Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri

Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri

DAVID K. CHENG
PROFESÖR, SYRACUSE ÜNİVERSİTESİ

TÜRKÇESİ

Prof.Dr. Adnan Köksal **Prof.Dr. Birsen Saka**
Hacettepe Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

PALME YAYINEVİ

PALME YAYINLARI: 395

MÜHENDİSLİK ELEKTROMANYETİĞİNİN TEMELLERİ – David K. Cheng
Türkçesi: Prof. Dr. Adnan Köksal, Prof. Dr. Birsen Saka
Yayın Koordinatörü: İlhan Budak
Yayına Hazırlama: PALME Dizgi-Grafik ve Tasarım Birimi
Palme Yayıncılık © 2024
Yayıncı Sertifika No : 49844

ISBN: 978-975-8982-99-8
Baskı : Özyurt Matbaacılık
Basımevi Sertifika No : 46772

Kitabın Özgün Adı: Fundamentals of Engineering Electromagnetics
Yazarı: David K. Cheng
Yayıncı Firma: Prentice Hall
Orijinal ISBN: 0-201-56611-7

Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Palme Yayıncılık Ltd. Şti'ne aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni olmadan elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

GENEL DAĞITIM
PALME YAYINEVİ

Merkez:
A. Adnan Saygun Caddesi, No.: 10/1 Sıhhiye/ANKARA
Tel.: 312 433 37 57
Faks: 312 433 52 72

Şube 1:
Olgunlar Sokak, No.: 4/5, Bakanlıklar/ANKARA
Tel. : 312 417 95 28
Faks : 312 419 69 64

Şube 2:
Kazım Dirik Mahallesi, Ankara Caddesi, No.: 259/C, Bornova/İZMİR
Tel. : 232 343 10 77
Faks : 232 343 10 78

bilgi@palmeyayinevi.com www.palmeyayinevi.com

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page iii

Önsöz

Bu kitap mühendislik elektromanyetiği konusunda lisans düzeyinde bir ders kitabı olarak kullanılmak üzere tasarlanmıştır. Elektromanyetik, elektrik mühendisliği müfredatındaki en temel konulardan biridir. Elektrik ve manyetik alan yasaları hakkındaki bilgi, elektrik ve manyetik cihaz ve makinaların çalışma ilkelerini anlamak için zorunludur. Elektromanyetik dalgaların temel teorisinin kavranması ise elektromanyetik olayların ve sistemlerin uzaktan etkisini açıklamakta kaçınılmazdır.

Çoğu elektromanyetik değişken, zamanın yanı sıra üç boyutlu uzay koordinatlarının da fonksiyonu olduğundan, konu elektrik devre teorisinden daha karmaşıktır. Bu nedenle konunun yeterli şekilde işlenmesi normal olarak iki tek dönemlik ders veya çeyrek dönem sisteminde üç ders gerektirir. Ancak bazı elektrik mühendisliği müfredatları elektromanyetik için bu kadar zaman ayırmaz. Bu kitabın amacı sadece elektromanyetik temellerini öz ve mantıklı bir şekilde sunmak değil aynı zamanda elektrik motorları, iletim hatları, dalga kılavuzları, antenler ve radar sistemleri gibi önemli mühendislik uygulamalarını da içeren bir ders kitabı ihtiyacını karşılamaktır.

Öğrencilerin elektromanyetik öğrenirken karşılaştıkları temel sorunlardan birinin, elektromanyetik model kavramını anlamaktaki zorluk olduğunu hissediyorum. Deneysel yasalardan başlayan ve bunları aşamalı olarak Maxwell denklemlerine sentezleyen geleneksel tümevarım yaklaşımı dağınık ve bağlantısız olma eğilimindedir. Ayrıca gradyant, ıraksama ve dönel işlemlerinin tanımları salt bu amaçla yapılıyor ve gelişigüzel gözükür. Öte yandan, hatırı sayılır karmaşıklıktaki Maxwell denklemlerinin tüm kümesini temel postülatlar alarak başlayan diğer uçtaki yaklaşımın öğrencilerde baştan bir direnç ve yılmaya neden olma ihtimali vardır. Bu yaklaşımda genel denklemlerin gerek ve yeterliği sorusu dikkate alınmaz ve elektromanyetik model kavramı belirsiz kalır.

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page iv

Bu kitap elektromanyetik modeli *aşamalı bir aksiyomatik yaklaşım* ile inşa eder[1] : Önce statik elektrik alanlar sonra statik manyetik alanlar ve son olarak zamanla - değişen alanlar aşamaları ile Maxwell denklemlerine ulaşılır. Her bir aşama için matematiksel temel, ıraksaması ve döneli her yerde verilen bir vektör alanının toplamsal bir sabit dışında belirlenebileceğini ifade eden Helmholtz teoremidir. Bu teoremin fiziksel olarak doğrulanması, bir vektör alanının ıraksamasının akış kaynağı şiddetinin bir ölçüsü ve alanın dönelinin de girdap kaynağı şiddetinin bir ölçüsü olduğu gerçeğine dayandırılabilir. Hem akış kaynağının hem de girdap kaynağının şiddeti verilirse vektör alanı bulunabilir.

Boş uzayda elektrostatik modelin geliştirilmesi için, ıraksaması ve döneli postülat olarak verilen tek bir vektörün (elekrik alan şiddeti **E**) tanımlanması yeterlidir. Coulomb yasasını ve Gauss yasasını da içeren, boş uzaydaki tüm diğer elektrostatik bağıntılar oldukça basit iki postülattan elde edilebilir. Malzeme ortamlarındaki bağıntılar kutuplanmış dielektriklerin eşdeğer yük dağılımları kavramı ile geliştirilebilir.

Benzer şekilde boş uzayda manyetostatik modelin geliştirilmesi için, ıraksaması ve döneli postülat olarak verilen manyetik akı yoğunluğu vektörü **B**'nin tanımlanması yeterlidir, tüm diğer formüller bu iki postülattan elde edilebilir. Malzeme ortamlarındaki bağıntılar eşdeğer akım yoğunluğu kavramı aracılığıyla geliştirilebilir. Elbette postülatların geçerliği, deneysel kanıtlarla uyumlu sonuçlar verme kabiliyetlerinde yatmaktadır.

Zamanla-değişen alanlarda elektrik ve manyetik alan şiddetleri bağlaşıktır. Elektrostatik modeldeki dönel **E** postülatı Faraday yasası ile uyumlu olacak şekilde değiştirilmelidir. Ayrıca manyetostatik modeldeki dönel **B** postülatı da süreklilik denklemi ile tutarlı olacak şekilde değiştirilmelidir. Böylelikle elektromanyetik modeli oluşturan dört Maxwell denklemini elde ederiz. Elektromanyetik modelin Helmholtz teoremine dayanan bu aşamalı geliştirilmesinin yeni, sistematik, pedagojik olarak sağlam ve öğrenciler tarafından daha kolay kabul edilir olduğuna inanıyorum.

Kitabın kısa 1. Bölümü elektromanyetik çalışmak için motivasyon sağlar. Bu bölüm ayrıca elekromanyetik modeldeki kaynak fonksiyonlarını, temel alan niceliklerini ve boş uzay için üç evrensel sabiti verir. 2. Bölüm vektör cebirinin temellerini, vektör hesabı ve Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatların ilişkilerini tekrar eder. 3. Bölüm elektrostatik problemlerin yasalarını ve çözüm yöntemlerini geliştirir. 4. Bölüm durgun elektrik akım alanları ve direnç hesaplama hakkındadır. 5. Bölüm statik manyetik alanlarla ilgilidir. Zamanla-de-

[1] D.K. Cheng, "An alternative approach for developing introductory electromagnetics, "*IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter,* S. 11-13, ubat 1983.

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page v

ğişen elektromanyetik alanlarla ilgili olan 6. Bölüm Faraday'ın elektromanyetik indüklenme yasası ile başlar ve Maxwell denklemlerine ve dalga denklemlerine ulaşır. Düzlem elektromanyetik dalgaların özellikleri 7. Bölümde işlenmiştir. İletim hatları teorisi ve uygulamaları 8. Bölümde çalışılmıştır. Elektromanyetik alanların ve dalgaların daha ileri mühendislik uygulamaları 9. Bölümde (dalga kılavuzları ve boşluk rezonatörleri) ve 10. Bölümde (antenler, anten dizileri ve radar sistemleri) verilmiştir. Konuların çoğu benim *Field and Wave Electromagnetics*[1] adlı daha geniş kitabımdan uyarlanmış ve indirgenmiştir, ancak bu kitapta bazı yeni pedagojik özellikler dahil edilmiştir.

Bu kitaptaki her bölüm, o bölümde tartışılacak konulara nitel rehberlik sağlayan bir genel bakış kısmı ile başlamaktadır. Kitap boyunca önemli formülleri ve nicel bağıntıları, tipik problemleri çözme yöntemlerini sergileyen çözülmüş örnekler takip etmektedir. Uygun olan yerlerde öğrencilerin benzer durumlardaki yeteneklerini test etmek için cevapları verilen basit alıştırmalar dahil edilmiştir. Birçok ilgili kısımdan sonra, düzensiz aralıklarla, tekrar soruları grupları verilmiştir. Bu sorular henüz tartışılmış konular hakkında geri besleme sağlamak ve öğrencinin konuyu nitel anlayışını desteklemek amacına hizmet eder. Ayrıca tekrar sorularından sonra bazı ilgili notlar verilmiştir. Bu notlar öğrencinin gözardı etmiş olabileceği özel öneme sahip bazı noktaları içerir. Yeni tanımlar, kavramlar veya bağıntılar verildiğinde, bunların önemini belirtmek için sayfa kenarında kısa notlar eklenmiştir. Her bölümün sonunda, bölümde işlenen ana konuları özetleyen maddeler içeren bir özet vardır. Bu pedagojik araçların öğrencilerin elektromanyetiği ve uygulamalarını öğrenmelerinde yararlı olacağını umuyorum.

Bu kitabın yayınlanmasında yazar dışında kendini bu işe adamış birçok insan katkıda bulunmuştur. Kıdemli editör Eileen Bernadette Moran ve yetkili editör Don Fowley'in bu projenin başlangıcından bu yana olan ilgi ve desteklerine teşekkür ederim. Yapım danışmanı Helen Wythe'ı yapımı takvime uygun tutmak için olan yakın ilgisinden dolayı takdir ettiğimi ifade etmek isterim. Tech-Graphics'den Jim ve Rosa Sullivan figürlerden sorumluydu. Onlara hassas çalışmalarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Hepsinden öte eşim Enid'e bu kitabı tamamlama işinin her aşamasındaki sabrı, anlayışı ve desteği için teşekkür ederim.

D.K.C

[1] D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, İkinci baskı, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page vi

Öğrenciye Giriş Notu

Bu kitap mühendislik elektromanyetiğini öğrenme yolculuğunuza başlarken sizin rehberiniz olacaktır. Hemen akla iki soru gelir: Elektromanyetik nedir ve niçin önemlidir? Birinci sorunun kısa bir cevabı elektromanyetiğin durağan veya hareket halindeki elektrik yüklerinin etkilerinin çalışıldığı alan olduğudur. Önemlidir; çünkü elektromanyetik teori elektromanyetik olayları açıklamak için ve elektrik, manyetik ve elektromanyetik mühendislik cihazlarının özelliklerinin ve çalışma ilkelerinin anlaşılması için zorunludur. Modern toplumlar ağırlıklı olarak elektromanyetik cihazlar ve sistemleri kullanmaktadır. Örneğin mikrodalga fırınları, katot-ışın osiloskoplarını, radyo, televizyon, radar, uydu haberleşmesi, otomatik-iniş sistemleri ve elektromanyetik enerji dönüşümünü (motorlar ve jeneratörler) düşününüz.

Elektromanyetiğin temel ilkeleri yüz altmış yıldan fazla süredir bilinmektedir. Olgun bir bilimsel konunun düzenli ve mantıklı bir şekilde çalışılması, çoğunlukla birkaç temel nicelik ve bazı temel postülatlardan (hipotezler veya aksiyomlar) oluşan geçerli bir teorik modelin kurulmasını gerektirir. Diğer bağıntılar ve sonuçlar bu postülatlardan geliştirilir. Örneğin klasik mekanik çalışması, kütle hız, ivme, kuvvet, momentum ve enerjiyi tanımlayan bir teorik modele dayanmaktadır. Modelin temel postülatları Newton'un hareket yasası, momentumun korunumu ve enerjinin korunumudur. Bu postülatlar diğer teoremlerden çıkarılamaz ancak göreli-olmayan mekanikteki (hareket hızının ışığın hızına kıyasla ihmal edilebilir olduğu durum) tüm diğer bağıntılar ve formüller bu postülatlardan geliştirilebilir.

Benzer şekilde, elektromanyetik çalışmamızda önce bir elektromanyetik model kurmamız gerekir. Bu kitabın 1. Bölümü elektromanyetik modelimizdeki temel nicelikleri tanımlamaktadır. Temel

postülatlar, statik elektrik alanları, statik manyetik alanları ve zamanla değişen alanları ayrı bölümlerde incelerken aşamalı olarak gerektikçe verilmektedir. Çeşitli teoremler ve diğer sonuçlar daha sonra bu postülatlardan çıkarılmıştır. Kitapta geliştirilen ilkelerin ve yöntemlerin mühendislik uygulamaları son birkaç bölümde daha detaylı incelenmiştir.

Postülatları ifade edebilmek ve yararlı sonuçları öz biçimlerde çıkarabilmek için uygun matematiksel araçlara sahip olmamız gerekir. Elektromanyetikte en sık vektörlerle yani hem bir büyüklüğü, hem de yönü olan niceliklerle karşılaşırız. Bu nedenle vektör cebiri ve vektör hesabında yetkin olmalıyız. Bu konular Vektör Analiz hakkındaki 2. Bölümde işlenmiştir. Sadece vektörleri kolay kullanma becerisini değil aynı zamanda vektörleri içeren çeşitli işlemlerin fiziksel anlamlarını anlamayı da geliştirmeliyiz. Elektromanyetik çalışmalarında vektör analiz eksikliği, fizik çalışmalarındaki cebir ve hesap eksikliğine benzerdir. Matematiksel araçların kullanımındaki yetkinlik verimli sonuçlar almak için zorunludur.

Büyük olasılıkla devre teorisini çalışmış durumdasınız. Devre teorisi, direnç, endüktans ve kapasitans gibi toplu parametrelerle ifade edilen elemanlardan oluşan toplu-parametreli sistemlerle ilgilenir. Gerilimler ve akımlar ana sistem değişkenleridir. D-C devreler için sistem değişkenleri sabitlerdir ve denklemler cebirsel denklemlerdir. A-C devrelerdeki sistem değişkenleri zaman-bağımlıdır ancak uzay koordinatlarından bağımsız skalar niceliklerdir. Buradaki denklemler adi diferensiyel denklemlerdir. Diğer taraftan çoğu elektromanyetik değişken hem zamanın hem de uzay koordinatlarının fonksiyonudur, ayrıca çoğu vektördür. Statik durumlarda dahi denklemler genel olarak kısmi diferensiyel denklemlerdir. Ancak kısmi diferensiyel denklemler, fizik ve lineer sistem analizi derslerinde rastladığınız adi diferensiyel denklemler halinde ayrıştırılabilir. Simetrinin var olduğu basit durumlarda da kısmi diferensiyel denklemler adi diferensiyel denklemlere indirgenir. Uzay ve zaman bağımlılığı birbirinden fazörlerin kullanımı ile ayrılır.

Elektromanyetikteki daha fazla nicelik tanımlama ve daha çok matematiksel işlem kullanma gereğinden dolayı, başlangıçta elektromanyetik teorinin soyut olduğu izlenimine kapılabilirsiniz. Gerçekte elektromanyetik teori devre teorisinden daha soyut değildir, her ikisi-

nin de geçerliği deneysel ölçülen sonuçlarla sağlanır. Daha geniş olay çeşitlerini açıklayabilen mantıklı ve tam bir teori geliştirmek için daha fazla iş yapmamız gerekir. Elektromanyetik teorinin zorluğu soyut olmasında değil, eletromanyetik modele ve eşlik eden işlem kurallarına ustaca hakim olmakta yatar.

Bu kitaptaki her bölümün, o bölümde tartışılacak konuları tanıtan bir GENEL BAKI kısmı ile başladığını göreceksiniz. Yeni tanımlar, kavramlar veya bağıntılar verildiğinde bunlara dikkatinizi çekmek için sayfa kenarlarında kısa notlar eklenmiştir. Bazı ilişkili kısımlardan sonra, bir düzen dahilinde olmaksızın, henüz tartışılmış konular hakkında hızlı geri besleme sağlamak ve konuyu nitel kavramanızı güçlendirmek için TEKRAR SORULARI vardır. Bu soruları emin bir şekilde cevaplandırabilmelisiniz. Eğer durum bu değilse bu kısımlara geri dönmeli ve şüphelerinizi ortadan kaldırmalısınız. Genellikle tekrar sorularını bir NOTLAR kutusu takip eder. Bu kutular gözardı etmiş olabileceğiniz ancak anlamanız ve hatırlamanız gereken ve özel önemi olan bazı noktaları içerir. Her bölümün bitiminde, bölümde elde edilen önemli sonuçların maddeler halinde verildiği bir ÖZET kısmı vardır. Bunun fonksiyonu, bu sonuçların önemini matematiksel formülleri tekrar etmeden vurgulamaktır.

Kitap boyunca yeni terimler ve önemli cümleler kalın ve eğik yazılmış, önemli formüller ise kutulanmıştır. Tipik problemlerin çözüm yöntemlerini göstermek için çözülmüş örnekler verilmiştir. Uygun olan yerlerde cevapları verilen basit alıştırmalar vardır. Bu alıştırmaları karşılaştıkça yapmalısınız, böylelikle henüz sunulmuş temel sayısal teknikleri kavrayıp kavramadığınızı görebilirsiniz. Bölüm sonlarındaki problemler bölümden öğrendiklerinizi genişletmek ve yeni durumlara uyum yeteneğinizi test etmek için kullanılmalıdır. Tek numaralı problemlerin cevapları kitabın sonunda verilerek cevaplarınızı kontrol etmeniz ve gelişmenizden emin olmanız sağlanmıştır.

Elektromanyetik öğrenmek bir zihinsel yolculuktur ve bu kitap bu yolculukta sizin rehberinizdir. Ancak siz de azminizi ve adanmışlığınızı beraberinizde getirmelisiniz. Mühendislik elektromanyetiği bölgesini keşfettikçe uyarıcı ve memnun edici bir deneyime sahip olacağınızı umuyoruz.

Yazar.

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page ix

Öğrenme şansla elde edilmez;
azimle aranmalı ve özenle sürdürülmelidir.

– Abigail Adams
(John Quincy Adams'a mektubundan, 1780)

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page x

İçindekiler

1. BÖLÜM ELEKTROMANYETİK MODEL *2*

1-1 Genel Bakış *2*
1-2 Elektromanyetik Model *4*
1-3 SI Birimleri ve Evrensel Sabitler *8*
Özet *10*

2. BÖLÜM VEKTÖR ANALİZ *12*

2-1 Genel Bakış *12*
2-2 Vektörlerin Toplanması ve Çıkarılması *14*
2-3 Vektörlerin Çarpımı *16*
2-3.1 Skalar veya Nokta Çarpım *16*
2-3.2 Vektör veya Çapraz Çarpım *18*
2-3.3 Üç Vektörün Çarpımı *19*
2-4 Ortogonal Koordinat sistemleri *21*
2-4.1 Kartezyen Koordinatlar *22*
2-4.2 Silindirik Koordinatlar *28*
2-4.3 Küresel Koordinatlar *33*
2-5 Bir Skalar Alanın Gradyantı *39*
2-6 Bir Vektör Alanın Iraksaması *43*
2-7 Iraksama Teoremi *48*
2-8 Bir Vektör Alanın Döneli *52*
2-9 Stokes Teoremi *59*
2-10 İki Sıfır Özdeşlik *62*
2-10.1 Özdeşlik I *62*
2-10.2 Özdeşlik II *62*
2-11 Alanların Sınıflandırılması ve Helmholtz Teoremi *64*
Özet *66*
Problemler *67*

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page xi

3. BÖLÜM STATİK ELEKTRİK ALANLAR *72*

3-1 Genel Bakış *72*
3-2 Boş Uzayda Elektrostatiğin Temel Postülatları *74*
3-3 Coulomb Yasası *76*
3-3.1 Ayrık Yüklerin Oluşturduğu Elektrik Alan *81*
3-3.2 Sürekli Yük Dağılımlarının Oluşturduğu Elektrik Alanı *81*
3-4 Gauss Yasası ve Uygulamaları *85*
3-5 Elektrik Potansiyel *90*
3-5.1 Bir Yük Dağılımının Oluşturduğu Elektrik Potansiyel *92*
3-6 Statik Elektrik Alanda Malzeme Ortamı *97*
3-6.1 Statik Elektrik Alanda İletkenler *98*
3-6.2 Statik Elektrik Alanda Dielektrikler *102*
3-7 Elektrostatik Alanlar İçin Sınır Koşulları *105*
3-7.1 Dielektrik Mukavemet *108*
3-8 Elektrostatik Alanlar İçin Sınır Koşulları *111*
3-9 Kapasitans ve Kapasitörler *116*
3-10 Elektrostatik Enerji ve Kuvvet *120*
3-10.1 Alan Nicelikleri Cinsinden Elektrostatik Enerji *123*
3-10.2 Elektrostatik Kuvvetler *126*
3-11 Elektrostatik Sınır Değer Problemlerinin Çözümü *128*
3-11.1 Poisson ve Laplace Denklemleri *129*
3-11.2 Kartezyen Koordinalarda Sınır Değer Problemleri *130*
3-11.3 Silindirik Koordinatlarda Sınır Değer Problemleri *132*
3-11.4 Küresel Koordinatlarda Sınır Değer Problemleri *134*
3-11.5 Görüntüler Metodu 136
Özet *143*
Problemler *143*

4. BÖLÜM DURGUN ELEKTRİK AKIMI *150*

4-1 Genel Bakış *150*
4-2 Akım Yoğunluğu ve Ohm Yasası *151*
4-3 Süreklilik Denklemi ve Kirchhoff'un Akım Yasası *157*
4-4 Güç Harcanması ve Joule Yasası *159*
4-5 Durgun Akım Yoğunluğu Denklemleri *160*
4-6 Direnç Hesaplama *162*
Özet *166*
Problemler *167*

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page xii

5. BÖLÜM STATİK MANYETİK ALANLAR *170*

5-1 Genel Bakış *170*
5-2 Boş Uzayda Manyetostatiğin Temel Postülatları *172*
5-3 Manyetik Vektör Potansiyeli *178*
5-4 Biot - Savart Yasası ve Uygulamaları *180*
5-5 Manyetik Dipol *186*
5-6 Mıknatıslanma ve Eşdeğer Akım Yoğunlukları *190*
5-7 Manyetik Alan iddeti ve Bağıl Geçirgenlik *194*
5-8 Manyetik Malzemelerin Davranışları *196*
5-9 Manyetostatik Alanlar İçin Sınır Koşulları *199*
5-10 Endüktans ve İndüktörler *201*
5-11 Manyetik Enerji *210*
5-11.1 Alan Nicelikleri Cinsinden Manyetik Enerji *211*
5-12 Manyetik Kuvvetler ve Torklar *214*
5-12.1 Akım Taşıyan İletkenlerde Kuvvetler ve Torklar *214*
5-12.2 Doğru Akım Motorları *219*
5-12.3 Depolanan Manyetik Enerji Cinsinden Kuvvetler ve Torklar *220*
Özet *223*
Problemler *223*

6. BÖLÜM ZAMANLA DEĞİ EN ALANLAR VE MAXWELL DENKLEMLERİ *228*

6-1 Genel Bakış *228*
6-2 Faraday Elektromanyetik İndüklenme Yasası
6-2.1 Zamanla Değişen Manyetik Alanda Durağan Bir Devre *231*
6-2.2 Transformatörler *232*
6-2.3 Statik Manyetik Alanda Hareketli Bir İletken *235*
6-2.4 Zamanla Değişen Manyetik Alanda Hareketli Bir Devre *239*
6-3 Maxwell Denklemleri *243*
6-3.1 Maxwell Denklemlerinin İntegral Biçimleri *245*
6-3.2 Elektromanyetik Sınır Koşulları *248*
6-4 Potansiyel Fonksiyonları *251*
6-4.1 Dalga Denklemlerinin Çözümü *253*
6-5 Zamanda - Harmonik Alanlar *255*
6-5.1 Fazörlerin Kullanımı- Tekrar *255*
6-5.2 Zamanda-Harmonik Elektromanyetik *259*
6-5.3 Elektromanyetik Spektrum *263*
Özet *267*
Problemler *268*

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page xiii

7. BÖLÜM DÜZLEM ELEKTROMANYETİK DALGALAR *272*

7-1 Genel Bakış *272*
7-2 Kayıpsız Ortamda Düzlem Dalgalar *273*
7-2.1 Doppler Etkisi *279*
7-2.2 Enine Elektromanyetik Dalgalar *281*
7-2.3 Düzlem Dalgaların Kutuplanması *283*
7-3 Kayıplı Ortamda Düzlem Dalgalar *287*
7-3.1 Düşük Kayıplı Dielektrikler *290*
7-3.2 İyi İletkenler *291*
7-4 Grup Hızı *296*
7-5 Elektromanyetik Güç Akışı ve Poynting Vektörü *298*
7-5.1 Anlık ve Ortalama Güç Yoğunlukları *301*
7-6 Düzlem Dalgaların Düzlem Sınırlara Dik Gelişi *304*
7-6.1 İyi İletken Üzerine Dik Geliş *309*
7-7 Düzlem Dalgaların Düzlem Sınırlara Eğik Gelişi *313*
7-7.1 Tam Yansıma *315*
7-7.2 İyonosfer *319*
7-7.3 Dik Kutuplanma *321*
7-7.4 Paralel Kutuplanma *325*
7-7.5 Hiç Yansımanın Olmadığı Brewster Açısı *327*
Özet *330*
Problemler *330*

8. BÖLÜM İLETİM HATLARI *336*

8-1 Genel Bakış *336*
8-2 Genel İletim Hattı Denklemleri *338*
8-3 İletim Hattı Parametreleri *341*
8-3.1 Mikroşerit Hatlar *346*
8-4 Sonsuz İletim Hatlarında Dalga Özellikleri *347*
8-4.1 Güç Bağıntılarından Zayıflama Sabiti *351*
8-5 Sonlu İletim Hatlarında Dalga Özellikleri *353*
8-5.1 Açık-Devre ve Kısa-Devre Hatlar *356*
8-5.2 Giriş Ölçümlerinden Öz Empedans ve Yayılma Sabiti *357*
8-5.3 Yansıma Katsayısı ve Duran-Dalga Oranı *360*
8-6 Smith Grafiği *366*
8-6.1 Smith Grafiğinde Admitanslar *374*
8-7 İletim Hatları ile Empedans Uyumlama *377*
Özet *381*
Problemler *382*

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page xiv

9. BÖLÜM DALGA KILAVUZLARI VE BOŞLUK REZONATÖRLERİ *386*

9-1 Genel Bakış *386*
9-2 Düzgün Kılavuz Yapılar Boyunca Genel Dalga Davranışı *387*
9-2.1 Enine Elektromanyetik Dalgalar *390*
9-2.2 Enine Manyetik Dalgalar *391*
9-2.3 Enine Elektrik Dalgalar *394*
9-3 Dikdörtgen Dalga Kılavuzları *400*
9-3.1 Dikdörtgen Dalga Kılavuzlarında TM Dalgalar *400*
9-3.2 Dikdörtgen Dalga Kılavuzlarında TE Dalgalar *404*
9-3.3 Dikdörtgen Dalga Kılavuzlarında Zayıflama *409*
9-4 Diğer Dalga Kılavuzu Tipleri *413*
9-5 Boşluk Rezonatörleri *414*
9-5.1 Dikdörtgen Boşluk Rezonatörleri *415*
9-5.2 Bir Boşluk Rezonatörünün Kalite Faktörü *419*
Özet *422*
Problemler *423*

10. BÖLÜM ANTENLER VE ANTEN DİZİLERİ *426*

10-1 Genel Bakış *426*
10-2 Elektrik Dipol Elemanı *428*
10-3 Anten Örüntüleri ve Yönlülük *430*
10-4 İnce Doğrusal Antenler *436*
10-4.1 Yarım - Dalga Dipolü *439*
10-5 Anten Dizileri *442*
10-5.1 İki - Elemanlı Diziler *442*
10-5.2 Birbiçimli Doğrusal Diziler *446*
10-6 Etkin Alan ve Geri Saçılım Kesit Alanı *451*
10-6.1 Etkin Alan *452*
10-6.2 Geri Saçılım Kesit Alanı *454*
10-7 Friis İletim Formülü ve Radar Denklemi *455*
Özet *460*
Problemler *460*

EKLER SEMBOLLER VE BİRİMLER

A-1 Temel SI (Rasyonelize MKSA) Birimleri *465*
A-2 Elde Edilen Nicelikler *466*
A-3 Birimlerin Katları ve Alt Katları *468*

00 ÖN KISIM_00 ÖN KISIM 5.06.2024 14:36 Page xv

B BAZI YARARLI MALZEME SABİTLERİ

B-1 Boş Uzay Sabitleri *469*
B-2 Elektron ve Protonun Fiziksel Sabitleri *469*
B-3 Bağıl Geçirgenlikler (Dielektrik Sabitleri) *470*
B-4 Öz İletkenlikler *470*
B-5 Bağıl Manyetik Geçirgenlikler *471*

KAYNAKÇA

TEK NUMARALI PROBLEMLERİN CEVAPLARI

DİZİN

ÇEVİRİ SÖZLÜĞÜ

ARKA CİLT SAYFALARI

Sol:
Bazı Yararlı Vektör Özdeşlikleri
Kartezyen Koordinatlarda Gradyant, Iraksama, Dönel ve Laplasyen Operatörleri

Sağ:
Silindirik ve Küresel Koordinatlarda Gradyant, Iraksama, Dönel ve Laplasyen Operatörleri

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 2



1. BÖLÜM

1-1 GENEL BAKIŞ

Elektromanyetiğin tanımı

Elektromanyetik, durağan veya hareket halindeki elektrik yüklerinin neden olduğu elektrik ve manyetik olayların çalışıldığı disiplindir. Elektrik yüklerinin varlığı iki buçuk bin yıldan daha önce Yunanlı astronom ve filozof Miletli Thales tarafından keşfedilmiştir. Thales, ipek veya yün ile sürtündükten sonra bir kehribar çubuğun saman ve küçük kâğıt parçalarını çektiğine dikkat etti. Bu gizemli özelliğin kehribar çubuktan kaynaklandığına karar verdi. Kehribarın yunanca karşılığı *elektron*'dur ve buradan da *elektron, elektronik, elektrik* v.b. kelimeler türetilmiştir.

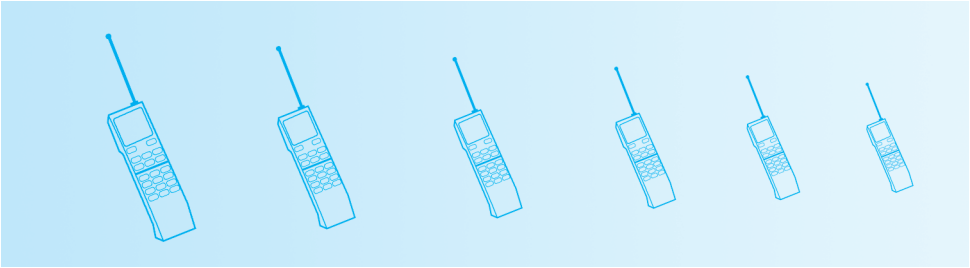
Pozitif ve negatif yükler

Temel fizikten, pozitif ve negatif iki tip yükün olduğunu biliyoruz. Pozitif ve negatif yüklerin her ikisi de elektrik alanının kaynağıdır. Hareketli yükler bir akım oluşturur ve bu da bir manyetik alan oluşturur. Burada elektrik alan ve manyetik alan terimleri genel olarak kullanılmıştır; bu terimlerin daha kesin anlamları ileride açıklanacaktır. Bir ***alan,*** bir niceliğin uzay dağılımıdır ve zamanın fonksiyonu olabilir veya olmayabilir. Zamanla değişen bir elektrik alana bir manyetik alan eşlik eder ve bunun tersi de geçerlidir. Bir başka deyişle, zamanla değişen elektrik ve manyetik alanlar bağlaşıktır ve bir elektromanyetik alan oluştururlar. Belli koşullar altında, zaman-bağımlı elektromanyetik alanlar kaynaktan yayılan dalgalar oluşturur.

Alan: Bir niceliğin uzay dağılımı

Alanlar ve dalgalar uzaktan etkinin açıklanmasına yardımcı olur.

Alanlar ve dalgalar kavramı uzaktan etkinin açıklanmasında temeldir. Örneğin temel mekanikte kütlelerin birbirini çektiğini öğrendik. Bu nedenle cisimler dünyanın yüzeyine doğru düşerler. Ancak serbest düşen bir cismi ve dünyayı birbirine bağlayan elastik bir yay



Elektromanyetik Model

olmadığına göre bu olayı nasıl açıklarız? Bu uzaktan etki olayını bir yerçekimi alanının varlığını postülat yaparak açıklarız. Benzer şekilde uydu haberleşmesi imkanları ve milyonlarca kilometre uzaktaki uzay problarından sinyal alınması sadece elektrik ve manyetik alanlar ve elektromanyetik dalgalar postülatı ile açıklanabilir. *Mühendislik Elektromanyetiğinin Temelleri* isimli bu kitapta temel elektromanyetik yasaları ve bunların mühendislik uygulamalarını çalışacağız.

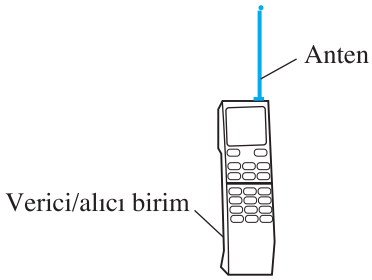
Devre teorisi mobil telefon iletişimini açıklayamaz.

Basit bir durum, elektromanyetik alan kavramlarının gereksinimini sergileyebilir. Şekil 1-1 bir mobil telefonu ve bağlı antenini göstermektedir. Verici durumunda, tabandaki bir kaynak, uygun taşıyıcı frekanslı mesaj-taşıyan bir akım ile anteni besler. Devre teorisi bakış açısından kaynak bir açık devreyi beslemektedir. Çünkü antenin üst ucu hiçbir şeye fiziksel olarak bağlanmamıştır. Bu durumda hiç akım akmamalı ve hiçbir şey olmamalıdır. Tabii ki bu bakış açısı hareketli telefon üniteleri arasında kurulan iletişimi açıklayamaz; elektromanyetik kavramlar kullanılmalıdır. 10. Bölümde bir antenin uzunluğu taşıyıcının dalga boyuna göre önemli bir uzunluk olduğunda, açık uçlu antende düzgün olmayan bir akımın aktığını göreceğiz. Bu akım, uzaya zamanla değişen bir elektromanyetik alan yayar ve bu alan bir elektromanyetik dalga olarak yayılarak uzaktaki antenlerde akım indükler. Daha sonra mesaj, alıcı ünitesi yardımıyla algılanır.

Model oluşturma

Bu bölümde bir elektromanyetik model oluşturma işine başlayacağız. Daha sonra bu modelden mühendislik elektromanyetiği konusunu geliştireceğiz.

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 4



ŞEKİL 1-1 Mobil telefon.

1-2 ELEKTROMANYETİK MODEL

Tümevarım ve tümdengelim yaklaşımları

Bir bilimsel konunun geliştirilmesinde iki yaklaşım vardır: Tümevarım yaklaşımı ve tümdengelim yaklaşımı. Tümevarım yaklaşımında konunun tarihi gelişmesi, bazı basit deneylerdeki gözlemlerle başlayıp bunlardan yasa ve teoremlere ulaşarak izlenir. Bu yöntem özel olaylardan genel ilkelere muhakeme ile erişme sürecidir. Diğer taraftan tümdengelim yaklaşımı, bir idealleştirilmiş model için birkaç temel bağıntıyı postülat olarak alır. Postülat alınan bu bağıntılar, özel yasa ve teoremlerin çıkarıldığı aksiyomlardır. Modelin ve aksiyomların geçerliliği deneysel gözlemlerle aynı sonuçları tahmin etme yeteneği ile sağlanır. Bu kitapta tümdengelim veya aksiyomatik yaklaşımı kullanılacaktır. Çünkü bu yaklaşım daha kısadır ve elektromanyetik konusunun düzenli bir şekilde geliştirmesine izin verir.

İdeal modele dayanan bir teorinin geliştirilmesi üç temel adım içerir:

İdeal bir modelden teori geliştirme adımları

ADIM 1 Çalışılan konuyla ilgili temel nicelikler tanımlanır.
ADIM 2 Bu niceliklerin işlem kuralları (matematiği) belirtilir.
ADIM 3 Bazı temel bağıntılar postülat olarak alınır. (Bu postülatlar veya yasalar genellikle kontrollü koşullar altında elde edilen birçok deneysel gözlem ve bunların akıllıca sentezine dayanır.)

Devre modeli

Tanıdık bir örnek, ideal kaynaklar ve saf direnç, endüktans ve kapasitanslardan oluşan *devre modeline* dayanan devre teorisidir. Bu durumda temel nicelikler gerilim (V), akım (I), direnç (R), endüktans (L) ve kapasitans (C)'dir. İşlem kuralları cebir, adi diferensiyel denklemler ve Laplace dönüşümü kuralları; temel postülatlar ise Kirchhoff'un gerilim ve akım yasalarıdır. Birçok bağıntı ve formül temelde oldukça basit olan bu modelden çıkarılabilir ve çok ayrıntılı dev-

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 5

relerin tepkileri bu modelle belirlenebilir. Bu modelin geçerliliği ve değeri yeterince kanıtlanmıştır.

Bir elektromanyetik modelden bir elektromanyetik teori geliştirmenin üç adımı

Benzer şekilde, uygunca seçilmiş bir elektromanyetik model üzerine bir elektromanyetik teori kurulabilir. Bu kısımda elektromanyetikteki temel niceliklerin tanımlandığı birinci adımı tamamlayacağız. İkinci adım olan işlem kuralları, vektör cebiri, vektör hesap ve kısmi diferensiyel denklemleri içerir. Vektör cebiri ve vektör hesabının temelleri 2. Bölümde (Vektör Analiz) tartışılacaktır. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözüm teknikleri ise kitapta ileri kısımlarda bu denklemler ortaya çıktığında verilecektir. Üçüncü adım olan temel kabullenmeler, sırasıyla, statik elektrik alanlar, statik manyetik alanlar ve elektromanyetik alanlar çalışılırken üç alt adımda sunulacaktır.

Elektromanyetik modeldeki temel nicelikler: Kaynak nicelikleri ve alan nicelikleri

Elektromanyetik modelimizdeki nicelikler kabaca iki sınıfa ayrılabilir: Kaynak nicelikleri ve alan nicelikleri. Elektromanyetik alanların kaynağı durağan veya hareket halindeki elektrik yükleridir. Ancak bir elektromanyetik alan yüklerin yeniden dağıtılmasına neden olabilir ve bu da sonuç olarak alanı değiştirir. Bundan dolayı neden ve sonuç arasındaki ayrım her zaman çok belirgin değildir.

Elektrik yükü

Elektrik yükünü göstermek için q sembolünü (bazen Q) kullanacağız. Elektrik yükü maddenin temel bir özelli idir ve sadece bir elektron üzerindeki e yükünün pozitif veya negatif katları halinde bulunur. e yükü

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \quad \text{(C)} \tag{1-1}$$

olarak verilir, burada C yük birimi Coulomb[1]'un kısaltılmış halidir. 1785 yılında Coulomb yasasını çıkaran Fransız fizikçi Charles A. de Coulomb'dan ismini almıştır. (Coulomb yasası 3. Bölümde tartışılacaktır.) Coulomb elektrik yükü için çok büyük bir birimdir; 1 C elde etmek için $1/(1.60 \times 10^{-19})$ veya 6.25 milyon trilyon elektron gerekir. Gerçekten aralarında 1 (m) olan iki 1-(C) yük birbirine yaklaşık 1 milyon ton kuvvet uygular. Elektronun diğer bazı fiziksel sabitleri Ek B-2'de listelenmiştir.

Yük birimi: Coulomb (C)

Elektrik yükünün korunumu ilkesi, enerjinin korunumu ilkesi gibi fiziğin temel bir postülatı veya yasasıdır. Elektrik yükünün korunduğunu, yani ne yaratılabildiğini ne de yok edilebildiğini belirtir. Bu, doğanın bir yasasıdır ve diğer ilkelerden veya bağıntılardan çıkarılamaz.

Elektrik yükleri bir yerden diğerine hareket edebilir veya bir elektromanyetik alanın etkisi altında yeniden dağılabilir ancak kapalı (izole) bir sistemdeki pozitif ve negatif yüklerin cebirsel toplamı

[1] Birimler sistemi Kısım 1-3'te tartışılacaktır.

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 6

Elektrik yükünün korunumu fiziğin temel bir postülatıdır.

sabit kalır. ***Elektrik yükünün korunumu ilkesi her koşul altında ve her zaman sağlanmalıdır.*** Bir elektromanyetik problemin, elektrik yükünün korunumu ilkesi ile çelişen herhangi bir formülasyonu veya çözümü yanlış olmalıdır.

Mikroskopik anlamda bir noktada elektrik yükü ayrık olarak vardır veya yoktur. Atomik ölçülerdeki bu ani değişimler büyük sayıda yük toplamlarını incelediğimizde önemsizdir. Elektromanyetik için makroskopik veya büyük-ölçekli bir teori oluştururken düzgünleştirilmiş ortalama yoğunluk fonksiyonlarının çok iyi sonuçlar verdiğini görürüz. (Aynı yaklaşım, kütlenin sadece atomik ölçekte ayrık şekilde temel parçacıklarla ilgili olduğu gerçeğine rağmen düzgünleştirilmiş kütle yoğunluğunun tanımlandığı mekanik dalında da kullanılır.) ***Hacim yük yoğunluğu*** ρ_v'yi bir kaynak niceliği olarak

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \qquad (\mathrm{C/m^3}), \tag{1-2}$$

Hacim, yüzey ve çizgi yük yoğunlukları - makroskopik anlamda ortalama yoğunluklar

halinde tanımlarız, burada Δq çok küçük bir Δv hacmindeki yük miktarıdır. Δv ne kadar küçük olmalıdır? ρ_v'nin doğru değişimini temsil etmeye yetecek kadar küçük ancak çok büyük sayıda ayrık yük içerecek kadar da büyük olmalıdır. Örneğin kenarları 1 mikron (10^{-6}m veya 1μm) kadar küçük bir temel küpün hacmi 10^{-18} ($\mathrm{m^3}$) tür ve bu da hâlâ 10^{11} (100 milyar) atom içerecektir. Böyle küçük bir Δv ile tanımlanan, uzay koordinatlarının düzgünleştirilmiş ρ_v fonksiyonunun tüm pratik amaçlar açısından doğru makroskopik sonuçlar vermesi beklenir.

Bazı fiziksel durumlarda Δq yükü bir Δs yüzey elemanı veya bir $\Delta \ell$ doğru elemanı üzerinde bulunur. Böyle durumlarda bir ρ_s **yüzey yük yoğunluğu** veya bir ρ_ℓ ***çizgi yük yoğunluğunu***

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \qquad (\mathrm{C/m^2}), \tag{1-3}$$

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} \qquad (\mathrm{C/m}) \tag{1-4}$$

Yük yoğunlukları nokta fonksiyonlarıdır.

olarak tanımlamak daha uygundur. Belli bazı durumlar dışında yük yoğunlukları noktadan noktaya değişir; böylece ρ_v, ρ_s ve ρ_ℓ genel olarak uzay koordinatlarının *nokta fonksiyonlarıdır*.

Akım yükün zamana göre değişimidir ve

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (\mathrm{C/s} \quad \text{veya} \quad \mathrm{A}) \tag{1-5}$$

ile verilir. Burada I'nın kendisi de zaman-bağımlı olabilir. Akımın birimi saniye başına Coulomb'tur (C/s) ve bu da amper (A) ile aynıdır. Akım bir sonlu alanda (örneğin sonlu kesit alanlı bir iletken tel) ak-

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 7

Akım nokta fonksiyonu değildir ancak akım yoğunluğu nokta fonksiyonudur.

malıdır ve bu nedenle bir nokta fonksiyonu değildir. Elektromanyetikte, akımın akış yönüne dik birim alandan akan akım miktarını ölçen **J *akım yoğunluğu*** bir vektör nokta fonksiyonu olarak tanımlanır. Kalın yazılan **J**, büyüklüğü birim alan başına akım (A/m^2) ve yönü de akımın akış yönü olan bir vektördür.

Dört temel elektromanyetik alan niceliği: E, B, D, H

Elektromanyetikte dört temel vektör alan niceliği vardır: ***Elektrik alan şiddeti* E, *elektrik akı yoğunluğu*** (veya ***elektrik yerdeğiştirme)* D, *manyetik akı yoğunluğu* B** ve ***manyetik alan şiddeti* H.** Bu niceliklerin tanımı ve fiziksel önemi kitapta daha sonra verildiklerinde tam olarak açıklanacaktır. Şu anda sadece şunu belirtmek istiyoruz: Elektrik alan şiddeti **E**, boş uzayda elektrostatik çalışmalarında (durağan elektrik yüklerinin etkileri) gereken tek vektördür ve birim test yükü üzerindeki elektrik kuvveti olarak tanımlanır. Elektrik yerdeğiştirme vektörü **D**, 3. Bölümde göreceğimiz gibi, malzeme ortamlarında elektrik alan çalışmaları için yararlıdır. Benzer şekilde manyetik akı yoğunluğu **B**, boş uzayda manyetostatik çalışmalarında (durgun elektrik akımının etkileri) gereken tek vektördür ve verilen bir hızla hareket eden bir yüke etki eden manyetik kuvvet ile ilişkilidir. Manyetik alan şiddeti **H**, malzeme ortamlarında manyetik alan çalışmalarında yararlıdır. **B** ve **H**'nin tanımı ve önemi 5. Bölümde tartışılacaktır.

Dört temel elektromanyetik alan niceliği birimleri ile birlikte Tablo 1-1'de verilmiştir. Tablo 1-1'de V/m metre başına volt'tur ve T tesla veya metrekare başına volt-saniye'yi göstermektedir. Zamanla değişim olmadığında elektrik alan nicelikleri **E** ve **D** ile manyetik alan nicelikleri **B** ve **H** iki ayrı vektör çiftini oluşturur. Ancak zamanbağımlı durumlarda elektrik ve manyetik alan nicelikleri bağlaşıktır

TABLO **1-1** TEMEL ELEKTROMANYETİK ALAN NİCELİKLERİ

Alan Niceliklerinin Sembolleri ve Birimleri	Alan Niceliği	Sembol	Birim
Elektrik	**Elektrik alan şiddeti**	**E**	V/m
	Elektrik akı yoğunluğu (Elektrik yerdeğiştirme)	**D**	C/m^2
Manyetik	**Manyetik akı yoğunluğu**	**B**	T
	Manyetik alan şiddeti	**H**	A/m

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 8

yani zamanla değişen **E** ve **D**, **B** ve **H** oluşturur ve bunun tersi de geçerlidir. Dört niceliğin her biri nokta fonksiyonudur. **E** ile **D** ve **B** ile **H** arasındaki bağıntıları malzeme (veya ortam) özellikleri belirler. Bu bağıntılar ortamın ***yapısal bağıntıları*** olarak adlandırılır ve daha sonra incelenecektir.

Elektromanyetik çalışmalarının temel amacı, elektromanyetik modele dayanarak yüklerin ve akımların uzaktan etkileşimlerini anlamaktır. Alanlar ve dalgalar (zamana ve uzaya bağlı alanlar) bu modelin temel kavramsal nicelikleridir. Sonraki bölümlerde incelenecek olan temel postülatlar **E**, **D**, **B**, **H** ile kaynak niceliklerini ilişkilendirecektir ve elde edilen bağıntılar elektromanyetik olayların açıklanmasına ve tahminine izin verecektir.

1-3 SI BİRİMLERİ VE EVRENSEL SABİTLER

SI veya MKSA birimleri

Herhangi bir fiziksel niceliğin ölçümü, bir sayı ve bunu takip eden bir birim halinde ifade edilmelidir. Bu şekilde üç metre uzunluk, iki kilogram kütle ve on saniye zaman aralığından bahsedebiliriz. Bir birim sisteminin kullanışlı olması için uygun (pratik) büyüklükteki bazı temel birimlere dayanması gerekir. Mekanikte tüm nicelikler üç temel birim cinsinden ifade edilebilir (uzunluk, kütle ve zaman). Elektromanyetikte dördüncü temel birime (akım için) gerek vardır. ***SI (Uluslararası Birimler Sistemi)*** Tablo 1-2'de listelenen dört temel birimden oluşturulan bir ***MKSA Sistemidir.*** Tablo 1-1'dekiler de dahil olmak üzere elektromanyetikte kullanılan tüm diğer birimler *metre, kilogram, saniye* ve *amper* cinsinden ifade edilebilen birimlerdir. Örneğin yük birimi Coulomb (C) amper-saniyedir (A·s); elektrik alan şiddeti birimi (V/m), $kg \cdot m/A \cdot s^3$ tür ve manyetik akı yoğunluğu birimi tesla (T) ise $kg/A \cdot s^2$'dir. Çeşitli niceliklerin birimlerini içeren geniş bir tablo Ek A'da verilmiştir.

Elektromanyetik modelimizde Tablo 1-1'de listelenen alan niceliklerine ek olarak üç evrensel sabit vardır. Bunlar boş uzayın (vakum)

TABLO **1-2** TEMEL SI BİRİMLERİ

Nicelik	Birim	Kısaltma
Uzunluk	metre	m
Kütle	kilogram	kg
Zaman	saniye	s
Akım	amper	A

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 9

Elektomanyetik modeldeki üç evrensel sabit

özellikleri ile ilgilidir. Bunlar, ***elektromanyetik dalganın*** (ışık dahil) **boş uzaydaki hızı** *c; **boş uzayın elektrik geçirgenliği*** ϵ_0 ve ***boş uzayın manyetik geçirgenliği*** μ_0'dır. Işığın hızının birçok ondalık basamakta doğru ölçümü için birçok deney gerçekleştirilmiştir. Bizim amaçlarımız açısından

$$c \cong 3 \times 10^8 \quad \text{(m/s)} \quad \text{(boş uzayda)} \tag{1-6}$$

olduğunu hatırlamak yeterlidir. Diğer iki sabit ϵ_0 ve μ_0, sırasıyla, elektrik ve manyetik olaylarla ilgilidir: ϵ_0 boş uzayda elektrik akı yoğunluğu **D** ile elektrik alan şiddeti **E** arasındaki orantı sabitidir ve

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{(boş uzayda)} \tag{1-7}$$

geçerlidir. μ_0 ise yine boş uzayda manyetik akı yoğunluğu **B** ile manyetik alan şiddeti **H** arasındaki orantı sabitidir ve

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \quad \text{(boş uzayda)} \tag{1-8}$$

yazılır. ϵ_0 ve μ_0 değerleri birim sisteminin seçimi ile belirlenir ve birbirinden bağımsız değildir. Elektromanyetik çalışmalarda hemen hemen evrensel olarak kabul edilen ***SI sisteminde*** boş uzayın manyetik geçirgenliği

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{(H/m)} \quad \text{(boş uzayda)} \tag{1-9}$$

olarak seçilir, burada H/m metre başına henry'yi gösterir. Eş. (1-6) ve (1-9)'da sabitlenen c ve μ_0 değerleri ile boş uzayın elektrik geçirgenliği aşağıdaki bağıntılardan elde edilir:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{(m/s)} \quad \text{(boş uzayda)} \tag{1-10}$$

veya

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \cong 8.854 \times 10^{-12} \quad \text{(boş uzayda.)} \tag{1-11}$$

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 10

TABLO **1-3** SI BİRİMLERLE EVRENSEL SABİTLER

Evrensel Sabitler	Sembol	Değer	Birim
Işığın boş uzaydaki hızı	c	3×10^8	m/s
Boş uzayın manyetik geçirgenliği	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
Boş uzayın elektrik geçirgenliği	ϵ_0	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	F/m

Burada F/m, metre başına farad'ın kısaltılmış halidir. Üç evrensel sabit ve değerleri Tablo 1-3'te özetlenmiştir.

Şimdi elektromanyetik modelin temel niceliklerini ve evrensel sabitlerini tanımlamış olduğumuzdan elektromanyetikteki çeşitli konuları geliştirebiliriz. Ancak bunu yapmadan önce uygun matematiksel araçlarla donanmış olmamız gerekir. Bundan sonraki bölümde vektör cebiri ve vektör hesabı için temel işlem kurallarını tartışacağız.

ÖZET

Bu bölüm, mühendislik elektromanyetiği çalışmalarımız için temeli oluşturmuştur. Bir tümdengelim veya aksiyomatik yaklaşım kullandık ve bir elektromanyetik model oluşturduk. Temel kaynak nicelikleri (yük, yük yoğunluğu, akım yoğunluğu) ve alan nicelikleri ($\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$) tanımlandı, birim sistemi (SI) belirtildi ve boş uzayın üç evrensel sabiti (μ_0, c, ϵ_0) verildi. Bu çerçeve ile bundan sonraki bölümlerde temel postülatları vererek çeşitli konuları geliştirebiliriz. Bunu aşamalı olarak adım adım yapacağız. Ancak önce farklı nicelikleri ilişkilendiren matematik ile aşina olmalıyız. Sağlam bir vektör analiz bilgisi zorunludur. 2. Bölüm vektör cebiri ve vektör hesabı hakkında gereken bilgileri sunmaktadır.

TEKRAR SORULARI

S.1-1 Elektromanyetik nedir?

S.1-2 Şekil 1-1'de gösterilen mobil telefon örneğinden farklı olan ve devre teorisi ile yeterince açıklanamayan iki süreç veya durum bulunuz.

S.1-3 Bilimsel bir konunun çalışılmasında bir ideal model oluşturmanın üç temel adımı nedir?

S.1-4 Elektromanyetik modeldeki kaynak nicelikleri nelerdir?

01 BOLUM QXP 65_01 BOLUM 5.06.2024 11:37 Page 11

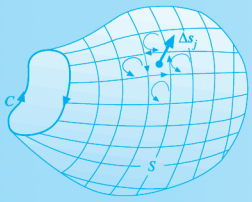
S.1-5 Bir nokta fonksiyonu ile ne anlatılmak istenir? Yük yoğunluğu bir nokta fonksiyonu mudur? Akım bir nokta fonksiyonu mudur?

S.1-6 Elektromanyetikteki dört temel SI birimi nedir?

S.1-7 Elektromanyetik modeldeki dört temel alan niceliği nedir? Bunların birimlerini belirtiniz.

S.1-8 Elektromanyetik modeldeki üç evrensel sabit ve aralarındaki bağıntı nedir?

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 12



2. BÖLÜM

2-1 GENEL BAKIŞ

Elektromanyetik modelimizde bazı nicelikler skalardır (yük, akım ve enerji gibi); bazı nicelikler ise vektördür (elektrik ve manyetik alan şiddeti gibi). Hem skalarlar hem de vektörler zamanın ve konumun fonksiyonu olabilir. Verilen bir zamanda ve konumda bir ***skalar***, büyüklüğü ile (pozitif veya negatif, birimi ile birlikte) tamamıyla belirtilebilir. Böylelikle örneğin $t = 0$ anında, belli bir konumda $-1(\mu C)$ yükü belirtebiliriz. Diğer taraftan bir ***vektörün*** verilen bir zaman ve konumda belirtilmesi hem bir yön, hem de bir büyüklük gerektirir. Bir vektörün yönünü nasıl belirtiriz? Bunun için üç boyutlu uzayda üç sayıya ihtiyaç vardır ve bu sayılar koordinat sistemi seçimine bağlıdır.

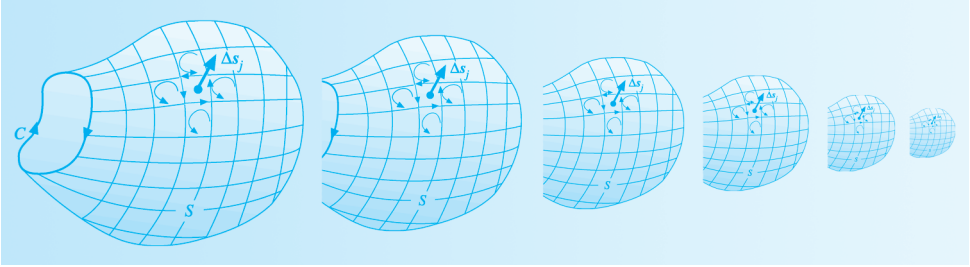
Skalar

Vektör

Çeşitli skalar ve vektör nicelikleri ilgilendiren fizik yasalarının koordinat sisteminden bağımsız olarak geçerli olması gerektiğine dikkat etmek önemlidir. *Elektromanyetik yasaların genel ifadeleri bir koordinat sisteminin belirtilmesini gerektirmez*. Bir özel koordinat sistemi, verilen bir geometriye sahip bir problem çözüleceğinde seçilir. Örneğin, eğer akım taşıyan bir tel döngünün merkezindeki manyetik alanı belirlemek istersek, eğer döngü dikdörtgen ise kartezyen koordinatları kullanmak daha uygundur. Diğer taraftan eğer döngü çember biçimindeyse kutupsal koordinatlar daha uygun olacaktır. Böyle bir problemde çözümü etkileyen temel elektromanyetik bağıntı her iki geometri için de aynıdır.

Koordinat sisteminden bağımsızlık

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 13



Vektör Analiz

Birçok elektromanyetik nicelik vektör olduğundan, bunları kolaylıkla kullanmayı (toplama, çıkarma ve çarpma) bilmeliyiz. Belirli sonuçları üç boyutlu uzayda ifade etmek için uygun bir koordinat sistemi seçmeliyiz. Bu bölümde en uygun üç ortogonal koordinat sistemini tartışacağız: Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar. Verilen bir vektörün bu koordinatlarda bileşenlerine nasıl ayrıldığını ve bir koordinat sisteminden diğerine nasıl dönüştürüldüğünü göreceğiz.

Bazı diferensiyel operatörlerin kullanımı, elektromanyetikteki temel kabullenmeleri ve diğer formülleri öz ve genel olarak ifade etmemizi sağlar. Gradyant, ıraksama ve dönel işlemlerinin önemini tartışacağız ve ıraksama ve Stokes teoremlerini ispat edeceğiz.

Vektör analiz hakkındaki bu bölüm üç ana konuyu incelemektedir:

1. Vektör cebiri—vektörlerin toplanması, çıkarılması ve çarpılması.
2. Ortogonal koordinat sistemleri—Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar.
3. Vektör hesabı—vektörlerin türevi ve integrasyonu; gradyant, ıraksama ve dönel işlemleri.

Ayrıca, diferensiyel operatörlerin arka arkaya kullanımını içeren iki önemli sıfır özdeşliğini de ispat edeceğiz.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 14

2-2 VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE ÇIKARILMASI

Bir vektörün büyüklüğü ve yönünün olduğunu biliyoruz. Bir **A** vektörü

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_A A \tag{2-1}$$

halinde yazılabilir. Burada A, **A**'nın büyüklüğüdür (ve **A** ile aynı birime sahiptir) ve

$$A = |\mathbf{A}| \tag{2-2}$$

ile verilen bir skalardır. $\mathbf{a}_A$ ise birim büyüklüğe sahip olan boyutsuz bir birim vektördür ve **A**'nın yönünü belirtir. $\mathbf{a}_A$'yı **A** vektörünü büyüklüğüne bölerek bulabiliriz:

Bir vektörden birim vektörün bulunması

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \tag{2-3}$$

A vektörü grafik olarak büyüklüğü $|\mathbf{A}| = A$ olan ve ok ucu Şekil 2-1'de görüldüğü gibi $\mathbf{a}_A$ yönünde olan bir yönlü doğru parçası ile temsil edilir.

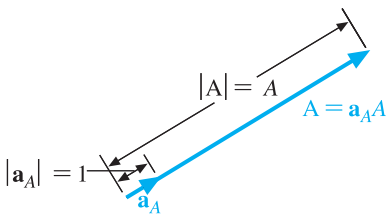
İki vektör, uzayda farklı yerlerde olsa dahi, eğer aynı büyüklüğe ve aynı yöne sahipse, birbirine eşittir. Elle kalın harfleri yazmak zor olduğundan, yazarken harfin üzerine ok veya çizgi ($\vec{A}$ veya $\bar{A}$) veya harfin altına tilda ($\underset{\sim}{A}$) koyarak bir vektörü bir skalardan ayırmak yaygındır. *Bu ayrım işaretine bir kez karar verildikten sonra vektörlerin yazıldığı her yerde ve zamanda kullanılmasına özen gösterilmelidir.*

Vektörler için ayırıcı işaretler

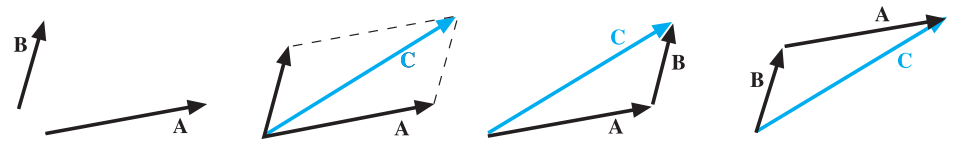
Şekil 2-2(a)'da görüldüğü gibi aynı veya zıt yönde olmayan iki **A** ve **B** vektörü bir düzlem belirler. Bunların toplamı, aynı düzlemde yer alan bir **C** vektörüdür. **C** = **A** + **B** grafik olarak iki yolla elde edilebilir.

1. Paralelkenar kuralı ile: Sonuçtaki **C** vektörü, aynı noktadan baş-

ŞEKİL 2-1 **A** vektörünün grafik gösterimi.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 15



(a) **A** ve **B** vektörleri (b) Paralelkenar kuralı (c) Baş-kuyruk kuralı **A + B** (d) Baş-kuyruk kuralı **B + A**

ŞEKİL 2-2 Vektörlerin toplamı **C** = **A** + **B** = **B** + **A**.

layarak çizilen **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın Şekil 2-2(b)'de gösterilen köşegenidir.

2. Baş-kuyruk kuralı ile: **A**'nın başı **B**'nin kuyruğuna bağlanır. Bunların toplamı olan **C** vektörü, **A**'nın kuyruğundan **B**'nin başına çizilen vektördür. **A**, **B** ve **C** vektörleri Şekil 2-2(c)'de görüldüğü gibi bir üçgen oluşturmaktadır. **C** = **A** + **B** = **B** + **A**'dır ve bu gerçek Şekil 2-2(d)'de gösterilmiştir.

Vektörlerin çıkarılması, vektör toplamı cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{2-4}$$

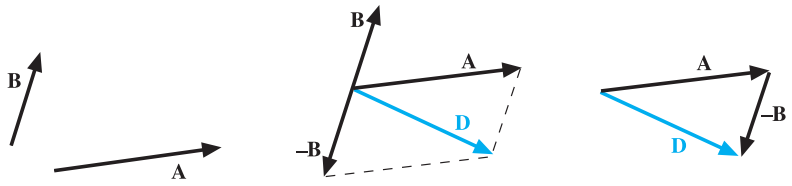
Burada **–B**, **B** vektörünün negatifidir. Çıkarma Şekil 2-3'te gösterilmiştir.

NOT: Bir skaları bir vektörle toplamak veya bir vektörden çıkarmak, benzer şekilde bir vektörü bir skalarla toplamak veya bir skalardan çıkarmak anlamsızdır.

■ **ALIŞTIRMA 2.1** Baş kuyruğa şeklinde çizilen üç **A**, **B** ve **C** vektörleri bir üçgenin üç kenarını oluşturmaktadır. **A** + **B** + **C** nedir? **A** + **B** – **C** nedir?

CEVAP: 0, –2**C**.

ŞEKİL 2-3 Vektörlerin çıkarılması, **D** = **A** – **B** = **A** + (–**B**).



(a) **A** ve **B** vektörleri (b) Paralelkenar kuralı (c) Baş-kuyruk kuralı

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 16

2-3 VEKTÖRLERİN ÇARPIMI

Bir **A** vektörünün bir pozitif k skaları ile çarpılması, yönünü değiştirmeksizin **A**'nın büyüklüğünü k kat değiştirir (k, 1'den büyük veya küçük olabilir.)

$$k\mathbf{A} = \mathbf{a}_A(kA). \tag{2-5}$$

"İki vektörün çarpımı" veya "bir vektörün bir diğeri ile çarpılması" ifadeleri yeterli değildir. Çünkü iki ayrı ve çok farklı vektör çarpımı tipi vardır. Bunlar (1) skalar veya nokta çarpım ve (2) vektör veya çapraz çarpımdır. Bu çarpımlar aşağıdaki kısımlarda tanımlanacaktır.

2-3.1 SKALAR VEYA NOKTA ÇARPIM

İki **A** ve **B** vektörünün skalar veya nokta çarpımı $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ("**A** nokta **B**") ile gösterilir. İki vektörün nokta çarpımının sonucu bir skalardır. Nokta çarpım, **A** ve **B**'nin büyüklüklerinin ve ikisi arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir. Böylece,

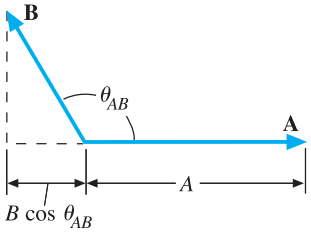
İki vektörün skalar veya nokta çarpımının tanımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \triangleq AB\cos\theta_{AB} \tag{2-6}$$

yazılır. Eş. (2-6)'da $\triangleq$ sembolü "tanımdan dolayı eşittir" anlamındadır. θ_{AB} ise **A** ve **B** arasındaki *küçük* açıdır ve Şekil 2-4'te gösterildiği gibi π radyandan (180°) küçüktür.

Eş. (2-6)'daki tanımdan iki vektörün nokta çarpımının, (1) büyüklüklerinin çarpımına eşit veya daha küçük olduğunu; (2) aralarındaki açının $\pi/2$ radyandan (90°) küçük veya büyük olmasına bağlı olarak pozitif veya negatif olabileceğini; (3) bir vektörün büyüklüğü

ŞEKİL 2-4 **A** ve **B** vektörlerinin nokta çarpımı.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 17

ile diğer vektörün ilk vektör üzerine izdüşümünün çarpımına eşit olduğunu ve (4) vektörler birbirine dik ise sıfır olduğunu görebiliriz.

Eş. (2-6) dan

Nokta çarpım değişimlidir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{2-7}$$

olduğu bulunur. Böylece bir nokta çarpımda vektörlerin sırasının bir önemi yoktur. (Nokta çarpım değişimlidir.) Ayrıca

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \tag{2-8}$$

veya

Bir vektörün boyunun bulunması

$$A = |\mathbf{A}| = +\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \tag{2-9}$$

bulunur. Eş. (2-9) bir vektörün ifadesi herhangi bir koordinat sisteminde verildiğinde vektörün büyüklüğünü bulmamızı sağlar. Basitçe, vektörün kendisi ile çarpımını ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$) oluşturur ve skalar sonucun pozitif karekökünü alırız.

ÖRNEK 2-1

Bir üçgende kosinüsler yasasını ispat etmek için vektörleri kullanınız.

ÇÖZÜM

Kosinüsler yasası bir üçgenin bir kenarının uzunluğunu, diğer iki kenarın uzunlukları ve bunların arasındaki açı cinsinden ifade eden bir skalar bağıntıdır. Şekil 2-5 için kosinüsler yasası

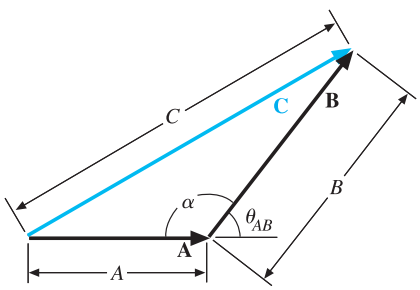
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha} \tag{2-10}$$

verir. Bunu, kenarları vektör kabul ederek, yani,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

alarak ispat ederiz.

ŞEKİL 2-5 Örnek 2-1'in gösterimi.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 18

C'nin büyüklüğünü bulmak için Eş. (2-8)'deki gibi **C**'nin kendisi ile iç çarpımını alırız.

$$C^2 = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$
$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}.$$

θ_{AB}, tanımdan dolayı **A** ve **B** arasındaki küçük açı olup $(180° - \alpha)$'ya eşit olduğundan $\cos\theta_{AB} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha \tag{2-11}$$

olur. Eş. (2-11)'in her iki tarafının karekökü (2-10) denklemindeki kosinüsler yasasını verir. Bu problemde hiçbir koordinat sisteminin belirtilmesine ihtiyaç olmadığına dikkat ediniz.

2-3.2 VEKTÖR VEYA ÇAPRAZ ÇARPIM

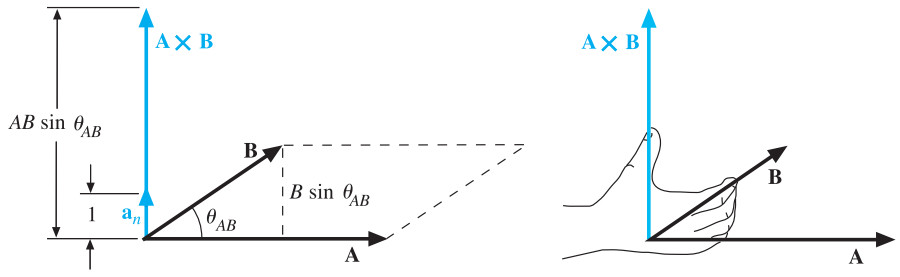
İkinci tip vektör çarpımı vektör veya çapraz çarpımdır. Verilen **A** ve **B** vektörleri için vektör çarpım **A** × **B** ile gösterilir ("**A** çarpı **B**") ve

İki vektörün vektör veya çapraz çarpım tanımı

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} \triangleq \mathbf{a}_n AB\sin\theta_{AB} \tag{2-12}$$

ile tanımlanan bir başka vektördür. Burada θ_{AB} **A** ve **B** vektörleri arasındaki *küçük* açı ($\leqslant\pi$) ve $\mathbf{a}_n$, **A** ve **B**'yi içeren düzleme normal (dik) birim vektördür. $\mathbf{a}_n$'nin yönü, sağ elin parmakları θ_{AB} boyunca **A**'dan **B**'ye dönerken baş parmağın yönü ile aynıdır (*sağ el kuralı*). Bu kural Şekil 2-6'da gösterilmiştir. Şekilden $B\sin\theta_{AB}$'nin **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın yüksekliği olduğunu görebi-

ŞEKİL 2-6 **A** ve **B** vektörlerinin **A** × **B** vektör çarpımı.



(a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{a}_n AB\sin\theta_{AB}$ (b) Sağ el kuralı

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 19

liriz. Ayrıca, negatif olmayan (pozitif veya sıfır) $AB\sin\theta_{AB}$ niceliği nümerik olarak paralelkenarın alanına eşittir. Böylece $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ vektör çarpımı, $\mathbf{a}_n$ yönü **A**'dan **B**'ye dönerken sağ el kuralı ile elde edilen ve büyüklüğü **A** ve **B**'nin oluşturduğu paralelkenarın alanına eşit olan bir vektördür.

Eş. (2-12)'deki tanımı ve sağ el kuralını kullanarak

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B} \tag{2-13}$$

Vektör çarpım değişmeli değildir.

olduğunu buluruz. Böylece, vektör çarpım *değişmeli değildir* ve bir vektör çarpımda iki vektörün sırası ters çevrilirse çarpımın işareti değişir.

2-3.3 ÜÇ VEKTÖRÜN ÇARPIMI

Üç vektörün iki tip çarpımı vardır: (1) üçlü skalar çarpım ve (2) üçlü vektör çarpım.

1. Üçlü skalar çarpım. Bu çarpım, bir vektörün, diğer iki vektörün vektör çarpımı ile nokta çarpımıdır. Bunun tipik bir biçimi

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

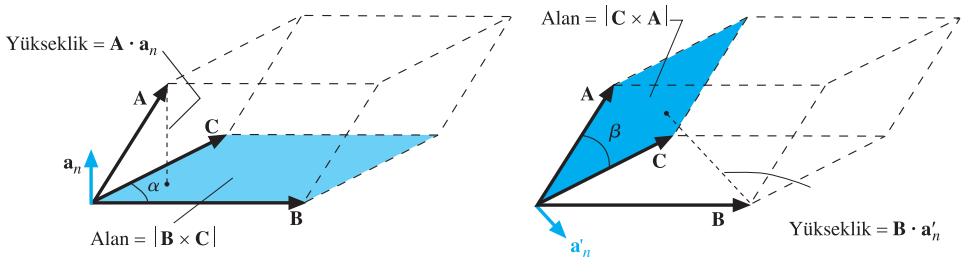
ile verilir. Burada **A**, **B** ve **C** Şekil 2-7(a)'da gösterildiği gibi herhangi üç vektördür.

Eş. (2-12)'ye göre $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ vektör çarpımının büyüklüğü, $BC\sin\alpha$ dır ve bu da **B** ve **C** kenarlarının oluşturduğu paralelkenarın taralı alanına eşittir. $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$'nin yönü, gösterildiği gibi **B** ve **C**'yi içeren düzleme dik $\mathbf{a}_n$ birim normal vektörüdür. O halde verilen üçlü çarpım

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_n)BC\sin\alpha \tag{2-14}$$

olur.

ŞEKİL 2-7 Üçlü skalar çarpım.



(a) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (b) $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 20

Eş. (2-14)'te $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ büyüklüğü $\mathbf{A}$'nın $\mathbf{a}_n$ birim normal vektörü yönündeki izdüşümüne eşit olan bir skalardır. Böylece $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n)$ nümerik olarak $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzün yüksekliğidir ve verilen üçlü skalar çarpım bu paralelyüzün hacmine eşittir.

2. Üçlü vektör çarpım. Bu çarpım, bir vektörün, diğer iki vektörün vektör çarpımı ile vektör çarpımıdır. Bunun tipik bir biçimi

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

ile verilir. Bu durum daha karmaşıktır ve burada genel bir çıkarım yapmayacağız. Ancak bir koordinat sistemi verildiğinde bu çarpım basitçe açılabilir (bkz. Problem 2-9). Bunun kullanımını ileride fırsat olduğunda tartışacağız.

ÖRNEK 2-2

Verilen üç $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ vektörleri için aşağıdaki üçlü skalar çarpım bağıntısını ispat ediniz.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{2-15}$$

ÇÖZÜM

Eş. (2-14) ile verilen $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ üçlü skalar çarpımının $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzün hacmi olduğunu bulmuştuk. Şimdi ikinci üçlü skalar çarpım $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$'yı inceleyelim. Şekil 2-7(b) ve Eş. (2-12)'den

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}'_n) CA \sin \beta \tag{2-16}$$

olur. Burada $\mathbf{a}'_n$ ve $CA \sin \beta$, sırasıyla, $\mathbf{C} \times \mathbf{A}$ vektör çarpımının yönünü ve büyüklüğünü göstermektedir. Şimdi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzün, alanı $|\mathbf{C} \times \mathbf{A}| = CA \sin \beta$ olan taralı taban üzerinde olduğunu hayal edelim. Paralelyüzün yüksekliği $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}'_n)$'dür. Böylece Eş. (2-16)'daki üçlü skalar çarpımın büyüklüğü paralelyüzün hacmine eşittir ki bu da Eş. (2-14) ile verilenle aynıdır. Böylece,

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \tag{2-17}$$

bulunur. Benzer tartışma Eş.(2-15)'teki $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ üçüncü üçlü skalar çarpımına da uygulanabilir. Çünkü her üç biçim aynı paralelyüzü vermektedir.

DİKKAT: Eş. (2-15)'teki eşitlikler üçlü skalar çarpımdaki vektörlerin sırasının döngüsel permütasyonda olmasını gerektirir. Bunun anlamı $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}\}$ veya $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ dizilerinin birinci vektör ikin-

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 21

ci ve üçüncü vektörün vektör çarpımı ile skalar çarpılırken korunması gerektiğidir. Döngüsel sırayı takip etmeyen $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ Eş. (2-16)'daki $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ ile aynı değildir (negatifine eşittir).

TEKRAR SORULARI

S.2-1 Hangi koşullar altında iki vektörün nokta çarpımı negatif olabilir?

S.2-2 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ve $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ çarpımlarını (a) $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ ve (b) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ için bulunuz.

S.2-3 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ ile $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ eşit midir? Açıklayınız.

S.2-4 Verilen $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörleri için (a) $\mathbf{A}$'nın $\mathbf{B}$ yönündeki bileşenini ve (b) $\mathbf{B}$'nin $\mathbf{A}$ yönündeki bileşenini nasıl bulursunuz?

S.2-5 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ eşitliği $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ verir mi? Açıklayınız.

S.2-6 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ eşitliği $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ verir mi? Açıklayınız.

NOTLAR

1. Bir vektörü yazarken onu skalardan ayıran işareti *hiçbir zaman* unutmayınız.
2. Bir vektör ile bir skaları herhangi bir sıra ile toplayıp çıkarmayınız.
3. Bir vektöre bölme tanımlı değildir. Bir niceliği bir vektöre bölmeye çalışmayınız.
4. İki vektörün nokta çarpımı sıfırsa bu iki vektör birbirine diktir, tersi de geçerlidir ($\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$—Eş.(2-6)).
5. İki vektörün vektör çarpımı sıfırsa bu iki vektör birbirine paraleldir, tersi de geçerlidir ($\theta = 0$, $\sin\theta = 0$—Eş. (2-12)).

■ **ALIŞTIRMA 2.2** Aşağıdaki üçlü skalar çarpımların değerlerini karşılaştırınız.

(a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{C})\cdot\mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{B})$, (c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ ve (d) $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{a}_A \times \mathbf{A})$.

■ **ALIŞTIRMA 2.3** Aşağıdaki ifadelerden hangileri anlamlı değildir?

(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, (b) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}/(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (c) $\mathbf{AB}/\mathbf{CD}$, (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}/(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})$, (e) $\mathbf{ABC}$, (f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

2-4 ORTOGONAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Daha önce elektromanyetik yasalarının koordinat sistemlerine göre değişmez olduğunu belirtmiştik. Bununla birlikte pratik problemlerin çözümü, bu yasalardan elde edilen bağıntıların, verilen problem geometrilerine uygun bir koordinat sisteminde ifade edilmesini gerekti-

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 22

rir. Örneğin uzayda belli bir noktada elektrik alanını belirlemek için en azından kaynağın konumunu ve bu noktanın bir koordinat sistemine göre yerleşimini vermemiz gerekir. Üç boyutlu uzayda bir nokta, üç yüzeyin kesişimi olarak bulunabilir. Bu üç yüzey ailesinin u_1 = sabit, u_2 = sabit ve u_3 = sabit ile verildiğini kabul edelim. Burada u'ların hepsi uzunluk olmak zorunda değildir bazıları açı olabilir. (Tanıdık Kartezyen veya dikdörtgen koordinat sisteminde u_1, u_2 ve u_3, sırasıyla, x, y ve z'ye karşılık gelir.) Bu yüzeylerin hepsi birbirine dik olduğunda bir ***ortogonal koordinat sistemi*** elde edilir.

Ortogonal koordinat sistemleri

Birçok ortogonal koordinat sistemi vardır ancak biz en yaygın ve en kullanışlı üç sistemi inceleyeceğiz:

1. Kartezyen (veya dikdörtgen) koordinatlar.[1]
2. Silindirik koordinatlar.
3. Küresel koordinatlar.

Bunlar, takip eden kısımlarda ayrı ayrı tartışılacaktır.

2-4.1 KARTEZYEN KOORDİNATLAR

Kartezyen koordinatlarda bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktası, Şekil 2-8'de gösterildiği gibi $x = x_1$, $y = y_1$ ve $z = z_1$ düzlemlerinin kesişimidir. Bu durumda

$$(u_1, u_2, u_3) = (x\ , y, z)$$

dir. Üç koordinat yönündeki, hepsi birbirine dik $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ ve $\mathbf{a}_z$ birim vektörlerine ***baz vektörler*** denir. Bir sağ-el sistemi için aşağıdaki döngüsel özellikler geçerlidir:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \tag{2-18a}$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \tag{2-18b}$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y. \tag{2-18c}$$

Aşağıdaki bağıntılar doğrudan bulunur:

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \cdot\, \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 \tag{2-19}$$

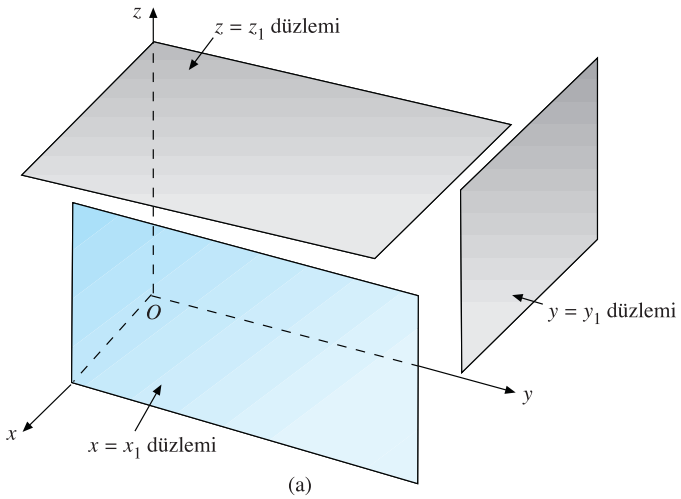
ve

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1. \tag{2-20}$$

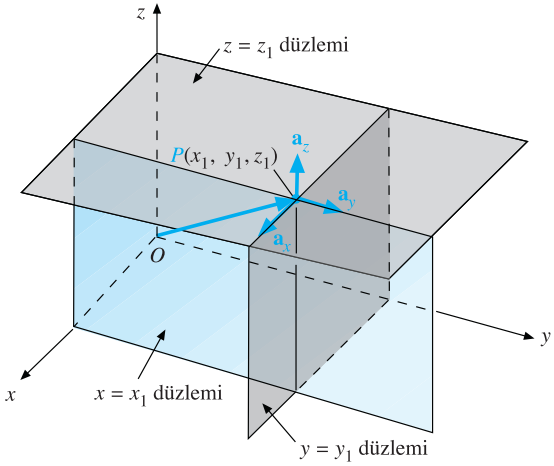
$P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının konum vektörü, O orijininden

[1] "Kartezyen koordinatlar" terimi tercih edilmiştir çünkü "dikdörtgen koordinatlar" terimi genelde iki boyutlu geometri ile ilgilidir. "Kartezyen" sıfatı analitik geometriyi başlatan Fransız filozof ve matematikçi Renatus Cartesius (René Descartes 1596-1650'nin Latince yazımı) anısına kullanılmaktadır.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 23



(a)



(b)

ŞEKİL 2-8 Kartezyen koordinatlar. (a) Birbirine dik üç düzlem. (b), (a)'daki üç düzlemin kesişimi P noktasının yerleşimini belirtir.

P noktasına çizilen vektördür. $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ ve $\mathbf{a}_z$ yönlerindeki bileşenleri, sırasıyla, x_1, y_1 ve z_1'dir[1].

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}_x x_1 + \mathbf{a}_y y_1 + \mathbf{a}_z z_1. \tag{2-21}$$

[1] Bu kitapta vektörleri yazarken önce yönü (bir birim vektör) ve sonra büyüklüğü yazma stilini kullanacağız.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 24

Kartezyen koordinatlarda A_x, A_y ve A_z bileşenleri olan bir **A** vektörü

Kartezyen koordinatlarda A vektörü

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \tag{2-22}$$

olarak yazılabilir. Bir vektör diferensiyel uzunluğun ifadesi

Kartezyen koordinatlarda diferensiyel uzunluk

$$d\ell = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \tag{2-23}$$

dir. Bir diferensiyel hacim, üç koordinat yönündeki diferensiyel uzunlukların çarpımıdır.

Kartezyen koordinatlarda diferensiyel hacim

$$dv = dx\,dy\,dz. \tag{2-24}$$

Eş. (2-22)'deki **A** ve bir diğer $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ vektörünün iç çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z)$$

veya Eş. (2-19) ve Eş. (2-20)'den

Kartezyen koordinatlarda A ve B'nin skalar çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2-25}$$

ile verilir.

A ve **B**'nin vektör çarpımı Eş.(2-18a, b ve c) kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= \mathbf{a}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z(A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned} \tag{2-26}$$

yazılır. Eşitlik (2-26) kolay hatırlamak için bir determinant halinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

Kartezyen koordinatlarda A ve B'nin vektör çarpımı

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{2-27}$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 25

ÖRNEK 2-3

Kartezyen koordinatlarda bir $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2$ vektörü veriliyor.

a) $A = |\mathbf{A}|$ büyüklüğünü,

b) $\mathbf{A}$ yönündeki $\mathbf{a}_A$ birim vektörünün ifadesini ve

c) $\mathbf{A}$'nın z ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

a) A'yı Eş. (2-8) ve Eş. (2-9)'u kullanarak ve Eş. (2-19) ve Eş. (2-20) yardımıyla buluruz.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\cdot(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\\ &= (-1)(-1) + (2)(2) + (-2)(-2)\\ &= 1 + 4 + 4 = 9.\end{aligned}$$

Böylece

$$A = +\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = +\sqrt{9} = 3$$

bulunur.

b) $\mathbf{a}_A$ birim vektörü Eş. (2-3)'ten elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} &= \frac{1}{3}(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\\ &= -\mathbf{a}_x\frac{1}{3} + \mathbf{a}_y\frac{2}{3} - \mathbf{a}_z\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

c) $\mathbf{A}$'nın $+z$ ekseni ile yaptığı θ_z açısını bulmak için $\mathbf{A}$'nın $\mathbf{a}_z$ ile nokta çarpımını alırız. Eş. (2-6)'dan

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_z = A\cos\theta_z,$$

$$(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 2)\cdot\mathbf{a}_z = -2 = 3\cos\theta_z,$$

bulunur, buradan da

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 180^\circ - 48.2^\circ = 131.8^\circ$$

elde ederiz.

SORU: Bu cevap niçin -48.2° veya 228.2° ($180^\circ + 48.2^\circ$) değildir?

ÖRNEK 2-4

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z$ ve $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x 3 + \mathbf{a}_z 4$ veriliyor.

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

b) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ve

c) θ_{AB}

değerlerini bulunuz.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 26

ÇÖZÜM

a) Eş. (2-25)'ten

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (5)(-3) + (-2)(0) + (1)(4) = -11$$ buluruz.

b) Eş. (2-27)'den

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_x 8 - \mathbf{a}_y 23 - \mathbf{a}_z 6$$

elde edilir.

c) **A** ve **B** vektörleri arasındaki θ_{AB} açısını Eş. (2-6)'daki $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ tanımından bulabiliriz. **A**'nın A ve **B**'nin B büyüklükleri

$$A = |\mathbf{A}| = +\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = +\sqrt{30}$$

ve

$$B = |\mathbf{B}| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$ bulunur.

Eş. (2-6)'dan

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{-11}{5\sqrt{30}} = -0.402$$

olur ve böylece

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}(-0.402) = 180^\circ - 66.3^\circ = 113.7^\circ$$

buluruz.

ÖRNEK 2-5

a) P_1 (1, 3, 2) noktasından, P_2(3, –2, 4) noktasına uzanan vektörü Kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

b) $\overline{P_1P_2}$ doğru parçasının uzunluğu belirleyiniz.

c) Orijinden bu doğruya olan dik uzaklığı bulunuz.

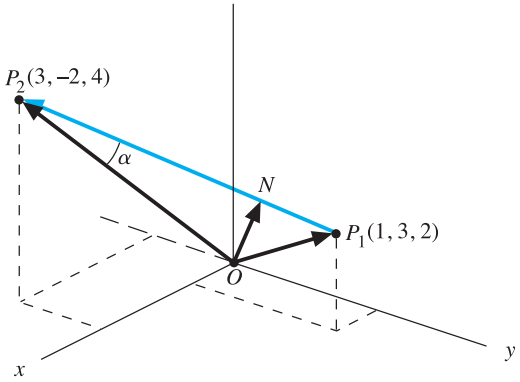
ÇÖZÜM

a) Şekil 2-9 yardımıyla

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 4) - (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 2) \\ &= \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 2 \end{aligned}$$

olduğunu buluruz.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 27



ŞEKİL 2-9 Örnek 2-5'in gösterimi.

b) $\overline{P_1P_2}$ doğru parçasının uzunluğu

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2} &= |\overrightarrow{P_1P_2}| \\ &= \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{33} \qquad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

c) O orijininden doğruya doğru olan dik (en kısa) uzaklık $|\overrightarrow{ON}|$ 'dir ki bu da $|\overrightarrow{OP_2}| \sin\alpha = |\overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{a}_{P_1P_2}|$ 'ye eşittir. Böylece

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{ON}| &= \frac{|\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \\ &= \frac{|(\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 4) \times (\mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 2)}{\sqrt{33}} \\ &= \frac{|\mathbf{a}_x 16 + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 11|}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{381}}{\sqrt{33}} = 3.40\end{aligned}$$

elde edilir.

NOT: Sadelik için bu örnekte birimler kullanılmamıştır.

■ **ALIŞTIRMA 2.4** $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 6 + \mathbf{a}_z 3$ vektörü veriliyor. Aşağıdakileri bulunuz.

a) $\mathbf{B}$'nin büyüklüğü,

b) $\mathbf{a}_B$'nin ifadesi,

c) $\mathbf{B}$'nin x, y ve z eksenleri ile yaptığı açı.

CEVAP: (a) 7, (b) $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_x 0.296 - \mathbf{a}_y 0.857 + \mathbf{a}_z 0.429$, (c) 73.4°, 149.0°, 64.6°.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 28

■ **ALIŞTIRMA 2.5** Kartezyen koordinatlarda O orijini ile $P_1(1, 2, 0)$ ve $P_2(-3, 4, 0)$ noktaları veriliyor. Aşağıdakileri bulunuz.

a) $\overrightarrow{OP_2}$'nin $\overrightarrow{OP_1}$ üzerine izdüşümünün uzunluğu ve

b) OP_1P_2 üçgeninin alanı.

CEVAP: (a) 2.236, (b) 5.

2-4.2 SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR

Silindirik koordinatlarda bir $P(r_1, \phi_1, z_1)$ noktası; $r = r_1$ çembersel silindirik yüzeyinin, z-ekseni kenarı olan ve xy düzlemi ile $\phi = \phi_1$ açısını yapan yarı-düzlemin ve $z = z_1$'de xy-düzlemine paralel bir düzlemin kesişimidir. Burada

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$$

dır. Şekil 2-10'da gösterildiği gibi r, z ekseninden olan radyal uzaklıktır ve ϕ açısı pozitif x ekseninden ölçülür. $\mathbf{a}_\phi$ baz vektörü silindirik yüzeye teğettir. $\mathbf{a}_r$ ve $\mathbf{a}_\phi$'nin her ikisinin de yönleri P noktasının yerleşimi ile değişir. $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\phi$ ve $\mathbf{a}_z$ için aşağıdaki sağ el bağıntıları geçerlidir.

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \tag{2-28a}$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_r \tag{2-28b}$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\phi \tag{2-28c}$$

Metrik katsayı

Üç koordinatın ikisi olan r ve z'nin (u_1 ve u_3) kendileri uzunluktur. Ancak $\phi\,(u_2)$ bir açıdır ve bir $d\phi$ diferensiyel açı değişimini bir diferensiyel uzunluk değişimine çeviren r çarpım katsayısını (metrik katsayı) gerektirir. Bu durum Şekil 2-11'de gösterilmiştir.

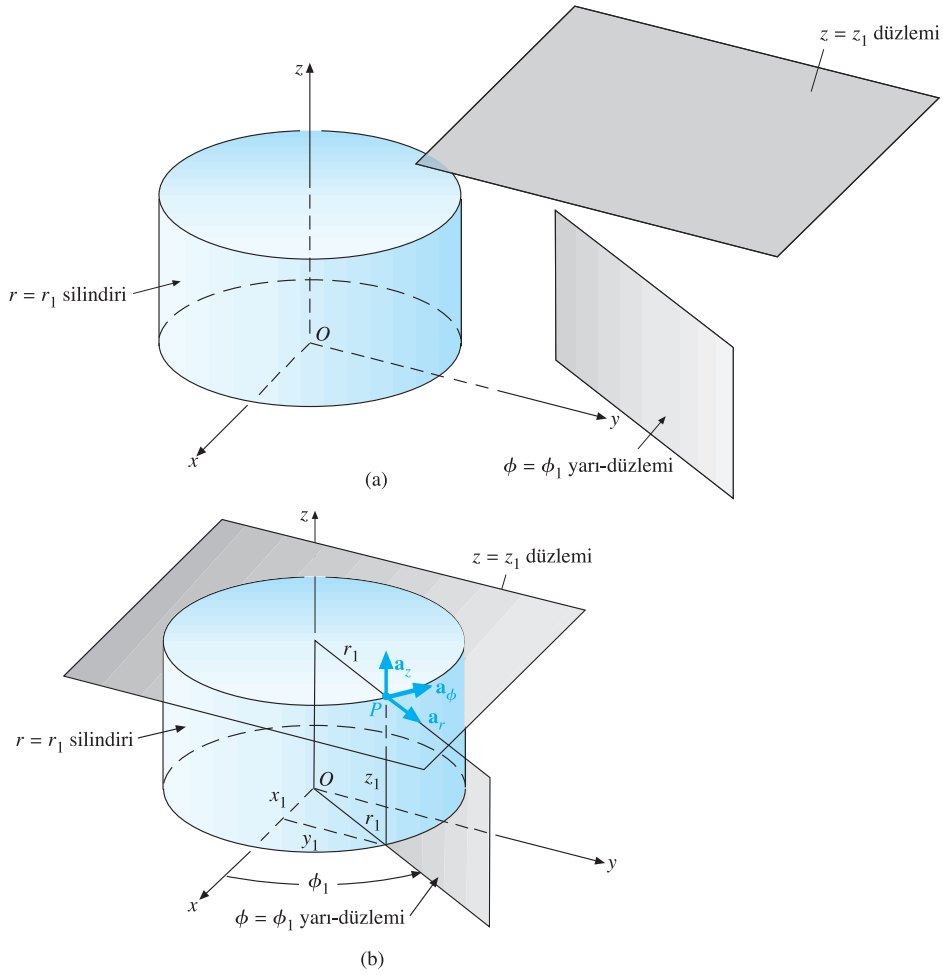
dr ve dz için metrik katsayı birimdir. $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\phi$ ve $\mathbf{a}_z$ koordinat yönlerindeki üç metrik katsayıyı, sırasıyla h_1, h_2 ve h_3 ile gösterirsek silindirik koordinatlar için $h_1 = 1$, $h_2 = r$ ve $h_3 = 1$ olur. Bunlar Tablo 2-1'de listelenmiştir. Kartezyen koordinatlarda her üç koordinat yönündeki metrik katsayı birdir ($h_1 = h_2 = h_3 = 1$) çünkü her üç koordinatın (x, y, z) kendisi uzunluktur.

Silindirik koordinatlarda bir vektör diferensiyel uzunluğun genel ifadesi, üç koordinat yönündeki diferensiyel uzunluk değişimlerinin vektör toplamıdır.

Silindirik koordinatlarda vektör diferensiyel uzunluk

$$d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\phi r\, d\phi + \mathbf{a}_z\, dz. \tag{2-29}$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 29



ŞEKİL 2-10 Silindirik koordinatlar. (a) Bir çembersel silindirik yüzey, kenarı z-ekseni olan bir yarı-düzlem ve z-eksenine dik bir düzlem. (b) (a)'daki silindirik yüzeyin ve iki düzlemin kesişimi bir P noktasının yerleşimini belirler.

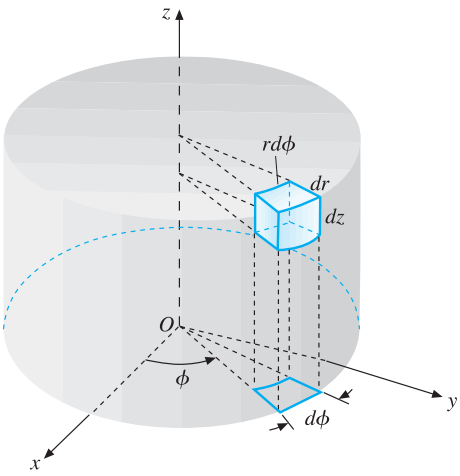
Bir diferensiyel hacim, üç koordinat yönündeki diferensiyel uzunluk değişimlerinin çarpımıdır. Silindirik koordinatlarda bu

Silindirik koordinatlarda diferensiyel hacim

$$dv = r\,dr\,d\phi\,dz \tag{2-30}$$

ile verilir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 30



ŞEKİL 2-11 Silindirik koordinatlarda bir diferensiyel hacim.

Silindirik koordinatlar uzun çizgi yükler veya akımlar için ve silindirik veya çember sınırların bulunduğu durumlarda önemlidir.

Bir vektör silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılır:

Silindirik koordinatlarda A vektörü

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z. \tag{2-31}$$

TABLO **2-1** ÜÇ TEMEL KOORDİNAT SİSTEMİ

		Kartezyen Koordinatlar (x, y, z)	**Silindirik Koordinatlar** (r, ϕ, z)	**Küresel Koordinatlar** (R, θ, ϕ)
Baz Vektörler	$\mathbf{a}_{u_1}$ $\mathbf{a}_{u_2}$ $\mathbf{a}_{u_3}$	$\mathbf{a}_x$ $\mathbf{a}_y$ $\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_r$ $\mathbf{a}_\phi$ $\mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_R$ $\mathbf{a}_\theta$ $\mathbf{a}_\phi$
Metrik Katsayılar	h_1 h_2 h_3	1 1 1	1 r 1	1 R $R \sin\theta$
Diferensiyel Hacim	dv	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\phi\,dz$	$R^2 \sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 31

Silindirik koordinatlarda verilen vektörler dönüştürülüp Kartezyen koordinatlarda ifade edilebilir, bunun tersi de geçerlidir. $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z$'yi Kartezyen koordinatlarda ifade etmek istediğimizi, yani $\mathbf{A}$'yı $\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$ alarak yazmayı ve A_x, A_y ve A_z'yi belirlemek istediğimizi varsayalım. Öncelikle $\mathbf{A}$'nın z bileşeni A_z'nin silindirik koordinatlardan Kartezyene dönüşüm sırasında değişmediğine dikkat ederiz. A_x'i bulmak için $\mathbf{A}$'nın her iki ifadesinin $\mathbf{a}_x$ ile çarpımını eşitleriz. Böylece

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x \\ &= A_r \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x + A_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x \end{aligned} \tag{2-32}$$

olur. Burada $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0$ olduğundan A_z içeren terim yok olmuştur. $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_r$ ve $\mathbf{a}_\phi$ baz vektörlerinin xy düzlemindeki bağıl konumlarını gösteren Şekil 2-12'ye bakarak

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \cos\phi \tag{2-33}$$

ve

$$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin\phi \tag{2-34}$$

olduğunu görürüz. Eş. (2-33) ve (2-34)'ü Eş. (2-32)'de yerine koyarsak

$$A_x = A_r \cos\phi - A_\phi \sin\phi \tag{2-35}$$

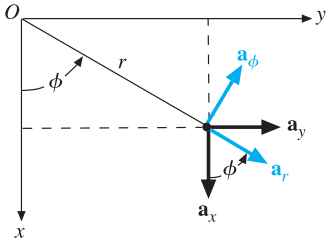
elde ederiz. Benzer şekilde A_y'yi bulmak için $\mathbf{A}$'nın her iki ifadesinin $\mathbf{a}_y$ ile iç çarpımını alırız ve eşitleriz:

$$\begin{aligned} A_y &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y \\ &= A_r \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y + A_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y. \end{aligned}$$

Şekil 2-12'den

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi \tag{2-36}$$

ŞEKİL 2-12 $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_r$ ve $\mathbf{a}_\phi$ arasındaki ilişkiler.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 32

ve

$$\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y = \cos\phi \tag{2-37}$$

bulunur. Buradan

$$A_y = A_r \sin\phi + A_\phi \cos\phi \tag{2-38}$$

takip eder. Bir vektörün Kartezyen ve silindirik koordinatlardaki bileşenleri arasındaki bağıntıları bir matris biçiminde yazmak kolaydır:

Silindirik koordinatlardaki bileşenlerin Kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{2-39}$$

Şekil 2-12'den bir noktanın (r, ϕ, z) silindirik koordinatlarındaki koordinatları (x, y, z) Kartezyen koordinatlarına aşağıdaki gibi çevrilir:

Bir noktanın silindirik koordinatlardaki yerleşiminin Kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi

$$x = r\cos\phi \tag{2-40a}$$

$$y = r\sin\phi \tag{2-40b}$$

$$z = z. \tag{2-40c}$$

ÖRNEK 2-6

Bir vektör alanının silindirik koordinatlarda $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r(3\cos\phi) - \mathbf{a}_\phi 2r + \mathbf{a}_z z$ olarak verildiğini kabul ederek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $P(4, 60°, 5)$ noktasındaki alan değeri nedir?

b) P'deki $\mathbf{A}_P$ alanını Kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

c) P noktasının konumunu Kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

ÇÖZÜM

a) $P(r = 4, \phi = 60°, z = 5)$ noktasında alan

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_r(3\cos 60°) - \mathbf{a}_\phi(2 \times 4) + \mathbf{a}_z 5$$

$$= \mathbf{a}_r(3/2) - \mathbf{a}_\phi 8 + \mathbf{a}_z 5 \text{ bulunur.}$$

b) Eş. (2-39)'u kullanarak

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° & 0 \\ \sin 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 33

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.68 \\ -2.70 \\ 5 \end{bmatrix}$$

buluruz, böylece

$\mathbf{A}_P = \mathbf{a}_x 7.68 - \mathbf{a}_y 2.70 + \mathbf{a}_z 5$ elde ederiz.

c) Eş. (2-40a, b ve c)'yi kullanarak P'nin Kartezyen koordinatları $(4\cos 60^\circ,\ 4\sin 60^\circ,\ 5)$ veya $(2,\ 2\sqrt{3},\ 5)$ olarak bulunur.

■ **ALIŞTIRMA 2.6** O orijininden $Q(3, 4, 5)$ noktasına $\overrightarrow{OQ}$ konum vektörünü silindirik koordinatlarda ifade ediniz.

CEVAP: $\mathbf{a}_r 5 + \mathbf{a}_z 5$.

■ **ALIŞTIRMA 2.7** P_1 ve P_2 noktalarının silindirik koordinatları $P_1(4, 60°, 1)$ ve $P_2(3, 180°, -1)$ veriliyor. Bu iki nokta arasındaki uzaklığı bulunuz.

CEVAP: $\sqrt{41}$.

2-4.3 KÜRESEL KOORDİNATLAR

Küresel koordinatlarda bir $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ noktası üç yüzeyin kesişimi olarak belirlenir: Merkezi orijinde ve yarıçapı $R = R_1$ olan bir küresel yüzey, köşesi orijinde olan, ekseni z-ekseni ile çakışan ve $\theta = \theta_1$ yarım açısına sahip bir dik çembersel koni ve kenarı z-ekseni ile çakışan, xz düzlemi ile $\phi = \phi_1$ açısını yapan yarı-düzlem. Bu sistemde

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$$

a_R ve a_r çok farklıdır.

dir. Bu üç kesişen yüzey Şekil 2-13'te gösterilmiştir. P'deki $\mathbf{a}_R$ *baz vektörünün orijinden yarıçap boyunca olduğuna ve silindirik koordinatlardaki* $\mathbf{a}_r$'den *oldukça farklı olduğuna* dikkat ediniz; $\mathbf{a}_r$ z-eksenine diktir. $\mathbf{a}_\theta$ baz vektörü $\phi = \phi_1$ düzlemindedir ve küresel yüzeye teğettir. $\mathbf{a}_\phi$ baz vektörü ise silindirik koordinatlardaki ile aynıdır. Bunlar Şekil 2-13'te gösterilmiştir. Bir sağ el sistemi için

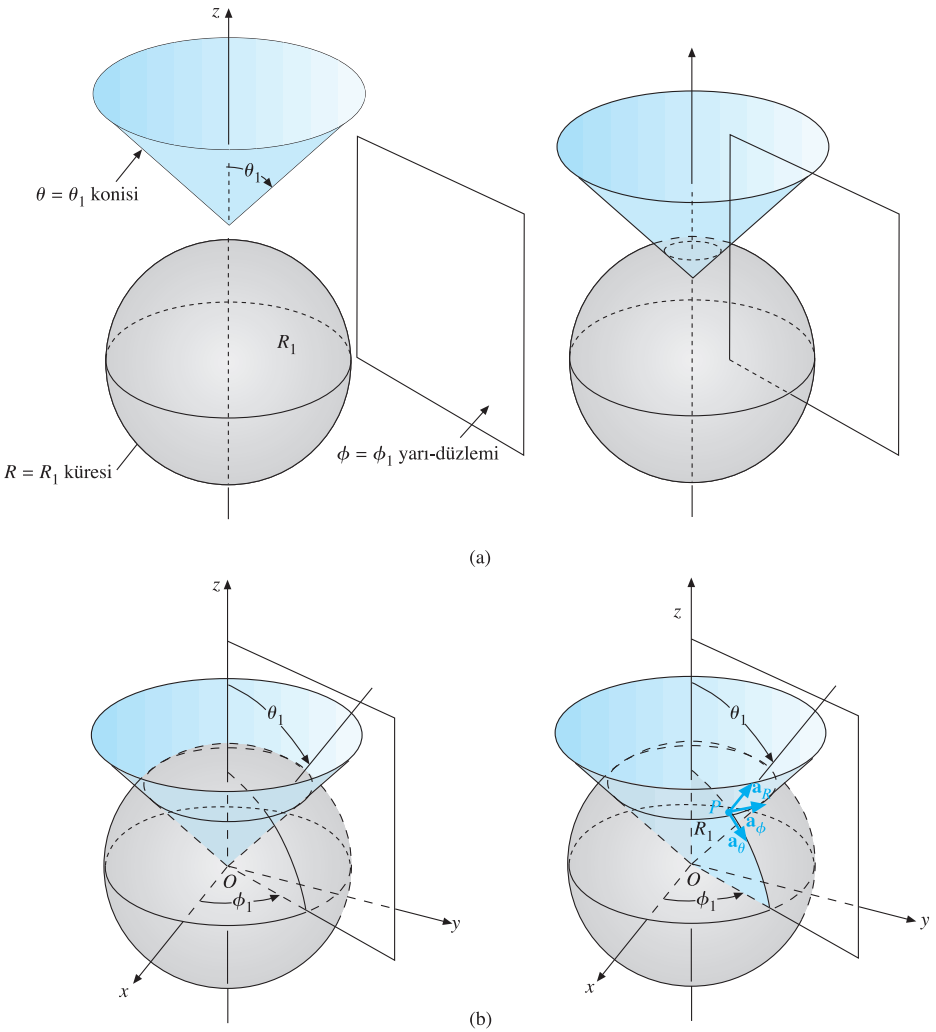
$$\mathbf{a}_R \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \qquad (2\text{-}41a)$$

$$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_R \qquad (2\text{-}41b)$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\theta \qquad (2\text{-}41c)$$

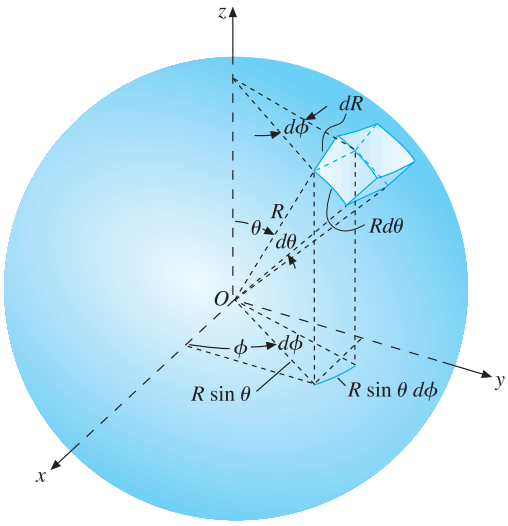
geçerlidir. Küresel koordinatlar nokta kaynaklar ve küresel sınırlı bölgeler içeren problemler için önemlidir. Bir gözlemci bir sonlu

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 34



ŞEKİL 2-13 (a) Bir küresel yüzey, bir dik çembersel koni ve z-eksenini içeren bir yarı-düzlem. (b) (a)'daki küre, koni ve yarı-düzlemin kesişimi P noktasını belirler.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 35



ŞEKİL 2-14 Küresel koordinatlarda bir diferensiyel hacim.

kaynaktan çok uzakta ise kaynak yaklaşık olarak bir nokta alınabilir. Bu nokta bir küresel koordinat sisteminin merkezi olarak seçilirse uygun sadeleştirici yaklaştırmalar yapılabilir. Uzak alanda anten problemlerinin çözümünde küresel koordinatların kullanılmasının nedeni budur.

Küresel koordinatlarda bir vektör

Küresel koordinatlarda A vektörü

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi \tag{2-42}$$

olarak yazılır. Küresel koordinatlarda sadece R uzunluktur. Diğer iki koordinat θ ve ϕ açıdır. Bir tipik diferensiyel hacim elemanının gösterildiği Şekil 2-14'e bakarsak $d\theta$ ve $d\phi$'yi, sırasıyla $(R)\,d\theta$ ve $(R\sin\theta)\,d\phi$ diferensiyel uzunluklarına çevirmek için $h_2 = R$ ve $h_3 = R\sin\theta$ metrik katsayılarının gerektiğini görürüz. Bir vektör diferensiyel uzunluğun genel ifadesi

Küresel koordinatlarda vektör diferensiyel uzunluk

$$d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_R\, dR + \mathbf{a}_\theta R\, d\theta + \mathbf{a}_\phi R\sin\theta\, d\phi \tag{2-43}$$

ile verilir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 36

Bir diferensiyel hacim, üç koordinat yönündeki diferensiyel uzunluk değişimlerinin çarpımıdır:

Küresel koordinatlarda diferensiyel hacim

$$dv = R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\phi \tag{2-44}$$

Üç temel ortogonal koordinat sistemi için baz vektörler, metrik katsayılar ve diferensiyel hacim ifadeleri Tablo 2-1'de gösterilmiştir.

Şekil 2-15 bir P noktasını belirleyen (x, y, z), (r, ϕ, θ) ve (R, θ, ϕ) uzay değişkenleri arasındaki ilişkileri sergilemektedir Aşağıdaki eşitlikler, küresel koordinatlardaki koordinat değişkenlerini Kartezyen koordinatlardaki değişkenlere dönüştürür:

Küresel koordinatlarda bir noktanın konumunun Kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi

$$x = R \sin\theta \cos\phi \tag{2-45a}$$

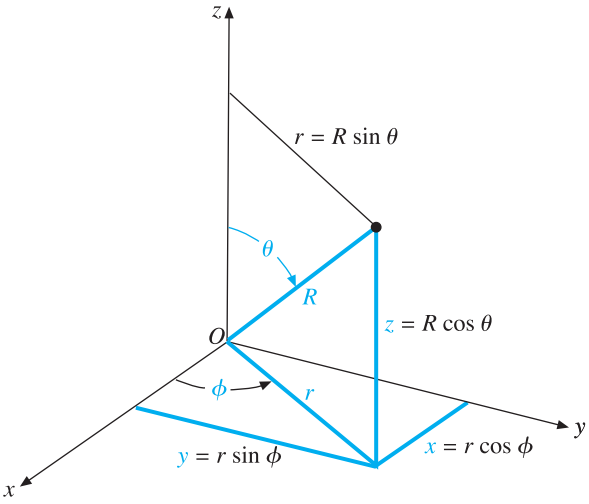
$$y = R \sin\theta \sin\phi \tag{2-45b}$$

$$z = R \cos\theta. \tag{2-45c}$$

■ **ALIŞTIRMA 2.8** $(4, -6, 12)$ Kartezyen koordinatlarını küresel koordinatlara dönüştürünüz.

CEVAP: $(14, 31°, 303.7°)$.

ŞEKİL 2-15 (x, y, z), (r, ϕ, z) ve (R, θ, ϕ) uzay değişkenleri arasındaki ilişkiler.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 37

ÖRNEK 2-7

$\mathbf{a}_z$ birim vektörünü küresel koordinatlarda ifade ediniz.

ÇÖZÜM

Öncelikle Eş. (2-45c)'den dolayı $\mathbf{a}_z$'yi $\mathbf{a}_R R\cos\theta$ veya $\mathbf{a}_R\cos\theta$ olarak yazmaya çalışmamalıyız. Çünkü hem yön ($\mathbf{a}_z \neq \mathbf{a}_R$) hem de büyüklük (her θ için $1 \neq R\cos\theta$ veya $\cos\theta$) yanlış olur. Küresel koordinatlar için baz vektörleri $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$ ve $\mathbf{a}_\phi$ olduğundan $\mathbf{a}_z$'nin bu yönlerdeki bileşenlerini bularak ilerleyelim. Şekiller 2-13 ve 2-14 yardımıyla

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R = \cos\theta \tag{2-46a}$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin\theta \tag{2-46b}$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \tag{2-46c}$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_R\cos\theta - \mathbf{a}_\theta\sin\theta \tag{2-47}$$

elde edilir.

ÖRNEK 2-8

Yarıçapları 2 ve 5 (cm) olan iki küre arasındaki bölgede bulunan bir elektron bulutunun yük yoğunluğu

$$\frac{-3\times10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi \qquad (\mathrm{C/m^3})$$

veriliyor. Bölgedeki toplam yükü bulunuz.

ÇÖZÜM

Elimizde

$$\rho_v = -\frac{3\times10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi$$

$$Q = \int \rho_v\, dv$$

vardır. Problemde verilen koşullar açıkça küresel koordinatların kullanımına işaret etmektedir. Eş. (2-44)'teki dv ifadesini kullanıp üçlü integral alarak

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05} \rho_v R^2\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\phi$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 38

buluruz. Burada iki şey önemlidir. Birincisi, ρ_v coulomb/metreküp birimi ile verildiğinden R için integrasyon sınırları metreye çevrilmelidir. İkinci olarak, θ için tam integrasyon bölgesi 0'dan π radyana kadardır ve 0'dan 2π radyana değildir. Biraz düşünmek, bir yarı çemberin (tam çember değil) z-ekseni etrafında 2π radyan boyunca (ϕ 0'dan 2π'ye) döndürülmesinin bir küre oluşturacağına bizi inandıracaktır. Böylelikle

$$
\begin{aligned}
Q &= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R^2} \cos^2 \phi \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\phi \\
&= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.02} \right) \sin\theta \, d\theta \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= -0.9 \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= -1.8 \times 10^{-6} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -1.8\pi \qquad (\mu\text{C})
\end{aligned}
$$

buluruz.

■ **ALIŞTIRMA 2.9** Küresel koordinatlarda diferensiyel yüzey alanının integralini alarak R_0 yarıçaplı bir kürenin yüzey alanı formülünü çıkarınız.

CEVAP: $4\pi R_0^2$.

TEKRAR SORULARI

S.2-7 Bir koordinat sistemini ne (a) ortogonal ve (b) sağ-el yapar?

S.2-8 Metrik katsayı nedir?

S.2-9 $d\ell$ ve dv'yi (a) Kartezyen koordinatlarda (b) silindirik koordinatlarda ve (c) küresel koordinatlarda yazınız.

S.2-10 Kartezyen koordinatlarda verilen $P_1(1, 2, 3)$ ve $P_2(-1, 0, 2)$ noktaları için $\overrightarrow{P_1P_2}$ ve $\overrightarrow{P_2P_1}$ vektörlerinin ifadelerini yazınız.

S.2-11 Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ve $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$'nin ifadeleri nedir?

NOTLAR

1. Açı değişimlerini uzunluk değişimlerine çevirirken uygun metrik katsayılar kullanılmalıdır.
2. z-ekseninden ölçülen r silindirik uzaklığını, orijinden ölçülen R küresel uzaklığı ile karıştırmayınız.
3. Her bir koordinat sisteminde birim vektörlerin vektör çarpımı döngüsel sırada sağ-el kuralını izler.

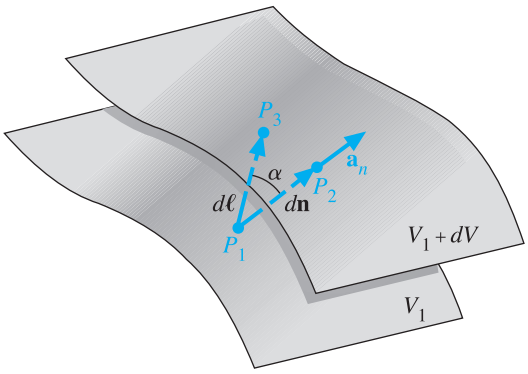
02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 39

2-5 BİR SKALAR ALANIN GRADYANTI

Elektromanyetikte sıklıkla hem zamana hem de konuma bağlı niceliklerle ilgileniriz. Üç boyutlu uzayda üç koordinat değişkeni bulunduğundan, dört değişkenin (t, u_1, u_2, u_3) fonksiyonu olan skalar ve vektör alanlarla karşılaşmayı bekleriz. Genel olarak alanlar dört değişkenin herhangi biri değiştiğinde değişebilir. Şimdi bir skalar alanın verilen bir anda uzay değişim hızını belirtme yöntemini ele alacağız. Üç uzay koordinat değişkenine göre kısmi türevler söz konusudur ve değişik yönlerdeki değişim hızı farklı olabilir. Bu yüzden bir skalar alanın verilen bir zaman ve noktadaki uzay değişim hızını tanımlamak için bir vektöre gerek vardır.

Uzay koordinatlarının $V(u_1, u_2, u_3)$ skalar fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon örneğin bir binadaki sıcaklık dağılımını, bir dağlık bölgede yüksekliği veya bir bölgedeki elektrik potansiyeli temsil edebilir. V'nin büyüklüğü genelde noktanın uzaydaki konumuna bağlıdır ancak bazı doğrular veya yüzeyler boyunca sabit olabilir. Şekil 2-16 V'nin büyüklüğünün sabit ve V_1 ile $V_1 + dV$ değerlerine sahip olduğu iki yüzey göstermektedir. Burada dV, V'de küçük bir değişimi göstermektedir. Sabit-V yüzeylerinin özel bir koordinat sisteminin herhangi bir yüzeyi ile çakışması gerekmediğine dikkat etmeliyiz. P_1 noktası V_1 yüzeyindedir; P_2 noktası ise $d\mathbf{n}$ normal vektörü boyunca ilerlendiğinde $V_1 + dV$ yüzeyinde karşılık gelen noktadır. P_3 ise bir başka $d\boldsymbol{\ell} \neq d\mathbf{n}$ vektörü boyunca ilerlenerek bulunan ve P_2'ye yakın bir noktadır. V'deki aynı dV değişimi için $dV/d\ell$ uzay değişim hızı açıkça $d\mathbf{n}$ boyunca en büyüktür çünkü dn iki yüzey arasındaki en kı-

ŞEKİL 2-16 Bir skalar alanın gradyantı.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 40

sa uzaklıktır.[1] $dV/d\ell$'nin büyüklüğü $d\boldsymbol{\ell}$'nin yönüne bağlı olduğundan, $dV/d\ell$ bir yönlü türevdir. ***Bir skalar alanın maksimum uzay artış hızının büyüklüğünü ve yönünü gösteren vektör, o skalar alanın gradyantı olarak tanımlanır*** ve

Bir skalar alanın gradyantı: fiziksel tanım

Bir skalar alanın gradyantı: matematiksel tanım

$$\mathbf{grad}\, V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn} \tag{2-48}$$

yazılır. Sadelik için $\boldsymbol{\nabla}$[2] sembolü ile gösterilen *del* operatörünü kullanmak ve **grad** V yerine $\boldsymbol{\nabla} V$ yazmak yaygındır. Böylece

$$\boldsymbol{\nabla} V \triangleq \mathbf{a}_n \frac{dV}{dn} \tag{2-49}$$

olur. dV'nin pozitif olduğunu (V'de artış) kabul ettik. Eğer dV negatif ise (P_1'den P_2'ye giderken V'de azalma) $\boldsymbol{\nabla} V$ de $\mathbf{a}_n$ yönünde negatif olacaktır.

$d\ell$ boyunca yönlü türev ise

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\ell} &= \frac{dV}{dn}\frac{dn}{d\ell} = \frac{dV}{dn}\cos\alpha \\ &= \frac{dV}{dn}\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_\ell = (\boldsymbol{\nabla} V)\cdot \mathbf{a}_\ell \end{aligned} \tag{2-50}$$

ile verilir. Eş. (2-50), V'nin $\mathbf{a}_\ell$ yönündeki uzay artış hızının, V'nin gradyantının o yöndeki izdüşümüne (bileşenine) eşit olduğunu belirtir. Eş (2-50)'yi $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\ell d\ell$ olmak üzere

V'nin ∇V cinsinden uzay artış hızı

$$dV = (\boldsymbol{\nabla} V)\cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{2-51}$$

halinde yazabiliriz. Şimdi Eş. (2-51)'deki dV, V'nin bir konum değişikliğinden (Şekil 2-16'da P_1'den P_3'e) kaynaklanan toplam diferensiyelidir ve

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \ell_1} d\ell_1 + \frac{\partial V}{\partial \ell_2} d\ell_2 + \frac{\partial V}{\partial \ell_3} d\ell_3 \tag{2-52}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $d\ell_1$, $d\ell_2$ ve $d\ell_3$ $d\boldsymbol{\ell}$ vektör yer değişiminin seçilen bir koordinat sistemindeki bileşenleridir. Kartezyen koordinatlarda $(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$'dir ve $d\ell_1$, $d\ell_2$ ve $d\ell_3$ sırasıyla dx,

[1] Daha formel bir incelemede ΔV ve $\Delta\ell$ değişimleri kullanılmalı ve $\Delta V/\Delta\ell$ oranı $\Delta\ell$ sıfıra yaklaşırken $dV/d\ell$ türevi haline gelmelidir. Bu detaylar basitlik için atlanmıştır.

[2] ∇ bazen *nabla* operatörü olarak da adlandırılır.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 41

dy ve dz (bkz. Eş. 2-23) olur. Eş. (2-52)'deki dV'yi iki vektörün nokta çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$dV = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{dy} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{a}_x\, dx + \mathbf{a}_y\, dy + \mathbf{a}_z\, dz)$$
$$= \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \qquad (2\text{-}53)$$

Eş. (2-53)'ü Eş. (2-51) ile karşılaştırarak

Kartezyen koordinatlarda ∇V

$$\boxed{\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}} \qquad (2\text{-}54)$$

veya

$$\nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) V \qquad (2\text{-}55)$$

elde ederiz. Eş. (2-55) gözönüne alınarak Kartezyen koordinatlarda ∇'in bir vektör diferensiyel operatör olarak düşünülmesi uygundur.

$$\boxed{\nabla \equiv \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}.} \qquad (2\text{-}56)$$

Metrik katsayıları (h_1, h_2, h_3) olan (u_1, u_2, u_3) genel ortogonal koordinatlarındaki ∇ operatörünü

$$\boxed{\nabla \equiv \left(\mathbf{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1\, \partial u_1} + \mathbf{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2\, \partial u_2} + \mathbf{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3\, \partial u_3}\right)} \qquad (2\text{-}56)$$

olarak tanımlayabiliriz. ∇V'nin silindirik ve küresel koordinatlardaki ifadeleri kitabın arka kapağının içinde verilmiştir.

ÖRNEK 2-9

E elektrostatik alan şiddeti V skalar elektrik potansiyelinin negatif gradyantı olarak çıkarılabilir; yani $\mathbf{E} = -\nabla V$'dir. Aşağıda verilen V'ler için $(1, 1, 0)$ noktasındaki **E**'yi belirleyiniz.

a) $V = V_0 e^{-x} \sin \dfrac{\pi y}{4}$,

b) $V = E_0 R \cos \theta$.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 42

ÇÖZÜM

a) $\mathbf{E} = -\nabla V$'yi Kartezyen koordinatlarda hesaplamak için Eş. (2-54)'ü kullanacağız.

$$\mathbf{E} = -\left[\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] V_0 e^{-x} \sin\frac{\pi y}{4}$$
$$= \left(\mathbf{a}_x \sin\frac{\pi y}{4} - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi y}{4}\right) V_0 e^{-x}.$$

Böylece $\mathbf{E}(1, 1, 0) = \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}} = \mathbf{a}_E E$

olur, burada

$$E = V_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)},$$
$$\mathbf{a}_E = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi^2/16)}}\left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right)$$ dir.

b) Burada V, θ küresel koordinatının bir fonksiyonu olarak verilmiştir. Küresel koordinatlar için $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$ ve $(h_1, h_2, h_3) = (1, R, R \sin\theta)$'dır (bkz. Tablo 2-1). Eş. (2-57)'den

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\mathbf{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial}{R\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{R\sin\theta\,\partial\phi}\right] E_0 R\cos\theta$$
$$= -(\mathbf{a}_R \cos\theta - \mathbf{a}_\theta \sin\theta)E_0$$

bulunur. Eş. (2-47) yardımıyla yukarıdaki sonuç basitçe Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_0$ haline döner. Bu anlamlıdır çünkü verilen V dikkatli incelenirse $E_0 R\cos\theta$'nın aslında $E_0 z$ olduğu ortaya çıkar. Kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}(E_0 z) = -\mathbf{a}_z E_0$$

bulunur.

■ **ALIŞTIRMA 2.10** $V = xy - 2yz$ kabul ederek, $P(2, 3, 6)$ noktasında

a) V'nin maksimum artış hızının yönünü ve büyüklüğünü ve

b) V'nin orijine doğru uzay azalma hızını bulunuz.

CEVAP: (a) $\mathbf{a}_x 3 - \mathbf{a}_y 10 - \mathbf{a}_z 6$, (b) $-60/7$.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 43

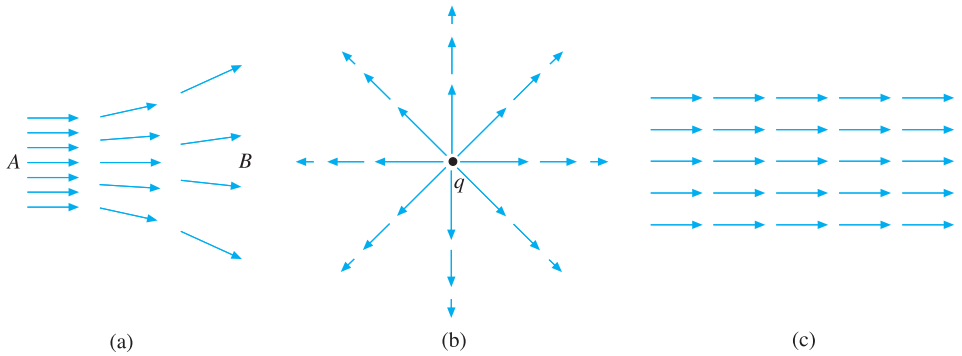
2-6 BİR VEKTÖR ALANIN IRAKSAMASI

Önceki kısımda bir skalar alanın uzay türevlerini inceledik ve gradyant tanımına ulaştık. Şimdi dikkatimizi bir vektör alanın uzay türevlerine çevireceğiz. Bu inceleme, bir vektör için ***ıraksama*** ve ***dönel*** tanımlarına yol açacaktır. Bu kısımda ıraksamanın, Kısım 2-8'de ise dönelin anlamını tartışacağız. Bunların her ikisi de elektromanyetik konusunda çok önemlidir.

Vektör alanları çalışmalarında alan değişimlerini, ***akı çizgileri*** denen yönlü alan çizgileri ile grafik olarak göstermek yaygındır. Bunlar Şekil 2-17'de gösterildiği gibi her bir noktada vektör alanın yönünü belirten yönlü doğru parçaları veya eğrilerdir. Alanın bir noktadaki büyüklüğü, noktanın yakınındaki çizgi yoğunluğu ile veya çizgilerin uzunluğu ile belirtilir. Şekil 2-17(a) *A* bölgesindeki alanın *B* bölgesindekinden daha kuvvetli olduğunu göstermektedir. Çünkü *A* bölgesindeki eşit uzunluklu yönlü çizgi yoğunluğu daha büyüktür. Şekil 2-17(b)'de q'dan uzaklaştıkça azalan ok boyları, q'ya en yakın bölgede en kuvvetli olan yarıçap boyunca bir alan göstermektedir. Şekil 2-17(c) bir düzgün alan örneğidir.

Şekil 2-17(a)'daki vektör alan şiddeti, vektöre dik birim yüzeyden geçen akı çizgisi sayısı ile ölçülür. Bir vektör alanın akısı, su gibi sıkıştırılamaz bir sıvının akışına benzerdir. Bir yüzey ile sınırlanmış bir hacim için, dışarı veya içeri fazla akış, hacimde, sırasıyla, bir kaynak veya kuyu bulunduğunda olur. Yani, bir net pozitif ıraksama hacim içinde bir sıvı kaynağı olduğuna işaret eder. Buna karşın, bir net negatif ıraksama böylede bir kuyunun varlığına işaret eder. Dolayısıyla, birim hacim başına net dışarı sıvı akışı, bölgedeki kaynağın

ŞEKİL 2-17 Vektör alanların akı çizgileri.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 44

kuvvetinin bir ölçüsüdür. Şekil 2-17(c)'deki düzgün alanda herhangi bir kapalı bölge için içeri ve dışarı akış eşit miktardadır ve bölge kaynak veya kuyu içermez. Bu durumda ıraksama sıfırdır.

Bir A vektör alanının ıraksaması: fiziksel tanım

Bir **A** *vektör alanının bir noktadaki ıraksaması, nokta etrafındaki hacim sıfıra giderken birim hacim başına* **A***'nın net dışarı akısı olarak tanımlanır* ve *div* **A** *olarak kısaltılır*.

A'nın ıraksaması: matematiksel tanım

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \triangleq \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}}{\Delta v} \tag{2-58}$$

Eş. (2-58)'deki pay bir yüzey integralidir. Gerçekte iki boyut üzerinden alınan iki katlı bir integraldir. Ancak sadelik için tek integral işareti ile yazılmıştır. İntegral işareti üzerindeki küçük çember integralin bir hacmi kuşatan S yüzeyinin tümünde alınacağını belirtir. İntegranddaki $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_n ds$ vektör diferensiyel yüzey elemanı, ds büyüklüğüne ve $\mathbf{a}_n$ birim normal vektörü ile göste ve sınırlanan hacimden dışarı doğru bir yöne sahiptir. Yüzey integrali **A** vektör alanının net dışarı akısını gösterir. Eş. (2-58) bir skalar nicelik olan ve büyüklüğü noktadan noktaya **A**'nın kendisi değiştiği için değişebilen div **A**'nın genel tanımıdır. Bu tanım her koordinat sisteminde geçerlidir. div **A**'nın ve benzer şekilde **A**'nın ifadesi doğal olarak koordinat sistemi seçimine bağlı olacaktır. Şimdi Kartezyen koordinatlarda div **A**'nın ifadesini çıkaracağız.

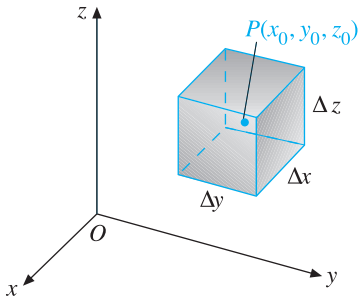
Kenarları Δx, Δy ve Δz olan ve Şekil 2-18'de gösterildiği gibi bir **A** vektör alanındaki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasında merkezlenen bir diferensiyel hacim düşünelim. Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$'dir. (x_0, y_0, z_0) noktasında *div* **A**'yı bulmak istiyoruz. Diferensiyel hacmin altı yüzü olduğundan Eş. (2-58)'deki paydaki integral altı parçaya ayrılabilir:

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left[\int_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{sağ}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{sol}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{üst}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{alt}\\ \text{yüz}}}\right] \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}. \tag{2-59}$$

Ön yüzde,

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} \cdot \Delta\mathbf{s}_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} = \mathbf{A}_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} \cdot \mathbf{a}_x(\Delta y\,\Delta z)\\ &= A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y\,\Delta z\end{aligned} \tag{2-60}$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 45



ŞEKİL 2-18 Kartezyen koordinatlarda bir diferensiyel hacim.

$A_x(x_0 + (\Delta x/2), y_0, z_0)$ niceliği (x_0, y_0, z_0)'daki değerinin etrafında bir Taylor serisine aşağıdaki gibi açılabilir:

$$A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2},\, y_0,\, z_0\right) = A_x(x_0,\, y_0,\, z_0) + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} + \text{yüksek mertebeli terimler} \tag{2-61}$$

Burada yüksek mertebeli terimler (Y.M.T) $(\Delta x/2)^2$, $(\Delta x/2)^3$, v.b. çarpanlarını içerir. Benzer şekilde arka yüz için

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}}\cdot\Delta\mathbf{s}_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}} = \mathbf{A}_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}}\cdot(-\mathbf{a}_x\,\Delta y\,\Delta z)\\ &= -A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2},\, y_0,\, z_0\right)\Delta y\,\Delta z\end{aligned} \tag{2-62}$$

elde edilir. $A_x\left(x_0 - \dfrac{\Delta x}{2},\, y_0,\, z_0\right)$ 'nın Taylor serisi açılımı

$$A_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2},\, y_0,\, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} + \text{Y.M.T} \tag{2-63}$$

dır. Eş. (2-61)'i Eş. (2-60)'ta ve Eş. (2-63)'ü Eş. (2-62)'de yerine koyar ve katkıları toplarsak

$$\left[\int_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}}\right]\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \text{Y.M.T.}\right)\Bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2-64}$$

buluruz. Burada Eş. (2-61) ve (2-63)'teki Y.M.T.'den bir Δx çarpanı ayrılmıştır ancak Eş. (2-64)'teki Y.M.T. hâlâ Δx'in kuvvetlerini içerir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 46

Koordinat değişikliklerinin, sırasıyla, $+\Delta y/2$ ve $-\Delta y/2$ olduğu ve $\Delta s = \Delta x\, \Delta z$ olan sağ ve sol yüzler için de aynı işlemi yaparsak

$$\left[\int_{\substack{\text{sağ}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{sol}\\ \text{yüz}}}\right] \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \text{Y.M.T.}\right)\Bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{2-65}$$

buluruz. Burada yüksek mertebeli terimler Δy, $(\Delta y)^2$ v.d. çarpanları içerir. Üst ve alt yüzeyler için ise

$$\left[\int_{\substack{\text{üst}\\ \text{yüz}}} + \int_{\substack{\text{alt}\\ \text{yüz}}}\right] \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{Y.M.T.}\right)\Bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{2-66}$$

elde ederiz. buradaki yüksek mertebeli terimler Δz, $(\Delta z)^2$ v.d. Şimdi Eş. (2-64), (2-65) ve (2-66)'daki sonuçlar Eş. (2-59)'da birleştirilirse

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z + \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z\text{'nin yüksek mertebeli terimleri} \tag{2-67}$$

bulunur. $\Delta v = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ olduğundan Eş. (2-67), Eş. (2-58)'de yerine konursa Kartezyen koordinatlarda div **A** ifadesi

Kartezyen koordinatlarda $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\boxed{\text{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \tag{2-68}$$

olarak elde edilir. Yüksek mertebeli terimler $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ diferensiyel hacmi sıfıra giderken yok olur. div **A** değeri genel olarak hesaplandığı noktanın konumuna bağlıdır. Eş. (2-68)'de (x_0, y_0, z_0) kullanmadık çünkü bu eşitlik **A** ve kısmı türevlerinin tanımlı olduğu her noktada geçerlidir.

Eş. (2.56)'da tanımlanan del (∇) operatörü ile Eş. (2-68)'i $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (del nokta **A** okunur) olarak yazabiliriz. Yani

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div}\,\mathbf{A}} \tag{2-69}$$

olur. (u_1, u_2, u_3) genel ortogonal eğrisel koordinatlarında Eş. (2-58)

Genel ortogonal koordinatlarda $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]} \tag{2-70}$$

verir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 47

$\nabla \cdot \mathbf{A}$'nın silindirik ve küresel koordinatlardaki ifadeleri kitabın arka kapağının içinde verilmiştir.

ÖRNEK 2-10

Bir gelişigüzel noktanın konum vektörünün ıraksamasını bulunuz.

ÇÖZÜM

Hem Kartezyen hem de küresel koordinatlarda çözümü bulacağız.

a) *Kartezyen koordinatlar*. Gelişigüzel bir (x, y, z) noktasının konum vektörünün ifadesi

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \tag{2-71}$$

dir. Eş. (2-68)'den

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad \text{bulunur.}$$

b) *Küresel koordinatlar*. Burada konum vektörü basitçe

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{a}_R R \tag{2-72}$$

dir. Bunun (R, θ, ϕ) küresel koordinatlarındaki ıraksaması Eş. (2-70)'ten Tablo 2-1 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Küresel koordinatlarda $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R \sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{2-73}$$

Eş. (2-72)'yi Eş. (2-73)'te yerine koyarsak yine beklendiği gibi $\nabla \cdot (\overrightarrow{OP}) = 3$ buluruz.

■ **ALIŞTIRMA 2.11** Örnek 2-10'u silindirik koordinatlarda çözünüz.

ÖRNEK 2-11

Akım taşıyan çok uzun bir telin dışındaki $\mathbf{B}$ manyetik akı yoğunluğu çemberseldir ve telin ekseninden olan uzaklık ile ters orantılıdır. $\nabla \cdot \mathbf{B}$'yi bulunuz.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 48

ÇÖZÜM

Uzun tel silindirik koordinat sistemindeki z-ekseni ile çakışsın. Problemde k sabit olmak üzere

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{k}{r}$$

olduğu verilmiştir. (r, ϕ, z) silindirik koordinatlarında bir vektör alanın ıraksaması Eş. (2-70)'ten Tablo 2-1 kullanılarak bulunabilir.

Silindirik koordinatlarda $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{2-74}$$

Şimdi $B_\phi = k / r$ ve $B_r = B_z = 0$'dır. Eş. (2-74)

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ verir.

Soleonid alan

Burada sabit olmayan bir vektör verilmekle birlikte ıraksaması sıfırdır. Bir ıraksamasız alan, ***solenoid alan*** olarak adlandırılır. 5. Bölümde manyetik alanın solenoid olduğunu göreceğiz.

2-7 IRAKSAMA TEOREMİ

Iraksama teoremi

Önceki kısımda bir vektör alanın ıraksamasını birim hacim başına net dışa doğru akı olarak tanımladık. Sezgisel olarak, ***bir vektör alanın ıraksamasının hacim integralinin, o vektörün bölgeyi sınırlayan yüzeydeki toplam dışa doğru akısına eşit olduğunu*** bekleyebiliriz, yani

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{2-75}$$

geçerlidir. Aşağıda ispatlanacak olan bu özdeşlik ***ıraksama teoremi***[1] olarak adlandırılır. Bu teorem S yüzeyi ile sınırlanan herhangi bir V hacmi için geçerlidir. $d\mathbf{s}$'nin yönü her zaman dışa doğru normalin yönüdür yani ds yüzeyine diktir ve hacimden dışarı doğru yönlenmiştir.

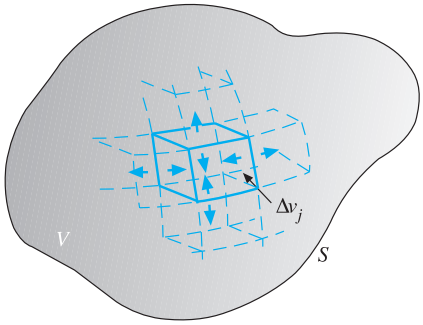
s_j yüzeyi ile sınırlanan küçük bir dv diferensiyel hacim elemanı için Eş. (2-58)'deki $\nabla \cdot \mathbf{A}$ tanımı doğrudan

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2-76}$$

verir.

[1] ***Gauss teoremi*** olarak da bilinir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 49



ŞEKİL 2-19 Iraksama teoreminin ispatı için alt bölmelenmiş hacim.

Bir gelişigüzel V durumunda V'yi birçok örneğin N tane küçük diferensiyel hacime bölebiliriz. Δv_j böyle bir diferensiyel hacmi göstermektedir ve bölmeleme Şekil 2-19'da gösterilmiştir. Şimdi tüm bu diferensiyel hacimlerin Eş. (2-76)'nın her iki tarafına katkılarını toplayalım.

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \, \Delta v_j \right] = \lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] \tag{2-77}$$

buluruz. Eş. (2-77)'nin sol tarafı tanımdan $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 'nın hacim integralidir:

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \, \Delta v_j \right] = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dv \tag{2-78}$$

Eş. (2-77)'nin sağ tarafındaki yüzey integralleri diferensiyel hacim elemanlarının tüm yüzleri üzerinden toplanır. Ancak komşu elemanların ortak yüzeylerindeki katkılar birbirini yok eder. Bunun nedeni bir iç ortak yüzeyde komşu elemanların dışa doğru normallerinin zıt yönlerde olmasıdır. Böylece Eş. (2-77)'nin sağ tarafındaki net katkı sadece V hacmini sınırlayan S dış yüzeyinden gelir, yani

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{2-79}$$

elde edilir. Eş. (2-78) ve Eş. (2-79)'un Eş. (2-77)'de yerine konması Eş. (2-75)'teki ıraksama teoremini verir.

Iraksama teoremi vektör analizde önemli bir özdeşliktir. *Bir vektörün ıraksamasının hacim integralini, o vektörün kapalı yüzey integraline çevirir. Bunun tersi de geçerlidir.* Bu teoremi elektromanyetikteki diğer teorem ve bağıntıları kurmak için sıklıkla kullanırız. *Eş.* (2-75)*'in her iki tarafında sadelik için tek integral işareti kullanılmakla birlikte, hacim ve yüzey integrallerinin, sırasıyla, üç katlı ve iki katlı integralleri gösterdiğini vurgulamalıyız.*

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 50

ÖRNEK 2-12

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y xy + \mathbf{a}_z yz$ için her kenarı birim uzunluğa sahip olan bir küp üzerinde ıraksama teoremini sağlayınız. Küp, bir köşesi orijinde olmak üzere birinci sekizdebirlikte yer almaktadır.

ÇÖZÜM

Şekil 2-20'ye bakınız. Önce altı yüz üzerindeki yüzey integrallerini hesaplayacağız.

1. Ön yüz: $x = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_x\, dy\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{ön}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 dy\, dz = 1.$$

2. Arka yüz: $x = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_x\, dy\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{arka}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

3. Sol yüz: $y = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_y\, dx\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{sol}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

4. Sağ yüz: $y = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_y\, dx\, dz$;

$$\int_{\substack{\text{sağ}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 x\, dx\, dz = \tfrac{1}{2}.$$

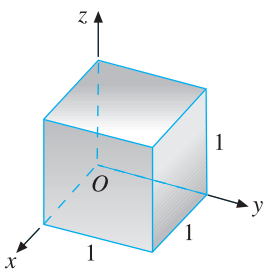
5. Üst yüz: $z = 1$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z\, dx\, dy$;

$$\int_{\substack{\text{üst}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \int_0^1 y\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}.$$

6. Alt yüz: $z = 0$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_z\, dx\, dy$;

$$\int_{\substack{\text{alt}\\ \text{yüz}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

ŞEKİL 2-20 Birim küp (Örnek 2-12).



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 51

Yukarıdaki altı değeri toplarsak

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 1 + 0 + 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 0 = 2 \tag{2-80}$$

buluruz. Şimdi **A**'nın ıraksaması

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 3x + y$$

elde edilir. Böylece

$$\int_v \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}\, dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y)\, dx\, dy\, dz = 2 \tag{2-81}$$

bulunur ki bu da (2-80)'deki kapalı yüzey integralinin sonucu ile aynıdır. Böylelikle ıraksama teoremi sağlanmıştır.

ÖRNEK 2-13

Verilen $\mathbf{F} = \mathbf{a}_R kR$ için ıraksama teoreminin, merkezleri Şekil 2-21'de görüldüğü gibi orijinde olan $R = R_1$ ve $R = R_2$ $(R_2 > R_1)$ küreleri ile sınırlı bölgede sağlanıp sağlanmadığını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

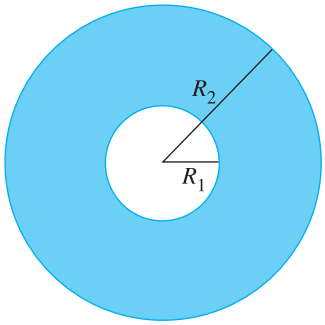
Burada belirtilen bölgenin $R = R_1$ ve $R = R_2$'de iki yüzeyi vardır.

Dış yüzeyde: $R = R_2$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R R_2^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ olduğundan

$$\int_{\substack{\text{dış}\\ \text{yüz}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (kR_2) R_2^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi k R_2^3$$

bulunur.

ŞEKİL 2-21 Örnek 2-13'teki küresel bölge.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 52

İç yüzeyde: $R = R_1$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_R R_1^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$; ve

$$\int_{\substack{\text{iç}\\ \text{yüzey}}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (kR_1)R_1^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = -4\pi k R_1^3$$

bulunur. Gerçekte her iki durumda integrand θ veya ϕ'den bağımsızdır. Bir sabitin bir küresel yüzey üzerinde integrali basitçe o sabit ile küre alanının (dış yüzey için $4\pi R_2^2$ ve iç yüzey için $4\pi R_1^2$) çarpımıdır ve integrasyon gerekmez. İki sonucu toplarsak

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3) \tag{2-82}$$

buluruz. Hacim integralini bulmak için öncelikle F_R bileşeni olan bir $\mathbf{F}$ için $\nabla\cdot\mathbf{F}$'yi belirleyeceğiz. Eş (2-73)'ten

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2F_R) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(kR^3) = 3k$$

buluruz. $\nabla\cdot\mathbf{F}$ bir sabit olduğundan bunun hacim integrali, hacim ile sabitin çarpımına eşittir. R_1 ve R_2 yarıçaplı küresel yüzeyler arasındaki bölgenin hacmi $4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3$'tür. Böylece

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dv = (\nabla\cdot\mathbf{F})V = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3) \tag{2-83}$$

bulunur ki bu da Eş. (2-82)'deki sonuç ile aynıdır.

Bu örnek ıraksama teoreminin, bölgenin içinde delikler olduğunda —yani hacim, bir çoklu bağlantılı yüzeyle sınırlı olduğunda— dahi geçerli olduğunu gösterir.

■ **ALIŞTIRMA 2.12** Verilen $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r + \mathbf{a}_z z$ vektör alanı için,

a) Yarıçapı 2, yüksekliği 4 olan, orijin merkezli ve ekseni z-ekseni olan bir çembersel silindir üzerindeki toplam dışa doğru akıyı bulunuz.

b) (a)'yı aynı silindirin tabanı xy-düzleminde olduğu durum için tekrar çözünüz.

c) $\nabla\cdot\mathbf{A}$'yı bulunuz ve ıraksama teoremini sağlayınız.

CEVAP: (a) 48π, (c)3.

2-8 BİR VEKTÖR ALANIN DÖNELİ

$\nabla\cdot\mathbf{A}$, A'nın akış kaynağı şiddetinin bir ölçüsüdür.

Kısım 2-6'da, bir hacmi sınırlayan bir yüzeyde bir $\mathbf{A}$ vektörünün net dışa doğru akısının bölgede bir kaynağın varlığına işaret ettiğini belirtmiştik. Bu kaynak bir akış kaynağı olarak adlandırılabilir ve div$\mathbf{A}$ bu akış kaynağının bir ölçüsüdür.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 53

Girdap kaynağı denen ve bir vektör alanın ***etrafında dolaşımına*** neden olan bir başka kaynak tipi daha vardır. Bir vektör alanın bir ***kapalı*** yol etrafındaki ***net dolaşımı*** (veya basitçe ***dolaşımı***), vektörün yol üzerindeki skalar çizgi integrali olarak tanımlanır:

$$\mathbf{A}\text{'nın } C \text{ yolu etrafında dolaşımı } \triangleq \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \,. \tag{2-84}$$

Eş. (2-87) bir matematiksel tanımdır. Dolaşımın fiziksel anlamı **A** vektörünün temsil ettiği alanın tipine bağlıdır. Eğer **A** bir nesne üzerine etki eden bir kuvvet ise dolaşımı, nesneyi yolun etrafında bir kez hareket ettirirken yapılan iş olacaktır. Eğer **A** elektrik alan şiddetini gösteriyorsa o zaman dolaşım, kapalı yol etrafındaki elektromotiv kuvvet olacaktır. Suyun bir lavaboda dönerek aşağı aktığı bilinen durum, sıvı hızının dolaşımına neden olan bir *girdap kaynak* örneğidir. div **A** = 0 olduğu (akış kaynağı olmadığı) durumda dahi **A**'nın bir dolaşımı var olabilir.

ÖRNEK 2-14

Verilen $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$ vektör alanının Şekil 2-22'de gösterilen *OABO* yolu etrafındaki dolaşımı bulunuz.

ÇÖZÜM

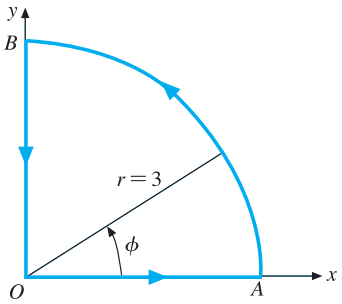
Dolaşım integralini üç kısıma ayıralım:

$$\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^A \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_B^O \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

OA yolu boyunca: $y = 0, \quad \mathbf{F} = -\mathbf{a}_y 2x, \quad d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_x dx$ ve

$$\int_O^A \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad \text{olur.}$$

ŞEKİL 2-22 Çizgi integral için yol (Örnek 2-14 ve 2-16).



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 54

BO yolu boyunca: $x = 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\displaystyle\int_B^O \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$.

AB yolu boyunca: $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy$ (bkz. Eş (2-23)) ve

$\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = xy\,dx - 2x\,dy$

bulunur. Dörttebir çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 9$ $(0 \le x, y \le 3)$'tür. Böylece

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_3^0 x\sqrt{9 - x^2}\,dx - 2\int_0^3 \sqrt{9 - y^2}\,dy \\ &= -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9 - y^2} + 9\sin^{-1}\frac{y}{3}\right]_0^3 \\ &= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{elde edilir.}$$

■ **ALIŞTIRMA 2.13** Örnek 2-14'te verilen **F** vektör alanının, orijinde ortalanmış ve kenarları dört birim olan kare yol ($-2 \le x \le 2$ ve $-2 \le y \le 2$) etrafında saat yönündeki dolaşımını bulunuz.

CEVAP: 32.

Eş. (2-84)'te tanımlandığı haliyle dolaşım bir nokta çarpımın çizgi integrali olduğundan, değeri açıkça *C* yolunun **A** vektörüne bağıl olarak konumuna bağlıdır. Bir nokta fonksiyon tanımlamak için *C*'yi çok küçük yapmalı ve dolaşımı en büyük yapacak şekilde konumunu ayarlamalıyız. Buradan

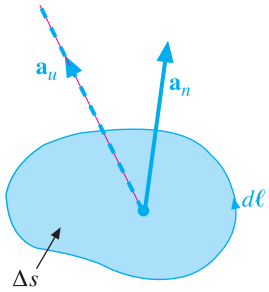
A vektör alanının dönelinin matematiksel tanımı

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{A} &\equiv \nabla \times \mathbf{A} \\ &\triangleq \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s}\left[\mathbf{a}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\right]_{\max}\end{aligned} \tag{2-85}$$

tanımlanır.[1]

[1] Bazı kitaplarda **A**'nın döneline **A**'nın rotasyonu denir ve rot **A** ile gösterilir. $\nabla \times \mathbf{A}$, del çarpı **A** diye okunur.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 55



ŞEKİL 2-23 Dönel tanımındaki $\mathbf{a}_n$ ve $d\ell$ arasındaki ilişki.

A'nın girdap kaynağının ölçüsü $\nabla \times \mathbf{A}$'nın fiziksel tanımı

Sözle söylersek Eş. (2-85), *curl* **A** veya $\nabla \times \mathbf{A}$ *ile gösterilen* **A** *vektör alanının döneli; büyüklüğü birim alan başına, alan sıfıra giderken* **A***'nın en büyük net dolaşımı olan bir vektördür. Dönelin yönü; alan dolaşımı en büyük yapacak şekilde yerleştirildiğinde, alanın normali ile aynıdır*. Bir alanın normali iki zıt yöne işaret edebileceğinden sağ-el kuralına uyacağız. Bu kuralda sağ elin parmakları $d\ell$'nin yönünü takip ettiğinde baş parmak $\mathbf{a}_n$ yönünü gösterir. Şekil 2-23 bunu göstermektedir. Curl **A** bir vektör nokta fonksiyonudur. Herhangi bir $\mathbf{a}_u$ yönündeki bileşeni $\mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$'dır ve $\mathbf{a}_u$'ya dik bir alan sıfıra giderken birim alan başına dolaşım olarak bulunabilir:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta s_u \to 0} \frac{1}{\Delta s_u} \left(\oint_{C_u} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right). \tag{2-86}$$

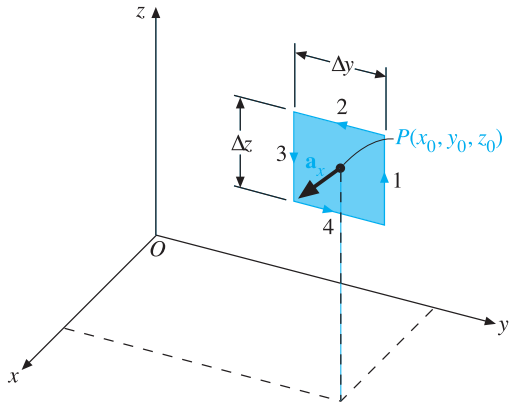
Burada Δs_u'yu sınırlayan C_u yolu üzerindeki çizgi integralinin yönü ve $\mathbf{a}_u$'nun yönü sağ-el kuralına uyar.

Şimdi Eş. (2-86)'yı kullanarak Kartezyen koordinatlarda $\nabla \times \mathbf{A}$'nın üç bileşenini bulacağız. $P(x_0, y_0, z_0)$ tipik noktası etrafında çizilmiş, kenarları Δy ve Δz olup; yz-düzlemine paralel bir diferensiyel dikdörtgen alanın gösterildiği Şekil 2-24'e bakınız. Bu durumda $\mathbf{a}_u = \mathbf{a}_x$ ve $\Delta s_u = \Delta y\, \Delta z$'dir ve C_u yolu 1, 2, 3, 4 kenarlarından oluşur. Böylece

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta y\, \Delta z} \left(\oint_{\substack{\text{kenarlar} \\ 1,2,3,4}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) \tag{2-87}$$

olur. Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z$'dir. Dört kenarın çizgi integrale katkıları aşağıdaki gibidir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 56



ŞEKİL 2-24 $(\nabla \times \mathbf{A})_x$'in belirlenmesi.

1. *Kenar*: $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_z \Delta z$, $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = A_z\left(x_0, y_0 + \dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z.$

Burada $A_z\left(x_0, y_0 + \dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)$ bir Taylor serisi halinde açılabilir:

$$A_z\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2}\left.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{Y.M.T.} \tag{2-88}$$

Buradaki Y.M.T. (yüksek mertebeli terimler) $(\Delta y)^2$, $(\Delta y)^3$, v.d. çarpanları içerir. Böylece

$$\int_{1.\text{ kenar}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \left\{A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2}\left.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{Y.M.T.}\right\}\Delta z \tag{2-89}$$

bulunur.

3. *Kenar*: $d\boldsymbol{\ell} = -\mathbf{a}_z \Delta z$, $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = A_z\left(x_0, y_0 - \dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)\Delta z.$

Burada

$$A_z\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2}\left.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{Y.M.T.} \tag{2-90}$$

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 57

olur ve

$$\int_{\text{3. kenar}} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{Y.M.T.} \right\}(-\Delta z) \tag{2-91}$$

elde edilir. Eş. (2-89) ve Eş. (2-91) birleştirilerek

$$\int_{\substack{\text{1. ve 3.}\\ \text{kenarlar}}} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} + \text{Y.M.T.} \right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y\, \Delta z \tag{2-92}$$

bulunur. Eş. (2-92)'deki Y.M.T hâlâ Δy'nin kuvvetlerini içermektedir. Benzer şekilde

$$\int_{\substack{\text{2. ve 4.}\\ \text{kenarlar}}} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z} + \text{Y.M.T.} \right)\bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta y\, \Delta z \tag{2-93}$$

olduğu gösterilebilir. Eş. (2-92) ve Eş. (2-93), Eş. (2-87)'de yerine konur ve Δx ile $\Delta y \to 0$ iken yüksek mertebeli terimlerin sıfıra gittiğine dikkat edilirse $\nabla \times \mathbf{A}$'nın x-bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{2-94}$$

Eş. (2-94)'ün yakın bir incelemesi, x, y ve z'nin döngüsel yer değiştirmesi ile $\nabla \times \mathbf{A}$'nın y ve z-bileşenlerini doğrudan yazabileceğimizi gösterir. Kartezyen koordinatlarda curl $\mathbf{A}$'nın toplam ifadesi

$\nabla \times$ A'nın Kartezyen koordinatlarda ifadesi

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)} \tag{2-95}$$

olarak yazılır. Eş. (2-95), Eş. (2-27)'de sergilenen vektör çarpım durumunda olduğu gibi bir determinant biçiminde düzenlenerek daha kolay hatırlanabilir:

$\nabla \times$ A'nın Kartezyen koordinatlarda determinant biçimi

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}. \tag{2-96}$$

$\nabla \times \mathbf{A}$'nın diğer koordinat sistemlerindeki çıkarımı aynı yolladır.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 58

ancak daha karmaşıktır. (u_1, u_2, u_3) genel ortogonal eğrisel koordinatlarında $\nabla \times \mathbf{A}$ ifadesi

Genel ortogonal koordinat sisteminde $\nabla \times \mathbf{A}$ ifadesi

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{u_1} h_1 & \mathbf{a}_{u_2} h_2 & \mathbf{a}_{u_3} h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{2-97}$$

olarak verilir. $\nabla \times \mathbf{A}$'nın silindirik ve küresel koordinatlardaki ifadesi, Tablo 2-1'deki uygun u_1, u_2 ve u_3 ile bunların h_1, h_2 ve h_3 metrik katsayılarını Eş. (2-97)'de kullanarak kolaylıkla elde edebilir. Bu ifadeler kitabın arka kapağının içinde verilmiştir.

ÖRNEK 2-15

Aşağıdaki durumlarda $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ olduğunu gösteriniz.

a) Silindirik koordinatlarda k bir sabit olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi (k/r)$.

b) Küresel koordinatlarda $f(R)$ radyal R uzaklığının herhangi bir fonksiyonu olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R f(R)$.

ÇÖZÜM

a) Silindirik koordinatlarda şunlar geçerlidir: $(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$; $h_1 = 1$, $h_2 = r$ ve $h_3 = 1$. Eş (2-97)'den

Silindirik koordinatlarda $\nabla \times \mathbf{A}$ ifadesi

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix} \tag{2-98}$$

yazabiliriz, ki bu da verilen $\mathbf{A}$ için

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

verir.

b) Küresel koordinatlarda şunlar geçerlidir: $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$; $h_1 = 1$, $h_2 = R$ ve $h_3 = R \sin\theta$. Buradan,

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 59

Küresel koordinatlarda $\nabla \times \mathbf{A}$ ifadesi

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (R\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix} \tag{2-99}$$

bulunur ve verilen $\mathbf{A}$ için

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

İrrotasyonel veya korunumlu alanın tanımı

Döneli sıfır olan bir vektör alanına ***irrotasyonel*** veya ***korunumlu alan*** denir. Böylece bu örnekte verilen iki alan tipi de korunumludur. Bir sonraki bölümde bir elektrostatik alanın korunumlu olduğunu göreceğiz.

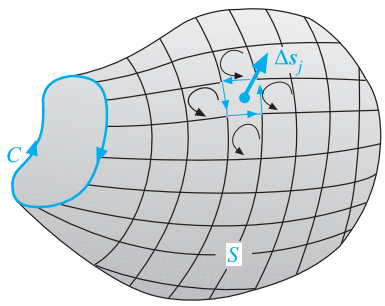
2-9 STOKES TEOREMİ

c_j yolu ile sınırlanan çok küçük bir Δs_j diferensiyel alanı için Eş. (2-86)'daki $\nabla \times \mathbf{A}$ tanımı

$$(\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{2-100}$$

verir. Eş. (2-100)'ü elde ederken Eş. (2-85)'in her iki tarafının $\mathbf{a}_n \Delta s_j$ veya $\Delta \mathbf{s}_j$ ile nokta çarpımını aldık. Bir gelişigüzel S yüzeyini birçok, örneğin N tane küçük diferensiyel alana bölebiliriz. Şekil 2-25 Δs_j tipik diferensiyel elemanı ile böyle bir bölmelemeyi göstermektedir.

ŞEKİL 2-25 Stokes teoreminin ispatı için bölmelenmiş yüzey.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 60

Eş. (2-100)'ün sol tarafı $\nabla \times \mathbf{A}$ vektörünün Δs_j alanından geçen akısıdır. Tüm diferensiyel alanların akıya katkısını toplarsak,

$$\lim_{\Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \tag{2-101}$$

buluruz. Şimdi Eş. (2-100)'ün sağ tarafında gösterilen tüm diferensiyel elemanları sınırlayan yollar üzerindeki çizgi integralleri toplayacağız. İki komşu elemanın yollarının ortak kısmı iki yol için ters yönde izlendiğinden, alanın içindeki tüm ortak kısımların net katkısı sıfırdır. Sonuçta sadece tüm S yüzeyini sınırlayan dış C yüzeyindeki çizgi integrali kalır:

$$\lim_{\Delta s_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} \left(\oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\,. \tag{2-102}$$

Eş. (2-101) ve Eş. (2-102)'yi birleştirerek aşağıdaki **Stokes teoremini** elde ederiz.

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}.} \tag{2-103}$$

Stokes teoremi

Bu teorem, ***bir vektör alanın dönelinin bir açık yüzey üzerindeki yüzey integralinin, yüzeyi sınırlayan yol boyunca vektörün kapalı çizgi integraline eşit olduğunu*** belirtir.

Stokes teroremi bir vektörün dönelinin yüzey integralini vektörün bir çizgi integraline çevirir, tersi de geçerlidir. Stokes teoremi ıraksama teoremi gibi vektör analizin önemli bir özdeşliğidir ve elektromanyetikteki diğer teoremleri ve bağıntıları kurmak için sıkça kullanılacaktır.

Eğer $\nabla \times \mathbf{A}$'nın yüzey integrali bir kapalı yüzey üzerinde alınırsa yüzeyi sınırlayan bir dış yol yoktur ve Eş. (2-103) bize *herhangi bir kapalı S yüzeyi için*

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{2-104}$$

olduğunu söyler. Şekil 2-25'teki gelişigüzel geometri, özellikle seçilmiştir. Bunun nedeni, Stokes teoreminin anlamsız olmayan bir uygulamasının her zaman bir açık yüzey ve o yüzeyi çevreleyen kenarı ima etmesidir. En basit açık yüzey, çevresi sınırlayan yol olan iki boyutlu bir düzlem parçası veya disktir. Burada $d\boldsymbol{\ell}$ ve $d\mathbf{s}$'nin (yönü $\mathbf{a}_n$ ile gösterilir) *sağ-el kuralını izlediğini* hatırlamalıyız: Eğer sağ elin parmakları $d\boldsymbol{\ell}$'nin yönünü izlerse baş parmak $\mathbf{a}_n$'nin yönünü gösterir.

ÖRNEK 2-16

Verilen $\mathbf{F} = \mathrm{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$ için, birinci dörttebirlikte Şekil 2-22'de gösterildiği gibi yer alan, 3 yarıçaplı çeyrek-daire disk için Stokes teoremini sağlayınız.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 61

ÇÖZÜM

Kartezyen koordinatlarda $\nabla \times \mathbf{F}$'yi bulmak için Eş. (2-96)'yı kullanırız.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}_z(2 + x).$$

Verilen geometri ve $d\boldsymbol{\ell}$'nin belirtilen yönü için $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_n\, ds = \mathbf{a}_z\, dx\, dy$'dir. Böylece

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{a}_z\, dx\, dy) \\ &= \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2 + x)\, dx \right] dy \\ &= -\int_0^3 [2\sqrt{9 - y^2} + \tfrac{1}{2}(9 - y^2)]\, dy \\ &= -\left[y\sqrt{9 - y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} + \frac{9}{2} y - \frac{y^3}{6} \right]_0^3 \\ &= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. İki integrasyon değişkeni için uygun sınırları kullanmak *önemlidir*. İntegrasyon sırasını

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-x^2}} -(2 + x)\, dy \right] dx$$

halinde ters çevirebilir ve aynı sonucu buluruz. Ancak hem x, hem de y'nin integrasyon aralığı olarak 0'dan 3'e kullanmak yanlış olur (neden?).

$\mathbf{F}$'nin çeyrek-daire disk sınırı boyunca *OABO* yolu üzerinde çizgi integrali $\int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$, Örnek 2-14'te bulunan dolaşımdır. Bu dolaşım da $\nabla \times \mathbf{F}$'nin yukarıda elde edilen yüzey integraline eşittir. Böylece Stokes teoremi sağlanmıştır.

■ **ALIŞTIRMA 2.14** $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r \sin\phi + \mathbf{a}_\phi 3 \cos\phi$ ve Şekil 2-22'deki çeyrek-daire bölge veriliyor.

a) $\oint_{OABO} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$'yi belirleyiniz.

b) $\nabla \times \mathbf{F}$'yi bulunuz ve Stokes teoremini sağlayınız.

CEVAP: (a) 6, (b) $\mathbf{a}_z\left(\dfrac{2}{r}\cos\phi\right)$.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 62

2-10 İKİ SIFIR ÖZDEŞLİĞİ

Del operatörünün ardışık uygulanmasını içeren iki özdeşlik elektromanyetikte özellikle potansiyel fonksiyonlara girişte çok önemlidir. Bunları aşağıda ayrı ayrı tartışacağız.

2-10.1 ÖZDEŞLİK I

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0 \tag{2-105}$$

Önemli bir sıfır özdeşliği

Sözle ifade edersek ***herhangi bir skalar alanın gradyantının döneli özdeş olarak sıfırdır*** (Burada V'nin ve türevlerinin her yerde var olduğu kabul edilmiştir).

Eş. (2-105), ∇ için Eş. (2-56)'yı kullanarak ve belirtilen işlemleri yaparak Kartezyen koordinatlarda kolaylıkla ispat edilebilir. Genel olarak eğer $\nabla \times (\nabla V)$'nin yüzey integralini herhangi bir yüzey üzerinde alırsak sonuç, Stokes teoreminin belirttiği gibi, yüzeyi sınırlayan kapalı yol üzerinde ∇V'nin çizgi integraline eşittir:

$$\int_S [\nabla \times (\nabla V)] \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\nabla V) \cdot d\boldsymbol{\ell} \,. \tag{2-106}$$

Ancak Eş. (2-51)'den

$$\oint_C (\nabla V) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C dV = 0 \tag{2-107}$$

bulunur. Eş. (2-106) ve (2-107)'nin birleşimi, $\nabla \times (\nabla V)$'nin *herhangi* bir yüzey üzerindeki yüzey integralinin sıfır olduğunu verir. Dolayısıyla integrandın kendisi de sıfır olmalıdır. Bu bize Eş. (2-105)'teki özdeşliği verir. Çıkarımda bir koordinat sistemi belirtilmediği için özdeşlik geneldir ve koordinat sistemi seçimi altında değişmezdir.

Özdeşlik I'in tersten bir ifadesi şöyle yapılabilir: ***Eğer bir vektör alanı sıfır dönelli ise, bir skalar alanın gradyantı halinde ifade edilebilir.*** Vektör alanı $\mathbf{E}$ olsun. O zaman eğer $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ise öyle bir V skalar alanı tanımlayabiliriz ki

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{2-108}$$

olur. Burada Özdeşlik I açısından eksi işareti önemsizdir. Eksi işareti kullanılmıştır çünkü Eş. (2-108)'deki bağıntı elektrostatikteki $\mathbf{E}$ *elektrik alan şiddeti* ile V *elektrik skalar potansiyeli* arasındaki temel bağıntıdır. Bu konu sonraki bölümde incelenecektir. Bu aşamada $\mathbf{E}$ ve V'nin neyi temsil ettiğinin önemi yoktur. Kısım 2-8'den sıfır dönelli bir vektör alanın korunumlu bir alan olduğunu biliyoruz. Böylece, ***bir irrotasyonel (korunumlu) vektör alan her zaman bir skalar alanın gradyantı olarak ifade edilebilir.***

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 63

■ **ALIŞTIRMA 2.15** Eş. (2-105)'teki özdeşliği Kartezyen koordinatlarda ispat ediniz.

2-10.2 ÖZDEŞLİK II

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \tag{2-109}$$

Diğer önemli sıfır özdeşliği

Sözle ifade edersek, ***herhangi bir vektör alanın dönelinin ıraksaması özdeş olarak sıfırdır.***

Bu özdeşliği bir koordinat sistemi kullanmadan sol taraftaki $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$'nın hacim integralini alarak ispat edebiliriz. Iraksama teoremini uygulayarak

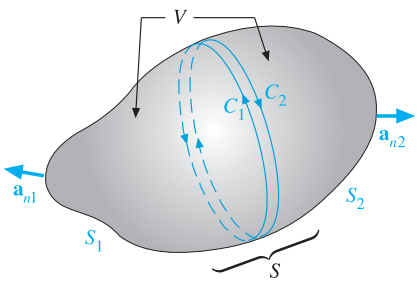
$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dv = \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \tag{2-110}$$

buluruz. Örnek olarak bir S yüzeyinin sınırladığı Şekil 2-26'daki V gelişigüzel hacmini seçelim. Kapalı S yüzeyi S_1 ve S_2 açık yüzeylerine ayrılabilir. Bu iki yüzey C_1 ve C_2 olarak iki kez çizilmiş olan bir ortak sınırla bağlanmıştır. Daha sonra, C_1 ile sınırlı S_1 yüzeyine ve C_2 ile sınırlı S_2 yüzeyine Stokes teoremini uygular ve Eş. (2-110)'un sağ tarafını

$$\begin{aligned} \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_{n1}\, ds + \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_{n2}\, ds \\ &= \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \end{aligned} \tag{2-111}$$

olarak yazarız. S_1 ve S_2 yüzeylerinin $\mathbf{a}_{n1}$ ve $\mathbf{a}_{n2}$ normalleri dışa doğru normallerdir ve bunların C_1 ve C_2 yollarının yönü ile ilişkileri sağ-el

ŞEKİL 2-26 S yüzeyi ile sınırlı gelişigüzel V hacmi.



02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 64

kuralını takip eder. Gerçekte C_1 ve C_2 yolları S_1 ve S_2 arasındaki aynı ortak sınır olduğundan, Eş. (2-111)'in sağ tarafındaki iki çizgi integrali aynı yolu zıt yönlerde izlerler. Dolayısıyla bunların toplamı sıfırdır ve Eş. (2-110)'un sol tarafındaki $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$'nın hacim integrali yok olur. Bu gelişigüzel bir hacim için de doğru olduğundan integrandın kendisi Eş. (2-109)'daki özdeşliğin belirttiği gibi sıfır olmalıdır.

Özdeşlik II'nin bir ters ifadesi şöyle yapılabilir: ***Eğer bir vektör alanı ıraksamasız ise solenoiddir ve bir başka vektör alanın döneli olarak ifade edilebilir.*** **B** bir vektör alanı olsun. Bu ters ifade, eğer $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ise

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2-112}$$

olacak şekilde bir **A** vektör alanı tanımlayabileceğimizi belirtir.

■ **ALIŞTIRMA 2.16** Eş. (2-109)'daki özdeşliği Kartezyen koordinatlarda ispat ediniz.

2-11 ALANLARIN SINIFLANDIRILMASI VE HELMHOLTZ TEOREMİ

Iraksamasız alan ↔ solenoid alan

Önceki kısımlarda *bir ıraksamasız alanın solenoid olduğunu ve bir sıfır dönelli alanın irrotasyonel (korunumlu) olduğunu* belirtmiştik. Vektör alanları solenoid ve/veya irrotasyonel olup olmadıklarına göre sınıflandırabiliriz. Bir **F** vektör alanı

Sıfır dönelli alan ↔ irrotasyonel (korunumlu) alan

1. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ve $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

ise solenoid ve irrotasyoneldir.

ÖRNEK: Yüksüz bir ortamda statik elektrik alanı.

2. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ancak $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$

ise solenoiddir ancak irrotasyonel değildir.

ÖRNEK: Akım taşıyan bir iletkendeki durgun manyetik alan.

3. $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ancak $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$

ise irrotasyoneldir ancak solenoid değildir.

ÖRNEK: Yüklü bir ortamda statik elektrik alanı.

4. $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$ ve $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$

ise ne solenoid ne de irrotasyoneldir.

ÖRNEK: Zamanla değişen bir manyetik alanın bulunduğu yüklü bir ortamda bir elektrik alan.

O halde en genel vektör alanın hem sıfır olmayan ıraksaması hem de sıfır olmayan döneli vardır ve bir solenoid alanla bir irrotasyonel alanın toplamı olarak düşünülebilir.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 65

Helmholtz teoremi

Helmholtz Teoremi: ***Bir vektör alanı, eğer her yerde hem ıraksaması hem de döneli verilirse bulunabilir.***[1]

Helmholtz teoremi genel bir şekilde bir matematiksel teorem olarak ispat edilebilir.[2] Bizim amaçlarımız için, bir vektörün ıraksamasının, akış kaynağı şiddetinin bir ölçüsü olduğunu ve dönelinin ise girdap kaynağı şiddetinin bir ölçüsü olduğunu hatırlamak önemlidir. Akış kaynağı ve girdap kaynağı şiddetlerinin verildiği durumda vektör alanın belirlenebilmesini bekleriz.

Elektromanyetiğin aksiyomatik sunumu

Gelecek bölümlerde elektromanyetiğin aksiyomatik sunumunda Helmholtz teoremini bir temel eleman olarak kullanacağız. Her bir çalışma konusu için (statik elektrik alanlar, statik manyetik alanlar ve zamanla değişen elektromanyetik alanlar) elektromanyetik modelde gereken temel alan vektörlerinin temel kabullenmelerini (ıraksama ve dönelin verilmesi) belirteceğiz. Diğer teorem ve bağıntılar bu temel kabullenmelerden geliştirilecektir.

ALIŞTIRMA 2.17 Aşağıdaki vektör alanların irrotasyonel ve solenoid olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y y^2 + \mathbf{a}_z xz$

b) $\mathbf{B} = r(\mathbf{a}_r \sin\phi + \mathbf{a}_\phi 2\cos\phi)$

c) $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_y 2y + \mathbf{a}_z z$

d) $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R k/R$

CEVAP: (a) Hiçbiri, (b) solenoid, (c) her ikisi, (d) irrotasyonel.

TEKRAR SORULARI

S.2-12 Bir skalar nicelik ile bir skalar alan arasındaki fark nedir? Bir vektör nicelik ile bir vektör alan arasındaki fark nedir?

S.2-13 Bir skalar alanın gradyantının fiziksel tanımı nedir?

S.2-14 Bir skaların verilen bir yöndeki uzay değişim hızını gradyantı cinsinden ifade ediniz.

S.2-15 Kartezyen koordinatlarda ∇ operatörünün ifadesi nedir?

S.2-16 Bir vektör alanın ıraksamasının fiziksel tanımı nedir?

S.2-17 Iraksama teoremini sözle ifade ediniz.

[1] Daha kesin olarak, bir sınırsız uzayda bir vektör alanın hem ıraksaması hem de döneli sonsuzda sıfır olmalıdır. Eğer vektör alan bir yüzeyle çevrili bir bölgeyle sınırlı ise ve eğer tüm bölgede ıraksaması ve döneli ve bölgenin sınır yüzeyinde vektörün normal bileşeni biliniyorsa bu vektör alanı belirlenebilir.

[2] Örneğin G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Kısım 1.15, Academic Press, New York, 1966'ya bakınız.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 66

S.2-18 Bir vektör alanın dönelinin fiziksel tanımı nedir?

S.2-19 Stokes teoremini sözle ifade ediniz.

S.2-20 Bir irrotasyonel ve bir solenoid alanın arasındaki fark nedir?

S.2-21 Helmholtz teoremini sözle ifade ediniz.

NOTLAR

1. Vektör cebirinin temel kuralları (vektör toplama, çıkarma, nokta ve vektör çarpma) koordinat sisteminden bağımsızdır.
2. Bir skalar alanın gradyantı bir vektör nokta fonksiyonudur.
3. Bir vektör alanın ıraksaması bir skalar nokta fonksiyonudur.
4. Bir vektör alanın döneli bir vektör nokta fonksiyonudur.
5. Bir kapalı çizgi integralini yazarken integral işareti üzerine bir küçük çember ($\oint$) çizmeyi unutmayınız.
6. Eş. (2-105) ve (2-109)'da verilen iki sıfır özdeşliği ve bunların sonuçları sonraki bölümlerde potansiyel fonksiyonları tanımlamada temel oluşturacaktır. Bu özdeşlikleri detaylıca öğreniniz.

ÖZET

Vektör analiz elektromanyetikte gerekli bir matematiksel araçtır. Elektromanyetik modeldeki çeşitli nicelikleri göstermek ve bunların arasındaki ilişkileri ifade etmek için kısa bir yol sağlar. Bu bölümde

- vektörleri toplama ve çıkarmanın ve vektör çarpımlarının temel kurallarını gözden geçirdik.
- Kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinin özelliklerini açıkladık.
- Del (∇) diferensiyel operatörünü tanıttık ve bir skalar alanın gradyantı ile bir vektör alanın ıraksamasını ve dönelini tanımladık.
- Bir vektör alanın ıraksamasının hacim integralini; o vektör alanın bir kapalı yüzey integraline dönüştüren (veya tersi de geçerlidir) ıraksama teoremini verdik.
- Bir vektör alanın dönelinin yüzey integralini, o vektör alanın bir kapalı çizgi integraline dönüştüren (veya tersi de geçerlidir) Stokes teoremini verdik.
- Vektör alanların iki önemli sıfır özdeşliğini verdik ve

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 67

- vektörlerin sınıflandırılmasını tartıştık. Ayrıca elektromanyetikteki çeşitli konuların aksiyomatik gelişiminde bir temel eleman olan Helmholtz teoremini verdik.

PROBLEMLER

P.2-1 Bir eşkenar dörtgen bir eşkenar paralelkenardır. Bir eşkenar dörtgenin iki komşu kenarını **A** ve **B** vektörleri ile gösterelim.

a) İki köşegenin $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ve $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ olduğunu sağlayınız.

b) Köşegenlerin birbirine dik olduğunu ispat ediniz.

P.2-2 Eğer bir gelişigüzel üçgenin kenarları saat yönünde veya tersinde **A**, **B** ve **C** vektörleri ile gösterilirse $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ geçerlidir. Sinüsler yasasını ispat ediniz.

İPUCU: Denklemi **A** ve **B** ile ayrı ayrı çapraz çarpıp, çarpımların büyüklük ilişkilerini inceleyiniz.

P.2-3 **A**, **B** ve **C** vektörleri aşağıdaki gibi veriliyor.

$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 6 + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 3$

$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 6 + \mathbf{a}_z 12$

$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_z 2$

Şıklarda istenenleri bulunuz.

a) $\mathbf{a}_B$

b) $|\mathbf{B} - \mathbf{A}|$

c) **A**'nın **B** yönündeki bileşeni

d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

e) **B**'nin **A** yönündeki bileşeni

f) θ_{AB}

g) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$

h) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ve $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

P.2-4 $\mathbf{a}_A$ ve $\mathbf{a}_B$ birim vektörleri xy-düzleminde x-ekseniyle α ve β açılarını yapan, sırasıyla, **A** ve **B** vektörlerinin yönlerini göstersin.

a) İki açının farkının kosinüsü yani $\cos(\alpha - \beta)$'nın açılımı için bir formülü $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B$ iç çarpımını kullanarak elde ediniz.

b) $\mathbf{a}_B \times \mathbf{a}_A$ vektör çarpımını kullanarak $\sin(\alpha - \beta)$ için bir formül elde ediniz.

P.2-5 Bir dik üçgenin köşeleri $P_1(1, 0, 2)$, $P_2(-3, 1, 5)$ ve $P_3(3, -4, 6)$ noktalarıdır.

a) Hangi köşenin dik açı olduğunu belirleyiniz.

b) Üçgenin alanını bulunuz.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 68

P.2-6 Verilen $P_1(-2, 0, 3)$ ve $P_2(0, 4, -1)$ noktaları için

a) P_1 ve P_2'yi birleştiren doğrunun uzunluğunu ve

b) $P_3(3, 1, 3)$ noktasından bu doğruya olan dik uzaklığı bulunuz.

P.2-7 Verilen $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z$ vektörü için

a) $\mathbf{a}_B \,||\, \mathbf{A}$ olacak şekilde bir $\mathbf{a}_B$ birim vektörünü,

b) $\mathbf{a}_C \perp \mathbf{A}$ olacak şekilde xy-düzleminde bir $\mathbf{a}_C$ birim vektörünü bulunuz.

P.2-8 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 5 + \mathbf{a}_z 3$ vektörünü $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 4$ vektörüne dik ve paralel olan, sırasıyla, $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ bileşenlerine ayrıştırınız.

P.2-9 Örnek 2-2'deki Eş. (2-15) **A**, **B** ve **C** vektörlerinin üçlü skalar çarpımını verir. Üç vektörün bir diğer önemli çarpımı üçlü vektör çarpımı $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$'dir. Kartezyen koordinatlarda açarak aşağıdaki bağıntıyı ispat ediniz.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{2-113}$$

Eş. (2-113) ***"BAC − CAB"*** kuralı olarak bilinir.

P.2-10 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x z - \mathbf{a}_z x$ vektörünün $P_1(-1, 0, -2)$ noktasında $P_2(\sqrt{3}, 150^\circ, 1)$ noktasına doğru yönelmiş olan bileşenini bulunuz.

P.2-11 Silindirik koordinatlarda bir noktanın konumu $(3, 4\pi/3, -4)$ olarak veriliyor. Noktanın konumunu

a) Kartezyen koordinatlarda ve

b) küresel koordinatlarda bulunuz.

P.2-12 Birim vektörlerin aşağıdaki çarpımlarının sonucunu bulunuz:

a) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x$,

b) $\mathbf{a}_R \cdot \mathbf{a}_y$,

c) $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R$,

d) $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x$,

e) $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_R$,

f) $\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_z$.

P.2-13 Bir **A** vektörünün (r_1, ϕ_1, z_1) noktasındaki r-bileşeni A_r'yi

a) Kartezyen koordinatlarda A_x ve A_y cinsinden,

b) küresel koordinatlarda A_R ve A_θ cinsinden ifade ediniz.

P.2-14 Bir **E** vektörünün (R_1, θ_1, ϕ_1) noktasındaki θ-bileşeni E_θ'yı

a) Kartezyen koordinatlarda E_x, E_y ve E_z cinsinden,

b) silindirik koordinatlarda E_r ve E_z cinsinden ifade ediniz.

P.2-15 Küresel koordinatlarda verilen $\mathbf{F} = \mathbf{a}_R(12/R^2)$ vektör alanı için

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 69

a) $P(-2, -4, 4)$ noktasında $\mathbf{F}$ ve F_y'yi bulunuz.

b) $\mathbf{F}$'nin P noktasında $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z 6$ vektörü ile yaptığı açıyı bulunuz.

P.2-16 $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$ vektör alanının $\int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ çizgi integralini; $P_1(2, 1, -1)$'den $P_2(8, 2, -1)$'e

a) iki noktayı birleştiren düz doğru boyunca,

b) $x = 2y^2$ parabolü boyunca hesaplayınız.

$\mathbf{F}$ korunumlu bir alan mıdır? Açıklayınız.

P.2-17 Bir $P(x, y, z)$ noktasının konum vektörünü $\mathbf{R}$ ile gösterelim. $\nabla (1/R)$'yi

a) Kartezyen koordinatlarda,

b) küresel koordinatlarda bulunuz.

P.2-18 $V = 2xy - yz + xz$ skalar alanı veriliyor.

a) V'nin $P(2, -1, 0)$ noktasında maksimum artış hızının yönünü ve büyüklüğünü gösteren vektörü bulunuz.

b) V'nin P noktasında $Q(0, 2, 6)$ noktasına doğru artış hızını bulunuz.

P.2-19 Bir eğrisel koordinat sisteminde bir baz vektörünün türevi değişik bir yönde yeni bir vektör verebilir.

a) Silindirik koordinatlarda $\partial \mathbf{a}_r/\partial\phi$ ve $\partial \mathbf{a}_\phi/\partial\phi$'yi bulunuz.

b) (a)'daki sonuçları, Eş. (2-57)ve (2-31)'i kullanarak silindirik koordinatlarda $\nabla \cdot \mathbf{A}$'nın formülünü bulurken kullanınız.

P.2-20 Aşağıdaki radyal alanların ıraksamasını bulunuz.

a) $f_1(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R R^n$,

b) k bir sabit olmak üzere $f_2(\mathbf{R}) = \mathbf{a}_R k/R^2$

P.2-21 Bir $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy + \mathbf{a}_y yz + \mathbf{a}_z zx$ vektör alanı veriliyor.

a) Bir köşesi orijinde olan ve ilk sekizdebirlikte yer alan bir birim küpün yüzeyinden dışarı akıyı hesaplayınız.

b) $\nabla \cdot \mathbf{F}$'yi bulunuz ve ıraksama teoremini sağlayınız.

P.2-22 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r^2 + \mathbf{a}_z 2z$ vektör fonksiyonu için $r = 5$, $z = 0$ ve $z = 4$ ile çevrelenen çembersel silindirik bölgede ıraksama teoremini sağlayınız.

P.2-23 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z z$ vektör fonksiyonu için

a) Düz tabanı xy-düzlemi ile çakışan, orijin merkezli ve 3 yarıçaplı kürenin üst yarısını oluşturan yarı-küresel bölgede $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ integralini bulunuz.

b) $\nabla \cdot \mathbf{A}$'yı bulunuz ve

c) ıraksama teoremini sağlayınız.

P.2-24 $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R (\cos^2\phi)/R^3$ vektör alanı $R = 2$ ve $R = 3$ ile tanımlanan küreler arasındaki bölgede etkilidir.

a) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$'yi ve

b) $\int \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv$'yi hesaplayınız.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 70

P.2-25 Bir f skalar fonksiyonu ve bir $\mathbf{A}$ vektör fonksiyonu için

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \tag{2-114}$$

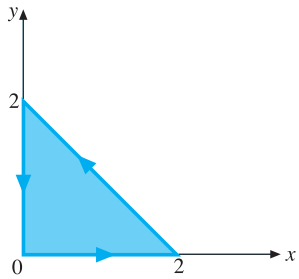
özdeşliğini Kartezyen koordinatlarda ispat ediniz.

P.2-26 Bir vektör alan $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x(2x^2 + y^2) + \mathbf{a}_y(xy - y^2)$ olsun.

a) $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ integralini Şekil 2-27'deki üçgen yol etrafında bulunuz.

b) $\oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$ integralini üçgen alanı üzerinde bulunuz.

c) $\mathbf{A}$ bir skaların gradyantı olarak ifade edilebilir mi? Açıklayınız.



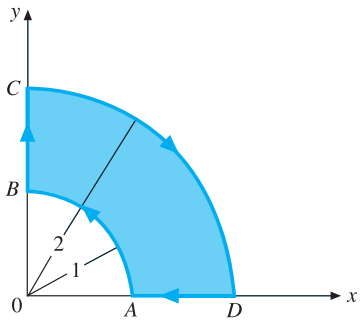
ŞEKİL 2-27 Problem P.2-26'nın grafiği.

P.2-27 Bir vektör fonksiyon $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r 5r \sin\phi + \mathbf{a}_\phi r^2 \cos\phi$ olarak verilsin.

a) $\oint \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$'yi Şekil(2-28)'deki *ABCDA* yolu etrafında belirtilen yönde hesaplayınız.

b) $\nabla \times \mathbf{F}$'yi bulunuz.

c) $\oint (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$'yi taralı alan üzerinde hesaplayınız ve sonucu (a) kısmında elde edilen sonuçla karşılaştırınız.



ŞEKİL 2-28 Problem P.2-27'nin grafiği.

02.QXP yeni_02.QXP 5.06.2024 11:34 Page 71

P.2-28 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi 3 \sin(\phi/2)$ vektör alanı için Stokes teoremini, 4 yarıçaplı bir yarım küre ve çembersel kenarı üzerinde sağlayınız.

P.2-29 Bir f skalar fonksiyonu ve bir $\mathbf{G}$ vektör fonksiyonu için

$$\boxed{\nabla \times (f\,\mathbf{G}) = f\,(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}} \tag{2-115}$$

özdeşliğini Kartezyen koordinatlarda ispat ediniz.

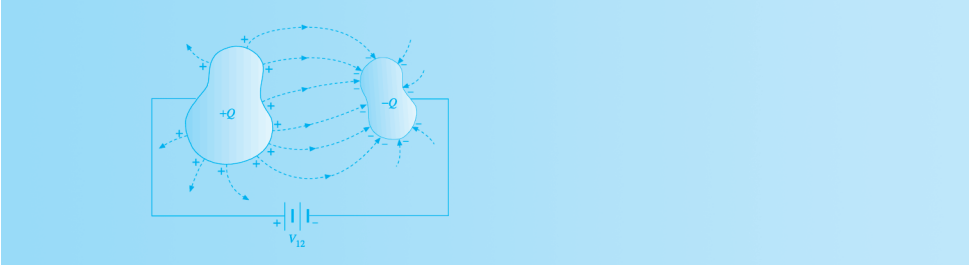
P.2-30 $\mathbf{F}$ vektör fonksiyonu

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_x(x + 3y - c_1 z) + \mathbf{a}_y(c_2 x + 5z) + \mathbf{a}_z(2x - c_3 y + c_4 z)$$

olarak veriliyor.

a) Eğer $\mathbf{F}$ irrotasyonel ise c_1, c_2 ve c_3'ü belirleyiniz.

b) Eğer $\mathbf{F}$ aynı zamanda solenoid ise c_4'ü belirleyiniz.



3. BÖLÜM

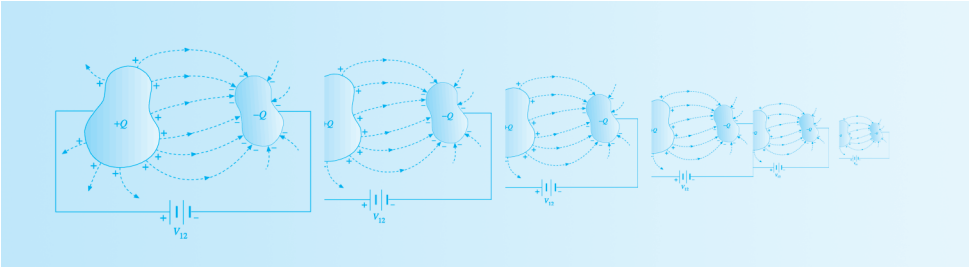
3-1 GENEL BAKIŞ Statik elektrik alanlara, durağan elektrik yükleri neden olur. Bir kuru odada halı üzerinde yürüdüğümüzde ve metal bir kapı tokmağına dokunduğumuzda, sıklıkla bir kıvılcımla karşılaşırız. Bunun nedeni, lastik tabanlı ayakkabılarımızın halı ile temasından dolayı üretilen vücudumuz üzerindeki statik yüklerin, parmak uçlarımız gibi uç noktalardan, hava üzerinden kapı tokmağına atlamasıdır. Üretilen potansiyel farkı birkaç bin volt seviyesinde olabilir, fakat ufak bir şok dışında ciddi bir zarar vermez ve genelde karşı karşıya olduğumuz yük miktarı azdır. Statik elektrik örneklerinden bir başkası, göreli hareket veya sürtünme yolu ile farklı yüklerle yüklenmiş farklı malzemelerin birbirine yapışmasıdır, örneğin ince üst giysimizin farklı malzemeden yapılmış iç çamaşırlarımıza yapışması gibi.

Statik elektrik üretimi örnekleri

Elektrostatik, hareket etmeyen elektrik yüklerin etkisini konu eder ve elektrik alanlar zamanla değişmez. Elektromanyetiğin en basit durumu olmasına karşın, daha karışık elektromanyetik modellerin anlaşılması için temel oluşturur. Birçok doğal olayın (şimşek ve korona gibi) açıklanmasında ve bazı önemli endüstriyel uygulamaların (osiloskop, ink-jet yazıcılar, zerografi, kapasitif tuş takımı ve sıvı kristal göstergeler) temeli elektrostatiğe dayanır. Elektrostatiğin özel uygulamaları üzerine bir çok kitap yayınlanmıştır.[1]

[1] A. Klinkenberg and J. L. van der Minne, *Electrostatics in the Petroleum Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1958. J. H. Dessauer and H. E. Clark, *Xerography and Related Processes*, Focal Press, London, 1965. A. D. Moore (Ed). *Electrostatics and Its Applications*, John Wiley, New York, 1973. C. E. Jewett, *Electrostatics in the Electronics Environment*, John Wiley, New York, 1976. J. C. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*, John Wiley, New York, 1986.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 73



Statik Elektrik Alanlar

Tarihsel olarak, elektrostatikteki nicel ilişkiler, Charles Augustin de Coulomb'un deneyleri ve bu deneylerin 1785 yılında şimdi *Coulomb Yasası* olarak bilinen formülasyonları ile başlar. Daha sonra, Karl F. Gauss *Gauss Yasasını* geliştirmiş ve diğer bilim adamları ve mühendisler, durağan elektrik yükler ile ilgili birçok önemli sonuçlara katkıda bulunmuşlardır. Statik elektrik alanların teorisi yavaş yavaş inşa edilmiştir. Deneysel yasalarla başlayan ve bunları Maxwell denklemleri biçiminde sentezleyen bu yöntem bir tümevarım yaklaşımıdır. Bu yaklaşım genellikle fiziğe giriş derslerinde takip edilir.

Tümdengelim yaklaşımı

Birçok sonuç, farklı zamanlarda, birbiri ile eşgüdümsüz bireyler tarafından elde edildiği için tümevarım yaklaşımı bölük pörçük ve tutarsız bir görünüm sergiler. Biz bu kitapta, *tümdengelim yaklaşımını* kullanmayı tercih ettik. Kısım 1.2'de de gösterdiğimiz gibi bu yaklaşım daha bütün ve mantıksaldır ve bir düzen içerisinde elektromanyetiği geliştirmemize olanak sağlar.

Boş uzayda statik elektrik alanları incelemek için, ıraksamasını ve dönelini belirleyerek bir elektrik alan şiddeti vektörü tanımlarız. Bunlar temel postülatları oluşturur ve bunlardan Coulomb Yasası ve Gauss yasasından *türetiriz*. Bu yasalar bir arada kullanılarak, değişik yük dağılımlarından oluşan elektrik alanlar belirlenebilir. Elektrostatik alanlar içindeki iletkenlerin ve dielektriklerin etkilenmeleri incelenebilir. Elektrostatik potansiyel tanımlanır ve elektrostatik enerji ve kuvvet arasındaki ilişki ortaya çıkar. Her yerdeki yük dağılımının tam bilinmediği özel durumlarda, sınır koşullarını sağlayan farklı çö-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 74

züm tekniklerine ihtiyaç vardır. Basit Poisson ve Laplace denklemlerinin çözüm adımları ve görüntü metodu da burada tartışılacaktır.

3-2 BOŞ UZAYDA ELEKTROSTATİĞİN TEMEL POSTÜLATLARI

Boş uzayda, elektrostatik için Kısım 1-2'de tartışılan elektromanyetik modeldeki dört temel vektör alan niceliklerinin birisini, yani, elektrik alan şiddeti **E**'yi dikkate almamız gerekir. Bundan başka, Kısım 1-3'de bahsettiğimiz üç evrensel sabitten sadece boş uzay geçirgenliği, ϵ_0, formülasyonumuza girecektir.

Elektrik alan şiddeti

Elektrik alan şiddeti, çok küçük durağan bir test yükü, elektrik alanın var olduğu bir bölgeye yerleştirildiğinde, üzerine etki eden birim yük başına düşen kuvvettir ve

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (\text{V/m}) \tag{3-1}$$

biçiminde ifade edilir. Elektrik alan şiddeti **E**, **F** kuvveti ile aynı yönde ve doğru orantılıdır. Eğer **F** newton (N) cinsinden ve yük q coulomb (C) cinsinden ölçülürse, **E**'nin birimi Coulomb başına düşen newton veya metre başına düşen volt (V/m)'dir. Şüphesiz test yükü q, pratikte sıfır değildir ve gerçekte bir elektron üzerindeki yükten daha az olamaz. Bununla birlikte, eğer test yükü, kaynağın yük dağılımını bozmayacak kadar küçük ise, test yükünün sonluluğu hesaplanan ile ölçülen **E** değeri arasında kayda değer farklılığa neden olmayacaktır. Eş. (3-1)'in ters bağıntısı, bir **E** elektrik alanı içindeki durağan bir q yüküne etkiyen kuvvet **F**'yi verir.

E için SI birimi (V/m)'dir.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (\text{N}) \tag{3-2}$$

Boş uzaydaki, elektrostatiğin iki temel postülatı, **E**'nin ıraksamasını ve dönelini belirler. Bunlar

Boş uzayda, elektrostatik E'nin ıraksaması

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (\text{boş uzayda}) \tag{3-3}$$

ve

Elektrostatik E'nin döneli sıfırdır.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3-4}$$

dır. Eş. (3-3)'de ρ_v serbest yüklerin hacim yük yoğunluğu (C/m^3) ve ϵ_0,

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 75

Eş. (1-11)'de verilen boş uzay geçirgenliğidir. Eş. (3-4) statik ***elektrik alanların irrotasyonel olduğunu***, Eş. (3-3) ise bir statik elektrik alanın $\rho_v = 0$ olmadıkça solenoid olmadığını söylemektedir. Bu iki postülat, özlü, basit ve koordinat sisteminden bağımsızdır ve elektrostatikteki diğer bütün ilişkilerin, yasaların ve teoremlerin çıkarımı için kullanılabilir.

Eş (3-3) ve Eş. (3-4) nokta eşitlikleridir ve uzaydaki her nokta için geçerlidir. Bunlar, hem ıraksama hem de dönel işlemleri uzayda türevi içerdiklerinden elektrostatiğin diferensiyel biçimli postülatları olarak bilinirler. Pratik uygulamalarda genellikle yük dağılımının oluşturduğu toplam alanla ilgileniriz. Bunu da Eş. (3-3)'ün integral biçimi ile elde etmek daha uygundur. Eş. (3-3)'ün her iki tarafının rastgele seçilmiş bir V hacmi üzerinde hacim integralini alırsak

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v\, dv \tag{3-5}$$

elde ederiz. Eş. (2-75)'deki ıraksama teoremi kullanılırsa Eş. (3-5) aşağıdaki biçimi alır:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{3-6}$$

Burada Q, S yüzeyi tarafından kapsanan V hacmi içerisindeki toplam yüktür. Eş. (3-6), elektrostatikteki en önemli eşitliklerden birisi olan ***Gauss yasası***nın bir biçimidir. Daha sonra Kısım 3-4'de örneklerle bunu tartışacağız.

Eş. (3-4)'deki dönel ilişkisini kullanmak suretiyle de bir integral biçim elde edilebilir. $\nabla \times \mathbf{E}$'nin açık bir yüzey üzerinde integralini alarak ve sonra Eş. (2-103)'de ifade edilen Stokes teoremini uygulayarak

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \tag{3-7}$$

elde edilir. Çizgi integrali, gelişigüzel seçilmiş kapalı bir C çevriti boyunca alınır. Eş. (3-7), ***elektrik alan şiddetinin skalar çizgi integralinin kapalı bir yol etrafında sıfır*** olduğunu söylemektedir. Herhangi bir yol üzerindeki $\mathbf{E} \cdot d\ell$ skalar çarpımının integrali o yol boyunca olan gerilimdir. Böylece Eş. (3-7), devre teorisindeki Kirchhoff gerilim yasasının (***kapalı bir devre üzerindeki gerilim düşüşlerinin cebirsel toplamı sıfırdır***) bir ifadesidir.

Kirchhoff gerilim yasası

Eş. (3-7) aynı zamanda, irrotasyonel $\mathbf{E}$ alanının, herhangi bir yol üzerinde bir noktadan (P_1 diyelim), bir başka nokta (P_2 diyelim) skalar çizgi integralinin, P_2'den P_1'e *bir başka yol üzerinde* alınacak integralle birbirini götüreceğini söylemektedir. Bu da, *bir statik alanın*

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 76

çizgi integralinin sadece uç nokta değerlerine bağlı olduğu anlamına gelir. Kısım 3-5'de göreceğimiz gibi P_1 noktasından P_2 noktasına **E**'nin çizgi integrali; bir birim yükün P_1 noktasından P_2 noktasına taşınması sırasında **E** tarafından yapılan işi gösterir. Böylece Eş. (3-7), elektrostatik alan etkisinde kapalı bir yol boyunca hareket eden bir birim yüke yapılan işin sıfır olduğunu söylemektedir. Bu da bizim, bir irrotasyonel alanın korunumlu bir alan olduğunu söylememize izin verir.[1]

Boş uzaydaki, iki temel elektrostatik postülatı, elektrostatiğin yapısının temelini oluşturduğu için aşağıda tekrarlanmıştır.

Boş uzayda elektrostatiğin iki temel postülatı

Boş uzayda elektrostatik postülatları	
Diferensiyel biçim	İntegral biçim
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$

Bu postülatları, yükün korunumu prensibi gibi doğa kanunlarının temsili olarak dikkate alacağız. İzleyen kısımda, Coulomb yasasını çıkaracağız.

3-3 COULOMB YASASI

Bir Gauss yüzeyi, üzerinde Gauss yasasının uygulandığı varsayımsal bir yüzeydir.

Mümkün en basit elektrostatik problem olan, sınırsız boş uzayda hareketsiz duran, tek bir q nokta yükünü dikkate alacağız. q'nun oluşturduğu elektrik alan şiddetini bulmak üzere, q merkezde olacak şekilde rastgele seçilmiş R yarıçaplı varsayımsal bir kapalı küresel yüzeyi (*Gauss yüzeyi*), Gauss yasasının uygulanacağı alanı belirlemek için kaynağın etrafına çizilir. Nokta yükün tercih ettiği herhangi bir yön olmadığı için, elektrik alan her yerde radyal yöndedir ve küre yüzeyi üzerindeki bütün noktalarda aynı şiddete sahiptir. Şekil 3-1 (a)'ya Eş. (3-6)'yı uyguladığımızda

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S (\mathbf{a}_R E_R) \cdot \mathbf{a}_R \, ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

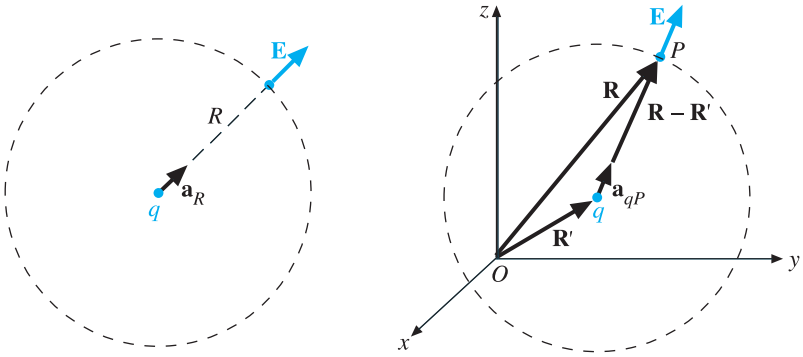
veya

$$E_R \oint_S ds = E_R(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

elde edilir.

[1] Mekanikten hatırlarsak, yerçekimi alanı korunumlu bir alandır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 77



(a) Orijinde nokta yük (b) Orijin dışında nokta yük

ŞEKİL 3-1 Bir nokta yükün oluşturduğu elektrik alanı.

Böylece

Orijindeki izole bir nokta yükün elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R = \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{(V/m)} \tag{3-8}$$

dir. Eş. (3-8) bize, ***bir pozitif nokta yükün elektrik alan şiddetinin yönünün dışarı doğru radyal olduğunu ve genliğinin yük ile doğru orantılı, yükten uzaklığın karesi ile ise ters orantılı olduğunu*** söylemektedir. Bu elektrostatikteki çok önemli bir formüldür. Bir pozitif nokta yük q'nun elektrik alan şiddetinin akı-çizgi grafiği Şekil 2-17(b)'deki gibi olacaktır.

■ **ALIŞTIRMA 3.1** Eş. (3-8)'deki **E** alanının Eş. (3-4)'ü sağladığını ve korunumlu olduğunu gösteriniz.

q yükü seçilen bir koordinat sisteminin orijinine yerleştirilmemiş ise, birim vektör $\mathbf{a}_R$ ve yükün yeri ile **E**'nin belirleneceği noktanın yeri arasındaki **R** uzaklığı üzerinde değişiklik yapmamız gerekir. q'nun konum vektörünü $\mathbf{R}'$ ve alanın gözlendiği nokta P'nin konum vektörünü **R** olarak Şekil 3-1(b)'de gösterildiği gibi seçelim. Bu durumda Eş. (3-8)'den

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{a}_{qP} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2} \tag{3-9}$$

yazabiliriz. Burada $\mathbf{a}_{qP}$, q'dan P'ye çizilmiş birim vektördür ve aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{a}_{qP} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}. \tag{3-10}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 78

Gelişigüzel konumdaki izole nokta yükün elektrik alan şiddeti

Sonuçta

$$\mathbf{E}_P = \frac{q(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^3} \quad (\text{V/m}) \tag{3-11}$$

olacaktır.

ÖRNEK 3-1

Havada, +5 (nC)'luk $Q(0.2, 0.1, -2.5)$ noktasına yerleştirilmiş bir nokta yük nedeniyle $P(-0.2, 0, -2.3)$ noktasında oluşan elektrik alan şiddetini belirleyiniz. Boyutlar metre olarak verilmiştir.

ÇÖZÜM

P noktasındaki konum vektörü

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OP} = -\mathbf{a}_x 0.2 - \mathbf{a}_z 2.3$$

ve nokta yük Q'nun konum vektörü

$$\mathbf{R}' = \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a}_x 0.2 + \mathbf{a}_y 0.1 - \mathbf{a}_z 2.5$$

dir. Aralarındaki fark ise

$$\mathbf{R}-\mathbf{R}' = -\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2$$

olacaktır ve genliği de aşağıda verilmiştir:

$$|\mathbf{R}-\mathbf{R}'| = [(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2]^{1/2} = 0.458\,(\text{m}).$$

Bulduklarımızı Eş. (3-11)'e yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{Q(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^3} \\ &= (9\times 10^9)\,\frac{5\times 10^{-9}}{0.458^3}\,(-\mathbf{a}_x 0.4 - \mathbf{a}_y 0.1 + \mathbf{a}_z 0.2) \\ &= 214.5(-\mathbf{a}_x 0.873 - \mathbf{a}_y 0.218 + \mathbf{a}_z 0.437) \quad (\text{V/m})\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada parantez içindeki ifade birim vektör $\mathbf{a}_{QP} = (\mathbf{R}-\mathbf{R}')/|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|$'dir ve $\mathbf{E}_P$'nin genliği 214.5 (V/m)'dir.

NOT: Havanın geçirgenliği, aslında, boş uzayla aynıdır. $1/(4\pi\epsilon_0)$ ifadesi elektrostatikte çok sık karşımıza çıkar. Eş. (1-11)'den $\epsilon_0 = 1/(c^2\mu_0)$ olduğunu bilmeliyiz. SI birimleri ile $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)'dır ve böylece tam olarak

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7}c^2 \quad (\text{m/F}) \tag{3-12}$$

dır. $c = 3 \times 10^8$ (m/s) yaklaşık değerini kullanırsak $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9$ (m/F)'a eşit olacaktır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 79

q_2 nokta yükü, bir başka q_1 nokta yükünün alanına yerleştirilirse, q_1'in q_2'nin konumunda oluşturduğu elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}_{12}$'den dolayı bir $\mathbf{F}_{12}$ kuvvetinin etkisi altında kalır. Eş. (3-2) ve Eş. (3-9)'u kullanarak

$$\mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{E}_{12} = \mathbf{a}_{12}\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \quad \text{(N)} \tag{3-13}$$

Coulomb yasası

elde edilir. Eş. (3-13), ***Coulomb yasası***nın matematiksel bir biçimidir ve ***iki nokta yük arasındaki kuvvetin, yüklerin çarpımı ile doğru orantılı ve yüklerin arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğunu belirtir***. Eş. (3-13)'ten, $\mathbf{F}_{12}$, q_1 ve q_2'nin her ikisi de artı veya eksi ($\mathbf{a}_{12}$'nin yönü q_1'den q_2'yedir ve q_1q_2 çarpımı artıdır) ise iten bir kuvvettir. q_1 ve q_2 farklı işaretli ise de (q_1q_2 çarpımı eksi) çeken bir kuvvettir.

■ **ALIŞTIRMA 3.2** Verilen (2, 0, –4)'deki q_1=10(μC) ve (0, –1, –2)'daki q_2=–60 (μC) nokta yükleri için aşağıdakileri belirleyiniz.

a) q_1'in konumunda q_2 tarafından oluşturulan elektrik alan şiddeti.
b) q_1'e etki eden kuvvetin genliği.

Bütün birimler metre cinsindendir.

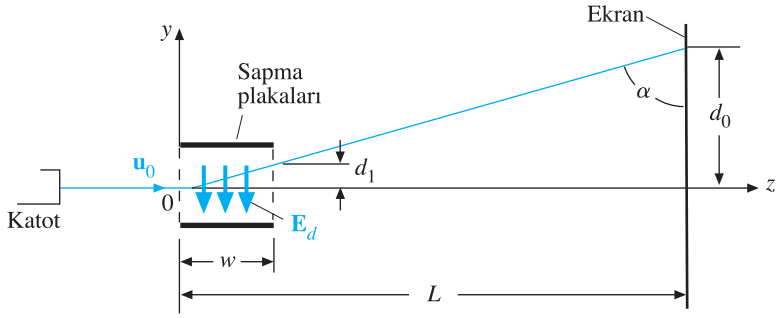
CEVAP: (a) –20 ($\mathbf{a}_x$2 + $\mathbf{a}_y$ –$\mathbf{a}_z$2) (kV/m), (b) 0.6 (N), çeken kuvvet.

ÖRNEK 3-2

Bir elektrostatik sapma sistemi

Katot-ışın osiloskobunun elektrostatik sapma sistemi Şekil 3-2'de verilmiştir. Isıtılan katottan çıkan elektronlara, artı yüklenmiş anod (şekilde gösterilmemiş) tarafından, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_z u_0$ başlangıç hızı verilmektedir. $z = 0$'da elektronlar, düzgün elektrik alan $\mathbf{E}_d = \mathbf{a}_y E_d$'nin oluşturulduğu, w genişliğindeki sapma plakalarının bulunduğu bölgeye girmektedir. Yerçekimi etkisini ihmal ederek, $z = L$'de bulunan floresan ekranı üzerindeki, elektronların düşey sapmasını bulunuz.

ŞEKİL 3-2 Katot-ışın osiloskobunun elektrostatik sapma sistemi (Örnek 3-2).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 80

ÇÖZÜM

$z > 0$ bölgesinde, z-yönünde etkiyen kuvvet olmadığından yatay u_0 hızı korunur. $\mathbf{E}_d$ alanı, her biri $-e$ yükü taşıyan elektronlar üzerine bir kuvvet uygulayarak, y-yönünde bir sapmaya neden olur:

$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E}_d = \mathbf{a}_y eE_d .$$

Düşey yönde, Newton'un ikinci hareket yasasından,

$$m\frac{du_y}{dt} = eE_d$$

elde ederiz. Burada m bir elektronun kütlesidir. Her iki tarafın integralini aldığımızda

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}E_d t$$

olacaktır. Burada integral sabiti, $t = 0$ anında $u_y = 0$ olduğundan sıfır alınmıştır. Tekrar integral aldığımızda ise

$$y = \frac{e}{2m}E_d t^2$$

denklemini elde ederiz. İntegral sabiti, $t = 0$'da $y = 0$ olduğunda yine sıfır alınmıştır. Dikkat edersek, elektronlar sapma plakaları arasında parabolik bir yol izler. Sapma plakalarının çıkışında $t = w/u_0$'dır. Buradan

$$d_1 = \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{u_0}\right)^2$$

ve

$$u_{y1} = u_y\left(t = \frac{w}{u_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\left(\frac{w}{u_0}\right)$$

olarak bulunur. Elektronlar, ekrana ulaştığında, $(L - w)$ kadar bir yatay uzaklığı $(L - w)/u_0$ saniyede kat etmiş olurlar. Bu zaman sırasında, ek bir dikey sapma daha oluşur:

$$d_2 = u_{y1}\left(\frac{L-w}{u_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\frac{w(L-w)}{u_0^2} .$$

Sonuçta, ekrandaki sapma

$$d_0 = d_1 + d_2 = \frac{eE_d}{mu_0^2}\, w\left(L - \frac{w}{2}\right) \text{ bulunur.}$$

Bilgisayar çıktısı almakta kullanılan mürekkep püskürtmeli yazıcılar, katot-ışın osiloskopları gibi, yüklü parçacıkların akışının elek-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 81

Mürekkep püskürtmeli yazıcının çalışma prensibi

trostatik sapması prensibiyle çalışan cihazlardır. Minicik mürekkep damlacıkları, bir piezo-elektrik dönüştürücü tarafından kontrol edilen titreşen bir uç içinden geçirilir. Bilgisayar çıktısı tarafından belirlenmiş farklı miktarlardaki yükler mürekkep damlacıklarına verilir. Yüklenmiş mürekkep damlacıkları, daha sonra aralarında düzgün statik elektrik alan olan bir saptırma plaka çifti arasından geçer. Damlacıkların sapma miktarı, taşıdıkları yüklere bağlıdır. Yazıcının başı yatay bir yönde hareket ederken, mürekkep damlacıkları, yazılacak yüzey üzerinde farklı noktalara çarpar ve böylece basılı bir kopya oluşur.

3-3.1 AYRIK YÜKLERİN OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN

Bir elektrostatik alanın, farklı konumlara yerleştirilmiş n adet ayrık nokta yükün oluşturduğu bir grup tarafından yaratıldığını düşünelim. Elektrik alan şiddeti, $\mathbf{a}_R q/R^2$ ile doğru orantılı bir lineer fonksiyon olduğundan, üst üste bindirme prensibi uygulanabilir ve bir noktadaki toplam $\mathbf{E}$ alanı, bütün bireysel yüklerin neden olduğu alanların vektör toplamıdır. $q_1, q_2, \ldots, q_n$ yüklerinin konumları (kaynak noktaları) $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \ldots, \mathbf{R}'_n$ konum vektörleri ile, elektrik alan şiddetinin hesaplanacağı alan noktasının konumu ise $\mathbf{R}$ ile gösterilsin.[1] Eş. (3-11)'i kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1(\mathbf{R}-\mathbf{R}'_1)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{R}-\mathbf{R}'_2)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'_2|^3} + \cdots + \frac{q_n(\mathbf{R}-\mathbf{R}'_n)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'_n|^3}\right]$$

veya

Ayrık nokta yüklerin oluşturduğu elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\mathbf{R}-\mathbf{R}'_k)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'_k|^3} \quad (\text{V/m}). \tag{3-14}$$

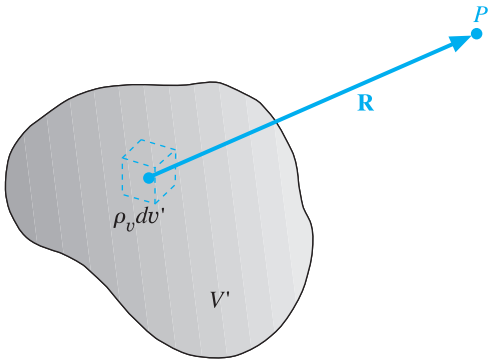
Eş. (3-14), kısa ve öz bir ifade olmasına karşın, sıklıkla farklı genlik ve yönlerdeki vektörlerin toplanmasına ihtiyacımız olması nedeniyle kullanışsızdır. Daha basit bir yaklaşım, $\mathbf{E}$'nin elektrik potansiyelinden bulunmasıdır. Bu, Kısım 3-5'de tartışılacaktır.

3-3.2 SÜREKLİ YÜK DAĞILIMLARININ OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK ALAN

Sürekli bir yük dağılımının neden olduğu elektrik alan, bir yük elemanının etkisinin yük dağılımı üzerinden integrali ile elde edilebilir. Şekil 3-3'de hacimsel bir yük dağılımı verilmiştir.

[1] Eğer kaynak noktası ile alan noktasının konum gösterimlerini birbirinden ayırmak gerekirse, genel kabul gören formu, yani, üslü koordinatları kaynak, üssüz koordinatları ise alan için kullanacağız.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 82



ŞEKİL 3-3 Sürekli yük dağılımının oluşturduğu elektrik alan.

Genelde hacim yük yoğunluğu $\rho_v(\mathrm{C/m^3})$ koordinatların bir fonksiyonudur. Yükün bir diferensiyel elemanı bir nokta yük gibi davranacağından, P alan noktasındaki elektrik alan şiddetine diferensiyel bir hacim elemanı (dv') içindeki yüklerin $(\rho_v dv')$ katkısı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$d\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{\rho_v\, dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{3-15}$$

Toplam alan, integral alarak

Bir hacim yük dağılımının elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_v}{R^2}\, dv' \qquad (\mathrm{V/m}) \tag{3-16}$$

bulunur. Eğer yükler, yüzey yük yoğunluğu $\rho_s(\mathrm{C/m^2})$ ile bir yüzey üzerinde dağılmış ise, bu durumda elektrik alan şiddeti

Bir yüzey yük dağılımının elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_s}{R^2}\, ds' \qquad (\mathrm{V/m}) \tag{3-17}$$

biçiminde ve çizgi bir yük için ise

Bir çizgi yükün elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \mathbf{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2}\, d\ell' \qquad (\mathrm{V/m}) \tag{3-18}$$

olarak yazılabilir. Burada $\rho_\ell(\mathrm{C/m})$ çizgi yük yoğunluğu ve L' yükün dağıtıldığı çizgidir ve çizginin doğru olması gerekmez.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 83

ÖRNEK 3-3

Sonsuz uzunlukta ve bir doğru üzerinde ρ_ℓ(C/m)'lik düzgün yoğunluğu olan çizgi yükün havadaki elektrik alan şiddetini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

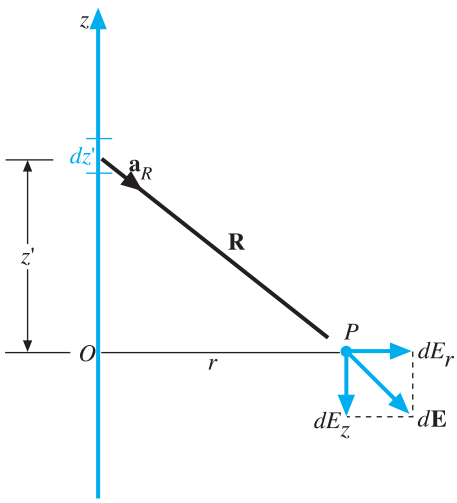
Şekil 3-4'de gösterildiği gibi çizgi yükün z'-ekseni boyunca uzandığını kabul edelim. Bu varsayımı yapmakta tamamen serbestiz, çünkü alan, çizginin nerede olduğundan bağımsızdır. *Üslü koordinatların kaynak noktaları için ve üssüz koordinatların da alan noktaları için kullanıldığına dikkat ediniz.*

Problemde, çizgiden r kadar uzaklıktaki bir P noktasında elektrik alan şiddetini bulmamız istenmektedir. Problemin silindirik bir simetriye (elektrik alan azimut açısı ϕ'den bağımsızdır) sahip olmasından dolayı, silindirik koordinatlarda çalışmamız en uygunudur. Eş. (3-18)'i tekrar aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \rho_\ell \frac{\mathbf{R}}{R^3}\, d\ell' \qquad \text{(V/m)}. \tag{3-18a}$$

Uğraştığımız problemde, ρ_ℓ sabittir ve orijinden gelişigüzel bir z' uzaklığı için çizgi elemanı $d\ell' = dz'$ seçilebilir. $\mathbf{R}$'nin kaynak nokta-

ŞEKİL 3-4 Sonsuz uzunluklu ve doğrusal bir çizgi yük.



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 84

sından alan noktasına olan uzaklık vektörü olduğunu hatırlarsak

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z' \tag{3-19}$$

olarak yazılacaktır. Diferensiyel çizgi yük elemanı $\rho_\ell d\ell' = \rho_\ell dz'$'nün oluşturduğu $d\mathbf{E}$ elektrik alanı

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{\rho_\ell\, dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \mathbf{a}_r\, dE_r + \mathbf{a}_z\, dE_z \end{aligned} \tag{3-20}$$

dir. Burada

$$dE_r = \frac{\rho_\ell r\, dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{3-21}$$

ve

$$dE_z = \frac{-\rho_\ell z'\, dz'}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{3-22}$$

olacaktır. Eş. (3-21) ve (3-22)'de $d\mathbf{E}$, $\mathbf{a}_r$ ve $\mathbf{a}_z$ yönündeki bileşenlerine ayrılmıştır. $+z$'deki her $\rho_\ell dz'$ için, $-z$'de bir $\rho_\ell dz$ çizgi elemanı bulunmaktadır ve bu çizgi elemanı dE_r ve $-dE_z$ bileşenleri olan $d\mathbf{E}$'yi üretecektir. Böylece $\mathbf{a}_z$ yönündeki bileşenler birbirlerini götürecekler ve bizim sadece Eş. (3-21)'de verilen dE_r'nin integralini almamız yeterli olacaktır. Böylece

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

veya

Sonsuz uzunluklu düzgün yoğunluklu çizgi yükün oluşturduğu elektrik alan şiddeti

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{(V/m)}} \tag{3-23}$$

bulunur.

Eş. (3-23), sonsuz uzunluklu bir çizgi yük için önemli bir sonuçtur. Şüphesiz, sonsuz uzunlukta fiziksel bir çizgi yük yoktur. Bununla birlikte, Eş. (3-23), uzun bir çizgi yükün, çizgi yüke yakın bir noktadaki yaklaşık $\mathbf{E}$ alanını bize vermektedir.

ALIŞTIRMA 3.3 Sonsuz uzunluklu 50 (pC/m)'lik bir çizgi yükün $x = 2$ (m) ve $z = 1$ (m)'de y-eksenine paralel yerleştirildiğini düşünerek $(-1, 5, -3)$ noktasındaki alan şiddetini belirleyiniz.

CEVAP: $-0.18(\mathbf{a}_x 0.6 + \mathbf{a}_z 0.8)$ (V/m).

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 85

3-4 GAUSS YASASI VE UYGULAMALARI

Gauss yasası, Eş. (3-3)'teki elektrostatiğin ıraksama postülatından, ıraksama teoreminin uygulanması ile doğrudan elde edilir. Gauss yasası, Eş. (3-6) olarak daha önce elde edilmişti, ancak önemi nedeniyle aşağıda tekrarlanmıştır.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{3-24}$$

Gauss yasası

Gauss yasası, boş uzayda bir kapalı yüzey üzerinde* E*-alanının toplam dışarı doğru akısının, yüzey tarafından kapsanan toplam yükün ϵ_0'a bölümüne eşit olduğunu söyler. *S* yüzeyi *uygun biçimde seçilmiş herhangi bir varsayımsal (matematiksel) kapalı yüzey* olabilir. Fiziksel bir yüzey olması gerekmez ve genellikle de değildir.

Gauss yasası, özellikle, *kapsanan bir yüzeyin üzerinde elektrik alan şiddetinin dik bileşeninin sabit olduğu* bazı simetri durumlarında, yük dağılımının **E**-alanını belirlemek için kullanışlıdır. Bu durumda, Eş. (3-24)'ün sol tarafındaki yüzey integrali kolaylıkla alınabilir ve Gauss yasası, elektrik alan şiddetini bulmak için Eş. (3-16)'dan Eş. (3-18a)'ya kadar olan denklemleri kullanmaktan çok daha hızlı ve verimli bir yol haline gelir.

Öte yandan, simetri durumu yok ise, Gauss yasasının çok faydası olmaz. Gauss yasasının uygulanmasının özünde, birinci olarak simetri durumunun bulunması ve ikinci olarak ise verilen bir yük dağılımından oluşan **E**'nin dik bileşeninin sabit olacağı uygun bir yüzeyin seçilmesi yatmaktadr. Bu tip bir yüzey ***Gauss yüzeyi*** olarak bilinir. Bu basit prensip, küresel simetriye sahip bir nokta yük için Eş. (3-8)'in elde edilişinde kullanılmıştır; sonuç olarak, nokta yük için uygun bir Gauss yüzeyi merkezi nokta yükte olan bir küre yüzeyidir.

Gauss yüzeyinin uygun seçimi

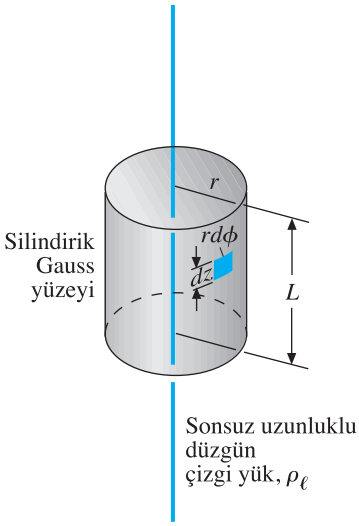
ÖRNEK 3-4

Havadaki, sonsuz uzunluklu, düzgün, yük yoğunluğu ρ_ℓ olan doğrusal çizgi yükün elektrik alan şiddetini Gauss yasasını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu problem Örnek 3-3'de Eş. (3-18) kullanılarak çözülmüştü. Çizgi yük sonsuz uzunlukta olduğundan, sonuçtaki **E** alanı, radyal yönde ve çizgi yüke dikey doğrultuda olmalıdır ($\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r$) ve **E**'nin çizgi yönünde bir bileşeni olamaz. Silindirik simetriden yararlanarak, Şekil 3-5'de gösterildiği gibi ekseninde çizgi yük olan, gelişigüzel *L* uzunluklu ve *r* yarıçaplı bir silindirik Gauss yüzeyi seçebiliriz. Bu

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 86



ŞEKİL 3-5 Sonsuz uzunluktaki çizgi yüke Gauss yasasının uygulanması (Örnek 3-4).

yüzey üzerinde E_r sabit ve $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_r r\,d\phi\,dz$'dir. Bu durumda

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E_r r\,d\phi\,dz = 2\pi r L E_r$$

olacaktır. Silindirin alt ve üst yüzeylerinden herhangi bir katkı olmayacaktır. Çünkü, üst yüzeyde $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_z r\,dr\,d\phi$'dir ve $\mathbf{E}$'nin z-bileşeni yoktur, dolayısıyla $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$ olacaktır. Alt yüzeyde de benzer durum oluşur. Silindirin kapsadığı toplam yük $Q = \rho_\ell L$'dir. Eş. (3-24)'e yerleştirdiğimizde

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho_\ell L}{\epsilon_0}$$

veya

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r}$$

elde ederiz. Bu sonuç Eş. (3-23)'de verilenin aynısıdır, fakat bu sonuca daha basit bir yol ile ulaşmış durumdayız. Dikkat edersek, son ifade silindirik Gauss yüzeyinin boyu L'yi içermemektedir, dolayısıyla birim uzunlukta bir silindir de seçebilirdik.

NOT: Aynı silindirik Gauss yüzeyini, çizgi yük sonlu uzunlukta olsa idi kullanamazdık. Neden olduğunu biliyor musunuz?

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 87

ÖRNEK 3-5

Düzgün yüzey yük yoğunluğu ρ_s'ye sahip sonsuz düzlem yükün elektrik alan şiddetini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Sonsuza uzanan yüklü bir levha tarafından oluşturulan **E** alanı, levha yüzeyine dik yöndedir. Eş. (3-17), **E**'nin bulunması için kullanılabilir, fakat bu durumda $1/R^2$'li ifadenin sonsuz limitler arasında ikili integralini almamız gerekecektir. Burada Gauss yasasının kullanılması daha avantajlıdır.

Şekil 3-6'da gösterildiği gibi, düzlem yükten eşit uzaklıkta ve rastgele seçilmiş A alanına sahip alt ve üst yüzeyleri olan bir diktörtgen kutu, Gauss yüzeyi olarak seçilmiştir. Kutunun yan yüzeyleri yüklü levhaya diktir. Eğer yüklü levha x-y düzlemi ile çakışık ise, üst yüzeyi için

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_z \, ds) = E_z \, ds$$

ve alt yüzeyi için de

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (-\mathbf{a}_z E_z) \cdot (-\mathbf{a}_z \, ds) = E_z \, ds$$

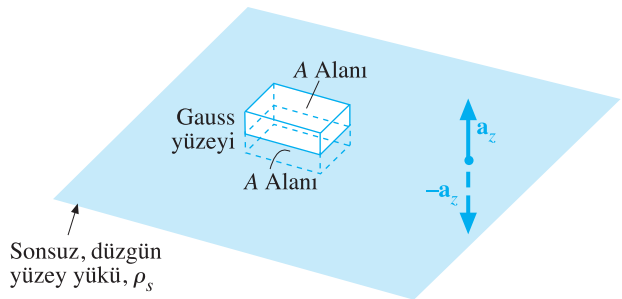
yazabiliriz. Yan yüzeylerden herhangi bir katkı olmadığı için

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2E_z \int_A ds = 2E_z A$$

olacaktır. Kutunun içerdiği toplam yük $Q = \rho_s A$'dır ve böylece

$$2E_z A = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0}$$

ŞEKİL 3-6 Sonsuz düzlem yüke Gauss yasasının uygulanması (Örnek 3-5).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 88

bulunur. Buradan da

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_z = \mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \qquad z > 0 \tag{3-25a}$$

ve

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_z = -\mathbf{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \qquad z < 0 \tag{3-25b}$$

elde ederiz. Yüklü levha her zaman *xy*-düzlemi ile çakışık olmaz (dolayısıyla düzlemin aşağısı ve yukarısı her zaman anlamlı değildir), fakat ρ_s artı ise, **E** alanı her zaman levhadan dışarı doğrudur. Bizim seçtiğimiz Gauss yüzeyi, herhangi bir biçimdeki "ilaç kutusu" olabilir, dikdörtgen olması gerekli değildir.

NOT: Bu örnekte, eğer düzlem yük her iki boyutta sonsuz olmasa veya düz olmasa idi, uygun bir Gauss yüzeyi seçilemezdi. Neden böyle olduğunu açıklayabilir misiniz?

Aydınlatma biçimleri ile karşılaştırma

Bir ofisin veya sınıfın aydınlatması, akkor filamanlı lamba, uzun floresan tüp veya panel biçiminde tavandan olabilir. Bunlar kabaca, sırasıyla, nokta kaynağa, çizgi kaynağa ve düzlem kaynağa karşılık gelir. Eş. (3-8), Eş. (3-23) ve Eş. (3-25)'den ışığın şiddetinin, akkor filamanlı lamba için kaynaktan olan uzaklığın karesi ile hızla düşeceğini, uzun floresan tüp için uzaklığın birinci kuvveti ile daha yavaş düşeceğini ve panel biçiminde tavan aydınlatması için ise değişmeyeceğini kestirebiliriz.

ÖRNEK 3-6

Hacim yük yoğunluğu $0 \leq R \leq b$ arasında $\rho_v = -\rho_o$ ve (hem ρ_o ve hem de b pozitiftir) $R > b$'de $\rho_v = 0$ olan küresel bir elektron bulutunun neden olduğu **E** alanını belirleyiniz.

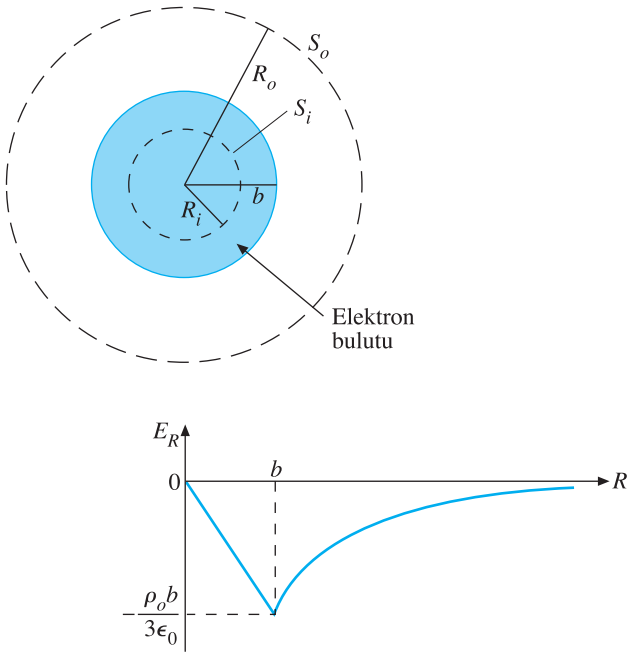
ÇÖZÜM

Verilen kaynak küresel simetriye sahiptir. Böylece uygun Gauss yüzeyi eşmerkezli küresel yüzeylerden oluşmalıdır. Şekil 3-7'de verildiği gibi **E** alanını iki bölgede bulmamız gerekmektedir.

a) $0 \leq R \leq b$

$R < b$ olan varsayımsal bir S_i küresel Gauss yüzeyi elektron bu-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 89



ŞEKİL 3-7 Küresel elektron bulutunun elektik alan şiddeti (Örnek 3-6).

lutu içinde seçilmiştir. Bu yüzey üzerinde **E** radyal yöndedir ve sabit bir genliği vardır.

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R, \qquad d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R\, ds.$$

Toplam dışa doğru E akısı ise

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_R \int_{S_i} ds = E_R 4\pi R^2$$

olacaktır. Gauss yüzeyi içindeki toplam yük ise

$$Q = \int_V \rho_v\, dv$$

$$= -\rho_o \int_V dv = -\rho_o \frac{4\pi}{3} R^3$$

dir. Eş. (3-6)'ya bunları yerleştirdiğimizde

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o}{3\epsilon_0} R, \qquad 0 \leqslant R \leqslant b$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 90

elde ederiz. Düzgün elektron bulutundaki **E** alanının, yönünün merkeze doğru ve genliğinin merkezden uzaklıkla doğru orantılı olduğunu görmekteyiz.

b) $R \geq b$

Bu durumda, küresel Gauss yüzeyi S_o'ı $R > b$ olacak şekilde elektron bulutunun dışında seçeriz. $\oint_{So} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ için (a) şıkkındaki ile aynı ifadeyi elde ederiz. Kapsanan toplam yük ise

$$Q = -\rho_o \frac{4\pi}{3} b^3$$

olacaktır. Sonuçta

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_o b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \qquad R \geq b$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin mesafenin karesi ile ters orantılı olduğuna ve Eş.(3-8)'den doğrudan elde edilebileceğine dikkat ediniz. Yüklü bulutun dışında, toplam yükün merkezde yoğunlaştığı, tek bir nokta yük ile elde edilen alanla tamamıyla aynı bir **E** alanı oluştuğunu görmekteyiz. Bu sonuç, herhangi bir küresel simetriye sahip yüklü bölge için, ρ_v dağılımı R'nin fonksiyonu olsa dahi genel olarak geçerlidir.

■ **ALIŞTIRMA 3.4** Boş uzayda $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r\,(20/r^2)$ (mV/m) alanı için (3, –4, 1) (cm) noktasında ρ_v'yi bulunuz.

CEVAP: -1.42 (nC/m^3).

■ **ALIŞTIRMA 3.5** Bir pozitif Q yükü, havada, b yarıçaplı çok ince bir küresel kabuk üzerine düzgün olarak dağıtılmıştır. Her yerdeki **E**'yi bulunuz. R'ye karşı $|\mathbf{E}|$'yi çiziniz.

CEVAP: $0 < R < b$'de 0; $R > b$'de $\mathbf{a}_R\,(Q/4\pi\epsilon_0 R^2)$

3-5 ELEKTRİK POTANSİYEL

Daha önceden Eş. (2-105)'deki sıfır özdeşliği ile bağlantı kurarak, döneli olmayan bir vektörün, her zaman bir skalar alanın gradyantı olarak ifade edilebileceğini görmüştük. Bu durumda Eş. (3-4)'ü kullanarak aşağıdaki gibi bir V skalar ***elektrik potansiyeli*** tanımlayabiliriz.

Elektrik potansiyelden elektrostatik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{3-26}$$

Skalar niceliklerle işlem yapmak vektör niceliklerle uğraşmaktan daha kolaydır. Eğer V'yi daha kolay belirleyebiliyorsak, doğrudan diferensiyel işlem olan gradyant alma ile **E** bulunabilir. Eş. (3-26)'daki eksi işaretinin nedeni ise daha sonra açıklanacaktır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 91

Elektrik potansiyelin fiziksel bir önemi vardır ve bir yükü bir noktadan diğerine taşırken yapılan iş ile ilgilidir. Kısım 3-2'de, elektrik alan şiddetini bir birim test yüküne etkiyen kuvvet olarak tanımlamıştık. Böylece bir elektrik alan içinde, bir birim yükü P_1 noktasından P_2 noktasına taşırken, alana karşı iş yapılmaktadır ve bu iş aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{W}{q} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(J/C veya V)}. \tag{3-27}$$

P_1'den P_2'ye giderken birçok yol izlenebilir. Yollardan ikisi Şekil 3-8'de çizilmiştir. Eş. (3-27)'de P_1 ile P_2 arasındaki yol tanımlanmadığı için, şu soru doğal olarak ortaya çıkar: İş, seçilen yola nasıl bağlıdır? Biraz düşündüğümüzde ise Eş. (3-27)'deki W/q yola bağlı olmamalıdır sonucuna varırız. Eğer bağlı olsaydı, P_1'den P_2'ye daha küçük W verecek bir yol boyunca gidilebilir ve başka bir yol boyunca P_1'e geri dönülebilirdi. Bu durumda net bir iş veya enerji kazancı elde edilir ki bu da enerjinin korunumu yasasına ters düşer. Daha önce irrotasyonel (korunumlu) **E** alanının skalar çizgi integralinin yoldan bağımsız doğasını Eş. (3-7)'yi tartışırken belirtmiştik.

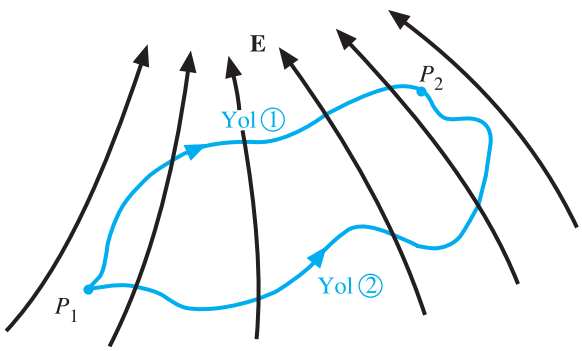
Mekanikteki potansiyel enerji kavramı ile benzerlik kurarsak, Eş. (3-27), bir birim yükün P_2 noktası ile P_1 noktası arasındaki elektrik potansiyel enerjilerinin farkını temsil etmektedir. Birim yük başına elektrik potansiyel enerjiyi V (***elektrik potansiyeli***) ile gösterirsek,

P_2 ve P_1 arasındaki elektrostatik potansiyel farkı, birim yükün P_1'den P_2'ye taşınması sırasında yapılan işe eşittir.

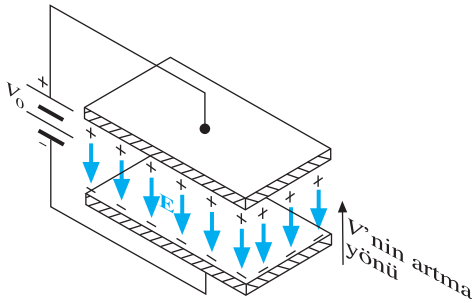
$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(V)} \tag{3-28}$$

elde ederiz. Eş. (3-28)'de P_2 ve P_1 noktaları arasındaki ***potansiyel farkını*** (***elektrostatik gerilim***) tanımladık. Bir noktanın mutlak potansiyeli hakkında, bir fazörün mutlak fazı veya bir coğrafi konumun mutlak rakımı hakkında konuştuğumuzdan daha anlamlı bir şekilde

ŞEKİL 3-8 Bir elektrik alan içinde, P_1'den P_2'ye giden iki yol.



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 92



ŞEKİL 3-9 **E**'nin ve artan V'nin göreceli yönleri.

Referans sıfır potansiyel noktası seçilmesi

konuşamayız. Öncelikle, bir referans sıfır-potansiyel noktası, bir referans sıfır faz (genellikle $t = 0$'dadır) veya bir referans sıfır rakım (genellikle deniz seviyesidir) belirlenmelidir. Genellikle (fakat her zaman değil), sıfır potansiyel noktası sonsuzda alınır. Referans sıfır-potansiyel noktası sonsuzda olmadığında (örneğin "toprak"ta olduğunda), özellikle belirtilmelidir.

Eş. (3-28) ile ilgili iki önemli gözlemi burada yapabiliriz. Birincisi, elektrik potansiyel V'nin **E** alanının ters yönünde arttığı kabullenmesine uyum için eksi işareti kullanılmalıdır. Örneğin, Şekil 3-9'daki gibi, iki paralel iletken plaka arasına V_0 geriliminde bir d-c kaynak bağlandığında, artı ve eksi yükler, sırasıyla, üst ve alt plakalarda birikirler. **E** alanının yönü, artı yükten eksi yüke doğru iken potansiyel artışı ters yöndedir.

Elektrik alan çizgileri eşpotansiyel çizgilerine ve yüzeylerine diktir.

İkincisi, bir skalar alanın gradyantını tanımladığımız Kısım 2-5'ten biliyoruz ki ∇V'nin yönü sabit V yüzeylerine diktir. Böylece, **E** alanının yönünü göstermek için ***yönlü alan çizgileri*** veya ***akı çizgilerini*** kullanırsak, bunlar her yerde ***eşpotansiyel çizgilerine*** ve ***eşpotansiyel yüzeylerine*** diktir.

■ **ALIŞTIRMA 3.6** P_1 (−2, 0, 0) konumundan, P_2(5, −1, 3) konumuna bir nokta yükün hareket ettirilmesi sırasında, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_y 2y$ (V/m) elektrik alanı tarafından yapılan işi belirleyiniz. Mesafeler (m) cinsindendir.

CEVAP: 9.5 (J).

3-5.1 BİR YÜK DAĞILIMININ OLUŞTURDUĞU ELEKTRİK POTANSİYEL

Sonsuz referans alınarak, bir q nokta yükünden R kadar uzaklıktaki bir noktanın elektrik potansiyeli, Eş. (3-28) kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V = -\int_{\infty}^{R} \left(\mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \cdot (\mathbf{a}_R \, dR)$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 93

Buradan da

Bir nokta yükün sonsuza göre elektrostatik potansiyeli

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{(V)} \tag{3-29}$$

yi elde ederiz. Bu bir skalar niceliktir ve q'nun yanısıra sadece R uzaklığına bağlıdır. q'dan R_2 ve R_1 uzaklıklarındaki, sırasıyla, P_2 ve P_1 noktaları arasındaki potansiyel farkı ise

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{3-30}$$

dir. $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \ldots, \mathbf{R}'_n$ konumlarına yerleştirilmiş n tane ayrık $q_1, q_2, \ldots, q_n$ yük sisteminin, $\mathbf{R}$ konumunda oluşturduğu elektrik potansiyel, üst üste bindirme ile bağımsız yüklerin oluşturduğu potansiyellerin toplamı biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

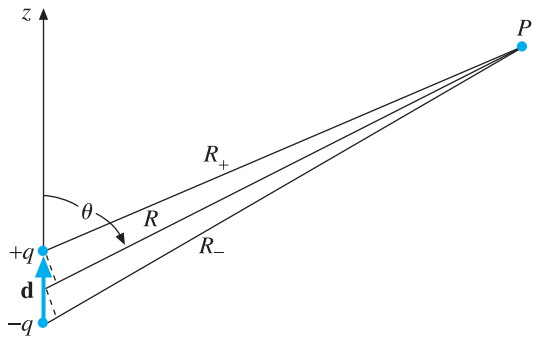
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_k|} \quad \text{(V).} \tag{3-31}$$

Bu toplamın skalar olması nedeniyle, genelde, V'nin negatif gradyantı alınarak $\mathbf{E}$'nin belirlenmesi, Eş. (3-14)'teki vektör toplamını doğrudan kullanmaktan daha kolaydır.

ÖRNEK 3-7

Bir elektrik dipol, Şekil 3-10'da gösterildiği gibi, iki eş ve ters işaretli nokta yük $+q$ ve $-q$'nun birbirinden d kadar kısa bir uzaklıkta yerleştirilmesinden oluşmuştur. Dipolden R kadar uzaklıktaki ($R \gg d$) gelişigüzel bir P noktasındaki potansiyel V'yi ve elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}$'yi bulunuz.

ŞEKİL 3-10 Elektrik dipol.



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 94

ÇÖZÜM

$+q$ ve $-q$ noktalarından alan noktası P'ye olan uzaklıkları, sırasıyla R_+ ve R_- olarak seçelim.

P noktasındaki potansiyel, Eş. (3-31)'i kullanarak doğrudan

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) \tag{3-32}$$

olarak yazılabilir. Eğer $d \ll R$ ise

$$R_+ \cong \left(R - \frac{d}{2}\cos\theta\right) \tag{3-33}$$

ve

$$R_- \cong \left(R + \frac{d}{2}\cos\theta\right) \tag{3-34}$$

biçiminde yazarsak, Eş. (3-33) ve Eş. (3-34)'ü, Eş. (3-32)'de yerleştirdiğimizde

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right) \cong \frac{q\,d\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{3-35}$$

ifadesini elde ederiz. Eş. (3-35) bir başka biçimde

Elektrik dipol momentinden elektrostatik potansiyelin bulunması

$$\boxed{V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{(V)}} \tag{3-36}$$

olarak da yazılabilir. Burada $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ ***elektrik dipol momenti***dir (SI birimi C·m). (Sadelik için "yaklaşık" işareti (~) kaldırılmıştır.)

$-\nabla V$'den $\mathbf{E}$ alanı elde edilebilir. Küresel koordinatlarda

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_R\frac{\partial V}{\partial R} - \mathbf{a}_\theta\frac{\partial V}{R\,\partial\theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\mathbf{a}_R 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta\sin\theta) \tag{3-37}$$

dir ve beklediğimiz gibi hem V hem de $\mathbf{E}$, ϕ'den bağımsızdır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 95

ALIŞTIRMA 3.7 Orijindeki bir elekrik dipolün dipol momenti $\mathbf{a}_z 0.1(\text{nC}\cdot\text{m})$'dir. (a) (0, 0, 5 (m)) ve (b) (2(m), $\pi/3$, $\pi/8$)'de V'yi ve $\mathbf{E}$'yi bulunuz.

CEVAP: (a) 36 (mV), $\mathbf{a}_z 14.4$ (mV/m); (b) 113(mV), $\mathbf{a}_R 113 + \mathbf{a}_\theta 97.4$ (mV/m).

Verilen bir bölgedeki sürekli bir yük dağılımından oluşan elektrik potansiyel, bir yük elemanının katkısının, yüklü bölge üzerinde integrali alınarak elde edilir. Bu da, bir hacim yük dağılımı için

Sürekli yük dağılımının oluşturduğu elektrik potansiyel

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{v'}\frac{\rho_v}{R}\,dv' \qquad \text{(V)}, \tag{3-38}$$

yüzey yük dağılımı için

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{s'}\frac{\rho_s}{R}\,ds' \qquad \text{(V)} \tag{3-39}$$

ve bir çizgi yük dağılımı için ise

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'}\frac{\rho_\ell}{R}\,d\ell' \qquad \text{(V)} \tag{3-40}$$

olarak ifade edilir.

Burada dikkat etmemiz gereken, Eş. (3-38) ve Eş (3-39)'daki integrallerin, sırasıyla, üç ve iki boyutlu olduklarıdır.

ÖRNEK 3-8

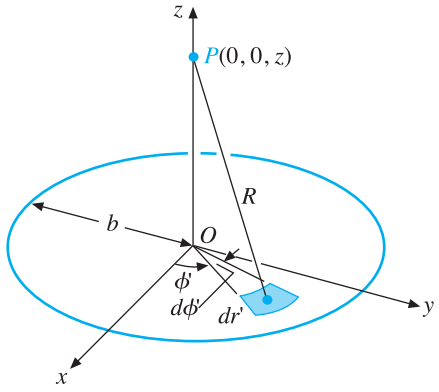
Düzgün bir yüzey yük yoğunluğu ρ_s'yi taşıyan, b yarıçaplı dairesel diskin ekseni üzerindeki elektrik alan şiddetini bulunuz.

ÇÖZÜM

Disk dairesel simetriye sahip olmasına rağmen disk etrafında $\mathbf{E}$'nin dik bileşeninin sabit genlikli olacağı bir yüzey hayal edemeyiz. Gauss yasası bu problemin çözümü için uygun olmadığından Eş. (3-39)'u kullanacağız. Şekil 3-11'de gösterilen silindirik koordinatlarla çalışırsak

$$ds' = r'\,dr'\,d\phi'$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 96



ŞEKİL 3-11 Düzgün yük dağılımlı disk (Örnek 3-8).

ve

$$R = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

dir. Sonsuzdaki noktaya göre, $P(0, 0, z)$ noktasındaki elektriksel potansiyel

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}}\, dr'\, d\phi'$$

$$= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(z^2 + b^2)^{1/2} - |z|] \tag{3-41}$$

olacaktır. Burada z'nin mutlak değeri bize z artı (diskin üstünde bir nokta) da olsa eksi (diskin altında bir nokta) de olsa V'nin aynı olacağını söylemektedir. Böylece

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2}], & \text{(3-42a)} \\ -\mathbf{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\epsilon_0} [1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2}] & \text{(3-42b)} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

TEKRAR SORULARI

S.3-1 Boş uzayda elektrostatiğin temel postülatlarını dierensiyel biçimde yazınız.

S.3-2 Hangi koşullar altında, elektrik alan şiddeti hem solenoid hem de irrotasyonel olacaktır?

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 97

S.3-3 Boş uzayda elektrostatiğin temel postülatlarını integral biçimde yazınız ve anlamlarını sözle ifade ediniz.

S.3-4 Bir irrotasyonel alanın aynı zamanda korunumlu bir alan olarak bilinmesinin nedenini açıklayınız.

S.3-5 Elektrik alan şiddetinin uzaklıkla değişimi (a) bir nokta yük ve (b) bir elektrik dipol için nasıldır?

S.3-6 *Coulomb yasasını* ifade ediniz.

S.3-7 *Gauss yasasını* ifade ediniz. Bir yük dağılımının elektrik alan şiddetini belirlemekte hangi koşullar altında Gauss yasası özellikle kullanışlıdır?

S.3-8 Sonsuz uzunlukta, düzgün yoğunluklu bir düz çizgi yükün elektrik alan şiddetinin uzaklıkla hangi şekilde değiştiğini tanımlayınız.

S.3-9 Bir noktada elektrik potansiyel sıfır ise, bu noktada aynı zamanda elektrik alan şiddeti de sıfır mıdır? Açıklayınız.

S.3-10 Bir noktada elektrik alan şiddeti sıfır ise, bu noktada aynı zamanda elektrik potansiyel de sıfır mıdır? Açıklayınız.

NOTLAR

1. Bir yük dağılımının oluşturduğu elektrik alan şiddeti **E**'nin belirlenmesinde, alanın dik bileşeninin sabit olacağı, yükü kapsayan simetrik bir Gauss yüzeyi bulunabiliyor ise Gauss yasası en basit yöntemdir.
2. Eğer uygun bir Gauss yüzeyi bulunamıyorsa, önce V (bir skalar)'nin bulunması, daha sonra **E**'nin $-\nabla V$'den elde edilmesi daha uygundur.
3. Yönlü alan çizgileri (akı çizgileri), her yerde, eşpotansiyel çizgilerine ve eşpotansiyel yüzeylerine diktir.

3-6 STATİK ELEKTRİK ALANDA MALZEME ORTAMI

İletkenler, yarı iletkenler ve dielektrikler

Şimdiye kadar, sadece, durağan yük dağılımlarının, boş uzayda veya havadaki elektrik alanlarını tartıştık. Şimdi ise alanların bir malzeme ortamındaki davranışını inceleyeceğiz. Genelde, malzemeleri, elektriksel özelliklerine göre ***iletkenler***, ***yarı-iletkenler*** ve ***yalıtkanlar*** veya ***dielektrikler*** olmak üzere üç tiple sınıflandırabiliriz. Bir atomun basit atom modeli, artı yüklü çekirdek ile yörüngesindeki elektronlardan oluşur. ***İletken*** atomlarının en dış yörüngesindeki elektronlar, gevşek tutunmuşlardır ve kolaylıkla bir atomdan diğerine göç ederler. Metallerin çoğu bu gruptadır. ***Yalıtkan*** veya dielektrik atomlarındaki elektronlar ise yörüngelerine sınırlıdır ve normal şartlar altında, dışarıdan bir elektrik alan uygulansa dahi serbestleşemezler. ***Yarı-iletkenlerin*** elektriksel özellikleri, iletkenlerin ve yalıtkanların arasında bir yerdedir ve göreli olarak az sayıda serbest hareket eden yüke sahiptirler.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 98

Katıların bant teorisine göre, elektronlar için izin verilmiş enerji bantları vardır. Her bant, birçok yakın aralıklı ayrı enerji durumlarından oluşur. Bu enerji bantları arasında, katı atomu elektronlarının duramayacağı, yasaklanmış bölgeler ve aralıklar olabilir. İletkenler, elektronlarla kısmen dolu bir üst enerji bantına veya kısmen dolu olan üst üste binmiş üst bant çiftine sahiptir. Dolayısıyla bu bantlardaki elektronlar, enerjilerindeki küçük bir değişimle birinden diğerine hareket edebilirler. Yalıtkan veya dielektrikler, üst bantları tamamen dolu olan malzemelerdir bu nedenle iletim normal olarak oluşmaz. Çünkü, bir sonraki daha yüksek bant ile büyük bir enerji aralığı vardır. Eğer yasaklanmış bölgedeki enerji aralığı, göreceli olarak küçük ise, küçük miktarlardaki dış enerji, elektronların uyarılarak dolu üst banttan bir sonraki banta atlamasına yeterli olabilir. Bu da iletime neden olur ve bu tip malzemeler yarı-iletkenlerdir. Bir malzeme ortamının makroskopik elektriksel özellikleri, 4. Bölümde tanımlayacağımız ***iletkenlik*** adı verilen yapısal bir parametre ile açıklanır.

3-6.1 STATİK ELEKTRİK ALANDA İLETKENLER

Bazı artı (veya eksi) yüklerin, iyi bir iletkenin içine yerleştirildiğini varsayalım. İletken içinde bir elektrik alan oluşacaktır. Alan yükler üzerine bir kuvvet uygulayacak ve yüklerin hareketlenmesine neden olacaktır. Bu hareket *tüm* yükler iletken yüzeyine ulaşana kadar devam edecek ve içerdeki hem yük hem de alan sıfırlanacak şekilde yüzeyde yükler yeni bir dağılım oluşturacaktır. Böylece

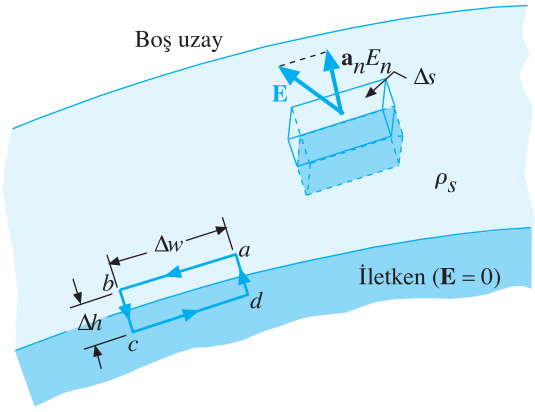
İletkenin içinde (Statik koşullar altında)	
$\rho_v = 0$	(3-43)
$\mathbf{E} = 0$	(3-44)

Statik durumda, bir iletkenin içinde, hem serbest yük yoğunluğu hem de elektrik alan şiddeti sıfırdır.

yazabiliriz. Bir iletken içinde serbest yükler yoksa ($\rho_v = 0$), $\mathbf{E}$ sıfır olmalıdır. Çünkü, Gauss kanuna göre, iletken içerisinde oluşturulmuş *herhangi bir* kapalı yüzeyden geçen dışarı doğru toplam elektrik akı sıfır olmalıdır.

Bir iletkenin yüzeyindeki yük dağılımı, yüzeyin şekline bağlıdır. Eğer bir teğet kuvvet üretecek ve yükleri harekete geçirecek elektrik alan şiddetinin bir teğet bileşeni varsa, yüklerin denge durumunda olmayacakları açıktır. Bu nedenle, ***statik koşullar altında, bir iletken yüzeyindeki $\mathbf{E}$ alanı, her yerde yüzeye diktir.*** Bir başka deyişle, ***bir***

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 99



ŞEKİL 3-12 İletken-boş uzay arayüzü.

iletkenin yüzeyi, statik koşullar altında, bir eşpotansiyel yüzeyidir. Bir iletkenin içerisinde her yerde $\mathbf{E} = 0$ olduğundan, bütün iletken aynı elektrostatik potansiyeldedir.

Şekil 3-12, bir iletken ve boş uzay arasındaki arayüzü göstermektedir. Genişliği $ab = cd = \Delta w$ ve yüksekliği $bc = da = \Delta h$ olan $abcda$ çevritini göz önüne alalım. ab ve cd kenarları arayüze paraleldir. Eş. (3-7)'yi kullanarak, $\Delta h \to 0$ seçerek ve $\mathbf{E}$'nin iletken içerisinde sıfır olduğunu hatırlayarak aşağıdaki

$$\oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = E_t \Delta w = 0$$

eşitliğini, veya

$$E_t = 0 \tag{3-45}$$

elde ederiz. Bu denklem, ***statik koşullar altında bir iletken yüzeyinde*** $\mathbf{E}$ ***alanının teğet bileşeninin sıfır olduğunu*** söylemektedir. İletken yüzeyindeki $\mathbf{E}$'nin dik bileşeni E_n'yi bulmak için, üst yüzeyi boş uzayda, alt yüzeyi ise $\mathbf{E} = 0$ olan iletken içinde olan ince bir hap kutusu şeklinde bir Gauss yüzeyi oluşturabiliriz. Eş. (3-6)'yı kullanarak

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0}$$

veya

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \tag{3-46}$$

elde edilir. Buradan, ***bir iletken-boş uzay sınırındaki*** $\mathbf{E}$ ***alanının dik bileşeni, iletken üzerindeki yüzey yük yoğunluğunun boş uzay geçirgenliğine bölümüne eşittir*** sonucunu elde ederiz.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 100

Statik koşullar altında bir iletkenin yüzeyinde, elektrik alan yüzeye diktir ve bu yüzey eşpotansiyellidir.

İletken yüzeyindeki *sınır koşulları* aşağıda özetlenmiştir.

İletken — Boş Uzay Arayüzündeki Sınır Koşulları	
$E_t = 0$	(3-45)
$E_n = \dfrac{\rho_s}{\epsilon_0}$	(3-46)

ÖRNEK 3-9

Bir pozitif nokta Q yükü iç yarıçapı R_i ve dış yarıçapı R_o olan iletken bir küre kabuğun merkezindedir. Radyal uzaklık R'nin fonksiyonu olarak $\mathbf{E}$ ve V'yi belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Problem geometrisi Şekil 3-13(a)'da gösterilmiştir. Küresel simetri olduğu için, basit çözüm, Gauss yasası kullanarak $\mathbf{E}$'nin belirlenmesi ve daha sonra integral yoluyla V'nin bulunmasıdır. Üç farklı bölge bulunmaktadır, bunlar: (a) $R > R_o$, (b) $R_i < R < R_o$ ve (c) $R < R_i$'dir. Bu bölgeler için uygun küresel Gauss yüzeyleri oluşturulacaktır. Simetri nedeniyle bütün bölgelerde $\mathbf{E} = \mathbf{a}_R E_R$ olmalıdır.

a) $R > R_o$, (Gauss yüzeyi S_1):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{R1} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

veya

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{3-47}$$

Bulunan $\mathbf{E}$ alanı, kabuk olmadığı durumdaki bir Q nokta yükü ile aynıdır ve bu ilişki Eş. (3-8)'de verilmiştir. Sonsuza göre potansiyel ise

$$V_1 = -\int_{\infty}^{R} (E_{R1})\, dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{3-48}$$

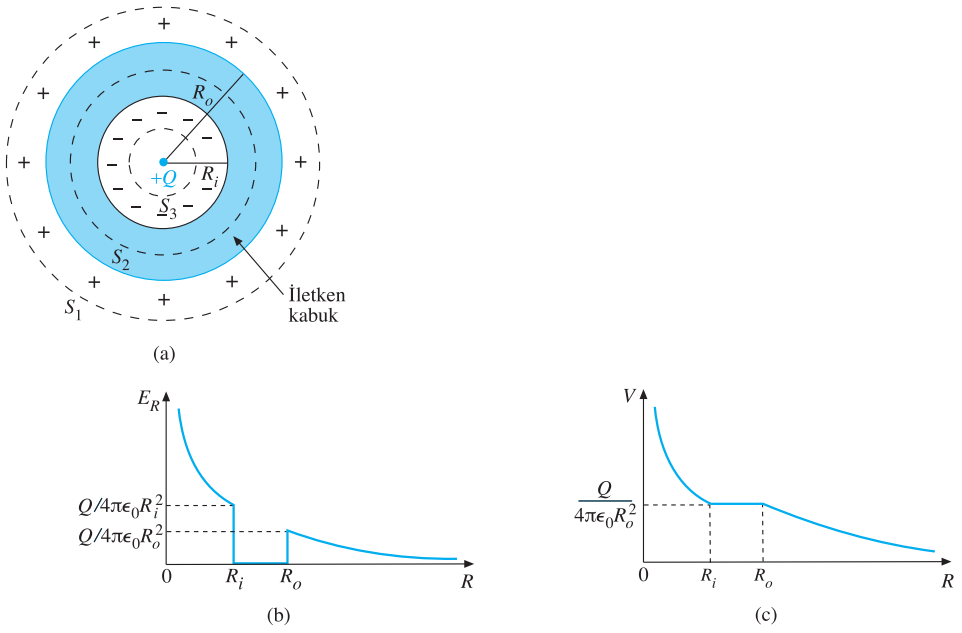
dir ve Eş. (3-29)'da verilen ile aynıdır.

b) $R_i < R < R_o$ (Gauss yüzeyi S_2): Eş. (3-44) nedeniyle,

$$E_{R2} = 0 \tag{3-49}$$

olduğunu biliyoruz. İletken kabuk içinde $\rho_v = 0$ olduğundan ve S_2 yüzeyi içindeki kapsanan toplam yükün sıfır olması gerektiği için,

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 101



ŞEKİL 3-13 İletken kabuğun merkezindeki $+Q$ nokta yükünün elektrik alan şiddeti ve potansiyel değişimleri (Örnek 3-9).

$R = R_i$'deki kabuğun iç yüzeyinde $-Q$'ya eşit miktarda bir eksi yük indüklenmelidir. (Bunun aynı zamanda anlamı, $R = R_o$'daki kabuğun dış yüzeyinde de $+Q$'ya eşit miktarda bir artı yük indüklenecektir.) İletken kabuk bir eşpotansiyel yüzeyidir, böylece

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o} \tag{3-50}$$

elde edilir.

c) $R < R_i$ (Gauss yüzeyi S_3): Gauss yasasının uygulanması ile birinci bölgede Eş (3-47)'deki E_{R1} ile aynı formül E_{R3} için elde edilir:

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{3-51}$$

Bu bölgedeki potansiyel ise

$$V_3 = -\int E_{R3}\, dR + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + K$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 102

olur, burada integral sabiti K, $R = R_i$'deki V_3'ün Eş (3-50)'deki V_2'ye eşit olması koşulu kullanılarak belirlenir.

$$K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right) \tag{3-52}$$

ve

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i}\right). \tag{3-53}$$

R'ye karşı E_R ve V değişimleri, üç bölge için Şekil 3-13(b) ve Şekil 3-13(c)'de çizilmiştir. Dikkat edilirse, elektrik alan şiddetinin süreksiz sıçramalarının olduğu yerde, potansiyel sürekli kalmaktadır. Potansiyeldeki süreksiz bir sıçramanın anlamı sonsuz bir elektrik alan şiddetidir.

Sınırlarda potansiyel süreklidir.

■ **ALIŞTIRMA 3.8** Dış yarıçapı 3 (cm) ve iç yarıçapı 2 (cm) olan çok uzun bakır bir tüp, eksenindeki 60 (pC/m)'lik bir çizgi yükü çevrelemektedir. Aşağıdakileri bulunuz.

a) r = 1 (m), 2.5 (cm) ve 1.5 (cm) için **E** ve

b) iç ve dış tüp yüzeyleri arasındaki potansiyel farkı.

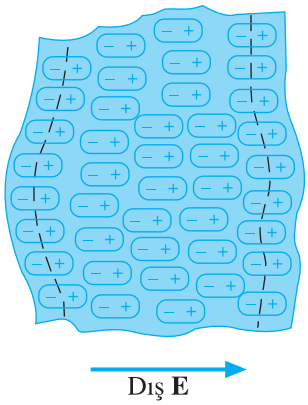
CEVAP: (a) 1.08 (V/m), 0, 72 (V/m), (b) 0 (V).

3-6.2 STATİK ELEKTRİK ALANDA DİELEKTRİKLER

Bütün malzeme ortamları, eksi yüklü elektronlar tarafından çevrelenmiş artı yüklü bir çekirdeği olan atomlardan oluşmuştur. Dielektrik molekülleri makroskopik olarak yüksüz olmakla birlikte, bir dış elektrik alan olduğunda, her bir yüklü parçacık üzerine bir kuvvet uygulanır ve artı ve eksi yüklerin zıt yönlere doğru küçük yer değiştirmeleri sonucunu doğurur. Bunlar ***bağlı yükler***dir. Bu yer değiştirmeler, atomik boyutlarla kıyaslandığında küçük olmasına rağmen, yine de dielektrik malzemenin kutuplanmasına neden olur ve elektrik dipoller yaratılır. Bu durum Şekil 3-14'te betimlenmiştir. Elektrik dipollerin birbirini sıfırlamayan elektrik potansiyeli ve elektrik alan şiddetleri olduğu sürece (bkz. Örnek 3-7), ***indüklenmiş elektrik dipollerin*** hem dielektrik malzemenin içindeki hem de dışındaki elektrik alanı değiştirmesini bekleriz.

Bazı dielektriklerin molekülleri, dışarıdan kutuplayıcı bir alan olmasa dahi kalıcı dipol momentlere sahiptir. Bu tip moleküller genellikle, iki veya daha fazla birbirinin aynı olmayan atomlardan oluşmuştur ve sabit dipol momentsiz ***kutupsal olmayan moleküller***in karşıtı olarak ***kutupsal moleküller*** olarak adlandırılır. İki hidrojen atomu ile bir oksijen atomundan oluşan su molekülü H_2O buna bir örnektir. Atomlar, sıfır dipol momente sahip moleküller yapacak şekilde kendilerini düzenleyemezler. Hidrojen atomları, oksijen atomunun iki yanında tam olarak simetrik biçimde bulunmaz.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 103



ŞEKİL 3-14 Kutuplanmış dielektrik ortamın kesiti.

Kutuplanmış moleküllerin dipol momentleri 10^{-30} (C·m) mertebesindedir. Dış alan olmadığından, kutupsal dielektriklerin bağımsız dipolleri rastgele yönlenmiştir, makroskopik olarak net dipol momenti üretmezler. Uygulanan elektrik alan, bağımsız dipoller üzerine bir tork uygulayacak ve Şekil 3-14'de gösterildiği gibi uygulanan alanla aynı hizaya gelme eğilimi oluşturacaktır.

İndüklenmiş dipollerin makroskopik etkisinin analizi için, aşağıdaki gibi bir **P** ***kutuplanma vektörü*** tanımlarız.

Kutuplanma vektörü, elektrik dipol momentinin hacim yoğunluğudur.

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_k}{\Delta v} \qquad (\mathrm{C/m^2}), \tag{3-54}$$

burada n birim hacimdeki molekül sayısıdır ve pay çok küçük bir Δv hacminde bulunan indüklenmiş dipol momentlerin vektör toplamını gösterir. Düzgünleştirilmiş bir nokta fonksiyonu olan **P** vektörü, elektrik dipol momentin hacim yoğunluğudur. Bir hacim elemanı dv'nin dipol momenti $d\mathbf{p}$ ise $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dv'$'dir ve aşağıdaki gibi elektrostatik potansiyel üretir (bkz. Eş. (3-36):

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, dv'. \tag{3-55}$$

Bunun, dielektrik hacmi V' üzerinde integralini aldığımızda, kutuplanmış dielektriğin oluşturduğu potansiyeli elde ederiz.

Kutuplanma vektöründen elektrostatik potansiyelin bulunması

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2}\, dv'. \tag{3-56}$$

Burada R, dv' hacim elemanından sabit bir alan noktasına olan uzaklıktır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 104

İndüklenmiş elektrik dipollerin etkisinin daha kullanışlı fiziksel bir ifadesi, $\mathbf{P}^{(1)}$ kutuplanma vektörünün aşağıda verien yüzey ve hacim etkisi gözlenerek elde edilebilir.

1. *Eşdeğer kutuplanma yüzey yük yoğunluğu*, ρ_{ps}.

Şekil 3-14'den, moleküllerin sonuç olarak sağ taraftaki sınırda artı yüzey yük yoğunluğu ve sol taraftaki sınırda eksi yük yoğunluğu oluşturduğunu görürüz. Yüzey yük yoğunluğu, bir yüzeyde çizgili hattın dışına çıkan elektrik dipollerinin yoğunluğuna bağlı olduğundan, ***eşdeğer kutuplanma yüzey yük yoğunluğu***nun aşağıdaki biçimde olacağını söyleyebiliriz.

Eşdeğer kutuplanma yüzey yük yoğunluğu

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \qquad (\mathrm{C/m^2}). \tag{3-57}$$

2. *Eşdeğer kutuplanma hacim yük yoğunluğu*, ρ_{pv}.

Bir V hacmini sınırlayan S yüzeyi için, kutuplanmanın bir sonucu olarak net toplam yük, Eş (3-57)'nin integrali ile elde edilir. V hacmi içinde *kalan* net yük, bu integralin *eksi* işaretlisidir:

$$Q = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \, ds \tag{3-58}$$

$$= \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \, dv = \int_V \rho_{pv} \, dv .$$

Burada kapalı yüzey integralini bir hacim integraline çevirmek için ıraksama teoremini uyguladık. ***Eşdeğer kutuplanma hacim yük yoğunluğunu*** aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Eşeğer kutuplanma hacim yük yoğunluğu

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad (\mathrm{C/m^3}) . \tag{3-59}$$

Böylece, $\mathbf{P}$'nin ıraksamasının sıfır olmadığı yerde, kutuplanmış dielektrik yüklenmiş gözükür. Bununla birlikte, elektriksel olarak yüksüz olan bir dielektrik cisim ile başlamış olduğumuzdan, cismin toplam yükü kutuplanmadan sonra sıfır kalmalıdır. Bu olay herhangi bir şekildeki dielektrik cisim için aşağıdaki şekilde doğrulanır:

$$\text{Toplam yük} = \oint_S \rho_{ps} \, ds + \int_V \rho_{pv} \, dv$$

$$= \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \, ds - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, dv = 0 .$$

(1) Daha detaylı bir çıkarım D.K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, İkinci Baskı, Kısım 3-7.1., Addison-Wesley Publishing Co., Reading Mass., 1989 kitabında bulunabilir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 105

Kutuplanma yük yoğunlukları ρ_{ps} ve ρ_{pv}, kutuplanmış bir dielektrikten oluşan potansiyel ve elektrik alan şiddetini belirlemek için kullanılabilir:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'}\frac{\rho_{ps}}{R}\,ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_{pv}}{R}\,dv'. \tag{3-60}$$

Bu eşitlik Eş. (3-56)'ya eşdeğerdir. Elektrostatik alanlar için $\mathbf{E} = \nabla V$'dir.

ÖRNEK 3-10

R_0 yarıçaplı bir dielektrik kürenin içindeki kutuplanma vektörü $\mathbf{P} = \mathbf{a}_x P_0$'dır.

a) Eşdeğer kutuplanma yüzey ve hacim yük yoğunluklarını ve

b) yüzey üzerindeki ve küre içindeki toplam eşdeğer yükü bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Küre yüzeyindeki ($R = R_0$) kutuplanma yüzey yük yoğunluğu

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R = P_0(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_R)$$
$$= P_0\sin\theta\cos\phi$$

dir. Kutuplanma hacim yük yoğunluğu ise

$$\rho_{pv} = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\nabla\cdot(\mathbf{a}_x P_0) = 0$$

olacaktır.

b) Toplam yüzey yükü

$$Q_s = \oint \rho_{ps}\,ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_0\sin\theta\cos\phi\,d\phi\,d\theta$$
$$= 0$$

ve içerideki toplam yük

$$Q_v = \int \rho_{pv}\,dv = 0$$

dır. Böylece küre içerisindeki toplam yük, beklendiği gibi $Q_s + Q_v = 0$'dır.

3-7 ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VE DİELEKTRİK SABİTİ

Kutuplanmış bir dielektrik, eşdeğer hacim yük yoğunluğu ρ_{pv}'ye neden olacağı için verilen bir kaynak dağılımının oluşturacağı elektrik alan şiddetinin, bir dielektrik içinde boş uzaydakinden farklı olması-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 106

nı bekleriz. Özellikle, Eş. (3-3)'deki ıraksama postülatının, ρ_{pv}'nin etkisini içerecek şekilde değiştirilmesi gereklidir.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_v + \rho_{pv}). \tag{3-61.a}$$

Eş. (3-59)'u kullandığımızda

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v \tag{3-61.b}$$

elde ederiz. Şimdi yeni bir temel alan niceliği, ***elektrik akı yoğunluğu***nu veya ***elektrik yerdeğiştirme*** **D**'yi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Elektrik yerdeğiştirme D'nin tanımı

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (\mathrm{C/m^2}). \tag{3-62}$$

D vektörünün kullanılması kutuplanma vektörü **P** veya kutuplanma yük yoğunluğu ρ_{pv} ile doğrudan uğraşmadan herhangi bir ortamda, elektrik alan ve *serbest yükler*in dağılımı arasındaki ıraksama ilişkisini yazma olanağını verir. Eş. (3-61) ve Eş. (3-62)'nin bir arada kullanılması ile aşağıda verilen yeni denklemi elde ederiz.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad (\mathrm{C/m^3}). \tag{3-63}$$

Burada ρ_v *serbest yükler*in hacim yoğunluğudur. Eş. (3-63) ve Eş. (3-4), herhangi bir ortam için elektrostatiğin iki temel diferensiyel denklemidir. Burada dikkat edilmelidir ki, boş uzay geçirgenliği ϵ_0, iki denklemde de açık olarak gözükmemektedir.

Eş. (3-63)'ün integral biçimi, her iki tarafının hacim integrali alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_V \rho_v\, dv \tag{3-64}$$

veya

Boş uzaya olduğu gibi dielektrik ortama da uygulanabilen genelleştirilmiş Gauss Yasası

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (\mathrm{C}). \tag{3-65}$$

Gauss yasasının bir başka biçimi olan Eş. (3-65), ***herhangi bir kapalı yüzey üzerinden elektrik yer değiştirmenin toplam dışarı doğru akısının (veya basitçe, toplam dışarı doğru elektrik akı), yüzeyin kapsadığı toplam serbest yüke eşit olduğunu*** belirtir.

Ortamın dielektrik özellikleri *lineer* ve *yönbağımsız* olduğunda kutuplanma, elektrik alan şiddeti ile doğru orantılıdır ve orantı sabi-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 107

ti, alanın yönünden bağımsızdır. Kutuplanma vektörünü

Elektrik hassasiyet

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \tag{3-66}$$

biçiminde yazarsak, burada χ_e birimsiz bir niceliktir ve ***elektrik hassasiyet***tir. Bir dielektrik ortam, χ_e E'den bağımsız ise lineer ve χ_e uzay koordinatlarından bağımsızsa homojendir. Eş. (3-66)'yı Eş. (3-62)'de yerleştirdiğimizde

Lineer dielektrik ortamın ve homojen dielektrik ortamın tanımı

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \qquad (\mathrm{C/m^2}) \end{aligned} \tag{3-67}$$

elde edilir. Burada

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{3-68}$$

Dielektrik sabiti (bağıl geçirgenlik)

birimsiz bir niceliktir ve ortamın ***dielektrik sabiti*** veya ***bağıl geçirgenlik*** olarak bilinir. $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ katsayısı, ortamın ***mutlak geçirgenliği*** (sıklıkla sadece ***geçirgenlik***)'dir ve metre başına farad (F/m) olarak ölçülür. Havanın dielektrik sabiti 1.00059'dur ve genelde geçirgenliği boş uzayınki ile aynı alınır. Bazı çok rastlanan malzemelerin dielektrik sabitleri Tablo 3-1 ve Ek B-3'de verilmiştir.

ϵ_r'nin uzay koordinatlarının bir fonksiyonu olabileceğine dikkat ediniz. ϵ_r konumdan bağımsız ise ortam ***homojen***dir denir. Bir lineer, homojen ve yönbağımsız ortam, ***basit ortam*** olarak adlandırılır. Basit bir ortamın bağıl geçirgenliği bir sabittir. ***Yönbağımlı*** malzemeler için (kristaller gibi) dielektrik sabiti, elektrik alanın farklı yönleri için farklıdır ve **D** ile **E** farklı yönlere sahiptir.

Basit ortam

TABLO **3-1** BAZI ÇOK RASTLANAN MALZEMELERİN DİELEKTRİK SABİTLERİ VE DİELEKTRİK MUKAVEMETİ

Malzeme	Dielektrik Sabiti	Dielektrik Mukavemeti (V/m)
Hava (atmosfer basıncında)	1.0	3×10^6
Mineral yağlar	2.3	15×10^6
Kağıt	2-4	15×10^6
Polistiren	2.6	20×10^6
Kauçuk	2.3-4.0	25×10^6
Cam	4-10	30×10^6
Mika	6.0	200×10^6

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 108

3-7.1 DİELEKTRİK MUKAVEMET

Bir elektrik alanın, bir dielektrik malzeme içinde bağlı yüklerin küçük yer değiştirmelerine neden olduğunu ve sonuçta kutuplanma oluştuğunu açıklamıştık. Elektrik alan çok güçlü ise, elektronları moleküllerin tamamen dışına çekecektir. Elektrik alan etkisi altında elektronlar hızlanacak, moleküler kafes yapısı ile şiddetli çarpışacak ve malzemede hasar oluşacaktır. Çarpışmalar nedeniyle iyonizasyonun çığ etkisi oluşabilir. Bu durumda malzeme iletken duruma gelecek ve büyük akımların akışına izin verebilecektir. Bu olay ***dielektrik kırılma*** olarak adlandırılır. Dielektrik malzemenin, kırılma olmadan dayanabileceği maksimum elektrik alan şiddeti malzemenin ***dielektrik mukavemeti***dir. Çok kullanılan bazı malzemelerin yaklaşık dielektrik mukavemeti Tablo 3-1'de verilmiştir. Bir malzemenin dielektrik mukavemeti ile dielektrik sabiti karıştırılmamalıdır.

Dielektrik mukavemet

Hatırlanması kolay bir rakam, atmosfer basıncında havanın dielektrik mukavemetidir ve 3 (kV/mm)'dir. Elektrik alan şiddeti bu değeri aştığında, hava kırılmaya uğrar. Kuvvetli iyonizasyon oluşur ve kıvılcım (korona boşalması) bunu izler. Yük sivri uçlarda yoğunlaşmaya meyillidir. Yüksek binaların tepelerine yıldırıma karşı konan metal çubuklar (paratonerler) bu prensiple çalışır. Çok miktarda elektrik yükü taşıyan bir bulut, toprakla bağlantılı yıldırım çubuğu (paratoner) ile donatılmış bir yüksek binaya yaklaştığında, zıt işaretli yükler topraktan elektrik alan şiddetinin en güçlü olduğu çubuğun ucuna doğru çekilirler. Elektrik alan şiddeti, ıslak havanın dielektrik mukavemetini aştığında ise, kırılma oluşur ve çubuğun ucunun yakınındaki hava iyonize olur ve iletken duruma gelir. Sonra, bulut içindeki elektrik yükleri güvenli olarak toprağa iletken yol üzerinden boşalırlar.

Havanın dielektrik mukavemeti (3kV/mm)'dir.

Yıldırım çubuğunun çalışma prensibi

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, elektrik alan şiddeti eğriliği daha yüksek olan bir yüklü iletken yüzeyinin yakınındaki bir noktada daha yüksek değerde olmaya meyillidir.

Bir iletken yüzeydeki elektrik alan şiddeti, en yüksek eğriliğin olduğu noktalarda daha yüksektir.

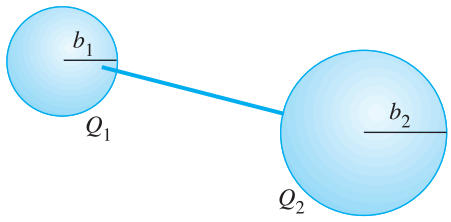
ÖRNEK 3-11

Yarıçapları b_1 ve b_2 ($b_2 > b_1$) olan iki küresel iletken bir iletken tel ile bağlanmıştır. İletkenler arasındaki uzaklık b_2'ye göre çok büyüktür, dolayısıyla, iletken küreler üzerindeki yükleri düzgün dağılmış olarak kabul edebiliriz. Küreler üzerinde Q toplam yükü depolanmıştır. Aşağıdakileri bulunuz:

a) İki küredeki yükleri ve

b) küre yüzeylerindeki elektrik alan şiddetini.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 109



ŞEKİL 3-15 Birbirine bağlı iletken küreler (Örnek 3-11).

ÇÖZÜM

a) Şekil 3-15'e bakarak, iletken kürelerin aynı potansiyelde olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2}$$

veya

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

bulunur. Küreler üzerindeki yükler, yarıçapları ile doğru orantılıdır. Toplam yük Q'ya eşittir, bunu yazarsak

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

ve buradan da

$$Q_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} Q \qquad \text{ve} \qquad Q_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} Q$$

elde ederiz.

b) İletken kürelerin yüzeyindeki elektrik alan şiddetleri ise

$$E_{1n} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2} \qquad \text{ve} \qquad E_{2n} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2}$$

olacaktır. Böylece

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1} \tag{3-69}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan, elektrik alan şiddetleri, yarıçap ile ters orantılıdır ve daha büyük eğriliğe sahip daha küçük küre yüzeyinde daha yüksektir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 110

ÖRNEK 3-12

Bir eş eksenli kablo, elektrik gücü taşımak için kullanıldığında, iç iletkeninin yarıçapı yük akımı tarafından ve kablo boyutları da gerilim ve kullanılan yalıtkan malzemenin tipi tarafından belirlenir. İç iletkenin yarıçapını $r_i = 2$ (mm) ve yalıtkan malzemeyi polistiren kabul ederek, kablonun 10 (kV)'luk bir gerilimde çalışabilmesi için dış iletkenin iç yarıçapı r_o'ı belirleyiniz. Yıldırım ve diğer anormal dış koşullardan kaynaklanan gerilim dalgalanmalarının oluşturacağı kırılmadan kaçınmak için, yalıtkan malzemedeki elektrik alan şiddetinin maksimum değerinin, malzemenin elektrik mukavemetinin %25'ini aşmaması gerekir.

ÇÖZÜM

Tablo 3-1'den, polistirenin dielektrik sabiti ve dielektrik mukavemetinin, sırasıyla, 2.6 ve 20×10^6 (V/m) olduğunu buluruz. Eş. (3-23)'den ise bir ρ_ℓ çizgi yükü nedeniyle oluşan elektrik alan şiddetini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \tag{3-70}$$

İç ve dış iletkenleri arasındaki 10^4 (V)'luk potansiyel farkıyla kablonun çalışabilmesi için

$$10^4 = -\int_{r_o}^{r_i} E_r\, dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0(2.6)} \ln \frac{r_o}{r_i}$$

veya

$$\ln \frac{r_o}{r_i} = \left(\frac{5.2\pi\epsilon_0}{\rho_\ell}\right) \times 10^4 \tag{3-71}$$

olmalıdır. Maksimum elektrik alan şiddetini, 20×10^6'nın %25'i ile sınırlandırmak için ise Eş. (3-70)'den

$$\text{Maks.} \quad E_r = 0.25 \times (20 \times 10^6) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0(2.6) r_i}$$

veya

$$\left(\frac{\rho_\ell}{5.2\pi\epsilon_0}\right) = (0.25 \times 20 \times 10^6) r_i = (5 \times 10^6) \times (2 \times 10^{-3})$$
$$= 10^4$$

eşitliğini yazabiliriz. Yukarıdaki değeri Eş. (3-71)'e yerleştirdiğimizde, $\ln (r_o/r_i) = 1$ veya

$$\ln r_o = 1 + \ln r_i = 1 + \ln (2 \times 10^{-3})$$
$$= 1 - 6.215 = -5.215$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 111

olacaktır. Buradan da

r_o = 0.0054 (m) veya 5.4 (mm) elde ederiz.

■ **ALIŞTIRMA 3.9** Örnek 3-12'deki eş eksenli kabloda polistiren yerine hava olsaydı kablonun izin verilebilen maksimum çalışma gerilimi ne olacaktır? (Maksimum alan şiddetinin, yalıtkan malzemenin dielektrik mukavemetinin % 25'ini aşmaması gerektiği kısıtlamasını kullanınız).

CEVAP: 1.5 (kV).

■ **ALIŞTIRMA 3.10** Hava ile doldurulmuş eş eksenli kablonun, Örnek 3-9'daki gibi iç yarıçapı r_i = 2 (mm) ve çalışma gerilimi 10 (kV) olması istense idi, r_o ne olmalıdır?

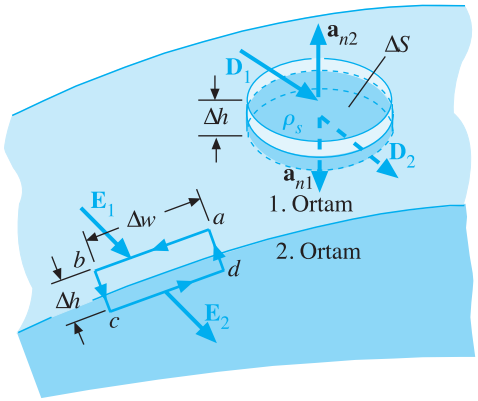
CEVAP: 1.571 (m).

3-8 ELEKTROSTATİK ALANLAR İÇİN SINIR KOŞULLARI

Elektromanyetik problemlerde sıkça farklı fiziksel özellikleri olan ortamların bir arada olduğu durumla karşılaşırız ve iki ortam arasındaki arayüzde alanların birbiri ile ilişkilerini bilmeye ihtiyaç duyarız. Örneğin, bir arayüzü geçerken **E** ve **D** vektörlerinin nasıl değiştiğini belirlemeyi isteyebiliriz. Bir iletken-boş uzay arayüzünde sağlanması gereken sınır koşullarını zaten bilmekteyiz. Bu koşullar Eş. (3-45) ve Eş. (3-46)'da verilmişti. Şimdi, iki genel ortam arasındaki Şekil 3-16'da gösterilen bir arayüzü inceleyeceğiz.

Küçük bir *abcda* yolu oluşturalım. Bu yolun *ab* ve *cd* kenarları, sırasıyla, 1. ortam ve 2. ortamdadır, her ikisi de arayüze paraleldir ve genişlikleri Δw'dır. Eş. (3-7)'yi bu yola uygulayalım. Kenarları $bc = da = \Delta h$ seçip, sıfıra yaklaştırırsak, bu kenarların **E**'nin yol üze-

ŞEKİL 3-16 İki ortam arasındaki arayüz.



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 112

rindeki çizgi integraline olan katkısı ihmal edilebilir. Bu durumda

$$\oint_{abcda} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{E}_1\cdot\Delta\mathbf{w} + \mathbf{E}_2\cdot(-\Delta\mathbf{w}) = E_{1t}\Delta w - E_{2t}\Delta w = 0$$

dır ve böylece

E'nin teğet bileşeni için sınır koşulu

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (\text{V/m}) \tag{3-72}$$

olacaktır. Bu ifadede, **E** ***alanının teğet bileşeninin bir arayüzü geçerken sürekli olduğu*** ifade edilmektedir. 1. ve 2. ortam, sırasıyla, geçirgenliği ϵ_1 ve ϵ_2 olan dielektrikse

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \tag{3-73}$$

yi elde ederiz.

Bir sınırdaki alanların dik bileşenleri arasındaki ilişkiyi bulmak için, üst yüzeyi 1. ortamda ve alt yüzeyi 2. ortamda olan küçük bir hap kutusunu Şekil 3-16'da gösterildiği gibi oluştururuz. Yüzeylerin alanı ΔS ve hap kutusunun yüksekliği sıfıra yaklaşan Δh'dir. Eş. (3-65)'deki Gauss yasasını uyguladığımızda

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} &= (\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{a}_{n2} + \mathbf{D}_2\cdot\mathbf{a}_{n1})\Delta S \\ &= \mathbf{a}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta S \\ &= \rho_s\Delta S\end{aligned} \tag{3-74}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\mathbf{a}_{n2} = -\mathbf{a}_{n1}$ ilişkisini kullandık. $\mathbf{a}_{n1}$ ve $\mathbf{a}_{n2}$ birim vektörleri, sırasıyla, 1. ve 2. ortamdan *dışarı doğru* birim normal vektörlerdir. Eş. (3-74)'ü kullanarak

$$\mathbf{a}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \tag{3-75a}$$

veya

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (\text{C/m}^2) \tag{3-75b}$$

yazabiliriz. Burada referans birim normal, 2. ortamdan dışarı doğrudur.

D'nin normal bileşeni için sınır koşulu

Eş. (3-75b), **D** ***alanının normal bileşeninin, yüzey yük yoğunluğu olan bir sınırı geçerken süreksiz olduğunu ve bu süreksizliğin miktarının yüzey yük yoğunluğuna eşit olduğunu*** söylemektedir. 2. ortam bir iletken ise $\mathbf{D}_2 = 0$'dır ve Eş. (3-75b) aşağıdaki biçimi alır.

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s. \tag{3-76}$$

1. ortam boş uzay olduğunda, üstteki denklem Eş. (3-46)'ya dönüşür.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 113

İki iletken, serbest yükleri olmayan bir arayüzde temas halinde ise $\rho_s = 0$'dır ve

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{3-77}$$

veya

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_1 E_{2n} \tag{3-78}$$

olacaktır. Elde ettiğimiz statik elektrik alanların sağlaması gereken sınır koşulları aşağıda tekrar verilmiştir.

Elektrostatik alanlar için sınır koşulları

Teğet bileşenler: $E_{1t} = E_{2t}$ (3-79)

Normal bileşenler: $\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$. (3-80)

■ **ALIŞTIRMA 3.11** Dielektrik sabiti ϵ_{r1} ve ϵ_{r2} olan iki mükemmel dielektrik arasındaki arayüzde elektrik potansiyelin sağlaması gereken sınır koşullarını belirtiniz ve açıklayınız.

CEVAP: $\epsilon_1 \partial V_1/\partial n = \epsilon_{r2} \partial V_2/\partial n$, $V_1 = V_2$.

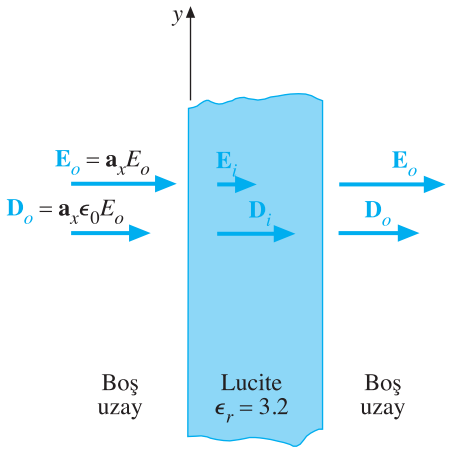
ÖRNEK 3-13

Bir lucite tabaka ($\epsilon_r = 3.2$) boş uzaydaki $\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_x E_o$ düzgün elektrik alanına dik olarak yerleştirilmiştir. Lucite içerisindeki $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{D}_i$ ve $\mathbf{P}_i$'yi belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Lucite tabakanın varlığının baştaki düzgün elektrik alan $\mathbf{E}_o$'ı bozmadığını varsayalım. Şekil 3-17'de problem betimlenmiştir. Arayüzler

ŞEKİL 3-17 Düzgün bir elektrik alandaki lucite tabaka (Örnek 3-13).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 114

elektrik alana dik oldukları için, sadece normal alan bileşenlerinin göz önüne alınması yeterlidir. Problemde serbest yük yoktur.

Soldaki arayüz için Eş. (3-77)'deki sınır koşullarını uygularsak

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x D_i = \mathbf{a}_x D_o$$

veya

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \epsilon_0 E_o$$

olacaktır. Elektrik akı yoğunluğunda, arayüzü geçerken değişim yoktur. Lucite tabaka içindeki elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_i = \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r}\mathbf{D}_i = \mathbf{a}_x \frac{E_o}{3.2}$$

dir. Böylece lucite tabakanın etkisi, elektrik alanda bir azalmadır. Lucite tabaka dışında kutuplanma vektörü sıfırdır ($\mathbf{P}_o = 0$). Tabaka içerisindeki kutuplanma ise aşağıda verildiği gibi hesaplanır.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{D}_i - \epsilon_0 \mathbf{E}_i = \mathbf{a}_x \left(1 - \frac{1}{3.2}\right)\epsilon_0 E_o$$

$$= \mathbf{a}_x 0.6875 \epsilon_0 E_o \qquad (\mathrm{C/m^2}).$$

Sağdaki arayüze Eş. (3-77)'deki sınır koşullarının benzer bir şekilde uygulanması ile lucite tabakanın sağındaki boş uzayda baştaki $\mathbf{E}_o$ ve $\mathbf{D}_o$'ı elde edeceğimiz açıktır.

Baştaki elektrik alan, düzgün olmayan $\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_x E(y)$ biçiminde bir alan olsa, problemin çözümü değişir mi?

ÖRNEK 3-14

Geçirgenlikleri ϵ_1 ve ϵ_2 olan iki dielektrik ortam, Şekil 3-18'de gösterildiği gibi yüksüz bir sınır ile ayrılmıştır. 1. ortamdaki elektrik alan şiddetinin, P_1 noktasındaki genliği E_1 ve normalle yaptığı açı α_1'dir. 2. ortamdaki P_2 noktasında, elektrik alan şiddetinin genliğini ve yönünü belirleyiniz.

ÇÖZÜM

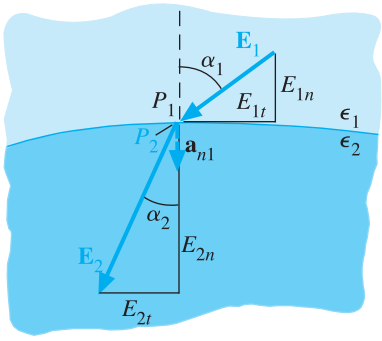
İki bilinmeyen E_{2t} ve E_{2n} için çözmemiz gereken iki eşitliğe ihtiyacımız vardır. E_{2t} ve E_{2n} bulunduktan sonra, E_2 ve α_2 doğrudan elde edilecektir. Eş. (3-72) ve Eş. (3-77)'yi kullanarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1 \tag{3-81}$$

ve

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1. \tag{3-82}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 115



ŞEKİL 3-18 İki dielektrik ortam arasındaki arayüzde sınır koşulları (Örnek 3-14).

Eş. (3-81), Eş. (3-82)'ye bölündüğünde

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tag{3-83}$$

denklemini elde ederiz. E_2'nin genliği ise

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \alpha_2)^2 + (E_2 \cos \alpha_2)^2}$$
$$= \left[(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

veya

$$E_2 = E_1 \left[\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3-84}$$

olacaktır. Şekil 3-18'i inceleyerek, ϵ_1'in ϵ_2'den daha büyük mü yoksa daha küçük mü olduğunu söyleyebilir misiniz?

2. ortam iletkense, statik koşullar altında 2. ortamda elektrik alan olmayacaktır ve sınırda $\mathbf{E}_1$'in sadece normal bileşeni bulunur ($\alpha_1 = 0$). Bu durumda $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_n E_{1n} = \mathbf{a}_n D_{1n}/\epsilon_1 = \mathbf{a}_n \rho_s/\epsilon_1$'dir. Burada ρ_s yüzey yük yoğunluğu ve $\mathbf{a}_n$ ise iletken yüzeyinden dışarı doğru olan normal birim vektördür.

■ **ALIŞTIRMA 3.12** Dielektrik sabitleri $\epsilon_{r1} = 3$ ve $\epsilon_{r2} = 2$ olan iki homojen, yönbağımsız dielektrik ortamın xy-düzlemi ile ayrıldığını kabul edelim. Bir ortak noktada $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y 5 - \mathbf{a}_z 4$'tür. $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_2$, α_1 ve α_2'yi bulunuz.

CEVAP: $\mathbf{D}_2 = 2\epsilon_0 \mathbf{E}_2 = 2\epsilon_0 (\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y 5 - \mathbf{a}_z 6)$, 51.9°, 40.4°.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 116

TEKRAR SORULARI

S.3-11 Statik koşullar altında, iyi bir iletkenin içinde neden serbest yükler yoktur?

S.3-12 *Kutuplanma vektörü*nü tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.3-13 Kutuplanma yük yoğunlukları nelerdir? $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ ve $\nabla \cdot \mathbf{P}$ için SI birimleri nelerdir?

S.3-14 *Basit ortamın* anlamı nedir?

S.3-15 *Elektrik yerdeğiştirme vektörünü* tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.3-16 *Elektrik geçirgenliği* tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.3-17 Bir dielektrik malzemenin *dielektrik sabiti* ve *dielektrik mukavemeti* arasındaki fark nedir?

S.3-18 Paratonerlerin çalışma prensibini açıklayınız.

S.3-19 Dielektrik sabitleri ϵ_{r1} ve ϵ_{r2} olan iki farklı dielektrik ortam arasındaki arayüzde **E** ve **D** için genel sınır koşulları nelerdir?

S.3-20 Bir iletken ve geçirgenliği ϵ olan bir dielektrik arasındaki arayüzde elektrostatik alanlar için sınır koşulları nelerdir?

S.3-21 İki farklı dielektrik ortam arasındaki bir arayüzde elektrostatik potansiyel için sınır koşulları nelerdir?

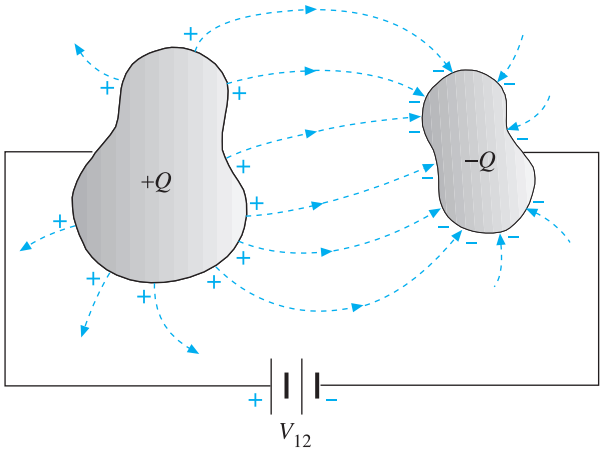
NOTLAR

1. Statik koşullar altında bir iletken içinde **E** alanı sıfırdır.
2. Statik koşullar altında, bir iletkenin yüzeyi bir eşpotansiyel yüzeydir ve **E** alanı her yerde yüzeye diktir.
3. İki farklı dielektrik ortam arasındaki bir arayüzde, elektrik potansiyel süreklidir.
4. Bir ortamın dielektrik sabiti ϵ_r ile ortamın geçirgenliği ϵ'u karıştırmayınız. Birincisi boyutsuzdur, ikincisinin SI birimi (F/m)'dir.

3-9 KAPASİTANS VE KAPASİTÖRLER

Kısım 3-6'da, bir statik elektrik alan içindeki bir iletkenin bir eşpotansiyel cisim olduğunu ve bir iletken üzerinde kalan yüklerin yüzey üzerine kendilerini, içerdeki elektrik alanı sıfırlayacak biçimde dağıttığını anlamıştık. Bir Q yükünün oluşturduğu potansiyeli V olarak alalım. k çarpanlık toplam yük artışı, yük dağılımını etkilemeden, her yerdeki yüzey yük yoğunluğunu aynı çarpan kadar artıracaktır. Çünkü iletken statik durumda bir eşpotansiyel cisim olarak kalacaktır. Eş. (3-39)'dan şu sonuca ulaşabiliriz: Bir izole edilmiş iletkenin potansiyeli, üzerindeki toplam yük ile doğru orantılıdır. Bu gerçek, V'nin bir

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 117



ŞEKİL 3-19 İki-iletkenlikli bir kapasitör.

k çarpanı ile artışının, $\mathbf{E} = -\nabla V$'yi k çarpanı kadar artırmasından da görülebilir. Fakat Eş. (3-46)'dan $\mathbf{E} = \mathbf{a}_n \rho_s / \epsilon_0$ denklemini hatırlarsak, bunu ρ_s'nin artışı izleyecek ve sonuçta toplam yük Q, k çarpanı kadar artacaktır. Böylece Q/V oranı değişmez kalacaktır.

$$Q = CV \tag{3-85}$$

biçiminde yazarsak C orantı sabiti izole edilmiş iletken cismin ***kapasitansı*** olarak bilinir. Kapasitansın SI birimi volt başına düşen Coulomb veya farad (F)'dır.

Pratikte oldukça önemli olan ***kapasitör*** (veya ***sığaç***), iki iletkenin birbirinden boş uzay veya bir dielektrik ortamla ayrılmasıyla oluşmuştur. İletkenler, Şekil 3-19'da gösterildiği gibi herhangi bir şekilde olabilir. Bir d-c gerilim kaynağı, iletkenler arasına bağlandığında, bir yük aktarımı oluşur, sonuçta iletkenlerin birinde $+Q$ yükü, diğerinde $-Q$ yükü toplanır. Şekil 3-19'da verildiği gibi, elektrik alan çizgileri artı yüklerden kaynaklanır ve eksi yüklerde sonlanır. Dikkat edersek, alan çizgileri eşpotansiyel yüzeyler olan iletken yüzeylerine diktir. V'yi iki iletken arasındaki potansiyel farkı V_{12} olarak alırsak, burada Eş. (3-85)'i aşağıdaki gibi uygulayabiliriz:

Kapasitans tanımı

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad \text{(F)}. \tag{3-86}$$

Bir kapasitörün kapasitansı, iki iletkenli sistemin fiziksel bir özelliğidir. Kapasitörün geometrisine ve ortamın geçirgenliğine bağlıdır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 118

İki iletken arasındaki C kapasitansı, aşağıdaki yöntem izlenerek ve Eş (3-86) kullanılarak belirlenir.

C'nin belirlenmesi için yöntem

1. Verilen geometri için uygun bir koordinat sistemi seçilir.
2. İletkenler üzerinde $+Q$ ve $-Q$ yükleri olduğu varsayılır.
3. Eş. (3-76), Gauss yasası veya başka bağıntılar kullanılarak Q'dan $\mathbf{E}$ bulunur.
4. V_{12} gerilimi $-Q$ taşıyan iletkenden $+Q$ taşıyan diğerine
$$V_{12} = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$
integrali alınarak bulunur.
5. Q/V_{12} oranından C bulunur.

ÖRNEK 3-15

Bir paralel plakalı kapasitör, alanları S olan, birbirinden d kadar uzaklıkta iki paralel iletken plakadan oluşmuştur. Plakalar arasındaki boşluk, geçirgenliği ϵ olan bir dielektrik ile doldurulmuştur. Kapasitansı belirleyiniz.

ÇÖZÜM

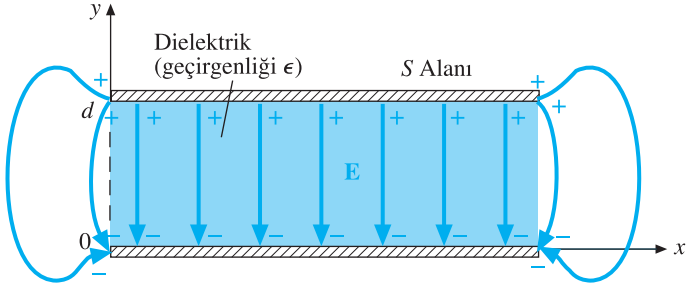
Kapasitörün ara kesiti Şekil 3-20'de gösterilmiştir. Burada kullanılacak uygun koordinat sistemi Kartezyen koordinat sistemidir. Yukarıda verilen yöntemi izleyerek $+Q$ ve $-Q$ yüklerini, sırasıyla, üst ve alt iletken plakalara yerleştirelim. Yüklerin, düzgün olarak $+\rho_s$ ve $-\rho_s$ yüzey yoğunlukları ile iletken plakalar üzerine dağılmış olduklarını kabul edelim. Böylece

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

olur ve Eş. (3-76)'dan $\mathbf{E}$'yi aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{\rho_s}{\epsilon} = -\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S}.$$

ŞEKİL 3-20 Bir paralel plakalı kapasitörün ara kesiti (Örnek 3-15).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 119

Plaka kenarlarındaki elektrik alan saçaklanması ihmal edilirse, yukarıdaki **E** alanı dielektrik içinde sabittir. Şimdi

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_0^d \left(-\mathbf{a}_y \frac{Q}{\epsilon S}\right)\cdot(\mathbf{a}_y\, dy) = \frac{Q}{\epsilon S}d$$

yazarsak, buradan *bir paralel plakalı kapasitör için kapasitans*

Bir paralel plakalı kapasitörün kapasitansı

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \epsilon\frac{S}{d} \tag{3-87}$$

biçiminde elde edilir ve Q ve V_{12}'den bağımsızdır.

■ **ALIŞTIRMA 3.13** Üst ve alt plakalar arasındaki potansiyel farkını V_{12} kabul edip, daha sonra Q'yu hesaplayıp Q/V_{12} oranını bularak, Şekil 3-20'deki paralel plakalı kapasitörün kapasitansını tekrar belirleyiniz.

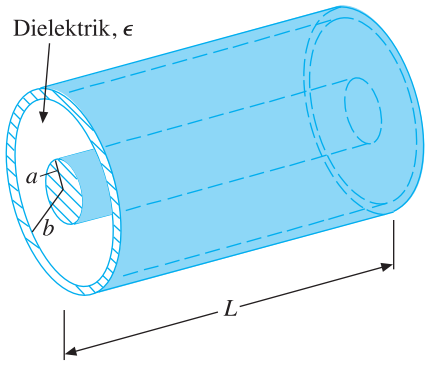
ÖRNEK 3-16

Şekil 3-21'de gösterilen silindirik kapasitör, a yarıçaplı bir iç iletkenden ve iç yarıçapı b olan bir dış iletkenden oluşmuştur. İletkenler arasındaki boşluk, geçirgenliği ϵ olan bir dielektrik ile doldurulmuştur ve kapasitörün boyu L'dir. Bu kapasitörün kapasitansını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Bu problemde silindirik koordinatları kullanacağız. Öncelikle, $+Q$ ve $-Q$ yüklerinin, sırasıyla, iç iletkenin yüzeyinde ve dış iletkenin iç yüzeyinde olduğunu varsayacağız. Dielektrik içindeki **E** alanı, dielektrik içindeki ($a < r < b$ bölgesi) bir silindirik Gauss yüzeyine Gauss yasa-

ŞEKİL 3-21 Silindirik kapasitör (Örnek 3-16 ve Örnek 3-19).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 120

sının uygulanması ile elde edilebilir. Burada $\rho_\ell = Q/L$'dir. Eş. (3-23)'ü kullanırsak

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \tag{3-88}$$

olacaktır. Yine, iletken kenarlarındaki saçaklanma etkisini ihmal ettik. İç ve dış iletkenler arasındaki potansiyel farkı

$$V_{ab} = -\int_{r=b}^{r=a} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_b^a \left(\mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right)\cdot(\mathbf{a}_r\, dr)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3-89}$$

dir ve böylece *bir silindirik kapasitör için* kapasitans

Bir silindirik kapasitörün kapasitansı

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{3-90}$$

biçiminde elde edilir.

■ **ALIŞTIRMA 3.14** Yeryüzünü, etrafı hava ile çevrili büyük bir iletken küre (yarıçap = 6.37×10^3 km) olarak kabul ederek, sonsuzu referans alıp kapasitansını bulunuz.

CEVAP: 7.08×10^{-4} (F).

3-10 ELEKTROSTATİK ENERJİ VE KUVVET

Kısım 3-5'de, bir elektrik alan içindeki bir noktadaki elektrik potansiyelin, bir birim pozitif yükün sonsuzdan (sıfır potansiyel referansı) o noktaya getirilmesi için gerekli olan iş olduğunu gösterdik. Bir Q_2 yükünün sonsuzdan boş uzaydaki bir Q_1 yükünün oluşturduğu alana karşı bir R_{12} uzaklığına getirilmesi (ivmelenmeden olmalıdır ki kinetik enerji ve yayılma etkisi ihmal edilebilsin) için yapılması gereken iş miktarı

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} \tag{3-91}$$

olacaktır. Elektrostatik alanlar korunumlu olduğu için W_2 işi Q_2'nin izlediği yoldan bağımsızdır. Eş. (3-91)'in diğer bir biçimi

$$W_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_1 \tag{3-92}$$

dir. Bu iş, iki yüklü bu sistemde potansiyel enerji olarak saklanır. Eş. (3-91) ve Eş. (3-92)'yi bir arada aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2). \tag{3-93}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 121

Şimdi, bir başka Q_3 yükünün sonsuzdan, Q_1 yükünden R_{13} ve Q_2 yükünden R_{23} uzakta olan bir noktaya getirildiğini düşünelim. Ek bir iş yapılmasına ihtiyaç duyulacaktır ve bu ek iş

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \tag{3-94}$$

olarak yazılabilir. Eş. (3-94)'deki ΔW ve Eş. (3-91)'deki W_2'nin toplamı, W_3 potansiyel enerjisidir, Q_1, Q_2 ve Q_3 yük sisteminde depolanır.

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right) \tag{3-95}$$

W_3'ü aşağıdaki biçimde tekrar yazabiliriz:

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{2} \left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right) \right] \\ &= \tfrac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3). \end{aligned} \tag{3-96}$$

Eş. (3-96)'da Q_1 noktasındaki V_1 potansiyeli, Q_2 ve Q_3 yüklerinden kaynaklanır ve iki yük durumundaki Eş. (3-92)'de verilen V_1'den farklıdır. Aynı şekilde, üç yük topluluğunda, V_2 ve V_3, sırasıyla, Q_2 ve Q_3'deki potansiyellerdir.

Bu işlemi, diğer yükleri getirmek üzere genişlettiğimizde, durağan olan N tane ayrık nokta yükün oluşturduğu bir sistemin potansiyel enerjisi için aşağıdaki genel ifadeye erişiriz. (W_e ifadesindeki e alt indisinin amacı, enerjinin elektrik doğasını göstermektir.)

Ayrık nokta yükler sisteminde depolanan elektrik enerjisi

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \quad \text{(J)}. \tag{3-97}$$

Burada V_k, Q_k noktasında diğer bütün yüklerden kaynaklanan elektrik potansiyeldir.

Enerji için SI birimi ***joule*** **(J)**'dür. Temel parçacıkların fiziği çalışmaları için bu birim çok büyüktür ve daha küçük bir birim olan ***elektron-volt*** **(eV)**'nin kullanılması çok daha uygundur. Bir elektron-volt, bir voltluk bir potansiyel farkına karşı bir elektronu hareket ettirmek için gereken enerji veya iştir.

Joule ve elektron-volt arasındaki ilişki

$$1 \text{ (eV)} = (1.60 \times 10^{-19}) \times 1 = 1.60 \times 10^{-19} \text{ (J)}. \tag{3-98}$$

(eV) cinsinden enerji, temelde, birim elektronik yük başına (J)'dür.

■ **ALIŞTIRMA 3.15** Çok güçlü yüksek enerji parçacık hızlandırıcısının proton hüzmesinin 2 (TeV)'luk kinetik enerjisini joule'e çeviriniz.

CEVAP: 3.20×10^{-7} (J).

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 122

ALIŞTIRMA 3.16 -1 (μC), 2 (μC) ve 3 (μC)'luk üç nokta yükü, boş uzayda, bir kenarı 10 (cm) olan eşkenar üçgenin köşelerine yerleştirmek için gerekli olan enerjiyi belirleyiniz.

CEVAP: 0.09 (J).

ÖRNEK 3-17

Hacim yük yoğunluğu ρ_v ve yarıçapı b olan bir düzgün küresel yük yoğunluğunu oluşturmak için gerekli enerjiyi bulunuz.

ÇÖZÜM

Simetri nedeniyle, küresel yükün dR kalınlığında küresel katmanların ardışık olarak bir araya getirilmesinden oluştuğunu düşünmek en kolay yaklaşımdır. Şekil 3-22'de gösterilen bir R yarıçapındaki potansiyel

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\epsilon_0 R}$$

olacaktır. Burada Q_R, R yarıçaplı bir kürenin içindeki toplam yüktür ve aşağıda verilmiştir.

$$Q_R = \rho_v \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

dR kalınlığındaki küresel bir katmandaki diferensiyel yük

$$dQ_R = \rho_v 4\pi R^2\, dR$$

dir ve dQ_R'yi getirmek için gerekli olan iş veya enerji ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$dW_e = V_R\, dQ_R = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho_v^2 R^4\, dR.$$

Böylece, b yarıçaplı ve ρ_v yük yoğunluklu bir düzgün küresel yükün oluşturulması için gerekli olan iş veya enerji

$$W_e = \int dW_e = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho_v^2 \int_0^b R^4\, dR = \frac{4\pi\rho_v^2 b^5}{15\epsilon_0} \quad \text{(J)} \qquad (3\text{-}99)$$

bulunur. Bu enerji

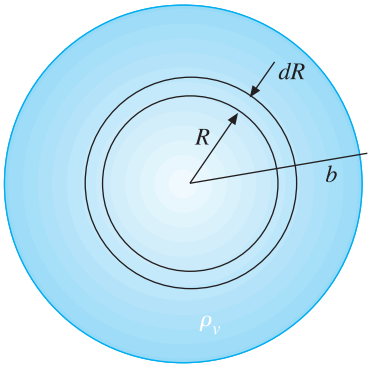
$$Q = \rho_v \frac{4\pi}{3} b^3$$

toplam yükü cinsinden

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b} \quad \text{(J)} \qquad (3\text{-}100)$$

olarak da yazılabilir. Eş. (3-100), enerjinin, toplam yükün karesi ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir. Şekil 3-22'deki küresel yük, örneğin bir elektron bulutu olabilir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 123



ŞEKİL 3-22 Düzgün bir küresel yükün oluşturulması (Örnek 3-17).

Bir sürekli yük dağılımı yoğunluğu ρ_v durumunda, Eş. (3-97)'deki ayrık yükler için verilen W_e formülünde değişiklik yapılmalıdır. Ayrı bir ispat yapmaksızın, Q_k'yı $\rho_v\,dv$ ile ve toplam işaretini integralle değiştirerek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Sürekli yük dağılımında depolanan elektrik enerjisi

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho_v V\,dv \qquad \text{(J)}. \tag{3-101}$$

Eş. (3-101)'de, V, hacim yük yoğunluğu ρ_v'nin olduğu noktadaki potansiyel ve V' ise ρ_v'nin varolduğu bölgenin hacmidir. Dikkat edersek, Eş (3-101)'deki W_e, makroskopik yüklerin dağılımını oluşturmak için gerekli işi (öz-enerji) içermektedir. Çünkü, bu enerji, çok küçük yük elemanının, diğer çok küçük yük elemanları ile etkileşiminin enerjisidir.

3-10.1 ALAN NİCELİKLERİ CİNSİNDEN ELEKTROSTATİK ENERJİ

Eş. (3-101)'deki bir yük yoğunluğunun elektrostatik enerji ifadesi, kaynak yük yoğunluğu ρ_v ve potansiyel fonksiyonu V'yi içerir. Sıklıkla, ρ_v'yi ayrı olarak bilmeksizin, W_e'nin alan nicelikleri $\mathbf{E}$ ve/veya $\mathbf{D}$ cinsinden bir ifadesini kullanmak daha uygundur. Eş. (3-101)'de ρ_v yerine $\nabla\cdot\mathbf{D}$'yi yerleştirerek

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} (\nabla\cdot\mathbf{D})V\,dv \tag{3-102}$$

elde ederiz. Burada Eş. (2-114)'teki vektör özdeşliğini kullanabiliriz (Problem P.2-25).

$$\nabla\cdot(V\mathbf{D}) = V\nabla\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\nabla V \tag{3-103}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 124

Şimdi Eş. (3-102)'yi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \nabla\cdot(V\mathbf{D})\,dv - \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\nabla V\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{S'} V\mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_n\,ds + \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv. \qquad (3\text{-}104)$$

Burada ıraksama teoremi kullanılarak birinci hacim integrali kapalı bir yüzey integraline dönüştürülmüş ve ikinci hacim integralinde $-\nabla V$ yerine $\mathbf{E}$ yerleştirilmiştir. V' bütün yükleri içeren herhangi bir hacim olduğundan, R yarıçaplı çok büyük bir küre olarak seçilebilir. $R \to \infty$ durumunda, elektrik potansiyel V ve elektrik yerdeğiştirme $\mathbf{D}$'nin genliği en azından, sırasıyla, $1/R$ ve $1/R^2$ ile düşmektedir.[1] Sınırlayan yüzeyin alanı S' ise R^2 ile artmaktadır. Böylece Eş. (3-104)'deki yüzey integrali en azından $1/R$ ile azalmakta ve $R \to \infty$ iken sıfıra gitmektedir. Sonuçta, sadece Eş. (3-104)'ün sağındaki ikinci integral kalacaktır.

E ve D cinsinden elektrik enerji

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv \qquad \text{(J)}. \qquad (3\text{-}105)$$

Bir lineer ve yönbağımsız ortam için $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ilişkisini kullanırsak, W_e'yi sadece $\mathbf{E}$ cinsinden yazabiliriz.

E ve ϵ cinsinden elektrik enerji

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \epsilon E^2\,dv \qquad \text{(J)}. \qquad (3\text{-}106)$$

Aynı zamanda, hacim integrali toplam elektrostatik enerjiye eşit olan bir ***elektrostatik enerji yoğunluğu*** w_e'yi tanımlayabiliriz.

$$W_e = \int_{V'} w_e\,dv \qquad (3\text{-}107)$$

buradan

$$w_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad (\text{J/m}^3) \qquad (3\text{-}108)$$

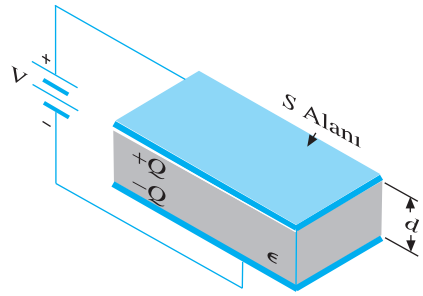
olacaktır.

ÖRNEK 3-17

Alanı S ve aralarındaki uzaklık d olan Şekil 3-23'deki paralel plakalı kapasitör, V gerilimi ile yüklenmiştir. Dielektriğin geçirgenliği ϵ'dur. Depolanan elektrostatik enerjiyi bulunuz.

[1] Nokta yük için $V \propto 1/R$ ve $D \propto 1/R^2$; dipol için $V \propto 1/R^2$ $D \propto 1/R^3$ geçerlidir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 125



ŞEKİL 3-23 Paralel plakalı kapasitör.

ÇÖZÜM

Şekilde gösterildiği gibi d-c kaynak (pil) bağlandığında, üst ve alt plakalar, sırasıyla artı ve eksi yüklenir. Kenarlardaki alan saçaklanması ihmal edilirse, dielektrik içindeki elektrik alan düzgün (plaka üzerinde) ve sabittir (dielektrik boyunca). Genliği ise

$$E = \frac{V}{d}$$

ye eşittir. Eş. (3-106)'yı kullanırsak

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2}\left(\epsilon\frac{S}{d}\right)V^2 \quad (3\text{-}109)$$

olarak bulunur. Son ifadedeki parantez içindeki $\epsilon S/D$ ifadesi paralel plakalı kapasitörün kapasitansıdır (bkz. Eş. (3-87)). Bu durumda

Bir kapasitörde depolanan elektrik enerji

$$W_e = \tfrac{1}{2}CV^2 \quad \text{(J)} \qquad (3\text{-}110)$$

bulunur. Bundan sonraki örnek, Eş. (3-110) ve Eş. (3-106)'nın beraber kullanılması ile kapasitansın nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

ÖRNEK 3-19

Şekil 3-21'de gösterilen silindirik kapasitörün kapasitansını Eş. (3-106) ve Eş. (3-110)'daki enerji formüllerini kullanarak bulunuz. Kapasitörün uzunluğu L, iç iletkeninin yarıçapı a, dış iletkeninin iç yarıçapı b ve dielektriğin geçirgenliği ϵ'dur.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 126

ÇÖZÜM

Gauss yasasını uygulayalım.

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r E_r = \mathbf{a}_r \frac{Q}{2\pi\epsilon L r}, \qquad a < r < b$$

Eş. (3-106)'dan dielektrik bölgede depolanan elektrostatik enerjiyi aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$W_e = \frac{1}{2}\int_a^b \epsilon \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L r}\right)^2 (L2\pi r\, dr)$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{3-111}$$

Diğer taraftan, W_e'yi C kapasitansı cinsinden de yazabiliriz. Eş. (3-110) ve Eş. (3-111)'i birbirine eşitleyelim.

$$W_e = \frac{C}{2}\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Buradan C'yi çözersek

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ifadesini elde ederiz, bu da Eş. (3-90)'da verilen ile aynıdır.

■ **ALIŞTIRMA 3.17** Kapasitansları 20 (μF) ve 40 (μF) olan iki kapasitör 60 (V)'luk bir kaynağa seri biçimde bağlanmıştır. Her bir kapasitörde depolanan enerjiyi hesaplayınız.

CEVAP: 16 (mJ), 8 (mJ).

3-10.2 ELEKTROSTATİK KUVVET

Coulomb yasası iki nokta yük arasındaki kuvvet ile ilgilidir. Yüklü cisimlerden oluşan daha karmaşık bir sistemde, cisimlerden birine diğer cisimlerin yükleri nedeniyle etkiyen kuvvetin belirlenmesi işlemi çok bezdirici olabilir. Yüklenmiş paralel plakalı bir kapasitörün plakaları arasındaki kuvveti bulmak gibi basit bir problemde dahi durum böyledir. Şimdi, bir yüklü sistem içindeki bir cismin üzerindeki kuvveti, sistemin elektrostatik enerjisinden hesaplamak için bir yöntemi tartışacağız. Bu yöntem, ***hayali yer değiştirme ilkesine*** dayanır.

Dış dünya ile ilgisi olmayan birbirinden ayrılmış hem yüklü iletken hem de dielektrik cisimlerden oluşan bir izole sistemi göz önüne alalım. Cisimler üzerindeki yükler sabittir. Elektrik kuvvetlerin ci-

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 127

simlerden birisinin yerini bir $d\ell$ diferensiyel uzaklığı (hayali yer değiştirme) kadar değiştirdiğini düşünelim. *Sistem tarafından* yapılan mekanik iş

$$dW = \mathbf{F}_Q \cdot d\ell \tag{3-112}$$

olacaktır. Burada $\mathbf{F}_Q$, sabit yük koşulu altında cisim üzerine etkiyen toplam elektrik kuvvetidir. Dışarıdan enerji kaynağı olmayan izole bir sistemimiz olduğu için, bu mekanik iş, depolanan elektrostatik enerjinin harcanması pahasına yapılmış olmalıdır.

$$dW = -dW_e = \mathbf{F}_Q \cdot d\ell. \tag{3-113}$$

Kısım 2-5'deki Eş. (2-51)'den, bir skaların $d\ell$ kadar konum değişiminden kaynaklanan diferensiyel değişimi, skaların gradyantı ile $d\ell$'nin nokta çarpımıdır ve aşağıda verilmiştir.

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\ell. \tag{3-114}$$

$d\ell$ gelişigüzel seçildiği için, Eş. (3-113) ve Eş. (3-114)'ü karşılaştırarak aşağıdaki ilişkiyi yazabiliriz:

Yüklü cisimler üzerindeki elektrostatik kuvvetin hayali yer değiştirme yöntemi ile belirlenmesi

$$\boxed{\mathbf{F}_Q = -\nabla W_e \qquad \text{(N)}.} \tag{3-115}$$

Üç-boyutlu uzayda, (3-115)'deki vektör eşitliği, gerçekte üç eşitlik demektir. Örneğin, Kartezyen koordinatlarda x-yönündeki kuvvet

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \tag{3-116}$$

olarak yazılır. Diğer yönler için de benzer denklemler yazılabilir.

ÖRNEK 3-20

Yüklü paralel plakalı bir kapasitörün iletken plakalarındaki kuvveti belirleyiniz. Plakaların alanları S'dir ve birbirinden x kadar uzaklıkta, hava ile ayrılmıştır.

ÇÖZÜM

Plakalar üzerinde sabit $\pm Q$ yükleri olduğunu kabul edelim ve Eş. (3-110)'dan depolanan elektrik enerjiyi yazalım.

$$W_e = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV. \tag{3-117}$$

Saçaklanma etkisini ihmal edersek, plakalar arasında aşağıdaki sabit elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}$ var olacaktır:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_x \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = -\mathbf{a}_x \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \tag{3-118}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 128

Üst ve alt plakalar arasındaki potansiyel farkı

$$V = -\int_{\text{alt plaka}}^{\text{üst plaka}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x \, dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} x \tag{3-119}$$

dir. Eş. (3-19)'daki V'yi Eş. (3-117)'de yerleştirip, Eş. (3-116)'yı kullandığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$(F_Q)_x = -\frac{Q}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}. \tag{3-120}$$

Eş. (3-120)'deki eksi işareti, kuvvetin, x'in artma yönüne ters yönde olduğunu göstermektedir.

TEKRAR SORULARI

S.3-22 *Kapasitans* ve *kapasitörü* tanımlayınız.
S.3-23 Plakaları d kalınlığında ve dielektrik sabiti ϵ_r olan bir ortam ile ayrılmış, S alanlı bir paralel plakalı kapasitörün kapasitans formülünü yazınız.
S.3-24 Bir *elektron-volt*'un tanımı nedir? Bir joule ile karşılaştırınız.
S.3-25 **E** cinsinden elektrostatik enerjinin ifadesini yazınız.
S.3-26 *Hayali yer değiştirme yönteminin* anlamını ve kullanımını tartışınız.

NOTLAR

1. Bir kapasitörün kapasitansı, iletkenler üzerindeki yükten veya iletkenler arasındaki potansiyel farkından bağımsızdır.
2. Ayrık yüklerin oluşturduğu bir sistemde depolanan elektrostatik enerji artı veya eksi olabilir.
3. Eş. (3-105)'deki enerji formülü genel bir ortam için geçerlidir, fakat Eş. (3-106)'daki formül sadece doğrusal ve yönbağımsız bir ortam için geçerlidir.
4. Eş. (3-110)'daki depolanan elektrostatik enerji formülü, sadece paralel plakalı kapasitör için değil, aynı zamanda her iki-iletkenli sistem için de geçerlidir.

3-11 ELEKTROSTATİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümün bundan önceki kısımlarında, verilen bir yük dağılımı için, elektrik alan şiddeti, elektrik potansiyel ve elektrik akı yoğunluğunun belirlenmesi yöntemleri ile uğraştık. Birçok pratik problemde, her yerde gerçek yük dağılımı bilinmeyebilir ve geliştirdiğimiz formüller doğrudan uygulanamayabilir. Örneğin, uzayda ayrık noktalarda yükler ve bazı iletken cisimlerin potansiyelleri verilmiş ise, iletken

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 129

cisimler üzerindeki yüzey yüklerinin dağılımını ve/veya uzaydaki elektrik alan şiddetini bulmak oldukça zordur. Bu bölümde, iletken/boş uzay (veya dielektrik) sınırlarındaki koşulları verilen problemlerin belli bazı çözüm yöntemlerini tartışacağız. Bu tip problemler ***sınır değer problemleri*** olarak adlandırılırlar. Önce, elektrostatik durumla ilgili elektrik potansiyel diferensiyel denklemlerini elde edeceğiz.

3-11.1 POISSON VE LAPLACE DENKLEMLERİ

Kısım 3-7'de, Eş. (3-63) ve Eş. (3-4)'ün, herhangi bir ortam için elektrostatiğin iki temel diferensiyel denklemi olduğunu işaret etmiştik. Bu denklemler aşağıda tekrar verilmiştir.

$$\text{Eş. (3-63):} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{3-121}$$

$$\text{Eş. (3-4):} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{3-122}$$

Eş. (3-122)'de gösterilen **E**'nin irrotasyonel doğası bize, skalar bir elektrik potansiyeli V'yi, Eş. (3-26)'daki gibi tanımlama olanağı sağlar.

$$\text{Eş. (3-26):} \quad \mathbf{E} = -\nabla V. \tag{3-123}$$

Bir lineer ve yönbağımsız ortamda $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$'dir. Bu durumda Eş. (3-121) aşağıdaki biçimi alır.

$$\nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho_v. \tag{3-124}$$

Eş. (3-123)'ü, Eş (3-124)'te yerine koyduğumuzda

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v \tag{3-125}$$

denklemini elde ederiz. Burada ϵ, konumun bir fonksiyonu olabilir. Bir basit ortamda (aynı zamanda homojendir), ϵ bir sabittir ve ıraksama operatörünün dışına alınabilir. Bu durumda

Poisson denkleminin operatör biçimi

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}} \tag{3-126}$$

denklemini elde ederiz. Eş. (3-126)'da yeni bir operatör olan ∇^2 (del kare) Laplasyen operatörü ile karşılaştık. ***Laplasyen operatörü*** "gradyantın ıraksakması" veya $\nabla \cdot \nabla$'dir. Eş. (3-126) ***Poisson denklemi*** olarak bilinir. Kartezyen koordinatlarda

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 130

dir ve aşağıdaki biçimi alır.

Kartezyen koordinatlarda Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad (\text{V/m}^2) \tag{3-127}$$

Benzer şekilde, Eş. (2-70) ve Eş. (2-57)'yi kullanarak silindirik ve küresel koordinatlarda $\nabla^2 V$ ifadesini aşağıda verildiği gibi elde edebiliriz. Silindirik koordinatlarda:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{3-128}$$

Küresel koordinatlarda:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \tag{3-129}$$

Önceden belirlenmiş sınır koşulları altında üç boyutta Poisson denkleminin çözümü, genelde, kolay bir iş değildir.

Serbest yüklerin olmadığı ($\rho_v = 0$) basit bir ortamdaki noktalarda Eş. (3-126) aşağıdaki biçime indirgenir.

Laplace denkleminin operatör biçimi

$$\nabla^2 V = 0. \tag{3-130}$$

Bu denklem ***Laplace denklemi*** olarak bilimir. Laplace denklemi, elektromanyetikte çok önemli bir konuma sahiptir. Kartezyen koordinatlardaki biçimi aşağıda verilmiştir.

Kartezyen koordinatlarda Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3-131}$$

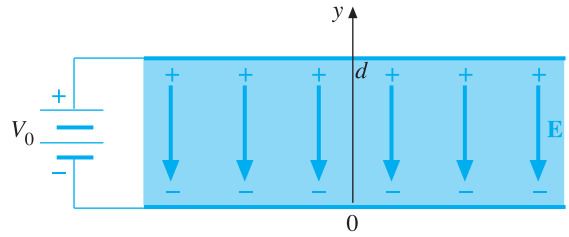
3-11.2 KARTEZYEN KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

V'nin sadece bir koordinatın fonksiyonu olduğu durum en basit durumdur. Bu durumu bir örnekle göstereceğiz.

ÖRNEK 3-21

Şekil 3-24'de gösterilen iki paralel büyük iletken plakanın arasındaki uzaklık d'dir ve potansiyelleri ise 0 ve V_0'dır. Plakalar arasındaki bölge, hacim yük yoğunluğu $\rho_v = -\rho_0 y/d$ olan sürekli bir elektron dağılımı ile doldurulmuştur. Kenarlardaki saçaklanma etkisini ihmal ederek,

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 131



ŞEKİL 3-24 Paralel plakalı kapasitör (Örnek 3-21).

a) plakalar arasındaki herhangi bir noktadaki potansiyeli bulunuz ve

b) plakalar üzerindeki yüzey yük yoğunluklarını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Burada kullanacağımız denklem Eş. (3-127)'deki Poisson denklemidir ve aşağıdaki gibi sadeleşir.

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d}\,y. \tag{3-132}$$

Eş. (3-132)'nin iki kez integralini aldığımızda

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}\,y^3 + C_1 y + C_2 \tag{3-133}$$

elde ederiz. İletken plakalardaki sınır koşullarını yazarsak

$$y = 0, \quad V = 0 = C_2$$

$$y = d, \quad V = V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d, \qquad C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}$$

bulunur. Bulduğumuz C_1 ve C_2 değerlerini Eş. (3-133)'de yerine koyarsak Eş. (3-132)'deki Poisson denkleminin çözümünü elde ederiz.

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}\,y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right) y. \tag{3-134}$$

Elektrik alan şiddeti ise $-\nabla V$'den aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{E}(y) = -\mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} = -\mathbf{a}_y \left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d}\,y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)\right]. \tag{3-135}$$

b) İletken plakalar üzerindeki yüzey yük yoğunlukları Eş. (3-46)'da verilen sınır koşulları kullanılarak bulunur.

Alttaki plakada, $y = 0$:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y, \qquad \rho_{s\ell} = \epsilon_0 E_{y\ell} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6}.$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 132

Üstteki plakada, $y = d$:

$$\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y, \qquad \rho_{su} = -\epsilon_0 E_{yu} = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{3}.$$

Bu durumda $\rho_{su} \neq -\rho_{s\ell}$'dir ve kapasitansın hesaplanmasının bir anlamı yoktur.

■ **ALIŞTIRMA 3.18** Aşağıdaki potansiyel fonksiyonlarının iki-boyutlu Laplace denklemini sağladığını gösteriniz.

a) $Ae^{-kx} \sin ky$,

b) $A \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - y)\right]$.

Burada A, k, a ve b sabittir.

3-11.3 SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Eş. (3-128)'i kullanırsak, silindirik koordinatlardaki skalar elektrik potansiyeli V'nin Laplace denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

Silindirik koordinatlarda Laplace denklemi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3-136}$$

Silindirik bir simetrinin olduğu durumlarda $\partial^2 V/\partial \phi^2 = 0$ alabiliriz. Ayrıca yarıçap ile kıyaslandığında uzunluk çok büyük olduğunda $\partial^2 V/\partial z^2 \cong 0$'dır ve Eş. (3-136) aşağıdaki duruma indirgenir.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0. \tag{3-137}$$

Burada V sadece yarıçap boyutu r'nin bir fonksiyonudur. Eş. (3-137)'nin iki kez integrali alındığında

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2 \tag{3-138}$$

elde edilir. Burada integral sabitleri C_1 ve C_2, problemin sınır koşulları tarafından belirlenir.

■ **ALIŞTIRMA 3.19** Uzun bir eş eksenli kablonun iç iletkeninin yarıçapı a'dır. Dış iletkenin iç yarıçapı ise b'dir. İç ve dış iletkenler, sırasıyla, V_0 ve 0 potansiyellerinde tutulduğunda, Laplace denklemini çözerek yalıtkan malzemenin içindeki elektrik potansiyeli ve elektrik alan şiddetini belirleyiniz.

CEVAP: $V = V_0 \ln(b/r)/\ln(b/a)$, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r V_0/r \cdot \ln(b/a)$

Elektrik potansiyelin r ve z yönlerinde değişmediği, sadece silindirinin çevresi yönünde değiştiği problemlerde, Eş. (3-136) aşağıdaki denkleme indirgenir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 133

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \tag{3-139}$$

Bu durum izleyen örnekte gösterilmiştir.

ÖRNEK 3-22

İki sonsuz büyüklükte ve izole edilmiş iletken düzlem, 0 ve V_0 potansiyellerindedir ve Şekil 3-25'de gösterildiği gibi bir kama yapısı oluşturmaktadır. Aşağıda verilen bölgeler için potansiyel dağılımını inceleyiniz.

a) $0 < \phi < \alpha$,

b) $\alpha < \phi < 2\pi$.

ÇÖZÜM

Burada $\partial V/\partial r = 0$ ve $\partial V/\partial z = 0$'dır. $r = 0$'daki bölge dışlandığı için Eş. (3-139)

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \tag{3-140}$$

biçimini alır. V sadece ϕ'ye bağlıdır ve Eş. (3-140)'ın iki kez integrali alınarak elde edilebilir.

$$V(\phi) = K_1\phi + K_2. \tag{3-141}$$

İntegral sabitleri K_1 ve K_2 sınır koşullarından belirlenebilir.

a) $0 \leqslant \phi \leqslant a$ için:

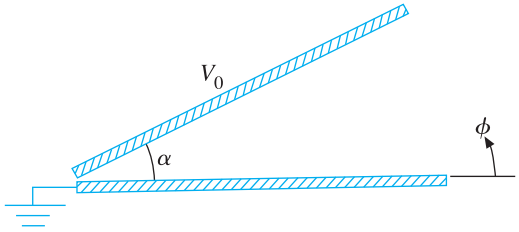
$$\alpha = 0\text{'da} \qquad V(0) = 0 = K_2 \tag{3-142a}$$

$$\phi = \alpha\text{'da} \qquad V(\alpha) = V_0 = K_1\alpha, \qquad K_1 = V_0/\alpha. \tag{3-142b}$$

Böylece Eş. (3-141) aşağıdaki gibi yazılır.

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\alpha}\phi, \qquad 0 \leq \phi \leq \alpha\,. \tag{3-143}$$

ŞEKİL 3-25 Sabit potansiyelde tutulan, iki sonsuz büyüklükte ve izole edilmiş iletken düzlem (Örnek 3-22).



03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 134

b) $\alpha \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ için:

$\phi = \alpha$'da $\quad V(\alpha) = \alpha K_1 + K_2$ (3-144a)

$\phi = 2\pi$ 'de $\quad V(2\pi) = 2\pi K_1 + K_2$. (3-144b)

Eş. (3-144a) ve Eş. (3-144b)'nin çözülmesi ile

$$K_1 = -\frac{V_0}{2\pi - \alpha} \tag{3-145a}$$

ve

$$K_2 = \frac{2\pi V_0}{2\pi - \alpha} \tag{3-145b}$$

elde edilir. Sonuçta Eş. (3-141)'den potansiyeli aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$V(\phi) = \frac{V_0}{2\pi - \alpha}(2\pi - \phi), \qquad \alpha \leq \phi \leq 2\pi. \tag{3-146}$$

3-11.4 KÜRESEL KOORDİNATLARDA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Küresel koordinatlarda, skalar elektrik potansiyeli V için Poisson ve Laplace denklemleri Eş. (3-129) kullanılarak elde edilebilir. Bundan sonraki örnekte, basitleştirilmiş bir tek boyutlu durumu tartışacağız.

ÖRNEK 3-23

İnce, iletken, eş merkezli iki küresel kabuğun iç ve dış yarıçapları, sırasıyla, R_i ve R_o'dır. Kabuklar arasındaki boşluk, yalıtkan bir malzeme ile doldurulmuştur. İç kabuk V_1 potansiyelinde, dış kabuk ise V_2 potansiyelindedir. Laplace denklemini çözerek, yalıtkan malzeme içindeki potansiyel dağılımını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Şekil 3-26'da gösterilen problem geometrisi küresel simetriye sahiptir ve elektrik potansiyel θ ve ϕ'den bağımsızdır. Eş. (3-129)'un basitleştirilmiş halinin Eş. (3-130)'a yerleştirilmesi ile tek-boyutlu Laplace denklemi aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = 0. \tag{3-147}$$

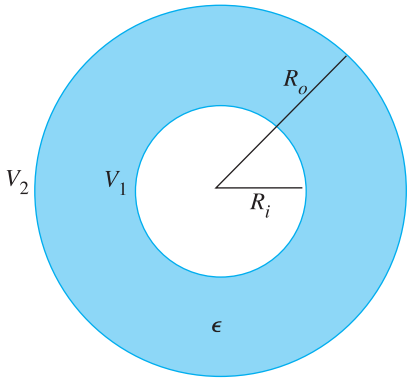
Eş. (3-147)'nin R'ye göre integrali alındığında

$$\frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2} \tag{3-148}$$

eşitliği elde edilir ve ikinci integral alma ile potansiyel aşağıdaki gibi yazılır.

$$V = -\frac{C_1}{R} + C_2. \tag{3-149}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 135



ŞEKİL 3-26 Sabit potansiyellerde tutulan iki eş merkezli iletken kabuk (Örnek 3-23).

İntegral sabitleri C_1 ve C_2, iki iletken kabuktaki sınır koşullarından belirlenir;

$R = R_i$'de

$$V_1 = -\frac{C_1}{R_i} + C_2 \tag{3-150a}$$

ve $R = R_o$'da

$$V_2 = -\frac{C_1}{R_o} + C_2 \tag{3-150b}$$

geçerlidir. Eş (3-150a) ve Eş. (3-150b)'nin çözümünden sabitler

$$C_1 = -\frac{R_o R_i (V_1 - V_2)}{R_o - R_i} \tag{3-151a}$$

ve

$$C_2 = \frac{R_o V_2 - R_i V_1}{R_o - R_i} \tag{3-151b}$$

olarak elde edilir. Böylece iki kabuk arasındaki potansiyel dağılımı, Eş. (3-149), Eş. (3-151a) ve Eş. (3-151b)'nin kullanılması ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$V(R) = \frac{1}{R_o - R_i}\left[\frac{R_i R_o}{R}(V_1 - V_2) + R_o V_2 - R_i V_1\right], \quad R_i \le R \le R_o. \tag{3-152}$$

Eş. (3-152)'yi incelersek, V'nin yalıtkan malzemenin dielektrik sabitinden bağımsız olduğunu görürüz.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 136

ALIŞTIRMA 3.20 Örnek 3-23'de, $R \geq R_o$ bölgesindeki potansiyel dağılımını bulunuz.

CEVAP: $V = R_o V_2 / R$.

3-11.5 GÖRÜNTÜ YÖNTEMİ

Görüntü yöntemi, bazı problemlerin çözümünü basitleştirir.

Bazı elektrostatik problemlerinin, ilgili Poisson ve Laplace denklemlerinin doğrudan çözümünde sınır değerlerinin sağlanması zor olabilir. Bu tip problemlerde sınırlayan yüzeylerdeki koşullar uygun sanal ***görüntü yükler***le oluşturulabilir ve daha sonra basit bir yolla potansiyel dağılımları belirlenebilir. Poisson veya Laplace denkleminin doğrudan çözümü ile uğraşmak yerine, sınırlayan yüzeylerin uygun sanal yüklerle değiştirildiği bu yönteme ***görüntü yöntemi*** denir.

Teklik teoremi

Görüntü yöntemini tartışmadan önce, ***verilen bir sınır koşulları kümesini sağlayan*** bir ***Poisson denklemi*** (Laplace denklemi bunun özel durumudur) ***çözümünün tek çözüm*** olduğunu bilmek önemlidir. Bu ifade ***teklik teoremi*** olarak bilinir. Teklik teoremi nedeniyle, sınır koşulları kümesini sağlayan bir elektrostatik problemin çözümü, hangi çözüm yönteminin kullanıldığından bağımsız olarak, o problemin *mümkün olan tek çözümü*dür. Zeki bir tahmin yolu ile elde edilen bir çözüm dahi tek doğru çözümdür. Teklik teoremi kanıtlanabilir[1], fakat biz sadece doğruluğunu kabul edeceğiz.

A. *İletken Düzlemlerin Yakınındaki Nokta Yükler*

Bu tipteki problemi bir örnek ile göstereceğiz.

ÖRNEK 3-24

Bir pozitif Q nokta yükü, topraklanmış (sıfır potansiyel) çok geniş bir iletken plakadan d kadar yukarıya Şekil 3-27(a)'da gösterildiği biçimde yerleştirilmiştir. a) $y > 0$ bölgesindeki herhangi bir $P(x, y, z)$ noktasındaki potansiyeli ve b) iletken düzlem yüzeyinde indüklenen yük yoğunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Bu problemin doğrudan çözüm yöntemi, $y = 0$ ve sonsuzda $V = 0$ sınır koşulunu sağlayan Poisson denkleminin $y > 0$ bölgesi için çözümünü gerektirir. Bu tip bir çözümün doğru-

[1] Bakınız, örneğin D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, İkinci Baskı, s. 158–159, Addison-Wesley Publishing Co., Reading Mass., 1989.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 137

Çok geniş bir iletken düzlem yakınındaki nokta yükün görüntüsü

dan oluşturulması zordur. Diğer taraftan, Şekil 3-27(b)'de gösterildiği gibi, iletken düzlemi kaldırıp $y = -d$'de bir $-Q$ görüntü nokta yükü yerleştirirsek, ne $y > 0$ bölgesindeki durum ne de sınır koşulları değişmeyecektir. İki yük nedeniyle bir $P(x, y, z)$ noktasında oluşan potansiyel gözlem yoluyla aşağıda yazılmıştır.

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}}\right], \quad y \geq 0 \qquad (3\text{-}153a)$$

ve

$$V(x, y, z) = 0, \quad y \leq 0. \qquad (3\text{-}153b)$$

Verilen sınır koşulları sağlandığı için, teklik teoremine göre Eş. (3-153a) ve Eş. (3-153b) doğru sonucu ifade eder.

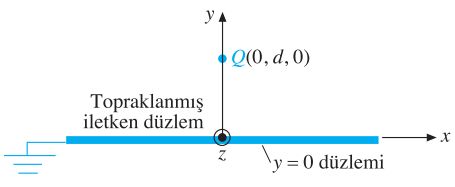
b) İletken yüzey üzerindeki indüklenen yük dağılımını bulmak için, önce elektrik alan şiddetini Eş. (3-153a)'yı kullanarak belirleriz.

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

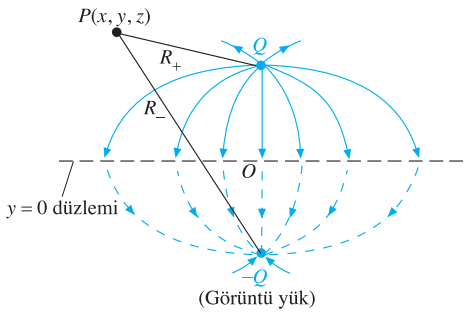
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y(y-d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y(y+d) + \mathbf{a}_z z}{[x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$y \geq 0 \qquad (3\text{-}154)$$

ŞEKİL 3-27 Nokta yük ve topraklanmış iletken düzlem (Örnek 3-24).



(a) Fiziksel yapı.



(b) Görüntü yük ve alan çizgileri

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 138

Eş. (3-46) ve Eş. (3-154)'den indüklenen yüzey yük yoğunluğu

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y\Big|_{y=0} = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{3/2}} \tag{3-155}$$

olarak bulunur.

Görüntü yönteminin sadece görüntü yüklerinin bulunmadığı bölgedeki alanları belirlemek üzere kullanılacağını vurgulamamız zorunludur. Dolayısıyla, Örnek 3-24'teki $-Q$ ve $+Q$ nokta yükleri $y < 0$ bölgesindeki V veya $\mathbf{E}$'nin hesaplanmasında kullanılamaz. Hem V ve hem de $\mathbf{E}$'nin $y < 0$ bölgesinde sıfır olduğu açıktır.

ALIŞTIRMA 3.21 Örnek 3-24'teki sonsuz iletken düzlem yüzeyinde indüklenen toplam yük miktarını bulunuz.

CEVAP: $-Q$.

B. *İletken Silindir Yakınında Paralel Çizgi Yük*

Şimdi ρ_ℓ(C/m)'lik bir çizgi yükün a yarıçaplı iletken dairesel bir silindirin eksenine paralel ve d kadar uzaklığa yerleştirildiğini düşünelim. Hem çizgi yük hem de iletken silindir sonsuz uzunlukta olsun. Şekil 3-28(a), bu düzenlemenin kesitini göstermektedir. Bu probleme görüntü yöntemi ile yaklaşmadan önce, aşağıdakilere dikkat etmemiz gereklidir. (1) Görüntü, silindirin içerisinde silindire paralel bir çizgi yük olmalıdır ve bu yük silindir yüzeyini ($r = a$) bir eş potansiyel yüzeyi yapmalıdır. Bu sanal çizgi yüke ρ_i diyelim. (2) OP doğrusuna göre simetri olduğundan, görüntü çizgi yük OP üzerinde bir noktada olacaktır. Bu noktaya P_i noktası dersek, bu noktanın orijinden ya da eksenden olan uzaklığı d_i'dir (Şekil 3-28b). İki bilinmeyen ρ_i ve d_i'yi belirlememiz gerekmektedir.

İlk adım olarak

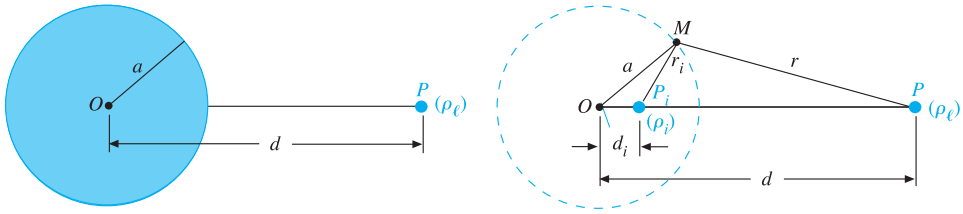
Görüntü çizgi yük

$$\boxed{\rho_i = -\rho_\ell} \tag{3-156}$$

olarak kabul edelim. Bu aşamada Eş. (3-156) sadece denemek için bir çözümdür (bir akıllıca tahmin) ve doğru olacağından emin olamayız. Bu deneme çözümünü, sınır koşullarının sağlanması başarısız olana kadar sürdüreceğiz. Bununla birlikte, Eş. (3-156) bütün sınır koşullarını sağlayacak duruma gelirse, teklik teoremi gereğince, bu çözüm tek çözüm olacaktır. Daha sonraki işimiz, d_i'nin belirlenmesidir.

ρ_ℓ çizgisel yük yoğunluğundan r kadar uzaklıktaki elektrik potansiyel, Eş. (3-23)'de verilen elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}$'nin integralinin alınması ile elde edilebilir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 139



(a) Çizgi yük ve paralel iletken silindir.

(b) Çizgi yük ve görüntüsü.

ŞEKİL 3-28 Çizgi yük ve iletken dairesel silindirdeki görüntüsünün kesiti.

$$V = -\int_{r_0}^{r} E_r\, dr = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\,dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} \tag{3-157}$$

Burada, sıfır potansiyel için r_0 referans noktası sonsuz olamaz. Çünkü Eş. (3-157)'de $r_0 = \infty$ alındığında V sonsuza gitmektedir. Şu an için r_0'ı belirlemeden bırakalım. Silindir yüzeyinde veya dışında bir noktanın potansiyeli ρ_ℓ ve ρ_i'nin katkılarının toplanması ile elde edilir. Şekil 3-28(b)'de gösterilen silindir yüzeyindeki bir M noktası için potansiyel aşağıda verilmiştir.

$$V_M = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_i} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_i}{r}. \tag{3-158}$$

Eş. (3-158)'de, basitlik sağlamak için, ρ_ℓ ve ρ_i'den eşit uzaklıkta bir nokta sıfır potansiyel için referans nokta seçilmiş ve böylece $\ln r_0$ terimleri birbirini götürmüştür. Tersi durumda, sabit bir terimin Eş. (3-158)'in sağ tarafında olması gerekecekti. Eşpotansiyel yüzeyleri

$$\frac{r_i}{r} = \text{sabit} \tag{3-159}$$

olarak belirlenir. Bir eşpotansiyel yüzeyin silindir yüzeyi $(\overline{OM} = a)$ ile çakışması için, P_i noktası OMP_i ve OPM üçgenlerini benzer yapacak şekilde yerleştirilmiş olmalıdır. Bu üçgenlerin zaten $\angle MOP_i$ ortak açıları bulunmaktadır. P_i noktası $\angle OMP_i = \angle OPM$ olacak biçimde seçilmelidir. Bu durumda

$$\frac{\overline{P_iM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$$

veya

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{sabit} \tag{3-160}$$

yazabiliriz.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 140

Eş. (3-160)'tan eğer

$$d_i = \frac{a^2}{d} \tag{3-161}$$

ise görüntü çizgi yük $-\rho_\ell$, ρ_ℓ ile birlikte, Şekil 3-28(b)'deki kesikli çizgi ile gösterilen silindir yüzeyini eşpotansiyel yüzey yapacaktır. M noktasının konumu kesikli çizgi ile verilen çember üzerinde değiştiğinde, hem r_i hem de r değişecek, fakat oranları a/d'ye eşit olacak şekilde sabit kalacaktır. P_i noktası, a yarıçaplı bir çembere göre P'nin ters ***noktası olarak*** isimlendirilir.

Görüntü çizgi yük $\rho_i = -\rho_\ell$, silindirik iletken yüzey ile yer değiştirebilir ve *yüzeyin dışındaki* herhangi bir noktadaki V ve $\mathbf{E}$, ρ_ℓ ve $-\rho_\ell$ çizgi yüklerinden belirlenebilir. Simetriden, orijinal çizgi yük ρ_ℓ'yi çevreleyen a yarıçaplı ve ekseni P'nın sağ tarafında, P'den d_i kadar uzakta olan paralel silindirik yüzey de bir eşpotansiyel yüzeydir. Bu gözlem bize, dairesel kesitli, iki paralel iletkenden oluşan bir açık telli iletim hattının birim uzunluğu başına kapasitansını hesaplama olanağı verir.

ÖRNEK 3-25

İki uzun, paralel, a yarıçaplı dairesel iletken tel arasındaki birim uzunluk başına kapasitansı belirleyiniz. Tellerin eksenleri arasındaki uzaklık D'dir.

ÇÖZÜM

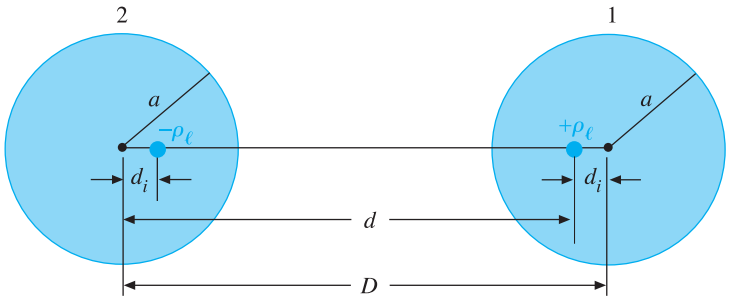
Şekil 3-29'da gösterilen iki-telli iletim hattının kesitini referans alalım. Tellerin eşpotansiyel yüzeyleri, $(D - 2d_i) = d - d_i$ uzaklıktaki $+\rho_\ell$ ve $-\rho_\ell$ çizgi yük çifti tarafından üretilmiş olarak düşünülebilir. İki tel arasındaki potansiyel farkı, teller üzerindeki herhangi iki nokta arasındakidir. Alt indisler 1 ve 2, sırasıyla, $+\rho_\ell$ ve $-\rho_\ell$ eşdeğer çizgi yükleri çevreleyen telleri göstermektedir. Eş. (3-158) ve Eş. (3-160)'dan

$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

ve benzer şekilde

$$V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$$

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 141



ŞEKİL 3-29 İki-telli iletim hattının kesiti ve eşdeğer çizgi yükler (Örnek 3-25).

yazabiliriz. Dikkat edersek, $a < d$ olduğundan V_1 artı, V_2 ise eksi değerlidir. Birim uzunluk başına kapasitans ise

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)} \tag{3-162}$$

bulunur ve burada

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d}$$

olarak yazılabilir. Buradan da[1]

$$d = \tfrac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}) \tag{3-163}$$

elde ederiz. Eş. (3-163)'ü Eş. (3-162)'de yerleştirdiğimizde

Paralel tellerin birim uzunluk başına kapasitansı

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}]} \quad \text{(F/m)} \tag{3-164}$$

olarak bulunur.

$x > 1$ için $\ln[x + \sqrt{x^2 - 1}] = \cosh^{-1} x$

olduğunu hatırlarsak, Eş. (3-164)'ü bir başka biçimde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad \text{(F/m)}. \tag{3-165}$$

[1] Hem D'nin hem de d'nin genellikle a'dan çok büyük olmasından dolayı, diğer çözüm olan $d = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4a^2})$ dikkate alınmamıştır.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 142

Tellerin çapları, aralarındaki uzaklığa kıyasla çok küçük olduğunda, $(D/2a) \gg 1$ alınır ve Eş. (3-164) aşağıdaki gibi sadeleşir.

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(D/a)} \quad \text{(F/m)} \tag{3-166}$$

■ **ALIŞTIRMA 3.22** Uzun bir güç iletim hattının yarıçapı 2 (cm)'dir ve topraktan 10 (m) yüksekliğe paralel olarak yerleştirilmiştir. Toprağın sonsuz, düzgün bir iletken düzlem olduğunu kabul ederek, hattın toprağa göre metre başına kapasitansını bulunuz.

CEVAP: 8.04 (pF/m).

TEKRAR SORULARI

S.3-27 Basit bir ortam için, Poisson ve Laplace denklemlerini vektör biçimde yazınız.

S.3-28 Basit bir ortam için, Poisson ve Laplace denklemlerini Kartezyen koordinatlarda yazınız.

S.3-29 $\nabla^2 U = 0$ ise, U neden özdeş olarak sıfır değildir?

S.3-30 Sabit bir gerilim paralel plakalı bir kapasitörün uçlarına bağlanmıştır.

a) Plakalar arasındaki boşlukta elektrik alan şiddeti, ortamın geçirgenliğine bağlı mıdır?

b) Elektrik akı yoğunluğu, ortamın geçirgenliğine bağlı mıdır? Açıklayınız.

S.3-31 $+Q$ ve $-Q$ sabit yükleri, izole bir paralel plakalı kapasitör üzerinde birikmiştir.

a) Plakalar arasındaki boşlukta elektrik alan şiddeti, ortamın geçirgenliğine bağlı mıdır?

b) Elektrik akı yoğunluğu, ortamın geçirgenliğine bağlı mıdır? Açıklayınız.

S.3-32 *Elektrostatikte teklik teoremini* ifade ediniz.

S.3-33 Bir küresel elektron bulutunun, sonsuz bir iletken düzleme göre görüntüsü nedir?

S.3-34 Sonsuz uzunluktaki bir çizgi yük yoğunluğu ρ_ℓ'nin paralel iletken dairesel bir silindire göre görüntüsü nedir?

S.3-35 Şekil 3-29'daki iki-telli iletim hattının sıfır potansiyel yüzeyi neresidir?

NOTLAR

1. Eş. (3-126)'daki Poisson ve Eş. (3-130)'daki Laplace denklemleri, ortam lineer değilse, homojen değilse veya yönbağımlı ise geçersizdir.
2. Görüntü yöntemi *sadece* görüntü yüklerin *bulunmadığı* bölgedeki alanların belirlenmesi için kullanılabilir.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 143

ÖZET

Bu bölüm, hareket etmeyen ve zamanla değişmeyen yüklerin elektrik alanları ile ilgilidir. Elektrik alan şiddeti **E**'yi birim yüke uygulanan kuvvet olarak tanımladıktan sonra,

- boş uzayda, elektrostatiğin iki temel postülatı, **E**'nin ıraksakması ve döneli olarak gösterildi.
- Coulomb yasası ve Gauss yasası çıkarıldı, bunlar bizim ayrık ve sürekli yük yoğunlukları nedeniyle oluşan elektrik alanları belirlememizi olanaklı kıldı.
- Skalar elektrik potansiyeli kavramı verildi.
- Statik elektrik alana malzeme ortamının etkisi incelendi.
- Eşdeğer kutuplanma yük yoğunlukları bulunarak indüklenmiş dipollerin makroskopik etkileri tartışıldı.
- Elektrik akı yoğunluğu veya elektrik yerdeğiştirme **D** ve dielektrik sabiti tanımlandı.
- Statik elektrik alanlar için sınır koşulları tartışıldı.
- Kapasitans tanımlandı ve belirlenmesinde kullanılan yol anlatıldı.
- Depolanan elektrostatik enerji için formüller bulundu.
- Bir yüklenmiş sistemdeki cisim üzerindeki kuvvetin hesaplanması için hayali yer değiştirme prensibi kullanıldı.
- Poisson ve Laplace denklemleri verildi ve basit problemleri çözme yöntemi gösterildi.
- Elektrostatik sınır-değer problemlerini çözmek için görüntü yöntemi açıklandı.

PROBLEMLER

P.3-1 Şekil 3-2'de gösterilen katot-ışın osiloskobu (KIO), paralel sapma plakaları arasına uygulanan gerilimi ölçmek için kullanılmaktadır.

a) Yalıtımda kırılma olmadığı varsayılırsa, plakalar arasındaki mesafe h iken ölçülebilen maksimum gerilim nedir?

b) Ekranın çapı D ise, L üzerindeki sınırlama nedir?

c) Sabit bir geometri için KIO'nun ölçülebilen maksimum gerilimini iki katına çıkarabilmek için ne yapılabilir?

P.3-2 Her bir kenarı 10 (cm) olan eşkenar üçgenin köşelerine, havada, üç 2 (μC)'luk nokta yük yerleştirilmiştir. Her bir yüke etkiyen kuvvetin genlik ve yönünü bulunuz.

P.3-3 Q_1 ve Q_2 nokta yükleri, sırasıyla, $(0, 5, -1)$ ve $(0, -2, 6)$ noktalarına yerleştirilmiştir. $P(0, 2, 3)$ noktasındaki bir test yüküne etkiyen

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 144

toplam kuvvetin aşağıdaki koşulları sağlaması için Q_1 ve Q_2 arasındaki ilişkiyi bulunuz.

a) y-bileşeni yok ve

b) z-bileşeni yok.

P.3-4 $Q_1 = -9$ (μC), $Q_2 = 4$ (μC) ve $Q_3 = -36$ (μC)'luk üç nokta yük düz bir çizgi üzerine yerleştirilmiştir. Q_1 ve Q_2 arasındaki uzaklık 9 (cm)'dir. Q_2 için öyle bir konum bulmak istiyoruz ki her bir yüke sıfır kuvvet etkisin. Bu konumu bulunuz.

P.3-5 Örnek 3-8'de, **E**'nin hesaplanmasında hatanın %1'den daha büyük olmayacağı ve daha uzak noktalar için diskin bir nokta yük olarak algılanabileceği z-ekseni üzerindeki P noktasını belirleyiniz.

P.3-6 Düzgün yük yoğunluğu ρ_ℓ olan bir çizgi yük, havada xy-düzleminde merkezi orijinde olacak şekilde, b yarıçaplı bir çember oluşturmaktadır.

a) $(0, 0, h)$ noktasındaki elektrik alan şiddeti **E**'yi bulunuz.

b) (a) şıkkındaki **E**'yi hangi h değeri maksimum yapar? Bu maksimum nedir?

c) Bu konumda **E**'nin neden bir maksimumu olduğunu açıklayınız.

P.3-7 Düzgün ρ_ℓ yük yoğunluğu olan bir çizgi yük xy-düzleminin üst yarısında, b yarıçaplı bir yarım çember oluşturmaktadır. Yarı çemberin merkezindeki elektrik alan şiddetinin genliğini ve yönünü belirleyiniz.

P.3-8 $\rho = \rho_0[1 - (R^2/b^2)]$'lik bir küresel yük dağılımı, $0 \leqslant R \leqslant b$ bölgesinde bulunmaktadır. Bu yük dağılımı, iç yarıçapı $R_i (> b)$ ve dış yarıçapı R_o olan bir iletken kabuk tarafından eşmerkezli olarak çevrelenmektedir. **E**'yi her yerde belirleyiniz.

P.3-9 İki sonsuz uzunluklu silindirik yüzeyin yarı çapları $r = a$ ve $r = b$ $(b > a)$'dır ve sırasıyla, ρ_{sa} ve ρ_{sb} yüzey yük yoğunluklarını taşımaktadır.

a) Her yerdeki **E**'yi belirleyiniz.

b) $r > b$'de **E**'nin sıfırlanması için a ve b arasındaki ilişki ne olmalıdır?

P.3-10 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$ alanı içinde $P_1(1, 2, -4)$'den $P_2(-2, 8, -4)$'e $+5(\mu$C)'luk bir yükün aşağıda verilen yollar boyunca taşınması sırasında yapılan işi belirleyiniz.

a) $y = x^2$ parabolü boyunca ve

b) P_1'den P_2'ye düz çizgi boyunca.

P.3-11 Problem P.3-10'u, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y - \mathbf{a}_y x$ için tekrarlayınız.

P.3-12 L uzunluğundaki bir çizgi yük, düzgün ρ_ℓ çizgi yük yoğunluğunu taşımaktadır ve x-ekseni ile çakışıktır.

a) Çizgi yükü ortadan kesen düzlemdeki V'yi belirleyiniz.

b) Coulomb yasasını kullanarak ρ_ℓ'den **E**'yi doğrudan belirleyiniz.

c) (b) şıkkındaki cevabı $-\nabla V$ ile karşılaştırınız.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 145

P.3-13 Orijin merkezli ve kenar uzunluğu L olan bir dielektrik kübün kutuplanması $\mathbf{P} = \mathrm{P}_0(\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)$ biçiminde verilmiştir.

a) Eşdeğer yüzey ve hacim yük yoğunluklarını belirleyiniz.

b) Toplam eşdeğer yükün sıfır olduğunu gösteriniz.

P.3-14 b yarıçaplı dielektrik bir kürenin kutuplanma vektörü $\mathbf{P} = \mathbf{a}_x \mathrm{P}_0$'dır.

a) Eşdeğer yüzey ve hacim yük yoğunluklarını belirleyiniz.

b) Toplam eşdeğer yükün sıfır olduğunu gösteriniz.

P.3-15 İç yarıçapı r_i ve dış yarıçapı r_o olan uzun bir dielektrik tübün ekseni z-ekseni ile çakışıktır. Dielektrik içinde $\mathbf{P} = \mathrm{P}_0(\mathbf{a}_x 3x + \mathbf{a}_y 4)$ biçiminde bir kutuplanma vektörü vardır.

a) Eşdeğer yüzey ve hacim yük yoğunluklarını belirleyiniz.

b) Toplam eşdeğer yükün sıfır olduğunu gösteriniz.

P.3-16 İç yarıçapı R_i ve dış yarıçapı R_o olan küresel dielektrik kabuğun merkezinde artı Q nokta yükü bulunmaktadır. Kabuğun dielektrik sabiti ϵ_r'dir. $\mathbf{E}$, V, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{P}$'yi radyal uzaklık R'nin fonksiyonu olarak belirleyiniz.

P.3-17 Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a) Bir paralel-plaka kapasitörün kırılma gerilimini bulunuz. Plakaların birbirinden 50 (mm) uzakta olduğunu ve arasındaki ortamın hava olduğunu kabul ediniz.

b) İletken plakalar arasındaki boşluk pleksiglas ile dolu olduğunda kırılma gerilimini bulunuz. Pleksiglas'ın dielektrik sabiti 3 ve dielektrik mukavemeti 20 (kV/mm)'dir.

c) Plakalar arasına 10 (mm) kalınlıkta pleksiglas yerleştirilse idi, bir kırılma olmadan plakalar arasına uygulanabilecek maksimum gerilim ne olurdu?

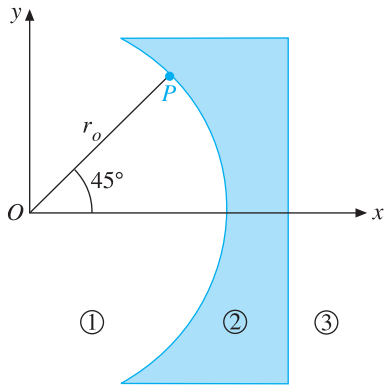
P.3-18 $z = 0$ düzleminin $\epsilon_{r1} = 2$ ve $\epsilon_{r2} = 3$ sabitli iki kayıpsız dielektrik bölgeyi birbirinden ayırdığını düşünelim. 1. bölgedeki $\mathbf{E}_1, \mathbf{a}_x 2y - \mathbf{a}_y 3x + \mathbf{a}_z(5 + z)$ olarak biliniyorsa, 2. bölgedeki $\mathbf{E}_2$ ve $\mathbf{D}_2$ hakkında neler bilinebilir? 2. bölgedeki her noktada $\mathbf{E}_2$ ve $\mathbf{D}_2$'yi belirleyebilir miyiz? Açıklayınız.

P.3-19 Dielektrik lensler elektromanyetik alanları odaklamak için kullanılabilir. Şekil 3-30'daki lensin sol yüzeyi dairesel silindir ve sağ yüzeyi düzlemdir. 1. bölgedeki $P(r_o, 45°, z)$ noktasında $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_r 5 - \mathbf{a}_\phi 3$ ise, 3. bölgedeki $\mathbf{E}_3$'ün x-eksenine paralel olması için lensin dielektrik sabiti ne olmalıdır?

P.3-20 Alanı S olan, paralel-plakalı kapasitörün arasındaki boşluk bir dielektrikle doldurulmuştur. Dielektriğin geçirgenliği doğrusal olarak bir plakadan diğerine ϵ_1'den ($y = 0$) ϵ_2'ye ($y = d$) değişmektedir. Saçaklanma etkisini ihmal ederek kapasitansı bulunuz.

P.3-21 Örnek 3-16'daki silindirik kapasitörün dış iletkeninin topraklandığını ve iç iletkeninin V_0 geriliminde tutulduğunu düşünelim.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 146



ŞEKİL 3-30 Dielektrik lens (Problem P.3-19).

a) İç iletken yüzeyindeki elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}(a)$'yı bulunuz.

b) Dış iletkenin iç yarıçapı b'yi sabit tutarak, $\mathbf{E}(a)$'yı minimum yapacak a'yı bulunuz.

c) Bu minimum $E(a)$ değerini bulunuz.

d) (b) şıkkındaki koşullar altında kapasitansı belirleyiniz.

P.3-22 Çok uzun eş eksenli bir iletim hattının iç iletkeninin yarıçapı ve dış iletkeninin iç yarıçapı, sırasıyla, r_i ve r_o'dır. İletkenler arasındaki alan iki eş merkezli dielektrik katman ile doldurulmuştur. Dielektrik sabitleri $r_i < r < b$ için ϵ_{r1} ve $b < r < r_o$ için ϵ_{r2}'dir. Birim uzunluk başına kapasitansı belirleyiniz.

P.3-23 Bir küresel kapasitör, içte R_i yarıçaplı bir iletken küre ve dış iletken olarak ise iç duvarının yarıçapı R_o olan bir küreden oluşmaktadır. Aralarındaki boşluk geçirgenliği ϵ olan bir dielektrik ile doldurulmuştur. Kapasitansı belirleyiniz.

P.3-24 1 (μF), 2 (μF) ve 3 (μF)'lık üç kapasitör, Şekil 3-31'de gösterildiği şekilde 120 volt'luk bir kaynağa bağlanmıştır. Her bir kapasitörde depolanan elektrik enerjisini hesaplayınız.

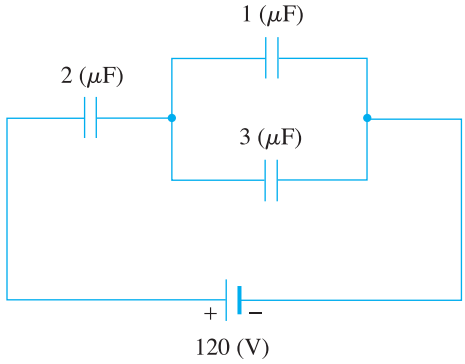
P.3-25 500 (pC)'luk bir nokta yük, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r 6r \sin\phi + \mathbf{a}_\phi 3r \cos\phi$ (V/m)'lik bir elektrik alan içerisinde $P_1(2, \pi/3, -1)$'den $P_2(4, -\pi/2, -1)$ konumuna hareket ettirilmektedir. Aşağıdaki durumlar için harcanan enerjiyi hesaplayınız.

a) Önce $r = 2$ iken $\phi = \pi/3$'den $\phi = -\pi/2$'ye daha sonra $\phi = -\pi/2$ iken $r = 2$ den $r = 4$'e hareket ettirilirse.

b) Önce $\phi = \pi/3$ iken $r = 2$'den $r = 4$'e, daha sonra, $r = 2$ iken $\phi = \pi/3$'den $\phi = -\pi/2$'ye hareket ettirilirse.

P.3-26 L uzunluğundaki bir eş eksenli kapasitör için, hayali yer değiştirme yöntemini kullanarak, sırasıyla, $+Q$ ve $-Q$ yüklerini taşıyan, iç iletken (a yarıçaplı) ve dış iletken (b yarıçaplı) arasındaki kuvveti bulunuz. Yalıtıcı malzemenin geçirgenliği ϵ'dur.

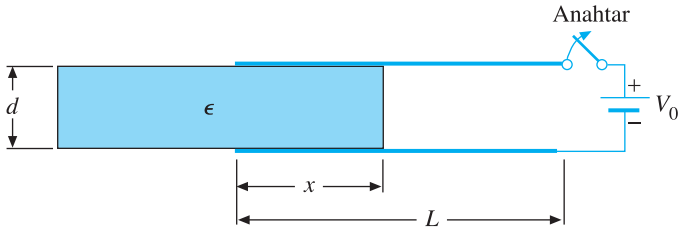
03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 147



ŞEKİL 3-31 Pile bağlı kapasitörler (Problem P.3-24).

İPUCU: Önce iç ve dış yarıçapları, sırasıyla, a ve $a + r$ kabul ediniz, daha sonra r'ye göre türev alınız.

P.3-27 L uzunluğunda, genişliği w ve aralarındaki uzaklık d olan, paralel plakalı bir kapasitörün, plakaları arasına geçirgenliği ϵ olan bir katı dielektrik tabaka yerleştirilmiştir. Kapasitör, Şekil 3-32'de gösterildiği gibi V_0 gerilimindeki bir pil ile yüklenmiştir. Dielektrik tabakanın şekilde gösterilen konuma çekildiğini ve anahtarın açıldığını düşünerek, tabakaya etkiyen kuvveti belirleyiniz.



ŞEKİL 3-32 Kısmi olarak doldurulmuş paralel-plakalı kapasitör (Problem P.3-27).

P.3-28 Büyük paralel-plakalı bir kapasitörün, üst ve alt iletken plaka gerilimleri sırasıyla, V_0 ve 0'dır ve birbirinden d kadar uzaklıkla ayrılmıştır. Alt plaka üzerine, dielektrik sabiti 6.0 olan ve $0.8d$ kalınlıkta düzgün bir dielektrik tabaka yerleştirilmiştir. İhmal edilebilir saçaklanma etkisi olduğunu düşünerek, Laplace denklemini çözerek aşağıdakileri belirleyiniz.

a) Dielektrik tabakadaki potansiyeli ve elektrik alan dağılımı,

b) dielektrik tabaka ve üst plaka arasındaki hava boşluğundaki potansiyeli ve elektrik alan dağılımı ve

c) alt ve üst plakalardaki yüzey yük yoğunlukları.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 148

P.3-29 Uzun eş eksenli bir silindirik yapının iç ve dış iletkenleri arasındaki boşluk, $a < r < b$'de $\rho_v = A/r$ olan hacim yük yoğunluğuna sahip bir elektron bulutu ile doldurulmuştur. a ve b, sırasıyla, iç ve dış iletkenlerin yarıçaplarıdır. İç iletkenin potansiyeli V_0, dış iletken ise topraklanmıştır. Poisson denklemini çözerek, $a < r < b$ olan bölgedeki potansiyel dağılımını belirleyiniz.

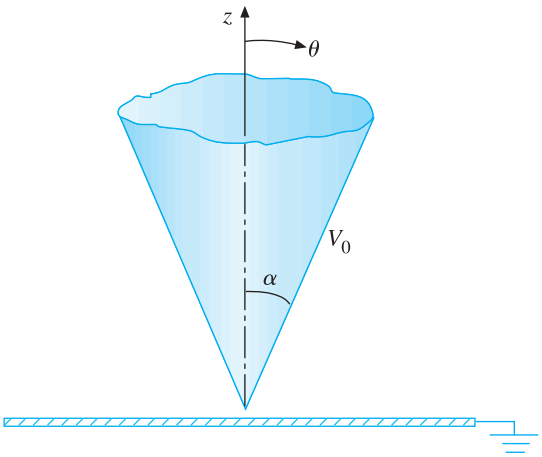
P.3-30 P.3-29'daki eş eksenli yapının iç ve dış iletkenleri arasındaki bölge boş uzay olsa idi, Laplace denklemini çözerek $a \leqslant r \leqslant b$ bölgesindeki $V(r)$'ye ilişkin ifadeyi bulunuz. $V(r)$'yi kullanarak, iletkenler üzerindeki yüzey yük yoğunluklarını ve yapının birim uzunluk başına kapasitansını elde ediniz. Sonucunuzu Eş (3-90) ile karşılaştırınız.

P.3-31 Yarı-açısı α olan, sonsuz uzunluktaki bir koni V_0 potansiyelinde tutulmaktadır ve Şekil 3-32'de gösterildiği gibi topraklanmış bir iletken plakadan izole edilmiştir. Aşağıdakileri belirleyiniz.

a) $\alpha < \theta < \pi/2$ bölgesindeki, potansiyel dağılımı $V(\theta)$,

b) $\alpha < \theta < \pi/2$ bölgesindeki, elektrik alan şiddeti ve

c) koni yüzeyindeki ve topraklanmış düzlemdeki yük yoğunlukları.



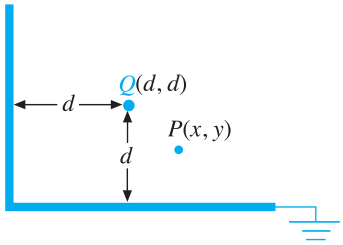
ŞEKİL 3-33 Sonsuz uzunlukta iletken koni ve topraklanmış iletken düzlem (Problem P.3-31).

P.3-32 Bir artı Q nokta yükü, birbirine dik yerleştirilmiş iletken yarı düzlemlerden d kadar uzaklığa Şekil 3-34'de gösterildiği gibi yerleştirilmiştir.

a) Gelişigüzel bir $P(x, y)$ noktasındaki potansiyel ve elektrik alan şiddetine ve

b) iki yarı-düzlemde indüklenen yüzey yük yoğunluklarına ilişkin ifadeleri bulunuz.

03 SON.QXP_03 SON.QXP 5.06.2024 13:42 Page 149

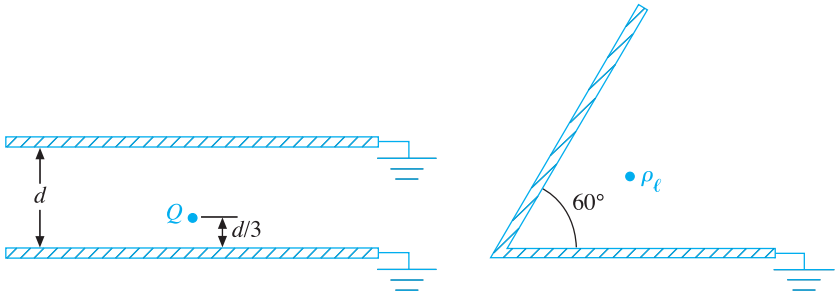


ŞEKİL 3-34 Birbirine dik, iki topraklanmış iletken yarı-düzleme eşit uzaklıkta yerleştirilmiş Q nokta yükü (Problem P.3-32).

P.3-33 Aşağıdaki durumları için, sıfır potansiyel sağlayacak şekilde iletken sınırlarını görüntü yükleri sistemi ile yer değiştiriniz.

a) Şekil 3-35(a)'da gösterilen, iki geniş ve topraklanmış paralel iletken plaka arasına yerleştirilmiş bir Q nokta yükü ve

b) Şekil 3-35(b)'de gösterilen, iki geniş ve 60 derece açı oluşturacak şekilde yerleştirilmiş birbirini kesen iletken plakaların ortasına konmuş bir sonsuz ρ_ℓ çizgi yük yoğunluğu.



(a) Topraklanmış paralel düzlemler arasında nokta yük.

(b) Topraklanmış birbirini kesen düzlemler arasında çizgi yük.

ŞEKİL 3-35 P.3-33 Probleminin çizimleri.

P.3-34 50 (nC/m)'lik sonsuz uzunluktaki bir çizgi yük, sıfır potansiyeldeki toprağın 3 (m) üstüne yerleştirilmiştir. Toprağı xy-düzleminde ve çizgi yükü x-eksenine paralel seçerek, aşağıdakileri görüntü yöntemini kullanarak bulunuz.

a) $(0, 4, 3)$'deki $\mathbf{E}$ ve

b) $(0, 4, 0)$'daki $\mathbf{E}$ ve ρ_s.

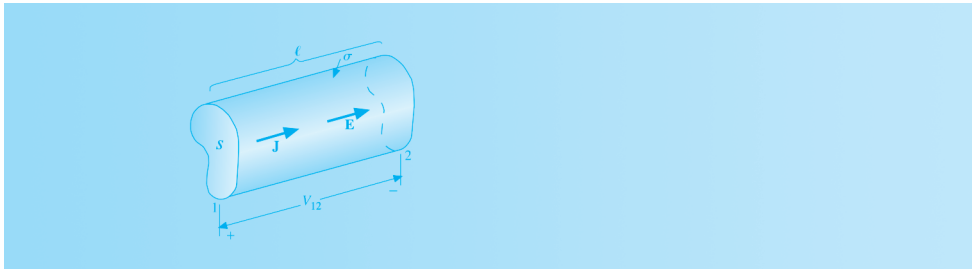
P.3-35 İki-telli bir paralel iletim hattının eksenleri 2 (cm) aralıklıdır. Tellerin yarıçapı 3 (mm) ve potansiyelleri +100 (V) ve −100 (V)'dadır. Aşağıdakileri bulunuz:

a) Kablo eksenine göre eşdeğer çizgi yüklerin konumu,

b) her bir kablonun eşdeğer çizgi yük yoğunluğu ve

c) kabloların tam ortasındaki noktada elektrik alan şiddeti.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 150



4. BÖLÜM

4-1 GENEL BAKIŞ 3. Bölümde durağan elektrik yükleri ile ilgili alan problemleri olan elektrostatik problemlerle ilgilendik. Şimdi akım akışı oluşturan hareketli yükleri izleyeceğiz. D-C. devre teorisinden, bir metal tel gibi bir iletken ortamdaki akım akışı problemleri tanıdıktır. Bu durumlarda geçerli bağıntı, iki terminal arasındaki gerilimin, akım ile terminaller arasındaki direncin çarpımına eşit olduğunu söyleyen ***Ohm yasasıdır.*** Eğer gerilim iyi bir yalıtkana uygulanırsa yüksek dirençten dolayı çok az akım akar. O zaman ortamın boşluk (vakum) yani bir açık devre olduğu bir katot-ışın tüpünde (Şekil 3-2) akımın aktığı gerçeğini nasıl açıklarız? Açıkça bu durumda Ohm yasası geçerli değildir.

Ohm yasası

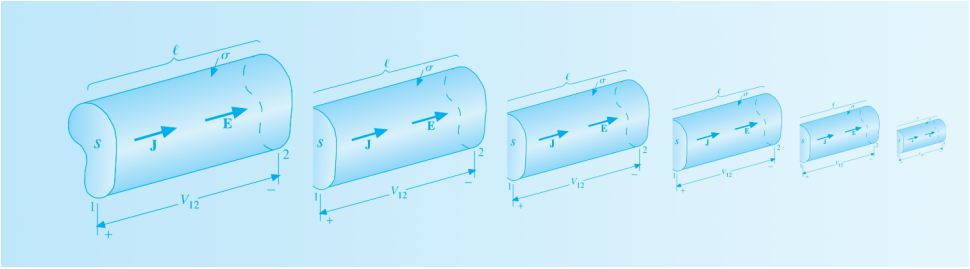
Serbest elektronların hareketinden oluşan iki tip akım vardır: *Konveksiyon akımı* ve *iletkenlik akımı*. Konveksiyon akımları vakumda veya seyreltilmiş gazlarda pozitif veya negatif yüklü parçacıkların hareketinden oluşur. Tanıdık örnekler bir katot-ışın tüpündeki elektron demetleri ve bir gökgürültülü fırtınadaki yüklü parçacıkların şiddetli hareketleridir. Kütle transferi içeren hidrodinamik hareketin sonucu olan konveksiyon akımları için Ohm yasası geçerli değildir.

Serbest elektron hareketlerinden oluşan iki akım tipi

Konveksiyon elektrik akımı için Ohm yasası geçerli değildir.

İletkenlik akımı mekanizması konveksiyon akımınkinden farklıdır. Normal durumda iken bir iletkenin atomları bir kristal yapı içinde düzenli konumlarda bulunur. Atomlar pozitif yüklü çekirdek ve bunu çevreleyen kabuk-gibi düzenlenmiş elektronlardan oluşur. İç kabuklardaki elektronlar çekirdeğe sıkıca bağlıdır ve uzağa hareket edemezler. Bir iletken atomunun en dış kabuklarındaki elektronlar ka-

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 151



Durgun Elektrik Akımı

bukları tamamen doldurmazlar; bunlar valans veya iletkenlik elektronlarıdır ve çekirdeğe çok gevşek olarak bağlıdırlar. Bu elektronlar bir atomdan diğerine rasgele dolaşabilirler. Atomlar ortalama olarak yüksüz (nötr) kalır ve elektronların net bir sürüklenme akımı yoktur. Bir iletkene dış elektrik alan uygulandığında iletkenlik elektronlarının düzenli hareketi ve bunun sonucunda da elektrik akımı oluşur. Çok iyi iletkenlerde dahi ortalama elektron sürüklenme hızı çok düşüktür (10^{-4} ve 10^{-3} m/s mertebesinde) çünkü elektronlar hareketleri sırasında atomlarla çarpışırlar ve kinetik enerjilerinin bir kısmını ısı olarak harcarlar. Bu olay kendisini akım akışını zayıflatan bir kuvvet veya direnç olarak gösterir. İletkenlik akım yoğunluğu ile elektrik alan şiddeti arasındaki ilişki bize Ohm yasasının nokta biçimini verir.

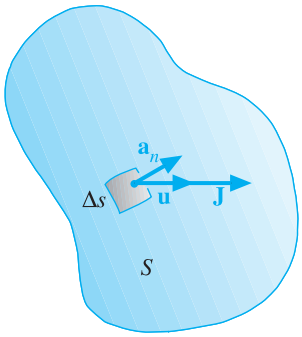
İletkenlik elektrik akımı için Ohm yasası geçerlidir.

4-2 AKIM YOĞUNLUĞU VE OHM YASASI

A) Konveksiyon akımı

Şekil 4-1'de görüldüğü gibi bir Δs yüzey elemanından **u** hızıyla geçen q yüklü (elektronlar için negatif) tek tip yük taşıyıcıların durgun hareketini inceleyelim. Eğer N birim hacim başına yük taşıyıcı sayısı ise o halde Δt zaman aralığında her bir yük taşıyıcı $\mathbf{u}\Delta t$ mesafesi kadar ilerleyecek ve Δs yüzeyinden geçen yük miktarı

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 152



ŞEKİL 4-1 Bir yüzeyi geçen yük taşıyıcıların sürüklenme hareketinden oluşan iletkenlik akımı.

$$\Delta Q = Nq\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_n\Delta s\Delta t \qquad \text{(C)} \tag{4-1}$$

olacaktır. Akım yükün zamanla değişim hızı olduğundan

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_n\Delta s = Nq\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{s} \qquad \text{(A)} \tag{4-2}$$

elde ederiz. Eş. (4-2)'de $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{a}_n\Delta s$'yi bir vektör nicelik olarak yazdık. ***Hacim akım yoğunluğu*** veya basitçe ***akım yoğunluğu*** $\mathbf{J}$'yi metrekare başına amper cinsinden bir vektör nokta fonksiyonu olarak tanımlamak uygundur:

Akım yoğunluğunun tanımı

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{u} \qquad (\text{A/m}^2) \tag{4-3}$$

böylelikle Eş. (4-2)

$$\Delta I = \mathbf{J}\cdot\Delta\mathbf{s} \tag{4-4}$$

olarak yazılabilir. O halde bir gelişigüzel S yüzeyinden geçen toplam I akımı $\mathbf{J}$ vektörünün S yüzeyindeki akısı olarak bulunabilir:

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(A).} \tag{4-5}$$

Nq çarpımı gerçekte birim hacimdeki serbest yük miktarıdır, bu nedenle Eş. (4-3)'ü

Konveksiyon akım yoğunluğu ile yük taşıyıcı hızı arasındaki bağıntı

$$\mathbf{J} = \rho_v\mathbf{u} \qquad (\text{A/m}^2) \tag{4-6}$$

olarak yazabiliriz. Bu da ***konveksiyon akım yoğunluğu*** ile yük taşıyıcıların ortalama hızı arasındaki bağıntıdır.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 153

ÖRNEK 4-1

Bir vakum tüpünde -0.3 (nC/mm^3) serbest yük yoğunluğu kabul ediniz. $-\mathbf{a}_z 2.4$ (A/mm^2) akım yoğunluğu için, (a) $R = 5$ (mm), $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ile belirtilen yarım küre yüzeyinden geçen toplam akımı ve (b) serbest yüklerin hızını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\rho_v = -0.3 \text{ (nC/mm}^3\text{)},$$
$$\mathbf{J} = -\mathbf{a}_z 2.4 \text{ (A/mm}^2\text{)},$$
$$R = 5 \text{ (mm)}$$

veriliyor.

a)
$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\int 2.4\,(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_R)\,ds$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -2.4\,(\cos\theta)(5^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi)$$
$$= -2\pi \int_0^{\pi/2} 60 \sin\theta\, d(\sin\theta)$$
$$= -120\pi \left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)_0^{\pi/2} = -60\pi = -188.5\,(\text{A}).$$

b)
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{J}}{\rho_v} = \mathbf{a}_z \frac{-2.4}{-0.3 \times 10^{-9}} = \mathbf{a}_z 8 \times 10^9 \text{ (mm/s)}$$
$$= \mathbf{a}_z 8 \text{ (Mm/s)}.$$

B) İletkenlik Akımı

İletkenlik akımı durumunda farklı hızlarda sürüklenen birden fazla tip yük taşıyıcı (elektronlar, delikler ve iyonlar) olabilir. Eş. (4-3) genelleştirilerek

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{u}_i \qquad (\text{A/m}^2) \tag{4-7}$$

elde edilir. Kısım 4-1'de belirtildiği gibi iletkenlik akımı yük taşıyıcıların uygulanan bir elektrik alanı etkisi altında sürüklenme hareketinin sonucudur. Ancak bu süreçte atomlar nötr ($\rho_v = 0$) kalır. Çoğu iletken malzemede ortalama sürüklenme hızının elektrik alan şiddeti ile orantılı olduğu analitik olarak gösterilebilir. Metalik iletkenler için

$$\mathbf{u}_e = -\mu_e \mathbf{E} \qquad (\text{m/s}) \tag{4-8}$$

yazarız, burada μ_e (m^2/V·s) ile ölçülen elektron ***devingenliğidir***.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 154

Bakır için elektron devingenliği $3.2 \times 10^{-3}(m^2/V{\cdot}s)$, alüminyum için $1.4 \times 10^{-4}(m^2/V{\cdot}s)$ ve gümüş için ise $5.2 \times 10^{-3}(m^2/V{\cdot}s)$'dir. Eş. (4-3) ve Eş. (4-8)'den

$$\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E} \tag{4-9}$$

buluruz, burada $\rho_e = -Ne$ sürüklenen elektronların yük yoğunluğudur ve negatif bir niceliktir. Eş. (4-9)

Ohm yasasının nokta biçimi

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (A/m^2)} \tag{4-10}$$

halinde yeniden yazılabilir. Buradaki orantı sabiti $\sigma = -\rho_e \mu_e$ ortamın, ***öz iletkenlik*** adı verilen bir makroskopik yapısal parametresidir. Eş. (4-10) ***Ohm yasası***nın nokta biçimidir.

Öz iletkenlik tanımı

Yarı-iletkenler için öz iletkenlik elektron ve deliklerin her ikisinin konsantrasyonuna ve devingenliğine bağlıdır:

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h. \tag{4-11}$$

Burada h alt indisi delikleri göstermektedir. Genel olarak $\mu_e \neq \mu_h$'dir. Germanyum için tipik değerler $\mu_e = 0.38$, $\mu_h = 0.18$; silikon için ise $\mu_e = 0.12$, $\mu_h = 0.03$ $(m^2/V \cdot s)$'dir.

Öz iletkenliğin SI birimi

Eş. (4-10) bir iletken ortamın bir yapısal bağıntısıdır. σ'nın birimi volt-metre başına amper $(A/V \cdot m)$ veya metre başına siemens'tir (S/m). En yaygın kullanılan iletken olan bakırın öz iletkenliği $5.80 \times 10^7(S/m)$'dir. Diğer taraftan germanyumun öz iletkenliği 2.2 (S/m); silikonunki ise $1.6 \times 10^{-3}(S/m)$ civarındadır. Yarı-iletkenlerin öz iletkenliği sıcaklığa çok bağlıdır (sıcaklık ile artar). İyi yalıtıcı olan sert kauçuğun öz iletkenliği sadece $10^{-15}(S/m)$'dir. Ek B-4 diğer bazı sıkça kullanılan malzemelerin öz iletkenliklerini listelemektedir. Öz iletkenliğin tersi ***öz direnç*** olarak adlandırılır ve birimi $(\Omega \cdot m)$'dir. Biz öz iletkenliği kullanmayı tercih edeceğiz, her ikisini de kullanmak için önemli bir neden yoktur.

ALIŞTIRMA 4.1 Bakırda 7 (A/mm^2) akım yoğunluğu için

a) elektrik alan şiddetini ve

b) elektron sürüklenme hızını bulunuz.

CEVAP: (a) 0.121 (V/m), (b) $3.57 \times 10^{-4}(m/s)$.

Devre teorisinden, 1 ucu ile 2 ucu arasında I akımı akan R direncinin uçları arasındaki V_{12} geriliminin RI'ya eşit olduğunu yani

$$V_{12} = RI \tag{4-12}$$

veren ***Ohm yasası***nı hatırlayalım. Burada R çoğunlukla verilen uzunluktaki bir iletken malzeme parçasının direnci; V_{12} malzemenin 1 ve

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 155

2 terminalleri arasındaki gerilim ve I da 1 terminalinden 2 terminaline sonlu kesitte akan toplam akımdır. Eş. (4-12) bir nokta bağıntısı değildir.

Şimdi Ohm yasasının nokta biçimini kullanarak Şekil 4-2'de gösterilen σ öz iletkenliğine sahip, ℓ uzunluklu ve S düzgün kesitli bir homojen malzeme parçasının gerilim-akım bağıntısını çıkaracağız. İletken malzeme içinde $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ ve $\mathbf{J}$ ile $\mathbf{E}$'nin her ikisi de akım akış yönündedir. 1 ve 2 terminalleri arasındaki potansiyel farkı

$$V_{12} = E\ell$$

olduğundan

$$E = \frac{V_{12}}{\ell} \tag{4-13}$$

bulunur. Toplam akım ise

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = JS$$

olur, buradan

$$J = \frac{I}{S} \tag{4-14}$$

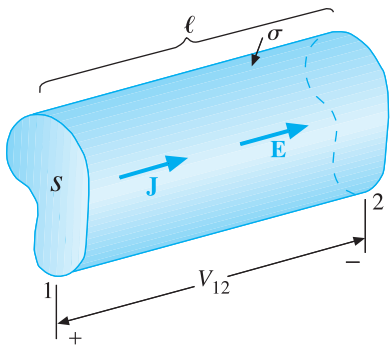
yazılabilir. Eş. (4-13) ve (4-14), Eş (4-10)'da kullanılırsa

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{12}}{\ell}$$

veya

$$V_{12} = \left(\frac{\ell}{\sigma S}\right) I = RI \tag{4-15}$$

ŞEKİL 4-2 Sabit kesitli homojen iletken.



04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 156

elde ederiz ki bu da Eş. (4-12) ile aynıdır. Eş. (4-15)'ten, durgun akım (d.c.) için düzgün kesitli homojen ve düz bir malzeme parçasının ***direnç*** formülünü buluruz:

Düz, homojen ve düzgün kesitli malzemenin direnci

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (\Omega). \tag{4-16}$$

ÖRNEK 4-2

a) Yarıçapı 1 (mm) olan 1 (km) uzunluğundaki bakır telin d-c direncini belirleyiniz.

b) Eğer aynı uzunluktaki bir alüminyum telin direnci aynı ise yarıçapı nedir?

ÇÖZÜM

Düzgün kesitli iletkenlerle çalıştığımızdan Eş. (4-16) geçerlidir.

a) Bakır tel için $\sigma_{cu} = 5.80 \times 10^7$ (S/m)

$$\ell = 10^3 \text{ (m)}, \qquad S_{cu} = \pi(10^{-3})^2 = 10^{-6}\pi \quad (\text{m}^2)$$

olduğundan direnci

$$R_{cu} = \frac{\ell}{\sigma_{cu} S_{cu}} = \frac{10^3}{5.80 \times 10^7 \times 10^{-6}\pi} = 5.49 \quad (\Omega)$$

olarak hesaplarız.

b) Alüminyum tel için $\sigma_{al} = 3.54 \times 10^7$ (S/m)'dir. O halde

$$R_{al} = \frac{\ell}{\sigma_{al} S_{al}} = R_{cu}$$

$$S_{al} = \frac{\sigma_{cu}}{\sigma_{al}} S_{cu} = \frac{5.80}{3.54}(10^{-6}\pi) = \pi r^2 \quad \text{ise}$$

$r = 1.28 \times 10^{-3}$ (m) veya 1.28 (mm) bulunur.

İletkenlik ve SI birimi

G ***iletkenliği*** veya direncin tersi, dirençleri paralel bağlarken yararlıdır. İletkenliğin birimi (Ω^{-1}) veya siemens (S)'tir.

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{\ell} \quad (\text{S}). \tag{4-17}$$

ALIŞTIRMA 4.2 1 (MΩ), 2 (MΩ) ve 4 (MΩ) değerlerindeki üç direnç paralel bağlanmıştır. Eşdeğer iletkenlik ve direnci hesaplayınız.

CEVAP: 1.75 (μS), 0.571 (MΩ).

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 157

TEKRAR SORULARI

S.4-1 İletkenlik akımı ile konveksiyon akımı arasındaki farkı açıklayınız.

S.4-2 Konveksiyon akım yoğunluğu ve yük taşıyıcıların hızı arasındaki bağıntı nedir?

S.4-3 Bir iletkendeki elektron *devingenliğini* tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.4-4 Ohm yasasının nokta biçimi nedir?

S.4-5 *Öz iletkenliği* tanımlayınız. SI birimi denir?

S.4-6 Yuvarlak kesitli iletken bir telin yarıçapı iki katına çıktığında direnci nasıl değişir?

NOTLAR

1. İletkenlik akımları için Ohm yasası geçerlidir ancak konveksiyon akımları için geçerli değildir.
2. Öz iletkenlik, iletkenlikten ve öz direnç de dirençten farklıdır.
3. Eş. (4-16)'daki direnç formülü sadece düz, homojen ve düzgün kesitli malzemeler için geçerlidir.

4-3 SÜREKLİLİK DENKLEMİ VE KIRCHOFF'UN AKIM YASASI

Yükün korunumu ilkesi

Yükün korunumu ilkesi fizikteki temel postülatlardan biridir. Elektrik yükleri yaratılamaz veya yok edilemez; hareketli veya durağan tüm yükler her zaman korunmalıdır. S yüzeyi ile sınırlanan gelişigüzel V hacmini düşünelim. Bu bölgede Q net yükü bulunsun. Eğer yüzeyden bölgeden *dışarı doğru* bir net akım akıyorsa hacimdeki yük bu akıma eşit bir hızla *azalmalıdır*. Diğer taraftan yüzeyden bölgenin *içine doğru* bir net akım akıyorsa hacimdeki yük bu akıma eşit bir hızla *artmalıdır*. Bölgeyi terkeden akım, akım yoğunluğu vektörünün S yüzeyindeki toplam dışarı doğru akısıdır. Böylelikle

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_v \, dv \tag{4-18}$$

yazabiliriz. Eş. (2-69)'daki ıraksama teoremi kullanılarak $\mathbf{J}$'nin yüzey integrali $\nabla \cdot \mathbf{J}$'nin hacim integraline çevrilebilir. Durağan bir hacim için

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv \tag{4-19}$$

elde ederiz. Zaman türevini integralin içine ρ_v'ye taşırken kısmi türev kullanmak gerekir. Çünkü ρ_v zamanın olduğu gibi uzay koordinatlarının da fonksiyonu olabilir. Eş. (4-19) V'nin seçiminden bağımsız ola-

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 158

rak geçerli olduğundan, integrandlar eşit olmalıdır. Sonuç olarak

Süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad (\text{A/m}^3) \tag{4-20}$$

buluruz. Yükün korunumu ilkesinden çıkarılan bu nokta bağıntısına ***süreklilik denklemi*** denir.

Durgun akımlar için yük yoğunluğu zamanla değişmez, $\partial \rho_v / \partial t = 0$ dır ve Eş. (4-20)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{4-21}$$

Durgun elektirk akımı seloniddir.

haline gelir. Buradan, durgun elektrik akımı ıraksamasız veya solenoiddir. Eş. (4-21) bir nokta bağıntısıdır ve $\rho_v = 0$ (sıfır akış kaynağı) olan noktalarda da geçerlidir. Bunun anlamı alan çizgilerinin, yüklerde başlayıp yüklerde biten elektrostatik alan şiddeti çizgilerinin aksine, kendi üzerlerine kapandığıdır. Herhangi bir kapalı yüzey üzerinde Eş. (4-21)'den aşağıdaki integral biçime ulaşılır:

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{4-22}$$

ki bu da

$$\sum_j I_j = 0 \qquad (\text{A}) \tag{4-23}$$

Kirchhoff'un akım yasası

halinde yeniden yazılabilir. Eş. (4-23) ***Kirchhoff'un akım yasası***nın bir ifadesidir. Bu yasa, ***bir elektrik devresindeki bir düğümden dışa doğru akan tüm akımların cebirsel toplamının sıfır olduğunu*** belirtir.

Kısım 3-6.1'de bir iletkenin içine yerleştirilen yüklerin, iletkenin yüzeyine hareket edeceğini ve denge koşullarında iletken içinde $\rho_v = 0$ ve $\mathbf{E} = 0$ yapacak şekilde kendilerini yüzeye dağıtacağını belirtmiştik. Şimdi bunu ispat edebilecek ve dengeye erişmek için gereken zamanı hesaplayabilecek durumdayız. Eş. (4-10)'daki Ohm yasasını süreklilik denklemi ile birleştirir ve sabit σ kabul edersek

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{4-24}$$

buluruz. Basit ortam için $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \epsilon$ olur ve Eş. (4-24)

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0 \tag{4-25}$$

haline gelir. Eş. (4-25)'in çözümü

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 159

Hacim yük yoğunluğu zamanla üstel olarak azalır.

$$\rho_v = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t} \qquad (\text{C/m}^3) \tag{4-26}$$

olarak bulunur, burada ρ_v, $t = 0$ anındaki başlangıç yoğunluğudur. ρ_v ve ρ_0'ın her ikisi de uzay koordinatlarının fonksiyonu olabilir ve Eş. (4-26) verilen bir konumdaki yük yoğunluğunun zamanla üstel olarak azaldığını söyler. ρ_0 başlangıç yük yoğunluğu, değerinin $1/e$ katına veya % 36.8'ine

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \qquad (\text{s}) \tag{4-27}$$

Gevşeme zamanının tanımı

zamanında azalır. τ zaman sabitine ***gevşeme zamanı*** denir. Bakır gibi iyi bir iletken için—$\sigma = 5.80 \times 10^7$ (S/m), $\epsilon \cong \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m)—τ 1.53×10^{-19} (s)'ye eşittir ki bu gerçekten çok kısa bir süredir.

■ **ALIŞTIRMA 4.3** Kauçuğun dielektrik sabiti ve öz iletkenliği, sırasıyla, 3.0 ve 10^{-15} (S/m) veriliyor.

a) Gevşeme zamanını ve

b) yük yoğunluğunun başlangıç değerinin %1'ine düşmesi için gereken zamanı bulunuz.

CEVAP: (a) 7.38 saat, (b) 1 gün 10 saat.

4-4 GÜÇ HARCANMASI VE JOULE YASASI

Daha önce, bir iletkendeki iletkenlik elektronlarının bir elektrik alanının etkisi altında makroskopik olarak bir sürüklenme hareketi yaşayacağını belirtmiştik. Mikroskopik olarak elektronlar atomlarla çarpışır. Böylece enerji, elektrik alanından ısıl titreşimdeki atomlara iletilir. Bir q yükünü $\Delta\ell$ mesafesi kadar hareket ettirirken $\mathbf{E}$ elektrik alanı tarafından yapılan Δw işi $q\mathbf{E} \cdot (\Delta\ell)$'dir ve bu da $\mathbf{u}$ sürüklenme hızı olmak üzere

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \tag{4-28}$$

gücüne karşılık gelir. Bir dv hacmindeki tüm yük taşıyıcılara aktarılan güç

$$dP = \sum_i p_i = \mathbf{E} \cdot \left(\sum_i N_i q_i \mathbf{u}_i \right) dv$$

olur ki bu da Eş. (4-7) yardımı ile

$$dP = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv$$

yazılır ve

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (\text{W/m}^3) \tag{4-29}$$

elde edilir.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 160

Böylece $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ nokta fonksiyonu durgun-durum koşulları altında bir ***güç yoğunluğu***dur. Verilen bir V hacmi için ısıya dönüşen toplam elektrik güç

Joule yasası

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv \qquad \text{(W)} \tag{4-30}$$

olarak bulunur. Bu denklem ***Joule yasası*** olarak bilinir. (P'nin SI biriminin, enerji veya işin birimi olan joule değil watt olduğuna dikkat ediniz.) Eş. (4-29) ise buna karşılık gelen nokta bağıntısıdır.

Sabit kesitli bir iletkende $d\ell$ uzunluğu $\mathbf{J}$ yönünde ölçülmek üzere $dv = ds\, d\ell$'dir. Eş. (4-30)

$$P = \int_L E\, d\ell \int_S J\, ds = VI$$

halinde yazılabilir, burada I iletkendeki akımdır. $V = RI$ olduğundan,

$$P = I^2R \qquad \text{(W)} \tag{4-31}$$

buluruz. Eş, (4-31) ohmik gücün tanıdık ifadesidir ve R direncinde birim zamanda harcanan ısıyı gösterir.

4-5 DURGUN AKIM YOĞUNLUĞU DENKLEMLERİ

Gördüğümüz gibi $\mathbf{J}$ akım yoğunluğu vektörü durgun elektrik akımı çalışmalarında temel bir niceliktir. Helmholtz teoremine göre $\mathbf{J}$'nin tanımlanması, hem ıraksamasının hem de dönelinin belirtilmesini gerektirir. Durgun akımlar için Eş. (4-21)'de olduğu gibi $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$'dır. Dönel denklemi, Ohm yasası ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) ile $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ birleştirilerek $\nabla \times (\mathbf{J}/\sigma) = 0$ olarak elde edilir. Bu diferensiyel biçim ve karşılık gelen integral biçim, durgun akım yoğunluğunun aşağıda verilen denklemleridir.

Durgun Durum Akım Yoğunluğu Denklemleri		
Diferensiyel Biçim	İntegral Biçim	
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$	(4-32)
$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma}\right) = 0$	$\oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\ell = 0$	(4-33)

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 161

Kısım 3-8'den iki farklı ortam arasındaki arayüzde (i) *ıraksamasız bir alanın normal bileşeninin sürekli olduğunu* (bkz. Eş. 3-77) ve (ii) *döneli sıfır olan bir alanın teğet bileşeninin sürekli olduğunu* (bkz. Eş. 3-72) hatırlarız. (i) ve Eş. (4-32)'nin sonucu

Akım yoğunluğunun normal bileşeni için sınır koşulu

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (\text{A/m}^2) \tag{4-34}$$

olur. σ_1 ve σ_2 öz iletkenlikli iki ohmik ortamın sınırında (ii) ve Eş. (4-33)'ün sonucu ise

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

veya

Akım yoğunluğunun teğet bileşeni için sınır koşulları

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{4-35}$$

bulunur.

■ **ALIŞTIRMA 4.4** İki iletken malzeme parçası $z = 0$ düzleminde temas halindedir. Arayüzdeki bir P noktasında akım yoğunluğu ortam 1'de (öz iletkenliği σ_1) $\mathbf{J}_1 = 10(\mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 4)(\text{A/m}^2)$'dir. Eğer $\sigma_2 = 2\sigma_1$ ise P'de ortam 2'de $\mathbf{J}_2$'yi belirleyiniz.

CEVAP: $20(\mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 2)\ (\text{A/m}^2)$.

TEKRAR SORULARI

S.4-7 *Süreklilik denkleminin* fiziksel önemi nedir?

S.4-8 *Kirchhoff'un akım yasasını* sözle ifade ediniz.

S.4-9 *Gevşeme zamanını* tanımlayınız. Bakırdaki gevşeme zamanının büyüklük mertebesi nedir?

S.4-10 Joule yasasını veriniz. Bir hacimde harcanan gücü (a) $\mathbf{E}$ ve σ ve (b) $\mathbf{J}$ ve σ cinsinden ifade ediniz.

S.4-11 Farklı öz iletkenlikli iki ortamın arayüzünde durgun akımların normal ve teğet bileşenleri için sınır koşulları nedir?

NOTLAR

1. Eş. (4-24) ve Eş. (4-26) sadece basit ortamlarda geçerlidir.
2. $\mathbf{J}$ durgun akımı solenoiddir.
3. $\mathbf{J}$ durgun akım yoğunluğu homojen olmayan ortamlarda korunumlu değildir.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 162

4-6 DİRENÇ HESAPLAMA

Kısım 3-9'da aralarında bir dielektrik ortam olan iki iletken arasındaki kapasitansı bulma yöntemini tartışmıştık. Bu iletkenler Şekil 4-3'teki gibi gelişigüzel şekillere sahip olabilir. Elektrik alan nicelikleri cinsinden kapasitans için temel formül

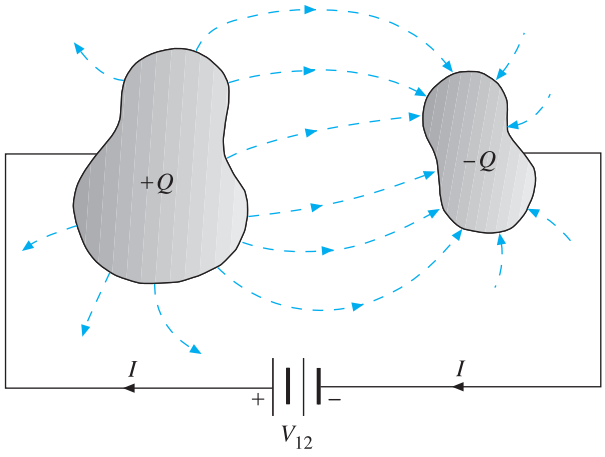
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}} \tag{4-36}$$

olarak yazılabilir. Burada paydaki yüzey integrali, pozitif iletkeni içeren bir yüzey üzerinde ve paydadaki çizgi integrali de negatif iletkenden (düşük-gerilim) pozitif iletkene (yüksek-gerilim) alınır.

Dielektrik ortam kayıplı olduğunda (küçük ancak sıfır olmayan bir öz iletkenliğe sahip olduğunda) pozitif iletkenden negatif iletkene bir akım akacak ve ortamda bir akım-yoğunluğu alanı oluşacaktır. $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ Ohm yasası $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{E}$'nin alan çizgilerinin yönbağımsız bir ortamda aynı olmasını garanti eder. İletkenler arasındaki direnç

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{-\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\oint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \tag{4-37}$$

ŞEKİL 4-3 Kayıplı dielektrik ortamda iki iletken.



04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 163

olur. Burada çizgi ve yüzey integralleri Eş. (4-36)'daki L ve S üzerinde alınmıştır. Eş. (4-36) ve (4-37)'nin karşılaştırılması aşağıdaki ilginç bağıntıyı verir:

İki iletken arasındaki *C* ve *R*'yi (veya *G*'yi) bağlayan bağıntı

$$RC = \frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} \tag{4-38}$$

Eş. (4-28) eğer ortamın ϵ ve σ'sı aynı uzay bağımlılığına sahipse veya ortam homojense (uzay koordinatlarından bağımsız) geçerlidir. Bu durumlarda eğer iki iletken arasındaki kapasitans bilinirse direnç (veya iletkenlik), yeniden hesap yapmaksızın ϵ/σ oranından doğrudan elde edilebilir.

ÖRNEK 4-3

a) İç iletken yarıçapı a, dış iletkenin iç yarıçapı b ve ortam öz iletkenliği σ olan bir koaksiyel kabloda iç ve dış iletkenler arasındaki ve

b) yarıçapları a olan ve aralarında D uzaklığı bulunan tellerden oluşan ve öz iletkenliği σ olan bir ortamda bulunan paralel-telli iletim hattındaki birim uzunluk başına kaçak direncini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Bir koaksiyel kablonun birim uzunluk başına kapasitansı Örnek 3-16'da Eş. (3-90) olarak elde edilmişti:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \qquad (\text{F/m}).$$

Böylece birim uzunluk için kaçak direnci Eş. (4-38)'den

$$R_1 = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (\Omega\cdot\text{m}) \tag{4-39}$$

bulunur. Birim uzunluk başına iletkenlik $G_1 = 1/R_1$'dir.

b) Paralel-telli iletim hattı için Örnek 3-25'teki Eş. (3-165) birim uzunluk başına kapasitansı verir:

$$C_1' = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)} \qquad (\text{F/m}).$$

Dolayısıyla eğer Eş. (4-38)'deki bağıntıyı kullanırsak birim

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 164

uzunluk için kaçak direnci kolaylıkla

$$R'_1 = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{1}{C'_1}\right) = \frac{1}{\pi\sigma}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma}\ln\left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right] \quad (\Omega\cdot\text{m}) \qquad (4\text{-}40)$$

olarak bulunur. Birim uzunluk başına iletkenlik ise $G'_1 = 1/R'_1$ olur.

Bazı durumlarda elektrostatik ve durgun akım problemleri, geometrik yapılar aynı olsa dahi tam olarak benzer değildir. Bunun nedeni akım akışının bir iletkenin içine tam olarak sınırlanabilmesi (iletkenin σ değeri çevre ortamınkinden *çok büyük* olmalıdır), öte yandan elektrik akısının sonlu boyutlardaki bir dielektrik katmana çoğunlukla sınırlandırılamamasıdır. Kullanılabilecek malzemelerin dielektrik sabit aralığı çok sınırlıdır (Bkz. Ek B-3) ve iletken çevresindeki kenarlarda akı-saçaklanması kapasitans hesaplanmasını daha az doğru hale getirir.

Verilen eşpotansiyel yüzeyler (veya terminaller) arasındaki bir iletken malzeme parçasının direncini hesaplama yöntemi aşağıda verildiği gibidir:

1. Verilen geometri için uygun bir koordinat sistemi seçilir.
2. İletken terminalleri arasında V_0 potansiyel farkı olduğu kabul edilir.
3. İletkendeki elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}$ bulunur. (Eğer malzeme sabit öz iletkenlikli homojen bir malzeme ise genel yöntem V için $\nabla^2 V = 0$ Laplace denklemini çözmek ve sonra $\mathbf{E} = -\nabla V$'yi elde etmektir.)
4. Toplam akım bulunur:

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s},$$

burada S, I akımının aktığı kesit alanıdır.

5. R direnci V_0/I oranı ile bulunur.

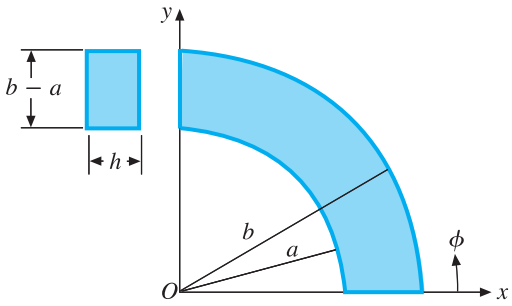
ÖRNEK 4-4

h düzgün kalınlıklı ve σ öz iletkenlikli bir iletken malzeme, Şekil 4-4'te görüldüğü gibi iç yarıçapı a, dış yarıçapı b olan çeyrek dairesel bir somun şeklindedir. Sınır yüzeyleri arasındaki direnci belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Bu problem için uygun koordinat sistemi açık olarak silindirik koordinat sistemidir. Yukarıdaki yöntemi izleyerek önce sınır yüzeyleri

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 165



ŞEKİL 4-4 Düz, iletken dairesel somunun dörtte biri (Örnek 4-4).

arasında V_0 potansiyel farkı kabul ederiz. Örneğin $y = 0$'daki yüzeyde ($\phi = 0$) $V = 0$ ve $x = 0$'daki yüzeyde ($\phi = \pi/2$) $V = V_0$ alalım. Laplace denklemini V için aşağıdaki sınır koşulları altında çözmemiz gerekir:

$$\phi = 0\text{'da} \qquad V = 0 \tag{4-41a}$$

$$\phi = \pi/2\text{'de} \qquad V = V_0. \tag{4-41b}$$

V potansiyeli sadece ϕ'nin fonksiyonu olduğundan silindirik koordinatlardaki Laplace denklemi

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0 \tag{4-42}$$

olarak sadeleşir. Eş. (4-42)'nin genel çözümü

$$V = c_1\phi + c_2$$

dir ki bu da Eş. (4-41a) ve (4-41b)'deki sınır koşulları kullanıldığında

$$V = \frac{2V_0}{\pi}\phi \tag{4-43}$$

haline gelir. Akım yoğunluğu

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\nabla V$$

$$= -\mathbf{a}_\phi \sigma \frac{\partial V}{r\partial\phi} = -\mathbf{a}_\phi \frac{2\sigma V_0}{\pi r} \tag{4-44}$$

bulunur. I toplam akımı, $\mathbf{J}$'yi $\phi = \pi/2$ yüzeyi üzerinde integralleyerek bulunur. Bu yüzeyde $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_\phi h\,dr$'dir ve akım

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = \frac{2\sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \ln\frac{b}{a} \tag{4-45}$$

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 166

olur. O halde direnç,

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)} \tag{4-46}$$

bulunur.

Verilen geometri I toplam akımından $\mathbf{J}$'nin kolaylıkla belirlenmesine izin veriyorsa çözüme bir I kabul ederek başlayabiliriz. I'dan $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ bulunur. Daha sonra potansiyel farkı

$$V_0 = -\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

bağıntısından belirlenir. Burada integrasyon düşük potansiyelli terminalden yüksek-potansiyelliye doğrudur. $R = V_0/I$ direnci, kabul edilen I'dan bağımsızdır.

ALIŞTIRMA 4.5 Bir eş eksenli kablonun iç ve dış iletken yarıçapları, sırasıyla a ve b ve aradaki ortamın öz iletkenliği ise σ'dır. Önce iç iletkenden dış iletkene doğru I kaçak akımı kabul edip sonra $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$, V_0 ve $R_1 = V_0/I$'yı bularak iletkenler arasında birim uzunluk başına kaçak direncini belirleyiniz. Sonucunuzu Eş. (4-39) ile karşılaştırınız.

TEKRAR SORULARI

S.4-12 Geçirgenliği ϵ ve öz iletkenliği σ olan bir kayıplı dielektrik ortama gömülü iki iletkenin oluşturduğu iletkenlik ve kapasitans arasındaki bağıntı nedir?

S.4-13 Dielektrik sabiti ϵ_r ve öz iletkenliği σ olan bir kayıplı dielektrik ortama gömülü iki iletkenin oluşturduğu direnç ve kapasitans arasındaki bağıntı nedir?

NOTLAR

ℓ uzunluğundaki iki paralel iletken *arasındaki* toplam kaçak direnci, birim uzunluk başına kaçak direncininin ℓ'ye bölümüne (ℓ ile çarpımına değil) eşittir.

ÖZET

Bu bölümde

- durgun elektrik akımının iki tipini gördük: Konveksiyon akımları (bunlar için Ohm yasası geçerli değildir) ve iletkenlik akımları.
- Ohm yasasının nokta biçimini veren öz iletkenliği tanımladık.

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 167

- Süreklilik denklemini ve gevşeme zamanı kavramını tanıttık.
- Joule yasasını ve güç harcanmasını çalıştık.
- Durgun akım yoğunluğu denklemlerini elde ettik.
- Direnç hesaplama yöntemlerini tartıştık.

PROBLEMLER

P.4-1 1 (km) uzunluğunda ve 0.5 (mm) yarıçaplı bir iletken tele uygulanan 6 (V) d-c gerilim 1/6 (A) akıma neden olmaktadır.

a) Telin öz iletkenliğini,
b) teldeki elektrik alan şiddetini,
c) telde harcanan gücü,
d) teldeki elektron devingenliğini 1.4×10^{-3} ($m^2/V{\cdot}s$) kabul ederek elektron sürüklenme hızını bulunuz.

P.4-2 Uzun, a yarıçaplı ve σ öz iletkenlikli yuvarlak bir tel 0.1σ öz iletkenlikli bir malzeme ile kaplanmıştır.

a) Telin kaplandıktan sonraki birim uzunluk başına direncinin kaplanmadan öncekinin %50'sine azalması için kaplamanın kalınlığı ne olmalıdır?
b) Kaplanmış telde I akımı kabul ederek hem teldeki hem de kaplamadaki **J** ve **E**'yi bulunuz.

P.4-3 $t = 0$ anında 0.1 (m) yarıçaplı kayıplı bir dielektrik küreye —$\epsilon = 1.2\epsilon_0, \sigma = 10$ (S/m)— yıldırım çarpmış ve küreye, düzgün dağılmış 1 (mC) yük depolamıştır. Tüm t anları için,

a) kürenin içindeki ve dışındaki elektrik alan şiddetini,
b) küredeki akım yoğunluğunu bulunuz.

P.4-4 Problem P.4-3'te verilenleri kullanarak,

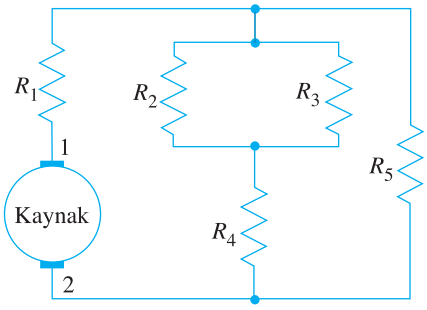
a) küredeki yük yoğunluğunun baştaki değerinin %1'ine düşmesi için gereken zamanı hesaplayınız.
b) Küredeki yük yoğunluğu baştaki değerin %1'ine düşerken kürede depolanan elektrostatik enerji değişimini hesaplayınız. Bu enerjiye ne olur?
c) Kürenin dışındaki uzayda depolanan enerjiyi belirleyiniz. Bu enerji zamanla değişir mi?

P.4-5 Şekil 4-5'te gösterilen beş direncin her birinde harcanan ısıyı

$$R_1 = \tfrac{1}{3}(\Omega), \quad R_2 = 20(\Omega), \quad R_3 = 30(\Omega), \quad R_4 = 8(\Omega), \quad R_5 = 10(\Omega)$$

ve kaynağın pozitif kutpu terminal 1'de olan 0.7(V)'luk ideal bir d-c gerilim kaynağı olduğu durum için bulunuz. Terminal 1-2 çifti arasında görülen toplam direnç nedir?

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 168



ŞEKİL 4-5 Problem P.4-5'in devresi.

P.4-6 Dielektrik sabitleri $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$ ve öz iletkenlikleri $\sigma_1 = 15$ (mS), $\sigma_2 = 10$ (ms) olan iki kayıplı homojen dielektrik ortam $z = 0$ düzleminde temas halindedir. $z > 0$ bölgesinde (ortam 1) $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x 20 - \mathbf{a}_z 50$ (V/m) düzgün elektrik alanı vardır. (a) Ortam 2'de $\mathbf{E}_2$'yi, (b) $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_2$'yi, (c) $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_2$'nin $z = 0$ düzlemi ile yaptıkları açıları ve (d) arayüzdeki yüzey yük yoğunluğunu bulunuz.

P.4-7 Her birinin alanı S olan iki paralel iletken plaka arasındaki bölge öz iletkenliği bir plakada ($y = 0$) σ_1'den diğer plakada ($y = d$) σ_2'ye lineer olarak değişen homojen olmayan bir ohmik ortamla doludur. Plakalar arasına V_0 d-c gerilimi uygulanmıştır.

a) Plakalar arasındaki toplam direnci ve

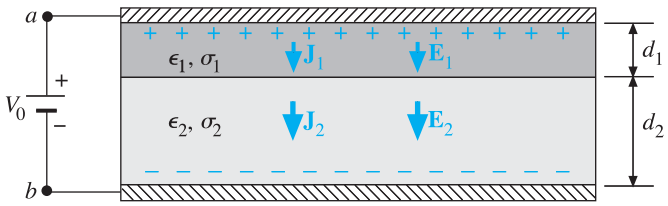
b) plakalar üzerindeki yüzey yük yoğunluğunu bulunuz.

P.4-8 Plaka alanı S olan paralel-plakalı bir kapasitöre V_0 d-c gerilimi uygulanmaktadır. İletken plakalar arasındaki bölge, geçirgenlikleri sırasıyla ϵ_1 ve ϵ_2, öz iletkenlikleri de σ_1 ve σ_2 olan $d_1$ve d_2 kalınlığında iki kayıplı dielektrikle Şekil 4-6'da gösterildiği gibi doldurulmuştur.

a) Plakalar arasındaki akım yoğunluğunu,

b) her iki dielektrikteki elektrik alan şiddetini ve

c) a ve b terminalleri arasındaki eşdeğer R-C devresini bulunuz.



ŞEKİL 4-6 İki kayıplı dielektrikle dolu paralel-plakalı kapasitör (Problem P.4-8).

P.4-9 L uzunluğundaki bir silindirik kapasitöre V_0 d-c gerilimi uygulanıyor. İç ve dış iletkenlerin yarıçapı, sırasıyla, a ve b'dir. İletkenler arasında bölge, $a < r < c$ bölgesinde bulunan ϵ_1 geçirgenlikli ve σ_1

04_04.qxp 5.06.2024 13:49 Page 169

öz iletkenlikli ve $c < r < b$ bölgesinde bulunan ϵ_2 geçirgenlikli ve σ_2 öz iletkenlikli iki farklı kayıplı dielektrik ile doldurulmuştur.

a) İç ve dış iletkenler arasındaki eşdeğer R-C devresini ve

b) her bir bölgedeki akım yoğunluğunu bulunuz.

İPUCU: Örnek 4-3(a)'nın sonuçlarını kullanınız.

P.4-10 Örnek 4-4 ve Şekil 4-4'teki çeyrek-dairesel, düz iletken somun geometrisi için üst ve alt düz yüzler arasındaki direnci bulunuz.

P.4-11 Örnek 4-4 ve Şekil 4-4'teki çeyrek-dairesel, düz iletken somunda eğri sınırlar arasındaki direnci bulunuz.

P.4-12 R_1 ve R_2 yarıçaplı kürelerin arasındaki bölge homojen, yönbağımsız ve öz iletkenliği σ olan bir malzeme ile doldurulursa bu iki eş merkezli yüzey ($R_1 < R_2$) arasındaki direnci bulunuz.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 170



5. BÖLÜM

5-1 GENEL BAKIŞ

Daha önceden, hareket etmeyen elektrik yükleri arasındaki etkileşimi *elektrik alan* kavramının tanıtılması ile tartıştık. 3. Bölüm'de boş uzayda elektrostatiğin incelenmesi için gerekli olan temel vektör alan niceliğinin sadece elektrik alan şiddeti **E** olduğunu gördük. Bir malzeme ortamında, kutuplanmanın etkisini hesaba katmak için, ikinci bir vektör alan niceliği, elektrik akı yoğunluğu (veya elektrik yerdeğiştirme) **D**'nin tanımlanması uygundur. Aşağıda verilen iki eşitlik, elektrostatik modelin temellerini oluşturur.

Elektrostatik modelin iki temel denklemi

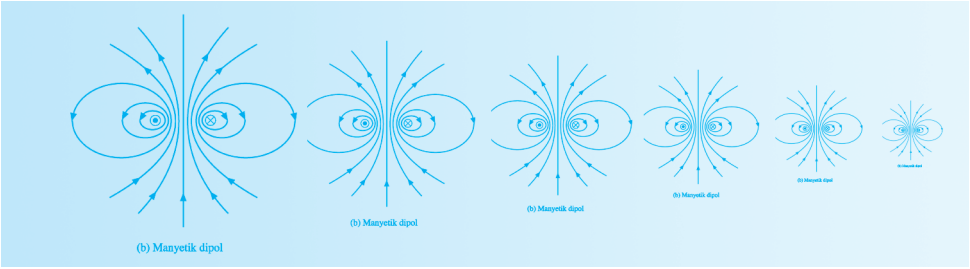
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{5-1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{5-2}$$

Ortamın elektriksel özellikleri, **D** ve **E** arasındaki ilişkiyi belirler. Ortam lineer ve yönbağımsız ise, basit yapısal bağıntı $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ile verilir ve burada ϵ bir skalardır.

Mıknatıslanma olgusu, mıknatıs taşı parçasının gizemli bir çekme gücü göstermesi ile keşfedilmiştir. Mıknatıs parçasının bulunduğu yer *Manisa*'dır (antik ismi *Magnesia*) ve *mıknatıs*, *manyetik*, *mıknatıslanma* ve *magnetron* gibi terimler de buradan türetilmiştir. Mıknatıslanmayı *manyetik alan* kavramı yoluyla inceleyeceğiz. Bir manyetik alana, bir sabit mıknatıs, hareket eden yükler veya bir akım akışı neden olabilir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 171



Statik Manyetik Alanlar

Bir **E** elektrik alanı içerisine küçük bir q test yükü yerleştirildiğinde, q'nun konumunun fonksiyonu olan bir $\mathbf{F}_e$ elektrik kuvveti oluşur.

Durağan bir yük üzerindeki kuvvet cinsinden tanımlanan elektrik alan

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad \text{(N)}. \tag{5-3}$$

Bir **manyetik akı yoğunluğu B**[1] tarafından tanımlanan manyetik alan içindeki test yükü, hareket ettiğinde, q yükünün aynı zamanda bir $\mathbf{F}_m$ manyetik kuvveti ile karşılaştığını deneyler göstermiştir. Bu kuvvet aşağıdaki gibi verilir:

Hareketli bir yükün oluşturduğu kuvvet cinsinden tanımlanan manyetik akı yoğunluğu

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad \text{(N)}, \tag{5-4}$$

burada **u** (m/s), hareket eden yükün hızıdır. **B**'nin birimi metre kare başına weber (Wb/m^2) veya tesla[2] (T)'dır. Dolayısıyla bir q test yükü üzerindeki toplam ***elektromanyetik kuvvet*** $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$'ye eşittir ve Lorentz kuvvet denklemi olarak bilinir.

B için SI birimi

Lorentz kuvvet denklemi

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \text{(N)}. \tag{5-5}$$

[1] Manyetik akı yoğunluğu, fizik kitaplarında ***manyetik indüklenme*** olarak verilir.

[2] Bir metre kare başına weber veya bir tesla 10^4 gauss'a eşittir. Yerin manyetik alanı yaklaşık $\frac{1}{2}$ gauss veya 0.5×10^{-4}T'dır. (Bir weber, bir volt-saniye ile aynıdır.)

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 172

Lorentz kuvvet denkleminin geçerliliği, deneylerle kesin tartışılmaz olarak gösterilmiştir. Elektrik alan şiddeti **E**'yi tanımlarken (Eş. 3-1) kullandığımız gibi küçük bir q için $\mathbf{F}_e/q$'yu ve manyetik akı yoğunluğu **B** için ise $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ilişkisini göz önüne alabiliriz. Bir başka seçenekte, Lorentz kuvvet denklemini, elektromanyetik modelimiz için, diğer postülatlardan türetilemez bir temel postülat olarak düşünebiliriz.

Hareket eden yükler bir akım üretir ve bu akım bir manyetik alan yaratır. Durgun akımların oluşturduğu statik manyetik alanlar bu bölümün konusunu oluşturur. Statik manyetik alanları incelemeye, boş uzayda **B**'nin ıraksama ve dönelini belirleyen iki postülat ile başlayabiliriz. **B**'nin solenoidal özelliğinden, vektör Poisson denklemine uyduğu gösterilebilen, bir manyetik vektör potansiyeli tanımlayacağız. Daha sonra, akım taşıyan bir devrenin manyetik alanını belirlemek için kullanılabilen Biot-Savart yasasını çıkartacağız. Dönel ilişkisini veren postülat, özellikle simetri durumlarında yararlı olan Amper devre yasasını doğrudan verir.

Bir manyetik alan içindeki manyetik malzemenin makroskopik etkisi bir mıknatıslanma vektörünün tanımlanmasıyla incelenebilir. Burada, bir başka vektör alan niceliği manyetik alan şiddeti **H**'yi tanımlayacağız. **B** ile **H** arasındaki ilişkiden, malzemenin manyetik geçirgenliğini tanımlayacağız ve manyetik malzemelerin davranışını tartışacağız. Daha sonra, iki farklı manyetik ortam arasındaki arayüzde sınır koşullarını inceleyerek, öz ve karşılıklı indüktansı tanımlayacak ve manyetik enerji, kuvvet ve torku tartışacağız.

5-2 BOŞ UZAYDA MANYETOSTATİĞİN TEMEL POSTÜLATLARI

Manyetostatiği (durgun manyetik alanlar) boş uzayda veya manyetik olmayan malzemelerde[1] incelemek için, sadece manyetik akı yoğunluğu vektörü **B**'ye ihtiyaç duyarız. *Manyetik olmayan ortamlarda* **B**'*nin ıraksaması ve döneli magnetostatiğin iki temel postülatı tarafından belirlenir. Bunlar*

B'nin ıraksaması sıfırdır.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \tag{5-6}$$

ve

Manyetik olmayan ortamda statik B'nin döneli

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad \text{(manyetik olmayan ortamda)} \tag{5-7}$$

dir.

[1] Ferromanyetik malzemeler (nikel, kobalt, demir ve bunların alaşımları) dışında, bu malzemelerin gerçigenlikleri boş uzayınki μ_0'a çok yakındır (% 0.01 içinde). (Bkz. Ek B-5). Bu kitapta, kolaylık için ferromanyetik olmayan malzemelerdeki (hava, su, bakır ve alüminyum gibi) manyetik alanlarla uğraşırken bunları boş uzayda kabul edeceğiz.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 173

Eş. (5-7)'de μ_0, boş uzayın manyetik gerçirgenliğidir.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m),

(bkz. Eş. 1-9) ve **J** ise akım yoğunluğudur (A/m^2). Herhangi bir vektör alanın dönelinin ıraksaması sıfır olduğu için Eş. (5-7)'den aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{5-8}$$

Eş. (5-8), durgun akımlar için verilen Eş. (4-21) denklemi ile uyumludur.

Eş. (5-6)'nın hacim integrali alınıp, ıraksama teoremi uygulandığında

Manyetik akış kaynağı yoktur (izole manyetik yükler yoktur).

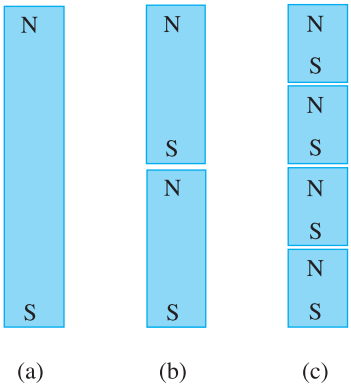
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{5-9}$$

denklemini elde ederiz. Burada yüzey integrali, gelişigüzel hacmi çevreleyen yüzey üzerinde alınır. Eş. (5-9) ile Eş. (3-6)'yı karşılaştırdığımızda, elektrik yüklerin manyetik alan benzerinin olmadığı sonucuna varırız. ***Manyetik akış kaynağı yoktur ve manyetik akı çizgileri her zaman kendi üstlerine kapanan, kapalı döngülerdir.*** Eşitlik (5-9), aynı zamanda ***manyetik akının korunumu yasasının*** bir ifadesidir. Çünkü herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru akan toplam manyetik akı sıfırdır.

Herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı akan net manyetik akı sıfırdır.

Sabit bir çubuk mıknatısın kuzey ve güney kutbunun geleneksel gösterimi, kuzey kutbunda izole edilmiş artı manyetik yüklerin ve güney kutbunda da izole edilmiş eksi manyetik yüklerin var olduğu anlamına gelmez. Şekil 5-1(a)'da gösterilen kuzey ve güney kutuplu çubuk mıknatısı göz önüne alalım. Eğer bu mıknatıs iki parçaya bölünür ise, yeni güney ve kuzey kutupları ortaya çıkacaktır ve Şekil 5-1(b)'de

ŞEKİL 5-1 Bir çubuk mıknatısın ardışık bölünmesi.



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 174

gösterilen iki tane, daha kısa mıknatısımız olacaktır. Eğer her bir kısaltılmış mıknatıs tekrar iki parçaya bölünürse, Şekil 5-1(c)'deki gibi birer tane kuzey ve güney kutbu olan dört tane mıknatısımız olacaktır. Bu işlem, mıknatıslar atomik boyutlara inene kadar devam ettirilebilir, fakat her bir çok küçük mıknatısın hâlâ bir kuzey bir de güney kutbu olacaktır. Buradan kesin olarak manyetik kutupların izole edilemeyeceğini söyleyebiliriz. Manyetik akı çizgileri, mıknatısın bir ucundan çıkıp diğer ucuna giren ve mıknatıs içinde diğer uca ulaşarak devam eden kapalı bir yol izler. Bir çubuk mıknatısın, yerin manyetik alanı içinde serbest olarak asıldığında, kuzey ve güney yönlerini gösteren uçları kuzey ve güney kutupları olarak isimlendirilir.[1]

Kuzey ve güney manyetik kutuplar izole edilemez.

Eş. (5-7)'deki dönel ifadesinin integral biçimi, her iki tarafın açık bir yüzey üzerinde integralinin alınması ve Stokes teoreminin uygulanması ile elde edilebilir.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

veya

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I} \quad \text{(manyetik olmayan ortam).} \tag{5-10}$$

Burada çizgi integralinin C yolu, S yüzeyini sınırlayan çevrittir ve I ise S'den geçen toplam akımdır. C'nin yönü ve akımın akış yönü sağ el kuralına uyar. Eş. (5-10)'un **B**'nin dönel postülatından çıkarıldığına dikkat edilmelidir. Eş. (5-10), ***Amper devre yasası***nın bir biçimidir ve ***manyetik olmayan bir ortamda manyetik akı yoğunluğunun herhangi bir kapalı yol üzerindeki dolaşımının, bu yolun sınırladığı yüzey içinden akan toplam akımın μ_0 ile çarpımına eşit olduğunu*** belirtir. Amper devre yasası, eğer I akımının etrafında **B**'nin genliğinin sabit olacağı bir kapalı C yolu var ise, bu I akımının oluşturduğu manyetik akı yoğunluğunu bulmak için çok yararlıdır.

Manyetik olmayan ortamlarda Amper devre yasası

Aşağıda, boş uzayda magnetostatiğin iki temel postülatı özet olarak verilmiştir.

[1] Bazı tarih öncesine ait kaya oluşumlarının incelenmesi her on milyon yılda bir yerin manyetik alanının tersine döndüğü inancını ortaya çıkarmıştır. Yerin manyetik alanının, yer kabuğunun içindeki erimiş demirlerin yuvarlanma hareketi ile üretildiği düşünülmektedir, fakat alanın tersine dönmesinin tam olarak nedeni hâlâ iyi anlaşılamamıştır. Bu tip bir tersine dönmenin 2000 yıl sonra olacağı tahmin edilmektedir. Böyle bir tersine dönmenin neden olacağı sonuçlar tam olarak bilinmemekle birlikte, küresel seyrüsefer sistemlerinin çalışmaz olacağı ve kuşların göç yollarının değişeceği tahmin edilmektedir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 175

Manyetik olmayan ortamda manyetostatiğin iki temel postülatı

Manyetik olmayan ortamda manyetostatiğin postülatları	
Diferensiyel Biçim	İntegral Biçim
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$

ÖRNEK 5-1

Sonsuz uzunlukta, düz, katı, b yarıçaplı, dairesel kesitli manyetik olmayan bir iletken, durgun I akımı taşımaktadır. İletkenin içindeki ve dışındaki manyetik akı yoğunluğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Öncelikle, bu problemin silindirik bir simetriye sahip olduğuna ve Amper devre yasasının kullanılabileceğine dikkat edelim. İletkeni z-ekseni boyunca yerleştirirsek, manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B}$, ϕ-yönünde ve z-ekseni etrafındaki herhangi bir dairesel yol üzerinde sabit genlikli olacaktır. Şekil 5-2(a), iletkenin ara-kesitini ve akım taşıyan iletkenin, içinde ve dışında, sırasıyla, C_1 ve C_2 dairesel integral yollarını göstermektedir. Tekrar dikkat edersek, C_1 ve C_2'nin yönü ve I'nın yönü sağ el kuralına uymaktadır. (Sağ elimizin parmaklarını C_1'in yönü doğrultusunda yerleştirdiğimizde, sağ elimizin baş parmağı I akımının yönünü gösterecektir.)

a) *İletkenin içinde:*

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1}, \qquad d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r_1 \, d\phi$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 \, d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}.$$

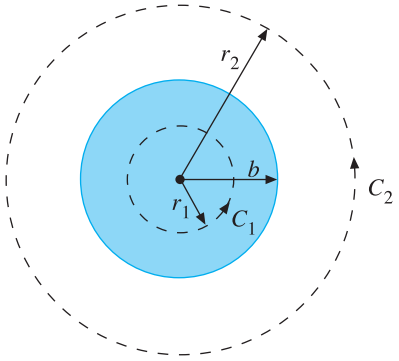
C_1 tarafından sınırlanan alandan akan akım ise

$$I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$$

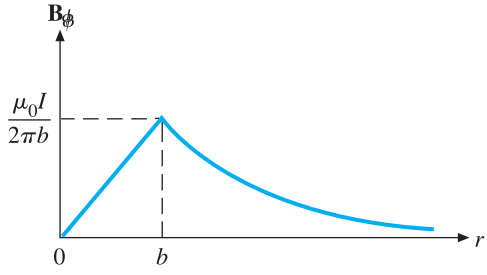
olacaktır. Amper devre yasası kullanılarak $\mathbf{B}_1$ bulunur.

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2} \qquad r_1 \le b. \tag{5-11}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 176



(a)



(b)

ŞEKİL 5-2 Sayfanın dışına doğru bir I akımı taşıyan, sonsuz uzunlukta, dairesel kesitli iletkenin manyetik akı yoğunluğu (Örnek 5-1).

b) *İletkenin dışında:*

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2}, \qquad d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r_2\, d\phi$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r_2 B_{\phi 2}.$$

İletkenin dışındaki C_2 yolu, toplam akım I'yı kapsar. Bu durumda

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}, \qquad r_2 \geq b \tag{5-12}$$

olacaktır. Eş. (5-11) ve Eş. (5-12)'yi incelediğimizde, **B**'nin genliğinin r_1'in 0 olduğu değerden $r_1 = b$'ye kadar doğrusal olarak arttığını, buradan sonra ise r_2'ye ters orantılı olarak azaldığını görürüz. B_ϕ'nin r'ye karşı değişimi Şekil 5-2(b)'de gösterilmiştir.

■ **ALIŞTIRMA 5.1** Sonsuz uzunlukta, b yarıçaplı, çok ince silindirik iletken bir tüp, $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_z J_s$(A/m) düzgün yüzey akım yoğunluğunu taşımaktadır. Her yerdeki **B**'yi bulunuz.

CEVAP: $r < b$ için 0, $r > b$ için $\mathbf{a}_\phi \mu_0 J_s b/r$.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 177

ÖRNEK 5-2

I akımını taşıyan, çekirdeği hava olan, N sarımlı, sarımları birbirine çok yakın olan bir toroidin içerisindeki manyetik akı yoğunluğunu belirleyiniz. Toroidin ortalama yarıçapı b ve her bir sarımın yarıçapı a'dır.

ÇÖZÜM

Şekil 5-3, bu problemin geometrisini göstermektedir. Silindirik simetri, $\mathbf{B}$'nin sadece ϕ-bileşeni olduğunu ve bunun genliğinin toroid ekseni etrafındaki herhangi bir dairesel yol boyunca sabit olduğunu garanti eder. Şekildeki gibi r yarıçaplı bir dairesel C çevriti oluşturalım. $(b-a) < r < b+a$ olduğu durumda Eş. (5-10)'dan doğrudan

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 NI$$

yazabiliriz. Burada toroidin çekirdeğinin μ_0 geçirgenliğinde havadan oluştuğunu kabul ettik. Bu durumda

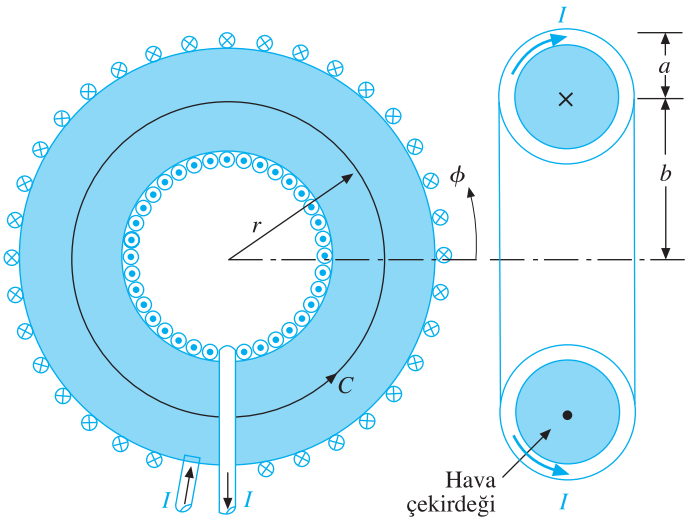
$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi B_\phi = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \qquad (b-a) < r < (b+a) \tag{5-13}$$

dır. $r < (b-a)$ ve $r > (b+a)$ için ise, bu iki bölgede oluşturulan çevritin kapsadığı net toplam akım sıfır olduğundan $\mathbf{B} = 0$ olacaktır.

■ **ALIŞTIRMA 5.2** I akımı taşıyan, her metrede n sarımı bulunan ve çekirdeği hava olan çok uzun silindirik bir solenoid içerisindeki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

CEVAP: $\mu_0 nI$.

ŞEKİL 5-3 Akım taşıyan bir toroid bobin (Örnek 5-2).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 178

TEKRAR SORULARI

S.5-1 **B** manyetik akı yoğunluğu alanı içerisinde **u** hızı ile hareket eden bir q test yüküne etkiyen kuvvetin ifadesi nedir?

S.5-2 Manyetik akı yoğunluğu birimi tesla (T)'nın, metrekare başına volt-saniye ($V \cdot s/m^2$) olduğunu gösteriniz.

S.5-3 Lorentz kuvvet denklemini yazınız.

S.5-4 Magnetostatiğin iki temel postülatı nelerdir?

S.5-5 Magnetostatiğin hangi postülatı, izole edilmiş manyetik yüklerin varlığını yadsır?

S.5-6 Manyetik akının korunumu yasasını ifade ediniz.

S.5-7 Amper devre yasasını ifade ediniz.

S.5-8 Bir doğru I akımını taşıyan, sonsuz uzunlukta düz ince telin **B**-alanının uzaklıkla değişimi nasıldır?

NOTLAR

1. Bir **B** manyetik alanı içinde **u** hızı ile hareket eden bir q yüküne etkiyen manyetik kuvvet, hem **u** hem de **B**'ye diktir. **u**, **B**'ye paralel ise q üzerine etkiyen kuvvet yoktur.
2. İzole edilmiş manyetik yükler yoktur.
3. Manyetik alan solenoiddir ve manyetik akı çizgileri her zaman kendi üstlerine kapanır.

5-3 MANYETİK VEKTÖR POTANSİYELİ

Eş. (5-6)'daki **B**'nin ıraksamasının sıfır olması postülatı yani $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, **B**'nin solenoid olduğunu göstermektedir. Sonuçta **B**, bir başka vektörün döneli olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Manyetik vektör potansiyeli A'nın kısmi ifadesi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(T)}. \tag{5-14}$$

A'nın SI birimi

A vektör alanı, ***manyetik vektör potansiyeli*** olarak adlandırılır. SI birimi metre başına weber (W/m)'dir. Eğer bir akım dağılımından **A**'yı bulabilirsek; **A**'nın türevleri yardımıyla (döneli) **B** elde edilebilir. Bu durum, elektrostatikte **E**'nin dönelinin sıfır olması nedeniyle (Bölüm 3-5) skalar elektrik potansiyeli V'nin tanımlanabilmesine ve $\mathbf{E} = -\nabla V$ ilişkisinin kullanılarak **E**'nin elde edilmesine benzerdir. Bununla birlikte, bir vektörün tanımlı olması, hem dönelinin hem de ıraksamasının belirlenmesini gerektirir. Bir başka deyişle, Eş. (5-14) tek başına **A**'nın tanımlanması için yeterli değildir, **A**'nın ıraksamasının da tanımlanması gereklidir.

$\nabla \cdot \mathbf{A}$'yı nasıl seçeceğiz? Bu soruyu cevaplamadan önce, Eş. (5-14)'teki **B**'nin dönelini alalım ve Eş. (5-7)'ye yerleştirelim.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 179

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{5-15}$$

Bu noktada bir vektörün dönelinin döneli[1] formülünü aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5-16a}$$

veya

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5-16b}$$

Eş. (5-16a) ve Eş. (5-16b)'yi, $\nabla^2\mathbf{A}$'nın dolayısıyla $\mathbf{A}$'nın Laplasyeninin tanımı olarak alabiliriz. *Kartezyen koordinatlarda* bu ifade

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{a}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{a}_z \nabla^2 A_z \tag{5-17}$$

olacaktır. Böylece, *Kartezyen koordinatlarda* $\mathbf{A}$ vektörünün Laplasyeni, bileşenleri $\mathbf{A}$'nın ilgili bileşenlerinin Laplasyeni (gradyantının ıraksaması) olan bir başka vektör alanı olacaktır. Bu durum diğer koordinat sistemleri için geçerli değildir.

■ **ALIŞTIRMA 5.3** Eş. (5-17)'yi Kartezyen koordinatlar için gerçekleyiniz.

Eş. (5-15)'deki $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$'yı Eş. (5-16a)'ya göre açtığımızda

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{5-18}$$

denklemini elde ederiz. Eş. (5-18)'i sadeleştirmek amacı ile

A'nın ıraksaması için Coulomb koşulu[2]

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \tag{5-19[2]}$$

seçersek[1] Eş. (5-18) aşağıdaki biçimi alır.

Vektör Poisson denkleminin operatör biçimi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.} \tag{5-20}$$

Bu eşitlik ***vektör Poisson denklemi***dir. Kartezyen koordinatlarda, Eş. (5-20), üç tane skalar Poisson denklemine eşdeğerdir:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \tag{5-21a}$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \tag{5-21b}$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z. \tag{5-21c}$$

[1] Bu formül, Kartezyen koordinatlarda doğrudan yerine koyma yoluyla gösterilebilir.
[2] Bu ilişki ***Coulomb koşulu*** veya ***Coulomb ölçüsü*** olarak bilinir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 180

Bu üç denklemin her biri, elektrostatikteki skalar Poisson denklemi ile matematiksel olarak aynıdır. Boş uzayda

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

denkleminin bir özel çözümü (bakınız Eş. 3-38) aşağıda verilmiştir.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_v}{R}\,dv'.$$

Bundan yararlanarak Eş. (5-21a)'nın çözümünü

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_x}{R}\,dv'$$

olarak yazabiliriz. A_y ve A_z için de benzer çözümler yazabiliriz. Üç bileşeni bir arada yazmak yoluyla, Eş. (5-20)'nin çözümü

Akım yoğunluğundan manyetik vektör potansiyelinin bulunması

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}}{R}\,dv' \qquad \text{(Wb/m)} \tag{5-22}$$

olacaktır. Eşitlik (5-22), hacim akım yoğunluğu **J**'den manyetik vektör potansiyeli **A**'nın bulunmasını sağlar. Türev yolu ile de $\nabla \times \mathbf{A}$'dan manyetik akı yoğunluğu **B** elde edilebilir.

A vektör potansiyeli, *C* çevriti tarafından sınırlanmış, verilen bir *S* alanı içinden geçen manyetik akı

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \tag{5-23}$$

Manyetik akı için SI birimi

arasında basit bir ilişki vardır. Manyetik akının SI birimi weber (Wb)'dir ve tesla-metre kare ($\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2$)'ye eşittir. Eş. (5-14) ve Stokes teoremini kullanarak

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\ell \qquad \text{(Wb)} \tag{5-24}$$

Manyetik vektör potansiyeli ile manyetik akı arasındaki ilişki

denklemini elde ederiz. Böylece manyetik vektör potansiyeli **A**'nın fiziksel önemi ortaya çıkar: **A**'nın herhangi bir kapalı yol üzerindeki çizgi integrali, bu yolun sınırladığı alandan geçen toplam manyetik akıya eşittir.

5-4 BIOT-SAVART YASASI VE UYGULAMALARI

Bir çok uygulamada, akım taşıyan bir devrenin neden olduğu manyetik alanın belirlenmesi ile ilgileniriz. Kesit alanı *S* olan ince bir tel için, dv', $S\,d\ell'$'ne eşittir ve akım bütün tel boyunca akar. Bu durumda

$$\mathbf{J}\,dv' = JS\,d\ell' = I\,d\ell' \tag{5-25}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 181

olacaktır ve Eş. (5-22) aşağıdaki biçimi alacaktır.

Kapalı devredeki akımdan manyetik vektör potansiyelinin bulunması

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R} \right) \quad \text{(Wb/m)}. \tag{5-26}$$

Burada integral işareti üzerine, I akımının, C' ile gösterilen kapalı bir yol üzerinde[1] akması gerektiği için bir çember yerleştirilmiştir. Bu durumda manyetik akı yoğunluğu ise

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R} \right) \end{aligned} \tag{5-27}$$

olarak bulunur. Eş. (5-27)'deki önemli nokta, *üssüz* dönel işleminin, *alan noktası*nın uzay koordinatlarına göre türevleri göstermesidir. İntegral işlemi ise *üslü kaynak koordinatları*na göre alınmaktadır. Eş. (5-27)'deki integrali alınacak ifade aşağıdaki özdeşlik (bkz. Eş. 2-115) kullanılarak iki terimle ifade edilebilir.

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} + (\nabla f) \times \mathbf{G}. \tag{5-28}$$

Eş. (5-27)'de $f = 1/R$ ve $\mathbf{G} = d\boldsymbol{\ell}'$ kullanırsak

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\boldsymbol{\ell}' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\boldsymbol{\ell}' \right] \tag{5-29}$$

elde ederiz. Şimdi, üslü ve üssüz koordinatlar birbirinden bağımsız olduğundan, $\nabla \times d\boldsymbol{\ell}'$ sıfıra eşittir ve Eş. (5-29)'un sağ tarafındaki birinci terim sıfırlanır. R uzaklığı, kaynak noktası (x', y', z')'deki $d\boldsymbol{\ell}'$'den alan noktası (x, y, z)'ye ölçülür. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2} \\ \nabla\left(\frac{1}{R}\right) &= \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= -\frac{\mathbf{a}_x(x-x') + \mathbf{a}_y(y-y') + \mathbf{a}_z(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{a}_R \frac{1}{R^2} \end{aligned} \tag{5-30}$$

[1] Burada, durgun manyetik alanları oluşturan doğru (zamanla değişmeyen) akımlarla uğraşmaktayız. Zamanla-değişen kaynak içeren devreler, ucu açık bir tel boyunca zamanla değişen akımlar oluşturabilir ve telin uçlarında yüklerin birikmesine neden olur. Antenler buna bir örnektir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 182

elde edilir. Burada $\mathbf{a}_R$, kaynak noktasından alan noktasına yönlenmiş birim vektördür. Eş. (5-30)'u Eş. (5-29)'da yerine koyarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

Kapalı bir devredeki akımdan manyetik akı yoğunluğunu bulmak için Biot-Savart yasası

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad \text{(T).} \tag{5-31}$$

Eş. (5-31) ***Biot-Savart yasası*** olarak bilinir. Bir C' kapalı yolundaki I akımının neden olduğu $\mathbf{B}$'nin belirlenmesi için bir formüldür ve $\mathbf{B}$'nin ıraksama postülatından *elde edilmiştir*. Bir çok kitap, Biot-Savart yasasını magnetostatiğin geliştirilmesi için başlangıç noktası olarak alır. Fakat, Eş. (5-31)'deki gibi kesin ve karışık bir ilişkiyi kullanarak deneysel yöntemleri oluşturmayı görmek zordur. Biz hem Amper devre yasasını hem de Biot-Savart yasasını, $\mathbf{B}$'nin ıraksama ve dönel postülatlarını kullanarak bulmayı tercih ettik.

Bazı durumlarda, Eş. (5-31)'i aşağıdaki gibi iki adımda yazmak uygun olabilir:

$$\mathbf{B} = \oint_{C'} d\mathbf{B} \quad \text{(T)} \tag{5-32a}$$

ile

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \right) \quad \text{(T).} \tag{5-32b}$$

Eş. (5-32b), $I\, d\boldsymbol{\ell}'$ akım elemanının oluşturduğu manyetik akı yoğunluğudur. Eş. (5-32b)'nin başka ve bazen daha uygun bir biçimi ise aşağıda verilmiştir.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad \text{(T).} \tag{5-32c}$$

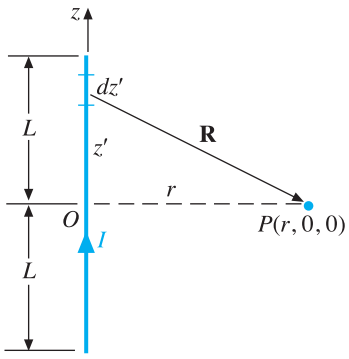
ÖRNEK 5-3

$2L$ uzunluğundaki düz bir telde I doğru akımı akmaktadır. Teli ortadan kesen düzlemde, telden r kadar uzaklıktaki bir noktada manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B}$'yi aşağıdaki yöntemlerle bulunuz: a) Önce manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$'yı bularak. b) Biot-Savart yasasını uygulayarak.

ÇÖZÜM

Doğru akım sadece kapalı devrelerde bulunur. Bu nedenle, bu problemdeki tel, akım taşıyan kapalı bir döngünün bir parçası olabilir. Devrenin geri kalanını bilmediğimiz için, Amper devre yasasının

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 183



ŞEKİL 5-4 Akım taşıyan düz bir tel (Örnek 5-3).

kullanılmasının bir avantajı olmayacaktır. Şekil 5-4'ü referans alırsak, akım taşıyan tel parçası z-ekseni boyuncadır. Tel üzerindeki uzunluk elemanı

$$d\ell' = \mathbf{a}_z\, dz'$$

olacaktır. Silindirik koordinatlarda P alan noktası ise $(r, 0, 0)$'dır.

a) **B**'*nin* $\nabla \times$ **A**'*dan bulunması*. Eş. (5-26)'ya $R = \sqrt{z'^2 + r^2}$ yerleştirdiğimizde

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + r^2}}$$

$$= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln\left(z' + \sqrt{z'^2 + r^2}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \tag{5-33}$$

elde ederiz. Buradan da **B** elde edilir.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{a}_z A_z) = \mathbf{a}_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \mathbf{a}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Tel etrafındaki silindirik simetri $\partial A_z/\partial \phi = 0$ olduğunu garanti eder. Buradan da

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L}\right]$$

$$= \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \tag{5-34}$$

elde ederiz.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 184

$r \ll L$ olduğunda Eş. (5-34) aşağıdaki biçime indirgenir.

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{5-35}$$

Yukarıdaki ifade, sonsuz uzunlukta, I akımı taşıyan düz bir telden r kadar uzaklıkta bir noktadaki $\mathbf{B}$ alanının ifadesidir ve Eş. (5-12)'de verilen ile aynıdır.

b) *Biot-Savart yasasının uygulanması*. Şekil 5-4'ten de görüldüğü gibi kaynak elemanı dz' ile alan noktası P arasındaki uzaklık vektörü

$\mathbf{R} = \mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z'$ ve

$d\ell' \times \mathbf{R} = \mathbf{a}_z dz' \times (\mathbf{a}_r r - \mathbf{a}_z z') = \mathbf{a}_\phi r\, dz'$

dir. Bu ifadeyi Eş. (5-32c)'de yerleştirirsek

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{r\, dz'}{(z'^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

elde ederiz, ki bu ifade Eş. (5-34) ile aynıdır.

ÖRNEK 5-4

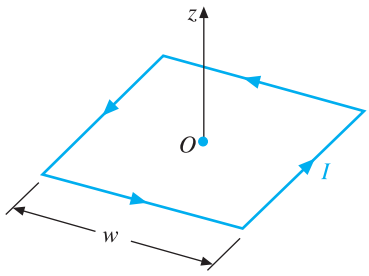
I doğrusal akımını taşıyan ve kenar uzunluğu w olan, bir düzlem kare döngünün merkezindeki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Döngünün, Şekil 5-5'de gösterildiği gibi xy-düzlemine yerleştirildiğini düşünelim. Kare döngünün merkezindeki manyetik akı yoğunluğu, w uzunluğundaki bir kenarının neden olduğu akının dört katına eşittir. Eş. (5-34)'de $L = r = w/2$ alırsak

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi w} \times 4 = \mathbf{a}_z \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi w} \tag{5-36}$$

ŞEKİL 5-5 I akımını taşıyan kare döngü (Örnek 5-4).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 185

elde ederiz. Burada **B**'nin yönü ve döngüdeki akım sağ el kuralına uygundur.

■ **ALIŞTIRMA 5.4** 8 (cm) × 6 (cm)'lik dikdörtgen biçimli iletken bir döngü *xy*-düzlemine yerleştirilmiştir. Yukarıdan bakıldığında saat yönünde 5 (A)'lik bir doğru akım akmaktadır. Döngünün merkezindeki **B**'yi bulunuz.

CEVAP: $-\mathbf{a}_z\, 83.3\ (\mu\text{T})$.

ÖRNEK 5-5

I doğru akımını taşıyan, *b* yarıçaplı çember biçimli döngünün eksenindeki bir noktada oluşan manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekil 5-6'daki çember döngüye Biot-Savart yasasını uygulayalım.

$$d\ell' = \mathbf{a}_\phi b\, d\phi'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b$$

$$R = (z^2 + b^2)^{1/2}.$$

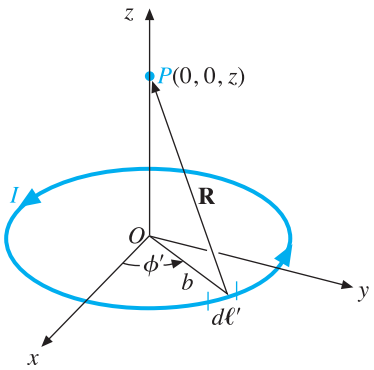
Yine **R**'nin, kaynak elemanı $d\ell'$'den alan noktası *P*'ye olan uzaklık olduğunu hatırlarsak aşağıdakileri yazabiliriz.

$$d\ell' \times \mathbf{R} = \mathbf{a}_\phi b\, d\phi' \times (\mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_r b)$$

$$= \mathbf{a}_r bz\, d\phi' + \mathbf{a}_z b^2\, d\phi'.$$

Silindirik simetri olduğu için, $d\ell'$'nün tam karşısına gelen elemanın oluşturacağı ters yönlü alan nedeniyle, $\mathbf{a}_r$ bileşenleri birbirlerini götürecektir, dolayısıyla bu çapraz çarpımın sadece $\mathbf{a}_z$-bileşenini dikkate almamız yeterlidir.

ŞEKİL 5-6 *I* akımı taşıyan çember döngü (Örnek 5-5).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 186

Eş. (5-32a) ve Eş. (5-32c)'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_z \frac{b^2\, d\phi'}{(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

veya

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}} \quad \text{(T)}.} \tag{5-37}$$

■ **ALIŞTIRMA 5.5** Şekil 5-6'yı kullanarak,

a) 2 (A)'lik doğru akım taşıyan 5 (cm) yarıçaplı çemberin merkezindeki **B**'yi bulunuz.

b) 4 (A)'lik doğru akım taşıyan 8 (cm) yarıçaplı yarım çemberin merkezindeki **B**'yi bulunuz.

CEVAP: (a) 8π (μT), (b) 5π (μT).

5-5 MANYETİK DİPOL

Bu bölüme bir örnek ile başlayacağız.

ÖRNEK 5-6

Manyetik dipol

I akımı taşıyan *b* yarıçaplı küçük çemberden (***manyetik dipol***) uzak bir noktadaki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekil 5-7'de verildiği gibi döngünün merkezini küresel koordinat sisteminin orijini olarak seçelim. Kaynak üslü koordinatlarla gösterilmiştir. Önce manyetik vektör potansiyeli **A**'yı bulacağız ve daha sonra **B**'yi $\nabla \times \mathbf{A}$'dan belirleyeceğiz.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R_1} \tag{5-38}$$

denkleminde, Şekil 5-7'de gösterildiği gibi R_1, P' noktasındaki $d\ell'$ kaynak elemanı ile alan noktası P arasındaki uzaklıktır. Simetri nedeniyle, alan noktasında manyetik alanın ϕ açısından bağımsız olduğu açıktır. Kolaylık için, yz-düzleminde $P(R, \theta, \pi/2)$'yi seçelim.

$d\ell'$ üzerindeki $\mathbf{a}_\phi$ ile P noktasındaki $\mathbf{a}_\phi$'nin aynı olmadığına dikkat ediniz. P noktasındaki $\mathbf{a}_\phi$, Şekil 5-7'den de görüleceği gibi $-\mathbf{a}_x$'dir ve

$$d\boldsymbol{\ell}' = (-\mathbf{a}_x \sin\phi' + \mathbf{a}_y \cos\phi')b\, d\phi' \tag{5-39}$$

olarak yazılabilir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 187

Her bir $I\,d\ell'$ için, y-ekseninin diğer tarafında karşılık gelen bir simetrik diferensiyel akım elemanı bulunmaktadır ve bu eleman $\mathbf{A}$'ya $-\mathbf{a}_x$ yönünde eşit miktarda katkı sağlar. Fakat $\mathbf{a}_y$ yönündeki katkılar birbirini yok eder. Sonuçta Eş. (5-38)

$$\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b \sin \phi'}{R_1}\, d\phi'$$

veya

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \phi'}{R_1}\, d\phi' \tag{5-40}$$

olarak yazılır. OPP' üçgenine kosinüs eşitliği uygulanırsa

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos \psi$$

olur, burada $R \cos \psi$, R'nin yarıçap OP' üzerindeki izdüşümüdür ve OP'' 'nün OP' üzerine izdüşümü ile aynıdır ($OP'' = R \sin \theta$). Böylece

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR \sin \theta \sin \phi'$$

ve

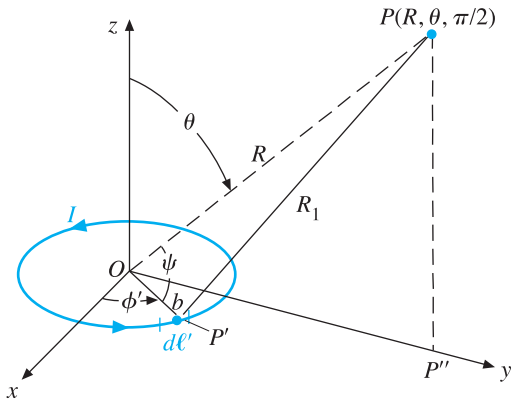
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \phi'\right)^{-1/2}$$

olacaktır. $R^2 \gg b^2$ olduğundan b^2/R^2 terimi 1 ile kıyaslandığında ihmal edilebilir:

$$\frac{1}{R_1} \cong \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \phi'\right)^{-1/2}$$

$$\cong \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \phi'\right). \tag{5-41}$$

ŞEKİL 5-7 I akımı taşıyan küçük çember (Örnek 5-6).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 188

Eş. (5-41)'in Eş (5-40)'da yerleştirilmesi ile

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 Ib}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{b}{R} \sin\theta \sin\phi'\right) \sin\phi' \, d\phi'$$

elde edilir, integral alındığında ise

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 Ib^2}{4R^2} \sin\theta \tag{5-42}$$

olacaktır. Manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$'dır. Eş. (2-97)'yi veya kitabın arka kapağının içindeki formülü kullanarak

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ib^2}{4R^3} (\mathbf{a}_R \, 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta) \tag{5-43}$$

cevabını elde ederiz.

Bu noktada, Eş. (5-43) ile Eş. (3-37)'de verilen elektrostatik dipolün *uzak alandaki* elektrik alan şiddeti arasındaki benzerliği fark edebiliriz. Şekil 5-7'deki manyetik dipolün (*xy*-düzlemine yerleştirilmiş) uzak noktadaki manyetik akı çizgileri, bir elektrik dipolün (*z*-yönünde uzanan) elektrik alan çizgileri ile aynı biçimdedir. Manyetik dipolün akı çizgilerinin sürekli olmasına rağmen, elektrik dipolün alan çizgileri yüklerde sonlanmakta ve her zaman artı yükten eksi yüke doğru gitmektedir. Bu durum Şekil 5-8'de gösterilmiştir.

Eş. (5-42)'deki manyetik vektör potansiyel ifadesini aşağıdaki gibi tekrar düzenleyelim:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 (I\pi b^2)}{4\pi R^2} \sin\theta$$

veya

Manyetik dipol momentinden manyetik vektör potansiyelinin bulunması

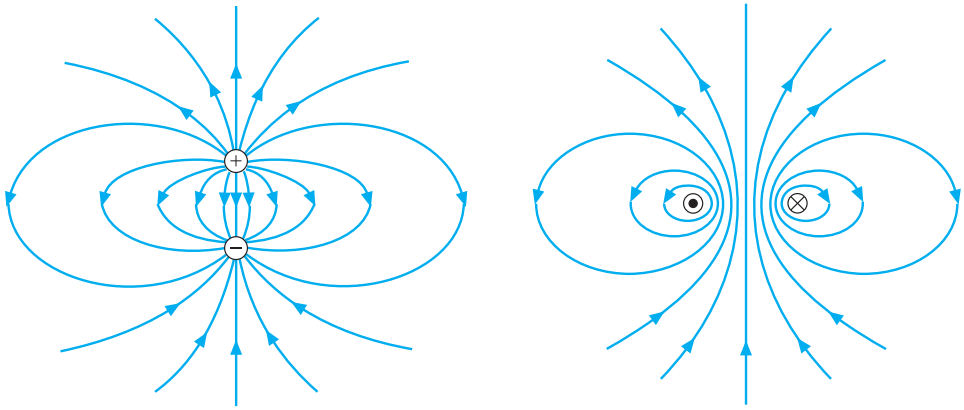
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{(Wb/m)}. \tag{5-44}$$

Burada

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_z I\pi b^2 = \mathbf{a}_z IS = \mathbf{a}_z m \quad (\text{A} \cdot \text{m}^2) \tag{5-45}$$

manyetik dipol momenti olarak tanımlanır ve genliği döngü akımı ile alanın çarpımına eşit, yönü ise sağ elimizin parmakları akım yönünde iken baş parmağımızın gösterdiği yön olan bir vektördür. Eş. (5-44)'ün Eş. (3-36)'daki elektrik dipolün skalar elektrik potansiyel ifadesi olan

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 189



(a) Elektrik dipol (b) Manyetik dipol

ŞEKİL 5-8 Bir elektrik dipolün elektrik alan çizgileri ve bir manyetik dipolün manyetik akı çizgileri.

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{(V)} \tag{5-46}$$

ile karşılaştırılmasından **A** ile V arasında benzerlik olduğu bulunur. Akım taşıyan küçük bir döngüyü bir ***manyetik dipol*** olarak isimlendiririz.

Aynı biçimde, Eş. (5-43)'ü de aşağıdaki gibi tekrar yazabiliriz.

Bir manyetik dipolün oluşturduğu manyetik alan yoğunluğu

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\mathbf{a}_R\, 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta) \quad \text{(T)}. \tag{5-47}$$

Eş. (5-47), bir elektrik dipolün çok uzağındaki bir noktadaki **E** alanının Eş. (3-37)'deki ifadesi ile aynı biçimdedir, sadece p ile m, ϵ_0 ile $1/\mu_0$ yer değiştirmiştir. Örnek 5-6'daki manyetik dipol, küçük bir çember döngü olmasına rağmen, Eş. (5-44) ve Eş. (5-47)'deki uzak alan ifadeleri, $m = IS$ tanımı ile diğer şekillerdeki döngüler için de elde edilebilir.

TEKRAR SORULARI

S.5-9 *Manyetik vektör potansiyeli* **A**'yı tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.5-10 Manyetik vektör potansiyeli **A** ve verilen bir alandan geçen manyetik akı arasındaki ilişki nedir?

S.5-11 Biot-Savart yasasını ifade ediniz.

S.5-12 Manyetik dipol nedir? ***Manyetik dipol momentini*** tanımlayınız. SI birimi nedir?

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 190

NOTLAR

1. Bir akım dağılımından oluşan **B**'yi belirlemede, eğer **B**'nin sabit bir genliğe sahip olduğu kapalı bir yol bulunabiliyorsa Amper devre yasasını uygulamak en basitidir. Problem geometrisi genelde silindirik simetriye ve/veya sonsuz uzunluğa sahiptir.
2. Eğer yukarıdaki koşul sağlanmıyorsa, verilen devredeki akımdan **B**'nin bulunması için Biot-Savart yasası kullanılmalıdır.
3. Bir elektrik dipolün oluşturduğu **E** alanı ve bir manyetik dipolün (akım taşıyan küçük döngü) oluşturduğu **B** alanının hesaplanmasında, benzeşen nicelikler aşağıda verilmiştir.

Elektrik dipol	Manyetik dipol
$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\mathbf{m} = \mathbf{a}_n IS$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{B}$
ϵ_0	$1/\mu_0$

5-6 MIKNATISLANMA VE EŞDEĞER AKIM YOĞUNLUKLARI

Maddelerin basit atom modeline göre, bütün malzemeler, artı yüklü bir çekirdek ve onun etrafında yörüngede dönen eksi yüklü elektronların oluşturduğu atomlardan oluşmuştur. Yörüngede dönen elektronlar, dönen akımlara neden olur ve mikroskopik manyetik dipoller oluşur. Buna ilaveten, hem elektronlar hem de atom çekirdeği kendi eksenleri etrafında dönerek (spin) manyetik dipol momentleri oluştururlar. Dönen bir çekirdeğin manyetik dipol momenti, yörüngede veya kendi ekseni etrafında dönen bir elektronunkine kıyasla genellikle ihmal edilebilir. Çünkü çekirdeğin kütlesi daha büyük ve açısal hızı daha düşüktür.

Dışarıdan bir manyetik alan uygulanmadığında, çoğu malzemenin (sabit mıknatıslar dışında) atomlarının manyetik dipolleri rastgele yönlenmiştir ve net manyetik momentleri sıfırdır. Dışarıdan bir manyetik alan uygulanması, hem ekseni etrafında dönen elektronların manyetik momentlerini aynı hizaya getirir hem de elektronların yörüngesel hareketlerindeki değişimin neden olduğu indüklenmiş bir manyetik momente neden olur. Bir manyetik malzemenin varlığının neden olduğu manyetik akı yoğunluğundaki değişim miktarını belirlemek için, bir atomun manyetik dipol momentine $\mathbf{m}_k$ diyelim. Eğer birim hacimde n tane atom var ise, ***mıknatıslanma vektörü***, **M**, aşağıdaki gibi

Mıknatıslanma vektörü, manyetik dipol momentinin hacim yoğunluğudur.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_k}{\Delta v} \qquad \text{(A/m)} \tag{5-48}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 191

olarak tanımlanır ve manyetik dipol momentinin hacim yoğunluğudur. Bir dv' hacim elemanının manyetik dipol momenti $d\mathbf{m} = \mathbf{M}\,dv'$'dür ve Eş. (5-44)'e göre

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}\,dv' \tag{5-49}$$

biçiminde bir manyetik vektör potansiyeli üretir. Eş. (5-49)'daki $d\mathbf{A}$'nın hacim integrali toplam $\mathbf{A}$'yı verir ve mıknatıslanmanın manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B}$'ye katkısı ise $\nabla \times \mathbf{A}$'dır. Eş. (5-49), kutuplanmış dielektrik ortamın oluşturduğu potansiyeli bulmakta kullandığımız ve daha sonra $-\nabla V$'den de $\mathbf{E}$'yi elde ettiğimiz Eş. (3-55)'teki dV ifadesi ile benzeşir.

Kısım 3-6.2'de tartışılan, indüklenmiş elektrik dipollerin momenti $\mathbf{P}$'nin, kutuplanma yüzey yoğunluğu $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$ ve kutuplanma hacim yük yoğunluğu $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$'ye eşdeğerliğine benzer biçimde, manyetik dipollerin momenti $\mathbf{M}$'nin analitik eşdeğerlerini de ***mıknatıslanma yüzey akım yoğunluğu***

Eşdeğer mıknatıslanma yüzey akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n \qquad (\text{A/m}) \tag{5-50}$$

ve ***mıknatıslanma hacim akım yoğunluğu***

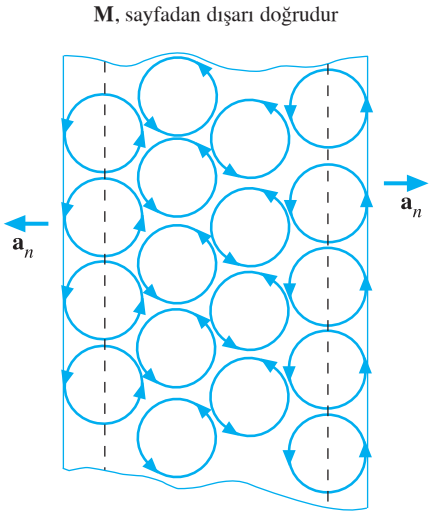
Eşdeğer mıknatıslanma hacim akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}_{mv} = \nabla \times \mathbf{M} \qquad (\text{A/m}^2) \tag{5-51}$$

olarak tanımlayabiliriz. Burada $\mathbf{a}_n$ sınıra dik dışarı doğru birim vektördür.

Belirli bir kalınlıktaki mıknatıslanmış malzemenin kesiti nitel göste-

ŞEKİL 5-9 Mıknatıslanmış malzemenin kesiti.



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 192

rim olarak Şekil 5-9'da verilmiştir. Yüzeydeki manyetik dipollerin etkin olarak çizgi ile gösterilen hattın ötesinde yüzey akımına katkıda bulunacağını görürüz. Yüzey akımının genliği, manyetik dipol momentinin hacim yoğunluğu ile doğru orantılıdır ve her iki sınırda da akımın yönü Eş. (5-50)'nin öngördüğü gibi $\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$ yönündedir.

Eş. (5-51)'de verilen eşdeğer mıknatıslanma hacim akım yoğunluğu $\mathbf{J}_{mv}$'yi gözümüzde canlandırmak biraz zordur, fakat manyetik moment yoğunluğu $\mathbf{M}$'nin $\mathbf{M}$ ile doğru orantılı bir iç akı yoğunluğu $\mathbf{B}_i$'yi üreteceğini kabul edebiliriz ve bunu da aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{M} \tag{5-52}$$

veya

$$\frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0} = \mathbf{M} \tag{5-53}$$

Eş. (5-7)'den ise

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}_e}{\mu_0} \right) = \mathbf{J} \tag{5-54}$$

ifadesini yazabiliriz. Burada $\mathbf{B}_e$, serbest akım yoğunluğu $\mathbf{J}$'nin oluşturduğu dış manyetik akı yoğunluğunu göstermektedir. Eş. (5-53)'den de

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0} = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{mv} \tag{5-55}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\mathbf{J}_{mv}$, eşdeğer mıknatıslanma hacim akım yoğunluğudur. Eş. (5-54) ve Eş. (5-55)'i topladığımızda

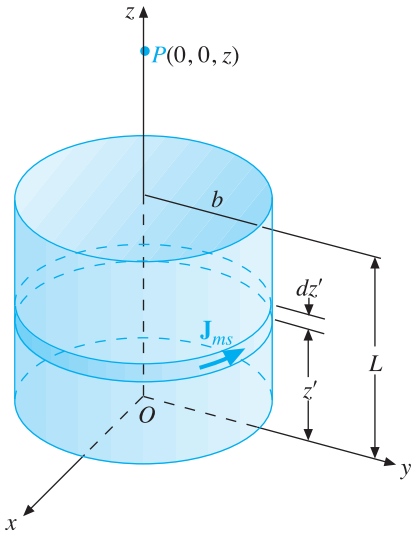
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{mv}) \tag{5-56}$$

elde edilir. Burada, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{toplam} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_i$'dir. Sonuçta, mıknatıslanmış bir malzemede manyetik akı yoğunluğu, $\mathbf{B}_i$ kadar değişecektir. Eğer $\mathbf{M}$ malzemenin içinde birbiçimli ise, komşu atomik dipollerin akımları, ters yönde aktığı için, her yerde birbirlerini yok edecekler ve içeride net akım sıfır olacaktır. Bu durum, Eş. (5-51)'den de tahmin edilebilir. Çünkü sabit $\mathbf{M}$'nin türevi (döneli) sıfırdır. Eğer $\mathbf{M}$'nin uzayda değişimi varsa ve $\nabla \times \mathbf{M} \neq 0$ ise, içerideki atomik akımlar birbirlerini yok etmezler ve sonuçta net hacim akım yoğunluğu $\mathbf{J}_{mv}$'yi oluştururlar.

ÖRNEK 5-7

Bir manyetik malzemeden oluşmuş mıknatıslanmış dairesel silindirin eksenindeki manyetik akı yoğunluğunu buluruz. Silindirin yarıçapı b, uzunluğu L ve eksenel mıknatıslanma $\mathbf{M} = \mathbf{a}_z M_0$'dır.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 193



ŞEKİL 5-10 Düzgün mıknatıslanmış dairesel silindir (Örnek 5-7).

ÇÖZÜM

Bu problemde ilgilendiğimiz silindirik çubuk mıknatısın eksenini, Şekil 5-10'daki gibi silindirik koordinat sisteminin z-ekseni ile çakıştıralım. Mıknatıs içerisindeki $\mathbf{M}$, mıknatıslanması sabit olduğundan, $\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M} = 0$ ve eşdeğer hacim akım yoğunluğu olmayacaktır. Silindirin yanal yüzündeki eşdeğer mıknatıslanma yüzey akım yoğunluğu

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ms} &= \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n' = (\mathbf{a}_z M_0) \times \mathbf{a}_r \\ &= \mathbf{a}_\phi M_0\end{aligned} \tag{5-57}$$

dır. *Bu durumda, mıknatıs, doğrusal çevresel akım yoğunluğu* M_0 (A/m) *olan bir silindirik tabaka gibi davranacaktır*. Alt ve üst yüzeylerde yüzey akımı yoktur. $P(0, 0, z)$ noktasındaki $\mathbf{B}$'yi bulmak için, $\mathbf{a}_\phi M_0\, dz'$ ve Eş. (5-37)'yi kullanarak

$$d\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 M_0 b^2\, dz'}{2[(z-z')^2 + b^2]^{3/2}}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} &= \mathbf{a}_z \int_0^L \frac{\mu_0 M_0 b^2\, dz'}{2[(z-z')^2 + b^2]^{3/2}} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}}\right]\end{aligned} \tag{5-58}$$

elde edilir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 194

ALIŞTIRMA 5.6 Yarıçapı 5 (cm) ve uzunluğu 12 (cm) olan silindirik bir çubuk mıknatısın eksenel mıknatıslanması $\mathbf{a}_z$ 130 (A/cm)'dir.

a) Üst yüzeyin merkezindeki,

b) alt yüzeyin merkezindeki ve

c) mıknatısın merkezindeki

B'yi bulunuz.

CEVAP: (a) $\mathbf{a}_z$ 7.54 (mT), (b) $\mathbf{a}_z$ 7.54 (mT), (c) $\mathbf{a}_z$ 12.55 (mT).

5-7 MANYETİK ALAN ŞİDDETİ VE BAĞIL GEÇİRGENLİK

Bir dış manyetik alanın uygulanması, dahili dipol momentlerin hizalanmasına ve manyetik malzeme içerisinde indüklenmiş manyetik momentlere neden olacaktır. Bu durumda manyetik malzeme olduğu durumdaki manyetik akı yoğunluğunun, boş uzaydakinden farklı olmasını bekleriz. Mıknatıslanmanın makroskopik etkisini, Eş. (5-51)'deki eşdeğer mıknatıslanma hacim akım yoğunluğu $\mathbf{J}_{mv}$'yi Eş. (5-7)'deki temel dönel denklemine yerleştirerek inceleyebiliriz.

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mv} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}$$

veya

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J}. \tag{5-59}$$

Şimdi burada yeni bir temel alan niceliği olan ***manyetik alan şiddeti*** **H**'yi

Manyetik alan şiddeti H'nin tanımı

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \qquad (\text{A/m}) \tag{5-60}$$

olarak tanımlayabiliriz. Eş. (5-59) ve Eş. (5-60)'ın bir arada kullanılması ile

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (\text{A/m}^2) \tag{5-61}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\mathbf{J}(\text{A/m}^2)$ *serbest yüklerin* hacim yoğunluğudur. Eş. (5-6) ve Eş. (5-61), magnetostatiğin iki temel diferensiyel denklemidir. Ortamın manyetik geçirgenliği, her iki denklemde de açıkça gözükmez.

Eş. (5-61)'in integral biçimi, her iki tarafının da skalar yüzey integralleri alınarak elde edilir:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{5-62}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 195

veya Stokes teoremine göre

Durağan akımlar için genelleştirilmiş Amper devre yasası hem manyetik hem de manyetik olmayan ortamlara uygulanabilir.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = I \qquad \text{(A)}. \tag{5-63}$$

Burada C, S yüzeyini sınırlayan çevrit (kapalı yol) ve I, S'den geçen toplam serbest akımdır. C'nin ve I akımının bağıl yönleri sağ el kuralına uygundur. Eş. (5-63), Amper devre yasasının bir başka biçimidir ve manyetik ortamlara uygulandığı gibi manyetik olmayan ortamlara da uygulanır. Bu yasa, ***herhangi bir kapalı yol etrafındaki manyetik alan şiddetinin dolaşımı, bu yolun sınırladığı yüzey içinden akan serbest akıma eşittir*** demektedir.

Ortamın manyetik özellikleri lineer ve yönbağımsız ise, mıknatıslanma manyetik alan şiddeti ile doğrusal orantılıdır.

Manyetik hassasiyetin tanımı

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{5-64}$$

burada χ_m birimsizdir ve ***manyetik hassasiyet*** olarak adlandırılır. Eş. (5-64)'ün Eş (5-60)'a yerleştirilmesi ile aşağıdaki yapısal ilişki elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \qquad (\text{Wb/m}^2) \end{aligned} \tag{5-65}$$

veya

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \qquad \text{(A/m)}. \tag{5-66}$$

Burada ise

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{5-67}$$

Bir ortamın bağıl geçirgenliği ve mutlak geçirgenliği

tanımlanmıştır ve ***bağıl geçirgenlik*** olarak bilinen bir başka birimsiz niceliktir. $\mu = \mu_0 \mu_r$ parametresi ortamın ***mutlak geçirgenliği*** (veya bazen sadece ***geçirgenlik***)'dir ve birimi H/m'dir. χ_m ve dolayısıyla μ_r, uzay koordinatlarının bir fonksiyonu olabilir. Basit bir ortam için (lineer, yönbağımsız ve homojen) χ_m ve μ_r sabittir.

Basit ortamın tanımı

Çoğu malzemenin manyetik geçirgenliği, boş uzayınkine (μ_0) çok yakındır. Demir, nikel ve kobalt gibi ferromanyetik malzemeler için μ_r çok büyük olabilir (50-5000 ve 10^6'ya kadar veya bazı alaşımlarda daha büyük). Manyetik geçirgenlik, sadece $\mathbf{H}$'nin genliğine bağlı değildir, aynı zamanda malzemenin daha önceki geçmişine de bağlıdır. Kısım 5-8; manyetik malzemelerin makroskopik davranışları ile ilgili bilgiler verir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 196

5-8 MANYETİK MALZEMELERİN DAVRANIŞI

Bir önceki kısımda, Eş. (5-64) ile bir lineer, yönbağımsız ortamın makroskopik manyetik özelliğini, **M** mıknatıslanma vektörü ve **H** manyetik alan şiddeti arasında manyetik duyarlılık adı verilen birimsiz bir χ_m orantı katsayısı tanımlayarak açıkladık. Bağıl geçirgenlik μ_r ise $1 + \chi_m$'ye eşitti. Manyetik malzemeler, μ_r değerlerine göre kısaca üç temel gruba ayrılabilir. Bunlar

Manyetik malzemelerin üç tipi

$\mu_r \lesssim 1$ ise diamanyetik (χ_m çok küçük bir eksi sayıdır).

$\mu_r \gtrsim 1$ ise paramanyetik (χ_m çok küçük bir artı sayıdır).

$\mu_r \gg 1$ ise ferromanyetik (χ_m çok büyük bir artı sayıdır).

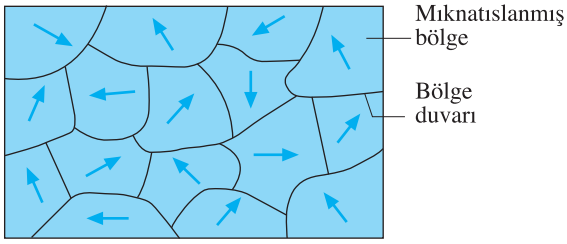
Mikroskopik manyetik olayların doğru anlaşılması, kuvantum teoriyi bilmeyi gerektirir. Biz burada basitçe açıklarsak, diamanyetiklik bir atomda elektronların yörünge üzerindeki hareketinden ortaya çıkar, paramanyetiklik ise elektronların kendi eksenleri etrafında dönmesinin oluşturduğu manyetik dipol momentlerinden kaynaklanır. Çok bilinen *diamanyetik* malzemelerin (bakır, germanyum, gümüş, altın) manyetik geçirgenliği -10^{-5} mertebesindedir; alüminyum, magnezyum, titanyum ve tungsten gibi *paramanyetik* malzemelerin ise 10^{-5} mertebesindedir.

Ferromanyetik malzemelerin mıknatıslanması, paramanyetik malzemelerinkinden çok daha büyüktür. (Bağıl geçirgenliğin tipik değerleri için Ek B-5'e bakınız.)

Ferromanyetizma, mıknatıslanmış ***bölgeler*** cinsinden açıklanabilir. Bu model deneysel olarak da gerçeklenmiştir ve bir ferromanyetik malzeme (örneğin, kobalt, nikel ve demir) boyutları birkaç mikrondan 1mm'ye kadar değişen bir çok küçük bölgeden oluşmuştur. Her biri yaklaşık 10^{15} veya 10^{16} atom içeren bu bölgeler, dışarıdan manyetik alan uygulanmasa dahi kendi ekseni etrafında dönen elektronların oluşturduğu hizalanmış manyetik dipoller içermesi nedeniyle tamamıyla mıknatıslanmıştır. Kuvantum teori şöyle demektedir: Bir bölge içerisindeki atomların manyetik dipol momentleri arasındaki güçlü bağlaşım kuvvetlerinin olması, dipol momentleri paralel tutar. Komşu bölgeler arasında, ***bölge duvarı*** adı verilen, 100 atom kadar kalınlıkta bir geçiş bölgesi bulunur. Mıknatıslanmış durumda, ferromanyetik malzemenin komşu bölgelerindeki manyetik momentler, Şekil 5-11'deki polikristal örneğinde olduğu gibi farklı yönlere sahiptir. Tümüne baktığımızda, bölgelerin rastgele yerleşimi net mıknatıslanmanın sıfır olduğu sonucunu verir.

Ferromanyetik malzemeye dışarıdan bir manyetik alan uygulandığında, manyetik momentleri uygulanan alanla aynı yönde olan bölgelerin duvarları hareket ederek diğer bölgelerin hacimlerini azaltma pahasına kendi hacimlerini artırır. Sonuçta manyetik akı yoğunluğu artar.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 197

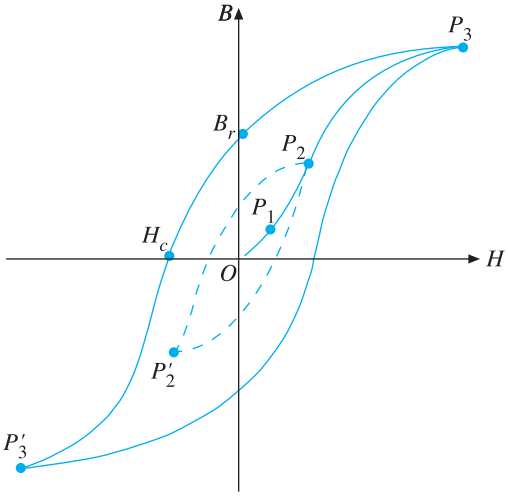


ŞEKİL 5-11 Polikristal ferromanyetik bir örneğin bölge yapısı.

Uygulanan zayıf alanlar için, örneğin Şekil 5-12'deki B–H mıknatıslanma eğrisinde P_1 noktasına kadar, bölge duvarlarının hareketleri geri dönüşlüdür. Fakat uygulanan alan güçlendikçe (P_1'i geçince) bölge duvarlarının hareketi artık geri dönüşlü değildir ve bölgeler uygulanan alan yönüne doğru yönlenecektir. Örneğin, P_2 noktasında uygulanan alan sıfıra düşürülürse, B–H ilişkisi P_2P_1O yolunu izlemez, fakat P_2'den P_2''ne şekildeki noktalı eğri boyunca iner. Mıknatıslanmanın onu oluşturan alanı takip etmesi olayına ***histerezis*** adı verilir ve geride kalmanın Yunanca karşılığı kelimeden türetilmiştir. Uygulanan alan daha güçlendiğinde (P_2'den P_3'e geçince), bölge-duvar hareketi ve bölgenin yönlenmesi, mikroskopik manyetik momentlerin tümünün uygulanan alanla aynı yöne yönlenmesine neden olacaktır. Bu nokta manyetik malzemenin *doyuma* ulaştığı nokta olarak bilinir. B–H düzlemindeki $OP_1P_2P_3$ eğrisi, ***normal mıknatıslanma eğrisi*** olarak adlandırılır.

Histerezis olgusu

ŞEKİL 5-12 Ferromanyetik malzeme için B–H düzleminde histerezis döngüleri.



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 198

Uygulanan manyetik alan P_3'deki değerinden sıfıra indirilirse, manyetik akı yoğunluğu sıfıra değil B_r gibi bir değere gider. Bu değere ***artık*** veya ***kalıntı akı yoğunluğu*** denir ve uygulanan maksimum alan şiddetine bağlıdır. Bir ferromanyetik malzemedeki kalıntı akı yoğunluğunun varlığı, kalıcı mıknatısı mümkün kılar.

Kalıcı mıknatıslar kalıntı akı yoğunluklarına sahiptir.

Bir örnekteki manyetik akı yoğunluğunu sıfır yapmak için, ters yönde bir H_c manyetik alan şiddetini uygulamamız gereklidir. Bu gerekli H_c ise ***zorlayıcı kuvvet*** olarak isimlendirilir, daha uygun bir isim ise ***zorlayıcı alan şiddeti*** (A/m olarak)'dir. B_r gibi H_c de uygulanan maksimum alan şiddetine bağlıdır.

Ferromanyetik malzemelerin, elektrik motorları, motorlar ve transformatörlerde kullanımı için, uygulanan çok küçük alanlar için büyük mıknatıslanma olması gereklidir. Bunların uzun ve dar histerezis döngüleri olmalıdır. Uygulanan manyetik alan şiddeti periyodik olarak $\pm H_{\max}$ arasında değiştirildiğinde, her bir çevrimde histerezis döngüsü taranır. Histerezis döngüsünün alanı, her bir çevrimdeki, birim hacimdeki enerji kaybına (***histerezis kaybı***) karşılık gelir. Histerezis kaybı, bölge-alan hareketi ve bölge yönlenmesi sırasında karşılaşılan sürtünmenin üstesinden gelmek için ısı biçimindeki enerji kaybıdır. Uzun ve dar histerezis döngülü, küçük döngü alanlı ferromanyetik malzemeler "yumuşak" malzemeler olarak nitelendirilir. Bunlar genellikle iyi tavlanmış, düzensizlikleri az olan, dolayısıyla bölge duvarları kolayca hareket edebilen malzemelerdir.

Histerezis kaybı

"Yumuşak" ve "sert" ferromanyetik malzemeler

Diğer yandan, iyi kalıcı mıknatıslar, mıknatıslıklarının giderilmesine yüksek bir direnç göstermelidirler. Bu durum, kalıcı mıknatısların yüksek zorlayıcı alan şiddeti H_c ve dolayısıyla şişman histerezis döngüye sahip malzemelerden yapılmasını gerektirir. Bu malzemeler, "sert" ferromanyetik malzemeler olarak adlandırılır. Sert ferromanyetik malzemelerin (Alniko alaşımları gibi) zorlayıcı alan şiddeti 10^5 (A/m) veya daha yüksek olabilirken, yumuşak malzemelerinki genellikle 50 (A/m) veya daha azdır.

Bir ferromanyetik malzemenin sıcaklığı, termal enerjisi manyetik dipol momentlerinin bağlaşım enerjisini aşacak kadar yükselirse, mıknatıslanmış bölgeler düzensiz duruma gelir. ***Curie sıcaklığı*** olarak bilinen bu kritik sıcaklığın üstünde ferromanyetik malzeme paramanyetik madde gibi davranır. Çoğu ferromanyetik malzemenin curie sıcaklığı, birkaç yüz ile bin santigrad derece arasındadır ve demirin curie sıcaklığı 770°C'dir.

Curie sıcaklığının tanımı

Ferritler manyetik malzemelerin bir başka sınıfıdır. Bazı ferritler çok düşük iletkenlikli olan (Örneğin 10^7 (S/m) olan demirinki ile kıyasla 10^{-4} ile 1 S/m arasında) seramik benzeri bileşiklerdir. Düşük iletkenlik yüksek frekanslardaki eddy-akımı kayıplarını sınırlandırır. Bu nedenle ferritler yüksek frekans ve mikrodalga uygulamalarında, örneğin FM antenler, yüksek frekans trafoları ve faz kaydırıcılarda, çekirdek olarak geniş uygulama alanı bulurlar. Ferrit malzemeler, aynı zamanda, bilgisayarlarda manyetik-çekirdek ve manyetik disk hafıza aygıtlarında da geniş uygulamaya sahiptir.

Ferritlerin karakteristikleri

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 199

5-9 MANYETOSTATİK ALANLAR İÇİN SINIR KOŞULLARI

Farklı fiziksel özellikleri olan ortamlara sahip bölgelerdeki manyetik alanlarla ilgili problemleri çözmek için, farklı ortamların arayüzlerinde **B** ve **H** vektörlerinin sağlaması gereken koşulları (sınır koşulları) incelememiz gerekir. Kısım 3-8'de elektrostatik alanlar için sınır koşullarını elde ederken kullandığımız tekniğe benzer biçimde manyetostatik sınır koşullarını çıkartabiliriz. Bu amaçla, Eş. (5-6) ve Eş. (5-61)'deki iki temel eşitliği, arayüzü içerecek biçimde, sırasıyla, küçük bir ilaç kutusu ve küçük bir kapalı yol üzerinde uygularız. Eş. (5-6)'daki **B** alanının ıraksamaz doğasından, Eş. (4-34)'deki gibi, ***arayüzü geçerken* B *alanının normal bileşeni süreklidir*** sonucuna varabiliriz.

Bir arayüzde B alanının normal bileşeni süreklidir.

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{(T)} \tag{5-68}$$

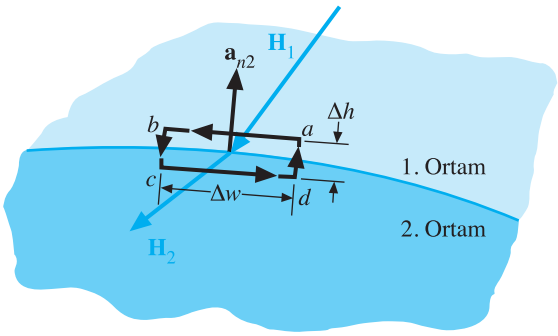
Lineer ve yönbağımsız ortamda $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$'dir ve Eş. (5-68) aşağıdaki biçimi alır.

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad \text{(T)}. \tag{5-69}$$

Arayüz boyunca bir yüzey akımı var ise, manyetik alanın teğet bileşeni sürekli değildir. **H**'nin teğet bileşenleri için sınır koşullarının ifadesi, Şekil 5-13'te gösterilen iki ortam arasındaki *abcda* kapalı yolu üzerine Eş. (5-63)'ün uygulanması ile çıkarılabilir. $bc = da = \Delta h$'yi sıfıra götürürsek

$$\int_{abcda} \mathbf{H}_i \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{w} + \mathbf{H}_2 \cdot (-\Delta \mathbf{w}) = \mathbf{J}_{sn}$$

ŞEKİL 5-13 H_t'nin sınır koşullarını belirlemek için, iki ortamın arayüzü etrafındaki kapalı yol.



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 200

veya

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \quad \text{(A/m)} \tag{5-70}$$

ifadesini elde ederiz. Burada J_{sn}, arayüz üzerinde *abcda* çevritine dik yüzey akım yoğunluğudur. Sağ elimizin parmakları yolun yönünü izlediğinde, baş parmağımız J_{sn}'nin yönünü gösterir. Şekil 5-13'te, seçilen yol için J_{sn}'nin yönü sayfadan dışarı doğrudur. Eş. (5-70)'in daha genel bir biçimi

H'nin teğet bileşeni için sınır koşulu

$$\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad \text{(A/m)} \tag{5-71}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{a}_{n2}$ *arayüzde, 2 ortamdan dışarı doğru birim normaldir*.

Her iki ortamın da iletkenliği sonlu ise, arayüzde serbest yüzey akımları tanımlanmaz ve akımlar hacim akım yoğunluğu olarak belirtilir. Bu durumda $\mathbf{J}_s$ sıfıra eşittir ve **H'*nin teğet bileşeni neredeyse bütün fiziksel ortamları geçerken süreklidir; sadece ideal mükemmel iletken veya bir süper iletken ile arayüz var ise süreksizdir.*** Sonuçta manyetostatik alanlar için normalde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{5-72}$$

■ **ALIŞTIRMA 5.7** Geçirgenliği μ_1 olan 1. ortamdaki manyetik alan şiddeti $\mathbf{H}_1$'in geçirgenliği μ_2 olan 2. ortamla olan arayüzde, normal ile yaptığı açı α_1'dir. α_2 açısı ($\mathbf{H}_2$'nin normalle yaptığı açı) ve α_1 açısı arasındaki ilişkiyi bulunuz.

CEVAP: $\tan \alpha_2 / \tan \alpha_1 = \mu_2 / \mu_1$.

TEKRAR SORULARI

S.5-13 *Mıknatıslanma vektörünü* tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.5-14 "Eşdeğer mıknatıslanma akım yoğunluğu" ne anlama gelir? $\nabla \times \mathbf{M}$ ve $\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$ için SI birimleri nelerdir?

S.5-15 *Manyetik alan şiddeti vektörünü* tanımlayınız. SI birimi nedir?

S.5-16 Manyetostatik için iki temel diferensiyel denklemi yazınız.

S.5-17 *Manyetik hassasiyet* ve *bağıl geçirgenliği* tanımlayınız. SI birimleri nelerdir?

S.5-18 Bir akım dağılımının oluşturduğu manyetik alan şiddeti ortamın özelliklerine bağlı mıdır? Manyetik akı yoğunluğu bağlı mıdır?

S.5-19 *Diamanyetik*, *paramanyetik* ve *ferromanyetik* malzemeleri tanımlayınız.

S.5-20 Histerezis döngüsü nedir?

S.5-21 *Kalıntı akı yoğunluğu* ve *zorlayıcı alan şiddetini* tanımlayınız.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 201

S.5-22 Yumuşak ve sert ferromanyetik malzemeler arasındaki farkı tartışınız.

S.5-23 *Curie sıcaklığı* nedir?

S.5-24 İki farklı manyetik ortam arasındaki arayüzde, manyetostatik alanlar için sınır koşulları nelerdir?

NOTLAR

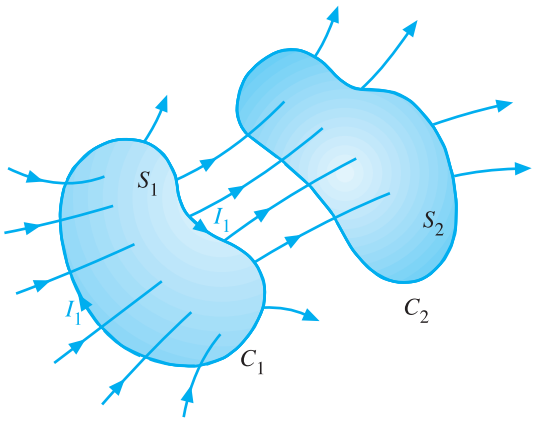
1. Düzgün mıknatıslanmaya sahip silindirik sabit mıknatıslar, sabit bir çevresel yüzey akım yoğunluğu olan silindirik tabakalara benzerdir.
2. Bir ortamın bağıl geçirgenliği μ_r ile (mutlak) geçirgenliği μ'yü karıştırmayınız. μ_r sabiti $1 + \chi_m$'ye eşit ve birimsiz bir nicelik iken μ'nün SI birimi (H/m)'dir.
3. Ferromanyetik olmayan malzemelerin μ_r değeri bir olarak alınabilir. Ferromanyetik malzemeler (nikel, demir ve bunların alaşımları) çok büyük μ_r değerine sahiptir ve lineer değildir. (**B** ile **H** orantılı değildir.)

5-10 ENDÜKTANS VE İNDÜKTÖRLER

Şekil 5-14'te verilen ve birbirine komşu C_1 ve C_2 kapalı döngüleri, sırasıyla, S_1 ve S_2 yüzeylerini çevrelemiştir. C_1'de bir I_1 akımı aktığında, bir $\mathbf{B}_1$ manyetik alanı yaratılacaktır. $\mathbf{B}_1$'in neden olduğu manyetik akının bir kısmı C_2 tarafından sınırlanan S_2 yüzeyinden geçecektir. Bu ortak akıya Φ_{12} dersek, Φ_{12}'yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \qquad \text{(Wb)} \tag{5-73}$$

ŞEKİL 5-14 Manyetik olarak bağlaşmış iki döngü.



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 202

Eş. (5-31)'deki Biot-Savart yasasından, B_1'in I_1 ile doğrusal orantılı olduğunu görürüz. Bu durumda Φ_{12} de I_1 ile orantılıdır.

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1. \tag{5-74}$$

Buradaki orantı sabiti L_{12}, C_1 ve C_2 döngüleri arasındaki ***ortak endüktans***[1] olarak bilinir ve SI birimi henry (H)'dir. C_2'nin N_2 sarımı olduğunda Φ_{12}'den dolayı Λ_{12} ***akı bağlaşımı***

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12} \quad \text{(Wb)} \tag{5-75}$$

olur. Eş. (5-74) aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$\Lambda_{12} = L_{12} I_1 \quad \text{(Wb)} \tag{5-76}$$

veya

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \qquad \text{(H).} \tag{5-77}$$

Ortak endüktans

İki devre arasındaki ortak endüktans, *bir devreden diğerine birim akım başına manyetik akı bağlaşımıdır*. Eş. (5-77), ortamın geçirgenliğinin I_1 ile değişmeyeceğini ima etmektedir. Bir başka deyişle, Eş. (5-74) ve dolayısıyla Eş. (5-77) sadece doğrusal ortamlara uygulanır.

I_1'in ürettiği manyetik akının bir kısmı sadece C_1'in kendisinden geçer ve C_2'den geçmez. I_1'in neden olduğu ve C_1 ile bağlaşan toplam akı ise

$$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_{11} > N_1 \Phi_{12} \tag{5-78}$$

Öz endüktans

olacaktır. C_1 döngüsünün ***öz endüktansı***, *döngünün kendi birim akımından kaynaklanan manyetik akı bağlaşımı* olarak tanımlanır ve lineer bir ortam için

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 \qquad \text{(H)} \tag{5-79}$$

biçiminde yazılabilir. Bir döngünün veya devrenin öz endüktansı, döngüyü veya devreyi oluşturan iletkenin fiziksel düzenlenmesi ve geometrik şekline bağlı olduğu kadar ortamın geçirgenliğine de bağlıdır. Lineer bir ortamda, öz endüktans döngü veya devredeki akıma bağlı değildir.

Belirli miktarda öz endüktans sağlamak üzere uygun şekilde düzenlenmiş (örneğin iletkenin sarmal biçiminde sarılması) bir iletken ***indüktör (bobin)*** olarak isimlendirilir. Bir kapasitörün elektrik enerjisi depolayabilmesi gibi, indüktör de Bölüm 5-11'de anlatılacağı gibi manyetik enerji depolar. Tek bir döngü ile ilgilendiğimizde, Eş. (5-

[1] Devre teorisi kitaplarında, sıklıkla ortak endüktansı göstermek için M sembolü kullanılır. Biz burada M'yi mıknatıslanma için kullandığımızdan L_{12}'yi kullanacağız.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 203

79)'daki alt indisleri kullanmamıza gerek yoktur ve sadece endüktans denildiğinde öz endüktans anlaşılır. Bir indüktörün öz endüktansını belirlemek için aşağıdaki yol izlenir:

Öz-endüktansın bulunması için yöntem

1. Verilen geometri için uygun bir koordinat sistemi seçilir.
2. İletken telde I akımı olduğu varsayılır.
3. Eğer simetri varsa, Eş. (5-10)'daki Amper devre yasası kullanılarak I'dan $\mathbf{B}$ hesaplanır. Simetri yoksa Eş. (5-31)'deki Biot-Savart yasası kullanılmalıdır.
4. $\mathbf{B}$'den integral yardımıyla her bir sarım ile bağlaşan akı Φ bulunur.

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Burada S, $\mathbf{B}$'nin bulunduğu ve varsayılan akımla bağlaştığı alandır.

5. Akı bağlaşımı Λ, Φ'nın sarım sayısı ile çarpımından bulunur.
6. $L = \Lambda/I$ oranından L bulunur.

İki devre arasındaki L_{12} ortak endüktansının belirlenmesinde, bu yöntemde sadece ufak değişiklikler gereklidir. Uygun koordinat sistemi seçildikten sonra şu yol izlenir: I_1 akımı varsayılır → $\mathbf{B}_1$ bulunur → S_2 yüzeyi üzerinde $\mathbf{B}_1$'in integrali alınarak Φ_{12} bulunur → Akı bağlaşımı $\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12}$ bulunur → $L_{12} = \Lambda_{12}/I_1$ bulunur.

ÖRNEK 5-8

Dikdörtgen kesitli ve boyutları Şekil 5-15'de gösterilen toroid bir kasnak üzerine N sarımlı tel sıkıca sarılmıştır. Ortamın geçirgenliğini μ_0 kabul ederek, toroid bobinin öz endüktansını bulunuz.

ÇÖZÜM

Toroid kendi ekseni etrafında simetrik olduğundan, bu problem için silindirik koordinat sisteminin uygun olduğu açıktır. İletken tel üzerinde I akımı varsayılarak, Eş. (5-10)'un r yarıçaplı ($a > r > b$) dairesel yol üzerinde uygulanmasıyla

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi B_\phi$$

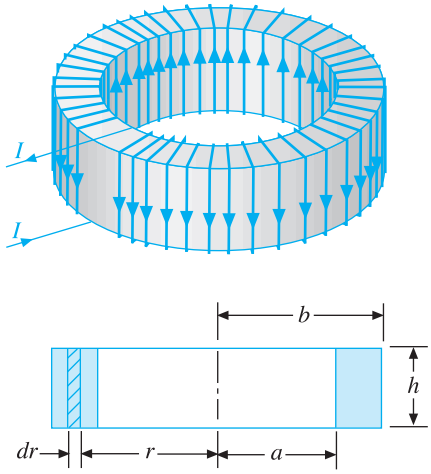
$$d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r\, d\phi$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\phi r\, d\phi = 2\pi r B_\phi$$

elde edilir. Dairesel C yolu üzerinde B_ϕ ve r sabit olduğundan bu sonuç elde edilmiştir. Yol, toplam NI akımını çevrelediğinden

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 N I$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 204



ŞEKİL 5-15 Sıkı sarılmış bir toroid bobin (Örnek 5-8).

ve

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{5-80}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitlik Örnek 5-2'deki dairesel kesitli toroid bobinin Eş. (5-13) denklemi ile aynıdır.

Bağlaşan akı ise aşağıda verilmiştir.

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right) \cdot (\mathbf{a}_\phi h\, dr)$$

$$= \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Akı bağlaşımı Λ ise $N\Phi$ dir:

$$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Sonuçta

N-sıkı sarımlı bir toroid bobinin endüktansı

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{(H)}. \tag{5-81}$$

ifadesini elde ederiz.

Öz endüktansın I'nın bir fonksiyonu olmadığına (sabit geçirgenlikli ortam için) ve sarım sayısının karesi ile doğru orantılı olduğuna dikkat ediniz. Bobinin, toroid üzerine sıkı sarılmasının nedeni, telin bağımsız sarımları arasından akı kaybını en düşük seviyeye getirmektir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 205

ÖRNEK 5-9

Birim uzunluğunda n sarımı olan çok uzun bir solenoidin birim uzunluk başına endüktansını bulunuz. Çekirdeğin geçirgenliği μ'dür.

ÇÖZÜM

Çok uzun bir solenodin içindeki manyetik akı yoğunluğu, solenoidin sonsuz yarıçaplı bir toroid bobin olduğu düşünülerek Eş. (5-80)'den elde edilebilir. Çekirdek kesit boyutlarının yarıçapa göre çok küçük olduğu durumda, solenoid içindeki manyetik akı yoğunluğu yaklaşık olarak sabittir. Eş. (5-80)'den

$$B = \mu\left(\frac{N}{2\pi r}\right) I = \mu n I \tag{5-82}$$

elde ederiz. Burada n, birim uzunluktaki sarım sayısıdır. Böylece

$$B = \mu n I$$

dir ve solenoid içerisinde sabittir. Buradan

$$\Phi = BS = \mu n S I \tag{5-83}$$

yazabiliriz. Burada S, selonodin kesit alanıdır. Birim uzunluktaki akı bağlaşımı[1] ise aşağıda verilmiştir:

$$\Lambda' = n\Phi = \mu n^2 S I. \tag{5-84}$$

Sonuçta birim uzunluk başına endüktans

Uzun solenoidin birim uzunluk başına endüktansı

$$\boxed{L' = \mu n^2 S \quad \text{(H/m)}} \tag{5-85}$$

olarak elde edilir. Eş. (5-85), solenodin uzunluğu, kesitinin boyutuna göre çok büyük olduğu kabulüne dayanan yaklaşık bir formüldür. Belirli uzunluktaki solenoidin uçlarının yakınındaki birim uzunluk başına akı bağlaşımı ve manyetik akı yoğunluğu için daha doğru bir çıkarım yapıldığında, sırasıyla, Eş. (5-82) ve Eş. (5-84)'de verilen değerlerden daha az oldukları görülecektir. Sonuçta, belirli uzunluktaki bir solenoidin toplam endüktansı, Eş. (5-85)'de verilen L' ile solenoidin boyunun çarpımından elde edilen değerden daha küçük olur.

ÖRNEK 5-10

Bir eş eksenli, hava boşluklu iletim hattı, a yarıçaplı içi dolu bir iç iletken ve iç yarıçapı b olan ince bir dış iletkenden oluşmaktadır. Hattın birim uzunluktaki endüktansını belirleyiniz.

[1] Birim uzunlukla ilgili nicelikleri göstermek için üssü işareti kullanacağız.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 206

ÇÖZÜM

Şekil 5-16'yı göz önüne alarak, iç iletkenden bir I akımı aktığını ve aynı akımın dış iletkenden geri döndüğünü varsayalım. Silindirik simetriden ötürü $\mathbf{B}$'nin sadece ϕ bileşeni vardır. Aynı zamanda, I akımının iç iletken kesiti üzerinde düzgün dağıldığını kabul edelim. Öncelikle $\mathbf{B}$'nin değerini bulalım.

a) *İç iletkenin içerisinde,*

$0 \le r \le a$.

Eş. (5-11)'den

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \tag{5-86}$$

elde edilir.

b) *İç ve dış iletkenler arasında,*
$a \le r \le b$.

Eş. (5-12)'den

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{5-87}$$

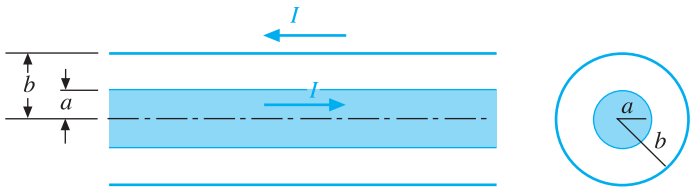
olarak bulunur.

Şimdi iç iletken içerisinde r ve $r + dr$ arasında bir dairesel halka düşünelim. Bu dairesel halkanın birim uzunluğundaki akım, Eş. (5-86) ve Eş. (5-87)'nin integrallerinin alınması ile elde edilecek akı ile bağlaşacaktır.

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \int_r^a B_{\phi 1}\, dr + \int_a^b B_{\phi 2}\, dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_r^a r\, dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{5-88}$$

Fakat dairesel halka içindeki akım, toplam I akımının sadece $(2\pi\, r\, dr/\pi\, a^2 = 2r\, dr/a^2)$'lik kısmıdır.

ŞEKİL 5-16 Bir eş eksenli iletim hattının iki kesiti (Örnek 5-10).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 207

Böylece bu dairesel halka için akı bağlaşımı

$$d\Lambda' = \frac{2r\,dr}{a^2}\,d\Phi' \tag{5-89}$$

dir. Birim uzunluk başına toplam akı bağlaşımı ise

$$\begin{aligned}\Lambda' &= \int_{r=0}^{r=a} d\Lambda' \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\left[\frac{1}{2a^2}\int_0^a (a^2 - r^2) r\,dr + \left(\ln\frac{b}{a}\right)\int_0^a r\,dr\right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eş eksenli iletim hattının birim uzunluktaki endüktansı aşağıdaki gibidir:

Eş eksenli iletim hattının birim uzunluktaki endüktansı

$$L' = \frac{\Lambda'}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{(H/m)}. \tag{5-90}$$

İlk terim $\mu_0/8\pi$, dolu iç iletkenin içerisindeki akı bağlaşımından ortaya çıkar ve iç iletkenin birim uzunluk başına ***iç endüktansı*** olarak bilinir. İkinci terim, iç ve dış iletkenler arasında var olan akı bağlaşımından kaynaklanır ve bu terim de eş eksenli hattın birim uzunluk başına ***dış endüktansı*** olarak adlandırılır. Eğer iç iletken içi boş bir tüpten oluşuyorsa, $\mu_0/8\pi$ terimi olmaz ve sadece dış endüktans vardır.

ÖRNEK 5-11

Birbirine ters yönlerde akım taşıyan, a yarıçaplı iki uzun paralel iletken telden oluşan bir iletim hattının iç ve dış endüktansını birim uzunluk başına hesaplayınız. Tellerin eksenleri birbirinden d kadar uzaktadır ve d, a'dan çok büyüktür.

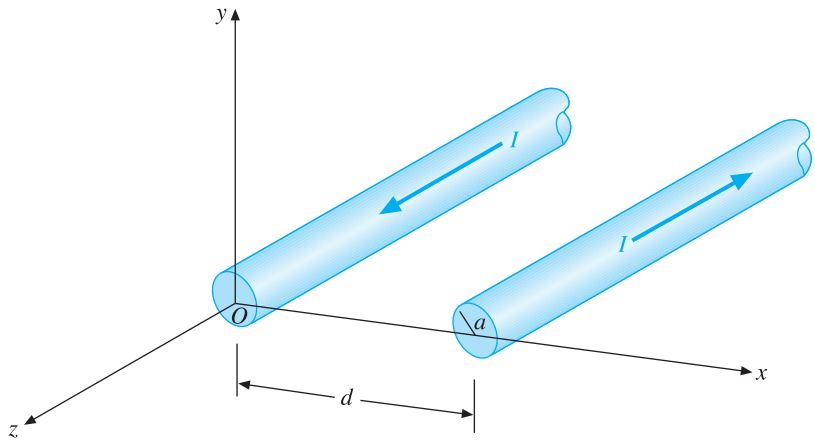
ÇÖZÜM

Her bir telin birim uzunluk başına iç öz endüktansı, Eş. (5-90)'dan $\mu_0/8\pi$ olarak elde edilir. İki tel için ise

$$L_i' = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \qquad \text{(H/m)} \tag{5-91}$$

olacaktır. Birim uzunluk başına dış öz endüktansı bulmak için, öncelikle tellerin I akımı taşıdığını varsayarak iletim hattının birim uzunluğu ile bağlaşan manyetik akıyı hesaplarız.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 208



ŞEKİL 5-17 İki iletkenli iletim hattı (Örnek 5-11).

Şekil 5-17'de de gösterildiği gibi iki telin uzandığı *xz*-düzleminde, iletkenlerdeki eşit genlikli ve ters yönlü akımların oluşturduğu **B** vektörünün sadece *y*-bileşeni olacaktır:

$$B_{y1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{5-92}$$

$$B_{y2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)}. \tag{5-93}$$

Birim uzunluktaki akı bağlaşımı ise

$$\begin{aligned}\Phi' &= \int_a^{d-a} (B_{y1} + B_{y2})\, dx \\ &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right] dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \cong \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\frac{d}{a} \qquad \text{(Wb/m)}\end{aligned}$$

ye eşittir ve böylece

$$L'_e = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\frac{d}{a} \qquad \text{(H/m)} \tag{5-94}$$

elde edilir. İki telli hattın birim uzunluk başına toplam öz endüktansı ise aşağıdaki gibidir:

Paralel telli bir iletim hattının birim uzunluk başına endüktansı

$$L' = L'_i + L'_e = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{a}\right) \qquad \text{(H/m)}. \tag{5-95}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 209

C_1'deki bir birim akım nedeniyle C_2 ile bağlaşan manyetik akının oluşturduğu, C_1 ve C_2 devreleri arasındaki L_{12} ortak endüktansının, C_2'deki bir birim akım nedeniyle C_1 ile bağlaşan manyetik akının oluşturduğu L_{21} ortak endüktansı ile aynı olduğu ispatlanabilir. Sonuçta $L_{12} = L_{21}$'dir. Bu nedenle ortak endüktansın belirleneceği bir problemle uğraşırken ilk adımda verilen geometri incelenmeli ve iki yoldan basit olanı kullanılmalıdır.

ÖRNEK 5-12

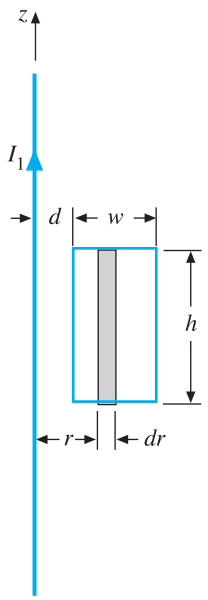
Şekil 5-18'de gösterilen iletken dikdörtgen bir döngü ile çok uzun düz bir telin arasındaki ortak endüktansı belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Bu problemde, uzun düz telin üzerinde bir akım düşünüp, manyetik akı yoğunluğunu yazmak ve dikdörtgen döngü ile bağlaşan akıyı bulmak daha basit gözükmektedir. Dikdörtgen döngü üzerinde bir akım düşünmek ve bu akımın oluşturduğu manyetik akı yoğunluğunu ve düz tel ile bağlaşan akıyı bulmak daha çok uğraşmamızı gerektiren bir yoldur.

Uzun düz teli devre 1 ve dikdörtgen döngüyü devre 2 olarak adlandıralım. Teldeki I_1 akımının oluşturduğu $\mathbf{B}_1$ manyetik akı yoğun-

ŞEKİL 5-18 İletken dikdörtgen döngü ve uzun düz tel (Örnek 5-12).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 210

luğu, Ampere devre yasası uygulanarak elde edilir:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \tag{5-96}$$

Bağlaşan akı $\Lambda_{12} = \Phi_{12}$ ise

$$\Lambda_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 \tag{5-97}$$

olacaktır. Burada $d\mathbf{s}_2 = \mathbf{a}_\phi h\, dr$'dir. Eş. (5-96) ve Eş. (5-97) birarada kullanılarak bağlaşan akı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}\Lambda_{12} &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} h \int_d^{d+w} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 h I_1}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{d}\right).\end{aligned} \tag{5-98}$$

Sonuçta ortak endüktans

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{d}\right) \quad \text{(H)} \tag{5-99}$$

olacaktır.

5-11 MANYETİK ENERJİ

Şimdiye kadar, öz ve ortak endüktansları statik durumda tartıştık. Fakat, durgun (d-c) akımlarda direnci sıfır olan indüktörlerin kısa devre gibi davrandığını bilmekteyiz. Bu nedenle endüktansın devrelerde ve manyetik alanlarda etkisini görmek için değişken akımları göz önüne almamız gerektiği çok açıktır. Zamanla değişen elektromanyetik alanları (elektrodinamik) incelemeyi bir sonraki bölüme kadar erteleyeceğiz.

Kısım 3-10'da, bir yük grubunu oluşturmak için gereken işi tartıştık ve işin elektrik enerjisi olarak depolandığını gördük. Benzer şekilde iletken döngülere akım yollanması için de bir iş yapılması gerektiğini ve bunun manyetik enerji olarak depolanacağını bekleriz. Başlangıçta akımı sıfır ve öz endüktansı L_1 olan tek bir kapalı döngüyü göz önüne alalım. Döngüye bir akım kaynağı bağlandığında, i_1 akımı sıfırdan I_1 değerine ulaşacaktır. Fizik derslerinden bildiğimiz gibi, akım değişimine direnecek şekilde döngüde bir elektromotor kuvvet (emf) indüklenecektir. İndüklenen bu emf'nin üstesinden gelmek için bir miktar iş yapılmalıdır. $v_1 = L_1\, di_1/dt$'yi endüktans üzerindeki gerilim olarak alalım. Gerekli olan bu iş

$$W_1 = \int v_1 i_1\, dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 \tag{5-100}$$

dir ve *manyetik enerji* olarak depolanır.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 211

Şimdi, C_1 ve C_2 kapalı döngülerinin, sırasıyla, i_1 ve i_2 akımlarını taşıdıklarını düşünelim. Akımlar başlangıçta sıfırdır ve I_1 ve I_2 değerlerine ulaşana kadar artacaktır. Gerekli olan iş miktarını bulmak için, önce $i_2 = 0$'da tutalım ve i_1'i sıfırdan I_1'e artıralım. Bu durum Eş. (5-100)'de verildiği gibi C_1 döngüsünde W_1 işinin yapılmasını gerektirecek; C_2 döngüsünde ise $i_2 = 0$ olduğundan iş yapılmayacaktır. Daha sonra i_1'i I_1'de tutalım ve i_2'yi sıfırdan I_2'ye artıralım. Karşılıklı bağlaşım nedeniyle, i_2'nin oluşturduğu manyetik akının bir kısmı C_1 döngüsünden geçecek ve bir emf indükleyecektir. Bu emf, i_1 akımını I_1 değerinde sabit tutmak için gereken $v_{21} = \pm L_{21} di_2/dt$ gerilimi tarafından karşılanacaktır. Gereken bu iş

$$W_{21} = \int v_{21} I_1 \, dt = \pm L_{21} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = \pm L_{21} I_1 I_2 \qquad (5\text{-}101)$$

olarak yazılabilir. Eş. (5-101)'de, C_1 ve C_2'deki I_1 ve I_2 birbirinin manyetik alan şiddetlerini güçlendiriyorsa artı işareti, birbirinin manyetik alanlarına karşı koyuyorsa eksi işareti kullanılır.

Aynı zamanda C_2 döngüsünde, i_2'nin 0'dan I_2'ye artışının neden olduğu indüklenen emf'ye karşı gelmek için bir W_{22} işi yapılmalıdır:

$$W_{22} = \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2. \qquad (5\text{-}102)$$

C_1 ve C_2 döngülerindeki akımların, sıfırdan, sırasıyla, I_1 ve I_2'ye yükselmesi ile yapılan toplam iş miktarı W_1, W_{21} ve W_{22}'nin toplamından oluşacaktır:

Akım taşıyan bağlaşık iki döngüde depolanan manyetik enerji

$$W_2 = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm L_{21} I_1 I_2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2. \qquad (5\text{-}103)$$

Bu enerji, akım taşıyan bağlaşık iki döngünün manyetik alanında depolanan enerjidir.

I akımını taşıyan, L endüktanslı tek bir indüktör için depolanan manyetik enerji ise aşağıda verilmiştir.

Bir endüktansta depolanan manyetik enerji

$$W_m = \tfrac{1}{2} L I^2 \quad \text{(J)}. \qquad (5\text{-}104)$$

■ **ALIŞTIRMA 5.8** Endüktansı L olan bir indüktörde depolanan manyetik enerjiyi bağlaşan Φ akısı ve I akımı cinsinden ifade ediniz.

CEVAP: $\Phi I/2$.

5-11.1 ALAN NİCELİKLERİ CİNSİNDEN MANYETİK ENERJİ

Kısım 3-10.1'de elektrostatik enerjiyi tartıştığımızda, Eş. (3-105) ve Eş. (3-106)'da yapıldığı gibi W_e'nin alan nicelikleri **E** ve **D** cinsinden tanımlanmasının daha uygun olduğu görülmüştü. Şu ana kadar öğrendiklerimize dikkat edersek elektrostatik ve manyetostatikteki ni-

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 212

celikler arasında aşağıda verilen ilişki görülebilir.

Elektrostatik	Manyetostatik
E	**B**
D	**H**
ϵ	$1/\mu$

Yukarıdaki benzerliği kullanarak, lineer ortam için Eş. (3-105)'ten manyetik enerji W_m'yi **B** ve **H** cinsinden doğrudan yazabiliriz.

B ve H cinsinden manyetik enerji

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \qquad \text{(J)}. \tag{5-105}$$

Bir lineer ortam için $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ yapısal bağlantısını kullanarak ise

B ve μ cinsinden manyetik enerji

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \frac{B^2}{\mu}\,dv \qquad \text{(J)} \tag{5-106}$$

elde ederiz. Eş. (5-105) ve Eş. (5-106)'nın biçimsel çıkarımı burada ayrıca verilmeyecektir. Elektrik ve manyetik enerjilerle, Bölüm 7-5'te elektromanyetik gücün akışını tartışırken tekrar karşılaşacağız.

Hacim integrali toplam manyetik enerjiye eşit olan ***manyetik enerji yoğunluğu*** w_m'yi

$$W_m = \int_{V'} w_m\,dv \tag{5-107}$$

eşitliğinden yararlanarak

$$w_m = \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \qquad (\text{J/m}^3) \tag{5-108a}$$

veya

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (\text{J/m}^3) \tag{5-108b}$$

biçiminde yazabiliriz.

Eş. (5-104)'ün Eş. (5-105) veya Eş. (5-106) ile bir arada kullanılmasıyla **B** ve/veya **H** cinsinden hesaplayacağımız depolanan manyetik enerjiyi kullanarak, akı bağlaşımından hesaplamaktan daha kolay bir yol ile öz endüktansı belirleyebiliriz. Bu durumda öz endüktans aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \qquad \text{(H)}. \tag{5-109}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 213

ÖRNEK 5-13

Depolanan manyetik enerjiyi kullanarak, içi hava dolu eş eksenli bir iletim hattının birim uzunluk başına endüktansını belirleyiniz. İletim hattının katı iç iletkeninin yarıçapı a ve çok ince dış iletkeninin iç yarıçapı b'dir.

ÇÖZÜM

Bu problem, Örnek 5-10'daki akı bağlaşımını dikkate alarak öz endüktans hesapladığımız problem ile aynıdır. Tekrar Şekil 5-16'yı kullanalım. Düzgün I akımının iç iletkenden aktığını ve dış iletkenden geri döndüğünü düşünelim. İç iletkende birim uzunluk başına depolanan manyetik enerji Eş. (5-86) ve Eş. (5-106)'dan

$$W'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a B_{\phi 1}^2 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3\, dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad \text{(J/m)} \tag{5-110}$$

olarak elde edilir. İç ve dış iletkenler arasındaki bölgede birim uzunluk başına depolanan manyetik enerji de Eş. (5-87) ve Eş. (5-106)'yı kullanırsak

$$W'_{m2} = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b B_{\phi 2}^2 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \quad \text{(J/m)} \tag{5-111}$$

olacaktır. Böylece Eş. (5-109)'dan öz endüktansı

$$L' = \frac{2}{I^2}(W'_{m1} + W'_{m2})$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad \text{(H/m)} \tag{5-112}$$

biçiminde elde ederiz ve bu sonuç Eş. (5-90) ile aynıdır. Bu çözümde kullandığımız yol, Örnek (5-10)'daki ile kıyaslandığında daha basittir.

■ **ALIŞTIRMA 5.9** Şekil 5-15'deki N sarımlı toroid bobinden I akımı akmaktadır.

a) Depolanan manyetik enerji için bir ifade elde ediniz.

b) Eş. (5-109)'u kullanarak öz endüktansı belirleyiniz ve sonucu Eş. (5-81) ile karşılaştırınız.

CEVAP: (a) $[\mu_0(NI)^2 h \ln(b/a)]/4\pi$ (J).

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 214

TEKRAR SORULARI

S.5-25 (a) İki devre arasındaki ortak endüktansı ve (b) tek bir bobinin öz endüktansını tanımlayınız.

S.5-26 Bir iletkenin iç endüktansı ile ne anlatılır?

S.5-27 Akım taşıyan bağlaşmış iki döngüde depolanan manyetik enerjinin ifadesini yazınız.

S.5-28 Alan nicelikleri cinsinden depolanan manyetik enerji ifadesini yazınız.

NOTLAR

1. Tel-sarımlı solenoid ve toroid bobinlerin öz endüktansı, sarım sayılarının karesi ile doğru orantılıdır.
2. Düzgün, ince iletken tüplerin iç endüktansı yaklaşık sıfırdır ve düzgün, içi dolu, ferromanyetik olmayan iletkenlerinki $\mu_0/8\pi$ (H/m)'dir.
3. Bağlaşan iki devre arasındaki ortak endüktans $L_{12} = L_{21}$ özelliğine sahiptir.
4. Endüktans için değişken akımları düşünmemiz gerekir. Çünkü d-c direnci sıfır olan indüktörler doğru akımda kısa devre olarak görünür.
5. Çok yüksek frekanslarda, iletkenlerdeki akım dağılımı tek biçimli (düzgün) değildir ve yüzey üzerinde yoğunlaşır (7. Bölümde tartışacağımız *deri etkisi* nedeniyle). Bu olay endüktans hesaplamalarında göz önünde tutulmalıdır.

5-12 MANYETİK KUVVETLER VE TORKLAR

Daha önceden, akı yoğunluğu **B** olan bir manyetik alan içerisinde **u** hızı ile hareket eden bir q yükü üzerine etkiyen $\mathbf{F}_m$ manyetik kuvvetini Eş. (5-4) ile aşağıdaki gibi vermiştik:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad \text{(N)}. \tag{5-113}$$

Bu bölümde, statik manyetik alanlar içinde akım taşıyan devreler üzerindeki kuvvetleri ve torkları değişik yönlerden tartışacağız.

5-12.1 AKIM TAŞIYAN İLETKENLER ÜZERİNDEKİ KUVVETLER VE TORKLAR

Kesit alanı S olan $d\ell$ iletken elemanını göz önüne alalım. $d\ell$ yönünde **u** hızıyla hareket eden, birim hacim başına N yük taşıyıcısı (elektronlar) var ise, Eş. (5-113)'e göre differensiyel eleman üzerindeki manyetik kuvvet

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 215

$$d\mathbf{F}_m = -NeS\,|d\ell|\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$
$$= -NeS|\mathbf{u}|d\ell \times \mathbf{B} \tag{5-114}$$

olacaktır. Burada e elektron yüküdür. $\mathbf{u}$ ve $d\ell$'nin yönü aynı olduğundan Eş. (5-114)'teki iki ifade eşdeğerdir. $-NeS|\mathbf{u}|$ iletkendeki akıma eşit olduğu için Eş. (5-114)'ü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$d\mathbf{F}_m = I\,d\ell \times \mathbf{B} \quad \text{(N)}. \tag{5-115}$$

Bir manyetik alan içinde I akımı taşıyan kapalı devredeki C çevriti üzerindeki manyetik kuvvet

Bir manyetik alan içerisinde akım taşıyan bir devre üzerindeki manyetik kuvvet

$$\mathbf{F}_m = I \oint_C d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad \text{(N)} \tag{5-116}$$

olacaktır. I_1 ve I_2 akımı taşıyan iki devremiz olduğunda, birinin oluşturduğu manyetik alanın içerisinde bulunan diğer akım taşıyan devre buna bir örnektir. C_1 döngüsündeki I_1 akımının oluşturduğu $\mathbf{B}_{12}$ manyetik akısı var olduğunda, C_2 devresi üzerindeki $\mathbf{F}_{12}$ kuvveti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \oint_{C_2} d\boldsymbol{\ell}_2 \times \mathbf{B}_{12}. \tag{5-117a}$$

Burada $\mathbf{B}_{12}$, Eş. (5-31)'deki Biot-Savart yasasından elde edilir.

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2}. \tag{5-117b}$$

Eş. (5-117a) ve Eş. (5-117b)'yi birleştirdiğimizde

Akım taşıyan iki devre arasındaki Amper kuvvet yasası

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{\ell}_2 \times (d\boldsymbol{\ell}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}})}{R_{12}^2} \quad \text{(N)} \tag{5-118}$$

elde ederiz ve bu eşitlik akım taşıyan iki devre arasındaki ***Amper kuvvet yasası***dır. Bu yasa, uzaklığın karesi ile ters orantı içerir ve Eş. (3-13)'teki iki durgun yük arasındaki Coulomb kuvvet yasası ile kıyaslanmalıdır. Akım taşıyan iki devre için kuvvet formülünün, iki durağan yükünkünden daha karmaşık olduğunu görürüz. Eş. (5-118)'i Eş. (5-117a) ve Eş. (5-117b)'de gösterildiği gibi iki adımla hesaplamak daha uygundur.

C_2 devresindeki I_2 akımının oluşturduğu manyetik akı nedeniyle oluşan C_1 devresindeki $\mathbf{F}_{21}$ kuvveti, Eş (5-118)'deki 1 ve 2 alt indislerinin yerini değiştirerek kolayca elde edilir. Newton'un etkiye tepki ile ilgili üçüncü yasası, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ olduğunu bize garanti eder.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 216

ÖRNEK 5-14

Aynı yönde I_1 ve I_2 akımlarını taşıyan, çok uzun, ince, birbirlerine paralel iki iletken tel arasındaki birim uzunluk başına kuvveti belirleyiniz. Tellerin arasındaki uzaklık d'dir.

ÇÖZÜM

Tellerin yz-düzleminde olduğunu düşünelim ve Şekil 5-19'da gösterildiği gibi sol taraftaki teli devre 1 olarak isimlendirelim. Bu problem Eş. (5-177a)'nın doğrudan bir uygulamasıdır. $\mathbf{F}'_{12}$'yi 2. tel üzerindeki birim uzunluk başına kuvvet olarak alırsak

$$\mathbf{F}'_{12} = I_2(\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_{12}) \tag{5-119}$$

olacaktır. Burada $\mathbf{B}_{12}$ 1. teldeki I_1 tarafından oluşturulan 2. teldeki manyetik akı yoğunluğudur ve 2. tel üzerindeki her noktada sabittir. Tellerin sonsuz uzunlukta ve silindirik simetriye sahip olması nedeniyle, $\mathbf{B}_{12}$'nin belirlenmesi için Eş. (5-117b)'nin kullanılmasına gerek yoktur. Amper devre yasasını uygularsak, Eş. (5-12)'den

$$\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{a}_x \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \tag{5-120}$$

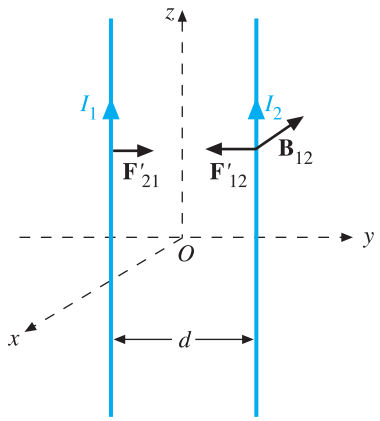
bulunur. Eş. (5-120)'nin Eş. (5-119)'da kullanılması ile

$$\mathbf{F}'_{12} = -\mathbf{a}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad \text{(N/m)} \tag{5-121}$$

Aynı yönde (ters yönde) akım taşıyan teller arasında çekme (itme) kuvveti

elde edilir. 2. teldeki kuvvetin, onu 1. tele doğru çektiğini görmekteyiz. *Aynı yönde akım taşıyan teller arasındaki kuvvet çekme kuvvetidir* (aynı işarete sahip iki yük arasındaki kuvvetin itme kuvveti olmasının tersinedir).

ŞEKİL 5-19 Akım taşıyan iki paralel tel arasındaki kuvvet (Örnek 5-14).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 217

■ **ALIŞTIRMA 5.10** Şekil 5-18'deki dikdörtgen döngüde saat yönünde I_2 akımı akmaktadır. Döngüdeki net kuvveti belirleyiniz.

CEVAP: $-\mathbf{a}_r \mu_0 I_1 I_2 hw/2\pi d(d + w)$.

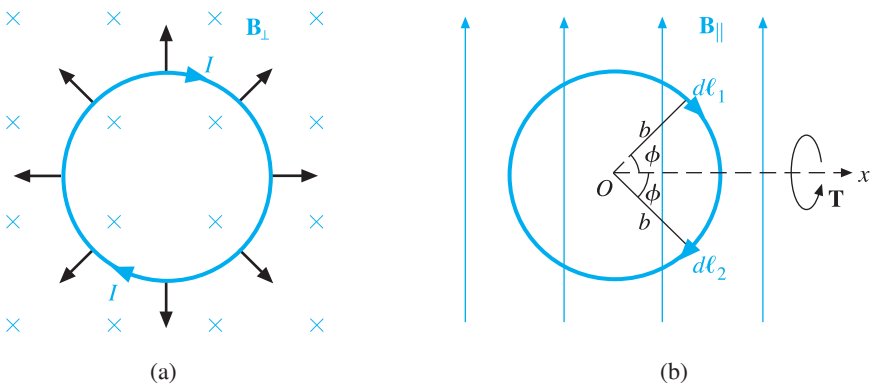
B akı yoğunluğu olan bir düzgün manyetik alan içerisinde, I akımı taşıyan ve yarıçapı b olan dairesel küçük bir döngüyü düşünelim. **B**'yi $\mathbf{B}_\perp$ ve $\mathbf{B}_\parallel$ biçiminde, döngü düzlemine dik ve paralel bileşenlerine ayırarak, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$ yazmamız uygun olacaktır. Şekil 5-20(a)'da betimlendiği gibi, dik bileşen $\mathbf{B}_\perp$ döngüyü genişletme yönünde (veya I'nın yönü değiştiğinde daraltmak yönünde) kuvvet uygulayacak, fakat döngüyü hareket ettirme yönünde uyguladığı kuvvet sıfır olacaktır. Paralel bileşeni $\mathbf{B}_\parallel$ ise Şekil 5-20(b)'de gösterildiği gibi $d\ell_1$ elemanı üzerinde yukarı doğru (sayfadan dışarı) bir $d\mathbf{F}_1$ kuvveti üretecek, simetriğindeki $d\ell_2$ elemanı üzerinde ise aşağı doğru (sayfadan içeri) $d\mathbf{F}_2 = -d\mathbf{F}_1$ olacak şekilde bir kuvvet üretecektir. Dolayısıyla $\mathbf{B}_\parallel$'in neden olduğu bütün döngü üzerindeki net kuvvet sıfırdır. Ancak, döngüyü x-ekseni etarfından döndürecek, I nedeniyle oluşan manyetik alan ile dış $\mathbf{B}_\parallel$ alanını aynı doğrultuya getirmek üzere bir tork oluşacaktır. $d\mathbf{F}_1$ ve $d\mathbf{F}_2$ tarafından üretilen differensiyel tork

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= \mathbf{a}_x (dF) 2b \sin\phi \\ &= \mathbf{a}_x (I\, d\ell\, B_\parallel \sin\phi)\, 2b \sin\phi \\ &= \mathbf{a}_x 2Ib^2 B_\parallel \sin^2\phi \; d\phi \end{aligned} \tag{5-122}$$

bulunur. Burada $d\mathbf{F} = |d\mathbf{F}_1| = |d\mathbf{F}_2|$ ve $d\ell = |d\ell_1| = |d\ell_2| = b\, d\phi$'dir. Döngü üzerine etkiyen toplam tork ise aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int d\mathbf{T} = \mathbf{a}_x 2Ib^2 B_\parallel \int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi \\ &= \mathbf{a}_x I(\pi b^2) B_\parallel. \end{aligned} \tag{5-123}$$

ŞEKİL 5-20 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$ düzgün manyetik alanı içindeki dairesel döngü.



(a) (b)

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 218

Eş. (5-45)'deki manyetik dipol momenti tanımı kullanılırsa,

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_n I(\pi b^2) = \mathbf{a}_n IS$$

dir ve burada $\mathbf{a}_n$, sağ elin parmakları akım yönünü gösterdiğinde sağ baş parmağın yönünde (döngü düzlemine dik) birim vektördür. Eş. (5-123)'ü aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Bir manyetik alan içerisindeki akım taşıyan devrenin karşılaştığı tork

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (\text{N} \cdot \text{m}). \tag{5-124}$$

Eş. (5-124)'te $\mathbf{B}$ vektörü ($\mathbf{B}_{\parallel}$ yerine) kullanılmıştır. Çünkü $\mathbf{m} \times (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_{\parallel}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\parallel}$'dir. Bu tork, manyetik malzemelerin mikroskopik manyetik dipollerini bir araya getirir ve uygulanan bir manyetik alan tarafından malzemelerin mıknatıslanmasına neden olur. Akım taşıyan döngü üzerinde düzgün olmayan bir $\mathbf{B}$ alanı var ise Eş. (5-124)'ün geçerli olmadığı unutulmamalıdır.

ÖRNEK 5-14

Kenar uzunlukları b_1 ve b_2 olan, I akımı taşıyan xy-düzlemindeki bir dikdörtgen döngü, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ düzgün manyetik alanı içerisindedir. Döngü üzerindeki kuvveti ve torku belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$\mathbf{B}$'yi dik ve paralel bileşenleri, $\mathbf{B}_{\perp}$ ve $\mathbf{B}_{\parallel}$'ye ayırdığımızda

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{a}_z B_z \tag{5-125a}$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y \tag{5-125b}$$

elde ederiz. Şekil 5-21'deki gibi akımın saat yönünde aktığını kabul edelim. Dik bileşen $\mathbf{a}_z B_z$, 1. ve 3. kenarlara $Ib_1 B_z$ kuvveti, 2. ve 3. kenarlara da $Ib_2 B_z$ kuvveti uygulayacaktır ve hepsi de döngünün merkezine doğrudur. Bu dört kuvvetin vektör toplamı sıfırdır ve tork üretilmeyecektir.

Manyetik akı yoğunluğunun paralel bileşeni $\mathbf{B}_{\parallel}$, dört kenarda aşağıdaki kuvvetleri üretir:

$$\mathbf{F}_1 = Ib_1 \mathbf{a}_x \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) \tag{5-126a}$$

$$= \mathbf{a}_z Ib_1 B_y = -\mathbf{F}_3;$$

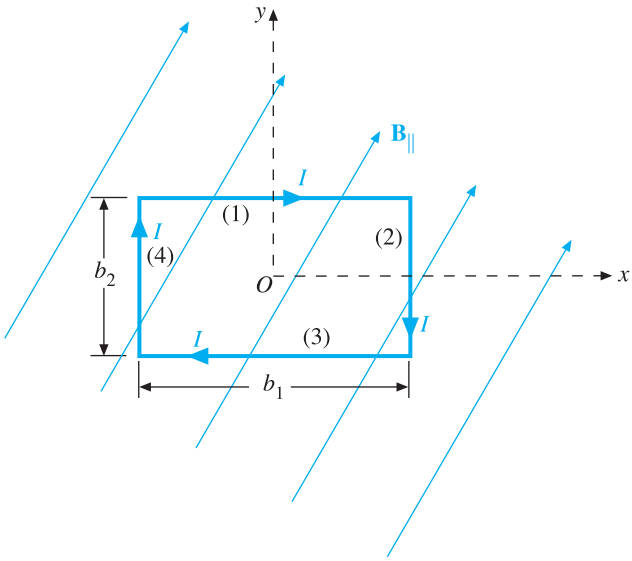
$$\mathbf{F}_2 = Ib_2(-\mathbf{a}_y) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) \tag{5-126b}$$

$$= \mathbf{a}_z Ib_2 B_x = -\mathbf{F}_4.$$

Döngü üzerindeki net kuvvete bakarsak $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ yine sıfır olacaktır. Bununla birlikte, bu kuvvetler bir tork oluşturacaktır. $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_3$ kuvvetleri nedeniyle 1. ve 3. kenarlardan oluşan $\mathbf{T}_{13}$ torku

$$\mathbf{T}_{13} = \mathbf{a}_x Ib_1 b_2 B_y \tag{5-127a}$$

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 219



ŞEKİL 5-21 Düzgün bir manyetik alan içinde dikdörtgen döngü (Örnek 5-15).

$\mathbf{F}_2$ ve $\mathbf{F}_4$ kuvvetlerinin 2. ve 4. kenarlarda oluşturduğu $\mathbf{T}_{24}$ torku ise

$$\mathbf{T}_{24} = -\mathbf{a}_y I b_1 b_2 B_x \tag{5-127b}$$

olarak elde edilir. Dikdörtgen döngü üzerindeki toplam tork ise aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{13} + \mathbf{T}_{24} = I b_1 b_2 (\mathbf{a}_x B_y - \mathbf{a}_y B_x) \quad (\text{N} \cdot \text{m}). \tag{5-128}$$

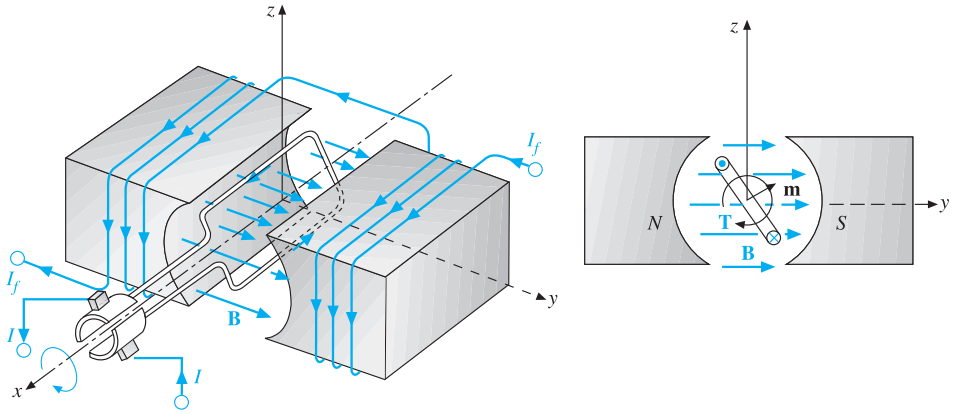
Döngüdeki manyetik moment $\mathbf{m} = -\mathbf{a}_z I b_1 b_2$ olduğundan, Eş. (5-128)'deki sonuçta, tam olarak $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$'dir. Eş. (5-124)'ün dairesel bir döngü için çıkarılmasına rağmen, tork formülü dikdörtgen bir döngü için de geçerlidir. Gerçek şu ki, Eş. (5-124)'ün herhangi bir şekildeki düzlem döngüler için, döngü, düzgün bir manyetik alan içinde olduğu sürece geçerli olduğu ispatlanabilir.

5-12.2 DOĞRU AKIM MOTORLARI

d-c motorların çalışma ilkesi

Doğru-akım (d-c) motorların çalışma prensibi Eş. (5-124)'e dayanır. Şekil 5-22(a), bu tip bir motorun şematik çizimini göstermektedir. **B** manyetik alanı, kutuplar etrafındaki sarımlardaki I_f alan akımı tarafından üretilir. Bir I akımı, dikdörtgen döngü içinden yollandığında, x-yönündeki bir tork, döngünün saat yönünde dönmesine neden olur. Bu durum Şekil 5-22(b)'de gösterilmiştir. Döngüden geçen akımın, her zaman aynı yönde **T** torkunu sağlamak üzere, döngünün bir dönüşünün yarısında tersine dönmesi gerekmektedir. Bunu sağlamak için şekilde görülen iki parçaya bölünmüş halka ve fırçalara ihtiyaç

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 220



(a) Perspektif görünüm (b) +*x* yönünden şematik görünüm

ŞEKİL 5-22 d-c motorun çalışma prensibinin gösterimi.

duyulur ve döngünün manyetik momenti **m**'nin *z*-bileşeni pozitif olmalıdır.

Kesintisiz ve verimli çalışma sağlamak üzere, gerçek bir d-c motor ferromanyetik çekirdekli bir armatür etrafına sarılmış ve dağıtılmış bir çok dikdörtgen döngüye sahiptir. Döngülerin uçları iletken çubuk çiftlerine bağlanır ve bu çubuklar da ***komütatör*** olarak adlandırılan küçük bir silindirik yapı üzerinde yer alır. Komütatörde döngü sayısının iki katı, birbirinden yalıtılmış paralel iletken çubuk vardır.

5-12.3 DEPOLANAN ENERJİ CİNSİNDEN KUVVETLER VE TORKLAR

Bütün akım taşıyan iletkenler ve devreler, bir manyetik alan içine yerleştirildiğinde manyetik kuvvetlerle karşılaşırlar. Bu manyetik kuvvetler eşit ve ters yöndeki mekanik kuvvetlerle dengelendiğinde devreler hareket etmez. Akım taşıyan devreler arasındaki manyetik kuvvetlerin Amper kuvvet yasası ile belirlenmesi, bazı simetrik durumlar (Örnek 5-4'deki çok uzun, akım taşıyan iki paralel iletken tel gibi) dışında genellikle zor bir iştir. Şimdi, ***sanal yer değiştirme prensibi*** temel alınarak manyetik kuvvet ve torkun bulunması ile ilgili alternatif bir yöntemi inceleyeceğiz. Bu prensip, yüklü iletkenler arasındaki elektrostatik kuvvetin belirlenmesi için Kısım 3-10.2'de de kullanılmıştı.

Akım taşıyan devrelerden birinde $d\ell$ sanal differensiyel yer değiştirmesi sonucunda akı bağlaşımında bir değişiklik olmadığını varsayarsak, hiç emf indüklenmeyecek ve kaynaklar sisteme hiç enerji sağlamayacaktır. $\mathbf{F}_\Phi \cdot d\ell$ mekanik işi, depolanan W_m manyetik enerjisindeki azalma pahasına yapılacaktır. Burada, $\mathbf{F}_\Phi$ sabit akı duru-

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 221

mundaki kuvveti göstermektedir. Bu durumda

$$\mathbf{F}_\Phi \cdot d\ell = -dWm = -(\nabla W_m) \cdot d\ell \tag{5-129}$$

olacaktır ve buradan

Sanal yer değiştirme yöntemi ile akım taşıyan bir devre üzerindeki kuvvetin belirlenmesi

$$\boxed{\mathbf{F}_\Phi = -\nabla W_m \quad \text{(N)}} \tag{5-130}$$

ifadesini elde ederiz. Üç boyutlu uzayda, aslında Eş. (5-130) üç denklemden oluşur. Örneğin, Kartezyen koordinatlarda x-yönündeki kuvvet aşağıda verilmiştir.

$$(F_\Phi)_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x}. \tag{5-131}$$

Benzer ifadeler, diğer yönler için de yazılabilir.

Eğer devre, bir eksen, örneğin z ekseni etrafında dönmeye zorlanıyorsa, sistem tarafından yapılan mekanik iş $(T_\Phi)_z d\phi$ olacaktır ve

Sanal yer değiştirme yöntemi ile, bir manyetik alan içindeki akım taşıyan bir devreye etkiyen bir eksen etrafındaki tork

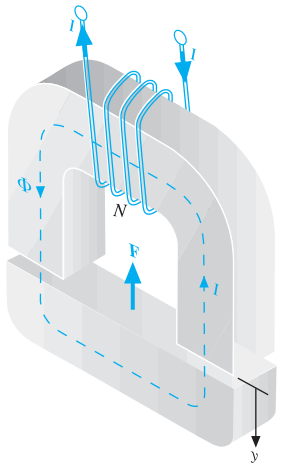
$$\boxed{(T_\Phi)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \phi} \quad (\text{N} \cdot \text{m})} \tag{5-132}$$

olarak yazılabilir. Eş. (5-132), sabit akı bağlaşımı durumunda, devre üzerine etkiyen torkun z-bileşenidir.

ÖRNEK 5-16

Şekil 5-23'deki, N sarımlı bobinindeki I akımının manyetik devrede Φ akısını ürettiği elektromıknatısı düşünelim. Çekirdeğin kesit alanı S'dir. Armatür üzerindeki kaldırma kuvvetini belirleyiniz.

ŞEKİL 5-23 Bir elektromıknatıs (Örnek 5-16).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 222

ÇÖZÜM

Armatürün dy (y'de diferensiyel artma) kadar sanal yer değiştirdiğini ve kaynağın Φ akısını sabit tutmak üzere ayarlandığını düşünelim. Armatürdeki yer değiştirme sadece hava boşluğunun boyunu değiştirecektir; sonuçta, yer değiştirme sadece iki hava boşluğundaki depolanan manyetik enerjiyi değiştirecektir. Eş. (5-106)'dan

$$dW_m = d(W_m)_{\substack{\text{hava}\\ \text{boşluğu}}} = 2\left(\frac{B^2}{2\mu_0} S\, dy\right)$$

$$= \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}\, dy \qquad (5\text{-}133)$$

ifadesini yazabiliriz. Hava boşluğunun boyundaki bir artış (bir artı dy), Φ sabit ise depolanan manyetik enerjiyi artırır. Eş. (5-130)'u kullanarak, y-yönündeki kuvveti

$$\mathbf{F}_\Phi = \mathbf{a}_y (F_\Phi)_y = \mathbf{a}_y \left(-\frac{\partial W_m}{\partial y}\right) = -\mathbf{a}_y \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} \quad \text{(N)} \qquad (5\text{-}134)$$

buluruz. Burada eksi işaret, kuvvetin hava boşluğunun boyunu azaltmak için çalıştığını gösterir ve bu nedenle çekme kuvvetidir.

TEKRAR SORULARI

S.5-29 Bir **B** manyetik alanı içinde, I akımı taşıyan kapalı bir devre üzerindeki kuvvetin integral ifadesini veriniz.

S.5-30 Bir manyetik alan içinde, akım taşıyan bir devre üzerindeki torku ifade eden formülü yazınız.

S.5-31 d-c motorların çalışma prensibini açıklayınız.

S.5-32 Sabit akı bağlaşımı koşulu altında, akım taşıyan devrelerin oluşturduğu sistemde kuvvet ve depolanan enerji arasındaki ilişki nedir?

NOTLAR

1. Akım taşıyan iki tel arasındaki manyetik kuvvet, akımlar *aynı* yönde ise *çekme*, akımlar *ters* yönde ise *itme* kuvvetidir.
2. Akım taşıyan bir döngüdeki tork (mikroskopik manyetik dipolleri içeren), döngünün manyetik momentini uygulanan manyetik alanla *aynı hizaya* getirmeye çalışacak yöndedir.
3. $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ tork formülü, sadece akım taşıyan döngü üzerine dışardan uygulanan manyetik alan *düzgün* ise geçerlidir.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 223

ÖZET

Elektrik ve manyetik alanların olduğu bir bölgede hareket eden bir yük, hem bir elektrik kuvvet hem de bir manyetik kuvvetle karşılaşır. Toplam elektromanyetik kuvvet Lorentz kuvvet denklemi ile verilir. Bir manyetik alanda hareket eden bir yüke etkiyen manyetik kuvvet için formül tanımlandıktan sonra:

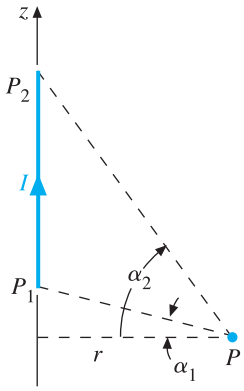
- Boş uzayda manyetostatiğin iki temel postülatı, **B**'nin ıraksaması ve döneli olarak verildi.
- Simetri koşulu altında, bir akım dağılımının oluşturduğu manyetik akı yoğunluğunu belirlemeye olanak sağlayan Amper devre yasası çıkarıldı.
- Manyetik vektör potansiyeli kavramı tanıtıldı.
- Kapalı bir döngüde akan akımın oluşturduğu **B**'nin belirlenmesi için Biot-Savart yasası çıkarıldı.
- Eşdeğer mıknatıslanma akım yoğunlukları bulunarak, indüklenmiş dipol momentlerin mikroskopik etkisi tartışıldı.
- Manyetik alan şiddeti **H** ve bağıl geçirgenlik tanımlandı.
- Farklı manyetik malzemelerin davranışları karşılaştırıldı.
- Statik manyetik alanlar için sınır koşulları bulundu.
- Öz endüktans ve ortak endüktans tanımlandı ve belirlenmeleri için yapılacak işlemler açıklandı.
- Depolanan manyetik enerji için formül bulundu.
- Manyetik alan içinde akım taşıyan devreler üzerindeki kuvvetler ve torklar tartışıldı ve
- doğru-akım motorlarının çalışma temelleri açıklandı.

PROBLEMLER

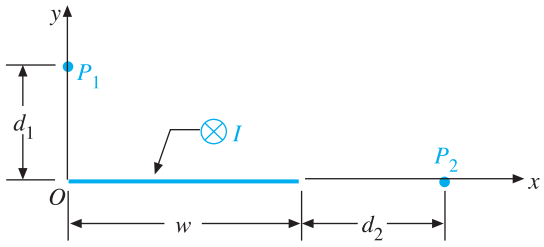
P.5-1 Bir Q nokta yükü, $\mathbf{u} = \mathbf{a}_x u_0$ hızı ile $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z$ düzgün manyetik alanına sahip bir bölgeye girmektedir. Yükün hızını değiştirmeden ilerleyebilmesi için bölgede nasıl bir **E** alanı var olmalıdır?

P.5-2 Kesiti dikdörtgen, yüksekliği h olan bir dairesel toroidden geçen manyetik akı yoğunluğunu bulunuz. Toroidin iç ve dış yarıçapı, sırasıyla a ve b'dir. Toroid etrafına sıkı sarılmış N sarımlı telden I akımı geçmektedir. Akıyı, kesit alanı ile ortalama yarıçaptaki akı yoğunluğunu çarparak bulduğumuzdan yapılan hatanın yüzdesini belirleyiniz. $b/a = 5$ ise hata ne olacaktır?

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 224



ŞEKİL 5-24 *I* akımı taşıyan belirli uzunluktaki bir düz iletken (Problem P.5-3).



ŞEKİL 5-25 *I* akımı taşıyan ince iletken plaka (Problem P.5-4 ve Problem P. 5-5).

P.5-3 Bir I doğru akımı, P_1P_2 uzunluğundaki düz bir tel iletkenden akmaktadır.

a) Şekil 5-24'de gösterilen, telden r kadar dik uzaklıkta ve α_1 ve α_2 açıları ile yeri gösterilebilen bir P noktasındaki $\mathbf{B}$ alanının

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu I}{4\pi r}(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \qquad (5\text{-}135)$$

olduğunu gösteriniz.

b) Telin uzunluğu sonsuz olduğunda, Eş. (5-135)'in Eş. (5-35)'e indirgeneceğini gösteriniz.

P.5-4 Şekil 5-25'te verilen, w genişliğindeki, çok uzun bir iletken tabakada I akımı, tabakanın uzunluğu boyunca akmaktadır. Akımın sayfaya doğru aktığını kabul ederek, $P_1(0, d)$ noktasındaki $\mathbf{B}_1$ manyetik akı yoğunluğunu belirleyiniz.

P.5-5 Problem P.5-4 ve Şekil 5-25'i referans alarak, $P_2(w + d_2, 0)$ noktasındaki manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B}_2$'yi bulunuz.

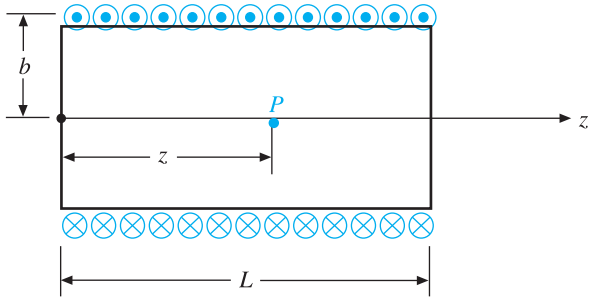
P.5-6 I akımı, sonsuz uzunluktaki eş eksenli hattın iç iletkeninden akmakta ve dış iletkeninden geri dönmektedir. İç iletkenin yarıçapı a ve dış iletkenin iç ve dış yarıçapı, sırasıyla, b ve c'dir. Bütün bölgelerdeki manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B}$'yi bulunuz. $|\mathbf{B}|$'yi r'nin değişimine karşı çiziniz.

P.5-7 $3w$ uzunluğundaki ince bir iletken tel eşkenar üçgen oluşturmaktadır. Telden I doğru akımı akmaktadır. Üçgenin merkezindeki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

P.5-8 Şekil 5-26'da verilen, birbirine çok yakın N sarımı olan, I akımı taşıyan L uzunluğunda ve yarıçapı b olan bir solenoidin ekseni üzerindeki bir P noktasındaki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz. L sonsuza yaklaştığında, sonucun Eş (5-82)'ye indirgendiğini gösteriniz. **İPUCU**: Eş. (5-37)'yi kullanınız.

P.5-9 2 (mm) yarıçaplı, sonsuz uzunluktaki bir telden I doğru akımı z-ekseni boyunca akmaktadır.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 225



ŞEKİL 5-26 Dairesel kesitli bir solenoid (Problem P.5-8).

a) Eş. (5-12)'deki **B** ifadesinden $r > 2$ (mm)'deki manyetik vektör potansiyeli **A**'yı elde ediniz. Referans sıfır potansiyeli, telin yüzeyinde seçiniz.

b) Eğer $I = 10$ (A) ise, $z = \pm 0.3$(m), $y = 0.1$ (m) ve 0.7 (m) ile belirlenmiş bir kare döngüden geçen toplam manyetik akı yoğunluğunu **A**'dan elde ediniz.

P.5-10 $\mathbf{a}_x J_{s0}$ yoğunluklu bir d-c yüzey akımı, xy-düzlemi ile çakışık, sonsuz büyüklükte bir iletken plakadan akmaktadır.

a) $(0, 0, z)$ ve $(0, 0, -z)$ noktalarındaki manyetik akı yoğunluğu **B**'yi belirleyiniz.

b) $(0, 0, z)$'deki **B**'den aynı yerdeki manyetik vektör potansiyeli **A**'yı bulunuz. Referans sıfır potansiyeli $z = z_0$'daki herhangi bir nokta olarak seçiniz.

P.5-11 d kalınlığındaki, çok geniş bir tabaka, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_z H_0$ düzgün manyetik alan şiddetine dik olarak durmaktadır. Kenar etkilerini ihmal ederek, aşağıdaki durumlar için tabaka içindeki manyetik alan şiddetini belirleyiniz.

a) Tabaka geçirgenliği μ olan bir malzemeden yapılmış ise ve

b) tabaka $\mathbf{M}_i = \mathbf{a}_z M_i$ mıknatıslanma vektörü olan kalıcı bir mıknatısdan oluşmuş ise.

P.5-12 Geçirgenliği μ olan dairesel çubuk biçimli bir manyetik malzeme, çok uzun hava nüveli bir solenoide eş eksenli biçimde yerleştirilmiştir. Çubuğun yarıçapı a, solenoidin iç yarıçapı b'den küçüktür. Solenoidin birim uzunluğunda I akımı taşıyan n sarım vardır.

a) $r < a$ ve $a < r < b$ için solenoidin içindeki **B**, **H** ve **M**'yi bulunuz.

b) Mıknatıslanmış çubuk için eşdeğer mıknatıslanma akım yoğunlukları $\mathbf{J}_{mv}$ ve $\mathbf{J}_{ms}$ nedir?

P.5-13 b yarıçaplı ferromanyetik bir küre, $\mathbf{M} = \mathbf{a}_z M_0$ mıknatıslanma vektörü ile düzgün olarak mıknatıslanmıştır.

a) Eşdeğer mıknatıslanma akım yoğunlukları $\mathbf{J}_{mv}$ ve $\mathbf{J}_{ms}$'yi belirleyiniz.

b) Kürenin merkezindeki akı yoğunluğunu belirleyiniz.

05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 226

P.5-14 Hava (1. bölge, $\mu_{r1} = 1$) ve demir (2. bölge $\mu_{r2} = 5000$) arasında bir düzlem sınır düşünerek,

a) $\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 10$ (mT) olduğunda, $\mathbf{B}_2$ ve $\mathbf{B}_2$'nin arayüz normali ile yaptığı açıyı bulunuz.

b) $\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_x 10 + \mathbf{a}_y 2$ (mT) olduğunda, $\mathbf{B}_1$ ve $\mathbf{B}_1$'in arayüz normali ile yaptığı açıyı bulunuz.

P.5-15 Ortalama yarıçapı r_0 ve dairesel kesitinin yarıçapı b olan havadan oluşmuş bir gövde üzerine N sarım yapılarak oluşturulan bir toroid bobinin öz endüktansını bulunuz. $b \ll r_0$ kabul ederek yaklaşık bir ifade elde ediniz.

P.5-16 Şekil 5-27'de gösterilen, çok uzun, düz bir tel ile iletken eşkenar üçgen bir döngü arasındaki ortak endüktansı belirleyiniz.

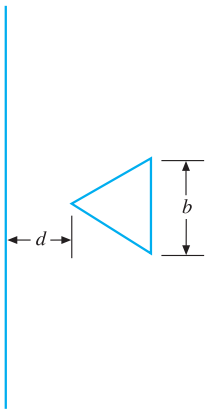
P.5-17 Şekil 5-28'deki birbirine paralel yerleştirilmiş iki dikdörtgen döngü arasındaki ortak endüktansı bulunuz. $h_1 \gg h_2$ ($h_2 > w_2 > d$) kabul ediniz.

P.5-18 Her biri aynı yönde 25 (A)'lik akım taşıyan, sonsuz uzunlukta, birbirinden 10 (cm) kadar uzaklıkta yerleştirilmiş, paralel tellerin her birine birim uzunluk başına uygulanan kuvveti hesaplayınız. Tellerin yerleşimi Şekil 5-29'da gösterilmiştir. Kuvvetin yönünü belirleyiniz.

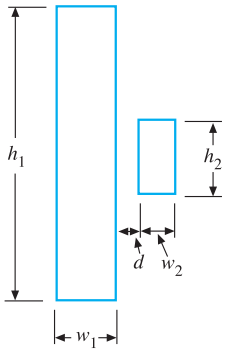
P.5-19 Uzun ince tel bir şeritin ve paralel bir telin kesiti Şekil 5-30'da verilmiştir. İletkenler üzerinde genlikleri eşit fakat yönleri farklı, I akımı akmaktadır. İletkenler üzerindeki birim uzunluk başına kuvveti bulunuz.

P.5-20 Şekil 5-31'deki AA' çubuğu, iki çok uzun paralel hattın, ilet-

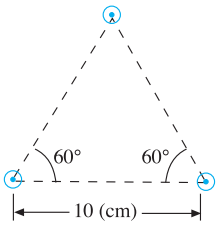
ŞEKİL 5-27 Uzun ve düz tel ile iletken eşkenar üçgen döngü (Problem P.5-16).



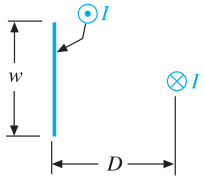
ŞEKİL 5-28 İki eş düzlemli dikdörtgen döngü, $h_1 \gg h_2$ (Problem P.5-17).



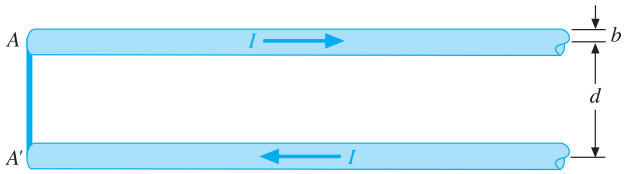
ŞEKİL 5-29 Birbirinden eşit uzaklıkta, sonsuz uzunlukta akım taşıyan teller (Problem P.5-18).



05_05.qxp 5.06.2024 13:55 Page 227



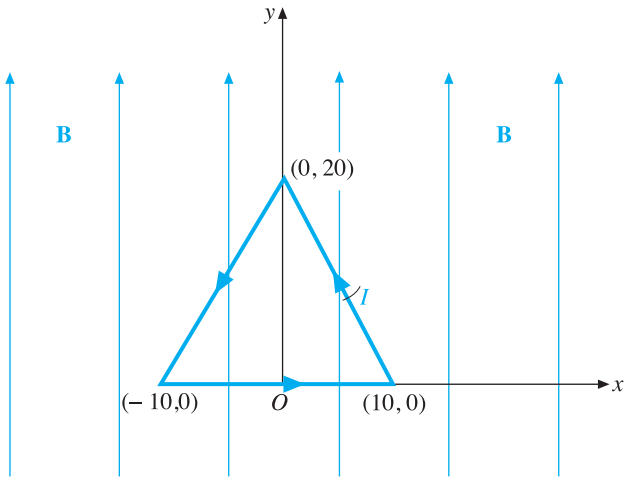
ŞEKİL 5-30 Paralel şerit ve iletken telin kesiti (Problem P.5-19).



ŞEKİL 5-31 Sonlu iletken çubuk üzerindeki kuvvet (Problem P.5-20).

ken yolu (örneğin devre kesicilerin bıçak ağzı) olarak kullanılmaktadır. Hatların yarıçapı b ve aralarındaki uzaklık d'dir. Çubuk üzerindeki manyetik kuvvetin yönünü ve genliğini bulunuz.

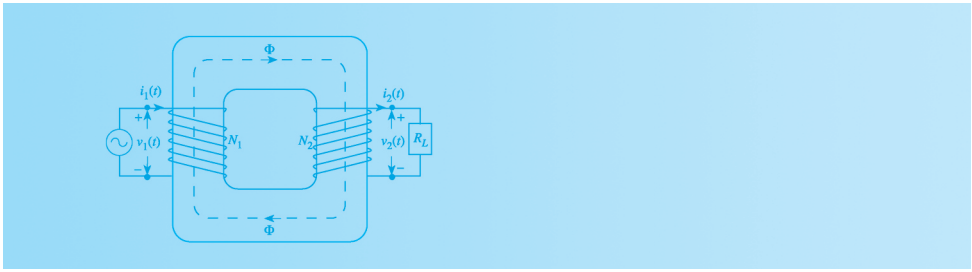
P.5-21 Şekil 5-32'deki gibi $I = 10$ (A)'lik bir d-c akım taşıyan üçgen döngü xy-düzlemindedir. Bölgede $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y 6$ (mT) biçiminde düzgün bir manyetik akı yoğunluğu olduğunu düşünerek, döngü üzerindeki kuvvetleri ve torku bulunuz. Boyutlar (cm) olarak verilmiştir.



ŞEKİL 5-32 Düzgün manyetik alan içinde bir üçgen döngü (Problem P.5-21).

P.5-22 I_1 durgun akımını taşıyan r_1 yarıçaplı dairesel sarılmış bir tel, yarıçapı kendisinden daha büyük ve r_2 olarak sarılmış ($r_2 \gg r_1$) aynı yönde I_2 durgun akımını taşıyan bir telin merkezine yerleştirilmiştir. İki devrenin normalleri arasındaki açı θ'dır ve küçük dairesel tel, kendi çapı etrafında dönme özgürlüğüne sahiptir. Küçük dairesel telin üzerindeki torkun genliğini ve yönünü belirleyiniz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 228



6. BÖLÜM

6-1 GENEL BAKIŞ

Şimdiye kadar sadece zamanla değişmeyen alanlarla ilgilendik. Elektrostatik modeli oluştururken **E** elektrik alan şiddeti vektörünü ve **D** elektrik akı yoğunluğu (elektrik yerdeğiştirme) vektörünü tanımladık. Temel diferensiyel denklemler

Elektrostatik modelin temel denklemleri

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (3\text{-}4)(6\text{-}1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad (3\text{-}63)(6\text{-}2)$$

olarak verilmişti. Lineer ve yönbağımsız (homojen olması gerekmez) ortamlar için **E** ve **D** arasındaki ilişki

Elektrik model için yapısal bağıntı

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \qquad (3\text{-}67)(6\text{-}3)$$

yapısal bağıntısı ile verilmişti. Manyetostatik model için **B** manyetik akı yoğunluğu vektörünü ve **H** manyetik alan şiddeti vektörünü tanımladık. Temel diferensiyel denklemler ise

Manyetostatik modelin temel denklemleri

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (5\text{-}6)(6\text{-}4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (5\text{-}61)(6\text{-}5)$$

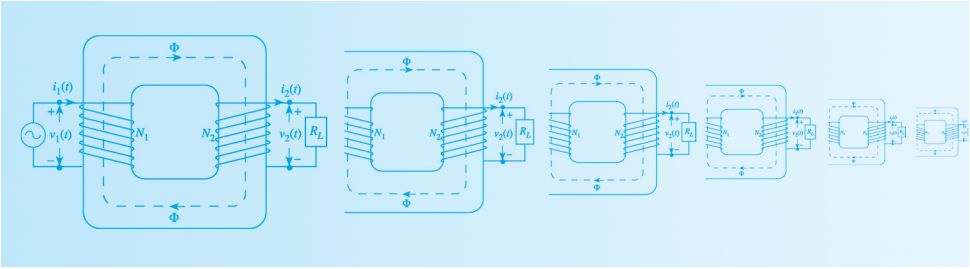
olarak verilmişti. Lineer ve yönbağımsız ortamlarda **B** ve **H** arasındaki yapısal bağıntı ise

Manyetik model için yapısal bağıntı

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \qquad (5\text{-}66)(6\text{-}6)$$

idi. Elektrostatik modeldeki **E** ve **D** ile manyetostatik modeldeki **B** ve **H** arasında bir bağıntı olmadığına dikkat edilmelidir. İletken bir or-

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 229



Zamanla Değişen Alanlar ve Maxwell Denklemleri

Elektromanyetostatik alan

tamda statik elektrik ve manyetik alanlar birlikte var olabilir ve bir ***elektromanyetostatik alan*** oluşturur. İletken ortamdaki statik elektrik alanı bir durgun akım akmasına neden olur ve bu da bir statik manyetik alan oluşturur. Ancak elektrik alanı statik elektrik yükleri veya potansiyel dağılımlarından tamamıyla belirlenebilir. Manyetik alan ise bir sonuçtur; elektrik alanın hesaplanmasında işin içine girmez.

Statik modeller basittir ancak zamanla değişen elektromanyetik olayları açıklamakta yetersizdir. Statik elektrik ve manyetik alanlar enerji ve bilgiyi ileten dalgalar oluşturmaz. Dalgalar, uzaktan elektromanyetik etkinin temelidir. Bu bölümde zamanla değişen bir manyetik alanın bir elektrik alan indüklediğini, bunun tersinin de geçerli olduğunu göreceğiz. Zamanla değişen alanlar durumunda elektrik alan vektörleri **E** ve **D**'yi manyetik alan vektörleri **B** ve **H** ile uygun şekilde ilişkilendiren bir elektromanyetik modelin oluşturulması gerekir.

Eş. (6-1)'de verilen $\nabla \times \mathbf{E}$ denklemini değiştiren ve Faraday elektromanyetik indüklenme yasasına götüren bir temel postülat ile başlayacağız. Transformatör ve hareketsel emf kavramları tartışılacaktır. Yeni postülat ile $\nabla \times \mathbf{H}$ denklemini de yükün korunumu yasası ile tutarlı olacak şekilde değiştirmemiz gerekecektir. Değiştirilmiş iki dönel denklemi, Eş (6-2) ve (6-4)'te verilen iki ıraksama denklemi ile birlikte Maxwell denklemleri olarak bilinir ve elektromanyetik teorinin temelini oluşturur.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 230

Elektrostatik ve manyetostatikteki temel denklemler, tüm nicelikler zamandan bağımsız olduğunda Maxwell denklemlerinin özel durumlarıdır. Maxwell denklemleri, ışık hızı ile yayılan elektromanyetik dalgaların varlığını öngören dalga denklemlerini verecek şekilde birleştirilebilir. Dalga denklemlerinin çözümü, özellikle zamanda-harmonik alanlar, bu bölümde tartışılacaktır.

6-2 FARADAY İNDÜKLENME YASASI

Elektromanyetik teoride önemli bir gelişme, 1831 yılında bir iletken döngüden geçen manyetik akı zamanla değiştiğinde, döngüde bir akım indüklendiğini keşfeden Michael Faraday tarafından sağlanmıştır. Deneysel gözleme dayanan, indüklenen emf ve akı bağlaşımı arasındaki bu nicel bağıntı ***Faraday yasası*** olarak bilinir. Bu deneysel bir yasadır ve bir postülat olarak alınabilir. Ancak sonlu bir döngüyü ilgilendiren deneysel bağıntıyı, elektromanyetik indüklenme teorisinin başlangıç noktası olarak almayacağız. Bunun yerine 3. Bölümde elektrostatik ve 5. Bölümdeki manyetostatikteki yaklaşımımızı izleyecek ve temel bir postülat verip bundan Faraday yasasının integral biçimlerini geliştireceğiz.

Elektromanyetik indüklenmenin temel postülatı

Elektromanyetik indüklenmenin temel postülatı

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6-7}$$

olarak verilir. Eş. (6-7) bir nokta-fonksiyon bağıntısını ifade eder, yani ister boş uzay isterse bir malzeme ortamında olsun, uzaydaki her noktada geçerlidir. *Bunun sonucunda zamanla değişen manyetik akı yoğunluğu olan bir bölgede elektrik alan şiddeti korunumlu değildir ve bir skalar potansiyelin gradyantının negatifi olarak ifade edilemez.*

Zamanla değişen bir manyetik alan durumunda elektrik alan şiddeti korunumlu değildir.

Eş. (6-7)'nin her iki tarafının açık bir yüzey üzerinde yüzey integralini alır ve Stokes teoremini uygularsak

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{6-8}$$

elde ederiz. Eş. (6-8), C çevresinde bir fiziksel devre olsun veya olmasın her S yüzeyi ve bunu sınırlayan C çevriti için geçerlidir. Doğal olarak zamanla değişmeyen bir alan için $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ olur ve Eş. (6-7) ve (6-8), sırasıyla, elektrostatikteki Eş. (6-1) ve (3-7)'ye indirgenir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 231

Aşağıdaki kısımlarda, zamanla değişen manyetik alandaki durağan devre, statik manyetik alanda hareketli bir iletken ve zamanla değişen manyetik alanda hareketli bir devre durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

6-2.1 ZAMANLA DEĞİŞEN MANYETİK ALANDA DURAĞAN BİR DEVRE

C çevritli ve S yüzeyli bir durağan devre için Eş. (6-8)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{6-9}$$

olarak yazılabilir. Eğer

$$\mathscr{V} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = C \text{ ile sınırlı devrede indüklenen emf (V)} \tag{6-10}$$

ve

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = S \text{ yüzeyinden geçen manyetik akı (Wb)} \tag{6-11}$$

tanımlarını yaparsak, Eş. (6-9)

$$\mathscr{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{(V)} \tag{6-12}$$

haline gelir. Eş. (6-12) ***bir kapalı durağan devredeki elektromotor kuvvetin, devreden geçen manyetik akının artış hızının negatifine eşit olduğunu*** belirtir. Bu, ***Faraday elektromanyetik indüklenme yasası***nın bir ifadesidir. Eş. (6-12)'deki eksi işareti, indüklenen emf'nin kapalı döngüden geçen manyetik akının değişimine direnen bir akım akmasına neden olacağını gösterir. Bu gerçek, ***Lenz yasası*** olarak bilinir. Zamanla değişen manyetik alandaki bir durağan devrede indüklenen emf ***transformatör emf***'sidir.

Faraday elektromanyetik indüklenme yasası

Lenz transformatör emf yasası

ÖRNEK 6-1

N sarımlı, dairesel bir iletken tel döngü xy-düzleminde yer almaktadır ve merkezi orijindedir. Döngü, b döngünün yarıçapı ve ω açısal frekans olmak üzere $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0 \cos(\pi r/2b) \sin \omega t$ manyetik alanının etkisindedir. Döngüde indüklenen emf'yi bulunuz.

ÇÖZÜM

Problemde zamanla değişen manyetik alanda durağan bir döngü verilmektedir. Böylece indüklenen $\mathscr{V}$ emf'si doğrudan Eş. (6-12) kullanılarak bulunabilir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 232

Dairesel döngünün her bir sarımından geçen manyetik akı

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}\\ &= \int_0^b \left[\mathbf{a}_z B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2b}\right)\sin\omega t\right]\cdot(\mathbf{a}_z 2\pi r\, dr)\\ &= \frac{8b^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)B_0 \sin\omega t\end{aligned}$$

bulunur. N tane sarım olduğundan toplam akı geçişi $N\Phi$ olur ve

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= -N\frac{d\Phi}{dt}\\ &= -\frac{8N}{\pi}b^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)B_0\omega\cos\omega t \qquad \text{(V)}\end{aligned}$$

elde ederiz. cos ωt'nin fazı sin ωt'nin fazından 90° önde olduğundan, indüklenen emf'nin fazının akının fazının 90° gerisinde olduğunu görürüz.

■ **ALIŞTIRMA 6.1** Eğer manyetik akı yoğunluğu $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0(b-r)\cos\omega t$ ile veriliyorsa Örnek 6-1'deki N-sarımlı b yarıçaplı dairesel döngüde indüklenen emf'yi bulunuz. İndüklenen emf ve manyetik alan arasındaki faz ilişkisi nedir?

CEVAP: $\mathcal{V} = N\dfrac{\pi}{3}\omega b^3 B_0 \sin\omega t$, $\mathbf{B}$'yi 90° faz farkı ile takip eder.

6-2.2 TRANSFORMATÖRLER

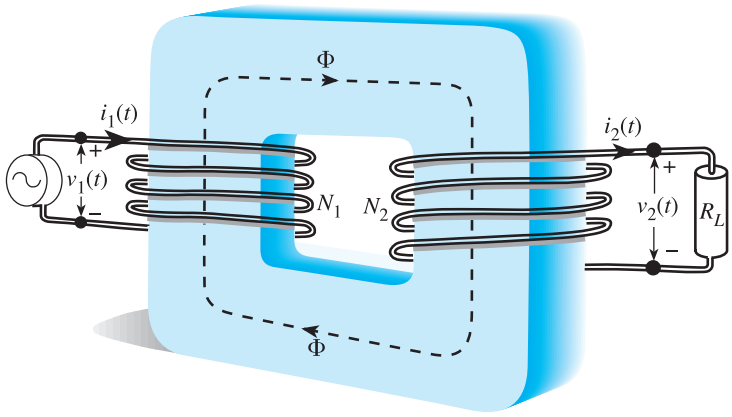
Bir transformatörün işlevleri

Bir transformatör, gerilimleri, akımları ve empedansları dönüştüren bir değişken akım (a-c) cihazıdır. Çoğunlukla Şekil 6-1'de gösterildiği gibi manyetik olarak bağlaşan iki veya daha fazla bobinden oluşur. Manyetik devrede Φ manyetik akısının takip ettiği kapalı yol için

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi \qquad (6\text{-}13)$$

yazabiliriz. Burada N_1, N_2 ve i_1, i_2, sırasıyla, birincil ve ikincil devrelerdeki sarım sayıları ve akımlardır. Eş. (6-13)'ün sol tarafı, transformatörün çekirdeği çevresinde $\oint \mathbf{H}\cdot d\ell$ kapalı çizgi integralidir. Bu, Eş. (5-63) ile ifade edilen Amper devre yasasının bir sonucudur ve net *manyetomotor kuvveti* (mmf-SI birimi: amper-sarım) temsil eder. İkincil $N_2 i_2$ devresinde indüklenen mmf'nin, Lenz yasası ile uyumlu olarak, birincil $N_1 i_1$ devresindeki mmf tarafından yaratılan manyetik akı akışına direndiğine dikkat edilmelidir. Eş. (6-13)'ün sağ tarafındaki $\mathcal{R}$, manyetik devrenin *relüktansını* gösterir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 233



ŞEKİL 6-1 Bir transformatörün şematik diyagramı.

Relüktans çekirdek malzemenin geometrisine bağlıdır ve malzemenin manyetik geçirgenliği ile ters orantılıdır.[1] Manyetik devre için verilen Eş. (6-13), kapalı bir devre etrafındaki net emf'nin, akım ile dirençlerin çarpımlarının toplamına eşit olduğunu söyleyen Kirchhoff gerilim yasasına benzerdir. Buradaki $\mathcal{R}$ ve Φ, sırasıyla, direnç ve akıma benzerdir.

İdeal transformatörün koşulları

İdeal transformatörlerde hiç kaçak akı olmadığını ve $\mu \to \infty$, $\mathcal{R} = 0$ olduğunu kabul ederiz. Böylece Eş. (6-13)

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{6-14}$$

İdeal transfarmatörde akım bağıntısı

haline gelir. Eş. (6-14) ***bir ideal transformatörün birincil ve ikincil sarımlarındaki akımların oranının sarım sayıları oranının tersine eşit olduğunu*** belirtir. Faraday yasası bize

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \tag{6-15}$$

ve

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{6-16}$$

olduğunu söyler.

[1] Bir manyetik devrede relüktansın hesaplanması bir elektrik devresindeki direnç hesabına benzer. Ancak sonuç, kaçak akının var olmasından ve transformatör çekirdeğinin kesit alanının düzgün olmamasından dolayı, sadece yaklaşık olabilir. (Kaçak akı, tüm manyetik devre ile bağlantısı olmayan manyetik akıdır.) Burada $\mathcal{R}$'nin belirlenmesini detaylandırmayacağız. Relüktansın SI birimi

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:10 Page 234

Burada v_1 ve v_2'nin uygun işaretleri Şekil 6-1'de gösterilen polariteler ile bulunur. Eş. (6-15) ve (6-16)'dan

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{6-17}$$

İdeal transformatörde gerilim bağıntısı

buluruz. Böylece, ***bir ideal transformatörde birincil ve ikincil sarımlardaki gerilimlerin oranının sarımların oranına eşit olduğu*** bulunur.

İkincil sarım, Şekil 6-1'de gösterildiği gibi Bir R_L yük direnci ile sonlandırılırsa birincil sarıma bağlanan kaynak tarafından görülen etkin yük

$$(R_1)_{\text{eff}} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2} \tag{6-18}$$

veya

İdeal transformatörün dirençleri dönüştürmesi

$$(R_1)_{\text{eff}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \tag{6-19}$$

olur ki bu da yük direncinin, sarımların oranının karesi ile çarpımıdır. Sinüzoidal $v_1(t)$ kaynağı ve Z_L yük empedansı için kaynağın gördüğü etkin yük, bir empedans dönüşümü olan $(N_1/N_2)^2 Z_L$ ile verilir. Böylelikle

İdeal transformatörün empedansları dönüştürmesi

$$(Z_1)_{\text{eff}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L \tag{6-20}$$

yazabiliriz. Kısım 5-10'dan bir bobinin endüktansının ortamın manyetik geçirgenliği ile orantılı olduğunu hatırlayalım. Buradan, bir ideal transformatördeki sonsuz μ kabullenmesi de sonsuz endüktans anlamına gelir.

Gerçek transformatörlerin tam analizinin zorluğunun nedenleri

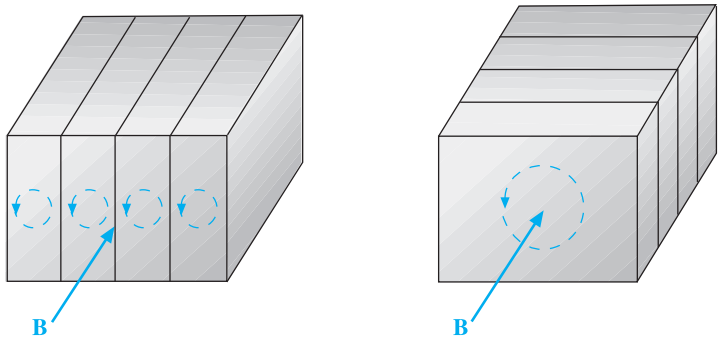
Gerçek transformatörlerde aşağıdaki gerçek-hayat koşulları vardır: Kaçak akının var olması, sonsuz olmayan endüktanslar, sıfır olmayan sarım dirençleri ve histerezis ve eddy-akımı kayıplarının varlığı. Ferromanyetik çekirdeğin lineer olmayan doğası (manyetik geçirgenliğin manyetik alan şiddetine bağlı olması) gerçek transformatörlerin tam analizini daha da zor hale getirir.

Eddy akımının tanımı

İndüksiyonla ısıtma ilkesi

Ferromanyetik çekirdekte zamanla değişen bir manyetik akı aktığında Faraday yasası ile uyumlu olarak bir indüklenen emf oluşur. İndüklenen bu emf, iletken çekirdekte manyetik akıya dik yerel akımlara neden olur. Bu akımlara ***eddy akımları*** denir. Eddy akımları direnil güç kaybına ve yerel ısınmaya neden olur. Gerçekte bu indüksiyonla ısıtmanın temelidir. Bu ilkeyi kullanan, metalleri eritebilecek kadar yüksek sıcaklıklar üretebilen indüksiyon fırınları inşa

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 235



(a) (b)

ŞEKİL 6-2 Zamanla değişen manyetik alanda katmanlı çekirdekler.

Eddy-akımı güç kaybını azaltmak için katmanlı çekirdek kullanımı

edilmiştir. Transformatörlerde eddy-akımı güç kaybı istenmez ve bu kayıp, çok büyük geçirgenlikli ancak çok düşük iletkenlikli (büyük μ küçük σ) çekirdek malzemeleri kullanılarak azaltılabilir. Ferritler böyle malzemelerdir. Düşük frekanslarda yüksek-güç uygulamaları için eddy-akım güç kaybını azaltmanın ekonomik bir yolu katmanlı çekirdek kullanmaktır. Yani transformatör çekirdekleri üstüste konan ve komşularından ince bir vernik veya oksit kaplama ile elektriksel olarak izole edilen plakalarla oluşturulur. Yalıtıcı kaplamalar Şekil 6-2(a)'da gösterildiği gibi manyetik akının yönüne paralel olmalıdır, böylelikle akıya dik olan eddy akımları tabakalara sınırlanmış olacaktır. Şekil 6-2(b)'deki izole katmanların manyetik akıya dik olduğu durum ise, açıkça eddy-akımı güç kaybını önlemede çok az etkili olur. Katmanların sayısı arttıkça toplam eddy-akımı güç kaybının azaldığı ispat edilebilir. Güç kaybının azalma miktarı kesitin şekline, büyüklüğüne ve katmanlama yöntemine bağlıdır.

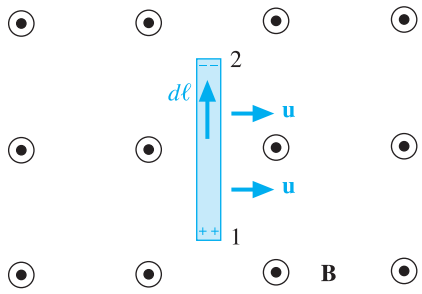
■ **ALIŞTIRMA 6.2** 75(Ω) bir direnç bir ideal transformatör yardımıyla 300(Ω)'a dönüştürülecektir. Transformatörün sarım oranı ne olmalıdır?

CEVAP: 2:1.

6-2.3 STATİK MANYETİK ALANDA HAREKETLİ BİR İLETKEN

Bir iletken **u** hızıyla bir statik (zamanla değişmeyen) **B** manyetik alanında Şekil 6-3'te görüldüğü gibi hareket ederse, $\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ kuvveti iletkende serbest hareket edebilen elektronları iletkenin bir ucuna doğru sürükler ve diğer uç pozitif yüklü hale gelir. Pozitif ve negatif yüklerin bu birbirlerinden ayrılması bir Coulomb çekme kuvveti yaratır. Yüklerin ayrılması süreci elektrik ve manyetik kuvvetler birbirini dengeleyene ve bir denge durumuna ulaşılana kadar devam eder. Çok çabuk ulaşılan denge durumunda hareketli iletkendeki ser-

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 236



ŞEKİL 6-3 Bir manyetik alanda hareket eden bir iletken çubuk.

best yükler üzerindeki net kuvvet sıfırdır.

İletkenle birlikte hareket eden bir gözlemciye göre, görünür bir hareket yoktur ve birim yük başına etkiyen $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ manyetik kuvveti, iletken boyunca etki eden bir indüklenmiş elektrik alanı olarak yorumlanabilir. Bu alan sonucunda

$$V_{21} = \int_1^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{6-21}$$

gerilimi oluşur. Eğer hareketli iletken bir C kapalı devresinin bir parçası ise o zaman devrede oluşan emf

$$\mathscr{V}' = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{6-22}$$

Hareketset emf tanımı

ile verilir. Bu emf ***akı-kesen emf*** veya ***hareketsel emf*** olarak bilinir. Açıkça, devrenin sadece manyetik akıya paralel olmayan bir yönde ilerleyen (ve böylece akı "kesen" parçası, Eş. (6-22)'deki $\mathscr{V}'$ emf'sine katkıda bulunacaktır.

ÖRNEK 6-2

Bir metal çubuk, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0$ düzgün manyetik alanında yer alan bir iletken ray çifti üzerinde Şekil 6-4'te gösterildiği gibi $\mathbf{u}$ sabit hızıyla kaymaktadır.

a) 1 ve 2 terminalleri arasında gözüken V_0 açık-devre gerilimini belirleyiniz.

b) Terminaller arasına bir R direncinin bağlandığını kabul ederek R'de harcanan elektrik gücü bulunuz.

c) Bu elektrik gücün, çubuğu $\mathbf{u}$ hızı ile hareket ettirmek için gereken mekanik güce eşit olduğunu gösteriniz. Metal çubuğun ve iletken rayların elektrik direncini ihmal ediniz. Temas noktalarındaki mekanik sürtünmeyi de ihmal ediniz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 237

ÇÖZÜM

a) Hareketli çubuk akı-kesen bir emf üretir. V_0 açık-devre gerilimini bulmak için Eş. (6-22)'yi kullanacağız.

$$V_0 = V_1 - V_2 = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$
$$= \int_{2'}^{1'} (\mathbf{a}_x u \times \mathbf{a}_z B_0) \cdot (\mathbf{a}_y \, d\ell)$$
$$= -uB_0 h \qquad \text{(V)}. \tag{6-23}$$

b) 1 ve 2 terminalleri arasına bir R direnci bağlandığında terminal 2'den terminal 1'e $I = uB_0h/R$ akımı olacaktır. Böylece R'de harcanan P_e elektrik gücü

$$P_e = I^2 R = \frac{(uB_0h)^2}{R} \qquad \text{(W)} \tag{6-24}$$

bulunur.

c) Çubuğu hareket ettirmek için gereken P_m mekanik gücü

$$P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \text{(W)} \tag{6-25}$$

olarak bulunabilir. Burada $\mathbf{F}$, akım taşıyan metal çubuğa manyetik alanın uyguladığı $\mathbf{F}_m$ manyetik kuvvetine karşı koymak için gereken mekanik kuvvettir. Eş. (5-116)'dan

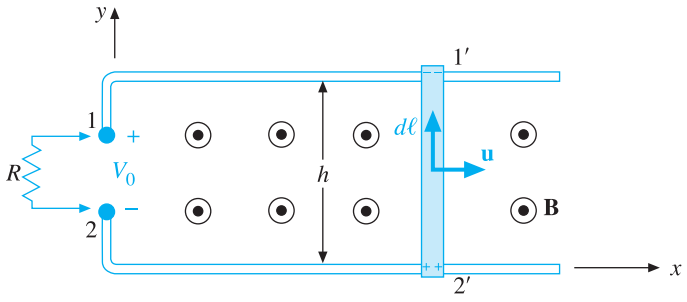
$$\mathbf{F}_m = I \int_{2'}^{1'} d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = -\mathbf{a}_x I B_0 h \tag{6-26}$$

buluruz. Eş. (6-26)'daki eksi işaretinin nedeni, I'nın $d\boldsymbol{\ell}$'ye ters yönde akmasıdır. Böylece

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m = \mathbf{a}_x I B_0 h = \mathbf{a}_x u B_0^2 h^2 / R \tag{6-27}$$

elde edilir.

ŞEKİL 6-4 İletken raylar üzerinde kayan bir metal çubuk (Örnek 6-2).



+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 238

Eş. (6-27)'nin Eş. (6-25)'te yerine konması $P_m = P_e$ olduğunu ispat eder ki bu da enerjinin korunumu ilkesi ile uyumludur.

ÖRNEK 6-3

Faraday disk üreteci

Faraday disk üreteci $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z B_0$ akı yoğunluklu düzgün ve sabit manyetik alanında, ω sabit açısal hızıyla z ekseni etrafında dönen dairesel bir metal diskten oluşur. Şekil 6-5'te gösterildiği gibi eksende ve diskin çeperinde fırça teması sağlanmıştır. Eğer diskin yarıçapı b ise üretecin açık-devre gerilimini belirleyiniz.

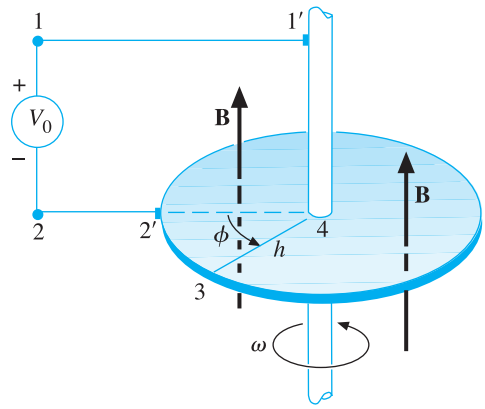
ÇÖZÜM

Şekil 6-5'teki 122′341′1 devresini ele alalım. Disk ile hareket eden 2′34 parçasının sadece düz 34 parçası manyetik akıyı "keser". Eş. (6-22)'den

$$\begin{aligned} V_0 &= \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell \\ &= \int_3^4 [(\mathbf{a}_\phi r\omega) \times \mathbf{a}_z B_0] \cdot (\mathbf{a}_r dr) \\ &= \omega B_0 \int_b^0 r\, dr = -\frac{\omega B_0 b^2}{2} \quad \text{(V)} \end{aligned} \tag{6-28}$$

buluruz ki bu, Faraday disk üretecinin emf'sidir. V_0'ı ölçmek için çok yüksek dirençli bir voltmetre kullanılmalıdır. Böylece devrede akan akım, uygulanan dış manyetik alanı değiştirecek boyutta olmayacaktır.

ŞEKİL 6-5 Faraday disk üreteci (Örnek 6-3).



+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 239

6-2.4 ZAMANLA DEĞİŞEN ALANDA HAREKETLİ BİR DEVRE

Bir q yükü, $\mathbf{E}$ elektrik alanı ve $\mathbf{B}$ manyetik alanının var olduğu bir bölgede $\mathbf{u}$ hızı ile hareket ederse, bir laboratuvar gözlemcisi tarafından ölçülecek q üzerindeki $\mathbf{F}$ elektromanyetik kuvveti

Lorentz kuvvet denklemi

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad \text{(5-5)(6-29)}$$

ile verilir. q ile birlikte hareket eden bir gözlemciye göre görülür bir hareket yoktur ve q üzerindeki kuvvet aşağıdaki $\mathbf{E}'$ elektrik alanından kaynaklanıyor gibi yorumlanabilir:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \qquad (6\text{-}30)$$

veya

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \qquad (6\text{-}31)$$

Böylece, S yüzeyine sahip C sınırlı bir iletken devre ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) alanında $\mathbf{u}$ hızıyla ilerlerse Eş. (6-31)'i Eş. (6-8)'de kullanarak

Faraday yasasının genel biçimi

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad (6\text{-}32)$$

elde ederiz. Eş. (6-32) zamanla değişen manyetik alanda hareket eden bir devre için Faraday yasasının genel biçimidir. Sol taraftaki çizgi integrali, hareketli referans çerçevesinde indüklenen emf'dir. Sağdaki ilk terim $\mathbf{B}$'nin zamanla değişiminden kaynaklanan transformatör emf'sini, ikinci terim de devrenin $\mathbf{B}$ alanında hareket etmesinden kaynaklanan hareketsel emf'yi göstermektedir.

Eğer Eş. (6-32)'nin sol tarafını

$$\mathscr{V}' = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad (6\text{-}33)$$

= C devresinde indüklenen emf'nin hareketli çerçevede ölçümü

olarak tanımlarsak Eş. (6-32)'nin, Eş. (6-12) ile aynı biçime sahip olan

Faraday yasasının bir başka biçimi

$$\mathscr{V}' = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{(V)} \qquad (6\text{-}34)$$

denklemine eşdeğer olduğu ispat edilebilir. Tabii ki eğer devre hareket etmiyorsa $\mathscr{V}'$ gerilimi $\mathscr{V}$ haline gelir. Böylelikle bir kapalı devredeki indüklenen emf'nin, devreden geçen manyetik akının artış hızının eksi işaretlisine eşit olduğunu belirten Faraday yasası durağan devreler-

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 240

de olduğu gibi hareketli devreler için de geçerlidir. Genel durumda indüklenen emf Eş. (6-32) veya Eş. (6-34) kullanılarak bulunabilir.

ÖRNEK 6-4

Örnek 6-3'teki Faraday disk üretecindeki açık-devre gerilimini Eş. (6-34)'ü kullanarak belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Örnek 6-3'teki problemi $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ için Eş. (6-32)'nin aynısı olan Eş. (6-22) yardımıyla çözdük. Eş. (6-34)'ü kullanmak için önce Şekil 6-5'teki $122'341'1$ devresinden geçen manyetik akıyı buluruz. Bu akı kama şekilli $2'342'$ alanından geçen akıdır. Böylece

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_0 \int_0^b \int_0^{\omega t} r \, d\phi \, dr$$

$$= B_0(\omega t)\frac{b^2}{2} \tag{6-35}$$

ve

$$V_0 = \mathscr{V}' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega B_0 b^2}{2} \tag{6-36}$$

buluruz ki bu da Eş. (6-28) ile aynıdır.

■ **ALIŞTIRMA 6.3** Örnek 6-2'de 1 ve 2 terminalleri arasında gözüken açık-devre gerilimini Eş. (6-34)'ü kullanarak belirleyiniz.

CEVAP: $-uB_0h$.

ÖRNEK 6-5

$h \times w$ boyutlarında bir dikdörtgen iletken döngü $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t$ değişen manyetik alanının etkisindedir. Döngünün normali başlangıçta $\mathbf{a}_y$ ile Şekil 6-6'da görüldüğü gibi α açısını yapıyor. (a) Döngü hareketsiz olduğunda ve (b) döngü x-ekseni etarfında α açısal hızı ile döndüğünde, döngüde indüklenecek emf'yi bulunuz.

ÇÖZÜM

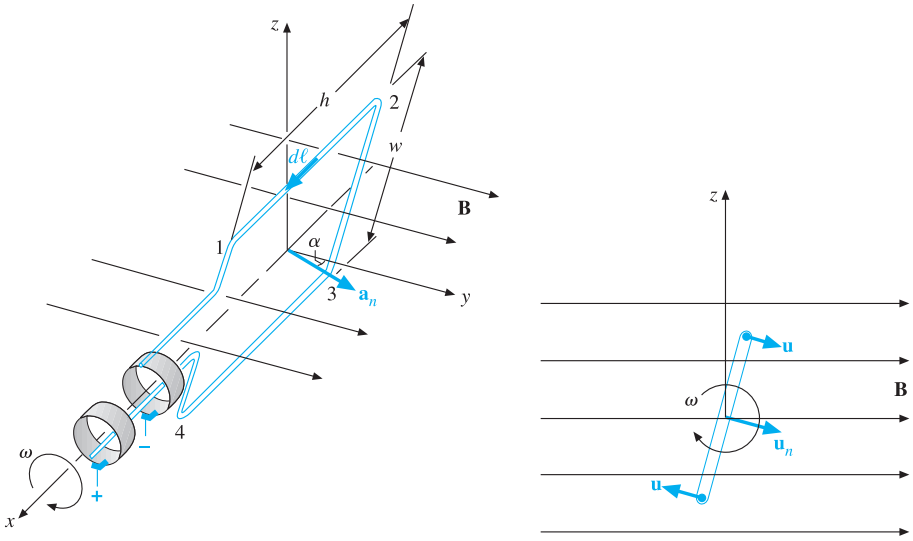
a) Döngü hareketsiz olduğunda Eş. (6-12)'yi kullanırız:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= (\mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t) \cdot (\mathbf{a}_n hw)$$

$$= B_0 hw \sin \omega t \cos \alpha.$$

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 241



(a) Perspektif görünüş. (b) + x yönünden görünüş.

ŞEKİL 6-6 Zamanla değişen manyetik alanda dönen iletken dikdörtgen döngü (Örnek 6-5).

Sonuç olarak

$$\mathscr{V}_a = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S\omega \cos \omega t \cos \alpha \tag{6-37}$$

olur, burada $S = hw$ döngünün alanıdır. Terminallerin bağıl polariteleri gösterildiği gibidir. Eğer devre bir dış yük ile tamamlanırsa $\mathscr{V}_a$ gerilimi Φ'deki değişime direnen bir akım oluşturacaktır.

b) Döngü x-ekseni etrafında döndüğünde Eş. (6-32)'deki her iki terim de katkıda bulunur: İlk terim Eş. (6-37)'deki $\mathscr{V}_a$ transformatör emf'sini oluşturur. İkinci terim ise $\mathscr{V}_a'$ hareketsel emf'sini oluşturur:

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_a' &= \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_2^1 \left[\left(\mathbf{a}_n \frac{w}{2}\,\omega\right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t)\right] \cdot (\mathbf{a}_x\, dx) \\ &\quad + \int_4^3 \left[\left(-\mathbf{a}_n \frac{w}{2}\,\omega\right) \times (\mathbf{a}_y B_0 \sin \omega t)\right] \cdot (\mathbf{a}_x\, dx) \\ &= 2\left(\frac{w}{2}\,\omega B_0 \sin \omega t \sin \alpha\right) h.\end{aligned}$$

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 242

23 ve 41 kenarlarının $\mathcal{V}_a'$ gerilimine katkıda bulunmadığına, 12 ve 34 kenarlarının katkısının ise eşit büyüklükte ve aynı yönde olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $t = 0$'da $\alpha = 0$ ise $\alpha = \omega t$ olur ve

$$\mathcal{V}_a' = B_0 S\omega \sin \omega t \sin \omega t \tag{6-38}$$

yazabiliriz. Dönen döngüde indüklenen veya oluşan toplam emf Eş. (6-37)'deki $\mathcal{V}_a$ ile Eş. (6-38)'deki $\mathcal{V}_a'$ gerilimlerinin toplamıdır:

$$\mathcal{V}_t' = -B_0 S\omega (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = -B_0 S\omega \cos 2\omega t. \tag{6-39}$$

Bu gerilimin açısal frekansı 2ω'dır. Buradan, Şekil 6-6'daki düzenlemenin ikinci harmonik üreteci olduğu görülür.

Toplam $\mathcal{V}_t'$ emf'sini Eş. (6-34)'ü doğrudan uygulayarak belirleyebiliriz. Herhangi bir t anında döngüden geçen manyetik akı

$$\Phi(t) = \mathbf{B}(t) \cdot [\mathbf{a}_n(t) S] = B_0 S \sin \omega t \cos \alpha$$
$$= B_0 S \sin \omega t \cos \omega t = \tfrac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t$$

bulunur. Buradan,

$$\mathcal{V}_t' = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t\right)$$
$$= -B_0 S\omega \cos 2\omega t$$

elde edilir ki bu daha önce bulunan sonucun aynısıdır.

TEKRAR SORULARI

S.6-1 *Elektromanyetostatik alan* nelerden oluşur? Statik koşullar altında bir iletken ortamda **E** ve **B** arasındaki ilişki nedir?

S.6-2 Elektromanyetik indüklenmenin temel postülatını yazınız.

S.6-3 Lenz yasasını veriniz.

S.6-4 Transformatör emf ifadesini yazınız.

S.6-5 Bir ideal transformatörde birincil ve ikincil gerilim ve akımların oranı sarımların oranına nasıl bağlıdır?

S.6-6 *Eddy akımları* nedir?

S.6-7 İndüksiyon ısıtmanın ilkesi nedir?

S.6-8 Yüksek manyetik geçirgenlikli ve düşük iletkenlikli malzemeler niçin transformatör çekirdeği olarak tercih edilir?

S.6-9 Güç transformatörlerinin çekirdekleri niçin katmanlıdır?

S.6-10 Faraday yasasının genel halini yazınız.

S.6-11 Faraday disk üreteci nedir?

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 243

NOTLAR

1. Zamanla değişen manyetik alanın olduğu bir bölgedeki **E** korunumlu değildir ve sadece bir skalar potansiyelin gradyantı cinsinden ifade edilemez.
2. Bir devreden geçen zamanla değişen manyetik akı devrede bir emf indükler.
3. Transformatörler a-c cihazlardır.
4. İdeal transformatörde çekirdeğin geçirgenliği ve sarımların endüktansı sonsuzdur.
5. Bir transformatörde eddy-akımı güç kaybını azaltmak için izole katmanlar manyetik akı yönüne paralel olmalıdır.

6-3 MAXWELL DENKLEMLERİ

Elektromanyetik indüklenmenin temel postülatı, zamanla değişen bir manyetik alanın bir elektrik alanı oluşturduğunu garanti eder. Bu garanti çok sayıda deneyle de sağlanmıştır. Sonuç olarak zamanla değişen durumda Eş. (6-1)'deki $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ denklemi Eş. (6-7) ile değiştirilmelidir. Şimdi aşağıdaki iki dönel denklemine (Eş. (6-7) ve Eş. (6-5)) ve iki ıraksama denklemine (Eş. (6-2) ve Eş. (6-4)) sahibiz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(6-7)(6-40a)}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \text{(6-5)(6-40b)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \qquad \text{(6-2)(6-40c)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad \text{(6-4)(6-40d)}$$

Ayrıca, tüm zamanlarda yükün korunumu ilkesinin sağlanması gerektiğini biliyoruz. Yükün korunumunun matematiksel ifadesi süreklilik denklemidir:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \qquad \text{(4-20)(6-41)}$$

Buradaki önemli soru Eş. (6-40a, b, c ve d)'de verilen dört denklemli kümenin zamanla değişen durumda Eş. (6-41) ile belirtilen geresinme ile tutarlı olup olmadığıdır. Cevabın olumsuz olduğu Eş. (6-40b)'nin ıraksaması alınarak hemen görülebilir:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}. \qquad \text{(6-42)}$$

Eş. (6-42), herhangi bir iyi-davranışlı vektör alanının dönelinin ıraksamasının sıfır olduğunu belirten Eş. (2-109)'dan dolayı elde edilir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 244

Öte yandan, Eş. (6-41) zamanla değişen durumda $\nabla \cdot \mathbf{J}$'nin sıfır olmadığını belirttiğinden Eş. (6-40b) genel durumda doğru değildir.

Eş. (6-40a, b, c ve d), Eş. (6-41) ile tutarlı olacak şekilde nasıl değiştirilmelidir? Öncelikle Eş. (6-42)'nin sağ tarafına $\partial\rho_v/\partial t$ terimi eklenmelidir:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \tag{6-43}$$

Eş. (6-43)'te Eş. (6-40c) kullanılırsa,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

bulunur ki bu da

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \tag{6-44}$$

anlamına gelir. Eş. (6-44), zamanla değişen bir elektrik alanın serbest akım akışı olmadığında dahi (yani $\mathbf{J} = 0$ olduğunda dahi) bir manyetik alan oluşturduğunu belirtir. Eklenen $\partial\mathbf{D}/\partial t$ terimi Eş. (6-44)'ü yükün korunumu ilkesiyle tutarlı kılmak için gereklidir.

D'nin zamanla değişim hızı bir yerdeğiştirme akım yoğunluğu oluşturur.

$\partial\mathbf{D}/\partial t$ teriminin akım yoğunluğu (SI birimi A/m^2) birimine sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. $\partial\mathbf{D}/\partial t$ terimine ***yerdeğiştirme akım yoğunluğu*** denir ve bunun $\nabla \times \mathbf{H}$ denkleminde kullanımı James Clerk Maxwell'in önemli katkılarından biridir. Zamanla değişen durumda süreklilik denklemi ile tutarlı olabilmek için Eş. (6-1) ve (6-5)'teki her iki dönel denklemi de genelleştirilmelidir. Eş. (6-40a, b, c ve d)'nin yerine kullanılacak dört tutarlı denklem kümesi

Maxwell denklemlerinin diferensiyel (operatör) biçimi

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(6-45a)} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(6-45b)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v && \text{(6-45c)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(6-45d)} \end{aligned}}$$

olarak verilir. Bu denklemler ***Maxwell denklemleri*** olarak bilinir. Eş. (6-45)'teki ρ_v'nin *serbest yüklerin* hacim yoğunluğu olduğuna, Eş. (6-45)'teki $\mathbf{J}$'nin ise hem konveksiyon akımından ($\rho_v\mathbf{u}$) hem de iletkenlik akımından ($\sigma\mathbf{E}$) oluşabilen *serbest akım yoğunluğu* olduğuna dikkat ediniz. Bu dört denklem, Eş. (6-41)'deki süreklilik denklemi ve Eş. (5-5)'teki Lorentz kuvvet denklemi ile birlikte elektromanyetik teorinin temelini oluşturur.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 245

Bu denklemler tüm makroskopik elektromanyetik olayları açıklamak ve tahmin etmek için kullanılabilir.

Dört Maxwell denklemi birbirinden bağımsız değildir.

Eş. (6-45a, b, c ve d)'deki dört Maxwell denklemi tutarlı olmakla birlikte, birbirinden bağımsız değildir. Aslında iki ıraksama denklemi (Eş. (6-45c ve d)) iki dönel denkleminden (Eş. (6-45a ve b)), Eş. (6-41) ile verilen süreklilik denklemi kullanılarak elde edilebilir. Aşağıdaki Alıştırma 6.4'e bakınız.

■ **ALIŞTIRMA 6.4** Eş. (6-45a) ve (6-45b)'deki iki dönel denkleminin ıraksamasını alıp, Eş. (6-41)'deki süreklilik denklemi yardımıyla Eş. (6-45c) ve (6-45d)'deki iki ıraksama denklemini elde ediniz.

6-3.1 MAXWELL DENKLEMLERİNİN İNTEGRAL BİÇİMLERİ

Eş. (6-45a, b, c ve d)'de verilen dört Maxwell denklemi uzayın her noktasında geçerli olan diferensiyel denklemlerdir. Fiziksel bir ortamdaki elektromanyetik olayları açıklarken belirli şekilleri ve sınırları olan sonlu nesneleri ele almak zorundayız. Bu nedenle diferensiyel biçimleri integral eşdeğerlerine çevirmek yararlıdır. Eş. (6-45a) ve (6-45b)'deki dönel denklemlerinin her iki tarafının yüzey integralini, sınırı C olan bir S açık yüzeyi üzerinde alır ve Stokes teoremini uygularsak

Maxwell denklemlerinin integral biçimleri

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s} \tag{6-46a}$$

ve

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{s} \tag{6-46b}$$

elde ederiz. Eş. (6-45c) ve (6-45d)'deki ıraksama denklemlerinin her iki tarafının hacim integralini, S kapalı yüzeyi ile sınırlanmış V hacmi üzerinde alırsak

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v\, dv \tag{6-46c}$$

ve

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{6-46d}$$

elde ederiz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 246

TABLO **6-1** MAXWELL DENKLEMLERİ VE ANLAMLARI

Diferensiyel Biçim	İntegral Biçim	Önemi
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Faraday yasası
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$	Amper devre yasası
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Gauss yasası
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	İzole manyetik yük yoktur.

Eş. (6-46a, b, c ve d)'deki dört denklem Maxwell denklemlerinin integral biçimleridir. Maxwell denklemlerinin diferensiyel ve integral biçimleri isimleri ile birlikte Tablo 6-1'de listelenmiştir.

ÖRNEK 6-6

Genliği V_0 ve açısal frekansı ω olan $v_c = V_0 \sin \omega t$ a-c kaynağı, Şekil 6-7'de görüldüğü gibi bir C_1 paralel-plaka kapasitörünün terminalleri arasına bağlanmıştır. (a) Kapasitördeki yerdeğiştirme akımının tellerdeki iletkenlik akımı ile aynı olduğunu gösteriniz. (b) Telden r kadar uzakta manyetik alan şiddetini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Bağlantı telindeki iletkenlik akımı

$$i_C = C_1 \frac{dv_C}{dt} = C_1 V_0 \omega \cos \omega t$$

bulunur. Alanı A, plakalar arası uzaklığı d ve dielektrik ortam geçirgenliği ϵ olan bir paralel-palaka kapasitörün kapasitansı

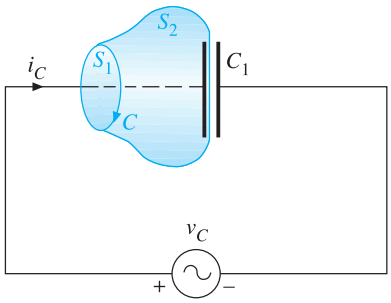
$$C_1 = \epsilon \frac{A}{d}$$

dir. Plakalar arasında v_c gerilimi olduğundan dielektrikteki düzgün elektrik alan şiddeti E (saçaklanma etkileri ihmal edilmektedir) $E = v_c/d$ olur ve buradan

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

elde edilir. O halde yerdeğiştirme akımı

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 247



ŞEKİL 6-7 a-c gerilim kaynağına bağlanmış paralel-plakalı kapasitör (Örnek (6-6).

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \left(\epsilon \frac{A}{d}\right) V_0 \omega \cos \omega t$$
$$= C_1 V_0 \omega \cos \omega t = i_C$$

bulunur ki bu da sağlamak istediğimiz akımdır.

b) İletken telden r kadar uzaktaki manyetik alan şiddeti, Eş. (6-46b)'deki genelleştirilmiş Amper devre yasasını Şekil 6-7'deki C çevritine uygulayarak bulunabilir. Sınırı C olan iki tipik açık yüzey seçilebilir: (1) S_1 düzlemsel disk yüzeyi veya (2) dielektrik ortamdan geçen eğimli S_2 yüzeyi. Tel çevresindeki simetri, C çevriti boyunca H_ϕ'nin bir sabit olduğunu garanti eder. Eş. (6-46b)'nin sol tarafındaki çizgi integrali

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r H_\phi$$

olarak bulunur. S_1 yüzeyi için Eş. (6-46b)'nin sağ tarafında sadece ilk terim sıfırdan farklıdır. Çünkü tel boyunca yük depolanmamaktadır. Bunun sonucunda $\mathbf{D} = 0$ elde edilir.

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_C = C_1 V_0 \omega \cos \omega t.$$

S_2 yüzeyi dielektrik ortamdan geçtiğinden, S_2 yüzeyinden iletkenlik akımı akmaz. Eğer ikinci yüzey integrali orda olmasa Eş. (6-46b)'nin sağ tarafı sıfır olurdu. Bu ise bir çelişkiye neden olurdu. Maxwell tarafından eklenen yerdeğiştirme akımı bu çelişkiyi ortadan kaldırmaktadır. (a) şıkkında gösterdiğimiz gibi $i_d = i_c$'dir. Böylece ister S_1, isterse S_2 yüzeyini kullanalım aynı sonucu elde ederiz. Önceki iki integrali birbirine eşitleyerek istenen manyetik alan şiddetini

$$H_\phi = \frac{C_1 V_0}{2\pi r} \omega \cos \omega t$$

buluruz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 248

6-3.2 ELEKTROMANYETİK SINIR KOŞULLARI

Farklı yapısal parametrelere sahip komşu bölgeler içeren elektromanyetik problemleri çözmek için **E**, **D**, **B** ve **H**'nin arayüzlerde sağlaması gereken sınır koşullarının bilinmesi gerekir. Sınır koşulları, statik elektrik ve manyetik alanların sınır koşullarının bulunduğu gibi, iki ortamın arayüzünde küçük bir bölgeye Maxwell denklemlerinin integral biçimleri Eş. (6-46a, b, c ve d) uygulanarak elde edilir. İntegral denklemlerin süreksiz ortamlar içeren bölgelerde de geçerli olduğu kabul edilir. (Kısım 3-8 ve 5-9'da izlenen yöntemler gözden geçirilmelidir.) Genel olarak, bir dönel denkleminin integral biçiminin, alt ve üst kenarları birbirine komşu iki ayrı bölgede olan, arayüzdeki bir düz kapalı yola uygulanması, teğet bileşenler için sınır koşullarını verir. Diğer taraftan, bir ıraksama denkleminin integral biçiminin, üst ve alt yüzleri komşu iki ayrı bölgede olan, arayüzdeki küçük bir silindire uygulanması, normal bileşenler için sınır koşullarını verir.

E ve **H**'nin teğet bileşenleri için sınır koşulları, sırasıyla, Eş. (6-46a) ve (6-46b)'den elde edilir:

E'nin teğet bileşeni için sınır koşulu

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{V/m}) \tag{6-47a}$$

H'nin teğet bileşeni için sınır koşulu

$$\mathbf{a}_{n2} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\text{A/m}). \tag{6-47b}$$

Zamanla değişen durum için bulunan Eş. (6-47a) ve (6-47b)'nin, Eş. (6-46c) ve (6-46b)'deki zamanla değişen terimlerin varlığına rağmen, sırasıyla, statik elektrik alanlardaki Eş. (3-72) ve statik manyetik alanlardaki Eş. (5-71) ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Benzer şekilde **D** ve **B**'nin normal bileşenleri için sınır koşulları, sırasıyla, Eş. (6-46c) ve (6-46d)'den elde edilir,

D'nin normal bileşeni için sınır koşulu

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (\text{C/m}^2), \tag{6-47c}$$

burada referans normal yönü ortam 2'den dışarı doğrudur. Son olarak

B'nin normal bileşeni için sınır koşulu

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (\text{T}) \tag{6-47d}$$

bulunur. Bunlar, sırasıyla, statik elektrik alanlardaki Eş. (3-75b) ve statik manyetik alanlardaki Eş. (5-68) ile aynıdır. Çünkü başlangıç

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 249

noktası aynı ıraksama denklemleridir.

Aşağıda iki önemli özel durumdaki sınır koşullarını özetleyeceğiz.

A. *İki kayıpsız ortam arasındaki arayüz*

Kayıpsız, lineer bir ortam, bir ϵ elektrik geçirgenliği, bir μ manyetik geçirgenliği ve $\sigma = 0$ ile tanımlanabilir. Çoğunlukla iki kayıpsız ortam arasındaki arayüzde serbest yük ve yüzey akımları yoktur. Eş. (6-47c) ve (6-47b)'de $\rho_s = 0$ ve $\mathbf{J}_s = 0$ alırız ve Tablo 6-2'de listelenen sınır koşullarını elde ederiz. Bu durumda E_t, H_t, D_n ve B_n'nin hepsinin arayüzde sürekli olduğunu görürüz.

B. *Bir dielektrik ve bir mükemmel iletken arasındaki arayüz*

Bir mükemmel iletkende iletkenlik sonsuzdur. Fiziksel dünyada iletkenlikleri 10^7 (S/m) mertebesinde olan gümüş, bakır, altın ve alüminyum gibi birçok "iyi iletken" vardır. (Ek B-4'teki tabloya bakınız.) Alan problemlerinin analitik çözümlerini sadeleştirmek için, iyi iletkenler sınır koşulları açısından mükemmel iletken olarak alınır. Bir mükemmel iletken *içinde* elektrik alan sıfırdır (aksi takdirde sonsuz bir akım yoğunluğu oluştururdu) ve iletkenin sahip olduğu her yük sadece yüzeyde bulunur. (**E**, **D**) ve (**B**, **H**) arasında Maxwell denklemleri yardımıyla bulunan ilişki, zamanla değişen durumda bir mükemmel iletken içinde **B** ve **H**'nin de sıfır olduğunu garanti eder. Kayıpsız bir dielektrik (ortam 1) ve bir mükemmel iletken (ortam 2) arasındaki arayüzü düşünelim. Ortam 2'de $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{D}_2 = 0$ ve $\mathbf{B}_2 = 0$'dır. Eş. (6-47a, b, c ve d)'deki genel sınır koşulları Tablo 6-3'te listelenenlere indirgenir. Bu durumda E_t ve B_n süreklidir ancak H_t ve D_n, sırasıyla, J_s yüzey akım yoğunluğuna ve ρ_s yüzey yük yoğunluğuna eşit miktarda süreksizdir. Eş. (6-47b) ve (6-47c)'yi uygularken yüzey normalinin iletken yüzeyinden dışa doğru (Ortam 2'den dışarı doğru) alındığına dikkat edilmelidir.

TABLO **6-2** İKİ KAYIPSIZ ORTAM ARASINDA SINIR KOŞULLARI

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{6-48a}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \longrightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{6-48b}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \tag{6-48c}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{6-48d}$$

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 250

TABLO **6-3** BİR DİELEKTRİK (ORTAM 1) VE MÜKEMMEL İLETKEN (ORTAM 2) ARASINDAKİ SINIR KOŞULLARI (ZAMANLA DEĞİŞEN DURUM)

Ortam 1 Tarafında	Ortam 2 Tarafında	
$E_{1t} = 0$	$E_{1t} = 0$	(6-49a)
$\mathbf{a}_{n2} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s$	$H_{2t} = 0$	(6-49b)
$D_{1n} = \rho_s$	$D_{2n} = 0$	(6-49c)
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$	(6-49d)

■ **ALIŞTIRMA 6.5** $y = 0$ düzleminin üst yarı-uzaydaki ($y > 0$) havayı iyi bir iletkenden ayırdığını ve arayüzde $\rho_s = C_1 \sin \beta x$ yüzey yük yoğunluğunun ve $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_x C_2 \cos \beta x$ yüzey akım yoğunluğunun bulunduğunu kabul ediniz. (C_1, C_2 ve β sabittir.) Arayüzde havada **E** ve **H**'yi belirleyiniz.

CEVAP: $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y (C_1/\epsilon_0) \sin \beta x$, $\mathbf{H} = \mathbf{a}_z C_2 \cos \beta x$.

TEKRAR SORULARI

S.6-12 Maxwell denklemlerinin diferensiyel biçimini yazınız.

S.6-13 *Yerdeğiştirme akımı*nın önemini açıklayınız.

S.6-14 Maxwell denklemlerinin integral biçimini yazınız ve her bir denklemi uygun deneysel yasa ile tanımlayınız.

S.6-15 E_t ve B_n için sınır koşullarını veriniz.

S.6-16 H_t ve D_n için sınır koşullarını veriniz.

S.6-17 Bir mükemmel iletkenin hemen dışındaki **E** alanı niçin iletken yüzeyine diktir?

S.6-18 Bir mükemmel iletkenin hemen dışındaki **H** alanı niçin iletken yüzeyine teğettir?

S.6-19 Bir mükemmel iletken içinde statik manyetik alan var olabilir mi? Açıklayınız. Zamanla değişen manyetik alan olabilir mi? Açıklayınız.

NOTLAR

1. Zamanla değişen bir manyetik alan bir elektrik alan oluşturur. Zamanla değişen bir elektrik alan, manyetik alana katkıda bulunan bir yerdeğiştirme akımı oluşturur. Zamanla değişen durumlarda elektrik ve manyetik alanlar Maxwell dönel denklemleri ile birbirine bağlaşıktır.
2. Dört Maxwell denkleminin hepsi bağımsız değildir.
3. Herhangi iki ortam arasındaki arayüzde **E**'nin teğet bileşeni ve **B**'nin normal bileşeni süreklidir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 251

6-4 POTANSİYEL FONKSİYONLARI

Kısım 5-3'te manyetik vektör potansiyeli **A** kavramı, **B**'nin solenoid yapısından yararlanarak verilmişti ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(T)}. \tag{6-50}$$

Eğer Eş. (6-50) Faraday yasasının diferensiyel biçimi olan Eş. (6-7)'de yerine konursa

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \tag{6-51}$$

veya

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{6-52}$$

elde edilir. Eş. (6-52)'de parantez içindeki iki vektör niceliğin toplamının döneli sıfır olduğundan, bu toplam bir skaların gradyantı halinde ifade edilebilir. Elektrostatikteki V skalar elektrik potansiyel tanımı olan Eş. (3-26) ile tutarlı olmak için

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

yazar ve buradan da

Zamanla değişen durumda E hem skalar elektrik potansiyeli V'nin hem de manyetik vektör potansiyeli A'nın fonksiyonudur.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{(V/m)} \tag{6-53}$$

elde ederiz. Statik durumda $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$'dır ve Eş. (6-53) $\mathbf{E} = -\nabla V$'ye indirgenir. Böylece **E** sadece V'den ve **B** de **A**'dan Eş. (6-50) ile belirlenebilir. Zamanla değişen alanlar için **E**, V ve **A**'nın her ikisine de bağlıdır: Elektrik alan şiddeti yük birikimlerinden $-\nabla V$ terimi ile ve zamanla değişen manyetik alanlardan $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ terimi ile oluşabilir. **B** de **A**'ya bağlı olduğundan sonuçta **E** ve **B** bağlaşıktır.

Eş. (6-50) ve (6-53)'ü Eş. (6-45b)'de yerine koyarsak ve $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ ve $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ yapısal bağıntılarını kullanırsak,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \tag{6-54}$$

buluruz. Burada homojen bir ortam kabul edilmiştir. Eş. (5-16a)'da

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 252

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ için verilen vektör özdeşliğini hatırlarsak Eş. (6-54)'ü

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \nabla\left(\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

veya

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{6-55}$$

halinde yazabiliriz. Şimdi, bir vektörün tanımlanması hem dönelinin hem de ıraksamasının verilmesini gerektirir. **A**'nın döneli Eş. (6-50) ile **B** olarak verilmekle birlikte **A**'nın ıraksamasını istediğimiz gibi seçmekte özgürüz. Bu nedenle

Potansiyeller için Lorentz koşulu

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \tag{6-56}$$

seçelim. Böylece Eş. (6-55)'in sağ tarafındaki ikinci terim yok olur ve denklem olası en basit biçime indirgenir. Sonuç olarak

A vektör potansiyeli için dalga denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}} \tag{6-57}$$

elde edilir. Eş. (6-57), **A *vektör potansiyeli için homojen olmayan dalga denklemidir.*** Denklem dalga denklemi olarak adlandırılır. Çünkü çözümleri $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ hızıyla ilerleyen dalgalardır. Kısım 6-4.1'de dalga denklemlerinin çözümleri tartışıldığında bu gerçek daha iyi anlaşılacaktır. Eş. (6-56)'da verilen **A** ve V arasındaki bağıntıya ***potansiyeller için Lorentz koşulu (veya Lorentz ölçüsü)*** denir. Statik alanlarda bu koşul Eş. (5-19)'daki $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ koşuluna indirgenir.

Skalar potansiyel V için karşılık gelen dalga denklemi

Skalar potansiyel *V* için dalga denklemi

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}} \tag{6-58}$$

bulunur. Bu denklem V ***skalar potansiyelinin homojen olmayan dalga denklemi*** olarak bilinir. Böylelikle Eş. (6-56)'daki Lorentz koşulu **A** ve V'nin dalga denklemlerini birbirinden ayırmıştır. Eş. (6-57) ve Eş. (6-58) arasındaki benzerliğe ve $\mathbf{A} \sim V$, $\mathbf{J} \sim \rho_v$ ve $\mu \sim 1/\epsilon$ karşılıklarına dikkat ediniz.

■ **ALIŞTIRMA 6.6** Eş. (6-53)'ü, Eş. (6-40c)'de kullanarak V'nin dalga denklemi olan Eş. (6-58)'i elde ediniz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 253

TEKRAR SORULARI

S.6-20 Skalar elektrik potansiyeli V ve manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$ nasıl tanımlanır?

S.6-21 Dalga denklemi nedir?

NOTLAR

Zamanla değişen V ve $\mathbf{A}$ potansiyel fonksiyonları dalga denklemini sağlar.

6-4.1 DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Şimdi sınırlı bir bölgedeki ρ_v yük dağılımından kaynaklanan V skalar potansiyelini bulmak için Eş. (6-58)'deki homojen olmayan dalga denkleminin çözümünü ele alacağız. Bir $\rho_v dv'$ diferensiyel nokta yükü t anında orijine yerleştirilsin. Orijinden R kadar uzakta küresel simetri kabul edebiliriz (yani V potansiyeli θ ve ϕ'ye değil sadece R ve t'ye bağlıdır). Eş. (3-129)'u kullanarak Eş. (6-58)'i

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{6-59}$$

halinde yazabiliriz. Şimdi

$$V(R,t) = \frac{1}{R}U(R,t) \tag{6-60}$$

yeni değişkeni tanımlanırsa Eş. (6-59)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{6-61}$$

olarak sadeleşir. Eş. (6-61) tek boyutlu homojen bir dalga denklemidir. $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ 'un iki kez türevlenebilen herhangi bir fonksiyonunun Eş. (6-61)'in bir çözümü olduğu doğrudan yerine koyma ile gösterilebilir (bkz. Problem P.6-11). Böylece

$$U(R,\, t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) \tag{6-62}$$

yazarız. Daha geç $t + \Delta t$ anındaki ve $R + \Delta R$ uzaklığındaki fonksiyon

$$U(R + \Delta R,\, t + \Delta t) = f[t + \Delta t - (R + \Delta R)\sqrt{\mu\epsilon}]$$

bulunur ve bu da $f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ 'a eşittir. Fonksiyon eğer $\Delta t = \Delta R\sqrt{\mu\epsilon} = \Delta R/u_p$ sağlanırsa şeklini korur.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 254

Yapısal parametreleri ϵ ve μ olan bir ortamda dalga yayılma hızı $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 'dur.

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{6-63}$$

niceliği ***dalga yayılma hızı***dır ve ortamın bir özelliğidir. Havada bu hız $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ değerine eşittir. Eş. (6-60) ve (6-62)'den

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u_p) \tag{6-64}$$

bulunur. $f(f - R/u_p)$ fonksiyonun ne olduğunu kesin belirlemek için, orijindeki $\rho(t)\Delta v'$ statik nokta yükü için Eş. (3-29)'dan

$$\Delta V(R) = \frac{\rho_v(t)\,\Delta v'}{4\pi\epsilon R} \tag{6-65}$$

buluruz. Eş. (6-64) ve (6-65)'in karşılaştırılması ile

$$\Delta f(t - R/u_p) = \frac{\rho_v(t - R/u_p)\,\Delta v'}{4\pi\epsilon} \tag{6-66}$$

belirlenir. O halde V' hacmindeki yük dağılımından kaynaklanan potansiyel

Gecikmiş skalar V potansiyelinin yük dağılımından bulunması.

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \frac{\rho_v(t - R/u_p)}{R}\,dv' \qquad \text{(V)} \tag{6-67}$$

olarak elde edilir. Eş. (6-67) kaynaktan R kadar uzakta t anındaki skalar potansiyelin, yük yoğunluğunun daha erken $(t - R/u_p)$ anındaki değerine bağlı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle Eş. (6-67)'deki $V(R, t)$ ***gecikmiş skalar potansiyel*** olarak adlandırılır.

Manyetik vektör potansiyeli **A**'nın, Eş. (6-57)'deki homojen olmayan dalga denkleminin çözümü tam olarak V'nin çözümü gibi yapılabilir. **A**'nın Eş. (6-57)'deki vektör denklemi, her biri V'nin Eş. (6-58)'deki denklemine benzer üç skalar denkleme ayrıştırabilir. Böylece gecikmiş vektör potansiyeli

Gecikmiş vektör potansiyeli A'nın akım dağılımından bulunması.

$$\mathbf{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(t - R/u_p)}{R}\,dv' \qquad \text{(Wb/m)} \tag{6-68}$$

ile verilir. **A** ve V'den türev alarak bulunan elektrik ve manyetik alanlar da açıkça $(t - R/u_p)$ 'nin fonksiyonu olacaktır ve dolayısıyla zamanda gecikecektir. Elektromanyetik dalganın ilerlemesi ve zamanla değişen yüklerin ve akımların etkisinin uzak noktalarda hissedilmesi için zaman geçmesi gerekir. Devre teorisinde bu zaman gecikmesi ihmal edilir ve anında tepki kabul edilir.

Devre teorisi zaman gecikmesi etkisini ihmal eder.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 255

■ **ALIŞTIRMA 6.7** Dünyadan aya yollanan bir radar sinyali 2.562 (s) gecikme sonra dünyada geri alınmaktadır. O anda dünya ve ay yüzeyleri arasındaki uzaklığı kilometre ve mil cinsinden bulunuz.

CEVAP: 3.843×10^5 (km) veya 238,844 mil.

■ **ALIŞTIRMA 6.8** Bir ışık yılına eşdeğer uzaklık nedir?

CEVAP: 9.46×10^{12} (km) veya 5.88 trilyon mil.

TEKRAR SORULARI

S.6-22 Gecikmiş potansiyelin elektromanyetikteki anlamı nedir?

S.6-23 Gecikme zamanı ve dalga yayılma hızı ortamın yapısal parametrelerine nasıl bağlıdır?

NOTLAR

1. Değişen yük ve akım dağılımlarına belli bir uzaklıktaki tepki *anında değildir*, zamanda *gecikmelidir*.
2. Dalga yayılım hızı ortamın bir özelliğidir ve *frekanstan bağımsızdır*.

6-5 ZAMANDA-HARMONİK ALANLAR

Maxwell denklemleri ve bu bölümde şimdiye kadar bunlardan elde edilen tüm denklemler gelişigüzel zaman bağımlılığı olan elektromanyetik nicelikler için geçerlidir. Alan niceliklerinin gerçek zaman bağımlılıklarının tipi, kaynak fonksiyonları ρ_v ve $\mathbf{J}$'ye bağlıdır. Mühendislikte sinüzoidal zaman fonksiyonları önemli bir yer tutar. Bunların üretilmesi kolaydır; gelişigüzel periyodik zaman fonksiyonları, harmonik sinüzoidal bileşenlerin Fourier serisine açılabilir ve geçici aperiyodik fonksiyonlar da Fourier integrali halinde ifade edilebilir. Böylece gelişigüzel zaman bağımlılığı olan kaynak fonksiyonları için elektromanyetik alanlar, kaynak fonksiyonunun frekans bileşenlerinin oluşturduğu alanlar cinsinden belirlenebilir. Üst üste bindirme ilkesinin (çeşitli frekanslara karşılık sonuçları toplamak) uygulanması bize toplam alanları verecektir. Bu kısımda *zamanda-harmonik* (durgun-durum sinüzoidal) alan bağıntılarını inceleyeceğiz.

Zamanda-harmonik alanlar sinüzoidal alanlardır.

6-5.1 FAZÖRLERİN KULLANIMI—TEKRAR

Zamanda-harmonik alanlar için fazör gösterimi kullanmak uygundur. Bu noktada fazörleri kısaca tekrar edeceğiz. Kavramsal olarak bir skalar fazörü tartışmak daha basittir. Bir sinüzoidal skalar niceliğin, örneğin i akımının anlık (zaman-bağımlı) ifadesi bir kosinüs veya bir

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 256

sinüs fonksiyonu olarak yazılabilir. Eğer *referans* olarak kosinüs fonksiyonunu seçersek (bu seçim çoğunlukla kaynağın fonksiyonel biçimi ile belirlenir) bulunan tüm sonuçlar kosinüs fonksiyonuna dayanacaktır. Bir sinüzoidal niceliğin belirtilmesi üç parametre bilgisi gerektirir: Genlik, frekans ve faz. Örneğin,

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{6-69}$$

için I_0 genlik, ω açısal frekans (rad/s)—f hertz cinsinden frekans olmak üzere ω her zaman $2\pi f$'ye eşittir— ve ϕ kosinüs fonksiyonuna göre faz açısıdır. Eş. (6-69)'daki $i(t)$'yi eğer istersek bir sinüs fonksiyonu olarak da yazabiliriz: $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi')$, $\phi' = \phi + \pi/2$. Dolayısıyla başlangıçta referansımızın kosinüs veya sinüs olduğuna karar verip daha sonra problem boyunca bu karara bağlı kalmak önemlidir.

$i(t)$'nin türevleri veya integralleri içerildiğinde, kosinüs fonksiyonu gibi bir anlık ifade ile doğrudan çalışmak uygundur. Çünkü bu işlemler hem sinüs (birinci-mertebe türev veya integral), hem de kosinüs (ikinci-mertebe türev veya integral) fonksiyonları verir. Ayrıca sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını birleştirmek zor olabilir. Örneğin bir seri RLC devresinde $v(t) = V_0 \cos \omega t$ gerilimi uygulandığında döngü denklemi

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v(t). \tag{6-70}$$

olarak bulunur. Eğer sonuçtaki $i(t)$ akımını Eş. (6-69) biçiminde yazarsak Eş. (6-70)

$$I_0\left[-\omega L \sin(\omega t + \phi) + R\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t + \phi)\right] = V_0 \cos \omega t \tag{6-71}$$

verir. Açıkça, I_0 ve ϕ bilinmeyenlerini Eş. (6-71)'den belirlemek için karmaşık matematiksel işlemler gerekir.

Üstel fonksiyonları[1] kullanmak ve uygulanan gerilimi

$$v(t) = V_0 \cos \omega t = \mathcal{R}e[(V_0 e^{j0})e^{j\omega t}] = \mathcal{R}e(V_s e^{j\omega t}) \tag{6-72}$$

şeklinde ve Eş. (6-69)'daki $i(t)$'yi

$$i(t) = \mathcal{R}e[(Ie^{j\phi})e^{j\omega t}] = \mathcal{R}e(I_s e^{j\omega t}) \tag{6-73}$$

[1] $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, $\cos \omega t = \mathcal{R}e(e^{j\omega t})$, $\sin \omega t = \mathcal{I}m(e^{j\omega t})$.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 257

halinde yazmak daha basittir. Burada $\mathcal{R}e$, "reel kısım" anlamındadır. Eş. (6-72) ve (6-73)'teki

$$V_s = V_0 e^{j0} = V_0 \tag{6-74}$$

$$I_s = I_0 e^{j\phi} \tag{6-75}$$

Fazörler: Kompleks niceliklerin genlik ve faz bilgisi içeren kutupsal biçimleri

ifadeleri genlik ve faz bilgisi içeren ancak *t'den bağımsız* olan (skalar) ***fazörler***dir. Eş. (6-74)'teki sıfır faz açılı V_s fazörü referans fazördür. Eş. (6-73)'ten

$$\frac{di}{dt} = \mathcal{R}e(j\omega I_s e^{j\omega t}) \text{ ve} \tag{6-76}$$

$$\int i\,dt = \mathcal{R}e\left(\frac{I_s}{j\omega} e^{j\omega t}\right) \tag{6-77}$$

bulunur. Eş. (6-72)-(6-77)'nin Eş. (6-70)'te yerine konması

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] I_s = V_s \tag{6-78}$$

verir ki bundan da akım fazörü I_s kolaylıkla çözülebilir. Eş. (6-78)'den zaman bağımlı $e^{j\omega t}$ çarpanının yok olduğuna, çünkü bunun Eş. (6-70)'deki yerine koymadan sonra her terimde var olduğuna ve dolayısıyla iptal edildiğine dikkat edilmelidir. I_s belirlendikten sonra anlık $i(t)$ tepkisi Eş. (6-73)'ten I_s'yi $e^{j\omega t}$ ile çarpıp sonucun reel kısmını alarak bulunabilir.

Fazörlerin anlık sinüzoidal zaman fonksiyonlarına çevrilmesi

Eğer uygulanan gerilim $v(t) = V_0 \sin \omega t$ bir *sinüs fonksiyonu* olarak verilirse, seri RLC-devre problemi fazörler cinsinden tamamen aynı yolla çözülebilir. Bu kez anlık ifadeler, sadece fazörlerle $e^{j\omega t}$ çarpımının *sanal kısmını* alarak elde edilecektir. Kompleks fazörler zamanda-harmonik problemlerin çözümlerindeki niceliklerin genliklerini ve faz kaymalarını gösterir.

ÖRNEK 6-7

Aşağıdaki akım fonksiyonlarının I_s fazör ifadelerini kosinüs referansı kullanarak yazınız.

a) $i(t) = -I_0 \cos(\omega t - 30°)$,

b) $i(t) = -I_0 \sin(\omega t + 0.2\pi)$.

ÇÖZÜM

Kosinüs referansı için

$i(t) = \mathcal{R}e\,(I_s e^{j\omega t})$ yazarız.

a) $i(t) = -I_0 \cos(\omega t - 30°)$

$= \mathcal{R}e\,[(-I_0 e^{-j30°}) e^{j\omega t}]$.

Böylece $I_s = -I_0 e^{-j30°} = -I_0 e^{-j\pi/6} = -I_0 e^{j5\pi/6}$.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 258

b) $i(t) = I_0 \sin(\omega t + 0.2\pi)$

$= \mathcal{R}e\,[(I_0 e^{j\,0.2\pi}) e^{-j\pi/2} \cdot e^{j\omega t}]$

bulunur. Burada $e^{-j\pi/2}$ çarpanı gereklidir. Çünkü sin ωt'nin fazı cosωt'ninkinden 90° veya $\pi/2$ (rad) geridedir. Böylece

$I_s = (I_0 e^{j\,0.2\pi}) e^{-j\pi/2} = I_0 e^{-j\,0.3\pi}$ elde edilir.

■ **ALIŞTIRMA 6.9** $i(t) = \mathcal{I}m(I_s' e^{j\omega t})$ sinüs referansını kullanarak Örnek 6-7'deki akım fonksiyonları için I_s' fazör ifadelerini bulunuz.

CEVAP: (a) $-I_0 e^{j\pi/3}$ veya $I_0 e^{-j2\pi/3}$. (b) $-I_0 e^{j0.2\pi}$.

ÖRNEK 6-8

Aşağıdaki fazörler için kosinüs referansını kullanarak anlık $v(t)$ ifadelerini elde ediniz:

a) $V_s = V_0 e^{j\pi/4}$ ve

b) $V_s = 3 - j4$.

ÇÖZÜM

a) $v(t) = \mathcal{R}e[V_s e^{j\omega t}]$

$= \mathcal{R}e[(V_0 e^{j\,\pi/4}) e^{j\omega t}]$

$= V_0 \cos(\omega t + \pi/4)$.

b) $V_s = 3 - j4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\, e^{j \tan^{-1}(-4/3)}$

$= 5e^{-j\,53.1^\circ}$.

Böylece,

$v(t) = \mathcal{R}e[(5e^{-j\,53.1^\circ}) e^{j\omega t}]$

$= 5\cos(\omega t - 53.1^\circ)$.

■ **ALIŞTIRMA 6.10** $v(t) = 10$ Cos $(\omega t - 45^\circ)$ gerilimi için V_s fazör ifadesini yazınız.

CEVAP: $10\, e^{-j\pi/4}$.

■ **ALIŞTIRMA 6.11** Kosinüs referansını kullanarak $V_s = 4 + j3$ fazörü için anlık $v(t)$ ifadesini yazınız.

CEVAP: 5 cos $(\omega t + 36.9^\circ)$.

■ **ALIŞTIRMA 6.12** Sinüs referansını kullanarak $V_s = 4 + j3$ fazörü için anlık $v(t)$ ifadesini yazınız.

CEVAP: 5 sin $(\omega t + 126.9^\circ)$.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 259

TEKRAR SORULARI

S.6-24 Fazör nedir? Fazörler t'nin fonksiyonu mudur? ω'nın fonksiyonu mudur?

S.6-25 Bir fazör ile bir vektör arasındaki fark nedir?

NOTLAR

1. Fazörler sinüzoidal fonksiyonların genliğini ve fazını gösteren kompleks niceliklerdir (kutupsal biçimde ifade edilirler).
2. Faz açıları radyan veya derece cinsinden ifade edilebilir. Derece olarak ifade edildiğinde ° *işaretini unutmayınız*.
3. Hiçbir zaman j içeren terimlerle anlık zaman fonksiyonlarını karıştırmayınız. $j \cos \omega t$, $e^{j\phi} \sin \omega t$, ve $(1 - j)i(t)$ gibi ifadeler yanlıştır.

6-5.2 ZAMANDA-HARMONİK ELEKTROMANYETİK

Uzay koordinatları ile değişen ve zamanın sinüzoidal fonksiyonu olan alan vektörleri, benzer şekilde, uzay koordinatlarına bağlı olan ancak zamana bağlı olmayan vektör fazörler ile temsil edilebilir. Örneğin $\cos \omega t$ [(1)] referansı ile zamanda-harmonik bir $\mathbf{E}$ alanı

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] \tag{6-79}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{E}(x, y, z)$ yön, genlik ve faz bilgisi içeren bir ***vektör fazör***dür. Eş. (6-76) ve (6-77)'den, eğer $\mathbf{E}(x, y, z; t)$ vektörü $\mathbf{E}(x, y, z)$ vektör fazörü ile temsil edilirse o zaman $\partial\mathbf{E}(x, y, z; t)/\partial t$ ve $\int\mathbf{E}(x, y, z; t)\, dt$, sırasıyla, $j\omega\mathbf{E}(x, y, z)$ ve $\mathbf{E}(x, y, z)/j\omega$ vektör fazörleri ile temsil edilmelidir. t'ye göre yüksek-mertebeden türev ve integraller, $\mathbf{E}(x, y, z)$ fazörünün $j\omega$'nın daha yüksek kuvvetleri ile, sırasıyla, çarpımı ve bölümü ile ifade edilebilirler.

Şimdi basit bir ortamda (lineer, yönbağımsız ve homojen), Eş. (6-45a, b, c ve d)'deki Maxwell denklemlerinin zamanda-harmonik biçimlerini, ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) vektör alan fazörleri ve (ρ_v, $\mathbf{J}$) kaynak fazörleri cinsinden aşağıdaki gibi yazarız:

Fazörler cinsinden zamanda-harmonik Maxwell denklemleri

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \tag{6-80a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{6-80b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v/\epsilon \tag{6-80c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{6-80d}$$

Burada sadelik için, uzay koordinat değişkenleri ve bir fazör niceliği gösteren s alt indisi yazılmamıştır. Fazörler için bunlara karşılık ge-

(1) Eğer zaman referansı açıkça belirtilmemişse genelde cos ωt olarak alınır.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 260

len zaman-bağımlı niceliklerle aynı gösterimin kullanılması çok az karışıklığa neden olacaktır. Çünkü bu kitabın kalan kısmında çoğunlukla zamanda-harmonik alanlarla (ve dolayısıyla fazörlerle) uğraşacağız. Anlık bir ifadeyi bir fazörden ayırt etmek gerektiğinde, anlık niceliğin zaman bağımlılığı, argümanında açıkça t'yi dahil ederek gösterilecektir.

TEKRAR SORUSU

S.6-26 Elektromanyetikte fazör kullanımının yararlarını tartışınız.

NOTLAR

1. Fazör nicelikler t'nin fonksiyonu değildir.
2. Anlık zaman fonksiyonları kompleks sayılar içermez.
3. j içeren herhangi bir elektromanyetik ifade bir fazör bağıntısı olmak zorundadır.

Fazörler cinsinden skalar V potansiyelinin Eş. (6-58)'deki zamanda-harmonik dalga denklemini

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon(j\omega)^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

halinde veya

Skalar V potansiyeli için Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{6-81}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p} \tag{6-82a}$$

veya

Dalga sayısının tanımı

$$k = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6-82b}$$

dalga sayısı olarak adlandırılır. Bu sayı, 2π aralıktaki dalga boyu sayısının bir ölçüsüdür. Benzer şekilde $\mathbf{A}$ vektör potansiyeli için Eş. (6-57)'nin fazör biçimi

A vektör potansiyeli için Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{6-83}$$

olarak yazılabilir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 261

Eş. (6-81) ve Eş. (6-83) ***homojen olmayan Helmholtz denklemleri*** olarak bilinir.

■ **ALIŞTIRMA 6.13** Eş. (6-56)'daki potansiyeller için Lorentz koşulunun fazör biçimini yazınız.

TEKRAR SORUSU

S.6-27 *Dalga sayısını* tanımlayınız ve SI birimini veriniz.

NOTLAR

1. Helmholtz denklemleri fazörler cinsinden zamanda-harmonik dalga denklemleridir.
2. Dalga sayısı dalganın frekansına olduğu gibi ortam özelliklerine de bağlıdır, ancak her zaman 2π'nin dalga boyuna bölümüne eşittir.

V için Eş. (6-81)'de verilen homojen olmayan Helmholtz denkleminin çözümü Eş. (6-67)'den elde edilebilir. $V(R, t)$ potansiyeli ρ_v'de bir R/u_p zaman farkı içerir. Bu fark $\omega(R/u_p)$ veya kR kadar faz farkına eşdeğerdir. Fazör gösteriminde bu fark bir e^{-jkR} çarpanını gerektirir. Böylece Eş. (6-67)'nin fazör biçimi

Gecikmiş skalar potansiyelin fazör biçimi

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\rho_v e^{-jkR}}{R}\,dv' \qquad \text{(V)} \tag{6-84}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde **A**'nın Eş. (6-83)'teki çözümünün fazör hali

Gecikmiş vektör potansiyelin fazör biçimi

$$\mathbf{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}e^{-jkR}}{R}\,dv' \qquad \text{(Wb/m)} \tag{6-85}$$

ile verilir. Bunlar zamanda-harmonik kaynakların oluşturduğu gecikmiş skalar ve vektör potansiyel ifadeleridir. Üstel e^{-jkR} çarpanının Taylor serisi açılımı

$$e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2R^2}{2} + \cdots \tag{6-86}$$

dır. Buradan eğer

$$kR = 2\pi\frac{R}{\lambda} \ll 1 \tag{6-87}$$

ise veya R uzaklığı λ dalga boyuna kıyasla çok küçükse, e^{-jkR} çarpanı 1 ile yaklaştırılabilir. Sonuç olarak Eş. (6-84) ve (6-85), sırasıyla, Eş.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 262

(3-39) ve (5-22)'deki statik ifadelere indirgenir.

Anlık elektrik ve manyetik alanların belirlenmesi için yöntem

Zamanda-harmonik yük ve akım dağılımlarından kaynaklanan elektrik ve manyetik alanları belirlemenin biçimsel yöntemi aşağıdaki gibidir:

1. Eş. (6-84) ve (6-85)'ten $V(R)$ ve $\mathbf{A}(R)$ fazörleri bulunur.
2. $\mathbf{E}(R) = -\nabla V - j\omega\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}(R) = \nabla \times \mathbf{A}$ fazörleri bulunur.
3. Kosinüs referansı için anlık alanlar $\mathbf{E}(R, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}(R)e^{j\omega t}]$ ve $\mathbf{B}(R, t) = \mathcal{R}e[\mathbf{B}(R)e^{j\omega t}]$ olarak elde edilir.

Bir problemin zorluk derecesi 1. adımdaki integrallerin ne kadar zor olduğuna bağlıdır. 10. Bölümde bu yöntemi kullanarak antenlerin yayılma özelliklerini belirleyeceğiz.

ÖRNEK 6-9

İletken olmayan, elektrik geçirgenliği $\epsilon = 9\epsilon_0$ ve manyetik geçirgenliği $\mu = \mu_0$ olan bir ortamdaki elektromanyetik dalganın elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_y 5 \cos(10^9 t - \beta z) \quad (\text{V/m}) \tag{6-88}$$

verilmektedir. $\mathbf{H}$ manyetik alan şiddetini ve β'nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eş. (6-88)'de verilen $\mathbf{E}(z, t)$, açısal frekansı $\omega = 10^9$ (rad/s) olan bir harmonik zaman fonksiyonudur. Kosinüs referanslı fazörleri kullanarak

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_y 5\ e^{-j\beta z} \tag{6-89}$$

yazabiliriz. Manyetik alan şiddeti Eş. (6-80a)'dan aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\mathbf{H}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \mathbf{E}$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 5e^{-j\beta z} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(-\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial z} E_y\right)$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0}(\mathbf{a}_x j\beta 5e^{-j\beta z}) = -\mathbf{a}_x \frac{\beta}{\omega\mu_0} 5e^{-j\beta z}. \tag{6-90}$$

β'yı belirlemek için Eş. (6-80b)'yi kullanacağız. İletken olmayan bir ortamda $\sigma = 0$ ve $\mathbf{J} = 0$'dır. Böylece

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial z} H_x\right)$$

$$= \mathbf{a}_y \frac{\beta^2}{\omega^2\mu_0\epsilon} 5e^{-j\beta z} \tag{6-91}$$

bulunur.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 263

Eş. (6-89) ve (6-91)'i eşitleyerek

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = 3\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{3\omega}{c}$$

$$= \frac{3\times 10^9}{3\times 10^8} = 10 \qquad \text{(rad/m)}$$

buluruz. Eş. (6-90)'dan ise

$$\mathbf{H}(z) = -\mathbf{a}_x \frac{5(10)}{(10^9)(4\pi 10^{-7})} e^{-j10z}$$

$$= -\mathbf{a}_x 0.0398 e^{-j10z} \tag{6-92}$$

elde ederiz. Eş. (6-92)'deki $\mathbf{H}(z)$ fazörü aşağıdaki anlık zaman fonksiyonuna karşılık gelir:

$$\mathbf{H}(z, t) = -\mathbf{a}_x 0.0398 \cos(10^9 t - 10z) \quad \text{(A/m)}. \tag{6-93}$$

TEKRAR SORULARI

S.6-28 Skalar elektrik potansiyeli $V(R)$'nin fazör ifadesini ρ_v yük dağılımı cinsinden yazınız.

S.6-29 Manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}(R)$'nin fazör ifadesini $\mathbf{J}$ akım dağılımı cinsinden yazınız.

NOTLAR

Verilen bir ortamdaki bir elektromanyetik dalganın elektrik ve manyetik alan şiddetleri kesinlikle birbirine bağlıdır. Bunlar Maxwell denklemlerini sağlamalıdır ve genlikleri ve fazları bağımsızca belirlenemez.

6-5.3 ELEKTROMANYETİK SPEKTRUM

ϵ ve μ ile tanımlanan, *iletken olmayan* ($\sigma = 0$) ve *kaynaksız* bir *ortamda* Eş. (6-45a, b, c ve d)'deki Maxwell denklemleri

İletken olmayan kaynaksız ortamda Maxwell denklemleri

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{6-94a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{6-94b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{6-94c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{6-94d}$$

haline indirgenir.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 264

Eş. (6-94a, b, c ve d) **E** ve **H** değişkenlerinin birinci-mertebeden diferensiyel denklemleridir. Bunlar sadece **E** veya **H** için ikinci-mertebeden bir denklem verecek şekilde birleştirilebilir. Bunu yapmak için Eş. (6-94a)'nın dönelini alalım ve Eş. (6-94b)'yi kullanalım:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Şimdi Eş. (6-94c)'den dolayı $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$'dir. Böylece

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6-95}$$

veya $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ olduğundan

E için homojen dalga denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0} \tag{6-96}$$

elde ederiz. Tamamen benzer şekilde **H** için de bir denklem elde edebiliriz:

H için homojen dalga denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.} \tag{6-97}$$

Eş. (6-96) ve (6-97) ***homojen vektör dalga denklemleridir***.

Kartezyen koordinatlarda Eş. (6-96) ve (6-97)'nin her birinin üç tek boyutlu, homojen, skalar dalga denklemine ayrıştırılabileceği kolaylıkla görülebilir. **E** ve **H**'nin her bileşeni, çözümü dalgaları temsil eden ve tamamen Eş. (6-61)'e benzeyen bir denklem sağlar. Çeşitli ortamlardaki dalga davranışını bir sonraki bölümde geniş olarak tartışacağız.

Zamanda-harmonik alanlar için fazörleri kullanmak uygundur. Böylelikle Eş. (6-96)

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \frac{\omega^2}{u_p^2} \mathbf{E}_s = 0$$

veya Eş. (6-82a)'nın yardımıyla

$\mathbf{E}_s$ fazörü için homojen Helmholtz denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s + k^2 \mathbf{E}_s = 0} \tag{6-98}^{(1)}$$

haline gelir. Benzer şekilde Eş. (6-97) de

$\mathbf{H}_s$ fazörü için homojen Helmholtz denklemi

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H}_s + k^2 \mathbf{H}_s = 0} \tag{6-99}^{(1)}$$

verir.

(1) $\mathbf{E}_s$ ve $\mathbf{H}_s$'nin fazör olduğunu ve Eş. (6-96) ve (6-97)'deki zaman bağımlı **E** ve **H** ile aynı olmadığını vurgulamak için *s* alt indisi kullanılmıştır.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 265

Eş. (6-98) ve (6-99)'un çözümleri yayılan dalgaları temsil eder. Bu konu bir sonraki bölümde çalışılacaktır.

TEKRAR SORUSU

S.6-30 Kaynaksız bölgelerde, sıfır olmayan elektrik ve manyetik alanların nasıl var olabileceğini açıklayınız.

NOTLAR

1. Kaynaksız ve iletken olmayan ortamlarda **E** ve **H** Eş. (6-96) ve Eş. (6-97)'de verilen aynı homojen dalga denklemini sağlar.
2. Kaynaksız ortamda zamanda-harmonik dalgalar için $\mathbf{E}_s$ ve $\mathbf{H}_s$ fazörleri Eş. (6-98) ve Eş. (6-99)'daki aynı homojen Helmholtz denklemini sağlar.
3. Maxwell denklemleri ve dolayısıyla dalga ve Helmholtz denklemleri dalgaların frekansı üzerine bir sınır koymaz.

Elektromanyetik spektrum ve uygulamaları

Deneysel olarak araştırılmış olan elektromanyetik spektrum çok düşük güç frekanslarından radyo, televizyon, mikrodalga, kızıl ötesi, görünür ışık, mor ötesi, X-ışınları ve 10^{24} (Hz)'i aşan gama (γ) ışınlarına kadar uzanır. Şekil 6-8 uygulamaya ve doğal varoluşlarına göre logaritmik ölçekte frekans ve dalga boyu aralıklarına bölünmüş olan elektromanyetik spektrumu göstermektedir.

Görünür ışık spektrumu

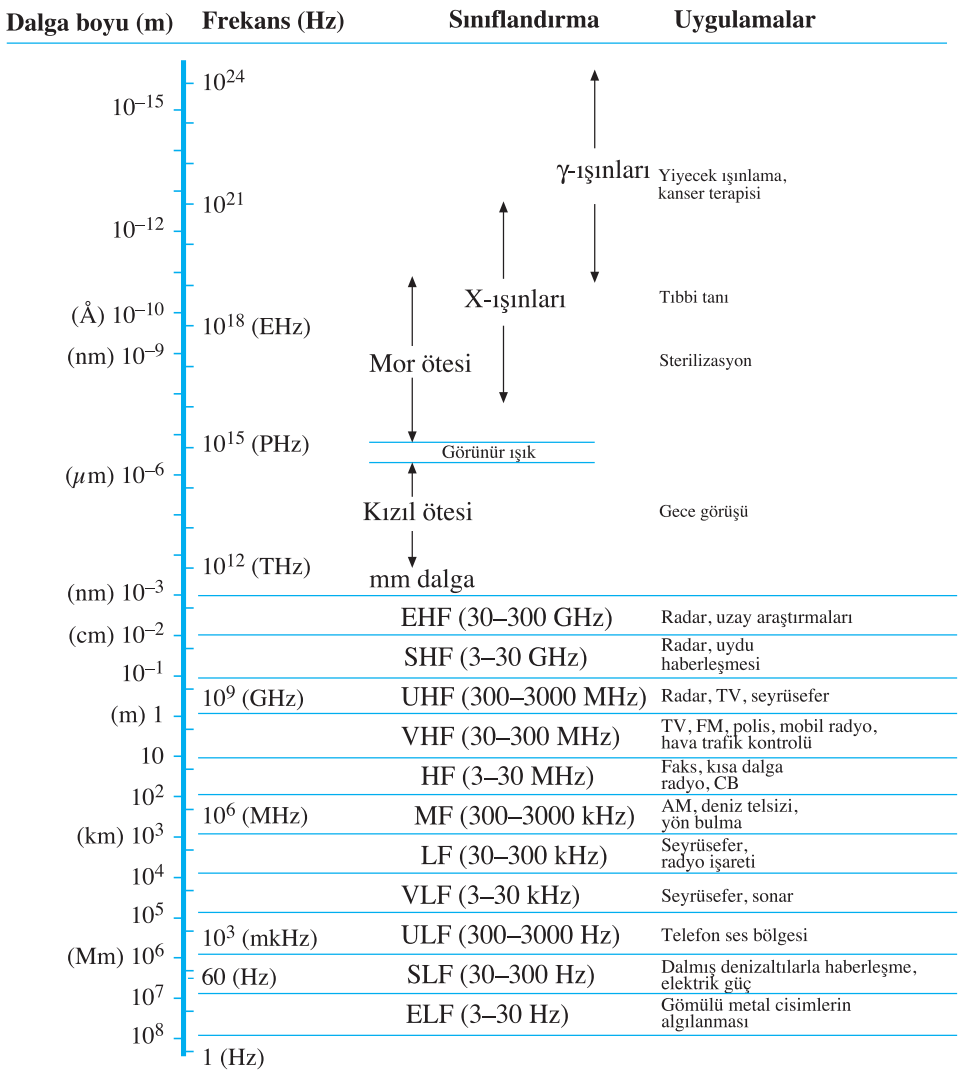
Telsiz haberleşme

"Mikrodalga" terimi biraz belirsizdir ve kesin değildir. 1 (GHz) üzerindeki ve kızıl ötesi bandının alt limitine kadar olan, UHF, SHF, EHF ve mm-dalga bölgelerini içeren frekanslardaki elektromanyetik dalgalar anlamına gelebilir. Görünür ışığın dalga boyu aralığı 720 (nm)'deki koyu kırmızıdan 380 (nm)'deki mora veya eşdeğer olarak 0.72 (μm)'den 0.38 (μm)'ye uzanır. Bu aralık 4.2×10^{14} (Hz)'den 7.9×10^{14} (Hz)'e frekans aralığına karşılık gelir. Şekilde radar, uydu iletişimi, seyrüsefer araçları, televizyon (TV), FM ve AM radyo, CB radyo, sonar ve diğer bantlar da gösterilmiştir. VLF aralığının altındaki frekanslar telsiz haberleşmede nadiren kullanılır. Bunun nedeni bu düşük frekanslarda elektromanyetik dalgaların etkin yayılımı için çok büyük antenlerin gerekmesi ve veri hızının çok düşük olmasıdır. Bu frekansları iletken deniz suyunda dalmış durumdaki denizaltılar ile stratejik küresel haberleşmede kullanmak için öneriler yapılmıştır. Radar çalışmalarında düşük mikrodalga frekans bantlarına alfabenin harflerinin atanması uygun bulunmuştur. Bunlar Tablo 6-4'te listelenmiştir.

Mikrodalga radar bantları

Sonraki bölümde düzlem elektromanyetik dalgaların özelliklerini tartışacağız ve bunlar süreksiz sınırlar boyunca yayılırken davranışlarını inceleyeceğiz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 266



ŞEKİL 6-8 Elektromanyetik dalgaların spektrumu.

TEKRAR SORULARI

S.6-31 Görünür ışığın dalga boyu aralığı nedir?

S.6-32 VLF aralığının altındaki frekanslar telsiz iletimde niçin nadiren kullanılır?

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 267

TABLO **6-4** MİKRODALGA FREKANSLAR İÇİN RADAR BANT İSİMLERİ

Bant	Frekans Aralığı (GHz)	Dalga boyu aralığı (cm)
U	40–60	0.75–0.50
Ka	26.5–40	1.13–0.75
K	18–26.5	1.67–1.13
Ku	12.4–18	2.42–1.67
X	8–12.4	3.75–2.42
C	4–8	7.5–3.75
S	2–4	15–7.5
L	1–2	30–15

NOTLAR

1. Verilen bir ortamda *tüm frekanslardaki* elektromanyetik dalgalar aynı $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ hızıyla yayılır.
2. Mikrodalga fırınların çalışma frekansı 2.45 (GHz) civarındadır.

ÖZET

Zamanla değişen durumda elektrik ve manyetik alanlar bağlaşıktır ve önceki bölümlerde verilen postülatlar yeterli değildir. Bu bölümde,

- elektromanyetik indüklenme için bir temel postülat ekledik.
- Bir devrede indüklenen emf'yi devreden geçen akının zamanla değişim hızına nicel olarak bağlayan Faraday yasasını verdik.
- İndüklenen emf'nin transformatör ve hareketsel (akı-kesen) emf olmak üzere iki parçaya ayrıştırılabileceğini açıkladık.
- İdeal transformatörlerin özelliklerini tartıştık.
- Süreklilik denklemi ile tutarlı olan dört Maxwell denklemini (iki ıraksama ve iki dönel denklemi) elde ettik.
- Farklı yapısal parametrelere sahip komşu bölgelerin arayüzlerinde alan vektörleri için genel sınır koşullarını inceledik.
- Elektrik ve manyetik alan şiddetini skalar elektrik potansiyeli V ve manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$ cinsinden ifade ettik.
- V ve $\mathbf{A}$ için homojen olmayan dalga denklemlerini elde ettik.
- Gecikmiş potansiyel kavramını tanıttık.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 268

- Zamanda-harmonik alanlar için, dalga denklemlerini Helmholtz denklemine çevirdik ve
- kaynaksız boş uzayda elektromanyetik spektrumu tartıştık.

PROBLEMLER

P.6-1 Durağan bir döngüde indüklenen transformatör emf'sini zamanla değişen **A** vektör potansiyeli cinsinden ifade ediniz.

P.6-2 Şekil 6-9'daki devre

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x 3 \cos\left(5\pi 10^7 t - \tfrac{1}{3}\pi y\right) \qquad (\mu\mathrm{T})$$

manyetik alanının etkisindedir. R = 15 (Ω) kabul ederek i akımını bulunuz.

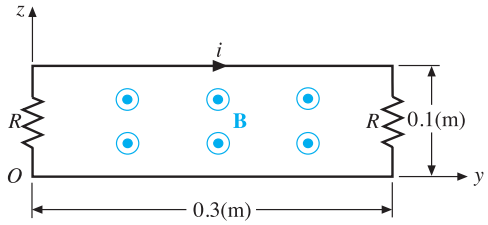
P.6-3 Genişliği w ve yüksekliği h olan durağan, iletken bir dikdörtgen döngü Şekil 6-10'daki gibi i_1 akımını taşıyan çok uzun bir telin yakınına yerleştirilmiştir. $i_1 = I_1 \sin \omega t$ ve dikdörtgen döngünün öz endüktansını L kabul ediniz. Döngüde indüklenen i_2 akımını bulunuz.

İPUCU: Fazörleri kullanınız.

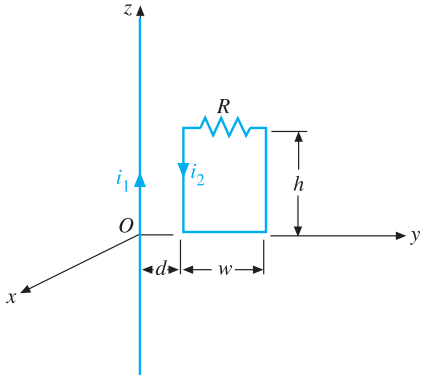
P.6-4 Şekil 6-10'da $i_1 = I_0$ sabit akımının olduğunu ancak dikdörtgen döngünün $\mathbf{u} = \mathbf{a}_y u_0$ sabit hızıyla uzaklaştığını kabul ediniz. Döngü gösterilen konumda iken i_2'yi belirleyiniz.

P.6-5 Boyutları 10 (cm)'ye 10 (cm) ve direnci R = 0.5 (Ω) olan bir kare iletken döngü, bir ayağının etrafında $\omega = 100\pi$ (rad/s) açısal frekansı ile $\mathbf{B} = \mathbf{a}_y 0.04$(T) sabit manyetik alanında Şekil 6-11'de göste-

ŞEKİL 6-9 Zamanla değişen manyetik alanda bir devre (Problem P.6-2).



ŞEKİL 6-10 Akım taşıyan uzun bir telin yakınında bir dikdörtgen döngü (Problemler P.6-3 ve P.6-4).

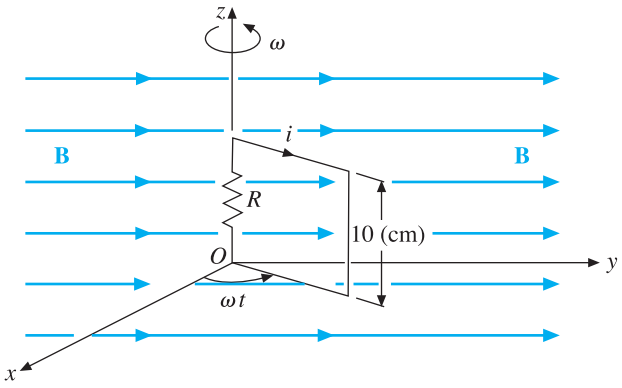


+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 269

rildiği gibi dönmektedir. Döngünün başlangıçta xz-düzleminde olduğunu kabul edip i akımını aşağıdaki iki durumda bulunuz:

a) Döngünün öz endüktansını ihmal ederek ve

b) döngünün öz endüktansını 3.5 (mH) alarak.

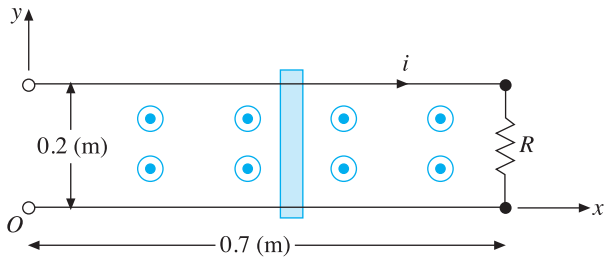


ŞEKİL 6-11 Sabit manyetik alanda dönen bir kare döngü (Problem P.6-5).

P.6-6 Bir iletken kayar çubuk iki paralel iletken ray üzerinde, sinüzoidal değişimli

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z 5 \cos \omega t \quad \text{(mT)}$$

manyetik alanında Şekil 6-12'de gösterildiği gibi salınmaktadır. Kayar çubuğun konumu $x = 0.35(1 - \cos \omega t)$(m) ile verilmektedir ve raylar $R = 0.2$ (Ω) dirençle sonlanmıştır. i akımını bulunuz.



ŞEKİL 6-12 Paralel raylar üzerinde kayan, zamanla değişen manyetik alan etkisindeki iletken çubuk (Problem P.6-6).

P.6-7 Aşağıdaki durumlar için, zamanda-harmonik bir elektrik alan şiddetinin eşit büyüklükte yerdeğiştirme ve iletkenlik akım yoğunluğu oluşturduğu frekansı belirleyiniz.

a) $\epsilon_r = 72$ ve $\sigma = 4$ (S/m) olan deniz suyu.

b) $\epsilon_r = 2.5$ ve $\sigma = 10^{-3}$ (S/m) olan nemli toprak.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 270

P.6-8 İyi bir iletkende akımların elektromanyetik etkilerini hesaplarken genellikle mikrodalga frekanslarında dahi yerdeğiştirme akımları ihmal edilir.

a) Bakır için $\epsilon_r = 1$ ve $\sigma = 5.70 \times 10^7$ (S/m) kabul ederek 100 (GHz)'de yerdeğiştirme akım yoğunluğu ile iletkenlik akım yoğunluğunun büyüklüğünü karşılaştırınız.

b) Kaynaksız iyi iletkende manyetik alan şiddeti **H** için geçerli olan diferensiyel denklemi yazınız.

P.6-9 xy-düzlemi ile çakışan $\mathbf{J} = \mathbf{a}_x 5$ (A/m) sonsuz akım tabakası havayı (ortam1, $z > 0$) $\mu_{r2} = 2$ olan bir ortamdan (ortam 2, $z < 0$) ayırmaktadır. $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_x 30 + \mathbf{a}_y 40 + \mathbf{a}_z 20$ (A/m) veriliyor. Aşağıda istenenleri bulunuz.

a) $\mathbf{H}_2$

b) $\mathbf{B}_2$

c) $\mathbf{B}_1$'in z-ekseni ile yaptığı α_1 açısı.

d) $\mathbf{B}_2$'nin z-ekseni ile yaptığı α_2 açısı.

P.6-10 Boş uzay ile sonsuz (yaklaşık) manyetik geçirgenlikli bir manyetik ortam arasındaki arayüz için sınır koşullarını yazınız.

P.6-11 Doğrudan yerine koyma ile, $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ 'un herhangi iki kez türevlenebilir bir fonksiyonunun Eş. (6-61)'deki homojen dalga denkleminin bir çözümü olduğunu ispat ediniz.

P.6-12 Dört Maxwell denkleminin (Eş. (6-80a, b, c ve d)) bileşen skalar denklemlerini aşağıdaki durumlar için yazınız.

a) Eğer alan fazörleri sadece z'nin fonksiyonu ise Kartezyen koordinatlarda,

b) eğer alan fazörleri sadece R'nin fonksiyonu ise küresel koordinatlarda.

P.6-13 Havada $E(z, t) = 50 \cos(2\pi 10^9 t - kz)$ (V/m) kabul ederek aşağıdaki grafikleri eksenleri adlandırarak çiziniz:

a) $z = 100.125\,\lambda$'da t'ye karşılık gelen $E(t)$, burada λ dalga boyudur.

b) $z = -100.125\,\lambda$'da t'ye karşılık gelen $E(t)$ ve

c) $t = T/4$'te z'ye karşılık gelen $E(t)$, burada T dalganın periyodudur.

P.6-14 Bir elektromanyetik dalganın

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_0 \cos\left[10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) + \psi\right] \qquad \text{(V/m)}$$

elektrik alanı

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{a}_x 0.03 \sin 10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) \qquad \text{(V/m)}$$

ve

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{a}_x 0.04 \cos\left[10^8\pi\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{\pi}{3}\right] \qquad \text{(V/m)}$$

alanlarının toplamıdır. E_0 ve ψ'ı bulunuz.

+06_+06.qxp 5.06.2024 14:11 Page 271

P.6-15 Bir elektromanyetik dalganın

$$\mathbf{H}(R\ ,t) = \mathbf{a}_\phi H_0 \cos(\omega t - kR) \quad \text{(A/m)}$$

manyetik alan şiddeti

$$\mathbf{H}_1(R\ ,t) = \mathbf{a}_\phi 10^{-4} \sin(\omega t - kR) \quad \text{(A/m)}$$

ve

$$\mathbf{H}_2(R,t) = \mathbf{a}_\phi 2 \times 10^{-4} \cos(\omega t - kR + \alpha) \quad \text{(A/m)}$$

alanlarının toplamıdır. H_0 ve α'yı bulunuz.

P.6-16 Basit ortamlarda zamanda-harmonik yük ve akım dağılımları ile Eş. (6-80a, b, c ve d)'deki fazör Maxwell denklemlerinden başlayarak

a) **E** için, homojen olmayan Helmholtz denklemini ve

b) **H** için, homojen olmayan Helmholtz denklemini elde ediniz.

P.6-17 Zamanda-harmonik bir akım taşıyan kısa bir tel elektromanyetik dalgaların bir kaynağıdır. z-ekseni boyunca yerleştirilmiş çok kısa bir $d\ell$ telinde $i(t) = I_0 \cos \omega t$ düzgün akımının aktığını kabul ederek,

a) küresel koordinatlarda R kadar uzakta gecikmiş manyetik vektör potansiyeli **A**'nın fazörünü belirleyiniz ve

b) **A**'dan manyetik alan şiddeti **H**'yi bulunuz.

P.6-18 Hava dielektrikli, iç iletken yarıçapı a ve dış iletkeninin iç yarıçapı b olan bir eş eksenli kablo içinde 60 (MHz) frekanslı bir elektromanyetik dalga vardır. Mükemmel iletken durumu ve elektrik alan şiddetinin fazör biçiminin

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{E_0}{r} e^{-jkz} \text{(V/m)}, \qquad a < r < b$$

olduğunu kabul ederek

a) k'yi bulunuz.

b) **H**'yi $\nabla \times \mathbf{E}$ denkleminden bulunuz.

c) İç ve dış iletkenler üzerindeki yüzey akım yoğunluğunu bulunuz.

P.6-19 Boş uzayda bir küresel dalganın elektrik alan şiddetinin

$$\mathbf{E}(R, \theta; t) = \mathbf{a}_\theta \frac{10^{-3}}{R} \sin\theta \cos(2\pi 10^9 t - kR) \qquad \text{(V/m)}$$

olduğu biliniyor. Manyetik alan şiddeti $\mathbf{H}(R, \theta; t)$'yi ve k'nin değerini bulunuz.

P.6-20 Havada

$$\mathbf{E}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi 10^9 t - \beta z) \qquad \text{(V/m)}$$

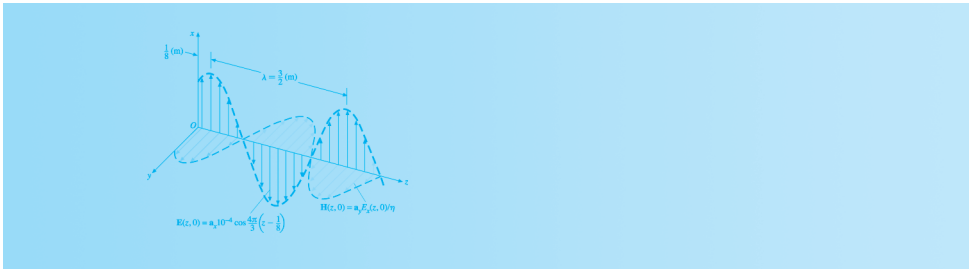
veriliyor. $\mathbf{H}(x, z; t)$'yi ve β'yı bulunuz.

P.6-21 Havada

$$\mathbf{H}(x, z; t) = \mathbf{a}_y 2 \cos(15\pi x) \sin(6\pi 10^9 t - \beta z) \qquad \text{(A/m)}$$

veriliyor. veriliyor. $\mathbf{E}(x, z; t)$'yi ve β'yı bulunuz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:19 Page 272



7. BÖLÜM

7-1 GENEL BAKIŞ Kısım 6-5'te kaynaksız, iletken olmayan bir basit ortamda Maxwell denklemlerinin, **E** ve **H** için homojen vektör dalga denklemleri verecek şekilde birleştirilebileceğini gösterdik. Eş. (6-96) ve (6-97)'de verilen bu iki denklem tamamıyla aynı biçime sahiptir. Örneğin **E** için kaynaksız dalga denklemi

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{u_p^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(6-96)(7-1)}$$

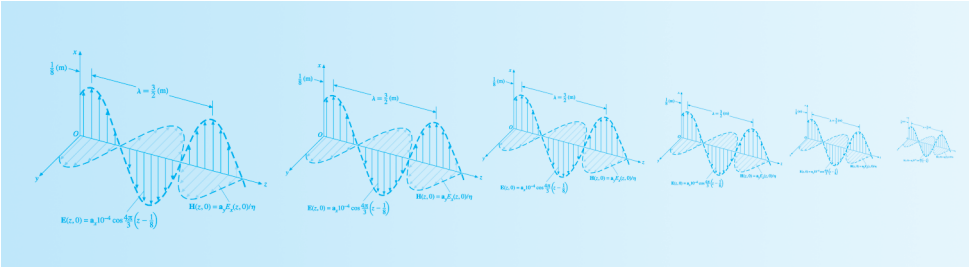
idi. Eş. (7-1) Kartezyen koordinatlarda üç tek-boyutlu, homojen, skalar dalga denklemine ayrıştırılabilir. Her bir bileşen denklemi Eş. (6-61) biçiminde olacaktır ve çözüm, ortamda

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \qquad \text{(6-63)(7-2)}$$

hızı ile ilerleyen bir dalgayı temsil edecektir. Zamanla değişen **E** ve **H** alanları Eş. (6-94a) ve (6-94b) Maxwell dönel denklemleri ile bağlaştığından, sonuç bir elektromanyetik dalgadır. Elektromanyetik dalgalar, uzaktan elektromanyetik etkiyi açıklamakta kullanılır. Tek-boyutlu uzay bağımlılığı olan dalgaların çalışılması bu bölümün ana hedefidir.

Bölüme, sınırsız, homojen bir ortamda zamanda-harmonik düzlem-dalga alanların yayılmasını çalışarak başlayacağız. Öz empedans, zayıflama sabiti ve faz sabiti gibi ortam parametrelerini tanıtacağız. ***Deri kalınlığı***nın yani dalganın bir iyi iletkene nüfuz derinliği-

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:19 Page 273



Düzlem Elektromanyetik Dalgalar

nin anlamı açıklanacaktır. Elektromanyetik dalgalar elektromanyetik güç taşırlar. Bir güç akı yoğunluğu olan ***Poynting vektörü*** kavramı tartışılacaktır.

Bir düzlem sınıra eğik olarak gelen düzlem dalganın davranışını çalışacağız. Düzlem dalgaların yansıma ve kırılmasını yöneten yasalar, yansımasız ve tümüyle yansıma durumlarıyla birlikte incelenecektir.

Düzgün düzlem dalga tanımı

Düzgün düzlem dalga, **E**'nin, (benzer şekilde **H**'nin) yayılma yönüne dik sonsuz düzlemlerde, aynı yöne, aynı genliğe ve aynı faza sahip olduğu özel bir Maxwell denklemleri çözümüdür. Kesin konuşmak gerekirse, düzgün düzlem dalgalar gerçekte yoktur çünkü oluşturulmaları için sonsuz boyutlarda kaynaklar gerekir ve pratik dalga kaynakları her zaman sonlu boyutludur. Bununla birlikte eğer bir kaynaktan yeterince uzakta isek, ***dalga cephesi*** (sabit faz yüzeyi) neredeyse küresel hale gelir ve dev bir kürenin yüzeyinin çok küçük bir kısmı bir düzleme çok yakındır. Düzgün düzlem dalgaların özellikleri basittir ve bunların çalışılması temel teorik ve pratik öneme sahiptir.

Dalga cephesi tanımı

7-2 KAYIPSIZ ORTAMDA DÜZLEM DALGALAR

Bu ve sonraki bölümlerde dikkatimizi sinüzoidal durgun durumdaki dalga davranışına yönelteceğiz. Sinüzoidal nicelikler, sadelik açısından *s* alt indisi olmaksızın fazörlerle temsil edilecektir. Anlık zaman

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 274

fonksiyonlarının tartışıldığı durumlarda ilgili niceliklerin zaman bağımlılığı, argümanlarının arasında t sembolü ile açıkça gösterilecektir. İletken olmayan basit ortamlarda kaynaksız dalga denklemi bir homojen vektör Helmholtz denklemi (bkz. Eş. (6-98)) haline gelir:

İletken olmayan ortamlarda E için homojen vektör Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0. \tag{7-3}$$

Burada k dalga sayısıdır. ϵ ve μ ile tanımlanan ortamda Eş. (6-82a)'dan

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p} \qquad \text{(rad/m)} \tag{7-4}$$

bulunur. Kartezyen koordinatlarda Eş. (7-3), E_x, E_y ve E_z için üç skalar Helmholtz denklemine denktir. E_x bileşeni için denklem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_x = 0 \tag{7-5}$$

olarak yazılabilir. z'ye dik düzlem yüzeylerde düzgün bir E_x (düzgün genlik ve sabit faz) ile tanımlanan bir düzgün düzlem dalgayı düşünelim. Bu dalga için

$$\partial^2 E_x/\partial x^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \partial^2 E_x/\partial y^2 = 0$$

olur ve Eş. (7-5)

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \tag{7-6}$$

halinde sadeleşir. Bu bir adi diferensiyel denklemdir çünkü E_x fazörü sadece z'ye bağldır.

Eş. (7-6)'nın çözümünün

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_x^+(z) + E_x^-(z) \\ &= E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz} \end{aligned} \tag{7-7}$$

olduğu kolaylıkla görülür. E_0^+ ve E_0^- sınır koşullarından belirlenmesi gereken gelişigüzel sabitlerdir.

Şimdi Eş. (7-7)'nin sağ tarafındaki ilk fazör terimi inceleyelim ve

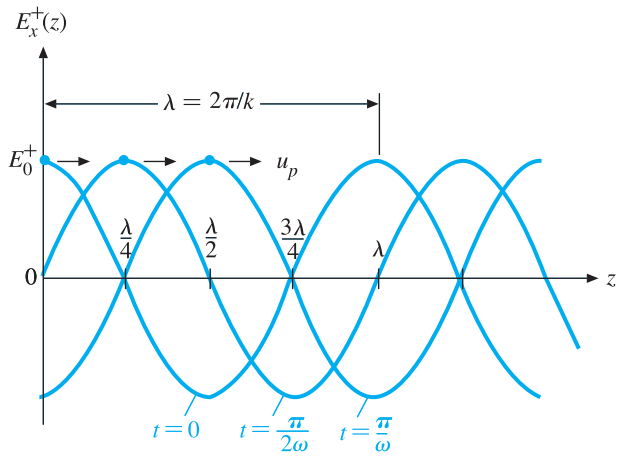
$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x^+(z) = \mathbf{a}_x E_0^+ e^{-jkz} \tag{7-8}$$

yazalım. Kosinüs referansı için Eş. (7-8)'deki $\mathbf{E}$'nin anlık ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z,t) &= \mathbf{a}_x E_x^+(z,t) = \mathbf{a}_x \mathscr{R}e[E_x^+(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_x \mathscr{R}e[E_0^+ e^{j(\omega t - kz)}] = \mathbf{a}_x E_0^+ \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \tag{7-9}$$

olarak elde edilir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 275



ŞEKİL 7-1 Birçok t değeri için pozitif z yönünde ilerleyen $E_x^+(z, t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz)$ dalgası.

İlerleyen dalganın özellikleri

Eş. (7-9) Şekil 7-1'de birçok t değeri için çizilmiştir. t = 0'da $E_x^+(z,0) = E_0^+ \cos kz$, genliği E_0^+ olan bir kosinüs eğrisidir. Ardışık zamanlarda eğri etkin olarak *pozitif z yönünde ilerler*. O halde ***ilerleyen bir dalga*** vardır.

$\omega t - kz$ = sabit faz

alırız ve buradan da

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{7-10}$$

Faz hızının tanımı

elde ederiz. Eş. (7-10) bir eşfaz cephesinin yayılma hızının (***faz hızı***) ışığın ortamdaki hızına eşit olduğunu belirtir. Dalga sayısı k, Eş. (6-82a ve b)'de verildiği gibi dalga boyuna

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{7-11}$$

şeklinde bağlıdır.

Çizim yapmadan Eş. (7-7)'nin sağ tarafındaki ikinci fazör terim olan $E_0^- e^{jkz}$ teriminin $-z$ yönünde aynı u_p hızıyla ilerleyen kosinüzoidal bir dalga olduğunu görebiliriz. Eğer sadece $+z$ yönünde ilerleyen dalga ile ilgileniyorsak $E_0^- = 0$ alırız. Ancak eğer ortamda süreksizlikler varsa, zıt yönde ilerleyen yansıyan dalgalar da bu bölümün ileriki kısımlarında olduğu gibi hesaba katılmalıdır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 276

İlgili **H** manyetik alanı Eş. (6-80a)'daki $\nabla \times \mathbf{E}$ denkleminden

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu(\mathbf{a}_x H_x^+ + \mathbf{a}_y H_y^+ + \mathbf{a}_z H_z^+)$$

olarak bulunur ve bu da

$$H_x^+ = 0, \tag{7-12a}$$

$$H_y^+ = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} \tag{7-12b}$$

$$H_z^+ = 0 \tag{7-12c}$$

verir. Böylece H_y^+ Eş. (7-8)'deki **E**'ye karşılık gelen **H**'nin sıfır olmayan tek bileşenidir. Ayrıca

$$\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(E_0^+ e^{-jkz}) = -jkE_x^+(z)$$

olduğundan Eş. (7-12b)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{a}_y H_y^+(z) = \mathbf{a}_y \frac{k}{\omega\mu} E_x^+(z) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{1}{\eta} E_x^+(z) \end{aligned} \tag{7-13}$$

verir. Eş. (7-13)'te yeni bir η niceliği kullandık. $\eta = \omega\mu/k$ veya

Ortamın öz empedansı

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\Omega) \tag{7-14}$$

ortamın ***öz empedansı*** olarak adlandırılır. Havada $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377\,(\Omega)$'dur. $H_y^+(z)$ ile $E_x^+(z)$ eş fazlıdır ve **H**'nin anlık ifadesini

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z,t) &= \mathbf{a}_y H_y^+(z,t) = \mathbf{a}_y \mathscr{R}e[H_y^+(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_0^+}{\eta}\cos(\omega t - kz) \end{aligned} \tag{7-15}$$

olarak yazabiliriz.

■ **ALIŞTIRMA 7.1** $-z$ yönünde ilerleyen bir düzgün düzlem dalga için $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x^-(z) = \mathbf{a}_x E_0^- e^{jkz}$ fazör ifadesinden başlayarak, ilgili $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y^-(z)$ alanını bulunuz. $E_x^-(z)/H_y^-(z)$ oranını hesaplayınız.

CEVAP: $E_x/H_y^- = -\eta$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 277

TEKRAR SORULARI

S.7-1 *Düzgün düzlem dalgayı* tanımlayınız.

S.7-2 *Dalga cephesi* nedir?

S.7-3 *İlerleyen bir dalga* nedir?

S.7-4 *Faz hızını* tanımlayınız.

S.7-5 Bir ortamın *öz empedansını* tanımlayınız. Boş uzayın öz empedans değeri nedir?

NOTLAR

1. Bir elektromanyetik dalganın kayıpsız bir ortamdaki faz hızı frekansından veya ilerleme yönünden bağımsızdır.
2. Bir düzgün düzlem dalganın **E** ve **H** büyüklükleri oranı ortamın öz empedansıdır.
3. **E**-alanının yönü ile **H**-alanının yönünün vektör çarpımı dalga yayılma yönünü verir; bu üç yön birbirine diktir.

ÖRNEK 7-1

Elektrik alanı $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ olan bir düzgün düzlem dalga, kayıpsız bir ortamda ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$) + z yönünde yayılıyor. E_x'in 100 (MHz) frekanslı ve $t = 0$ ile $z = \frac{1}{8}$(m)'de $+10^{-4}$(V/m) maksimum değere sahip bir sinüzoidal olduğunu kabul ediniz.

a) Herhangi bir t ve z için **E**'nin anlık ifadesini yazınız.

b) **H**'nin anlık ifadesini yazınız.

c) $t = 10^{-8}$ (s) anında E_x'in pozitif maksimum olduğu noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce k aşağıdaki gibi bulunur.

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

$$= \frac{2\pi 10^8}{3\times 10^8}\sqrt{4} = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{(rad/m)}.$$

a) cos ωt referansını kullanarak **E**'nin anlık ifadesini

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x E_x = \mathbf{a}_x\, 10^{-4} \cos(2\pi\, 10^8\, t - kz + \psi)$$

olarak buluruz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 278

E_x, kosinüs fonksiyonunun argümanı sıfır olduğunda $+10^{-4}$ olur. Yani

$$2\pi\, 10^8 t - kz + \psi = 0$$

olmalıdır. $t = 0$ ve $z = \frac{1}{8}$ için

$$\psi = kz = \left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{(rad)}$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos\left(2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \mathbf{a}_x 10^{-4} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \qquad \text{(V/m)}$$

elde edilir. Bu ifade $+z$ yönünde $\frac{1}{8}$ (m) kayma göstermektedir ve problemin cümlesinden doğrudan yazılabilir.

b) **H**'nin anlık ifadesi

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y = \mathbf{a}_y \frac{E_x}{\eta}$$

olur, burada

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 60\pi \qquad (\Omega)$$

dur. Böylece

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{a}_y \frac{10^{-4}}{60\pi} \cos\left[2\pi 10^8 t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right] \quad \text{(A/m)}$$

elde edilir.

c) $t = 10^{-8}$ anında E_x'i pozitif maksimum yapmak için kosinüs fonksiyonunun argümanını $\pm 2n\pi$'ye eşitleriz.

$$2\pi 10^8 (10^{-8}) - \frac{4\pi}{3}\left(z_m - \frac{1}{8}\right) = \pm 2n\pi.$$

Buradan

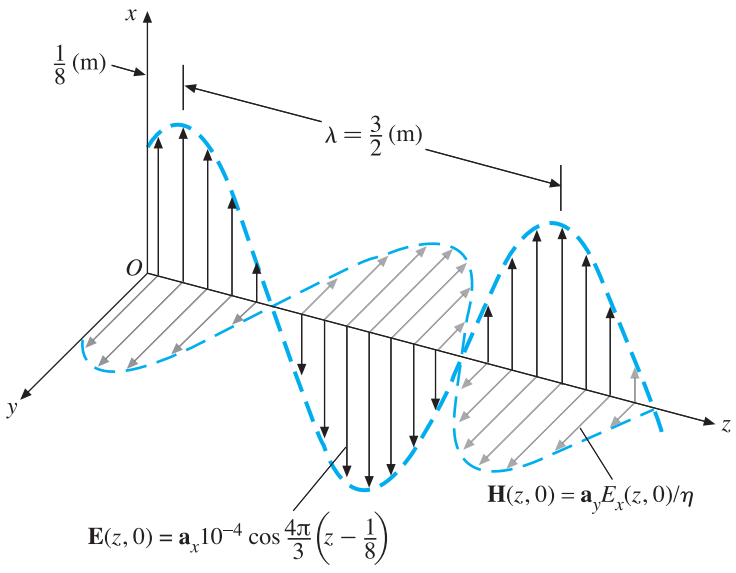
$$z_m = \frac{13}{8} \pm \frac{3}{2} n \quad \text{(m)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad z_m > 0$$

buluruz. Bu sonucu daha yakından incelersek verilen ortamdaki dalga boyunun

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{3}{2} \qquad \text{(m)}$$

olduğunu görürüz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 279



ŞEKİL 7-2 Bir düzgün düzlem dalganın $t = 0$'daki **E** ve **H** alanları (Örnek 7-1).

Böylelikle E_x pozitif maksimum değerine

$$z_m = \frac{13}{8} \pm n\lambda \qquad \text{(m)}$$

noktalarında ulaşır. **E** ve **H** alanları $t = 0$ anında z'nin fonksiyonu olarak Şekil 7-2'de gösterilmiştir.

7-2.1 DOPPLER ETKİSİ

Doppler etkisinin anlamı

Zamanda-harmonik bir kaynak ve alıcı arasında göreli bir hareket olduğunda, alıcıda algılanan dalganın frekansı kaynağın yaydığı frekanstan farklı olur. Bu gerçeğe **Doppler etkisi** [1] denir. Doppler etkisi kendisini elektromanyetikte olduğu gibi akustikte de gösterir. Belki de hızlı hareket eden bir lokomotifin ıslığındaki tizlik değişimine dikkat etmişsinizdir. Aşağıda Doppler etkisinin bir açıklamasını vereceğiz.

Frekansı f olan zamanda-harmonik T kaynağının (vericinin) durağan bir R alıcısına çizilen doğruyla θ açısı yapacak şekilde **u** hızıyla Şekil 7-3(a)'da gösterildiği gibi hareket ettiğini varsayalım. T tara-

[1] C. Doppler (1803-1853).

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 280



(a) $t = 0$'da (b) $t = \Delta t$'de

ŞEKİL 7-3 Doppler etkisi

fından havada $t = 0$ referans anında yayılan elektromanyetik dalga R'ye

$$t_1 = \frac{r_0}{c} \tag{7-16}$$

anında ulaşacaktır. Daha sonraki $t = \Delta t$ anında T yeni konumu T' noktasına gelecektir ve T' tarafından yayılan dalga R'ye

$$\begin{aligned} t_2 &= \Delta t + \frac{r'}{c} \\ &= \Delta t + \frac{1}{c}[r_0^2 - 2r_0(u\,\Delta t)\cos\theta + (u\,\Delta t)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{7-17}$$

anında gelecektir. Eğer $(u\Delta t)^2 \ll r_0^2$, ise Eş. (7-17)

$$t_2 \cong \Delta t + \frac{r_0}{c}\left(1 - \frac{u\,\Delta t}{r_0}\cos\theta\right)$$

haline gelir. Böylece R'de geçen, T'deki Δt'ye karşılık gelen zaman

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t_2 - t_1 \\ &= \Delta t\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{7-18}$$

olur ki bu Δt zamanına eşit değildir.

Eğer Δt zamanda-harmonik bir kaynağın periyodunu gösteriyorsa, yani $\Delta t = 1/f$ ise, o zaman R'de alınan dalganın frekansı

$$\begin{aligned} f' = \frac{1}{\Delta t'} &= \frac{f}{\left(1 - \dfrac{u}{c}\cos\theta\right)} \\ &\cong f\left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{7-19}$$

olur. Burada ikinci eşitlik için olağan $(u/c)^2 \ll 1$ kabullenmesi yapılmıştır. Eş. (7-19) R'de algılanan frekansın, eğer T, R'ye doğru hareket ediyorsa, vericideki frekanstan daha yüksek olduğunu açıkça belirtir. Diğer taraftan eğer T, R'den uzaklaşıyorsa algılanan frekans verici frekansından düşük olacaktır. Benzer sonuçlar T durağan ve R hareketli ise de elde edilir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 281

Hız radarının çalışma ilkesi

Doppler etkisi polis tarafından araçların hız kontrolünde kullanılan (Doppler) radarının çalışma ilkesidir. Hareketli bir araçtan yansıyarak alınan dalgadaki frekans kayması aracın hızına orantılıdır ve bu bilgi algılanıp bir el cihazında görüntülenebilir. Doppler etkisi aynı zamanda astronomide, uzaklaşan bir yıldızın yaydığı ışık spektrumundaki ***kırmızıya kayma*** adı verilen etkinin de nedenidir. Yıldız dünyadaki bir gözlemciden yüksek bir hızla *uzaklaşırken* alınan frekans spektrumun *düşük frekans* (*kırmızı*) ucuna doğru kayar.

Astronomideki kırmızıya kayma olayı

■ **ALIŞTIRMA 7.2** Bir tren görüş doğrusundan 20° açı ile gözlemciye doğru 130 (km/sa) hızla ilerlemektedir. Tren 800 (Hz)'lik düdük çalmaktadır. Gözlemci tarafından algılanan frekans nedir? (Ses hızı yaklaşık 340 m/s'dir.)

CEVAP: 880 (Hz).

TEKRAR SORUSU

S.7-6 Doppler etkisi nedir?

NOTLAR

Eğer bir verici alıcıya doğru yaklaşıyorsa (alıcıdan uzaklaşıyorsa), alıcı tarafından algılanan dalganın frekansı, vericinin yaydığı dalganın frekansından yüksektir (düşüktür).

7-2.2 ENİNE ELEKTROMANYETİK DALGALAR

$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ ile tanımlanan ve $+z$ yönünde yayılan bir düzgün düzlem dalganın $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$ manyetik alanına sahip olduğunu gördük. Böylece $\mathbf{E}$ ile $\mathbf{H}$ birbirine diktir ve bunların her ikisi de yayılma yönüne diktir. Böyle bir dalga ***enine elektromanyetik (TEM) dalga***nın, özel bir durumudur. Şimdi bir düzgün düzlem dalganın, bir koordinat ekseni ile çakışmak zorunda olmayan gelişigüzel bir yönde yayılmasını inceleyeceğiz.

TEM dalga

Eş. (7-8)'deki $\mathbf{E}(z)$ yerine, $+x$ ve $+z$ yönlerinde ilerleyen düzgün düzlem dalganın y-doğrultusundaki elektrik alan şiddetini gösteren

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk_x x - jk_z z} \tag{7-20}$$

ifadesini düşünelim. Eğer ***dalga sayısı vektörü*** $\mathbf{k}$'yi

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k_x + \mathbf{a}_z k_z = \mathbf{a}_k k \tag{7-21}$$

Dalga sayısı vektörünün kartezyen koordinatlarda ifadesi

ve orijinden gelişigüzel bir noktaya olan yarıçap vektörü $\mathbf{R}$'yi

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \tag{7-22}$$

olarak tanımlarsak Eş. (7-20) kısaca

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 282

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{R}} \tag{7-23}$$

halinde yazılabilir. Bu durum Şekil 7-4'te gösterilmiştir.

$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{R} = \overline{OP}$ uzunluğu (bir sabit)

bağıntısı (**R** yarıçap vektörünün uç noktalarının geometrik yerleri) yayılma yönü $\mathbf{a}_k$'ya dik bir düzlemin denklemidir. Bu düzlem sabit faz ve sabit genlik düzlemidir.

Eş. (7-23)'teki elektrik alana eşlik eden manyetik alan **H**, Eş. (6-80a)'dan

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{\omega\mu}(-\mathbf{a}_x k_z + \mathbf{a}_z k_x)e^{-jk_x x - jk_z z} \tag{7-24}$$

bulunur. Eş. (7-24) daha genel olarak

Bir düzlem dalgada H'yi E'den bulma

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu}\mathbf{a}_k \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_k \times \mathbf{E} \tag{7-25}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece eğer verilen bir yönde yayılan düzgün düzlem dalganın **E** alanı biliniyorsa **H** alanı Eş. (7-25)'ten kolaylıkla bulunabilir.

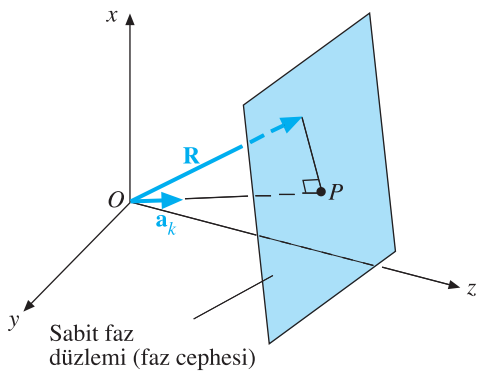
■ **ALIŞTIRMA 7.3**

a) Havada $-y$ yönünde ilerleyen, frekansı f ve z yönündeki elektrik alanının genliği E_0 olan bir düzgün düzlem dalganın elektrik alanının fazör ifadesini yazınız.

b) İlgili manyetik alanın fazör ifadesini yazınız.

CEVAP: (a) $\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_0 e^{j2\pi fy/c}$

ŞEKİL 7-4 Yarıçap vektörü ve düzgün düzlem dalganın faz cephesinin normali (birim dik vektörü).



+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 283

7-2.3 DÜZLEM DALGALARIN KUTUPLANMASI

Bir düzgün düzlem dalganın kutuplanma tanımı

Bir düzgün düzlem dalganın ***kutuplanması,*** elektrik alan şiddeti vektörünün uzayda verilen bir noktadaki zamanla değişen davranışını açıklar. Örneğin bir düzlem dalganın **E** vektörü x yönüne sabitlenmişse ($\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$, E_x pozitif veya negatif olabilir), dalgaya x-yönünde ***doğrusal kutuplanmıştır*** denir. Manyetik alan davranışının ayrı bir tanımına gerek yoktur, çünkü **H**'nin yönü **E**'ninkine kesin olarak bağlıdır.

Bazı durumlarda bir düzlem dalganın **E** alanının verilen bir noktadaki yönü zamanla değişebilir. İki doğrusal kutuplanmış dalganın üst üste bindirilmesini düşünelim: Biri x-yönünde kutuplanmış diğeri de y-yönünde kutuplanmış ve zaman fazında 90° (veya $\pi/2$ radyan) gecikmeli olsun. Fazör gösterimi ile

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z)\\ &= \mathbf{a}_x E_{10} e^{-jkz} - \mathbf{a}_y j E_{20} e^{-jkz}\end{aligned} \tag{7-26}$$

yazabiliriz. Burada E_{10} ve E_{20} bu iki doğrusal kutuplanmış dalganın genliğini gösteren reel sayılardır. **E**'nin anlık ifadesi ise

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z,t) &= \mathcal{R}e\{[\mathbf{a}_x E_1(z) + \mathbf{a}_y E_2(z)]e^{j\omega t}\}\\ &= \mathbf{a}_x E_{10}\cos(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20}\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

olur. Verilen bir noktada t değişirken **E**'nin yön değişimini incelerken $z = 0$ almak uygundur. Böylece

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0,t) &= \mathbf{a}_x E_1(0,t) + \mathbf{a}_y E_2(0,t)\\ &= \mathbf{a}_x E_{10}\cos\omega t + \mathbf{a}_y E_{20}\sin\omega t\end{aligned} \tag{7-27}$$

buluruz. ωt, 0'dan $\pi/2$, π ve $3\pi/2$'ye artıp 2π'de döngüyü tamamlarken $\mathbf{E}(0,t)$ vektörünün ucu saat yönünün tersinde eliptik bir yörünge çizecektir. Analitik olarak,

$$\cos\omega t = \frac{E_1(0,t)}{E_{10}}$$

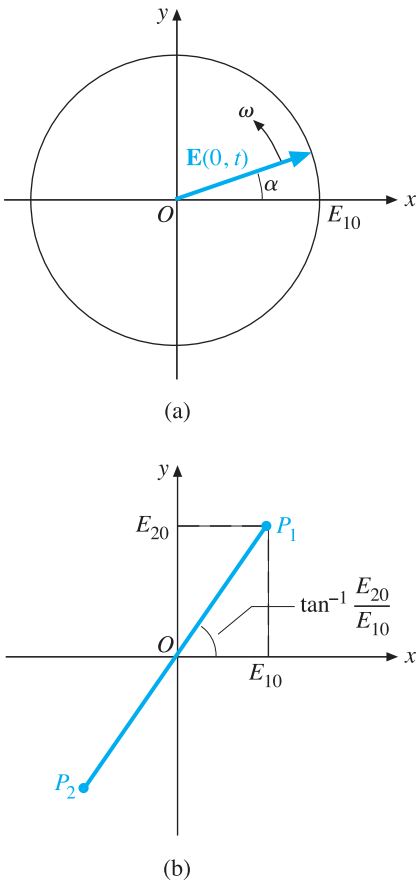
ve

$$\begin{aligned}\sin\omega t &= \frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\\ &= \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\left[\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right]^2}\end{aligned}$$

yazabiliriz ki bunlar da aşağıdaki elips denklemini verir:

$$\left[\frac{E_2(0,t)}{E_{20}}\right]^2 + \left[\frac{E_1(0,t)}{E_{10}}\right]^2 = 1. \tag{7-28}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 284



ŞEKİL 7-5 Doğrusal kutuplanmış ve birbirine dik iki dalganın $z = 0$'daki kutuplanma diyagramı: (a) dairesel kutuplanma, $\mathbf{E}(0, t) = E_{10}(\mathbf{a}_x \cos \omega t + \mathbf{a}_y \sin \omega t)$; (b) doğrusal kutuplanma, $\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20}) \cos \omega t$

Eliptik ve dairesel kutuplanmış dalgaların anlamı

Böylece birbirine uzayda ve zamanda dik iki doğrusal kutuplanmış dalganın toplamı olan $\mathbf{E}$, eğer $E_{20} \neq E_{10}$ ise ***eliptik kutuplanmıştır*** ve eğer $E_{20} = E_{10}$ ise ***dairesel kutuplanmıştır***. Tipik bir kutuplanma çemberi Şekil 7-5(a)'da gösterilmiştir.

$E_{20} = E_{10}$ olduğunda $\mathbf{E}$'nin $t = 0$'da x- ekseni ile yaptığı anlık α açısı

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_2(0, t)}{E_1(0, t)} = \omega t \tag{7-29}$$

bulunur ki bu da $\mathbf{E}$'nin düzgün ω açısal hızıyla *saat yönünün tersinde* döndüğünü belirtir. Sağ elin parmakları $\mathbf{E}$'nin dönüş yönünü gösterirse, baş parmak dalganın yayılma yönünü işaret eder.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 285

Sağ-el (veya pozitif) dairesel kutuplanmış dalga

Bu bir ***sağ-el*** veya ***pozitif dairesel kutuplanmış dalgadır***.

Eğer zaman fazında $E_1(z)$'nin 90°($\pi/2$ rad) önünde bir $E_2(z)$ ile başlarsak Eş. (7-26) ve Eş. (7-27), sırasıyla,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_{10} e^{-jkz} + \mathbf{a}_y j E_{20} e^{-jkz} \tag{7-30}$$

ve

$$\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{a}_x E_{10} \cos \omega t - \mathbf{a}_y E_{20} \sin \omega t \tag{7-31}$$

olacaktır. Eş. (7-31) ile Eş. (7-27)'yi karşılaştırırsak **E**'nin yine eliptik kutuplanmış olacağını görürüz. Eğer $E_{20} = E_{10}$ ise **E** dairesel kutuplanmış olacaktır ve x-ekseninden $z = 0$'da ölçülen açısı şimdi $-\omega t$ olacaktır. Bu da **E**'nin saat yönünde ω açısal hızıyla döneceğini gösterir. Böyle bir dalgaya ***sol-el*** veya ***negatif dairesel kuputlanmış dalga*** denir.

Sol-el (veya negatif) dairesel kutuplanmış dalga

Eğer $E_2(z)$ ve $E_1(z)$ uzayda dik ama zamanda eş fazlı ise **E**'nin $z = 0$'daki anlık ifadesi

Doğrusal kutuplanmış dalga

$$\mathbf{E}(0, t) = (\mathbf{a}_x E_{10} + \mathbf{a}_y E_{20}) \cos \omega t \tag{7-32}$$

olur. $\mathbf{E}(0, t)$ vektörünün ucu $\omega t = 0$ iken Şekil 7-5(b)'deki P_1 noktasında olacaktır. ωt açısı $\pi/2$'ye doğru artarken vektörün büyüklüğü sıfıra doğru azalacaktır. Bundan sonra $\mathbf{E}(0, t)$ zıt yönde $\omega t = \pi$ için P_2 noktasına doğru artmaya başlar. Toplam **E**'nin x-ekseni ile $\tan^{-1}(E_{20}/E_{10})$ açısını yapan doğru boyunca doğrusal kutuplanmış olduğunu söyleriz.

Genel durumda, uzayda birbirine dik olan $E_2(z)$ ve $E_1(z)$ farklı genliklere sahip olabilir. ($E_{20} \neq E_{10}$) ve fazları gelişigüzel miktarda (sıfır veya $\pi/2$'nin tam katı değil) farklı olabilir. Bu durumda bunların toplamı eliptik kutuplanır.

ÖRNEK 7-2

Doğrusal kutuplanmış bir dalganın eşit genlikli bir sağ-el dairesel ve bir sol-el dairesel kutuplanmış dalgaya ayrılabileceğini ispat ediniz.

ÇÖZÜM

$+z$ yönünde yayılan doğrusal kutuplanmış bir dalga düşünelim. Genelliği kaybetmeden **E**'nin x-yönünde kutuplanmış olduğunu kabul edebiliriz. Fazör gösterimi ile

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-jkz} \tag{7-33}$$

olur. Ancak bu da

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{rc}(z) + \mathbf{E}_{lc}(z) \tag{7-34}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 286

halinde yeniden yazılabilir, burada

$$\mathbf{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)e^{-jkz} \tag{7-34a}$$

ve

$$\mathbf{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{-jkz} \tag{7-34b}$$

Lineer kutuplanmış bir dalga eşit genlikli iki dairesel kutuplanmış dalgaya ayarlanabilir.

dır. Önceki tartışmalardan, Eş. (7-34a)'daki $\mathbf{E}_{rc}(z)$ ve Eş. (7-34b)'deki $\mathbf{E}_{lc}(z)$'nin, ikisi de $E_0/2$ genliğine sahip olan, sırasıyla, sağ-el ve sol-el dairesel kutuplanmış dalgalar olduğunu anlayabiliriz. Böylelikle bu problemin cümlesi ispatlanmıştır. Zıt dairesel kutuplanmış eşit genlikli iki dalganın toplamının doğrusal kutuplanmış bir dalga olduğunu belirten ters cümle de geçerlidir.

■ **ALIŞTIRMA 7.4** Elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}(x, t) = (\mathbf{a}_y E_{10} - \mathbf{a}_z E_{20}) \sin(\omega t - kx)$ olarak verilen dalganın kutuplanmasını açıklayınız.

TEKRAR SORULARI

S.7-7 TEM dalgası nedir?

S.7-8 Kayıpsız bir ortamın öz empedansı frekansın fonksiyonu mudur? Açıklayınız.

S.7-9 Bir dalganın *kutuplanması* ne demektir? Bir dalga ne zaman doğrusal, ne zaman dairesel kutuplanmıştır?

S.7-10 Doğrusal kutuplanmış birbirine dik iki dalga birleştiriliyor. Sonuçta bulunan dalganın, (a) doğrusal kutuplanmış bir dalga, (b) dairesel kutuplanmış bir dalga ve (c) eliptik kutuplanmış bir dalga olmasının koşullarını belirtiniz.

NOTLAR

1. Kayıpsız, sınırsız bir ortamdaki TEM dalgası için (a) **E** ve **H** eş fazlıdır ve (b) $|\mathbf{E}| = \eta|\mathbf{H}|$'dir.
2. AM yayın istasyonlarının **E**-alanı yere dik olarak doğrusal kutuplanmıştır. Maksimum alış için alıcı anten de dik konumda olmalıdır.
3. Televizyon sinyallerinin **E**-alanı yatay yönde doğrusal kutuplanmıştır. Çatılardaki TV alıcı antenlerinin yatay konumuna dikkat ediniz.
4. FM yayın istasyonlarından yayılan dalgalar genellikle dairesel kutuplanmıştır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 287

7-3 KAYIPLI ORTAMDA DÜZLEM DALGALAR

Şimdiye kadar kaynaksız, ($\rho_v = 0$, $\mathbf{J} = 0$) kayıpsız basit ortamlardaki dalga yayılmasını inceledik. Eğer bir ortam iletken ise ($\sigma \neq 0$), $\mathbf{E}$'nin varlığından dolayı bir $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ akımı akacaktır. Bu durumda Eş. (6-80b)'deki zamanda-harmonik $\nabla \times \mathbf{H}$ denklemi

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\mathbf{E}$$

$$= j\omega\epsilon_c\mathbf{E} \tag{7-35}$$

olarak değişmelidir, burada

Kayıplı ortamın kompleks geçirgenliği

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \qquad (\text{F/m}) \tag{7-36}$$

tanımlanmıştır. Eş. (6-80a, c ve d) ise değişmez. Böylece eğer ϵ Eş. (7-36)'daki ***kompleks*** ϵ_c ***geçirgenliği*** ile değiştirilirse iletken olmayan ortamlar için geçerli olan tüm önceki denklemler iletken ortamlarda da geçerli olur.

Kısım 3-6.2'de tartıştığımız gibi bir malzemeye zamanla değişen bir dış elektrik alan uygulanması, bağlı yüklerin küçük yer değişimlerine neden olur ve bu da bir hacimsel kutuplanma yoğunluğu oluşturur. Bu kutuplanma vektörü uygulanan alanla aynı frekansta salınır. Frekans arttıkça yüklü parçacıkların ataleti, parçacık yer değişimlerinin alan değişimi ile aynı fazda olmasını engeller ve bir sürtünme zayıflaması mekanizmasına yol açar. Bu da güç kaybına neden olur çünkü zayıflama kuvvetlerinin üstesinden gelmek için iş yapılmalıdır. Bu farklı fazlı kutuplanma olayı bir kompleks hassasiyet ve dolayısıyla bir kompleks geçirgenlikle açıklanabilir. Eğer bunun yanında, malzemede, bir iletkendeki elektronlar, bir yarı-iletkendeki elektronlar ve delikler veya bir elektrolitteki iyonlar gibi önemli miktarda serbest yük taşıyıcı varsa direnil kayıplar da olacaktır. Böyle ortamları incelerken, hem zayıflama hem de direnil kayıpları, ϵ_c kompleks geçirgenliğinin sanal kısmına katmak gelenekseldir:

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \qquad (\text{F/m}). \tag{7-37}$$

Burada ϵ' ve ϵ'''nün her ikisi de frekansın fonksiyonudur. Seçenek olarak, tüm kayıpları temsil eden bir eşdeğer iletkenliği

$$\sigma = \omega\epsilon'' \qquad (\text{S/m}) \tag{7-38}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Eş. (7-37) ile Eş. (7-38)'in birleşimi Eş. (7-36)'yı verir.

Kayıplı bir ortamın kayıp tanjantı

ϵ''/ϵ' oranına ***kayıp tanjantı*** denir; çünkü ortamdaki güç kaybının bir ölçüsüdür:

$$\tan\delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega\epsilon}. \tag{7-39}$$

Eş. (7-39)'daki δ_c niceliğine ***kayıp açısı*** denebilir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 288

İyi iletken ve iyi yalıtkan arasındaki fark

Eğer $\sigma \gg \omega\epsilon$ ise böyle bir ortama ***iyi iletken***; eğer $\omega\epsilon \gg \sigma$ ise ***iyi yalıtkan*** denir. Böylece bir malzeme düşük frekanslarda iyi iletken olabilir ancak çok yüksek frekanslarda kayıplı dielektrik özelliklerine sahip olabilir. Örneğin nemli toprağın dielektrik sabiti ϵ_r ve iletkenliği σ, sırasıyla, 10 ve 10^{-2}(S/m) civarındadır. O halde nemli toprağın kayıp tanjantı $\sigma/\omega\epsilon$ 1(kHz)'de 1.8×10^4'e eşittir ve onun göreli olarak iyi iletken olduğunu belirtir. 10 (GHz)'de $\sigma/\omega\epsilon$ 1.8×10^{-3} haline gelir ve nemli toprak daha çok bir yalıtkan gibi davranır.

ÖRNEK 7-3

Bağıl geçirgenliği 2.5 ve kayıp tanjantı 0.001 olan kayıplı bir dielektrik ortamda frekansı 1 (GHz) ve genliği 250 (V/m) olan bir sinüzoidal elektrik alan şiddeti vardır. Ortamda metre küp başına harcanan ortalama gücü bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce bu kayıplı ortamın etkin öz iletkenliğini bulmalıyız.

$$\tan \delta_c = 0.001 = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r}$$

$$\sigma = 0.001(2\pi 10^9)\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)(2.5)$$

$$= 1.39 \times 10^{-4}\,(\text{S/m}).$$

O halde birim hacim başına harcanan ortalama güç

$$p = \tfrac{1}{2}JE = \tfrac{1}{2}\sigma E^2$$

$$= \tfrac{1}{2} \times (1.39 \times 10^{-4}) \times 250^2 = 4.34 \qquad (\text{W/m}^3)$$

bulunur.

■ **ALIŞTIRMA 7.5** Bir mikrodalga fırın, yiyecekleri magnetron tarafından üretilen mikrodalga güç ışıması ile pişirir. Bir bifteğin 2.45 (GHz) çalışma frekansında dielektrik sabitini 40 ve kayıp tanjantını 0.35 kabul edip Örnek 7-3'teki elektrik alan genliğini kullanarak birim hacim başına harcanan ortalama gücü bulunuz. (Kısım 7-3.2'de tartışılacak olan ***deri etkisini*** ihmal ediniz.)

CEVAP: 59.6 (kW/m^3).

Yukarıdaki tartışmanın ışığında, kayıplı ortamda zamanda-harmonik davranışın analizi Eş. (7-3)'ten başlayarak basitçe reel k yerine bir k_c kompleks dalga sayısı kullanarak gerçekleştirilebilir.

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c}\,. \tag{7-40}$$

Aşağıdaki homojen Helmholtz denkleminin çözümünü incelemeliyiz:

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 289

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_c^2\mathbf{E} = 0. \tag{7-41}$$

İletim hatları teorisindeki yaygın gösterime uymak için γ ***yayılma sabiti***

Yayılma sabiti ve dalga sayısı arasındaki ilişki

$$\boxed{\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \qquad (\mathrm{m}^{-1})} \tag{7-42}$$

olarak tanımlanır. γ kompleks olduğundan Eş. (7-36)'nın yardımıyla

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2} \tag{7-43}$$

veya Eş. (7-37)'den

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{1/2} \tag{7-44}$$

bulunur. Burada α ve β, sırasıyla, γ yayılma sabitinin reel ve sanal kısımlarıdır. Bunların fiziksel önemi şimdi açıklanacaktır. Kayıpsız bir ortam için $\sigma = 0 (\epsilon'' = 0,\ \epsilon = \epsilon')$, $\alpha = 0$ ve $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ olur.

Eş. (7-42) ile Eş. (7-41)

$$\nabla^2\mathbf{E} - \gamma^2\mathbf{E} = 0 \tag{7-45a}$$

haline gelir. $+z$ yönünde yayılan, $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ ve $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$ ile tanımlanan bir düzgün düzlem dalga için Eş. (7-45a)

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x \tag{7-45b}$$

haline indirgenir. Eş. (7-45b)'nin çözümü

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \tag{7-46}$$

bulunur, burada α ve β pozitif niceliklerdir. İlk $e^{-\alpha z}$ çarpanı z arttıkça azalır ve dolayısıyla bir zayıflama çarpanıdır. Bu nedenle α'ya ***zayıflama sabiti*** denir. Zayıflama sabitinin SI birimi metre başına Neper'dir[1] (Np/m). İkinci çarpan olan $e^{-j\beta z}$ ise bir faz çarpanıdır. β, ***faz sabiti*** olarak adlandırılır ve metre başına radyan (rad/m) ile ifade edilir. Faz sabiti, dalga bir metre ilerlediğinde oluşan faz kayması miktarını gösterir.

Zayıflama sabiti ve SI birimi

Faz sabiti ve SI birimi

■ **ALIŞTIRMA 7.6** Kayıplı bir ortamda yayılan bir düzlem dalganın elektrik alan şiddetinin genliği P_1 noktasında 1 (mV/m) ve 50 (m) uzaktaki P_2 noktasında 0.8 (mV/m) ise

[1] Neper birimsiz bir niceliktir. Eğer α = 1 (Np/m) ise, birim genlikli bir dalga 1 (m) ilerlediğinde e^{-1}(=0.368) büyüklüğüne azalır. 1 (Np/m) zayıflama $20\log_{10}e$ = 8.69 (dB/m)'ye eşittir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 290

a) P_1 ve P_2 noktaları arasındaki toplam zayıflamayı neper ve desibel cinsinden,

b) α'yı (Np/m) ve (dB/m) cinsinden bulunuz.

CEVAP: (a) 0.223 (Np), 1.94 (dB) (b) 0.00446 (Np/m), 0.0388(dB/m).

7-3.1 DÜŞÜK KAYIPLI DİELEKTRİKLER

Düşük kayıplı bir dielektrik, iyi ancak mükemmel olmayan bir yalıtkandır ve $\epsilon'' \ll \epsilon'$ veya $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ olacak şekilde sıfır olmayan bir eşdeğer öz iletkenliği vardır. Bu koşul altında Eş. (7-44)'teki γ binom açılımı ile

Kayıplı bir dielektriğin yayılma sabiti

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

olarak yaklaştırılabilir. Buradan da

$$\alpha = \mathscr{R}e(\gamma) \cong \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad \text{(Np/m)} \tag{7-47}$$

zayıflama sabitini ve

$$\beta = \mathscr{I}m(\gamma) \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \quad \text{(rad/m)} \tag{7-48}$$

faz sabitini buluruz. Eş. (7-47)'den düşük kayıplı bir dielektriğin zayıflama sabitinin pozitif bir nicelik olduğu ve yaklaşık olarak frekansla doğru orantılı olduğu görülür. Eş. (7-78)'deki faz sabiti, bir mükemmel (kayıpsız) dielektriğin $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ değerinden sadece çok az sapar.

Düşük kayıplı bir dielektriğin öz empedansı kompleks bir niceliktir:

Kayıplı bir dielektriğin öz empedansı

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{-1/2}$$

$$\cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right) \quad (\Omega). \tag{7-49}$$

Bir düzgün düzlem dalga için öz empedans E_x ve H_y'nin oranı olduğundan, kayıplı bir dielektrikte elektrik ve manyetik alan şiddetleri, kayıpsız bir ortamda olduğu gibi aynı fazda değildir.

u_p faz hızı ω/β oranından elde edilir. Eş. (7-48)'den

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right] \quad \text{(m/s)} \tag{7-50}$$

buluruz ki bu değer ortam kayıpsız olduğunda bulunandan biraz düşüktür.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 291

TEKRAR SORULARI

S.7-11 Bir dielektrik ortamın geçirgenliğini kompleks yapan nedir?

S.7-12 Bir ortamın *kayıp tanjantını* tanımlayınız.

S.7-13 *Yayılma sabiti* ile dalga sayısı arasındaki ilişki nedir?

S.7-14 Bir ortamda yayılan bir dalganın *zayıflama sabitini* ve *faz sabitini* tanımlayınız. Bunların SI birimleri nedir?

NOTLAR

1. Kayıplı bir ortamdaki düzgün düzlem dalgaların elektrik ve manyetik alanları uzayda birbirine diktir ve farklı zaman fazlarına sahiptir.
2. α ve β reel niceliklerdir ve genelde her ikisi de frekansın fonksiyonudur.
3. Dalga genliğinin neper cinsinden zayıflaması, başlangıç noktasındaki genliğin bitiş noktasındaki genliğe oranının doğal logaritmasıdır.
4. 1 (Np) = (8.69) (dB).

7-3.2 İYİ İLETKENLER

İyi iletken bir ortam $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ sağlayan bir ortamdır. Bu koşul altında Eş. (7-43)'ü kullanmak ve $\sigma/\omega\epsilon$ yanında 1'i ihmal etmek uygundur. Böylece

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

veya

Bir iyi iletkenin yayılma sabiti

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{7-51}$$

elde edilir. Burada

$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = e^{j\pi/4} = (1+j)/\sqrt{2}$$

ve $\omega = 2\pi f$ bağıntılarını kullandık. Eş. (7-51) iyi bir iletken için α ve β'nın yaklaşık olarak eşit olduğunu ve her ikisinin de $\sqrt{f}$ ve $\sqrt{\sigma}$ arttıkça arttığını gösterir. Bir iyi iletken için

Bir iyi iletkenin zayıflama sabiti ve faz sabiti eşittir.

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}} \tag{7-52}$$

elde edilir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 292

Bir iyi iletkende öz empedansla zayıflama sabiti arasındaki ilişki

Bir iyi iletkenin öz empedansı

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \qquad (7\text{-}53)$$

bulunur ki bunun faz açısı 45°'dir. Böylece manyetik alan şiddeti elektrik alan şiddetinin 45° gerisindedir.

İyi iletkende faz hızı

Bir iyi iletkendeki faz hızı

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad \text{(m/s)} \qquad (7\text{-}54)$$

bulunur. Faz hızı $\sqrt{f}$ ve $1/\sqrt{\sigma}$ ile orantılıdır. Bakır örneğine bakarsak

$$\sigma = 5.80 \times 10^7 \quad \text{(S/m)}$$
$$\mu = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{(H/m)}$$

$$u_p = 720\,\text{(m/s)} \quad 3\,\text{(MHz)}$$

buluruz. Bu hız ışığın havadaki hızından çok daha yavaştır. İyi iletkendeki bir düzlem dalganın dalga boyu

İyi iletkende dalga boyu

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad \text{(m)} \qquad (7\text{-}55)$$

olur. Bakır için 3 (MHz)'de $\lambda = 0.24$(mm) bulunur. Karşılaştırma için havadaki bir elektromanyetik dalganın 3 (MHz)'deki dalga boyu 100 (m)'dir.

Çok yüksek frekanslarda bir iyi iletkenin Eş. (7-52) ile verilen α zayıflama sabiti çok büyük olma eğilimindedir. Bakır için 3 (MHz)'de

$$\alpha = \sqrt{\pi(3\times10^6)(4\pi\times10^{-7})(5.80\times10^7)} = 2.62\times10^4 \ \text{(Np/m)}$$

elde edilir. Zayıflama sabiti $e^{-\alpha z}$ olduğundan, bir dalga $\delta = 1/\alpha$ mesafesini ilerlediğinde dalganın genliği $e^{-1} = 0.368$ çarpanı ile zayıflayacaktır. Bakır için 3 (MHz)'de bu mesafe $(1/2.62)\times10^{-4}$ (m) veya 0.038 (m)'dir. 10 (GHz)'de bu mesafe sadece 0.66 (μm)'dir ve gerçekten küçüktür. Böylece yüksek frekanslı bir elektromanyetik dalga bir iyi iletken içinde çok çabuk zayıflar. Bir ilerleyen dalganın genliğinin e^{-1} veya 0.368 çarpanı ile azaldığı δ mesafesine iletkenin ***deri kalınlığı*** veya ***nüfuz derinliği*** adı verilir ve

Deri kalınlığı

Deri kalınlığının iletkenin öz iletkenliği ve manyetik geçirgenliği ile frekanstan bulunması

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad \text{(m)}} \qquad (7\text{-}56)$$

olarak bulunur. Bir iyi iletken için $\alpha = \beta$ olduğundan δ

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 293

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \text{(m)} \tag{7-57}$$

olarak yeniden yazılabilir. Mikrodalga frekanslarında bir iyi iletkenin deri kalınlığı veya nüfuz derinliği o kadar küçüktür ki tüm pratik amaçlar açısından alanlar ve akımların iletkenin çok ince bir tabakasına (yani, derisine) sınırlandığı kabul edilebilir.

ÖRNEK 7-4

Denizin içinde $+z$ yönünde ilerleyen doğrusal kutuplanmış bir düzgün düzlem dalganın elektrik alan şiddeti $z = 0$'da $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x 100 \cos(10^7 \pi t)$ (V/m) veriliyor. Deniz suyunun ortam parametreleri $\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ ve $\sigma = 4$ (S/m)'dir.

a) Zayıflama sabiti, faz sabiti, öz empedans, faz hızı, dalga boyu ve deri kalınlığını belirleyiniz.

b) $\mathbf{E}$'nin genliğinin $z = 0$'dakinin %1'ine düştüğü mesafeyi bulunuz.

c) $\mathbf{E}(z, t)$ ve $\mathbf{H}(z, t)$ ifadelerini $z = 0.8$ (m)'de t'nin fonksiyonu olarak yazınız.

ÇÖZÜM

$$\omega = 10^7 \pi \quad \text{(rad/s)}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6 \text{(Hz)} = 5 \text{(MHz)}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{4}{10^7\pi\left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)72} = 200 \gg 1$$

veriliyor. Bu nedenle iyi iletken formüllerini kullanabiliriz.

a) Zayıflama sabiti:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{5\pi 10^6 (4\pi 10^{-7}) 4} = 8.89 \quad \text{(Np/m)}.$$

Faz sabiti:

$$\beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 8.89 \quad \text{(rad/m)}.$$

Öz empedans:

$$\eta_c = (1 + j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$= (1 + j)\sqrt{\frac{\pi(5 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})}{4}} = \pi e^{j\pi/4} \quad (\Omega).$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 294

Faz hızı:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7\pi}{8.89} = 3.53 \times 10^6 \qquad \text{(m/s)}.$$

Dalga boyu:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} = 0.707 \qquad \text{(m)}.$$

Deri kalınlığı:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} = 0.112 \qquad \text{(m)}.$$

b) Dalganın genliğinin $z = 0$'daki değerinin %1'ine düştüğü mesafe

$$e^{-\alpha z_1} = 0.01 \quad \text{veya} \quad e^{\alpha z_1} = \frac{1}{0.01} = 100$$

$$z_1 = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{4.605}{8.89} = 0.518 \qquad \text{(m)}$$

olarak bulunur.

c) Fazör gösteriminde

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

yazabiliriz. **E**'nin anlık ifadesi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \mathscr{R}e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathscr{R}e[\mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}] = \mathbf{a}_x 100 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\end{aligned}$$

olur. $z = 0.8$(m)'de

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0.8, t) &= \mathbf{a}_x 100 e^{-0.8\alpha} \cos(10^7\pi t - 0.8\beta) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7\pi t - 7.11) \\ &= \mathbf{a}_x 0.082 \cos(10^7\pi t - 47.5°)^{(1)} \qquad \text{(V/m)}\end{aligned}$$

buluruz. Bir düzgün düzlem dalganın, $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ve her ikisinin de dalga yayılma yönü $\mathbf{a}_z$'ye dik olma özelliklerinden dolayı bir TEM dalgası olduğunu biliyoruz. Böylece $\mathbf{H} = \mathbf{a}_y H_y$ olur. **H**'nin anlık ifadesi $\mathbf{H}(z, t)$'yi bulmak için $H_y(z, t) = E_x(z, t)/\eta_c$ *yazma hatasına düşmemeliyiz*. Çünkü bu $E_x(z, t)$ ve $H_z(z, t)$ reel fonksiyonları ile η_c kompleks niceliğini karıştırmak demektir. Bunun yerine $E_x(z)$ ve $H_y(z)$ fazör nicelikleri kullanılmalıdır. Yani,

$$H_y(z) = \frac{E_x(z)}{\eta_c}$$

(1) 7.11 (rad) = 7.11 × (180/π) = 407.4° ki bu da faz bağıntılarında 407.4° − 360° = 47.5°'ye eşdeğerdir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 295

olur. Buradan da anlık nicelikler arasındaki

$$H_y(z,t) = \mathcal{R}e\left[\frac{E_x(z)}{\eta_c}e^{j\omega t}\right]$$

bağıntısını elde ederiz. Eldeki problemde, fazörlerle

$$H_y(0.8) = \frac{100e^{-0.8\alpha}e^{-j0.8\beta}}{\pi e^{j\pi/4}} = \frac{0.082e^{-j7.11}}{\pi e^{j\pi/4}} = 0.026e^{-j1.61}$$

bulunur. Birleştirmeden önce *her iki* açının radyan olmasına dikkat edilmelidir. O halde **H**'nin $z = 0.8$ (m)'deki anlık ifadesi

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0.8,t) &= \mathbf{a}_y 0.026\cos(10^7\pi t - 1.61)\\ &= \mathbf{a}_y 0.026\cos(10^7\pi t - 92.3^\circ) \qquad \text{(A/m)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. 5-(MHz)'lik bir düzlem dalganın deniz suyunda çok çabuk zayıfladığını ve kaynaktan çok kısa bir mesafede ihmal edilebilir kadar zayıf hale geldiğini görebiliriz. (Alan genliklerinin 0.8 (m)'deki değerleri yüzeydeki değerlerinin 0.082/100 = 0.00082 katına azalır.) Çok düşük frekanslarda dahi, dalmış bir denizaltı ile haberleşmek çok zordur.

■ **ALIŞTIRMA 7.7** Deniz suyunun deri kalınlığının on metre olduğu frekansı belirleyiniz. Buna karşılık gelen deniz suyu dalga boyunu bulunuz ve havadaki ile karşılaştırınız.

CEVAP: 633 (Hz), 62.8 (m), 474 (km).

TEKRAR SORULARI

S.7-15 Verilen bir frekansta bir iyi iletkenle bir iyi yalıtkanı birbirinden ne ayırır?

S.7-16 Bir iletkenin *deri kalınlığı* ile ne anlatılmak istenir?

NOTLAR

1. Biri iyi iletkenin zayıflama sabiti ve faz sabiti nümerik olarak eşittir.
2. Bir iyi iletkenin öz empedansının faz açısı 45°'dir.
3. Bir iyi iletkenin deri kalınlığı nümerik olarak zayıflama sabitinin tersine eşittir ve $\sqrt{f}$ ile $\sqrt{\sigma}$ 'ya ters orantılıdır.
4. İyi iletkenlerin 10 (GHz)'deki deri kalınlığı 1 (μm)'den azdır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 296

7-4 GRUP HIZI

Faz hızının tanımı

Eş. (7-10)'da tek frekanslı bir düzlem dalganın faz hızı u_p'yi bir eş-faz dalga cephesinin hızı olarak tanımladık. u_p ile β arasındaki ilişki

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{(m/s)} \tag{7-58}$$

dir. Kayıpsız ortamlardaki düzlem dalgalar için $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ω'nın lineer fonksiyonudur. Bunun sonucunda faz hızı $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ bir sabittir ve frekanstan bağımsızdır. Ancak bazı durumlarda (kayıplı bir dielektrik veya bir iletim hattı boyunca ilerleyen dalgalar veya dalga kılavuzlarındaki dalgalar) faz sabiti ω'nin lineer fonksiyonu değildir. Bu nedenle farklı frekanslar farklı faz hızıyla ilerler. Tüm bilgi taşıyan dalgalar bir frekans bandından oluştuğundan, bileşen frekansların dalgaları farklı faz hızlarıyla ilerleyecek ve sinyalin dalga şeklinde bozulmaya neden olacaktır. Bir başka deyişle sinyal "dağılacaktır". Faz hızının frekansa bağımlı olmasından dolayı oluşan sinyal bozulmasına ***dağılma*** denir. Eş. (7-50) ve (7-39)'un ışığında kayıplı dielektrik ***dağıtıcı ortamdır.***

Dağılma

Grup hızının tanımı

Bilgi taşıyan bir sinyalin normal olarak bir yüksek taşıyıcı frekans etrafında küçük bir frekans yayılması (yan bantları) vardır. Böyle bir sinyal bir frekans grubundan oluşur ve bir dalga paketi oluşturur. ***Grup hızı***, dalga paketi zarfının (bir frekans grubunun) yayılma hızıdır.

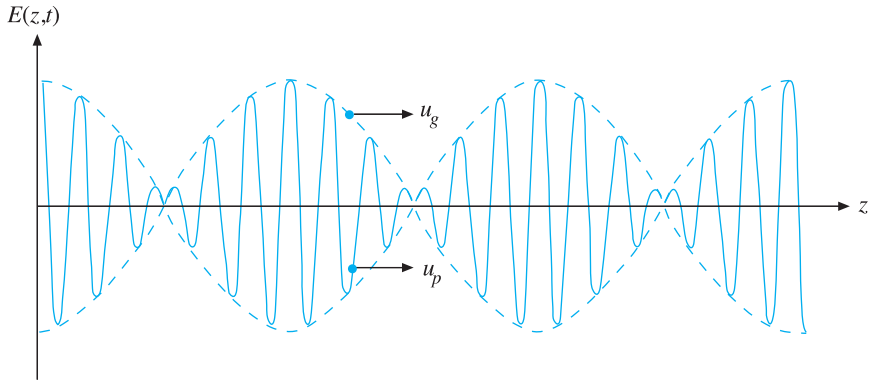
Eşit genliğe sahip, çok az farklı $\omega_0 + \Delta\omega$ ve $\omega_0 - \Delta\omega (\Delta\omega \ll \omega_0)$ açısal frekanslı iki ilerleyen dalgadan oluşan en basit dalga paketi durumunu düşünelim. Faz sabitleri de, frekansın fonksiyonu olduklarından dolayı, çok az farklı olacaktır. İki frekansa karşı gelen faz sabitleri $\beta_0 + \Delta\beta$ ve $\beta_0 - \Delta\beta$ olsun. Şimdi,

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z\right] \\ &\quad + E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z\right] \\ &= 2E_0 \cos\left(t\,\Delta\omega - z\,\Delta\beta\right) \cos\left(\omega_0 t - \beta_0 z\right) \end{aligned} \tag{7-59}$$

yazabiliriz. $\Delta\omega \ll \omega_0$ olduğundan Eş. (7-59)'daki ifade, ω_0 açısal frekansı ile hızla salınan ancak genliği $\Delta\omega$ açısal frekansı ile yavaşça değişen bir dalgayı temsil eder. Bu dalga Şekil 7-6'da gösterilmiştir.

Zarfın içindeki dalga $\omega_0 t - \beta_0 z$ = sabit alarak bulunan

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 297



ŞEKİL 7-6 İki eşit genlikli, çok az farklı frekanslı ve zamanda-harmonik ilerleyen dalganın verilen bir t anındaki toplamı.

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

faz hızıyla ilerler. Zarfın hızı (u_g ***grup hızı***) Eş. (7-58)'deki ilk kosinüs çarpanın genliğini bir sabite eşitleyerek belirlenebilir:

$$t\,\Delta\omega - z\,\Delta\beta = \text{ sabit}$$

ve buradan da

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/\Delta\omega}$$

elde edilir. $\Delta\omega \to 0$ limit durumunda bir dağıtıcı ortamdaki grup hızının

Dağıtıcı ortamlarda grup hızı formülü

$$u_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad \text{(m/s)} \tag{7-60}$$

formülüne ulaşırız. Bu hız, dalga paketi zarfının üzerindeki Şekil 7-6'da gösterilen gibi bir noktanın hızıdır ve dar bantlı bir sinyalin hızı olarak tanımlanır. Bir dağıtıcı ortamdaki grup hızı faz hızından yüksek veya düşük olabilir. Bir ortam, eğer $u_g < u_p$ ise normal dağılma, eğer $u_g > u_p$ ise anormal dağılma gösteriyor denir. $u_g = u_p$ olduğunda ise dağılma yoktur.

TEKRAR SORULARI

S.7-17 Bir sinyalin *dağılması* ile ne anlatılmak istenir? Dağıtıcı ortamlara bir örnek veriniz.

S.7-18 *Grup hızını* tanımlayınız. Grup hızı hangi açılardan faz hızından farklıdır?

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 298

NOTLAR

1. Bilgi taşıyan sinyaller sadece dağıtıcı olmayan ortamlarda bozulma olmaksızın yayılırlar.
2. Bir ortam, eğer β, ω'nın lineer fonksiyonu (ω ile doğru orantılı) ise dağıtıcı değildir.

7-5 ELEKTROMANYETİK GÜÇ AKIŞI VE POYNTING VEKTÖRÜ

Elektromanyetik dalgalar kendileriyle birlikte elektromanyetik güç taşırlar. Enerji, uzayda alıcı noktalara elektromanyetik dalgalarla iletilir. Şimdi böyle bir enerji transferi hızı ile, ilerleyen bir dalgaya eşlik eden elektrik ve manyetik alan şiddetleri arasında bir bağıntı çıkaracağız.

Dönel denklemleri ile başlarız:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(6-45a)(7-61)}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad \text{(6-45b)(7-62)}$$

Aşağıdaki vektör özdeşliği Kartezyen koordinatları kullanarak doğrudan sağlanabilir:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \qquad (7\text{-}63)$$

Eş. (7-61) ve Eş. (7-62), Eş. (7-63)'te yerine konursa

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (7\text{-}64)$$

bulunur. ϵ, μ ve σ ve parametreleri zamanla değişmeyen bir basit ortamda

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{E} \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma E^2$$

elde edilir. O halde Eş. (7-64)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \sigma E^2 \qquad (7\text{-}65)$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 299

olarak yeniden yazılabilir ki bu bir nokta-fonksiyon bağıntısıdır. Eş. (7-65)'in integral biçimi, her iki tarafın ilgili hacim üzerinde integralini alarak

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_V \sigma E^2 \, dv \qquad (7\text{-}66)$$

halinde bulunur. Burada $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$'nin hacim integrali ıraksama teoremi kullanılarak $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$'nin kapalı yüzey integraline çevrilmiştir.

Eş. (7-66)'nın sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimin, sırasıyla, elektrik ve manyetik alanlarda depolanan enerjinin zamanla değişim hızı olduğunu görürüz. [Eş.(3-106) ve Eş. (5-106) ile karşılaştırınız.] Son terim, $\mathbf{E}$ elektrik alanının varlığında akan $\sigma\mathbf{E}$ iletkenlik akımı yoğunluğu sonucunda harcanan direnil güçtür. Böylece Eş. (7-66)'nın sağ tarafını, depolanan elektrik ve manyetik enerjinin *azalış hızı* ve bundan çıkarılan, V hacminde ısı olarak harcanan direnil güç olarak yorumlayabiliriz. Enerjinin korunumu yasası ile tutarlı olmak için bu da hacmi kuşatan yüzeyden *çıkan* güce (enerji hızına) eşit olmalıdır. Böylece $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ niceliği birim alan başına güç akışını temsil eden bir vektördür.

$$\mathscr{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \qquad (7\text{-}67)$$

Poynting vektörünün tanımı

tanımlayalım. $\mathscr{P}$ niceliği ***Poynting vektörü*** olarak bilinir ve bir elektromanyetik alana eşlik eden güç yoğunluğu vektörüdür. $\mathscr{P}$'nin bir kapalı yüzey üzerinde Eş. (7-66)'da verildiği gibi yüzey integralinin, yüzeyin kuşattığı hacmi terk eden güce eşit olduğu cümlesi ***Poynting teoremi*** olarak bilinir. Bu sonuç düzlem dalgalarla sınırlı değildir ve geneldir.

Poynting teoremi

Eş (7-66) başka bir biçimde

$$-\oint_S \mathscr{P} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) \, dv + \int_V p_\sigma \, dv \qquad (7\text{-}68)$$

olarak yazılabilir, burada

$$w_e = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \text{ Elektrik enerji yoğunluğu} \qquad (7\text{-}69)$$

$$w_m = \tfrac{1}{2}\mu H^2 = \tfrac{1}{2}\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \text{ Manyetik enerji yoğunluğu} \qquad (7\text{-}70)$$

$$p_\sigma = \sigma E^2 = J^2/\sigma = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*/\sigma = \text{ Direnil güç yoğunluğu} \qquad (7\text{-}71)$$

dur. Sözle ifade edersek Eş. (7-68), herhangi bir anda kapalı bir yüzeyden *içeri* akan toplam gücün, depolanan elektrik ve manyetik enerjilerin artış hızının ve hacimde harcanan direnil gücün toplamına eşit olduğunu belirtir. Bir nicelik üzerindeki yıldız, o niceliğin kompleks eşleniğini göstermektedir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 300

ÖRNEK 7-5

I doğru akımını taşıyan uzun, düz bir iletken telin (σ öz iletkenlikli ve b yarıçaplı) yüzeyinde Poynting vektörünü bulunuz. Poynting teoremini sağlayınız.

ÇÖZÜM

Elimizde bir d-c durum olduğundan, teldeki akım telin kesit alanına düzgün olarak dağılmıştır. Telin ekseninin z-ekseni ile çakıştığını kabul edelim. Şekil 7-7 uzun telin ℓ uzunluğunda bir parçasını göstermektedir. Bu bilgilerle

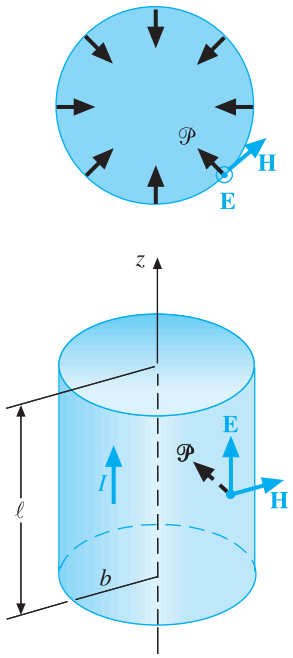
$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\pi b^2}$$

ve

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2}$$

yazabiliriz.

ŞEKİL 7-7 Poynting teoreminin sergilenmesi (Örnek 7-5).



+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 301

Telin yüzeyinde

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi \frac{I}{2\pi b}$$

dir. Böylece tel yüzeyindeki Poynting vektörü

$$\mathscr{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\phi) \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

$$= -\mathbf{a}_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

bulunur ki bu da her yerde tel yüzeyinden içeri yönlenmiştir.

Poynting teoremini sağlamak için $\mathscr{P}$'yi Şekil 7-7'deki tel parçasının duvarı üzerinde integralleriz:

$$-\oint_S \mathscr{P} \cdot d\mathbf{s} = -\oint_S \mathscr{P} \cdot \mathbf{a}_r \, ds = \left(\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\right) 2\pi b\ell$$

$$= I^2 \left(\frac{\ell}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R.$$

Burada Eş. (4-16)'daki bir düz telin direnç formülü $R = \ell/\sigma S$ kullanılmıştır. Yukarıdaki sonuç Poynting vektörünün negatif yüzey integralinin, iletken teldeki I^2R direnil güç kaybına tam olarak eşit olduğunu gösterir. Böylece Poynting teoremi sağlanmıştır.

7-5.1 ANLIK VE ORTALAMA GÜÇ YOĞUNLUKLARI

Zamanda-harmonik elektromanyetik dalgalarla çalışırken fazör gösterimini kullanmanın uygun olduğunu gördük. O halde $\cos \omega t$ referansı kullanıldığında bir niceliğin anlık değeri, fazör nicelikle $e^{j\omega t}$'nin çarpımının reel kısmıdır. Örneğin,

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_x E_x(z) = \mathbf{a}_x E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z} \tag{7-72}$$

fazörünün anlık ifadesi

Bir fazörden anlık ifadenin yazılması

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \mathscr{R}e\,[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \mathscr{R}e\,[e^{j(\omega t - \beta z)}] \\ &= \mathbf{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \tag{7-73}$$

olur. Bir kayıplı ortamda $+z$ yönünde yayılan düzgün düzlem dalga için ilgili manyetik alan fazörü

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{a}_y H_y(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \theta_\eta)} \tag{7-74}$$

dır. Burada θ_η ortamın $\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta_\eta}$ öz empedansının faz açısıdır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 302

$\mathbf{H}(z)$ için karşılık gelen anlık ifade

$$\mathbf{H}(z,\,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (7\text{-}75)$$

bulunur. Poynting vektörü veya güç yoğunluğunun anlık ifadesi Eş. (7-72) ve (7-74)'ten

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(z,\,t) &= \mathbf{E}(z,\,t) \times \mathbf{H}(z,\,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \mathscr{R}e[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \\ &= \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z}[\cos\theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \quad (7\text{-}76)^{(1)}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bir elektromanyetik dalganın ilettiği güç düşünüldüğünde ortalama değer anlık değerden daha önemlidir. Eş.(7-76)'dan zamanda-ortalama Poynting vektörü $\mathscr{P}_{\text{av}}(z)$

Bir düzgün düzlem dalganın +z yönünde ilettiği ortalama güç yoğunluğu

$$\mathscr{P}_{\text{av}}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{P}(z,\,t)\,dt = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \qquad (\text{W/m}^2) \quad (7\text{-}77)$$

bulunur, burada $T = 2\pi/\omega$ dalganın zaman periyodudur. Eş. (7-76)'nın sağ tarafındaki ikinci terim, bir periyot üzerinde ortalaması sıfır olan iki kat frekanslı bir kosinüs fonksiyonudur. Kayıpsız ortamda dalga yayılmasında $\eta_c \to \eta$ reeldir, $\sigma = 0$ ve $\theta_\eta = 0$ olur ve Eş. (7-77)

$$\mathscr{P}_{\text{av}}(z) = \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{2\eta} \qquad (\text{W/m}^2) \quad (7\text{-}78)$$

haline indirgenir. Genel durumda, z-yönünde yayılan bir dalga ile uğraşmıyor olabiliriz ve

Yayılan bir dalganın ortalama güç yoğunluğu için genel formül

$$\mathscr{P}_{\text{av}} = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \qquad (\text{W/m}^2) \quad (7\text{-}79)$$

yazabiliriz. Bu, yayılan bir dalganın ortalama güç yoğunluğunu hesaplamak için genel bir formüldür.

■ **ALIŞTIRMA 7.8** Eş. (7-72) ve Eş. (7-74)'te verilen $\mathbf{E}(z)$ ve $\mathbf{H}(z)$'nin fazör ifadelerini Eş.(7-79)'da yerine koyarak Eş. (7-77)'de elde edilen $\mathscr{P}_{\text{av}}$ ifadesini sağlayınız.

(1) Burada $\cos\theta_1\cos\theta_2 = \frac{1}{2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)]$ trigonometrik özdeşliğini kullandık.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 303

ÖRNEK 7-6

Boş uzayda, bir küresel koordinat sisteminin orijinine yerleştirilmiş olan $Id\ell$ kısa dikey akım elemanının uzak alanının R uzaklığındaki fazör ifadeleri

$$\mathbf{E}(R,\theta) = \mathbf{a}_\theta E_\theta(R,\theta) = \mathbf{a}_\theta \left(j\frac{60\pi I\, d\ell}{\lambda R}\sin\theta \right) e^{-j\beta R}\ (\text{V/m}) \qquad (7\text{-}80)$$

ve

$$\mathbf{H}(R,\theta) = \mathbf{a}_\phi \frac{E_\theta(R,\theta)}{\eta_0} = \mathbf{a}_\phi \left(j\frac{I\, d\ell}{2\lambda R}\sin\theta \right) e^{-j\beta R}\ (\text{A/m}) \qquad (7\text{-}81)$$

veriliyor. Burada $\lambda = 2\pi/\beta$ dalga boyudur.

a) Anlık Poynting vektörünün ifadesini yazınız.

b) Akım elemanı tarafından yayılan toplam ortalama gücü bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $E_\theta/H_\phi = \eta_0 = 120\pi\ (\Omega)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Anlık Poynting vektörü de

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(R,\theta;t) &= \mathscr{R}e[\mathbf{E}(R,\theta)e^{j\omega t}] \times \mathscr{R}e[\mathbf{H}(R,\theta)e^{j\omega t}] \\ &= (\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi)30\pi\left(\frac{I\, d\ell}{\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta \sin^2(\omega t - \beta R) \\ &= \mathbf{a}_R 15\pi\left(\frac{I\, d\ell}{\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta[1-\cos 2(\omega t - \beta R)] \qquad (\text{W/m}^2)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

b) Ortalama güç yoğunluğu vektörü Eş. (7-79)'dan

$$\mathscr{P}_{\text{av}}(R,\theta) = \mathbf{a}_R 15\pi\left(\frac{I\, d\ell}{\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta \qquad (7\text{-}82)$$

yazılabilir ki bunun da bu çözümün (a) şıkkında verilen $\mathscr{P}(R,\theta;t)$'nin zamanda-ortalama değerine eşit olduğu görülür. Yayılan toplam ortalama güç, $\mathscr{P}_{\text{av}}(R,\theta)$'nin R yarıçaplı bir küre üzerinde integrali alınarak bulunur:

$$\begin{aligned}\text{Toplam}\quad P_{\text{av}} &= \oint_S \mathscr{P}_{\text{av}}(R,\theta)\cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[15\pi\left(\frac{I\, d\ell}{\lambda R}\right)^2 \sin^2\theta\right] R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= 40\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 I^2 \qquad (\text{W}). \qquad (7\text{-}83)\end{aligned}$$

Burada I, $d\ell$'deki sinüzoidal akımın genliğidir (efektif değerin $\sqrt{2}$ katı).

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 304

■ **ALIŞTIRMA 7.9** Örnek 7-6'ya bakınız. $I = 5\,(\text{A})$ ve $d\ell = \lambda/20$ kabul ederek, uzak alanda 9 (m) uzaklıkta akım elemanına bakan ve $80° \leqslant \theta \leqslant 100°$ ve $0° \leqslant \phi \leqslant 20°$ ile tanımlanan bir küresel yüzey tarafından kesilen gücü belirleyiniz.

CEVAP: 0.354 (W).

TEKRAR SORULARI

S.7-19 *Poynting vektörünü* tanımlayınız. Bu vektör için SI birimi nedir?

S.7-20 Poynting teoremini veriniz.

S.7-21 Bir zamanda-harmonik elektromanyetik alan için, (a) anlık Poynting vektörü ve (b) zamanda-ortalama Poynting vektörünün ifadelerini elektrik ve manyetik alan şiddeti vektörleri cinsinden yazınız.

NOTLAR

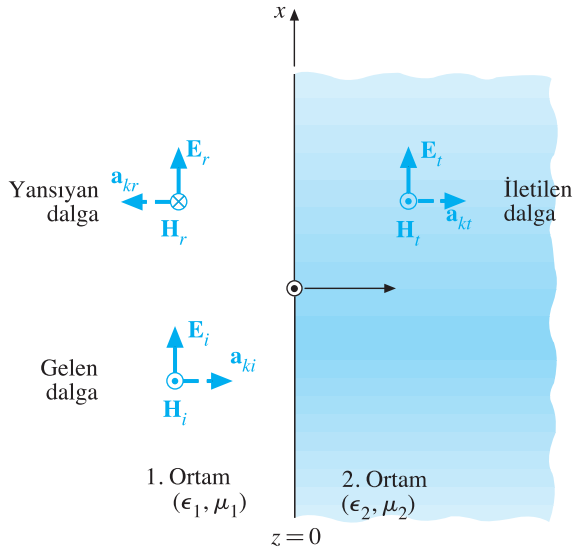
1. $\mathcal{P}$ Poynting vektörü **E** ve **H**'nin her ikisine de dik bir yöndedir.
2. Poynting teoremi enerjinin korunumu ilkesinin ifadesidir.
3. $$\mathcal{P}(z,t) = \mathcal{R}e[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \mathcal{R}e[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}]$$
$$\neq \mathcal{R}e[\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}(z)]e^{j\omega t}$$
olduğuna, yani önce **E** ve **H**'yi çapraz çarpmak ve sonra çarpımın reel kısmını almanın yanlış olduğuna dikkat edilmelidir.

7-6 DÜZLEM DALGALARIN DÜZLEM SINIRLARA DİK GELİŞİ

Şimdiye kadar düzgün düzlem dalgaların sınırsız homojen ortamlarda yayılmasını inceledik. Pratikte dalgalar sıklıkla değişik ortam parametreli birçok ortamın olduğu sınırlı bölgelerde yayılırlar. Bir ortamda ilerleyen bir elektromanyetik dalga değişik öz empedanslı bir diğer ortama çarptığında yansıma olur. İkinci ortamın bir mükemmel iletken olduğu durum dışında, gelen gücün bir kısmı ikinci ortama iletilir. Bu kısımda düzlem dalgaların bir düzlem sınıra dik geldiği, görece basit durumu inceleyeceğiz. Daha genel olan eğik gelme durumu sonraki kısımda çalışılacaktır.

Şekil 7-8'deki, 1. ortamdaki (ϵ_1, μ_1) gelen $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ dalgasının $+z$ yönünde 2. ortama (ϵ_2, μ_2) doğru ilerlediği durumu düşünelim. Sınır yüzeyi $z = 0$ düzlemidir. Her iki ortam kayıpsız kabul edilmiştir. Gelen $(\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_z)$ dalganın elektrik ve manyetik alan şiddeti fazörleri

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 305



ŞEKİL 7-8 Bir düzlem dielektrik sınıra dik olarak gelen düzlem dalga.

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \tag{7-84}$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \tag{7-85}$$

yazılabilir. $z = 0$'daki ortam süreksizliğinden dolayı gelen dalga kısmen 1. ortama geri yansıyacak ve kısmen de 2. ortama iletilecektir. Böylece aşağıdakileri yazabiliriz.

a) *Yansıyan dalga* $(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r)$ *için*: $\mathbf{a}_{kr} = -\mathbf{a}_z$ ve

$$\mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{r0} e^{j\beta_1 z} \tag{7-86}$$

$$\mathbf{H}_r(z) = (-\mathbf{a}_z) \times \frac{1}{\eta_1} \mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}. \tag{7-87}$$

b) *İletilen dalga* $(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$ *için*: $\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_z$ ve

$$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x E_{t0} e^{-j\beta_2 z}, \tag{7-88}$$

$$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_z \times \frac{1}{\eta_2} \mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}. \tag{7-89}$$

Burada E_{t0}, $\mathbf{E}_t$'nin $z = 0$'daki büyüklüğüdür. β_2 ve η_2 ise, sırasıyla, 2. ortamın faz sabiti ve öz empedansıdır. $\mathbf{E}_r$ ve $\mathbf{E}_t$ için yön oklarının gelişigüzel çizildiğine çünkü iki ortamın parametrelerinin görece büyüklüklerine bağlı olarak E_{r0} ve E_{t0} değerlerinin pozitif veya negatif olabileceğine dikkat edilmelidir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 306

Bilinmeyen iki E_{r0} ve E_{t0} büyüklüklerini belirlemek için iki denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler, elektrik ve manyetik alanın sağlaması gereken sınır koşullarından elde edilir. $z = 0$ dielektrik arayüzünde elektrik ve manyetik alan şiddetlerinin teğet bileşenleri (x-bileşenleri) sürekli olmalıdır. Buradan

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \quad \text{veya} \quad E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \tag{7-90}$$

ve

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \tag{7-91}$$

yazarız. Eş. (7-90) ve (7-91)'i çözerek

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \tag{7-92}$$

$$E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \tag{7-93}$$

Yansıma ve iletim katsayıları

elde ederiz. E_{r0}/E_{i0} ve E_{t0}/E_{i0} oranlarına, sırasıyla, ***yansıma katsayısı*** ve ***iletim katsayısı*** denir. Öz empedanslar cinsinden bunlar

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad \text{(Dik geliş)} \tag{7-94}$$

ve

$$\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad \text{(Dik geliş)} \tag{7-95}$$

olarak bulunur. Γ ve τ'nın Eş. (7-94) ve (7-95)'teki tanımları ortamlar kayıplı olduğunda dahi — yani η_1 ve/veya η_2 kompleks olduğunda dahi— geçerlidir. Böylece genel durumlarda Γ ve τ da kompleks olabilir. Yansıma ve iletim katsayıları aşağıdaki denklemle birbirine bağlıdır:

Dik geliş için yansıma ve iletim katsayıları arasındaki ilişki

$$1 + \Gamma = \tau \quad \text{(Dik geliş).} \tag{7-96}$$

1. ortamdaki ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) toplam alanı, gelen ve yansıyan alanların toplamıdır. Eş. (7-84) ve (7-86)'dan

Gelen dalga artı yansıyan dalga → duran dalga

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}(1 + \Gamma e^{-j\beta_1 z}) \tag{7-97}$$

yazarız ki bu z'nin fonksiyonudur. $|\mathbf{E}_1(z)|$ maksimum ve minimum değerlerine, sırasıyla, $(1 + \Gamma\, e^{j2\beta_1 z})$ çarpanının maksimum ve minimum olduğu yerlerde ulaşacaktır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 307

($e^{j2\beta_1 z}$'nin büyüklüğü birdir.) Gerçekte 1. ortamda bir duran dalga vardır.

Bir duran dalganın elektrik alan şiddetinin maksimum değerinin minimum değerine oranına ***duran-dalga oranı (SWR)***, S, denir:

Duran-dalga oranı

$$S = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{(Birimsiz).} \tag{7-98}$$

Eş. (7-98)'in ters bağıntısı

Duran-dalga oranından yansıma katsayısının büyüklüğünün bulunması

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \quad \text{(Birimsiz)} \tag{7-99}$$

bulunur. Γ değerleri -1 ile $+1$ arasında olmakla birlikte S'nin değeri 1 ile ∞ arasında değişir. S'yi bir logaritmik ölçekte ifade etmek yaygındır. Desibel olarak duran-dalga oranı $20 \log_{10} S$'dir. Böylelikle $S = 2$, $20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB) ve $|\Gamma| = (2-1)/(2+1) = \frac{1}{3}$'e karşılık gelir. 2 (dB) duran dalga oranı, $S = 1.26$ ve $|\Gamma| = 0.115$'e eşdeğerdir.

$|\Gamma|$'nın aralığı: 0'dan 1'e

S'nin aralığı: 1'den ∞'a

ALIŞTIRMA 7.10

a) $\Gamma = 0.20$'yi (dB) olarak S'ye çeviriniz.
b) $S = 3$ (dB)'yi $|\Gamma|$ yansıma katsayısına çeviriniz.

CEVAP: (a) 3.52 (dB), (b) 0.17.

1. ortamdaki manyetik alan şiddeti Eş. (7-85) ve Eş. (7-87)'deki, sırasıyla, $\mathbf{H}_i(z)$ ve $\mathbf{H}_r(z)$ birleştirilerek elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}\right) \\ &= \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}\left(1 - \Gamma e^{j2\beta_1 z}\right).\end{aligned} \tag{7-100}$$

Bu, Eş. (7-97)'deki $\mathbf{E}_1(z)$ ile karşılaştırılmalıdır. Kayıpsız bir ortamda Γ reeldir ve $|\mathbf{H}_1(z)|$, $|\mathbf{E}_1(z)|$'nin maksimum olduğu yerlerde minimum olacaktır; bunun tersi de geçerlidir.

2. ortamda ($\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$), $+z$ yönünde yayılan iletilen dalgadır. Eş. (7-88) ve Eş. (7-95)'ten

$$\mathbf{E}_t(z) = \mathbf{a}_x \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z} \tag{7-101}$$

buluruz. Eş. (7-89)'dan da

$$\mathbf{H}_t(z) = \mathbf{a}_y \frac{\tau}{\eta_2} E_{i0} e^{-j\beta_2 z} \tag{7-102}$$

elde ederiz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 308

ÖRNEK 7-7

Öz empedansı η_1 olan kayıpsız bir ortamdaki bir düzgün düzlem dalga, η_2 öz empedanslı bir başka kayıpsız ortama bir düzlem sınır boyunca dik olarak çarpmaktadır.

a) Her iki ortamdaki zamanda-ortalama güç yoğunluğu ifadelerini elde ediniz.

b) Eğer $\eta_2=2\eta_1$ ise 1. ortamdaki duran-dalga oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Eş. (7-79) zamanda-ortalama güç yoğunluğu veya zamanda-ortalama Poynting vektörünü hesaplamak için gerekli formülü sağlar:

$$\mathscr{P}_{\text{av}} = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*). \tag{7-103}$$

1. ortamda Eş. (7-97) ve Eş. (7-100)'ü kullanırız ve

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}_{\text{av}})_1 &= \mathbf{a}_z\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}\mathscr{R}e[(1+\Gamma e^{j2\beta_1 z})(1-\Gamma e^{-j2\beta_1 z})]\\ &= \mathbf{a}_z\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}\mathscr{R}e[(1-\Gamma^2)+\Gamma(e^{j2\beta_1 z}-e^{-j2\beta_1 z})]\\ &= \mathbf{a}_z\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}\mathscr{R}e[(1-\Gamma^2)+j2\Gamma\sin 2\beta_1 z]\\ &= \mathbf{a}_z\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}(1-\Gamma^2)\qquad (\text{W/m}^2)\end{aligned} \tag{7-104}$$

buluruz. Burada Γ reel bir sayıdır çünkü her iki ortam kayıpsızdır.

2. ortamda Eş. (7-101) ve Eş. (7-102)'yi kullanarak

$$(\mathscr{P}_{\text{av}})_2 = \mathbf{a}_z\frac{E_{i0}^2}{2\eta_2}\tau^2\qquad(\text{W/m}^2) \tag{7-105}$$

elde ederiz. Kayıpsız ortamlarla çalıştığımızdan, 1. ortamdaki güç akışı 2. ortamdakine eşittir, yani

$$(\mathscr{P}_{\text{av}})_1 = (\mathscr{P}_{\text{av}})_2 \tag{7-106}$$

veya

$$1-\Gamma^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\tau^2 \tag{7-107}$$

buluruz. Eş. (7-107)'nin doğru olduğu Eş. (7-94) ve Eş. (7-95) kullanılarak kolaylıkla sağlanabilir.

b) Eğer $\eta_2 = 2\eta_1$ ise

$\Gamma = \dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} = \dfrac{1}{3}$ elde edilir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 309

Böylece Eş. (7-98)'den

$$S = \frac{1+1/3}{1-1/3} = 2$$

bulunur. Desibel cinsinden $S = 20 \log_{10} 2 = 6.02$ (dB) olur.

■ **ALIŞTIRMA 7.11** Havada ilerleyen $\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{a}_y 24 \cos(10^8 t - \beta z)$ (V/m) dalgası, $z \geq 0$ bölgesinde bulunan $\epsilon_{r2} = 2.25$, $\mu_{r2}=1$ parametreli kayıpsız bir ortama dik olarak çarpıyor. (a) β, Γ, S, τ; (b) $\mathbf{E}_r(z, t)$; (c) $\mathbf{E}_2(z, t)$; (d) $\mathbf{H}_2(z, t)$ ve (e) $(\mathcal{P}_{av})_z$ değerlerini bulunuz.

CEVAP: (a) 1/3 (rad/m), –0.2, 1.5, 0.8; (b) $-\mathbf{a}_y 4.8 \cos(10^8 t + z/3)$ (V/m); (c) $\mathbf{a}_y 19.2 \cos(10^8 t - z/2)$ (V/m); (d) $-\mathbf{a}_x 0.0764 \cos(10^8 t - z/2)$ (A/m); (e) 0.733 (W/m^2).

7-6.1 İYİ İLETKEN ÜZERİNE DİK GELİŞ

Düzlem dalgaların bir düzlem sınıra dik gelişi tartışmalarımız kayıpsız ortamlar için yapılmıştır. Pratikte sıklıkla, bir ortamın iyi iletken olduğu $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ durumuyla karşılaşırız. Örnekler metalik yansıtıcılar ve dalga kılavuzlarıdır. Bu koşullar altında genellikle mükemel iletken yaklaşımını ($\sigma \to \infty$) kullanabilir ve iyi sonuçlar elde edebiliriz. Bu yaklaştırma tüm formüllerimizi basitleştirir.

Eş. (7-84) ve Eş. (7-85)'te verilen gelen alan vektör fazörlerini düşünelim:

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \qquad (7\text{-}84)(7\text{-}108)$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \qquad (7\text{-}85)(7\text{-}109)$$

İletken düzlem sınıra dik geliş için $\Gamma = -1$ ve $\tau = 0$'dır

Bu dalga $z = 0$'da bir mükemmel iletken düzlem sınıra çarpmaktadır. Eş. (7-53)'te σ yerine ∞ koyarsak $\eta_2 = 0$ buluruz. Bu beklendiği gibidir ve iletken sınır bir kısa devre olarak davranır. Eş. (7-94) ve Eş. (7-95)'ten $\Gamma = -1$ ve $\tau = 0$ olduğunu görürüz. Sonuç olarak $E_{r0} = \Gamma E_{i0} = -E_{i0}$ ve $E_{t0} = \tau E_{i0} = 0$ bulunur. Gelen dalga, fazı ters çevrilerek tümüyle geri yansıtılır ve mükemmel iletken bir sınırdan içeri hiç güç iletilemez. Buradan

$$\mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{a}_x E_{i0} e^{j\beta_1 z} \qquad (7\text{-}110)$$

$$\mathbf{H}_r(z) = -\mathbf{a}_y \times \frac{\mathbf{E}_r(z)}{\eta_1} = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \qquad (7\text{-}111)$$

ve

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = \mathbf{a}_x E_{i0}(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z})$$
$$= -\mathbf{a}_x j 2 E_{i0} \sin \beta_1 z \qquad (7\text{-}112)$$

yazarız. Manyetik alan ise

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 310

$$\mathbf{H}_1(z) = \mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

$$= \mathbf{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \qquad (7\text{-}113)$$

olarak bulunur. Eş. (7-112) ve Eş. (7-113) $\mathbf{E}_1(z)$ ve $\mathbf{H}_1(z)$'nin zamanda birbirine dik ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$'den $-j$ çarpanından dolayı 90° geridedir) olduğunu gösterir. Her ikisi de duran dalgaları gösterir ve Eş. (7-79)'dan, 1. ortamdaki toplam elektromanyetik dalgaya hiçbir ortalama gücün eşlik etmediği sonucuna varırız.

1. ortamdaki toplam alanın uzay-zaman davranışını incelemek için önce Eş. (7-112) ve Eş. (7-113)'te elde edilen elektrik ve manyetik alan şiddeti fazörlerinin anlık ifadelerini yazarız:

Düzlem iletken sınıra dik geliş durumunda toplam E_1 ve H_1 alanları duran dalgalardır.

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_1(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_x 2E_{i0} \sin \beta_1 z \sin \omega t \qquad (7\text{-}114)$$

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \mathscr{R}e[\mathbf{H}_1(z)e^{j\omega t}] = \mathbf{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \qquad (7\text{-}115)$$

$\mathbf{E}_1(z, t)$ ve $\mathbf{H}_1(z, t)$ tüm t için iletken sınırdan sabit uzaklıklarda sıfırlara ve maksimumlara sahiptir. Verilen bir t için $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$'in her ikisi de düzlem sınırdan ölçülen uzaklık ile sinüzoidal olarak değişirler (z, 1. ortamda negatiftir). $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ ve $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y H_1$ duran dalgaları birçok ωt değeri için Şekil 7-9'da gösterilmiştir. $\mathbf{E}_1$'in sonsuz iletken sınırda sıfır olduğunu görürüz; sınırdan $\lambda_1/2$ uzaklığın katlarında da sıfırdır. $\mathbf{H}_1$ duran dalgası $\mathbf{E}_1$ duran dalgasından çeyrek dalga boyu ($\lambda_1/4$) kayıktır.

ÖRNEK 7-8

y yönünde kutuplanmış, 100 (MHz)'lik ($\mathbf{E}_i$, H_i) düzgün düzlem dalga havada $+x$ yönünde yayılıyor ve $x = 0$'daki mükemmel iletken sınıra dik olarak çarpıyor. $\mathbf{E}_i$'nin genliğini 6 (mV/m) kabul ederek aşağıdakilerin fazör ve anlık ifadelerini yazınız.

a) Gelen dalganın $\mathbf{E}_i$ ve $\mathbf{H}_i$ ifadeleri.
b) Yansıyan dalganın $\mathbf{E}_r$ ve $\mathbf{H}_r$ ifadeleri.
c) Havadaki toplam dalganın $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ ifadeleri.

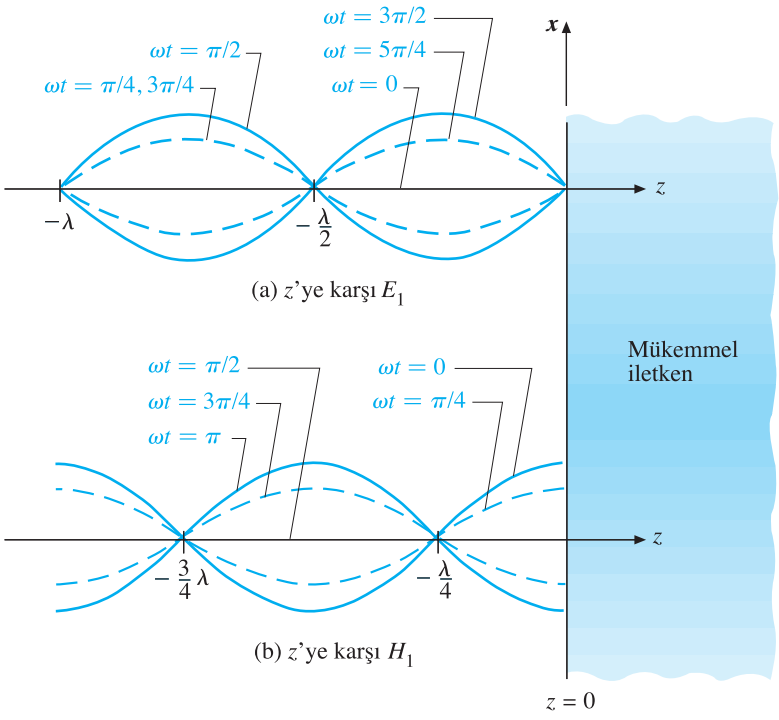
ÇÖZÜM

Verilen 100 (MHz) frekansında,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \qquad \text{(rad/s)}$$

$$\beta_1 = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{(rad/m)}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 311



ŞEKİL 7-9 Birçok ωt değeri için $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x E_1$ ve $\mathbf{H}_1 = \mathbf{a}_y \mathbf{H}_1$ duran dalgaları.

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \qquad (\Omega)$$

bulunur.

a) *Gelen dalga için* (*ilerleyen bir dalga*):

i) Fazör ifadeler

$$\mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} e^{-j2\pi x/3} \qquad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1}\mathbf{a}_x \times \mathbf{E}_i(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{-j2\pi x/3} \qquad (\text{A/m})$$

olarak elde edilir.

ii) Anlık ifadeler ise

$$\mathbf{E}_i(x,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_i(x)e^{j\omega t}]$$

$$= \mathbf{a}_y 6 \times 10^{-3} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right) \qquad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H}_i(x,t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right) \qquad (\text{A/m})$$

bulunur.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 312

b) *Yansıyan dalga için* (*ilerleyen bir dalga*):

i) Fazör ifadeler

$$\mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y 6\times 10^{-3} e^{j2\pi x/3} \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H}_r(x) = \frac{1}{\eta_1}(-\mathbf{a}_x)\times \mathbf{E}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j2\pi x/3} \quad (\text{A/m})$$

olarak elde edilir.

ii) Anlık ifadeler ise

$$\mathbf{E}_r(x,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_r(x)e^{j\omega t}]$$
$$= -\mathbf{a}_y 6\times 10^{-3}\cos\left(2\pi\times 10^8 t + \frac{2\pi}{3}x\right)(\text{V/m})$$
$$\mathbf{H}_r(x,t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi\times 10^8 t + \frac{2\pi}{3}x\right)(\text{A/m})$$

bulunur.

c) *Toplam dalga için* (*duran bir dalga*):

i) Fazör ifadeler

$$\mathbf{E}_1(x) = \mathbf{E}_i(x) + \mathbf{E}_r(x) = -\mathbf{a}_y j12\times 10^{-3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H}_1(x) = \mathbf{H}_i(x) + \mathbf{H}_r(x) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \quad (\text{A/m})$$

olarak elde edilir.

ii) Anlık ifadeler ise

$$\mathbf{E}_1(x,t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}_1(x)e^{j\omega t}]$$
$$= \mathbf{a}_y 12\times 10^{-3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\sin(2\pi\times 10^8 t) \quad (\text{V/m})$$
$$\mathbf{H}_1(x,t) = \mathbf{a}_z \frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\cos(2\pi\times 10^8 t) \quad (\text{A/m})$$

bulunur.

■ **ALIŞTIRMA 7.12** Örnek 7-8'deki problem için $|E_1|_{\max}$ ve $|H_1|_{\max}$ konumlarını bulunuz.

CEVAP: $x = -(2n+1)3/4\,(\text{m})$'de $|E_1|_{\max}$, $x = -3n/2\,(\text{m})$'de $|H_1|_{\max}$

$n = 0, 1, 2, \ldots,$

TEKRAR SORULARI

S.7-22 *Yansıma katsayısını* ve *iletim katsayısını* tanımlayınız. Dik geliş için ikisi arasındaki ilişki nedir?

S.7-23 Mükemmel iletken bir sınırda yansıma ve iletim katsayısı değerleri nedir?

S.7-24 *Duran dalga* nedir?

S.7-25 *Duran-dalga* oranını tanımlayınız. Yansıma katsayısı ile ilişkisi nedir?

S.7-26 Mükemmel iletken bir sınırda dik geliş için gelen ve yansıyan dalgaların oluşturduğu duran-dalga oranı nedir?

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 313

NOTLAR

1. Kayıpsız ortamlar için, Γ ve τ'nın her ikisi de reeldir. Γ pozitif veya negatif olabilir, ancak τ negatif olamaz.
2. Kayıplı ortamlarda Γ ve τ komplekstir. Bu da yansıma ve iletimde bir faz farkının oluştuğu anlamına gelir.
3. Bir duran dalga bir gelen dalga ile bir yansıyan dalganın üst üste binmesinin sonucudur.
4. Γ ve S birimsizdir: $0 \leqslant |\Gamma| \leqslant 1$ ve $1 \leqslant S \leqslant \infty$ geçerlidir.
5. $\eta_2 < \eta_1$ $|\Gamma < 0|$ olduğunda $|\mathbf{E}_1|$'in bir minimumu arayüzde oluşur; $\eta_2 > \eta_1$ olduğunda ise $|\mathbf{E}_1|$ arayüzde maksimumdur.

7-7 DÜZLEM DALGALARIN DÜZLEM SINIRLARA EĞİK GELİŞİ

Şimdi daha genel olan bir düzlem sınıra eğik olarak gelen düzgün düzlem dalga durumunu inceleyeceğiz. $z = 0$ düzleminin[1] 1. ortam (ϵ_1, μ_1) ve 2. ortam (ϵ_2, μ_2) arasında bir arayüz oluşturduğu Şekil 7-10'a bakınız. Sınıra dik birim vektörü ve dalga sayısı vektörü $\mathbf{a}_k$'yı barındıran düzleme ***geliş düzlemi*** denir. Üç açı önemlidir: ***Geliş açısı*** θ_i, ***yansıma açısı*** θ_r ve ***kırılma açısı*** (veya ***iletim açısı***) θ_t. Bunlar, sırasıyla, gelen, yansıyan ve iletilen dalgaların sınıra dik birim vektör ile yaptığı açılardır. AO, $O'A'$ ve $O'B$ doğruları, gelen, yansıyan ve iletilen dalgaların dalga cephelerinin (sabit faz yüzeyleri) geliş düzlemi ile kesişimleridir. Hem gelen, hem de yansıyan dalga 1. ortamda u_{p1} faz hızıyla yayıldığından $\overline{OA'}$ ve $\overline{AO'}$ uzaklıkları eşit olmalıdır. Böylece

Geliş düzlemi

Tüm açılar sınırın normalinden ölçülür.

$$\overline{OO'} \sin\theta_r = \overline{OO'} \sin\theta_i$$

veya

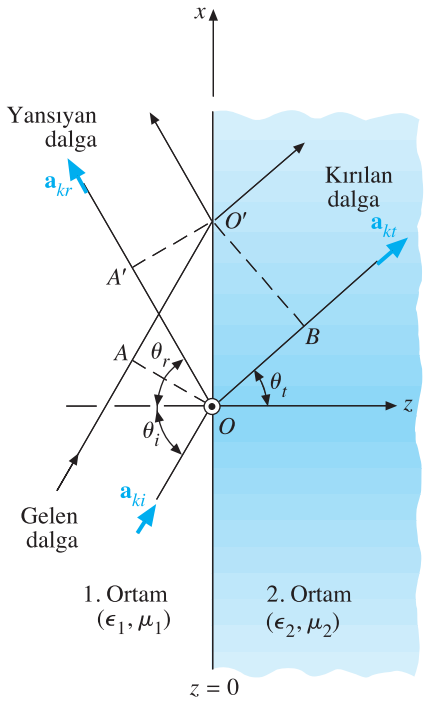
$$\theta_r = \theta_i \tag{7-116}$$

bulunur. Eş. (7-116) ***yansıma açısının geliş açısına eşit olduğunu***, yani ***Snell yansıma yasasını*** belirtir.

Snell yansıma yasası

[1] Burada genellikten kayıp yoktur. Çünkü her zaman koordinat sistemimizi z-ekseni sınır düzlemine dik olacak şekilde ayarlayabiliriz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 314



ŞEKİL 7-10 Bir düzlem dielektrik sınıra eğik olarak gelen düzgün düzlem dalga.

2. ortamda iletilen dalganın O'dan B'ye ilerlemesi için geçen zaman, gelen dalganın A'dan O'ya ilerlemesi için geçen zamana eşittir. Böylece

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO'}} = \frac{\overline{OO'}\sin\theta_t}{\overline{OO'}\sin\theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}}$$

yazılabilir, ki buradan da

Snell kırılma yasası

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad (7\text{-}117)$$

elde edilir. n_1 ve n_2, sırasıyla, 1. ve 2. ortamların kırılma indisidir. Bir ortamın ***kırılma indisi*** ışığın (elektromanyetik dalganın) boş uzaydaki hızının o ortamdaki hızına oranıdır: $n = c/u_p$. Eş. (7-117)'deki bağıntı ***Snell kırılma yasası*** olarak bilinir.

Bir ortamın kırılma indisi

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 315

Eşit geçirgenlikli olan ortamlar için Eş. (7-117)'de $\mu_1 = \mu_2$ alınırsa

$\mu_1 = \mu_2$ için Snell kırılma yasası

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \qquad (\mu_1 = \mu_2) \tag{7-118}$$

bulunur, burada η_1 ve η_2 ortamların öz empedansıdır.

Snell yansıma ve kırılma yasalarını, sonsuz bir yüzeyde gelen, yansıyan ve kırılan dalgaların ışın yollarını inceleyerek çıkardığımıza dikkat ediniz. Bu tartışmada dalgaların kutuplanması hiç kullanılmamıştır. Bu nedenle Snell yasaları dalgaların kutuplanmasından bağımsızdır.

7-7.1 TAM YANSIMA

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ olduğunda tam yansıma durumu

Şimdi Eş.(7-118)'deki Snell yasasını $\epsilon_1 > \epsilon_2$ için yani 1. ortamdaki dalga daha az yoğun olan 2. ortam üzerine geldiği durum için inceleyelim. Bu durumda $\theta_t > \theta_i$ olur. θ_t açısı θ_i ile arttığından $\theta_t = \pi/2$ olduğunda kırılan dalganın arayüzü yaladığı ilginç durum oluşur. θ_i'nin daha fazla artışı kırılan dalga olmamasına neden olur ve gelen dalganın tamamen yansıdığı söylenir. θ_t'nin $\pi/2$ olduğu ***tam yansımanın*** eşiğine karşılık gelen θ_c geliş açısına ***kritik açı*** denir. Eş. (7-118)'de $\theta_t = \pi/2$ koyarak

Kritik açı

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{7-119}$$

veya

Kritik açı formülü

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (\mu_1 = \mu_2) \tag{7-120}$$

elde ederiz. Bu durum, $\mathbf{a}_{ki}$, $\mathbf{a}_{kr}$ ve $\mathbf{a}_{kt}$'nin, sırasıyla, gelen, yansıyan ve kırılan dalgaların yayılma yönünü gösterdiği Şekil 7-11'de sergilenmiştir.

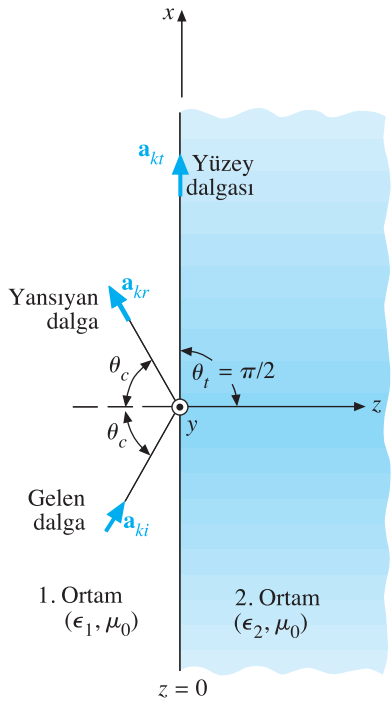
θ_i geliş açısı θ_c kritik açısından daha büyük olduğunda $(\sin\theta_i > \sin\theta_c = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1})$ matematiksel olarak ne olur? Eş. (7-118)'den

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\sin\theta_i > 1 \tag{7-121}$$

buluruz ki bu formül θ_t için reel çözüm vermez. Eş. (7-121)'deki θ_t halâ reel olmakla birlikte $\cos\theta_t$ değeri $\sin\theta_t > 1$ olduğundan aşağıdaki gibi sanal hale gelir:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}. \tag{7-122}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 316



ŞEKİL 7-11 Kritik açı ile gelen düzlem dalga, $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

2. ortamda Şekil 7-10'da gösterildiği gibi bir tipik iletilen (kırılan) dalganın yayılma yönündeki $\mathbf{a}_{kt}$ birim vektörü

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \sin\theta_t + \mathbf{a}_z \cos\theta_t \tag{7-123}$$

dır. $\mathbf{E}_t$ ve $\mathbf{H}_t$'nin her ikisi de, $\mathbf{R}$ Eş. (7-22)'de olduğu gibi yarıçap vektörünü göstermek üzere

$$e^{-j\beta_2 \mathbf{a}_{kt}\cdot\mathbf{R}} = e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{7-124}$$

çarpanı ile uyumlu olarak değişir. Eş. (7-118) ve Eş. (7-119) $\theta_i > \theta_c$ için kullanılırsa Eş. (7-124)'teki ifade

$$e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2x} x} \tag{7-125}$$

haline gelir. Burada

$$\alpha_2 = \beta_2\sqrt{(\epsilon_1/\epsilon_2)\sin^2\theta_i - 1} \tag{7-125a}$$

ve

$$\beta_{2x} = \beta_2\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}\,\sin\theta_i \tag{7-125b}$$

dir. Eş. (7-122)'deki üstteki işaret atılmıştır çünkü bu seçim z arttık-

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 317

Sönümlenen dalga ve yüzey dalgası

ça artan bir alanın bulunduğu olanaksız bir sonuç verir. $\theta_i > \theta_c$ için Eş. (7-125)'ten, arayüz boyunca (x-yönünde) bir ***sönümlenen dalganın*** varlığı ve bunun da 2. ortamda dik yönde (z-yönünde) üstel olarak (hızlı) zayıfladığı sonucuna varılabilir. Bu dalga arayüze sıkıca bağlıdır ve ***yüzey dalgası*** olarak adlandırılır. Şekil 7-11'de gösterilen bu dalga düzgün olmayan bir düzlem dalgadır. Bu koşullar altında 2. ortama hiç güç iletilmez (bkz. Problem P.7-27).

ÖRNEK 7-9

Optik frekanslarda suyun geçirgenliği $1.75\,\epsilon_0$'dır. Suda d derinliğindeki yönbağımsız bir ışık kaynağının 5 (m) yarıçaplı dairesel bir alanı aydınlattığı bulunmuştur. d'yi belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Suyun kırılma indisi $n_w = \sqrt{1.75} = 1.32$'dir. Şekil 7-12'ye bakınız. Aydınlık bölgenin $O'P = 5$ (m) yarıçapı,

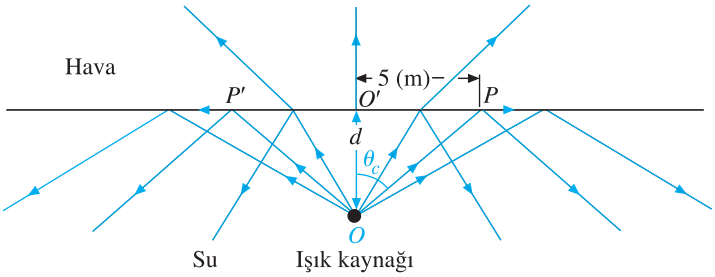
$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n_w}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.32}\right) = 49.2^\circ$$

kritik açısına karşılık gelir. Böylece

$$d = \frac{\overline{OP}}{\tan\theta_c} = \frac{5}{\tan 49.2^\circ} = 4.32 \qquad \text{(m)}$$

bulunur. Şekil 7-12'de gösterildiği gibi $\theta_i = \theta_c$ ile P noktasına gelen bir ışın bir yansıyan ve bir teğet kırılan ışına neden olur. $\theta_i < \theta_c$ için gelen dalgalar kısmen suya geri yansır ve kısmen kırılarak yukarıdaki havaya girer. $\theta_i > \theta_c$ olan dalgalar ise tamamen yansırlar (sönümlenen yüzey dalgaları şekilde gösterilmiştir).

ŞEKİL 7-12 Bir sualtı ışık kaynağı (Örnek 7-9).



+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 318

ÖRNEK 7-10

Saydam bir malzemeden yapılan bir dielektrik çubuk veya fiber, ışığı veya elektromanyetik dalgayı tam iç yansıma koşulları altında kılavuzlamak için kullanılabilir. Bir uçtan herhangi bir açı ile gelen bir dalganın diğer uçtan çıkana kadar çubuğa sınırlanması için gereken minimum kılavuz ortam dielektrik sabitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekil 7-13'e bakınız. Tam iç yansıma için θ_1, kılavuz dielektrik ortamın kritik açısı θ_c'ye eşit veya daha büyük olmalıdır, yani

$$\sin \theta_1 \geq \sin \theta_c \tag{7-126}$$

sağlanmalıdır. $\theta_1 = \pi/2 - \theta_t$ olduğundan Eş. (7-126)

$$\cos \theta_t \geq \sin \theta_c \tag{7-127}$$

haline gelir. Eş. (7-118)'deki Snell kırılma yasasından

$$\sin \theta_t = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \sin \theta_i \tag{7-128}$$

buluruz. Şekil 7-13'teki ϵ_1 ve ϵ_2'nin rollerinin Şekil 7-10'dakilerin tersi olduğuna dikkat ediniz. Eş. (7-128), Eş. (7-127)'de yerine konur ve Eş. (7-119) kullanılırsa

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \sin^2 \theta_i} \geq \sin \theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

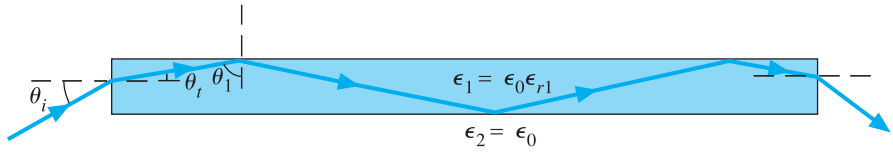
elde edilir. Bu da

$$\epsilon_{r1} \geq 1 + \sin^2 \theta_i \tag{7-129}$$

gerektirir. Eş. (7-129)'un sağ tarafı en büyük değerine $\theta_i = \pi/2$ iken ulaşacağından kılavuz ortamın bağıl dielektrik sabitinin en az 2 olması gerekir. Bu değer $n_1 = \sqrt{2}$ kırılma indisine karşılık gelir. Cam ve kuartz, bu dielektrik sabiti kısıtını sağlayan malzemelerdir.

Optik fiber için minimum dielektrik sabiti

ŞEKİL 7-13 Elektromanyetik dalgayı tam iç yansıma ile kılavuzlayan dielektrik çubuk veya fiber.



+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 319

■ **ALIŞTIRMA 7.13** Bir 30-(MHz)'lik düzgün düzlem dalga kayıpsız bir dielektrik ortamdan ($\epsilon = 2.25\epsilon_0, \mu = \mu_0$), $z = z_0$'daki düzlem sınırdan havaya girmektedir. Geliş açısı 30°'dır. Kırılma açısını ve dielektrik ortam ile havanın faz sabitlerini bulunuz.

CEVAP: 48.6°, 0.94 (rad/m), 0.63 (rad/m).

■ **ALIŞTIRMA 7.14** Alıştırma 7.13'te kritik açıyı bulunuz. Eğer geliş açısı 60° ise havadaki zayıflama ve faz sabitlerini belirleyiniz.

CEVAP: 41.8°, 0.52 (Np/m), 0.82 (rad/m).

TEKRAR SORULARI

S.7-27 *Geliş düzlemini* tanımlayınız.
S.7-28 *Snell yansıma yasasını* sözle ifade ediniz.
S.7-29 Manyetik olmayan iki komşu ortam için *Snell kırılma yasasını*, ortamların kırılma indisleri ve öz empedansları cinsinden ifade ediniz.
S.7-30 *Kritik açıyı* tanımlayınız. *Tam yansıma* ile ne anlatılmak istenir?
S.7-31 *Yüzey dalgasını* tanımlayınız.

NOTLAR

1. Snell yasaları dalga kutuplanmasından bağımsızdır.
2. Eğer ortamların parametreleri frekanstan bağımsız ise Snell yasaları dalga frekansından bağımsızdır.
3. Snell yasalarındaki tüm açılar arayüz normalinden ölçülür.
4. Tam yansıma sadece $\epsilon_1 > \epsilon_2$ olduğunda mümkündür.
5. $\theta_i > \theta_c$ olduğunda arayüzden hiç güç iletilmez.

7-7.2 İYONOSFER

İyonosferin kompozisyonu

Dünyanın atmosferinin üst kısmında, kabaca 50-100 (km) yüksekte ***iyonosfer*** adı verilen iyonlaşmış gaz tabakaları vardır. İyonosfer, güneşten gelen ultraviyole ışıma üst atmosferdeki atomlar ve moleküller tarafından soğurulduğunda ortaya çıkan serbest elektronlar ve pozitif iyonlardan oluşur. Yüklü parçacıklar dünyanın manyetik alanına yakalanma eğilimindedir. İyonlaşmış tabakaların yüksekliği ve karakteri, hem güneş radyasyonunun yapısına hem de atmosferin kompozisyonuna bağlıdır. Bunlar güneş lekesi döngüsü, mevsim ve günün saati ile karmaşık bir şekilde değişir. İyonlaşmış tabakaların herbirinde elektron ve iyon yoğunlukları temelde birbirine eşittir. Eşit elektron ve iyon yoğunluklu iyonlaşmış gazlara ***plazma*** denir.

Plazma

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 320

İyonosfer elektromanyetik dalgaların yayılmasında önemli bir rol oynar ve haberleşmeyi etkiler. Elektronlar pozitif iyonlardan çok daha hafif olduklarından, iyonosferden geçen elektromanyetik dalgaların elektrik alanı ile daha çok ivmelenirler. Analizler, iyonosferin veya plazmanın dalga yayılmasına olan etkisinin bir ϵ_p etkin geçirgenliği ile çalışılabileceğini göstermiştir. ***Etkin plazma geçirgenliği***

Etkin plazma geçirgenliği

$$\epsilon_p = \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \epsilon_0\left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right) \quad \text{(F/m)} \tag{7-130}$$

olarak tanımlanır, burada ω_p ***plazma açısal frekansıdır*** ve

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \tag{7-131}$$

ile verilir. Eş. (7-131)'de N birim hacim başına elektron sayısı ve e ile m, sırasıyla, elektron yükü ve kütlesidir.

Eş. (7-42) ve Eş. (7-130)'dan yayılma sabitini

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_0}\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \tag{7-132}$$

olarak elde ederiz. $f < f_p$ olduğunda γ reel hale gelir ve yayılma olmaksızın bir zayıflama olduğunu belirtir. Diğer taraftan eğer $f > f_p$ ise γ tümüyle sanaldır ve elektromanyetik dalgalar iyonosferde zayıflamadan (ihmal edilebilir çarpışma kayıpları kabul ederek) yayılacaktır.

Eğer e, m ve ϵ_0 değerleri Eş (7-131)'de yerine konursa plazma (kesim) frekansı için çok basit bir formül

Plazma frekansı formülü

$$f_p \cong 9\sqrt{N} \quad \text{(Hz)} \tag{7-133}$$

halinde bulunur. Daha önce belirttiğimiz gibi verilen bir yükseklikteki N sabit değildir; günün saati, mevsim ve diğer faktörlerle değişir. İyonosferin elektron yoğunluğu, en alt tabakada $10^{10}/\text{m}^3$ ile, en üst tabakada $10^{12}/\text{m}^3$ aralığında değişir. Eş. (7-133)'de N için bu değerleri kullanırsak f_p'nin 0.9–9(MHz) arasında değiştiğini buluruz. Böylece iyonosferden yukarıda bir uydu ile veya bir uzay istasyonu ile haberleşmek için, en büyük N'li tabakaya herhangi bir geliş açısı ile gelen elektromanyetik dalganın nüfuzunu garantileyecek şekilde 9 (MHz)'den çok yüksek frekanslar kullanmalıyız. 0.9 (MHz)'den düşük frekanslı sinyaller ise iyonosferin sınırı ve dünya yüzeyinden çoklu yansımalarla dünya çevresinde çok uzağa yayılabilirler. 0.9 ve 9 (MHz) arasında frekansa sahip sinyaller alt iyonosfer katmanlarına kısmen nüfuz eder ancak sonunda N'nin büyük olduğu yerden geri döner.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 321

ÖRNEK 7-11

Bir uzay aracı dünyanın atmosferine yeniden girdiğinde, hızı ve sıcaklığı çevresindeki atom ve molekülleri iyonlaştırır ve bir plazma oluşturur. Bu elektron yoğunluğunun (cm^3) başına 2×10^8 civarında olduğu tahmin edilmektedir. Plazmanın, uzay aracı ve dünyadaki görev kontrolörleri arasındaki radyo haberleşmesindeki frekans kullanımına etkisini tartışınız.

ÇÖZÜM

$$N = 2 \times 10^8/\text{cm}^3$$
$$= 2 \times 10^{14}\ /\text{m}^3$$

için Eş. (7-133), $f_p = 9 \times \sqrt{2 \times 10^{14}} = 12.7 \times 10^7\,(\text{Hz})$ veya 127 (MHz) verir. Böylece 127 (MHz)'den daha küçük frekanslarda radyo haberleşmesi kurulamaz.

TEKRAR SORULARI

S.7-32 *İyonosfer* nelerden oluşur?

S.7-33 Plazma frekansının önemi nedir?

Daha önce, Snell yasalarının ve sonuç olarak tam yansıma için kritik açının, gelen elektrik alanın kutuplanmasından bağımsız olduğunu belirtmiştik. Ancak yansıma ve iletim katsayısı formülleri kutuplanmaya bağımlıdır. Aşağıdaki iki alt kısımda dik ve paralel kutuplanma davranışlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

7-7.3 DİK KUTUPLANMA

Dik kutuplanmanın anlamı

Dik kutuplanma ile eğik geliş için $\mathbf{E}_i$, Şekil 7-14'te gösterildiği gibi geliş düzlemine diktir. Bu durumda

$$\mathbf{a}_{ki} = \mathbf{a}_x \sin\theta_i + \mathbf{a}_z \cos\theta_i, \tag{7-134}$$

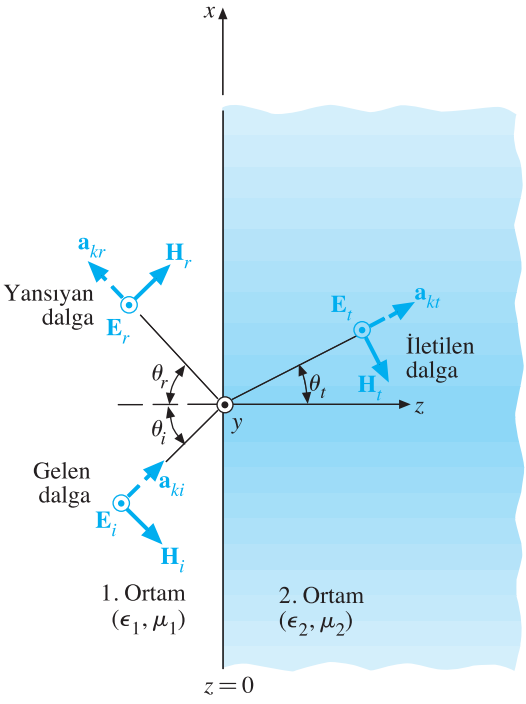
olduğuna dikkat ederek, Eş. (7-23) ve Eş. (7-25)'ten

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{7-135}$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\mathbf{a}_x \cos\theta_i + \mathbf{a}_z \sin\theta_i) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{7-136}$$

buluruz. Burada kayıpsız ortamda k_1 yerine β_1 kullanılmıştır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 322



ŞEKİL 7-14 Bir düzlem dielektrik sınıra eğik gelen düzlem dalga (dik kutuplanma).

Yansıyan dalga için,

$$\mathbf{a}_{kr} = \mathbf{a}_x \sin\theta_r - \mathbf{a}_z \cos\theta_r \tag{7-137}$$

olur. Yansıyan elektrik ve manyetik alanlar

$$\mathbf{E}_r(x,z) = \mathbf{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{7-138}$$

$$\mathbf{H}_r(x,z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\mathbf{a}_x \cos\theta_r + \mathbf{a}_z \sin\theta_r) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{7-139}$$

olarak bulunur. İletilen dalga için,

$$\mathbf{a}_{kt} = \mathbf{a}_x \sin\theta_t + \mathbf{a}_z \cos\theta_t \tag{7-140}$$

yazılabilir ve

$$\mathbf{E}_t(x,z) = \mathbf{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{7-141}$$

$$\mathbf{H}_t(x,z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\mathbf{a}_x \cos\theta_t + \mathbf{a}_z \sin\theta_t) e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{7-142}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerde dört bilinmeyen nicelik vardır. Bunlar E_{r0}, E_{t0}, θ_r ve θ_t'dir. Bunların belirlenmesi $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$'nin teğet bileşenlerinin $z = 0$ sınırındaki süreklilik koşullarının sağlanması ile olur.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 323

$E_{iy}(x,0)+E_{ry}(x,0)=E_{ty}(x,0)$ 'dan

$$E_{i0}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}+E_{r0}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r}=E_{t0}e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{7-143}$$

buluruz. Benzer şekilde $H_{ix}(x,0)+H_{rx}(x,0)=H_{tx}(x,0)$ 'dan

$$\frac{1}{\eta_1}(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}+E_{r0}\cos\theta_r e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r})$$

$$=-\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{7-144}$$

olması gerekir. Eş. (7-143) ve Eş. (7-144)'ün her x için sağlanması gerektiğinden x'in fonksiyonu olan üç üstel faktörün hepsi eşit olmalıdır ("faz uyumlama"). Böylece

$$\beta_1 x\sin\theta_i=\beta_1 x\sin\theta_r=\beta_2 x\sin\theta_t$$

bulunur ki bu da, Snell yansıma yasasını ($\theta_r=\theta_i$) ve Snell kırılma yasasını ($\sin\theta_t/\sin\theta_i=\beta_1/\beta_2=n_1/n_2$) verir. Eş. (7-143) ve Eş. (7-144) basitçe

$$E_{i0}+E_{r0}=E_{t0} \tag{7-145}$$

ve

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0}-E_{r0})\cos\theta_i=\frac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t \tag{7-146}$$

olarak yazılabilir ve buradan E_{r0} ve E_{t0}, E_{i0} cinsinden bulunabilir. Sonuçta yansıma ve iletim katsayıları

Dik kutuplanma için yansıma katsayısı

$$\Gamma_\perp=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \tag{7-147}$$[1]

ve

Dik kutuplanma için iletim katsayısı

$$\tau_\perp=\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \tag{7-148}$$[1]

olarak elde edilir. $\theta_i=0$ olduğunda $\theta_r=\theta_t=0$ olur ve bu ifadeler dik geliş durumu ifadelerine —Eş. (7-94) ve Eş. (7-95)— indirgenir. Ayrıca $\Gamma_\perp$ ve $\tau_\perp$ aşağıdaki şekilde ilişkilidir,

Dik kutuplanma için yansıma ve iletim katsayılarının ilişkisi

$$1+\Gamma_\perp=\tau_\perp \tag{7-149}$$

ve bu da dik geliş için olan Eş. (7-96)'ya benzerdir.

[1] Bunlara bazen ***Fresnel denklemleri*** denir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 324

Eğer 2. ortam bir mükemmel iletken ise $\eta_2 = 0$'dır. Bu durumda $\Gamma_\perp = -1$ ($E_{r0} = -E_{i0}$) ve $\tau_\perp = 0$ ($E_{t0} = 0$) olur. İletkenin yüzeyindeki teğet **E** alanı sıfır olur ve mükemmel iletken bir sınırdan hiç enerji iletilemez.

ÖRNEK 7-12

Havadaki bir düzgün düzlem dalganın elektrik alanının anlık ifadesi

$$\mathbf{E}_i(x, z; t) = \mathbf{a}_y 10 \cos(\omega t + 3x - 4z) \quad (\text{V/m})$$

veriliyor. Dalga $z = 0$'daki mükemmel iletken düzlem sınıra gelmektedir.

a) β_1 faz sabitini, ω açısal frekansını ve θ_i geliş açısını bulunuz.

b) $\mathbf{E}_r(x, z)$'yi bulunuz.

c) $\mathbf{E}_1(x, z; t)$'nin davranışını tartışınız.

ÇÖZÜM

a) $\mathbf{E}_r$ nin fazör ifadesi

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10 e^{j3x - j4z}$$

yazılır ki bu da $-x$ ve $+z$ yönlerinde ilerleyen dik kutuplanmış bir dalgadır. Eş. (7-20) ve Eş. (7-21) ışığında

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{ki} k_i = -\mathbf{a}_x(\beta_1 \sin\theta_i) + \mathbf{a}_z(\beta_1 \cos\theta_i)$$

olur. Burada kayıpsız 1. ortam için $k_i = \beta_1$ alınmıştır. Böylece

$$\beta_1 \sin\theta_i = 3 \quad \text{ve} \quad \beta_1 \cos\theta_i = 4$$

bulunur, buradan da

$$\beta_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (\text{rad/m}) \quad \text{ve}$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36.9^\circ$$

elde edilir. Ayrıca $\beta_1 = \omega/c$ ve $\omega = \beta_1 c = 5 \times (3 \times 10^8) = 1.5 \times 10^9$ (rad/s) olur.

b) Bir mükemmel iletken arayüz için $\Gamma_\perp = -1$, $E_{r0} = -E_{i0} = -10$ ve

$$\mathbf{E}_r(x, z) = -\mathbf{a}_y 10 e^{j3x + j4z}$$

bulunur ki bu da $-x$ ve $-z$ yönlerinde ilerlemektedir.

c) Birinci ortamdaki toplam alan

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(x, z) &= \mathbf{E}_i(x, z) + \mathbf{E}_r(x, z) \\ &= \mathbf{a}_y 10(e^{-j4z} - e^{j4z})e^{j3x} \\ &= -\mathbf{a}_y 20j(\sin 4z)e^{j3x}\end{aligned}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 325

bulunur. Bu da

$$\mathbf{E}_1(x, z; t) = \mathbf{a}_y 20(\sin 4z) \cos (1.5 \times 10^9 t + 3x - \pi/2)$$

anlık ifadesine karşılık gelir. Böylece $\mathbf{E}_1(x, z; t)$, $-z$ yönünde bir duran dalgadan ve $-x$ yönünde bir ilerleyen dalgadan oluşmaktadır. Duran dalga $4z = n\pi$ veya $z = n\pi/4$ ($n = 0, 1, 2,\ldots$) noktalarında sıfır değerine sahip olur. İlerleyen dalga düzgün olmayan bir düzlem dalgadır. Çünkü z yönünde genliği sabit değildir.

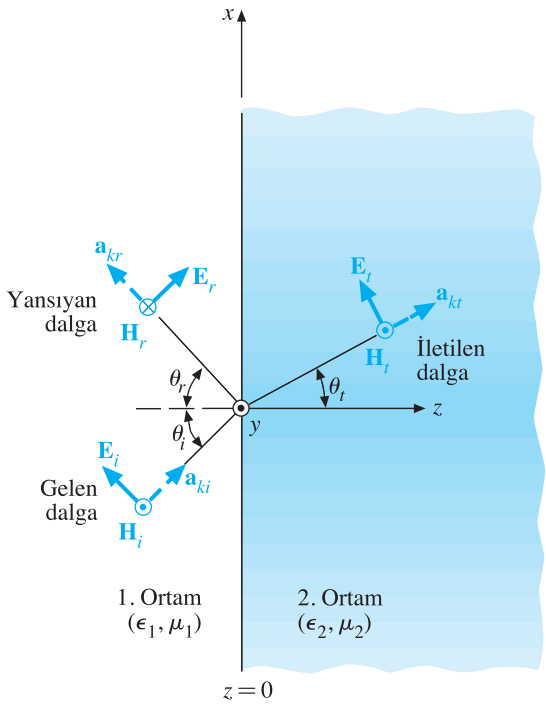
7-7.4 PARALEL KUTUPLANMA

Paralel kutuplanmanın anlamı

Paralel kutuplanmış bir düzgün düzlem dalga bir düzlem sınıra eğik geldiğinde $\mathbf{E}_i$ Şekil 7-15'te gösterildiği gibi geliş düzlemine paraleldir. ($\mathbf{H}_i$ geliş düzlemine diktir). Birinci ortamdaki gelen ve yansıyan elektrik ve manyetik alan şiddeti fazörleri

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0}(\mathbf{a}_x \cos \theta_i - \mathbf{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (7\text{-}150)$$

ŞEKİL 7-15 Bir düzlem dielektrik sınıra eğik gelen düzlem dalga (paralel veya yatay kutuplanma).



+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 326

$$\mathbf{H}_i(x,z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{7-151}$$

$$\mathbf{E}_r(x,z) = E_{r0}(\mathbf{a}_x \cos\theta_r + \mathbf{a}_z \sin\theta_r) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{7-152}$$

$$\mathbf{H}_r(x,z) = -\mathbf{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{7-153}$$

yazılır. İkinci ortamdaki iletilen elektrik ve manyetik alan şiddeti fazörleri ise

$$\mathbf{E}_t(x,z) = E_{t0}(\mathbf{a}_x \cos\theta_t - \mathbf{a}_z \sin\theta_t) e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{7-154}$$

$$\mathbf{H}_t(x,z) = \mathbf{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{7-155}$$

olarak ifade edilir. **E** ve **H**'nin teğet bileşenlerinin $z = 0$'daki süreklilik koşulları yine Snell yansıma ve kırılma yasalarını ve ek olarak aşağıdaki iki denklemi verir:

$$(E_{i0} + E_{r0})\cos\theta_i = E_{t0}\cos\theta_t \tag{7-156}$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2} E_{t0}. \tag{7-157}$$

Bunlardan E_{r0} ve E_{t0}, E_{i0} cinsinden çözülerek

Paralel kutuplanma için yansıma katsayısı

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{7-158}^{(1)}$$

ve

Paralel kutuplanma için iletim katsayısı

$$\tau_{\parallel} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{7-159}^{(1)}$$

elde edilir. Ayrıca

Paralel kutuplanma için yansıma ve iletim katsayılarının bağıntısı

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel}\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right) \tag{7-160}$$

olduğu kolaylıkla sağlanabilir. Eş. (7-160)'ın dik kutuplanmadaki Eş. (7-149)'dan, dik geliş durumu olan $\theta_i = \theta_t = 0$ durumu dışında farklı olduğu görülür.

Eğer 2. ortam bir mükemmel iletken ise ($\eta_2 = 0$) Eş. (7-158) ve Eş. (7-159), sırasıyla, $\Gamma_{\parallel} = -1$ ve $\tau_{\parallel} = -0$ haline gelir ki bu da bek-

(1) Bunlar da ***Fresnel denklemleri*** olarak bilinir.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 327

lendiği gibi iletkenin yüzeyindeki toplam **E**'nin teğet bileşenini sıfır yapar. Şekil 7-14 ve 7-15'te $\mathbf{E}_r$ ve $\mathbf{H}_r$'nin referans yön seçiminin tümüyle gelişigüzel olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbf{E}_r$ ve $\mathbf{H}_r$'nin gerçek yönleri Eş. (7-147)'deki $\Gamma_\perp$ ve Eş. (7-158)'deki $\Gamma_\parallel$'in pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak şekildeki ile aynı veya ters olabilir.

Eğer $|\Gamma_\perp|^2$ ve $|\Gamma_\parallel|^2$'yi θ_i'ye karşı çizersek öncekinin, ikisinin eşit olduğu $\theta_i = 0$ durumu dışında sonrakinden her zaman büyük olduğunu görürüz. Bu da, kutuplanmamış bir dalga bir düzlem dielektrik sınıra vurduğunda, yansıyan dalgadaki dik kutuplanmış bileşenin gücünün paralel kutuplanmış bileşeninkinden daha fazla olacağı anlamına gelir. Bu gerçeğin popüler bir uygulaması güneş parlamasını azaltmak için Polaroid güneş gözlüklerinin tasarımıdır. Göz tarafından algılanan güneş ışığının çoğu dünya üzerindeki yatay yüzeylerden yansır. $|\Gamma_\perp|^2 > |\Gamma_\parallel|^2$ olduğundan göze ulaşan ışık baskın olarak yansıma düzlemine (geliş düzlemi ile aynıdır) diktir ve böylece elektrik alanı dünya yüzeyine paraleldir. Polaroid güneş gözlükleri bu bileşeni filtrelemek için tasarlanmıştır.

Güneş parıltısını azaltmak için Polaroid güneş gözlüğünün ilkesi

7-7.5 HİÇ YANSIMANIN OLMADIĞI BREWSTER AÇISI

Eş. (7-158)'deki yansıma katsayısının payının iki terimin farkı olduğuna dikkat edelim. Bu da yansıma olmaması için $\Gamma_\parallel = 0$ yapan bir η_1, η_2 ve θ_i birleşimi olup olmadığı sorusunu gündeme getirir. Bu özel θ_i'yi $\theta_{B\parallel}$ ile gösterirsek,

$$\eta_2 \cos \theta_t = \eta_1 \cos \theta_{B\parallel} \tag{7-161}$$

veya

$$\sin^2 \theta_{B\parallel} = \frac{1 - (\eta_2/\eta_1)^2}{1 - (\eta_2\beta_1/\eta_1\beta_2)^2}$$

istiyoruz. Eş. (7-161)'in her iki tarafının karesini alır ve Eş. (7-117)'yi kullanırsak

$$\sin^2 \theta_{B\parallel} = \frac{1 - \mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1 - (\epsilon_1/\epsilon_2)^2} \tag{7-162}$$

elde ederiz. $\theta_{B\parallel}$ açısı paralel kutuplanma için hiç yansımanın olmadığı ***Brewster açısı*** olarak bilinir.

Hiç yansımasız Brewster açısı

Brewster açısı formülü

$$\sin \theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon_1/\epsilon_2)}}, \qquad (\mu_1 = \mu_2) \tag{7-163}$$

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 328

Eş. (7-163)'ün alternatif bir biçimi aşağıdaki gibi bulunur:

Alternatif Brewster açısı formülü

$$\theta_{B\|} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \qquad (\mu_1 = \mu_2). \tag{7-164}$$

■ **ALIŞTIRMA 7.15** Eş. (7-163) ve Eş. (7-164)'ün eşdeğer olduğunu sağlayınız.

Bu noktada okuyucu dik kutuplanmada hiç yansıma olmaması için Brewster açısını niçin aramadığımızı merak edebilir. Matematiksel olarak $\Gamma_\perp$'i sıfır yapan θ_i geliş açısı olan $\theta_{B\perp}$ için matematiksel bir formül bulabilirdik. Eş. (7-147)'nin payını sıfıra eşitlersek

$$\eta_2 \cos\theta_{B\perp} = \eta_1 \cos\theta_t \tag{7-165}$$

koşulu bulunur. Bu koşul Eş. (7-117)'deki Snell yansıma yasası ile birlikte

$$\sin^2\theta_{B\perp} = \frac{1-\mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1-(\mu_1/\mu_2)^2} \tag{7-166}$$

verir. Şimdi eğer $\mu_1 = \mu_2$ ise $\theta_{B\perp}$'in var olmadığı açıktır. Bu, çoğunlukla karşılaşılan durumdur.

Dik ve paralel kutuplanmaların Brewster açı formülleri farklı olduğundan kutuplanmamış bir dalgada bu iki tip kutuplanmanın ayrılması mümkündür. Rasgele ışık gibi kutuplanmamış bir dalga bir sınıra Eş. (7-164) ile verilen Brewster açısı ile geliyorsa sadece dik kutuplanmış bileşen yansıyacaktır. Bu nedenle Brewster açısı aynı zamanda ***kutuplama açısı*** olarak bilinir. Bu ilkeye dayanarak bir lazer tüpünün iki ucunda Brewster açısında ayarlanmış kuartz pencereler, yayılan ışık hüzmesinin kutuplanmasını kontrol etmek için kullanılır.

ÖRNEK 7-13

Bir elektromanyetik dalga havadan, dielektrik sabiti 80 olan su yüzeyine gelmektedir.

a) Paralel kutuplanma için $\theta_{B\|}$ Brewster açısını ve karşılık gelen iletim açısını bulunuz.

b) Eğer dalga dik kutuplanmışsa ve havadan su yüzeyine $\theta_i = \theta_{B\|}$ ile gelirse yansıma ve iletim katsayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Paralel kutuplanmada hiç yansımanın olmadığı Brewster açısı Eş. (7-163)'ten doğrudan,

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 329

$$\theta_{B\|} = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(1/\epsilon_{r2})}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(1/80)}} = 81.0^\circ$$

olarak elde edilir. Buna karşılık olan iletim açısı Eş. (7-118)'den

$$\theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta_{B\|}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}+1}}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right) = 6.38^\circ$$

bulunur.

b) Dik kutuplanmış gelen dalga için $\Gamma_\perp$ ve $\tau_\perp$'i bulmak için θ_i = 81.0° ve θ_t = 6.38°alarak Eş. (7-147) ve Eş. (7-148)'i kullanırız ($\eta_1 = 377\,\Omega$, $\eta_2 = 377/\sqrt{\epsilon_{r2}} = 40.1\,\Omega$'dur):

$$\Gamma_\perp = \frac{40.1\cos 81^\circ - 377\cos 6.38^\circ}{40.1\cos 81^\circ + 377\cos 6.38^\circ} = -0.967$$

$$\tau_\perp = \frac{2\times 377\times\cos 81^\circ}{40.1\cos 81^\circ + 377\cos 6.38^\circ} = 0.033.$$

$\Gamma_\perp$ ve $\tau_\perp$ arasında Eş. (7-149) ile verilen bağıntının sağlandığına dikkat edilmelidir.

TEKRAR SORULARI

S.7-34 Düzlem dalgaların bir düzlem sınıra eğik gelişi için dik kutuplanma ve paralel kutuplanmayı tanımlayınız.

S.7-35 Hangi koşullar altında dik kutuplanma için yansıma ve iletim katsayıları paralel kutuplanma durumundakilerle aynıdır?

S.7-36 *Brewster açısını* tanımlayınız. Bu açı manyetik olmayan iki ortamın arayüzünde ne zaman var olur?

S.7-37 Brewster açısı niçin *kutuplama açısı* olarak da adlandırılır?

NOTLAR

1. Bir arayüzdeki yansıma ve iletim katsayıları, ortamların parametrelerine ve geliş açısına ek olarak dalganın kutuplanmasına da bağlıdır.
2. Sadece $\epsilon_2 < \epsilon_1$ olduğunda var olan tam yansıma kritik açısının aksine, iki manyetik olmayan ortam için, paralel kutuplanmada hiç yansımanın olmadığı Brewster açısı $\epsilon_2 < \epsilon_1$ veya $\epsilon_2 > \epsilon_1$ durumlarında her zaman vardır.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 330

ÖZET

Elektromanyetik dalgalar yayan bir sonlu kaynaktan çok büyük uzaklıklarda dalga cephesinin küçük bir kısmı düzleme çok benzerdir. Bu nedenle düzgün düzlem dalgaların çalışılması özellikle önemlidir. Bu bölümde,

- hem kayıpsız hem de kayıplı ortamlarda düzgün düzlem dalgaların davranışını inceledik.
- Zamanda-harmonik bir kaynak ve bir alıcı arasında göreli bir hareket olduğunda Doppler etkisini açıkladık.
- Düzlem dalgaların kutuplanmasını tartıştık ve doğrusal kutuplanmış dalgalarla dairesel kutuplanmış dalgalar arasındaki ilişkiyi gösterdik.
- Kayıplı ortamlarda kompleks dalga sayısı ve kompleks yayılma sabitinin anlamını açıkladık.
- İletkenlerdeki deri etkisini çalıştık ve deri kalınlığı formülünü çıkardık.
- Sinyal dağılması kavramını inceledik ve faz ve grup hızları arasındaki farkı açıkladık.
- Elektromanyetik güç akışını ve Poynting teoremini tartıştık.
- Elektromanyetik dalgaların düzlem sınırlardan yansıma ve kırılmalarını hem dik hem de eğik geliş için çalıştık.
- Snell yansıma ve kırılma yasalarını çıkardık.
- İyonosferin dalga yayılmasına etkisini açıkladık ve
- tam yansıma ve sıfır yansıma koşullarını inceledik.

PROBLEMLER

P.7-1 (a) Kaynaksız ve parametreleri ϵ, μ, σ olan iletken bir ortamda $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ için geçerli olan dalga denklemlerini elde ediniz. (b) Zamanda-harmonik durum için karşılık gelen Helmholtz denklemlerini elde ediniz.

P.7-2 Yerde 1-(GHz) frekanslı bir Doppler radarı yaklaşmakta olan bir uçağın konumunu ve hızını belirlemek için kullanılmaktadır. İrtifa açısı 15.5° olan uçaktan yansıyan sinyalin 0.3 (ms) zaman gecikmesi ve 2.64 (kHz) frekans kayması ile geri döndüğünü kabul ederek uçağın uzaklığını, yüksekliğini ve hızını bulunuz.

P.7-3 Bir TEM dalgasında $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ fazörünü $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ fazörü ve ortamın öz empedansı cinsinden ifade eden genel bir formül elde ediniz. Burada $\mathbf{R}$ yarıçap yani konum vektörüdür.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 331

P.7-4 Havada $+y$ yönünde yayılan bir düzgün düzlem dalganın manyetik alan şiddetinin anlık ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_z 4 \times 10^{-6} \cos\left(10^7 \pi t - k_0 y + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(A/m)}.$$

a) k_0'ı ve $t = 3$ (ms)'de H_z'nin sıfır olduğu yerleri belirleyiniz.

b) **E** için anlık ifadeyi yazınız.

P.7-5 Bir dielektrik ortamda yayılan bir düzgün düzlem dalganın **E** alanı aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_x 2 \cos(10^8 t - z/\sqrt{3}) - \mathbf{a}_y \sin(10^8 t - z/\sqrt{3}) \quad \text{(V/m)}.$$

a) Dalganın frekansını ve dalga boyunu belirleyiniz.

b) Ortamın dielektrik sabiti nedir?

c) Dalganın kutuplanmasını açıklayınız.

d) Eşlik eden **H** alanını bulunuz.

P.7-6 Elektrik alanının anlık ifadesi

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{a}_x E_{10} \sin(\omega t - kz) + \mathbf{a}_y E_{20} \sin(\omega t - kz + \psi)$$

olan bir düzlem dalganın eliptik kutuplandığını gösteriniz.

P.7-7 3-(GHz), y-kutuplanmış bir düzgün düzlem dalga, dielektrik sabiti 2.5 ve kayıp tanjantı 0.05 olan, manyetik olmayan bir ortamda $+x$ yönünde yayılıyor.

a) Yayılan dalganın genliğinin yarıya düşeceği uzaklığı belirleyiniz.

b) Ortamdaki dalganın öz empedansını, dalga boyunu, faz hızını ve grup hızını bulunuz.

c) $x = 0$'da $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y 50 \sin(6\pi 10^9 t + \pi/3)$ (V/m) kabul ederek **H**'nin her t ve x için anlık ifadesini yazınız.

P.7-8 Bakırın [$\sigma_{cu} = 5.80 \times 10^7$(S/m)] ve çinkonun [$\sigma_{br} = 1.59 \times 10^7$(S/m)] öz empedans, zayıflama sabiti ve deri kalınlığını (a) 1 (MHz) ve (b) 1 (GHz) frekanslarında belirleyip karşılaştırınız.

P.7-9 Grafitin 100 (MHz)'deki deri kalınlığı 0.16 (mm) ise (a) grafitin öz iletkenliğini ve (b) 1-(GHz) frekanslı bir dalganın alan şiddetinin 30 (dB) azalması için grafitte ilerlemesi gereken uzaklığı bulunuz.

P.7-10 Işımanın insan sağlığına zararı konusunda sürekli tartışma vardır. Aşağıdaki hesaplamalar kaba bir karşılaştırma sağlar.

a) Bir mikrodalga ortamında insan sağlığı için U.S. standardı güç yoğunluğunun 10 (mW/cm^2)'den az olmasıdır. Buna karşılık gelen elektrik alan şiddeti standardını hesaplayınız. Manyetik alan şiddeti için karşılık gelen standardı bulunuz.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 332

b) Güneşli bir günde dünyanın güneşten 1.3 (kW/m^2) hızla ışıma enerjisi aldığı tahmin edilmektedir. Monokromatik (aslında değildir) bir düzgün düzlem dalga kabul ederek elektrik ve manyetik alan şiddeti vektörlerinin eşdeğer genliklerini hesaplayınız.

P.7-11 Kayıpsız ortamda yayılan dairesel kutuplanmış bir düzgün düzlem dalganın Poynting vektörünün zamandan ve uzaklıktan bağımsız bir sabit olduğunu gösteriniz.

P.7-12 Bir anten sisteminin ışıma elektrik alan şiddetini

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\theta E_\theta + \mathbf{a}_\phi E_\phi$$

kabul ederek ortalama dışa doğru birim alan başına güç akışının ifadesini bulunuz.

P.7-13 Elektromanyetik bakış açısından kayıpsız bir eş eksenli kablo ile taşınan güç, iç iletkenle dış iletken arasındaki dielektrik ortamda var olan Poynting vektörü cinsinden incelenebilir. İç iletken (a yarıçaplı) ve dış iletken (b iç yarıçaplı) arasına V_0 d-c gerilimi uygulandığını ve bunun yük direncinde I akımının akmasına neden olduğunu kabul ederek, dielektrik ortamın kesit alanı üzerinde Poynting vektörünün integralinin yüke iletilen $V_0 I$ gücüne eşit olduğunu sağlayınız.

P.7-14 Havada $\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{a}_y 50 \sin(10^8 t - \beta x)$ (V/m) verilen bir düzgün düzlem dalga, $x \geq 0$ bölgesindeki kayıpsız bir ortama ($\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 8$, $\sigma = 0$) dik olarak gelmektedir.

a) $\mathbf{E}_r$ ve $\mathbf{H}_r$'yi,
b) Γ, τ ve S'yi
c) $\mathbf{E}_t$ ve $\mathbf{H}_t$'yi bulunuz.

P.7-15 Bir düzgün düzlem dalga $+z$ yönünde (aşağı doğru) okyanusun içine ($\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m) yayılmaktadır. Okyanus yüzeyindeki ($z = 0$) manyetik alan $\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{a}_y\, 0.3 \cos 10^8 t$ (A/m) veriliyor.

a) Okyanus suyunun deri kalınlığını ve öz empedansını belirleyiniz.
b) Okyanustaki $\mathbf{E}(z, t)$ ve $\mathbf{H}(z, t)$ ifadelerini bulunuz.
c) Okyanusta birim alan başına güç kaybını z'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

P.7-16 1. ortamdan, 2. ortamla olan düzlem arayüze dik gelen düzgün düzlem dalgalar için

a) H_{r0}/H_{i0} oranını bulunuz ve Eş. (7-94)'teki yansıma katsayısı ile karşılaştırınız.
b) H_{t0}/H_{i0} oranını bulunuz ve Eş. (7-95)'teki iletim katsayısı ile karşılaştırınız.

P.7-17 Aşağıdaki

$$\mathbf{E}(z) = E_0(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)\, e^{-j\beta z}$$

fazörü ile temsil edilen bir sağ-el dairesel kutuplanmış düzlem dalga $z = 0$'daki mükemmel iletkenin üzerine dik olarak çarpıyor.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 333

a) Yansıyan dalganın kutuplanmasını belirleyiniz.
b) İletken duvarda indüklenen akımı bulunuz.
c) Kosinüs zaman referansı kullanarak toplam elektrik alan şiddetinin anlık ifadesini elde ediniz.

P.7-18 Bir düzgün düzlem dalganın, iki kayıpsız dielektrik ortam arasındaki arayüze dik geldiği durumda yansıma katsayısının büyüklüğünün iletim katsayısınınkine eşit olması için gereken koşulu belirleyiniz. Bu koşul altında duran-dalga oranı dB olarak nedir?

P.7-19 Havada $\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{a}_x 10\, e^{-j6z}$ (V/m) verilen bir düzgün düzlem dalga $z = 0$'da, dielektrik sabiti 2.25 ve kayıp tanjantı 0.3 olan kayıplı ortamla olan arayüze normal (dik) olarak geliyor.

a) $\mathbf{E}_r(z)$, $\mathbf{H}_r(z)$, $\mathbf{E}_t(z)$ ve $\mathbf{H}_t(z)$ fazör ifadelerini bulunuz.
b) Havadaki dalganın duran-dalga oranı nedir?
c) Havadaki ve kayıplı ortamdaki zamanda-ortalama Poynting vektörü ifadelerini bulunuz.

P.7-20 Elektrik alan şiddeti için aşağıdaki fazör ifadenin verildiği bir düzgün sinüzoidal düzlem dalga

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \mathbf{a}_y 10 e^{-j(6z + 8z)} \qquad \text{(V/m)}$$

$z = 0$'daki mükemmel iletken düzleme çarpıyor.

a) Dalganın frekansını ve dalga boyunu bulunuz.
b) $\mathbf{E}_i(x, z; t)$ ve $\mathbf{H}_i(x, z; t)$ anlık ifadelerini yazınız.
c) Geliş açısını belirleyiniz.
d) Yansıyan dalga için $\mathbf{E}_r(x, z)$ ve $\mathbf{H}_r(x, z)$'yi bulunuz.
e) Havadaki toplam dalga için $\mathbf{E}_1(x, z)$ ve $\mathbf{H}_1(x, z)$'yi bulunuz.

P.7-21 Dik kutuplanmış bir düzgün düzlem dalganın, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ için Şekil 7-14'te gösterildiği gibi bir düzlem sınıra eğik geldiği durumda $E_{i0} = 20$ (V/m), $f = 100$ (mHz) ve $\theta_i = 30°$ kabul ederek,

a) yansıma ve iletim katsayılarını bulunuz.
b) $\mathbf{E}_t(x, z; t)$ ve $\mathbf{H}_t(x, z; t)$ anlık ifadelerini yazınız.

P.7-22 Paralel kutuplanmış bir düzgün düzlem dalganın, $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.25\ \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ için Şekil 7-15'te gösterildiği gibi bir düzlem sınıra eğik geldiği durumda $H_{i0} = 0.053$ (A/m), $f = 100$ (MHz) ve $\theta_i = 30°$ kabul ederek,

a) yansıma ve iletim katsayılarını bulunuz.
b) $\mathbf{E}_t(x, z; t)$ ve $\mathbf{H}_t(x, z; t)$ anlık ifadelerini yazınız.

P.7-23

a) İyonosferdeki maksimum elektron yoğunluğunu ölçmek için bir yöntem öneriniz.
b) Metreküp başına $N_{max} = 8 \times 10^{11}$ kabul ederek, iyonosferden yukarıda bir uzay istasyonu ile haberleşmek için minimum kullanılabilir frekansın seçimini tartışınız.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 334

c) Eğer daha düşük bir frekans kullanılırsa iyonosfere eğik geliş durumunda ne olur?

P.7-24 Bir düzgün düzlem dalga iyonosfere $\theta_i = 60°$ geliş açısı ile geliyor. Sabit elektron yoğunluğu ve iyonosferin plazma frekansının yarısına eşit dalga frekansı kabul ederek

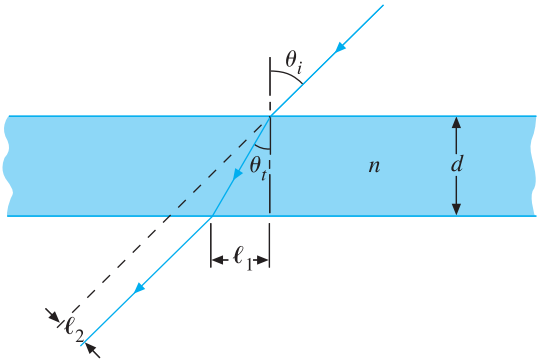
a) $\Gamma_\perp$ ve $\tau_\perp$

b) $\Gamma_\parallel$ ve $\tau_\parallel$

değerlerini belirleyiniz ve bu kompleks niceliklerin anlamını yorumlayınız.

P.7-25 Havada 10-(kHz)'lik paralel kutuplanmış bir elektromanyetik dalga okyanus yüzeyine teğete çok yakın $\theta_i = 88°$ açısı ile eğik olarak gelmektedir. Deniz suyu için $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ ve $\sigma = 4$ (S/m) kullanarak, (a) θ_t kırılma açısını bulunuz. (b) İletim katsayısı $\tau_\parallel$'i bulunuz. (c) Alan şiddeti 30 (dB) düşecek şekilde okyanus yüzeyinden derinliği bulunuz.

P.7-26 Bir ışık ışını havadan, kırılma indisi n olan d kalınlıklı bir şeffaf tabaka üzerine Şekil 7-16'da gösterildiği gibi eğik olarak gelmektedir. Geliş açısı θ_i'dir. (a) θ_t'yi, (b) çıkış noktasındaki ℓ_1 uzaklığını ve (c) çıkan ışının yatay yer değiştirme miktarı ℓ_2'yi bulunuz.

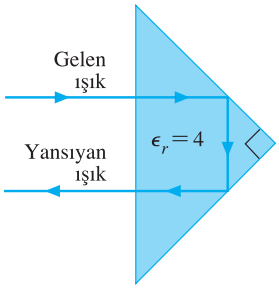


ŞEKİL 7-16 n kırılma indisli şeffaf tabakaya eğik olarak çarpan ışık-ışını (Problem P.7-26).

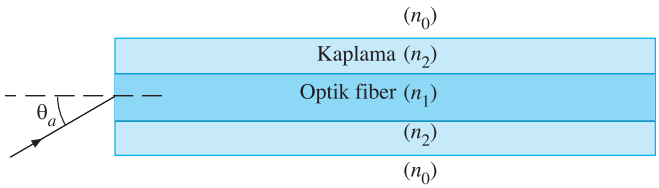
P.7-27 Eş. (7-135) ve (7-136) ile temsil edilen dik kutuplanmış bir düzgün düzlem dalga Şekil 7-14'te görüldüğü gibi $z = 0$'daki düzlem arayüze gelmektedir. $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ve $\theta_i > \theta_c$ kabul ederek, (a) iletilen alan ($\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$)'nin fazör ifadelerini elde ediniz. (b) 2. ortama iletilen ortalama gücün sıfır olduğunu sağlayınız.

P.7-28 Kırılma indisi n_1 olan 1. ortamdaki ω açısal frekanslı bir düzgün düzlem dalga, kırılma indisi n_2 ($<n_1$) olan 2. ortamla $z = 0$'da bulunan arayüze kritik açı ile geliyor. E_{i0} ve E_{t0}, sırasıyla, gelen ve kırılan elektrik alan şiddetlerinin genliği olsun.

+07_+07.qxp 5.06.2024 14:20 Page 335



ŞEKİL 7-17 Dik, eşkenar üçgen prizmadan ışık yansıması (Problem P.7-30).



ŞEKİL 7-18 Kaplanmış optik fiber (Problem P.7-31).

a) Dik kutuplanma için E_{t0}/E_{i0} oranını bulunuz.

b) Paralel kutuplanma için E_{t0}/E_{i0} oranını bulunuz.

c) Dik kutuplanma için $\mathbf{E}_i(x, z; t)$ ve $\mathbf{E}_t(x, z; t)$ anlık ifadelerini ω, n_1, n_2, θ_i ve E_{i0} parametreleri cinsinden yazınız.

P.7-29 Bir sualtı kaynağının dik kutuplanmış elektromanyetik dalgası su-hava arayüzüne $\theta_i = 20°$ ile geliyor. Su için $\epsilon_r = 81$ ve $\mu_r = 1$ kullanarak (a) θ_c kritik açısını, (b) $\Gamma_\perp$ yansıma katsayısını, (c) $\tau_\perp$ iletim katsayısını ve (d) her bir dalga boyu için havada dB cinsinden zayıflamayı bulunuz.

P.7-30 Şekil 7-17'de gösterilen cam eşkenar üçgen prizmalar optik cihazlarda kullanılır. Cam için $\epsilon_r = 4$ kabul ederek gelen ışık gücünün prizmadan geri yansıyan yüzdesini bulunuz.

P.7-31 Komşu fiberlerdeki dalgaların girişimini engellemek ve mekanik koruma için optik fiberler genellikle ekil 7-18'de gösterildiği gibi daha düşük kırılma indisli ($n_2 < n_1$) bir malzeme ile kaplanırlar.

a) Fiberin uç yüzeyine gelen meridyen ışınlar tam yansıma ile içeride kalacak şekilde maksimum θ_a geliş açısını n_0, n_1 ve n_2 cinsinden bulunuz. (***Meridyen ışınlar*** fiber ekseninden geçen ışınlardır. θ_a açısına ***kabul açısı*** ve sin θ_a'ya ***fiberin nümerik açıklığı*** (N. A) denir)

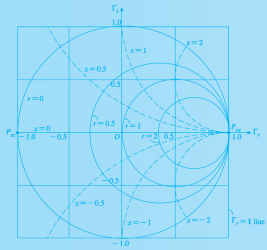
b) Eğer $n_1 = 2$, $n_2 = 1.74$ ve $n_0 = 1$ ise θ_a ve N. A'yı bulunuz.

P.7-32 Bir arayüzden sıfır yansıma koşulu altında, Brewster açısı ile kırılma açısının toplamının,

a) dik kutuplanma ($\mu_1 \neq \mu_2$) ve

b) paralel kutuplanma ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) durumlarında $\pi/2$ olduğunu ispat ediniz.

P.7-33 Paralel kutuplanmış bir gelen dalga için, eşit manyetik geçirgenlikli iki komşu ortam için θ_c kritik açısı ve $\theta_{B\|}$ Brewster açısı arasındaki ilişkiyi bulunuz.



8. BÖLÜM

8-1 GENEL BAKIŞ

Elektromanyetik modelimize göre, zamanla değişen yükler ve akımlar elektromanyetik alanlar ve dalgaların kaynağıdır. Dalgalar elektromanyetik güç taşır ve bulunduğu ortamda ışığın hızı ile ilerler. Dalgaların bir alıcı üzerindeki etkisi, diğer faktörlerle birlikte, dalgaların alıcıdaki ortalama güç yoğunluğuna bağlıdır. Büyük uzaklıklarda bu güç yoğunluğu (birim alan başına güç) çok küçüktür. Bunun nedeni merkezi kaynaklarda olan büyük bir kürenin toplam yüzey alanının çok büyük olmasıdır. Bu nedenle bir tümyönlü kaynaktan bir alıcıya güç iletimi çok verimsizdir. Bir kaynak, yönlülüğü yüksek bir anten yardımıyla ışıdığı zaman dahi, büyük uzaklıklarda gücü çok geniş bir alana yayılır.

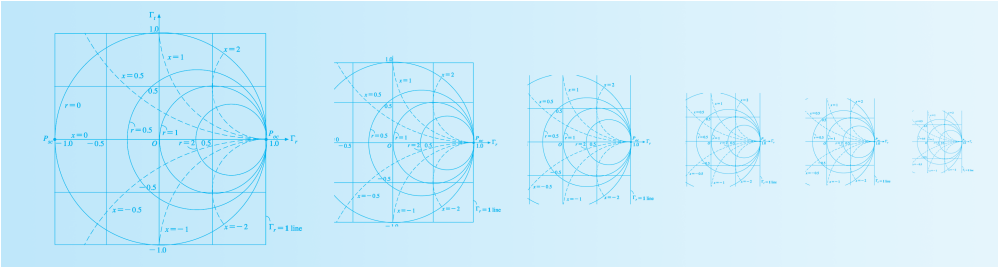
Işıma ile güç iletimi çok verimsizdir.

Noktadan-noktaya verimli güç ve bilgi iletimi için kaynak enerjisi kılavuzlanmalıdır. Bu bölümde iletim hatları ile kılavuzlanan enine elektromanyetik (TEM) dalgaları çalışacağız. İletim hatları ile kılavuzlanan TEM dalgaların birçok özelliğinin, 7. Bölümde tartışılan, sınırsız bir ortamda yayılan bir düzgün düzlem dalga ile aynı olduğunu göstereceğiz.

Üç en yaygın iki-iletkenli iletim hattı tipi

TEM dalgaları destekleyen üç en yaygın iki-iletkenli iletim hattı tipi aşağıdakilerdir:

a) *Paralel-plaka iletim hattı*. Bu iletim hattı tipi, düzgün kalınlıklı bir dielektrik katman ile birbirinden ayrılan iki paralel iletken düzlemden



İletim Hatları

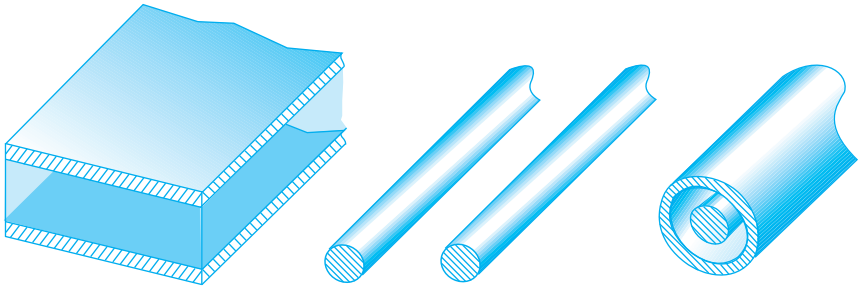
oluşur [bkz. Şekil 8-1(a)]. Paralel-plaka iletim hatları mikrodalga frekanslarında baskılı devre teknolojisi ile ucuz olarak bir dielektrik alttaş üzerine imal edilebilir. Bunlar sıklıkla ***şerit hat*** olarak adlandırılır. İki şerit hat tipi Şekil 8-3'te gösterilmiştir.

b) *İki-telli iletim hattı*. Bu iletim hattı, aralarında sabit uzaklık bulunan iki paralel iletken telden oluşur [bkz. Şekil 8-1(b)]. Örnekler, direklerle taşınan güç ve telefon hatları ve bir çatı anteninden televizyona gelen düz giriş hatlarıdır.

c) *Eş eksenli iletim hattı*. Bu hat, bir dielektrik ortamla birbirinden ayrılan bir iç iletken ve eş eksenli ince bir dış iletkenden oluşur. (bkz. Şekil 8-1(c)]. Bu yapının önemli yararı, elektrik ve manyetik alanların tümüyle dielektrik bölgeye hapsedilmesi ve hatta çok az dış girişim eşlenmesidir. Örnekler, telefon ve TV kabloları ile hassas yüksek-frekans ölçüm cihazlarının kablolarıdır.

Genel iletim hattı denklemleri, hattın birim uzunluk başına direnç, endüktans, iletkenlik ve kapasitansı cinsinden bir devre modelinden elde edilebilir. İletim hattı denklemlerinden, verilen bir hat boyunca yayılan dalganın tüm özellikleri çıkarılabilir ve çalışılabilir.

İletim hatlarının zamanda-harmonik durgun-durum özellikleri, kompleks sayıların tekrar tekrar kullanımı ihtiyacını ortadan kaldıran grafikler yardımıyla kolaylıkla incelenebilir. En iyi bilinen ve en yay-



(a) Paralel-plaka iletim hattı (b) İki-telli iletim hattı (c) Eş eksenli iletim hattı

ŞEKİL 8-1 Yaygın iletim hattı tipleri.

gın kullanılan grafik ***Smith grafiği***dir. Smith grafiğinin iletim hatlarındaki dalga özelliklerinin belirlenmesi ve empedans uyumlama için kullanımı tartışılacaktır.

■ **ALIŞTIRMA 8.1** Yarım-dalga boyu antenler

(a) 800 (MHz)'deki UHF-TV sinyallerini,

(b) 60 (MHz) deki VHF-TV sinyallerini,

(c) 95 (MHz)'deki FM sinyallerini ve

(d) 100 (kHz)'deki seyrüsefer radyo sinyallerini iletmekte kullanılırlar.

Bu antenlerin uzunlukları nedir?

CEVAP: (a) 18.75 (cm), (d) 1,500 (m).

TEKRAR SORULARI

S.8-1 TEM dalgaları destekleyen üç en yaygın kılavuz yapısı tipi nelerdir?

S.8-2 Eş eksenli kabloların ve iki-telli iletim hatlarının güçlü ve zayıf yönlerini karşılaştırınız.

8-2 GENEL İLETİM HATTI DENKLEMLERİ

İki paralel mükemmel iletkenden oluşan bir düzgün iletim hattını inceleyeceğiz. İletkenler arasındaki uzaklık çalışma dalga boyuna kıyasla küçüktür. İncelemeye **E** ve **H**'nin enine bileşenleri için Maxwell denklemlerini yazarak başlayabiliriz. Bu alan bileşenlerinin enine koordinatlara bağlılığının statik ve kaynaksız durumla aynı oldu-

ğunu bulacağız. Böylece bir iletim hattının parametreleri statik koşullarda kullanılan yöntemlerle belirlenebilir. İletkenler arasındaki gerilim ve hat boyunca akım; **E** ve **H**'nin enine bileşenlerine, sırasıyla, Eş (3-28) ve (5-63) ile bağlıdır. Sonuç olarak, bir TEM dalgası taşıyan iki-iletkenli, düzgün bir iletim hattının çalışma özelliklerini gerilim ve akım dalgaları cinsinden tartışabiliriz.

Olağan elektrik devrelerinin fiziksel boyutları çalışma dalga boyundan çok küçüktür. Bunlar ayrık, toplu parametrelerle modellenebilir.

Bu kısımda, genel iki-iletkenli düzgün iletim hatlarını yöneten denklemleri çıkarmak için bir devre modeli kullanacağız. İletim hatları, olağan elektrik devrelerinden bir temel açıdan farklıdırlar. Elektrik devrelerinin fiziksel boyutları çalışma dalga boyundan çok küçüktür. Öte yandan iletim hatları genellikle bir dalga boyunun önemli bir oranıdır ve birçok dalga boyu uzunluğunda da olabilir. Bir olağan elektrik devresinde devre elemanları ayrık kabul edilebilir ve böylelikle toplu parametrelerle açıklanabilir. Toplu devre elemanlarından geçen akımın, elemanın üzerinde konumla değişmediği ve duran dalgaların var olmadığı kabul edilir. Diğer taraftan bir iletim hattı, dağıtılmış-parametreli bir devredir ve uzunluğu boyunca dağıtılmış devre parametreleri ile modellenmelidir. Empedans uyum koşulları (bu bölümde ileride açıklanacaktır) dışında bir iletim hattında duran dalgalar vardır.

İletim hatları genelde dalga boyu cinsinden uzundur ve dağıtılmış parametrelerle modellenir.

Bir iletim hattının, aşağıdaki dört parametre ile açıklanan bir Δz diferensiyel uzunluğunu düşünelim:

R, birim uzunluk başına direnç (her iki iletken), Ω/m olarak.

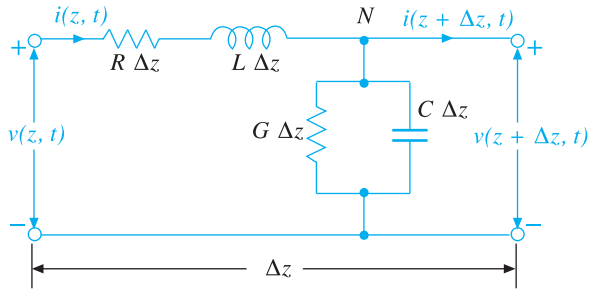
L, birim uzunluk başına endüktans (her iki iletken), H/m olarak.

G, birim uzunluk başına iletkenlik, S/m olarak.

C, birim uzunluk başına kapasitans, F/m olarak.

R ve L'nin seri elemanlar, G ve C'nin ise paralel elemanlar olduğuna dikkat edilmelidir. Şekil 8-2 böyle bir hat parçasının eşdeğer elektrik devresini göstermektedir. $v(z, t)$ ve $v(z + \Delta z, t)$ nicelikleri, sırasıyla, z ve $z + \Delta z$'deki anlık gerilimleri göstermektedir.

ŞEKİL 8-2 İki-iletkenli iletim hattının Δz diferensiyel uzunluğunun eşdeğer devresi.



Benzer şekilde, $i(z, t)$ ve $i(z + \Delta z, t)$, sırasıyla, z ve $z + \Delta z$'deki anlık akımları gösterir. Kirchhoff gerilim yasasını uygulayarak

$$v(z, t) - R\,\Delta z i(z, t) - L\,\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0 \tag{8-1}$$

elde edilir ve bu da

$$-\frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} = Ri(z, t) + L\frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \tag{8-2}$$

verir. $\Delta z \to 0$ limiti için Eş. (8-2)

Eş. (8-3) ve (8-5) anlık gerilim ve akım için, iki eşlenmiş kısmi diferensiyel iletim hattı denklemidir.

$$\boxed{-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = Ri(z, t) + L\frac{\partial i(z, t)}{\partial t}} \tag{8-3}$$

haline gelir. Benzer şekilde Şekil 8-2'deki N düğümüne Kirchoff akım yasasını uygulayarak

$$i(z, t) - G\,\Delta z v(z + \Delta z, t) - C\,\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0 \tag{8-4}$$

bulunur. Δz ile bölünüp, Δz sıfıra götürüldüğünde Eş. (8-4)

$$\boxed{-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = Gv(z, t) + C\frac{\partial v(z, t)}{\partial t}} \tag{8-5}$$

haline gelir. Eş. (8-3) ve (8-5), $v(z, t)$ ve $i(z, t)$ için birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerdir ve genel iletim hattı denklemleri olarak adlandırılırlar.

Harmonik zaman bağımlılığı durumunda, fazörlerin kullanımı iletim hattı denklemlerini adi diferensiyel denklemlere sadeleştirir. Kosinüs referansı için

$$v(z, t) = \mathcal{R}e[V(z)e^{j\omega t}] \tag{8-6}$$

$$i(z, t) = \mathcal{R}e[I(z)e^{j\omega t}] \tag{8-7}$$

yazarız. Burada $V(z)$ ve $I(z)$ sadece uzay koordinatı z'nin fonksiyonudur ve her ikisi de kompleks olabilir. Eş. (8-6) ve (8-7)'nin Eş.(8-3) ve (8-5)'de yerine konması $V(z)$ ve $I(z)$ için aşağıdaki adi diferensiyel denklemleri verir:

Fazör gerilim ve akım fonksiyonları için iki eşlenmiş adi diferensiyel iletim hattı denklemi

$$\boxed{-\frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z)} \tag{8-8}$$

$$\boxed{-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)V(z).} \tag{8-9}$$

Eş. (8-8) ve (8-9) eşlenmiş ***zamanda-harmonik iletim hattı denklemleridir***. Bunlar $V(z)$ ve $I(z)$'yi çözmek için birleştirilebilir. Bu yapıldığında aşağıdaki ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler elde edilir:

Fazör gerilim için ikinci mertebeden adi diferensiyel iletim hattı denklemi

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z) \tag{8-10}$$

ve $I(z)$ için

Fazör akım için ikinci mertebeden adi diferensiyel iletim hattı denklemi

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \tag{8-11}$$

olur. Burada

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \qquad (m^{-1}) \tag{8-12}$$

İletim hattının yayılma sabiti, zayıflama sabiti ve faz sabiti

yayılma sabitidir. γ'nın reel ve sanal kısımları α ve β, sırasıyla, hattın ***zayıflama sabiti*** (Np/m) ve ***faz sabitidir*** (rad)/m. Buradaki gösterim Kısım 7-3'te tanımlanan kayıplı ortamda düzlem dalga yayılımına benzerdir. Bu nicelikler gerçekten sabit değildir çünkü genel olarak ω'ya karmaşık bir şekilde bağlıdırlar. Eş. (8-10) ve (8-11) temel denklemlerdir ve bunlardan sonsuz uzun veya sonlu iletim hatlarının tüm zamanda-harmonik özelliklerini elde etmek mümkündür. Eş. (8-10) ve (8-11) ile Eş. (7-45b) arasındaki benzerliklere dikkat edersek, 7. Bölümde düzlem dalga yayılımında **E** ve **H** için elde ettiğimiz birçok bağıntı ve sonucun (eğik geliş durumundakiler dışında), iletim hatlarındaki gerilim ve akım dalgaları $V(z)$ ve $I(z)$'ye de uygulanabildiğini görürüz.

Düzlem dalga yayılımındaki E ve H ile bir iletim hattı üzerindeki *V* ve *I* arasındaki benzerlikler

8-3 İLETİM HATTI PARAMETRELERİ

Bir iletim hattının verilen bir frekanstaki elektriksel özellikleri, hattın dört dağıtılmış parametresi R, L, G ve C tarafından tamamıyla tanımlanır. Bu kısımda üç temel iletim hattı tipi için bu parametrelerin formüllerini, fiziksel boyutlar ve ortam parametreleri cinsinden vereceğiz.

Temel kabullenmemiz, iletim hattındaki iletkenlerin iletkenliğinin genellikle çok büyük olduğudur. Bunun sonucunda yayılma sabiti hesabında seri direncin etkisi ihmal edilebilir ve hattaki dalganın

yaklaşık olarak TEM olduğu görülür. Eş. (8-12)'den R'yi düşürerek

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2} \tag{8-13}$$

yazarız. Eş. (7-43)'ten, parametreleri (μ, ϵ, β) olan bir ortamdaki TEM dalganın yayılma sabitinin

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2} \tag{8-14}$$

olduğunu biliyoruz. Ancak Eş. (4-38)'den

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{8-15}$$

bulunur. Böylece Eş. (8-13) ve Eş. (8-14)'ün karşılaştırılması

Bir iletim hattında L ve C ile ortam parametrelerinin ilişkisi

$$\boxed{LC = \mu\epsilon} \tag{8-16}$$

verir. Eş. (8-16) çok yararlı bir bağıntıdır; çünkü verilen bir ortam ve hat için eğer L bilinirse C belirlenebilir; bunun tersi de geçerlidir. C bilinirse Eş. (8-15)'ten G'yi bulabiliriz. Seri direnç R, iletkenlerdeki güç kaybından belirlenecektir.

A. *Paralel-plaka iletim hattı*

Her birinin genişliği w olan ve aralarında, d kalınlığında (ϵ, μ) dielektriği olan iki paralel iletken plaka.
Eş. (3-87)'den saçaklanmayı ihmal ederek

$$\boxed{C = \epsilon\frac{w}{d} \quad \text{(F/m)}} \text{ (paralel-plaka hat)} \tag{8-17}$$

buluruz. Eş. (8-17)'yi, Eş. (8-16) ve (8-15)'te kullanarak

$$\boxed{L = \mu\frac{d}{w} \quad \text{(H/m)}} \text{ (paralel-plaka hat)} \tag{8-18}$$

ve

$$\boxed{G = \sigma\frac{w}{d} \quad \text{(S/m)}} \text{ (paralel-plaka hat)} \tag{8-19}$$

elde ederiz.

Birim uzunluk başına seri R direncinin belirlenmesi metal plakaların mükemmel iletken olmadığı anlamına gelir. Elektrik alanın teğet bileşeni sıfır değildir ve bundan dolayı kayıplı iletim hatları üzerindeki dalgalar TEM değildir. Yeterince yüksek frekanslarda iyi iletkenlerin deri kalınlığı çok küçüktür. İletkenlerdeki toplam akımın, deri kalınlığı δ üzerinde düzgün dağıldığını kabul ederek R için bir yaklaşık ifade elde edebiliriz. σ_c ve μ_c sırasıyla, iletkenlerin iletkenliğini ve manyetik geçirgenliğini göstersin. Birim uzunluklu, w genişlikli ve δ derinlikli bir malzemenin direnci Eş. (4-16)'dan

$$R = \frac{1}{\sigma_c S} \tag{8–20}$$

bulunur, burada $S = w\delta$'dır. İki iletken plaka için

$$R = \frac{2}{\sigma_c w \delta} \tag{8-21}$$

olur ki bu da Eş. (7-56) yardımıyla

$$\boxed{R = \frac{2}{w}\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega/\text{m})} \text{ (paralel-plaka hat)} \tag{8-22}$$

haline gelir.

B. *İki-telli iletim hattı*

(ϵ, μ) dielektrik ortamında, aralarında D uzaklığı olan, her biri a yarıçaplı iki iletken tel.

Eş. (3-165)'ten

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{F/m})} \text{ (iki-telli hat)} \tag{8-23}^{(1)}$$

yazabiliriz. Eş. (8-23)'ü, Eş. (8-16) ve (8-15)'te kullanarak

$$\boxed{L = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right) \quad (\text{H/m})} \text{ (iki-telli hat)} \tag{8-24}^{(1)}$$

ve

$$\boxed{G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (\text{S/m})} \text{ (iki-telli hat)} \tag{8-25}^{(1)}$$

elde ederiz.

[1] Eğer $(D/2a)^2 \gg 1$ ise $\cosh^{-1}(D/2a) \cong \ln(D/a)$.

R'yi bulmak için Eş. (8-20)'yi kullanacağız. Deri kalınlığı δ olan her bir teldeki akımın geçtiği kesit alanı yaklaşık olarak $2\pi a\delta$'dır. İki tel için

$$R = \frac{1}{\sigma_c(\pi a\delta)} \tag{8-26}$$

veya

$$\boxed{R = \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{\pi f\mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega/\text{m})} \text{ (iki-telli hat)} \tag{8-27}$$

bulunur.

C. *Eş eksenli iletim hattı*

Birbirinden bir (ϵ, μ) dielektriği ile ayrılmış a yarıçaplı bir iç iletken ve iç yarıçapı b olan eşmerkezli dış iletken.

Eş. (3-90)'dan

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (\text{F/m})} \text{ (eş eksenli hat)} \tag{8-28}$$

buluruz ki bu da Eş. (8-16) ve (8-15) yardımıyla

$$\boxed{L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad (\text{H/m})} \text{ (eş eksenli hat)} \tag{8-29}$$

ve

$$\boxed{G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (\text{S/m})} \text{ (eş eksenli hat)} \tag{8-30}$$

verir. Yüksek frekanslarda akımın hem iç hem de dış iletkenlerde δ deri kalınlığında düzgün olarak aktığını kabul ederiz. İç iletkende akım akışı için kesit alanı $S_i = 2\pi a\delta$, dış iletkende ise $S_o = 2\pi b\delta$'dır. O halde Eş. (2-80)

$$R = \frac{1}{\sigma_c S_i} + \frac{1}{\sigma_c S_o} = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \tag{8-31}$$

veya

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f\mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega/\text{m})} \text{ (eş eksenli hat)} \tag{8-32}$$

verir.

Üç tip iletim hattının, R, L, G ve C parametreleri Tablo 8-1'de verilmiştir. Burada R_s, Eş. (7-53)'te verildiği gibi iletkenin öz empedansının reel kısmıdır: $\eta_c = R_s + jX_s = (1 + j)\sqrt{\pi f \mu_c/\sigma_c}$. İletkenlerin Örnek 5-10 ve 5-11'de tartışılan iç öz endüktansı L parametresine dahil edilmemiştir. O örneklerdeki hesaplamalar, iletkenlerin tüm kesitine düzgün dağılan bir doğru akım ile yapılmıştı. Yüksek frekanslarda akım, deri etkisinden dolayı yüzeye doğru yakınlaşır ve iç endüktans ihmal edilebilecek bir değere indirgenir.

■ **ALIŞTIRMA 8.2** Aşağıdaki hatların birim uzunluk başına düşük-frekans direnç formüllerini elde ediniz.

a) Her biri a yarıçapında iki-telli bir hat.

b) İç iletken yarıçapı a; dış iletkeninin iç yarıçapı b, dış yarıçapı d olan bir eş eksenli kablo.

İPUCU: Doğru akımlar için direnç formülünü kullanınız.

CEVAP: (a) $\dfrac{2}{\sigma_c \pi a^2}$, (b) $\dfrac{1}{\sigma_c \pi}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{d^2 - b^2}\right)$.

TEKRAR SORULARI

S.8-3 Bir iletim hattı ile bir olağan elektrik devresi arasındaki temel fark nedir?

S.8-4 Bir kayıplı iletim hattı üzerinde neden TEM dalga olamayacağını açıklayınız.

S.8-5 Eş. (8-8)-(8-11)'de verilen iletim hattı denklemleri darbe tipli gerilim ve akımlar için geçerli midir? Açıklayınız.

TABLO **8-1** PARALEL-PLAKA, İKİ-TELLİ VE EŞ EKSENLİ İLETİM HATLARININ DAĞITILMIŞ PARAMETRELERİ

İletim hatlarının dağıtılmış parametreleri

Parametre	Paralel-Plaka Hat	İki-Telli Hat	Eş Eksenli Hat	Birim
R	$\dfrac{2}{w}R_s$	$\dfrac{R_s}{\pi a}$	$\dfrac{R_s}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$	Ω/m
L	$\mu\dfrac{d}{w}$	$\dfrac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\dfrac{D}{2a}\right)$	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$	H/m
G	$\sigma\dfrac{w}{d}$	$\dfrac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	S/m
C	$\epsilon\dfrac{w}{d}$	$\dfrac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)}$	$\dfrac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	F/m

Not: Eğer $(D/2a)^2 \gg 1$ ise $R_s = \sqrt{\pi f \mu_c/\sigma_c}$; $\cosh^{-1}(D/2a) \cong \ln(D/a)$. İç endüktans dahil edilmemiştir.

NOTLAR

1. Düzlem-dalgaların yayılmasındaki **E** ve **H**'nin özellikleri ile iletim hatlarındaki $V(z)$ ve $I(z)$ arasında yakın benzerlik vardır.
2. Yayılma "sabiti" $\gamma = \alpha + j\beta$'dır. Zayıflama "sabiti" α ve faz" sabiti β frekansa karmaşık bir şekilde bağlı olabilir.
3. İletkenler için μ_c ve σ_c'yi bir dielektrik ortamın μ ve σ'sından ayırmak önemlidir.
4. Bir iletim hattının R seri direnci, G paralel iletkenliğinin tersi değildir.

8-3.1 MİKROŞERİT HATLAR

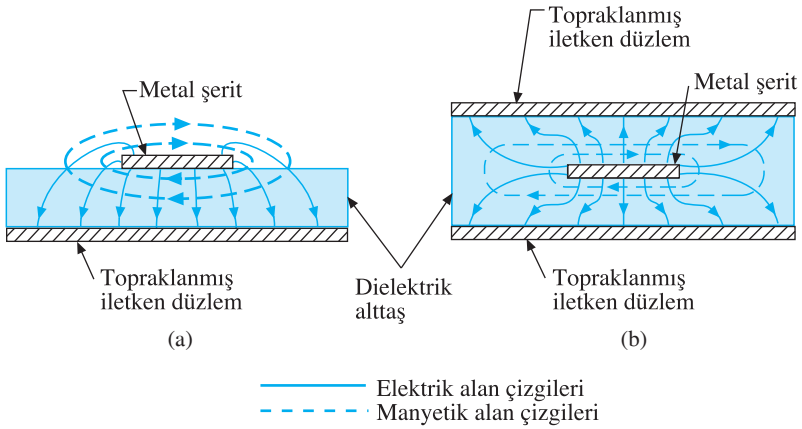
Şerit hatlar paralel-plaka iletim hatlarının değiştirilmiş biçimidir.

Katı-hal mikrodalga cihazların ve sistemlerin gelişmesi, paralel-plaka iletim hatlarının mikroşerit hat veya basitçe ***şerit hat*** denen tipinin yaygın şekilde kullanımına neden oldu. Bir şerit hat genellikle topraklanmış iletken bir düzlem üzerinde oturan bir dielektrik alttaş ve bu alttaşın üstündeki ince, dar bir metal şeritten oluşur. Baskılı-devre tekniklerinin gelişmesi sayesinde şerit hatlar diğer devre elemanları ile beraber üretilip entegre edilebilir. Ancak, paralel-plaka iletim hatları için çıkardığımız sonuçlar iki geniş plaka için (ihmal edilebilir saçaklanma) geçerli olduğundan, burada tam olarak uygulanabilmelerini bekleyemeyiz. Eğer metal şeritin genişliği alttaş kalınlığından çok büyük ise yaklaştırma daha yakın olur.

Alttaşın dielektrik sabiti büyük olduğunda TEM yaklaşımının yeterince tatmin edici olduğu bulunmuştur. Şekil 8-3(a)'daki mikroşeritin, tüm sınır koşullarını sağlayan tam analitik çözümü zor bir problemdir. Alanların tümü dielektrik alttaşa sınırlı değildir, bir kısmı üst şeritten şerit dışındaki bölgeye uzanır ve böylece komşu devrelerde girişime neden olur. Daha doğru hesaplamalar için dağıtılmış parametreler ve öz empedans formüllerinin yarı-empirik olarak değiştirilmesi gereklidir.[1] Bu niceliklerin tümü frekans bağımlıdır ve sonuç olarak şerit hatlar dağıtıcıdır.

Şerit hatların parazitik alanlarını azaltmanın bir yöntemi ince metal şeriti Şekil 8-3(b)'deki gibi ortaya koyup dielektrik alttaşın her iki tarafına topraklanmış iletken düzlemler koymaktır. Bu düzenle-

[1] Bkz., K.F. Sander ve G.A.L. Reed, *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2. baskı, Kısım 6.5.6, Cambridge University Press, New York, 1986. Ayrıca bkz. D.M.Pozar, *Microwave Engineering*, Kısım 4.7 ve 4.8, Addison-Wesley Publishing Co., Reading Mass., 1990.



ŞEKİL 8.3 İki mikroşerit hat tipi.

Üç-plakalı hatlar parazitik alanları azaltır.

meye ***üç-plakalı hat*** denir. Üç-plakalı hatların yapımının daha zor ve pahalı olduğunu tahmin edebiliriz. Ayrıca bir üç-plakalı hattın öz empedansı, karşılık gelen şerit hattınkinin yarısıdır.

8-4 SONSUZ İLETİM HATLARINDA DALGA ÖZELLİKLERİ

Kısım 8-2'de, bir iletim hattında zamanda-harmonik $V(z)$ ve $I(z)$ için Eş. (8-10) ve Eş. (8-11)'i elde ettik. Şimdi bir sonsuz hat üzerinde bunların özelliklerini inceleyelim. Eş. (8-10) ve Eş. (8-11)'in çözümleri

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+(z) + V^-(z) \\ &= V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \end{aligned} \tag{8-33}$$

$$\begin{aligned} I(z) &= I^+(z) + I^-(z) \\ &= I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \end{aligned} \tag{8-34}$$

dır. Burada artı ve eksi işaretleri, sırasıyla, $+z$ ve $-z$ yönünde ilerleyen dalgaları göstermektedir. (V_0^+, I_0^+) ve (V_0^-, I_0^-) dalga genlikleri Eş. (8-8) ve Eş. (8-9) ile ilişkilidir ve

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} \tag{8-35}$$

olduğunu gösterebiliriz (Alıştırma 8.3). Bir sonsuz hat (gerçekte sol ucunda kaynak olan bir yarı-sonsuz hat) için $e^{\gamma z}$ çarpanını içeren terimler yok olmalıdır. Böyle olmasa bu terimler z ile belirsizce artardı ki bu fiziksel olarak imkansızdır. Yansıyan dalgalar yoktur, sade-

ce $+z$ yönünde ilerleyen dalgalar vardır. Böylece

$$V(z) = V^+(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} \tag{8-36}$$

$$I(z) = I^+(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} \tag{8-37}$$

bulunur. Sonsuz uzunluktaki bir hatta herhangi bir z'de gerilimin akıma oranı $V^+(z) / I^+(z) = V_0^+ / I_0^+$, z'den bağımsızdır ve hattın ***öz empedansı*** olarak adlandırılır.

İletim hattının öz empedansı

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (\Omega). \tag{8-38}$$

γ ve Z_0'ın, hat sonsuz olsa da olmasa da, bir iletim hattının özellikleri olduğuna dikkat edilmelidir. Bunlar hattın uzunluğuna değil, R, L, G, C ve ω'ya bağlıdır. Bir sonsuz hat basitçe yansıyan dalga olmadığını gösterir.

■ **ALIŞTIRMA 8.3** Eş. (8-33) ve (8-34)'ü Eş. (8-8)'de yerine koyarak Eş. (8-35)'teki bağıntıyı sağlayınız.

Eş. (8-12)'deki γ ve Eş. (8-38)'deki Z_0 için iki durum özellikle önemlidir.

1. *Kayıpsız Hat* ($R = 0$, $G = 0$).

Bir kayıpsız hatta α ve X_0 sıfırdır, u_p ve R_0 ise sabittir.

a) Yayılma sabiti:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}; \tag{8-39}$$

$$\alpha = 0, \tag{8-40}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (\omega\text{'nın lineer fonksiyonu}). \tag{8-41}$$

b) Faz hızı:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{sabit}). \tag{8-42}$$

Eş. (8-16) yardımıyla bir kayıpsız hat üzerindeki dalgaların faz hızı, hat ortamında yayılan düzlem dalgaların yayılma hızı $1/\sqrt{\mu\epsilon}$'a eşittir.

c) Öz empedans:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{8-43}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{sabit}) \tag{8-44}$$

$$X_0 = 0. \tag{8-45}$$

2. *Bozulmasız Hat* ($R/L = G/C$). Eğer

Bozulmasız bir hat için koşul

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \tag{8-46}$$

koşulu sağlanırsa, α ve Z_0 ifadelerinin her ikisi de sadeleşir.

a) Yayılım sabiti:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{RC}{L} + j\omega C\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{L}}(R + j\omega L); \tag{8-47}$$

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \tag{8-48}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad (\omega\text{'nın lineer fonksiyonu}). \tag{8-49}$$

b) Faz hızı:

Kayıplı ve bozulmasız bir hat, sıfır olmayan zayıflama sabiti dışında, bir kayıpsız hatla aynı özelliklere sahiptir.

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(sabit)}. \tag{8-50}$$

c) Öz empedans:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{(RC/L) + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{8-51}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{(sabit)}, \tag{8-52}$$

$$X_0 = 0. \tag{8-53}$$

Böylece, sıfır olmayan bir zayıflama sabiti dışında bozulmasız bir hattın özellikleri bir kayıpsız hattınkilerle aynıdır—faz hızı sabittir ($u_p = 1/\sqrt{LC}$) ve öz empedans reel bir sabittir ($Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C}$).

Sabit faz hızı, faz sabiti β'nın ω'ya lineer bağımlılığının doğrudan bir sonucudur. Bir sinyal genellikle bir frekans bantından oluştuğundan, bozulma olmaması için farklı frekans bileşenlerinin iletim hattı boyunca aynı hızla ilerlemesi zorunludur. Bu koşul, kayıpsız bir hat tarafından sağlanır ve çok düşük kayıplı bir hat tarafından yaklaştırılır. Bir kayıplı hat için, dalga genlikleri zayıflayacaktır ve farklı frekans bileşenleri aynı hızda ilerlese bile eğer farklı şekilde zayıflarsa, bozulma var olacaktır. Eş. (8-46)'da belirtilen koşul, hem sabit α, hem de sabit u_p verir— böylece ***bozulmasız hat*** tanımlanır.

Bir kayıplı iletim hattının faz sabiti, Eş. (8-12)'de verilen γ ifadesinin açılımı ile belirlenir. Genel olarak faz sabiti, ω'nın lineer fonksi-

Sinyal bozulması (dağılma), faz sabiti frekansla orantılı olmadığında oluşur.

yonu değildir ve bu da frekans-bağımlı bir u_p faz hızı verir. Bir sinyalin farklı frekans bileşenleri hat boyunca farklı hızlarla ilerlediğinden sinyal bozulur veya ***dağılır***. Genel, kayıplı bir iletim hattı bundan dolayı, bir kayıplı dielektrik ortam gibi, *dağıtıcıdır*.

ÖRNEK 8-1

Kayıpları ve saçaklanma etkisini ihmal ederek ve bir şerit hattın alttaş kalınlığının 0.4 (mm) ve dielektrik sabitinin 2.25 olduğunu kabul ederek, (a) şerit hattın 50 (Ω) öz empedansa sahip olması için gereken metal şerit kalınlığı w'yu belirleyiniz. (b) Hattın L ve C'sini bulunuz. (c) Hattaki u_p'yi hesaplayınız. (d) (a), (b) ve (c) şıklarını 75 (Ω) öz empedans için tekrar çözünüz.

ÇÖZÜM

a) Eş. (8-17) ve (8-18)'i Eş. (8-43)'te kullanarak w'yı aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$w = \frac{d}{Z_0}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{0.4 \times 10^{-3}}{50}\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$= \frac{0.4 \times 10^{-3} \times 377}{50\sqrt{2.25}} = 2 \times 10^{-3} \text{ (m) veya } 2 \text{ (mm)}.$$

b) $L = \mu\dfrac{d}{w} = 4\pi 10^{-7} \times \dfrac{0.4}{2} = 2.51 \times 10^{-7}$ (H/m) veya 0.251 (μH/m).

$$C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{w}{d} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2.25 \times \frac{2}{0.4} = 99.5 \times 10^{-12} \text{ (F/m)} \text{ veya } 99.5 \text{ (pF/m)}.$$

c) $$u_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{2.25}} = \frac{c}{1.5} = 2 \times 10^8 \text{ (m/s)}.$$

d) w, Z_0 ile ters orantılı olduğundan, $Z_0' = 75$ (Ω) için,

$$w' = \left(\frac{Z_0}{Z_0'}\right)w = \frac{50}{75} \times 2 = 1.33 \text{ (mm)}$$

$$L' = \left(\frac{w}{w'}\right)L = \left(\frac{2}{1.33}\right) \times 0.251 = 0.377 \text{ (μH/m)}$$

$$C' = \left(\frac{w'}{w}\right)C = \left(\frac{1.33}{2}\right) \times 99.5 = 66.2 \text{ (pF/m)}$$

$$u_p' = u_p = 2 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

buluruz.

8-4.1 GÜÇ BAĞINTILARINDAN ZAYIFLAMA SABİTİ

Bir iletim hattında ilerleyen bir dalganın zayıflama sabiti, yayılma sabitinin reel kısmıdır ve Eş. (8-12)'deki temel tanımdan elde edilebilir. Zayıflama sabiti bir güç bağıntısı yardımıyla da bulunabilir. Eş. (8-36) ve (8-37)'yi kullanarak (sadelik için artı üst indisini atarak)

$$V(z) = V_0 e^{-(\alpha + j\beta)z} \tag{8-54}$$

$$I(z) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-(\alpha + j\beta)z} \tag{8-55}$$

yazarız. Hat üzerindeki herhangi bir z'de yayılan zamanda-ortalama güç

$$\begin{aligned} P(z) &= \tfrac{1}{2}\mathcal{R}e[V(z)I^*(z)] \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z} \end{aligned} \tag{8-56}$$

dir. Enerjinin korunumu kanununa göre, $P(z)$'nin hat boyunca uzaklıkla azalma hızı, birim uzunluk başına zamanda-ortalama güç kaybı P_L'ye eşittir. Böylece

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P(z)}{\partial z} &= P_L(z) \\ &= 2\alpha P(z) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da aşağıdaki α formülü elde edilir:

Zayıflama sabitini güç bağıntısından belirleme

$$\alpha = \frac{P_L(z)}{2P(z)} \quad \text{(Np/m)}. \tag{8-57}$$

ÖRNEK 8-2

a) Eş. (8-57)'yi kullanarak, R, L, G ve C dağıtılmış parametreleri olan bir kayıplı hattın zayıflama sabitini bulunuz.

b) (a) şıkkında bulduğunuz sonucu (a) düşük kayıplı ve (b) kayıpsız bir hat durumlarına özelleştiriniz.

ÇÖZÜM

a) Bir kayıplı hat için birim uzunluk başına zamanda-ortalama güç kaybı

$$\begin{aligned} P_L(z) &= \tfrac{1}{2}[|I(z)|^2 R + |V(z)|^2 G] \\ &= \frac{V_0^2}{2|Z_0|^2}(R + G|Z_0|^2)e^{-2\alpha z} \end{aligned} \tag{8-58}$$

olarak bulunur.

Eş. (8-56) ve (8-58)'in Eş. (8-57)'de yerine konması α'yı verir:

Kayıplı iletim hattının zayıflama sabiti

$$\alpha = \frac{1}{2R_0}(R + G|Z_0|^2) \qquad \text{(Np/m)}. \tag{8-59}$$

b) Düşük kayıplı bir hat için, $Z_0 \cong R_0 = \sqrt{L/C}$ 'dir ve Eş. (8-59)

$$\alpha \cong \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_0} + GR_0\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right). \tag{8-60}$$

haline gelir. Bir bozulmasız hat için Eş. (8-52) $Z_0 = R_0 = \sqrt{L/C}$ verir. Böylece Eş. (8-60) uygulanabilir ve

$$\alpha = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(1 + \frac{G}{R}\frac{L}{C}\right)$$

verir. Bu da, Eş. (8-46)'daki koşul yardımıyla sadeleştirilir:

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{8-61}$$

■ **ALIŞTIRMA 8.4** Bir paralel-plaka iletim hattı w genişlikli çok iyi iletken plakalar ve bunları ayıran d kalınlıklı ϵ_r bağıl dielektrik sabitli, kayıpsız bir dielektrikten imal edilmiştir. Saçaklanma etkisini ihmal ederek, eğer sadece bir parametre değiştirilerek öz empedans iki katına çıkarılmak istenirse, (a) w, (b) d ve (c) ϵ_r'nin nasıl değişmesi gerektiğini açıklayınız.

■ **ALIŞTIRMA 8.5** Bir bozulmasız eş eksenli iletim hattının 10 (MHz)'deki zayıflama sabiti 0.1 (dB/km)'dir. Bu sabitin değerini,

a) 50 (MHz)'de ve

b) izolasyon dielektriğinin sabiti iki katına çıkarıldığında ve 10 (MHz)'de, hesaplayınız.

CEVAP: (a) 0.224 (dB/km), (b) 0.141 (dB/km).

TEKRAR SORULARI

S.8-6 Bir iletim hattının *yayılma sabitini* ve *öz empedansını* tanımlayınız. Sinüzoidal besleme durumunda bunların genel ifadelerini R, L, G ve C cinsinden yazınız.

S.8-7 *Şerit hat* nedir?

S.8-8 *Üç-plakalı hat* nedir? Üç-plakalı bir hattın ve buna karşılık gelen şerit hattın öz empedanslarını kıyaslayınız.

S.8-9 "Bozulmasız hat" ile anlatılmak istenen nedir? Bir hattın bozulmasız olması için parametreleri hangi bağıntıyı sağlamalıdır?

S.8-10 Bir iletim hattındaki güç kaybı ile zayıflama sabiti arasındaki ilişki nedir?

NOTLAR

1. Kayıpsız bir iletim hattında ve bozulmasız bir hattaki dalga yayılma hızı, hattın dielektrik ortamında kılavuzlanmamış bir düzlem dalganın yayılma hızı $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ile aynıdır.
2. Mikroşerit hatların dağıtılmış parametrelerinin ve öz empedanslarının tam belirlenmesi zordur. Çoğunlukla yarı-empirik formüller kullanılır.
3. Kayıpsız bir hat bozulmasızdır; ancak bozulmasız bir hat kayıplı olabilir.
4. Kayıplı hatlar, eğer Eş. (8-46) sağlanmıyorsa, genelde dağıtıcıdır.

8-5 SONLU İLETİM HATLARINDA DALGA ÖZELLİKLERİ

Kısım 8-2'de iletim hatları için Eş. (8-10) ve Eş. (8-11)'deki zamanda-harmonik, tek boyutlu Helmholtz denklemlerinin genel çözümleri

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \tag{8-62}$$

ve

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \tag{8-63}$$

olarak verilmişti. Burada Kısım 8-4'te verildiği gibi,

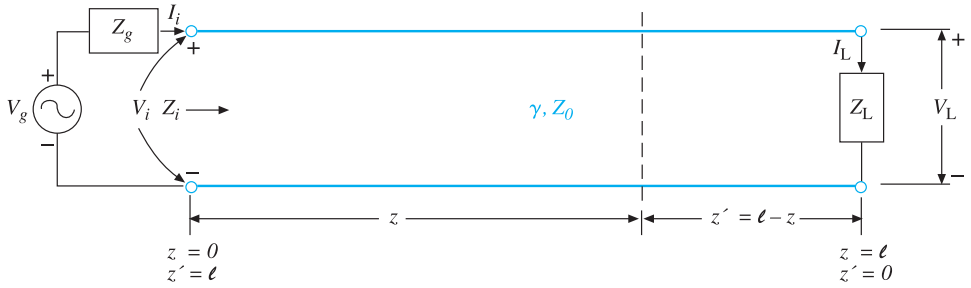
$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_0 \tag{8-64}$$

dır. Sonsuz uzun bir hatta $z = 0$'dan yollanan dalgalar durumunda sadece $+z$ yönünde ilerleyen ileri dalgalar olacak ve Eş. (8-62) ile Eş. (8-63)'te yansıyan dalgaları temsil eden sağ taraftaki ikinci terimler sıfır olacaktır.

Şimdi Şekil 8-4'te gösterildiği gibi, gelişigüzel bir Z_L yük empedansı ile sonlandırılmış Z_0 öz empedanslı bir sonlu iletim hattı genel durumunu ele alalım. Hattın uzunluğu ℓ'dir. İç empedansı Z_g olan $V_g \angle 0°$ sinüzoidal voltaj kaynağı $z = 0$'da hatta bağlanmıştır. Böyle bir durumda

$$\left(\frac{V}{I}\right)_{z=\ell} = \frac{V_L}{I_L} = Z_L \tag{8-65}$$

olur ki bu da $Z_L = Z_0$ durumu dışında, Eş. (8-62) ve (8-63)'ün sağ tarafındaki ikinci terimler (yansıma) olmaksızın sağlanamaz. Hattın γ ve Z_0 özellikleri ve ℓ uzunluğu verilirse Eş. (8-62) ve (8-63)'te dört bilinmeyen vardır: V_0^+, V_0^-, I_0^+ ve I_0^-. Bu dört bilinmeyen, $z = 0$ ve $z = \ell$'deki bağıntılarla kısıtlı olduklarından tamamen bağımsız değildir.



ŞEKİL 8-4 Z_L yük empedansı ile sonlandırılmış sonlu iletim hattı.

Eş. (8-62) ve (8-63)'te $z = \ell$ alınır ve Eş. (8-64) kullanılırsa

$$V_L = V_0^+ e^{-\gamma\ell} + V_0^- e^{\gamma\ell} \tag{8-66}$$

$$I_L = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma\ell} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma\ell} \tag{8-67}$$

elde edilir. Eş. (8-66) ve (8-67) V_0^+ ve V_0^-için çözülürse

$$V_0^+ = \tfrac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)e^{\gamma\ell} = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell} \tag{8-68}$$

$$V_0^- = \tfrac{1}{2}(V_L - I_L Z_0)e^{-\gamma\ell} = \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0)^{-\gamma\ell} \tag{8-69}$$

bulunur. Eş. (8-68) ve (8-69), Eş. (8-62) ve (8-63)'te kullanılarak

$$V(z) = \frac{I_L}{2}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma(\ell - z)} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(\ell - z)}] \tag{8-70}$$

$$I(z) = \frac{I_L}{2Z_0}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma(\ell - z)} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(\ell - z)}] \tag{8-71}$$

elde edilir. ℓ ve z birlikte $(\ell - z)$ biçiminde gözüktüğünden, yükten olan uzaklığı ölçen $z' = \ell - z$ yeni değişkenini tanımlamak yararlıdır. O halde Eş. (8-70) ve (8-71)

$$V(z') = \frac{I_L}{2}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z'}] \tag{8-72}$$

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0}[(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma z'}] \tag{8-73}$$

haline gelir. Hiperbolik fonksiyonların kullanımı yukarıdaki denklemleri sadeleştirir. Eş. (8-72) ve (8-73)'ü

$$e^{\gamma z'} + e^{-\gamma z'} = 2\cosh \gamma z' \quad \text{ve} \quad e^{\gamma z'} - e^{-\gamma z'} = 2\sinh \gamma z'$$

bağıntılarını hatırlayarak

Bir sonlu hatta γ, Z_0, Z_L, I_L ve z' cinsinden $V(z')$ ve $I(z')$

$$V(z') = I_L(Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \sinh \gamma z') \tag{8-74}$$

$$I(z') = \frac{I_L}{Z_0}(Z_L \sinh \gamma z' + Z_0 \cosh \gamma z') \tag{8-75}$$

halinde yazabiliriz. Bu denklemler bir iletim hattında herhangi bir noktadaki gerilim ve akımı I_L, Z_L, γ, ve Z_0 cinsinden bulmak için kullanılabilir.

$V(z')$ / $I(z')$ oranı, *yükten z' kadar uzaktan* hattın yük ucuna doğru bakarken görülen empedanstır ve

$$Z(z') = \frac{V(z')}{I(z')} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \sinh \gamma z'}{Z_L \sinh \gamma z' + Z_0 \cosh \gamma z'} \tag{8-76}$$

veya

γ, Z_0, Z_L ve z' cinsinden $Z(z')$ empedansı

$$Z(z') = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma z'}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma z'} \quad (\Omega) \tag{8-77}$$

olarak bulunur. Hattın kaynak ucu $z' = \ell$'de kaynaktan hatta bakarken aşağıdaki Z_i ***giriş empedansı*** görülür:

ℓ uzunluğunda bir hattın giriş empedansının genel formülü

$$Z_i = (Z)_{\substack{z=0 \\ z'=\ell}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma \ell}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma \ell} \quad (\Omega). \tag{8-78}$$

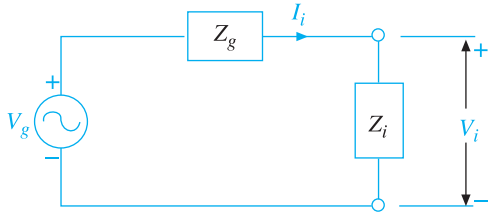
Kaynaktaki koşullar söz konusu olduğunda, sonlandırılmış iletim hattı Şekil 8-5'te görüldüğü gibi Z_i ile değiştirilebilir. Şekil 8-4'teki V_i giriş gerilimi ve I_i giriş akımı, Şekil 8-5'teki eşdeğer devreden kolaylıkla bulunur.

$Z_L = Z_0$ olduğunda iletim hattı uyumludur.

$Z_L = Z_0$ olduğunda hattın ℓ uzunluğundan bağımsız olarak $Z_i = Z_0$ olduğu açıktır. Bu koşul altında hatta, *uyumludur* denir. Bu koşul hakkında ileride tekrar konuşacağız.

Çoğu durumda iletim hattı parçaları kayıpsız kabul edilebilir. Bu durumda $\gamma = j\beta$, $Z_0 = R_0$ ve $\tanh \gamma \ell = \tanh(j\beta\ell) = j \tan \beta\ell$ olur. Z_L ile sonlanmış, ℓ uzunluklu kayıpsız bir hattın Z_i giriş empedan-

ŞEKİL 8-5 Şekil 8-4'teki sonlu iletim hattının kaynak ucundaki eşdeğer devresi.



sı için Eş. (8-78)'de verilen formül aşağıdaki hale gelir.

ℓ uzunluğunda kayıpsız bir hattın Z_i giriş empedansı formülü

$$Z_i = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan \beta\ell}{R_0 + jZ_L \tan \beta\ell} \quad (\Omega) \quad \text{(kayıpsız hat).} \tag{8-79}$$

8-5.1 AÇIK-DEVRE VE KISA-DEVRE HATLAR

İletim hatları yalnızca bir yerden diğerine güç ve bilgi iletmek için dalga-kılavuz yapısı olarak kullanılmazlar, çok yüksek frekanslarda (UHF)—300 (MHz)'den 3(GHz)'e—devre elemanı olarak da kullanılabilirler. Bu frekanslarda endüktans ve kapasitans gibi toplu devre elemanları yapmak zordur ve parazitik alanlar önemli hale gelir. Açık ve kısa-devre elemanlar endüktans ve/veya kapasitans olarak davranabilir. UHF aralığının üstündeki frekanslarda iletim-hattı devrelerinin fiziksel boyutları uygun olmayacak kadar küçülür ve artık sonraki bölümde tartışılacak olan dalga kılavuzu elemanların kullanılması avantajlı olur.

A. *Açık-devre hat* ($Z_L \to \infty$).

Eş. (8-79)'dan

Kayıpsız bir açık-devre hattın giriş empedansı

$$Z_{io} = jX_{io} = -\frac{jR_0}{\tan \beta\ell} = -jR_0 \cot \beta\ell \tag{8-80}$$

yazarız. Eş. (8-80) açık-devre bir hattın giriş empedansının tümüyle reaktif olduğunu gösterir. Ancak hat kapasitif veya endüktif olabilir çünkü $\cot \beta\ell$ fonksiyonu $\beta\ell\ (= 2\pi\ell/\lambda)$ değerine bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir.

Eğer bir açık-devre hattın uzunluğu, dalga boyuna kıyasla çok küçükse $\beta\ell \ll 1$'dir ve hattın kapasitif reaktansı için basit bir formülü, $\beta\ell \cong \beta\ell$'olduğuna dikkat ederek bulabiliriz. Eş. (8-80)'den

Çok kısa açık-devre bir hattın giriş empedansı tümüyle kapasitiftir.

$$Z_{io} = jX_{io} \cong -j\frac{R_0}{\beta\ell} = -j\frac{\sqrt{L/C}}{\omega\sqrt{LC}\ell} = -j\frac{1}{\omega C\ell} \tag{8-81}$$

buluruz ki bu da $C\ell$ faradlık kapasitansın empedansıdır.

Açık-devre hatlar nadiren devre elemanı olarak kullanılır.

Pratikte bir iletim hattının ucunda, özellikle yüksek frekanslarda sonsuz yük empedansı elde etmek mümkün değildir, çünkü yakın devrelere bağlaşım ve açık uçtan ışıma vardır.

B. *Kısa-devre hat* ($Z_L = 0$).

Bir kayıpsız, kısa-devre hattın giriş empedansı

Bu durumda Eş. (8-79)

$$Z_{is} = jX_{is} = jR_0 \tan \beta\ell \tag{8-82}$$

haline indirgenir.

tan $\beta\ell$ $-\infty$ ile $+\infty$ arasında değiştiğinden kayıpsız kısa-devre bir hattın giriş empedansı da $\beta\ell$ değerine bağlı olarak tümüylü endüktif veya tümüyle kapasitif olabilir. Özel durumda $\beta\ell = \pi/2$ veya $\ell = \lambda/4$ olduğunda Eş. (8-82)deki Z_i sonsuz olur. Böylece çeyrek-dalga boyunda bir kısa devre-hat sonuçta bir açık-devredir.

Çeyrek-dalga boyu bir kısa devre, açık devre gibi davranır.

Eğer bir kısa-devre hattın uzunluğu dalga boyuna kıyasla çok küçük ise $\beta\ell \ll 1$ olur ve Eş. (8-82) yaklaşık olarak

$$Z_{is} = jX_{is} \cong jR_0\beta\ell = j\sqrt{\frac{L}{C}}\,\omega\sqrt{LC}\ell = j\omega L\ell \tag{8-83}$$

Çok kısa bir kısa-devre hattın giriş empedansı tümüyle endüktiftir.

haline gelir ki bu da $L\ell$ Henry'lik endüktansın empedansıdır.

■ **ALIŞTIRMA 8.6** Çeyrek-dalga boyu, kayıpsız bir hattın, bir yük empedansını, girişte empedansın tersi ile öz direncin karesinin çarpımına dönüştürdüğünü, yani $Z_i = R_0^2/Z_L$ olduğunu ispat ediniz.

■ **ALIŞTIRMA 8.7** Yarım-dalga boyundaki bir hattın, yük empedansını değiştirmeden giriş ucuna taşıdığını ispat ediniz.

8-5.2 GİRİŞ ÖLÇÜMLERİNDEN ÖZ EMPEDANS VE YAYILMA SABİTİ

Bir iletim hattının öz empedansını ve yayılma sabitini, hattın bir parçasının giriş empedansını açık ve kısa-devre koşullarında ölçerek belirleyebiliriz. Aşağıdaki ifadeler doğrudan Eş. (8-78)'den bulunabillir.

Açık-devre hat, $Z_L \to \infty$: $\quad Z_{io} = Z_0 \coth \gamma\ell.$ (8-84a)

Kısa devre hat, $Z_L = 0$: $\quad Z_{is} = Z_0 \tanh \gamma\ell.$ (8-84b)

Eş. (8-84a) ve (8-84b) kullanılarak

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{io}Z_{is}} \quad (\Omega)} \tag{8-85}$$

Bir hat için Z_0 ve γ'nın açık-devre ve kısa-devre koşulları altında giriş empedansı ölçümlerinden hesaplanması

ve

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\ell}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{Z_{is}}{Z_{io}}} \quad (\mathrm{m}^{-1})} \tag{8-86}$$

elde edilir. Eş. (8-85) ve (8-86)'nın hesaplanması kolaydır.

ÖRNEK 8-3

Açık-devre gerilimi $v_g(t) = 0.3\cos 2\pi 10^8 t$ (V) ve iç direnci 1 (Ω) olan bir sinyal kaynağı, kayıpsız 50-(Ω) bir hatta bağlanmıştır.

Hat 4 (m) uzunluğundadır ve hattaki dalga yayılma hızı 2.5×10^8 (m/s)'dir. Uyumlu bir yük için (a) hat üzerinde gelişigüzel bir noktadaki anlık gerilim ve akım ifadelerini, (b) yükteki anlık gerilim ve akım ifadelerini ve (c) yüke iletilen ortalama gücü bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Hat üzerinde gelişigüzel bir noktada gerilim ve akımı bulmak için önce giriş ucundaki ($z = 0$, $z' = \ell$) gerilim ve akım bulunmalıdır. Verilen nicelikler aşağıdaki gibidir:

$$V_g = 0.3\underline{/0^\circ} \quad \text{(V)}, \qquad \text{kosinüs referanslı bir fazör}$$
$$Z_g = R_g = 1 \quad (\Omega),$$
$$Z_0 = R_0 = 50 \quad (\Omega),$$
$$\omega = 2\pi \times 10^8 \quad \text{(rad/s)},$$
$$u_p = 2.5 \times 10^8 \quad \text{(m/s)},$$
$$\ell = 4 \quad \text{(m)}.$$

Hat uyumlu yük ile sonlandırıldığından $Z_i = Z_0 = 50$ (Ω)'dur. Girişteki gerilim ve akım Şekil 8-5'teki eşdeğer devreden bulunabilir. Böylece

$$V_i = \frac{Z_i}{Z_g + Z_i} V_g = \frac{50}{1 + 50} \times 0.3\underline{/0^\circ} = 0.294\underline{/0^\circ} \quad \text{(V)},$$

$$I_i = \frac{V_g}{Z_g + Z_i} = \frac{0.3\underline{/0^\circ}}{1 + 50} = 0.0059\underline{/0^\circ} \quad \text{(A)}$$

buluruz. Bir uyumlu hat üzerinde sadece ileri yönde ilerleyen dalgalar var olduğundan, herhangi bir noktadaki gerilim ve akım için, sırasıyla, Eş (8-54) ve (8-55)'i kullanırız. Verilen hat için $\alpha = 0$'dır ve

$$\beta = \frac{\omega}{u_p} = \frac{2\pi \times 10^8}{2.5 \times 10^8} = 0.8\pi \quad \text{(rad/m)}$$

bulunur. Böylece

$$V(z) = 0.294e^{-j0.8\pi z} \quad \text{(V)},$$
$$I(z) = 0.0059e^{-j0.8\pi z} \quad \text{(A)}$$

elde edilir. Bunlar fazördür. Bunlara karşılık gelen anlık ifadeler Eş. (8-6) ve (8-7)'den

$$v(z, t) = \mathcal{R}e[0.294e^{j(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z)}]$$
$$= 0.294\cos(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z) \quad \text{(V)},$$
$$i(z, t) = \mathcal{R}e[0.0059e^{j(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z)}]$$
$$= 0.0059\cos(2\pi 10^8 t - 0.8\pi z) \quad \text{(A)}$$

olarak bulunur.

b) Yükte $z = \ell = 4$ (m)'dir ve

$$v(4, t) = 0.294\cos(2\pi 10^8 t - 3.2\pi) \quad \text{(V)},$$
$$i(4, t) = 0.0059\cos(2\pi 10^8 t - 3.2\pi) \quad \text{(A)}$$

elde edilir.

c) Bir kayıpsız hatta yüke iletilen ortalama güç, giriş terminallerindekine eşittir:

$$(P_{av})_L = (P_{av})_i = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e[V(z)I^*(z)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.294 \times 0.0059) = 8.7 \times 10^{-4}\,\text{(W)} = 0.87\ \text{(mW)}.$$

ÖRNEK 8-4

Çeyrek dalga boyundan daha kısa olan 1.5 (m) uzunluğundaki kayıpsız bir iletim hattının giriş terminallerinde ölçülen açık-devre ve kısa-devre giriş empedansları, sırasıyla, $-j54.6$ (Ω) ve $j103$ (Ω)'dur.

a) Hattın Z_0 ve γ değerlerini bulunuz.

b) Çalışma frekansını değiştirmeden, verilen hattın iki katı uzunluğundaki kısa-devre bir hattın giriş empedansını bulunuz.

c) Giriş terminallerinde bir açık devre olarak gözükmesi için kısa-devre bir hattın uzunluğu ne olmalıdır?

ÇÖZÜM

Verilen nicelikler şunlardır:

$$Z_{io} = -j54.6, \qquad Z_{is} = j103, \qquad \ell = 1.5.$$

a) Eş. (8-85) ve (8-86)'yı kullanarak

$$Z_0 = \sqrt{-j54.6(j103)} = 75 \quad (\Omega),$$
$$\gamma = \frac{1}{1.5}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{j103}{-j54.6}} = \frac{j}{1.5}\tan^{-1}1.373 = j0.628\ \text{(rad/m)}$$

buluruz.

b) İki kat uzun kısa-devre bir hat için $\ell = 3.0$ (m) ve

$\gamma\ell = j0.628 \times 3.0 = j1.884$ (rad)'dır.

Giriş empedansı, Eş. (8-84b)'den

$$Z_{is} = 75\tanh(j1.884) = j75\tan 108^\circ$$
$$= j75(-3.08) = -j231 \quad (\Omega)$$

bulunur. Kısa-devre yapılmış 3 (m) bir hat için Z_{is}'nin şimdi kapasitif reaktans olduğuna dikkat ediniz. Öte yandan verilen 1.5 (m) hattın Z_{is} değeri endüktif bir reaktanstır.

c) Bir kısa-devrenin giriş terminallerinde açık devre olarak gözükmesi için hattın çeyrek-dalga boyunun tek katı uzunluğa sahip olması gerekir. Bu da Eş. (8-82)'de $\tan\beta\ell \to \infty$ yapar.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.628} = 10 \quad \text{(m)}.$$

Böylece gereken hat uzunluğu

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + (n-1)\frac{\lambda}{2}$$
$$= 2.5 + 5(n-1) \quad \text{(m)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

bulunur.

TEKRAR SORULARI

S.8-11 "Uyumlu iletim hattı" ne demektir?

S.8-12 Bir iletim hattının giriş empedansı hangi faktörlere bağlıdır?

S.8-13 Kayıpsız, açık-devre bir iletim hattının uzunluğu (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ ve (c) $3\lambda/4$ olduğunda giriş empedansı nedir?

S.8-14 Kayıpsız, kısa-devre bir iletim hattının uzunluğu, (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ ve (c) $3\lambda/4$ olduğunda giriş empedansı nedir?

S.8-15 $\lambda/8$ uzunluğunda bir iletim hattının giriş reaktansı, hat (a) açık-devre ve (b) kısa-devre ise endüktif mi yoksa kapasitif midir?

S.8-16 Z_L yük empedansı ile sonlandırılmış ℓ uzunluğunda bir iletim hattının, eğer (a) $\ell = \lambda/2$ ve (b) $\ell = \lambda$ ise giriş empedansı nedir?

S.8-17 Bir iletim hattının öz empedansını ve yayılma sabitini belirlemek için bir yöntem veriniz.

NOTLAR

1. Öz empedansı ile sonlandırılmış bir iletim hattının giriş empedansı, hattın uzunluğundan bağımsız olarak, öz empedansa eşittir.
2. Bir sonsuz iletim hattı durumunda olduğu gibi, öz empedansı ile sonlandırılmış bir hat üzerinde sadece ileri dalgalar vardır. Giriş (yollayan) ucunda, sonsuz bir hat ve uyumlu hattın devre koşulları aynıdır.
3. ℓ uzunluğunda, kısa-devre bir hattın giriş empedansı $jR_0 \tan \beta\ell$'dir; endüktif veya kapasitif olabilir.
4. Bir hattın öz empedansı ve yayılma sabiti, hat açık-devre ve kısa-devre iken giriş empedanslarını ölçerek belirlenebilir.

8-5.3 YANSIMA KATSAYISI VE DURAN-DALGA ORANI

Şekil 8-4'te gösterilen gibi bir sonlu iletim hattı üzerinde, kaynak ucundan Z_L yük ucuna doğru ilerleyen gerilim ve akım dalgaları, eğer $Z_L \neq Z_0$ ise yansıyan gerilim ve akım dalgalarına neden olacaktır. Yükten herhangi bir $z' = \ell - z$ uzaklığındaki gerilim Eş. (8-72)'de elde edilmişti.

Bu denklemde $e^{\gamma z'}$ içeren terim gelen gerilim dalgasını, $e^{-\gamma z'}$ içeren terim ise yansıyan gerilim dalgasını göstermektedir. Böylece

$$V(z') = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}\left[1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}e^{-2\gamma z'}\right]$$

$$= \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}[1 + \Gamma e^{-2\gamma z'}] \qquad (8\text{-}87)$$

yazabiliriz. Burada

Z_L yük empedansının gerilim yansıma katsayısının tanımı

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma|e^{j\theta_\Gamma} \quad \text{(birimsiz)} \qquad (8\text{-}88)$$

yükteki ($z' = 0$) yansıyan ve gelen gerilim dalgalarının kompleks genliklerinin oranıdır ve Z_L ***yük empedansının gerilim yansıma katsayısı*** olarak adlandırılır. Bu katsayı, iki dielektrik ortamın düzlem sınırına normal olarak gelen bir düzlem dalganın, Eş. (7-94)'te verilen yansıma katsayısı ile aynı biçimdedir. Yansıma katsayısı genelde genliği $|\Gamma| \leq 1$ olan bir kompleks niceliktir.

Eş. (8-87)'deki $V(z')$'ye karşılık gelen akım denklemi, Eş. (8-73)'ten

$$I(z') = \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0)e^{\gamma z'}[1 - \Gamma e^{-2\gamma z'}] \qquad (8\text{-}89)$$

Akım yansıma katsayısı gerilim yansıma katsayısının negatifine eşittir.

bulunur. Yükteki ($z' = 0$) yansıyan ve gelen akım dalgalarının kompleks genliklerinin oranı olarak tanımlanan akım yansıma katsayısı, Eş. (8-64)'ten açıkça görüldüğü gibi gerilim yansıma katsayısının negatifidir. Sonraki kısımlarda sadece gerilim yansıma katsayısını kullanacağız. Eğer bir iletim hattı uyumlu ise —yani $Z_L = Z_0$ ise— $\Gamma = 0$'dır ve yükte hiç yansıma yokur. $Z_L \neq Z_0$ olduğunda hat üzerinde Eş. (8-87) ve (8-89)'la uyumlu olarak, duran gerilim ve akım dalgaları vardır ve maksimum ve minimumlar oluşur.

Eş. (7-98)'deki düzlem dalga durumuna benzer şekilde, sonlu ve sonlandırılmış bir hat üzerindeki maksimum ve minimum gerilimlerin oranını S ***duran-dalga oranı*** **(SWR)** olarak tanımlarız:

Duran-dalga oranının (SWR) tanımı

$$S = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad \text{(birimsiz).} \qquad (8\text{-}90)$$

Z_L'nin değerine bağlı olarak SWR değeri 1'den ($|\Gamma| = 0$, uyumlu yük) ∞'a ($|\Gamma| = 1$, açık devre veya kısa devre) değişebilir. S'nin geniş aralığından dolayı bir logaritmik ölçek ile, $20 \log_{10} S$ ile (dB) olarak ifade edilmesi yaygındır.

Bir hat üzerinde yüksek duran-dalga oranı arzu edilmez; çünkü büyük bir güç kaybına neden olur. Eş. (8-90)'ın ters bağıntısı

|Γ|'nın SWR'den hesaplanması

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \quad \text{(birimsiz)} \tag{8-91}$$

olarak yazılabilir. Bir iletim hattındaki SWR, hatta açılan dar bir yarık boyunca küçük bir prob gezdirilip algılanan maksimum ve minimum elektrik alan şiddetlerinin oranı halinde bulunabilir. Eş. (8-90)'dan $S = |V_{max}|/|V_{min}|$ ve Eş. (8-91)'den de $|\Gamma|$ bulunur. θ_Γ açısı V_{max} veya V_{min}'in konumundan belirlenebilir. (Ardışık gerilim maksimumları veya ardışık gerilim minimumları arasındaki uzaklık yarım dalga boyudur.) $|\Gamma|$ ve θ_Γ bulunduktan sonra Z_L Eş. (8-88)'den Örnek 8-5'te gösterileceği gibi hesaplanabilir.

Kayıpsız bir iletim hattında $\gamma = j\beta$'dır ve Eş. (8-87) ve (8-89)

$$V(z') = \frac{I_L}{2}(Z_L + R_0)e^{j\beta z'}[1 + |\Gamma|e^{j(\theta_\Gamma - 2\beta z')}] \tag{8-92}$$

ve

$$I(z') = \frac{I_L}{2R_0}(Z_L + R_0)e^{j\beta z'}[1 - |\Gamma|e^{j(\theta_\Gamma - 2\beta z')}] \tag{8-93}$$

haline gelir.

ÖRNEK 8-5

Bilinmeyen bir yük empedansı ile sonlandırılmış kayıpsız, 50-(Ω) bir hatta duran-dalga oranı 3.0 bulunmuştur. Ardışık gerilim minimumları arasındaki uzaklık 20 (cm)'dir ve ilk minimum yükten 5 (cm) uzakta oluşmuştur. (a) Γ yansıma katsayısını ve (b) Z_L yük empedansını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Ardışık gerilim minimumları arasındaki uzaklık yarım dalga boyudur, o halde

$$\lambda = 2 \times 0.2 = 0.4 \text{ (m)}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ (rad/m)}$$

bulunur. Yansıma katsayısının $|\Gamma|$ genliğini, verilen SWR $S = 3$ ile Eş. (8-91)'den

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{3-1}{3+1} = 0.5$$

olarak elde ederiz. θ_Γ açısını bulmak için Eş. (8-92)'den ilk gerilim minimumunun

$$\theta_\Gamma - 2\beta z'_m = -\pi$$

olduğunda oluştuğunu kullanırız. Burada z'_m ilk gerilim minimumunun konumunu göstermektedir. Böylece

$$\theta_\Gamma = 2\beta z'_m - \pi$$
$$= 2 \times 5\pi \times 0.05 - \pi = -0.5\pi = -\pi/2 \quad \text{(rad)}$$

ve sonuçta

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma} = 0.5e^{-j\pi/2} = -j0.5$$

buluruz.

b) Yük empedansı Z_L, Eş. (8-88)'den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{Z_L - 50}{Z_L + 50} = -j0.5,$$

$$Z_L = \frac{50 - j25}{1 + j0.5} = 30 - j40 \quad (\Omega).$$

■ **ALIŞTIRMA 8.8**

Örnek 8-5'i aynı kayıpsız 50-(Ω) iletim hattı ve aynı çalışma frekansında ancak farklı bir yük direnci için yeniden çözünüz. Eğer SWR 2.5 ise ve yükte bir gerilim maksimumu varsa (a) Γ_L yansıma katsayısını ve (b) Z_L yük empedansını bulunuz.

CEVAP: (a) 0.43, (b) 125.4 (Ω).

Eş. (8.87) ve Eş. (8-89)'da sonlu uzunluklu, Z_L yük empedansı ile sonlandırılmış bir iletim hattı üzerindeki $V(z')$ gerilimini ve $I(z')$ akımını, I_L yük akımı ve yükün Γ gerilim yansıma katsayısı cinsinden ifade ettik. Giriş veya kaynak ucundaki koşullardan hiç bahsedilmedi ancak, doğaldır ki I_L, giriş ucundaki koşullara bağlıdır. V_g gerilimli ve Z_g iç empedanslı bir kaynak Şekil 8-4'te gösterildiği gibi hattın giriş ucuna bağlanırsa aşağıdaki

$$V_i = V_g - I_i Z_g \tag{8-94}$$

koşulu geçerlidir. Burada V_i ve I_i sırasıyla, Eş. (8-87) ve (8-89)'da $z' = \ell$ alarak elde edilir. Kaynak, hattın giriş terminallerine bağlanır bağlanmaz $V_i = V_g Z_0/(Z_0 + Z_g)$ giriş gerilimi yüke doğru $u_p = \omega/\beta$ hızıyla ilerler. Yükte eğer $Z_L \neq Z_0$ ise gelen dalga bir Γ yansıma katsayısı ile yansır. Bu yansıyan dalga, giriş ucuna aynı u_p hızıyla geri döner. Eğer $Z_g \neq Z_0$ ise $\Gamma_g = (Z_g - Z_0)/(Z_g + Z_0)$ yansıma katsayısı ile bir başka yansıma gerçekleşir. Bu işlem her iki uçtaki yansımalarla belirsizce devam eder ve $V(z')$ duran dalgası her iki yönde ilerleyen dalgaların toplamıdır.

Eğer $Z_g \neq Z_0$ ise kaynak (giriş) ucunda da yansıma gerçekleşir.

Eğer $Z_L = Z_0$ (uyumlu yük) ise $\Gamma = 0$ olur ve sadece kaynak tarafından yüke doğru ilerleyen dalgalar vardır. Eğer $Z_L \neq Z_0$ ancak $Z_g = Z_0$ ise sadece kaynaktan yüke doğru ilerleyen (gelen dalga) bir başlangıç dalgası ve yükten kaynağa giden bir yansıyan dalga var olacaktır.

ÖRNEK 8-6

$V_g = 10\underline{/0^\circ}$ (V) ve iç direnci 50 (Ω) olan 100-(MHz) bir kaynak, 3.6 (m) uzunluğunda, $25 + j25$ (Ω) yükle sonlandırılmış 50 (Ω)'luk hava dielektrikli bir hatta bağlanmıştır. (a) Kaynaktan z uzaklıkta $V(z)$'yi, (b) giriş terminallerinde V_i'yi ve yükte V_L'yi, (c) hattaki duran-dalga oranını ve (d) yüke iletilen ortalama gücü bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekil 8-4'e bakarak verilen nicelikler

$$V_g = 10\underline{/0^\circ} \quad \text{(V)}, \quad Z_g = 50 \quad (\Omega), \quad f = 10^8 \quad \text{(Hz)},$$

$$R_0 = 50 \ (\Omega), \quad Z_L = 25 + j25 = 35.36\underline{/45^\circ} \ (\Omega), \quad \ell = 3.6 \ \text{(m)}$$

dir. Böylece

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{(rad/m)}, \qquad \beta\ell = 2.4\pi \quad \text{(rad)},$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(25 + j25) - 50}{(25 + j25) + 50} = \frac{-25 + j25}{75 + j25} = \frac{35.36\underline{/135^\circ}}{79.1\underline{/18.4^\circ}}$$

$$= 0.447\underline{/116.6^\circ} = 0.447\underline{/0.648\pi}$$

ve $\Gamma_g = 0$ bulunur. Sadece bir tane gelen ve bir tane yansıyan dalga vardır.

a) $V(z)$'yi bulmak için Eş. (8-87)'den $V(z' = \ell) = V_i$'yi ve Eş. (8-89)'dan $I(z' = \ell) = I_i$'yi Eş. (8-94)'te yerine koyarak

$$I_L(Z_L + Z_0)e^{\gamma\ell} = V_g \tag{8-95}$$

buluruz. Eş. (8-95)'i Eş. (8-87)'de kullanarak

$$V(z) = \frac{V_g}{2} e^{-j\beta z}[1 + \Gamma e^{-j2\beta(\ell - z)}] \tag{8-96}$$

elde ederiz. Bu problemdeki değerlerle aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$V(z) = \frac{10}{2} e^{-j2\pi z/3}[1 + 0.447\, e^{j(0.648 - 4.8)\pi} e^{j4\pi z/3}]$$

$$= 5[e^{-j2\pi z/3} + 0.447 e^{j(2z/3 - 0.152)\pi}] \quad \text{(V)}.$$

b) Giriş terminallerinde

$$V_i = V(0) = 5(1 + 0.447 e^{-j0.152\pi})$$

$$= 5(1.396 - j0.207)$$

$$= 7.06\underline{/-8.43^\circ} \quad \text{(V)}$$

bulunur. Yükte ise

$$V_L = V(3.6) = 5[e^{-j0.4\pi} + 0.447 e^{j0.248\pi}]$$

$$= 5(0.627 - j0.637) = 4.47\underline{/-45.5^\circ} \quad \text{(V)}$$

elde edilir.

c) Duran-dalga oranı

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.62 \quad \text{ve}$$

d) yüke iletilen ortama güç

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\frac{V_L}{Z_L}\right|^2 R_L = \frac{1}{2}\left(\frac{4.47}{35.36}\right)^2 \times 25 = 0.20 \quad \text{(W)} \quad \text{bulunur.}$$

■ **ALIŞTIRMA 8.9** Örnek 8-6'daki iletim hattı devresinde $Z_L = Z_0 = 50 + j0$ (Ω) uyumlu yüküne iletilen ortalama gücü bulunuz. Cevabınızla o örnekteki (d) şıkkının sonucu arasındaki farkı açıklayınız.

CEVAP: 0.25 (W).

TEKRAR SORULARI

S.8-18 *Gerilim yansıma katsayısını* tanımlayınız. Akım yansıma katsayısı ile aynı mıdır? Açıklayınız.

S.8-19 *Duran-dalga oranını* açıklayınız. Gerilim ve akım yansıma katsayıları ile ilişkisi nedir?

S.8-20 Bir iletim hattında niçin yüksek duran-dalga oranı istenmez?

S.8-21 Açık-devre sonlu bir hatta Γ ve S nedir? Kısa devre durumunda bunlar nasıl değişir?

S.8-22 Kayıpsız bir hat üzerinde duran-dalga oranını ölçerek direnç yükün nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

NOTLAR

1. Bir iletim hattı uyumlu olmadığında ($Z_L \neq Z_0$, $\Gamma \neq 0$), hat üzerinde bir duran dalga oluşur. Ardışık gerilim maksimumları (veya ardışık gerilim minimumları) arasındaki uzaklık $\lambda/2$ ve komşu V_{max} ile V_{min} arası uzaklık ise $\lambda/4$'tür
2. R_L direnci ile sonlandırılmış R_0 öz dirençli kayıpsız bir iletim hattında, eğer $R_L > R_0$ ise yükte bir V_{max}; eğer $R_L < R_0$ ise yükte bir V_{min} oluşur. Bu gerçek Eş. (8-92)'de $z' = 0$ alarak ve Eş. (8-88)'den, $R_L > R_0$ için $\theta_\Gamma = 0$ ve $R_L < R_0$ için $\theta_\Gamma = \pi$ olduğuna dikkat ederek görülebilir.
3. Şekil 8-4'teki iletim hattını düşününüz ve kaynağın $t = 0$ anında açıldığını kabul ediniz. (a) Eğer $Z_L = Z_0$ ise (Z_g ne olursa olsun) $t_1 = \ell/u_p = \beta\ell/\omega$ anında ve (b) Eğer $Z_L \neq Z_0$ ise $2t_1$ anında hatta durgun duruma ulaşılır.

8-6 SMİTH GRAFİĞİ

Grafikler iletim hattı hesaplamalarını basitleştirir.

Smith grafiği

İletim hattı hesaplamaları çoğunlukla kompleks sayıların yoğun kullanımını içerir. Bu zorluk bir grafik çözüm yöntemi ile aşılabilir. En iyi bilinen ve en yaygın kullanılan grafik, P. H. Smith[1] tarafından bulunan ***Smith grafiğidir.*** Smith grafiği, normlanmış direnç ve reaktans fonksiyonlarının yansıma katsayısı düzleminde çizilen grafiğidir.

Kayıpsız bir iletim için Smith grafiğinin nasıl oluşturulduğunu anlamak için Eş. (8-88)'de tanımlanan yük empedansının gerilim yansıma katsayısını inceleyelim:

$$\Gamma = \frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0} = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}. \tag{8-97}$$

Z_L yük empedansını, hattın $R_0 = \sqrt{L/C}$ öz empedansı ile normlayalım:

$$Z_L = \frac{Z_L}{R_0} = \frac{R_L}{R_0} + j\frac{X_L}{R_0} = r + jx \quad \text{(Birimsiz)}, \tag{8-98}$$

burada r ve x, sırasıyla, normlanmış direnç ve reaktanstır. Eş. (8-97)

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}, \tag{8-99}$$

halinde yeniden yazılabilir. Burada Γ_r ve Γ_i, sırasıyla, gerilim yansıma katsayısı Γ'nın reel ve sanal kısımlarıdır. Eş. (8-99)'un ters bağıntısı

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}}{1 - |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}} \tag{8-100}$$

olarak bulunur. z_L ve Γ'yı reel ve sanal bileşenlerle ifade edersek

$$r + jx = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i} \tag{8-101}$$

buluruz. Eş. (8-101)'in pay ve paydasını, paydanın kompleks eşleniği ile çarpar ve reel ile sanal kısımları ayırırsak

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{8-102}$$

ve

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}. \tag{8-103}$$

elde ederiz.

[1] P.H. Smith, "Transmission-line calculator," *Electronics,* cilt. 12, s. 29, Ocak 1939 ve "An improved transmission-line calculator," *Electronics*, cilt. 17, s.130, Ocak 1944.

Eğer Eş. (8-102) verilen bir r değeri için $\Gamma_r - \Gamma_i$ düzleminde çizilirse sonuçtaki grafik bu r'nin gemetrik yeridir. Bu yer, denklem aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse rahatlıkla algılanabilir.

Smith grafiğinde sabit-*r* çemberlerinin denklemi

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2. \tag{8-104}$$

Bu denklem, $1/(1 + r)$ yarıçaplı ve $\Gamma_r = r/(1 + r)$, $\Gamma_i = 0$ merkezli bir çember denklemidir. Farklı r değerleri, farklı yarıçaplı ve merkezleri Γ_r ekseninde farklı noktalarda olan çemberler verir. Bir r-çemberleri ailesi Şekil 8-6'da sürekli çizgilerle gösterilmiştir. Bir kayıpsız hat için $|\Gamma| \leq 1$ olduğundan $\Gamma_r - \Gamma_i$ düzleminin sadece birim çember içinde kalan grafik kısımları anlamlıdır; dışarıdaki herşey gözardı edilebilir. Tüm çemberlerin (1, 0) noktasından geçtiğine dikkat ediniz. Bunlardan merkezi orijinde olan birim yarıçaplı $r = 0$ çemberi en büyük olandır.

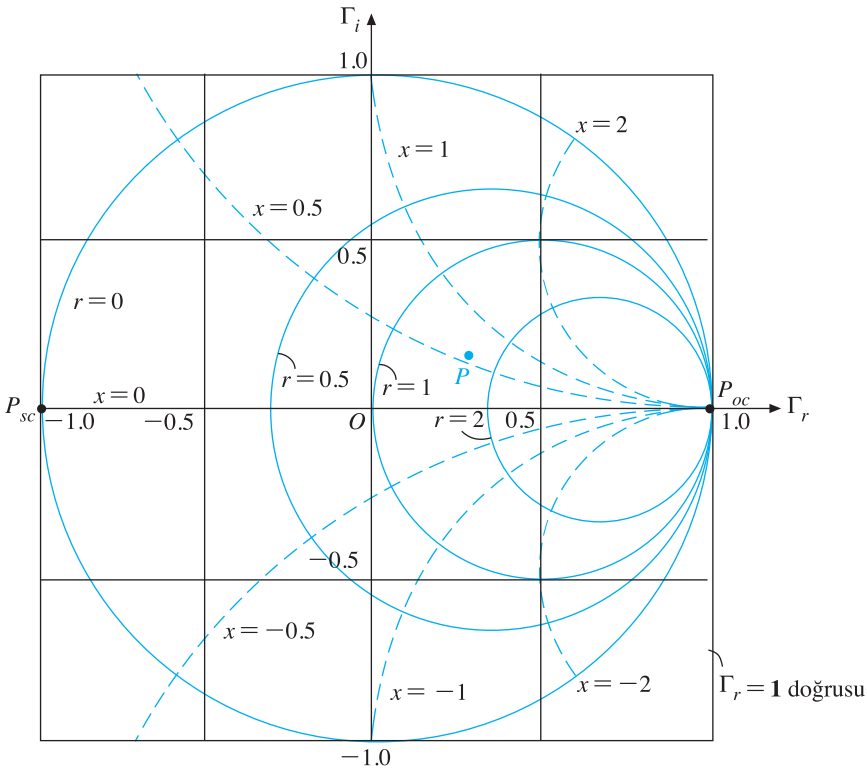
Eş. (8-103) yeniden düzenlenerek

Smith grafiğinde sabit-*x* çemberlerinin denklemi

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{8-105}$$

elde edilir.

ŞEKİL 8-6 Kartezyen koordinatlı Smith Grafiği.



Bu denklem $1/|x|$ yarıçaplı ve $\Gamma_r = 1, \Gamma_i = 1/x$ merkezli bir çemberin denklemidir. x'in farklı değerleri, merkezleri $\Gamma_r = 1$ doğrusunda farklı konumlarda olan farklı yarıçaplı çemberler verir. $|\Gamma| = 1$ sınırının içinde kalan x-çemberi kısımlarının bir ailesi Şekil 8-6'da kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Tüm x-çemberleri de $(1, 0)$ noktasından geçer. Bunların merkezleri $x > 0$ için Γ_r ekseninin üstünde (endüktif reaktans) ve $x < 0$ için Γ_r-ekseninin altındadır (kapasitif reaktans). x-çemberlerinin yarıçapı $|x|$ azaldıkça artar ve $x = 0$ için olan noktalar Γ_r eksenine dönüşür.

r ve x çemberlerinin her yerde birbirine dik olduğu ispat edilebilir. Bir r-çemberi ve bir x-çemberinin kesişimi $z_L = r + jx$ normlanmış yük empedansını gösteren bir nokta tanımlar. Gerçek yük empedansı $Z_L = R_0(r + jx)$'tir.

Smith grafiğinde P_{sc} kısa-devre ve P_{oc} açık-devre noktalarının konumu

Örnek olarak Şekil 8-6'daki P noktası $r = 1.7$ ve $x = 0.6$ çemberlerinin kesişimidir. Aynı P noktası Şekil 8-8'deki detaylı grafikte daha kesin olarak gösterilmiştir. Nokta, $z_L = 1.7 + j\,0.6$'yı göstermektedir. Böylece $\Gamma_r = -1, \Gamma_i = 0$'daki P_{sc} noktası, $r = 0$ ve $x = 0$'a karşılık gelmektedir ve kısa devreyi gösterir. $\Gamma_r = 1, \Gamma_i = 0$'daki P_{oc} noktası ise sonsuz empedansa karşılık gelir ve açık devreyi temsil eder.

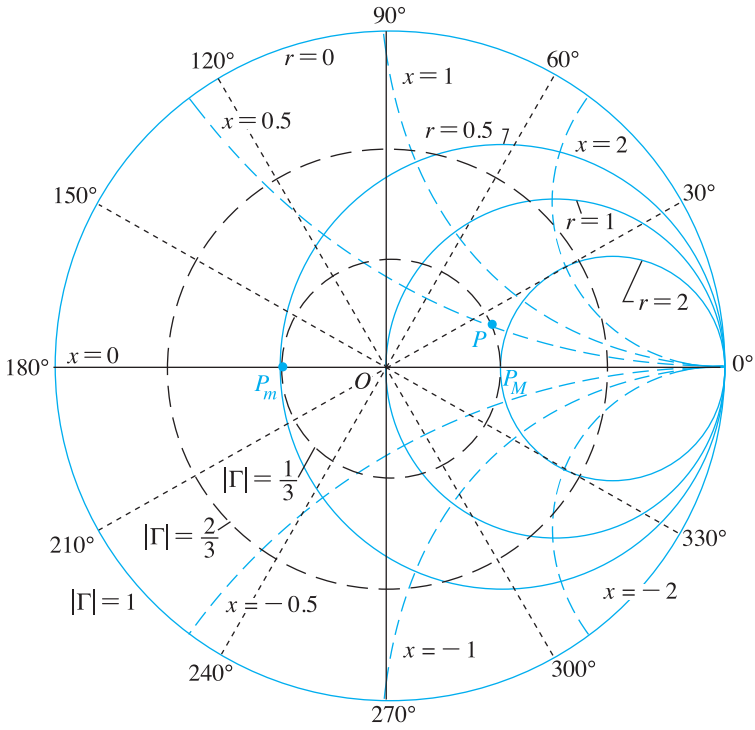
Yansıma katsayısı düzleminde Smith grafiği $\Gamma_r - \Gamma_i$ dikdörtgen koordinatlarında veya $|\Gamma|$-θ_Γ kutupsal koordinatlarında işaretlenebilir.

Şekil 8-6'daki Smith grafiği Γ_r ve Γ_i dikdörtgen koordinatlarıyla işaretlenmiştir. Aynı grafik, Γ-düzleminde her nokta bir $|\Gamma|$ genliği ve θ_Γ faz açısı ile belirlenecek şekilde kutupsal koordinatlarda da işaretlenebilir. Şekil 8-7'de birçok $|\Gamma|$-çemberi kesikli koyu çizgilerle gösterilmiş ve $r = 0$ çemberi ile aynı olan $|\Gamma| = 1$ çemberi üzerinde bazı θ_Γ açıları işaretlenmiştir. Ticari Smith grafiklerinde $|\Gamma|$-çemberleri çoğunlukla gösterilmez. Ancak belirli bir $Z_L = r + jx$'i gösteren nokta bulunduğunda, merkezi orijinde olan ve bu noktadan geçen çemberin çizilmesi çok basittir. Merkezden noktaya olan uzaklık (grafiğin sınırına olan birim uzunluğa oranla), gerilim yansıma katsayısının $|\Gamma|$ genliğine eşittir. Merkezden noktaya çizilen doğrunun reel eksenle yaptığı açı ise θ_Γ açısıdır. Grafik yardımıyla belirleme Γ'nın Eş. (8-99)'dan hesaplanmasını gereksiz kılar.

Smith grafiğinde V_{max} ve V_{min}'i temsil eden noktaların konumu

Her bir $|\Gamma|$-çemberi reel ekseni iki noktada keser. Şekil 8-7'de pozitif-reel (OP_{oc}) eksenindeki nokta P_M ve negatif-reel (OP_{sc}) eksenindeki nokta da P_m ile gösterilmiştir. Reel eksen boyunca $x = 0$ olduğundan P_M ve P_m'nin her ikisi de $Z_L = R_L$ yani tümüyle reel yük durumunu gösterir. Açıkça P_M'de $r_L > 1$ ve $R_L > R_0$ ancak P_m'de $r_L < 1$ ve $R_L < R_0$'dır. P_M ve P_m noktaları, sırasıyla, V_{max} ve V_{min} konumlarına karşılık gelir. Bir reel yük için

$$\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \frac{r_L - 1}{r_L + 1} = \frac{S - 1}{S + 1} \qquad \text{geçerlidir.} \tag{8-106}$$



ŞEKİL 8-7 Kutupsal koordinatlarla Smith grafiği.

Smith grafiğinde S'nin (SWR) bulunması

Burada $R_L > R_0$ için $S = r_L = R_L/R_0$ olur. Böylelikle, P_M *noktasından geçen r-çemberinin nümerik değeri duran-dalga oranına eşittir*. Şekil 8-7'de P olarak işaretlenen $z_L = 1.7 + j0.6$ noktası için $|\Gamma| = 1/3$ ve $\theta_\Gamma = 28°$ buluruz. P_M'de $r = S = 2.0$'dır. Bu sonuçlar analitik olarak sağlanabilir.

Şu ana kadar Smith grafiğinin oluşturulmasını, Eş. (8-88)'de verilen yük empedansının gerilim yansıma katsayısına dayandırdık. Yükten z' uzaklığında yüke doğru bakıldığında giriş empedansı, $V(z')$'nün $I(z')$'ye oranıdır. Eş. (8-87) ve (8-89)'dan, kayıpsız hat için γ yerine $j\beta$ yazarak

$$Z_i(z') = \frac{V(z')}{I(z')} = R_0\left[\frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta z'}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta z'}}\right] \tag{8-107}$$

buluruz. Normlanmış giriş empedansı ise

$$z_i = \frac{Z_i}{R_0} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta z'}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta z'}} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j\phi}}{1 - |\Gamma| e^{j\phi}} \tag{8-108}$$

olur.

Burada

$$\phi = \theta_\Gamma - 2\beta z' \tag{8-109}$$

dır. z_i ve $\Gamma e^{-j2\beta z'} = |\Gamma| e^{j\phi}$'yi ilişkilendiren Eş. (8-108)'in z_L ve $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma}$'yi ilişkilendiren Eş. (8-100) ile tam olarak aynı biçimde olduğuna dikkat edilmelidir. Gerçekte sondaki, $z' = 0$ ($\phi = \theta_\Gamma$) için baştakinin özel halidir. Yansıma katsayısının genliği $|\Gamma|$ ve dolayısıyla duran-dalga oranı S ilave z' hat uzunluğu ile değişmez. Böylece Smith grafiğini verilen z_L yükünün $|\Gamma|$ ve θ_Γ değerlerini bulmakta kullanabildiğimiz gibi, $|\Gamma|$'yı sabit tutabilir ve θ_Γ'dan $2\beta z' = 4\pi z'/\lambda$'yı *çıkarabiliriz* (*saat yönünde* bu açı kadar dönmeye karşılık gelir). Bu işlem, R_0 öz empedanslı, z' uzunluğunda ve z_L normlanmış yük empedansı ile sonlandırılmış bir kayıpsız hatta bakarken görülen normlanmış z_i giriş empedansını veren $|\Gamma| e^{j\phi}$ noktasını belirler. Hat uzunluğundaki $\Delta z'$ değişikliğe karşı gelen $2\beta(\Delta z')$ faz değişiminin kolay okunması için $|\Gamma| = 1$ çemberi çevresinde $(\Delta z'/\lambda)$ cinsinden iki ölçek daha verilir. Dış ölçek saat yönünde (artan z') "kaynağa doğru dalga boyları" ifadesi ve iç ölçek de saat yönünün tersinde (azalan z') "yüke doğru dalga boyları" ifadesi ile işaretlenmiştir. Şekil 8-8 ticari olarak bulunabilen[1] tipik bir Smith grafiğidir. Karmaşık bir görüntüsü vardır ancak gerçekte sadece sabit-r ve sabit-x çemberlerinden oluşur. Hat uzunluğunda yarım dalga boyu değişimin ($\Delta z' = \lambda/2$), ϕ'de $2\beta(\Delta z') = 2\pi$ değişime karşılık geldiğine dikkat edilmelidir. Bir $|\Gamma|$-çemberi etrafında böyle bir tam dönüş bizi başlangıç noktamıza geri getirir ve empedansta hiçbir değişime neden olmaz.

Smith grafiğinde normlanmış z_i giriş empedansının bulunması.

Smith grafiğinin kullanımını birçok örnekle tipik iletim hattı problemleri çözerek sergileyeceğiz.

ÖRNEK 8-7

Smith grafiğini kullanarak, 0.1 dalga boyu uzunluğunda ve kısa-devre ile sonlandırılmış kayıpsız 50-(Ω) iletim hattının giriş empedansını bulunuz.

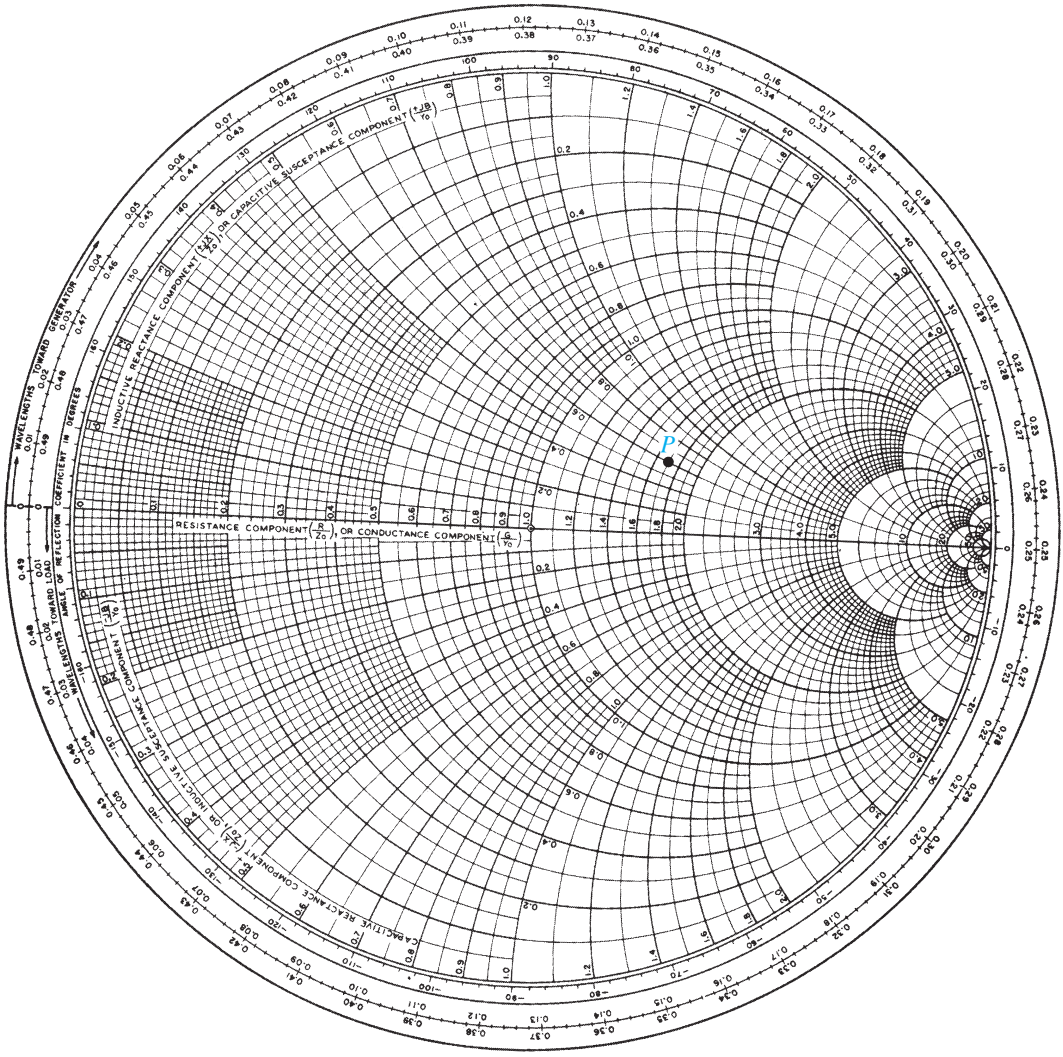
ÇÖZÜM

$$z_L = 0,$$
$$R_0 = 50 \quad (\Omega),$$
$$z' = 0.1\lambda$$

veriliyor.

1. Smith grafiğine $r = 0$ ve $x = 0$'ın kesişiminden (grafiğin en solunda P_{sc} noktası) girilir (Bkz. Şekil 8-9).
2. Grafiğin çevresinde ($|\Gamma| = 1$) "kaynağa doğru" 0.1 dalga boyu, saat yönünde ilerlenerek P_1 noktasına gelinir.

[1] Bu kitaptaki tüm Smith grafikleri Emeloid Industries, Inc., New Jersey'in izniyle basılmıştır.



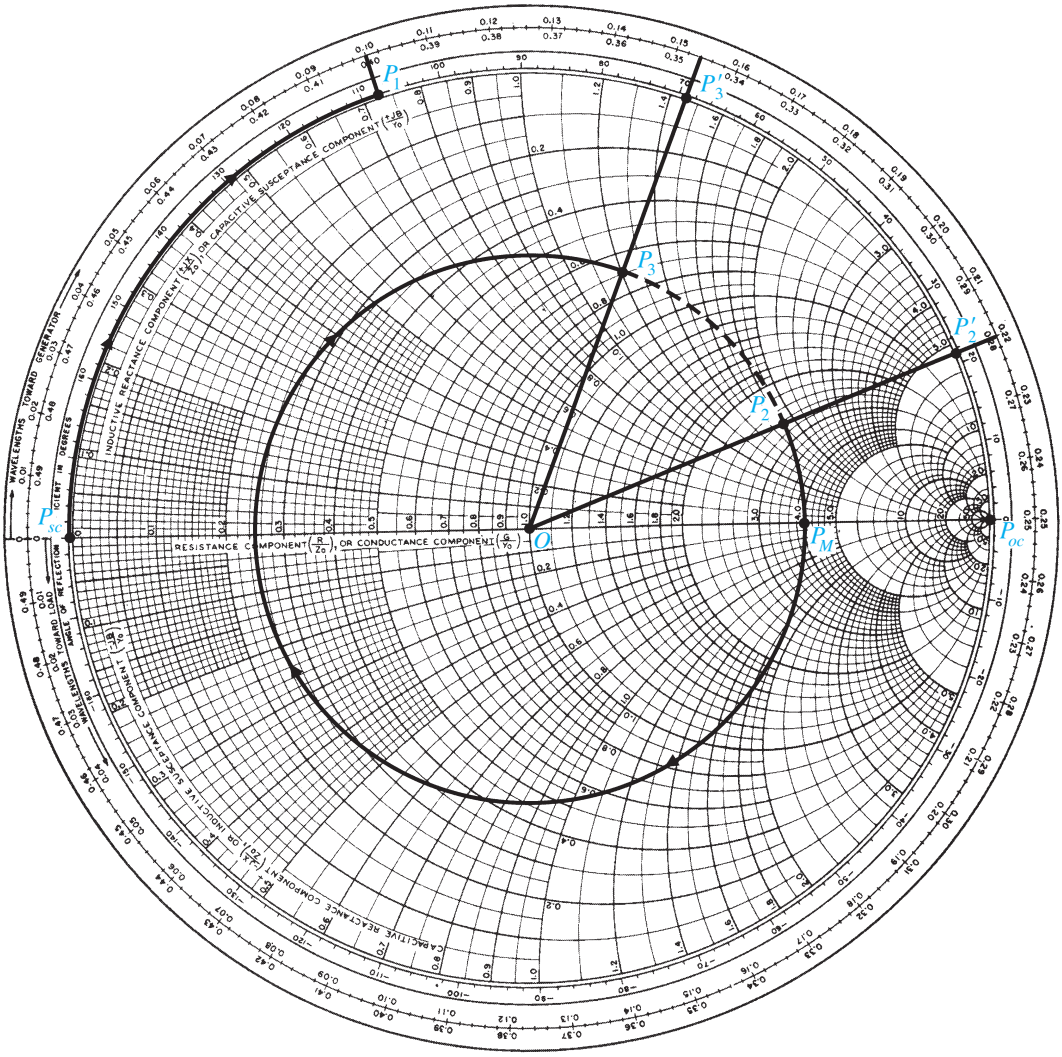
ŞEKİL 8-8 Smith grafiği. (*P* noktası Şekil 8-6 ve 8-7'deki ile aynı noktadır.)

3. P_1'de $r = 0$ ve $x \cong 0.725$ veya $z_i = j0.725$ okunur. Böylece $Z_i = R_0 z_i = 50(j0.725) = j36.3$ (Ω) olur. Giriş empedansı tümüyle endüktiftir.

Bu sonuç Eş. (8-82) kullanılarak kolaylıkla kontrol edilebilir:

$$Z_i = jR_0 \tan \beta\ell = j50 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 0.1\lambda$$

$$= j50 \tan 36^\circ = j36.3 \quad (\Omega).$$



ŞEKİL 8-9 Örnek 8-7 ve 8-8'deki hesaplamalar için Smith grafiği.

ALIŞTIRMA 8.10 Açık-devre, 75-(Ω) bir kayıpsız iletim hattının giriş empedansı 90 (Ω) kapasitif reaktanstır. Smith grafiği kullanarak hattın dalga boyu cinsinden uzunluğunu belirleyiniz.

CEVAP: 0.11λ.

ÖRNEK 8-8

Uzunluğu 0.434λ ve öz empedansı 100 (Ω) olan kayıpsız bir iletim hattı 260 + *j*180 (Ω) empedansı ile sonlandırılmıştır. (a) Gerilim yansıma katsayısını, (b) duran-dalga oranını, (c) giriş empedansını ve (d) yüke en yakın gerilim maksimumunun konumunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$z' = 0.434\lambda,$

$R_0 = 100 \quad (\Omega),$

$Z_L = 260 + j180 \quad (\Omega)$

veriliyor.

a) Gerilim yansıma katsayısı aşağıdaki adımlarla bulunur:

1. $z_L = Z_L/R_0 = 2.6 + j1.8$ Smith grafiğinde işaretlenir (Şekil 8-9'da P_2 noktası).

2. Merkezi orijin, yapıçapı ise $\overline{OP}_2 = |\Gamma| = 0.60$ olan çember çizilir. (Grafiğin yarıçapı $\overline{OP}_{sc}$ bire eşittir.)

3. OP_2 doğrusu çizilir ve çeperdeki P_2' noktasına kadar uzatılır. "Kaynağa doğru dalga boyları" ölçeğinde 0.220 okunur. Buradan, yansıma katsayısının θ_Γ faz açısı $(0.250 - 0.220) \times 4\pi = 0.12\pi$ (rad) veya 21.6° bulunur. (Uzaklıktaki dalga boyu değişimini 4π ile çarparız çünkü Smith grafiğindeki açılar $2\beta z'$ veya $4\pi z'/\lambda$ cinsinden ölçülür.) Bu açı, çevredeki işaretlemelerden de okunabilir. (a) şıkkının cevabı,

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma} = 0.60\underline{/21.6^\circ}$$

bulunur.

b) $|\Gamma| = 0.60$ çemberi, OP_{oc} pozitif-reel ekseniyle, $r = S = 4$'te kesişir. Böylece duran-dalga oranı 4'tür.

c) Giriş empedansı aşağıdaki gibi bulunur:

1. 0.220'deki P_2', önce 0.500'e (0.000 ile aynıdır) ve sonra 0.154'e P_3' noktasına toplam [0.500 − 0.220) + 0.154 = 0.434] "kaynağa doğru dalga boyu" hareket ettirilerek P_3' noktasına gelinir.

2. O ve P_3' bir düz doğru ile birleştirilir. Bu doğru $|\Gamma| = 0.60$ çemberini P_3 noktasında keser.

3. P_3'te $r = 0.69$ ve $x = 1.2$ okunur. Buradan

$$Z_i = R_0 z_i = 100(0.69 + j1.2) = 69 + j120 \quad (\Omega)$$

elde edilir.

d) P_2'den P_3'e giderken $|\Gamma| = 0.60$ çemberi OP_{oc} pozitif-reel eksenini, gerilimin maksimum olduğu P_M'de keser. Böylece yükten $(0.250 - 0.220)\lambda$ veya 0.030λ uzakta bir gerilim maksimumu oluşur.

ALIŞTIRMA 8.11 Örnek 8-8'de verilen hattaki duran-dalga oranı, yük empedansı bir R_L direnci ile değiştirilerek 4'ten 2'ye indirilmek isteniyor. (a) R_L ne olmalıdır? (b) Giriş Empedansı ne olmalıdır?

CEVAP: (a) 200 (Ω), (b) $13.5 + j76$ (Ω).

TEKRAR SORULARI

S.8-23 Smith grafiği nedir ve iletim hattı hesaplamalarında niçin yararlıdır?

S.8-24 Bir Smith grafiğinin dikdörtgen koordinatları nelerdir?

S.8-25 Bir Smith grafiğinin kutupsal koordinatları nelerdir?

S.8-26 Smith grafiğinde uyumlu yükü gösteren nokta neresidir?

S.8-27 Öz empedansı Z_0 olan kayıpsız bir hat üzerinde verilen Z_L yük empedansı için Smith grafiğini kullanarak (a) yansıma katsayısını ve (b) duran-dalga oranını nasıl belirleriz?

NOTLAR

1. Smith grafiğinde r ve x-çemberleri her yerde birbirine diktir ve tümü (1, 0) noktasından geçer.
2. Smith grafikleri herhangi bir öz dirence sahip iletim hattı için kullanılabilir.
3. Bir $|\Gamma|$-çemberi ve pozitif reel eksenin kesişiminden geçen r-çemberinin değeri, duran-dalga oranı S'ye eşittir.
4. Yarım dalga boyu değişim Smith grafiğinde bir tam dönüşe karşılık gelir.

8-6.1 SMITH GRAFİĞİNDE ADMİTANSLAR

Şu ana kadar Smith grafiğini normlanmış $z = r + jx$ empedansları cinsinden tartıştık. Ancak Smith grafiği admitans hesaplamaları için de kullanılabilir. Eş. (8-79)'dan, ℓ uzunluğunda ve Z_L empedansı ile sonlandırılmış kayıpsız bir hattın Z_i giriş empedansının formülünü hatırlayalım:

$$Z_i = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan \beta\ell}{R_0 + jZ_L \tan \beta\ell}. \qquad \text{(8-79)(8-110)}$$

$\ell = \lambda/4$ olduğunda $\beta\ell = \pi/2$, $\tan\beta\ell \to \infty$ olur ve Eş. (8-110)

Çeyrek-dalga dönüştürücülerin özelliği

$$Z_i = \frac{R_0^2}{Z_L} \quad \text{(Çeyrek-dalga boyu hat)} \qquad \text{(8-111)}$$

haline gelir (bkz. Alıştırma 8.6). Sonuç olarak çeyrek-dalga kayıpsız hat bir empedans evirici olarak davranır ve sıklıkla ***çeyrek-dalga dönüştürücü*** olarak anılır.

Şimdi, $Y_L = 1/Z_L$ yük admitansını göstersin. Normlanmış yük empedansı

$$z_L = \frac{Z_L}{R_0} = \frac{1}{R_0 Y_L} = \frac{1}{y_L} \qquad \text{(8-112)}$$

olur, burada

$$y_L = R_0 Y_L$$
$$= Y_L / Y_0 = g + jb \quad \text{(Birimsiz)} \tag{8-113}$$

reel ve sanal kısımları, sırasıyla, normlanmış g iletkenliği ve normlanmış b hassasiyeti olan normlanmış yük empedansıdır. Eş. (8-112) birim öz empedanslı bir çeyrek-dalga hattın z_L'yi y_L'ye dönüştürdüğünü ve bunun tersinin de geçerli olduğunu söyler. Smith grafiğinde z_L'yi gösteren noktayı sadece $|\Gamma|$-çemberi üzerinde bir çeyrek-dalga boyu döndürerek, y_L'yi gösteren noktayı bulabiliriz. Hat uzunluğunda $\lambda/4$ değişim Smith grafiğinde π radyan değişime karşılık geldiğinden, ***z_L ve y_L'yi gösteren noktalar $|\Gamma|$-çemberi üzerinde, çap üzerindeki zıt noktalardır.*** Bu gözlem Smith grafiğinde y_L'den z_L'yi ve z_L'den y_L'yi kolaylıkla bulmamızı sağlar. (z_L ve y_L'nin her ikisinin de birimsiz olduğunu hatırlayınız.)

Smith grafiğinde z_L'den y_L'yi bulma ve tersi

ÖRNEK 8-9

$Z = 95 + j20$ (Ω) veriliyor. Smith grafiğini kullanarak Y'yi bulunuz.

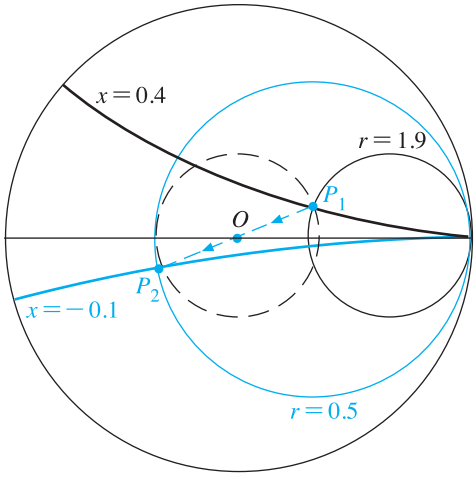
ÇÖZÜM

Bu problemin iletim hatları ile doğrudan bir ilgisi yoktur. Smith grafiğini kullanabilmek için herhangi bir normlama sabiti, örneğin $R_0 = 50$ (Ω), seçilebilir. Böylece

$$z = \tfrac{1}{50}(95 + j20) = 1.9 + j0.4$$

olur. Şekil 8-10'da z, P_1 noktası olarak gösterilmiştir. P_1 ve O'yu birleştiren doğrunun diğer tarafındaki P_2 noktası y'yi gösterir ve

ŞEKİL 8-10 Empedanstan admitansın bulunması (Örnek 8-9).



$\overline{OP}_2 = \overline{OP}_1$ dir. Böylece

$$Y = \frac{1}{R_0}\, y = \frac{1}{50}\,(0.5 - j0.1) = 10 - j2 \quad \text{(mS)} \quad \text{elde edilir.}$$

■ **ALIŞTIRMA 8.12** $Y = 6 + j11$(mS) veriliyor. Smith grafiği kullanarak Z'yi bulunuz.

CEVAP: $38 - j70$ (Ω).

ÖRNEK 8-10

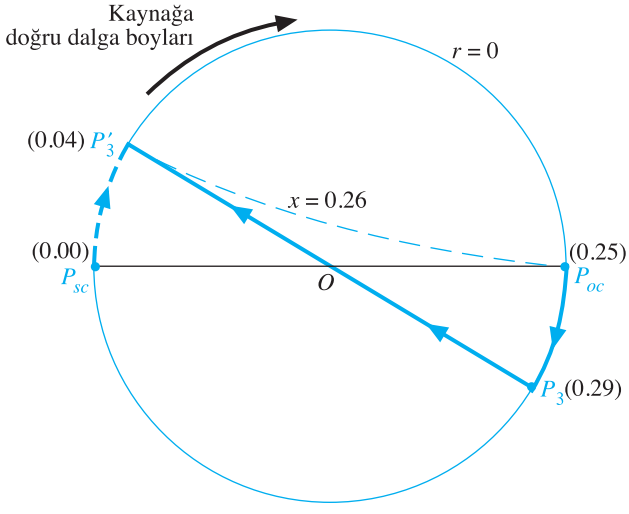
Smith grafiği kullanarak, uzunluğu 0.04λ, öz empedansı 300 (Ω) olan açık devre bir hattın giriş admitansını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Açık-devre bir hat için Smith grafiğinin en sağındaki P_{oc} noktasından başlarız. Şekil 8-11'de bu nokta 0.25'tir.
2. Grafiğin çevresinde 0.04 "kaynağa doğru dalga boyu" ilerleyerek P_3'e (0.29'da) ulaşılır.
3. P_3 ve O'dan geçen doğru çizilir. Zıt taraftaki kesişim noktası P_3' noktasıdır.
4. P_3' noktasındaki değerler okunur:

$$y_i = 0 + j0.26.$$

ŞEKİL 8-11 Açık-devre hattın giriş admitansının bulunması (Örnek 8-10).



Böylece

$$Y_i = \frac{1}{300}(0 + j0.26) = j0.87 \quad \text{(mS)} \quad \text{elde edilir.}$$

Bir Smith grafiği empedans veya admitans grafiği olarak kullanılabilir.

Önceki iki örnekte Smith grafiğini bir empedans grafiği olarak kullanarak admitans hesaplamaları yaptık. Smith grafiği aynı zamanda bir admitans grafiği olarak da kullanılabilir. Bu durumda r ve x çemberleri g ve b çemberleri olur. Bir admitans grafiğinde açık ve kısa-devre yükler, sırasıyla, grafiğin en sol ve en sağ noktalarıdır. Örnek 8-10 için grafiğin en solundan, Şekil 8-11'deki 0.00'dan başlayabilir ve sonra 0.04 "kaynağa doğru dalga boyu" ilerleyerek P_3' noktasına doğrudan ulaşabilirdik.

Gerçekte bir admitans grafiği olarak Smith grafiği, hatların paralel bağlantılarını içeren problemlerin çözümünde empedans grafiğinden daha kullanışlıdır. Bunun nedeni paralel bağlantılarda admitansların toplanmasıdır. Bu nokta, aşağıda empedans uyumlamayı tartıştığımızda daha açık olacaktır.

8-7 İLETİM HATLARI İLE EMPEDANS UYUMLAMA

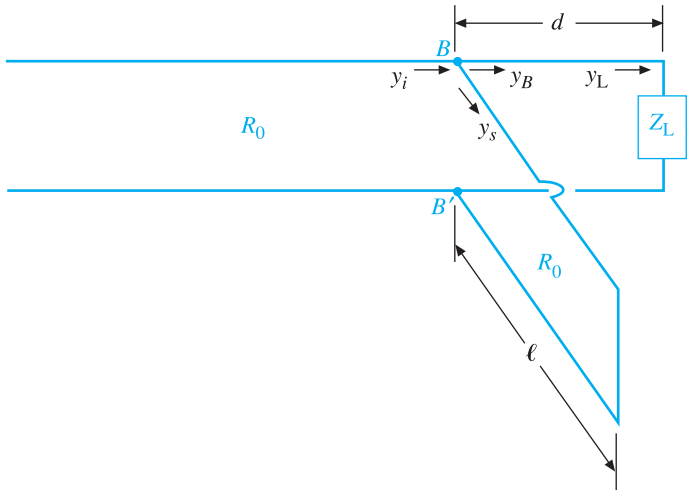
İletim hatlarında empedans uyumlamanın önemi

İletim hatları güç ve bilgi iletiminde kullanılır. Radyo frekanslarındaki güç iletiminde, kaynaktan mümkün olduğunca çok gücün yüke iletilmesi ve mümkün olduğunca az gücün hat üzerinde kaybı özellikle istenir. Bunun olması için yükün hattın öz empedansına uyumlu olması gerekir, böylece hat üzerindeki duran-dalga oranı bire olabildiğince yakın olacaktır. Bilgi iletimi için hatların uyumlu olması zorunludur çünkü uyumsuz yüklerden ve düğümlerden olan yansımalar ekolara neden olacak ve bilgi taşıyan sinyali bozacaktır. Bu kısımda kayıpsız iletim hatlarında empedans uyumlama için basit bir tek-saplama yöntemi tartışacağız.

İletim hatlarında empedans uyumlama için kısa-devre saplamalar (açık-devreye tercihen) daha sık kullanılır.

Gelişigüzel bir yük empedansı, Şekil 8-12'de gösterildiği gibi, uygun bir konumda hatta *paralel* bir kısa-devre saplama yerleştirerek iletim hattına uyumlanabilir. Buna empedans uyumlamada *tek-saplama* yöntemi denir[(1)]. Bir paralel bağlantı ile uğraştığımızdan, yöntemi admitanslar cinsinden açıklamak daha uygundur. Kısa-devre saplamalar açık-devre saplamalardan daha sık tercih edilir çünkü sonsuz yük empedansı oluşturmak, sıfır yük empedansı oluşturmaktan daha zordur. Açık uçtan ışıma ve komşu devrelerle bağlaşım, empedansın sonsuz olmasını engeller.

[(1)] Bir alternatif yöntem, aralarındaki uzaklık sabit olan iki saplama ile empedans uyumlama, yani çift-saplama yöntemidir. (Bkz. D.K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics,* 2. Baskı, s. 504-509, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1989.)



ŞEKİL 8-12 Tek-saplama yöntemi ile empedans uyumlama.

Dahası, ayarlanabilir uzunluklu ve sabit öz dirençli bir kısa-devre saplama yapmak (basitçe kısa-devrenin konumu değiştirilir), uzunluğu kesin olarak kesilmesi gereken açık-devre saplama yapmaktan çok daha kolaydır. Bir açık-devre saplama ve kısa-devre saplamanın uzunlukları arasındaki gereken fark, çeyrek-dalga boyunun tek katlarıdır.

Y_B'nin Şekil 8-12'de B–B' konumunda yüke doğru bakarken, saplama dışında giriş admitansı olduğunu kabul edersek, empedans (veya admitans) uyumlama problemimiz, $Y_0 = 1/R_0$ için

$$Y_i = Y_0 = Y_B + Y_s \tag{8-114}$$

olacak şekilde saplamanın konumu d ve uzunluğu ℓ'yi belirlemektir. Normlanmış admitanslar cinsinden Eş. (8-114)

$$1 = y_B + y_s \tag{8-115}$$

haline gelir, burada yük kısmı için $y_B = R_0 Y_B$ ve kısa-devre saplama için $y_s = R_0 Y_s$'dir. Ancak, bir kısa-devre saplamanın giriş admitansı tümüyle sanal olduğundan y_s tümüyle sanaldır. Sonuç olarak Eş. (8-115) eğer sadece

$$y_B = 1 + jb_B \tag{8-116}$$

ve

$$y_s = -jb_B \tag{8-117}$$

ise sağlanabilir, burada b_B pozitif veya negatif olabilir. O halde amaçlarımız, (1) B–B' terminallerinden sağa yüke doğru bakıldığında bulunan y_B admitansının *birim reel kısmı* olacak şekilde d uzunluğunu bulmak ve (2) *sanal kısmı yok etmek* için gereken ℓ saplama uzunluğunu bulmaktır.

Smith grafiğini bir admitans grafiği olarak kullanarak, tek-saplama uyumlamada aşağıdaki adımları izleriz:

Tek-saplama empedans uyumlama için yöntem.

1. Normlanmış yük admitansı y_L'yi gösteren nokta Smith grafiğinde işaretlenir.
2. y_L için $|\Gamma|$-çemberi çizilir. Bu çember $g = 1$ çemberini iki noktada kesecektir. Bu noktalarda $y_{B1} = 1 + jb_{B1}$ ve $y_{B2} = 1 + jb_{B2}$'dir.
3. y_L ile y_{B1} ve y_L ile y_{B2} arasındaki açılardan, sırasıyla, d_1 ve d_2 yük kısmı uzunlukları bulunur.
4. Grafiğin en sağındaki kısa-devre noktası P_{sc} ile $-jb_{B1}$ ve $-jb_{B2}$'yi gösteren noktalar arasındaki açılardan ℓ_1 ve ℓ_2 saplama uzunlukları belirlenir.

Aşağıdaki örnek gerekli adımları sergilemektedir.

ÖRNEK 8-11

50-(Ω) bir iletim hattı $Z_L = 35 - j47.5$ (Ω) yük empedansına bağlanmıştır. Hattı uyumlayacak kısa-devre saplamanın konumunu ve uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$R_0 = 50\ (\Omega)$$

$$Z_L = 35 - j47.5\ (\Omega)$$

$$z_L = Z_L/R_0 = 0.70 - j0.95$$

veriliyor.

1. Smith grafiğinde z_L empedansı P_1 olarak girilir (Şekil 8-13).
2. Merkezi O, yarıçapı $\overline{OP}_1$ olan $|\Gamma|$-çemberi çizilir.
3. P_1 ve O'dan geçen doğru çizilir. Bu doğru, çeperde P_2' noktasını, $|\Gamma|$-çemberinde ise y_L'yi gösteren P_2 noktasını keser. "Kaynağa doğru dalga boyları" ölçeğinde P_2' için 0.109 okunur.
4. $|\Gamma|$-çemberi ile $g = 1$ çemberinin iki kesişim noktası bulunur:

   P_3: $y_{B1} = 1 + j1.2 = 1 + jb_{B1}$;

   P_4: $y_{B2} = 1 - j1.2 = 1 + jb_{B2}$.

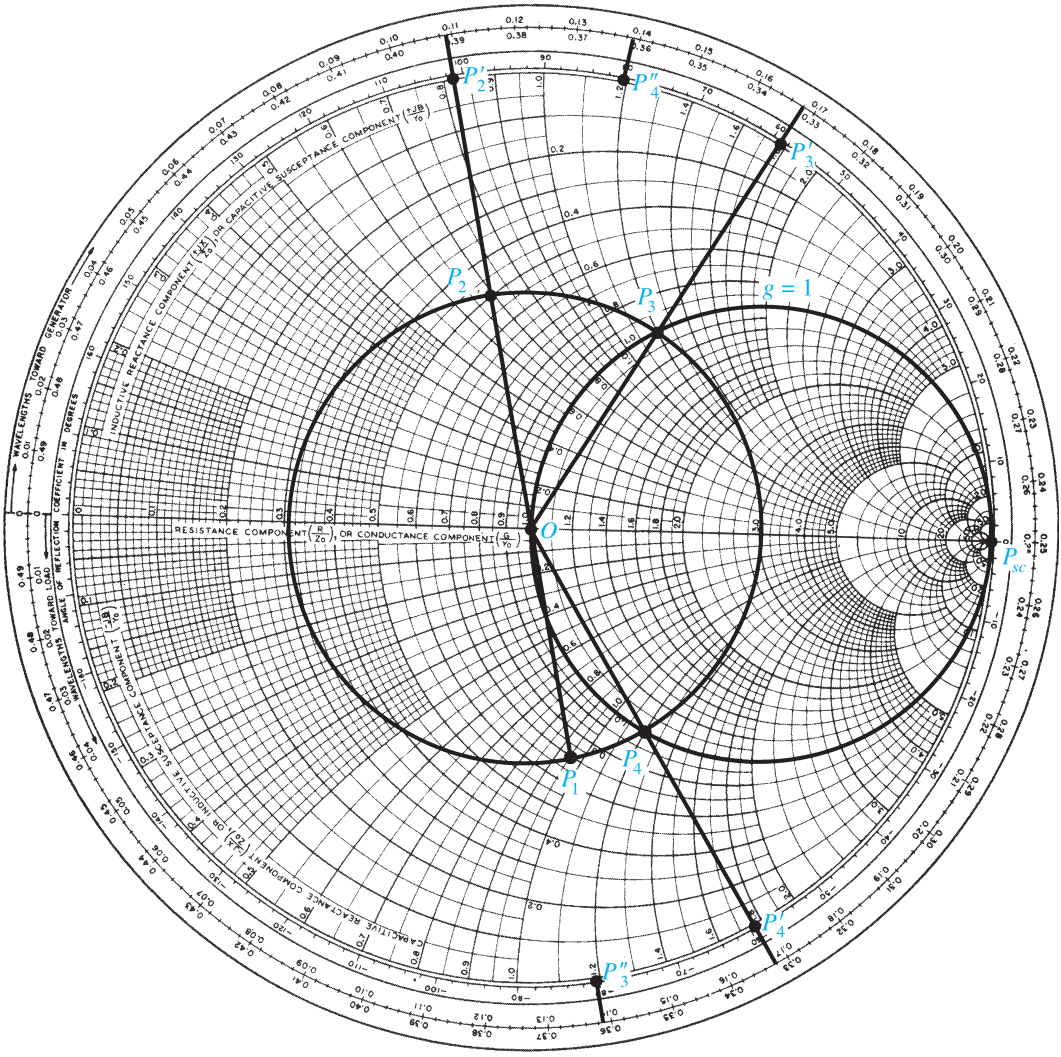
5. Saplamanın konumu için çözümler aşağıdaki gibi bulunur:

   P_3 için (P_2''den P_3''ne) $d_1 = (0.168 - 0.109)\lambda = 0.059\lambda$,

   P_4 için (P_2''den P_4''ne) $d_2 = (0.332 - 0.109)\lambda = 0.223\lambda$.

6. $y_s = jb_B$ verecek kısa-devre saplama uzunlukları aşağıdaki gibi elde edilir.

   P_3 için (grafiğin en sağındaki P_{sc} noktasından $-jb_{B1} = -j1.2$'yi temsil eden P_3'' noktasına):



ŞEKİL 8-13 Smith admitans grafiğinde tek-saplama uyumlamanın gösterimi (Örnek 8-11).

$$\ell_1 = (0.361 - 0.250)\lambda = 0.111\lambda.$$

P_4 için (P_{sc}'den $-jb_2 = j1.2$'yi temsil eden P''_4 noktasına):

$$\ell_2 = (0.139 + 0.250)\lambda = 0.389\lambda.$$

Genel olarak, eğer başka pratik kısıtlar yoksa daha kısa uzunluklar veren çözüm tercih edilir. Kısa-devre saplamanın kesin ℓ uzunluğu gerçek uyumlama işleminde ince ayar gerektirebilir. Bundan dolayı kısa-devre uyumlama kısımlarına bazen ***saplama ayarlayıcılar*** denir.

■ **ALIŞTIRMA 8.13** Kayıpsız 50-(Ω) bir hattaki ölçümler ardışık gerilim minimumlarının 6 (cm) arayla olduğunu göstermiştir. $Z_L = 75 + j100\,(\Omega)$ yük empedansının bir kısa-devre saplama ile hatta uyumlanması istenmektedir. (a) Yüke en yakın saplama konumunu, (b) gereken en kısa saplama uzunluğunu, (c) yükle saplama arasındaki hat üzerinde SWR'yi ve (d) saplama ile kaynak arasındaki hatta SWR'yi bulunuz.

CEVAP: (a) 2.78 (cm), (b) 1.02 (cm), (c) 4.62, (d) 1.00.

TEKRAR SORULARI

S.8-28 Hat uzunluğunda yarım dalga boyu değişim niçin Smith grafiğinde bir tam dönüşe karşılık gelir?

S.8-29 Verilen $Z = R + jX$ empedansının $Y = 1/Z$ admitansını Smith grafiğinde bulmak için ne yol izlenir?

S.8-30 Verilen $Y = G + jB$ admitansının $Z = 1/Y$ empedansını Smith grafiğinde bulmak için hangi yol izlenir?

S.8-31 Bir iletim hattında hat kayıplı olduğunda da duran dalga oranı sabit midir? Açıklayınız.

S.8-32 Empedans uyumlama problemlerinin çözümünde Smith grafiğini admitans grafiği olarak kullanmak, empedans grafiği olarak kullanmaktan niçin daha uygundur?

S.8-33 Bir iletim hattında empedans uyumunun sağlanması niçin istenir?

S.8-34 Empedans uyumlamada kullanılan saplamalar niçin çoğunlukla açık-devre tipi değil de kısa-devre tipidir?

NOTLAR

1. Smith grafiği bir empedans grafiği olarak ($z = Z/R_0$ birimsiz empedansları için) veya bir admitans grafiği olarak ($y = R_0Y$ birimsiz admitansları için) kullanılabilir. Kısa-devreyi gösteren P_{sc} noktası bir Smith admitans grafiğinde (1, 0) noktasıdır.
2. Tek-saplama empedans uyumlama yönteminin ana ilkesi, uygun uzunluklu bir kısa-devre saplamayı yükten uygun bir uzaklıkta hatta paralel bağlayarak, paralel bağlantı noktasındaki giriş admitansını $1 + j0$ yapmaktır.
3. İletim hatları ile empedans uyumlama yöntemleri frekans-duyarlıdır: Gereken saplama konumu ve saplama uzunluğu çalışma frekansına bağlıdır.

ÖZET

İletim hatları noktadan-noktaya verimli enerji ve bilgi iletimi için kullanılır. Bu bölümde iletim hatları ile kılavuzlanan enine elektromanyetik (TEM) dalgaların davranışlarını ve analiz yöntemlerini çalıştık. Özel olarak,

- üç en yaygın iletim hattı tipinin (paralel-plaka hat, iki-telli hat ve eş eksenli hat) özelliklerini tartıştık.
- Genel iletim hattı denklemlerini çıkardık, ki bunlar da zamanda-harmonik koşullar altında tek-boyutlu, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler verecek şekilde birleştirildi.
- Sonsuz iletim hatlarında dalga özelliklerini inceledik.
- Kayıpsız hatların ve bozulmasız hatların yayılma sabitini, faz hızını ve öz empedansını belirledik.
- Kayıplı hatta ilerleyen bir dalganın zayıflama sabitini güç bağıntıları cinsinden ifade ettik.
- Sonlu iletim hatları üzerindeki dalgaların özelliklerini yayılma sabiti, giriş empedansı, yansıma katsayısı ve SWR cinsinden inceledik.
- Açık-devre ve kısa-devre hatların özelliklerini inceledik.
- İletim hattı devre problemlerini çözdük.
- Smith grafiğinin oluşturulma ilkelerini ve uygulamalarını çalıştık ve
- empedans uyumlama için tek-saplama yöntemini açıkladık.

PROBLEMLER

P.8-1 Verilen bir öz empedans için kayıpsız şerit hat tasarımını düşününüz.

a) Eğer dielektrik sabiti ϵ_r iki katına çıkarsa, sabit w plaka genişliği için d dielektrik kalınlığı ne olmalıdır?

b) Eğer ϵ_r iki katına çıkarsa sabit d için w nasıl değişmelidir?

c) Eğer d iki katına çıkarsa sabit ϵ_r için w nasıl değişmelidir?

d) (a), (b) ve (c) kısımlarındaki değişikliklerden sonra yayılma hızı sabit kalır mı? Açıklayınız.

P.8-2 Genişlikleri 20 (mm) olan ve 2.5 (mm) kalınlığında kayıplı bir dielektrik katmanla—$\mu = \mu_0$, $\epsilon_r = 3$, $\sigma = 10^{-3}$ (S/m)—birbirinden ayrılmış iki paralel pirinç şeritten—$\sigma_c = 1.6 \times 10^7$(S/m)—oluşan bir iletim hattını düşününüz. Çalışma frekansı 500 (MHz)'dir.

a) Birim uzunluk başına R, L, G ve C'yi hesaplayınız.

b) Elektrik alanın enine ve boyuna bileşenlerinin genliğini karşılaştırınız.

c) γ ve Z_0'ı bulunuz.

P.8-3 Polietilen (ϵ_r =2.25) dielektrik ortam kullanarak düzgün iletim hatları tasarlanmak isteniyor. Kayıpların ihmal edilebileceğini kabul ederek, (a) iletken tellerin yarıçapı 0.6 (mm) olduğu 300-(Ω) bir iki-telli hat için iletkenler arası uzaklığı bulunuz ve (b) merkezdeki iletkenin yarıçapının 0.6 (mm) olduğu 75-(Ω) bir koaksiyel kablo için dış iletkenin iç yarıçapını bulunuz.

P.8-4 İç iletken yarıçapı 0.6 (mm) ve dış iletkeninin iç yarıçapı 3.91 (mm) olan bozulmasız bakır bir eş eksenli iletim hattının zayıflama sabitini bulunuz. Dielektrik ortam sabiti 2.25'tir.

P.8-5 Kayıplı bir hatta 100 (MHz)'de aşağıdaki parametreler ölçülmüştür:

$$Z_0 = 50 + j0 \quad (\Omega),$$
$$\alpha = 0.01 \quad (\text{dB/m}),$$
$$\beta = 0.8\pi \quad (\text{rad/m}).$$

Hattın R, L, G ve C değerlerini belirleyiniz.

P.8-6 İç empedansı Z_g olan bir kaynaktan, kayıpsız bir iletim hattı ile bir Z_L yük empedansına iletilen gücün, Z_i yüklü hatta doğru bakıldığında görülen empedans olmak üzere, $Z_i = Z_g^*$ olduğunda maksimum olduğunu ispat ediniz. Maksimum güç transferinin verimi nedir?

P.8-7 $V(z)$ ve $I(z)$'yi, iletim hattının giriş ucundaki V_i gerilimi, I_i akımı, γ ve Z_0 cinsinden (a) üstel biçimde ve (b) hiperbolik biçimde ifade ediniz.

P.8-8 V_g gerilimli ve R_g iç dirençli bir d-c kaynak, birim uzunluk başına direnci R ve iletkenliği G olan bir kayıplı iletim hattına bağlanmıştır.

a) Gerilim ve akım için iletim hattı denklemlerini yazınız.

b) $V(z)$ ve $I(z)$'nin genel çözümlerini bulunuz.

c) (b) şıkkındaki cevapları sonsuz hat için özelleştiriniz.

d) (b) şıkkındaki cevapları, R_L yük direnci ile sonlandırılmış ℓ uzunluğundaki bir hatta özelleştiriniz.

P.8-9 Açık-devre gerilimi $v_g(t) = 10 \sin 8000\pi t$ (V) ve iç empedansı $Z_g = 40 + j30$ (Ω) olan bir kaynak, 50-(Ω)'luk bir bozulmasız hatta bağlanmıştır. Hattın direnci 0.5 (Ω/m)'dir ve hattın dielektrik sabitinin kayıp tanjantı %0.18'dir. Hat 50 (m) uzunluğundadır ve uyumlu yükle sonlandırılmıştır. (a) Hatta herhangi bir konumda gerilim ve akımın anlık ifadelerini, (b) yükteki anlık gerilim ve akım ifadelerini ve (c) yüke iletilen ortalama gücü bulunuz.

P.8-10 Düşük kayıplı ($\alpha\lambda \ll 1$) çeyrek-dalga boyu bir iletim hattının,

a) kısa-devre ile,

b) açık-devre ile sonlandırıldığında giriş empedansını bulunuz.

P.8-11 2-(m), hava-boşluklu, 50 (Ω) öz empedanslı bir iletim hattı, 200 (MHz) çalışma frekansında $40 + j30$ (Ω) empedansla sonlandırılıyor. Giriş empedansını bulunuz.

P.8-12 Hava-boşluklu, 4 (m) uzunluğunda bir iletim hattının açık-devre ve kısa-devre giriş empedansları, sırasıyla,

$250/\underline{-50^\circ}\,(\Omega)$ ve $360/\underline{20^\circ}\,(\Omega)$ ölçülmüştür.

a) Hattın Z_0, α ve β parametrelerini bulunuz.

b) R, L, G ve C değerlerini hesaplayınız.

P.8-13 100 (kHz)'de 0.6 (m) uzunluğunda bir kayıpsız eş eksenli kablo üzerindeki ölçümler, kablo açık-devre iken 54 (pF) kapasitans ve kısa-devre iken 0.30 (μH) endüktans vermektedir.

a) Z_0'ı ve dielektrik ortamın sabitini belirleyiniz.

b) 10 (MHz)'de X_{io} ve X_{is} değerlerini hesaplayınız.

P.8-14 75-(Ω)'luk bir kayıpsız hat $Z_L = R_L + jX_L$ yük empedansı ile sonlandırılmıştır.

a) Hattaki duran-dalga oranının 3 olması için R_L ve X_L arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

b) $R_L = 150\ (\Omega)$ için X_L'yi bulunuz.

P.8-15 Bir kayıpsız iletim hattı düşününüz.

a) $40 + j30\ (\Omega)$ yük empedansı için olası en küçük duran-dalga oranını verecek hat öz empedansını belirleyiniz.

b) Bu en küçük duran-dalga oranını ve karşılık gelen gerilim yansıma katsayısını bulunuz.

P.8-16 $R_0 = 50\ (\Omega)$ öz empedanslı bir iletim hattı, R_0' öz empedanslı ve ℓ' uzunluğunda bir başka iletim hattı ile $Z_L = 40 + j10\ (\Omega)$ yük empedansına uyumlanmak isteniyor. Uyumlama için gereken ℓ' ve R_0' değerlerini bulunuz.

P.8-17 R_0 öz empedanslı bir hattın giriş empedansını $Z_i = R_i + jX_i$ yapacak olan ℓ hat uzunluğunun ve R_L yük direncinin formüllerini elde ediniz.

P.8-18 Bilinmeyen bir yük empedansı ile sonlandırılmış 300-(Ω)'luk bir iletim hattındaki duran dalga oranı 2.0'dir. Yüke en yakın gerilim minimumu ise yükten 0.3λ uzaktadır. (a) Yükteki Γ yansıma katsayısını ve (b) bilinmeyen Z_L yük empedansını belirleyiniz.

P.8-19 İç empedansı 50 (Ω) ve $V_g = 0.1/\underline{0^\circ}$ (V) olan bir sinüzoidal gerilim kaynağı, öz empedansı $R_0 = 50\ (\Omega)$ olan kayıpsız bir iletim hattına bağlanmıştır. Hat $\lambda/8$ uzunluğundadır ve $R_L = 25\ (\Omega)$ yük empedansı ile sonlandırılmıştır. (a) V_i, I_i, V_L ve I_L'yi; (b) hattaki duran-dalga oranını ve (c) yüke iletilen ortalama gücü bulunuz. (c)'deki sonucunuzu $R_L = 50\ (\Omega)$ durumu ile karşılaştırınız.

P.8-20 Verilen kayıpsız bir iletim hattının öz empedansı 75 (Ω)'dur. Bu hattın 200 (MHz)'de giriş empedansını, (a) 1 (m) uzunluğunda bir açık-devre ise ve (b) 0.8 (m) uzunluğunda bir kısa-devre ise, Smith grafiği kullanarak bulunuz. (c) (a) ve (b) şıklarındaki hatlar için karşılık gelen giriş empedanslarını belirleyiniz.

P.8-21 30 + *j*10 (Ω) yük empedansı, 0.101λ uzunluğunda ve 50 (Ω) öz empedanslı kayıpsız bir iletim hattına bağlanmıştır. Smith grafiğini kullanarak (a) duran-dalga oranını, (b) gerilim yansıma katsayısını, (c) giriş empedansını, (d) giriş admitansını ve (e) hattaki gerilim minimumunun konumunu bulunuz.

P.8-22 Problem P.8-21'i 30 – *j*10 (Ω) yük empedansı için tekrar çözünüz.

P.8-23 Bilinmeyen bir yük empedansı ile sonlandırılmış 50-(Ω)'luk iletim hattı ile yapılan laboratuvar deneyinde duran-dalga oranı 2.0'dır. Ardışık gerilim minimumları 25 (cm) aralıklıdır ve birinci minimum yükten 5 (cm) uzaktadır. (a) Yük empedansını ve (b) yükteki yansıma katsayısını bulunuz. (c) Eğer yük kısa-devre ile değiştirilirse ilk gerilim minimumu nerede olur?

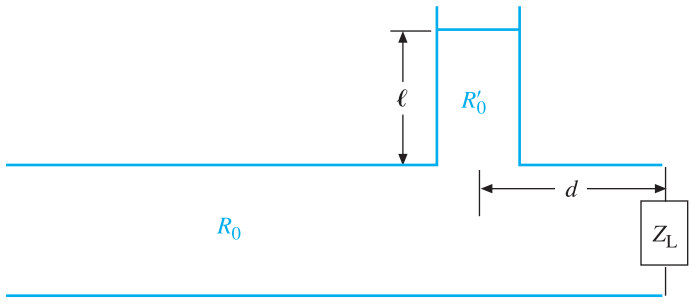
P.8-24 Giriş empedansı 75 (Ω) olan bir dipol anten, 300-(Ω)'luk iki-telli iletim hattı aracılığıyla 200-(MHz)'lik bir kaynakla beslenmektedir. 2 (cm) hava aralıklı iki-telli çeyrek-dalga iletim hattı ile anteni 300 (Ω) hatta uyumlayınız.

P.8-25 Tek-saplama yöntemi ile 25 + *j*25 (Ω) yük empedansı 50-(Ω)'luk bir iletim hattına uyumlanmak istenmektedir. Smith grafiği kullanarak, aynı 50-(Ω) hattan yapılmış kısa-devre saplamanın gereken konumunu ve uzunluğunu bulunuz.

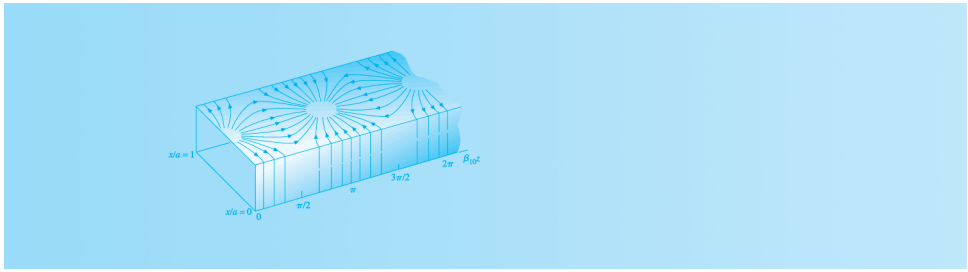
P.8-26 Problem P.8-25'i 75 (Ω) öz empedanslı bir hatla yapılan kısa-devre saplama için tekrar çözünüz.

P.8-27 Öz empedansı 75 (Ω) olan kayıpsız bir hatta yapılan ölçümler duran-dalga oranının 2.4 olduğunu ve yüke en yakın ilk iki gerilim minimumunun yükten 0.335 (m) ve 1.235 (m) uzakta oluştuğunu göstermektedir. Smith grafiği yardımıyla kısa-devre saplamanın yüke en yakın konumunu ve uzunluğunu bulunuz.

P.8-28 Bir yük empedansı, uygun konumda hatta seri olarak bağlanan tek bir saplama ile de (bkz. Şekil 8-14) iletim hattına uyumlanabilir. Z_L = 25 + *j*25 (Ω), R_0 = 50 (Ω) ve R_0' =35 (Ω) kabul ederek uyumlama için gereken d ve ℓ'yi bulunuz.



ŞEKİL 8-14 Seri saplama ile empedans uyumlama (Problem P.8-28).



9. BÖLÜM

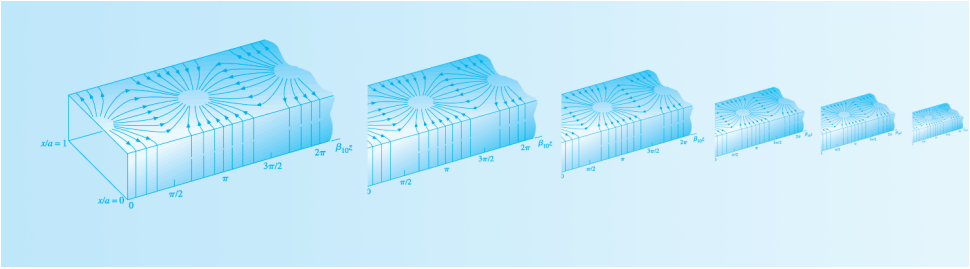
9-1 GENEL BAKIŞ

Önceki bölümde, iletim hatları ile kılavuzlanan enine elektromanyetik dalgaların (TEM) temel özelliklerini inceledik. Ancak TEM dalgalar iletim hatlarında yayılabilen tek kılavuzlanmış dalga modu değildir. Ayrıca Kısım 8-1'de sözü edilen üç iletim hattı tipi (paralel-plaka, iki-tel ve eş eksenli) de tek olası dalga kılavuzlama yapısı değildir. SHF ve EHF bölgesi yukarısındaki ($f > 3$ GHz, $\lambda < 10$ cm) uygulamaları için Kısım 8-1'de verilen iki-iletkenli iletim hatları kullanışlı değildir. Bunun nedeni, TEM dalgaların, iletkenlerin sonlu iletkenliğinden kaynaklanan hat boyunca zayıflamalarının, hattın birim uzunluk başına direnci R ile birlikte artmasıdır. R frekansın kare kökü ile doğru orantılıdır (bkz. Tablo 8-1). Mikrodalga frekanslarında zayıflama engelleyici miktarda yüksek olacaktır. Bu bölümde, boş metal borular içinde yayılan elektromanyetik dalgaların özelliklerini çalışacağız. Metal borular büyük yüzey alanlı tek iletken olduğundan dirençten dolayı zayıflamanın daha az olmasını bekleriz. Boş metal borular ***dalga kılavuzu*** denen düzgün yapıların bir biçimidir.

Boş metal borular mikrodalga frekanslarında bir dalga kılavuzu tipidir.

Önce gelişigüzel kesitli bir düzgün dalga kılavuzu içindeki elektromanyetik dalgaların genel davranışını inceleyeceğiz. Başlangıç noktası, **E** ve **H** için vektör Helmholtz denklemidir. Yayılma yönünde hiç alan bileşeni olmayan ***enine elektromanyetik (TEM) dalgalara*** ek olarak, hem boyuna elektrik alan bileşeni olan ***enine manyetik (TM) dalgaların***, hem de boyuna manyetik alan bileşeni olan ***enine elektrik (TE)*** dalgaların var olabildiğini göreceğiz. Ancak TEM dal-

Üç yayılan elektromanyetik dalga tipi: TEM, TM ve TE



Dalga Klavuzları ve Boşluk Rezonatörleri

galaların tek iletkenli boş (veya dielektrik doldurulmuş) dalga kılavuzlarında var olamayacağı açıkça görülecektir. Bir dikdörtgen dalga kılavuzundaki TM ve TE dalgaların özellikleri detaylıca çalışılacaktır.

Mikrodalga frekanslarında, tellerle birbirine bağlanan olağan toplu-parametre elemanlar (örneğin indüktör ve kapasitörler) devre elemanı veya rezonans devresi olarak kullanışlı değildir. Bunun nedeni elemanların aşırı küçük olmasının gerekmesi, ışıma ve deri etkisinin bir sonucu olarak tel devrelerin direncinin çok yüksek olmasıdır. Uygun boyutlarda bir boş iletken kutu çok yüksek Q'lu bir rezonans elemanı olarak kullanılabilir. Temelde sınır yüzleri kapalı bir dalga kılavuzu parçası olan böyle bir kutuya ***boşluk rezonatörü*** denir. Basit dikdörtgen boşluk rezonatörlerindeki alanların değişik mod örüntülerini tartışacağız.

Boşluk rezonatörleri sınır yüzleri olan dalga kılavuzu parçalarıdır.

9-2 Düzgün Kılavuz Yapılar Boyunca Genel Dalga Davranışı

Bu kısımda düzgün kesitli düz kılavuz yapılar boyunca yayılan dalgaların bazı genel özelliklerini inceleyeceğiz. Dalgaların $+z$ yönünde, belirlenmesi gereken $\gamma = \alpha + j\beta$ yayılma sabiti ile yayıldığını kabul edeceğiz. ω açısal frekanslı harmonik zaman bağımlılığı için, tüm alan bileşenlerinin z ve t bağımlılığı aşağıdaki üstel çarpan ile açıklanabilir:

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 388

$$e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = e^{(j\omega t - \gamma z)} = e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}. \tag{9-1}$$

Örnek olarak kosinüs referansı için Kartezyen koordinatlarda **E** alanının ifadesini

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \mathscr{R}e[\mathbf{E}^0(x, y)e^{(j\omega t - \gamma z)}] \tag{9-2}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\mathbf{E}^0(x, y)$ sadece kesit koordinatlarına bağlı olan iki boyutlu bir vektör fazördür. Buradan, alan niceliklerini ilişkilendiren bağıntılarda fazör gösterimini kullanırken t ve z'ye göre kısmi türevleri basitçe, sırasıyla, $(j\omega)$ ve $(-\gamma)$ çarpanları ile yer değiştirebilir ve $e^{(j\omega t - \gamma z)}$ ortak çarpanını düşürebiliriz.

Gelişigüzel kesitli, dielektrik-dolu ve z-ekseni boyunca uzanan Şekil 9-1'de gösterilen gibi bir düz dalga kılavuzunu düşünelim. Eş. (6-98) ve (6-99)'a göre bir yüksüz dielektrik ortam içinde elektrik ve manyetik alan şiddetleri aşağıdaki homojen vektör Helmholtz denklemlerini sağlar:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \tag{9-3}$$

ve

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0. \tag{9-4}$$

Burada **E** ve **H** üç boyutlu vektör fazörler ve k ise dalga sayısıdır:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}. \tag{9-5}$$

Üç boyutlu ∇^2 Laplasyen operatörü iki parçaya ayrılabilir: Kesit koordinatları için $\nabla^2_{u_1u_2}$ ve boylam koordinatı için ∇^2_z. Dikdörtgen kesitli dalga kılavuzları için Kartezyen koordinatlarda

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} &= (\nabla^2_{xy} + \nabla^2_z)\mathbf{E} = \left(\nabla^2_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E} \\ &= \nabla^2_{xy}\mathbf{E} + \gamma^2\mathbf{E}\end{aligned} \tag{9-6}$$

elde edilir. Eş. (9-3) ve (9-6) birleştirilirse

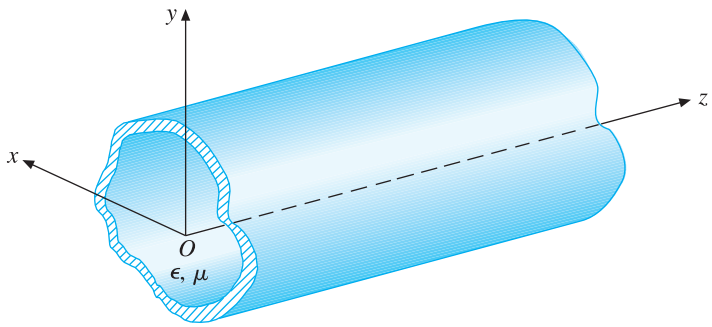
$$\nabla^2_{xy}\mathbf{E} + (\gamma^2 + k^2)\mathbf{E} = 0 \tag{9-7}$$

bulunur. Benzer şekilde Eş. (9-4)'ten

$$\nabla^2_{xy}\mathbf{H} + (\gamma^2 + k^2)\mathbf{H} = 0 \tag{9-8}$$

bulunur. Eş. (9-7) ve (9-8)'in gerçekte **E** ve **H**'nin her bir bileşeni için ikinci-mertebeden üç tane kısmi diferensiyel denklem olduğuna dikkat ediniz. Bu bileşen denklemlerinin kesin çözümü, kesit geometrisine ve sınır koşullarına bağlıdır (bkz. Kısım 9-3).

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 389



ŞEKİL 9-1 Gelişigüzel kesitli bir düzgün dalga kılavuzu.

Elbette **E** ve **H**'nin çeşitli bileşenlerinin hepsi bağımsız değildir ve **E** ve **H**'nin altı bileşeni için ikinci mertebeden altı kısmi diferensiyel denklem çözmek gerekli değildir. $\mathbf{J} = 0$ için iki kaynaksız dönel denklemi olan Eş. (6-80a) ve Eş. (6-80b)'yi Kartezyen koordinatlarda açarak bu altı bileşen arasındaki ilişkileri inceleyelim:

$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$'den		$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$'den	
$\frac{\partial E_z^0}{\partial y} + \gamma E_y^0 = -j\omega\mu H_x^0$	(9-9a)	$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} + \gamma H_y^0 = j\omega\epsilon E_x^0$	(9-10a)
$-\gamma E_x^0 - \frac{\partial E_z^0}{\partial x} = -j\omega\mu H_y^0$	(9-9b)	$-\gamma H_x^0 - \frac{\partial H_z^0}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y^0$	(9-10b)
$\frac{\partial E_y^0}{\partial x} - \frac{\partial E_x^0}{\partial y} = -j\omega\mu H_z^0$	(9-9c)	$\frac{\partial H_y^0}{\partial x} - \frac{\partial H_x^0}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z^0$	(9-10c)

z'ye göre kısmı türevlerin $(-\gamma)$ ile çarpımla yer değiştirildiğine dikkat ediniz. Yukarıdaki eşitliklerdeki tüm alan bileşenleri sadece x ve y'ye bağlı olan fazörlerdir ve ortak $e^{-\gamma z}$ z bağımlılığı çarpanı atılmıştır. Bu eşitliklerle oynayarak H_x^0, H_y^0 ile E_x^0 ve E_y^0 enine bileşenlerini E_z^0 ve H_z^0 boyuna bileşenleri cinsinden ifade edebiliriz. Örneğin Eş. (9-9a) ve (9-10b) birleştirilerek E_y^0 yok edilebilir ve H_x^0, E_z^0 ve H_z^0 cinsinden elde edilebilir. Böyle işlemlerle

Enine bileşenlerin E_z ve H_z cinsinden ifade edilmesi

$$H_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^0}{\partial x} - j\omega\epsilon\frac{\partial E_z^0}{\partial y}\right) \tag{9-11}$$

$$H_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial H_z^0}{\partial y} + j\omega\epsilon\frac{\partial E_z^0}{\partial x}\right) \tag{9-12}$$

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 390

$$E_x^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial y}\right) \tag{9-13}$$

$$E_y^0 = -\frac{1}{h^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z^0}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial H_z^0}{\partial x}\right) \tag{9-14}$$

bulunur, burada

$$h^2 = \gamma^2 + k^2 \tag{9-15}$$

Bir dalga kılavuzunda dalga davranışını belirleme yöntemi

dir. Bir dalga kılavuzundaki dalga davranışı, E_z^0 ve H_z^0 boyuna bileşenleri için, sırasıyla, Eş. (9-7) ve (9-8)'i gerekli sınır koşulları altında çözerek ve diğer bileşenleri, (9-11)'den (9-14)'e eşitlikler yardımıyla bularak incelenebilir.

Bir düzgün dalga kılavuzunda yayılan dalgaları E_z veya H_z'nin var olmasına göre üç sınıfa ayırmak uygundur.

Bir düzgün dalga kılavuzunda yayılan üç dalga tipi

1. *Enine elektromanyetik (TEM) dalgalar*. Bunlar ne E_z, ne de H_z içeren dalgalardır. TEM dalgalarla 7. Bölümde düzlem dalgaları tartışırken ve 8. Bölümde iletim hatlarındaki dalgaları incelerken karşılaşmıştık.
2. *Enine manyetik (TM) dalgalar*. Bunlar sıfır olmayan bir E_z içeren ancak $H_z = 0$ olan dalgalardır.
3. *Enine elektrik (TE) dalgalar*. Bunlar sıfır olmayan bir H_z içeren ancak $E_z = 0$ olan dalgalardır.

Çeşitli dalga tiplerinin yayılma özellikleri farklıdır ve bunlar ileriki alt kısımlarda incelenecektir.

9-2.1 ENİNE ELEKTROMANYETİK DALGALAR

Bir kılavuz içindeki TEM dalgalar için $E_z = 0$ ve $H_z = 0$ olduğundan Eş. (9-11)-(9-14), paydadaki h^2'nin de sıfır olduğu durum dışında bir aşikar çözüm kümesi (tüm alan bileşenleri sıfır olur) oluşturur. Bir başka deyişle TEM dalgalar sadece

$$\gamma_{\text{TEM}}^2 + k^2 = 0 \tag{9-16}$$

veya

$$\gamma_{\text{TEM}} = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{9-17}$$

olduğunda var olabilir. Bu da ϵ ve μ parametreleri ile tanımlanan sınırsız bir ortamdaki düzlem dalganın yayılım sabiti ile aynı ifadedir. Eş. (9-17)'nin bir kayıpsız iletim hattı üzerindeki TEM dalgası için de geçerli olduğunu hatırlayalım. Buradan TEM dalgalar için yayılma hızı (faz hızı)

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 391

TEM dalgalar için faz hızı

$$u_{p(\text{TEM})} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{(m/s)} \tag{9-18}$$

bulunur. Eş. (9-9b) ve (9-10a)'dan E_z ve H_z'yi sıfır alarak E_x^0 ve H_y^0 arasındaki oranı bulabiliriz. Bu orana ***dalga empedansı*** denir. Bu yolla

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{\text{TEM}}} = \frac{\gamma_{\text{TEM}}}{j\omega\epsilon} \tag{9-19}$$

olur ki bu da Eş. (9-17) yardımıyla

TEM dalgalar için dalga empedansı

$$Z_{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (\Omega) \tag{9-20}$$

haline gelir. Z_{TEM} in Eş. (7-14)'te verilen, dielektrik ortamın öz empedansı ile aynı olduğuna dikkat ediniz. Eş. (9-18) ve (9-20), ***TEM dagaların faz hızının ve dalga empedansının dalga frekansından bağımsız olduğunu belirtir.***

Tek-iletkenli dalga kılavuzları TEM dalgaları destekleyemez. Kısım 5-2'de manyetik akı çizgilerinin her zaman kendi üzerlerine kapandığını belirtmiştik. Böylece eğer bir dalga kılavuzunda bir TEM dalgası var olacaksa **B** ve **H**'nin alan çizgileri enine düzlemde kapalı döngüler oluşturmalıdır. Ancak Eş. (6-46b)'deki genelleştirilmiş Ampere devre yasası, manyetik alanın bir enine düzlemde herhangi bir kapalı yol üzerindeki çizgi integralinin, döngüden geçen boyuna iletkenlik ve yerdeğiştirme akımlarının toplamına eşit olduğunu belirtir. Bir iç iletken olmaksızın dalga kılavuzu içinde boyuna iletkenlik akımı yoktur. Tanımdan, bir TEM dalgasının E_z bileşeni yoktur, sonuç olarak boyuna yerdeğiştirme akımı yoktur. Bir dalga kılavuzunun içinde bir boyuna akımın yokluğu, herhangi bir enine düzlemde kapalı manyetik alan çizgilerinin olamayacağını belirtir. Sonuç olarak, ***şekli nasıl olursa olsun, tek-iletkenli boş (veya dielektrik dolu) bir dalga kılavuzunda TEM dalgalar var olamaz.***

Tek-iletkenli dalga kılavuzları TEM dalgaları destekleyemez.

9-2.2 ENİNE MANYETİK DALGALAR

Enine manyetik (TM) dalgaların, yayılma yönünde bir manyetik alan bileşenleri yoktur, yani $H_z = 0$'dır. TM dalgaların davranışı, Eş. (9-7)'yi kılavuz sınır koşulları altında E_z için çözüp, Eş. (9-11)-(9-14)'ü diğer bileşenleri bulmak için kullanarak incelenebilir. E_z için Eş. (9-7)'yi yazarsak

$$\nabla_{xy}^2 E_z^0 + (\gamma^2 + k^2)E_z^0 = 0 \tag{9-21}$$

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 392

veya

$$\nabla_{xy}^2 E_z^0 + h^2 E_z^0 = 0 \tag{9-22}$$

buluruz. Eşitlik (9-22) E_z^0 için çözülebilecek ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir. Bu kısımda sadece çeşitli dalga tiplerinin genel özelliklerini tartışmak istiyoruz. Eş. (9-22)'nin gerçek çözümü dikdörtgen dalga kılavuzlarını tartışacağımız bir sonraki kısıma bırakılacaktır. E_z^0 belirlendikten sonra tüm diğer alan bileşenleri $H_z^0 = 0$ alıp Eş. (9-11)'den (9-14)'e kullanarak bulunabilir. Manyetik alan şiddetinin enine bileşenleri H_x^0 ve H_y^0 ile elektrik alan şiddetinin enine bileşenleri E_x^0 ve E_y^0 arasındaki ilişkiyi TM modu için bir dalga empedansı ile ifade edebiliriz:

TM dalgalar için dalga empedansı

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \tag{9-23}$$

Z_{TM}'nin $j\omega\mu/\gamma$'ya *eşit olmadığına* dikkat edilmesi önemlidir çünkü TM dalgalar için γ, γ_{TEM} gibi $j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 'a eşit değildir.

Karakteristik değerlerin veya öz değerlerin tanımı

Eş. (9-22)'deki iki boyutlu homojen Helmholtz denklemini verilen dalga kılavuzunun sınır koşulları altında çözerken, çözümlerin sadece *ayrık h değerleri* için olanaklı olduğunu göreceğiz. Eş. (9-22)'nin çözümünü var kılan bu h değerlerine, bu sınır-değer probleminin ***karakteristik değeri*** veya ***öz değeri*** denir. Her bir öz değer verilen dalga kılavuzunun özel bir TM modunun karakteristik özelliklerini belirler.

Sonraki kısımlarda çeşitli dalga kılavuzu problemlerinin öz değerlerinin reel sayılar olduğunu da keşfedeceğiz. Eş. (9-15)'ten

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{h^2 - k^2} \\ &= \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}\end{aligned} \tag{9-24}$$

buluruz. Yayılma sabitinin iki farklı bölgesine dikkat edilebilir, bu bölgeler $\gamma = 0$ ile ayrılmıştır. Bu durumda

$$\omega_c^2 \mu\epsilon = h^2 \tag{9-25}$$

dir ve

Öz değer *h* ile kesim frekansı f_c arasındaki bağıntı

$$f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{(Hz)} \tag{9-26}$$

elde edilir.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 393

f_c kesim frekansının tanımı

$\gamma = 0$ veren f_c frekansına ***kesim frekansı*** denir. *Bir dalga kılavuzu içinde bir modun f_c değeri, bu modun h öz değerine bağlıdır*. Eş. (9-26)'yı kullanarak Eş. (9-24)'ü

$$\gamma = h\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{9-27}$$

halinde yazabiliriz. γ'nın iki farklı aralığı $(f/f_c)^2$'yi bir ile karşılaştırarak tanımlanabilir.

a) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 > 1$ veya $f > f_c$. Bu aralıkta $\omega^2\mu\epsilon > h^2$ ve γ sanaldır. Eş. (9-24) ve (9-26)'dan

$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1-\left(\frac{h}{k}\right)^2} = jk\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{9-28}$$

buluruz. Bu, yayılan bir moddur ve faz sabiti β

$f > f_c$ olan dalgalar yayılan modlardır.

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \text{(rad/m)} \tag{9-29}$$

ile verilir. Kılavuz içindeki dalga boyu

Kılavuz dalga boyu, karşılık gelen sınırsız ortamdaki dalga boyundan büyüktür.

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \tag{9-30}$$

dır. Burada

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{f} \tag{9-31}$$

μ ve ϵ ile tanımlanan bir sınırsız dielektrik ortamda, frekansı f olan bir düzlem dalganın dalga boyudur. $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ise aynı ortamdaki ışık hızıdır. Eş. (9-30) λ, kılavuz dalga boyu λ_g ve kesim dalga boyu $\lambda_c = u/f_c$ arasında bir basit bağıntı verecek şekilde yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \tag{9-32}$$

elde edilir. Kılavuzda yayılan dalganın faz hızı ise

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\lambda_g}{\lambda}u > u \tag{9-33}$$

olarak bulunur.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 394

Eş. (9-33)'ten bir dalga kılavuzu içindeki faz hızının, bir sınırsız ortamdakinden daima daha büyük ve frekans bağımlı olduğunu görürüz. Buradan, bir sınırsız, kayıpsız dielektrik ortam dağıtıcı olmamakla birlikte, ***tek iletkenli dalga kılavuzları dağıtıcı iletim sistemleridir.*** Eş. (9-28)'in Eş. (9-23)'te yerine konması

Tek iletkenli dalga kılavuzları dağıtıcıdır.

$$Z_{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (\Omega) \tag{9-34}$$

Yayılan TM modlarının dalga empedansı kılavuzdaki ortamın öz empedansından küçüktür.

verir. ***Böylece kayıpsız dielektrikli bir dalga kılavuzunda yayılan TM modlarının dalga empedansı tümüyle reeldir ve her zaman kılavuz içindeki dielektrik ortamın öz empedansından küçüktür.***

b) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 < 1$ veya $f < f_c$. Çalışma frekansı kesim frekansından küçük olduğunda γ reeldir ve Eş. (9-27)

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\ ,\ f < f_c \tag{9-35}$$

$f<f_c$ olan dalgalar sönümlenen veya yayılmayan dalgalardır.

olarak yazılabilir. Bu da, gerçekte bir zayıflama sabitidir. Tüm alan bileşenleri $e^{-\gamma z} = e^{-\gamma z}$ yayılma çarpanı içerdiğinden dalga z ile hızla küçülür ve sönümlenen dalga olarak adlandırılır. ***Sonuç olarak bir dalga kılavuzu bir yüksek-geçiren filtre özelliği sergiler.*** Verilen bir mod için, sadece frekansı o modun kesim frekansından daha yüksek olan dalgalar kılavuz içinde yayılabilir. Eş. (9-35)'in Eş. (9-23)'te yerine konması $f < f_c$ olan TM modların dalga empedansını sanal olarak verir. Böylece kesim frekansının altındaki frekanslardaki sönümlenen TM modlarının dalga empedansı tümüyle sanaldır. Bu da sönümlenen dalgalarla güç akışı olmadığını gösterir.

Dalga kılavuzları yüksek-geçiren cihazlardır.

9-2.3 ENİNE ELEKTRİK DALGALAR

Enine elektrik (TE) dalgalar, yayılma yönünde bir elektrik alan bileşenine sahip değildir, yani $E_z = 0$'dır. TE dalgaların davranışı önce Eş. (9-8)'i H_z için çözerek incelenebilir:

$$\nabla_{xy}^2 H_z + h^2 H_z = 0 \tag{9-36}$$

Kılavuz duvarlarında uygun sınır koşulları sağlanmalıdır. Daha sonra enine alan bileşenleri, Eş. (9-11)-(9-14)'te E_z sıfır alınıp bulunan H_z yerine konarak bulunabilir.

Elektrik alan şiddetinin enine bileşenleri E_x^0 ve E_y^0 manyetik alan şiddetinin enine bileşenleri H_x^0 ve H_y^0'a dalga empedansı ile bağlıdır.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 395

Buradan

TE dalgalar için dalga empedansı

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x^0}{H_y^0} = -\frac{E_y^0}{H_x^0} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (\Omega) \tag{9-37}$$

bulunur. Eş. (9-37)'deki Z_{TE} Eş. (9.23)'teki Z_{TM}'den oldukça farklıdır. Bunun nedeni TE dalgalardaki γ'nın γ_{TEM} gibi $j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 'a eşit olmamasıdır.

γ ve h arasındaki ilişki değişmediğinden TM dalgalarla ilgili olan Eş. (9-24)-(9-33) TE dalgalar için de geçerlidir. Ayrıca γ için, çalışma frekansının Eş. (9-26)'da verilen f_c kesim frekansından büyük veya küçük olmasına göre iki farklı aralık vardır.

a) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 > 1$ veya $f > f_c$. Bu aralıkta γ sanaldır ve bir yayılan mod vardır. γ'nın ifadesi Eş. (9-28)'deki ile aynıdır ve aşağıda verilmiştir:

$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{9-38}$$

Bunun sonucunda, β, λ_g ve u_p'nin sırasıyla, Eş. (9-29), (9-30) ve (9-33)'te verilen ifadeleri TE dalgalar için de geçerlidir. Eş. (9-38)'i Eş. (9-37)'de yerine koyarsak

Yayılan TE modları için dalga empedansı, kılavuzdaki ortamın öz empedansından büyüktür.

$$Z_{\text{TE}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (\Omega) \tag{9-39}$$

elde ederiz ki bu da Z_{TM} için Eş. (9-34)'te verilen ifadeden açıkça farklıdır. Eş. (9-39), ***kayıpsız dielektrikli bir dalga kılavuzunda yayılan TE modlarının dalga empedansının tümüyle reel olduğunu ve her zaman kılavuzdaki dielektrik ortamın öz empedansından daha büyük olduğunu belirtir.***

b) $\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 < 1$ veya $f < f_c$. Bu durumda γ reeldir ve sönümlenen veya yayılmayan bir mod vardır:

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}, \qquad f < f_c. \tag{9-40}$$

Eş. (9-40)'taki γ tümüyle reel olduğundan Eş. (9-37)'deki TE mod dalga empedansı $f < f_c$ için tümüyle sanaldır,

$f<f_c$ olan dalgalar sönümlenen veya yayılmayan dalgalardır.

$$Z_{\text{TE}} = j\frac{\omega\mu}{h\sqrt{1 - (f/f_c)^2}}, \qquad f < f_c. \tag{9-41}$$

Bu da $f < f_c$ durumunda sönümlenen dalgalar için bir güç akışı olmadığını belirtir.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 396

■ **ALIŞTIRMA 9.1** (a) Bir dalga kılavuzunda TM ve TE modları için kesim frekansının iki katına eşit bir frekansta dalga empedansını ve kılavuz dalga boyunu (TEM mod değerleri cinsinden) belirleyiniz.

(b) (a) şıkkını kesim frekansının yarısına eşit bir frekans için tekrarlayınız.

CEVAP: (a) 0.866η, 1.155λ; 1.155η, 1.155λ. (b) $-j0.276h/f_c\epsilon$; $j3.63f_c\mu/h$.

■ **ALIŞTIRMA 9.2** Bir dalga kılavuzunda u_g grup hızı için f_c ve f cinsinden bir ifadeyi Eş. (9-33)'ten elde ediniz ve

$$u_g u_p = u^2 \tag{9-43}$$

olduğunu ispat ediniz.

ÖRNEK 9-1

Eş. (9-29) bir dalga kılavuzunda yayılan bir modun faz sabiti β ve frekansı f arasındaki ilişkiyi verir. TM ve TE modları için $\omega - \beta$ grafiğini çiziniz ve kılavuzda yayıyan bir mod için faz ve grup hızlarının grafikten nasıl belirlenebileceğini tartışınız.

ÇÖZÜM

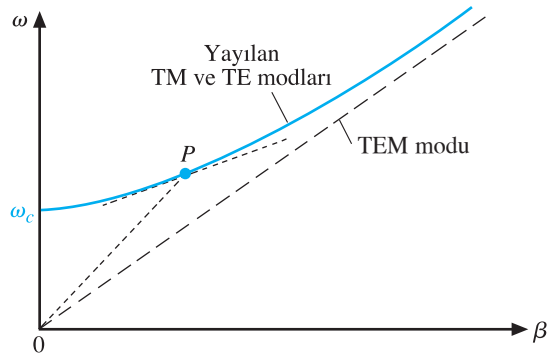
Eşitlik (9-29) hem TM, hem de TE yayılan modlar için geçerlidir. $k = \omega/u$ ve $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ sınırsız ortamdaki dalga yayılma hızı olduğundan Eş. (9-29)

$$\omega = \frac{\beta u}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} \tag{9-43}$$

Dağılma diyagramı ω–β grafiğidir.

halinde yeniden yazılabilir. ***Dağılma diyagramı*** olarak adlandırılan $\omega - \beta$ grafiği Şekil 9-2'de sürekli eğri olarak çizilmiştir. Orijin ile eğri

ŞEKİL 9-2 Dalga kılavuzu için $\omega - \beta$ grafiği (Örnek 9-1).



+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 397

üzerindeki herhangi bir P noktasını birleştiren doğrunun eğimi, f_c kesim frekanslı ve belli çalışma frekanslı bir modun u_p faz hızına eşittir. $\omega - \beta$ eğrisinin P noktasındaki eğimi ise u_g grup hızıdır. Bir dalga kılavuzunda yayılan TM ve TE dalgalar için $u_p > u$, $u_g < u$ olduğunu ve Eş. (9-43)'ün geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Çalışma frekansı kesim frekansının çok üstüne çıktıkça u_g ve u_p'nin her ikisi de asimtotik olarak u'ya yaklaşır. ω_c'nin tam değeri Eş. (9-26)'daki h öz değerine, yani ilgili TM veya TE moduna bağlıdır.

ÖRNEK 9-2

(ϵ, μ) ortam parametreleri olan bir dielektrik ortamla araları doldurulmuş b uzaklıklı iki mükemmel iletken plakadan oluşan Şekil 9-3'teki paralel-plaka dalga kılavuzunu düşününüz. Plakalar x-yönünde sonsuz boyutludur (alanlar x-yönü ile değişmemektedir).

a) Kılavuzdaki TM modları için zamanda-harmonik alan ifadelerini elde ediniz.

b) Kesim frekansını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Dalgalar $+z$ yönünde yayılsın TM modları için $H_z = 0$'dır. Harmonik zaman bağımlılığı olduğunda alan şiddeti fazörleri ile çalışmak ve $E_z(y, z)$'yi' $E_x^0(y)\, e^{-\gamma z}$ olarak yazmak daha uygundur. x-yönünde hiç değişim olmadığından Eş. (9-22)

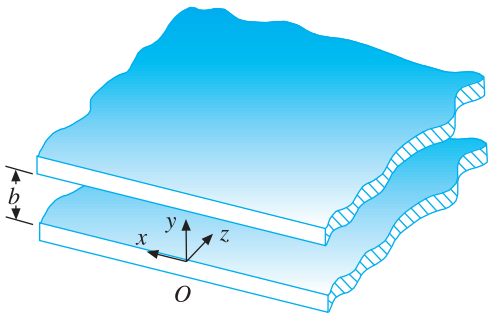
$$\frac{d^2 E_z^0(y)}{dy^2} + h^2 E_z^0(y) = 0 \tag{9-44}$$

haline gelir. Eş. (9-44)'ün genel çözümü

$$E_z^0(y) = A_n \sin hy + B_n \cos hy \tag{9-25}$$

yazılabilir.

ŞEKİL 9-3 Sonsuz paralel-plaka dalga kılavuzu.



+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 398

Mükemmel iletken plaka yüzeylerinde elektrik alanın teğet bileşenlerinin sıfır olması gerektiğinden, aşağıdaki sınır koşulları sağlanmalıdır:

(i) $y = 0$'da $E_z^0(0) = 0$

ve

(ii) $y = b$'de $E_z^0(b) = 0$.

(i) sınır koşulu $B_n = 0$ olmasını gerektirir ve (ii) koşulu $\sin hb = 0$ veya $hb = n\pi$ olmasını gerektirir. Bu da h öz değerini

$$h = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9-46}$$

olarak belirler. Böylece Eş. (9-45)'teki $E_z^0(y)$

$$E_z^0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{9-47}$$

biçiminde olmalıdır. Burada A_n genliği, özel TM dalgasının kaynağının gücüne bağlıdır. Sıfır olmayan diğer alan bileşenleri, Eş. (9-11) ve (9-14)'ten $H_z^0 = 0$ ve $\partial E_z^0/\partial x = 0$ olduğu akılda tutularak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H_x^0(y) = \frac{j\omega\epsilon}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{9-48}$$

$$E_y^0(y) = -\frac{\gamma}{h} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{9-49}$$

Eş. (9-49)'daki γ, yayılma sabitidir ve Eş. (9-24)'ten

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{9-50}$$

olarak belirlenebilir.

b) Kesim frekansı $\gamma = 0$ veren frekanstır. Buradan

Paralel plaka dalga kılavuzunun kesim frekansı

$$f_c = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{(Hz)} \tag{9-51}$$

buluruz ki bu da Eş. (9-26) ile uyumludur. $f > f_c$ olan dalgalar Eş. (9-29)'da verilen β faz sabiti ile yayılır ve $f \le f_c$ olan dalgalar sönümlenendir.

n değerlerine bağlı olarak, farklı h öz değerlerine karşılık gelen farklı olası yayılan TM modları (öz modlar) vardır. Dolayısıyla, $n = 1$ için kesim frekansı $(f_c)_1 = 1/2b\sqrt{\mu\epsilon}$ olan TM_1 modu, $n = 2$ için kesim frekansı $(f_c)_2 = 1/b\sqrt{\mu\epsilon}$ olan TM_2 modu ve aynı şekilde diğer modlar yazılabilir. $n = 0$ olduğunda $E_z = 0$ olur

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 399

ve sadece H_x ve E_y enine bileşenleri var olur. Böylece TM_0 modu TEM modudur ve $f_c = 0$ olan bir özel durumdur.

TEKRAR SORULARI

S.9-1 Niçin yaygın iletim hattı tipleri, mikrodalga frekanslarında TEM modunda uzak mesafelere sinyal iletimi için kullanışlı değildir?

S.9-2 Tellerle birbirine bağlanan toplu-parametreli elemanlar mikrodalga frekanslarında rezonans devre olarak neden kullanışsızdır?

S.9-3 Bir düzgün dalga kılavuzundaki üç temel yayılan dalga tipi nedir?

S.9-4 Tek iletkenli boş veya dielektrik doldurulmuş dalga kılavuzlarının niçin TEM dalgaları destekleyemediğini açıklayınız.

S.9-5 *Dalga empedansını* tanımlayınız.

S.9-6 Bir dalga kılavuzundaki dalga empedansı,

a) yayılan TEM dalga,

b) yayılan TM dalga,

c) yayılan TE dalga durumlarında frekansa nasıl bağlıdır?

S.9-7 Bir sınır-değeri probleminin *öz değerleri* nedir?

S.9-8 Bir dalga kılavuzunun *kesim frekansı* ile ne anlatılmak istenir?

S.9-9 Bir dalga kılavuzunun birden çok kesim frekansı olabilir mi? Kılavuzun kesim frekansı hangi etmenlere bağlıdır?

S.9-10 Bir dalga kılavuzunda yayılan bir dalganın kılavuz dalga boyu, karşılık gelen sınırsız dielektrik ortamdaki dalga boyundan uzun mu yoksa kısa mıdır?

S.9-11 *Sönümlenen dalga* nedir?

NOTLAR

1. Bir dalga kılavuzu sadece kesim frekansından daha yüksek frekansların yayılmasına izin vererek bir yüksek-geçiren filtre özelliği sergiler.
2. Kayıpsız dalga kılavuzlarında yayılan TM ve TE modlarının dalga empedansı tümüyle reeldir ve (f_c/f) oranı ile değişir; sönümlenen dalgalarınki ise tümüyle sanaldır.
3. Bir dalga kılavuzundaki TM ve TE modlarının her ikisi için de dalga boyu (λ_g) ve faz hızı (u_p), karşılık gelen sınırsız ortamdaki dalganın dalga boyu (λ) ve faz hızı (u)'dan büyüktür.
4. Bir dalga kılavuzunda yayılan dalganın grup hızı (u_g), $f\lambda_g$ çarpımına eşit değildir ancak faz hızı (u_p) bu çarpıma eşittir.
5. Tek iletkenli dalga kılavuzları dağıtıcı iletim sistemleridir (u_p ile f orantılı değildir).
6. Bir paralel-plaka dalga kılavuzunun kesim frekansı, plakalar arası uzaklıkla ters orantılıdır.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 400

9-3 DİKDÖRTGEN DALGA KILAVUZLARI

Örnek 9-2'de incelenen paralel-plaka dalga kılavuzunda enine x-yönünde plakaların sonsuz olduğu ve alanların x ile değişmediği kabul edilmiştir. Gerçekte bu plakaların genişliği her zaman sonludur ve kenarlarda alan saçaklanması olur. Kılavuz kenarlarından elektromanyetik enerji sızacak diğer devrelere ve sistemlere istenmeyen bağlaşım oluşacaktır. Bunun sonucunda pratik dalga kılavuzları, sınırlanmış bir kesite sahip düzgün yapılardır. Bu kısımda boş dikdörtgen dalga kılavuzlarındaki dalga davranışını inceleyeceğiz.

Aşağıdaki tartışmada düzgün kılavuz yapılar boyunca dalga davranışını ilgilendiren kısımlarda Kısım 9-2'yi kullanacağız. Zamanda harmonik dalgaların $+z$ yönünde γ yayılma sabiti ile yayılması incelenecektir. TM ve TE modları ayrı ayrı tartışılacaktır. Daha önce belirttiğimiz gibi tek iletkenli boş veya dielektrik dolu bir dalga kılavuzunda TEM dalgalar var olmaz.

9-3.1 DİKDÖRTGEN DALGA KILAVUZLARINDA TM DALGALAR

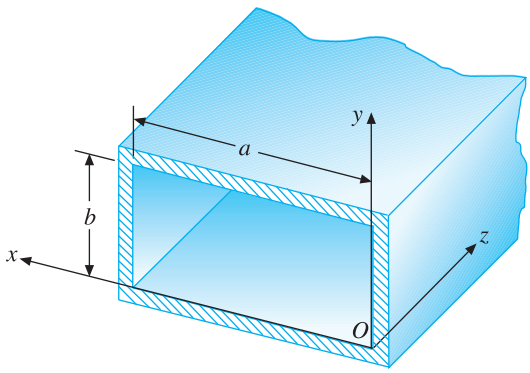
Şekil 9-4'te gösterilen, diktörtgen kesitinin kenar uzunlukları a ve b olan dalga kılavuzunu düşünelim. Çevrelenen dielektrik ortamın ϵ ve μ ortam parametrelerine sahip olduğu kabul edilmiştir. TM dalgalar için $H_z = 0$'dır ve E_z Eş. (9-22)'den çözülmelidir. $E_z(x, y, z)$'yi

$$E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)e^{-\gamma z} \tag{9-52}$$

halinde yazarsak aşağıdaki ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemi çözeceğiz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) E_z^0(x, y) = 0. \tag{9-53}$$

ŞEKİL 9-4 Dikdörtgen dalga kılavuzu.



+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 401

$E_z^0(x, y)$ çözümünün sadece x'e bağlı bir $X(x)$ fonksiyonu ile sadece y'ye bağlı bir $Y(y)$ fonksiyonun çarpımı halinde ifade edilebildiğini kabul edelim.

$$E_z^0(x, y) = X(x)Y(y). \tag{9-54}$$

Değişkenlerin ayrılması yöntemi

Kısım 3-11.5'te, Eş. (9-53)'ün bir çözümünün, eğer problemin sınır koşullarını sağlıyorsa, nasıl elde edilmiş olursa olsun, tek olası çözüm olduğunu garanti eden teklik teoreminden bahsetmiştik. Eş. (9-54)'teki gibi bir çarpım çözüm kabul ederek ***değişkenlerin ayrılması yöntemini*** takip edeceğiz. Eş. (9-54)'ü Eş. (9-53)'te yerine koyup, bulunan denklem $X(x)Y(y)$ çarpımına bölünürse

$$-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + h^2 \tag{9-55}$$

bulunur. Eş. (9-55)'in sol tarafı sadece x'in fonksiyonu ve sağ tarafı da sadece y'nin fonksiyonu olduğundan, eşitliğin tüm x ve y değerlerince sağlanması için her iki taraf bir sabite eşit olmalıdır. Bu sabiti (ayırma sabiti) k_x^2 olarak adlandırırsak aşağıdaki iki ayrı adi diferensiyel denklemi elde ederiz:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k_x^2X(x) = 0 \tag{9-56}$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k_y^2Y(y) = 0\,. \tag{9-57}$$

Burada

$$k_y^2 = h^2 - k_x^2 \tag{9-58}$$

tanımlanmıştır. Eş. (9-56) ve (9-57)'nin genel çözümleri

$$X(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x \tag{9-59}$$

$$Y(y) = B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y \tag{9-60}$$

yazılabilir. $X(x)$ ve $Y(y)$'nin uygun biçimlerinin seçimi, Eş. (9-54)'teki çarpım aşağıdaki sınır koşullarını sağlayacak şekilde yapılmalıdır:

1. x-yönünde:

$$E_z^0(0, y) = 0 \quad \text{ve} \tag{9-61}$$

$$E_z^0(a, y) = 0. \tag{9-62}$$

2. y-yönünde:

$$E_z^0(x, 0) = 0 \quad \text{ve} \tag{9-63}$$

$$E_z^0(x, b) = 0. \tag{9-64}$$

O halde, açıkca

$X(x)$'i $\sin k_x x$,

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 402

ve $Y(y)$'yi $\sin k_y y$ biçiminde

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

olarak seçmeliyiz. Sonuçta $E_z^0(x, y)$'nin uygun çözümü

$$E_z^0(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{(V/m)} \tag{9-65}$$

olur. Burada dalga kılavuzunun besleme koşullarından belirlenmesi gereken A_1B_1 çarpımı yerine E_0 yazılmıştır. Diğer alan bileşenleri Eş. (9-11)-(9-14)'ten $H_z = 0$ olarak elde edilebilir.

h öz değeri ve γ yayılma sabiti, k_x ve k_y'ye, sırasıyla, Eş. (9-58) ve (9-24) ile bağlıdır. Buradan

$$h^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{9-66}$$

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - h^2} = j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{9-67}$$

elde ederiz. m ve n tamsayılarının her seçimi, TM_{mn} ile gösterilebilen bir olası mod tanımlar; böylelikle çift sonsuz sayıda TM modu vardır. İlk alt indis x-yönündeki yarı-döngü değişimlerinin sayısını, ikinci alt indis de y-yönündeki yarı-döngü değişimlerinin sayısını gösterir. Belli bir modun kesimi, γ'nın sıfır olma durumudur. TM_{mn} modu için kesim frekansı Eş. (9-26)'dan

TM_{mn} modunun kesim frekansı

$$(f_c)_{mn} = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \text{(Hz)} \tag{9-68}$$

bulunur. Ayrıca $\lambda_c = u/f_c = 2\pi/h$ veya

TM_{mn} modunun kesim dalga boyu

$$(\lambda_c)_{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad \text{(m)} \tag{9-69}$$

yazabiliriz, burada λ_c ***kesim dalga boyudur.***

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 403

Dikdörtgen dalga kılavuzlarındaki TM modları için m veya n sıfır olamaz. Olursa Eş. (9-65)'teki $E_z^0(x, y)$ ve tüm diğer bileşenler sıfır olur. Böylece TM_{11} modu bir dikdörtgen dalga kılavuzundaki tüm TM modları arasında en düşük kesim frekansı olanıdır. Eş. (9-29) ve (9-34)'te, sırasıyla, yayılan modların β faz sabiti ve Z_{TM} dalga empedansı için verilen ifadeler bu durumda da geçerlidir.

ÖRNEK 9-3

İç boyutları $a = 2.3$ (cm) ve $b = 1.0$ (cm) olan bir dikdörtgen dalga kılavuzu $\epsilon_r = 2.25$, $\mu = 1$ ile tanımlanan bir ortamla doludur.

a) TM_{11} modu için h, f_c ve λ_c'yi bulunuz.

b) Eğer çalışma frekansı kesim frekansından %15 yüksek ise $(Z)_{TM_{11}}$, $(\beta)_{TM_{11}}$ ve $(\lambda_g)_{TM_{11}}$ değerlerini bulunuz. Yayılan modlar için dalga kılavuzunu kayıpsız kabul ediniz.

ÇÖZÜM

a) TM_{11} modu için Eş. (9-66), (9-68) ve (9-69)'da $m = n = 1$ kullanırız:

$$(h)_{TM_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2.3 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{1.0 \times 10^{-2}}\right)^2} = 342.6 \quad (\text{m}^{-1})$$

$$(f_c)_{TM_{11}} = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{hc}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{342.6 \times (3 \times 10^8)}{2\pi\sqrt{2.25}} = 10.9 \quad (\text{GHz})$$

$$(\lambda_c)_{TM_{11}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{342.6} = 1.83 \quad (\text{cm}).$$

b) $f = 1.15\, f_c = 1.15 \times 10.9 = 12.54$ (GHz)'de TM_{11} bir yayılan moddur. Z_{TM}, β ve λ_g'nin Eş. (9-34), (9-29) ve (9-30)'daki ifadelerinin tümü $\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = \sqrt{1 - (1/1.15)^2} = 0.494$ çarpanını içerir. Buradan,

$$(Z)_{TM_{11}} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{377}{\sqrt{2.25}} \times 0.494 = 124.2 \quad (\Omega),$$

$$(\beta)_{TM_{11}} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi \times (12.54 \times 10^9)\sqrt{2.25}}{3 \times 10^8} \times 0.494$$

$$= 194.5 \quad (\text{rad/m})$$

ve

$$(\lambda_g)_{TM_{11}} = \frac{2\pi}{(\beta)_{TM_{11}}} = \frac{2\pi}{194.5} = 0.0323 \text{ (m)} = 3.23 \quad (\text{cm})$$

buluruz.

+09 1_+09 1 5.06.2024 14:32 Page 404

■ **ALIŞTIRMA 9.3** $f < (f_c)_{TM_{11}}$ için TM_{11} bir sönümlenen dalgadır. Örnek 9-3'te verilen dalga kılavuzunda TM_{11} modunda $f = 0.85 f_c$ için zayıflama sabitini bulunuz. Dalga kılavuzu içinde alan genliğinin e^{-1} çarpanı kadar veya %36.8 azalması için gereken uzaklık nedir?

CEVAP: 180.5 (N/pm), 5.5 (mm).

■ **ALIŞTIRMA 9.4** Örnek 9-3'teki dalga kılavuzu için TM_{12} ve TM_{21} modlarının kesim frekanslarını bulunuz.

CEVAP: 20.5 (GHz), 13.3 (GHz).

9-3.2 DİKDÖRTGEN DALGA KILAVUZLARINDA TE DALGALAR

Enine elektrik dalgalarda $E_z = 0$'dır ve H_z için Eş. (9-36)'yı çözeriz. Burada

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y)e^{-\gamma z} \tag{9-70}$$

yazarız, $H_z^0(x, y)$ aşağıdaki ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemi sağlar:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right) H_z^0(x, y) = 0. \tag{9-71}$$

Eş. (9-71)'in Eş. (9-53) ile tamamen aynı biçimde olduğu görülür. $H_z^0(x, y)$'nin çözümü aşağıdaki sınır koşullarını sağlamalıdır:

1. x-yönünde:

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial x} = 0 \ (E_y = 0) \qquad x = 0\text{'da} \tag{9-72}$$

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial x} = 0 \ (E_y = 0) \qquad x = a\text{'da.} \tag{9-73}$$

2. y-yönünde:

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} = 0 \ (E_x = 0) \qquad y = 0\text{'da} \tag{9-74}$$

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} = 0 \ (E_x = 0) \qquad y = b\text{'de.} \tag{9-75}$$

$H_z^0(x, y)$ için uygun çözümün

$$H_z^0(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \tag{9-76}$$

olduğu kolaylıkla sağlanabilir. Diğer alan bileşenleri Eş. (9-11)-(9-14) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E_x^0(x, y) = \frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \tag{9-77}$$

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 405

$$E_y^0(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad (9\text{-}78)$$

$$H_x^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad (9\text{-}79)$$

$$H_y^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \qquad (9\text{-}80)$$

burada h ve γ, sırasıyla, Eş. (9–66) ve (9-67)'deki TM modlarının ifadeleri ile aynıdır.

$a > b$ olan bir dalga kılavuzunda TE_{10} modu tüm TE modlarının en düşük kesim frekanslısıdır.

Eş. (9-68)'deki kesim frekansı ifadesi de burada geçerlidir. TE modları için m ve n (ancak ikisi birden değil) sıfır olabilir. Eğer $a > b$ ise $h = \pi/a$ en küçük öz değerdir ve kesim frekansı $m = 1$, $n = 0$ için en düşüktür:

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u}{2a} \quad \text{(Hz)}. \qquad (9\text{-}81)$$

TE_{10} modunun kesim frekansı

Karşılık gelen dalga boyu ise

$$(\lambda_c)_{TE_{10}} = 2a \quad \text{(m)} \qquad (9\text{-}82)$$

Baskın mod

olarak bulunur. En düşük kesim frekansına (en büyük kesim dalga boyuna) sahip olan moda ***baskın mod*** denir. Böylece *$a > b$ olan bir dikdörtgen dalga kılavuzunda* TE_{10} *modu baskın moddur*. Zayıflaması bir dikdörtgen dalga kılavuzundaki tüm modların en azı olduğu ve elektrik alanı her yerde tek yönde kutuplandığı için TE_{10} modunun özel bir önemi vardır. Bu modun alan yapısını ve diğer özelliklerini bu bölümün ileriki kısımlarında daha detaylı inceleyeceğiz.

Dikdörtgen dalga kılavuzlarında TE_{10} modunun önemi

■ **ALIŞTIRMA 9.5** (a) $a \times b$ dikdörtgen dalga kılavuzunda eğer $a < b$ ise baskın mod nedir? Bu modun kesim dalga boyu nedir? (b) Kare ($a = b$) dalga kılavuzunda TM_{11}, TE_{20} ve TE_{02} modlarının kesim frekansları nedir?

CEVAP: (a) $2b$, (b) $1/a\sqrt{2\mu\epsilon}$.

ÖRNEK 9-4

10 (GHz)'de bir TE_{10} dalgası, boyutları $a = 1.5$ (cm) ve $b = 0.6$ (cm) olan ve polietilen ($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$) ile dolu bir dalga kılavuzunda yayılıyor. (a) Faz sabitini, (b) kılavuz dalga boyunu, (c) faz hızını ve (d) dalga empedansını belirleyiniz.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 406

ÇÖZÜM

$f = 10^{10}$ (Hz)'de sınırsız polietilen içindeki dalga boyu

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = \frac{2 \times 10^8}{10^{10}} = 0.02 \quad \text{(m)}$$

dir. TE_{10} modunun kesim frekansı, Eş. (9-81)'den

$$f_c = \frac{u}{2a} = \frac{2 \times 10^8}{2 \times (1.5 \times 10^{-2})} = 0.667 \times 10^{10} \quad \text{(Hz) bulunur.}$$

(a) Faz sabiti Eş. (9-38)'den bulunur:

$$\beta = \frac{\omega}{u}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi 10^{10}}{2 \times 10^8}\sqrt{1 - 0.667^2}$$
$$= 74.5\pi = 234 \quad \text{(rad/m).}$$

b) Kılavuz dalga boyu Eş. (9-30)'dan

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{0.02}{0.745} = 0.0268 \quad \text{(m) olarak bulunur.}$$

c) Faz hızı Eş. (9-33)'ten

$$u_p = \frac{u}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{2 \times 10^8}{0.745} = 2.68 \times 10^8 \quad \text{(m/s) elde edilir.}$$

d) Dalga empedansı Eş. (9-39)'dan

$$(Z_{TE})_{10} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{377/\sqrt{2.25}}{0.745} = 337.4 \ (\Omega) \text{ bulunur.}$$

■ **ALIŞTIRMA 9.6** Eğer çalışma frekansı 19 (GHz) ise Örnek 9–4'teki polietilen dolu dikdörtgen dalga kılavuzunda hangi TM ve TE modları yayılabilir? Bunların kesim frekansları nedir?

CEVAP: TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11} ve TM_{11}. GHz olarak kesim frekansları 6.67, 13.3, 16.7, 17.9 ve 17.9.

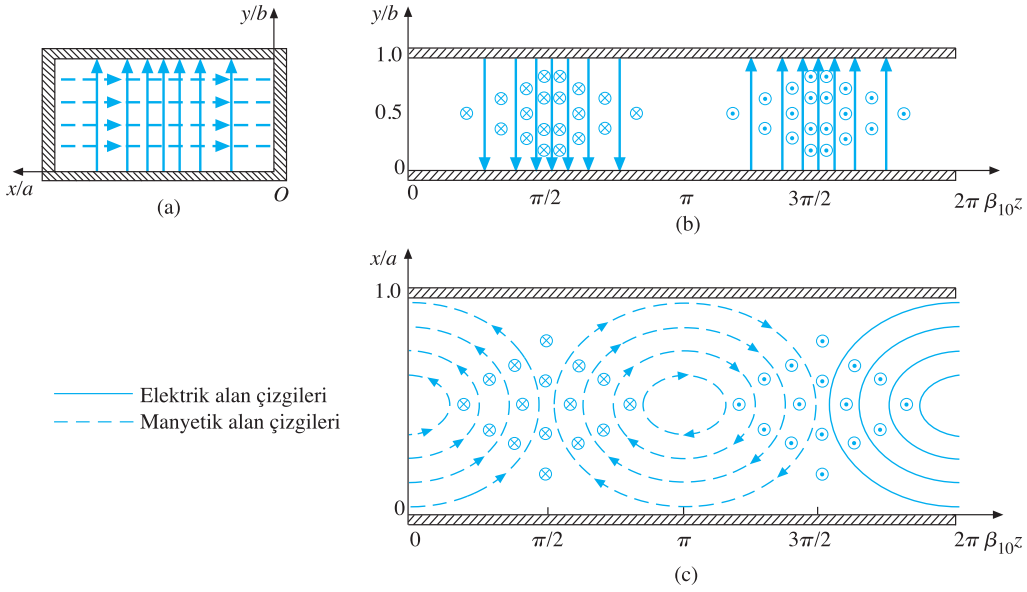
ÖRNEK 9-5

(a) Kenarları a ve b olan bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TE_{10} modunun anlık alan ifadelerini yazınız. (b) elektrik ve manyetik alan çizgilerini tipik xy–, yz– ve xz– düzlemlerinde çiziniz. (c) Kılavuz duvarlarındaki yüzey akımlarını çiziniz.

ÇÖZÜM

a) Baskın TE_{10} modunun anlık alan ifadeleri, Eş. (9-76)'dan Eş.(9-80)'e eşitliklerdeki fazör ifadeleri

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 407



ŞEKİL 9-5 Dikdörtgen dalga kılavuzunda TE_{10} modunun alan çizgileri.

$e^{j(\omega t-\beta z)}$ ile çarpıp daha sonra çarpımın reel kısmını alarak bulunur. $m = 1$ ve $n = 0$ ($h_{10} = \pi/a$) için

$$E_x(x, y, z; t) = 0, \tag{9-83}$$

$$E_y(x, y, z; t) = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10} z), \tag{9-84}$$

$$E_z(x, y, z; t) = 0, \tag{9-85}$$

$$H_x(x, y, z; t) = -\frac{\beta_{10} a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10} z), \tag{9-86}$$

$$H_y(x, y, z; t) = 0, \tag{9-87}$$

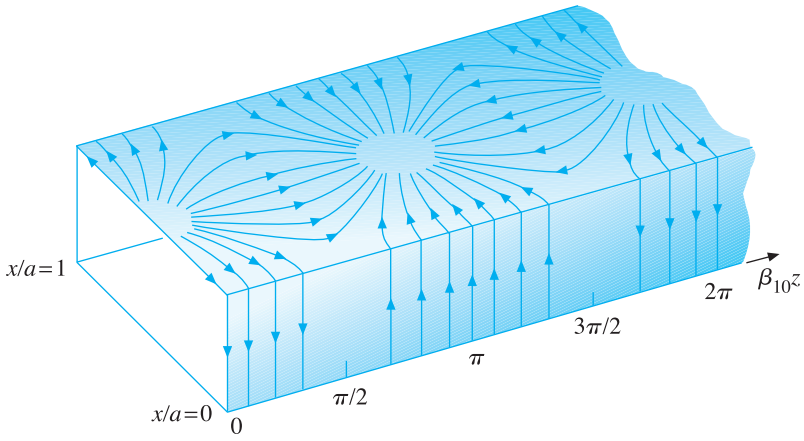
$$H_z(x, y, z; t) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10} z) \tag{9-88}$$

buluruz. Burada

$$\beta = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \text{ dır.} \tag{9-89}$$

(b) Eş. (9-83)'ten (9-88)'e eşitliklerden sadece üç alan bileşeninin, E_y, H_x ve H_z'nin sıfır olmadığını görürüz. Tipik bir xy–düzleminde, örneğin $\sin(\omega t - \beta z) = 1$ olduğunda, E_y ve H_x'in her ikisi de $\sin(\pi x/a)$ değişimine sahiptir ve Şekil 9-5(a)'da görüldüğü gibi y'den bağımsızdır. Tipik bir yz–düzleminde örneğin $x = a/2$'de veya $\sin(\pi x/a) = 1$ ve $\cos(\pi x/a) = 0$ olduğunda sadece

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 408



ŞEKİL 9-6 Dikdörtgen dalga kılavuzunda TE_{10} modunun kılavuz duvarlarındaki yüzey akımları.

E_y ve H_x vardır ve her ikisi de βz ile sinüzoidal olarak değişir. E_y ve H_x'in $t = 0$'daki grafikleri Şekil 9-5(b)'de gösterilmiştir.

xz–düzleminde bir çizim, sıfır olmayan tüm alan bileşenlerini, yani E_y, H_x ve H_z'yi gösterecektir. $t = 0$'da **H** çizgilerinin eğimi

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{\mathrm{H}} = \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)\tan\left(\frac{\pi}{a}x\right)\tan\beta z \tag{9-90}$$

denklemi ile belirlenir, ki bu da Şekil 9-5(c)'deki **H** çizgilerini çizmek için kullanılabilir. Bu çizgiler y'den bağımsızdır.

(c) Kılavuz duvarlarındaki $\mathbf{J}_s$ yüzey akım yoğunluğu, manyetik alan şiddetine Eş. (6-47b) ile aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}. \tag{9-91}$$

Burada $\mathbf{a}_n$ kılavuz yüzeyinden dışa doğru normaldir ve **H** de kılavuz duvarındaki manyetik alan şiddetidir. $t = 0$'da

$$\mathbf{J}_s(x=0) = -\mathbf{a}_y H_z(0,\, y,\, z;\, 0) = -\mathbf{a}_y H_0 \cos\beta z, \tag{9-92}$$

$$\mathbf{J}_s(x=a) = \mathbf{a}_y H_z(a,\, y,\, z;\, 0) = \mathbf{J}_s(x=0), \tag{9-93}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_s(y=0) &= \mathbf{a}_x H_z(x,\, 0,\, z;\, 0) - \mathbf{a}_z H_x(x,\, 0,\, z;\, 0)\\ &= \mathbf{a}_x H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\beta z - \mathbf{a}_z \frac{\beta}{h^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\beta z,\end{aligned} \tag{9-94}$$

$$\mathbf{J}_s(y=b) = -\mathbf{J}_s(y=0). \tag{9-95}$$

buluruz. $x = 0$ ve $y = b$ iç duvarlarındaki yüzey akımları Şekil 9-6'da gösterilmiştir.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 409

■ **ALIŞTIRMA 9.7** Dalgalar bir dalga kılavuzunda yayıldıkça duvarlarının iç yüzeylerinde yükler depolanır.

a) Üst ve alt yüzlerin orta çizgisi boyunca ve

b) yan duvarlarda TE_{10} modu için $t = 0$'da yüzey yük dağılımı ifadelerini bulunuz.

CEVAP: (a) üst yüzde $\rho_s = (\omega\mu\epsilon a/\pi)H_0 \sin\beta_{10}z$ (C/m^2), (b) 0.

ÖRNEK 9-6

Standart hava dolu dikdörtgen dalga kılavuzları Tablo 6-4'te listelenen radar bantları için tasarlanmıştır. *X*–bant uygulamaları için uygun bir dalga kılavuzunun iç boyutları a = 2.29 cm ve b = 1.02 cm'dir. Eğer dalga kılavuzunun sadece baskın TE_{10} modunda çalışması ve çalışma frekansının TE_{10} kesim frekansının en az %25 üstünde ancak bir sonraki modun kesin frekansının %95'inin altında olması istenmektedir. İzin verilen çalışma frekansı aralığı nedir?

ÇÖZÜM

$a = 2.29 \times 10^{-2}$ (m) ve $b = 1.02 \times 10^{-2}$ (m), için en düşük kesim frekansına sahip olan iki mod TE_{10} ve TE_{20}'dır. Eş. (9-68)'i kullanarak

$$(f_c)_{10} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 2.29 \times 10^{-2}} = 6.55 \times 10^9 \quad \text{(Hz)}$$

$$(f_c)_{20} = \frac{c}{a} = 13.10 \times 10^9 \quad \text{(Hz)}$$

buluruz. Böylece verilen koşullar altında izin verilen çalışma frekansı aralığı

$$1.25(f_c)_{TE_{10}} \le f \le 0.95(f_c)_{TE_{10}}$$

veya

$$8.19 \quad \text{(GHz)} \le f \le 12.45 \quad \text{(GHz)} \quad \text{bulunur.}$$

9-3.3 DİKDÖRTGEN DALGA KILAVUZLARINDA ZAYIFLAMA

Dalga kılavuzlarında zayıflamanın nedenleri

Bir dalga kılavuzunda zayıflama iki nedenden kaynaklanır: Kayıplı dielektrik ve mükemmel iletken olmayan duvarlar. Kayıplar kılavuz içindeki elektrik ve manyetik alanları değiştirir ve tam çözümlerin elde edilmesini zorlaştırır. Ancak kullanılan dalga kılavuzlarında kayıplar genellikle çok küçüktür ve yayılan modların enine alan örüntülerinin etkilenmediği kabul edilebilir. Şimdi yayılma sabitinin bir reel kısmı olacaktır ve bu kısım zayıflama sabiti olarak gözüküp güç kayıplarını temsil edecektir. Zayıflama sabitinin iki kısmı vardır:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c, \tag{9-96}$$

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 410

burada α_d dielektrikteki kayıplardan, α_c ise mükemmel iletken olmayan duvarlardaki direnil kayıplardan oluşan zayıflama sabitidir. α_d ve α_c'nin analitik olarak belirlenmesi biraz zordur. Burada bunların belirlenmesinin genel yöntemini sadece özetleyeceğiz.

α_d'yi bulmak için Kısım 7-3'ten bir kayıplı dielektriğin dalga yayılımı üzerindeki etkilerinin aşağıdaki gibi bir kompleks geçirgenlikle incelenebileceğine dikkat ederiz.

$$\begin{aligned}\epsilon_d &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ &= \epsilon' - j\frac{\sigma_d}{\omega}.\end{aligned} \tag{9-97}$$

Kayıplı dielektrikten oluşan zayıflama, dielektiğin öz iletkenliği ve frekansla artar.

Burada $(\epsilon'' / \epsilon' = \sigma_d/\omega\epsilon'$ kayıp tanjantı ve σ_d de dielektriğin eşdeğer öz iletkenliğidir. Eş. (9-24)'te ϵ yerine ϵ_d'nin kullanılması bir kompleks γ yayılma sabiti verecek, bunun da reel kısmı α_d olacaktır. α_d, σ_d ile doğru orantılıdır ve (f_c/f) oranı ile azalır.

α_c'yi bulmak için, enerjinin korunumu yasasından elde edilen Eş. (8-57)'yi kullanacağız:

$$\alpha_c = \frac{P_L(z)}{2P(z)}. \tag{9-98}$$

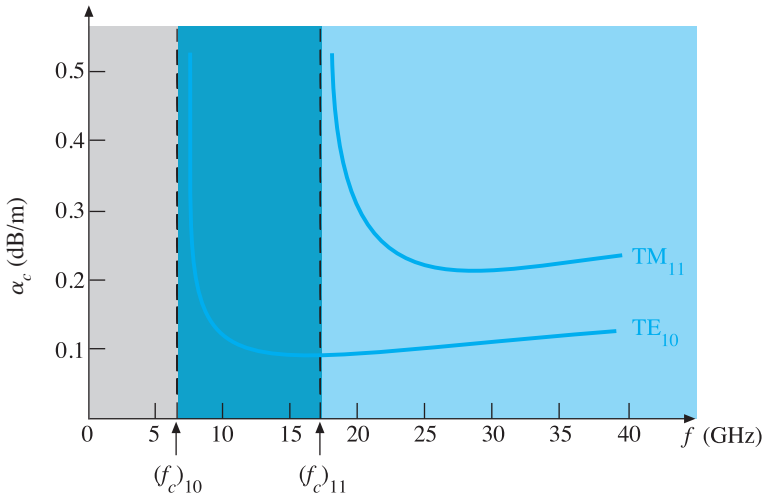
Burada $P(z)$, kılavuz boyunca yayılan gücün z'de zamanda ortalaması ve $P_L(z)$ ise birim uzunluk başına güç kaybının z'de zamanda ortalamasıdır. $P(z)$ enine elektrik ve manyetik alan şiddetlerini ve Eş. (9-79)'u kullanarak bulunabilir. $P_L(z)$'nin hesaplanabilmesi için σ_c iletkenliğinden dolayı dört kılavuz duvarındaki güç kaybı bulunmalıdır. Bu da $|J_s|^2 R_s$'nin duvarların birim uzunluğu başına iç yüzeylerde integrasyonunu gerektirir. J_s ve R_s, sırasıyla, duvarlardaki yüzey akım yoğunluğunu ve duvar iletkenlerinin öz direncini (bkz. Eş. 7-53) göstermektedir. TM_{mn} ve TE_{mn} için α_c ifadeleri farklı akım dağılımlarından dolayı farklıdır. Kılavuz boyutlarına ve (f_c/f) oranına karmaşık bir şekilde bağlıdırlar. Tüm yayılan modlarda α_c sabiti R_s ile doğru orantılıdır. R_s ise duvar öz iletkenliği σ_c'nin kare kökü ile ters orantılıdır. Eğer kılavuz duvarları sonsuz iletkenlikli ($\sigma_c \to \infty$) ise α_c sıfırdır (güç kaybı yoktur).

Sonlu duvar öz iletkenliğine bağlı zayıflama duvar öz iletkenliğinin kare kökü ile ters orantılıdır, ancak moda ve frekansa karmaşık şekilde bağlıdır.

Şekil 9-7'de 2.29 (cm) × 1.02 (cm) dikdörtgen bakır dalga kılavuzu içindeki TE_{10} ve TM_{11} modlarının α_c eğrileri, f çalışma frekansının fonksiyonu olarak çizilmiştir. Eş. (9-68)'den $(f_c)_{10}$ = 6.55 (GHz) ve $(f_c)_{11}$ = 16.10 (GHz) buluruz. Eğriler, çalışma frekansı kesim frekansına yaklaştıkça zayıflama sabitinin hızla sonsuza doğru arttığını göstermektedir. $(f > f_c)$ çalışma bölgesinde her iki eğrinin geniş bir minimumu vardır. TE_{10} modunun zayıflama sabiti her yerde TM_{11} modununkinden daha düşüktür. Bu gerçekler çalışma modu ve frekanslarının seçimi ile doğrudan ilgilidir.

Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TE_{10} modunun zayıflama sabiti en düşüktür.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 411



ŞEKİL 9-7 TE_{10} ve TM_{11} modlarının bir dikdörtgen bakır dalga kılavuzunda duvar kayıplarından dolayı zayıflaması. $a = 2.29$ (cm) ve $b = 1.02$ (cm).

ÖRNEK 9-7

Hava dolu, 5.0 (cm) × 2.5 (cm) bir dikdörtgen dalga kılavuzu 0.8(m) uzunluğundadır ve 4.5 (GHz)'de bir uyumlu yüke 1.2 (kW) taşıyacaktır. Zayıflama sabitini 0.05 (dB/m) alarak (a) gereken ortalama dalga kılavuzu giriş gücünü, (b) dalga kılavuzunun duvarlarında yitirilen toplam güç miktarını ve (c) kılavuz içindeki en büyük elektrik alan şiddeti değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a = 5.0 \times 10^{-2}$ (m), $b = 2.5\ 10^{-2}$ (m) veriliyor.

Baskın mod için: $$(f_c)_{10} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 5.0 \times 10^{-2}}$$
$$= 3 \times 10^9 \text{ (Hz)} = 3 \text{ (GHz)}.$$

Sonraki daha yüksek modlar TE_{20} ve TE_{01}'dir. Bunların her ikisinin de kesim frekansı 6 (GHz)'dir ve bu da 4.5 (GHz)'den büyük olduğundan 4.5 (GHz)'de yayılan tek mod TE_{10} modudur.

a) $\alpha = 5 \times 10^{-2}$ (dB/m) $= 5.75 \times 10^{-3}$ (Np/m).

$$P_{\text{giriş}} = P_{\text{yük}}\, e^{2\alpha\ell} = 1.2 \times 10^3 e^{2 \times (5.75 \times 10^{-3}) \times 0.8}$$
$$= 1.2 \times 10^3 e^{0.0092} = 1{,}211 \quad \text{(W)}.$$

b) Harcanan güç $= P_{\text{giriş}} - P_{\text{yük}}$
$$= 1{,}211 - 1{,}200 = 11 \quad \text{(W)}.$$

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 412

c) TE_{10} modu için enine alan bileşenlerinin fazör ifadeleri Eş. (9-84) ve (9-86)'dan

$$E_y^0 = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) x \tag{9-99}$$

ve

$$H_x^0 = -\frac{E_0}{\eta_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{9-100}$$

olarak yazılabilir. Burada $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ dır ve Eş.(9-86)'daki β_{10} $\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{1-(f_c/f)^2}$ halinde yazılmıştır (bkz. Eş. (9-38)). En büyük alanlar giriş ucunda olduğundan Eş. (7-79)'dan

$$P_{\text{giriş}} = -\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a E_y^0 H_x^0\, dx\, dy$$

$$= \frac{E_0^2 ab}{4\eta_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{9-101}^{(1)}$$

buluruz. Eş. (9-101)'deki sayıları yerine koyarsak

$$1{,}211 = \frac{E_0^2(5.0\times10^{-2})(2.5\times10^{-2})}{4\times377}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4.5}\right)^2}$$

elde ederiz ki bu da

$$E_0 = 44{,}283 \quad \text{(V/m)} \text{ verir.}$$

TEKRAR SORULARI

S.9-12 Kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için kullanılan değişkenlerin ayrılması metodunu açıklayınız.

S.9-13 Bir dalga kılavuzunun *baskın modu* ile ne anlatılmak istenir? Bir paralel plaka dalga kılavuzunun baskın modu nedir?

S.9-14 Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TM dalgalarındaki E_z'nin sağlaması gereken sınır koşullarını belirtiniz.

S.9-15 Bir dikdörtgen dalga kılavuzundaki tüm TM modlarının arasındaki en düşük kesim frekanslısı hangisidir?

S.9-16 Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TE dalgalarındaki H_z'nin sağlaması gereken sınır koşullarını belirtiniz.

---

(1) Eş. (9-79)'dan

$$P_{\text{giriş}} = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \mathcal{R}e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{a}_z\, dx\, dy$$

bulunur. Burada $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_y^0$ ve $\mathbf{H} = \mathbf{a}_x H_x^0 + \mathbf{a}_z H_z^0$'dir. Buradan $\mathcal{R}e(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = -\mathbf{a}_z E_y^0 H_x^0$ olur çünkü H_z^0 bileşeni E_y^0'dan 90° kayık fazlıdır ve çarpımlarının reel kısmı sıfırdır.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 413

S.9-17 Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda (a) $a > b$ ise, (b) $a < b$ ise ve (c) $a = b$ ise hangi mod baskın moddur?

S.9-18 Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda eğer $a > b$ ise TE_{10} modunun kesim dalga boyu nedir?

S.9-19 Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TE_{10} modunun sıfır olmayan alan bileşenleri hangileridir?

S.9-20 Dikdörtgen dalga kılavuzlarında TE_{10} modunun özel önemi nedir?

S.9-21 Dalga kılavuzları VHF ve daha düşük frekans bantlarında niçin kullanılmamaktadır?

■ **ALIŞTIRMA 9.7** Hava dolu, $a = 2.25$ (cm), $b = 1.00$(cm) boyutlu dikdörtgen dalga kılavuzunda 10-(GHz)de TE_{10} modu ile kırılma olmaksızın iletilebilecek en büyük ortalama gücü bulunuz.

NOTLAR

1. Bir dalga kılavuzunda çift sonsuz sayıda TM ve TE modu vardır.
2. Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda TM ve TE modlarının öz değerleri ayrık reel sayılardır.
3. TM_{mn} ve TE_{mn} modlarının kesim frekansları aynıdır.
4. Kesim frekansları dielektrik ortamın $\sqrt{\epsilon_r}$ parametresi ile ters orantılıdır.
5. Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda en düşük mertebeli TM modu TM_{11}'dir.
6. $a > b$ olan bir dikdörtgen dalga kılavuzunda baskın mod, kesim dalga boyu $2a$ olan TE_{10} modudur.
7. Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda duvar kayıplarından dolayı en küçük zayıflama sabitli mod TE_{10} modudur.
8. Bir dalga kılavuzunda duvar kayıplarından kaynaklanan zayıflama sabiti duvar öz iletkenliğinin kare kökü ile ters orantılıdır.

9-4 DİĞER DALGA KILAVUZU TİPLERİ

Kısım 9-2'den, düzgün dalga kılavuzları boyunca dalga davranışını inceleme yönteminin, kılavuzun kesit düzleminde homojen vektör Helmholtz denkleminin çözümü ile başladığını hatırlayalım. Tam çözüm, kesitin şekline ve boyutlarına bağlıdır. Bu yöntemi izleyerek dikdörtgen dalga kılavuzlarının çalışma özelliklerini Kısım 9-3'te elde etmiştik. Bu kısımda, uygulama alanları bulan diğer bazı dalga kılavuzu tiplerini kısaca tartışacağız.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 414

Önce, gerçekte yuvarlak metal borular olan boş dairesel dalga kılavuzlarından bahsedeceğiz. Bir dairesel dalga kılavuzu boyunca dalga davranışının tam analizi, kılavuzun dairesel kesitinde (r, ϕ) kutupsal koordinatlarında iki boyutlu Helmholtz denkleminin çözümünü içerir. Bu da, Bessel diferensiyel denklemi ve Bessel fonksiyonları hakkında bilgi gerektirir. Bu kitapta böyle bir çözümü vermeyeceğiz ancak dikdörtgen dalga kılavuzlarında olduğu gibi değişik kesim frekanslı TM ve TE modlarının var olduğunu söylemekle yetineceğiz.

İletken duvarları olmayan dielektrik tabaka ve çubuklar da, temelde dielektrik ortama sınırlanmış TM ve TE kılavuzlanmış dalga modlarını destekleyebilirler. Kılavuz ortam dışında alanlar üstel olarak zayıflar. Bunlar parazitik alanlardır ve komşu devreler arasında girişim problemlerine neden olabilirler.

Optik fiberler optik frekanslarda dalga kılavuzlarıdır. Bunlar esnektir ve çok düşük zayıflama sabitleri ve çok geniş bantları vardır.

Optik frekanslarda özel önemi olan bir dalga kılavuzu, bir dielektrik malzemenin, ki bu tipik olarak camdır, çok ince bir fiberden ve biraz daha düşük kırılma indisli bir kaplama tabakasından oluşur. Böyle optik dalga kılavuzlarına genellikle ***optik fiber*** denir. Kaplanmış bir optik fiber Şekil 7-18'de gösterilmiştir. Bir optik fiberin çalışması, Şekil 7-13 için Örnek 7-10'da yapıldığı gibi tam iç yansıma ile açıklanabilir. Optik fiberlerin çekirdek çapları çoğunlukla 25 ile 100 (μm) aralığındadır ve kızıl ötesi frekanslarda 1.4 (dB/km) kadar düşük zayıflama sabitine ulaşılabilir. Boş metal dalga kılavuzlarının 30 (dB/km) ve sıradan eş eksenli kabloların yüzlerce dB/km zayıflama sabitleri ile karşılaştırıldığında bu düşük zayıflama özelliği optik fiberler için çok büyük bir avantajdır. Dahası, kızılötesi frekanslarda kullanılabilir bant genişliği öyle büyüktür ki, bir tek fiber-optik devre 20 milyon telefon kanalını veya 20 bin televizyon kanalını taşıyabilir.

Optik fiberler saç teli kadar ince ve esnektir. Bunların binlercesi biraraya getirilerek bir endoskopun önemli bir kısmını oluştururlar. Endoskop, bronşlar, bağırsak, mesane vb. içi boş insan organlarının içini incelemek için bir tıp cihazıdır. Görüntüler optik dalga kılavuzları boyunca etkin bir şekilde iletilir.

9-5 BOŞLUK REZONATÖRLERİ

Boşluk rezonatörleri kapalı metal kutulardır.

Daha önce, mikrodalga frekanslarında R, L ve C gibi toplu devre elemanları yapmanın zor olduğunu ve parazitik alanların önemli hale geldiğini belirtmiştik. Çalışma dalga boyu ile karşılaştırılabilir boyutlu devreler verimli yayıcılar haline gelir ve diğer devreler ve sistemlerle etkileşir. Ayrıca geleneksel tel devreler, hem ışımadan kaynaklanan enerji kaybından hem de deri etkisinden dolayı yüksek direnç-

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 415

Kutular elektromanyetik enerjiyi sınırlar. Böylece ışıma ve yüksek direnç etkileri yok olur ve çok yüksek *Q* elde edilir.

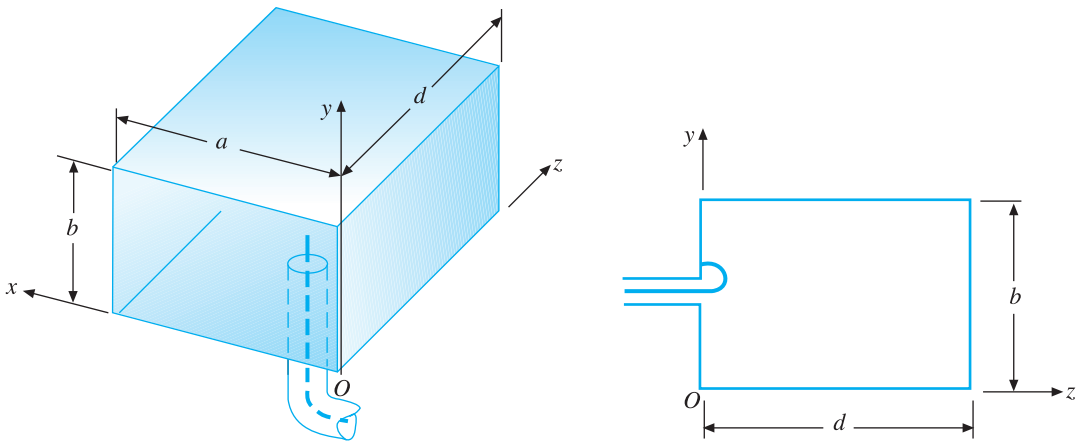
lere sahip olurlar. UHF ve daha yüksek frekanslarda bir rezonans devresi yapmak için iletken duvarlarla sınırlı bir boşluk kullanılabilir. Böyle ekranlanmış bir boşluk, elektromanyetik alanları içeriye hapseder ve akım akışı için büyük alanlar sağlar. Böylelikle ışıma ve yüksek direnç durumları yok olur. Bu yapıların doğal rezonans frekansları ve çok yüksek Q'ları (kalite faktörü) vardır ve ***boşluk rezonatörü*** olarak adlandırılırlar.

9-5.1 DİKDÖRTGEN BOŞLUK REZONATÖRLERİ

Her iki ucu iletken duvarla kapalı bir dikdörtgen dalga kılavuzu düşünelim. Boşluğun iç boyutları Şekil 9-8'de gösterildiği gibi a, b ve d'dir. Şu an için şeklin prob-besleme kısmını ihmal edelim. Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda hem TM hem de TE modlar var olabildiğinden, bir dikdörtgen rezonatörde de TM ve TE modların olmasını bekleriz. Ancak bir rezonatörde TM ve TE gösterimleri *tek değildir* çünkü x, y ve z yönünü "yayılma yönü" olarak seçebiliriz. Bir başka deyişle tek "boylam yönü" yoktur. Örneğin z–eksenine göre bir TE modu, y–eksenine göre bir TM modu olabilir.

Amaçlarımız için *z–eksenini referans* "yayılma yönü" *olarak seçeceğiz*. Gerçekte $z = 0$ ve $z = d$'deki iletken sınır duvarları çoklu yansımalara neden olur ve duran dalgalar oluşur. Bir sınırlı boşlukta yayılan bir dalga yoktur. Bir boşluk rezonatöründeki TM veya TE duran dalgalarını göstermek için üç sembollü (***mnp***) alt indisine ihtiyaç vardır.

ŞEKİL 9-8 Boşluk modlarının bir eş eksenli hatla beslenmesi.



(a) Prob besleme

(b) Döngü besleme

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 416

(A) TM_{mnp} Modları

Bir dalga kılavuzundaki TM_{mn} modlarının, tek boyuna alan bileşeninin fazör ifadesi $E_z(x, y, z) = E_z^0(z, y)e^{-\gamma z}$ Eş. (9-52) ve (9-65)'te verilmiştir. $+z$ yönünde ilerleyen bir dalganın boyuna değişiminin $e^{-\gamma z}$ veya $e^{-j\beta z}$ çarpanı ile açıklandığına dikkat ediniz. Bu dalga $z = d$'deki sınır duvarından yansıyacaktır ve yansıyan dalga $-z$ yönünde gittiğinden $e^{j\beta z}$ çarpanı içerecektir. $e^{-j\beta z}$ içeren bir terimle aynı genlikli $e^{j\beta z}$ içeren bir terimin üst üste binmesi, $\sin\beta z$ veya $\cos\beta z$ tipinde bir duran dalga verir. Hangisi olmalıdır? Bu sorunun cevabı ilgilendiğimiz alan bileşenine bağlıdır.

$E_y(x, y, z)$ enine bileşenini düşününüz. İletken yüzeylerdeki sınır koşulları bunun $z = 0$ ve $z = d$'de sıfır olmasını gerektirir. Bunun anlamı (1) z–bağımlılığının $\sin\beta z$ tipinde olması ve (2) $\beta = p\pi/d$ olması gerektiğidir. Aynı tartışma, diğer enine elektrik alan bileşeni $E_x(x, y, z)$ için de geçerlidir. Enine E_x^0, E_y^0 bileşenleri ile E_z^0 arasındaki ilişki Eş. (9-13) ve (9-14)'te verilmiştir ve bunlarda TM modu için H_z^0 sıfırdır. Eş. (9-13) ve (9-14)'teki $(-\gamma)$ çarpanının gözükmesi z'ye göre türev almanın sonucudur. Böylece, eğer $E_y(x, y, z)$ $\sin\beta z$'ye bağlı ise, $(-\gamma)$ çarpanını içeren Eş. (9-14)'ten $E_z(x, y, z)$'nin $\cos\beta z$ ile değişmesi gerektiği sonucuna ulaşırız. Böylelikle TM_{mnp} modu için

TM_{mnp} modlarında $m \neq 0$ ve $n \neq 0$

$$E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \tag{9-102}$$

yazılır. Tüm diğer alan bileşenleri Eş. (9-11) - (9-14)'te bu E_z'yi kullanarak ve $(-\gamma)$ ile çarpımın z'ye göre kısmi türev alma olduğuna dikkat ederek bulunabilir.

Eş. (9-67)'de $\beta = p\pi/d$ yerine konursa, TM_{mnp} modlarının rezonans frekansı

Boşluk rezonatörünün rezonans frekansı

$$f_{mnp} = \frac{u}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} \quad \text{(Hz)} \tag{9-103}$$

olarak elde edilir, burada $(u = 1/\sqrt{\mu\epsilon})$'dur. Eş. (9-103), bir modun mertebesi arttıkça rezonans frekansının da arttığını açıkça göstermektedir.

(B) TE_{mnp} Modları

TE_{mnp} $(E_z=0)$ modlarının duran dalga alan bileşenlerinin fazör ifadeleri Eş. (9-76)-(9-80) kullanılarak yazılabilir. TM_{mnp} modları için kullandığımız kuralların aynısını kullanacağız, yani (1) enine (teğet)

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 417

elektrik alan bileşenleri $z = 0$ ve $z = d$'de sıfır olmalıdır ve (2) γ çarpanı z'ye göre türevin negatifini göstermektedir. İlk kural $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ ve $H_z(x, y, z)$'de $\sin(p\pi z/d)$ çarpanının olması gerektiğini verir. İkinci kural ise $H_x(x, y, z)$ ve $H_y(x, y, z)$'de $\cos(p\pi z/d)$ çarpanını verir. Böylece

TE_{mnp} modlarında $p \neq 0$'dır. m ve n beraber sıfır olamaz.

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$$
$$= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \qquad (9\text{-}104)$$

yazabiliriz. Tüm diğer alan bileşenleri, H_z bileşeni Eş. (9-11)-(9-14)'te kullanılarak ve $(-\gamma)$ ile çarpımın z'ye göre kısmi türev gösterdiği dikkate alınarak yazılabilir.

Yoz modlar

Rezonans frekansı f_{mnp}'nin ifadesi TM_{mnp} modları için Eş. (9-103)'te verilen ile aynıdır. Aynı rezonans frekansına sahip farklı modlara ***yoz modlar*** denir. Böylece eğer mod indislerinin hiçbiri sıfır değilse TM_{mnp} ve TE_{mnp} modları her zaman yozdur. Bir boşluk rezonatöründe en düşük rezonans frekanslı moda ***baskın mod*** denir (bkz. Örnek 9-8).

Bir boşluk rezonatörü küçük bir probla veya döngüyle beslenebilir.

Bir boşluk rezonatöründe (veya bir dalga kılavuzunda) özel bir mod, bir eş eksenli hattan bir küçük probla veya bir döngü antenle beslenebilir. Şekil 9-8(a) bir eş eksenli kablonun iç iletkeninin ucu olan bir probu göstermektedir. Bu prob, istenen modun elektrik alanının maksimum olduğu bir yerde boşluğa girmektedir. Gerçekte prob elektromanyetik enerjiyi rezonatörün içine eşleyen bir antendir. Seçenek olarak bir boşluk rezonatörü, manyetik akının maksimum olması gereken yere bir döngü anten yerleştirerek de beslenebilir. Şekil 9-8(b) böyle bir durumu göstermektedir. Tabii ki, eş eksenli hattaki kaynak frekansı, boşlukta istenen modun rezonans frekansı ile aynı olmalıdır.

Örnek olarak $a \times b \times d$ dikdörtgen boşluğunda TE_{101} modu için sadece aşağıdaki üç alan bileşeni sıfır değildir:

$$E_y = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right), \qquad (9\text{-}105)$$

$$H_x = -\frac{a}{d} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right), \qquad (9\text{-}106)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right). \qquad (9\text{-}107)$$

Bu mod, üst veya alt yüzde E_y'nin maksimum olduğu merkez bölgeye Şekil 9-8(a)'da gösterildiği gibi bir prob sokularak veya maksimum H_x eşlemek için ön veya arka yüzün içine bir döngü yerleştirilerek beslenebilir. Probun veya döngünün en iyi yerleşimi, rezonatörün de bir parçası olduğu mikrodalga devrenin empedans uyumlandırma gerekleriyle belirlenir.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 418

Bir boşluk rezonatörü bir yarıktan da beslenebilir.

Bir dalga kılavuzundan bir boşluk rezonatörüne enerji eşlemenin yaygın bir yolu, boşluğun duvarında uygun bir yerde bir delik ya da yarık açılmasıdır. Dalga kılavuzunda delikteki alanın rezonatörde istenen modu destekleyecek bir alan bileşeni olmalıdır.

ÖRNEK 9-8

Hava dolu bir dikdörtgen boşluk rezonatöründe, a, b ve d sırasıyla, x, y ve z yönündeki boyutlar olmak üzere (a) $a > b > d$, (b) $a > d > b$ ve (c) $a = b = d$ durumlarında baskın modu ve frekansını bulunuz.

ÇÖZÜM

Genelde olduğu gibi z eksenini referans "yayılma yönü" olarak alırız. TM_{mnp} modları için Eş. (9-102) m ve n'nin sıfır olamayacağını ama p'nin olabileceğini gösterir. TE_{mnp} modları için Eş. (9-104) eğer p sıfır değilse, m ve n'nin her ikisi sıfır olsa dahi H_z'nin sıfır olmadığını belirtir. Ancak eğer H_z, x ve y'den bağımsız ise Eş. (9-11)-(9-14)'e göre hiçbir enine alan bileşeni olmayacaktır. Buradan, TE_{mnp} modlarında p sıfır olamaz ancak m veya n (her ikisi birden değil) sıfır olabilir.

Bir dikdörtgen boşluk rezonatöründe en düşük mertebeli modlar

$$TM_{110}, \quad TE_{011} \quad \text{ve } TE_{101}$$

dir. TM ve TE modları için rezonans frekansı Eş. (9-103) ile verilmiştir.

a) $a > b > d$ için en düşük rezonans frekansı

$$f_{110} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \tag{9-108}$$

olur. Burada c ışığın boş uzaydaki hızıdır. Böylece TM_{110} baskın moddur.

b) $a > d > b$ için en düşük rezonans frekansı

$$f_{101} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}} \tag{9-109}$$

ve TE_{101} baskın moddur.

c) $a = b = d$ için tüm en düşük mertebeli modlar (TM_{110}, TE_{011} ve TE_{101}) aynı alan örüntülerine sahiptir. Bu yoz modların rezonans frekansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_{110} = \frac{c}{\sqrt{2}a}. \tag{9-110}$$

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 419

■ **ALIŞTIRMA 9.9** Hava dolu 2.5 (cm) × 1.5 (cm) × 5.0 (cm) boyutlarındaki bir dikdörtgen boşluk rezonatöründe en düşük dört rezonans frekansını bulunuz ve modlarını belirleyiniz.

CEVAP: 6.71, 8.49, 10.44, 11.66 (GHz).

9-5.2 BİR BOŞLUK REZONATÖRÜNÜN KALİTE FAKTÖRÜ

Bir boşluk rezonatörü, herhangi bir mod var olduğunda elektrik ve manyetik alanlarda enerji depolar. Herhangi bir boşluk rezonatöründe duvarların öz iletkenliği sonludur (sıfır olmayan yüzey direnci) ve sonuçtaki güç kaybı depolanan enerjinin azalmasına neden olur. Bir rezonatörün ***kalite faktörü*** Q, herhangi bir rezonans devresinde olduğu gibi, rezonatörün bant genişliğinin bir ölçüsüdür ve

Bir rezonatör için Q tanımı

$$Q = 2\pi \frac{\text{Rezonans frekansında zamanda ortalama depolanan enerji}}{\text{Bu frekansta bir periyotta harcanan enerji}} \quad \text{(Birimsiz)} \tag{9-111}$$

olarak tanımlanır. W bir boşluk rezonatöründeki enerjinin zamanda ortalaması olsun. O halde

$$W = W_e + W_m \tag{9-112}$$

yazarız. Burada W_e ve W_m, sırasıyla, elektrik ve manyetik alanlarda depolanan enerjiyi gösterir. Eğer P_L boşlukta harcanan gücün zamanda ortalaması ise o halde bir periyotta harcanan enerji, P_L'nin frekansa bölümüdür ve Eş. (9-111)

Bir boşluk rezonatörünün Q formülü

$$Q = \frac{\omega W}{P_L} \quad \text{(Birimsiz)} \tag{9-113}$$

halinde yazılabilir. Bir boşluğun, bir rezonans frekansında Q'sunu belirlerken kayıpların, kayıp olmadığı durumdaki alan örüntülerinin kullanımına izin verecek kadar küçük olduğunu kabul etmek çok yaygındır.

Şimdi $a \times b \times d$ boyutlu boşluğun, sıfır olmayan üç alan bileşeni bulunan TE_{101} modu için Q'sunu hesaplayacağız. Depolanan enerjinin zamanda ortalaması

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{4} \int |E_y|^2 \, dv \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_{101}^2 \mu_0^2 a^2}{4\pi^2} H_0^2 \int_0^d \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{d}z\right) dx\, dy\, dz \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_{101}^2 \mu_0^2 a^2}{4\pi^2} H_0^2 \left(\frac{a}{2}\right) b \left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{4} \epsilon_0 \mu_0^2 a^3 b d f_{101}^2 H_0^2 \end{aligned} \tag{9-114}$$

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 420

bulunur. Depolanan manyetik enerjinin zamanda ortalaması ise

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{\mu_0}{4}\int \{|H_x|^2 + |H_z|^2\}\, dv \\ &= \frac{\mu_0}{4} H_0^2 \int_0^d \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{a^2}{d^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{d}z\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)\right\} dx\, dy\, dz \\ &= \frac{\mu_0}{4} H_0^2 \left\{ \frac{a^2}{d^2}\left(\frac{a}{2}\right) b\left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right) b\left(\frac{d}{2}\right)\right\} = \frac{\mu_0}{16} abd\left(\frac{a^2}{d^2}+1\right) H_0^2 \end{aligned} \tag{9-115}$$

olarak elde edilir. Eş. (9-103)'ten TE_{101} modunun rezonans frekansı

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}} \tag{9-116}$$

bulunur. Eş. (9-116)'daki f_{101} Eş. (9-114)'te yerine konursa *rezonans frekansında* $W_e = W_m$ olduğu ispatlanır. Böylece

$$W = 2W_e = 2W_m = \frac{\mu_0 H_0^2}{8} abd\left(\frac{a^2}{d^2} + 1\right) \tag{9-117}$$

bulunur. P_L'yi bulmak için birim alan başına güç kaybının

$$\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}|J_s|^2 R_s = \tfrac{1}{2}|H_t|^2 R_s \tag{9-118}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Burada $|H_t|$ boşluk duvarlarında manyetik alanın teğet bileşeninin büyüklüğüdür. $z = d$ (arka) duvarındaki güç kaybı, $z = 0$ (ön) duvardaki ile aynıdır. Benzer şekilde $x = a$ (sol) duvardaki güç kaybı, $x = 0$ (sağ) duvardaki ile ve $y = b$ (üst) duvardaki güç kaybı da $y = 0$ (alt) duvardaki ile aynıdır. Böylece

$$\begin{aligned} P_L &= \oint \mathscr{P}_{av}\, ds = R_s \left\{ \int_0^b \int_0^a |H_x(z=0)|^2\, dx\, dy + \int_0^d \int_0^b |H_z(x=0)|^2\, dy\, dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^d \int_0^a |H_x|^2\, dx\, dz + \int_0^d \int_0^a |H_z|^2\, dx\, dz \right\} \\ &= \frac{R_s H_0^2}{2}\left\{ \frac{a^2}{d}\left(\frac{b}{d}+\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{9-119}$$

yazabiliriz. Eş. (9-117) ve (9-119)'u Eş. (9-113)'te kullanırsak

$$Q_{101} = \frac{\pi f_{101}\mu_0 abd(a^2+d^2)}{R_s[2b(a^3+d^3)+ad(a^2+d^2)]} \quad (TE_{101}\text{ modu}) \tag{9-120}$$

elde ederiz. Buradaki f_{101} Eş. (9-116)'da verilmiştir.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 421

■ **ALIŞTIRMA 9.10**

Kayıplı bir boşlukta depolanan W toplam enerjisi üstel olarak $e^{-2\alpha t}$ ile azalır. W'nun zamanla değişim hızı boşluk duvarlarında harcanan P_L gücüne eşittir. α zayıflama sabitinin boşluk Q'suna $\alpha = \omega/2Q$ formülü ile bağlı olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 9-9

a) Hava ile dolu kübik bir boşluğun 10 (GHz) baskın rezonans frekansı olması için boyutu ne olmalıdır?

b) O frekansta Q'yu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Kübik bir boşlukta $a = b = d$'dir. Örnek 9-8'in (c) şıkkından TM_{110}, TE_{011} ve TE_{101}'in aynı alan örüntülerine sahip yoz baskın modlar olduğunu ve

$$f_{101} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2}a} = 10^{10} \quad \text{(Hz)}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$a = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2} \times 10^{10}} = 2.12 \times 10^{-2} \quad \text{(m)}$$

$$= 21.2 \quad \text{(mm) bulunur.}$$

b) Q'nun Eş. (9-120)'deki ifadesi bir kübik boşluk için

$$Q_{101} = \frac{\pi f_{101} \mu_0 a}{3R_s} = \frac{a}{3}\sqrt{\pi f_{101} \mu_0 \sigma} \tag{9-121}$$

haline indirgenir. Bakır için $\sigma = 5.80 \times 10^7$(S/m) olduğundan

$$Q_{101} = \left(\frac{2.12}{3} \times 10^{-2}\right)\sqrt{\pi 10^{10}(4\pi 10^{-7})(5.80 \times 10^7)} = 10{,}693$$

buluruz.

Bir boşluk rezonatörünün Q'su, toplu L–C rezonans devrelerinden elde edilebileceklerinden çok yüksektir. Ancak pratikte elde edilen değer bulunandan biraz daha düşük olur. Bunun nedeni besleme bağlantılarındaki kayıplar ve yüzey bozukluklarıdır.

Yüksek Q'lu bir boşluk rezonatörü çok dar bantlıdır.

Devre teorisinden bildiğimize göre bir rezonans devresindeki çıkış değişkeni (voltaj veya akım) rezonans frekansında maksimumdur. Ancak yüksek Q'lu bir devrede frekans, rezonans frekansının her iki yönünde saparsa bu değişken hızla azalır. Böylece yüksek Q'lu bir boşluk rezonatörü çok seçicidir ve çok dar bantlıdır.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 422

ALIŞTIRMA 9.11

Örnek 9-9'daki kübik boşluğun pirinçten yapıldığı ve bir kayıpsız dielektrik malzeme ($\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$) ile doldurulduğunu kabul ederek

a) en düşük rezonans frekansını ve

b) Q kalite faktörünü hesaplayınız.

TEKRAR SORULARI

S.9-22 Boşluk rezonatörleri nedir? En çok aranan özellikleri nedir?

S.9-23 Bir boşluk rezonatöründe ilerleyen dalgalar mı, duran dalgalar mı vardır? Bir dalga kılavuzundaki dalgalardan fark nedir?

S.9-24 z-ekseni referansıyla, bir dikdörtgen boşluk rezonatöründe TM_{011}, TM_{101}, TM_{110}, TE_{011}, TE_{101} ve TE_{110} modlarından hangileri var olamaz? Açıklayınız.

S.9-25 *Yoz modlarla* ne anlatılmak istenir?

S.9-26 Bir rezonatörün kalite faktörü Q'yu tanımlayınız.

S.9-27 Boşluk rezonatörlerinin Q formülünün çıkarımında hangi temel kabullenme yapılmıştır?

S.9-28 Bir boşluk rezonatörünün ölçülen Q'sunun hesaplanandan niçin daha küçük olduğunu açıklayınız.

NOTLAR

1. Bir dikdörtgen rezonatördeki TM_{mnp} ve TE_{mnp} modları (m, n, $p \neq 0$) aynı rezonans frekanslarına sahiptir.
2. m, n ve p alt indisleri, sırasıyla, x, y ve z yönlerindeki alan değişimlerindeki yarım dalga boyu sayısını gösterir.
3. Bir boşluk rezonatörünün Q'su duvar öz iletkenliğinin kare kökü ile doğru orantılıdır.

ÖZET

Dalga kılavuzları ve boşluk rezonatörleri ile ilgili bu bölümde,

- homojen vektör Helmholtz denklemlerini çözerek düzgün kılavuz yapılar boyunca dalga davranışını inceleme yöntemini tartıştık.
- TM ve TE dalgaların genel özelliklerini inceledik.
- Dalga kılavuzlarının kesim ve yüksek–geçiren özelliklerini açıkladık.
- Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda baskın TE_{10} modunun alan ve akım dağılımlarını inceledik.

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 423

- Bir dikdörtgen dalga kılavuzunda yayılan modların zayıflama sabitini belirleme yöntemini tartıştık ve tipik α_c eğrilerini frekansın fonksiyonu olarak gösterdik.
- Dikdörtgen boşluk rezonatörlerinin dalga modlarını açıkladık, rezonans frekanslarını belirledik ve yüksek Q özelliklerini gördük.

PROBLEMLER

P.9-1 (a) Hava dolu bir dalga kılavuzunda TM ve TE modları için dalga empedansını (f/f_c) oranına karşı çiziniz. (b) Z_{TM} ve Z_{TE} değerlerini $f = 1.1f_c$ ve $2.2f_c$'de karşılaştırınız.

P.9-2 Düzgün dalga kılavuzlarında Kısım 9-2'deki uygun bağıntıları kullanarak,

a) u_g/u ve f_c/f'yi ilişkilendiren evrensel diyagramın birim yarıçaplı bir çeyrek çember olduğunu ispat ediniz.

b) λ_g/λ'nın f_c/f'ye göre evrensel grafiğini çiziniz.

c) $f = 1.25\,f_c$'de u_g/u, λ_g/λ ve u_p/u'yu bulunuz.

P.9-3 Şekil 9-3'teki paralel plaka dalga kılavuzunda f frekanslı bir TE dalgasının z–yönünde yollandığını kabul edelim. Plakalar arasındaki ortamın parametreleri ϵ ve μ'dur. (a) $H_z^0(y)$'nin fazör ifadesini bulunuz. (b) TE_1 modunun kesim frekansını bulunuz. (c) TE_1 modunun tüm alan bileşenlerinin anlık ifadelerini yazınız.

P.9-4 Şekil 9-3'teki hava dolu paralel-plaka dalga kılavuzu için,

a) TE modlarının tüm alan bileşenlerinin fazör ifadelerini elde ediniz.

b) TE_n modunun kesim frekansını belirleyiniz.

a) İletken plakalardaki yüzey akım yoğunluklarını bulunuz. İki plakadaki akım aynı mı, ters yönde mi akar?

P.9-5 Kılavuz dalga boyu ve empedanslar, dalga kılavuzunun yarıklı bir kısmı boyunca dedektör takılmış bir probu hareket ettirerek ölçülebilir. Kayıpsız ve boş 2.50 (cm) × 1.25 (cm) boyutlarında bir dikdörtgen dalga kılavuzunun yük tarafı bir kısa devre düzlemi ile sonlandırılıyor. Bu durumda TE_{10} modunda ardışık minimumlar arası 2.65 (cm)'dir. Kısa devre düzlem, bir yükle değiştirildiğinde SWR'nin 2.0 olduğu ve voltaj minimumlarının yüke doğru 0.80 (cm) kaydığı bulunmuştur. (a) Çalışma frekansını, (b) yük empedansını ve (c) 10 (W) giriş empedansı için yüke aktarılan gücü bulunuz.

P.9-6 TM_{11} modunda, f frekansında çalışan, hava dolu $a \times b$ boyutlu dikdörtgen dalga kılavuzu için (a) tüm alan bileşenlerinin fazör ifadelerini yazınız ve (b) f_c, λ_c ve λ_g'yi bulunuz.

P.9-7 Hava dolu, standart S-bant bir dikdörtgen dalga kılavuzu, $a = 7.21$ (cm) ve $b = 3.40$ (cm) boyutlarına sahiptir. Aşağıdaki

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 424

dalga boylarına sahip hangi mod tipleri kullanılabilir?

a) $\lambda = 10$ (cm) ve b) $\lambda = 5$ (cm).

P.9-8 Bir $a \times b$ dikdörtgen dalga kılavuzundaki TE_{01}, TE_{10}, TE_{11}, TE_{02}, TE_{20}, TM_{11}, TM_{12}, ve TM_{22} modlarının kesim frekanslarını (a) $a = 2b$ ve (b) $a = b$ durumlarında baskın mod kesim frekansı cinsinden hesaplayıp, sıralayınız.

P.9-9 Hava dolu, $a \times b$ ($b < a < 2b$) boyutlu dikdörtgen dalga kılavuzu 3 (GHz)'de baskın modda çalışacak şekilde yapılmıştır. Çalışma frekansının baskın modun kesim frekansından en az %20 yüksek, bir sonraki modun kesim frekansından da en az % 20 düşük olmasını istiyoruz.

a) a ve b boyutları için tipik bir tasarım yapınız.

b) Tasarımınız için β, u_p, λ_g ve dalga empedansını çalışma frekansınızda hesaplayınız.

P.9-10 7.5 (GHz)'de çalışan bir 2.5 (cm) × 1.5 (cm) dikdörtgen dalga kılavuzu için aşağıdaki durumlarda $\beta, u_p, u_g, \lambda_g$ ve $Z_{TE_{10}}$ değerlerini hesaplayıp karşılaştırınız:

a) Dalga kılauzu boşsa ve

b) dalga kılavuzu $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$ ve $\sigma = 0$ ile tanımlanan bir dielektrik ortam ile doluysa.

P.9-11 Eş. (9-65)'ten başlayarak,

a) $E_x^0(x, y)$, $E_y^0(x, y)$, $H_x^0(x, y)$ ve $H_y^0(x, y)$ ifadelerini TM_{11} modu için elde ediniz.

b) Bir $a \times b$ dalga kılavuzunda iletilen ortalama güç P_{av} için bir formül elde ediniz.

P.9-12 Hava dolu, 5.0 (cm) × 2.5 (cm) bir dikdörtgen dalga kılavuzunda bir TM modunun anlık E_z ifadesi

$$E_z = E_0 \sin(100\pi x) \sin(100\pi y) \cos(2\pi 10^{10} t - \beta z)$$ veriliyor.

a) Çalışma modu nedir?

b) f_c, β, Z_{TM} ve λ_g'yi hesaplayınız.

P.9-13 Hava dolu, 2.5 (cm) × 2.5 (cm), kare dalga kılavuzunda bir TE modunun anlık H_z ifadesi

$$H_z = 0.3 \cos(80\pi y) \cos(\omega t - 280z)$$ (A/m) veriliyor.

a) Çalışma modu nedir?

b) f_c, f, Z_{TE} ve λ_g'yi hesaplayınız.

c) Kayıpları ihmal edilebilir kabul ederek, dalga kılavuzundaki ortalama güç akışını hesaplayınız.

P.9-14 Bir dalga kılavuzunda yayılan modların kayıplı dielektrikten kaynaklanan zayıflaması, Eş. (9-97)'de gösterildiği gibi bir ϵ_d kompleks geçirgenlik ve σ_d eşdeğer öz iletkenliği ile incelenebilir. (a) Eş. (9-97)'yi Eş. (9-24)'te yerine koyarak kayıplı dielektrikten kaynaklanan α_d zayıflama sabiti için f_c/f oranı cinsinden bir formül elde ediniz. (b) 4.0 (GHz)'de çalışan, 2.50 cm × 1.25 (cm) boyutlu bir dik-

+09 2_+09 2.qxp 5.06.2024 14:33 Page 425

dörtgen dalga kılavuzu için α_d'yi hesaplayınız. Dielektrik ortamın dielektrik sabiti 4, eşdeğer öz iletkenliği ise 3×10^{-5} (S/m)'dir.

P.9-15 Bir elektromanyetik dalga, hava dolu, $a \times b$ boyutlu bir dikdörtgen dalga kılavuzunda baskın modda yayılacaktır. $a = 2.50$ (cm) alınız ve kullanışlı bant genişliğini, 1.15 $(f_c)_{10}$ ile bir sonraki modun kesim frekansının %15 altı arası olarak kabul ediniz.

a) $b = 0.25a$, $b = 0.50a$ ve $b = 0.75a$ için kullanışlı bant genişliğini hesaplayıp, karşılaştırınız.

b) (a) şıkkındaki üç kılavuz için maksimum elektrik alan şiddetini 10 (kV/m) alarak iletilen ortalama gücü hesaplayıp, karşılaştırınız. Kayıpları ihmal ediniz.

P.9-16 8(cm) × 6(cm) × 5(cm) boyutlarına sahip, hava dolu, kayıpsız bir dikdörtgen boşluk rezonatörü veriliyor. En düşük mertebeli sekiz modu ve bunların rezonans frekanslarını bulunuz.

P.9-17 Hava dolu ve pirinç duvarlı $-\epsilon_0$, μ_0, $\sigma = 1.57 \times 10^7$(S/m) – bir dikdörtgen boşluk $a = 4$ (cm), $b = 3$ (cm) ve $d = 5$ (cm) boyutlarına sahiptir.

a) Bu boşluğun baskın modunu ve bu modun rezonans frekansını belirleyiniz.

b) Q'yu bulunuz ve H_0'ı 0.1 (A/m) kabul ederek, rezonans frekansında depolanan elektrik ve manyetik enerjilerin zamanda ortalamasını bulunuz.

P.9-18 Eğer problem P.9-17'deki dikdörtgen boşluk, dielektrik sabiti 2.5 olan bir kayıpsız dielektrik malzeme ile doldurulursa,

a) baskın modun rezonans frekansını,

b) Q'yu ve

c) H_0'ı 0.1 (A/m) kabul ederek rezonans frekansında zamanda-ortalama depolanan elektrik ve manyetik enerjileri bulunuz.

P.9-19 Eş. (9-121), bir kübik rezonans boşluğu ($a = b = d$) içindeki TE_{101} modunun kalite faktörü Q_{101}'in

$$Q_{101} = \frac{a}{3\delta} \tag{9-122}$$

olarak yazılabileceğini belirtir. Burada δ, boşluk duvarlarının deri kalınlığıdır.

a) Boşluk pirinçten yapılmışsa, kalite faktörünü 6500 yapacak a'yı belirleyiniz.

b) Rezonans frekansını bulunuz.

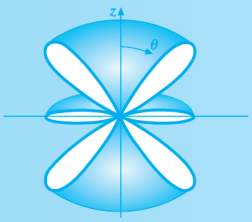
c) Eğer boşluk bakırdan yapılsaydı Q_{101} ne olurdu?

P.9-20 Hava dolu, bakırdan bir boşluk rezonatör için,

a) eğer boyutları $a = d = 1.8$ $b = 3.6$ (cm) ise TE_{101} modunun Q'sunu hesaplayınız.

b) Q'yu %20 daha yüksek yapmak için b'nin ne kadar artırılması gerektiğini bulunuz.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 426



(c) $2h/\lambda = 3/2$.

10. BÖLÜM

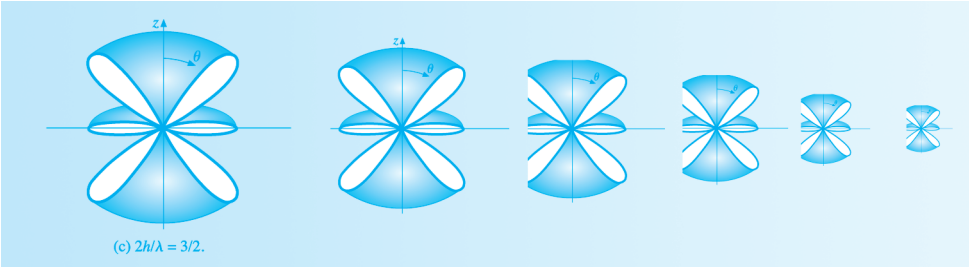
10 - 1 GENEL BAKIŞ

7. Bölümde, dalganın nasıl üretildiğine bakmaksızın, kaynak içermeyen ortamda düzlem elektromanyetik dalgaların yayılma karakteristiklerini inceledik. Şüphesiz dalgalar kaynaklardan, elektromanyetik terimlerle ifade edersek zamanla değişen yüklerden ve akımlardan ortaya çıkacaktır. Elektromanyetik enerjiyi, daha önceden belirlenmiş yönlerde etkin olarak yaymak için, yüklerin ve akımların, özel yollarla dağıtılması gerekmektedir. ***Antenler***, elektromanyetik enerjiyi önceden tanımlandığı şekilde, etkin olarak yaymak ve almak için tasarlanan yapılardır. Her antenin bir giriş empedansı vardır ve bir anten, besleme iletim hattının veya dalga kılavuzunun empedansını, anteni çevreleyen ortamın öz empedansına uyumlandıracak bir dönüştürücü olarak düşünülebilir. Verimli bir anten olmaksızın, elektromanyetik enerji yerelleşecek ve uzak mesafelere bilginin aktarımı mümkün olmayacaktır.

Antenlerin işlevleri

Bu bölümde ilk olarak bir elektrik dipol elemanının ışıma alanlarını ve karakteristik özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra önemli bir özel durumu yarım-dalga dipolü olan, belirli-uzunlukta ince doğrusal antenleri gözden geçireceğiz. Bir doğrusal antenin ışıma karakteristikleri, büyük oranda nasıl uyarıldığı ve boyu tarafından belirlenir. Daha yüksek yönlülük ve istenen diğer özellikler, birden fazla antenin dizi anten oluşturmak üzere bir araya getirilmesi ile elde edilir. Basit dizilerin bazı temel özellikleri burada incelenecektir. Alıcı antenlerin etkin alanları ve saçıcıların geri saçılım kesit alanı kavram-

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 427



(c) $2h/\lambda = 3/2$.

Antenler ve Anten Dizileri

larını tartışacağız. Aynı zamanda verici ve alıcı antenler arasındaki güç iletim ilişkisini ve radar denklemini inceleyeceğiz.

Bir antenin ışıma karakteristiğini belirlemek için yöntem

Genelde, bir antenin ışıma karakteristiklerinin analizinde aşağıda verilen üç adım izlenir.

1. Anten üzerindeki bilinen veya kabul edilen **J** akım dağılımından manyetik vektör potansiyeli **A** belirlenir. Harmonik zaman bağımlılığı için, Eş. (6-85)'ten gecikmiş fazör vektör potansiyeli,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}e^{-jkR}}{R}\,dv' \tag{10-1}$$

ile verilir. Burada $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ dalga numarasıdır.

2. **A**'dan manyetik alan şiddeti **H** bulunur. Bakınız Eş. (6-50).

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}. \tag{10-2}$$

3. **H**'den elektrik alan şiddeti **E** bulunur. Eş. (6.80b)'ye uzayda $\mathbf{J} = 0$ alarak bakınız.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla \times \mathbf{H}. \tag{10-3}$$

E ve **H** bilindikten sonra antenin diğer bütün yayılma karakteristikleri belirlenebilir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 428

10-2 ELEKTRİK DİPOL ELEMANI

Öncelikle, Şekil 10-1'de gösterilen çok kısa (çalışılan dalga boyuna kıyasla), ince, $d\ell$ uzunluğunda, aşağıda verilen zamanla değişen akım dağılımını taşıyan iletken telin yayılma karakteristiğini inceleyeceğiz.

$$i(t) = I\cos\omega t = \mathcal{R}_e[Ie^{j\omega t}] \tag{10-4}$$

Hertz dipolü çok kısa, ışıyan akım elemanıdır.

Bu tip bir akım elemanı, doğrusal antenlerin temel taşıdır ve ***Hertz dipolü*** olarak adlandırılır.

Bir Hertz dipolünün elektromanyetik alanını belirlemek için, Kısım 10-1'de özeti verilen üç adımı izleriz:

1. ADIM Gecikmiş vektör potansiyeli **A**'nın fazör gösterimi bulunur. Eş. (10-1)'i kullanırsak

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right) \tag{10-5}$$

dir. Burada $\beta = k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$'dır. Eş. (2-47)'den

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_R\cos\theta - \mathbf{a}_\theta\sin\theta \tag{10-6}$$

olarak yazılır. $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi$ vektörünün küresel bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$A_R = A_z\cos\theta = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\cos\theta, \tag{10-6a}$$

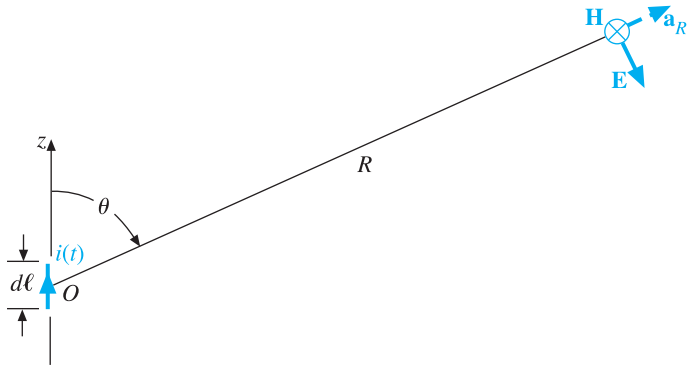
$$A_\theta = -A_z\sin\theta = -\frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\sin\theta, \tag{10-6b}$$

$$A_\phi = 0. \tag{10-6c}$$

2. ADIM **A**'dan **H** bulunur.

Şekil 10-1'deki geometriden, ϕ koordinatına göre değişim olmamasını bekleriz. Eş. (2-99)'dan

ŞEKİL 10-1 Hertz dipolü.



+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 429

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\mu_0 R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]$$
$$= -\mathbf{a}_\phi \frac{I\,d\ell}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\left[\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2}\right]e^{-j\beta R} \qquad (10\text{-}7)$$

olarak yazılır.

3. ADIM **H**'den **E** bulunur.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\nabla \times \mathbf{H}$$
$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0}\left[\mathbf{a}_R \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \sin\theta) - \mathbf{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RH_\phi)\right], \qquad (10\text{-}8)$$

buradan da

$$E_R = -\frac{I\,d\ell}{4\pi}\eta_0\beta^2 2\cos\theta\left[\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right]e^{-j\beta R} \qquad (10\text{-}8a)$$

$$E_\theta = -\frac{I\,d\ell}{4\pi}\eta_0\beta^2 \sin\theta\left[\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right]e^{-j\beta R} \qquad (10\text{-}8b)$$

$$E_\phi = 0 \qquad (10\text{-}8c)$$

elde edilir. Burada $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \cong 120\pi\ (\Omega)$ 'dur.

Eş. (10-7) ve Eş. (10-8) bir Hertz dipolünün elektromanyetik alanlarını oluşturur. Bu ifadeler oldukça karışıktır. Bununla birlikte, anten problemlerinde, aslında antenden çok uzak mesafelerdeki alanlarla ilgileniriz. Bu bölge $R \gg \lambda/2\pi$ veya $\beta R = 2\pi R/\lambda \gg 1$ olduğu mesafelerdir. Bu şartlar altında (uzak alanda) $1/(\beta R)^2$ ve $1/(\beta R)^3$'lü terimleri ihmal edersek, elektrik dipol elemanının ***uzak alanını*** veya ***ışıma alanını*** aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

Uzak alan

Işıma alanları uzak alanlardır.

$$H_\phi = j\frac{I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\beta \sin\theta \qquad (\text{A/m}), \qquad (10\text{-}9)$$

Hertz dipolünün uzak alanları

$$E_\theta = j\frac{I\,d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\eta_0\beta \sin\theta = \eta_0 H_\phi \qquad (\text{V/m}). \qquad (10\text{-}10)$$

Diğer alan bileşenleri ihmal edilebilir.

TEKRAR SORULARI

S.10-1 Antenlerin temel fonksiyonları nelerdir?

S.10-2 Bir anten üzerinde zamanla değişen akım dağılımı olduğunu kabul edersek, oluşacak elektromanyetik alanı hangi işlemlerle bulacağımızı belirtiniz.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 430

S.10-3 *Hertz dipolü* nedir?

S.10-4 Bir antenin *uzak alanını* tanımlayınız.

S.10-5 Bir antenin *ışıma alanları* ne demektir?

NOTLAR

1. Bir dikey Hertz dipolünün ışıma alanı H_ϕ ve $E_\theta = \eta_0 H_\phi$ 'den oluşur.
2. E_θ ve H_ϕ, uzayda birbirine diktir, eş fazlıdır ve her ikisi de dipolden uzaklıkla ters orantılı değişir.

10-3 ANTEN ÖRÜNTÜLERİ VE YÖNLÜLÜK

Antenin ışıma örüntüsü, anten örüntüsü

Uzayda bütün yönlere birbiçimli ışıyan fiziksel bir anten yoktur. Bir antenden sabit bir uzaklıkta, yöne karşı göreceli uzak alan şiddetini gösteren grafik antenin ***ışıma örüntüsü*** veya sadece ***anten örüntüsü*** olarak adlandırılır. Genelde, bir anten örüntüsü üç boyutludur, küresel koordinatlarda hem θ hem de ϕ ile değişimi verir. Üç boyutlu çizimin zorluklarından kaçınmak için anten örüntüsü sabit bir ϕ düzleminde normlanmış (tepe değerine göre) alan şiddetinin genliğinin θ'ya göre değişimi (***E-düzlemi örüntüsü***) ve $\theta = \pi/2$ için normlanmış alan şiddetinin ϕ'ye göre değişimi (***H-düzlemi örüntüsü***) olarak ayrı ayrı verilir.

***E*-düzlemi ve *H*-düzlemi ışıma örüntüleri**

ÖRNEK 10-1

Bir Hertz dipolünün *E*-düzlemi ve *H*-düzlemi ışıma örüntülerini çiziniz.

ÇÖZÜM

E_θ ve H_ϕ uzak alanda birbiriyle orantılı olduğu için, bizim sadece E_θ'nın normlanmış genliğine ihtiyacımız olacaktır.

a) *E-düzlemi örüntüsü*. Verilen bir R için E_θ, ϕ'den bağımsızdır ve Eş. (10-10)'u kullanırsak E_θ'nın normlanmış genliği

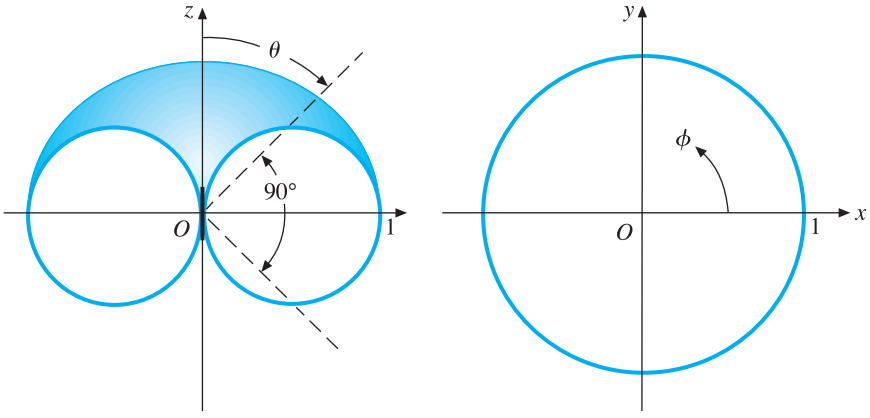
$$\text{Normlanmış} \quad |E_\theta| = |\sin\theta| \tag{10-11}$$

olacaktır. Bu ifade bir Hertz dipolünün ***örüntü fonksiyonudur***. Herhangi bir ϕ için Eş. (10-11), Şekil 10-2(a)'da gösterildiği gibi bir çift çemberdir.

Anten örüntüsünü tanımlayan normlanmış elektrik şiddeti fonksiyonu, örüntü fonksiyonudur.

b) *H-düzlemi örüntüsü*. Verilen bir R ve $\theta = \pi/2$ için, E_θ'nın normlanmış genliği $|\sin\theta| = 1$ olacaktır. O halde *H*-düzlemi örüntüsü, Şekil 10-2 (b)'de gösterildiği gibi, merkezi z-yönünde yerleştirilmiş dipolde olan bir birim çemberden başka birşey değildir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 431



(a) *E*-düzlemi örüntüsü (b) *H*-düzlemi örüntüsü

ŞEKİL 10-2 Bir Hertz dipolünün ışıma örüntüleri.

Işıma şiddetinin tanımı ve SI birimi

Bir antenin, belirli bir yöne ışıyan gücü yönlendirme yeteneğini göstermek için kullanılan genel parametre ***yönlü kazanç***tır ve ışıma şiddeti cinsinden ifade edilebilir. ***Işıma şiddeti***, katı açı başına düşen zamanda-ortalama güçtür. Işıma şiddetinin SI birimi steradyan başına düşen watt (W/sr)'dır. Her birim katı açı için küre yüzey alanı R^2 olduğuna göre, ışıma şiddeti U, R^2 kere birim alana düşen zamanda-ortalama güce veya R^2 kere zamanda-ortalama Poyting vektör ($\mathcal{P}_{av}$)'ye eşittir:

$$U = R^2 \mathcal{P}_{av} \quad \text{(W/sr)}. \tag{10-12}$$

Toplam zamanda-ortalama yayılan güç ise

$$P_r = \oint \mathcal{P}_{av} \cdot d\mathbf{s} = \oint U \, d\Omega \qquad \text{(W)} \tag{10-13}$$

dır ve burada $d\Omega$ diferensiyel katı açısı, $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ olarak yazılabilir.

Bir antenin ***yönlü kazancı*** $G_D(\theta, \phi)$, (θ, ϕ) yönündeki ışıma şiddetinin ortalama ışıma şiddetine oranıdır ve aşağıdaki gibi yazılır:

Yönlü kazanç

$$G_D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{P_r/4\pi} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{\oint U \, d\Omega}. \tag{10-14}$$

Yönbağımsız veya tümyönlü antenler pratikte yoktur.

Bir yönbağımsız veya tümyönlü (bütün yönlere eşit ışıyan anten) antenin yönlü kazancının bire eşit olduğu açıktır. Bununla birlikte, pratikte yönbağımsız antenin var olmadığı da unutulmamalıdır.

Anten yönlülüğü

Bir antenin en yüksek yönlü kazancını, antenin ***yönlülüğü*** olarak adlandırırız. Yönlülük, en yüksek ışıma şiddetinin ortalama ışıma

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 432

şiddetine oranıdır ve genellikle D ile gösterilir:

$$D = \frac{U_{\max}}{U_{av}} = \frac{4\pi U_{\max}}{P_r} \quad \text{(Birimsiz).} \tag{10-15}$$

Elektrik alan şiddeti cinsinden ise D aşağıdaki gibi yazılır.

Uzak-alan elektrik alan şiddetinden yönlülüğün hesaplanması

$$D = \frac{4\pi |E_{\max}|^2}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |E(\theta, \phi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \quad \text{(Birimsiz).} \tag{10-16}$$

Yönlülük genellikle desibel cinsinden ifade edilir.

ÖRNEK 10-2

Bir Hertz dipolünün yönlülüğünü ve yönlü kazancını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir Hertz dipolü için zamanda-ortalama Poynting vektörünün genliği

$$\mathscr{P}_{av} = \tfrac{1}{2}\mathscr{R}e|\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*| = \tfrac{1}{2}|E_\theta|\,|H_\phi| \tag{10-17}$$

biçiminde yazılır. Eş. (10-9), (10-10) ve (10-12)'yi kullanarak

$$U = \frac{(I\,d\ell)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2 \sin^2\theta \tag{10-18}$$

elde edilir. Eş. (10-14)'ten yönlü kazanç ifadesi

$$G_D(\theta, \phi) = \frac{4\pi \sin^2\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin^2\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\phi} = \tfrac{3}{2}\sin^2\theta \tag{10-19}$$

biçimindedir. Yönlülük $G_D(\theta, \phi)$'nın en yüksek değeridir ve

$$D = G_D\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = 1.5$$

olarak elde edilir. dB cinsinden sonuç, $10 \log_{10} 1.5$ veya 1.76 (dB)'dir.

Anten kazancının tanımı

Anten verimliliğinin ölçütlerinden birisi güç kazancıdır. Bir antenin ***güç kazancı*** veya kısaca ***kazancı*** G_P, bir yönbağımsız kaynağa göre verilir ve en yüksek ışıma şiddetinin, aynı giriş gücüne sahip kayıpsız ve yönbağımsız bir kaynağın ışıma şiddetine oranıdır.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 433

Eş. (10-14)'de tanımlanan yönlü kazanç, ışıyan güç (P_r) bazlıdır. Antenin kendi üzerinde ve toprağı da içeren yakınındaki kayıplı yapılar nedeniyle oluşan direnil (ohmik) güç kaybı (P_ℓ) nedeniyle, ışıyan güç (P_i) toplam giriş gücünden daha azdır.

$$P_i = P_r + P_\ell \tag{10-20}$$

Bir antenin güç kazancı bu durumda

$$G_P = \frac{4\pi U_{\max}}{P_i} \quad \text{(Birimsiz)} \tag{10-21}$$

olacaktır. Bir antenin kazancının, yönlülüğüne oranı ise ***ışıma verimidir*** ve ζ_r ile gösterilir:

Işıma veriminin tanımı

$$\zeta_r = \frac{G_P}{D} = \frac{P_r}{P_i} \quad \text{(Birimsiz).} \tag{10-22}$$

Normalde, iyi yapılmış bir antenin verimi %100'e çok yakındır.

Anten ışıma direnci

Bir antenden ışıyan gücün miktarının yararlı bir ölçüsü ışıma direncidir. Bir antenin ***ışıma direnci***, ışıyan güç (P_r)'ye eşit miktarda güç harcayan düşünsel bir dirençtir. Bu dirençten geçen akım antenden geçen akımın en yüksek değeridir. Bir anten için yüksek ışıma direnci istenen bir özelliktir.

ÖRNEK 10-3

Bir Hertz dipolünün ışıma direncini bulunuz.

ÇÖZÜM

Direnil kayıpların olmadığını varsayarsak, genliği I olan zamanda değişen giriş akımını taşıyan bir Hertz dipolünden ışıyan zamanda-ortalama güç

$$P_r = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_\theta H_\phi^* R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{10-23}$$

olarak yazılır. Eş. (10-9) ve Eş. (10-10)'da verilen ifadeleri kullanırsak uzak-alandaki alanları

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{I^2(d\ell)^2}{32\pi^2}\eta_0\beta^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{I^2(d\ell)^2}{12\pi}\eta_0\beta^2 = \frac{I^2}{2}\left[80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{10-24}$$

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 434

olarak buluruz. Bu son ifadede, β yerine $2\pi/\lambda$ ve serbest uzay empedansı (η_0) yerine ise 120π kullanılmıştır.

Kısa Hertz dipolü üzerindeki akım düzgün olduğundan, ışıma direnci üzerinde harcanan güç, I kullanılarak bulunmuştur. $I^2R_r/2$'yi P_r'ye eşitlediğimizde ise

Bir Hertz dipolünün ışıma direnci

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega) \tag{10-25}$$

elde ederiz.

Örneğin, $d\ell = 0.01\lambda$ ise R_r ancak 0.08 (Ω)'luk çok küçük bir değerdir. Dolayısıyla kısa dipol anten, zayıf bir elektromanyetik güç yayıcısıdır. Bir dipol antenin ışıma direncinin boyunun karesi ile arttığını söylemek doğru olmaz. Çünkü Eş. (10-24) sadece $d\ell \ll \lambda$ durumunda geçerlidir.

ÖRNEK 10-4

İletkenliği σ, boyu d olan ve a yarıçaplı metal telden yapılmış Hertz dipol antenin ışıma verimini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kayıp direnci R_ℓ olan tel dipolden geçen akımın genliği I olsun. Bu durumda direnil güç kaybı

$$P_\ell = \tfrac{1}{2} I^2 R_\ell \tag{10-26}$$

olacaktır. Işıma direnci R_r cinsinden ışıyan güç ise

$$P_r = \tfrac{1}{2} I^2 R_r \tag{10-27}$$

dir. Eş. (10-20) ve Eş. (10-22)'yi kullanırsak

$$\zeta_r = \frac{P_r}{P_r + P_\ell} = \frac{R_r}{R_r + R_\ell} = \frac{1}{1 + (R_\ell/R_r)} \tag{10-28}$$

elde ederiz. Burada R_r, Eş. (10-25) kullanılarak bulunmuştur. Metal telin kayıp direnci R_ℓ, yüzey direnci R_s cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_\ell = R_s \left(\frac{d\ell}{2\pi a}\right). \tag{10-29}$$

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 435

Burada Eş. (7-53)'te de verildiği gibi

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \tag{10-30}$$

dır. Eş. (10-28)'de Eş. (10-25) ve Eş. (10-29)'u kullanırsak, bir Hertz dipolünün ışıma verimini

$$\zeta_r = \frac{1}{1 + \dfrac{R_s}{160\pi^3}\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)\left(\dfrac{\lambda}{d\ell}\right)} \tag{10-31}$$

biçiminde elde ederiz.

a = 1.8 (mm), $d\ell$ = 2 (m), çalışma frekansı f = 1.5 (MHz) ve σ (bakır için) = 5.80×10^7(S/m) alırsak,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1.5 \times 10^6} = 200 \quad \text{(m)}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \times (1.50 \times 10^6) \times (4\pi 10^{-7})}{5.80 \times 10^7}} = 3.20 \times 10^{-4} \quad (\Omega)$$

$$R_\ell = 3.20 \times 10^{-4} \times \left(\frac{2}{2\pi 1.8 \times 10^{-3}}\right) = 0.057 \quad (\Omega)$$

$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{2}{200}\right)^2 = 0.079 \quad (\Omega)$$

ve

$$\zeta_r = \frac{0.079}{0.079 + 0.057} = \%58$$

bulunur ve bu çok düşüktür. Eş. (10-31)'den görüleceği gibi (a/λ) ve $(d\ell/\lambda)$ küçüldükçe anten verimi düşmektedir.

ALIŞTIRMA 10.1

Toprak düzlemi üzerinde ve dikey yerleştirilmiş bir antenin E-düzlemindeki normlanmış örüntü fonksiyonu $\sqrt{\sin\theta}$, $(0 \le \theta \le \pi/2$ ve $0 \le \phi \le 2\pi)$ olarak verilmiştir.

a) Yönlü kazanç ifadesini bulunuz.

b) Yönlülüğü hesaplayınız.

CEVAP: (a) $(8/\pi)\sin\theta$, (b) 2.55 veya 4.06 (dB).

TEKRAR SORULARI

S.10-6 *Anten örüntüsü*nü tanımlayınız.

S.10-7 Bir Hertz dipolünün E-düzlemi ve H-düzlemi örüntülerini tanımlayınız.

S.10-8 *Işıma şiddeti*ni tanımlayınız.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 436

S.10-9 Bir antenin *yönlü kazancını* ve *yönlülüğünü* tanımlayınız.
S.10-10 Bir antenin *güç kazancını* ve *ışıma verimini* tanımlayınız.
S.10-11 Bir antenin *ışıma direncini* tanımlayınız.

NOTLAR

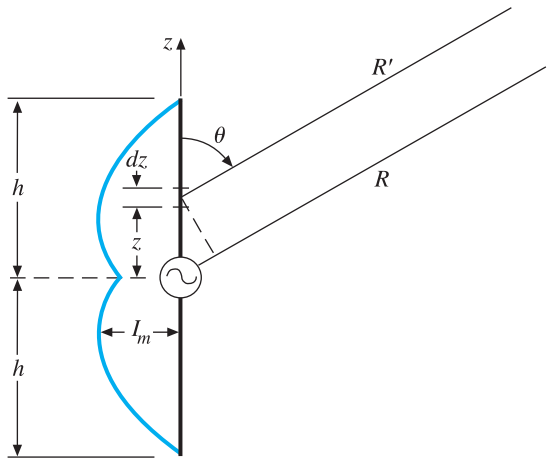
1. Bir antenin ışıma-şiddeti örüntüsü (veya güç örüntüsü), sabit bir uzaklıkta, θ veya ϕ'ye karşı alan şiddetinin karesinin çizimidir.
2. Yönlü kazanç ile güç kazancı aynı *değildir*.
3. Yönlülük ile ışıma verimi aynı *değildir*.
4. Işıma direnci, giriş empedansının reel kısmı *değildir*.

10-4 İNCE DOĞRUSAL ANTENLER

Doğrusal dipol anten

Kısa dipol antenin, düşük ışıma direnci ve düşük ışıma verimi nedeniyle iyi bir elektromanyetik güç yayıcı olmadığını göstermiştik. Şimdi, Şekil 10-3'de gösterilen dalga boyuna kısaylanabilir boyu olan, merkezden beslenmiş ince düz antenin ışıma özelliklerini inceleyeceğiz. Bu tip anten bir ***doğrusal dipol anten***dir. Eğer anten üzerindeki akım dağılımı biliniyor ise, bu antenin ışıyan alanı bir dipol elemanının ışıyan alanının anten uzunluğu boyunca integralini almak yoluyla bulunabilir. Sabit yarıçaplı düz bir tel gibi çok basit görünen

ŞEKİL 10-3 Sinüzoidal akım dağılımlı, merkezden beslenmiş bir doğrusal dipol.



+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 437

bir geometrinin bile üzerindeki akım dağılımının tam olarak belirlenmesi çok zor bir sınır-değer problemidir. Burada çok ince, düz bir dipol üzerindeki akımın uzaydaki değişimi sinüzoidal olarak kabul edilecektir. Bu tip akım dağılımı Şekil 10-3'te de gösterildiği gibi dipol üzerinde bir çeşit duran dalga oluşturur ve bu dağılım iyi bir yaklaştırmadır.

Dipolün merkezden beslenmesi nedeniyle, dipolün her iki parçasındaki akımlar simetriktir ve dipolün uçlarında sıfıra gider. Akım fazörünü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} I(z) &= I_m \sin \beta(h - |z|) \\ &= \begin{cases} I_m \sin \beta(h - z), & z > 0 \\ I_m \sin \beta(h + z), & z < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{10-32}$$

Biz burada sadece uzak-alandaki alanlarla ilgilenmekteyiz. Eş. (10-9) ve Eş. (10-10)'dan diferensiyel akım elemanı $I\,dz$'den kaynaklanan uzak alan

$$dE_\theta = \eta_0\, dH_\phi = j\,\frac{I\,dz}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R'}}{R'}\right)\eta_0 \beta \sin\theta \tag{10-33}$$

olacaktır. Eş. (10-33)'deki R' ile dipolün merkezinden tanımlı, küresel koordinat orijininden ölçülen R arasında çok az fark vardır. Uzak alanda, $R \gg h$'dir ve

$$R' \cong R - z\cos\theta \tag{10-34}$$

yazılabilir. $1/R'$ ve $1/R$ arasındaki genlik farkı önemsizdir, fakat Eş. (10-34)'te verilen yaklaşık ifade faz teriminde mutlaka kullanılmalıdır. Eş. (10-33)'te Eş. (10-32) ve Eş. (10-34)'ün kullanılması ve integral alınması ile

$$\begin{aligned} E_\theta &= \eta_0 H_\phi \\ &= j\,\frac{I_m \eta_0 \beta \sin\theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h}^{h} \sin\beta(h - |z|) e^{j\beta z\cos\theta}\, dz \end{aligned} \tag{10-35}$$

ifadesini elde ederiz. Eş. (10-35)'teki integral alınacak terimin ilk çarpanı $\sin\beta(h - |z|)$, z'nin çift fonksiyonudur ve ikinci çarpan

$$e^{j\beta z\cos\theta} = \cos(\beta z\cos\theta) + j\sin(\beta z\cos\theta)$$

biçiminde yazılırsa, buradaki $\sin(\beta z\cos\theta)$ terimi z'nin tek fonksiyonudur. $-h$ ve h simetrik sınırları arasında integral aldığımızda, sadece iki çift fonksiyonun çarpımınından oluşan $\sin\beta(h - |z|)\cos(\beta z\cos\theta)$ teriminin sıfırdan farklı değer vereceğini biliyoruz. Dolayısıyla Eş. (10-35) aşağıdaki biçime indirgenir:

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = j\,\frac{I_m \eta_0 \beta \sin\theta}{2\pi R} e^{-j\beta R} \int_{0}^{h} \sin\beta(h - z)\cos(\beta z\cos\theta)\, dz$$

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 438

$$= \frac{j60I_m}{R} e^{-j\beta R} F(\theta). \tag{10-36}$$

Burada

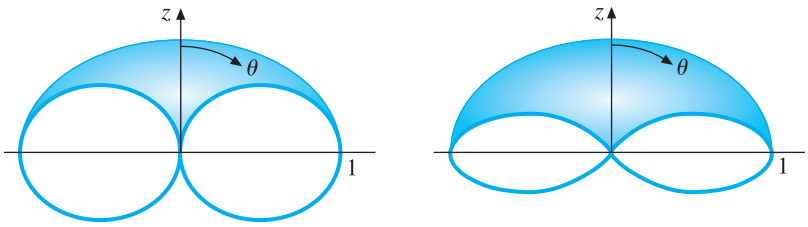
Yarı-boyu *h* olan doğrusal dipol antenin örüntü fonksiyonu

$$F(\theta) = \frac{\cos(\beta h \cos\theta) - \cos\beta h}{\sin\theta} \tag{10-37}$$

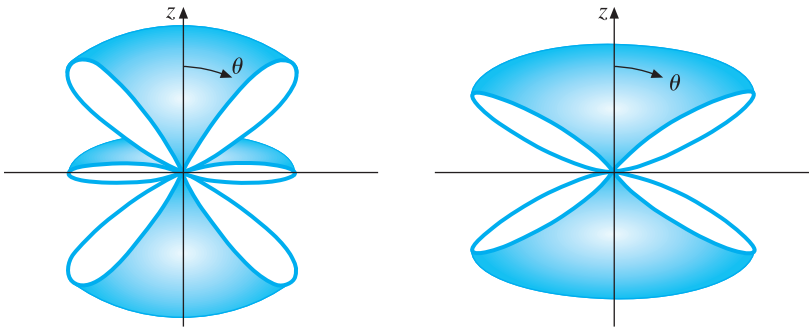
dır.

$|F(\theta)|$, bir doğrusal dipol antenin *E*-düzlemi ***örüntü fonksiyonu***dur. Eş. (10-37)'de verilen $|F(\theta)|$'nın gösterdiği ışıma örüntüsünün gerçek şekli $\beta h = 2\pi h/\lambda$'nın değerine bağlıdır ve değişik anten boyları için oldukça farklılık gösterebilir. Bununla birlikte, anten örüntüsü her zaman $\theta = \pi/2$ düzlemine göre simetriktir. Şekil 10-4, dört farklı anten boyu, $2h/\lambda = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ ve 2 için *E*-düzlemi örüntülerini göstermektedir. *H*-düzlemi örüntüleri $F(\theta)$'nın ϕ'den bağımsız olması nedeniyle sadece çemberdir. Şekil 10-4'teki örüntülerde, dipol boyu $3\lambda/2$'ye yaklaştığında en yüksek ışımanın yönünün $\theta = 90°$ düzleminden uzaklaştığını görmekteyiz. $2h = 2\lambda$ için ise $\theta = 90°$ düzleminde hiç ışıma oluşmamaktadır.

ŞEKİL 10-4 Merkezden beslenmiş dipol antenlerin *E*-düzlemi ışıma örüntüleri.



(a) $2h/\lambda = 1/2$. (b) $2h/\lambda = 1$.



(c) $2h/\lambda = 3/2$. (d) $2h/\lambda = 2$.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 439

10-4.1 YARIM-DALGA DİPOLÜ

$2h = \lambda/2$ boyundaki yarım-dalga dipolünün, istenen örüntüsü ve empedans özellikleri nedeniyle pratikte özel bir önemi vardır. $\beta h = 2\pi h/\lambda = \pi/2$ olduğunda Eş. (10-37)'deki örüntü fonksiyonu

Bir yarım-dalga dipolünün örüntü fonksiyonu

$$F(\theta) = \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \tag{10-38}$$

biçimini alır. Bu fonksiyonun maksimumu $\theta = 90°$'de bire eşittir ve sıfırları ise $\theta = 0°$ ve $\theta = 180°$'dedir. *E*-düzlemi örüntüsü Şekil 10-4(a)'da verilmiştir. Eş. (10-36)'yı kullanarak uzak-alandaki alan fazörü

$$E_\theta = \eta_0 H_\phi = \frac{j60I_m}{R} e^{-j\beta R} \left\{ \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \right\} \tag{10-39}$$

olarak yazılabilir. Zamanda-ortalama Poynting vektörünün genliği ise aşağıda verilmiştir:

$$\mathscr{P}_{av}(\theta) = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* = \frac{15I_m^2}{\pi R^2} \left\{ \frac{\cos[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} \right\}^2. \tag{10-40}$$

Bir yarım-dalga dipolünden ışıyan toplam güç, $\mathscr{P}_{av}$'nin büyük bir küre yüzeyi üzerinde integralinin alınması ile elde edilir:

$$\begin{aligned} P_r &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathscr{P}_{av}(\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 30I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin\theta} d\theta. \end{aligned} \tag{10-41}$$

Eş. (10-41)'de verilen integralin sayısal değeri 1.218'dir ve böylece

$$P_r = 36.54 I_m^2 \quad (\text{W}) \tag{10-42}$$

olur. Böylelikle havadaki bir yarım-dalga dipolünün ışıma direncini elde edebiliriz:

Bir yarım-dalga dipolünün ışıma direnci

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 73.1 \quad (\Omega). \tag{10-43}$$

Kayıpları ihmal ettiğimizde, ince bir yarım-dalga dipolün giriş direncini 73.1 (Ω)'a eşit olarak buluruz. Antenin giriş reaktansı ise küçük bir pozitif sayıdır. Eğer anten boyunu $\lambda/2$'den biraz daha küçük ayarlarsak giriş reaktansı sıfıra gider. (Daha önce söylediğimiz gibi, giriş empedansının gerçek hesabı biraz zahmetlidir ve bu kitabın konusu dışındadır.)

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 440

Eş. (10-15)'i kullanarak bir yarım-dalga dipolün yönlülüğü bulunabilir. Eş. (10-12) ve Eş. (10-40)'tan

$$U_{\max} = R^2 \mathscr{P}_{av}(90^\circ) = \frac{15}{\pi} I_m^2 \tag{10-44}$$

yazılırsa

Bir yarım-dalga dipolün yönlülüğü

$$D = \frac{4\pi U_{\max}}{P_r} = \frac{60}{36.54} = 1.64 \tag{10-45}$$

bulunur. Bu değer yönbağımsız yayıcı referans alınarak 10 log 1.64 veya 2.15 (dB)'ye karşılık gelir.

ÖRNEK 10-5

Mükemmel iletken toprak düzlemi üzerindeki çeyrek-dalga boyu ince, dikey bir anten, tabanından zamanda-harmonik bir kaynak tarafından uyarılmaktadır. Işıma örüntüsü, ışıma direnci ve yönlülüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Akım, hareketli yüklerden oluşur. Bu nedenle Kısım 3-11.5'te tartışılan görüntü yöntemini kullanabiliriz ve iletken toprak düzlemi yerine dikey antenin görüntüsünü yerleştirebiliriz. I akımını taşıyan dikey antenin görüntüsü, toprak düzlemi altına yerleştirilmiş aynı boyutta başka bir dikey antendir. Görüntü anten, orijinal anten ile *aynı yönde,* aynı akımı taşır. Dolayısıyla Şekil 10-5(a)'da verilen çeyrek-dalga boyu dikey antenin toprak düzleminin üst tarafında oluşturduğu elektromanyetik alan, Şekil 10-5(b)'deki yarım-dalga anteninki ile aynıdır. Eş. (10-38)'deki örüntü fonksiyonu $0 \le \theta \le \pi/2$'de geçerlidir ve Şekil 10-5(b)'de kesikli çizgi ile gösterilen ışıma örüntüsü, Şekil 10-4(a)'dakinin üst yarısıdır.

Eş. (10-40)'taki zamanda-ortalama Poynting vektörü $\mathscr{P}_{av}$'nin genliği $0 \le \theta \le \pi/2$ için geçerlidir. Bir çeyrek-dalga anteni (***monopol***) sadece üst yarı uzaya ışıma yapar, toplam ışıma gücü de Eş. (10-42)'de verilenin sadece yarısıdır:

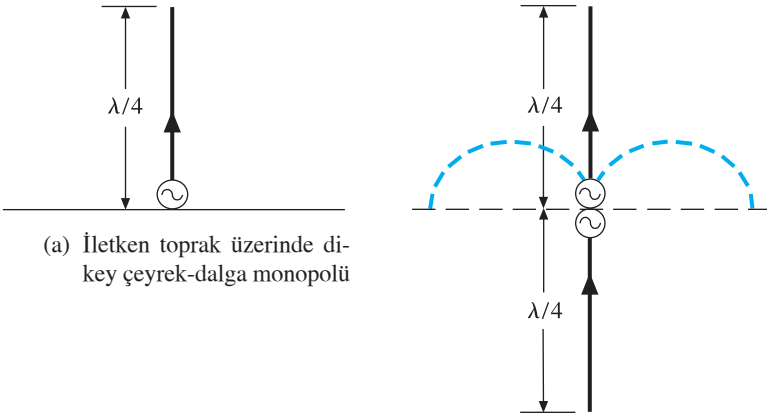
$$P_r = 18.27 I_m^2 \quad \text{(W)}.$$

Sonuçta ışıma direnci de

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 36.54 \quad (\Omega) \tag{10-46}$$

olacaktır. Bu değer, boş uzaydaki yarım-dalga anteninin ışıma direncinin yarısıdır.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 441



(a) İletken toprak üzerinde dikey çeyrek-dalga monopolü

(b) Üst yarı-düzleme ışıma yapan yarım-dalga dipol eşdeğeri

ŞEKİL 10-5 İletken toprak üzerindeki çeyrek-dalga monopolü ve yarım-dalga dipol eşdeğeri.

Yönlülük hesaplanırken, hem en yüksek ışıma şiddeti U_{max} hem de ortalama ışıma şiddeti $(P_r/2\pi)$[1], yarım-dalga dipolü ile aynıdır. Böylece

Çeyrek-dalga monopolün yönlülüğü

$$D = \frac{U_{max}}{U_{av}} = \frac{U_{max}}{P_r/2\pi} = 1.64 \tag{10-47}$$

olacaktır, bu da yarım-dalga anteni ile aynıdır[1]. Bu anten ***çeyrek-dalga monopolü*** olarak bilinir.

■ **ALIŞTIRMA 10.2**

600 (MHz)'de çalışan, merkezden beslemeli 25 (cm) boyunda bir dipol 475 (W) toplam ortalama güç yaymaktadır. $P(100\text{ m}, \pi/2, 0)$ noktasındaki elektrik ve manyetik alan şiddetinin genliğini bulunuz.

CEVAP: 2.17 (V/m), 5.75 (mA/m).

TEKRAR SORULARI

S.10-12 Bir yarım-dalga dipol antenin *E* ve *H*-düzlemindeki ışıma örüntülerinin niteliklerini tanımlayınız.
S.10-13 Bir yarım-dalga dipol antenin ışıma direnci ve yönlülüğü nedir?
S.10-14 İletken toprak üzerindeki dikey çeyrek-dalga monopolün ışıma direnci ve yönlülüğü nedir?
S.10-15 İletken toprak üzerindeki yatay dipolün görüntüsü nedir?

[1] *Çevirenin notu*: Ortalama ışıma şiddeti gerçekte $P_r/4\pi$ olmalıdır. Bu durumda $D = 3.28$ bulunur ki bu da yarım-dalga dipol antenin yönlülüğünün iki katıdır.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 442

NOTLAR

1. İnce, merkezden beslenmiş, doğrusal antenlerin zamanda harmonik akım dağılımları, yaklaşık olarak uçlarda sıfırlanan sinüzoidal duran dalgalardır.
2. Dikey bir antenin uzak-alanındaki alan şiddeti bileşenleri sadece E_θ ve H_ϕ'dir.
3. Merkezden beslenmiş doğrusal yarım-dalga dipol antenin, ışıma direnci ve yönlülüğü, sırasıyla 73.1 (Ω) ve 1.64'tür.

10-5 ANTEN DİZİLERİ

Anten dizileri

Tek-elemanlı doğrusal antenlerin ışıma örüntülerine baktığımızda ışıma gücünün, geniş hüzmeleri üzerinde dağıldığını görürüz. Bu antenlerin yönlülükleri düşük ve ana hüzmeleri sabit yönlere doğrudur. Bu kısıtlamalar, birden çok antenin değişik biçimlerde (doğru, çember, üçgen ve benzerleri) bir araya getirilmesi ve istenen ışıma karakteristiklerini sağlayacak uygun genlik ve faz ile uyarılması yoluyla aşılır. Anten elemanlarının bu tip düzenlenmesine ise ***anten dizileri*** adı verilir. Bu kısımda, doğrusal anten dizilerinin (ışıma elemanları doğru bir çizgi üzerine yerleştirilmiştir) temel teorisini ve özelliklerini dikkate alacağız. Önce en basit durum olan iki elemanlı dizileri çalışacağız. Yeterince deneyim kazandıktan sonra ise aynı elemanlardan oluşturulmuş birbiçimli doğrusal dizilerin temel özelliklerini inceleyeceğiz.

10-5.1 ANTEN DİZİLERİ

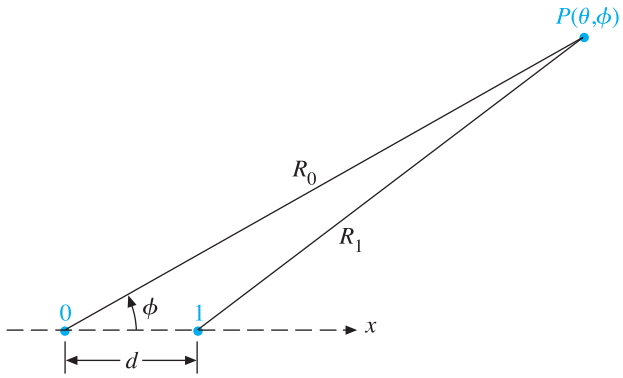
En basit dizi, iki özdeş ışıma elemanının (antenin) birbirinden belirli bir uzaklığa yerleştirilmesi ile oluşur. Şekil 10-6'da bu düzenleme gösterilmiştir. Basitleştirmek için antenlerin x-ekseni boyunca yerleştirildiğini düşünelim ve θ yönünde her bir antenin uzak alandaki elektrik alanını inceleyelim. Antenlerin akımları aynı genliktedir fakat 1. antenin fazı, 0. antene göre ξ açısı kadar ileridedir. $P(\theta, \phi)$ noktasında oluşan elektrik alanlar

$$E_0 = E_m F(\theta, \phi) \frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} \tag{10-48}$$

$$E_1 = E_m F(\theta, \phi) \frac{e^{j\xi} e^{-j\beta R_1}}{R_1} \tag{10-49}$$

olarak yazılabilir. Burada $F(\theta, \phi)$ her bir elemanın örüntü fonksiyonu ve E_m ise genlik fonksiyonudur. İki elemanlı dizinin elektrik alanı E_0 ve E_1'in toplamından oluşacaktır. Böylece

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 443



ŞEKİL 10-6 İki-elemanlı dizi.

$$E = E_0 + E_1 = E_m F(\theta, \phi)\left[\frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} + \frac{e^{j\xi}e^{-j\beta R_1}}{R_1}\right] \tag{10-50}$$

bulunur. Uzak alanda, $R_0 \gg d/2$ geçerlidir ve $1/R_1$ genlik terimi, yaklaşıklıkla $1/R_0$ terimi ile yer değiştirebilir. Ancak üstel terimdeki R_0 ve R_1 terimleri arasındaki küçük farklılıklar, önemli faz farklarına neden olabilir, bu nedenle daha iyi bir yaklaştırma kullanılmalıdır. İki anteni P noktasına birleştiren doğrular neredeyse paralel olduğundan

$$R_1 \cong R_0 - d\sin\theta\cos\phi \tag{10-51}$$

yazabiliriz. Eş. (10-51)'in Eş. (10-50)'de yerleştirilmesi ile

$$E = E_m \frac{F(\theta, \phi)}{R_0} e^{-j\beta R_0}[1 + e^{j\beta d\sin\theta\cos\phi}e^{j\xi}] \tag{10-52}$$

$$= E_m \frac{F(\theta, \phi)}{R_0} e^{-j\beta R_0} e^{j\psi/2}\left(2\cos\frac{\psi}{2}\right)$$

elde edilir. Burada

$$\psi = \beta d\sin\theta\cos\phi + \xi \tag{10-53}$$

dır. Dizinin elektrik alanının genliği ise

$$|E| = \frac{2E_m}{R_0}|F(\theta, \phi)|\left|\cos\frac{\psi}{2}\right| \tag{10-54}$$

olacaktır. Buradaki $|F(\theta, \phi)|$, ***eleman çarpanı*** ve $|\cos(\psi/2)|$ de normlanmış ***dizi çarpanı*** olarak isimlendirilebilir. Eleman çarpanı, bağımsız ışıma elemanlarının örüntü fonksiyonunun genliğidir. Dizi çarpanı, dizi geometrisine bağlı olduğu kadar elemanların göreceli genlik ve faz uyarımlarına da bağlıdır. (İncelediğimiz özel durumda uyarım genlikleri eşittir.)

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 444

Örüntü çarpım ilkesi

Eş. (10-54)'ten, ***aynı elemanlardan oluşan bir dizinin örüntü fonksiyonu, eleman çarpanı ve dizi çarpanının çarpımı ile tanımlanır*** sonucuna varırız. Bu özellik ***örüntü çarpım ilkesi*** olarak bilinir.

ÖRNEK 10-6

İki paralel dipolün, H-düzlemi örüntü fonksiyonunu verilen durumlar için çiziniz: (a) $d = \lambda/2$, $\xi = 0$ ve (b) $d = \lambda/4$, $\xi = -\pi/2$.

ÇÖZÜM

Dipollerin Şekil 10-6'da gösterildiği gibi, z-yönünde olduğunu ve x-ekseni boyunca yerleştirildiğini düşünelim. H-düzleminde ($\theta = \pi/2$) her bir dipol tümyönlüdür ve normlanmış örüntü fonksiyonu, normlanmış dizi çarpanı $|A(\phi)|$'ye eşittir:

$$|A(\phi)| = \left|\cos\frac{\psi}{2}\right| = \left|\cos\frac{1}{2}(\beta d\cos\phi + \xi)\right|.$$

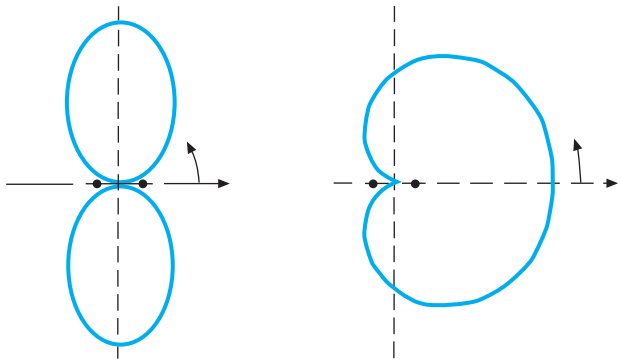
a) $d = \lambda/2$ $(\beta d = \pi)$, $\xi = 0$:

$$|A(\phi)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|. \tag{10-55}$$

Enine ışımalı dizi

Örüntünün en büyük değeri $\phi_0 = \pm\pi/2$'de, dizinin boyuna dik yöndedir. Bu tip diziler ***enine ışımalı dizi*** olarak bilinir. Şekil 10-7(a) bu enine örüntüyü göstermektedir. Dipollerin uyarımları aynı fazlı olduğundan, enine yönde ($\phi = \pm\pi/2$) elektrik alanları toplanır. $\phi = 0$ ve $\phi = \pi$'de $\lambda/2$'lik uzaklık 180°'lik faz farkına neden olduğu için elektrik alanlar birbirini yok eder.

ŞEKİL 10-7 Paralel yerleştirilmiş iki elemanlı dipol dizisinin H-düzlemi örüntüleri.



(a) $d = \lambda/2$, $\xi = 0$ (b) $d = \lambda/4$, $\xi = -\pi/2$

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 445

b) $d = \lambda/4$ ($\beta d = \pi/2$), $\xi = -\pi/2$:

$$|A(\phi)| = \left|\cos\frac{\pi}{4}(\cos\phi - 1)\right|. \tag{10-56}$$

Fonksiyonun en büyük değeri $\phi_0 = 0$'da ve sıfırı ise $\phi = \pi$'dedir. Örüntünün en büyük değeri dizi *boyunca* oluşur ve bu iki dipol ***boyuna ışımalı dizi*** oluşturur. Şekil 10-7(b) boyuna ışıma örüntüsünü göstermektedir. Bu durumda sağ taraftaki dipolün fazı $\pi/2$ kadar gecikir. Bu gecikme $\phi = 0$'da sol taraftaki dipolün elektrik alanından çeyrek devir erken gelişini tamamen telafi eder. Sonuç olarak, $\phi = 0$ yönünde elektrik alanlar birbirine eklenir. $\phi = \pi$ yönünde, sağ taraftaki dipolün fazındaki $\pi/2$'lik gecikmeye çeyrek tur gecikme de eklenince tam anlamı ile alanların birbirini yok etmesi gerçekleşir.

Boyuna ışımalı dizi

ÖRNEK 10-7

$\lambda/2$ aralıklarla yerleştirilmiş üç tane yönbağımsız kaynaktan oluşan doğrusal dizinin ışıma örüntüsünü tartışınız. Kaynakların uyarımları aynı fazdadır ve genliklerinin oranı 1:2:1'dir.

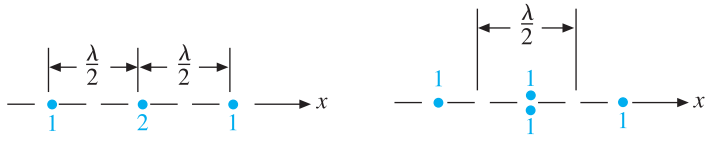
ÇÖZÜM

Bu üç-kaynaklı dizinin eşdeğeri Şekil 10-8'de verildiği gibi birbirinden $\lambda/2$'lik uzaklıkta iki adet iki-elemanlı dizidir. Her bir iki-elemanlı dizi, Eş. (10-55)'te verilen eleman çarpanlı bir yayıcı kaynak olarak düşünülebilir ve dizi çarpanı da aynı eşitliklikle verilmiştir. Örüntü çarpma ilkesi kullanılarak

$$|E| = \frac{4E_m}{R_0}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|^2 = \frac{4E_m}{R_0}|A(\phi)| \tag{10-57}$$

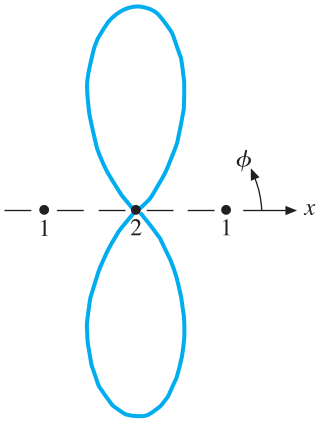
elde edilir. $|A(\phi)| = |\cos[(\pi/2)\cos\phi]|^2$ ile verilen normlanmış dizi fonksiyonu ile gösterilen ışıma örüntüsü Şekil 10-9'da çizilmiştir. Şekil 10-7(a)'da verilen birbiçimli iki elemanlı dizi ile karşılaştırdı-

ŞEKİL 10-8 Üç-elemanlı dizi ve iki-elemanlı dizi çiftinden oluşan eşdeğeri.



(a) Üç-elemanlı binom dizisi. (b) İki adet iki-elemanlı eşdeğeri.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 446



ŞEKİL 10-9 Üç-elemanlı enine binom dizisinin ışıma örüntüsü.

ğımızda, bu üç-elemanlı enine ışıma örüntüsünün daha keskin (daha yönlü) olduğunu görürüz. Her iki örüntü de yan kulakçıksız ve sadece ana hüzmelidir.

Binom dizileri

Üç-elemanlı enine ışımalı dizi, ***binom dizileri*** olarak adlandırılan, yan kulakçıksız diziler sınıfının özel bir durumudur. N elemanlı bir binom dizisinde, dizi çarpanı $(1 + e^{j\psi})^{N-1}$ biçiminde bir binom fonksiyonudur ve uyarım genlikleri ise $\binom{N-1}{n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ biçimindeki binom açılımının katsayılarına göre değişir. $N = 3$ için göreli uyarım genlikleri, Örnek 10-7'deki gibi $\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2$ ve $\binom{2}{2} = 1$'dir. Binom dizilerinde, yankulakçıksız yönlü bir örüntü elde etmek için d normalde $\lambda/2$ ile sınırlanmıştır.

ALIŞTIRMA 10.3

a) Eşfazlı, uzaklıkları $\lambda/3$ olan dört yönbağımsız elemanlı bir binom dizisinin göreli uyarım genlikleri nelerdir?

b) Kaynakların y-ekseni boyunca yerleştirilmiş olduğunu düşünürsek, $\theta = \pi/2$ düzlemindeki normlanmış dizi çarpanını elde ediniz.

CEVAP: (a) 1 : 3 : 3 : 1, (b) $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos\phi\right)\right|^3$.

10-5.2 BİRBİÇİMLİ DOĞRUSAL DİZİLER

Şimdi, birbirine eşit uzaklıkta bir düz çizgi üzerine yerleştirilmiş ve ikiden fazla aynı antenden oluşan bir diziyi inceleyeceğiz. Antenler, eşit genlikli ve hat boyunca düzgün ilerleyen faz kaymaları olan akımlarla beslenmiştir. Bu tip diziye ***birbiçimli doğrusal dizi*** denir. N tane anten elemanının x-ekseni boyunca yerleştirildiği bir örnek, Şekil 10-10'da gösterilmiştir. Anten elemanları aynı olduğu için dizi örüntü çarpanı, eleman çarpanı ile dizi çarpanının çarpımından olu-

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 447

şur. *xy*-düzlemindeki normlanmış dizi çarpanı aşağıdaki gibidir:

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N}|1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi}|. \tag{10-58}$$

Burada

$$\psi = \beta d \cos\phi + \xi \tag{10-59}$$

dir. Eş. (10-58)'in sağ tarafındaki polinom kapalı biçimde

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}}\right|$$

veya

N-elemanlı birbiçimli bir doğrusal dizinin dizi çarpanı

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}\right| \quad \text{(Birimsiz)} \tag{10-60}$$

biçiminde yazılabilir.

Özdeş dizi elemanlarının tümyönlü *H*-düzlemi örüntüleri olduğunu varsayarsak, Eş. (10-60)'ta verilen $|A(\psi)|$'den birkaç önemli özellik çıkarabiliriz.

Ana hüzme
Ψ = 0'da oluşur.

1. *Ana hüzme yönü*: $|A(\psi)|$'nin en büyük değeri $\psi = 0$ durumunda oluşur:

$\beta d \cos \phi_0 + \xi = 0.$

Bu ifade de

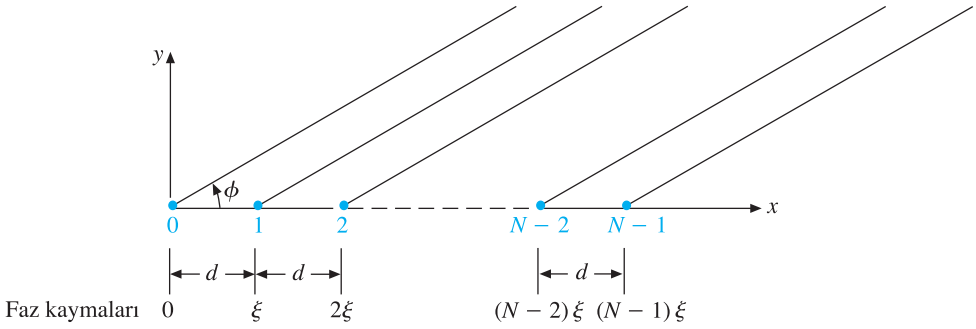
$$\cos\phi_0 = -\frac{\xi}{\beta d} \tag{10-61}$$

demektir.

İki özel durum önemlidir:

a) *Enine ışımalı dizi*: Enine ışımalı dizide, en yüksek ışıma, dizinin bulunduğu hatta dik yönde oluşur. Bu da $\phi_0 = \pm\pi/2$ an-

ŞEKİL 10-10 Genel birbiçimli doğrusal dizi.



+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 448

lamına gelir ve $\xi = 0$ olmasını gerektirir. Bir başka deyişle doğrusal enine ışımalı bir dizinin Örnek 10-6(a)'da olduğu gibi *eş fazlı* uyarılması gerekmektedir.

b) *Boyuna ışımalı dizi*: Bir boyuna ışımalı dizi için, en yüksek ışıma $\phi_0 = 0$'da oluşur. Eş. (10-61)'den

$$\xi = -\beta d \cos \phi_0 = -\beta d$$

elde edilir. Birbiçimli doğrusal bir dizinin ana hüzmesinin yönü, ilerleyen faz kaymalarının değiştirilmesi ile değiştirilebilir (taratılabilir). Ana hüzmenin elektronik olarak taratılabilmesi için faz kaydırıcılar ile donatılmış anten dizilerine *fazlı diziler* ismi verilir.

Fazlı diziler

Yankulakçıklar

2. *Yankulakçık yerleri*. Yankulakçıklar ana hüzmenin dışındaki diğer maksimumlardır. Eş. (10-60)'ın sağ tarafının paydasının yaklaşık olarak en büyük olduğu, yani $|\sin(N\psi/2)| = 1$ olduğu yerde oluşur:

$$\frac{N\psi}{2} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Birinci yankulakçık ise

$$\frac{N\psi}{2} = \pm\frac{3}{2}\pi, \qquad (m = 1). \tag{10-62}$$

durumunda oluşur. Burada $N\psi/2 = \pm\pi/2$ ($m = 0$)'nin halâ anahüzme bölgesinde olduğu ve yankulakçık yeri olmadığına dikkat edilmelidir.

3. *Birinci yankulakçık seviyesi*. Bir dizinin ışıma örüntüsünün önemli bir karakteristiği, bütün yankulakçıkların en yükseği olan birinci yankulakçığın ana hüzmeye kıyasla seviyesidir. Işıyan gücün anahüzme yönünde yoğunlaşması ve yankulakçık bölgelerine dağılmaması için yan kulakçık seviyeleri mümkün olan en düşük seviyede tutulmalıdır. Eş. (10-62)'yi Eş. (10-59)'da yerleştirirsek, birinci yankulakçık genliğini büyük N değerleri için

$$\frac{1}{N}\left|\frac{1}{\sin(3\pi/2N)}\right| \cong \frac{1}{N}\left|\frac{1}{3\pi/2N}\right| = \frac{2}{3\pi} = 0.212$$

olarak buluruz. Çok elemanlı, birbiçimli doğrusal anten dizisinin birinci yankulakçığının seviyesi logaritmik olarak ana hüzme seviyesinden $20\log_{10}(1/0.212)$ veya 13.5 (dB) daha düşüktür. N yeterince büyükse, bu sayı N'den neredeyse bağımsızdır. (Küçük N değerleri için yankulakçık seviyeleri daha yüksektir.)

Uca doğru azalan genlik uyarımları dizi yankulakçık seviyelerini düşürür.

Bir doğrusal dizinin ışıma örüntüsünde yankulakçık seviyesinin düşürülmesinin bir yolu, anten elemanlarının akım dağılımlarını uca doğru azaltmaktır. Bir başka deyişle, elemanların merkezde olanlarının uyarım genliklerini uçlardakinden daha yüksek yapmaktır (Problem P.10-14).

ALIŞTIRMA

$d = \lambda/2$ olan beş-elemanlı doğrusal dizinin dizi örüntüsünün birinci yan-

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 449

kulakçıklarının yerini ve seviyesini,
a) enine ışımalı ve
b) boyuna ışımalı çalışması
için bulunuz.

CEVAP: (a) $\phi = \pm 53.1$ ve $\phi = \pm 126.9°$'de -12.1 (dB),
(b) $\phi = \pm 66.4°$'de -12.1 (dB).

ÖRNEK 10-8

$\lambda/2$ aralıklı, beş-elemanlı birbiçimli doğrusal dizinin (a) enine ışımalı çalışması ve (b) boyuna ışımalı çalışması durumunda ana hüzme genişliğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Ana hüzme genişliği, en yüksek ışımanın olduğu yönün her iki tarafındaki birinci örüntü sıfırları arasındaki bölgedir. Dizi örüntüsünün birinci sıfırları ψ_{01}'de oluşur (Eş. (10-60)'a bakınız) ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{N\psi_{01}}{2} = \pm\pi . \tag{10-63}$$

Bu örnekte, $\psi_{01} = \pm 2\pi/5 = \pm 0.4\pi$'dir. ψ'daki ξ'nin enine ve boyuna ışımalı diziler için değişik değerler alması nedeniyle ϕ'deki ilgili sıfır noktalarının farklı olacağı açıktır.

a) *Enine ışıma*. $\xi = 0$, $\psi = \beta d \cos\phi = \pi \cos\phi$. Birinci sıfırlar için $\pi \cos\phi_{01} = \pm 0.4\pi$ 'dir ve buradan

$$\phi_{01} = \cos^{-1}(\pm 0.4)$$

elde edilir. Artı işareti aldığımızda $\phi_{01} = \pm 66.4°$ olacaktır. Eksi işareti aldığımızda ise $\phi_{01} = \pm 113.6°$'dir. Enine ışımalı dizinin ana hüzmesi $\phi_0 = \pm 90°$'dedir. Bu durumda ana hüzme genişliği $113.6° - 66.4° = 47.2°$ olarak bulunur.

b) *Boyuna ışıma*. $\xi = -\beta d$, $\psi = \beta d(\cos\phi - 1) = \pi(\cos\phi - 1)$. Birinci sıfırlar için $\pi(\cos\phi_{01} - 1) = -0.4\pi$ [(1)]'dir ve buradan

$$\phi_{01} = \cos^{-1} 0.6 = \pm 53.1°$$

elde edilir. Bu durumda ana hüzme ($\phi_0 = 0°$) genişliği, $2 \times 53.1° = 106.2°$'dir.

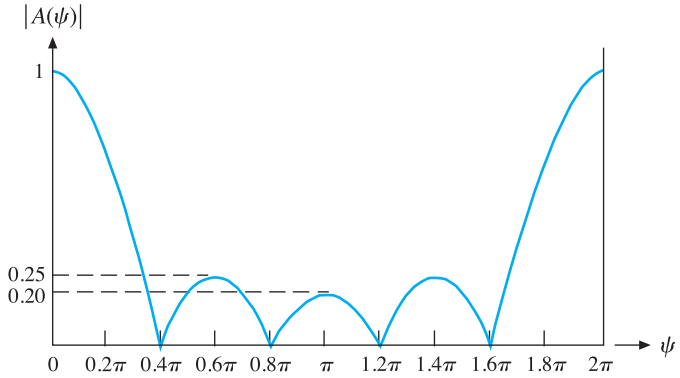
Boyuna ışımalı dizinin ana hüzmesi, karşılık gelen enine ışımalı dizininkinden daha geniştir.

Boyuna ışımalı dizinin ana hüzmesinin, karşılık gelen enine ışımalı diziden çok daha geniş olduğunu görmekteyiz.

Eş. (10-60)'taki normlanmış dizi çarpanının tipik bir grafiği, $N = 5$ için Şekil 10-11'de, ψ'ya karşı $|A(\psi)|$'nin çizimi olarak verilmiştir. $\phi = 0$ ile 2π arasındaki (görünür bölgede) azimut açı aralığındaki gerçek normlanmış dizi örüntüsü, ψ ve ϕ arasındaki ilişkiye bağlıdır. Yukarıda gösterdiğimiz gibi:

[(1)] Eş. (10-63)'teki artı işaret, $\cos\phi_{01} = 1.4$'ün çözümü olmadığından burada kullanılamaz.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 450



ŞEKİL 10-11 Beş-elemanlı birbiçimli doğrusal dizinin normlanmış dizi çarpanı.

a) Enine ışımalı dizi için, $\phi_{01} = \pm\pi/2, \xi = \beta d\cos\phi$'dir. (10-64a)

b) Boyuna ışımalı dizi için, $\phi_0 = 0, \xi = \beta d(\cos\phi - 1)$'dir. (10-64b)

Eş. (10-64a) ve Eş. (10-64b)'deki farklı dönüşümler, aynı dizi çarpanı için ϕ'ye karşı farklı dizi örüntüleri oluşturur.

■ **ALIŞTIRMA 10.5**

$d = \lambda/2$ olan beş-elemanlı birbiçimli enine ışımalı dizi için ϕ, 0'dan π'ye değiştiğinde normlanmış dizi örüntüsü $|A(\phi)|$'yi Şekil 10-11'i kullanarak

a) doğrusal çizim ve

b) kutupsal çizim

olarak veriniz.

■ **ALIŞTIRMA 10.6**

$d = \lambda/2$ olan beş-elemanlı birbiçimli boyuna ışımalı dizi için ϕ, $-\pi/2$'den $+\pi/2$'ye değiştiğinde normlanmış dizi örüntüsü $|A(\phi)|$'yi Şekil 10-11'i kullanarak

a) doğrusal çizim ve

b) kutupsal çizim

olarak veriniz.

TEKRAR SORULARI

S.10-16 Aynı giriş gücü ile beslenen tek elemanlı antenlere göre anten dizilerinin en büyük avantajı nedir?

S.10-17 Bir dizinin *normlanmış dizi çarpanının* anlamı nedir? Bağımsız antenlerin örüntü fonksiyonlarından farkı nedir?

S.10-18 *Örüntü çarpım ilkesini* ifade ediniz.

S.10-19 *Enine ışımalı dizi* ile *boyuna ışımalı dizinin* birbirinden farklılığını ifade ediniz.

S.10-20 Binom dizisi nedir? Altı-elemanlı binom dizisinin göreli uyarım genlikleri nelerdir?

S.10-21 Bütün doğrusal binom dizilerinin ışıma örüntüleri yankulakçıksız mıdır? Açıklayınız.

S.10-22 *Birbiçimli doğrusal dizi* ne anlama gelir?

S.10-23 *Fazlı dizi* nedir?

S.10-24 Çok elemanlı, birbiçimli doğrusal bir dizinin ışıma örüntüsünde, birinci yankulakçıklar ana hüzmeden kaç desibel aşağıdadır?

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 451

NOTLAR

1. Örüntü çarpım ilkesi sadece aynı elemanlardan oluşan dizilere uygulanır.
2. Enine ışımalı dizinin elemanları aynı fazlı beslenir.
3. Boyuna ışımalı dizinin ışıma elemanının fazı, genellikle $(2\pi/\lambda)$'nın en büyük ışıma yönüne yerleştirilen elemanın uzaklığı ile çarpımı kadar bir miktarda gecikir.[1]
4. Enine ışımalı dizi, karşılık gelen boyuna ışımalı diziden daha dar ana hüzmeye ve daha yüksek yönlülüğe sahiptir.
5. Uçlara doğru azalan genlik dağılımı olan bir doğrusal dizinin ışıma örüntüsündeki yankulakçık seviyesi, karşılık gelen birbiçimli genlik dağılımlı diziden daha düşüktür.

10-6 ETKİN ALAN VE GERİ SAÇILIM KESİT ALANI

Antenler ve anten dizilerini verici modda tartıştık. Verici modda, bir gerilim kaynağı, antenin giriş terminallerine uygulanır ve anten üzerinde yükleri ve akımları oluşturur. Zamanla değişen akımlar ve yükler, enerji ve/veya bilgiyi taşıyan elektromanyetik dalga olarak yayılır. Bir verici anten, bir kaynağın (üretecin) enerjisini elektromanyetik enerjiye dönüştüren bir aygıt olarak düşünülebilir. Bir alıcı anten ise gelen elektromanyetik dalgadan enerji elde eden ve bunu yüke yollayandır. Karşılıklılık ilkesi ışığında, aşağıdaki sonuçlara ulaşmak mümkündür:

Alıcı ve verici moddaki antenler için karşılıklılık ilkesi

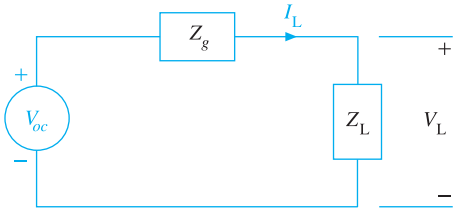
1. Alıcı modda bir antenin eşdeğer üreteç empedansı, verici moddaki antenin giriş empedansına eşittir.
2. Alıcı konumundaki bir antenin yönlülük örüntüsü ile verici modundaki aynıdır.

Biz bu sonuçları kabul edeceğiz.

Bir verici kaynağa bağlaşmış bir alıcı anten için, alıcı ucundaki yaklaşık Thevenin eşdeğer devresi Şekil 10-12'de gösterilmiştir. Burada V_{oc}, alıcı antende indüklenen açık-devre gerilimidir. Z_g, alıcı

[1] Boyuna ışımalı bir dizinin uyarım fazları, özel yöntemlerle ayarlanarak dizi yönlülüğü iyileştirilebilir. (Bakınız. D.K. Cheng and P.D. Raymond, Jr., "Optimization of array directivity by phase adjustments, "*Electronics Letters*, 7, s. 552-553, 9 Eylül, 1971.)

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 452



ŞEKİL 10-12 Alıcı anten ile yük için Thevenin eşdeğer devresi.

modundaki antenin eşdeğer üreteç iç empedansıdır (verici modundaki girip empedansına eşittir) ve Z_L de yük empedansıdır. Alıcı antenlerin performansını belirlemek için bu eşdeğer devreyi kullanacağız.

10-6.1 ETKİN ALAN

Bir alıcı antenin etkin alanı

Alıcı antenleri tartışmak için ***etkin alan*** olarak adlandırılan niceliği tanımlamak gerekir.[1] Bir alıcı antenin etkin alanı A_e, *uyumlanmış yüke* gönderilen ortalama güç P_L'nin, antene gelen elektromanyetik dalganın zamanda-ortalama güç yoğunluğu $\mathcal{P}_{av}$'ye oranıdır:

$$A_e = \frac{P_L}{\mathcal{P}_{av}} \quad (\text{m}^2). \tag{10-65}$$

Empedansın uyumlandırıldığı durumda

$$Z_L = Z_g^* = Z_i^* \tag{10-66}$$

olacaktır. Verici modunda kayıplar ihmal edildiğinde anten giriş empedansı Z_i ise

$$Z_i = R_r + jX_i \tag{10-67}$$

biçiminde yazılabilir. Burada R_r ışıma direncidir. Şekil 10-12'deki indüklenen açık-devre gerilimi V_{oc}, Eş. (10-66) ve Eş. (10-67) göz önüne alındığında $2R_r$ toplam direnci üzerinde görülecektir ve uyumlanmış yüke yollanan ortalama güç ise

$$P_L = \frac{1}{2}\left\{\frac{|V_{oc}|}{2R_r}\right\}^2 R_r = \frac{|V_{oc}|^2}{8R_r} \tag{10-68}$$

olacaktır. Alıcı antendeki elektrik alan şiddetinin genliğini E_i ile gösterelim. Bu durumda, alıcı taraftaki zamanda-ortalama güç yoğunluğu

[1] ***Etkin açıklık*** veya ***alıcı kesit alanı*** da denir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 453

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{E_i^2}{2\eta_0} = \frac{E_i^2}{240\pi} \tag{10-69}$$

dir ve P_L ile $\mathscr{P}_{av}$'nin oranı etkin alanı verir.

ÖRNEK 10-9

λ dalga boyundaki gelen düzlem elektromanyetik dalgayı almak için kullanılan, $d\ell$ ($\ll\lambda$) boyunda elektrik dipol elemanının etkin alanı $A_e(\theta)$'yi bulunuz. Gelen elektromanyetik alanın yönü ile dipol ekseninin θ açısını yaptığını kabul ediniz.

ÇÖZÜM

E_i dipol üzerindeki elektrik alan şiddetinin genliği olsun. İndüklenen açık devre gerilimi

$$V_{oc} = E_i\, d\ell \sin\theta \tag{10-70}$$

olacaktır. Eş. (10-25)'ten elektrik dipol elemanının ışıma direncini

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \tag{10-71}$$

biçiminde yazabiliriz. Eş. (10-70)'teki V_{oc}'yi ve Eş. (10-71)'deki R_r'yi, Eş. (10-68)'de yerleştirdiğimizde

$$P_L = \frac{E_i^2}{640\pi^2} (\lambda \sin\theta)^2 \tag{10-72}$$

elde ederiz. Eş. (10-65)'te Eş. (10-69) ve Eş. (10-72)'yi yerleştirdiğimizde ise elektrik dipol elemanının (Hertz dipolü) etkin alanını elde ederiz:

Hertz dipolünün etkin alanı

$$A_e = \frac{3}{8\pi} (\lambda \sin\theta)^2. \tag{10-73}$$

Örnek 10-2'deki Eş. (10-19)'u hatırlarsak, bir Hertz dipolünün yönlü kazancı

$$G_D(\theta, \phi) = \tfrac{3}{2} \sin^2\theta \tag{10-74}$$

dır. Empedans uyumlandırılmış bir anten için aşağıdaki ilişkiyi yazabiliriz:

Bir antenin etkin alanı ve yönlü kazancı arasındaki ilişki

$$\boxed{A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_D(\theta, \phi) \quad (\text{m}^2).} \tag{10-75}$$

Eş. (10-75)'teki A_e ve G_D arasındaki ilişkinin genelde bütün antenler için geçerli olduğu kanıtlanabilir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 454

■ **ALIŞTIRMA 10.7**

3 (GHz)'de bir Hertz dipolünün en yüksek etkin alanını hesaplayınız.

CEVAP: 11.9 (cm^2).

10-6.2 GERİ SAÇILIM KESİT ALANI

Bundan önceki kısımda gördüğümüz gibi, etkin alan kavramı, gelen güç yoğunluğunun alıcı antenin uyumlu yükünde oluşturduğu güç ile ilgilidir. Bir başka durum ise gelen alandan enerji elde etme amacı olmayan pasif bir cisme, gelen alanın ulaşmasıdır. Pasif cismin varlığı, saçılan alana neden olacaktır ve biz de buradan ***geri saçılım kesit alanı*** veya ***radar kesit alanını*** tanımlayabiliriz. Saçıcının üzerindeki güç yoğunluğunun bir alan üzerinde toplandığını ve sonra toplanan gücün yönbağımsız olarak ışıdığını kabul edelim. Bu durumda alıcıdaki güç yoğunluğunu baştaki ile aynı yapacak büyüklükteki alana radar kesit alanı denir.

Geri saçılım kesit alanı (radar kesit alanı)

$\mathscr{P}_i$ = Cisme ulaşan zamanda-ortalama gelen güç yoğunluğu (W/m^2)

P_s = Alıcı tarafındaki zamanda-ortalama saçılan güç yoğunluğu (W/m^2)

σ_{bs} = Geri saçılım kesit alanı (m^2) ve

r = saçıcı ve alıcı arasındaki uzaklık (m)

olarak tanımlanırsa

$$\frac{\sigma_{bs}\mathscr{P}_i}{4\pi r^2} = \mathscr{P}_s$$

olur ve

$$\sigma_{bs} = 4\pi r^2 \frac{\mathscr{P}_s}{\mathscr{P}_i} \quad (m^2) \tag{10-76}$$

yazılabilir. Büyük r değerleri için P_s, r^2 ile ters orantılıdır ve σ_{bs}, r ile değişmez.

Radar

Geri saçılım kesit alanı, cismin (hedefin), ***radar*** (***ra***dio ***d***etection ***a***nd ***r***anging) tarafından algılanabilmesinin bir ölçüsüdür ve radar kesit alanı terimi de buradan türemiştir. Radar kesit alanı cismin yüzey durumuna, elektriksel parametrelerine, nasıl durduğuna ve geometrisine, gelen dalganın frekans ve polarizasyonuna bağlı karma bir ölçüttür. Hayalet uçak, geri saçılım veya radar kesit alanı olağanüstü küçük olan bir tasarımdır.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 455

10-7 FRIIS İLETİM FORMÜLÜ VE RADAR DENKLEMİ

Şimdi, alıcı ve verici antenler arasındaki güç iletim ilişkisini inceleyeceğiz. Bir iletişim bağının, etkin alanları, sırasıyla, A_{e1} ve A_{e2} olan antenleri bulunan istasyon 1 ve istasyon 2 arasında kurulduğunu düşünelim. Antenlerin birbirinden uzaklığı r'dir. Gönderilen ve alınan güçler arasındaki ilişkiyi bulmak istemekteyiz.

P_t, yönlü kazancı G_{D1} olan 1. anten tarafından yayılan toplam güç olsun. r kadar uzaktaki 2. antendeki ortalama güç yoğunluğu

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_{D1} \tag{10-77}$$

olacaktır. Eğer 2. antenin etkin alanı A_{e2} ise, uyumlu bir yüke ulaşan P_L gücü (bakınız Eş. (10-65)),

$$P_L = A_{e2}\mathscr{P}_{av} \tag{10-78}$$

dir. Eş. (10-77) ve Eş. (10-78)'in birleştirilmesi ve Eş. (10-75)'in kullanılması ile

$$\frac{P_L}{P_t} = \left(\frac{A_{e2}}{4\pi r^2}\right) G_{D1} = \left(\frac{A_{e2}}{4\pi r^2}\right)\left(\frac{4\pi A_{e1}}{\lambda^2}\right)$$

veya

Friis iletim formülü

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{A_{e1}A_{e2}}{r^2\lambda^2}} \tag{10-79}$$

denklemini elde ederiz. Eş. (10-79)'daki denklem ***Friis iletim formülü*** olarak bilinir. Verilen bir iletilen güç değeri için alınan güç, verici ve alıcı antenlerin etkin alanlarının çarpımı ile doğru orantılı, aralarındaki uzaklık ve dalga boyunun karelerinin çarpımı ile ters orantılıdır.

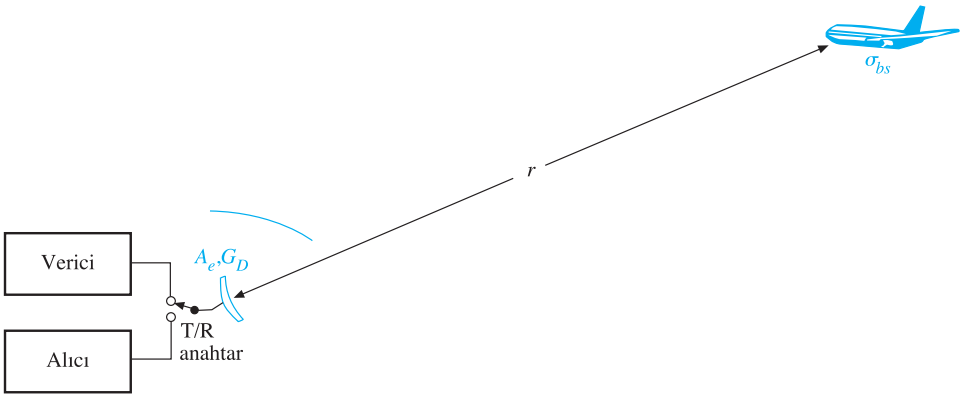
Eş. (10-75)'i kullanırsak, Friis iletim formülünü aşağıdaki gibi bir başka biçimde de yazabiliriz:

Friis iletim denkleminin bir başka biçimi

$$\boxed{\frac{P_L}{P_t} = \frac{G_{D1}G_{D2}\lambda^2}{(4\pi r)^2}.} \tag{10-80}$$

Eş. (10-79) ve Eş. (10-80)'deki alınan güç, P_L, uyumlama durumunda ve antenin kendi üzerindeki güç tüketimi ihmal edilmiş olarak yazılmıştır. Ayrıca alıcı ve verici antenlerin birbirlerinin uzak alanında olduğu da kabul edilmiştir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 456



ŞEKİL 10-13 Monostatik radar sistemi.

Şimdi, Şekil 10-13'de verilen, aynı anteni hem zamanda-harmonik yayılımı dar darbeler halinde göndermek, hem de bir hedeften geri saçılan enerjiyi almak için kullanan bir radar sistemini inceleyeceğiz.[1] P_t iletilen gücü için, r kadar uzaktaki bir hedef üzerindeki güç yoğunluğu (bkz. Eş. (10-77))

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_D(\theta, \phi) \tag{10-81}$$

dir. Burada $G_D(\theta, \phi)$ antenin hedef yönündeki yönlü kazancıdır. σ_{bs}, hedefin geri saçılım veya radar kesit alanı olarak tanımlanırsa, yönbağımsız saçılan eşdeğer güç, $\sigma_{bs}\mathscr{P}_{av}$'dir ve bunun da anten üzerinde oluşturduğu güç yoğunluğu $\sigma_{bs}\mathscr{P}_{av}/4\pi r^2$ olur. Antenin etkin alanını A_e olarak tanımlarsak, alınan güç için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$P_{\mathrm{L}} = A_e \sigma_{bs} \frac{\mathscr{P}_{av}}{4\pi r^2}$$

$$= A_e \sigma_{bs} \frac{P_t}{(4\pi r^2)^2} G_D(\theta, \phi). \tag{10-82}$$

Eş. (10-75)'i kullanırsak, Eş. (10-82)

Radar denklemi

$$\frac{P_{\mathrm{L}}}{P_t} = \frac{\sigma_{bs}\lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} G_D^2(\theta, \phi) \tag{10-83}$$

biçimini alır ve ***radar denklemi*** olarak adlandırılır. Yönlü kazanç $G_D(\theta, \phi)$ yerine antenin etkin alanı A_e cinsinden radar denklemini yazarsak da

[1] Ortak bir anteni verici ve alıcı olarak aynı alanda T/R anahtarı aracılığı ile kullanan bir radar sistemi monostatik radar olarak isimlendirilir.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 457

Radar denkleminin alternatif biçimi

$$\frac{P_L}{P_t} = \frac{\sigma_{bs}}{4\pi}\left(\frac{A_e}{\lambda r^2}\right)^2 \tag{10-84}$$

denklemini elde ederiz. Radar sinyalleri, antenden hedefe ve oradan da tekrar antene geri döndüğü için alınan güç, antenden hedefe olan uzaklık r'nin dördüncü kuvveti ile ters orantılıdır. Pratikte, hedeften saçılan ve alıcı antene ulaşan gücün bir kısmı, yansır veya tekrar saçılır. Bu nedenle P_L, Eş. (10-84)'te verilenden biraz düşüktür.

Yerdurağan uydular

Bir uydu iletişim sistemi, dünyanın ekvator düzlemindeki yörüngesi üzerinde hareket eden uyduları kullanır. Uyduların hızı ve yörüngelerin yarıçapları, uyduların dünya etrafındaki dönme periyotları ile dünyanın periyodu aynı olacak şekildedir. Böylece uydular, dünya yüzeyine göre durağandırlar ve bunlara yerdurağan uydu denir. Yere eşzamanlı yörüngenin yarıçapı 42,300 (km)'dir. 6380 (km)'lik dünya yarıçapını düşünürsek, uydular yeryüzünden 36,000 (km) uzaktadırlar.

Sinyaller, bir yer istasyonundaki yüksek kazançlı anten tarafından uyduya doğru gönderilir. Uydu sinyalleri alır, yükseltir ve farklı bir frekansta yer istasyonuna geri yollar. Üç uydu, yere eşzamanlı yörünge üzerine, kutup bölgesi dışındaki bütün dünya yüzeyini kapsayacak biçimde eşit aralıklarla yerleştirilebilir (bkz. Problem P.10-21). Bir uydu iletişiminde anten gücü ile kazancı arasındaki ilişkilerin nicel çözümlemesi, Friis iletim denkleminin yer-uydu bağı (yer istasyonundan uyduya) için bir kez ve uydu-yer bağı (uydudan yer istasyonuna) için bir kez olmak üzere iki kez uygulanmasını gerektirir.

ÖRNEK 10-10

Bir mikrodalga hattı, 300 (MHz) frekansta 10 millik bir mesafe için, her birinin yönlü kazancı 30 (dB) olan iki özdeş parabol yansıtıcı ile oluşturulmuştur. Verici anten 500 (W) güç yaymaktadır. Kayıpları ihmal ederek aşağıdakileri bulunuz: a) Alınan güç ve b) alıcı antendeki elektrik alan şiddetinin genliği.

ÇÖZÜM

a) Öncelikle 30 (dB)'lik logaritmik yönlü kazancı rakam olarak ifade edelim:

$$10 \log_{10}(G_D) = 30 \text{ (dB)},$$

$$G_D = 10^3 = 1{,}000.$$

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 458

$$r = 10 \times 1609 = 1.609 \times 10^4 \text{(m)}, \quad \lambda = \frac{3 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 1 \text{ (m)'dir.}$$

Eş. (10-80)'i kullanırsak

$$P_{\text{L}} = P_t \left(\frac{G_D \lambda}{4\pi r}\right)^2$$

$$= 500 \left(\frac{1000 \times 1}{4\pi \times 1.609 \times 10^4}\right)^2$$

$$= 12.23 \times 10^{-3} \text{(W)} = 12.23 \text{ (mW)}$$

olarak bulunur.

b) Eş. (10-77) ve Eş. (10-69)'dan

$$\mathscr{P}_{av} = \frac{P_t G_D}{4\pi r^2} = \frac{E_i^2}{240\pi} \quad \text{ve buradan da}$$

$$E_i = \frac{1}{r}\sqrt{60 P_t G_D}$$

$$= \frac{1}{1.609 \times 10^4}\sqrt{60 \times 500 \times 1000} = 0.341 \text{ (V/m)}$$

elde edilir.

ÖRNEK 10-11

3 (GHz)'de çalışan bir radar sisteminin anteni 50 (kW) ile beslenmiş olsun. Antenin etkin alanı 4 (m^2) ve ışıma verimi %90'dır. Minimum sezilebilen sinyal gücü (alıcı sistemi ve çevreden kaynaklanan gürültü üzerindeki) 1.5 (pW) ve alıcı konumundaki antenin güç yansıma katsayısı 0.05'tir. Geri saçılma kesit alanı 1 (m^2) olan bir hedefin bu radar tarafından sezilebileceği en büyük kullanılabilir uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM

$f = 3 \times 10^9$(Hz)'de $\lambda = 0.1$(m)'dir.

$A_e = 4 \quad (\text{m}^2)$,

$P_t = 0.90 \times 5 \times 10^4 = 4.5 \times 10^4 \quad (\text{W})$,

$$P_{\text{L}} = 1.5 \times 10^{-12}\left(\frac{1}{1 - 0.05}\right) = 1.58 \times 10^{-12} \quad (\text{W}),$$

$\sigma_{bs} = 1 \quad (\text{m}^2)$ bulunur.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 459

Eş. (10-84)'ten

$$r^4 = \frac{\sigma_{bs} A_e^2}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{P_t}{P_L}\right)$$

ve

$$r = 4.20 \times 10^4 \text{ (m)} = 42 \quad \text{(km)}$$

elde edilir.

■ **ALIŞTIRMA 10.8**

Örnek 10-11'deki radar sistemi için aşağıdakileri hesaplayınız.

a) Geri saçılma kesit alanı 0.2 (m^2) olan bir hedef için maksimum sezilme uzaklığı.

b) 42 (km) uzaklıktaki yeni bir hedefin algılanması için gerekli yeni bir antenin (dB) olarak yönlülüğü.

c) (dB) olarak baştaki durumdaki toplam iletim kaybı.

CEVAP: (a) 28.1 (km), (b) 40.5 (dB), (c) 155.2 (dB).

TEKRAR SORULARI

S.10-25 Verici ve alıcı modlarında çalışan antenlere ilişkin karşılıklılık ilkesinin önemli sonucu nedir?

S.10-26 Bir antenin *etkin alanını* tanımlayınız.

S.10-27 Bir cismin *geri saçılım alanını* tanımlayınız.

S.10-28 *Radar*ın çalışma ilkesini açıklayınız.

S.10-29 Antenlerin etkin alanları cinsinden *Friis iletim denklemi* neyi ifade etmektedir?

NOTLAR

1. Bir antenin etkin alanı ve yönlü kazancı arasındaki oran, evrensel bir sabittir ve $\lambda^2/4\pi$'ye eşittir.
2. Verilen bir gelen güç yoğunluğu için, uyumlu bir yüke yollanan güç, bir antenin etkin alanı ile (ve dolayısıyla yönlü kazancı ile de) doğru orantılıdır.
3. Etkin alan, antenlerin bir özelliğidir, geri saçılım (radar) kesit alanı ise pasif cisimlerin bir özelliğidir.
4. Verilen bir iletilen güç için, monostatik radar sisteminde alınan güç, hedefin geri saçılım kesit alanı ve antenin yönlü kazancı ile çalışma frekansının çarpımının karesi ile doğru orantılı, hedefe olan uzaklığın dördüncü kuvveti ile ise ters orantılıdır.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 460

ÖZET

Antenler ve anten dizileri, daha önceden tanımlanmış biçimde elektromanyetik enerjiyi etkin olarak yaymak ve/veya almak için kullanılır. Bu bölümde

- kabul edilmiş bir akım dağılımı olan bir antenin yaydığı elektromanyetik alanların belirlenmesinde kullanılan genel yöntemi tartıştık.
- Işıyan bir elektrik (Hertz) dipol elemanının uzak alandaki elektrik ve manyetik alan şiddetlerini bulduk.
- Bir antenin temel ışıma karakteristiklerini (yönlü kazanç, yönlülük, güç kazancı, ışıma direnci, ışıma verimi) tanımladık.
- Genel bir doğrusal antenin, yarım-dalga dipolün ve çeyrek-dalga dipolün örüntü fonksiyonlarını inceledik.
- Aynı elemanlardan oluşan anten dizileri için örüntü çarpma ilkesini açıkladık.
- Binom dizilerinin özelliklerini vurguladık.
- Dizi çarpanının genel özelliklerini, enine ve boyuna ışımalı dizilere özel vurgu yaparak tartıştık.
- Etkin alan ve geri saçılım kesit alanı kavramlarını açıkladık ve
- Friis iletim formülünü ve radar denklemini çıkardık.

PROBLEMLER

P.10-1 Giriş gücü 15 (kW) ve verimi %70 olan bir Hertz dipolünden 10 (km) uzaklıktaki elektrik ve manyetik alan şiddetlerini belirleyiniz.

P.10-2 Bir antenin ışıma şiddeti

$$U(\theta,\ \phi) = \begin{cases} 50\sin^2\theta\cos\phi; & 0 \le \theta \le \pi,\ -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, \\ 0; & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde verilmiştir. (a) Yönlülüğü ve (b) kayıpları ihmal ederek, antenin giriş akımının genliği 2(A) olduğunda ışıma direncini bulunuz.

P.10-3 (a) z-ekseni boyunca uzanan, çok ince ve merkezden beslenmiş yarım-dalga dipolü üzerindeki akımın uzaysal dağılımını $I_0\cos 2\pi z$ kabul ederek, dipol üzerindeki yük dağılımını bulunuz. Dalga boyu nedir? (b) (a) şıkkını dipol üzerindeki akım dağılımının aşağıda verilen üçgen fonksiyonu olması durumunda tekrarlayınız.

$$I(z) = I_0(1 - 4\,|z|)$$

P.10-4 1 (MHz)'lik düzgün bir akım 15 (m) uzunluğundaki bir dikey anten üzerinde akmaktadır. Anten, 2 (cm) yarıçaplı ve merkezden beslenmiş bir bakır çubuktur. Aşağıdakileri bulunuz.

a) Işıma direnci,

b) ışıma verimi ve

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 461

c) antenden ışıyan güç 1.6 (kW) ise 20 (km) uzaklıktaki maksimum elektrik alan şiddeti.

P.10-5 100 (MHz)'de çalışan, 1.5 (m) uzunluğunda, merkezden beslenmiş bir dipolün ışıma verimini belirleyiniz. Dipol, yarıçapı 1 (mm) olan pirinçten yapılmıştır.

P.10-6 $2h$ ($h \ll \lambda$) uzunluğunda, merkezden beslenmiş bir kısa dipol anten üzerindeki zamanda harmonik akım dağılımının genliği, bir üçgen fonksiyonu ile yaklaştırılabilir:

$$I(z) = I_0\left(1 - \frac{|z|}{h}\right).$$

(a) Uzak-alandaki elektrik ve manyetik alan şiddetlerini, (b) ışıma direncini ve (c) yönlülüğü bulunuz.

P.10-7 Bir radyo seyrüsefer sisteminin verici anteni, yeryüzünden izole edilmiş, 40 (m)'lik dikine yerleştirilmiş metal bir direktir. Taşıyıcının tabanındaki bir kaynak, 180 (kHz)'lik 100 (A) genlikte bir akım yollamaktadır. Anten üzerindeki akım genliğinin, doğrusal biçimde azalarak direğin tepesinde sıfırlandığını ve yeryüzünün mükemmel iletken olduğunu varsayarak aşağıdakileri belirleyiniz:

a) Antenden 160 (km) uzaklıktaki maksimum alan şiddeti,

b) zamanda-ortalama ışıma gücü ve

c) ışıma direnci.

P.10-8 $2h/\lambda = 3/2$ ve $2h/\lambda = 2$ boyutlarındaki merkezden beslemeli dipol anten için, sırasıyla, Şekil 10-4(c) ve Şekil 10-4(d)'deki E-düzlemi kutupsal ışıma örüntülerini gerçekleyiniz. (b) θ'ya karşı $F(\theta)$ biçiminde bu örüntüleri doğrusal formda çiziniz. (c) Örüntülerin maksimumlarını gösteren θ_0 açısını kestiriniz.

P.10-9 Bir antenin ışıma örüntüsündeki ana hüzmenin yarı-güç noktaları arasındaki açı, sıklıkla örüntü ***hüzme genişliği*** olarak isimlendirilir. (Yarı-güç noktaları, alan şiddetinin, maksimum ışıma yönündeki değerinin $1/\sqrt{2}$ 'sine indiği noktadır.) (a) Bir Hertz dipolünün ve (b) yarım-dalga dipolün E-düzlemi örüntülerindeki hüzme genişliklerini bulunuz.

P.10-10 Toplam uzunluğu $2h = 1.25\lambda$ olan ince dipol antenin θ'ya karşı kutupsal ışıma örüntüsünü çiziniz. Birinci sıfırlar arasındaki ana hüzme genişliğini belirleyiniz.

P.10-11 Her biri $2h$ ($h \ll \lambda$) boyundaki iki dipol elemanı anten, merkezleri arasındaki uzaklık d ($d > 2h$) olacak şekilde z-ekseninin iki tarafına yerleştirilmiştir. İki antenin uyarımları, eşit genlikli ve fazlıdır.

a) İki elemanlı dipol dizi için genel uzak-alan elektrik alan ifadesini yazınız.

b) $d = \lambda/2$ için normlanmış E-düzlemi örüntüsünü çiziniz.

c) $d = \lambda$ için (b) şıkkını tekrarlayınız.

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 462

P.10-12 İki paralel dipolün *H*-düzlemi kutupsal ışıma örüntüsünü aşağıdaki durumlar için çiziniz.

a) $d = \lambda/4, \xi = \pi/2$; **b)** $d = 3\lambda/4, \xi = \pi/2$.

P.10-13 Beş elemanlı bir binom dizisi için

a) dizi elemanlarının göreceli uyarım genliklerini belirleyiniz.

b) $d = \lambda/2$ için dizi çarpanını çiziniz.

c) Yarı-güç hüzme genişliğini belirleyiniz ve aynı elemanlar arası uzaklığa sahip beş-elemanlı birbiçimli dizininki ile karşılaştırınız.

P.10-14 $\lambda/2$ aralıklarla yerleştirilmiş, uyarım genlikleri oranı 1:2:3:2:1 olan beş yönbağımsız elemandan oluşan enine ışımalı bir dizinin dizi çarpanını bulunuz ve normlanmış ışıma örüntüsünü çiziniz. Birinci yankulakçık seviyesini beş elemanlı birbiçimli dizi ile karşılaştırınız.

P.10-15 Birbirine paralel yarım-dalga dipollerden oluşan $N_1 \times N_2$ boyutlu, birbiçimli uyarılmış dikdörtgen dizinin örüntü fonksiyonunu elde ediniz. Dipollerin z-eksenine paralel yerleştirildiklerini ve merkezlerinin x- ve y-eksenlerinden, sırasıyla, d_1 ve d_2 aralıklarla yerleştirildiğini kabul ediniz.

P.10-16 İnce doğrusal antenlerle uğraşırken, bazen antenin etkin uzunluğu ℓ_e'nin tanımlanması daha uygundur. Etkin uzunluk, akım momentinin, besleme noktasındaki akıma göre normlanarak tanımlanmasıdır. Merkezden beslenmiş, yarı-boyu h olan bir dipol için maksimum etkin uzunluk ($\theta = \pi/2$'de)

$$\ell_e(\pi/2) = \frac{1}{I(0)} \int_{-h}^{+h} I(z)\,dz \tag{10-85}$$

olarak verilir. Aşağıdakilerin etkin uzunluklarını belirleyiniz:

a) $d\ell$ uzunluğudaki bir Hertz dipolü,

b) $I_0 \cos \beta z$ sinüzoidal akım dağılımı olan bir yarım-dalga dipol,

c) $I_0(1 - 4\,|z|/\lambda)$ üçgen akım dağılımı olan bir yarım-dalga dipol.

P.10-17 Eş. (10-85)'de tanımlandığı gibi etkin uzunluğu ℓ_e olan bir dipol anten, dipole paralel gelen elektrik alan E_i'yi almak için kullanıldığında, alıcı devresinde indüklenen açık devre gerilimi $|V_{oc}|$, $|E_i \ell_e|$ çarpımına eşittir. Yarım-dalga dipolün 300 (MHz)'de 2 (kW) yaydığını ve ikinci bir yarım-dalga dipolün birinciye paralel ve birinciden 150 (m) uzağa alıcı anten olarak kullanılmak üzere yerleştirildiğini düşünelim. Kayıpları ihmal ederek, (a) eşdeğer alıcı devresindeki $|V_{oc}|$'yi ve (b) uyumlu bir yükle alınan gücü bulunuz.

P.10-18 (a) İki paralel yarım-dalga dipol 150 (m) aralıkla yerleştirilmiştir. Verici dipol 300 (MHz)'de 2 (kW) yaymaktadır. Eş. (10-80)'i kullanarak alıcı dipolde alınan gücü bulunuz. (b) Her iki anteni de Hertz dipolü olarak düşünerek (a) şıkkını tekrar çözünüz.

P.10-19 Yarı-boyu $\lambda/4$ olan bir simetrik dipol anten için

+10_+10.qxp 5.06.2024 14:25 Page 463

a) etkin alan $A_e(\theta)$ için bir ifade elde ediniz.
b) 100 (MHz) için A_e'nin maksimum değerini hesaplayınız.
c) 200 (MHz) için A_e'nin maksimum değerini hesaplayınız. Burada bulduğunuz sonuç neden (b)'de bulduğunuzdan daha küçüktür?

P.10-20 3 (GHz)'de çalışan 120 (kW)'lık bir monostatik radar anteninin kazancı 20 (dB)'dir. Radar'ın 8 (km) uzaktaki bir hedefi izlediği ve hedefin geri saçılım kesit alanının 15 (m^2) olduğunu varsayalım. Aşağıdakileri bulunuz:

a) Hedefteki elektrik alan şiddetinin genliği,
b) hedef tarafından yolu kesilen gücün miktarı,
c) radarda, anten tarafından soğurulan yansıyan güç miktarı.

P.10-21 (a) Ekvator düzlemindeki yere eşzamanlı yörünge üzerinde eşit uzaklıkla yerleştirilmiş üç uydunun neredeyse bütün yeryüzünü kapsadığını gösteriniz. Neden kutup bölgelerinin kapsanmadığını açıklayınız. (b) Uydu anteninin ana hüzmesinin yeryüzünü taşma olmadan kapsayacak şekilde çember kesitli koni biçiminde olduğunu varsayarak, antenin ana-hüzme genişliği ve antenin yönlü kazancı arasındaki ilişkiyi bulunuz.

P.10-22 Bir uydu iletişim bağındaki yer istasyon anteninin 14 (GHz)'deki kazancı 55 (dB)'dir. Bu anten 36,500 (km) uzaktaki yerdurağan uyduya yönlenmiştir. Uydudaki antenin kazancını 35 (dB) ve yer istasyonuna geri yolladığı sinyalin frekansını ise 12 (GHz) olarak kabul ediniz. Minimum kullanılabilen sinyal 8 (pW)'tır.

a) Antenin direnil ve empedans uyumsuzluğu kayıplarını ihmal ederek, uydunun yollaması gereken minimum gücü bulunuz.
b) Yer istasyonundan, uydunun bir pasif cisim olarak algılanabilmesi için yollanması gereken darbe gücünün tepe değerini bulunuz. Uydunun geri saçılım kesit alanının güneş panelleri dahil 25 (m^2) ve minimum algılanabilecek geri dönen darbe gücü değerini ise 0.5 (pW) olarak kabul ediniz.

Ek A

SEMBOLLER VE BİRİMLER

Nicelik	Sembolü	Birimi	Kısaltması
Uzunluk	ℓ	metre	m
Kütle	m	kilogram	kg
Zaman	t	saniye	s
Akım	I, i	amper	A

(1) Uluslararası Ağırlıklar ve Ölçüler Komisyonu'nun kabul ettiği SI, uzunluk, kütle, zaman ve akımın yanı sıra iki temel birimi daha içerir. Bunlar termodinamik sıcaklık için Kelvin derecesi (K) ve aydınlanma şiddeti için kandela (cd) birimleridir.

A-2 ÇIKARILAN NİCELİKLER

Nicelik	Sembolü	Birimi	Kısaltması
Admitans	Y	siemens	S
Açısal frekans	ω	radyan/saniye	rad/s
Zayıflama sabiti	α	neper/metre	Np/m
Kapasitans	C	farad	F
Yük	Q, q	coulomb	C
Yük yoğunluğu (doğrusal)	ρ_ℓ	coulomb/metre	C/m
Yük yoğunluğu (yüzey)	ρ_s	coulomb/metre^2	C/m^2
Yük yoğunluğu (hacim)	ρ_v	coulomb/metre^3	C/m^3
İletkenlik	G	siemens	S
Öz iletkenlik	σ	siemens/metre	S/m
Akım yoğunluğu (yüzey)	$\mathbf{J}_s$	amper/metre	A/m
Akım yoğunluğu (hacim)	$\mathbf{J}$	amper/metre^2	A/m^2
Dielektrik sabiti (bağıl geçirgenlik)	ϵ_r	(birimsiz)	—
Yönlülük	D	(birimsiz)	—
Elektrik dipol momenti	$\mathbf{p}$	coulomb-metre	C · m
Elektrik yerdeğiştirme (elektrik akı yoğunluğu)	$\mathbf{D}$	coulomb/metre^2	C/m^2
Elektrik alan şiddeti	$\mathbf{E}$	volt/metre	V/m
Elektrik potansiyel	V	volt	V
Elektrik hassasiyet	χ_e	(birimsiz)	—
Elektromotiv kuvvet	$\mathcal{V}$	volt	V
Enerji (iş)	W	joule	J
Enerji yoğunluğu	w	joule/metre^3	J/m^3
Kuvvet	$\mathbf{F}$	newton	N
Frekans	f	hertz	Hz
Empedans	Z, η	ohm	Ω
Endüktans	L	henry	H
Manyetik dipol momenti	$\mathbf{m}$	amper-metre^2	A · m^2
Manyetik alan şiddeti	$\mathbf{H}$	amper/metre	A/m

Nicelik	Sembolü	Birimi	Kısaltması
Manyetik akı	Φ	weber	Wb
Manyetik akı yoğunluğu	$\mathbf{B}$	tesla	T
Manyetik vektör potansiyeli	$\mathbf{A}$	weber/metre	Wb/m
Manyetik hassasiyet	χ_m	(birimsiz)	—
Mıknatıslanma	$\mathbf{M}$	amper/metre	A/m
Manyetomotiv kuvvet	$\mathcal{V}_m$	amper	A
Manyetik geçirgenlik	μ, μ_0	henry/metre	H/m
Elektrik geçirgenlik	ϵ, ϵ_0	farad/metre	F/m
Faz	ϕ	radyan	rad
Faz sabiti	β	radyan/metre	rad/m
Kutuplanma vektörü	$\mathbf{P}$	coulomb/metre^2	C/m^2
Güç	P	watt	W
Poynting vektörü (güç yoğunluğu)	$\mathcal{P}$	watt/metre^2	W/m^2
Yayılma sabiti	γ	metre^{-1}	m^{-1}
Işıma şiddeti	U	watt/steradyan	W/sr
Reaktans	X	ohm	Ω
Bağıl (manyetik) geçirgenlik	μ_r	(birimsiz)	—
Bağıl (elektrik) geçirgenlik (dielektrik sabiti)	ϵ_r	(birimsiz)	—
Relüktans	$\mathcal{R}$	henry^{-1}	H^{-1}
Direnç	R	ohm	Ω
Hassasiyet	B	siemens	S
Tork	T	newton-metre	N · m
Hız	u	metre/saniye	m/s
Gerilim	V	volt	V
Dalga boyu	λ	metre	m
Dalga sayısı	k	radyan/metre	rad/m
İş (enerji)	W	joule	J

A-3 BİRİMLERİN KATLARI VE ALT KATLARI

Birimin Çarpanı	Ön Ek	Sembolü
$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$	exa	E
$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$	peta	P
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hekto[1]	h
$10 = 10^{1}$	deka[1]	da
$0.1 = 10^{-1}$	desi[1]	d
$0.01 = 10^{-2}$	senti[1]	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\,001 = 10^{-6}$	mikro	μ
$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	piko	p
$0.000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

[1]Bu ön ekler, uzunluk, alan ve hacim ölçüleri dışında genelde kullanılmaz.

Ek B

BAZI ÇOK KULLANILAN MALZEMELERİN SABİTLERİ

B-1 BOŞ UZAY SABİTLERİ

Sabit	Sembolü	Değeri
Işık hızı	c	$\sim 3 \times 10^8$ (m/s)
Elektrik geçirgenlik	ϵ_0	$\sim \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ (F/m)
Manyetik geçirgenlik	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)
Öz empedans	η_0	$\sim 120\pi$ ya da 377 (Ω)

B-2 ELEKTRON VE PROTONUN FİZİKSEL SABİTLERİ

Sabit	Sembolü	Değeri
Elektronun durağan kütlesi	m_e	9.107×10^{-31} (kg)
Elektron yükü	$-e$	-1.602×10^{-19} (C)
Elektronun yük-kütle oranı	$-e/m_e$	-1.759×10^{11} (C/kg)
Elektronun yarıçapı	R_e	2.81×10^{-15} (m)
Protonun durağan kütlesi	m_p	1.673×10^{-27} (kg)

B-3 BAĞIL GEÇİRGENLİKLER (DİELEKTRİK SABİTLERİ)[1]

Malzeme	Bağıl Geçirgenlik, ϵ_r
Hava	1.0
Bakalit	5.0
Cam	4–10
Mika	6.0
Yağ	2.3
Kağıt	2–4
Parafin	2.2
Pleksiglas	3.4
Polietilen	2.3
Polistiren	2.6
Porselen	5.7
Kauçuk	2.3–4.0
Toprak (kuru)	3–4
Teflon	2.1
Saf su	80
Deniz suyu	72

B-4 İLETKENLİKLER[1]

Malzeme	İletkenlik, σ(S/m)	Malzeme	İletkenlik, σ(S/m)
Gümüş	6.17×10^7	Tatlı su	10^{-3}
Bakır	5.80×10^7	Saf su	2×10^{-4}
Altın	4.10×10^7	Kuru toprak	10^{-5}
Alüminyum	3.54×10^7	Trafo yağı	10^{-11}
Çinko	1.57×10^7	Cam	10^{-12}
Bronz	10^7	Porselen	2×10^{-13}
Demir	10^7	Kauçuk	10^{-15}
Deniz suyu	4	Kuartz	10^{-17}

[1] Bazı malzemelerin temel parametrelerinin frekansa ve sıcaklığa bağlı olduğuna dikkat ediniz. Burada sıralanan sabitler, oda sıcaklığındaki düşük-frekans ortalama değerlerdir.

B-5 BAĞIL GEÇİRGENLİKLER[1]

Malzeme	Bağıl Geçirgenlik, μ_r
Ferromanyetik (lineer olmayan)	
Nikel	250
Kobalt	600
Demir (saf)	4,000
Mumetal	100,000
Paramanyetik	
Alüminyum	1.000021
Magnezyum	1.000012
Palladyum	1.00082
Titanyum	1.00018
Diamanyetik	
Bizmut	0.99983
Altın	0.99996
Gümüş	0.99998
Bakır	0.99999

[1] Bazı malzemelerin temel parametrelerinin frekansa ve sıcaklığa bağlı olduğuna dikkat ediniz. Burada sıralanan sabitler, oda sıcaklığındaki düşük-frekans ortalama değerlerdir.

Kaynaklar

Elektromanyetik alan ve dalgalarla ilgili aşağıdaki benzer seviyedeki kitaplar referans olarak yararlı olabilir. Bu kaynaklar birinci yazarlarının isimlerine göre alfabetik olarak aşağıda sıralanmıştır.

Bewley, L. V., *Two Dimensional Fields in Electrical Engineering*, Dover Publications, New York, 1963.

Cheng, D. K., *Field and Wave Electromagnetics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

Collin, R. E., *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, New York, 1985.

Crowley, J. M., *Fundamentals of Applied Electrostatics*, Wiley, New York, 1986.

Feynman, R. P.; Leighton, R. O.; and Sands, M., *Lectures on Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.

Javid, M., and Brown, P. M., *Field Analysis and Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

Jordan, E. C., and Balmain, K. G., *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.

Kraus, J. D., *Electromagnetics*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Lorrain, P., and Corson, D., *Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd ed., Freeman, San Franscisco, Calif., 1970.

Neff, H. P., Jr., *Introductory Electromagnetics*, Wiley, New York, 1991.

Paris, D. T., and Hurd, F. K., *Basic Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.

Parton, J. E.; Owen, S. J. T.; and Raven, M. S., *Applied Electromagnetics*, 2nd ed., Macmillan, London, 1986.

Paul, C. R., and Nasar, S. A., *Introduction to Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Plonsey, R., and Collin, R. E., *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1982.

Plonus, M. A., *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1978.

Popović, B. D., *Introductory Engineering Electromagnetics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.

Pozar, D. M., *Microwave Engineering*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

Ramo, S.; Whinnery, J. R.; and Van Duzer, T., *Fields and Waves in Communication Electronics*, 2nd ed., Wiley, New York, 1984.

Sander, K. F., and Reed, G. A. L., *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1986.

Seshadri, S. R., *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.

Shen, L. C., and Kong, J. A., *Applied Electromagnetism*, 2nd ed., PWS Engineering, Boston, Mass., 1987.

Zahn, M., *Electromagnetic Field Theory*, Wiley, New York, 1979.

Tek Numaralı Problemlerin Cevapları

2. BÖLÜM

P.2-3 **a)** $(\mathbf{a}_x 2 - \mathbf{a}_y 3 + \mathbf{a}_z 6)/7$. **b)** 17.1. **c)** -1.71. **d)** -24.
e) -3.43. **f)** 104.2°. **g)** $-\mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z 10$. **h)** -118.

P.2-5 **a)** P_1'de dik açı **b)** 15.3.

P.2-7 **a)** $(\mathbf{a}_x 5 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z)/\sqrt{30}$. **b)** $(\mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y 5)/\sqrt{29}$.

P.2-11 **a)** $(-3/2,\ -3\sqrt{3}/2,\ -4)$. **b)** $(5,\ 143.1^\circ,\ 240^\circ)$.

P.2-13 **a)** $A_x \cos\phi_1 + A_y \sin\phi_1$. **b)** $A_R(r_1/\sqrt{r_1^2 + z_1^2}) + A_\theta(z_1/\sqrt{r_1^2 + z_1^2})$.

P.2-15 **a)** $\mathbf{a}_R 2;\ -4/3$. **b)** 112.4°.

P.2-17 **a)** $-(\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z)/R^3$. **b)** $-\mathbf{a}_R(1/R^2)$.

P.2-19 **a)** $\mathbf{a}_\phi;\ -\mathbf{a}_r$.

P.2-21 **a)** 3/2. **b)** $y + z + x$.

P.2-23 **a)** $2\pi R^3/3$. **b)** 1.

P.2-27 **a)** 1/2. **b)** $\mathbf{a}_z(3r - 5)\cos\phi$. **c)** 1/2.

3. BÖLÜM

P.3-1 **a)** $\dfrac{m}{e}\left(\dfrac{u_0 h}{w}\right)^2$. **b)** $\dfrac{1}{2}\left(w + \dfrac{mu_0^2 Dh}{ewV_{\max}}\right)$.

P.3-3 **a)** $Q_1/Q_2 = 4/3$. **b)** $Q_1/Q_2 = 3/4$.

P.3-5 $z = 8.66b$.

P.3-7 Orijinin etrafındaki yarım çember çizgi yükün xy-düzleminin üst yarısında olduğu kabul edilirse, $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \rho_l/2\pi\epsilon_0 b$.

P.3-9 **a)** $E_r = 0,\ r < a;\ E_r = a\rho_{sa}/\epsilon_0 r,\ a < r < b;\ E_r = (a\rho_{sa} + b\rho_{sb})/\epsilon_0 r,\ r > b$.
b) $b/a = -\rho_{sa}/\rho_{sb}$.

P.3-11 **a)** $-30\,(\mu\text{J})$. **b)** $-60\,(\mu\text{J})$.

P.3-13 **a)** $\rho_{ps} = P_0 L/2$ altı yüzün herbirinde; $\rho_{pv} = -3P_0$.

P.3-15 **a)** $\rho_{ps} = P_0 r_o(3 + \sin^2\phi),\ r = r_o;\ \rho_{ps} = -P_0 r_i(3 + \sin^2\phi),\ r = r_i;\ \rho_{pv} = -7P_0$.

P.3-17 **a)** $150\,(k\text{V})$. **b)** $1{,}000\,(k\text{V})$. **c)** $130\,(k\text{V})$.

P.3-19 $\epsilon_{r2} = 1.667$.

P.3-21 **a)** $\mathbf{a}_r V_0/a\ \ln(b/a)$.
b) $a = b/e = b/2.718$.
c) eV_0/b.
d) $2\pi\epsilon(\text{F/m})$.

P.3-23 $4\pi\epsilon \Big/ \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right)$.

P.3-25 **a)** 27 (nJ). **b)** 27 (nJ).

P.3-27 $\mathbf{a}_x(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2 w/2d$.

P.3-29 $V = c_1 \ln r + c_2 - Ar/\epsilon$; $c_1 = [A(b-a)/\epsilon - V_0]/\ln(b/a)$,
$c_2 = [V_0 \ln b + A(a \ln b - b \ln a)/\epsilon]/\ln(b/a)$.

P.3-31 **a)** $V(\theta) = V_0 \dfrac{\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

b) $\mathbf{E}(\theta) = -\mathbf{a}_\theta \dfrac{V_0}{R \ln[\tan(\alpha/2)] \sin\theta}$.

P.3-35 **a)** $d_i = 0.46$ (mm). **b)** 2.96 (nF/m). **c)** $|\mathbf{E}| = 111.9$ (V/m).

4. BÖLÜM

P.4-1 **a)** 3.54×10^7 (S/m).
b) 6×10^{-3} (V/m).
c) 1 (W).
d) 8.4×10^{-6} (m/s).

P.4-3 **a)** $\mathbf{a}_R\ 7.5 \times 10^9 Re^{-9.42 \times 10^{11} t}$ (V/m), $R < b$; $\mathbf{a}_R (9/R^2) \times 10^6$ (V/m), $R > b$.
b) $\mathbf{a}_R\ 7.5 \times 10^{10} Re^{-9.42 \times 10^{11} t}$ (A/m^2), $R < b$; 0, $R > b$.

P.4-5 $P_{R_1} = 3.33$ (mW), $P_{R_2} = 8.00$ (mW), $P_{R_3} = 5.31$ (mW),
$P_{R_4} = 8.87$ (mW), $P_{R_5} = 44.5$ (mW). Toplam direnç $= 7(\Omega)$.

P.4-7 **a)** $\dfrac{d}{(\sigma_2 - \sigma_1)S} \ln\left(\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$.

b) $\dfrac{\epsilon_0(\sigma_2 - \sigma_1)V_0}{\sigma_2 d \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$, $y = d$.

P.4-9 **a)** $C_i = \dfrac{2\pi\epsilon_1 L}{\ln(c/a)}$, $G_i = \dfrac{2\pi\sigma_1 L}{\ln(c/a)}$,

$C_o = \dfrac{2\pi\epsilon_2 L}{\ln(b/c)}$, $G_o = \dfrac{2\pi\sigma_2 L}{\ln(b/c)}$.

b) $J_i = J_o = \dfrac{\sigma_1\sigma_2 V_0}{r[\sigma_1 \ln(b/c) + \sigma_2 \ln(c/a)]}$

P.4-11 $R = \dfrac{2}{\pi\sigma h} \ln(b/a)$.

5. BÖLÜM

P.5-1 $\mathbf{E} = u_0(\mathbf{a}_y B_z - \mathbf{a}_z B_y)$.

P.5-5 $\mathbf{B}_{P_2} = -\mathbf{a}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(1 + \dfrac{w}{d_2}\right)$.

P.5-7 I akımının xy-düzlemindeki bir üçgende saat yönünün tersinde aktığını kabul edersek,

$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \dfrac{9\mu_0 I}{2\pi w}$.

P.5-9 **a)** $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\dfrac{r_o}{r}\right)$.

b) 2.34(μWb).

P.5-11 **a)** $\mathbf{a}_z \mu_0 H_0/\mu$.
b) $\mathbf{a}_z(H_0 - M_t)$.

P.5-13 **a)** $\mathbf{J}_{mv} = 0$, $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{a}_\phi M_0 \sin\theta$.

b) $(2/3)\mu_0\mathbf{M}_0$.

P.5-15 $L = \mu_0 N^2(r_o - \sqrt{r_o^2 - b^2})$, $L \cong \mu_0 N^2 b^2/2r_o$.

P.5-17 $L_{12} = \dfrac{\mu_0 h_2}{2\pi} \ln \dfrac{(w_1 + d)(w_2 + d)}{d(w_1 + w_2 + d)}$.

P.5-19 $\mathbf{f} = \mathbf{a}_x \dfrac{\mu_0 I^2}{\pi w} \tan^{-1}\left(\dfrac{w}{2D}\right)$.

P.5-21 $\mathbf{T} = -\mathbf{a}_x 0.1(\text{N}\cdot\text{m})$.

6. BÖLÜM

P.6-1 $\mathscr{V} = -\oint_C \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

P.6-3 $i_2(t) = -\dfrac{\omega\mu_0 I_1 h}{2\pi\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \ln\left(1 + \dfrac{w}{d}\right) \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\dfrac{R}{\omega L}\right)$.

P.6-5 **a)** $i = 0.251 \sin 100\pi t$ (A).

b) $i = 0.104 \sin(100\pi t - 65.6°)$ (A).

P.6-7 **a)** 1 (GHz). **b)** 7.2 (MHz).

P.6-9 **a)** $\mathbf{H}_2 = \mathbf{a}_x 30 + \mathbf{a}_y 45 + \mathbf{a}_z 10$ (A/m).

b) $\mathbf{B}_2 = 2\mu_0\mathbf{H}_2$. **c)** $\alpha_1 = 68.2°$. **d)** $\alpha_2 = 79.5°$.

P.6-15 $\alpha = \pi/6$, $H_0 = 1.73 \times 10^{-4}$ (A/m).

P.6-17 **a)** $\mathbf{A} = \mathbf{a}_R A_R + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi$, burada

$$A_R = A_z \cos\theta = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\cos\theta,$$

$$A_\theta = -A_z \sin\theta = -\frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi}\left(\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right)\sin\theta,$$

$$A_\phi = 0.$$

b) $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_\phi \dfrac{I\, d\ell}{4\pi}\beta^2 \sin\theta\left[\dfrac{1}{j\beta R} + \dfrac{1}{(j\beta R)^2}\right] e^{-j\beta R}$.

P.6-19 $k = 20\pi/3$ (rad/m).

$$\mathbf{H}(R, \theta; t) = \mathbf{a}_\phi \frac{10^{-3}}{120\pi R} \sin\theta \cos(2\pi 10^9 t - 20\pi R/3)\ (\text{A/m}).$$

P.6-21 $\beta = 13.2\pi = 41.6$ (rad/m).

$$\mathbf{E}(x, z; t) = \mathbf{a}_x 496 \cos(15\pi x)\sin(6\pi 10^9 t - 41.6z) + \mathbf{a}_z 565 \sin(15\pi x)\cos(6\pi 10^9 t - 41.6z).$$

7. BÖLÜM

P.7-1 **a)** $\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\dfrac{\partial E}{\partial t} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$.

b) $\nabla^2\mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0$.

P.7-3 $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\eta\mathbf{a}_k \times \mathbf{H}(\mathbf{R})$.

P.7-5 **a)** $f = 1.59 \times 10^7$ (Hz), $\lambda = 10.88$ (m).

b) $\epsilon_r = 3$.

c) Sol-el, eliptik kutuplanmıştır.

d) $\mathbf{H}(z, t) = \dfrac{\sqrt{3}}{120\pi}\left[\mathbf{a}_x \sin(10^8 t - z/\sqrt{3}) + \mathbf{a}_y 2\cos(10^8 t - z/\sqrt{3})\right]$ (A/m).

P.7-7 **a)** 0.279 (m).

b) $\eta_c = 238/\underline{1.43°}$, $\lambda = 0.063$ (m), $u_p = 1.897 \times 10^8$ (m/s), $u_g = 1.898 \times 10^8$ (m/s).

c) $\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{a}_z 0.21 e^{-2.48x} \sin(6\pi \times 10^9 t - 31.6\pi x + 0.325\pi)$ (A/m).

P.7-9 **a)** $\sigma = 9.9 \times 10^4$ (S/m). **b)** 0.175 (mm).

P.7-11 For $\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{a}_x E_0\cos(\omega t-kz+\phi)+\mathbf{a}_y E_0\sin(\omega t-kz+\phi)$,
$\mathscr{P}=\mathbf{a}_z E_0^2/\eta$, ki bu da t ve z'den bağımsızdır.

P.7-15 **a)** $\delta=6.3\,(\text{cm})$, $\eta_c=3.96+j3.96\,(\Omega)$.

b) $\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{a}_x 1.68e^{-15.85z}\cos(10^8t-15.85z+0.25\pi)$ (V/m),
$\mathbf{H}(z,t)=\mathbf{a}_y 0.3e^{-15.85z}\cos(10^8t-15.85z)$(A/m).

c) $\mathscr{P}_{av}=\mathbf{a}_z 0.178e^{-31.9z}\,(\text{W/m}^2)$.

P.7-17 **a)** $\mathbf{E}_r(z)=E_0(-\mathbf{a}_x+j\mathbf{a}_y)e^{j\beta z}$, dır. Bu, $-z$ yönünde ilerleyen bir sol-el dairesel kutuplanmış dalgadır.

b) $\mathbf{J}_s=\dfrac{2E_0}{\eta_0}(\mathbf{a}_x-j\mathbf{a}_y)$.

c) $\mathbf{E}_1(z,t)=2E_0\sin\beta z\,(\mathbf{a}_x\sin\omega t-\mathbf{a}_y\cos\omega t)$.

8. BÖLÜM

P.8-1 **a)** $d'=\sqrt{2}d$. **b)** $w'=w/\sqrt{2}$. **c)** $w'=2w$.

d) **a** ve **b** şıkları için $u_p'=u_p/\sqrt{2}$; **c** şıkkı için $u_p'=u_p$

P.8-3 **a)** 2.55 (cm). **b)** 3.91 (mm).

P.8-5 $R=0.058\,(\Omega/\text{m})$, $L=0.20(\mu\text{H/m})$, $C=80(\text{pF/m})$, $G=23(\mu\text{S/m})$.

P.8-7 **b)** $V(z)=V_i\cosh\gamma z-I_iZ_0\sinh\gamma z$,

$$I(z)=I_i\cosh\gamma z-\frac{V_i}{Z_0}\sinh\gamma z.$$

P.8-9 **a)** $V(z,t)=5.27e^{-0.01z}\sin(8000\pi t-5.55z-0.322)$ (V),
$I(z,t)=0.105e^{-0.01z}\sin(8000\pi t-5.55z-0.322)$ (A).

b) $V(50,t)=3.20\sin(8000\pi t-0.432\pi)$ (V),
$I(50,t)=0.064\sin(8000\pi t-0.432\pi)$ (A).

c) 0.102 (W).

P.8-11 $Z_i=26.3-j9.87\,(\Omega)$.

P.8-13 **a)** $R_0=74.5(\Omega)$, $\epsilon_r=4.05$.

b) $X_{io}=-290\,(\Omega)$, $X_{is}=19.2\,(\Omega)$.

P.8-15 **a)** $Z_0=50\,(\Omega)$. **b)** Min. $S=2$.

P.8-17 $\dfrac{R_L}{R_0}=\dfrac{1}{2r_i}\left[(1+r_i^2+x_i^2)\pm\sqrt{(1+r_i^2+x_i^2)^2-4r_i^2}\right]$; $r_i=\dfrac{R_i}{R_0}$, $x_i=\dfrac{X_i}{R_0}$,

$$l=\frac{\lambda}{2\pi}\tan^{-1}t;\ t=\frac{1}{2x_i}\left\{-[1-(r_i^2+x_i^2)]\pm\sqrt{(1-r_i^2-x_i^2)^2+4x_i^2}\right\}.$$

P.8-19 **a)** $V_i=0.0527\angle 18.4^\circ$ (V), $I_i=1.05\angle -18.4^\circ$ (mA),
$V_L=0.033\angle -45^\circ$ (V), $I_L=1.33\angle -45^\circ$ (mA).

b) $S=2$.

c) 0.022 (mW); 0.025 (mW), eğer $R_L=50(\Omega)$ ise.

P.8-21 **a)** $S=1.77$. **b)** $\Gamma=0.28e^{j146^\circ}=0.28e^{j2.55}$.

c) $Z_i=50+j29.5\,(\Omega)$. **d)** $Y_i=0.015-j0.009\,(\text{S})$.

e) Hatta gerilim minimumu yoktur, fakat $V_L<V_i$ 'dir.

P.8-23 **a)** $Z_L=33.75-j23.75\,(\Omega)$. **b)** $\Gamma=\frac{1}{3}e^{j252.5^\circ}=\frac{1}{3}e^{j4.41}$.

c) Kısa devreden 25 (cm)'de.

P.8-25 $d_1=0$ ve $l_1=0.375\lambda$; veya $d_2=0.324\lambda$ ve $l_2=0.125\lambda$.

P.8-27 **a)** $Z_L=104.3-j73.5\,(\Omega)$.

b) $d=0.173\,(\text{m})$, $l=0.238\,(\text{m})$.

9. BÖLÜM

P.9-1 **b)** At $f = 1.1f_c$: $Z_{TM} = 157\,(\Omega)$, $Z_{TE} = 904\,(\Omega)$.
At $f = 2.2f_c$: $Z_{TM} = 336\,(\Omega)$, $Z_{TE} = 423\,(\Omega)$.

P.9-3 **a)** $H_z^0(y) = B_n \cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$.

b) $(f_c)_{TE_1} = \dfrac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}$.

c) $H_z(y, z; t) = B_1 \cos\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - \beta_1 z)$,

$H_y(y, z; t) = -\dfrac{\beta_1 b}{\pi} B_1 \sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)\sin(\omega t - \beta_1 z)$,

$E_x(y, z; t) = -\dfrac{\omega\mu b}{\pi} B_n \sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)\sin(\omega t - \beta_1 z)$,

$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$.

P.9-5 **a)** 8.25 (GHz). **b)** $544 + j390$. **c)** 8.89 (W).

P.9-7 **a)** TE_{10}. **b)** TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, ve TM_{11}.

P.9-9 **a)** Tipik bir tasarım: $a = 6.5$ (cm), $b = 3.5$ (cm).

b) $u_p = 4.70 \times 10^8$ (m/s), $\lambda_g = 15.7$ (cm),
$\beta = 40.1$ (rad/m), $(Z_{TE})_{10} = 590\,(\Omega)$.

P.9-11 **a)** $E_x^0(x, y) = -\dfrac{j\beta_{11}}{h^2}\left(\dfrac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)$,

$E_y^0(x, y) = -\dfrac{j\beta_{11}}{h^1}\left(\dfrac{\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)$,

$H_x^0(x, y) = \dfrac{j\omega\epsilon}{h^2}\left(\dfrac{\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)$,

$H_y^0(x, y) = -\dfrac{j\omega\epsilon}{h^2}\left(\dfrac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right)$.

$\beta_{11} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$, $h^2 = \omega_c^2\mu\epsilon$,

$f_c = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$.

b) $P_{av}(z) = \dfrac{\omega\epsilon\beta_{11}\epsilon_0^2 ab}{8\left[\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right]}$.

P.9-13 **a)** TE_{02} modu

b) $(f_c)_{02} = 12$ (GHz), $f = 18$ (GHz), $Z_{TE} = 506\,(\Omega)$, $\lambda_g = 2.24$ (cm).

c) $P_{av} = 280$ (W).

P.9-15 **a)** 3.3 (GHz); 3.3 (GHz); hiçbiri

b) 5.3 (W); 10.7 (W).

P.9-17 **a)** TE_{101} modu, $f_{101} = 4.802$ (GHz).

b) $Q_{101} = 6{,}869$. $W_e = W_m = 0.0773$ (pJ).

P.9-19 **a)** 2.89 (cm). **b)** 7.34 (GHz). **c)** 12,493.

10. BÖLÜM

P10-1 $E_0 = 97.2$ (mV/m), $H_0 = 0.258$ (mA/m).

P.10-3 **a)** $\rho_l = -j(I_0/c)\sin 2\pi z$, $\lambda = 1$ (m).

b) $\rho_l = \begin{cases} -j2I_0/\pi c, & z > 0 \text{ için} \\ +j2I_0/\pi c, & z < 0 \text{ için.} \end{cases}$

P.10-5 $\zeta_r = \%99.2$.

P.10-7 **a)** $|E_\theta|_{\max} = 2.82$ (mV/m).

b) $P_r = 1.14$ (kW).

c) $R_r = 0.227\,(\Omega)$.

P.10-9 **a)** 90°. **b)** 78°.

P.10-11 **a)** $E_\theta = \dfrac{j120Ih}{R}\beta e^{-j\beta(R - d/2\cos\theta)}F(\theta)$,

burada $F(\theta) = \sin\theta\cos\left(\dfrac{\beta d}{2}\cos\theta\right)$.

P.10-13 **a)** 1 : 4 : 6 : 4 : 1.

b) $|A(\phi)| = \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right|^4$.

c) 20,78°'ye karşı 30.28°.

P.10-15 $|F(\theta, \phi)| = \dfrac{1}{N_1 N_2}\left|\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|\left|\dfrac{\sin\left(\dfrac{N_1\psi_x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{N_2\psi_y}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\psi_x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\psi_y}{2}\right)}\right|$,

burada $\psi_x = \dfrac{\beta d_1}{2}\sin\theta\cos\phi$ ve

$\psi_y = \dfrac{\beta d_2}{2}\sin\theta\cos\phi$.

P.10-17 **a)** $|V_{oc}| = 0.942$ (V). **b)** $P_L = 1.52\,(\text{mW})$.

P.10-19 **a)** $A_e(\theta) = 0.13\lambda^2\left[\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2$.

b) 1.17 (m^2). **c)** 0.29 (m^2).

P.10-21 **b)** Ana-hüzme hüzme genişliği $= 4/\sqrt{G_D}$.

Dizin

Açı
  Brewster, 327, 328
  geliş, 313
  kırılma, 313
  kritik, 315
  kutuplayan, 328
  yansıma, 313
Akı çizgileri, 43, 92
Akı geçişi, 202, 231
Akım, 6
  birimi, 6, 465
  iletkenlik, 153
  konveksiyon, 151
Akım yoğunluğu, 152, 154, 160, 173, 194
  doğrusal, 193
  hacim, 152, 173, 191, 194
  iletkenlik, 153
  konveksiyon, 152
  mıknatıslanma, 191
  yerdeğiştirme, 244
  yüzey, 191, 200
Akış kaynağı, 52, 65, 173
Aksiyomatik yaklaşım. *Bkz.* Tümdengelim yaklaşımı
Alan, 2
  döneli sıfır alan, 62, 64
  elektromanyetik, 2, 244-246, 272
  elektrostatik, 74
  ıraksamasız, 48, 64
  irrotasyonel, 59, 62, 64, 75, 76
  korunumlu, 59, 62, 64, 76
  manyetostatik, 171
  solenoid, 48, 64
  zamanda-harmonik, 255, 259, 262, 264
Alıcı antenler, 451
  etkin alanları, 452-453
  yönlü örüntüleri, 451
Alıcı kesit alanı. *Bkz.* Etkin alan
Amper, akım birimi, 8
Amper devre yasası, 174, 195, 391
Amper kuvvet yasası, 215
Ana hüzme, 447, 449
Anten dizileri, 426, 442
  binom, 446
  boyuna, 445, 447
  düzgün doğrusal, 446
  enine, 444, 447
  fazlı, 448
  iki-elemanlı, 442
Anten kazancı, 432
Anten kazancı. *Bkz.* Kazanç
Anten örüntüsü, 430. *Ayrıca bkz.* Işıma örüntüsü
Antenler, 426
  alıcı, 451
  çeyrek-dalga monopol, 441
  doğrusal dipol, 436
  elektrik dipol elemanı, 428
  yarım-dalga dipol, 439
Arfken, G., 65
Artık akı yoğunluğu. *Bkz.* Kalıntı akı yoğunluğu
Ayarlayıcı, saplama, 380
Ayırma sabiti, 401

Bac-cab kuralı, 68 (P.2-9)
Bağlı yükler, 102
Bağlı-yük yoğunlukları
  Bkz. Kutuplanma yük yoğunlukları
Bant tanımları
  mikrodalga frekansı aralıkları için, 267
Baskın mod, 405
  boşluk rezonatörü için, 417
  dikdörtgen dalga kılavuzu için, 405
Baz vektörleri, 22, 30
  Kartezyen koordinatlarda, 22
  küresel koordinatlarda, 33
  silindirik koordinatlarda, 28
Binom dizisi, 446
Biot-Savart yasası, 180, 182
Birim vektör, 14
Birimler, 8
  çıkarılan niceliklerin, 466-467
  MKSA sistemi, 6, 465
  SI sistemi, 8, 465
  temel, 8, 465
Boş uzay
  elk. geçirgenliği, 9, 10, 469
  içinde ışık hızı, 469
  man. geçirgenliği, 9, 10, 469
  öz empedansı, 276, 469
  sabitleri, 9, 10, 469
Boşluk rezonatörleri, 387, 414-421
  beslenmesi, 417, 418
  dikdörtgen, 415
  kalite faktörü (Q), 419
  TE modları, 416
  TM modları, 416

Boyuna ışımalı dizi, 445, 448
Bozulmasız hat, 349
Bölge duvarı, 196
Bölgeler, manyetik, 196
Brewster açısı, 327, 328

Cheng, D.K., 104, 136, 377, 451
Coulomb koşulu, 179
Coulomb ölçütü. *Bkz.* Coulomb koşulu
Coulomb yasası, 73, 76, 79
Coulomb, yük birimi, 5, 466
Crowley, J.C., 72, 106
Curie sıcaklığı, 198
Çapraz çarpım. *Bkz.* vektör çarpımı

Çeyrek-dalga dönüştürücü, 357, 374
Çeyrek-dalga monopolü, 441

Dağılma, 296, 346, 350, 394
  anormal, 297
  diyagramı, 396
  normal, 297
Dağıtıcı iletim sistemleri, 346, 350, 394
Dağıtıcı ortam, 296
Dairesel kutuplanmış dalga, 285
Dalga
  dairesel kutuplanmış, 285
  doğrusal kutuplanmış, 283, 285
  duran, 307, 311
  düzgün olmayan, 317, 325
  düzgün, 273
  düzlem, 273
  elektromanyetik, 272
  eliptik kutuplanmış, 284
  enine elektrik (TE), 386, 394
  enine elektromanyetik (TEM), 281, 336, 339, 386, 390
  enine manyetik (TM), 386, 391
  ilerleyen, 275
  kayıplı ortamda, 287
  kayıpsız ortamda, 273
  sönümlenen, 371, 394, 395
  yüzey, 317
Dalga boyu, 260, 275
  dalga kılavuzunda, 391, 393
  iyi iletkende, 292
  kesim, 393, 402
Dalga cephesi, 273
Dalga denklemi
  çözümü, 253
  homojen olmayan, 252
  homojen, 253, 272
Dalga empedansı
  TE modları için, 395
  TEM modları için, 391
  TM modları için, 392-394
Dalga kılavuzları, 386
  dairesel, 414
  dielektrik, 414
  dikdörtgen, 400-413
  genel dalga davranışı, 387-396
  optik, 414
  paralel-plakalı, 397
Dalga sayısı, 260, 274, 275, 388, 427
  vektörü, 281
Değişkenlerin ayrılması yöntemi, 401
Del operatörü, 40, 41
Deri kalınlığı, 288
Dessauer, J. H., v.d., 72
Devingenlik, 153
Devre modeli, 4
Diamanyetizma, 196. *Ayrıca bkz.* Manyetik malzemeler
Dielektrik kırılma, 108
Dielektrik mukavemeti, 108
Dielektrik sabiti, 107, 470. *Ayrıca bkz.* Geçirgenlik, bağıl
Dielektrikler, 97
Dikdörtgen dalga kılavuzları, 400
  baskın mod, 405
  kesim dalga boyu, 402
  kesim frekansı, 402
  TE-modlar, 404-09
  TM-modlar, 400-403
  zayıflaması, 409
Dikdörtgen koordinatlar. *Bkz.* Kartezyen koordinatlar
Dipol
  elektrik, 93
  manyetik, 186
Dipol anten
  doğrusal, 436
  elektrik elemanı, 428
  uzak-bölge alanları, 429
  yarım-dalga, 439
Dipol momenti
  elektrik, 94
    hacim yoğunluğu, 103
  manyetik, 186
    hacim yoğunluğu, 191
Direnç, 156
Direnç (birim uzunluk başına)
  eş eksenli iletim hattının, 344, 345
  iki-telli iletim hattının, 344, 345
  paralel-plakalı iletim hattının, 343, 345
Direnç hesaplama, 162
Dizi çarpanı, 443
  düzgün doğrusal dizinin, 447
  iki-elemanlı dizinin, 443
Doğrusal kutuplanmış dalga, 285, 286
Doppler, C., 279
Doyma, manyetik malzemenin, 197
Dönel, 43, 54. *Ayrıca bkz.* arka kapak
  genel ortogonal eğrisel koordinatlarda, 58
  Kartezyen koordinatlarda, 57
  küresel koordinatlarda, 59
  silindirik koordinatlarda, 58
Döneli sıfır olan alan, 62, 64
Dönme (bir vektör alanının), 53
Duran dalga, 307, 311, 360
Duran-dalga oranı (SWR), 307-309, 361, 369
Dünyanın manyetik alanı, 171
Düzlem dalga, 273
  düzgün, 273
  düzgün olmayan, 317, 325
  kutuplanması, 283

Eddy akımı, 234
Elektrik akı yoğunluğu. *Bkz.* Elektrik yerdeğiştirme

Elektrik dipol elemanı, 428. *Ayrıca bkz.* Hertz dipolü
uzak alanı, 429
Elektrik dipol momenti, 103
Elektrik dipolü, 93, 189, 428
indüklenmiş, 102
Elektrik hassasiyet, 107
Elektrik potansiyel, skalar, 62, 90, 91, 251, 252
Elektrik yerdeğiştirme, 7, 106
birimi, 7, 74, 466
Elektrik yükü, 5
korunumu, 5-6, 157, 243, 244
Elektromanyetik, 2
zamanda-harmonik, 259
Elektromanyetik alan, 2, 244-246, 272
zamanda-harmonik, 255, 259
Elektromanyetik güç, 298-302
Elektromanyetik indüklenme. *Bkz.* Faraday yasası
temel kabullenmeleri, 230
Elektromanyetik model, 4, 5, 246
evrensel sabitleri, 8-9
temel alan nicelikleri, 7-9
Elektromanyetik spektrum, 265-266
Elektromanyetik teori temelleri, 244
Elektromanyetostatik alan, 229
Elektromotor kuvvet (emf), akı-kesen *Bkz.* hareketli
hareketsel, 236, 239
indüklenen, 210, 211, 231, 232, 236, 239-242
transformatör, 231, 239
Elektron, 5
fiziksel sabitleri, 469
Elektron-volt, 121
Elektrostatik enerji yoğunluğu, 124
Elektrostatik enerji, 120-126
alan nicelikleri cinsinden, 123
ayrık yük dağılımının, 121
kapasitede depolanan, 125
sürekli yük dağılımının, 123
Elektrostatik kuvvetler, 126
Elektrostatik model, 170, 228
boş uzayda, 74
Elektrostatik, temel postülatları, 74, 76, 228
Eleman çarpanı, 443
Eliptik kutuplanmış dalga, 284
Empedans. *Ayrıca bkz.* Dalga empedansı
açık devre hattın, giriş, 356
bir iletim hattının, giriş, 355, 356
dalga kılavuzunda dalganın, 391, 392, 395
kısa devre hattın, giriş, 356
öz, 276, 290, 348
Empedans dönüştürücü, çeyrek-dalga, 234, 374
Empedans uyumlama
tek-saplama yöntemi ile, 377
Endüktans, 203
dış, 207
iç, 205
karşılıklı, 202, 209
öz, 202
toroid sarımın, 204
Endüktans (birim uzunluk başına)
eş eksenli iletim hattının, 207, 213, 344, 345
iki-telli iletim hattının, 208, 343, 345
paralel-plakalı iletim hattının, 342, 345
uzun solenoidin, 205
Enerji
birimi, 121, 466
elektrik, 120, 123, 124
manyetik, 210-212
Enine elektrik (TE) dalga, 386, 394-397, 404
dikdörtgen dalga kılavuzunda, 404
Enine elektromanyetik (TEM) dalga, 281, 336, 339, 386, 390
Enine ışımalı dizi, 444, 447
Enine manyetik (TM) dalga, 386, 391-394, 400
dikdörtgen dalga kılavuzunda, 400
paralel-plakalar arasında, 397
Eşpotansiyel eğrileri, 92
Eşpotansiyel yüzeyleri, 92, 98
Etkin açıklık. *Bkz.* alıcı antenin etkin alanı
Etkin alan (alıcı antenin), 452
Hertz dipolünün, 453
Etkin uzunluk (anten), 462 (P. 10-16)
Evrensel sabitler, 8-10, 469

Faraday disk jeneratörü, 238, 240
Faraday, Michael, 230
Faraday'ın elektromanyetik indüklenme yasası, 230, 231, 239
Faz hızı, 275, 297
dalga kılavuzunda, 391, 393
düşük kayıplı dielektrikte, 290
iyi iletkende, 292
Faz sabiti, 289
düşük kayıplı dielektriğin, 290
iletim hattının, 341
iyi iletkenin, 291
Faz uyumlama, 323
Fazörler, 255, 257
vektörü, 259
Ferritler, 198, 235
Ferromanyetik malzemeler
sert, 198
yumuşak, 198
Ferromanyetik, 196
Fiber, optik. *Bkz.* Optik fiberler
Fresnel denklemleri, 323, 326
Friis iletim formülü, 455

Gauss teoremi. *Bkz.* Iraksama teoremi
Gauss yasası, 73, 75, 85, 106
Gauss yüzeyi, 76, 85
Gauss, manyetik akı yoğunluğu birimi, 171, 467
Gecikmiş potansiyel
skalar, 254, 261
vektör, 254, 261, 427
Geçirgenlik (elektrik), 107
bağıl, 107, 470
boş uzayın, 9-10, 75, 469
kompleks, 287
mutlak, 107

plazmanın, 320
Geçirgenlik (manyetik), 195
bağıl, 195, 471
boş uzayın, 9-10, 173, 469
mutlak, 195
Geliş
açısı, 313
düzlemi, 313
Geliş düzlemi, 313
Geri saçılım kesit alanı, 454
Ayrıca bkz. Radar kesit alanı
Gerilim, 154
elektrostatik, 91
indüklenmiş, 236
Gevşeme zamanı, 159
Girdap
kaynak, 53, 55, 65
kuyu, 53
Görüntüler yöntemi, 136
çizgi yük ve iletken silindir, 138
nokta yük ve iletken düzlem, 136
Görünür ışık, dalga boyu aralığı, 265, 266
Gradyant, 39. *Ayrıca bkz*. arka kapağın içi
genel ortogonal eğrisel koordinatlarda, 41
Kartezyen koordinatlarda, 41
tanımı, 40
Grup hızı, 296, 297, 397
Güç kazancı. *Bkz*. Anten kazancı
Güç yoğunluğu, 160
anlık, 302
zamanda-ortalama, 302-308

Hassasiyet
elektrik, 107
manyetik, 195
Hayalet uçak, 454
Hayali yer değiştirme ilkesi, 126, 220
Helmholtz denklemi
homojen, 264, 274, 289, 388
homojen olmayan, 261
Helmholtz teoremi, 65
Henry, endüktans birimi, 202, 466
Hertz dipolü, 428
E-düzlemi örüntüsü, 430
elektromanyetik alan, 429
etkin alanı, 453
H-düzlemi örüntüsü, 430
uzak alanı veya ışıyan alanı, 429
Hız
dalga yayılmasının, 9-10, 275
faz, 272, 275, 297, 397
grup, 296, 297, 397
ışığın boş uzaydaki, 9-10, 469
Histerezis
döngüsü, 198
kaybı, 198
manyetik, 197
Hüzme genişliği, 461 (P. 10-9)

İlerleyen dalga, 275
İletim hatları, 337
açık-devre, 356
bozulmasız, 349
çeyrek-dalga kısımları, 357, 374
devre elemanı olarak, 356
empedans uyumlama, 377, 380
eş eksenli, 337, 344
giriş empedansı, 355, 356
güç kaybı, 351
iki-telli, 337, 343
kayıpsız, 348
kısa-devre, 356
öz empedansı, 348, 357
paralel-plakalı, 337, 342
sonlu, 353
sonsuz, 347
uyum koşulları, 355, 360, 361
yarım-dalga kısımları, 357
yayılma sabiti, 341, 357
zayıflama sabiti, 341, 351-352
İletim katsayısı
dik kutuplanma için, 323
normal geliş için, 306, 308
paralel kutuplanma için, 326
İletim-hattı denklemleri
genel, 340
zamanda-harmonik, 341
İletim-hattı devresi, 355, 363
İletim-hattı parametreleri, 341, 345
eş eksenli iletim hattının, 344, 345
iki-telli iletim hattının, 343, 345
paralel-plaka iletim hattının, 342, 345
İletkenler, 97
iyi, 98, 288
statik elektrik alanında, 98
İletkenlik (birim uzunluk başına)
iki-telli iletim hattının, 343, 345
koaksiyel iletim hattının, 344, 345
paralel-plakalı iletim hattının, 342, 345
İletkenlik akım yoğunluğu, 154
İletkenlik akımı, 150, 151
İletkenlik, 156
birimi, 156, 466
İndüksiyonla ısıtma, 234
İndüktör, 202
İnk-jet yazıcı, 80
Iraksama, 46. *Ayrıca bkz*. Arka kapak içi
genel ortogonal eğrisel koordinatlarda, 46
Kartezyen koordinatlarda, 46
küresel koordinatlarda, 47
silindirik koordinatlarda, 48
tanımı, 44
Iraksama teoremi, 48
Iraksamasız alan, 48, 64, 158
İrrotasyonel alan, 56, 62, 64, 75, 76

Işıma alanları, 29. *Ayrıca bkz*. Uzak alanlar
Işıma direnci, 433
çeyrek-dalga monopolün, 440
Hertz dipolünün, 434
yarım-dalga dipolün, 439
Işıma örüntüsü, 430
E-düzlemi, 430
H-düzlemi, 430
Işıma örüntüsünün görünür aralığı, 449

Işıma şiddeti, 431
Işıma verimi, 433
İyonosfer, 319. *Ayrıca bkz.* Plazma

Jewett, C.E., 72
Joule yasası, 160
Joule, enerji birimi, 121, 466

Kalıntı akı yoğunluğu, 198
Kapasitans, 117
  birimi, 117, 466
  enerji bağıntılarından, 125
  paralel-plakalı kapasitörün, 119
  silindirik kapasitörün, 120
Kapasitans (birim uzunluk başına)
  eş eksenli iletim hattının, 120, 344, 345
  iki-telli iletim hattının, 141, 343, 345
  paralel plakalı iletim hattının, 119, 342, 345
Karakteristik değer. *Bkz.* Öz değer
Karşılıklılık bağıntıları, 451
Kartezyen koordinatlar, 22, 30
Kayıp açısı, 287
Kayıp tanjantı, 287
Kaynak
  akış, 52, 65, 173
  girdap, 53, 55, 65
Kesim dalga boyu, 393, 402
Kesim frekansı, 392
  dikdörtgen dalga kılavuzunun, 402
  iyonosferin, 320
  paralel-plakalı dalga kılavuzunun, 398
Kırılma
  açısı, 313
  indisi, 314
  Snell yasası, 315, 323
Kırılma indisi, 314
Kırılma katsayısı. *Bkz.* İletim katsayısı
Kırmızıya kayma, 281
Kirchhoff akım yasası, 4, 158, 340
Kirchhoff voltaj yasası, 4, 75, 233, 340
Klinkenberg, A., v.d., 72
Komütatör, 220
Konveksiyon akım yoğunluğu, 152
Konveksiyon akımı, 150, 151
Koordinat sistemleri, ortogonal, 22, 30, 41, 46, 58
  Kartezyen, 22, 30
  küresel, 30, 33
  silindirik, 28, 30
Korunumlu alan, 59, 62, 64
Kritik açı, 315
Kutuplanma, 283
  dairesel, 285
  dik, 321
  doğrusal, 283, 285
  düzgün düzlem dalganın, 283
  eliptik, 284
  paralel, 325
  vektörü, 103
Kutuplanma yük yoğunlukları
  hacim, 104
  yüzey, 104
Kutuplayan açı, 328. *Ayrıca bkz.* Brewster açısı
Kuvvet denklemi, Lorentz, 171, 239
Kuvvetler
  elektrik, 171
  elektromanyetik, 171, 239
  elektrostatik, 74, 126
  manyetik, 171, 214, 221
Küresel koordinatlar, 30, 33. *Ayrıca bkz.* arka kapak içi

Laplace
  işlemleri. *bkz.* Arka kapak içi
  operatör, 123, 179
Laplace denklemi, 130
Lenz yasası, 231
Lorentz koşulu (potansiyeller için), 252
Lorentz kuvvet denklemi, 171, 239
Lorentz ölçütü. *Bkz.* Lorentz koşulu

Manyetik akı, 173, 180
  birimi, 180, 467
  kaçak, 233
  korunumu, 173
Manyetik akı geçişi, 202
Manyetik akı yoğunluğu, 6, 171, 172
  birimi, 171, 466
  dönmesi, 174
Manyetik alan şiddeti, 7, 194, 427
  birimi, 7, 466
Manyetik dipol, 186, 189
Manyetik dipol momenti, 188
  hacim yoğunluğu, 190
Manyetik enerji, 210, 212
  alan nicelikleri cinsinden, 211
Manyetik enerji yoğunluğu, 212
Manyetik hassasiyet, 195, 196
Manyetik indüklenme, 171
Manyetik kuvvet, 171, 214, 215
  depolanan manyetik enerji cinsinden, 221
Manyetik malzemeler, 196, 471
  diamanyetik, 196
  ferromanyetik, 196-198, 471
  paramanyetik, 196
Manyetik tork, 214-218
  depolanan manyetik enerji cinsinden, 221
Manyetik vektör potansiyel, 178, 251, 427
Manyetomotor kuvvet (mmf), 232
Manyetostatik
  temel postülatları, 172, 175, 228
Manyetostatik model, 228
  ferromanyetik olmayan ortamda, 172
Maxwell denklemleri, 243-246
  diferensiyel biçim, 244-246
  integral biçim, 245, 246
  kaynaksız, 263
  zamanda-harmonik, 259
Maxwell, James Clerk, 244
Metrik katsayılar, 28, 30
Mıknatıs, çubuk, 173, 193. *Ayrıca bkz.* sabit mıknatıs
Mıknatıslanma akım yoğunlukları

hacim akım yoğunluğu, 191
yüzey akım yoğunluğu, 191
Mıknatıslanma eğrisi, normal, 197
Mıknatıslanma vektörü, 190
Mıknatıslanmış bölgeler, 196
Mikrodalga fırın, 267, 288
Mikrodalga frekans aralıkları
bant tanımları, 265, 267
Mikroşerit hatlar. *Bkz.* Şerit hatlar
Moleküller
kutuplu, 102
kutupsuz, 102
Monopol, 441
Moore, A.D., 72
Motor, d-c, 219

Nabla operatörü, 40
Neper, 289
Nokta çarpım. *Bkz.* Skalar çarpım
Nüfuz derinliği. *Bkz.* deri kalınlığı

Ohm yasası, 150, 154
Optik fiberler, 318, 335 (P. 7-31), 414
kabul açısı, 335
meridyen ışınlar, 335
nümerik açıklık, 335
Ortak endüktans, 202, 209
Ortam
basit, 107, 129, 195
homojen, 107
lineer, 107
yönbağımlı, 107
yönbağımsız, 107
Ortogonal koordinat sistemleri, 22
üç temel, 30

Örüntü fonksiyonu, 430, 438
doğrusal dipol antenlerin, 438
elektrik dipol elemanının, 430
yarım-dalga dipolün, 439
Örüntülerin çarpımı ilkesi, 444
Öz değer, 382
dikdörtgen dalga kılavuzunun, 402
paralel-plakalı dalga kılavuzunun, 398
Öz direnç, 154
Öz empedans, 276
bir ortamın, 276, 391
boş uzayın, 276
düşük kayıplı dielektriğin, 290
iletim hattının, 348
iyi iletkenin, 292
Öz empedans, 348
bozulmasız hattın, 349
kayıpsız hattın, 348
Öz iletkenlik, 98, 154
bazı malzemelerin, 470
birimi, 154, 466
Öz mod, 398

Paramanyetik, 196. *Ayrıca bkz.* Manyetik malzemeler
Paratoner, 108
Plazma, 319, 321
etkin geçirgenliği, 320
frekansı, 320, 321
içinde yayılma sabiti, 320
kesim frekansı, 320, 321
Poisson denklemi
skalar, 129, 179
vektör, 179
Polaroid güneş gözlüğü, 327
Potansiyel
farkı, 91
gecikmiş, 254, 261, 427
skalar elektrik, 90, 91, 251, 252
vektör manyetik, 178, 251, 427
Poynting teoremi, 299
Poynting vektörü, 299
anlık, 302
zamanda-ortalama, 302
Pozar, D.M., 346

Q (kalite faktörü)
boşluk rezonatörünün, 419

Radar, 1, 454
bant tanımları, 267
Doppler, 281
monostatik, 456, 463 (P. 10-20)
Radar denklemi, 456, 457
Radar kesit alanı, 454
Raymond, P.Dr. Jr., 451
Reed, G.A.L., 346
Relüktans, 232
birimi, 233, 467
Rezonatör, 387, 414-421. *Ayrıca bkz.* boşluk rezonatörleri

Sabit mıknatıs, 198
Sabitler, evrensel, 8-10, 469
Saçılma kesit alanı. *Bkz.* radar kesit alanı
Sander, K.F., 346
Saplama ayarlayıcı, 380
Sıfır özdeşlikleri, 62, 63
Sınır koşulları
akım yoğunluğu için, 161
bir dielektrik ve bir mükemmel iletken arasındaki, 112, 250
elektromanyetik alanlar için, 248-250
elektrostatik alanlar için, 100, 113
iki kayıpsız ortam arasında, 249
manyetostatik alanlar için, 199
Sınır-değer problemleri, 128
Kartezyen koordinatlarda, 130
küresel koordinatlarda, 134
silindirik koordinatlarda, 132
SI birimleri, 8, 465
Siemens, iletkenlik birimi, 156, 466
Silindirik koordinatlar, 28, 30. *Ayrıca bkz.* arka kapak içi
Skalar, 12
çarpım, 16
üçlü çarpım, 19, 20
Smith grafiği, 366, 371
admitans grafiği olarak, 377-380
üzerinde admitans, 374
Smith, P.H., 366
Snell yasası
kırılma, 315, 323
yansıma, 313, 323
Solenoid alan, 48, 64, 158
Sönümlenen dalga, 317, 394, 395

Sönümlenen mod, 394, 395
Spektrum, elektromanyetik dalgaların, 265-266
Stokes teoremi, 59, 60
Süreklilik denklemi, 158, 243, 244, 245
Süreklilik, denklemi, 158, 243

Şerit hatlar, 337, 346

Tam yansıma, 315
Teklik teoremi, 136, 401
Temel postülatlar
  boş uzayda elektrostatik için, 74, 76
  elektromanyetik indüklenme için, 230
  manyetik olmayan ortamda manyetostatik için, 174, 175
Ters nokta, 140
Tesla, manyetik akı yoğunluğu birimi, 7, 8, 171, 467
Tork, 214
  manyetik, 214-218, 221
Transformatör emf, 231
Transformatörler, 232-234
  çeyrek-dalga, 374
  empedans, 234
  gerçek, 234
  ideal, 233
Tümdengelim yaklaşımı, 4, 73
Tümevarım yaklaşımı, 4

Uluslararası birimler sistemi. *Bkz*. SI birimleri
Uydu
  haberleşmesi, 3, 457, 463 (P. 10-21, P. 10-22)
  yere eşzamanlı, 457
Uzak alanlar
  Hertz dipolünün, 429

Üç-plakalı hat, 347, 350
Üst üste bindirme ilkesi, 255

Vektör, 12
  birimi, 14
  büyüklüğü, 17
Vektör çarpımı, 16-20. *Ayrıca bkz*. vektörlerin çarpımı
Vektör özdeşlikler. *Bkz*. Arka kapak içi
Vektör potansiyel
  gecikmiş, 254, 261, 427
  manyetik, 178, 180, 181
Vektör toplamı ve farkı, 14, 15
Vektörlerin çarpımı, 16-20
  skalar veya nokta çarpım, 16
  üçlü vektör çarpımları, 19-20
  vektör veya çapraz çarpım, 18
Vektörlerin üçlü çarpımları
  skalar, 19-20
  vektör, 68 (P. 2-9)

Weber, manyetik akı birimi, 171, 180, 467

Y.M.T. (yüksek mertebeli terimler), 45, 56
Yalıtkan, 97
  iyi, 288
Yan kulakçık, 448
Yansıma katsayısı
  akım için, 361
  dik kutuplanma için, 323
  gerilim için, 361, 362
  normal geliş için, 306, 308
  paralel kutuplanma için, 326
  sonlandırılmış iletim hattında, 361, 362
Yansıma
  açısı, 313
  Snell yasası, 313, 323
Yapısal bağıntılar, 8, 154, 195, 212, 228
Yarı-iletkenler, 97
Yayılma sabiti, 289
  düşük-kayıplı dielektrikte, 290
  iletim hattında, 341
    bozulmasız, 349
    kayıpsız, 348
  iyi iletkende, 291
  plazmada, 320
Yerdeğiştirme akım yoğunluğu, 244
Yerdeğiştirme akımı, 246, 247
Yoz modlar, 417
Yönbağımlı ortam, 107
Yönlü kazanç, 431
  Hertz dipolünün, 432
Yönlülük, 431
  çeyrek-dalga monopolünün, 441
  Hertz dipolünün, 432
  yarım-dalga dipolün, 440
Yük yoğunluğu, 6
  doğrusal, 6, 82
  hacim, 6, 82
  kutuplanma, 104
  yüzey, 6, 82
Yük, elektrik, 5
  bağlı, 102
  birimi, 5
  elektronun, 5, 469
  korunumu, 5-6, 157, 243, 244
Yükün korunumu, 5, 238, 289, 304
Yüzey dalgası, 317
Yüzey integrali, 44

Zamanda-gecikme etkisi, 254
Zamanda-harmonik elektromanyetik, 259
Zamanda-harmonik
  alanlar, 255
  dalga denklemleri, 264
  iletim-hattı denklemleri, 340-341
  Maxwell denklemleri, 259
Zayıflama sabiti, 289
  dikdörtgen dalga kılavuzunda, 409
  düşük-kayıplı dielektriğin, 290
  güç bağıntılarından, 351
  iletim hattının, 341, 351
  iyi iletkenin, 291
Zorlayıcı alan şiddeti, 198

Çeviri Sözlüğü

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

admittance: admitans
amplitude (ve kompleks sayılarda magnitude): genlik
anisotropic: yönbağımlı
approximation: yaklaştırma
attenuation (constant): zayıflama (sabiti)
available (power): kullanılabilir (güç)
backscatter: geri saçılım
base vector: baz vektörü
beamwidth: hüzme genişliği
bound charges: bağlı yükler
boundary condition: sınır koşulu
breakdown: kırılma
broadside array: enine ışımalı dizi
capacitance: kapasitans
capacitor: kapasitör
cavity resonator: boşluk rezonatörü
characteristic equation: öz denklem, karakteristik denklem
characteristic impedance: öz empedans
circularly polarized: dairesel kutuplanmış
coaxial: eş eksenli
coercive field intensity: zorlayıcı alan şiddeti
coil: bobin
compatibility: uyumluluk
conduction current: iletkenlik akımı
conductivity: öz iletkenlik
conjugate: eşlenik
constitutive relations: yapısal bağıntılar
contour: çevrit
convection current: konveksiyon akımı
convergence: yakınsama
convergent: yakınsak
corona: korona
coupling: bağlaşım, eşleme
critical angle: kritik açı
cross product: çapraz çarpım
curl: dönel
curvilinear: eğrisel
cutt off frequency: kesim frekansı
damping: zayıflama
damping force: zayıflatıcı kuvvet
degenerate modes: yoz modlar
depth of penetration: nüfuz derinliği
dielectric strength: dielektrik mukavemeti
direct current: doğru akım
directive gain: yönlü kazanç
directivity: yönlülük
discharge: boşalma
dispersion: dağılma
dispersive: dağıtıcı
displacement: yerdeğiştirme
distortion: bozulma
distributed (circuit): dağıtılmış (devre)
distribution: dağılım
divergence: ıraksama
divergent : ıraksak
dominant mode: baskın mod
dot product: nokta çarpım
drift current: sürüklenme akımı
effective aperture: etkin açıklık
effective area: etkin alan
eigenmode: öz mod
eigenvalue: öz değer
eigenvector: öz vektör
electromotive force: elektromotor kuvvet
ellipticaly polarized: eliptik kutuplanmış
endfire array: boyuna ışımalı dizi
equiphase: eşfaz

equipotential: eşpotansiyel
evanescent: sönümlenen
factor : çarpan
flow source: akış kaynağı
flux: akı
flux linkage: akı geçişi, akı bağlaşımı
free charge carrier: serbest yük taşıyıcı
free-space: boş uzay
frictional damping: sürtünme zayıflaması
geostationary: yer durağan
geosynchronous: yere eşzamanlı
gradient: gradyant
hole: delik
homogeneous: homojen
horizontal polarization: yatay kutuplanma
imaginary: sanal
impedance inverter: empedans evirici
impedance matching: empedans uyumlama
impedance transformer: empedans dönüştürücü
index of refraction: kırılma indisi
inductance: endüktans
inductor: indüktör
inertia: atalet, eylemsizlik
inner product: iç çarpım
interface: arayüz
interference: girişim
intrinsic impedance: öz empedans
irrotational: irrotasyonel
isotropic: yönbağımsız
laplacian: laplasyen
leakage current: kaçak akımı
leakage resistance: kaçak direnci
line of sight: görüş doğrusu, birbirini gören (antenler için)
linear polarization: doğrusal kutuplanma
link: bağ
longitudinal (wave): boyuna (dalga)
loss angle: kayıp açısı
loss tangent: kayıp tanjantı
lossless: kayıpsız
lossy: kayıplı
low-loss: düşük-kayıplı
lumped: toplu
magnetization: mıknatıslanma
magnetized: mıknatıslanmış
magnetomotive force: manyetomotor kuvvet
magnitude (alanlar için): genlik
magnitude (vektörler için): büyüklük
main beam: ana hüzme
material: malzeme
mobility: devingenlik
mutual inductance: ortak endüktans, karşılıklı endüktans
neutral: yüksüz, nötr
no reflection: yansımasız
nonconducting : iletken olmayan
nonlinear: lineer olmayan
normal incidence: dik geliş
normal vector: normal vektör
normalized: normlanmış
numerical : nümerik
oblique incidence: eğik geliş
ohmic : direnil
omnidirectional: tümyönlü
open-circuited (line): açık-devre (hat)
optical fibre: optik fiber
parallel polarization: paralel kutuplanma
parallel-plate transmission line: paralel-palaka iletim hattı
parallel-wire transmisson line: paralel-telli iletim hattı
pattern: örüntü
permeability: (manyetik) geçirgenlik
permitivity: (elektrik) geçirgenlik
phase front: faz cephesi
point form: nokta biçimi
point-to-point (communication): noktadan-noktaya iletişim
polar coordinates: kutupsal koordinatlar
polarization: kutuplanma
polarizing angle: kutuplama açısı
position vector: konum vektörü
postulate: postülat
propagation constant: yayılma sabiti
pulse: darbe, vuru
quality factor: kalite faktörü
quarter-wave transformer: çeyrek-dalga dönüştürücü
radar cross section: radar kesit alanı
radiation: ışıma, yayılma
radiation efficiency: ışıma verimi
radiation resistance: ışıma direnci
radiator: yayıcı
reciprocity: karşılıklılık
rectangular coordinates: dikdörtgen koordinatlar
red shift: kırmızıya kayma
reflection coefficient: yansıma katsayısı
reflector: yansıtıcı
refraction: kırılma
relative (permittivity): bağıl (geçirgenlik)
relaxation time: gevşeme zamanı
reluctance: relüktans

remanent flux: kalıntı akı
residual flux: artık akı
resistivity : öz direnç
resonator: rezonatör
retarded potential: gecikmiş potansiyel
rhombus: eşkenar dörtgen
saturation: doyma
scalar: skalar
scalar product: skalar çarpım
scalar triple product: üçlü skalar çarpım
self inductance: öz endüktans
semiconductor: yarı-iletken
separation of variables: değişkenlerin ayrılması
sidelobe: yan kulakçık
simple medium: basit ortam
single-stub: tek-saplama
singular: tekil
sink: kuyu
skin depth: deri kalınlığı
skin effect: deri etkisi
slab: tabaka, katman
Smith chart: Smith grafiği
solenoidal: solenoid
source: kaynak
spillover: taşma
standing-wave ratio: duran-dalga oranı
static: statik
stationary: durağan
steady-state: durgun durum
stealth aircraft: hayalet uçak
stray: parazitik
stripline: şerit hat
stub: saplama
stub tuner: saplama ayarlayıcı
substrate: alttaş
superposition: üst üste bindirme
susceptance: hassasiyet
susceptibility: hassasiyet
time-harmonic: zamanda harmonik
total internal reflection: tam iç yansıma
transmission line: iletim hattı
transverse (wave): enine (dalga)
traveling (wave): ilerleyen (dalga)
triplate line: üç-plakalı hat
two-wire transmisson line: iki-telli iletim hattı
uniform: düzgün, birbiçimli
uniform plane wave: düzgün düzlem dalga
uniqueness: teklik
vector product: vektör çarpım
vector triple product: üçlü vektör çarpım
vertical polarization: dik kutuplanma
virtual displacement: hayali yer değiştirme
vortex source: girdap kaynağı
wave number: dalga sayısı
wavefront: dalga cephesi
waveguide: dalga kılavuzu

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

açık-devre (hat): open-circuited (line)
admitans: admittance
akı geçişi, akı bağlaşımı: flux linkage
akı: flux
akış kaynağı: flow source
alttaş: substrate
ana hüzme: main beam
arayüz: interface
artık akı: residual flux
atalet, eylemsizlik: inertia
bağ : link
bağlaşım, eşleme: coupling
bağlı yükler: bound charges
bağıl (geçirgenlik): relative (permittivity)
basit ortam: simple medium
baskın mod: dominant mode
baz vektörü: base vector
bobin: coil
boş uzay: free-space
boşalma: discharge
boşluk rezonatörü: cavity resonator
boyuna (dalga): longitudinal (wave)
boyuna ışımalı dizi: endfire array
bozulma: distortion
büyüklük : magnitude (vektörler için)
çapraz çarpım: cross product
çarpan: factor
çevrit: contour
çeyrek-dalga dönüştürücü: quarter-wave transformer
dağılma: dispersion
dağılım: distribution
dağıtıcı: dispersive
dağıtılmış (devre): distributed (circuit)

dairesel kutuplanmış: circularly polarized
dalga cephesi: wavefront
dalga kılavuzu: waveguide
dalga sayısı: wave number
darbe, vuru: pulse
değişkenlerin ayrılması: separation of variables
delik: hole
deri etkisi: skin effect
deri kalınlığı: skin depth
devingenlik: mobility
dielektrik mukavemeti: dielectric strength
dik geliş: normal incidence
dik kutuplanma: vertical polarization
dikdörtgen koordinatlar: rectangular coordinates
direnil: ohmic
doğru akım: direct current
doğrusal kutuplanma: linear polarization
doyma: saturation
dönel: curl
durağan: stationary
duran-dalga oranı: standing-wave ratio
durgun durum: steady-state
düşük-kayıplı: low-loss
düzgün düzlem dalga: uniform plane wave
düzgün, birbiçimli: uniform
eğik geliş: oblique incidence
eğrisel: curvilinear
(elektrik) geçirgenlik: permitivity
elektromotor kuvvet: electromotive force
eliptik kutuplanmış: ellipticaly polarized
empedans dönüştürücü: impedance transformer
empedans evirici: impedance inverter
empedans uyumlama: impedance matching
endüktans: inductance
enine (dalga): transverse (wave)
enine ışımalı dizi: broadside array
eş eksenli: coaxial
eşfaz: equiphase
eşkenar dörtgen: rhombus
eşlenik: conjugate
eşpotansiyel: equipotential
etkin açıklık: effective aperture
etkin alan: effective area
faz cephesi: phase front
gecikmiş potansiyel: retarded potential
genlik: amplitude (ve kompleks sayılarda magnitude)
genlik: magnitude (alanlar için)
geri saçılım: backscatter
gevşeme zamanı: relaxation time
girdap kaynağı: vortex source
girişim: interference
görüş doğrusu, birbirini gören (antenler için): line of sight
gradyant: gradient
hassasiyet: susceptance
hassasiyet: susceptibility
hayalet uçak: stealth aircraft
hayali yer değiştirme: virtual displacement
homojen: homogeneous
hüzme genişliği: beamwidth
ıraksak: divergent
ıraksama: divergence
ışıma direnci: radiation resistance
ışıma verimi: radiation efficiency
ışıma, yayılma: radiation
iç çarpım: inner product
iki-telli iletim hattı: two-wire transmisson line
ilerleyen (dalga): traveling (wave)
iletim hattı: transmission line
iletken olmayan: nonconducting
iletkenlik akımı: conduction current
indüktör: inductor
irrotasyonel: irrotational
kaçak akımı: leakage current
kaçak direnci: leakage resistance
kalite faktörü: quality factor
kalıntı akı: remanent flux
kapasitans: capacitance
kapasitör: capacitor
karşılıklılık: reciprocity
kaynak: source
kayıp açısı: loss angle
kayıp tanjantı: loss tangent
kayıplı: lossy
kayıpsız: lossless
kesim frekansı: cutt off frequency
konum vektörü: position vector
konveksiyon akımı: convection current
korona: corona
kritik açı: critical angle
kullanılabilir (güç): available (power)
kutuplama açısı: polarizing angle
kutuplanma: polarization
kutupsal koordinatlar: polar coordinates
kuyu: sink
kırmızıya kayma: red shift
kırılma indisi: index of refraction
kırılma: breakdown
kırılma: refraction

laplasyen: laplacian
lineer olmayan: nonlinear
malzeme: material
(manyetik) geçirgenlik: permeability
manyetomotor kuvvet: magnetomotive force
mıknatıslanma : magnetization
mıknatıslanmış : magnetized
nokta biçimi: point form
nokta çarpım: dot product
noktadan-noktaya iletişim: point-to-point (communication)
normal vektör: normal vector
normlanmış: normalized
nüfuz derinliği: depth of penetration
nümerik: numerical
optik fiber: optical fibre
ortak endüktans, karşılıklı endüktans: mutual inductance
örüntü: pattern
öz değer : eigenvalue
öz denklem, karakteristik denklem: characteristic equation
öz direnç: resistivity
öz empedans: characteristic impedance
öz empedans: intrinsic impedance
öz endüktans: self inductance
öz iletkenlik: conductivity
öz mod: eigenmode
öz vektör: eigenvector
paralel kutuplanma: parallel polarization
paralel-palaka iletim hattı: parallel-plate transmission line
paralel-telli iletim hattı: parallel-wire transmisson line
parazitik: stray
postülat: postulate
radar kesit alanı: radar cross section
relüktans: reluctance
rezonatör: resonator
sanal: imaginary
saplama ayarlayıcı: stub tuner
saplama: stub
serbest yük taşıyıcı: free charge carrier
şerit hat: stripline
skalar çarpım: scalar product
skalar: scalar
Smith grafiği: Smith chart
solenoid: solenoidal
sönümlenen: evanescent
statik: static
sürtünme zayıflaması: frictional damping
sürüklenme akımı: drift current
sınır koşulu: boundary condition
tabaka, katman: slab
tam iç yansıma: total internal reflection
taşma: spillover
tekil: singular
teklik: uniqueness
tek-saplama: single-stub
toplu: lumped
tümyönlü: omnidirectional
üçlü skalar çarpım: scalar triple product
üçlü vektör çarpım: vector triple product
üç-plakalı hat: triplate line
üst üste bindirme: superposition
uyumluluk: compatibility
vektör çarpım: vector product
yaklaştırma : approximation
yakınsak: convergent
yakınsama: convergence
yan kulakçık: sidelobe
yansıma katsayısı: reflection coefficient
yansımasız: no reflection
yansıtıcı: reflector
yapısal bağıntılar: constitutive relations
yarı-iletken: semiconductor
yatay kutuplanma: horizontal polarization
yayıcı: radiator
yayılma sabiti: propagation constant
yer durağan: geostationary
yerdeğiştirme: displacement
yere eşzamanlı: geosynchronous
yönbağımlı: anisotropic
yönbağımsız: isotropic
yönlü kazanç: directive gain
yönlülük: directivity
yoz modlar: degenerate modes
yüksüz, nötr: neutral
zamanda harmonik: time-harmonic
zayıflama : damping
zayıflama (sabiti): attenuation (constant)
zayıflatıcı kuvvet: damping force
zorlayıcı alan şiddeti: coercive field intensity

Bazı Yararlı Vektör Özdeşlikleri

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla(\psi V)=\psi\nabla V+V\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{A})=\psi\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\psi$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{A})=\psi\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\psi\times\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot\nabla V=\nabla^2V$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla\times\nabla V=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$$

$$\int_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dv=\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}\qquad\text{(Iraksama teoremi)}$$

$$\int_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\oint_C\mathbf{A}\cdot d\ell\qquad\text{(Stokes teoremi)}$$

Gradyant, Iraksama, Dönel ve Laplasyen Operatörleri

Kartezyen Koordinatlar (x, y, z)

$$\nabla V=\mathbf{a}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\mathbf{a}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\mathbf{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\mathbf{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\mathbf{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\mathbf{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$