

SEVENTH EDITION

Elementary and Middle School Mathematics

Teaching Developmentally

John A. Van de Walle
Late of Virginia Commonwealth University

Karen S. Karp
University of Louisville

Jennifer M. Bay-Williams
University of Louisville

Allyn & Bacon

Boston New York San Francisco
Mexico City Montreal Toronto London Madrid Munich Paris
Hong Kong Singapore Tokyo Cape Town Sydney

Acquisitions Editor: Kelly Villella Canton
Senior Development Editor: Shannon Steed
Editorial Assistant: Annalea Manalili
Senior Marketing Manager: Darcy Betts
Editorial Production Service: Omegatype Typography, Inc.
Composition Buyer: Linda Cox
Manufacturing Buyer: Megan Cochran
Electronic Composition: Omegatype Typography, Inc.
Interior Design: Carol Somberg
Cover Administrator: Linda Knowles

For related titles and support materials, visit our online catalog at www.pearsonhighered.com.

Copyright © 2010, 2007, 2004 Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of the material protected by this copyright notice may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording, or by any information storage and retrieval system, without written permission from the copyright owner.

To obtain permission(s) to use material from this work, please submit a written request to Allyn and Bacon, Permissions Department, 501 Boylston Street, Suite 900, Boston, MA 02116, or fax your request to 617-671-2290.

Between the time website information is gathered and then published, it is not unusual for some sites to have closed. Also, the transcription of URLs can result in typographical errors. The publisher would appreciate notification where these errors occur so that they may be corrected in subsequent editions.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Van de Walle, John A.
Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. — 7th ed. / John A. Van de Walle, Karen S. Karp, Jennifer M. Bay-Williams.
p. cm.
Includes bibliographical references and index.
ISBN-13: 978-0-205-57352-3
ISBN-10: 0-205-57352-5
1. Mathematics—Study and teaching (Elementary) 2. Mathematics—Study and teaching (Middle school) I. Karp, Karen. II. Bay-Williams, Jennifer M. III. Title.
QA135.6.V36 2008
510.71'2—dc22

2008040112

Printed in the United States of America

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 WEB 13 12 11 10 09

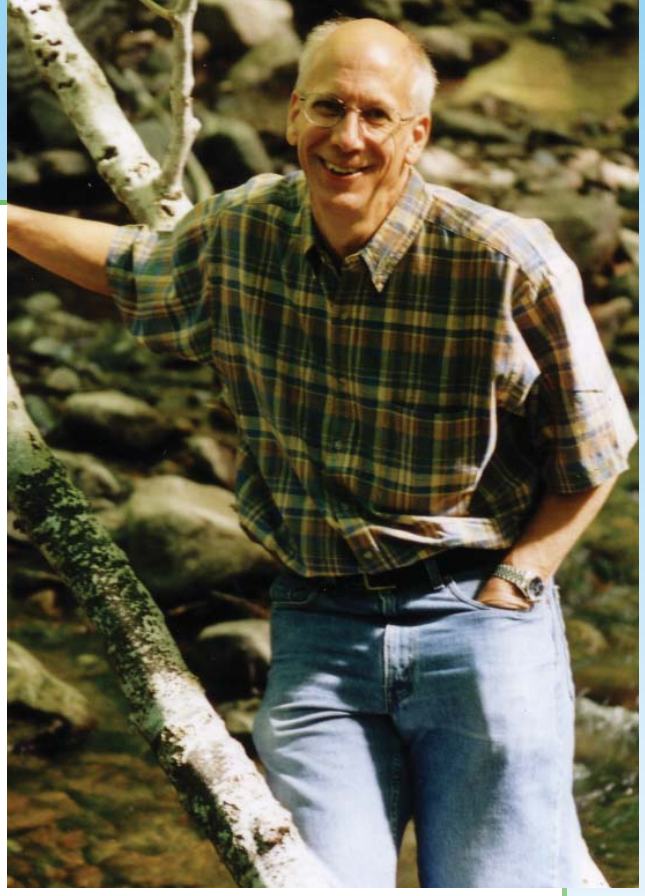
Allyn & Bacon
is an imprint of

PEARSON

www.pearsonhighered.com

ISBN-10: 0-205-57352-5
ISBN-13: 978-0-205-57352-3

Hatırasına



"Çocuklara inanınız!"

—John A. Van de Walle

Bu kitabın bütün haldeki ilk kopyasını müsveddesinin birinci versiyonu nokta vuruşlu yazıcıdan yavaşça çıkarken "Herhangi birisinin bu kitabı okuyacağını düşünüyor musunuz?" sorusunu bize sorduğunda babamız, korku ve umudu eşit derecede taşıyordu. Babam kitabını, öğretmenlerin sadece okuyacakları bir şey değil, aynı zamanda, öğrencilerin matematiği keşfetmelerine yardımcı bir araç ve rehber gibi kullanacakları bir şey olarak düşündü. Aklındaki bu vizyonla, kalbini, ruhunu ve matematik öğretimi hakkında bildiği her şeyi "bu kitab"a dökerek yaklaşık 2 yılını harcadı. O ilk el yazmasının yazıcıdan çıktığı yirmi yıldan beri, "kitap", ailemizin bir parçası oldu. Sürekli ilgi ve sevgi isteyen bir çeşit çocuktu, hatta bu çocuk büyüdü ve olgunlaştı ve bizleri çok gururlandırdı.

Matematik eğitimi alanında çalışan çoğu insan babamızdan bir"rock yıldızı" olarak bahsetti. Babamı tamamen şaşırtan bu tanım, bizim onunla babamıza takıldığımız bir tanımdı. Bizim için o, sadece bizim babamızdı. Gerçekte bir rock yıldızı olduğuna dair herhangi bir kanıta ihtiyacımız olsaydı, babam öldüğünde sayısız öğretmenden, meslektaşından ve en önemlisi ilkokul öğrencilerinden babamızın onlara gerçek anlamda matematik *yapmayı* nasıl öğrettiği hakkında anlatılan hikâyeleri kanıt olarak kullanırdık. Bu kitap aracılığıyla dünyanın dört bir yanından milyonlarca çocuk, matematiği ezberlenen ve çabucak unutulan anlamsız işlemler yığını olarak görmekten ziyade onu anladıkları bir araç olarak kullanabilecekler. Babam daha iyi bir miras hayal edemezdi.

Babamızın adına en büyük dileğimiz, "kitab"ın rehberliği ile öğretmenlerin öğrencilerine, kendi başlarına matematik çözmenin sevincini nasıl keşfedeceklerini ve o sevince nasıl sahip çıkacaklarını göstermeye devam etmeleridir. Hiçbir şey babamızı bundan daha fazla onurlandıramazdı.

Charlotte Van de Walle

Bridget Van de Walle Phippo

İthaf

Pek çoğunuzun bilebileceği gibi, John Van De Walle, 6. baskının yayınlanmasından hemen sonra hayatını kaybetti. Bu olay, bizim 7. baskı için ortak yazarlar olmaya yönelik çalışırken ve kitap için yazmaya başladığımız gelecek baskının geliştirilmesi sırasında gerçekleşti. Bu deneyim sayesinde, John'un en son araştırmalarını, diğerlerinden aldığı olumlu-olumsuz eleştirileri ve ortaya çıkardığı kaynakları etraflıca düşündüğümüzde mükemmelliğe olan eksiksiz bağlılığını daha da takdir ettik. Kaybı, onu tanıyanlar herkes için oldukça zor oldu ve onu çok özleyeceğiz.

Üzerinde çalıştığımız bu baskının, John'un çocuklara, öğretmen adaylarına ve hizmete devam eden öğretmenlere olan derin bağlılığını; onun öğretim felsefesine olan güçlü inancımızı ve anlayışımızı yansıttığına inanıyoruz. John'un anlamlı matematik öğretiminin heyecanlı bir savunucu olması, düşüncemizde, yazımızda ve öğretimimizde ön planda tuttuğumuz bir gerçektir. Onun kalıcı mirası olan "matematik öğretmenliği eğitimi"nin ve alana olan katkılarının takdir edilmesi amacıyla bu kitabı John A. Van de Walle' ye ithaf ediyoruz.

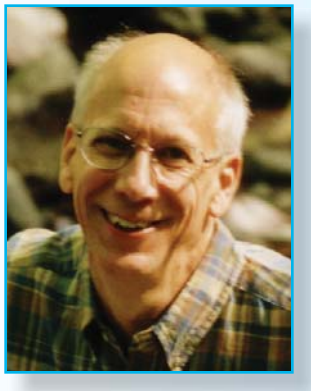
Karen S. Karp

Jennifer M. Bay-Williams

Son yirmi yılı aşkın bir süredir Pearson Allyn&Bacon ve Longman'da John de Walle ile çalışmanın ayrıcalığının yanı sıra onu tanıma zevkine sahip olduk. Şüphesiz *İlkokul ve Ortaokul Matematiği: Gelişimsel Öğretim*, matematik öğretim yöntemleri derslerinde altın bir standart haline geldi. John matematik eğitimi için çıtayı yükselti. O kendini alanına adayarak, bütün çocukların matematiği anlamlandırmalarına yardımcı olmaya söz verdi ve her yerdeki eğitimcilerin matematik öğretme ve öğrenmelerini geliştirmeye odaklanarak, kaynaklar ve referanslar toplamakla birlikte, en son araştırmalara ve eğilimlere ayak uydurmaya gayret gösterdi. Ayrıca, kitabın ve destekleyici ek kaynakların her detayını hazırlarken titiz davranarak bir ders kitabı yazarının nasıl olması gerektiğinin bir örneği oldu. Sadık bir aile adamı ve özlü bir öğretmen eğitimcisi olarak "kitab"ın arkasındaki bu kişiyi tanıma fırsatımız olduğu için çok şanslıyız. O her zaman özlenecek ve asla unutulmayacaktır.

—Pearson Allyn & Bacon

Yazarlar Hakkında



John A. Van de Walle, Virginia Commonwealth Üniversitesi'nden emekli bir profesördü. Kanada ve Birleşik Devletler'deki Anaokulu-8. sınıf (ilk ve ortaokul) öğrencileri için düzenli profesyonel gelişim semineri veren bir matematik eğitim danışmanıydı. O, öğrenci merkezli matematik derslerini uygulama amacıyla ilkokul sınıflarını ziyaret etti ve öğretim yaptı ve öğretmenlerle birlikte çalıştı. TheScott Foresman-Addison Wesley'ın *Anaokulu-6. Sınıflarda Matematik* serisine ortak yazarlık yaptı ve Pearson School'un yeni matematik programı, *enVisionMATH*'e katkıda bulundu. Ayrıca, NCTM kitapları ve dergileri için pek çok bölüm ve makale yazdı. Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi'nde *(NCTM)* çok aktifti. Eğitim Materyalleri Kurulu'nda (Educational Materials Committe) başkan olarak hizmet etti ve bir bölgesel konferans için kurul başkanı olarak görev yaptı. Bölgesel ve ulusal toplantılarda sıkça çıkan bir konuşmacıydı ve 1998'den 2001'e kadar yönetim kurulu üyesiydi.



Karen S. Karp, Louisville Üniversitesi'nde(Kentucky) matematik eğitimi profesörüdür. Öğretmen Eğitimi alanına girmeden önce New York'ta bir ilkokul öğretmeniydi. Çeşitli topluluklara matematik öğretimi üzerine olan ilgi alanlarına göre düzenlenmiş *Girişken Kadınlar: Kızları Matematiksel Düşünmeye Esinleme'nin* ***(Feisty Females: Inspiring Girls to Think Mathematically)*** *yazarıdır. Profesyonel Gelişim: NCTM Yayınlarından Anaokulu-8. Sınıflar (İlk-Ortaokul) için Yazılar'ı (GrowingProfessionally: Readings from NCTM Publications for Grades K–8) Jennifer'la birlikte düzenledi.* NCTM yönetim kurulu üyesi ve Matematik Öğretmen Eğitimcileri Birliği (*Association of Mathematics Teacher Educators-AMTE*) eski başkanıdır.



Jennifer M. Bay-Williams Louisville Üniversitesi'nde (Kentucky) matematik eğitimi doçentidir. NCTM dergilerinde öğrenme ve öğretme üzerine pek çok makale yayımlamıştır. Aynı zamanda şu kitaplarda ortak yazarlık yapmıştır: 6-8. Sınıflar için Matematik ve Edebiyat (*Math and Literature: Grades 6–8)*, 6-8. Sınıflar için Matematik ve Kurgusal Olamayan Düzyazı (*Math and Nonfiction: Grades 6–8)*, 6-8. Sınıflarda Bağlantılar Arası Seyir (*Navigating Through Connections in Grades 6–8)*. Missouri ve Peru'da ilkokul, ortaokul ve liselerde öğretmen olarak çalıştı. Öğrencilerle ve öğretmenlerle her seviye sınıfta çalışmaya devam etmektedir. Matematik Öğretmen Eğitimciler Birliği (*Association of Mathematics Teacher Educators-AMTE)* ve NCTM Yayın Geliştirme Komitesi (*NCTM Emerging Issues Committee*) başkanı olarak görev yapmaktadır.

Brief Contents



SECTION I
Teaching Mathematics: Foundations and Perspectives

CHAPTER 1 Teaching Mathematics in the Era of the NCTM Standards 1

CHAPTER 2 Exploring What It Means to Know and Do Mathematics 13

CHAPTER 3 Teaching Through Problem Solving 32

CHAPTER 4 Planning in the Problem-Based Classroom 58

CHAPTER 5 Building Assessment into Instruction 76

CHAPTER 6 Teaching Mathematics Equitably to All Children 93

CHAPTER 7 Using Technology to Teach Mathematics 111

SECTION II
Development of Mathematical Concepts and Procedures

CHAPTER 8 Developing Early Number Concepts and Number Sense 125

CHAPTER 9 Developing Meanings for the Operations 145

CHAPTER 10 Helping Children Master the Basic Facts 167

CHAPTER 11 Developing Whole-Number Place-Value Concepts 187

CHAPTER 12 Developing Strategies for Whole-Number Computation 213

CHAPTER 13 Using Computational Estimation with Whole Numbers 240

CHAPTER 14 Algebraic Thinking: Generalizations, Patterns, and Functions 254

CHAPTER 15 Developing Fraction Concepts 286

CHAPTER 16 Developing Strategies for Fraction Computation 309

CHAPTER 17 Developing Concepts of Decimals and Percents 328

CHAPTER 18 Proportional Reasoning 348

CHAPTER 19 Developing Measurement Concepts 369

CHAPTER 20 Geometric Thinking and Geometric Concepts 399

CHAPTER 21 Developing Concepts of Data Analysis 436

CHAPTER 22 Exploring Concepts of Probability 456

CHAPTER 23 Developing Concepts of Exponents, Integers, and Real Numbers 473

APPENDIX A Principles and Standards for School Mathematics: Content Standards and Grade Level Expectations A-1

APPENDIX B Standards for Teaching Mathematics B-1

APPENDIX C Guide to Blackline Masters C-1

İçindekiler



Ön Söz xix

SECTION I
Teaching Mathematics: Foundations and Perspectives

The fundamental core of effective teaching of mathematics combines an understanding of how children learn, how to promote that learning by teaching through problem solving, and how to plan for and assess that learning on a daily basis. Introductory chapters in this section provide perspectives on trends in mathematics education and the process of doing mathematics. These chapters develop the core ideas of learning, teaching, planning, and assessment. Additional perspectives on mathematics for children with diverse backgrounds and the role of technology are also discussed.



BÖLÜM 1

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi Standartları Döneminde Matematik Öğretim 1

Amerikan Ulusal Standartları'na Dayalı Akım 1

Okul Matematiği İçin İlkeler ve Standartlar 2

Altı İlke 2
Beş Öğrenme Alanı Standardı 3
Beş Süreç Standardı 3

Öğretim Programının Odak Noktaları: Tutarlık İçin Bir Arayış 5

Matematik Öğretimi için Mesleki Standartlar ve Bugünün Matematik Öğretimi 5

Sınıf Ortamındaki Değişiklikler 5
Öğretim Standartları 5

Matematik Öğretimi Üzerindeki Etkiler ve Baskılar 6

Ulusal ve Uluslararası Çalışmalar 6
Eyalet Standartları 7
Öğretim Programı 7
Değişen Dünya Ekonomisi 8

Gelişmeye ve Öğrenmeye Bir Davet 9

Matematik Öğretmeni Olma 9

BÖLÜM 1 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 11
Araştırma ve Tartışma Konuları 11

BÖLÜM 1 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

Önerilen Okuma Parçaları 11
Standartlara Dayalı Öğretim Programı 12
Online Kaynaklar 12



BÖLÜM 2

Matematik Yapmanın ve Bilmenin Ne Anlama Geldiğinin İncelenmesi 13

Matematik Yapmak Ne Anlama Gelir? 13

Matematik Bir Örüntü ve Düzen Bilimidir 13
Matematik Yapmak İçin Bir Sınıf Ortamı 14

Matematik Yapmaya Davet 15

Şimdi Biraz Matematik Yapalım 15
Cevaplar Nerede? 19

Matematik Öğrenmek Ne Demektir? 20

Yapılandırmacılık Teorisi (Constructivism) 20
Sosyokültürel Teori 21
Matematik Öğretimi İçin Çıkarımlar 21

Matematiği Anlamak Ne Demektir? 23

Matematikte Yeterlik 24
Matematik Öğretimi İçin Çıkarımlar 25
Benefits of a Relational Understanding 26
İlişkisel Anlamayı Destekleyecek Çoklu Temsiller/Gösterimler 27

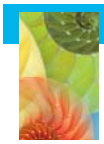
Noktaları Birleştirelim 29

BÖLÜM 2 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 30
Araştırma ve Tartışma Konuları 30

BÖLÜM 2 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

Önerilen Okuma Parçaları 30
Online Kaynaklar 31

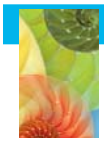


BÖLÜM 3
Problem Çözme ile Öğretim 32

Problem Çözme ile Öğretim 32
Matematik Öğrenimi İçin Problemler ve Görevler 33
Problemlerin Rolündeki Değişim 33
Problem Çözme ile Öğretimin Değeri 33
Probleme-Dayalı Görevlerden Örnekler 34
Probleme-Dayalı Görevlerin ve Derslerin Seçimi ya da Tasarımı 36
Çoklu Giriş Noktaları 36
Anlamlı ve Katılımı Teşvik Eden Ortamların Hazırlanması 37
Nitelikli Görevlerin Bulunması ve Probleme Dayalı Dersler 38
Problem Çözmeye İlişkin Öğretim 42
Dört Adımlık Problem Çözme Süreci 42
Problem Çözme Stratejileri 43
Probleme Dayalı Bir Sınıfta Öğretim 43
Bırakın Öğrenciler Konuşsun 43
Ne kadar Söylemeli ve Ne Söylememeli 44
Öğrencilerin Rapor Yazmasının Önemi 44
Biliş ötesi 46
Yatkınlık 47
Tutumsal Hedefler 47
Üç Aşamalı Ders Formatı 47
Dersin Önce Evresi 48
Önce Evresinde Öğretmenin Eylemleri 48
Ders Esnası Evresi 51
Ders Esnasında Öğretmenin Eylemleri 51
Ders Sonrası Evresi 52
Ders Sonrası Evresinde Öğretmenin Eylemleri 53
Sıkça Sorulan Sorular 55

BÖLÜM 3 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM
Yazarak Öğrenelim 56
Araştırma ve Tartışma Konuları 56

BÖLÜM 3 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR
Önerilen Okuma Parçaları 56
Online Kaynaklar 57



BÖLÜM 4
Probleme-Dayalı Dersin Planlanması 58

Bir Dersin Geliştirilmesi için Planlama Süreci 58
Probleme Dayalı Derslerde Planlama 58
Planlama Sürecinin Uygulanması 62
Üç-Aşamalı Dersin Değişiklikleri 63
Kaynak Olarak Ders Kitapları 64
Öğrenenlerin Hepsi İçin Planlama 64
Uyarlamalar ve Değişiklikler Yapma 65
Farklılaştırılmış Öğretim 65
Esnek Gruplar 67
Bir Dersin Uyarlama Örneği: ELLs 67
Alıştırma veya Uygulama? 69
Alıştırma ve Uygulamanın Yeni Tanımları 69
Alıştırmanın Sağladıkları 69
Uygulamanın Sağladıkları 70
Alıştırma Ne Zaman Uygundur? 70
Öğrenemeyen Öğrenciler 71
Ev Ödevleri 71
Ev Ödevi Olarak Uygulama 71
Ev Ödevi Olarak Alıştırma 71
Ev Ödevleri İçin Destek Sağlama 72

BÖLÜM 4 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM
Yazarak Öğrenelim 72
Araştırma ve Tartışma Konuları 72

BÖLÜM 4 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR
Önerilen Okuma Parçaları 73
Online Kaynaklar 73

ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DERS
Belirlenmiş Alanlar 74



BÖLÜM 5
Değerlendirmenin Öğretime Entegrasyonu 76

Değerlendirme Nedir? 76
Değerlendirme Standartları 76
Öğretimin Değerlendirme ile Yapılandırılması 76
Niçin Değerlendirme Yaparız? 77
Ne değerlendirilmelidir? 78
Performans Temelli Değerlendirmeler 78
Performans temelli görevler için örnekler 79
Değerlendirme Görevleri Hakkında Düşünceler 80
Rubrikler ve Performans Göstergeleri 80
Basit rubrikler 80
Performans göstergeleri 81
Öğrencilerin Rubriklere Dâhil Olması 82
Gözlem Araçları 82
Anekdotsal Notlar 83
Gözlem Rubriği 83
Öğrenciler İçin Bireysel Kontrol Listeleri 83
Tüm sınıf için kontrol listeleri 84
Yazma ve Günlükler 84
Yazmanın önemi 84
Günlükler 85
Yazım yönlendirmeleri ve fikirler 85
Erken dönem öğrenciler için günlükler 86

Öğrenci öz-değerlendirmesi 87
Tanılayıcı Mülakatlar 87
Sınavlar 88
Yüksek Riskli Sınavlardaki Performansın Geliştirilmesi 89
Temel Kavramları ve Süreçleri Öğretiniz 89
Sınav Stratejileri 89
Not Verme 90
Not Vermede Bazı Hususlar 90

BÖLÜM 5 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 91
Araştırma ve Tartışma Konuları 91

BÖLÜM 5 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

Önerilen Okuma Parçaları 91
Online Kaynaklar 92



BÖLÜM 6
Matematiği Tüm Çocuklara Eşit Şekilde Öğretmek 93

Eşitlikçi Bir Öğretimin Temin Edilmesi 93
Tüm Çocuklar İçin Matematik 94
Günümüz Sınıflarında Çeşitlilik 94
Sınıflandırma ve Esnek Gruplandırma 94
Farklı Öğrenciler İçin Öğretim İlkeleri 95
Özel Gereksinimli Öğrencilerin İhtiyaçlarını Karşılamak 95
Müdahaleye Yanıt Verme 95
Hafif Düzeyde Engelli Öğrenciler 96
Önemli Düzeyde Engelli Öğrenciler 100
Kültürel ve Dilsel Açıdan Çeşitlilik Gösteren Öğrenciler 102
Pencereler ve Aynalar 102
Kültürel Açıdan İlgili Matematik Öğretimi 102
Etnomatematik 103
İngilizce Dilini Öğrenenler (ELL) 103
ELL Öğrencilerine Matematik Öğretmek İçin Stratejiler 104
Cinsiyet Eşitliğine Yönelik Çalışma 106
Cinsiyet Eşitsizliğine Yol Açan Olası Nedenler 106
Ne Yapılabilir? 106
Direnci Azaltma ve Dayanıklılığı Artırma 107
Matematiksel Olarak Üstün Yetenekli Öğrencilerin İhtiyaçlarını Karşılamak 107
Kaçınılması Gereken Stratejiler 108
Kullanılabilecek Stratejiler 108
Son Düşünceler 109

BÖLÜM 6 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 109
Araştırma ve Tartışma Konuları 109

BÖLÜM 6 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

Önerilen Okuma Parçaları 110
Online Kaynaklar 110



BÖLÜM 7
Matematik Öğretiminde Teknoloji Kullanımı 111

Matematik Öğretiminde Hesap Makineleri 112
Hesap Makinesini Ne Zaman Kullanmalı 112
Hesap Makinesi Kullanımının Faydaları 112
Grafik Hesap Makineleri 113
Veri Toplama Araçları 114
Matematik Öğretiminde Bilgisayarlar 115
Sayıları İfade Etmeyi Geliştirme İçin Araçlar 115
Geometriyi Geliştirme için Araçlar 116
Olasılık ve Veri Analizinin Geliştirilmesi İçin Araçlar 117
Cebirsel Düşünmeyi Geliştirme için Araçlar 118
Eğitsel Yazılımlar 118
Kavram Öğretimi 118
Problem Çözme 118
Alıştırma ve Pekiştirme 118
Yazılım Seçme ve Kullanma İçin Yönergeler 119
Yazılım Kullanımı için Yönergeler 119
Yazılım Nasıl Seçilmeli 119
İnternet Kaynakları 120
İnternet Kaynakları Nasıl Seçilmeli 120
Emerging Technologies 120

BÖLÜM 7 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 122
Araştırma ve Tartışma Konuları 123

BÖLÜM 7 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

Önerilen Okuma Parçaları 123
Online Kaynaklar 123

SECTION II
Development of Mathematical Concepts and Procedures

This section serves as the application of the core ideas of Section I. Here you will find chapters on every major content area in the pre-K–8 mathematics curriculum. Numerous problem-based activities to engage students are interwoven with a discussion of the mathematical content and how children develop their understanding of that content. At the outset of each chapter, you will find a listing of "Big Ideas," the mathematical umbrella for the chapter. Also included are ideas for incorporating children's literature, technology, and assessment. These chapters are designed to help you develop pedagogical strategies and to serve as a resource for your teaching now and in the future.



BÖLÜM 8

Erken Dönemlerde Sayı Kavramlarının ve Sayı Hissinin Geliştirilmesi 125

Faydalı Başlangıçları Destekleme 125

Anaokulu Öncesi Dönemde ve Anaokulunda Sayı Gelişimi 126

Daha Fazla, Daha Az ve Aynı ilişkileri 126
Erken Dönemde Sayma 127
Sayıyı Tanıma ve Yazma 128
Üzerine ve Geri Sayma 128

Erken Dönemde Sayı Hissi 129

1'den 10'a Kadarki Sayıların Birbiriyle Olan İlişkileri 130

Örüntülü Kümeyi Tanıma 130
Bir-İki Fazlası, Bir-iki Eksiği 131
Sayıları 5 ve 10'a göre konumlandırmak 132
Parça-Parça-Bütün İlişikleri 134
Sayı İlişkilerinin Öğretiminde Bir Model Olarak Noktalı Kartlar 137

10'dan 20'ye Kadarki Sayılarla İlgili Bağıntılar 138

Basamak Değeri Kavramlarının Öncesi 138
Daha Fazla ve Daha Az İlişkilerini Genişletme 139
İki Katlar ve İki Kata Yakınlıkları 139

Çocukların Dünyasında Sayı Hissi 140

Tahmin ve Ölçme 140
Veri Toplama ve Analiz 141

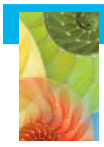
Erken Dönemlerdeki Zihinsel Matematiğe Genişletmeler 142

BÖLÜM 8 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 143
Araştırma ve Tartışma Konuları 143

BÖLÜM 8 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 143
Önerilen Okuma Parçaları 144
Online Kaynaklar 144



BÖLÜM 9

Toplama ve Çıkarma ile İlgili Problem Yapıları 145

Dört İşlemin Anlamlarının Geliştirilmesi 145

Dört Problem Yapısına Örnekler 146

Toplama ve Çıkarmanın Öğretimi 148

Bağlamsal Problemler 148

INVESTIGATIONS IN NUMBER, DATA, AND SPACE

2. Sınıf, *Sayma, Madeni Paralar ve Kombinasyonlar* 150

Model Temelli Problemler 151
Toplama ve Çıkarmanın Özellikleri 153

Çarpma ve Bölme Problem Yapıları 154

Dört Problem Yapısına Örnekler 154

Çarpma ve Bölme Öğretimi 157

Bağlamsal Problemler 157
Kalanlar 157
Model Temelli Problemler 158
Çarpma ve Bölmenin Özellikleri 160

Bağlamsal Problem Çözme Stratejileri 161

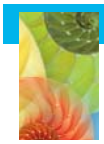
Bağlamsal Problemleri Analiz Etme 161
İki-Aşamalı Problemler 163

BÖLÜM 9 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 164
Araştırma ve Tartışma Konuları 164

BÖLÜM 9 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 165
Önerilen Okuma Parçaları 165
Online Kaynaklar 166



BÖLÜM 10
Temel Kural Öğreniminin Doğal Gelişimi 167

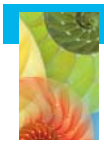
Temel Kuralların Öğreniminde Öğrencilere Yardımcı Olma 167
Kural Öğrenimi için Yaklaşımlar 168
Strateji Geliştirmeye Rehberlik Etme 169
Toplama Kuralları İçin Muhakeme Stratejileri 170
Bir Fazlası ve İki Fazlası 170
Sıfır Ekleme 171
5'i Konum Sayısı Olarak Kullanma 172
10 Kuralları 172
10'dan Fazla 172
İki Katlar Kuralı 173
Yaklaşık İki Katlar 173
Muhakeme Stratejilerini Pekiştirme 174
Çıkarma Kuralları İçin Muhakeme Stratejileri 175
Toplamayı-Düşün Yöntemiyle Çıkarma 175
10'a Doğru İnme 176
10'dan Çıkarma 176
Çarpma Kuralları İçin Muhakeme Stratejileri 177
İki Katlar 178
Beşler 178
Sıfırlar ve Birler 178
Havalı Dokuzlar 179
Diğer Kuralları Türetmede Bilinen Kuralların Kullanılması 180
Bölme Kuralları ve "Yakın Kurallar" 181
Temel Kuralları Öğrenme 182
Etkin Alıştırmalar 182
Kural Düzeltme 184

BÖLÜM 10 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 185
Araştırma ve Tartışma Konuları 185

BÖLÜM 10 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 185
Önerilen Okuma Parçaları 186
Online Kaynaklar 186



BÖLÜM 11
Doğal Sayılarda Basamak Değeri Kavramlarının Geliştirilmesi 187

Onluk Tabandan Önce Gelişen Kavramlar 188
Çocukların Onluk Tabandan Önce Sayılara Bakışı 188
Birerli Sayma 188
Basamak Değeri Hakkında Temel Fikirler 188
Onluk Taban Gruplandırmasının Birerli Sayma ile Entegrasyonu 188
Saymanın Rolü 189
Gruplamanın Kelimerlerle Entegrasyonu 189
Gruplamanın Basamak Değeri Simgesi ile Entegrasyonu 190
Basamak Değerleri İçin Modeller 191
Onluk Taban Modelleri Ve On-Bir-Yapar İlişkisi 191
Gruplandırılabilir Modeller 191
Önceden Gruplandırılmış veya Değiş-Tokuş Modelleri 192
Orantısal Olmayan Modeller 192
Onluk Taban Kavramlarının Gelişimi 193
Gruplama Etkinlikleri 193
Birlik, Onluk ve Yüzlüklerin Tuhaflığı 195
100 Yapmak İçin Onlukları Gruplama 195
Denk Gösterimler 195
Sayılar İçin Sözel ve Yazılı İsimler 197
İki Basamaklı Sayı İsimleri 197
Üç Basamaklı Sayı İsimleri 198
Yazılı Semboller 198
Çok Basamaklı Sayılar ile Örüntüler ve İlişkiler 200
Yüzlük Tablolar 200
Referans Sayılarıyla İlişkiler 202
Toplama ve Çıkarma İçin Sayı İlişkileri 204
Gerçek Hayat Fikirleriyle İlişkilendirmeler 207
1000'in Ötesindeki Sayılar 207
Basamak Değeri Kavramının Genişletilmesi 208
Büyük Sayıları Kavramsallaştırma 209

BÖLÜM 11 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 210
Araştırma ve Tartışma Konuları 210

BÖLÜM 11 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 211
Önerilen Okuma Parçaları 211
Online Kaynaklar 212



BÖLÜM 12
Doğal Sayılarla Hesaplamalar İçin Stratejiler Geliştirme 213

Hesaplamada Akıcılığa Doğru 214
Doğrudan Modelleme 214
Öğrenci-İcadı Stratejiler 215
Geleneksel Algoritmalar 217
Öğrenci İcadı Stratejilerin Gelişimi 218
Strateji İcat Etmek İçin Ortam Oluşturma 218
İcat Edilen Stratejileri Desteklemek İçin Modeller 218
Toplama ve Çıkarma İçin Öğrenci İcadı Stratejiler 219

Tek Basamaklı Sayıları Toplama ve Çıkarma 219
İki Basamaklı Sayıları Toplama 220
Yukarı Doğru Sayarak Çıkarma Yapmak 220
Eksiltmeyle Çıkarma 221
Genişletmeler ve Zorlu Görevler 222

Toplama ve Çıkarma İçin Geleneksel Algoritmalar 223
Toplama Algoritması 223
Çıkarma Algoritması 225

Çarpma İçin Öğrenci-İcadı Stratejiler 226
Faydalı Gösterimler 226
Tek Basamaklı Çarpan ile Çarpma 227
Büyük Sayıların Çarpımı 228

Çarpma İçin Geleneksel Algoritma 230
Tek Basamaklı Çarpanlar 230
İki Basamaklı Çarpanlar 231

Bölme İçin Öğrenci İcadı Stratejiler 232
Eksik Çarpan Stratejisi 232
Gruplama Problemleri 233

Bölme İçin Geleneksel Algoritma 234
Tek Basamaklı Bölenler 234
İki Basamaklı Bölenler 235

BÖLÜM 12 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 237
Araştırma ve Tartışma Konuları 238

BÖLÜM 12 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 238
Önerilen Okuma Parçaları 239
Online Kaynaklar 239



BÖLÜM 13
Hesaplamaya Dayalı Tahmini Tanıtma 240

Doğal Sayılarla Hesaplamaya Dayalı Tahminin Kullanımı 240
Hesaplamaya Dayalı Tahminin Anlaşılması 241
Hesaplamaya Dayalı Tahminin Öğretimi için Öneriler 242

İcat Edilen Stratejiler Yoluyla Hesaplamaya Dayalı Tahmin 244
Detaylara Girmeden Önce Durunuz! 244
İlişkili Problem Kümelerini Kullanınız 244

Hesaplamaya Dayalı Tahmin Stratejileri 245
Ön-Son Yöntemleri 245
Yuvarlama Yöntemleri 246
Uyuşan Sayılar 247
Gruplama 248
Onluk ve Yüzlükleri Kullanma 248

Tahmin Deneyimleri 249
Hesap Makinesi Etkinlikleri 249

Rasyonel Sayıları Tahmin Etmek İçin Doğal Sayıları Kullanma 251

BÖLÜM 13 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 252
Araştırma ve Tartışma Konuları 252

BÖLÜM 13 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 252
Önerilen Okuma Parçaları 252
Online Kaynaklar 252



BÖLÜM 14
Cebirsel Düşünme: Genellemeler, Örüntüler ve Fonksiyonlar 254

Cebirsel Düşünme 255

Aritmetik ve Örüntülerden Genelleme 255
Toplamayla Genelleme 255
Yüzlük tabloda genelleme 256
Örüntü İnceleme Üzerinden Genelleme 257

Sembollerin Anlamlı Kullanımı 257
Eşitlik İşaretinin Anlamı 258
Değişkenlerin anlamı 262

Sayı Sistemindeki Yapıyı Görünür Kılmak 265
Özellikler Hakkında Varsayımlarda Bulunmak 265
Varsayımları Doğrulamak 266
Teklik ve çiftlik ilişkileri 266

Örüntüler ve Fonksiyonları Çalışmak 267
Tekrar Eden Örüntüler 267
Genişleyen örüntüler 269
Doğrusal Fonksiyonlar 274

Matematiksel Modelleme 276

Öğretimde Dikkat Edilecek Hususlar 277
Uygun cebir terimlerini vurgulayınız 277
Çoklu gösterimler 278
Gösterimlerin İlişkilendirilmesi 280
Öğretim Programlarında Cebirsel Düşünme 280

BAĞLANTILI MATEMATİK

Sınıf 7, *Değişkenler ve Örüntüler* 281

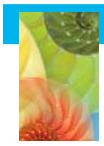
BÖLÜM 14 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 283
Araştırma ve Tartışma Konuları 283

BÖLÜM 14 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 283

Önerilen Okuma Parçaları 284
Online Kaynaklar 284



BÖLÜM 15
Kesir Kavramlarını Geliştirme 286

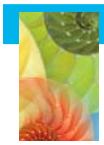
Kesirlerin Anlamları 287
Kesir Yapıları 287
Doğal Sayı Kavramları Üzerine İnşa Etme 287
Kesirler İçin Modeller 288
Bölge ya da Alan Modelleri 288
Uzunluk Modelleri 289
Küme Modelleri 290
Kesirsel Parçalar Kavramı 291
Paylaşma Etkinlikleri 291
Kesir Dili 293
Kesir Parçalarının Denk Büyüklükleri 293
Parçalara Ayırma 294
Kesir Dili ve Sembollerini Kullanma 294
Kesirsel Parçaları Sayma: Tekrarlama 294
Kesir Notasyonu 296
1'den Büyük Kesirler 296
Anlamayı Değerlendirme 297
Kesirlerle Tahmin Etme 298
Sıfır, Yarım ve Bir Referansları 299
Karşılaştırma Yapmak İçin Sayı Hissini Kullanma 299
Denk Kesir Kavramları 301
Denkliğe Kavramsal Olarak Odaklanma 301
Denk Kesir Modelleri 302
Denk-Kesir Algoritması Geliştirme 304
Kesir Kavramları İçin Öğretimde Dikkate Edilmesi Gereken Hususlar 306

BÖLÜM 15 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 306
Araştırma ve Tartışma Konuları 306

BÖLÜM 15 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 307
Önerilen Okuma Parçaları 307
Online Kaynaklar 307



BÖLÜM 16
Kesir Hesaplamaları İçin Stratejiler Geliştirme 309

Sayı Algısı ve Kesir Algoritmaları 310
Kavramsal Anlama Zaman Alır 310
Problem Temelli Bir Sayı Algısı Yaklaşımı 310
Tahmini Hesaplama 310
Toplama ve Çıkarma 312
İcat Edilen Stratejiler 312
Bir Algoritma Geliştirme 315
Tam Sayılı Kesirler ve Bileşik Kesirler 317
Çarpma 317
Kavramı Geliştirme 317
Algoritmayı Geliştirme 320
Birden Büyük Çarpanlar 320
Bölme 321
Bölmenin Parçalara Ayırma Yorumu 321
Bölmenin Ölçme Yorumu 323
Doğal Sayı Olmayan Cevaplar 324
Algoritmalar Geliştirme 324

BÖLÜM 16 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 326
Araştırma ve Tartışma Konuları 326

BÖLÜM 16 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 326
Önerilen Okuma Parçaları 327
Online Kaynaklar 327



BÖLÜM 17
Kesirler ve Ondalık Sayıları İlişkilendirme 328

Ondalık Sayı ve Yüzde Kavramlarının Gelişimi 328
On-Tabanlı Kesirler 329
Basamak Değeri Sisteminin Genişletilmesi 330
Kesir-Ondalık Sayı Bağlantısı 332
Ondalık Sayı Hissinin Gelişimi 333
Ondalık Sayılarla İlişkilendirilmiş Bilinen Kesirler 334
Uygun Kesirle Yaklaşık Olarak Bulma 335
Ondalık Sayıları Sıralama 336
Diğer Kesir-Ondalık Sayı Denklikleri 337
Yüzdelerin Takdimi 337
Modeller ve Terminoloji 338
Gerçekçi Yüzde Problemleri 339
Tahmin 341
Ondalık Sayılarla Hesaplama 342
Tahminin Rolü 342
Toplama ve Çıkarma 342
Çarpma 343
Bölme 344

BÖLÜM 17 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 345
Araştırma ve Tartışma Konuları 345

BÖLÜM 17 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 345
Önerilen Okuma Parçaları 346
Online Kaynaklar 346



BÖLÜM 18
Orantısal Akıl Yürütme 348

Oranlar 348
Oran Çeşitleri 349
Orantısal Akıl Yürütme 350
Çarpımsal DurumlarToplamsal Durumlar 351
Çarpımsal İlişkileri Belirleme 352
Denk Oranlar 353
Farklı Oranlar 354

İLİŞKİLENDİRİLMİŞ MATEMATİK
Sınıf Düzeyi 7, *Karşılaştırma ve Ölçeklendirme* 356
Oran Tabloları 356
Öğretim Programında Orantısal Akıl Yürütme 358
Cebir 359
Ölçme ve Geometri 359
Ölçekli Çizimler 360
İstatistik 361
Sayı: Kesirler ve Yüzdeler 362
Orantılar 363
Kendi İçindeki ve Aralarındaki Oranlar 363
Akıl Yürütme Yaklaşımları 364
İçler-Dışlar Çarpımı Yaklaşımı 365

BÖLÜM 18 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM
Yazarak Öğrenelim 366
Araştırma ve Tartışma Konuları 366

BÖLÜM 18 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR
İlgili Edebi Metinler 366
Önerilen Okuma Parçaları 367
Online Kaynaklar 368



BÖLÜM 19
Ölçme Kavramlarının Gelişimi 369

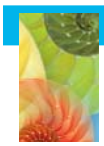
Ölçmenin Anlamı ve Ölçme Süreci 370
Kavramlar ve Beceriler 371
Standart olmayan Birimler ve Standart Birimler: Her birinin Kullanmanın Sebepleri 372
Tahmin Etmenin ve Yaklaşık Değer Bulmanın Rolü 372
Uzunluk 373
Karşılaştırma Etkinlikleri 373
Uzunluk Birimleri 374
Cetvel Yapma ve Kullanma 375
Alan 376
Karşılaştırma Etkinlikleri 376

SAYI, VERİ VE UZAYDA İNCELEMELER
Sınıf Düzeyi 3, *Çevre, Açılar ve Alan* 377
Alan Birimleri 378
Alan ve Çevre Arasındaki İlişki 380
Hacim ve Kapasite 380
Karşılaştırma Etkinlikleri 381
Hacim ve Kapasite Birimleri 381
Ağırlık ve Kütle 382
Karşılaştırma Etkinlikleri 382
Ağırlık ya da Kütle Birimleri 383
Zaman 383
Süre 383
Saat Okuma 383
Geçen Süre 384
Para 385
Madeni Parayı Tanıma ve Değerleri 385
Madeni Para Kümelerini Saymak 385
Para Bozmak 386
Açılar 386
Karşılaştırma Etkinleri 386
Açısal Ölçü Birimleri 386
Açıölçerlerin ve Açı Cetvellerinin Kullanımı 386
Standart Birimlerin Tanıtımı 387
Öğretim Hedefleri 387
Önemli Standart Birimler ve Aralarındaki İlişkileri 389
Ölçüleri Tahmin Etme 389
Ölçme Tahminleri İçin Yöntemler 390
Tahmin Öğretimi için İpuçları 390
Ölçümü Tahmin Etme Etkinlikleri 391
Alan ve Hacim İçin Formüller Geliştirme 391
Öğrencilerin Kavram Yanılgıları 391
Dikdörtgenlerin, Paralelkenarların, Üçgenlerin ve Yamukların Alanları 392
Dairelerin Çevresi ve Alanı 394
Yaygın Olarak Bilinen Katı Cisimlerin Hacimleri 395
Formüller Arasındaki Bağlantılar 396

BÖLÜM 19 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM
Yazarak Öğrenelim 397
Araştırma ve Tartışma Konuları 397

BÖLÜM 19 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 397
Önerilen Okuma Parçaları 397
Online Kaynaklar 398



BÖLÜM 20
Öğrenciler İçin Geometrideki Hedefler 399

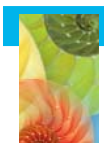
Geometrik Düşünme ve Geometrik Kavramlar 399
Uzamsal His ve Geometrik Akıl Yürütme 400
Geometrik İçerik 400
Geometrik Düşünmenin Gelişimi 400
van Hiele Geometrik Düşünce Düzeyleri 400
Öğretime Yönelik Öneriler 404
Şekiller ve Özelliklerini Öğrenme 405
Düzey 0'da Düşünenler için Şekiller ve Özellikleri 405
Düzey1'de Düşünenler İçin Şekiller ve Özellikleri 410
Düzey-2'de Düşünenler İçin Şekiller ve Özellikler 416
Dönüşümleri Öğrenme 419
Düzey-0'da Düşünenler İçin Dönüşümler 419
Düzey-1'de Düşünenler İçin Dönüşümler 422
Düzey-2'de Düşünenler İçin Dönüşümler 424
Konumu Öğrenme 424
Düzey-0'da Düşünenler için Konum 424
Düzey-1'de Düşünenler için Konum 426
Düzey-2'de Düşünenler için Konum 428
Görselleştirmenin Öğrenilmesi 429
Düzey0'da Düşünenler İçin Görselleştirme 429
Düzey1'de Düşünenler İçin Görselleştirme 430
Düzey 2'de Düşünenler İçin Görselleştirme 432

BÖLÜM 20 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 433
Araştırma ve Tartışma Konuları 433

BÖLÜM 20 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 433
Önerilen Okuma Parçaları 434
Online Kaynaklar 434



BÖLÜM 21
Veri Analizi Kavramlarının Gelişimi 436

İstatistik Yapmak Ne Anlama Geliyor? 437
Bu İstatistik midir Yoksa Matematik midir? 437
Değişkenlik 437
Verinin Şekli 438
İstatistik Yapma Süreci 439
Soruların Formüle Edilmesi 439
Sorular için Fikirler 439
Veri Toplama 440
Mevcut Veri Kaynaklarının Kullanılması 440
Veri Analizi: Sınıflandırma 441
Özellikli Materyaller 441
Veri Analizi: Grafiksel Temsiller 443
Sütun Grafikler ve Çetele Tabloları 443
Daire Grafikleri 444
Sürekli Veri Grafikleri 445
Saçılma Diyagramları 447
Veri Analizi: Merkezi Eğilim Ölçüleri 449
Ortalamalar 449
Aritmetik Ortalamayı Anlamak: İki Yorum 449
Saplı Kutu Diyagramları 452
Sonuçların Yorumlanması 453

BÖLÜM 21 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 454
Araştırma ve Tartışma Konuları 454

BÖLÜM 21 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 454
Önerilen Okuma Parçaları 455
Online Kaynaklar 455



BÖLÜM 22
Olasılık Kavramlarının İncelenmesi 456

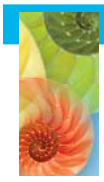
Olasılığı Tanıtma 457
Mümkün veya Mümkün Değil 457
Olasılık Spektrumu 459
Teorik Olasılık ve Deneyler 460
Teorik Olasılık 461
Deneyler 462
Öğretime Yönelik Sonuçlar 464
Deneylerde Teknoloji Kullanımı 464
Örnek Uzaylar ve İki Olayın Olasılığı 465
Bağımsız Olaylar 465
Bir Alan Modeli ile İki Olaylı Olasılıklar 466
Bağımlı Olaylar 467
Simülasyonlar 468

BÖLÜM 22 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 470
Araştırma ve Tartışma Konuları 470

BÖLÜM 22 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 471
Önerilen Okuma Parçaları 471
Online Kaynaklar 472



BÖLÜM 23

Üslü Sayı, Tamsayı ve Gerçek Sayı Kavramlarının Gelişimi 473

Üslü Sayılar 473
İfadelerdeki Üsler ve Denklemler 473
Üslü Sayı, Tamsayı ve Gerçek Sayı Kavramlarının Gelişimi 473
Negatif Üsler 476
Bilimsel gösterim 477

Tam sayılar 479
Tamsayıları İncelemek İçin Bağlamlar 479
Negatif sayıların anlamı 481
Tamsayıların öğretimi için iki model 481

Tamsayılarla işlemler 482
Toplama ve çıkarma 482
Çarpma ve bölme 484

Gerçek sayılar 486
Rasyonel sayılar 486
İrrasyonel sayılar 487
Gerçek sayıların yoğunluğu 489

BÖLÜM 23 ÜZERİNE DÜŞÜNELİM

Yazarak Öğrenelim 489
Araştırma ve Tartışma Konuları 489

BÖLÜM 23 İLE İLGİLİ KAYNAKLAR

İlgili Edebi Metinler 490
Önerilen Okuma Parçaları 490
Online Kaynaklar 490

APPENDIX A

Principles and Standards for School Mathematics: Content Standards and Grade Level Expectations A-1

APPENDIX B

Standards for Teaching Mathematics B-1

APPENDIX C

Guide to Blackline Masters C-1

References R-1

Index I-1

Ön Söz

BU KİTAPTA NELER BULACAKSINIZ?

İçindekiler tablosuna baktığınızda bölümlerin iki ayrı kısma ayrıldığını göreceksiniz. 7 bölümden oluşan ilk kısım, özel matematik öğrenme alanlarının sınırlarına değinen önemli fikirlerle alakalıdır. 16 bölümden oluşan ikinci kısım ise ''Anaokulu öncesi-Anaokulu-8. sınıf" müfredatında bulunan önemli matematik konularının her birinin öğretimi için önerilerde bulunmaktadır. I. Kısım, çocukların matematik öğrenmelerine yardımcı olacak zorlu konulara ilişkin bir bakış açısı sunmaktadır. Matematik eğitiminin evrilmesi ve bu değişimlerin altında yatan nedenler, bir matematik öğretmeni olarak mesleki bilginizin önemli bileşenleridir. Matematik disiplini için bir anlayışa sahip olmak da (bu da matematik yapmanın ne anlama geldiğini bilmektir) mesleğinizin önemli bir bileşenidir. İlk iki bölüm bu konuları işlemektedir.

Öğrenmenin oluşturmacı bakış açısıyla ele alındığı, bunun matematik öğrenmeye nasıl uygulanabileceği ve problem çözme ile öğretmenin ne anlama geldiğinin incelendiği 2. ve 3. bölümler en temel bölümlerdir. 4. Bölüm, öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiğine yönelik bu fikirleri öğreteceğiniz derslere aktarmanızda sizlere yardımcı olacaktır. Burada tüm çocuklar için etkili ders planlama, alıştırma ve uygulamanın değeri ve diğer konulara yönelik pratik yaklaşımlar bulacaksınız. Basit bir ders planı örneği bu bölümün sonunda yer almaktadır. Öğrencinin öğrenmesine en iyi şekilde yardımcı olacak öğretimle değerlendirmenin birbirine entegrasyonu 5. Bölümde incelenecektir.

İngilizce öğrenenlerin, üstün zekalı ve özel gereksinimi olan öğrencilerin de dâhil olduğu farklı öğrenci grupları hakkındaki bilgilere 6. Bölümde ulaşacaksınız. Matematik öğretmede teknoloji kullanımıyla ilgili konulara yönelik bakış açıları 7. Bölümde verilecektir. Tüm sınıf seviyelerinde taşınabilir teknoloji kullanımı için güçlü deliller sunulmuştur. İnternetteki kaynakların ve bilgisayar yazılımının kullanımı ve seçimine yönelik rehberlikte de bulunulmuştur.

2. kısmın her bölümü, matematik öğrenme alanı, bu öğrenme alanının en iyi nasıl öğrenileceği ve iyi bir matematiksel gelişim sürecinde öğrencileri çalıştıracak problem temelli etkinliklere yönelik sayısız önerilerle ilgili bir bakış açısı verecektir. Öğrenciler için, problem temelli görevler metne eklenmemiş, metinle bütünleştirilmiştir. Okurken bu etkinlikler üzerine düşünmek, öğrencilerin gözüyle matematik hakkında düşünmenize yardımcı olabilir. Bu etkinlikleri metinden ayrı değil metinle birlikte okuyunuz. Kaleminizi ve kâğıdınızı mümkün olduğunca sık kullanın ve problemler üzerinde çalışın ki böylece *matematiği öğrenen çocuklar* hakkında *kendi öğrenmeniz* üzerine etkin şekilde yoğunlaşabilesiniz.

KİTABIN BAZI ÖZGÜN ÖZELLİKLERİ

Bu kitabın sayfalarını çevirdikçe, birçok bölüm başlığını, farklı şekilleri ve çok çeşitli özgünözellikleri fark edeceksiniz. Tüm bunlar, bu kitabı uzun vadeli bir kaynak ve bir ders kitabı olarak daha faydalı hâle getirebilmek için tasarlandı. İncelemeniz için birkaç örnek:

Ana Fikirler

Öğrenci merkezli yaklaşımı benimseyen pek çok araştırma ve kaynak öğretmenlerin öğretimlerini bağlantısız beceri ve kavramlardan ziyade "Ana Fikirler" etrafında planlamalarını tavsiye etmektedir. II. kısımdaki her bölümünün başlangıcında, bölümle ilişkili anahtar matematiksel fikirlerin bir listesini bulacaksınız. Bu listeler, öğrettikleri matematiğin hızlı bir resmini çekmekte öğretmenlere yardımcı olacaktır.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları İle Bağlantılar

Ana fikirler listesini takiben hâlihazırdaki bölümün içeriğiyle ilişkilendirilen diğer matematik öğrenme alanlarının kısa betimlemeleridir. Bu listeler öğrettiğiniz matematik hakkında daha çok şey öğrenmenize, öğrenci zorluklarını teşhis etmenize ve dersleri planlarken içeriğin muhtemel etkileşimlerinin daha da farkında olmanıza yardımcı olmayı sağlar.


388 Bölüm 19 Ölçme Kavramlarının Gelişimi

rektiren bir konudur. (Çimen tohumu satın almak için çimenliğinizi ölçerken ve bir pencere için cam levha alırken aynı hassasiyetle mi ölçüm yapardınız?) Öğrencilerin uygun standart birimlerin seçiminde sağduyularını kullanarak pratik yapmaya ihtiyaçları vardır.

3. *Birimler arasındaki ilişki bilgisi.* Öğrenciler yaygın bir şekilde kullanılan inç, fit ve yard ya da mililitre ve litre arasındaki ilişkileri bilmelidirler. Can sıkıcı dönüştürme alıştırmaları ölçme hissinin gelişimine çok az etki yapar.

Birim Aşinalığının Geliştirilmesi. İki çeşit etkinlik standart birimlere yönelik aşinalığı geliştirebilir: (1) tek bir birime odaklaşan karşılaştırmalar ve (2) tek tek birimler ya da basit birimlerin katları için kişisel ölçüt ya da referanslarını geliştiren etkinlikler.

Etkinlik **19.21**

standart birimin bir modelini
yaklaşık aynı şeyi ölçen
isteyin. Örneğin, metre ile
öğrencilere 1 metre
verin. Onlardan yaklaşık 1
lerini yapmalarını isteyin. 1
da uzun) olanları ya da iki katı
da olanları ayrı bir şekilde
öğrencileri günlük hayatlarında
a teşvik edin. Uzunlukları
el ya da dairesel uzunlukları
Daha sonra, öğrenciler verilen
fazla, az ya da ona yakın olup
e çalışabilirler.

irim uzunluklarla da yapılabilir.
aşık 1 mil ya da 1 kilometre olan
estekleri sağlanabilir. Bir mektup
alışveriş merkezine ya da sıklıkla
lar gibi semtlerindeki mesafeleri
Eğer mümkünse, uzaklıkları ölç-
yard çevre uzunluğuna sahip bir
kullanın) gönderin.
yrek galon ve litre gibi kapasite
zerinde tek bir birim için işaret
luyarlar. Öğrenciler daha sonra
da aynı miktarda, fazla ya da az
malıdır. Unutmayın ki kapların
n ederken çok yanıltıcı olabilir.
n gram, kilogram, ons ve pound
rin bir tanesi ile iki kefeli terazi
ıtırabilirler. 10 gram ya da 5 ons
olabilir. Öğrenciler, evlerinden
tirmeleri teşvik edilerek, sınıftaki
a yapılabilir.

Standart alan birimleri uzunluk cinsindendir (örneğin, inç kare ya da fit kare). Dolayısıyla uzunluklara aşina olmak önemlidir. Tek bir dereceye aşina olmak, 30, 45, 60 ve 90 dereceler hakkındaki bazı fikirlere sahip olmak kadar önemli değildir.

Birim aşinalığına ikinci bir yaklaşım da çok tanıdık nesnelerle başlamak ve onların ölçülerini referans ya da ölçüt olarak kullanmaktır. Bir kapı girişi 2 metre yüksekliğinden biraz daha fazladır ve bir kapı kolu zeminden yaklaşık 1 metre mesafede olur. Bir torba un 5 pound için iyi bir referanstır. Bir ataç yaklaşık 1 gram gelir ve yaklaşık 1 santimetre genişliğindedir. Bir galon süt 4 kilogramdan biraz daha az ağır gelir.

Etkinlik **19.22**

Bilinen Referanslar

Measuring Penny (Leedy, 2000) isimli kitabı, öğrencilerinizin ilgisini bilinen nesnelerin ne çeşitli yollarla ölçülebileceği üzerine çekmek için kullanın. Bu kitapta, yazar oyuncak köpek Penny'i ölçerek standart ve standart olmayan (örneğin köpek biskvisi gibi) birimler arasında köprü kurar. Penny'i ölçme fikrini kullanarak öğrencilerinizden evde (ya da sınıfta) standart birimleri birçok yolla kullanabilecekleri nesneleri bulmalarını isteyin. Ölçümler (öğrenciler kesirsel bir birimi toplamanın daha kesin olduğunu önermedikçe) doğal sayılara yuvarlanmalıdır. Sınıfta, seçilen tanıdık nesneleri ve ölçülerini tartışınız, böylelikle farklı fikirler ve nirengi noktaları paylaşılmış olur.

Vücudumuz üzerinde bulunan nirengi noktalarının özel önemi vardır. Bunlar zaman geçtikçe daha da tanınır hâle gelir ve birçok durumlarda birer cetvelmiş gibi kullanılabilirler. Her ne kadar küçük çocuklar oldukça hızlı bir şekilde gelişseler de üzerlerinde taşıdıkları uzunlukları yaklaşık olarak tanımaları faydalıdır.

Etkinlik **19.23**

Kişisel Nirengi Noktaları

Vücudunuzu ölçün. Yaklaşık olarak ayağınız, adımınız, karışınız (açılmış ve parmaklarınız yan yana) ne kadar uzunluğundadır, parmağınızın genişliği, kol uzunluğunuz (parmaktan diğer parmağa ve parmaktan burnunuza kadar), el bileğinizin ve belinizin çevresi ve göğsünüze kadar olan yüksekliğe, omzunuza kadar olan yüksekliğe ve başınıza kadar olan yüksekliğe nedir? Bazıları yararlı nirengi noktaları bazıları ise tek birimler için mükemmel modeller olabilir (Ortalama bir öğrencinin tırnak genişliği yaklaşık 1 cm'dir ve birçok insan ellerinin üzerindeki herhangi bir yerde 10 cm uzunluğunu bulabilirler).

Bu referansları hatırlamalarına yardımcı olmak için bunların uzunluk, hacim ve benzerlerinin nirengi noktalarıyla karşılaştırılarak ölçümleri tahmin etmenin istendiği etkinliklerde kullanılması zorunludur.

Ondalık Sayı Hissinin Gelişimi 333

Hesap makinesi de ondalık sayı kavramının gelişiminde önemli bir rol oynayabilir.

Etkinlik **17.3**

1 ☐ ☐ ☐ . . . tuşuna basarak hesap makinesiyle nasıl "sayma" yapıldığını düşünüyor. Öğrenciler, şimdi ☐ **0.1** ☐ ☐ . . . tuşuna basın. Ekranda, 0.9 görüntüdüğünde durumu ve bunun ne anlama geldiğini ve bir sonraki tuşa basıma ile ekrandaki görüntünün neye benzeyeceğini tartışınız. Çoğu öğrenci, 0.10 tahmininde bulunacaktır (Yidan sonra 10 gelir düşüncesiyle). Her bir tuşa basmakla, öğrenciler onda-birler için model olarak bu on-tabanlı şeritleri birleştirilerse bu tahmin daha da ilginç hale gelecektir. Daha fazla tuşa basmak daha fazla şerit veya 10 tane şerit demektir. Hesap makinesi, niçin 0.10'u göstermemelidir? Onuncu basım 11'gösterdiği zaman (hesap makinesi, ondalık sayının sağında birbirini takip eden sıfırları çoğu zaman göstermez); tartışma, bir kare için 10 serildin değiş-tokuşu etrafında dönmelidir. Ondabirliklerle, 4 veya 5'e kadar saymaya devam edilir. Bir tam sayıdan bir sonrakini elde etmek için kaç kere basılır? 0.001 veya 0.01 ile saymayı deneyiniz. Bu sayımlar, binde-bir ve yüzde-birin ne kadar küçük olduğunu çarpıcı bir şekilde gösterir. Bu, 0.01 elde etmek için 0.001 ile 10 kez sayma ve 1'e ulaşmak için 1000 kez sayma gerektirir.

Aslında hesap makinesi, 0.8-0.9-1-1.1 yerine 0.8-0.9-0.10-0.11 şeklinde sayar ve burada şu soru ortaya çıkar: "Bu, mantıklı mıdır? Eğer mantıklıysa, niçin?"

Kesirleri yazmaya imkân veren hesap makineleri, bir kesir-ondalık sayı dönüştürme tuşuna da sahiptir. Bazı hesap makinelerinde, 0.25 gibi bir ondalık sayı, on-tabanlı kesir $\frac{25}{100}$ şeklinde dönüştürülür ve elle veya otomatik olarak sadeleştirme yapmaya imkân verir. Grafik çizen hesap makineleri; dönüştürme, sadeleştirme veya sadeleştirme olmaksızın ayarlanabilir. Öğrenciler, kesir ve ondalık sayı sembollerini ilişkilendirmeye başladıkça, kesirlerle işlem yapmayı mümkün kılan hesap makinelerinin, kesirler ve ondalık sayılar arasında ileri-geri gitme özelliği bu makineleri değerli bir araç yapar.

◄ Etkinlikler

II. Kısmın her bölümünde bulunan birçok farklı etkinlik okuyucular tarafından her zaman kitabın en değerli parçalarından biri olarak görülmüştür. Bazı etkinlik fikirleri gösterimler ve metin içerisinde doğrudan açıklanmıştır. Diğerleri numaralandırılmış etkinlik kutuları içinde sunulmuştur. Her etkinlik (Bölüm 3'te tanımlandığı gibi) problem temelli bir görevdir ve öğrencilerin matematikte uğraş göstermeleriiçin tasarlanmıştır. Bazı etkinlikler hesap makinesi kullanımı barındırır ve bu belirli etkinlikler hesap makinesi simgesiyle işaretlenmiştir.


Öğretimde Dikkat Edilecek Hususlar 281

Bağlantılı Matematik

Sınıf 7, Değişkenler ve Örüntüler

Çalışma 3: Grafik ve Tabloların Analizi

2.1 Bisiklet Kiralama

Alan 377

Sayı, Veri ve Uzayda İncelemeler

Sınıf Düzeyi 3, Çevre, Açılar ve Alan

Bağlam

Çevrenin Bulunması ve Ölçülmesi (sayfa 1)

Görev

Kaynak: *Investigations in Number, Data, and Space: Grade 3—Perimeter, Angles, and Area*, p. 35. Copyright © 2008 by Pearson Education, Inc., or its affiliate(s). Used by permission. All rights

Etkinlik 19.8

İki parçalı Şekiller

Sayı, Veri, Uzay ve İlişkilendirilmiş Matematik Üzerine İncelemeler ►

II. Kısımda, 4 Bölüm*sayı,veri ve uzay hakkında incelemeler* (bir ilkokul müfredatı) ya da *İlişkilendirilmiş Matematik projesi (CMPII) (*Ortaöğretim müfredatı) gibi standart temelli öğretim programlarında bir etkinliği tanımlayan özellikler içerir. Bu özellikler program içindeki etkinliğin tanımı kadar ünitede bulunan içeriği de kapsar. Bu özelliğin ana amacı, sizlerin bu materyallerle aşina olmanızı sağlamak ve NCTM S*tandartlar*ının ruhunun ve kitapla verilmeye çalışılan oluşturmacı teorinin var olan ticari müfredata nasıl aktarıldığını göstermektir.

Değerlendirme Notları ▶



Değerlendirme, öğretimin ayrılmaz bir parçası olmalıdır. Aynı şekilde, matematik öğrenme alanındaki içeriği geliştirmenin farklı alanlarını okurken neye dikkat etmeniz (değerlendirme) gerektiğini düşünmeniz mantıklı olur. İçeriklerle ilgili bölümlerde, o bölümdeki başlığı değerlendirmenin yollarının kısa bir tanımını gösteren değerlendirme simgelerini göreceksiniz. Bu değerlendirme notlarını okumanız öğrencilere en iyi şekilde nasıl yardım edebileceğinizi anlamanıza yardımcı olabilir.

NCTM Standartları ▶



Kitap boyunca, NCTM'nin *Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar* raporuna göndermede bulunan bir simge göreceksiniz. NCTM Standartları, genellikle *Standartlar*dan bir alıntıyı ve/ya *Standart*ların belirli bir konu için ne söylediğinin bir özetini içerir. Bu notlar kitabın içeriğini standartlarla ilişkilendirir. Umarız, bu alıntıları ve açıklamaları, iyi bir matematik öğretimi vizyonunu anlamakta faydalı bulursunuz.

Kullanılabilecek Teknolojiler ▶



Bu simge, henüz tartışılmış içeriği destekleyecek şekilde teknolojinin nasıl kullanılabileceğinin tartışıldığı *Kullanılabilecek Teknolojiler* kısmını gösterir. Tanımlamalar; açık kaynaklı yazılımlar, etkileşimli küçük uygulama programlarını ve diğer web tabanlı kaynakları içerir. Aynı zamanda bu bölümde, NCTM sitesinde yer alan derslerle ilişkili NCTM e-Examples önerileri de mevcuttur. (Bu notlarda dâhil edilen herhangi bir başlık ya da websitesi bir destek gibi görülmemelidir)

Bölüm Sonu İçeriği ▶


Bölüm 19 Üzerine Düşünelim!

Bölüm 19 ile İlgili Kaynaklar 397

Yazarak Öğrenelim!

1. Bir şeyi ölçmenin ne anlama geldiğini açıklayın. Açıklamanız uzunluk, alan, hacim ve zaman için de eşit derecede geçerli midir?
2. Ölçme için genel bir öğretim planı üç adımdan oluşur. Her adımda kullanılan etkinlik çeşidinin öğretim hedefini nasıl gerçekleştirdiğini açıklayın.
3. Öğretim etkinliklerinde standart birimlerin yerine standart olmayan birimlerin kullanılmasına yönelik dört sebep önerilmiştir. Bunlardan hangisi sizin için en önemlisidir ve neden?
4. Dikdörtgenler, paralelkenarlar, üçgenler ve yamuklar için alan formüllerini ilişkili bir şekilde geliştirin. Resimler çizin ve açıklamalarda bulunun.
5. Bir dairenin alanı, bir paralelkenarın alanı için kullanılan temel formülü kullanarak nasıl belirlenebilir, açıklayın (Dairesel dilimlerden oluşan bir setiniz varsa bunlar bir dairenin parçaları olarak kullanılabilir).

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Ölçme üzerine hazırlanmış bir ders kitabı uzunluk, alan, hacim ve kapasite konularını genellikle metrik ve geleneksel birimlerle beraber anlatacaktır. Herhangi bir düzey için ders kitabının öğretmen baskısını alın ve ölçme ile ilgili bölümlere bakın. Kitap ne kadar iyi bir şekilde metrik ölçü fikirlerini kapsamaktadır? Orada bulunan dersleri nasıl değiştirir veya genişletirsiniz?

Bölüm 19 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

How Big Is a Foot? *Myller, 1990*
The story in this concept book is very attractive to young children. The king measures his queen using his feet and orders a bed made that is 6 feet long and 3 feet wide. The chief carpenter's apprentice, who is very small, makes the bed according to his own feet, demonstrating the need for standard units.

Every Minute on Earth: Fun Facts That Happen Every 60 Seconds *Murrie & Murrie, 2007*
This is an amazing book that is not just about the concept of time. The authors provide fun facts about what can happen in 60 seconds: a snow avalanche travels 4.2 miles (6.8 kilometers); the adult heart pumps 3.3 liters (3.5 quarts) of blood; movie film travels 90 feet (27.4 meters) through a projector; a garden snail moves 0.31 inches (7.8 millimeters); people in the United States throw away 18,315 pounds (8325 kilograms) of food; and consumers spend $954.00 on chewing gum. Students can use the facts provided or identify others as they think and discuss these relationships.

Inchworm and a Half *Pinczes, 2001*
In this wonderfully illustrated book, an inchworm happily goes about measuring various garden vegetables. One day a measurement does not result in a whole number, and the worm gets very upset. Fortunately, a smaller worm drops onto the vegetable and measures a half unit. Eventually, other fraction-measuring worms appear. (Be wary of the $\frac{1}{2}$ worm as $\frac{1}{2}$ is not a common measurement unit.) The story provides a great connection between fractions and measurement concepts, especially for the introduction of fractional units in measurement. Moyer and Mailley (2004) describe a nice series of activities inspired by the book.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Austin, R., Thompson, D., & Beckmann, C. (2005). Exploring measurement concepts through literature: Natural links across disciplines. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(5), 218–224.
This article includes a rich collection of almost 30 children's books that emphasize overall systems of measurement, length, weight, capacity, speed, area, perimeter, and volume. Three books are described in detail as the authors share how to link measurement to science, history, geography, and economics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2004). Measurement. [Focus Issue]. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9.*
This focus issue of NCTM's middle school journal is full of great information for teachers at that level. Of particular note are several articles that involve scale drawings or other aspects of proportional reasoning, which is a great way to integrate measurement into the curriculum.

Pamala, V.A., & Klabunde, D.A. (2005). Learning measurement through practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(9), 452–460.
A mathematics teacher and a science teacher collaborated on a series of six activities to help their students learn about measurement.

Her bölümün sonu iki temel altbaşlıktan oluşacak şekilde düzenlenmiştir: Yazarak Öğrenelim! ile Araştırma ve Tartışma Konularını içeren birinci altbaşlık Bölüm Üzerine Düşünelim! şeklindedir. İkincisi ise Bölüm İçin Kaynaklar altbaşlığı olup (İkinci kısımdaki tüm bölümlerde yer alan) İlgili Edebi Metinler, Önerilen Okuma Parçaları, İnternet Kaynakları ve Alan Deneyimi Kılavuz (Örnek) Bağlantılarını içermektedir.

Yazarak Öğrenelim!

Önemli pedagojik fikirlere yoğunlaşmanıza yardımcı olması için odaklayıcı soruların bir listesi "Yazarak Öğrenelim!" başlığı altında her bölümün sonunda yer almaktadır. Bu çalışma soruları bölümlerin ana konuları hakkında düşünmenize yardım etmesi için düzenlenmiştir. Aslında sizin kendi kelimelerinizle bu soruların cevaplarını yazmanız, her bölümün ana fikirlerine ilişkin kavrayışınızı geliştirmek için iyi bir yoldur.

Araştırma ve Tartışma Konuları

Bu sorular, bir meseleyi incelemenizi, sınıftaki gözlemler üzerine derin düşünmenizi, müfredatla ilgili materyallerde yer alan hususlarla bu kitaptan edindiğiniz fikirleri karşılaştırmanızı ya da belki de tartışmalı bir meselede karşı pozisyonda yer almanızı istemektedir. Bu sorulara verilecek belli bir "doğru" cevap yoktur ama bu soruların düşünmeye teşvik edeceğini ve ateşli konuşmalara neden olacağını umuyoruz.

Literature Connections

Section II chapters contain end-of-chapter Literature Connections sections. These have been completely updated and expanded. For each children's literature title suggested, there is a brief description of how the mathematics concepts in the chapter can be connected to the story. These sections will get you started using this exciting vehicle for teaching mathematics.

Önerilen Okuma Parçaları

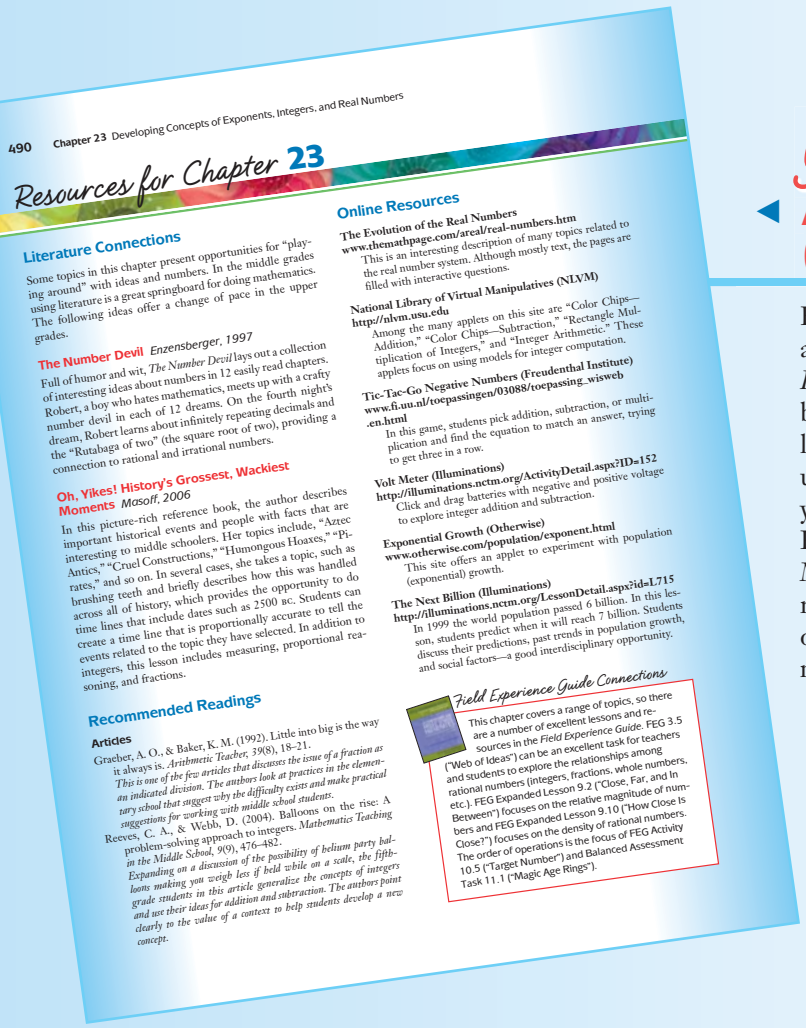
Bu kısımda, o bölümde bulunan bilgileri geliştirmek için kitapların ve makalelerin ek açıklamalı bir listesini bulacaksınız. Bu tavsiyeler, NCTM makalelerini, kitaplarını ve sınıf öğretmenleri için tasarlanmış diğer profesyonel kaynakları içeriyor. (Önerilmiş Okuma Parçalarına ek olarak, bölümlerin içinde alıntı yapılmış bütün kaynaklar için kitabın sonunda Kaynakça bulunmaktadır.)

Kitabın her bölümüyle ilgili makalelerin ve kitapların tam listesi bu kitap için MyEducationLab sitesinde (www.myeducationlab.com) de bulunabilir.

İnternet Kaynaklar

Bugün internette erişimi bedava birçok matematik öğrenme kaynağı bulunmaktadır. Çoğu, öğrencilerin belirli bir matematik kavramı ya da beceriyi incelemelerini sağlayan etkileşimli küçük uygulama programları formundadır. Her bölümün sonunda, bu kaynakların en iyi olanlarından bazılarının ek açıklamalı listesini web adresleriyle birlikte bulacaksınız. Web tabanlı bu kaynakları araştırmak öğrencilerin yanı sıra sizin için de bir öğrenme deneyimi olacaktır.

Bu sitelere erişimin kolay bir yolu, bu kitap için MyEducationLab sitesini ziyaret etmektir. Orada web tabanlı kaynaklara ve küçük uygulama programlarının her birine basit bir tık ile ulaşabilirsiniz.



490 Chapter 23 Developing Concepts of Exponents, Integers, and Real Numbers

Resources for Chapter 23

Literature Connections

Some topics in this chapter present opportunities for "playing around" with ideas and numbers. In the middle grades using literature is a great springboard for doing mathematics. The following ideas offer a change of pace in the upper grades.

The Number Devil *Enzensberger, 1997*
Full of humor and wit, *The Number Devil* lays out a collection of interesting ideas about numbers in 12 easily read chapters. Robert, a boy who hates mathematics, meets up with a crafty number devil in each of 12 dreams. On the fourth night's dream, Robert learns about infinitely repeating decimals and the "Rutabaga of two" (the square root of two), providing a connection to rational and irrational numbers.

Oh, Yikes! History's Grossest, Wackiest Moments *Masoff, 2006*
In this picture-rich reference book, the author describes important historical events and people with facts that are interesting to middle schoolers. Her topics include, "Aztec Antics," "Cruel Constructions," "Humongous Hoaxes," "Pirates," and so on. In several cases, she takes a topic, such as brushing teeth and briefly describes how this was handled across all of history, which provides the opportunity to do time lines that include dates such as 2500 BC. Students can create a time line that is proportionally accurate to tell the events related to the topic they have selected. In addition to integers, this lesson includes measuring, proportional reasoning, and fractions.

Recommended Readings

Articles

Graeber, A. O., & Baker, K. M. (1992). Little into big is the way it always is. *Arithmetic Teacher, 39*(8), 18–21.
This is one of the few articles that discusses the issue of a fraction as an indicated division. The authors look at practices in the elementary school that suggest why the difficulty exists and make practical suggestions for working with middle school students.

Reeves, C. A., & Webb, D. (2004). Balloons on the rise: A problem-solving approach to integers. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(9), 476–482.
Expanding on a discussion of the possibility of helium party balloons making you weigh less if held while on a scale, the fifth-grade students in this article generalize the concepts of integers and use their ideas for addition and subtraction. The authors point clearly to the value of a context to help students develop a new concept.

Online Resources

The Evolution of the Real Numbers
www.themathpage.com/areal/real-numbers.htm
This is an interesting description of many topics related to the real number system. Although mostly text, the pages are filled with interactive questions.

National Library of Virtual Manipulatives (NLVM)
http://nlvm.usu.edu
Among the many applets on this site are "Color Chips—Addition," "Color Chips—Subtraction," "Rectangle Multiplication of Integers," and "Integer Arithmetic." These applets focus on using models for integer computation.

Tic-Tac-Go Negative Numbers (Freudenthal Institute)
www.fi.uu.nl/toepassingen/03088/toepassing_wisweb.en.html
In this game, students pick addition, subtraction, or multiplication and find the equation to match an answer, trying to get three in a row.

Volt Meter (Illuminations)
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=152
Click and drag batteries with negative and positive voltage to explore integer addition and subtraction.

Exponential Growth (Otherwise)
www.otherwise.com/population/exponent.html
This site offers an applet to experiment with population (exponential) growth.

The Next Billion (Illuminations)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L715
In 1999 the world population passed 6 billion. In this lesson, students predict when it will reach 7 billion. Students discuss their predictions, past trends in population growth, and social factors—a good interdisciplinary opportunity.

Field Experience Guide Connections
This chapter covers a range of topics, so there are a number of excellent lessons and resources in the *Field Experience Guide*. FEG 3.5 ("Web of Ideas") can be an excellent task for teachers and students to explore the relationships among rational numbers (integers, fractions, whole numbers, etc.). FEG Expanded Lesson 9.2 ("Close, Far, and In Between") focuses on the relative magnitude of numbers and FEG Expanded Lesson 9.10 ("How Close Is Close?") focuses on the density of rational numbers. The order of operations is the focus of FEG Activity 10.5 ("Target Number") and Balanced Assessment Task 11.1 ("Magic Age Rings").

YENİ!

Alan Deneyimi Kılavuz (Örnek) Bağlantıları

Bu yeni özellik, her bölümün içindeki konuyla ve öğrenme alanıyla doğrudan bağlantı kuran *Öğrenme Alanı Deneyim Rehberi*nden kaynaklar sunuyor. *İlk ve Ortaokul Matematiği'ne* bir ilave olan *Alan Deneyim Rehberi*, ilk ve ortaokul seviyelerinde öğrenci öğretimi deneyimleri, araştırma ve staj için uygundur. Kılavuz kitap iki kısım içermektedir: I. Kısım, yapmaları için öğretmen adaylarına görevler sunmakta; II. Kısım, üç çeşit etkinlik sunmaktadır: Genişletilmiş Dersler, Matematik Etkinlikleri ve Dengeleyici Değerlendirme Görevleri. Bu *Alan Deneyimi Rehber Bağlantıları* bölümünün, okulda çalıştığınız metindeki bilgiyi daha iyi bütünleştirmede size yardım etmesini umuyoruz.

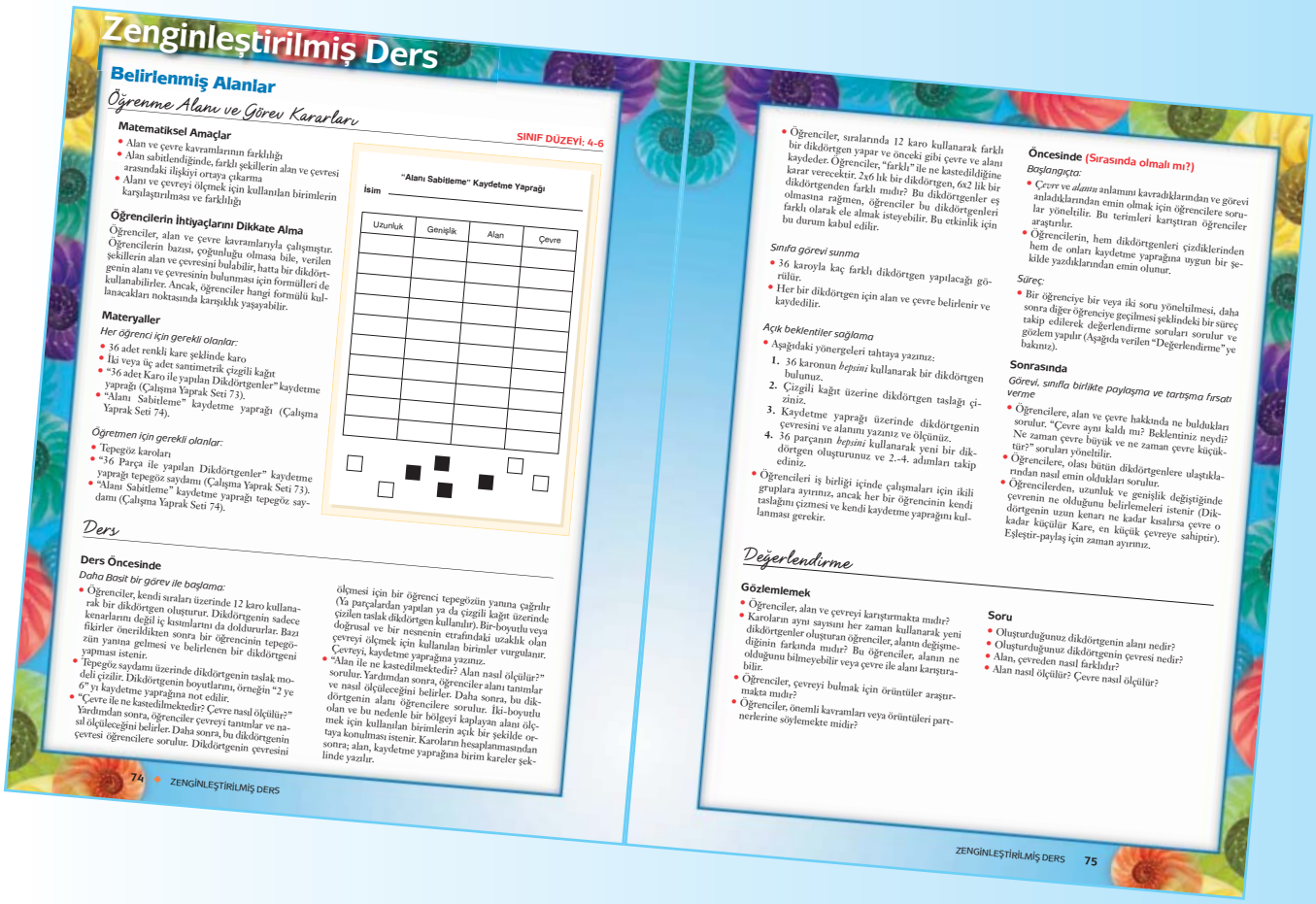
Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council Of Teachers Of Mathematics/NTCM) Standartları Ekleri

NCTM'in *Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar* raporuna, NCTM Standarları başlığı altında sürekli göndermede bulunulmuş ve bu rapor Bölüm 1'de derinlemesine açıklanmıştır. Ek A'da, A-2, 3-5 ve 6-8. sınıflar için İçerik Standartlarının ve Amaçların listesini sunan bu belgenin bir kopyası bulunmaktadır.

Ek B ise, *Bugün Matematiği Öğretmek*'ten *(Mathematics Teaching Today/NCTM, 2007a)* uyarlanan *Matematiği Öğretme Standartları*'nın gözden geçirilmiş şeklini sunmaktadır.

Genişletilmiş Dersler ▼

Bölüm 4'te, bir Genişletilmiş Ders örneği bulunmaktadır. Ayrıca, www.myeducationlab.com adresindeki MyEducationLab adlı siteden benzer 7 Genişletilmiş Ders'e ulaşılabilir. *Alan Deneyim Rehberi*'nde, tüm öğrenme alanlarını kapsayan ekstra 24 Genişletilmiş Ders bulunmaktadır. Genişletilmiş Dersler, Bölüm 4'te tarif edilen ders yapısını izlemektedir. Ayrıca, bu dersler matematiksel amaçları, hazırlık notlarını, belirli öğrenci beklentilerini, değerlendirme notlarını ve gerek duyulduğunda Çalışma Yaprak Setini (Blackline Masters) içermektedir. Bunlar, bir etkinliği gerçek ders planına dönüştüren bir model sağlamakta ve bunu yapmak için gerekli olan düşünce yolunu göstermektedir.


Zenginleştirilmiş Ders

Belirlenmiş Alanlar

Öğrenme Alanı ve Görev Kararları

SINIF DÜZEYİ: 4-6

Matematiksel Amaçlar

- Alan ve çevre kavramlarının farklılığı
- Alan sabitlendiğinde, farklı şekillerin alan ve çevresi arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma
- Alanı ve çevreyi ölçmek için kullanılan birimlerin karşılaştırılması ve farklılığı

Öğrencilerin İhtiyaçlarını Dikkate Alma

Öğrenciler, alan ve çevre kavramlarıyla çalışmıştır. Öğrencilerin bazısı, çoğunluğu olmasa bile, verilen şekillerin alan ve çevresini bulabilir, hatta bir dikdörtgenin alanı ve çevresinin bulunması için formülleri de kullanabilirler. Ancak, öğrenciler hangi formülü kullanacakları noktasında karışıklık yaşayabilir.

Materyaller

Her öğrenci için gerekli olanlar:

- 36 adet renkli kare şeklinde karo
- İki veya üç adet santimetrik çizgili kağıt
- "36 adet Karo ile yapılan Dikdörtgenler" kaydetme yaprağı (Çalışma Yaprak Seti 73).
- "Alanı Sabitleme" kaydetme yaprağı (Çalışma Yaprak Seti 74).

Öğretmen için gerekli olanlar:

- Tepegöz karoları
- "36 Parça ile yapılan Dikdörtgenler" kaydetme yaprağı tepegöz saydamı (Çalışma Yaprak Seti 73).
- "Alanı Sabitleme" kaydetme yaprağı tepegöz saydamı (Çalışma Yaprak Seti 74).

"Alanı Sabitleme" Kaydetme Yaprağı

İsim _____

Uzunluk	Genişlik	Alan	Çevre

Ders

Ders Öncesinde

Daha Basit bir görev ile başlama:

- Öğrenciler, kendi sıraları üzerinde 12 karo kullanarak bir dikdörtgen oluştururlar. Dikdörtgenin sadece kenarlarını değil iç kısımlarını da doldururlar. Bazı fikirler önerildikten sonra bir öğrencinin tepegözün yanına gelmesi ve belirlenen bir dikdörtgeni yapması istenir.
- Tepegöz saydamı üzerinde dikdörtgenin taslak modeli çizilir. Dikdörtgenin boyutlarını, örneğin "2 ye 6" yı kaydetme yaprağına not edilir.
- "Çevre ile ne kastedilmektedir? Çevre nasıl ölçülür?" Yardımdan sonra, öğrenciler çevreyi tanımlar ve nasıl ölçüleceğini belirler. Daha sonra, bu dikdörtgenin çevresini öğrencilere sorulur. Dikdörtgenin çevresini ölçmesi için bir öğrenci tepegözün yanına çağrılır (Ya parçalardan yapılan ya da çizgili kağıt üzerinde çizilen taslak dikdörtgen kullanılır). Bir-boyutlu veya doğrusal ve bir nesnenin etrafındaki uzaklık olan çevreyi ölçmek için kullanılan birimler vurgulanır.
- "Alan ile ne kastedilmektedir? Alan nasıl ölçülür?" sorulur. Yardımdan sonra, öğrenciler alanı tanımlar ve nasıl ölçüleceğini belirler. Daha sonra, bu dikdörtgenin alanı öğrencilere sorulur. İki-boyutlu olan ve bu nedenle bir bölgeyi kaplayan alanı ölçmek için kullanılan birimlerin açık bir şekilde ortaya konulması istenir. Karoların hesaplanmasından sonra; alan, kaydetme yaprağına birim kareler şeklinde yazılır.

74 • ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DERS

- Öğrenciler, sıralarında 12 karo kullanarak farklı bir dikdörtgen yapar ve önceki gibi çevre ve alanı kaydeder. Öğrenciler, "farklı" ile ne kastedildiğine karar verecektir. 2x6 lık bir dikdörtgen, 6x2 lik bir dikdörtgenden farklı mıdır? Bu dikdörtgenler eş olmasına rağmen, öğrenciler bu dikdörtgenleri farklı olarak ele almak isteyebilir. Bu etkinlik için bu durum kabul edilir.

Sınıfa görevi sunma

- 36 karoyla kaç farklı dikdörtgen yapılacağı görülür.
- Her bir dikdörtgen için alan ve çevre belirlenir ve kaydedilir.

Açık beklentiler sağlama

- Aşağıdaki yönergeleri tahtaya yazınız:
  1. 36 karonun *hepsini* kullanarak bir dikdörtgen bulunuz.
  2. Çizgili kağıt üzerine dikdörtgen taslağı çiziniz.
  3. Kaydetme yaprağı üzerinde dikdörtgenin çevresini ve alanını yazınız ve ölçünüz.
  4. 36 parçanın *hepsini* kullanarak yeni bir dikdörtgen oluşturunuz ve 2.-4. adımları takip ediniz.
- Öğrencileri iş birliği içinde çalışmaları için ikili gruplara ayırınız, ancak her bir öğrencinin kendi taslağını çizmesi ve kendi kaydetme yaprağını kullanması gerekir.

Öncesinde (Sırasında olmalı mı?)

Başlangıçta:

- *Çevre* ve *alanın* anlamını kavradıklarından ve görevi anladıklarından emin olmak için öğrencilere sorular yöneltilir. Bu terimleri karıştıran öğrenciler araştırılır.
- Öğrencilerin, hem dikdörtgenleri çizdiklerinden hem de onları kaydetme yaprağına uygun bir şekilde yazdıklarından emin olunur.

Süreç:

- Bir öğrenciye bir veya iki soru yöneltilmesi, daha sonra diğer öğrenciye geçilmesi şeklindeki bir süreç takip edilerek değerlendirme soruları sorulur ve gözlem yapılır (Aşağıda verilen "Değerlendirme" ye bakınız).

Sonrasında

Görevi, sınıfla birlikte paylaşma ve tartışma fırsatı verme

- Öğrencilere, alan ve çevre hakkında ne buldukları sorulur. "Çevre aynı kaldı mı? Beklentiniz neydi? Ne zaman çevre büyük ve ne zaman çevre küçüktür?" soruları yöneltilir.
- Öğrencilere, olası bütün dikdörtgenlere ulaştıklarından nasıl emin oldukları sorulur.
- Öğrencilerden, uzunluk ve genişlik değiştiğinde çevrenin ne olduğunu belirlemeleri istenir (Dikdörtgenin uzun kenarı ne kadar kısalırsa çevre o kadar küçülür Kare, en küçük çevreye sahiptir). Eşleştir-paylaş için zaman ayırınız.

Değerlendirme

Gözlemlemek

- Öğrenciler, alan ve çevreyi karıştırmakta mıdır?
- Karoların aynı sayısını her zaman kullanarak yeni dikdörtgenler oluşturan öğrenciler, alanın değişmediğinin farkında mıdır? Bu öğrenciler, alanın ne olduğunu bilmeyebilir veya çevre ile alanı karıştırabilir.
- Öğrenciler, çevreyi bulmak için örüntüler araştırmakta mıdır?
- Öğrenciler, önemli kavramları veya örüntüleri partnerlerine söylemekte midir?

Soru

- Oluşturduğunuz dikdörtgenin alanı nedir?
- Oluşturduğunuz dikdörtgenin çevresi nedir?
- Alan, çevreden nasıl farklıdır?
- Alan nasıl ölçülür? Çevre nasıl ölçülür?

ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ DERS 75

BU BASKIDAKİ DEĞİŞİKLİKLER

Bazı değişiklikler hemen göze çarparken bazıları ise daha dikkatli bakıldığında fark edilmektedir. Dokunulmamış hiçbir bölüm kalmamıştır. 6. baskıdaki tüm özellikler aynı bırakılmıştır; fakat bazı bölümler gözden geçirilip genişletilmiştir. *Ek Kaynak Önerileri* bölümü daha da kısaltılmış ve üzerinde durulmuştur. *İlgili Edebi Metinler* diğer kaynaklarla beraber öğrenme alanlarıyla ilgili bölümlerin sonunda yer almaktadır. Ayrıca, öğretmenlerle çalışan John Van de Walle'nin videosunu içeren *MyEducationLab* bölümleri vardır. Ek olarak, her bölüm *Alan Deneyim Rehberi* ile bağlantı kuran bir bölüm ile bitmektedir. Devamında ise, 7. baskıdaki değişiklikler göze çarpmaktadır.

Matematik Yapmak ve Matematiği Anlamak

Bu baskıda bir bölümün eksikolduğunu hemen fark edeceksiniz. 6. baskı 2. ve 3. bölümleri matematik yapmak ve matematiği anlamak şeklinde ikiye ayırmıştır. Bu baskıda ise 2. Bölüm, öğrenme teorilerinin "Niçin yapmalı" boyutu ile matematik yapmanın uygulaması arasında bağlantı kurmaktadır. Oluşturmacı ve sosyo-kültürel teoriler kısa ve anlaşılır bir biçimde açıklanmış ve sonrasında da bunların öğretim için çıkarımları verilmiştir. Birçok eleştirmen, bu iki bölümün birleştirilmesini rica etmiş ve sonuçta ortaya çıkan bölüm teoriyle uygulamayı açık bir şekilde birbiriyle ilişkilendirmiştir.

Problem Çözme

Problem çözme kitabın tümüne entegre edilmesine rağmen, *I. kısımdaki bölümlerde* problem çözmenin öğretiminde George Polya'nın çalışması üzerine yoğunlaşan yeni bir yaklaşımın vurgulandığını göreceksiniz. Çoğu öğretmenin kitapta benimsenen problem çözme yaklaşımına aynı şekilde yoğunlaşmayan bir müfredatı kullandıklarını bildiğimizden, *Bölüm 3*'te ders kitaplarının soru çözmeyi teşvik etmek amacıyla nasıl uyarlanması gerektiğini anlatan mükemmel bir bölüm yer almaktadır.

Çeşitlilik

Bu kitabı daha önceden kullananlar için çeşitlilik üzerine yapılan vurgu aşikârdır. Çeşitlilik odaklı birtakım tartışmalar, farklılaşan öğretimi (sıralı dersler dâhil), esnek gruplamanın avantajlarını (Bölüm 4), ders planlama sürecinin yeni bir bileşenini (Bölüm 4), farklı dilbilimsel ve kültürel geçmişi olan ailelerle çalışma (Bölüm 4 ve 6) konularını içermektedir. "Tüm Çocuklara Eşit Şekilde Matematiği Öğretmek" başlıklı Bölüm 6, özel gereksinimli öğrencilerle çalışırken kullanılan müdahaleye tepki verme modelinin (Response to Intervention/RTI) matematik sınıflarındaki öğrencilere uyarlanması konusunu tartışan genişletilmiş bir bölümdür. Ayrıca bu bölümeorta ve ağır derece engelli öğrenciler için araştırma temelli stratejiler öneren gözden geçirilmiş yeni özellikleri içeren bir altbaşlık eklenmiştir. Sonuç olarak II. Kısımda, kavram ve yöntem tartışmaları kapsamında, farklı geçmişi olan öğrencilerle çalışmanın önemine değinilmiştir.

Teknoloji

En son baskıdan bu yana teknoloji dünyasında şaşırtıcı olmayan birçok değişiklik meydana gelmiştir. Bu yeni baskı yayınlanmış olsa dahi, bu değişikliklere ayak uydurmak oldukça güç görünmektedir. Teknolojinin, dijital araçları, iş birlikçi yazılım araçlarını, ses ve video gibi oynatıcı yayın aboneliğini ve dinamik yazılımları da içeren daha kapsamlı bir tanımı vardır. Teknolojik ve Pedagojik Alan Bilgisi düşünüldüğünde bu tanım, teknolojiden tüm derslerde faydalanma gereğini doğurmaktadır. Bölüm 7'de, daha önceki kullanıcı ve eleştirmenlerin talep ettiği gibi, internet kaynaklarının nasıl seçilip değerlendirileceğine dair rehber bilgiler bulunmaktadır. Kitap boyunca, kişilerin satın almaları yerine internet üzerinden ulaşabilecekleri yazılımlar üzerinde yoğunlaşan ısrarlı bir çaba gösterilmiştir

Cebirsel Düşünme

Bu baskıdaki en belirgin değişikliklerden birisi, "Cebirsel Düşünme: Genellemeler, Örüntüler ve Fonksiyonlar" başlıklı Bölüm 14'teki cebirsel düşünmenin ele alınışıdır. 6. baskıda

yeniden düzenlenmesine rağmen bu bölüm, matematiğin tümü için geçerli olan aritmetikten ve örüntülerden yola çıkarak genelleme yapma, sembollerin anlamlı kullanımı, sayı sisteminin yapısı üzerinde çalışma, örüntü ve fonksiyonları inceleme gibi cebirsel düşünmede önemli olan ve bu dördünü kaynaştıran matematiksel modelleme gibi 5 kritik temanın etrafında yeniden düzenlenmiştir. Ayrıca; Anaokulunda 8. Sınıflar arasında, diğer derslerle ilişkilendirmeyi de içerek şekilde cebirsel düşünebilmek için anlamlı bağlamlar geliştirmeye yönelik artan bir ilgi vardır.

İstatistik ve Veri Analizi

6. baskıdan sonra Amerika İstatistik Birliği, *İstatistik Eğitim Raporunda Değerlendirme ve Öğretim için Öneriler*'i (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education/ GAISE) yayımladı. Bu önemli belge, Bölüm 21'in yazılmasını sağlayan istatistik yapma sürecinin taslağını oluşturmaktadır. Bu bölümde veri analizi önemli bir odak noktası olarak görülmesine rağmen bu bölüme; problem kurmayı, veri toplamayı ve çıkarımlarda bulunmayı gösteren yeni bir bölüm eklenmiştir.

Bir Profesyonel Olarak Gelişmek

Uzun vadeli profesyonel gelişiminize yeni bir vurgu da, matematik öğretmeni olma yolunda öğrenme ve gelişime davet eden en güncel matematik belgelerinin bulunduğu tamamen yeni bir kısım Bölüm 1'de verilmiştir. Yine Bölüm 1'de, *Müfredat Odak Noktaları* size tanıtılacaktır. NCTM'nin tüm yeni pozisyon ifadeleri, Sınıf Düzeyindeki Kazanımları ve başlıca ulusal ve Uluslararası değerlendirme sonuçları üzerine düşünmeniz sağlanacaktır. Ayrıca, kişisel matematiksel bilginizi, kararlılık, olumlu tutum, değişime açık olma ve derin düşünme yatkınlığınızı vurgulayan özel bir kısım Bölüm 1'de yer almaktadır. Tüm bunlar yaşam boyu bir öğrenci olmanın bileşenleridir.

Diğer Değişiklikler

7. baskıdaki diğer değişiklikler şu şekildedir:

- "Öğretimin Değerlendirme ile yapılandırılması" başlıklı Bölüm 5, tanılayıcı ve biçimlendirici değerlendirmenin tanımlarını, delil toplamaya odaklı dereceleme ölçeklerini ve güçlük yaşayan öğrencilerle çalışırken kişiye yardımcı olabilecek teşhis amaçlı görüşmeleri içeren bir kısım içermektedir.
- "Temel Bilgi ve İşlemlerde Ustalaşmalarında Öğrencilere Yardım Etme" Bölüm 10, araştırmaların en etkin strateji olarak ortaya koyduğu "10 Yap" stratejisini vurgulamaktadır. Ayrıca, stratejileri uygulamaya dökme yolunda nelerin yapılıp nelerin yapılmaması gerektiği konusuna rehberlik eden yeni bir kısım bulunmaktadır.
- "Kesir Kavramlarının Gelişimi" başlıklı Bölüm 15, kesirlerin anlamlarını ve kesirleri öğretirken hatırlanması gereken strateji listesini sunmaktadır.
- "Ölçme Kavramlarının Gelişimi" başlıklı Bölüm 19, basamak değerinin tartışıldığı daha önceki bölümde yer alan para konusunu içermektedir.
- "Olasılık Kavramlarının İncelenmesi" başlıklı Bölüm 22, olasılığı keşfetmek için daha gerçekçi ve çekici bağlamlar içermekle beraber örneklem büyüklüğü ve değişkenlik kavramları üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Bölüm 1

Matematik Öğretmenleri Konseyi Standartlarıyla Matematik Öğretimi

Değişen bu dünyada, matematiği anlayanlar ve yapabilenler geleceklerinin şekillenmesine dair önemli düzeyde imkânlar ve fırsatlar yakalayacaktır. Matematiksel yeterlik, iyi bir gelecek için kapılar açar. Matematiksel yeterliğin eksikliği ise bu kapıları kapatır. ... Öğrencilerin hepsine matematiği anlamaları ve derinlemesine öğrenmeleri için fırsatlar sağlanmalı ve destek verilmelidir. Eşitlik ve mükemmellik arasında bir çatışma yoktur.

NCTM (2000, s. 50)

Yakın bir gelecekte kendinizi öğrencilerin önünde bulacaksınız, belki de hâli hazırda öğretim yapmaktasınızdır. Matematiği öğretme biçiminize rehberlik edecek genel fikirler nelerdir? Bu kitap, anaokulu öncesi 8. sınıfa kadar öğretim programlarının matematik öğrenme alanlarıyla rahat bir şekilde çalışabilmeniz için yardımcı olacaktır. Çocukların matematiği bilmelerine ve matematik yaparken kendi yeteneklerine güvenmelerine yardımcı olacak araştırmaya dayalı stratejileri de öğreneceksiniz. Şu iki durum, yani matematik bilginiz ve öğrencilerin matematiği nasıl öğrendikleri, etkili bir matematik öğretmeni olmanızı sağlayacak en önemli araçlardır. Bununla birlikte, dış etkiler ve araştırmalar da, sınıflardaki matematik öğretiminizi etkileyecektir.

Son 20 yılda, matematik eğitimi ağır ama kararlı bir şekilde ilerlemektedir. Hem okul matematiğinin öğrenme alanlarında hem de matematiğin öğretim biçimindeki bu değişimlerin itici gücü, araştırmalardan elde edilen bilgiyi içeren çeşitli kaynaklara bağlanabilir. Bu değişimdeki önemli bir faktör, matematik eğitimcileri ve öğretmenlerinin bir organizasyonu olan Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin [National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)] mesleki öncülüğüdür. Diğer bir faktörde, uluslararası çalışmalarda Amerikalı öğrencilerin performanslarının çoğunlukla düşük düzeyde kalması nedeniyle mate matik eğitiminde değişim için oluşan politik ve toplumsal baskıdır. Bu duruma tepki olarak ise eyalet standartları ve "Eğitimsiz Hiçbir Çocuk Kalmasın Kanunu" [No Child Left Behind Act (NCLB)]", yüksek başarı düzeyini sağlamak için daha fazla sınav baskısı uygulamaya başlamış ve öğretmenlerin sorumluluğunu arttırmıştır. NCTM ve politik sektörün reform gündemi, öğretmenlere farklı yönergelerle sık sık baskılar yapılmasına neden olmuştur. Öğrenciler için yüksek kazanımlar önemli olmasına rağmen, sınavlar, öğrencilerin öğrenmelerini zenginleştirmek için tek başına uygun bir yaklaşım değildir. NCTM'e göre, "Öğretmenler, matematiksel düşünme ve akıl yürütme üzerine odaklandıkları zaman, matematiği öğrenme en yüksek düzeye ulaşır" (www.nctm.org). Bu kitapta tartışılan fikirlerde, NCTM'nin görüşleri açık bir şekilde yansıtılmıştır.

Çocukların matematiği öğrenmelerine yardımcı olabilmeniz için, matematik sınıflarında değişimi etkileyen güçlere yönelik bazı görüşlere sahip olmanız önemlidir. Bu bölüm, NCTM'nin matematik eğitimine yaptığı öncülüğü ve matematik eğitimi üzerindeki dış etkilerden kaynaklanan büyük baskıları da vurgulamaktadır.

Nihayetinde bir öğretmen olarak öğretiminiz, çocukların matematiği öğrenmelerini şekillendirecektir. Çocukların matematiği nasıl anlayacaklarına ve matematiği bilme ve yapmayla ne kastedildiğine yönelik inançlarınız, öğretim yaklaşımınızı etkileyecektir. Bu inançlar, bu bölümde matematik eğitimiyle ilgili okuyacağınız önemli fikirlerden doğrudan veya dolaylı bir şekilde mutlaka etkilenecektir.

Standartlara Dayalı Akım

NCTM, 11 yıl önce 1989'da yayımladığı orijinal standartlar dokümanının bir güncellemesi olarak Nisan 2000 de, *Okul Matematiği için Standartlar ve İlkeler*'i [*Principles and Standards for School Mathematics*] yayımladı. Bu çok önemli doküman ile Konsey, sadece Amerika ve Kanada'da değil aynı zamanda tüm dünyada matematik eğitimde devrim niteliğindeki reform hareketlerine yönelik rehberliğini sürdürmüştür.

Matematik eğitimindeki reform hareketleri için itici güç, "okuma, yazma ve aritmetiğe" vurgu yapan "temellere dönüş" hareketine tepki olarak 1980'lerin başlarında başlamıştır. Bir sonuç olarak, problem çözme matematik müfredatında önemli bir öğrenme alanı olmuştur. Jean Piaget ve diğer gelişim psikologlarının çalışması, çocukların

matematiği en iyi nasıl öğrenebileceklerine yönelik çalışmalara odaklanılmasına yardımcı olmuştur.

Bu ivme; NCTM, *Okul Matematiği için Öğretim Programı ve Değerlendirme Standartları*'nı [*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*] ve Standartlar hareketleri yayımlandığı veya matematik eğitiminde reform çağının başladığı 1989'da üst noktaya ulaştı. Bugün de süreç devam etmektedir. Başka hiçbir doküman, öğretim programının herhangi bir alanı veya okul matematiği üzerinde asla çok büyük bir etki yapmamıştır. NCTM, 1991'de *Matematik Öğretimi için Mesleki Standartlar*'ı [*Professional Standards for Teaching Mathematics*] yayımladı. *Mesleki Standartlar* ve *Bugünün Matematik Öğretimi* [*Mathematics Teaching Today*], matematik öğretimine yönelik bir vizyondan bahsetmiş ve bu iki kitap, az sayıda çocuk yerine bütün çocuklar için matematik başarısının önemine vurgu yapan bir vizyona sahip *Öğretim Programı Standartları*'nda bulunan kavramlar üzerine inşa edilmiştir. NCTM; 1995'de yayımladığı, *Okul Matematiği için Değerlendirme Standartları* [*Assessment Standards for School Mathematics*] ile paketi tamamlamıştır (bkz. Bölüm 5). *Değerlendirme Standartları*, öğretim ile değerlendirmenin bütünleştirilmesinin zorunluluğunu açık bir şekilde göstermiş ve değerlendirmenin, uygulamadaki değişimde anahtar rol oynadığına işaret etmiştir.

1989'dan 2000'e kadar bu üç doküman, doğrudan matematik eğitimindeki reform hareketlerine rehberlik etmiş ve bu üç orijinal standart dokümanın bir güncellemesi olan ve Ana okulu öncesi - 12. sınıf düzeyine (K-12) ve programına kadar vurgulanması gereken ileri fikirleri, süreçleri ve öğrenme alanlarını içeren *Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar*'ının [*Principles and Standards for School Mathematics*], 2000 yılında yayımlanmasına yol açmıştır. NCTM, kendisi küçük ama her bir sınıf düzeyi için matematiğin ihtiyaçlarına odaklanma, daha derinlere ulaşma ve ilişkileri gösterme gibi büyük mesajlar içeren *Öğretim Programı Odak Noktalar*'ı [*Curriculum Focal Points*] 2006'da yayımlamıştır. Bütün düzeyler için, NCTM'nin rehberliğinin devamı, matematik eğitimcilerinin ve öğretmenlerinin güçlü destekleriyle, matematik öğretimini ve öğrenimini geliştirmeyi sürdürecek ve ülkeyi, öğrenciler için daha anlamlı ve uğraşmaya değer bir öğretim programına sahip olmaya sevk edecektir. Aşağıdaki kısımlarda, bu dokümanlar özellikle de bir matematik öğretmeni olarak çalışmalarınız için önemli mesajlar içeren *İlkeler ve Standartlar* tartışılacaktır.

Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar[1]

Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar (2000), ana okulu öncesi - 12. sınıftaki matematik eğitimindeki öğretmenler ve diğer yöneticiler için yönergeler içermekte ve rehberlik yapmaktadır. *İlkeler ve Standartlar*, yaklaşık 10 yıldır bu eğitimciler için matematiksel bilgi üzerinde en önemli referans kaynağı olmayı sürdürmektedir. Öğretmenlerin, *Standartlar* üzerindeki bilgileri okumaları ve üzerinde düşünmeleri önemli iken gelecek birkaç sayfa size ne bulacağınız hakkında bazı fikirler verecektir.

Altı İlke

Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar'ın en önemli özelliklerinden birisi, yüksek-kalitede matematik eğitimi için altı temel ilkeyi açıklamasıdır:

- Eşitlik
- Öğretim Programı
- Öğretim
- Öğrenme
- Değerlendirme
- Teknoloji

İlkeler ve Standartlar'a göre, bu ilkeler mutlaka "okul matematik programları ile iç içe geçirilmelidir" (NCTM, 2000, s.12). Bu İlkeler, matematik eğitiminde uzmanlaşmanın, öğrenme alanı hedeflerinin basit bir şekilde listelenmesinden çok daha fazlasını içerdiğini açık bir şekilde göstermektedir.

Eşitlik İlkesi

> Matematik eğitiminde uzmanlık, bütün öğrenciler için eşitliği, yüksek beklentileri ve güçlü desteği gerektirir (NCTM, 2000, s.12).

Eşitlik ilkesinin güçlü mesajı, bütün öğrenciler için yüksek beklentilerdir. Bütün öğrencilere, "kişisel özelliklerine, geçmişlerine veya fiziksel durumlarına bakılmaksızın" (s.12) matematiği öğrenmek için mutlaka yeterli destek ve fırsat verilmelidir. Herkes için yüksek beklenti mesajı, doküman boyunca işlenmiştir.

Öğretim Programı İlkesi

> Bir öğretim programı, etkinliklerin toplamından daha fazladır: O, tutarlı olmalı, matematiğin önemi üzerine odaklanmalı ve sınıf düzeyleri arasındaki geçişi sağlamalıdır (NCTM, 2000, s.14).

Tutarlılık, hem öğretim programında hem de günlük sınıf öğretiminde "ana fikirler" etrafında öğretimin yapılandırılmasının öneminden bahsetmektedir. Öğrencilere mutlaka, matematiği ayrıştırılmış parçalar ve kısımlardan ziyade bir bütün olarak görmeleri için yardım edilmelidir.

Matematiksel fikirler, başka fikirlerin gelişiminde, fikirlerin birbirleriyle ilişkilendirilmesinde veya matematik disiplininin bir insan uğraşısı olduğunun gösterilmesinde yardımcı olarak kullanılırsa "önemlidir".

Öğretim İlkesi

> Etkili matematik öğretimi, öğrencilerin neyi bildiğini ve öğrenmek için neye ihtiyaçları olduğunu ve onların daha iyi öğrenmeleri için nasıl bir desteğe ve çalışmaya gerek duyduklarını anlamayı gerektirmektedir (NCTM, 2000, s.16).

Öğrenciler, neredeyse tümüyle, öğretmenlerin her gün derslerde kendilerine sunduklarına dayalı olarak öğrenirler. Öğretmenler, matematik öğretimini yüksek-kaliteli yapmak için mutlaka, (1) öğrettikleri matematiği derinlemesine anlamalıdır; (2) öğrencilerinin bireysel matematiksel gelişimlerinin farkında olarak, onların matematiği nasıl öğrendiklerini kavramalı ve (3) öğrenmeyi arttıracak öğretimsel görevler ve stratejiler seçmelidir. "Öğretmenlerin" görevi,

1 Standartlar, NCTM'in izni ile listelenmiştir. NCTM, bu listenin geçerliğini ve içeriğini desteklemez. *Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar*'dan izin alınarak basılmıştır. © NCTM 2000 telif hakkına sahiptir.

öğrencileri düşünme, soru sorma, problemleri çözme ve fikirlerini, stratejilerini ve çözümlerini tartışmak için cesaretlendirmektir." (s. 18).

Öğrenme İlkesi

> Öğrenciler, matematiği anlayarak öğrenmeli, önceki bilgi ve deneyimlerinden faydalanarak yeni bilgiyi aktif bir şekilde inşa etmelidir (NCTM, 2000, s. 20).

Öğrenme ilkesi, iki temel fikre dayanmaktadır. Birincisi, matematiği anlayarak öğrenmek esastır. Bugünün matematiği, sadece hesaplamaya dayalı becerileri değil aynı zamanda yeni problemleri çözmek için matematiksel akıl yürütme ve düşünme yeteneğini ve öğrencilerin gelecekte karşılaşacakları yeni fikirleri öğrenmelerini gerektirmektedir.

İkincisi ise öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenebileceklerini çok açık bir şekilde beyan etmektedir. Öğrenme, öğrencilerin kendilerinin ve başkalarının fikirlerini değerlendirmelerine imkân verecek şekilde sınıflarda geliştirilir ve öğrenciler, matematiksel varsayımlar oluşturmaları, onları test etmeleri ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeleri için teşvik edilir.

Değerlendirme İlkesi

> Değerlendirme, matematiğin önemini öğrenmeyi desteklemeli ve hem öğretmenlere hem de öğrencilere kullanışlı bilgi sağlamalıdır (NCTM, 2000, s. 22).

Yazarların kelimelerinde, "Değerlendirme, sadece öğrencileri değerlendirmek *için* değil öğrencilerin öğrenmelerini zenginleştirmek ve onlara rehberlik etmek *için* yapılmalıdır" (s. 22). Sürekli yapılan değerlendirmeler, öğrencilerin dikkatini en önemli matematiksel kavramlar üzerine çeker. Sürekli gözlemi ve öğrencilerin etkileşimini içeren değerlendirme, öğrencileri fikirlerini ifade etmeleri için cesaretlendirir ve böylece fikirlerini açıklamalarını sağlar. Günlük değerlendirme dönütleri, öğrencilerin amaçlarını oluşturmalarına ve daha bağımsız öğrenenler olmalarına yardımcı olur.

Değerlendirme, öğretimsel kararların alımında da önemli bir faktör olmalıdır. Öğrencilerin gelişimi ve anlamasına ilişkin sürekli olarak toplanan bilgiyle; öğretmenler, öğrencilerin öğrenmelerini destekleyen günlük kararları daha iyi alabilirler. Değerlendirmenin etkili olabilmesi için, öğretmenler mutlaka çeşitli değerlendirme tekniklerini kullanmalı, öğrencilerinin matematiksel amaçlarını derinlemesine anlamalı ve öğrencilerinin matematik hakkındaki düşüncelerini veya yanlış anlamalarını ortaya çıkarmaya yönelik iyi bir fikre sahip olmalıdır.

Teknoloji İlkesi

> Teknoloji, matematik öğrenimi ve öğretiminde esastır. O, matematiğin öğretimini ve öğrencilerin öğrenmelerinin zenginleştirilmesini etkiler (NCTM, 2000, s. 24).

Hesap makineleri, bilgisayarlar ve başka teknolojiler, sınıflarda matematiğin öğrenimi ve yapımı için temel araçlar olarak görülmelidir. Teknoloji, öğrencilere bu araçlar olmaksızın sıklıkla imkânsız olarak görülen durumlardaki problemleri çözmeleri, akıl yürütmeleri ve matematiksel fikirler üzerine odaklanmaları için izin verir. Teknoloji, fikirlerin sunumunun zenginleştirilmesine ve keşiflerin arttırılmasına izin vermesi yoluyla matematiğin öğrenimini zenginleştirir. O, değerlendirilecek problemlerin dizisini genişletir.

Beş Öğrenme Alanı Standardı

İlkeler ve Standartlar, dört sınıf düzeyi grubu içerir: ana okulu öncesi 2, 3-5, 6-8 ve 9-12. Okul öncesindeki yeni vurgu, çocukların okul öncesi eğitime başlamadan önceki kritik yıllarını belirlemektir. Her bir sınıf düzeyi grubu için matematiksel konuların farklı kümelerini kullanmaktan ziyade, yazarlar sınıf düzeyleri boyunca beş öğrenme alanı standardının ortak bir kümesi üzerinde karar kılmıştır (bkz. Ek A). Bu kitaptaki Kısım 2 (Bölüm 8'den 23'e kadar), aşağıda listelenen öğrenme alanlarının her birine ilişkin ayrıntılı açıklamalar için ayrılmıştır:

- Sayı ve İşlemler
- Cebir
- Geometri
- Ölçme
- Veri Analizi ve Olasılık

Her bir öğrenme alanı standardı, bütün sınıf düzeyi gruplarına uygulanabilir amaçların küçük bir kümesini içermektedir. Sonra, her bir sınıf düzeyi grubu, öğrencilerin bilmesi gereken özel kazanımlar sağlamaktadır. Bu sınıf düzeyi grup kazanımları da *Standartlar*'a ek olarak açık bir şekilde bu kitabın Ek A kısmında listelenmiştir.



Dur ve Düşün!

Şimdi durunuz ve Ek A ya bakınız. En çok ilginizi çeken sınıf düzeyi grubu için bu beklentilerinizle birlikte birkaç dakikanızı harcayınız. Okul zamanlarınızdaki matematik deneyiminizle bu beklentileri nasıl karşılaştırırsınız?

Aynı beş öğrenme alanı standardı, bütün sınıf düzeylerinde uygulanmasına rağmen, her bir sınıf düzeyi grubunda her öğrenme alanına eşit düzeyde ağırlık veya vurgu yapılacağını düşünmeyiniz. Sayı ve İşlemler, ana okulu önces, - 5. sınıfa kadar en yoğun şekilde vurgulanır, ortaokul düzeyine kadar önemini sürdürür, fakat 9 -12. sınıf düzeyinde daha az vurgulanır. Aynı vurgu, bu kitapta Bölüm 8 den 13'e ve 15 den 18'e kadar Sayı ve İşlemler konusunda bulunan öğrenme alanı ile yansıtılmaktadır.

Cebir, bütün sınıf düzeyleri için açık bir şekilde bir öğrenme alanı olarak planlanmıştır. Okul döneminizde, bu durum muhtemelen yoktu. Bugün, çoğu ülke ve eyalet her bir sınıf düzeyinde cebire yönelik hedefler içermektedir. Bölüm 22, 23 ve 24, bu konuyu vurgulamaktadır.

Geometri ve Ölçme'nin, ayrı öğrenme alanları olduğunu, ilkokul ve ortaokul sınıf düzeylerinde bu alanların her birinin öneminin tek başına vurgulanması gerektiğini not ediniz.

Beş Süreç Standardı

Beş öğrenme alanı standardını takiben *İlkeler ve Standartlar*, beş süreç standardını listelemiştir:

- Problem Çözme
- Akıl yürütme ve İspat

- İletişim
- İlişkilendirme
- Temsil

Süreç standartları, öğrencilerin kazanmaları ve kullanmaları gereken matematiksel bilgiye paralel matematiksel süreçleri ifade etmektedir. Beş süreç standardının ifadesi, Tablo 1.1'de bulunabilir.

Bu beş süreç standardı, matematik öğretim programında ayrı öğrenme alanı veya alt öğrenme alanı olarak görülmemelidir. Aksine, onlar matematik yapmanın bütün süreçlerini veya yöntemlerini belirlemekte ve bu nedenle, matematik öğreniminin ve öğretiminin tamamlayıcı bileşenleri olarak değerlendirilmelidir.

"*Standartlar*'a göre" öğretim için, en uygun tanımlardan biri, süreç standartlarını yansıtacak biçimde gerçekleştirilen öğretimdir.

Problem Çözme standardı; problem çözmeye, çocukların matematiksel fikirlerinin geliştirilmesinin aracı olarak bakmaktadır. **Problemleri çözdüğünüz gibi** matematiği öğrenme ve yapma, önceki yöntemlere karşı *Standartlar*'ın yaklaşımındaki muhtemelen en önemli farklılıktır.

Eğer problem çözme, matematiğin odağı ise o zaman **Akıl yürütme ve İspat standardı,** karar vermemize ve cevaplarımızı anlamamıza yardım eden mantıksal düşünmeye vurgu yapar. Öğrencilerin, her bir cevabın tamamlayıcı bir parçası olarak bir mantıksal gerekçe gösterme alışkanlığını geliştirmeye ihtiyaçları vardır. Öğrencilerin, mantıksal deliller aracılığıyla fikirlerin kanıtlanmasının değerini öğrenmeleri önemlidir.

İletişim standardı, matematiksel fikirlerin konuşulabilmesi, yazılabilmesi, nitelendirilebilmesi ve açıklanabilmesinin önemini ifade etmektedir. Öğrenciler matematikte iletişimi, sınıfta sözel ortamdaki bir etkinlikte fikirlerini keşfederek öğrenir ve etkileşim içerisinde geliştirir. Bir fikri, başkalarına aktarmaya veya sağlam bir şekilde ifade etmeye çalışmaktan daha iyi yol yoktur.

İlişkilendirme standardı, iki ayrı itici güce sahiptir. Birincisi, matematiksel fikirler içindeki ve arasındaki ilişkileri ifade eder. Örneğin; bir bütünün kesir parçaları, ondalık sayı ve yüzde kavramları ile ilişkilendirilir. Öğrencilerin, ilişkili fikirlerin kullanılışlı bir ağında matematiksel fikirlerin birinin diğeri üzerine nasıl inşa edildiğini görmeye ihtiyaçları vardır.

İkincisi, matematik gerçek dünya ve diğer disiplinlerle ilişkilendirilmelidir. Çocuklar matematiğin, sanatta, fende, dil bilimlerinde ve sosyal çalışmalarda önemli bir rol oynadığını görmelidir. Bu durum, gerçek dünyada matematiğin uygulamalarının keşfedilmesini ve matematiğin başka disiplin alanlarıyla sıklıkla entegre edilmesini önerir.

Temsil standardı, matematiksel fikirlerin ve ilişkilerin ifade edilmesinin çok güçlü yöntemleri olarak diyagram, manipulatif, grafik, tablo ve sembollerin kullanılmasına vurgu yapar. Matematikte sembolleştirme, grafik ve tablo gibi görselleştirmeye yardımcı elemanlar aracılığıyla, matematiksel fikirlerin başka kişilere aktarımının yolları olarak öğrenciler tarafından anlaşılmalıdır. Bir

Tablo 1.1

Okul Matematiği İçin İlkeler ve Standartlar'dan Beş Süreç Standardı

Problem Çözme Standardı Ana okulu öncesi - 12. sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrencilere imkân vermeli—	• Problem çözme aracılığıyla yeni matematiksel bilginin inşası • Matematikte ve başka bağlamlarda ortaya çıkan problemleri çözme • Problemleri çözmek için uygun stratejilerin bir çeşidini uyarlama ve uygulama • Matematiksel problem çözme süreçleri üzerinde derinlemesine düşünme ve kendini ayarlama
Akıl yürütme ve İspat Standardı Anaokulu öncesi - 12. sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrencilere imkân vermeli—	• Akıl yürütme ve ispatı, matematiğin temel bileşenleri olarak görme • Matematiksel varsayımları oluşturma ve inceleme • Matematiksel iddiaları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme • İspat yöntemleri ve akıl yürütmenin çeşitli tiplerini seçme ve kullanma
İletişim Standardı Anaokulu öncesi - 12. sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrencilere imkân vermeli—	• İletişim aracılığıyla matematiksel düşünmeyi güçlendirme ve organize etme • Matematiksel düşüncelerini, arkadaşlarına, öğretmenlerine ve başkalarına açık ve tutarlı bir şekilde aktarabilme • Başkalarının matematiksel düşünme ve stratejilerini analiz etme ve değerlendirme • Matematiksel fikirleri açık bir şekilde ifade etmek için matematiksel dili kullanma
İlişkilendirme Standardı Anaokulu öncesi - 12. sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrencilere imkân vermeli—	• Matematiksel fikirler arasındaki ilişkileri görme ve kullanma • Matematiksel fikirlerin nasıl iç içe geçtiğini ve tutarlı bir bütünü üretmek için birinin diğeri üzerine nasıl inşa edildiğini anlama • Matematiğin dışındaki içeriklerde matematiği belirleme ve uygulama
Temsil Standardı Anaokulu öncesi - 12. sınıfa kadar öğretim programları, bütün öğrencilere imkân vermeli—	• Matematiksel fikirlerin organize edilmesi, kaydedilmesi ve iletişimi için temsilleri oluşturma ve kullanma • Problemleri çözmek için matematiksel temsilleri seçme, uygulama ve aralarında geçiş yapma • Fiziksel, sosyal ve matematiksel olayları yorumlama ve modellemek için temsiller kullanma

Kaynak: Standartlar, NCTM'in izni ile listelenmiştir. NCTM, bu listenin geçerliğini ve içeriğini desteklemez.
Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar'dan izin alınarak basılmıştır.
© NCTM 2000 telif hakkına sahiptir. Inc. www.nctm.org.

temsilden diğerine geçiş, yeni biçimlendirilmiş bir fikri derinlemesine anlamak için önemli bir yoldur.

Bu kitap boyunca, bu ikon okuduğunuz bilgilerle ilgili *İlkeler ve Standartlar*'daki özel bilgi için sizi uyaracaktır. Fakat, okuduğunuz bu notlar ve özet betimlemeler, *Standartlar* dokümanlarını okumanın yerini almamalıdır. NCTM'nin üyeleri, önceki üç standart doküman gibi *İlkeler ve Standartlar* dokümanlarının tamamına online olarak ulaşabilir. Üye olmayanlar, www.nctm.org da *İlkeler ve Standartlar*'a 120 gün ücretsiz erişim için kayıt olabilir. Web sayfası, matematiksel kavramların öğrenimi için etkileşimli araçlar olan küçük uygulama yazılımlarının (appletler) (e-Örnekler" olarak ifade edilmektedir) bir sayısını da ücretsiz olarak içermektedir. ◆

Öğretim Programının Odak Noktaları: Tutarlılık İçin Bir Arayış

Eyaletler tarafından oluşturulan amaçlar, genellikle geniş ve çoktur (Bu bölümde daha sonra gelecek "Sınıf Düzeyi Kazanımları" kısmında daha çok tartışılacaktır) ve 1 yıldaki birçok konuyu, bu konularla nasıl ilişkilendirilme yapılacağını açık bir şekilde göstermeksizin içermektedir. Bir kez daha; NCTM, matematik öğretmenleri, eyaleti temsil eden öğretim programı liderleri ve diğer eğitimciler gibi temsilciler tarafından her bir sınıf düzeyinde en ince matematiksel "hedeflerin" en önemli kavram ve becerilerindeki ana fikirleri belirlemek için dile getirilen ihtiyaçları karşılamıştır. NCTM, bu konuyu araştıran uzmanları bir araya getirmiş Ana okulu öncesi - *8. Sınıfa kadar Matematik için Öğretim Programının Odak Noktaları: Tutarlılık İçin Bir Arayış* (2006) [*The Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*] adlı kitabı yazmıştır. Bu kitap, sınıf düzeyi ve NCTM öğrenme alanlarına göre biçimlendirilmiş ve her bir sınıf düzeyi için sınıf düzeyindeki öğretimin öncelikli odaklarını içeren üç temel alana (odak noktaları) vurgu yapmıştır. Konular, ayrıştırılmış konuların bir listesini içeren bir öğretim programından ziyade *tutarlı* bir öğretim programının önemini gösterecek odaklara göre düzenlenmiştir. Süreç becerilerini ve bağlantılı birikimleri entegre eden bu odak noktalarını içeren kazanımlar, sınıf düzeyinin temel öğrenme alanlarını biçimlendirmiştir. *Öğretim Programı Odak Noktaları*, öğretmenler, yöneticiler, aileler ve diğer ilgili paydaşları, çocuk, sınıf, okul veya eyalet için anahtar fikirlerin vurgusu, derinliği ve dizisi hakkında konuşmaları için teşvik eder. Eyaletlerin yarısından fazlasının, öğretim programlarını hali hazırda Odak Noktaları ile düzenlemeleri sürpriz değildir. Odaklı öğretime ilaveten; bu kitap, rekabet etmeyi önceleyen mevcut öğretim programının ince ayarının yapılması ve verimli hale getirilmesi için de rehberlik sağlar.

Matematik Öğretimi için Mesleki Standartlar ve Bugünün Matematik Öğretimi

İlkeler ve Standartlar, değerlendirme ve öğretim ilkelerini içermesine rağmen, vurgu öğretim programı üzerinedir. *Matematik Öğretimi için Mesleki Standartlar* (1991),(NCTM üyelerine online olarak ücretsizdir) ve *Matematik Öğretimi için Mesleki Standartlar*'ının tamamlayıcısı olan *Bugünün Matematik Öğretimi* (2007) dokümanı (bkz. Ek B), öğretim üzerine odaklanmaktadır. Doküman, öğretmenlerin gerçek sınıf hikâyelerinin (süslenerek) detaylandırılması yoluyla, derinlemesine düşünme çalışmasının matematik öğretimine dikkatlice eklenmesini istemektedir.

Sınıf Ortamındaki Değişiklikler

Bugünün Matematik Öğretimi'nin girişi, öğrencilerin bir matematik sınıf ortamında matematiksel anlamalarını geliştirmelerine izin vermek için gerekli altı önemli değişikliği listelemektedir:

- Bütün öğrencilere öğrenmek için eşit fırsatın sağlanması.
- İşlemsel akıcılığın yanında kavramsal anlama üzerine de dengeli odaklanma.
- *Öğrencileri, problem çözme, akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme yapmalarında ve çoklu temsilleri kullanmalarında aktif hale getirme.
- İyi donanımlı öğrenme merkezlerinde teknolojinin anlamayı geliştirmek için kullanımı.
- Öğretimsel amaç ve uygulamalarla uyumlu çoklu değerlendirmeleri kullanma.
- Matematik yetkisi, matematiksel bütünlük ve akıl yürütmenin gücü altındadır (NTCM, 2007, s. 7).

Öğretim Standartları

Bugünün Matematik Öğretimi, (1) öğretim ve öğrenme; (2) gözlem, denetim ve matematik öğretiminin geliştirilmesi; (3) öğretmenlerin eğitimi ve meslekî gelişimlerinin sürdürülmesi; (4) başarmak için birlikte çalışma vizyonu ve (5) derinlemesine düşünmeyi öğrenenler için sorular şeklindeki bölümleri içermektedir. Öğretim ve öğrenme kısmında, yedi matematik öğretim standardı vardır:

1. Matematik bilgisi ve genel pedagoji
2. Öğrencilerin matematik öğrenme bilgisi
3. Değerli matematiksel görevler

4. Öğrenme ortamı
5. Konuşma ortamı
6. Öğrenci öğrenmeleri üzerine derinlemesine düşünme
7. Öğretim pratikleri üzerine derinlemesine düşünme

Bugünün Matematik Öğretimi (ve önceki yayınları), *İlkeler ve Standartlar*'ı destekleyerek bir sınıf ortamı oluşturmanız için bir öğretmen olarak rolünüzü tasarlamanıza yardım eden mükemmel bir kaynaktır.



Dur ve Düşün!

Yedi öğretim standardı, bu kitabın Ek B kısmında verilmiştir. Bu bir sayfalık listeyi incelemek çok az zamanınızı alır. Sizin için özellikle önemli olan bir veya iki standardı seçiniz. Bu kitapta çalışırken, bu önemli fikirlere zaman zaman geri dönmeyi hatırlamanız için sayfa üzerine bir stiker koyunuz.

Matematik Öğretimi Üzerindeki Etkiler ve Baskılar



NCTM, matematik eğitimindeki reform için önemli bir vizyon sağlamış ve öncülük yapmıştır. Fakat, değişimin yönünü tek bir faktör kontrol edemez. Ulusal ve uluslararası öğrenci performanslarının karşılaştırılmasının sürekli gündeme taşınması, toplum fikrini tahrik etmiş ve Amerikan yasama organına, sınava hazırlığa göre düzenlenmiş daha sağlam standartlar için baskı yapılmasına neden olmuştur. Sınava hazırlık politikalarının baskısı, okullar ve nihayetinde NCTM *Standartları*'nın vizyonundan farklı bir öğretim yapmak için öğretmenler üzerinde de etkili olmuştur. Bu baskılara ek olarak, öğretmenlere verilmek için hazırlanan ve eyalet standartları ile uyuşmayacak şekilde düzenlenmiş öğretim programı materyallerinin ve kitaplarının da güçlü bir etkisi vardır.

Ulusal ve Uluslararası Çalışmalar

Geniş ölçekli çalışmalar, Amerikan toplumunun dikkatinin çoğunu, çocuklarının matematikteki başarıları üzerine yoğunlaştırdığını göstermektedir. Bu durum, matematik eğitimi araştırmacıları için kullanışlı veriler sağlamalarına ek olarak politik kararları da etkilemektedir. Bu çalışmaları yapmak niçin önemlidir? Uluslararası ve ulusal değerlendirmeler, öğrencilerimizin küresel piyasada rekabet edebilmesi ve sorumlu vatandaşlar olarak karşılaşacakları karmaşık sorunları anlayabilmeleri için matematik öğretiminin değişmesi gerektiği yönünde güçlü deliller sunmaktadır.

Amerikan Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme Dairesi (NAEP) [National Assesment of Educational Progress-NAEP]. 1960'ın sonlarından beri ve düzenli aralıklarda (2 ve 4 yıl), Amerika Birleşik Devletleri [ABD], NAEP aracılığıyla, öğrencilerin matematiği (ve başka öğrenme alanları) nasıl yaptıklarıyla ilgili ulusal verileri toplamaktadır. Bu veriler, eğitimciler ve politikacılar için ABD öğrencilerinin zaman içinde gelişimlerini ölçmekte önemli bir imkan sağlamaktadır. "Amerikan Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme Dairesi Çalışma Bulguları Web Sayfasında [Nation's Report Card]", NAEP hem ulusal hem de eyalet düzeyinde trendleri incelemektedir. NAEP, 4, 8 ve 12. sınıflardaki öğrencileri dört performans düzeyi kullanarak değerlendirmektedir: Temel Altı Düzey, Temel Düzey, Yeterli Düzey ve İleri Düzey (Yeterli ve İleri Düzeyleri ile dikkate değer sınıf düzeyi başarısı ifade edilir). Kriter- referanslı test, günümüz, öğretim programını yansıtmak için düzenlenmiştir. 2007 deki birçok güncel değerlendirmede, 4. ve 8. sınıf düzeyindeki ABD öğrencilerinin yarısından azı, Yeterli ve İleri Düzeyler arasında istenilen düzeyde bir performans göstermiştir (her bir durumda % 39). (U.S. Department of Education [ABD Eğitim Bakanlığı], 2008). "Eğitimsiz Hiçbir Çocuk Kalmasın Kanunu- NCLB", 2014 yılında öğrencilerin hepsinin Yeterli Düzey veya daha üstü bir performansa çıkmasını beklemesine rağmen, NAEP verileri bu amaca muhtemelen ulaşılamayacağını göstermektedir. 4. sınıf öğrencilerinin yaklaşık % 18'inin ve 8. sınıf öğrencilerinin % 29'unun Temel Altı Düzeyde olması çok üzüntü verici bir durumdur. Son 30 yıl boyunca NAEP puanlarında küçük yükselmeler olmasına rağmen, Amerikalı öğrencilerin performansları cesaret kırıcı yeterlik düzeylerinde kalmıştır (Detaylı bilgi, http://nationsreportcard.gov/math_2007 adresinde bulunabilir).

Uluslararası Matematik ve Fen Çalışmasında Trendler [Trends in International Mathematics and Science Study]. 1995 ve 1996'da, 41 ülkenin katıldığı Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Çalışması [*Third International Mathematics and Science Study*-TIMMS], matematik ve fen eğitiminin en geniş boyuttaki çalışmasıdır. Veriler, öğretmenlerin yanı sıra 4, 8 ve 12. sınıf düzeylerindeki 500.000 öğrenciden toplanmıştır. Rapor edilen sonuçlar çoğunlukla Amerika'daki 4. sınıf öğrencilerinin TIMSS ülkelerinin ortalamasının üzerinde, 8. sınıf öğrencilerinin uluslararası ortalamanın altında ve 12. sınıf öğrencilerinin ise anlamlı bir şekilde uluslararası ortalamanın altında olduklarını göstermektedir (ABD Eğitim Bakanlığı, 1997a).

1999 (38 ülke), 2003 (46 ülke) ve 2007 (63 ülke) yıllarında, tekrar- TIMSS çalışmaları yapılmıştır (Kısaltılmış TIMSS, şimdi Uluslararası Matematik ve Fen Çalışması'nda Trendler'in yerine kullanılmaktadır). En son güncel versiyon (2003), Amerika'daki 4. sınıf öğrencilerinin uluslararası ortalamanın üzerine çıktıklarını göstermesine rağmen, 11 ülkenin (veya bu ülkelerin bazı kısımlarında), anlamlı şekilde daha yüksek puana sahip olduklarını ortaya koymaktadır (Bu ülkeler: Singapur, Hong Kong, Japonya, Tayvan (Çin), Belçika (Flaman), Hollanda, Letonya, Litvanya, Rusya Federasyonu, İngiltere ve Macaristan). Amerika'daki 4. sınıf öğrencilerinin sadece % 7'si, İleri Düzey için Uluslararası Kritik Eşik içinde yer almıştır. Bu veri, Singapur % 44, Tayvan (Çin) % 38 ve Japonya % 24 ile açık bir fark olduğunu göstermektedir (Mullis, Martin, Gonzales ve Chrostowski, 2004).

Orjinal TIMSS öğretim programının analizinin önemli bir bulgusu; Amerikan öğretim programını, "bir mil geniş ve bir inç derin" (Schmidt, McKnight ve Raizen, 1996, s. 62) şeklinde yani, konular üzerine odaklanmayan, birçok ülkeninkinden daha fazla konu içeren ve içinde çok

sayıda tekrar barındıran bir program olarak nitelemiştir. Amerikan öğretim programı, her şeyi yapmaya çalışmıştır, fakat çalışmanın derinliğini ve yeni öğretimin hedeflerinin herkese ulaşmasını kısmen başarabilmiştir (Schmidt et al., 1996). Cevap olarak; *Öğretim Programının Odak Noktaları*, eyalet ve bölgelere her bir sınıf düzeyinde derinleşebilmek ve odaklaşabilmek için "mil genişlik, inç derinlik" fikrinden uzaklaşmasında yardım etmiştir.

1999'daki çalışmanın en ilginç bileşenlerinden birisi, Amerika Birleşik Devletleri, Avustralya ve en yüksek başarı düzeyini gösteren beş ülkedeki 8. sınıf öğrencileri ile yapılan video-kayıt çalışmalarını içermesidir. Sonuçlar, öğretimin bir kültürel etkinlik olduğuna ve birçok benzerliğe rağmen ülkeler için farklılıkların sıklıkla daha fazla ön plana çıktığına işaret etmiştir. Tüm ülkelerde, problemler ve görevler sıklıkla derslere başlamak için kullanılmaktadır. Fakat, Amerika Birleşik Devletleri'nde bu problemler bir dersin ilerletilmesi sürecinin yolu olarak yüksek başarılı ülkelere göre tamamen tezat oluşturacak şekilde kullanılmaktadır. Analizler, dünyanın 100 yıl öncekinden tamamen farklı amaçlara sahip olmasına rağmen, aynı zaman sürecinde Amerika'nın matematik öğretimine yaklaşımının temelde değişmediğini ortaya koymaktadır.

Aşağıdaki tipik Amerikan dersi tanıdık gelmekte midir? Öğretmen, önce materyal veya ev ödevlerinin bir kontrolüyle başlar, sonra tahtada bir problemi gösterir. Öğrenciler, sıralarında benzer temel problemleri çözer, öğretmen bu masabaşı çalışmaları kontrol eder ve ileri problemleri, dersin kalan kısmı için veya ev ödevi olarak verir. Amerika'daki derslerin % 99.5'inden daha fazlasında öğretmenler, öğrencilerin problemleri nasıl çözdüklerini göstermeye yönelmektedir. Amerikan derslerine ilişkin yapılan 81 video kayıdının hiç birisinde, derslerin yüksek düzey matematik öğrenme alanını içerdiği gözlenmezken, tersine Almanya ve Japonya'daki derslerin % 30 -% 40'ında yüksek düzey matematik öğrenme alanı içerdiği görülmüştür. Önceden söylendiği gibi, öğretmenler araştırma ekibinin video çekimi yapmaya geleceğini bilmelerine rağmen, Amerika'daki derslerin % 89'u düşük düzey matematik öğrenme alanı içermiştir. Çek Cumhuriyeti, Hong Kong ve Japonya'da, dersler çeşitli yöntemleri içermekte fakat sıklıkla problem çözme yaklaşımı ile başlamakta, doğru problem çözme ve kavramsal anlama üzerine vurgu yaparak devam etmektedir (Hiebert et al., 2003). Öğretimde yüksek düzeyde başarılı ülkeler, NCTM *Standartlar*'ının tavsiyelerini Amerika Birleşik Devletleri'nden daha çok dikkate almaktadır.

Eyalet Standartları

Standartlar terimi, 1989'da NCTM ile popüler olmuştur. Bugün, çok özel matematik hedeflerinin sınıf düzeyinde listelenmesini ifade etmek için neredeyse ülkedeki her eyalette kullanılmaktadır. Bu eyalet standartları veya hedefleri, eyaletten eyalete çok çeşitlilik gösterebilmektedir. Temel kuralların/işlemlerin öğretimine yönelik yöntemlerin öğretildiği sınıf düzeyinin, üç farklı sınıf düzeyine kadar çeşitlilik göstermesi beklenebilir. NCTM *Standartlar* dokümanı, dört sınıf düzeyi grubunun her biri için amaçları listelemesine rağmen, bu bir ulusal öğretim programı değildir. Birleşik Devletler ve Kanada, bir ulusal öğretim programı olmaksızın dünyada sanayileşmiş yegâne ülkelerdir.

Sınıf Düzeyi Kazanımları. Eğitimsiz Hiçbir Çocuk Kalmasın (NCLB) yaygın adıyla bilinen kanun, 2001 yılında kabul edilmiş ve her bir ders için yüksek kaliteli öğretmenler, 2014 yılı ile bütün öğrencilerden yeterlik, o yıl içinde beklenilen kazanımların elde edilmesi süreçlerinin [adequate yearly progress-AYP] değerlendirilmesine dayalı artan yıllık başarı ve sağlam ve özgül öğrenme alanı standartlarının eyaletlerce geliştirilmesini talep etmiştir.Bu sınıf düzeyi öğrenme kazanımları (SDÖK), ders kitaplarının seçimine rehberlik yapar, farklı sınıf düzeylerinde öğretilen ve değerlendirilen konuları gösterir ve nihayetinde üniversitelerde öğretmen adaylarına ne öğretileceğini belirler. Fakat beklendiği üzere, SDÖK eyaletten eyalete bazen önemli ölçüde farklılaşabilir (Reys & Lapan, 2007). Örneğin, sadece toplam sayılarda, matematikte 4. sınıf düzeyinde Florida'da 89 SDÖK, Kuzey Karolina'da ise 26 SDÖK vardır. Ders kitabı yayıncıları, birçok eyaletin özellikle yoğun nüfusa sahip eyaletlerin gereksinimlerini ders kitaplarını maksimum düzeyde satmak için mümkün olduğunca karşılamaya çalışır. Bununla birlikte bu yük altına giren öğretmenler, verilen bir kitaptaki bazı materyalleri çıkarmak için birçok konu ve bunlara karşılık gelen dersler boyunca bir seçim yapmak zorunda kalırken, bazen de kitapta yer almayan konuları işlemek için başka kaynaklarla kitabın desteklenmesine ihtiyaç duyarlar. Araştırmacılar da, ders kitaplarını birçok konuyu yüzeysel işleyen "sınırlı örtüşme" ve "öğrenme kazanımlarının geniş bir sayısı" olarak nitelemiştir (Reys, Chval, Dingman, McNaught, Regis ve Togashi, 2007, s. 11). Birçok eyaletin, NCTM *Öğretim Programı Odak Noktalar*'ı takip etmesiyle birlikte oluşacak işbirliğinin, öğretim programı üzerindeki vurguya, odak noktalarındaki yakınlaşmaya ve uzlaşıya zemin hazırlayacağı beklenmektedir.

Değerlendirme. Eyalet standartlarının her bir kümesiyle ilişkilendirilen sınav programının bazı formları vardır. Açık bir şekilde rapor edilen sınav puanları, yöneticiler, sonra okul müdürleri ve en son olarak da öğretmenler üzerinde bütün alanlarda sınav puanlarının arttırılması için büyük bir baskı oluşturmaktadır (Schmidt vd., 1996). *Standartlar*'ın ruhuna az sahip veya buna yönelik bir birikimi olmayan bir öğretmen için, yüksek öneme sahip sınavlara hazırlıkla uğraşırken, matematiğe öğrenci-merkezli yaklaşımı adapte etmek çok zordur. Ne yazık ki çocuklar için, bu durumun sonucu alıştırma, gözden geçirme ve uygulamalı testler, yüksek düzey düşünme içermeyen veya az içeren matematiksel deneyimler, problem çözme veya akıl yürütme üretmektedir.

Eyalet standartları, *Standartlar* ile uyuşmamakta mıdır? İyi bir matematik öğretimi, çocukların kavramları anlamalarına, problemleri çözmek ve matematik yapmak için yeteneklerine güven duymalarına yardımcı olmalıdır. Burada, NCTM'in ruhuna uygun öğretimin birçok mükemmel örneği vardır. Bu sınıflardaki çocuklar, çoğu geleneksel standart testler üzerinde olsa bile oldukça iyi bir başarı yakalayacaktır.

Öğretim Programı

Birçok sınıfta; ders kitabı, fiili öğretimin nasıl, ne zaman ve ne şekilde yapılacağının belirlenmesinde tek başına çok etkili bir faktördür. Öğretmenlerin ve okul sistemlerinin, ders kitabı veya diğer öğretim programı materyalleri ile zorunlu eyalet standartlarını nasıl uyumlu hale getirdiklerini anla-

mak gittikçe karmaşık bir hal almaktadır. Belki çok basit düzeye indirgenmiş olsa da, Ana okulu öncesi - 8. sınıfa kadar kullanılan öğretim programı materyalleri ya geleneksel ya da NCTM *Standartları*'nın ruhuna dayalı anlamı yansıtan standartlar olarak kategorize edilebilir.

Geleneksel Öğretim Programı. "Geleneksel kitap" terimi, burada piyasa araştırmasına dayalı büyük ticari yayımcı şirketler tarafından geliştirilen kitapları nitelendirmek için kullanılmaktadır. Geleneksel kitaplar, biri diğerine göre bazı yönlerden çeşitlik göstermesine rağmen, her biri için doğru olabilecek bazı özellikler vardır. Birincisi; geleneksel kitaplar yayınevlerinin, her bir eyaletin öğretim programındaki konuları kapsamasına yönelik çabasını yansıtır. Çünkü eyaletler, bir özel sınıf düzeyindeki konuların genişliğinde çeşitlilik gösterir ve her şeyi içeren bu yaklaşım, çok konulu çok geniş bir ders kitabı sonucunu doğurur. İkincisi, burada derin anlamanın gelişiminde yetersiz kalabilecek çoğu bir günlük ders ile işlenebilecek birçok konu vardır. Üçüncüsü; geleneksel kitaplar, matematiğin nasıl yapılacağı ve daha sonra öğrencilerin bu süreçleri nasıl uygulayacağına ilişkin öğretmenin örtük öğretimsel modelini içerir. Dördüncüsü, önceden tartışıldığı gibi belki de uluslararası araştırma bakımından en zor olanı, kavramsal anlamanın elde edilmesi için matematiksel süreçler üzerinde yapılan geleneksel vurgudur. Örneğin; kesirlerle ilgili bir ünitede, bir geleneksel kitap, muhtemelen öğrencilerin ihtiyaç duyduğu hesaplamanın ne olduğu veya konunun diğer matematiksel öğrenme alanlarıyla nasıl ilişkilendirilebileceğinden ziyade nasıl hesaplama yapılacağını gösterme üzerine odaklanacaktır.

Ders kitapları, öğretim pratiklerini büyük ölçüde etkiler. Geleneksel bir kitabı kullanan bir öğretmen, muhtemelen daha çok konuyu işler, her bir konu üzerinde bir gün harcar, öğretmen merkezli öğretimsel yaklaşım kullanır ve işlemler üzerine odaklanır. Eğer bir öğretmen, bir kavram için daha fazla zaman ayırmak isterse, o zaman onu daha derinlemesine öğretir veya kavramsal anlama üzerine odaklanır. Örneğin, ders kitabındaki dersleri adapte etmeye ve genişletmeye ihtiyacı olabilir.

Standartlar'a Dayalı Öğretim Programı. Geleneksel ders kitaplarıyla karşılaştırıldığında, standartlara dayalı ders kitapları, piyasa (market) araştırmasına dayanmaz, fakat öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiği ve kavramların zamanla nasıl geliştirilmesi gerektiğine ilişkin araştırmaya dayanır. Bu nedenle, bu kitaplar daha az sayıda konu içerme, her bir kavram için daha fazla zaman harcama ve kavramlar arasında ilişkilendirmeler yapma eğilimindedir. Standart'a dayalı programların çoğu, öğretmen açıklamaları boyunca değil aksine öğrencilerin sorgulama-eğilimli yaklaşımlar boyunca öğrenmeleri için düzenlenmiştir. Sonuç olarak, standartlara dayalı programların hepsi, kavramsal anlama (sadece işlemler üzerine değil) ve problem çözme üzerine güçlü bir vurguya sahiptir.

Günümüzde, üç ilkokul ve dört ortaokul programı, standartlara dayalı öğretim programı olarak yaygın biçimde tanınmaktadır. Bu standartlara dayalı veya alternatif programların önemli bir işareti, öğrencilerin ilgisidir. Çocuklar, genellikle gerçek içeriklerdeki projeler ve araştırmalar aracılığıyla yeni matematiksel kavramları anlamaları için yönlendirilir. Yazılı ve sözel iletişim, güçlü bir şekilde teşvik edilir.

Standartlara dayalı öğretim programının etkililiğine dair verilerin, geleneksel sınav programları tarafından ölçüldüğü gibi toplanması sürmektedir.Standartlara dayalı programlardaki öğrencilerin, problem çözme ölçümlerinde daha iyi performans gösterdikleri ve en az geleneksel programdaki öğrenciler kadar geleneksel beceriler üzerinde iyi oldukları rahatça söylenebilir (Bell, 1998; Boaler, 1998; Fuson, Carroll ve Drueck, 2000; Hiebert, 2003; Reys, Robinson, Sconiers ve Mark, 1999; Riordin ve Noyce, 2001; Stein, Grover ve Henningsen, 1996; Stein ve Lane, 1996; Wood ve Sellers, 1996, 1997).

Ders kitapları, günümüz öğretiminin merkezinde olduğu için, standartlara dayalı bir ders kitabının kullanımı, öğretmenlerin ne yapacağını güçlü bir şekilde etkilemektedir. İlginç ve anlamlı görevlere kolayca erişilebilir, bu nedenle öğretmenler, önemli matematiksel kavramları öğrencilerin ilgisini çekecek öğrenme ortamlarıyla ilişkilendirerek matematik derslerini işleme imkânına daha fazla sahip olur. Öğretmenler, sadece işlemler üzerine odaklanmaktan ziyade kavramlar üzerine muhtemelen daha fazla zaman ayırır, zira öğrenci araştırmaları kavramsal olma eğilimlidir. Yazma, konuşma, gruplarda çalışma ve problem çözme, muhtemelen daha fazla görülen bileşenlerdir. Bunlara karşılık gelen geleneksel bir kitapla birleştirilen işlemlerle, bu etkinliklerin her birinin karşılaştırılması, standartlara dayalı matematiğin veya reformun ne olduğunu anlamak için etkili bir yol olabilir.

Kısım 2'nin, 9, 14, 18 ve 19. Bölümlerinde, standartlara dayalı iki programda etkinlikleri tanımlayan özellikleri bulacaksınız. *Sayı*, *Veri ve Uzayda Araştırmalar* [*Investigations in Number, Data, and Space*] (Sınıf düzeyleri K-5) veya *İlişkilendirilmiş Matematik* [*Connected Mathematics*] (Düzeyler 5-8). Bu özellikler, öğretim için iyi fikirler sunduğu gibi geleneksel olmayan programlara yönelik derinlemesine bir kavrayış sağlamak için dâhil edilmiştir.

Değişen Dünya Ekonomisi

Eski astronot ve senatör John Glenn'in liderliğinde hazırlanan Glenn Komisyon Raporu, "21. yüzyılın erken dönemlerindeki yeni mesleklerin % 60'ının, günümüz iş gücünün sadece % 20'sinin sahip olduğu becerileri gerektireceğini ifade etmektedir (ABD Eğitim Bakanlığı, 2008, s. 11). Rapor, okulların "(Amerikan) ekonomisinin, rekabete dayalı son teknolojide kalmasını sağlayacak becerili çocukları mezun" (s. 12) etmediğini ortaya koymuştur. Bu beceriler, sıklıkla Amerikan toplumunun alt yapısını inşa edecek matematiksel becerilerdir.

Thomas Friedman, "Dünya Düzdür (*The World Is Flat*)" adlı kitabında, insanların sürekli sahip olmaları gereken becerileri ve şartlara uygun mesleklerin her zaman yaşayacağını tartışır. O, bütün ekonomik devrimler boyunca bunları yapacak bireyleri "dokunulmazlar" olarak isimlendirmektedir.

Ayrıca, geniş kategorilerin bir kaçı için uygun olan insanların, iş piyasasındaki bir değişiklik tarafından zorlanmayacağını da ifade etmektedir. Friedman'ın analizindeki bu güvenli-garanti kategorilerden birisi, "matematik dostları"dır. Friedman; algoritmalarla bilgilerin sayısal hale getirildiği ve çevrelendiği bir dünyada, matematik dostlarının daima fırsatlara ve seçeneklere sahip olacağına işaret etmiştir. Öğretmenin işi, öğrencilerde bu arzuyu geliştirmektir. Tanınmış matematikçi ve eğitimci Lynn Arthur Sten'in belirttiği gibi, "Bilginin giderek daha fazla nicelleşmesi ve toplumun artan düzeyde bilgisayar ve verilere dayanması, Gutenberg'in zamanındaki cahil köylülerin zayıflığı gibi bugünün hesap yapmayı bilmeyen vatandaşlarını üretmektedir" (1997, s.xv).

Değişen dünya, Ana okulu öncesi - 8. sınıftaki matematik derslerinde ne öğretilmesi gerektiğini etkilemektedir. İlkokul öğrencilerinin günümüzde muhtemelen var olmayan meslekler için hazırlandığı gibi, sadece basit hesaplama yapabilen insanlar için çok az mesleğin olduğu da bilinmelidir. Burada, yeni problemlere çeşitli yollarla yaklaşabilmeyi, tahminler yapmak için algoritmalar düzenlemeyi ve karmaşık verileri yorumlamayı gerektirecek mesleklerin olacağı öngörülebilir.

Öğrenmeye ve Gelişmeye Davet

NCTM Standartları'nda nitelenen matematik eğitimi, Ana okulu öncesi - 8. sınıf boyunca deneyim sahibi olduğunuz matematik ve matematik öğretimiyle aynı olmayabilir. Bu yol boyunca, günümüz reform ruhunu gerçekten yansıtan bazı mükemmel öğretmenlere sahip olmuş olabilirsiniz. Standartlara dayalı öğretim programının iyi örnekleri, 1990'ların başlarından beri vardır ve bunların birinden yararlanmış olabilirsiniz. Fakat, reform hareketinin amaçları çoğu yere bu dönemin ikinci yarısının sonunda ulaşmış, fakat hâlâ Kuzey Amerika'daki okulların büyük çoğunluğunda gerçekleştirilememiştir.

Bu kitap, *Standartlar*'ın zorlamasıyla karşılaşan bir stajyer veya öğretmen adayı olarak, *matematik yapmakla* neyin kastedildiği, *matematiği öğrenmenin* nasıl olacağı, *problem çözme aracılığıyla matematiğin nasıl öğretileceği* ve öğretime entegre edilen *matematiğin değerlendirilmesiyle* neyin ifade edildiğine ilişkin kişisel inançlarınızdan bazıları ile yüzleşmenizi gerektirebilir.

Bu kişisel değerlendirmenin parçası olarak, matematiğin insanların sevdiği veya nefret ettiği bir konu olarak görüldüğünü anlamanız gerekir. Bir matematik öğretmeni olarak, toplantılarda veya öğretmen-aile konferanslarında bile bazı yetişkinlerin, "Asla matematiği yapamazdım" veya "Banka hesabımı bile dengeleyemiyorum" gibi yorumları ile karşılaşabilirsiniz. Bu söylemleri dışlamak yerine dikkate almak lazımdır. Yıllarca okumayan ve bir kitap okumamış insanlar, sırlarını verir mi? Bu mümkün değildir. Ailelerin ve öğretmenlerin matematiğe yönelik tutumları, çocukların matematik yapma yeteneklerini geliştirebilir veya dumura uğratabilir. Sizin ve ailelerin, matematik yeteneğinin kalıtsal olmadığını ve matematiği herkesin öğrenebileceğini bilmesi önemlidir. Üstelik, matematik öğrenme temel bir yaşam becerisidir. Bu ifadeler, özellikle çocukların yanlarında söylenirse, konunun önemine ve insanların hepsinin matematiği öğrenme kapasitesine sahip olduğuna işaret edecek ve bunları karşılayabilecek yolları bulmaya ihtiyacınız olacaktır. Sadece eskiden beri bu anlayışla gelen modeller, aile üyelerinden çocuğa (veya nadiren öğretmenden çocuğa) geçerken sekteye uğrayabilir. Burada, matematiksel problemlerin çözümünü yapmak için daha fazla haz duymak lazımdır ve çocuklarda bu tutkuyu beslemeye ihtiyacınız vardır.

Çocukların ve yetişkinlerin, kendilerini bir okur gibi düşünmeye olan ihtiyaçlarıyla kendilerini bir matematikçi gibi düşünmeye olan ihtiyaçları benzerdir. Matematiksel ve teknolojik dünyayla artan bir şekilde etkileşimi olan bireyler olarak, yeni bilgiyi birçok formda inşa etmeye, güncellemeye veya entegre etmeye ihtiyaç vardır. Yeni problemleri çözme ve bir matematiksel perspektif ile durumlara yaklaşım, yenilikleri, herhangi bir şeyin iç yüzünü anlamak veya bilgileri kavramak için mümkün olduğunca doğal biçimde okumayı gerektirmelidir. "Bir doğru cevap" üzerine odaklanmak yerine matematik hakkındaki düşünme ve konuşma, bütün vatandaşlarının matematiği yapabileceklerine dair güvene sahip olduğu iyi bir toplum olmada bize yardım edecek bir stratejidir.

Matematik Öğretmeni Olma

Bu kitap ve bu öğretim programı, mesleki öğretim kariyeriniz için önemlidir. Şu an aldığınız matematik eğitimi dersi, gelecek on yıl için derslerinizde yapacağınız matematik öğretiminin çoğu için temel oluşturacaktır. Bu kitabın yazarları, -sizin yaptığınızı bildiğimiz gibi- bu durumu oldukça ciddiye almaktadır. Bu nedenle bu kısım, bir matematik öğretmeni olarak başarmanız için gerekli eğilimleri, becerileri, düşünme alışkanlıklarını ve özellikleri listelemekte ve tanımlamaktadır.

Matematik Bilgisi. Derin, esnek ve adapte edilebilir matematiksel içerik bilgisine sahip olmaya ihtiyacınız vardır (Ma, 1999). Matematiğin, güçlü yönlerinize uygun olmadığını hissediyorsanız bu ifade sizi ürkütmeyi amaçlamamaktadır, fakat matematiğin nasıl öğretileceği ve matematiğin öğrenimiyle ilgili ciddi bir okul dönemi için hazırlanmanıza yardımcı olmayı hedeflemektedir. Matematik için "okulun etkileri" büyüktür ve diğer konu alanlarından farklıdır. Çocuklar, güncel konular üzerinde tartışma, doğayı keşfetme veya kitap okuma gibi konular üzerinde okul dışında başkaları veya aileleri ile sıklıkla etkileşim içerisinde olurken, matematik alanında ise birçok çocuk için okulda ne yapılmışsa "o" dur. Bunu sorumluluğunuzun ciddiyetine ekleyiniz. Zira, bir çocuğun yıl içindeki matematik öğrenimi muhtemelen sadece sizden dolayı gerçekleşecektir. Bir kesirsel kavram veya matematik öğretim programının başka yönü için emin değilseniz, şimdi bir öğretim lideri olarak rolü-

nüze en iyi şekilde hazırlanmanız için anlayışınızda derin değişiklik yapmanın zamanıdır. Bu kitap ve ders hocanız, bu süreçte size yardımcı olacaktır.

Israr Etme. Hayal kırıklığını giderme ve ısrar etme yeteneğini göstermeye ihtiyacınız vardır. Öğrencileriniz, matematiksel araştırmalar yaparak bu beceriye sahip olabilir. Problemler üzerinde çalışarak ve bu kitap içinde hareket ederek, öğrenmeyi tökezleten blokları kaldırmak için stratejileri belirleyecek ve öğrencilerin öğrenmelerinin önündeki bariyerleri öngörmenize yardım edecek yöntem ve stratejileri öğreneceksiniz. Bir öğrenen olarak sizin için işleyen durum, muhtemelen öğrencileriniz için de işleyecektir. Bu kitaptaki materyaller üzerinde deneyiminiz artıkça, eğer bunların uygunluğu üzerinde derinlemesine düşünür, düşünceleriniz hakkında sorgulama yapar, çabalar ve zihninizde tartarsanız, bir öğretmen olarak bilgi dağarcığınızı zenginleştirirsiniz. Öğrencilerinize model olabilecek bu özellikleri göstermek için onlara ihtiyacınız olacağını unutmayınız.

Olumlu Tutum. Matematiğe yönelik olumlu tutum ile kendinizi donatınız. Bir araştırma, olumlu tutuma sahip öğretmenlerin, öğrencilerinin matematiği daha çok sevmelerine imkân veren daha başarılı yollarda matematiği öğrettiğini göstermektedir (Karp, 1991). Eğer kalpten "matematiği asla sevmedim" diyorsanız, bu öğretiminizde açığa çıkacaktır. Bir araştırmanın, matematiğe yönelik tutumların nispeten kolay değiştiğini (Tobias, 1995) ve uzun soluklu olduğunu göstermesi iyi bir haberdir. Alan bilginizin genişletilmesi ve problemlere yaklaşım için yeni yollar aracılığıyla, matematiksel etkinlikleri eğlenceli yapmayı öğrenebilirsiniz. Sadece matematiğe yönelik olumlu tutum kazanmazsınız aynı zamanda bu yapmanız gereken zorunlu bir iştir.

Değişim için Hazırbulunuşluk. Dengesizliğe neden olabilecek radikal bir değişim için bile, değişim için hazırlıklı olduğunuzu gösteriniz. Aşina olduklarınızı yabancı veya tam tersine, yabancı olduklarınızı tanıdık bulabilirsiniz. Örneğin, kesirlerin indirgenmesini daima $\frac{2}{4}$ ün $\frac{1}{2}$'ye değişim süreci olarak ifade ettiniz, fakat "indirgeme" kavramsal düzeyde mi olmaktadır? İndirgenen kesir, daha mı küçüktür? Bu tür terminoloji, çocukların doğal biçimde yapacakları ilişkilendirmelerde hatalar yapmalarına neden olabilir (İndirgenen kesir, diyet mi yaptı?"). Dikkatli bir inceleme, kavramsal bilgi üzerine odaklanıldığı zaman "indirgeme" nin kullanım için iyi bir terim olmadığına işaret etmektedir. Yıllardır bu tanıdık ifadeyi kullanmanıza rağmen, bu ifade gerçekte ne olduğunu açıklamadığı için uygun değildir. Kesirlerin öğretimi için yenilikçi ve kavramsal olarak güvenilir yöntemler, Bölüm 15 de tartışılacaktır.

Diğer tarafta, tanıdık olmayan çok daha fazla rahatlatıcı olabilecektir. Eğer, öğrencilerin açıklamalarını anlamayacağınıza ilişkin bir endişeye sahipseniz, "Farklı biçimde onu çözen birisi var mı?" sorusunu öğrencilere rahat bir şekilde soramayabilirsiniz. Yine de bu stratejinin cesurca kullanımı, öğrencilerin bir problemi nasıl çözdüklerine yönelik düşüncelerini anlayabilmeniz için onlara çözümlerini yeniden açıklamalarını sormak, kavramı kendinizin de daha iyi anlamanıza yol açacaktır.

Potansiyel olarak diğer bir zor değişim, kavramlar üzerine odaklanmaktır. Bir öğrenci, kesirlerde bölme işlemini anlamadığı zaman işleme- odaklı bir ders ortamında ne olmaktadır? Sadece işlemsel bilgiye sahip bir öğretmen sıklıkla sadece bir yaklaşım ile kalır: Daha yüksek ses ve daha alçak sesle tekrarlama. " Şimdi bölme işaretini çarpmayla değiştiriyoruz, ikinci kesri çeviriyoruz ve çarpıyoruz.". Bu yaklaşımın işe yaramayacağı bilinmeli ve bunun için başka yollar düşünülmelidir. $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} =$ _____ yi alınız. Bir kavramsal yaklaşımda, $25 \div 5 =$ _____ bir doğal sayılı problemle ilişkilendirilebilir. Buna karşılık gelen bir hikâyeye dayalı problem, "25 pizzanın sipariş edildiği bir durumda, kaç tane 5 lik pizza siparişi verilmiş olur?". Kesir problemine geri dönüldüğünde, bölme problemini ifade etmek için öğrencilere, " Her bir misafire, bir pizzanın $\frac{1}{2}$'sini servis yapmayı düşünüyorsunuz. Eğer $3\frac{1}{2}$'lik pizzaya sahipseniz, kaç misafire servis yapabilirsiniz? Evet, $3\frac{1}{2}$ de yedi yarım vardır ve bu nedenle 7 misafire servis yapabilirsiniz. Bu problemi zihinsel olarak çözebilmeniz sizin için bir sürpriz midir?

Öğrencilerin zorlukları, belirsizlikleri ve hayal kırıklıklarına karşılık vermek için süreç içinde matematiksel kavramları temelden almaya ve yeniden öğrenmeye, kavramsal anlamayı ve önemli temsilleri geliştirmeye ihtiyacınız vardır. Uzun soluklu bir farklılık oluşturmak için bilginizi sağlam bir zemine oturtmalı ve böylece değişime hazır olmalısınız. Bu kitabı okurken, şu ana kadar edindikleriniz birçok defa "Aha" anlık refleksleri ile size imkânlar sağlayacak ve hafızanızdaki depolanmış güncel bilgiyle yeni bilginin ilişkilendirmesini yapmanıza yardımcı olacaktır.

Derinlemesine Düşünme Eğilimi. Kendi durumunuzu gözden geçirme (veya öz-bilinç sahibi olma) ve derinlemesine düşünme zamanıdır. Connecticut'taki eski matematik eğitimi yöneticisi Steve Leinwand'ın yazdığı gibi, "Eğer kendinizi yetersiz hissediyorsanız, muhtemelen işinizi yapmıyorsunuz" (2007, s. 583). Öğretmen adayı veya tecrübeli bir öğretmen olmanızın önemi yoktur, matematik öğretiminin yöntemleri ve öğrenme alanları hakkında öğrenmeniz için burada çok şey vardır. Zorluklar ve başarı üzerinde derinlemesine düşünme veya gelişime ihtiyaç duyulan alanlarda kendinizi test etme yeteneği, büyüme ve gelişim için önemlidir. En iyi öğretmenler, kendilerini en son yayımlanan makaleler, kitaplar, en güncel konferanslar veya mesleki gelişim fırsatlarına yönelik etkinliklere katılarak sürekli olarak yenilemeye çalışır. Bu öğretmenler, "Oh, zaten bunu yapıyorum" şeklinde konuşmazlar. Bunun yerine, bilgi dağarcıklarına eklenecek küçük bir eğlenceyi tanımlar ve mutlu olurlar. En iyi öğretmenler, bilmek için ihtiyaçları olan öğrenmeyi asla sonlandırmaz, yaptıkları ilişkilendirmelerin sayısını asla tüketmez ve bir sonuç olarak öğretimi modası geçmiş veya atıl olarak asla görmezler. Bir eski Çin atasözü, "Bir ağacı dikmek için en iyi zaman, yirmi yıl öncesidir, ikinci en iyi zaman ise bugündür." demektedir. Böylece, John Van de Walle'nin her bir yeni basımla beraber söylediği gibi, "İyi yolculuklar!".

Bölüm 1 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

Bu kitabın her bir bölümünün sonunda, bu başlık altında soruların bir serisini bulacaksınız. Sorular, bölümün en önemli fikirleri üzerinde derinlemesine düşünmenize yardım etmek için düzenlenmiştir. Yazma (veya bir arkadaşla sesli konuşma), yeni fikirleri keşfetmek ve kendi bilgi dağarcığınıza onları katmak için mükemmel bir yoldur. Yazma (veya tartışma), kendi fikirlerinizi oluşturmanıza yardım edecektir.

1. *İlkeler ve Standartlar* tarafından tanımlanan beş öğrenme alanı (standart) nedir? Bu öğrenme alanları, farklı sınıf düzeylerinde farklı şekilde nasıl vurgulanmaktadır?
2. *İlkeler ve Standartlar* süreç standartlarında bahsedilen *süreç* ile ne kastedilmektedir? Beş süreç standardının her birinin kısa bir betimlemesini yapınız.
3. *Bugünün Matematik Öğretimi*'ndeki fikirlerin arasında, sınıf ortamındaki altı değişiklik (eğilim) vardır. Bu altı değişikliği inceleyiniz ve her bir değişikliğin sizin için en önemli gördüğünüz yönlerini birkaç cümle ile belirtiniz.
4. NAEP verilerinden elde edilen iki sonucu belirleyiniz. Çıkarılabilecek sonuçlar nelerdir?
5. TIMSS verilerinden elde edilen iki sonucu belirleyiniz. Çıkarılabilecek sonuçlar nelerdir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Son yıllarda, "temeller" için yapılan protestolar çeşitli kaynaklardan tekrar duyulmaya başlanmıştır. Reform ve temeller arasındaki münazara, hem önemli hem de ilginçtir. "Temellere dönüş" protestosunun ışığında, reform hareketleri tartışmasını kavramak için www.pdkintl.org/kappan/khome/karticle.htm web sayfasındaki *Phi Delta Kappan*'nın Şubat 1999 basımında online olarak verilen üç makaleyi ücret ödemeden okuyunuz. Temellere karşı reform münazarasında yeriniz nedir?
2. Seçtiğiniz herhangi bir sınıf düzeyindeki geleneksel bir kitabı inceleyiniz. Eğer mümkünse, öğretmenler için yayımlanan kitabı kullanınız. Her bir bölüm boyunca sayfalara bakınız ve beş süreç standardının belirtilerini arayınız. Matematiğin öğrenimini ve yapımını, bu süreçler tarafından tanımlanan biçimde bu kitaptan öğrenecek çocuklar nereye kadar gidebilir? Bu metindeki genel yaklaşıma neyi ilave edebilirsiniz?
3. Standartlara dayalı öğretim programlarından herhangi birinden bir üniteyi inceleyiniz ve ünitenin NCTM'nin reform vizyonunu, özellikle de beş süreç standardını nasıl yansıttığına bakınız. Bu öğretim programları, geleneksel ders kitabı programlarından nasıl farklılaşmaktadır? Bu içeriğe ekleme yapmaya ihtiyacınız var mıdır?

Bölüm 1 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Hoffman, L., & Brahier, D. (2008). Improving the planning and teaching of mathematics by reflecting on research. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 412–417.
This article addresses how a teacher's philosophy and beliefs influence his or her mathematics instruction. Using TIMSS and NAEP studies as a foundation, the authors talk about posing higher-level problems, asking thought-provoking questions, facing students' frustration, and using mistakes to enhance understanding of concepts. They pose a set of reflective questions that are good for self-assessment or discussion with peers.

Kitaplar

Ferrini-Mundy, J. (2000). The standards movement in mathematics education: Reflections and hopes. In M. J. Burke (Ed.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 37–50). Reston, VA: NCTM.
In this chapter, written before Standards *was released, the author shares her unique and very well-informed view of this important publication, how it came to be, the impact of the earlier document, the political climate in which* Standards *was released, and the intentions that NCTM had for the document. This article will provide an understanding of* Standards *that is impossible to get from the document itself.*

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 5–23). Reston, VA: NCTM.
This chapter provides one of the best perspectives on what we have learned since Standards *was released. It also offers some perspective on typical U.S. classrooms and offers contrasts between traditional mathematics programs and those called "standards based."*

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
This book is the effort of a select committee representing mathematics educators, mathematicians, school administrators, and industry. A hallmark of this book is the formulation of five strands of "mathematical proficiency": conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning, and

productive disposition. Educators and policy makers will cite this book for many years to come.

Standartlara Dayalı Öğretim Programı

İlköğretim Programları

UCSMP Elementary: Everyday Mathematics (K–6)
Investigations of Number, Data, and Space (K–5) (samples included throughout the book)
Math Trailblazers: A Mathematical Journey Using Science and Language Arts (K–5)

Ortaokul Programları

Connected Mathematics (CMP) (6–8) (samples included throughout the book)
Mathematics in Context (MIC) (5–8)
MathScape (6–8)
Middle Grades Math Thematics (STEM) (6–8)
Middle School Mathematics Through Applications Project (MMAP) (6–8)

Online Kaynaklar

Illuminations
www.illuminations.nctm.org
A companion website to NCTM sponsored by NCTM and Marcopolo. Provides lessons, interactive applets, and links to websites for learning and teaching mathematics.

Matematikte Anahtar Sorunlar (Key Issues in Math)
www.mathforum.org/social/index.html
Part of the Math Forum at Drexel University, this page lists numerous questions concerning issues in mathematics education with answers supplied by experts in short articles or excerpts.

Amerikan Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme Dairesi (National Assessment of Educational Progress (NAEP), "The Nation's Report Card")http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics
Past and current data and reports related to NAEP assessments.

Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)
www.nctm.org
Here you can find all about NCTM, its belief statements, and positions on important topics. Also find an overview of *Principles and Standards* and free access to interactive applets (see Standards—Electronic), membership and conference information, publications catalog, links to related sites, and much more. Members have access to even more information.

Eyalet Matematik Standartları Veri Tabanı (State Mathematics Standards Database)
http://mathcurriculumcenter.org/states.php
This site from The Center for the Study of Mathematics Curriculum (CSMC) has the complete set of hotlinks to current state-level K–12 mathematics curriculum standards. In some cases states provide multiple documents, including their standards for assessment or other important information for teachers of mathematics.

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)
http://nces.ed.gov/timss
Access articles and data from TIMSS.

Bölüm 2

Matematik Yapmanın ve Bilmenin Ne Anlama Geldiğinin İncelenmesi

Öğretmenler konuları ne kadar sabırla ve açık bir şekilde öğrencilerine açıklarsa açıklasınlar, idrak etme işini onların yerine yapamazlar.

Schifter ve Fosnot (1993, s.9)

Matematikte bir konuyu bilmek ne demektir? Mesela kesirlerde bölme işlemini ele alalım. Eğer bu konuyu iyi biliyorsanız tam olarak neyi biliyorsunuz denebilir? Bölüm 1'de de belirtildiği üzere bu sorunun cevabı ezberlemiş olduğunuz bir yöntemi (ikinci kesri ters çevirip birinciyle çarpma) bilmekten daha öte bir cevaptır. Kesirlerde bölmeyi bilmekle, bu işleme dair örnekleri bilmenin yanında, problemleri çözerken alternatif yollar kullanabilirsiniz, cevapları tahmin edebilirsiniz ya da bir sayının bir kesir ile bölünme işlemini şekil çizerek gösterebilirsiniz. Ne yazık ki çoğu matematik dersi, öğrencilerin farklı konuları derinlemesine anlamasına imkân vermeyen kurallarla kısıtlanmaktadır.

Bu bölüm, öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenmeleri için gerekli bilgiler ve gelişimsel öğretimin öğrenme teorisi ile alakalıdır. Bu bölümü matematik öğretiminin ne, neden ve nasıl'ı olarak düşünebilirsiniz. "Nasıl" kısmı ilk önce ele alınacaktır – matematik öğrenenler tarafından nasıl tecrübe edilmelidir? İkinci olarak matematiğe "neden" bu şekilde bakılmalıdır? Son olarak da, matematiği anlamak "ne" anlama gelir?

Bununla birlikte, öğrenme teorileri ve matematikte bilgi hakkında yazılanları okumadan önce, (kavramlar arası) bağlantılar kurmaya ve anlam geliştirmeye yardımcı olacak şekilde "matematik yapma" şansına sahip olmanız sizin için önemli olacaktır. Bu tarz deneyimler ileride öğrenme teorilerine ve bilgiye dair tartışmalara geri döndüğümüzde bize örnek teşkil edecektir.

Matematik Yapmak Ne Anlama Gelir?

Bir an için durup kendi deneyimlerinizden hareketle matematik yapmanın ve bilmenin ne anlama geldiğine dair birkaç cümle yazınız. Sonrasında da bu yazı yazdığınız kağıdı bu bölümü okumayı bitirinceye kadar bir kenara bırakınız.

Burada verilen "matematik yapmak" tanımlaması ile sizin deneyimleriniz uyuşmayabilir. Bu gayet normaldir! Fakat hâlihazırdaki algılarınızla ters düşüyor diye yeni fikirlere kapalı olmak veya önceki deneyimlerinizden oldukça farklı bir matematik öğretiminin olabileceğini ret etmek kabul edilemez.

Matematik, bir sürü örnek çözmek veya öğretmenin açıkladığı yöntemleri taklit etmekten daha öte bir şeydir. Matematik yapmak problem çözme için yöntem geliştirme, bu yöntemleri uygulama, bunların bir sonuca götürüp götürmediğini görme ve verdiğiniz cevapların anlamlı olup olmadığını kontrol etme anlamına gelmektedir. Sınıflarda "matematik yapmak" gerçek dünyada matematik yapma işini mümkün olduğunca aslına uygun şekilde modelleyebilmelidir.

Matematik Bir Örüntü ve Düzen Bilimidir

Zihin jimnastiği yapmaya yarayan Everybody Counts (Mathematical Sciences Education Board, 1989) isimli eserde mevcut olan matematiğin bu harikulade tanımı, matematiği anlamsız kural ve hesaplamalarla dolu bir disiplin olarak gösteren yaygın anlayışa meydan okumaktadır. Bilim, bir şeyleri çözümleme ve anlamlandırma sürecidir. Her ne kadar bu şekilde düşünmeseniz de matematik, belli bir düzen ve mantıksal sıralamaya sahip, kavram ve işlemler üzerine kurulu bir bilimdir. Bu düzen veya intizamı bulmak ve keşfetmek ve sonrasında anlamlandırmak, tam anlamıyla "matematik yapmak" demektir.

Okul çağındaki çok küçük çocuklar dahi bu düzen ve örüntü bilimine dâhil olabilir ve olmalıdırlar da. Hiç 6 + 7

işleminin sonucunun 5 + 8 ve 9 + 4 ile aynı olduğunu fark ettiniz mi? Buradaki örüntü nedir? İlişkiler nelerdir? İki tek sayı çarpıldığında sonuç da tektir ama aynı sayılar toplandığında ya da birbirinden çıkarıldığında sonuç çifttir.

Ortaokulda öğrenciler doğrusal fonksiyonların (yani, $y = mx + b$ ile temsil edilebilen fonksiyonların) grafiklerini çizerler. Fonksiyon çizimi bir dizi adım veya kural izlenerek ancak çok basit bir düzeyde ele alınabilir, fakat neden sadece bazı denklem çeşitlerinin, durumların veya modellerin doğrusal olarak arttığını anlamak bir düzen/örüntü aramayı gerektirir. Hangi çeşit gerçek dünya ilişkilerinin doğrusal grafiklerle temsil edilebileceğini keşfetmek, gerçek dünyayla ilişkilendirmeksizin bir denklemden grafiği üretmekten daha bilimseldir ve çok daha değerlidir.

Örüntü ve düzen bilimiyle uğraşmak, yani matematik yapmak, zaman ve gayret ister. Mesela toplama ve çarpma için gerekli temel kuralları bilmek ve tamsayılar, kesirler ve ondalık sayılar üzerine etkin hesaplama yöntemlerine sahip olmak gibi, "temel beceriler" ile ilgili listelerde karşımıza çıkan konuları bir düşünelim. Çarpım tablosundaki sayısal ilişkileri çalışmak veya basamak değerindeki örüntüleri analiz etmek (ki bunlar ilgili bölümlerde ele alınmıştır) öğrencilerin ne yaptıklarını anlamalarına yardımcı olur ve bu da kesinliği ve akılda tutmayı geliştirir. Bu konuları sadece ezberleyerek bir kurallar ve işlemler silsilesi olarak öğrenmek matematik yapmaktan ziyade piyano tuşlarına belli bir kalıptaki nota dizilişini dikkate alıp dokunarak yapılan müzikten farksızdır.



Durup Düşün!

Bir an için öğrencilerin "örüntülerin bir çalışması" şeklinde matematik yaptığı bir ilk veya ortaokuldaki matematik dersini hayal ediniz. Öğrenciler yaptıkları işi betimlemek için hangi davranış fiillerini kullanabilirler? Okumaya daha fazla devam etmeden bu fiilleri içeren kısa bir liste yapınız.

Matematik Yapmak İçin Bir Sınıf Ortamı

Öğrencilerin matematik yapmalarına imkân verecek bir ortam oluşturmak demek, öğrencilere verilen etkinliklerde ve matematik dersine özel (oluşturulan) sınıf düzeninde değişikliğe gidilmesi anlamına gelir. Matematik yapmak, öğrencilere üzerinde uğraşmaya değer etkinlikler vermeyle ve sonrasında da öğrencilerin matematiksel fikirleri paylaşıp savunduğu ortamları (risk içeren ortamlar) oluşturmakla başlar.

Matematik Yapmanın Dili. Geleneksel matematik sınıflarındaki öğrenciler matematiği genellikle "(angarya) iş" ya da "cevaba ulaşmak" şeklinde tanımlamaktadırlar. "Toplamak" veya "katını bulmak" (çarpma) üzerine konuşurlar. Tam aksine, gerçek anlamda matematik yapmayı tarif eden literatürdeki birçok kaynakta aşağıdaki fiillerin bir koleksiyonu bulunabilir ve bunların hepsi ayrıca PSSM'de (NCTM, 2000) de kullanılmaktadır.

inceleme	gerekçelendirme	yapılandırma	geliştirme
araştırma	temsil etme	doğrulama	tarif etme
varsayım	formülleştirme	açıklama	kullanma
çözme	keşfetme	tahmin etme	

Bu fiiller üst düzey düşünmeyi gerektirir ve "anlamlandırma" ve "çözümleme" içerir. Matematik derslerinde bu eylemlerle uğraşan çocuklar (derslerde ele alınan) matematiksel fikirler hakkında etkin bir şekilde düşünebileceklerdir. Bu eylemleri bir de geleneksel matematik derslerini tasvir edebilecek şu eylemlerle kıyaslayınız: dinleme, kopyalama, ezberleme, alıştırma yapma. Bunlar da düşük seviyede düşünceyi gerektiren etkinlikler olup gerçek anlamda matematik yapmaya öğrencileri hazırlayamazlar. Matematik uğraş/çaba gerektirir ve öğrencilerin, velilerin ve çevrenin, matematikte öğrenmenin bu uğraşa/çabaya bağlı olduğunu kabul edip onaylaması önemlidir (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Gündelik olarak üst düzey matematik etkinliklerin yapıldığı sınıflarda öğrenciler şu güçlü mesajı alırlar: "Bunu anlama yeteneğine sahipsiniz – matematik yapabilme yeteneğine sahipsiniz!"

Matematik derslerinde verilen her fikir her öğrenci tarafından anlaşılabilir ve anlaşılmalıdır. Bunun istisnası yoktur! Tüm öğrenciler bizim öğrenmelerini arzuladığımız matematiği öğrenme becerisine sahiptir. Öğrencilerdeki bu öğrenme, iddialı ve merak uyandıran matematikle uğraşmak için bu kısımda verilen fiiller öğretildiğinde, daha anlamlı bir hâle gelir.

Matematik Yapmak için Düzenlenmiş Ortamlar. Öğretmenin buradaki rolü (öğrencide) araştırma, güven ve ümit ruh halini oluşturmaktır. Bu tarz bir ortamda öğrenciler matematik yapmaya davet edilirler. Siz soruları sorarsınız, öğrenciler de çözüm için uğraşırlar. Buradaki odak noktaları öğrencilerin etkin bir şekilde fikirlerini test ederek, varsayımlarda bulunarak, nedenler üreterek ve açıklamalar önererek anlamlandırmalar yapmalarıdır. Sınıfiçi etkin iletişimin nasıl uygulanması gerektiğini anlatan, öğretmenler için yazılmış bir kaynak olan "Classroom Discussions (Sınıfiçi Tartışmalar)" isimli eserlerinde Chapin, O'Conner ve Anderson (2003) şunu yazmışlardır: "Öğrencilerin birbirlerinin ne dediğini dinleme ihtiyacı hissettikleri, kendi fikirlerini açık ve anlaşılır bir biçimde ifade ettikleri ve iddiaları için kanıt sunabildikleri bir sınıf ortamını oluşturmayı başarabilen bir öğretmen, öğrencilerin öğrenmesini sağlayacak güçlü bir ortam oluşturmuş demektir" (s.9).

"Making Sense" (Hiebert vd., 1997) isimli klasik eserde yazarlar öğrencilerin birbirlerinden öğrenmesini sağlayacak üretken (matematik) sınıf kültürünün (ortamının) dört özelliğini şu şekilde tarif etmektedirler.

1. Fikirler sınıflar için tedavül (para) niteliğindedir. Katılımcılar tarafından ifade edilen fikirler, herkesin öğrenmesine yardım etme potansiyeline sahip olup, sonuçta saygı ve cevap kazanmayı garanti eder.
2. Öğrenciler problem çözmede kullanılan yöntemlerde imtiyaz sahibidirler (bağımsızdırlar). Öğrenciler genelde bir problemin çözümünün birçok farklı yöntemle yapılabileceğine ve herkesin kendi çözüm yolunu anlama gerekliliğinin olduğuna saygı duymalıdırlar
3. Sınıf kültürü, öğrenci hatalarını birer öğrenme fırsatı olarak değerlendirme imkânı sunar. Hatalar, yapılan muhakemedeki yanılgıları inceleme fırsatı verir ve bu sayede herkesin (öğrencilerin) analiz yapma yetisini geliştirir. Hataların üstü örtülmemeli, sınıfta yapıcı bir şekilde kullanılmalıdır.

4. Makul olanı bulmak ve doğruluğu sağlamak için gerekli olan otorite, bireylerin sosyal statülerinden ziyade konunun yapısını ve mantığını esas alır. Bir açıklamanın ikna ediciliği veya bir çözüm yönteminin doğruluğu bunları sunanın popülerliğinden ziyade matematiksel olarak bu açıklama veya çözüm yönteminin ne kadar mantıklı olduğuna bağlıdır.

Bu tarz bir kültürü içselleştiren sınıflarda öğrencilerin matematik hakkındaki düşünceleri değişir. Öğrenciler "Benden ne yapmamı (neyi bulmamı) istiyorsun?" sorusunu sormak (ya da düşünmek) yerine probleme sahip çıkan "Sanırım, şu şekilde yapacağım…" tarzında bir pozisyona gireceklerdir (Baker ve Baker, 1990). Bu ikinci tarz pozisyonda, öğrenci kendini öğretmeninin önereceği yönteme bağlı kalmaktansa kendi yaklaşımını üretebilecek güçte hissedecektir. Bu da matematik yapmak için ortam oluşturmada en temel gerekliliktir. Bölüm 3'te bu tarz öğrenenler topluluğunun oluşturulmasına dair daha fazla bilgi bulunmaktadır.



Matematik Yapmaya Davet

Öğrencilerin gerçek anlamda matematikle uğraştığı bir sınıf ortamı oluşturmak istiyorsanız, kendinizin de matematik yapmanın ne demek olduğuna yönelik şahsi bir hisse/fikre sahip olmanız önemlidir. Bu bölümün bu kısmındaki amaç sizleri düzen ve örüntü bilimine, yani matematik yapmaya, teşvik edecek imkânlar yaratmaktır. Mümkünse deneyimlerinizi paylaşabilmek ve fikir alışverişinde bulunabilmek amacıyla birlikte çalışabileceğiniz bir iki arkadaş bulunuz.

Bu kısımda yazılanların hepsini bir seferde okumaya çalışmayınız. Her etkinliğin ardından bazı ipuçları ve öneriler verilmektedir. Bir konu üzerinde gerçekten takılana kadar uğraşın ve daha sonra biraz daha okuyunuz.

Şimdi Biraz Matematik Yapalım

Bu kısımda dört farklı problem inceleyeceğiz. Bunların her biri birbirinden bağımsız problemlerdir. Bu problemlerin hiçbiri karmaşık matematik, hatta cebir bile gerektirmez. Fakat bu problemler üst düzey düşünme ve muhakeme gerektirir. Fikirlerinizi denemekten çekinmeyiniz! Biraz zaman ve çaba harcayın, kararlı olun – bunlar matematikte başarı için gerekli anahtarlardır. İyi vakit geçirmeniz dileğiyle!

Saymaya Başla ve Atlayarak Say: Örüntü Aramak

Bir "başlangıç sayısını" ve sabit bir artış sayısını (buna "sıçrama sayısı" diyelim) içeren bir sayı listesi yapmanız gerekmektedir. İlk olarak başlangıç sayısını 3 ve sıçrama sayısını 5 olarak deneyiniz. Başlangıç sayısını listenizin en üstüne yazın ve daha sonra 8, 13 vb. şeklinde her seferinde 5 atlayarak 130'a kadar devam ediniz.

Bu sayı listesini inceleyin ve bulabildiğiniz kadar örüntü bulunuz. Fikirlerinizi grubunuzla paylaşın ve üzerinde uzlaştığınız her örüntüyü not ediniz.



Bulabildiğiniz kadar örüntü belirleyene kadar takip eden kısmı okumaya ara veriniz!

Birkaç İpucu. Aşağıda birkaç fikir verilmektedir.

- En azından bir tane değişmeli (alterne) örüntü görebildiniz mi?
- Tek ve çift sayılara baktınız mı?
- Onlar basamağındaki rakam için ne söyleyebilirsiniz?
- Onlar basamağına sahip olmayan ilk iki sayı için ne diyebilirsiniz?
- Sayıları toplamayı denediniz mi? Listedeki sayıları mesela? Veya basamaklardaki sayı değerlerini toplamayı denediniz mi?



Eğer bu listede yer alan herhangi bir fikri denemediyseniz lütfen şimdi deneyiniz.

Sayılar 100'ü geçtikten sonra sayı örüntünüze ne olduğu hakkında düşünmeyi unutmayınız. Mesela 113 hakkında ne düşünüyorsunuz? 113 sayısı 1 yüzlük, 1 onluk ve 3 birlik şeklinde düşünülebilir. Fakat bu sayı, onlar basamağının 9'dan 10'a ve 10'dan da 11'e kadar ilerleyebildiği "onbir-üç" şeklinde bir sayı olarak da düşünülebilir. Bu değişik bakış açıları elinizdeki sayı örüntüsünü nasıl etkiliyor? 999'dan sonra ne olabilir?

Sayılardaki basamakların sayı değerlerini topladıysanız toplamlar; 3, 8, 4, 9, 5, 10, 6, 11, 7, 12, 18, …, şeklindedir. Bu sıradaki diğer bütün sayılara baktınız mı? Ve 113 için basamaklardaki sayı değerleri toplamı nedir? Bu toplam 5 midir yoksa 14 mü? (Unutmayın ki burada tek bir doğru cevap yoktur. Ancak değişik olasılıkları göz önünde bulundurmak ilginç olabilir.)

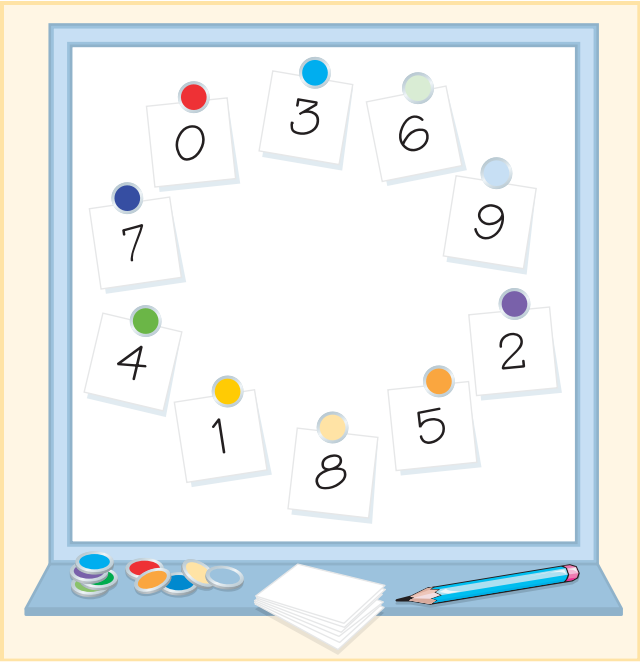
Sonraki Aşamalar. Bazen, matematikte bazı örüntüler keşfettiğinizde bazı değişiklikler yaparak bu değişikliklerin örüntüyü nasıl etkilediğine bakmak iyi bir fikirdir. Bu problemde ne gibi değişiklikler yapabilirdiniz?



Devam etmeden önce bazı fikirlerinizi deneyiniz.

Kendi yaptığınız değişiklikler aşağıdaki önerilerden belki çok daha ilginçtir. Fakat aşağıda size bazı fikirler sunulmaktadır:

- Başlangıç sayısını değiştirin fakat sıçrama sayısını 5 olarak koruyun! Ne gibi farklılık veya benzerlikler gözlemlediniz?
- Başlangıç sayısını aynı tutup değişik sıçrama sayılarını inceleyiniz. Göreceksiniz ki sıçrama sayısını değiştirmek başlangıç sayısını değiştirmeye göre her şeyi daha da "alt üst" edecektir.
- Eğer birkaç farklı sıçrama sayısına denk gelen örüntüleriniz varsa, sıçrama sayısının örüntüyü nasıl etkilediği hakkında ne bulabilirsiniz? Örneğin; sıçrama sayısı 5



Şekil 2.1 "3" sıçrama sayısı için birler basamağında oluşacak sayıların döngüsü. Başlangıç sayısı döngünün nerede başlayacağını belirtmektedir.

olsaydı, birler basamağının örüntüsü her iki sayıda bir tekrar ederdi – "örüntü uzunluğu" 2 olurdu. Fakat sıçrama sayısı 3 olduğunda, birler basamağının örüntü uzunluğu 10 oluyor. Diğer sıçrama sayıları değişik örüntü uzunlukları verir mi?

- Sıçrama sayısının 3 olması durumunda, birler basamağının örüntüsü Şekil 2.1'deki sayı döngüsü ile nasıl ilişkilidir? Diğer sıçrama sayıları için başka sayı döngüleri bulunabilir mi?
- 3 için oluşturulan sayı döngüsünü kullanarak 3'ün katları olan sıçrama değerleri için (yani 6, 9 veya 12 için) bir örüntü belirleyiniz.

Teknoloji Kullanımına Dair. Aynı problemi bir hesap makinesi kullanarak incelemek isteyebilirsiniz. Bu sayede sayı listesi oluşturmak henüz ritmik saymayı bilmeyen küçük yaştaki öğrenciler için daha kolay olabilir. Ayrıca bu 25 veya 36 gibi daha büyük sıçrama gerektiren durumlarla uğraşırken öğrencilere kapı aralayacaktır. Birçok hesap makinesi otomatik olarak sabit bir sayıyı art arda ekleme özelliğine sahiptir. Örneğin, hesap makinenizde 3 [+] 5 [=] tuşlarsanız ve sonrasında devamlı surette [=] tuşlarsanız, makine 5'erli sayma yapacaktır (yukarıda ilk olarak ele aldığınız sayı dizisi). Bu yöntem aynı şekilde diğer üç işlem için de geçerlidir.

İki Makine Bir İş

Ron'un Geri Dönüşüm Dükkanı (Recycle Shop), Ron'un kullanılmış bir kağıt parçalama makinesini satın almasıyla işe başladı. İşler iyi gidince, Ron aynı makineden bir tane daha alır. Eski makine bir kamyon yükü kadar kâğıdı 4 saatte parçalamaktadır. Yeni makine ise aynı kamyon yükü kadar kağıdı sadece 2 saatte parçalayabilmektedir. Eğer Ron her iki makineyi de aynı anda çalıştırırsa, bir kamyon yükü kadar kağıt ne kadar zamanda parçalanabilir?

STOP

Bir cevap bulana kadar veya tamamen bir yerde takılıp kalıncaya kadar okumaya devam etmeyiniz! Doğru cevap verdiğinizi teyit edebilir misiniz? Takılıp kaldığınızdan emin misiniz?

Birkaç İpucu. Problemde yapılan varsayımlara yüzeysel olarak mı bakıyorsunuz? Makineler eş zamanlı mı (aynı anda mı) çalışıyorlar? Problem "aynı zamanda" diyor. Bu makinelerin birlikte çalışırkenki hızları, tek başlarına çalışırkenki hızları ile aynı mıdır?

STOP

Yukarıdaki ipucu size bir fikir verdiyse okumaya devam etmeden önce o fikir üzerinden gidiniz.

Bu iki makinenin işi ne kadar zamanda yapacağını yaklaşık olarak tahmin etmeyi denediniz mi? Tam sayılar için tahmin yürütünüz. Örneğin; cevap 1 saate mi yoksa 4 saate mi daha yakın olur? Neden bu şekilde bir cevap verdiniz? "Sezgiye dayalı tahmininizin" anlamlı olup olmadığı ya da aşağı yukarı istenen cevabın sınırları içinde olup olmadığını söyleyebilir misiniz? Bu şekilde bir tahmini kontrol etmek bazen yeni bir anlayışa sizi yönlendirir.

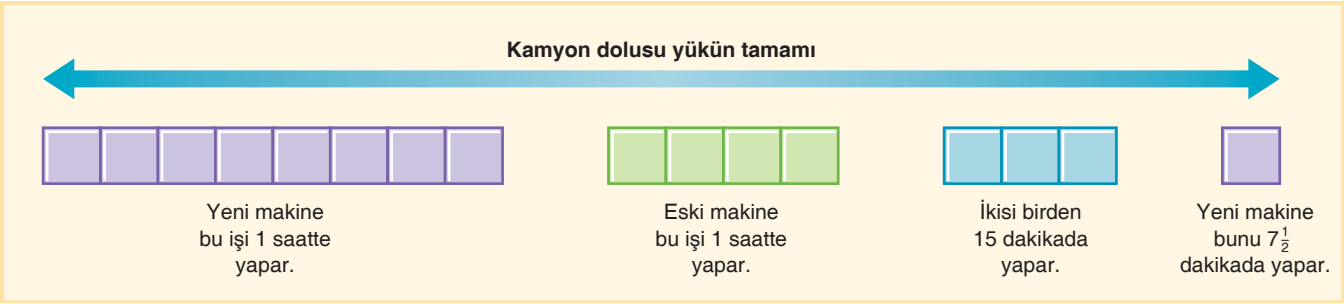
Bazıları problemleri şekil çizerek çözerler. Bazıları (problem çözerken) hareket ettirebilecekleri veya değiştirebilecekleri şeyleri kullanmayı severler. Mesela bir kamyon dolusu kâğıdı temsil etmek amacıyla bir dikdörtgen veya doğru parçası çizebilirdiniz ya da bazı sayma nesnelerini (pullar, plastik küpler, demir paralar) edinip bir kamyon kâğıdı temsilen bir grup oluşturabilirdiniz.

STOP

Geriye dönüp problem üzerinde biraz daha çalışınız.

Başkalarının Çözüm Yollarına Bakalım. Aşağıda, bu problemle uğraşmış 3 ilkokul öğretmeninin ürettiği çözümler (Örnekler Schifter & Fosnot, 1993, s. 24-27' den alıntıdır) verilmektedir. Betsy'nin çözüm yolu şu şekildedir:

> Betsy bir miktar plastik küpü elinde tutar. "Bu 16 tane küpü bir kamyon dolusu kâğıt olarak kabul edelim. Bir saatte yeni makine 8 küpü parçalarken, eskisi 4 küpü parçalar." Betsy önce 8 küpü daha sonra da 4 küpü parçalara ayırır. "Elimizde 4 küp artakaldı. Eğer yeni makine 1 saatte 8 küplük iş yapıyorsa, 2 küplük işi 15 dakikada halleder. Eski makine de (bu 15 dakikalık zaman diliminde) bunun yarısı kadar iş, yani 1 küplük iş yapmış olur." Betsy bunu söylerken 3 küpü daha parçalar. " Bu (toplamda) 1 saat 15 dakika eder ve halen elimizde 1 küpümüz daha var." Uzun bir duraklamadan sonra "Pekâlâ, yeni makine 2 küpü 15 dakikada halletti, dolayısıyla bu (elde kalan) küpü 7 dakikada halleder. Bunu da 1 saat 15 dakikaya ekleyin. Toplam harcanan süre 1 saat 22 dakika olacaktır. (bakınız Şekil 2.2)



Şekil 2.2 Betsy'nin kağıt parçalama problemi için ürettiği çözüm yolu.

4. Sınıf öğretmeni Cora ise Betsy'nin cevabına katılmaz. Cora'nın çözümü şu şekildedir:

> Bu dikdörtgen (Bkz. Şekil 2.3) tüm kamyon dolusu kağıtları temsil etsin. 1 saatte yeni makine bunun yarısını parçalar." Dikdörtgen ortadan ikiye bölünür. "1 saatte, eski makine kâğıtların $\frac{1}{4}$'ini parçalayabilir." Dikdörtgen belirtilen şekilde bölünür. "Böylece iki makine bir saatte kâğıtların toplam $\frac{3}{4}$'ünü parçalar ve kâğıtların $\frac{1}{4}$'i kalır. Kalan kısım parçalanan kısmın üçte biridir. Dolayısıyla iki makine bu (kalan) kısmı, toplam kıydıkları kısma harcanan zamanın üçte biri kadar zamanda kıyar. 1 saatin üçte biri 20 dakikadır. Bu da, tamamını 1 saat 20 dakikada parçalamaları anlamına gelir.

3. Sınıf öğretmeni Sylvia kendi grubunun izlediği yöntemi şu şekilde açıklar:

> İlk olarak problemi ortalamayı kullanarak çözdük. Ortalaması 3 saat olduğu için bu işlemin 3 saat alacağına karar verdik. Sonra Deborah ortalama almamız gerektiğini nereden bildiğimizi sordu. Bir neden olduğunu düşünüyorduk fakat daha sonra Deborah, sadece yeni makinenin kendi başına 2 saatte yapacağı işi iki makinenin birlikte çalışarak daha uzun bir zamanda yaptığı hakkında Ron'un ne düşüneceğini sordu. Böylece 3 saatin pek bir anlam ifade etmediğini gördük. Halen bu işin 1 saat 20 dakika mı, yoksa 1 saat $22\frac{1}{2}$ dakika mı sürdüğünü bilmiyoruz.

Bu örneklerdeki öğretmenlerin yaptığı gibi, çözüm yönteminizin doğruluğuna neyi, neden yaptığınızı savunarak karar vermeniz önem teşkil eder ki bu da gerçek anlamda problem çözmedir (cevabınızı bir çözüm anahtarıyla kıyaslamadan). Problemi doğru bir biçimde çözdüğünüzü kanıtladıktan sonra ya diğer başka yollarla da aynı sonuca ulaşmaya ya da diğerlerinin probleme olan yaklaşımlarını anlamaya çalışınız. Diğer çözüm yollarını dikkate alarak, problem çözme yöntemlerine dair bilgi dağarcığınızı genişletmiş olursunuz.

Bir Fazla Bir Eksik

1-3. Sınıflar İçin. **7 sayısını kendisine eklerseniz 14 elde edersiniz. İlk sayıyı 1 fazlalaştırıp, ikinci sayıyı 1 azalttığınızda aynı cevabı elde edersiniz:**

7 + 7 = 14 ile 8 + 6 = 14 aynı sonucu verir.

Bu durum 5 + 5 için de geçerlidir:

5 + 5 = 10 ile 6 + 4 = 10 aynı sonucu verir.

Bu durumla ilgili ne türden çıkarımlarda bulunabilirsiniz?

4-8. Sınıflar İçin. **Bu etkinlikte toplama işlemini çarpma işlemiyle değiştirirseniz ne olur?**

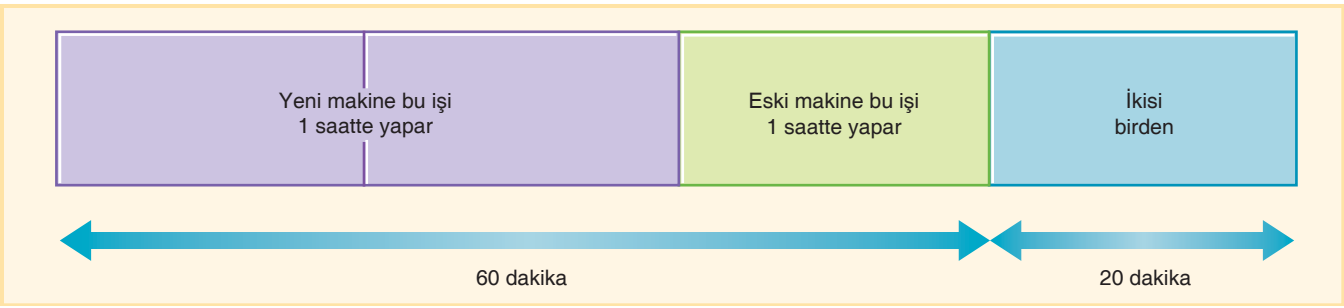
7 × 7 = 49 cevabı 8 x 6 = 48 cevabından 1 fazladır.

Bu durum 5 x 5 için de geçerlidir:

5 × 5 = 25 cevabı 6 x 4 = 24 cevabından 1 fazladır.

Bu durumla ilgili ne türden çıkarımlarda bulunabilirsiniz?

Bu örüntü diğer durumlarda genişletilebilir mi?



Şekil 2.3 Cora'nın kağıt parçalama problemi için ürettiği çözüm yolu.

STOP

Çarpma örüntüsü üzerinde çalışınız. Bu örüntüyü birtakım fikirler geliştirene kadar inceleyiniz. Keşfettiğiniz fikirleri de not ediniz.

Birkaç İpucu. Bir model ya da resim kullanınız. Muhtemelen bazı ilginç örüntüler buldunuz. Bu örüntülerin neden işlediğini ifade edebilir misiniz? Toplama işleminde, bir sayıdan alıp diğer sayıya eklediğinizde sonucun aynı kaldığını görmek oldukça kolaydır. Çarpma işleminde işler aynı şekilde yürümez. Neden? Bunu araştırmanın bir yolu, her bir çarpanı kenar ve yükseklik kabul eden dikdörtgenler oluşturmaktır (örneğin, ilk problem için 7×7 şeklinde bir dikdörtgen ve 6×4 şeklinde bir dikdörtgen). Dikdörtgenlerin nasıl birbirleriyle kıyaslandıklarını inceleyiniz (Bkz. Şekil 2.4a)

Çarpmayı eşit kümeler gibi düşünmeyi tercih edebilirsiniz. Örneğin 7×7, 7'şer tane nesne içeren toplam 7 küme demektir. Burada kümelerin sayısını artırırken, kümelerdeki eleman sayısını azaltıyorsunuz. (Bkz. Şekil 2.4.b)

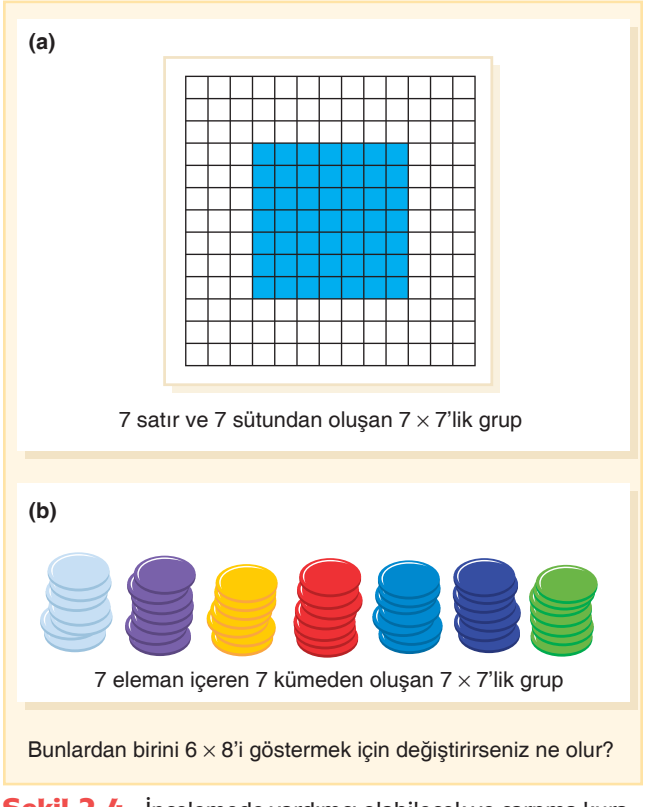
STOP

Bu yaklaşımlardan bir veya ikisi üzerinde çalışarak farklı bakış açıları edinmeye çalışınız.

Diğer Bazı Örüntülerin İncelenmesi. Çarpmaya dair örüntülerle ilgili daha birçok şey bulunabilir. Düşünebildiğiniz kadar "ya … ise …?" sorusu düşününüz. Aşağıda bunlardan birkaç tane verilmektedir. Eğer başka bu şekilde soru bulabilirseniz, harika! Bu problemi birçok yoldan inceleme imkânı mevcuttur.

- İlk iki sayının birbiriyle nasıl ilişkili olduğunu incelediniz mi? Örneğin, 7×7, 5×5 ve 9×9 işlemlerinin hepsi aynı bileşenler içeren çarpımlardır. Peki ya çarpım iki tane ardışık sayıdan ibaretse (örneğin, 8×7 veya 13×12) ne olur? Ya çarpılan sayılar arasında 2'şer veya 3'er fark varsa?
- Çarpanları birer artırıp azaltmanın ötesini düşününüz. Ya çarpanları iki artırılmış iki azaltılmış şekilde değiştirirseniz ne olur? (örneğin 7×7'yi 9×5'e değiştirmek gibi)
- Peki ya küçük sayılar yerine büyük sayılar kullanırsanız (30×30 gibi) ne olur?
- Çarpanların her biri de artırılırsa yine bir örüntü bulunabilir mi?

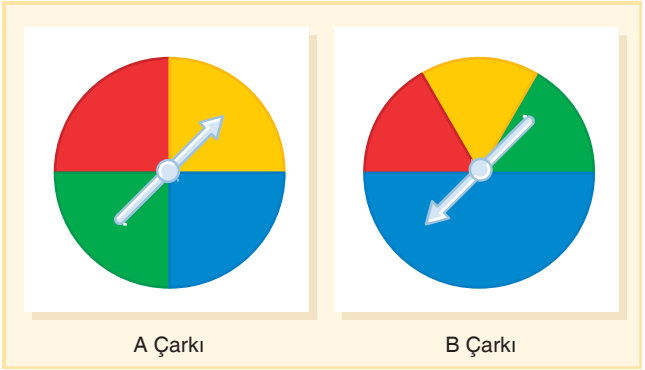
Temennimiz kendi varsayımlarınızı da ele alıp incelemiş olmanız veya en azından "ya … ise …?" listesine eklemiş olmanızdır. Bilim insanları (matematikçiler de buna dâhil) körü körüne işlemleri takip etmektense kendilerine ilginç gelen ve gelecek vadeden yeni fikirleri incelerler, araştırırlar.



Şekil 2.4. İncelemede yardımcı olabilecek ve çarpma kuralını incelemeye yarayacak iki görsel yöntem.

En Yüksek Şansla Mor'u Elde Etme

Üç tane öğrenci iki tane çarkı döndürerek mor rengi (ya ilk çarkta kırmızı ikinci çarkta mavi veya ilkinde mavi ve ikincisinde kırmızıyı denk getirecek şekilde, bkz. Şekil 2.5) elde etmeye çalışıyorlar. Bu öğrenciler ya iki çarkı da birer kez çevirebilirler ya da bir tanesini iki kez çevirebilirler. Mary, A çarkını iki kez çevirmeyi seçer; John B çarkını iki kez çevirmeyi seçer; ve Susan da ilk önce A sonra da B çarkını birer kez çevirmeyi seçer. Hangi öğrenci kırmızı ve mavi renklerini birlikte elde etme şansına en fazla sahiptir? (Lapan & Even, 1989, s.17)



Şekil 2.5 A çarkını iki kez, B'yi iki kez, ya da önce A'yı sonra B'yi birer kez çevirebilirsiniz. Hangi seçenek kırmızı ve mavi renkleri denk getirme şansına en fazla sahiptir?

STOP

Bu problem üzerine ve neler bildiğiniz üzerine düşününüz. Deney de yapabilirsiniz.

Birkaç İpucu. Bazen soyut olarak düşünmeyi gerektiren veya karmaşık problemlerle ilgili bir hissiyat edinmek zor olur. Şans içeren durumlarda bir yolunu bulup deneyler/denemeler yapabilir ve sonuçta ne olduğunu gözlemleyebilirsiniz. Bu problem için kâğıt üzerine basit bir çizim yaparak bir ataç ve bir kalem yardımıyla çarklar üretebilirsiniz. Kaleminizin ucunu atacın iç kısmına gelecek şekilde ve kâğıdın tam merkezine yerleştiriniz. Şimdi atacın ucuna vurarak atacı (kalem ucunun etrafında) çevirebilirsiniz. Her seçenek için çarkların ikisini birlikte en az 20 kez çeviriniz ve çıkan sonuçları takip ediniz.

Bu deneyi incelerken şunları dikkate alınız:

- Susan'ın seçeneği için (önce A sonra B çarkları), önce B'yi sonra da A'yı çevirmesi bir şey değiştirir mi? Neden?
- Yukarıdaki seçeneklerden herhangi biri için diğer iki seçeneğe göre mor rengin gelme şansının neden daha fazla ya da daha az olduğunu açıklayınız. Bazen neler gözlemlediğiniz üzerine konuşmak, daha etkin ve tutarlı bir düşünceyi uygulamak için bir yol belirlemenize yardımcı olur.

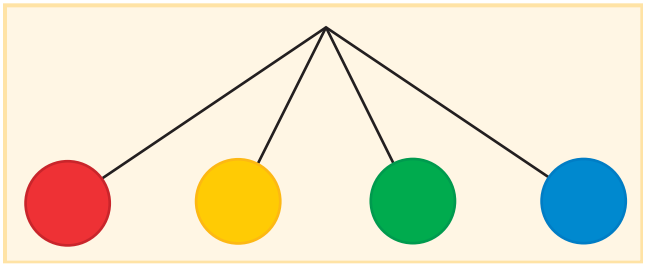


Okumaya daha fazla devam etmeden önce bu verilen önerileri uygulayınız.

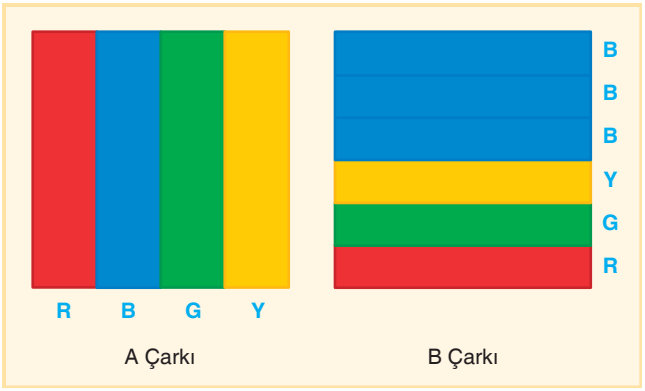
Yöntem 1: Ağaç Diyagramı. A çarkında dört rengin gelme şansı da aynıdır. A çarkı için dört daldan oluşan ve bütün dalların aynı şansa sahip olduğu bir ağaç diyagramı yapabilirsiniz (Bkz. Şekil 2.6). B çarkı ise farklı ebatlarda bölmelere sahip olup şu soruları akla getirmektedir:

- Mavi bölge ile diğer her bir bölgenin ilişkisi nedir?
- Her dalın aynı şansa sahip olduğu bir ağaç diyagramını B için nasıl yapabilirsiniz?
- A çarkı için oluşturulan diyagrama nasıl eklemeler yapabilirsiniz ki bu diyagram A çarkı için birbirini takip eden iki dönmeyi temsil edebilsin?
- Diyagramınızdaki hangi dallar mor renk elde etmeyi temsil etmektedir?
- John'un ve Susan'ın seçenekleri için ağaç diyagramlarını nasıl çizmeniz gerekir? Bunlar size neden anlamlı gelir?

Çark ya da çarkları çevirerek fikirlerinizi test ediniz.



Şekil 2.6 Şekil 2.5'teki A çarkı için bir ağaç diyagramı.



Şekil 2.7 Verilen her kare, Şekil 2.5'te verilen çarklar için her bir rengin gelme şansını göstermektedir.

Ağaç diyagramları bu soruyu ele almanın sadece bir yoludur. Sizin farklı bir yolunuz olabilir. Kendi yolunuz sizi belirli bir aşamaya taşıdığı sürece o yola sarılabilirsiniz. İzleyebileceğiniz bir öneri daha var. Fakat problemi çözmeye hazırsanız, daha fazla okumaya devam etmeyiniz.

Yöntem 2: Kareli Kağıt. Elinizde A çarkı için bütün olası sonuçları gösteren bir kare ile aynı şeyi B çarkı için yapan bir karenin olduğunu düşününüz. Her ne kadar bir kareyi dört eş parçaya bölmenin birçok yolu olsa da aynı doğrultuda çizgiler kullanırsanız bir olayın (bir bütün kare) bütün olası sonuçlarını bir başka olayın (başka bir kare ile gösterilen) tüm sonuçlarıyla karşılaştırabilirsiniz. Eğer ikinci olay (burada ikinci çarkı çevirme) birinciyi takip ederse ikinci karedeki çizgileri birincidekine göre ters (yataysa dikey gibi) yönde çiziniz. Şekil 2.7'deki karenin bir kopyasını yapıp öbürünün üzerine yerleştiriniz. Sonuçta 24 tane küçük kare elde edersiniz.

Neden B Çarkını temsil eden karede altı kısım bulunmaktadır? 24 küçük karenin her biri neyi temsil etmektedir? Hangi kısımlar mor'u temsil etmektedir? Üzerinde çalıştığınız başka herhangi bir yöntemde sırayla A ve B çarklarına bakarken 24 sayısıyla karşılaştınız mı?

Cevaplar Nerede?

Bu metinde hiçbir cevap ya da çözüm verilmemiştir. Bu konuda ne hissediyorsunuz? Peki doğru cevaplar nelerdir? Sizce kendi cevaplarınız doğru mu? Herhangi bir incelemede problemin çözümünü "doğru" kılan husus nedir?

Sınıfta, cevap anahtarının varlığı veya öğretmenin çözümü vermesi ya da bir cevabın doğruluğunu onaylaması, çocuklara matematik yapmayla alakalı açık bir mesaj gönderir: "Sizin göreviniz öğretmenin hâlihazırda bildiği cevapları bulmaktır." Sınıf dışında, problem çözmenin gerçek ortamında ne cevapları bilen öğretmenler ne de kitap çözümleri mevcuttur. Matematik yapmak bir cevabın doğruluğunu belirleme aracı olarak gerekçeler sunmayı (savunma yapmayı) içerir.

Matematik Öğrenmek Ne Demektir?

Şu ana kadar matematik yapmak ile ilgili deneyim kazandığınıza göre bir dizi soru aklınıza gelebilir: Bu şekilde zorlayıcı (ilgi çekici) soruları öğrenciler çözebilir mi? Neden bu tür soruları çözmek için zaman harcansın ki – bunun yerine fazlaca daha kısa problemler çözmek daha iyi değil mi? Öğrenciler neden bu tarz problemleri çözmek istesinler, özellikle de bunu yapmada isteksizseler? Tüm bu sorular şu soruyla özetlenebilir: "Matematik yapmak" ile "öğrencilerin öğrenmesi" birbiriyle nasıl ilişkilidir? Bu sorunun cevabı insanların nasıl öğrendiğini ele alan hâlihazırdaki teori ve araştırmalarda bulunmaktadır. Sınıfta öğrencilere sunduğumuz deneyimler öğrenciler için en üst düzeyde öğrenme imkânı sağlayacak şekilde tasarlanmalıdır.

Yapılandırmacılık Teorisi (Constructivism)

Yapılandırmacılık, bilişsel psikoloji ekolünde ve 1930'larda bir bilişsel gelişim (cognitive development) teorisi ve zihinsel şema (mental schema) fikrini ortaya atan Jean Piaget'in çalışmalarında kökleşmiştir (Bu çalışmalar 1950'lerde İngilizce'ye çevrilmiştir). Yapılandırmacılığın temelindeki fikir şudur: Çocuklar (veya en genel anlamda öğrenenler) boş birer levha olmayıp kendi öğrenmelerini kendileri yaratırlar. Bütünleşik ağlar, ya da bilişsel şemalar, hem bilgi yapılandırmanın bir ürünü hem de ekstradan yeni bilgi yapılandırmaya yarayan araçlardır. Öğrenme oluştukça bu ağlar yeniden düzenlenir, genişler veya da değiştirilir. Piaget şemaların iki yolla değiştirilebileceğini belirtmiştir, bunlar özümseme (assimilation) ve uyuşmadır (accommodation). Özümseme, yeni bir kavram hâlihazırdaki bilgilerle uyumlu olduğu zaman gerçekleşir ve bu şekilde yeni bilgi hâlihazırdaki bilgi ağını genişletir. Uyuşma ise yeni bir kavram hâlihazırdaki bilgi ağıyla uyumsuz olduğunda gerçekleşir ve bu sayede beyin eldeki bilişsel ağı yeniler veya değiştirir. Derin düşünme (eski dilde, tefekkür) sayesinde insanlar sahip oldukları şemalarını, yeni fikirleri edinebilmek için değiştirirler (düzeltirler) (Fosnot, 1996). Derin düşünme (reflective thought) mevcut kanıya, görüşe veya etkinliğe bağlı görünen fikirleri edinebilmek için mevcut fikirler (hâlihazırdaki bilgiler) üzerinden eleme yapma anlamına gelmektedir.

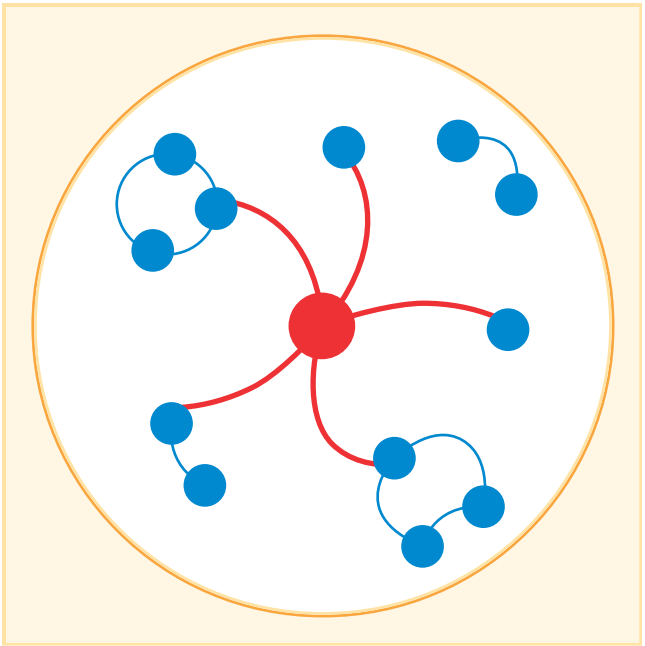
Mevcut şemalar genellikle hâlihazırdaki bilgi olarak anılır. Yapılandırmacılığın temel taşlarından birisi bireylerin kendi bilgilerini mevcut bilgileri üzerine kendilerinin inşa etmesi fikridir. Herkes daima algıladıkları şeylere veya düşündükleri şeylere anlam verir ve bunları yapılandırır. Bu kelimeleri okuduğunuzda siz de bunlara anlam veriyorsunuz. İster pasif bir şekilde bir ders dinleyin isterseniz aktif olarak bir projede edindiğiniz bulguları sentezleyin, beyniniz her seferinde mevcut bilgilerinizi yeni bilgiyi anlamlandırmak amacıyla kullanır.

Fikirlerin Yapılandırılması: Gerçek dünyada bir şeyi kurmak veya inşa etmek bazı araçlar, malzemeler ve çaba gerektirir. Bizim fikirleri nasıl yapılandırdığımız da aynı mantıkla ele alınabilir. Anlamayı yapılandırmak için kullandığımız araçlar mevcut fikir ve bilgilerimizdir. Anlamayı yapılandırmak için kullandığımız malzemeler gördüğümüz, duyduğumuz veya dokunduğumuz şeyler – kısaca fiziksel çevremizin unsurları – olabilir. Bazen de malzemeler kendi fikir ve düşüncelerimizdir. Bunun için gereken çaba ise etkin ve derin düşüncedir.

Şekil 2.8'de mavi ve kırmızı noktalar fikirleri sembolleştirmek için kullanılmıştır. Mavi noktalar mevcut fikirleri temsil etmektedir. Fikirleri birleştiren çizgiler (kurduğumuz) mantıksal bağları veya fikirler arasında geliştirilen ilişkileri temsil etmektedir. Kırmızı nokta gelişmekte olan veya yapılandırılan (inşa edilen) bir fikirdir. Yapılandırma sürecinde hangi mevcut fikirlerin (mavi noktalar) kullanıldığı yeni fikre (kırmızı nokta) bağlı olmak zorundadır, çünkü bunlar yeni fikre anlam veren fikirlerdir. Eğer yeni bir fikir (kırmızı nokta) öğrenilirken, bu fikirle alakalı olma potansiyeline sahip bir fikre (mavi nokta) öğrenen tarafından erişilemiyorsa, o takdirde gerekli potansiyel bağ da kurulamayacaktır.

Bilgi yapılandırmak öğrenen için etkin bir çaba gerektirir (Baroody, 1987; Cobb, 1988; Fosnot, 1996; von Glasersfeld, 1990, 1996). Yeni bir bilginin anlaşılması veya yapılandırılması bunun üzerine etkin bir biçimde düşünmeyi gerektirir. "Bu (bilgi) benim hâlihazırdaki bildiklerime ne kadar uyuyor?" "Bunu kendi mevcut bilgilerim bağlamında nasıl anlamlandırabilirim?" Bilgi bir öğrenenin aklına (sanki bir şeyler dökülüp dolduruluyormuş gibi) dökülemez. Basit anlamda bilginin yapılandırılması derin düşünce (tefekkür), bir şey hakkında etkin düşünme veya bir fikir üzerine zihin jimnastiği gerektirir.

Öğrenenler yeni bilgi ile mevcut bilgileri arasında kurdukları ilişkilerin doğası ve sayısı bakımından farklılık gösterecektir. Aynı ortamda veya aynı sınıfta da olsa her



Şekil 2.8 Yeni bir fikrin (kırmızı nokta) inşasında, fikirler arası ilişkilerden oluşan ağların kurulma sürecini geliştirirken, mevcut fikirlerimizi (mavi noktalar) kullanırız. Daha fazla fikir kullandıkça ve bağ kurdukça daha iyi anlarız.

öğrenen için bilginin yapılandırılması (oluşturulması) farklı olacaktır. Her ne kadar öğrenme içsel olarak inşa edilse de sınıf kültürü (ortamı) öğrenmeye katkıda bulunur-öğrenenler de sınıftaki kültüre (ortama) katkı sağlar (Yackel ve Cobb, 1996). Yackel ve Cobb öğrenen ile sınıf kültürünün (ortamının) birbirilerini etkileyecek şekilde ilişkili olduğunu savunmaktadırlar.

Sosyokültürel Teori

Piaget'in çalışmalarının yapılandırmacılığa yol gösterdiği gibi bir Rus psikoloğu olan Lev Vygotsky'nin çalışmaları da sosyokültürel teoriyi büyük ölçüde etkilemiştir. Her ne kadar 1970'lere kadar çevirisi yapılmamış olsa da Vygotsky'nin çalışmaları da 1920 ve 1930'larda ortaya çıkmıştır. Bu teorilerin birçok paylaştığı kavram vardır (örneğin öğrenenin etkin bir şekilde anlamlandırmaya çalışma sürecinin öğrenme süreci olarak ele alınması). Fakat sosyokültürel teori bazı kendine has temel kavramlara sahiptir. Bunlardan bir tanesi sosyal öğrenme ortamlarında insanların paylaşımındaki zihinsel işlemlerin varlığıdır. Ayrıca öğrenenler bu sosyal öğrenme ortamlarındaki fikirleri kendi psikolojik alanına aktarır (Forman, 2003).

İkinci olarak, bilginin içselleştirilmesi (öğrenilme) bu bilginin öğrenenin yakınsak gelişim alanında (zone of proximal development-ZPD) olup olmadığına bağlıdır. Burada yakınsak gelişim alanı (ZPD) diye öğrenenin verilen bir konu (veya problem) üzerinde çalışırken yardım alarak ve yardım almayarak çalışması arasındaki performans farkına denir (Vygotsky, 1978). Basit anlamda ZPD, bir bireyin kendi başına öğrenmesinin mümkün olmadığı fakat arkadaşlarının veya kendinden daha bilgili kişilerin desteğiyle öğrenebileceği bilgi "aralığı"nı ifade eder. "ZPD fiziksel bir alan değildir, fakat öğrenenlerin kendinden daha fazla bilgiye sahip bireylerle ve onlara öncülük eden kültürle etkileşimi sayesinde oluşturulan sembolik bir alandır" (Goos, 2004, s.262). Cobb (1994) ve Goos'un (2004) ikisi de gerçek anlamda matematik öğrenenlerden müteşekkil bir grupta hem bireylerden oluşan ortak bir ZPD'nin hem de bireylerin kendi ZPD'lerinin var olduğunu savunmaktadırlar.

Sosyokültürel teorideki diğer bir kavram da semiyotik arabuluculuktur (semiotik mediation). Bu terim bilginin sosyal alandan bireysel alana nasıl aktarıldığını tarif etmek için kullanılmaktadır. Bu bir mekanizmadır ve bu mekanizma sayesinde bireylerin inançları, tutumları ve amaçları sosyokültürel uygulamalar ve kurumlarla karşılıklı etkileşirler" (Forman ve McPhil, 1993, s.134). Semiyotik arabuluculuk dil ile ve bunun yanında diyagramlar, şekiller ve eylemler ile etkileşimi içerir. Dil ve bu diğer nesneler ve eylemler arabuluculuk için "araçlar" olarak kabul edilir.

Arabuluculukta sosyal etkileşim bir zorunluluktur. Öğrenenlerden müteşekkil toplulukların yapısı/doğası sadece öğretmenin oluşturduğu (sınıf) kültürü ile değil aynı zamanda sınıftaki üyelerin daha geniş sosyal ve tarihsel kültürlerinden de etkilenir (Forman, 2003). Özetle sosyokültürel teori perspektifinden bakıldığında öğrenme (kendi ZPD alanlarında çalışan) öğrenenlere, sınıf ortamındaki sosyal etkileşime ve sınıf-içi ve dışındaki kültüre bağlıdır.

Matematik Öğretimi İçin Çıkarımlar

Piaget'in teorileri üzerine kurulu bilişsel yapılandırmacılıktan ve Vygotski'nin görüşlerini rehber alan sosyal yapılandırmacı teoriden birisini seçmek gibi bir zorunluluk yoktur (Cobb, 1994). Aslında fikir yapılandırmak için imkânları en üst düzeye çıkaran veya arabuluculuğu desteklemek için araçlar sunan sınıf uygulamaları düşünüldüğünde bu iki teori de birbirine çok benzemektedir. "Çocukların öğrenmesini sağlayan en temel şey" (Wood ve Turner-Vorbeck, 2001, s.186) öğrencilerin problem çözüm yolları ve kendi fikirleri üzerine kurulu (sınıfiçi) tartışmalardır.

Öğrenme teorisinin bir öğretim yöntemi olmadığını tekrarlamakta fayda var, bununla birlikte teori öğretim süreci hakkında bizi bilgilendirir. Bu kısımda yapılandırmacı ve sosyokültürel perspektifleri yansıtan öğretim yöntemleri kısaca ele alınacaktır. Bu yöntemlere, 3 ve 4. bölümlerde probleme dayalı öğretim modelleri ele alınırken ve diğer bölümlerde bu fikirleri matematikteki özel alanlara nasıl uygulayacağınızla ilgili bilgi edinirken, tekrar geri dönüldüğünü göreceksiniz.

Yeni Bilginin Ön-bilgi Üzerine İnşâ Edilmesi. Aşağıda sayma sayılarıyla bölme işlemi yapmayı öğrenmekte olan 4. sınıf öğrencilerine sorulan bir soru bulunmaktadır, bu soruyu inceleyiniz:

> 4 çocuk 3 tane M&M[1] paketine sahip olsun. Bu çocuklar şeker içeren bu üç paketi de açmaya karar vermişler ve M&M şekerleri eş olarak paylaşmışlardır. Her pakette 52 tane M&M şekeri bulunmaktadır. (Bu paylaşım sonucunda) Her bir çocuk kaçar tane M&M şekeri almıştır? (Campbell ve Johnson, 1995, s.35-36).

Not: Yemekle alakalı olmayan bir konu da seçebilirsiniz. Mesela iskambil kağıdı veya kültürel anlamda daha uygun ve ilginç olan ve eş sayıda paketlerde bulunan nesneler de seçilebilir.



Yapılandırmacı teoriye veya sosyokültürel öğrenme teorisine dayalı etüt çalışması yapan bir öğretmen olarak bu problem için ne tür beklentilerinizin olabileceğini ve 4. sınıflara bölme işlemini nasıl öğretebileceğinizi düşününüz.

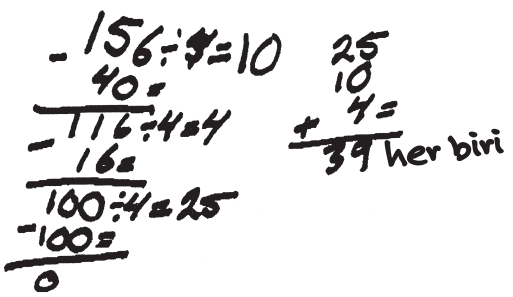
Şekil 2.9'daki öğrenci çalışmalarından örnekler yapılandırmacılığı benimsemiş bir sınıftan alınmıştır. Bu sınıfta öğrencilerin kendi ön bilgilerini kullanarak matematik yapmak için yöntemler geliştirdiği veya icat ettiği, ve bu sayede matematiksel kavramlar arası bağlar kurduğu düşünülmektedir.

Marlena verilen soruyu şu şekilde anlamlandırır: "156'dan kaç tane 4'lü set yapılabilir?" Öncelikle Marlena (problemdeki) mevcut ve basit unsurları (verileri) kullanmıştır: 10 × 4 ve 4 × 4. Bu toplamları ta ki 100'e ulaşıncaya kadar 156'dan çıkarmıştır. Bu da onu 4 tane 25 kullanmaya sevk etmiştir. 4'lü setlerini toplayarak her çocuğa 39 şeker düştüğünü bilmektedir. Marlena (burada) eşit çıkarma yaklaşımını ve bazı çarpma ile ilgili kuralları kullanmaktadır. Yeni bir kavram olan bölme hakkında öğrenmeye başlaya-

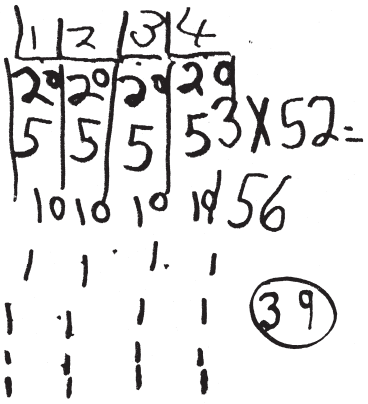
1 Ç.N. M&M bir şekerleme markasıdır.

bilmek için (Şekil 2.9'da) mavi noktaları nasıl birleştirdiğine dikkat ediniz. Her ne kadar bu yöntem çok da pratik bir yöntem olmasa da

Marlena



Darrell



Şekil 2.9 İki tane 4. Sınıf öğrencisinin bir hesaplamaya özgü yöntemleri keşfi.
Kaynak: P.F. Campbell ve M. L. Johnson, "How Primary Students Think and Learn," I. M. Carl (Ed.), *Prospects for School Mathematics* (ss. 21–42). Telifi "National Council of Teachers of Mathematics, Inc"'e aittir. www.nctm.org.

Marlena bölme kavramını anlamaktadır ve ileride daha etkin yöntemler kullanabilir.

Darrell'in probleme yaklaşımı (Marlena'nınkine göre) problemin paylaştırma bağlamıyla daha doğrudan ilişkilidir. Darrell dört tane sütun oluşturmuş ve mevcut miktarı her bir sütuna dağıtmış, bu esnada sayıları yazarken miktarlarını zihinden ve sesli olarak birbirine eklemiştir. Darrell ileriye doğru sayma yöntemini kullanmıştır – önce her öğrenciye 20 M&M şekeri vermiş, sonrasında daha fazla M&M şekerlerini almaları gerektiğini anlamış, 5'er tane daha vermiş, sonra 10'ar daha fazla ve sonrasında 1'er tane daha vererek toplam sayıya ulaşmıştır. Marlena gibi Darrell de bildiği işlem ve kuralları kullanmıştır. Problemi eşit dağıtma şeklinde düşündüğü için paylaştırma bağlamı Darrell için "mavi nokta" olarak verilmiştir.

Matematik Hakkında Konuşabilmek için Olanakların Sağlanması. Öğrenen birey diğer bireylerle birlikte aynı fikirler üzerine yakın bir ilişki içerisinde çalışırsa öğrenme artar (gelişir). Burada uğraşmaya değer bir hedef öğrencilerin birbirleriyle ve sizinle etkileşimde bulundukları bir ortam oluşturmaktır. Sınıf içinde öğrencilerce yapılan zengin iletişimler (etkileşimler) öğrencilerin derin düşünmeye sevkine ve etkileşimsiz ve akranlarının ve öğretmenlerinin söylemleri olmaksızın, belki de erişemeyecekleri kavramları içselleştirmelerine sebep olur. Akranlarla yapılan tartışmalarda öğrenciler kavram ağlarını genişletip (kendi bilgi hazinelerine) uyarlarlar.

Derin Düşünme için Olanaklar Yaratma. Sınıf ortamı öğrencilerin mevcut bilgileri ışığında matematiği anlamlandırmaları için gerekli altyapı ve desteği sağlamalıdır. Öğrettiğiniz fikrin birbiriyle ilişkili zengin bir bilgi yumağına iliştirilebilmesi için öğrencilerin zihinsel olarak etkin olması gereklidir. Öğrenciler bunun için sahip oldukları (yeni bilgi ile) ilgili fikirleri bulmalı ve yeni fikrin geliştirilmesinde kullanmalıdırlar. Şekil 2.8'deki işaretlemelerle konuşacak olursak, öğrencilerin öğrenmelerini istediğimiz her yeni kırmızı noktaya bağlı halihazırda sahip oldukları mavi noktaların etkin hâle getirilmesini isteriz.

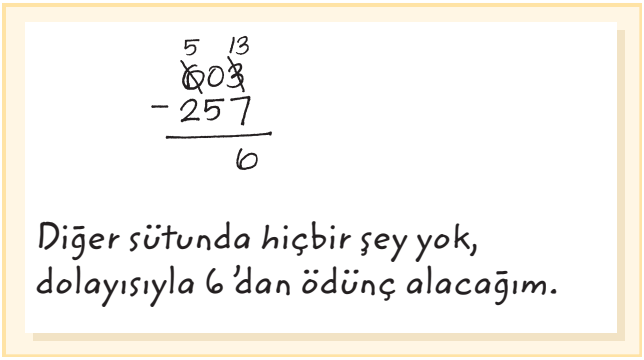
Üçüncü bölümde ve kitabın genelinde de göreceğiniz üzere, öğrencileri problemler üzerine düşünmeye sevk edebilmek için önemli bir anahtar, onların (verilen probleme) çözüm ararken ve bu süreçte yeni fikirler üretirken mevcut ön bilgilerini kullanmalarını sağlamaktır. Problem çözme yaklaşımı sadece cevap bulmayı gerektirmez, aynı zamanda çözümleri açıklamayı ve gerekçelendirmeyi gerektirir.

Farklı Yaklaşımları Teşvik Etme. Yapılan öğretim öğrencilere kendi bilgileri ile öğrendikleri bilgiler arasında bağlar kurması için imkân tanımalıdır. Şekil 2.10'da çalışması gösterilen öğrenci kullanmaya çalıştığı kuralı anlamamış olabilir. Fakat bunun yerine farkı bulmak için eğer kendi çözüm yolunu kullanması istenseydi doğru bir çözüm bulabilir ve basamak değeri ve çıkarma bilgisinin üzerine bunu inşa edebilirdi.

Öğretmen (öğrencilerden) birden fazla çözüm yolu bulmalarını istediği taktirde 7 × 8 gibi temel bir problemi öğrenmesi bile daha iyi sonuçlar doğurabilir. Bir sınıf düşünün ki bu sınıfta öğrenciler çarpımı bulmanın zekice (farklı) yollarını birbirleriyle paylaşıp tartışıyorlar. Öğrencilerden birisi 5 tane 8 ve sonrasında 2 tane 8 düşünebilir. Bir diğer öğrenci 7 × 7 ve sonrasında 7 daha eklemeyi öğrenebilir. Bir başka öğrenci ise 7'lerin yarısını alabilir (4 × 7) ve sonucu ikiye katlayabilir. Bu fikirlerin paylaşımının olduğu sınıf içi bir tartışma ortamı toplama ve çarpma kavramlarının ilişkilendiren birçok faydalı matematiksel "noktayı" öne çıkarır.

Bunların tam aksine 7 × 8 ezber yoluyla da öğrenilebilir. Bu şekilde de bu bilgi yapılandırılabilecekken diğer bilgilerle ilişkilendirilmeyecektir. Ezbere dayalı öğrenme "zayıf yapılandırma" (Noddings, 1993) olarak düşünülebilir. Öğrenciler bu şekilde öğrendikleri bilgileri hatırlayabilirler, fakat unuturlarsa o zaman 7 × 8'i tekrardan oluşturmalarına izin verecek diğer bilgi kırıntılarına bağlamamış olacaklardır.

Hataları/Yanlışları Öğrenme İçin Birer Fırsat Olarak Değerlendirme. Öğrenciler hataya düştüklerinde bu onların mevcut bilgilerini yeni duruma/ortama yanlış uyguladıkları anlamına gelebilir. Hatırlayınız ki yapılandırmacı bakışa göre zihin, yeni duruma uygun faydalı yaklaşımlar sergileyebilmek için bildiklerini bir elemeden geçirir. Öğrencilerin nadiren rasgele cevaplar verdiklerinin (Ginsburg, 1977; Labinowicz, 1985) bilinmesi, öğrencilerin kavram ya-



Şekil 2.10 Bu öğrencinin cevabı öğrencinin basamak değeri ve yeniden gruplama ile ilgili kavram yanılgısı olduğunu belirtmektedir

nılgılarını ortaya çıkarmada ve bunu yeni öğrendiklerine (kendi bilişsel mekanizmalarına) nasıl uydurdukları konusunda bize bilgi verir. Örneğin, ondalık sayıları kıyaslayan öğrenciler sayma sayıları ile ilgili "kuralları" – sayı uzun olduğunda değeri büyür (Martinie, 2007; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, ve Peled, 1989) – yanlış bir biçimde uygulayabilir.

Şekil 2.10 bir öğrencinin yeniden gruplama hakkında öğrendiklerini yanlış bir şekilde uygulamasına bir örnek teşkil etmektedir. Eğer burada öğretmen öğrenciye problemi çözmenin doğru yolunu tekrardan açıklayarak yardım etmeye çalışırsa, öğrenci kendi kavram yanılgılarını düzeltme ve bunlar üzerine düşünme fırsatını kaçırır. Bunun yerine öğretmen öğrencinin yeniden gruplamada kullandığı işlem sürecini açıklamasını isterse, bu takdirde öğrenci derin düşünceye sevk edilecek ve neyin yeniden gruplandığı ve sayının nasıl değişmeden aynı kaldığına dair düşünecektir.

Yeni Konunun Öğrenilmesi İçin Sistematik Yardım. Sosyokültürel teorinin ürünü olan sistematik yardım (scaffolding) kavramı şu fikre dayanır: Normalde bir öğrencinin ZPD'sinin dışında olan bir konu/ödev/problem eğer dikkatli yapılandırılmışsa erişilebilir hâle dönüşebilir. Öğrencilere tamamen yabancı olan yeni kavramlar içinse öğrenme, manipulatifler gibi araç kullanımı veya daha fazla akran yardımını içeren, daha fazla bir yapıyı ve yardımı gerektirir. Öğrenciler konulara daha bir aşina olduklarında bu sistematik yardımlar kaldırılır ve öğrenciler daha bağımsız hâle gelirler. Sistematik yardım yerleşik "mavi noktalar" koleksiyonuna sahip olmayan öğrenciler için gerekli desteği sağlayabilir.

Çeşitliliğe Değer Verme. Son olarak ve en önemlisi de bu teoriler her bireyin sahip olduğu kültürel deneyim ve bilgi koleksiyonuyla şahsına münhasır olduğunu vurgularlar. Yeni bilgiler mevcut bilgi ve deneyimlerin üzerine inşa edildiği için etkin öğretim de bu deneyimleri dikkate alarak öğrencilerin sınıfa getirdikleri bilgi ve deneyimlerin üzerine inşa edilip bunlarla bütünleşir. Bunun içindir ki dersler [genellikle] önceden edinilmiş deneyimlerin ortaya çıkarılmasıyla başlar ve dersler için gerekli anlam ve bağlamlar da öğrenci bilgi ve deneyimleri dayanak alınarak seçilir. Bazı öğrenciler gereksinim duydukları "mavi noktalara" sahip olamayacaklardır – bu mavi noktaları geliştirmelerine imkân tanıyacak deneyimleri onlara sunmak ve bunların öğrenilen kavrama bağlanmasını sağlamak sizin görevinizdir.

Sınıf kültürü (ortamı) öğrencilerinizin bireysel olarak öğrenmelerini etkiler. Önceden de bahsedildiği gibi matematik yapmayı mümkün kılacak farklı yaklaşım ve yöntemleri desteklemelisiniz. Öğrencilerin fikirleri dikkate alınıp değerlendirilmeli ve bunlar matematikle ilgili sınıf içi tartışmalara dâhil edilmelidir. Uygulamada yapılan ve öğretmenin problem için bir çözüm yolunu öğrencilere söylemesinden uzaklaşan bu tarz bir değişiklik fikirlerin değer gördüğü bir sınıf kültürü oluşturur. Bu tarz bir yaklaşım her bireyin şahsına münhasır olduğu fikrine kıymet verir.

Matematiği Anlamak Ne Demektir?

Yapılandırmacı ve sosyokültürel teorilerin ikisi de öğrenenlerin mevcut fikirleri ile yeni fikirler arasında (mavi noktaların kırmızı noktalara) bağlar kurmasını vurgulamaktadır. Şu soruları sormak isteyebilirsiniz: "Neyi öğrenmeli ve ilişkilendirmeliler? Bu mavi noktalar nelerdir? Bu kısım günümüz sınıflarında gerekli olan matematik bilgisine odaklanmaktadır.

Bir şeyi bildiğimizi veya bilmediğimizi söylemek mümkündür. Yani bir fikir, sahip olduğumuz ya da olmadığımız bir şeydir. Anlama/kavrama ise farklı bir meseledir. Örneğin, ekseriyetle 5. sınıf öğrencileri kesirler hakkında bir şeyler bilirler. $\frac{6}{8}$ kesri verildiğinde büyük ihtimalle bu kesrin nasıl okunduğunu bilip, 6 ve 8 sayılarını sırasıyla pay ve payda olarak belirleyebilirler. Bu kesrin $\frac{3}{4}$'e eşit olduğunu ve $\frac{1}{2}$'den büyük olduğunu bilirler.

Öte yandan öğrenciler eş olmanın ne anlama geldiği gibi kavramlara dair farklı anlayışa/kavrayışa sahip olacaklardır. $\frac{6}{8}$'nın sadeleştirilerek $\frac{3}{4}$ yapılabileceğini bilebilirler ancak $\frac{3}{4}$ ile $\frac{6}{8}$'nın eş miktarı temsil ettiğini anlamayabilirler/kavramayabilirler. Bazıları $\frac{6}{8}$'nın $\frac{3}{4}$'e sadeleştirilmesinin sayıyı küçülttüğünü düşünebilir. Bazı öğrenciler denk kesirleri şekil ve modellerle gösterebilecek veya 6/8'nın sınıf dışında nasıl kullanıldığına dair birçok örnek verebilecektir. Özet olarak öğrencilerin kesirlerle ilgili kendi şahsi anlayışlarını/kavrayışlarını ilişkilendirebildikleri bir fikir yelpazesi mevcuttur – her öğrenci birçok farklı mavi noktayı kesrin ne olduğuna dair kendi bilgisine bağlayacaktır.

Anlama (kavrayış) bir fikrin mevcut fikirlerle olan bağlarının kalitesinin ve çokluğunun bir ölçümü olarak tanımlanabilir. Anlama her şey veya hiçbir şey demek değildir. Her birey için farklılık gösteren uygun olan fikirlerin varlığına ve üretilen yeni ilişkilere dayanır (Backhouse, Haggarty, Pirie, & Stratton, 1992; Davis, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992; Janvier, 1987; Schroeder & Lester, 1989).

Anlama hakkında düşünmenin bir diğer yolu da bu kavramın ilişkisel anlamadan (ne yapıldığının ve nedeninin bilinmesi) enstrümantal anlamaya (anlamadan yapmak) kadar olan bir spektrumda var olmasıdır (Bkz. Şekil 2.11). Bu spektrumun iki ucuna isimlerini veren kişi matematik eğitimine büyük etki etmiş olan eğitim psikoloğu Richard Skemp'tir (1978).



Şekil 2.11 Anlama, yeni bir fikrin mevcut fikirlerle olan bağlantılarının sayısının ve kalitesinin bir ölçümüdür. Fikirler ağına yapılan bağlantıların sayısı arttıkça anlama da artar.

$\frac{6}{8}$ örneğinde şekil çizebilen, örnekler verebilen, denklikler bulabilen ve $\frac{6}{8}$'nın miktarını tahminen belirleyebilen bir öğrenci bu sürecin ilişkisel anlama ucuna yakın bir anlamaya sahiptir. Öte yandan sadece kesir isimlerini ve $\frac{6}{8}$'yı $\frac{3}{4}$'e indirgeme yöntemini bilen bir öğrenci spektrumun enstrümantal anlama ucuna daha yakın bir anlamaya sahiptir.

Matematikte Yeterlik

Skemp'in matematikte neyin öğrenilmesi gerektiğine odaklanan ilişkisel ve enstrümantal anlamlar üzerine olan klasik çalışmasından bu yana birçok çalışma ortaya atılmıştır. Bu çalışmaların hepsi de işlemleri öğrenmenin ötesine geçilme ihtiyacına dayanmaktadır.

Kavramsal ve İşlemsel Anlama. Kavramsal anlama bir konuya dair temel fikirlerle veya ilişkilerle alakalı bilgidir. İşlemsel anlama matematiksel işlemleri yaparken kullanılan kural ve işlemlere dair bilgi olup ayrıca matematiği temsil için kullanılan sembolizmdir. 47 x 21 problemini ele alalım. Bu problemin kavramsal olarak anlaşılması çarpmanın tekrarlı toplama olması ve 47 inç ve 21 inç boyutlarında bir dikdörtgenin alanını temsil edebilmesi gibi fikirleri içerir. Burada işlemsel anlama standart kuralı veya üretilen kuralları (örneğin, 47 ile 10'un çarpılması, sonucun iki katının alınması ve sonrasında bir 47 daha eklenmesi) içerebilir. Bu örnekteki gibi üretilen kuralları kullanabilme becerisi ise basamak değeri ve çarpmaya dair kavramsal bilgi gerektirir.

Aslında matematik öğrenme üzerine yapılmış olan araştırmalarda, kavramsal anlamanın işlemsel yetkinliğin önemli bir bileşeni olduğu kuvvetli bir biçimde ortaya konulmuştur (Bransford, Brown, ve Cocking, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008; NCTM, 2000). İlkeler ve Standartlarda verilen Öğrenme Prensibine göre:

NCTM Standartları

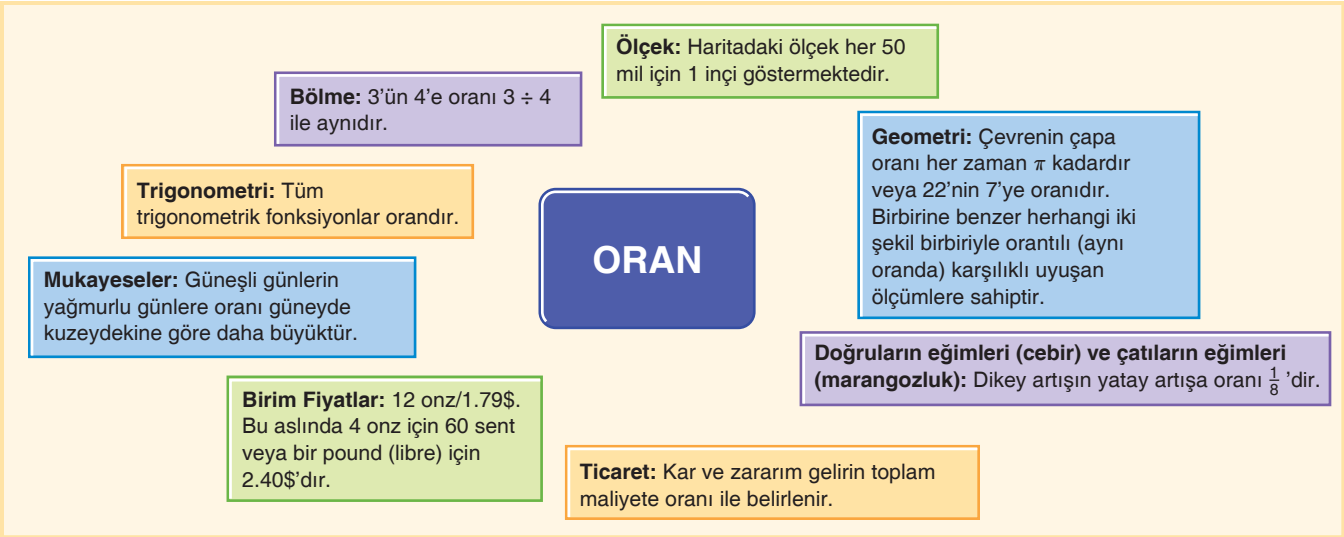
"Kuramsal bilgi, işlemsel yetkinlik ve kavramsal anlamanın ittifakı bu üç bileşenin güçlü bir biçimde kullanılabilmesini sağlar" (s.19). ◆

156 ÷ 4 problemini kendi geliştirdikleri yöntemle çözen iki öğrenciyi hatırlayınız (Bkz. Şekil 2.9). Açıkça çocukların ürettikleri yöntemler ile çarpma hakkında bildikleri ve bölmeye dair geliştirdikleri kavramlar arasında işleyen ve kullanışlı bir etkileşim vardı.

Genelde kavramsal anlamadan yoksun olarak yapılan işlem öğretimi hatalara ve matematiğin sevilmemesine neden olmaktadır. Öğrencilerinizin (ve sizin) bir kavrama dair birbirleriyle bağlantılı tüm fikirler hakkında düşünmesine yardımcı olmanın bir yolu, Şekil 2.12'de oran kavramı için gösterildiği gibi, bir ağ veya bağlantılar yumağı oluşturmaktır. Oran kavramı için ilişkisel anlamaya sahip olmanın ne kadar çok şey içerdiğine dikkat ediniz. Bunu bir de oranın bazı kitaplarda enstrümantal anlamıyla şu tarz sorularla ele alınmasıyla kıyaslayın: "Kızların erkeklere oranı 3'e 4 ise 24 erkek mevcut olduğu takdirde kızların sayısı kaçtır?"

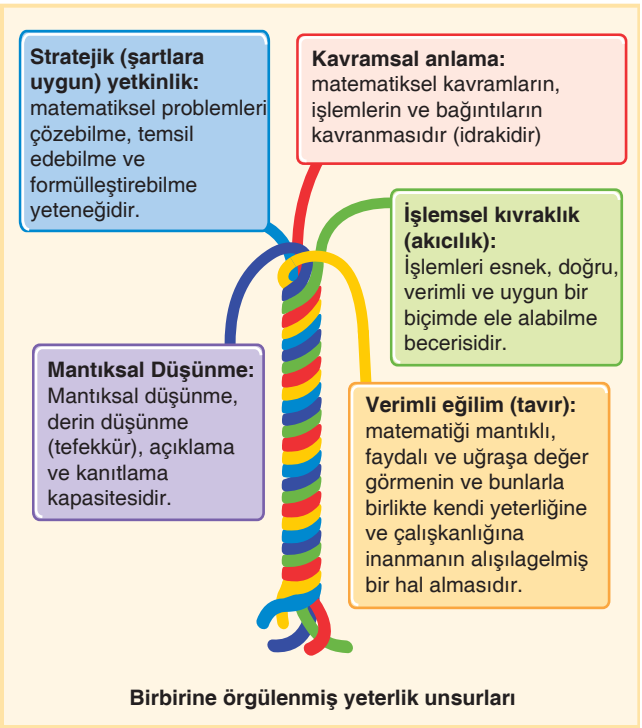
Matematiksel Yeterliğin Beş Ana Unsuru. Bir kavramın kavramsal ve işlemsel anlamlarının bilinmesi önemli olmasına rağmen yeterli değildir. Matematiksel anlamda yetkin olmak demek insanların matematik yaparken bazı davranış ve eğilimler (tavırlar) göstermesidir. Öğrencilerin nasıl matematik öğrendiklerine dair etkin bir rapor olan Adding It Up (NRC, 2011) kaynağı matematiksel yetkinliğin içerdiği beş ana kolu şu şekilde tarif etmektedir: (1) kavramsal anlama, (2) işlemsel kıvraklık (akıcılık), (3) stratejik (şartlara uygun) yetkinlik, (4) uyarlanabilir muhakeme, ve (5) verimli eğilim (tavır). Birbiriyle bağlantılı ve iç içe geçmiş bu unsurlar her birine birer tarif verilerek Şekil 2.13'te gösterilmektedir.

"Şimdi Biraz Matematik Yapalım" kısmında çözdüğünüz soruları hatırlayın. Her bir problemle uğraşırken eğer bu problemi çözmek için bir yöntem tasarlayabileceğinizi hissederseniz (ya da bir yöntemin işe yaramadığı durumda yeni yöntemler denerseniz) bu taktirde bu stratejik yetkinliğe bir örnektir. O kısımda verilen her problemde çözümünüzü açıklamanız ve savunmanız istenmişti. Bir örüntü hakkında muhakeme yapabildiyseniz ve bunun nasıl çalıştığını söyleyebildiyseniz, bu da uyarlanabilir muhakemeye bir örnektir. Son olarak bir şeyi anlamlandırmaya ve verilenleri çözmeye kendinizi adamışsanız ve bu tutumu muhafaza ederseniz, bir çözüme ulaşabilirsiniz, bu takdirde verimli eğilime (tavra) sahipsiniz demektir.



Şekil 2.12 Oran kavramını anlamlandırmaya yardımcı olabilecek potansiyel fikir yumağı.

Yukarıda verilen beş unsurun son üçü sadece öğrenciler bu işlemleri içeren deneyimlere sahip olduklarında gelişmektedir. Umuyoruz ki burada kullanılan terimlerin bölümde önceden verdiğimiz öğrenme teorisi ile ilgili kısımda kullanılan terimlerle çok benzer olduğunu fark etmişsinizdir. Derin düşünme (tefekkür), mevcut bilgileri kullanmak, sosyal etkileşim ve problemlerin farklı yollarla çözülmesi, diğer yöntemlerin yanı sıra, öğrenme için ve matematiksel yetkin hâle gelmek için zaruridir.



Şekil 2.13 Adding It Up kitabı matematiksel yetkinliğin beş unsurunu tarif etmektedir.
Kaynak: Adding It Up: Helping Chidren Learn Mathematics. s.5. National Academies Press kurumunun izniyle yeniden üretilmiştir. Telif hakkı National Academy of Sciences kurumuna aittir.

Matematik Öğretimi İçin Çıkarımlar

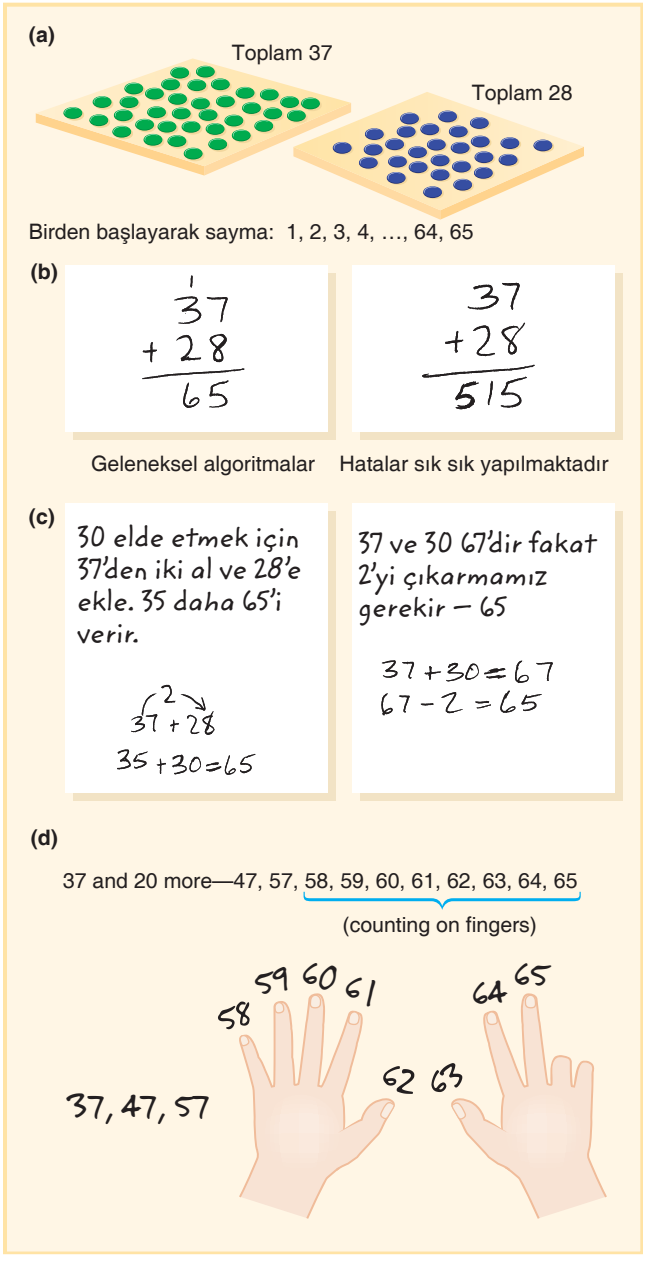
Eğer 'anlama'nın 'bilme'den hem nitel hem de nicel anlamda farklı olduğu fikrini kabul ederseniz, "Bunu biliyor mu?" sorusu "Bunu nasıl anladı? Hangi fikirleri bununla ilişkilendirdi?" sorusuyla değiştirilmek zorundadır. Aşağıdaki örneklerde farklı öğrencilerin aynı bilgilerden hareketle farklı fikirleri nasıl geliştirdiğini ve bu sayede nasıl farklı anlamlara sahip olduklarını göreceksiniz.

Erken (Yaşlarda) Sayı Kavramları. 7 kavramının birinci sınıftaki bir çocuk tarafından yapılandırıldığını farz edin. Bir birinci sınıf öğrencisi büyük ihtimalle 7'yi ve "…'den daha fazla" yapısını sayma işlemine bağlayacaktır ve bunu 10'dan küçük 2'den büyük şeklinde anlamlandıracaktır. Bu çocuk daha neleri 7 kavramı ile ilişkilendirecektir? 6'dan 1 fazladır; 9'dan 2 eksiktir; 3 ile 4'ün veya 2 ile 5'in toplamıdır; tek sayıdır; 73 ile kıyaslandığında küçük ve $\frac{1}{10}$ ile kıyaslandığında büyüktür; haftadaki gün sayısıdır; "şans" sayısıdır; asaldır, vs. Bir sayı ile ilişkilendirilmiş potansiyel fikirlerin yumağı büyüyüp kapsamlı olabilir.

Hesaplama. Hesaplama bir işlemi ezberlemekten daha fazlasıdır; bir öğrencinin uyguladığı yöntemi analiz etmek anlamların bir çocuktan diğerine nasıl değişebildiğini görme olanağı verir. İki veya üç basamaklı sayıların toplama veya çıkarmasını yapabilmek için sayıların ve basamak değeri kavramının esnek ve zengin bir şekilde anlaşılması çok fayda sağlar. Farklı çocuklar 37 ile 28'in toplamını bulmaya nasıl teşebbüs ederler? Çocukların 37'yi anlamaları sadece

saymaya dayanıyorsa, sayma nesnelerini kullanmaları ve 1'den başlayarak sayma işlemlerini yapmaları beklenir (bkz. Şekil 2.14(a)). Bir öğrenci, sayıların basamaklarını alt alta hizalayarak önce birler basamağındaki sonra da onlar basamağındakileri toplayarak, geleneksel kuralları kullanabilir, fakat 1'i neden (10'lar basamağına) taşıdığını anlamayabilir. İşlemler kavramlarla bağlantılı olmadığı zaman (bu durumda basamak kavramı ile ilgili kavramlar) hataların yapılması ve mantıksız cevapların gelmesi çok doğaldır (bkz. Şekil 2.14(b)).

Öğrenciler kendi ürettikleri bir yöntemle bu soruyu çözebilirler (bkz. Figure 2.14(c)). Burada kullanılan yöntemler öğrencilerin sayıların birçok değişik yoldan parçalara ayrılabileceği ve iki sayının toplamının sayılardan birine bir miktar ekleyip diğerinden aynı miktarı çıkarmayla aynı kalacağını bildiğini gösterir. Bu öğrenciler esnek yollarla toplama yapabilmektedirler.



Şekil 2.14 Farklı derecede anlamlandırmayı gösteren çeşitli işlem örnekleri.

İlişkisel Anlamanın Faydaları

Zengin veya ilişkisel anlamaya yönelik bir öğretim birçok iş yükü ve çaba gerektirir. Kavramlar ve aralarındaki bağlar, bir günde değil, belli bir sürede gelişir. Öğrencilerin bağ kurmasına yardımcı olacak etkinlikler seçilmelidir. İlişkisel anlamadan çıkarılabilecek önem arz eden faydalar (yukarıda bahsi geçen) iş yükünü sadece değerli kılmaz aynı zamanda gerekli de kılar.

Yeni Kavram ve İşlemlerin Etkin Öğrenimi. Öğrenme teorisinin bize ne söylediğini hatırlayın – öğrenciler mevcut bilgileri üzerine etkin bir şekilde (yeni bilgiyi) inşa ederler. Bir kavramı anlamaları kuvvetlendikçe öğrencilerin yapılandırdığı bağlantılar da artar ve yeni fikirleri mevcut kavramsal ağlarıyla birleştirmeleri daha mümkün olur. Kesir bilgisi ve basamak kavramı bilgisi ondalık sayı öğrenimini kolaylaştırmak için bir araya gelir ve ondalık sayı kavramları da yüzdelik kavram ve işlemlerini anlamayı doğrudan artırır. Bunlar ve diğer birçok bağlantılar olmadan çocuklar karşılaştıkları her bir yeni bilgiyi birbirinden ayrık ve bağımsız bir şekilde öğrenmek durumunda olacaklardır.

Az Şey Hatırlama. Öğrenciler enstrümantal anlamda öğrendiklerinde matematik onlara birbirinden bağımsız ve doğru bir biçimde anlaşılması hep zor olan, sonsuz beceri, kavram, kural ve semboller listesi şeklinde görünebilir. Yapılandırmacılar "ana fikirler"in öğretiminden bahsederler (Brooks ve Brooks, 1993; Hiebert et al., 1996; Schifter ve Fosnot, 1993). Ana fikirler aslında birbiriyle örgülü geniş ağ şebekelerinden ibarettir. Bu ağ şebekeleri sık sık öyle iyi yapılandırılır ki tüm bilgiler hafızamızda depolanır ve sonrasında birbirinden ayrık parçalar yerine birer bütün ünite olarak (kullanılmak üzere) geri çağırılır. Örneğin, basamak kavram bilgisi ondalık sayılarda virgüllerin alt alta gelmesi, ondalık sayıların sıralanması, ondalık sayı – yüzdelik dönüştürmelerinde virgülün sağ veya sola kaydırılması, sayıların yuvarlanması ve tahmin edilmesi ve diğer birçok fikir ile ilgili kuralları içerir.

Daha Fazla Akılda Tutma ve Hatırlama. Bellek bir nevi bilgiyi geri çağırma işlemidir. Bilgiyi geri çağırma (hatırlama) daha çok bir kavramı bütün bir fikir yumağına bağladığınız zaman daha olasıdır. Eğer hatırlamanız gereken şey aklınıza gelmezse bununla ilişkili olan fikirler hakkında derin düşünmeniz (tefekkür etmeniz) sonuçta sizi hatırlamayı arzu ettiğiniz fikre genelde ulaştırır. Örneğin, dikdörtgensel bir prizmanın yüzey alanına dair formülü unuttuysanız, bu prizmanın açınımının masa üstünde düz bir hal aldığı zaman ne şekilde olduğu üzerine derin düşünmeniz (bu prizmada) üç çift halinde birbirinin aynısı altı tane dikdörtgen yüzeyin olduğunu hatırlamanıza yardımcı olabilir.

Gelişmiş Problem Çözme Becerileri. Alışılmışın dışında problemlerin çözümü bir bağlamda öğrenilen fikirlerin yeni

durumlara aktarılmasını gerektirir. Kavramlar zengin bir bilgi ağı içine gömülü olarak verildiğinde bilgi transferi ve bunun sonucu olarak problem çözme (Schoenfeld, 1992) de anlamlı şekilde gelişecektir. Öğrenciler bir durum ile bir bağlam arasındaki ilişkiyi anladıklarında, problem çözmek için kullanılacak olan özel bir yöntemi ne zaman kullanacaklarını bileceklerdir. Birçok öğrenci bunu tam sayılarla ilgili işlemlerde yapabilmekteyken problemlerin zorluk derecesi arttığında ve sayılar da tam sayılardan rasyonel sayılara veya bilinmeyenlere kaydığında ilişkisel anlamaya sahip olmayan öğrenciler halihazırda yeni problemleri çözmek için öğrendikleri becerileri uygulayamayacaklardır.

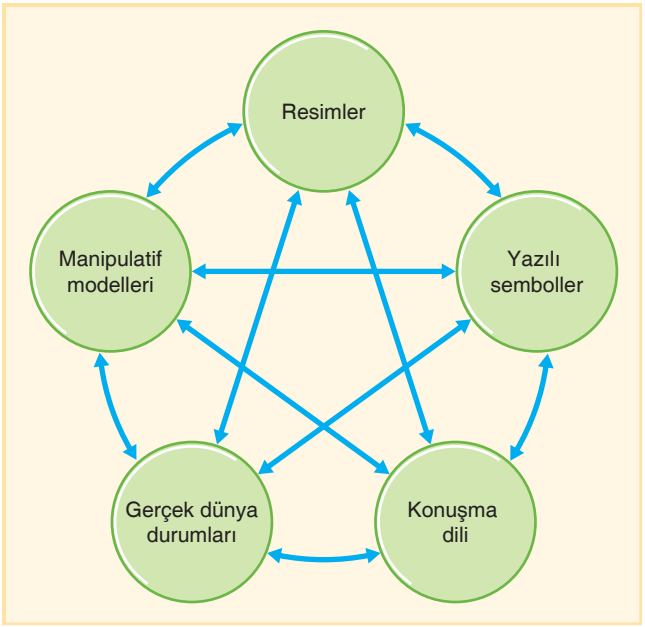
Gelişmiş Tutum ve İnançlar. İlişkisel anlama duyuşsal ve bilişsel etkilere sahiptir. Fikirler iyi anlaşıldığında ve anlamlandırıldığında öğrenen kişi, matematiği öğrenme ve anlama becerisine dair olumlu şahsi-algı geliştirme eğiliminde olur. Burada "Bunu yapabilirim! Bunu anladım!" tarzında şüphe içermeyen bir hissiyat vardır. İlişkisel anlamada öğrenilen bilgi mevzubahis olduğunda korkmak veya şaşkınlık geçirmek için herhangi bir sebep yoktur. Öte taraftan enstrümantal anlama matematik kaygısı üretme potansiyeline sahiptir ki bu da korku ve uzak durma davranışlarını içeren bir olgudur.

İlişkisel Anlamayı Destekleyecek Çoklu Temsiller/Gösterimler

Yeni geliştirilen bir fikri test etmeleri ya da bu fikir hakkında düşünmeleri için çocuklara ne kadar çok yol gösterilirse, bunları doğru bir biçimde şekillendirip zengin kavram ağlarıyla o kadar iyi birleştirebilecekler ve bu sayede ilişkisel anlamayı geliştirebileceklerdir. Lesh, Post ve Behr (1987) kavramlar için beş gösterim/temsil önermiştir (Bkz. Şekil 2.15). Bu araştırmacıların yaptıkları çalışmalarda bir kavramı bir gösterim biçiminden başka bir gösterime aktarma konusunda zorluk çeken çocukların problem çözmede ve yapılan hesaplamaları anlamada da zorluk çektikleri ortaya çıkmıştır. Farklı gösterimler arasında geçiş yapabilme yeteneğinin kuvvetlendirilmesi öğrencilerin anlamalarını ve anladıklarını hafızalarında tutmalarını geliştirir. Konuşma dili, gerçek dünya durumları ve yazılı sembollerle ilgili tartışmalar bu bölüme yayılmıştır. Fakat manipülatiflerin ve modellerin çocukların fikirleri yapılandırmasına yardımcı olmada nasıl yardım ettiğine veya etmediğine dair geniş bir bakış açısına sahip olmanız önemlidir.

Modeller ve Manipülatifler. Bir kavram için model denildiğinde bahsedilen şey kavramı temsil eden ya da kavram adına üzerine ilişki yüklenebilen herhangi nesne, resim veya çizimdir. Bu anlamda 100 tane nesneden oluşan bir grup "100" kavramı için bir model olabilir çünkü "100'e 1" ilişkisini bu grubun veya gruptaki tek bir elemanın üzerine yükleyebiliriz. Manipülatifler ise matematiksel kavramları keşfedebilmek ve resmedebilmek için öğrenci ve öğretmenlerin kullanabildiği fiziksel (katı) nesnelerdir – bunlar matematik için yapılmış (legolar gibi) veya başka amaçlı üretilmiş nesneler olabilir.

Bir modelin bir kavramı resmettiğini söylemek aslında doğru değildir. Resmetmek göstermeyi çağrıştırır. Teknik olarak gözlerinizle görebildiğiniz tek şey fiziksel nesnedir; sadece aklınız bu nesnenin üzerine bir ilişki oturtabilir (Suh, 2007; Thompson, 1994).



Şekil 2.15 Matematiksel fikirlerin beş farklı gösterimi/temsili. Gösterimlerin birinden diğerine veya kendi içinde çevrilmeleri yeni kavramların geliştirilmesinde yardımcı olabilir.

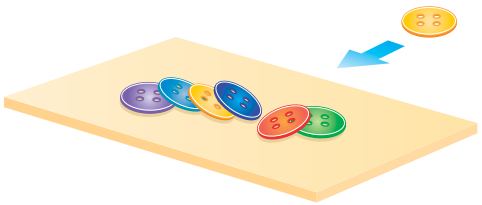
Modeller gelişmekte olan fikirler için test alanı mahiyetinde kullanılabilir. Bazen öğrencilerin (her yaş sınıfından) sadece kelimeleri veya sembolleri kullanarak soyut ilişkiler üzerine düşünmeleri ve bunları test etmeleri zordur. Örneğin, paralelkenarının alanı bilindiği göz önünde tutulursa, bir üçgenin alanını keşfetmek, belli ilişkileri yapılandırabilmek için, resim ve/ya manipülatif kullanımı gerektirir. Seçilip rahatça kullanılabilecek çeşitli modellerin öğrencilerin kullanımına açık olması gerekir. Bir fikri/kavramı açıkça tasvir ettiğini düşündüğünüz bir modeli kullanıp öğrencinin bunu anlamadığı durumlarla mutlaka karşılaşacaksınız – böyle durumlarda farklı bir model daha etkin olacaktır.

Modellere Örnekler. Matematikte katı cisimler veya manipülatifler çok sayıda mevcuttur-lima fasulyesi ve şerit gibi bilinen nesnelerden ticari amaçlı üretilen ağaçtan çubuklara (örneğin, kesir çubukları) ve küplere kadar birçok çeşit vardır. Şekil 2.16 altı tane modeli göstermektedir-bunların her biri farklı bir kavramı temsil etmekte ve bu şekilde matematiksel kavram ve işlemlerin geliştirilmesini desteklemek amaçlı birçok şekilde kullanılabilen manipülatiflere bir göz atılmaktadır.



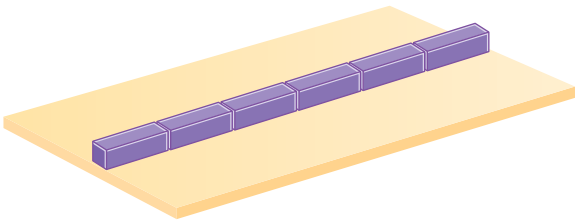
Şekil 2.16'da verilen her bir kavram ve karşılık gelen modeli dikkate alınız. Kavramı "görebilmek/anlayabilmek" için model üzerinde kuracağınız ilişkiyi fiziksel modelden ayırmaya çalışınız.

(a)



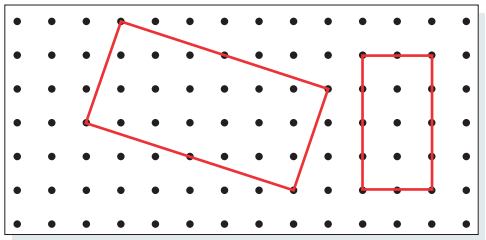
Sayılabilir nesneler "sayı" kavramını ve "bir fazlası" gibi sayı kavramına bağlı fikirleri modellemek için kullanılabilir.

(b)



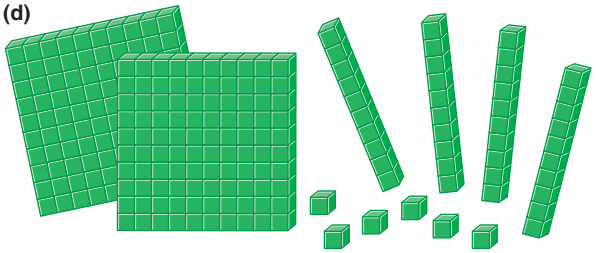
"Uzunluk," farklı nesnelerin uzunluk niteliklerinin kıyaslanmasını içerir. Çubuklar uzunluk ölçümünde kullanılabilir.

(c)



"Dikdörtgenler" noktalı kağıt üzerinde modellenebilir. Dikdörtgenler uzunluk ve uzamsal ilişkileri içerir.

(d)



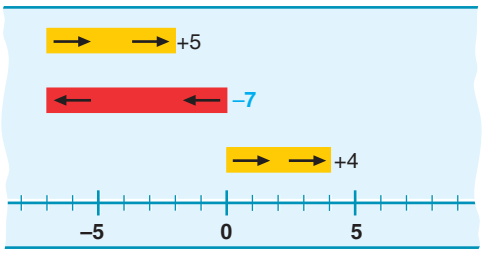
Onluk sayı sistemine dair kavramlar (birlik, onluk, yüzlük) çoğunlukla şerit ve karelerle modellenir. Çubuk ve çubuk desteleri de ayrıca bu amaçla kullanılmaktadır.

(e)



"Şans (olasılık)" kavramı bir çarktan elde edilen sonuçların kıyaslanmasıyla modellenebilir.

(f)



"Pozitif" ve "negatif" tam sayılar farklı yön ve uzunlukta oklarla modellenebilir.

Şekil 2.16 Matematiksel kavramları temsil eden model örnekleri.

Şekil 2.16'daki örnekler aşağıdaki kavramları tasvir edebilecek modellerdir:

a. "6" kavramı bir, iki, üç, dört, beş veya altı kelimeleri ile eşleşebilecek kümeler arasındaki bir ilişkidir. Eldeki bir grup sayılabilir nesneyi "bir" ekleyerek değiştirmek bu ilişkiyi değiştirir. 6-lı nesne grubu ile 7-li nesne grubu arasındaki fark "bir fazlası" ilişkisidir.

b. "Uzunluk ölçümü" kavramı farklı nesnelerin uzunluk niteliklerinin kıyaslanmasıdır. Bir nesnenin uzunluk ölçüsü nesnenin uzunluğunun birim uzunlukla kıyaslanması ilişkisidir.

c. "Dikdörtgen" kavramı hem uzamsal hem de uzunluk ilişkilerini içerir. Karşıt kenarlar eş ve paraleldir ve komşu kenarlar birbirini 90 derecelik açıyla keser.

d. Sayı olarak "Yüz" kavramı büyük karede (yüzlük) değil büyük karenin şerite (onluk) ve küçük kareye (bir'lik) olan ilişkisinde mevcuttur.

e. "Şans (olasılık)" bir olayın olma sıklığının sayısı ile mümkün olan tüm sonuçlar arasındaki ilişkidir. Çark

burada göreli (birbirine bağlı) frekanslar oluşturmak için kullanılabilir. Bunlar çarkın kısımlarının birbiriyle ilişkilerinin incelenmesiyle tahmin edilebilir.

f. "Negatif sayı" kavramı "büyüklük" ve "tersi" ilişkilerine dayanır. Negatif çokluklar sadece pozitif çokluklara kıyasla mevcuttur. Sayı doğrusu üzerindeki oklar tersine ilişkiyi modeller – bu modelleme yön ile uzunluğa dair ebat veya büyüklük ilişkilerine dairdir.

Model ve Manipülatiflerin Etkin Olmayan Kullanımı. Model ile kavram arasındaki farkı belirginleştirmenin yanında model veya manipülatifleri etkisiz biçimde kullanmanın başka yolları da vardır. Etkili olmayan kullanımlardan birisi öğretmenin öğrencilerine "bana bakarak yaptığımı yapın" demesiyle ortaya çıkmaktadır. Burada, nesneleri çıkarıp bunların nasıl kullanıldığını çocuklara göstermeye karşı doğal bir cezbedicilik vardır. Çocuklar öğretmenlerinin verdiği yönergeleri kopyalar ve hatta anlamış gibi de görünebilirler, fakat sadece gördüklerini düşünmeksizin takip ediyor da olabilirler. Öğrencilere ters çevirip çarpmayı bilmeden öğretmek neyse bu da tıpkı onun gibi anlamsızca küplerle oynamalarını sağlamaktır. İki yöntem de düşünceyi geliştirmez veya kavram gelişimine yardımcı olmazlar (Ball, 1992; Clements & Battista, 1990; Stein & Bovalino, 2001).

Model kullanımını aşırı şekilde yönlendirmenin bir sonucu çocukların bunları bir kavramı keşfetmeye yarayan araçlar olarak görmesinden ziyade cevap-bulma araçları olarak kullanmaya başlamalarıdır. Örneğin, çocuklara bir çarpma problemine basamak bloklarını kullanarak nasıl cevap bulunabileceğini dikkatlice gösterip açıklarsanız, bu takdirde öğrenciler cevabı bulmak için blokları kullanabilir fakat problemi bloklarla modellemede karşılaşılabilecek örüntü ve işlemlere odaklanamayabilirler. İyi bir manipülatif grubu ile yapılan mantıksız bir işlem süreci ne olursa olsun yine mantıksız bir işlemdir.

Bunun tam aksine öğrencilere yeterince rehberlik etmeyip onları odaklamamak da sistemsiz ve üretken olmayan bir çalışma yapmalarına sebebiyet verir (Stein ve Bovalino, 2001). Öğrenciler kullandıkları modeller hakkında konuşturulabilir, fakat yaptıklarının matematiksel amacının ne olduğunu bilmezlerse manipülatifler bu sefer de kavramı geliştirmek için bir araç olmaktan çıkar.

Teknoloji Temelli Modeller. Teknoloji model ve manipülatifler için başka bir kaynaktır. Utah State University National Library of Virtual Manipulatives (Utah Devlet Üniversitesi Sanal Manipülatifler Ulusal Kütüphanesi) gibi web sitelerinde birçok farklı manipülatifler mevcuttur (örneğin, geometri tahtası, 10'luk bloklar, çarklar, sayı doğruları). Bazı öğrenciler elektronik versiyon kullanmaktan yana oldukları için sanal manipülatifler fiziksel nesnelere ek olarak iyi olacaktır. Hatta bunlara sınıf dışından da erişebilirler.



Hesap makinalarını da birer araç olarak düşünmek önemlidir. Hesap makineleri çok çeşitli sayısal ilişkileri modeller-bunu hızlı ve kolay bir şekilde bu fikirlerin sonuçlarını ortaya koyarak yapar. Örneğin, 0.01'den veya 3 gibi diğer bir başlangıç sayısından başlayarak 100'er atlamalı sayma yapabilirsiniz 0.01'e basın, sonra [+] 0,01'e, sonra da [=], [=], [=] ... gibi). 3 sayısından 4'e gidebilmek için kaç tane [=] işaretine basmak gerekir? Daha bunun gibi birçok benzer fikir Bölüm 7'de sunulmaktadır.



Noktaları Birleştirelim

Özellikle bu bölümde verilen fikirler diğer bölümlerdeki her bir kısımda izlenen yönteme temel teşkil ettiği için bu bölümü bazı noktaları birleştirerek kapatmak yerinde olacaktır. Bu bölüm matematik yapmanın ne olduğu ve sizi biraz matematik yapmaya zorlayan tartışmalarla başlamıştı. Çözülen soruların her biri matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmaya imkân vermiştir – mavi noktalar birleştirilmiştir.

İkinci olarak öğrenme teorisiyle ilgili hususları okudunuz – noktaları birleştirmek için imkânlar edinmenin önemini okudunuz. Yapılandırmacı ve sosyokültürel teorilere göre öğrenmek için en elverişli zamanlar, öğrenenlerin kendi bilgi ve deneyimlerini sosyal etkileşim ve derin düşünme sayesinde problem çözmek için kullandıkları zamanlardır. Verilen dört soruda sizden bunu yapmanız istenmişti. Matematik hakkında yeni bir şeyler öğrendiniz mi? Daha önceden ilişkilendiremediğiniz bir fikri (kendi bilişsel mekanizmanızda) ilişkilendirebildiniz mi?

Son olarak "anlama" hakkında okudunuz – (mavi noktaların birleştirildiği) ilişkisel anlama, kavramsal ve işlemsel anlamayı ve diğer yeterlikleri/becerileri de gerektirir. İlk kısımda çözdüğünüz problemler sizi stratejik yetkinlik, uyarlanabilir muhakeme ve verimli tavır kullanmanız gereken bir duruma sokarken kavramlar ve işlemlere odaklanmayı sağlamıştır.

Bu bölüm teori ile pratik arasındaki noktaları birleştirmeye odaklanmıştır – bu sayede öğrencilerin kendi mavi nokta ağ şebekelerini geliştirmeleri için onlara imkân vermeye odaklı bir öğretiminizin olmak zorunda olduğuna dair bir tespit yapılmıştır. Öğretimi planlayıp tasarlarken, öğrencileri kritik ve yaratıcı düşünmeye sevk edebilmek ve matematiği kapsamlı bir şekilde ele almalarını sağlamak için, öğrencilerin sosyal ve kültürel deneyimlerini yansıtacak etkinlikler tasarlayarak, daima öğrencilerinizin mevcut bilgilerini nasıl ortaya çıkaracağınız üzerine kafa yormalısınız.

Bölüm 2 Üzerine Düşünelim!

Yazma Ödevleri

1. Matematik yapmanın ne anlama geldiğini nasıl tarif edersiniz?
2. Neden her çocuğun bir fikre dair bilgisinin ve anlamasının o çocuğa has olduğunu varsaydığımızı açıklayınız.
3. Derin düşünme (tefekkür) nedir? Matematikte kavramların geliştirilmesinde derin düşünme neden çok önemlidir?
4. Anlama'nın ilişkisel anlamadan enstrümantal anlamaya kadar olan bir süreçte var olması ne anlama gelmektedir? Bir fikre dair bir örnek veriniz ve öğrencilerin anlamalarının iki uca nasıl düştüğünü açıklayınız.
5. Bir matematiksel fikir için (üretilen bir) modelin aslında nasıl o fikir için bir örnek teşkil etmediğini açıklayınız. Eğer bu model, kavram için bir örnek teşkil etmiyorsa "modele baktığımızda kavramı görürüz" demek ne anlama gelmektedir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Aşağıdaki problemi okuyunuz ve listedeki meseleleri cevaplandırınız.
   - Belirlediğiniz bir yöntem ile soruyu çözünüz.
   - Soruyu nasıl çözdüğünüzü kelimelerle açıklayınız.
   - Çözümünüzün doğruluğunu kanıtlayınız.

Bazılarına göre dört ardışık sayıyı toplamak için ilk ve son sayıları toplar ve iki ile çarparsınız. Bu her zaman doğru mudur? Nasıl bilebilirsiniz? (Stoessiger ve Edmunds, 1992)

2. Aşağıdaki etkinliği dikkate alıp şu üç soruyu cevaplandırınız.
   - Bu soruda "matematik yapmanın" hangi özellikleri vardır?
   - Bu soru öğrencileri hangi aşamaya kadar ilişkisel anlama geliştirmeye sevk eder?
   - Hangi aşamaya kadar bu soru matematiksel yetkinlik kazandırır?

"The Sole D'Italia Pizzeria" pizzacısı küçük, orta ve büyük boy pizza satmaktadır. Küçük olanın çapı 9 inç, orta boydakinin çapı 12 inç ve büyük boy pizzanın çapı 15 inçtir. Sole D'Italia restoranı sade ve peynirli küçük bir pizza için 6 dolar, orta boy için 9 dolar ve büyük boy için de 12 dolar istemektedir.

- **Çevre, alan, yarıçap ya da çap ölçümlerinden hangisi (ya da hangileri) talep edilen fiyatlarla sıkı bir ilişkiye sahiptir? Neden?**
- **Bulduğunuz sonuçları kullanarak Sole D'Italia restoranınca belirlenen pizza fiyatlarının ne kadar adil olduğu üzerine bir rapor yazınız.**

3. Her eğitimci matematik öğretiminde yapılandırmacı yaklaşıma inanmamaktadır. Bunun bazı nedenleri şunlardır: (Sınıfta) Çocukların her şeyi keşfetmesine izin vermek için yeterince zaman yoktur. Temel kural ve fikirler kaliteli açıklamalarla daha iyi öğretilmektedir. Öğrenciler tekerleği yeniden icat etmek zorunda olmamalıdır. Bu açıklamalara nasıl cevap verirsiniz?

Bölüm 2 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Ball, D. L. (1997). From the general to the particular: Knowing our own students as learners of mathematics. *Mathematics Teacher*, *90*(9), 732–737.
Deborah Ball, one of the leading advocates for classroom discourse and listening to children, offers a thought-provoking example of third-grade thinking about fractions while raising our awareness of how difficult it is to see into the minds of children.

Berkman, R. M. (2006). One, some, or none: Finding beauty in ambiguity. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(7), 324–327.
This article offers a great teaching strategy for nurturing relational thinking. Examples of the engaging "one, some, or none" activity are given for geometry, number, and algebra activities.

Buschman, L. (2003). Children who enjoy problem solving. *Teaching Children Mathematics*, *9*(9), 539–544.
The focus of this article is the enjoyment that students achieve when they are making sense of mathematics themselves rather than following rules.

Flores, A., & Klein, E. (2005). From students' problem solving strategies to connections with fractions. *Teaching Children Mathematics*, *11*(9), 452–457.
This outstanding article focuses on fractions, a topic for which students (and adults) often lack relational understanding, and describes how connections can be made to other concepts.

Hedges, M., Huinker, D., & Steinmeyer, M. (2005). Unpacking division to build teachers' mathematical knowledge. *Teaching Children Mathematics*, *11*(9), 478–483.
Like the Flores and Klein article, this article offers a wonderful explanation of the concepts related to division. Student strategies

are examined and from that a collection of related concepts are proposed.

Suh, J. (2007). Tying it all together: Classroom practices that promote mathematical proficiency for all students. *Teaching Children Mathematics*, *14*(3), 163–169.

This is an excellent resource for teachers wanting to implement strategies for developing the five strands of mathematics proficiency described in Adding It Up *(NRC, 2001).*

Kitaplar

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Lampert reflects on her personal experiences in teaching fifth grade and shares with us her perspectives on the many issues and complexities of teaching. It is wonderfully written and easily accessed at any point in the book.

Mokros, J., Russell, S. J., & Economopoulos, K. (1995). *Beyond arithmetic: Changing mathematics in the elementary classroom.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

These authors/researchers of the Investigations in Number, Data, and Space *curriculum use numerous examples from the elementary classroom to develop an image of teaching mathematics from a problem-solving perspective. In looking at teaching, curriculum, and assessment, the importance of problem solving as a way of learning mathematics is quite clear.*

Online Kaynaklar

A Maths Dictionary for Kids
www.amathsdictionaryforkids.com

An extensive dictionary with each word illustrated by a small interactive explanation.

Classic Problems
www.mathforum.org/dr.math/faq/faq.classic.problems.html

A nice collection of well-known problems ("Train A leaves the station at . . .") along with discussion, solutions, and extensions.

Constructivism
http://carbon.cudenver.edu/~mryder/itc_data/constructivism.html

Based at the University of Colorado, Denver, this site lists definitions and numerous papers on constructivist theories from Dewey to von Glasersfeld and Vygotsky.

Constructivism in the Classroom
http://mathforum.org/mathed/constructivism.html

Provided by the Math Forum, this page contains links to numerous sites concerning constructivism as well as articles written by researchers.

Utah State University National Library of Virtual Manipulatives
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

A robust collection of virtual manipulatives. A great site to bookmark and use. Here are two favorite applets to check out from this site:

Circle 21
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_188_g_2_t_1.html

A puzzle that involves adding positive and negative integers to sum to twenty-one.

How High?
http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_3_t_3.html

This is a conservation of volume activity—the student predicts how high the liquid in one container will be when moved to one of a different shape.

Bölüm 3

Problem Çözme ile Öğretim

Bir konunun problematik olmasını sağlamak, öğrencilerin *meraklanmasına*, *sorgulamasına*, *cevaplar aramasına ve tutarsızlıkları tahlil edip çözmesine izin vermek demektir. Bu şu demektir; hem program hem de öğretim, öğrenciler için problemlerle, ikilemlerle ve sorularla başlamalıdır.*

Hibert ve arkadaşları (1996, s. 12)

Yirmi yılı aşkın, ilk NCTM *Standartlarının* (1989) yayımlanmasından bu yana, elde edilen bulgular artarak problem çözmenin öğrenme için güçlü ve etkili bir araç olduğunu göstermeye devam etmiştir. İlkeler *ve Standartlar*'ın (2000) *belirttiği gibi:*

> Problem çözmek sadece matematik öğrenmenin bir amacı değil, aynı zamanda onun temel aracıdır…. Problem çözme matematik öğrenmenin temel bir parçasıdır ve bu yüzden matematik programından ayrı olarak ele alınmamalıdır. Matematikteki problem çözme, Standartlarda açıklanan beş içerik alanının hepsini içermelidir… İyi problemler birden çok konuları bütünleştirir ve önemli matematiği içerir (s. 52).

Klasik bir eserde (Schroeder & Lester, 1989), matematik eğitiminde problem çözme alanında çalışan iki araştırmacı, problem çözmenin matematik öğretimine üç yolla bütünleştirilebileceğini belirtmişlerdir:

1. *Problem çözme için öğretim.* Bu yaklaşım, birçok ders kitaplarında gösterildiği gibi, bir öğrenciye önce bir becerinin öğretilmesi ve daha sonra öğrencinin bu beceriyi kullanarak problem çözebilir hale gelmesi şeklinde özetlenebilir. Önceki bilgilerin üzerine yeni bilgilerin inşası yerine, problem çözmek için öğretim birçok zaman soyut kavramların öğrenilmesi ile başlar ve sonra öğrenilen bu becerilerin kullanılmasıyla problem çözmeye dayanır. Örneğin, öğrenciler kesirlerin toplama kuralını öğrendikten sonra bu kuralı kullanarak kesir problemlerini çözerler.

2. *Problem çözmeye ilişkin öğretim.* Bu ikinci yöntem öğrencilere *nasıl* problem çözebileceklerine yönelik adımları (problemi anlamak, bir yöntem tasarlamak, yöntemi uygulamak, sonucu değerlendirmek) ya da stratejileri öğretmeyi içerir. Örneğin, "çizim yapmak" öğrencilerin problem çözmelerine yardımcı olan yöntemlerden biridir. Bu konu daha sonra bu bölümde "*Problem Çözmeye İlişkin Öğretim*" kısmında detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

3. *Problem* çözme *ile* öğretim. Bu yaklaşımda genellikle öğrencilerin matematiği gerçek bağlamlar, problemler, durumlar ve modeller üzerinden öğrendiği düşünülür. Bağlamlar ve modeller öğrencilerin soyut kavramları anlayabilmeleri için zemin oluşturur. Problem çözme *ile* öğretim, problem çözme *için* öğretimin tersi olarak ifade edilebilir, şöyle ki dersin başında problem ya da problemler verilir ve problemi çözmek için gerekli beceriler problem çözme sırasında ortaya çıkar. Örneğin, bir foot'luk[1] bir kurdelenin $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ miktarlarının toplam uzunluğunun bulunmasını gerektiren bir durumda öğrenciler, kesirlerin toplama işlemini keşfetmelerine yönlendirilebilir.

Problem çözme ile öğretim bu bölümün konusu ve bu kitabın bir temasını oluşturmaktadır.

Problem Çözme ile Öğretim

Önemli matematik kav-ramlarının ve işlemlerinin, hepsi değilse de, birçoğu problem çözme ile en iyi şekilde öğretilebilir. Bu cümle İlkeler *ve Standartlar*'ın ve matematik eğitimindeki araştırmacıların şu anki düşüncelerini yansıtmaktadır.

Görevler ya da problemler, öğrencileri öğrenmeleri gereken önemli matematiksel kavramlar hakkında merak

[1] 1 foot: 30.48 cm

uyandırmaya sevk edecek ve bu kavramların oluşmasına olanak sağlayacak şekilde sorulabilir ve sorulmalıdır da. Şimdi bu yaklaşımın neden öğrencilerin düşüncelerini daha iyi desteklediğini inceleyelim.

Matematik Öğrenimi İçin Problemler ve Görevler

Problem, burada herhangi bir görev ya da etkinlik olarak tanımlanmış olup bu görevin çözümü için öğrencilerin daha önceden ne belirledikleri ya da ezberledikleri kural ya da yöntemlerin olduğu, ne de öğrencilerce belirlenmiş bir "doğru" çözüm metodunun olduğu algısının bulunmadığı bir durumdur (Hiebert ve ark., 1997)

Matematik öğrenimi için *problem* ayrıca şu özelliklere sahiptir:

- Öğrencilerin önbilgileri ile aynı yerden başlamalıdır. Etkinliğin tasarımında ya da seçiminde öğrencilerin o anki anlama düzeyleri dikkate alınmalıdır. Öğrenciler problemle uğraşmak ve çözmek için uygun fikirlere sahip olmalı, ancak buna rağmen problemi zorlayıcı ve ilginç bulmadırlar.
- *Problemin problematik ya da merak uyandıran yönü* öğrencilerin öğrenecekleri *matematiğe dayandırılmalıdır.* Problemin çözümünde ya da etkinliğin yapılmasında, öğrenciler öncelikle problem ya da etkinliğin içinde yer alan matematiksel fikirlerin anlaşılmasıyla meşgul olmalıdır ve böylece istenilen fikirleri geliştireceklerdir. Her ne kadar, problemleri ilgi çekici hale getirecek bağlamların olması arzu edilse de, bu bağlamlar etkinliğin odak noktası olmamalıdır. Ne de matematiksel olmayan durumlar (örneğin, kesme ve yapıştırma, grafikleri renklendirme, vs.) problemin içinde yer alan matematiğe gölge düşürmelidir.
- *Problem, cevaplar ve yöntemler için, gerekçelendirme ve açıklama talep etmelidir.* Öğrenciler, cevapların doğruluğunu ve neden bunların doğru olduğunu belirleme sorumluluğunun öğretmende değil de kendilerinde olduğunu anlamalıdırlar. Gerekçelendirme matematik yapmanın temel parçası olmalıdır.

Matematiğin problem çözme *ile* öğretimini anlamak önemlidir. Bu şu demektir; probleme dayalı görevler ya da etkinlikler arzu edilen matematik programının oluşturulması için birer araçtırlar. Öğrenme problem çözme sürecinin bir sonucudur.

Problemlerin Rolündeki Değişim

Schroeder ve Lester'in daha önce açıklanan problem çözme *için* öğretim yöntemi, matematik öğretimi için, kültürümüze köklü bir şekilde yerleşmiştir. Öğretmen matematiği sunar; öğrenciler becerileri çalışır ve daha sonra sözel ya da dört işlem problemlerini çözer. Ne yazık ki, matematik öğretimindeki bu yaklaşım, öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmesinde ve akılda tutmasında başarılı olmamıştır.

- Bu yöntem bütün öğrencilerin öğretmenin açıklamalarını anlamak için gerekli bütün ön bilgilere (Bölüm 2'deki açıklanan mavi noktalar) sahip olduğunu kabul eder.
- Öğretmen genellikle problemi çözmek için sadece bir yöntem gösterirken (ki bu yöntem çoğu öğrenci tarafından anlaşılır olmayabilir) ve bu yöntemin problemi çözmenin tek yöntemi olduğunu söylese de bu çoğu zaman olası değildir.
- Göster ve söyle yaklaşımı, öğretmenin fikirleri sunmasına dayalı, öğrencilerin mevcut bilgileri ile problemleri çözmek için yöntemler geliştirebilen bağımsız düşünürler yerine öğrencileri pasif öğrenen durumuna koyar.
- Problem çözme, matematik öğrenmenin küçük bir bölümünü oluşturan beceri ve kavramlardan ayrı bir etkinlik olur. Dolayısıyla, öğrenciler daha önce öğrendikleri beceri ve kavramlar arasında ilişki kuramadıklarından karşılaştıkları problemleri çözebileceklerine inanmazlar.
- Kendisine nasıl matematik yapılması söylenmesine alışkın öğrenciler problemin nasıl çözüleceği ile ilgili açık yönlendirmeler yapılmadığı sürece yeni bir probleme başlamak için girişimde bulunmazlar. Ancak, aslında matematik yapmak eldeki problemi çözmek için bir yöntem bulmaktır.

Bazı öğretmenler öğrencilere problemlerin nasıl çözülebileceklerini göstermenin öğrencilerin zorlanmalarını önlediği ve zamandan tasarrufu sağladığı için en iyi yol olduğunu düşünebilirler. Bununla beraber, öğrenciler konu içeriklerini derinlemesine öğrenmemekte, birçok kez öğrendiklerini unutmaktadırlar. Öğrenciler, matematik öğrenimi için daha etkili bir yaklaşıma ihtiyaç duymaktadırlar.

Etkili dersler, öğretmenlerden ziyade öğrencilerin durumlarını dikkate alarak başlar. Yani, öğretim çocukların mevcut fikirlerini temel alarak başlamalı ve bu fikirler yeni fikirlerin oluşturulmasında kullanılmalıdır. Öğrencileri meşgul etmek için görev ya da etkinliklerin probleme dayalı ve düşündürücü olması gerekir. Öğrenciler matematiği problem çözme sonucu öğrenirler. Matematiksel fikirler, problem çözme öncesi öğretilmesi gereken ilkeler olarak değil, problem çözmenin ürünü olarak düşünülmelidir (Hiebert ve ark., 1996, 1997). Ayrıca, problem çözme süreci öğrenmeyle iç içe geçmiştir; çocuklar matematiği yaparak öğrenmektedirler.

Problem Çözme ile Öğretimin Değeri

Problem çözme ile öğretim paradigma değişimi gerektirmektedir. Bu değişim kapsamında, öğretmen çocukların nasıl öğrendiklerini ve onların öğrenmelerine en iyi nasıl yardımcı olabileceği hakkındaki felsefesini değiştirmektedir. İlk bakışta, öğrenciler düşünmeyi gerçekleştirdiği için öğretmenin rolü daha azmış gibi görünebilir, ancak bunun tersi aslında doğrudur. Öğretmenler, öğrencilerin kendilerinin bulacakları yöntem ve çözümlerle konuyu öğrenmelerine olanak sağlayan nitelikli görevler seçmek zorundadırlar. Öğretmenler

daha sonra öğrencilerin yöntemlerini doğrulayan ve ilişkilendirmeye izin veren yüksek kaliteli sorular geliştirmeli ve sormalıdırlar. Bu süreç öğrencilerin matematiği daha iyi anlamasına fırsat verecektir. Problem çözme ile öğretim yönteminin kullanımının birçok iyi sebepleri vardır.

- *Öğrencilerin dikkatini fikirlere ve anlamaya odaklandırır.* Problemleri çözerken öğrenciler, problemin içindeki kavramları üzerinde düşünmelidirler. Yeni ortaya çıkan kavramlar büyük ihtimalle mevcut olan kavramlarla birleşirler ve böylece anlamayı geliştirirler. Aksine, bir öğretmen ne kadar hünerli bir şekilde açıklama ve yönlendirme yapsa da, öğrenciler kavramlar ve ilişkilerden ziyade bu yönlendirmelere dikkat edecektir.
- *Öğrencinin matematiği yapabilmesinden ve anlamasından dolayı güvenini geliştirir.* Öğretmenler ne zaman probleme dayalı bir görev verdiğinde ve bir cevap beklediğinde, öğrencilere "Bunu yapabileceğine inanıyorum" derler. Sınıf bir problemi çözdükçe ve öğrencilerin anlamaları geliştikçe güvenleri ve kendilerine verdikleri değer artar.
- *Öğrencinin kavramı anlamlandırmasına yardımcı olmak için bir bağlam sağlar.* Bir bağlamın sağlanması, özellikle öğrencilerin aşina oldukları bir bağlamın oluşturulması, matematiksel kavramların gelişimine yardımcı olur.
- *Birçok öğrencinin katılımına olanak verir.* İyi probleme-dayalı görevlerde cevaba birden fazla yolla ulaşılır. Öğrenciler 42-26 çıkarma işlemini birçok yöntemle yapabilirler: önce 42 sayma pulunu sayıp sonra 26'sını ayırabilecekleri gibi 26'nın üzerine tamamlayarak 42'ye ulaşabilirler ya da önce 42 den 20 çıkarıp daha sonra 6 çıkarabilirler; 100'lük tabloyu kullanarak ileriye-geriye doğru sayabilirler ya da standart çıkartma işlemini kullanabilirler. Her öğrenci kendi fikirlerini kullanarak verilen görevi anlamlandırır. Bunun yanında, diğer öğrencilerin yöntemlerini dinleyerek ve onlar üzerine düşündükçe kendi fikirleri de artar ve gelişir. Bunun aksine, öğretmen- yönlendirmeli yaklaşım, çoğu öğrencinin aleyhine olacak şekilde çeşitliliği göz ardı edip öğrencilerin birçoğunun kazanımı engeller.
- *Öğretim kararları için katkı verecek sürekli değerlendirme verileri sağlar; öğrencinin başarına yardımcı olur ve anne-babayı çocuklarının durumu hakkında bilgilendirir.* Öğrenciler fikirlerini tartıştıkça, resimler çizdikçe, ya da öğretim materyalleri kullandıkça, çözümlerini savundukça ve diğerlerinin yöntemlerini değerlendirdikçe, rapor ya da açıklamalar yazdıkça, öğretmen için faydalı olan düzenli bilgi akışını sağlarlar. Bu bilgiler, öğrencilerin problemleri nasıl çözdüklerini, ne tür kavram yanılgılarına sahip olabileceklerini ve yeni kavramları nasıl ilişkilendirdikleri ve uyguladıkları hakkında birçok deliller sunar. Öğrencilerinin ne bildiği hakkında fikir sahibi olan bir öğretmen daha etkili ve her öğrencinin ihtiyacına yönelik planlar yapabilir.
- *Genişletmelere ve ayrıntılı çalışmalara izin verir.* Problem üzerinde yapılabilecek düzenlemeler ve "şöyle olsaydı" soruları (karmaşık hale getirilmesi gibi) ileri düzeydeki öğrencileri motive ederek öğrenmelerini ve matematiği sevmelerini arttırabilir. Bu tip problemler birçok öğrencinin ihtiyacına göre uyarlanabilir.
- *Öğrencileri meşgul edip uğraştırdığı için disiplin problemlerini azaltır.* Sınıf içindeki birçok disiplin konuları öğrencilerin sıkılmaları, öğretmenin yönlendirmelerini anlamamaları ya da basitçe görevi yeteri kadar anlamlı bulmamaları yüzünden olmaktadır. Öğrencilerin çoğu uğraştırıcı sorularla karşılaşmayı ve problemleri kendilerine anlamlı gelen yollar ile çözmelerine izin verilmesini severler, böylece daha az davranış sorunu çıkarırlar.
- *"Matematiksel yetkinliği" geliştirir.* Sınıfta problem çözen öğrenciler matematik yapmayı içeren 5 sürecin her birinde yer alırlar-İlkeler *ve Standartlar* belgesinde bahsedilen bu süreçler şunlardır: problem çözme, akıl yürütme, iletişim, ilişkilendirme ve gösterimdir.
- *Çok Eğlencelidir!* Problem çözme ile öğretim yöntemini kullanan öğretmenler bir daha doğrudan öğretim yöntemine geri dönmezler. Öğrencilerin gelişimini ve bundan dolayı yaşadıkları coşkuyu görmek bütün bu verilen emeklere değerdir.

Yukarıda verilen bu liste, problem çözme ile öğretimin öğrencilerin öğrenmesine ve katılımına faydalı olduğunu göstermektedir. Bir sonraki bölüm öğretmenlerin bu yöntem ile kullanabilecekleri görevleri tartışmaktadır.

Probleme-Dayalı Görevlerden Örnekler

Bölüm 2'de matematiksel fikirlerin kavramsal ya da işlemsel olarak sınıflandırılabileceğini görmüştünüz. Aşağıdaki örneklerde de görülebileceği üzere, öğrenciler her iki matematiksel bilgiyi de probleme dayalı etkinliklerle öğrenebilirler.

Kavramsal Matematik. Bölüm 2'de anlatıldığı gibi, kavramlar anlam geliştirmede önemli rol oynarlar. Örneğin, çarpma ile ilgili kavramlar, tekrarlı toplamayı ($4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5$) ve alan kavramını (ölçüsü 4 metreye 5 metre olan halının alanı 20 metrekaredir) içerir. Aşağıdaki üç örnek görev kısaca kavramların problem çözme ile nasıl sunulabileceğini anlatmaktadır.

Kavram: Parçalara Ayırma
Sınıf: Anaokulu-1

6 sayısının iki farklı miktara ayrıldığını düşünün. Şekil çizerek 6 adet bir nesnenin iki kısma ayrılabileceğini gösterin. Çiziminize uygun bir hikâye de düşünün.

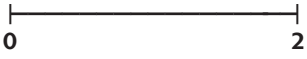
Birinci görevde, anaokulu ya da 1. sınıf düzeyinde öğretmen, öğrencilerinin basitçe 6 nesnenin farklı iki kısma ayrılmış halini düşünmelerini ve buna uygun bir hikâye geliştirme-

lerini isteyebilir.Birinci ya da ikinci sınıfta ise öğretmen, öğrencilerden hikâye oluşturmaktan ziyade olabilecek bütün kombinasyonları oluşturmalarını isteyerek onları zorlayabilir. Burada güzel bir ilişki ve örüntü vardır aslında. Bu görev üstünde çalışıldıktan sonra sınıfça yapılacak bir tartışmada öğrenciler yedi farklı kombinasyonu ve bunun arkasındaki kuralı göreceklerdir: Birinci kısım 0 dan 6 ya doğru birer-birer artarken, diğeri 6 dan başlayıp 0'a doğru birer-birer daralacaktır.

İkinci görev, birçok öğrencinin anlamakta zorlandığı bir kavramla ilgidir- bir kesrin yaklaşık değerinin bulunması.

Kavram: 1 den büyük kesirlerin tahmin edilmesi
Sınıf: 4-6

Verilen sayı doğrusu üzerinde $\frac{11}{8}$'in olabileceği yere X işareti koyutnuz ve neden o yere yerleştirdiğinizi açıklayınız. Açıklamanızda size yardımcı olabilecek diğer noktaları da sayı doğrusu üzerinde işaretleyebilirsiniz.



Dikkat ederseniz verilen görev nasıl yanıtlayacağınızla ilgili bir öneri içermektedir, ancak net olarak ne yapılması gerektiğini söylememektedir. Öğrenciler kendi düşünce seviyelerine göre cevaplarını doğrulayabilmektedirler. Görevin devamında yapılan tartışmada öğretmen 1'den büyük kesirlerin anlaşılması için çeşitli gösterimlerin paylaşılmasını isteyebilir.

Kavram: Oranların Karşılaştırılması ve Orantısal Akıl Yürütme
Sınıf: 6-8

Jack ve Jill bir tepenin başından bir kova su getirmeyi planlıyorlardı. Jack her 25 saniyede bir 5 adım atarak tepeye tırmanırken, Jill her 10 saniyede 3 adım atarak ilerliyordu. Her ikisinin de sabit hızla ilerledikleri düşünülünce sizce hangisi bir kova suya önce ulaşır.

Öğrenciler bu problemi, orantılar kurmayı da içerecek şekilde çeşitli şekillerde çözebilir. Bunun yanında öğrenciler, oran yaklaşımını kullanıp her bir kişi için dakikadaki adım sayısı hesaplayabilirler. Bu görev ve diğerleri için yapılan tartışmalarda oranların karşılaştırılması orantısal düşüncenin temelini oluşturmaktadır. Bu görev *Staj Rehberi*'nde (s. 113-114) yer alan Genişletilmiş Ders kısmında orantısal düşünmeyi öğretmek için kullanılan dört görevden biridir.

Algoritmalar ve İşlemler. Bazı öğretmenler yanlışlıkla işlemlerin doğrudan öğretim yoluyla öğretilmesi gerektiğini zannederler. Gerçekte, öğrenciler algoritmaları problem çözme yaklaşımı ile öğrenebilirler. Doğrudan öğretim yolu ile problem çözme yaklaşımı arasındaki fark problem çözme yöntemini kimin belirlediğidir. Öğrenciler hesaplamaları problem çözme ile öğrenirken aynı zamanda problemi nasıl çözeceklerini de öğrenmektedirler. Bu öğrencilere sadece kullanacakları bir algoritmayı göstermekten çok öte bir durumdur. Aşağıdaki iki örnek bu yaklaşımı izah etmektedir.

İlk örneğimiz 1 ve 2. sınıflara yönelik iki basamaklı sayıların toplamı üzerine olacak. Ders, öğretmenin şu sorusu ile başlar: *48 ile 25'in toplamı nedir?* Nasıl buldunuz? Her ne kadar bir hikâye ya da çözümlenmesi gereken bir durum verilmemiş olsa da bu soru öğrenciler için hâlâ bir problemdir, çünkü öğrencilerin bu soruya nasıl yaklaşacaklarını belirlemeleri gerekmektedir. Öğrenciler problem üzerinde materyalleri, çizimleri veya diğer araçları kullanarak çalışırlar. Problemi kendi yöntemleri ile çözen öğrencileri öğretmen daha sonra birbirlerinin yöntem ve cevaplarını dinlemek üzere bir araya getirir.

Russell (1997) bir ikinci sınıfta en az yedi farklı yöntemin öğrenciler tarafından belirlendiğini saptamıştır. İki öğrenci 100'lük tabloda iki farklı sayma yöntemini kullanmıştır (10 × 10 ebatlarında 1 den 100'e kadar sayıların olduğu bir tablo). Yöntemlerden bazıları şunlardır:

4[8] + 2[5] (Kutular içindeki birlikleri "muhafaza etme" yardımcı olacaktır)
40 + 20 = 60
8 + 2 = 10 [3] (5'ten 3 kaldı)
60 + 10 = 70
70 + 3 = 73

---

40 + 20 = 60
60 + 8 = 68
68 + 5 = 73

---

48 + 20 = 68
68 + 2 ("*5'ten*") = 70
"*Hâlâ 5'ten kullanacağım 3 var.*"
70 + 3 = 73

---

25 + 25 = 50 [23]
50 + 23 = 73
Öğretmen: 23 nerden geliyor?
"*48'den aldım.*"
48'i nasıl parçalara ayırdın?
"*20 ve 20 ve 8'i de 5 ve 3'e ayırdım.*"

---

48 – 3 = 45 [3]
45 + 25 = 70
70 + 3 = 73

Bu sınıftaki öğrenciler farklı düşünme düzeylerine ve birçok ilginç tekniklere sahiptiler. Hepsi kullanmasa da "tutma kutusularına" sayı yerleştirme oyunlarını birbirlerinden öğrenmişlerdi. 100'lük tabloda sayarak toplama işlemi yapan diğer öğrenciler ise basamak değerini yete-

rince öğrenmemiş olduklarından bu karmaşık yöntemleri anlamakta zorlanıyorlardı. Sınıf tartışmaları öğrencilerin bu yöntemleri anlamalarına yardımcı olabilir. Burada, bu keşfedilen yöntemler, etkili ya da uygun mu diye akla bir soru gelebilir. Buna cevap olarak öğrencilerin çeşitli yöntemleri denemelerine ve bu kararı onların vermelerine ihtiyaç vardır diyebiliriz.

Ondalıklı kesirlerin toplamında virgülün alt alta gelmesini bilmeyen beşinci sınıf öğrencilerinin 3.72 + 1.6 işlemini gerçekleştirmeleri istendiğinde sizce ne olabilir bir düşünün. Birçok öğrenci yanlış yapacaktır, belki de 2 ve 6'yı alt alta yazacaklardır. Virgülün farklı yerlere yerleştirildiği görülebilir. Ancak kendilerinden çözümlerini savunmaları istenen öğrenciler, virgülün yerinin değişmesinin sonucu nasıl etkilediğini anlamaları gerekir. Problem çözümünde tecrübe sahibi öğrenciler bir süre sonra ondalıklı kesirlerin toplamına yönelik etkili bir yöntem geliştireceklerdir.

Gary Tsuruda probleme-dayalı matematik öğretimini başarıyla uyguladığı sınıfıyla alakalı kitap yazan bir ortaokul öğretmenidir (Tsuruda, 1994). Çoğunlukla öğrencileri, problem çözmek için küçük gruplar halinde çalışırlardı. Aşağıdaki örnek (Şekil 3.1) yamuğun alan formülüne yönelik bir dersten alınmıştır. Öğrencileri mantıksal anlatım ve formülde değerleri yerine koyma yerine, formülü anlamayı sağlayan probleme dayalı yaklaşımı kullanmaktadırlar. İlk sorulan sorular öğrencilerin görev için gerekli fikirleri düşünmelerini sağlamaktadır. Daha sonra incelemeler yapmaları ve örüntü olup olmadığını araştırmaları istenmektedir. Bu araştırmadan grupça bir formül bulmaları, bunu test etmeleri, formülü nasıl geliştirdiklerini açıklamaları ve nasıl kullanılacağını göstermeleri istenmiştir.

Tsuruda (1994) bütün grupların bir formül oluşturduklarını belirtmiştir. "Bulunan formüller tipik ders kitaplarında geçen yamuğun alan formülüne benzemese de hepsi doğru ve daha önemlisi, her formül gruplardaki öğrencilerin ortak çalışmalarının bir ürünü olduğu için bir anlam ifade ediyordu" (s. 6).

Bütün bu probleme dayalı derslerin hepsinde öğrenciler matematik yapma sürecine aktif bir şekilde katılmışlardı-işlemleri sorgulamadan kabul etmek yerine düşünerek ne anlama geldiğini bulmuşlardı. Şu açıkça söylenebilir ki öğrenciler ne kadar çok problem çözerse, o kadar problem çözmeye karşı istekli, özgüvenli ve gelecekteki problemlere karşı daha hazırlıklı olurlar (Boaler, 1998,2002; Boaler & Humphreys, 2005; Buschman, 2003a,b; Campbell, 1996; Rowan & Bourne, 1994; Silver, Smith, & Nelson, 1995; Silver & Stein, 1996; Wood, Cobb, Yackel, & Dillon, 1993).

Yamuğun Alanı

Problem: *Herhangi bir yamuğun alanını belirlemeye yarayan kolay bir yol bulunuz.*

Öncelikle, aşağıdaki soruların her birinin cevabını anladığınıza emin olun:

1. "Alan" ne anlama gelmektedir?
2. Yamuk nedir?
3. Diğer çokgenlerin alanlarını nasıl bulursunuz? Gösterebildiğiniz kadar farklı yollar gösterin.

Şimdi bakalım grubunuz herhangi bir yamuğun alanını belirlemeye yarayan kolay bir bulabilecek mi?

İpuçları:

1. Noktalı kâğıt üzerine birkaç tane yamuk çiziniz ve alanlarını bulunuz. Bir örüntü görebiliyor musunuz?
2. Diğer çokgenlerin alanlarını nasıl bulduğunuzu düşünün. Benzerlik görebiliyor musunuz?
3. Çizdiğiniz yamukları kesip bir araya getirmeyi deneyebilirsiniz.
4. Eğer alanı belirlemeye yönelik bir yol bulduysanız, mümkün olduğunca kolay ve bütün yamuklar için geçerli bir yol olduğuna emin olun.

Rapor:

1. İlk üç soruya verdiğiniz cevapları detaylı bir şekilde açıklayınız. Grubunuzun cevaplar üzerinde nasıl görüş birliğine ulaştığını söyleyiniz.
2. Bütün yamuklarda kullanılabilen alan formülünü bulmak için ne yaptınız? Verilen ipuçlarından herhangi birini kullandınız mı? İpuçları size nasıl yardımcı oldu?
3. Formülünüzü ve nasıl çalıştığını gösteriniz.

Şekil 3.1 Öğrencilerin bir formül inşâ edebilecekleri ortaokul düzeyinde bir örnek.
Kaynak: Putting it Together: Middle School Math in Transition (syf. 7), G. Tsuruda izni ile yeniden yayımlanmıştır.

Probleme-Dayalı Görevlerin ve Derslerin Seçimi ya da Tasarımı

Problem ile öğretimin temel öğesi uygun problemlerin ya da görevlerin seçimidir. Bir görev, sizin öğrencilere öğretmek istediğiniz fikirleri öğrenmesine yardımcı olduğunda etkili olur. Görevin içindeki matematik öğrenciler için sorun oluşturmalıdır. Böylelikle, öğrenciler matematiksel fikirlere odaklanacaklardır. Bu nedenle, görev seçiminde ilk ve en önemli değerlendirme ölçütü matematik olmalıdır. Bununla birlikte, görevler içinde ne ararsınız ve bu görevleri nerede bulursunuz?

Çoklu Giriş Noktaları

Probleme dayalı öğretim yaklaşımının avantajlarından bir tanesi de sınıflardaki öğrencilerin düzeylerinin çeşitliliğine uygun olmasıdır. Bu yaklaşım, öğrenciye bir problemi çözmek için nasıl düşünmesi gerektiğini dikte etmez. Bir görev verildiğinde öğrencilere "Bu problemi çözmek için *kendi* fikirlerinizi kullanın" denir. Çeşitli düşünsel becerileri ve fikirleri sayesinde öğrenciler bir görevi en iyi şekilde tamamlamak için farklı düşüncelere sahip olacaktır. Bu nedenle, bir problemin çözüm sürecine bütün öğrencilerin dahil olabilmesini sağlamak, problemin hem basit hem de karmaşık yollardan çözülebilmesi ile mümkündür.

Bir problemin çözümü için sadece bir yol olduğunu düşünmekten vazgeçtiğimizde farklı yollarla çözülebilen problemleri geliştirmek güç olmaz. Birçok problemin bir tek doğru cevabı olsa da çoğu zaman o sonuca farklı yollarla ulaşılabilir. Bu bölümde sunulan problemlerin tamamına yakını bu tip sorulardır. Aşağıda buna iki örnek verilmiştir.

Kavram: Alan
Sınıf: 3–4

Matematik kitabınızın kapak sayfasının alanını bulunuz. Kaç tane kare karoyla kapak sayfasını doldurabilirsiniz?

Kavram: Kesirlerin Bölümü
Sınıf: 5–7

Clara'nın evinde arkadaşları için aynı büyüklükte olan iki pizzası ve birde $\frac{1}{3}$'lik pizza bulunmaktadır. Eğer her bir arkadaşı bir pizzanın $\frac{1}{4}$ ini yemek isterse $2\frac{1}{3}$ pizza ile kaç tane arkadaşına ikramda bulunabilir?



Durup Düşün!

Bu iki problemi çözmek için birden fazla yol bulabilir misiniz? Bir tane basit, bir tane karmaşık bir yol bulmaya çalışınız. Okumaya devam etmeden önce bunu yapınız.

Alan problemi materyal kullanılarak çözülebilir. Kitabın kapağı kare karolarla tamamen kaplanıp daha sonra birer-birer sayılır. Bu yola göre daha karmaşık bir yöntem ise kapağın karolarla kaplandıktan sonra her bir karonun sayılması yerine bir sırada kaç karo olduğunun belirlenmesinden sonra toplam sıra sayısıyla bu sayının çarpılması sonucu bulunur. Bir diğer öğrenci bütün kapağı karoyla kaplamak yerine karoları sadece kitabın kenarlarına yerleştirip sonra bunları çarparak alanı bulabilir. Bir diğeri ise karonun bir kenarının 2.5 cm olduğunu fark edip ardından kitabın kenarlarını ölçerek sonuca ulaşabilir.

Pizza problemi de materyal kullanılarak çözülebilir. Plastik dairesel kesir parçaları (ya da çizimler) kullanılarak $2\frac{1}{3}$ pizza temsil edilebilir ve bunun üzeri $\frac{1}{4}$ kesir parçası ile tamamen dolacak şekilde kaplanır. Diğer bir çocuk 4 tane $\frac{1}{4}$'in bir tam olduğunu bilip 2 pizza ile 8 arkadaşına ikramda bulunabileceğini bilebilir. Öğrenciler $\frac{1}{3}$'in içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu bilmeyebilirler. Bu nedenle, bu parçayla ayrıca uğraşmaları gerekir. Tahmin etme ve deneme yöntemi kullanmakta mümkündür. Önce 6 çocuk ile başlayıp pizza bitene kadar deneme yapılabilir. Birkaç öğrenci $2\frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ işlemini yapmasını öğrenmiş olabilir.

Bu farklı yöntemler hakkında bilgisi olan bir öğretmen öğrencilerine takıldıkları yerde doğru ipuçları verebilecektir.

Anlamlı ve Katılımı Teşvik Eden Ortamların Hazırlanması

Problem çözme ile öğretimin en güçlü yanlarından bir tanesi kuşkusuz derse başlanılan problemin öğrencileri matematiği öğrenmeye yönelik heyecanlandırıyor olmasıdır. Altıncı sınıfta orantı üzerine anlatılan şu iki dersi karşılaştırın:

> "Bugün oran konusunu inceleyeceğiz ve oranların büyüklükleri karşılaştırmada nasıl kullanıldıklarını göreceğiz."
>
> "Şimdi size Harry Potter'dan Hagrid'in ne kadar büyük olduğuna dair bir bölüm okuyacağım. Oran kavramını kullanarak boyumuz ve enimizi Hagrid ile karşılaştıracağız."

Bağlamlar, sınıfınızdaki öğrencilerinizinki gibi farklı kültürleri öğrenmek için de kullanılabilir. Bağlamlar,takip eden bölümlerde gösterildiği gibi, konular arasında bağlantılar kurmak içinde kullanılabilir. Çocuk edebiyatının, kültürel olayların ve farklı disiplinlerin (örneğin, fen) öğrencileri ne ölçüde matematik öğrenimine teşvik ettiği incelenecektir.



"Bir problemi analiz ederek ve düzenleyerek, problemi çözerken ortaya çıkabilecek matematiksel fikirleri tahmin ederek ve öğrencilerin muhtemel sorularını düşünerek, öğretmenler belirli problemlerin sınıfı için belirlediği matematiksel hedefleriileriye taşımaya yardımcı olup olmayacağına karar verebilir" (NCTM, 2000, s. 53). ◆

Çocuk Edebiyatı. Çocuk edebiyatı sadece ilkokul için değil her düzey için zengin bir problem kaynağıdır. Çocuk hikâyeleri çeşitli problemlerin oluşturulmasında rahatlıkla kullanılabilir ve bu alanda yazılmış birçok mükemmel kitap mevcuttur (Bay-Williams & Martinie, 2004; Bresser,1995; Burns, 1992; Karp, Brown, Allen, & Allen, 1998; Sheffield, 1995; Theissen, Matthias, & Smith, 1998; Ward,2006; Welchman-Tischler, 1992; Whitin & Whitin, 2004; Whitin & Wilde, 1992, 1995).

Örneğin, resimli çocuk kitabı, *The Doorbell Rang* (Hutchins, 1986) çeşitli sınıf düzeylerinde farklı kavramların öğretiminde kullanılabilir. hikâye, 12 kurabiyeyi paylaşan çocukları anlatmaktadır. Her sayfada, mutfağa daha çok çocuk gelmekte ve 12 kurabiye yeniden paylaştırılmak zorunda kalmaktadır. Bu basit ama öğrencilerin dikkatini çeken hikâye anaokulu öğrencilerinden ikinci sınıf öğrencilerine kadar eş parçalara ayırma yollarını keşfetmeye yönelik kullanılabilir. Çarpma ve bölme için 3 ve 4. sınıf düzeyinde kullanılabilir. 4-6. sınıf düzeylerinde kesir kavramının incelenmesinde de kullanılabilir.

Harry Potter ve Felsefe Taşı'nda (Rowling, 1998) bahsi geçen Hagrid ortalama bir insanın iki katı boyunda ve 5 katı genişliğindedir (omuz genişliği). İkinci ve üçüncü sınıf öğrencileri boyları uzunluğunda ve omuz genişlikleri

ölçüsünde kağıt şeritler kesip Hagrid'in boyunu ve omuz genişliğini hesaplayabilirler. Dördüncü ve beşinci sınıfta, öğrenciler bir tablo oluşturarak her bir öğrencinin boy uzunluğunu ve omuz genişliğini kaydederek aralarında bir örüntü olup olmadığına (yaklaşık 3'e 1 gibi) bakabilirler. Daha sonra Hagrid'in boy uzunluğunu ve omuz genişliğini hesaplayarak aralarındaki oranı (5'e 2) koruyup koruyamadıklarını kontrol edebilirler. Altıncı, yedinci ve sekizinci sınıflarda öğrenciler grafik çizerek boy uzunluklarını ve omuz genişliklerini gösterip Hagrid'e ait ölçüleri grafik üzerinde gösterebilirler. Ölçme, sayılar ve cebir konularına ait kavramlar bu örneklerde görülebilir. Öğrenciler ister 6 yaşında ister 13 yaşında olsunlar, edebiyat onların öğrenmelerine yardımcı olan, problem çözmeye karşı daha istekli olmalarına ve matematiğin dünyayı keşfetmelerine yarayan faydalı bir araç olduğuna inanmalarını sağlar.

Son zamanlarda roman dışında kalan çeşitli kaynakların matematik öğretiminde kullanımı artmaktadır (Bay-Williams &Martinie, 2008; Petersen, 2004; Sheffield & Gallagher, 2004).Gazeteler, dergiler ve internet, problemler için geniş bir kaynak oluşturarak öğrencilerin çevrelerini tanımalarına yardımcı olurlar.

Örneğin, İngiltere'de *Manchester Akşam Haberleri* dergisinde (Leerning, 2007) yayımlanan bir makalede Camelot isimli bir şirketin ürettiği Kazı-Kazan Piyango Kartı üzerindeki negatif sayıların büyüklüğünü anlamakta birçok insanın zorlandığını belirtmiştir:

> Ödülü kazanmak için, kartın üzerindeki pencereyi kazıyarak yine kartın üzerinde yazan hava sıcaklığından düşük bir dereceyi bulmak gerekiyor. Oyun kış temasını içerdiği için hava sıcaklığı genelde donma noktasının altında oluyor. Camelot şirketi oyunu başlattıkları ilk gün sonunda birçok kişiden oyunu anlamamaları yüzünden şikâyetler aldılar. Örneğin –5, –6 dereceden nasıl sıcak olabiliyordu? [Bir kişi şunu dedi]: "Kartlarımın birinin üzerinde kazanabilmem için –8 dereceden düşükhava sıcaklıklarını bulmam gerektiği yazıyordu. Kartın üzerini kazıdıktan sonra –6 ve –7 sayılarını gördüm ve kazandığımı düşündüm. Kartı aldığım bayideki bayanda aynı şeyi düşündü. Fakat kartı makinede okutunca kazanmadığım ortaya çıktı.

Öğrencilere sorulabilecek güzel bir problem düşünebilir misiniz? Bir soru, öğrencilere negatif sayıların değerini anlamaya yardımcı olabilecek bir örnek ve açıklama hazırlamalarını istemek olabilir.

Bölüm 2'de yer alan her bölümün sonunda "İlgili Edebi Metinler" başlığıaltında matematiği keşfetmek için resimli kitaplar, şiirler ve romanlar önerilmektedir. Edebi Metinlerle ile ilgili fikirler NCTM'nin yayımladığı dergilerde de sıklıkla karşılaşılmaktadır. Çünkü edebi metinlerproblem senaryoları oluşturmak için önemli bir kaynaktır.

Diğer Disiplinlerle Bağlantılar. Farklı alt yapılara sahip öğrencilerin bulunduğu sınıflarda herkese hitap edecek ortamların oluşturulması her zaman zor olmuştur. Böyle durumlarda bütün öğrencilerin aşina oldukları durumları kullanmak etkili olabilir. Örneğin, öğrencilerin aldıkları diğer dersler problem oluşturmak için mükemmel bir kaynaktır. İlkokul öğretmenleri, sosyal bilgiler, fen ve teknoloji ve Türkçe dersleri kapsamında okutulan konulardan fikirler oluşturabilirler. Bunun gibi, ortaokul öğretmenleri de ortaokul düzeyinde okutulan derslerden bu amaçla faydalanabilirler. Ayrıca, sanat, spor ve popüler kültür de güzel bir problem kaynağıdır.

Anaokulunda, öğrenciler doğada karşılaştıkları durumları matematikle ifade etmeye çalışabilirler. Örneğin, yaprakları çeşitli kurallara göre (renklerine, düz veya tırtıklı kenarlarına ve şekillerine göre)sınıflandırabilirler. Öğrenciler Venn şemaları (matematik) kullanarak gruplama yapmasını ve farklı ağaçları gözlemleyerek ve analiz ederek (fen) yapraklar arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları öğrenebilirler. Matematik ve fen bilgisinin ortak konuları olan sınıflandırma ve ölçme,yapraklarla keşfedilecek diğer başka kavramlardır. İleri yaştaki öğrenciler fen bilgisi dersi kapsamında neden farklı yaprakların farklı şekillere, büyüklüklere ve desenlere sahip olduklarını öğrenirken iken matematikte öğrenciler çeşitli yaprakların çevrelerini ve alanlarını bulabilirler.

AIMS (Activities in Mathematics and Scicence-Matematik ve Fen Etkinlikleri), matematik ve fen bilgisini entegre etmiş birçok güzel fikirleri içeren bir dizi öğretmen kaynak kitaplarıdır. Bilgi için www.aimsedu.org adresine bakınız. Bunlardan Looking at Lines (AIMS, 2001) isimli ortaokul kitabında öğrenciler ataçları el yapımı bir teraziye asarak lineer denklemleri (matematik) ve kuvvet ve hareket (fen) konularını öğrenmektedirler.

Sosyal bilgiler dersi matematik yapmak için birçok fırsatlar sunmaktadır. Tarihi olayların oluş zamanları sayıların nisbi büyüklüklerini ve tarihi daha iyi anlamak için mükemmel fırsatlar tanımaktadır. Öğrenciler çeşitli ülkelerin alanlarını ve nüfuslarını araştırabilir ve nüfus yoğunluklarını karşılaştırabilirler. Bunun yanında sosyal bilgiler dersinde,yaşamın kilometre karede 200 insanın yaşadığı bir bölge ile kilometre karede 5 insanın yaşadığı bölge arasında nasıl değişebileceğini konuşabilirler.



Eşitlik İlkesi öğretmenleri, sınıfta sorulan her soruya her öğrencinin bir değer katacağına inanmaya zorlar. Öğretim İlkesi,farklı alt yapılara sahip öğrencilerin katılımını sağlamak için öğretmenlerdenproblemleri seçerken "birden fazla yolla çözülebilmesine (örneğin sayma metodunu kullanarak, geometrik diyagramlar çizerek veya denklem kurarak çözülebilmesine) dikkat etmelerini ister" (NCTM, 2000, syf. 19). ◆

Nitelikli Görevlerin Bulunması ve Probleme Dayalı Dersler

Matematik öğretimi için bol miktarda yazılı kaynak ve buna ek olarak internette neredeyse sınırsız fikir mevcuttur. Bir ders için doğru görevi (etkinliği) bulmak zaman alıcı veya kafa karıştırıcı olabilir. Güzel etkinliğin nasıl olacağını ve bunu nerede bulacağını bilmek yardımcı olabilir.

Görev Seçme Rehberi. Bu kitap boyunca, ders kitaplarında ve okuduğunuz makalelerde ya da katıldığınız hizmet içi eğitimlerde çocukların matematik öğretmenlerine yardımcı olabilecek etkinlik veya görev örnekleri bulacaksınız. Tanınmış matematik eğitimcilerinden Lappan ve Briars (1995), öğretmenlerin öğrencilerin öğrenmesini etkileyen en önemli kararlarından birinin etkinliklerin veya görevlerin seçimi olduğunu ileri sürmüştür. Şekil 3.2 öğrencileriniz için yeni bir etkinliği seçerken rehber olarak kullanabileceğiniz dört adımlık önerileri göstermektedir.

Şekildeki üçüncü adım, bir etkinliğin anlattığınız konuya uygun olup olmadığını belirleyen en önemli unsurdur. Etkinliği matematiksel bir problem haline getiren durum nedir? Etkinlik, öğrencileri zihinsel olarak nasıl aktif hâle getirerek düşünmelerine ve dersiniz için belirlediğiniz önemli fikirleri öğrenme fırsatlarını arttıracaktır?

Şekil 3.2 verilen etkinlik değerlendirme ve seçme rehberini bu kitap kapsamında verilen etkinlikler için kullanmayı deneyin. Görevleri ya da etkinlikleri düşünürken çocukların sadece ne yapacaklarını değil zihninden geçebilecek düşünceleri de dikkate almaya çalışın. Unutmayın ki, iyi görevler sadece uygulamalı etkinlikler değil ayrıca düşündüren etkinliklerdir.

Etkinlik Değerlendirme ve Seçme Rehberi

1. ADIM: Etkinliğin Yapılması

Önce etkinliği siz yapınız.Etkinliği ve etkinliğin nasıl yapıldığını anlamaya çalışın.

Çocuklar sizce bu etkinliği nasıl yaparlar ya da bu problemi nasıl çözerler?

- Hangi materyallere ihtiyaç var?
- Neler istenmiş?
- Hangi kavram yanılgıları ortaya çıkabilir?

2. ADIM: Etkinliğin Amacı Nedir?

Etkinlik ile hangi matematiksel kazanımların elde edilmesi düşünülüyor?

- Bu kazanımlar kavramsal mı? Yoksa işlemsel beceriler mi?
- Bu kazanımların diğer kazanımlarla ilişkilendirilmesi olacak mı?

3. ADIM: Bu Etkinlik Sizin İstediğiniz Öğrenme Kazanımlarını Kazandırabilir mi?

Etkinliği matematiksel bir problem haline getiren durum nedir? Bu durum dersiniz için belirlediğiniz kazanımla ilgili mi?

Öğrenciler,etkinliği tamamlayabilmeleri için ne düşünmelidirler? (Gerçekçi olunuz)

Etkinliği fazla bir düşünce gerekmeden tamamlamak mümkün müdür? Eğer öyleyse, etkinlik yeniden düzenlenerek öğrencilerin matematik hakkında düşünmeleri sağlanabilir mi?

4. ADIM: Ne Yapmalısınız?

Ders öncesi ne yapmalısınız?

- Öğrencilerin önceki bilgilerini nasıl aktif hâle getireceksiniz?
- Öğrencilerin ne üretmeleri bekleniyor?

Ders esnasında ne görmeyi bekliyorsunuz ve sormayı planlıyorsunuz?

Dersin sonunda ne yapmak istiyorsunuz?

Şekil 3.2 Matematik etkinliklerinin ya da görevlerinin seçim süreci

Durup Düşün!

Farz edin ki amacınız öğrencilerinize çarpım tablosunda henüz öğrenmedikleri çarpımları öğretmek olsun (3 ya da 4. sınıflar için). Sayfa 50'de verilen göreve yardımcı olacak bilgiyle ilgili bir problemi sorunuz. Şekil 3.2'de verilen 3. adım içindeki soruları düşünün. Sizce bu öğrencileriniz için etkili bir etkinlik olacak mı? Neden? Bunu daha iyi bir hâle getirebilir misiniz? Nasıl?

Teknoloji NOTLARI

NCTM'nin kaynak web sayfalarından biri olan Illuminations kaliteli dersleri bulabileceğiniz belki de en iyi internet portalıdır. Konu ve sınıf düzeyinde araştırma yapabileceğiniz 100'ün üstünde küçük uygulama yazılımlarının kullanıldığı etkinlikler, 500'ün üzerinde ders planları ve birçok faydalı Internet adresleri mevcuttur. Kesinlikle bilgisayarınızdaki sık kullanılanlar kısmına eklemeniz gereken bir web sitesi! (http://illuminations.nctm.org). ◆

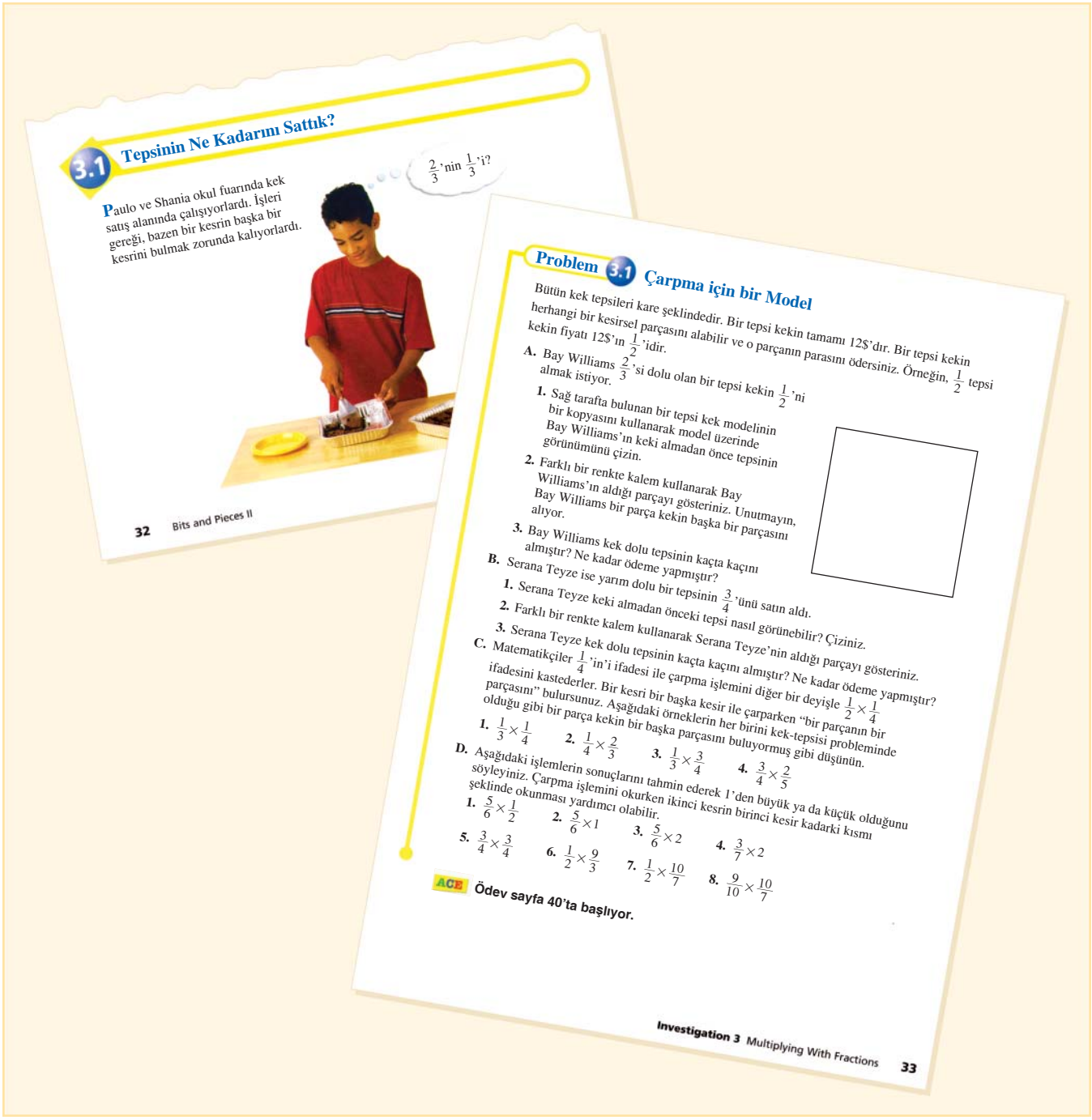
Standartlara Dayalı Program. Eğer okulunuz standartlara dayalı bir matematik programı kullanıyorsa problem çözme ile matematik öğrenimine odaklanıldığını göreceksiniz. Bunu özellikle bu bölümün sonunda açıklanan *ders başı*, *ders esnası*ve ders *sonu* yaklaşımını benimseyen *Investigations In Number, Data, and Space* ve *Connected Mathematics Project* (CMP II) kitap serilerinde görmeniz mümkündür.

Şekil 3.3'te verilen CMP II kitabından alınan ders kesirlerin çarpımı ile ilgili verilen ilk derstir. Problemde bilindik bir durum kullanılmaktadır: bir tepsi kek. Bu örnek öğrencilerin önceki bilgilerini kullanarak düşünmelerine ve problemi çözmelerine yardımcı olur. Ders "Tepsinin ne kadarını sattık?" sorusu ile başlar (*ders öncesi*).

Daha sonra, öğrenciler kare tepsiyi model olarak kullanarak A şıkkından D şıkkına kadar olan sorular üzerinde çalışırlar (*ders esnası*). Soruların (1) kek bağlamında nasıl oluşturulduğuna, (2) gittikçe nasıl zorlaştığına ve (3) kavramsal boyutuyla işlemsel boyutunun nasıl ilişkilendirildiğine dikkat edin. Ayrıca, Bölüm A ve B kavramsal boyutla ilgili iken C ve D bölümlerinde öğrenciler problem çözerken fark ettikleri ilişkiler üzerinden kesirlerin çarpımı için bir kural ya da algoritma geliştirmeleri istendiğine dikkat edin.

Son olarak, öğrencilerden grup halinde bir araya gelmeleri istenir ve kesirlerin çarpımı kavramına odaklanan sorular sorulur-bir parçanın bir parçasını almak (*ders sonu*). Öğretmen kılavuzunda şu tartışma soruları önerilmiştir:

- Bir tepsi kekin kaçta kaçının satın alındığını nasıl belirlediniz?
- Aranızdan kim kek tepsisini işaretleme yolu ile tepsinin kaçta kaçının satın alındığını görmemize yardımcı olacak bir öneride bulanabilir?



3.1 Tepsinin Ne Kadarını Sattık?

Paulo ve Shania okul fuarında kek satış alanında çalışıyorlardı. İşleri gereği, bazen bir kesrin başka bir kesrini bulmak zorunda kalıyorlardı.

$\frac{2}{3}$'nin $\frac{1}{3}$'i?

32 Bits and Pieces II

Problem 3.1 Çarpma için bir Model

Bütün kek tepsileri kare şeklindedir. Bir tepsi kekin tamamı 12$'dır. Bir tepsi kekin herhangi bir kesirsel parçasını alabilir ve o parçanın parasını ödersiniz. Örneğin, $\frac{1}{2}$ tepsi kekin fiyatı 12$'ın $\frac{1}{2}$'idir.

A. Bay Williams $\frac{2}{3}$'si dolu olan bir tepsi kekin $\frac{1}{2}$'ni almak istiyor.

1. Sağ tarafta bulunan bir tepsi kek modelinin bir kopyasını kullanarak model üzerinde Bay Williams'ın keki almadan önce tepsinin görünümünü çizin.

2. Farklı bir renkte kalem kullanarak Bay Williams'ın aldığı parçayı gösteriniz. Unutmayın, Bay Williams bir parça kekin başka bir parçasını alıyor.

3. Bay Williams kek dolu tepsinin kaçta kaçını almıştır? Ne kadar ödeme yapmıştır?

B. Serana Teyze ise yarım dolu bir tepsinin $\frac{3}{4}$'ünü satın aldı.

1. Serana Teyze keki almadan önceki tepsi nasıl görünebilir? Çiziniz.

2. Farklı bir renkte kalem kullanarak Serana Teyze'nin aldığı parçayı gösteriniz.

3. Serana Teyze kek dolu tepsinin kaçta kaçını almıştır? Ne kadar ödeme yapmıştır?

C. Matematikçiler $\frac{1}{4}$'in'i ifadesi ile çarpma işlemini diğer bir deyişle $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ ifadesini kastederler. Bir kesri bir başka kesir ile çarparken "bir parçanın bir parçasını" bulursunuz. Aşağıdaki örneklerin her birini kek-tepsisi probleminde olduğu gibi bir parça kekin bir başka parçasını buluyormuş gibi düşünün.

1. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ **3.** $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ **4.** $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

D. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını tahmin ederek 1'den büyük ya da küçük olduğunu söyleyiniz. Çarpma işlemini okurken ikinci kesrin birinci kesir kadarki kısmı şeklinde okunması yardımcı olabilir.

1. $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ **2.** $\frac{5}{6} \times 1$ **3.** $\frac{5}{6} \times 2$ **4.** $\frac{3}{7} \times 2$

5. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ **6.** $\frac{1}{2} \times \frac{9}{3}$ **7.** $\frac{1}{2} \times \frac{10}{7}$ **8.** $\frac{9}{10} \times \frac{10}{7}$

ACE Ödev sayfa 40'ta başlıyor.

Investigation 3 Multiplying With Fractions 33

Şekil 3.3 Standartlara dayalı bir matematik programında kesirlerin çarpımına yönelik ilk ders.
Kaynak: Connected Mathematics: Bits and Pieces II: Öğrenci Kitabı, G. Lappan, J. Fey, W. Fitzgerald, S. Friel, and E. Phillips, s. 32–33. Copyright © 2006 Michigan State University. Pearson Education Şirketinin izni ile kullanılmıştır. Bütün hakları saklıdır.

- Soru A için nasıl bir sayı cümlesi [denklem] yazabilirim?

Bu bir dizi ders içerisinden seçilmiş bir ders olup kesirlerin çarpımını anlamlı şekilde öğrenmek için tasarlanmış ve problem çözme ile öğretim yaklaşımını kullanmıştır.

Durup Düşün!

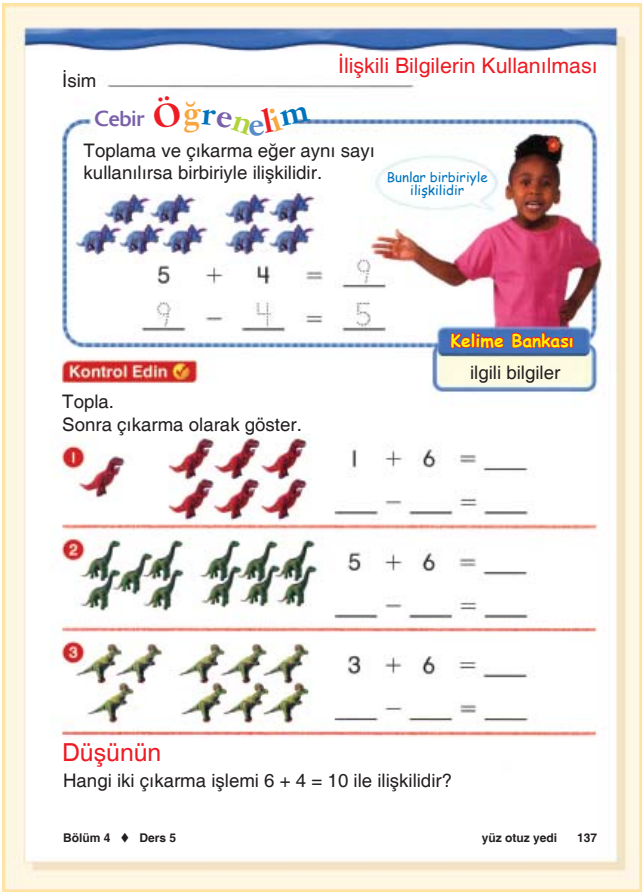
Kesirlerin çarpımının bu yaklaşımla anlatımının geleneksel yaklaşımdan farkını gösteren üç şey söyleyiniz. Problem çözme ile öğretim yaklaşımının avantajları ve zorlukları sizce nelerdir?

Probleme Dayalı Olmayan Bir Dersi Uyarlama. Birçok öğretmen ders kitaplarını günlük ders programlarını planlarken bir rehber olarak görür. Bununla birlikte, öğretmenler ders kitaplarını kullanınca öğrencilerin kitaptakileri öğrendiklerini zannederler. "Eğer ders kitabını işlersek, öğrenciler kesin öğrenirler" düşüncesi bir hayaldir ve buna çokta itibar edilmemelidir. İyi öğretmenler, ders kitaplarını öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde bir kaynak ve rehber olarak kullanırlar.

Birçok geleneksel ders kitapları şuan okuduğunuz yaklaşımın tersine öğretmen merkezli sınıflar için tasarlanmıştır. Ünite perspektifi benimseyin. Ünitedeki her derse ya da fikre dikkat edilmesi fikrinden kaçının. Bir bölümü ya da üniteyi baştan sona kadar inceleyin ve o bölümde bahsedilen matematikle ilgili önemli iki ya da dört temel fikri belirleyin. (Ana fikirler bu kitapta Bölüm 2 de yer alan alt bölümlerin başında verilmiştir.) Ünitede başında verilen bu temel fikirleri unutmadan, şimdi iki seçeneğiniz var: (1) bölümdeki en iyi ya da en önemli dersi probleme dayalı bir ders haline gelecek şekilde düzenlemek veya (2) temel kavramlara yönelik etkinlik hazırlamak ya da bu yönde ders kitabındaki ya da diğer kaynaklardaki etkinlikleri bulmak.

Örnek 1: Toplama. Şekil 3.4 birinci sınıflara yönelik hazırlanmış bir ders kitabından bir sayfayı göstermektedir. Ders önemli bir konuya değinmektedir: toplama ve çıkarma arasındaki ilişki. Kullanılan yaklaşım güzel: Toplama ve çıkarma arasındaki ilişki gösterilmek için iki kümeden oluşan saymaya yardımcı resimler kullanılmış. Ancak, öğrencilerden beklenilen sadece boşlukların doldurulması.

Biran için bu etkinliği öğrencilere nasıl yaptırırdınız düşünün. Bu tip etkinliklerde eğer dikkat edilmezse toplama ve çarpma kavramlarının üzerinde durmak yerine kolaylıkla boşlukların doldurulmasınaodaklanılabilir. Şimdi bu dersi probleme dayalı bir hâle dönüştürelim.



Şekil 3.4 Geleneksel bir ders kitabından alınmış birinci sınıflara ait bir ders.
Kaynak: Scott Foresman–Addison Wesley Math: Sınıf 1 (s. 137), yazan R. I.Charles ve diğerleri. Telif hakkı © 2004 Pearson Eğitim. İzin ile kullanılmıştır. Bütün hakları saklıdır.

Durup Düşün!

Öğrenciler sizce bu etkinlikle daha fazla uğraşmaları için nasıl teşvik edilebilir? Etkinliğin çoklu giriş noktalarına olanak vermesi için farklı bir yaklaşım ne olabilir? Eğer bu problem daha fazla açık uçlu bir soru haline getirilmek için yeniden tasarlansaydı bu, öğrencilerin dersteki zorlanmalarını ve öğrenmelerini nasıl etkileyecekti?

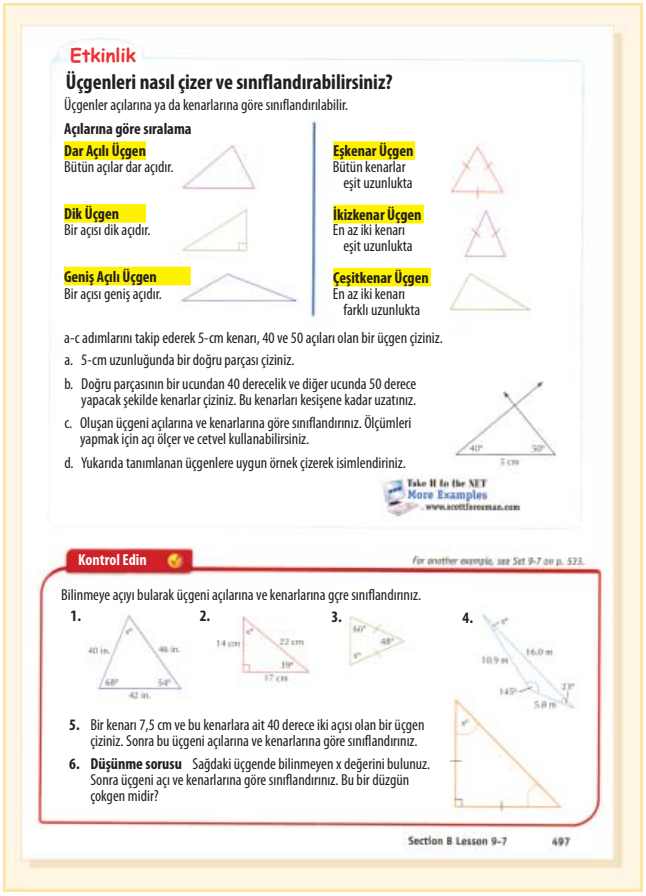
Bir ihtimal öğrencilere sekizer sayma pulu vererek onların bunları iki parçaya ayırmaları istenebilir. Öğrencilerin görevi toplama ve çıkarma işlemleri yaparak sayma pullarını nasıl iki parçaya ayırdıklarını göstermektir. Öğrencilerden bunu çizim yaparak da göstermeleri istenebilir. Ayrıca, öğrencilere sekiz sayma pulunun iki farklı gruba kaç farklı yoldan ayrılabileceği sorulabilir ve her bir durum için bir toplama ve çıkarma işlemini göstermeleri istenebilir.

Bir diğer olasılık, içinde iki miktarın olduğu, örneğin iki farklı raftaki oyuncak arabalar gibi, bir senaryo hazırlamak olabilir. *Bir oyuncakçı mağazasında 4'ü üst rafta ve 7'si yan rafta olmak üzere toplam 11 araba vardı.* Öğrencilerden bu 11 arabayı kullanarak bir toplama üzerine bir de çıkartma üzerine iki hikâye oluşturarak birer problem hazırlamalarını isteyiniz.

Bu düzenlemeleri yaparak öğrenciler Şekil 3.4'teki bir dizi problemi çözmek yerine sadece bir ya da iki problem çözeceklerdir. Bununla beraber, yeniden düzenlenmiş dersin öncesi vesonrasını içerenbölümlerinde öğrenciler, toplama ve çıkarmak işlemi arasındaki ilişkiyi anlamak için daha fazla fırsat bulacaktır.

Örnek 2: Üçgenleri Sınıflandırma. Şekil 3.5 altıncı sınıfa ait bir ders kitabının geometri dersinin ikinci sayfasını göstermektedir. Dersin içeriği üçgenlerin kenar uzunluklarına ve açılarının büyüklüklerine göre sınıflandırmayı içermektedir, ancak, dikkat ederseniz nasıl dersin büyük bir bölümü tanımların verilmesine ayrılmış. Sayfanın başında sorunun verilmiş (Üçgenleri nasıl çizer ve sınıflandırabilirsiniz?) olması aslında probleme-dayalı bir iyi etkinlik için gereklidir. Okumaya devam etmeden önce bu soruyu sorduktan sonra siz ne yapardınız biraz düşünün.

Bu soruyu bir sınıflandırma etkinliği haline getirmek için öğrencilerin bu altı kategoriye ait her birine iki ya da üç üçgen düşecek şekilde üçgenlere ihtiyaçları olur. Bu şekilde



Etkinlik

Üçgenleri nasıl çizer ve sınıflandırabilirsiniz?

Üçgenler açılarına ya da kenarlarına göre sınıflandırılabilir.

Açılarına göre sıralama

Dar Açılı Üçgen Bütün açılar dar açıdır.

Dik Üçgen Bir açısı dik açıdır.

Geniş Açılı Üçgen Bir açısı geniş açıdır.

Eşkenar Üçgen Bütün kenarlar eşit uzunlukta

İkizkenar Üçgen En az iki kenarı eşit uzunlukta

Çeşitkenar Üçgen En az iki kenarı farklı uzunlukta

a-c adımlarını takip ederek 5-cm kenarı, 40 ve 50 açıları olan bir üçgen çiziniz.

a. 5-cm uzunluğunda bir doğru parçası çiziniz.

b. Doğru parçasının bir ucundan 40 derecelik ve diğer ucunda 50 derece yapacak şekilde kenarlar çiziniz. Bu kenarları kesişene kadar uzatınız.

c. Oluşan üçgeni açılarına ve kenarlarına göre sınıflandırınız. Ölçümleri yapmak için açı ölçer ve cetvel kullanabilirsiniz.

d. Yukarıda tanımlanan üçgenlere uygun örnek çizerek isimlendiriniz.

Take It to the NET More Examples www.scottforesman.com

Kontrol Edin

Bilinmeye açıyı bularak üçgeni açılarına ve kenarlarına gçre sınıflandırınız.

1. 2. 3. 4.

5. Bir kenarı 7,5 cm ve bu kenarlara ait 40 derece iki açısı olan bir üçgen çiziniz. Sonra bu üçgeni açılarına ve kenarlarına göre sınıflandırınız.

6. **Düşünme sorusu** Sağdaki üçgende bilinmeyen x değerini bulunuz. Sonra üçgeni açı ve kenarlarına göre sınıflandırınız. Bu bir düzgün çokgen midir?

Section 8 Lesson 9-7 497

Figure 3.5 A page from a sixth-grade lesson from a traditional textbook.

Source: Scott Foresman–Addison Wesley Math: Grade 6 (p. 497), by R. I. Charles et al. Copyright 2004 Pearson Education, Inc., or its affiliate(s). Used by permission. All rights reserved.

üçgenleri kağıt üzerinde hazırlayabilir ve öğrencilerin bunları kesmelerini isteyebilirsiniz ya da eğer geometri tahtaları mevcutsa bunları kullandırabilirsiniz (Sayfa 413'teki Etkinlik 20.8'e ve Çalışma Yaprak Seti 58'e bakabilirsiniz).Üçgenleri verdikten sonra öğrencilerden bunları 3 ayrı gruba ayıracak şekilde sınıflandırmaları için iki farklı yol bulmaları istenebilir. Bunu yapmaları için önce kenar uzunluklarına göre ve sonra açı ölçülerine göre sınıflandırma yapmalarını isteyebilirsiniz ya da öğrencilere kendi yollarını belirlemelerine müsaade edebilirsiniz.Ders esnasındazorlanan öğrencilere yaklaşarak sınıflandırma yapmalarına yardımcı olacak ipuçları verebilirsiniz. Öğrenciler kendi sınıflandırmalarını belirledikten sonra üçgen sınıflarına ait uygun isimleri tanıtabilirsiniz.

Problem Çözmeye İlişkin Öğretim

Bu bölümün başında anlatıldığı gibi *problem çözmeye ilişkin öğretim* öğrencilere problem çözme sürecinin öğretilmesine dayanmaktadır. Bu yaklaşım ayrıca *problem çözme ile öğretimin* bir parçası olup bazen sınıflarda öğretmenin amacının yenibir problem çözme yönteminin (düzenli bir liste oluşturmak gibi)öğrencilere öğretimi olduğu durumlarla karşılaşılabilir. Problem çözmeye ilişkin öğretimde, sadece problem çözme sürecini anlamaya çalışmak önemli değildir; bunun yanında problem çözmek için faydalı olan genel yöntemlerin öğretimi de önemlidir.

Dört Adımlık Problem Çözme Süreci

Ünlü bir matematikçi olan George Polya, klasikleşmiş kitabında (How to Solve It-Nasıl Çözmeli, 1945) matematik yapmanın dört adımını göstermiştir. Bu adımlar birçok kaynak kitabında ve ders kitaplarında yer almış ve yer almaya devam etmektedir. Bu adımların açıkça öğretimi öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirebilir. Aşağıda bu dört adım kısaca açıklanmıştır:

1. *Problemi anlama.* Bu kısaca problemin ne ile ilgili olduğunu, ne sorulduğunu anlamaktır.

2. *Bir plan hazırlama.* Bu aşamada problemi nasıl çözeceğinizi düşünürsünüz. Bir denklem mi yazmak istersiniz? Materyal kullanarak problemi modellemek mi istersiniz? (Daha fazla örnek için "Problem Çözme Yöntemleri" başlıklı bir sonraki bölüme bakınız.)

3. *Planın uygulaması.* Bu planınızın uygulama aşamasıdır.

4. *Çözümün değerlendirilmesi.* Belki de en önemli ve öğrenciler tarafından en çok göz ardı edilen bu aşamada üçüncü adımda elde ettiğiniz cevabın birinci adımda anlaşılan problemin gerçek cevabı olup olmadığının değerlendirilmesidir. Soruya verdiğiniz cevap sizce mantıklı mı?

Problem çözme ile öğretim yaparken bu adımların kullanılması öğrencilerinizin başarısını arttıracaktır. Öğrencilerinize bir problem sorduğunuzda ilk adımınız onların anladığına emin olmaktır. Bu aynı zamanda Polya'nın problem çözme sürecinin ilk adımıdır (ve *ders öncesi* aşamasının bir parçasıdır). İkinci adıma başlamak için öğrencilerinize problemi çözmek için hangi yöntemlerin kullanılabileceğini sorabilirsiniz. *Ders esnasında* öğrenciler çözümle ilgili strateji belirlerler ve bu stratejiyi uygularlar (2 ve 3. adım). Daha sonra geriye bakarak çözümlerinin mantıklı olup olmadığını değerlendirirler (4. adım). *Ders sonunda* öğrenciler yöntemlerini (2. adım) diğer öğrencilerle paylaşırlar, nasıl çözdüklerini (3. adım) anlatırlar ve sonucun doğruluğunu (4. adım) gösterirler. Polya'nın belirlediği bu adımların güzelliği genellenebilir olmasında yatmaktadır. Birçok farklı probleme, ister basit hesaplamalara dayalı alıştırma olsun ister birkaç adımlı karmaşık problemler olsun bu adımlar kullanılabilir.

Problem Çözme Stratejileri

Problemleri çözmek için kullanılan stratejiler konudan bağımsız olarak belirlenebilen yöntemlerdir. Öğrenciler problemi çözmek için bir plan hazırlarken (2. adım)bir strateji seçer ya da tasarlarlar. Bu süreçte eğer önemli ya da kullanışlı bir strateji keşfedilirse bu stratejinin önemi vurgulanmalı ve tartışılmalıdır. Bu yöntemlerin isimlendirilmesi *ders öncesi ya da ders esnasında* öğrenciler ve öğretmen için kullanışlı olabilir. Aşağıda anaokulundan sekizinci sınıfa kadar sıklıkla karşılaşılan isimlendirilmiş stratejiler verilmiştir. Bunların bazıları aslında bütün sınıf düzeylerinde kullanılmaktadır.

- *Bir şekil çiz, canlandırma yap, bir model kullan.* Model ve materyal kullanma stratejileri Bölüm 2'de açıklanmıştır. "Canlandırma" modellerin problem durumunun gerçek bir yorumuna doğrudan uyarlanmasıdır.
- *Bir örüntü ara.*Örüntü aramak özellikle cebirsel düşünme alanında birçok probleme dayalı etkinliklerin merkezinde yer alır. İlkokuldan lise yıllarına kadar geçen sürede örüntüler, sayılar ve işlemlerle ilgili temel becerilerin öğrenilmesinde büyük bir rol oynarlar.
- *Tahmin et ve kontrol et.* Bu strateji aynı zamanda "Dene ve gör" şeklinde de adlandırılabilir. Sizi şaşırtan bir problemle karşılaştığınızda iyi yöntemlerden biri bir şey denemektir. Bir girişimde bulunun! Yanılsanız dahi bu size daha iyi bir fikir verebilir.
- *Tablo ya da çizelge hazırla.* Veri çizelgeleri, fonksiyon tabloları, dört işlem tabloları ve oran veya ölçümleri içeren tablolar, analiz ve matematiksel iletişimi sağlayan temel formlardır. Bir çizelgenin kullanımı birçok zaman problemini çözmek için örüntü aramayı ya da yeni fikirler oluşturmayı içerir.
- *Daha basit bir problemi dene.*Problemdeki sayılar yeniden düzenlenerek ya da basitleştirilerek daha anlaşılır bir hâle getirilebilir. Daha basit problemlerin çözümü bazen daha karmaşık problemlerin çözümü için fikirler verebilir.
- *Düzenli bir liste hazırla.* Sistemli bir şekilde bir duruma ait bütün olasılıkların listelenmesi o duruma ait mümkün olan bütün olasılıkların sayısı gösterebilir ya da mümkün olan tüm olasılıkların göz önünde bulundurulmasını sağlayabilir.
- *Bir denklem yaz.* Bu yöntemde problem sayısal ya da sembolik olarak ifade edilerek bir denklem oluşturulur ve çözülür.

Problem çözmeyi bir prosedür haline getirmemek önemlidir. Diğer bir deyişle, problemi çözerken öğrencilere hangi stratejiyi seçmeleri ve nasıl çözmeleri gerektiğini söyleyerek problem çözmenin değeri düşürülmemelidir. Bunun yerine, öğrencilerin geliştirmelerini istediğiniz bir stratejiye (örneğin, düzenli bir liste hazırlamak) uygun bir problemi sorup onlara istedikleri yollarla çözmelerine izin verebilirsiniz. Sonuçların paylaşılması sırasında, liste kullanıldıysa buna vurgu yapabilirsiniz. Eğer liste kullanılmamışsa, öğrencilere "Problemi çözerken sizce liste kullanmak etkili olur muydu? Liste yapmak nasıl olurdu? Bir deneyin!" gibi sorular sorarak onları liste kullanmaya teşvik edebilirsiniz.

NCTM Standartları

NCTM'nin problem çözme ile ilgili standardının ilk iki amacı problem çözme ile öğretimle ilgilidir. Üçüncü ve dördüncü amaçlar öğrencilerin problem çözmeyi öğrenmeleri ile ilgilidir. Sizin ilgilendiğiniz sınıf düzeyine göre bu amaçları incelemek faydalı olabilir. ◆

Probleme Dayalı Bir Sınıfta Öğretim

Bu bölümde bahsedilen fikirler literatürdeki problem çözme ile öğretimi içeren kaynaklardan ve yine literatürde yer alan sınıflarında probleme dayalı yaklaşımı kullanmaya çalışan ilkokul ve ortaokul öğretmenlerinin tecrübelerinden alınmıştır. Bir sonraki bölüm probleme dayalı matematik sınıflarının düzenlenmesinde göz önünde bulundurulması gereken hususları içermektedir.

Bırakın Öğrenciler Konuşsun

Sınıf içi tartışmaların önemi yadsınamaz. Öğrenciler problemlere verilen çözümleri anlattıkça ve değerlendirdikçe, yaklaşımlarını paylaştıkça ve varsayımlarda bulundukça öğrenme gerçekleşecektir. Öğrenciler fikirlerine sahiplenmeye başlayacak ve matematiği anlayarak bir özgüven geliştireceklerdir.

Öğrencilere bir problem verildiğinde, sorumluluklarından birinin bunun üzerinde çalıştıktan sonra çözümlerini sınıfça tartışmak için hazırlık yapmaları gerektiğini bilmeleridir. Dördüncü sınıflara giren bir öğretmen ders esnasında geçen tartışmalara fazlasıyla katıldığını fark etti. Öğrenciler çözümlerini paylaşmak yerine öğretmenin sorular sormasını bekliyorlardı. Öğrencilerine bireysel olarak daha fazla sorumluluk almalarına yardımcı olmak için aşağıdaki üç posteri hazırladı:

1. Problemi nasıl çözdünüz?
2. Neden bu yolla çözdünüz?
3. Neden çözümünüzün doğru ve mantıklı olduğunu düşünüyorsunuz?

Başlangıçta, öğrenciler bu posterler dahilinde sunumlarını yapıyorlardı, fakat kısa bir süre sonra artık bunlara ihtiyaç duymaz oldular. *Ders esnasında* probleme çözümlerini ha-

zırlarken bu posterlerdeki soruları dikkate almaya devam ediyorlardı. Sunum sırasında buna riayet etmeyenleri ise öğrenciler: "Posterdeki ikinci soruyu cevaplamadınız!" şeklinde uyarıyorlardı. Poster uygulamasının en güzel sonucu öğretmeni, tartışmaların içeriğinden uzaklaştırması oldu.

Dersin yapısı ve zamanlama ne olursa olsun, sınıf içi tartışmalara muhakkak yer verilmelidir. Öğrenciler ister oyun oynasınlar, ister bir etkinlik yapsınlar, isterse zor bir problem üzerinde çalışsınlar hâlâ yapmış oldukları etkinlikleri tartışabilirler: *Oyunda hangi stratejiler sizin için etkili oldu? Etkinlik sonucu ne öğrendiniz? Bu alıştırmayı daha farklı yollardan nasıl yapardınız?*

Ne kadar Söylemeli ve Ne Söylememeli

Problem çözme ile öğretimde en çok yaşanan ikilemlerden biri öğrencilere neyi ne kadar söylemektir. Bir yandan, söylemek öğrencinin derinlemesine düşünmesini azaltır. Öğretmenin tercih ettiği bir yöntemin ya da yaklaşımın var olduğunu sezen öğrenciler kendi stratejilerini kullanmakta gönülsüz davranırlar. Öğretmenlerinin kendileri yerine düşündüğünü gören öğrenciler özgüven ve problem çözme becerileri geliştiremeyeceklerdir. Öte yandan, çok az şey söylemek bazen öğrencilerin bocalamasına ve değerli ders zamanının harcanmasına neden olabilir.

Yaşanan bu ikilemin basit bir çözümü olmasa da, araştırmacılar şu tavsiyelerde bulunmaktadır: Öğretmenler problemin matematiksel değerini düşürmedikten sonra problemle ilgili bilgileri paylaşmakta rahat olmalıdırlar (Hiebert ve ark., 1997). Bu şu demektir, "sunulan bilgi problemi çözmek için gerekli olan bilgi olmadıkça ve öğrencinin problemde verilen durum için muhakeme yapma ve yöntem geliştirme ihtiyacını ortadan kaldırmadıkça paylaşılabilir ve paylaşılmalıdır da" (s. 36). Araştırmacılar aşağıdaki üç tip bilgiyi öğretmenlerin öğrencilerine sunmaları gerektiğini belirtmişlerdir:

- *Matematiksel Gelenekler.* Matematik için önemli olan semboller ve terimler, derinlemesine düşünülerek asla geliştirilemezler. Örneğin, "üç ve beş sekize eşittir" ifadesinin "3 + 5 = 8" şeklinde gösterimi bir gelenektir. Tanımlar ve isimler de birer gelenektir. Sembolleri ve kelimeleri öğrencilerin ihtiyacı olduğu zaman veya onlar için kullanışlı oldukları zaman vermek önemlidir. Temel kural olarak, semboller ve terimler kavramlar anlaşıldıktan *sonra*özellikle fikirlerin ifade edilmesinde ya da isimlendirilmesinde kullanılmalıdır.
- *Alternatif yöntemler.*Öğrencilere problemi çözmek için alternatif bir yol ya da yaklaşım kullanmalarını önerebilirsiniz. Ayrıca öğrencilere kendi keşfettikleri hesaplama yöntemlerini daha iyi anlayacakları şekilde not etmelerini isteyebilirsiniz. Örneğin, onluk ve birlik basamakları arasına öğrencilerin dik çizgi çizmelerini önermek öğrenme zorluğu çeken öğrencilerin basamak değerini anlamalarına yardımcı olacaktır. Yapılan yöntemin değeri doğruluğunda ve etkililiğinde saklıdır. Öğrencilere farklı yöntemleri değerlendirterek kendi yöntemlerinin her zaman işe yarayıp yaramayacağı ve benzer bir problemle karşılaşıldığında hangi yöntemi kullanabilecekleri sorulabilir.
- *Öğrenci yöntemlerine açıklık getirme.*Öğrencilere fikirlerini açıklamalarına ve yorumlamalarına yardımcı olmalısınız. Örneğin, bir öğrenci 38 ve 5'i toplarken 38'in 2 fazlasının 40 olduğunu fark edebilir ve buna 3 ekleyerek 43 elde edebilir. Bu yöntem 8+5 işleminde kullanılan 10'a tamamlama yöntemiyle ilişkilendirilebilir. Bu yöntemde 40'ın orta nokta olarak seçilmesi önemli bir basamak değeri kavramıdır. Bu tip açıklamalar öğrencilerin fikirlerini güçlendirir. Öğrencilerin fikirlerinin tartışılması ya da açıklanması dikkatlerin sizin öğrenilmesini istediğiniz fikirlerin üzerine toplanmasını sağlar. Öğretmenin bir yöntem üzerinde durarak sanki tercih ettiği yöntem oymuş gibi bir izlenim verilmemelidir.

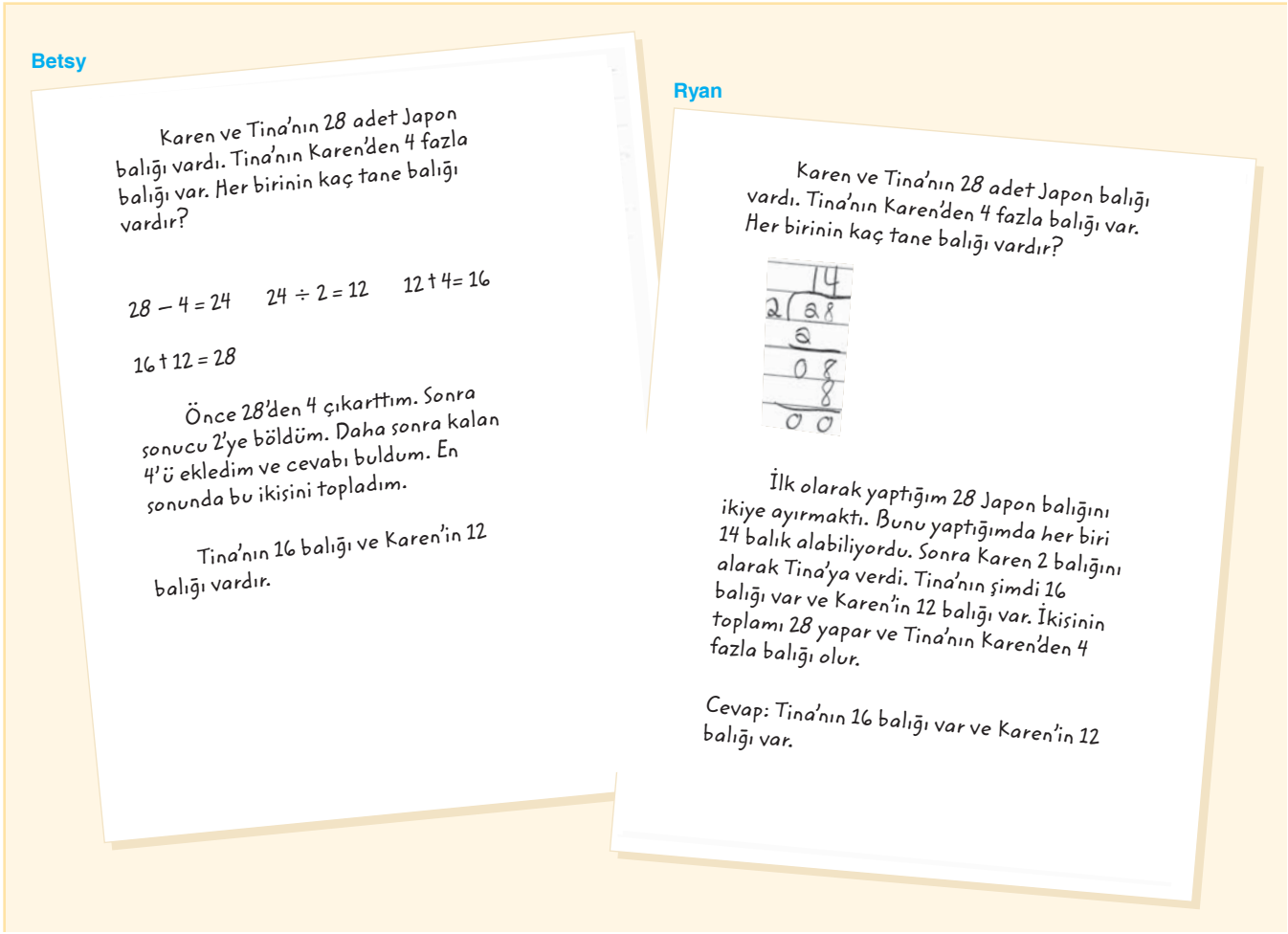
Öğrencilerin Rapor Yazmasının Önemi

Matematik sınıfında yazma ödevini kullanmanın birçok sebebi vardır. Bunlardan en önemlisi yazının öğrencinin öğrenmesini ve anlamasını geliştirmesidir (Bell & Bell, 1985; Pugalee,2005; Steele, 2007).

- *Yazma işi düşünceleri ortaya çıkaran bir süreçtir.* Öğrenciler düşüncelerini açıklamak için çaba harcarken ve cevaplarının doğruluğunu savunurken, problemin içerdiği fikirler üzerine daha çok odaklanarak düşünürler.
- *Yazılı rapor ders sonu tartışması için bir prova niteliğindedir.* Öğrencilerin bir problem üzerinde 15 dakika çalıştıktan sonra problemi nasıl çözdüklerini anlatmaları onlar için zordur. Kendilerinden çözümlerini paylaşmaları istendiğinde her zaman için yazılı rapordan yararlanabilirler. Anaokulu öğrencisi dahi bir resmî göstererek konuşabilir. Her öğrenci çözümünü kâğıt üzerine yazarsa fikirlerini paylaşmak için gönüllü aramak zorunda da kalmazsınız.
- *Yazılı rapor aynı zamanda ders bittikten sonra elinizde kalabilecek yazılı bir belgedir.* Raporlar ders sonunda toplana bilir ve daha sonra incelenebilir. Elde edilen bilgiler, ders planlaması, öğrencilerin bireysel bilgi ihtiyaçlarının karşılanması, değerlendirme ve veli toplantıları için kullanılabilir.

Öğrencilerin yazılı raporlar için ne yapmaları gerektiğini anlamalarına yardımcı olmak önemlidir. Onlara cevaplarını nasıl bulduklarını açıklamalarını isterseniz, raporlarına neyi neden yaptıklarını açıklamak yerine doğrudan problemin çözümünü yazabilirler. Şekil 3.6 ve 3.7, farklı kalitedeki öğrenci açıklamalarını örneklendirmektedir. Öğrencilerin düşüncelerini nasıl açıklayacaklarının bir örneğini vermekönemlidir. Öğrencilerin hazırladıkları raporları kullanmak (örneğin Şekil 3.6 ve Şekil 3.7'deki gibi) onlardan beklentilerinizi anlamalarına yardımcı olabilir. Daha iyi açıklamaları ortaya çıkarmak için aşağıdaki iki olası yolu takip edebilirsiniz:

- Öğrencilere kullanabilecekleri taslak bir rapor verebilirsiniz: "Ben (biz) cevabın _____ olduğunu düşünüyoruz. Bunun böyle olduğunu düşünüyoruz, çünkü _____."



Şekil. 3.6 Betsy çözümündeki her adımını anlatmaktadır, ancak açıklama yapmamaktadır. Aksine Ryan her adımda sebeplerini açıklamaktadır.

- "Yazarak, çizim yaparak ve sayılar kullanarak cevabınızı nasıl bulduğunuzu ve cevabınızın neden doğru ve mantıklı bir cevap olduğunu açıklayınız."

Rapor Yazımında Teknoloji Kullanımı. Aşağıdaki ücretsiz programların sunduğu avantajları kullanarak öğrencilerinizden, raporlarını yazmalarını, üzerinde değişiklikler yapmalarını ve size e-mail yoluyla göndermelerini isteyebilirsiniz.

Metin Düzenleme
(gerçek zamanlı, iş birlikçi araçlar)

- Google Docs & Spreadsheets (http://docs.google.com)
- Synchroedit (www.synchroedit.com)
- OpenEffort (www.openeffort.com/oe)
- Zoho Writer (http: //zoho.com)

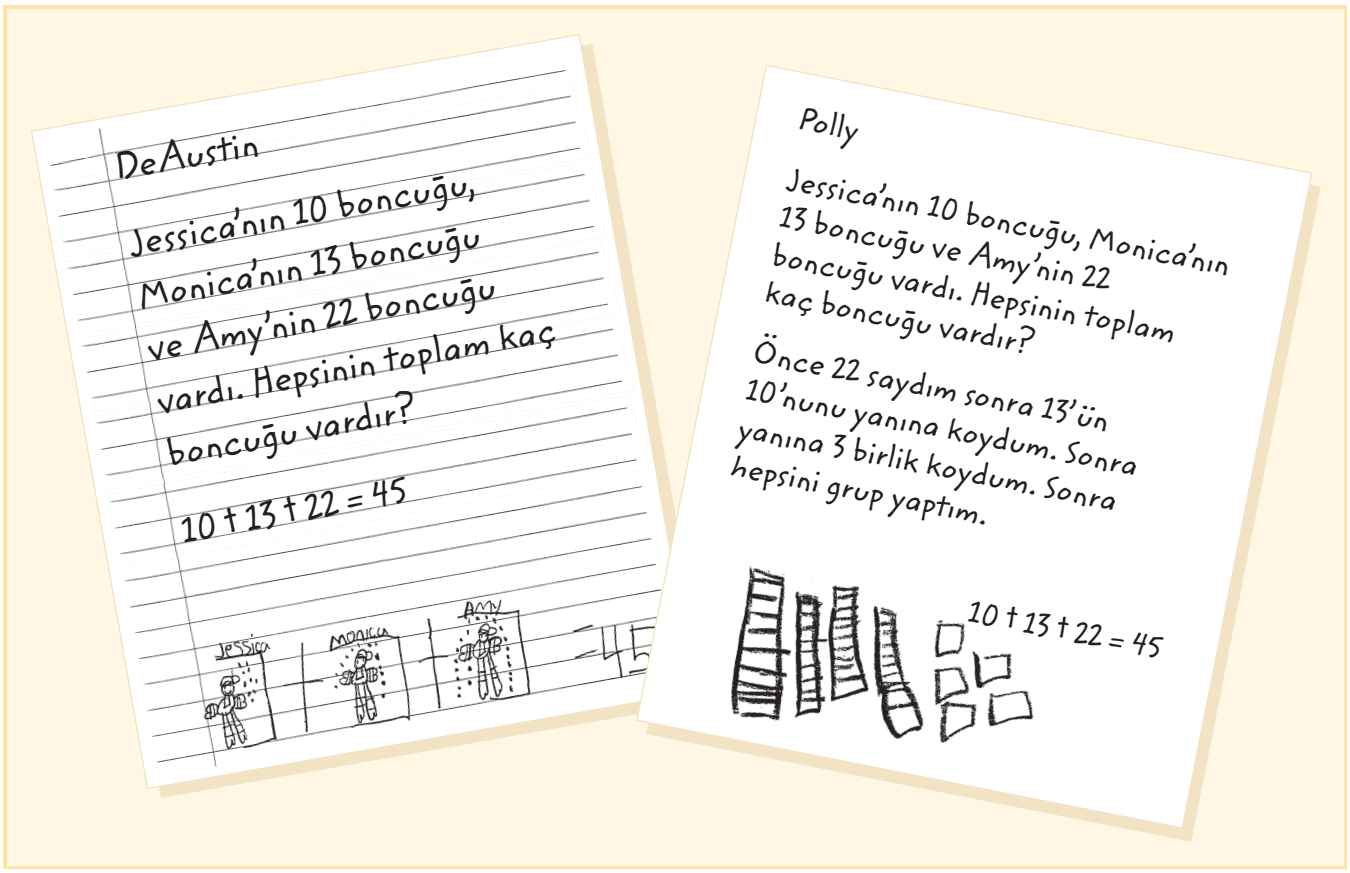
Wiki
(ücretsiz, eşzamansız, iş birlikçi web sayfaları oluşturma araçları)

- Wikispaces—matematiksel denklemlerini kullanımına olanak verir (www.wikispaces.com)
- Wiki-site—matematiksel denklemlerini kullanımına olanak verir (www.wiki-site.com)
- XWiki—matematiksel denklemlerini kullanımına olanak verir (www.xwiki.com/xwiki/bin/view/Main/WebHome)
- Wikidot—matematiksel denklemlerini kullanımına olanak verir (www.wikidot.com)

Bloglar

- Blogger (www.blogger.com)
- WordPress (http://wordpress.com)

Bu gibi web tabanlı araçlar matematik sınıflarının içinde ve dışında kullanılarak öğretmen ve öğrencilerin birbirlerinin matematiksel fikirlerini inceleme fırsatı verir. Elle ya da Word dokümanı şeklinde yazmada isteksiz davranan öğrencilerin bu tip teknolojik araçlarla motivasyonları arttırılabilir ve daha kaliteli açıklamalar ve gösterimler yapmaları sağlanabilir.



Şekil 3.7 İki birinci sınıf öğrencisinin 10 + 13 + 22 toplamını çözerken yaptıkları işlemler iki basamaklı sayılar hakkındaki düşünceleri arasındaki farkı göstermektedir.

Biliş ötesi

Biliş ötesi bir bireyin bir şeyi nasıl ve neden yaptığının farkında olması ve düşüncelerinde bilinçli düzenlemeler (bir şeyi yapmayı seçmesi ya da değişiklik yapmaya karar vermesi) yapabilmesidir. Başarılı problem çözücüler düşüncelerini kendiliğinden ve düzenli olarak izlerler. Bir çıkmazla karşılaştıklarında ya da tam anlamıyla anlamadıklarında bunu fark ederler. Böyle durumlarda yeniden başlamak için bilinçli kararlar vererek yöntemlerini değiştirirler, problemi yeniden düşünürler ve gerekli konu bilgisine bakarlar (Shoenfeld, 1992).

Araştırmalar biliş ötesi niteliğindeki davranışların öğrenilebileceğini göstermiştir (Campione, Brown, & Connell, 1989; Garofalo,1987; Lester, 1989; Thomas, 2006).Öğrenciler, kendilerini gözlemlemeyi ve problem çözme davranışlarını düzenlemeyi öğrenebilirler. Bunu yapabilen öğrenciler, problem çözmede de başarılarını arttırırlar.

Biliyoruz ki öğrencilere problem çözmedeki gelişimlerini gözlemlemeyi ve kontrol etmeyi öğrenmelerine yardımcı olmak önemlidir. Bunu yapabilmek şu üç soruya verilecek cevaplarla mümkün olabilir: Ne yapıyorsun? Neden yapıyorsun? Bu sana nasıl yardımcı olur? Bu soruları detaylandırmak için Thomas (2006) bir dizi önerilerde bulunmuştur:

Problem hakkında *konuş.*
Nasıl çözülebilir?
Problemi çözmek için bir strateji *belirle.*
Bu strateji problemi çözmene nasıl yardımcı olduğuna *dikkat et.*
Problemle ilgili düşünmeye *devam et*. Çözümün sence mantıklı mı? Problemi çözmek için başka bir yol var mı?

Bu önerileri dikkate alan öğrenciler diğer öğrencilere göre problem çözme becerilerini arttırmıştır (Thomas, 2006). Bu başarının temelinde bilinçli ve maksatlı olarak biliş ötesi niteliğindeki bilişsel becerilerin geliştirilmesi ve problem çözme sürecinde bu becerilerin kullanılması yatmaktadır.

Biliş ötesiningelişimini sağlamak dersin üç aşamasınıda içermektedir. *Ders öncesi* aşamasında, öğrenciler hangi stratejileri kullandıklarını ve neden kullandıklarını belirtirler. *Ders esnasında* ne, neden ve hatta nasıl sorularına cevap aramaya devam ederler. Biliş ötesi gelişimi, Thomas'ın (2006) önerilerinde bahsettiği soruları öğrencilere bireysel ya da grup halinde etkileşirken sorarak destekleyebilirsiniz. Bir gruba katılıp öğrencilere soruları birbirlerine nasıl sormaları gerektiğini gösterebilirsiniz. Üst sınıflarda bu görevi her bir grup içinde görevlendirilmiş öğrenci yapabilir.

Öğrencilerinize, ayrıca, problem çözme etkinliği bittikten sonra problemi çözmek için ne yapıldığını tartıştırarak kendilerini izleme alışkanlıkları kazandırmalarına yardımcı olabilirsiniz. Çözüm stratejilerinin tartışılmasına ek olarak dersin sonunda öğrenciler daha önce belirtilen biliş ötesi niteliğine sahip sorular üzerine düşüncelerini paylaşma fırsatları bulmalıdırlar. Bu günlük tutturma yoluyla ya da sınıf tartışmalarıyla şu sorular sorularak yapılabilir:

- Problemi anlamak için ne yaptın?
- İhtiyacın olmayan herhangi bir sayı ya da bilgi buldun mu? Bunu nerden biliyorsun?
- Ne yapmaya nasıl karar verdin?
- Cevabınızı bulduktan sonra tekrar üzerinde düşündünüz mü?
- Cevabınızın doğru olduğuna nasıl karar verdiniz?
- Sonuç vermeyen bir yöntem denediniz mi? Bu yöntemin sonuç vermediğini nasıl anladınız?
- Bu problemde yaptığınız bir şey diğer problemleri çözmenize yardımcı olur mu?

Öğrenciler matematikle uğraşırken daha bağımsız davranmaya başladıkça problemi çözmek için öğretmenin desteğine daha az ihtiyaç duyacaklardır. Bunun sonucunda matematiğe karşı tutumları ve eğilimleri ve matematik yapmadaki yetkinlikleri hakkındaki duyguları değişecektir.

Yatkınlık

Yatkınlık öğrencilerin matematik yapmak hakkındaki tutum ve inançlarına işaret etmektedir. Öğrencilerin matematik yapma becerileri ile ilgili ve matematiğin doğasına yönelik inançları problemlere nasıl yaklaştıklarını ve başarılarına önemli ölçüde etkiler.

Problem çözmekten hoşlanan ve karmaşık problemleri çözebileceklerine inanan öğrenciler bu tip problemlerle karşılaştıklarında sebatla çalışarak problemi çözmek için girişimlerde bulunurlar ve hatta yeni problemler oluştururlar.Yatkınlığın az olması durumda ise bunun tam tersi etki ile karşılaşılır.

Tutumsal Hedefler

- *Kendine güven kazanmanın ve becerilerine inanmanın* matematik yapmak isteyen ve alışılmadık problemlerle karşılaşmak isteyen öğrenciler için önemi büyüktür.
- *Risk almaya istekli ve azimli olmak* öğrencilerin alışılmadık problemleri çözme isteklerini arttırır ve başlangıçtaki başarısızlıklara rağmen moralini bozmadan problem çözmede sebatlı olmayı geliştirir.
- *Matematik yapmaktan hoşlanmak* öğrencinin düşünmesinden zevk almasına, örüntüler aramasında ve problemleri çözmesine yardımcı olur.

Bütün öğrenciler için yüksek beklentilere sahip ve her bir öğrencinin düşüncesine saygılı olan bir sınıf ortamı tutumsal hedeflerin kazanılması yönünde uzun bir yol almış sayılır. Bu hedeflere ulaşmaya yardımcı olabilecek diğer fikirler aşağıda verilmiştir:

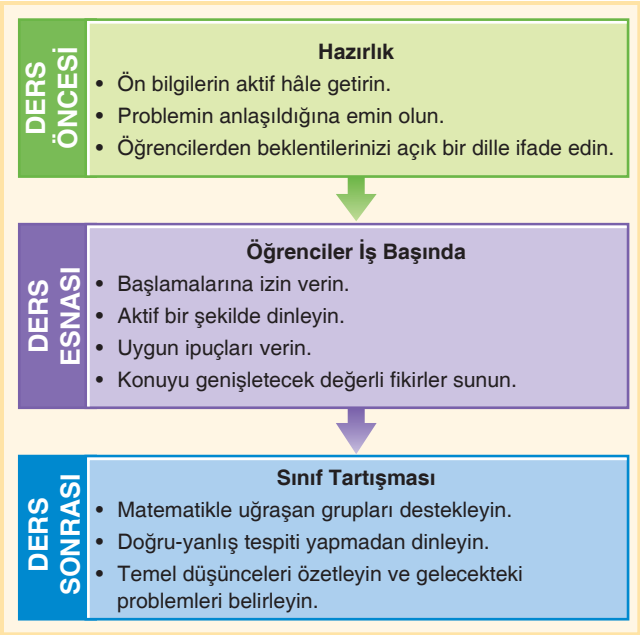
- *Başarının inşası.* Öğretim yılının başında öğrencilerinizin çözebileceğini düşündüğünüz problemleri planlayınız. Çözüm yollarını göstererek ve zorlukları aşmalarına yardımcı olarak öğrencileri başarılıymış gibi göstermekten sakının.
- *Öğrencilerin çabalarını ve risk almalarını takdir edin.* Öğrencilerin sıklıkla güdülenmeye ihtiyaçları vardır. Fikirlerini paylaşmak için gönüllü olduklarında onları dikkatle dinlemeli, düşüncelerine değer vermeli ve risk alıp düşüncelerini paylaştıkları için takdir edilmelidir. Bunu yaparken verdikleri cevaptan ziyade düşüncelerini paylaşmak için gösterdikleri çaba ve cesareti takdir etmek önemlidir.
- *Bütün öğrencileri dinleyin.* Bir tartışmayı ilk doğru cevabı aldıktan sonra bitirmekten kaçının. Öğrencilerin düşüncelerini yargılamadan dinlerseniz birçok öğrencinin aynı probleme farklı yaklaşımlar getirdiğini ya da aynı yöntemi farklı yollarla açıkladıklarını göreceksiniz. Öğrencilerin katkılarını, güzel matematik dilini kullanmalarını ya da yaklaşımlarını göz önünde bulundurarak onların güvenlerini oluşturmalarında ve anlamlı öğrenmelerinde rol oynarsınız.

Öğrenciler kendilerine güvendiklerinde, azimli olduklarında ve matematiği sevdiklerinde daha başarılı olacakları açıktır ve kendilerine gelecekte birçok kapı açabilecek matematik öğrenmeye devam etmek isteyeceklerdir. Daha önce belirtildiği gibi, bu tutumları gerçekleştirebilecek öğretim yaklaşımında öğretmen ve öğrencilerin rollerinin eskiye göre tamamen farklı şekilde yeniden düşünülmesi gerekir. Böyle bir geçişte akla soruların gelmesi muhtemeldir. Bu yeni yöntemlerin gerçekten güzel fikirler içerdiğini düşünseniz dahi bazı önerilerin nasıl gerçekleştirilebileceğini ve dersinizle bu önerilerin nasıl uyum göstereceğini merak edebilirsiniz. Bir sonraki bölümde, üç aşamalı bir ders planı modeli açıklanmıştır.Sorgulamaya dayalı fen dersi modelinin uyarlanmış hali olan bu model size öğrencilerinizin problem çözme ile öğrenim ve problem çözmeye ilişkin öğrenim yoluyla eğitim verme olanağı sağlayacaktır.



Üç Aşamalı Ders Formatı

Probleme dayalı olmayan bir derste öğretmenler, genel olarak dersin küçük bir kısmında açıklama yapıp ya da daha önceki bilgileri tekrarladıktan sonra bu açıklama ya da bilgileri kullanacakları alıştırmalara geçerler. Önce anlat sonra çöz modeli şeklinde tasarlanmış derslerde çoğu zaman öğrenciler işlemsel sürece odaklanıp ne yaptıklarını gerçekten anlamazlar. Öğretmenler bu ortamlarda sık sık kendilerini bir sıradan diğer sıraya gidip öğrencilere tekrar öğretmek durumunda kaldıklarını görürler. Bu yaklaşım tek bir problem etrafında gerçekleştirilen probleme dayalı öğretim ile büyük ölçüde farklılıklar göstermektedir.



Şekil 3.8 Problem çözme ile öğretim üç aşamalı ders yapısına uygundur

Probleme dayalı bir dersi üç bölüm olarak düşünmekte yarar vardır: ders öncesi, ders esnası ve ders sonrası (Bkz. Şekil 3.8). Eğer her bir bölüme zaman ayrılırsabir problem, bütün bir günü hatta daha fazlasını alabilir. Bazen bir etkinliğin bütün bir dersi doldurmadığı zamanlar da olur; zihinden matematik etkinliği buna güzel bir örnektir. Bu tür etkinliklerde dahi dersi üç aşamalı olarak düşünmekte fayda vardır. Dersin her bölümünün özel bir amacı vardır. Bu amaçlara nasıl ulaştığınız sınıfa, problemin kendisine ve dersin amacına göre değişebilir.

Dersin *Önce* Evresi

Dersin başında şu üç hazırlık yapılır:

1. Öğrencileri probleme zihinsel olarak hazırlayın ve onlara yardımcı olacak önceki bilgilerini düşünmelerini sağlayın.
2. Öğrencilerin problemi çözmeye hazır olmaları için problemi anladıklarına emin olun. Böylelikle dersin ilerleyen dönemlerinde yeniden açıklamak zorunda kalmazsanız.
3. Öğrencilere onlardan beklentilerinizi probleme başlamadan önce açık bir şekilde anlatınız. Bu, öğrencilerin nasıl çalışacaklarını (bireysel veya çiftler ya da küçük gruplar halinde) ve cevaplarına ek olarak onlardan ne beklediğinizi içerir.

Dersin başındaki bu hazırlıkları yukarıdaki listelendiği sırayla yapılması zorunlu değildir. Örneğin, bazı dersler için kısa bir etkinlik yaparak öğrencilerin problemle ilgi önceki bilgilerini aktif hâle getirip sonra problemi verebilir ve beklentilerinizi açıklayabilirsiniz. Diğer dersler ise problem cümlesi ile başlayabilir ve ön hazırlık etkinliği olabilir ya da olmayabilir.

Önce Evresinde Öğretmenin Eylemleri

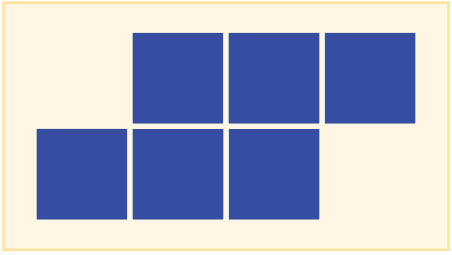
Dersin *önce* evresinde yapılanlar etkinliğe göre değişebilir. Bazı etkinliklere çabucak başlayabilirsiniz. Örneğin, öğrencileriniz dört işlem problemlerini çözmeye alışık iseler ve çözümlerini yazılı olarak anlatırkenkendilerinden kelimeler, çizimler ve sayılar kullanmaları beklendiğini biliyorlarsa, yapılacak iş onlara problemi okumak ve anladıklarına emin olmaktır. Görevin ya da problemin sunulması *önce* evresinin başında ya da sonundaki eylemler olabilir.

1. Önceki Bilgilerin Aktif hâle Getirilmesi. Bugünkü anlatacağınız kavramla ilgili ön bilgileri aktif hâle getirin. Bunun nasıl yapılacağı aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi konuya bağlı olarak değişebilir

Basit bir Etkinlikle Başlayın. Diyelim ki alan ve çevre hakkında öğrencilerin bazı fikirleri geliştirmesine yardımcı olmak istiyorsunuz ve aşağıdaki etkinlikle başlıyorsunuz (Lappan & Even, 1989).

Kavram: Çevre
Sınıf düzeyi: 4-6

Karenin bir kenarının 1 birim olduğunu kabul edin. Şekle yeni kareler ekleyerek çevresinin 18 birim olmasını sağlayın.



Dersinize bu problemle başlamak yerine önce öğrencilerin ön bilgilerini şu yollarla aktif hâle getirebilirsiniz:

- 3 x 5 ebatlarında karelerden oluşmuş bir dikdörtgen tahtaya çiziniz ve öğrencilere bu şekil hakkında ne bildiklerini sorunuz. (Bu bir dikdörtgendir. Karelerden oluşmaktadır. 15 tane kare vardır. Beş kareden oluşan üç sıra vardır.) Eğer kimse alan ve çevre kelimelerinden bahsetmezse, bunları tahtaya yazarak şekil hakkında konuşurken bu kelimelerin kullanılıp kullanılamayacağını sorunuz.
- Öğrencilere kareselkarolar dağıtarak ya da kareli kağıtlar vererek onlara "Çevresi 12 birim olan bir şekil oluşturmanızı istiyorum. Şeklinizi oluşturduktan sonra alanını bulunuz" deyin. Kısa bir süre sonra birkaç öğrencinin oluşturdukları şekilleri göstermelerini sağlayınız.

Bu ısındırma etkinliklerinin her biri asıl etkinlikte kullanılması gereken kelimeleri içermektedir. Bunun yanında, ikinci etkinlik öğrencilerin karoları kullanarak olası modeller oluşturmaları ve bu şekilde elde edilen farklı şekillerin aynı çevre uzunluğuna sahip olabileceği fikrini göstermek için kullanılabilir.

Bir sonraki problem, bir çıkarma problemini çözmek için toplama işleminin nasıl kullanılabileceğini öğrencilere göstermek için tasarlanmıştır.

Kavram: Çıkarma
Sınıf: 2-3

Babam arabada sahile ulaşmak için önümüzde gidilecek hâlâ 503 mil olduğunu söyledi. Benzin için bir istasyonda durduğumuzda 267 mil gitmiş olduğumuzu fark ettik. Sahile ulaşmak için daha ne kadar yol gitmeliyiz?

Bu problemi sormadan önce öğrencilere ön bilgilerini hatırlatmak için bir parçası verilen 100'ün diğer parçasını bulmalarını sorabilirsiniz. Önce 80 ya da 30 gibi sayıları kullanabilirsiniz. Daha sonra 47 ya da 62 gibi sayıları deneyebilirsiniz. Asıl problemi sorduğunuzda öğrencilere cevabın 300'den fazla ya da az olup olmadığını sorabilirsiniz.

Çözümleri tartışın. Bir sonraki problem oran ve veri analizi için tasarlanmıştır.

Kavram: Oran ve İstatistik
Sınıf: 6-7

Okul kayıtları bir sınıftaki öğrenciler ve aileleri hakkındaki bilgileri tüm okulla karşılaştırmalı olarak vermektedir.

	Okul	*Sınıf*
Kardeşler		
Hiç yok	**36**	**5**
Bir tane	**89**	**4**
İki tane	**134**	**17**
İkidnen fazla	**93**	**3**
Irk		
Afrika kökenli Amerikalılar	**49**	**11**
Asya kökenli Amerikalılar	**12**	**0**
Beyazlar	**219**	**15**
Okula ulaşım yöntemi		
Yürüyerek	**157**	**10**
Otobüsle	**182**	**19**
Diğer	**13**	**0**

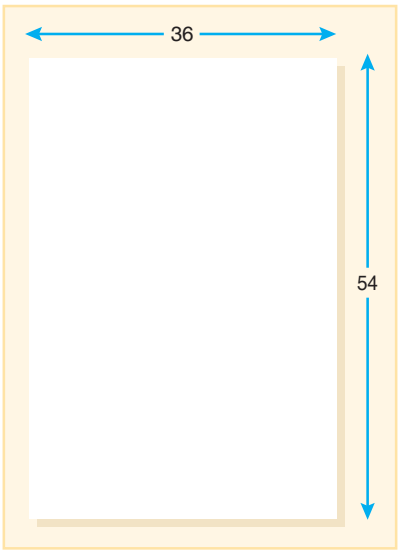
Eğer biri size bu sınıfın okulun genel durumununu ölçüde-yansıttığını sorsa nasıl cevap verirdiniz? Cevabınızın bir açıklamasını yazınız. Açıklamanızda cevabınızı destekleyecek bir ya da daha fazla çizelge ya da grafik bulundurun.

Bu problem, bir önceki problemde olduğu gibi daha basit bir problemin sorulması için uygun değildir. Ancak, öğrenciler bu problem üzerinde çalışırken ön bilgileri aktif haline gelecektir. Örneğin öğrenciler "tipik" kelimesini ve okulun genel durumunu yansıtan bir sınıfı nasıl belirleyebileceklerini tartışabilirler (örneğin, düşün-ikili takım oluştur-paylaş yöntemiyle tartışılabilir). Öğretmen ortaya çıkan fikirleri,*ders esnasında* öğrencilerin kullanması için tahtaya listeleyebilir.

Tahmin ya da Zihinsel Hesaplamalar Yapın. Eğer etkinlik, hesaplamalara dayalı bir yöntemin gelişimini amaçlıyorsa, önce aşamasında öğrencilerin bu hesapları zihinden yapmaları sağlanabilir ya da tahmini bir cevap istenebilir. Bu, alıştırma probleminin değerini düşürmez. Aslında gerçek cevabın ne olduğu hakkında bir merak uyandırabilir. Bu teknik daha önce sorulan "sahile ulaşmak için daha ne kadar yol gitmeliyiz?" sorusuna uygundur. Bir sonraki etkinlik ön bilgileri aktif hâle getirebilecek dersin başında hazırlık amaçlı tahmin ya da zihinsel hesaplamaların yapılabileceği bir örnektir.

Kavram: Çarpma
Sınıf düzeyi: 4-5

Boyu 54 birim, eni 36 birim olan bir dikdörtgenin içine kaç tane küçük birim kareler sığar? Onluk taban bloklarını kullanarak çözümünüzü gerçekleştirin. Dikkat edin onluk taban blokları birler (bir küp), onlar (on küpten oluşan bir sıra) ve yüzlerden (10 x 10 kare) oluşmaktadır. Planınızı öyle yapın ki toplam alanı çok fazla saymak zorunda kalmadan bulunuz. Planınızın boyu 27 birim, eni 42 birim olan bir dikdörtgende basıl uygulanabileceğini açıklayınız.



Bu problemin çözümünü tahmin etmeden önce daha basit birkaç problemle (örneğin, 30 × 8 ebatlarında ya da 40 × 60 ebatlarında dikdörtgenlerin alanlarının belirlenmesi gibi) başlamak faydalı olabilir.

2. Problemin Anlaşıldığına Emin Olun. Problemin anlaşılması tercihe bırakılmamalıdır! Öğrenciler çalışmaya başlamadan önce onların problemi anladıklarından emin

olmalısınız. Problemi önceden analiz edip öğrencilerin yaklaşımlarını ve olası yorumlamalarını ve kavram yanılgılarını tahmin etmeniz önemlidir (Wallace, 2007). Problem çözme işleminde bu aşamada harcanan zaman dersin sonraki bölümleri için çok önemlidir. Öğrencilere sorular sorarak problemin anlaşılıp anlaşılmadığı kontrol edilir (örneğin, problemi nasıl çözebileceklerinden ziyade problemin ne demek istediğini anlamak üzerine sorulan sorular gibi). Örneğin, "Ne biliyorsunuz?" ve "Neyi bilmeye ihtiyacınız var?" gibi soruların sorulması, bir matematik eğitimi araştırmacısı ve öğretmen olan Wallace'a göre önemlidir: "Problemin çözümüne başlamadan önce ne kadar soru sorulursa öğrenciler problem çözme aşamasında o kadar az öğretmenin yardımına ihtiyaç duyacaklardır" (s. 510).

Çarpım tablosunun öğrenilmesine yönelik probleme dayalı bir yaklaşım düşünelim. En zor çarpımların öğrenilmesi dahi daha önceden öğrenilmiş basit çarpımlarla ilişkilendirilebilir.

Kavram: Çarpımlar
Sınıf düzeyi: 3-4

Bir "yardımcı kuralı" (daha önceden çarpım kuralı ile ilgili bildiğiniz bir bilgiyi) kullanarak şu problemleri çözünüz:4 × 6, 6 × 8, 7 × 6, 3 × 8.

Bu problem için öğrencilerin daha önce çarpım tablosundan öğrendikleri basit çarpım kurallarını burada nasıl kullanacaklarını görmeleriönemlidir. Toplama yaparken bu tür yardımcı bilgileri öğrenciler büyük olasılıkla kullanmışlardır. Sizde bu öğrendikleri ön bilgilerle ilişkilendirmek için onlara: "Toplamayı öğrenirken 6 + 6 işleminin cevabını bilmeniz size 6 + 7 işleminin sonucunu bulmaya nasıl yardımcı oluyordu?" sorusunu sorabilirsiniz. Bunun yanında öğrencilere bildikleri bir bilginin ne anlama geldiğini anlamalarına yardımcı olabilirsiniz-sayma ihtiyacı duymadan sonucunu bilmek gibi.

Aşağıda verilen örnekteki gibi bir dört işlem probleminde, öğrencilere problemi nasıl çözeceklerini söylemeden problemin ne demek istediğini anlamalarına yardımcı olmak önemlidir.

Kavram: Çarpma ve Bölme
Sınıf düzeyi: 3-5

Yerel şeker mağazası şekerleri 12 kutu alabilen büyük karton kutular halinde satın almaktadır. Bir büyük kartonun fiyatı $42.50. Küçük kutular 8'er şeker içermekte olup mağaza taneyle satış yapmayı planlamaktadır. Her bir şekerin mağazaya maliyeti ne kadardır?

Etkinlikle ilgili şu hazırlık soruları sorulabilir: "Şeker mağazası ne yapmaktadır? Büyük karton kutuların içinde ne vardır? Küçük karton kutuların içinde ne vardır? Büyük karton kutunun fiyatı ne kadardır? Küçük kutu denmekle ifade edilmek istenen nedir?" Son soru öğrencilerin yanlış anlamasına açık bir sorudur. Öğrencilerin soruyu size açıklayabilmelerinde fayda vardır. Öğrencilerden soruyu tekrar okumalarını istemek yerine soruyu kendi cümleleri ile ifade etmelerini istemek problemi anlamalarına yardımı olacaktır.

Eğer okumakta güçlük çeken ya da anadili İngilizce olmayan öğrencilerin yardıma ihtiyacı olabilir. Problem içinde kullanılan kelimelerin anlaşılmasına önem verilmelidir. Grafik Düzenleyiciler (gerekli bilgilerin kayıt edilebildiği yerlere sahip broşürler), metni okumak ve anlamak için yardımcı olabilir.Anadili İngilizce olmayan öğrencileri destekleyici daha fazla bilgi için Bölüm 4'te bulunan Tablo 4.1'e ve Bölüm 6'ya bakınız.

3 Beklentilerinizi Açıkça İfade Edin. Beklentilerin oluşturulmasının iki bileşeni vardır: öğrenciler nasıl çalışacaklar ve dersin sonunda tartışmak üzere ne hazırlayacaklar. Bunların her ikisi de gerekli olup göz ardı edilemez.

Öğrenciler gruplar halinde çalışsınlar ya da çalışmasınlar, *ders sonrası* evresinde düşüncelerini paylaşmadan önce, kendilerininbir ya da daha fazla arkadaşıyla fikirlerini tartışmak için biraz fırsat bulmaları her zaman iyidir. Öğrenciler yalnız çalıştıkları zaman, fikir üretmede ya da takıldıklarında kendilerine yardımcı olacak kimse bulamazlar. Diğer yandan, grup halinde çalıştıklarında ise grupta katkıda bulunmayan ya da baskın bir öğrencinin gölgesinde kalan öğrencilerle karşılaşmak her zaman olasıdır.

Matematik eğitiminde önde gelen isimlerden biri olan Buschman (2003b), *düşün-yaz-ikili takım oluştur-paylaş* yaklaşımını önererek öğrencilerin ikili oluşturarak problemin çözümünü sınıfa anlatmadan önce bunu yazmaları ya da çözümü birbirlerini anlatmaları gerektiğini belirtmiştir. Çözümün paylaşılmak üzere yazılı hâle getirilmesiyle iki öğrenci konuşma fırsatı bulmuş olur. Düşün-yaz-ikili takım oluştur-paylaş yaklaşımı bütün öğrenciler için uygun olsa da özellikle problem çözümünü tartışmaya nasıl başlanacağını ve hatta beraber nasıl çalışılacağını tam olarak bilmeyen anaokulu ve 1. sınıf öğrencilerine yardımcı olur.

Problem çözme ile öğretim öğrencilerin sadece cevaba odaklanmalarına değil o cevaba nasıl ulaştıklarını da odaklanmalarını gerektirir. Bu nedenle, öğrencilerinizden dersin sonunda sunmalarını istediğiniz nihai ürünü modellemenizin ve açıklamanızın önemi büyüktür. Bir beklentiniz problemle ilgili yazılı bir açıklama olabilir. Yazmak öğrencilerin matematik öğrenimini desteklemektedir (Pugalee, 2005; Steele, 2007) ve ayrıca yazılı açıklamalara atıfta bulanabileceklerindenöğrencilerin sınıf içindeki tartışmalarına katkıda bulunabilir. Öğrenciler yazılı açıklamalarla birlikte ya da onlarsız çizelge ya da grafik kullanmayı seçebilirler (bkz. Şekil 3.9). Şekil 3.9'daki örnekte, öğrencilerden iki katlı bir binada 5 kişinin kaç farklı bir şekilde kalabileceğini göstermeleri istenmektedir. Öğrencilerle düşüncelerini gösteren nasıl bir resim çizebileceklerini tartışın. Öğrencilerin problemi anlamalarını sağlamak ne kadar önemliyse, dersin *sonra* aşamasında sizin onlardan paylaşmalarını beklediğiniz nihai ürünü anlayıp anlamadıklarını kontrol etmeniz de o kadar önemlidir.

Anaokulu
5'in ne anlama geldiğini kaç farklı yoldan gösterebilirsiniz?



Şekil 3.9 Bir anaokulu öğrencisi 5 yapmanın yollarını göstermektedir.

Ders *Esnası* Evresi

Ders *esnası* evresinde öğrenciler verilen etkinliği (bireysel, ikili takımlar halinde ya da küçük gruplar içinde) incelerler. Bu esnada ilgilenmek isteyeceğiniz açık gündemler vardır:

1. *Serbest Bırakın!* Öğrencilere aşırı rehberlik etmeden çalışma şansı tanıyın. Mücadeleyi benimsemelerine izin verin ve onları teşvik edin-bu matematik yapmanın önemli bir parçasıdır.
2. *Aktif dinleyin.* Bu zamanı farklı öğrencilerin nasıl düşündüklerini anlamak, hangi fikirleri kullandıklarını saptamak ve probleme nasıl yaklaştıklarını belirlemek için kullanın. Bu aşama gözlem ve değerlendirme yapmak içindir-öğretmek için değil.
3. *Uygun ipuçları verin.* Tüm ipuçlarını öğrencilerin fikirlerinde ve düşünme yollarına dayandırın. Problemin doğru çözüm yolunun sizde olduğunu ima etmekten kaçının.
4. *Konuyu genişletecek değerli fikirler sunun.* Problemi çabuk bitiren öğrenciler için hazır fikirler bulundurun.

Ders *Esnasında* Öğretmenin Eylemleri

Erken bitiren öğrencilerin hazırlanması hariç bu gündemler, öğrencilerine gerekenden fazla yardım etme eğiliminde olan öğretmenleri zorlayabilir. Öğretmen, bir rehber rolü üstlenerek ne zaman öğrencilerin kendi başlarına çalışmalarına ve ne zaman bir ipucu vereceğine karar verir. Bu kararlar öğrencilerin dikkatli dinlenmesi ve dersin içerik amaçlarının bilinmesine dayanır.

1. Serbest Bırakın! Öğrenciler problemi anladıklarında, artık serbest bırakma zamanı gelmiştir. Ders *esnasında* "öğrencilerin zorlandıklarını görmek" sizi müdahale etmek için kışkırtsa da kendinizi tutmanız gerekir. Matematik yapmak zaman alıcıdır ve çözümler her zaman açık değildir. Öğrencilere problem üzerinde zaman harcama farklı yaklaşımları denemenin ve birbirlerine danışmalarının matematiği öğrenmeleri ve anlamaları için mühim olduğunu belirtmek önemlidir. Öğrenciler takıldıklarında "Bu çözdüğümüz diğer bir probleme benziyor mu?" "Çizim yapmayı denedin mi?" "Bu problemi zor yapan nedir?" gibi sorular sorulabilir. Bu yaklaşım, problemin nasıl çözüleceğini söylemeden öğrencilerin düşüncelerini desteklediği için etkilidir.

Öğrenciler size cevaplarını ya da fikirlerini onaylatmak isteyeceklerdir. Onay merkezi olmaktan kaçının. Bir sonucun veya yöntemin doğruluğu sorulduğunda, "Buna nasıl karar verebilirsin?" "Neden onun doğru olabileceğini düşünüyorsun?" ya da "Doğruluğunu bir şekilde kontrol edebilir misin?" şeklinde sorular sorarak cevaplayınız. "Bunun mantıklı bir cevap olduğunu nasıl söyleyebiliriz?" sorusunu sormak öğrencilere cevaplarının mantıklı bir açıklaması olmadan kabul edilmeyeceğini hatırlatır.

Öğrencileri serbest bırakmak ayrıca onların hata yapmalarına izin vermek anlamına gelir. Bir hatayı ya da yanlış bir düşünceyi gözlemlediğinizde onu o anda düzeltmeyin. Öğrenciler daha en başından hatalarının birer öğrenme fırsatı olabileceğini öğrenmeleri gerekir (Boaler & Humphreys, 2005). En iyi tartışmalar öğrenciler fikir ayrılıklarına düştükleri zaman olur.

Öğrenciler hata yaptıklarında, onlardan süreci ya da yöntemi açıklamalarını isteyin. Kendi hatalarını kendileri yakalayabilirler. Ayrıca, dersin *sonrasında*, öğrencilerin çözümleri ve stratejileri açıklamak, doğrulamak, savunmak ve sorgulamak için fırsatları olacaktır. Bu süreç, hatalardan ve kavram yanılgılarından öğrenmek için imkânlar tanımaktadır.

2. Aktif Dinleyin. "Aktif dinlemek" bir öğrencinin probleme yönelik yaklaşımını anlamaya çalışmanız demektir. Sonuç olarak sorularınız öğrencilerin düşüncelerini anlamaya yönelik olmalıdır; sonuçlar beklenmedik olabilir. Bu belirli bir yanıtı ya da sizin cevap olarak bildiğinizi dinlemekten farklıdır ve cevabın ortaya çıkarılması ile ilgilidir. Bu süreç, öğrencilerin aklınızdaki cevaba doğru "kanalize edilmesi" şeklinde ifade edilebilir.

Ders *esnası* evresi öğrencilerinizin ne bildiğini, nasıl düşündüklerini ve verdiğiniz göreve nasıl yaklaştıklarını belirlemek için karşınıza çıkan iki fırsattan biridir (diğeri ders*sonrası*aşamasıdır). Bir grupta oturup ve basitçe onları dinlemeniz, öğrencilere düşüncelerini açıklamak için müsaade edip bir yandan arada sırada not almanız bunu gerçekleştirmenize olanak sağlar. Eğer daha fazla bilgi edinmek isterseniz, "Bana ne yaptığınızı anlatır mısın?" ya da "Bu sayıları çarparak başladığını görüyorum. Bunları neden çarptın? Açıklar mısın?" gibi sorular sorabilirsin. Öğrencilerde ne yaptıkları ve ne düşündükleri hakkında gerçekten ilgi uyandırmak gerekir. Şimdi öğrencileri değerlendirmenin ya da problemi nasıl çözmelerini söylemenin sırası değildir.

"Bu kolay." "*Sana yardım edeyim."* Bu iki basit cümle öğrencilere iki talihsiz mesaj verir. Birincisi, yardım isteyen öğrenciler için problem hiçte kolay değildir. Öğrenciler şu şekilde düşünebilir, "Eğer kolaysa ve ben anlamıyorsam, ben gerçekten aptal olmalıyım." İkinci cümlede olumsuz bir mesaj verebilir. Bu şunu ima etmektedir, "Sen bunu kendi başına yapmak için yeterli değilsin. Benim sana yardımcı olmam lazım."

Aktif dinlemek soruları sormayı içerir, örneğin aşağıdakiler gibi:

- Şuana kadar hangi fikirleri denedin?
- Bana …… hakkında daha fazla bir şeyler söyleyebilir misin?
- Neden …. yaptın?
- Nasıl çözdün?

Bu soruları sorarak öğrencilerin kavramları anlama düzeylerini belirleyebilirsiniz.

3. Uygun İpuçları Verin. Eğer bir grup ya da öğrenciler probleme nasıl başlayacakları hakkında kararsız görünüyorlarsa, bir ipucu uygun olabilir. Öğrencilere eğer uygunsa belirli bir materyal kullanımını, resim çizmeyi ya da tablo yapmayı önerebilirsiniz. Ya da "Başlamalarına İzin Verin!" bölümündeki gibi sorular sormayı deneyebilirsiniz.

Kavram: Yüzde Artışı ya da Azalışı
Sınıf düzeyi: 6-8

Fern Mobilya Mağazasında, Bayan Fern bütün mobilyaları, toptan satış fiyatının yüzde 20'si üzerinden fiyatlandırmıştır. Mobilya satışını arttırmak için çalışanlarına bütün fiyatlarda yüzde 10 indirim yapmalarını söyler. Bu durumda Bayan Fern yüzde 10 kar mı yapar? Yoksa yüzde 10'dan az mı kar yapar? Ya da yüzde 10'dan fazla mı kar yapar? Cevabınızı açıklayınız.

Bu problem için şu ipuçlarını düşünün:

- Bir şeyin resmini ya da grafiğini çizerek yüzde 10 eksiğinin ne anlama geldiğini gösteriniz.
- Bir şeyin resmini ya da grafiğini çizerek yüzde 20 fazlasının ne anlama geldiğini gösteriniz.
- Örnek bir başlangıç fiyatı seçip önce yüzde 20 eklediğinizde ne olduğunu bulabilir ve daha sonra yüzde 10 indirim yaptığınızda ne olduğuna bakabilirsiniz.
- Daha basit bir problem deneyelim. Diyelim ki senin 8 tane bloğun vardı ve yüzde 25 daha aldın. Daha sonra şuan ki pullarının yüzde 25'ini kaybettin.

Dikkat ederseniz bu öneriler, yönlendirmekten ziyade daha çok probleme başlangıç yapmak için kullanılır. Bu önerilerden hangisini kullanacağınıza öğrencileri dikkatlice dinleyip onların ne yapmak istediklerini ya da ne düşündüklerini anladıktan sonra karar verebilirsiniz. Önerinizi yaptıktan sonra oradan ayrılın. Öğrencilerin etrafında dolaşmayın yoksa öğrenciler sizden yeni öneriler sorma arayışı içerisine girerler.

4. Değerli Genişletmelere Zemin Oluşturunuz. Bazı öğrenciler her zaman diğer sınıf arkadaşlarından önce bitireceklerdir. Erken bitirenlere ek iş verilmiş gibi bir his uyandırmadan çözmüş oldukları problemle ilgili olarak sorular sorulabilir. (üstün yetenekli öğrencilere yönelik yöntemler için Bölüm 6'ya bakabilirsiniz.) Devam eden matematik projeleri de bu amaç için kullanılabilir. Örneğin, erken bitiren öğrenciler kalan zamanlarını bu projeleri tamamlamak için kullanabilirler.

Birçok güzel problem görünürde basittir. Zor olan bu problemlerin devamında sorduklarınızdır. Bu bölümdeki alan ve çevre problemleri bu açıdan örnek olarak verilebilir. Birçok öğrenci bir ya da iki çözüm yolu bulacaklardır. "Görüyorum ki problemi çözmek için bir yol bulmuşsun. Daha farklı çözüm yolları olabilir mi? Bunlar birbirlerinden farklı ya da daha ilginç olabilir mi sence? Çevresi 18 birim olan şekillerden hangisi en fazla alana, hangisi en az alana sahiptir? Yeni bir kare eklediğinizde çevre her zaman artar mı?"

"… olursa ne olur?" ya da "Bu fikir sence bu durum içinde uygulanabilir mi?" gibi sorular öğrencilerin düşünmelerini onları motive ederek devam ettirmelerini sağlar. Örneğin, "Diyelim ki çevresi 18 birim olan bütün şekilleri belirlediniz. Peki alanlar hakkında ne söyleyebilirsiniz?"

Öğrencilerin bir problemi birden fazla yolla çözmelerinin değeri yadsınamaz. Bu yöntem sınıftaki değer sistemini değiştirerek sonuçtan ziyade sürece ve düşünceye önem verilmesini sağlar. Öğrencilerin yeni ve farklı bağlantılar kurması için iyi bir yoldur.

Buna bir örnek olarak aşağıdaki altıncı sınıf problemi verilebilir.

Kavram: Yüzde Artışı ya da Azalışı
Sınıf düzeyi: 6-8

Elbise başlangıçta $90 olarak fiyatlandırılmıştı. Eğer satış fiyatı yüzde 25 düşürülürse, yeni satış fiyatı ne olur?

Bu örnek tek bir cevabı olan düz bir problemdir. Birçok öğrenci bu problemi çözmek için önce $90'ı 0.25 ile çarpıp sonra sonucu $90'dan çıkaracaktır. Buna ek olarak belki başka bir yol ile sonucu bulmak önerisini yapmak gerekir. Daha özel öneriler de getirilebilir: "Bu soruyu ondalık sayı ile değil de kesirlerle nasıl çözerdin? "Bana bir şekil çizerek ne yaptığını açıklar mısın?" "Bu soru sence tek bir adımda nasıl çözülebilir?" "Zihinden çözmeyi deneyebilirsin."

İkinci sınıflar sıradaki problemi sıklıkla ya sayarak ya da toplama işlemini kullanarak çözeceklerdir.

Kavram: Toplama ve Çıkarma
Sınıf düzeyi: Anaokulu-2

Maxine $9 biriktirmişti. Ertesi gün harçlığını aldı. Şimdi $12'ı var. Ne kadar harçlık almıştır?

"Bu soruyu hesap makinesi ile nasıl yapardınız?" ve "Bu durumu temsil edecek iki denklem/eşitlik yazabilir misin?" gibi sorular öğrencileri $9 + ? = 12$ ile $12 - 9 = ?$ arasında ilişki kurmaya teşvik eder.

Ders *Sonrası* Evresi

Dersin *sonra* aşamasında öğrencileriniz öğrenenler topluluğu şeklinde çalışarak çözümlerini tartışıp doğruluğunu gösterecek ve diğer çözümlerin doğruluğunu sınayacaklardır.

Öğrenciler bireysel ve toplu olarak keşfettikleri bilgileri ders sonunda sergilediklerinden öğrenmenin birçoğu bu aşamada gerçekleşecektir. Bu aşama için yeterli zamanın ayrılması gerçekten çok önemlidir ve ders *esnasında* geçen süreyi çok uzun tutmamak gerekir. Ders *sonrası* aşamasında gündemi ifade etmek kolaydır ancak başarması zordur:

1. *Matematik öğrenenler topluluğu oluşturmayı teşvik etmek.* Bu ölçüt bütün öğrencileri içerir. Öğrencileri üretken tartışmalar içine sokmaya ve birlikte öğrenmelerine yardımcı olmaya çalışınız.

2. *Doğru-yanlış tespiti yapmadan aktif bir şekilde dinleyin.* Bu ikinci büyük fırsatı kullanıp öğrencilerin nasıl düşündüklerini, probleme nasıl yaklaştıklarını anlamaya çalışın. Yöntemlerin ve çözümlerin değerlendirilmesi ise öğrencilerin sorumluluğundadır.

3. *Temel fikirleri özetleyin ve gelecekte çözülecek problemleri belirleyin.* Bu aşamayı, daha sonraki etkinliklerin planlanması için kullanabilirsiniz.

Ders *Sonrası* Evresinde Öğretmenin Eylemleri

Bu aşama için önceden yeterli zamanı planlayın ve daha sonra bu aşama için zaman ayırdığınıza emin olun. Güzel bir sınıf tartışması ve fikirlerin paylaşılması için yirmi dakika ya da fazlasını ayırmaya çok fazla denilemez. Bu nedenle her öğrencinin bitirmesini beklemek gerekli değildir. Bu aşama cevapların kontrol edilme zamanından ziyade öğrencilerin fikirlerinin paylaşılması zamanıdır.

Zamanla, sınıfınızı matematik öğrenenler topluluğu haline getirecek, öğrencilerinizin risk almaya ve fikirlerini paylaşmaya açık olduklarını gözlemleyecek birbirlerinin fikirlerine katılmasalar da saygı duyduklarını görecek ve fikirlerin tartışıldığı, sorgulandığı ve değer verildiği bir ortamı oluşturduğunuzu göreceksiniz. Böyle bir ortam kolayca veya çabucak oluşmaz. Öğrencilerinize ders *sonrası* aşamasındaki beklentilerinizi öğretmeniz ve birbirleriyle saygılı iletişimi nasıl kurabileceklerini göstermeniz gerekir.

1. Bütün Öğrencileri İçeren Matematik Öğrenenler Topluluğunu Teşvik Edin. NCTM, *Standartları*'nda bütün öğrencilerin matematik öğrenebilecekleri inancını açıkça ifade etmiştir. Bu görüş risk altındaki öğrenciler üzerinde çalışma yapan birçok seçkin matematik eğitimcisi tarafındanda desteklenmektedir. (Campbell, 1996; Gutstein, Lipman, Hernandez, & Reyes, 1997; Silver& Stein, 1996; Trafton & Claus, 1994).

Öğrencilerin ihtiyaçları ve becerilerinin farklı olması sebebiyle dengeli ve bütün öğrencileri içeren toplu tartışmaların yapılabilmesi yetenek ve uygulama yapmayı gerektirir. Bununla ilgili olarak Rowan ve Bourne (1994) farklı etnik kökenlere sahip düşük sosyoekonomik yapıya sahip bir okulda yaptıkları çalışmaya dayalı olarak güzel önerilerde bulunmaktadır. Yazarlar, en önemli faktörün grup tartışmalarının amacının net olarak bilinmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Yaniöğrenciler tarafından üretilen farklı yöntemlerin, fikirlerin ve çözümlerin incelenmesi ve paylaşılması ve bunların zengin bir sınıf ortamında tartışılmasının öğrenilmesidir. Her sınıfta her an cevaplamaya hazır meraklı öğrenciler vardır. Bunun yanında pasif ya da katılımcı olmayan öğrenciler de mevcuttur. Dolayısıyla, yapılacak ilk iş, tartışmalara bütün öğrencilerin katılımını sağlamak olacaktır.

Matematiksel toplulukların nasıl geliştiğine ve işlediğine yönelik yapılan birçok araştırma bizlere etkili sınıf içi söylemlerin nasıl geliştirilebileceği hakkında ek bilgiler sunmaktadır (bkz.Rasmussen, Yackel, & King, 2003; Stephan & Whitenack,2003; Wood, Williams, & McNeal, 2006; Yackel & Cobb, 1996).Aşağıda bu araştırmalardan elde edilmiş önerileri bulabilirsiniz:

- Sınıfı dışlayan öğrenci-öğretmen diyaloglarından ziyade öğrenci-öğrenci diyaloglarını teşvik edin. "Juanita, Lora'nın sorusunu cevaplayabilir misin?" "Devon, ne demek istediğini La Toya ve Jose'un anlayacakları şekilde açıklar mısın?" Öğrencilerin farklı çözümleri olduğunu görünce bunları bütün sınıfla paylaşmalarını sağlayın. "George, görüyorum ki Tomeka'dan farklı bir cevabın var. Onun açıklaması hakkında ne düşünüyorsun?"
- Bütün cevapları açıklamaları ile birlikte isteyin. Bir süre sonra öğrenciler kendilerinden açıklama istenmesinin cevaplarının yanlış olduğu anlamına gelmediğini anlayacaklardır. Doğru cevap her zaman doğru düşüncenin bir ürünü olmayabilir. Yanlış cevaplar da kolaylıkla düzeltilebilecek hatalardan kaynaklanıyor olabilir. Açıklama yapılmasının zorunlu tutulmasıyla öğrenciler matematikte akıl yürütmenin önemli ve gerekli olduğunu öğrenirler.
- Öğrencileri fikirlerini paylaşmaları için davet edin. Özellikle utangaç ya da kendilerini ifade etmekte zorlanan öğrencilere öncelik verin. Konuşmaları için davet edildiklerinde ve düşüncelerini ifade etmeleri için yeterli zaman verildiğindebu sessiz öğrenciler kolaylıkla kendilerini ifade edebilecekler ve bu nedenle değer verildiklerini anlayacaklardır. "Kim çözümünü açıklamak ister?" gibi bir soruyu sormak her zaman katılan üç-dört istekli öğrencinin el kaldırmasıyla sonuçlanacaktır. Diğer öğrenciler ise bu öğrencilerin cevaplarının genellikle doğru olduğunu düşünüp farklı fikirleri paylaşmakta isteksiz olabilirler. Ders *esnasında* sınıf içinde dolaşıp ilginç çözümleri belirlemenizin (yanlış olanlarda dâhil olmak üzere) dersin sonunda yapılan tartışmaya katkısı olabilir. Her günkü beklentileriniz doğrultusunda bütün öğrenciler fikirlerini paylaşmak üzere hazırlıklı olmalıdır.
- Öğrencileri soru sormaları için teşvik edin. "Pete, nasıl yaptıklarını anladın mı? Antonio'ya soru sormak istermisin?"
- Siz ne anlıyorsanız öğrencilerinizin de onu anladığına emin olun. Konu hakkındaki bilginiz bazen öğrencilerin açık olmayan cevaplarını siz anladığınız için kabul etmenize sebep olabilir. Böyle durumlarda, öğrencinin açıklamasında sizce önemli olan bir bölümü alıp bu açık olmayan cevabın sizde uyandırdığı kafa karışıklığını paylaşabilirsiniz veöğrenciden ifadesini daha anlaşılır bir hâle getirmesini isteyebilirsiniz. "Carlos, burada neden 9'u çıkardığını tam olarak anlayamadım. Bize bunu neden yaptığını açıklayabilir misin?" Öğrencilere kafa karışıklığının normal olduğunu ve bu durumlarda açıklamaya yönelik soruların sorulmasında bir sorun olmadığını gösterin. Öğrencileriniz için öğretim amaçlarından biride sizin tavsiyeniz olmadan bu tip soruları sormalarıdır.

- Bazen, söylenen fikri anlayan bir başka öğrenciden diğerleri için açıklamalar yapmalarını isteyiniz. "Thandie, belki sen bu fikri kendi cümlelerinle açıklayıp bizlerden bazılarını daha iyi anlamasına yardımcı olursun." Bu arada, bir öğrencinin ben anladım demesini onun gerçekten anladığı anlamına gelmediğini unutmayın.
- Yeri geldiğinde öğrencileri daha çok kavramsal açıklamalarda bulunmaya yönlendirin. Örneğin, bir öğrenci 4.17'in 4.1683'ten büyük olduğunu bildiğini söylerse ona (ya da başka bir öğrenciye) bunun neden böyle olduğunu açıklamasını isteyebilirsiniz. Diğer bir teknik ise "anlamazlıktan gelmektir." Kafanız karışmış gibi davranıp "Bu nasıl olabilir? Sanki ondalıklı kısmı uzun olan sayı daha büyük bir sayı olmalı gibi geliyor bana." Benzer bir şekilde, çözümlerindeki adımları basitçe sıralayan öğrencilerin bu düşüncelerini değiştirin. "Ne yaptığını görüyorum, ancak sanırım bazılarımızın neden böyle yaptığını ve bunun neden bize doğru cevabı vereceği ile ilgili biraz kafaları karıştı."

2. Doğru-yanlış tespiti yapmadan aktif bir şekilde dinleyin. Yargılamadan yardımcı olduğunuzda öğrenciler tartışmalar sırasında fikirlerini paylaşmak için daha istekli olacaklardır. Böylelikle onların düşüncelerini daha iyi anlar ve değerlendirebilirsiniz. Tartışmaları mümkün olduğunca bölmeden dikkatlice dinleyin. Burada elde ettiğiniz bilgileri yarınki dersin planlanmasında kullanabilirsiniz ve genel olarak şuan üzerinde çalıştığınız ünitede ne doğrultuda ilerlemek istediğinize karar verebilirsiniz.

Verilen bütün cevaplara karşı tarafsız olmaya çalışın. Cevapların doğrulatılmasına yönelik girişimlere karşı koyun. Cevapların, ister yanlış olsun ister doğru olsun, daha iyi anlaşılmasına yönelik sorular sorabilirsiniz. "Doğru yaptın Dewain" dediğiniz zaman artık öğrencilerin cevabı değerlendirmeleri için bir sebep kalmaz. Öğrencilerin Dewain'in cevabına katılmadıkları ya da onunla ilgili soruları oldukları zaman cevabın doğru olduğunu söylemenizden dolayı sorularını sormayacaklar ya da Dewain'in cevabını sorgulamayacaklardır. Sonuç olarak, öğrencilerin ne söyleyeceklerini duyamayacak ve öğrenemeyeceksiniz. Öğrencilerin düşüncelerine onları değerlendirmeden destek olabilirsiniz. "Başka kimsenin farklı düşüncesi var mı ya da Dewein'in söyledikleri üzerine yorum yapmak ister misiniz?"

Övgü cümlelerini dikkatlice kullanın. Doğru cevaplara verilen övgüler ya da ilginç bir düşünce karşısında sergilenen coşku, öğrencilerde olağandışı ya da beklenmeyen bir cevap verilmiş algısı doğurabilir. Bu durum övgü almayan öğrencilerde olumsuz bir etki bırakabilir. "Aferin!" ve "Çok iyi!" gibi yorumlar çok kolay söylenen sözlerdir. Bununla beraber, araştırmalar özellikle öğrencilerin cevaplarına ya da ortaya çıkardıkları ürünlere yönelik söylenen övgü cümlelerinde dikkatli olunması gerektiğini belirtmişlerdir (Kohn, 1993; Schwartz, 1996).

Yargı belirten övgüler yerine Schwartz (1996) ilgi gösteren ve kapsam genişleten cümlelerin kurulmasını önermiştir: "Merak ediyorum, eğer …. denersen ne olur?" ya da "Bana nasıl yaptığını anlatır mısın lütfen?" Dikkat ederseniz bu cümleler öğrencinin düşüncesine ilgi duyulduğunu ve değer verildiğini gösterir.

Öğrencilerin açıklamaların ortasında kafalarının karıştığı ya da cevap veremedikleri zamanlar olacaktır. Bu durumlarda başka birinin "yardımını" istemede dikkatli olun. Böyle yaparak öğrenciye yetersiz olduğu mesajını veriyor olabilirsiniz. Her zaman yeterli zaman tanıyın. Bazen öğrenciden ona sonra geri dönmeye söz vererek diğer öğrencilerin düşüncelerini alabilirsiniz ama mutlaka geri dönüp öğrencinin ne bulduğunu dinlemelisiniz.

3. Temel Fikirleri Özetleyin ve Gelecekte Çözülecek Problemleri Belirleyin. Fikirleri özetlemek için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Sınıfça yapılan tartışmalar temel fikirleri öğrencilerin ağzından duymanızı sağlayabilir. Sözlü paylaşımlar birçok yolla yapılabilir. Örneğin, öğrencinin biri temel bir fikri söylerken arkadaşı buna bir örnek verebilir. Sözlü özetlerin ardından özet fikirlerin yazılı olarak da alınması her öğrencinin dersten ne öğrendiğini anlamanızı sağlamak için önemlidir. Örneğin ders sonunda öğrencilere, üzerinde dersin temel fikirlerini açıklamalarını isteyen sorular bulunan el broşürleri bu amaçla kullanılabilir (ya da daha küçük öğrencilere resim çizmeleri söylenebilir). Bunlar matematik dersi "biterken" öğrencilere verilir. Ya da öğrencilere günün etkinliğini tarif eden bir gazete başlığı yazmalarını ve küçük bir sütunda bu etkinliği kısaca anlatmalarını söyleyebilirsiniz. Öğrencilerinizi yazmaya yönlendirecek birçok şablonlar mevcuttur.

Fikirler iyi bir şekilde geliştiğinde uygun terminolojinin, tanımların ya da sembollerin kullanımını teşvik edin. Bunlar fikirlerin oluşmasından sonra gelmelidir, önce değil. Eğer bir problem bir işlemin ortaya çıkarılmasını içeriyorsa (örneğin bir hesaplama yöntemi, temel gerçekler için bir yöntem ya da ölçme formülü gibi) tahtaya yararlı olabilecek yöntemleri yazın. Bunlar, öğrencilerin isimleri ve bir örnekle etiketlendirilebilir. Böylelikle, bu yöntemler daha sonra ileriki derslerde öğrencilerin kullanımı için hazır bulunur.

Çoğu zaman bir öğrencinin genelleme yaptığını ya da doğru olduğuna kuvvetle inandığı bir gözlemden bahsedip bunu tamamen kanıtlayamadığını görebilirsiniz. Test edilmeyen fikirler tahtaya yazılıp yanına varsayımda bulunan öğrencinin ismi yazılabilir. Örneğin, "Andrea'nın Varsayımı." *Varsayımın* anlamını doğru ya da yanlış olabilen bir fikir olarak açıklayınız. Varsayımın test edilmesi gelecekte çözülebilecek bir başka problem olabilir ya da varsayım kendisini destekleyen ya da aksi bir kanıt gelene kadar tahtada yazılı durabilir. Örneğin, kesirlerin karşılaştırılmasında, varsayın ki bir grup şu genellemeyi yapmış ve siz bunu tahtaya yazıyorsunuz: *Hangi kesrin büyük olduğuna karar verirken kesirde alttaki sayı yukarıdaki sayıya ne kadar yakınsa o kesir daha büyüktür. Örnek:* $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{8}$ *kadar büyük değildir çünkü* 7, *8'den 1 uzaktadır, fakat* 4, *7'den 3 uzaktadır.* Bu olağan dışı bir sonuç değildir, fakat hiçte doğru değildir. Bir sonraki günün problemi böyle bir varsayımın her zaman doğru olup olmayacağının belirlenmesi ya da bu varsayıma uymayan kesirlerin bulunması olabilir (karşı örnekler).

Öğrenciler varsayımlarda bulunmasalar bile tartışmalar sonunda ilginç sorularla karşılaşılıp bunların daha sonra araştırılması yeni kavramların gelişmesine yardımcı olabilir.

Sıkça Sorulan Sorular

Aşağıdakiler öğretmenlerin problem çözme ile öğretimin uygulamasına yönelik sordukları sorulardır.

1.*Öğretmem gereken bütün temel becerileri/kuralları nasıl öğretebilirim?* Özellikle merkezi sınavların baskısı altında "temel becerilerin/kuralların" öğretiminde alıştırma ve soru çözme yöntemine başvurulması caziptir. Bazı insanlar temel kuralların/işlemlerin öğrenilmesinin probleme dayalı yaklaşımla gerçekleştirilemeyeceğine inanmaktadır. Bununla beraber, bulgular bunun tam tersini söylemektedir. Aslına bakılırsa, Amerikan sınıflarındaki alıştırmaya dayalı yaklaşımlar sürekli yetersiz sonuçlar doğurmuştur (Battista, 1999; Kamii & Dominick,1998; O'Brien, 1999).Düşük seviyeli becerilerdeki kısa süreli kazanımlar belki alıştırmaların sonucu olabilir, ancak merkezi sınavlar dahi temel becerilerden daha fazlasını istemektedir.

İkincisi, araştırma bulguları, merkezi sınav sonuçlarına göre yapılan değerlendirmede, probleme dayalı yaklaşıma yönelik programlarda eğitim alan öğrencilerin temel becerilerdeki başarılarının geleneksel öğretime dayalı programlarda eğitim alan öğrencilerle aynı düzeyde ya da daha başarılı olduklarını göstermiştir (Campbell, 1995; Carpenter,Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998; Hiebert, 2003; Hiebert & Wearne, 1996; Riordan & Noyce, 2001; Silver &Stein, 1996).Beceri gelişimindeki herhangi bir eksiklik, kavramlar ve problem çözmedeki keskinliktendaha ağır önemlidir.

Son olarak, geleneksel beceriler, temel kurallar-işlemler ve hesaplamalar gibi, probleme dayalı yaklaşımla etkili bir şekilde öğretilebilir (Campbell, Rowan, & Suarez,1998; Huinker, 1998).

2. *Neden öğrencilerin sıklıkla "konuşması" ya da "açıklaması" öğretmenin "konuşması" ya da "açıklamasından" daha iyidir?*Birincisi, **öğrenc**ilerin açıklamaları onların ne anladıklarını gösterir. İkincisi, öğrenciler matematiksel fikirlerini sözlerle ifade ettikçe daha iyi anlamaya başlarlar. Üçüncüsü, öğrenenler topluluğu oluşturduğuna dair sonuçlar bulunmaktadır. Öğrenciler akranlarının açıklamaları bir anlam ifade etmediğinde sorgulayacaklardır. Hâlbuki öğretmenin açıklamaları genellikle sorgulanmadan (ve muhtemelen anlaşılmadan) kabul edilir. Son olarak, öğrenciler açıklama yapma sorumluluğuna sahip olduklarında bazı şeyleri kendilerinin bulabilecekleri ve matematiği anlayabileceklerini görüp kendileriyle iftihar edecekler ve güvenleri artacaktır. Bu güce ve beceriye *onlar* sahipler.

3. *Bir problemi çözerken zorluk çeken öğrencilere yardım etmek doğru mudur?* Elbette zorlanan öğrencileri gördüğünüzde yardım etmek isteyeceksiniz. Ancak, Buschman'ın (2003b) tavsiye ettiği gibi problemin nasıl çözüleceğini söylemekten ziyade öğrencinin neden zorlandığını anlamak daha iyi bir yaklaşım olur. Eğer doğrudan yardım etmek için müdahale ederseniz öğrencinin zorlanmasının gerçek sebebini bulamayabilirsiniz. Bu sebep problemin anlaşılmaması gibi basit bir sebep olabileceği gibi temel bazı kavramların anlaşılmasındaki yetersizlik gibi karmaşık olabilir. Bunu anlamak için "Bana ne düşündüğünü söyler misin?" demek iyi bir başlangıç olabilir.

Şu iki basit sözün olumsuz sonuçlarını önceki tartışmamızdan hatırlayın: *Çok kolay! Dur sana yardım edeyim.* Bunun yerine, öğrencinin bilgisinin üzerine inşa etmeye çalışın. Öğrencileri, başarma duygusundan ve problem çözme süreci sonunda elde ettikleri kazanımlardan yoksun bırakmayın.

4. *Bütün konuları kapsayacak zamanı nerden bulabilirim?* Matematik birçok eyaletin "standartlarında" listelediği kazanımlardan çok daha fazla bağlantılı ve bütünleşik bir yapıya sahiptir. Kapsamla ilgili ilk öneri,her ünite ya da bölümde yer alan temel kavramların yani"ana fikirlerin" gelişimine yönelik bir öğretimin amaçlanmasıdır. Siz bu doğrultuda ilerledikçe kazanımlarda yer alan birçok beceri ve fikirlere değinilecektir. Eğer listedeki her bir kazanıma ayrı ayrı odaklanırsanız, ana fikirlerin gelişmesi ve bağlantıların kurulması ve anlamanın gerçekleşmesi pek mümkün değildir. İkincisi, öğrenciler öğrendiklerini akıllarında tutamadıkları için biz tekrar anlatıma aşırı zaman harcıyoruz. Bu bağlamda fikirler arasında anlamlı ilişkiler kurulması için harcanacak zaman uzun vadede tekrar öğretim için harcanan zamanda önemli ölçüde tasarruf sağlayacaktır.

5. *Öğrencilerin öğrenenler topluluğu oluşturması ve fikirleri paylaşmasını ve tartışmasını öğrenmeleri ne kadar zaman alır?*Bu genellikle tahmin ettiğimizden daha fazla bir zaman alır ve tartışmalar başlangıçta gergin ya da üretken olmayan bir şekilde geçebilir. Öğrencilere, sınıf tartışmalarına nasıl katılacakları ve küçük gruplarda nasıl çalışabileceklerine yönelik rehber olunmalıdır. Okulun ilk haftalarında, bu becerileri açıkça öğretmek ve modellemek için mutlaka zaman ayrılmalıdır. Başlarda katılımların sıklıkla desteklenmesi ve öğrencilerin dinlenmesi gereklidir. Daha sonra, bu alışkanlıklar elde edildiğinde daha az yardım gerekir. İlkokul öğrencileri üst sınıflara göre bu sürece daha çabuk adapte olacaklardır. Çünkü üst sınıflardaki matematik sınıfında sessizce oturulup kurallara uyulması gerektiği algısı henüz oluşmamıştır. Öğrencilerin matematiği anlamak için sorumluluk geliştirmelerinin yaklaşık olarak 6 hafta kadar sürebileceği beklenmektedir. Açıklama istemek ve güzel sorular sormak, ve öğrenenler topluluğu oluşturmak uzun zamanlı kararlılık ister. Vazgeçmeyin!

6. *Öğrenci merkezli probleme dayalı öğretim ile öğretmen merkezli öğretimi birlikte kullanabilir miyim?* Öğretim yaklaşımlarının değiştirilmesi tavsiye edilmemektedir. Yöntemlerin değiştirilmesi öğrencilerin kendilerinden beklenenler konusunda kafa karışıklığına yol açabilir. Daha önemlisi, öğrenciler bir süre sonra kendi düşüncelerinin gerçekten önemli olmadığını çünkü nasıl olsa öğretmenin kendilerine problemi çözmek için "doğru" yolu söyleyeceğini düşünebilirler (Mokros, Russell, & Economopoulos, 1995). Probleme dayalı yaklaşıma öğrencilerin bağlanması için onların, fikirlerinin değerli ve bilginin kaynağının kendileri olduğuna gerçekten inanmaları gerekir-her gün.

7. *Alıştırma ve uygulamaya yer olacak mı?* Kesinlikle! Kavramların geliştirilmesi ya da güçlendirilmesi için alıştırma yapmanın bir yöntem olduğuna inanmak hatalı olur. Alıştırma ancak şu durumlarda uygun olabilir: (a) isteni-

len kavramlar anlamlı bir şekilde oluşturulduğunda, esnek ve faydalı işlemler geliştirildiğinde ve (c) hız ve doğruluk gerektiğinde. Alıştırma ve uygulama ile unutulmaması gereken şey çok az ilerleme olacağıdır. Temel beceriler üzerine yapılan alıştırmalar 10 dakikayı geçmemelidir. 25 adet çarpma problemi sormak yerine 5 adet çarpma problemi ile öğrencinin çarpma işlemini kavrayıp kavramadığını anlayabilirsiniz. Ek olarak sorulan 20 soru ile pek fazla bir şey kazanılmaz. Ayrıca, öğrenciler yanlış yaptıklarında, daha çok alıştırma yapmak ve soru çözmek çözüm değildir. Bunun yerine, kavram yanılgılarının tespiti ve buna yönelik adımların atılması daha etkili olur. Örneğin, bazı ortaokul öğrencileri hâlâ temel çarpma kurallarını bilmiyor olabilirler. Bu durumda 144 kural üzerine alıştırma yapmak bir öğrencinin unuttuğu yöntemler (örneğin yardımcı kurallar) üzerinde çalışmak kadar yardımcı olmayacaktır. (Temel kurallara yönelik yöntemler için Bölüm 10'a bakınız).

8. *Probleme dayalı ders başarısızlığa uğrarsa ne yaparım?* Düşündüğünüz kadar sıklıkla olmasa da sorduğunuz soru karşısında, ne kadar ipucu ya da öneri verseniz de, ne yapacağını bilmeyen öğrencilerle karşılaşacaksınız. Bu durumlarda "söylemek" eğiliminde olmayın. Bir süre bir kenarda durup kendinize neden olmadığını sorun. Öğrenciler gerekli ön bilgilere sahip miydiler? Problem, seviyelerinin çok üzerinde miydi? Çoğu zaman öğrencileri yeniden gruplandırıp bu zor soruya hazırlamak için daha basit bir problem sormamız gerekir. Problemin bir yere ulaşmayacağını hissederseniz yeniden düzenleyin! Günlerinizi harcayıp ta güzel bir şey olacağını ummayın. Eğer öğrencilerinizi dinlerseniz bir sonraki adımda ne yapmanızla ilgili fikirler alacaksınızdır.

Bölüm 3 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Problemile öğretimin faydalarından hangisi sizde en çok yankı uyandırdı? Neden?
2. Matematik öğretimi için kullanılabilen görev ya da problemlerle ne anlatılmak isteniyor? Bu yöntemin etkili olabilmesi için gerekli üç özelliği söyleyin.
3. Polya'nın dört-aşamalı problem çözme süreci *ders öncesi*, *ders esnası ve ders sonrası*planına uygulanabilir. Öğrencilere bu dört adımın her birinde düşüncelerini desteklemek için hangi soruları sorabilirsiniz?
4. Çocuk edebiyatının matematik öğretiminde kullanılmasının faydalarını tartışınız.
5. Öğrencilerin matematik dersinde yazmalarını istemenin ne gibi faydaları olabilir? Ne zaman yazma işlemi gerçekleştirilmelidir? Çok küçük öğrenciler nasıl "yazabilirler?"
6. Kendi cümlelerinizle "matematik öğrenenler topluluğundan" ne anladığınızı ifade edin.
7. Öğretmenin ders öncesi, ders esnası ve ders sonrası aşamalarındaki amacı ya da gündemi nedir?
8. Dersin bu aşamalarında öğretmen ne tür eylemler içinde bulunabilir? Açıklayınız. (Unutmayın bu eylemlerin hepsi her derste yapılacak diye bir kaide yoktur.) Hangi eylemleri her zaman kullanmalısınız?
9. "Çok kolay! Dur sana yardım edeyim." İyi bir fikir değil mi? Problemi çözmede zorlanan öğrenciye yardım etmenin daha iyi bir yolu var mı?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Bu kitabın ikinci kısmındaki herhangi bir bölümden bir etkinlik seçiniz. Bu etkinlik bu bölümde anlatılan öğretimin amacı doğrultusunda bir problem ya da bir görev olarak nasıl kullanılabilir? Bu etkinliği sınıfınızda kullanıyor olsaydınız *ders öncesinde* özellikle ne yapardınız?
2. Herhangi bir sınıf düzeyine ait geleneksel bir ders kitabı bulunuz. Bölümlerine göz atarak dersin içeriğini çok fazla değiştirmeden probleme dayalı bir derse çevirebileceğiniz en az bir ders bulunuz.

Bölüm 3 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Buschman, L. E. (2005). Isn't that interesting! *Teaching Children-Mathematics*, *12*(1), 34–40.

Hartweg, K., & Heisler, M. (2007). No tears here! Third-gradeproblem solvers. *Teaching Children Mathematics*, *13*(7),362–368.

Reinhart, S. C. (2000). Never say anything a kid can say! *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(8), 478–483.

Rigelman, N. R. (2007). Fostering mathematical thinking andproblem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics*,*13*(6), 308–314.

Kitaplar

Boaler, J., & Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematicalideas: Middle school video cases to support teaching and learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Buschman, L. (2003). *Share and compare: A teacher's story abouthelping children become problem solvers in mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Makingsense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Lester, F. K., & Charles, R. I. (Eds.). (2003). *Teaching mathematicsthrough problem solving: Pre-K to 6.* Reston, VA: NCTM.

Sakshaug, L. E., Olson, M., & Olson, J. (2002). *Children aremathematical problem solvers.* Reston, VA: NCTM.

Online Kaynaklar

Annenberg/CPB
www.learner.org/index.html

MathSolutions Lessons from the Classroom
www.mathsolutions.com/index.cfm?page=wp9&crid=56

ENC Online (Eisenhower National Clearinghouse)
www.goenc.com

Writing and Communication in Mathematics
http: //mathforum.org/library/ed_topics/writing_in_math

Bölüm 4

Probleme Dayalı Derslerde Planlama

Doğal öğrenme . . . belirlenmiş bir zaman içinde gerçekleşmez ve genellikle okullarda ona ayrılan zamandan çok daha fazlasını gerektirir. Problem çözme deneyimleri zaman alır. Öğretmenlerin, öğrencilerin kendi etkinlikleri aracılığıyla çalışmaları için ihtiyaç duydukları zamanı sağlamaları ve verimlilik için cevabı söylemeye yönelmemeleri gerekir.

Burns (1992, s.30)

Bölüm 3'te öğrencilerin problemle uğraşma gereksinimlerine dayalı, tartışma ve derinlemesine düşünme için zaman ayıran üç-aşamalı ders biçiminin temel yapısı tanımlanmıştır. Fakat, bu öğretimsel modelin başarılı bir şekilde uygulanması için mevcut şartların da göz önüne alınması gerekmektedir.

Bu bölüm, probleme-dayalı derslerin planlanması için adım adım yapılan yönlendirmeyle başlamaktadır. Burada, ders kitaplarının etkili kullanımı, ev ödevlerine yönelik tavsiyeler, alıştırma ve uygulamayla ilgili konular ve çeşitli biçimlerde öğrenenler için ipuçları içeren üç-aşamalı yapının bazı değişkenleri incelenmiştir. Kısaca bu bölüm, bir probleme- dayalı matematik dersinin planlanmasının "alfabesi"ni tartışmaktadır.

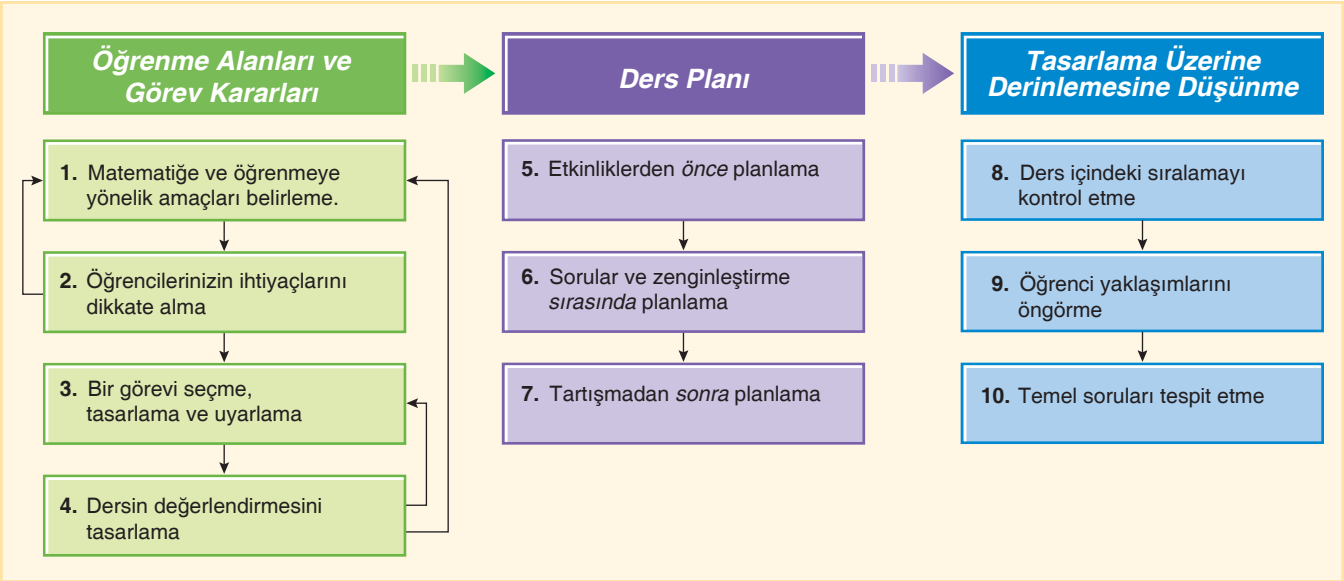
Probleme-Dayalı Dersin Planlanması

Deneyiminize bakmaksızın, derslerinizi planlanmaya yönelik yeterli düzeyde düşünme zamanı ayırmanız önemlidir. Burada, planlanan ve sunum sırasına göre işlenilecek şekilde her dersi basitçe öğretebileceğiniz bir "öğretmen-ispat" öğretim programı gibi bir durum yoktur. Her sınıf farklıdır. Görevlerin seçimi ve bunların öğrencilere nasıl sunulacağı, çeşitli biçimlerde öğrenen öğrencilerin ihtiyaçlarına en uygun şekilde günlük olarak mutlaka planlanmalı, eyalet ve yerel öğretim program hedefleri öğretimle ilişkilendirilmelidir.

Bir Dersin Geliştirilmesi için Planlama Süreci

Dersleri planlama, genellikle bir öğretimsel ünitenin planlanması içinde ifade edilir ve her bir ders, ünite hedeflerini ve amaçlarını gerçekleştirmek için önceki derse göre planlanır. Bu kitap, ünite geliştirme üzerinde durmayacak bunun yerine bir ünite içinde bir probleme dayalı dersin nasıl geliştirileceğine odaklanacaktır. Şekil 4.1, bir dersin planlanmasında dikkate alınması gerekenleri sunmaktadır. Öğrenme alanı ve görev kararları (ilk sütun), planlama sürecinin en önemli kısmı olmasına rağmen öğrenci ihtiyaçlarını ve öğrenme alanı kazanımlarını göz önüne almaksızın planlanan derslerde sıklıkla gözden kaçırılmaktadır. Dersin planlanması için öncelikle bu kararların alınması gerekir (bkz. Şekil 4.1'deki mor renkli basamaklar). Buradaki odaklanma, öğrencilerin üç ders aşaması (*ders öncesinde*, *ders sırasında* ve *ders sonrasında)* için Bölüm 3'te verilen amaçları başarabilmelerine yönelik etkinliklerin planlanması üzerinedir. Öğrenme alanı amaçlarının başarılması, bu üç aşama aracılığıyla gerçekleşir. Önce bir taslak plan hazırlanır. Bu taslak plan, öğrenenlerin sorularını ve ilgilerini en iyi şekilde destekleyebilmek, öğrencilerin olası zorluklarını ve cevaplarını öngörebilmek, dersin akışını göz önünde tutabilmek ve planı yeniden gözden geçirebilme ve son şeklini verebilmek için önemlidir. Bir probleme-dayalı dersin planlanmasında dikkate alınması gerekenlerin her birisi bu kısımda özet olarak tartışılmıştır. Göz önüne alınması gerekenler kapsamında, bu süreçlerin nasıl uygulanacağına yönelik Alanı Sabitleme başlıklı bir örnek ders verilmiştir (bu ders planı, bölümün sonunda bulunmaktadır).

Adım 1: Matematiğe ve Öğrenmeye Yönelik Amaçları Belirleme: Öğrencilerinizin matematiği öğrenmek için



Şekil 4.1 Probleme dayalı ders için planlama adımları

neye ihtiyaçları olduğuna nasıl karar veriyorsunuz? Bu dersi planlamadan önce ya siz ya da bölgenizdeki bir grup, öğretim yılı için matematiksel amaçları tespit etmiş ve çalışılan ünitede matematiğin önemini vurgulamak için hazırlık yapmış olmalıdır. Ders düzeyinde, hem eyalet standartlarına hem de yerel öğretim programına sınıf düzeyiniz için bakmanız ve kendinize "Bu ders bittiğinde, öğrencilerim neyi yapabilmelidir?" diye sormanız önemlidir. Bir dersin başarılmasının birkaç gün sürebileceğini zihninizde tutunuz. Bu soruya cevap verirken, yapmak istediğiniz etkinlik yerine matematik üzerine odaklandığınızdan emin olunuz.

Örnek: Alanları Sabitleme. Ölçme öğrenme alanı için bölgesel kazanımlara baktığınızda, çevre ve alanı göreceksiniz (sınıf düzeyi 5). Bu konu üzerindeki bir ders ünitesi için olası bir amaç, çevre ve alan arasındaki ilişkileri, özellikle de biri değişirken diğerinin aynı kaldığı durumlarda keşfetmektedir.

Bu amaç, *gözlenebilir* ve *ölçülebilir* hedeflerin gelişimine yol açacaktır. Hedefler, öğrencilerinizin *yaptıklarını* görmek veya ne bildiklerini göstermek için *söylemek* istediğiniz şeylerdir. Ders hedefleri için sayısız farklı yol olmasına rağmen, öğrencilerin ne yapacaklarının açık bir şekilde belirtilme zorunluluğu üzerinde bir uzlaşı vardır.

Örnek: Alanları Sabitleme. Öğrenciler, verilen bir alan için olası dikdörtgenleri çizebilmeli ve dikdörtgenin çevresini belirleyebilmelidir. Öğrenciler, alan ve çevre arasındaki ilişkiyi açıklayabilmelidir. Öğrenciler, bir dikdörtgenin çevresini bulmak için bir işlemi (kendi algoritmalarını) belirleyecektir.

Örnek Olmayan: Alanları Sabitleme. Öğrenciler, çevrenin değişebileceğini ve alanının aynı kalabileceğini anlayacaktır.

"Örnek" hedeflerin, *işitebileceğiniz* veya *görebileceğiniz* davranışlar olduğunu not ediniz. "Örnek-olmayan" hedef, planlamanıza rehberlik yapmak için makul bir amaç olmasına rağmen bir hedef değildir, zira buradaki anlama, gözlenebilir ve ölçülebilir değildir.

Adım 2. Öğrencilermizin İhtiyaçlarını Dikkate Alma: Öğrencilerinizin seçilen matematiksel kavramlar hakkında önceden bilmesi veya anlaması gerekenler nelerdir? Öğrenciler, matematiğin bu kısmını başarmak için hazır mıdır veya geçmişe dayalı henüz gelişmemiş bazı fikirleri var mıdır? Belki, öğrenciler üzerinde çalıştığınız ve bu derste zenginleştirilmeyi veya detaylandırmayı hedeflendiğiniz içerik hakkında bazı bilgilere sahiptir. Adım 1'de belirlediğiniz matematiksel amaçların, öğrencileriniz için yeni bir şey olduğundan veya en azından aşina olmadıkları şeyleri içerdiğinden emin olunuz. Aynı zamanda, ulaşamayacağınız hedefleri de belirleyiniz.

Her bir öğrencinin, öğrenme zorluğu, öğrenme biçimi, zayıf ve güçlü yönlerini kapsayacak şekilde bireysel ihtiyaçlarını dikkate alınız. Ek olarak, dil ve kültür de mutlaka göz önünde tutulmalıdır. Öğrenciler, başlama noktası olarak yardımcı olabilecek bu konu hakkında önceden neyi bilmektedir? Sınıftaki öğrenenlerin ilgisini çekecek içerik ne olabilir? Vurgulanmaya ihtiyacı olan öğrenme farkları veya yanlış kavramalar nelerdir? Öğrencilerin anlamasını destekleyebilecek görseller veya modeller nedir? Desteğine ihtiyaç duyulabilecek kelime dağarcığı nedir?

Örnek: Alanları Sabitleme. Öğrenciler, muhtemelen çevre ve alan terimleri bilgisine önceden sahiptir. Fakat öğrenciler, ikisinin anlamını karıştırabilir. Öğrenciler, verilen bir alan için yanlış kavramaya sahip olabilir, burada sadece bir çevre olabilir veya tam tersi.

Adım 3. Bir Görevi Seçme, Tasarlama ve Uyarlama: Amaçlarınızı ve öğrencilerinizi göz önünde tutarak,

hangi görev veya etkinliği, -belki bu görev, etkinlik veya alıştırmalar, ders kitabınızda olabilir- kullanacağınıza odaklanmaya hazır olmalısınız. Bu planlama aşamasında, "Verilen görev (ders kitabından veya başka kaynaktan), öğrenme alanı amaçlarına (adım 1) ve öğrencilerin ihtiyaçlarına uygun mudur?" şeklinde kendinize sorunuz. Eğer cevabınız evet ise o zaman dersi zenginleştirmek için belki çocuklara özgü edebi metinleri barındıran veya öğrencilerin daha fazla ilgisini çekecek bir içeriğin kullanımı gibi küçük düzeltmelerle uyarlama çalışmaları planlayabilirsiniz. Daha sonra, öğrencilerinizin her birini dikkate almaya ihtiyacınız vardır ve dersi onların ihtiyaçlarını karşılamak için nasıl uyarlayacağınızı düşününüz. Karp ve Howell (2004), özel eğitime gereksinim duyan öğrencilerin ihtiyaçları üzerine düşünmeyle ilgili olarak, her öğrencinin ihtiyaçları göz önüne alınırken de iyi bir temel oluşturabilecek 3 soru önermiştir:

1. Bu etkinlikten, özel eğitime gereksinim duyan öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılamak için elde edilmesi gerekli örgütsel, davranışsal ve bilişsel beceriler nedir?
2. Hangi öğrenciler, bu becerilerin herhangi birinde önemli düzeyde zayıf kalır?
3. Çalışılan kavramsal görev üzerine odaklanmaları için özel eğitime gereksinim duyan öğrencilere zayıf oldukları alanlarda nasıl bir destek sağlayabilirim?

Eğer verilen ders görevlerine bakar ve bu görevlerin öğrenme alanına ve öğrenci ihtiyaçlarına uygun olmadığını belirlerseniz, o zaman derslerinizde ya önemli güncellemeler ya da bir değişiklik yapmaya ihtiyacınız olacaktır.

Bir görevin iyi olması için detaylı olması gerekmez. Çocukların hedeflenen matematik içeriğiyle uğraşmasını sağladığı sürece, hikâyeye dayalı basit bir problem yeterlidir.

Bölüm 3, görevlerin örneklerini vermekte ve görevlerin seçimi veya hazırlanması için öneriler sunmaktadır. Bu kitap görevlerle doludur. Adım 1'in planlanmasındaki öğrenme alanları ile ne kadar çok deneyime sahip olursanız ve meslekî gelişim, konferans, kaynak kitap ve dergilerden görev repertuarınızı ne kadar uzun sürede oluşturduysanız, planlamadaki bu önemli adım o kadar kolay olacaktır.

Adım 4. Dersin Değerlendirmesini Planlama: Dersin giriş aşamasından bile önce, niçin değerlendirme hakkında düşünüldüğüne şaşırabilirsiniz, fakat öğrencilerinizin ne bildiğini öğrenmek ve bildiklerini size nasıl gösterecekleri üzerinde düşünmek, değerlendirmedir. Okuduğunuz bu cümle, size hedeflerle ilgili alışılmış bir deneyim hissi verebilir ve böyle de olması gerekir. Değerlendirmeleriniz, hedeflerinizden türetilir. Bu değerlendirme stratejilerini çeşitli yollarda değerlendirmek- genişletilmiş tartışmalar için bkz. Bölüm 5- önemlidir. Biçimlendirici değerlendirme, öğrencilerin ders sırasında hedeflerin her birine yönelik neler yaptıklarını bilmenize izin veren bilgileri toplama çeşididir. Bu bilgi, dersin akışının güncellenmesi veya ileri günler için değişikliklerin yapılması için kullanılabilir. Biçimlendirici değerlendirme, ders *sonrasındaki* aşama için görevlerin tartışılmasında soracağınız sorular için de bilgiler verir. Düzey belirleyici değerlendirme, ders için (veya ünite) listelenen hedefleri, öğrencilerin öğrenip öğrenmediğini ortaya çıkarır.

Örnek: Alanları Sabitleme. *Hedef 1*: Öğrenciler verilen bir alan için olası dikdörtgenlerin yeterli bir çeşidini çizebilecek ve çevrelerini belirleyebilecektir. *Değerlendirme:* Ders *sırasında*, her bir öğrencinin verilen alan için en az üç farklı dikdörtgen oluşturabildiğini ve onların çevrelerini doğru şekilde hesapladıklarını görmek amacıyla bir kontrol listesi kullanılır. Bireylere sorulur, "Dikdörtgenin (aynı dikdörtgeni işaret ederek) çevresini nasıl hesapladınız? Bana, bunu açıklayınız." [biçimlendirici].

Hedef 2: Öğrenciler, alan ve çevre arasındaki ilişkiyi tanımlayabilecektir. *Değerlendirme:* Ders *sırasında*, bireylere sorulur: "Bu dikdörtgenlerin, çevre ve alan ilişkisine yönelik gözlemleriniz nedir?" [biçimlendirici]. Öğrenciler, bir dikdörtgenin çevre ve alanı arasındaki ilişkiyi açıklamaları ve bu açıklamalarını destekleyici resimler çizmeleri için bir yazılı sınav kağıdı kullanacaktır. Bu kağıt, dersin sonunda dersin işlenişine yönelik, dersin "sonlanmasını" gösteren yazılı bir değerlendirmedir.

Hedef 3: Öğrenciler, bir dikdörtgenin çevresini bulmak için bir yöntem (kendi algoritmalarını) belirleyecektir. *Değerlendirme*: Ders *sırasında*, "Çevreyi nasıl buluyorsunuz? Herhangi bir örüntü veya kısa bir yol görüyor musunuz? Bana, bunu açıklayınız." [biçimlendirici] şeklinde sorulur. Ders *sonrasında*, bu bir tartışmanın odağı olacaktır [biçimlendirici].

Adım 1'den Adım 4'e kadar ki süreç, dersinizin odağını tanımlamaktadır. Gelecek üç adım ise dersinizde nasıl planlama yapacağınızı gösterecektir.

Adım 5. Ders *Öncesini* Planlama. Bölüm 3'teki "Ders *Öncesindeki* Aşamada Öğretmen Eylemleri" başlıklı kısımda tartışıldığı gibi, dersin başlangıcı, öğrencilerin önceki bilgilerini ortaya çıkarmalı, içeriği sunmalı ve kazanımları belirlemelidir. Seçtiğiniz görevler ve bu görevlerin nasıl takdim edileceğine yönelik düşünmeye ihtiyacınız vardır. Öğrencilerin göreve hazır olması için ihtiyaç duyulan terminoloji ve deneyim nedir? Öğrencilerin ilgisini çekmek ve görevle ilişkilendirmek için bir çocuk kitabı okuyacak mısınız? Konuyu takdim etmek için kullanılabilecek güncel veya popüler bir olay var mıdır? Bazen, öğrencilerin sorumluluklarının ifade edilmesiyle ve görevle basitçe başlayabilirsiniz. Fakat çoğu örnekte; öğrencileri, ilgili bir görevi göstermek suretiyle veya önceki bilgilerini açığa çıkaracak ve bilgi dağarcıklarını oluşturacak bazı ilgi çekici alıştırmalarla da hazırlamak isteyeceksiniz.

Görevi nasıl sunacağınızı düşününüz. Görevi, kağıda yazarak, öğrencilerin kitaplarından alarak, tepegözde göstererek, tahtaya veya kart üzerine yazarak verebilirsiniz. Öğrencilere sorumluluklarını söylediğinizden emin olunuz. Her görev için, öğrencileriniz size şunları söyleyebilmelidir:

- Öğrenciler, cevabı elde etmek için ne yaptı?
- Öğrenciler, cevabı niçin bu şekilde elde etti?
- Öğrenciler, çözümün niçin doğru veya makul olduğunu düşünmektedir?

Bu bilgiyi, öğrencilerinizden nasıl edineceğinize karar veriniz. Eğer yazılı cevap vereceklerse, öğrencileriniz bireysel olarak mı yazacaklar veya bir grup sunumu mu hazırlayacaklar? Öğrencileriniz, kendi günlükleriyle, öğretmene teslim edilecek ödevle, bir çalışma yaprağıyla, sınıfa sunmak için bir görselle veya tepegöz asetatıyla mı yazacaklar? Bir PowerPoint sunumu mu hazırlayacaklar?

Öğrencilere, görev üzerinde düşünmeleri için, ne kadar süre verilmesi gerektiğini tahmin ediniz. Öğrencilere bunu önceden söylemek faydalıdır. Bazı öğretmenler, bütün öğrencilerin görebileceği bir zaman ölçer kullanabilir. Plan, bir dereceye kadar esnek olabilir fakat, dersin sonundaki tartışma için zaman ayırmayı engellememelidir.

Örnek: Alanları Sabitleme. Beşinci sınıf öğrencilerinin "*Lise Müzikali*"nde ilgisini çekmek için dersin içeriği, 36 metre karelik bir alana sahip bir sahnenin oluşturulması olacaktır. Öğrenciler, sahne yüzeyinin alanı ve çevresinin ne olması gerektiğini açıklayacak ve öğretmen tahtada bunları çizecek ve isimlendirecektir. Merakı arttırmak için odak bir soru: Sahne yüzeyi için genişlik ve uzunluk önemli midir? Bir dikdörtgeninin şekli, diğerinden daha iyi veya daha kötü olabilir mi? Bütün olasılıkları araştırınız ve sonra aktörlere ve dansçılara en iyi hizmeti verecek olanı seçiniz.

Adım 6. Ders Sırasını Planlama. Bu aşama, öğrencilerin bağımsız biçimde çalıştıkları zaman olarak görülebilir ve öğretim için önemli bir zamandır. Öğretmenin rolü, izlemek, öğrenci süreçlerini değerlendirmek ve gerekli durumlarda ipuçları sağlamaktır. Örneğin, öğrencilerin görevi anladıklarını ve problemin çözümüyle uğraştıklarını görmek için her grubu hızlıca gezebilirsiniz.

Bir yerde tıkanmış veya uyumsamaya ihtiyacı olan öğrencilerin gelişimi için planlayabileceğiniz yardım ve ipuçları nedir? Ders sırasında, özellikle gözlemlemek ve değerlendirmek istediğiniz özel gruplar veya öğrenciler var mıdır? Bunları not ediniz. Yetenekli veya görevi erken bitiren öğrencilere hitap edebilecek zor ve farklı alanlara uyarlanabilecek etkinlikleri düşününüz.

Her grubun başladığını görmek için yapılan başlangıç turundan sonra, gelecek turlar öğrencilerinizin ne bildiğini ve ne yapabildiğini görmenize imkân verecektir (bkz planlama adımları 1 ve 4). Öğrenciler, ders *sırasında* ne düşündükleri ve ne yaptıklarını açıklamaları için yönelteceğiniz sorulara alışkın olmalıdır. Bu aşama, öğrenci çalışmalarının paylaşımının ders *sonrasında* grup mu yoksa bireysel mi olması gerektiğini görmeniz için de yardımcı olacaktır.

Örnek: Alanları Sabitleme. Öğrencilerin her bir çiftine 36 karoyu dağıttıktan sonra öğrencilerin, bir dikdörtgeni oluşturmak için dikdörtgenin boyutlarını çizgili kağıt üzerinde doğru bir şekilde kaydettiklerini ve her bir kenarını isimlendirdiklerini yerinde görmek için sınıf içinde bir tur atınız. Öğrencilerin hepsi, ilk dikdörtgen için bu işlemi tamamladıktan sonra, sınıf içindeki turunuzu daha çok değerlendirme amaçlı sorular sorarak yapınız. Amaç, her bir öğrencinin dikdörtgenin çevresini nasıl bulduğunu açıklaması ve gözlemlediği örüntüleri belirtmesidir. Fakat burada, herhangi bir cevap alamazsanız o zaman bir sonraki ders bunun üzerine odaklanınız.

Adım 7. Ders Sonrasını Planlama. Tartışmaya nasıl başlayacaksınız? Herhangi bir yorum yapmaksızın, birey veya gruplardan aldığınız farklı bütün cevapların kolayca anlaşılmasını sağlamak için bunların bir listesini yapmak ve sonra öğrencilerden veya gruplardan cevaplarını açıklamalarını ve savunmalarını istemek bir fikirdir. Cevapların hepsini almadan önce, her bir gruptan veya öğrenciden açıklamaların tamamını alarak da başlayabilirsiniz. Eğer, sözlü raporları kabul ederseniz o zaman söylenenleri tahtaya nasıl kaydedeceğinizi düşününüz.

Tartışmalarınız için zamanın yeterli bölümünü planlayınız. Bunun için 5 dakika asla yeterli değildir. İçeriği zengin bir problemin tartışılması, 15- 20 dakika alabilir.

Örnek: Alanları Sabitleme. İlk önce, verilen alanı gösterecek olası bütün dikdörtgenler belirlenir, bu şekilde çizgili kağıt biçiminde bir tepegöz fotokopisine sahip olunur ve her bir gruba bulduklarını rapor etmeleri söylenir. Hızlı bir şekilde, olası dikdörtgenlerin her birisi çizilir ve boyutları isimlendirilir. İkincisi, farklı gruplarlardan her bir dikdörtgenin çevresi ve alanını rapor etmeleri, geriye doğru gitmeleri ve bu bilgiye ekleme yapmaları istenir. Bu görsellik, aşağıdaki odak tartışmalar için yardımcı olacaktır:

- Bu dikdörtgenlerin çevrelerini nasıl buldunuz? (Farklı fikirleri toplayınız- kısa çözümleri araştırınız ve tahtada bu cevapları kelimelerle veya sembollerle yazınız).
- Alan ve çevre arasındaki ilişkiye yönelik ne gözlemlediniz? (Öğrenciler, verilen bir alan için olası çevrelerin sayısını ve şekil kareye benzedikçe çevrenin küçüldüğünü gözlemlemelidir).
- Eğer, *Lise Müzikali* için sahne mimari olsaydınız, bu dikdörtgenlerden hangisini seçerdiniz? Niçin?

Tartışmadan sonra, "Mimara Tavsiye" başlıklı yazılı sınav kağıdını dağıtınız ve öğrencilerden, ifadelerini çizimlerle destekleyerek, mimara yukarıdaki ikinci soruyu açıklamalarını isteyiniz.

Adım 5, 6 ve 7, deneme niteliğinde yapılan bir öğretimsel plan bazında meydana gelmiştir. Gelecek üç adım, bazı önemli gözlemler ışığında ihtiyaç duyulan eklemelerin veya değişikliklerin yapılması için bu deneme planın yeniden gözden geçirilmesini kapsamaktadır.

Adım 8. Dersin İçindeki Sıralamayı Kontrol Etme. İyi planlanmış bir ders, öğrencilere öğrenmeleri için maksimum fırsatlar sağlayacak şekilde düzenlenmeli ve sıralanmalıdır. Burada, bir konuyla ilişkilendirilen fakat kısmen farklı öğrenme amaçlarına yönelik "eğlenceli" etkinliklerin bir serisini yapmak için sıklıkla çekici bir durum mevcuttur. İlki, açık bir şekilde sıralanmış planın üç parçasına bakınız, bazen onlar neredeyse özdeştir: hedefler, değerlendirme ile ders *sırasında* ve ders *sonrasında* yöneltilen sorulardır. Eğer soruların hepsi, sadece bir hedef üzerine odaklanırsa o zaman her bir hedefi vurgulayacak sorular ekleyiniz ve ifade edilmeyen hedefi çıkarınız.

İkincisi, ders derinliğine inşa edilmeli ve mantıklı bir akışa sahip olmalıdır. Ders *öncesi* etkinlik, ders *sırasındaki* odaklanılan görevle ilişkilendirilmelidir. Ders *sonrası*

aşaması, öğrencileri göreve yoğunlaşmaktan ziyade matematiksel kavramların genelleştirilmesine yönlendirmelidir. Eğer bir etkinliği yaparken sürekli biçimde başka bir etkinliğe kaydığınızı hissediyorsanız ve nihayetinde bunların ikisini nasıl bir araya getireceğinizi bilemiyorsanız, dersiniz yapılandırılmamış demektir. Hedeflere geri bakıp, bütün etkinliklerin bu hedefleri desteklediğinden ve kritik düşünmeyi sağlayacak biçimde oluşturulduğundan emin olunuz.

Örnek: Alanları Sabitleme. Alan bulmaya ilişkin ders, tutarlı bir düzenlemeyi gösterir. Hedefler, değerlendirmeyi yazmak için kullanılmış ve değerlendirme soruları dersin aşamalarıyla eşleştirilerek yazılmıştır. Ders, öğrencilerin alan ve çevreyle ilgili düşüncelerini ortaya çıkaracak bir örnekle başlar, bu temel üzerine 36'lık alana sahip birçok dikdörtgen oluşturulur ve sonra öğrenciler, çevreyi bulma yolları ile alan ve çevre arasındaki ilişkinin genelleştirilmesi üzerine odaklanacakları bir tartışmaya çekilir.

Adım 9. Öğrenci Yaklaşımlarını Öngörme. Seçilen görev üzerine derinlemesine düşünmede, öğrencilerin kullanabilecekleri stratejiler ve sizin bunlara nasıl karşılık vereceğiniz önemlidir. Öğrencilerin sahip olduğu yanlış kavramalar nedir? Vurgulanmaya ihtiyaç duyulan ortak engeller nedir? Bunlardan hangisini, etkinliğin başlangıcında öncelikli olarak vurgulamak istiyorsunuz ve öğrenci çalışmasından ortaya çıkmasını beklediğiniz nedir?

Örnek: Alanları Sabitleme. Öğrenciler, dikdörtgenlerinden birisinin 6x6'lık bir kare olup olamayacağına yönelik muhtemelen münazara yapacaktır. Bir karenin, bir dikdörtgen olup olmadığına yönelik bir konuşma, değerli bir sınıf tartışmasıdır ve bu hemen ifade edilmeyecektir. İkincisi, öğrenciler başlangıçta bir 9x4'lük bir dikdörtgenden farklı bir 4x9'luk bir dikdörtgen alabilirler. Bu etkinlikteki dikdörtgenlerin aynı olduğu, öğrencilerin birçok dikdörtgeni oluşturmada çıkmaza girmemeleri için dersin öncesinde vurgulanacaktır. Öğrenciler, *alan* ve *çevre* terimlerini karıştırabilir, bu nedenle ders *öncesinde* hangisinin hangisi olduğunu hatırlatmaya yönelik stratejiler tartışılmalı ve öğrenciler, arkadaşlarıyla çalışırken uygun terimleri kullanmaları için teşvik edilmelidir.

Adım 10. Temel Soruları Belirleme. Önceki adımlardan sonra bu adım gereksiz gibi görülse de, bir dersteki sorularınızın kalitesi, uygun bir son adım olarak olası öğrenme için oldukça önemlidir. Odaklandığınız hedefi kullanarak, problemin nasıl çözüldüğüne yönelik öğrencilerin dikkatini çekmeye ve merakını arttırmaya odaklı soruları ders *öncesi* aşamasında sunarak dersi yeniden gözden geçiriniz. Ders *sırasındaki* ve ders *sonrasındaki* aşamalarda, öğrencilerin öğrenmelerini istediğiniz ve görevin başlıca özelliklerine ilişkin öğrencilerin düşünmeleri üzerine odaklanan hedeflerden sorular kullanınız. Sorularla ilgili yapılan araştırmalar, öğretmenlerin nadiren yüksek düzeyli sorular sorduğuna işaret etmektedir- bu sizin için bir şanstır ve öğrencilere, genişletme, analiz etme, karşılaştırma yapma, genelleme ve sentez yapma imkânı veren bazı zor soruları sorduğunuzdan emin olunuz. Bu sorular, öğrencilerin çalıştıkları kavramları çok daha derinlemesine anlamalarına yardımcı olacaktır.

Örnek: Alanları Sabitleme. Hedeflere dayalı yüksek düzeyli sorular, öğrencilere ders *sırasında* ve ders *sonrasındaki* aşamalarda sunulur. Tartışmaya hazırlık yapmak için veya görevi erken bitiren veya ileri düzeydeki öğrenciler için bazı ilâve sorular aşağıdakileri içerir:

Çevre 36 metre olsaydı ne olurdu? Olası farklı alanlar var mıdır?
Bir mimar, bir dans sahnesi için hangisini tercih eder?
Bir kare bir dikdörtgen midir? Şekillerin bildiğiniz özelliklerini kullanarak açıklayınız.

Planlama Sürecinin Uygulanması

Planlama sürecini kullanmanın önemi, aşırı düzeyde vurgulanmayabilir. Öğretmenler, bazen öğretilecek bir kavram için derse hazırlık yapmaktan çok kağıtların puanlamasına daha fazla zaman harcamak zorunda kalırlar. Bu, öğrenmenin az gerçekleştiği kalitesi kötü bir derse neden olur. Bu durum ise öğretmenin, öğrencilerin yanlış kavramalarını gidermek ve yok etmek için daha fazla çalışmasına neden olacaktır.

Tamamlanmış bir ders planı, sıralamasında değişiklikler yapılabilmesine rağmen genellikle aşağıdaki bileşenlere sahiptir:

- Eyalet ve/veya yerel matematik standartları
- Ders amaçları ve öğrenme hedefleri
- Değerlendirme(ler)
- Uyarlamalar
- İhtiyaç duyulan materyaller
- Ders *öncesi*
- Ders *sırası*
- Ders *sonrası*

Gelecek kısımda tartışılan dersler, öğrencilerin belirlenmemiş bir grubu ve eyaletten eyalete değişiklik gösteren eyalet standartları için geliştirildiğinden, Zenginleştirilmiş Ders için tasarlanan ders planı, uyarlamayı veya standartları içermez.

Ders Örnekleri: Zenginleştirilmiş Dersler. İlk iki planlama adımına (öğretim programınızda matematik ve öğrencilerinizin matematiğe ilişkin özel ihtiyaçları) dikkat etmek, başarılı bir ders işlemek için önemlidir. Bu nedenle, gerçek bir sınıf olmaksızın zihinde bir dersi planlamak, biraz yapay düzeyde kalmaktadır. Fakat, zenginleştirilmiş bir ders olarak isimlendirilen örnek bir ders, ilgili düşünceyi göstermek için bu bölümün sonunda verilmiştir.

Alan ve çevre üzerinde zenginleştirilmiş ders, bir probleme dayalı dersteki planlama basamaklarının her biri için

bir örnek olarak kafidir ve 4. ve 5. sınıflar için bir tam ders saati için tasarlanmıştır.

Üç-Aşamalı Dersin Değişiklikleri

Bizim tartıştığımız temel ders yapısı, bir görev veya problemin verildiği, üzerinde çalışmaya izin veren ve bir tartışma ile sonlanan bir ders olarak düşünülmektedir. Şüphesiz ki, her ders bir tam ders saati için verilen bir görev boyunca geliştirilmez. Fakat, görevlerin ve tartışmaların temel kavramı, çoğu probleme-dayalı derslere adapte edilebilir.

Küçük Dersler. Çoğu görevin yapımı, tam ders süresini gerektirmez. Üç-aşamalı biçim, 10 dakikadan daha az süreye sıkıştırılabilir. Bir tek derste, iki veya üç dönüm noktası planlayabilirsiniz. Örneğin, şu görevleri göz önüne alınız:

Sınıf Düzeyi K-1:	Grafiğimizdeki bilgiyi kullanarak cevaplayabileceğimiz iki soru oluşturunuz.
Sınıf Düzeyi 2-3:	9 + 5 toplama işleminin cevabını unuttuysanız, zihninizde onu nasıl hesaplayabilirsiniz?
Sınıf Düzeyi 4-5:	Geometri tahtası üzerinde, doğru simetrisine sahip fakat dönel simetriye sahip olmayan bir şekil çiziniz. Dönel simetriye sahip fakat bir doğru simetrisine sahip olmayan ikinci bir şekil çiziniz.
Sınıf Düzeyi 6-7:	Ortak paydayı bulmaksızın, aşağıdaki kesir çiftlerindeki kesirlerden hangisinin daha büyük olduğunu belirlemek için bir yol bulunuz. Stratejinizi açıklayınız. $\frac{1}{8}$ ve $\frac{1}{10}$ $\frac{9}{20}$ ve $\frac{13}{25}$ $\frac{3}{4}$ ve $\frac{3}{8}$ $\frac{9}{10}$ ve $\frac{10}{11}$

Bunlar değerli görevlerdir ancak bu görevler, yapılması ve tartışılması için tam bir ders süresini gerektirmez.

Kısa görevler için etkili bir strateji, "*düşün-eşleştir-paylaş*" dır. Öğrenciler, ilk önce göreve nasıl yaklaşacaklarına dair kendi düşünce ve fikirlerini geliştirmeleri veya bir çözümün ne olabileceğine yönelik düşünmeleri için bir dakika düşünmeye yönlendirilir. Sonra, bir sınıf arkadaşı ile eşleştirilir ve her biri diğerinin stratejisini tartışır. Bu, onlara fikirlerini açıklama ve test etme fırsatı sağlar. En son adım ise sınıfın geri kalanı ile fikirlerini paylaşmaktır. Çiftler, iki fikre sahip olabilir veya bir ortak karara doğru da varabilirler. İçinde biraz tartışmayı da barındıran bütün bu süreç, 15 dakikadan daha az sürebilir.

İstasyon çalışması. İstasyon çalışması, sıklıkla öğrencilerin sınıfın etrafındaki çeşitli yerlerde farklı görevler üzerinde çalışmaları için kullanılmaktadır. İstasyon çalışmaları, dağıtma ve toplama ihtiyacı olmaksızın materyallerin kullanımı için iyi bir yoldur. İstasyon çalışmaları, bir etkinlik için ulaşılması gerekli fakat temini mantıksız ve imkânsız olan materyallere ulaşma zorunluluğundaki öğrencilere de yardımcı olur. Çünkü iyi bilgisayar görevleri, özellikle de web üzerinde bulunan küçük uygulama yazılımları (appletler) vardır ve bu nedenle öğrencilerin, bilgisayara yönelik eğilim göstermelerine fırsatlar sağlayacak bir bilgisayar istasyon çalışması da yapılabilir. İstasyon çalışmaları, kavramsal anlamanın farklı basamaklarında öğrencileriniz olduğu zaman, ayırt edici görevler için de size imkânlar tanır.

Öğrencilerinizin bireysel veya küçük gruplar halinde istasyonlarda çalışmasını isteyebilirsiniz. Bu nedenle, verilen bir konu için dörtten sekize kadar farklı etkinlikler hazırlayabilirsiniz. Her istasyon çalışması farklı olmak zorunda değildir. Oyun veya etkinlik için gerekli ve özel yazma kağıtlarını da içeren materyaller, hızlı bir şekilde sınıfın farklı yerlerine konulabilmeleri için bir dosya veya bir kabın içine konur.

Bilgisayar etkinlikleri ve oyunlar veya küçük çocuklar için istasyonlardaki yönergelere ek olarak, önce bütün sınıfa etkinliği öğretmek veya açıklamak iyi bir fikirdir. Bu şekilde, öğrenciler istasyon çalışmasını anlamak için zamanlarını boşa harcamaz, siz de sınıfta dolaşarak onlara ne yapmaları gerektiğini söylemek zorunda kalmazsınız. Ayrıca, aileleri veya başka gönüllüleri de bu çalışmalara katabilirsiniz.

Birkaç kere tekrarlanabilen bir görev, bir istasyon etkinliği için iyi bir görevdir. Örneğin; öğrenciler, bir öğrencinin sayma pullarının bilinen sayısının bir kısmını kapatması ve diğer öğrencinin de kapatılan kısımdaki miktarı isimlendirmesi "oyunu" nu oynayabilirler. NCTM Illumination derslerindeki (http: //illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=18) "Kesir Oyunu" tekrarlı bir şekilde oynanabilir ve her bir tekrar ise öğrencilerin kesirleri anlamasını güçlendirir.

Bir oyun veya tekrarlanabilen başka bir etkinlik, bir problem içermeyebilir ancak yine de bir probleme-dayalı görev olabilir. Matematiksel ilişkilerin gelişimi veya yeni bir şey üzerinde derinlemesine düşünmek için öğrencileri teşvik eden bir etkinliğin olup olmaması burada belirleyici faktördür. Derinlemesine düşünmenin ilerlemeye ve dolayısıyla öğrenmeye yol açtığını hatırlayınız. Eğer bir etkinlik, öğrencileri ortaya çıkan bir fikirle mücadele etmeksizin sadece tekrarlı bir sürece yönlendiriyorsa, o zaman bu etkinlik bir problem-dayalı çalışma değildir. Ancak, az önce bahsettiğimiz birkaç örnek ve bunlar gibi diğer örnekler, çocukları henüz iyi geliştiremedikleri kavramlar aracılığıyla düşündürmektedir. Bu anlamda, bu örnekler probleme-dayalı görevlerin tanımına uygundur.

Öğrencilerin istasyonlarda çalışma zamanı, bir dersin, ders *sırasındaki* kısmıyla benzerdir. Bir dersin, ders *sonrasındaki* kısmı için yapabileceğiniz şeyler nedir? Bir görev üze-

rinde çalışan öğrencilerle tartışmalar yapmak, oyunlar ve istasyonlar için önemlidir. Bu tartışmalar, küçük gruplarla yapılabilir. Örneğin, öğrencilerle bir istasyonda oturabilir ve ne yaptıklarını, keşfettikleri stratejilerinin ne olduğunu veya genel anlamda etkinlik hakkında ne düşündüklerini sorabilirsiniz. Öğrencilerin yaptıklarının arkasındaki mantığı elde etmeye çalışınız. Diğer bir seçenek, sınıftaki öğrencilerin hepsinin, istasyonların her birinde çalışıncaya kadar beklenmesidir. Sonra, etkinliğin içine yerleştirilmiş matematiksel kavram hakkında bütün sınıfın katıldığı bir tartışma yapabilirsiniz.

Herhangi bir görevle uğraşırken, mümkün olduğunca bazı yazılı veya kayıtlı formlar, istasyonlara dâhil edilebilir. Bir bilgisayar aracığıyla bir problemi çözen öğrenciler, ne yaptıklarını yazabilir ve ne öğrendiklerini açıklayabilir. Öğrenciler, oynadıkları bir oyunun kayıtlarını tutabilir, oyunu nasıl oynadıklarını söyleyebilir ve düşündükleri veya kullandıkları stratejileri açıklayabilir.

Kaynak Olarak Ders Kitapları

Ders kitabı, ilköğretim ve ortaöğretim sınıflarındaki öğretimi etkileyen en önemli faktör olarak durmaktadır. Bazı derslerdeki istisnai durumlar hariç çoğu ders kitabı, "söyleyerek öğretme" öğretimsel yaklaşımına çok yakındır. Fakat standartlara-dayalı ders kitapları, geleneksel kitaplardan çok farklıdır. Standartlara-dayalı matematik ders kitaplarındaki öğretimsel model, bu kitap boyunca sunulan iki konu gibi (*Sayı*, *Veri ve Uzayda Araştırmalar* ve *İlişkilendirilmiş Matematik Projesi II*), bu bölümde ve Bölüm 3'te tanımlanan ders *öncesinde*, ders *sırasında* ve ders *sonrası* şeklinde sıralanmıştır. Geleneksel ve standartlara-dayalı ders kitaplarının özelliklerine ilişkin daha fazlası için Bölüm 1'e bakınız.

Eğer geleneksel bir kitap kullanıyorsanız, bu kitabı ders içinde NCTM süreç standartlarının (problem çözme, akıl yürütme ve ispat, iletişim, ilişkilendirme ve temsiller) vurgusunu arttırarak daha fazla standartlara dayalı hâle getirmek bir yoldur. Öğretim için plan yaparken, açık-uçlu soruları (iletişimi inşa etmek için), daha karmaşık yüksek düzeyli düşünme soruları için kolay anlaşılabilir soruları uyarlamayı (problem çözme ve akıl yürütmenin gerçekleşmesine imkân vermek için) ve modeller ile görselleri kullanmayı (daha fazla gösterimler kullanmak için) içeren anlamlı içerikleri (ilişkilendirmeyi inşa etmek için) ekleyebilirsiniz. Bazen, ev ödevi kısmının sonunda (hikâyeye dayalı problemler) veya örnekler kısmında görülen problemler, daha çok probleme-dayalı derslerin işlenmesi için iyi bir kaynaktır. Bir probleme-dayalı dersin nasıl uyarlanabileceğine yönelik daha fazla bilgi için Bölüm 3'e bakınız.

Ders kitaplarının, fikirlerin kaynağı olarak kullanımına ilişkin önerilen diğer yaklaşımlar ise aşağıda verilmiştir:

- Sayfalar yerine ana fikirleri veya kavramları öğretiniz. Bölüm veya üniteye bakış, bir sayfayı tamamlamak için gerekli etkinlikten ziyade ana fikirler üzerine odaklanılmasına yardım edecektir.
- Probleme-dayalı etkinliklerin daha fazla planlanması için fikir veya ilham kaynağı olarak derslerin kavramsal kısımlarını dikkate alınız.
- Bir ünitedeki derslerin akışını, bir dersteki ünitenin işlenmesine dair yüzeysel bir normdan ziyade, öğrencilerin performansları ve anlamalarıyla belirlenmesini sağlayınız.
- Her sayfanın mutlaka işlenmesi ve her alıştırmanın mutlaka yapılmasına yönelik bir kanunun olmadığını hatırlayınız. Kitapla eşleştirilmiş bir öğretim tasarımından ziyade eyalet standartlarına, öğretim amaçlarına ve öğrencilerinizin ihtiyaçlarına uygun dersleri veya etkinlikleri seçiniz. Göz ardı edilen sayfaların ve etkinliklerin uygun olmadığından ve sadece ihtiyaç duyulanları kullandığınızdan emin olunuz.

Öğrenenlerin Hepsi İçin Planlama



Bugün, öğretmenler için belki de en önemli zorluklardan biri, artan düzeyde çeşitli öğrenci grupları içeren sınıf ortamlarındaki bütün öğrencilere ulaşmaktır. Her öğretmen bu ikilem ile karşılaşır, çünkü her bir sınıf farklı birikime ve yeteneğe sahip öğrencilerden oluşmaktadır.

İlginç ve belki de bazıları için sürpriz olanı, probleme-dayalı yaklaşımla öğretim, öğrencilerin bu farklı dağılımlarına ulaşmak ve matematiği öğretmek için en iyi yoldur. Probleme-dayalı derste, çocuklar probleme yalnızca kendi fikirlerini ve becerilerini verir, kendi yolları üzerine matematiği anlarlar. Karşıt olarak, yüksek düzeyde geleneksel öğretimle biçimlendirilmiş bir derste ise bütün öğrencilerin anlayacağı, öğretmen ve ders kitabı tarafından belirlenen benzer fikirleri ve benzer yaklaşımları kullanacakları kabul edilir. Öğrenciler, bir öğretimsel tavırda (yani, bir kavramsal anlama olmaksızın) öğretmenin kurallarını ve yönergelerini izlemeye odaklı sunulan fikirleri anlamak için hazır olmazlar. Bu, elbette birçok zorluğa neden olur ve birçok öğrenci dersi bırakır veya ciddi bir telafi programına ihtiyaç duyar.

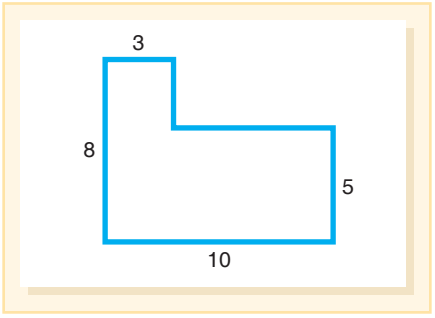
Bir probleme-dayalı yaklaşımın kullanıma ek olarak, sınıfınızdaki çeşitli biçimlerde öğrenen öğrencilere ulaşabilmenize yardımcı olabilecek özel iyileştirme stratejileri vardır. Bu öğrenciler için önerilen stratejiler, Bölüm 6' da verilmiştir. Bu bölümdeki odaklanma, bütün öğrenciler için yapabileceğinizin en iyisini yapmak isterseniz, özellikle bir probleme-dayalı dersin gelişimi sırasındaki planlama adımları üzerine olacaktır. Özel olarak, bu kısım özetle şunları tartışmaktadır:

- Uyarlamalar ve değişiklikler
- Farklılaştırılmış öğretim

- Esnek gruplar
- Bir dersin uyarlanmasının örneği: Anadili İngilizce olmayan öğrenenler

Uyarlamalar ve Değişiklikler Yapma

Verilen bir görevi, bütün öğrencilere ulaştırabilmek için iki yol vardır: *Uyarlama* ve *değişiklik*. *Uyarlama*, özel eğitime gereksinim duyan öğrenciler için farklı çevre veya koşulların hazırlanmasıdır. Örneğin, bu öğrencilere yönergeleri sözel olarak aktarmak yerine yazılı olarak verebilirsiniz. Uyarlamalar, görevi değiştirmez. *Değişiklik*, bir problem veya görevdeki bir değişikliği temsil eder. Örneğin, kabul edelim ki görev aşağıda gösterildiği gibi bir bileşik şeklin alanının bulunması ile başlasın.



Eğer, basit dikdörtgensel bölgeler üzerine odaklanmak yerine başka bir boyuta odaklanmaya karar verirseniz, o zaman bu bir değişikliktir. Eğer dikdörtgensel bölgelerle ve dikdörtgenlerden oluşan bileşik şekilleri ilişkilendirmeyle başlamaya karar verirseniz, orijinal görevi hızlandırmak için sistematik bir ders planına sahip olmalısınız. Bu anlamdaki bir görevdeki sistematik yapı, bir uyarlamadır. Uyarlamaların ve değişikliklerin planlanmasındaki amaç, hedefleri değiştirmek yerine her bir çocuğun başarılı bir şekilde öğrenme hedeflerinize ulaşmasına imkân vermektir. Bu, sınıfta adil bir şekilde sağlanmalıdır.

Farklılaştırılmış Öğretim

Farklılaştırılmış öğretim, akademik, kültürel ve dilbilimsel olarak heterojen gruplardan oluşan sınıflarda sıklıkla bulunan farklı akademik birikimlere sahip öğrencileri destekleyici stratejileri içeren bir öğretmen planını ifade etmektedir (Tomlinsen, 1999).

Farklılaştırma dikkate alındığında, her öğrencinin öğrenme biçimi, ilgisi ve hazır bulunuşluğunu göz önüne alınız. İkincisi, üç önemli eleman boyunca neyin farklılaştırılacağına dikkat ediniz: içerik (her bir öğrencinin neyi yapabilmesini istiyorsunuz), süreç (öğrencileri öğrenmeye nasıl yönlendireceksiniz) ve ürün (öğrenciler, ders bittikten sonra öğrendiklerinin ne kadarını göstermek zorundadır). Üçüncüsü, fiziksel öğrenme ortamının nasıl adapte edilebileceğine dikkat ediniz. Bu, oturma düzeni, belirli grup stratejileri ve materyallere erişim durumunu kapsayabilir. Farklılaştırmak için bazı ortak yollar, istasyon çalışmaları veya merkezlerin kullanımı ve görevlerin farklı düzeylere (basamaklandırılmış dersler) uyarlanmasını içermektedir.

Basamaklandırılmış Dersler. Bir basamaklandırılmış derste, öğretmen bütün öğrenciler için öğrenme amaçlarını belirler, fakat görevlerin zorluk düzeyi, aşağı yukarı bütün öğrenenlerin ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde ayarlanır. Öğretmen, sınıftaki öğrencilerin öğrenme ihtiyaçlarını en iyi şekilde karşılamak için bir derste tanımlanan basamakların her birinin zorluğunu belirleyebilir (Kingore, 2006; Tomlinson, 1999). Sadece *içerikle* ilgili zorluk düzeyi değil aynı zamanda aşağıdakilerin her biri de dikkate alınabilir (Kingore, 2006):

1. *Öğretmenin sağladığı yardım derecesi.* Verilen örnekleri veya öğrencilerin beraber çalışmalarını kapsayabilir.
2. *Derslerin yapılandırılması.* Özel eğitime gereksinim duyan öğrenciler, örneğin yüksek düzeyde yapılandırılmış görevlerden, üstün zekâlı öğrenciler ise genellikle daha çok açık-uçlu görevlerden yararlanır.
3. *Verilen görev(lerin) karmaşıklığı.* Bu, daha zor problemleri veya uygulamaları ya da daha somut veya daha soyut bir görevi yapmayı içerebilir.
4. *Sürecin karmaşıklığı.* Bu, görevin bir parçası olarak belirli bir zamanda kaç tane öğretimsel talimat verileceği ve kaç tane yüksek düzeyli düşünme sorusunun sorulacağının belirlenmesine yönelik dersin hızlı bir şekilde planlanmasını içerir.

Sınıf düzeyi 1-2 için, toplama kavramı üzerine odaklanan aşağıdaki görevi göz önüne alınız:

Orjinal Görev

Eduardo, 9 oyuncak arabaya sahiptir. Erica, oynamaya gelmiş ve Eduardo'ya 8 oyuncak araba vermiştir. Eduardo ve Erica'nın birlikte kaç oyuncak arabası olduğunu bulabilir misiniz? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Öğretmen, öğrencilere problemi modellemeleri için küpler, problemi nasıl çözdüklerini yazmaları ve göstermeleri için kağıt ve kalem dağıtır. Öğretmen, öğrencilerden problemi modellemelerini ve çözümlerini açıklamalarını ister.

Uyarlanmış Görev

Eduardo, bazı oyuncak arabalara sahiptir. Erica, oynamaya gelmiş ve oyuncak arabalarını vermiştir. Eduardo ve Erica'nın birlikte kaç oyuncak arabası olduğunu bulabilir misiniz? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Öğretmen, öğrencilere bu problemde ne olduğunu ve ne yapacaklarını sorar. Sonra, Eduardo ve Erica'nın kaç tane arabaya sahip olduklarını söylemeleri için Görev Kartları dağıtır. Öğretmen, 10 sayısından küçük sayılarla çalışmakta zorlanan öğrencilere ve 10 sayısından büyük sayılarla ileri düzeyde çalışabilen öğrencilere göre sayıların zorluğunu çeşitlendirir.

Kart 1 (kolay)

Eduardo 6 arabaya ve
Erica 8 arabaya sahiptir.

Kart 2 (orta)

Eduardo 13 arabaya ve
Erica 16 arabaya sahiptir.

Kart 3 (ileri)

Eduardo ____ arabaya ve
Erica ____ arabaya sahiptir.
Birlikte 25 arabaları vardır.
Eduardo kaç arabaya, Erica
kaç arabaya sahip olabilir?

Her bir durumda, öğrenciler kelimeleri, resimleri, modelleri veya sayıları kullanarak çözümü nasıl elde ettiklerini kağıt üzerinde göstermelidir. Öğrencilerin kullanımı için çeşitli araçlar (yüzlük kartlar, çubuklar ve bağlantılı küpler) sağlanır.

Bu uyarlanmış derste, Görev Kartları'nın nasıl düzenleneceğine yönelik bazı öneriler vardır. Birincisi, öğretmen kartları herkese sıralı bir şekilde (kolay, orta ve ileri düzey) verebilir. İkincisi, öğretmen, öğrencilerin mevcut akademik hazır bulunuşluklarına (örneğin, tek basamaklı sayıların toplamını yapamayan öğrencilere kolay kartlar) göre sadece bir kart verebilir. Üçüncüsü, öğretmen kart 1 ve kart 2'yi verebilir ve bunları başarılı bir şekilde yapan öğrencilere farklı alanlara uyarlamalar yapmaları için yeteneklerine dayalı olarak kart 3'ü dağıtabilir. Bu üç durumun her birinde, öğretmen hangi öğrencilerin toplama işlemi gerektiren problemleri açıklayabileceğini ve modelleyebileceğini bilebilir ve buna dayalı olarak gelecek dersi planlayabilir.

Bir görevi etkili bir şekilde farklılaştırabilmeniz için bazı yollar vardır. Bir görevi farklılaştırmanın bir yolu, ilgili durumu farklı sorularla irdeleyebilmektir. Bu durum, bir şekil veya grafik veya bir geometri veya ölçme görevindeki veriler olabilir. Aşağıda, bir örnek verilmiştir:

Konu: Paralelkenarların özellikleri
Sınıf: 5-8

Öğrencilere, dikdörtgensel olmayan paralelkenarların yanında dikdörtgen ve kareleri içeren paralelkenarlar da verilir. Aşağıdaki sorular yöneltilir:

- **Bir şekil seçiniz ve seçtiğiniz şekle bazı biçimlerde benzeyen en az üç yeni şekil çiziniz. Yeni şekillerinizin, seçtiğiniz şekilden farklılıklarını ve benzerliklerini söyleyiniz.**
- **Bu şekillerde köşegenler çiziniz ve onları ölçünüz. Köşegenler hakkında keşfedebileceğiniz ilişkileri görünüz.**
- **Bu kümedeki her bir paralelkenara yönelik düşünebildiğiniz özelliklerin hepsinin bir listesini yapınız.**

Her öğrencinin bu görev üzerinde çalışmasını sağlamak zordur.

Hesaplamaları içeren çoğu problem için, sayıların çoklu kümeleri girebilir. Aşağıdaki problemde, öğrencilerin her bir köşeli ayraç içindeki birinci, ikinci ve üçüncü sayıları seçmelerine izin verilir.

Konu: Çıkarma
Sınıf: 2–3

Eduardo, {12, 60, 121} bilyeye sahiptir ve Erica'ya {5, 15, 46} bilye vermiştir. Eduardo'nun şimdi kaç bilyesi vardır?

Öğrenciler, çok zor olmadığı müddetçe kendilerine zorluk çıkaran sayıları seçmeye eğilimlidir. Tartışmalarda, bütün öğrenciler aynı görev üzerinde çalışmış gibi faydalanır ve hisseder.



Durup Düşün!

Daha önce tanımlanan dört zorluk düzeyini (Kingore, 2006) dikkate alarak, paralelkenar görevini zorluk düzeylerine uyarlayarak nasıl değiştirebilirsiniz?

Esnek Gruplama

Öğrencilere anlamalarını inşa eden ve matematik hakkındaki iletişimlerini arttıran zor ve destekleyici görevlerin yapımı için iş birliğine dayalı ortamlar sağlanmalıdır. İşbirliği, aynı zamanda önemli bir yaşam becerisidir. "Esnek Gruplar", amaca ve stratejiye dayalı bir durumda küçük grupların oluşumunu ve büyüklüğünü ifade etmektedir. Diğer bir deyişle, öğrenciler bazen görevin doğası gereği sadece iki kişinin çalışmasının en uygun olduğu durumlarda ikili gruplar halinde çalışır, bazı durumlarda da görevin yeterliliği veya büyük bir takımda roller üstlenme gerekçeleriyle dörtlü gruplar halinde de çalışabilirler. Ayrıca gruplar, öğrencilerin davranışları, sosyal dinamikleri, yabancı dil öğrenme ihtiyaçları ve akademik yeteneklerine göre de oluşturulur. Stratejik olarak, daha yetenekli öğrencilerin zor öğrenen öğrencilere yardımcı olabilecekleri düşüncesiyle, grupları karma yeteneklere (heterejon) göre oluşturmak da çok etkilidir.

Gruplar, öğrencilerin birbirleriyle çalışma becerisi kazanmaları için bir ünitenin tamamı boyunca aynı kalabilir. Eğer öğrenciler dörtlü gruplarda çalışıyor, fakat görev iki öğrencinin çalışmasına daha uygunsa, öğrenciler grup içinde ikili gruplar halinde de çalışabilirler.

Grupların ikili veya dörtlü veya benzer (homojen) veya karma yetenekli üyelerden oluşup oluşmadığına bakmaksızın başarılı bir gruplama için anahtar, *bireysel yükümlülüktür*. Bireysel yükümlülük, bir görev üzerinde grup birlikte çalışırken, her bir grup üyesinin bireysel olarak süreci, içeriği ve ürünü açıklayabilmesini ifade etmektedir. Bu kavram, kolay gibi görünmesine rağmen aslında kolay değildir. İkinci ve eşit düzeyde zorluğa sahip diğer bir durum ise grup içinde *sorumluluğun paylaşımını* sağlamaktır. Ders yılının başında, takım oluşturma etkinliklerini yapmak, bütün grup üyelerinin katılacağı standartları yerleştirmek ve bütün takım üyelerinin, süreç, içerik ve ürünü anlayacaklarından emin olmak önemlidir.

Takım oluşturma etkinlikleri (oldukça fazla olmasına rağmen) için, Alana Jones'un (1999), *Her Bir Grup İçin Takım Oluşturma Etkinlikleri (Team Building Activities for Every Group)* ve Sam Sikes'in (1995), *Zircon Gorilini Besleme ve Diğer Takım Oluşturma Etkinlikleri (Feeding the Zircon Gorilla and Other Team Building Activities)* faydalanılacak iyi kaynaklardır. Tom Heck, web'ten ücretsiz indirim için, *Bir İp Üzerinde Takım Oluşturma Oyunları (Team Building Games on a Shoestring* (www.teachmeteamwork.com) adlı kitabında, iple yapılabilen sekiz eğlenceli etkinlik geliştirmiştir.

Bireysel yükümlülüğü ve sorumluluğun paylaşımını desteklemek için öğretmen olarak rolünüzde değişiklik yapmanız gerekir. Küçük bir grubun bir üyesi size bir soru sorduğunda, soruya cevap vermek yerine grubun tamamının soru hakkında ne düşündüğünü araştırınız. Öğrenciler, birinci kaynak olarak takım arkadaşlarından yararlanmaları gerektiğini, öğretmenin ise sadece bütün grubun ihtiyacı olduğunda yardımcı olabileceğini zamanla öğrenecektir. Ayrıca, grupları gözlemlediğinizde Angela'ya ne yaptığını sormaktan ziyade Bernard'tan Angela'nın ne yaptığını açıklamasını isteyebilirsiniz. Bütün öğrencilerin, sınıfın tamamına sözlü rapor vermeye katılmaya yönlendirilmesi de, bireysel yükümlülüğü inşa eder. Bütün grup üyelerinin ne yaptıklarını anladıklarından emin olmanın iyi bir yolu; öğrencilerin, grubun herhangi bir üyesinin grubun ne yaptığını açıklaması için çağrılabileceğini bilmesidir. Ek olarak, öğrencilerin bireysel olarak stratejilerini ve çözümlerini yazmaları ve kaydetmeleri de önemlidir. Bu stratejileri veya benzerlerini ne kadar çok kullanırsanız, grup çalışmaları o kadar etkili olacak ve öğrenciler kavramları o kadar başarılı bir şekilde öğrenecektir.

Yeteneğe dayalı gruplar oluşturmaktan sakınınız! Bir sınıfı, her bir grup çeşitli özelliklere sahip olacak şekilde yeteneğe dayalı gruplara ayırmaya çalışmak boşunadır. Bu durum, üst gruplarda yer almayan öğrenciler için küçük düşürücü bir yaklaşımdır. Daha düşük grupta yer alan öğrenciler, üst grupta yer alan öğrencilerin dil ve düşünce birikiminden faydalanamayacak ve üst grupta yer alan öğrenciler de, alt grupta yer alan öğrencilerin görevlere yönelik çoğunlukla alışılagelmeyen düşüncelerini ve ilginç yaklaşımlarını duyamayacaktır.

Bir Dersin Uyarlama Örneği: Ana Dili İngilizce Olmayan Öğrenenler (ADİOÖ)

Öğrencilerin tamamı için eşitliği sağlayacak bazı stratejiler zaten vardır. Adaletli bir öğretmen olmak için, derslerinizde matematiksel amaçlar üzerine dikkatinizi yoğunlaştırmalı ve her bir çocuğun özel öğrenme ihtiyaçlarına aynı anda karşılık vermelisiniz. Anadili İngilizce olmayan öğrencilerin ihtiyaçlarını dikkate alırken, Tablo 4.1'de detaylandırılan on basamaklı planlama rehberinin her bir basamağı göz önüne alınmalıdır.

NCTM Eşitlik İlkesindeki, "yüksek beklentiler" ve "güçlü destek" ibareleri aynı fikri göstermektedir ve ikisi farklı değildir. Aşağıdaki örnekte; öğretmen, yüksek beklenti hedeflerini koruyarak anadili İngilizce olmayan öğrencilerini destekleyici bazı teknikler kullanmaktadır.

> *Ms. Steimer, uzunluk tahmin etme (inç (inch)biriminde) kavramlarını ve yarım ince en yakın ölçümü içeren bir üçüncü sınıf dersi üzerinde çalışmaktadır.Görev, öğrencilerden yaklaşık 6 inç uzunluğundaki üç nesneyi, 1 ayak (foot) uzunluğundaki üç nesneyi ve 2 ayak uzunluğundaki üç nesneyi bulmaları için tahmin etme becerilerini kullanmalarını istemektedir. Öğrenciler, önce yarım ince en yakın dokuz nesneyi ölçer ve tahminleri ile ölçümlerini karşılaştırır. Ms. Steimer'ın, sınıfında Kore'den gelen ve çok az İngilizce bilen ve Meksika'dan gelen ve iyi düzeyde İngilizce konuşan fakat Amerikan okullarında öğrenciliğe yeni başlayan iki öğrenci vardır. Bu iki öğrenci, inç ve feet birimlerine aşina değildir ve bu nedenle muhtemelen bu birimlerde tahmin etme veya ölçmede zorlanacaklardır.*
>
> *Ms. Steimer, yabancı dil üzerine vurgu yapmaya ve sınıfın tamamına cetvel üzerindeki aralıkları göstermeye zaman ayırır. Çünkü ayak (foot) kelimesi iki anlama sahiptir. Ms. Steimer derse başlamadan önce bunu açık bir şekilde söylemeye karar verir ve öğrencilerine bir "foot"un ne olduğunu sorarak başlar. Öğrencilere, başka bir arkadaşıyla beraber kelimeyi tartışmaları ve sonra cevaplarını sınıfla paylaşmaları için zaman verir. Öğrencilerine bugün bir ayağın (foot) ölçme birimi (cetveli tutarken) olduğunu öğreneceklerini açıklar. Öğrencilerine, ölçmede kullanılabilecek başka birimleri sorar. Özellikle, anadili İngilizce olmayan öğrencilerinden ülkelerinde kullandık-*

Table 4.1

ELLs İçin Genel Planlama Basamaklarına ve Ek Düşüncelere Bakış

Basamaklar	Genel Betimleme	Anadili İngilizce Olmayan Öğrenciler için Ek Düşünceler
1. Matematiksel kavramları ve amaçları belirleme	• Eyalet ve bölge standartları boyunca matematiksel kavramları belirleme. • Öğrenme hedeflerini belirleme.	• Derste dil hedeflerini (örneğin, okuma, yazma, konuşma ve dinleme) oluşturma. • Çocukların diline yakın kelimeler kullanarak dil ve içerik hedeflerini belirleme.
2. Öğrencilerin ihtiyaçlarını dikkate alma	• Kavramları, önceden öğrenilen kavram ve deneyimlerle ilişkilendirme.	• Öğrencilerin, sosyal/kültürel arka planlarını ve önceden öğrendikleri kelime ve içeriği dikkate alma.
3. Bir görevi, seçme, tasarlama ve uyarlama	• Öğrencilere Adım 1'de seçilen kavram(ları) keşfetmelerine imkân verecek bir görevi seçme.	• Öğrencilerin kültürel ve arka planlarına uygun bir içerik ekleme. • Görevi, dilin tuzaklarına göre analiz etme. Tartışılmaya ihtiyacı olan kelimeleri belirleme ve görevin anlaşılması için gerekli olmayan terimleri çıkarma. • Eşsesli, cinas ve matematikte özel anlamlara (örneğin, ortalama, benzer, çarpım) sahip kelimeleri belirleme.
4. Dersin değerlendirmesini tasarlama	• Her bir hedef için kullanılabilecek değerlendirme çeşitlerini belirleme • Çeşitli değerlendirmeler kullanma	• Anlamayı teşhis edici sorular hazırlama. Eğer gerekliyse bir tercüman kullanma. • Eğer bir öğrenci başaramıyorsa, problemin dil, içerik veya her ikisinden kaynaklandığını teşhis etmek için alternatif stratejiler araştırma.
5. Etkinliklerden *önce* planlama	• Görevin nasıl sunulacağını belirleme. • Öğrencilerin düşünme biçimlerine yönelen etkinlikleri dikkate alma.	• Arka planı inşa ediniz! Görevi, önceki öğrenme ve bilinen içeriklerle ilişkilendirme. • Görev için gerekli anahtar kelimeleri araştırma. Anahtar kelimeleri belirli bir yerde listeleme. • Seçilen görevle ilgili görsel ve reel nesneler sağlama. • Görevi, yazılı ve sözel biçimde sunma. • Anlamayı kontrol etme (örneğin, eşleştir-paylaş için öğrencilere sorunuz):
6. Sorular ve farklı alanlara uyarlama *sırasında* planlama	• Öğrencilere çalışırken verebileceğiniz ipucu veya yardım düzeyi üzerine düşünme. • Zorlukları ve farklı alanlara uyarlamayı göz önünde tutma	• Hem akademik hem de dil desteği için öğrencileri gruplama. • Öğrencileri resimler çizmeye, diyagramlar oluşturmaya ve/veya manipulatifler/modeller kullanmaya yönlendirme. • Dil üzerine vurguyu arttırma. Öğrencilerden görüşlerini açıklamalarını ve savunmalarını isteme. • Bir grafik düzenleyici kullanma. Fikirler içerir: kavram haritaları ve tabloları çizen ve cümle başlangıçlarını giren (örneğin, problemi . . . ile çözdüm). • Tehdit edici olmayan biçimlerde dili maksimum düzeyde kullanma (örneğin, düşün-eşleştir-paylaş).
7. Tartışma *sonrasını* planlama	• Öğrenciler, bulgularını nasıl rapor edecekler? • Görevin tartışmasını nasıl biçimlendireceksiniz?	• Öğrencileri, raporlarda görselliği kullanmaya yönlendirme. • Öğrencilerin planlama yapabilmeleri için konuşmalarının isteneceği önceden bildirilmelidir. • Mümkünse, bir tercüman kullanarak öğrencileri istedikleri dili kullanmaya cesaretlendirme. • Uygun "bekleme süresi" verme.
8. Dersin içindeki sıralamayı kontrol etme	• Dersin amaçlanan hedeflerinin bütün yönlerinin kontrolü.	• Ders boyunca desteklenen anahtar kelimeleri görmek için ders aşamalarını yeniden gözden geçirme. • Görsel ve başka destekleri görmek için dersi yeniden gözden geçirme.
9. Öğrenci yaklaşımlarını öngörme	• Öğrencilerin görevi nasıl cevaplayacakları ve hangi yanlış kavramaları yapabilecekleri üzerine derinlemesine düşünme. • Bu sorunları nasıl dile getireceğini belirleme.	• Başka ülkelerde kullanılan yaklaşımları dikkate alma ve öğrencileri farklı yaklaşımları paylaşmak için teşvik etme. • Yaş ve dil yeterliğine uygun olacak resimleri, kelimelerin yerine kullanmaya yönlendirme.
10. Temel soruları tespit etme	• Bir rehber olarak hedeflerinizi kullanarak, her bir ders aşamasında ne soracağınızı belirleme.	• Mümkünse, temel soruları tercüme etme. • Sözel soruları, açık bir şekilde, basit cümle yapılarıyla yazma.

ları birimlerin ne olduğunu metrik cetvellerle göstermelerini ister. Öğrencilerinden cetvelle çalışmalarını ve şu soruları kullanarak inç ile santimetreyi karşılaştırmalarını ister. "Bir inçte yaklaşık kaç santimetre olduğunu tahmin edebilir misiniz? 6 inçte? Bir ayak'ta?".

Ms. Steimer, dersin hedeflerini düşünerek, öğrencilerden inçler ve santimetreler için orta noktaların nasıl işaretlendiğini karşılaştırmalarını ister. Sonra, öğrencilerinden cetvel kullanmadan yaklaşık bir-buçuk ayak uzunluğundaki bir kağıdı koparmalarını ister. Öğrenciler, kağıt şeritlerini ölçerek 6 inçe ne

kadar yaklaştıklarını görür. Ms. Steimer, öğrencilere tahmin etmeyi ve ölçmeyi öğretmeye başlamak için artık hazırdır.

Durup Düşün!

Bayan Steimer'in dersini inceleyiniz. Anadili İngilizce olmayan öğrencileri desteklemek için belirleyebildiğiniz özel stratejiler nedir?

Düşün-eşleştir-paylaş tekniğinin kullanımıyla *ayak* kelimesinin tartışması, olası dilden kaynaklı karışıklığı ortaya koymuş ve öğrencilere, görev nedeniyle olabilecek karışıklıktan önce onun hakkında konuşma imkânı vermiştir. Görsel ve somut modelleri (cetvel ve yırtılmış kağıt şeridi) kullanma ve öğrencilerin önceki bilgileri üzerine (Kore ve Meksika'da metrik sistemin kullanımı) inşa etme çabaları, ADİOÖ'in bu görevde başarılı olmasını sağlamıştır. En önemlisi, Bayan Steimer bu strateji ile görevin zorluğunu azaltmamıştır. Eğer, Bayan Steimer görevi değiştirseydi, beklentisi çok daha küçük olurdu. Zira, ADİOÖ örneğin, inçi çok iyi bilmediklerinden onlardan görevi tahmin etmesi beklenemezdi. Tersine Bayan Steimer, öğrencilerin cetvel veya görseller kullanarak zaman harcamadan problemle basit düzeyde çalışmasına izin verseydi, beklentilerinin yüksekliğini koruyabilir fakat öğrencilerinin başarmasına imkân verecek desteği sağlamakta başarısız olurdu. Sonuç olarak Bayan Steimer, bütün öğrenciler için metrik sistemle bir ilişkilendirme yaparak öğrencilerinin kültürlerine saygı göstermiş ve başka ülkelerdeki ölçme birimlerine ilişkin diğer öğrencilerin ufkunu genişletmiştir.

Durup Düşün!

Bölümün sonundaki zenginleştirilmiş dersi inceleyiniz. Ders içinde, ADİO öğrenciler için destekleyici bulguları araştırınız. ADİO öğrencileri desteklemek için derste bulabileceğiniz ek imkânlar nedir?

Bölümün sonundaki zenginleştirilmiş dersi inceleyiniz. Ders içinde, ELL öğrencileri için destekleyici bulguları araştırınız. ELL öğrencilerini desteklemek için derste bulabileceğiniz ek imkânlar nedir?

Alıştırma veya Uygulama?

Alıştırma veya uygulama, matematikte Amerikan öğretim yöntemlerinin en gözdesi olmasa da, neredeyse her derste bir yere kadar kullanılmaktadır. Geleneksel kitaplardaki çoğu ders, genellikle benzer yapıda ve derste öğretilenlerle tamamen aynı doğrultudaki alıştırmalardan oluşan bir kısım ile sonlanır. Bu tekrarlı işlemsel süreç, öğrenilen fikirlerin sağlamlaştırılmasını amaçlamaktadır. Bu ortak ders kitabı yaklaşımına ilâve olarak, alıştırma-ve-uygulama çalışma kitapları ve bilgisayar alıştırma programları da çok yaygındır.

"Bu alıştırmaların bize kazandırdığı nedir?" sorusu değerli bir sorudur. Alıştırma, on yıllardır matematik derslerinin sürekli bir bileşenidir, fakat yetişkin insanların çoğu övünerek, "matematikte asla iyi değilim" demekte ve temel aritmetikten başka bir konuyu da çok az anladıklarını belirtmektedir. Bu kısım, farklı bir bakış açısı sunacaktır.

Alıştırma ve Uygulamanın Yeni Tanımları

"Alıştırma ve uygulama" ibaresi, konuşma diline yerleşmiş kalıplar olduğundan, "alıştırma" ve "uygulama" kelimeleri çoğu yerde eş anlamlı olarak kullanılmaktadır. Alıştırma ve uygulamaya ilişkin yeni ilginç bir açılım veya farklı bir bakış açısıyla, bu iki terimi birlikte ilişkilendirmekten ziyade etkinliklerin farklı çeşitleri olarak ayrıştıracak tanımları dikkate alınız.

Uygulama, birçok ders saatine yayılmış ama her biri aynı temel fikirleri vurgulayan farklı probleme-dayalı görevleri veya deneyimleri ifade etmektedir.

Alıştırma, tekrarlı bir süreç içermekte ve kazanılmış süreçlerin ve becerilerin geliştirilmesi için tasarlanan probleme-dayalı olmayan çalışmaları ifade etmektedir.

Durup Düşün!

Bu iki tanımın farkı nedir? Alıştırma ve uygulama kelimelerinden hangisi size daha tanıdık gelmekte veya "alıştırma ve uygulama" kalıbını (tekil anlamda) hangisi daha çok temsil etmektedir? Bunların her birisi, insanların nasıl öğrendiklerine ilişkin bizim bildiklerimizle uyumlu hâle nasıl getirilir?

Bu tanımları bir hareket noktası olarak kullanarak, her birinin uygun olduğu zamanı ve bunların her birinden elde edilebilecek yararların ne olduğunu araştırmak faydalıdır.

Alıştırmanın Sağladıkları

Alıştırma, öğrencilere aşağıdakileri sağlayabilir:

- Bir işlemin-fakat *sadece* daha önceden öğrenilmiş bir işlemin-kullanımına artan düzeyde imkân vermesi
- Bilgi ve işlemlerin yeniden gözden geçirilmesi ve böylece unutulmalarının önlenmesi

Alıştırmanın sınırlılıkları:

- Alternatif durumları dikkate almama ve bir tek yöntem üzerine odaklanma
- Anlamanın yanlış bir tezahürü
- Matematiğe bir işlemsel veya kural eğilimli bakış

Öğrencilerin, alıştırmalar aracılığıyla bir şekilde öğreneceklerine yönelik yaygın bir inanç vardır. Aslında alıştırma, öğrencilerin sadece zaten önceden bildiklerini daha hızlı bir şekilde elde etmelerine yardımcı olabilir. Temel bilgi sorularını cevaplamak için parmakları ile hesaplama yapan öğrenciler, sadece parmakları ile çok iyi hesaplama yapabilirler. Alıştırma, bir derinlemesine düşünme ekinliği değildir. Öğrenciler konuyu henüz öğrenmiş olsalar bile, alıştırma sorularının doğası öğrencilerin nasıl yapılacağını zaten bildiklerini yapmaları üzerinedir. Alıştırmanın odağı, işlemsel beceri üzerinedir.

Farklı sınıf düzeylerindeki matematikte hesaplamalar da dâhil olmak üzere, cevabı elde etmenin birçok yolu vardır. Örneğin, 48+35? işlemini toplamak için kaç farklı zihinsel yöntem olduğunu düşününüz. $84'ın yüzde 25'ini bulmak için sayıyı 0.25 ile çarpmaktan ziyade sayıyı 4 e bölebilirsiniz. $84'ın yüzde 17'sini bulmak için hangi yaklaşımı kullanabilirsiniz? Esnek düşünmenin değerine ilişkin benzer örnekler kolaylıkla bulunabilir. Alıştırma, esnekliğin ilerletilmesinden ziyade kişinin düşüncesinin daraltılması eğilimine sahip bir yaklaşımdır.

Öğrenciler, rutin alıştırmalardan oluşan bir sayfayı başarı ile tamamladıkları zaman, öğretmenler (ve hatta öğrenciler) bu durumu genellikle öğrencilerin "onu elde ettiklerinin" bir işareti olarak görürler. Aslında, öğrenciler kendilerine gösterilen bir sürecin yeniden oluşturulmasına yönelik geçici bir beceriye sahip olmuştur. Bir öğrencinin, geleneksel bir dersin sonundaki alıştırmaları yapması kısa-süreli bellek için gerekli anlamanın işaretçisi değildir. Yüzeysel öğrenme süreçleri kolayca ve hızlı bir şekilde karıştırılır ve unutulur. Bölüm 6'da not edildiği gibi, özel eğitime gereksinim duyan öğrencilerin zorluklarından biri ezberlemektir. Ezberleme ve bir bilgi veya işlem üzerine alıştırma yapma, iyi ezber yapamayan fakat iyi düşünen diğer öğrenciler gibi bu öğrencilerin de ilgilerini üst düzeyde çeken bir öğretimsel yaklaşım değildir.

Alıştırma, matematik sınıflarının yaygın bir bileşeni olduğu sürece, birçok öğrenci ve yetişkinin matematiği sevmemesi şaşılacak bir durum değildir. Gerçek matematik, mantık ve akıl yürütme üzerinedir ve bir kural ve örüntüler bilimidir. Öğrenciler, sürekli olarak işlemsel becerilerin tekrarı ile uğraşırlarsa, matematiğin bu yönünü elde etmeleri mümkün değildir.

Anlamanın en önemli kuralı şudur: Alıştırma, kavramsal anlamaya yardımcı olmayacaktır. Alıştırma, herhangi yeni bir beceri veya strateji de sağlamayacaktır. Alıştırma, sadece bilinenin muhafaza edilmesi üzerine odaklanır.

Uygulamanın Sağladıkları

Bu kitap, öğrencilere probleme-dayalı görevler aracılığıyla yeni fikirler oluşturmaları veya derinlemesine düşünmeleri için bol ve çeşitli imkânlar sunan bir uygulama kitabıdır. Uygulamanın sonuçlarının aşağıdaki listesi sürpriz olmamalıdır:

- Kavramsal fikirler, daha fazla detaylandırma ve kullanışlı ilişkilendirmelerin geliştirilmesi için artan düzeyde fırsatlar sağlama.
- Alternatif ve esnek stratejilerin geliştirilmesine imkân verme.
- Öğrencilerin tamamının özellikle de özel eğitime gereksinim duyan öğrencilerin anlamaları için daha fazla imkânlar verme.
- Matematiğin hesaplama ve anlama olduğuna yönelik açık bir mesaj içerme.

Uygulamanın yararlarının her biri, bu bölümde ve önceki bölümlerde ortaya konduğundan daha ileri tartışmaları gerektirmemektedir.Fakat uygulamanın, becerileri geliştirebileceğinin veya geliştirdiğinin açığa çıkarılması önemlidir. Yoğun bir alıştırma desteği olmadan, öğrencilerin "temel becerileri" öğrenemeyeceklerine yönelik korku, standartlara dayalı öğretim programı veya uygulamaları üzerinde yapılan günümüz araştırmaları tarafından desteklenmemektedir (bkz. Bölüm 1). Bu programlar, burada tanımlandığı gibi birçok uygulama ve alıştırmanın uygun miktarını içerir. Bu programlardaki öğrenciler, hesaplamaya dayalı beceriler üzerinde geleneksel programdaki öğrenciler kadar performans gösterir ve diğer ölçme becerilerinde de daha iyidirler.

Alıştırma Ne Zaman Uygundur?

Evet, matematikte alıştırma için bir yer vardır, fakat mevcut durumdaki kadar sıklıkta ve uzunlukta olmasına gerek yoktur. Alıştırmanın uygun olup olmadığının belirlenmesine yönelik önerilen şu iki kriteri göz önüne alınız:

- Alıştırma yapma becerisi için etkili bir strateji zaten vardır.
- Beceri veya strateji ile otomatikleşme istenilen bir sonuçtur, verimli ve etkili bir şekilde gerçekleştirilebilecek beceriyi ifade etmektedir.

Bir beceriye sahip olma ama aynı zamanda bu beceriyi mükemmelleştirme veya onun üzerinde alıştırma yapmaya gerek var mıdır? Açıkçası bu durum, matematiğin dışındaki müzik ve spor gibi iyi örneklerde sürekli olarak vuku bulur. Bir futbol topu ile dripling yapmayı veya bir kağıt üzerinde gösterilen müziğin notalarını çalmayı nasıl öğreniriz. Öğretimin başlangıcında, bu becerileri yapmak için gerekli olan bilgi parçaları bize verilir. Başlangıçta, bu beceriler zayıf ve eksiktir. Bu becerilerin yeterli bir düzeye gelmesi için tekrarlanması gerekir. Ancak, bunlara başlamak için mevcut bir beceri yoksa o zaman alıştırmanın sayısı bir beceri oluşturmayacaktır.

Alıştırma uygun olduğunda,-örneğin temel bilgilerin uygulaması-küçük bir parça ile bile daha çok iş yapılabilir. 10 işlemin uygulaması, örneğin belirli bir süre içinde yapılması gereken 50 işlemden daha fazla etkilidir (Temel işlemlerin etkili öğretimine ilişkin ayrıntılar için Bölüm 10'a bakınız.). Ayrıca alıştırma, 5-10 dakika ile sınırlandırılırsa çok iyi olur zira, alıştırma bir yeniden gözden geçirme işlemidir. Bir işlemin tekrarı için yoğun zaman harcamak etkili değildir ve öğrencilerin ilgi, motivasyon ve anlamaları üzerine olumsuz etki yapabilir.

Sonuç olarak, öğrenciler benzer biçimdeki problemden sonraki problemi çözmeleri gerektiğinde genellikle düşünmeyi terk ederler. 301-298 çıkarma işlemini alınız. Çok sayıda bu tarz problem çözen öğrenciler, sonucu sıklıkla hatalı olacak şekilde 3'ten 0'a ödünç alarak çıkarma işlemi için bir algoritma kullanırlar. Öğrenciler, bu iki sayının arasında farkın üç olduğunu ve dolayısıyla bu çıkarma işleminin sonucunun 3 olduğunu görememektedir. Aslında, burada öğrencilerin bir algoritmayı takip etmeye de ihtiyaçları yoktur.



Durup Düşün!

Durunuz ve Ana okulu öncesi -8. sınıf matematiğine kadar öğrencilerin otomatik olarak yapabileceğini düşündüğünüz şeylerin bir listesini zihninizde yapınız.

Yaptığınız liste, muhtemelen sayıları hesaplamayı, okumayı ve yazmayı içerecektir. Liste, temel işlemlerin öğrenilmesini de içermelidir (örneğin, 3 + 9 veya 8 × 6). Eğer insanların çoğu gibiyseniz, listenizdeki tamsayılarla hatta ondalık sayılarla ve kesirlerle bile hesaplama yapabilirsiniz. Kesinlikle, öğrencilerin akıcı bir şekilde hesaplama yapmaları istenmekte fakat öğrencilerin bir tek yöntemle sınırlandırılmaması veya anlamadan hesaplama yapmalarının engellenmesi gerekmektedir. Otomatikleşmesi istenilen beceriler için aday olabilecek daha birçok madde yazılabilir, genellikle bunlar matematiğin küçük parçaları olabilir, ana fikirleri olamaz. Aslında, otomatikleşmesi istenilen becerilerin listesinin oldukça kısa olması ve bu konulara ayrılacak zamanın bunu karşılaması gerekmektedir.

Öğrenemeyen Öğrenciler

Daha önce tartışıldığı gibi, sınıflardaki çeşitlilik bütün öğretmenler için bir zorluğa neden olmaktadır. Sınıftaki çoğu öğrenci gibi yeni fikirleri hızlı bir şekilde öğrenemeyen öğrenciler için öğretmenlerin cevabı verip "sadece şu alıştırmayı yapınız" demeye yönelik güçlü bir eğilimleri vardır. Bu çözümü yapmadan önce şu iki soruyu kendinize sorunuz: *Alıştırma, anlamayı inşa edecek mi? Bunun çocuğa kazandıracağı nedir?* Zorluklara sahip çocuk, kesinlikle geçmişte alıştırmalarla öğrenmiştir. Sizin şu aşamada sağladığınız alıştırmaların, öğrencinin geçmişte yaptığı uzun soluklu alıştırmalardan çok daha faydalı olacağına inanmak gerçekçi değildir. Alıştırma, çok kısa süreli başarı sağlamasına rağmen, samimi bir derinlemesine düşünme ve birçok araştırma sonucu, alıştırmanın uzun vadede çok az etkisinin olacağına işaret etmektedir. Bu çocukların, alıştırmaların çoğundan öğrendikleri basittir: "Matematikte iyi değilim. Matematiği sevmiyorum. Matematik, kurallardır."

Bu bölümün ilk kısmı-Öğrenenlerin Hepsi için Planlama- zorluklara sahip öğrencilere yardımcı olabilecek bir kavramsal yaklaşımı güçlü bir şekilde önermektedir. Alıştırma, buna cevap veremez.

Ev Ödevleri

Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Çalışması'ndan [Third International Mathematics and Science Study-TIMMS] elde edilen veriler, Amerika'daki 4. sınıf öğrencilerine diğer birçok ülkedeki öğrenciler kadar ev ödevi verildiğini ortaya koymaktadır (ABD Eğitim Bakanlığı, 1997c). Amerika'daki 8. sınıf öğrencilerine, kendilerinden anlamlı düzeyde daha yüksek performans gösteren Japon öğrencilerinden bile daha fazla ödev verildiği ve derste ödevlerle ilgili konuşmaya daha fazla zaman harcandığı da belirtilmektedir (ABD Eğitim Bakanlığı, 1996). Ev ödevinin gerçek değerinin ne olduğu belli değildir. Çoğu aile, ev ödevi verilmesini beklemekte ve çoğu öğretmen de ev ödevi vermektedir.

Fakat probleme-dayalı öğretim programında ev ödevi ne olmalıdır? Öğrencileri ve ailelerini ev ödevini başarılı bir şekilde yapmaları için etkili bir şekilde nasıl desteklersiniz? Önceki kısımda tanımlandığı gibi, alıştırma ve uygulama arasındaki fark, ev ödevleri için kullanışlı bir bakış açısı sağlayacaktır.

Ev Ödevi Olarak Uygulama

Ev ödevleri, öğrencilerin probleme-dayalı etkinliklere katılmasının en uygun yoludur. Bölüm 3'te tanımlananlara benzer bir probleme-dayalı görev, görevin zorluğu öğrencilerin çoğunun yapabileceği şekilde ayarlanarak ev ödevi olarak verilebilir. Buradaki farklılık, öğrencilerin evlerinde bir grup veya bir partnerle çalışmaktan ziyade tek başlarına çalışmalarının sağlanmasıdır.

Ev ödevi verme sürecinde, üç-aşamalı ders modeli örnek olarak alınabilir. Öğrenciler eve gitmeden önce, onların görevi anladıklarından emin olmak için ders *öncesinin* kısa bir adaptasyonu yapılır. Öğrenciler evde, ders *sırasındaki* aşamayı tamamlar. Tamamlanmış çalışma ile okula geldiklerinde, dersin *sonrasının* tekniklerini paylaşırlar. Eğer ailelerin/velilerin iletişimleri aracılığıyla bir yönlendirme yapılırsa o zaman öğrenciler, aileleriyle beraber de ders *sonrasındaki* uygulamaları yapabilir. Yazılı yapılan çalışmanın bazı biçimleri, öğrencilerin sınıf tartışmalarına hazırlık yapmaları ve ödevde sorumluluk almaları için gereklidir.

Bu tür ev ödevleri; ailelere, sınıfınızda ne olduğunu veya probleme-dayalı ortamı anlamalarını sağlamada iletişim vazifesi görür ve bu yaklaşımın değerini görmelerine yardımcı olur. Aileler, ev ödevi görmek ister, fakat bazı aileler okuduğunuz öğretim çeşidiyle ilgili herhangi bir deneyime sahip değildir. Ailelere yönelik yapılacak yönlendirme ve destek, velilerin yaklaşımı anlamalarında ve öğrencisine(lerine) yardım noktasındaki yeteneklerinde büyük bir fark oluşturabilir.

Ev Ödevi Olarak Alıştırma

Geliştirilmesi gerekli kavramlardan önce veya uygulamanın yerine geçecek alıştırma verilmez. Ev ödevleri için alıştırma verildiğinde, aşağıdakileri düşünmeniz gerekir. Bunlar:

- Alıştırma, kısa tutulmalıdır. Fazla uzun alıştırma, verimli değildir.
- Bir cevap anahtarı hazırlanmalıdır. 3. sınıf ve daha üst sınıflarda, öğrenciler kendi çalışmalarını kontrol etme kapasitesine sahiptir. Öğrencilerin, gözden kaçırılan alıştırmaları tekrarlamaları ve/veya neyi anlamadıkları veya nerede zorlandıklarını gösteren bir cümle yazmaları gerekli olabilir. Eğer bu notlara yardımcı olacak şekilde bir karşılık verirseniz, öğrenciler ev ödevi alıştırmalarının, onlara yardımcı olmak için bir yol olduğunu anlamaya başlayacaktır.
- Doğruluğuna dayalı olarak ev ödevine puan verilmemelidir. Bunun yerine, sadece tamamlanma veya tamamlanmama durumuna puan veriniz. Yanlış cevapları, cezalandırmaktan ziyade öğrencilere yardım etmek ve gelişimlerini ilerletmek için bir fırsat olarak görünüz. Bu öneri, aynı derecede uygulamaya dayalı ev ödevi için de kullanılabilir.

- Dersin değerli zamanı, alıştırma içerikli ev ödevleriyle boşa harcanmamalıdır. Özellikle, eğer son iki öneri dikkate alınırsa gerekli olanların tamamlandığı kolayca gözlemlenir.

Ev Ödevleri İçin Destek Sağlama

Aileler, ev ödevi problemlerini yapmak için stratejilerden de yararlanır. Örneğin, aileler veya veliler için yönlendirici soruların sağlanması, onların çocuklarına yardım edebilmesine ve öğretim için probleme-dayalı yaklaşım üzerine sizin yaptığınız vurguyu anlamalarına imkân verebilir. Şekil 4.2, öğrencilerin dizüstü bilgisayarlarında bulunabilecek ve aileler veya veliler ile paylaşılabilecek bazı yönlendirici sorular sunmaktadır.

Ders kitabınızı, online kaynaklar sağlayıp sağlamadığını görmek için kontrol ediniz. Bazı ders kitaplarının web siteleri, aileler, veliler ve ev ödevleri için, flash programına dayalı öğretim etkinlikleri, video kaynakları, aileler ve veliler için kaynaklar, gerçek uygulamalarla ilişkilendirmeler, birçok dilde çeviri yapan sözlükler, işitsel kaynaklar ve daha fazlasını içeren online kaynaklar içermektedir.

Bu yönlendirici sorular, matematik ev ödevleri soruları aracılığıyla öğrencilerin düşünmelerine yardımcı olacak şekilde tasarlanır:

- Hesaplamak için neye ihtiyacınız vardır? Problem ne üzerinedir?
- Bilinmeyen kelimeler nedir? Bilinen kelimeler nedir?
- Derste bugün, bunun benzeri bir problem çözdünüz mü?
- Bugüne kadar ne çalıştın?
- Problem hakkında düşünmene yardımcı olacak bir çizim yapabilir misin?
- Cevabının anlamı var mı?
- Burada bir cevaptan daha fazlası var mı?

Şekil 4.2 Ev ödevleriyle yardımcı olmak için ailelere sorular

Bölüm 4 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. Hiçbir ders, bir tek görev üzerinde inşa edilmeyecektir. Sınıfta, probleme-dayalı etkinlikleri yapısallaştırmanın başka yolları nedir?
2. Bir oyun, bir probleme-dayalı görev olarak nasıl görülebilir?
3. Öğrenciler istasyonlarda çalışırken, bir dersin *sonrasındaki* kısmı nasıl yaparsınız?
4. Çeşitlilik gösteren sınıflarda, probleme-dayalı yaklaşım bütün öğrencilere ulaşmak için neden iyi bir yoldur?
5. (a) Farklılaştırılmış görevler ve (b) basamaklandırılmış dersler ile ne ifade edildiğini tartışınız.
6. Grupların etkili bir şekilde çalışması için ihtiyaç duyulan öğretmen uygulamaları nelerdir?
7. Bir dersteki bir güncellemenin yapımı ve öğrenciler için bir uyarlamanın yapımı arasındaki fark nedir? Bu ayrımın niçin önemli olduğunu açıklayınız.
8. Bu bölüm, alıştırma ve uygulama arasında bir ayrım önermektedir. Farklarını ve her birinin ne sağladığını açıklayınız.
9. Çoğu geleneksel ders kitabındaki baskın yaklaşım ile bu kitapta tanımlanan öğretim yöntemi arasındaki en önemli fark nedir? Geleneksel ders kitaplarına genellikle eklenilen "iki-sayfalık ders biçimi" ile ne ifade edildiğini kısaca belirtiniz. Bu biçimin dezavantajları nelerdir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Herhangi bir sınıf düzeyindeki bir kitabı inceleyiniz. Bir bölümün bir konusunu seçiniz ve bölümde yansıtılan iki veya üç temel hedefi veya ana fikri belirleyiniz. Üçten daha fazla olmayacak şekilde kendinizi kısıtlayınız. Şimdi, özel olarak derslere bakınız. Dersler, belirlediğiniz ana fikirleri amaçlamakta mıdır? Dersler, bu bölüm için ana fikirleri etkili bir şekilde geliştirecek midir? Dersler, probleme-dayalı mıdır? Eğer değilse, probleme-dayalı olacak şekilde nasıl uyarlanır?
2. Anadili İngilizce olmayan öğrenenleri içeren bir sınıf için bir ders planlandığında, planlama sürecinin her bir basamağında göz önüne alabileceğiniz birçok nokta vardır. Bu kitaptan Zenginleştirilmiş Dersi alınız ve anadili İngilizce olmayan öğrenenler (ADİOÖ) ve özel eğitime gereksinim duyan öğrencilere yönelik uyarlamaları tanımlayınız. Anadili İngilizce olmayan öğrenenler için Tablo 4.1'de tanımlanan anahtar fikirleri kullanınız.

Bölüm 4 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Holden, B. (2008). Preparing for problem solving. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 290-295.
This excellent "how to" article shares how a first-grade teacher working in an urban high-poverty setting incorporated differentiated instruction. Holden describes how she prepared her classroom and her students to be successful through six specific steps. For new and experienced teachers, this provides great insights into how to structure a successful problem-based classroom.

Reeves, C. A., & Reeves, R. (2003). Encouraging students to think about how they think! *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 374-377.
When students (and also adults) get into a habit of mind—or, in this case, a pattern for solving a problem—they often continue to use this pattern even when easier methods are available. The authors explore this idea with simple tasks you can try. The point is that too much drill with little variability may have negative effects.

Williams, L. (2008). Tiering and scaffolding: Two strategies for providing access to important mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 14(6), 324-330.
Using a second-grade fraction lesson and a third-grade geometry lesson as examples, Williams shares how they were tiered and then how scaffolds, or supports, were built into the lesson. The focus on individual learners and equity makes this a very worthwhile article.

Kitaplar

Burns, M., & Silbey, R. (2000). *So you have to teach math? Sound advice for K–6 teachers.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
This is a must read for new teachers and also for veteran teachers who are switching grades. Burns and Silbey offer practical advice on leading class discussions, using manipulatives, incorporating writing into your classroom, creating useful homework, working with families, and more. Each topical chapter is organized by questions teachers typically ask. Filled with practical tips, this will be a resource to come back to often.

Litton, N. (1998). *Getting your math message out to parents: A K–6 resource.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
Well-meaning parents and other family members who remember mathematics as memorization and worksheets often challenge a constructivist, student-oriented approach to teaching. Litton is a classroom teacher who has practical suggestions for communicating with family members. The book includes chapters on parent conferences, newsletters, homework, and family math night.

Online Resources

Illuminations
www.illuminations.nctm.org
This is a favorite of many math teachers. Click on "Lessons" and you can then select grade band and content to search for lessons—all of them excellent!

The Math Forum: Internet Mathematics Library
http://mathforum.org/library
Here you will find links to all sorts of information that will be useful in both planning and assessment in a problem-based classroom.

Ask Dr. Math
http://mathforum.org/dr.math
Ask Dr. Math is a great homework resource for families, students, and teachers. Dr. Math has answers to all the classic math questions students have, like why a negative times a negative is a positive.

Zenginleştirilmiş Ders

Alanları Sabitleme

Öğrenme Alanı ve Görev Kararları

SINIF: 4-6

Matematiksel Amaçlar

- Alan ve çevre kavramlarının farklılığı
- Alan sabitlendiğinde, farklı şekillerin alan ve çevresi arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma
- Alanı ve çevreyi ölçmek için kullanılan birimlerin karşılaştırılması ve farklılığı

Öğrencilerimizin İhtiyaçlarını Dikkate Alma

Öğrenciler, alan ve çevre kavramlarıyla çalışmıştır. Öğrencilerin bazısı, çoğunluğu olmasa bile, verilen şekillerin alan ve çevresini bulabilir, hatta bir dikdörtgenin alanı ve çevresinin bulunması için formülleri de kullanabilirler. Ancak, öğrenciler hangi formülü kullanacakları noktasında karışıklık yaşayabilir.

Materyaller

Her öğrenci için gerekli olanlar:

- 36 adet renkli kare şeklinde karo
- İki veya üç adet santimetrik çizgili kağıt
- "36 adet Karo ile yapılan Dikdörtgenler" kaydetme yaprağı (Çalışma Yaprak Seti 73).
- "Alanı Sabitleme" kaydetme yaprağı (Çalışma Yaprak Seti 74).

Öğretmen için gerekli olanlar:

- Tepegöz karoları
- "36 Parça ile yapılan Dikdörtgenler" kaydetme yaprağı tepegöz saydamı (Çalışma Yaprak Seti 73).
- "Alanı Sabitleme" kaydetme yaprağı tepegöz saydamı (Çalışma Yaprak Seti 74).

"Alanı Sabitleme" Kaydetme Yaprağı

İsim _____

Uzunluk	Genişlik	Alan	Çevre



Ders

Ders Öncesi

Daha Basit bir görev ile başlama:

- Öğrenciler, kendi sıraları üzerinde 12 karo kullanarak bir dikdörtgen oluşturur. Dikdörtgenin sadece kenarlarını değil iç kısımlarını da doldururlar. Bazı fikirler önerildikten sonra bir öğrencinin tepegözün yanına gelmesi ve belirlenen bir dikdörtgeni yapması istenir.
- Tepegöz saydamı üzerinde dikdörtgenin taslak modeli çizilir. Dikdörtgenin boyutlarını, örneğin "2 × 6" yı kaydetme yaprağına not edilir.
- "Çevre ile ne kastedilmektedir? Çevre nasıl ölçülür?" Yardımdan sonra, öğrenciler çevreyi tanımlar ve nasıl ölçüleceğini belirler. Daha sonra, bu dikdörtgenin çevresi öğrencilere sorulur. Dikdörtgenin çevresini ölçmesi için bir öğrenci tepegözün yanına çağrılır (Ya parçalardan yapılan ya da çizgili kağıt üzerinde çizilen taslak dikdörtgen kullanılır). Bir-boyutlu veya doğrusal ve bir nesnenin etrafındaki uzaklık olan çevreyi ölçmek için kullanılan birimler vurgulanır. Çevreyi, kaydetme yaprağına yazınız.
- "Alan ile ne kastedilmektedir? Alan nasıl ölçülür?" sorulur. Yardımdan sonra, öğrenciler alanı tanımlar ve nasıl ölçüleceğini belirler. Daha sonra, bu dikdörtgenin alanı öğrencilere sorulur. İki-boyutlu olan ve bu nedenle bir bölgeyi kaplayan alanı ölçmek için kullanılan birimlerin açık bir şekilde ortaya konulması istenir. Karoların hesaplanmasından sonra; alan, kaydetme yaprağına birim kareler şeklinde yazılır.

- Öğrenciler, sıralarında 12 karo kullanarak farklı bir dikdörtgen yapar ve önceki gibi çevre ve alanı kaydeder. Öğrenciler, "farklı" ile ne kastedildiğine karar verecektir. 2 × 6'lık bir dikdörtgen, 6x2 lik bir dikdörtgenden farklı mıdır? Bu dikdörtgenler eş olmasına rağmen, öğrenciler bu dikdörtgenleri farklı olarak ele almak isteyebilir. Bu etkinlik için bu durum kabul edilir.

Sınıfa görevi sunma:

- 36 karoyla kaç farklı dikdörtgen yapılacağı görülür.
- Her bir dikdörtgen için alan ve çevre belirlenir ve kaydedilir.

Açık kazanımlar sağlama:

- Aşağıdaki yönergeleri tahtaya yazınız:
  1. 36 karonun *hepsini* kullanarak bir dikdörtgen bulunuz.
  2. Çizgili kağıt üzerine dikdörtgen taslağı çiziniz.
  3. Kaydetme yaprağı üzerinde dikdörtgenin çevresini ve alanını yazınız ve ölçünüz.
  4. 36 parçanın *hepsini* kullanarak yeni bir dikdörtgen oluşturunuz ve 2.-4. adımları takip ediniz.
- Öğrencileri işbirliği içinde çalışmaları için ikili gruplara ayırınız, ancak her bir öğrencinin kendi taslağını çizmesi ve kendi kaydetme yaprağını kullanması gerekir.

Ders Sırası

Başlangıçta:

- *Çevre* ve *alanın* anlamını kavradıklarından ve görevi anladıklarından emin olmak için öğrencilere, sorular yöneltilir. Bu terimleri karıştıran öğrenciler araştırılır.
- Öğrencilerin, hem dikdörtgenleri çizdiklerinden hem de onları kaydetme yaprağına uygun bir şekilde yazdıklarından emin olunur.

Süreçte:

- Bir öğrenciye bir veya iki soru yöneltilmesi, daha sonra diğer öğrenciye geçilmesi şeklindeki bir süreç takip edilerek değerlendirme soruları sorulur ve gözlem yapılır (Aşağıda verilen "Değerlendirme" ye bakınız).

Ders Sonrası

Görevi, sınıfla birlikte paylaşma ve tartışma fırsatı verme:

- Öğrencilere, alan ve çevre hakkında ne buldukları sorulur. "Çevre aynı kaldı mı? Beklentiniz neydi? Ne zaman çevre büyük ve ne zaman çevre küçüktür?" soruları yöneltilir.
- Öğrencilere, olası bütün dikdörtgenlere ulaştıklarından nasıl emin oldukları sorulur.
- Öğrencilerden, uzunluk ve genişlik değiştiğinde çevrenin ne olduğunu belirlemeleri istenir (Dikdörtgenin uzun kenarı ne kadar kısalırsa çevre o kadar küçülür Kare, en küçük çevreye sahiptir). Eşleştir-paylaş için zaman ayırınız.

Değerlendirme

Gözlem

- Öğrenciler, alan ve çevreyi karıştırmakta mıdır?
- Karoların aynı sayısını her zaman kullanarak yeni dikdörtgenler oluşturan öğrenciler, alanın değişmediğinin farkında mıdır? Bu öğrenciler, alanın ne olduğunu bilmeyebilir veya çevre ile alanı karıştırabilir.
- Öğrenciler, çevreyi bulmak için örüntüler araştırmakta mıdır?
- Öğrenciler, önemli kavramları veya örüntüleri partnerlerine söylemekte midir?

Soru

- Oluşturduğunuz dikdörtgenin alanı nedir?
- Oluşturduğunuz dikdörtgenin çevresi nedir?
- Alan, çevreden nasıl farklıdır?
- Alan nasıl ölçülür? Çevre nasıl ölçülür?

Bölüm 5

Öğretimin Değerlendirme ile Yapılandırılması

Değerlendirme, öğrenme ve öğretmeye hizmet etmelidir. Öğrencilerinin becerileri, kavrayışları ve matematiğe yaklaşımları konularında bilgi sahibi olmaksızın, öğretmenler çalışmalarına yön verecek bir şeye sahip değildirler.

Mokros, Russell, and Economopoulos (1995, p. 84)

Kişisel tecrübelerinize dayanarak, değerlendirme denilince aklınıza neler gelmektedir? Testler? Notlar? Çalışma? Endişe? Doğru cevabı bulma? Tüm bunlar tipik anılardandır. Şimdi varsayalım ki size sınıfta yapılan değerlendirmenin, öğrencilerin öğrenmelerine ve öğretmenlerin de öğretimine yardımcı olacak şekilde tasarlanması gerektiği söylensin. Peki değerlendirme bunları nasıl yapabilir?

Değerlendirmenin Öğretime Entegrasyonu

NCTM'nin *Prensipler ve Standartlar* arasında yer alan değerlendirme prensibi iki temel konuya vurgu yapmaktadır: (1) değerlendirme öğrencilerin öğrenmelerini iyileştirmelidir ve (2) değerlendirme öğretime yönelik kararlar vermek için değerli bir araçtır. Değerlendirme biçimlendirici ve düzey belirleyici olabilir. Biçimlendirici değerlendirme, eğitsel etkinliklerde öğrencilerin anlayışlarını sürekli olarak kontrol etmek amacıyla yapılan planlı bir süreçtir (Popham, 2008; William, 2008). İyi uygulandığında biçimlendirici değerlendirme, öğrenmeyi destekleyici geri dönüt sağlayarak ve öğretimi iyileştirmek için elde edilen bulgu ve sonuçları kullanarak, öğrencilerin öğrenme hızını kayda değer biçimde artırır (Nyquist, 2003; William, 2007). Hızlı geri dönütler, hâlihazırdaki öğrenme yaklaşımlarında gerekli ayarlamalar yapmaları ve kendi öğrenimlerinin sorumluluklarını üstlenmeleri için öğrencilere oldukça faydalı bilgiler verir. Topladığınız veriler, öğrenmeyi geliştirmek amacıyla atılacak adımlara yönelik vereceğiniz kararlar için bilgilendirici olacaktır.

Takip eden kısımlarda, performans görevleri, günlükler, problem çözen öğrencilerin gözlemleri ve tanılayıcı öğrenci mülakatları gibi bazı biçimlendirici değerlendirme yaklaşımlarını ele alacağız. Düzey belirleyici değerlendirmeler, konu sonu sınavı, eyalette veya okulun bulunduğu bölgede kullanılan standardize testler gibi belirli bir not üreten birikimli değerlendirmelerdir. Düzey belirleyici değerlendirmeler anlık durumu gösteren bir resim olarak ifade edilirse, biçimlendirici değerlendirmeler akış halindeki video yayını gibidir. Birincisi zamanın belli bir anında öğrencinin ne bildiğinin fotoğrafını verirken diğeri öğrencinin düşünce ve muhakemesini aktif halde gösteren sinema filmidir.

Değerlendirme Nedir?

Değerlendirme tabiri NCTM'nin Değerlendirme Standartlarında şu şekilde tanımlanmıştır: "bir öğrencinin matematik bilgisi, matematiği kullanma becerisi, matematiğe karşı eğilimi hakkında delil toplama ve bunlardan çeşitli amaçlar için çıkarımlarda bulunma sürecidir" (NCTM, 1995, s.3). Burada "delil toplama" ifadesinin test ya da sınav yapmak anlamında kullanılmadığını belirtmek önemlidir. Değerlendirme öğretimin ayrılmaz bir parçası olarak hemen her gün yapılabilir ve yapılmalıdır. Eğer değerlendirmeye bakışınızı sadece testler ve sınavlarla kısıtlarsanız, değerlendirmenin öğretimi nasıl bilgilendirdiğini ve öğrencinin gelişimine nasıl yardımcı olduğunu göremeyeceksiniz.

Değerlendirme Standartları

Geleneksel testler, öğrencilerin *neyi bilmedikleri* (yanlış cevapların sayısı) üzerine odaklanmışlardır. 1989 yılında Öğretim Programı Standartlarını ortaya koyan yazarlar, değerlendir-

Tablo 5.1

NCTM Değerlendirme Standartları	
Matematik Standardı	• Öğrencilerin bilmesi ve kullanabilmesi gereken matematiğin belirlenmesinde NCTM ve ulusal veya yerel standartları kullanınız ve değerlendirmeyi de bu temel kavramlar ve süreçlere dayandırınız • Matematiğin gerçek ve bazen de alışılmışın dışındaki durumlarda kullanımını teşvik edecek değerlendirmeler geliştiriniz • Önem taşıyan ve doğru olan matematik üzerine odaklanınız
Öğrenme Standardı	• Değerlendirmeyi, öğretimi keserek ya da ünite sonlarında ayrı bir şekilde değil öğretimin ayrılmaz bir parçası olarak sürece dâhil ediniz • Önem taşıyan ve değer verilen içerik hakkında, öğretim sırasında bu fikirleri vurgulayarak ve kullandığınız model ve yöntemlerin değerlendirmeyle örtüşmesini sağlayarak, öğrencileri bilgilendiriniz • Öğrencilerinizin kavram yanılgıları ya da ihtiyaçlarına ilişkin tahmine dayalı değil kanıta dayalı olarak öğretimin yapılması için onları dikkatlice dinleyiniz.
Eşitlik Standardı	• Her öğrencinin farklılık taşıyan özellik, deneyim ve uzmanlıklarına saygı gösteriniz • Öğrencilerin bireysel ihtiyaçlarını göz önünde bulundururken beklentinizi yüksek tutunuz • Öğrencilerin değerlendirilmesine çoklu yaklaşımları dahil ediniz ve özel eğitime gereksinim duyan öğrenciler için de gerekli değişiklik ve uyarlamaları yapınız
Açıklık Standardı	• Öğrencilerin sergilemeleri gereken performanslar ve bildiklerini nasıl gösterebileceklerine ilişkin beklentileri belirleyiniz • Sadece cevaplara bakmaktan kaçınınız ve öğrencilerin kullandıkları düşünce süreçlerinin incelenmesine özen gösteriniz • Öğrencilere, beklentileri karşılayan ve karşılamayan cevaplara ilişkin örnekler sununuz
Çıkarımda Bulunma Standardı	• Öğrencilerin, ne bildikleri konusunda neyi açıkladıkları üzerine ciddi ve dürüstçe düşününüz • Öğrencilerin performanslarına ilişkin sonuca varmak için çoklu değerlendirmeler kullanınız (örneğin gözlemler, mülakatlar, görevler, sınavlar) • Puanlamada kullanılan her bir bileşenin değerini ve bunlar için ihtiyaç duyulan kanıtların açıklandığı puanlama anahtarı (rubrik) oluşturarak önyargıdan kaçınınız
Tutarlılık Standardı	• Değerlendirme tekniklerinin hem kazanımlar ve hem de öğretim yöntemleriyle örtüşmesini sağlayınız • Değerlendirmenin öğrencilerin öğrenmelerini istediğiniz içeriği yansıttığına emin olunuz • Elde edilen sonuçları, öğretiminize ilişkin geri dönüt sağlayacak şekilde kullanabileceğiniz bir değerlendirme sistemi geliştiriniz

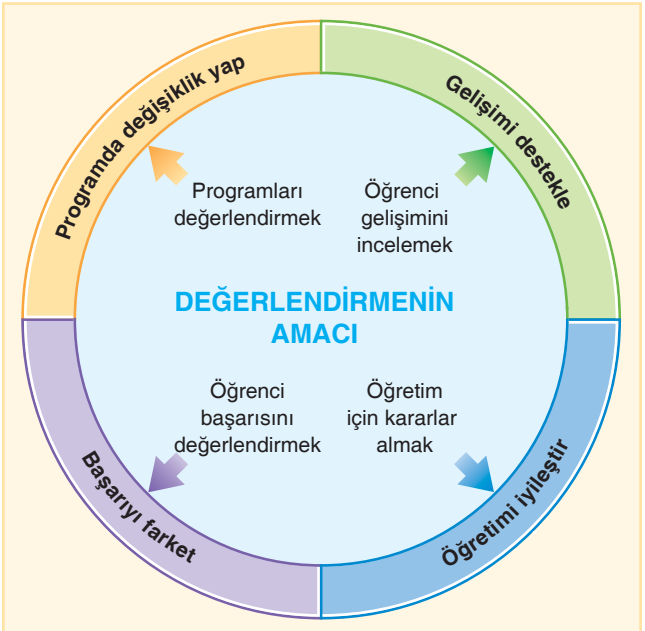
menin öğrencilerin *neyi bildiklerini* (etkinliklere hangi fikirleri taşıdıkları, nasıl muhakemede bulundukları, hangi düşünsel süreçleri kullandıkları) belirlemeye doğru bir değişime gitmesi için çağrıda bulunmuşlardır. Öğrenciler hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak için bir değişime gidilmesi, 1995 yılında NCTM tarafından yayımlanan Okul Matematiği için Değerlendirme Standartlarının da bir teması olmuştur. Değerlendirme Standartları üzerinde detaylı düşünmemiz gereken altı standart içermektedir (bakınız Tablo 5.1).

Niçin Değerlendirme Yaparız?

Altı değerlendirme standardına yüzeysel bir bakış bile değerlendirme ve öğretimin tam bir entegrasyonuna işaret etmektedir. *Değerlendirme Standartları* değerlendirmenin Şekil 5.1'de resmedilen dört özel amacını ana hatlarıyla belirlemektedir. Her amaç için bir ok, dış halkada karşılık gelen sonuca işaret etmektedir.

Öğrenci gelişimini izlemek. Değerlendirme, öğretmen ve öğrencilere, dersin kazanımları ve uzun vadeli amaçlarına yönelik gelişime ilişkin sürekli geri dönüt sağlamalıdır. Öğretim sırasında yapılan değerlendirme her bir öğrenci ve öğretmene, sadece işlemsel becerilerdeki ustalaşma hakkında değil, problem çözme becerisi ve matematiksel kavramların anlaşılmasına yönelik kaydedilen gelişim hakkında da bilgi vermelidir.

Öğretim için kararlar almak. Öğrencilerin kavrayışlarını geliştirmek için etkinlikler planlayan öğretmenler, öğrencilerin düşünme şekilleri ve kullandıkları ve geliştirdikleri fikirleri hakkında bilgi sahibi olmalıdırlar. Günlük olarak yapılan problem çözme ve tartışmalar, bölüm sonunda yapılan bir testten çok daha zengin ve faydalı veriler sunarlar.



Şekil 5.1 Ölçmenin dört amacı ve sonuçları (dış çemberde)
Kaynak: Adapted with permission from *Assessment Standards for School Mathematics,* p. 25, copyright 1995 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org.

Toplanan bu veriler, öğrenci bir sorun yaşadıktan sonra tedavi etmek yerine onların konuya ilişkin fikirler geliştirmelerine yardımcı olmak için yapılan planlamlarda kullanılır.

Öğrenci başarısını değerlendirmek. *Değerlendirme* "dikkatlice yapılan inceleme ve muhakemeye dayalı olarak, bir şeye kıymet atfetme veya beli bir değer tayin etme sürecidir" (NCTM, 1995, s.3). Değerlendirme, öğretmenin kanıtlar toplayıp bilgilenmiş olarak bir kanıya varmasını içerir. Değerlendirme, sınavlardan gelen verileri içerebileceği gibi öğretim sırasında elde edilen geniş bir yelpazede yer alan kaynak ve türdeki bilgileri de dikkate almalıdır. En önemlisi de, değerlendirme öğrencilerin bilmesi ve anlaması gerekenlere dair performans ölçütlerini yansıtmalıdır; yoksa bir öğrenciyi diğeri ile kıyaslamak için kullanılmamalıdır.

Programları değerlendirmek. Değerlendirme verileri şu soruyu cevaplamak için bir bileşen olarak kullanılmalıdır: "Bu program ya da çalışma ünitesi amaçlarımı gerçekleştirmekte ne kadar iyiydi?" Bir öğretmen için bu, eğitsel görevlerin seçimini, etkinliklerin sıralanışını, geliştirilecek soru türlerini ve model kullanımını içerir.

Ne değerlendirilmelidir?

Bu bölümde ve NCTM tarafından teşvik edilen değerlendirme için sunulan kapsamlı bakış açısına göre, uygun bir değerlendirme matematiğin tüm alanlarını yansıtmalıdır: kavramlar ve işlemler, matematiksel süreçler ve hatta öğrencilerin matematiğe karşı yönelimleri.

Kavramlar ve işlemler. İyi bir değerlendirme stratejisi, öğrencilerin ele alınan kavramları nasıl anladıklarını göstermeleri için imkânlar sunar. İyi tasarlanmamış bir sınav, bir fikri anlamak için genellikle sadece bir yol hedefler; bu da değerlendirmeyi tasarlayan tarafından belirlenen yoldur. Eğer bir etkinlik üzerine çalışılırken, etkinlik tartışılırken, etkinlik sonuçları gerekçelendirilirken, kısacası matematik öğrenirlerken, öğrencilerden biçimlendirici bilgiler toplanırsa, öğrencilerin o fikri kavrayışlarının doğasına ilişkin bilgi elde edilecektir.

Becerilerde ustalaşmayı içerecek şekilde işlemsel bilgi de değerlendirilmelidir. Fakat eğer bir öğrenci kesirlerle hesaplamalar yapabilmesine rağmen toplama için ihtiyaç duyduğu ortak paydanın çarpmada niçin gerekmediğine dair fikir sahibi değilse, "ustalaşılan" kurallar taşıdıkları anlamlar ile zayıf bir şekilde ilişkilendirilmişlerdir. Bu da bir becerinin en zayıf haliyle var olduğunu gösterir. Rutin beceriler basit bir bilgi testi ile kontrol edilebilirken, istenen kavramsal ilişkiler farklı değerlendirmeleri gerektirir.

Matematiksel süreçler. Matematiksel gücün özelliklerini tanımlayan kılavuzlar beş süreç standardının yer aldığı *Prensipler ve Standartlar*'da (NCTM) bulunabilir. Tüm bu süreçlerin hepsini değerlendirmeye çalışmak ve bunu da her gün yapmak, makul değildir. Her bir sınıf için, *Prensipler ve Standartlar*, süreç standartlarının o sınıf seviyesi için neye benzeyeceğini tasvir etmiştir. Öğrencilerinizin anlayabileceği şekilde matematik öğrenimi hakkında ifadeler oluşturmak için bu tasvirleri kullanınız. İşte size birkaç örnek, fakat sizler de kendi ifadelerinizi oluşturmalı veya okul sisteminiz ya da eyalet kılavuzları tarafından sunulanları kullanmalısınız.

Problem Çözme

- Başlamadan önce problemleri tam olarak anlamaya çalışır
- Problemler hakkında düşünmeye ve çözüme yardımcı olacak çizimler, grafikler ve fiziksel modeller kullanır
- Birçok farklı stratejiyi bilir
- Problemlerin çözümünde uygun olan stratejileri kullanır
- Cevapların makullüğünü değerlendirir

Muhakeme

- Sonuçları ve çözüm yöntemlerini gerekçelendirir
- Muhakemeye dayalı tahminler yapar
- Matematikte örüntüler arar ve kullanır

İletişim

- Fikirleri kelimeler ile yazarak, resimler ve sayılarla açıklar
- Sınıf tartışmalarında düşüncelerini anlaşılır bir şekilde iletir

Bu bileşenleri anlamalarına yardım etmek ve değer verdiğiniz süreçlerin bunlar olduğunu bilmelerini sağlamak için bu ifadeler öğrencilerle birlikte tartışılmalıdır. Belirli aralıklarla, öğrencilerin bireysel çalışmalarına, grup çalışmalarına ve sınıf tartışmasına katılımlarına dayalı olarak matematiksel süreçlerini değerlendirmek için bu ifadeleri kullanınız. Eğer zamana yayılarak geliştirilen ve toplanan çalışmalardan oluşan ürün dosyaları (portfolyo) kullanırsanız, sürece odaklanan değerlendirme göz önünde bulundurulmalıdır. Bu süreçler, vereceğiniz notların bir parçası olarak değerlendirilmeye alınmalıdır; aksi halde öğrenciler bunları ciddiye almayacaklardır.

Üretken Yönelim. Öğrencilerin kendi matematiksel becerilerine olan güvenleri ve inanışlarıyla birlikte matematikte sevdikleri ve sevmedikleri şeyler üzerine veriler toplamak da önemli bir değerlendirmedir. Bu bilgiler en kolay şekilde kontrol listeleri, mülakatlar ve günlük yazımları ile elde edilir. Problemlerle uğraşmada sabır ve isteklilik hakkındaki bilgi, problem çözme yaklaşımını kullandığınız her gün mevcuttur.

Performans Temelli Değerlendirmeler



Bölüm 3'ten hatırlanacağı gibi problem, öğrencilerin önceden tayin edilmiş veya ezberlenmiş kurallar ya da çözüm yöntemine sahip olmadıkları herhangi bir görev

ya da etkinliktir. Aynı tanım değerlendirme görevleri için de kullanılmalıdır. Muhtemelen p*erformans değerlendirme görevleri* ya da *alternatif değerlendirme*yi duymuşsunuzdur. Bu terimler, öğretimde kullanılan gerçek problem çözme etkinlikleriyle bağlantılı görevlere işaret ederler. Öğrenmeyi desteklemek için tasarlanan problem temelli iyi bir görev, sıklıkla değerlendirme için en iyi türdeki görevdir.

İyi görevler, beceri düzeyi fark etmeksizin, sınıftaki her bir öğrenciye bilgi, beceri ve kavrayışlarını gösterme imkânı sunmalıdır. Zorlanan öğrenciler, her ne kadar sınıflarındaki diğer öğrencilerin kullandıkları strateji ve becerilerle aynı olmasa da, fikirlerini bir problem üzerinde çalışırken kullanmaları için teşvik edilmelidirler.

Değerlendirme görevleri, problemler için sıklıkla gerçek hayat ya da özgün bağlamlar içerirler. Bağlamsal durumlar önemli olsa da bir öğrencinin verilen görevi nasıl tamamladığı ve çözümünü gerekçelendirme şekli bu öğrencinin matematiği anlaması hakkında bizleri bilgilendirir. Özellikle ana dili İngilizce olmayan öğrenciler için bu gündem, ortamdan kaynaklanabilecek zorluklardan dolayı gölgelenmemelidir.

Cevaplar için gerekçelendirmeler, sözel olarak verilse bile, yalnızca cevaplardan elde edilenden daha fazla bilgi sağlayacaktır. Belki de öğrenci kavrayışına ulaşmak için bundan daha iyi bir yöntem yoktur.

Performans temelli görevler için örnekler

Takip eden kısımda sunulan görevlerden her biri öğrencilerin öğrenmeleri için birçok fırsat sunar. Aynı zamanda, bunların her biri öğretmenlerin değerlendirmede kullanmaları için veri de sağlar. Bunların kapsamlı görevler olmadığına dikkat ediniz; fakat tartışma yapıldığında her birisi ayrılan zamanın büyük çoğunluğunda öğrencilerin ilgilerini çekebilir. Bu görevlerin her birisine başarıyla cevap verebilmek için ne tür matematiksel fikirler gereklidir? Bu görev, öğrencilerin fikirleri ne kadar iyi kavradığını anlamanıza yardımcı olacak mıdır?

Paylaşımlar (Anaokulu-3. sınıflar)

Leila'nın 6, Darlene'nin 2 ve Melissa'nın 4 tane jelibonu vardır. Onlar jelibonları eşit olarak paylaşmak istiyorlar. Bunu nasıl yapabilirler? Cevabınızı açıklamaya yardım edecek bir resim çizin.

İkinci ve üçüncü sınıflar için Paylaşımlar problemindeki sayılar muhtemelen daha büyük olacaktır. Eğer bu problem kurabiyelerin paylaşımı hakkında ve kurabiyelerin toplamı da 14 olsaydı, başka hangi ilave kavramlar gerekecekti?

Çıkarma (1-2. Sınıflar)

Eğer 12-7 işleminin sonucunu bilmeseydiniz, cevabı bulabileceğiniz yollar nelerdir?

Ne kadar? (1 ve 2. Sınıflar)

Gustavo almak istediği bir oyun için $15 biriktirmiştir. Oyunun fiyatı $23'dır. Gustavo daha ne kadar paraya ihtiyaç duymaktadır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Bu her iki problem de çıkarma işlemi içermesi yönüyle benzerdir ve öğrencilerin hangi stratejileri kullanacaklarını görmesi için öğretmene imkân sunar. İkinci problemde, problemin içeriği öğrencinin "üzerine ekleme" yaklaşımını (15'in kaç fazlası 23 yapar?) kullanma ihtimalini artırmaktadır. Bu problemlerin kullanımı ile elde edilecek faydaya karşın sadece işlemlerin verilmesinin sağlayacağı faydayı karşılaştırınız.

Tüm Küme (3-5. Sınıflar)

Mary, annesinin piknik için hazırladığı çöreklerden geriye kalanları saydığında 15 tane olduğunu görür. "Şimdiye kadar beşte ikisini yemiş durumdayız" diye belirtir. Annesi kaç tane çörek pişirmiştir?

Bu problem herhangi bir hikâyeleştirmeye gidilmeden de kolaylıkla sorulabilirdi. Peki, böylesi problemlerin gerçek hayat bağlamında hikâyeleştirilerek sorulmasının sağladığı fayda nedir?

Takip eden görevlerde ise öğrencilerden diğer öğrencilerin performanslarını yargılamaları istenmektedir. Öğrenci performanslarının analizi görevler oluşturmak için iyi bir yoldur.

Ondalıklar (4-6. Sınıflar)

Alan, 1, 4, 5 ve 9 rakamlarını kullanarak 50'ye en yakın ondalık sayıyı bulmaya çalışmaktadır. Bu rakamları şu şekilde kullanmıştır: 51,49. Jerry ise bu rakamları kullanarak 50'ye daha yakın bir sayı bulunabileceğini düşünmektedir. Jerry'e katılıp katılmadığınızı açıklayınız.

Zihinden Matematik (4-8. Sınıflar)

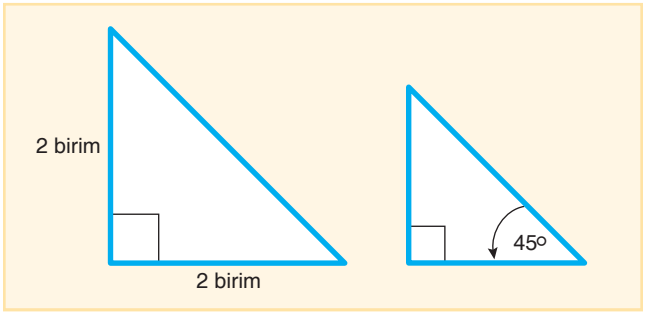
Zihninizden 4×276 çarpma işlemini yapmak için iki farklı yol bulunuz. Bunlardan hangisini kullanmak daha kolay? 5×98 çarpma işleminin sonucunu bulmak için farklı bir yol kullanır mıydınız? Niçin aynı ya da farklı bir yöntem kullanacağınızı açıklayınız.

Zihinden hesaplama görevleri, 2. sınıf sıralarında başlamak üzere tüm sınıf seviyelerinde sıklıkla kullanılmalıdır. Öğrencilerin sınıflarında paylaştıkları yöntemleri diğer öğrenciler de kapabilirler. Açıklamalar, öğrencilerin kullandıkları strateji ve kavramları nasıl anladıkları hakkında da bilgi ve-

ricidir. Gözleme dayalı bu bilgiler, zaman içinde çeşitli basit yöntemlerle kayıt edilebilir.

İki üçgen (4-8. Sınıflar)

Bu iki üçgen hakkında neler söyleyebilirsiniz?



Bu problem açık uçlu değerlendirme için iyi bir örnektir. Bu problemin, soldaki üçgenin açı ölçümünü sormaktan ne kadar daha değerli olduğunu göz önünde bulundurunuz.

Cebir: Grafik Çizme (7-8. Sınıflar)

$y = x^2$ grafiği $y = x^2 + 2$ grafiği ile kesişir mi? Fikrinizi test edebileceğiniz hangi yollar vardır?

Bu iki grafiğin kesişmediğini ispatlamak, bir grafik hesap makinasıyla bile olsa, grafiğin denklemler ve tablolar ile ilişkisinin anlaşılması ve muhakeme yapılmasını gerektirir.

Değerlendirme Görevleri Hakkında Düşünceler

Bazı durumlarda, bir görevin gerçek değeri veya öğrencilerin anlayışları hakkında edinilen bilgiler ancak takip eden tartışmalarda ortaya çıkacaktır. Diğer durumlarda ise bu bilgi yazılı olarak yapılan açıklamalarda yer alacaktır. Marilyn Burn'un yazdığı kitapların bir çoğunda şu ifadeleri görürsünüz "Bize göre cevap… Böyle olduğunu düşünüyoruz çünkü…." Öğrenciler gerekçeleri dinleme, yazma ve paylaşma alışkanlığı geliştirmelidirler. Eğer açıklamalara sınıfınızda düzenli olarak yer vermiyorsanız, değerlendirmelerde öğrencilerin iyi açıklamalar yapmasını beklemek gerçekçi olmayacaktır.

Birçok etkinlik yazılı bir bileşene sahip değildir ve "cevap" ya da sonuçları da yoktur. Örneğin, öğrenciler zar ya da dominoların kullanıldığı bir oyun oynayabilirler. Bu oyunlara dinleyici olarak katılan bir öğretmen, çocukların sayıları kullanım şekillerinde büyük farklılıklar görecektir. Bazıları kartın ya da dominonun üzerindeki her bir noktayı sayacaktır. Bazıları ise üzerine-sayma stratejisini kullanacaktır. (üzerine sayma stratejisini kullanarak bir domino taşı üzerindeki toplamı bulmaya çalışan öğrenci, taşın bir tarafında gördüğü, örneğin, dört noktanın üzerine ekleyerek saymaya başlayacak ve bu şekilde toplam sayıyı bulacaktır). Bazıları saymadan da bazı örüntüleri fark edecektir.

Diğer öğrenciler ise 13'ün 11'i yenip yenemeyeceğinden emin olmayabilecektir. Bu delil öğrencileri, sayı kavramlarını anlamalarına göre birbirinden ayrıştırır. Bir çift öğrencinin basit bir etkinlik üzerine çalışırken dinlenmesiyle elde edilen veriler öğrencilerin düşünceleri hakkında, neredeyse tüm yazılı testlerden elde edilenden daha fazla, bilgi sağlayacaktır. Öğrencilerle yapılan konuşmalar ve davranışlarının gözlenmesinden elde edilen veriler kayıt edilebilir ve bunlar yazılı veriler gibi not vermek ve değerlendirme yapmak gibi amaçlar için kullanılabilir. Özellikle not verme durumunda, daha sonra bakabileceğiniz anekdotları yazılı hâle getirmek ve tarihini de belirtmek önemlidir. (İleride ela alınan "anekdotlar" başlığına bakınız.)

Öğretimden değerlendirmeye geçebilir ve performans görevlerini amaçlarınızla uyumlu değerlendirme araçları yapabilirsiniz. Öğretim amaçlı görevlerden değerlendirme amaçlı görevlere geçişte bir rubrik (dereceli puanlama anahtarı) kullanılmalıdır. Takip eden kısımda, performansın genel özelliklerini betimleyen jenerik rubrikleri ve belli bir dersin kazanımlarına dayalı ölçütler içeren konu özelindeki rubrikleri nasıl oluşturabileceğiniz ve kullanabileceğiniz açıklanacaktır.

Rubrikler ve Performans Göstergeleri

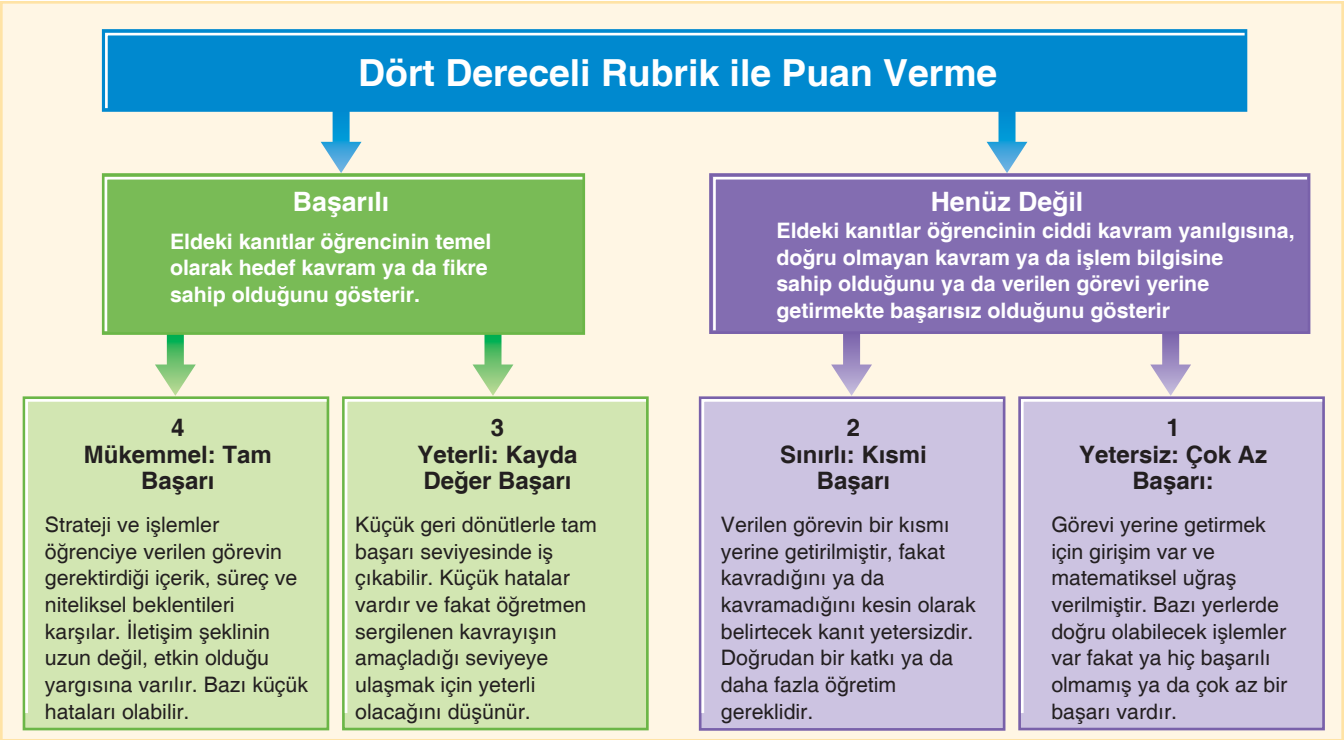
Problem temelli görevler öğrencilerin ne bildikleri konusunda çok şey söyleyebilirler; peki bu bilgiler nasıl ele alınmalıdır? Belirli bir zaman aralığında devam eden öğrencilerin çalışmalarıyla ilgili temel bir problem vardır. Doğruların yüzdeliğini saymak ve not defterine belirli bir puan olarak yazmak için basit bir yol yoktur. *Puanlama* (Scoring) ve *not verme* (Grading) kavramları arasında bir ayırıma gitmek faydalı olacaktır. "*Puanlama*, öğrencinin çalışmasının ölçütlerle ya da beklentimiz olan çalışmayı tanımlayan rubriklerle karşılaştırılmasıdır. *Not verme* ise puanlamaların ve öğrencinin çalışması hakkında diğer bilgilerin bir araya getirilerek öğrencinin durumunu başkalarına özetlemek ve iletmek için kullanılan sonuçtur" (Stenmark & Bush, 2001, s.118). Puanlar diğer bilgilerle birlikte kullanılarak (veya kullanılmayarak) bir nota dönüştürülebilirler. Puanlama için kullanılan değerli bir araç rubriktir.

Rubrik, belirli bir öğrenci grubu veya belirli bir matematiksel görev için öğretmen tarafından tasarlanan veya uyarlanan bir çerçevedir (Kulm, 1994). Rubrik üç ila altı dereceden meydana gelir. Bu dereceler, bir grup alıştırmadan doğru veya yanlışların sayısını bulmaktan ziyade tek bir görev üzerindeki performansın sınıflandırılmasında kullanılır. Derece veya puan, toplam performansın incelenmesiyle bulunur.

Basit rubrikler

Aşağıda sunulan dört dereceli basit rubrik Yeni Standartlar Projesi tarafından geliştirilmiştir.

4	Mükemmel: Tam başarı
3	Yeterli: Kayda değer başarı
2	Sınırlı: Kısmi başarı
1	Yetersiz: Çok az başarı



Şekil 5.2. Dört dereceli rubrik ile önce performans iki kategoriye ayrılır. Sonra her bir performans yeniden göz önüne alınır ve ölçekte bir puan verilir.

Şekil 5.2.'de görüldüğü gibi bu basit rubrik, öğretmenin performansı önce iki kategoriye ayırarak puanlanmasına izin verir. Öğrenci performansını kabaca iki kategori altında toplamak görece olarak kolaydır. Ölçek daha sonra, şekilde görüldüğü gibi, her bir kategoriyi iki ilave seviyeye daha ayırmaya izin verir. Hiç cevap verilmeyen, uğraş gösterilmeyen ya da tamamen ilgisiz olan cevaplara 0 puan verilir.

Dört dereceli ölçeğin avantajı başlangıçta yapılan ve görece kolay olan "Başarılı" veya "Henüz Değil" şeklindeki ayırımdır. Bazıları aşağıda örneği sunulana benzer şekildeki üç dereceli rubriği tercih ederler.

3	Üstünde ve Ötesinde-örnek gösterilecek yöntemler kullanır, yaratıcılık gösterir, problemin gereksinimlerinin ötesine geçer
2	Hedefte-verilen görevi sadece küçük hatalarla tamamlar, başarılı yaklaşımlar kullanır
1	Henüz değil-kayda değer hatalar ve atlamalar yapar, başarısız yaklaşımlar kullanır

Burada sunduğumuz görece olarak basit ölçekler jenerik rubriklerdir. Bunlar genel performans kategorilerini belirler fakat belirli bir görev için ölçütler tanımlamazlar. Verilen bir görev ya da süreç için her bir seviyeye ait performans göstergelerini oluşturmak daha faydalıdır.

Performans göstergeleri

Performans göstergeleri, rubrikte belirlenen her bir seviyedeki performansı betimleyen, göreve özel ifadelerdir ve bunun yapılmasıyla kabul edilebilir performans için ölçütler belirlenmiş olur.

Bir rubrik ve rubriğin performans göstergeleri, sizi ve öğrencilerinizi kazanımlara odaklamalı ve "Kaç tane kaçırsanız da halen bir A alabilirsiniz?" gibi sınırlandırıcı sorulardan uzak durmalıdır. Tıpkı hiçbir zaman "yeterince iyi" olduğunu düşünmeyip sürekli olarak daha iyi performans için çaba gösteren atletler gibi, öğrenciler de her zaman çok daha iyi olmanın mümkün olduğunu görmelidirler. Toplam performansı (süreçler, cevaplar, gerekçelendirmeler, gelişim vs.) hesaba kattığınızda, her zaman "ileriye gitmek ve ötesine geçmek" mümkündür.

Göreve özel rubriğinizi oluştururken, rubriğin farklı seviyelerindeki performansın neye benzeyeceği veya benzemesi gerektiğini kestirmek güç olabilir. Çoğu şey sizin o sınıf seviyesindeki çocuklarla deneyiminize, geçmişte aynı görev üzerine çalışan öğrencilerle yaşadığınız tecrübelere ve görevin kendisi hakkındaki kavrayışlarınıza bağlıdır. Performans seviyelerini belirlemenizde size yardımcı olacak önemli bir kısım yaygın öğrenci yanılgıları veya aynı ya da benzer problemler için beklenen düşünce tarzı veya yaklaşımlardır.

Görevi sınıfta kullanmadan önce, eğer mümkünse, "yeterli" veya "hedefte" performans seviyeleri için göstergeleri belirleyip yazmak iyi olacaktır. Bu, görevi seçme amacınızı gerçekleştirme ihtimalini belirlemek için mükemmel bir kontrol imkânı sağlar. Çocukların etkinliğe nasıl yaklaşacakları hakkında düşününüz.

Konuya özel hazırlanan rubrikler, görev birden fazla bileşene sahip olsa da tek bir göreve uygulanır. Eğer ken-

dinizi doğru cevapların sayısına dayalı olarak performans göstergeleri yazarken bulursanız muhtemelen siz rubrik kullanımının uygun olduğu performans temelli görevlerden ziyade alıştırma soruları hazırlamışsınızdır.

Durup Düşün!

Daha önce verilen "Tüm Küme" isimli kesir problemini göz önünde bulundurun. Dördüncü sınıfların dersine girdiğinizi ve öğrencilerinizle paylaşabileceğiniz dört dereceli rubrik için performans göstergeleri yazmak istediğinizi varsayınız (Şekil 5.2.). Seviye-3 ve 4 performansları için kullanacağınız göstergeler neler olurdu? Öncelikle seviye-3 performansından başlayınız ve sonra seviye-4 için düşününüz. Bunu, takip eden kısımları okumadan önce deneyiniz.

Performans göstergelerini belirlemek her zaman için mesleki kanılara dayalı olarak gerçekleşen öznel bir süreçtir. Aşağıda "Tüm Küme" görevi için mümkün olan bir göstergeler listesi sunulmuştur.

3 Doğru cevabı belirler veya küçük hatalar yapılmaması durumunda doğru cevabı verebilecek bir yaklaşım kullanır. Gerekçeler ya verilmemiş ya da yanlıştır. Yenilen çöreklerin sayısını doğru fakat pişirilenlerin toplam sayısını yanlış olarak verilmesi de seviye-3 performansıdır.

4 Pişirilen çörek sayısını belirler; kelimeler, resimler ve sayılar kullanarak sonucu ve bu sonucun nasıl elde edildiğini gerekçelendirir. Kesir kısımları ve bütün ile olan ilişkisine dair bilgi sahibi olduğunu gösterir.

Buradakine benzer göstergeler önceden öğrencilerle paylaşılmalıdır. Görev üzerine çalışmaya başlamadan önce göstergelerin paylaşılması değer verilen ve beklenenin ne olduğunu açık bir şekilde iletir. Öğrencilere kağıtlarını vererek göstergeleri birlikte gözden geçirirseniz, doğru cevapları ve bazı başarılı örnek cevapları dâhil etmeye çalışınız. Bu sayede öğrenciler nasıl daha iyi yapabileceklerini anlayabilirler. Sınıf arkadaşlarının (isim belirtmeksizin) ya da geçmiş yıllardan çalışma örnekleri vermek faydalıdır. Öğrencilerin seviye-4'te yer alan bir performansın neye benzediğini görmeleri gereklidir.

Peki seviye-1 ve seviye-2 performansları hakkında ne dersiniz? Aynı görev için bazı öneriler şunlardır:

2 Kesirlerin bazı yönlerini uygun bir şekilde kullanır (örneğin, 15'i 3 yerine 5 gruba bölmesi) fakat bütünün nasıl belirleneceğini kavradığını gösteren örnek sergileyemez. Pay ve paydanın anlamları doğru değil ve karıştırılmış.

1 Uğraş gösterir fakat parça ile bütün arasındaki ilişkiyi çok az ya da hiç anlamadığı görülür.

Eğer öğrenciler ya da ebeveynler açıklama istemezlerse, seviye-1 ve seviye-2 performansları için göstergeleri öğrencilerle paylaşmaya gerek yoktur. Fakat yine de bu iki seviyedeki performanslar arasındaki farklar açıkça belirtilmesi çalışmanızda size yardımcı olacaktır ki böylece öğrencilerin gelişimleri de belgelenebilir.

Beklenmeyen yöntemler ve çözümler ortaya çıkar. Öğrenciler kazanımlarınızı farklı yollarla gerçekleştirdiklerinde, kavrayışlarını sadece sizin düşündüğünüz ya da beklediğiniz şekilde göstermeleri için sınırlandırmayınız. Bu tür hadiseler rubriğinizin gelecekteki kullanımları için iyileştirilmesi veya gözden geçirilmesinde size yardımcı olur.

Performans seviyelerindeki sınıflandırmayı bitirdiğinizde, sonuçları görev için ilave rubrik göstergeleri yazmakta kullanınız. Betimlemeleri mümkün olduğunca genel tutunuz. Kâğıtları öğrencilere tekrar dağıttığınızda bu göstergeler onlarla paylaşılabilir. Gözden geçirilen rubriği ve göstergeleri daha sonra kullanmak için bir dosyada muhafaza ediniz.

Öğrencilerin Rubriklere Dâhil Olması

Ders yılının başlangıcında Şekil 5.2'dekine benzer bir jenerik rubriği sınıfınızla konuşunuz. Görülür ve dikkat çeker bir şekilde sergileyiniz. Birçok öğretmen tüm dersler için aynı rubriği kullanır; diğerleri matematik için özel olarak hazırlanmış ayrı bir rubrik kullanmayı tercih eder. Sınfta yapacağınız konuşma esnasında, öğrencileriniz etkinlik yaparken ve problem çözerken, onlara bir harf notu veya yüzdelik bir not vermeyeceğinizi, bunun yerine rubriği kullanarak onların çalışmalarına bakacağınızı, açıklamalarını dinleyeceğinizi ve geri dönüt vereceğinizi bildiriniz.

Öğrenciler rubriğin gerçekten ne anlama geldiğini anlamaya başladıklarında, jenerik rubriğe dayalı olarak görevlerdeki performanslar hakkında onlarla konuşunuz. Öğrencilerden kendi çalışmalarını bu rubriği kullanarak özdeğerlendirmeye tabi tutmalarını isteyebilir ve derecelendirmeleri için gerekçelerini açıklatabilirsiniz. Daha büyük yaştaki öğrenciler bu değerlendirmeyi yazılı formatta yapabilir ve siz de yazılı olarak onlara cevap verebilirsiniz. Tüm öğrencilerle, tamamlanan bir görev ve bu görev için "yeterli" ve "mükemmel" seviyedeki performansın ne şekilde oluşturulabileceği hakkında sınıf tartışması yapabilirsiniz.

Gözlem Araçları

Tüm öğretmenler her gün kendi öğrencileri hakkında yararlı bilgiler öğrenmektedirler. Bölüm 3'te sunulan üç aşamalı ders formatı kullanıldığında, özellikle ders *esnasında* ve *sonrasında* kısımlarında, öğrenci performansı hakkındaki veri akışı ciddi şekilde artar. Eğer öğrencileri dinlerken ve gözlerken bu bilgiyi toplamak için sistematik bir planınız varsa, çok değerli en az iki sonuç ortaya çıkar. Birinci olarak, fark edilmeyecek bilgiler birden bire görülebilir ve önemli olur. İkincisi, sistematik olarak toplanan gözlem verileri diğer verilere eklenebilir ve ders planlamasında, öğrencilere geri dönüt sağlamada, veli toplantılarında ve not vermede kullanılabilir.

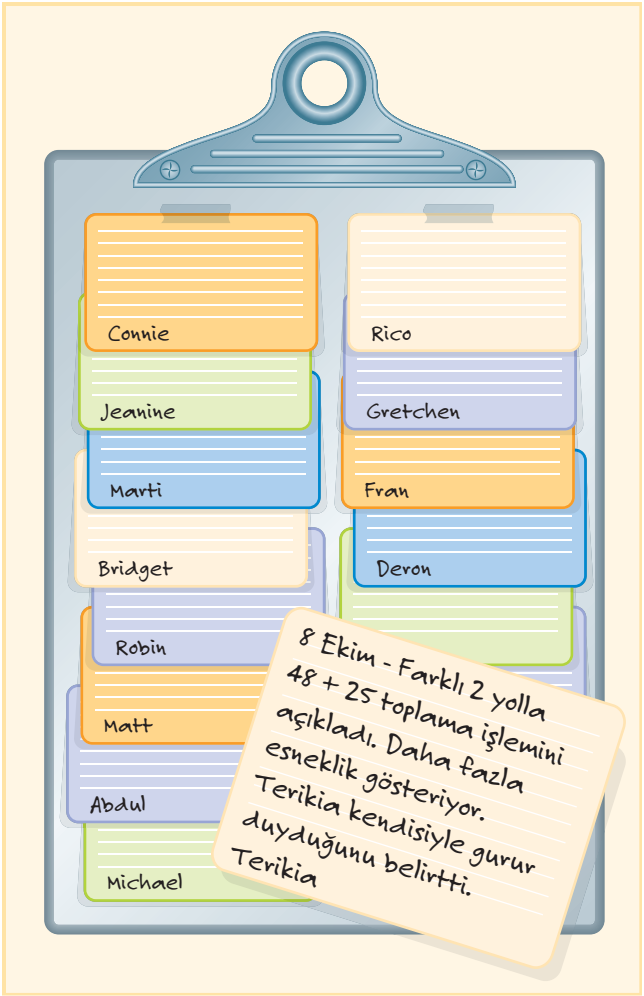
Toplamaya çalıştığınız bilginin türüne bağlı olarak, bir sınıfın yalnız bir gözleminin yapılması birkaç günden 2 haftaya kadar devam eden bir süre alabilir. Daha kısa süreli

gözlemler belli bazı kavramlara, becerilere ya da öğrencilere odaklanacaktır. Daha uzun süreli gözlemlerde, problem çözme, gösterim, muhakeme ve iletişim gibi matematiksel süreçlerdeki gelişim belirlenebilir. Gözlemin, performans görevlerinden değerlendirme amaçlı etkili bir veri toplama aracı olarak kullanılması için şu sözü ciddiye almak gerekir: *tek bir ders saatinde her bir öğrenci üzerine verileri kayıt etme girişiminde bulunma.*

Gözlem yöntemleri kullanım amaçlarına göre çeşitlilik gösterir. Ayrıca, gözlem verilerini toplama formatı ve yöntemi sizin bireysel öğretim stil ve alışkanlıklarınız tarafından etkilenecektir.

Anekdotsal Notlar

Gözlem kayıtlarını tutmanın bir yolu ders esnasında veya dersin hemen sonrasında anlatı biçiminde kısa notlar yazmaktır. Bir olasılık, her bir öğrenci için bir kart bulundurmaktır. Bazı öğretmenler klipsli pano üzerine her bir kartı üst kenarından bantlayarak muhafaza ederler (Bkz. Şekil 5.3). Diğer bir seçenek ise gözlemlerinizi bir günde yaklaşık beş öğrenci üzerine odaklamanızdır. Diğer gün farklı öğrenciler seçilir. Seçilen öğrenciler iş birliği içinde çalışan bir veya iki grubun üyeleri olabilir. Kartlara alternatif, mümkünse öğrenci isimlerinin önceden yazılı olduğu, büyük ebatta yapışkanlı dosya etiketlerinin kullanımıdır. Her bir öğrenci için etiketlere yazılan notlar daha sonra kalıcı bir defter sayfasına taşınır.



Şekil 5.3 Gözlem notları alırken hızlı ulaşım için pano ya da klasöre yerleştirilmiş hazır kartlar

Gözlem Rubriği

Bir başka ihtimal, üç veya dört dereceli jenerik rubriklerin çok kullanımlık bir form üzerinde Şekil 5.4'deki gibi kullanılmasıdır. İçeriğe özgü göstergeler için boşluk bırakınız ve öğrencilerin isimlerini not etmek için de diğer bir sütun oluşturunuz. İsimlere küçük bir not ya da yorum eklenebilir. Bu yöntem planlama amaçları için özellikle faydalıdır.

Öğrenciler İçin Bireysel Kontrol Listeleri

Yazım işini azaltmak ve dikkatinizi toplamak için belli süreçler veya konu alanlarında kontrol listeleri düzenlenebilir ve her bir öğrenci için çoğaltılabilir (Bkz. Şekil 5.5). Bazı öğretmen-

Gözlem Rubriği

Verilen Kesirden Bütünü Bulmak 3/17

Üstünde ve Ötesinde Net bir kavrayış. Çoklu gösterimlerle kavramı açıklar. Yönlendirmeye gerek duymaksızın fikri kullanır. Çubuk ve küme gösterimleriyle kesirden bütün elde edildi. Kolayca açıklar.	Sally Latania Greg Zal
Yeterli Kavrar veya iyi bir gelişim sergiliyor. Gösterilen modelleri kullanır. Bütünü ~~çubuk~~ ya da ~~küme~~ gösterimiyle bulur. Tereddütlü. Birim kesiri bulmak için yönlendirmeye ihtiyaç duyar.	Lavant (çubuk) Tanisha (çubuk) Julie (çubuk) Lee (küme) George (küme) J.B. (çubuk) Maria (küme) John H. (çubuk)
Henüz Değil Kavram yanılgısı veya kafa karışıklığı var. Sadece yardım edilince modelleme yapar. Etkinliği yapmak için yardıma ihtiyaç duyar. Güveni hiç yok.	John S. Mary

Şekil 5.4 Bir etkinlikte ya da birkaç gün devam eden bir konuda isimleri bir rubriğe kaydediniz

ler bunları bilgisayar yazıcısı yardımıyla yapışkan etiketler ya da kartlar üzerine yazdırmaktadırlar. Şablonun bir kez oluşturulmasıyla birlikte, tüm öğrencilerin isimlerini tekraren yazmaya gerek kalmadan, kontrol listesinde bulunan maddelerin düzenlenmesi kolay olacaktır. Kontrol listesinin formatı ne olursa olsun yorumlar için boş bir alan ayrılmalıdır.

Tüm sınıf için kontrol listeleri

Bir başka format sınıftaki tüm öğrencileri tek bir sayfa üzerine ya da üç sayfayı geçmeyecek şekilde listelemektir (Bkz. Şekil 5.6). Sayfanın üst satırında aranan özel beceriler ya da eksiklikler yer alır. Artılar ve eksiler, onay işaretleri veya rubriğinizde karşılık tutulan kodlar hücreye girilir. Tüm sınıf kontrol listelerinin uzun vadeli kazanımlar için kullanımı daha muhtemeldir. Bu formatın kullanımına uygun olan konular arasında problem çözme süreçleri, iletişim becerileriyle birlikte temel bilgiler ve tahmin gibi alana özgü beceriler de yer alır. Veri girişi yapılan tarihlerin not edilmesi veya gözlem yapılan etkinliklerin belirtilmesi faydalı olacaktır.

İSİM: *Sharon V.*

KESİRLER	HENÜZ DEĞİL	HEDEFTE	ÜSTÜNDE VE ÖTESİNDE	YORUMLAR
Payı/Paydayı Anlar		✓		
Alan modelleri		✓		*2/3 ve 3/6'ü göstermek için örüntü bloklarını kullandı*
Küme modelleri	✓			
Kesirleri gerçek hayat ortamlarında kullanır	✓			
Kesir miktarlarını tahmin eder		✓		*Daha fazla akla yatkınlık sergileme*
PROBLEM ÇÖZME				
Çözüme başlamadan önce problemi anlar		✓		*Problemi kendi kelimeleriyle ifade etti*
Risk almakta isteklidir	✓			*Soyut modeller kullanımına isteksiz*
Sonuçları gerekçelendirir				

Şekil 5.5 Bilgisayarda üretilmiş odaklı bir kontrol listesi ve rubrik her bir öğrenci için yazdırılabilir.



Yazma ve Günlükler

Şimdiye kadar öğretim ve değerlendirmenin bütünleştirilmesi gereğine vurgu yaptık. Bu durumun öğrencinin yazmasından daha açık görüldüğü başka bir yer yoktur. Yazmak hem öğrenme hem de değerlendirme için bir fırsattır. Bazı öğrenciler başlangıçta matematikte yazı yazmakta zorlansalar da kararlılık mükâfatını verir ve öğrenciler yazı yazmayı matematik dersinin doğal bir parçası olarak görmeye başlarlar.

Yazmanın önemi

Öğrenciler yazdıklarında, kendi fikirlerini ifade ederler ve kendi kelimelerini ve dillerini kullanırlar. Yazmak kişiseldir. Sınıfta sözel iletişim ise oldukça umumidir. Fikirler öğrencinin ağzından kurgulanmadan ve düzeltilmeden "birdenbire çıkar". Anlam bir bütün olarak sınıf tarafından müzakere edilir ve detaylandırılır. Sınıf içi söylemiyle karşılaştırıldığında, yazımın bireysel yansıtıcı özelliği matematikte yazmanın değerini göz önünde tutan önemli bir faktördür.

> Yazı yazma süreci düşünceleri bir araya getirmeyi, organize etmeyi ve netliğe kavuşturmayı gerektirir. Neyi bildiğinizi ve neyi bilmediğinizi keşfetmeyi gerektirir. Düşüncenin netleştirilmesini zorunlu kılar. Benzer şekilde, matematiği öğrenmek düşünceleri bir araya getirmeye, organize etmeye ve netliğe kavuşturmaya, bildiklerinizi ve bilmediklerinizi belirlemeye ve düşüncenin netleşmesine bağlıdır. Matematiksel arayışın son gösterimi yazma uğraşısının nihai ürününden oldukça farklı gözükse de zihinsel yolculuk temelde aynıdır: Bir fikri anlamlandırmak ve etkin bir şekilde sunmak (Burns, 1995b, s.3)

Bir değerlendirme aracı olarak yazı, öğrencilerin algılamaları ve bir fikir hakkındaki düşünme şekilleri konusunda benzersiz bir pencere sunar. Okul öncesindeki bir öğrenci bile fikirleri bir kâğıt üzerine çizimler ve diğer işaretlemeler ile ifade eder ve ne düşündüğünü açıklamaya başlar. Son olarak, öğrencilerin yazıları veli toplantılarında mükemmel bir iletişim biçimidir. Yazı, öğrencilerin düşüncelerine ilişkin velilerine herhangi bir nottan ya da test sonucundan çok daha fazlasını söyleyen bir kanıt sağlar.

Sınıf tartışmasından önce öğrenciler bir problem için kendi çözümleri hakkında yazdıklarında, bu yazı çalışma üzerine yapılacak konuşma için bir prova niteliği taşır. Ayağa kalktıklarında düşünmekte zorluk çeken öğrenciler, yapacakları katkılara destek sağlayacak yazılı bir metne sahip olurlar. Bu sayede, sınıf tartışmasının sadece yüksek sözel beceriye sahip az sayıdaki öğrenciler tarafından yapılması engellenmiş olur. Öncelikle konuşmakta isteksiz olanlara söz hakkı veriniz ki böylece onların fikirleri de duyulmuş ve değer görmüş olsun.

Konu: 2 basamaklı sayıların zihinden toplanması İsimler	Henüz Değil Zihinden yapamıyor	Hedefte En az bir stratejiye sahip	Üstünde ve Ötesinde Farklı sayılarla farklı metotları kullanır	Yorumlar
Lalie		✓ 3-18-09 3-21-09		
Pete	✓ 3-20-09	✓ 3-24-09		Yeniden gruplandırmayı gerektiren problemlerde zorluk yaşıyor
Sid			✓+ 3-20-09	Esnek yaklaşımlar kullanıyor
Lakeshia		✓		Önce onlukları sonra birlikleri sayıyor
George		✓		
Pam	✓			Önce onluk grupları ekleyerek başlıyor
Maria		✓ 3-24-09		Panoda sergilenen yüzlük tabloyu kullanıyor

Şekil 5.6 Tüm sınıf için hazırlanan gözlem kontrol listesi uzun vadeli kazanımlar veya birkaç günde tamamlanan kısa vadeli kazanımlar için kullanılabilir.

Günlükler

Günlükler, yazılı iletişimi matematik öğreniminin düzenli bir parçası yapmanın bir yoludur. Öğrencilere sağladığınız geri dönütler onların öğrenmelerini daha ileriye taşımalıdır. Günlükler, öğrencilerin matematik deneyimlerinin çeşitli boyutları hakkında yazı yazmaları için bir alandır:

- Düşüncelerin ve çözümlerin tasvir edilmesi; problemlerin, grafiklerin, tabloların ve gözlemlerin gerekçelendirilmesi de dâhil olmak üzere onların kavramsal anlamaları ve problem çözme becerileri
- Hali hazırda üzerine çalışılan konudaki soruları, yardıma ihtiyaç duyabilecekleri konular veya çok iyi anlamadıkları bir alan
- Matematiğe karşı tutumları, kendi kavrayışlarına ilişkin güven duyguları veya yanlış yapma korkuları

Öğrencilerinize günlüklerini düzenli olarak yazdırsanız bile bu günlüklerin matematiksel düşünceler hakkında yazımlar için kullanılan hususi bir yer olduğunu unutmayınız. Örneğin, alıştırma soruları veya birkaç gün boyunca devam eden uzun soluklu projelerin yürütülmesi için günlükler uygun değildir. Değerlendirme amacıyla kullanmayı planladığınız performans temelli bir değerlendirme görevi de günlükte yer almamalıdır. Öğretim amaçlı görevlerin çoğu için yapılan çalışmalar bu günlüğün içinde yer alabilir ve almalıdır; böylece çalışmanın önemli olduğu ve her zaman not vermeyecek olsanız bile bunu günlükte görmek istediğiniz şeklinde bir mesaj verebilirsiniz.

Günlüklere not vermek belirli bir "doğru" cevabı aradığınız şeklinde bir anlam taşıyabilecektir. Bununla beraber günlük yazımını okuyup cevap vermeniz esastır. Performans görevine verilecek bir cevap şekli sınıfın jenerik rubriğini kullanarak yol gösterici bir yorum yapmaktır. Bu da rubrikler ile notlar arasında ayırım yapmanın bir yoludur ve yine de geri dönüt sağlar.

Yazım yönlendirmeleri ve fikirler

Öğrenciler günlüklerine yazılacaklar konusunda açık ve iyi tanımlanmış bir amaca sahip olmalıdırlar. Öğrenciler tam olarak ne hakkında yazacaklarını ve muhataplarının kim olduğunu (siz, alt sınıflardan bir öğrenci, bir yetişkin, okula yeni gelen bir öğrenci) bilmelidirler ve yazmaları için onlara belirli bir zaman dilimi verilmelidir. Belirtilmiş bir amacı olmayan tamamen açık uçlu bir günlük yazımı, zamanın iyi bir kullanımı olmayacaktır. Şimdi yazım yönlendirmeleri konusunda düşünmeniz için bazı öneriler verilecektir; fakat olasılıklar sınırsızdır.

Kavramlar ve süreçler

- "Bence cevap …. Böyle düşünüyorum çünkü…" (Günlük herhangi bir problemin çözüm ve açıklaması için kullanılabilir. Bazı öğretmenler problemleri çoğaltıp öğrencilerin bunları günlüklerine bantlamalarını istemektedir.)
- Yeni ya da küçük yaştaki bir öğrenciye 4×7 işleminin 7×4 ile niçin aynı olduğunu ve bunun 6×49 ve 49×6 için de geçerli olup olmadığını açıklayan bir yazı yazınız. Eğer geçerliyse, neden geçerlidir?
- Farklı bir sınıfta olan (ve bugün okula gelmeyen) bir öğrenciye ondalıklar hakkında ne öğrendiğinizi açıklayınız.
- Bugün yaptığımız matematik çalışmasında kolay olan şey neydi? Zor olan şey neydi? Hâlâ sorularınız olan konu nedir?
- Eğer bugün problem çözerken takıldıysanız, problemin neresinde takıldınız? Sence niçin orada bir sorunla karşılaştın?
- Bugünkü problemin cevabını bulduktan sonra, cevabın doğruluğuna kendini nasıl ikna ettin? Doğru cevabı bulduğuna nasıl eminsin?

- Şu denkleme (şu grafiğe, şu diyagrama, şu resme) uygun bir hikâye problemi yazınız.

Üretken yönelimler

- "Matematik hakkında en çok (veya en az) sevdiğim şey …"
- Bir matematik özgeçmişi yazınız. Okul dışında matematikteki deneyimlerinizi ve matematiğe yönelik ne hissettiğinizi anlatınız.
- Bu hafta içinde öğrendiğin en ilginç matematik fikri neydi?

Erken dönem öğrenciler için günlükler

Anaokulu ve 1. sınıf öğrencilerle çalışırken yukarıda verilen yazım yönlendirmelerinin çok ileri düzeyde kalabileceği düşünülebilir; yazmayı henüz bilmeyen ya da yazmayı yeni öğrenmeye başlayan öğrencilerin yukarıda önerildiği gibi düşüncelerini ifade etmeleri zordur. Anaokulu ya da birinci sınıftaki öğrencilerle başarılı bir şekilde kullanılması mümkün olan özel teknikler vardır.

Dev günlük. Matematikte yazım sürecini başlatmak için bir anaokulu öğretmeni dil deneyimi yaklaşımını kullanmaktadır. Bir etkinlik sonrası, öğretmen tahtaya "Dev Günlük" diye not düşer ve altına bir konu ya da yönlendirme yazar. Öğrenciler yönlendirme sorusuna cevap verirler ve öğretmen de onların fikirlerini, fikri söyleyen öğrencinin de ismiyle birlikte, tahtaya yazar ve hatta uygunsa çizimleri de ilave eder (Şekil 5.7'de olduğu gibi).

Çizimler ve Erken Dönemde Yazma. Tüm öğrenciler yaptıklarını betimlemek için belli bazı çizimler yapabilirler. Noktalar, sayma pullarını ya da blokları temsil edebilirler. Şekiller ve bazı özel desenler çoğaltılmış kağıtlardan kesilerek günlük sayfalarına yapıştırılabilir.

"Yazı" öğrencinin yaptığı ve memnun olduğu bir şeyin kaydı olmalıdır. Şekil 5.8, birinci ve ikinci sınıflarda çözülen problemleri göstermektedir. Fikirlerin açıklanması için öğrenci tarafından üretilmiş yazılış şekilleri hakkında kaygı duymayınız. Öğrencilerin kendi kağıtlarını size okumalarını sağlayınız.



Şekil 5.7 Okul öncesinde bir günlük, tahta üzerinde bir sınıfın ürünü olabilir.

1. Sınıf

Problemi oku. Çözümde sana yardımcı olacak materyalleri düşün ve kullan.

Yedi tane baykuş vardı. Onlar ormanın içinde yemek için fareler buldular. Her bir baykuş beş tane fare buldu. Onlar toplam kaç tane fare buldular? Cevabın doğruluğunu nasıl bilirsin. Problemi nasıl çözdüğünü göstermek için resimler, kelimeler ve sayılar kullan.



2. Sınıf

Çiftçi beş inek ve 4 tavuk gördü. Çiftçi toplamda kaç tane ayak ve kuyruk gördü?



Şekil 5.8 Birinci ve ikinci sınıflardaki çocukların günlüklerinden bazı örnekler

Öğrenci öz-değerlendirmesi

Stenmark (1989) "kendi gelişim ve öğrenimini değerlendirme kapasitesi ve isteği öğrencilerin geliştirebilecekleri en üstün yeteneklerden birisidir... Matematiksel güç ne kadar bildiğimizi ve daha çok öğrenmek için ne yapmamız gerektiğini bilmekle ortaya çıkar" (s.26). Öğrenci öz-değerlendirmesi, öğrenmelerini ya da yönelimlerini ölçmek için kullandığınız tek araç olmamalıdır; onların bu konulardaki *algılarının* kaydı da olmalıdır.

Öz-değerlendirme için plan yaparken, değerlendirmenin bir öğretmen olarak size nasıl yardımcı olmasını istediğinizi düşününüz. Öğrencilerinize bu etkinliği niçin yaptırdığınızı anlatınız. İçten gelerek ve istekli olarak bu işi yapmaları için onları teşvik ediniz.

Öz-değerlendirme verilerini birkaç şekilde elde edebilirsiniz. Günlükler için önerilen açık uçlu yazım yönlendirmeleri öz-değerlendirme verileri toplamak amacıyla kullanılabilecek etkili bir yöntemdir:

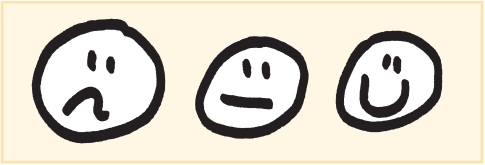
- Son birkaç gündür işlediğimiz kesirler konusunu ne kadar iyi anladığınızı düşünüyorsunuz? Kesirlerde sizi zorlayan bir şey varsa lütfen bana ne olduğunu söyleyiniz.
- Bu günkü (veya bu haftaki) ders hakkında bir tane sevdiğiniz ve bir tane de sevmediğiniz şeyi yazınız.
- Bugün grubunuzda çalışırken sizin katkınız ne oldu?

Bir başka yöntem ise öğrencilerin cevaplayacağı bir anket formu kullanmaktır. Anketlerde açık uçlu sorular, seçimli cevaplar (örneğin bazen, ara sıra, sıklıkla; katılmıyorum, fikrim yok, katılıyorum), zihin haritaları, çizimler ve benzeri yer alabilir. Başkası tarafından geliştirilen anket ya da formları kullanıyorsanız, bunların amacınıza hizmet ettiğine emin olunuz.

Öğrenciler tutum ve inanışları hakkında yazmayı zor bulabilirler. Böylesi durumlar için öğrencilerin "evet", "belki" ve "hayır" şeklinde cevaplayabilecekleri ifadelerin yer aldığı bir anketin kullanımı sıklıkla başarılı bir yaklaşımdır. Arzu ettiklerinde, her bir anket maddesinin altına kendi düşüncelerini yazmaları için onları teşvik ediniz. Böylesi bir ankette kullanabileceğiniz bazı maddeler şunlar olabilir:

- Bir probleme çözüm bulduğumda kendimden emin olurum.
- Bazen işimi bitirebilmek için öylesine bir cevap yazarım.
- Zor matematik problemleri üzerine çalışmaktan hoşlanırım.
- Matematik dersi beni kaygılandırır.
- Takıldığım zaman bırakmayı veya başka bir probleme geçmeyi düşünürüm.
- Matematikte sınıftaki öğrencilerin birçoğu kadar iyi değilim.
- Matematik benim favori dersimdir.
- Anlaması zor olan problemler üzerine çalışmayı sevmiyorum.
- Matematik öğrenmek için bildiğim tek yol kuralları ezberlemektir.
- Çözdüğümü düşününceye kadar bir problem üzerinde uzun bir süre çalışacağım.

Bir başka teknik ise öğrencilerden matematik dersinde yaptıkları herhangi bir çalışmanın sonunda yapılan etkinlik hakkında ne hissettiklerini bir cümleyle yazmalarını istemektir. Küçük çocuklar her sayfaya bir yüz ifadesi çizerek size duygularını ifade edebilirler.



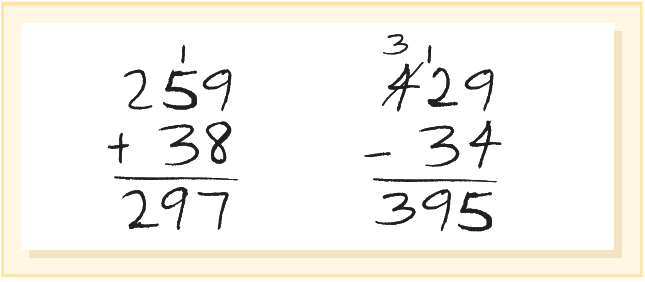
Tanılayıcı Mülakatlar

Tanılayıcı mülakatlar, ele alınan bir kavram hakkında öğrencilerin bilgileri ve zihinsel stratejilerine ilişkin derinlemesine bilgi edinmek için kullanılan bir araçtır. Bu mülakatlar, yoğun bir iş yükü getirse de, önemli kavramlar hakkında öğrencilerin düşünce şekilleri ve kavram yanılgılarına dair veri sağlayan zengin değerlendirmelerdir. Tanılayıcı mülakatta öğrenciye bir problem verilir ve çözüm sürecinde düşüncelerini dile getirmesi istenir. Bazen öğrenciler hatalarını kendiliğinde düzeltirler; fakat sıklıkla öğretmenler öğrenci kavram yanılgısını ya da öğrencinin ustalaştığı stratejilerin neler olduğunu ortaya çıkarabilir.

Seçtiğiniz problemler, öğrencilerinizin üzerinde çalıştığı konudaki kavramaları gereken temel hususlar ile örtüşmelidir. Her durumda kağıt, kalem ve özellikle de öğretiminiz sırasında kullandığınız çeşitli materyalleri hazır bulundurunuz. Ortaya çıkan kavrayışları, kullanılmasını beklediğiniz yöntemleri veya açığa çıkan yaygın kavram yanılgılarını not düşebilmek için puanlama rehberi veya bir rubriğin hazırda bulundurulması faydalı olacaktır.

Tanılayıcı mülakatlar için kullanılabilecek bir takım problem önerileri şunlardır:

Aşağıdaki problemlerin her birinde 1 sayısı aynı miktarı mı temsil etmektedir? (Philipp, Schappelle, Siegfried, Jacobs, & Lamb, 2008)



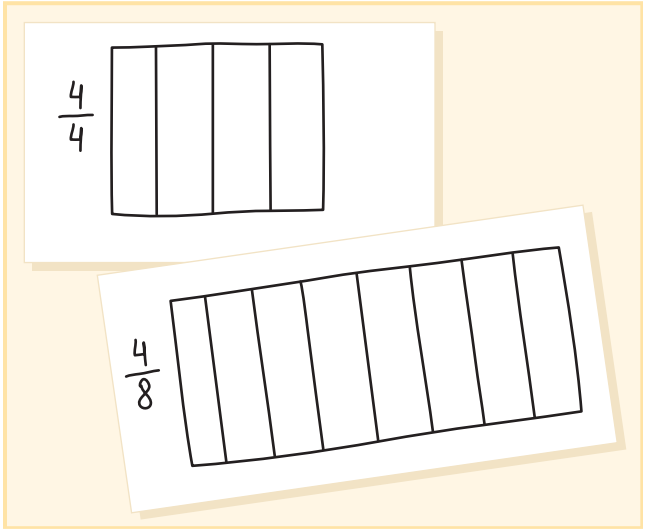
Öğrenciler cevaplarını verdikten sonra onlardan şu sorunun cevabını açıklamalarını istemelisiniz: Niçin toplama

işleminde (birinci problemde olduğu gibi) 1 sayısı 5'e eklenirken çıkarmada (ikinci problemde olduğu gibi) 2 sayısına 10 eklenmektedir? Bu problem, öğrencilerinizin çıkarma ve toplamayı işlemsel olarak mı yoksa kavramsal olarak mı bildiklerini anlamanıza yardımcı olacaktır. Öğrencilerinizin basamak değerine mi yeniden gruplandırmaya mı dikkat ettiği, yoksa her problemde sayının aynı olduğuna mı inandığına ilişkin elde edeceğiniz bilgi daha sonra yapacağınız öğretime yönelik kararlarınız için mesleki kanılarınızı geliştirecektir.

Aşağıda verilen problem, kesirleri karşılaştırma bilgisini değerlendirmek için yapılan mülakatta kullanılabilir.

Hangisi daha büyük?—$\frac{4}{4}$ mü yoksa $\frac{4}{8}$ mü? (Ball, 2008)

Bu problemde, öğrenciler bu karşılaştırmaya ilişkin düşüncelerini göstermeleri için teşvik edilmelidirler. Öğrenciler zihinsel süreçlerini göstermek ve cevaplarını temellendirmek için muhtemelen bir alan modeli ya da sayı doğrusu seçeceklerdir. Bazı öğrenciler, buradaki karşılaştırma için sabit birim olarak bütüne dair kavrayışları ve kavram yanılgılarını açık hâle getirecek şekilde farklı büyüklüklerde dikdörtgen diyagramları çizebilecektir. Örneğin önemli bir matematik eğitimcisi olan Deborah Ball tarafından yapılan bir sunumda, sınıfındaki çocuklardan birisi dört tane 1/4 içeren alan modeli çizmiştir. Daha sonra öğrenci aynı büyüklükte parçaları kullanarak 4 tane 1/8 çizmiştir. Böylece en son elde edilen bütün başlangıçtaki orijinal şeklin iki katı olmuştur. Fakat bu öğrenci, kendi arkadaşının aynı büyüklükte iki farklı dikdörtgen alarak bunlardan birisini dört parçaya bölüp her dördünü de taradığını, diğer dikdörtgeni ise sekiz parçaya bölüp dördünü (ya da yarısını) taradığını görmüş ve kendi hatasını düzeltmiştir. Tanılayıcı mülakat sırasında öğrenciler, diğer öğrencilerin açıklamalarından faydalanma imkânı bulamayacaklardır; fakat bunlar sizin öğretiminizi geliştirecek ve size bilgi verecek olan bulgu ve sonuçlardır. Ayrıca bu bilgiler öğrencilerin düşünce ve stratejilerini yeniden yönlendirme veya destekleme noktasında size yardımcı olacaktır.



Şekil 5.9 Kesirleri karşılaştıran bir öğrencinin çalışması

Sınavlar

Değerlendirmeyi öğretimle birleştirmekte ne kadar başarılı olursak olalım sınavlar her zaman için ölçme ve değerlendirmenin bir parçası olacaktır. Fakat bir sınav, not vermesi kolay olan alt düzey becerilere dayalı alıştırmaların bir koleksiyonu olmak zorunda değildir. Basit işlemsel beceri sınavları sınıfınızda bir role sahip olsa da, bu tür sınavların kullanımı değerlendirmenizin sadece bir boyutunu oluşturmalıdır. Tüm diğer değerlendirme biçimleri gibi sınavlar da öğretim amaçlarınızla örtüşmelidir. Sınavlar öğrencilerin anladıkları kavramların neler olduğunu ve düşünceleri arasındaki bağlantıların nasıl gerçekleştiğini ortaya çıkaracak şekilde tasarlanabilmelidir. İşlemsel bilgi sınavları, bir algoritmanın nasıl uygulandığını belirlemenin ötesine geçmeli ve öğrencilere bu sürecin kavramsal temelini göstermelerini izin ve imkân vermelidir. Takip eden kısımda bu tür örnekler verilecektir.

1. Öyle bir çarpma işlemi yazınız ki sonucu aşağıda verilen iki çarpma işleminin sonucunun arasında kalsın:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ \times\ 30 \\ \hline \end{array}$$

2. a. Aşağıdaki bölme işleminde 296 sayısı 6 gruba ayrıldığında her bir gruba kaç tane onluğun düştüğünü belirten sayı hangisidir?
   b. Elaine, kalan sayısını "K 2" olarak yazmak yerine "$\frac{1}{3}$" şeklinde yazmıştır. Kalan kısmı bu iki yolla belirtmek arasındaki farkı açıklayınız.

$$6\overline{)296} \quad 49\text{K}2 \qquad 6\overline{)296} \quad 49\tfrac{1}{3}$$

3. Kareli bir kağıt üzerine, aynı alana fakat farklı çevre uzunluğuna sahip iki şekil çiziniz. Her birisinin alan ve çevresini liste halinde yazınız.
4. Çıkarma işleminin her bir özelliği için aşağıdaki çıkarma işlemlerinin cevaplarını bulmanıza yardımcı olacak şekilde toplama işleminin bir özelliğini yazınız.

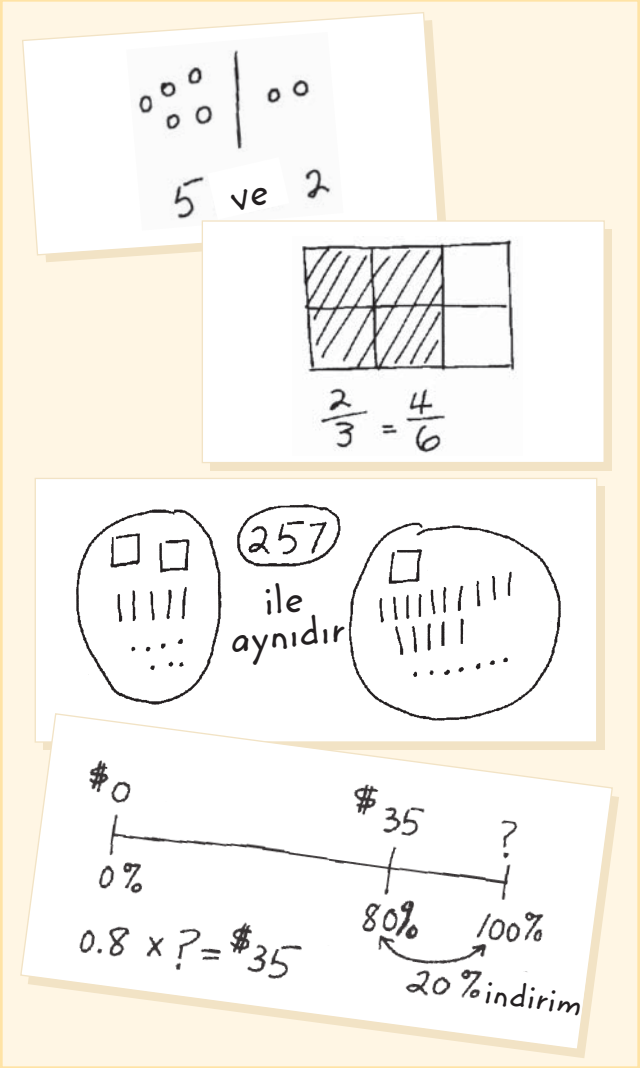
$$\begin{array}{r} 12 \\ -3 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ +3 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ -7 \\ \hline \end{array}$$

5. $^{-}3 + {}^{-}4$ ile $^{-}3 - {}^{+}4$ işlemlerinin sonuçlarının niçin aynı olduğunu gösteren ok resimlerini çiziniz.

Eğer bir test iyi oluşturulmuşsa, doğru ve yanlış cevapların sayılarından çok daha fazla bilgi toplanabilir. Aşağıdaki hususlar sınavınızın değerini artırmakta size yardımcı olabilir.

1. *Öğrencilerin hesap makinası kullanımına izin veriniz.* Hesaplama becerilerinin sınavları haricindekilerde, hesap makinası kullanımı öğrencilerin gerçekten test etmek istediğiniz şeye odaklanmalarına izin verirler. Hesap makinasına izin vermeniz öğrencilerinize hesap makinası kullanımına karşı pozitif bir tutum mesajı iletir.

2. *Çizimler ve manipülatifler kullanınız.* Kavram öğretimi sırasında modeller kullanıldığında öğrenciler sınav soruları üzerinde çalışırken aynı modelleri uygun olarak kullanabilirler (Yukarıdaki sorularda çizimlerin ve kareli kâğıtların kullanımı gibi). Basit çizimlerle sayma pullarının, onluk tabanda sayıların, kesirlerin ve benzerlerinin gösterimi yapılabilir (bakınız Şekil 5.10). Öğrencilerinizden sınav esnasında çizim yapmalarını istemeden önce modellerin nasıl çizildiğine ilişkin sınıfta örnekler sunduğunuzdan emin olunuz.
3. *Açıklamalar için fırsatlar veriniz.*
4. *"Cevabı önceden belli" sınavların sürekli kullanımından kaçınınız.* Gerek hesaplama, gerek çoktan seçmeli ve gerekse boşluk doldurma şeklinde olsun, tek bir doğru cevaba sahip olan sınavlar çocukların öğrendiklerini parçalara bölme ve bildiklerinin çoğunu gizleme eğilimindedir. Bunun yerine öğrencilerin bildiklerini gösterme fırsatı verecek sınavlar oluşturunuz.



Şekil 5.10 Öğrenciler testlerdeki kavramları açıklamak için çizimler kullanabilirler.

Yüksek Riskli Sınavlardaki Performansın Geliştirilmesi

Eğitimsiz Hiçbir Çocuk Kalmasın Kanunu (The No Child Left Behind Act) Amerika'daki tüm eyaletlerin 3. sınıftan başlamak üzere 8. sınıfa kadar her sınıf seviyesindeki öğrencilere matematik dersinden sınav yapılması direktifini verir. Sınav yöntemi ve ölçülmeye çalışılan kazanımların belirlenmesi eyaletlere bırakılmıştır. Birçok idari bölge her sınıf seviyesinde öğrencilerini matematik dersinden sınava tabi tutmaktadır.

Bir eyaletteki sınav programının detayları ne olursa olsun, harici sınavlar (sınıf dışı kaynaklı) okullara ciddi bir baskıya yol açmakta, bunun sonucu olarak da idareciler baskı altına girmekte ve kendi öğretmenlerine baskı uygulamaktadırlar.

Öğrenciler ve öğretmenler için bir takım önemli sonuçlara sahip olan harici sınavlar *yüksek riskli* (high stakes) sınavlar şeklinde adlandırılır. Yüksek riskli sınavlar, sınav baskısını hem öğrenciler (Geçecek miyim? Ebeveynlerim üzülecek mi?) ve hem de öğretmenler (Benim sınıfım ulusal yeterlik düzeyini yakalayacak mı? Öğrencilerim geçerin altında notlara sahipler, yükseltmek zorundayım.) için daha önemli hâle getirirler. Kuşkusuz bu baskılar öğretim üzerinde bir etkiye sahiptir.

Yüksek riskli sınavların baskısından kaçınamazsınız. Burada üzerinde durulması gereken soru "Bununla nasıl başa çıkacaksınız?"

Temel Kavramları ve Süreçleri Öğretiniz

Yüksek riskli sınavlarda başarılı olabilmek için verilecek en iyi tavsiye öğretim programındaki ulusal ve yerel standartlar ekseninde önem taşıyan matematiksel fikirleri öğretmenizdir. Kavramsal fikirleri ilişkili bir şekilde öğrenen ve matematiksel işlem süreçlerini anlayan öğrenciler, format ya da kazanımlar fark etmeksizin, sınavlarda daha başarılı olacaklardır.

Ulusal veya idari bölge düzeyinde hedeflenen kazanım ve becerileri inceleyerek bunların dayandığı kapsamlı kavramsal temelleri belirleyiniz. Öğrencilerin, bu standartlarda yer alan içeriği öğrenmeleri için bir fırsat oluşturunuz. Bu kitabın ikinci kısmında yer alan her bir bölümün başlangıcında, özet olarak sunulan Ana Fikirler ve bunu takip eden Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar isimli bir kısım bulacaksınız. Bunlar, öğretmeniz gereken kazanımların altında yatan kapsamlı fikirleri belirlemenize yardımcı olacaktır; bu sayede öğrencilerinize fikirler arasındaki bağlantıları derinlemesine bir şekilde kavramaları için yardımcı olabilirsiniz. Tüm programlar, kavramsal gelişim, problem çözme, muhakeme ve matematiksel anlayışların aktarılmasına ilişkin ortak bir odağa sahip olmalıdırlar. Kısacası problem temelli bir yaklaşım puanların yükseltilmesi için en iyi hareket tarzıdır.

Sınav Stratejileri

Sınav sonuçlarını yükseltmede bir başka yaygın yaklaşım öğrencilere içerikle ilişkisiz fakat sınav esnasında faydalı olabilecek belirli stratejilerin öğretilmesidir. Temkinli olmak ve

aşağıdaki iki uyarıyı dikkate almak şartıyla, takip edilecek bu yaklaşım öğrencilerinize yardımcı olabilecektir. Birinci olarak, öğrenciler kavramları geliştirmemişlerse sınav stratejileri işe yaramayacaktır. İkinci olarak, sınav stratejilerinin öğretilmesi sınavdan kısa bir süre önce yapılmalıdır. Pozitif bir etkiye sahip olabilecek bazı sınav stratejileri aşağıda verilmiştir.

- *Öğrencilerin farklı soru formatlarıyla aşinalığını sağlayın.* Ulusal düzeyde yapılan sınavlarda çıkan soru formatlarını araştırınız ve bu formatları düzenli olarak sınıfınızda kullanınız (fakat her zaman sadece bu formatları kullanmaktan kaçınınız).
- *Test esnasında kullanılacak stratejileri öğretin*. Öğrenciler çoğu kez sınav olmada uzman değildirler ve onlara sınav esnasında kullanabilecekleri stratejileri öğretmeniz faydalı olabilir. Öğretilebilecek bazı stratejiler şunlardır:
  - Soruları dikkatlice okuyunuz. Soruda ne istendiği ve çözüm için ihtiyaç duyulan bilginin ne olduğunu belirlemeye yönelik uygulamalar yapınız.
  - Hesaplama için zaman harcamadan önce cevabı tahmin ediniz. Çoktan seçmeli sınavlarda tahminde bulunma ve iyi bir sayı algısı soruların çözümü için sıklıkla gereken şeylerdir.
  - Şıkları eleyiniz. Mevcut seçeneklere bakınız. Bazılarının makul olmadığı neredeyse kesin gibidir. Bir seçenek anlamlı geliyor mu? Birler basamağındaki sayıya bakarak şıkkı elemek mümkün mü?
  - Cevaptan geriye doğru çalışınız.

Unutmayınız! Başarılı sınav olma stratejileri kavramların anlaşılmasını, becerileri ve sayı algısını gerektirir.



Not Verme

Not, belli bir çalışma alanında bir öğrencinin elde ettiği başarı seviyesini başkalarına iletmek için kullanılan bir istatistiktir. Notun doğruluğu veya geçerliliği, notu elde etmek için kullanılan bilgiye, öğretmenin mesleki kanısına ve değerlendirmenin öğretimin gerçek amaç ve kazanımlarıyla uygunluğuna bağlıdır. Not vermenin daha önce yapılan tanımına bakınız. Bu tanımda puanlamaların "öğrencinin çalışması hakkında diğer bilgiler" ile birlikte kullanılarak notun belirlendiği söylenmektedir. Notların ortalamalarının alınmasından bahsedilmemektedir.

Tecrübeli öğretmenlerin çoğu öğrencilerinin ne bildikleri, farklı durumlardaki performansları, tutum ve inanışları ve beceri düzeylerindeki başarıları hakkında çok şey bildiklerini söyleyeceklerdir. Başarılı öğretmenler, bazen informal ve hatta kayıt tutmaksızın, süregiden bir performans değerlendirmesi yaparlar. Daha iyi bir yaklaşım ise öğrenci performansını doğru bir şekilde yansıtan tüm önemli değerlendirme bilgilerinin kayıt edilmesidir.

İstatiksel olarak yapılan hesaplamalarla not verme uygulaması okulun her seviyesine o kadar derinden yerleşmiştir ki bundan vazgeçmekte zorlanabilirsiniz. Bu bölümde yapılan tartışmalarda açıklığa kavuşmuş olması gereken bir düşünce şudur ki öğrencilerin kavrayışları, problem çözme süreçleri ve tutum ve inanışları hakkında çeşitlilik gösteren bilgilerin toplanması oldukça faydalıdır. Tüm bu bilgilerin, düşük seviyeli beceriler üzerine odaklanmış sınavlardan elde edilen sonuçlara dayalı verilen puanlama uğruna göz ardı edilmesi, öğrencilere, ebeveynlere ve bir öğretmen olarak kendinize yapılan bir haksızlık olacaktır.

Not Vermede Bazı Hususlar

Problemlerden, görevlerden ve diğer uygun yöntemlerden elde edilen değerlendirme bilgilerinin not verirken etkin olarak kullanımında bazı zor kararlar kaçınılmazdır. Bu kararlardan bazıları felsefidir. Bazıları not verme konusunda okul ve ulusal politikaların bir gereğidir. Bunların hepsi de neye değer verdiğimizi ve amaçlarımız hakkında öğrenci ve velilere ilettiğimiz mesajların neler olduğunu incelememizi gerektirir.

Not Verilen Değer Verilendir. Not verme sürecinin bileşenleri arasında inkâr edilemez bir hakikat vardır: öğretmen tarafından not verilen şey öğrenci tarafından değer verilen şeydir. Geri dönüt sağlamak ve en iyiye ulaşmayı teşvik için kullanılan rubrik puanları da verilen nota yansıtılmalıdır. Fakat, "beş üzerinden dördü [rubrik puanlamasında] yüz üzerinden 80'e ya da dört üzerinden üçü [rubrik puanlamasında] C notuna dönüştürmek alternatif değerlendirmenin ve rubrik kullanımının tüm amacını yerle bir edecektir" (Kulm, 1994, s.99). Kulm'a göre, rubrik puanlarının doğrudan belli bir nota dönüştürülmesiyle birlikte dikkatler not üzerine yoğunlaşacak ve bu da bütün problem çözme etkinliklerini, en iyi performansı yakalamak için uğraşmak şeklinde özetlenebilecek, amaçlarından uzaklaşacaktır. Tam puan alamayan cevap kâğıtları öğrencilere dağıtıldığında detaylı rubrik göstergelerinin amacı daha yüksek seviyede bir performans yakalamak için yapılması gerekenler konusunda öğrenciye yol göstermektir. İlk zamanlarda geri dönütlere dayalı olarak performansın iyileştirilmesi için imkânlar olmalıdır. Yüz üzerinden 75 veya bir C notu verildiğinde, öğrencinin bildiği tek şey düşük performans sergilediği olacaktır. Eğer, örneğin, bir öğrencinin cevaplarını ve çözümlerini gerekçelendirme becerisi gelişmişse, bu öğrenci not verme devresinin başlangıcında ortaya çıkan düşük performansına verilen notlarının da ortalamaya katılmasıyla cezalandırılmalı mıdır?

Verilen not, performans görevlerini ve rubrik derecelendirmesi yaptığınız diğer tüm etkinlikleri dikkate almak zorundadır; aksi takdirde, öğrenciler bunların önemli puanlamalar olmadığını düşüneceklerdir. Diğer yandan, bunların sayısal tarzda eklenmesi ya da ortalamalarının alınması suretiyle kullanılması da gerekmez. Not verme devresinin sonunda verilen not, bütüncül bir bakışla sizin amaçlarınızla karşılaştırıldığında öğrencinin an itibariyle nerede olduğunu yansıtmalıdır.

Değerlendirme Araçlarından Notlara. Tayin ettiğiniz not sizin tüm amaçlarınızı yansıtmalıdır. İşlemsel beceriler önemini korumalı fakat bu önem amaçlarınızla karşılaştırmalı olarak verilmelidir. Matematik için tek bir not tayin etmek zorunda kalırsanız, bu notun belirlenmesinde farklı unsurlar, farklı ağırlık veya değere sahiptir. Öğrenci X'in güçlü bir muhakeme yeteneği ve matematiğe karşı gerçek

bir sevgisi varken hesaplama becerileri zayıf olabilir. Öğrenci Y problem çözmede ortalama düzeyde iken matematiksel düşüncesinin iletiminde oldukça başarılı olabilir. Grup çalışmasında iş birliğine, yazılıya karşın sözel iletişime, hesap becerilerine ne kadar bir ağırlık vermelisiniz? Bu sorulara verilecek basit cevaplar yoktur. Fakat tüm bunlar, notları vereceğiniz gecede değil, not verme döneminin başında belirlenmeli ve açıklanmalıdır.

Not verme sisteminin geçerliliğini artırmak için çoklu değerlendirmeye dayalı çok boyutlu rapor sistemi önem taşımaktadır. Matematik için sadece bir değil de birden fazla not tayin ederseniz, sizin raporunuz aileler için daha anlamlı olacaktır. Okulunuzun rapor kartı çoklu not vermeye izin vermiyor olsa bile, farklı kazanımlarınıza yönelik birden fazla notun yer aldığı ek bir doküman düzenleyebilirsiniz. Yorumlar için bir boşluğun bulunması da faydalı olacaktır. Not verme sürecinde bu formu belirli periyotlarda öğrencilerinizle paylaşabilir ve kolaylıkla bir rapor kartı eşliğinde sunabilirsiniz.

Çoklu değerlendirme formları kullanarak öğrenciye not verme süreci öğrencinizin başarısını artırma potansiyeline sahiptir. Öğretiminizle örtüşen araçlar geliştirirken ve öğrencilerinizin anlayışları hakkında önemli kanıtlar sunarken meslektaşlarınızla birlikte çalışınız. Küçük gruplar ya da aynı sınıf seviyesinde derse giren arkadaşlarınızla, performans görevleri paylaşabilir, öğrencilerin çalışmalarından örneklere bakarak hatalarını belirlemeye çalışabilir, öğrencinin kullandığı yeni bir yaklaşımın mutluluğunu yaşayabilir ve benzer kavram yanılgılarına karşın onların neler yaptığını konuşabilirsiniz. Etkili değerlendirmeler yapmak ve yürütmek amacıyla takım olarak çalıştığınızda, anlamlı performans görevleri ya da soru seçim ve uygulamasındaki beceriniz artacak ve düşüncelerinizi sorgulamak ya da teyit etmek suretiyle mesleki kanılarınız gelişecektir.

Bölüm 5 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Biçimlendirici değerlendirme ile düzey belirleyici değerlendirme arasındaki fark nedir? Her birisi için örnekler veriniz.
2. Puanlama ile not verme arasındaki fark nedir? Bir puanlamanın amacı, not vermek değilse, nedir?
3. Rubriğin temel özelliklerini açıklayınız. Performans göstergeleri nedir?
4. Öğrenmelerine yardımcı olmak için öğrenciler rubriklerin anlaşılması ve kullanılması sürecine nasıl dâhil edilebilirler?
5. Gözleme dayalı değerlendirmeleri günlük derslerinize nasıl dâhil edebilirsiniz? Gözlemlerin kayıt altına alınması için kullanılan yöntemlerden birisi nedir? Her bir öğrenciyi gözlemlemek zorunda mısınız?
6. Sınırlı yazım becerisine sahip öğrenciler matematik günlüklerini nasıl yazabilirler?
7. Tanılayıcı mülakatlar öğrencilerin düşüncelerini yansıtmaya nasıl yardımcı olur?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Çeşitli matematik ders kitaplarındaki konu sonu testleri inceleyiniz. Bu testler konuyla ilgili önemli hususları ölçmekte ne kadar başarılıdır? Kavramlar mı anlama mı? Matematiksel süreçler mi?
2. Eyaletinizdeki eğitim biriminin web sitesine ulaşınız ve NCLB tarafından istenen yıllık gelişimi (Annual yearly progress) belirlemekte kullanılan sınav sorularını bulunuz. Öncelikle bu soruların içerdikleri kavramlar hakkında öğrencilerin kavrayışlarını ortaya çıkarmakta kullanılabilecek problem temelli değerlendirme için uygun olup olmadığına karar veriniz. Sonra, eğer gerekirse, bu soruları sınıfta faydalı olabilecek problem temelli değerlendirmeye dönüşebilmesi için iyileştirmeye çalışınız.
3. Sizin bölgenizdeki öğretmenler ulusal sınav programlarının baskısına karşı nasıl tepki vermektedirler? Öğrencilerin bu sınavlardaki performanslarını artırmak için neler yapıyorlar?

Bölüm 5 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Kitchen, R., Cherrington, A., Gates, J., Hitchings, J., Majka, M., Merk, M., & Trubow, G. (2002). Supporting reform through performance assessment. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(1), 24–30.

Six of the seven authors are middle school teachers working together in the same school. As part of implementing a standards-based curriculum in a school that had recently dropped tracking, these teachers wrote and refined assessments they believed would help promote higher-order thinking. The article includes interesting examples and provides useful and inspiring information that is applicable across the grades.

Leatham, K. R., Lawrence, K., & Mewborn, D. (2005). Getting started with open-ended assessment. *Teaching Children Mathematics*, *11*(8), 413–419.

In this article, the definition of an open-ended assessment item includes the potential for a range of responses and a balance between too much and too little information given. Examples are

included. The teacher-author (Lawrence) talks personally about getting started in her third–fourth grade class of "culturally and economically diverse" students and the values that accrued for both her and her class.

Kitaplar

Bush, W. S., & Leinwand, S. (Eds.). (2000). *Mathematics assessment: A practical handbook for grades 6–8*. Reston, VA: NCTM.

Glanfield, F., Bush, W. S., & Stenmark, J. K. (Eds.). (2003). *Mathematics assessment: A practical handbook for grades K–2*. Reston, VA: NCTM.

Stenmark, J. K., & Bush, W. S. (Eds.). (2001). *Mathematics assessment: A practical handbook for grades 3–5*. Reston, VA: NCTM.

These three NCTM books are part of a K–12 series on assessment. The handbooks offer practical advice for classroom teachers that is considerably beyond the scope of this chapter. The four chapters in each book essentially cover the kinds of assessment options that are best used, practical guidelines for implementing a quality assessment program in your classroom, and suggestions for dealing with the assessment data once gathered.

Wright, R., Martland, J., & Stafford, A. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention*. London: Paul Chapman Educational Publishers.

This book includes six diagnostic interviews for assessing young children's knowledge and strategy use related to numbers and the operations of addition and subtraction. Using a series of frameworks the authors help teachers pinpoint students' misconceptions and support appropriate interventions.

Online Kaynaklar

NCTM Araştırma Videoları ve Yorumları—Biçimlendirici Değerlendirme
www.nctm.org/clipsandbriefs.aspx

NCTM provides information on the definition of formative assessment and Five Key Strategies for effective formative assessment, including an example of a task for a diagnostic interview. They also include an excellent set of references for further investigation.

NCTM'nin Durum Cetveli—Yüksek Riskli Sınavlar (Ocak 2006)
http://nctm.org/about/content.aspx?id=6356

This position statement provides information about NCTM's position on the role of high-stakes testing in making decisions for schools, students, and instruction.

20 Matematik Rubriği
http://intranet.cps.k12.il.us/Assessments/Ideas_and_Rubrics/Rubric_Bank/MathRubrics.pdf

Although this site is maintained by the Chicago Public Schools' Bureau of Assessment, you will find rubrics from many different states and national projects. Some are generic rubrics for problem solving, communication, and concept knowledge, but many have useful indicators and performance levels that can be adapted for many purposes.

Bölüm 6

Matematiği Tüm Çocuklara Eşit Şekilde Öğretmek

Bir bilge adam demişti ki: eşit olmayanlara yapılan eşit muameleden daha büyük eşitsizlik yoktur.

Yüksek mahkeme yargıcı Felix Frankfurter,
Kaynak: Denniz v. U.S., 339 US 162 (1950), s.184. .

Tüm öğrencilerin NCTM standartlarıyla amaçlanan sonuçlara ulaşmalarına yardımcı olacak anahtar bileşen eğitimde eşitliktir. Eşitlik İlkesi şu şekilde ifade edilir: "matematik eğitiminde mükemmellik, eşitliği, yani tüm öğrenciler için güçlü bir destek ve yüksek beklentiyi gerektirir" (NCTM, 2000, s.12). Öğrencilere bilgilerini ileri düzeye taşımak için bireysel öğrenme hedeflerine önem veren bir öğretim ile desteklenmiş fırsatlar bulmalıdırlar. Geçmiş yıllarda (ve bazı durumlarda halen) bazı öğrencilerin matematikte diğerleri kadar iyi olmaları beklenmezdi; örneğin, özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler, beyaz olmayan öğrenciler, ana dili İngilizce olmayanlar, bayanlar ve düşük sosyo-ekonomik mevkidekiler. Tüm öğrencilerin sınıf düzeylerindeki öğretim programlarını öğrenmek için eşit şanslara sahip olmaları gerekmesine rağmen, bu her bir çocuk için yapılan öğretimin aynı olması anlamına gelmemektedir.

Eşitlikçi Bir Öğretimin Temin Edilmesi

Eşitliği amaçlayan bir öğretim, öğrencilere matematik öğrenmeleri için eşit imkân sağlamaktan çok daha fazlasını ifade etmektedir. Aynı matematik derslerini talep etmek, aynı ödevleri vermek ve tıpatıp aynı değerlendirme ölçütlerini kullanmak yeterli değildir. Bunun yerine, eşitliği amaçlayan bir öğretim bireysel farklılıklara duyarlı olarak tüm öğrenciler için aynı sonuçları elde etmeye çalışmak demektir. Eşitlikçi öğretim, her bir öğrenci hakkında çeşitli kaynaklardan elde edilen bilgileri göz önünde bulundurarak, öğretmenleri tüm öğrencilere adil ve tarafsız muamelede bulunmaya teşvik eder. Mahrumiyet içindeki çocukların ve şehirdeki ve bazen de kırsaldaki okullarda yer alan öğrencilerin başarılı olmaları için eğitsel reformların gücünü ve öğrencilerin öğrenme kabiliyetleri hakkındaki yaygın ön kabulleri sorgulamanız gerekir. Matematik öğretimlerini öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde değiştiren ve sınıflardaki çeşitliliği zenginlik olarak gören öğretmenler, öğrencilerin öğrenmelerini gerçek anlamda destekleyen öğretmenlerdir. Öğretimi bu perspektiften gördüğünüzde dönüştürücü bir role sahip olabilirsiniz. Gerçekten de eşitlikçi olmayan okullar mükemmel olamaz.

İlkeler ve Standartlar şunu belirtir: "Kişisel özellikleri, geçmiş deneyimleri veya fiziksel zorlukları ne olursa olsun tüm öğrenciler matematik eğitimini görmek ve matematiği öğrenmek için fırsat bulmalıdırlar. Eşitlik her bir öğrencinin birebir aynı öğretimi almaları anlamına gelmez; bunun yerine tüm öğrencilerin başarı ve erişiminin sağlanması için gerekli olan makul ve uygun uyarlamaların yapılmasını gerektirir" (NCTM, 2000, s.12). Önceki NCTM başkanı Shirley Frye bu durumu en basit haliyle şu şekilde ifade etmiştir: "Tüm çocuklar öğrenebilir; fakat bu ne aynı şekilde ne de aynı gün içinde olur."

Kapsamlı araştırmalar tarafından desteklenmiştir ki eşitlikçi öğretimin bir yolu, öğrencilerin matematik öğretimi için esaslı bilgi ve beceriye ulaşmış, yüksek nitelikli bir öğretmene sahip olmalarını sağlamaktır. "Tüm öğrencilerin matematik [ve fen bilgisi] başarısını iyileştirmenin en kestirme yolu daha iyi matematik [ve fen bilgisi] öğretimidir… Daha iyi bir öğretimin pozitif etkisini gösteren deliller açıktır; gerçekten de matematikte [ve fen bilgisinde] öğrenci başarısını öngörmede en tutarlı ve en güçlü unsur öğretmenlik sertifikası ve öğretimi yapılan alanda bir lisans derecesidir" (Glenn, 2000). Ne yazık ki kırsaldaki okullar, yüksek personel değişim hareketliliğine ve sertifika ya da güçlü bir matematik alan bilgisine sahip olmayan öğretmenlere sahiptirler.

Eğer öğretmenler derin bir matematiksel kavrayış sağlayamazlarsa, yeterince hazırlanmamış ya da daha kötüsü, yanlış olarak hazırlanmış öğrenciler yetiştireceklerdir. Bu yüzden "uzman" öğretmenlerle çalışan okullardaki öğrenciler ile zayıf öğretmenlere sahip öğrencilerin performansları arasındaki fark şaşırtıcı değildir.

Başarı farklarının birçoğu gerçekte *öğretime* ya da *beklentilere* dayalı farklardır. İlk ya da ortaokul öğretmenleri öğrencilerine sağlam bir temel vermek için mümkün olduğunca fazla matematik alan bilgisine sahip olarak öğrencilerini hazırlamalıdırlar. Öğretmenlerin kendi öğrencileri için düşük beklentilere sahip olarak şunu söylemeleri faydalı değildir: "Bu sınıfı çalışmaları için gruplara ayıramıyorum; bunlar çok afacanlar" veya "Benim öğrencilerim hikâye problemlerini çözemiyorlar; daha okuma becerilerine sahip değiller" veya "Sınıfımda anadili İngilizce olmayan çok sayıda öğrenci olduğu için matematik öğretimim sırasında yazılı etkinlikler yapmıyorum." Tüm bu ifadeler öğrenciler için yüksek beklenti eksikliğinin göstergesidir. Bazı öğrencilerin "yapamayacakları" şeklindeki bir tutum ile başlamak, bu öğrencilerin yapabileceklerini ispatlamaları için yeterince fırsat bulamamalarına yol açacaktır.

NCTM *her bir* öğrencinin eğitimini kendi varlığının en mecburi hedefi olarak görmektedir. Eşitlikçi bir sınıf ortamının oluşumu ve sürdürülmesi düşünüldüğünde NCTM şunu belirtmektedir: "Matematik eğitiminde üstün başarı eşitliğe dayanmaktadır-yüksek beklentiler, saygı, anlayış ve tüm öğrencilerin desteklenmesi. Tüm öğrencilerin kaynaklara eşit olarak erişimini sağlayarak en yüksek potansiyelde öğrenimi desteklemek için politikalar, uygulamalar, matematik öğretimine ilişkin tutumlar ve inanışlar sürekli olarak gözden geçirilmelidir. Eşitlik kültürü tüm öğrencilerin öğrenme potansiyellerini azami düzeye çıkarır" (2008).

Tüm Çocuklar İçin Matematik

Öğretmenlerin büyük çoğunluğu, özellikle de yeni öğretmenler, sınıflarındaki her bir öğrencinin desteklenmesine kendilerini adamışlardır. Bu yüzden kendinizi öğrencilere yönelik birçok farklı stratejilerle donanımlı kılmanız son derece önemlidir. Bir öğrenci için netice veren bir strateji, aynı özel duruma sahip olsalar bile, diğeri için tamamen etkisiz olabilir.

Durup Düşün!

Durunuz ve bir dakika düşününüz. Şahsen eşitlik kültürünün gerekli ya da mümkün olduğuna inanıyor musunuz? Öğrenme güçlüklerine sahip olan çocuklar, yoksul evlerden gelen çocuklar, ana dili İngilizce olmayanlar-tüm bu çocuklar matematiksel düşünceyi gerçekleştirebilecekler midir?

Günümüz Sınıflarında Çeşitlilik

Normal sınıflardaki becerilerin, engellerin/özürlerin ve sosyo-ekonomik koşulların çeşitliliği öğretmenlere önemli sorunlar sunmaktadır. *Tüm* öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap vermek, aşağıdakilerden herhangi birisi ya da hepsi için fırsat sağlamak demektir:

- Belli bir öğrenme güçlüğüne sahip olduğu belirlenen öğrenciler
- Farklı kültürel özgeçmişlerden gelen öğrenciler
- Ana dili İngilizce olmayan ve bu dili öğrenen öğrenciler
- Matematiksel olarak üstün yetenekli olan öğrenciler

Bu bölümde, matematik sınıflarında çeşitlilik konusunu ve her bir çocuğun matematik okur-yazarı olmasına yardımcı olabilecek yaklaşımları inceleyeceğiz. Belki şöyle düşünebilirsiniz: "Kültürel ve dilsel çeşitlilik (CLD) taşıyan öğrenciler hakkındaki kısmı okumam gerekmiyor çünkü ben hiçbir göçmenin olmadığı bir yerde çalışmayı planlıyorum." 1972 yılında okullara kayıtlı olan Hispanik (İspanyol kökenli) öğrencilerin oranı % 6 iken bu oranın 2008 yılında % 20'ye yükseldiğini biliyor muydunuz? Aynı dönemde okullara kayıtlı olan beyaz öğrencilerin oranı % 78'den % 57'ye düşmüştür (U.S. Department of Education, 2008). Belki şunu düşünebilirsiniz: "Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrenciler hakkındaki kısmı atlayabilirim çünkü bunlar matematiksel olarak özel bir programa alınacaklardır." Matematiksel olarak üstün yetenekli çocuklar sadece katıldıkları özel programlarda değil günlük derslerinde de desteklenmelidirler.

Eşitlik ve İngilizce dilini öğrenenler konularının etkili ders planlamasıyla ilişkilerinden ötürü Bölüm 4'te de ele alındığını hatırlayınız. Bu bölümdeki her bir altbölümü okudukça daha eşitlikçi sınıfları oluşturmanın yollarını keşfedecek ve tüm öğrencilerin matematik okur-yazarı olmalarına yardımcı olacak araçları bulacaksınız.

Eşitliğin amacı öğrencilerin önemli matematik konularına erişimini sağlamaktır. Fakat istemeyerek de olsa eşitsizlik/haksızlık var olmaya devam etmektedir. Örneğin, bir öğretmen dersinde öğrenci-öğrenci etkileşimi için fırsatlar oluşturmuyorsa, bu öğretmen genellikle sosyal olarak öğrenen kız öğrencilerin veya küçük gruplarda konuşmak, dinlemek ve yazmak için fırsata ihtiyaç duyan İngilizce öğrenenlerin gereksinimlerine cevap vermeyebiliyordur. Bu sadece adil ya da eşitlikçi olmayı istemenin ötesinde daha fazla şey gerektirir; bu her bir farklı türdeki öğrenciyi bağdaştıracak stratejileri bilmeyi ve bu stratejilerin öğretimle bütünleştirilmesi için her türlü çabayı sarf etmeyi gerektirir. Tüm öğrencilerin sınıf seviyesindeki öğretim programını öğrenmek için eşit şansa sahip olması gerekse de, eşit öğretim bir amaç değildir.

Sınıflandırma ve Esnek Gruplandırma

Sınıflandırma, öğrencilere göre farklılaşan beklentileri oluşturmada önemli bir unsurdur. Öğrenciler düşük seviyedeki bir sınıfa yerleştirildiğinde, beklentiler de buna bağlı olarak azalmaktadır. Genellikle düşük seviye sınıflandırmalarındaki öğrenciler, uğraştırıcı materyallere, yüksek kalitedeki

öğretime ve en iyi öğretmenlere olan erişimden yoksun bırakılmaktadırlar (Burris & Welner, 2005; Futrell & Gomez, 2008; Samara, 2007). Düşük seviyedeki sınıflar için matematik, çok az heyecan verici ve asgari düzeyde bir başarı amaçlayan, çare kabilinden alıştırmalara yönelmektedir. Düşük beklentiler pekiştirilmektedir; çünkü öğrenciler ne düşünmeye teşvik edilmektedirler ne de problem çözme ve muhakemeyi destekleyici etkinlik ve etkileşimlerle meşgul olmaktadırlar. Bu durum cesaret kırıcıdır; çünkü azınlıklar ve düşük sosyo-ekonomik statüdeki (düşük-SES) öğrenciler alt düzeydeki sınıflarda oldukça fazla miktarda bulunmaktadırlar (Samara, 2007; Wyner, Bridgeland & Dilulio, 2007).

Sınıflandırmanın etkisiyle öğrenciler arasında başlangıçta bulunan fark, kapanmak yerine, daha da açılmaktadır. Grupların esnek olduğu ve öğrencilerin yüksek seviyelere çıkabileceği hakkında yapılan konuşma gerçekte sadece bir konuşmadan ibarettir. Gruplar genellikle aynı kalmakta ve ortaya çıkan etki ise eklenerek artmaktadır. Bir öğrencinin daha yüksek seviyedeki bir sınıfa atlayabilmesi neredeyse insan ötesi bir yoğunlaşmayı gerektirmektedir; öğrencinin alışkın olduğundan daha hızlı şekilde sunulan hâlihazırdaki konuları takip ederken daha önce alamadığı konuları da yetiştirmesi ve ayrıca yeni sınıfın sosyal ve akademik "kurallarını" öğrenmesi gerekir.

Sınıflandırma başarılı öğrenciler için de faydalı değildir. En yüksek seviyedeki gruplarda yer alan öğrencilerin sergiledikleri gelişimin, benzer öğrencilerin heterojen gruplardaki gelişimleriyle karşılaştırıldığında, oldukça düşük olduğu görülmüştür. Aynı zamanda, başarısız gruplar nitelikli öğretimden mahrum kalmaktadırlar. Okul öncesinden 8. sınıf seviyesine kadar öğrencilerin başarılarına göre sınıflandırılmalarına dair destekleyici veriler uluslararası karşılaştırmalarda da görülmemektedir. Bu durum özellikle Asya ülkelerinde geçerlidir. Büyük endüstriyel ülkeler arasında sadece Birleşik Devletler ve Kanada sınıflandırmaya bir ilgi göstermeye devam etmektedirler (NRC, 2001).

Heterojen sınıflarda, düşük kabiliyetli olarak kabul edilen öğrenciler belli bir kavrayış sergilediklerinde ve düşük başarı sınıflarında asla karşılaşmayacakları kavramlarla anlamlı çalışmalar yaptıklarında, beklentiler genellikle tersine dönmektedir. Tüm öğrencilerin yüksek düzeyde düşünme becerisi ve nitelikli bir matematiğe maruz bırakılmaları, düşük başarı beklentilerinin sonucunda ortaya çıkan farkların her geçen yıl artarak devam etmesine engel olmaktadır.

Farklı Öğrenciler İçin Öğretim İlkeleri

Öğrencilerimizin mükemmel ve sayısız çeşitliliği içerisinde, tüm çocuklar esasında aynı yolla öğrenirler (Fuson, 2003). *Adding It Up* (NRC, 2001) çalışmasının yazarları aşağıdaki üç ilkeye önem verilmesi durumunda tüm çocuklara en iyi şekilde hizmet edileceği sonucuna ulaşmışlardır:

1. Kavrayarak öğrenme, önemli kavramsal fikirler etrafındaki bilgilerin ilişkilendirilmesi ve organize edilmesine dayanmaktadır.
2. Öğrenme, öğrencilerin bildikleri şey üzerine inşa edilir.
3. Okuldaki öğretim, çocukların informel matematik bilgilerini avantaja dönüştürmelidir.

Bu ilkeler şaşırtıcı gelmemelidir. Bölüm 2'de açıklanan oluşturmacılığın öğretileri, sadece ortalama düzeydeki sözde tipik bir sınıf için değil tüm öğrenciler için geçerlidir.

Bunu belirttikten sonra, Bölüm 4'te ele alınan iki fikir üzerinde yeniden durulmalıdır: uyarlama ve değiştirme. Uyarlamada, çevrenin veya öğrencinin ihtiyacına cevap vermek esas olup eğitsel görevde bir değişiklik yapılmaz. Değişiklikte ise öğrenciye daha erişilebilir yapmak için eğitsel görev değişir. Değişiklikler, daha kolay ya da daha az uğraştırıcı bir eğitsel etkinlik sonucunu doğurduğunda beklentiler düşürülür. Değişiklikler, ihtiyaç duyabilecek öğrenciler için destek ya da sistematik yardım sağlamak suretiyle eğitsel görevin başlangıçtaki haline geri dönmeye yönelik olarak yapılmalıdır.

Takip eden kısım, sınıfınızda er ya da geç karşılaşacağınız geniş yelpazede farklılık gösteren öğrenciler için yapılacak uyarlamaları tartışmaktadır.

Özel Gereksinimli Öğrencilerin İhtiyaçlarını Karşılamak

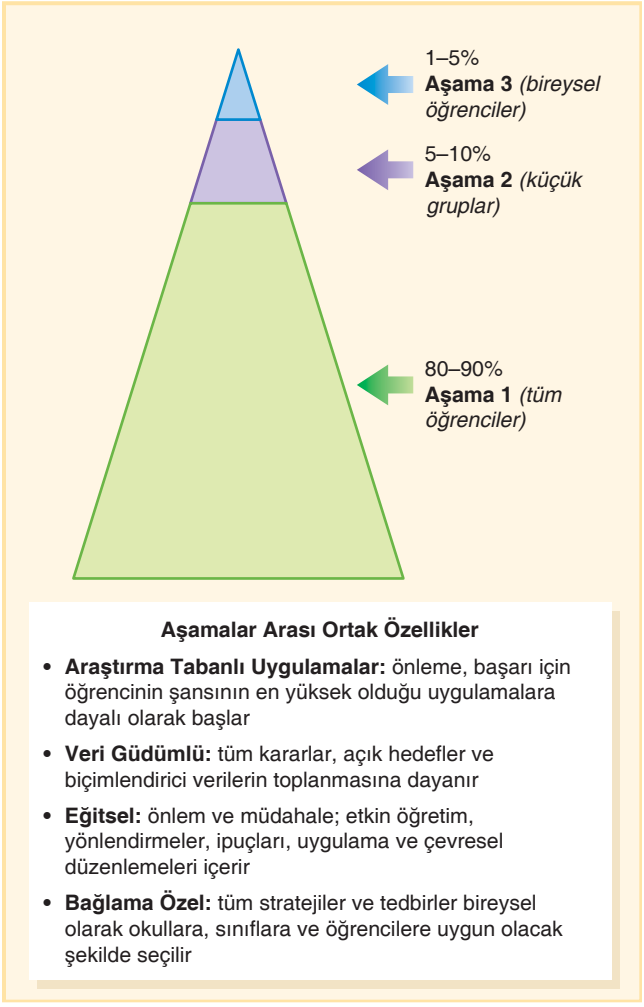
Özel eğitimin temel öğretilerinden birisi özel gereksinimli öğrenciler için öğretilen içeriğin ve kullanılan yöntemlerin bireyselleştirilmesidir. Engelli öğrencilerin birçoğu, ilk olarak 1975 yılında imzalanan ve o zamandan beri çeşitli değişikliklere uğrayarak en son 2004 yılında değişen Engelli Bireylerin Eğitimi Kanunu (IDEA) tarafından şart koşulan bireyselleştirilmiş eğitim programı (IEP) almaktadırlar. Bu kanun öğrencilerin genel eğitim sınıflarındaki matematik öğretim programlarına erişimlerini garanti altına almakta ve bununla birlikte ilk ve ortaokul sınıflarında mümkün olduğunca çok sayıda özel gereksinimli öğrencinin yer almasını vurgulamaktadır. Bu kanunun işaret ettiği bir nokta, eğitimcilerin bireysel öğrenme ihtiyaçlarını sadece öğretilecek matematiksel içeriğin *ne* olduğu değil aynı zamanda *nasıl* öğretileceğini de göz önünde bulundurmaları gerekliliğidir. "Eşitlik her bir öğrencinin birebir aynı öğretimi almaları anlamına gelmez; bunun yerine tüm öğrencilerin başarı ve erişiminin sağlanması için gerekli olan makul ve uygun uyarlamaların yapılmasını gerektirir" (NCTM, 2000, s.12).

Müdahaleye Yanıt Verme

Öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin özel eğitim hizmetlerine olan ihtiyaçlarının belirlenmesi 2004 yılında yenilenen IDEA kapsamında değişiklik göstererek müdahaleye yanıt verme (RTI) adı verilen bir yaklaşım sürece dâhil edilmiştir. Geçmişte öğrenme güçlüğüne sahip olan öğrencilerin özel eğitim ihtiyaçları IQ puanları ve akademik performansları

arasında farka dayalı olarak tanımlanmaktaydı. Fakat özel eğitim hizmetlerine ihtiyaç duyanların sadece testler ile tanımlanması öğrencilerin hızlı bir şekilde destek alma şanslarını sınırlamakta ve ortaya çıkan gecikme genellikle tamiri daha da zor olan öğrenme problemleri anlamına gelmektedir. Buna ek olarak sadece testlerin kullanılması öğrencilere yardımcı olmak için öğretmenlerin kullandıkları stratejilerin dikkate alınmaması ile sonuçlanmaktadır. RTI benzeri yaklaşımlar bu hususlara işaret etmek ve uygun matematik öğretimi eksikliğinden kaynaklanan düşük başarı (veya "öğretmen-engelli öğrenciler" (Ysseldyke, 2002)) ile öğrenme güçlüğü kaynaklı düşük başarıyı birbirinden ayırt etmek için tasarlanmıştır.

RTI, öğretimle ilgili önleyici müdahalelerin hayata geçirilmesiyle ortaya çıkan sonuçlara odaklanan üç aşamalı bir öğrenci destek sistemidir. Her aşama bir müdahale seviyesini ve bu seviyeye karşılık gelen sonuç ve çıktıların takibini temsil etmektedir (Bkz. Şekil 6.1). Üçgenin tabanında yer alan ve en büyük orana sahip olan kısmı Aşama 1'i temsil eder. Bu aşama, tüm öğrenciler için kullanılması gereken asıl öğretimdir; birçok durumda yüksek kalitede matematik öğretim programının yine yüksek kalitede öğretim uygulamaları (yani manipülatifler, kavramsal vurgular vs.) ile verilmesi anlamına gelir. Bu öğretim uygulamaları özel eğitim öğrencilerine cevap verirken genel anlamda gelişim sergileyen öğrencilerin de faydalandığı evrensel tasarım ilkelerine işaret ederler. Aşama 1'de her bir sınıf düzeyinde eyalet veya ulusal standartlar tarafından beklenen bilgi ve becerileri öğrencilerin sergilemelerine izin verecek şekilde çeşitlilik taşıyan değerlendirmeler yapılmalıdır. Aşama 2 "yönlendirme öncesi" öğrencileri temsil eder. Bu öğrenciler aşama 1 sırasında beklenen başarı seviyesine ulaşmamış fakat henüz özel eğitim hizmetlerine ihtiyaç duyduğu kesinleşmemiş olanlardır. Aşama 2'deki öğrenciler hedefe dönük fazladan öğretim almalıdırlar; bu süreçte önemli becerilerin sistematik öğretimine dönük açık bir yönlendirmeyi içeren değişikliklerin kullanımı, daha yoğun ve sıklıkta eğitsel fırsatlar, daha çok destek ve açıktan yapılan yönlendirmeler ve daha fazla sistematik yardım verilmelidir (Torgesen, 2002). Eğer yapılan değerlendirmeler olumlu bir gelişim olduğunu gösterirse o zaman öğrencilere verilen fazladan destek kesilmelidir. Zorluklar ve sorunlar devam ederse müdahale yeniden ayarlanabilir veya öğrenci bir sonraki aşamadaki desteğe yönlendirilir. Aşama 3, daha yoğun seviyede yardıma ihtiyaç duyan öğrenciler içindir. Bu öğrencilerin özel eğitim ihtiyaçlarına dönük değerlendirmelerinin yapılması ya da özel eğitim hizmetlerine yönlendirilmeleri bu aşamada yapılmaktadır. Bu müdahale "daha düşük seviyedeki önleyici tedbirlere karşı direnç gösterdiği belirlenen bozukluklar için tahsis edilmekte ve ciddi komplikasyonları engellemek için daha cesur eylem gerekmektedir" (Fuchs & Fuchs, 2001). Öğretmenden, genel anlamda etkin olan birçok eğitsel müdahalenin denendiğini ve öğrencinin daha yoğun olan bu strateji ve yaklaşımlara yeterli düzeyde yanıt vermediğini göstermesi istenebilecektir. Bir öğrencinin daha önce ele alınan kanunlar tarafından şart koşulan kayda değer farklılıkları gösteremediğini beklemek yerine, RTI öğrencilerin gelişimine izin verecek şekilde yapılandırılmış destek ile önleyici bir model oluşturmaktadır. Her üç aşama için stratejiler Tablo 6.1'de özetlenmektedir.



Şekil 6.1 Müdahaleye yanıt verme-tüm çocuklar için etkin önleyici stratejilerin kullanımı
Kaynak: Scott, Terence, and Lane, Holly. (2001). *Multi-Tiered Interventions in Academic and Social Contexts*. Unpublished manuscript, University of Florida, Gainesville.

RTI üzerine yapılan araştırmalar göstermektedir ki öğrencilerin büyük çoğunluğu aşama 1'de yer almasına rağmen öğrencilerin yaklaşık % 15'i beklenen gelişimi tam olarak sergileyememektedirler (Fuchs & Fuchs, 2001). Aşama 2'ye geçmesi belirlenen öğrencilerin % 40'ı nihayetinde aşama 1'e geri dönmektedir. Aşama 2'ye kaydırılan grubun sadece % 13'ü aşama 3 seviyesinde yer almakta olup özel bir eğitmenden bireysel hizmet alması gerekli görülmüştür (Fuchs & Fuchs, 2005, 2007). Eğer 100 çocuktan oluşan bir grup örnek olarak kullanılırsa, bu şu anlama gelmektedir: bu araştırmacıların çalışmaları 15 öğrencinin aşama 2'ye nakil olduğunu göstermektedir. Yapılan müdahale sonrasında bunlardan 6 tanesi aşama 1'e geri dönmekte, 9 tanesi aşama 2'de kalmakta ve yaklaşık 2 öğrenci ise bireyselleştirilmiş hizmet için aşama 3'e kaydırılmaktadır.

Hafif Düzeyde Engelli Öğrenciler

Öğrenme güçlüğüne sahip öğrenciler, çok özel algısal ya da bilişsel zorluklara sahiptirler ve aşama 3 hizmetine ihtiyaç duyanlar olarak tanımlanırlar. Bu zorluklar hafızayı; genel strateji kullanımını; dikkati; konuşma ya da düşünceleri

Tablo 6.1

Matematik Öğretimi İçin RTI Müdahaleleri

RTI seviyesi	Müdahaleler
Aşama 3	**Yüksek nitelikli özel eğitim öğretmeni** • Öğrenciyle birebir çalışır • Zayıf olduğu belirlenen özel alanlarda uygun öğretimi kullanır • Öğretim yöntemlerini uyarlar, öğrencileri motive eder ve öğretim programlarını adapte eder • Becerilere dayalı öğretimin uygun bağlamlarını açıktan kullanır
Aşama 2	**Yüksek nitelikli bir sınıf öğretmeni ile yüksek nitelikli özel eğitim öğretmeninin iş birliği** • Bireysel teşhis edici mülakatlar yapar (Bkz. Bölüm 5) • Özel eğitim öğretmeni ile iş birliği yapar • Önemli fikirleri (odak noktalarını) veya temaları vurgulayan dersler oluşturur • Sistematik strateji öğretimini açıktan sürece dâhil eder (önemli noktaları doğrudan özetler, dersten önce önemli kelime veya kavramları ele alır) • Özel davranışları ve stratejileri modeller; örneğin materyallerin ölçümünün ya da geometri tahtasının kullanımının nasıl yapılacağı • Öğrencilerin problem çözme aşamalarını takiplerine yardımcı olmak için hatırlatıcı ipuçlarını veya kartlar ya da posterler üzerine yazılmış adımları kullanır • Bir öğrencinin yardıma ihtiyaç duyduğu ve bir başkasının ise bu yardımı verebileceği akran-destekli öğrenmeyi kullanır • Zorluk yaşanan belirli konularda, günlük matematik dersi dışında gönüllüler yardımıyla (örn. büyükbaba veya büyükanne) öğrenciye özel ders verir • Evde kullanılmak üzere ailelere ilave destek materyalleri temin eder • Öğrencinin kendini yönlendirme ve kendi başına öğrenme stratejilerini (örn. notları gözden geçirme, özetler yazma ve ana fikirleri belirleme) kullanmasını teşvik eder • Sınav stratejilerini öğretir, önemli bilgileri vurgulamak için öğrencinin sınavda fosforlu işaret kalemi kullanımına izin verir • Daha önceki sınıfta yer alan konuları hatırlatmak için geçmiş konuları bölümlere ayırır (Fuchs & Fuchs, 2001)
Aşama 1	**Yüksek nitelikli sınıf öğretmeni** • Başarı için zorlu standartlar ve yüksek kalitede bir öğretim programını dâhil eder • Öğretim programını tanımlandığı şekli ile öğretmeye azami gayret eder • Manipülatifler ve görsel materyaller kullanır • Sorun yaşayan öğrencileri belirlemek için gelişimi takip eder • Esnek öğrenci gruplandırmalarını kullanır • Etkin katılımı artırır • Yüksek beklentileri olduğunu iletir • Dersin öncesi, esnası ve sonrası aşamalarında grafik düzenleyiciler kullanır *Öncesi.* Hedefi belirtir, yeni kelimeleri tanıtır, önbilgilerden kavramlara açıklık getirir, grup kullanıyorsa grup üyelerinin görevlerini belirler *Esnası.* Yönergeleri bir çizelge, poster ya da liste olarak verir; bir dizi rehberlik edici soruyu cevaplar için boşluk bırakarak bir çizelge halinde temin eder. *Sonrası.* Birbirleriyle ilişkili olarak önemli kavramların listesini ve özetini sunar.

yazılı olarak ifade etme becerilerini; işitsel, görsel veya yazılı bilgiyi algılama veya soyut fikirleri birleştirme becerilerini etkiler. Her bir öğrenci kendine özgü güçlü ve zayıf yönlere sahip olsalar da matematik dersinin planlaması, öğretimi ve değerlendirmesi aşamalarının tümünde öğrencileri destekleyecek yollar vardır.

NCTM, matematikte zorlanan öğrencilere (örneğin RTI aşama 2'de yer alan öğrenciler) öğretim için araştırma tabanlı bir dizi etkili stratejiyi bir araya toplamış ve bunlardan bazı önemli stratejilerin kullanımını vurgulamıştır (Baker, Gersten & Lee, 2002; Gersten, Chard, Jayanthi & Baker, 2006). Bu stratejilere örnek olarak şunlar verilebilir: Öğrenci sesli düşünmeleri, problemlerin görsel ve grafik temsilleri, akran destekli öğrenme etkinlikleri, öğretmen ve öğrencilere sağlanan biçimlendirici değerlendirme verileri. Etkili olduğu ortaya konulan araştırma tabanlı bu yaklaşımlar, bazı hallerde birinci ve ikinci aşamada yer alan önleyici müdahalelerden oldukça farklı ilkeler belirtmektedir. Aşama 3'te yer alan müdahale ve öğretim tek tek öğrenci üzerine yoğunlaşırken birinci ve ikinci aşamadaki önleyici müdahaleler tüm sınıf ya da küçük gruplar halinde çalışmaya vurgu yapmaktadır. Takip eden kısımda sunulan bilgiler birinci aşamadaki (aşama 1) önleyici stratejilerin başarısız olduğu daha az sayıdaki öğrencilere yönelik kullanım içindir.

Açıktan strateji öğretimi. Açıktan öğretim, belirli bir strateji üzerine genellikle oldukça yapılandırılmış, doğrudan, öğretmen liderliğinde yapılan öğretim olarak tanımlanır. Öğretmen sadece stratejiyi modellemekle kalmaz öğrencilere de yaptırır; fakat bu öğrenciler aldıkları kararları açıklamakta sorunlar yaşayabilirler. Bu modelde, gösterme-yönlendirme-yaptırma silsilesi şeklindeki öğretim rutinleri kullanılır. Öğretim adım-adım organize edilmiştir ve kavramlar doğrudan öğretmen tarafından açıklanır. Yapılan açıklamalar, öğrencilerin matematik bilgileriyle öğrendikleri diğer kavramlar arasında ilişkilendirme yapmalarını amaçlar. Örneğin açıktan öğretimi kullanan bir sınıf öğretmenine bakalım:

> *Mr. Logan'ın sınıfına girdiğinizde bir masa etrafında oturmuş, öğretmenin detaylı açıklamalarını dinleyen ve denk kesir kavramına ilişkin gösterisini izleyen küçük bir grup öğrenci ile*

karşılaşırsınız. Öğrenciler Mr. Logan tarafından söylendiği şekliyle manipülatifler kullanıyorlar. Mr. Logan öğrencilerine "dörtte birlik" kırmızı parçalardan almalarını söylemiş ve "yarımlık" mavi parçayı kaplamak için tam olarak kaç tane gerek olduğunu kontrol etmelerini istemiştir. Daha sonra kahverengi "sekizde birlik" ve sarı "altıda birlik" parçalar ile yarımı temsil eden parçayı karşılaştırmalarını istemiştir. Öğrenciler sırayla söz alarak yüksek sesle bu sorulara cevap veriyorlar. Ders esnasında Mr. Logan sık sık grubu durdurmakta, laf arasında bazı noktaları açıklığa kavuşturmakta ve etkinliğin önemli bileşenlerine doğrudan dikkat çekmektedir. Pay ve payda gibi kelimeler tahtaya yazılmakta ve ders boyunca bunların tanımları gözden geçirilmekte ve pekiştirilmektedir. Dersin bitiminde öğrencilere, derste tartışılan karşılaştırma türünde örnekler alıştırma olarak verilmektedir.

Mr. Logan'ın kesir kavramlarını öğretim yaklaşımında doğrudan öğretimin birçok boyutu görülebilir. Mr Logan öğretmen güdümlü bir öğretim yaklaşımı kullanmakta, manipülatiflerin kullanımını belirtmekte ve gösterme-yönlendirme-yaptırma silsilesini sözlü öğretiminde kullanmaktadır (öncelikle gösterimler, bunu takiben yönlendirme ve soru sorma ve sonrasında da bağımsız uygulama yaptırma). Mr. Logan öncelikli olarak öğretmen liderliğinde etkinlikleri kullanmaktadır. Öğrenciler matematiksel bilgiyi, öğretmen tarafından sunulan sözel, yazılı ve görsel ipuçlarından elde etmektedirler.

Öğrencilere problemleri çözerken; problemi okuyup kendi kelimeleriyle ifade etmek, bir şekil çizmek, problemin türünü belirleyerek bir plan yapmak, problemi matematiksel bir cümle halinde yazmak, problemi küçük parçalara ayırmak, işlemleri yapmak ve sonucu hesap makinası kullanarak kontrol etmek gibi kendilerine rehberlik edecek açıktan strateji öğretimi uygulanmaktadır. Bu öz-eğitici yönlendirmeler veya kendine soru sormalar tüm öğrenme sürecini baştan sona yapılandırmaktadır. Aşama 1'deki sorgulamaya dayalı öğretimin aksine, öğretmen bu adımları modeller ve aşama 1 ve 2'deki etkinliklerde yapılan bağımsız çalışmalarla keşfedemeyen engelli öğrencilerin kolayca anlayacakları bir terminoloji kullanarak bileşenleri açıklar.

Fiziksel modeller de açıktan strateji öğretiminde kullanılabilir. Örneğin, çarpma düzenini küplerle gösteren bir öğretmen şunu söyleyebilir: "Beni izleyin. Şimdi tam benimkine benzer şekilde küplerle bir dikdörtgen yapın." Tersine, oluşturmacı bir yaklaşıma sahip olan öğretmen şunu diyebilir: "bu küpleri kullanarak, işleminin bir temsilini bana nasıl gösterebilirsiniz?"

Öğrenme güçlüğü çeken öğrenciler için açıktan strateji öğretimi yapmanın birçok muhtemel avantajı vardır. Bu yaklaşım matematiksel problem çözmeyi destekleyecek örtük düşünme stratejilerini gün yüzüne çıkarmaya ya da açık hâle getirmeye yardımcı olur. Aksi halde, öğrenme güçlüğü çeken öğrenciler bu stratejilere erişemeyeceklerdir; çünkü açıktan bir öğretim olmaksızın öğrencilerin bu stratejileri uygulaması veya kazanması mümkün olamayabilecektir. Ayrıca açıktan öğretim yaklaşımları, öğrencinin deneyimlerinden ya da ana hatlarıyla yapılandırılmış öğrenme etkinliklerinden kendi başına kavramları elde etme becerilerine daha az bağımlıdır.

Bu avantajlarla birlikte öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle açıktan öğretim stratejisini kullanmanın bazı dezavantajları da belirlenmiştir. Bu yaklaşımın bazı boyutları hafızaya dayanmaktadır ki bu da özel gereksinimli öğrencilerin en zayıf oldukları alanlardan biridir. Bilinen bir zayıflığı alarak bir öğrenme stratejisini bunun üzerine inşa etmek genellikle sonuç verici değildir. Ayrıca kaygı duyulan bir nokta da şudur ki doğrudan, açık öğretim gibi ciddi anlamda öğretmen kontrollü yaklaşımlar öğretmen yardımına sürekli bağımlılığa yol açabilir. Bu durum öğrenme güçlüğü çeken öğrenciler için özellikle kaygı duyulan bir konudur; çünkü bunların birçoğu pasif öğrenenler olarak tanımlanmaktadırlar. Öğrenciler neyi uygulama fırsatı bulurlarsa onu öğrenirler. Öz-yönlendirmeyle öğrenme fırsatı hiçbir zaman verilmeyen öğrenciler (bunun güçlü bir alan olmadığı varsayımına dayalı olarak) bu alanda beceriler geliştirmekten mahrum kalacaklardır. Gerçekte, doğrudan öğretimin en iyi şekli çoklu modellere, örnek olan ve olmayan durumlara ve anından yapılan hata düzeltmeleri ile öğrencinin bağımsız öğrenmesine yardım edecek şekilde azalan yönlendirmelere doğru bir geçiştir. Açıktan yaklaşımlarda mümkün olan bir başka sorun, sonuçta beklenen kavrayışın derinliğidir. Etkin problem çözme ve bilginin oluşturulması üzerine odaklanan deneyime dayalı öğrenme, daha derinden bir matematiksel kavrayışa yol açar ve öğrencinin hafızada tutma, genelleme yapma ve bilgiyi uygulama becerisini artırır. Tüm bu faktörler de matematikte uzun soluklu başarı için hayati olmakla birlikte hemen her zaman hafif engelli öğrenciler için sorunlu alanlardır.

Akran Destekli Öğrenme. Özel gereksinimli çocuklar, kendi sınıf arkadaşları ve akranları da dâhil olmak üzere, başkalarının modelleme ve desteklerinden fayda görürler (Fuchs, Fuchs, Yazdian & Powell, 2002). Bu yaklaşımda, sınıf içi tasarımda ortaya çıkanlar şu temel düşünceyi yansıtır: çocuklar okuldaki öğrenme görevleri üzerine ustalaşan bir çırak rolü verildiğinde en iyi şekilde öğrenirler. Öğrenciler, öğrenme durumlarını daha becerikli uzmanların düşüncelerine benzer bir şekilde gerçekleştirme noktasında teşvik edilirler. Akran destekli öğrenme yaklaşımı yukarıda açıklanan açıktan strateji öğretimi modeliyle bazı ortak özelliklere sahip olsa da ikisi arasında önemli farklar da vardır. Bunlardan birisi bilginin önceden belirlenen sırayla değil de "ihtiyaç olduğunda" sunulmasıdır. Akranlar bilgileri, o bilgi gerekli olduğunda, başkalarıyla paylaşırlar. Öğrenciler kendilerinden daha büyük öğrencilerle ya da bir kavram hakkında daha detaylı bilgiye sahip olan akranlarla eşleştirilirler. Diğer durumlarda, etkinlik esnasında öğretmenler ve öğrenciler rollerini değişebilirler.

Öğrenci Sesli Düşünmeleri. "Sesli düşünme" bir görevi gerçekleştirirken atılan adımları göstermeyi, bu adımlara eşlik eden muhakeme ve düşünme sürecini sözle anlatmayı içeren bir öğretim stratejisidir. Öğrenciler bu adımları farklı, fakat paralel, bir görev üzerinde taklit ederek bu öğretimi takip ederler. "Uzman" öğrencilerin "acemi" öğrencilerle

stratejileri paylaşımları modelinden türetilmiştir. Dördüncü sınıf öğrencilerine verilen ve sınıflarının duvarlarını tamamen boyamak için ne kadar boyanın gerekli olduğunu belirlemeleri istenen bir problemi göz önüne alalım. Örneğin, duvar uzunluklarını bir cetvel yardımıyla nasıl ölçüleceğinin gösteriminden ziyade, sesli düşünme stratejisi, duvarları ölçerken atılan her bir adıma dönük yapılanlar için sebepleri belirlemek ve bunlar hakkında konuşmayı içerecektir. İlk ölçüm sonunda cetvelin sona erdiği yere bir işaret koyan öğretmen şunu söyler: "ben bu çizgiyi cetvelin sona erdiği yeri işaretlemek için kullandım. Duvarın bir sonraki kısmını ölçerken bu çizgiyi nasıl kullanmalıyım? Biliyorum ki cetveli kaydırmalıyım fakat daha önce yaptığımı kopya mı etmeliyim?" Tüm bu diyaloglar cetvelle ikinci bir ölçüm yapmadan önce gerçekleşir. Öğretmenler genellikle bir görevin gerçekleştirilmesine ilişkin alternatifleri paylaşır ve bunlardan hangisini yapmaya nasıl karar verdiklerini açıklarlar. Bu stratejiyi kullandıklarında, öğretmenler gözükmeyen düşünce süreçlerini görülür hâle getirirlerken mümkün olan yaklaşımları da modellemeye çalışırlar.

Gereken stratejileri seçeceksinizdir; fakat sizin esas amacınız öğrenme için yüksek öğrenci sorumluluğunu sağlamaya dönük olarak çalışmaktır. İçeriğin yüksek seviyede kavranması için hareket etmek bir yokuşun yüksek yerlerine doğru gitmeye benzetilebilir. Bazıları için düzgün merdiven basamakları ve yolda verilecek destek gereklidir (açıktan strateji öğretimi); başkaları için yokuşun tepesindeki teşvike dayalı rampalar işe yarayacaktır (akran destekli öğrenme). Diğer öğrenciler az bir rehberlikle kendi başlarına yokuşun tepesine doğru bir patika bulabilirler (oluşturmacı yaklaşım). Tüm insanlar hayatlarının değişik zamanlarında ya da farklı koşullar altında çeşitli destekler almaya ihtiyaç duyabilirler ve özel gereksinimli öğrencilerde de durum hiç farklı değildir. Yine de önünde sonunda öğrenciler kendi başlarına yeni bir öğrenme için bir patika oluşturmak zorundadırlar çünkü okul yaşantılarından sonraki gerçek hayatlarında onlardan beklenen şey bu olacaktır. Çocukları yalnızca aldıkları destekle merdiven basamaklarını çıkmaya ve basamaklar olmaksızın yokuşla karşı karşıya bırakmaya veya sürekli başkalarından yardım almaya terk etmek öğrencilerin hedeflerine ulaşmalarına yardımcı olmayacaktır. Aşağıda verilen öneriler özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler için dersin üç önemli aşamasında (öncesi, esnası ve sonrası) uyarlama ve değişiklik yapmakta size yardımcı olabilir (Karp & Howell, 2004).

ÖNCESİNDE

Ortamın Düzenlenmesi

- *Dikkati merkezde toplayınız.* Öğrencileri tahtaya veya öğretmene yaklaştırınız. Öğrencilerle konuşurken yüzünüzü onlara çeviriniz.
- *Ailelerin katılımını sağlayınız.* Eğer mümkünse, eve götürmeleri için ikinci bir matematik ders kitabı temin ediniz.
- *Rekabeti ortadan kaldırınız.* Değerlendirmeyi daha sessiz ya da daha az dikkat dağıtıcı şeyin olduğu başka ortamlarda gerçekleştiriniz.
- *Kazanımları uyarlayınız.* Belirli öğrenciler için öğrenme hedeflerini uyarlayınız ki böylece bu öğrenciler "ana fikirler" üzerine odaklanırken başka öğrenciler de konuları daha derinlemesine inceleme imkânı bulurlar.
- *Kafa karışıklığından kaçınınız.* Yönergeleri dikkatlice ve net olarak ifade ediniz ve öğrenciden bunları tekrar etmesini isteyiniz. Yönergeleri birer birer veriniz.
- *Öğretim arasındaki geçişleri yumuşatınız.* Etkinlikler arasındaki geçişi açık yönergelerle yapınız ve "konudan uzaklaşma" ihtimalini en aza indiriniz.
- *Matematiksel kavramları veya kelimeleri önceden öğretiniz veya gözden geçiriniz.* Önemli terimlerle öğrencileri aşina kılınız.

Potansiyel Engelleri Belirleyiniz

- *Öğrencilerin hatırlamalarına yardımcı olacak yollar bulunuz.* Genellikle hafıza özel gereksinimli öğrencilerin güçlü oldukları bir alan değildir. O yüzden bilindik adımlar için hatırlatıcı ipuçları geliştiriniz ya da ders boyunca işaret edebileceğiniz yönergeler yazınız. Örneğin STAR kelimesi problem çözme için hatırlatıcı bir ipucudur: S harfi problemdeki önemli bilgilerin araştırılması (Search); T harfi kelimeleri modellere, resimlere veya sembollere çevirmeyi (Translate); A harfi problemi cevaplamayı (Answer); R harfi ise çözümün makullüğünü gözden geçirme (Review) anlamına gelmektedir (Gagnon & Maccini, 2001).
- *Anahtar kelimeleri ve sembolleri pekiştiriniz.* Görsel ipuçları temin etmek için bir kelime ya da sembol köşesi oluşturunuz. Dil anlama problemi olan öğrenciler için matematiksel kelimelerin ve sembollerin altını çiziniz.
- *Kolay sayılar kullanınız.* Kavramsal ve işlemsel hedeflerin iç içe geçmesi yerine sadece kavramsal anlamayı vurgulamak için $6.13 yerine $6.00 kullanınız. Unutmayınız ki bu teknik yalnızca işlem yapma becerileri dersin kazanımları arasında değilse kullanılmalıdır.
- *Görevin büyüklüğünde çeşitliliğe gidiniz.* Özel eğitime ihtiyaç duyan öğrencilere çözmeleri için daha az sayıda problem veriniz. Bazı öğrenciler görevin büyüklüğü altında ezilebilirler. Etkinliğin zorlu fakat yapılabilir şekilde uygun olarak seçimine dikkat ediniz.
- *Zaman dilimini akılda tutunuz.* Öğrencilere materyalleri incelemek, görevleri tamamlamak ya da ödevleri bitirmek için arta kalan zamanın ne kadar olduğunu hatırlatınız. Bu öğrencilerin zaman yönetimi yapmalarına yardımcı olacaktır.
- *Verilen destek seviyesini ayarlayınız.* Kendi öğretiminiz, dikkatiniz ya da yardımcı öğretmen (veya akran) vasıtasıyla daha fazla yardıma izin veriniz. Manipülatif materyaller ve teknoloji gibi çeşitli öğrenme araçlarının desteğini göz önünde bulundurunuz.
- *Eşleştiriniz ve paylaşınız.* Öğrencilerin risk alma ve fikirlerini tüm sınıfla tartışma isteklerini arttırmak için düşüncelerini paylaşmalarını sağlayınız.

ESNASINDA

Anlaşılırlığı sağlayınız

- *Öğrencilerden düşüncelerini paylaşmalarını isteyiniz.* Sesli düşünme veya düşün-eşleş-paylaş (önce soru hakkında *düşün*, sonra bir sınıf arkadaşınla *eşleş* ve düşünceleri karşılaştır, sonunda en iyi düşünceyi sınıfın geri kalanı ile *paylaş*) yöntemini kullanınız.

- *Modeli bir eylemle ya da kelimelerle ilişkilendiriniz.* Örneğin, bir kağıt şeridi dört parçaya katlayarak $\frac{2}{4}$ ile $\frac{1}{2}$ arasındaki ilişkiye dönük bir soru sorduğunuzda, parça-bütün ilişkisine jestlerinizle işaret ediniz.
- *Görsel tanıtımı ayarlayınız.* Değerlendirmeleri ve görevleri, tek bir sayfada çok fazla şey yer almayacak şekilde tasarlayınız. Bazen kelimelerin, çizimlerin ve sayıların yoğunluğu öğrencilerde aşırı yüklemeye yol açabilir. Her sayfaya bir problem koyunuz, yazı büyüklüğünü artırınız veya sadece görsel gösterimleri çalışılabilecek miktara düşürünüz.
- *İlgili noktaları vurgulayınız.* Özel gereksinimli bazı öğrenciler küplerin sayısı yerine bir küpün rengi üzerine odaklanabilmektedir.
- *Yazılı çalışmaların organizasyonu için yöntemler kullanınız.* Öğrencilere şablonlar ve araçlar temin ederek onların tablo ya da çizelgelerin organizasyonu yerine matematik üzerine odaklanmalarını sağlayınız. Ayrıca düzenleyiciler, resim tabanlı modeller ve sütunlu veya kareli kâğıtları kullanınız.
- *Örnek olan ve olmayan durumlar sununuz.* Üçgenlerin örnekleriyle beraber üçgen olmayan şekiller de veriniz. Öğrencilerin, örnek olanlar ile örnek olmayanları ayırt edecek özellikler üzerine odaklanmalarına yardımcı olunuz.
- *Bağlantıları destekleyiniz.* Somut gösterimler, resimsel gösterimler ve sayısal gösterimler sağlayınız. Dikkatlice hazırlanmış sorular yardımıyla öğrencilerinize bağlantılar kurdurunuz.
- *Ders anlatım şeklinizi uyarlayınız.* Daha çok görsel olarak öğrenen öğrenciler için çeşitli materyaller, resimler, örnekler ve modeller dâhil ediniz. Bazı öğrenciler problemin ya da değerlendirmenin kendilerine okunmasına ihtiyaç duyarlar. Yönergeleri hem sözel hem de yazılı olarak veriniz.

SONRASINDA

Alternatif değerlendirmeleri göz önünde bulundurunuz

- *Alternatif ürünler öneriniz.* Özel gereksinimli öğrencilerin görevlere cevap vermeleri için seçenekler sununuz. Bu öğrencilerin başkası tarafından yazılan veya bant kaydı yapılan sözel bir cevabı sunmaları gerekebilir. Ses tanıma yazılımı ya da birkaç harf yazınca kelime seçenekleri sunan kelime tahmin yazılımları kullanmaları gerekebilir. Değerlendirme için yazılı cevap yerine matematiksel bir kavramı anladıklarını gösterecek materyaller kullanmak isteyebilirler.
- *Geri dönüt çizelgesini göz önünde bulundurunuz.* Öğrencinin gelişimini takip ediniz ve zaman içinde gelişimini çizelge haline getiriniz. Bu öğretmen ve öğrenci için önemli bir pekiştireçtir.

Uygulama ve özet yapmayı vurgulayınız

- *Fikirleri bir araya getirmeleri için öğrencilere yardım ediniz.* Önemli matematik kavramlarını özetleyen çalışma rehberleri hazırlayınız ve bunu tekrar etmelerine izin veriniz.
- *Fazladan uygulama yapmalarını sağlayınız.* Dikkatlice seçilmiş problemleri kullanınız (fazla sayıda olmamak şartıyla) ve aşina olunan fiziksel modellerin uzun süre de olsa kullanımına izin veriniz.
- *Uygulama rutinlerini gelişime dönük yapınız.* Uygulama yapmaya sadece bir problem türüyle başlayınız ve çeşitli türdeki problemlerle uygulamaya daha sonra geçiniz.

Önemli Düzeyde Engelli Öğrenciler

Önemli düzeyde bilişsel engellere sahip olan öğrenciler genellikle kapsamlı değişikliklere ve matematik programını anlamak için bireyselleştirilmiş desteklere ihtiyaç duyarlar. Bilişsel problemler arasında şunlar gösterilebilir: ciddi otizm, algı bozuklukları, hareketi etkileyen sınırlılıkların kombinasyonlarını içeren çoklu engeller veya zekâ geriliği ve beyin felci gibi bilişsel işlem bozuklukları. IDEA (1990, 1997, 2004) genel sınıf düzeylerindeki öğretim programlarına tüm öğrencilerin erişimlerini şart koşmaktadır. Eğitimsiz Hiçbir Çocuk Kalmasın (No Child Left Behind) Kanunu erişimin de ötesine geçerek öğrencilerin içeriği öğrendiklerine dair kanıt istemekte; orta ve üst düzey engele sahip öğrencilerin, sınıf seviyelerine uygun eyalet tarafından belirlenen alternatif standartlara ulaşmak için matematikteki çalışmalarına yönelik beklentileri de kapsamaktadır. Bu konudaki kararlılıklarını göstermek için bazı eyaletler ciddi engele sahip öğrencileri de öğrenci gelişim değerlendirmesi için resmî olarak yapılan yıllık sorumluluk programlarına dâhil etmektedirler.

Aslen ileri düzeyde engelli öğrenciler için işlevsel öğretim programı genellikle gerçek hayatla ilişkili becerilere indirgenmiştir; bu becerilere örnek olarak para yönetimi, zamanı söyleme veya telefon numarasını çevirmek, ev kapı numarasını bulmak, hesap makinası kullanmak veya ölçüm yaparken sayıları bilmek gösterilebilir. Eyalet düzeyinde yapılan girişimler ve değerlendirmeler *Öğretim Programı Odak Noktaları* (NCTM, 2006) kapsamında yer alan her bir sınıf seviyesine göre hazırlanmış NCTM'nin beş öğrenme alanı standardını içerecek şekilde öğretim programlarının kapsamını genişletmiştir. Örneğin, önemli bir yaklaşım, tüm öğrencilerin matematiksel okur-yazar vatandaşlar olarak hazırlanmalarının bir yolu olarak matematiksel becerinin gerçek dünya temsilleri aracılığıyla gelişimine vurgu yapmaktadır. Basamak değeri kavramları üzerine çalışırken para kullanmak veya alış-veriş bağlamında problemler sormak çeşitli faydaları olan yaklaşımlardır.

Başlangıç seviyesinde, öğrenciler sayıların tanımlanması üzerine çalışırken parmaklarını veya resimleri kullanırlar. Sayı anlayışını geliştirirken, toplamı bulma, yapılması gereken günlük görevlerin sayılmasıyla ilişkilendirilebilir ve geriye doğru sayma ise bir etkinlikten ya da öz-bakım rutinlerinin tamamlanmasından sonra (dış fırçalama gibi) bir temizleme periyoduna işaret edebilir. Orta ve ileri düzeyde engelli öğrenciler, ölçme araçlarını kullanmak, grafikleri karşılaştırmak, basamak-değeri kavramlarını incelemek (genellikle para kullanımıyla ilişkili olarak), sayı doğrusunu kullanmak ve nicelikleri karşılaştırmak için imkân bulmalıdırlar. Her defasında içerik gerçek hayatta gerekli olan beceriler ve iş hayatının muhtemel özellikleri (örn. erzak stokları) ile ilişkilendirilmelidir (Hughes & Rusch, 1989). Yiyecek hazırlığına yönelik alışveriş becerileri ya da etkinlikleri matematiksel problem çözme durumları için uygun seçenekler olabilir. Bazen sadece matematiksel kazanımları günlük olaylarla ilişkilendirmek de faydalıdır. Örneğin, bölme işlemi üzerine çalışırken, Cadılar Bayramında şekerlerin eşit şekilde nasıl paylaşılacağını ya da bir oyun oynarken kartların dağıtımını bulmak uygun olacaktır. Öğrenciler ayrıca küçük projeler de yürütebilirler

(örneğin şekil ve ölçümlerin incelenmesi amacıyla farklı ögeleri yerleştirebilecekleri bir kutu yapmaları gibi).

Orta ve ileri düzeyde engelli öğrencilerin öğretim programında ilerlemeleri için tüm kavramları tam olarak öğrenmeleri gerektiğini düşünmeyiniz; öğrenciler toplama ve çıkarmayı tam anlamıyla öğrenmeden de geometri ya da ölçümle ilgili kavramları öğrenebilirler. Orta ve ileri düzeyde engelli öğrenciler için geometri sadece şekilleri tanımaktan çok daha fazla bir anlam taşımaktadır; geometri bu öğrencilerin gerçek hayatta kendi kendilerini yönlendirmeleri için çok önemlidir. Paralel ve dik doğrular, kavisler ve düz kenarlar yerel bir bölgenin haritalarını yorumlamaya yaradığında pratiğe dönük boyutları ortaya çıkar. Otobüs veya metro rotaları için hazırlanan haritalardan öğretim materyali olarak faydalanıldığında öğrencilerin toplu taşımayı kullanmaları desteklenebilecektir. Otobüs duraklarını saymayı öğrenen ve zamanı tahmin edebilen öğrencilerin başarılı bir şekilde kendi dünyalarını yönlendirmelerine yardımcı olunabilir.

Tablo 6.2'de farklı içerik alanlarına yönelik yaklaşımlar sunulmuştur. Belli bir sınıf seviyesi için öğretim programı ile bir öğrencinin işlevsel bağlamda ihtiyaç duyduğu temel becerileri harmanlamanız gerekecektir. Eğer diğer öğrenciler üçgenlerde çeşitli açıların ölçülmesi konusunu çalışıyorlarsa, orta düzeyde engelli bir öğrenci belirlenen bir üçgenle aynı açıya sahip olan üçgenleri gruplandırma yapabilir. Örneğin dik açıların öğrenimi kapsamında, verilen bir modelle dikaçılı üçgenlerin karşılaştırılması yapıldığında, içerik sınıf seviyesinde belirlenen kazanımlar düzeyinde kalmakla birlikte orta düzeyde engelli öğrencilerin kavram ve kelime gelişimleri ile sembol kullanımlarına dönük uzun-vadede ihtiyaçlarına cevap verecek bir adaptasyon yapılmış olur.

Takip eden listede sınıf seviyesinde yapılan öğretim için değişiklik önerileri yer almaktadır.

Orta ve İleri Düzeyde Engelli Öğrencilerin Desteklenmesi İçin İlave Stratejiler

- *Sistematik öğretim.* Öğrencilerin tekrar tekrar denemelerini sağlayınız, sistematik yönlendirmeler yapınız ve belli bir sonuca ulaşmak için düzeltici geri dönütler veriniz.
- *Görsel destekler.* Görsel işaretler, renk kodlaması ve noktalar veya diğer resimsel ipuçları kullanarak elde edilen basitleştirilmiş sayısal ifadeler bazı öğrencilerin öğrenmelerini odaklandırır.
- *Cevap yönlendirme.* Bir öğrenciye 3+3 gösterirken "üç artı üç kaç yapar?" diye sorunuz. "Altı" deyiniz ve sonra öğrenciye yeniden ifade ediniz "üç artı üç altıdır." Sonra uyarıcı-tepki yönlendirmesini yapınız: "üç artı üç kaç yapar?"
- *Görev zincirleme.* Görev analizi. Her seferinde bir adım atınız ve her adımda öğrenciye bir yönlendirme yapınız. Yönlendirme sayısını öğrencinin performansına dayalı olarak azaltınız.
- *Problem çözme.* Problemi ifade ediniz. Örneğin masa etrafındaki öğrencilere kâğıttan tabaklar dağıtınız. Ama tabakların sayısı öğrenci sayısından daha az olsun. Öğrencilere "Problem nedir?" diye sorunuz. Öğrenciler bir çözüm belirtmeli ve daha fazla tabağın gerektiğini söylemeliler. "Daha kaç tane tabak gereklidir?" Bu miktar verildiğinde öğrenciler problemi çözmüş olurlar. Bu durumun kaydının nasıl tutulacağını göstermek için kişiler ve kâğıt tabaklar arasında bire-bir eşlemeyi görsel olarak kullanınız. Sonra buna karşılık gelen denklemi yazıp okuyunuz.
- *Öz denetleme becerileri ve bağımsız öz-yönlendirmeli öğrenme.* Hedef belirlemede ve karar vermede öğrencilerin kendi tercihlerini yapmaları için fırsatlar oluşturunuz.

Tablo 6.2

Orta ve İleri Düzeyde Engelli Öğrenciler İçin Etkinlikler

İçerik Alanı	Etkinlik
Sayılar ve İşlemler	• Genel sınıf etkinlikleri için çeşitli ögeleri teker teker sayınız. • Sınıf için ya da belli bir organizasyon için sipariş edilmesi gerekli malzemelerinin listesini oluşturunuz. • Belli bir yemekteki kalori miktarını hesaplayınız. • Yerel restoranların menülerindeki iki yemeğin fiyatlarını karşılaştırınız.
Cebir	• Bir harçlık ya da ücrette ortaya çıkan zaman içindeki artışı bir çizelge üzerinde gösteriniz. Bir ay ya da bir yılda ne kadar bir miktara sahip olacaklarını gösterecek bir denklem yazınız. • Tekerlekli sandalye rampasının ya da garaj girişinin eğimini hesaplayınız.
Geometri	• Harita üzerinde iki konum arasındaki kısa bir patikayı belirlemek için uzamsal ilişkiyi kullanınız. • Çeşitli şekilleri süsleyerek farklı şekildeki parçacıkların birbirine nasıl uyduğunu gösteriniz. Bir boşluğu tangram kullanarak doldurmak da böylesi iş ortamında gerekli önemli becerilerini geliştirecektir.
Ölçme	• Hacmi ölçmek için farklı şekillerdeki ögeleri su, kum veya pirinç ile doldurunuz ve kapları en küçükten en büyüğe sıralayınız. • Vücut sıcaklığını ölçünüz ve dış sıcaklıkla karşılaştırmasını göstermek için büyütülmüş bir termometre kullanınız. • Alan kavramını kullanarak, sınıfın duvar ya da tavanlarını boyamak için gerekli olan boya miktarını hesaplayınız. • Harita kullanarak, bilinen bir yere yapılan yolculuğun süresini tahmin ediniz.
Veri Analizi ve Olasılık	• Öğrencilerin favori oyunlarını araştırınız (elektronik ortamda ya da başka şekilde) ve ilk beş sırada gelen oyunları kendi sınıfınızın oylamasına sununuz. Sonuçları göstermek ve karşılaştırmak için bir grafik oluşturunuz. • Okulda öğle yemeği siparişi veren öğrencilerin çetelesini çıkarınız. • Geçen hafta için hava sıcaklığını inceleyiniz ve gelecek hafta için hava sıcaklığının belli bir aralıkta olma ihtimalini tartışınız.

Kültürel ve Dilsel Açıdan Çeşitlilik Gösteren Öğrenciler

Birleşik Devletler hem bir eritme potası ve hem de bir salata kâsesi olarak isimlendirilmektedir. Gerçekte her ikisi de doğrudur. Sınıflarımızdaki birçok öğrencinin ebeveynleri ya da dede-nineleri farklı köklere sahiptir; fakat kendileri Birleşik Devletlerde yetiştirilmişlerdir ve birinci dilleri de İngilizcedir. Birleşik Devletler aynı zamanda, yaygın Amerikan kültürü ile kaynaşmamış birçok öğrenciye de sahiptir. Bunlar, başka bir kültürün birinci veya ikinci neslin çocukları olup başka bir dili birinci dil olarak konuşanlardır. Kültürel ve dilsel açıdan çeşitlilik gösteren (CLD) öğrencilerinizin ihtiyaçlarına en iyi şekilde cevap vermenin yolu onların kültür ve dillerine değer vermeniz ve yörenizin kültür ve dilini kullanmaya yönelik bir zorlamada bulunmamanızdır. Bu kısımda kültürel olarak uyumlu öğretim uygulamalarını geliştirmenin yolları tartışılacaktır.

Pencereler ve Aynalar

Matematik öğrenmeyi sağlamak için kültürel ufuklarını genişletmek zorunda olan tek kişi siz değilsiniz; öğrencileriniz de bunu yapmak zorundadır. New Jersey'deki Morristown okullarının çeşitlilik koordinatörü Emily Style'ın ifadesiyle,

> Kapsayıcı bir öğretim programı, öğrencilere, başkalarının çeşitlilik taşıyan tecrübelerini kabul etmek ve çerçevelemek için pencere ve her bir öğrencinin gerçekliği ve geçerliğini yansıtmak için bir ayna dengesi sunar. (1988)

Öğrencilerin güçlü oldukları alanlarla çalışırken, onların aşina olmadıkları deneyimlerden aşina olduklarına doğru geçiş yapabilecek yollarla düşüncelerini geliştirecek fırsatlar belirlemelisiniz. Örneğin, şehir ortamında büyümüş çocuklarla çalışma yapıyorsanız ve bahçe veya tarlaların çizimi hakkında bir örnek üzerinde konuşuyorsanız, tüm sınıfın anlaması için bir hikâye anlatmak akıllıca olacaktır. DyAnne Disalvo-Ryan tarafından yazılan Yeşil şehir (*City Green*) bilinmeyenin bilinmesine yardımcı olacaktır. Öğrenciler şehir toplumunda ne kadar fazla şeyin komşular arasında paylaşılabileceğini görebileceklerdir. Bu yaklaşımla, tüm öğrenciler etkinlik için gereken altyapıyı kazanabilirler. Destekleyici bir ortamı oluşturmanın bir başka unsuru öğrencilerin bir diğerini önemsediği güvenli ve besleyici bir çevrenin oluşturulmasıdır. Öğrenciler birbirlerinin matematiksel görevlerdeki başarıları için sorumluluk hissetmeli ve destek gördüklerini bilmelidirler. Sosyal ve duygusal alanlara yapılan vurgunun bir parçası olarak öğrencilere iletişimde bulunmaları için fırsat vermek, çeşitli kültürlerin bir arada ve aynı anda değer gördüğü sınıfların oluşturulması için çok önemlidir.

Kültürel Açıdan İlgili Matematik Öğretimi

Muhtemelen siz "matematik evrensel bir dildir" söylemini duymuşsunuzdur. Bu yaygın yanılgı sınıflarda eşitsizliğe yol açabilmektedir. Örneğin, CLD öğrencilerinin dil ihtiyaçları matematik öğretiminde ihmal edilmektedir (Lee & Jung, 2004). CLD öğrencilerine nasıl destek verileceğine ilişkin üç farklı perspektif vardır:

1. Dil kullanımını sınırlandırmak ve esas olarak semboller üzerine odaklanmak.
2. Dil açısından zengin etkinlikler kullanarak, NCTM *İlkeler ve Standartlar*'ını hayata geçirmek
3. CLD stratejileriyle standartlar temelli bir öğretim programının entegrasyonunu sağlamak (Bay-Williams & Herrera, 2007).

Şimdi avantaj ve dezavantajlarıyla birlikte bu üç yaklaşımdan her birine kısaca göz atacağız.

Sınırlı-dil kullanımı yaklaşımının mantıki gerekçesi şudur: öğrenciler evrensel olan sembolleri anlayacaklardır. Bu bakış açısında birçok problem vardır. Örneğin, Meksika'da ders kitapları B açısını veya şeklinde gösterirken Birleşik Devletlerde ∠B veya ∠ABC şeklinde göstermektedir. İngilizce dilini öğrenen bir kimse açı sembolünü tanıyamayabilir ve bunu "küçüktür" işareti ile karıştırabilir. Latin Amerikan ülkelerinde yazılan 9 sayısı küçük g harfi ile kolaylıkla karıştırılabilir. Birleşik Devletlerde "milyar" olarak isimlendirilen sayı Meksika da "bin milyon" olarak adlandırılmaktadır (Perkins & Flores, 2002). İkinci olarak semboller soyutturlar. Bölüm 2'de tartışıldığı gibi, öğrenciler aşina oldukları durumları sunan somut materyaller ve problemlerle başlamalıdırlar. Üçüncü olarak, yazılı veya sözel formda dil kullanımı derin bir matematiksel kavrayış için esastır (Khisty, 1997). Son olarak, CLD öğrencileri için sembol kullanımının daha kolay olduğu şeklinde inanış bir öğretmeni çok hızlıca sembolik gösterim kullanımına yöneltmektedir ve bu yüzden de öğrencinin kavramsal öğrenmesi sınırlandırılmaktadır (Garrison & Mora, 1999).

CLD öğrencilerinin öğretimine ilişkin ikinci yaklaşım ise *İlkeler ve Standartlar*da ana hatlarıyla sunulan tavsiyelere uymaktır. Standartlar temelli öğretim yapan bir öğretmen, sorgulamaya dayalı öğretimi, öğrenci-öğrenci etkileşimini (ikililer olarak ya da küçük gruplar halinde), tartışmalar ve alternatif değerlendirmeleri kullanabilir. Bunların hepsi de Amerikan kültürünün belli bazı yönlerine aşina olmayan ya da İngilizce öğrenmekte olan bir öğrencinin öğrenme sürecini destekleyecektir (Echevarria, Vogt & Short, 2008).

Standartlar temelli bir öğretim, İngilizce dilini öğrenen bir öğrenciye geleneksel öğretimden daha etkin bir destek sağlar; çünkü kullanılan stratejilerin çoğu CLD öğrencileri için özellikle faydalıdır. Örneğin, *Standartlar* öğrencilerin kendi seçtikleri bir stratejiyi kullanarak bir problemi çözmelerini ve daha sonra nasıl çözdüklerini açıklamalarını isteyen bir öğrenme ortamının oluşmasını teşvik eder. Farklı kültürden gelen bir öğrenci o kavram ya da ilişkili beceriler için farklı stratejileri öğrenmiş olabilir. Ayrıca, kendi stratejilerini açıklamak dil becerilerinin gelişimi için öğrencilere fırsatlar sunar.

Fakat Standartlar temelli uygulamaların birçoğunu kullanan öğretmenlerin sınıflarında bile bir başarı farkı halen varlığını sürdürmektedir. Eksik olan şey genellikle öğrencilerin dil becerilerinin gelişimine yardımcı olacak

amaçlı bir çabadır. Bu ise üçüncü yaklaşımın üzerinde durduğu konudur.

CLD öğrencileri için etkin bir öğrenmeyi gerçekleştirmek iki dilli (bilingual) eğitim ilkeleri ile Standartlar temelli içerik öğretiminin bütünleştirilmesini içerir (Bkz. Tablo 4.1). Yani, öğrencilerin dilleri ve kültürlerini de dikkate alarak yapılan dersler problemlere ve tartışmalara dayalı olmak zorundadır. Bu perspektiften işe koyulmak dil gelişimini desteklerken kültürün nasıl kucaklanacağını düşünmeyi de gerektirir. Takip eden iki kısımda bağımsız olarak ele alınsa da bu ikisi yakından ilişkilidir ve öğretimde ayrılmamalıdır.

Etnomatematik

Kültür, matematik ve eğitimin kombinasyonu genellikle etnomatematik olarak adlandırılır. Birçok toplum farklı matematiksel geleneklere sahiptirler ve matematiksel düşüncenin farklı dallarında gelişim sergilemişlerdir. Matematiğin kültürle ilişkili olarak öğretimi sınıflardaki çeşitliliğe saygı göstermenin bir yoludur. Öğrenciler, kendi kültürlerinin matematik kullanımlarına, uygulamalarına ve düşünmelerine olan etkisini incelemek suretiyle matematikle kişisel olarak ilgilenebilirler. Başka kültürlerdeki matematiği çalışmak, matematiğin bazı mistik olguların bir sonucu olduğu şeklindeki yanlış düşüncenin yerine matematiksel katkıları "görünür kılmak" (matematiği insanların ürünü olarak görmeleri) için öğrencilere bir fırsat sağlar.

Bishop (1991) matematiği dil ve kültür çeşitliliğine bağlayan altı kategori tanımlamaktadır: sayma (örn. başka ülkelerin sayı sistemlerinin öğrenimi), ölçme (örn. başka ülkelerin ölçme araçlarını ya da birimlerini kullanma), yerini belirleme (örn. mekânları yerleştirmek için coğrafya ve haritaları kullanma), tasarım ve inşaat (yuvarlak ve kare şeklindeki Afrika evlerindeki yaşam alanlarını düşünme), oyun (örn. "Mancala", "Nine Men's Morris") ve açıklama (örn. aile fertlerinin soyağacındaki ilişkilerini betimlemek veya Afrikalıların kumla yapılan boyama şekilleri üzerinden hikâyeler anlatma).

Kültürel perspektiften matematiğe yaklaşmanın birçok yolu vardır (örn. matematikçilerin hayat hikâyeleri veya kavramların tarihsel gelişimi, oyunlar, çocuk edebiyatı ve temaya dayalı üniteler). Etnomatematik, öğretim programlarındaki diğer dersler ile matematik arasında doğal bir köprü görevi görür. Matematik, insanların düşüncelerinin, yaratıcılıklarının, problem çözme becerilerinin, inançlarının, değerlerinin ve hayatta kalma mücadelelerinin bir ürünüdür. Matematik alanına yapılan katkılar dünya üzerinde çok çeşitli insanlardan gelmiştir; bunlar arasında matematiğe yaptıkları katkıları göz ardı edilen birçok kadın ve beyaz olmayan kişiler de yer almaktadır.

İngilizce Dilini Öğrenenler (ELL)

Amerikan okullarına devam eden öğrencilerden kaç tanesinin İngilizcesi akıcı değildir? 2005 yılı itibariyle ulusal bazda 5 milyondan fazla öğrenci (yüzde 10.5) ELL hizmetleri almaktaydı. Bu sadece şehir merkezlerindeki bir istatistik değildir; ELL hizmetlerine Birleşik Devletlerin her bir eyaletinde ve Kanada'nın her bir vilayetinde ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, ELL öğrencilerinde 1995 yılından 2005 yılına kadar en büyük artışların yaşandığı eyaletler Güney Carolina (% 714), Kentucky (% 417), Indiana (% 408), Kuzey Carolina (% 372) ve Tennessee (% 370). Tüm göçmen öğrencilerin % 58'ini ve ELL öğrencilerinin % 75'ini temsil eden İspanyol kökenliler, Amerika'daki en büyük azınlık grup olmaya devam etmektedirler (Kohler & Lazarin, 2007).

Matematik derslerine giren İngilizce dilini öğrenenler, evlerinde öncelikli iletişim dili İngilizce olmayan öğrencilerdir. Bir kimse birkaç yıl içerisinde İngilizce konuşma becerilerini geliştirebilmesine rağmen matematik gibi belli bir alana özgü olan "akademik dil" gelişimi 7 yıl kadar bir süre almaktadır. (Cummins, 1994). Akademik dili öğrenmek daha zordur; çünkü bu dil öğrencinin günlük hayatında kullanılmamaktadır. Matematik öğrenirken, öğrenciler belki de kendi dillerinde kelime olarak karşılığı bulunmayan bir içerik öğrenmek durumunda kalmaktadırlar. Örneğin, merkezi eğilim ölçülerini çalışırken (ortalama, medyan ve mod), öğrencilerin bu terimlerin kendi dillerindeki karşılığını bilemeyebilirler; bu da ikinci dilde akademik dili öğrenme zorluğunu artıracaktır. Buna ek olarak, ELL öğrencileri için hikâye içeren problemler de zordur. Bunun sebebi sadece dil değildir; aynı zamanda hikâye problemlerindeki cümlelerin genellikle konuşma dilindeki İngilizceden farklı şekilde yapılandırılmasıdır.

Anadili İngilizce olmayan kişiler için İngilizce öğretmenleri (TESOL) ikinci bir dil olarak İngilizceyi (ESL) etkin öğretmek için okul öncesinden 12. sınıfa kadar standartlar geliştirmişlerdir (TESOL, 1997). TESOL'un İngilizceyi öğrenen öğrenciler için etkin eğitim vizyonu, öğrencilerin İngilizce yeterliklerinin geliştirilmesi ve aynı zamanda öğrencilerin anadillerini muhafaza edilmesi ve desteklenmesini içermektedir. TESOL standartları, öğrencilerin aşağıdakileri gerçekleştirmek için İngilizce kullanmalarını belirtmektedir:

1. "sınıf içinde iletişime geçmek"
2. "konu alan bilgisini konuşma ve yazma formatında elde etmek, işlemek, oluşturmak ve sunmak"
3. "akademik bilgiyi oluşturmak ve kullanmak için uygun öğrenme stratejilerini kullanmak" (TESOL, 1997, s.9).

Dikkat edilecek olursa öğrencilerin İngilizceyi kendi akademik kurslarında kullanmaları beklenmektedir. Bu "yalnızca İngilizce" anlamına gelmemektedir; daha ziyade anadil kullanımını ve İngilizce gelişimini teşvik eden bir yaklaşımdır. Ayrıca ELL öğrencileri için dile ait şu fırsatların sunulması üzerine vurgu yapılmaktadır: okuma, yazma, konuşma ve dinleme. Bunlar etkili bir şekilde öğretime dâhil edildiğinde matematiksel kavrayış ve dil aynı zamanda öğrenilebilir.

ELL Öğrencilerine Matematik Öğretmek İçin Stratejiler

İngilizce öğrenen öğrencilere verilecek destekler arasında, bu kısımda tartışılacak stratejiler matematik öğretimi için özel bir önem taşır. Bunlar matematik derslerinde ELL öğrencilerinin akademik başarılarını artırmak için araştırmacılar ve öğretmenler tarafından yaygın olarak bahsedilen fikirlerdir (Bkz. Bölüm 4'teki Tablo 4.1).

İçeriğe ve dile dair kazanımları ifade ediniz ve yazınız. Her ders öğrencilere ne öğreneceklerini söyleyerek başlamalıdır. Yaptıkları incelemelerde keşfedecekleri şeyi onlara siz vermeyeceksiniz ama yaptıklarının daha genel anlamda amacını belirtmelisiniz. Yani bir yol haritası vermelisiniz. Eğer öğrenciler dersin hedefini bilirlerse, büyük resmin ışığı altında detayları daha anlamlı hâle getirebileceklerdir. Örneğin, çarpma ve bölme için farklı stratejilerin kullanımı hakkında bir ders yaptığınızda öğrencilerin anlayabilecekleri şekilde kazanımları tahtaya aşağıdakine benzer olarak yazmalısınız:

1. Sayıları çarpmak ve bölmek için farklı yollar bulunuz. (içerik)
2. Birinci adım verildiğinde bir çarpma veya bölme işlemini nasıl tamamladığınızı açıklayınız. (dil ve içerik)
3. Bölme problemini çözmek için seçtiğiniz yolu yazınız. (dil)

Arka planı oluşturunuz. Bu, önbilgi üzerine inşâ etmeye benzer; fakat içerikle beraber kültür ve dili de dikkate alır. Eğer mümkünse, çözmelerini istediğiniz problemi anlamalarına yardım etmek için uygun görseller ve bir bağlam kullanınız. Dersi önceki bilgileriyle ilişkilendiriniz (dünkü dersle, bir gerçek hayat problemi veya ay içinde önceden yaptığınız başka bir şeyle). Örneğin, 22 x 42 işleminin neye işaret ettiğini tartışabilirsiniz (bu belki de duvarda asılı olan bir tablonun ölçülerine veya 22 öğrencilik bir sınıftaki her bir kişiye alınacak pulların tutarı olan paraya işaret ediyordur).

Anadilin kullanımını teşvik ediniz. Araştırmalar, öğrencilerin bilişsel gelişimlerinin kendi ana dillerinde daha kolay gerçekleştiğini göstermektedir. Bir matematik dersinde, öğrenciler kendi anadillerinde iletişime geçebilir ve İngilizce dil gelişimleri de devam edebilir. Örneğin, küçük gruplar halinde çalışan öğrenciler için iyi bir strateji İspanyolca konuşan öğrencilerin öncelikle problemi İspanyolca olarak tartışmalarını sağlamaktır. Eğer bir öğrenci yeterince İngilizce biliyorsa dersin *sonrası* aşamasındaki sunum İngilizce yapılabilir. Eğer öğrenci çok az ya da hiç İngilizce bilmiyorsa bir çevirmen kullanarak açıklamalarını İspanyolca yapabilir.

Anlaşılabilir girdi kullanınız. İki dilli eğitimde kullanılan "anlaşılabilir girdi" ifadesi ilettiğiniz mesajın öğrenci tarafından anlaşılabilir olması anlamına gelmektedir. Cümle yapılarının basitleştirilmesi ve gerekli olmayan veya kafa karıştırıcı kelimelerin kullanımının sınırlandırılması anlamına gelmektedir; dersten beklentinin düşmesi anlamına gelmemektedir. Ayrıca öğrencilerin karşılaştıkları dili anlamalarına yardımcı olacak stratejilerin kullanımı anlamına da gelmektedir. Bazen öğretmenler birçok gereksiz kelimeyi ve deyimleri soru sorarken kullanmaktadırlar. Böylece sorular o dilde konuşmayanlar için açıklığını yitirmektedir. Aşağıdaki öğretmen yönergelerini karşılaştırınız:

> Değiştirilmemiş: Sizlerin önünde az önce dağıttığım birer tane çalışma sayfası bulunmaktadır. Her bir durum için, şekiller için toplam alanı belirlemenizi istiyorum. Arkadaşınızla birlikte çalışacaksınız; fakat her biriniz cevaplarınızı kendi sayfanız üzerine not edeceksiniz ve cevabı nasıl bulduğunuzu açıklayacaksınız. Eğer bir problemde takılırsanız parmağınızı kaldırın.

> Değiştirilmiş: Lütfen kâğıtlarınıza bakınız. (Kâğıdı kaldırır ve işaret eder. Birinci resmî gösterir). Alanını bulacaksınız. *Alan* ne demek? (Bir müddet bekleme zamanı tanır.) Alanı nasıl hesaplarsınız? Arkadaşınızla konuşunuz. (Bunu söylerken ağzına işaret eder ve sonra da bir çift öğrenciye.) Cevaplarınızı yazınız. (Kâğıt üzerine yazma hareketi yapar.)

Üç şeyin yapıldığına dikkat ediniz: cümleler kısaltıldı, kafa karıştırıcı kelimeler çıkarıldı ve jestler ve hareketler ile kelimeler arasında bağlantı kuruldu. Ayrıca "bekleme zamanı" verilmesine de dikkat ediniz. ELL öğrencilerine bir soru sorulduktan ya da yönerge verildikten sonra bir miktar zaman tanınması oldukça önemlidir; bu süre zarfında öğrenciler çeviri yapar, isteği anlamlandırır ve katılımda bulunurlar.

Anlaşılabilir girdi sağlamanın bir başka yolu sözel ifadenin öğrenciler tarafından anlaşılması ve görselleştirilmesi için çeşitli araçlar kullanmaktır. Önceki örnekte öğretmen yönergeleri modellemektedir. Bir derse giriş yaparken, resimler, gerçek nesneler ve diyagramlar kullanınız. Örneğin, tamsayıları öğretirken gerçek bir termometre getirmek ve tepegözle yansıtmak görselleştirmeye yardımcı olur (ve bir bağlam sağlar). Hatta karla kaplanmış yerlerin resimlerini getirip bunları düşük dereceler yanına yerleştirebilirsiniz. Ayrıca öğrencilerden de kendi çalışmalarına çoklu gösterimleri dâhil etmeleri beklenmelidir. Öğrencilerden çizim yapmalarını, yazmalarını ve yaptıklarını açıklamalarını bekleyiniz. Bu hem onlar için hem de çözümlerini inceleyen birlikte çalıştığı arkadaşı için faydalıdır. Kullanmayı düşünebileceğiniz destekleyici materyaller arasında manipülatifler, gerçek nesneler, resimler, görseller, multimedya, gösterimler ve çocuk kitapları yer alabilir (Echevarria, Vogt & Short, 2008).

Kelimeleri açıktan öğretiniz. Kelime gelişimini desteklemek için başvurulan yaygın bir yöntem matematik kelime

duvarıdır. Matematik öğrenimi için esas teşkil eden kelimelerle karşılaştıkça öğrenciler bunları kelime duvarına ilave ederler. Bir kelime seçildiğinde, bu kelimenin İngilizcesi, sınıfınızda temsil edilen dile çevirisi, resimler ve bir öğrenci tarafından yapılan İngilizce ya da başka dillerde tanımlamasını (formel bir tanım değil) içeren kartlar öğrenciler tarafından oluşturulur.

Kelime duvarına ilave olarak, kelimeleri açıktan öğretmenin birçok yolu vardır. Örneğin, kesirler, ondalıklar ve yüzdeler arasındaki ilişkileri çalışırken öğrenciler terimleri ve kavramları birbiriyle ilişkilendiren kavram haritaları oluşturabilirler. Öğrenciler, bilmeleri gereken terimlerin örnekleri ve gösterimlerinin yer aldığı kendi "kişisel matematik sözlükleri" hazırlayabilirler. Daha önce değindiğiniz bir matematiksel terimi kullandığınızda, orada durun ve terimi öğrencilerin hatırladığından emin olun. Yeni terimler tanıştırıldığında, kelimenin kendisi tartışılmalı, kelimenin kökü ve ilişkili kelimeler paylaşılmalıdır (Rubenstein, 2000). Günlük hayattaki kullanımlarından farklı anlamlara sahip birçok matematiksel terim vardır; örneğin, çarpım, ortalama, toplam, çarpan, dik, kök, bölme, fark, benzer, açı.

Dil gelişimini desteklemek için iş birlikçi gruplar planlayınız. İngilizce öğrenenler, tehdit teşkil etmeyen bir ortamda konuşma, yazma ve dinleme için fırsatlara ihtiyaç duyarlar. Bunu gerçekleştirmenin en iyi yolu iş birlikçi gruplardır. Gruplama yaparken bir öğrencinin dil becerilerini dikkate almak zorundasınız. Bir ELL öğrencisini iki İngilizce konuşan öğrenciyle birlikte eşlerseniz ELL öğrencisinin tamamen dışlanması sonucu ortaya çıkabilir. Bu gruba bir tane de her iki dili bilen öğrencinin verilmesi ya da anadilleri aynı olan öğrencileri, mümkün mertebe, birlikte eşlemek daha iyi olacaktır (Garrison, 1997; Khisty, 1997). Üçlü ya da dörtlü gruplardan ziyade ikililer daha uygun olabilir. Tüm grup çalışmalarında olduğu gibi kurallar veya yapılar yerli yerinde olmalıdır ki böylece her bir öğrenci katılım sağlayabilir ve etkinlikten sorumlu tutulur. ELL öğrencileri, kendi kültürleri ve dillerinin idare edilmesi gereken bir eksiklik olarak değil de değer verilen bir kaynak olarak gördüğünüzü anladıklarında onlar için desteklerin verildiği bir cennet oluşturduğunuzu fark edeceklerdir.

Ailelerle ilişkileri güçlendiriniz. Tüm öğrenciler, aileleri öğrenmelerine destek verdiklerinde daha başarılı olmaktadırlar. Ebeveynler ya da veliler öğrencilerin sınav sonuçlarından ve kavrayış eksikliklerini azaltarak pozitif bir değişikliğe yol açmak için yapmaları gerekenler konusunda bilgilendirilmelidirler. Fakat aile üyelerinin kendi okul dönemlerine veya matematik derslerine ait olumsuz hatıraları varsa aile ile iyi bir ilişki kurmak zor olabilmektedir. Bu, tıpkı, sizin hastaneye girince huzursuz olmanız gibidir; çünkü siz veya sevdikleriniz orada zor zamanlar yaşamışsınızdır. Aile üyeleri de okul ortamına ve özellikle de matematik sınıflarına geri geldiklerinde kendilerini aynı şekilde hissedebilirler. Bazen öğretmenler ve idareciler topluluklar arasına karışarak, tüm öğrencilere matematiği öğretmek için birlikte çalışmak gerektiğini ve bunun da öğrencilerin "kazanmaları" için en iyi yol olduğu şeklindeki mesajı paylaşmalıdırlar. *Kazanmak* önemli kelimedir; çünkü birçok topluluk kazanmak için stratejiler geliştirmeye isteklidir. Güçlü, kapsayıcı bir matematik programına sahip olmanın önemli bir boyutu kendi rollerini çocuklarının öğrenimi için kritik olarak gören ailelerin destek ve güvenlerini kazanmaktır.

Önemli bir matematik öğrenimi daha çocuklar sınıfa girmeden gerçekleşir. Evde edinilen bu matematik bilgisi yeni deneyimler oluşturmak için iyi bir temeldir ve öğretmen bu bilgi üzerine inşa ettiğinde yüksek düzey öğrenme için bir aşama oluşturur. Bir çocuğun ailesinin matematik denkleminin içine çekilmesi bir sınıf topluluğunu geliştirmek ve öğretim programını kültürel olarak ilişkili hâle getirmek için önemli bir unsurdur. Aileler kendi çocuklarının öğrendiği matematiğe katılmalıdırlar; böylece matematik öğrenimlerine dair kendi okul deneyimlerinden farklı olsa da aileler matematiğe değer verirler. Ailelerin incelemeleri amacıyla tavsiyeler, bulmacalar, oyunlar ve problemlerin yer aldığı okul bültenleri evlere gönderilebilir. Aile Matematik Geceleri (Stenmark, Thompson & Cossey, 1986) için davetiyeler veya ev ödevlerine ailelerin yardımcı olmasına dönük öneriler daha güçlü bir ilişkiye olanak sağlar.

Çocukları televizyon ve bilgisayar oyunlarından uzaklaştıran ve aile fertleriyle yapılabilecek matematiksel etkinliklere ya da problem çözme becerilerine yönelten yöntemler, süreklilik arz eden eğitsel ilişkilerin inşâsı için önem taşır. Öğretmenler ailelerin kültürlerinin sınıfa olan katkılarını öğrenirken, aileler de öğretmenin çalışmalarına karşı saygı duyarlar. Aşağıda verilen aile kaynaklı matematik projesi, aile tarihi ve kültürünü önemsemek suretiyle matematik dersine yapabileceğiniz katkıya ilişkin bir tasvirdir.

> *Her gün öğle yemeğinden sonra sınıfıma Yüz Peni Kutusu (Hundred Penny Box) (Mathis, 1986) isimli bir kitap okuyorum. Bu bir çocuğun büyük büyük halası olan Dew'in dokunaklı bir hikâyesidir. Dew yaşlı bir Afrika kökenli Amerikalıdır ve yaşadığı yüzyıl boyunca eski bir sigara kutusuna her yıl için birer peni biriktirmiştir. Kutudan çıkardığı her bir peni paranın kutuya atıldığı yılda başına gelen önemli bir olayı hatırlatmaktadır. Her bir peni, bir para olmanın ötesinde anlam taşımaktadır; bunların her biri hayatındaki "anıları hatırlatıcı" niteliktedir. Kitaptan esinlenerek çocuklardan doğdukları yıldan itibaren her yıl için bir peni toplamalarını istedim. Öğrencileri sınıf arkadaşlarından ihtiyaç duyacaklar için fazladan peni getirmeleri noktasında teşvik ettim. Sonra öğrenciler ailelerine danışarak hayatlarındaki önemli olaylar için peniden oluşan zaman çizelgesi hazırladılar. Evlerinden topladıkları bilgilerle doğdukları yıldan itibaren doğum günlerini ve ayrıca ilk adımlarını, kazaları, tatilleri, evcil hayvanlarını ve kardeşlerinin doğumlarını listelediler. Sonra öğrencilerden belli bazı olaylar arasında kaç yıl geçtiğini belirlemelerini ya da bir evcil hayvan aldıkları veya bisiklet kullanmasını öğrendikleri yaşları hesaplamalarını istedim.*

Ailelerle bağlar kurmanın yanı sıra, bu proje saygı ve uyuma dayalı bir sınıf iklimi oluşturmuştur. Öğrenciler ve aileler, çocuğun kişisel tarihçesini incelemek ve hangi olayların vurgulamaya en değer olduğunu belirlemek için birlikte çalışmışlardır. Hayattan kesitleri kronolojik olarak zaman çizelgesiyle eşleştirmek sosyal bilgiler kapsamındaki beceriler ile de oldukça uyumlu olmuştur.

Cinsiyet Eşitliğine Yönelik Çalışma

NAEP sınavlarının sonuçlarına dayalı olarak konuşmak gerekirse, cinsiyetler arası matematik başarısındaki fark az da olsa 1990 ve 2007 yılları arasında tutarlı bir şekilde varlığını sürdürmüş ve 4, 8 ve 12. sınıflarda erkek öğrenciler kız öğrencilerden daha başarılı olmuşlardır. Fakat yakın zamanda yapılan bir araştırmada (Hyde, Lindberg, Linn, Ellis & Williams, 2008) 2-11. sınıflarda okuyan 7.2 milyon Amerikan öğrencisinin standardize sınav sonuçlarının analizi neticesinde kızlar ve erkekler arasında matematik puanları açısından bir fark olmadığı görülmüştür. Hyde şunu ifade etmektedir "basmakalıp söylemlere inanan kızlar zor matematik derslerini almaktan kaçınmaktadırlar." Fakat geçtiğimiz 20 yıldır verilen uğraşlar artık netice vermeye başlamıştır. Yine de lise sonrasında daha çok erkekler yoğun matematik ve fen gerektiren alanlarda çalışmaya başlamaktadırlar. Kadın Mühendisler Derneği başkanı şunu belirtmektedir: "Lisans düzeyinde öğrenim görenlerin % 55'i bayan olmasına rağmen niçin mühendislik alanlarının sadece % 20'sini bayanlar oluşturmaktadır ve niçin erkeklerin mühendislik alanlarına kayıt olmaları ihtimali kızlarınkinden dört kat daha fazladır?" (Tortolani, 2007). Cinsiyet eşitliğinin farkında olmanız ve sınıfınızda dikkat etmeniz gereklidir.

Cinsiyet Eşitsizliğine Yol Açan Olası Nedenler

Becker ve Jacobs (2001) tarafından dikkat çekildiği gibi araştırmaların büyük bir kısmı "cinsiyetin sosyal olarak oluşturulduğu ve farklılıkların biyolojik olarak belirlenmediğini kabul ederek 'cinsiyet farkları' yerine 'toplumsal cinsiyet farkları' konusuna doğru kaymaktadır" (s.2). Cinsiyet eşitsizliğinin nedenlerinden bazılarını sınıflarda bulabiliriz.

Cinsiyetle İlgili İnanış Sistemleri. Matematiğin bir erkek etkinliği olduğu şeklindeki inanış günümüz toplumunda varlığını devam ettirmekte ve her iki cinsiyet tarafından da kabul görmektedir. Erkeklerin matematikte daha iyi oldukları şeklindeki basmakalıp düşünce kızların öz-algılarını ve motivasyonlarını şekillendirmektedir (Nosek, Banaji & Greenwald, 2002). Sonuçta ise matematiğe karşı ortaya çıkan ilgi azalmaktadır. "Bayanların görece olarak matematik ve fenle ilgili alanlarda sayıca az olmaları kızların matematikle ilgili alanlarda başarılı olamayacakları şeklindeki basmakalıp düşünceyi beslemekte ve böylece genç kızlar genellikle bu alanlardan uzak durmaktadırlar" (Barnett, 2007).

Öğretmen Etkileşimleri ve Cinsiyet. Muhtemelen öğretmenler bilinçli olarak öğrencilerine cinsiyete ilişkin basmakalıp düşünceler aşılamazlar; fakat toplumumuzun cinsiyete dayalı önyargıları genellikle öğretmenlerin öğrencilerle iletişimini etkiler (Martin, Sexton, Wagner & Gerlovich, 1997). Janet Hyde'ye göre "veliler ve öğretmenler, erkeklerin matematikte kızlardan daha iyi olduğu şeklindeki basmakalıp düşünceye sahiptirler" (Seattle Times News Services, 2008). Öğretmenlerin cinsiyet özelinde etkileşimleri gözlendiğinde erkeklere daha fazla özen gösterildiği ve bu özenin de kızlara gösterilenden daha farklı şekilde olduğu görülmektedir. Erkekler yanlış cevaplar için daha fazla eleştiri almakta ve doğru cevaplarından dolayı daha fazla takdir görmektedirler. Erkekler ayrıca matematiğe daha fazla özen göstermekte ve çalışmalarını daha dikkatli kontrol ettirmektedirler (Campbell, 1995). Burada özen gösterme her iki cinsiyet üzerinde öngörülebilir etkiye sahip olan değer olarak yorumlanmaktadır. Genellikle kızlar matematik derslerinde göz ardı edilmektedir ve bir araştırmaya göre onlar "sessizce başarılı olanlardır" (Clark vd., 2001).

Ne Yapılabilir?

Daha önce belirtildiği gibi, kızların matematikle ilgili kendilerini algılama nedenleri kısmen eğitsel ortamla ilişkilidir. Çözüm için bakmamız gereken yer de burasıdır.

Farkındalık. Bir öğretmen olarak, kızlar ve erkeklere eşit muamelede bulunmaya çalışmalısınız. Öğrencilerle etkileşimde bulunurken her iki cinsiyet grubuyla aşağıda sunulan etkileşimlere karşı duyarlı olunuz:

- Sorduğunuz soru sayısı ve türü
- Kargaşalıklara verdiğiniz dikkat miktarı
- Ödev olarak verilen proje ve etkinliklerin türleri ve konuları
- Öğrenci katılımına karşına yapılan övgü
- Küçük grupların oluşumu
- Problem bağlamları
- Matematik öğretiminde kullanılan çocuk edebiyatındaki karakterler (Karp, Brown, Allen & Allen, 1998)

Cinsiyete özel davranışlarınızın farkında olmanız gözüktüğünden daha zordur. Geri dönüt almak için periyodik olarak bir iki dersinizi videoya kaydediniz. Kızlar ve erkeklere sorulan soruların sayısını tutunuz. Ayrıca hangi öğrencilerin soru sorduğunu ve ne tür sorular sorulduğunu not ediniz. Sınıfta nerede durmaktasınız? Başlangıçta cinsiyet ayrımı yaptığınız davranışlara şaşıracaksınız. Farkındalık uğraş ister.

Tüm Öğrencileri Dâhil Ediniz. Sadece istekli olanları değil sınıfınızdaki tüm öğrencileri dâhil etmek için yollar arayınız. Kızlar katılmak istemeyebilir ve yardım istemekte o kadar da aceleci değildirler. Öğrencileri dâhil etmek için en iyi öneri bu kitabın öğretilerini takip etmek olabilir-öğretimde problem temelli bir yaklaşım kullanınız. Mau ve Leitze'ye (2001) göre, öğretmenler göster-ve-söyle tarzını benimsediklerinde, erkeklerin etkin davranışlarını ve kız-

ların da pasif davranışlarını pekiştirmelerine yol açmaktadırlar. Oluşturmacı teoriden etkilenen bir sınıfta tüm öğrencilerin hem dinlemesi hem de konuşması beklenmektedir. Öğretmenin daha az konuşması ve öğrencilerin de fikirler hakkında daha fazla iletişime geçmeleri halinde daha fazla matematiksel düşünce oluşturulacaktır. Otorite öğrencilere ve öğrencilerin iddialarına dayanmaktadır.



Durup düşün!

Bir an için durun ve öğrenci olarak tecrübe ettiğiniz öğretim modelini düşünün. Bir cinsiyetin, bilinçli olarak farklı muamelede bulunduğunun farkında olmasa bile, öğretmen tarafından kayrıldığı, teşvik edildiği, azarlandığı veya yardım edildiği durumları hatırlayabiliyor musunuz? Bu farklılıklar problem-temelli, öğrenci-etkileşimli bir ortamda nasıl ortadan kaldırılabilecektir?

Direnci Azaltma ve Dayanıklılığı Artırma

Formel eğitimleri esnasında matematiği öğrenemeyecekleri şeklinde bir kanaate sahip olan öğrenciler vardır ve o halde bu öğrenciler neden uğraşsınlar ki? Öğretmenler bu "direncin ötesine geçmeli" ve öğrencileri dinlemek ve becerilerini ortaya çıkarmak için yollar aramalıdırlar. Bunu yapmak için birkaç önemli strateji verilecektir.

Öğrencilere Tercih Hakkı Verin ve Güçlü Özelliklerini Kullanın. Çocuklar kendi paylarına düşen bir konuda yetki ve söz sahibi olmalıdırlar. Bu yüzden öğrencilerin fikirleriyle konuyu ilişkilendirme noktasında sınıflarınızı katılımcı yapınız. Öğrencilerin matematiksel görevlerde kendilerini başarılı hissettikleri durumlarda matematik öğrenmekten istekli olarak kaçınmaları duraklayacaktır. Okullar, aileler ve topluluklar gibi, çocuklardaki dayanıklılık ve sebatı geliştirebilecek koruyucu destek sistemleridir.

Dayanıklılık Özelliklerini Besleyiniz. Benard (1991) dayanıklı bireylerde bulunan dört özellikten bahsetmektedir-sosyal yeterlik, problem çözme becerileri, özerklik ve amaç ve gelecek algısı. Matematik eğitiminde öğrencilerin başarıya ulaşmalarına yardımcı olmak için bu kişisel özellikleri kullanabiliriz. Güçlük ve riske rağmen çocukları başarılı olmaları için teşvik ediniz. Öğrencilerin eleştirel düşünmelerini sağlayınız ve yeni problemler çözmekte esneklik kazandırınız. Bu beceri hayatlarının tüm yönlerinde öğrencilere hizmet edecek stratejilerin gelişiminde bir anahtardır. Yüksek seviyede öğrenci sorumluluğu ve özerkliği geliştiriniz. Amaçlı olarak öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmelerinin mümkün olduğunu ve bunları öğrenebileceklerini özümsetiniz.

Şefkat gösteriniz. Bazen mekanik bir süreç olarak görülen matematikte şefkat ve yardımseverliğe dayalı bir atmosfer oluşturmak özellikle önemlidir. Örneğin, öğrencilerle çalışarak onlar üzerindeki baskıları ve sıkıntılarını belirleyiniz ve böylece stres içerisinde yollarını bulmalarına yardımcı olunuz ve matematik derslerinde onlar için bir sığınak oluşturunuz. Çünkü "okullar gerçek hayatta hakikaten önemli olan konular üzerine odaklandıklarında şimdi yapay olarak ve zorlukla ulaşmaya çalıştığımız bilişsel hedefler daha doğal bir şekilde başarılacaktır. … Açıktır ki çocuklar sevdikleri ve güvendikleri insanlar için daha sıkı çalışacak ve birçok şeyi de yapacaklardır, kesirleri toplamak gibi şeyleri bile" (Noddings, 1988, s.32).

Matematiği çekici hâle getiriniz. Motivasyon, öğrencilerin yapabilecekleri şeylere dair kendi kendilerinden beklentilerine ve değer verdikleri şeyin ne olduğuna bağlıdır (Feather, 1982). Oyunların, bilmecelerin, matematik sayesinde çözülebilecek gizemlerin ve öğrencilerin "bu nasıl mümkün olur?" diye sordukları mantık dışı problemlerin kullanımı ders için heyecan duyulmasına yardımcı olur. Fakat motivasyon için esas itici kuvvet sizden kaynaklanır. Öğretmenler konu için tutku duyulmasını sağlarlar. İstekli olunuz ve matematiğin onların hayatında bir fark yaratacağını gösteriniz. İyi tanınan fen eğitimcisi David Hawkins bir keresinde şöyle demişti: "bazı şeyler kendilerine aşık olunduğunda en iyi bilinirler" (Hawkins, 1965, s.3).

Öğrencilere kendi öğrenimlerinin kontrolünü veriniz. Başarılı öğrenciler başarısızlıklarını uğraş eksikliğine bağlamaktadırlar. Onlar başarısızlığı sıkı bir çalışma ve yenilenen bir çabayla çözülebilecek geçici bir durum olarak görmektedirler. Diğer yandan, akademik başarısızlık geçmişi olan çocuklar başarısızlıklarını beceri eksikliğine bağlamaktadırlar. Bu içsel yüklemenin etkisini gidermek daha zordur çünkü çocuklar, kendileri ne yaparlarsa yapsınlar, doğuştan gelen bu beceri eksikliğinin matematikte başarılı olmalarını engellediğini düşünmektedirler. Bir strateji, öğrencilerin kendi matematik öğrenimleri için kişisel hedefler geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Öğrenciler bir ünite değerlendirmesinde kendi performansları üzerine düşünebilir ya da temel kuralların ezberlenmesi ve haftalık hedeflerine ulaşmak için yaptıklarını kişisel olarak takip edebilirler.

Matematiksel Olarak Üstün Yetenekli Öğrencilerin İhtiyaçlarını Karşılamak

Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrenciler yüksek beceriye sahip olanlar ya da matematiğe ileri düzeyde ilgi duyanlardır. Bu grupta yer alan öğrencilerin bir kısmı matematiksel kavramların sezgisel bilgisine sahip özel yetenekli olanlardır; bazıları da öğrenmek için yoğun çalışmaları gerekse de matematik için tutkuya sahiptirler. Üstün Yetenekli Çocuklar için Ulusal Federasyon (National Association for Gifted Children-NAGC) bu tür bir öğrenciyi şöyle tanımlamaktadır: "bir veya birden fazla anlatım alanında olağanüstü seviyede performans gösteren veya gösterme potansiyeline sahip kişi" (NAGC, 2007). Üstün yetenekli öğrencilerin çoğu matematiksel kavramları beklenenden daha erken bir yaşta

kavramak ve ifade etmek suretiyle kendilerini ebeveynlerine, velilerine ve öğretmenlerine belli ederler. Bu öğrenciler genellikle konular arasında bağlantıları kolayca kurarlar ve çoğu kez bir cevabı çabucak nasıl bulduklarını anlatamazlar (Rotigel & Fello, 2005). Genellikle, özel gereksinimli öğrencileri belirlemek için kullanılan müdahaleye yanıt verme modelinin 1. aşamasında olduğu gibi, burada varsayım şudur: iyi bir öğretim, üstün yeteneklilerin de dâhil olduğu, çeşitlilik taşıyan öğrencilerin farklılaşan ihtiyaçlarına cevap verebilmelidir. Bazı üstün yetenekli öğrenciler kavramsal bilgi ve becerilerde kendilerini zorlayacak ilave şeyler yapmak istemektedirler. İşte bu konuda araştırmacılar (Lynch, 1992; Renzulli, 1986; Van Tassel-Baska, 1998) öğretim programlarının seviye, zorluk, kapsayıcılık, derinlik ve hız dikkate alınarak adaptasyonunun yapılmasını önermektedirler.

Kaçınılması Gereken Stratejiler

Mesleğe yeni başlayan birçok öğretmen, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin ihtiyaçlarına etkili olmayan üç farklı yaklaşımla cevap verme eğilimi göstermektedirler. Birincisi, üstün yetenekli öğrenciler kendilerine verilen görevleri hızlıca tamamladıklarında öğretmenler onlara aynı tür işten daha fazla vermektedirler. Bu matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilere yapılacak en etkisiz müdahale olup öğrencilerin kendi becerilerini gizlemelerine yol açacaktır. Aynı problemden daha fazlasının verilmesi şeklindeki yaklaşım Persis Herold, Washington D.C.'de bir matematik merkezi müdürü tarafından "sürekli nota var ama hiç müzik yok" şeklinde tasvir edilmiştir (alıntı Tobias, 1995, s.168). Öğrencilerin yeteneğini kullanmayan bir başka yaklaşım ise onlara, erken bitirdikleri taktirde serbest zaman vermektir. Öğrenciler mükâfat olarak görseler bile bu yaklaşım onların entelektüel gelişimlerini artırmamaktadır. Üçüncü yaklaşım ise üstün yetenekli öğrencileri zorluk çekenlerle ikili olarak eşleyip verilen bir görevde öğreticilik yaptırmaktır. Yetenekli öğrencileri sürekli olarak öğrendiklerini başkalarına öğretmeleri için görevlendirmek bir hatadır; çünkü bu yaklaşım matematiksel olarak yetenekli öğrencileri sürekli bir öğreticilik pozisyonuna koymakta ve daha derin ve zorlu ilişkileri derinlemesine kavramalarına imkân tanımamaktadır. Bunlar yerine, üstün yetenekli öğrenciler çeşitlilik taşıyan seçeneklere ihtiyaç duyarlar. Sheffield, yetenekli öğrencilerin "geniş bir yelpazede çeşitlilik gösteren orijinal, açık uçlu veya karmaşık problemler için yaratıcı bir şekilde orijinal, pürüzsüz, esnek ve çekici çözümler üretmelerini teşvik ederek derin düşünmenin mutluluk ve zorluklarıyla" tanışmaları gerektiğini belirtir (1999, s.46).

Kullanılabilecek Stratejiler

Üstün yetenekli öğrenciler için matematiksel içeriği adapte etmeye yönelik dört temel kategori vardır: hızlandırma, zenginleştirme, kapsamlılık ve yenilik (Gallagher & Gallagher, 1994). Bu durumların hepsinde de öğrencilerden sadece bilgi kazanmaları değil uygulamaları da istenmelidir. Fikirlerin uygulanması üzerine yapılan vurgu, bilgilerin ve hatta kavramların zihinde toplanmasından daha fazlasına göndermede bulunmalıdır.

Hızlandırma. Hızlandırma, verilecek olan matematiksel içeriğin öğrenciler tarafından zaten bilinebileceğini dikkate alır. Bazı öğretmenler "öğretim programını sıkıştırarak" (Renzulli, Smith & Reis, 1982) içeriği kısaca gözden geçirir ve öğrencilere bilgilerini sergileyecekleri görevler vererek cevaplarını değerlendirirler. Sonrasında öğretmenler, bu öğrencilerin ilgili konularda harcadıkları zamanı azaltır ya da tamamen daha ileri düzey ve karmaşık bir başka konuya geçerler. Kendi öğrenme hızlarını ayarlama imkânı vermek öğrencilere kendi sınıf seviyelerinin üzerinde bir içeriğe erişim fırsatı sunar; sınıfın geri kalanından daha farklı araç ve materyaller sunulduğu için de daha bağımsız olurlar. Öğrenciler genellikle benzer konuları incelerler; fakat üstün yetenekli öğrencilerin konuları, yüksek düşünce seviyesini, daha karmaşık ya da soyut fikirleri ve daha derin seviyede bir kavrayışı içerir. Üstün yetenekli öğrenciler öğretim programını hızlıca işlediklerinde fen, teknoloji, mühendislik ve matematikle (STEM) ilgilenmeye başladıkları görülmüştür (Sadler & Tai, 2007).

Zenginleştirme. Zenginleştirme etkinlikleri, çalışılan konunun ötesine geçerek dersin kazanımları ile uyumlu olmasına rağmen sınıf seviyesindeki öğretim programında yer almayan konulara uzanır. Zenginleştirme etkinliklerinin büyük çoğunluğu matematiksel görevlerin uzantılarıdır. Örneğin, ikinci sınıfta üç renge bölünmüş bir çark ile olasılık konusunu incelerken bunu zenginleştirmek için bir öğrenci grubundan şu durumları gösterebilecek altı farklı çark oluşturmaları istenebilir: kırmızı kesin olarak kazanır; kırmızı muhtemelen kazanamaz; muhtemelen mavi kazanır; kırmızı, mavi, yeşil, sarı ve turuncunun kazanma olasılıkları eşittir; mavi veya yeşil muhtemelen kazanacaktır; sarı ve turuncu muhtemelen kazanamazken kırmızı, mavi ve yeşilin kazanma şansları aynıdır. Bazen zenginleştirme formatı sınıfın geri kalanıyla aynı konuda çalışırken çalışma şekli ve sonucunun farklı olmasını içerir. Örneklerden birkaçı: grup araştırmaları, toplumdaki gerçek problemlerin çözümü, dışarıdaki bir izleyici kitlesine mektup yazmak veya öğrenilen matematiğin uygulamalarını tanımlamak.

Kapsamlılık. Bir başka strateji bir konunun daha derinden incelenmesi ya da zorluk derecesini artırarak kapsamını genişletmektir. Bu da bir matematiksel konunun yer aldığı daha fazla sayıdaki fikrin incelenmesi anlamına gelmektedir. Örneğin, basamak değeri ünitesini çalışırken, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrenciler Roma, Maya, Mısır, Babil, Çin ve Zulu gibi başka sayı sistemlerini çalışarak bilgilerini enginleştirebilirler. Bu da bizim sayı sistemimizin dünyadaki diğer sistemler arasında nasıl bir yere sahip olduğuna dair çok kültürlü bir bakış açısı sağlar. Cebir alanında, öğrencileri sayı dizilerini ve örüntülerini çalıştıklarında, üstün yetenekli öğrenciler Fibonacci dizileri ve bunların doğadaki karşılıklarını da öğrenebilirler.

Yenilik. Yenilik, öğretim programından tamamen farklı bir materyalle tanıştırır ve genellikle okul-sonrası kulüplerde, sınıf dışı projelerde veya iş birlikli okul deneyim-

lerinde yer alır. İş birlikli deneyimler, özel bir matematik projesi için farklı sınıflardan öğrencilerin gönüllü olarak bir öğretmen liderliğinde çalışmalarını içerir. Yenilik yaklaşımı, üstün yetenekli öğrencilere kendilerinin kavrayabileceği fakat öğretim programının dışında bulunan konuları inceleme imkânı sunar. Örneğin, öğrenciler ikili sayı sistemini kullanarak sınıf arkadaşının doğum gününü tahmin edecek matematiksel "hilelere" bakabilir ya da muhakeme gerektiren problemleri mantıksal matris kullanarak çözebilir. Yenilik yaklaşımı, esnekgen (çeşitli çokgenler yapılmasına izin veren esnek yapılar) ismi verilen topolojinin kâğıt "düğümleri üzerinden incelenmesi ya da öğle yemeği vaktinde çöpe atılan yiyecek miktarının araştırılması gibi geniş kapsamlı inceleme konularını içerebilir. Bir grup, dörtyüzlü bir uçurtma yapabilir veya sanatta matematik arayabilir. Yenilik yaklaşımının bir başka boyutu ise öğrencilere kendi kavrayışlarına dayalı performanslarının zirveye ulaşması için fırsatlar sağlamaktır. Örnek olarak, icatlar, deneyler, simülasyonlar, oyunlaştırmalar, görsel gösteriler ve sözel sunular yaparak kendi bilgilerini göstermeleri verilebilir.

Üstün yetenekli öğrencilerle yapılan çalışmalarda önemli bir kaygı matematikte iyi olan öğrencilerin sürekli olarak medyada tuhaf görünümlü ya da garip davranışlı olarak gösterilmeleridir (Shefield, 1997). Başarılı, zeki matematik ve fen öğrencilerinin sosyal becerisizliklerinden dolayı dışlanmış olarak temsil eden televizyon ve film karakterleriyle çocuklar bombardımana tutulmaktadırlar. Öğrenciler, sürekli olarak izlediklerinden, popüler medya yüzlerinin davranışlarını taklit ettikleri gibi aynı zamanda herkesin göreceği şekilde kendi zekâlarını göstermenin olumsuz sonuçlarına dair çok güçlü mesajları da içselleştirmektedirler. Yapılan bir çalışmaya katılan 20,000'den fazla öğrenciden elde edilen sonuçlar bir grup üyeliği tercihi söz konusu olduğunda "uyuşturucu bağımlıları" grubuna ait olmak isteyenlerin sayısının "çok zekiler" grubuna dâhil olmak isteyenlerden daha fazla olduğunu göstermektedir (Steinberg, Brown &Dornbusch, 1996). Rağbet gören medyada tekraren yapılan entelektüel karşıtı sunumlara, "zekiler kazanır" mesajının sürekli ve tutarlı olarak işlenmesiyle karşılık vermek gerekir. Medya tasvirlerini etkilemek zordur; bu yüzden dünya televizyonlarında, filmlerinde, edebiyatında ve gerçek hayatta "akıllı matematikçi" rol modelleri bulmak üstün yetenekli öğrencilerinizi cesaretlendirecek ve onlara destek olacaktır.

Son Düşünceler

Asa Hilliard, çeşitlilik konusunda uzman ve profesör, demiştir ki "Yeniden yapılandırmak için öncelikle kendi çocuklarımız için belirlediğimiz hedefleri ve onlar hakkında sahip olduğumuz inanışlarımızı derinlemesine gözden geçirmek zorundayız. Eğer o konularda doğru yerdeysek, o zaman dikkatimizi onlara hitap etme şeklimize çevirmemiz gerekir. Sınıflandırmamak doğrudur. Kaynaştırma doğrudur. Sorumluluğun dağıtılması doğrudur. İş birlikli öğrenme doğrudur. Herkes için teknolojiye erişim doğrudur. Çok kültürlülük doğrudur. Fakat eğer temel inanış, oluşturulan yeni yapılarla uyumlu değilse bu yaklaşımların ya da stratejilerin hiçbirisi bir anlam ifade etmez" (1991, s.36). Kendi sınıfınızın bir öğretmeni olarak okullara geçtiğimizde, çeşitliliği destekleyen aşağıdaki stratejileri kullanarak tüm öğrencilerin başarılı olmaları için yüksek beklentilere sahip olmanız süregiden bir farka yol açacaktır.

- Çocukların hâlihazırdaki bilgi temellerini belirleyiniz ve bunu akılda tutarak öğretimi yapılandırınız
- Tüm öğrencileri yüksek düzey düşünebilme için zorlayınız
- Beklentilerinizi yüksek tutunuz
- Çok kültürlü bir yaklaşım kullanınız
- Ev kültürünü fark edin, değer verin, tanıyın ve sürece dâhil ediniz.
- Öğrenci performans göstergelerinin çeşitliliğini artırmak için alternatif değerlendirmeler kullanınız
- Öğrenci çalışmalarının anlık resmini çekmek yerine zaman içindeki gelimi ölçünüz
- Çaba göstermenin ve dayanıklı olmanın önemini anlatınız

Bölüm 6 Üzerine Düşünelim

Yazarak öğrenelim

1. Sınıfta eşitlik, tüm öğrencilere eşit bir öğretim yapmaktan nasıl farklıdır?
2. Öğrenme güçlüğü çeken ve özel gereksinimli öğrenciler için müdahaleye yanıt verme modeli kullanarak içerik ve öğretim nasıl değiştirilmelidir?
3. İngilizce dilini öğrenenlerin matematik derslerinde karşılaşabilecekleri zorluklardan bazıları nelerdir?
4. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verme bağlamında derinleşme ne anlama gelmektedir?

Araştırma ve tartışma konuları

1. "Tüm öğrenciler" veya "tüm çocuklar" için kendi felsefi bildirgenizi oluşturunuz. Bildirgeniz için görsel bir sunum hazırlayınız. *İlkeler ve Standartlar*daki Eşitlik İlkesini okuyunuz ve kendi pozisyonunuzun bu ilkeyle örtüşüp örtüşmediğine bakınınız.
2. Matematiksel olarak üstün yetenekli bir öğrencinin olduğu bir sınıfta öğretim yapmak durumunda kalsaydınız ne yapardınız? Sosyal adaptasyon faktörlerinden dolayı bir sonraki sınıf seviyesine yönelik hızlandırma yapmanın mümkün olmadığını varsayınız.

Bölüm 6 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Berry, R. Q., III. (2004). The Equity Principle through the voices of African American males. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(2), 100–103.

Berry provides the reader with a realistic view of adolescent African American males who can and do find their way in mathematics. It is clear that it is the teacher who makes a difference.

Lee, H., & Jung, W. S. (2004). Limited English-proficient (LEP) students and mathematical understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(5), 269–272.

The article helps teachers design instruction to assist students who know little or no English. Specific examples will help the reader go beyond guiding principles.

National Council of Teachers of Mathematics. (2004). Teaching mathematics to special needs students [Focus Issue]. *Teaching Children Mathematics*, *11*(3).

The first article in this focus issue by Karp and Howell tackles the reality that children with special needs truly are different and need special support to meet high standards. Other articles in the journal address assessment issues for special students, strategies for differentiation, and more.

Witzel, B., & Allsopp, D. (2007). Dynamic concrete instruction in an inclusive classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(4), 244–248.

This article highlights the use of manipulative materials for middle grade students with high incidence disabilities such as attention-deficit hyperactivity disorder (ADHD). They discuss through two classroom vignettes three main strategies: (1) linking prior knowledge to new concepts, (2) emphasizing thinking-aloud modeling, and (3) applying multisensory cueing (p. 244).

Kitaplar

Secada, W. G. (Series Ed.). (1999–2002). *Changing the faces of mathematics* (6 volumes). Reston, VA: NCTM.

These six books present perspectives on Asian Americans and Pacific Islanders, Native Americans, Latinos, African Americans, multiculturalism, and gender equity. Each volume explores curriculum, instruction, and assessment issues relevant to the topic for all grade levels.

Online Kaynaklar

LDOnline
www.ldonline.org

This site offers identification and assessment tools, teaching strategies, recommended readings, and interesting articles on mathematical disabilities in the "LD in Depth" section.

Teaching Diverse Learners—Culturally Responsive Teaching
www.alliance.brown.edu/tdl/tl-strategies/crt-principles-prt.shtml

This site includes several characteristics of culturally relevant teaching, explaining the importance of each and giving concrete examples of how to implement each characteristic in the classroom.

National Association for Gifted Children (NAGC)
www.nagc.org

NAGC, which has been in existence for over 50 years, is dedicated to serving professionals who work on behalf of gifted children. The site has a "Tools for Educators" section that includes online articles and resources.

Bölüm 7

Matematik Öğretiminde Teknoloji Kullanımı

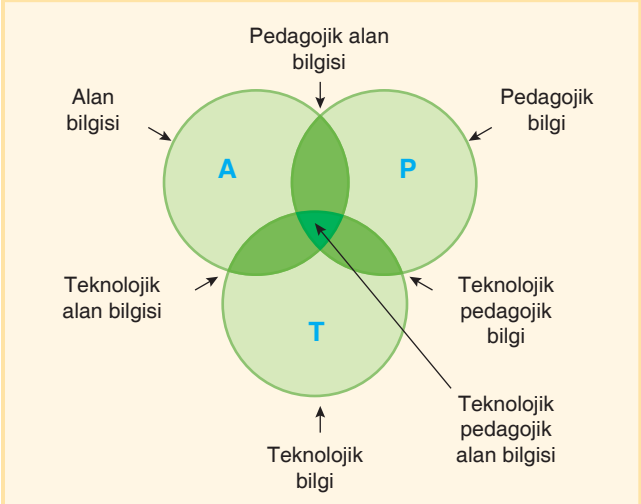
Teknoloji, 21. yy matematik öğrenimi için temel bir araç olup, tüm okullar her öğrencinin teknolojiye erişimini sağlamalıdır. Etkili öğretmenler öğrencilerinin anlamalarını geliştirmek, ilgilerini canlı tutmak ve matematikteki yeterliliklerini artırmak amacıyla teknolojinin potansiyelini mümkün olan en iyi seviyeye çıkarırlar. Teknoloji stratejik olarak kullanıldığında tüm öğrenciler için matematiğe erişme imkanı sağlayabilir.

Teknolojinin Matematik Öğretme ve
Öğrenmedeki Rolü Üzerine
NCTM Pozisyon Raporu (Mart 2008)

Teknoloji terimi okul matematiği bağlamında, dijital araçlara, masaüstü ya da taşınabilir bilgisayarlara, hesap makinelerine ve diğer taşınabilir cihazlara, işbirlikçi yazarlık araçlarına, bilgisayar cebir sistemlerine, dinamik geometri yazılımlarına, çevrimiçi dijital oyunlara, podcastlara, interaktif sunum araçlarına, elektronik tablolara bunun yanı sıra bu cihazlar ve araçlarla kullanılabilen genelde internet tabanlı kaynaklara işaret etmektedir. *Prensipler ve standartlar* belgelerinde yer alan altı prensipten biri olan teknolojinin, sözü geçen pozisyon raporunda da önemi vurgulanmakta, daha net olarak NCTM, matematik öğrenimi ve öğretimi için teknolojiyi temel bir araç olarak dikkate almaktadır. Teknolojiyi sınıfta yapılacaklar listesine ilave edilen bir "ek iş" olarak düşünme geçerli bir yaklaşım değildir. Bunun yerine teknoloji, eğitimde kullanılan öğrenme araçlarının bir tamamlayıcısı olarak görülmelidir. Teknoloji öğrencilerin öğrenebildiği içeriğin kapsamını daha da genişletebilir ve öğrencilerin üstesinden gelebildiği problemlerin çeşitliliğini artırabilir (Ball & Stacey, 2005; NCTM Pozisyon Raporu, 2008). Ancak teknoloji, matematiğin tamamıyla kavramsal anlaşılmasının yerine geçemez.

Pedagojik alan bilgisi (PAB), matematik alan bilgisinin öğretme ve öğrenmenin pedagojik bilgisiyle kesişme noktasıdır (Shulman, 1986). Ayrıca öğretmenlerin sahip olduğu fakat matematiği iyi olsa bile ortalama bir insanın muhtemelen bilemeyeceği bilgi olarak da nitelendirilebilir. Pedagojik alan bilgisi matematiksel bilginin öğrencilere iletilmesinde öğretmenlerin kullandığı belirli stratejileri ve yaklaşımları temsil eder. Teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPAB) ise (Şekil 7.1' de görüldüğü gibi) teknolojinin bu sürece entegresini tanımlar (Mishra & Koehler, 2006; Niess, 2008). Biz öğretmenlere, teknolojiyi, her dersin ve öğrenci öğrenmesini artırıcı yöndeki her stratejinin, bilinçli bir bileşeni olarak dikkate almalarını öneriyoruz. Bu bölümün teknolojinin öğretimdeki önemi üzerindeki vurgusu, özellikle teknoloji ikonu yardımıyla vurgu yapılan kısımlarda, içeriğe dayalı bölümler boyunca devam ettirilmektedir.

Teknolojinin değeri, bir eklenti ya da bilgisayar laboratuvarında haftada bir sunulan imkan olmaktan çıkıp temel bir öğrenme aracı olarak hizmet ettiğinde ve derslerin içine dahil edilerek öğrencilerin matematiği öğrenme imkanlarını arttırdığında, açık hale gelir.



Şekil 7.1 TPAB Teorik Çerçevesi

Matematik Öğretiminde Hesap Makineleri

NCTM, Hesaplama, Hesap Makineleri ve Sağduyu ile ilgili Pozisyonunu belirlediği 2005 yılındaki raporunda, bilinen görüşünü şu şekilde açıklığa kavuşturmuştur: "Öğrencilerin, sayı ve işlemleri, yani hesaplama prosedürlerinin kullanımını, tahmin etmeyi, zihinsel matematiği ve hesap makinesinin uygun kullanımını anlamaları gerekmektedir." Raporun devamında "Öğretmenler bu teknolojik araçtan uygun bir şekilde yararlanarak öğrencilerin matematiksel anlamalarını zenginleştirebilirler." görüşüne yer verilmiştir.

Hesap makineleri toplumda günlük bazda kullanılmalarına ve okullarda profesyonel destek sağlanmasına rağmen, kullanımları, matematik öğretiminde, özellikle de ilkokul düzeyinde, her zaman merkezde olmamıştır. Bazen eğitimciler ve öğrenci aileleri, öğrencilere problem çözerlerken hesap makinesi kullanmalarına izin verilmesinin, çocukların işlem kurallarını öğrenmelerinin yerine geçebileceği konusunda endişe etmektedirler. Fakat 'bu ya da o' tercihinden ziyade, internet kullanımında olduğu gibi, bazı durumlarda öğrenciler teknolojiyi kullanmalı diğer bazı zamanlarda ise sadece kendi öz kaynaklarından yararlanmalıdır.

Verimlilik ve etkililik açısından, öğrenci ne zaman zihinsel matematiği veya tahmin etmeyi kullanacağını, ne zaman kağıt ve kalem kullanarak problem çözeceğini ve ne zaman hesap makinesini kullanacağını öğrenmelidir. Hesap makinelerinin olası yararlarını yok sayarak onların kullanımlarını tamamıyla yasaklamak öğrencilerin öğrenmelerine engel oluşturabilir. Öğrencilere hesap makinesini ne zaman kullanacaklarını ya da ne zaman kullanmayacaklarını öğretmek tamamıyla öğretmenin görevidir. Ders esnasında bazen hesap makinesi kullanımı öğrencilere üst-düzey bir konuyu irdeleme ya da karmaşık bir ilişkiyi belirleme fırsatı sunabilir. Öğrencilerin, zor matematiksel fikirler hakkında düşünme becerilerini geliştirme ile hesaplama becerilerinin geliştirilmesi dengeli bir şekilde yapılmalıdır.

Hesap makinesi kullanımının çocukların sağlam bir matematiği öğrenmelerini hiçbir şekilde engellemeyeceği konusunda ailelere yardımcı olunmalı ve onların bu hususu anlamaları sağlanmalıdır. Gerçekte, hesap makineleri planlı ve anlamlı bir şekilde kullanıldığında matematik öğrenimini geliştirir. Dahası, hesap makinelerinin ve diğer teknolojilerin öğrencilerin problem çözücü olmalarını gerektirdiği konusunda ailelere farkındalık sağlanmalıdır. Hesap makineleri sadece girilen değerleri hesaplar. Hesap makineleri kendi başlarına en anlamlı matematiksel etkinliklere bile cevap veremez ve düşünmenin ya da anlamanın yerini tutamaz. Önemli matematiksel kavramların pekiştirilmesinde, hesap makinesi etkinliklerini ev ödevi olarak vermek ve Aile Matematik Gecesi programına hesap makinesi etkinliklerini dahil etmek, uygun hesap makinesi kullanımı konusunda aileleri eğitme yollarındandır.

Hesap Makinesini Ne Zaman Kullanmalı

Öğretimin ana amacı hesaplama becerilerinin geliştirilmesine dönük alıştırma yapmak ise, öğrenciler hesap makinesini kullanmamalıdır. Diğer taraftan, öğrencilerin örüntüleri keşfederken, araştırmalar yaparken, varsayımları test ederken ve problem çözerken hesap makinelerine erişimleri en üst düzeyde olmalıdır. İçerisinde hesaplama yapmayı gerektiren ve öğrencilerin hesap makinesi olmaksızın yapamayacağı durumlar, öğrencilerin anlamlı bir şekilde düşünemeyecekleri durumlar olmak zorunda değildir.

Öğrenciler işlemleri tam olarak anladıklarında, içerisinde gerçekçi sayıların olduğu gerçek hayat problemleri ile karşı karşıya bırakılmalıdır. Örneğin, küçük çocuklar hayatta oldukları süreyi saniye cinsinden hesaplamak isteyebilirler. Buradan hareketle kavramsal düzeyde bir dakikada, bir saatte, bir günde vs. kaç saniye olduğunu düşünebilirler. Fakat gerçek "hesaplamalar" ve haftalarca ve yıllarca süren hesaplamalar hesap makinesi yardımıyla daha etkin bir şekilde yapılabilir.

Ayrıca problem çözme sürecinde hesaplamanın bulunduğu fakat öğretimin amacının hesaplama yapmak olmadığı durumlarda, işin içine hesap makinelerini dahil edebilirsiniz. Örneğin, farklı ürünlerde farklı yüzde oranlarında indirim olduğunda, ortaokul öğrencilerinden "en iyi alımı" belirlemeleri istenebilir. Bir bisiklet satın alma ya da lunaparkta sürüş biletleri almak için pazarlık durumunda, amaç, sunulan bir tercih grubu arasında en ekonomik ilişkiyi tanımlamak ve bunu da hesap makinesinden yararlanarak çeşitli indirim yüzdelerini hesaplamak kaydıyla yapmaktır. Hesap makineleri ayrıca örüntüleri oluşturmak ve analiz etmek için de son derece faydalıdır. Örneğin, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$ ve benzerlerinin ondalık denkliklerini bulduğunuzda, harika bir örüntü ortaya çıkar. Öğrencilere paydası 9 olan diğer kesirli ifadeleri inceleme fırsatı veriniz ve bu örüntünün neden oluştuğu konusunda hipotez geliştirmelerini sağlayınız. Burada asıl amaç hesaba dayalı bir çözüm yolu belirlemek olmayıp, hesap makinesi kullanarak bir örüntünün bulunmasına yardımcı olmaktır.

Son olarak, hesap makineleri özel eğitime ihtiyaç duyan öğrencileri öğrenim sürecine dahil etme açısından da kullanılabilir. Hesap makineleri hesaplama becerilerini geliştirmeyi merkezine almayan bir öğretim için kullanıldığında, bütün öğrencilerin mümkün olan en üst düzeyde müfredata erişimini sağlayabilir.

Hesap Makinesi Kullanımının Faydaları

Hesap makinelerinin matematik öğrenimine nasıl katkıda bulunacağının anlaşılması şu hususun farkında olunmasını gerektirir; "hesap makinesi kullanımı temel becerilerin gelişimine engel teşkil etmez; ve kavramsal anlamayı, stratejik yeteneği ve matematiğe yönelik pozitif eğilimi geliştirebilir" (NRC, 2001, s. 354). Bu husus dört-fonksiyonlu, bilimsel ve grafik hesap makineleri için de geçerlidir. Grafik hesap makinelerine ilişkin detaylara bu bölümün ilerleyen kısımlarında yer verilmiştir.

Hesap Makineleri Kavramları ve Problem Çözmeyi Geliştirmek İçin Kullanılabilir. Hesap makinesi, hesaplama

aracı olmaktan daha fazla bir potansiyele sahiptir. 79' dan fazla araştırmanın analizinde gösterildiği gibi, hesap makinesi kullanan Anaokulu-12.sınıf öğrencileri (4. Sınıflar hariç) "kağıt ve kalemle yapılan hesaba dayalı işlemler ile problem çözme etkinliklerinde" temel becerilerini geliştirmişlerdir (Hembree & Dessert, 1986; 1992, s. 96). Başka araştırmacılar hesap makinelerinin kullanımı ile ilgili uzun süre deneyimi olan öğrencilerin genel olarak bu türden deneyimi olmayan çocuklardan hem zihinsel hesaplamalarda hem de kağıt ve kalemle çözülebilen problemlerde daha iyi performans sergilediklerini doğrulamışlardır (Ellington, 2003; Smith, 1997b; Wareham, 2005). Hesap makinelerinin uzun soluklu kullanımıyla ilgili daha fazla çalışma için çağrı yapılmakta (Amerikan Ulusal Matematik Danışma Kurulu, 2008) ve büyük ihtimalle başka çalışmalar ortaya çıkacaktır.

Bazıları sayı ve işlemlerde hesap makinesi kullanımının öğretimi engelleyeceği konusunda endişe ederken, aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi, aslında tersi durum söz konusudur (Ayrıca bir sonraki bölümde sayı ve işlemler ilgili hesap makinesi etkinliklerine bakınız.) Anaokulu-1. sınıflarda miktar kavramlarını irdeleyen çocuklar hesap makinesini bir sayma makinesi olarak kullanabilir. Otomatik-sabit özelliğini kullanarak çocuklar sayabilir. (Bütün hesap makineleri bunu aynı şekilde yapmayabilir— dolayısıyla hesap makinenizde bunun nasıl çalışacağını kontrol ediniz). Örneğin, şu tuşlara basarak —[0] [+] [1] [=] [=] [=]— birer birer sayınız ve eşit tuşuna sayma sürdüğü müddetçe basınız. Çocukların bu özelliği denemelerini sağlayınız. Hesap makineleri aracılığıyla "birer birer sayma" öğrencilerin sözlü olarak saymalarını, örüntülerin belirlenmesini pekiştirebilir ve hatta bir çocuk tarafından sınıf arkadaşları sabah sınıfa girerken onları saymak için kullanılabilir. Çocuk edebiyatında tekrar eden ifadeler, mesela Goodnight Moon (İyi Geceler Ay) (Brown, 1947) klasiği gibi, öğrencilere saymak için fırsat sunar. Çocuklar uyku zamanında küçük tavşanın her iyi geceler demesinde eşit tuşuna basabilirler. Kitabı bitirdiklerinde "iyi gecelerin" kaç defa kaydedildiğini karşılaştırarak görebilirler. Sonraki etkinliklerde, hesap makinesindeki aynı otomatik-sabit özelliğiyle değişik hikâye ya da kitaplarda ikişerli (örneğin, insan ya da hayvan çifti), beşerli (örneğin, bir elin parmakları ya da bir arabadaki insanlar), ya da onarlı (örneğin, 10 sent, "yatakta on", ağaçtaki elmalar) sayma çalışmaları yapılabilir.

Yaşça daha büyük öğrenciler ondalıklı kavramları, sonraki örneklerde gösterildiği gibi, hesap makinesiyle inceleyebilir. Hesap makinesinde, 796 ÷ 42 = 18.95348 dir. Tam sayı biçiminde kalan bulmak için hesap makinesiyle etkinlik yapmayı düşünebilirsiniz. Kendisi ile çarpımı 43'ü veren sayıyı bulmak için hesap makinesini kullanmak başka bir örnek olabilir. Bu durumda, bir öğrenci 6.1 [×] [=] ifadelerini tuşlayarak, 6.1'in karesini bulabilir. Ondalık kesirleri daha yeni anlamaya başlayan öğrenciler için, bu türden bir etkinlik 6.3 ve 6.4 gibi sayıların 6 ile 7 arasında olduğunu gösterecektir. Ayrıca 6.55, 6.5 ile 6.6 arasındadır. Ondalık kesirleri bilen öğrenciler için aynı etkinlik, kareköklü sayılara anlamlı ve kavramsal bir giriş yapmaya hizmet edebilir.

Hesap Makineleri Alıştırma İçin Kullanılabilir. 7'nin katları ile uygulama yapmak isteyen öğrenciler, 7 [×] 3 tuşlarına basarak ve bu arada [=] tuşuna basmayı erteleyerek yapabilirler. Buradaki zor iş, [=] tuşuna basmadan önce işlem sonucunu kendilerinin hesaplamasına ilişkindir. 7'nin sonraki katları, sadece ikinci çarpan ile [=] tuşuna basılarak bulunabilir. TI-10(Texas Instruments) ve TI-15 hesap makineleri şimdi yüklü problem çözme özelliklerine sahip olup, öğrenciler ilişki sembolünün her iki tarafındaki aritmetik ifadelerden yararlanarak, kurallarla uygulama yapabilir, ilişkili kuralların listelerini geliştirebilir ve denklem ya da eşitsizlikleri test edebilir (http://education ti.com/educationportal/sites/US/productCategory/us_ elementary.html).

Bir sınıf ikiye bölünerek, yarısından hesap makinesi ile, diğer yarısından ise zihinsel olarak hesaplama yapmaları istenebilir. 3000+1765 toplamı için, zihinde hesaplama yapan grup her zaman kazanır. Bu grup basit hesaplamalarda ve zihinde hesaplama yapmaya uygun türdeki problem durumlarında yine kazanır. Tabii ki, 537 × 32 gibi birçok hesaplamada, hesap makinesi grubu daha hızlı olacaktır. Bu basit alıştırma, sadece zihinde matematiksel hesaplama yapma ile ilgili fırsat vermez, aynı zamanda öğrencilere hesap makinesi kullanımının her zaman verimli olmayacağını da gösterir.

Hesap Makineleri Tutumları Geliştirir ve Motivasyonu Artırır. Araştırma sonuçları hesap makinesini sık kullanan öğrencilerin matematiğe yönelik daha pozitif bir tutuma sahip olduklarını göstermiştir (Ellington, 2003). Öğrencilerin kaygıları azaltıldığında, daha çok motive olduklarına dair kanıtlar söz konusudur: dolayısıyla, problem çözme etkinliklerinde öğrencileri hesap makineleri ile desteklemek önemlidir. Temel kurallar bilgisi zayıf olduğundan dolayı problem çözme derslerinde dışarıda tutulan özel eğitime ihtiyaç duyan bir öğrenci, öğretmenin planladığı yararlı araştırmaları takip edemeyecektir. Bu onları kendi kurallarını öğrenmekten muaf tutmaz. Öğrencilerin zor matematiksel problemleri çözebileceklerine dair özgüvenlerini artırmaya yönelik çaba gösterirken, sayılar hakkında düşünme ve bu süreçte ısrarcı olmaları veistikrar göstermeleri için motivasyonları da artırılabilir. Dolayısıyla, hesap makinesinin stratejik kullanımı öğretmenin yaptığı planlamalar rehberliğinde ve öğrencilerin verdikleri nihai kararları doğrultusunda mümkün olur.

Hesap Makineleri Toplumda Yaygın Olarak Kullanılmaktadır. Hesap makineleri hayatın birçok kademesinde herkes tarafından çeşitli hesaplamalar yapmak için kullanılmaktadır. Yaygın kullanıma sahip olan bu aracın etkili bir şekilde nasıl kullanılacağı öğrencilere öğretilmeli ve ayrıca ne zaman kullanacaklarına dair karar vermeyi öğrenmelidirler. Birçok yetişkin hesap makinesinin otomatik-sabit özelliğini nasıl kullanacağını öğrenmemiştir ve hesap makinesiyle yapılan yaygın hataları fark etme konusunda uygulamaya dair bilgileri yoktur. Hesap makinelerinin etkin kullanımı önemli bir beceridir ve bu beceri anlamlı problem çözme etkinliklerinde hesap makinelerini kullanarak en iyi şekilde öğrenilir.

Grafik Hesap Makineleri

Grafik hesap makineleri veriyle gerçek-hayat arasında ilişkiler kurduklarında, öğrencilere kavramları görselleştirme konusunda yardımcı olurlar. Öğrenciler ifadeleri, formülleri,

grafikleri ve bu görsel gösterimler üzerinde bir değişkenin değiştirilmesinin sonuçlarını gerçekten gördüklerinde, kavramların derinlemesine anlaşılması sonucu ortaya çıkabilir. Grafik hesap makineleri ilköğretimin ikinci kademesinden başlayarak lise ve daha sonrasındaki öğrencilerin öğretiminde kullanılır, fakat en yaygın kullanımı ortaöğretim düzeyindedir. SAT, ACT, PSAT, ya da AP gibi sınavlarda kullanımlarına izin verildiği ve bazı durumlarda da gerekli olduğu için, bütün öğrencilerin grafik hesap makinelerine aşina olması önem arz etmektedir.

Grafik hesap makinelerinin sadece "yüksek-düzey" matematiği yapma işine yaradığını düşünmek hatadır. Aşağıda grafik hesap makinelerinin ne tür olanaklar sunduğu gösterilmiş olup, bunların her biri standart ortaokul matematik programı kapsamında yararlıdır.

- Görüntü penceresi, hesaplanmadan önce, $3 + 4(5 – 6/7)$ gibi birden fazla işlem içeren ifadelerin birlikte görülmesine imkan verir. Ayrıca, hesaplandığında ise, önceki ifadeler tekrar geri getirilebilir ve düzeltilebilir. Bu, notasyonun ve işlemler sırasının anlaşılmasına hizmet eder. Grafik hesap makineleri aynı zamanda örüntülerin incelenmesi ve problemlerin çözümü için önemli bir araçtır. Kullanılan değerlerle ilgili herhangi bir kısıtlama olmaksızın ifadeler, üslü sayıları, mutlak değerleri ve negatif işaretlerini içerebilir.
- Hatta fonksiyon tanımı imkânını kullanmadan ve her bir değer için bütün formülü yazmaya gerek duymadan, öğrenciler değerleri ifadelere ya da formüllere girebilir. Sonuçlar, değerler listesine ya da tablosuna girilebilir ve ileri analiz için doğrudan hesap makinesinde kaydedilebilir.
- Değişkenler ifadelerde kullanılabilir ve daha sonra ifadeler üzerindeki etkisini görmek için değişik değerler girilebilir. Bu basit yöntem değişkenin, değişen bir şey olduğu fikrinin anlaşılmasına yardımcı olur.
- "Negatif" ile "çıkarma" arasındaki fark açık ve oldukça faydalıdır. Bir miktarın negatifini girmek için ayrı bir tuş kullanılabilir. Görüntü penceresi negatif işaretini üst simge olarak gösterir. Eğer $^{-}5$, B değişkeninde kayıtlı ise, o zaman $^{-}2 – {}^{-}B$ ifadesi $^{-}7$ olarak doğru bir şekilde hesaplanır. Bu özellik tam sayılar ve değişkenler üzerindeki çalışmalar için önemli ölçüde kolaylık sağlar.
- Bir koordinat ekranında noktalar, ya koordinatları girerek ve sonuçları görerek ya da ekran üzerinde sürgü belirli bir koordinata hareket ettirilerek çizilebilir.
- Çok büyük ve çok küçük sayılar hatasız bir şekilde ele alınabilir. Hesap makinesi, çok büyük sayılar için bile olsa, hızlı bir şekilde faktöriyelleri hesaplayabilir, bununla birlikte permütasyonları ve kombinasyonları da. Örneğin, $23! = 1.033314797 \times 10^{40}$ dir.
- Yüklü istatistiksel fonksiyonlar, bilgisayar olmaksızın, öğrencilere ortalamaları, medyanları ve gerçekçi büyük veri gruplarının standart sapmalarını inceleme fırsatını verir. Verinin girilmesi, sıralanması, eklenmesi ya da değiştirilmesi neredeyse Excel'deki kadar kolaydır.
- Veri analizi için, saplı kutu diyagramı, histogramlar ve bazı hesap makineleri üzerindeki daire grafikleri, çubuk grafikleri ve resimli grafikler dahil grafikler mevcuttur.
- Rasgele sayı üretkenleri çeşitli ihtimal deneylerinin simülasyonuna izin verir ve böyle bir araç olmadan bunu yapmak çok güçtür.
- Gerçek verinin sıralı çiftleri için saçılım grafikleri girilebilir, çizilebilir ve gösterdikleri eğilimler açısından incelenebilir. Hesap makineleri en uygun doğrusal, ikinci dereceden, üçüncü dereceden ve logaritmik fonksiyonların denklemlerini hesaplayabilir.
- Fonksiyonlar üç temsil altında incelenebilir: denklem, tablo ve grafik. Hesap makinesi bir temsilden diğerine rahatça geçiş imkanı verdiği için ve iz sürme özelliğinden dolayı, bu temsiller arasındaki bağlantılar oldukça açık bir hale gelir.
- Grafik hesap makineleri programlanabilme özelliğine sahiptir. Programlar oldukça kolay yazılabilir ve anlaşılabilir. Örneğin, Pisagor teoremini içeren bir program kullanılarak dik üçgenlerin kenar uzunlukları hesaplanabilir.
- Öğrenciler veri programları ve fonksiyonları bir hesap makinesinden diğerine aktararak paylaşabilir, hesap makinelerini sınıfın görüntü ekranına bağlayabilir, bilgisayar üzerinde bilgi kaydedebilir ve özel durumlar için ilave kolaylık sağlayan yazılım uygulamalarını indirebilir.

Yukarıda sıralanan fikirlerin çoğu bu kitabın ilgili bölümlerinde kısaca ele alınmıştır.

TI-Nspire (www.ti-nspire.com/tools/nspire/index.html) adında yeni bir grafik hesap makinesi sınıflarda yerini almaya başlamıştır. Bu elde taşınabilen araç, grafikler, tablolar, görsel imajlar ve hatta yazılı temsiller dahil, bir ekranda aynı verinin dörde kadar farklı temsili arasında bağlantı kurar. Örneğin, bir öğrenci çevreyi sabit tutmak kaydıyla, bir dikdörtgenin en uzunluğunu değiştirmenin alanı üzerine olan etkisini irdeleyebilir. Eş zamanlı olarak öğrenciler ekranda dikdörtgenin görüntüsünü görebilir; dikdörtgenin boyutlarını istedikleri şekilde değiştirerek, bunlara karşılık gelen değerler tablosunu ve alan çıktısının grafiğini oluşturulabilir. Program kapsamında bir temsilden diğerine geçmekten ziyade, bunların hepsi bir arada düşünülebilir ki, bu durum örüntüleri görme becerisini geliştirir. Keşfedilenleri ya da bulguları yazarak kaydetmek için bile seçenekler söz konusudur. Ancak bu araç yine de öğrenciler için öğretmenlerin oluşturduğu etkinlikler kadar kullanışlıdır.

Grafik hesap makinelerine karşı belirtilen görüşler diğer hesap makinelerine karşı belirtilenlere benzer olup, aynı ölçüde kanıtla desteklenmemiştir. Bu harika araçlar öğrencilere gerçek matematiği inceleyebilmeleri için büyük fırsatlar sunma potansiyeline sahiptir.

Veri Toplama Araçları

Grafik hesap makinelerinin kendi başına yapabileceklerine ilave olarak, elektronik veri toplama araçları bunları fevkalade araçlar haline getirebilir. Teksas enstrümanları kendi versiyonlarını BTL (bilgisayar-temelli laboratuar için) ola-

rak isimlendirir ve bu, böylesi araçlar için genel bir kısaltma haline gelmiştir. Casio'nun yeni versiyonu EA-200, tasarım açısından neredeyse aynıdır. Bu araçlar, gerçek fiziksel veri toplamak için kullanılabilecek sıcaklık ya da ışık sensörleri ve hareket detektörleri gibi çeşitli veri toplama girişlerini kabul eder. Veri, bir ya da daha çok listeyi kaydedebilme özelliğine sahip grafik hesap makinesine transfer edilebilir. Hesap makinesi daha sonra saçılım grafiklerini üretebilir ya da diğer analizleri hazırlayabilir. Uygun bir yazılımla, veri aynı zamanda bir bilgisayara transfer edilebilir.

Bu araçlar gerçek hayat olayları ile grafikler arasında bağlantı kurma anlamında öğrencilere yardımcı olur. Bu araçlar değişkenler arasındaki ilişkilerin önemini ortaya koyar ve öğrencilerin grafikleri yorumlamada yaşadıkları bazı yaygın kavram yanılgılarını giderir (Lapp, 2001). Lapp, öğrencilerin grafik üzerinde değişim oranının en hızlı olduğu nokta ile en yüksek noktayı birbirine karıştırdıklarını ya da hatalı bir şekilde bir hareketlinin şeklinin bir grafiğin şekli olduğunu (mesela, bir yokuşa tırmanan bir bisiklet, inen bir bisikletten daha hızlıdır- artan hız) düşünebildiklerini ortaya koymuştur. Grafiğin hemen üretilebilir olma gerçeği bu aracın en güçlü özelliği olup, böylece düşünme sürecindeki "yanlış adımlar" hemen test edilebilir ve tartışılabilir.

Matematik öğretmenleri için en popüler araştırma ölçüm aracı hareket detektörüdür. Texas Instruments Ranger ya da CBR diye isimlendirilen özel bir hareket detektörüne sahip olup, CBL öğesini gerektirmeden hesap makinesine direk bağlanır. Hareket detektörü ile yapılan deneyler eğimli bir yüzeyden aşağı doğru yuvarlanan nesnelerin, sıçrayan topların ya da salınımlı sarkaçların analizlerini içerir. Araç aslında bir nesnenin sensörden ne kadar uzaklıkta olduğunu tespit eder. Uzaklığın zamanla ilişkili olarak grafiği çizildiğinde, oluşan grafik hızı gösterir. Öğrenciler detektöre doğru yürüyerek veya detektörden uzaklaşarak kendi hareketlerinin grafiğini çizebilir ya da halihazırda üretilmiş grafikte gösterilen hareket ile eşleştirebilir. Değişim oranı kavramı bir uzaklık-zaman eğrisinin eğimi olarak yorumlandığı zaman tamamen etkileyici olacaktır.

Veri toplama araçlarının en heyecan verici yönlerinden bir tanesi fen ile matematik öğrenimini bir araya getirmesidir. Örneğin, Concord Consortium's Technology Enhanced Elementary and Middle School Science (Concord Konsorsiyumunun teknolojiyle zenginleştirilmiş ilk ve ortaokul fen dersi (TEEMSS II) projesi), 3-8 sınıflar için (http://teemss.concord.org) fen ve matematik araştırmasını harmanlamaktadır. Müfredat ve yazılım aracılığıyla (kayıttan sonra ücretsizdir), doğa biliminde, canlı biliminde, yer biliminde, teknolojide ve mühendislikte, toplanan, analiz edilen ve paylaşılan gerçek-zaman verisi araştırmalarını paylaşırlar.

Matematik Öğretiminde Bilgisayarlar

Matematik sınıflarında kullanılmak üzere birtakım güçlü yazılım araçları üretilmiş olup, bunlar hem yazılım yayınevlerinden satın alınabilecek bağımsız programlar olarak, hem de Microsoft'un Internet Explorer'ı, Apple'ın Safarisi, Mozilla'nın Firefox' u, vb gibi ağ tarayıcıları aracılığıyla ulaşılabilen internet-temelli uygulamalar olarak bulunmaktadır. Java küçük uygulama yazılımları, ticari yazılımlardan epey küçük ve daha çok hedef odaklı olup, internet üzerinden ücretsiz olarak erişilebilme gibi önemli bir avantaja sahiptir. Birçoğu aynı zamanda internetten indirilebilir, böylece öğrencilerin kullanımına yönelik internet bağlantısının olması gerekmez. Bu küçük uygulama yazılımlarından bazıları bu kitap boyunca her bir bölümün sonunda kısaca tanıtılmıştır. Bu bölümün sonunda listesi verilen siteler, 100' ün üzerinde küçük uygulama yazılımını sunmaktadır. Bu yazılımlara mutlaka göz atınız ve çalıştırınız. Birçoğu oldukça eğlencelidir!

Bir matematiksel yazılım aracı az çok bir somut manipulatif gibidir: kendi kendine öğretemez. Fakat, iyi tasarlanmış bir aracın kullanıcısı "düşünen elektronik bir oyuncağa" sahip olup, onunla matematiksel fikirleri irdeleyebilir.

Sayıları İfade Etmeyi Geliştirme İçin Araçlar

Sayma, basamak değeri ve kesirler için popüler manipülatif modellerinin ekran versiyonlarını sağlayan programlar öğrencilerin çalışabilmesi için ücretsiz bir şekilde mevcut olup, burada bilgisayarın problem sormasına, sonuçları değerlendirmesine ve öğrencilere ne yapması gerektiğini söylemesine ihtiyaç yoktur.

En erken seviyede, renkli karolar, muhtelif nesnelerin resimleri, beşlik/onluk kartlar ve daha fazlası gibi "sayılabilir nesneleri" üreten programlar vardır. Genel olarak, öğrenciler sayılabilir nesneleri ekran üzerinde herhangi bir yere sürükleyebilir, renklerini değiştirebilir ve onları gruplandırabilirler. Bazı programlar ekran ya da alt kısımları için sayılabilir nesneleri açma seçeneklerine sahiptir. Kidspiration (Inspiration Software, 2008) gibi matematiksel olmayan programlar ekran üzerindeki farklı nesneleri "damgalamak" için kullanılabilir; şekiller, kelime işlemleri ve daha fazlası irdelenebilir.

Onluk taban blokları (birlik, onluk ve yüzlük modelleri), farklı görünümlere sahip kesir parçaları ve Cuisenaire çubukları (santimetre çubukları) bazı yazılım paketleri yanı sıra Web-temelli küçük uygulama yazılımlarında da mevcuttur. Bunlar, öğretme ve özel olarak ders verme özelliğine sahip pür araç programları ile öğretimsel yazılım programlarını içerirler. Bazı kesir modelleri somut modellerden daha çok esnektir. Örneğin, dairesel bir bölge, somut modellerle makul ölçüde bölünebileceğinden çok daha fazla kesirli parçalara bölünebilir. Modeller ekran üstü sayma nesneleri ile bağlantılı hale getirildiğinde, bazı programlar aracılığıyla kesir ve ondalık kesir temsillerini göstermek mümkün olur, böylece kesirler ile ondalık sayılar arasındaki bağlantılar gösterilmiş olur. Kesirler için bu türden temsillerin bağlantılarını kurma noktasında, Odyssey Math (CompassLearning, 2008) ya da Destination Math (Riverdeep Interactive Learning Limited, 2008) güzel bir iş yapmaktadır.

Web-temelli araçlar ya da küçük uygulama yazılımları var ve tasarlanmış olup, öğrenciler kısıtlama olmadan bu programlarla çalışabilirler. Örneğin, onluk taban blokları küçük uygulama yazılımları (www.arcytech.org/ java/b10blocks/b10blocks.html), çocuklara istedikleri kadar babet, çubuk ya da birimleri toplama, onları onluk gruplar halinde

bir araya getirme, ya da bir babeti on çubuğa ayırma ya da bir çubuğu on birime ayırma şansı vermektedir.

Burada, neden sadece gerçek somut modelleri kullanmıyoruz? sorusu önem arz etmektedir. Elektronik ya da sanal manipülatifler, öğretime entegre edilecek ilaveler olmaktan ziyade, öğretimde kullanılmayı hakedecek avantajlara sahiptir.

- *Kullanımda Niteliksel Farklılıklar.* Genellikle sanal manipülatifleri kullanmak, en az somut emsallarini kullanmak kadar kolaydır. Fakat ekran üzerindeki materyallerin kontrolü farklı, belki de daha bilinçli, zihinsel eylem gerektirir, ki bu eylem "çocuklardan gerçekleştirmelerini istediğimiz zihinsel eylemler ile daha uyumludur" (Clements & Sarama, 2005, s. 53). Örneğin, çekiç simgesi ile üzerine tıklandığında, bir onluğu temsil eden onluk taban çubuk, on tekli bloklara ayrılabilir. Somut bloklarla ise, onluğun eşiti olan bloklarla takas edilmesi ve bunların öğrenciler tarafından sayılması gerekmektedir.
- *Sembollerle bağlantı.* Sayı için var olan sanal manipülatiflerin çoğu dinamik rakamları ya da yol sayaçlarını içermekte olup, ekrandaki temsiller değiştikçe bunlar da değişmektedir. Sayısal gösterimlerle yapılan bu doğrudan ve hemen kurulan bağlantının, somut materyallerle yapılması daha zordur.
- *Kolay Temizleme Özelliğine Sahip Sınırsız Materyaller.* Öğrenciler sanal manipülatiflerle çalıştıklarında, ekrandakileri kolayca silebilir ve farenin tıklanmasıyla yeni bir probleme başlayabilirler. Hiçbir zaman materyalleri tükenmez. Basamak değeri için, büyük 1000 küpler bile adet olarak kullanım için mevcuttur. Saklama ya da temizleme için endişeye gerek yoktur.
- *Özel Amaçlar İçin Destekler.* İngilizce öğrenenler ya da görme bozukluğuna sahip öğrenciler için, bazı programlar konuşmayı geliştirme özelliklerine sahip olup, bu sayede öğrenciler materyallerin ya da sayıların isimlerini duyabilirler. Bazı programlar ve küçük uygulama yazılımları İspanyolca olarak da mevcuttur. Fiziksel engelli öğrenciler için, bilgisayar modellerinin erişimi ve kullanımı, somut modellere göre genelde daha kolaydır.

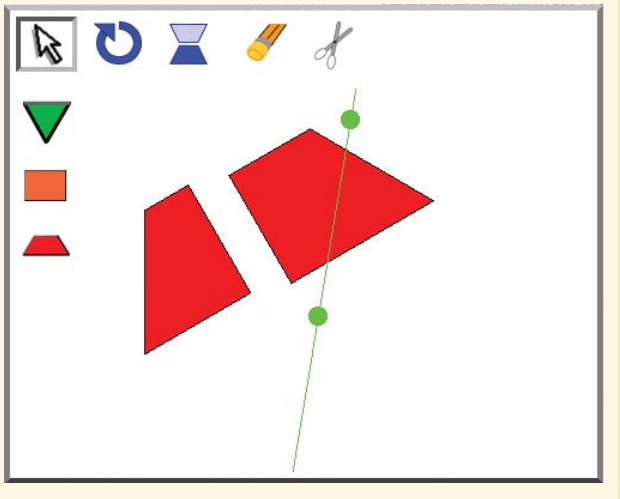
Birçok yazılım-temelli program ayrıca çalışma alanıyla bağlantılı kelime işleme imkânını sağlar ve bu, öğrencilere ne yaptıklarını bir ya da iki cümle yazarak açıklama ya da muhtemelen üzerinde çalışabilecekleri bir sözel problem oluşturma şansını verir. Yazılı eklentili ya da eklentisiz çalışma alanının bir resminin baskısını almak, öğretmenler ya da ebeveynler için çalışmaların bir kaydını oluşturur ki, bunu somut modellerle yapmak daha güçtür. Fakat Web-temelli küçük uygulama yazılımlarının genel olarak baskı imkanlarının olmadığını hatırlatmakta fayda vardır.

Geometriyi Geliştirme için Araçlar

Sayılar için belirtilmiş olanlarla karşılaştırıldığında, geometrik açıklama için kullanılabilecek bilgisayar araçları, pür araçlara daha yakındır. Şöyle ki, herhangi bir kısıtlama olmadan öğrenciler bu araçların çoğunu kullanabilir. Bilgisayar donanımlı araçlar sınıflarda somut modellerin yerini tutmamalı ilkesiyle birlikte, bu araçlar genel olarak somut materyallerden daha çok avantaj sağlarlar.

Bloklar ve karolar. Ekran üzerinde öğrencilere geometrik süslemeleri "damgalama" imkanını veren programlar oldukça yaygındır. Genel olarak, örüntü blokları ya da tangramların aynısı, öğrencilerin fareyi tıklayarak arasında seçim yapabildikleri bir bloklar paleti vardır. Çoğu kez bloklar "mıknatıslı" bir şekilde oluşturulabilir, böylece bir başka bloğun yakınında serbest bırakıldıklarında, kenarların eşleşmesi gibi, ikisi birbirini çekebilir. Bağımsız bir şekilde ya da belirlenmiş artışlarla, bloklar genelde döndürülebilir. Şekil 7.2 basit fakat güçlü bir küçük uygulama yazılımını göstermektedir ki, bu öğrencilere üç şeklin herhangi bir yerden kesilmesine ve sonra parçalarla bazı işlemlerin yapılmasına fırsat vermektedir. Öğrencilerin somut modellerle yapmaları güç ya da mümkün olmayan fakat bilgisayarla yapabilecekleri uygulamalar için bu güzel bir örnektir. Ayrıca aşağıda yer verilen uygulamaların da yapılabildiğini görebilirsiniz:

- Blokların boyutunun büyütülmesi ya da küçültülmesi, genellikle belirlenmiş artışlarla
- Blokların birbirine yapıştırılarak yeni blokların oluşturulması
- Bir simetri doğrusuna göre bir ya da daha fazla bloğun yansıtılması ya da bir nokta etrafında döndürülmeleri
- Alanın ya da çevre uzunluğunun ölçülmesi
- Değişik sayıdaki kenar sayısıyla çokgenlerin seçilmesi
- Üç boyutlu şekillerin oluşturulması ve bunların döndürülmesi

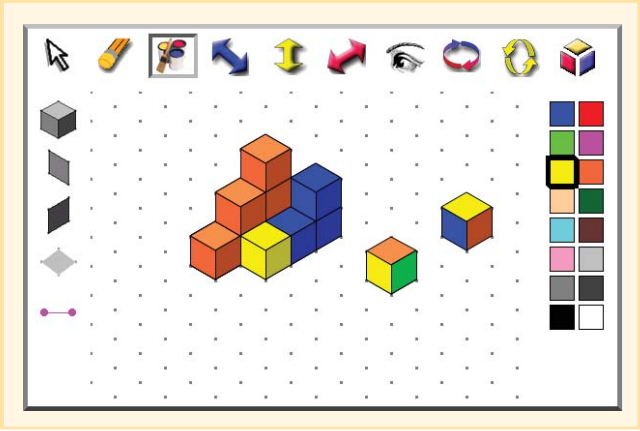


Şekil 7.2 Şekilleri Kesme Aracı Küçük Uygulama Yazılımı.
C. R. Findell, L. Davey, C. E. Greens, ve L. J. Sheffield tarafından yazılan NCTM K-2 öncesi geometri *Navigasyonları* ile verilen CD-ROM'dan izin alınarak kullanılmıştır. © 2001, Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, bu kitabın basım, yayın ve satış haklarına sahiptir. *Navigasyonlardan* alınan ekran görüntüsünün bu şekildeki varlığı NCTM'nin onayladığı anlamına gelmez.

Blokların kullanılmasını güçleştiren zayıf motor becerilere ya da fiziksel engellere sahip öğrenciler için, blokların bilgisayar versiyonları büyük bir artıdır. Renkli baskılar görüntülenebilir, tartışılabilir ve eğer gerekli aksam mevcut ise, eve götürülebilir.

Çizim Programları. Daha küçük öğrenciler için, geometrik incelemeler açısından düşünüldüğünde, gridli çalışma kağıdı üzerine şekiller çizmek, serbest-form çiziminden çok daha kolay ve faydalıdır. Birkaç program elektronik geometri tahtası olanağına sahip olup, bunlar üzerindeki bir grid üstünde noktalar arasında doğrular çizilebilir. Üçgen gibi bir şekil oluşturulduğunda, bu şekil aynı geometri tahtasında lastiklerle değiştirdiğiniz gibi genellikle istenilen yönde değiştirilebilir. Örnek için, NCTM' in illüminasyon web sayfasına bakılabilir. Elektronik geometritahta programları daha büyük gridli çalışma kağıdı imkanını sunmakta ve üzerinde çizme, kullanılanları silme, kaydetme ve çıktı alma olanakları vardır. Bu programlardan bazıları, somut bir geometri tahtası üzerinde yapılması güç ya da imkansız olan, örneğin şekillerin hacimlerinin ölçülmesiyle birlikte yansıtılması ve döndürülmesi gibi şeyler için imkan sağlar. Çizim için güzel bir internet uygulama yazılım örneği NCTM' in web sayfasında yer alan İzometrik Çizim Aracıdır (Bknz Şekil 7.3).

Dinamik Geometri Ortamları. Dinamik geometri programları öğrencilere bilgisayar ekranı üzerinde şekiller oluşturma ve daha sonra köşelerinden sürükleyerek onları kullanma ve ayarlama imkanını tanımaktadır. *Geometri Sketchpad* (Key Curriculum Press), *Cabri Geometri II* (Texas Instruments) ve herkesin erişimine açık olan *Wingeom* (http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html) en çok bilinen programlardır. Dinamik geometri programları geometrik nesnelerin (doğrular, çemberler) oluşturulmasına imkan sağlar ve bu sayede bunların başka bir nesne ile olan ilişkisi kurulabilir.



Şekil 7.3 NCTM' in illüminasyon websayfasından İzometrik Çizim Aracı uygulama yazılımı

NCTM'nin illüminasyon web sayfasından izin alınarak kullanılmıştır. © 2003, Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, bu kitabın basım, yayın ve satış haklarına sahiptir. İllüminasyon web sayfasından (http://illuminations.NCTM.org/ActivityDetail.aspx?ID-125) alınan ekran görüntüsünün bu şekildeki varlığı NCTM'nin onayladığı anlamına gelmez.

Örneğin, yeni bir doğru, bir nokta ve başka bir doğruya olan dikmeyle çizilebilir. Doğrunun herhangi bir parçası üzerinde bir orta nokta oluşturulabilir. Bir kez oluşturulunca, nesneler hareket edilse ya da yer değiştirilse dahi, bu ilişkiler korunur. Dinamik geometri yazılımı üçüncü sınıf ve sonrasındaki geometri öğretimini dramatik bir şekilde hem değiştirebilir hem de geliştirebilir. Öğrencilerin geometrik ilişkilerle ilgili bu yazılım sayesinde yapabilecekleri, bilgisayarsız olarak yapabilecekleriyle benzerlik teşkil etmez. Bu programlarla ilgili daha detaylı bilgiler Bölüm 20'de bulunabilir.

Olasılık ve Veri Analizinin Geliştirilmesi İçin Araçlar

Bu bilgisayar araçları veri girişi ile bu verilerden oluşturulabilecek birçok grafik seçimine olanak sağlar. Dahası, bunların çoğu aritmetik ortalama, medyan ve açıklık gibi bilinen istatiksel değerleri üretir. Bazı programlar ilkokul düzeyindeki öğrenciler için tasarlanmıştır. Diğerleri daha karmaşık olup, ortaokul düzeyinde kullanılabilir. Örneğin, 4-8. Sınıftaki öğrenciler için, TinkerPlots (Key Curriculum Press, 2005) veri analizi ve istatiksel ölçümler üretme için çeşitli formlarda grafikler oluşturabilir. Programın dinamik yapısı öğrencilere bir uç değeri sürükleyerek, ortalamanın, medyanın ve modun nasıl değiştiğini görme fırsatını verir. "Kümeleme, sıralama ve ayırma" yapısını kullanarak, yazılım sadece grafikler hakkında sağlam bir düşünme yaklaşımı sağlamaz, aynı zamanda gerçek-hayat bilgilerinin kullanılması için 40'tan fazla veri takımı sunar. Bu programlar veri analizinde vurguyu "grafikler nasıl oluşturulabilir" den "hangi grafik hikayeyi en iyi anlatır"a doğru değiştirmeyi mümkün kılar.

Olasılık Araçları. Bu programlar kontrollü olasılık deneylerini yapmayı ve sonuçların grafiksel gösterimlerini görmeyi kolaylaştırmaktadır. Örneğin, National Library of Virtual Manipulatives (NLVM-Amerikan Ulusal Sanal Manipülatifler Kütüphanesi) (bölüm sonunda websayfaları kısmına bakınız) madeni para atılması ve bölgelere ayrılmış çarklar için seçenekler sunar. Bu programları kullanan küçük öğrenciler şu gerçeği kabul etmelidir; bilgisayar "yazı tura attığında" ya da "çarkı döndürdüğünde" ortaya çıkan sonuçlar, rasgele ve gerçek madeni paralarla ya da çarklarla yapıldığı gibi aynı olasılıklara sahiptir. Bu programların değeri, deneylerin tasarlanması ve çok sayıdaki denemelerin yapılması sırasında sağladığı kolaylıkta görülebilir ki bu durum sonuçların analiz edilmesine daha fazla imkan tanır.

Tablolama Programları ve Veri Grafikerleri. Tablolama Programı sayısal verinin satırlarını ve sütunlarını istenildiği gibi kullanmayı sağlayan programlardır. Tablolama Programının bir yerinden alınan değerler, başka bir yerdeki girdileri belirlemek için formüllerde kullanılabilir. Bir girdi değiştirildiğinde, program bütün değerleri hemen günceller.

Tablolama Programı, okul dışında kullanılan en popüler standart yazılımlar arasında yer aldığı için, bilgisayarınızda kurulu programlar arasında muhtemelen mevcuttur. Üçüncü sınıf ve üzeri seviyedeki öğrenciler, veriyi organize etme, veriyi grafiksel olarak çeşitli yollarla gösterme ve gaz

fiyatlarının değişmesinin aile bütçesini nasıl etkilediğini bulma gibi sayısal hesaplama yapma için bu programı kullanabilirler. Öğrencilerin sadece Tablolama programının olanaklarını nasıl kullanacaklarını bilmeleri yeterlidir.

NCTM'nin web sistesinde yer alan illimünasyonlar, Tablolama Programı ve Tablolama ve Grafik Çizim Aracı isimli iki tane çok güzel internet uygulama yazılımı imkânını sağlar. Bu programlar internete bağlı iken kullanılabilir ya da bilgisayara yüklenebilir. Ayrıca, MCES Kidszone (http://nces.ed.gov/nceskids/index.asp) web sayfası, ilköğretim birinci ve ikinci kademedeki öğrenciler için hem grafik çizim araçlarını hem de olasılık simülasyonlarını barındırmaktadır.

Cebirsel Düşünmeyi Geliştirme için Araçlar

Küçük yaştaki çocuklar sanal örüntü bloklarını kullanarak, kopyalama, sürdürme, devam ettirme ve analiz için örüntüler oluşturabilirler (www.arcytech.org/java/patterns). Herhangi bir örüntü bloğunun sonsuz sayıda sağlanması, çocukları ulaşabilecekleri materyallerin sayısı noktasında kısıtlamaz.

Onların tasarımlarının kopyaları anlık ekran görüntüsü aracılığıyla basılabilir, böylece diğer öğrencilere de örüntüyü belirlemek için çaba sarfettirilmiş olur. Öğretmenler daha büyük öğrenciler için sanal örüntü bloklarını interaktif beyaztahta üzerinde kullanarak ya da NLVM' den (Ulusal Sanal Manipülatifler Kütüphanesinden) ulaşarak, her bir adımda (terimde) ihtiyaç duyulan karelerin sayısını kaydedip genişleyen bir örüntü oluşturabililer. Öğrenciler kareler dizisini inceleyip, örüntünün onuncu ya da dokuzuncu adımında kaç tane kareye ihtiyaç duyulduğuna dair hipotezler geliştirebilirler.

Daha büyük öğrenciler için, fonksiyon grafiği yazılımı kullanıcıya hemen hemen her fonksiyonun grafiğini çok kısa sürede oluşturma olanağını vermektedir. Aynı eksen üzerinde birçok fonksiyon çizilebilir. Fonksiyon grafiği üzerinde gezinerek her bir noktadaki koordinatları görmek genelde mümkündür. Bakılan bölgenin boyutları kolay bir şekilde değiştirilebilir, böylece orijinden bin birim uzaklıktaki grafiğin parçasına bakmak, x ve y'in −10 ve 10 olduğu bir aralıkta bir grafiğe bakmak kadar kolay olur. İki grafiğin kesiştiği nokta üzerine "zum yapılarak", cebirsel işlemleri kullanmadan kesişim noktalarını bulmak mümkündür.

Fonksiyon grafiği özelliklerinden şu ana kadar belirtilenler grafik hesap makinelerininin hepsinde mevcuttur. Bilgisayar programları, hız, renk, görsel açıklık ve diğer bazı ilginç imkanları da sunarak öğrencilere fonksiyonları analiz etmede yardımcı olur.



Eğitsel Yazılımlar

Eğitsel yazılımlar öğrenci etkileşimi için tasarlanmış olup ders kitabına ya da bir öğreticiye benzerdir. Öğretmek için tasarlanmışlardır. Bazı paketler sadece araç bileşenini içerdiği için, bir araç ile eğitsel yazılım arasındaki fark her zaman açık olmayabilir. Takip eden tartışmada, matematik programınız için eğitsel yazılımların sağlayabileceği farklı katkılar üzerine bazı görüşler sunmak amaçlanmıştır.

Kavram Öğretimi

Kavramsal öğretim sunmak için çaba gösteren program sayısında artış görülmektedir. Math Adventures *Matematik Serüvenleri* serisi (Tom Snyder Yayınları) ve *Prime Time Matematik* serisi (Tom Snyder Yayınları) gibi bazı programlar matematiksel fikirleri göstermek için gerçek-hayat bağlamlarını kullanırlar. Problem çözme durumlarını kullanarak belirli kavramlar, problem çözmek için rehberlik edici bir tarzda üretilir.

Çoğu zaman eksik olan şey matematiğin problem-temelli yapılmaması ya da sembolik tekniklerin kavramsal etkinliklerle bağlantısının kurulmamasıdır. Öğrenciler bilgisayarla çalıştıklarında, ayrıca, etkileşim, varsayım ya da orijinal fikirler için çok az olanakları vardır. Bazı yazılımların kavramları sunma biçimleri, öğrencileri düşünmekten ve kendi anlama biçimlerini yapılandırmaktan alı koyar. Bazı durumlarda, öğretmenin programları sınıfla birlikte büyük bir ekran üzerinde kontrol ederek kullanması en iyi yol olabilir. Bu yolla, öğretmen öğrencilere sorular yöneltebilir ve tartışmayı eğlenceli hale getirebilir ki, bunu bir bilgisayar başında bir öğrencinin bulunmasıyla yapmak mümkün değildir.

Problem Çözme

Problem çözme üzerindeki güncel vurguyla birlikte, daha fazla yazılım yayıncısı öğrencilere problem çözmeyi öğretme iddiasındadır. Fakat problem çözme, problemleri çözme ile aynı şey değildir. *Thinkport* serisi güzel problem çözme örneklerini sunmaktadır. Buradaki problemler işlem gerektiren tipik sözel problemler olmayıp, gerçek hayat bağlamlarına yerleştrilmiş, iyi düşünülmüş hikayelerdir.

Diğer taraftan, bazı programlar ise tipik sözel problemlerden oluşan koca bir kütüphaneden daha az şey sunarlar. Genelde öğretmen, problemin zorluğunu ve kullanılacak işlemleri kontrol edebilir. Bu programlar, öğrenci problemi yanlış çözdüğünde kavramsal yardım sağlayabilseydi çok daha yararlı olabilirdi. Fakat bu durum nadiren söz konusudur.

Mantık problemlerini çözme, problem çözme yazılımının diğer bir değişkenidir. Bu kategori *Factory Deluxe*'deki (Sunburst) gibi uzamsal düşünmeyi ve *Odyssey Math* (CompassLearning), *Destination Math* (Riverdeep), ve *Academy of Math'deki* (AutoSkill) gibi sayı örüntüleri ve işlem hissini içerir.

Alıştırma ve Pekiştirme

Alıştırma programları daha önceden öğretildiği varsayılan becerilerle uygulama yapmak üzere öğrencilere olanak sağlar. Genel olarak, bir alıştırma programı sorular yöneltir ve bu sorular doğrudan ya da çoktan seçmeli olarak verilen seçenekler arasında seçim yapılarak cevaplandırılır. Bu

programların çoğu eğlence oyun salonu formatında kurulu olup, yapılan uygulama ile formatın bir ilişkisi olmamasına rağmen, video oyunlarını seven öğrenciler için programları ilginç hale getirir.

Alıştırma programları cevapları hemen değerlendirir. Bu programların birinci ya da ikinci yanlış cevabı nasıl ele aldığı ayırt edici bir özelliktir. Bir tarafta, cevap sadece yanlış olarak kaydedilir. Cevabı düzeltmek için ikinci ya da üçüncü bir şans olabilir. Diğer taraftan, program doğru cevabın açıklanması yönüne doğru işleyebilir. Diğerleri faydalı bir ipucu sunabilir ya da etkinliğe yardımcı olması için görsel bir model sağlayabilir. Bazı programlar ayrıca kayıt tutma özelliğine sahip olup, bu sayede öğretmen öğrencinin bireysel gelişimini takip edebilir.

Yazılımın bahsedilmeye değer bir diğer özelliği ise *FASTT Math'te* görüleceği gibi (Tom Snyder Productions, www.tomsnyder.com/fasttmath/overview.html) ayrıştırılmış alıştırmadır. The *FASTT Math (Teknolojiyle Sistematik Öğretim aracılığıyla Hız ve Otomatiklik)* programı bütün öğrencilerin matematik kurallarıyla hızlı bir şekilde çalışmasını geliştirmek için yardım sağlar. Bireysel öğrenenler için uyarlanmış oturumlarda, her öğrencinin daha önceki performasına dayalı olarak, yazılım otomatik olarak öğretimi farklılaştırır.

Yazılım Seçme ve Kullanma İçin Yönergeler

Matematik için bugün çok sayıda yazılım mevcuttur. Ticari açıdan yayımlanmış yazılımlar giderek pahalı olmaya başlamış olup, bu yüzden mümkün olduğunca açık kaynak yazılımı öneriyoruz. Birçok internet tamelli uygulama yazılımı ücretsiz olarak kullanılmasına rağmen, okullar yine de internet erişimi ve uygun donanım olanağını sağlamalıdır. Hangi durumda olursa olsun, sınırlı kaynak kullanımında bilgiye dayalı karar vermek önemlidir.

Yazılım Kullanımı için Yönergeler

Matematik öğretiminde yazılımın nasıl kullanıldığı büyük ölçüde, konuya, sınıf düzeyine ve yazılımın kendisine göre değişir. Yazılım kullanımı için aşağıda sunulan kriterleri göz önünde bulundurunuz.

- Yazılım dersin ya da ünitenin hedeflerine katkı sunmalıdır. Daha erişilebilir yaklaşımlar için yazılım eklenti ya da yer tutucu olarak kullanılmamalıdır. Yazılım kullanımı hangi teknolojinin işi etkin ve iyi yapacağı faydacılığını esas almalıdır.
- Bireyselleştirilmiş ya da küçük-grup kullanımı için, yazılımı kullanmaya dönük olarak belirli açıklamalar sunmak için plan yapınız ve ayrıca öğrencilere yazılımı serbest bir şekilde incelemeleri ya da uygulama yapmaları için zaman vermeyi planlayınız.
- Yazılım etkinliklerini bilisayar dışı etkinliklerle birleştiriniz (örneğin, sınıftaki ölçme verilerini toplayarak Tablolama Programına girmek).
- Yazılım kullanımı için bir yönetim planı oluşturunuz. Bu plan yazılım kullanımı için bir program (örneğin, toplu çalışma süresince, küçük grup çalışması süresince) ile yazılım kullanımı etkililiğini değerlendirme yöntemini içerebilir. Bazı yazılım programları öğrenci performansının takip edilmesi için olanak sağlasa da, yazılımın dersin ya da ünitenin hedeflerini etkin olarak karşılayıp karşılamadığını belirlemek için başka değerlendirme stratejilerini de kullanabilirsiniz.

Yazılım Nasıl Seçilmeli

Etkin yazılım alımı için en önemli koşul ürün hakkında iyi bilgi toplamak ve objektif bir şekilde değerini ölçüp tartmaktır.

Bilgi toplama. Yeni yazılımlara ilişkin en iyi bilgi kaynaklarından bir tanesi NCTM ya da önemli bulduğunuz diğer dergilerin görüş belirtme bölümüdür. Birçok websayfası hem ticari olarak var olan yazılımlar hem de internet-temelli uygulama yazılımları hakkında eleştirilere yer verirler. Drexel Universitesinde ve http://mathforum.org adresinde sunulan matematik formu böyle bir sayfadır.

Göz önünde bulundurulacak en önemli husus yazılımın, engelli bireyler dahil, bütün öğrenciler için erişilebilir olup olmadığına ilişkindir. Sesli okunduğunda metin büyütülebilir ya da altı çizilebilir mi? Fare üzerine getirildiğinde grafikler kolay bir şekilde tanınabilir mi? (fare görüntü üzerinde hareket ettiğinde yapılan eylem yazılı ya da sözel olarak ifade edilir) ve anlam açısından grafikler renge bağımlı değil midir? Yazılım fare yerine klavye kullanılarak çalışıyor mu? Bütün bu sorular www.design.ncsu.edu/cud/about_ud/udprinciplestext.htm adresinde tanımlanmış genel tasarım prensiplerinden uyarlanmıştır.

www.techmatrix.org sayfasındaki TechMatrix "özel eğitime gereksinim duyan öğrencilere yönelik olarak eğitsel ve destekleyici teknoloji ürünleri bulmak için etkili bir araçtır" (National Center for Technology Innovation-Amerikan Ulusal Teknoloji Inovasyonu Merkezi, 2008). Konular başlığı altında yer alan matematiği seçiniz ve yazılım programlarında öğrenmeyi destekleyici "matris" listesinin çeşitli öğeleri nasıl gösterdiğine bakınız. Oluşturacağınız matris, matematik öğrenimi için kullanılan değişik yazılım ürünlerinin, ayırt etme özellikleri, metin okuma yeteneği, kelime tahmini, görsel tarama sürgüleri, Braille'deki çıktı seçenekleri, ses tanıma ve diğer faydalı bilgiler gibi öğeleri içerip içermediğini karşılaştıracaktır. Ana sayfanın en üstünde yer alan "Araştırma" ve daha sonra da "Matematik" üzerine tıklandığında, özel eğitime ihtiyaç duyan ve duymayan öğrenciler için matematik sınıflarında teknolojinin kullanımıyla ilgili bir çok araştırmaya dayalı çalışmaya ulaşılabilir.

Bilgisayar-temelli herhangi bir araç ya da eğitsel bir yazılım seçildiğinde, uygun bir şekilde o aracı değerlendirmek önemlidir. Öncelikle öngörünüm kopyasını ya da en

azından tanıtım versiyonunu edinmeye çalışınız. Kullanıcılara 30 gün için yazılımı yükleme ve kullanma hakkı veren imkanlardan yararlanınız. Yazılımı satın almadan önce, birlikte çalışmayı düşündüğünüz çocuklar ile yazılımla ilgili uygulama yapınız. Unutmayınız ki, ilgilendiğiniz şey içerik olup, öğrencilerin oynayabileceği oyun değildir.

Kriterler: İnceleyeceğiniz bir yazılımı, satın almadan veya sınıfınızda kullanmadan önce aşağıda verilen maddeler hakkında düşününüz:

- Bu yazılım, bilgisayarsız yapılan neyi daha iyi yapabilir? Herhangi bir yazılımı öğrencilerin sadece bilgisayar başında olmaları için seçmemeli ya da kullanmamalısınız. İşe yarar grafikler ve oyunlar üzerinde durunuz ve öğrencilerin ne öğreneceği üzerine odaklanınız.
- Öğrenciler içerikle (gösterişle değil) nasıl bir ilişki kurabilirler? Etkin bir öğretimdeki en önemli faktörün öğrencinin yansıtıcı düşünmesi olduğunu hatırlayınız. Sunulan matematik öğrenci için problematik midir?
- Programın kullanımı ne kadar kolaydır? Programın kullanımında çok fazla bıktırıcılık olmamalı ki dikkat içerikten başka yöne çevrilmesin. Yoksa öğrenciler kendilerini yılgın hissederler.
- Program kavramsal bilgiyi kavramların anlaşılmasını destekler nitelikte nasıl geliştirir? Alıştırma programlarında yanlış cevaplar nasıl ele alınır? Modeller veya açıklamalar öğrencilerin anlaması için faydalı olur mu?
- Öğretmene ne tür kontrol ve değerlendirme imkanları veriliyor? Açabilme ve kapatabilme seçenekleri mevcut mudur? (örneğin; ses, yardım veya dönüt türleri, zorluk seviyeleri) Öğrencilerin sergilediği bireysel gelişim süreçlerini öğrenebilmek için tutacağınız kayda yönelik bir şart var mı?
- Kullanım klavuzu veya online açıklamalar ulaşılabilir mi? Kullanım klavuzunun veya açıklamaların kalitesi nedir? Kullanım klavuzu en azından programın nasıl kurulacağını açıklamalı ve sistemin hata verdiği durumlar için yardım sağlamadır.
- Program cinsiyet ve kültür dikkate alındığında eşitlikçi mi?
- Lisans sözleşmesinin yapısı nedir? Yazılımın satın alınması durumunda bir kurulum lisansı veya ağ lisansı mevcut mu? Tek kullanıcı paketi satın aldıysanız bu yazılımı birçok bilgisayara kurmanız yasal değildir. İnternet küçük uygulama yazılımlarının görüntülenmeleri için bilgisayarın internete ve Java (Sun Microsystems) gibi bir yazılıma bağlı olması gerekmektedir. Bu kısıtlamalar sizin okul şartlarına uygun mu?
- Programın okuldaki bilgisayarlarda çalışacağından emin olunuz. Yazılım tarifi uyumlu platformları (Windows/Macintosh) ve gerekli kurulum sistemlerinin sürümlerini belirtmelidir.



İnternet Kaynakları

İnternet tabanlı yazılım uygulamaları veya küçük uygulama yazılımları erişimine ilave olarak, matematik öğretimine ve matematiğe ilgi duyan hem öğretmen hem de öğrenciler için kaynakların ve bilgilerin kökeni internettir.

Matematikle ilişkili bilgiye ulaşmak için standart bir arama motoru kullanmak yerine, bilinen bazı adreslerle işe başlamak daha iyi olacaktır. Farklı kategorilerdeki iyi standartlarda birkaç web sitesi genellikle diğer sitelere ait, kendi başınıza araştırarak bulacağınızdan daha fazla linke ulaşma imkanı sağlayacaktır. Bu kitap faydalı sitelere erişmek için bir kaynaktır. İnternet tabanlı kaynaklar listesini her bölüm sonunda görebilirsiniz. Bu web sayfalarını ziyaret ediniz. Bu sayfalarda mesleki bilgi, öğretmen kaynakları, dijital araçlar ve açık kaynak yazılımları dahil kaynak türlerine ulaşabilirsiniz.

İnternet Kaynakları Nasıl Seçilmeli

Bir öğretim planı yapacağınızda, sınıfınızdaki öğrenciler bilgi topladıklarında veya bir matematik konusunu araştırdıklarında, internet üzerinde yer alan bol miktardaki bilginin kalitesine göre sınıflandırılması ve doğruluk için ayıklanması gerekmektedir. Örneğin herhangi bir matematik dersine internet aracılığıyla ulaşmak, onun kaliteli olduğunu garanti etmez. Zira herhangi bir kimse sahip olduğu bir fikri internet üzerinde yayınlayabilir. Örneğin ünlü bir matematikçi hakkında öğrenciler bir WebQuest (http://webquest.org) veya I Search (www2.edc.org/FSC/MIH) tamamladıklarında bilginin güvenilir olduğunudan nasıl emin olabilirler? İnterneti başarılı matematik etkinliklerine ulaşmada, zengin etkinlikleri teşvik etmede veya öğrenme zorluğu yaşayan öğrencilere yardım etmeye yönelik destekleyici stratejilere ulaşmada bir öğretim araç kutusu olarak kullanmak için yüksek kalitedeki siteleri tercih etmek, sadece birkaç kelimeyle ulaşılabilen arama motorlarını kullanmaktan daha iyidir. Bununla ilgili olarak size bölüm sonundaki siteleri bilgisayarınızdaki favorileriniz arasına eklemenizi ve bilgiye ulaşmada ilk basamak olarak bu siteleri kullanmanızı öneriyoruz. Eğer web sayfalarını, web günlüklerini (bloglar) veya wikileri (ortak bir şekilde oluşturulan ve güncellenen web sayfaları) daha geniş ölçüde incelemek isterseniz, Tablo 7.1 de yer alan numaralandırılmış unsurları dikkate alınız. Farkındalık sahibi bir eğitimci olarak bu kriterler sizin için önemlidir ve bu kriterler öğrencilerinizin internet üzerindeki materyali değerlendirebilmeleri için de uyarlanabilir ve sadeleştirilebilirler. Tablodaki ana konular Smith (1997a) tarafından önerilen kriterler arasından seçilerek uyarlanmıştır.

Gelişen Teknolojiler

Gelişen teknolojiler teknolojik araçların ve ilerlemelerin sürekli değişen tabiatına işaret etmektedir. Giderek teknolojik hale gelen toplumumuzda, biliyoruz ki öğrencilerin yenilikler hakkında öğrenmeleri için, yapabileceğimiz en

Tablo 7.1

Web Kaynaklarının Değerlendirilmesi

	Kriterler	Gerekçe	Kanıt/Doğrulama
Yetkili	• Sayfa eser sahiplerini ve niteliklerini belirtmelidir. • Site saygın bir eğitim enstitüsü veya kurum ile ilişkili olmalıdır.	• Herhangi bir kimse internet üzerinde web siteleri oluşturabilir. Sitelerdeki bilgilerin güvenilir bir kaynaktan ve yüksek kalitede olduğu konusunda emin olmak istersiniz.	• Yazar ya da kurumların iletişim bilgilerine kolayca ulaşılabilir. Kurumun ana sayfasına bir bağlantı var mıdır? • Yazarların uzmanlıkları kayda değer mi? • www.whois.net alan araştırma servisini kullanarak, sitenin yazarını tespit ediniz. • URL alanı, .org, .edu, .gov, .net, ya da .com uzantılı mı?
İçerik	• Site ilgi alanı ile eşleşmelidir. • Materyaller var olan bilgilere derinlik katmalıdır.	• Bilgiler kişisel görüşler olmaktan ziyade faydalı olgular olmalıdır. • Metinler diğer sitelerden alınan bilgilerin farklı şekilde ifadesinden ziyade uzmandan alınan doğru bilgilerden oluşmalıdır.	• Diğer sitelere ait linklerden oluşan bir liste var mıdır? • Yazılanlar, dipnotlar ve araştırma makaleleri tarafından doğrulanmakta mıdır? • Yazarlar sayfalara koydukları bilgiler için kriter belirtmişler midir?
Objektiflik	• Site taraflı bir görüş yansıtmamalıdır. • Yazarlar gerçekleri sunmalı, okuyucunun aklını çelmeye çalışmamalıdır.	• Websayları bağımsız ve objektif bilgi kaynaklarını sunmaktan ziyade okuyucuları etkilemeye çalışabilirler.	• Sayfada ya da bağlantılı sayfalarda reklamlar ya da sponsorlar var mıdır? • Yazar bir çok teoriyi ya da bakış açısını ele almakta mıdır?
Doğruluk	• Bilgi hatasız olmalıdır. • Bilginin doğrulanması hakemler ve kontrolörler tarafından sağlanmalıdır.	• Websayfaları hakemlerin gözetiminden ya da doğruluk kontrolünden geçmeden yayınlanabilirler.	• Sayfa belirgin gramer, yazım ya da matematik hataları içermekte midir? • Orijinal kaynaklar referans listesinde açık bir şekilde belirtilmekte midir? • Bilgi bir diğer kaynak aracılığıyla kontrol edilebilmekte midir? • Grafikler, diyagramlar ya da istatistiksel veriler açıkça isimlendirilmekte midir?
Güncellik	• Site güncel olmalı ve sıklıkla revize edilmelidir.	• Bilgi o kadar hızlı değişiyor ki güncellenmeyen ve bakımı yapılmayan websayfaları ihtiyaç duyulan güvenilir bilgiyi sağlayamaz. • Güncellik, yazılı kaynaklarla karşılaştırıldığında webin en önemli avantajıdır. Şayet sitenin güncellendiğine dair bir işaret yoksa, o zaman site alandaki bilgiye katkı sunma potensiyelini kaybetmiş demektir.	• Sayfanın tarih ve güncellemelerine bakınız. • Linkler güncel olmalı ve aktif olmayan sitelere yönlendirmemelidir. • Referanslar güncel atıfları içermelidir. • Fotoğraflar ve videolar güncel olmalıdır (tarihsel bir konuyla ilişkili olmamak şartıyla)
Hedef Kitle	• Site sizin kullanımız için mi yoksa sınıfınızdaki öğrencilerin muhtemel kullanımı için mi olduğunu açıkça ortaya koymalıdır. • Site bireysel ya da başkaları tarafından oluşturulduğu konusunda detayları vermelidir. • Site tüm öğrenciler için özellikle de özel eğitime ihtiyaçları olanlar için ulaşılabilir olmalıdır.	• Eğitimde, hedef kitle öğrenciler, aileler, öğretmenler ya da idareciler olabilir. İyi belirlenmiş bir hedef kitlesi esas alınarak bilginin sunulması önem arz etmektedir.	• Siteyi, önerilen sınıf düzeyleri ve yaş grupları için kontrol ediniz. • Site, öğrencilerin bilgiye ulaşmalarına yardımcı olması için menü veya araştırma özellikleri aracılığıyla kolay bir erişim izni veriyor mu? • Hikayelerin okunma düzeyi nedir? • Özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler için seçenekler bulunmakta mıdır? • Siteler, evrensel tasarım prensiplerine bağlı kalmakta mıdır? Örneğin, görme zorluğu çeken öğrenciler için yazı boyutunun büyütülmesi, sentetik konuşma ya da bir ekran okuyucusu hususlarına dikkat edilmekte midir? Ya da işitme zorluğu çeken öğrenciler için video ya da ses materyallerinde altyazılara yer verilmekte midir?

iyi şey en yeni donanım ve yazılıma, meraklı ve duyarlı bir yaklaşımla karşılık vermeleri noktasında kendilerine yardımcı olmaktır. Ilginin yoğunlaştığı alanlardan bir tanesi, genelde podcast olarak nitelendirilen ve blogları, wikileri, ses ya da video sunumları içeren Web 2.0 araçları olup, bu araçlar işbirliğini, etkileşimi ve bilginin yapılandırılmasını teşvik etmektedir.

Podcastlar. Podcastlar internet üzerinden abone olunan ve araçlara otomatik olarak yüklenen ses ya da video dosyalarına işaret eder. Bu dosyalar taşınabilir medya oynatıcılarla dinlenebilir veya seyredilebilir. Öğrenciler ve öğretmenler bu türden podcastlar oluşturarak, bir derse ya da konuya ilişkin yapılan hazırlıkları tekrar dinleyebilir ya da izleyebilir. Öğretmenler, dersleri destekleyici yüklenebilir dijital

içerikler oluşturmak için podcastlar üretebilir. Öğrenciler podcastları, Pisagor teoremi üzerine bir rapor ya da önem arz eden gerçek-hayat durumundan elde edilen verilerin neticesinde ortaya çıkan ikna edici bir fikir gibi, zamanla neticelenen projeler olarak geliştirebilir.

Wikiler. Wikiler web-temelli yayın araçları olup, birçok yazarın ortak bilgilerinin birleşimi aracılığıyla oluşur. Katkıda bulunan grubun üyeleri içerik ekler, kaldırır, düzenler ya da bunlar dışında değiştirir. Işbirlikçi yazarlık süreci, yeni bilgileri bulma, halihazırda var olan bilgileri değerlendirme ve yeni bilgileri inşa etme açısından öğrencileri cesaretlendirebilir. Her ne kadar yanıltıcı ve yanlış bilgilerin yayınlanması söz konusu olsa da, bu eksiklik web bilgilerini dikkatli bir şekilde tetkik etme becerisinin gelişmesine yardımcı olur. Sosyal bilimlerde sivil haklar hareketi gibi bir konunun ya da literatürün bir konusunun bir wikinin başlamasını nasıl tetiklediğini kolayca görebilirsiniz, oysa matematik konuları da wikilerin oluşması için başlama noktası olmayı hakederler. Sayı sistemleri, geometrik dönüşümler, bir veri grubunun yorumlanması ya da fotoğrafta, kitapta ve hatta filmde matematik, matematik derslerinden ortaya çıkan wikiler için çeşitli seçenekler sunmaktadır.

Web Günlükleri. Web günlükleri elektronik belgeler ya da websayfaları olup, bu sayfalarda insanlar olayları tartışır, yorumlarını gönderir ya da sadece değişik konular hakkında fikirlerini beyan ederler. Kaynakları ya da düşünceleri paylaşmak ve diğerlerinin tepkisini almak etkin bir araç olup, öğrencilerin fikirleri değerlendirmelerini ve iletmelerini sağlar. Temel düzeyde, sınıfınızın web günlüğü (blog) ev ödevlerinin ya da aileleri ilgilendiren diğer materyallerin arşivini tutabilir —hatta çok başarılı bir ödevin gönderilebileceği bir yeri de olabilir. Bir yıl ya da bir not dönemi boyunca matematik öğrenimindeki gelişim şeklini yansıtacak ya da konferanslar için paylaşılabilecek öğrenci çalışmalarının portfolyo dosyaları ayrıca web günlüklerinde muhafaza edilebilir. Site, matematik oyunlarının, haftanın problemlerinin ya da matematik şiir şablonları gibi yazma iletilerinin muhafaza edildiği bir yer haline gelebilir. Aile üyeleri de dahil, günlüğün nasıl kullanılması ya da kullanılmaması gerektiğinin anlaşılması için kurallar listesi hazırlamayı unutmayınız.

Dijital Oyun. Bazı uzmanlar, online eğitsel web sayfalarının gittiği istikametin dijital oyun olduğu konusunda hemfikirdirler. Küçük öğrencilerin çoğunun teknoloji ile ilk karşılaşmaları çok küçükken bilgisayarda oynadıkları dijital oyunlar olduğu düşünülürse, yeni oyunlar öğrencilerin aşina olduğu ve çekici bulduğu araçlar olup matematik öğrenimini karmaşık problemlerin çözümü aracılığıyla destekler. Diğer video oyunlarında olduğu gibi, bu matematik oyunları, analiz yapmayı, konsantrasyonu, çeşitli stratejilerin kullanılmasını, hayalgücünü ve orijinal ürünler ortaya koymayı gerektirmektedir. Etkileşimli sanal dünyalar aracılığıyla, küçük öğrenciler bildikleri şeyleri kullanarak yeni kavramları öğrenebilirler. Örneğin, Maryland Public Television (Maryland Kamu Televizyonunun) *Thinkport* sitesi, farklı alanlarda öğretimi desteklemek için yenilikçi ve çekici web sayfalarının geliştirilmesinde öncüdür (www.thinkport.org/ technology/gotgame/default.tp). Dijital oyunlarından bir tanesi, "Lure of the Labyrinth-Labirentin Cazibesi" (http://labyrinth.thinkport.org), yüksek-düzey bir etkinlik örneği olup ilköğretim ikinci kademe matematik öğrencilerine yöneliktir. NCTM standartlarıyla bağlantılı olarak, "Labirent oyunu", orantı, değişkenler, denklemler, sayı ve işlemler konuları üzerinde eleştirel düşünmeyi geliştirmek için tasarlanmış hikaye konusuna öğrencileri dahil eder. Oyun oynayanlar tecrübelerinden öğrenirler ve onlar kendi başarı ya da başarısızlıklarından sorumlu olan "uzmanlardır". Oyun ilerlemeyi takip ettiğinden dolayı, öğrenciler ihtiyaç duyduklarında "anında" yardım alabilirler. "For Educators-Eğitimciler için" üzerine tıklarsanız, oyunla ilgili faydalı bir açıklama görebilirsiniz. Burada ayrıca konu, ders planları, sınıf yönetimi stratejileri ve matematik standartları bağlantı çizelgesi hakkındaki temel çalışmalar aracılığıyla oyuna ilişkin arka plan bilgisine ulaşabilirsiniz.

Bölüm 7 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim

1. Teknoloji matematik öğretim programını ve nasıl öğretildiğini birçok yönden etkilemiştir. Bunlardan en az üç tanesini açıklayınız ve açıklamalarınızı örneklerle destekleyiniz. Bu bölümde yer verilmeyen örneklerden bahsedebilir misiniz?
2. Matematik sınıflarında hesap makinelerinin düzenli kullanılmasının bazı faydalarını belirtiniz. Bunlardan hangisi sizin için en çarpıcıdır? Hesap makinelerinin kullanılmasına karşı olan görüşlerden bazıları nelerdir? Okul müdürünüzün huzurunda hesap makinelerinin düzenli olarak kullanılmasını savunuyormuş ya da öğretmen ve velilerden oluşan bir topluluğa sunum yapıyormuş gibi, hesap makinelerine karşı olan görüşlerin her birine yönelik savunma yapınız.
3. İlköğretim ikinci kademede matematik öğrenimini gerçekten geliştiren grafik hesap makinelerinin özelliklerinden en az üç tanesini belirtiniz?
4. Yazılım seçiminde size göre en önemli kriterler nelerdir?
5. Matematik öğretiminde faydalı olabilecek ne tür bilgileri internet üzerinde bulmayı ümit ediyorsunuz? Bu bilgilerin kalitesini nasıl değerlendirebilirsiniz?
6. Gelişmekte olan teknolojiler nelerdir? Gelecekteki yeni teknolojiler için kendinizi nasıl hazırlarsınız?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Sınıflarda hesap makinelerinin kullanımı hakkında bazı öğretmenlerle görüşünüz. Hesap makinelerini ne zaman kullanacaklarına nasıl karar veriyorlar? NCTM'in Hesaplama ve Hesap Makinelerine İlişkin Pozisyonu Belgesini okuyunuz. NCTM'in pozisyonuyla karşılaştırıldığında, konuştuğunuz öğretmenlerin sunduğu gerekçeler nasıldır?
2. Okulunuzda var olan yazılımlar arasında, matematik için bir tane eğitsel yazılım örneği seçiniz. Deneyiniz ve sınıfınızda nasıl uygulanabileceğine karar veriniz (eğer mümkünse). Önerilen sınıf seviyesi için ilgili belgeyi kontrol ettiğinizden emin olunuz.
3. Aşağıda önerilen web sayfalarından en az üçüne göz atınız. Diğer sitelere sizi yönlendiren bağlantıları takip ettiğinizden emin olunuz. Kendi "ilk on" listenizi oluşturunuz ve bilgisayarınızda favorilerim listesine ekleyiniz.
4. Küçük uygulama yazılımları altında listelenen bir ya da daha fazla siteden üç ya da dört küçük uygulama yazılımını inceleyiniz (aşağıdaki bölüme bakınız). Bir tanesini seçiniz ve çocuklarla birlikte uygulayınız. Küçük uygulama yazılımının bir öğretmen aracı ya da öğrenci etkinliği olarak kullanıldığı bir ders yapınız.

Bölüm 7 ile İlgili Kaynaklar

Önerilen okuma parçaları

Makaleler

McGehee, J., & Griffith, L. K. (2004). Technology enhances student learning across the curriculum. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(6), 344–349.
Five examples using technology are explored, including understanding graphs (rate of change), decimals, geometry, measurement, and data analysis. This is a good introduction to the use of technology in any of these domains.

National Council of Teachers of Mathematics. (2002–present). *ON-Math* is an online NCTM journal that can be accessed on the Web by all NCTM members at www.nctm.org/publications/onmath.aspx.
However, anyone can go into the "Articles by Grade" section and see titles of the variety of articles for pre-K–12 teachers. There are actual classroom activities, enhanced lessons, and more general suggestions for technology use delivered with interactive software, virtual manipulatives, video clips, and sound effects.

Thompson, T., & Sproule, S. (2005). Calculators for students with special needs. *Teaching Children Mathematics*, *11*(7), 391–395.
An excellent argument is made for the use of calculators for students who have learning problems that affect their mathematical skills. A framework or flowchart that is easily used to make decisions about when to allow calculator use is not only appropriate for special students but also for every child. This short article can help counter any objections raised by calculator critics.

Kitaplar

Masalski, W. J., & Elliott, P. C. (Eds.). (2005). *Technology-supported mathematics learning environments: Sixty-seventh yearbook*. Reston, VA: NCTM.
An excellent collection of perspectives on the use of technology across the grades by noted authorities and practicing teachers alike. Topics include strategies for effective use of technology, examination of virtual manipulatives for young students, dynamic geometry software, the spreadsheet, and much more. A CD is included to illustrate many of the ideas found in the book.

Online Kaynaklar

Mesleki Bilgiler

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM)
www.nctm.org
The NCTM website is a must for every elementary teacher and teacher of mathematics. It includes specific information for teachers, parents, leaders, and researchers. The home page changes almost monthly, providing up-to-date information about conferences, publications, news, and more. The site also provides a mechanism for joining the council, registering for conferences, purchasing publications and products, and linking to the Illuminations site (see separate entry). Members can access their journals online, subscribe to a special electronic journal, and renew memberships. You can choose to receive a monthly e-mail update informing you of recent additions to the website.

Program Geliştirme ve Denetim Derneği (ACSD)
www.ascd.org
ASCD is an international nonprofit educational association that is committed to successful teaching and learning for all.

Uluslararası Eğitimde Teknoloji Topluluğu (ISTE)
www.iste.org
ISTE is the professional organization for educators interested in infusing technology into instruction. It maintains an exciting set of resources for teachers including website links, professional development, and publications. The next generation of ISTE's National Educational Technology Standards (NETS-S) for students can be found by clicking the NETS section from the home page. The standards address such topics as creativity and innovation; communication and collaboration; research and information fluency; critical thinking, problem solving, and decision making; digital citizenship; and technology operations and concepts.

Öğretmenler İçin kaynaklar

NCTM İllüminasyonları
http://illuminations.nctm.org

This is an incredible site developed by NCTM to provide Internet resources for teaching and learning intended to "illuminate" *Principles and Standards for School Mathematics*. You can find resources from lesson ideas to "math-lets" (applets designed to provide tools for developing understanding in mathematics). Also at this site are multimedia investigations for students and links to video vignettes designed to promote professional reflection.

The Illuminations website continues to be updated with the addition of many new lessons. In addition the Illuminations Game Room Project allows students to explore mathematics topics while playing mathematics games with one another over the Web.

Matematik Forumu
http://mathforum.org

Along with the NCTM sites, this may be your most important source of information and links to useful sites. The forum has resources (Math Tools) for both teachers and students. There are suggestions for lessons, puzzles, and activities, plus links to other sites with similar information. There are forums where teachers can talk with other teachers. Two pages accept questions about mathematics from students or teachers (Ask Dr. Math) and about teaching mathematics from teachers (Teacher 2 Teacher). Problems are regularly posted, and solutions can be entered via the Internet.

Annenberg/CPB Projeleri
www.learner.org

This tremendous resource lists free online learning activities, including information about all sorts of interesting uses of mathematics and science in the real world, resources for free and inexpensive materials from Annenberg, and information about funding opportunities.

Eğitimde Teknolojiyi Uygulama Merkezi (CITEd): Tech Matrix
www.techmatrix.org

CITEd's Tech Matrix is a useful database of technology products that supports instruction in mathematics for students with special needs. Each product evaluation includes a link to the supplier's website.

Küçük Uygulama Yazılımları

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi e-Örnekler
http://standards.nctm.org/document/eexamples/index.htm

Many of these applets are referenced in and directly support the text of *Principles and Standards for School Mathematics*. They are also available on the CD version of the *Standards*. Most are also available on the Illuminations site.

NCTM İllüminasyonları
http://illuminations.nctm.org

Check both the i-Math Investigations (interactive math lessons, most built around applets) and Interactive Math-lets (a collection of applets). The Math-let applications cover the K–12 spectrum. They are ordered alphabetically, so be sure to check out the full list. This is a good collection of quality tools. The i-Math Investigations include all of the applets from the e-Examples.

Ulusal Sanal Manipulatifler Kütüphanesi ve eNLVM
http://nvlm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

This NSF-funded site located at Utah State University contains a huge collection of applets organized by the five content strands of the *Standards* and also by the same four grade bands. The eNVLM section contains online units, customizable student activities, and tools to help teachers develop activities collaboratively.

Arcytech
http://arcytech.org/java

This site includes tool applets for base-ten blocks, pattern blocks, Cuisenaire rods, fraction bars, and integer bars. There is also an extended interactive lesson developing the Pythagorean theorem.

Shodor interaktif (Shodor Eğitim Kurumları)
www.shodor.org/interactivate

The site contains a huge list of applets that continues to grow. In addition, there are lessons and activities. Applets (referred to as "activities") are arranged by content rather than grade level, so be sure to look through the full list. This is a valuable site, especially for teachers in the upper grades and middle school.

Bölüm 8

Erken Dönemlerde Sayı Kavramlarının ve Sayı Hissinin Geliştirilmesi

Çocuklar sayı hakkında birçok fikre sahip olarak okula gelirler. Çocuklarla çalışırken bu fikirler üzerine bilgiyi dayandırmalı ve onların yeni ilişkiler geliştirmelerine yardımcı olmalıyız. 4, 5 ve üst sınıflardaki çoğu öğrencinin nasıl sayılabileceğinin ötesinde sayıyla ilgili gerekli bilgiye sahip olmadıklarını görmek üzücüdür. Daha üst sınıflarda incelenecek ileri düzeydeki sayıyla ilişkili kavramlara doğru ilerleyecek ve gelişecek şekilde sayıyı tam olarak anlamaları çocuklar için birçok deneyim ve zaman gerektirir.

Bu bölüm 20'ye kadarki sayılarla ilgili sayı fikirlerinin gelişimini inceleyecektir. Bu temel fikirler, daha büyük sayılara, işlemlere, temel kurallara ve hesaplamalara genişletilebilirler.

Ana Fikirler

1. Sayma, bir kümede kaç eleman olduğunu belirtir. Bir kümedeki öğeler sayıldığında sayı dizisindeki en son sözcük, o kümedeki çokluğu ifade eder.
2. Sayılar çok çeşitli bağıntılarla birbirleriyle ilişkilendirilirler. Örneğin 7 sayısı, 4'ten büyüktür, 9'un 2 eksiğidir, 3 ile 4'ün toplamı olabileceği gibi 2 ile 5'in toplamıdır, 10'dan 3 sayı uzaktadır ve bu sayı, farklı şekillerdeki örüntülü nokta dizilişlerinde kolayca tanınabilir. Bu fikirler, 17, 53 ve 370 sayılarını anlamak için genişletilirler.
3. Sayı kavramları bizi çevreleyen dünyaya derinlemesine bağlıdır. Sayı ilişkilerinin gerçek durumlara uygulanması, dünyayı matematiksel bir tarzda anlamlandırmaya başlamanın temelini oluşturur.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Başlangıç sayı kavramının gelişimi müfredatın farklı alanlarıyla iki şekilde ilişkilidir: Kendisiyle etkileşimde bulunduğu ve sayı kavramını geliştiren içerikle ve ilk sayı kavramlarının nasıl geliştiği ile doğrudan etkilenen içerikle. Ölçme, veri ve işlemlerin anlamları ilk kategoride düşünülebilir. Temel kural ve işlemler, basamak değeri ve hesaplama ise ikinci kategoride düşünülebilir.

- **İşlemler** (Bölüm 9). Dört işlemden herhangi birisiyle ilişkili hikâye türü problemleri çözerken öğrenciler, üzerine sayarlar, geriye doğru sayarlar, gruplar oluşturup grupları sayarlar ve karşılaştırmalar yaparlar. Sayılarla ilgi yeni ilişkileri ve işe yarar yöntemleri bu süreçte oluştururlar.
- **Ölçme** (Bölüm 19). Küçük bir çocuk için uzunluk, yükseklik, hacim veya ağırlık ölçümlerini belirlemek, sayının önemli bir kullanımıdır. Ölçme, anlamlı sayma ve (sayılar arası ilişkileri) karşılaştırmayla ilişkilidir ve sayıyla çocuğun yaşadığı dünya arasında bağ kurar.
- **Veri** (Bölüm 21): Ölçmedeki gibi veri de sayma ve karşılaştırmaları içerir. Hem saymalar hem de karşılaştırmalar, sayıyı anlamalarına ve sayıyı gerçek-dünya durumlarıyla ilişkilendirmelerine yardımcı olur.
- **Temel Kural ve İşlemler** (Bölüm 10): Sayı ilişkilerinin zengin ve derinlemesine gelişimi, temel kural ve işlemlerde ustalaşmak için kritik bir temel oluşturur. Sayı ilişkileri olmaksızın temel kural ve işlemler sadece ezberlenmelidirler. Sayı anlaşıldığında toplama ve çıkarmayla ilgili temel kural ve işlemler ise göreceli basit genişletmelerdir.
- **Basamak Değeri ve Hesaplama** (Bölüm 11 ve 12): İşlemsel akıcılığa ve sayılarla rahat işlem yapabilmeye katkıda bulunabilecek fikirlerin çoğu, sayıların 10 ile ilişkisinin ve parçalara ayrılmasının ve yeniden farklı şekillerde bir araya getirilmesinin nasıl olduğunun genişletilmesiyle ilişkilidir.

Faydalı Başlangıçları Destekleme

NCTM ve NAEYC (National Association for the Education of Young Children) 2002 yılında birlikte duyurdukları ortak bildiride, tüm çocukların matematik öğretimine daha

erken yaşlarda başlamaya gerek duyduklarını vurgulamışlardır. Hazır olmayla ilgili bu vurgu, National Mathematics Advisory Panel 'in (2008) en son bulgularıyla da uyumludur. Panel, 3-6 yaş grubundaki çocuklara yönelik iyi hazırlanmış üst düzey öğrenme etkinliklerini geliştirmeleri için öğretmenlere araştırmaya dayanan on öneride bulunmuştur:

1. Öğrencilerin matematiğe karşı doğal ilgilerini ve bu ilgiyi kullanarak kendi fiziksel ve sosyal dünyalarını anlamlandırma eğilimlerini geliştiriniz
2. Çocukların aileleri, dil bilimsel, kültürel ve toplumsal alt yapıları, öğrenmedeki bireysel yaklaşımları ve informal bilgileri de dâhil olmak üzere deneyim ve bilgileri üzerine bilgiyi temellendiriniz.
3. Matematik müfredatını ve öğretim uygulamalarını, küçük çocukların bilişsel, dil bilimsel, fiziksel ve sosyal-duygusal gelişim bilgileri üzerine temellendiriniz.
4. Çocukların problem çözme ve akıl yürütme süreçleriyle birlikte temsil etme, iletişimde bulunma ve matematiksel fikirleri ilişkilendirmeyi güçlendirecek öğretim uygulamalarını ve müfredatı kullanınız.
5. Birbirini takip eden önemli matematiksel fikirler ve bilinen ilişkilerle uyumlu ve tutarlı bir müfredatın uygulandığından emin olunuz.
6. Çocukların anahtar matematiksel fikirlerle derin ve sürekli etkileşimde bulunmalarını destekleyiniz.
7. Matematiği diğer etkinliklere diğer etkinlikleri de matematiğe entegre ediniz.
8. Yoğun bir ilgiyle matematiksel fikirleri inceleyip üzerinde durabilecekleri bir bağlamın olduğu oyunda çocukları tutmak için yeteri kadar zaman, materyal ve öğretmen desteği sağlayınız.
9. Geniş bir alana yayılmış uygun deneyim ve öğretim stratejilerini kullanarak matematiksel kavramları, yöntemleri ve dili tanıtınız.
10. Tüm çocukların matematiksel bilgi, beceri ve stratejilerini sürekli ve derinlemesine değerlendirerek öğrenmelerini destekleyiniz.

Durup Düşün!

Tüm bu öneriler kritik olmasına rağmen, bir öğretmen olarak kendinizi geliştirirken bu fikirlerden en önemli ve öncelikle başlanması gerektiğini düşündüğünüz ikisi hangisidir?

Anaokulu Öncesi Dönemde ve Anaokulunda Sayı Gelişimi

Aileler, çocuklarına az sayıda nesneyi, masadaki insanları, oyuncaklarını ve kendi parmaklarını saymalarında yardımcı olurlar. "Hangisindeki daha fazla?" veya "Yeteri kadar var mı? " gibi sorular 2 veya 3 yaşındaki çocukların günlük yaşamlarının bir parçasıdır. Yeterince delil, çocukların sayma ve sayı kavramının ilk anlayışlarına sahip olduklarını göstermektedir (Baroody & Wilkins, 1999; Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978; Gelman & Meck, 1986; NRC, 2001). Bu yüzden, küçük çocukların kavramları tam bir şekilde anlamaları için gereken çeşitli deneyimleri destekleyen bol sayıda etkinliğe yer verdik.

Daha Fazla, Daha Az ve Aynı ilişkileri

"Daha fazla", "daha az" ve "aynı" kavramları, sayı kavramını genel olarak anlamaya katkıda bulunan temel ilişkilerdir. Çocuklar okula başlamadan önce ilişkisel fikirler geliştirmeye başlarlar. Anaokuluna başlayan çocuklara açık bir şekilde sayıca birbirinden farklı olan iki küme gösterildiğinde, hemen tamamı daha fazla olanı seçer. Hatta bu durumu Baroody (1987), "Sezgisel bir tarzda 'daha fazla'yı kullanamayan bir çocuk, eğitsel risk altında olarak düşünülebilir" (s. 29) şeklinde ifade etmiştir. Sınıftaki etkinlikler, çocukların bu temel görüşü temellendirmelerine ve düzeltmelerine yardımcı olmalıdır.

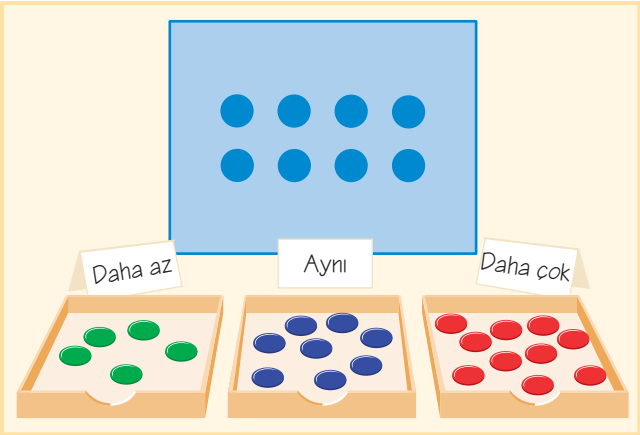
Daha az kavramı daha çok kavramıyla mantıksal olarak ilişkili olmasına rağmen (daha çok elemana sahip olan kümeyi seçme daha az sayıda elemana sahip kümeyi seçmemekle aynıdır) çocuklara daha az ifadesi daha çok ifadesine göre oldukça zor gelmektedir. Olası bir açıklama şudur: Çocuklar daha çok ifadesini kullanabildikleri çok sayıda fırsat yakalamaktadırlar ama daha az ifadesiyle sınırlı sayıda karşılaşmaktadırlar. Öğrencilerinizin daha az kavramını anlamalarına yardım etmek için, bu ifadeyi daha fazla ifadesiyle sıkça eşleştiriniz ve bilinçli bir gayret göstererek "hangisi daha az?" soruları kadar "hangisi daha fazla?" sorularını sorunuz. Örneğin, iki küme verildiğinde daha fazla elemana sahip olanı sınıfınızın doğru bir şekilde seçtiğini var sayınız. Bunu takiben hemen, "hangisi daha az?" sorusunu sorunuz. Böylece, kavram daha iyi bilinen fikirle ilişkilendirilmiş olur ve daha az terimi daha aşina hâle gelir.

Bu üç kavramın tümü için (daha az, daha çok ve aynı) çocuklar, verilen iki küme arasında karşılaştırmalar yapma veya birisini seçme kadar sayma pulları kullanarak da kümeler oluşturmalıdır. Takip eden etkinlik, açıklamaların istenebildiği olası her durumda araştırmacı bir ruhla yürütülmelidir. " Bu kümenin niçin daha az sayıda elemana sahip olduğunu düşünüyorsun?"

Etkinlik 8.1

Daha Az/Daha Fazla /Aynı Kümeleri Yap!

Çalışma istasyonunda veya masada, 4'ten 12'ye kadar eleman içeren kümelerle sekiz kart, küçük sayma pulları veya küp seti ve Daha Çok, Daha Az ve Aynı olarak etiketlendirilmiş indeks kartları bulundurunuz. Öğrencilerinizden her bir kartın yanında sayma pullarıyla üç farklı küme oluşturmalarını isteyiniz: Daha fazla elemana sahip, daha az elemana sahip ve aynı elemana sahip bir küme. Uygun etiketler kümelere yerleştirilecektir (Bkz. Şekil 8.1).



Şekil 8.1 Daha az, daha çok ve aynı eleman sahip kümeler oluşturma

8.1 etkinliğinde öğrenciler, sayma pullarıyla bir küme oluşturmaktadırlar. Bu onlara, kümeler üzerinde düşünmeleri ve çalışırken düşüncelerini düzeltme olanağı sunmaktadır. Sonraki etkinlik sayma pulları kullanılmadan yapılmıştır. Aynı temel fikirlere göndermede bulunmasına rağmen bu etkinlik farklı bir problem durumu sunmaktadır.

Etkinlik 8.2

Aynı Miktarı Bul

Üzerinde farklı kümelerin bulunduğu bir grup kartı çocuklara veriniz. Kullanılabilecek olası kartlardan birisi noktalı kartlardır (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 3-8). Kartlardan herhangi birini çocuklara seçtiriniz ve seçilen kartla aynı miktardaki diğer bir kartı bularak bir çift oluşturmalarını isteyiniz. Diğer çiftleri buldurmaya devam ediniz. Bu etkinliği, "daha az" veya "daha çok" olan noktalı kartları çocuklara buldurtacak şekilde değiştirebilirsiniz.

Bu görevi yaparlarken çocukları gözleyiniz. Sayı fikirleri sadece ve sadece saymaya bağlı çocuklar, kartları rasgele seçip her bir noktayı sayacaktır. Diğerleri, aynı sayıda noktaya sahip gözüken kartlardan birini seçmeyle başlayacaktır. Bu ise dikkat çekici üst düzey bir anlayış olduğunu gösterir. Ayrıca noktaları nasıl saydıklarını gözleyiniz. Saymalar doğru bir şekilde yapıldı mı? Her biri sadece bir kez mi sayıldı? Çocuk sayarken her noktaya dokunmaya gereksinim duydu mu? Çocuklar az elemana sahip örüntülü kümeleri saymaya gerek duymadan tanımaya başladıklarında önemli bir dönüm noktası gerçekleşmiş olur.

Durup Düşün!

Sayılar için temel niteliğindeki ilk fikirlerden bir kısmını görmeye başladınız. Burada durup birinci sınıfı bitirdiklerinde çocukların 8 sayısıyla ilgili bilmesi gerekenler olarak düşündüğünüz önemli fikirlerin bir listesini yapınız (8 sayısı bir örnek olarak kullanılmıştır. 6'dan 12'ye kadar herhangi bir sayı için de bu liste oluşturulabilirdi). Düşüncelerinizi şimdilik bir kenara bırakınız, bu fikirlere daha sonra geri döneceğiz.

Erken Dönemde Sayma

Anlamlı sayma etkinlikleri okulöncesinde başlar. Çocuklar genellikle anaokulunun ortalarında saymanın doğru bir anlayışına sahip olmalıdırlar ama bu fikri kendileri oluşturmalıdırlar. Bu fikir onlara dayatılamaz. Sıralı bir şekilde sayma sadece ezber bir işlemdir. Tüm diğer sayı kavramlarının üzerine dayandırıldığı anahtar kavramsal fikir, saymaya yüklenen anlamdır.

Sayma Becerilerinin Gelişimi. Sayma birbirinden farklı iki beceriyle ilişkilidir. İlk olarak çocuk, sayma sözcüklerinin standart listesini bir sıra içinde ortaya koyabilmelidir: "Bir, iki, üç, dört, …". İkinci olarak çocuk, bu sayı dizisini sayılan küme içindeki öğelerle bire bir eşleştirme yaparak ilişkilendirebilmelidir. Her bir öğe sadece ve sadece bir kez sayılmalıdır.

Bu sayma becerilerinin gelişiminde en önemli etkenler rehberlik ve deneyimdir. Çoğu çocuk anaokuluna gelirken 10 veya daha fazla elemanlı kümeleri sayabilecek durumdadırlar. Bu çocukların yanı sıra zayıf bir alt yapıya sahip olanlar, önceki deneyimlerini zenginleştirecek ek uygulamaya gerek duyabilirler. Kümedeki öğelerin dizilişi ve büyüklüğü sayma başarısıyla ilişkili diğer etkenlerdendir. 12'ye kadar sayma hiçbir örüntü veya tekrar içermediğinden, çoğu çocuk onlardaki (thirteen-onüç, fourteen-ondört, fifteen-onbeş,…) herhangi bir örüntüyü kolayca anlayamaz. Nesneleri sayı sözcükleriyle eşleştirme şeklindeki sayma becerilerini hâlâ öğrenmeye çalışan çocuklara, hareket ettirebilecekleri sayma pulları ile küpler veya kolayca sayılabilecek küme resimleri bir örüntü içinde düzenlenerek verilmelidir.

Saymaya Yüklenen Anlam. Fosnot ve Dolk (2001), 4 yaşındaki bir çocuk için kardineliteyi anlamanın ve bunun saymayla ilişkisini kurmanın hiçte kolay olmayan bir husus olduğunu açıkça ifade etmiştir. En son sayı sözcüğünün kümenin miktarını veya kümenin kardinelitesini ifade ettiğini anlamadan önce çocuklar (nesnelerle sayma sözcüklerini eşleştirerek) nasıl sayılacağını öğreneceklerdir. Bu ilişkiyi kurabilen çocuklar, çokluklarla ilgili başlangıçta sahip olunan görüşlerin netleştirilmesi anlamındaki kardinelite ilkesine sahip olarak adlandırılırlar. Çocukların tamamı olmasa da çoğu $4\frac{1}{2}$ yaşına kadar bu ilişkiyi kurarlar (Fosnot & Dolk, 2001; Fuson & Hall, 1983).



Sözel olarak sayabilen küçük çocuklar saymalarına bir anlam yüklemeyebilirler. Kolayca sayabilecekleri şekilde beşten dokuza kadar belli bir sırada noktaların dizildiği kartı bir çocuğa gösteriniz. Çocuktan noktaları saymasını isteyiniz. Eğer sayma doğruysa, "Kartta kaç tane nokta vardır?" sorusunu sorunuz. Çoğu çocuk tekrar sayacaktır. Anlamanın bir göstergesi, ilk saymanın yeniden saymadan ilk saymayı yansıtan bir cevap olmasıdır. Şimdi de sayma pulu setinden aynı sayıda sayma pullarını belirlemelerini sağlayınız. "Lütfen kartın üzerindeki nokta sayısı kadar sayma pulunu ayırınız." İzlenmesi gereken çok sayıda gösterge vardır. Çocuk, yeni-

den saymadan ne kadar ayıracağını biliyor mu? Sayma pullarını mı sayıyor yoksa sayma pullarıyla noktaları birebir mi eşleştiriyor? Çocuk, nokta sayısı kadar sayma pulunun olduğu konusunda kendinden emin mi? ◆

Fosnot ve Dolk, 4 yaş grubundaki çocukların bulunduğu bir sınıfı ele almışlardır. Bu sınıfta 17 kişinin olduğunu bilen çocuklar, her birinin süt paketinden birer tane alması durumunda kaç paket gerekeceğinden emin değildiler.

Sayma anlayışlarını geliştirmek için sayma veya karşılaştırma içeren herhangi bir oyun veya etkinliği öğrencilerinize yaptırınız. Basit bir öneri takip eden etkinlikte verilmiştir.

Etkinlik 8.3

Olukları Doldur

Dört "oluklu" basit bir oyun panosu oluşturunuz. Her bir oluk 1 inç^2 boyutlarında üstünde bir yıldız işareti olan 12 kareli bir sütun içersin. Çocuklar sırayla zar atarak sayma pulunun numarasını gösteren sayıları toplasınlar. Sonra bu sayma pullarını oluklardan birisine yerleştirsinler. Amaç sayma pullarıyla olukları doldurmaktır. Bir seçenek olarak, olukların tam olarak doldurulmasını isteyiniz. Zarın üst yüzüne 5 gelmesi durumu, dört boşluklu bir oluğu doldurmada kullanılamaz.

Bu "oyun" size, çocuklarla sayılar hakkında konuşma ve onların düşüncelerini değerlendirebilme olanakları sunar. Çocukların zarın üstündeki noktaları nasıl saydıklarını izleyiniz. "Doğru sayıda sayma pulu seçtiğinizden nasıl eminsiniz?" ve "Oluğa kaç tane sayma pulu koydunuz? Oluğu doldurmak için kaç tane daha koymalısınız?" gibi sorular sorunuz.

Ayrıca Etkinlik 8.1 ve 8.2, biçimlendirici değerlendirme için olanaklar sunmaktadır. Atıştırma sırasında kaç tane peçetenin gerektiğini sayma gibi sıradan sınıf etkinlikleri, çocuklar için sayıları anlama, öğretmenler içinse öğrencilerin fikirlerini dinleme fırsatları sunmaktadır.

Sayıyı Tanıma ve Yazma

Çocuklara tek basamaklı sayıları okuma ve yazmada yardımcı olma, alfabenin harflerini yazma ve okumayı onlara öğretmeye benzer. İkisinin de sayı kavramıyla herhangi bir ilişkisi yoktur. Geleneksel yaklaşımla öğretim, tekrarlı uygulamaların farklı biçimlerini içermektedir. Çocuklar sayfalar dolusu sayıların bulunduğu kağıtlardaki izler üzerinden gitme, 0 dan 10 a kadar sayıları tekrar tekrar yazma, oyun hamurlarıyla sayıları oluşturma, kum üzerinde sayıların izlerini sürme, havada ya da tahtada sayıları yazma ve buna benzer birçok etkinliği yaparlar.

Sayı tanımada hesap makinesi güzel bir eğitsel araçtır. Çocuklara sayılar konusunda yardım etmesine ek olarak başlangıç etkinlikleri, öğrencilerin hesap makineleriyle aşinalığını geliştireceğinden muhtelemelen daha karmaşık etkinlikleri yapmalarına yardımcı olacaktır.

Etkinlik 8.4

Bul ve Tuşa Bas



Her çocuğun elinde bir hesap makinesi olmalıdır. Etkinliğe hep çocuklardan "Clear" (Temizle) tuşuna basmalarını isteyerek başlayınız. Sonra bir sayı söyleyiniz ve çocuklar hesap makinesinde bu sayının olduğu tuşa bassınlar. Tepegözde gösterebileceğiniz bir hesap makineniz veya etkileşimli beyaz tahtanız varsa kendi cevaplarını kontrol etmeleri için öğrencilerinize doğru tuşu gösterebilirsiniz. Ya da çocukların cevaplarını karşılaştırmaları için bu sayıyı tahtaya yazabilirsiniz. Tek basamaklı sayılarla başlayınız. Daha sonra, birbiri ardına iki veya üç sayı söyleyerek devam ediniz. Örneğin, "Üç, yedi, bir" deyiniz. Öğrenciler söylediğiniz sayı dizisinin tamamını tuşlara basarak oluştursunlar.

Okul öncesi ve anaokulunda uygulanan alıştırmaların belki de en yaygın olanı çocukların sayılarla kümeleri eşleştirmeleridir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 2). Çocuklara kümelerin bulunduğu resimler verilir ve kaç tane olduğunu yazmaları veya kaç tane olduklarını gösteren sayılarla eşleştirmeleri istenir. Bunun alternatifi olarak bir sayı verilir ve bu sayı kadar nesnenin olduğu bir kümeyi çizmeleri veya oluşturmaları istenir. Çoğu öğretmen kaynak kitapları çocukların, nilüfer yaprağı üzerinde numaralandırılmış kurbağaları noktalarla eşleştirmedeki gibi bir sayı ile doğru büyüklükteki kümeyi eşleştirebildiği öğrenme merkezli etkinlikleri tanımlamasına rağmen, bu etkinliklerin sadece kümeleri sayma becerileriyle sayıyı tanıma ve yazmayla ilişkili etkinlikler olduğunu aklınızda tutmanız önemlidir. Çocukların bu etkinliklerde başarılı olması durumunda daha ileri kavramlara doğru yol almanın zamanı gelmiştir.

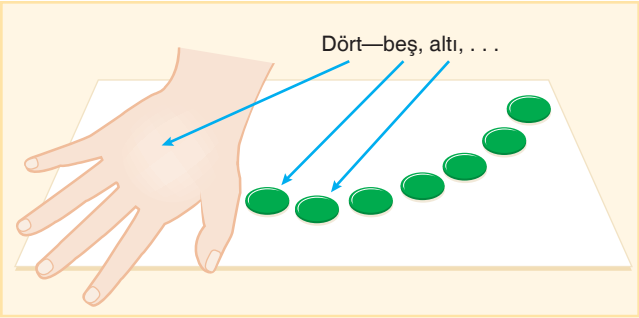
Üzerine ve Geri Sayma

Küçük çocukların çoğu ileri doğru sayma işlemiyle aşina olmasına rağmen, üzerine ve geri sayma bu çocuklara zor gelen becerilerdir. Sıkça kullanılabilecek kısa pratik alıştırmalar önerilebilir.

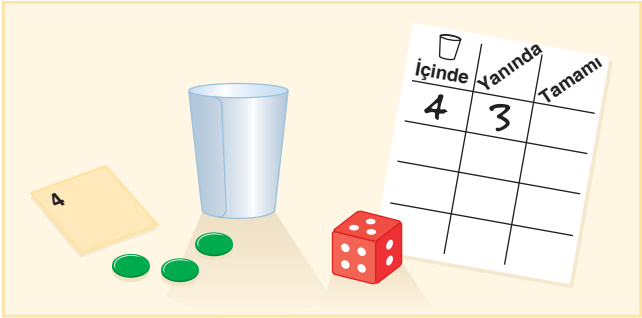
Etkinlik 8.5

İleri ve Geri Sayma

Belli bir hedef sayıdan ileriye ve geriye ritmik sayma önemli bir sayma alıştırmasıdır. Örneğin, sınıfta herkesin önünde beş sandalye ve beş öğrenciyi sıraya diziniz. Tüm sınıf 1'den 5'e kadar sayarken çocuklar sırayla sandalyeye otursunlar. 5 gibi hedef sayısına ulaşılıncaya kadar bu işlem tekrar edilsin; 5' e ulaşıldığında sandalyeye oturan çocuk ayağa kalkar ve 1'e kadar geriye doğru sayma yapılır. Geriye doğru sayma devam ederken, çocuklar sırayla birer birer ayağa kalkar. Oyun "1,2,3,4,5,5,4,3,2,1,1,2,..." şekilde devam eder. Okul öncesi, anaokulu ve birinci sınıf öğrencileri bu tip alıştırmaları eğlenceli ve teşvik edici olarak görürler. İleri ve geri ritmik saymada (el çırpma, arkasını dönme gibi) çeşitli hareketler kullanılabilir.



Şekil 8.2 Üzerine sayma: "Dört sayma pulunu saklayınız. Saklı sayma puluna karşılık gelen sayıdan başlayarak sayınız."



Şekil 8.3 Tamamı kaç tanedir? Toplamı söylemek için çocuklar nasıl saymaktadır? Kaptaki sayma pullarını boşaltarak mı? Kaptaki sayma pullarını kullanmadan 1'den itibaren ileriye doğru sayarak mı? Üzerine sayarak mı?

Bu son etkinlik, öğrencilerin sadece hem ileri hem geriye doğru saymada sözcüklere aşina olmalarına ve 1 dışındaki sayılarla da saymalar yapmalarına yardım etmek için tasarlanmıştır. Küçük öğrenciler için hiçte kolay olmamasına rağmen bu etkinlikler, üzerine veya geri saymayı anlamlı bir şekilde yapmalarına göndermede bulunmamaktadır. Fosnot ve Dolk (2001) sayı hissini kazanma yolculuğunda saymayı bir " mihenk taşı " olarak tanımlamaktadır. Takip eden iki etkinlik bu amaçla tasarlanmıştır.

Etkinlik 8.6

Sayma Pullarıyla Üzerine Sayma

Her bir çocuğa 10 veya 12 adet küçük sayma pulu verip sıraları üzerinde soldan sağa doğru sıralamalarını isteyiniz. Sayma pullarından dörde karşılık gelen kadarını sayıp sol ellerinin altına gizlemelerini veya bir kaba yerleştirmelerini söyleyiniz (Bkz. Şekil 8.2). Sonra, "Elinizi işaretledikten sonra elinizin altında kaç tane var?" deyiniz (Dört). "Şu şekilde sayalım: D-Ö-R-T (ellerini işaret ederek), beş, altı. . . " Elin altında gizlenen başka sayma pullarıyla etkinliği tekrarlayınız.

Takip eden etkinlik aynı kavramı biraz daha problem temelli bir yaklaşımla incelemektedir.

Etkinlik 8.7

Asıl Üzerine Sayma

İki kişilik bu "oyun" için 1'den 7'ye kadar numaralandırılmış bir deste kart, bir zar, kağıt bardak ve sayma pulları gerekmektedir. Birinci oyuncu en üstteki kartı açarak buna karşılık gelen sayma pullarını kağıt bardağın için koyar. Kaç tane olduğunu hatırlatması için açılan kart bardağın yanına konur. İkinci çocuk zarı atarak üst yüze gelen sayı kadar sayma pulunu kağıt bardağın yanına yerleştirir (Bkz. Şekil 8.3). Birlikte toplam kaç tane sayma pulu olduğuna karar verirler. "Kabın içinde", "Yanında" ve "Tamamı" başlıklı sütunların olduğu bir kayıt defteri bir seçenek olarak kullanılabilir. Kart destesindeki en büyük sayının hangisi olacağı ihtiyaca göre ayarlanabilir.

Son etkinlikte öğrencilerin toplam miktarı nasıl belirlediklerini izleyiniz. Henüz üzerine sayma yapamayan çocuklar, kaptaki sayma pullarını ortaya saçarak saymak isteyebilir veya kaptan sayma pullarını çıkarmadan birden ileri doğru sayabilirler. Bu stratejileri kullanmalarına izin verme konusunda tereddüt etmeyiniz. Çocuklar oynamaya devam ederlerken er ya da geç üzerine saymayı anlamlı ve kullanışlı bir strateji olarak kullanacaklardır.

Erken Dönemde Sayı Hissi

Sayı hissi gibi terimlerin tanımı çok açık olmamasına rağmen, bu terim 1980'lerin sonlarında kullanılan popüler bir terimdi. Howden (1989) sayı hissinini "sayılar ve birbirleriyle ilişkilerine yönelik doğru bir sezgi olarak" tanımlamıştı. "Sayı hissi, çeşitli bağlamlarda sayıları görselleştirme ve geleneksel algoritmalarla sınırlandırılmayacak yaklaşımlarla sayıları ilişkilendirmenin yapılabildiği sayı araştırmalarının bir sonucu olarak aşamalı bir şekilde gelişir." (s. 11). Bu tanım hâlâ en iyi tanımdır.

NCTM Standartları

İlkeler ve Standartlar'da sayı hissi terimi, sayı ve İşlemler öğrenme alanının tamamında herhangi bir kısıtlama olmaksızın kullanılmıştır. "Öğrenciler sayılarla uğraştıkça, sayılar hakkında düşünmede sayı hissinin en önemli işareti olan esnekliği adım adım geliştireceklerdir. Sayı hissi, öğrenciler sayının büyüklüğünü anladıklarında, sayılar hakkında düşünebilmenin ve onları temsil edebilmenin birçok farklı yolunu geliştirebildiklerinde, sayıları bir referans noktası olarak kullanabildiklerinde ve sayılar üzerinde işlemlerin etkisine yönelik doğru algılar oluşturduklarında gelişir." (s. 80). ◆

Sayı hissi tartışması, küçük sayılardan 20'ye kadarki sayılarla ilgili öğrencilerin kurdukları ilişkiler ve ilişkilendirmelerin çeşitlerine bakarken başlamaktadır. Ama "sayılara yönelik doğru sezgi" bu küçük doğal sayılarla sonlanmaz. Çocuklar, sayıları işlemlerde kullanmaya başladıklarında, basamak değerine yönelik bir anlayış oluşturduklarında, esnek hesaplama yöntemleri düşündüklerinde, daha büyük sayıların, kesirlerin, ondalık sayıların ve yüzdelerin ele alındığı durumlarda tahminler yaptıklarında sayı hissini geliştirmeye devam ederler.

Bu bölümde şu ana kadar tartışılan başlangıç düzeyindeki sayı fikirleri, sayının ilkel yönleriyle ilişkilidir. Ne yazık ki çoğu ders kitapları da bu başlangıç düzeyindeki fikirlerden, öğrencilerin yeni başlıklara aktarılabilecekleri sayı fikirlerini sınırlı bir yığın şeklinde bırakarak doğrudan toplama ve çıkarmaya geçerler. Sonuç olarak da öğrenciler, basit hikâyeleştirilmiş problemleri çözerken sıkça birer birer saymaya devam ederler ve temel bilgi ve kurallarda ustalaşmada zorluklar yaşarlar. Erken dönemlerdeki sayı hissinin gelişimi, çoğu geleneksel anaokul öncesi-Anaokulu-2. Sınıf programlarındakinden daha fazla ciddiye ele alınmayı gerektirmektedir.

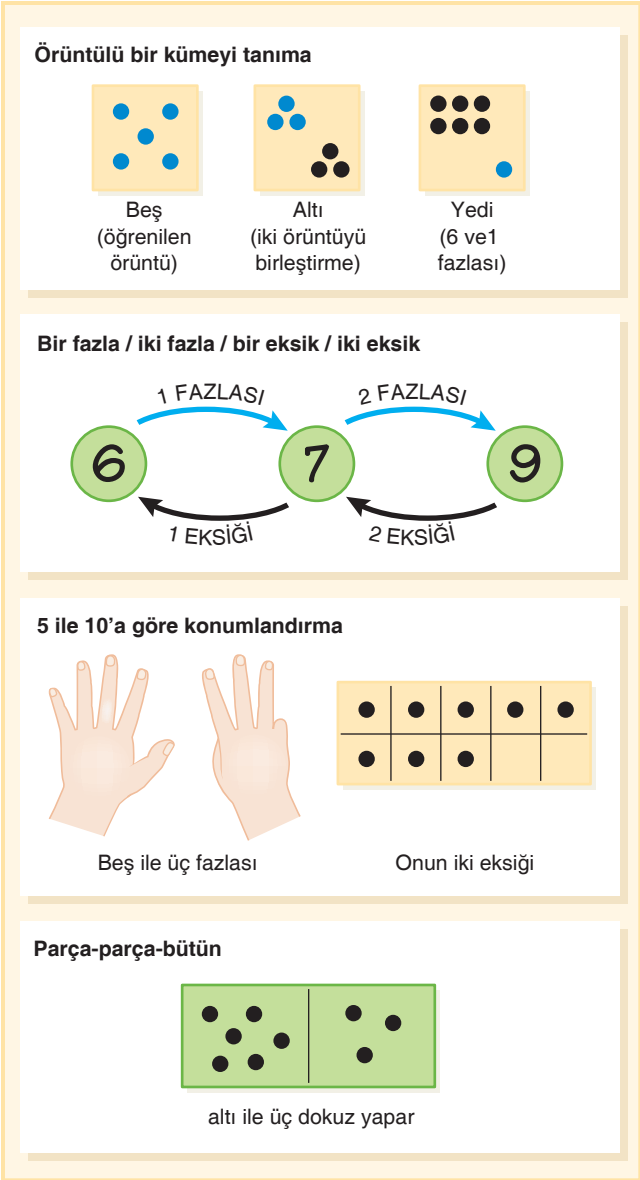
1'den 10'a Kadarki Sayıların Birbiriyle Olan İlişkileri

Çocuklar bir kez kardinalite kavramını edindiklerinde ve sayma becerilerini anlamlı bir şekilde kullandıklarında, şimdiye kadar tanımlanan çeşitli sayma etkinliklerinden çokta fazla olmayan kazanımlar edineceklerdir. Çocukların tamamen saymaya bağlı olmayan esnek bir sayı kavramı olan sayı hissini geliştirmelerini sağlamak için daha fazla ilişkiler kurulmalıdır.

Şekil 8.4'te, çocukların sayılarla ilgili geliştirebilecekleri ve geliştirmeleri gereken dört farklı ilişki türü gösterilmiştir.

- *Örüntülü Kümeler.* Öğrenciler kümelerdeki öğeleri, örüntülü dizilişlerle algılamayı öğrenebilir ve saymadan kaç tane olduğunu söyleyebilirler. Sayıların çoğunda birçok ortak örüntüler vardır. Küçük sayılar için örüntüler kolaylıkla iki veya daha fazla şekilde oluşturulabilir.
- *Bir, iki fazlası; bir, iki eksiği.* İki fazlası ve iki eksiği ilişkileri, sadece üzerine iki sayma veya geriye doğru ikişer sayma becerisinden daha fazla bir şeyi ifade eder. Örneğin çocuklar, 7'nin 6'dan bir fazla veya 9'dan 2 eksik olduğunu bilmelidirler.
- *Sayıları 5 ve 10'a göre konumlandırmak veya "kritik eşikler" olarak 5 ve 10.* Sayma sistemimizde önemli bir role sahip olduğundan ve beş ile beş 10 yaptığından 10, 1'den 10'a kadar olan sayılar için bağıntılar geliştirmede oldukça kullanışlıdır.
- *Parça-parça-bütün ilişkileri.* Bir sayının iki veya daha fazla parçadan oluştuğunu kavramsallaştırabilme, sayılarla ilgili geliştirilebilecek en önemli bir ilişkidir. Örneğin 7, 3 elemanlı bir küme ile 4 elemanlı bir kümenin veya 2 elemanlı bir küme ile 5 elemanlı bir kümenin birleşimi olarak düşünülebilir.

Öğrencilerin bu ilişkileri oluştururken kullanacağı temel araç, sahip oldukları sayı bilgisi olan saymadır. Öyleyse ilk olarak, çok sayıda saymayı gözleyeceksiniz ve bir ilerleme sağlayıp sağlamadıkları üzerinde duracaksınız. Sabırlı olunuz! Çocuklar bu yeni ilişkileri geliştirdikçe ve daha güçlü fikirleri kullanmaya başladıkça saymaya daha az gerek duyacaklardır.

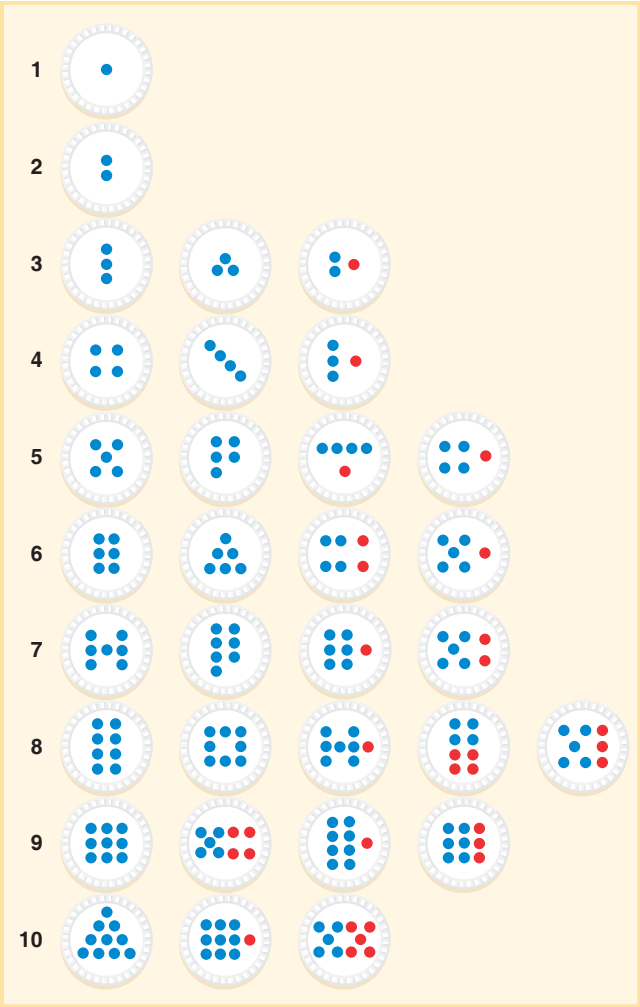


Şekil 8. 4 Öğrencilerin geliştirebilecekleri dört sayı ilişkisi.

Örüntülü Kümeyi Tanıma

Zarları kullanarak oynadıkları çok sayıda oyundan dolayı çoğu çocuk, standart bir zar üzerindeki nokta dizilişlerini tanımayı öğrenirler. Benzer şekilde, diğer örüntülerde kullanmak için (saymaya gerek duymadan tanıyabilme olarak ta bilinen) hemen tanıma becerisi geliştirilebilir. Burada önerilen etkinlikler, ilişkilerin oluşturulabildiği örüntülerle ilgili derinlemesine düşünmeyi teşvik eder. Bu durumda ezbere saymaksızın miktarları söyleyebilme, (bilinen örüntülü bir kümeden) "üzerine sayma" ya veya sayıların kombinasyonlarını öğrenmeye (bilinen daha küçük iki örüntüden yeni bir örüntüyü görebilmeye) yardımcı olabilir.

Örüntü tanıma etkinliklerinde kullanılabilecek iyi materyallerden biri noktalı tabak setidir. Bu materyal küçük kağıt tabaklar kullanılarak yapılabilir. Yapışkanından sıyrılıp



Şekil 8. 5 "Noktalı Tabaklar" için nokta örüntülerinin bir derlemesi

çıkarılabilen noktalı kağıtlar çoğu kırtasiyede bulunabilir. Bir örüntü derlemesi Şekil 8.5'te gösterilmektedir. Bazı örüntülerin daha küçük iki örüntünün bir kombinasyonu veya bir ya da iki fazla sayıda noktadan oluşmuş örüntüler olduğuna dikkat ediniz. Bunlar iki farklı renk kullanılarak yapılmalıdırlar. Noktaları birbirine yakın yerleştiriniz. Noktalar birbirinden uzak olduklarında örüntüleri belirlemek güçleşir.

Etkinlik 8.8

Örüntüleri Öğrenme

Örüntüleri tanıtma amacıyla her bir öğrencinize on sayma pulu ve bu sayma pullarını üzerlerine serebilmeleri için bir parça elişi kâğıdı veriniz. Noktalı tabaklardan birini 3 saniye havada tutunuz. "Elişi kâğıdınızın üzerindeki sayma pullarını kullanarak tabakta gördüğünüz örüntüye benzer bir örüntü yapınız. Kaç tane nokta var? Örüntü neye benzemektedir?" Kaç tane nokta olduğunu bulurlarken ve bir örüntü oluştururlarken belli bir süreyi tartışma için ayırınız. Her gün yeni farklı birkaç örüntüyle bu etkinliği yapınız.

Etkinlik 8.9

Görünüp Hızlıca Kaybolan Noktalı Tabak

Noktalı tabaklardan birini 1-3 saniye havada tutunuz. "Kaç tane nokta görüyorsunuz? Örüntü neye benzemektedir?" Çocuklar, kaç tane nokta olduğunu ve nasıl bulduklarını söylerken hızlı davranmaktan hoşlanırlar. Onların güven kazanmalarını sağlama sürecinde kolayca bulunabilecek örüntüleri ve nokta sayısının azar azar arttırıldığı çok sayıda durumu veriniz. Öğrenciler bir çalışma istasyonu etkinliği olarak birbirleriyle bu etkinliği yapabilirler.

Tabaklarla yapılan hemen tanıma etkinlikleri heyecan vericidir ve gün boyu herhangi bir anda veya ders aralarında 5 dakika zaman ayrılarak yapılabilir. Bu etkinlikleri, ilkokulun herhangi bir sınıf düzeyinde veya yılın herhangi bir anında kullanmak oldukça değerlidir.

Bir-İki Fazlası, Bir-iki Eksiği

Çocuklar sayarlarken, bir sayının diğer bir sayıyla ilişkisini düşünmeleri için hiçbir sebepleri yoktur. Amaç sadece, sonuna gelinceye kadar sayıp nesnelerle bunlara karşılık gelen sayı sözcüklerini eşleştirmektir. 6 ve 8'in "İki fazlası", "iki eksiği" ikiz bağıntılarıyla ilişkili olduğunu öğrenme, sayma gerektiren ödevlerdeki fikirler üzerine düşünme gerektirmektedir. Üzerine bir-iki sayma (veya geriye doğru bir-iki sayma) bu fikirleri oluşturmada kullanışlı bir araçtır.

"İki fazlası" ilişkilerinin "iki saydıktan sonra gelen" den anlamlı bir farkı olduğuna dikkat ediniz. Sonraki ifadedeki ilişki, temsil ettikleri çokluklara değil sayı sözcük dizilerine uygulanabilir. İki saydıktan sonra gelen ilişkisi alfabenin harflerine uygulanabilir. H harfi F harfinden iki sonraki harftir. Bununla beraber F ve H arasında niceliksel veya sayısal hiçbir fark yoktur. Bu nicelikleri sayarken sayı dizisi kullanılmasa dahi 8 sayısı hâlâ 6 sayısından iki fazladır. Geliştirmek istediğiniz şey sayısal ilişkidir.

Öğrencilerinize bu ilişkilerlerde yardımcı olmaya başlamak için takip eden etkinlik iyi bir başlangıç noktasıdır. Dört sayı ilişkisinden herhangi birisi için de kullanılabilmesine rağmen açıklamada belirtildiği gibi bu etkinlik iki fazlası ilişkisi üzerine yoğunlaşmaktadır.

Etkinlik 8.10

İki Fazlası Olan Bir Küme Yap

Öğrencilerinize yaklaşık olarak altı adet noktalı kart veriniz. Öğrencilerin görevi, kartta gösterilen kümeden iki fazla elemana sahip bir kümeyi sayma pullarıyla oluşturmaktır. Benzer şekilde sekiz noktadan on noktaya kadar nokta içeren kartları dağıtınız ve öğrencilerinizden ellerindeki her bir kart için kartta gösterilenden iki eksik olanı diğer kartlar arasında bulmalarını isteyiniz. (Üzerinde 1 ve 2 nokta bulunan kartlar için iki eksiğini bulma etkinliğini yapmayınız.)

Çocukların bir kümeyi buldukları veya bir küme oluşturdukları etkinliklerde, incelenen kümelerin tamamına bir sayı kartını (üzerinde sayıların yazıldığı küçük bir kartı) ekleyebilirler. Birlikte çalıştıkları arkadaşlarına bir sayı cümlesini sırayla okumaları da teşvik edilmelidir. Örneğin, dört elemanlı bir kümeden iki fazla olan bir küme yapıldığında çocuk, " dördün iki fazlası altıdır" veya "altı dörtten iki fazladır" şeklinde sayı cümlelerini söyleyerek okuyabilir. Takip eden etkinlik bu türden ilişkileri bir araya getirmektedir.

Etkinlik 8.11

Daha Fazla veya Daha Az

İki oyuncuyla veya küçük bir grupla bu etkinlik yapılabilir. Şekil 8.6'da gösterildiği gibi daha az veya daha az desteleri yapmak için Çalışma Yaprak Seti-1'i kullanınız. Her bir çeşit karttan beş ya da altı tane yapınız. Ayrıca üzerinde her birinden ikişer tane olmak üzere 3'ten 10'a kadar sayıların yazıldığı kartlara (Çalışma Yaprak Seti-2) gerek duyacaksınız. Çocuklardan biri tek bir sayı kartı çekerek herkesin göreceği şekilde yerleştirir. Bu sayı kadar sayma pulunu bir kabın içine koyar. Sonra bir diğer çocuk daha çok veya daha az yazılı kartlardan birini çeksin ve üzerinde sayının bulunduğu kartın yanına koysun. Daha çok yazan kartlar için uygun şekilde sayma pulları kaba eklensin. Daha az yazılı kartlar için kaptan sayma pulları çıkarılacaktır. Üzerinde sıfır yazılı kartlar için ise herhangi bir işlem yapılmayacaktır. Kap doğru bir şekilde ayarlandığına artık her çocuk kapta kaç tane sayma pulunun olduğunu tahmin edebilir. Sayma pullar kaptan dışarı çıkarılır ve sayılır. Böylece bir tur oyun bitmiş olur ve yeni bir sayı kartı çekilir.



Şekil 8.6 "Daha fazla veya daha az" etkinliğini oynamak için materyaller (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 1)

"Daha fazla veya daha az" oyunu sınıfla birlikte oynanabilir. Kaç tane sayma pulunu kaba koyduğunuzu sınıfa duyurup bu sayıyı tahtaya yazınız. Bir öğrenciye kart çektiriniz ve öğrencilerinizin yeni miktarı tahmin etmelerini isteyiniz. Daha fazla ve daha az sözcükleri aritmetik işlemlerle ilişkilendirmek için, formel olarak henüz tanıtılmamalarına rağmen toplama veya çıkarmayla eşleştirilebilir veya yer değiştirilebilir.

Hesap makinesi, bir fazlası, iki fazlası, bir eksiği ve iki eksiği ilişkilerini uygulamada heyecan verici bir aygıttır.

Etkinlik 8.12

İki Fazlası Hesap Makinesi



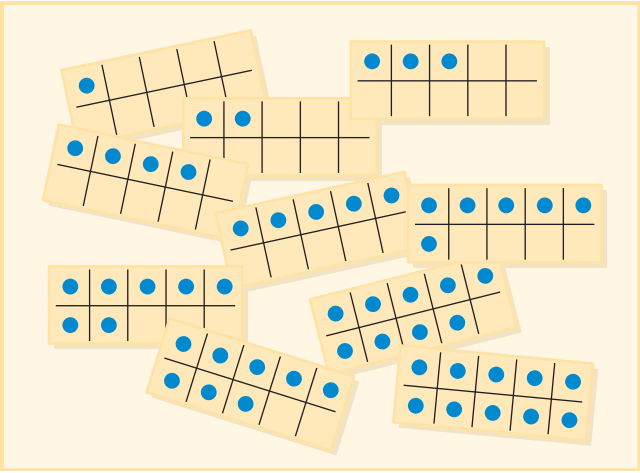
Çocuklara iki fazlası hesap makinesinin nasıl yapıldığını öğretiniz. 0 [+] 2 [=] tuşlarına basınız. Böylece bir iki fazlası hesap makinesi yapılmış olur. Şimdi de istediğiniz bir sayı tuşuna, örneğin 5 tuşuna basınız. Çocuklar parmaklarını [=] tuşu üzerinde tutarak 5'ten iki fazla olan sayıyı tahmin ederler. Sonra [=] tuşuna basarak sonuçlarını doğrularlar. Eğer işlem tuşlarından (+, −, ×, ÷) herhangi birine basmazlarsa, "makine" bu şekilde işlem yapmaya devam edecektir.

İki fazlası makinesinde gerçekte olan şey makinenin en son işlemi hafızasına alması ve "hatırlama"sıdır. Bu durumda hesap makinesi, "+2" yi hatırlar ve [=] tuşuna basıldığında pencerede gözüken sayı hangisi ise ona ekler. Çocuk [=] tuşuna basmaya devam ederse hesap makinesi ikişer ikişer sayacaktır. İstenen herhangi bir anda yeni bir sayı tuşu ve arkasından eşit tuşuna basılabilir. Bir iki eksiği makinesi yapmak için, 2 [−] 2 [=] tuşlarına basınız (Negatif sayıyı önlemek için önce 2 tuşuna basınız). Başlangıçta öğrenciler unutarak işlem tuşlarına basarlar. Bu da hesap makinelerinin yaptığı işlemi değiştirir. Bununla birlikte çok geçmeden öğrenciler, hesap makinesini bir fonksiyon makinesi olarak kullanmanın yolunu öğrenmiş olurlar.

"İki fazlası hesap makinesi", basılan iki veya daha fazla basamaklı sayılar da dâhil olmak üzere herhangi bir sayının iki fazlası olan sayıyı üretir. Öğrenciler iki basamaklı sayılarla karşılaşır karşılaşmaz iki fazlası ilişkileri bu sayıları da içerecek şekilde genişletilmelidir. Bunu yapmanın bir yolu verilen 7 sayısı için iki fazlası işlemini yapmalarını sormaktır. Doğru cevap bulunduktan sonra, "37'nin iki fazlası hangi sayıdır?" sorusunu sorunuz ve benzer işlemi sonu 7 ile biten diğer sayılarla da yapınız. Bunu 8 veya 9 sayıları için denediğinizde, 28'in iki fazlasına verilen cevabın "yirmi-on" denmesindekine benzer bazı zorluklar yaşayabilir ve tuhaf cevaplar alabilirsiniz. Birinci sınıfta bu zorluk oldukça değerli bir sonucu doğrular. "Daha fazla veya daha az" etkinliği gerçek sayma pullarının kullanılamayacağı daha büyük sayılara genişletilebilir.

Sayıları 5 ve 10'a göre konumlandırmak

Burada tekrar öğrencilerimize, verilen bir sayıyı başka sayılarla, özel olarak 5 ve 10 ile, ilişkilendirmelerine yardımcı



Şekil 8.7 Onluk kartlar

olmak istiyoruz. Bu ilişkiler özellikle sayıların farklı kombinasyonlarını düşünürken kullanışlıdır. Örneğin, takip eden durumların her birisinde 8'in, 5'in 3 fazlası olduğu ve 10'un iki eksiği olması bilgisinin 5 + 3, 8 + 6, 8 – 2, 8 – 3, 8 – 4, 13 – 8 işlemlerinde nasıl bir rol oynayabildiğini düşününüz (Bu örneklerin her birinde burada durup 5 ve 10'un rolünü düşünmek değerlidir). Benzer ilişkiler daha sonra, 68 + 7'de olduğu gibi daha büyük sayılarla zihinsel işlemlerin geliştirilmesinde kullanılabilir.

Bu ilişki için kullanılabilecek en yaygın belki de en önemli model onluk karttır. Basit bir onluk kart, sayıları görselleştirmek için sayma pullarının veya noktaların yerleştirilebildiği 2 × 5 boyutunda düzenlenmiştir (Bkz. Şekil 8.7). Onluk kartlar elişi kâğıdının tamamını kaplayacak şekilde kolayca çizilebilir (veya Çalışma Yaprak Seti 10'u kullanınız). Başka da bir şey gerekmemektedir ve her çocuk bir tanesine sahip olabilir. Onluk kart bu kitapta çok çeşitli etkinliklerle birlikte kullanılmıştır ve çoğu matematik ders kitabında yer alır.

Onluk kartı henüz incelemeyen anaokulu veya birinci sınıfın ilk dönemindeki çocuklar için beşlik kartla başlamak iyi bir fikirdir. Beş bölümlü bir satır olarak bu kart yine el işi kağıdı üzerine çizilebilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 9) Çocuklara beşlik karttaki bölmelere sığabilecek onlu sayma pulları sağlayarak takip eden etkinliği yapınız.

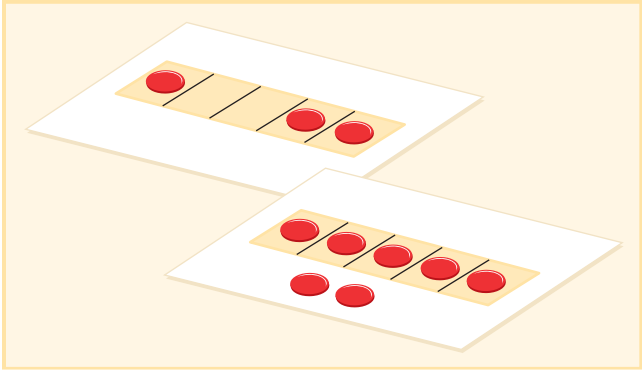
Etkinlik 8.13

Beşlik Kart Ne Olduğunu Söyler

Beşlik kartlardaki her bir bölüme sadece bir sayma pulunun konulmasına izin verildiğini açıklayınız. Beşlik kartın bulunduğu elişi kağıtlarının konduğu zemin üzerine başka sayma pulunun konmasına izin verilmez. Beşlik kart üzerinde 3'ü göstermelerini isteyiniz. "Kendi elişi kâğıdınızda yer alan 3 için ne söyleyebilirsiniz?" Çok sayıda öğrencinin cevaplarını dinledikten sonra 0'dan 5'e kadarki sayılarla bu işlemi deneyiniz. Çocuklar onluk kartların üzerine sayma pullarını istedikleri şekilde yerleştirebilirler. Neleri gözledikleri bir çocuktan diğer çocuğa göre oldukça farklılaşacaktır. Örneğin, dört sayma pulunu kullanarak beşlik kartın iki ucuna ikişer tane sayma pulu yerleştiren bir çocuk, "Arada bir tane boşluk olacak" veya "İki ile ikinin toplamıdır" diyebilir. Doğru olan tüm cevapları kabul ediniz. 5'i elde etmek için kaç tane daha sayma puluna ihtiyaç duyacakları veya 5'ten ne kadar uzakta olduğunu gösteren sayı üzerine dikkatlerini çekiniz. Her bir bölüme konacak sayma pulunun bir tane olması kuralı hâlâ geçerlidir. Şekil 8.8'de gösterildiği gibi 5'ten büyük sayılar, tamamlanmış bir beşlik kart kullanılarak gösterilmiştir. Artan sayma pulları beşlik kartların üzerinde değil elişi kâğıdı üzerinde gösterilmiştir. Tartışma sırasında dikkatlerini 5 ve daha fazla sayılardaki gibi büyük sayılar üzerine odaklayınız: "yedi, beş ve iki fazlasıdır."

Beşlik kartın gerçekte 10'a göre konumlandırılmış sayılara değil 5'e göre konumlandırılmış sayılarla olan ilişkiye yoğunlaştığına dikkat ediniz. Aşağı yukarı bir hafta beşlik kartlar kullanıldıktan sonra onluk kartları tanıtınız (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 10). "Beşlik kart ne olduğunu söyler" etkinliğinin onluk karta uyarlanmış şekliyle oynamak isteyebilirsiniz ama onluk karttaki sayıları göstermenin kuralını hemen şu şekilde tanıtınız: Okurken yaptığınız gibi *soldan başlayarak her zaman üstteki birinci sırayı doldurunuz. Üst sıra dolduktan sonra sayma pulları, soldan sağa doğru alt sıraya yerleştirilmelidir.* Bu kural, şekil 8.7'de gösterildiği gibi onluk kartta sayıları göstermenin "standart" yolunu üretecektir.

Belli bir süre için çoğu çocuk, onluk kartlarındaki her bir sayma pulunu sayacaklardır. Bazıları sayma pullarının tamamını eline alıp boş bir onluk kart üzerinde teker teker her bir sayıyı oluşturmaya başlayacaktır. Kısa süre içerisinde diğerleri ekleyerek veya çıkararak istenen sayıyı oluşturmak için beşli bir satırdakileri saymayı öne çıkarmadan gerekli ayarlama yapmayı öğreneceklerdir. Öğrencilerinize baskı uygulamayınız. Sürekli pratik yaparak tüm öğrenciler gelişme göstereceklerdir. Onluk kartı nasıl kullandıkları size, öğrencinin mevcut sayı kavramının gelişimi hakkında bir içgörü sağlayacaktır.



Şekil 8.8 Beşlik kart, 5'e göre konumlandırma üzerine odaklanır. Sayma pulları, her bir bölmeye sadece bir tane konacak şekilde yerleştirilir ve öğrenciler kartta oluşturdukları sayıların nasıl göründüğüne yönelik konuşurlar.

Etkinlik 8.14

Birbirine Karışmış Çılgın Sayılar

Bu etkinlik Mathematics Their Way'den (Baratta-Lorton, 1976) uyarlanmıştır. Tüm öğrenciler aynı sayıyı gösteren onluk kartlarını oluştururlar. Öğretmen 0 ile 10 arasında rastgele bir sayı söyler. Her sayıdan sonra çocuklar, onluk kartlarını bu yeni sayıları göstermek için değiştirirler. Çocuklar aşağı yukarı 15 adet "Birbirine karışmış çılgın sayılar" listesini hazırlayarak bu oyunu bağımsız bir şekilde oynayabilirler. Bir çocuk "öğretmen"i oynar diğerleri ise onluk kartları kullanırlar. Çocuklar kendi sayı listelerini oluşturmaktan hoşlanırlar.

"Birbirine Karışmış Çılgın Sayılar" ilk bakışta göründüğünden daha karışık bir problemdir. Onluk kartınızı değiştirirken nasıl karar verirsiniz? Bazı çocuklar onluk kartta oluşturdukları tüm sayıları silerek her sayı için yeniden aynı işlemi yaparlar. Diğerleri her sayının neye benzediğini öğrenmiş olacaklardır. Başka bir boyut eklemek için onluk kartlarını değiştirmeden önce öğrencilerinizden kaç tane daha sayma pulu eklemeye ("artı") ya da çıkarmaya ("eksi") gerek olduğunu söylemelerini isteyiniz. Sonra da artı veya eksi ile doğru miktarı ifade etmelidirler. Örneğin, eğer onluk kart 6'yı gösteriyorsa ve öğretmen "dört" demişse, çocuklar "Eksi 2" şeklinde cevap verebilirler ve sonra da buna uygun şekilde onluk kartlarını değiştirirler. Bunu nasıl bilebildiklerinin tartışılması oldukça değerlidir.

Onluk kartların önemli farklı bir biçimi onluk indeks kartlardır. Elişi kâğıtlarından küçük bir indeks kartı boyutunda kartlar yapınız. Bir adet 0, bir adet 10 ve 1 den 9'a kadarki sayılardan ikişer tane olmak üzere 20 kartlık bir set olsun. Takip eden etkinlikte olduğu gibi bu kartlar, 5'e ve 10'a göre konumlandırılmış sayıları kullanmaya teşvik etmek için basit alıştırmalar yapma olanağı sağlar.

Etkinlik 8.15

Onluk İndeks Kartları

Sınıfa veya gruba onluk indeks kartlarını veriniz ve kartların kaç tane noktayı gösterdiklerini nasıl hızlıca söyleyebildiklerini izleyiniz. Etkinlik hızlı bir tempoda yapılır ve sadece birkaç dakika sürer. İstenilen bir anda yapılır ve oldukça eğlencelidir.

"Onluk İndeks Kartları" nın önemli farklı biçimleri takip eden hususları içerirler.

- Karttaki noktaların sayısını söyleme yerine kartta kaç tane boşluk olduğunu söyleme
- Noktaların sayısından bir fazlasını (veya iki fazlasını ve ayrıca bir veya iki eksiğini) söyleme
- Örneğin "6 ile 4 on eder" gibi "10 la ilgili kuralları" söyleme

Onluk kart görevleri sürpriz bir şekilde çoğu öğrenci için sorun oluşturmaktadır. Öğrenciler, kalan boşluklar ve belli bir sayının beşten az ya da fazla olması ve 10'a olan uzaklığı gibi beşli iki satırın anlamı üzerinde kafa yormalıdırlar. Sayıların beşlik veya onluk kartlarda nasıl görülebileceğinin ele alındığı başlangıçtaki tartışmalar, öğrencilerin birbirlerinden öğrenebilecekleri ders *sonrasında* yer alan etkinliklerin basit örnekleridir.



"Onluk İndeks Kart" taki kartlara öğrencilerin nasıl cevap verdikleri, bir öğrencinin mevcut sayı kavrama düzeyinin hızlıca değerlendirilebildiği iyi bir örnektir. Listelenen etkinliğin farklı biçimlerini de kullanınız. 10'a olan uzaklık çok önemli olduğundan bir diğer değerlendirme, ondan az olan bir sayıyı göstererek "buradaki kadar noktalar bir onluk kart üzerinde olsaydı kaç tane boşluk kalırdı" sorusunu sorunuz. Ya da basitçe "elimde yedi nokta var, on oluşturmak için kaç tane noktaya ihtiyacım var?" sorusunu sorunuz. ◆

Parça-Parça-Bütün İlişikleri



Durup Düşün!

Okumaya devam etmeden önce basit sayma pulları veya madeni paralar bulunuz. Öğrencilerinizin önünde sanki bir birinci veya ikinci sınıf öğrencisiymiş gibi sayma pullarından sekizlik bir seti ayırarak sayınız.

Anlamlı saymanın nasıl yapılabileceğini öğrenen herhangi bir çocuk sizin yaptığınız gibi sekiz nesneyi sayabilir. Bu deneyle ilgili en önemli husus, bu saymanın sizin üzerinde düşünmenize neden olup olmamasıdır. Sekiz öğeden oluşan bir seti sayarken hiçbir şey, bu setin iki parçadan oluştuğu şeklindeki olgu üzerinde bir öğrencinin yoğunlaşmasına neden olmaz. Örneğin, az önceki nesnelerden iki farklı yığın ayırınız ve bu kombinasyon üzerinde düşününüz. 2 ile 6, 7 ile 1 veya 4 ile 4'ün bir kombinasyonu olabilir. İki sayma pulları yığınınızda bir değişiklik yaparak bu yeni kombinasyonu kendinize söyleyiniz. Bir niceliği onun parçaları cinsinden düşünmeye yoğunlaşmanın, sayı hissinin gelişmesi için önemli sonuçları vardır. Çocuklarda sayı kavramlarının gelişmesi üzerinde çalışan önemli bir araştırmacı Resnick (1983) şöyle demiştir:

> Muhtemelen okulun ilk yıllarındaki en önemli kavramsal başarı, sayıları onu oluşturan parçalarla bütün arasındaki ilişkiler cinsinden yorumlamalarıdır. Bir Parça-bütün şemasının çokluğa uygulanmasıyla, çocuklar için sayıları diğer sayıların bir kombinasyonu olarak düşünmeleri mümkün olacaktır. Sayı anlayışının geliştirilmesi, küçük çocukların o ana kadar sahip olmadıkları yorumun ve matematiksel problem çözmenin farklı biçimlerini ele almayı mümkün kılar (s. 114).

Parça-Parça-Bütün Etkinliklerinin Temel Öğeleri. Parça-parça-bütün etkinliklerinin çoğu tüm etkinlik boyunca tek bir sayı üzerinde yoğunlaşır. Örneğin, bir çocuk veya birlikte çalışan bir grup çocuk tüm etkinlik boyunca 7 sayısı üzerinde çalışabilirler. Çocuklar ya verilen çokluğu iki veya daha fazla parça şeklinde oluştururlar ya da bütün çoklukla başlayıp onu iki veya daha fazla parçaya ayırırlar. İki veya üç çocuktan oluşmuş bir grup

5-20 dakikalık bir etkinlikte tek bir sayı üzerinde çalışabilirler. Anaokulu çocukları genellikle bu etkinliklere 4 veya 5 sayısı üzerinde çalışarak başlarlar. Kavramlar geliştikçe, çocuklar çalışmalarını 6'dan 12'ye kadarki sayılara doğru genişletirler. Bu türden etkinliklerde kullanılabilecek farklı biçimde ve çeşitlilikteki materyaller öğrencinin ilgiyle takip etmesine yardımcı olabilir. 7-12 aralığında bulunan sayılarla parça-parça-bütün ilişkisini tam olarak geliştiremeyen ikinci sınıf öğrencilerinin olması garipsenmemelidir.

Çocuklar bu etkinlikleri yaparlarken, parçaları söylemelerini, "okumalarını" veya herhangi bir not defterine yazmalarını isteyiniz (ya da hem okuma hem de yazmalarını isteyiniz). Yazma veya okuma kombinasyonları çocukların, parça-bütün ilişkisi üzerinde düşünmelerini teşvik edici bir araç görevi görürler. Yazma, boşluklara sayıların yazıldığı (_____ ve _____) veya eşitliklerin verilmesi durumunda toplam eşitlikleri (3 +5 = 8) gibi farklı şekillerde yapılabilir.

Parça-Parça-Bütün Etkinlikleri. Takip eden etkinlik veya onu farklı biçimleri "temel" parça-parça-bütün etkinliği olarak düşünülebilir.

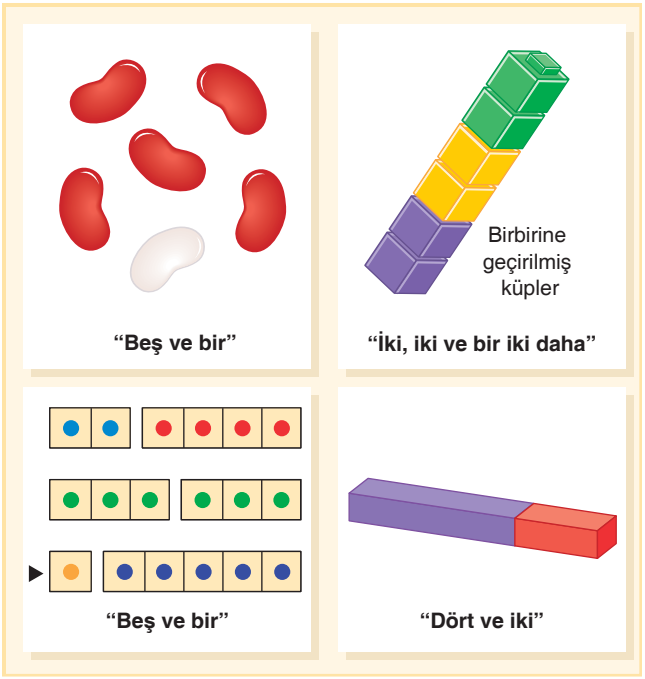
Etkinlik 8.16

Parçalarını Kullanarak Oluştur

Renkli kâğıtlardan yapılmış kareler veya legolar gibi materyalleri çocuklara temin ediniz. Görevleri, belli bir sayıyı iki parça kullanarak kaç farklı şekilde oluşturabileceklerini görmektir (isterseniz, ikiden fazla parçadan da o sayıyı oluşturmalarına izin verebilirsiniz). Bir elişi kâğıdının dörtte birinden yapılmış küçük bir zemin üzerinde her bir kombinasyonu gösterebilirler. Üzerinde durabileceğiniz birkaç fikir şunlardır (her bir fikir Şekil 8.9'da örneklendirilmiştir):

- **İki renkli sayma fasülyelerini (plastikten yapılanları da mevcuttur) kullanınız.**
- **Legolardan sütunlar oluşturunuz. Her bir sütunu iki farklı renkle oluşturunuz. Bir sütunu oluşturan farklı renklerdeki küpleri bir arada tutunuz.**
- **1 inç genişliğinde üzerine noktaların yapıştırılabileceği poster biçimindeki karttan şeritlerden iki noktalı şerit kombinasyonları oluşturunuz (üzerindeki nokta sayıları bir ile dört arasında olan çok sayıda şeritlerle nokta sayısı beşle on arasında olan daha az sayıda şeritler oluşturunuz).**
- **Verilen bir çoklukla eşleştirmek için iki renkli Cuisenaire çubuk kombinasyonları oluşturunuz.**

"Parçalarını Kullanarak Oluştur" etkinliği üzerinde çalışan çocukları gözlerken, her bir sayı kombinasyonlarına uygun bir sayı cümlesini "okumalarını" isteyiniz. Çocukların sayı cümlelerini birbirlerine okumalarını teşvik ediniz. Aynı materyalle çalışan iki ya da üç çocuk birçok deneme yaparak oldukça fazla sayıda farklı kombinasyonlar oluşturabilirler. Çocukların sayı kombinasyonları üzerine aklınızda tutunuz.



Şekil 8.9 Altının parçalarını oluşturmak için kullanılabilecek farklı materyaller.

Takip eden etkinlik tam anlamıyla semboliktir. Ama çocuklar gerek görürlerse sayma pullarını kullanmalıdırlar.

Etkinlik 8.17

Herhangi ikisinin toplamının öğrencilerin üzerinde yoğunlaştıkları bütünü verdiği üç sayılı listeler oluşturunuz. 5 sayısı için verilebilecek örnek bir liste şudur:

2–3–4
5–0–2
1–3–2
3–1–4
2–2–3
4–3–1

Çalışma yaprağında veya tahtada verilen bu listeyle öğrenciler sırasıyla bütünü veren iki sayı seçerler. Tüm problem çözme etkinliklerinde olduğu gibi öğrenciler cevaplarının gerekçesini vermeye zorlanmalıdırlar.

Eksik-Parça Etkinlikleri. Parça-parça-bütün etkinliklerinin özel ve önemli farklı bir biçimi eksik-parça etkinlikleri olarak adlandırılır. Bir eksik-parça etkinliğinde çocuklar, bütünü bilir ve önceden geliştirmiş oldukları bütün-parça bilgisini kullanarak gizlenmiş/üzeri kapatılmış parçanın ne olduğunu söylemeye çalışırlar. Bilmiyor veya emin değillerse bilinmeyen parçanın üzerini açar ve normalde

yaptıkları gibi tüm kombinasyonu söylerler. Eksik parça etkinlikleri, belli bir sayı için tüm kombinasyonlar üzerinde en üst düzeyde düşünebilme olanağı sunar. Bu etkinlikler çıkarma kavramlarına öncülük etmeye de hizmet ederler. Bütünün 8 ama gösterilen kısmının sadece 3 olmasıyla bir çocuk daha sonra "8 – 3 = 5" yazabilir.

Eksik parça etkinlikleri bir şekilde parçanın gizlenmesini veya bilinmemesini gerektirmektedir. Genellikle bu, iki çocukla çalışırken veya sınıfta öğretmenin yönlendirmesiyle yapılır. Yine aynı şekilde dikkat bir bütün olarak belli birçokluk üzerindedir. Takip eden üç etkinlik bu önemli fikrin farklı biçimlerini örneklendirmiştir.

Etkinlik 8.18

Saklı Parçalar

Sayma pulu setinden hedef çokluğa eşit sayıda olacak biçimde sayma pulu sayılarak ayrılır ve geri kalanlar ise bir kenara konur. Bir çocuk kabın veya mukavva karton parçasının altına sayma pullarını yerleştirir. Sonra sayma pullarından bir kısmını kabın altından çekip çıkarır (Bu miktar, tamamı, hiçbiri veya bunlar arasındaki herhangi bir çokluk olabilir). Örneğin, bütün 6 ve görünürde 4 tane varsa, diğer çocuk "Dört ile iki altı yapar" der. Eğer kararsızlarsa veya gizlenen parça bilinmiyorsa, hemen saklı kısım gösterilir (Bkz. Şekil 8.10).

Etkinlik 8.19

Eksik-Parça Kartları

4'ten 10'a kadarki her bir sayı için 3'e 9 inç boyutlarında mukavva karton şeritleri kullanarak eksik-parça kartları yapınız. Her bir kartta bütünü göstermek için bir sayı ile biri elle kapatılmış iki noktalı setler gösterilsin. Örneğin 8 sayısı için, görünür kısımdaki nokta sayısı sıfır sekiz arasında kalacak şekilde dokuz karta ihtiyacınız olacaktır. Öğrenciler, "Saklı Parçalar" etkinliğindeki gibi kartları kullanacaklar ve dört noktanın gözüktüğü ikisinin gizlendiği bir kart için "Dört ile iki altı yapar" diyeceklerdir (Bkz. Şekil 8.10).

Etkinlik 8.20

Keşke Benim de Olsaydı

Legolardan oluşturulmuş bir sütun, bir adet noktalı şerit, iki sütunlu bir şerit ya da 6 veya daha küçük olan bir sayıyı gösteren noktalı tabağı temin ediniz. "Keşke 6'm olsaydı" deyiniz. Çocuklar 6'yı oluşturmak için gereken kısmı göstererek cevap versinler. Üzerine sayma yaparak cevap kontrol edilebilir. Oyunda belli bir sayı üzerine yoğunlaşılabilir veya "Keşke benim olsaydı" sayısı her seferinde değiştirilebilir (Bkz. Şekil 8.10).



Bilgisayar yazılımları yardımıyla parça-parça-bütün etkinlikleri geliştirebilmenin birçok



Şekil 8.10 Eksik parça etkinlikleri

yolu vardır. Böyle bir programda gereken tek şey, öğrencilerin ekranda nesne setleri oluşturabilmesine izin vermesidir. Scott Foresman'in eTools (Pearson Education, 2004) programı sayma nesneleri için çok çeşitli arka plan görüntüleri içermektedir. Ayrıca bu etkinlik www.kyrene.org/mathtools adresinde yer almaktadır. Online kullanımı tercih ederseniz ekranın sol alt bölümde "workspaces" başlığı altındaki buket simgesine tıklayarak "Counters/Sayma Nesneleri" ni seçiniz. Banyo küvetini seçtikten sonra bot, ördek veya kırmızı balık biçimindeki sayma nesnelerini ekleyiniz. Şekil 8.11 de gösterildiği gibi çocuklar, üç farklı türdeki banyo küveti oyuncaklarını ya küvetin içine (görünmez) ya da dışına etiket gibi tutturabilirler. Küvetin üzerindeki rakam içeride kaç tane oyuncak olduğunu göstermektedir. İstenirse soru işareti (?) düğmesi eksik kalan kısmı gösterecek şekilde ayarlanabilir. Alt kısımda toplam gösterilmektedir. Küvetin üstündeki ampül tıklanarak küvetin içindeki nesneler görünür yapılabilir (Şekil 8.11b). Öğretmenlerin elleri altındaki bu program, parça-parça-bütün ve eksik parçalar etkinlikleri için büyük çapta bir çeşitlilik ve zorluk sunmaktadır. ◆



Durup düşün!

8 sayısı hakkında çocukların ne bildiklerinin ele alındığı bu bölümün önceki kısmında verilen listeyi hatırlayınız. O listeye tekrar bakınız ve listeye yeni bir şey ekleyip eklemeyeceğinize veya bu noktaya kadar öğrendiklerinize dayalı olarak yeniden gözden geçirip geçirmeyeceğinize karar veriniz. Okumaya devam etmeden bunu yapınız.

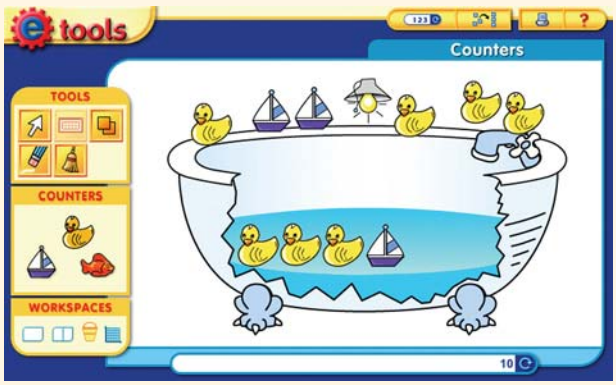
Birinci sınıfın sonuna gelinceye kadar 8 sayısı hakkında çocukların bilmesi gereken şeylerin olası bir listesi şudur:

SAĞ SÜTUNUN KISALTILMASI GEREKİYOR

(a)



(b)

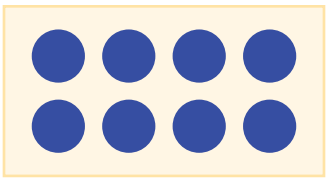


Şekil 8.11 Scott Foresman'ın eTools yazılımındaki sayma nesneleri, parça-parça-bütün ve eksik parçalar fikrini ve sayı kavramlarıyla başlangıç düzeyindeki toplama ve çıkarma fikirlerini incelemede kullanışlı bir araçtır.
Kaynak: Scott Foresman Addison-Wesley Math Electronic-Tools CD-ROM Grade K Through 6. Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., or its affiliate(s). Used by permission. Tüm hakları saklıdır.

- Sekize kadar sayma (sayı sözcükleri ve bunların sırasını bilme)
- Sekiz nesneyi sayma ve kaç tane olduğunu ifade eden en son sayı sözcüğünü bilme
- 8 rakamını yazma
- 8 rakamını tanıma ve okuma

Önceki liste, en az sayıdaki sayı becerilerinin bir listesini vermektedir. Sayı hissine katkıda bulunabilecek öğrencilerin sahip olması gereken ilişkilerin bir listesi takip eden listedir:

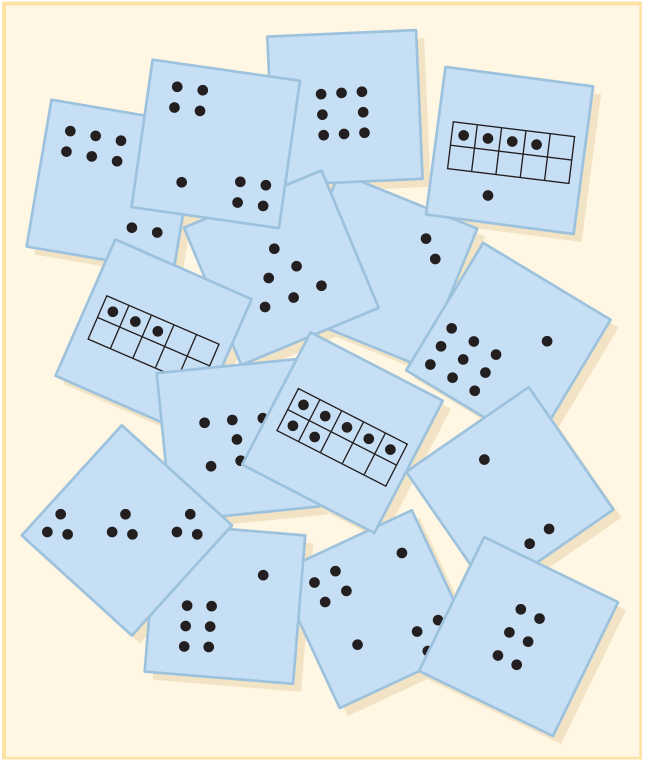
- 1-2 fazlası ve eksiği ilişkisi: 8, 7'den bir fazla, 9'dan bir eksik, 6'dan iki fazla ve 10'dan iki eksiktir.
- 8 sayısı için aşağıdaki gibi uzamsal örüntüler:



- Sayıları 5 ve 10'a göre konumlandırma: 8, 5'ten 3 fazladır ve 10'dan 2 eksiktir.
- Parça-bütün ilişkileri: 8, 5 ile 3'ün, 2 ile 6'nın, 7 ile 1'in toplamıdır. Bu, 8'in eksik kalan parçasını bilmeyi içerir.
- İki katları: 4'ün iki katı 8'dir.
- Gerçek dünyayla ilişkilendirmeler: Kardeşim 8 yaşındadır, okuma kitabım 8 inç genişliğindedir.

Sayı İlişkilerinin Öğretiminde Bir Model Olarak Noktalı Kartlar

Uygun sayı ilişkilerini geliştiren etkinliklerin çoğu şu ana kadar tartışılan ilişkilerden daha fazlasını içerir. Onluk kartları, örüntülü kümeleri ve diğer ilişkileri çocuklar öğrendikçe, Çalışma Yaprak Seti 3-8'deki noktalı kartlar kullanılarak bolca etkinlikler yapılabilir (Bkz. Şekil 8.12). Kartlar, sayma gerektiren noktalı örüntüleri, iki veya üç basit örüntü kombinasyonlarını ve noktaların sıra dışı dizilişleri kadar "standart" dizilişlerinin verildiği onluk kartları içermektedir. Çocuklar sayı kavramıyla ilişkili herhangi bir etkinlik için bu kartları kullandıklarında, kartlar onları sayılar hak-



Şekil 8.12 Çalışma Yaprak Seti 3-8 kullanılarak noktalı kartlar yapılabilir.

kında çok farklı şekillerde düşünmeye sevk eder. Noktalı kartlar daha önce tanımlanan birçok etkinliklere ayrı boyut katarlar ve takip eden etkinliklerdekine benzer şekilde etkili bir şekilde kullanılabilirler.

Etkinlik 8.21

İkililerin Savaşı

"İkililerin Savaşı" (Kamil, 1985) savaş gibi oynanan bir oyundur, ama her oynayışta iki oyuncu birer kart çekip göstermek yerine ikişer kart çekip birbirlerine gösterirler. En büyük toplama sahip oyuncu oyunu kazanır. Bu oyunu oynayan çocuklar, toplam nokta sayısını kart çekerek bulmadan oyunu kazanan oyuncuyu belirlemek için farklı sayı ilişkilerini kullanabilirler.

Etkinlik 8.22

Fark Savaşı

"Savaş" oyunundaki gibi iki oyuncuya kartları dağıtınız ve 30-40 tanelik sayma pulu yığını hazırlayınız. Her oyunda oyuncular, normal bir şekilde kart çekerler. İki kart arasındaki fark kadar yığından çekilen sayma pullarından daha fazlasına sahip oyuncu oyunu kazanır. Oyuncular kartlarını tutarlar. Sayma pulları yığınındaki tüm pullar bittiğinde oyun bitmiş olur. En fazla sayma puluna sahip olan oyuncu oyunu kazanır.

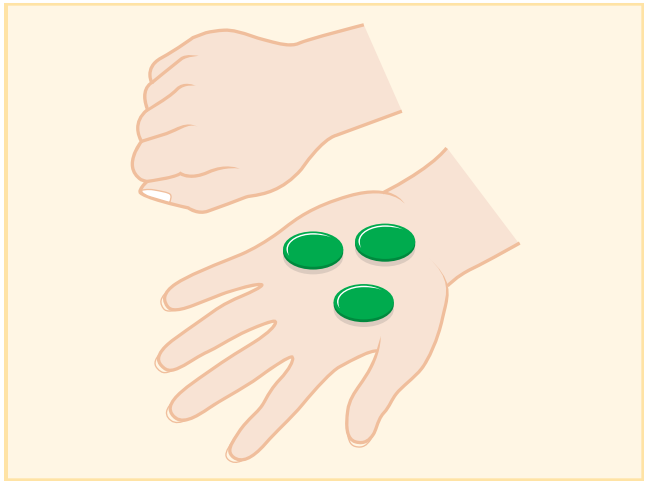
Etkinlik 8.23

Sayı Sandviçleri

5 ile 12 arasından bir sayı seçiniz ve toplamı bu sayı olacak şekilde farklı iki kart kombinasyonlarını bulunuz. Noktalı tarafları gözükecek şekilde bu iki kartı sırt sırta yerleştiriniz. En az on çift bulduklarında, bir sonraki zorlayıcı aşama diğer taraftaki sayının adını söylemek olsun. Kartlar çevrilerek cevap teyit edilir. Sonrasında gizlenen kısmı adlandırmada aynı çiftler yine kullanılabilir.



Oldukça önemli olan parça-bütün ilişkilerini değerlendirmek için, Etkinlik 8.18'tekine ("Saklı Parçalar") benzer şekilde eksik parçayla ilgili tanılayıcı görüşme biçimini kullanınız. Çocuğun iyice "ustalaştığı" na inandığınız sayılardan (diyelim ki 5) birisiyle başlayınız. Çocuktan bu sayı kadar sayma pulunu ayırarak avucunuzun içine koymasını isteyiniz. Avucunuzu kapayarak çocuğun, avucunuzda kaç tanesinin saklı olduğunu bilmesinden emin olunuz. Sonrasında birkaç tanesini ayırıp avucunuzda kalanları gösteriniz (Bkz. Şekil 8.13). "Görünmeyen kısımda kaç tane sayma pulu vardır?" sorusunu çocuğa sorunuz. Her sayı için üç ya da dört eksik parçayı



Şekil 8.13 Eksik parçalı sayının değerlendirilmesi. Tamamı sekizdir. Görünmeyen kısımda kaç tane sayma pulu vardır?

kontrol etmek yeterli olmasına rağmen farklı sayılarda sayma pullarını ayırarak aynı işlemlere devam ediniz. Çocuk hızlı ve doğru cevap veriyorsa ve hiçbir şekilde açıkça saymıyorsa, bu durumu "sayıda ustalaşmış" olarak adlandırınız ve öğrenci takip listesinde yer alan bu becerinin karşısına tik atınız. Bir sayıda iyice ustalaşınca bir sonraki büyük sayıyla tüm süreci tekrarlayınız. Çocuk hata yapıncaya kadar bu şekilde devam ediniz. Çocuğun birinci sınıfın başlarında, 4'ten 7 veya 8'e kadarki sayılarda iyice ustalaştığını göreceksiniz. Birinci sınıfın bahar dönemine gelinceye kadar, çocukların hemen hemen tamamı 10'a kadar olan sayılarda ustalaşmalıdırlar. ◆

10'dan 20'ye Kadarki Sayılarla İlgili Bağıntılar

Anaokulu, birinci ve ikinci sınıf öğrencileri 20'ye kadarki sayılarla ve günlük yaşamlarında daha büyükleriyle belli bir deneyime sahip olmalarına rağmen küçük sayılar için geliştirdikleri bir takım ilişkileri otomatik olarak 10'dan büyük sayılara genişletebilecekleri varsayılmamalıdır: Hem de bu sayılar, temel sayma kurallarında ve zihinsel olarak yaptıklarımızın çoğundaki gibi birçok basit sayma etkinliklerinde önemli bir yer tutmasına rağmen. Bu sayılardaki ilişkiler 10'a kadar olan sayılardaki ilişkiler kadar önemlidir.

Basamak Değeri Kavramlarının Öncesi

Onluk bir set, çocukların 10 ile 20 arasındaki sayıları ilk anlamalarında önemli bir rol oynar. Çocuklar onluk bir setle beraber altılık bir set gördüğünde toplamın saymadan 16 olacağını bilmelidirler. Ama, 10 ile 20 arasındaki sayılar basamak değeri kavramlarını tartışmak için uygun değildirler. Bu yüzden de basamak değeri kavramlarının tam olarak gelişiminden önce (Bkz. İkinci sınıflar için Müfredat Odak

Noktaları) çocuklardan 16'daki 1'in "bir onluk" ifade ettiğini açıklamaları beklenmemelidir.

Durup Düşün!

Kendi kendinize "Bir onluk" diye sesleniniz. Şimdi de 20'ye kadar saymayı henüz öğrenmiş bir çocuğun bakış açısından bu ifadenin anlamını düşününüz. On sayısı kaç tane parmağımın olduğunu bildiren bir sayıyken bu "bir onluk" ifadesinin olası anlamı nedir? Yoksa dokuzdan sonra gelen sayı mıdır?" Böylesi bir şey nasıl mümkün olabilir?

Başlangıçta öğrenciler, 10 ile 20 arasındaki sayılarda sayısal bir örüntü görmezler. Bunun yerine bu isimler basitçe sayı dizisine fazladan eklenen on tane sözcüktür. Tek bir onluk, anaokulu veya birinci sınıfa yeni başlayan çocuğun kavramakta zorlandığı kavramdır. Bazıları bu kavramın birinci sınıf için hiçbir şekilde uygun olmadığını söylemektedir (Kamii, 1985). "Bir onluk ile altı birlik" kavramını (bir ne demektir?) tartışmanın uygunsuzluğu onluk bir setin onlu sayıların tartışılması sırasında baskın bir şekilde öne çıkması anlamına gelmez. Takip eden etkinlik bu fikri örneklendirecektir.

Etkinlik 8.24

On ve Biraz Fazlası

İki parçalı basit bir altlık kullanınız ve çocuklar on tane sayma pulunu sayıp altlığın bir tarafına koysunlar. Sonrasında ise diğer tarafa beş sayma pulunu koysunlar. Bütün sayma pullarını birer birer saysınlar. Koro halinde "On ile beş, onbeş" desinler. Altlığı döndürerek, "Beş ile on, onbeş" desinler. Yalnız, altlığın 10'luk kısmını değiştirmeden rastgele bir sırada diğer sayılarla da bunu tekrar etsinler.

Etkinlik 8.24, yeni sayı isimlerini öğretmek için tasarlanmıştır ve bundan dolayı da belli bir oranda öğretmen yönlendirmesini gerektirmektedir. Bu etkinliği takiben 20'ye kadar olan sayıları daha açık uçlu bir yaklaşımla inceleyiniz. Elişi kâğıdından yapılmış altlık üzerine çizilmiş alt alta iki onluk kartı her bir çocuğa temin ediniz. Ya da Çalışma Yaprak Seti-11'i kullanınız. Rastgele bir sırada kendi altlıkları üzerinde 20'ye kadar sayıları göstermelerini isteyiniz. Bu ise "Birbirine Karışmış Çılgın Sayılar" (Etkinlik 8.14) etkinliğinin iki onluk kartla 20'ye kadarki sayılarla oynanmış halidir. Doğru sayıda sayma pulları olduğu müddetçe bu etkinliği yapmanın tercih edilen belli bir yolu yoktur. İlginç olan şey, kaç tane olduğu kolayca görülebilecek şekilde sayı altlığı üzerinde sayma pullarının nasıl gösterildiğidir. Çocukların fikirlerini birbirleriyle paylaşmalarını sağlayınız. Çocukların hepsi tam bir onluk seti kullanmayacaktır ama bu fikir herkesçe yaygın bir şekilde kullanıldıkça onlardan (on-bir, on-iki, on-üç gibi) oluşan on ve fazlası fikri kısa bir sürede gelişecektir. Çocuklarınıza kulak verdikçe sayma pullarıyla 26 veya daha büyük bir sayıyı sayma pullarıyla göstermenin yollarını bulmaları için onlara meydan okuyabilirsiniz.

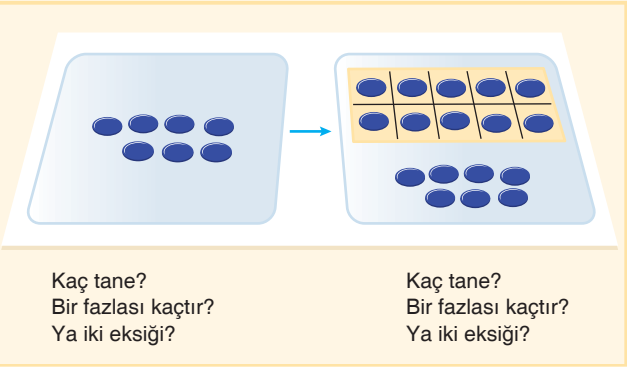
Daha Fazla ve Daha Az İlişkilerini Genişletme

Tüm sayılar için bir-iki fazlası, bir-iki eksiği ilişkileri önemlidir. Ama bu fikirler, 10'dan az sayılardaki aynı kavramlarla ilişkilidir veya onlar üzerine inşâ edilirler. 17'nin 18'in bir eksiği olması olgusu, 7'nin 8'den bir eksik olması fikriyle ilişkilidir. Çocuklar bu ilişkileri kurmada yardıma gerek duyabilirler.

Etkinlik 8.25

Daha Az-Daha Fazla Fikri Genişletildi

Tepegözde veya tahtada yedi sayma pulu gösterip iki fazlasının, bir eksiğinin, vb. nin ne olacağını sorunuz. Sonra tam dolu bir onluk kartı ekleyerek (veya 10'u herhangi bir şekilde göstererek) soruları tekrar ediniz. Şekil 8.14'te gösterildiği gibi onluk kartın üstünü örterek veya açarak soruları karşılıklı olarak eşleştiriniz.



Şekil 8.14 İlişkileri onlara (on-bir, on-iki, vb.) genişletme

İki Katlar ve İki Kata Yakınlıkları

İki katları (6'nın iki katı 12'dir gibi) ve iki katına yakınlıkları (13, 6'nın iki katına bir eklemektir gibi) kullanma genellikle toplamayla ilgili temel kuralları/işlemleri ezberlemede kullanılan bir strateji olarak düşünülebilir. Çocukların temel kuralları/işlemleri ezberlemeyle bu kadar alakalı olmalarından çok önce de bu ilişkileri geliştirmeye başlayacaklarını düşünmemek için bir neden yoktur. İki katları ve iki katına yakınlıkları fikri genel parça-parça-bütün kavramsal durumlarının basitçe özel durumlarıdır.

İki katları özel imgelerle ilişkilendiriniz. Çocuklar resimler çizebilir veya her sayı için iki katlarını gösteren posterler yapabilirler. Çocuklarınız için sağlam fikirlerin her türlü gösterimleri onlar için iyi olacaktır.

Söylediğiniz sayının iki katını öğrencilerinizin bulmasını isteyeceğiniz sözlü alıştırmaları periyodik olarak yapınız. Bir sayının iki katını nasıl bulduklarını açıklamalarını öğrencilerinizden isteyiniz. Öğrencilerin çoğu resimleri kullanmayacaklardır.

Etkinlik 8.26

İki Kat Yapıcı Makine



Hesap makinesinin 2 [×] [=] tuşlarına basarak "İki Kat Yapıcı" bir makineye dönüştürünüz. Herhangi bir sayı girildikten sonra [=] tuşuna basma o sayının iki katını verecektir. Çocuklar çiftler halinde veya tek başına çalışarak hesap makinesinin bulduğu cevaba ulaşmak için çaba gösterebilirler.

Bununla ilişkili sözlü bir görev olarak bir sayı söyleyiniz ve onun iki katının kaç olacağını öğrencilere sorunuz. "Ondört hangi sayının iki katıdır?" (7'nin iki katı). Öğrenciler bu görevde başarılı olduklarında 20'ye kadar herhangi bir sayıyı kullanınız. "Ya onyedi?" (8'in iki katının bir fazlası).

Çocukların Dünyasında Sayı Hissi



Sayılarla ilgili sahip oldukları ilk bilgileri genişletmenin yollarını farklı bir yolla inceleyeceğiz. Sayıların gerçek dünya çoklukları ve ölçüleriyle ilişkileri ve basit tahminlerdeki kullanımları, çocukların esnek ve sayılarla ilgili en çok istenen sezgisel fikirler geliştirmelerine yardım edebilir. Çocukların sayıları gerçek durumlarla ilişkilendirmelerine yardımcı olabilecek bazı etkinlikler şunlardır.

Etkinlik 8.27

Sayınıza Bir Birim Ekleyin

Tahtaya bir yazı yazınız. Bu sayıya uyacak bazı birimleri öneriniz ve çocukların buna uyabileceklerini düşündüklerinin hangisi olduğunu sorunuz. Örneğin, sayının 9 olduğunu var sayınız. "9 dolar mı, 9 saat mi? 9 araba mı? 9 çocuk mu? Saat 9 mu? 9 karış mı? 9 galon mu?" aklınıza ne geliyor? Her bir durumu tartışmak için belli bir süre ayırınız. Çocukların da birimler önermesine izin veriniz. Ya anlık gelişen bazı fikirleri incelemeye ya da ebeveyn veya evdeki bakıcılarla paylaşılabilecek bazı proje veya görevlerdekine benzer durumlara hazırlık olunuz.

Etkinlik 8.28

Mantıklı mı?

Bir sayı ile bir birim (örneğin 15 fit) seçiniz. Öğretmen 15 fit boyunda olabilir mi? Oturma odanız 15 fit genişliğinde olabilir mi? Erkek biri 15 fit yüksekliğe sıçrayabilir mi? Üç çocuk yan yana kollarını 15 fit açabilir mi? Daha büyük veya küçük herhangi bir sayı ve çocukların aşina olduğu bir birim seçiniz. Sonra da bu türden bir dizi soru oluşturunuz.

Çocuklar, Etkinlik 8.28 ile bir kez aşina olduktan sonra bir sayı ve birim ile (10 çocuk, 20 muz gibi) durumlar seçmelerini isteyerek hangi türden sorular oluşturduklarını görünüz. Farklı bir görüş geliştiğinde, araştırma ve deney yapmak için bu olanaktan yararlanınız. Sahip olduğunuz yetişkin düzeydeki bilginizin öğrencilere cevap vermek için sizi yönlendirmesine izin vermeyiniz. Bunun yerine " Güzel, peki bunun mantıklı olup olmadığına nasıl karar verebiliriz? Ne yapabileceğimize dair herhangi bir fikri olan var mı?" deyiniz.

Bu etkinlikler gerçek manada problem temelli etkinliklerdir: Sadece net cevaplar belli olmadığı için değil ama öğrenciler çevrelerinde karşılaştıkları durumların bir parçası olarak en ilginç olan sayıyı inceleme ve kendi sorularını kurmaya kolayca başladıkları için. İşe siz başladığınızda çocuklar bu gerçek dünya ilişkilerine sahip olmayacaklardır ve sayı hakkındaki ilk sınırlı fikirleri sizleri hayal kırıklığına uğratacaktır. Howden (1989), oldukça fakir alt yapıya sahip çocukları okutan bir birinci sınıf öğretmenin ona söylediği " Hepsinin parmakları var ve okullarının bahçesinde çok sayıda çakıl ve yapraklarıyla ile ucuz benekli fasulyeleri var. Dolayısıyla sayabilir, sıralayıp, karşılaştırabilir ve bu nesnelerle ilgili konuşabiliriz. Çocukların tutup kavrayabildikleri odadaki hemen her şeyi tarttık ve ölçtük" (s.6) diye yazmıştır. Bu öğrencilerin öğretmeni, "Yirmi-dört dediğimde aklınıza ne gelmektedir?" sorusuna aldığı cevapların uzunca ve oldukça zengin bir listesini üretmiştir. Test puanlarının yüksek olduğu başka profesyonel bir topluluktaki diğer bir okulda aynı soruya, üçüncü sınıf öğrencilerinin bulunduğu bir sınıftan ise hiçbir cevap alınamamıştır. Çocukların kendi sayı fikirlerini dünyayla ilişkilendirmelerine yardımcı olmak oldukça ödüllendirici olabilir.

Tahmin ve Ölçme

Öğrencilerin gerçek çoklukları düşünmelerine yardımcı olmanın en iyi yollarından biri sayıları, şeylerin ölçüleriyle ilişkilendirmektir. İlk sınıflarda uzunluk, ağırlık ve zamanı ölçme iyi birer başlangıç noktalarıdır. Çocuklar için ilginç olmadıkça ve sonuç hakkında düşünmek için bir neden olmadığı müddetçe sadece ölçmek ve sonuçları kaydetmek çokta etkili olmayacaktır. Bir sıranın uzunluğunun veya kitabın ağırlığının ne olduğunu ifade eden sayı üzerinde çocuğun düşünmesi ve kafa yormasına yardımcı olmak için ilk tahminlerini yazabilmeleri ve söyleyebilmelerini istemek iyi bir fikir olabilir. Ama iyi bir tahmin üretmek küçük çocuklar için oldukça zor bir görevdir. Çocuklar "Tahmin" veya "Yaklaşık" kavramlarını kolayca anlayamazlar. Örneğin, oldukça büyük bir ayak izi setinin olduğu poster biçimindeki kartonlardan, 18 inç uzunluğunda kesip ayırdığınızı var sayalım. Tamamı birbiriyle aynı büyüklüktedir. Sınıfa "bunlardan okuma köşemizde bulunan kilimin boyunu ölçmek için yaklaşık kaç tane gerekir?" sorusunu sorunuz. Buradaki anahtar sözcük *yaklaşık*tır ve bu sözcük öğrencilerinizin anlamalarına yardımcı olmak için üzerinde çoğu zaman durmak zorunda kalacağınız bir sözcüktür. Bu amacı sağlamak için bir tahminde bulunma isteği, öğrencilerden belli bir sayıyı verme isteği değil "yaklaşık" kavramını anlamaya yardımcı olabilecek yolları belirleme şeklinde olabilir.

Takip eden sorular, başlangıç düzeyindeki tahmin etkinlikleriyle kullanılabilir:

- _____ 'den daha fazla/daha az? 10 adımdan fazla mı eksik mi? Elma, 20 tane tahta bloğun ağırlığından daha fazla mı veya daha az mı ağır gelir? 15 tane legodan oluşan bu uzun sütundan daha fazla/ daha az uzunlukta mıdır?
- _____ 'e daha yakındır veya ____ ile aynıdır? 5 adıma mı daha yakın uzunluktadır yoksa 20 adıma mı? Elma 10 blok ağırlığa mı daha yakın ağırlıktadır yoksa 30 blok ağırlığına mı? Bu sütün 10 küp uzunluğunda mıdır yoksa 50 küp uzunluğundadır?
- Yaklaşık olarak _____. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, . . . sayılarından birini kullanınız. Yaklaşık kaç adımdır? Elma yaklaşık kaç blok ağırlığındadır? Bu sütunda yaklaşık olarak kaç tane küp vardır?

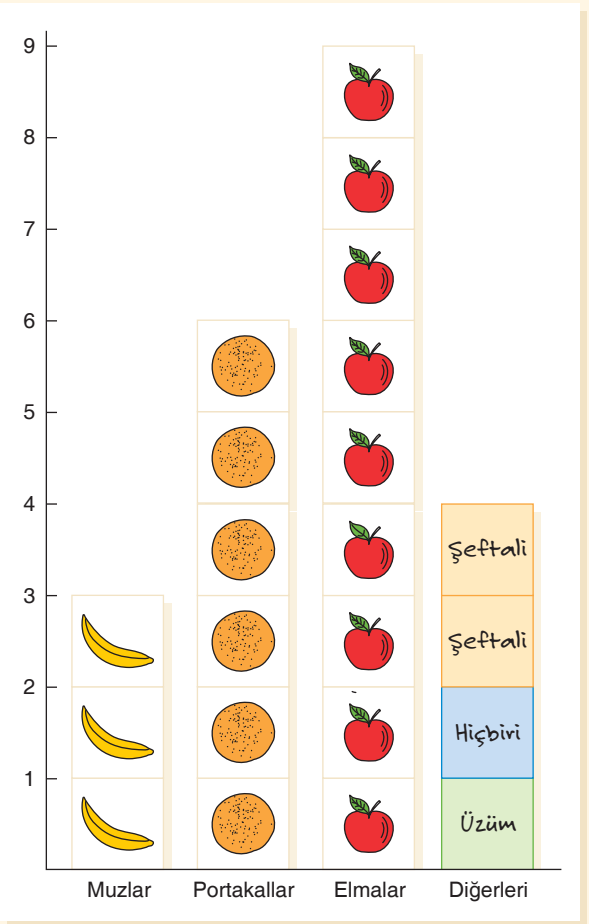
Tahminlerini bu soru biçimlerinde sorma çocukların "yaklaşık" ile ne demek istediklerini öğrenmelerine yardımcı olur. Her çocuk rastgele bir sayı seçmeksizin tahminde bulunabilir. Ama, yarışmacı bir havada en yakın tahminleri için çocukları ödüllendirme, çoğunlukla öğrenmelerinde hassas bir tahmin arama ile tam bir tahminde bulunmama sonucunu doğurur. En iyisi bunun yerine mantık sınırları içindeki tüm cevapları tartışmaktır.

Sayı ve ölçmelerinde yardımcı olmak için aynı birimleri ardı ardına kullanarak birçok şeyi tahmin ediniz. Örneğin, bir şerit kullanarak "etrafımızdaki şeyleri" ölçtüğünüzü ve tahmin ettiğinizi var sayınız. Ölçme için bir şeridi nesnenin etrafına dolayınız sonra da şerit çubuğu gibi bazı birimlerle ölçünüz. Demetria'nın kafasının çevresini ölçtükten sonra çöp sepetinin, kürenin veya George'un yumruğunun çevre uzunluğunu tahmin ediniz. Birbirini takip eden her ölçüm çocukların yeni tahminler yapmasına yardımcı olur.

Veri Toplama ve Analiz

Çocukların dünyasıyla sayı arasında ilişki kurmanın bir diğer yolu ise grafik çizme etkinlikleridir. Bölüm 21'de anaokulu öncesi-Anaokulu-2. sınıflarındaki çocuklarla birlikte grafikler oluşturmanın yolları tartışılacaktır. Öğrencilerin verdiği cevaplardan toplanan, en sevilen dondurma, renk, tutulan takım,evcil hayvan, kız ve erkek kardeş sayıları, okula ulaşmanın yolları, ayakkabı tipleri, evcil hayvanlarının sayısı, vb. gibi hemen hemen her türden veriyle grafikler hızlıca oluşturulabilir. Grafikler diğer öğrenme alanlarıyla ilişkilendirilebilir. Su ile ilgili bir nesnenin birimi, suda yüzen veya batan nesnelerin grafiğine ön ayak olabilir.

Basit bir sütun grafiği bir kez oluşturuldu mu grafiğe uygun istenilen sayıda soru sormak için zaman ayırmak oldukça önemlidir. Sayı gelişiminin başlangıç evrelerinde (Anaokulu öncesi-Anaokulu-1. sınıflar) sayı ilişkilerini göstermek ve sayıları çocukların çevresinde var olan çokluklarla ilişkilendirmek için grafiklerin kullanılmasının arkasında yatan neden, grafiğin kendisinden ziyade grafiği oluşturmaktır. Grafikler dikkati, gerçekçi şeyler üzerinde saymalara yoğunlaştırırlar. Aynı oranda önemli nokta ise sütun grafiklerinin, sadece bir sayı veya çokluğun tek başına incelenmesi durumunda nadiren yapılan iki veya daha fazla sayı arasında karşılaştırmaları net olarak gösterebilmesidir. Bir grafik örneği ve sorulabilecek olası sorular için Şekil 8.15'e bakınız. Başlangıçta çocuklar, farklarla ilgili sorularda sorun yaşayabilirler ama bu fikirlerle bir sütun grafiği şeklinde sürekli karşılaşmaları anlayışlarını geliştirecektir. Kavramların bu şekilde karşılaştırılmaları çocukların sayıyı anlamalarına dikkat çekici bir şekilde katkıda bulunurlar.



Sınıfın oluşturduğu grafik atıştırmalık olarak getirilen meyveleri göstermektedir: Muz, portakal, muz, elma vb. kağıttan çıkartmalar.

- Hangi atıştırmalık (ya da grafiğin gösterdiğine atıfta bulunarak) en fazla/en azdır?
- Hangisi 7'den (ya da başka bir sayıdan) fazla (az) dır?
- Hangisi bu atıştırmalıktan (ya da meyvenin adını kullanınız) bir eksik (fazla) dır?
- _____, _____'dan ne kadar fazladır? (bu soruyu takiben hemen sırayı değiştirerek aynı zoruyu ne kadar az şeklinde sorunuz)
- _____, _____'den ne kadar azdır? (cevabı aldıktan sonra bu soruyu tersten sorunuz)
- _____ ile _____ arasında ne kadar fark vardır?
- Hangi iki sütun grafiğindekilerin toplamı, _____ ile aynıdır?

Şekil 8.15 Bir sütun grafiğindeki ilişkiler ve sayı hissi

Standartlar, sayı gelişiminin müfredatın diğer alanlarıyla bütünleştirilmesinin değerini net bir şekilde kabul etmektedir. "Sayılarla çalışan öğrenciler, yaptıkları işi diğer matematik konularıyla ilişkilendirebilmelidirler. Örneğin, işlemsel akıcılık… hem öğrencileri geliştirir hem de öğrencilerin verileri, ritmik saymanın gelişimini destekleyen örüntülerin bilgisini ve cebirsel düşünmeyi, şekil ve uzay ile öğrencilerin tahmin becerilerini geliştirmelerine yardımcı olan sayıyı incelemeleriyle geliştirilebilir" (s. 79). ◆

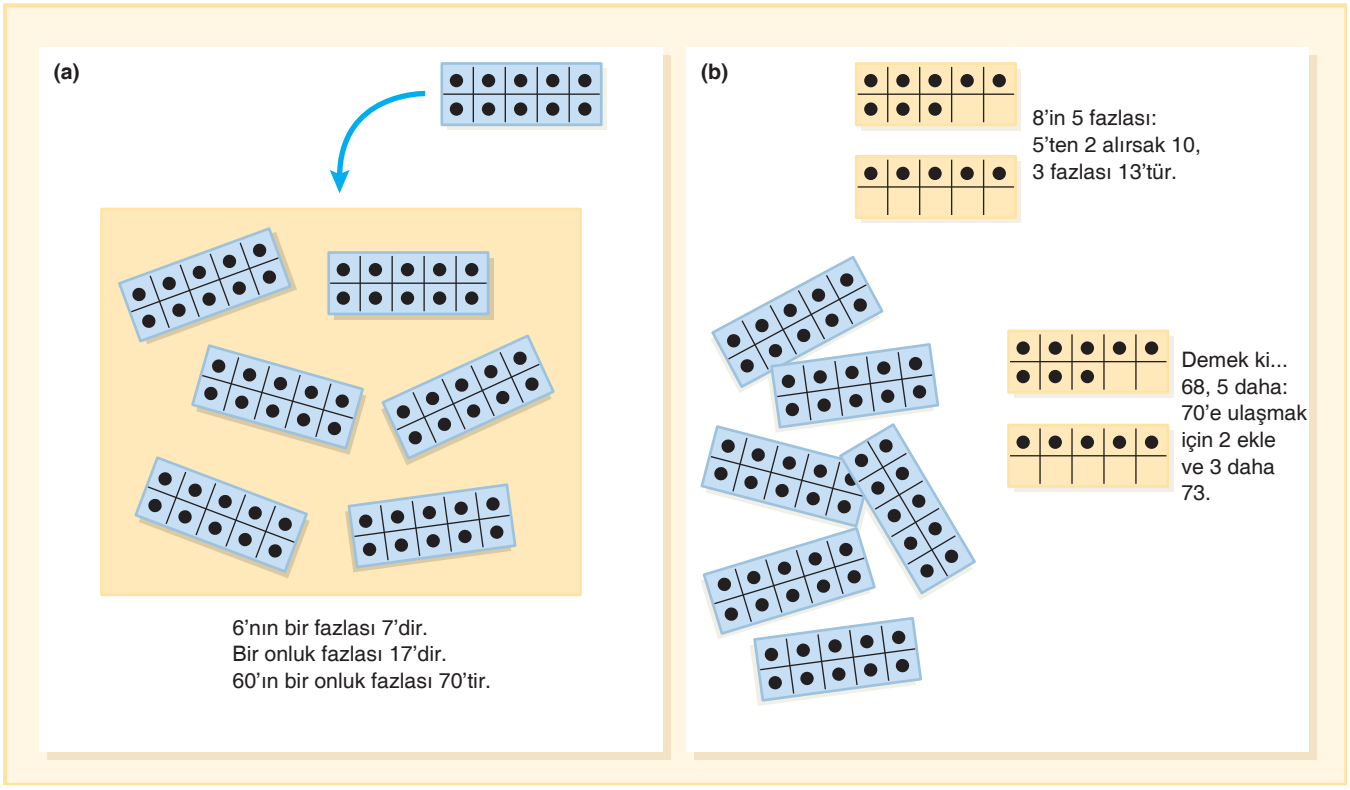
Erken Dönemlerdeki Zihinsel Matematiğe Genişletmeler

İkinci ve üçüncü sınıflardaki öğretmenler, erken dönemlerdeki sayı ilişkilerinin bazılarından yararlanabilirler ve bu ilişkileri 100'e kadarki sayılara genişletebilirler. Bu ilişkileri kurmada yardımcı olacak kullanışlı bir materyal seti, Çalışma Yaprağı Seti 16'daki küçük onluk kartlardır. Her bir çocuk, 10 onluğun gösterildiği onluk kart setiyle 1'den 9' a kadarki her bir sayının (ek olarak 5'in de) gösterildiği başka bir onluk kart setine sahip olmalıdır.

Takip eden üç fikir, Şekil 8.16'daki küçük onluk kartların kullanımını açıklamaktadır. İlki bir fazla/bir eksik ilişkileridir. Eğer 7'nin 6'nın bir fazlası olduğunu anlamışsanız o zaman benzer bir şekilde 70'in 60'ın on fazlası olduğunu anlarsınız. İkinci fikir, geleceğe dönük olarak temel kural/ilişki stratejileri oluşturmaktır. Çocuk, 8'e veya 9'a eklemenin öncelikle 10'a ulaşmak, sonra da geri kalanı eklemek olduğunu öğrenmişse bunu benzer iki basamaklı sayılara genişletmek oldukça basittir (Bkz. 8.16(b)). Son olarak küçük sayılar için en sağlam fikir onları parçalar halinde düşünmedir. Bir şekilde esneklik geliştirmeye başlamak için büyük sayılardan parçalar almak oldukça kullanışlı bir fikirdir.

Çocuklar 80'deki gibi 10'un katları olacak şekilde parçalara ayırmanın yollarını düşünerek başlayabilirler. Çocuklar bu işlemi bir kez onluklarla yaptılar mı 25 veya 35 gibi beşliklere sahip sayılarla uğraşırlarken yaşanabilecek zorluk, 80'i parçalara ayırmanın yollarını bulmada yaşanabilir.

Erken dönemdeki zihinsel hesaplamayla ilgili daha fazlası Bölüm 21'de söylenecektir. Burada vurgulanacak nokta, başlangıç düzeyindeki sayı ilişkileri ilk başta gözüktüğünden daha fazla bir şekilde çocukların ne bildikleri üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Hatta ilerleyen sınıflardaki öğretmenler onluk kartları ve parça-parça-bütün etkinliklerini kullanmanın faydalarını dikkate alabilirler.



Şekil 8.16 Başlangıç düzeyindeki sayı ilişkilerini zihinden hesaplama etkinliklerine genişletme

Bölüm 8 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim

1. Bir kümeyi hatasız sayabilmesi için bir çocuk ne yapabilmelidir?
2. Adı "Kümeyi Sayıyla Eşleştir" olan bir etkinliği betimleyiniz.
3. "Asıl Üzerine Sayma" etkinliği çocukların üzerine saymayı anlayıp anlamadıklarını veya hâlâ geçiş aşamasında olup olmadıklarını belirlemek için nasıl kullanılabilir?
4. 1'den 10'a kadarki sayılar için açıklanan dört tür ilişki nedir? Her birinin anlamlarını özetle açıklayınız ve her biri için bir etkinlik öneriniz.
5. Parça-bütün sayı ilişkilerini bir öğretmen nasıl değerlendirebilir?
6. Sayılarla ilişkili erken dönem sayma fikirlerini geliştirmek için hesap makinesi nasıl kullanılabilir? Parça-parça-bütün ya da bir eksiği ilişkisi gibi sayı ilişkilerinin uygulamasını yapan bir çocuğa yardımcı olmada hesap makinesi nasıl kullanılabilir?
7. 10 ile 20 arasındaki sayılar için takip eden fikirlerin nasıl geliştirebileceğini açıklayınız:
   a. Onluk bir set ve daha fazlası olarak *on*lar fikri
   b. Bir fazla/bir eksik kavramının onlar kavramına genişletilmesi
8. Çocukların sayıları gerçek dünya fikirleriyle ilişkilendirmelerine yardımcı olabilmenin üç yolu nedir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Müfredat Odak Noktaları (MON) adlı belgeyi inceleyiniz (www.nctm.org adresinden erişilebilir). Anaokul öncesi-Anaokulu-2. sınıf çocukları için "sayı" kavramı altında önerilen Müfredat Odak Noktalarına bakınız ve önerileri bu bölümde sunulan görüşlerle karşılaştırınız. Hangi görüşler vurgulanmıştır? Hangi fikirler Müfredat Odak Noktaları'na dâhil edilmemiştir? Sayı kavramı geliştirme programınızı planlarken her iki kaynağı nasıl kullanabilirsiniz?
2. Sayı sistemimizdeki sayıların doğru sırasını takip ederek sayılacak nesnelerle eşleştirebilen ama her bir nesneyi tek tek sayıyla eşleştirmeyen bir öğrencinizin olduğunu fark ettiniz. Bu yüzden de en son söylenen sayı tutarsız ve hatalı olur. Birebir eşleştirmeyle ilgili daha iyi kavrayış geliştirebilmesine yardım etme amacıyla bu öğrenci için ne planlardınız?

Bölüm 8 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Çocuk edebiyatında saymayla ilgili harika kitaplardan bolca bulunmaktadır. Sayma ve saymayla ilişkili bir kitabı basit bir şekilde okumanın veya kitaptaki resimlere bakmanın okumanın ötesine gittiğinizde emin olunuz. Bu kitapları, çocukların dünyasına girecek şekilde genişletmenin bir yolunu bulunuz. Hikâyeyle ilgili problemler oluşturunuz. Çocukların hikâyede geçen matematiği görmelerini sağlayınız. Sayıları genişletiniz ve ne olacağına bakınız. Kitap künyesine bakarak kitabın ne kadar eski olduğu hakkında konuşunuz. Sayı kavramları ve sayı hissiyle edebi metinleri ilişkilendirmenize yardımcı olacak birkaç fikir şunlardır:

Anno's Counting House, *Anno, 1982*

This book shows ten children in various parts of a house. As the pages are turned, the house front covers the children, and a few are visible through cutout windows. A second house is on the opposite page. As you move through the book, the children move one at a time to the second house, creating the potential for a 10–0, 9–1, 8–2, . . . , 0–10 pattern of pairs. But as each page partially shows the children through the window, there is an opportunity to discuss how many in the missing part. Have children use counters to model the story as you "read" it the second or third time.

What if the children moved in pairs instead of one at a time? What if there were three houses? What if there were more children?

The Very Hungry Caterpillar, *Carle, 1969*

This is a predictable-progression counting book about a caterpillar who eats first one thing, then two, and so on. Children can create their own eating stories and illustrate them. What if more than one type of thing were eaten at each stop? What combinations for each number are there? Are seven little things more or less than three very large things?

Two Ways to Count to Ten, *Dee, 1988*

This Liberian folktale is about King Leopard's search for the best animal to marry his daughter. The task devised involves throwing a spear and counting to 10 before the spear lands. Many animals try and fail. Counting by ones proves too lengthy. Finally, the antelope succeeds by counting "2, 4, 6, 8, 10."

The story is a perfect lead-in to skip counting. Can you count to 10 by threes? How else can you count to 10? How many ways can you count to 48? What numbers can you reach if you count by fives? A hundreds board or counters are useful in helping with these problems. Be sure to have children write about what they discover in their investigations.

Another fun book to use is *The King's Commissioners* (Friedman, 1994), a hilarious tale that also opens up opportunities to count by different groupings or skip counting.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Fuson, K. C., Grandau, L., & Sugiyama, P. A. (2001). Achievable numerical understandings for all young children. *Teaching Children Mathematics*, 7(9), 522–526.

Researchers who have long worked with the number development of young children provide the reader with a concise overview of number development from ages 3 to 7. This practical reporting of their research is quite useful.

Griffin, S. (2003). Laying the foundation for computational fluency in early childhood. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6), 306–309.

This short article lays out clearly five stages of number development based on a simple addition story problem task. This is followed by activities to develop number at each stage. A useful article, especially for diagnosis and remediation of early number development.

Losq, C. (2005). Number concepts and special needs students: The power of ten-frame tiles. *Teaching Children Mathematics*, *11*(6), 310–315.

This is a very useful article to engage struggling learners in the use of a countable and visually unique model—the ten-frame tile. Losq positions the ten-frames described in this chapter in a vertical position to enhance subitizing or instant recognition and provide useful tools for formative assessment.

Kitaplar

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

One of three books in a series by these authors, they describe clearly the development of number concepts. Dolk represents the view of the Freudenthal Institute in the Netherlands and Fosnot is a respected mathematician and theoretician in the United States. This book demonstrates a sensitivity for children and a detailed perspective on children's number development.

Richardson, K. (2003). *Assessing math concepts: The hiding assessment.* Bellingham, WA: Mathematical Perspectives.

One of a series of nine assessment books covering number topics from counting through two-digit numbers. The assessments are designed for diagnostic interviews. Extensive explanations and levels with examples are provided. Richardson is a leading expert on early number development and assessment.

İnternet Kaynakları

Count Us In
www.abc.net.au/countusin/default.htm
A site full of downloadable activities and games for early number development.

Let's Count to 5 (Grades K–2)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U57
This site contains seven lessons with links to resources and downloads for student recording sheets. Children can make sets of zero through five objects and connect number words or numerals to the sets. Familiar songs, rhymes, and a variety of activities that appeal to visual, auditory, and kinesthetic learners are included. In a similar fashion see the following site for higher numbers.

Let's Count to 10 (Grades K–2)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U147

Let's Count to 20 (Grades K–2)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U153
These lessons emphasize the process standards of Communication and Reasoning.

Toy Shop Numbers (Grades K–2)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L216
Using the setting of a toy shop, these activities focus on finding numbers in the real world.

Representing Data—Baby Weight (Grades K–8)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=L170
In this grades 1–2 lesson, students work with data to complete an organized chart by doubling or halving numbers and compare data using bar graphs.

Math Tools: Math 1, Number Sense
http://mathforum.org/mathtools/cell/m1,3.2,ALL,ALL
On this one page of the Math Tools website you will find activities and lessons appropriate for first-grade number sense. Explore other options on the site as well.

Ten Frame (NCTM illuminations Tools)
http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?id=75
A nice manipulative version of the ten-frame. Four games that help students develop counting and addition skills are included in this activity.

Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings
www.naeyc.org/about/positions/pdf/psmath.pdf
The full position statement of the National Association for the Education of Young Children (NAEYC) and the National Council for Teachers of Mathematics (NCTM) is found at this location.

Bölüm 9

Dört İşlemin Anlamlarının Geliştirilmesi

Bu bölüm, çocukların farklı anlamları, yorumları ve ilişkileri toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine bağlamalarına ve bu sayede dört işlemi gerçek dünya durumlarında etkin bir biçimde kullanabilmelerine yardımcı olmaya yöneliktir.

Bu bölümün ana amacı çocukların *işlem hissi* olarak isimlendirilebilecek hissi geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Bu his, dört işlemin birbiriyle iç içe girmiş üst düzey bir anlamlandırılmasından ve bu işlemlerin gerçek dünya bağlamlarındaki birçok farklı, fakat ilişkili, anlamlarından ibarettir.

Bölümü okudukça sayı gelişimi, temel işlem becerisi ve hesap yapma üzerindeki etkiler üzerine özellikle yoğunlaşın. Çocuklar işlemlere dair anlam geliştirdikçe eş zamanlı olarak sayı hakkında başka fikirler ve basit işlemlere dair yöntemler geliştirebilirler ve geliştirmelidirler. İşlemlerin anlamlarına yönelik hikâye problemleri işlemsel becerileri geliştirmenin de bir yöntemidir.

Ana Fikirler

1. Toplama ve çıkarma birbirine bağlıdır. Toplama işlemi bütünü parça cinsinden isimlendirir ve çıkarma işlemi eksik olan kısmı isimlendirir.
2. Çarpma işlemi aynı büyüklüğe sahip grupların sayılmasını ve toplamda kaç eleman olduğunun belirlenmesini içerir (çarpımsal düşünme).
3. Çarpma ve bölme birbiriyle ilişkilidir. Bölme işlemi, bilinen çarpan ile çarpım cinsinden eksik olan çarpanı isimlendirir.
4. İşlemler için olan bağlamsal problemleri çözmede ve sayıların ebatlarına odaklanmaksızın bir problemde hangi işlemin olduğunu belirlerken modeller kullanılabilir. Modeller ayrıca sayı cümlelerini anlamlandırmada da kullanılabilir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Bu bölümdeki fikirler sayı kavramları (nümerasyon) ve hesaplamalar için üretilen yöntemlerin geliştirilmesiyle doğrudan bağlantılıdır.

- **Sayı Gelişimi (Bölüm 8):** Çocuklar sayılar hakkında parça ve eksik parçalar yardımıyla düşünmeyi öğrendiklerinde bu fikirleri toplama ve çıkarma işlemlerine de bağlamaları gerekir. Çarpma ve bölme öğrencilerin sayıları "bütünler" olarak düşünmelerini gerektirir: 3 x 6'da her bir "6" birer bütün (birim, çokluk) olarak sayılır.
- **Temel Kurallar (Bölüm 10):** Dört işlemi iyi anlamak toplama ve çıkarmayı sıkı sıkıya birbirine bağlayabilir ve bu sayede çıkarma işlemine dair temel kurallar, toplamayı öğrenmenin doğal bir sonucu olarak ortaya çıkar. Çarpma ve bölme arasındaki sıkı ilişki de bu tarz bir fayda sağlar.
- **Doğal Sayılarda Basamak Değeri ve Hesaplamalar (Bölüm 11 ve 12):** Öğrenciler daha büyük sayılar içeren bağlamsal problemleri çözdükçe ondalık sayı sistemi ile çalışıp bu sisteme dair fikirler geliştirirler. Bu sebeple öğrenciler dört işleme dair anlam geliştirdikçe iki basamaklı sayılarla işlemler için yöntem üretmelerini sağlamak yerinde olur.
- **Cebirsel Düşünme (Bölüm 14):** Cebirsel düşünmenin temelinde yatan şey denklemlerle bağlamsal durumları temsil etmektir. Bu, öğrencilerin bağlamsal problemlere çözüm olacak denklemleri yazmayı öğrenirken tam olarak yaptıkları şeydir.
- **Kesir ve Ondalık Sayı Hesaplamaları (Bölüm 16 ve 17).** İlkokulun üst kademeleri ve ortaokul sınıflarında yer alan bu konular dört işlemin tam olarak anlaşılmasına bağlıdır.

Toplama ve Çıkarma ile İlgili Problem Yapıları

Bu bölüme (toplama ve çıkarmayı içeren) toplamsal durumlar için dört ayrı problem yapısını inceleyerek başlayıp sonrasında (çarpma ve bölmeyi içeren) çarpımsal durumlar için dört problem yapısını inceleyerek devam edeceğiz. Her ne kadar bu gruplamalar öğrencilerin öğrenmesini umduğumuz bilgiler olmasa da öğretmenlerin bu gruplamaları pedagojik alan bilgisinin (PCK) (Shulman, 1986) – yani, öğretmenlerin öğrencilerin matematik

öğrenimini etkin bir biçimde desteklemeleri ve düzenleyebilmeleri için gereksinim duydukları derin anlamanın-bir parçası olarak bilmesi beklenmektedir. Farklı durum ve yapılardan habersiz öğretmenler öğrencilere onların dört işlemi tam olarak hazmetmelerini destekleyecek nitelikte uygun bir sıralamaya tabi olmayan gelişigüzel problemler verebilir ve böylece öğrencileri ileride karşılaşacakları farklı gerçek dünya durumlarına hazırlayamayabilirler. Bu problemlerin mantıksal yapısını bilerek öğrencilerin birçok matematiksel durumu yorumlayabilmesine yardımcı olabilirsiniz. Aynı şekilde öğrenciler bir problemi "ekleme" veya "ayırma" tarzı gruplamalarla ismen tanımlamaya gereksinim duymayacaktır, fakat bir öğretmen olarak sizin farklı problem çeşitlerini göstermeniz ve aynı zamanda hangi yapının öğrenciler için en büyük sorunlara sebebiyet verdiğini görmeniz gerekecektir.

Araştırmacılar toplama ve çıkarma problemlerini içerdikleri ilişkiler temelinde gruplara ayırmıştır. Bunlar, *birleştirme (bir araya getirme)* problemleri, *ayırma* problemleri, *parça-parça-bütün* problemleri ve *karşılaştırma* problemleridir (Carpenter, Carey, &Kouba, 1990; Carpenter, Fennema, Franke, Levi, &Empson, 1999; Gutstein&Romberg, 1995). Bu dört problem çeşidinin her birinin temel yapısı Şekil 9.1'de gösterilmektedir. Her yapı 3, 5, 8 gibi bir sayı "ailesi" içermektedir. Verilen durumdaki üç çokluktan hangisinin bilinmediğine bağlı olarak farklı bir problem çeşidi de ortaya çıkabilir.

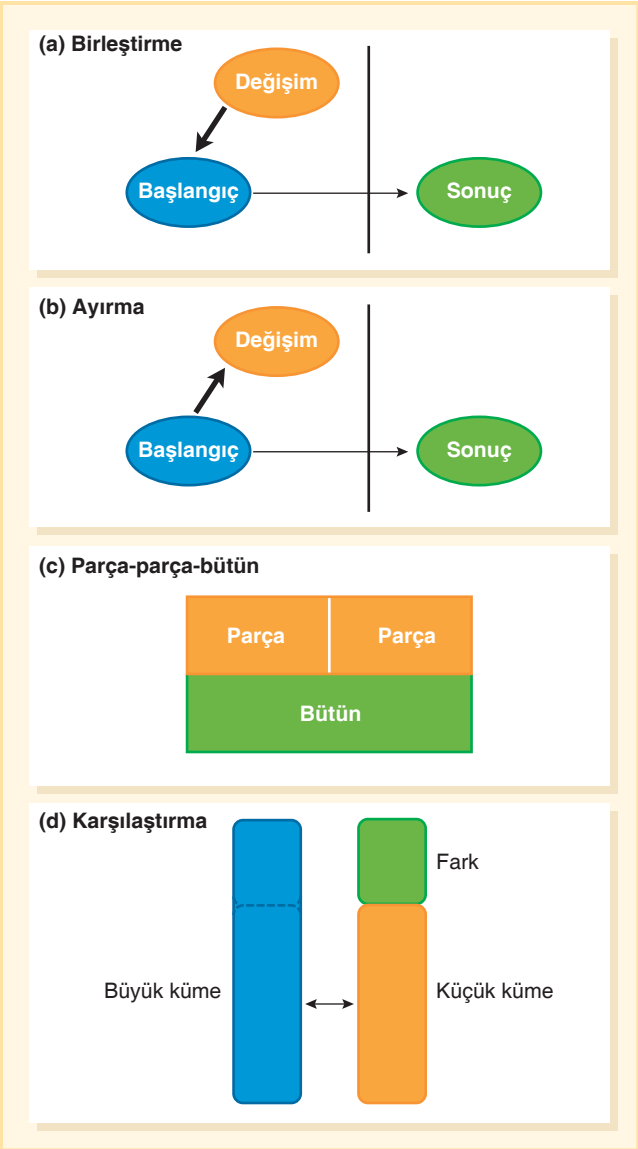
Dört Problem Yapısına Örnekler

Aşağıdaki bağlamsal problemlerin her birinde 4, 8, 12 sayı ailesi kullanılmıştır ve Şekil 9.1'deki yapıyla ilişkilendirilebilir. Bu çizimler öğrenciler için üretilmemiştir, fakat bir öğretmen olarak size yardımcı olacaktır. Ayrıca problemler toplama veya çıkarma problemleri gibi adlarla değil kendi yapıları ve anlamları itibariyle tanımlanmıştır. Düşünebileceğinizin aksine birleştirme eylemi her zaman toplama anlamına gelmez, aynı şekilde ayırma veya eksiltme eylemleri de çıkarma anlamına gelmez.

Birleştirme Problemleri. Birleştirme eylemi üç tane çokluk içerir: başlangıç miktarı, değişim miktarı (toplanan veya eklenen parça) ve sonuç miktar (değişim olduktan sonraki toplam miktar). Bu Şekil 9.1(a)'da değişim miktarının başlangıç miktara "eklenmesi" şeklinde gösterilmektedir. Burada da gösterileceği üzere bu çokluklardan herhangi biri bir problemde bilinmeyen olabilir.

Birleştirme: Sonuç Miktarın Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın 8 senti var. George kendisine 4 tane daha verdi. Sandra'nın toplamda kaç senti vardır?



Şekil 9.1 Toplama ve Çıkarmaya dair bağlamsal problem çeşitleri için dört temel yapı. Her yapı üç sayıya sahiptir. Verilen bir bağlamsal problemde bu üç sayıdan herhangi biri (problemdeki) bilinmeyen olabilir.

Birleştirme: Değişim Miktarının Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın 8 senti vardı. George kendisine biraz daha verdi. Bunun sonucunda Sandra'nın 12 senti oldu. George Sandra'ya kaç sent vermiştir?

Birleştirme: Başlangıç Miktarın Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın bir miktar senti vardı. George kendisine 4 tane daha verdi. Bunun sonucunda Sandra'nın 12 senti oldu. Sandra'nın başlangıçta kaç senti vardı?

Ayırma Problemleri. Dikkat ediniz ki "ayırma" problemlerinde başlangıç miktarı bütün veya en büyük miktar iken "birleştirme" problemlerinde sonuç bütünü verir. "Ayırma" problemlerinde değişimin anlamı bir miktarın bir başlangıç değerinden ayrılması demektir. Burada problemleri ele aldıkça Şekil 9.1(b)'ye bakabilirsiniz.

Ayırma: Sonuç Miktarın Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın 12 senti vardı. George'a 4 tanesini verdi. Sandra'nın bu durumda kaç senti vardır?

Ayırma: Değişim Miktarının Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın 12 senti vardı. Bir kısmını George'a verdi. Sandra'nın bu durumda elinde 8 senti var. Sandra George'a kaç sent vermiştir?

Ayırma: Başlangıç Miktarın Bilinmediği Durumlar

Sandra'nın bir miktar senti vardı. George'a 4 tanesini verdi. Sandra'nın bu durumda 8 senti kaldı. Sandra'nın başlangıçta kaç senti vardı?

Parça-Parça-Bütün Problemleri. Parça-parça-bütün problemleri Şekil 9.1(c)'de görüldüğü gibi bir bütüne dönüştürülebilen iki parçanın birleşimini içerir. Bu birleştirme bir fiziksel eylem olabilir ya da parçaların fiziksel olarak birleştirilmediği durumlarda zihinsel bir birleşim de olabilir.

Parça-parça-bütün durumunda iki parça arasında anlamlı bir ayırım yoktur, dolayısıyla her bir parçanın bilinmeyen olarak ele alınmasını gerektirecek farklı bir problem (yapısına) gerek yoktur. Burada her bir olasılık için (bütünün bilinmediği ve parçanın bilinmediği) ikişer problem verilmiştir. Bunların ilkinde herhangi bir eylemin olmadığı zihinsel bir birleşim vardır. İkincisiyse fiziksel bir eylem içerir.

Parça-Parça-Bütün: Bütünün Bilinmediği Durumlar

George'un 4 senti ve 8 nikeli[1] vardı. Bu durumda George'un kaç tane bozuk parası vardır?

George'un 4 senti ve Sandra'nın 8 senti vardı. İkisi de paralarını aynı kumbaraya koydular. Kumbaraya ne kadar para koymuş oldular?

Parça-Parça-Bütün: Parçanın Bilinmediği Durumlar

George'un 12 tane bozuk parası var. Bunların 8 tanesi sent ve geri kalanı da nikeldir. Bu durumda George'un kaç tane nikeli vardır?

George ve Sandra kumbaraya 12 sent atmışlardır. George, 4 sent atmıştır. Sandra kumbaraya kaç sent koymuştur?

[1] Ç.N. 1 nikel 5 senttir.

Karşılaştırma Problemleri. Karşılaştırma problemleri iki çokluğun kıyaslanmasını içerir. Üçüncü çokluk aslında mevcut değildir, fakat diğer iki çokluğun farkıdır. Şekil 9.1(d) karşılaştırma problem çeşidini göstermektedir. Karşılaştırma problemlerini, hangi çokluğun bilinmediğine bağlı olarak (küçük, büyük, fark) göstermenin üç yolu vardır. Burada bu yollardan her biri için iki örnek verilmiştir: ilk problemde fark büyük cinsinden ikincisinde ise küçük cinsinden verilmiştir.

Karşılaştırma: Farkın Bilinmediği Durumlar

George'un 12 senti ve Sandra'nın 8 senti vardır. George'unSandra'dan ne kadar daha fazla senti vardır?

George'un 12 senti vardır. Sandra'nın ise 8 senti vardır. Sandra'nın, Geroge'dan ne kadar daha az senti vardır?

Karşılaştırma: Büyük Çokluğun Bilinmediği Durumlar

George'un Sandra'nın sahip olduğu sentten 4 tane fazla senti vardır. Sandra'nın 8 senti vardır. George'un kaç senti vardır?

Sandra'nınGeorge'un sahip olduğu sentten 4 tane daha az-senti vardır. Sandra'nın 8 senti vardır. George'un kaç senti vardır?

Karşılaştırma: Küçük Çokluğun Bilinmediği Durumlar

George'un Sandra'nın sahip olduğu sentten 4 tane fazla senti vardır. George'un 12 senti vardır. Sandra'nın kaç senti vardır?

Sandra'nın George'un sahip olduğu sentten 4 tane daha az senti vardır. George'un 12 senti vardır. Sandra'nın kaç senti vardır?



Durup Düşün!

Verilen tüm bu örneklerin üzerinden gidiniz ve problemlerde kullanılan sayıları Şekil 9.1'deki yapının bileşenleriyle eşleştiriniz. Her problem için fazladan iki şey daha yapınız. İlk olarak, tıpkı ilkokul seviyesindeki öğrencilerin yapabileceğini düşünerek, problemi sayma nesneleri veya bozuk paralarla modelleyiniz (çözünüz). İkinci olarak da her bir problem için problemi en iyi şekilde sayma nesneleriyle çözerken temsil edeceğine inandığınız bir toplama ya da çıkarma denklemi yazınız.

Çoğu kitapta basit anlamda sonucu belirsiz olan birleştirme ve ayırma problemleri üzerine aşırı derecede bir vurgu vardır. Bunlar da toplama ve çıkarma için fiili tanım haline gelmektedir: Toplama "bir araya getirme" ve çıkarma "ayırma/eksiltme"dir. Aslında bunlar toplama ve çıkarma için (olması gereken) tanımlar değildir.

Öğrenciler toplama ve çıkarma için bu bir-araya-getirme ve ayırma/eksiltme tanımlarını geliştirdiklerinde, ile-

ride toplama ve çıkarmaya gereksinim duyulduğunda, ancak bir-araya-getirme ve ayırma yapılarından farklı bir yapıyla karşılaşıldığında öğrenciler çoğu kez zorluk çekerler. Bunun için öğrencilerin bu dört problem yapısındaki tüm çeşitlere maruz bırakılması önemlidir.

Problem Zorluğu. Birçok tipteki problemin zorluk derecesi öğrenciler için kesinlikle aynı değildir. Başlangıç miktarın bilinmediği birleştirme ve ayırma problemleri en zor problemler arasındadır (muhtemelen bu, problemleri doğrudan modelleyen çocukların başlangıçta kaç sayma nesnesini kullanmaları gerektiğini bilmemelerindendir). Değişim miktarının bilinmediği problemler de ayrıca zordur.

Birçok öğrenci karşılaştırma problemlerini verilen iki miktar için ayrı ayrı sayma nesne kümeleri oluşturmaksızın parça-parça-bütün problemleri olarak çözecektir. Burada bütün, büyük miktar olarak kullanılır (bir parçası küçük miktar için ve ikinci parçası da değişim miktarı için). ***Siz*** hangi yöntemi kullandınız? Çocuklar ne yaptıkları konusunda emin oldukları sürece bu yöntemi teşvik etmemek için kesinlikle bir sebep yoktur.

Öğrenciler önceki sayfalarda verilen tarzda çeşitli bağlamsal problemleri (çözmek için) denklemlere dönüştürmeye başladıkça karşılık gelen işlemi öne çıkaran uygun bir denklem üretmekte zorlanabilirler. Öğrenciler cebirsel düşünmeyi geliştiren incelemelere doğru ilerledikçe bu beceri çok önem arz eder. Öncelikli olarak hikâyede tarif edilen durumu okuyup anlamaya bağlı olarak birbirine eş denklemler üretme esnekliğine sahip olmayan, İngilizceyi öğrenenler için de denklemlerin yapısı zorluk teşkil edebilir. Bu sebeple denklemlerin anlamsal (semantik) ve işlemsel biçimlerini bilmenin öğrencilerinize yardımcı olmanıza nasıl katkı sağlayacağına bakmamız gerekir.

Denklemlerin İşlemsel ve Anlamsal Biçimleri. Eğer yukarıda önerildiği üzere her bir problem için bir denklem yazarsanız, bilinmeyen çokluğun eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılamadığı bazı denklemler elde edebilirsiniz. Örneğin, başlangıç kısmın bilinmediği birleştirme problemi için bir denklem $\square + 4 = 12$ şeklindedir. Burada sayılar problemdeki anlamı takip edercesine listelendiği için buna problem için anlamsal (semantik) denklem denir. Şekil 9.2 önceki sayfalarda verilen altı tane birleştirme ve ayırma problemi için anlamsal denklemleri göstermektedir. Dikkat ederseniz sonucu belli olmayan iki problem de bilinmeyeni eşitliğin bir tarafında yalnız bırakmaktadır. Bu şekilde bilinmeyeni izole eden bir denklem, denklemin işlemsel biçimi olarak adlandırılır. Anlamsal (semantik) biçim aynı zamanda işlemsel biçim de değilse (eldeki denkleme) denk bir denklem yazılabilir. Örneğin, $\square + 4 = 12$ denklemi $12 - 4 = \square$ şeklinde denk bir formda yazılabilir. İşlemsel biçim bu denklemleri bir hesap makinesi yardımıyla çözme durumunda olduğunuzda ihtiyaç duyacağınız biçimdir. Öğrenciler bir denklemde verilen durumu temsil etmenin birçok yolu olduğunu anlamalıdırlar. Sayılar büyüyüp çocuklar denklemleri sayma nesneleri yardımıyla çözerken, en nihayetinde denklemlerin farklı biçimleri arasındaki denkliği görmeyi öğrenmek zorundadırlar.

Bilinmeyen Çocuk	Birleştirme Problemleri	Ayırma Problemleri
Sonuç	8 + 4 = [ ]	12 – 4 = [ ]
Değişim	8 + [ ] = 12	12 – [ ] = 8
Başlangıç	[ ] + 4 = 12	[ ] – 4 = 8

Şekil 9.2 Sayfa 146-147'de verilen altı tane birleştirme ve ayırma probleminin her biri için anlamsal denklem. Sonucu bilinmeyen problemler için anlamsal ve işlemsel biçimlerin birbirinin aynısı olduğuna dikkat ediniz. Diğer dört problem için işlemsel biçim ise bilinmeyeni izole eden eş denklemdir.

Toplama ve Çıkarmanın Öğretimi

Şimdiye kadar toplama ve çıkarmaya dair birçok bağlamsal problem çeşidini gördünüz ve muhtemelen bu problemlerin çocuklarca nasıl çözüldüğünü anlamanıza yardımcı olacak sayma nesneleri kullandınız. Bağlamsal problemlerin kullanımı ile modellerin (sayma nesneleri, çizimler, sayı doğruları) kullanımını birleştirmek öğrencilerin bu iki işlem için zengin anlamlar inşâ etmesine yardımcı olmada önemlidir. Şimdi her bir yaklaşımın sınıfta nasıl kullanılabileceğini inceleyelim. Bu kısmı okudukça toplama ve çıkarmanın aynı zamanda (birbirine paralel olarak) öğretildiğini aklınızda tutunuz.

Bağlamsal Problemler

Öğrencilere sadece çözülmek üzere problem vermekten daha fazla düşünülmesi gereken şey vardır. Bir önceki kısımda verilen kısır bağlamsal problemlerin aksine aşağıdaki problemi dikkate alınız.

Dün ne kadar uzun olduğumuzu ölçüyorduk. Yerde yatar vaziyette iken boyumuzca uzanan büyük bir tren yapmak için birbirine geçmeli küpler kullandığımızı hatırlayınız. Dion ile Rosa baştan aşağı yattıklarında kaç küp uzunlukta olduklarını merak ediyorlardı. Dion, Rosayı ölçmüş ve 84 küp uzunlukta olduğunu bulmuştu. Rosa da Dion'u ölçtü ve 102 küp uzunlukta olduğunu buldu. İkisi uç uca konulduğunda ne kadar uzun olacaklarını bulalım ve sonrasında da ölçerek sonucu kontrol edelim.

Fosnot ve Dolk (2001) bağlamsal problemlerde çocukların sonucu bulma odaklı çalışmaya meyilli olduklarını

işaret etmiştir. "Öte yandan bağlamsal problemler 'okul matematiğinden' ziyade mümkün olduğunca çocukların yaşamlarıyla ilişkilidir. Bu tarz problemler çocukların gerçek dünyayı matematiksel olarak modellemebecerilerini geliştirmek ve bunu öngörmek için tasarlanmaktadır" (s.24). Bağlamsal problemler, yakın geçmişte sınıftaki, bir gezideki, sanat, bilim veya sosyal çalışmalara dair bir tartışmadaki veya çocuklara dair literatürdekideneyimlerden elde edilebilir.

Bağlamsal veya Hikâye Problemleri Üzerine Kurulu Dersler. Amerika'daki eğilim tek bir ders sürecinde öğrencilere bir sürü problem çözdürülmesidir. Bu derslerdeki odak ise cevapların nasıl bulunabileceği üzerinedir. Bununla birlikte Japonya'da dersin tümü bir veya iki problem ve bunlarla ilgili tartışmalar etrafında dönmektedir (Reys ve Reys, 1995).

Bağlamsal problemler üzerine kurulu, ikinci sınıflara yönelik iyi bir ders nasıl görünür? Eğer öğrencileri sadece problem çözenler olarak değil de aynı zamanda problemi nasıl çözdüklerini kelime, resim ve sayıları kullanarak açıklayan ve neden doğru yaptıklarını düşünenler olarak tasavvur ederseniz cevabınız daha doğal olacaktır. Çocukların ihtiyaç duyduklarında kendilerine yardımcı olacağını hissettikleri hangi fiziksel nesne varsa kullanmalarına izin verilmelidir veya basit anlamda resimler çizebilmelidirler. Kağıtlarına ne yazarlarsa yazsınlar yaptıklarını yeterince açıklamalı ve (bu açıklamalar) başkalarının da kendilerinin ne düşündüğünü anlamasına imkân vermelidir (en azından bir problem için öğrencilere yarım sayfa kadar yer verilmelidir).

Investigations in Number, Data, and Space adlı müfredat kitabının ikinci sınıflar için yazılan kısmı, toplama ve çıkarma kavramlarının ilişkilendirilmesine kayda değer bir önem vermektedir. Sayfa 150'de verilen alıntıda çıkarma işlemine dair bağlamsal problemleri içeren bir etkinlik göreceksiniz. Burada öğrencilerin verilen durumu zihninde canlandırmasına ve problemi kendi kelimeleriyle anlamlandırmasına yapılan vurguyu özellikle dikkate alınız.

Problemler için Sayı Seçme. Anaokul öncesi ve anaokulu çocuklarından bile bağlamsal problemleri çözmesi beklenebilir. Bu çocukların çözüm yöntemleri genellikle problemi doğrudan modelleyerek sayma nesneleri kullanmayı veya deney yapmayı içerecektir. Başlangıç miktarı verilmemiş birleştirme ve ayırma problemlerini zor yapan da budur. Bu tarz problemler için çocuklar öncelikle deneme-yanılma yaklaşımını kullanırlar (Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999).

Her ne kadar problemlerin yapısı farklı zorluklara neden olsa da, problemlerde kullanılan sayılar çocukların sayı gelişimiyle uyumlu olmalıdır. Anaokul öncesi ve anaokulu çocukları kavramsal olarak içselleştirebilecekleri büyüklükte sayıları kullanabilirler ki bu sayılar genelde 10 veya 12'ye kadar olan sayılardır.

İkinci sınıfta okuyan çocuklar ayrıca iki basamaklı sayıları öğrenmekte ve ondalık sayı sistemimizin nasıl çalıştığını anlamaya başlamaktadır. Öğrencilerin basamak değerini öğrenmesini ve sayı hesaplamalarına dair teknikler geliştirmelerini beklemektense bağlamsal problemler onların sayıları ve sayı üzerine hesaplamaları eşzamanlı öğrenmeleri için problem temelli imkân sunacaktır. Örneğin, 30 ile 42 sayılarının birleştirilmesini içeren bir problem öğrencilerin 10'luk gruplara odaklanmasına yardımcı olma potansiyeline sahiptir. Öğrenciler 42 sayısını 40 ve 2 olarak düşünmeye başladıkça önce 30'a 40 eklemek ve sonrasında da 2 daha eklemek şeklinde düşünmek artık onlara mantıksız gelmeyecektir. Bölüm 12'deki hesaplamalar için kullanılan icat edilmiş yöntemleri öğrendikçe hesap gelişimine destek olmak için derslerinizde kullanacağınız problemlere yönelik nasıl sayılar seçilmesi gerektiğini daha iyi anlamlandıracaksınız.



Standartlar belgesinin yazarları toplama ve çıkarmanın ilişkilendirilmesinin değerini açıkça ortaya koymaktadırlar. "Öğretmenler, öğrencilerin tekrar tekrar aynı sayıların farklı bağlamlarda ortaya çıktığı durumlarla karşılaşmasını garanti altına almalıdır. Örneğin, 3, 4 ve 7 sayıları 4+3, 3+4, veya 7-3 veya 7-4 işlemleriyle temsil edilebilecek problem durumlarında görünebilir. Toplama ve çıkarma arasındaki ters ilişkinin fark edilmesi öğrencilerin problem çözmede yöntem kullanırken esnek olmalarına imkân verebilir" (s.83).

Sembolizmin Tanıtılması. Çok küçük yaştaki çocuklar toplama ve çıkarma kavramlarını anlamlandırmak için +, - ve = sembollerini anlamak zorunda değildir. Bununla birlikte bu sembolik gösterimler de önemlidir. Öğrencilerinizin bu sembolleri kullanmaya hazır olduklarını hissettiğiniz zaman, öğrencilerin bağlamsal problemler çözdüğü derslerin tartışma kısmında bu sembolleri tanıtabilirsiniz. Örneğin, "Problemde 12 sayısı var ve 8 sayısı da 12'nin parçalarından birisidir. Bilmediğiniz parçanın 4 olduğunu belirlediniz. Bunu yazmanın bir yolu 12 - 8 = 4'tür" diyebilirsiniz. Eksi işareti "eksi" veya "çıkar" şeklinde okunabilir ancak "ayırma " olarak okunamaz. Artı işareti ise genelde "ve" yerine kullanıldığı için daha kolay anlaşılır.

Eşittir işaretine ayrıca dikkat edilmelidir. Eşittir işareti "… ile aynı " anlamına gelmektedir. Ancak çoğu öğrenci bu sembolü "cevap geliyor" mesajı veriyor olarak düşünmektedir. Bu sembol hesap makinasındaki [=] tuşu ile aynı manada ele alınmaktadır. Yani, cevaba ulaşmak için basmanız gereken bir tuş'tur. 4 + 8 = 3 + 9 denkleminin bir "cevabı" yoktur ve halihazırda doğrudur, çünkü iki taraf da aynı çokluğu temsil eder. Öğrencilerle birlikte denklemleri ele alırken "… ile aynı" yapısını "eşittir"in yerine veya bununla birlikte kullanmak iyi fikirdir.

Diğer bir yaklaşım da eşit işaretini denge olarak kullanmaktır. Bir tarafta ne varsa diğer tarafı "dengeler" veya diğer tarafa eşittir. Bu da eğer (yeterince) erken geliştirilirse ileri sınıflarda cebirsel düşünmeyi destekleyecektir (Knuth, Stephens, McNeil, ve Alibali, 2006). (Eşitlik işaretinin "cevap geliyor" anlamından ziyade "… ile aynı" olarak öğretimine daha detaylı bakmak için Bölüm 14'ü inceleyiniz.)

Investigations
in Number, Data, and Space

2. Sınıf, *Sayma, Madeni Paralar ve Kombinasyonlar*

Bağlam

Sayma, Madeni Paralar ve Kombinasyonlar ünitesi 2. sınıf için üretilen 9 üniteden ilkidir. Toplama, çıkarma ve sayı sistemi üzerine çalışmayı gerektiren dört üniteden biridir. Bu ünitede çocuklar bazı kuralları öğrenmeye başlayıp,icat ettikleri yöntemleri kullanarak iki basamaklı sayılardan oluşan problemlere doğru ilerlemektedir. Sayma sayısı üzerine işlemlerdeki odaklanma problem yapısını anlamayı, bağlamsal problemleri çözmek için yöntem geliştirmeyi ve kelime, resim ve sayı kullanarak (problem) çözümlerini açıklamayı içermektedir. Ünite serisinde bu bölümde daha önce verilmiş olan her çeşit problem yapısı geliştirilecektir. Burada öğrencilerin sadece bir eylem veya gösterime odaklanmaktan ziyade farklı durumlar ve perspektifler hakkında düşünmelerine yardımcı olması için farklı problem çeşitlerine vurgu yapılmaktadır.

Görev Tarifi

Sayma, Madeni Paralar ve Kombinasyonları ünitesi öğrencilerin toplama ve çıkarma problemlerini hikâye durumları dahilinde incelemesini ve akabinde de tanımlanan eylemlerin modellenmesini ve görselleştirilmesini sağlamaktadır. Bu etkinlikleri takip eden tartışmalar toplama ve çıkarma kavramlarını ilişkilendirmek için bağlamsal problemleri kullanan belirli bir çabayı içermektedir. Bu sayfada gösterilen çıkarma etkinliği çizelgede veya başka göze çarpan bir yerde kendi başına gösterilen birçok etkinlikten (sadece) biridir. Bağlamsal problemlerin her biri bu bölümde tartışılan çeşitli yapıları temsil etmek için kurgulanmıştır. Örneğin, bu çıkarma etkinliği sonucun bilinmediği ayrı bir problemi göstermektedir. İşe başlarken öğrencilere bir hikâye dinleyecekleri, verilen durumu zihinlerinde canlandırmaları ve problemi kendi kelimeleriyle anlamlandırmaları söylenir.

Çıkarma problemleri genellikle takip etmesi daha zor problemler olduğu için öğrencilere sonucun 16'dan çok mu yoksa az mı olacağı sorulur. Öğrenciler cevabı verirken cevabın neden öyle olduğunu (arkadaşlarıyla) paylaşabilmelidirler. Sonrasında öğrenciler problemi çözmek için arzu ettikleri yöntem veya materyal ne varsa kullanmalı; fakat yaptıkları işi de gösterebilmelidirler ki sonuç olarak "bir başkası yaptığınız işe bakabilmeli ve problemi çözmek için ne yaptığınızı anlayabilmelidir" (s.41).

İsim Tarih

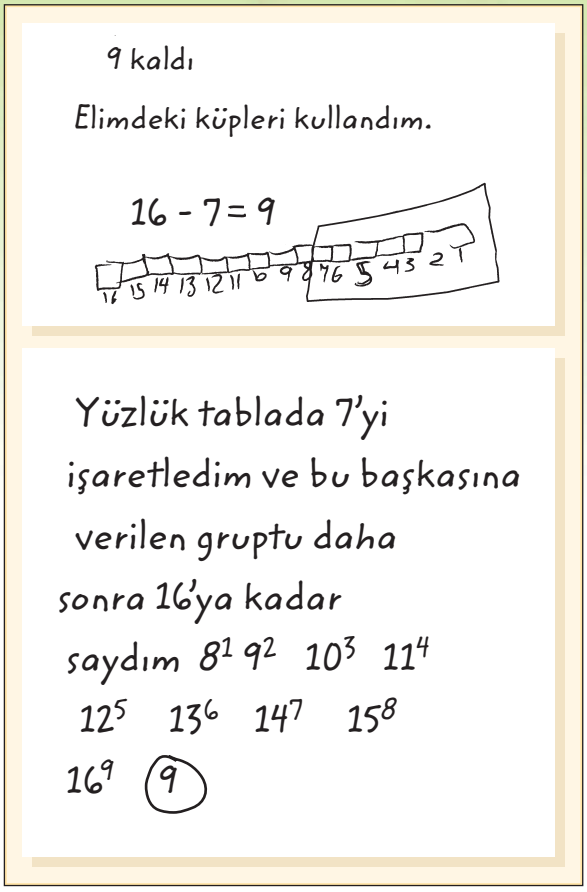
Sayma, Madeni Paralar ve Kombinasyonlar

Kaç Tane Kart Vardır?

Problemi çözünüz. Yaptıklarınızı açıklayınız.
Bir denklem yazınız.

1. Kira'nın16 tane beyzbol kartı vardı. 7 tanesini başkasına vermiştir. Kira'nın elinde kaç tane beyzbol kartı kalmıştır?





Kaynak: Investigations in Number, Data, and Space: Grade 2 — Counting, Coins, and Combinations, s. 150—151. Kullanım hakkı 2008-Pearson Education, Inc., veya bağlı birimlerindir. İzin alınarak buraya konulmuştur. Her hakkı saklıdır.

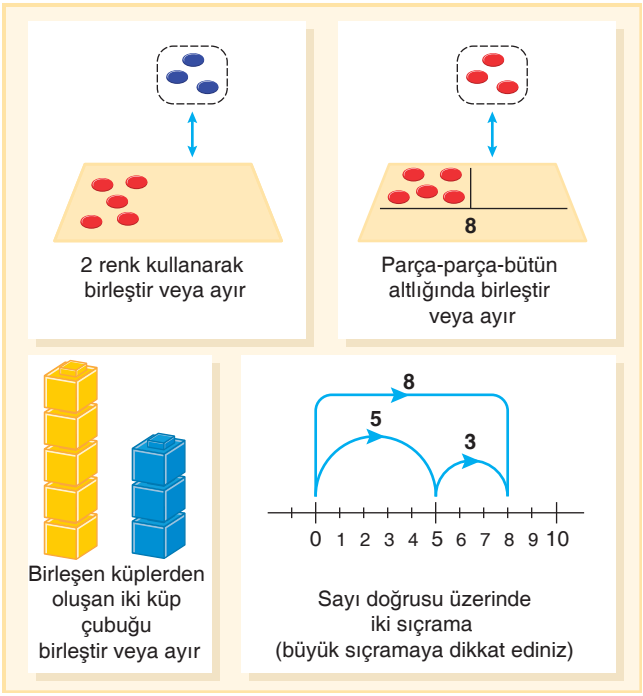
Bu etkinliği takip eden bütün bir ders süresince öğrencilere kendi yöntemlerini öğretmenle paylaşmaları için imkân verilir ve öğretmen de sorular sorarak öğrencilerin anlamalarını derinleştirir. Buna ek olarak öğretmen bir başka öğrenciden sınıf arkadaşı tarafından önerilen bir çözümü modellemesini isteyebilir (örneğin, öğrenci çalışma örneklerinde gösterildiği gibi küpleri veya yüzlük çizelgesini kullanmak gibi). Diğer öğrencilere de aynı yöntemi denemeleri söylenebilir. Öğrencilere aidiyet hissi vermek adına kaç öğrencinin benzer yaklaşım kullandığını sorup bu esnada öğrencilerin gelişimine dair fikir edinebilirsiniz. Problemi geçmeden önce halihazırda gösterilmeyen yöntemleri de tartışabilirsiniz.

Probleme dair denklem yazarak da sembolik gösterimlerle bağ kurmak önemlidir. Bunun aynı sayıları kullanarak toplama işlemi içeren bir hikâyeye nasıl bağlanabileceği hakkında da konuşabilirsiniz.

Biraz zaman ayırarak iki öğrencinin çalışma örneklerine bir bakınız. Öğrencilerin kendi düşüncelerini kaydetmelerinde ne dikkatinizi çekti? Kullandıkları yöntemi belirleyebilir misiniz? Yöntemlerden biri diğerlerine göre daha çok hata yapmaya müsait midir? Bir yöntem diğerlerine göre daha üst düzey bir anlama gerektiriyor mu?



Öğrencilerin bağlamsal problemleri çözmelerini izlemek size çocukların sayıyı anlamaları hakkında epey bilgi verecektir - benzer şekilde problem çözmeleri ve toplama ve çıkarmaya dair anlamaları hakkında daha aşikar bilgi verecektir. CGI (Carpenter vd., 1999) projesi anaokulundan 2. sınıfa kadar çocukların problem çözme stratejilerinde bir gelişme olduğunu bulmuştur. Bu stratejiler, öğrencilerin sayıyı anlamalarının ve temel kurallarla ilgili stratejilerde ortaya çıkacak becerileri öğrenmelerinin bir yansıması şeklindedir. Örneğin, ilk zamanlarda öğrenciler sayma nesneleri kullanacaklar ve her ekleneni sayacaklar ve sonrasında tüm kümeyi tekrardan sayacaklardır (sonucu bilinmeyen ekleme problemi). Daha fazla pratikle ilk kümeden hareketle (ilk kümeyi saymaksızın) sayacaklardır. Bu yöntem daha büyük kümelerden itibaren saymaya dönüşecektir; yani, 4+7 için çocuk, her ne kadar ilk sayı 4 olsa da, 7'den itibaren saymaya başlayacaktır. En nihayetinde öğrenciler akıllarında kalan bazı temel kuralları kullanmaya başlayacaklar ve sayma nesneleri veya diğer modellere sadece gerektiğinde başvuracaklardır. Öğrencilerin nasıl problem çözdüklerini gözlemlemek size problemlerde hangi sayıları kullanmanız gerektiğine ve öğrencilere onların ilgilerinin daha etkin yöntemler üzerine çekilmesini sağlayacak hangi soruları sormanız gerektiğine karar vermenizde yardımcı olacak ipuçları verir. ◆



Şekil 9.3 5 + 3 = 8 ve 8 − 3 = 5 için parça-parça-bütün modeli

Model Temelli Problemler

Çoğu öğrenci bağlamsal problemleri çözmek için sayma nesnelerini veya sayı doğrularını (modelleri) kullanacaktır. Model onların hem problemde ne olduğunu anlamasına yardımcı olan hem de sayıları bir düzen içerisinde takip etmesine ve problem çözmesine yarayan bir düşünme aracıdır. Problemler, ortada bir bağlam olmadığı zaman, ayrıca model kullanarak da sorulabilir.

Toplama. Bir kümenin parçaları bilindiği zaman toplama bütünün parçalar yardımıyla isimlendirilmesi için kullanılır. Toplamanın bu basit anlamı hem eylem durumlarında (birleştirme ve ayırma) hem de hareketsiz veya eylem içermeyen durumlarda işimize yarar.

Şekil 9.3'te gösterilen her bir parça-parça-bütün modeli 5+3=8 için bir modeldir. Bunların bazıları belirgin bir araya getirme veya birleştirme eylemlerinin bir sonucu olup bazıları da değildir. Her örnekte paralar birleştirilse bile ikisinin de ayrık olduğuna dikkat ediniz. Sayma nesneleri kullanılırsa iki parça ayrı ayrı yığınlar olarak veya bir altlığın kısımları olarak ya da iki farklı renkte tutulur. Öğrencilerin iki parça ile bütün arasındaki ilişkiyi görebilmesi için 5 ve 3'ün resimlerinin iki ayrı küme olarak ele alınması şarttır. Bu, çocukların yapıldıktan sonra yapılan bir eylem üzerine düşünmesine yardımcı olur. "Bu kırmızı sayma nesneleri başlangıçta ele aldıklarımdır. Sonrasında 3 tane mavi sayma nesnesi ekledim ve şimdi elimde hepsi bir arada 8 tane var."

Sayı doğrusu 1 ve 2. sınıf öğrencileri için bazı kavramsal sorunlar üretmektedir. Sayı doğrusunun bu kademede model olarak kullanımı genellikle önerilmez. Sayı doğrusu, cetvelde olduğu gibi, sıfırdan (sıfır noktasından) olan uzaklığı ölçer. İlk sınıflarda çocuklar (sayı doğrusu üzerindeki) aralıklardan ziyade işaretlere veya rakamlara odaklanmaktadır. Bununla birlikte eğer her bir örnekteki her sayı için bir işaretten diğerine atlama okları (atlama çizgileri) çizilirse uzunluk kavramı daha açıkça gösterilmiş olacaktır. 5+3'ü parça-parça-bütün olarak modellemek için "bu kadarı 5 eder" anlamına gelen 0'dan 5'e kadar bir ok çizilir. 5 için sayı doğrusu üzerinde verilmiş olan işarete "bu beştir" diyerek vurgu yapılmaz.

Etkinlik 9.1

Sayı Doğrusu Üzerinde Aşağı ve Yukarı Gitmek

Sınıfınızın tabanında büyükçe bir sayı doğrusu oluşturunuz veya bir tane sayı doğrusunu tahtanın silgi ve tebeşir konan kısmına asınız. Tahta üzerindeki zıplamaları temsil için tahta silgisi kullanınız ya da sınıf tabanı üzerinde yürüyen bir öğrenciden yararlanınız. Her farklı denklem için gereken hareketler üzerine konuşunuz. Bu yapılan etkinlik, sayı doğrusu üzerindeki aralıkları vurgulamaktadır ve toplama ve çıkarmanın anlamları hakkında düşünmek için harika bir zihinsel görüntü sağlamaktadır.

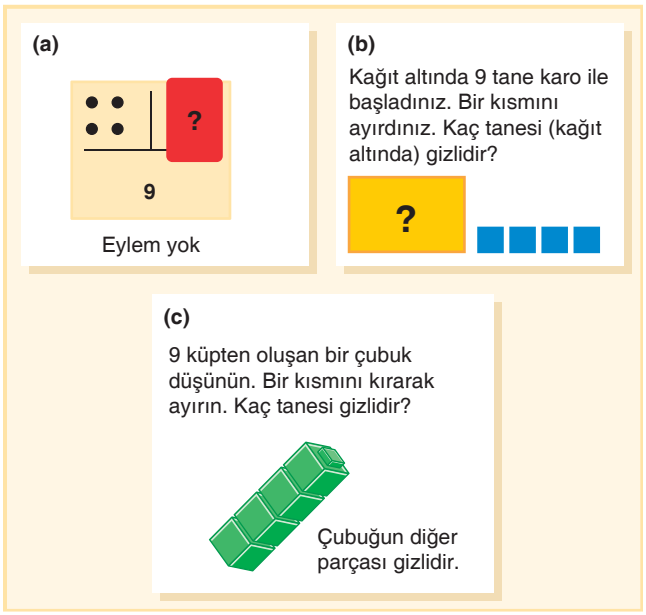
Çıkarma. Bir parça-parça-bütün modelinde bütün ve parçalardan birisi bilindiğinde çıkarma işlemi diğer parçayı isimlendirir/belirler. Bu tanım dilde aşırı şekilde kullanılmakta olan "ayırma" ile de uyumludur. Eğer 8 bütünüyle başlarsanız ve 3 kümesini ayırırsanız, bilinen iki küme 8 ve 3 kümeleridir. "Sekiz eksi üç" diye okunan 8-3 ifadesi 5'i isimlendirir/belirler. Bu yüzden sekiz eksi üç, beştir. Dikkat ederseniz Şekil 9.3'teki modeller hem çıkarma hem de toplama (eylemler hariç) işlemi için modeldir. Çocukların aynı

model veya resimleri kullandıklarını görmelerine yardımcı olmak bu iki işlemi (onlar için) ilişkilendirecektir.

Etkinlik 9.2

Eksik-Kısım Çıkarma İşlemi

Belli sayıda sayma nesnesi bir altlığın üzerine konur. Bir çocuk altlık üzerindeki sayma nesnelerini iki parçaya ayırır ve bu arada diğer bir çocuk gözlerini kapar. İlk çocuk iki parçadan birisinin üzerini bir parça kağıt ile kapatır ve sadece ikinci parçayı gösterir (bkz. Şekil 9.4(b)). (Bunun üzerine) ikinci çocuk bir çıkarma işlemi söyler. Örneğin, "Dokuz eksi dört [görünen parça] beştir [gizlenen parça]." Eğer gerekirse gizlenen parça çocuğun orada kaç sayma nesnesi olduğunu söylemesi için gösterilebilir. Daha sonra hem çıkarma hem de toplama denklemi yazılabilir.



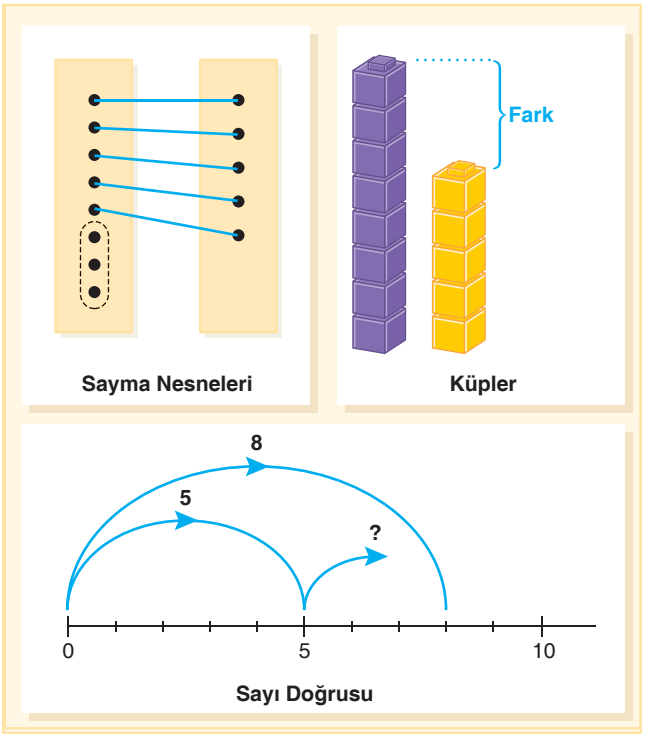
Şekil 9.4 Bir eksik-parça problemi olan 9-4 için modeller

Toplama-Düşüncesiyle Çıkarma İşlemi. Etkinlik 9.2'de eldeki durum açık bir şekilde, ayırma eylemi olsa bile, iki ayrık parça ile son bulmaktadır. Ayrılan parça etkinlikte veya altlık üzerinde, çıkarma denklemi yazıldıktan sonra yazılması gereken toplama denklemi için, bir model olarak kalmaktadır. Aynı model durumu için bu iki denklemin nasıl yazılabileceği üzerine bir tartışma, toplama ve çıkarmayı ilişkilendirmek için önemli bir imkândır. Bu modelleme ve toplama ve çıkarmanın birbiriyle olan bağları üzerine yapılan tartışmalar, öğrencilere 3, 5, 8 gibi sayı ailelerinin verildiği ve iki toplama iki de çıkarma denklemi yazmalarının istendiği "kurallar ailesi" tarzında geleneksel etkinlikten çok daha iyidir. Bu (ikinci yol) genellikle sayıları belli yerlere koymaya dair ezbere bir işlem halini almaktadır.

Çıkarma işlemi hakkında "ayırma" düşüncesinden çok "toplama-düşüncesiyle" hareket etmek çıkarma işlemine dair temel kuralları öğrenmek için çok önemlidir. Kalan veya bilinmeyen parça için kullanılan sayma nesneleri bir örtü altında saklı kaldığı için çocuklar bu etkinlikleri yaparken saklı kalan parça üzerinde düşünmeye teşvik edilirler: "Gördüğüm parça ile neyi denk getirirsem bütünü oluştururum?" Örneğin, toplam veya sayma nesnelerinin tamamı 9 ise ve 6 tane de örtü altından ayrılmış ise çocuk muhtemelen " 6 ile ne 9 yapar?" veya "6'ya ne koyarsan 9'u verir?" şeklinde düşünecektir. Buradaki zihinsel eylem "ne kaldığını say" dan ziyade "toplama-düşüncesi"dir. Daha sonraları çıkarma kuralları üzerine çalışırken 9 – 6 = □ gibi bir çıkarma kuralı aynı tarz düşünceyi tetikleyebilir: "6 ve ne, 9 yapar?"

Karşılaştırma Modelleri. Karşılaştırma gerektiren durumlar iki ayrık küme veya çokluk ve bunların farkını içerir. Şekil 9.5'te fark ilişkisini modellemenin çeşitli yolları gösterilmektedir. İster fark isterse çokluklardan biri bilinmesin aynı model kullanılabilir.

Bir karşılaştırma durumuyla toplama ve çıkarma işlemlerinden birinin nasıl ilişkilendirileceğinin çok da açık olmadığına dikkat ediniz. Bir yetişkin bakış açısıyla büyük çokluğun bir kısmı ile küçük çokluğu eşleştirirseniz büyük çokluğun parça-parça-bütün modeline dönüştüğünü ki bunun da problemi çözmenize yardımcı olduğunu görebilirsi-



Şekil 9.5 8 ve 5 arasındaki fark için (kullanılan) modeller.

niz. Aslında çoğu çocuk karşılaştırma problemlerini sadece bu şekilde yapmaktadır. Fakat çocuklara bir fikri göstermek, o fikri kendileri yapılandırmadıkları sürece, çok zordur.

Çocukların iki çokluk yapmalarını sağlayın, mesela birbirine geçmeli küplerden oluşan iki çubuk yapabilirler. Üçüncü sayıyı üretebilmek için iki çubuğun farkı üzerine tartışın. Örneğin, çocuklar 10'luk ve 6'lık çubuklar yaptıysa onlara "10'luk çubukla eşleşmek için kaç tane daha küpe ihtiyacımız var?" diye sorun. Fark 4'tür. "Bu üç sayıyı kullanarak hangi denklemleri oluşturabiliriz?" Çocukların 10 ve 6 miktarlarını içeren bağlamsal problemler üretmesini sağlayın. Hangi denklemlerin üretilen problemlere uygun olduğunu tartışın.

Toplama ve Çıkarmanın Özellikleri

Toplamada Değişme Özelliği. Toplama için değişme özelliği bize iki sayının hangi sırada toplandığının hiçbir öneminin olmadığını söyler. Her ne kadar değişme özelliği bizim için aşikar görünse de (parça-parça-bütün altlığında iki sayma nesne yığınını basitçe yer değiştir) çocuklar için bu kadar açık olmayabilir. Bu özellik problem çözmede, temel kuralları öğrenmede ve zihinde yapılan matematikte epey kullanışlı olduğu için çocukların bu ilişkiyi inşâ etmesine yardımcı olmak için biraz zaman ayırmakta fayda vardır. Öğrencilerin kavramı anlayıp uygulamaları bu özelliği isimlendirebilmelerinden daha önemlidir.

Schifter (2001) 10'a kadar olan toplamları incelerken "arkaya-dönme" özelliğini keşfeden bir grup yeni ikinci sınıf öğrencisinden oluşan sınıfı anlatmaktadır. Sonrasında öğretmen bu fikri gerçekten anlayıp anlamadıklarını merak eder ve çocuklara bunun her zaman işleyip işlemeyeceğini sorar. Sınıftaki çoğu öğrenci bunun her zaman çalışacağından emin değildir ve özellikle bunun büyük sayılarla çalışacağından hiç emin değildir. Buradaki ana mesele, çocuklar üzerinde deneyim kazandıkları toplamlar için değişme özelliğini görüp kabullenebilir fakat bu basit ancak önemli özelliğin tüm toplama kombinasyonları için çalışacağını açıklayamayabilir veya hatta buna inanmayabilirler.

Çocukların değişme özelliğine odaklanmalarına yardımcı olmak için aynı bileşenlere farklı sırada sahip problemleri ikili gruplar halinde ele alın. Her problem için bağlam farklı olmalıdır. Örneğin:

Tania kitabının 32. sayfasını okumaktadır. Ertesi gün 15 sayfa daha okuyabileceğini düşünmektedir. Eğer o kadar sayfa daha okursa hangi sayfaya gelecektir?

Kafeteryadaki süt tablasındaki sütlerin sayısı 15 kartona kadar düşmüştür. Öğleden önce süt dağıtıcısı biraz daha süt getirmiştir. Tablayı 32 tane daha süt kutusu ile doldurmuştur. Süt tablası kaç karton süt almaktadır?

Bu problemlerin nasıl birbiriyle benzer olduklarını kimsenin fark edip etmediğini sorun. Eğer ikişerli çalışırlarsa bazı öğrenciler (hepsi değil) problemlerden biri çözülünce aslında ötekinin de çözüldüğünü anlayacaktır.

Toplamada Birleşme Özelliği. Toplamada birleşme özelliği üç veya daha fazla sayı toplandığında ilk sayı çiftinin öncelikle toplandığının veya diğer bir sayı çiftiyle toplamaya başladığınızın bir öneminin olmadığını söyler. Toplamada daha fazla esneklik vardır ve öğrenciler bildikleri kombinasyonlarla çalışabilmek için sayıları grupladıkları sırayı değiştirebilirler. Aşağıdaki örneklerin verilen ifadeleri sadece soldan sağa okumaktan farklı olarak sayıları belli bir sırada eklemek için zihinsel bir gruplama içerdiğine dikkat ediniz.

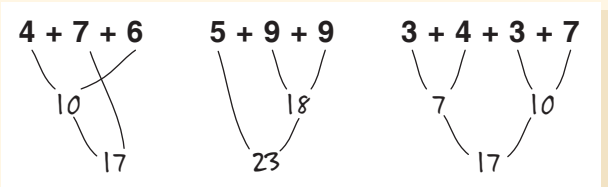
Etkinlik 9.3

İkiden Fazla Toplanan Bileşen

Öğrencilere sonucunu bulmaları için 3 ve 4 tane bileşenden oluşan altı tane toplama işlemi verin. Bunları altı parçaya ayrılmış bir sayfada hazırlayın ki her birinin altında yazmak için boşluk olsun. Her birinde toplamı 10 (belki iki katı olan) en az bir çift olsun: 4 + 7 + 6, 5 + 9 + 9 veya 3 + 4 + 3 + 7. Öğrenciler sayıları nasıl topladıklarını gösterebilmelidirler. Başka herhangi bir yönlendirme yapmadan öğrencilerin toplamları bulmalarına imkân verin.

Şekil 9.6 öğrencilerin düşündüklerini nasıl gösterebildiklerini vermektedir. Çözümlerini paylaştıkça mutlaka farklı bir sıra kullanarak ekleyen fakat aynı sonucu bulan öğrenciler olacaktır. Bu tartışmadan hareketle öğrencilerin sayıları herhangi bir sırada toplayabilecekleri sonucuna varmasına yardımcı olabilirsiniz. Aynı zamanda birleşme özelliğini kullanıyorsunuz fakat bundan daha önemlisi değişme özelliğidir. Bu aynı zamanda harika bir sayı hissi etkinliğidir, çünkü çoğu öğrenci bu toplamlarda 10'un kombinasyonlarını bulacak veya (sayıların) iki katlarını kullanacaktır. Sayıları birbirine denk gelecek şekilde farklı yöntemlerle ayarlamayı öğrenmek hesap yapmaya dair ustalık kazanmada yolun başlangıcıdır.

Sıfır Özelliği. Sıfırı içeren bağlamsal problemler ve üç bileşenli toplamalarda sıfır kullanımı da öğrencilerin sıfırı toplama ve çıkarmada birim eleman olarak anlamalarına yardımcı olacak iyi bir yöntemdir (*Öğretim Programı Odak*



Şekil 9.6 Öğrenciler toplamayı nasıl yaptıklarını göstermektedir.

Noktaları [CFP], 1. Sınıf). Zaman zaman öğrenciler, 6+0'ın 6'dan daha fazla olması gerektiğini çünkü "toplamanın sayıları büyüttüğü"nü veya 12-0'ın 11 olması gerektiğini çünkü "çıkarmanın sayıları küçülttüğünü" zannederler. Sıfırın eklenmesine veya çıkarılmasına dair gelişigüzel şatafatlı kurallar üretmektense problem çözme rutininde sıfırla ilgili tartışma yapmak için imkân oluşturun.



Halihazırda az sayıda kitap, toplama ve çıkarmaya dair burada incelediğimiz birçok problem çeşidini içeren bağlamsal problemlere yer vermektedir. Ancak sınıfınızdaki bilgisayarlardan faydalanmanın, sahip olduğunuz herhangi bir temel yazılım aracıyla, iki farklı yolu daha vardır. İlk olarak Word yazılımını kullanarak problemleri kendiniz verebilirsiniz veya şekillerin kolayca çizimine ve kelimelerin kolayca yazımına izin verecek herhangi bir program kullanabilirsiniz. Yeni bir dosya açın ve uygun bir boşluğa bağlamsal bir problem yazın. Öğrenciler dosyayı açar ve çözümlerini kaydetmek için çizim özelliklerini kullanabilirler. Ayrıca öğrencilerin sizin ürettiğiniz şekiller için bilgisayarda bağlamsal problemler yazmalarını sağlayabilirsiniz. ◆

Çarpma ve Bölme Problem Yapıları

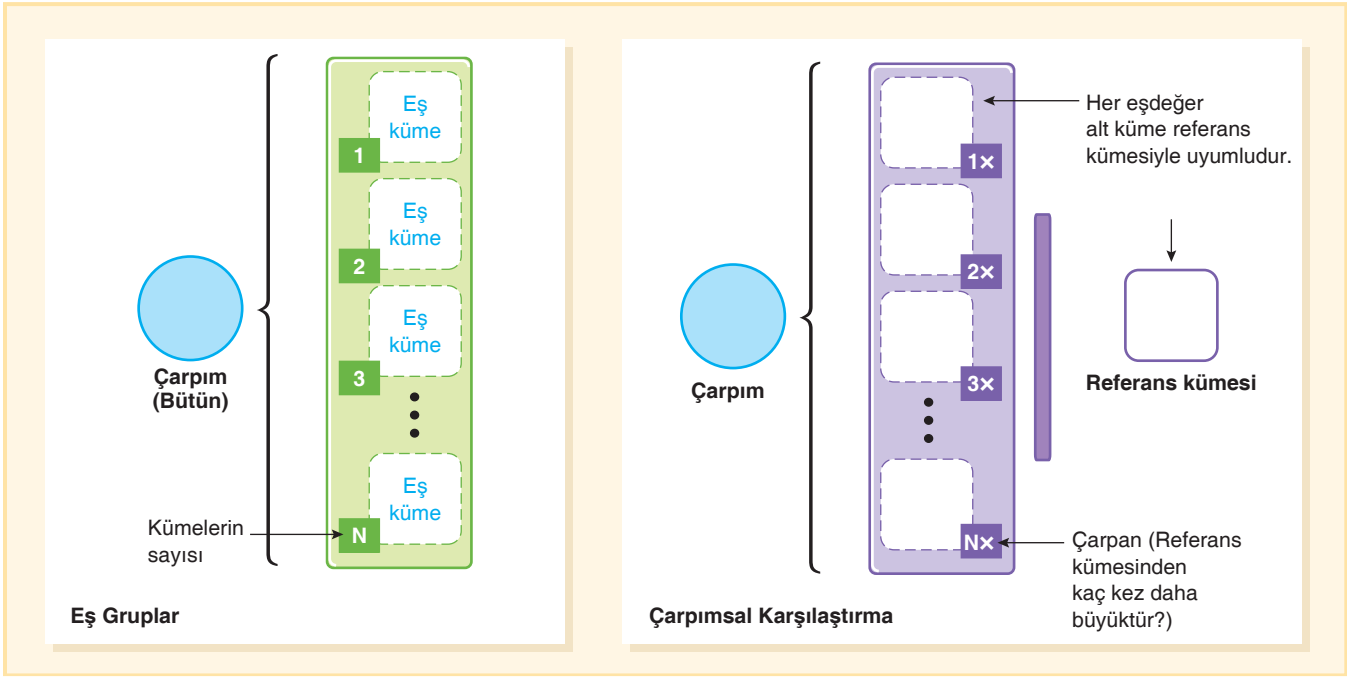
Toplama ve çıkarmada olduğu gibi çarpma ve bölme etkinlikleri üretmede ve öğrencilere vermede size bir öğretmen olarak yardımcı olacak problem yapıları mevcuttur. Toplamsal problem yapılarında olduğu gibi burada da anlatılacaklar sizin içindir, öğrencileriniz için (uygun) değildir.

Çoğu araştırmacı dört tane farklı çarpımsal yapı sınıfı tanımlamıştır (Greer, 1992). (Çarpımsal kelimesi burada çarpma ve bölme işlemi içeren her çeşit problemi tanımlamak için kullanılmaktadır). Bunlardan Şekil 9.7'de tanımlanan iki tanesi, ***eş gruplar (tekrarlı toplama, orantı) ve çarpımsal karşılaştırma***, ilkokulda en çok yaygın olanlardır. Bu yapılara uyan problemler sayma nesne kümeleriyle, sayı doğrularıyla veya dizilerle modellenebilir. Bunlar gerçek dünyadaki çarpımsal problemlerin büyük bir yüzdesini temsil etmektedir.

Dört Problem Yapısına Örnekler

Çarpımsal problemlerde bir sayı veya ***bileşen*** kaç tane küme, grup veya eş ebatta parçanın içerildiğini sayar/belirler. Diğer bileşen de her bir küme veya parçanın büyüklüğünü söyler. Bu iki yapının herbirindeki üçüncü sayı da ***bütün*** veya ***çarpım***dır ve tüm parçaların toplamıdır. Parça ve bütün terminolojisi toplama işlemine bağ kurarken faydalıdır.

Eş-Grup Problemleri. Grupların adet ve büyüklükleri bilindiğinde problem bir çarpma durumudur. Grupların sayısından veya büyüklüğünden birisi bilinmediğinde bu taktirde problem bir bölme durumudur. Fakat bu bölme durumlarının benzer olmadığına dikkat ediniz. Grup büyüklüğünün bilinmediği problemler adil-paylaşım veya parçalara ayırma problemleri olarak adlandırılır. Bütün, belirli sayıda grup arasında, her birinin büyüklüğünü



Şekil 9.7 Çarpma ve bölmeye dair bağlamsal problemler için (mevcut olan) dört problem yapısından ikisi. Her yapı 3 sayıya sahiptir. Bu üç sayıdan herhangi biri bağlamsal bir problemde bilinmeyen olabilir.

belirleyebilmek için, paylaşılmakta veya dağıtılmaktadır. Eğer grup sayısı bilinmiyor fakat eş grupların büyüklükleri biliniyorsa problemler ***ölçme*** veya bazen de ***tekrarlı-çıkarma*** problemleri olarak adlandırılır. Bütün, verilen büyüklükteki gruplar cinsinden "ölçülmektedir". Bu terimler, anlaşılması için, aşağıda bazı örneklerde kullanılmaktadır. Hangi sayıların verildiği ve hangilerinin bilinmediğini görebilmek için Şekil 9.7'deki yapıyı aklınızda tutunuz.

Eş-grup problemleri (tekrarlı-toplama problemleri olarak da isimlendirilir – örneğin, "Eğer üç çocuğun her birinin dört elması varsa, toplamda kaç elma vardır?") arasında ince bir fark vardır ve bunlar *oran* problemleri olarak adlandırılır (Her çocuk için [kişi başı] 4 elma varsa üç çocuğun kaç elması olur?). (Aşağıda) her kategori için iki tane oran problem örneği sunulmuştur.

Eş Gruplar: Bütünün Bilinmediği Durumlar (Çarpma)

Mark'ın 4 torba elması var. Her torbada 6 tane elma var. Mark'ın toplamda kaç elması var? (tekrarlı toplama)

Her bir elma 7 sent ise Jill 5 elma için kaç para ödemelidir? (oran)

Peter saatte 4 mil hızla 3 saat yürümüştür. Ne kadar mesafe gitmiştir? (oran)

Eş Gruplar: Grup Büyüklüğünün Bilinmediği Durumlar (Parçalamalı Bölme)

Mark'ın 24 elması var. Bunları 4 arkadaşı arasında eş olarak paylaştırmak istiyor. Her bir arkadaşı kaç tane elma alır? (adil paylaşım)

Jill 5 elma için 35 sent ödemiştir. 1 elmanın fiyatı nedir? (oran)

Peter 3 saatte 12 mil yürümüştür. Saatte kaç mil (ne kadar hızlı) yürümüştür? (oran)

Eş Gruplar: Grup Sayısının Bilinmediği Durumlar (Ölçüm Bölmesi)

Mark'ın 24 elması var. Bunları her biri 6 elma içeren torbalara koydu. Mark kaç tane torba kullanmıştır? (tekrarlı çıkarma)

Jill her biri 7 sent olan elmalardan satın almıştır. Aldığı elmaların toplam fiyatı 35 senttir. Jill kaç tane elma satın almıştır? (oran)

Peter saatte 4 mil hızla 12 mil yürümüştür. Peter'ın 12 mili yürümesi için kaç saat geçmiştir? (oran)

Karşılaştırma Problemleri. Çarpımsal karşılaştırma problemlerinde aynı toplama ve çıkarmaya dair kıyaslama durumlarında olduğu gibi gerçekte iki farklı küme/grup vardır. Kümelerden biri diğerinin birçok kopyasından oluşmaktadır. Her durum için ikişer örnek aşağıda verilmektedir. İlk örnekte karşılaştırma bir miktar ya da çoklukların farkıdır. Çarpımsal durumlarda karşılaştırma diğerinin belli bir katı olan bir küme üzerine kuruludur.

Karşılaştırma: Çarpımın Bilinmediği Durumlar (Çarpma)

Jill 6 elma almıştır. Mark ise Jill'in 4 misli elma almıştır. Mark kaç elma almıştır?

Mark bu ay geçen ayın 5 misli kadar para biriktirmiştir. Geçen ay 7 dolar biriktirmiştir. Mark bu ay ne kadar biriktirmiştir?

Karşılaştırma: Grup Büyüklüğünün Bilinmediği Durumlar (Parçalamalı Bölme)

Mark 24 elma almıştır. Mark Jill'in elmalarının 4 misli elma almıştır. Jill kaç elma almıştır?

Mark bu ay geçen ayın 5 misli kadar para biriktirmiştir. Bu ay 35 dolar biriktirdiyse geçen ayki birikimi ne kadardır?

Karşılaştırma: Çarpımın Bilinmediği Durumlar (Ölçüm Bölmesi)

Mark 24 elma almış ve Jill ise sadece 6 tane elma almıştır. Mark, Jill'in aldığı elmaların kaç misli elma almıştır?

Mark bu ay 35 dolar biriktirmiştir. Geçen ay 7 dolar biriktirmiştir. Bu ay, geçen ayın kaç misli para biriktirmiştir?

Durup Düşün!

Şu ana kadar okuduklarınız, üzerine kafa yormadan öğrenmeniz için oldukça fazladır. Şimdi durun ve elinize bir miktar sayma nesnesi alın – en az 35 tane. Bu sayma nesnelerini kullanarak her bir problemi çözün. Öncelikle eş-grup problemlerine bakın ve "İşaretli" problemleri veya her kümedeki ilk problemi yapın. Sayılarla Şekil 9.7'de verilen yapısal modeli karşılaştırın. Bu problemler, özellikle de iki çeşit bölme problemi, nasıl birbirleriyle benzer veya farklıdırlar? Aynı egzersizi önce "Jill" problemleriyle sonra da "Peter" problemleriyle tekrarlayın. Her bir problem yapısında yer alan problemlerin nasıl benzer olduğunu ve karşılıklı problem yapılarındaki (örneğin Mark ile ilgili olanlar) problemlerin nasıl ilişkili olduğunu görebiliyor musunuz?

Eş-grup problemlerinde yeterince rahat olduğunuzda aynı süreci çarpımsal karşılaştırma problemlerinde de tekrarlayınız. Aynı şekilde üç gruptaki ilk problemle başlayın ve sonrasında üç gruptaki ikinci problemi yapın. Daha önce sorulan sorular üzerinde düşünün.

Anaokulu ve 1. sınıf çocuklarının çarpma ve bölme problemlerini, hatta kalan içeren bölmeyi, çözmede epey başarılı olduğuna dair deliller vardır (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, &Weisbeck, 1993; Carpenter vd., 1999). Mulligan ve Mitchelmore (1997) kendilerinin ve diğerlerinin araştırmalarına dayanarak öğrencilerin okulda ilk sınıftan itibaren dört işleme de maruz kalmaları gerektiğini ve çarpma ve bölmenin müfredatta daha sıkıca ilişkili olması gerektiğini ısrarla vurgulamaktadırlar.

Her ne kadar aşağıdaki iki çarpımsal yapı biraz daha karmaşık ve bu sebeple iyi bir başlangıç noktası olmasa da bunları çarpımsal yapıların iki ayrı kategorisi olarak düşünmeniz önemlidir.

Kombinasyonlar ve *Kartezyen çarpımlar* ve *alan* ve diğer *ölçüm-çarpımı* problemleri (örneğin, en çarpı boy alana eşittir) birçok müfredatın çarpma ve bölme kısımlarında daha az ifade edilmekte fakat daha ileri ilk ve ortaokul sınıflarında kullanılmaktadır.

Kombinasyon Problemleri. Kombinasyon problemleri iki küme arasında yapılabilecek muhtemel ikili eşleşmelerin sayısını saymayı içerir. Çarpım, verilen iki kümenin her birinden alınan her bir ikilinin bir üyesi olacak şekilde, ikililerden oluşur.

Kombinasyon Problemleri: Çarpımın Bilinmediği Durumlar

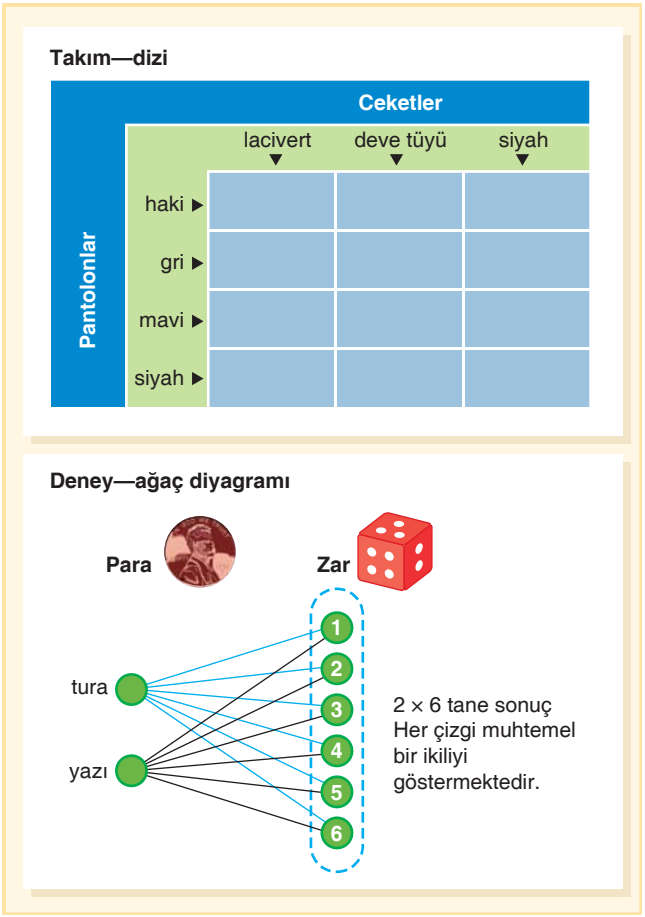
Sam 4 pantolon ve 3 ceket satın almıştır ve bunların hepsi birlikte giyilebilir. Sam bir pantolon ve ceketten oluşan kaç değişik takıma sahip olabilir?

Bir deney para ve zar atmadan oluşmaktadır. Bu deneyde kaç değişik çeşit sonuç elde etmek mümkündür?

Bu iki örnekte çarpım bilinmemekte ve iki kümenin büyüklükleri verilmektedir. Kombinasyon kavramı için ilişkili bölme problemleri bulmak az da olsa mümkündür.

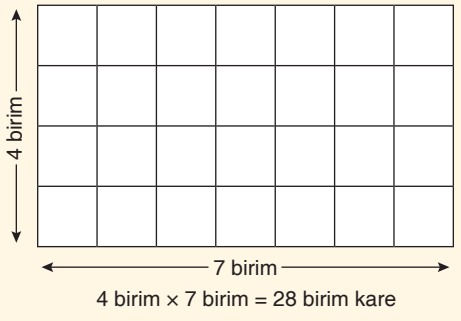
Şekil 9.8 kombinasyon problemlerini modellemek için iki bilinen yöntem göstermektedir: dizi ve ağaç diyagramı. İki veya daha fazla şeyin veya olayın mümkün olan kaç tane kombinasyonu bulunduğunu saymak olasılık belirlerken önemlidir. Örneğin, tura gelme ve 1 veya 6 gelme olasılıklarını belirlemek için tura ve zar deneyinde 12 tane muhtemel sonuç olduğunun bilinmesi gerekir. Kombinasyon kavramı genellikle Olasılık öğrenme alanı altında verilir.

Alan ve Diğer Ölçüm-Çarpımı Problemleri. Ölçüm-çarpımı problemlerini diğerlerinden ayırt eden özellik çarpım tam olarak diğer iki bileşenden farklı bir birimdir. Bir dikdörtgende iki uzunluğun çarpımı (en x boy) alandır, sonuç genellikle birim karedir. Şekil 9.9 birim karelerin diğer iki uzunluk bileşeninden ne kadar farklı olduğunu göstermektedir: 4 fit çarpı 7 fit, 28 fit değildir fakat 28 fit-karedir. Bileşenlerin her biri birer boyutlu fakat çarpım iki boyutlu birimlerden oluşmaktadır.



Şekil 9.8 Kombinasyon çözümleri için modeller.

Bu kategorideki diğer iki yaygın örnek şunlardır: *çalışanların sayısı x çalışılan saat sayısı = çalışanların çalışma saati*, ve *kilovat x saat = kilovat-saat*.



Şekil 9.9 Uzunluk ile uzunluğun çarpımı alana eşittir.

Çarpma ve Bölme Öğretimi

Birçok kitapta çarpma ve bölme, çarpma bölmeden önce verilecek şekilde, ayrı ayrı öğretilmektedir. Bununla birlikte iki kavramın nasıl ilişkili olduğunu öğrencilerin anlamasına yardımcı olmak için çarpma öğretildikten hemen sonra çarpma ve bölmeyi birleştirmek önemlidir. Çoğu müfredatta bu konular ilk olarak 2. sınıfta (CFP) verilmekte ve sonra 4 ve 5. sınıflarda devamlı olarak geliştirilmek üzere 3. sınıfın odak noktası olmaktadır.

Çarpımsal yapılarla çalışmadaki büyük bir kavramsal engel bir grubun birçok nesne içerdiğini düşünürken aynı zamanda grupları birer tekil yapı olarak anlamlandırmaktır (Blote, Lieffering ve Ouewhand, 2006; Clark ve Kamii, 1996). Çocuklar "Her birinde 8 elma olan 4 sepette (toplam) kaç elma vardır" sorusunu sekizer sayma nesnesinden oluşan dört kümeyi sayarak ve sonra da tüm sayma nesnelerini sayarak yapabilirler. Bu problem hakkında çarpımsal olarak *dört tane sekizli küme* gibi düşünmek için çocukların her bir sekizli kümeyi sayılması gereken kendi başına (tekil) bir nesne olarak sayması gerekmektedir. Özellikle bağlamsal durumlarda, grup oluşturmaya ve saymaya dair deneyimler çok faydalıdır. (Bu bölüm sonundaki *Each Had 8 Slices* isimli kitapla ilgili tartışmaya bakınız.)

Bağlamsal Problemler

Toplama ve çıkarmayı çevreleyen birçok mesele aynı zamanda çarpmayı da kapsamaktadır ve ayrıntılı olarak burada tartışılması gerekmez. Gerektiğinde yapay hikâye problemlerinden ziyade bağlamsal problemlerin kullanımı burada da önemlidir. Toplamsal yapılarda olduğu gibi çarpımsal dersleri de iki veya üç problem etrafında kurgulamak iyi fikirdir. Öğrenciler problemleri arzu ettikleri teknikleri kullanarak çözebilmeliler. Önemli olan ne yaptıklarını ve yaptıklarının neden mantıklı olduğunu, tercihen kelime, resim ve sayılarla, açıklayabilmeleridir.

Çarpma ve Bölme için Sembolizm. Öğrenciler çarpmaya dair sembolleri öğrenmeden önce basit çarpma içeren hikâye problemleri çözdüklerinde, büyük ihtimalle yaptıklarını temsilen tekrarlı-toplama denklemleri şeklinde yazacaklardır. Bu sizin için çarpma işaretini anlatmak ve çarpmadaki iki bileşenin ne anlama geldiğini açıklamak için bir fırsattır.

Buradaki geleneksel kullanım 4 × 8 dört tane sekizli grup şeklinde olup 8 tane 4'erli grup şeklinde değildir. Bu kullanım konusunda çok katı olmaya gerek yoktur. Önemli olan öğrencilerin size *kendi* denklemlerindeki her bileşenin neyi temsil ettiğini söyleyebilmesidir. Dikey formda genellikle alttaki bileşen grup sayısını verir. Yine bu farkı bilmek çok da önemli değildir.

24'ün 6 ile bölünmesi üç farklı şekilde gösterilmektedir: $24 \div 6$, $6\overline{)24}$ ve $\frac{24}{6}$. Öğrenciler bu gösterimlerin denk olduğunu anlamalıdırlar. Ortaokul seviyesinde kesir gösterimi önemli hâle gelir. Çocuklar sıklıkla $6\overline{)24}$'yı, sayılardaki soldan sağa sıralamasından dolayı, "6 bölü 24" şeklinde yanlış olarak okumaktadırlar. Genellikle bu hata öğrencilerin düşündükleriyle uyuşmamaktadır.

Bölme gösteriminin zorluğu talihsiz bir ifade olan "6, 24'ün içine …giriyor" ile birleşmektedir. Bu ifade bölme kavramına dair çok küçük bir anlam taşımaktadır, özellikle adil-paylaşım ve parçalara ayırma bağlamları ile bağlantılı olarak. "İçine giriyor" (veya "guzinta[2]") terminolojisi yetişkin dilinde yerleşmiştir; yıllardır kitaplarda bulunmamaktadır. Eğer bu ifadeyi kullanma eğilimindeyseniz, şimdi bunu bilinçli bir şekilde terk etmenin tam zamanıdır.

Problemler için Sayı Seçimi. Çarpımsal hikâye problemleri veya etkinlikler için sayı seçerken büyük sayıların öğrencilere zorluk çıkardığına dair bir eğilim vardır – 3 x 4'ün bir şekilde 4 × 17'ye göre anlaşılmasının daha kolay olduğu düşünülmektedir. Çarpımları veya bölümleri anlamak, sayılar çocukların kavrayabilecekleri seviyede olduğu sürece, sayıların büyüklüklerinden etkilenmez. Çarpmayla ilgili ilk incelemeleri küçük sayılara kısıtlamayla çok az bir kazanım sağlanır. 3. sınıf başında bile öğrenciler halihazırda bildikleri sayma yöntemlerini kullanarak daha büyük sayılarla çalışabilirler. 14 × 8'i içeren bağlamsal bir problem 3. sınıflar için, herhangi bir hesap tekniği öğrenmeden önce bile, aşırı büyük değildir. Bu gibi zorluklar verildiğinde çocuklar muhtemelen hesap yöntemleri geliştirecektir.

Kalanlar

Gerçek dünya durumlarında olmadığından daha fazla bölme işlemi bir tam sayı vermez. Örneğin, 6'yı bölen olarak kabul eden problemler sadece altıda bir oranında bir tam sayıyla sonuçlanır. Bağlamın olmadığı durumlarda kalan ile sadece iki yolla baş edilebilir: Artan kısım, ya sadece bir çokluk olur veya kesirlere parçalanır. Şekil 9.10'da 11 ÷ 4 problemi kesirleri göstermek için modellenmektedir.

Gerçek dünya bağlamında kalanlar bazen cevaplar üzerinde üç etkiye sahiptir:

- Kalan göz ardı edilir, daha küçük bir tam sayı cevap bulunur.
- Kalan, cevabı bir sonraki en yüksek tam sayıya tamamlamaya "zorlar."
- Yaklaşık bir sonuç bulmak için cevap en yakın tam sayıya yuvarlanır.

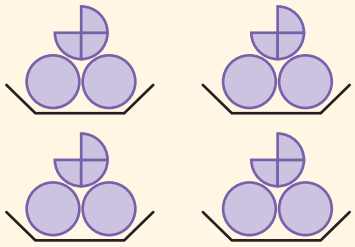
[2] Ç.N. Eskilerin bilmek zorunda olduğu kerrat cetveli veya çarpım tablosudur. Aslında İngilizce'deki "goes into" kelimesinin kısaltılmışı gibi de kullanılmaktadır.

Parçalara ayırma

11 ÷ 4 = $2\frac{3}{4}$

4 kümenin her birinde $2\frac{3}{4}$ vardır.

(her kalan kısım dörtte birlik dilimlere bölünmüştür.)

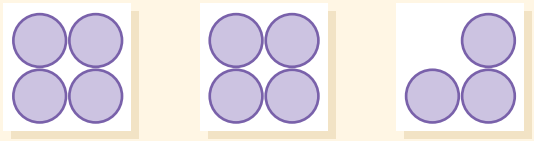


Ölçüm

11 ÷ 4 = $2\frac{3}{4}$

4'ten $2\frac{3}{4}$ tane küme

(2 tam küme ve bir kümenin $\frac{3}{4}$'ü)



Şekil 9.10 Kalanların kesir olarak ifade edilmesi.

Aşağıdaki problemler beş seçeneği de göstermektedir.

1. **Elinizde 7 çocukla adil bir şekilde paylaşmak için 30 parça şeker olsun. Her çocuk kaç parça şeker alır?**
   ***Cevap:* 4 parça şeker ve 2 tane de artakalır. (artakalan)**
2. **Her kavanoz 8 ons sıvı içermektedir. Bir sürahide 46 ons (sıvı) varsa (bunu boşaltmak için) kaç tane kavanoza ihtiyaç duyulacaktır?**
   ***Cevap:* 5 ve $\frac{6}{8}$ kavanoz. (kesir olarak parçalanma)**
3. **Bir ip 25 adım uzunluktadır. Bundan kaç tane 7-adım'lık hoplama ipi yapılabilir?**
   ***Cevap:* 3 tane hoplama ipi. (göz ardı edilen)**
4. **Bir feribot 8 araba alabilmektedir. 25 arabayı taşıyabilmek için nehirde kaç tur atması gerekir?**
   ***Cevap:* 4'tür. (bir sonraki tam sayıya tamamlanmaya zorlanma)**
5. **Altı çocuk 50 parçadan oluşan bir paketi paylaşmayı planlamaktadırlar. Her çocuk yaklaşık kaç parça sakız alır?**
   ***Cevap:* Her çocuk için yaklaşık 8 parça. (yuvarlama, yaklaşık sonuç)**

Öğrenciler kalanı sadece "K 3" veya "artakalan" olarak düşünmemelidirler. Kalanlar bir bağlama yerleştirilmeli ve bu bağlam kapsamında kalanlarla uğraşılmalıdır.

Durup Düşün!

Farklı bağlamlarda problem üretmek sizin için faydalı olacaktır. Uzunluk, zaman ve hacim gibi sürekli çoklukları dâhil edin. Deneyin bakalım, kesirli ya da yukarı veya aşağı yuvarlanmış kalana sahip eş-grup ve karşılaştırma yapıları için bölme problemleri üretebilecek misiniz?

Değerlendirme NOTLARI

Aynı derste çarpma ve bölme işlemleri için hikâye problemleri vermek önemlidir. Bu sayede öğrencilerin problemlerin anlamlarını yorumladıklarından ve sadece iki sayı alarak "bugünün" işlemini kullanmadıklarından emin olabilirsiniz.

Çarpımsal problemleri modellerken veya problem çözümünde kendi yöntemlerini kullanırken çocuklar daima problemle uyumlu bir yaklaşım kullanmayacaklardır. Örneğin, 4'erli 12 grubu içeren bir problemi çözüyorlarsa çoğu çocuk 12 tane 4'ü toplamaktansa 4 tane 12'yi ekleyecektir. Buna kaygılanmaktansa, bunu çocukların 12 x 4 ve 4 x 12'nin aynı sonucu verdiğini anlayacağının ve kabulleneceğinin bir göstergesi olarak görün. Ancak çocuklar bunun gibi bir problemi farklı yollarla çözdüklerinde bu size anlamlı bir tartışma için güzel bir imkân sunar. ◆

Model Temelli Problemler

Başlangıçta çocuklar tüm işlemler için aynı modelleri – kümeler ve sayı doğruları – kullanabileceklerdir. Genelde toplama için pek kullanılmayan ancak çarpma ve bölmede yaygın olarak kullanılan çok önemli bir model dizidir. Bir ***dizi***, bir şeylerin satır ve sütun şeklinde düzenlenmesidir (örneğin, kare karoların veya küplerin dikdörtgen şeklinde düzenlenmesi) (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 12).

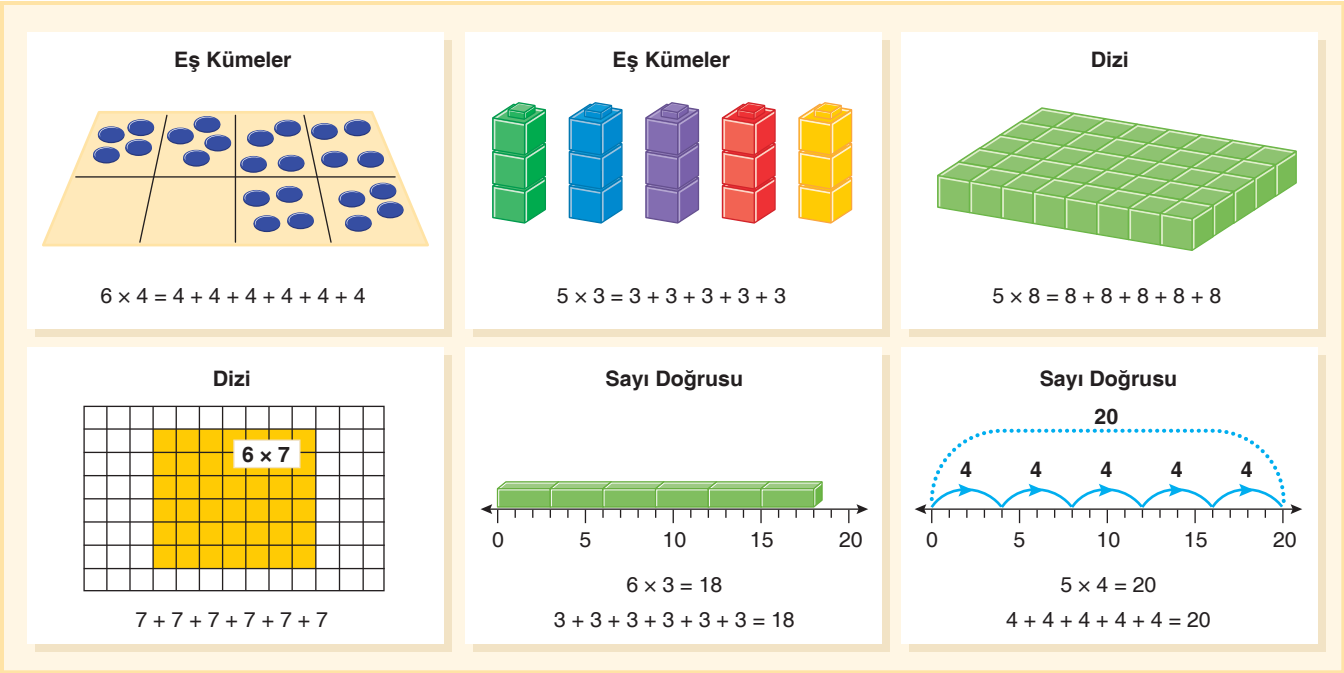
Toplamaya olan bağını açık yapmak için, başlangıçtaki çarpma etkinlikleri aynı model için toplama cümlesi yazmayı da içermelidir. Şekil 9.11'de çeşitli modeller gösterilmektedir. Dikkat ediniz ki çarpımlar dâhil edilmemiştir – sadece toplama ve çarpma "isimleri" yazmaktadır. Bu, büyük kümeleri yorucu bir şekilde saymadan kaçmanın bir başka yoludur. Benzer bir yaklaşım da iki kavramı aynı anda ifade eden bir cümle yazmaktır (örneğin, 9 + 9 + 9 + 9 = 4 × 9).

Toplamsal problemlerde olduğu gibi çocuklar modellerin kullanıldığı ancak bağlam olmayan birkaç etkinlikten faydalanabilirler. Bu tarz etkinliklerin amacı işlemin anlamına ve buna bağlı olan sembolizme odaklanmaktır. Etkinlik 9.4, iyi bir problem çözme ruhuna sahiptir. Kullandığınız dil daha önce çocuklarınızla birlikte ne kullandığınıza bağlıdır.

Etkinlik 9.4

Çarpanları Bulmak

Birçok çarpanı olan bir sayı ile başlayın – örneğin, 12, 18, 24, 30 veya 36 gibi. Öğrencilerin kendilerine verilen sayı



Şekil 9.11 Eş-grup çarpımı için modeller.

için mümkün olduğunca çok çarpma ifadesi bulmalarını sağlayın. Sayma nesneleri yardımıyla, öğrenciler sayma nesnelerini eş alt gruplara ayırmak için bir yol bulmaya çalışırlar. Diziler yardımıyla (kare karolardan veya küplerden ya da grafik kağıdı üzerine çizimlerden yapılmış) öğrenciler verilen sayıda kareye sahip dikdörtgenler oluşturmaya çalışır. Bu şekilde düzenlenen küme veya uygun dikdörtgenler için hem toplama hem de çarpma denklemi yazılmalıdır. Bu etkinlik küçük uygulama etkinliği olarak http: //illuminations.nctm.org/ ActivityDetail.aspx?id=64 adresinde mevcuttur.

Etkinlik 9.4 ayrıca bölme kavramlarını da içerebilir. Çocuklar 3 ve 6'nın 18'in çarpanları olduğunu öğrendiklerinde 18 ÷ 3 = 6 ve 18 ÷ 6 = 3 denklemlerini 3 x 6 = 18 ve 6 + 6 + 6 = 18 denklemleriyle birlikte yazabilirler (kabul edelim ki 3 tane 6'şarlı grup modelleniyor olsun). Aynı etkinliğin aşağıdaki biçimi bölme üzerine odaklanmaktadır. Çocukların hikâye problemleri üretmelerini sağlamak bu etkinliğin bir başka harika açıklamasıdır. Çocuklardan ürettikleri hikâye problemlerinin sayma nesneleri ile yaptıklarıyla nasıl uyuştuğunu açıklamalarını zorunlu kılın.

Etkinlik 9.5

Bölmeyi Öğrenme

Çocuklara yeteri miktarda sayma nesneleri ve bunları küçük gruplara ayırmaya yarayacak bir yöntem verin. Küçük kâğıttan bardaklar işe yarar. Çocukların bir kısım sayma nesnelerini sanki bütünmüş veya tüm kümeymiş gibi saymalarını sağlayın. Bu sayıyı not ederler: "31 ile başla." Sonrasında ya yapılması gereken eş grupların sayısını ya da yapılması gereken grupların büyüklüğünü belirleyin: "Elinizdeki sayma nesnelerin, 4 eş-büyüklükte kümeye ayırın" veya "mümkün olduğunca çok 4'erli kümeler oluşturun."Sonra çocukların karşılık gelen materyallerinin ne gösterdiğini belirten çarpma denklemini yazmalarını isteyin, bunun altına da bölme denklemi yazmalarını sağlayın.

İki çeşit alıştırmayı da dâhil ettiğinizden emin olun: eş grupların sayısı ve grupların büyüklüğü. Sınıfınızla bu ikisinin nasıl farklı olduğunu, hatta ikisinin de çarpmayla ilişkili olduğunu ve bölme denklemi olarak yazıldığını tartışın. Bu aşamada öğrencilere bölme denklemlerini yazmanın farklı yollarını gösterebilirsiniz. Etkinlik 9.5'i birkaç kez yapın. Bölenin katı olan bütünlerle başlayın (kalansız) ama sonrasında kalanlı durumları da dâhil edin. (31 ÷ 4 = 7 K 3 yazmak teknik olarak yanlıştır. Bununla birlikte başlangıçta bu yazım biçimi belki de kullanmak için en uygun olanıdır).

Etkinlik, eldeki model değiştirilerek, çeşitlendirilebilir. Çocukların kare karolar veya küpler kullanarak ya da santimetreli noktalı grafik kağıdında çizim yaparak diziler oluşturmasını sağlayın. Bir dizide kaç tane kare olmasının gerektiğini belirten alıştırmaları gösterin. Daha sonra yapılması gereken satır sayısını belirleyebilirsiniz (parçalara ayırma) veya her bir satırın uzunluğunu belirleyebilirsiniz (ölçüm). Noktalı grafik kâğıdında çocuklar dizi çizimlerini kullanarak kesirli cevapları nasıl modelleyebilir?

Teknoloji NOTLARI

National Library of Virtual Manipulatives (Ulusal Sanal Manipülatifler Kütüphanesi) internet sitesindeki (http: //nlvm.usu.edu/en/nav/Frames_asid_193_g_2_+_1.html) "Dikdörtgen Bölmesi/RectangleDivision" isimli küçük uygulama yazılımı kalanlı bölme için harika bir etkileşimi sunmaktadır. Bu uygulamada çarpımdaki kare sayısını gösteren bir dizi içeren bir bölme işlemi verilmektedir. Dizinin boyutları değiştirilebilmekte fakat içerdiği kare sayısı sabit kalmaktadır. Eğer, örneğin, alıştırma 52 ÷ 8 problemini göstermeyi gerektiriyorsa kareler 8 × 6'lık diziyi farklı renkte 4 fazladan kare ile (8 × 6 + 4) gösterecek şekilde ayarlanabilmekte ve aynı zamanda dikdörtgendeki 52 karenin herhangi diğer bir dizilimi artı kalan için daha kısa bir sütun olarak ayarlanabilmektedir. Bu uygulama yazılımı çok canlı bir biçimde bölmenin nasıl çarpmayla ilişkili olduğunu göstermektedir. ◆

Etkinlik 9.6

Kırık Çarpma Tuşu



Hesap makinesi çarpma ile bölmeyi ilişkilendirmenin iyi bir yoludur. Öğrencilere hesap makinesinde [×] tuşunu kullanmadan çeşitli çarpımlar bulmaları söylenebilir. Örneğin, 6 x 4 şu tuşlara basılarak bulunabilir: [+] 4 [=] [=] [=] [=] [=] [=]. (Ardı ardına [=] tuşuna basmak her seferinde ekrandaki sayıya 4'ü ekler. Sıfırla başlayıp 4'ü altı kez eklemiş oldunuz.) Öğrenciler, buldukları sonucu sayma nesneleri yardımıyla göstermeleri için teşvik edilebilir. Fakat aynı teknik 23 x 459 gibi çarpımları belirlemek için de kullanılabilir ([+] 459 ve sonrasında 23 kez [=]'e basmak). Öğrenciler aynı şeyi [×] tuşu ile yapılan çarpımlarla kıyaslamak isteyeceklerdir.

"Kırık Çarpma Tuşu" etkinliğinin ardından faydalı bir biçimde "Kırık Bölme Tuşu" etkinliği yapılabilir.

Etkinlik 9.7

Kırık Bölme Tuşu



Öğrencilerin gruplar halinde çalışarak, bölme tuşunu kullanmaksızın bölme alıştırmaları çözmek için, hesap makinesi kullanımına dair yöntemler bulmasını sağlayın. Problemler herhangi bir hikâye bağlamı olmadan verilebilir. "Bölme tuşuna basmadan 61÷14'ü belirlemek için en az iki yol bulunuz." Eğer problem bir hikâye bağlamında verilirse, bir yöntem diğerinden daha iyi bir şekilde probleme uyabilir. Aynı sonucu veren farklı çözüm yöntemlerinin ardından verimli tartışmalar yapılabilir. İkisi de doğru mudur? Neden doğru veya neden değildir?



Durup Düşün!

Etkinlik 9.7'nin nasıl yapıldığını çocuklara göstermek için ortada hiçbir neden yoktur. Bununla birlikte 61÷14'ü bölme tuşunu kullanmadan hesap makinesi kullanarak çözmenin üç yolunu bulup bulamayacağınızı test etmek iyi bir fikirdir. Bir ipucu görmek için dipnota bakınız.*

NCTM Standartları

"3-5. sınıflardaki öğrenciler çarpma ve bölmenin anlamlarına ve aralarındaki ilişkiye odaklanmalıdır. Öğrencilerin çarpma veya bölme ifadesindeki her sayının neyi temsil ettiğini anlaması önemlidir. … Çarpma problemlerini resimlerle, diyagramlarla veya katı cisimlerle modellemek öğrencilerin bileşenlerin ve onların çarpımının neleri temsil ettiğini öğrenmesine yardımcı olur" (s.151). ◆

Çarpma ve Bölmenin Özellikleri

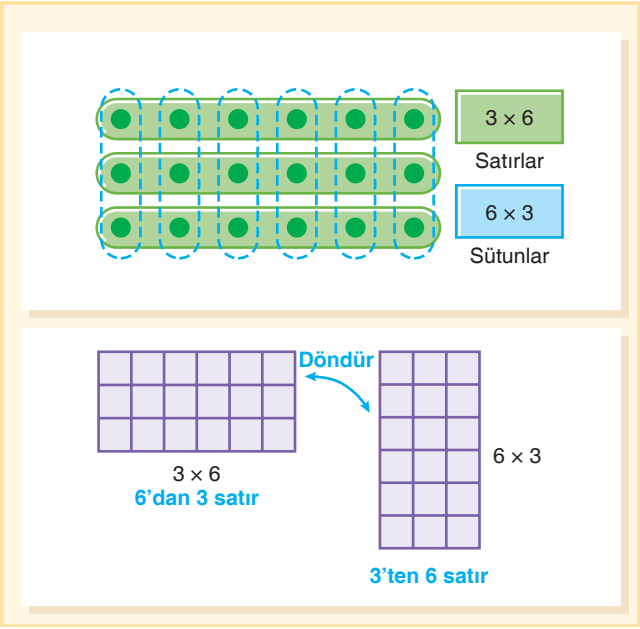
Toplama ve çıkarmada olduğu gibi bazı yararlı ve bunun için dikkate değer çarpımsal özellikler vardır. Burada vurgu terminoloji veya tanımlardan ziyade fikirler üzerine olmalıdır.

Çarpmanın Değişme ve Birleşme Özellikleri. 3 × 8'in 8 × 3 ile eşdeğer olduğu veya genelde sayıların sıralarının değişmesinin hiç fark yaratmayacağı (*değişme özelliği*) sezgisel olarak aşikar değildir. 8'erli 3 grubun bir resmî aynı zamanda hemen 3'erli 8 grup olarak görülemeyebilir. 3'er 3'er 8 kez zıplamak 24'te son bulur fakat 8'er 8'er 3 kez zıplamanın aynı noktada son bulacağı açık değildir.

Tam aksine bir dizi, değişme özelliğini göstermede (Şekil 9.12'de gösterildiği üzere), oldukça etkilidir. Çocuklar dizileri çizebilir veya inşa edebilirler ve onları kullanarak neden her dizinin aynı çarpıma sahip iki farklı çarpmayı temsil ettiğini gösterebilirler. Toplamada olduğu gibi çarpmanın da birleşme özelliği vardır ki bir ifadedeki sayıların herhangi bir sırada ikililer halinde eşleşmesine izin verir.

Sıfır ve Birim Eleman Özellikleri. Sıfır ve (daha az bir dereceye kadar da) 1 bileşenler olarak çocuklarda sık sık kavramsal zorluklara neden olmaktadır. Bir tane 3. sınıf ders kitabında 0 ve 1 bileşenleri üzerine kurulu bir ders çocuklara 0 ve 1 içeren farklı çarpımları incelemesi için hesap makinesi kullandırmakta (423 × 0, 0 × 28, 1536 × 1, vs.) ve örüntülere baktırmaktadır. Bulunan örüntü 0 ve 1 bileşenleri için kurallar önermekte ancak nedenleri verilmemektedir. Aynı derste bir bağlamsal problem şunu sormaktadır: Her porsiyonunda 0 gram yağ varsa 7 porsiyonluk kerevizde kaç gram yağ vardır? Bu tarz bir yaklaşım, öğrencilere mantık yürütmelerini sorduğu için, herhangi bir kurala göre daha tercih edilebilirdir. 0 ve 1'i içeren ilginç bağlamsal problemler üretin ve sonuçlarını tartışın. İlk bileşenin 0 olduğu problemler gerçekten tuhaftır. Bir sayı doğrusunda 0'ar 0'ar 5 kez zıplamak 0'da sonuçlanır (5 × 0). Peki 5'er 5'er 0 kez zıplamak ne olabilir? Diğer eğlenceli bir etkinlikse 6 × 0 veya 0 × 8'i bir dizi yardımıyla modellemektir. (Deneyin!) 1 bileşeni için yapılan diziler de araştırmaya değerdir.

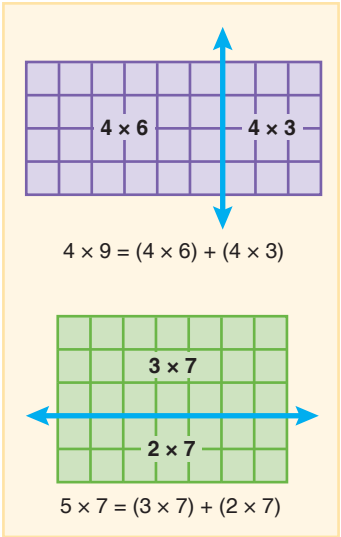
*61'de kaç tane 14 olduğunu belirlemek için iki tane ölçüm yöntemi vardır. Üçüncü yol aslında parçalara ayırmayla veya 14 kere hangi sayının 61'e yakın olduğunu bulmayla ilişkilidir.



Şekil 9.12 Bir dizi, çarpmanın değişme özelliğini göstermek için iki şekilde kullanılır.

Dağılma Özelliği. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği bir çarpımdaki iki bileşenden birinin iki veya daha fazla parçaya ayrılabileceğini ve her parçanın ayrı ayrı çarpılıp toplanabileceğini belirtmektedir. Sonuç başlangıçtaki bileşenlerin çarpımıyla aynıdır. Örneğin, 6 × 9 ile (6 × 5) + (6 × 4) aynıdır. Burada 9 sayısı 5 ve 4'e ayrılmıştır. Buradaki kavram bir kuralı diğerine bağlamak için çok kullanışlıdır ve ayrıca iki basamaklı sayılarla yapılan hesaplamaların gelişiminde etkindir. Şekil 9.13, dizi modelinin bir çarpımı iki parçaya ayırmada nasıl kullanılacağını göstermektedir.

Bir sonraki etkinlik çocukların bileşenleri nasıl parçalayacaklarını keşfetmesine yardımcı olmak için, diğer bir deyişle çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini öğrenmeleri için, tasarlanmıştır.



Şekil 9.13 Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği için modeller.

Etkinlik 9.8

Parçalara Ayırın

Çocuklara birkaç tane santimetreli grafik kâğıdı ve renkli karolar verin. Her öğrenci ikilisine 6 x 8 gibi bir çarpım verin. (Verilen çarpımlar farklı veya hepsi aynı olabilir.) Göreviniz verilen dikdörtgeni tek bir kesik ile ayırmanın tüm farklı yollarını bulmaktır. Her dilim için öğrenciler bir denklem yazarlar. 8 elemanlı bir satır dilimi için öğrenciler 6 × 8 = (5 × 8) + (1 × 8) yazabilir. Bu, işlemlerin sırasını konuşmak için iyi bir zamanlama olabilir. Şekil 9.13'te gösterildiği üzere denklemler dizilerin içine yazılabilir.

Neden Sıfır ile Bölemeyelim? Genelde öğretmenler tam olarak bu kavramı anlamadıklarından (Quinn, Lamberg, ve Perrin, 2008) çocuklara kısaca "Sıfır ile bölme yapılamaz" demektedirler. Keyfi bir kuraldan kaçınmak için sıfır içeren ve modellenmesi gereken problemler sorun: "30 tane sayma nesnesi alınız. (Bunlarla) kaç tane sıfırlı grup oluşturabilirsiniz?" veya "12 küpü sıfır eş gruba ayırınız. Her gruba kaç tane küp düşer?"



Şunu bulun!/Figurethis! harika bir araştırma koleksiyonu içerir ve www.figurthis.org adresinde mevcuttur. 80 zor-soru ortaokul öğrencileri için tasarlanmıştır. Her ne kadar basit hikâye problemleri olmasa da bunların birçoğu işlemleri anlamayı içerir. Her problemi takip eden ilginç sorular vardır ve bunların hepsi öğrencileri ve aileleri matematiğin gerçek dünya uygulamalarına çekmek için tasarlanmıştır. İspanyolca bir versiyonu da vardır. ◆

Bağlamsal Problem Çözme Stratejileri

Öğrenciler sık sık bağlamsal veya hikâye problemleri ile karşılaşırlar ve ne yapacaklarını bilemezler. Okuma güçlüğü çekenler ve ana dili İngilizce olmayıp İngilizceyi öğrenen öğrenciler problemi anlamada yardıma ihtiyaç duyabilir. Bu kısımda onlara yardımcı olabilmek için bazı teknikler öğreneceksiniz.

Bağlamsal Problemleri Analiz Etme

Aşağıdaki problemi inceleyiniz:

Bir bölgedeki yol inşâsında çalışan işçiler alandaki büyük bir çukuru molozla, kamyonlarla taşıyarak, doldurdular. Tamamını doldurmak 638 kamyon dolusu moloz gerektirdi. Bir kamyon ortalama $6\frac{1}{4}$ kübik-yard kadar moloz taşımakta bu da 17.3 ton gelmektedir. Bu doldurma işleminde kaç ton moloz kullanılmıştır?

Genellikle 5-8. sınıf ders kitaplarında bu tarz problemler belli bir bağlam ya da tema çevresinde dönen problem serilerinin bir parçası olarak bulunur. Veriler bir grafikte veya bir çizelgede ya da kısa bir haber veya hikâyede bulunabilir. Problemler büyük ihtimalle dört işlemin hepsini içerecektir. Öğrenciler doğru işleme karar vermede, hatta problem için uygun veri bulmada zorluk çekerler. Çoğu öğrenci problemde iki sayı bulacak ve doğru işlem üzerine tahminde bulunacaktır. Bu çocuklar aslında problemleri analiz etmek için herhangi bir araca sahip değildirler. En azından burada öğrencilere çok yardımcı olabilecek iki yöntem öğretilebilir: Problemi çözmeden önce cevap hakkında düşünmek veya probleme çok benzeyen ama daha basit bir problem üzerinde düşünmek.

Problemi Çözmeden Önce Cevap Hakkında Düşünmek. Problem çözmede zayıf olanlar problem üzerinde ve problemin ne ile ilgili olduğu hakkında düşünmek için yeteri kadar zaman harcamazlar. Acele ederler ve hesap yapmaya koyulurlar, sanırlar ki sadece "sayılarla uğraşmak" problemleri çözer. İşin aslı bu değildir. Bunun yerine öğrenciler cevabın ne olması gerektiğine dair konuşarak (ve sonrasında düşünerek) vakit geçirmelidirler. Örnek problemimiz için bu aşağıdaki şekilde olabilir:

Problemdeki esas mesele nedir? Kamyonlar büyük bir çukuru doldurmak için moloz taşıyor.
Sonuç bize neyi söyleyecek? Bu çukuru doldurmak için kaç ton moloza ihtiyaç olacaktır.
Bu az sayıda mı yoksa çok sayıda ton mu olacak? Bir kamyonda 17.3 ton vardı, fakat birçok da kamyon vardır, sadece bir tane değil. Büyük ihtimalle bir sürü ton olacak.
Sence yaklaşık olarak kaç ton olacak? Çok olacak. Sadece 100 kamyon olsaydı 1730 ton olurdu. 10,000 tona yakın olabilir.

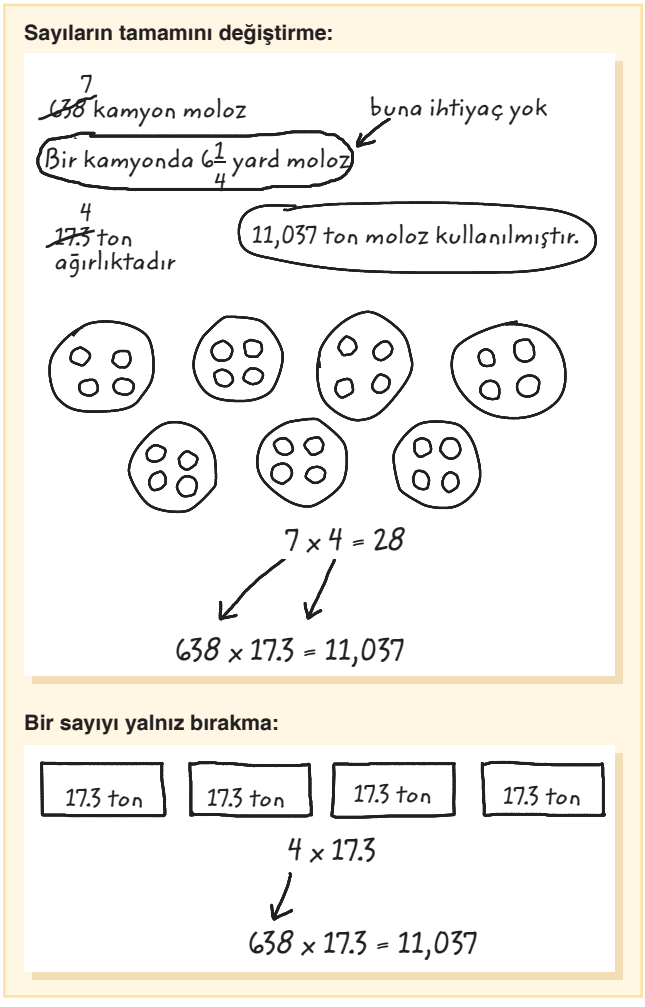
Bu tarz bir tartışmada üç şey olmaktadır. İlk olarak öğrencilerin sayılara odaklanmak yerine probleme ve sonucun anlamına odaklanması istenmektedir. Problemin yapısı üzerine düşünürken sayıların bir önemi yoktur. İkinci olarak öğrenciler problem yapısına odaklanarak önemli olan ve aynı zamanda problem için önemli olmayan sayıları belirleyebilirler. Üçüncü olarak (problem üzerine) düşünmek cevabın kabaca bir tahminine ulaştırır. Her halükarda cevabın ne söylediği ve ne kadar büyük olabileceği üzerine düşünmek faydalı bir ilk adımdır.

Daha Basit Problemi Çözmek. Moloz problemi gibi problemlerde modellerin çok az kullanılmasının nedeni büyük sayıları kolayca modellemenin imkânsız olmasıdır. Dolar ve sentler, binlerce millik uzaklıklar, dakikalık ve saniyelik zamanların hepsi üst sınıflarda karşılaşılabilecek türden verilerdir ve bunların hepsi de modellemesi zor olan şeylerdir. "Daha kolay bir problemi çözme" şeklindeki genel problem çözme stratejisi daima uğraşması zor sayılara uygulanabilir.

"Daha kolay bir problemi çözme" stratejisi şu adımlara sahiptir:

1. Problemdeki tüm uygun olan sayıların yerine küçük doğal sayılar koyun.
2. Problemi bu yeni sayıları kullanarak modelleyin (sayma nesneleri, çizim, sayı doğrusu, dizi)
3. Problemin küçük sayılar konmuş halini çözen bir denklem yazın.
4. Küçük sayıların kullanıldığı yerlere başlangıçtaki sayıları koyarak karşılık gelen denklemi yazın.
5. Bir hesap makinesi kullanarak hesabı yapın.
6. Cevabınızı tam bir cümle olarak yazın ve mantıklı olup olmadığına karar verin.

Şekil 9.14 moloz probleminin nasıl daha kolay hâle dönüştürülebileceğini göstermektedir. Ayrıca şekil sadece sayılardan birinin daha basit yapılabileceği ve diğer sayının sembolle gösterildiği bir alternatif sunmaktadır. İki yöntem de etkindir.



Şekil 9.14 Daha basit bir problemi çözme: iki seçenek

Buradaki mesele öğrencilerin problemi analiz etmede kullanabilecekleri bir araç sağlamak olup sadece hangi hesaplamayı yapmayı tahmin etmek değildir. Öğrencilerin çözümlerini kanıtlamaları için bir çizim modeli kullanabilecekleri birkaç problem yapmalarını sağlamak onlara çözümü tahmin edecekleri ancak tahminlerinin doğruluğunu bilemeyecekleri birçok problem vermekten çok daha faydalıdır.

Dikkat: Anahtar Kelime Yöntemine Bel Bağlamaktan Sakının! Hikâye problemlerinde öğrencilere "anahtar kelime" bulması öğretilmelidir diye devamlı surette öneride bulunulur. Hatta bazı öğretmenler anahtar kelimelerin ve karşılık gelen anlamlarının bir listesini asarlar. Örneğin, "hep beraber" ve "yekün"nün anlamı toplama yapmanız gerektiğini ve "kaldı" ve "daha az" kelimeleri çıkarmanız gerektiğini belirtmektedir. "Her" kelimesi çarpmayı önermektedir. Bir aşamaya kadar öğretmenler bazen ders kitaplarında bulunan diğer zamanlarda da kendi okuma becerileriyle aşırı sade ve formül içeren hikâye problemleri ile takviye edilegelmiştir (Svlentic-Dowell, Beal, ve Capraro, 2006). Problemler bu yolla yazıldığında anahtar kelime stratejisinin etkin olduğu sanılabilir.

Bu inanışın tersine araştırmacılar ve matematik eğitimcileri anahtar kelime stratejisine karşı uzun zamandır uyarıda bulunmaktadırlar (örneğin, Burns, 2000; Carpenter, 1985; Clement ve Bernhard, 2005; Goldin, 1985; Sowder, 1988). Anahtar kelime yaklaşımına güvenmeye karşı üç görüş aşağıda verilmektedir:

1. Anahtar kelimeler genellikle şaşırtıcıdır. Çoğu kez bir problemdeki ifade veya anahtar kelime yanlış bir işlem akla getirir. Drake ve Barlow (2007) tarafından paylaşılan aşağıdaki problem bu olasılığı sergilemektedir.

Masada üç paket kızarmış tavuk parçası bulunmaktadır. Her pakette 6 tavuk parçası vardır. Yekünde kaç tavuk parçası vardır? (s.272)

Drake ve Barlow bir öğrencinin, "yekünde ne kadar tutar" kelimelerini 9'u cevap olarak üreten 3 + 6 toplamını bulmak için bir öneri olarak kullanıp 9 cevabını ürettiğini bulmuştur. Öğrenci eldeki durumun anlamını ortaya çıkarmak yerine anahtar kelime yaklaşımını işlevsel bir karar almak için bir kısa yol olarak kullanmıştır.

2. Çoğu problem anahtar kelimeye sahip değildir. Ders kitaplarında bulunan aşırı basit problemler hariç problemlerin büyük bir çoğunluğu anahtar kelimeler içermezler. Anahtar kelimelere güvenmesi öğretilen bir çocuk elinde hiçbir strateji olmadan kalıverir (örneğin, bu bölümde verilen toplamsal ve çarpımsal problemler anahtar kelimesiz çeşitli örnekler içermektedir). Ve bu problemler, size yapılara dair yardımda bulunacak, aşırı derecede basitleştirilmiş problemlerin bir koleksiyonundandır.
3. Anahtar kelime yöntemi matematik yapma hakkında çok kötü bir mesaj vermektedir. Herhangi bir bağlamsal problemi çözerken en önemli yaklaşım onu analiz etmek ve anlamlandırmaktır. Anahtar kelime yaklaşımı öğrencileri problemin anlamını ve yapısını göz ardı etmeye cesaretlendirmekte ve kolay bir çıkış yolu aratmaktadır. Matematik muhakeme ve durumların anlamlandırılmasıyla ilişkilidir. Anlamlandırma stratejisi her zaman işe yarayacaktır.

İki-Aşamalı Problemler

Öğrenciler çoğunlukla çoklu adım gerektiren problemlerde zorluk çekerler. İlk olarak burada tartıştığımız şekilde tek adımlı problemleri analiz edebildiklerinden emin olun. Huinker'den (1994) alınan aşağıdaki fikirler çocukların iki problemin birbiriyle nasıl ilişkili olduğunu anlamalarına yardım etmek için tasarlanmıştır.

1. Öğrencilere tek adımlı problem verin ve çözmelerini sağlayın. Çözümü tartışmadan evvel her öğrencinin ya da grubun ilk problemin cevabını kullanarak ikinci bir problem üretmesini sağlayın. Sonrasında sınıfın geri kalanından, aşağıdaki gibi, ikinci problemi çözmeleri istenebilir:

Verilen Problem: Jones ailesi Washington D.C.'ye olan 195 millik mesafeyi $3\frac{1}{3}$ saatte alabilmektedir. Ortalama hızları nedir?

İkinci Problem: Jones'ların çocukları nehri 10: 30'da geçtiklerini (ya da evi terk ettiklerinden 2 saat sonra) geçtiklerini hatırlamaktadırlar. Nehir eve yaklaşık ne kadar mesafededir?

2. "Gizli soru" üretin. İlk alıştırmayı tek adımlı problemle başlayarak tekrarlayın. Farklı gruplara farklı problemler verin. Bu sefer daha önce olduğu gibi öğrencilerin ikinci bir problem yazmasını sağlayın. Sonrasında ilk problemdeki soruyu ortadan kaldıran birleştirilmiş tek bir problem yazın. İlk problemden olan bu soru aşağıdaki basit örnekteki gibi "gizli soru"dur.

Verilen Problem: Tony üç düzine yumurtayı düzinesi 89 sente satın almıştır. Faturası ne kadar tutmuştur?

İkinci Problem: Tony 5 dolar verdiğinde ne kadar para geri alır?

Gizli-soru problemi: **Tony üç düzine yumurtayı düzinesi 89 sente satın almıştır. Tony 5 dolar verdiğinde ne kadar para geri alır?**

Diğer öğrencilerin gizli soruyu belirlemesini isteyin. Tüm öğrenciler benzer ödev üzerine ancak farklı problemlerle çalıştıkları için (işlemleri karışık kullanmaya dikkat edin) gizli soru ile ne anlam ifade edildiğini daha iyi anlayacaklardır.

3. Standart iki adımlı problemler sorun ve öğrencilerden gizli soruyu belirleyip çözmelerini isteyin. Aşağıdaki problemi inceleyin:

Willard Satış Şirketi toptan satıştan 275 parça malı her biri 3.69 dolardan satın almışlardır. İlk ayda Şirket 205 parçayı her biri 4.99 dolardan satmıştır. Willard Şirketi ne kadar kazanmış ya da zarar etmiştir? Sizce Willard Satış Şirketi parça satmaya devam etmeli mi?

Daha önceden önerilen soruları düşünmeyle işe başlayın: "Problemdeki asıl mesele nedir?" (Bir şeyler iki farklı fiyatta alınıp satılıyor.) "Sonuç bize neyi söyleyecek?" (Ne kadar kâr veya zarar olduğunu) Bu sorular sizin işe koyulmanıza yarayacaktır. Öğrenciler takılırsa şu soruyu sorabilirsiniz: "Bu problemde gizli bir soru var mıdır?"



*Standartlar*da öğrencilerin tartışmasının matematikte anlam geliştirmedeki (işlemleri anlama dahil) değeri oldukça açıktır. Anaokulu-2. sınıf düzeyinde: "Öğrenciler fikirlerin açık olarak paylaşımında zorlandıklarında kendi düşündüklerini daha iyi anlamlandırırlar" (s.129). 3-5. sınıf seviyesinde: "Model ve resim kullanımı anlama ve tartışma için daha ileri seviyede imkân sunar. Somut bir referansın olması öğrencilerin daha açık ve daha kolayca paylaşılabilen anlamlar geliştirmelerine yardımcı olur" (s.197). ◆



Öğrencilerin işlemlerin anlamlarına dair bilgilerini ölçmenin en iyi yollarından biri verilen bir denkleme veya sonuca yönelik hikâye problemi üretmelerini sağlamaktır (Drake ve Barlow, 2007; Whitin ve Whitin, 2008). Örneğin, öğrencilere "24 sent" sonucunu verin ve bu cevabı üretecek bir çıkarma problemi veya bir bölme veya diğer uygun bir çeşit problem yazmalarını isteyin. Diğer bir seçenek de öğrencilere 5 x 7 gibi bir ifade vermek ve bu ifadeyi temsil edecek bağlamsal bir problem yazmalarını istemektir. Verilen senaryoyu istenen hesaplamaya uygun bir şekilde uydurabilen öğrenciler anladıklarını gösterecekler ve zorluk çeken öğrenciler de zayıf oldukları alanları sergileyeceklerdir. Öğrenciler, ayrıca dört işlemin anlamını vurgulayan bağlamsal problem yazmak için, çocuk literatüründen bağlamlar da kullanabilir. ◆

Bölüm 9 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Karşılaştırma içeren bir bağlamsal problem üretin. Sonra karşılaştırma problemlerindeki altı değişik ihtimalin hepsine birer örnek verecek şekilde problemi değiştirin.
2. Neden bağlamsal problem basit bir hikâye probleminden daha etkilidir?
3. Eksik-kısım etkinliklerinin öğrencileri çıkarma işlemine dair temel kuralları nasıl öğrenmeye hazırladığını açıklayınız.
4. Eş gruplarla çarpımsal karşılaştırma arasındaki farkı göstermek için çarpma içeren hikâye problemleri üretin. Oran ve alan gibi sürekli çoklukları içeren problemler üretebilir misiniz?
5. 36 ÷ 4 için iki farklı hikâye problemi üretiniz. Bir problem ölçüm problemi biri de parçalara ayırma problemi olsun.
6. Gerçekçi şu üç şekilde kalanla uğraşmayı gerektiren ölçüm ve parçalara ayırma türünde bölme problemi üretin: (a) kalan göz ardı edilsin (arta kalan göz ardı edilmesin); (b) kalan kesir olsun; (c) kalan cevabı bir sonraki doğal sayı olmaya zorlasın.
7. Anahtar kelimelerin kullanımı neden çocuklara öğretmek için iyi bir strateji değildir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. *Cognitively Guided Instruction* bir müfredat olmayıp öğretmenlerin öğretimlerine rehberlik etmesi için öğrencilerin düşüncelerini kullanmayı öğrendikleri bir öğretmen gelişim programıdır. CGI programının ana dayanak noktası bağlamsal problemlerdir – bu sadece dört işlemi öğrenmek için değil aynı zamanda sayı ve temel kural gelişimi ve hatta büyük sayılarla hesap gelişimi içindir. Ya temel kural öğrenimini veya hesap gelişimini seçin ve bu hedeflerin temelde bağlamsal problemlerle nasıl başarılabileceğine yönelik düşüncenizi tarif edin. Mümkünse kendi düşüncelerinizi onlarınkiyle kıyaslamak için *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction* kitabına ek olarak verilen CD'deki bazı video klipleri izleyin.
2. Bir ders kitabında kaç çeşit farklı hikâye problemi bulabileceğinizi araştırın. İlkokul seviyesinde birleştirme, ayırma, parça-parça-bütün, ve karşılaştırma problemlerini bulmak için bakın. Dördüncü sınıf ve üstü için dört çarpımsal problem çeşidine bakın. (Çarpma ve toplamayla ilgili bu kitaptaki bölümleri ve ayrıca özel problem çözme derslerini inceleyin). Farklı türdeki problemler iyi şekilde temsil edilmiş midir?

Bölüm 9 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Kümelere, satın almaya, ölçülere vb. yönelik hikâye ve resim içeren birçok kitap bulunmaktadır (bunlar problem vermek için veya, daha da iyisi, çocukları kendi problemlerini üretmeye teşvik için kullanılabilir). Bu bağlamda en çok bahsi geçen kitap Pat Hutchins (1986) tarafından yazılan *The Doorbell Rang* kitabıdır. Bu kitapla birlikte aşağıdaki dört kitaba bir göz atabilirsiniz.

How Many Snails? *Giganti, 1988*

Appropriate for the pre-K–2 set, this book includes a variety of pictures in which the objects belonging to one collection have various subcollections (parts and wholes). For example, a sky full of clouds has various types of clouds. The text asks, "How many clouds are there? How many clouds are big and fluffy? How many clouds are big and fluffy and gray?" These pages lead directly to addition and subtraction situations matching the part-part-whole concepts. Of special note is the opportunity to have missing-part thinking for subtraction. Children can then pose their own questions about the drawing and add appropriate number sentences or draw pictures with subcollections on their own equation and how it fits the picture.

One Hundred Hungry Ants *Pinczes, 1999*

This book, written by a grandmother for her grandchild, helps students explore the operation of multiplication (and division). It tells the tale of 100 ants on a trip to a picnic. In an attempt to speed their travel, the ants move from their single-file line of 100 to two rows of 50, four rows of 25, and so forth. This story uses the visual representation of arrays to explore several options for a group of 100 ants. Students can be given different sizes of ant groups to explore other groupings.

Remainder of One *Pinczes, 1995*

Similar to her other book, Elinor Pinczes describes the trials and tribulations of a parade formation of 25 bugs. As the queen is viewing the outline of the parading bugs she notices that one bug is not with the group, trailing behind. The group tries to create different numbers of rows and columns (arrays) but again the one bug is always a "leftover" (remainder). Here too students can be given different parade groups and they can generate formations that will leave one, two, or none out of the group.

Each Orange Had 8 Slices *Giganti, 1992*

Each two-page spread shows objects grouped in three ways. For example, one illustration has four trees, three bird's nests in each tree, and two eggs in each nest. The author asks three questions: "How many trees? How many nests? How many eggs?" The three questions with each picture extend multiplication to a three-factor product. In the case of the trees, nests, and eggs, the number of eggs is the product of $4 \times 3 \times 2$. After children get a handle on the predictable arrangement of the book's pictures, they can write different multiplication stories that go with the pictures or make up illustrations of their own. For example, what similar situations can be found in the classroom? Perhaps desks, books, and pages or bookshelves, shelves, and books.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Clement, L., & Bernhard, J. (2005). A problem-solving alternative to using key words. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(7), 360–365.

This article explores the use of key words as a replacement for sense making in reading word problems. The authors emphasize the meanings of the operations as they sort out common student misconceptions. They describe ways to emphasize having students understand the quantities and relationships between quantities rather than just focusing on the values.

Jung, M., Kloosterman, P., & McMullen, M. (2007). Research in review: Young children's intuition for solving problems in mathematics. *Young Children*, *62*(5), 50–57.

This article explores how students in pre-K through the second grade solve problems using the Cognitively Guided Instruction (CGI) approach as a foundation. The authors share classroom vignettes and then they debrief what they learned about children's thinking.

Kitaplar

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann. (Also published by NCTM)

For teachers, this is the best book available for understanding the CGI approach to operations and the use of story problems to develop number, basic facts, and computational procedures. The classifications of word problems for all operations, as discussed in this chapter, are explained in detail along with methods for using these problems with students. With the book come two CDs, one with classroom clips of CGI classrooms and the other showing children using the various strategies described in the book.

Schifter, D., Bastable, V., & Russell, S. J. (1999b). *Developing mathematical understanding: Numbers and operations, Part 2, Making meaning for operations (Casebook)*. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publications.

In this casebook, teachers in grades K–7 share their stories of working with children as they develop meanings for the four operations. The teachers discuss the kinds of actions and situations that students use as they come to understand the operations.

İnternet Kaynakları

Broken Calculators
http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=7457&page=11&add=Y
www.fi.uu.nl/toepassingen/00014/toepassing_wisweb.en.html

These two applets demonstrate the broken calculator activity as mentioned in Activities 9.6 and 9.7. The first allows for problems at any level, whereas the second is more appropriate for intermediate or middle grade students, as it includes a problem-solving feature.

Number Line Arithmetic
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_156_g_1_t_1.html

This number-line applet can be used to model whole-number operations in addition, subtraction, multiplication, and division.

Thinking Blocks: Addition and Subtraction
www.thinkingblocks.com/ThinkingBlocks_AS/TB_AS_Main.html

Thinking Blocks: Multiplication and Division
www.thinkingblocks.com/ThinkingBlocks_MD/TB_MD_Main.html

These teacher-developed tools links to the various types of problems discussed earlier in the chapter. The difference is the use of two-digit numbers and problems with multiple steps, including compare, part-part-whole, and change examples. There is an emphasis on identifying and solving for an unknown quantity. Because the ideas are presented in game formats, you should view the introduction to be able to play.

All About Multiplication (Grades 3–5)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U109

Four lessons with links to other activities and student recording sheets highlight the models of the number line, equal groups, arrays, and balanced equations. Lesson 3 explores the order property, the zero property, and the identity property. Lesson 4 has an engaging applet called the *Product Game*.

The Factor Game
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=12

This game puts two players into competition to collect the factors for given numbers.

Bölüm 10

Temel Kuralların Öğreniminde Öğrencilere Yardımcı Olma

Temel kurallar toplama ve çarpma işlemleri için toplanan ya da çarpanların her ikisinin de 10'dan küçük olduğu durumlara işaret eder. Çıkarma ve bölme kuralları toplama ve çarpma kurallarına karşılık gelen kurallardır. Örneğin, 15-8=7 işlemi bir çıkarma kuralıdır çünkü toplanan kısımlar 10'dan küçüktür.

Temel bir kuralın öğrenilmesi bir çocuğun sayma gibi etkin olmayan yöntemlere başvurmadan, hızlı cevap vermesi (yaklaşık 3 saniyede) anlamına gelir. NCTM'nin Öğretim Programı Odak Noktaları'na göre, toplama ve çıkarma kavramları birinci sınıfta öğrenilmeli, hızlı hatırlama şeklindeki temel toplama ve çıkarma kurallarının öğrenimi ise ikinci sınıfta olmalıdır. Benzer şekilde, çarpma ve bölme kavramları üçüncü sınıfta öğrenilmeli, hızlı hatırlama şeklindeki temel kuralların öğrenimi ise dördüncü sınıfta olmalıdır.

Temel kurallarla ilgili hızlı ve doğru bir hatırlama yaklaşımı geliştirmek, bu kitaptaki her konuda olduğu gibi, gelişimsel bir süreçtir! Öğrencilerin temel kuralları bilmeleri büyük önem taşır— ve öğrencilere onları iyi öğretmek bilgi kartları ile süreli testlerden çok daha fazlasını gerektirir. Bu bölüm, kullanılacak ve kaçınılacak öğretimsel yaklaşımlar dahil, öğrenciler için temel kuralları öğrenmelerine yardımcı olacak stratejileri ele almaktadır.

Ana fikirler

1. Sayı ilişkileri temel kuralların hatırlanmasına yardımcı olan stratejiler için temel oluşturur. Örneğin, sayıların 5 ve 10 ile ilişkisinin bilinmesi 3+5 (bir onluk kartı düşününüz) ve 8+6 (8, 10'dan 2 eksiktir; 10+4=14 elde etmek için 6'dan 2 çıkar) gibi kuralların öğrenilmesinde yardımcı olur.
2. "Toplamayı düşün" çıkarma kuralları için en güçlü yöntemdir. "13'ten 6'yı çıkarmak" yerine, ki bu geriye doğru saymayı ve aynı zamanda kaç tanenin sayıldığını takip etmeyi gerekli kılar, öğrenciler 6'yı ve kaç ilave edilirse 13 yapacağını düşünebilirler. Öğrenciler 10 yapacak şekilde işlem yapabilir ya da 6'nın 2 katı 12 ve böylece bu sayı 7 olabilir şeklinde düşünebilirler.
3. Temel kuralları öğrenme gelişimsel bir süreç olduğu için, öğrenciler, sayma ile başlayıp, sonra daha etkin olan muhakeme stratejileri ve son olarak da hızlı hatırlama gibi aşamalardan geçerler. Öğretim, ezbere yöneltmeden, öğrencilerin bu aşamalardan geçmelerine yardımcı olmalıdır.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Ana Fikirler kısmında belirtildiği gibi, temel kuralın öğrenimi gerçekte yeni bir matematik olmayıp, öğrenilmiş fikirlerle akıcı işlem yapmanın gelişimidir.

- Sayı ve İşlemler (Bölüm 8 ve 9): Kural öğrenimi önemli ölçüde öğrencilerin sayılarla ilgili ilişkileri ne kadar iyi kurduklarına ve işlemleri ne ölçüde anladıklarına bağlıdır.

  Temel kurallarla akıcı işlem yapma, özellikle zihinsel hesaplama olmak üzere, hesaplamayı kolaylaştır ve böylece sayılarla ilişkili her alanda sayısal muhakeme yapmaya yardımcı olur. Kurallara hakim olmayan öğrenciler için her ne kadar hesap makineleri ve usandırıcı sayma yöntemi bir fırsat olsa da, basit sayı işlemlerinde bunlara bağlı kalmak matematiksel gelişim açısından önemli bir engeldir.

Temel Kural Öğreniminin Doğal Gelişimi

Temel kuralların etkin öğretimi şu önemli anlamayı gerektirir: öğrencilerin belirli aşamalardan geçtikten sonra varacakları nihai aşama "sadece" 2 + 7'nin 9 ya da 5 × 4'ün 20 olduğunu bilmeleridir. Temel kurallar üzerine çalışan matematik eğitimcisi Arthur Baroody bu süreçteki üç aşamayı şu şekilde ele almaktadır (2006, s. 22):

Aşama 1: Sayma stratejileri — cevabı belirlemek için nesne saymayı (örneğin, bloklar ya da parmaklar) ya da sözel saymayı kullanma.
Örnek: 4 + 7. Öğrenci 7 ile başlar ve sözel bir şekilde 8, 9, 10, 11 şeklinde sayar.
Aşama 2: Muhakeme Stratejileri —verilen bilgileri kullanarak bilinmeyen bir kombinasyonu mantıksal olarak belirleme.
Örnek: 4 + 7. Öğrenci 7 + 3'ün 10 olduğunu bilir, böylece 7 + 4 bir fazla olup, 11 eder.
Aşama 3: Öğrenme — cevapların etkin (hızlı ve doğru) üretimi.
Örnek: 4 + 7. Öğrenci hızlı bir şekilde cevap verir, "Sonuç 11'dir; bunun böyle olduğunu biliyorum."

Şekil 10.1 gelişim düzeylerine uygun olarak karşılaştıkları basit toplama ve çıkarma problemlerini çözmede öğrencilerin kullandıkları yöntemleri göstermektedir.

Uzun yıllar boyunca yapılan çalışmalar, temel kuralların öğreniminin muhakeme stratejilerinin gelişimine dayandığı fikrini desteklemektedir (Baroody, 2003, 2006; Brownell &Chazal, 1935; Carpenter & Moser, 1984; Fuson, 1992; Henry & Brown, 2008). Bu bölüm, muhakeme stratejileri ve temel kuralların öğrenilmesinde kullanılacak muhakemeyi öğrencilere etkin yollarla öğretme üzerine odaklanmaktadır.

Kural Öğrenimi için Yaklaşımlar

Çocukların temel kuralları öğrenmelerine yardımcı olmak için, birbirinden kısmen farklı üç yaklaşımdan söz edilebilir. Her bir kuralın ezberlenmesi üzerine ayrı ayrı çalışmak ilk yaklaşımdır. En az 1970'lere dayanan ikinci yaklaşıma göre ise (Rathmell, 1978), değişik temel kural sınıfları için etkili ve öğretilebilir olduğu belirlenmiş stratejiler koleksiyonu ya da düşünce örüntüleri öğrencilere öğretilmektedir. "Rehberli icat" olarak nitelendirilen üçüncü yaklaşım kuralların öğrenimi için stratejilerin kullanımı üzerine yoğunlaşmaktadır; fakat burada stratejiler öğrenciler tarafından üretilir ya da tekrar icat edilir. Bu yaklaşımların her biri takip eden kısımlarda kısaca ele alınarak tartışılmaktadır.

Kuralları Ezberleme. Bazı ders kitapları ve öğretmenler, stratejilerin gelişim sürecini atlayarak, toplama ve çarpma kavramlarını verir vermez doğrudan kuralların ezberlenmesine yönelirler. Bu şu demektir; öğrencilerin 100 ayrı toplama (0-9) ve 100 ayrı çarpma kuralı ezberlemeleri gerekir. Öğrenciler hatta çıkarma ve bölmeyi ayrı olarak ezberlemek zorunda kalabilirler. Fakat, dördüncü ve beşinci sınıftaki birçok öğrencinin toplama ve çıkarma kurallarını öğrenmedikleri ve ortaokul ve sonrasındaki öğrencilerin çarpma kurallarını bilmedikleri gerçeği bu yöntemin aslında iyi çalışmadığını göstermektedir. Birçok öğrenci gibi siz de kuralları bu şekilde öğrendiğinizi zannedebilirsiniz. Fakat, 1935'lere kadar

	Toplama	**Çıkarma**
Sayma	Doğrudan modelleme (nesneleri ve parmakları sayma) • Hepsini sayma • İlkinden başlayarak sayma • Büyük olandan başlayarak sayma Somut materyal olmaksızın sayma • Hepsini sayma • İlkinden başlayarak sayma • Büyük olandan başlayarak sayma	Nesneleri Sayma • ...den ayırma • ...ye ayırma • Üzerine ekleme Parmakları sayma • Geriye sayma • İleri sayma Somut materyal olmaksızın sayma • Geriye sayma • İleri sayma
Muhakeme	Özellikler • $a + 0 = a$ • $a + 1$ = bir sonraki sayma sayısı • Değişme özelliği Bilinen kuraldan türetme (ör., 5 + 6 = 5 + 5 + 1; 7 + 6 = 7 + 7 − 1) Türetilmiş kuralları yeniden organize etme (ör., 7 + 5 = 7 + (3 +2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12)	Özellikler • $a - 0 = a$ • $a - 1$ = bir önceki sayma sayısı Bilinen toplama kurallarının tamamlayıcısı/terstleri (ör., 12 − 5 bilinir çünkü 5 + 7 = 12 dir.) Türetilmiş kuralları yeniden organize etme (ör., 12 − 5 = (7 + 5) − 5 = 7 + (5 − 5) = 7)
Geri Çağırma	Uzun süreli bellekten geri çağırma	Uzun süreli bellekten geri çağırma

Şekil 10.1 Toplama ve çıkarma temel kural öğrenimi için gelişimsel süreç

Kaynak: Henry, V. J., & Brown, R. S. (2008). "First-Grade Basic Facts: An Investigation into Teaching and Learning of an Accelerated, High-Demand Memorization Standard." *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(2), p. 156. İzin alınarak basılmıştır.© 2008, Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi, www.nctm.org.,basım, Tüm hakları saklıdır.

uzanan ve Brownell ve Chazal tarafından yapılan çalışmalar, çocukların tecrübe ettikleri birçok farklı alıştırmaya rağmen, temel kurallar için farklı türden düşünme süreçleri ya da stratejileri geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Ne yazık ki alıştırmalar bu stratejilerin geliştirilmesini teşvik etmez ya da desteklemez. Dahası Baroody'nin (2006) belirttiği gibi bu yaklaşımla temel kural öğretimi, matematiksel yeterliliğin beş boyutunun gelişiminin de aksi yönde çalışır (bknz. Syf 24-25). Söz konusu aksi yönler aşağıda belirtilmektedir:

- *Verimli olmama.* Ezberlenmesi gereken çok sayıda kurallar vardır.
- *Uygun olmayan uygulamalar.* Öğrenciler kuralları yanlış uygular ve yaptıklarını kontrol etmezler.
- *Esnek olmama.* Öğrenciler toplamları (ya da çarpımları) bulmak için esnek stratejileri öğrenmezler ve bu yüzden de sayı sayma yönteminden faydalanmaya devam ederler.

Alıştırma yapma ayrıca bir hakkaniyet meselesidir. Zorluk yaşayan ve özel eğitime ihtiyaç duyan öğrenciler birbirinden farklı birçok kuralı ezberlemede zorluk yaşamaktadırlar; fakat strateji kullanmada bu öğrenciler çok başarılı olabilirler. Ayrıca alıştırmalar gereksiz endişeye ve uzun vadede öğrencinin matematiğe olan ilgi ve merakının sarsılmasına neden olabilir.

Açık Strateji Öğretimi. Birçok kurala uygulanabilir özellikte olan etkili bir stratejinin öğrencilere gösterimi yaklaşık 30 yıldır popüler bir yaklaşım olmuştur. Daha sonra öğrenciler kendilerine gösterildiği gibi stratejiyi uygularlar. Böyle bir yöntemin etkin olacağına dair güçlü kanıtlar bulunmaktadır (Baroody, 1985; Bley & Thornton, 1995; Fuson, 1984, 1992; Rathmell, 1978; Thornton & Toohey, 1984). Bu araştırmacılar tarafından geliştirilen ve test edilen birçok fikir bu bölümde tartışılmaktadır.

Açık strateji öğretimi, öğrencileri ezberledikleri bir stratejiyi kullanmaya zorlamaktan ziyade öğrencilerin düşünmelerini desteklemeyi amaçlamaktadır. Bazen ders kitapları veya öğretmenler, stratejinin ve bu strateji ile işleyen kuralların ezberlenmesine odaklanmaktadırlar. Ancak bu yöntem işe yaramaz. Öğrenciler anlamlandırmadıkları stratejileri ezberlediklerinde, bunları yanlış uygulayabilmektedirler. Gerçekten de son zamanlarda yapılan bir çalışma göstermektedir ki büyük oranda temel kural stratejilerinin ezberlenmesini öne çıkaran ders kitaplarına bağlı kalan öğretmenlerin öğrencileri, daha düşük seviyede sayı hissi yeterliliğine sahip olmuştur (Henry ve Brown, 2008). Dahası öğrenciler ezberi iyi yapamamakta ve çareyi saymada bulmaktadırlar. Öğrencilere yardımcı olacak yol, fırsatları görmelerini sağlamak ve sayma yapmadan çözüm elde edebilmeleri için onların strateji seçmelerine izin vermektir.

Rehber Eşliğinde İcat. Üçüncü seçenek "rehber eşliğinde icat etmedir" (Gravemeijer & van Galen, 2003). Bu etkili yaklaşımda kural öğrenimi, öğrencilerin sahip olduğu sayı ilişkileri ile yakından bağlantılıdır. Bazı öğrenciler 6+7'yi "iki kere 6, 12 ve bir fazlası 13" olarak düşünebilirler. Aynı sınıftaki diğer öğrenciler ise 7, 10' dan 3 uzaklıktadır ve 10 elde etmek için 6' dan 3 çıkarılır ve kalan 7' ye eklenir. Daha sonra kalan 3' ü eklerler. Öte yandan diğerleri her bir toplanandan 5 alarak 10 elde edebilir ve daha sonra kalan 1 ve 2'yi de 10'a eklerler. Buradaki önemli husus şudur; öğrenciler sahip oldukları ve anlamlandırdıkları sayı kombinasyonlarını ve ilişkilerini kullanmaktadırlar.

Gravemeijer ve van Galen bu yaklaşımı rehber eşliğinde icat olarak adlandırmaktadır, çünkü birçok etkin strateji, rehber desteği alınmadan bütün öğrenciler tarafından geliştirilemeyecektir. Yani tüm çabamızı sayı ilişkileri ve işlemlerin anlamları üzerine harcayamayız ve kural öğreniminin sihirli bir değnekle oluşacağını varsayamayız. Öğrencilerin sözel problemler, sayı etkinlikleri ve oyunlar için ortaya koydukları çözümlere dayalı sınıf tartışmaları çeşitli stratejilerin sınıfa taşınmasını sağlayacaktır. Öğrenciler kendilerine anlamlı gelen fikirleri seçer ve adapte olurlar. Öğretmene düşen görev, etkinlikleri ve problemleri etkin stratejilerin ortaya çıkmasını sağlayacak şekilde tasarlamak ve bu stratejilerin sınıfta net olarak açıklandığından ve paylaşıldığından emin olmaktır. 8. bölümde de belirtildiği gibi, öğretmenlerin zengin bir sayı ilişkileri koleksiyonu oluşturmak için uğraşması hayati derecede önemlidir.

Strateji Geliştirmeye Rehberlik Etme

Etkin stratejileri kullanmada öğrencilere rehberlik edebilmeniz için, mümkün olduğunca birçok iyi stratejiye sizin kendinizin hakim olması gerekmektedir. Bu bilginizle öğrencilerinizin geliştirdiği etkin stratejileri fark edebileceksiniz ve diğerlerinin bu fikirlerden yararlanabilmeleri için onlara yardımcı olabileceksiniz.

Öğrencilerin sayma yapmaktan, stratejilere ve oradan da hatırlamaya geçmeleri için farklı deneyimler planlamaya ihtiyacınız vardır. Öğrencilerin çözüm sırasında strateji geliştirdikleri sözel problemlerin tasarlanması ve kullanılması etkin bir yaklaşım olabilir. Siz de öğrencilerin stratejilerini ele alırken dikkatinizi en faydalı yöntemlere yoğunlaştırabilirsiniz.

İkinci olarak muhakeme stratejilerini öğretiniz. Bu, onlara kendi zihinsel stratejilerini geliştirmede yardımcı olacak ve sayma yapmaktan uzaklaştıracaktır. Dikkat edilmelidir ki bu öğretim yaklaşımı, öğrencileri stratejileri ezberlemeye ve kullanmaya zorlamamalı ama stratejileri vurgulamaya dönük olmalıdır.

Hikâye Problemleri. Hikâye problemleri öğrencilere durumu anlamalarında ve hesaplama yapmak için esnek stratejileri uygulamalarında yardımcı olan bağlamlar sağlar. Örneğin, bir sınıf 3'ler kuralı üzerine çalışıyor. Öğretmen aşağıda yer alan soruyu öğrencilere yöneltiyor:

3 hafta sonra hayvanat bahçesine gideceğiz. Hayvanat bahçesine gitmemize kaç gün kaldı?

Farz edelim ki Aidan 3 × 7'yi nasıl anladığını, yedinin iki katı ve buna yedi ekleme yoluyla açıklamış olsun. Aidan biliyor ki 14'e 6 eklendiğinde 20 eder, bunun da bir fazlası 21'dir. Diğer bir öğrenciden Aidan'ın sınıfla ne paylaştığını açıklamasını isteyiniz. Bu durum öğrencilere sınıf arkadaş-

1. sınıf, Ünite 6, Sayı Oyunları ve Renkli Kalem Bulmacaları
Ders: Diziler Oluşturma
1. Max'in futbol takımının 15 topu var.
   Max'in takımı Rosa'nın takımına 6 top ödünç veriyor.
   Max'ın takımında kaç tane top kaldı?

4. sınıf, Ünite 1, Çarpanlar, Katlar ve Diziler
Ders: Toplama ve Çıkarma Hikâye Problemleri
2. Bir meyve suyu paketinde 8 kutu bulunmaktadır.
   Üç pakette kaç kutu meyve suyu bulunur?
   Altı pakette kaç kutu meyve suyu bulunur?
   Dokuz pakette kaç kutu meyve suyu bulunur?

Şekil 10.2 Temel kurallarla ilgili muhakeme stratejilerini geliştirmek için Sayı, Veri ve Uzayda İncelemeler müfredatından seçilmiş hikâye problemleri.

larından gelen fikirlere dikkat etme ihtiyacı hissettirecektir. Şimdi Aidan' ın stratejisi ile başka hangi kuralların çalışabileceğini öğrenmek için sınıfla birlikte inceleme yapınız. Bu tartışma farklı türde stratejiler içerebilir. Bazıları 3'ler ile yapılan tüm çarpma kurallarının çift kat ve bir fazla ekleme stratejisi ile yapılabileceğini görebilirler. Diğer öğrenciler daha küçükler için geçerli kural biliniyorsa daima üzerine bir grubun eklenebileceğini söyleyebilirler. Örneğin, 6×8 için daha küçük olan 5 × 8' e 8 ekleme.

Sayılarla Düşünme programı (Rathmell, Leutzinger ve Gabriele 2000) geniş bir basit hikâye problemleri koleksiyonundan oluşmaktadır. Bu problemler belirli kurallar hakkında düşünme yollarını veya belirli stratejileri teşvik etmek için gruplar halinde tasarlanmıştır. Öğretmenler öğrencilere her gün zihinden çözmeleri için bir problem sunar. Devamında öğrencilerin fikirleri üzerine kısa bir tartışma yapılır. Benzer bir yaklaşım Şekil 10.12'de yer almaktadır. Burada Sayı, Veri ve Uzayda İncelemeler' in 1. sınıftan 4. sınıfa kadar ki muhakeme stratejilerini destekleyen hikâye problemleri yer almaktadır. Araştırmalar problem çözümlerine güçlü vurgu yapıldığında, öğrencilerin sadece daha iyi problem çözücü değil aynı zamanda kural alıştırması yapan bir programdaki öğrencilerden daha çok temel kuralı öğrendiklerini göstermektedir (NRC, 2001).

Muhakeme Stratejileri. İkinci bir yaklaşım ise doğrudan bir muhakeme stratejisini modellemektir. Belirli bir strateji için uygun olan belirli kurallar koleksiyonu, öğrencilerin incelemesini sağlamak için bir ders olarak tasarlanabilir. Bu kuralların bir şekilde nasıl birbirlerine benzediklerini veya öğrencilere bir yaklaşım önererek onların benzer kurallar için bu yaklaşımı kullanıp kullanmadıklarını gözleyebilirsiniz.

Öğrencilerden bir stratejiyi kullanmalarını ve daha sonra bunu uygulamalarını istemekten kaçınınız. Sınıfınızda üretilen stratejileri tartışmaya ve dersleri stratejileri kullanmayı teşvik edecek şekilde planlamaya çalışınız. Öğrencilerden tanıtılan bir stratejiyi sadece bir hikâye problemiyle veya durumla anlamalarını beklemeyiniz. Öğrencilerin bir stratejiyi içselleştirmek için çok daha fazla deneyime ihtiyaçları vardır. Öğrencilerin çoğu ilk günlerde yeni bir fikri kullanmak için hazır olmayacaktır fakat bir zaman sonra birden bire zihinlerinde şimşek çakacak ve kendileri için kullanışlı buldukları bir fikre sahip çıkacaklardır.

Öğrencilerin geliştirdikleri stratejilerin bir posterini yapma ya da yeni stratejileri tahtaya yazma iyi bir fikir olabilir. Stratejilere anlamlı isimler veriniz. (*İki katını al ve bir ekle. Aidan' ın fikri. 3'ler ile kullanınız.* Bir örnek veriniz.)

Hiçbir öğrenci bir başkasının stratejisini benimsemesi için zorlanmamalı ancak, bütün öğrenciler tartışılan tüm stratejileri anlamaya teşvik edilmelidir.

Aynı kurallar topluluğu için farklı öğrenciler farklı stratejiler bulacak ya da benimseyecektir. Örneğin, 8 veya 9' u eklerken 10'nun kullanılabileceği birkaç yöntem veya strateji vardır. Bu yüzden 8 veya 9 ile yapılan tüm toplama kurallarını içeren bir alıştırma, bu kurallar için bir stratejiye sahip olan her çocuğa fırsat sunabilir. İki öğrenciden her biri farklı stratejiler kullanarak çarkları çevirerek alıştırma yapma oyunu oynayabilirler.



Matematik eğitimindeki reform hareketlerini eleştirenler, sıklıkla Standartlar'ın özellikle kuralların öğrenimi olmak üzere,"temel kurallar hakkında hafif" kaldığını belirtmeye çalışmışlardır. Hiçbir şey hakikatten daha öte olamaz. Standartlar belgesinde yer alan ve birbirine benzeyen ifadeler arasından seçilebilecek bir alıntı şudur: " Temel sayı kombinasyonlarını (tek basamaklı toplama ve çarpma ikilileri ve bunların çıkarma ve bölme için karşılıklarını) bilmek esastır" (s. 32). ◆

Toplama Kuralları için Muhakeme Stratejileri

Öğrencilerin toplama kuralları için kullandıkları ya da bulabilecekleri stratejiler doğrudan bir veya birden fazla sayı ilişkisiyle bağlantılıdır. 8. bölümdeki çok sayıda etkinlik bu ilişkileri geliştirmek amacıyla önerilmiştir. Buradaki öğretim görevi, öğrencilere bu sayı ilişkilerini temel kurallarla ilişkilendirmelerinde yardımcı olma amacıyla yapılmaktadır.

Muhakeme stratejilerini kullanmanın arkasındaki "büyük fikir" öğrencilerin bilinen kurallarla ve ilişkilerle temel kuralları halletmeleridir. Öğrencilerin bunu yapabilecekleri iki yoldan biri 7 + 5 gibi bilinmeyen bir kuralı çözmek için bilinen bir kuralı (7 + 3 = 10 gibi) kullanmaktır. İkinci yol ise türetilmiş kurallardır. Burada öğrenci 7 + 5' i, 7'yi 5 + 2 daha sonra 5 + 5 ve 2 ekleyerek çözebilir (Henry ve Brown, 2008). Buradaki "büyük fikri" bu bölümde yer alan her bir muhakeme stratejisini gözden geçirirken kullanmak için aklınızda tutunuz.

Bir Fazlası ve İki Fazlası

Aşağıdaki tabloda koyu renkle gösterilen 36 kuralın her birinin toplananından en az biri 1 ya da 2'dir. Bu kurallar

Bölüm 8'de belirtilen bir fazlası ve iki fazlası ilişkilerinin doğrudan uygulamasıdır.

İçerisinde toplananlardan biri 1 ya da 2 olan hikâye problemleri üretmek kolaydır. Örneğin, Tommy sirk gösterisindeyken 7 palyaçonun küçük bir arabadan indiğini görmektedir. Daha sonra 2 palyaço bisikletlerin üzerinde görünür. Tommy toplamda kaç tane palyaço gördü? Farklı öğrencilerden 9 cevabını nasıl bulduklarını açıklamalarını isteyiniz. Bazıları 7'den başlayarak sayacaklardır. Bazıları yine de 7 ve 2'yi sayıp daha sonra hepsini birlikte sayabilir. Bazıları 7'nin iki fazlasının 9 olduğunu bildiklerini söyleyecektir. Son cevap size iki fazlası fikrini kullanabileceğiniz kurallar hakkında konuşma fırsatı vermektedir.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	2							
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3		4	5							
4		5	6							
5		6	7							
6		7	8							
7		8	9							
8		9	10							
9		10	11							

Etkinlik 10.1

Yatakta Kaç Ayak Var?

How Many Feet in the Bed/Yatakta Kaç Ayak Var? kitabını okuyunuz. Kitaba ikinci defa döndüğünüzde, öğrencilere yeni bir kişi yatağa girdiğinde yatakta kaç fazla ayak olacağı sorusunu yöneltiniz. Öğrencilerden oluşturdukları ifadeyi yazmalarını (ör., 6 + 2) ve kaç tane ayak olduğunu söylemelerini isteyiniz. İki eksik ayak, ailedekilerin yataktan çıktıkları şeklinde düşünülebilir.

Farklı cevaplar öğrencilerin sayı hissi ile ilgili birçok bilgi sağlayacaktır. Öğrenciler iki fazlası fikrini "hepsini saymaya" gerek duymadan kullanmaya hazır olduklarında, aşağıdaki etkinlik gibi uygulamaları yapmaya başlayabilirler.

Etkinlik 10.2

Zar ve Çarklarla Bir Fazlası ve İki Fazlası

Yüzlerinde +1, +2, +1, +2, "bir fazlası" ve "iki fazlası" etiketleri olan bir zar oluşturunuz. Bu zarı 3,4,5,6,7 ve 8 (ya da öğrencilerin istedikleri değerlerden oluşan) rakamları ile etiketlendirilmiş bir diğer zarla birlikte kullanınız. Her iki zar atıldıktan sonra, çocuklar çıkan sonuçları söylemeli: "Dört ve iki fazlası 6'dır". Alternatif olarak, bir zar atılır ve bir yarısında +1, diğer yarısında ise +2 olan bir çark kullanılabilir.



Şekil 10.3 Bir fazlası ve iki fazlası etkinlikleri.

Şekil 10.3, Etkinlik 10.2'deki fikirleri örneklendirmektedir. Bu gibi etkinliklerin kitaptaki hemen hemen tüm stratejiler için uyarlanabileceğine dikkat ediniz.

Sıfır Ekleme

Ondokuz kural toplananlardan birisi olarak sıfırı içermektedir. Her ne kadar böyle problemler kolay olsa da, bazı öğrenciler toplama problemlerinin sonuçlarının toplananlardan daha büyük olacağı şeklinde aşırı genelleme yaparlar. Sıfır içeren hikâye problemleri bu noktada oldukça faydalı olacaktır. Tartışmalarda bir parçası boş olan iki parçalı çizim gösterimlerini kullanınız.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	2									
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									

Etkinlik 10.3

Benzer Olan Nedir? Sıfır Kuralları

Tahtaya sıfırla ilgili yaklaşık 10 tane kural yazınız. Bazılarında sıfır birinci ve bazılarında ise ikinci kısımda

olsun. Bu kuralların nasıl benzerlik gösterdiğini tartışınız. Çocuklara sayma nesnelerini ve parça-parça-bütün altlığını kullandırarak masalarındaki kuralları modellemelerini sağlayınız.

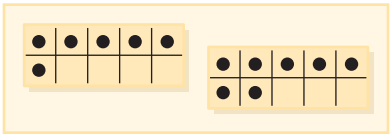
5'i Konum Sayısı Olarak Kullanma

Konum sayısı kullanımı bir muhakeme stratejisi olup öğrencilerin sayı ilişkileri bilgileri üzerine kuruludur. Öğrencilere söz konusu ilişkilerden kurallar türetmeleri için yardımcı olur. Örneğin, 7, 5 + 2'dir ve 6, 5+1'dir. O zaman, 6 + 7, her bir sayıda 5 ile birlikte "ekstraların" olduğu şeklinde düşünülebilir. Bu örnekte, öğrenci 5 ile 5'i toplar ve sonra 6'daki ekstra 1'i ve 7'deki ekstra 2'yi alarak 13'ü bulur. Bölüm 8'de ele alınan onluk kartlar, öğrencilere sayıları 5 ve daha fazlası olarak görmeleri için yardımcı olabilir.

Etkinlik 10.4

10'u Konum Sayısı Olarak Kullanma

Tepegöze iki tane onluk kart asetatı yerleştiriniz. Her birine sayma pulları yerleştiriniz (örneğin, birine 6 ve diğerine 7). Tepegözü yaklaşık 5 saniye açık tutunuz ve daha sonra kapatınız. Öncelikle öğrencilere kaç tane sayma pulu olduğunu sorunuz ve daha sonra onları nasıl bulduklarını açıklamalarını isteyiniz. Çalışma Yaprak Seti 11 ve 16'ya bakınız.



Etkinlik 10.5

10'un Kuralını Söyle

Bir onluk kartı sınıfa gösteriniz ve öğrencilerden "10'un kuralını" söylemelerini isteyiniz. 7 noktalı bir kart için, cevap "yedi ve üç, on eder" dir. Daha sonra, tahtaya boş bir onluk kart yerleştiriniz ve 10'dan küçük bir sayı söyleyiniz. Çocuklar bu sayı ile başlar ve "10'un kuralını" tamamlar. Eğer siz "dört" derseniz, onlar "dört artı altı on eder" derler. Aynı etkinlikleri bağımsız ya da küçük grup çalışmalarında kullanınız. Çalışma Yaprak Seti 16'ya bakınız.

10 Kuralları

Öğrencilerin bilmesi gereken en önemli strateji herhalde 10 Elde Etme stratejisidir ya da 10 yapan kombinasyonlardır. İşlemin sonucu10 olacak şekilde iki sayıyı içeren hikâye problemleri ya da 10 olması için kaça ihtiyaç vardır şeklindeki uygulamalar bu süreçte yardımcı olabilir. Onluk kart da faydalı bir araçtır. Onluk kart üzerine sayma pulları yerleştiriniz ve "10 olması için kaç taneye daha ihtiyaç vardır?" sorusu yöneltiniz. Bu etkinlik, öğrenciler sonucu 10 olan bütün kombinasyonları iyice kavrayana kadar tekrar tekrar yapılabilir. Kombinasyonları 10 olanları bilmek sadece basit kuralları öğrenmek açısından yardımcı olmaz, aynı zamanda daha büyük sayılarla toplama yapmanın alt yapısını oluşturur ve basamak değeri kavramlarının anlaşılmasına temel teşkil eder.

10'dan Fazla

Bazı işlemlerin 10'dan büyük toplamları olur. Öğrenciler bildikleri ve 10'a eşit olan kuralları kullanarak bu türden temel problemleri çözerler. Örneğin, 6 + 8 işlemini yapan öğrenciler, büyük sayı ile başlayabilir ve bunun 10'dan 2 eksik olduğunu görebilir; böylece, 10'u elde etmek için 6'dan 2'yi çıkarır ve daha sonra kalan 4'ü 10'a ekleyerek 14'ü bulurlar.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										11
3									11	12
4								11	12	13
5							11	12	13	14
6						11	12	13	14	15
7					11	12	13	14	15	16
8				11	12	13	14	15	16	17
9			11	12	13	14	15	16	17	18

Bu muhakeme stratejisi oldukça önemlidir ve genelde Amerika'daki ders kitaplarında ya da sınıflarda yeterince vurgulanmaz (Henry ve Brown, 2008). Gerçekte, bu strateji yüksek performans gösteren ülkelerde (Kore, Çin, Tayvan ve Japonya) yoğun bir şekilde vurgulanmakta ve bu ülkelerdeki öğrenciler Amerikalı öğrencilerden daha erken ve daha doğru bir şekilde kuralları ezberlemektedir. Kaliforniya'daki birinci sınıflar üzerine yapılan yeni bir çalışma 10 Elde Etme stratejisinin, iki katını alma kullanımıyla karşılaştırıldığında (her ne kadar bu çalışmada iki katını alma kullanımı öğretmenler ve ders kitapları tarafından vurgulanmış olsa da), 10'dan fazla olanla ilgili kuralları ezberlemeye daha çok katkıda bulunduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca, 10 Elde Etme stratejisi kullanılarak kaç tane temel toplama işleminin yapılacağına dikkat ediniz. İlave olarak, bu strateji daha sonraları 20 veya 50'den büyük ya da kritik sayıların toplamına uygulanabilir. Dolayısıyla, bu muhakeme stratejisi toplama (ve çıkarma) kurallarının öğretiminde kullanılmayı önemli ölçüde hak etmektedir.

Etkinlik 10.6

10 Elde Etmek için Yerini Değiştir

Etkinlik 10.4'ü uyarlayarak, öğrencilere onluk kartlardan birinin boş kısımlarını hayallerinde sayma pullarıyla doldurmalarını ve kaç tane olacağını belirtmelerini isteyiniz. Öğrenciler toplamı bulduktan sonra, ifadelerini kayıt ettiriniz ve birbirleriyle paylaşmalarını sağlayınız. Alternatif olarak, ifade ile başlayınız ve öğrencilere "10 elde etmeyi" hayal etmelerini isteyiniz ve sonra cevabı onlara söyletiniz. Çalışma Yaprak Seti 11'e bakınız.

Etkinlik 10.7

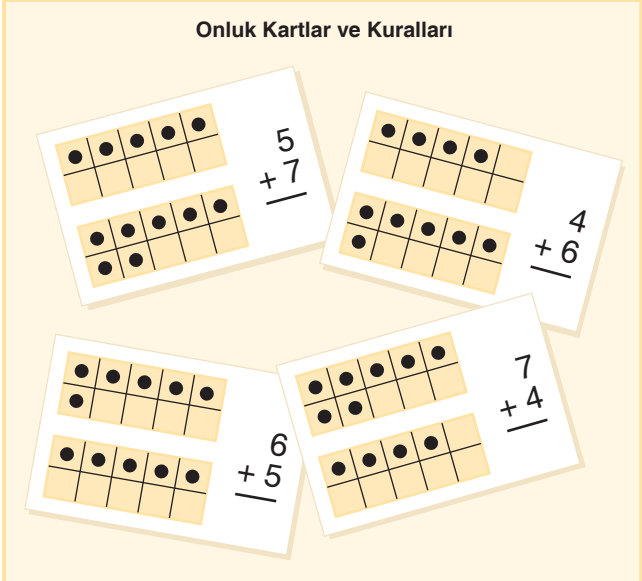
Onluk Kartlarda 10 Elde Etmek

Öğrencilere üzerinde iki tane onluk kart bulunan bir altlık veriniz. Onluk kartların yanına bilgi kartları yerleştirilebilir ya da bir kural sözel olarak verilebilir. Öğrenciler her iki onluk kart üzerindeki sayıyı modeller ve daha sonra en kolay yönteme karar vererek sayıların toplamını saymadan bulur. Öğrencilere yaptıklarını açıklatınız. 10'u elde etmek için, sayma pullarının bir onluk karttan alınarak diğerine aktarılabileceği üzerine özellikle odaklanınız. Daha sonra elinizde, 10 ile artanlardan ne kaldıysa o kalır. Çalışma Yaprak Seti 11'e bakınız.

Etkinlik 10.8

Kartlar ve Kurallar

Küçük onluk kartları kullanınız (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 15 ve 16). Tepegöz için bir asetat seti oluşturunuz. Tepegözde 8 (ya da 9) kartı gösteriniz. Bu kartın altına, öğrenciler işlem sonucunu söyledikçe, her seferinde diğer kartları yerleştiriniz. Öğrencilerden yaptıklarını sözel olarak açıklamalarını isteyiniz. 8+4 için, öğrenciler şöyle diyebilirler, "4'ten 2 alınır ve 10 elde etmek için 8'in üzerine ilave edilir. Daha sonra 10 ile arta kalan 2, 12 yapar." Sonra 7+6 gibi daha zor kartlarla işlem yapılır. Etkinlik küçük onluk kartlar olmadan bağımsız bir şekilde de yapılabilir. Öğrencilerden, Şekil 10.4'te gösterildiği gibi, her ifadeyi yazmaları istenir.



Şekil 10.4 Onluk Kartlar ve Kurallar Etkinliği

İki Katlar Kuralı

Aşağıda gösterildiği gibi, 0 + 0'dan 9 + 9'a kadar 10 adet iki kat alma kuralı vardır. Muhtemelen ritmik doğaları gereği, öğrenciler genelde iki katları bilirler. Bu ikililer diğer kurallar için konum sayıları olabilir.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1		2								
2			4							
3				6						
4					8					
5						10				
6							12			
7								14		
8									16	
9										18

Etkinlik 10.9

İki Kat Görüntüleri

Şekil 10.5'te gösterildiği gibi, öğrencilerden iki katların her biri için resim kartları oluşturmalarını isteyiniz ve bu kartların temel kuralları içermesini sağlayınız.

Hikâye problemleri toplananların benzer olduğu çiftleri içerecek şekilde olabilir. *Hem Alex hem de Zack sahilde 7 adet deniz kabuğu bulmuştur. Her ikisi toplamda kaç tane deniz kabuğu bulmuştur?*

Basit bir "iki kat yapan makine" tahtaya çizilebilir ya da bir ayakkabı kutusuyla bu makine oluşturulabilir. Ön kısmına "girdi sayısı" ve arka kısmına ise sayının iki katı yazılmış kartlar oluşturulur. Kart iki kat yapan makineden "geçerken", önden arkaya çevrilir. İki öğrenci ya da küçük bir öğrenci grubu girdi/çıktı makinesi kullanabilir. Bir öğrenci kartı çevirirken diğeri/diğerleri kuralı ifade eder.

Etkinlik 10.10



Hesap Makinesiyle İki Katlar

Hesap makinesi kullanınız ve "iki kat yapanı" tuşlayınız (2 [×]). Bir öğrenciden, örneğin, "yedi artı yedi" demesini isteyiniz. Elinde hesap makinesi olan çocuk 7'yi tuşlamalı, iki katını (14) bulmak için uğraşmalı ve daha sonra [=] tuşuna basarak ekranda doğru iki katı görmeye çalışmalıdır. (Hesap makinesinin, +1 ve +2 kurallarıyla uygulama yapmak için de yararlı bir araç olduğunu not ediniz.)

Yaklaşık İki Katlar

Yaklaşık İki Kat Kuralı "iki kat-artı-bir" ya da "iki kat-eksi-bir" kuralı olarak da isimlendirilir ve toplananlardan birinin diğe-



Şekil 10.5 İki katlarla ilgili kurallar

rinden bir fazla ya da az olduğu tüm kombinasyonları içerir. Bu bir strateji olup bilinen bir kuraldan bilinmeyen bir kuralın üretilmesi için kullanılır. Bu stratejide küçük sayının iki katı alınır ve 1 ilave edilir. Bu strateji üzerine odaklanmadan önce öğrencilerin çift kat kuralını bildiklerinden emin olunuz.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1								
1	1		3							
2		3		5						
3			5		7					
4				7		9				
5					9		11			
6						11		13		
7							13		15	
8								15		17
9									17	

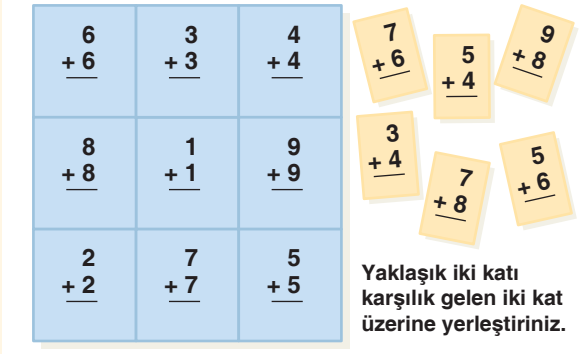
Yaklaşık iki kat kuralını içeren hikâye problemlerine ek olarak, tahtaya 10 tane yaklaşık iki kat kuralı yazarak bu stratejiyi sınıfa tanıtabilirsiniz. Düşey ve yatay formatları kullanınız ve daha küçük olan toplananın hangisi olduğunu çeşitli örneklerle gösteriniz.

Öğrencileri, cevaplarını yazmaları için bağımsız olarak çalıştırınız. Daha sonra öğrencilerin bu kuralları cevaplamak için ortaya koydukları "iyi" (etkin) strateji fikirlerini tartışınız. Bazıları küçük sayının iki katını alarak bir ilave edebilir, diğerleri ise büyük sayının iki katını aldıktan sonra çıkarma işlemi yapabilir. Hiç kimse yaklaşık iki kat stratejisi kullanmıyorsa, bazı kurallara karşılık gelen iki katları yazınız ve öğrencilere bu kuralların kendilerine nasıl yardımcı olabileceğini sorunuz.

Etkinlik 10.11

İki Kat Kuralı Üzerine

Tahtada ya da kağıt üzerinde iki katları gösteren bir etkinlik tablosu oluşturunuz (Bkz. Şekil 10.6). Yaklaşık iki kat kurallarını (ör., 4 + 5) içeren kartlar hazırlayınız. Öğrencilere kart üzerinde var olan kuralı çözmeye yardımcı olabilmesi için bir kural bulmalarını ve bunu etkinlik tablosuna yerleştirmelerini isteyiniz. Öğrencilerden yardımcı olabilecek başka iki katların olup olmayacağını belirtmelerini isteyiniz.



Şekil 10.6 Yaklaşık iki katlar etkinliği

Muhakeme Stratejilerini Pekiştirme

Muhakeme stratejilerinin geliştirilmesinin arkasındaki en önemli amacın, öğrencilerin saymanın ötesinde işlem yapmalarına ve kuralları hızlı ve doğru bir şekilde hatırlayana kadar daha etkin olmalarına yardım etmek olduğunu hatırlayınız. Günlük bazda öğrencilere hikâye problemleri ya da ifadeler yönelterek basitçe şunu sorabilirsiniz, "Nasıl çözdün?". Eğer öğrenciler bir kuralı "bilmiyorlarsa" Etkinlik 10.12 kendilerine yardımcı olabilir ve muhakeme stratejilerine geri dönerek sorunu çözebilirler.

Etkinlik 10.12

Eğer Bilmiyorsan

Şu soruyu sınıfınıza yöneltiniz: Eğer 8 + 5'in cevabını bilmiyorsanız (ya da öğrencilerin düşünmelerini istediğiniz herhangi bir kural), cevabı bulmak için

gerçekten de etkili yöntemler ne olabilir? "Etkin yöntemin" saymak zorunda olmadığınız ve zihninizde yapabileceğiniz şey anlamına geldiğini açıklayınız. Öğrencileri birden fazla yöntemle çözüm üretmeleri için teşvik ediniz. Tüm sınıfla paylaşmadan önce, öğrencilerin öncelikle fikirlerini arkadaşı ile tartışacağı düşün-eşleş-paylaş yaklaşımını kullanınız.



Öğrencilerin çoğu toplama kuralları için sayma stratejilerine takılıp kalırlar. Bu çocuklar genelde saymada o kadar iyi olurlar ki onların sayıp saymadıklarının farkına bile varamazsınız. Saymadaki hız kural öğreniminin yerini tutmaz. Kurallar üzerinde işlem yaparlarken öğrencilerinizin nasıl düşündüğünü bilmek faydalı bir iştir. Bu durum, öğrencilerinizin hâlâ öğrenmediğini düşündüğünüz bazı kurallar ile ilgili kısa süreli bir teşhis edici mülakat yapmanızı gerektirebilir. Öğrenci cevabını yazdığında ya da belirttiğinde, "bu cevabı bulurken nasıl düşündüğünü bana söyle" sorusunu yöneltiniz. ◆



Durup Düşün!

Toplama kurallarının çoğu farklı türden muhakeme stratejilerinin kullanılmasına olanak sağlar. 8 + 6 işleminin sonucunu elde etmek için öğrenciler hangi stratejileri kullanabilirler? En az üç tanesini belirtiniz.

Çıkarma Kuralları İçin Muhakeme Stratejileri

Çıkarma kurallarının toplama kurallarına göre daha zor olduğu bilinmektedir. Bu durum özellikle çıkarma işlemi "say-say-say" yaklaşımıyla öğretildiğinde ortaya çıkar; 13-5 için, 13'ü say, 5 geri, kalanı say. Bu bölümde daha önce belirtildiği gibi sayma, kuralları öğrenmenin en baştaki adımıdır. Bölümün başındaki Şekil 10.1 öğrencilerin sayma ile başlayıp kural öğrenmeye giden süreçte çıkarma işlemini nasıl yapabileceklerinin yollarını sunmaktadır. Muhakeme stratejilerini kullanma ve öğrenme olanağı sağlanmazsa, öğrenciler çıkarma kurallarıyla ilgili olarak yavaş ve genelde de yanlış bir yaklaşım olan sayma stratejilerine bağlı kalmaya devam edebilirler.

Toplamayı-Düşün Yöntemiyle Çıkarma

Şekil 10.7'de, çıkarma öğrencileri şu şekilde düşünmeye teşvik edecek bir formda modellenmiştir, "Toplamı bulmak için bu parçaya ne eklenmeli?" Toplamayı-düşün yöntemiyle yapıldığı zaman, çocuk bilinen toplama kurallarını kullanarak bilinmeyen miktarı ya da parçayı elde eder. (Bölüm 8'deki eksik-parça etkinlikleri ile Bölüm 9'daki parça-parça-bütün kavramlarına bakabilirsiniz). Parçalar ve bütünler — toplama ve çıkarma— arasındaki bu önemli ilişki kurulabilirse, çıkarma kuralları daha da kolaylaşır. Toplama kurallarında olduğu gibi, eksilen sayının 10'dan büyük olduğu (ör., 13 – 4) kurallarla çalışmadan önce, her biri 10 ya da daha küçük olan (ör., 8 – 3, 9 – 7) kurallarla işe başlamak yararlı olacaktır.

Çocuklar 9 – 4'ü gördüklerinde, doğal olarak şunu düşünmelerini istersiniz, "Dört ve ne dokuz yapar?" Buna karşın, bu kuralla ilgili zorluk yaşayan bir üçüncü sınıf öğrencisini düşününüz. Toplamayı-düşün fikri hiçbir zaman akla gelmeyecektir. Onun yerine, çocuk ya 9'dan geriye ya da 4'ten ileriye saymaya başlayacaktır. Toplamayı-düşün yönteminin değeri burada net olarak görülebilir.

Fakat, toplamayı-düşün yönteminin etkin kullanılması isteniyorsa, öncelikle toplama kurallarını öğrenmek esastır. Bulgular çok az çocuğun, çıkarma kullarına karşılık gelen toplama kurallarını öğrenmeden (eğer varsa) çıkarma kurallarını öğrendiklerini ortaya koymaktadır. Başka bir deyişle, 3+5'in öğrenilmesi, 8 – 3 ve 8 – 5 kurallarının öğrenilmesinin ön koşulu olarak düşünülebilir.

Toplamayı-düşün yöntemini teşvik eden hikâye problemleri toplama gibi gözükebilir fakat toplananlardan biri eksiktir: *ekleme, ilk parça bilinmiyor; ekleme, fark bilinmiyor; ve parça-parça-bütün, parça bilinmiyor* (Bkz. Bölüm 9). Bu problemi düşün: *Janice'in akvaryumunda 5 tane balığı var. Anneannesi kendisine balık veriyor. Böylece 12 balığı oluyor. Bu durumda Anneanne Janice'e kaç balık vermiştir?* Burada yapılması öngörülen işlemin ekleme olduğuna ve böylece toplamanın ima edildiğine dikkat ediniz. Büyük ihtimalle öğrenciler şu şekilde düşüneceklerdir; *5 ve kaç fazlası 12 eder.* Bu türden problemleri kullanacağınız tartışmalarda size düşen sorumluluk, bu düşünme sürecini çıkarma kuralı (12-5) ile ilişkilendirmek olmalıdır.



Şekil 10.7 Çıkarmada toplamayı-düşün modelini kullanma.

10'a Doğru İnme

Durup Düşün!

Aşağıyı okumadan önce, burada verilen üç çıkarma kuralına bakınız ve hangi düşünme sürecini kullanarak cevap bulabileceğiniz üzerinde düşünmeye çalışınız. "Sonuçları hemen biliyorsanız" bile, olası bir düşünme sürecinin ne olabileceği hakkında düşününüz.

$$\begin{array}{r} 14 \\ -\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ -\,6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ -\,6 \\ \hline \end{array}$$

Bunların herhangi birine toplamayı-düşün stratejisini uygulamış olabilirsiniz. Örneğin, birinci problemde 9'dan yukarıya 1 sayarak 10'a ulaşma ve daha sonra 5 fark için 4 fazlayla 14'e ulaşma. Bunun yerine 14'le başlayıp geriye doğru saydıysanız, muhtemelen 14'ten aşağıya 4 inme ve daha sonra 9'u elde etmek için aşağı 1 daha inme, ki böylece toplam farkı 5 bulma, şeklindeki bir muhakemeyle aslında 10'a Doğru İnme olarak adlandırılan bir muhakeme stratejisini kullanmışsınız demektir. Bu stratejiyi şu ana kadar kullanmadıysanız, diğer iki örnek üzerinde deneyiniz.

Bu muhakeme stratejisi türetilmiş bir kural stratejisi olup öğrenciler bildiklerini (14 eksi 4, 10'a eşittir) kullanarak ilişkili bir kuralı kavrarlar (14 – 5). Toplama kurallarında ele alınan 10 Elde Etme stratejisi gibi, bu strateji üstün performans gösteren ülkelerde vurgulanan stratejilerdendir (Fuson ve Kwon, 1992). Bu strateji öğrencilerin kuralları öğrenmelerine yardımcı olması açısından önemli bir potansiyele sahip olup aynı zamanda sayı hissinin gelişmesini sağlar. Fakat bu strateji Amerikan ders kitapları ve sınıflarında hak ettiği ilgiyi görmüş değildir.

Etkinlik 10.13

Ağaçtaki Elmalar

Tepegöze bir çift onluk kart asetatı yerleştiriniz (ya da etkileşimli beyaz tahtaya), ilk onluk kartı ve ikincisinin ise bir kısmını fiş ile kapatınız (örneğin, 16 için, ilk kartta 10 ve ikincisinde 6 tanesinin üstünü kapatınız). Öğrencilere bazı elmaların yere düştüğünü söyleyiniz – onlara kaç tane elma düştüğünü söyleyeceksiniz ve onlar da size ağaçta kaç tane kaldığını söyleyecektir. Etkinliği ihtiyaç duyuldukça tekrar ediniz. Çalışma Yaprak Seti 11'e bakınız.

Etkinlik 10.14

10 Olacak Şekilde Çıkarma

Tahtaya ilk kural için farkın 10 ve ikincisi için farkın 8 ya da 9 olduğu beş ya da altı çift kural yazınız: örneğin, 16-6 ve 16-7 ya da 14-4 ve 14-6. Öğrencilere bütün kuralları cevaplatınız ve daha sonra stratejilerini tartışınız. Amaç her bir çiftte iki kural arasında bağlantı kurmaktır. İkinci kuralda sayı 10'dan bir ya da iki azdır. Ertesi gün 10'a eşit olmayan kurallarla etkinliği tekrarlayınız –örneğin, şu hikâye problemiyle:

Bekcy'in 16 senti var. Küçük bir oyuncak için 7 sent harcıyor. Becky' nin ne kadar parası kalmıştır?

10'dan Çıkarma

Bu strateji Amerika'da iyi bilinmez ya da kullanılmaz fakat üstün performans gösteren ülkelerde sürekli olarak kullanılmaktadır. Strateji öğrencilerin sahip olduğu ve kombinasyonları10 yapan kurallarla ilgili bilgilerinden de faydalanır. İlk değeri (eksilen) 10'dan fazla olan bütün çıkarma problemleri için bu strateji çalışır. Örneğin, 16-8 problemini ele alınız. Öğrenciler eksileni 10+6 olarak iki parçaya ayırırlar. 10'dan çıkararak (çünkü bu kural biliniyor), 10-8 = 2 elde edilir. Daha sonra 8'i elde etmek için, 6 geri ilave edilir. Yöntemi şu örneklerle deneyiniz:

15 – 8 = 17 – 9 = 14 – 8 =

İlk bakışta nadir olduğunu düşünseniz de, bu önemli bir muhakeme stratejisidir. Eksileni 10'dan büyük olan bütün çıkarma kuralları için kullanılabilir olup, bunun için 10'dan çıkarmayı nasıl yapacağınızı ve toplamları 10'dan küçük olan toplama kurallarını bilmeniz yeterlidir.

Etkinlik 10.15

İki Ağaçtaki Elmalar

Etkinlik 10.13'ü uyarlayarak, onluk kartların her birini ayrı bir ağaç olarak düşününüz. Öğrencilere ağaçlardan kaç tane elma düştüğü ve geriye (ağaçların her ikisinde de) kaç tane kaldığı sorusunu yönelteceğinizi söyleyiniz. Her seferinde öğrencilerden düşünme biçimlerini açıklamalarını isteyiniz.

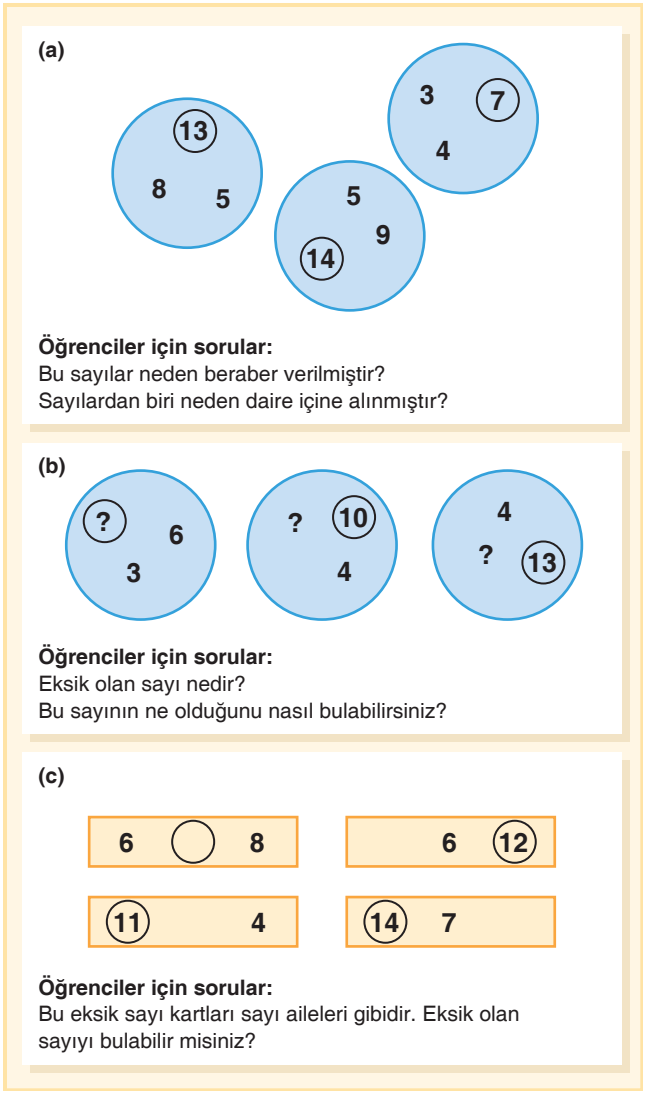
Etkinlik 10.16

Eksik Sayı Kartları

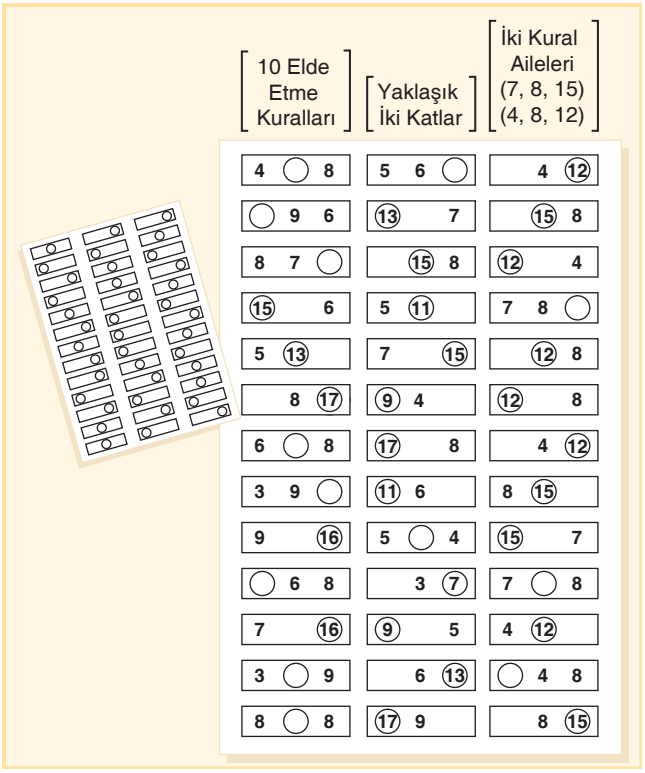
Öğrencilere toplamları Şekil 10.8 (a)'da daire içine alındığı gibi sayı ailelerini gösteriniz. Bu sayıların neden beraber verildiğini ve bunlardan birinin neden daire içine alındığını sorunuz. Bu sayı ailesi fikri anlaşıldığında, başka bir kart çiziniz ve sayılardan birini parmağınız ile kapatarak şunu sorunuz, "Eksik olan ne?" Öğrencilere cevabı nasıl bulduklarını sorunuz. Modellemeden sonra, öğrenciler bunu akranlarıyla yapabilirler. Alternatif olarak, Şekil 10.8 (b)'de gösterildiği gibi, sayılardan birinin soru işareti ile yer değiştirdiği kartlar oluşturabilirsiniz.

Öğrenciler bu etkinliği anladıklarında, Şekil 10.8 (b)'de gösterildiği gibi, bu fikre dayalı olarak bazı eksik sayı kartları oluşturduğunuzu söyleyiniz. Öğrencilerden eksik olan sayıyı bulmalarını ve düşünme biçimlerini açıklamalarını isteyiniz.

Etkinlik 10.16'nın devamında, öğrenciler eksik sayı çalışma yaprağındaki "kartları" tamamlayabilirler. Çalışma Yap-



Şekil 10.8 Eksik sayı kartlarını tanıtma



Şekil 10.9 Eksik Kart Çalışma Kağıtları. Bu çalışma kağıdının boş biçimi vurgulanmasını istediğiniz kurallar grubu için kullanılabilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 13). Etiketlere (parantez içindeki) öğrenci sayfalarında yer verilmemiştir.

rak Seti 13'te yer alan Eksik Parça çalışma yaprağından farklı türden alıştırmalar yapmak için fotokopiler çoğaltınız. Farklı sayıların eksik olduğu, bunlar parçalar ve bütünler olabilir, iki sayı ailesinden tüm kombinasyonları, 13 "karttan" oluşan bir sütuna yerleştiriniz. Boşları farklı yerlere yerleştiriniz. Şekil 10.9'da bir örnek verilmiştir. Sayıları yerleştirdikten sonra, fotokopileri çoğaltınız ve öğrencilerden boş yerleri doldurmalarını isteyiniz. Bir sayfa üzerinde, bir stratejiden bir grup kural oluşturmak ya da iki stratejiden sayı ilişkisi veya karma kurallar oluşturmak başka bir fikir olabilir. Öğrencilere kullanmak istedikleri stratejiyi seçme fırsatı veriniz. Toplama ve çıkarma kuralları için öğrencilerden birer eksik sayı kartı hazırlamalarını isteyiniz. Bu önemli bir adımdır; çünkü birçok çocuk sayı ailesindeki eksik parçayı bulabilir, ama bu bilgiyi çıkarma ile ilişkilendirmez.

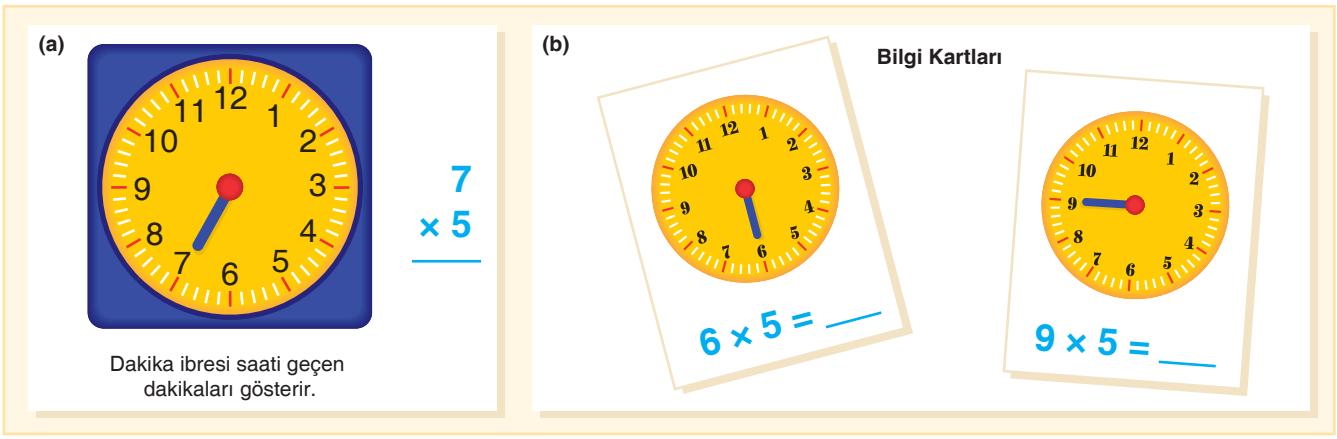
NCTM Standartları

Öğretmenler öğrencilerin toplama ve çıkarma kurallarını ne zaman öğrenmeleri gerektiğini genelde sorarlar. Öğretim Programı Odak Noktaları'na göre, ikinci sınıfta öğrenciler "toplama ve ilgili çıkarma kurallarının hızlı hatırlanması" yönünde gelişim göstereceklerdir. ◆

Çarpma Kuralları İçin Muhakeme Stratejileri

Çarpma kuralları da yeni kuralların mevcut bilgiyle ilişkilendirilmesi yoluyla öğrenilebilir. Problem temelli yaklaşımın kullanılması ve muhakeme stratejileri üzerine odaklanma, çarpma ve ilişkili bölme kurallarının öğrenilmesinin gelişimi için çok önemlidir (Baroody, 2006; Wallace & Gurganus, 2005). Toplama ve çıkarma kurallarında olduğu gibi, farklı stratejilerle ilgili yaptığınız uygulamalarda hikâye problemlerini kullanmalısınız.

Öğrencilerin değişme özelliğini tamamıyla anlamaları büyük bir önem taşımaktadır (Bkz. s. 160 ve Şekil 9.12). Bu durum sıralanışlar kullanılarak görselleştirile-



Şekil 10.10 Saatleri kullanarak beşler kurallarını öğrenmeye yardımcı olma

bilir. Örneğin, 2'ye 8'lik sıra, 2 sıra 8 ya da 8 sıra 2 olarak gösterilebilir. Her iki durumda da cevap 16'dır. Değişme özelliğinin iyi anlaşılması kuralların öğrenilmesinde çok önemlidir, çünkü bu özellik ezberlenecek kuralları yarı yarıya indirir.

Daha sonra ele alınacak olan beş muhakeme stratejisinden ilk dördü genel olarak kolay olup 100 çarpma kuralından 75'ini kapsamaktadır. Bu stratejiler öneri olup kural değildir. Öğretimsel yaklaşımın amacı öğrencilerin temel kuralları belirlemek için kullandıkları muhakeme stratejilerini tartışmak olmalıdır.

İki Katlar

İki çarpanına sahip kurallar toplamadaki iki katlar ile eşdeğer olup, toplama kurallarını bilen öğrenciler tarafından zaten bilinmiş olmalıdır. Sadece 2 × 'nin değil aynı zamanda 7 × 2'nin de bir tür iki kat olduğunu görmeleri için öğrencilere yardımcı olunuz. 2'nin grup sayısı olduğu hikâye problemleri çözünüz. Daha sonra 2'nin grupların miktarı olduğu problemleri kullanınız. *George çoraptan kuklalar yapıyor. Her bir kuklanın gözleri için 2 düğmeye ihtiyaç vardır. Eğer George 7 kukla yaparsa, gözler için ihtiyaç duyulan düğme sayısı kaçtır?*

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			0							
1			2							
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3			6							
4			8							
5			10							
6			12							
7			14							
8			16							
9			18							

Beşler

Bu tablo 5'in birinci ya da ikinci çarpan olduğu bütün kuralları göstermektedir.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0						0				
1						5				
2						10				
3						15				
4						20				
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6						30				
7						35				
8						40				
9						45				

En az 45'e kadar beşerli ritmik sayınız. Beşerli saymanın beş noktalı dizilişlerden oluşan sıralarla bağlantısını kurunuz. 6 dizilişten oluşan bir sıranın 6 × 5'in bir modellenmesi, 8 dizilişin 8 × 5'in vb. olduğunu belirtiniz.

Etkinlik 10.17

Saat Kuralları

Saatin dakika ibresi üzerine odaklanınız. İbre bir sayının üzerine geldiğinde, saati kaç dakika geçiyor? Şekil 10.10(a)'ya bakınız. Bu fikrin çarpma kurallarından 5 ile bağlantısını kurunuz. Şekil 10.10(b)'deki gibi bir bilgi kartını havaya kaldırınız ve daha sonra saat üzerindeki sayıya karşılık gelen diğer çarpanla birlikte gösteriniz. Bu yolla, beşlerle ilgili kurallar "saat kuralları" haline gelir.

Sıfırlar ve Birler

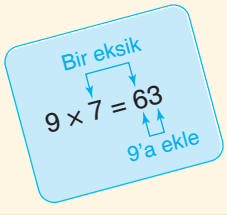
Otuz altı kuralın çarpanlarından en az biri ya 0 ya da 1'dir. Kolay görünümlerine rağmen, bu kurallar bazı çocukların toplama için öğrendikleri "kurallar" ile karıştırılmaktadır.

6 + 0 kuralı değişmez, ama 6 × 0 her zaman sıfırdır. 1+4 kuralı, bir-fazlası fikridir, fakat 1 × 4 aynı kalır. Bu kuralların arkasında yatan kavramlar en iyi hikâye problemleri aracılığıyla geliştirilebilir. Alternatif olarak, öğrencilerden sayısal ifadeleri sözel hâle getirmelerini isteyiniz. Örneğin, 6 × 0'ın; içerisinde sıfırın olduğu 6 grup anlamına geldiğini söyleyiniz (ya da hiçbirinde insanların oturmadığı 6 sıra sandalye). 0 × 6 için, grupta altı kişi var fakat sizin sıfır grubunuz mevcut. Örneğin, saati 6 dolar olan çocuk bakıcılığı için 0 saat çalıştınız. Rasgele gözüken "sıfır ile çarpılan her sayı sıfır olur" gibi gerekçesiz kurallardan kaçınınız.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2								
3	0	3								
4	0	4								
5	0	5								
6	0	6								
7	0	7								
8	0	8								
9	0	9								

Havalı Dokuzlar

9 çarpanı ile elde edilen kurallar en büyük sonuçları içerir; fakat diğerleri arasında öğrenilmesi en kolay kural olabilir. Dokuz çarpanı tablosu keşfetmesi zevkli bazı güzel ilişkiler içermektedir. Bu kurallardan ikisi dokuzların kavranması için yararlıdır: (1) çarpımın onlar basamağındaki rakam her zaman "diğer" çarpandan bir küçüktür (9 olmayan çarpan) ve (2) sonuçtaki iki rakamın toplamı her zaman 9 eder. Bu iki fikir herhangi bir 9 kuralının sonucunu çabukça elde etmek için birlikte kullanılabilir. 7 × 9 için, 7' den 1 çıkarılırsa 6, 6 ve 3'ün toplamı 9 eder, böylece cevap 63'tür.



×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										0
1										9
2										18
3										27
4										36
5										45
6										54
7										63
8										72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Çocuklar bu stratejiyi 9 çarpanını içeren basit hikâye problemlerini çözerek keşfedemezler. Bu yüzden dersin aşağıda verilen etkinlik ekseninde inşa edilmesi faydalı olur.

Etkinlik 10.18

Dokuz Kuralındaki Örüntüler

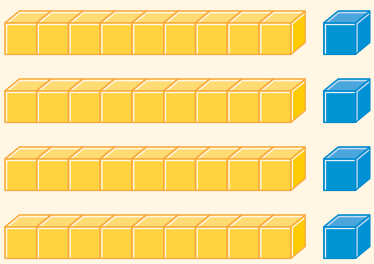
Dokuzlar tablosunu sütun formunda tahtaya yazınız (9 × 1 = 9, 9 × 2 = 18, . . . , 9 × 9 = 81). Etkinlikte amaç tabloda olası tüm örüntüleri bulmaktır. (Öğrencilerden bir strateji düşünmelerini istemeyiniz.) Etkinlik üzerinde çalışan öğrencileri dinlerken strateji için gerekli olan iki örüntünün sınıfta bulunmuş olduğundan emin olunuz. Tüm örüntüler tartışıldıktan sonra, bilmediğiniz bir 9'lar kuralını zekice bir yolla anlamak için örüntüleri kullanmayı düşündüren ek etkinlik yapılabilir. (Tüm öğrenciler dokuzlar kuralını bilse bile bu etkinlik yine de yapılabilir.)

Çocuklar dokuzlar için bir strateji icat ettiklerinde, havalı dokuzları hatırlamada başvurulacak elle tutulabilir bir yol (sayma için değil) parmak kullanımıdır. Bu şu şekildedir: Her iki el yukarı kaldırılır. Sol eldeki serçe parmakla başlayarak, hesaplama yapacağınız kural için sayınız. Örneğin, 4 × 9 için dördüncü parmağa (işaret) doğru hareket edilir. İşaret parmağı içe doğru katlanır. Şekil 10.11' de görüldüğü gibi içe doğru katlanan işaret parmağının sol tarafında 3 onluk, sağ tarafında ise altı vardır, 36! (Barney, 1970).

Uyarı: Dokuzlar için sunulan bu strateji oldukça başarılı olmasına rağmen karışıklığa da neden olabilir; çünkü iki adım bağlantılıdır ve kavramsal bağlantı görünür değildir; bu nedenle çocuklar adımları karıştırabilir veya bu fikri diğer kurallar için de uygulamaya kalkışabilirler. Fakat bu gerekçesi olmayan bir kural değildir. Bu on tabanlı sayı sisteminde yer alan çok ilginç bir örüntüye dayalı bir fikirdir. Aslında öğrencileri, neden böyle bir örüntünün ortaya çıktığı konusunda düşündürtebilirsiniz.

Dokuzlar için bir alternatif strateji ise kullanımı oldukça kolay olandır. 7 × 9, 7 × 10'dan7 birlik eksiktir ya da

Şekil 10.11 Parmaklar kullanılarak 4 × 9'un gösterilmesi.



Şekil 10.12 Dokuzları düşünmek için onlukları kullanma.

70 – 7'dir. 60'dan 6' yı, 70'den 7'yi ya da bu şekildeki diğer çıkarma işlemlerini kolaylıkla yapabilen öğrenciler için bu strateji tercih edilebilir.

Bu fikri, Şekil 10.12'de olduğu gibi sonuncu küpü farklı renkte olan onluk çubuklar gösterme yoluyla da tanıtabilirsiniz. Her bir çubuğun on küpten oluştuğunu açıkladıktan sonra öğrencilerden küplerden kaç tanesinin sarı olduğunu anlamak için en iyi yolun ne olduğunu düşünmelerini isteyiniz.

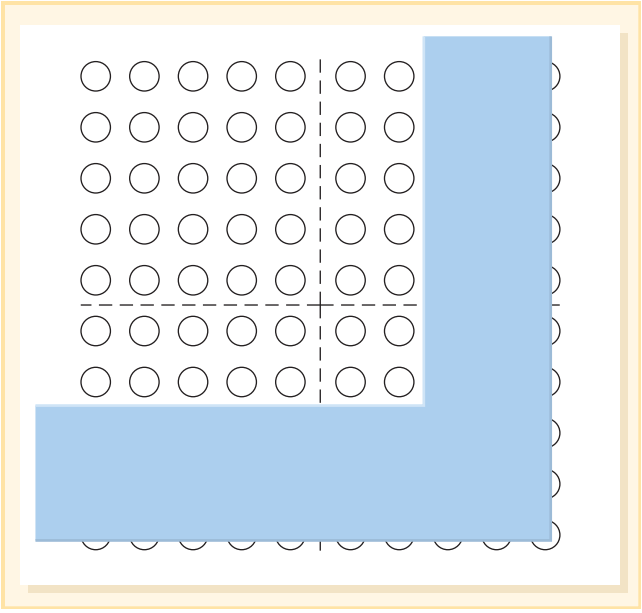
Diğer Kuralları Türetmede Bilinen Kuralların Kullanılması

Aşağıda yer alan tablo kalan 25 tane çarpma kuralını göstermektedir. Burada öğrencilerin dikkati çekilmesi gereken nokta kavranması gereken sadece 15 kuralın kalmasıdır; çünkü bunların 20 tanesi 10 çift tekrar eden sayı içermektedir.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3				9	12		18	21	24	
4				12	16		24	28	32	
5										
6				18	24		36	42	48	
7				21	28		42	49	56	
8				24	32		48	56	64	
9										

Bu 25 kural daha önce bilinen bir kuralla ya da yardımcı bir kuralla ilişkilendirilerek öğrenilebilir. Öğrenciler 2'ler (iki kat) için kuralı bilirlerse 3 kat ve 4 kat kurallarını üretmek için bunu kullanabilirler. Örneğin; 3 × 8, 2 × 8 ile ilişkilidir (iki kere 8 ve 8 fazla). 5'ler kuralının bilinmesi veya 3'ler kuralının 2'ler kuralından türetilmesi diğer kurallar için de yol gösterici olabilir. 6 × 7 kuralı ya 5 × 7 (5 tane 7 ve 7 fazlası) ile ya da 3 × 7 ile ilişkilendirilebilir (3 × 7'nin iki katı). Örneğin, 5×7, 35'dir ve 6×7 için 35'e 7 eklenir. Bu aşamada parmakla sayma görürseniz 10 elde etmenin genişletilebileceğini tavsiye ediniz: 35 ve 5 fazlası 40 eder kalan 2 ile birlikte 42'dir.

Dizilimler bu stratejiler için güçlü bir düşünme aracı olması nedeniyle öğrencilere, ona onluk boyutta dizili nokta



Şekil 10.13 Bir dizilim zor çarpma kurallarına yönelik stratejiler geliştirmek için kullanışlı bir modeldir. (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 12.)

fotokopileri verilir (Şekil 10.13; ayrıca Çalışma Yaprak Seti 12). Belirli çarpımlar için sıralı noktaları işaretlemede bir etiket tahtası L (taralı alan) kullanılır. Sıralı noktalardaki doğrular noktaların sayılmasını kolaylaştırır ve yardımcı olarak daha kolay olan beşler kuralının kullanılmasını öngörür. Örneğin, 7 × 7, 5 × 7' ye iki 7'nin eklenmesidir veya 35 + 14'tür.

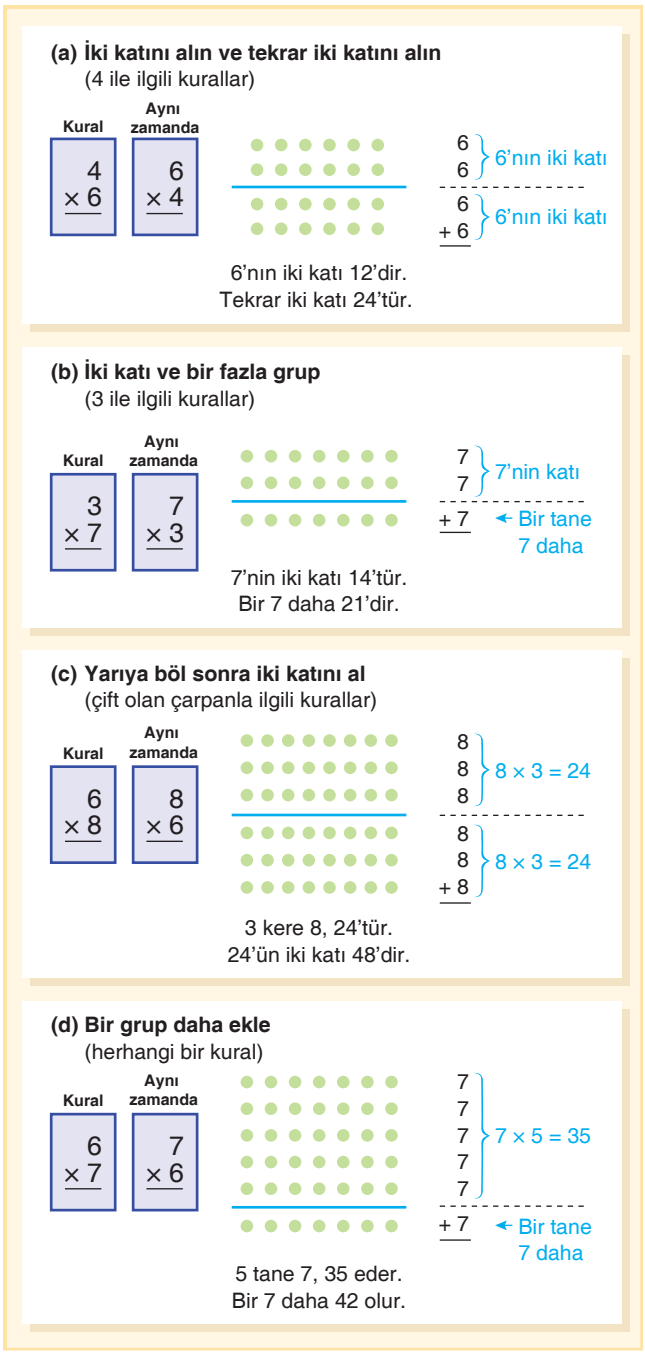
Faydalı olacak yardımcı bir kuralın nasıl bulunduğu, farklı kurallara göre çeşitlilik arz eder ve bazen bu sizin hangi çarpana odaklandığınıza bağlıdır. Şekil 10.14 örtüşen dört kural grubunu ve her bir grup ile ilişkili düşünme sürecine yönelik modelleri örneklendirmektedir.

Şekil 10.14(a)' da gösterilen iki kat ve tekrar iki kat stratejisi 4' ün çarpan olduğu tüm kurallara uygulanabilir. Çocuklara bu fikrin 4'ün hem birinci çarpan hem de ikinci çarpan olduğu durumlarda kullanıldığını hatırlatınız. 4×8 için iki kat 16 da zor bir kuraldır. Örneğin, 15+15, 30 ve 16+16, 30' un iki fazlası veya 32'dir. 16+16'nın kağıt üzerinde toplanması, amacı ortadan kaldırmaktadır.

Şekil 10.14(b)' de gösterilen iki kat ve bir grup fazla stratejisi bir çarpanı 3 olan kuralların düşünülmesi için bir yoldur. Bir sıra ya da grup resmî ile iki kat kısmı daire içine alınabilir ve açıktır ki orada bir grup fazladır. Bu gruptaki iki kural daha fazla zihinsel toplamalar gerektirir (8 × 3 ve 9 × 3).

Çarpanlardan biri çiftse, Şekil 10.14(c)'de gösterilen, önce bir yarım sonra iki kat stratejisi kullanılabilir. Çift çarpan seçilir ve ikiye ayrılır. Küçük olan kural biliniyorsa yeni kural için çarpım iki ile çarpılır.

Birçok çocuk, Şekil 10.14(d)'de gösterildiği gibi, "yakın" bir bilinen kurala yönelir ve sonra bu kurala bir fazla grup eklemeyi tercih eder. Örneğin, 6 × 7, 6 tane 7 gibi düşünülebilir. 5 tane 7 yakındır: 35' tir. 6 tane 7, bunun 7 fazlasıdır veya 42'dir. 6 × 8 için 5 × 8 yardımcı olarak



Şekil 10.14 Bilinen bir kuraldan bilinmeyen bir kural türetmek için muhakeme stratejileri

kullanıldığında grup dili olan "6 kere 8" 5 × 8'e 6 fazlanın değil de 8 fazlanın ekleneceğinin hatırlanmasında oldukça faydalıdır. Bu "yakın" kural muhakeme stratejisi son derece önemlidir. Öncelikle hiçbir sınırlılığı yoktur (tüm kurallar için kullanılabilir). İkinci olarak sayılar arasındaki ilişkileri ve öğrencilerin sayı hissini pekiştirir. Öğrencilerden yeni bir kuralın türetilmesinde bildikleri yakın bir kuralı kullanmalarının istenmesi zamanla bunu otomatik zihinsel bir sürece dönüştürecektir. Aslında birçok yetişkin özellikle zor kurallar için bu stratejiyi kullanmaktadır. Bu zihinsel süreç: "Yedi kere sekiz kaçtır? Evet, 49' un 7 fazlası –56." Benzer şekilde öğrenciler 4 ve 6 kuralını üretmek için 5 kuralını kullanabilirler.

Kolay ve zor kurallar arasındaki ilişki problem temelli etkinlikler için verimli bir altyapıdır. Öğrencilere "eğer 6 × 8'in ne olduğunu bilmiyorsanız, iyi bildiğiniz başka bir kuralı kullanarak onu nasıl bulabilirsiniz?" sorusunu sorunuz. Öğrenciler zor bir çarpma kuralını cevaplamada, mümkün olan birçok yolu bulmakla karşı karşıya bırakılmalıdır.

Durup Düşün!

"Zor kural" olduğunu düşündüğünüz bir kural seçiniz ve buna uygun bir kural türetmek için Şekil 10.14' te yer alan muhakeme stratejilerinden kaç tanesinin kullanılabildiğini anlamaya çalışınız.

Hikâye problemleri bir stratejiyi akla getirecek şekilde yapılandırılabilir. Carlos ve Jose beyzbol kartlarını her sayfasında 6 kart bulunan bir albümde saklıyorlar. *Carlos'un 4 sayfası Jose'un ise 8 sayfası bu kartlarla doludur. Her birinin kaç tane beyzbol kartı vardır?* (Yarım-sonra-iki kat stratejisini görebiliyor musunuz?)

Dizilimin öğrencilere çarpma kurallarını ve ilişkilerini kurmada büyük ölçüde yardımcı olduğu açıktır. 3 ve 4. sınıfın her ikisinde de Sayı, Veri ve Uzayda İncelemeler programı dizilimlere özel bir önem vermektedir. Dizilimler çarpma kuralları ile çarpma ve bölme arasındaki ilişki ve çarpma için hesaplama prosedürlerinin gelişimine yardım etmede kullanılmaktadır.

Bölme Kuralları ve "Yakın Kurallar"

Burada sorulabilecek ilginç bir soru şudur: "Öğrenciler bölme işlemlerinin olduğu bir sayfada çalışırken, bölme ile ilgili mi yoksa çarpma ile ilgili mi uygulama yaparlar?". Şüphesiz ki bölme kurallarının sınırlı pratiğinde biraz da olsa fayda vardır. Ancak bölme kurallarının öğrenilmesinde çarpma kurallarının öğrenimi ve çarpma ve bölme arasındaki bağlantılar anahtar konumdadır. Hikâye problemleri yine bu bağlantının oluşturulmasında anahtar nitelikte olmaya devam eder.

Durup Düşün!

48 ÷ 6 veya 36 ÷ 9 gibi kuralları hatırlamak için hangi düşünme sürecini kullanırsınız?

36 ÷ 9 işlemini düşünmeye çalışıyorsak "Dokuz kere ne otuz-altı eder?" sorusunu düşünürüz. Bir çoğu için, 42 ÷ 6 ayrı bir kural olmayıp 6 × 7 ile yakından ilişkilidir. (Çıkarma da toplama ile bu kadar yakından ilişkili olsaydı harika olmaz mıydı? Elbette olabilir!)

50 ÷ 6 gibi alıştırmalar "yakın kurallar" olarak adlandırılabilir. Sonucu doğal sayı olmayan bölmeler, sonucu doğal

sayı olan bölmelere göre hesaplamalarda ve gerçek hayatta daha yaygındır. Sonucu 50 ile karşılaştırmak suretiyle, 50 ÷ 6 işlemini cevaplamak için birçok kişi kısa bir dizi çarpma işlemi yapar: "6 kere 7 (az), 6 kere 8 (yakın), 6 kere 9 (fazla). 8 olmalı, bu şekilde cevap 48, 50'den 2 eksik." Çocuklar makul hızda ve zihinden, kalanlı tek basamaklı bölenleri ve cevapları olan problemler yapmalıdırlar.

Etkinlik 10.19

Ne Kadar Yakın Bir Değer Bulabilirsiniz?

Aşağıda gösterildiği gibi, amaç hesaplama yapmadan çarpımı oluşturan tek haneli çarpanı bulmak ve bu çarpanla işlem sonucuna en yakın sayıyı elde etmektir. Bu türden çarpma kurallarını gözden geçirme sürecini geliştirmeleri için öğrencilere yardımcı olunuz. Bu, tepegöz ya da sunu için bir liste hazırlanarak tüm sınıf etkinliği olabilir veya iki kişilik ya da bireysel yazılı bir etkinlik olabilir.

İşlemin sonucuna bakmadan en büyük çarpanı bulunuz.

4 × ☐ → 23, ☐ kalan
7 × ☐ → 52, ☐ kalan
6 × ☐ → 27, ☐ kalan
9 × ☐ → 60, ☐ kalan

NCTM Standartları Standartlar belgesi çarpma ve bölme kuralları hakkında ne söylemektedir? "Ritmik sayma, alan modellemelerini kullanma ve bilinmeyen kombinasyonları bilinenlerle ilişkilendirme yoluyla, öğrenciler aşina olmadıkları kombinasyonları öğrenebilir ve akıcı bir hâle gelebilirler [çarpma kuralları] ….Eğer dördüncü sınıfın sonunda, öğrenciler çarpma ve bölme stratejilerini etkin olarak kullanamıyorlarsa, o zaman onların ya bu kombinasyonlarla akıcı stratejiler geliştirmeleri ya da "daha zor" kombinasyonları ezberlemeleri gerekmektedir" (s. 153). ◆

Temel Kuralları Öğrenme

Strateji gelişimi ile genel sayı hissinin (sayı ilişkileri ve işlemin anlamları) kural öğrenimine en iyi katkıyı sağladığı konusunda şüphe yoktur. Bu faktörlerin dikkate alınmadığı alıştırmaların araştırmalarla tekrar tekrar etkisiz olduğu gösterilmiştir. Fakat, alıştırma hafızayı ve hatırlama becerilerini güçlendirir (Ashcraft ve Christy, 1995).

Etkin Alıştırmalar

Alıştırma –problem temelli olmayan tekrar tekrar yapılan etkinlik – bir stratejiye sahip olup, bunu anlayan ve nasıl kullanacağını bilen fakat henüz ustalaşmamış çocuklar için uygundur. Uygun bir strateji ile alıştırma, öğrenciyi bu strateji üzerine yoğunlaştırır ve bu stratejinin daha fazla otomatikleşmesine yardımcı olur. Alıştırma kural öğreniminde önemli bir rol oynar ve bilgi kartları ile kural oyunları gibi yöntemlerin kullanımı akıllıca olursa etkin olabilir.

Çocukların stratejiyi kullandıklarını ve zihinsel olarak kullanmaya başladıklarını rahatça gözlemlediyseniz, bazı özel kural grupları için alıştırma etkinliklerini oluşturmanız uygun olabilir. Kural grupları ya da her bir strateji için 10 kadar farklı etkinliğiniz olabilir. Dosya klasörleri ve kutulu etkinlikler çocuklar tarafından bireysel, ikişerli ya da küçük gruplar halinde kullanılabilir. Birçok etkinlikle, çocuklar anladıkları stratejiler ile en çok ihtiyaç duydukları kurallar üzerine çalışabilirler.

Bilgi kartları kural stratejisi uygulamalarındaki en kullanışlı yaklaşımlar arasında yer almaktadır. Her bir strateji ya da ilişkili kural grupları için, stratejiye uygun tüm kuralları kullanarak birkaç bilgi kartı grubu oluşturunuz. Çocuklara stratejiyi hatırlatmak için, stratejiyi kartların üzerine etiketleyebilir veya çizimler ya da ipuçları kullanabilirsiniz. Bu bölümde bu türden birkaç örneğe yer verilmiştir.

Öğrenciler muhakeme stratejilerini geliştirdikten sonra ancak alıştırma yapmak uygun olur. Alıştırma öğrencilerin kuralda ustalaşmalarını sağlayabileceği gibi engelleyebilir de. Bu yüzden kullanmaktan kaçınmanız ya da kullanmanız gereken yöntemlerin farkında olmanız önem arz etmektedir.

Temel Kuralları Öğretirken Ne Yapmalı. Aşağıda verilen öneri listesi hızlı hatırlamanın gelişimine yardımcı olabilir.

1. *Öğrencilerden öz-denetim yapmalarını isteyiniz.* Bu önerinin önemi yadsınamaz. Tüm öğrenme süreci boyunca, ne bilmediğinizi ve öğrenmek için neye ihtiyaç duyduğunuzu bilmeniz önemlidir. Bu, özellikle kuralların ezberlenmesi durumunda önem arz eder. Öğrenciler "zorlandıkları hususları" belirleyebilmeli ve kural türetmelerine yardımcı olması için muhakeme stratejileri üzerine çalışmaya devam etmelidir.

2. *Öz-gelişim üzerine odaklanınız.* Bu öneri öz-denetim maddesinin devamıdır. Öğrencilerin kuralları hızlı bir şekilde hatırlamalarının gelişimi üzerine çalışıyorsanız, o zaman öğrencilerin yarıştıkları kişiler sadece kendileri olmalıdır. Örneğin, öğrenciler "dört yığın"[1] üzerinden ne kadar sürede geçtiklerinin kaydını tutabilirler. Daha sonra, iki gün sonra mesela, aynı yığını çekiniz ve öğrencilerin bir öncekinden daha hızlı (daha doğru cevaplı) olup olmadıklarını görünüz.

3. *Küçük zaman dilimlerinde alıştırma yapınız.* Küçük bir zaman dilimi için onluk kart asetatlarına bazı örnekler yansıtabilirsiniz. Ya da günde bir tane hikâye problemi çözebilirsiniz (stratejileri paylaşmak beş dakikanızı alacaktır).

[1] Ç.N. Dört yığın kart oyunu, Solitaire (tek kişilik iskambil) oyununun orijinal versiyonudur.

Ayrıca kartlar arasından her öğrenciye bir grup bilgi kartı çektiriniz, diğer bir öğrenci ile eşleştiriniz ve iki dakikalık bir süre için birbirlerinin kartlarını inceletiniz. Bunun için uzun süre (10 dakika veya fazlası) verimli olmaz. Günün ilk beş-on dakikasını ya da öğle yemeğinin hemen öncesindeki ekstra zamanı kullanmanız kural gelişimine devamlı katkı sağlar ve bu şekilde diğer konulara ayrılması gereken matematik öğretim zamanı da kullanılmamış olur.

4. *Zamanla kurallar üzerinde çalışınız.* Kuralların ezberlenmesi üzerine bir ünite işlemekten ziyade, aydan aya kurallar ve muhakeme stratejileri ve daha sonra ezberleme üzerine çalışınız ve sonrasında da bunları devamlı gözden geçiriniz ve kontrol ediniz.

5. *Aileleri işin içine katınız.* Bir yıl boyunca kuralların öğrenimi ile ilgili yapacağınız çalışma planını paylaşınız. İkinci sınıfın ikinci dönemi için (ya da dördüncü sınıf), örneğin, bir ya da iki tane "Haftanın Kurallarını Eve Götür" etkinliğini yapacağınızı ailelere ya da velilere söylemeniz bir fikir olabilir. Öğrenciler kuralı bilmediklerinde aile üyelerinden kendilerine stratejilerini kullanarak yardımcı olmalarını isteyiniz.

6. *Alıştırmayı eğlenceli hâle getiriniz.* Bir sonraki etkinlikte gösterildiği gibi, kuralların pekişmesi için tasarlanmış ve yarıştırmayan ya da çocuklarda endişeye yol açmayan birçok oyun mevcuttur.

Etkinlik 10.20

Selam!

Öğrencileri üçerli gruplara ayırınız ve her gruba bir deste kart veriniz (yüz ifadelerini içeren kartları kullanmaksızın ve iskambildeki ası birler olarak kullanmak şartıyla). İki öğrenci kartlara bakmaksızın birer kart çekip kartı açarlar (ki diğer ikisi görsün). Kartı olmayan başka bir öğrenci toplamı (ya da çarpımı) söyler. Açılan karttaki sayının ne olduğunu doğru söyleyen ilk kişi kart setini "kazanmış" olacaktır. Yarışma işin içinden çıkarılarak, her bir öğrenciye sahip olduğunu düşündüğü sayıyı karta yazmaları (beş saniye içinde) istenir ve doğru cevabı bulurlarsa bir puan verilir.

7. *Teknolojiyi kullanınız.* Öğrenciler bilgisayar ya da hesap makinesi ile çalıştıklarında, hemen dönüt ve pekiştireç alırlar ki, bu öz-denetim yapmalarına yardımcı olur. Fikir edinmek için, aşağıda verilen Teknoloji Notları ile bölümün sonunda listelenen internet sayfalarına bakınız.

8. *Kuralların hızlı hatırlanmasının önemini vurgulayınız.* Baskı ya da endişe oluşturmadan, öğrencilere gerek gerçek yaşamda gerekse matematiğin geri kalan kısmında her zaman bu kuralları hatırlamaya ihtiyaç duyacaklarını vurgulayınız-öğrenciler kuralları mutlaka ve çok iyi öğrenmeliler. Öğrenciler başardıklarında kendilerini tebrik ediniz.



Temel kurallarla alıştırma yapmak için olanak sağlayan yüzlerce yazılım vardır. Neredeyse tüm kural programları farklı zorluk seviyeleri için oyun ve alıştırma olanağı sağlamaktadır. Maalesef, strateji gelişimini vurgulayan herhangi bir programın varlığı görülmemektedir. Şu açık ki, öğrenciler muhakeme stratejileri geliştirdikten sonra ancak bilgisayar destekli kural uygulamaları kullanılmalıdır.

Erişilebilir iyi yazılımlara bir örnek FASTT Math'dir (Tom Snyder Productions yazılımı, ücretsiz değildir). Bu yazılım süreç değerlendirmesini yapan bir teşhis aracıdır. Öğrencilerin tempolarına göre kullanabileceği bu program oyunlar içermekte ve öğrencilere "kendi gelişimlerini takip etme" olanağı sağlamaktadır. www.tomsnyder.com/products/product.asp?SKU=FASFAS adresini deneyiniz.

Math Munchers Deluxe'da[2] *(Riverdeep Interactive Learning, 2005), öğrenciler yutan yaratığı (muncher) üç boyutlu kareli format üzerinde hareket ettirirler. Sorulara cevap vererek, yutan yaratığı kovalayan ve yemeye çalışan 6 canavardan (Troggles) kaçabilirler. Math Munchers hızlı olmayı teşvik eder ve oldukça motive edicidir. 3'ten başlayıp 6'cı sınıfa kadar ki öğrenciler için kullanılabilir.*

Diğer bir popüler program Math Blaster (Knowledge Adventure) oyunudur (video oyun formatında olup hızlı olmaya katkıda bulunur). Birçok program gibi, Math Blaster kurallardan daha fazlası için alıştırmalar içermekte ve hepsi aynı formatta olan çok basamaklı hesaplamalar, ondalık sayılar, kesirler, yüzdeler, tahmin ve diğer konuları kapsamaktadır. ◆

Temel Kuralları Öğretirken Ne Yapmamalı. Aşağıdaki liste iyi niyetle hazırlanmış fakat temel kuralların ezberlenmesini engelleyen bazı stratejileri göstermektedir.

1. *Çok uzun süren testler kullanmayınız.* Öğrencilerin üzerlerindeki baskıdan dolayı dikkatleri dağılır ve muhakeme stratejilerinden vazgeçerler. Bazılarını yapmadan geçtiklerinde, öğrencilerin zorluk yaşadıkları yerleri görme şansları olmaz, böylece yapılan değerlendirme ilerlemelerine yardımcı olmaz. Öğrenciler böylece matematik öğrenmelerini engelleyecek endişe duygusu geliştirirler. Küçük bir kural grubuyla ne kadar zaman harcadıklarının tecrübe ettirilmesi öğrencilere hızları hakkında fikir verebilir.

2. *Herkesin önünde kimin kurallarda ustalaştığını görmek için karşılaştırmalar yapmayınız.* Çarpma kurallarını öğrenmeyle ilişkili olarak, duyuru panosunda öğrencilerin bir merdivenin farklı basamaklarında gösterildiğini görmüş olabilirsiniz. Üçüncü basamakta olan bir öğrencinin altıncı basamakta olanları gördüğünde ne hissettiğini düşününüz. Öğrenci başarısını kutlamak çok önemlidir fakat aralarında karşılaştırma yapmaktan kaçınınız.

3. *Kuralları 0'dan 9'a olacak şekilde sırayla ele almayınız.* Katı bir şekilde sırayla gitmek yerine stratejilere dayanan öğrenci birikimleri üzerine çalışmak ve öğrencilerin zaten bildiklerini "bir tarafa bırakmak" daha yerinde bir adımdır. Gerçekte, kurallar ne kadar fazla karışık verilirse, öğrenciler de o kadar muhakeme stratejileri ve sayı hissine başvuracak ve önceki hafta öğrenilen kurallar unutulmayacaktır.

4. *Ezberlemeye çok erken geçmeyiniz.* Bu husus bölüm boyunca ele alınmıştır fakat tekrarlamakta fayda vardır. Hızlı hatırlama ya da kuralda ustalaşma ancak öğrenci hazır olduktan sonra mümkündür (yani ihtiyaç duyduklarında uygulayabilecekleri güçlü bir muhakeme stratejileri koleksiyonuna sahip olduktan sonra).

[2] Ç.N.Math Munchers Deluxe matematik problemlerine yönelik simülasyonlu bir oyundur. Kullanıcı oyunu yutan yaratık (Muncher) aracılığı ile oynar. Kullanıcı bu yaratığı yönlendirerek tüm doğru cevapları bulmaya çalışır. Bu arada da yutan yaratığın canavar (Troggle) tarafından yenilmemesi için de çaba gösterir.

5. *Kuralları iyi bir matematiğin önündeki engel olarak kullanmayınız.* Temel kurallara tamamıyla hakim olan öğrencilerin, gerekçesi ne olursa olsun, temel kurallara hakim olmayan öğrencilerden ille de daha iyi muhakeme yürüttükerli anlamına gelmez. Bugün, matematik sadece hesaplama ile ilgili değildir, özellikle de kağıt ve kalem hesaplamalarıyla. Matematik muhakeme, örüntüler ve bir şeylerin anlamlandırılması ile ilgilidir. Matematik problem çözmedir. Tüm temel kurallara hakim olmayan bir çocuğu gerçek matematiksel deneyimlerden mahrum bırakmak için bir sebep yoktur.



Temel kurallar için süreli bir test yapmanın bir amacı olacaksa, o da teşhis için olmalıdır-hangi kombinasyonların öğrenildiği ve hangilerinin ise öğrenilmesi gerektiğinin belirlemek için. Teşhis amaçlı kullanılsa da, süreli testler sadece iki haftada bir yapılmalıdır. ◆

Kural Düzeltme

Beşinci ya da altıncı sınıfa gelmiş fakat hâlâ temel kuralları öğrenememiş öğrencilerin alıştırmadan daha farklı şeylere ihtiyaçları vardır. Bu öğrencilerin önceki yıllarında kuralları kesinlikle sayılamayacak kadar gördüklerini ve onlarla uygulama yaptıklarını fakat hâlâ hatırlamadıklarını söyleyebiliriz. Sunacağınız alıştırma olanağının bir şekilde önceki yıllarda verdiklerinizden daha etkili olacağına dair inandırıcı bir sebep bulunmamaktadır. Bu öğrencilerin daha iyisine ihtiyaçları vardır. Aşağıdaki ana fikirler yaşça büyük olan bu öğrencilere yardım etmek için size rehberlik edebilir.

1. *Daha fazla alıştırmanın sonuç getirmeyeceğini biliniz.* Öğrencilerin kurallarla ilgili zorlukları, bu bölümde ele alındığı gibi, alıştırmaların eksikliğinden ziyade, kavramlar ve ilişkilerin geliştirilmemesi ya da aralarında ilişkilerin kurulmamasından kaynaklanmaktadır. En iyi durumda, daha fazla alıştırmayla geçici başarı elde edilecektir. En kötü durumda, matematiğe karşı negatif tutumun gelişmesine yol açacaktır.

2. *Umut aşılayınız.* Kural öğrenimiyle ilgili zorluk yaşayan öğrenciler genelde kuralları öğrenemeyecekleri ya da hayatları boyunca parmak saymaya mahkum olacakları yönünde bir inanç geliştirirler. Bu çocuklara yardımcı olacağınızı ve öğreteceğiniz bazı yeni stratejilerin kendilerine de yardımcı olacağını söyleyiniz.

3. *İhtiyaç duyan her bir öğrenci için bilinen ve bilinmeyen kurallar envanteri geliştiriniz.* Her bir öğrenciden yararlanarak hangi kuralların hızlıca ve rahatça bilindiğini ve hangilerinin ise bilinmediğini belirleyiniz. Teşhiste bulunmanız için, beşinci sınıf veya daha üst seviyedeki öğrencilerden yararlanabilirsiniz. Bir işleme özgü tüm kuralları rasgele içeren çalışma yapraklarını öğrencilere veriniz, hepsini cevaplamaya çalışmalarını ve çözümlerinden şüphe duyduklarını ise daire içine almalarını isteyiniz. Sağlıklı bir değerlendirme yapmada diğer öğrencilere yardım etmek için bu bilgiye ihtiyaç duyduğunuzu vurgulayınız.

4. *Zayıf ve güçlü yönleri teşhis ediniz.* Öğrencilerin bilmedikleri kurallarla karşılaşma durumlarında ne yaptıklarını gözlemleyiniz. Parmaklarından mı yararlanıyorlar? Verilen sayıları topluyorlar mı? Tahmin mi ediyorlar? İlişkili bir kuralı kullanmaya mı çalışıyorlar? Çarpım tablolarından mı yararlanıyorlar? Bu bölümde kullanılması tavsiye edilen faydalı ilişkileri kullanabiliyorlar mı?

Zorluk yaşayan her bir öğrenci ile on dakikalık teşhis edici bir mülakat yapabilirsiniz. Bilinmeyen kuralları sorunuz ve öğrenciden bu kurallara nasıl yaklaşacağını açıklamasını isteyiniz. Öğretmeye değil; sadece anlamaya çalışınız. Öğrenciler, bir kuralı bilmedikleri durumlarda ne yaptıklarını yazmak suretiyle size bu bilgilerin bir kısmını ayrıca temin edebilir.

5. *Muhakeme stratejileri üzerine odaklanınız.* Kural öğrenimi üzerine problem çözme stratejisi kullanarak odaklanmak oldukça etkilidir (Baroody, 2006; Crespoki, Kyriakides ve McGee, 2005).Öğrenciler bu düzeltme programında daha çok kendi başlarına ya da küçük gruplar şeklinde çalışacakları için, ne sınıf tartışmasına ne de kendi stratejilerini geliştirmeleri için ihtiyaç duyacakları haftaları ve ayları vardır. Bu yüzden, bu öğrencilerle "diğer öğrencilerin kullandığını gördüğünüz" stratejileri paylaşmanız mantıklı bir adımdır. Öğrencilerin söz konusu strateji ile ilgili kavramsal bir anlamaya sahip olduğu ve onu kullanabilecekleri konusunda emin olunuz.

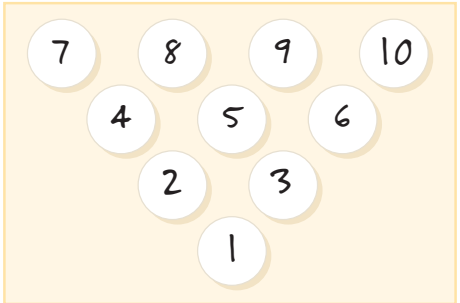
6. *Başarıyı inşâ ediniz.* Başarısızlığı tecrübe eden bir çocuk için iyi tasarlanmış bir programla işe başlarken, başarının hızlı ve kolay bir şekilde oluşması için çalışınız. Daha kolay ve daha faydalı, mesela toplama için "10'dan Fazla", muhakeme stratejileri ile işe başlayınız. Başarı başarıyı getirir! İlave stratejilerin yardımıyla, başarıya daha da hızlı ulaşılabilir. Öğrencilere bir fikrin, bir stratejinin birçok kuralı öğrenmek için ne kadar yeterli ve gerekli olduğunu gösteriniz. Kural çizelgelerini kullanarak üzerinde çalıştığınız kurallar grubunu gösteriniz. Çizelgenin ne kadar kısa sürede öğrenilen kurallarla dolduğunu şaşırarak göreceksiniz. Yeni öğrenilen kurallarla birlikte daha önceden bilinenleri devamlı gözden geçiriniz.

7. *Alıştırmada sürece dâhil edici etkinlikler yapınız.* Alıştırma için fikir olabilecek ve eğlenceli yönü de olan Etkinlik 10.20'yi inceleyiniz. Aşağıdaki etkinlik dört kuralın hepsini bir arada ele almaktadır.

Etkinlik 10.21

Bir Kural Yuvarla

Bu etkinlikte, bowling toplarına benzeyen daireler çiziniz ve üçgen şeklinde yerleştiriniz. Öndeki daire 1 ve sonrakiler sırayla 10'a kadar etiketlenmiş diğer daireler olsun.



Üç zar atınız. Öğrenciler üç zarı kullanarak topların üzerindeki sonuçları veren ifadeleri bulmaya çalışırlar. Örneğin, 4, 2 ve 3'ü attıysanız, 4x2-3 işlemi ile öğrenciler 5'i bulabilirler, bu şekilde bu "topu" da "devirmiş" olurlar. Öğrenciler bütün on topu devirecek şekilde ifadeler üretebilirlerse, o zaman bir altın vuruş yapmış olurlar. Bu vuruş yapılamazsa, zarları tekrar atınız ve ekstra bir atış ile geri kalanların devrilip devrilmediğini görünüz. Bunu tüm sınıfla yaptıktan sonra, öğrenciler küçük gruplar halinde çalışabilirler. (Shoecraft, 1982)

Ders dışında yapacağınız şeyler öğrenciler için motive edici olabilir ve bu durum kişisel olarak ek çaba göstermelerine yol açabilir. Derste bu öğrenciler diğer öğrencilerle birlikte çalışmaya devam etmeli ve mevcut müfredatı takip etmelidir. Temel kuralları öğrenememelerinin, kapasitelerinin bir göstergesi olmadığı konusunda öğrencileri inandırmalı ve bunu onlarla paylaşmalısınız. Etkili stratejiler ve bireysel çabayla birlikte, başarı gelecektir. Buna inanın!

Bölüm 10 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Öğrencilerin temel kuralları öğrenmelerine yardımcı olan bir gelişimsel yaklaşımın avantajlarını belirtiniz.
2. Bir öğrencinin 8+6 kuralı için kullanabileceği muhakeme stratejilerinden en az üç tanesini yazınız.
3. Çıkarmanın "toplamayı-düşün" olarak nitelendirilmesinin anlamı nedir? Çıkarma için toplamayı-düşün düşünme örüntüsünü geliştirmeleri için öğrencilere nasıl yardımcı olunabilir?
4. Çıkarma kuralları için toplamayı-düşün stratejisinin kullanımını sağlayan bir hikâye problemi örneği veriniz.
5. Bir öğrencinin 6x7 çarpma kuralı için kullanabileceği muhakeme stratejilerinden üç tanesini yazınız.
6. Alıştırmaların nasıl etkin kullanılabileceğini belirtiniz.
7. Temel kural öğrenimi için kullanılan süreli testlerin negatif ve pozitif yönlerini belirtiniz.
8. Öğrencilerin temel kural öğrenimini düzeltmek için kullanabileceğiniz üç ana fikri belirtiniz.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Temel kurallarla ilgili alıştırma yapmak için bir internet-temelli program ya da bir yazılım inceleyiniz. Bulduğunuz programın iyi yanları nelerdir? Kötü yanları nelerdir? Bu programı sınıfta bir ya da iki bilgisayarın olması durumunda nasıl kullanabilirsiniz?
2. Stratejilerin çocukların ezberleyeceği püf noktaların koleksiyonundan daha fazla bir anlam ifade ettiği görüşü stratejileri düşünmenin bir yoludur. Şu soruyu tartışınız, "Temel kural öğrenimi için çocuklara düşünme stratejilerini öğretmek oluşturmacı matematik öğretimi yaklaşımı ile uyumlu mudur?"
3. Temel kuralların öğretilmesinin beklendiği bir sınıfa ders verdiğinizi varsayalım (toplama ve çıkarma için ikinci sınıf ya da çarpma ve bölme için dördüncü sınıf). Zaman, strateji gelişimi, ailelerin sürece dâhil edilmesi vb. hususları düşünmek kaydıyla, bir dönem ya da yıl için temel kural öğrenimine yönelik nasıl bir düzenleme yapabilirsiniz?

Bölüm 10 ile İlgili Kaynaklar

Edebi Metinler

The children's books described in Chapters 8 and 9 are also good choices when working on the basic facts. In addition to those, consider these opportunities to develop and practice basic facts.

One Less Fish *Toft, 1998*

This beautiful book with an important environmental message starts with 12 fish and counts back to zero fish. On a page with eight fish, ask, "How many fish are gone?" and "How did you figure it out?" Encourage students to use the Down Over 10 strategy. Any counting-up or counting-back book can be used in this way!

The Twelve Days of Summer *Andrews, 2005*

You will quickly recognize the style of this book with five bumble bees, four garter snakes, three ruffed grouse, and so on. The beautiful illustrations and motions make this a wonderful book. Students can figure out how many of each item appear by the end of the book, applying multiplication facts. (For example, three ruffed grouse appear on days 3, 4, 5, and so on.)

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic fact combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), 22–31.
Baroody suggests that basic facts are developmental in nature and contrasts "conventional wisdom" with a number sense view. Great activities are included as exemplars.

Buchholz, L. (2004). Learning strategies for addition and subtraction facts: The road to fluency and the license to think. *Teaching Children Mathematics*, *10*(7), 362–367.
A second-grade teacher explains how her students developed and named their strategies and even extended them to work with two-digit numbers. She found her "lower ability" students were very successful using reasoning strategies.

Crespo, S., Kyriakides, A. O., & McGee, S. (2005). Nothing "basic" about basic facts: Exploring addition facts with fourth graders. *Teaching Children Mathematics*, *12*(2), 60–67.
This article provides evidence of the critical importance of addressing remediation through a focus on reasoning strategies and number sense.

Kamii, C., & Anderson, C. (2003). Multiplication games: How we made and used them. *Teaching Children Mathematics*, *10*(3), 135–141.
Constance Kamii, a well-known constructivist, teams up with a third-grade teacher and describes a collection of games that were used to help Title I school students master multiplication facts.

Kitaplar

Fennema, E., & Carpenter, T. P. (with Levi, L., Franke, M. L., & Empson, S.) (1997). *Cognitively guided instruction: Professional development in primary mathematics.* Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.
The CGI program is based on the belief that students develop their own strategies for mastering the basic facts. They are helped in this process by solving well-selected story problems. Teachers listen carefully to students' emerging processes and encourage increasingly efficient methods.

Rathmell, E. C., Leutzinger, L. P., & Gabriele, A. J. (2000). *Thinking with numbers.* Cedar Falls, IA: Thinking with Numbers.
This resource is a set of small cards, each with several simple story problems. The cards are organized by strategies for each of the operations. As children solve these problems (5 minutes per day), they invent their own strategies and share them with the class.

İnternet Kaynakları

Arithmetic Four
www.shodor.org/interactivate/activities/ArithmeticFour/index.html
The game is like "Connect Four." Players must answer an arithmetic fact to be able to enter a piece of their color on the board. Operations can be selected and timer set for answering each fact.

Cross the Swamp (BBC)
www.bbc.co.uk/schools/starship/maths/crosstheswamp.shtml
This British applet asks students to supply a missing operation (+/– or ×/÷) and a number to complete an equation (e.g., 4 __ __ = 12). There are five questions in a set, each with three levels of difficulty.

Diffy (NLVM—Applet/Game)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_326_g_1_t_1.html
Diffy is a classic mathematics puzzle that involves finding the differences of given numbers.

Let's Learn Those Facts (NCTM's Illuminations—Lessons, Grades 1–2)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U58
These six lessons, including links to resources and student recording sheets, target addition facts.

Multiplication: It's in the Cards (NCTM's Illuminations—Lessons, Grades 3–5)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U110
These four lessons, including links to resources and student recording sheets, use the properties of multiplication to help students master the multiplication facts. See also "Six and Seven as Factors" (NCTM's Illuminations—Lessons, Grades 3–5), two lessons on products where 6 or 7 is a factor (http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=U150).

Number Invaders
www.mathplayground.com/balloon_invaders.html
This game is like "Space Invaders." Players choose an operation (×, ÷) and a factor, and use the space bar and arrow keys to launch the "number (product) popper."

Number Puzzles (NLVM—Applet)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_157_g_3_t_1.html
In this applet, students are required to arrange numbers on a diagram so that all numbers in a line add up to a given value.

The Product Game (NCTM's Illuminations—Lessons, Grades 3–8)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U100
These four lessons use the engaging and effective games "Factor Game" and "Product Game" to help students see the relationship between products and factors.

SpeedMath Deluxe (Jefferson Lab)
http://education.jlab.org/smdeluxe/index.html
Players are given four numbers between which they must enter one of the four operation signs so that the resulting expression equals a given number. Requires an understanding of order of operations and occasionally integers.

Bölüm 11

Doğal Sayılarda Basamak Değeri Kavramlarının Geliştirilmesi

Basamak değerinin tam olarak anlaşılması, ondalık sayı gösterimindeki devamını da dâhil edersek, ilk ve ortaokul süresince gelişir. Doğal sayı kavramı için bu gelişimdeki en kritik dönem anaokul öncesi eğitiminden 3. sınıfa kadar olan dönemdir. 2006 yılında yayımlanan *Öğretim Programı Odak Noktaları*'nda belirtildiği gibi ana okulu ve 1. sınıftaki öğrenciler 100'e kadar sayar ve 100'e kadar olan sayılardaki örüntülerle muhatap olurlar. En önemlisi, on nesneden oluşan grupları bir birim olarak düşünmeye başlarlar. 2. sınıfa geçtiklerinde baştaki örüntüler ve onlu gruplar hakkındaki fikirler artık formal olarak sayıların gösterimindeki basamak değerleri sistemimiz ile ilişkilidir. 3 ve 4. sınıflarda çocuklar anlayışlarını, çeşitli bağlamlarda, 10,000'e kadar olan sayılara kadar genişletirler. 4 ve 5. sınıflarda doğal sayılar hakkındaki fikirler ondalık sayılara genişletilir.

Bu gelişimin önemli bir parçası olarak, öğrenciler iki ve üç basamaklı sayılarla toplama ve çıkarma problemlerini çözerken sayıları çok çeşitli yollar kullanarak bir araya getirme ve ayırmada çaba göstermeye başlamalıdır. Öğrencilerin kendi hesaplama yöntemlerini keşfederken yaşadıkları zorluklar hem onların basamak değerini anlamalarını geliştirecek hem de esnek hesaplama yöntemleri için sağlam bir altyapı oluşturacaktır.

Ana Fikirler

1. Onluk gruplar (ve onlukların onlukları) tek bir öğe olarak algılanabilir. Örneğin, üç grup onluk ve iki tane birlik 32'lik nesnenin onluk tabanda ifade yöntemidir. Bu, onluk tbanda sayı gösteriminin en temel prensibidir.
2. Sayılardaki basamakların yerleri, neyi temsil ettiklerini ve hangi büyüklükteki grupları saydıklarını belirler. Bu *basamak değeri*'nin en temel prensibidir.
3. Sayıların oluşumunda örüntüler vardır. Örneğin, her on yılın 1'den 9'a kadar olan sayı dizisini yansıtan sembolik bir örüntüsü vardır.
4. Birlik, onluk ve yüzlük grupları farklı yollarla parçalara ayrılabilirler. Örneğin, 256, 1 yüzlük, 14 onluk ve 16 birlik olabileceği gibi 250 ve 6 da olabilir. Çok basamaklı sayıları esnek bir şeklide ayırma ve birleştirme, hesaplama için önemli bir beceridir.
5. "Gerçekten büyük" sayılar en iyi, aşina olunan gerçek hayata atfedilerek anlaşılırlar. 1000 veya daha büyük miktarları kavramsallaştırmak zordur. Bununla birlikte, örneğin, yerel bir spor sahasını dolduracak insan sayısı böyle kalabalıklarla deneyimi olanlar için anlamlı bir kavramdır.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Onluk tabanlı basamak değeri sistemi, doğal sayılarla ve daha sonra gelen ondalık sayılarla yaptığımız her şeyi ifade etme ve gösterme yoludur.

- **Doğal Sayılarda Hesaplama ve Sayı Hissi** (Bölüm 12 ve 13): Çeşitli zihinsel yöntemler, kağıt-kalem yöntemleri, tahmin becerileri ve hatta teknolojiyi etkili kullanma gibi esnek hesaplama yöntemleri tamamen basamak değerini anlamaya dayalıdır. Toplama ve çıkarma için hesaplama stratejileri basamak değerinin anlaşılması ile birlikte geliştirilebilir ve geliştirilmelidir.
- **Ondalık ve Yüzdeler** (Bölüm 17): Doğal sayı basamak değeri fikirleri, her türlü rasyonel sayının gösterimine ve irrasyonel sayıların yaklaşık olarak bulunmasına olanak sağlayacak şekilde genişletilir.
- **Ölçme** (Bölüm 19): Gerçek ölçümler içeren problem temelli görevler, öğrencilere onluklar halinde gruplama hakkındaki fikirlerini inşâ etmede yardımcı olmak için kullanılabilir. İnsanlar, ölçüler aracılığıyla sayılar için kıstaslar ve anlamlı atıflar oluştururlar.

Onluk Tabandan Önce Gelişen Kavramlar

Çocuklar iki basamaklı sayılar (10'dan 99'a kadar) hakkında anaokulu kadar erken bir dönemde bile oldukça bilgiye sahiptir. Neticede, çoğu anaokulu öğrencisi 100'e kadar saymayı ve 20 veya 30 kadar nesneden oluşan grupları saymayı öğrenebilir ve öğrenmelidir. Öğrenciler günlük takvim etkinlikleri yapar, odadaki çocukları sayar, kitaplarından istenen sayfayı açar, vb. Bununla birlikte, onların anlayışları sizinkinden oldukça farklıdır ve çokluğa bir fazlası veya birerli sayma yaklaşımıyla bakmaya dayalıdır.

Çocukların Onluk Tabandan Önce Sayılara Bakışı

Birinci veya ikinci sınıf çocuklarından 53 tane karoyu saymalarını isteyin. Çoğu bunu yapabilecek veya sadece dikkatsizce hatalar yapacaklardır. Dikkatlice izlerseniz, öğrencilerin karoları teker teker saydıklarını ve herhangi bir gruplama modeli kullanmadan karolardan bir yığın oluşturduklarını fark edeceksiniz. Öğrencilere şimdi kaç tane karo saydıklarını belirten sayıyı yazdırın. Çoğu öğrenci bunu yazabilecektir. Bazısı"53" yerine "35", basit bir şekilde tersini, yazacaktır.

Buraya kadar herşey çok iyi. Şimdi, öğrencilerden az önce yazdıkları sayının10 fazlası olan sayıyı yazmalarını isteyin. Çoğu muhtemelen 53'ten başlayarak saymaya başlayacaklardır. 53'ün üzerine sayarken sayımlarını kaydetmeyi gerekli görecekler ve muhtemelen parmaklarını kullanacaklardır. Birinci sınıftaki veya ikinci sınıfın başlarındaki öğrencilerin hemen hemen hepsi değilse bile çoğu, bu görevde başarılı olmayacak ve çok az bir kısmı 10 fazlasının 63 olduğunu hemen bilecektir. Yazdıkları sayıdan 10 eksiğini sormak daha da problemlidir.

Son olarak, herbirinde onluk kartların olduğu büyük bir kart destesi gösterin. Her bir kartta on adet kare bölme olduğunu ve her karta on adet karo sığabileceğini açıklayın. Bir onluk kartın kare bölmelerini karolarla doldurarak karoları kartların üzerine koymayı gösterin. Şimdi, "Bütün karoları [saydığınız 53 karoyu] kartların üzerine koymak istersek bunun gibi kaç tane kartın gerekeceğini düşünüyorsunuz?" sorusunu sorun. "53" cevabı olağan dışı değildir. Başka çocuklar bilmediklerini söylerken, bir kısmı da çözebilmek için karoları kartların üzerlerine koymaya gerek duyacaklardır.

Birerli Sayma

Az önce betimlenen çocuklar 53 tane karo olduğunu biliyorlar,"çünkü onları saydım". Sayıyı yazmak ve söylemek genelde doğru yapılıyor, fakat öğrencilerin 53'ten anladıkları birerli saymaya dayanır ve birerli saymayla ilişkilidir. Çocuklar çoklukları göstermede onlu grupların anlamlı bir kullanımını kolayca ve çabukça geliştiremezler.

Asgari öğretim ile çocuklar, 53 sayısında, 5'in onlar basamağında olduğunu veya "3 birlik" olduğunu size söyleyebilirler. Bunula birlikte, muhtemeldir ki bu eksik bir anlayışla basit bir şekilde konumların isimlendirilmesidir. Eğer çocuklar daha önce onluk taban materyalleriyle karşılaşmışlarsa, onluk bir çubuğu "on" ve küçük bir kübü "bir" olarak isimlendirebilirler. Bununla birlikte, aynı çocuklar bir onluk yapmak için ne kadar birlik gerektiğini kolaylıkla söyleyemeyebilirler. Materyallere ve gruplara, bu materyal ve sembollerin neyi temsil ettiklerinin farkına varmadan kelimeler iliştirmek kolaydır.

Çocuklar 53'ün "oldukça büyük" ve 47'den daha büyük olduğunu bilir (çünkü sayarken 53'e gelmeden önce 47'yi sayarsınız). Yazdıkları "53"ü tek bir sayı olarak düşünürler. 5'in beş onluk nesne grubunu ve 3'ün üç tane tekil nesneyi temsil ettiğini bilmezler (Fuson, 2006). Fuson ve meslektaşları,çocukların sayıların onluk taban öncesi anlayışlarından "birim" olarak bahsederler. Bir başka ifadeyle, bir çoklukla iki basamaklı bir sayı eşlense bile, onarlı gruplamalar yoktur. Çoklukları anlamaları birimleri saymalara dayanır.

Basamak Değeri Hakkında Temel Fikirler

Basamak değerinin anlaşılması, yeni ve oluşturulması güç kavramlar olan onluklarla gruplama (onluk taban kavramı) ile grupların bizim basamak değeri şemamızda nasıl kaydedildiği, sayıların nasıl yazıldığı ve nasıl söylendiği prosedürel bilgilerinin entegrasyonunu gerektirir.

Onluk Taban Gruplandırmasının Birerli Sayma ile Entegrasyonu

Çocukların 53'lük bir grubu sayabileceğinin farkında olarak, onlara onarlı gruplar ve kalanlar grubu yapmanın aynı çokluğu saymanın bir yolu olduğunu görmelerinde yardımcı olmak isteriz. Şekil 11.1'deki her bir grupta 53 tane karo vardır. Çocuklardan bütün bunların aynı olduğu ve aynı olma durumunun onlukların gruplanmasından dolayı çok net bir şekilde belli olduğu fikrini oluşturmalarını istiyoruz.

İki grup çocuk arasında ince fakat derin bir ayrım vardır: B grubunun 53 olduğunu bilen çünkü beş 10'luk ve 3 fazlasının birerli sayarak elde edilen 53 ile aynı miktar olduğu fikrini anlayan çocuklar ve kendilerine, nesneler bu şekilde gruplandığında 53 olarak isimlendirilir diye söylendiği için basit bir şekilde "53'tür" diyen çocuklar. İkinci gruptaki çocuklar, B kümesindeki karoların birerli sayarlarsa kaç tane elde edeceklerinden veya eğer gruplar "gruplandırılmamış" olsa kaç tane karo olacağından emin olmayabilirler. Anlayan çocuklar B kümesini birerli saymaya hiç gerek görmeyeceklerdir. A ve B kümelerinin "elli üçlülüğünün" aynı olduğunu anlarlar.

Durup Düşün

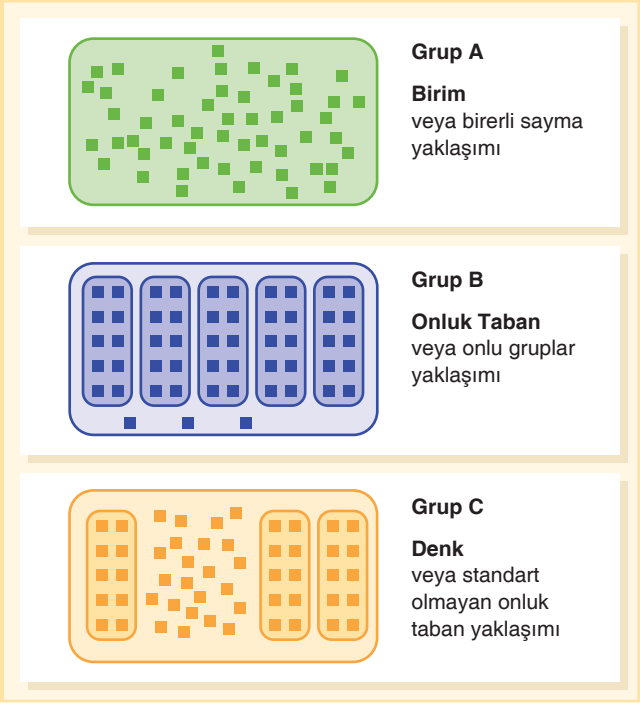
Önceki paragraftaki fikirler sizin anlamanız için önemlidir. Böylece, daha sonra üzerinde tartışılacak etkinlikler anlam ifade edecektir. Basamak değerlerini anlayan ve anlamayan çocuklar hakkında konuşabileceğinizden emin olunuz.

B ve C gruplarının denkliğinin farkına varılması çocukların kavramsal gelişimlerinde bir başka adımdır. Maksimum sayıdaki onluklardan daha az sayıdaki gruplamalar denk *gruplamalar* veya *denk gösterimler* olarak ifade edilebilir. B ve C'nin denkliğinin anlaşılması, onluklar halinde gruplamanın sadece takip edilen bir kural olmadığına, fakat tüm veya bazı tekleri içeren herhangi onlularla gruplamanın kaç tane olduğunu söylemeye yardım edebileceğine işaret eder. Birçok hesaplama tekniği sayıların denk gösterimlerini temel alır.

Saymanın Rolü

Sayma, çokluk hakkında onluk taban fikirlerinin oluşturulmasında ve bu kavramların sayıların sembolleri ve sözel isimleri ile ilişkilendirilmesinde kilit rol oynar.

Çocuklar, Şekil 11.1'deki gibi kümeleri üç farklı şekilde sayabilirler. Herbir yol çocuklara çokluklar hakkında farklı bir şekilde düşünme konusunda yardım eder (Thompson, 1990).



Şekil 11.1 53 tane nesnenin üç denk gruplaması. Grup A, 53'tür, çünkü "ben onları (birerli) saydım." Grup B'de 5 onluk ve 3 daha var. Grup C, B ile aynıdır, fakat bazı onlu gruplar birliklere ayrılmıştır.

1. *Birerli sayma.* Bu, çocukların başlaması gereken yöntemdir. Başlangıçta, birerli sayma çocukların birçokluğu isimlendirmeleri veya "kaç tane olduğunu söylemeleri" için tek yoldur. Şekil 11.1'deki üç kümenin hepsi birerli sayılabilir. Onluk taban fikirleri gelişmeden önce, çocukların her üç kümenin de aynı olduğuna ikna olmaları için birerli sayma tek yoldur.

2. *Gruplamayla ve tek tek sayma.* Şekil 11.1'deki B grubunda gruplamayla ve tek tek sayma şöyle olur: "Bir, iki, üç, dört, beş tane onluk kümesi ve bir, iki, üç tekli." Bir grup nesneyi tek bir öğe olarak saymayı hiç düşünmemiş bir çocuk için bu yöntemin ne kadar orijinal olacağını düşününüz. Aynı zamanda, bu saymanın nasıl kaç tane nesne olduğunu doğrudan söylemediğine dikkat ediniz. Bu, sayma şeklinin"kaç tane" olduğunu söylemek için bir araç olabilmesinden önce birerli sayma ile eş güdümlenmelidir.

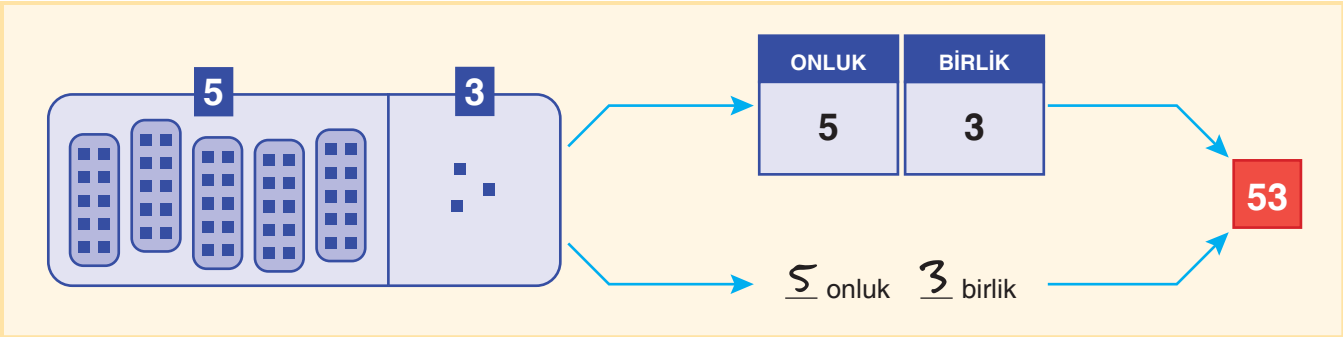
3. *Onarlı ve birerli sayma.* Bu,yetişkinlerin muhtemelen B grubunu ve bir ihtimal C grubunu saymak için kullanacakları yoldur: "On, yirmi, otuz, kırk, elli, elli bir, elli iki, elli üç." Bu sayma oradaki sayıyı söyleyince bitse de grupların sayılarını saymada ikinci yöntem kadar açık değildir. Aynı zamanda, daha anlamlı olan birerli sayma ile eş güdümlenmediği müddetçe "kaç tane" anlayışını ifade etmeyecektir.

Çocuklarla yapabileceğiniz özel etkinliklerden bağımsız olarak, onlara onluklarla gruplama kavramı ile sayılar hakkında birerli saymadan bildiklerini entegre etmelerine yardım etmek sizin en başta ele alınması gereken kazanımlarınızdan olmalıdır. Eğer önce birerli sayılırsa, soru şu olabilir: "Eğer bunları gruplar halinde ve tek tek (veya onlar ve birler) sayarsak ne olacak?" Eğer bir küme onlar ve birlikler olarak gruplandırılır ve ona göre sayılırsa, "Burada 53 tane nesne olduğundan gerçekten nasıl emin olabiliriz?" veya "Birerli sayarsak kaç tane elde edeceğimizi düşünüyorsunuz?".Çocuklara bu saymaların hepsinin aynı olduğunu *söylemek* yeterli değildir. Öğretmen bu şekilde çalıştığını söylediği için değil kendi kendilerine derinlemesine düşünerek oluşturmaları gereken bir ilişkidir.

Gruplamanın Kelimerlerle Entegrasyonu

Sayıları söyleyişimiz, "elli üç" gibi, onlularla gruplama kavramı ile ilişkili olmalıdır. Sayma yöntemleri bir bağlantı mekanizması sağlar. Onlarla ve birlerle sayma, grupların ve teklilerin sayılarının ayrı ayrı söylenmesi ile sonuçlanır: " beş onluk ve üç".Bu,çokluğu isimlendirmenin standart olmamasına rağmen kabul edilebilir bir yoludur. Bu tarzda, onlukların ve birliklerin sayısını ayrı ayrı söylemek bir sayı için "onluk taban dili" olarak adlandırılabilir. Çocuklar onluk taban dilini günlük dil ile ilişkilendirebilir: "beş onluk ve üç – elli üç."

53 için onluk taban dilinin birkaç biçimi vardır – 5 onluk ve 3; 5 onluk ve 3 birlik; 5 onluk ve 3 tekli; ve benzeri. Her biri standart isim olan "elli üç" ile değiştirilebilir biçimde kullanılabilir.



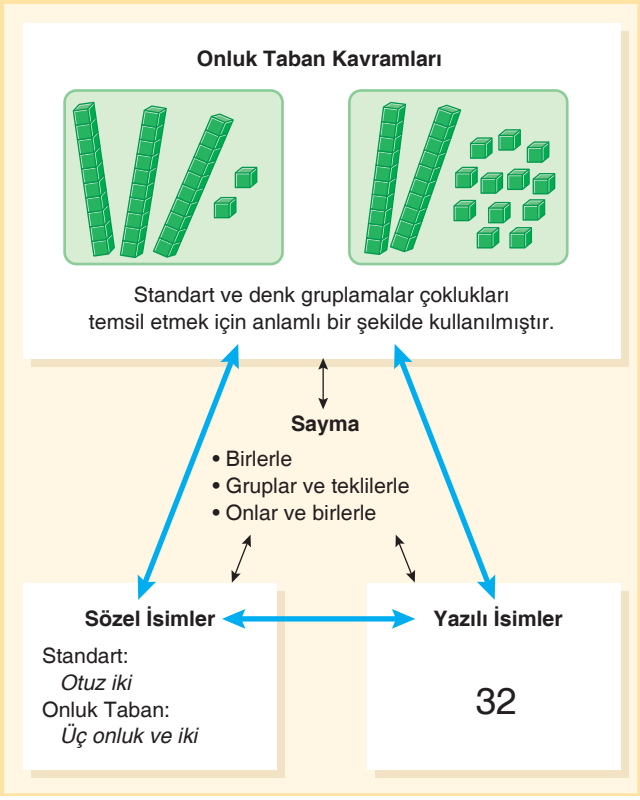
Şekil 11.2 Onlu gruplamalar rakamlarla eşleştirilmiş, etiketli yerlere yerleştirilmiş ve en sonunda standart formda yazılmış.

Onluk taban dilinin, standart sözel isimlere tercihen dahi, ikinci sınıf boyunca kullanılması gerektiği kolayca savunulabilir.

Gruplamanın Basamak Değeri Simgesi ile Entegrasyonu

Benzer şekilde, sayıları yazmak için kullandığımız sembolik şema (birler sağda, onlar birlerin soluna, vesaire) gruplama şeması ile eş güdümlenmelidir. Etkinlikler, Şekil 11.2'de gösterildiği gibi, çocukların onlu ve birli gruplandırmasını-tek tek basamakların doğru kaydedilmesi ile fiziksel olarak ilişkilendirebilecekleri şekilde dizayn edilmelidir.

Dil bu bağlantıların oluşturulmasında yine kilit rol oynar. Gruplarla ve teklilerle açık bir şekilde sayma, sayıların klasik soldan sağa yazılımındaki bireysel basamaklarla eşleşir. Benzer bir eşgüdümleme yüzlükler ve diğer basamak değerleri için de gereklidir.



Şekil 11.3 Basamak değerinin ilişkisel anlaşılması, üçgenin köşeleri olarak gösterilen üç unsuru birleştirir: onluk taban kavramları, sayılar için sözel isimler ve sayılar için yazılı isimler.

NCTM Standartları "'10'u basit bir şekilde 10 birliğin bir araya gelmesi olarak görmekten hem 10 birlik *ve* hem de 1 on olarak görmeye geçmek, onluk taban sayı sisteminin yapısını anlama yolunda öğrenciler için önemli bir ilk adımdır" (s. 33). ◆

Şekil 11.3 şu ana kadar tartışılan fikirleri özetlemektedir.

- Basamak değerinin kavramsal bilgisi, onluk taban gruplama fikirlerinden oluşur.
  - Bir yığın nesne onlu kümeler ve bazı kalan tekliler olarak gruplandığında, onlu grupları saymak ve teklileri eklemek yığında kaç tane olduğunu belirtir.
  - Olabilecek maksimum sayıdaki gruplamadan daha az grup ile de denk gösterimler olabilir.
- Onluk taban gruplaması fikirleri sayıların sözel ve yazılı isimleri ile entegre edilmelidir.
- Birerli saymaya ek olarak çocuklar iki farklı sayma şekli kullanırlar: gruplar ve teklilerle ayrı ayrı ve onlar ve birlerle. Üç sayma yönteminin hepsi kavramları, yazılı isimleri ve sözel isimleri entegre etmenin temel yöntemi olarak eşgüdümlenmişlerdir.

Durup Düşün

Şekil 11.3'ü basamak değerinin kavramsal fikirleri en üstte olacak şekilde bir üçgen olarak düşünün. Sayıları nasıl söylediğimizi ve yazdığımız, belirten prosedürel fikirler diğer iki köşeyi oluşturur. Sayma, çocukların bu fikirleri birleştirmede yardımcı olması için kullandıkları esas araçtır. Daha fazla

ilerlemeden, bu fikirlerin nasıl ilişkili olduğu hakkında kendinizin iyi bir anlayışa sahip olduğunuzdan emin olunuz. Kavramsal fikirlerin ilk önce çocukların bu fikir dizisine getirdikleri çokluğun birerli sayma kavramı üzerine inşa edilmesi gerektiğini unutmayınız.

Basamak Değerleri İçin Modeller

Onluk taban kavramları için olan fiziksel modeller çocuklara, "on"un hem tek bir öğe hem de on tane birimden oluşan bir küme olduğu fikrinin gelişiminde yardım etmede kilit bir rol oynayabilir. Gerçi, modellerin çocuklara kavramları "göstermediğini" hatırlayınız. Çocuklar kavramları zihinlerinde oluşturmalı ve bunu model üzerine uygulamalılar.

Onluk Taban Modelleri Ve On-Bir-Yapar İlişkisi

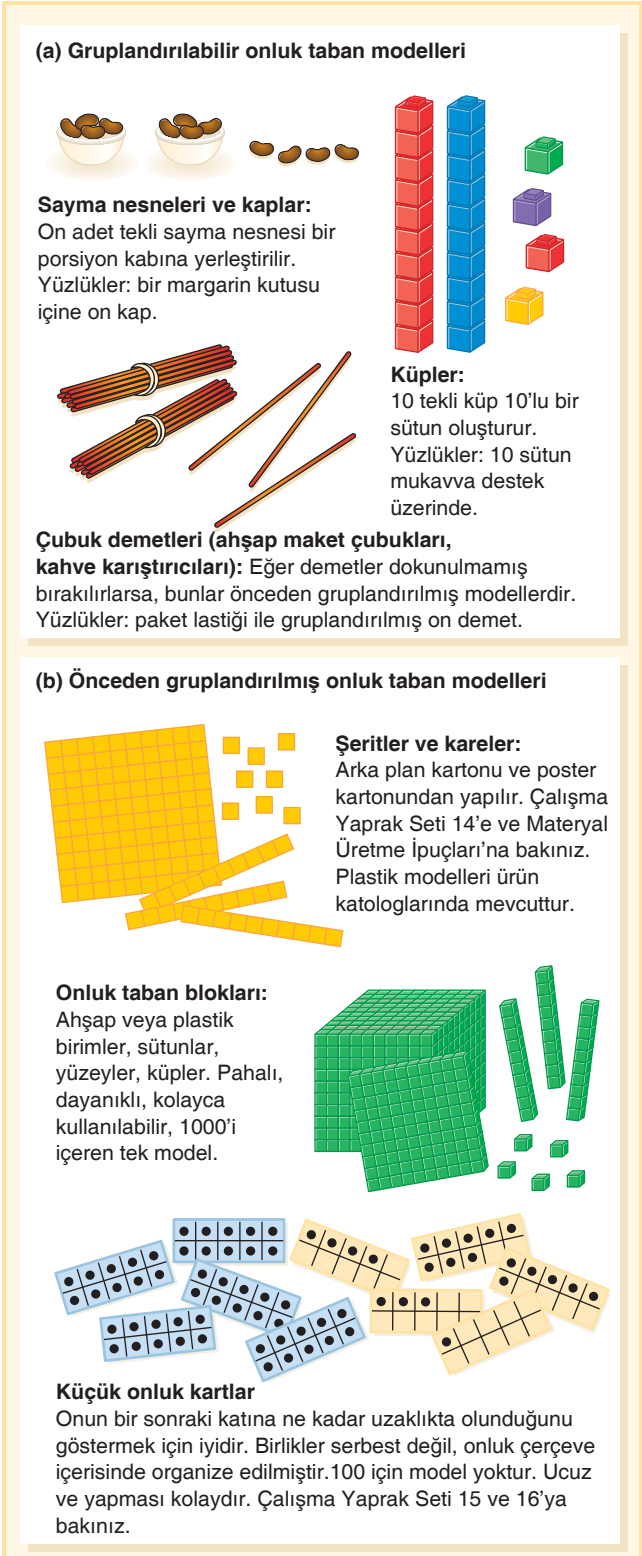
Birler, onlar ve yüzler için iyi bir onluk taban modeli *orantısal* olanıdır. Bir başka deyişle, fiziksel olarak on modeli bir modelinin on katı büyüklükte ve yüz modeli on modelinin on katı büyüklüktedir. Onluk taban modelleri, *gruplandırılabilir* ve *önceden gruplandırılmış* olarak kategorilendirilebilir.

Gruplandırılabilir Modeller

Birler, onlar ve yüzlerin aralarındaki ilişkiyi en açık şekilde yansıtan modeller, 10'un gerçekten teklilerden yapılabildiği veya gruplandırılabildiği modellerdir. Çocuklar on tane fasulyeyi bir porsiyon kabına koyduklarında, onlu kap, on tane tek fasulyeyle tam olarak *aynı*dır. Bu süreç özel eğitime gereksinim duyan öğrenciler için özellikle önemlidir. Gruplandırılabilir modeller için örnekler Şekil 11.4(a)'da gösterilmiştir. Bunlar aynı zamanda "bir araya getir-parçalara ayır" modelleri olarak da isimlendirilebilir.

Gruplandırılabilir modeller arasında, porsiyon kaplarındaki fasulyeler ve sayma nesneleri en ucuz ve çocukların kullanımı için en kolay olanlarıdır. Plastik birbirine geçmeli küpler çekicidir ve önceden gruplandırılmış onluk çubuklara iyi bir geçiş sağlar. Ahşap maket çubuk veya kahve karıştırıcısı desteleri tanınmış modellerdir, fakat küçük eller paket lastiklerle ve fiilen desteleri yapmakta sorun yaşarlar. Yüzlüklerin, çoğu gruplandırılabilir materyallerle yapılabilmesi imkân dahilinde olmasına rağmen genellikle uygulanabilir değildir.

Çocuklar bu modellere gitgide aşina oldukça, onlu gruplar çocuklar tarafından önceden yapılıp hazır onluklar olarak saklanabilir. Plastik porsiyon kapları için kapaklar satın alınabilir ve birbirine geçmeli küpler önceden destelenmiş olarak bırakılabilir. Bu, bundan sonra anlatılacak olan önceden gruplandırılmış modellere iyi bir geçiştir.



Şekil 11.4 Gruplandırılabilir ve önceden gruplandırılmış onluk taban modelleri.

Önceden Gruplandırılmış veya Değiş-Tokuş Modelleri

Önceden gruplandırılmış modeller yaygın olarak ders kitaplarında gösterilir ve öğretimsel etkinliklerde kullanılır. Şekil 11.4(b)'deki gibi önceden gruplandırılmış modellerle çocuklar aslında parçaları ayıramaz veya bir araya getiremezler. On tekli parça bir araya getirildiğinde bir onluk ile değiştirilmeli ya da *değiş-tokuş* edilmeli ve benzer şekilde onluklar yüzlüklerle değiş-tokuş yapılmalıdır.

Bu modellerin başlıca avantajı kullanımlarının kolay olması ve büyük sayıları etkili olarak modellemeleridir. Önemli bir dezavantajı ise çocuklar için bunları ona-bir ilişkisini düşünmeden veya gerçekten ne yaptıklarını anlamadan kullanma potansiyelidir. Örneğin, eğer çocuklara 10 tane birliği bir tane onluk ile değiş-tokuş etmeleri söylenirse, çocukların bu değiş tokuşu onluk olarak isimlendirdikleri parçanın "onlukluğuna" dikkat etmeden yapmaları oldukça muhtemeldir. Benzer şekilde, çocuklar basit bir şekilde 4 onluk ve 2 birliği seçerek, bu parçaların hepsi ayrılmış olsa birerli sayılabilen 42 birlik parçası olacağını anlamadan," 42 sayısını yapmayı" öğrenebilirler.

Bu kategoride küçük onluk kartlar bir bakıma özgündür. Eğer Bölüm 8'de tartışıldığı gibi çocuklar küçük onluk kartları 20'ye kadar olan sayılar hakkında düşünmek için kullanıyorlarsa, doldurulmuş onluk kartın değeri onluk taban materyallerinden olan şeritler ve karelerden daha anlamlıdır. Birlikler kartlar üzerinde sabitlenmiş olmasına rağmen bu modelin her zaman onun bir sonraki katına olan uzaklığı göstermesi gibi farklı bir avantajı vardır. 47, 4 onluk kart ve bir yedi kartı ile gösterildiğinde, üç tane fazlasının 50 yapacağı açıktır. Diğer bütün modellerde, kaç tane olduğunu söylemek için birliklerin devamlı sayılması gerekmektedir ve bir sonraki ona olan uzaklık belirsizdir.

Gruplandırılabilir modeller de dâhil olmak üzere hiçbir model çocukların materyallerde ona-bir ilişkisini düşündüklerini garanti edemez. Önceden gruplandırılmış modellerle çocukların bir onluğun gerçekten 10 tane birlikle aynı olduğunu anladıklarını görmek için ekstra çaba harcamalıyız.

(Onluk taban şeritleri ve kareleri ve onluk kartları yapmak için Çalışma Yaprak Seti 14 ve Materyal Üretme İpuçları'na bakınız.)



Onluk taban manipülatiflerinin elektronik versiyonları oldukça popüler olmaya başlıyor. Genellikle bunlar üç boyutlu onluk taban bloklarının, binlik parçası da dahil, bilgisayar gösterimleridir. Birkaç fare tıklamasıyla çocuklar birimleri, sütunları, yüzeyleri ve küpleri ekrana yerleştirebilirler. Ulusal Sanal Manipülatifler Kütüphanesi'ndeki (National Library of Virtual Manipulatives – http: //nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html) "Taban Blokları" (Base Block) bilgisayar uygulamasında modeller basamak değeri çizelgesinin üzerine yerleştirilmiştir. Eğer on tane aynı tip blok bir kement aracı ile dikdörtgen içerisine alınırsa, bu nesneler birbirine kenetlenir. Eğer bir parça bir sütun sağa sürüklenirse, parçalar birbirinden ayrılır. Person Education'ın *eAraçları (eTools)*'nda biraz daha esneklikte benzer bir basamak değeri aracı vardır.



Şekil 11.5 Pearson Scott Foresman'ın *eTools*'u onluk taban bloklarının bir bilgisayar modelini içerir.
Kaynak: Scott Foresman Addison-Wesley Matematik Elektronik-Araçlar CD-ROM Anaokulundan 6. Sınıfa. Telif Hakkı (c) 2004 Person Education, Inc., veya onun bağlı şirketleri. Kullanım için izin alınmıştır. Bütün hakları saklıdır.

Bu bilgisayar uygulamasına ücretsiz olarak www.kyrene.org/mathtools sitesinden ulaşılabilir. "Basamak Değeri Blokları"'nı (Place Value Blocks) seçin ve isterseniz sol altta "çalışma alanları"nın (workspaces) altında Şekil 11.5'teki gibi ikiye ayrılmış ekranı (two-part mat) seçin. Daha sonra istediğiniz onluk-taban parçalarını seçin ve birlikleri, onlukları ve yüzlükleri ekleyin.*eTools'ta* "Sayı Blokları" (Number Blocks) ile basamak değeri sütunu kapatılabilir ve en fazla üç farklı sayı ayrı ayrı modellenebilir. "Odometre" (Odometer) seçeneği 523 saysını *5 yüzlük + 2 onluk + 3 birlik* veya *500 + 20 + 3* veya *beş yüz yirmi üç* olarak gösterebilir. Çekiç (Hammer) ikonu bir parçayı daha küçük parçalara ayırır ve yapıştırıcı şişesi (glue bottle) ikonu on parçayı bir araya gruplamak için kullanılır.

Gerçek onluk taban modelleri ile karşılaştırıldığında, sanal bloklar ücretsizdir, kolayca gruplandırılabilir ve ayrılabilir, bir ekrandan tüm sınıfa gösterilebilir ve "sonsuz" sayıda mevcuttur (binlik bloklar dahi). Bilgisayar modelleri öğrencilere çalışmalarının çıktısını alma olanağı verir ve böylece yaptıklarının yazılı kayıtlarını da oluşturmuş olur. Öte yandan, bilgisayar modeli fiziksel modelden daha kavramsal değildir ve fiziksel model gibi ilişkileri anlayan öğrenciler için sadece bir gösterim şeklidir. ◆

Orantısal Olmayan Modeller

Orantısal olmayan modeller, on birimin nasıl "bir on" yaptığını anlamaya artık ihtiyaç duymayan öğrenciler tarafından veya daha üst düzey hesaplamalarla uğraşırken zorlanıp basamak değeri kavramlarına dönmeye ihtiyaç duyan bazı öğrenciler tarafından kullanılabilir. Bu modeller, para gibi, on modelinin fiziksel olarak birin on katı kadar olduğunu göstermeyen modellerdir. Birçok öğrenci basamak değeri ilişkisini, penny, dime ve doları 1, basamak değeri paletlerinde birleri, onları ve yüzleri göstermek için kullanarak kavrarlar. Bozuk para gösterimlerini kullanarak miktarları gösterebilir, bir doları on dime ile değiştirebilir ve çeşitli hesaplamalar yapabilir

1 Ç.N. Penny: 1 kuruşa denk Amerikan para değeri
Dime: : 10 kuruşa denk Amerikan para değeri
Dollar: : 1 Türk Lirasına denk Amerikan para değeri

ve gösterebilirler. Farklı sütunlarda (tellerde) aynı boyutlarda boncukları olan abaküs gibi veya renklerine göre farklı basamak değerleri verilmiş renkli markalar gibi orantısal olmayan gösterimler, basamak değeri kavramlarının tanıtılması için değildir. Bunlar, öğrenciler sayı sistemlerini kavramsal olarak anladıklarında ve ek pekiştirmeye ihtiyaç duyduklarında kullanılırlar. Basamak değerleri arasındaki ilişkiyi anlamış fakat diğer matematik kavramlarını geliştirmede desteğe ihtiyaç duyan özel öğretim gereksinimi olan orta okul öğrencileri için çoğu kez para faydalı bir araçtır. Böyle yaşı daha büyük olan çocuklar bazen fasulye, blok ve birbirine geçmeli küpleri kullanmak istemezler çünkü onların daha küçük yaştaki çocuklar için olduğunu düşünürler.

Onluk Taban Kavramlarının Gelişimi

Madem şimdi basamak değeri kavramlarını geliştirmek için çocuklara yardımcı olma görevi hakkında bir fikre sahipsiniz, bu görevde yardımcı olacak etkinliklere odaklanmaya başlayabiliriz. Bu bölüm Şekil 11.3'teki fikirler üçgeninin tepesine odaklanır: onluk taban kavramları veya onluklar halinde gruplama. Çoklukları tanımlamak için onlu grupları saymanın ana fikri, açık bir şekilde geliştirilmesi gereken en önemli unsurdur. Bu kritik fikirlerin, sayı yazımındaki basamak değeri sistemleri ve sayıları söyleme şeklimiz – Şekil 11.3'teki üçgenin alt iki köşesi –ile bağlantıları, kavramsal hedeflere odaklanmanıza yardımcı olmak için ayrı ayrı tartışılmıştır. Bununla birlikte, sınıf içerisinde sayıların sözel ve yazılı isimleri uyum içinde ve neredeyse her zaman modelleri kullanarak kavramsal fikirlere bağlantılı olarak geliştirilebilir ve geliştirilmelidir.

Gruplama Etkinlikleri

Çocuklar onluk taban kavramlarının gelişmesine sayıların birerli sayma fikri ile geldikleri için oradan başlamalısınız. Onluklar halinde gruplamayı çocuklara gelişigüzel benimsetemezsiniz. Biz çocukların miktarları benzer büyüklükte gruplarla gösterme ile ilgili deneyler yapmalarını ve belki de on'un kullanmak için çok yararlı bir büyüklük olduğu üzerinde anlaşmalarını istiyoruz. Takip eden etkinlik birinci sınıfın sonunda ve ikinci sınıfta yapılabilir ve gruplama kavramlarının gelişmesine yönelik ilk girişimin örneği olarak tasarlanmıştır.

Etkinlik 11.1

Gruplarla Sayma

Çocukların saymak için ilgilerini çekebilecek maddeler bulun – belki sınıftaki gözlerin veya ayakkabıların sayısı, gizemli bir kutu düğme veya küpler, uzun bir plastik zincir, boya kalemi kutusundaki kalemlerin sayısı. Çokluk, sayılabilir olmalıdır (25 ile 100 arasında olacak şekilde). Soruyu yöneltin, "Ayakkabılarımızı birerli saymaktan daha kolay olacak şekilde nasıl sayabiliriz?" Her ne öneri alırsanız alın, uygulamayı deneyin. Birkaç yöntemi denedikten sonra, neyin iyi işlediğinin ve neyin işlemediğinin tartışmasını yapın. Eğer kimse onlarla saymayı önermez ise, siz bunu gelişigüzel bir biçimde olası bir başka fikir olarak önerebilirsiniz.

Bir öğretmen, ikinci sınıf öğrencilerinden, her birisine ceplerinin her biri için birer birbirine geçmeli küp verdikten sonra, bütün küpleri saymaları için iyi bir yol bulmalarını istedi. İlk öneri yedişerli saymaydı. O yol denendi fakat çok iyi işlemedi, çünkü ikinci sınıf öğrencilerinin hiçbiri yedişerli sayamadı. Daha hızlı bir yol arayışında bir sonraki öneri ikişerli saymaydı. Bu, birerli saymadan çok da iyi bir yönteme benzemiyordu. En sonunda onarlı sayma konusunda karar kıldılar ve, beşerli saymanın da iyi işlemesine rağmen, onarlı saymanın oldukça iyi bir yöntem olduğunun farkına vardılar.

Bu ve benzer etkinlikler, "çabuk" sayma yolu başlamadan önce materyallerin aslında onarlı gruplar halinde düzenlenebileceğini önermek için size bir fırsat sağlamaktadır. Çocukların "on, yirmi, otuz, otuz-bir, otuz-iki" gibi sayabileceğini fakat çoklukların "otuz ikiliğininin" tam olarak farkına varamayabileceklerini hatırlayınız. Onarlı sayma yöntemini anladıkları birerli sayma yöntemiyle ilişkilendirmek için çocuklar her iki yol ile de saymalı ve neden aynı sonucu elde ettiklerini tartışmalıdırlar.

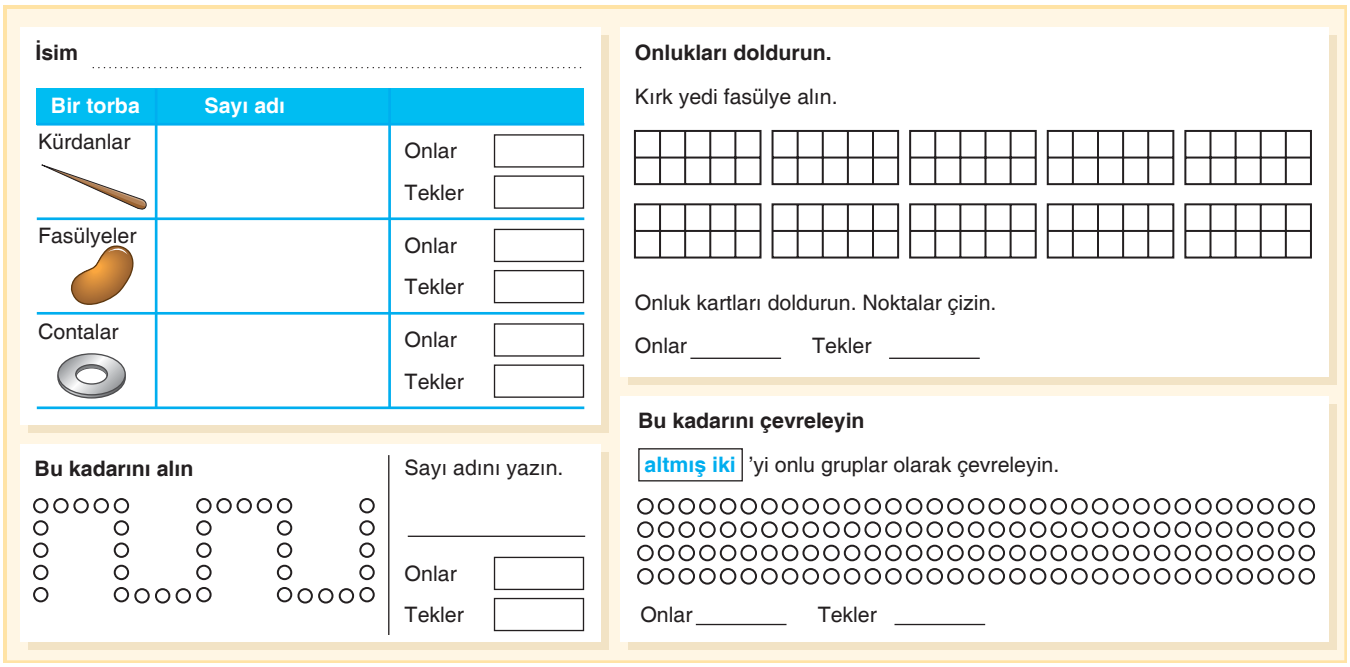
Bir sonraki etkinlikteki fikir çocukların onlu gruplamalar yapması ve miktarları söyleyebilmeleri veya kaydedebilmeleridir. Sayıların adları, çocukların onları ve birleri tek tek basamaklarla mekanik olarak eşleştirmemeleri için kullanılır. Çocukların gerçek çokluklarla kendilerine anlamlı gelecek şekilde yüzleşmeleri önemlidir.

Etkinlik 11.2

10'luk Gruplar

Kürdan, düğme, fasulye, plastik marka,birbirine geçmeli küpler, maket çubukları ve benzeri gibi farklı cinste sayma nesnelerinin olduğu torbalar hazırlayınız. Çocukların Şekil 11.6'da en üstteki örnekteki gibi kayıt sayfaları olsun. Torbalar odanın etrafındaki istasyonlara yerleştirilebilir veya çiftler halindeki çocuklara verilebilir. Çocuklar torbaları boşaltırlar ve içindekileri sayarlar. Miktar, sayının kelime adı olarak kaydedilir. Sonra sayma nesneleri mümkün olduğu kadar çok onluklar halinde gruplandırılır. Gruplandırmalar form üzerine kaydedilir. Bütün sayma nesneleri torbalara geri konduktan sonra ya torbalar değiştirilir ya da öğrenciler bir başka istasyona geçerler.

"10'lu Gruplar" etkinliğinin değişik biçimleri Şekil 11.6'daki diğer kayıt sayfalarında önerilmiştir. "Bu Kadarını Alın" etkinliğinde çocuklar noktaları sayar ve daha sonra karşılık gelen sayı kadar sayma nesnesini sayarlar. Onlu grupları koymak için küçük porsiyon kapları verilmelidir. Etkinliğin,



Şekil 11.6 Sayı adlarını ve 10'lu gruplar yapmayı içeren etkinlikler.

öğrencilerin önce kümeyi kendi anladıkları yoldan saymalarını, miktarı kelime olarak kaydetmelerini ve daha sonra gruplamayı yapmalarını gerektirdiğine dikkat ediniz. Etkinlik öğrencilerin anlamlı bir şekilde saymaları ile başlar ve grup fikrini geliştirir. "Onlukları Doldur" ve "Bu Kadarını Çevreleyin" sözel bir isim (sayı adı) ile başlar ve öğrencilerin belirtilen miktarı saymaları ve sonra grup yapmaları gerekir.



Çocukları bu etkinlikleri yaparken izlediğinizde onların onluk taban kavramlarının gelişimi hakkında oldukça çok şey öğrenebileceksiniz. Örneğin, çocuklar nesneleri nasıl sayıyorlar? Onarlı gruplar yapıyorlar mı? 10'a kadar sayıp sonra tekrar 1'den mi başlıyorlar? Bunu yapan çocuklar zaten onluk taban yapısını kullanıyordur. Fakat ilk başlarda büyük olasılıkla, tüm kümeyi *on*larda hiç durmadan sayan ve yığındaki materyalleri gruplamak için hiç çaba sarfetmeyen çocuklar göreceksiniz. Bir ikinci sınıf öğretmeni bir kavanoz küçük fasulyeyi öğrencilerine saydırır. Öğrencilerin, sayıyı kaydettikten sonra, içinde onlu gruplar yapmak üzere porsiyon kaplarını istemeleri gerekmektedir. Birkaç öğrenciye kaç tane kaba ihtiyaçları olabilecekleri hakkında ne düşündükleri sorulduğunda ya hiçbir fikirleri yoktu ya da rasgele tahminde bulundular. Bu öğrencilerin basamak değeri bilgileri hakkında ne bilebilirsiniz? ◆

Gruplama kavramlarını ölçme etkinlikleri ile birlikte entegre etmek oldukça kolaydır. Bu, her iki alana da daha fazla ilgi uyandıracağı gibi öğretim programınızda size zaman kazandıracaktır. Bölüm 19'da okuyacağınız gibi ölçme etkinliklerinin ilk kısımlarına bir tahmin unsurunun eklenmesi öğrencilerin ölçme kavramlarını anlamalarına yardım etmede önemlidir. Sıradaki ölçme etkinliğinde tahmin etme, öğrencilerin nicelikleri onlu gruplamalar halinde düşünmelerine yardımcı olma görevi de görür.

Etkinlik 11.3

Onlu ve Birli Grupları Tahmin Etme

Öğrencilere ölçecekleri bir uzunluk gösterin – örneğin, uzanan bir öğrencinin uzunluğu veya bir gazete kağıdının etrafındaki mesafe. Uzunluğun bir ucunda on birimi (örneğin, on tane birbirine geçmeli küp, kürdan, sütun veya bloklar) sıralayın. Öğrenciler,uzunluğa kaç tane onlu ve birli grubun sığacağı hakkındaki tahminlerini kayıt sayfası üzerine (Bkz. Şekil 11.7) yazsınlar. Sonra gerçek ölçümü, birimleri tüm uzunluk boyunca yerleştirerek bulurlar. Bunlar birerli sayılabilir ve de onlular halinde gruplandırılır. Her iki sonuç da kaydedilir.

Tüm basamak değeri unsurlarının Etkinlik 11.3'ün içinde bulunduğuna dikkat ediniz. Çocuklar oda içerisindeki birkaç uzunluğu ölçmek için ikili gruplar halinde çalışabilirler. Benzer bir tahmin yaklaşımı "10'luk Gruplar" etkinliğine (Etkinlik 11.2) eklenebilir ve öğrenciler önce torbadaki miktarı tahmin ederler. Tahmin etme,gruplar halinde ifade edilen miktarlara ilişkin derinlemesine düşünmeyi gerektirir.



Öğrencilerin tahminlerini dinlemek de çocukların sizin o anki etkinlikleriniz aralığında yer alan sayı kavramları hakkında epey bir fikir vermesi açısından faydalı bir değerlendirme olanağıdır. ◆

İSİM Jessica

NESNE	TAHMİN	GERÇEK DEĞER
desk	5 ONLUK 6 BİRLİK	3 ONLUK 2 BİRLİK thirty-two *Sayı Adı*
	ONLUK BİRLİK	ONLUK BİRLİK *Sayı Adı*

Şekil 11.7 Onlu ve birli grupları tahmin etmek için kayıt sayfası.

Birlik, Onluk ve Yüzlüklerin Tuhaflığı

Bir anlığına "yedi birlik" demenin ne kadar tuhaf olduğunu düşünün. Şüphesiz çocuklar hiçbir zaman "yedi birlik" yaşında olduklarını söylememişlerdir. *On* kelimesinin tekil grup ismi olarak kullanımı daha gizemlidir. "On tane bir, bir tane on yapar" cümlesini düşünün. İlk *on* alışılmış 10 şey anlamını taşır, 9 şeyden 1 fazla olan miktar. Fakat diğer *on* tekil bir isimdir (bir şey yani). Çocuğun yıllardır birçok şeyin ismi olarak bildiği şey nasıl bir anda bir şey olabilir? 10'lu demetler, desteler, kaplar ve gruplar başlangıçta "bir on"dan daha fazla anlam ifade eder.

Öğrenciler 10'lu gruplar yapmaya başladıklarında bu gruplamaların terminolojileri de tanıtılmalıdır. Başlangıçta "onlu ve birli gruplar" veya "onlu ve tekli demetler" gibi bir terminoloji en anlamlı olanıdır. On'lar için hangi terminoloji uygunsa onu kullanın: 10'lu çubuklar, 10'lu kaplar, 10'lu desteler. Sonunda bunu basit bir şekilde "on" olarak kısaltabilirsiniz. Kalanlar için "birlik" kelimesini kullanmakta acele etmenize gerek yok. "Dört onluk ve yedi" gibi bir dil kullanmanız da pekala işinize yarar.

Yüz kelimesi eş derecede tuhaftır fakat genellikle daha az dikkat çeker. *Yüz*,üç şekilde anlaşılmalıdır: 100 tek nesne, 10 onluk ve tekil bir şey olarak. Bu sayı adları göründükleri kadar kolay değildir!

100 Yapmak İçin Onlukları Gruplama

Şimdiye kadar ağırlıklı olarak öğrencilere birerli saymadan onlu grupların nasıl daha etkili bir şekilde kullanabileceğini anlamlarına geçiş yapmalarında yardım etmeye odaklandık. İkinci sınıfta 100'den 999'a kadar sayılar önemli hâle gelir. Burada sorun birerli saymayı 100'lü grupla ilişkilendirmekten ziyade 100'lü bir grubun nasıl hem 10 onluktan oluşan bir grup hem de 100 tek birlik olarak anlaşılabileceğini görmektir. Ders kitaplarında bu bağlantı sıklıkla bir sayfada 10 onluk çubuğun nasıl 1 yüzlük yapmak üzere bir araya getirilebileceğini gösterir biçimde resmedilmiştir. Bu aceleci gösterim birçok öğrenci üzerinde etki uyandırmamaktadır.

Yüzlükleri 10 onlu grup ve 100 tekli olarak tanıtmada bir araç olarak aşağıdaki tahmin etme etkinliğini düşünün.

Etkinlik 11.4

Bir Sürü Onluk

Öğrencilere 150-1000 parçadan oluşan birçokluğu gösterin. Örneğin, bir kavanoz kuru fasulye kullanabilirsiniz. Alternatifler uzun bir zincir veya ataş ya da bir kutu paket dolgu köpüğü olabilir. İlk önce, öğrencilere bir kavanozda kaç tane fasulye olduğuna yönelik tahminler yaptırın ve kaydettirin.Öğrencilerle bu tahmini nasıl yaptıklarını tartışın. İkili ya da üçlü öğrenci gruplarına onarlı fasulye kaplarını doldurmak üzere fasulye paylarını verin. Artan fasulyeleri toplayın ve bunları da onarlı gruplar haline getirin. Şimdi "Bu onlu grupları kaç tane fasulyemiz olduğunu söylemek için nasıl kullanabiliriz? Onarlı gruplardan yeni gruplar yapabilir miyiz? Onlu gruplar nasıl adlandırılır?" sorularını sorun. Eğer fasulyeler için kaplar kullanılıyorsa, on kap alabilecek daha büyük başka kaplar hazırda olsun. Bütün gruplar yapıldığında yüzlükleri, onlukları ve birlikleri ayrı ayrı sayın. Tahtaya "4 yüzlük + 7 onluk + 8 birlik" şeklinde yazın.

En son etkinlikte gruplandırılabilir modelleri kullanmak önemlidir. Böylece öğrenciler on grubun nasıl 100 parça yaptığını görebilirler. Bu önceden gruplandırılmış onluk taban modellerinden 100'lük yüzey veya kare basit gösterimlerinde sıklıkla gözden kaçar.

Denk Gösterimler

Gruplama etkinliklerinin önemli bir değişik biçimi, sayıların denk gösterimlerini hedef alır. Örneğin, bir torba dolusu sayma nesnesi ile yapılan "10'lu Gruplar" etkinliğini yeni

tamamlamış çocuklara, "42'yi 4 grup ve 2 tekliden başka hangi yolla gösterebilirsiniz? Bakalım kaç farklı yol bulabileceksiniz." sorusunu sorun. Sıradaki etkinlikler de denk gösterimler oluşturma fikrine yöneliktir.

Etkinlik 11.5

Tuhaf Gruplamalar

Sadece bir kısmı onlu kümeler halinde gruplanmış bir materyal topluluğu gösterin. Örneğin, 5 adet 10 halkalı zincir ve 17 tane ekstra halka olabilir. Çocukların her grupta on'ar parça olduğunu anladığından emin olun. Grupların sayısını sayın ve teklileri de sayın. "Hepsi toplamda kaç tane?" sorusunu sorun. Bütün cevapları kaydedin ve saymadan önce tartışın. Öğrencilerin saymak için hangi yolu isterlerse kullanmalarına izin verin. Sonra gruplamaları değiştirin (teklilerden bir onlu yapın veya bir onluyu parçalara ayırın) ve soruları ve tartışmayı tekrarlayın. Birinden diğerine toplam sayıyı değiştirmeyin. Öğrenciler toplamın değişmediğini anladıklarında parçaların onlular ve birleri kullanarak başka nasıl gruplandırılabileceğini sorun.

Üçüncü sınıfta ders veriyorsanız, yüzlüklerin onlu gruplar halindeki denk gösterimleri, bir yüz'ün 10 onluk olduğu kavramına yardımcı olur. Sıradaki etkinlik "Tuhaf Gruplamalar" etkinliğine benzer fakat önceden gruplandırılmış materyaller kullanılarak yapılır ve yüzlükler içerir.

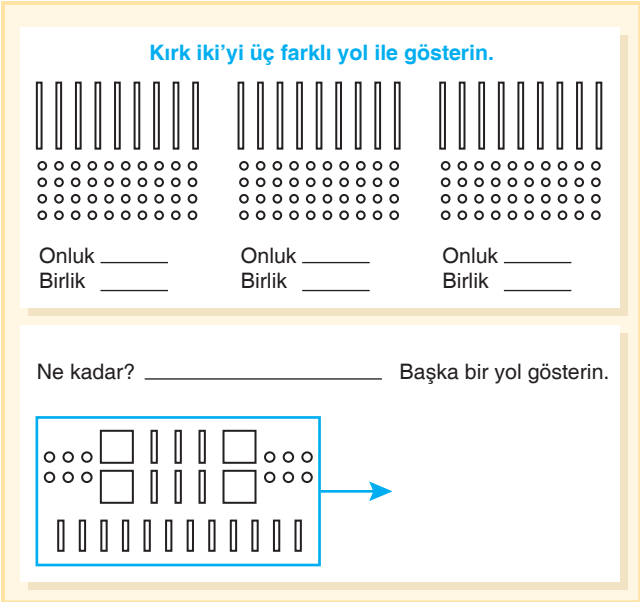
Etkinlik 11.6

Üç Farklı Yol

Öğrenciler ikili ya da daha büyük gruplar halinde çalışır. İlk önce "dört yüz altmış üç"ü sıralarında şeritler ve kareler kullanarak standart gösterim ile gösterirler. Daha sonra bu sayıyı göstermenin en az üç farklı yolunu bulur ve kaydederler.

"Üç Farklı Yol" etkinliğinin bir değişik biçimi öğrencileri belirli bir sayıda parça kullanarak bir miktarı gösterecek bir yol bulmaları için düşündürmektir. "463'ü 31 parça ile gösterebilir misiniz?" (Bunu yapabilmenin birden fazla yolu vardır). 3 veya 4. sınıftaki öğrenciler üç basamaklı bir sayıyı göstermeninbütün yollarını bulmak ile oldukça ilgilenebilirler.

Öğrenciler önceden gruplandırılmış materyallerle yeterince deneyim kazandıktan sonra yarı soyut "nokta, çubuk ve kare" simgeleri birler, onlar ve yüzleri yazmak için kullanılabilir. Öğrenciler üçüncü sınıf olduklarında,Şekil 11.8'de gösterildiği gibi, küçük kareleri yüzler için kullanabilirler. Çizimleri, çocuklara problemleri çözmek için hangi materyalleri çıkartmaları gerektiğini söylemek için bir araç



Şekil 11.8 Kare-çubuk-nokta resimleri kullanılan denk gösterim alıştırmaları.

ve de çocukların sonuçlarını kaydetmeleri için bir yol olarak kullanın.

Sıradaki etkinlik denk gösterim fikirleriyle beraber sözel dili birleştirmeye başlar.

Etkinlik 11.7

Onluk Taban Bilmeceleri

Onluk taban bilmeceleri sözel ya da yazılı formda sunulabilir. Her iki durumda da öğrenciler bilmeceleri çözmek için onluk taban materyalleri kullanmalıdırlar. Burada farklı zorluk seviyelerinde örnekler gösterilmiştir. Bunları tamamladıktan sonra öğrencilerden yeni bilmeceler yazmalarını isteyiniz.

23 birlik ve 4 onluğum var. Ben kimim?

4 yüzlük, 12 onluk ve 6 birliğim var. Ben kimim?

30 birlik ve 3 yüzlüğüm var. Ben kimim?

Ben 45'im. 25 tane birliğim var. Kaç tane onluğum vardır?

Ben 341'im. 22 tane onluğum var. Kaç tane yüzlüğüm vardır?

13 onluk, 2 yüzlük ve 21 birliğim var. Ben kimim?

Bana 3 tane daha onluk eklersen, ben 115 olurum. Ben kimim?

17 tane birliğim var. Ben 40 ile 50 arasındayım. Ben kimim? Kaç tane onluğum vardır?

Sayılar İçin Sözel ve Yazılı İsimler

Bu bölümde çocuklara, Şekil11.3'teki üçgenin alt iki köşesini – sayılar için sözel ve yazılı isimleri – yeni gelişen onluk taban kavramları olan onlu grupları etkili sayma yöntemleri olarak kullanma ile ilişkilendirmeye yardımcı olmaya odaklanacağız. Sayıları nasıl yazdığımız ve söylediğimizin kavramlardan daha çok teamüller olduğuna dikkat ediniz. Öğrenciler bunları problem temelli etkinliklerden ziyade onlara söylenmesi ile öğrenmelidir. Anadili İngilizce olmayan öğrenciler için İngilizce sayı adlarında kullanılan teamüller ve örüntülerin kendi ana dillerindekilerle muhtemelen aynı olmaması hatırlanmaya değerdir.[2] Bu, özellikle 11'den 19'a kadar olan sayılar için doğrudur.

İki Basamaklı Sayı İsimleri

Çocuklar birinci ve ikinci sınıfta onluk taban kavramlarını çok sefer kullandıkları sözel sayı adları ile ilişkilendirmeliler. Kelimeleri biliyorlardır fakat onları onluklar ve birlikler açısından düşünmemişlerdir.

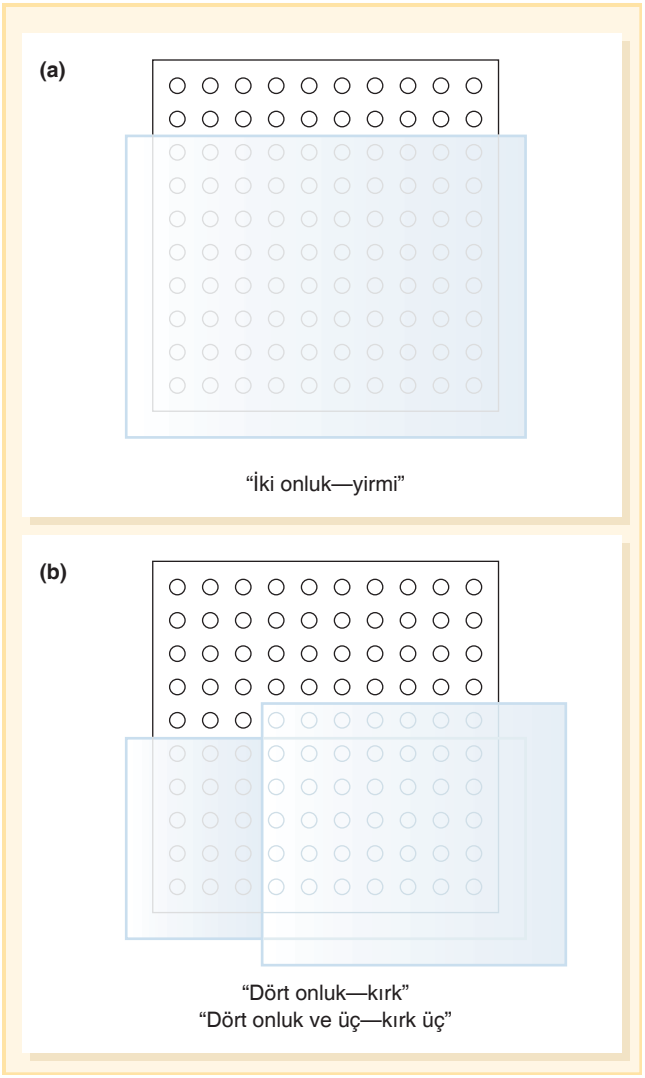
Sözel isimleri öğretirken neredeyse her zaman onluk taban modellerini kullanın. Başlangıçta standart sayı adlarını kullanmak yerine daha açık olan onluk taban dili kullanılabilir. Onluk taban dilinde "kırk yedi" demek yerine "dört onluk ve yedi birlik" dersiniz. Onluk taban dili nadiren yanlış anlaşılır. Uygun göründüğünde onluk taban dili ile standart dili eşleştirmeye başlayın. 13'ten 19'a kadar olan sayıları istisna olarak vurgulayın. Bu sayıların "ters yönde" oluşturulduklarını ve kalıba uymadıklarını belirtin.[3] Sıradaki etkinlik sayıların sözel isimlerini tanıtmak için faydalıdır.

Etkinlik 11.8

10'lu Satırları Saymak

Tepegözde 10 x 10 nokta dizilimini gösterin. Şekil 11.9'daki gibi iki satır hariç diğerlerini kapatın. "Kaç tane onluk? [2]. İki onluk *yirmi* olarak isimlendirilir." Sınıftan bunu tekrar etmesini isteyin. Başka bir satır gösterin. "Üç onluk *otuz* olarak isimlendirilir. Dört onluk *kırk*'tır. Beş onluk *elli*'dir."[4] Dizilimin farklı kısımlarını kapatarak kaç tane onluk olduğunu ve o kadar onluğun isimlerini sorun.

Aynı 10 × 10 dizilimini onlukların ve birliklerin isimleri üzerinde çalışmak için kullanın. Örneğin, dört tam satır, "kırk," gösterin. Sonra beşinci satırdan bir nokta daha gösterin. "Dört onluk ve bir. Kırk bir." Sırayla birer nokta daha ekleyin. "Dört onluk ve iki. Kırk iki." "Dört onluk ve üç. Kırk üç." Bu, Şekil 11.9'da gösterilmiştir. Örüntü oluşturulduğunda yirmiden doksana kadar diğer onluklarla da tekrar edin.



Şekil 11.9 10 x 10 nokta dizilimi, onluk ve birlik kümelerini modellemek için kullanılır (Çalışma Yaprak Seti 12).

Bu temel yaklaşımı diğer onluk taban modelleri ile tekrarlayın. Sıradaki etkinlik bunun nasıl yapılabileceğini göstermektedir.

Etkinlik 11.9

Onluk Taban Modelleri ile Saymak

Şekil 11.10'da gösterildiği gibi birkaç onlu parçayı tepegözde veya etkileşimli beyaz tahtada veya sadece yerde karışık bir düzenleme halinde gösterin. Kaç tane onluk olduğunu sorun. Bir tane on ekleyin ya da çıkartın ve soruyu tekrarlayın. Sonra birkaç tane birlik ekleyin. Çocuklardan daima onluk taban ve standart isimleri vermelerini isteyin. Gösterilen materyallerde 1 veya 2 onluk ve birlikler ekleyip çıkartarak değişiklikler yapmaya

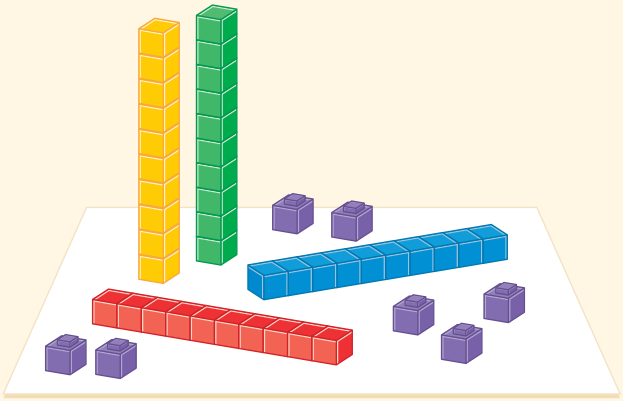
[2] Ç.N. Anadili Türkçe olmayan öğrenciler için Türkçe'de sayılar için kullanılan teamüller ve kalıplar farklılık gösterebilir. Bu durum dikkat edilmesi gereken bir noktadır.

[3] Ç.N. Buradaki iki cümle sayıların İngizceler'i için geçerlidir. Türçe'de sayılar kurallı bir şekilde oluşturulur ve istisnai bir durum söz konusu değildir.

[4] Ç.N. Orjinal metinde "Five teens could have been fivety but is just fifty" yer alıyordu. Türkçe'nin yapısı gereği "fivety" Türkçe'ye çevrilemez. *Altmış*, *yetmiş*, *seksen*, *ve doksan* isimleri İngilizce'de kalıplara uysa bile Türkçe'de benzer bir kalıp yoktur. Bu sebepten bu cümlenin çevirisi yapılmamıştır.

devam edin. Onluk ve birlikler için standart soldan sağa sıralamadan kaçınırsak vurgu, materyallerin hangi sıralamada olduklarının değil isimlerinin üzerinde olur.

Öğrencilere onluk taban parçalarını kendi sıralarında kullandırarak etkinliği tersine çevirin. Örneğin, siz "63 yapın" deyin. Çocuklar sayıyı modellerle yaparlar ve sonra onluk taban ismini verirler.



"Dört onluk ve yedi birlik – kırk yedi"

Şekil 11.10 47 için onluk taban ve stardart isimleri kullanma

Etkinlik 11.8 ve 11.9'un tartışmalarla daha da geliştirilebileceğine dikkat ediniz. Çocuklara düşüncelerini açıklattırın. Eğer çocukların cevapları hakkında düşünmelerini zorunlu kılmazsanız, bir süre sonra sizin istediğiniz cevabı, toplam çokluk hakkında gerçekten düşünmeden sayı adlarını modellerle eşleyerek nasıl vereceklerini öğrenirler. Sıradaki etkinlik aynı hedefe sahiptir.

Etkinlik 11.10

Onluklar, Birlikler ve Parmaklar

"6 [veya 10'dan daha az bir sayıda] parmağı nasıl gösterirsiniz?" sorusunu sınıfınıza sorun. Sonra "37 parmağı nasıl gösterirsiniz?" diye sorun. Bazı çocuklar en azından dört çocuk gerekeceğini düşünüp bulacaklardır. Dört çocuğu sıralayın ve üçünün 10 parmağını ve son çocuğun 7 parmağını kaldırmasını isteyin. Sınıfa parmakları onlu ve birlilerle saydırın. Başka çocuklardan farklı sayılar göstermelerini isteyin. 10 parmak kümelerinin ve tek parmakların sayısını (onluk taban dili) vurgulayın ve bunu standart dil ile eşleştirin.

Üç Basamaklı Sayı İsimleri

Üç basamaklı sayı adları için yaklaşım, temelde iki basamaklı isimler için olan ile aynıdır. Karışık düzenlenmiş onluk taban materyalleri gösterin. Çocuklardan onluk taban isimlerini ve standart isimleri söylemelerini isteyin. Bir örnekten diğerine sadece bir tip parçayı değiştirerek farklı düzenlemeler yapın. Bir başka deyişle, sadece birlikler veya sadece onluklar ya da sadece yüzlükler ekleyin veya çıkartın.

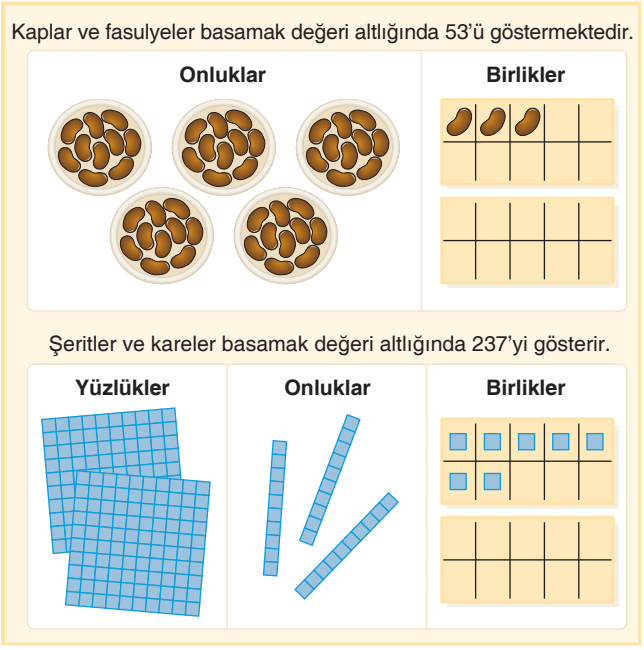
Benzer şekilde, çocuklardan sözel olarak standart isimlerini verdiğiniz sayıların kendi sıralarında modellerini yapmalarını isteyin. Çocuklar üç basamaklı sayılar için hazır olduklarında 13'ten 19'a kadar olan sayılarla[5] yaşadıkları zorluklar dâhil olmak üzere iki basamaklı sayı adlarını genellikle iyice anlamış olurlar. Başlıca zorluk 702 gibi onluk içermeyen sayılarladır. Daha önce bahsedildiği gibi burada onluk taban dilini kullanmak oldukça faydalıdır. Sıfır-onluk zorluğu, sayıların yazımında daha belirgindir. Çocuklar sıklıkla "yedi yüz iki" yerine 7002 yazarlar. Sözel onluk taban dilindeki anlama vurgu önemli bir yardımcı olacaktır.

Yazılı Semboller

Basamak değeri paletleri, Şekil 11.11'deki gibi, birlik ve onlukları veya birlik, onluk ve yüzlükleri koymak için iki veya üç bölüme ayrılmış sıradan altlıklardır. Öğrencilerinize onluk taban parçaları ile çalışırken altlıkları materyalleri düzenlemek için iyi bir yol olarak önerebilirsiniz. Basamak değeri altlığının standart kullanımının birlikler için olan boşluk sağda, onluk ve yüzlükler için olan yerler sola doğru olacak biçimde olduğunu açıklayınız.

Geleneksel ders kitaplarında yaygın bir şekilde görülmemesine rağmen, birliklerin yerine gösterildiği gibi iki tane onluk çerçeve çizilmesi şiddetle tavsiye edilir (Bkz.

[5] 13'ten 19' kadar olan sayılar (teens) Türkçe'de çocukların problem yaşadıkları bir kavram değildir.



Şekil 11.11 Birliklerin yerinde iki tane onluk kartı içeren basamak değeri altlıkları, sayma nesnelerini düzenler ve onlu gruplar kavramını destekler.

Çalışma Yaprak Seti 17). O şekilde onluk kartlar üzerindeki birlerin miktarı her zaman açık bir şekilde ortadadır ve sıkıcı ve sık sık tekrarlanan saymaya olan ihtiyacı ortadan kaldırır. Onluk kart bir sonraki onluğu yapmak için kaç tane ek sayma nesnesine ihtiyaç olduğunu çok açık hâle getirir. Eğer çocuklar iki sayıyı aynı anda modelliyorlarsa, her bir sayı için bir onluk kart kullanabilirler.

Çocuklar kendi basamak değeri altlıklarını kullanırlarken, parçaların soldan sağa dizilişlerinin aynı zamanda sayıların yazılış şekli olduğu gösterilebilir. Basamak değeri altlığı, onluk taban modelleri ile sayıların yazılı formları arasındaki bağlantıyı kurar. Bir kez daha bir çocuk için, sayının neyi temsil ettiğini, hakkında hiç kavramsal anlayışa sahip olmadan, bir sayıyı altlık üzerinde onluk ve birlik parçaları kullanarak gösterebilmenin ve sayıyı yazmayı öğrenmenin ne kadar kolay olduğunun farkında olunuz. Birinci ve ikinci sınıf ders kitapları sıklıkla bir model gösterir ve çocuklardan sayıları aşağıdaki tarzda yazması istenir:

7 onluk ve 3 birlik toplamda 73 'tür.

Şerit ve tekli karelerin sayılarını olduğu gibi kağıda geçirmek ve bu basamakları 73 gibi tek bir sayı olarak tekrar yazmak ve bu sembollerin ne anlama geldiği ile uğraşmamak çok kolaydır.

Sıradaki üç etkinlik, çocuklara üç gösterimin hepsi arasında ilişki kurmada yardımcı olmak için tasarlanmıştır: modeller, sözel dil ve yazılı form. Bu etkinlikler birinci sınıftan dördüncü sınıfa kadar iki veya üç basamaklı sayılarla yapılabilir.

Etkinlik 11.11



Sayıyı Söyle/Sayıyı Tuşla

Birlik ve onluklarla (ve yüzlüklerle) karışık düzende birkaç model gösterin. (Tepegöz veya etkileşimli beyaz tahta kullanın veya kare-çubuk-nokta yöntemini kullanarak tahtaya çizin.) Öğrenciler gösterilen miktarı onluk taban dilinde ("dört yüzlük, bir on, ve beş") ve sonra standart dilde ("dört yüz on beş") söylerler ve en sonunda bu miktarı hesap makinesine girerler. Bir kişiye ekranını paylaşmasını ve savunmasını isteyin. Materyallerde değişiklik yapın ve etkinliği tekrar edin.

"Sayıyı Söyle/Sayıyı Tuşla" etkinliği özellikle 13'ten 19'a kadar olan (etkinliğin açıklamasındaki örneğe dikkat edin) ve sıfır onluklu üç basamaklı sayılara yardım için faydalıdır. Eğer 7 yüzlük ve 4 birlik gösterirseniz, sınıf "yedi yüzlük, sıfır onluk ve dört – yedi yüz (*kısa bir duraklama*) dört" der. Duraklama ve onluk taban dili, doğru üç basamaklı sayıyı tuşlamayı veya sayıyı yazmayı akla getirir. Daha önce bahsedildiği gibi, birçok öğrenci bu örnekle sorun yaşar ve standart isimde ne duyduysa aynen onu, yani "7004," yazar. Bu etkinlik yardımcı olacaktır. Sıradaki etkinlik sadece öğrencilere sunulan ilk gösterimi değiştirir.

Etkinlik 11.12



Sayıyı Göster/ Sayıyı Tuşla

Bir sayının (iki veya üç basamaklı) standart ismini söyleyin. Çocuklar sıralarında o sayıyı göstermek için kendi onluk taban modellerini kullanırlar ve sayıyı hesap makinelerine girerler (veya yazarlar). 13'ten 19'a kadar olan sayılara ve sıfır onluk durumlarına özel dikkat harcayın.

Takip eden etkinlik on yıllardır popülerdir ve basamak değeri gelişiminin erken safhalarında olan öğrenciler için faydalı bir zorluk olmaya devam eder.

Etkinlik 11.13



Basamak Değişimi

Öğrencilerden iki veya üç basamaklı belirli bir sayıyı hesap makinelerine girmelerini isteyiniz. Sonraki görev kolay bir şekilde yeni sayıyı girmeden sayının bir basamağını değiştirmektir. Örneğin, 48'i 78'e değiştirin. 315'i 305'e veya 295'e değiştirin. Değişimler uygun bir miktarı eklemek veya çıkarmakla yapılabilir. Öğrenciler çözümlerinin açıklamalarını yazmalı ve tartışmalıdırlar.



Öğrenciler sıklıkla basamak değerini anlamadaki eksikliklerini yönergeleri takip ederek, onluk ve birlik parçalarını belirlenmiş kurallar dahilinde kullanarak ve basamak değeri dilini kullanarak gizleyebilirler. Burada sunulan teşhis görevleri, çocukların basamak değerini anlamalarına daha yakından bakmanıza yardım etmek için tasarlanmıştır. Tüm sınıf için kullanılacak etkinlikler olmaktan ziyade teşhis için karşılıklı görüşmeler olarak tasarlanan bu etkinlikler birçok araştırmacı tarafından kullanılmış olup temel olarak Labinowicz (1985), Kamii (1985) ve Ross'un (1986) çalışmalarından uyarlanmıştır.

342 sayısını yazınız. Çocuklara bu sayıyı okutturunuz. Sonra çocuklardan bu sayının 1 fazlasını yazmalarını isteyiniz. Daha sonra bu sayıdan 10 fazla olan sayıyı sorun. Modelleri kullanarak daha derinlemesine incelemek isteyebilirsiniz. Bir azı ve 10 azı aynı yol ile kontrol edilebilir.

"Karşılık Gelen Basamak Etkinliği" olarak anılan bir sonraki etkinlik, basamak değeri gelişimi çalışmalarında yaygın biçimde kullanılmıştır. 36 blok çıkartın. Bir çocuktan blokları saymasını isteyin ve sonra kaç tane olduğunu söyleyen sayıyı yazmasını isteyin. 36'daki 6'yı yuvarlak içine alın ve "36'nın bu parçasının kaç tane blok olduğu ile hiçbir ilişkisi var mıdır?" sorusunu sorun. Sonra 3'ü yuvarlak içine alın ve soruyu aynen tekrarlayın. İpucu vermeyin. Gelen cevaplara göre, Ross (1989, 2002) basamak değerinin beş farklı anlama düzeyini belirlemiştir:

1. *Tekli sayı.* Çocuk 36 yazar fakat onu tek bir sayı olarak görür. Tek tek 3 ve 6 basamaklarının kendi başlarına bir anlamı yoktur.

2. *Konum isimleri*. Çocuk onluk ve birliklerin konumlarını doğru bir şekilde belirler fakat hâlâ tek tek basamaklar ve bloklar arasında ilişki kurmaz.
3. *Görünen değer*. Çocuk 6 blok ile 6'yı ve 3 blok ile 3'ü eşleştirir.
4. *Basamak değerine geçiş*. 6, 6 blok ile ve 3, kalan 30 blok ile eşleştirilir fakat 3 tane 10'lu grup olarak değil.
5. *Tamamen anlama*. 3, 3 tane 10lu blok grupları ve 6, 6 tane tekli blok ile ilişkilendirilir. ◆

Çok Basamaklı Sayılar ile Örüntüler ve İlişkiler

Bu bölümde tek tek sayılara yüzeysel bakıştan daha ötesine, sadece basamaklardan ziyade sayıların bütününe bakan yönelime doğru geçmek istiyoruz. Burada odak, sayı sistemimizdeki örüntüler ve sayıların birbirleri ile nasıl ilişkili oldukları üzerinde olacaktır. Sayıların önemli özel sayılarla ilişkisi ile ilgileniyoruz. Bu ilişkiler hesaplamayla örtüşmeye başlayan veya hesaplama için temel oluşturan ilişkilerdir. Standart temelli öğretim programında bu bölümde bulunanlara benzeyen fikirler neredeyse basamak değeri gelişiminin tamamını oluşturur ve daha önce tartışılan konulara daha az dikkat edilir.

Yüzlük Tablolar

Yüzlük tablo (Şekil 11.12) basamak değeri kavramlarının gelişmesinde o kadar önemli bir araçtır ki özel ilgiyi hak eder. Anaokulundan ikinci sınıfa kadar sınıflar, göz önünde olacak şekilde bir yüzlük tabloya sahip olmalıdır.

Yüzlük tabloların aşırı derecede önemli bir çeşidi, içlerine 100 sayı kartının her birinin konabileceği şeffaf ceplerden yapılmış olanıdır. Bir sayıyı, cebin içine sayının önüne gelecek biçimde boş bir kart koyarak gizleyebilirsiniz. Çeşitli sayı örüntülerini ön plana çıkarmak için ceplere renkli kağıt parçaları da koyabilirsiniz. Ve sayı kartlarını çıkartıp öğrencilerden onları doğru yerlerine yerleştirmelerini isteyebilirsiniz.

Bir yüzlük tablonun tepegöz asetatı veya etkileşimli beyaz tahta üzerinde gösterimi, neredeyse cep tablosu versiyonu kadar esnektir. Sayılar, üzerlerine şeffaf olmayan sayma nesneleri yerleştirilerek gizlenebilir. Örüntüler bir kalemle veya şeffaf sayma nesneleri ile işaretlenebilir. Boş bir 10 × 10 kare bölme asetatı, üzerine sayılar yazılabilecek boş bir yüzlük tablo görevi görür. Bu asetatlar Çalışma Yaprak Seti 21 kullanılarak yapılabilir.

Anaokulu ve birinci sınıf seviyelerinde, öğrencilere, yüzlük tablo ile iki basamaklı sayıları saymada ve tanımada, bu sayıları onluk taban dahilinde anlamalarının gelişiminden çok önce, yardım edilebilir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Şekil 11.12 Yüzlük tablo (Çalışma Yaprak Seti 22).

Etkinlik 11.14

Yüzlük Tablodaki Örüntüler

Çocuklardan yüzlük tablodaki örüntüleri bulmak üzere çiftler halinde çalışmalarını isteyiniz. Sınıftan sözel olarak fikirler isteyin. Çocukların hepsinin önerilen fikirleri tam olarak anladığından emin olmak için onlardan başkalarının bulduğu örüntüleri açıklamalarını isteyiniz.

Yüzlük tabloda çok sayıda örüntü vardır. Bir tartışmada, farklı çocuklar aynı örüntüyü çeşitli yollardan tarif edeceklerdir. Bütün fikirleri kabul edin. Çocukların işaret edebilecekleri bazı örüntüler şöyledir:

- Bir sütundaki sayılar hep aynı sayı ile (bu da en tepedeki sayıdır) son bulurlar.
- Bir satırda bir sayı "sayılır" (birler basamağı 1,2,3,...,9,0 şeklinde ilerler); veya "ikinci" sayı birerli artarak ilerler fakat ilk sayı (onlar basamağı) aynı kalır.
- Bir sütunda, ilk sayı (onlar basamağı) "sayılır" ya da birerli artarak ilerler.
- En sağdaki sütunda aşağı doğru giderek onarlı sayabilirsiniz.
- 2'nin altındaki bütün sayılar çift sayıdır. (Satırlardaki sayılar birer sayı arayla çift sayıları verir.)
- Beşerli sayarsanız iki sütun elde edersiniz: 5'in bulunduğu sütun ve en sondaki sütun.

Bu örüntüler çocuklar için hiç açık veya sıradan değildir. Örneğin, bir çocuk 4'ün altındaki sütunda bir örüntüyü fark edebilir – bütün sayılar 4 ile bitiyor. İki dakika sonra

başka bir çocuk 7 ile başlayan sütunda paralel bir örüntü "keşfedecektir." Bütün sütunlarda böyle bir örüntü olduğu tamamen aşikar olmayabilir.

Öğrencilere incelettirebileceğiniz diğer örüntüler şunları içerebilir: içerisinde 7 olan sayılar, basamaklarının toplamı dört olan sayılar, her iki basamağı da aynı olan sayılar (11, 22, vb.) ve çeşitli ritmik sayma örüntüleri.

Etkinlik 11.15

Ritmik Sayma Örüntüleri

Tüm sınıf etkinliği olarak öğrencilerden ikişerli, üçerli, dörtleri ve benzeri ritmik sayma yapmalarını isteyiniz. Sınıf olarak ritmik saydıktan sonra öğrencilerden, belirli bir ritmik sayma örüntüsünü kendi yüzlük tabloları üzerine,saydıkları her bir sayıyı boyayarak kaydetmelerini isteyiniz. Herbir ritmik sayma, tablo üzerinde ilginç bir örüntü oluşturur. Sayılardaki örüntüleri de tartışmalısınız. Örneğin, dörderli ritmik saydığınızda sadece ikişerli saydığınızda geldiğiniz sayıların üzerine dururusunuz. Hangi saymalar sütun örüntüleri ve hangi saymalar çapraz örüntüler oluşturur?

Ritmik sayma başlangıçta çocuklara oldukça zor gelebilir. Ritmik sayma konusunda kendilerini daha rahat hissettiklerinde yüzlük tablonun yardımı olmadan ritmik saymalarını isteyiniz. Ritmik sayma becerileri çarpma kombinasyonlarına hazır olma durumunu gösterir ve çocuklara sayılarda ilginç ve faydalı örüntüler aramaya başlamada yardım eder.

Etkinlik 11.16

Eksik Sayılar



Öğrencilere bazı sayı kartları çıkartılmış bir yüzlük tablo verin. Tüm sınıf etkinliği için cepli sınıf tablosunu veya tepegöz asetatı kullanın. Öğrencilerin görevi eksik olan sayıları yerine koymak veya ne olduklarını söylemektir. Bu etkinliğin başlangıç versiyonunda sadece rasgele seçilmiş tek tek sayılar çıkartılır. Sonra, üç ya da dört satırdan birkaç sayıdan oluşan sayı dizilerini çıkartın. Son olarak, bir veya iki satır ya da sütun hariç hepsini çıkartın. En sonunda öğrencilerden zorlu bir görev olarak boş bir tablodaki bütün sayıları yerleştirmelerini isteyiniz. (Çalışma Yaprak Seti 21.)

Boş bir tabloya sayı kartlarını ve karolarını yerleştirme iki öğrencinin beraber çalışabileceği güzel bir istasyon etkinliğidir. Öğrencilerin sayılar için doğru yerleri bulmaya nasıl başladıklarını dinleyerek onların 1-100 dizisini ne kadar iyi anladıklarını değerlendirebilirsiniz.

Etkinlik 11.17

Yüzlük Tabloda Daha Fazlası ve Daha Azı

Ya tamamen boş ya da neredeyse boş bir yüzlük tablo ile başlayın (Çalışma Yaprak Seti 21). Belirli bir eksik sayıyı yuvarlak içine alın. Öğrencilerin belirlenen sayıyı ve "komşularını" – sağındaki, solundaki, yukarısındaki ve aşağısındaki sayıları– doldurmaları gerekmektedir. Bu etkinlik tepegözde veya beyaz tahtada tüm sınıfla birlikte yapılabilir ya da boş yüzlük tablolar veya 10 x 10 kareli bölümler kullanılarak çalışma yaprakları hazırlanabilir. Öğrenciler bir sayının komşularının isimlerini rahatlıkla söyleyebilir hâle geldikten sonra komşu sayılar hakkında ne farkettiklerini sorunuz. Solundaki ve sağındaki sayılar, verilen sayının bir fazlası ve bir eksiğidir. Yukarıdaki ve aşağıdakiler ise sırasıyla on azı ve on fazlasıdır. Ya çaprazdakiler? Öğrenciler bu ilişkileri tablo üzerinde tartışarak sayıların dizilişinin sayısal ilişkilerle nasıl bağlantılı olduğunu görmeye başlarlar.

Öğrencilerin sayı dizilerindeki örüntüleri öğrenmek için ilk başta yüzlük tabloyu kullanacaklarına dikkat ediniz. Birçok öğrenci, özellikle anaokulu veya birinci sınıf düzeyindekiler, son etkinlikte tartışılanlar gibi uygun sayısal ilişkileri anlamayacaklardır. Takip eden etkinlikte tablodaki sayı ilişkileri, onluk taban modellerinin kullanımı dâhil edilerek daha açık hâle getirilir.

Etkinlik 11.18

Yüzlük Tabloyla Modeller

İki basamaklı sayılar için öğrencilerin aşına oldukları herhangi bir fiziksel modeli kullanın. Küçük onluk kartlar önerilir.

- **Çocuklara önce modellerle yapmaları ve sonra tablo üzerinde bulmaları için bir ya da daha fazla sayı verin. Ya aynı satır ya da aynı sütunda bulunan iki veya üç sayıdan oluşan gruplar kullanın.**
- **Tablo üzerinde bir sayı belirtin. Bu sayının komşularını (solundaki, sağındaki, yukarısındaki ve altındaki sayıları) elde etmek için neyi değiştirmeniz gerekir?**

Yüzlük tablo çok küçük çocukların bile sayı kavramlarını genişletebilir. Çocuklar aşina oldukları herhangi bir sayı için kombinasyonlar bulmakta yüzlük tabloyu kullanabilirler. Öğrenciler, büyük sayıların nasıl küçük sayılardakine benzer bir tarzda ilişkili olduklarını görmek için tablo üzerindeki örüntüleri kullanırlar.

200'e kadar genişleyen bir tabloya sahip olmak gittikçe daha popüler hâle geliyor, hatta birinci sınıfta dahi. Yüzlük tabloyu 1000'e genişletmek belki daha güçlü bir düşüncedir.

Etkinlik 11.19

Binlik Tablo

Öğrencilere Çalışma Yaprak Seti 21'den birkaç tane boş yüzlük tablo verin. Üçerli veya dörderli öğrenci gruplarına 1'den 1000'e kadar olan bir tablo oluşturma görevi verin. Tablo, on tabloyu uzun bir şerit halinde birbirine bantlayarak oluşturulur. Öğrenciler, tablonun farklı kısımlarını farklı öğrenciler alacak şekilde görevi nasıl paylaşacaklarına karar vermelidir.

Binlik tablo, 1 yüzden sonraki yüze doğru sayarken sayıların nasıl değiştiğini, örüntülerin ne olduğunu, ve benzeri konuları incelemek için sınıf olarak tartışılmalıdır. Aslında önceki yüzlük tablo etkinliklerinin tamamı binlik tabloya genişletilebilir.



Çeşitli Web-tabanlı kaynaklar, öğrencilerin örüntüleri keşfetmelerine olanak veren yüzlük tablolar içerir. *Sayı İlişkileri Hakkında Öğrenme* (*Learning about Number Relationships*), NCTM'in *e-Standartları*'dan (*e-Standards*) bir hesap makinesi ve yüzlük tablosu olan ve gayet açık keşfe izin veren bir e-Örnek'tir (e-Example). Öğrenciler hesap makinesi ile ritmik sayarken örüntüler tablo üzerinde renklendirilir. Öğrenciler istedikleri sayıyla ritmik sayabilir ve istedikleri sayıdan saymaya başlayabilirler.Herhangi iki örüntü iki renk kullanılarak üst üste gelebilir. Bu tablo 1000'liğe de genişletilebilir.NLVM'den (http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html) *Sayı Örüntüleri* (Number Patterns) küçük uygulama yazılımı öğrencilere tamamlanmak üzere sayı örüntüleri sunar. ◆

Referans Sayılarıyla İlişkiler

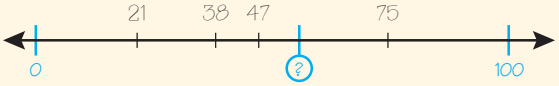
Hem yüzlük tablonun hem de küçük onluk kartların en değerli özelliklerinden biri bir sonraki onluğa (tablodaki bir satırın sonu veya onluk karttaki boşluklar) olan mesafeyi açık bir şekilde gösterebilmesidir. 10 ile 100'ün katları ve bazen 25 gibi özel sayıların katları, Sayı, Veri ve Uzay'da Araştırmalar (*Investigations in Number, Data, and Space*) programında *referans sayıları*olarak anılır.Öğrenciler bu terimi kullanmayı informal hesaplama yöntemleri ile çalışırlarken öğrenirler. 74 ve 112 arasındaki farkı bulurken bir çocuk "Önce bir referans sayısı bulmak için 74'e 6 ekledim. Sonra 100 elde etmek için 80'e 2 onluk daha ekledim çünkü 100 bir başka referans sayısıdır..." diyebilir. Hangi terminoloji kullanılırsa kullanılsın sayıların bu özel sayılarla nasıl ilişkili olduğu öğrencilerin sayı hissi gelişimlerinde önemli bir basamaktır.

Yüzlük tabloya ek olarak sayı doğrusu bu ilişkileri incelemek için mükemmel bir yoldur. Sıradaki iki etkinlik sayı doğrularını kullanmaya yönelik önerilerdir.

Etkinlik 11.20

Ben Kimim?

İki ucu 0 ve 100 olarak işaretlenmiş kabataslak bir doğru çizin. Gizli sayınıza karşılık gelen bir noktayı ? ile işaretleyin. (Yerini olabildiğince doğru tahmin etmeye çalışın.) Öğrenciler gizli sayınızı tahmin etmeye çalışsın. Herbir tahmin için çizgi üzerinde bir yer işaretleyin ve bir etiket verin. Gizli sayınız keşfedilene kadar her bir tahmini işaretlemeye devam edin. Değişiklik olarak uç noktaları 0 ve 100'den farklı olabilir. Örneğin, 0 ve 1000, 200 ve 300 ya da 500 ve 800'ü deneyin.

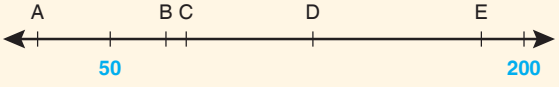


Etkinlik 11.21

Bunlar Kimler Olabilir?

Sayı doğrusu üzerinde iki noktaya (başlangıç ve bitiş noktaları olmasına gerek yok) referans sayıları verin.

Öğrencilere harfle işaretlenmiş farklı noktalar gösterin ve bunların hangi sayılar olabileceğini ve neden öyle düşündüklerini sorun. Burada gösterilen örnekte B ve C, 100'den küçük fakat muhtemelen 60'tan büyüktür. E, 180 olabilir. 75'in nerede olabileceğini veya 400'ün nerede olduğunu sorabilirsiniz. A ve D birbirlerinden yaklaşık ne kadar uzaklıktadırlar? Neden D'nin 100'den büyük olduğunu düşünüyorsun?



Sonraki iki etkinlik Bölüm 9'da incelenen parça-parça-bütün fikirlerinin genişletilmesidir. Bunların ilkinde parçalardan birisi referans sayısıdır. İkincisinde referans sayısı bütündür.

Etkinlik 11.22

50 ve Biraz Daha Fazlası



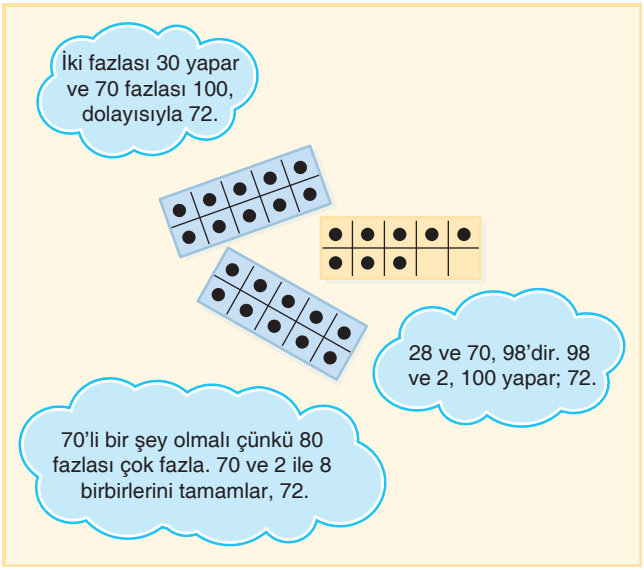
50 ile 100 arasında bir sayı yazın veya söyleyin. Öğrenciler "50 ve ____" diye cevap verirler. 63 için cevap "50 ve 13"tür. 50 yerine herhangi bir referans sayısı kullanılabilir. Örneğin sonu 50 ile biten herhangi bir sayı kullanabilirsiniz. 70 veya 230 gibi sayılarla da bu etkinliği yapabilirsiniz.

Referans sayıları hesaplamalarda sıklıkla parçalara ayrılır. Bir sonraki etkinlik en önemli referans sayısının, 100, ne olabileceğini amaçlar.

Etkinlik 11.23

100'ün Diğer Parçası

İki öğrenci bir küçük onluk kart setiyle çalışır. Öğrencilerden biri iki basamaklı bir sayı yapar.Sonra her iki öğrenci bu sayıyı 100 yapmak için onluk kart üzerinde ne kadarlık miktara gerek olduğunu zihinden belirlemeye çalışırlar. Cevaplarını kağıda yazar ve toplamın 100 olup olmadığını görmek için diğer parçayı kartlar üzerinde oluştururlar. Öğrenciler başlangıç sayısını sırayla yaparlar. Şekil 11.13 öğrencilerin kullanabilecekleri üç farklı düşünme sürecini gösterir.



Şekil 11.13 "100'ün diğer parçası" hakkında düşünmeye yardım etmek için küçük onluk kartların kullanımı.

100'ün diğer parçasını belirleyebilmek 2. sınıftan 4. sınıfa kadar odaklanılması gereken bir beceri olmalıdır çünkü esnek hesaplama yöntemleri için çok faydalıdır.

Eğer öğrencileriniz 100'ün parçalarında uzmanlaştılar ise, bütünü 100'den başka bir sayıya çevirebilirsiniz. İlk başlarda 70 veya 80 gibi 10'nun diğer katlarını deneyiniz. Daha sonra bütünü 100'den küçük herhangi bir sayıya genişletebilirsiniz.

Durup Düşün

Bütünün 83 olduğunu varsayalım. 36'yı gösteren kabataslak dört küçük onluk kartı çizin. "Kart"larınıza bakarak 36'yı 83'e ne tamamlar? Nasıl düşündünüz?

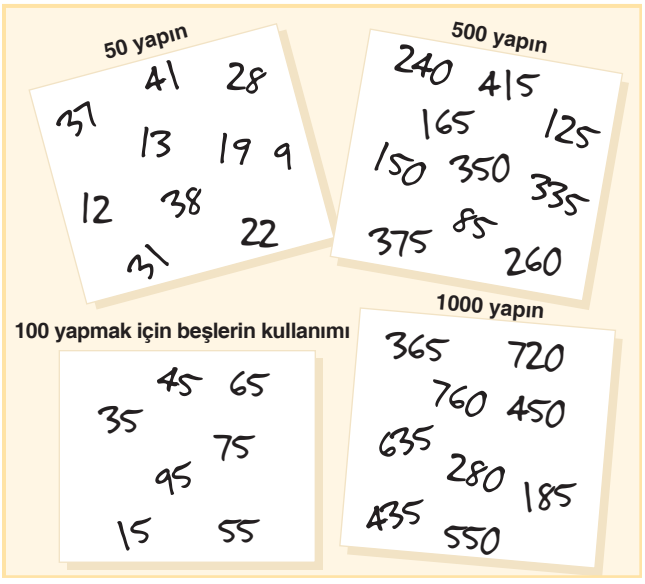
Az önce 83'ün diğer parçasının bulurken yaptığınız 83'ten 36'yı çıkarmaktı. Ödünç almadınız ya da sayıları yeniden gruplandırmadınız. Çok büyük olasılıkla zihinden yaptınız. Daha fazla pratikle bunu kartların yardımı olmadan da yapabilirsiniz (üçüncü sınıftaki öğrenciler dahi).

Toplama ve çıkarma için uygun sayılar, güzel sayılar yapmak için birbirine kolaylıkla uyan sayılardır. Onlar ve yüzleri oluşturan sayılar, en yaygın örnekleridir. Uygun toplamlar ayrıca 5, 25, 50 veya 75 ile biten sayıları da içerir çünkü bu sayılarla da çalışmak kolaydır. Öğretme görevi, öğrencileri birbiriyle çalışan kombinasyonları aramaya ve daha sonra bu kombinasyonları hesaplama durumlarında aramaya alıştırmaktır.

Etkinlik 11.24

Uygun Çiftler

Uygun çiftleri aramak tüm sınıfla beraber bir etkinlik olarak yapılabilir. Arama etkinlik sayfasının kopyasını çıkartmak için bir asetat hazırlayın ya da beyaz tahtayı kullanın. Farklı zorluk seviyesinin dört olasılığı Şekil 11.14'te gösterilmiştir. Öğrenciler gördüklerinde uygun çiftleri söylerler veya birleştirirler.



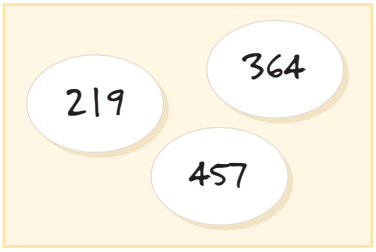
Şekil 11.14 Uygun çift arayışı.

Bir sonraki etkinlikte çocuklar, referans sayıları hakkında incelediğimiz fikirlerin bazılarını uygulamaktadırlar.

Etkinlik 11.25

Yakın, Uzak ve Arasında

Herhangi üç sayıyı tahtaya yazın. Uygunsa iki basamaklı sayılar kullanın.



Bu üç sayıyı referans kabul ederek aşağıdaki gibi sorular sorun (bütün cevapların tartışılmasını cesaretlendirerek sorun):

- **Hangi ikisi birbirine en yakındır? Neden?**
- **300'e hangisi en yakındır? 250'ye?**
- **457 ve 364 arasında bir sayı söyleyin.**
- **219 ve 364 arasında 25'in katı bir sayı söyleyin.**
- **Bütün bu sayılardan büyük bir sayı söyleyin.**
- **219 ve 500 yaklaşık olarak birbirlerinden ne kadar uzaklıktadırlar? 219 ve 5000?**
- **Eğer bunlar "büyük sayılar" ise küçük sayılardan bazıları nelerdir? Ya yaklaşık aynı olan sayılar?Ya bunları küçükmüş gibi gösteren sayılar nelerdir?**

Toplama ve Çıkarma İçin Sayı İlişkileri

Herhangi bir 1-5. sınıf ders kitabını incelerseniz basamak değerinde bahseden bölümler ile hesaplama stratejilerinden bahseden başka bölümler bulacaksınız. Aynı şey elbette bu kitap için de geçerlidir. Bununla birlikte bulgular, sayılarla belirtmeyi öğrenme ile hesaplama tekniklerini öğrenme arasında etkileşim olduğunu gösteriyor (NRC, 2001). Bir başka deyişle, sayılarla belirtme kavramlarının gelişimini hesaplamayı incelemeden önce tamamlamak gerekli değildir.

Jerrika, birinci sınıfın Ocak ayında birbirine geçmeli küpleri kullanarak 10 + 13 + 22 için bağlamsal bir problem çözer. Yazdıkları Şekil 11.15'te gösterilmiştir. Bir tane 10 kullanmaya başlıyor fakat büyük ihtimalle geri kalan küpleri birerli saymış. Sınıf arkadaşı Monica aynı problemi çözdü fakat, açıkça görülüyor ki, onluk taban fikrini daha fazla kullanmış (Şekil 11.15). Bu gibi fikirler ilaveten problem çözmeyle ve sınıf tartışmalarında fikirlerini paylaşmalarıyla gelişmeye devam eder.

NCTM Standartları *Standartlar*'ın yazarları,sayılarla belirtme ve hesaplamanın harmanlanmasını da tavsiye ediyor. "Öğrencilerin, iki ve üç basamaklı sayıları içeren problemleri çözmelerine imkân tanımadan önce, basamak değeri anlayışlarının tamamen gelişmesini beklemeye gerek yoktur. Böyle problemler ilginç bağlamlarda ortaya çıktığında, öğrenciler onları çözmek için basamak değeri anlayışlarını bünyesinde birleştiren ve derinleştiren yollar icat ederler; özellikle de kendi icat ettikleri strateji ve yaklaşımları tartışma ve açıklama fırsatı bulduklarında(s. 82). ◆

Bu bölümdeki etkinlikler hem öğrencilerin onluk taban kavramlarına yönelik anlayışlarını ilerletmek hem de onları hesaplamaya, özellikle toplama ve çıkarma, hazırlamak için tasarlanmıştır. (Şekil 11.15'te gösterilenler gibi basit bağlamsal problemlerin de etkili olduklarını unutmayın.) Köprü görevi gören bu etkinliklerin ilki hesap makinesiyle ritmik saymayı içerir. Sayıların ayarlanması ile neredeyse her sınıf seviyesi için uygun hâle getirilebilir.

Etkinlik 11.26

Düşündürücü Hesap Makinesi Sayması



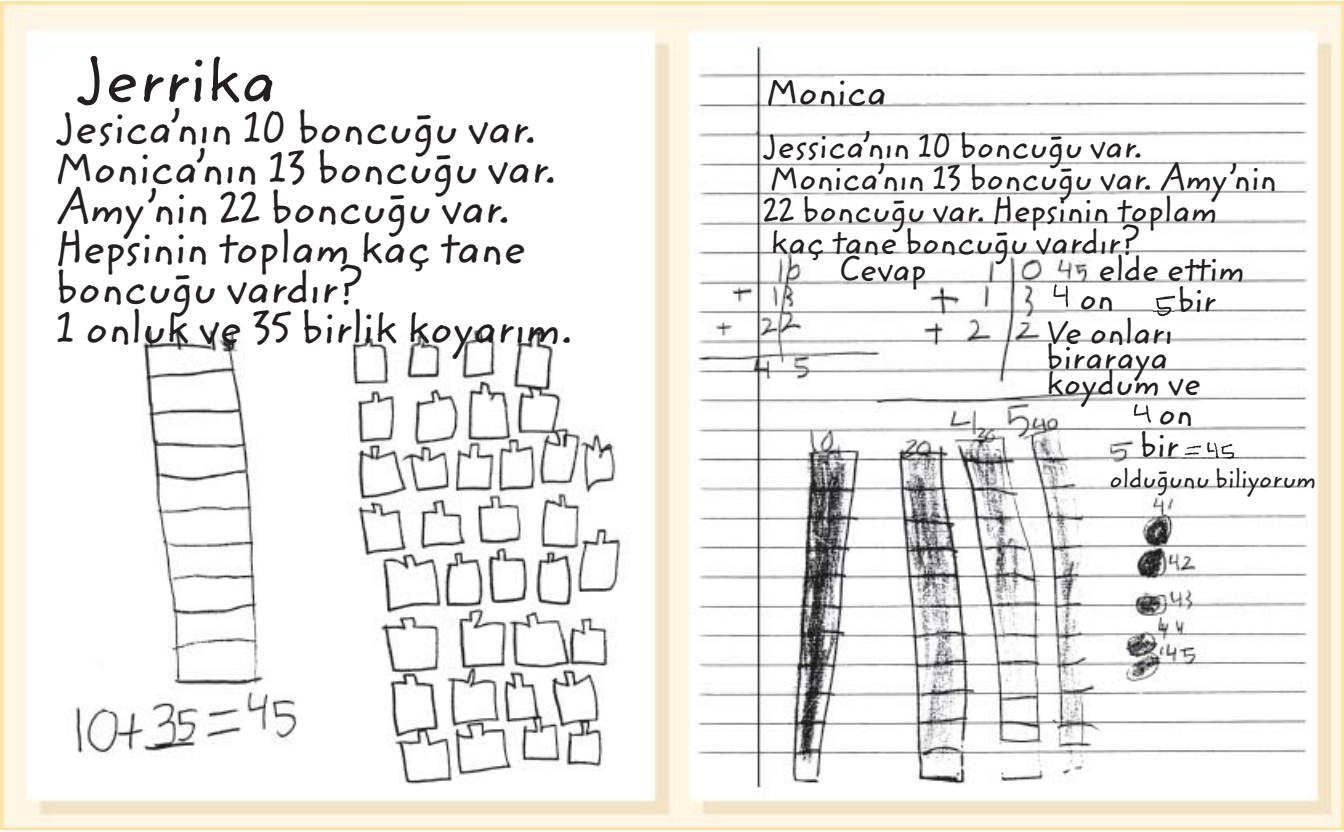
Öğrenciler hesap makinesinde herhangi bir sayıya (7 gibi) ve sonra [+] 4'e basarlar. [=]'e basmadan önce toplamı söylerler. Daha sonra zihinden 4 eklemeye devam ederler, kendilerini zorlayarak [=]'e basmadan önce sayıyı söylerler. Hata yapmadan ne kadar ileriye gidebileceklerini görmeleri için onları zorlayın.

"Düşündürücü Hesap Makinesi Sayması" etkinliğinde sabit toplanan ([+] 4) herhangi bir sayı, hatta iki veya üç basamaklı bir sayı, olabilir. Genellikle başlangıç sayısı on'dan küçüktür fakat öğrencilerin örneğin 327 veya başka bir sayıyla başlamamaları için bir sebep yoktur. Küçük yaştaki öğrenciler eğer başlama sayısı da beşin katı değilse beşli atlamaları bile zorlu bulacaklardır. 20'şerli veya 25'erli ritmik sayma, 7'şerli veya 12'şerli saymadan daha kolay olacaktır ve önemli örüntü ve ilişkilerin gelişmesine yardım edecektir.

"Düşündürücü Hesap Makinesi Sayması" ters şekilde de ilerleyebillir. Bir başka deyişle, 123 gibi bir sayıyı hesap makinesi girin ve [−] 6'ya basın. Önceki gibi öğrenciler sonucu [=]'e basmadan önce söylerler. Her takip eden basış,altı veya hangi sabit sayı girildiyse o kadar azaltır.

İki öğrenci bu etkinlikten oldukça fayda sağlayacak şekilde beraber çalışabilir. Etkinliğin esnek yapısı, etkinliğin değişik yetenek düzeylerinde tekrar tekrar, daima öğrencileri düşündürterek ve onların sayılarla ilgili zihinsel yeteneklerini geliştirerek, kullanılabilmesine izin verir.

Bir sonraki etkinlik sembolizmi onluk taban gösterimleri ile birleştirir.



Şekil 11.15 İki tane 1. sınıf öğrencisinin Ocakta yaptıkları çalışmaları. Her ikisi de 10 + 13 + 22 problemini çözdü. Jerrika'nın çalışması onun onlukları henüz hesaplamasında kullanmadığını gösterirken Monica açık bir şekilde onlu grupları topluyor.

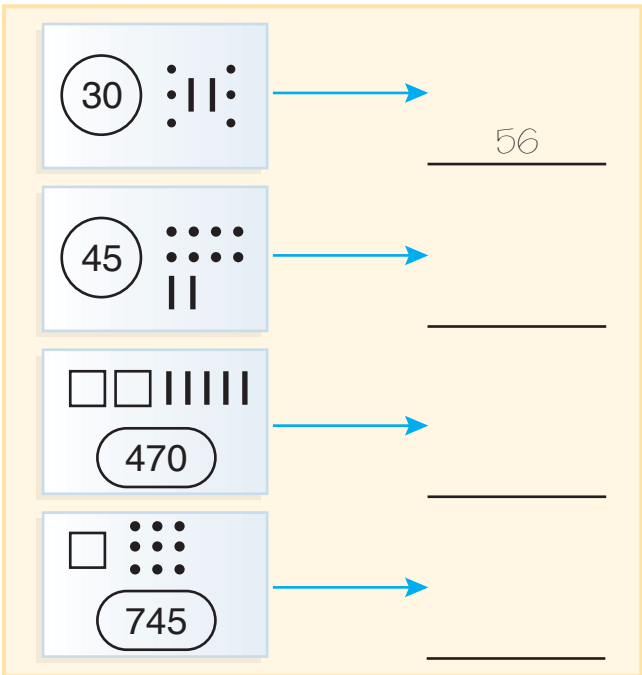
Etkinlik 11.27

Sayılar, Kareler, Çubuklar ve Noktalar

Şekil 11.16'da gösterildiği gibi, üzerinde bir sayı ve onluk tabanda bazı parçaların gösterildiği bir çalışma yaprağı veya asetat hazırlayın. Çizimleri basit tutmak için küçük kareler, çubuklar ve noktalar kullanın. Görev, toplamları zihinden hesaplamaktır.

Eğer bu etkinlik tüm sınıfla yapılırsa,her bir alıştırmayı bir sonrakine geçmeden önce tartışın. Çalışma yaprağı formatını kullanıyorsanız sadece birkaç örnek kullanın ve öğrencilerden onları çözmeyi nasıl ele aldıklarını yazmalarını isteyin. Sınıf ile tartışmak hâlâ önemlidir.

Bir sonraki etkinlik yüzlük tablo kullanımını ileri düzeye taşır.



Şekil 11.16 Hem sayıları hem de modelleri kullanarak esnek sayma veya toplama.

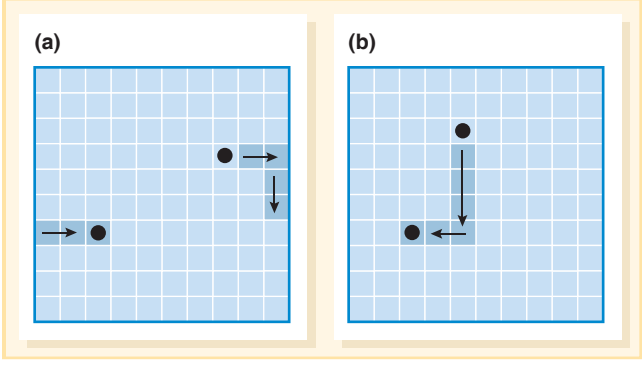
Etkinlik 11.28

Yüzlük TabloToplaması

Bu etkinlik için en uygunu, bütün öğrencilerin görebileceği bir tane sınıf yüzlük tablosuna (veya bir

binlik tablosuna) sahip olmaktır. Bir alternatif, kağıt üzerinde bireysel yüzlük tablolar vermektir (Çalışma Yaprak Seti 22). Öğrenciler yüzlük tabloyu iki sayıyı toplamak için kullanmalıdırlar. Yüzlük tablonun toplama için birçok kullanım yolu olduğundan fayda sınıf içi tartışmalardadır. Bundan dolayı, her seferinde sadece bir toplama yapmak ve sonra farklı yöntemleri tartışmak iyi bir fikirdir.

Yüzlük tablolar sayı doğrusunun katlanmış hali gibi görülebilir (herhangi bir sayının bir sonraki onluk katına olan uzaklığını vurgulamaktadır). Bir alt satıra atlamak on eklemek ile aynıdır ve bir satır yukarı atlamak on azdır. Bir çocuğun yüzlük tabloyu 38 ile 25'in toplamını düşünmeye yardım için nasıl kullanabileceğini düşünün. Şekil 11.17(a)'da gösterildiği gibi bir yaklaşım, 38'den başlamak ve 40'a kadar üzerine 2 eklemek olabilir. Bir öğrenci oradan aşağı 60'a doğru iki sıra, toplamda 22, sayabilir ve sonra bir sonraki sırada 3 daha ekleyebilir. Şekil 11.17(b), 25' ten başlayarak 38 eklemeyi gösterir. Buradaki düşünce 40 eklemek ve 2 geri gitmektir. Başka yaklaşımlar da vardır. Birçok öğrenci basit bir şekilde 38'in üzerine 25 tek kare sayacaktır. En azından bu sıkıcı sayma, başka hiç stratejisi olmayan öğrencilere kullanım sağlar. Bu öğrenciler sınıf arkadaşlarının fikirlerini dinlemeliler fakat bunları kullanmaya zorlanılmamalıdırlar.



Şekil 11.17 Yüzlük tablo üzerinde 38 + 25 işlemini yapmanın iki yöntemi. Bir sütun içinde bir satır aşağı hareket etmenin 10 ekleme ile aynı olduğu fikrinin vurgulanması önemlidir.

Bir sonraki etkinlik "Yüzlük Tablo Toplaması"na benzerdir ama toplama fikrini bir çıkarma yöntemi olarak bekler.

Etkinlik 11.29

Arası Ne Kadar?

Öğrencilerin yüzlük tabloya erişimi olmalıdır. Öğrencilere iki sayı verilir. Görevleri bir sayının diğerine ne kadar uzaklıkta olduğunu belirlemektir.

"Arası Ne Kadar?" etkinliğinde iki sayının seçimi bazı öğrencilerin kullanacakları stratejiler üzerinde etkili olacaktır. En kolay çiftler, 24 ve 64 gibi aynı sütun içinde olanlardır. Bu başlamak için iyi bir bir yer olabilir. Eğer büyük sayı ilk sayının sağında ise (örneğin, 24 ve 56) öğrenciler muhtemelen hedefteki sayının sırasına ulaşmak için onluklar ve sonra birlikler ekleyeceklerdir. Elbette bu herhangi iki sayı için de mantıklı bir stratejidir. Fakat tabloda 17 ve 45'i düşünün ki 45, 17'nin sol tarafında kalır. Bu çift ile mantıklı bir strateji 47'ye doğru 3 satır aşağı (+30) hareket etmek ve sonra 45'e doğru 2 geri (-2) saymaktır. Şimdi toplam sayım 30 – 2 veya 28'dir. Başka olası yaklaşımlar da vardır.

Sonraki iki etkinlik matematiksel olarak önceki iki etkinliğe paraleldir fakat yüzlük tablo yerine küçük onluk kartlar kullanılır.

Etkinlik 11.30

Küçük Onluk Kart Toplamları

İkili öğrenci gruplarına iki grup küçük onluk kart verin. Her çocuk bir sayı seçer. Bir örnek Şekil 11.18(a)'da gösterilmiştir. Sonra, öğrenciler toplam nokta sayısını bulmak için birlikte çalışırlar. Her sayı ikilisi ve toplam, üzerinde anlaşılan cevapla birlikte kağıda yazılır.

Etkinlik, öğrencilere sayıların tepegözde gösterilmesi ve öğrencilerin kendi sıralarında ikili gruplar olarak çalışmasıyla da yapılabilir.

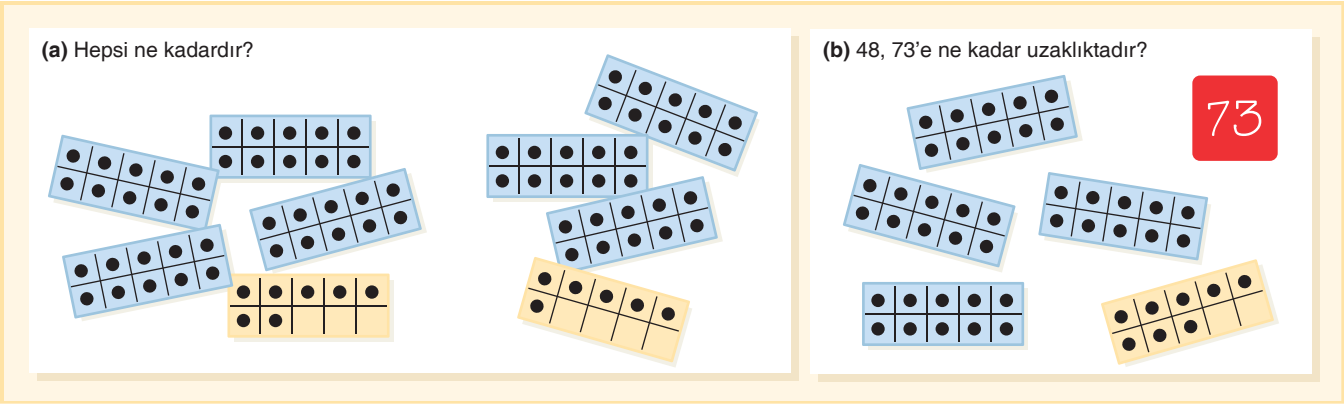
Etkinlik 11.31

Benim Sayıma Ne Kadar Uzakta?

Öğrenciler ikili gruplar halinde tek bir grup onluk kart ile çalışır. Bir öğrenci 50'den küçük bir sayıyı oluşturmak için kartları kullanır. Aynı anda, diğer öğrenci Şekil 11.18(b)'de gösterildiği gibi, bir kağıdın üzerine 50'den büyük bir sayı yazar. Bu sayıların büyüklüklerini sınırlamayı tercih edebilirsiniz fakat bu gerekli değildir. Öğrencilerin görevi beraber çalışarak yazılı sayıya ulaşmak için onluk çerçevedeki sayıya ne kadar daha eklenmesi gerektiğini bulmaktır. Öğrenciler bunu başka kart kullanmadan yapmaya çalışmalıdır. Bir cevap belirlendiğinde öğrenciler cevaplarını kartlar ile yapmalı ve toplamın yazılı sayı ile aynı olup olmadığına bakmalıdır.

Durup Düşün!

Elinizdeki sayıyı Şekil 11.18'deki iki örnek üzerinde deneyin. İki öğrencinin bunları kaç farklı yolla yapabileceğini tahmin edersiniz? Bir meslektaşınızla düşüncelerinizi paylaşın.



Şekil 11.18 Küçük onluk kartlar kullanılarak yapılabilecek iki etkinlik.

Bölüm 12'de öğrencilerin sayıları toplama ve çıkarmada kullandıkları çeşitli çözüm stratejileri tartışılacaktır. Öğrenciler bu bölümdekilere benzer etkinliklerde fikirlerini geliştirmek için yeterli imkânlara sahip olmalıdır. Bununla birlikte, öğrencilerin sayılar ve aralarındaki mesafeler hakkındaki fikirlerinin gelişmeye devam ediyor olabileceğine dikkat ediniz. Bu fikirler, toplama ve çıkarma kadar basamak değerinin anlaşılmasına yöneliktir. Küçük onluk kartlar ve yüzlük tablo bu ilişkilerin gelişmesini desteklemek için iyi modellerdir.



Bu etkinliklerin herhangi birinde zorlanan öğrenciler, icat edilmiş hesaplama tiplerinin neredeyse hepsiyle zorluk yaşayabilir. Örneğin, öğrenciler Etkinlik 11.27'deki, "Sayılar, Kareler, Çubuklar ve Noktalar", alıştırmalara nasıl başlarlar? O etkinlik, çocukların onluk taban kavramlarını anlamlı saymalarda kullanması için bu kavramları yeterince anlamış olmalarını gerektirir. Eğer öğrenciler birer birer, belki parmaklarıyla, sayıyorlarsa bu etkinliklerle daha fazla pratik yersiz olabilir. Daha ziyade, öğrencilerin onlu grupların değerini görme fırsatı sunacak ilave sayma ve gruplama etkinlikleri düşünün. Küçük onluk kartları kullanmak da yardımcı olabilir.

"Benim Sayıma Ne Kadar Uzakta?" (Etkinlik 11.31) etkinliği, teşhis görüşmeleri için de faydalı bir etkinliktir. Öğrencilerin bu problemleri nasıl çözdüklerini dinlerken, basit bir şekilde doğru cevabı almanın ötesinde onların düşünceleri hakkında ortaya çıkarılacak çok daha fazla bilgi olduğunu farkedeceksiniz. ◆

Gerçek Hayat Fikirleriyle İlişkilendirmeler

Öğrencileri kendilerini çevreleyen dünyadaki sayıları görmeye teşvik etmeden basamak değerikavramları üzerinde çalışmalarına izin vermemeliyiz. Gerçek sayıları sınıfa getirmek için öncedenbelirlenmiş bir etkinliğe ihtiyacınız yoktur.

İkinci sınıftaki çocuklar önce 100'ün altındaki sayılar ve hemen sonra 1000'e kadar olan sayılar hakkında düşünüyor olmalılar. Bundan büyük olan çokluklar üzerinde düşünmek zordur. Böyle sayılar nerelerde bulunabilir? Cevap okulunuzdur: her bir sınıftaki öğrenci sayısı, okul servislerinin üzerindeki sayılar, her gün ve sonra her hafta matematik için ayrılan dakikaların sayısı, kantinde her gün servis edilen çikolotalı veya sade kutu süt sayısı, takvimdeki sayılar (haftadaki, aydaki, yıldaki günler), okul başladığından beri geçen gün sayısı. Ve daha sonra, ölçümler, evdeki sayılar, bir alan gezisindeki sayılar,haberlerdeki sayılar ve benzerlerinde bu sayılar bulunabilir.

Bu sayılarla ne yaparsınız? İlginç grafiklere çevirin, onları kullanarak hikâyeler yazın, problemler oluşturun, yarışmalar düzenleyin.

Çocukların, biraz daha büyüdüklerinde, sayılara olan ilgileri okul ve sınıfın ötesine genişleyebilir.Grafik oluşturmak, çıkarımda bulunmak ve karşılaştırmalar yapmak için her türlü şey ölçülebilir ve ölçülmelidir. Örneğin, "ortalama" beşinci sınıf öğrencisi için hangi sayılar uygundur? Uzunluk, ağırlık, kol uzunluğu, ay olarak yaş, kardeş sayısı, evden okula olan mesafe, durarak uzun atlama uzunluğu, evde beslenen hayvanların sayısı, haftada TV izlerken geçirilen saat. Sınıfınızdaki öğrencilerin ilgisini çekebilecek bu veya başka sayılar için ortalamayı nasıl bulabilirsiniz? Bunlardan birisi gerçekten de ortalamamıdır?

Sayıları ve gerçek hayatı sınıfınızda bir araya getiriş yolunuz size kalmıştır. Fakat gerçek hayatı sınıf ile ilişkilendirmenin önemini küçümsemeyiniz.

1000'in Ötesindeki Sayılar



Öğrencilerin 1000'in ötesindeki sayılara yönelik temel kavramlara sahip olması için, dikkatli bir şekilde geliştirilmiş kavramsal fikirler genişletilmelidir. Bunu yapmak bazen zordur çünkü binlikler için fiziksel modeller yaygın olarak mevcut değildir veya göstermek için sadece bir büyük kübünüz olabilir. Aynı zamanda sayı hissi fikirleri de geliştirilmelidir. Çok büyük sayılar

hakkındaki bu informal fikirler birçok yönden en önemli olanlardır.

Basamak Değeri Kavramının Genişletilmesi

Üç basamaklı sayılar için geliştirilen iki önemli fikir daha büyük sayılara da genişletilmelidir. İlk olarak gruplama fikri genelleştirilmelidir. Bir başka deyişle, herhangi bir konumdaki *on* bir sonrakipozisyonda bir tek şey (grup) yapar ve tam tersi de doğrudur. İkinci olarak, üç basamaktaki sayılarla ilgili sözel ve yazılı örüntüler, sola doğru her üç basamak için akıllıca kopyalanmıştır. Bu ilişkili iki fikri çocukların anlaması yetişkinlerin düşündükleri kadar kolay değildir. Çünkü büyük sayılar için olan modellere sahip olmak veya bu modelleri resmetmek o kadar zordur ki ders kitapları bu fikirleri ağırlıklı olarak sembolik biçimde ele olmak zorunda kalır. Bu yeterli değildir!

Etkinlik 11.32

Sırada Ne Var?

Onluk taban şeritleri ve karelerini kullanarak "Sırada Ne Var?" tartışması yapın. Birim veya birlik parçalar 1 santimetre (cm) karedir. Onluk parçalar 10 × 1'lik şerittir. Yüzlük parça 10 cm × 10 cm'lik karedir. Sıradaki nedir? On tane yüzlük, bin olarak adlandırılır. Hangi şekil? 10 tane yüzlük kareden oluşan bir şerit olabilir. 10 yüzlüğü birbirine bantlayın. Sıradaki nedir? (Şimdiye kadar gelişen "on, bir yapar" fikrini pekiştirin.) On tane binlik şerit, bir kenarı 1 metre (m) olan bir kare yapar. Sınıf binlik parçanın şeklini düşünerek bulduklarında, problem temelli etkinlik "Sırada Ne Var?" olacaktır. Küçük grupların on-binlik parçanın boyutları üzerinde çalışmasına izin verin.

Eğer öğrencileriniz "Sırada Ne Var?" etkinliğindeki büyük parçaları görmekle ilgilenirlerse, onlara bu parçaları kağıt üzerinde ölçme etkinliği yaptırın. On tane on-binlik kare (100,000) biraraya gelerek kocaman bir şerit yapar. Bu şeridi uzun bir ambalaj kağıdına çizin ve onu oluşturan onluk kareleri işaretleyin. Koridora çıkmak zorunda kalacaksınız.

Kare, şerit, kare, şerit dizisini nereye kadar genişletmek istediğiniz sınıfınıza bağlıdır. Bir yerdeki 10'un bir sonraki yerde 1 yapması fikrinin çarpıcı biçimde anlaşılması sağlanabilir. Sıradaki 10 m × 10 m'lik kareyi daha büyük çocuklarla tebeşir kullanarak oyun alanında yapmak oldukça muhtemeldir. Bir sonraki şerit 100 m × 10 m'dir. Bu, büyük bir oyun alanında çocukların köşeleri işaretlemesiyle ölçülebilir. Bu noktada kazanç, ardışık miktarların boyutlarındaki artışın anlaşılmasını ve on-bir-yapar ilerlemesini içerir. 100 m × 10 m'lik şerit 10 milyon için bir modeldir ve 10 m × 10 m karesi 1 milyonu modeller. 1 milyon ve 10 milyon arasındaki fark çarpıcıdır. 1 milyon minik santimetre kare kavramı bile çarpıcıdır.

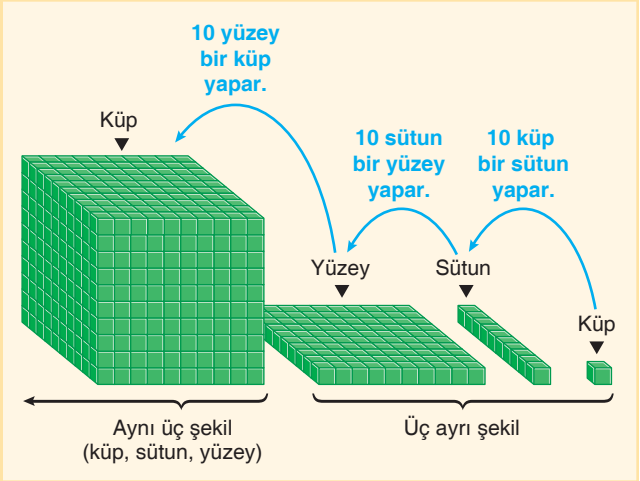
"Sırada Ne Var?" tartışmasını üç boyutlu modeller bağlamında deneyin. İlk üç şekil farklıdır: bir *küp*, bir *sütun* ve bir *yüzey*. Sırada ne var? Yüzeyleri dizin ve onlar bir küp yapar, ilk şeklin aynısı, sadece 1000 kat daha büyüğü. Sırada ne var? (Bkz. Şekil 11.19.) On *küp* bir başka *sütun* yapar. Sırada ne var? On tane büyük *sütun* büyük bir *yüzey* yapar. İlk üç şekil şimdi tekrar etti! On tane büyük yüzey daha da büyük bir küp yapar ve şekil üçlemesi tekrar başlar.

Her bir kübün ismi vardır. İlki *birim* küptür, sonraki *binlik*, sonraki *milyonluk*, sonraki *milyarlık* ve böyle devam eder. Her sütun 10 küptür: 10 birim, 10 binlik, 10 milyonluk. Benzer şekilde, her yüzey 100 küptür.

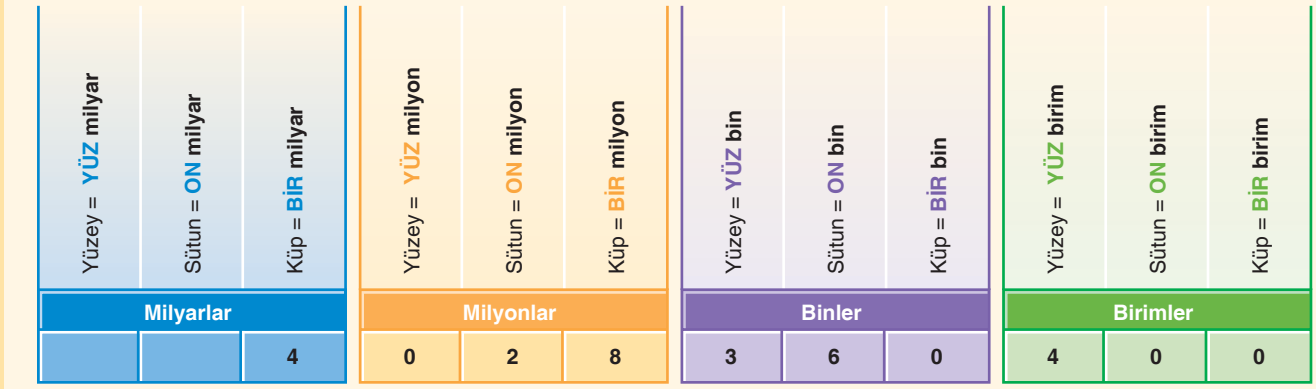
Bir sayıyı okumak için, önce sağdan başlayarak üçlüler halinde sınırlar çizin. Sonra, her üçlünün sonunda o üçlünün birimini (veya küp şeklini) isimlendirmek için durarak üçlüler okunur (Bkz. Şekil 11.20). Her üçlünün önündeki sıfırlar yok sayılır. Eğer öğrenciler 059 (elli dokuz) veya 009 (dokuz) gibi sayıları okumayı öğrenebilirse, herhangi bir sayıyı okuyabilmelidirler. Bir sayıyı yazmak için aynı şemayı kullanın. Eğer önce sözel olarak öğrenilirse, sistem olduça basittir. Öğrencilere bir doğal sayıyı okurken "ve" kelimesini kullanmamalarını hatırlatınız. Örneğin, 106, "yüz *ve* altı" olarak değil "yüz altı" şeklinde okunmalıdır. "Ve" kelimesi ondalık noktasını ifade etmek için gerekli olacaktır.* Lütfen kendiniz de sayıları doğru olarak okuduğunuzdan emin olunuz.

Öğrencilerin sistemin tamamen gelişgüzel olmadığını, mantıksal bir yapısının olduğunu ve anlaşılabileceğini farketmeleri önemlidir.

* Bu İngilizce için geçerlidir. Türkçe'de ondalık sayılar okunurken "ve" yerine "tam" kullanılır.



Şekil 11.19 Şekiller her üç basamakta tekrarlanır. Her küp 1'i temsil eder, her sütun 10'u temsil eder ve her yüzey 100'ü temsil eder.



Şekil 11.20 Büyük sayıları okumak için üçlüler sistemi.

Büyük Sayıları Kavramsallaştırma

Az önce tartışılmış fikirler, çok büyük sayıları içeren gerçek çoklukları düşünmede sadece kısmen faydalıdır. Örneğin, kare, şerit, kare, şerit dizisini genişletme ile, 1000 veya 100,000 nicelikleri hakkında biraz kavrayış sağlanabilir. Fakat, küçük karelerden oluşan çoklukları diğer maddeleri, uzaklıkları veya zamanı içeren çokluklara dönüştürmek herkes için zordur.

Durup Düşün!

1000 veya 100,000 hakkında nasıl düşünüyorsunuz? Bir milyon için herhangi bir gerçek kavramınız var mı?

Özel Büyük Sayılar İçin Referanslar Oluşturmak. Bu etkinliklerde 1000; 10,000 (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 29) veya hatta 1 milyon gibi sayılar gerçek anlamında veya hayali olarak hakkında düşünülmesi kolay ve eğlenceli şeylere dönüştürülmüştür. İlginç çokluklar, büyük sayılar için kalıcı referans noktaları veya ölçütler haline gelirler ve böylece gerçek hayatta karşılaşılan sayılara anlam yüklerler.

Etkinlik 11.33

10,000 Toplamak

Koleksiyonlar. **Bir tek sınıf veya bir sınıf seviyesindeki tüm sınıflar için proje olarak belli çokluğa ulaşma hedefi ile herhangi bir çeşit nesne toplayın (örneğin, 1000 veya 10,000 düğme, ceviz, eski kalem,kutu kola açma halkası veya önemsiz posta[6]). 100,000 veya 1 milyon hedeflemeye başlarsanız, enine boyuna düşündüğünüzden emin olun. Bir öğretmen sınıflarıyla birlikte bir milyon şişe kapağı toplamak için yaklaşık 10 yıl harcamıştı. O kadar miktarı taşımak için küçük bir damperli kamyonet gerekir!**

Etkinlik 11.34

10,000'i Göstermek

Örneklemeler. **Bazen büyük miktarları oluşturmak daha kolaydır. Örneğin, öğrencilerin bir sayfa kağıt üzerine 100 ya da 200 veya hatta 500 nokta çizecekleri bir proje başlatın. Her hafta farklı öğrenciler belirli bir sayıda katkıda bulunsun. Bir başka fikir büyük bir miktarın neye benzediğini görmek için gazeteyi dolar banknotları büyüklüğünde parçalara kesmektir. Zaman içerisinde kağıt zincir halkaları oluşturulabilir ve özel sayılar işaretlenerek koridora asılabilir. Okulu nihai hedef hakkında haberdar edin.**

Etkinlik 11.35

Ne Kadar Uzun?/Ne Kadar Uzak?

Gerçek ve hayali uzaklıklar. **Bir milyon bebek adımı ne kadar uzundur? Uzunluğa değinen diğer fikirler: uç uca eklenmiş kürdanlar, dolar banknotları veya çubuk şekerler; bir sıra halinde el ele tutuşmuş çocuklar; üst üste yığılmış blok veya tuğlalar; birinin başı diğerinin ayağına gelecek şekilde uzanan çocuklar. Gerçek ölçümler de kullanılabilir: fit[7], santimetre, metre.**

Etkinlik 11.36

Uzun Bir Süre

Zaman. **1000 saniye ne kadar uzundur? Bir milyon saniye ne kadar uzundur? Bir milyar? 10,000 veya 1 milyona kadar saymak ne kadar zaman alır? (Bütün sayımları aynı yapmak için sayarken hesap makinenizi kullanın. Sadece**

[6] Burada mavi kapak sayısı örneği verilebilir. Sosyal açıdan da önemli bir mesaj olur.

[7] Uzunluk birimi: 1 fit = 30.48 cm

[=] tuşuna basın.) Bir düğmeyi 1000 kere iliklemek gibi bazı görevleri yapmak ne kadar zaman alır?

Büyük Nicelikleri Tahmin Etmek. Etkinlik 11.33'ten 11.36'ya kadar olan etkinlikler belirli sayılara odaklanır. Bunun tersi olan fikir, büyük bir miktar seçmek ve kaç tane olduğunu ölçmek, saymak veya tahmin etmek için bazı yollar bulmaktır.

Etkinlik 11.37

Gerçekten Büyük Çokluklar

Kaç tane olduğunu sorun

- **Odanızın zeminini kaplayacak çubuk şekerler**
- **Bir karıncanın okul binasının etrafını dolaşması için atacağı adımlar**
- **Bir kap veya bir galonluk[8] sürahiyi dolduracak pirinç taneleri**
- **Tabandan tavana kadar bir sıra halinde yığılacak çeyreklikler[9]**
- **Bütün koridorda yan yana dizilmiş peniler[10]**
- **Jimnastik salonunun zeminini kaplayacak defter sayfaları**
- **Bugüne kadar yaşadığınız saniyeler**

Büyük sayı projelerinin ders saatinin büyük bir kısmını almasına gerek yoktur. Bu projeler, evde yapılacak projeler veya grup projeleri olarak birkaç hafta boyunca incelenebilir veya,belki de en iyisi, okul çapında büyük bir tahmin etme yarışmasına dönüştürülebilir.

NCTM Standartları

Standartlar belgesi, büyük sayıların gerçek dünya ile ilişkilendirilmesinin gereğini kabul eder. "Bir üçüncü sınıf, 1000'e kadar ritmik sayarak, on tane yüzlük tablo kullanıp bir 1000 modeli geliştirerek, ataş gibi 1000 nesne toplayarak ve onları saymak için etkili yollar geliştirerek ya da 1000 santimetre uzunluğu göstermek için 10 veya 100 santimetre uzunluğundaki şeritler kullanarak 1000'in boyutunu inceleyebilir" (s. 149). ◆

[8] Hacim ölçü birimi: 1 galon = 3.79 litre
[9] 25 sent değerindeki madeni para
[10] 1 sent değerindeki madeni para

Bölüm 11 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Onluk taban kavramları henüz gelişmemiş bir çocuğun,örneğin, 85 kadar büyük nicelikleri nasıl anlayacağını açıklayınız. Bunu, aynı nicelikleri onluk taban gruplamaları bağlamında anlayan bir çocuk ile karşılaştırınız.
2. "*Denk gösterimler*" ile ne denmek isteniyor?
3. Bir kişinin bir grup nesneyi sayabileceği üç yolu ve bu sayma yöntemlerinin sayı kavramları ve sayıların sözel ve yazılı isimlerini eşgüdümlemek için nasıl kullanılabileceğini açıklayınız.
4. Onluk taban kavramları için üç çeşit fiziksel modeli tanımlayın. Bu modeller arasındaki farkların önemi denir?
5. Çocuklar iki ve üç basamaklı sayıları birlik ve onlukların veya birlik, onluk ve yüzlüklerin onluk tabandaki anlamları ile ilişkili olacak şekilde yazmayı nasıl öğrenir?
6. Yüzlük tabloda bulunabilecek birkaç örüntüyü tanımlayın. Örüntülere bakmaya ek olarak yüzlük tablo ile bir başka etkinlik tanımlayın.
7. Referans sayıları nelerdir? Öğrencilerin referans sayıları ile ilgili geliştirmelerini istediğiniz ilişkileri tarif ediniz. Bu ilişkilere değinen bir etkinlik tanımlayın.
8. Basamak değeri kavramları ve hesaplama yetenekleri aynı anda nasıl geliştirilir? Bu ikili gündeme değinilmede kullanılabilecek iki etkinlik tanımlayın.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Bu bölümdeki önerileri temel alarak, belli bir sınıftaki çocuklardan birisi için teşhis görüşmesi tasarlayın ve görüşmeyi yapın. Görüşmenin nasıl gittiğini takip edebilmek için bir arkadaşınızı gözlemci olarak almak ya da bir ses kayıt cihazı veya kamera kullanmak iyi bir fikirdir. Çocuğun yorumları nasıl anladığını analiz edin ve bir sonraki öğretim basamaklarınızı önerin.

Bölüm 11 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Books that emphasize groups of things, even simple counting books, are a good beginning to the notion of ten things in a single group. Many books have wonderful explorations of large quantities and how they can be combined and separated.

Moira's Birthday *Munsch, 1987*

As Moira plans her birthday party, she invites more and more children until she has invited all the children in the kindergarten, first, second, third, fourth, fifth, and sixth grades. Then she needs to order food. She orders 200 cakes and 200 pizzas. Wonderful bedlam ensues. A second-grade teacher, Diane Oppedal (1995), used this story as a background for the question "How can you show 200 things in different ways?" As children work on this or similar projects, they can be encouraged to use some form of groups to keep track of their collections.

100th Day Worries *Cuyler, 2000*

100 Days of School *Harris, 1999*

Both of these books focus on the 100th day of school, which is one way to recognize the landmark number of 100. Through a variety of ways to think about 100 either through collections of 100 items or 10 salty peanuts every minute for 10 minutes, students will be able to use these stories to think about the relative size of 100 or ways to make 100 using a variety of combinations.

How Much Is a Million? *Schwartz, 1985*

If You Made a Million *Schwartz, 1989*

On Beyond a Million: An Amazing Math Journey *Schwartz, 1999*

Magic of a Million Activity Book—Grades 2–5 *Schwartz & Whitin, 1998*

David Schwartz has generated a series of entertaining and conceptually sound children's books about the powers of ten or what makes a million—from visual images of students standing on one another's shoulders in a formation that reaches the moon to various monetary collections. In addition, the activity book by Schwartz and Whitin provides a series of powerful activities to help students interpret large numbers.

The King's Commissioners *Friedman, 1994*

The king has so many commissioners, he can't keep track of how many there are. In a hilarious tale, the commissioners are marched into the throne room to be counted. One person tries to count them by twos and another by fives. The princess convinces the king that there are many other excellent ways to count. The story is a natural background for place-value concepts, including grouping and different counting methods, large numbers, and informal early computation challenges.

A Million Fish . . . More or Less *McKissack, 1992*

This story, which takes place in lower Louisiana, is a tall tale of a boy who catches three fish . . . and then a million more. The story is full of exaggerations such as a turkey that weighs 500 pounds and a jump-rope contest (using a snake) where the story's hero wins with 5553 jumps. "Could these things be true? How long would it take to jump 5553 times? Could Hugh put a million fish in his wagon? How do you write half of a million?"

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Ellett, K. (2005). Making a million meaningful. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(8), 416–423.
This amazing collection of ideas for helping students think about large numbers, especially 1 million, is found in the MTMS focus issue on Mathematics and Literature. Ellett gives examples of student projects and ways for students to conceptualize a million, shows student work, and connects many of these ideas to literature.

Kari, A. R., & Anderson, C. B. (2003). Opportunities to develop place value through student dialogue. *Teaching Children Mathematics*, *10*(2), 78–82.
These two teachers describe a mixed first/second-grade classroom illustrating in vivid detail how children's understanding of two-digit numbers can at first be quite mistaken and then developed conceptually with the aid of discussion. Much of the discussion revolves around one child's belief that any 1 in a number stands for ten. This student is convinced that 11 + 11 + 11 is 60. Reading this article emphasizes the wide range of student ideas and the value of classroom discourse.

Kitaplar

Burns, M. (1994). *Math by all means: Place value, grades 1–2.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
Burns provides 25 very detailed lessons in place value. There are ample examples of children's written work and descriptions of interactions that took place in actual classrooms.

Richardson, K. (2003). *Assessing math concepts: Grouping tens.* Bellingham, WA: Mathematical Perspectives.
This is one of a nine-part series on using diagnostics interviews and other assessment tools to understand children's grasp of a concept—in this case, grouping by tens. Tips are shared about conducting careful observations and suggestions for instruction. Blackline Masters are included to support the assessments.

İnternet Kaynakları

Base-Ten Blocks
http://nlvm.usu.edu/en/nav/topic_t_1.html

There are several variations of the basic base-ten blocks applet here. Blocks appear on a place-value chart and can be grouped or broken apart. The addition and subtraction versions pose problems and allow blocks in two colors to model two separate numbers.

Comparison Estimator
www.shodor.org/interactivate/activities/estim2/index.html

Two sets of small objects are shown and the task is to decide which set has more. The actual counts are then given. The same applet also allows for comparisons of length and areas.

Hundreds Board and Calculator
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.5/index.htm

A calculator is used to create skip-counting patterns on a hundreds chart. You can start the pattern on any number and skip by any number. The chart extends to 1000. A second pattern will show with red dots on top of the first pattern.

Lots of Dots and a Million Dots on One Page
www.vendian.org/envelope

These explorations of big numbers are only a hint at the array of ideas found on this website. A lot is beyond the elementary school, but anyone interested in big numbers and measures will certainly be intrigued. See a dot for every second of the day!

The MegaPenny Project
www.kokogiak.com/megapenny/default.asp

A fascinating look at large numbers in terms of stacks of pennies. Stacks from 1 penny to a trillion pennies are shown with visual referents, value, weight, height if stacked, and more. Great for large-number concepts.

The Place Value Game (Jefferson Lab)
http://education.jlab.org/placevalue/index.html

The goal is to make the largest possible number from the digits the computer gives you. Digits are presented one at a time. The player must place the digit in the number without knowing what the next digits will be. It's fun and also good for understanding ordering of numbers.

Bölüm 12

Doğal Sayılarla Hesaplamalar İçin Stratejiler Geliştirme

Toplumun çoğu, hesaplama becerisini ilkokul seviyesinde matematik bilmenin ne anlama geldiğinin karakteristik özelliği olarak görür. Bu gerçekten uzak olmasına rağmen, doğal sayılarla hesaplama becerileri konusu aslında ilköğretim müfredatının, özellikle 1. sınıftan 6. sınıfa kadar, çok önemli bir parçasıdır.

Çıkarma (veya herhangi bir işlem) için tek bir yöntem olmasından ziyade en uygun olanı sayılar ve bağlam değiştikçe esnek olarak değişebilen ve hatta değişmesi gereken yöntemdir. *Standartlar*'ın ruhunda mesele artık, "üç basamaklı sayıların nasıl çıkarılacağını bilir" değildir; daha ziyade, öğrencilere gerçek hayatta en çok yarayacak bir takım esnek becerilerin, zihinden hesaplama becerisi dahil, zaman içerisinde gelişmesidir.

Sizin bu becerilere sahip olmamanız çok olasıdır ama bunları kazanabilirsiniz. Bu beceriler hakkında öğrenirken bunlar için çaba gösteriniz. Kendinizi esnek bir dizi hesaplama stratejileri ile donatınız.

Ana Fikirler

1. Esnek hesaplama yöntemleri sayıları çok çeşitli yollarla parçalara ayırıp birleştirmeyi içerir. Sayıları parçalara ayırmanın çoğu basamak değeri veya "uygun" sayılar (25 ve 75 gibi birlikte kolaylıkla çalışan sayı çiftleri) temeline dayanır.
2. "İcat edilmiş" stratejiler, sayılarla ve durumla değişen esnek hesaplama yöntemleridir. Stratejilerin başarılı kullanımı kullanan kişinin stratejileri anlamasını gerektirir ki *icat edilmiş* terimi bundan dolayıdır.
3. Hesaplama için esnek yöntemler işlemleri ve işlemlerin özelliklerini, özellikle çarpmanın değişme ve dağılma özelliklerini, iyi anlamayı gerektirir. İşlemlerin nasıl ilişkili olduğu da (toplamanın çıkarmayla, toplamanın çarpmayla ve çarpmanın bölmeyle) önemli bir bileşendir.
4. Geleneksel algoritmalar, hesaplama için zaman içerisinde geliştirilmiş akıllıca stratejilerdir. Her biri, bitişik konuma geçişlerle (takas veya tekrar gruplama) birlikte işlemi her seferinde bir basamak değeri üzerinde yapma temeline dayanır. Geleneksel algoritmalar bizleri basamakların meydana getirdiği birleşik sayıdan ziyade basamaklar cinsinden düşündürme eğilimindedir. Bu algoritmalar bütün sayılar için işe yarar, ama hesaplamanın en etkili ve en faydalı yöntemleri değildirler.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Esnek hesaplama bundan önceki üç bölümde bulunan fikirlerin üzerine inşa edilir. Hesaplama için esnek yöntemler, özellikle zihinsel yöntemler, kişinin matematiğin sayıları içeren her alanında çok daha etkili akıl yürütmesine izin verir.

- **İşlemlerin Anlamları ve Temel Bilgilere Hakim Olma** (Bölüm 9 ve 10): Çocuklar işlemleri anlamalarını geliştirirken çok basamaklı sayıları içeren bağlamsal problemleri inceleyebilmelidir ve hatta incelemelidir. Temel bilgiler olmadan, öğrenciler herhangi bir hesaplama gayretlerinde ciddi olarak dezavantajlı olacaklardır. Dahası, temel bilgilere hakim olmak için kullanılan bir çok strateji ve sayı kavram hesaplamaya genişletilebilir.
- **Basamak Değeri** (Bölüm 11): Basamak değeri hesaplama için sadece bir temel değildir; öğrenciler basamak değeri anlayışlarını kendi hesaplama yöntemlerini bulmanın bir *sonucu* olarak da geliştirebilirler.
- **Tahmini Hesaplama** (Bölüm 13): Tahmini hesaplama bir hesaplamadaki sayıların yerine "uygun" sayıları koymayı içerir ki yeni hesaplamalar zihinden veya en azından minimum çabayla yapılabilsin.

Hesaplamada Akıcılığa Doğru

Günümüz teknolojisi sayesinde elle uzun ve sıkıcı hesaplamalar yapma gereği aslında yok olmuştur. 1957'de, hesap makinelerinin yaygın kullanımından çok önce, yapılan bir çalışma yetişkinlerin kağıt kalemle hesaplama yöntemlerini yaptıkları hesaplamaların sadece %25'inde kullandıklarını göstermiştir (Wandt & Brown; Northcote & McIntosh, 1999'dan alıntı). Şimdi, zihinden veya kağıt kalem desteğiyle halledilebilecek çok sayıda hesaplama yöntemi olduğunu biliyoruz. Çoğu gündelik durumda bu alternatif hesaplama stratejileri daha kolay ve hızlıdır, çok defa zihinden yapılabilir ve genel sayı hissimize katkıda bulunur. Geleneksel algoritmaların (hesaplama için prosedürler) bu faydaları yoktur.

Aşağıdaki problemi düşününüz.

Mary'nin fotoğraf albümünde 114 tane yer vardı. Şimdiye kadar albümünde 89 tane fotoğrafı var. Albümü doldurmak için kaç tane daha fotoğraf koyabilir?

Durup Düşün!

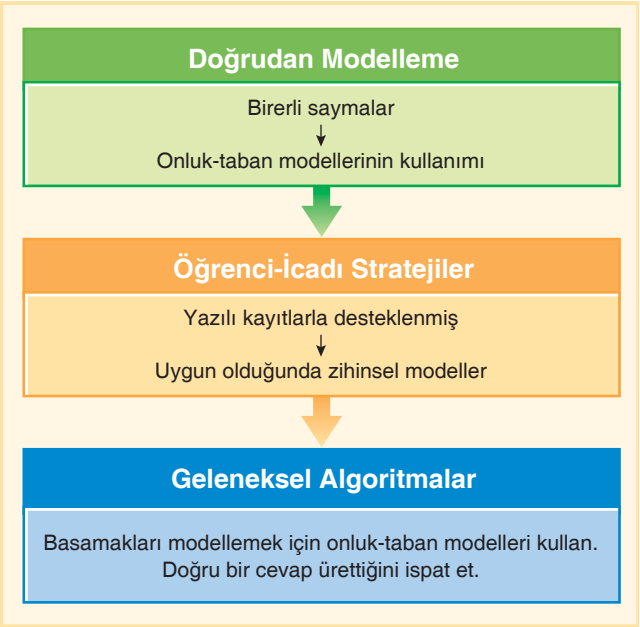
Fotoğraf albümü problemini okulda size öğretilenden başka bir yöntem kullanarak çözmeyi deneyiniz. Eğer 9 ve 4 ile başlamak isterseniz, başka bir yaklaşım deneyiniz. Zihinden yapabilir misiniz? Birden fazla yolla yapabilir misiniz? Okumaya devam etmeden bunun üzerinde çalışınız.

Aşağıda fotoğraf albümü problemindeki hesaplamayı çözmek için ilkokul düzeyindeki öğrencilerin kullandığı bir çok yöntemden sadece dördünü bulabilirsiniz:

89 + 11, 100'dür. 11 + 14, 25'tir.
90 + 10, 100'dür ve 14 daha 24 eder ve artı 1 (90 değil 89 olduğu için) 25'tir.
89, 99, 109 (bu 20'dir). 110, 111, 112, 113, 114 (parmaklarla takip ederek) 25'tir.

Bunun gibi stratejiler zihinden yapılabilir, genelde geleneksel algoritmalardan daha hızlıdır ve kullanan kişiye anlam ifade ederler. Daha anlamlı yöntemler daha hızlı ve hataya daha az yatkın oldukları halde, her gün öğrenciler ve yetişkinler geleneksel ve çoğu zaman hataya eğilimli stratejilere başvururlar. Çeşitli hesaplama stratejilerinde esneklik başarılı günlük yaşam için önemli bir araçtır. Hesaplamanın ne demek olduğu konusunda bakış açımızı genişletmenin zamanıdır.

Şekil 12.1 üç genel hesaplama tipini listeler. Başlangıçtaki etkisiz doğrudan modelleme yöntemleri yol göstermeyle bir takım esnek ve faydalı öğrenci icadı stratejiler haline gelebilir. Diyagramda belirtildiği gibi bu yöntemlerin bir çoğu, özellikle zihinsel hesaplama için hiçbir özel yöntem tasarlanmadığı halde, zihinden halledilebilir. Geleneksel kağıt kalem algoritmaları yaygın öğretim programlarında varlığını sürdürür. Bununla birlikte, bunlara yapılan vurgu, en azından düşünülmelidir.



Şekil 12.1 Üç çeşit hesaplama stratejisi.

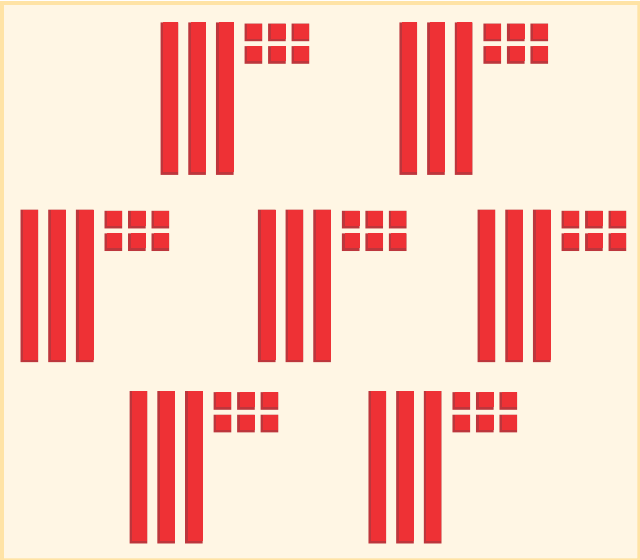
NCTM Standartları

"[Temel bilgilerle] aynı derecede asli olan hesaplamada akıcılıktır; yani, hesaplama için etkili ve doğru yöntemlere sahip olmak ve kullanmaktır. Akıcılık, zihinsel stratejiler ve kağıt üzerine not düşmenin bir karışımını kullanmada veya özellikle sayılar büyük olduğunda çabucak doğru cevap üretmek için kağıt kalemle bir algoritma kullanmada tezahür edebilir. Kullanılan yöntem ne olursa olsun, öğrenciler yöntemlerini açıklayabilmeli, birçok yöntemin var olduğunu anlamalı ve etkili, doğru ve genel yöntemlerin yararlılığını görebilmelidir" (s. 32). ◆

Doğrudan Modelleme

Genellikle icat edilen stratejilerden önce gelen gelişim basamağı doğrudan modellemedir: bir işlem veya bağlamsal problemin anlamını doğrudan temsil etmek için manipülatiflerin veya çizimlerin sayma ile birlikte kullanılması. Şekil 12.2 onluk-taban materyallerinin kullanıldığı bir örnek verir, fakat öğrenciler sıklıkla basit sayma nesneleri ve birerli saymayı kullanırlar.

Devamlı olarak birerli sayan öğrenciler büyük ihtimalle onluk-taban gruplama kavramlarını geliştirmemişlerdir. Bu onların iki basamaklı sayıları içeren problemleri çözmeye



Şekil 12.2 36 × 7'nin onluk-taban modelleri kullanılarak olası bir doğrudan modellemesi.

devam etmemeleri gerektiği anlamına gelmez. Bu öğrencilerle çalışırken, onlara, sayarken sayma nesnelerini onluklar halinde gruplamalarını önerin (zorlamayın). Bazı öğrenciler onlu çubuğun her bir kesitini birerli saydıkları halde, çubuğu on'ların sayısını takip etmek için sayma aparatı olarak kullanırlar.

Doğrudan modellemeyi kullanan öğrenciler kısa zamanda fikirlerini materyallere veya saymaya dayanmayan yöntemlere aktaracaklardır. Doğrudan modelleme safhası gerekli bir fikir arka planı sağlar. Bu gelişimsel stratejiler daha etkili yöntemler için hazır olmayan öğrencilere bu aşamanın ötesine geçmiş sınıf arkadaşlarıyla aynı problemleri incelemek için bir yol sağladıklarından dolayı da önemlidir. Öğrencileri zamanından önce manipülatif yaklaşımları terk etmeye zorlamamak önemlidir.

Öğrenci İcadı Stratejiler

Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema ve Empson (1998) geleneksel algoritmadan farklı olan veya fiziksel materyal kullanmayı veya birerli saymayı içermeyen herhangi bir stratejiden *icat edilmiş strateji* olarak bahsederler. *Kişisel ve esnek stratejiler* de aynı derecede uygun olsa da biz de *icat edilmiş strateji* terimini kullanacağız. Zaman zaman, icat edilmiş stratejiler, fikirler incelenip, kullanılıp, anlaşıldıktan sonra zihinsel yöntemler haline gelirler. Örneğin, 75 + 19 zihinden yapmak için zor değildir (70 + 20, 95'tir, 1 eksiği 94'tür). 847 + 256 için bazı öğrenciler problem üzerinde çalışırken hatırlamaya yardımcı olması için ara basamakları yazabilirler. (Bunu kendiniz deneyiniz.) Sınıfta, stratejiler gelişirken biraz yazılı destek çoğu zaman teşvik edilir. Düşünmenin yazılı kayıtları daha kolayca paylaşılır ve öğrencilere fikirlere odaklanmada yardım ederler. Yazılı, kısmen yazılı ve zihinsel arasındaki fark, özellikle gelişim döneminde, önemli değildir.

Son yirmi yıl boyunca birkaç araştırma projesi çocukların belirli bir algoritma veya strateji öğretilmediğinde hesaplama durumlarını nasıl hallettikleri üzerine dikkatleri odaklamıştır.* "Okuldaki ve okul dışındaki çocukların çok basamaklı sayıları toplamak ve çıkarmak için, açıkça bir öğretim olmadan, yöntemler inşa edebildikleri yönünde artan kanıtlar vardır" (Carpenter vd., 1998, s. 4). Öğrencilerin çarpma ve bölme için faydalı yöntemler inşa ettiklerini destekleyen veri de toplanmıştır (Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Kamii & Dominick, 1997; Schifter, Bastable, & Russell, 1999b).

Bütün öğrenciler kendi stratejilerini icat etmezler. Sınıftakiler tarafından icat edilen stratejiler paylaşılır, incelenir ve başkaları tarafından denenir. Bununla birlikte, öğrencilere hiçbir stratejiyi anlamadan kullanmaları için izin verilmemelidir.

Geleneksel Algoritmalarla Karşılaştırmalar. Öğrenci-icadı stratejilerle geleneksel algoritmalar arasında önemli farklar vardır.

1. *İcat edilen stratejiler basamak-odaklı olmaktan ziyade sayı odaklıdır.* Örneğin, 68 × 7 için icat edilmiş bir strateji 7 x 60, 420'dir ile başlar ve 56 daha 476'dır. İlk çarpım 7 kere *altmış*tır, geleneksel algoritmada olacağı gibi 6 rakamı değildir. 45 + 32 için geleneksel algoritmayı kullanırken öğrenciler hiçbir zaman 40 ve 30'u düşünmezler daha ziyade 4 + 3'ü düşünürler. Uzun zamandır geleneksel algoritmalara karşı mücadeleci olan Kamii bu algoritmaların basamak değeri "öğrenimini yıktığını" iddia eder (Kamii & Dominick, 1998).
2. *İcat edilen stratejiler sağ taraf yerine sol taraftandır.* İcat edilen stratejiler sayıların en soldaki basamaklarıyla temsil edilen en büyük parçalarıyla başlarlar. 26 x 47 için icat edilen stratejiler 20 x 40, 800'dür ile başlayacaktır ve sadece bir basamakta neticedeki cevabın büyüklüğü hakkında bir his verecektir. Geleneksel algoritma 7 x 6, 42'dir ile başlar. Sağ taraftan basamak odaklı başlayarak geleneksel algoritmalar cevabı sona kadar gizleyebilirler. Uzun bölme bir istisnadır.
3. *İcat edilen stratejiler "tek doğru yol"dan ziyade esnektirler.* İcat edilen stratejiler hesaplamayı kolaylaştırmak için kullanılan sayılarla birlikte değişme eğilimindedirler. Bunların her birini zihinden deneyin: 465 + 230 ve 526 + 98. Siz de

*The Cognitively Guided Instruction (CGI) project, directed by Carpenter, Fennema, and Franke at the University of Wisconsin; the Conceptually Based Instruction (CBI) project, directed by Hiebert and Wearne at the University of Delaware; the Problem Centered Mathematics Project (PCMP), directed by Human, Murray, and Olivier at the University of Stellenbosch, South Africa; the Supporting Ten-Structured Thinking (STST) project, directed by Fuson at Northwestern University; and ongoing research by Kamii at the University of Alabama are all examples of efforts that have informed thinking about invented strategies for computation.

aynı yöntemi mi kullandınız? Geleneksel algoritma bütün problemlerde aynı aracı kullanmayı telkin eder. 7000-25 için olan geleneksel algoritma öğrenci hatalarına götürür fakat zihinsel bir strateji nispeten kolaydır.

Öğrenci İcadı Stratejilerin Faydaları. İcat edilmiş stratejilerin gelişimi hesaplama kolaylığından daha fazlasını sağlar. Hem bu stratejilerin gelişiminin hem de düzenli kullanımlarının göz ardı edilmesi zor olan faydaları vardır.

- *Öğrenciler daha az hata yaparlar.* Araştırmalar, öğrencilerin anladıkları yöntemleri kullandıklarında stratejileri anlamadan öğrenmelerine kıyasla çok daha az hata yaptıklarını gösterir (Gravemeijer & van Galen, 2003; Kamii & Dominick, 1997). Geleneksel algoritmaya karşı iyi niyetle geçen onlarca yıldan sonra birçok öğrenci onları destekleyen kavramları anlamıyorlar. Bu öğrenciler sadece hata yapmıyor, aynı zamanda bu hatalar çoğu zaman sistematik ve düzeltilmesi güç hatalardır. İcat edilmiş stratejilerle hatalar daha az sıklıktadır ve neredeyse hiçbir zaman sistematik değildir.
- *Daha az tekrar öğretme gerekir.* Öğretmenler çoğu zaman, öğrencilerin alternatif stratejilerle ilk zamanlardaki çabalarının yavaş ve zaman alıcı olduğundan şikâyet ederler. Fakat ilk başlardaki aşamalarda olan zaman alıcı mücadele sağlam ve kalıcı bir fikirler ağına iyi bütünleşmiş ve anlamlı fikirlerle sonuçlanır. Gelişme zamanındaki artış tekrar öğretme ve düzeltmeye olan ihtiyaçta dikkate değer bir azalma ile telafi edilir.
- *Öğrenciler sayı hissini geliştirir.* "Hesaplama, gittikçe artan bir biçimde sadece cevaplar üretmek için bir araç olmaktan çok sayı sisteminin derin yapısının üzerinde bir pencere olarak görülüyor" (NRC, 2001, s. 182). Öğrencilerin sayı odaklı esnek algoritmaları geliştirmeleri ve kullanmaları onlara sayı sisteminin zengin bir anlayışını sunar. Buna karşılık öğrenciler sıklıkla geleneksel algoritmaları neden çalıştıklarını açıklayamadan kullanırlar (Carroll & Porter, 1997). Böyle nedenleri olmayan kuralların çok az faydası vardır.
- *İcat edilmiş stratejiler zihinden hesaplama ve tahmin etmenin temelidir.* İcat edilmiş stratejiler hesaplama için norm olduklarında başka yöntemleri öğretmeye veya zihinden hesaplama hakkında ayrı bir beceriymiş gibi konuşmaya gerek yoktur. Düşüncelerini icat edilmiş stratejilerle kaydetmeleri veya ara basamakları yazmaları öğretilen öğrenciler, çoğu zaman bu prosedürleri zihinden daha etkili olarak yapabildiklerini gördüklerinden böyle yazmanın gerçekten gerekli olup olmadığını soracaklardır. Tahmini hesaplama ayrı bir beceri seti içerir; esnek, sayı odaklı stratejilerin gelişimi bu becerilerin çoğunda önemli bir rol oynar (NRC, 2001).
- *Esnek yöntemler geleneksel algoritmalardan çoğu zaman daha hızlıdır.* 64 x 8 işlemini düşününüz. Basit bir icat edilmiş strateji 60 x 8 = 480 ve 8 x 4 = 32'yi içerebilir. 480 ve 32'nin toplamı 500 + 12 fazlası – 512'dir. Bu, zihinden veya hatta biraz kayıt etmeyle kolayca, geleneksel algoritmanın çoklu basamaklarından çok daha kısa zamanda yapılır. İcat edilmiş stratejilerde ustalaşanlar toplama ve çıkarma hesaplamalarını geleneksel algoritmayı kullananlardan devamlı olarak daha hızlı yapacaklardır.
- *Algoritma icadının kendisi "matematik yapmanın" oldukça önemli bir sürecidir.* Hesaplama için bir strateji icat eden veya sınıf arkadaşlarından bir strateji benimseyen öğrenciler matematiğin anlamını kavrama sürecine çok yakından dâhil olmuşlardır ve bunu yapma becerilerine güven geliştirirler. Prosedürlerin gelişimi çoğu zaman ilkokul öğrencilerinden gizlenmiş bir süreçtir. Matematiğin bu yönüyle uğraşmakla "matematik yapmanın" önemli ölçüde farklı ve değerli bir görünümü küçük çocuklara açılmıştır.

Bu faydalara ilaveten öğrencilerin hesaplama becerilerinin geleneksel stratejiler öğretilen öğrencilere kıyasla zarara uğramadığı yönünde gittikçe büyüyen bir kanıt topluluğu vardır. Standart-tabanlı programlar kullanan okul sistemlerinden toplanan veriler bu öğrencilerin anlama ve problem çözme ölçümlerinde geleneksel programlardan gelen akranlarından tutarlı olarak daha iyi performans gösterdiklerini ortaya çıkarmıştır. Çok basamaklı hesaplama alanında, çoğu çalışma standart-tabanlı öğrencilerin geleneksel programlardaki öğrencilerle eşit düzeyde olduklarını veya onlardan daha iyi performans gösterdiklerini bulmuştur (Fuson, 2003). Hollanda'daki öğrencilere geleneksel algoritmanın kullanımı öğretilmez ve onlar en az ABD'li öğrenciler kadar iyi performans gösterirler (Gravemeijer & van Galen, 2003; Torrence, 2003).

Zihinden Hesaplama. Zihinsel bir hesaplama stratejisi basitçe, zihinden yapılan herhangi bir icat edilmiş stratejidir. Bir öğrenci için zihinsel strateji olabilen, başka birisine yazılı destek gerektirebilir. Başlangıçta öğrencilerden hesaplamaları zihinden yapmaları istenmemelidir çünkü bu, henüz makul bir icat edilmiş strateji geliştirmemiş veya hâlâ doğrudan modelleme aşamasında olan öğrencilerin gözünü korkutabilir. Aynı zamanda, öğrencilerin hesaplamaları zihinden yapma becerilerine (ve sizin kendi becerinize) oldukça şaşırabilirsiniz de.

Aşağıdaki örnekle kendinizi deneyin:

342 +153 + 481



Durup Düşün!

Az önce gösterilen toplama etkinliği için şu yöntemi deneyiniz: Yüzleri toplayarak başlayın ve ilerlerken toplamları söyleyin – 3 *yüz*, 4 *yüz*, 8 *yüz*. Sonra bunun üstüne birbiri ardına onları ekleyin ve en sonunda da birleri. Bir deneyin.

Hesaplamalar birazcık daha karmaşık olduğunda, zorluk daha ilgi çekicidir ve genellikle daha fazla alternatif vardır. 7 x 28 için *Standartlar* üç çözüm yolu listeler ama en

azından iki tane daha vardır (NCTM, 2000, s. 152). Siz kaç tane yol bulabilirsiniz?

Öğrencileriniz daha ustalaştıkça zaman zaman hesaplamaları zihinden yapma zorlu görevi verilebilir ve hatta verilmelidir de. Bütün öğrencilerden aynı becerileri beklemeyiniz.

Geleneksel Algoritmalar

İncelemeler adlı kitap hariç, bütün ticari öğretim programları geleneksel algoritmaları öğretir. Yüzyılı aşkın gelenek artı ailelerin baskısı bu yaklaşımları terk etmedeki gönülsüzlüğümüzün en azından kısmen sorumlularıdır. Diğer tartışmalar genellikle etkililik ve bütün sayılarla çalışacak yöntemlere olan ihtiyaç etrafında döner. Birileri, toplama ve çıkarma için iyi anlaşılmış ve pratiği yapılmış icat edilmiş stratejilerin yeterinden fazlası olduğu karşılığını verebilir. Bununla birlikte, 486 x 372 gibi bir hesaplamanın icat edilmiş stratejilerle zor olduğu kesinlikle doğrudur. Ama böyle hesaplamalar teknoloji ile mi yapılmalıdır?

İcat edilmiş stratejilere artan ilginin ve geleneksel algoritmalara karşı olan tartışmaların ne kadar ikna edebilici olduğunun önemi yok, çok az sınıf öğretmeni geleneksel yaklaşımları bırakabileceklerdir.

Erteleyin! Erteleyin! Erteleyin! Öğrenciler muhtemelen geleneksel algoritmaları icat etmezler. Sizin her bir algoritmayı onlara tanıtıp açıklamanız ve nasıl ve neden çalıştıklarını anlamaları için yardım etmeniz gerekecektir. Siz sınıfınızda bu algoritmaları ne kadar dikkatli bir şekilde sadece başka bir alternatif olarak tanıtsanız da, öğrencileriniz muhtemelen hesaplama için "gerçek yol" veya "doğru yol" budur olarak algılayacaklardır. Geleneksel algoritmalarla başladığınız zaman öğrencilerinize başka yöntemleri öğrenmelerini önermeniz aşırı derecede zordur. Hesaplamalara sağ yerine soldan başlamanın ve basamaklardan ziyade bütün sayılar cinsinden düşünmenin sizin için ne kadar zor olduğunu düşününüz. Bu alışkanlıkları, yerleştikleri zaman, değiştirmek zordur.

Geleneksel algoritmalar anlamlı olacak biçimde öğretilebilir mi? Kesinlikle! Bu bölümün ilerleyen kısımlarında her bir algoritmayı öğretmek için anlamlı yaklaşımlar tartışılacaktır. Eğer geleneksel algoritmaları öğretmeyi planlıyorsanız önce icat edilen stratejilerle kayda değer bir zaman harcamanız tavsiye edilir– aylar harcayınız, haftalar değil. Geleneksel algoritmalar için acele etmeniz gerektiğini hissetmeyiniz. Erteleyin! Çabanızı icat edilmiş stratejilerde harcayın. Çocukların icat edilmiş stratejilerle çalışmalarından kazanacakları anlayış sizin geleneksel algoritmaları öğretmenizi çok daha kolaylaştıracaktır.

Geleneksel Algoritmalar Meydana Gelecektir. Çocuklar geleneksel algoritmaları sıklıkla büyük kardeşlerinden, geçen seneki öğretmenlerinden ve aile bireylerinden ("Babam bana kolay bir yol gösterdi") öğrenirler. Bir geleneksel yöntem bilen bu tip öğrenciler daha esnek stratejilerin icadına çoğu kez karşı koyarlar. O zaman ne yaparsınız?

Öncelikle ve en önemli olarak, bütün stratejilere uygulanan kuralı geleneksel algoritmaya uygulayın: Eğer kullanıyorsanız neden çalıştığını anlamalısınız ve açıklayabilmelisiniz. "Hadi neden çalıştığını bulalım" denen bir atmosferde öğrenciler, bu algoritmaları anlamaktan tıpkı herhangi başka birini anlamada olduğu gibi istifade ederler. Ama sorumluluk onların olmalıdır, sizin değil.

Geleneksel bir algoritmayı (anlaşıldığı zaman) sınıfın yöntem "araç kutusuna" konacak bir strateji daha olarak kabul edin. Fakat, diğer stratejiler gibi bazı durumlarda diğer durumlara kıyasla daha faydalı olabileceği fikrini pekiştirin. 504 – 498 veya 75 x 4 gibi zihinsel bir stratejinin çok daha faydalı olabileceği problemler sorun. Hangi yöntemin en iyi göründüğünü tartışın. 4568 + 12,813 gibi bir problem için geleneksel algoritmanın bazı avantajları olduğuna işaret edin. Ama gerçek hayatta çoğu insan bu hesaplamaları hesap makinesinde yapıyor.

Algoritmalarda Kültürel Farklar. Sayıların dilinin evrensel olması üzerinden İngilizce öğrenen öğrenciler için matematiğin diğer derslerden daha kolay olduğunu zannedebilsek de gerçek şudur ki notasyonlarda, teamüllerde ve algoritmalarda birçok farklılıklar vardır. Öğrencilerin sınıfa getirdikleri farklı algoritmalar ve "matematik yapmak" için sembolleri kayıt etme yolları hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak, özellikle bizim "geleneksel algoritma" diyebildiğimizin başka ülkelerde gelenek olmadığını bilmek, öğrencileri desteklemede ve ailelere cevap vermede size yardımcı olacaktır (Bkz. Bölüm 6'daki "Kültürel Olarak İlişkili Matematik Öğretimi"). Alternatif algoritmaların farkında olma, öğrencilerinizin Amerika Birleşik Devletleri dışındaki okullarda olan önceki deneyimlerinden veya aileleri tarafından öğretilen yaklaşımlardan bildikleri prosedürleri ve cevapları kayıt etme yollarını incelemede yardımcı olacaktır.

Örneğin, çoğu Latin ve Avrupa ülkelerinde kullanılan popüler bir çıkarma algoritması "denk toplama" veya "her ikisine de on ekle" olarak bilinir ve eksilen ve çıkarılana aynı miktarı eklemenin farkı (cevabı) değiştirmeyeceği bilgisine dayanır. Dolayısıyla, eğer çözülecek ifade 15-5 ise, eksilene ve çıkarılana 10 ekleyip 25 – 15'i çözerseniz cevapta (veya farkta) hiçbir değişiklik olmaz. Fark hâlâ 10'dur. Bunu düşünmek için 62 – 27'ye bakalım. Siz "geleneksel" veya tanıdık olarak düşünebileceğiniz algoritmayı kullanarak muhtemelen tekrar gruplarsınız: 6'nın üzerini çizip 10'u küçük bir "1" ile birler sütünundaki 2'ye ekle (12 yapacak şekilde) ve sonra 12'den 7'yi çıkar ve benzeri gibi. "Denk toplama" yaklaşımında sadece zihinden birler sütunundaki 2'ye küçük bir "1" (on'u temsil etmek için) ekleyerek ve böylece 12 elde ederek 62'ye on eklersiniz. Sonra eksilene eklenen 10'un etkisini 27'ye (çıkarılana) zihinden 10 ekleyerek, ama bunu onlar sütununu 1 arttırıp sonra 37 çıkararak, yok edersiniz. Bu size şaşırtıcı gelebilir – ama deneyin. Özellikle eksilende sıfırlar olduğu zaman (örneğin, 302 – 178) bunu

ilginç bir yaklaşım olarak bulacaksınız. Daha önemlisi, olası şaşkınlığınız size, öğrencilerinizin (ve onların ailelerinin) bildikleri ve başarılı bulduklarından tamamen farklı bir prosedüre nasıl tepki verebileceklerinin hissini yaşatır.

Algoritmalar hakkında kültürler arası farkları anlamadaki başka bir kilit unsur başka ülkelerde zihinsel matematiğe yapılan kuvvetli vurgudur. Bu sıklıkla öğretmenleri şaşırtır, özellikle bir öğrenci hiçbir görünür kısmi çarpım, ara hesaplama veya notasyon olmadan sadece cevabı yazdığında. Bu, bazen bu vurgunun farkında olmayan öğretmenler tarafından, acemice, öğrencinin muhtemelen başkasının çalışmasını kopya ettiği şeklinde yorumlanabilir (Perkins & Flores, 2002). Aslında öğrencilere, bu işi zihinden yapma becerilerinden dolayı kendileriyle gurur duymaları öğretilmiştir.

Öğrencilerinizin, özellikle başka kültürel birikimlerden olanların, sayılarla işlemleri incelerken ne yaptıkları ve düşündükleri hakkında daha fazla öğrenmeniz sizin repertuarınızı genişletmeniz için bir fırsattır.

Öğrenci İcadı Stratejilerin Gelişimi

Öğrenciler mükemmel hesaplama yöntemlerini kendiliklerinden, öğretmenleri rahatça oturup izlerken icat etmezler. Farklı deneysel programlardaki öğrencilerin farklı stratejiler geliştirme veya farklı stratejilere doğru yönelme eğiliminde oldukları bulundu; ve bu da öğretmenlerin ve programların öğrencilerin geliştirdiği yöntemler üzerinde etkisi olduğunu akla getirdi (Fuson ve diğerleri, 1997). Takip eden bölüm, çocuklara bütün sınıf seviyeleri ve dört işlemin tamamı için uygun icat edilmiş stratejiler geliştirmede yardım etmek için genel pedagojik yöntemleri tartışır.

Strateji İcat Etmek İçin Ortam Oluşturma

İcat edilen stratejiler güçlü bir sayı anlayışından gelişir. Basamak değerinin standart gelişimi sıklıkla öğrencileri hesaplama stratejileri icat etmedeki zorluklara kötü hazırlanmış olarak bırakır. Örneğin, bazı üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencileri verilen iki-basamaklı bir sayıdan on az veya on fazla olan sayının ismini saymaya başvurmadan söylemekte zorluk çekerler. Dolayısıyla, öğrencilerin matematikçiler gibi davranacakları ve fikirleri korkmadan keşfedecekleri sınıf ortamına ihtiyaçları vardır.

Matematikteki bu yeni fikirleri inceleme girişiminde bulunan öğrenciler sınıflarının o naif ve olgunlaşmamış düşüncelerini ifade etmeleri için güvenilir bir ortam olmasına ihtiyaç duyarlar. Bu kitapta problem çözme ortamının gelişimi hakkında daha önce tarif edilen bazı özelliklerin aynısı, varsayımları test etme ve yeni yaklaşımlar denemek üzere ortamı oluşturmak için burada tekrar edilmelidir. Aşağıda akılda tutulması gereken bazı unsurları bulabilirsiniz:

- Öğrenciler arasında etkileşimi, tartışmaları ve tahminleri bekleyiniz ve teşvik ediniz.
- Öğrenciler eski bilgilerini açıklığa kavuşturduklarında ve yeni fikirler inşa etme girişiminde bulunduklarında kutlayınız.
- Yeni şeyler denemek için merak ve açık fikirliliği teşvik ediniz.
- Yanlış ve doğru fikirler hakkında değerlendirmeyen veya endişe vermeyen bir tarzda konuşunuz.
- Komplike olmayan fikirleri daha komplike düşünmeye doğru ikna etme, çalıştırma ve güdümlü soru sorma yollarıyla ilerletiniz.
- Öğrencilerin ilgisini çekmek için bağlamsal problemler kullanınız.
- Öğrenciler yeni fikirler biçimlendirirken müdahale mi etmeniz yoksa geri adım mı atmanız gerektiğini dikkatlice düşünmelisiniz (şüpheniz varsa geri çekiliniz).

Bölüm 3'te tarif edilen üç parçalı ders formatı icat edilen stratejiler dersi için iyi bir yapıdır. Etkinlik ister bir veya iki bağlamsal problem ister yalın bir hesaplama olsun çözüm yöntemi her zaman tartışılmalıdır. Zorluğu ayarlamak için bazen farklı gruplara farklı rakamlarla varyasyonlar oluşturup verebilirsiniz.

İcat Edilen Stratejileri Desteklemek İçin Modeller

Sayı sistemimizdeki örüntülerin üzerine odaklanan ve yüzlük tablo, küçük onluk kartlar veya onluk-taban modelleri gibi basamak değeri modelleri yoluyla toplama ve çıkarmayı inceleyen etkinlikler öğrencileri icat edilen stratejiler için hazırlar ve onların sayı hissini geliştir. Sayı ilişkileri ve informal toplama ve çıkarma stratejileri üzerine odaklanan uygun etkinliklerin bir derlemesi Bölüm 11'de bulunabilir (Bkz. s. 199-206).

Toplama ve çıkarma için olan birçok stratejinin, temel bilgiler ve basamak değeri stratejilerinin, özellikle 10'u köprü olarak kullananların, uzantıları olduğuna dikkat ediniz (Bkz. Bölüm 10). Örneğin, öğrenciler 8 ve 9'u içeren temel işlemlere hakim olmanın yöntemlerini incelerken, bu fikirleri 38 veya 69'a genişletin. Başka bir örnek olarak, 4'ün iki katı 40'ın iki katına genişletilebilir.

Bir sayıyı parçalara "ayırma" kavramı her işlem için faydalı bir stratejidir. Hem *ayırma* kelimesinin hem de gösterildiği gibi görsel diyagram kullanımının öğrencilerin stratejileri geliştirmelerine yardım ettiği bulunmuştur (Saenz-Ludlow, 2004). İki hesaplamanın nasıl birleştiğini belirtmek için Şekil 12.3(a)'daki gibi oklar veya çizgiler kullanmayı deneyiniz.

Şekil 12.3(b)'de gösterilen *boş sayı doğrusu* Hollanda'da geliştirilen ve Amerika Birleşik Devletleri'nde gittikçe daha fazla önerilen bir tekniktir (Fosnot & Dolk, 2001; Gravemeijer & van Galen, 2004; Ineson, 2007; Varol & Farran, 2007).

(a) 86 ve 47 kaç yapar?

Öğrn: 80 ve 20 daha 100 yapar biliyorum.

Öğrt: 80 ve 20 nereden geliyor?

Öğrn: 47'yi 20 ve 20 ile 7 olarak ve 86'yı 80 ve 6 olarak ayırdım.

Öğrt: (ayırmayı çizgilerle gösterir) O zaman 20'lerden birini 80'e ekledin?

Öğrn: Evet, 80 ve 20, 100 eder. Daha sonra öbür 20'yi ekledim ve 120 elde ettim.

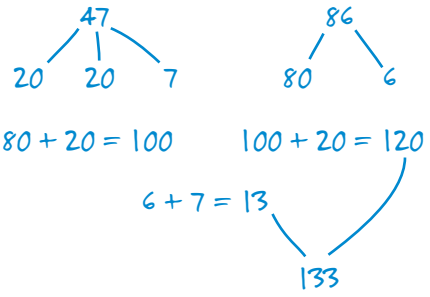
Öğrt: (denklemi tahtaya yazar)

Öğrn: Sonra 6 ve 7'yi ekledim ve 13 elde ettim.

Öğrt: (bu denklemi yazar)

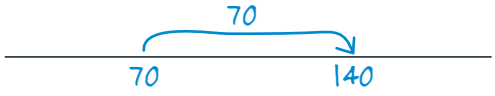
Öğrn: Sonra 120'yi 13'e ekledim ve 133 elde ettim.

Öğrt: (Birleşen çizgilerle gösterir).

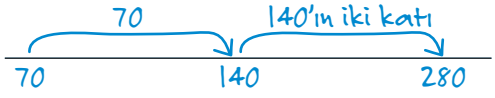


(b) 4 kere 68 kaç yapar?

Öğrn: 70'leri kullandım çünkü onlar 68'lerden daha kolay. Önce 70 ve 70'in 140 olduğunu yaptım.

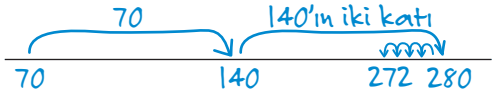


Sonra 140'ın iki katını aldım ve 280 elde ettim.



Öğrt: Neden 140'ın iki katını aldın?

Öğrn: Çünkü bu dört tane 70 yapar ve benim zaten iki tane 70'im vardı. Sonra 4 tane 2 çıkarmam gerekti çünkü sadece 68 yerine 70 kullandım. Bu da beni 272'ye ulaştırdı.



Şekil 12.3 Sınıfın stratejiyi görebilmesi için öğrencilerin düşünce süreçlerini tahtaya kaydetmenin iki yöntemi.

İlk başta boş sayı doğrusu bir öğrencinin düşüncesini sınıf için modellemenize yardım etmede iyi bir yoldur. Kısa zamanda öğrenciler için kendi düşüncelerini oluşturmada kullanacakları bir araç haline gelecektir (Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998). Bu araştırmacılar boş sayı doğrusunun normal sayı doğrusundan çok daha esnek olduğunu bulmuşlardır; çünkü boş sayı doğrusu herhangi bir sayıyla kullanılabilir ve öğrencilerin kafaları çentikler ve onların arasındaki boşluklarla karışmaz. Doğrudaki sıçramalar, öğrenciler çözümlerindeki her bir adımı paylaşırken veya açıklarken kaydedilebilir.

Toplama ve Çıkarma İçin Öğrenci İcadı Stratejiler

Araştırmalar öğrencilerin toplama ve çıkarma için birçok strateji icat edeceğini göstermiştir. Sizin hedefiniz çocuklarınızın her birinin oldukça etkili, matematiksel olarak doğru ve birçok farklı sayı için faydalı olan en az bir veya iki tane yönteme sahip olması olabilir. Farklı çocukların farklı stratejilerde karar kılmasını bekleyiniz.

Öğrencilerinize hangi problemleri soracağınızı dikte edeceğinizi takip etmek için açık biçimde tanımlanmış bir ilerleme yolu yoktur. Kullandıkları akıl yürütme türünü ve önerilen stratejileri dinlemeyi öğrenmelisiniz. Hesaplamanın içerdiği sayılar ve hem de kullanılan bağlamsal problem tipleri öğrencilerin bir probleme nasıl yaklaştıklarını etkileyecektir. Yine de düşünce süreçlerinin birçok varyasyonunu keşfedeceksiniz. Takip eden bölümler çocukların sıklıkla kullandığı çeşitli icat edilmiş stratejileri akla getirir. Bunlar öğretim programı olarak değil, daha ziyade size olasılıkların kapsamı hakkında biraz fikir vermek için sunulmuştur.

Tek Basamaklı Sayıları Toplama ve Çıkarma

Küçük bir miktarı toplarken veya çıkarırken veya birbirine oldukça yakın iki sayı arasındaki farkı bulurken birçok öğrenci problemleri çözmek için saymayı kullanacaklardır. Hedeflerden biri öğrencilerin temel bilgiler ve sayı sisteminin onluk yapısı hakkındaki bilgilerini genişletmek olmalı ki saymaya gerek olmasın. Fark bir onlukla çakıştığı zaman (örneğin, 58 + 6) on'un katına olan yukarı veya aşağı doğru uzaklığı kullanmak son derece faydalıdır.

Tommy kitabının 47. sayfasındaydı. Sonra 8 sayfa daha okudu. Kaçıncı sayfaya geldi?

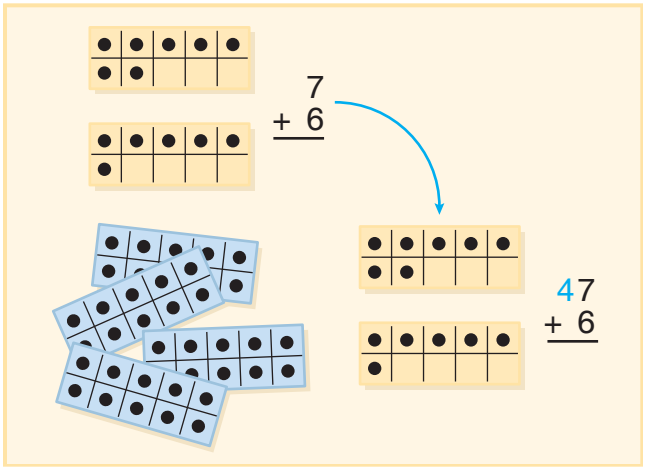
68'den 75'e olan uzaklık nedir?

Ruth'un 52 senti vardı. 8 sente küçük bir oyuncak aldı. Ne kadar parası kaldı?



Bu problemlerden her biri bir on'la çakışır ve on'dan daha küçük bir değişim veya fark içerir. On'a dikkat etmeden yukarı veya aşağı doğru sayan öğrencilere kulak verin. Bu çocuklara Şe-

kil 12.4'deki gibi ya yüzlük tabloyu ya da küçük onluk kartları kullanmalarını önerebilirsiniz. Aynı zamanda, 8 + 6 veya 13 – 5 gibi temel işlemleri nasıl çözdüklerini bulunuz. Bu işlemler için on'un kullanımı daha yüksek onluk problemler için olanla aslında aynıdır. İlgili etkinliklerin hepsi Bölüm 11'de bulunabilir: "Düşündürücü Hesap Makinesi Sayması" (11.26), "Arası Ne Kadar?" (11.29), veya "Küçük Onluk Kart Toplamları" (11.30).. ◆



Şekil 12.4 Küçük onluk kartlar çocukların 10 Yap fikrini daha büyük sayılara genişletmesine yardım edebilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 15-16).

Öğrencileri bir basamaklı sayılardan iki basamaklı sayılara ilerletirken, on'ları ve yüzleri toplama ve çıkarma önemli bir geçiştir. 10 veya 100'ün katlarını içeren toplam ve farklar zihinden kolayca hesaplanır. Aşağıdaki gibi bir problemi tahtaya yazınız:

$$300 + 500 + 20$$

Öğrencileri bu problemi zihinden çözmeye zorlayın. Nasıl yaptıklarını paylaşmalarını isteyin. Basamak değeri kelimelerinin kullanımını arayın: "3 yüz ve 5 yüz 8 yüz'dür ve 20 daha 820'dir."

Çocukların onlar ve yüzler cinsinden düşünmeye başlamalarına yardım etmek için onluk taban modellerini kullanın. İlk başlardaki örnekler takası içermemelidir. 420 + 300 alıştırması hiçbir takas içermezken 70 + 80 daha zor olabilir.

İki Basamaklı Sayıları Toplama

2-basamaklı sayıların toplamını içeren problemler çok çeşitli stratejileri teşvik edeceklerdir. Bunlardan bazıları sayılardan biri veya diğeriyle başlayıp bu noktadan itibaren ya bir sonraki on'a ulaşmak için üzerine ekleyerek ya da bir sayıdan diğerine on'lar ekleyerek çalışmayı içerir. Diğer bir deyişle, 46 + 35 için bir öğrenci 50'ye ulaşmak için 46'ya 4 ekleyebilir ve sonra 31 daha ekler veya önce 46'ya 30 ekler sonra 80'e ulaşmak üzere 4 ekler ve 1 daha ekler. Her iki durumda da on'un kullanılmasının çok açık bir avantajı vardır. Birçok çocuk bu katları geçerken on'larda durmadan sayacaklardır.

Başka yaklaşımlar sayıları parçalara ayırmayı ve daha kolay olan parçaları ayrı ayrı eklemeyi içerir. Genellikle ayırma onları ve birleri içerir veya öğrenciler çalışmak için sayıların başka parçalarını kullanabilirler; örneğin, 50 veya 25 gibi sayının "uygun" bir parçası.

Öğrenciler sıklıkla onlarla ve birlerle sayma tekniğini kullanacaklardır. Yani, "46 + 30, 76'dır" yerine "46 → 56, 66, 76" diye sayabilirler. Öğrencilerin takip etmelerine yardım etmek için bu saymalar söylendikçe yazılabilir.

Şekil 12.5, 2-basamaklı sayıların toplamı için dört farklı strateji göstermektedir. Çözümlerin kayıt ediliş biçimleri önerilerdir. Boş sayı doğrusu kullanımına dikkat ediniz. Sıradaki bağlamsal problem bir öneridir.

İki izci grubu alan gezisine gitti. 46 kız ve 38 erkek izci vardı. Kaç tane izci geziye gitti?

10 Yapmak için Taşı ve telafi stratejileri sayılardan biri 8 veya 9 ile bittiğinde faydalıdır. Bu stratejiyi teşvik etmek için 39 veya 58 gibi toplananları içeren problemler sunun. İki sayıdan sadece birini ayarlamanın gerekli olduğuna dikkat ediniz.

Durup Düşün!

367 + 155 işlemini yapabildiğiniz kadar farklı yoldan yapmayı deneyiniz. Yollarınızdan kaç tanesi Şekil 12.5'dekilere benzerdir?

Yukarı Doğru Sayarak Çıkarma Yapmak

Bu çıkarma yapmak için şaşırtıcı biçimde güçlü bir yoldur. Temel işlemler için *toplamayı düşün* stratejisi üzerinde çalışan öğrenciler daha büyük sayıları içeren problemleri de çözüyor olabilirler. Kavram aynıdır. 38 – 19 için fikir, "38'e gelmek için 19'a kaç eklerim?" i düşünmektir. Bu stratejinin 42 – 6 için muhtemelen etkili olmayacağına dikkat ediniz. *Bilinmeyen değişiklikle birleştir* problemleri veya *kayıp parça* problemleri (Bölüm 9'da tartışılmıştı) yukarı doğru sayma stratejisini teşvik edeceklerdir. Aşağıda her biri için birer örnek bulabilirsiniz.

Sam'in 46 tane beyzbol kartı vardı. Bir kart gösterisine gitti ve koleksiyonu için biraz daha kart aldı. Şimdi 73 kartı var. Sam kart gösterisinde kaç tane kart aldı?

Juanita bütün boya kalemlerini saydı. Bazıları kırıktı ve bazıları değildi. Toplamda 73 boya kalemi vardı. 46 tane boya kalemi kırık değildi. Kaç tanesi kırıktı?

On'ları Topla, Birleri Topla ve Sonra Birleştir

46 + 38

40 ve 30 70'dir. 6 ve 8 14'tür.
70 ve 14 84'tür.

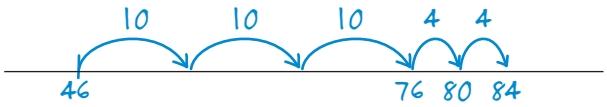
40 + 30 = 70
6 + 8 = 14
84

Üzerine On'ları Ekle, Sonra Birleri Ekle

46 + 38

46 ve 30 daha 76'dır. Sonra diğer 8'i üzerine ekledim. 76 ve 4, 80'dir ve 4 daha 84' tür.

46 + 30 →
76 + 8 → 80, 84

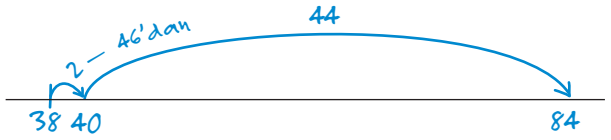


Birazını Onluk Yapmak İçin Taşı

46 + 38

46'dan 2 al ve 40 yapmak için 38 ile bir araya getir. Şimdi 44'ün var ve 40 daha 84'tür.

2
46 + 38
44 + 40
84

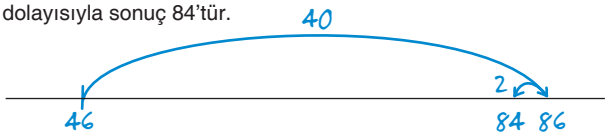


Güzel Bir Sayı Kullan ve Telafi Et

46 + 38

46 ve 40, 86'dır. Bunda ekstradan 2 vardır dolayısıyla sonuç 84'tür.

46 + 40 →
86 − 2 → 84



Şekil 12.5 İki basamaklı sayıların toplaması için dört tane icat edilmiş strateji.

Bu problemlerdeki sayılar Şekil 12.6'da gösterilen stratejilerde kullanılmıştır. Basitçe iki sayı arasındaki farkı sormak bu stratejiyi harekete geçirebilir.

Eksiltmeyle Çıkarma

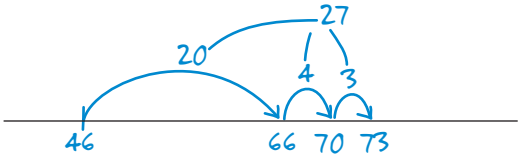
Eksiltme/ayırma eylemini kullanmak zihinden yapmak için oldukça zordur. Bununla birlikte, muhtemelen ders

Yaklaşmak İçin On'ları Ekle, Sonra Birleri

73 – 46

46 ve 20, 66'dır. (30 fazlası çok fazladır.) Sonra 4 daha 70 ve 3 daha 73'tür. Bu da 20 ve 7 veya 27'dir.

46 + 20 = 66
66 + 4 = 70
70 + 3 = 73
20 + 4 + 3 = 27

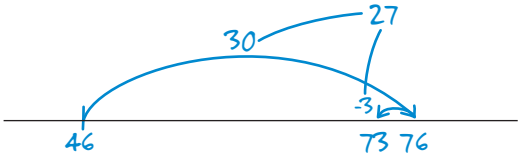


Hedefi Aşmak Üzere On'ları Ekleyin, Sonra Geri Gelin

73 – 46

46 ve 30, 76'dır. Bu 3 fazladır, dolayısıyla sonuç 27'dir.

46 + 30 → 76 − 3 → 73
30 − 3 = 27

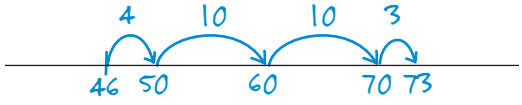


On Yapmak İçin Birleri Ekleyin, Sonra On'ları ve Birleri

73 – 46

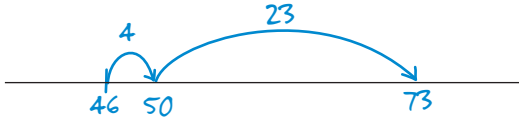
46 ve 4, 50'dir. 50 ve 20 70'dir ve 3 daha 73'tür. 4 ve 3, 7'dir ve 20 daha 27'dir.

46 + 4 → 50
50 + 20 → 70
70 + 3 → 73
4 + 20 + 3 = 27



Benzer şekilde, 46 ve 4, 50'dir.
50 ve 23, 73'tür.
23 ve 4, 27'dir.

46 + 4 → 50
50 + 23 → 73
23 + 4 = 27



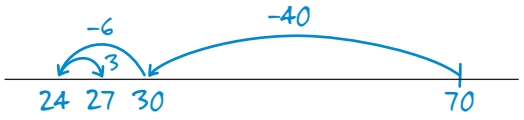
Şekil 12.6 Yukarı doğru sayarak çıkarma yapmak için üç farklı icat edilmiş strateji.

On'lardan On'ları Çıkar, Sonra Birleri Çıkar

73 – 46

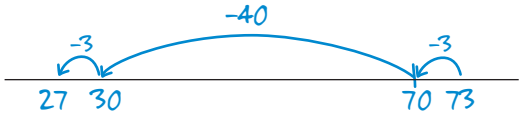
70 eksi 40, 30'dur.
6 daha çıkarın
24'tür.
Şimdi 3 tane
biri ekleyin ⟶ 27.

70 – 40 ⟶ 30 – 6
24 + 3 ⟶ 27



Veya
70 eksi 40, 30'dur. Bu 3'leri çıkartabilirim ama 30'dan 3 daha çıkarmam gerekir ve 27 yapar.

70 – 40 = 30
(73 – 3 = 70)
30 – 3 = 27

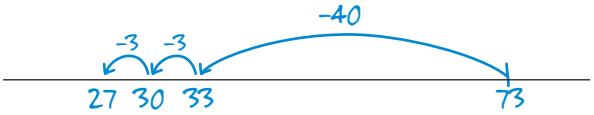


On'ları Çıkar, Sonra Birleri

73 – 46

73 eksi 40, 33'tür. Sonra 6 çıkar:
3 çıkar 30 ve 3 daha çıkar 27 yapar.

73 – 40 ⟶ 33 – 3
30 – 3 ⟶ 27

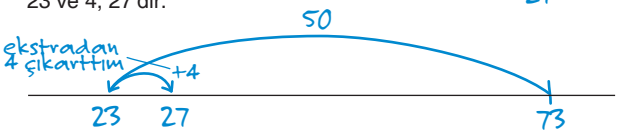


Ekstra Onluk Çıkar, Sonra Geri Ekle

73 – 46

73'den 50 çıkar 23. Bu 4 fazla.
23 ve 4, 27'dir.

73 – 50 ⟶ 23 + 4
27

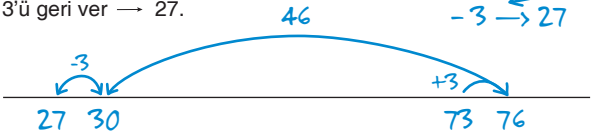


Gerekirse Bütünü Ekle

73 – 46

76 elde etmek için 73'e 3'ü ver. 76'dan 46'yı çıkarınca 30 yapar. Şimdi 3'ü geri ver ⟶ 27.

+3
73 – 46 ⟶
76 – 46 ⟶ 30
– 3 ⟶ 27



Şekil 12.7 Eksiltme/ayırmayla çıkarma için dört farklı icat edilmiş strateji.

kitapları eksiltmeyi/ayırmayı çıkarmanın anlamı olarak vurguladıkları için eksiltme/ayırma stratejileri yaygındır. Çıkarılan sayı onun bir katı veya onun bir katına yakın olduğunda eksiltme/ayırma, kullanmak için kolay bir yöntem olabilir. Şekil 12.7'de dört farklı strateji gösterilmiştir.

Bahçede 73 tane çocuk vardı. Önce 46 tane ikinci-sınıf öğrencisi içeri girdi. Kaç tane çocuk hâlâ dışarıdaydı?

On'lardan on'ları çıkarmakla başlayan iki yöntem çoğu öğrencinin onluk-taban parçalarıyla yaptıklarının yansımasıdır. Diğer iki yöntem sayılardan birini el değmemiş olarak bırakır ve ondan çıkarır. 83 – 29'u zihninizde önce 30'u çıkarıp sonra 1'i geri ekleyerek deneyiniz. On'un bir katına yakın olan bir sayıyı çıkarırken bu iyi bir zihinsel yöntemdir.

Bazen çocukların aklına doğal olarak ne geldiğinin bize hatırlatılması gerekir. Campbell (1997) Baltimore'da çıkarma için geleneksel algoritma öğretilmemiş 2000'den fazla çocuğa test uyguladı. Bir tek çocuk bile birler basamağıyla başlamadı!

Durup Düşün!

82 – 57'yi hesaplamayı deneyiniz. Hem eksiltme/ ayırma hem de yukarı doğru sayma yöntemlerini deneyiniz. Şekil 12.6 ve 12.7'deki stratejilerin hepsini bakmadan kullanabilir misiniz?



Birçok çıkarma problemi (özellikle üç basamaklı olanlar) için üzerine ekleme, eksiltme/ayırma yaklaşımından önemli ölçüde daha kolaydır. Üzerine ekleme yöntemini kullanmayan öğrencileri bu konuda zorlamamaya çalışınız. Bununla birlikte, bu tip düşünmeyi teşvik etmesi daha olası olan basit kayıp parça etkinliklerine dönmek isteyebilirsiniz. "Benim Sayım Ne Kadar Uzaklıkta?" adlı Etkinlik 11.31'i deneyin veya sadece küçük onluk kartlar ile 28 gibi bir sayıyı gösterin ve "53 yapmak için 28'e ne eşlik etmelidir?" diye sorun. Aynısını üç basamaklı sayılarla modelleri kullanmadan yapabilirsiniz. ◆

Genişletmeler ve Zorlu Görevler

Önceki bölümlerdeki örneklerin her biri 100'den küçük olan toplamları ve hepsi *10 ile köprü kurma* veya *10 ile çakışmayı* içerdi. Diğer bir deyişle, eğer geleneksel algoritma ile yapılırlarsa tekrar gruplama veya takası gerektirirler.

Köprü kurma, sayıların büyüklükleri ve problemleri zihinden yapma potansiyeli hep düşünülecek konulardır.

Köprü Kurma. Stratejilerin çoğunda toplama veya çıkarma köprü kurma gerekmediğinde daha kolaydır. Her bir stratejiyi, nasıl çalıştıklarını görmek için, 34 + 52 veya 68 – 24 ile deneyin. Daha kolay problemler güven telkin eder. Ayrıca öğrencilerinizi "daha zoru" ile uğraştırmanıza izin verirler. Bir de 100 veya 1000 ile köprü kurma konusu vardır. 58 + 67 işlemini farklı stratejilerle deneyiniz. 100 ile köprü kurma da çıkarma için bir meseledir. 128 – 50 veya 128 – 45 gibi problemler 100 ile çakışmayan problemlerden daha zordur.

Daha Büyük Sayılar. Çoğu öğretim programları üçüncü sınıflardan üç-basamaklı sayılarla toplama ve çıkarma yapmalarını bekleyecektir. Sizin eyalet standartlarınız dört-basamaklı sayılarla dahi çalışmayı gerektirebilir. *Sizin* bunları geleneksel algoritmayı kullanmadan nasıl yapacağınızı görmeye çalışın: 487 + 235 ve 623 – 247. Çıkarma için yukarı doğru sayma stratejisi genellikle en kolayıdır. Ara sıra daha büyük sayılarla başka stratejiler ortaya çıkar. Örneğin, 50 veya 25'in katlarını büyük parça halinde ayırmak çok defa faydalı bir yöntemdir. 462 + 257 için 450 ve 250'yi 700 yapmak için çekip çıkarın. Bu geriye 12 ve 7 daha bırakır → 719.

NCTM Standartları

Hem Anaokulu – 2. sınıf hem de 3 – 5. sınıflar için Sayı ve İşlem standartları açıkça gösterecek ki *Standartlar* bu bölümdeki yaklaşımları destekleyicidir. Örneğin, "Öğrenciler kendi icat ettikleri veya anlamlı oldukları için seçtikleri stratejilerle hesapladıklarında öğrenmeleri sağlam olma eğilimindedir; bilgilerini hatırlayabilir ve uygulayabilirler. Belirli öğrenme zorlukları olan çocuklar gelişimsel olarak uygun iyi tasarlanmış etkinlikler verilirse etkin olarak strateji icat edebilir ve transfer edebilirler" (s. 86).

Toplama ve Çıkarma İçin Geleneksel Algoritmalar

Eğer toplama ve çıkarma için geleneksel hesaplama stratejilerini öğretirseniz, icat edilmiş stratejilerle birkaç aylık ciddi bir çabaya hâlâ değer olduğunu hatırlayınız. Öğrencileriniz muhtemelen geleneksel algoritmaları icat etmeyecekleri için sizin öğretiminiz kaçınılmaz olarak daha doğrudan olacaktır. Öğrencileriniz bundan sizin açıkladığınız bu "yeni" yolun tercih edilmesi gerektiğini çıkaracak ve kendi icat ettikleri stratejileri terk edeceklerdir. Geleneksel algoritmalara bu tam dönüşü bunları başka bir alternatif olarak sunarak önlemeye çalışınız ve sonra icat edilmiş yöntemlerle pratik yapmayı sürdürünüz.

Geleneksel algoritmalar *tekrar gruplamayı* anlamayı gerektirir: bir basamaktaki 10'u solundaki pozisyondaki 1 ile değiştirme-veya ters yönde 1'i sağdaki pozisyondaki 10 ile değiştirme. Karşılık gelen *taşıma* ve *ödünç alma* terimleri kullanılmaz olmuştur ve kavramsal olarak yanıltıcıdır. *Tekrar gruplama* ifadesi küçük çocuklar için çok anlam ifade etmeyebilir. İlk başlarda kullanmak için tercih edilebilir bir terim *takas*tır. On tane bir, bir tane on ile *takas edilir*. Bir tane yüz 10 tane on ile *takas edilir*. İcat edilmiş stratejilerin hiçbirinin tekrar gruplamayı içermediğine dikkat ediniz.

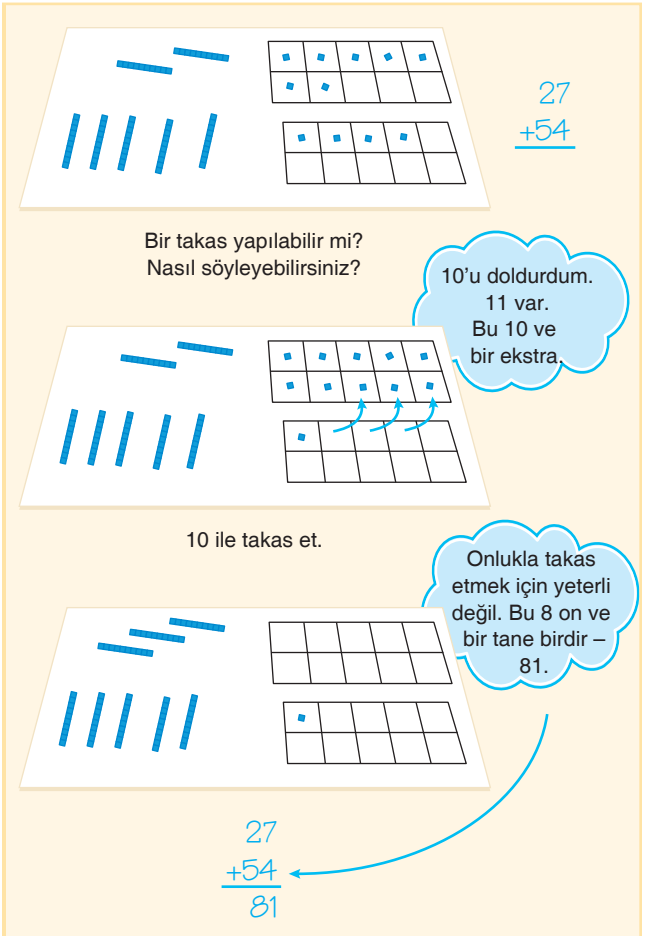
Tekrar gruplamayı ele almadan önce tekrar gruplamayı içermeyen problemlerde ustalaşmak için çalışmak ciddi bir hatadır. Bu problemleri ayrı tutmanın birçok hata örüntüsünün kaynağı olduğu belgelenmiştir. İlk önce tekrar gruplamayı gerektirmeyen problemleri öğretmek çocukların sonra unutmaları gereken kötü alışkanlıklara neden olur.

Toplama Algoritması

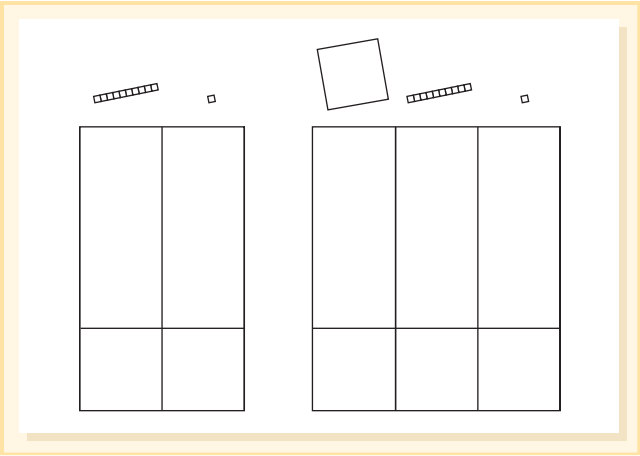
Öğrencilere çoğu yetişkinin okuldayken öğrendikleri bir toplama yöntemini öğreneceklerini açıklayınız. Bu tek yol veya en iyi yol değildir; sadece onların öğrenmelerini istediğiniz başka bir yöntemdir.

Sadece Modellerle Başlayın. Başlangıçta bir cevabın olası kaydının haricinde herhangi bir yazılı çalışmadan kaçının. Öğrencilere basamak değeri altlıkları ve onluk-taban modelleri verin. Birler basamağında iki tane onluk kart olan altlık (Çalışma Yaprak Seti 17) önerilir.

Şekil 12.8'in üst kısmında gösterildiği gibi öğrencilere altlığın en üstüne bir sayı ve onun altına ikinci bir sayı yaptırın. Eğer çocuklar hâlâ onluk-taban kavramlarını geliştiri-



Şekil 12.8 Toplamada sağdan sola doğru çalışma (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 17).



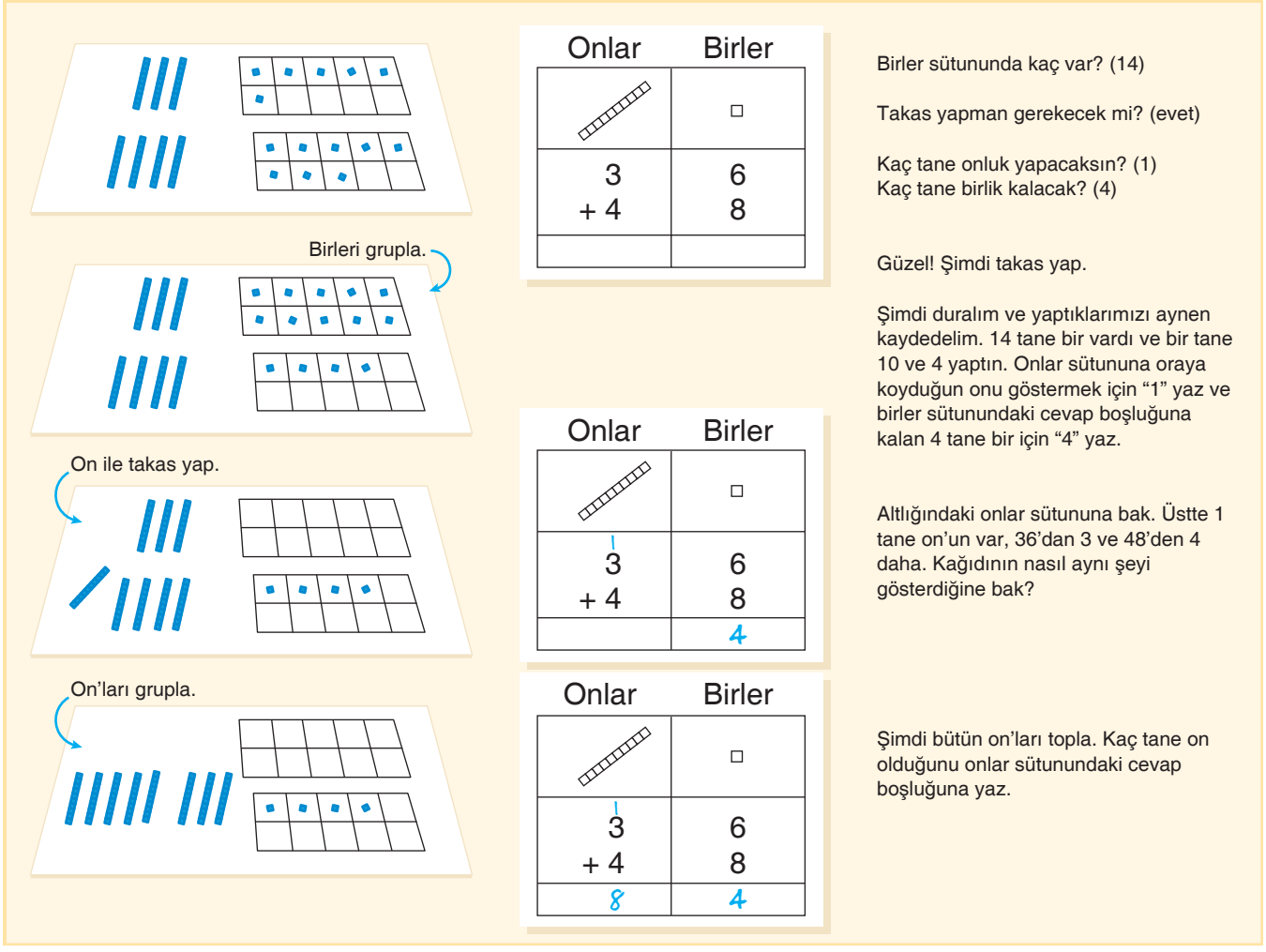
Şekil 12.9 Boş kayıt tabloları faydalıdır (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 19).

yorlarsa kaplarda sayma nesneleri gibi bir gruplandırılabilir model faydalıdır.

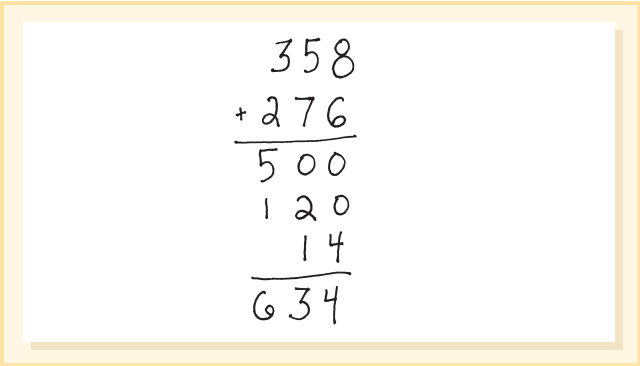
Bu tek kuralı açıklayınız: *Birler sütunundan başlarsınız*. "Bu insanların çok zaman önce buldukları bir yoldur ve onların işine yaramıştır." Öğrencilerin problemi kendi başlarına çözmelerine izin verin. Bolca zaman verin ve öğrencilere ne yaptıklarını ve neden yaptıklarını açıklattırın. Öğrencilerin açıklamalarına yardımcı olması için tepegöz veya etkileşimli beyaz tahta modelleri veya manyetik parçalar kullanmalarına izin verin.

Bir derste bir veya iki problem ve bolca tartışma, çocukların anlamadıkları kuralları temel alan birçok problemden çok daha verimlidir.

Yazılı Kaydı Geliştirme. Üzerinde Şekil 12.9'da gösterilenlere benzer basit basamak değeri tabloları olan sayfalar çoğaltın. Bu tablolar küçük çocuklara sayıları sütunlara kaydetmede yardımcı olacaktır. Genel fikir, çocukların onluk-taban modelleriyle yaptıkları prosedürün her bir basamağını, *yapıldığı gibi*, bu sayfalara kaydetmesidir. Bunu



Şekil 12.10 Öğrencilere basamak değeri altlıklarında yaptıkları her basamağı kağıda kaydetmeleri için yardım ediniz (Çalışma Yaprak Seti 17 ve 19).



Şekil 12.11 Toplama için alternatif kayıt şeması. Bunun soldan sağa kullanılabileceği gibi sağdan sola da kullanılabileceğine dikkat ediniz.

yaptığınız ilk birkaç seferde Şekil 12.10'da gösterildiği gibi her bir basamak için dikkatlice rehberlik ediniz. Benzer bir yaklaşım üç basamaklı problemler için kullanılabilir.

Bir öneri çocukları ikili gruplar halinde çalıştırmaktır. Bir çocuk modellerden sorumludur ve diğeri basamakları kaydeder. Her problemde rolleri değiştirebilirler.

Şekil 12.11, geleneksel kayıt şemasının en azından üç basamaklılara kadar oldukça makul bir çeşidini gösterir. Küçük "taşınan birler"den kurtarır ve basamakların değerlerine dikkati odaklar. Eğer öğrencilerin meyilli oldukları gibi soldan toplamaya başlamalarına izin verilirse, bu, keşfedilmiş strateji, "Onluları ekle, birlileri ekle, sonra birleştir," için sadece dikey bir kayıt şeması olabilir (Şekil 12.5).

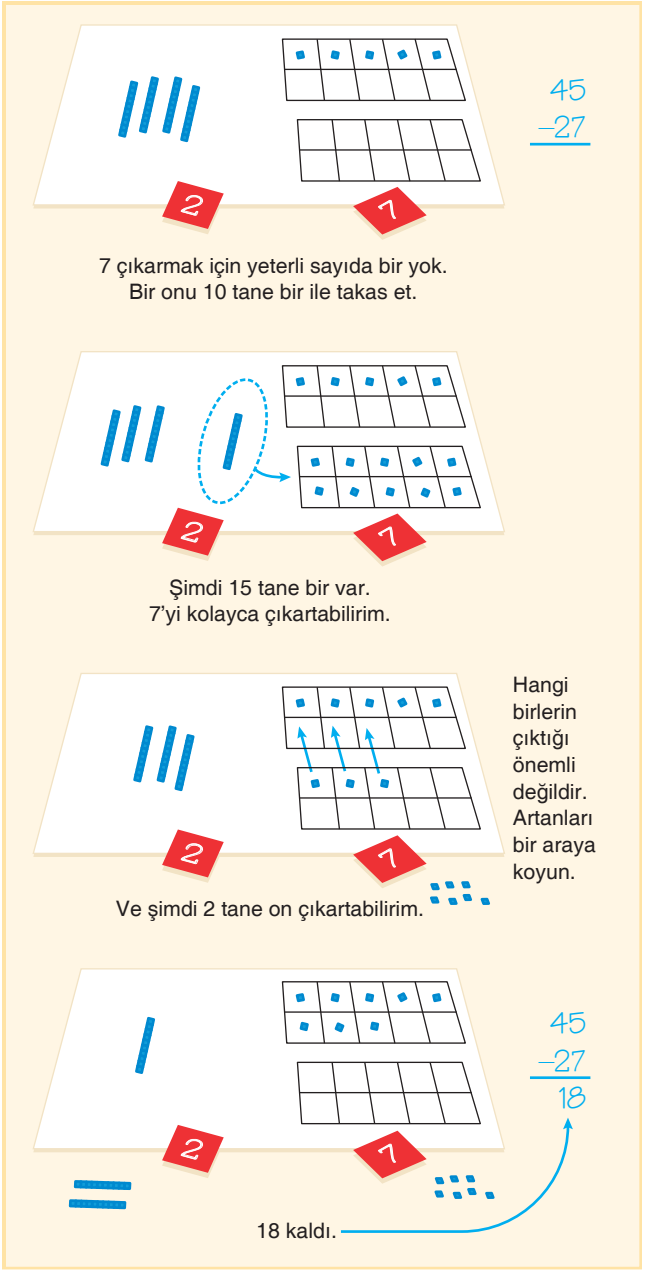
Çıkarma Algoritması

Çıkarma algoritmasının gelişimi için genel yaklaşım, toplamanınki ile aynıdır. Prosedür modellerle tamamen anlaşıldığında, yap-ve-yaz yaklaşımı onunla yazılı form arasında bağ kurar.

Sadece Modellerle Başla. Çocuklardan bir çıkarma probleminde üstteki sayıyı basamak değeri altlıklarının üst yarısında modellemelerini isteyerek başlayın. Çıkarılacak miktar için öğrencilere her basamağı küçük bir kağıt parçası üzerine yazmalarını ve bu kağıt parçalarını altlıkların alta yakın bölümlerinde ilgili sütunlara Şekil 12.12'deki gibi yerleştirmelerini isteyin. Hatalardan kaçınmak için bütün ödünç almaları ilk başta yapmalarını önerin. Böylece, kağıt üzerindeki toplam miktar tek seferde çıkartılabilir. Öğrencilere toplamada yaptıkları gibi birler sütunundan işleme başlamaları gerektiğini de açıklayın.

Sıfırla Zorlukları Bekleyin. Herhangi bir yerinde sıfır içeren problemler özel zorluklara sebep olmaya meyillidir. Bu durumlara modelleri kullanmaya devam ederken ekstra dikkat edin.

Çok yaygın hata olan "sıfırın öbür yanında tekrar gruplama"ya en iyi modelleme aşamasında değinilir. 403-

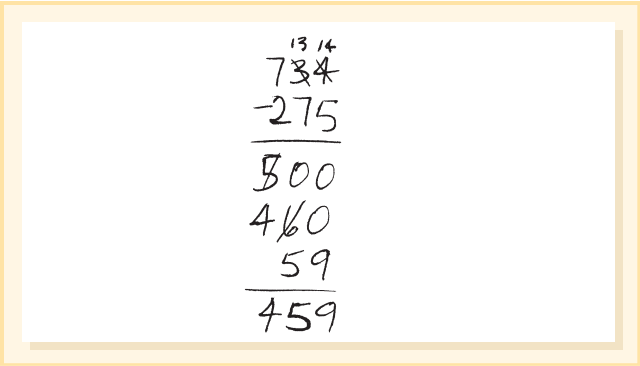


Şekil 12.12 Modellerle iki basamak çıkarması.

138 örneğinde çift takas yapılmalıdır: bir yüzlük yerine 10 tane onluk takas edilir ve sonra bir onluk parça yerine 10 tane birlik.

Yazılı Kaydı Geliştirmek. Yapıldığı gibi her basamağı kaydetme süreci toplama için önerdiğimiz ile aynıdır. Aynı kayıt sayfaları da (Şekil 12.9) tavsiye edilir.

Çocuklar kayıt sürecinde kullanılan sembollerin kullanımını açıklayabildiğinde bu onları fiziksel materyaller kullanmaktan alıp tamamen sembolik seviyeye götürmek için bir sinyaldir. Bir kere daha, sıfırlı problemlere karşı dikkatli olun.



Şekil 12.13 Çıkarma için sol taraftan kayıt şeması. Başka yöntemler de tasarlanabilir.

Eğer öğrencilerin kendi doğal içgüdülerini takip etmelerine ve büyük parçalardan başlamalarına (sağ yerine soldan) izin verilirse Şekil 12.13'tekine benzer kayıt şemaları mümkündür. Takaslar soldaki sütunda çıkarma işlemi bittikten sonra arta kalan kısımlarla yapılmıştır. "Sıfırın öbür yanında tekrar gruplama" zorluğu 462 – 168 gibi problemlerde hâlâ ortaya çıkacaktır. Deneyin.

Durup Düşün!

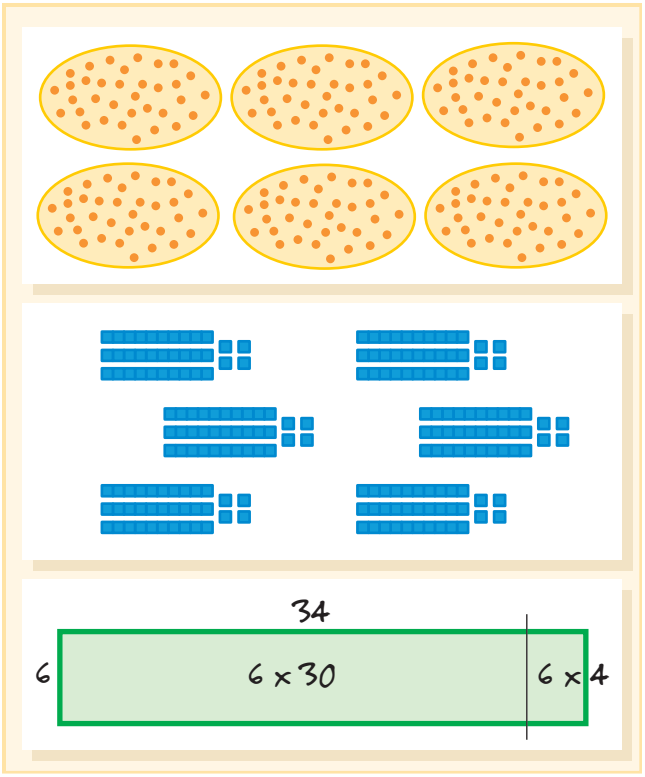
Çıkarmada tekrar gruplamayı, özellikle sıfırın öbür yanında tekrar gruplamayı, çocuklara öğretmedeki zorluklar ile üzerine eklemenin kolaylığını karşılaştırın. Örneğin, şunu çözmeye çalışın: 428 ve kaç daha 703 yapar? Şimdi öğrencilere 703 – 428 işlemini çözmek için sıfırın öbür yanında tekrar gruplamayı öğretmeyi düşünün.

Çarpma İçin Öğrenci-İcadı Stratejiler

Çarpma için esnek bir biçimde sayıları parçalara ayırma yeteneği toplama ve çıkarmadakinden çok daha önemlidir. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği çarpma hesaplamasında önemli bir diğer kavramdır. Örneğin, 43 × 5 işlemi için bir kişi 43'ü 40 ve 3 olarak parçalayıp her birini 5 ile çarpmayı sonra sonuçları toplamayı düşünebilir. Çocukların bu kavramları kendi fikirlerine ve sınıf arkadaşlarının fikirlerine anlam vererek geliştirmek için oldukça çok fırsata ihtiyaçları vardır.

Faydalı Gösterimler

6 × 34 problemi Şekil 12.14'de gösterildiği gibi birkaç yolla gösterilebilir. Bazen model seçimi bağlamsal bir problemden etkilenir. Her sınıfta 34 çocuk varsa 6 sınıfın ne kadar



Şekil 12.14 6 × 34 işlemini modellemenin farklı yolları farklı hesaplama stratejilerini destekleyebilir.

portakala ihtiyacı olduğunu belirlemek için çocuklar 6 grup 34 modeli yapabilir. Eğer problem 34 cm'ye 6 cm'lik bir dikdörtgenin alanı hakkında ise, bir dizilim çeşidi muhtemeldir. Fakat, bağlama bakılmaksızın, 34 x 6 hakkında düşünmek için her bir gösterim uygundur ve öğrenciler çarpmayı düşünmek için kendilerine anlamlı gelecek yollar seçme noktasına gelmelidir.

Çocukların bir çarpımı nasıl gösterdikleri, cevapları belirleme yöntemleri ile etkileşir. 34'lü gruplar tekrarlı toplamaları akla getirir – belki grupları her seferinde ikişerli alarak. İki 34, 68'dir ve bunlardan üç tane var, dolayısıyla 68 + 68 + 68. Buradan sonra çeşitli yöntemler olasıdır.

Altı grup onluk taban parçaları sayıları onluklara ve birliklere parçalamayı akla getirir: 6 kere 3 onluk veya 6 × 30 ve 6 × 4. Bazı çocuklar onlukları tekli olarak kullanır: 6 tane on 60 yapar. Dolayısıyla bu 60 ve 60 ve 60 (180)'dir. Sonra 24'ü üzerine ekleyin ve 204'ü elde edin.

Bütün bu fikirler çok basamaklı çarpımlar için öğrencilerin model repertuarlarının parçası olmalıdır. Farklı gösterimleri (her seferinde bir tane) çarpmayı keşfetmek için yollar olarak sınıfın bir takım faydalı fikirleri olduğuna kanaat getirene kadar tanıtın. Aynı zamanda çizim yapmadan çok iyi akıl yürüten öğrencileri ihtiyaç duymadıklarında model kullanmaya zorlamayın.

Tek Basamaklı Çarpan ile Çarpma

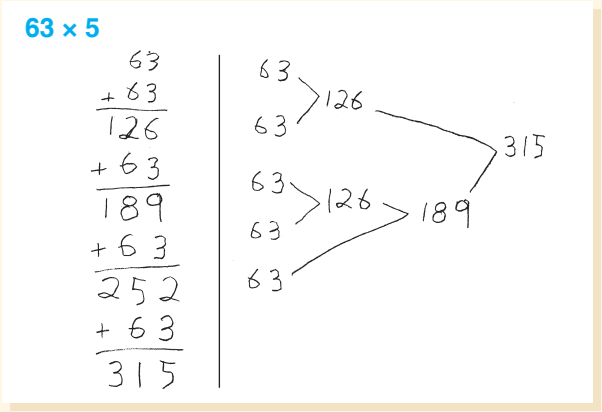
Toplama ve çıkarmadaki gibi çarpma görevlerini bağlamsal problemlere yerleştirmek faydalıdır. Öğrencilerin problemleri kendilerine anlamlı gelecek şekilde modellemelerine izin verin. Çarpanların yerlerini değiştirme konusunda endişe etmeyiniz (6 grup 34 veya 34 grup 6). Ne de kullandığınız sayılar konusunda çekingen olmalısınız. 3 × 24 problemi 7 × 65 probleminden daha kolay olabilir fakat 7 × 65 düşünmeye zorlar. Öğrencilerin çarpma için kullandıkları strateji tipleri, toplama ve çıkarmadan çok daha çeşitlidir. Bununla birlikte, bugüne kadar yapılmış araştırmalardan takip eden üç kategori belirlenebilir.

Bütün-Sayı Stratejisi. Sayıları parçalama konusunda henüz rahat olmayan çocuklar gruplardaki sayılara tekli gruplar olarak yaklaşacaklardır. Büyük olasılıkla bu erken stratejiler tekrarlı toplamı temel alacaktır. Çocuklar sıklıkla uzun sütunlar halinde sayıları listeleyecek ve bunları toplayacaktır. Bu can sıkıcı süreci kısaltma teşebbüsünde çocuklar kısa bir süre sonra eğer iki sayıyı toplarlarsa sıradaki iki sayının da aynı toplamı olacağını ve listenin aşağısına doğru da böyle gideceğini farkederler. Bu iki katını alma süreci,kesinlikle çok etkili olmamasına rağmen, çoğu öğrenci için temel yaklaşım haline gelebilir (Ambrose, Baek, & Carpenter, 2003; Fosnot & Dolk, 2001b). Şekil 12.15 öğrencilerin kullanabileceği iki yöntemi gösterir. Bu çocuklar onluk taban modellerini kullanan çocukları dinlemekten faydalanacaklardır. Sayıları farklı yollarla parçaladıkları onluk taban etkinlikleri ile daha fazla çalışmaya da ihtiyaç duyabilirler.

Parçalara Ayırma Stratejileri. Çocuklar onluk taban kavramı anlayışlarını yansıtan çeşitli yollarla sayıları parçalarlar. Bunların en azından dört tanesi Şekil 12.16'da gösterilmiştir. "Onluklar" (veya "Yüzlükler" vb.) yaklaşımı, öğrencilerin her zaman büyük sayılarla başlaması haricinde geleneksel algoritma ile aynıdır. Üç basamaklı sayılara kolaylıkla genişletilebilir ve zihinsel matematik stratejisi olarak çok güçlüdür. Zihinden yöntemler için bir başka değerli strateji "Diğer Parçalar" örneğinde bulunabilir. 25 ve 50'nin katlarıyla zihinden hesaplamak ve sonra küçük bir ayarlamayı eklemek veya çıkarmak kolaydır. Bütün parçalara ayırma stratejileri dağılma özelliğine dayanır.

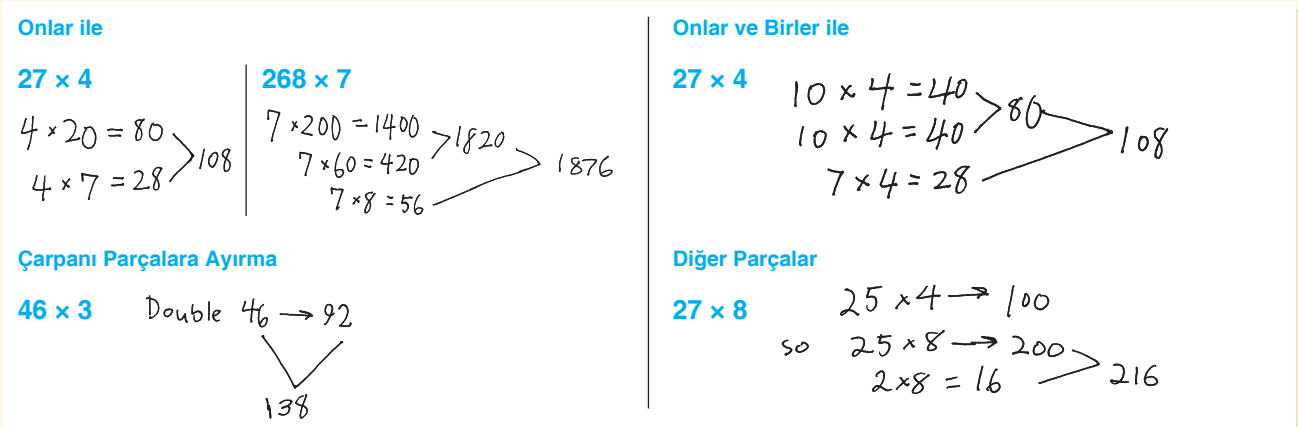
Telafi Stratejileri. Çocuklar ve yetişkinler sayıları değiştirme yolları ararlar ki hesaplamalar kolay olsun. Şekil 12.17'de, 27 × 4 problemi daha kolay bir probleme dönüştü-

Çarpma İçin Bütün Sayı Stratejileri



Şekil 12.15 Bütün-sayı stratejisini kullanan çocuklar sayıları onluklara ve birliklere ayırmazlar.

Çarpma için Parçalara Ayırma Stratejisi



Şekil 12.16 Daha kolay kısmi çarpmalar yapmak için dört farklı yol.

Çarpma için Telafi Stratejileri

27 × 4

27 + 3 → 30 × 4 → 120

3 × 4 = 12 → − 12

108

250 × 5

250'yi ikiye ayırıp 10 ile çarpabilirim.

125 × 10 = 1250

17 × 70

3×70↓

20 × 70 → 1400 − 210 → 1190

Şekil 12.17 Telafi yöntemi orjinali ile ilişkili bir çarpım kullanır. Telafi cevapta yapılır veya bir çarpan diğer çarpandaki değişikliği telafi etmek için değiştirilir.

rülür ve sonra bir ayarlama veya telafi yapılır. İkinci örnekte, bir çarpan yarıya indirilmiş ve diğeri iki katına çıkarılmış. Bu 5 veya 50'nin olduğu durumlarda sıklıkla kullanılır. Bu stratejiler kullanılan sayılara oldukça bağlı olduğu için bütün hesaplamalarda kullanılamaz. Bununla birlikte, bunlar, özellikle zihinden matematik ve tahmin için, güçlü stratejilerdir.

Tek Basamaklıdan İki Basamaklı Çarpanlara Geçiş. Öğrencileri tek basamaklıdan iki basamaklı çarpanlara geçirirken 10 ve 100'ün katlarını içeren çarpımlara erken maruz bırakmak değerlidir.

Bir izci grubu kaynak bulma projesi olarak 400 adet ateş başlatma kitini paketlemek istiyor. Eğer her pakette 12 adet ateş başlatıcı olursa, izcilerin kaç tane ateş başlatıcısına ihtiyaçları olacaktır?

Çocuklar 4 × 12 = 48'i 400 × 12'nin 4800 olduğunu hesaplamak için kullanacaklardır. "Dört bin sekiz yüz"ün nasıl söyleneceği ve yazılacağı hakkında tartışmalar olacaktır. Sebebini anlamadan sıfırları basit bir şekilde koyan çocuklara dikkat edin. 30 × 60 veya 210 × 40 gibi onlukların onluklarla çarpıldığı problemleri deneyin.

Büyük Sayıların Çarpımı

Aşağıdaki gibi problemler birçok farklı yolla çözülür:

Geçit töreninde 23 tane palyaço vardı. Herbir palyaço 18 tane balon taşıdı. Toplam kaç balon vardı?

Bazı çocuklar 6 × 23 gibi küçük çarpımlar ararlar ve sonra o sonucu üç kere eklerler. Bir başka yöntem 20 × 23 işlemini yapmak ve sonra 2 × 23'ü çıkarmaktır. Başkaları dört farklı kısmi çarpım hesaplarlar: 10 × 20 = 200, 8 × 20 = 160, 10 × 3 = 30 ve 8 × 3 = 24. Ve başkaları hâlâ bir dizi 23'ü toplayabilir. İki basamaklı çarpma hem karışıktır hem de zorlayıcıdır. Fakat öğrenciler bu problemleri çeşitli ilginç yollarla çözebilirler. Bu yolların bir çoğu geleneksel algoritmanın veya tıpkı onun gibi etkili bir algoritmanın gelişimine katkıda bulunacaktır. Şekil 12.18 çarpma için geleneksel algoritmanın öğretilmediği üç tane dördüncü sınıf öğrencisinin çalışmalarını göstermektedir. Kenneth'in "parçalamak" ifadesi öğretmen tarafından daha önce verilen bir strateji etiketi olan *parçalara ayırma*yı işaret eder. Briannon toplama ile yetiniyor. Arkadaşları tarafından geliştirilen başka stratejileri görmeye ihtiyacı var. Nick'in yöntemi kavramsal olarak geleneksel algoritmaya çok benziyor. Öğrenciler sayıları basamak değeri çizgileri boyunca parçalara ayırmaya başladıklarında, stratejiler sıklıkla geleneksel algoritmalara benzer ama geleneksel kayıt şemaları olmaksızın.

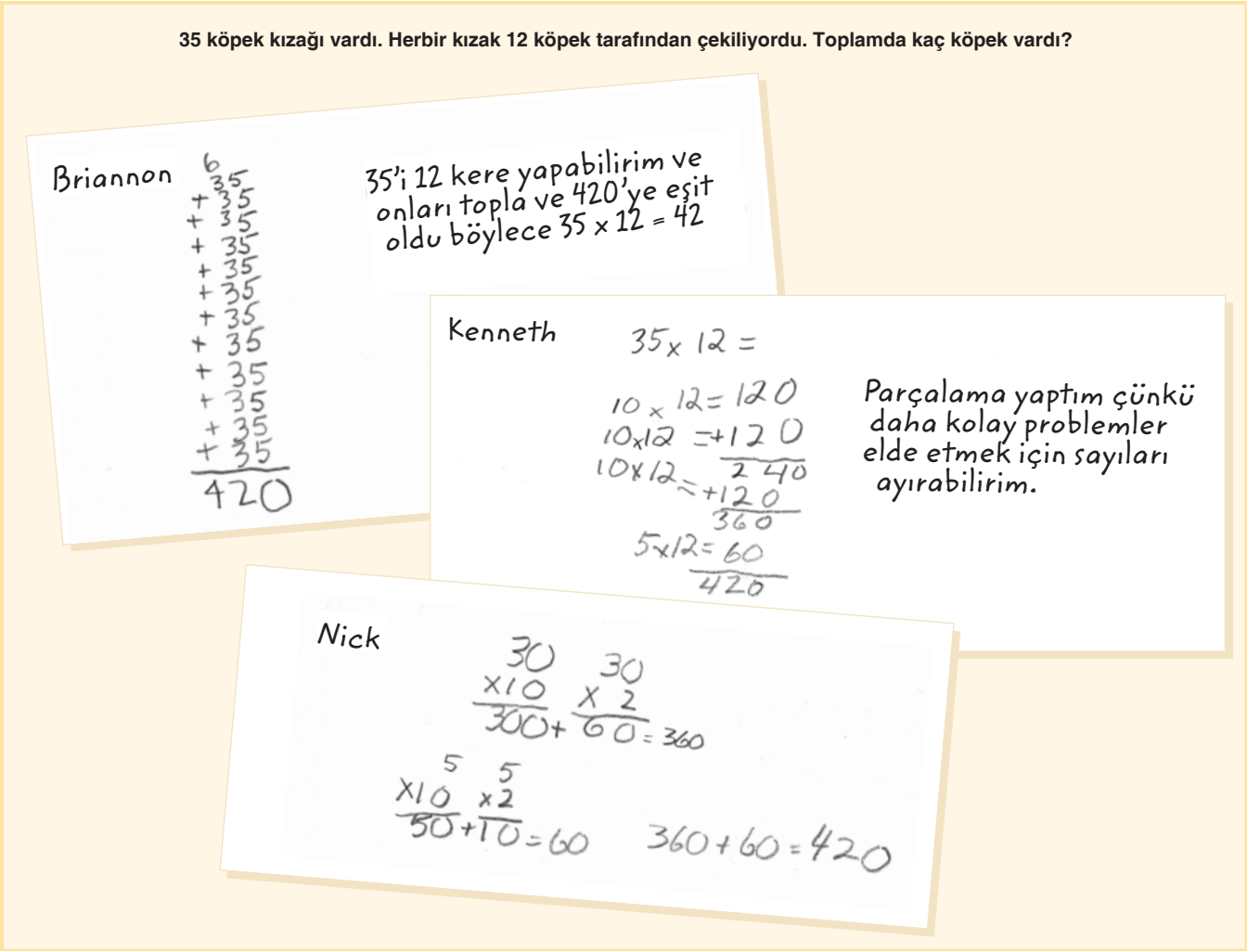
Gruplama Problemleri. *Investigations in Number, Data, and Space* adlı kitabın dördüncü ve beşinci sınıflarında çok basamaklı çarpma işlemleri için bir yaklaşım "gruplama problemleri" olarak adlandırılır. Bu yaklaşım öğrencileri daha karmaşık hesaplamaları düşünerek bulmaları için bildikleri temel bilgiler ve temel işlemleri kullanmaya teşvik eder. Örneğin, takip eden gruplama bir derste kullanılabilir: 7 × 6, 5 × 6, 10 × 6, 50 × 6 ve 57 × 6. Amaç diğer problemleri destek olarak kullanıp nihai çarpımı (koyu font ile gösterilen) bulmaktır.

Öğrencilere gruplamadaki hiçbir problemi yapmadan önce nihai çarpımı tahmin ettirmek faydalıdır. Örneğin, 34 × 50 için bir gruplamada 3 × 50 ve 10 × 50 problemleri 30 × 50'yi düşünmede yardımcı olabilir. 30 × 50 ve 4 × 50'nin sonuçları birleşerek 34 × 50'yi verir. 34 × 25, 34 × 50'den daha zor görünebilir. Bununla birlikte, 34 × 25'i biliyorsanız istenen çarpımı elde etmek için sadece iki katını almanız gerekecektir. Öğrenciler ihtiyaçları olursa gruplamaya problem eklemek için teşvik edilmelidirler. 34 × 25'i bulmak için 10 × 34'ü (ve bazı başka ilişkili problemleri) nasıl kullanabileceğinizi düşünün.

Gruplama problemi yaklaşımı, öğrencilere gruplama problemlerinin verilmesi ile başlar. Bu yaklaşıma aşina olduktan sonra öğrenciler verilen bir çarpım için kendi gruplama problemlerini oluşturabilmelidirler. Başlangıçta öğrencilere gruplamalar için sınıf olarak beyin fırtınası yaptırın.

Durup Düşün!

86 × 42 için bir grup problem oluşturmayı deneyin. Yardımcı olabileceğini düşündüğünüz bütün olası problemleri dâhil edin, hatta çarpımı bulmak için hepsi tek yaklaşımla ilgili olma-



Şekil 12.18 Üç tane dördüncü sınıf öğrencisi kendi icat ettikleri stratejileri kullanarak bir çarpma problemini çözüyorlar. Herbiri makul düzeyde etkili bir yöntem geliştirmede farklı yerdeler.

salar bile. Sonra gruplamalarınızı çarpımı bulmak için kullanın. Birden fazla yol var mı?

Gruplamanızda olabilecek bazı problemler aşağıdadır.

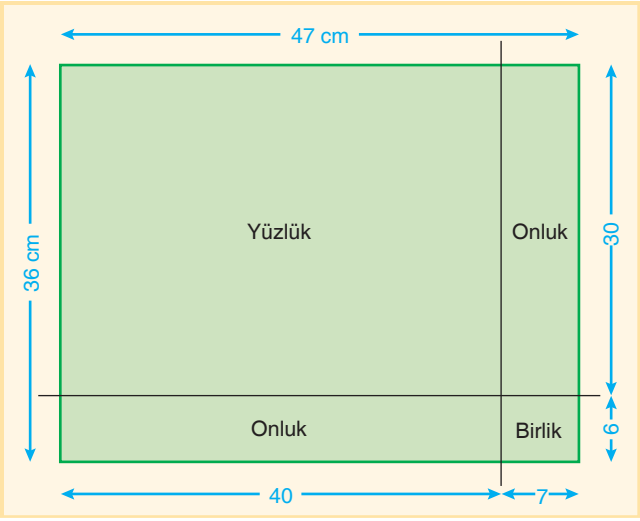
2×80 4×80 2×86 40×80
6×40 10×86 40×86

Elbette sizin gruplamanız burada gösterilmeyen çarpımları içerebilir. Gruplama problemleri yaklaşımına başlamanız için gerekli olacak şey gruplamanızın neticede bir çözüme ulaştıracak olmasıdır. Sizin kendi gruplamanızın yanısıra bu gruplamadaki problemleri 86×42'yi bulmak için kullanıp kullanamayacığınıza bakın.

Gruplama problemleri çarpanları – veya sayıları-daha kolay parçalara ayırabilme yollarını düşünmede öğrencilere yardım eder. Sayıları ayırıp parçaları çarpma stratejisi – dağılma özelliği – esnek hesaplama için aşırı derecede değerli bir tekniktir. Ayrıca çözüm için farklı zekice yollar bulmak eğlencelidir. Çoğu problem için çalışan bir gruplama bulmak aslında algoritma kullanmaktan daha çabuktur.

Alan Modelleri. Değerli bir keşif için her iki veya üç kişilik öğrenci grubu için büyük dikdörtgenler hazırlanır. Dikdörtgenler dikkatli bir şekilde, boyutları 25 cm ve 60 cm arasında olacak biçimde, ölçülmelidir ve dik köşelerle doğru bir şekilde çizilmelidir. Öğrencilerin görevi bunun içine kaç tane küçük birlik parçanın (onluk taban materyalleri) sığacağını belirlemektir. Ahşap veya plastik onluk taban parçaları en iyileridir fakat mukavva şeritler ve kareler de yeterlidir. Alternatif olarak öğrencilere basit bir şekilde görev sözel olarak verilebilir: *47 cm'ye 36 cm'lik bir dikdörtgenin alanı nedir?*

Çoğu çocuk ilk önce dikdötgeni mümkün olduğu kadar yüzlük parçalarla dolduracaklardır. Bariz bir yaklaşım 12 tane yüzlüğü bir köşeye koymaktır. Bu her iki kenarda da onluk parçalarla doldurulabilecek dar bölgeler ve en sonunda birliklerin yerleşebileceği küçük bir dikdörtgen



Şekil 12.19 Birlik, onluk ve yüzlük parçalar 47 × 36'lık bu dikdörtgenin dört bölmesine tam uyar. Tüm dikdörtgenin boyutunu belirlemek için her bir bölmenin boyutunu düşünüp bulunuz.

bırakacaktır. Özellikle öğrenciler çarpımları dizilimlerde bulmayı daha önceden tecrübe etmişlerse, herbir alt dikdörtgenin boyutunu düşünüp bulmak aşırı derecede zor değildir. Şekil 12.19'daki taslak çizim dört bölgeyi gösterir.

Durup Düşün!

Eğer halihazırda algoritmayı bilmiyorsanız, dikdörtgenin boyutunu nasıl belirlerdiniz? Kendi yönteminizi (standart algoritmayı değil) 68 cm × 24 cm ölçülerindeki bir dikdörtgen üzerinde kullanının. Çalışmanızı açıklamak ve göstermek için taslak bir çizim yapın.

Geleneksel algoritmanın tartışmasında göreceğiniz gibi alan modeli sayıları çarpma için mantıklı bir yaklaşıma yönlendirir.

Çarpma İçin Geleneksel Algoritma

Eğer öğrencilerin kendi stratejilerini keşfetmek için çok fırsatları olmamışsa geleneksel çarpma algoritması muhtemelen dört algoritma arasında en zor olanıdır. Çarpma algoritması, tekrarlı toplama modeli veya alan modeli kullanılarak anlamlı bir şekilde geliştirilebilir. Tek basamaklı çarpanlar için fark en azdır. İki basamaklı çarpanlara geçtiğinizde alan modelinin bazı avantajları vardır. Bu sebepten buradaki tartışmada alan modeli kullanılacaktır. İcat edilmiş stratejilerin gelişmesindekinden daha doğrudan bir yaklaşıma ihtiyacın olduğu tekrar hatırlatılır.

Tek Basamaklı Çarpanlar

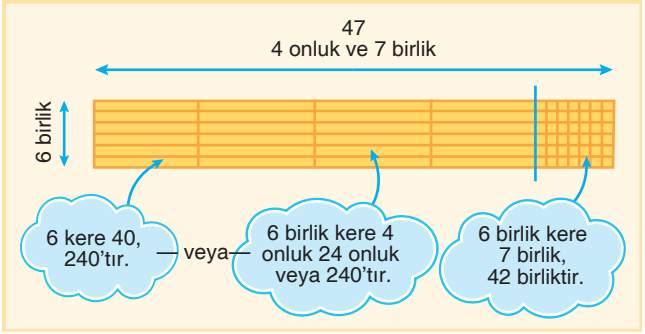
Diğer algoritmalarla olduğu gibi kayıt veya yazılı kısım sonra gelecek şekilde algoritmanın kavramsal gelişimine gerektiği kadar zaman ayrılmalıdır. Buna karşılık çoğu ders kitabı gelişime daha az ve alıştırmalara daha çok zaman ayırır.

Modellerle Başlamak. Öğrencilere 47 cm'ye 6 cm'lik bir dildörtgen çizimi verin. *Kaç tane küçük santimetre kare parçası dikdörtgene sığar?* (Dikdörtgenin alanı santimetre kare olarak kaçtır?) Öğrencilerin soruyu sınıf olarak tartışmadan önce gruplar olarak çözmesine izin verin. Bu basit görev öğrenciler için iyi bir probleme dönüştürülebilir. Onları her bir parçanın boyutunu söyleyebilecekleri şekilde dikdörtgenin içini iki veya daha fazla parçaya bölerek dikdörtgenin içindeki birim karelerin sayısını belirlemek için bir yol bulmaya zorlayın. Örneğin, 20 x 6 ve 7 x 6 olmak üzere iki kısma bölünebilir.

Şekil 12.20'de gösterildiği gibi dikdörtgen iki parçaya bölünebilir veya ayrılabilir. Böylece bir parça 6 birliğe 7 birlik veya 42 birlik ve diğeri 6 birliğe 4 onluk veya 24 onluk olacaktır. Onluk taban söyleminin "6 birlik kere 4 onluk, 24 onluktur" büyük bölmede kaç *parça*'nın (onluk şeritler) olduğunu söylediğine dikkat edin. "6 kere 40, 240'tır" demek de doğrudur ve bölmede kaç tane birim veya santimetre kare olduğunu söyler. Her bölme bir *kısmi çarpmayı* belirtir. İki kısmi çarpımı toplayarak toplam çarpımı veya dikdörtgenin alanını elde edersiniz.

Büyük dikdörtgenler çizme ve onluk taban parçalarını düzenleme sıkıcılığından kaçınmak için Çalışma Yaprak Seti 18'de bulunan onluk taban için kareli kağıtları kullanın. Kareli kağıtların üzerinde öğrenciler bütün parçaları gösteren düzgün dikdörtgenleri kolayca çizebilirler. Öğrenciler bir çarpım elde etmek için dikdörtgenin iki boyutunu nasıl kullanacaklarını anlamadan onları hiçbir kayıt tekniğine zorlamayın.

Yazılı Kaydı Geliştirmek. Kayıt şemasına yardım etmesi için öğrencilere problemleri kaydedebilecekleri onluk taban sütunlarının olduğu sayfalar verin. İki kısmi çarpım

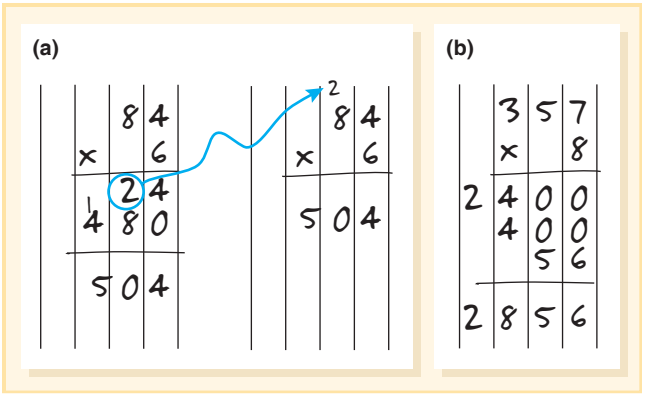


Şekil 12.20 Onluk taban parçaları ile doldurulmuş bir dikdörtgen iki basamaklıyla bir basamaklının çarpımı için faydalı bir modeldir.

Şekil 12.21(a)'daki gibi ayrı yazıldıklarında öğrenecek az şey vardır. Öğrenciler basit bir şekilde çarpımları kaydeder ve onları toplar. Gösterildiği gibi öğrencilere ilk çarpımın taşınan basamak ile nasıl yazıldığını öğretmek mümkündür. Böylece toplam çarpım tek satırda yazılır. Bu kayıt şeması hataların kaynağı olarak bilinir. Çoğu zaman zorluk çıkaran taşınan küçük basamaktır – ikinci çarpımdan önce eklenir veya unutulur.

Öğrencilerin her iki kısmi çarpımı da kaydedip taşınan basamakla ilgili problemlerin önüne geçmelerine izin verilememesinin pratik bir sebebi yoktur. Bunu kabul ettiğinizde çarpımların hangi sırada yazıldığı farketmez. Neden basitçe öğrencilerin yazılı çarpımları Şekil 12.21(b)'de gösterildiği gibi yapmalarına izin verilmez? Çarpımlar sözel problemlerde, tablolarda veya başka bir biçimde olduğunda gerçekten gerekli olan bütün kısmi çarpımları yazmak ve toplamaktır. Ayrıca bu, zihinden nasıl yapılıyorsa aynen öyledir.

Çoğu standart öğretim programları iki basamaklılardan üç basamaklılara tek basamaklı çarpanlar ile geçer. Öğrenciler bu ilerlemeyi kolayca yaparlar. Öğrencilerin hâlâ üç kısmi çarpımın hepsini ayrı ayrı yazmalarına izin verilmeli ve taşıma ile uğraşmayı düşünmemelidirler.

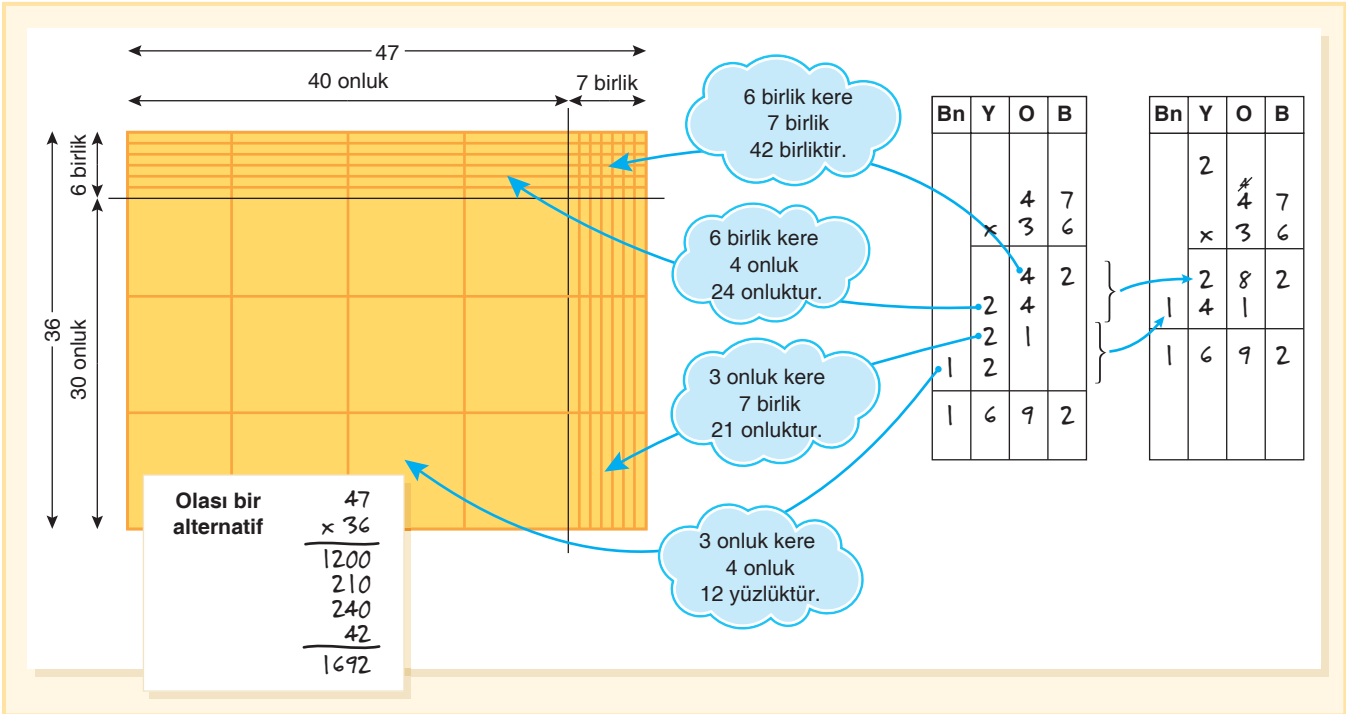


Şekil 12.21 (a) Standart formda ilk olarak birlerin çarpımı kaydedilir. Bu ilk çarpımın onlar basamağı, "taşınan" basamak olarak onlar sütununun üzerine yazılabilir. (b) Taşınan basamakları terketmek ve kısmi çarpımların herhangi bir sırada kaydedilmesine izin vermek oldukça mantıklıdır. (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 20.)

İki Basamaklı Çarpanlar

Alan modeli ile iki basamaklı çarpanlara ilerleme nispeten dolambaçsızdır. Dikdörtgenler onluk-taban için kareli kağıtlara çizilebilir veya tam boy dikdörtgenler onluk taban parçaları ile doldurulabilir. Dikdörgenin dört ayrı bölümüne karşılık gelen dört kısmi çarpım olacaktır.

Dilde bir takım varyasyonlar kullanılabilir. Şekil 12.22'de gösterilen 47 x 36 işlemini düşünün. 40 x 30 kısmi çarpımında eğer onluk taban söylemi kullanılırsa – *4 onluk kere 3 onluk 12 yüzlüktür*- sonuç o bölümde kaç tane yüzlük parça olduğunu söyler. Sözel olarak "kırk kere otuz" çarpımı endişe vericidir. Sayılardan ziyade basamakları düşünmeyi



Şekil 12.22 Onluk taban parçaları ile doldurulmuş 47 × 36 dikdörtgeni. Onluk taban söylemi, dört kısmi çarpım ile geleneksel yazılı biçim arasında bağlantı kurar. Çarpımların başka sıralamalarda kaydedilebileceği olasılığına dikkat edin.

teşvik eden "dört kere üç"ten kaçınmayı deneyin. Bütün durumlarda *onluk kere onluğun çarpımı yüzlüktür* fikri vurgulanmaya ziyadesiyle değerdir.

Ayrıca Şekil 12.22 dört kısmi çarpımın geleneksel sırada kaydını ve eğer taşınan basamaklar kullanılırsa bunların iki satıra nasıl daraltılabileceğini gösteriyor. Burada ikinci "taşıma" teknik olarak yüzlük sütununa aittir, fakat nadiren oraya yazılır. Sıklıkla ilkiyle karıştırılır ve dolayısıyla ek bir hata kaynağıdır. Şeklin sol alt köşesi aynı hesaplamayı dört çarpımın hepsinin farklı bir sırada yazılmasıyla gösterir. Bu oldukça kabul edilebilir bir algoritmadır. Nadiren birisi 538 × 29 gibi sayıları kağıt ve kalem ile çarptığında, altı kısmi çarpım olur. Fakat çok daha az hata ortaya çıkar ve dolayısıyla daha az öğretim zamanına ve çok daha az takviyeye ihtiyaç duyulurdu.



Çarpma işlemi için alan modelinin bilgisayar versiyonları, basamak değeri bloklarının fiziksel olarak dikdörtgenlerle doldurulmasındaki bazı zorlukları ortadan kaldırabilir. NLVM'in web sayfasında, Rectangle Multiplication (Dikdörtgen Çarpımı) bilgisayar uygulaması 30 × 30'a kadar olan dikdörtgenleri modelleyecektir (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_192_g_2_t_1.html?from=category_g_2_t_1_html). Dikdörtgen, çarpandaki onluk ve birlik basamaklarına karşılık gelerek dört parçadan ziyade ikiye bölünür. Sonuç geleneksel algoritma ile güzel bir şekilde ilişkilidir. ◆



Çarpma işlemi için alan modelinin bilgisayar versiyonları, basamak değeri bloklarının fiziksel olarak dikdörtgenlerle doldurulmasındaki bazı zorlukları ortadan kaldırabilir. NLVM'in web sayfasında, Rectangle Multiplication (Dikdörtgen Çarpımı) bilgisayar uygulaması 30 x 30'a kadar olan dikdörtgenleri modelleyecektir (http: //nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_192_g_2_t_1.html?from=category_g_2_t_1_html). Dikdörtgen, çarpandaki onluk ve birlik basamaklarına karşılık gelerek dört parçadan ziyade ikiye bölünür. Sonuç geleneksel algoritma ile güzel bir şekilde ilişkilidir. ◆

Bölme İçin Öğrenci İcadı Stratejiler

Çoğu yetişkinin bölmeyi en zahmetli hesaplama işlemi olarak düşünmesine rağmen, çarpmadan bir hayli kolaydır. Genel olarak, bölme hesaplama stratejileri üçüncü ve dördüncü sınıfta gelişir.

İki tane bölme kavramı olduğunu hatırlayın. İlk olarak, bu bağlamsal problemle gösterilen parçalara ayırma veya adil paylaşım fikri vardır.

Çantada 783 jelibon vardır ve Aidan ve dört arkadaşı bunları eşit olarak paylaşmak istiyor. Aidan ve herbir arkadaşı kaç tane jelibon alacak?

Sonra ölçüm veya tekrarlı çıkarma kavramı vardır:

Fil Jumbo yer fıstığına bayılır. Eğiticisinin 625 tane yer fıstığı vardır. Eğer Jumbo'ya her gün 20 tane yer fıstığı verirse, yer fıstıkları kaç gün yeter?

Öğrenciler her iki tarzda da soruları çözmeye zorlanmalıdır. Bununla birlikte adil paylaşım problemlerini onluk taban parçaları ile çözmek sıklıkla daha kolaydır. Buna ek olarak, geleneksel algoritma bu fikrin üzerine inşa ediliyor. Süreç ile hikâyedeki eylem eşleşmediğinde bile eninde sonunda öğrenciler her iki problem tarzında uygulayacakları stratejiler geliştireceklerdir.

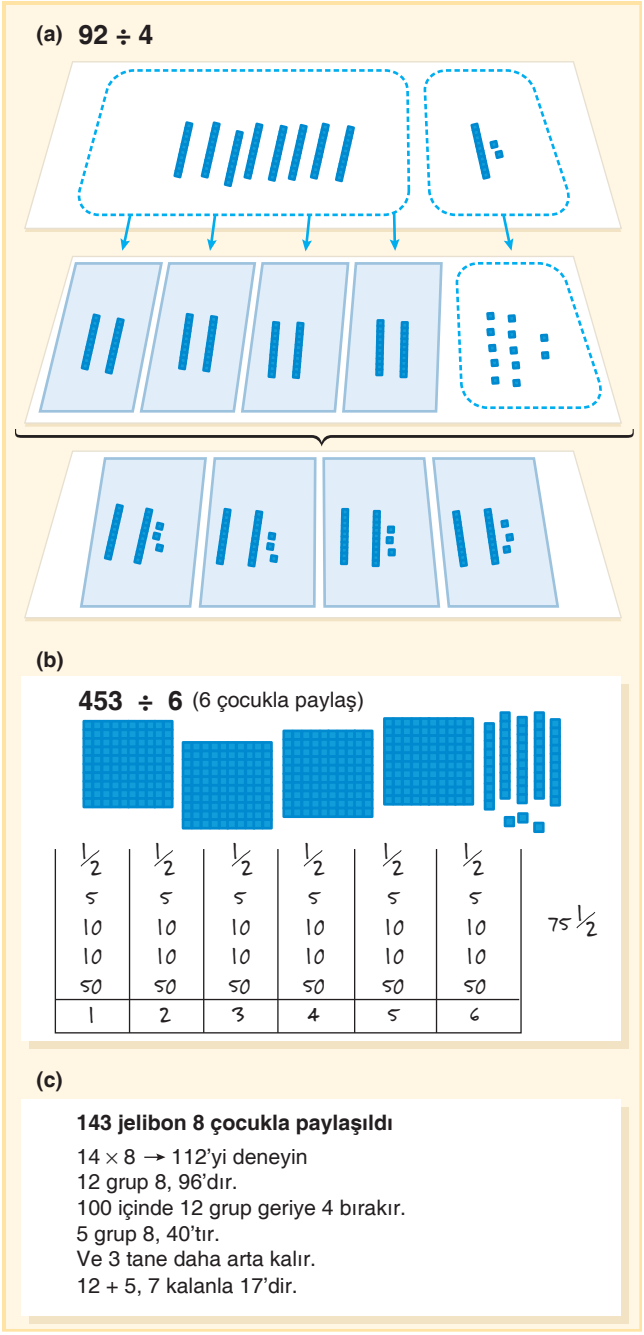
Şekil 12.23, dördüncü sınıf çocuklarının bölme problemlerini çözmek için kullandıkları bazı stratejileri gösterir. İlk örnek, 92 ÷ 4'ü onluk taban parçaları ve bir paylaşım sürecini kullanırken resimler. Dağıtmak için daha fazla onluk kalmamışsa, bir tane on takas edilir. Sonra her grupta 23 olacak şekilde 12 birlik paylaştırılır. Onluk taban parçaları ile doğrudan modelleme yaklaşımı üçüncü sınıf öğrencilerinin anlaması ve kullanması için bile oldukça kolaydır.

İkinci örnekte öğrenci onluk taban parçalarını düzene koyar ve altı sütunlu "sütun grafiği" çizer. Her çocuk için yeterli yüzlük olmadığına kanaat getirilince, 3 tane yüzlüğü her bir sütuna 50 koyarak yarıya böler. Bu ona 1 yüzlük, 5 onluk ve 3 birlik bırakır. Yüzlüğü onluklarla (şimdi 15 onluk) takas yaptıktan sonra her sütuna 2 onluk kaydederek herkese 20 verir. Şimdi ona 3 onluk ve 3 birlik veya 33 kalmıştır. 5 × 6'nın 30 olduğunu bilir, dolayısıyla her çocuğa 5 verir ve kendisine 3 kalır. Kalanları yarıya böler ve her sütuna $\frac{1}{2}$ yazar.

Üçüncü örnekteki çocuk bir paylaşım problemi çözüyor fakat bunu bir ölçüm süreci gibi yapmaya çalışıyor. 143'ün içinde kaç tane sekiz var onu bulmaya çalışıyor. Başlangıçta rastgele tahmin ediyor. 8'i önce 10 ile sonra 20 ile (işlem gösterilmemiş) ve sonra 14 ile çarparak cevabın 14'ten büyük 20'den küçük olduğunu bilir. Sonra problemi 100'ün içinde ve 40'ın içinde kaç tane sekiz var diye tekrar düşünür.

Eksik Çarpan Stratejisi

Şekil 12.23(a)'da onluk taban bloklarının kullanımının nasıl basamak odaklı bir yaklaşımın – önce yüzlükleri paylaştırın, sonra onlukları ve son olarak birlikleri – gelişimine eğilimli olduğuna dikkat edin. Bu geleneksel algoritma için iyi bir arka plan olmasına rağmen oldukça faydalı olan bütün-sayı



Şekil 12.23 Öğrenciler bölme problemlerini çözmek için hem modelleri hem de sembolleri kullanır.

Kaynak: Adapted from *Developing Mathematical Ideas: Numbers and Operations, Part I, Casebook* by Deborah Schifter, Virginia Bastable, and Susan Jo Russell. Copyright © 2000 by the Education Development Center, Inc. Used by permission of Pearson Education, Inc. All rights reserved.

stratejilerini geliştirmeye yardım etmez. Şekil 12.23(c)'de öğrenci çarpımsal bir yaklaşım kullanıyor. "Hangi sayı kere 8, 143'e 8'den az kalan ile yakın olacaktır?" sorusuna cevap bulmaya çalışıyor.

Durup Düşün!

Hangi sayı kere 7 (veya *7 kere hangi sayı*) 318'i geçmeden 318'e yakındır bularak 318 ÷ 7'nin bölümünü belirlemeye çalışın. Standart algoritmayı kullanmayın.

Bu problemi çözmeye başlamak için birçok yer vardır. Örneğin, 10 × 7 sadece 70 ve 100 × 7, 700 olduğu için cevap 10 ile 100 arasında olmak zorundadır. 10'un katları ile başlayabilirsiniz. Otuz tane 7, 210'dur. Kırk tane 7, 280'dir. Elli tane 7, 350'dir. Dolayısıyla 40 yeterli değil ve 50 çok fazladır. Kırk-küsür olmalıdır. Bu noktada 40 ile 50 arasında rastgele bir tahminde bulunabilirsiniz. Veya 7 ekleyebilirsiniz. Veya kırk tane 7'nin (280) size 20 artı 18 veya 38 bıraktığına dikkat edebilirsiniz. Beş tane 7, 38'in 3 kalanı ile birlikte 35 olacaktır. Hepsi ile birlikte, 3 kalanı ile 40 + 5 veya 45'tir.

Bu eksik çarpan stratejisi, bazı öğrenciler tarafından eğer sıradaki gibi ölçüm problemlerini çözüyorlarsa icat muhtemelen edilecektir:

Grace 6 resmi fotoğraf albümündeki bir sayfaya yerleştirebiliyor. Eğer onun 82 resmi varsa kaç sayfaya ihtiyacı olacaktır?

Alternatif olarak, 82 ÷ 6 gibi bir problemi basitçe ortaya atabilir, "Hangi sayı kere 6, 82'ye yakındır?" sorusunu öğrencilere sorabilir ve oradan devam edebilirsiniz.

Gruplama Problemleri

Eksik çarpan stratejisinin gelişimi için bir diğer yaklaşım, çarpma için tartışılan gruplama problemlerini kullanmaktır. İşte iki örnek:

100 × 4	10 × 72
500 ÷ 4	5 × 70
4 × 25	2 × 72
6 × 4	4 × 72
527 ÷ 4	5 × 72
	381 ÷ 72

Eksik çarpan stratejisinin, iki basamaklı bölenler için olduğu gibi tek basamaklı bölenler için de eşit seviyede iyi çalıştığına dikkat edin. Gruplamada bölme problemlerinin içerilmesinin uygun olduğuna da dikkat edin. İlk örnekte, 400 ÷ 4 kolay bir şekilde 100 × 4 ile yer değiştirilebilirdi ve 125 × 4, 500 ÷ 4 ile yer değiştirebilir. Düşünce, çarpma ve bölmeyi olabildiğince sıkı bir şekilde bağlı tutmaktır.

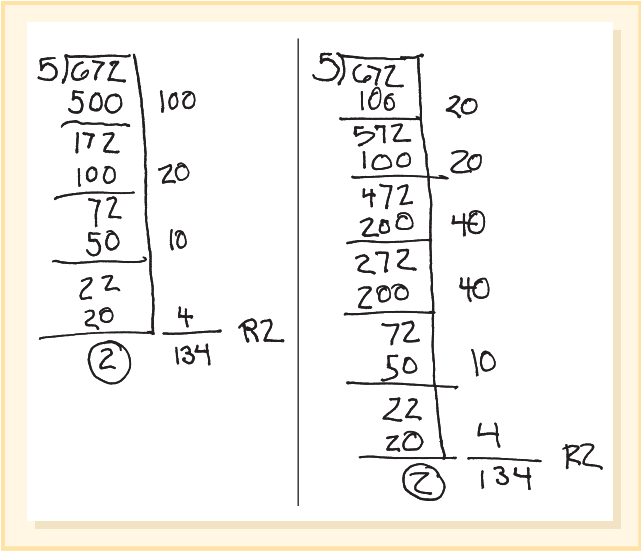
Gruplama problemleri, öğrencilere problemlerin farklı yollarla ve farklı başlangıç noktaları ile çözülebileceği farkındalığını verir. Bundan dolayı, gruplama problemlerinden ziyade, öğrencilere bir problemi çözmek için çeşitli ilk basamaklar verebilirsiniz. Öğrencilerin görevleri bir tane başlangıç noktasını

seçmek ve problemi oradan başlayarak çözmektir. Örneğin, 514 ÷ 8 için dört olası başlangıç noktası şöyledir:

10 × 8 400 ÷ 8 60 × 8 80 ÷ 8



Öğrencilerden ilk olarak problemleri iki yöntem kullanarak çözmeleri istendiğinde, sıklıkla ikinci yaklaşım için ilkel veya tamamen verimsiz bir yöntem kullanırlar (veya standart algoritmaya dönerler). Örneğin, 514 ÷ 8'i çözmek için, bir öğrenci çok uzun tekrarlı bir çıkarma dizisi kullanır (514 – 8 = 506, 506 – 8 = 498, 498 – 8 = 490, ve benzer şekilde devam eder.) ve kaç kere 8 çıkarttığını sayar. Diğerleri gerçekten 514 tane çentik atar ve 8'li grupları çember içine alır. Bu öğrenciler henüz diğer etkili yöntemleri düşünmek için yeterli esneklik geliştirmemiştir. Farklı başlangıç noktaları sunma önerisi fikri öğrencileri başka daha kazançlı alternatiflere yönlendirir. Sınıf tartışmaları da öğrencilerin daha esnek yaklaşımları görmeye başlamalarına yardımcı olacaktır. ◆



Şekil 12.24 Gösterilen bölme algoritmasında kenardaki sayılar, bölünenden çıkarılan bölen miktarını belirtir. İki örnekte de görüldüğü gibi bölen, bölünenden istenilen herhangi miktar kadar çıkartılabilir.

Bölme İçin Geleneksel Algoritma

Uzun bölme, sol taraftan veya büyük parçalar ile başlayan geleneksel bir algoritmadır. Ders kitaplarında sıklıkla öğretilen algoritmanın kavramsal temeli parçalara ayırma veya adil paylaşım yöntemidir ki bu yöntemi detaylı bir şekilde keşfedeceğiz. Bir başka iyi bilinen algoritma tekrarlı çıkarmayı temel alır ve kısmi çarpımların bölme hesaplamasının sağındaki sütuna kaydedilmesi ile eksik çarpan yaklaşımını kaydetmek için iyi bir yol olarak görülebilir. Şekil 12.24'teki iki örnekle gösterildiği gibi bir avantaj her basamakta seçilen çarpımda tam bir esnekliğin olmasıdır.

Tek Basamaklı Bölenler

Genel anlamda tek basamaklı bölenli bölme algoritmasına üçüncü sınıfta giriş yapılır. Eğer iyi bir giriş yapılmışsa tekrar öğretilmesine gerek kalmayacaktır ve iki basamaklı bölenler için temel sağlamalıdır. Bölme algoritmasında zorluk yaşayan üst sınıflardaki öğrenciler de kavramsal bir gelişimden yararlanabilir.

Modellerle Başlamak. Geleneksel olarak, $4\overline{)583}$ gibi bir problemi çözmemiz gerekirse, "4, 5'e bir kere sığar" diyebiliriz. Bu, çocuklar için oldukça gizemlidir. Nasıl olur da "83"ü yok sayıp problemi değiştirmeye devam edebilirsiniz? Tercihen, öğrencilerinizin 583'ü, bağımsız 5, 8 ve 3 basamakları olarak değil 5 yüzlük, 8 onluk ve 3 birlik olarak düşünmelerini istersiniz. Bir fikir, bir kartonda 10 kutu ve bir kutuda 10 şeker gibi bir bağlam kullanmaktır. Bu durumda problem *4 okul arasında eşit olarak paylaşmak için 5 kartonumuz, 8 kutumuz ve 3 şekerimiz var* olur. Bu bağlamda, artık daha fazla paylaşacak karton kalmayana kadar ilk önce kartonları paylaşmak mantıklıdır. Geri kalan kartonlar "açılır" ve kutular paylaştırılır ve böyle devam eder. Para ($100, $10 ve $1[1]) benzer şekilde kullanılabilir.



Durup Düşün!

Bunu onluk taban parçaları ve 524 ÷ 3 problemini kullanarak kendi başınıza deneyin. "-e sığar" kelimesini kullanmadan süreci konuşarak deneyin. Paylaşımı düşünün.

Dil, algoritmanın kavramsal olarak düşünülmesinde muazzam bir rol oynar. Çoğu yetişkin bırakması zor olan "-e sığmak" diline alışmıştır. 583 ÷ 4 problemi için bazı önerilen söylemler şöyledir:

- Bu dört grup arasında 5 yüzlük, 8 onluk ve 3 birliği paylaşmak istiyorum. Herbir grubun 1 yüzlük alması için yeterince yüzlük var. Geriye paylaşamayacağım 1 yüzlük kalır.
- Yüzlüğü, 10 tane onluk ile takas edeceğim. Bu bana toplamda 18 tane onluk verir. Her gruba 4 onluk verebilirim ve 2 onluk arta kalır. İki onluk, dört gruba dağıtmak için yeterli değildir.
- 2 onluğu 20 birlik ile takas edebilirim ve halihazırda elimde olan 3 birlikle bir araya koyarım. Toplamda 23 birlik yapar. Dört grubun her birine 5 birlik verebilirim. 3 birlik kalan olarak arta kalır. Toplamda, her bir gruba 3 tane birlik arta kalarak 1 yüzlük, 4 onluk ve 5 birlik verdim.

[1] Amerikan para birimi.

Yazılı Kaydı Geliştirmek. Uzun bölme algoritması için kayıt şeması tamamen sezgisel değildir. Çocukların modellerle adil paylaşımı kaydetmeyi öğrenmelerine yardım etmede oldukça yönlendirici olmanız gerekecek. Temel olarak dört basamak var:

1. *Paylaş* ve her bir gruba koyulan parçaların sayısını kaydet.
2. Toplamda paylaşılan parçaların sayısını *kaydet*. Bu sayıyı bulmak için çarpma yapın.
3. Kalan parçaların sayısını *kaydet*. Bu sayıyı bulmak için çıkartma yapın.
4. Daha küçük parçalarla *takas yapın* (gerekli ise) ve halihazırda var olanlarla birleştirin. Sıradaki sütuna yeni toplamı kaydedin.

Öğrenciler bir basamaklı böleni olan bir problemi modelliklerinde 2 ve 3. basamaklar gereksiz görünür. Bu basamakların orada sayacak parçanız olmadığında gerçekten yardımcı olduğunu açıklayın.

Belirgin Takasları Kaydetmek. Şekil 12.25, şimdi tanımlanan kayıt sürecinin basamaklarını detaylandırır. Solda geleneksel algoritmayı görürsünüz. Sağdaki, takasları belirgin bir şekilde kaydederek gerçek eylem ile modelleri eşleştiren bir öneridir. Bir bakıma gizemli olan "indirme" prosedürü yerine bir sonraki sütunda varolan parçaların sayısında olduğu gibi takas edilen parçaların üzeri çizilir. Parçaların toplam sayısı, iki basamak kullanılarak bu sütuna yazılır. Örnekte, 2 yüzlük 20 onluk ile takas edilmiş, orada olan 6 ile birleştirilip toplamda 26 onluk elde edilmiştir. Dolayısıyla 26 onluk sütununa yazılır.

Uzun bölme prosedürünü anlaması gereken öğrenciler belirgin takas yöntemini daha kolay takip edilebilir bulurlar. Geniş basamak değeri sütunlu boş bölme tabloları şiddetle önerilir. Bunlar Çalışma Yaprak Seti 20'de bulunabilir. Problemi tablosuz bir şekilde yazarken bölünenin basamaklarını yaymak önemlidir. (*Yazar notu:* Belirgin takas yöntemi John Van de Walle'nin icadıdır. Başarılı bir şekilde 3. sınıftan 8. sınıfa kadar kullanılmıştır. Başka ders kitaplarında bulamazsınız.)

Hem belirgin takas yöntemi hem de basamak değeri sütunlarının kullanımı bir problemdeki sıfırı atlama sorununda yardımcı olacaktır (bkz. Şekil 12.26).

İki Basamaklı Bölenler

Kendi eyalet ve yerel standartlarınızı çocukların ne zaman iki basamaklı bölenlerle bölme işleminde ustalaşacağı konusunda rehberlik etmesi için inceleyin. Dördüncü, beşinci ve bazen altıncı sınıfın büyük bir kısmı sıklıkla bu beceri için harcanır. Zaman ve öğrencilerin matematiğe karşı tavırları bazında maliyeti muazzamdır. Herhangi bir yetişkin hayatında sadece birkaç defa böylesi bir hesap için kesin bir sonuca ihtiyaç duyacak ve bir hesap makinesi bulunmayacaktır.

İki basamaklı bir bölenle her basamakta paylaşmak için doğru miktarı bulmak zordur. Çok yüksek veya çok alçak rastgele bir tahmin sil baştan yeniden başlamanız anlamına gelir. Aynı bölmeyi birçok problemde kullanarak başlayın. Bu öğrencilerin sürece odaklanmalarına izin verirken daha başarılı tahminler yapmalarına yardımcı olur.

Sezgisel Bir Fikir. Büyük bir şeker yığınını 36 arkadaşınızla paylaşacağınızı varsayın. Her seferinde birer tane vermek yerine ihtiyatlı olarak herkesin en azından 6 parça alabileceğini tahmin edersiniz. Dolayısıyla her arkadaşınıza 6 tane verirsiniz. Şimdi 36 parçadan daha fazla arttığını buldunuz. Herkese 7 veya 8 tane verebilmek için herkesten 6 parçasını geri vermesini mi istersiniz? Bu aptalca olurdu! Basit bir şekilde daha fazla dağıtırsınız.

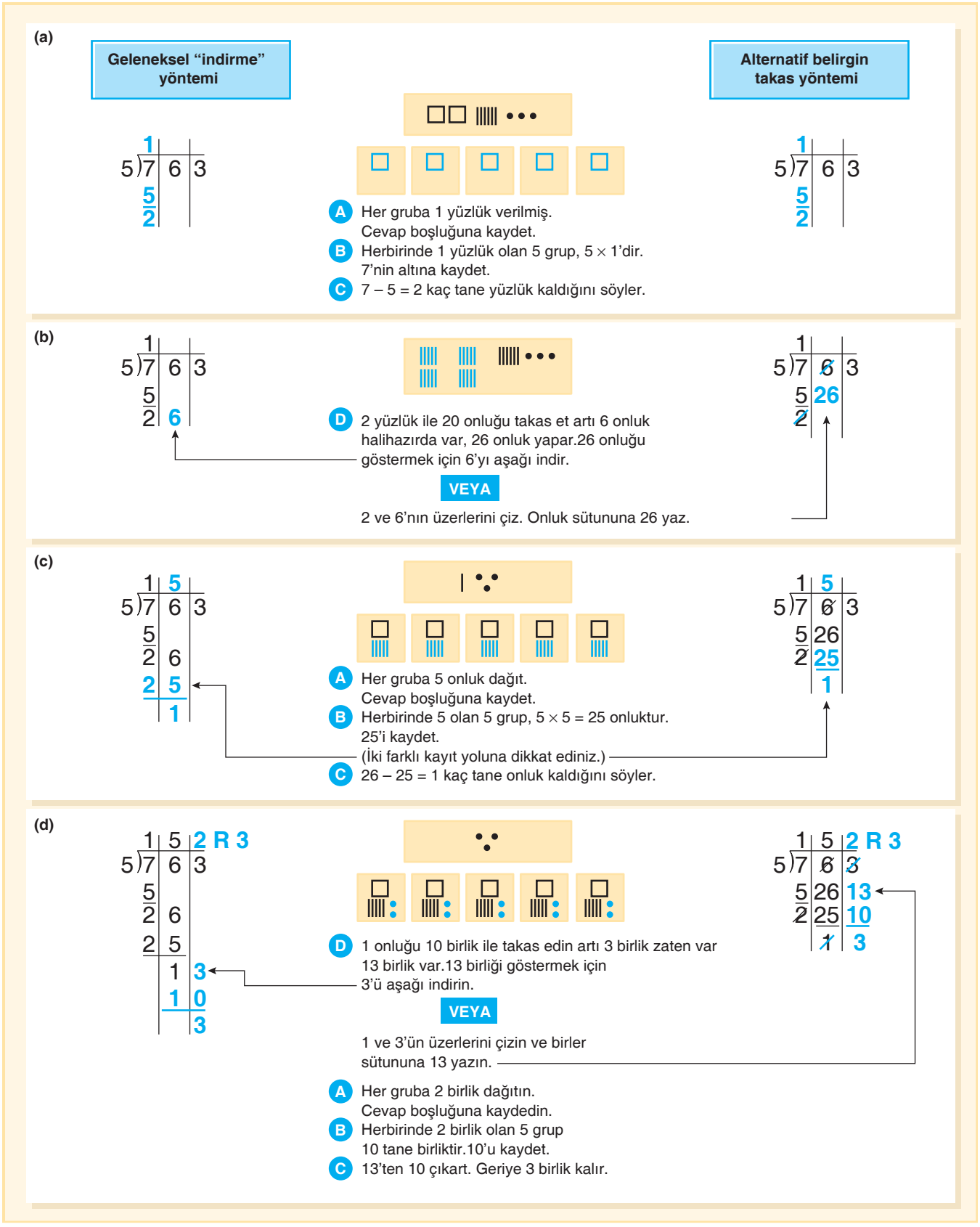
Şeker örneği bize uzun bölmede paylaşım için iki iyi fikir verir. İlki, her zaman ne kadar paylaşılabileceğini az tahmin edin. Her zaman daha fazla dağıtabilirsiniz. Aşırı tahminden kaçınmak için, her zaman gerçeğinden daha fazla dağıtılacak grup varmış gibi düşünün. Örneğin, 312'yi 43' bölüyorsanız (43 grup veya "arkadaş" arasında paylaşım), 50 grubunuz varmış gibi düşünün. 10'un bir sonraki katına *yukarı* yuvarlayın. Kolay bir şekilde 50 grup arasında 6'şar parça düşeceğini belirleyebilirsiniz çünkü 6 × 50 kolay bir çarpımdır. Bundan dolayı, gerçekte sadece 43 grup olduğu için açıkça görülüyor ki her birine *en az* 6 tane verebilirsiniz. Her zaman daha büyük bölen düşününün; *her zaman yukarı yuvarla.*

Fikri Sebmolik Olarak Kullanma. Bu fikirler Şekil 12.27'de kullanılmıştır. Kayıt için hem geleneksel yöntem hem de belirgin takas yöntemi gösterilmiştir. Yukarı yuvarlanan bölen, 70, gerçek bölenin üzerinde küçük bir "düşünce balonu" içine yazılmıştır. Yukarı yuvarlamanın bir başka avantajı vardır: 70'in katlarını gözden geçirmek ve onları 374'le karşılaştırmak kolaydır. Onluk taban parçalarını paylaşmayı düşünün (binlikler, yüzlükler, onluklar ve birlikler). Her seferinde bir basamak olacak şekilde her kaydedilen basamağın neyi temsil ettiğini söyleyerek problemi çözün.

Bu yaklaşımın, dördüncü sınıfta bölmeyi ilk defa öğrenen çocuklarda ve altıncı sınıftan sekizinci sınıfa kadar takviyeye ihtiyacı olan çocuklarda başarılı olduğu ispatlanmıştır. Seçim yapmadan kaynaklanan zihinsel yorgunluğu azaltır ve esas itibariyle silme ihtiyacını ortadan kaldırır. Eğer bir tahmin çok düşükse bunun zararı yoktur. Ve her zaman yukarı yuvarlarsanız tahmin hiçbir zaman çok yüksek olmayacaktır. Aynısı belirgin takas notasyonu için de doğrudur.

NCTM Standartları

Sıradakiler *Standartlar*'ın 3-5. bölümlerindendir: "Beklentinin öğrencilerin doğal sayılarla hesaplamada akıcılığı geliştirmesi olmasına rağmen büyük sayılar içeren veya genişletilmiş bir problemin bir parçası olan karmaşık hesaplamaları çözmek için sıklıkla hesap makinesi kullanmalıdırlar" (s. 155). ◆



Şekil 12.25 Geleneksel ve belirgin takas yöntemleri bölme sürecinin her basamağına bağlanmıştır. Her basamak anlam ifade edebilir ve etmelidir (Çalışma Yaprak Seti 20).

Bu hatadan kaçının.

$$\begin{array}{r} 17 \\ 6\overline{)642} \\ \underline{6} \\ 042 \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

Basamak değeri sütunları yardımcı olabilir.

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 0 & 7 \\ \hline 6 & 6 & 42 \\ \underline{6} & & \underline{42} \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 1 & 0 & 7 \\ \hline 6 & 6 & 42 \\ \underline{6} & & \\ 0 & 42 & \\ & \underline{42} & \\ & & \end{array}$$

Şekil 12.26 Basamak değeri sütunlarını işaretlemek için doğrular kullanmak sıfırları kaydetmeyi unutmanın önüne geçmede yardımcı olabilir.

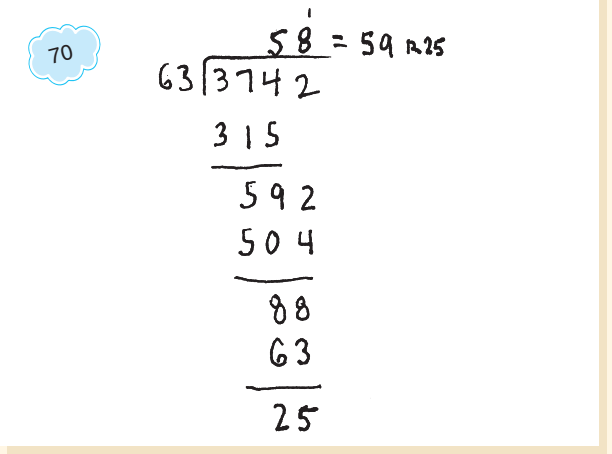


Herhangi bir işlem için geleneksel algoritma öğretilirken, küçük sınavlar verebilir veya ders kitabındaki bölüm sonu testlerini kullanabilirsiniz. Öğrenciler iyi yapsalar da o kadar iyi yapmasalar da tamamen hesaplamaya dayalı bir test ile öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını gerçekten değerlendirip değerlendiremeyeceğinizi kendinize sorunuz. Öğrenciler bir algoritmada sistematik bir hata yaptıklarında, muhtemelen tekrar eden problemlerde aynı şekilde ortaya çıkacaktır. Bilmeyeceğiniz çocuğun hangi kavramsal bilgiyi kullandığı veya kullanmadığıdır. Standart bir algoritmanın doğru kullanımını kavramsal anlayış ile karıştırmayın.

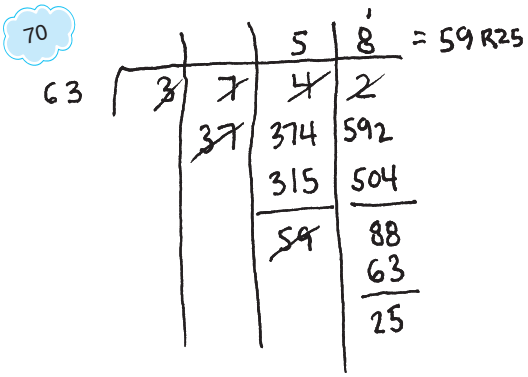
Algoritma için bu çok önemli arka plan anlayışını değerlendirmek için, sınıf tartışmaları esnasında her bir basamağı farklı öğrencinin açıklamasını isteyin. Basit bir tabloda veya başka bir kayıt tekniği ile öğrencilerin cevaplarını, üzerinde çalıştığınız algoritmayı ne kadar iyi anlamış göründüklerini belirterek, takip edin. Zorlanan öğrencilerle anlama düzeylerini daha detaylı bir şekilde incelemek için kısa bir teşhis görüşmesi yapmak isteyebilirsiniz.

Bir teşhis görüşmesi öğrenciye bir hesaplamayı tamamlattırarak başlayabilir. Bittiğinde süreç içerisindeki belirli basamaklar için açıklama isteyiniz. Eğer sembolik sürecin açıklanmasında zorluk varsa öğrenciye aynı hesaplamayı yapması için onluk taban blokları kullandırtın. Sonra modellerle yapılanlar ile sembolik olarak yapılanlar arasındaki bağlantıları sorun. ◆

Geleneksel indirme yöntemi



Alternatif belirgin takas yöntemi



Şekil 12.27 Düşünmek için böleni 70'e yuvarlayın, fakat paylaştığınızı 63 ile çarpın. Birlik sütununda her grupla 8'i paylaşın.Aman! Geriye 88 kaldı. Her gruba 1 tane daha ver.

Bölüm 12 Üzerine Düşünelim

Yazarak öğrenelim!

1. Bir problemi doğrudan modelleyerek çözme ile icat edilen stratejiyi kullanarak çözme arasındaki fark nedir? Geleneksel algoritma nedir?
2. Geleneksel algoritmalar öğrenci-icadı stratejilerden nasıl farklıdır? İcat edilen stratejilerin geleneksel algoritmalara göre faydalarını açıklayınız.
3. 46 + 39 işlemi için üç farklı strateji gösteriniz. Hangileri zihinden kolaylıkla yapılır? 39, 40'a yakın olduğundan daha kolay bir strateji var mıdır? 538 + 243 gibi toplamlar için hangi stratejiler iyi çalışır? Çalıştığınız her bir stratejiyi diğer öğrencilerin ne yapıldığını takip edebilmesi için tahtaya nasıl kaydedeceğinizi düşününüz.
4. 93 – 27 ve 545 – 267 için iki farklı toplama stratejisi kullanınız. Toplama stratejisini teşvik edecek bağlamsal bir problem oluşturunuz.
5. Toplama ve çıkarma için algoritmaları geliştirmeye nasıl başlayacağınızı anlatınız. Öğrencilerin doğal eğilimi sol taraftan

başlamak iken sağ tarafta birler basamağından başlama konusunu nasıl halledersiniz? Sol yerine sağdan başlayan makul bir yazılı algoritma göstermek için 385 + 128'i kullanınız. 453 – 278 için aynısını yapınız.

6. 57 x 4'ün nasıl modellenebileceğini gösteren resimler çiziniz: sayma nesneleri ile, onluk-taban parçaları ile, onluk taban için kareli kağıtlar üzerinde dikdörtgenler veya dizilimler ile.
7. Öğrencileriniz çarpma problemleri için gerçekte hiç çarpma yapmadan tekrarlı toplamayı kullanmada ısrar ediyor gibi görünüyorlarsa ne yapardınız?
8. Hangi bölme kavramı, ölçme mi yoksa parçalara ayırma mı, doğrudan modelleme için daha kolaydır ve de alışılmış uzun bölme algoritmasını geliştirmek için kullanılır? Bu kavramla 735 ÷ 6'ya uyan bir hikâye oluşturunuz.
9. 735 ÷ 6 için geleneksel algoritmayı kullanınız ve süreci, metindeki takasları açık bir şekilde kayıt etme önerisini kullanarak tekrar ediniz. İki algoritma yan yana iken kayıt edilen her sayının onluk-taban parçalarını paylaşırken neyi temsil ettiğini açıklayınız.
10. Geleneksel algoritmaları öğretirken öğrencinin anlamasını ortaya çıkaran değerlendirme biçimi neden çok önemlidir?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Doğal sayılar için geleneksel hesaplama algoritmalarının öğretilmeye devam edilip edilmemesini görüşen dört kişilik bir panel tartışması yapınız. Her bir görüşü temsil eden iki kişi olsun. Tartışmalar, her bir yaklaşımın faydalarını, çeşitli yöntemlerin etkinliğini, öğrencilerin "matematik yapmadan" ne anladıklarını, gerçek hayatta mevcut olan teknoloji konusunu, sınıf dışında çeşitli hesaplama türlerine olan ihtiyacı, büyük öneme sahip testleri ve ailelerin isteklerini ortaya koymalıdır. İki orta yollu görüş olasıdır: geleneksel algoritmaları sadece çarpma ve bölme için dâhil etmek ve geleneksel algoritmaların öğretimini yedinci veya sekizinci sınıfta esnek stratejiler ve daha iyi sayı hissi gelişene kadar vermemek.

Bölüm 12 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Children's literature can play a very useful role in helping you develop problems for your invented strategies and mental computation lessons.

The Breakfast Cereal Gourmet *Hoffman, 2005*
The History of Everyday Life *Landau, 2006*
The Pop Corn Book *de Paola, 1978*
Math and Non-Fiction: Grades 6–8 (a resource book for teachers) *Bay-Williams & Martinie, 2008*

These nonfiction books include interesting facts and figures that can be used for a variety of calculations and investigations. Hoffman's book provides fun information about breakfast eating habits; for example, the average person eats 160 bowls of cereal a year. Such facts can be used to find how many bowls are eaten in 5 years, or how many consumed in a month. In the *History of Everyday Life*, inventions are discussed, including facts and figures about the toilet. If the toilet uses about 3 or 4 gallons of water for every flush, how much water are you using at home? Can the school keep track of its usage for one day? *The Pop Corn Book* is representative of books that combine stories with numerical data. If 500,000,000 pounds of popcorn are popped in a year, how many 100-pound children would it take to weigh as much? Look for other titles on your bookshelf, or explore facts in your own local newspaper to bring children into the mathematical calculations that naturally emerge from real situations. The teacher resource book by Bay-Williams and Martinie shares other titles and activities in all mathematics content areas including whole-number computations.

Alice Ramsey's Grand Adventure *Brown, 1997*
Wilma Unlimited *Krull, 1996*

Brown and Krull both write about strong females who made their mark in history and sports. Alice Ramsey was the first woman to drive across the continental United States, and Wilma Rudolph was an Olympic track athlete who had polio as a young child. Again, these are representative of many pieces of children's literature that link actual information to possible calculations and comparisons. The first book can lead to considering trips across the United States by car in which students can use road maps to explore distances between locations, tallying up mileage across states or regions. Alice's first trip (of 31) took 59 days and there are interesting problems that can be generated to compare that to cross-country car trips today or to figure how many days she was in the car on the total of 31 trips. In *Wilma Unlimited*, there are obvious connections to the length of her races or how any race can be divided into a relay of a given number of people leading to calculations of the length of each segment. Of course additional problems can emerge from calculating how long ago these women lived. Biographies of pioneers and leaders are a good source of data for addition, subtraction, multiplication, and division problems.

Is a Blue Whale the Biggest Thing There Is?
Wells, 2005

This is one of the most intriguing books you will find about large objects and large distances. Blue whales look small next to Mount Everest, which in turn looks small next to the earth. The data in the book allow children to make other comparisons, such as the number of fourth graders that would have the same weight or volume as a blue whale or would fill the gymnasium. These comparisons are the perfect place for estimations and discussions about how much precision is necessary to make a meaningful comparison.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). Computational fluency [Focus Issue]. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6).

How to help children achieve skills and understanding in the area of computation is the focus of this entire journal, which can be purchased separately from NCTM. Each of the nine articles is well worth reading, including a discussion of teaching computation to English language learners, an article on computational fluency written by an internationally prominent mathematician, a reprint of a classic article on meaning and skill by William Brownell, plus other worthwhile articles by both classroom teachers and researchers in the area of computation.

O'Loughlin, T. A. (2007). Using research to develop computational fluency in young mathematicians. *Teaching Children Mathematics*, *14*(3), 132–138.

Written by a second-grade teacher, this article describes her journey to improve her students' computational fluency through research-based practice. Using the Fosnot and Dolk (2001) books referred to in the "Books" section below, she encourages student-invented strategies to explore her students' thinking and understanding. The interesting collection of student work and thought-provoking associated debriefing will demonstrate various methods, such as place-value strategies and empty number line representations.

Russell, S. J. (2000). Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Children Mathematics*, 7, 155–158.

In just four pages, Russell provides an articulate view of what Principles and Standards *means by computational fluency. Russell accompanies each of her points with examples from children. She explains that teaching for fluency is a complex task requiring the teacher's understanding of the mathematics, selecting appropriate tasks, and recognizing when to capitalize on students' ideas.*

Kitaplar

Duncan, N., Geer, C., Huinker, D., Leutzinger, L., Rathmell, E., & Thompson, C. (2007). *Navigating through number and operations in grades 3–5.* Reston, VA: NCTM.

This book (particularly Chapters 3 and 4) is a perfect companion to this chapter, reflecting on how to introduce and develop the four operations with the ultimate goal of developing computational fluency and mathematical proficiency. There is also follow-up on how to assess and interpret student work. Part of the publication is a CD that includes blackline masters that correspond to a variety of activities in the book and a collection of related articles and chapters from NCTM publications.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

These are two in a series of three books by Fosnot (a U.S. mathematics educator) and Dolk (a mathematics educator in the Netherlands). The books are products of a collaborative research effort of working with teachers to examine how children learn and how to support that learning. They show children's work constructing ideas about number, operations, and computation in ways not found elsewhere. (Their third book is on fractions and decimals.)

İnternet Kaynakları

Base Blocks Addition
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_154_g_2_t_1.html

Base Blocks Subtraction
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_155_g_2_t_1.html

These two similar applets use base-ten blocks on a place-value chart. You can form any problem you wish up to four digits. The subtraction model shows the bottom number in red instead of blue. When the top blocks are dragged onto the red blocks, they disappear. Although you can begin in any column, the model forces a regrouping strategy as well as a take-away model for subtraction. Good for reinforcing the traditional algorithms.

Rectangle Division
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_193_g_1_t_1.html

This applet uses an array model to represent any two-digit number as a product of two numbers. Remainders are included.

Rectangle Multiplication
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_192_g_1_t_1.html

This applet nicely models two-digit by two-digit products up to 30 × 30.

Whole Number Algorithms and a Bit of Algebra!
http://mason.gmu.edu/%7Emmankus/whole/base10/asmdb10.htm

The purpose of this website is to assist the user in looking at addition, subtraction, multiplication, and division of whole numbers connecting the conceptual and procedural understandings. The site uses explanations with manipulatives to demonstrate the different algorithms.

Bölüm 13

Doğal Sayılarla Hesaplamaya Dayalı Tahminin Kullanımı

İlkeler ve Standartlar'ın, hesaplamadaki akıcılığı, "hesaplama için doğru ve etkili yöntemleri bilme ve kullanma" (NCTM, 2000, s. 32) şeklinde tanımladığını hatırlayınız. Hesaplamaya dayalı tahmin becerileri, doğal sayılarla akıcı düşünmeyi ve esnekliğin gelişimini sağlar. *Öğretim Programı Odak Noktaları* (NCTM, 2006), 1. sınıftan 4. sınıfa kadar hesaplamayla ilgili kazanımların yanı sıra doğal sayılarla hesaplamaya dayalı tahmini içerir ve bu amaç, öğrencilerin "uygun yöntemleri seçebilmesi ve uygulayabilmesi" şeklinde ifade edilmiştir.

Zihinden hesaplama ve hesaplamaya dayalı tahmin, birbiriyle sıkıca ilişkili olmasına rağmen aslında oldukça farklı becerilerdir. Tahminlerde, gerçekte kullanılabilecek sayılara göre hesaplanması daha kolay sayıları içeren zihinsel hesaplamalar kullanılır. Buna göre tahmin, öğrencilerin zihinden hesaplama becerilerine bağlıdır. Ancak tahmin, hem gerçek dünyada hem de matematiğin çoğu kısmındaki önemi ve hesaplamaya dayalı tahmin stratejilerinin çeşitliliği nedeniyle, önceki bölümde tartışılanlardan oldukça farklılık göstermekte, bu durum da hesaplamaya dayalı tahmini ayrı bir şekilde vurgulamayı anlamlı hâle getirmektedir.

Ana Fikirler

1. Çok basamaklı sayılar, çeşitli yollarla inşa edilebilir veya parçalarına ayrılabilir. Sayıların parçalarıyla çalışmanın daha kolay olduğu durumlarda, bu sayılar hesaplamalar yaparken verilen sayıların birebir kendisini kullanma yerine tahminlerde bulunmak için kullanılabilir. Örneğin; 36; 30 ve 6'nın veya 25, 10 ve 1'in toplamıdır. 483'de, 500 − 20 + 3 olarak düşünülebilir.
2. Sonuçları zihinsel olarak hesaplayabilmek için hesaplamaya dayalı tahminlerin neredeyse tamamı, sayıların kullanımı daha kolay olan parçalarını veya kullanımı zor olan sayının yerine bu sayıya yakın "uygun" sayıların kullanımını içermektedir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Tahmin becerileri, matematiğin diğer alanlarını anlamak kadar günlük yaşamı anlamak için de bir araç olarak geliştirilir.

- **İşlemler, Basamak Değeri ve Doğal Sayı Hesaplamaları** (Bölüm 9, 11 ve 12): Tahmin becerilerinin çoğu, doğrudan hesaplama için icat edilen stratejiler aracılığıyla gelişir. Örneğin, 708 ÷ 27 işlemini tahmin etmek için, 20 × 27 (540) ve sonra da 5 × 27 (çarpım 135 ve dolayısıyla toplam 675) işlemini yapabilirsiniz. Böylece, bölümün 25'ten biraz daha büyük olduğu anlaşılır. Bu iki çarpımın hesaplanması, basamak değerini anlamayı gerektirir. Çarpmanın, bölme işleminin sonucunu tahmine nasıl yardımcı olabileceğini anlamak, çarpma ile bölmenin nasıl ilişkilendirileceğini anlamayı gerektirir.
- **Kesirler, Ondalık Sayılar ve Yüzdelerle Tahmin** (Bölüm 16 ve 17): Öğrenciler, tahminin ne olduğunu anladıkları ve doğal sayılar için stratejiler geliştirdikleri zaman, diğer sayı çeşitleriyle tahmin yaparken daha az sayıda yeni stratejilere ihtiyaç duyulur. 3.45 + 24.06 − 0.0057 işleminin sonucunun tahmini, yeni tahmin becerisi gerektirmez, burada sadece ilgili ondalık sayıların iyi düzeyde kavramsal anlaşılmasına ihtiyaç vardır. Benzer ifadeler, kesirler ve yüzdeler için de doğrudur.

Hesaplamaya Dayalı Tahmini Takdimi

Günlük yaşamda veya okulda, bir hesaplamayla karşılaştığımızda, hesaplamayı nasıl yapacağımızla ilgili çeşitli seçimlere sahip olduğumuz söylenebilir. 1989 yılında yayınlanan Standartlar belgesinde işaret edildiği gibi, ilk karar şudur: "Kesin bir cevaba mı ihtiyacımız var yoksa yaklaşık bir cevabı kabul edecek miyiz?" Eğer kesin bir cevap isteniyorsa,

o zaman icat edilmiş veya zihinsel bir stratejiyi, kağıt-kalem algoritmasını, bir hesap makinesini veya bir bilgisayarı bile kullanabiliriz. Elektronik tablolama/spreadsheet formatına uygun birçok tekrarlı hesaplamalar gerektiğinde bir bilgisayara ihtiyaç duyulabilir. Fakat çoğu kez, kesin bir cevaba ihtiyaç duyulmadığı için tahmini kullanabiliriz. İyi bir tahminin nasıl olduğu, bir tahminin iyiliği-gerçek hesaplamaya yakın olması-bir tahmini kullanmak için ilk başta verilmiş karar gibi bağlama dayalıdır.

Hesaplamaya dayalı tahminin amacı, durum için yeterli olabilecek bir hesaplamada yaklaşık bir sonucu esnek ve hızlı bir şekilde üretebilmektir. Günlük yaşamda tahmin becerileri, zamandan tasarruf etmenin değerli bir aracıdır. Çoğu durum, kesin bir cevabı gerektirmez, dolayısıyla iyi tahmin becerilerine sahip birisi, bir hesap makinesi veya bir kaleme ihtiyaç duymaz. Bununla birlikte; hesaplamaya dayalı tahmin becerisi, tahmin edenin birçok karar vermesini gerektiren yüksek düzeyli düşünme becerisidir (Sowder, 1989). Öğrenciler, hesaplamaya dayalı tahminde kesin cevapları elde etmedeki kadar iyi değildir ve bu nedenle de hesaplamaya dayalı tahminde kendilerini rahat hissetmezler (Hanson ve Hogan, 2000; Reys, Reys ve Penafiel, 1991; Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa ve Shimizu, 1991).

Tahmin becerisi iyi olanlar, zaman içinde geliştirdikleri hesaba dayalı farklı stratejileri kullanma eğilimindedir. Bu stratejileri çocuklara öğretmek, öğretim programının düzenli bir bileşeni olmuştur. 2. sınıftan itibaren, çocuklara bir hesaplamayı, tahmin etmenin ne olduğunu anlamaları için yardımcı olabiliriz ve öğrenciler, kullanışlı olabilecek bazı tahmin stratejileri geliştirmeye başlayabilir. Öğrenciler, ortaokul yıllarıyla beraber kendi tahmin stratejilerini ve becerilerini geliştirmeyi sürdürmeli ve bunlara yenilerini eklemelidir.

Hesaplamaya Dayalı Tahminin Anlaşılması

Tahmin terimi; tek başına, belli bir bağlama karşılık gelen kesin bir sayı yerine konabilecek en uygun yaklaşık değeri bulmayı ifade etmektedir. Tahmin kavramı, hesaplama kadar niceliklere ve ölçümlere de uygulanır.

Tahminin Üç Çeşidi. Anaokulu - 8. sınıf matematik öğretim programında, *tahmin* birbirinden oldukça farklı üç fikri ifade etmektedir:

- *Ölçümü tahmin*-Kesin bir ölçme işlemi yapmadan, yaklaşık bir ölçümün belirlenmesidir. Örneğin, bir odanın uzunluğunun veya manavdaki bir karpuzun ağırlığının tahmin edilmesi.
- *Niceliği tahmin*-Bir yığındaki parçaların yaklaşık sayısının belirlenmesidir. Örneğin, bir konser salonundaki öğrencilerin veya "tahmin kabı"ndaki jöleli küçük şekerlemelerin sayısının tahmin edilmesi.
- *Hesaplamaya dayalı tahmin*-Yapamadığımız veya kesin olarak belirlemek istemediğimiz bir hesaplamanın yaklaşık sonucunu veren sayıyı bulma işlemidir. Örneğin, arabamızla 16 galon yakıtla 326 mil seyahat edersek (326 ÷ 16), mil başına tüketilen yaklaşık yakıt miktarını bilmek isteyebiliriz. Bazı durumlarda, hesaplamanın verilen bir sayıdan ya çok ya da az olduğunu bilmek yeterlidir. Param, her biri $3.29 olan altı kutuyu satın almak için yeterli midir? 28 düzine donatımız (tatlı çeşidi) var. Her bir öğrenciye ikişer tane dağılacak şekilde 117 öğrenciye yetecek kadar donat var mıdır?

Tahmin veya Kestirim. Çocukların çoğu, tahmin ile kestirimi karıştırır. Tahminin üç çeşidi de kestirimi tamamen içermez. Her biri, akıl yürütmenin bazı biçimlerini barındırır. Örneğin, hesaplamaya dayalı tahmin bazı hesaplamaları içerir, fakat hiçbir şekilde bir kestirim değildir. Bu nedenle, (1) tahminle ilgili çalışırken *kestirim* kelimesini kullanmamak ve (2) öğrencilerin tahmin ve kestirim arasındaki farkı açık bir şekilde görmelerine yardımcı olmak önemlidir.

Öğretim Programında Hesaplamaya Dayalı Tahmin. Hesaplamaya dayalı tahmin, ders kitaplarınızda ve hatta eyalet standartlarında az vurgulanmasına rağmen, matematik yapabilmenin önemli bir parçasıdır. *Öğretim Programı Odak Noktaları*'nda doğal sayılarla tahmine dayalı hesaba ilişkin bulunan ifadeler, hesaplamaya dayalı tahminin önemini ortaya koymaktadır. Bu ifadelerin bir özeti aşağıdadır ve anahtar terimler koyu biçimde yazılmıştır.

> **2. Sınıfta [Çok basamaklı toplama ve çıkarma işlemlerinde akıcılığa ilişkin Odak Noktaları]**
>
> [Öğrenciler], toplamları ve farkları *tahmin etmek* için uygun yöntemleri seçecek, uygulayacak veya bağlama ve içerdiği sayılara dayalı olarak toplamı zihinden hesaplayacaktır. (s. 14)

> **3. Sınıfta [Sayı ve İşlemleri İlişkilendirme]**
>
> [Öğrencilere], kağıt-kalem kullanımına dayalı hesaplamalar yapma, *hesaplamaya dayalı tahmini* kullanma ve (2500 + 6000 + 5000 gibi özel durumlardaki gibi toplama ve çıkarma işlemleri) zihinden hesaplamalar yapmalarını mümkün kılan ortamlar sağlanarak, öğrencilerin sayılara yönelik anlayışları gelişecektir (s. 15).

> **4. Sınıfta [Çarpma işleminde akıcılığa ilişkin Odak Noktaları]**
>
> [Öğrenciler], bağlama ve ele alınan sayılara bağlı olarak çarpımları *tahmin etmek* veya zihinden hesaplamak için uygun yöntemleri seçecek ve uygulayacaktır (s. 16).

> **5. Sınıfta [Doğal sayılarla bölme işleminde akıcılığa ilişkin Odak Noktaları]**
>
> [Öğrenciler], bağlama ve ele alınan sayılara bağlı olarak bölümleri, *tahmin etmek* veya zihinden hesaplamak için uygun yöntemleri seçecek ve uygulayacaktır (s. 17).

Tahminle ilgili bütün çalışmaların, bağlama dayalı olarak bir hesaplamayı mı yoksa bir tahmini ve bir stratejinin seçimine yönelik bir karar vermeyi mi içerdiğine dikkat edilmelidir.

NCTM Standartları

"Öğretmenler öğrencilere, kesin bir cevabın veya tahminin ne zaman daha uygun olacağına nasıl karar vereceklerini, en iyi hesaplama yöntemlerini nasıl seçeceklerini ve hesaplamalara verdikleri cevapların akla yatkınlığını nasıl değerlendireceklerini öğrenmeleri noktasında yardımcı olmalıdır. Çoğu hesaplama, öğrenciler bir bağlam problemleri çözerken ortaya çıkmalıdır" (s. 220). ◆

Hesaplamaya Dayalı Tahminin Öğretimi için Öneriler

Öğrencilerinizin hesaplamaya dayalı tahmin becerilerini geliştirmelerine yardımcı olacak ve aklınızda tutmanız gereken değerli bazı genel ilkeler aşağıdadır:

Günlük Yaşamdan Tahmin Örneklerini Kullanınız. Hesaplamaya dayalı tahmininin hangi durumlarının günlük hayatta kullanıldığını tartışınız. Tartışmanızın içeriği, bakkaldaki alışveriş durumları (karşılaştırmalı alışveriş yapma, faturayı ödemek için yeterince para olup olmadığına karar verme), bir gezinin planlanma aşamasında seyahat edilecek yerlerin uzaklıklarının toplanması, her türden olayların (okul malzemeleri, saç kesimleri, çimen biçmeden elde edilen gelir, TV izleme süresi) yıllık veya aylık toplamlarının yaklaşık olarak belirlenmesi, ulaşımı, biletleri ve atıştırmalıkları da içeren bir spor olayına veya gösterisine gitmenin maliyeti gibi bazı basit örnekleri kapsayabilir. Bazı örneklerde, niçin kesin cevaplar gerekli iken bazı örneklerde niçin kesin cevabın gerekli olmadığını tartışınız. Sayıların nerede bir tahminin, nerede bir kesin işlemin sonucu olarak kullanıldığını belirlemek için bir gazete veya bir dergiyi inceleyiniz. Günlük yaşam örnekleri, öğrencileri motive etmek için de bir yoldur-örneğin, ortaokul öğrencilerine sorunuz: "Bir milyon saniye yaşında mısın? Nasıl hesaplayabilirsin?". Öğrenciler, yaşlarının kaç saniye olduğunu tahmin etmekten ve doğum günleriyle ilgili bilgileri karşılıklı olarak değiştirmekten hoşlanırlar (Martinie ve Coates, 2007).

Tahmine Özgü Dili Kullanınız. *Yaklaşık*, *yakın*, *hemen hemen*, *biraz daha fazla (veya az)* ve *arasında* gibi kelimeler ve ibareler, tahmine özgü dili oluşturan parçalardır. Öğrenciler, hızlı ve kolay yöntemleri kullanarak doğru cevaba en yakın cevabı mümkün olduğu kadar elde etmeye çalıştıklarını, fakat burada kesin tahminin olmayacağını anlamalıdır. Dil, bu fikrin aktarımında yardımcı olabilir.

Tahmine Yardımcı Olmak için Bağlam Kullanınız. Durumlar, tahminde bir rol oynamaktadır. Örneğin, tanesi 69 centten 30 kutu içecek içtiğinizi düşününüz. Burada, 7 x 3'ü hesaplamaya odaklanmak, mantıklı bir yaklaşımdır ve 0.69 x 30'u hesaplayarak buradaki ondalık sayıyı doğru biçimde yerleştirmeye çalışmaktan daha kolaydır. En mantıklısı $2.10, $21 veya $210 ödemek midir? Benzer yardımlar, bir arabanın fiyatının $950 mı yoksa $9500 mı olabileceğini bilme bilgisinden gelebilir. Okuldaki bir oyuna katılım, 30, 300 veya 3000 kişi midir? Basit bir hesaplamayla en önemli basamaklar elde edilirken, kalan bilgilere bağlama dayalı olarak sahip olunabilir.

Tahmin Aralıklarından Birini Kabul Ediniz. Tahminler, hesaplamaya dayalı olduğu için burada nasıl farklı cevaplar olabilir? Cevap; elbette, herhangi bir özel tahmine, sayıların ayarlanma çeşidine ve kullanılan stratejilere bağlı olabilir. Tahminler, tahmin için ihtiyaca göre de çeşitlilik gösterebilir. Mil başına tüketilen yakıt miktarının tahmini, elinizdeki son $5'ın bir alışveriş merkezinde ihtiyacınız olan üç nesneyi almanıza yetip yetmeyeceğinin tahmininden oldukça farklıdır. Bunlar, küçük çocuklar için yeni ve zor fikirlerdir.

27 × 325 işlemi için tahminiz ne olurdu? Eğer 20 × 300 işleminin sonucunu kullanırsanız, 6000 sonucunu söyleyebilirsiniz. Ya da dört tane 25'ten 100 elde edileceğinden hareketle, 27 yerine 25 sayısını kullanabilirsiniz. 325 ÷ 4 işlemi için yaklaşık olarak 81 elde edileceğinden, sonuç 8100 olacaktır. Eğer, 30 × 300'ü kullanırsanız tahmininiz 9000, 30 × 320'yi kullanırsanız ise tahmininiz 9600 olur. Bunlardan biri, "doğru" mudur?

Birçok öğrencinin tahminleri listelendiğinde ve öğrencilerle farklı tahminlerin nasıl ve niçin olduğu tartışıldığında, öğrenciler tahminlerin genellikle kesin cevabın etrafındaki bir aralıkta olduğunu görmeye başlayabilir. Farklı yaklaşımlar, farklı sonuçlara imkân verecektir. Burada bağlam da unutulmamalıdır. Bazı durumlar, diğerlerinden çok daha fazla dikkatli tahminleri gerektirir ve sonuçlar, tahminlerin akla uygunluğuna göre değerlendirilmelidir.

Öğretmene Önemli Not: En yakın cevabı ödüllendirmeyiniz veya vurgulamayınız. Öğrenciler için "yaklaşık" cevapları elde etmek zaten zordur. Cevabın kesinliği hakkında endişelenerek, en yakın cevap için öğrencileri zorlamak problemi daha da zorlaştırır. Bunun yerine; verilen cevabın incelenen durum veya problem için mantıklı olup olmadığına odaklanınız.

Cevaplara Değil Esnek Yöntemlere Odaklanınız. Öncelikli ilginizin, öğrencilerin hızlı bir şekilde hesaplamaya dayalı tahminler yapabilmeleri için stratejiler geliştirmelerine yardımcı olmak olduğunu unutmayınız. Bu nedenle, stratejiler üzerindeki derin düşünme, stratejilerin gelişimine yol açacaktır. Tahmin stratejilerine ilişkin bir sınıf tartışması, icat edilen hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesi kadar önemlidir. Verilen herhangi bir tahmin için, genellikle birkaç tane çok iyi, fakat farklı tahmin yöntemi vardır. Öğrenciler, birbirlerinden stratejiler öğreneceklerdir. Farklı stratejilerin tartışılması, öğrencilerin burada "doğru" tahminin olmadığını anlamalarına da yardımcı olacaktır.

Durup Düşün!

Şu çarpımın sonucunu tahmin ediniz: 438 x 62. Aklınıza gelen ilk fikri kullanınız ve sonucu yazınız. Sonra göreve geri dönünüz ve tahmin için belki yaklaşımınızdaki farklı sayıları kullanarak farklı bir yaklaşım deneyiniz.

Bazen farklı stratejiler aynı tahminleri üretir. 438 × 62 işlemi için, ilk adım olarak 450 × 60 işlemini kullanmayı düşünebilirsiniz. Sonra, 10 × 450 işleminin sonucunun 4500 olduğunu düşününüz. İki tane 4500, 9000 eder ve 3 × 9000 = 27 000'dir. Ek olarak, 6 × 45 işleminin sonucunun 240 + 30 veya 270 olduğunu da düşünebilirsiniz. Fakat bu, 6 × 45 değil, 60 × 450 işlemidir. Bu nedenle, bu işlemin sonucuna iki tane daha sıfır ekleyiniz ve bu şekilde 27 000 sonucunu elde edersiniz.

Alternatif olarak, 400 × 60 işlemini kullanabilir ve 24 000 sonucunu elde edebilirsiniz. Burada, her iki sayıyı da aşağı doğru yuvarladığınızın farkına varabilirsiniz. En az 38 × 62 kadar sayıyı ya da yaklaşık 40 × 60'ı kaybettiniz. Bu nedenle, 26 400'ü elde etmek için 24 000'e 2400 ekleyiniz.

Eğer sadece "kabaca" tahmin doğru olsaydı, 500 x 60 işleminin sonucunun 30 000 olduğunun ve bu sonucun da biraz yüksek olduğunun farkına varırdınız. Ancak kesin cevap, en az 400 × 60 veya 24 000'dir. Böylece sonuç, 24 000 ile 30 000 arasındadır.

Bir hesaplama için, birçok olası tahmin stratejisinden dört tanesini gördünüz. Stratejilere ilişkin ne kadar çok deneyiminiz olursa o kadar çok şey öğreneceksiniz. Ne kadar fazla stratejiye sahipseniz, elinizdeki durum için en uygun olan birini seçebilirsiniz. Öğrenciler bu şekilde de öğrenecektir. Tersine, eğer öğrencilere verilen bir stratejiyi (örneğin, her sayıyı belirli bir basamağa yuvarlama ve çarpma) kullanmalarını söylerseniz, öğrencilerin farklı durumlar için farklı stratejiler seçme becerisi gelişmeyecektir. Bazen, yuvarlama yapmak gereksizdir ve başka stratejiler daha hızlı veya daha isabetlidir.

Cevap için Değil Bilgi Edinmek için Sorunuz. Bir üçüncü sınıf öğrencisinden, $349. 29 + $85. 99 + $175. 25 işleminin sonucunu tahmin etmesini istediğinizde, öğrencinin bu işlemi yapmaktan çekindiğini düşününüz. Bir sayı elde etme gereksinimi, özellikle tahmin etme becerisi zayıf öğrenciler için ortak bir strateji olarak hızlı bir şekilde kesin bir cevap elde etmeye çalışma ve sonra bu sayıyı yuvarlama şeklinde sonuçlanabilir (Hanson ve Hogan, 2000). Bu durumu gidermek için, "Bu, 1000'den az mı yoksa fazla mıdır?" veya "Bilet fiyatları için $500 yeterli midir?" gibi sorgulayıcı soruları kullanarak olası bir sonucu elde etmeye çalışınız. Üç fiyat için, "Yaklaşık ne kadar?" sorusu, "$600'den daha fazla mıdır?" sorusundan oldukça farklıdır. Bu soruların her birini nasıl cevaplarsınız?

Aşağıdaki her bir etkinlik, belirli bir sayısal cevap gerektirmeyen tahmin için bir biçim önermektedir.

Etkinlik 13.1

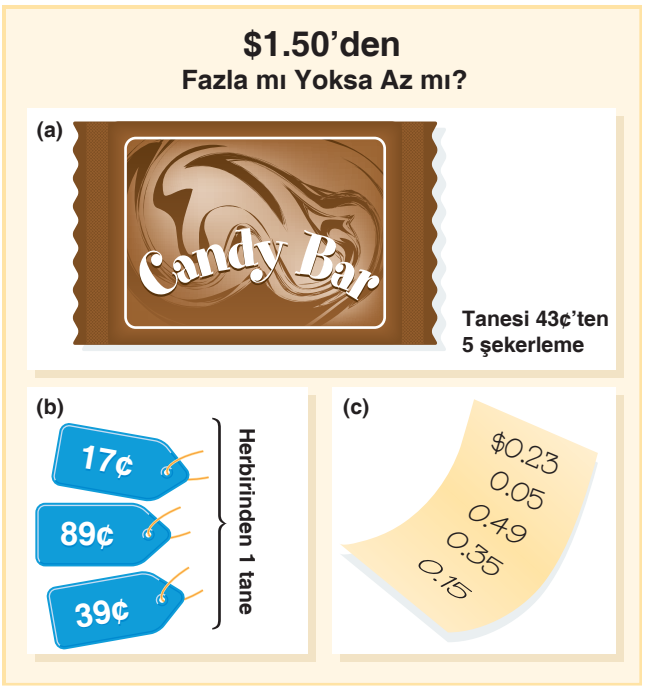
Fazla mı yoksa Az mı?

Bir slayt üzerinde birkaç tahmin etme alıştırması hazırlayınız. Her biriyle, "sayıdan fazla mı yoksa az mıdır?" şeklinde sorular yazınız. Şekil 13.1'de, her biri ya $1.50'dan fazla ya da az olacak şekilde sorular verilmiştir. Burada, her bir görev için ihtiyaç duyulan sayılar aynı olmak zorunda değildir.

Son etkinliğin çok ayrıntılı olmasına gerek yoktur. Aşağıda, bazı "fazla/az" örnekleri vardır:

37 + 75	100'den fazla/az
712 – 458	300'den fazla/az
17 × 38	400'den fazla/az
349 ÷ 45	10'dan fazla/az

Daha fazla öğrenciye ulaşmaya imkân veren görevleri yapmak için anlamlı bir bağlama dayalı durumlar bu tür



Şekil 13.1 Tahmin etkinliği için "Fazla mı yoksa Az mı?" iyi bir başlangıç noktasıdır.

örneklere eklenebilir. Bağlama dayalı olmayan bu çeşit görevler, hızlı bir şekilde hazırlanabilir. Her birini sunduktan sonra, öğrenciler seçimlerini yapacak ve sonra akıl yürütmelerini tartışacaktır. Gelecek etkinlik de buna benzerdir. Bu etkinlik, "*Sayı, Veri ve Uzayda İncelemeler*"de yer alan beşinci sınıf materyalindeki bir etkinlikten uyarlanmıştır.

Etkinlik 13.2

Büyük mü Yoksa Küçük mü?

Bir hesaplama ve tahmin yapmak için kullanılabilecek üç veya daha fazla olası hesaplamayı gösteriniz. Öğrencilerin görevi, tahminin gerçek cevaptan daha büyük mü yoksa daha küçük mü olabileceğine karar vermektir. Örneğin, 736 x 18 işlemini düşününüz. Aşağıdaki işlemlerden her birinin sonucunun, bu işlemin kesin sonucundan daha büyük mü yoksa daha küçük mü olacağına karar veriniz ve niçin böyle düşündüğünüzü açıklayınız.

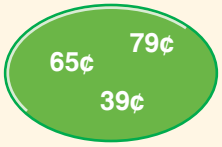
750 x 10	**730 x 15**
700 x 20	**750 x 20**

Etkinlik 13.3

En İyi Seçim

Herhangi bir tahmin görevi için, üç veya dört olası tahmin öneriniz.

Toplamda yaklaşık kaçtır?



Seçimler: $1.50, $2.00, $2.50

Seçimlerin birbirlerine yakın olması, tahminin zorluğunu belirleyecektir. Bazen, $21, $210 ve $2100 gibi 10'un katlarının kullanılması iyi bir fikirdir.

Kısa bir üç-aşamalı ders formatı, bu görevlerin hepsinde etkili olur. Alıştırma sunulur, öğrenciler seçimlerini hızlıca kağıda yazar (bu durum, öğrencilerin bir cevap vermesini sağlar) ve sonra bu seçimleri niçin yaptıklarını tartışırlar. Bu üç aşamanın hepsi, sadece 10 dakika sürebilir. Tartışmada, tahminlerin çeşitliliği ve tahmin yöntemleri paylaşılır. Bu durum, öğrencilerin tahminlerin bir aralıkta kümelendiğini ve burada bir tek doğru (veya en iyi) tahminin veya yöntemin olmadığını görmelerine yardımcı olacaktır.

İcat Edilen Stratejiler Yoluyla Hesaplamaya Dayalı Tahmin

İcat edilen stratejilerde olduğu gibi; tahmin, sayı ilişkilerinin kullanımına bağlıdır (Menon, 2003). 64 ile 28'in toplamını hesaplamanızın istendiğini düşününüz. 60 ile 20'yi toplama veya 64 ile 30'u toplamayla başlayabilirsiniz. Bu başlangıçlardan her biri için, cevaba ulaşmadan önce bir veya iki toplama işlemi yapmaya ihtiyacınız olabilir. Bununla birlikte, bu başlangıçların her biri gerçekten makul bir tahmindir.

Detaylara Girmeden Önce Durunuz!

Tahmin için icat edilmiş yeterince iyi bir hesaplamada, bu durum genellikle birinci veya ikinci adımdır. 64 + 28 örneğinde, bir üçüncü sınıf öğrencisi bile muhtemelen doğru cevabı bulabilir. Fakat tahminlere, genelllikle kesin bir cevabı bulmanın oldukça sıkıcı ve çok ihtiyacın olmadığı durumlarda gerek duyulur. Öğrenciler icat edilen stratejilere ilişkin iyi bir dağarcığa sahip olduklarında, tahmin için bir yaklaşım kesin bir cevaba yakın bir cevap elde edilinceye kadar basitçe hesaplamaya devam etmek olarak düşünülebilir.

Etkinlik 13.4

Bu Yeterince İyi!

Öğrencilere, becerilerine uygun zorlukta bir hesaplama verilir. Örnek: *Okul amblemi bulunan tişörtlerin toptan satışındaki birim fiyat $6'dır. Okul öğrenci derneği, $257 biriktirmiştir. Dernek, yardımda bulunmak amacıyla kaç tane tişört satın alabilir?* Buradaki görev, kesin bir cevap elde etmek için atılacak adımları atmadan açıklamaktır.

Öğrencilerin fikirlerini paylaşınız. Daha sonra öğrencilerinize bir veya iki adım daha uygulatınız. Durup, iyi bir tahminin olup olmadığına bakınız.

"Bu Yeterince İyi!"deki örnek, size zor gelebilir. Aynı fikri, 4 ile 6 tane sayının toplamıyla deneyiniz: 47 + 29 + 74 + 55. Bunu, daha zor olan bir çıkarma işlemi için yapınız: 7021 – 4583. Çarpma işlemi için de deneyiniz: 86 × 29. Öğrencilerin önereceği yöntemler, hesaplama için öğrendikleri fikirlere dayanacaktır. Çoğu durumda, bu hesaplamaların ilk adımı iyi tahminlerde bulunmaktır. İcat edilmiş bir stratejinin ilk basamaklarını kullanarak öğrenciler, icat edilen stratejileri geliştirecek ve sayı hislerini de zenginleştirecektir.

İlişkili Problem Kümelerini Kullanınız

Bölüm 12'de, ilişkili gruplandırılmış problemlerin veya gruplandırılmış problemlerin kullanımı, öğrencilerin çarpma ve bölme işlemleri için icat edilen stratejilerini geliştirmek için bir teknik olarak açıklanmıştı (Bkz. s. 228). *İncelemeler* öğretim programından uyarlanan gruplandırılmış problem yaklaşımı, öğrencilerin hedef problemle ilişkili fakat hedef problemden daha kolay problemlerin bir topluluğunu çözmelerini ifade etmektedir. Bu problemler, sonraki aşamalarda daha zor problemleri çözmek için kullanılır. Gruplandırılmış problem yaklaşımının önemli bir yönü, öğrencilerin hedef hesaplamalarına ilişkin bir ilk tahminde bulunabilmeleridir (ve tahminlerini kağıda dökmeleridir).

Durup Düşün!

İşlemlerin her biri için bazı gruplandırılmış problemler aşağıdadır. En son problem, hedef problemdir. Bunları yapmayı deneyiniz. İlk önce, hedef problemin bir tahminini yapmayı unutmayınız. Sonra, gruptaki problemlerin hepsini çözünüz. Hedef problemi tahmin etmek için gruptaki problemleri kullanınız. Hangi seçimler, iyi tahminlere yol açar?

4 + 5 + 6	600 – 300
400 + 500 + 600	600 – 400
400 + 600	85 + 15
60 + 30 + 100	15 + 13
60 + 20 + 90	85 – 13
467 + 528 + 693	**613 – 385**
10 ÷ 7	6 × 7
70 ÷ 7	6 × 8
7 × 11	70 × 7
7 × 12	60 × 7
87 ÷ 7	**68 × 7**

40×20	5×20
50×4	5×22
48×2	5×10
48×4	22×10
50×20	2×22
48×24	**$147 \div 22$**

Burada, sonuçlara ulaştıran birçok olan yol vardır. Bununla beraber, ilişkili (ama hedef olmayan) problemlerin bazıları, tahmin etmede kullanmak için gerçekten iyi problemlerdir. Öğrenciler, problem kümeleriyle bir sorun yaşamadıkları zaman aşağıdaki görevi deneyiniz.

Etkinlik 13.5

Küçük Bir Grup Oluşturma

Öğrencilere, ilişkili problemlerin bir kümesi için bir hedef problem veriniz. Bu, üzerinde çalıştığınız herhangi bir işlem olabilir. Görev, mantıklı bir tahmin üretilmesine yardımcı olacak iki veya üç problem içeren bir küme oluşturmaktır. Öğrenciler, bir kez küçük küme grubunu oluşturduklarında, artık hedef problemi tahmin etmek için kendi problemlerini kullanmalıdır.

Hesaplamaya Dayalı Tahmin Stratejileri

Tahmin stratejileri, yaklaşık sonuçları üreten özel algoritmalardır. Bu kısımdaki stratejiler üzerinde çalışırken öğrencilerin kendi icat ettikleri yöntemlere dayanarak geliştirdikleri aynı yaklaşımların çoğunun değerini anlamalısınız. Bu bölümdeki stratejilerden bazıları muhtemelen geliştirilmeyecektir. Bu nedenle öğrencilerinize, bu stratejileri sunma ihtiyacı duyabileceksiniz. Ne zaman niyetiniz, iyi stratejilerden oluşmuş stratejiler "sepetini" oluşturmak için bir strateji önermek olursa o zaman çok açık olunuz. Sizin sunduklarınız, öğrencilerin tasarladıkları fikirlerden daha doğru ya da önemli değildir.

NCTM Standartları

"Öğretmenler, öğretimsel dikkat ve sık modelleme çalışmalarını kullanarak, esnek yuvarlama, kritik eşiklerin kullanımı ve ön-son stratejilerini içeren hesaba dayalı tahminin bir dizisini geliştirmede öğrencilere yardımcı olabilir. Öğrenciler, tahmin yaparken düşüncelerini açıklamaya sıkça teşvik edilmelidir (s.156). ◆

Ön-Son Yöntemleri

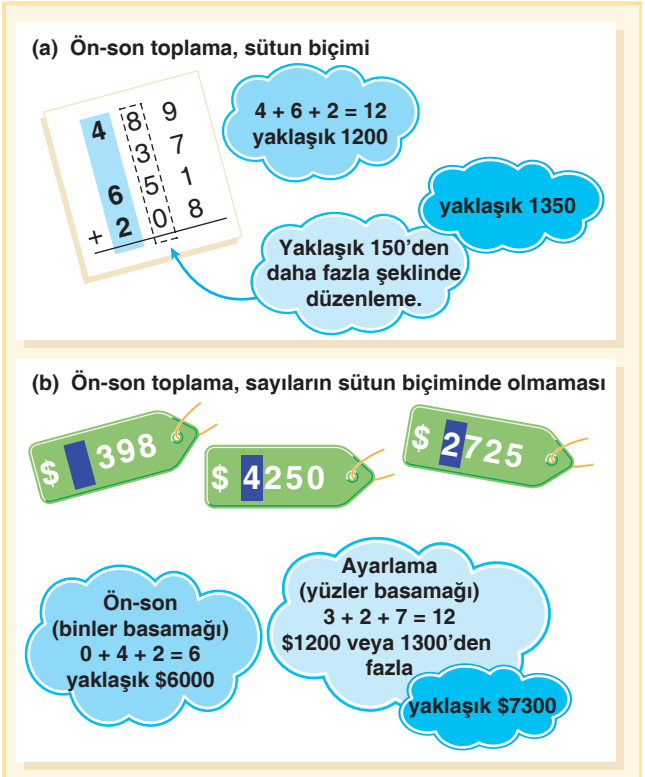
Ön-son yöntemleri, sayıların diğer kısımları ihmal edilerek sayının ilk veya en soldaki basamakları üzerine odaklanır. Sadece bu ön-son basamaklar temel alınarak yapılan bir tahminden sonra, ne kadarının ihmal edildiği dikkate alınarak bir ayarlama yapılabilir.

Ön-son stratejisi, icat edilen stratejiler genellikle sayının büyük kısmıyla başladığı için icat edilen stratejilerde çok deneyimli öğrenciler için mantıklı gelecektir. Ön-son stratejisi, özellikle sadece geleneksel algoritmaları kullanan öğrenciler için tahmin konusuna giriş için iyi bir başlangıç noktasıdır. Bir hesaplamada sayıların öncelikle sol kısmına bakma fikrinin yerleşmesi için öğrencilerin çok çalışmaları gerekecektir.

Ön-Son Yöntemiyle Toplama ve Çıkarma. Ön-son yaklaşımı, sayıların tamamının veya çoğunun aynı basamak sayısına sahip olması durumunda, toplama veya çıkarma işlemlerini yapmak için uygundur. Şekil 13.2, bu düşünceyi göstermektedir. Bir sayı diğerlerinden daha az basamak içerdiğinde, o sayının başlangıçta gözardı edileceğini not ediniz.

İlk basamakların toplanması veya çıkarılmasından sonra, gözardı edilen basamaklar veya sayılar için bir ayarlama yapılır. Ayarlama yapma, aslında ayrı bir beceridir. Küçük çocuklar için, uygulama öncelikle ilk basamaklar kullanarak yapılır.

İlk basamak stratejisi, sayıların yuvarlanmasını veya değiştirilmesini gerektirmediği için kullanma açısından kolay olabilir. Kullanılan sayılar buradadır ve görülebilir, böylece öğrenciler sayıları değiştirmeden tahmin yapabilir. Özellikle her basamaktaki sayılar çeşitlilik gösterdiğinde, öğrencilerin dikkatinin basamak değerine ve sadece en büyük basamaktaki sayılar üzerine odaklanacağından emin olunuz.



Şekil 13.2 Toplamada ön-son tahmini

Ön-Son Yöntemiyle Çarpma ve Bölme. Çarpma ve bölme işlemleri için, ön-son yöntemi her çarpandaki ilk basamağı kullanır. Daha sonra, hesaplama diğer konumlardaki sıfırlar kullanılarak yapılır. Örneğin, 48 × 7'nin ön-son tahmini, 40 kere 7 veya 280'dir. Her iki sayı da birden fazla basamağa sahip olduğunda, her ikisinin de ön-sonları kullanılır. 452 × 23 için, 400 × 20 veya 8000 alınır. Çarpma ile tahminlerde daha büyük hatalar oluşabileceği için bu tahminleri ayarlamak önemlidir.

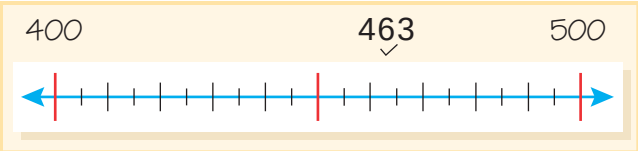
Bölme işlemi için, çarpmayı düşünmek de bir yaklaşımdır. Hesaplama formunu kullanarak problemleri $(7\overline{)3482}$ sunmaktan sakınınız, zira bu tarz problemler, bir tahmin yapmaktan ziyade bir hesaplamayı önerir ve kesin cevabı bulmaya yönlendirir. Problemleri, bağlama dayalı veya cebirsel formda veriniz: 3482 ÷ 7. Bu problem için ön-son basamağı, ilk olarak doğru biçimin elde edilmesiyle belirlenir. (100 × 7 oldukça düşüktür. 1000 × 7 oldukça fazladır. Sonuç, yüzler formundadır) Bu işlemde, bölünen sayı 34 tane yüzlüğe sahiptir, bu nedenle 34 ÷ 7 işleminde bölüm 4 ile 5 arasında, ön-son tahmini de 400 veya 500'dür. Bu örnekte, 34 ÷ 7 hemen hemen 5 olduğu için en yakın tahmin 500'dür.

Yuvarlama Yöntemleri

Tahminin en çok bilinen biçimi yuvarlamadır. Yuvarlama, zihinden daha kolay hesaplama yapabilmek için problemdeki sayıları değiştirmenin bir yoludur. Tahminde bir fayda sağlaması için yuvarlama, esnek olmalı ve kavramsal olarak da iyi anlaşılmalıdır. Cevaplar, ön-son yöntemlerindeki gibi, en yakın tahmini elde etmek için son adımda ayarlanabilir.

Yuvarlama Kavramı. Bir sayıyı yuvarlamak en basit biçimiyle, bazı hesaplamaları daha kolay yapabilmek için hesaplama yapılan sayıya en yakın "uygun" sayı ile hesaplama yapmayı ifade etmektedir.Yakın sayı, herhangi bir uygun sayı olabilir ve geleneksel olduğu gibi 10 veya 100'ün katları olmasına gerek yoktur. O, bir şekilde hesaplamayı yapmalı, tahmini kolaylaştırmalı veya bir konuşma, grafik veya hikâyedeki sayıları yeterince sadeleştirmelidir. "Dün gece, ev ödevimi yapmak 57 dakikamı aldı" veya "Dün gece ödevimi yapmak yaklaşık bir saatimi aldı" diyebilirsiniz. İlk ifade, daha kesin iken ikinci ifade, daha iyi bir iletişim için kesin sayının yerine yuvarlanmış bir sayıyı kullanmaktadır.

Uygun sayılarla işaretlenmiş bir sayı doğrusu, çocuklara yakın-uygun sayıyı seçmelerinde yardımcı olabilir. Şekil 13.3'te gösterildiği gibi işaretlenmemiş bir sayı doğrusu, uç uca eklenmiş üç poster şeridi kullanılarak yapılabilir. Sayılar, yazı tahtası üzerine yazılır. Uçlar, 0 ve 100, 100 ve 200,…, 900 ve 1000 şeklinde numaralandırılabilir. Diğer işaretlemeler, 25, 10 ve 5'in katlarını gösterir. Yukarıdaki sayı doğrusunda yuvarlamak istediğiniz bir sayıyı işaretleyiniz. Yakın olan işaretlemeleri (uygun sayıları) tartışınız (*Yazar Notu:* "uygun sayı" terimi, ders kitaplarında çoğunlukla yer almamaktadır. Uygun sayı; problemi, zihinden daha kolay hesaplamaya imkân veren sayıları ifade etmektedir.).



Şekil 13.3 Boş bir sayı doğrusu, öğrencilere yardım etmek için yakın ve uygun sayılarla farklı şekillerde etiketlendirilebilir.

Toplama ve Çıkarmada Yuvarlama. Birkaç sayı toplandığında, bu sayıları aynı basamak değerine yuvarlamak genellikle iyi bir fikirdir. Her bir sayıyı yuvarlarken sürekli bir toplam elde ediniz. Şekil 13.4, yuvarlamanın bir örneğini göstermektedir.

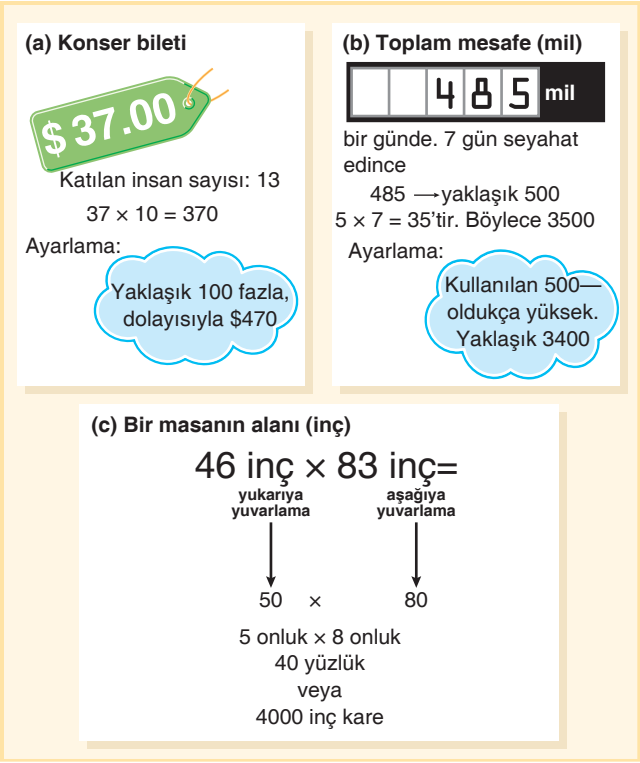
Sadece iki terim içeren toplama ve çıkarma işlemleri için, iki sayıdan sadece birini yuvarlamak bir stratejidir. Örneğin, sadece çıkan sayıyı yuvarlayabilirsiniz (Örneğin, 6724-1863 işlemi, 6724-2000 işlemine dönüşür ve 4724 sonucu elde edilir.). Burada durabilir ve sonucu ayarlayabilirsiniz. Ayarlama işlemi şu şekilde yapılabilir: Burada daha büyük bir sayı aldınız, bu nedenle elde edilen sonuç mutlaka daha küçük olmalıdır. 4800'e yakın bir ayarlama yapınız.

"Uygun" sayılara yuvarlama, tahmin üreten kişinin "uygun" sayı olarak neyi alacağına bağlıdır. Örneğin, 627 + 385 işleminde, 385'i 375 veya 400'e yuvarlamayı isteyebilirsiniz. Fakat burada, kesin kurallar yoktur. Buradaki seçimler; tahmin edenin, tahmine ne kadar hızlı ihtiyacı olduğu ve ne kadar yakın bir tahmine gerek duyduğu gibi durumlara bağlıdır.

Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Yuvarlama. Çarpma işlemi için yuvarlama stratejisi, diğer işlemler için yapılanlar-



Şekil 13.4 Toplamada yuvarlama



Şekil 13.5 Çarpma işleminde yuvarlama.

dan farklı değildir. Fakat özellikle iki çarpan da yuvarlandığı zaman yapılan hata daha büyük olabilir. Şekil 13.5'te, çok sayıda çarpma işlemi örneği verilmiş ve her birini tahmin için yuvarlama yapılmıştır.

Eğer bir sayı, 10, 100 veya 1000'e yuvarlanabilirse, çarpımın sonucunu diğer çarpanı ayarlamadan belirlemek kolaydır. Şekil 13.5(a), benzer bir süreci göstermektedir.

Çarpanlardan biri tek basamaklı olduğunda, diğer çarpanı inceleyiniz. 7 × 485 çarpımını alınız. Eğer 485, 500'e yuvarlanırsa, tahmin etmek nispeten kolaylaşır, fakat hata 7x15 kadar büyük olur. Eğer, daha yakın bir cevap istenirse o zaman bu tahmin değerinden yaklaşık 100 çıkarınız (7 x 15'in yaklaşık değerinden). Şekil 13.5 (b)'ye bakınız.

Çarpma için diğer iyi bir yuvarlama stratejisi, çarpanlardan birini yukarı diğer çarpanı da aşağıya doğru yuvarlamaktır (en yakın yuvarlanmış sayı olmasa bile). 86 × 28 işleminin sonucu tahmin edilirken, 86, 80 ve 90'ın arasında, fakat 28, 30'a çok yakın denilebilir. 86'yı 80'e ve 28'i de 30'a yuvarlayınız. Gerçek sonuç, 2408'dir ve 80 × 30 işleminin tahmininden sadece 8 fazladır. Eğer her iki sayıda 10'un katlarına yuvarlansaydı, tahmin yaklaşık 300'e yakın bir hatayla 90 × 30 işlemine dayalı olacaktı (Diğer bir örnek için, Şekil 13.5(c)'e bakınız).

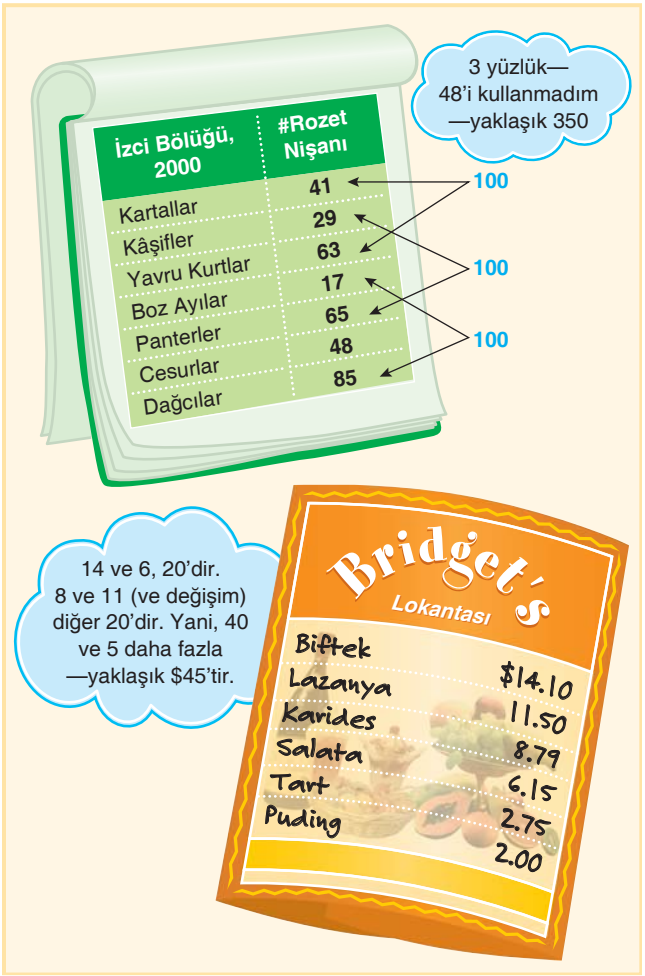
Bölme işleminde yuvarlama yapıldığında, en yakın kritik eşiklere yuvarlama yapmak yerine daha kolay bir zihinsel hesaplama yapmaya imkân verecek iki uygun sayının seçimi önemlidir. Örneğin, 4325 ÷ 7 bölme işlemi, 4325'in 4200'e yuvarlanmasıyla tahmin edilebilir ve 600 sonucu elde edilir. Burada, en yakın yüzlüğe yuvarlama (4300 sayısına), bölme işleminin zihinden daha kolay yapılmasına imkân sağlamaz.

Uyuşan Sayılar

Kritik eşik değerlerini (örneğin, 10, 100, 500) oluşturmak için gruplanabilecek iki veya üç sayıyı aramak bazen kullanışlıdır. Eğer listedeki sayılar, bu grupları oluşturmak için ayarlanabilirse bir tahmin yapma daha kolaylaşacaktır. Bu yaklaşım, Şekil 13.6'da gösterilmiştir.

Çıkarma işleminde, Şekil 13.7'de gösterildiği gibi kolay bir şekilde gözlenebilecek bir fark oluşturmak için sadece bir sayının ayarlanması genellikle yapılan bir işlemdir.

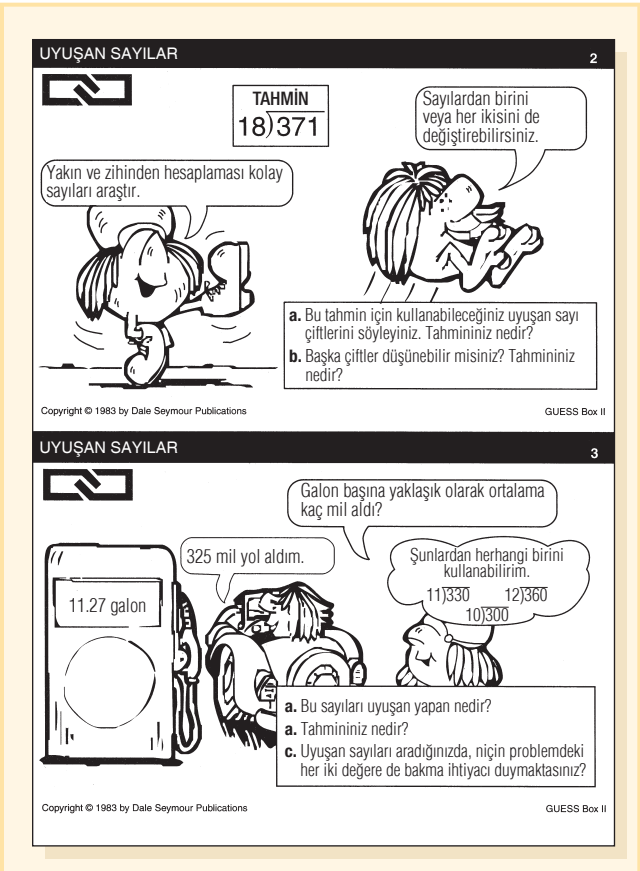
Uyuşan sayılar stratejisinin en iyi kullanım alanlarından biri bölmedir. Şekil 13.8'de verilen iki alıştırma, bölen veya bölünenin (veya her ikisi), bir tamsayı sonucuna sahip bir bölme işlemi oluşturmak için ayarlanmasını ve bu şekilde işlemin zihinden kolay yapılmasını göstermektedir. Çoğu yüzde, kesir ve oran durumu, bölme içermektedir ve uyuşan sayılar stratejisi, Şekil 13.9'da gösterildiği gibi oldukça kullanışlıdır.



Şekil 13.6 Toplama kullanılan uygun sayılar.

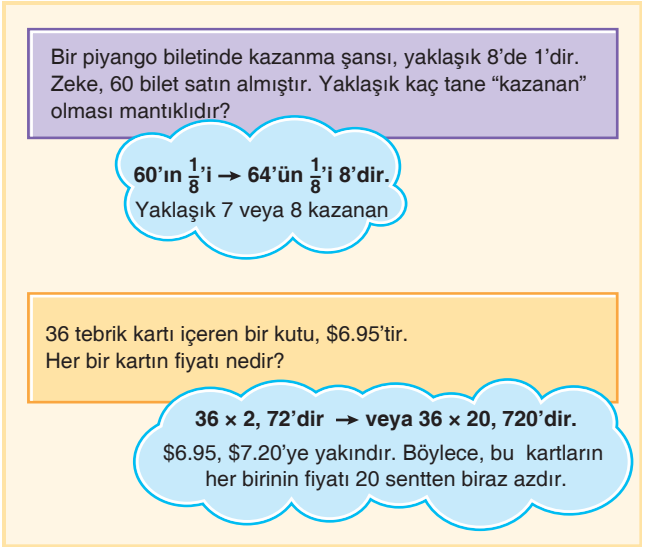


Şekil 13.7 Uyuşan sayılar, farkı kolayca üreten bir ayarlama anlamına gelebilir.



Şekil 13.8 Bölmeyi sadeleştirmek için ayarlama

Source: GUESS (Guide to Using Estimation Skills and Strategies) Box 2 (cards 2 and 3), by Barbara J. Reys and Robert E. Reys, White Plains, NY: Dale Seymour Publications. Copyright © 1984 Pearson Education, Inc., or its affiliate(s). Used by permission. All rights reserved.



Şekil 13.9 Bölmede uyuşan sayıları kullanma

Gruplama

Günlük yaşamda bir tahmine, çoğunlukla birbirine yakın toplananların geniş bir listesini oluşturmak için ihtiyaç duyulmaktadır. Bu, benzer elemanların fiyatlarının bir serisi, aynı alandaki olayların bir serisine katılanlar, ardışık günlerde bir noktadan geçen araba sayısı veya diğer benzer verilerle olabilir. Bu durumlarda, Şekil 13.10'da gösterildiği gibi, her birinin temsilcisi olarak zihinden hesaplamaya basitçe imkân veren uygun bir sayı seçilebilir ve çarpma, toplamı belirlemek için kullanılabilir.

Onluk ve Yüzlükleri Kullanma

Bazen problemdeki sayıların biri, bölme veya çarpmada bir avantaj elde etmek için onluk, yüzlük veya binliklerle



Şekil 13.10 Gruplamayı kullanarak toplamları tahmin etme.

çarpılarak değiştirilebilir (Menon, 2003). Örneğin, 456 × 5 işlemini alınız. Gerçekten de, 10/2 beştir (böylece, zihinden çözmek için yerine 10 ÷ 2 konulur). 456'nın 10 ile çarpımıyla 4560 elde edilir ve sonra bu sonucun yarısı alınarak yaklaşık 2300 şeklinde tahmin yapılır. Bu stratejinin daha büyük sayılar içeren probleme uygulanabileceğini görünüz: 786 × 48. İlk düşünceniz; 48'in hemen hemen 50 olduğu olabilir ve bu değer, 100 ÷ 2 ile aynıdır. 786 kere 100, 78 600'e eşittir, bu değer yaklaşık 80 000'dir ve yarısı da 40 000'dir. Alternatif olarak, ilk önce 2 ile bölebilir ve sonra 10 veya 100 ile çarpabilirsiniz. Son örnekte, 786'nın yarısını alabilirsiniz ki, yaklaşık 400 eder ve bunu 100 ile çarpararak 40 000 sonucunu elde edebilirsiniz.

Bölmeyle çalışmalar da bu şekildedir. 429 ÷ 5 işlemini alınız. Düşünün: 429 ÷ 10 × 2 (veya 429 × 2 ÷ 10), yaklaşık 42'dir ve bunun iki katı 84 eder. Bu, özelllikle aşağıdaki gibi daha büyük sayılar elde etmek için kullanışlı bir strateji olabilir.

2309 ÷ 53
45,908 ÷ 517

Bu strateji, 25'e yakın sayılara da genişletilebilir (100/4). Örneğin, 786 ÷ 23 bu düşünceyle hesaplanabilir: 786 × 4 ÷ 100. Böylece, 786, 800'e yakındır. 800'ün dört katı, 3200'dür ve sonra bu sonuç, 100 ile bölünür ve 32 elde edilir.



Hesaplamaya dayalı tahmin, hızlı cevap vermeyi içerdiği için, öğretmenler çoğunlukla öğrencilerin kağıt üzerinde hesaplama yapıp yapmadıklarını ve tahmin yerine yuvarlanmış bir cevap verip vermediklerini belirleyemeyebilir. Bir tepegöz asetatı üzerinde üç tahmin alıştırmasına ilişkin kısa bir liste hazırlamak bir yöntemdir. KESTİRİM kutularındaki kartlar (Reys ve Reys, 1983), bunlar için hazır kaynaklardır veya hesaplamaları basit bir şekilde yazabilirsiniz. Tepegöz üzerinde bir alıştırmayı basitçe özetleyerek gösterirken, göreve dayalı olmak üzere belki de 20 saniye içinde öğrenciler kağıtlarını hazırlar. Öğrenciler, tahminlerini hemen yazar ve tahminlerinin "küçük" mü yoksa "büyük" mü olduğunu belirtir, yani tahminlerinin kesin hesaplamadan daha küçük veya daha büyük olduğuna yönelik değerlendirme yaparlar. Öğrenciler, herhangi bir yazılı hesaplama yapmaz. Sonuna kadar devam ediniz. Sonra, tüm alıştırmaları gösteriniz ve öğrencilerin, her bir tahmini nasıl yaptıklarını yazmalarını sağlayınız. Öğrenciler, ayrıca tahminlerinin yeterince iyi olup olmadığını ve bunun nedenlerini gerekçeleriyle belirtmelidir. Yalnızca birkaç alıştırma yaparak, fakat öğrencilerin bu şekilde derinlemesine düşünmesini sağlayarak sadece uzun bir listeye cevap vermekten çok daha fazla bilgiyi elde edebilirsiniz. ◆



Tahmin Deneyimleri

Burada sunulan örnekler, tahmin stratejilerini öğretmek için tasarlanmamıştır, fakat öğrencilerinizin tahmin becerilerinin gelişimi sürecinde uygulama yapma imkânı veren kullanışlı biçimler önermektedir. Bunlar, herhangi bir tahmin programına iyi bir ekleme olacaktır.

Öğrenciler, kendilerini hesaplamanın aksine tahminle daha az rahat (veya daha az yetenekli) hissettikleri için, öğrencilerin tahmin becerilerini geliştirmede yardımcı olacak etkinlikleri ve düzenli deneyimleri dâhil etmek önemlidir. Aşağıdaki etkinlik, tüm sınıfın yaptığı tahmin etkinliklerinin çoğunda olduğu gibi tepegöz aracılığıyla yapılan etkinliklerde de oldukça kullanışlıdır. Bu etkinlik, tahmin stratejilerinin tartışılması sırasında öğrencilerin ilgisini çekmek için de iyidir.

Etkinlik 13.6

Yönteminiz Neydi?

Bir tahminin verildiği bir problem seçiniz. Örneğin, 139 x 43 çarpımının sonucu 6000 olarak tahmin edilebilir. Bu tahminle ilgili soru sorunuz: "Tahmine nasıl ulaşıldığına ilişkin ne düşünüyorsunuz? Bu, iyi bir yaklaşım mıdır? Nasıl ayarlanmalıdır? Herhangi biri, 139'un yerine 140'ı seçmektense niçin 150'yi seçebilir?" Neredeyse her tahmin, farklı seçimler ve yöntemler içerebilir. Alternatifler, iyi tartışmalar doğrurur, öğrencilerin farklı yöntemleri görmesine ve sadece tek bir doğru tahminin olmadığını öğrenmelerine yardımcı olur.

Etkinlik 13.7

O Sayıya Atla

Bu etkinlik, bölme kavramları üzerine odaklanmaktadır. Öğrenciler, bir başlangıç sayısıyla başlar ve amaca ulaşmak için başlangıç sayısına ne kadar ekleneceğini tahmin eder. Başlangıç için aşağıdaki veriler kullanılabilir (sayılar, öğrencilerinizin deneyimlerini ve ihtiyaçlarını karşılamak için farklı değerler alabilir):

Atlama Sayısı	Amaç	Tahmini Atlama	Tahmin Mantıklı mıydı?
5	72		
11	97		
7	150		
14	135		
47	1200		

Tahminleri hesap makinesiyle kontrol etmek için öğrenciler her tahmini atlayış için 0 + [atlama sayısı] yazıp [=] tuşuna basabilir veya [atlama sayısı] [×] [tahmini atlama] işlemini yapabilir.

Hesap Makinesi Etkinlikleri

Hesap makinesi, sadece tahmin etkinliklerinin iyi bir kaynağı değil aynı zamanda tahminin oldukça önemli olmasının nedenlerinden birisidir. Günlük hayatta, genellikle yanlış bir tuşa basarız, sıfır veya ondalık sayıyı gözardı ederiz ya da

sayıları yanlış yazarız. Sonucun beklenilen bir tahmini, bu hatalar için bizleri uyarır. Bir tahmin öğretim aracı olarak hesap makinesi, başarısızlık korkusu olmadan eğlenceli bir şekilde öğrencilere meydan okuyarak bağımsız veya çiftler halinde çalışma imkânı sağlar.

Etkinlik 13.8

Aralık Oyunu:



Bu etkinlik, dört işlemin herhangi biri için bir tahmin oyunudur. İlk olarak bir başlangıç sayısı ve bir işlem seçiniz. Daha sonra, öğrenciler sırayla başlangıç sayısını yazar ve seçtikleri bir sayıyla [×] tuşuna basarak başlangıç sayısını çarpar ve hedef aralığa yönelik sonuçları üretmek için [=] tuşuna basar. Çarpma için aşağıda verilen örnek, bu etkinliği örneklendirmektedir:

Başlangış Sayısı: 17

Aralık: 800–830

İlk olarak 25'i denerseniz, 17 [×] 25 işleminin sonucu 425 eder. Bu istenilen aralıkta değildir. Böylece, hesap makinesini diğer öğrenci alır. Bu öğrenci ekrandaki işlemi siler ve farklı bir sayı seçer. Örneğin, 50 yakın bir sayı olabilir, zira ilk sonuç hedef aralığın yaklaşık yarısıydı. İkinci bir tahmin, 17 [×] 45 veya 765 olabilir. Bu, daha yakındır fakat hâlâ istenilen aralıkta değildir. Hesap makinesi, tekrar ilk kişiye geri verilir. Her bir tahmin temizlenerek devam edilir ve herhangi biri aralığa düşecek bir sonuca ulaşıncaya kadar oyun tekrarlanır. Şekil 13.11, dört işlemin her biri için örnekler sunmaktadır. Başlangıç sayıları ve hedef aralıklar için bir liste hazırlayınız. Listedeki hedeflere en çok ulaşabilecek kişileri görmek için öğrencilerin oyunu ikişerli oynamalarına izin veriniz (Wheatley ve Hersberger, 1986).

"Aralık Oyunu", bir projektör yardımıyla sınıfın tamamının katılımıyla da oynanabilir. Aralığın genişliği ve sayıların çeşitleri, sınıf düzeyine uygun olacak şekilde ayarlanabilir.

Etkinlik 13.9

Aralık Oyunu: Sürekli Olarak Sayıları Girme



Önceki gibi bir hedef aralığı seçiniz. Daha sonra, hesap makinesinde bir başlangıç sayısı yazınız ve hesap makinesini ilk oyuncuya veriniz. Toplama ve çıkarma için, ilk oyuncu [+] veya [−] tuşuna basar, bir sayı yazar ve sonra sonuç için [=] tuşuna basar. Eğer sonuç, aralıkta ise hesap makinesi (ekrandaki cevaplar durduğu şekilde) diğer oyuncuya verilir. Bu oyuncu, [+] veya [−] tuşlarına basar ve devamında uygun bir sayı yazar. Hedef, 423 ile 425 arasında ise oyunun geçişlerinin bir dizisi şu şekilde olabilir:

119 ile başlayınız

Oyuncu 1 [+] 350 [=] ⟶ 469 (oldukça yüksek)

Oyuncu 2 [−] 42 [=] ⟶ 427 (çok az yüksek)

Oyuncu 1 [−] 3 [=] ⟶ 424 (başarılı)

Çarpma veya bölme için, bütün oyun boyunca sadece bir işlem kullanılır. Birinci veya ikinci geçişten sonra genellikle ondalık sayılara ihtiyaç duyulur. Bu çeşitlilik, ondalık sayılarla çarpma veya bölmenin mükemmel şekilde anlaşılmasını sağlar. 262 ile 265 aralığı hedefi için bir işlem dizisi şu şekilde olabilir:

63 ile başlayınız.

Oyuncu 1 [×] 5 [=] ⟶ 315 (oldukça yüksek)

Oyuncu 2 [×] 0.7 [=] ⟶ 220.5 (oldukça düşük)

Oyuncu 1 [×] 1.3 [=] ⟶ 286.65 (oldukça yüksek)

Oyuncu 2 [×] 0.9 [=] ⟶ 257.985 (oldukça düşük)

Oyuncu 1 [×] 1.03 [=] ⟶ 265.72455 (çok yakın!)

(Bu adımdan sonra neyi tuşlardınız?)

76 ile 80 aralığı hedefi için deneme yapınız, bunun için 495 ile başlayınız ve sadece bölmeyi kullanınız.

Toplama:

Bas: 0 [+] (başla#) [=]

BAŞLA	HEDEF
153	790 → 800
216	400 → 410
53	215 → 220

Çıkarma:

Bas: 0 [−] (başla#) [=]

BAŞLA	HEDEF
18	25 → 30
41	630 → 635
129	475 → 485

Çarpma:

Bas: (başla#) [×] 0 [=]

BAŞLA	HEDEF
67	1100 → 1200
143	3500 → 3600
39	1600 → 1700

Bölme:

Bas: 0 [÷] (başla#) [=]

BAŞLA	HEDEF
20	25 → 30
39	50 → 60
123	15 → 20

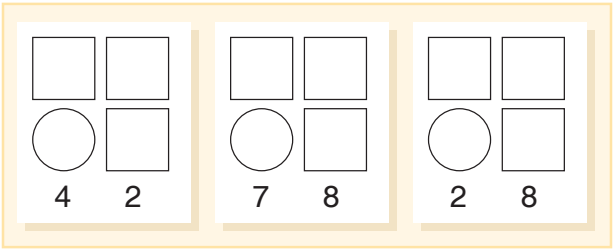
Şekil 13.11 "Aralık Oyunu"

Aşağıdaki etkinlik, zihinden hesaplama ve tahminin bir karışımıdır. Sayıların nereye gideceğini anlamak, tahmin etmeyi içeren kesin çözümü bulmaya götürür.

Etkinlik 13.10

Kutu Eşleme

Öğrencilere, kullanmaları için üç basamak (örneğin, 3, 5, 7) ve iki işlem (+ ve −) veriniz (tercihen kesilmiş kartlar üzerinde). Böylece öğrenciler, sayılar üzerinde kolayca çalışabilirler. Öğrencilere, cevaplarıyla birlikte denklemlerin bir kümesini veriniz ve aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi cevabı elde etmek için sadece kendi sayılarını (kare formatında) ve işlemlerini (daire formatında) kullanmalarını isteyiniz.



Burada, en az dokuz farklı olası cevap vardır. Aynı durum, her iki işlemin hesaplanması için yatay biçimde yazılmasına rağmen, çarpma ve bölmeyle de yapılabilir (Coates ve Thompson'dan uyarlanmıştır, 2003).

Rasyonel Sayıları Tahmin Etmek İçin Doğal Sayıları Kullanma

Günlük hayattaki tahminlerin çoğunun, kesir, ondalık sayı ve yüzdeleri içerdiği söylenebilir. Önerilen bazı örnekler aşağıdadır:

İndirimli Satış! Bir montun asıl fiyatı $58.00'dır. Dörtte biri oranında indirim yapılıyor? Mont'un satış fiyatı nedir?

834 öğrencinin yaklaşık yüzde 62'si geçen Çarşamba öğle yemeği sipariş etmişti. Kaç tane yemek siparişi verildi?

Biletler, $1.25'e satıldı. Eğer 3124 kişi katılsaydı, toplam gelir yaklaşık ne kadar olurdu?

12.35 galon yakıtla 337 mil yol yaptım. Galon başına arabamın aldığı yol kaç mildir?

Durup Düşün!

Önceki durumların her biri için tahminler ürettiğinizi kabul ediniz. Gerçekte bir tahminde bulunmadan, her bir durumda hangi sayıları kullanacağınıza karar veriniz. Örneğin, ilk örnekte 51.99'u kullanmadınız, belki 50 veya 52'yi kullandınız. Diğer problemlerdeki kesirler, ondalık sayılar ve yüzdelere ilişkin durum nedir? Okumaya devam etmeden önce bunun üzerine düşününüz.

İlk örnek, temelde $58.00'ın $\frac{3}{4}$'ünü veya $\frac{1}{4}$ oranındaki indirimi tahmin etmenizi istemektedir. Bir niceliğin $\frac{3}{4}$'ünü elde etmek için, niceliği 4'e bölüp 3 ile çarpma gerekir. Bunlar, doğal sayı içeren hesaplamalardır ve kesirlerin çarpımının anlaşılmasını da gerektirir.

Bir sonraki örnekte, problem yüzde 62'nin bulunmasıyla çözülmektedir. Bu yüzde, $\frac{3}{5}$ olan yüzde 60'a veya buna denk olan 6 kere yüzde 10'a yakındır. Her iki durumda, gerekli hesaplamalar doğal sayıları içermektedir. Yüzde 62'nin dönüştürülmesi, yüzdelerin anlaşılmasını gerektirir.

Üçüncü örnekte, ondalık sayıların ve kesirlerin anlaşılması, problemi 3125'in $1\frac{1}{4}$'ine dönüştürür. Hesaplamalar, 3125'in (belki 3200) 4'e bölünmesini ve bulunan sonucun 3125'e eklenmesini içerir ki, hepsi doğal sayı hesaplamasıdır. Benzer şekilde; son örnek, doğal sayı hesaplamalarının anlaşılmasını takiben ondalık sayıların anlaşılmasını gerektirir.

Kesir, ondalık sayı ve yüzdeler içeren durumlarda, bir tahmin yapmak için gerek duyulan ilk şey çoğunlukla sıralı saymanın anlaşılmasıdır. Bu anlama tarzı, genellikle durumu sadece doğal sayı hesaplamaları içeren bir konuma dönüştürür.

Elbette bu durum, kesirler ve ondalık sayılar için her zaman geçerli değildir. Takip eden örnek için tahminler yaparken nelere ihtiyaç olduğu üzerine düşününüz:

$$2\tfrac{3}{8} + 4\tfrac{1}{9} - 1\tfrac{1}{12}$$

$$42.5 \times 0.46$$

Her bir durum için mantıklı bir tahmin, rasyonel sayıların anlaşılmasını gerektirir. Burada, gerekli olan birkaç yeni tahmin becerisi vardır. Bu çeşit problemler, Bölüm 16'da tartışılmıştır.

Bölüm 13 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. Hesaba dayalı tahmin, diğer tahmin çeşitlerinden nasıl farklıdır?
2. Hesaba dayalı tahmin, öğrencilere niçin rahat gelmeyebilir?
3. Hesaba dayalı tahminin öğretimindeki önemli bazı noktalar nedir?
4. Öğrencilerin gerçekte bir cevap bulmadığı, "Fazla mı yoksa Az mı?" gibi etkinliklerin amacı nedir?
5. Tahminin, icat edilen stratejilerin gelişiminden nasıl ortaya çıktığını genel ifadelerle belirtiniz.
6. Aşağıdaki tahmin stratejilerinin her birini tanımlayınız. Her biri için örnekler veriniz ve bunları açıklamalarınızda kullanınız.
   - **a** Ön-son
   - **b** Yuvarlama
   - **c** Uyuşan sayılar
   - **d** Gruplama
   - **e** 10'lar, 100'ler vb. kullanmak için ayarlama yapma

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Yuvarlama ve hesaplama yaparak, cevabı tahmin eden bir öğrenciyi gözlemleyiniz. Öğrenci, bu stratejiyi niçin kullanmaktadır? Öğrencinin tahmin becerisini geliştirmek için hangi deneyimleri planlardınız?
2. *Üst Üste Koyarak İnşa Etme (Adding It Up)* (NRC, 2001), zihinden aritmetik ve tahmin konularına beş sayfadan daha fazla yer ayırmıştır (ss. 214-218).Tahmin stratejileri için gerek duyulan ilgili stratejileri ve tahmin tartışmalarıyla ilgili birkaç sayfayı özel bir dikkatle okuyunuz. *Üst Üste Koyarak İnşa Etme* kitabının tamamına www.nap.edu/books/0309069955/html/index.html web sayfasından ulaşabilir ve buradaki alıntıları okuyabilirsiniz. Zihinden hesaplama ve tahminin bu bakışının, Bölüm 12 ve bu bölümdeki fikirlerle hem uyuşması hem de uyuşmaması nasıl olmaktadır?

Bölüm 13 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Edebi metinler; tahminler ve kesin olmayan cevaplar için genellikle mükemmel içerikler sunmaktadır. Buna ilişkin iki ilginç örnek aşağıdadır:

Counting on Frank *Clement, 1991*

This popular book has a narrator who uses his dog, Frank, as a counting reference. For example, he explains that 24 Franks would fit in his room. Since the book offers approximations, there are limitless opportunities to do computational estimation. For example, how many Franks would fit in five rooms? If there were 24 Franks, how many cans of dog food (discussed on a later page) might be needed? The back of the book offers a series of estimation questions to get you started.

"How Many, How Much" from *A Light in the Attic* *Silverstein, 1981*

This very short poem is a nice lead-in to lessons on estimation, especially as it asks some unanswerable estimates, like how many slices in a loaf of bread (depends on how you slice it!). No answers are given, but students can estimate how many eggs in 15 dozen, how many crayons in 70 boxes (boxes with 8, 16, or any amount), or how many weeks in their lifetime.

Önerilen Okuma Parçaları

Kitaplar

Bresser, R., & Holtzman, C. (1999). *Developing number sense: Grades 3–6*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
This book includes 13 worthwhile number sense activities covering a range of topics including estimation. Activities include extensions, practical suggestions, and examples of students' work.

Reys, B. (1991). *Developing number sense*. Addenda Series, Grades 5–8. Reston, VA: NCTM.
This is (still) a fabulous resource—providing a discussion about number sense and including a great collection of activities, some of which focus on computational estimation.

Online Kaynaklar

Count on Math (NCTM's Illuminations—Lessons, Grades 6–8)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U96
The two lessons here provide activities for older students to estimate and develop number sense through data collection activities.

Estimate!
www.fi.uu.nl/toepassingen/00062/schatten/welcome_en.html

This is a fun fast-paced estimation applet for all four operations (go to "options" to select the ones you want to do). You click on start and a timer records how long until you get your answer entered. After ten problems you get a score, based on speed and accuracy.

Estimate Sums
www.ixl.com/math/practice/grade-2-estimate-sums

This site has various applets to practice skills for pre-K–3 students. There is a range of rounding and estimating activities for grades 2 and 3.

Estimation—Hundreds
www.quia.com/mc/65924.html

Players select squares on a board that round to the same hundred. A concentration version is also available.

Estimator Quiz (Shodor's Project Interactivate)
www.shodor.org/interactivate/activities/EstimatorQuiz

Similar to Estimate!, this applet allows a student to practice estimation for addition, multiplication, and percentage problems, getting instant feedback, but this site gives one problem at a time. A timer and instant feedback allow for independent practice and reinforcement.

Bölüm 14

Cebirsel Düşünme: Genellemeler, Örüntüler ve Fonksiyonlar

Cebir anaokulundan 12. sınıfa varıncaya kadar tüm eyaletlerin standartlarında yerleşmiş bir konu olup NCTM'nin *İlkeler ve Standartlar*'ında yer alan beş içerik alanından birisidir. İlkokul ve ortaokul seviyelerindeki cebir kazanımlarında büyük bir çeşitlilik olmasına rağmen açık olan bir konu vardır: bu sınıf seviyeleri - ve hatta lise seviyesi - için hedeflenen cebir sizin lisedeyken tecrübe ettiğiniz cebir ile aynı değildir. Sekizinci veya dokuzuncu sınıf seviyesinde yer alan tipik bir cebir dersi temel olarak gerçek hayatla çok az bir ilişkisi olan sembollerle işlemleri ve yapay uygulamaları içermektedir. Şimdiki odak ise matematiğin tüm alanlarında öğrencileri matematiksel düşünmeye hazırlayan düşünce ve muhakeme türü üzerinedir.

Cebirsel düşünme veya cebirsel muhakeme, sayılar ve işlemlerle genellemeler yapmayı, bu düşünceleri anlamlı sembol sistemleri kullanarak formalize etmeyi ve örüntü ve fonksiyon kavramlarını incelemeyi içermektedir. Gerçek hayatta sınırlı kullanımı olan bir konu olarak görülemeyecek olan cebirsel düşünme matematiğin tümü üzerine hâkim olan ve matematiği günlük hayatta faydalı kılan esas unsurdur.

Ana fikirler

1. Cebir, dünyamızdaki örüntüleri temsil etmek ve aritmetiği genelleştirmek için yararlı bir araçtır.
2. Öğrencilerin matematikte ve bilhassa da cebirde başarılı olmaları için özellikle eşitlik ve değişkenleri içeren sembollerle gösterimlerin kavramsal olarak çok iyi anlaşılmaları gerekir.
3. İşlem yapmak için kullandığımız yöntemler ve sayı sistemimizdeki yapılar genellenebilir ve genellenmelidir. Örneğin, a + b = b + a şeklindeki genelleme bizlere 83 + 27 = 27 + 83 ifadesinin, her iki yanında yer alan toplamları yapmaksızın, doğru olduğunu söyler.
4. Tekrarlı ve artan örüntüler fark edilebilir, genişletilebilir ve genelleştirilebilir.
5. Anaokulundan 8. sınıfa kadarki matematikte yer alan fonksiyonlar "her bir girdi için tek bir çıktı vardır" fikrini somut yollarla anlatırlar.
6. Fonksiyonların anlaşılması farklı gösterimlerle incelendiğinde desteklenmiş olur, çünkü her bir gösterim aynı ilişkinin farklı bir görünümüdür.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Kaput'un (1998) belirttiği gibi genelleştirmenin yapılmadığı ve formel olarak sunumun bulunmadığı bir matematik alanı bulmak oldukça zordur. Gerçekte, bu türden bir muhakeme örüntü ve düzen bilimi olan matematiğin tam da kalbinde yer alır.

- **Sayı, basamak değeri, temel bilgiler ve işlemler** (Bölüm 8, 10, 11 ve 12): Cebirsel düşünmenin merkezinde yer alan en önemli genellemeler sayılar ve işlemler (yani aritmetik) için yapılanlardır. Cebirsel düşünme sayılar ve işlemlerden sadece genelleme yapmakla kalmaz aynı zamanda genellemelerin kendileri de işlemlerin anlaşılması ve kullanılmasına katkıda bulunur. 5 + 8 veya 5 + 38 işlemlerini yapmak için 10 sayısına ilişkin kavrayışımızı kullanırız (5 + 8 = 3 + 2 + 8 = 3 + 10) veya (5 + 38 = 3 + 2 + 38 = 3 + 40). Genelleştirilmiş düşünce, toplananlardan birinden 2 alınıp diğerine eklenebileceğidir: a + b = (a = 2) + (b + 2). Öğrenciler bu genel fikri sembolize edemeseler bile bunun çalıştığını görmek cebirsel düşüncedir.
- **İşlem kavramları** (Bölüm 9): Çocuklar işlemleri öğrenirken, işlemlerin çalışma şekillerinde bir düzenlilik olduğunu da öğrenirler. Değişme özelliği (a + b = b + a ve a × b = b × a) ve işlemlerin birbirleriyle olan ilişkileri örnek olarak verilebilir.
- **Orantısal muhakeme** (Bölüm 18): Her bir orantısal durum, grafiği orijinden geçen doğrusal bir fonksiyona (düz-çizgi) işaret eder. Orantıdaki sabit oran grafiğin eğimidir.

- **Ölçme** (Bölüm 19): Ölçümler fiziksel dünyadaki ilişkileri tasvir eden esas araçlardır ve bu ilişkiler çoğunlukla cebirseldir. Ölçüm formülleri, örneğin çemberin çevresi gibi, fonksiyondurlar. Bir binanın yüksekliğinin binada bulunan kat sayısının bir fonksiyonu olduğunu söyleyebilirsiniz.
- **Geometri** (Bölüm 20): Geometrik örüntüler çocukların tecrübe ettiği ilk örüntülerdendir. Artan örüntüler bir fonksiyona işaret ederler. Koordinatlar uzaklık kavramlarını genellemek ve dönüşümleri kontrol etmek için kullanılırlar. Ve tabi ki fonksiyonların koordinat düzlemindeki grafikleri,cebirsel ilişkileri görselleştirirler.
- **Veri Analizi** (Bölüm 21): Veriler toplandığı zaman cebirsel olarak düşünen bir kimse bu verileri örüntüler açısından inceleyebilmelidir. Fonksiyonlar yönelimleri yaklaşık olarak belirlemek veya ilişkileri matematiksel olarak kullanışlı şekilde tasvir etmek için kullanılırlar.

Cebirsel Düşünme

Cebirsel düşünme okul öncesinden başlayıp lise yılları boyunca devam eder. *Öğretim Programı Odak Noktaları*'na göre (NCTM, 2006), okul öncesinde, "Çocuklar basit dizisel örüntüleri fark eder ve kopyalar (örn. kare, çember, kare, çember, kare, çember, …)" (s.11). Cebirsel düşünme her sınıf seviyesinde dâhil edilmekte olup şu temel konulardan oluşur: (1) genellemelere götüren örüntülerin kullanımı (özellikle işlemlerle), (2) değişimin çalışılması ve (3) fonksiyon kavramı. Seeley ve Schielack (2008) *Öğretim Programı Odak Noktaları*'ndaki cebirsel düşünceye dair incelemelerinde şunu belirtmişlerdir:

> Bu konuların hepsinin altında yatan temel fikir, öğrencilerin cebirde başarılı olacak şekilde hazırlanmaları için, en iyi araçlardan biri, öğrencilerin sayı sistemine, işlemlere ve işlemlerle ilişkili özelliklere dair derin bir kavrayış sahibi olmalarıdır. (s.266)

Aslında bu bölüm bu kavramlar üzerine yazılan bölümleri takip eder; böylece sayı kavramları, işlemler ve cebirsel düşünmenin ne kadar da yakından ilişkili olduğunu görebilirsiniz.

Sınıf seviyelerinde uygun cebir öğretim programlarını şekillendiren öncü isimlerden biri olan Kaput (1999), cebir hakkında şunu söyler: "[Cebir] genellemeleri ve bu genellemelerin artan şekildeki formel bir dille ifadesini içerir; aritmetikte, modelleme durumlarında, geometride ve neredeyse ortaokulda yer alan ve alabilecek tüm matematikte genelleme işte bu formel dilde başlar" (ss. 134-135). Birçok yazar ve araştırmacı cebirsel düşünme üzerine yazmışlarsa da Kaput'un açıklaması, diğerlerinin katkılarını da içerecek şekilde, en eksiksiz olandır. Kaput cebirsel muhakemenin beş farklı biçiminden bahseder:

1. Matematiğin tümündeki artimetik ve örüntülerden genelleme
2. Sembollerin anlamlı kullanımı
3. Sayı sistemindeki yapıların çalışılması
4. Fonksiyonlar ve örüntülerin çalışılması
5. Yukarıdaki dört maddeyi birleştirecek matematiksel model süreci

Böylece cebirsel düşünme tekil bir fikir değil, aksine farklı düşünme biçimleri ve sembollerin kavranmasından oluşmuştur. Öğretim programında ayrı bir kısımdır ama matematiğin tüm alanlarına yedirilmelidir. Bu düşünce biçimlerinin geliştirilmesine okul döneminin en başından başlanması gerektiği konusunda genel bir mutabakat vardır. Bu sayede öğrenciler matematikteki önemli fikirlerle üreterken olarak düşünmeyi öğreneceklerdir; yani matematiksel olarak düşünebileceklerdir.

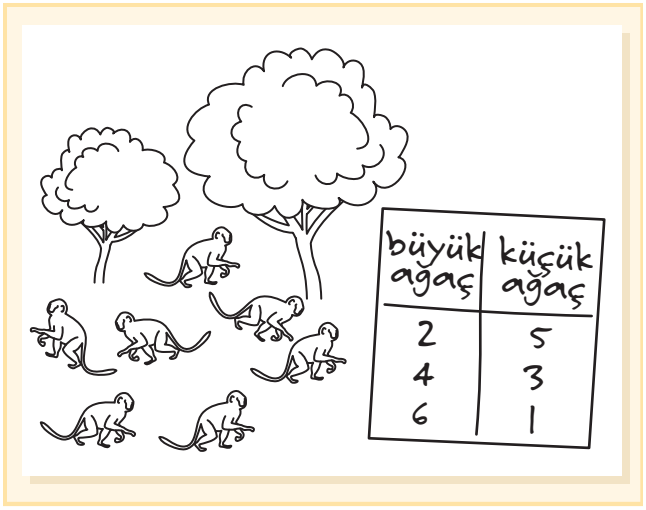
Bu bölümde bu beş tema cebirsel düşünmeyi açıklamak için kullanılacaktır. Kategorilerin kendileri gelişimsel değildir fakat her bir kategori içinde gelişime dair önemli görüşler vardır. Bu yüzden, bölümü okurken, anaokulu öncesinden 8. sınıfa kadar her bir kategoride bazı görüşler ve etkili eğitsel etkinlikler bulacaksınız.

Aritmetik ve Örüntülerden Genelleme

Sayılardan ve aritmetikten genellemeler yapmak okul öncesi dönemde başlar ve öğrenciler sayıların ve işlemlerin tüm yönleri (temel bilgiler ve işlemlerin anlamı da dâhil) hakkında öğrenmeye devam ettiği müddetçe sürer. Bu yüzden cebirsel düşünme 9 ve 13. bölümler arasında sunulan fikirlerle yakından ilgilidir.

Toplamayla Genelleme

Küçük çocuklar toplama ailelerini incelerler ve bu süreçte sayıları parçalara ayırmayı ve bileştirmeyi öğrenirler. Şekil 14.1'de sunulan maymunlar ve ağaçlar problemi öğrencilere sadece 7 sayısını parçalara ayırma yollarını göstermekle kalmaz aynı zamanda genellenebilecek özellikleri (örneğin küçük ağaçtaki sayıyı bir artırmanın büyük ağaçtaki sayıyı bir azaltmak anlamına gelmesi gibi) görmeleri için de fırsat sağlar. Öğrencilerden, maymunların iki ağaçta bulunabileceği tüm durumları bulmaları istenebilir. Buradaki önemli soru tüm çözümlerin bulunduğunun nasıl anlaşılacağıdır. Öğrenciler artık başka hiçbir çözüm düşünemeyeceklerdir ve birçoğu da 0 kullanmayı unutacaklardır. Diğer çocuklar bir ağaç için 0'dan 7'ye kadar tüm sayıları kullanmayı deneyebilirler. 0'dan 7'ye kadar her bir sayı için bir çözüm olduğunu söyleyen öğrenci 7'yi



Şekil 14.1 Yedi maymun iki ağaçta oynamak ister. Ağaçlardan biri büyük biri küçüktür. Yedi maymunun iki ağaçta oynayabileceği tüm farklı durumları gösteriniz.

Kaynak: Adapted from Yackel, E. (1997). "A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades." *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 276–280. A similar task was explored in Carpenter, T. P., Franke, M. L., and Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

parçalara ayırmıyor fakat çözümlerin sayısını veren bir genellemeyi tüm çözümleri listelemeden de yapabiliyor demektir (Yackel, 1997). Bu muhakeme 376 maymunun iki ağaçta yer alma durumlarının sayısı için genelleştirilebilir. İkinci sınıflar, çözüm sayısının maymun sayısından her zaman bir fazla olduğunu dile getirmişlerdir (Carpenter vd., 2003). Bu genellemenin sürece dâhil olan sayılardan bağımsız olduğuna dikkat ediniz.

Genelleme semboller içermek zorunda değildir; fakat bu daha büyük yaştaki öğrenciler için önemli bir ilave olacaktır (sonraki kısma bakınız). Örneğin, yedinci sınıflar maymun problemine benzer bir problemde 8 farenin yeşil veya mavi kafeste olma durumlarına ilişkin üç denklemi fark etmişlerdir: $m + y = 8$, $8 - y = m$ ve $8 - m = y$ (Stephens, 2005).

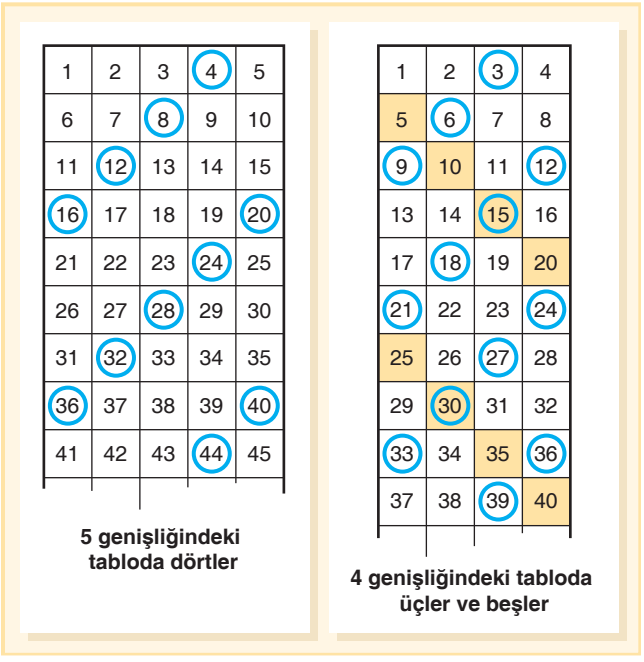
Bu, cebirsel düşünmenin sayılarla yapılan çalışmalara nasıl dâhil edilebileceğine dair sadece bir örnektir. Bunun için önceden planlama yapmak gerekir: öğrencilerin çalıştıkları (maymun problemi) ya da benzer nitelikteki (376 maymun durumu) problemde genellenen özellikleri (bir ağaçtaki maymun sayısı arttığında diğer ağaçtakilerin sayısının bir azaltılması) düşünmelerine yardımcı olmak için hangi soruların sorulacağı hakkında fikir geliştirmek).

Yüzlük tabloda genelleme

Yüzlük tablo, sayı ilişkilerini incelemek için zengin bir çalışma alanıdır ve sadece saymayı öğretmek için bir araç olarak düşünülmemelidir. Bölüm 11'de çocuklar yüzlük tabloda ritmik sayma yaptıkları hücreleri boyadılar ve örüntüler aradılar (Bkz. Etkinlikle 11.14-11.19 ve Etkinlik 11.28). İşte size benzer yaklaşımlar inceleyebileceğiniz bazı ilave görevler.

- Hangi sayılar köşegen örüntüleri oluşturur? Hangileri sütun örüntüleri oluşturur? Bir sayının ne zaman köşegen veya sütun örüntüsüne sahip olacağını açıklayacak bir kural üretebilir misiniz? (Bkz. Şekil 14.2, örüntülerin tablonun kaç sütun içerdiğine bağlı olduğuna dikkat ediniz.)
- İki aşağı ve bir yana doğru kayarsanız başlangıçtaki sayı ile yeni sayı arasındaki ilişki nedir?
- Birbiri üstüne denk gelecek şekilde iki tane ritmik sayma örüntüsü bulabilir misiniz? Yani, bir örüntü için işaretlenen tüm değerler diğerinde de yer almalıdır. Bu iki ritmik saymadaki sayılar arasındaki ilişki nedir? Bu durum aynı ilişkiye sahip tüm sayı çiftleri için doğru mudur? Farklı genişlikteki yüzlük tablolarda bu doğru olacak mıdır? Niçin doğrudur ya da niçin doğru değildir?
- Yüzlük tabloda herhangi bir değer seçiniz. Bu sayıyı sağındaki ve solundaki sayı ile toplayıp 3'e bölünüz. Ne elde ettiniz? Niçin?

Bu örnekler sayı kavramlarını cebirsel düşünmeye genişleten sorulardan sadece birkaçıdır. "Bir kural bulabilir misiniz?", "Bu niçin doğrudur?" ve "Bu ne zaman doğru olacaktır?" soruları gerekçe sunma ve muhakeme gerektirir. Bu da öğrencilerin sayı ve cebir kavramlarını kavrayışını güçlendirir.



Şekil 14.2 Farklı genişlikteki yüzlük tablolarda örüntüler

Örüntü İnceleme Üzerinden Genelleme

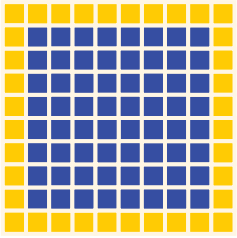
Genelleme arayışında belki de en ilginç ve en değerli yöntemlerden birisi onu artış gösteren fiziksel örüntülerde aramaktır. Bunu yapmanın bir yöntemi, bir artış basamağına sahip fiziksel bir örüntünün incelenmesi ve öğrencilerden ögelerin sayısını, teker teker saymadan, hesaplamaları için bir yöntem bulmalarını istemektir. Aşağıdaki problem böylesi bir görev için klasik bir örnektir ve birçok kaynakta ele alınmıştır (Burns ve McLaughlin, 1990; Boaler ve Humphreys, 2005).

Etkinlik 14.1

Kenarlık problemi

Bir santimetrelik kareli kâğıda, öğrencilerinize 8 × 8 tipinde yüzme havuzunu temsil eden bir kare çizdiriniz. Sonra, etrafını çevreleyen kareleri, yani havuzun etrafındaki karoları boyatınız (Bkz. Şekil 14.3). Göreviniz sınırdaki karoların sayısını onları birer birer saymadan hesaplayacak bir yol bulmaktır. Öğrenciler karelerin sayısını nasıl bulduklarını göstermek için kendi çizimlerini, kelimelerini ve sayı cümlelerini kullanmalıdırlar.

Kenarlık boyunca yer alan karoların sayısını bulmanın, tek tek sayma dışında, en az beş farklı yöntemi vardır.



Şekil 14.3 Kaç farklı yolla 8 × 8 boyutundaki havuzun etrafındaki karoların sayısını, birer birer saymadan, hesaplayabilirsiniz?

Durup düşün!

Daha fazla okumadan önce, kenarlık boyunca bulunan karolar problemi için dört veya beş farklı sayma yöntemi bulup bulamayacağınızı düşününüz. Yönteminizi başka boyutlardaki karelerin sınırlarındaki karo sayılarının hesaplanmasına uygulayınız.

Çok bilinen bir çözüm, şeklin altında ve üstünde onar adet, her iki yanında ise sekizer karenin olduğunu fark etmekten geçer. Bu da şu şekilde yazılabilir:

$$10 + 10 + 8 + 8 = 36 \text{ veya } 2 \times 10 + 2 \times 8 = 36$$

Aşağıdaki her bir ifade benzer şekilde karelerin farklı gruplandırmalarına bakarak ulaşılabilir:

$$4 \times 9$$

$$4 \times 8 + 4$$

$$4 \times 10 - 4$$

$$100 - 64$$

Öğrenciler çarpma yerine toplama kullanabileceklerinden, daha fazla ifade şekilleri mümkündür. Her halükarda bir kez genellemeye ulaşıldığında, öğrenciler ifadelerindeki öğelerin fiziksel gösterimle nasıl eşleştiğini gerekçelendirmelidirler.

Kenarlık Problemine bir başka yaklaşım ise öğrencilere aşama aşama (her aşamada kenarlarda bir fazla karo kullanarak) birçok havuz yaptırmaktır (3 × 3, 4 × 4, 5 × 5 gibi). Daha sonra her bir adımdaki karoların sayısını adım sayısını kullanarak hesaplayacak bir yöntem bulmaları istenir. Bu durumda öğrenciler 8x8 boyutundaki havuz için yazdıkları ifadelere paralel sayı cümlelerini, örneğin, 7 × 7 ve 6 × 6 için de bulabilirler. Nihayetinde, bu durum bir genellemeyle neticelenebilir (örneğin, 2 × 10 + 2 × 8 ifadesinin genelleştirilerek $2 \times (n + 2) + 2(n)$ elde edilmesi gibi).

Genellemede önemli bir unsur, bu genellemenin uygulanabileceği yeni durumu fark etmek ve uygun şekilde adapte etmektir. Örneğin, öğrenciler çevreyle ilgili artan başka örüntüler de inceleyebilirler (her kenarında 3, 4, 5 nokta bulunan üçgenler gibi). Öğrenciler bunun da aynı türden bir örüntü olduğunu fakat bunda sadece üç kenarın bulunduğu sonucuna ulaşmalı ve daha önceki genellemelerini bu problemde de kullanabilmelidirler (Steele, 2005).

Sembollerin Anlamlı Kullanımı

Öğrencilerin, kullandıkları sembollere dair güçlü bir kavrayışlarının bulunmaması, onların cebirde başarısız olmalarının muhtemel bir sebebidir. Birçok yetişkin için cebir kelimesi uzun denklemlerde *x*'i elde etmek için yapılan sadeleştirmeler anlamı taşımaktadır. Sembollerle yapılan işlemlere dair yaşantılar çoğu kez anlamdan yoksun olmuş ve matematiğe karşı o kadar derin bir antipati oluşturmuştur ki cebir, Hollywood yazarları ve çizgi filmlerin favori bir hedefi haline gelmiştir. Hakikatte ise semboller gerçek olayları temsil ederler ve karar vermeye yardımcı olan önemli problemlerin çözümü için faydalı araçlar olarak görülmelidirler (örn. *x* dolar kazanmak için kaç tane satmamız gerektiğini hesaplamak veya belli sayıdaki çalışanın projeyi zamanında bitirmeleri için hangi hızda çalışmaları gerektiğini belirlemek gibi). Öğrenciler, çok önemli (ve de az anlaşılan) iki konuda anlamlı bir öğretim olmaksızın böylesi soruları anlamlandıramayacaklardır: eşitlik işareti ve değişken.

Eşitlik İşaretinin Anlamı

Eşitlik işareti, aritmetikte, cebirde ve sayıları ve işlemleri kullanan tüm matematikte en önemli sembollerden birisidir. Aynı zamanda, 1975 yılından günümüze kadar uzanan çalışmalar "=" sembolünün çok az anlaşıldığına açıkça işaret etmektedir (RAND MathematicsStudy Panel, 2003).

Durup Düşün!

Sizce aşağıdaki ifadede kutu içine gelecek sayı nedir?

$$8 + 4 = \square + 5$$

İlkokul ya da ortaokul öğrencilerinin bu soruyu tipik olarak nasıl cevaplayacağını düşünüyorsunuz?

Bir çalışmada kutu içerisine doğru sayıyı (7) yazan 1 ile 6. sınıflar arasındaki öğrencilerin sayısı % 10'dan daha fazla olmamıştır. Yaygın cevaplar 12 ve 17 olmuştur (Öğrenciler bu cevapları nasıl elde etmişlerdir?). 6.sınıfta 145 öğrenciden birisi bile kutuya 7 yazmamıştır (Falkner, Levi ve Carpenter, 1999). Önceki çalışmalar benzer sonuçları bulmuşlardır (Behr, Erlwanger ve Nichols, 1975; Erlwanger ve Berlanger, 1983).

Bu tür kavram yanılgıları neden kaynaklanmaktadır? Ortaokulda öğrencilerin karşılaştıkları denklemlerin çoğu şuna benzemektedir: 5 + 7 = _____ veya 8 × 45 = _____ veya 9(3 + 8)= _____. Doğal olarak, öğrenciler = işaretini eşitlik bildiren bir sembolden ziyade "ve cevap şudur" şeklinde bir ifade olarak anlamaktadırlar (Carpenter, Franke ve Levi, 2003; McNeilveAlibali, 2005; Molina veAmbrose, 2006).

Öğrencilerin eşitlik işaretini doğru olarak anlamaları niçin o kadar da önemlidir? İlk olarak, öğrencilerin sayı sistemimizdeki ilişkileri görmeleri, anlamaları ve sembolize etmeleri önemlidir. Eşitlik işareti bu ilişkileri göstermenin başlıca yöntemidir (örneğin, 6 × 7 = 5 × 7 + 7). Bu sadece bilgisel bir strateji değil aynı zamanda dağılma özelliğinin bir uygulamasıdır. Dağılma özelliği her bir parçayı ayrı ayrı çarpmamıza imkân tanır: (1 + 5) × 7 = (1 × 7) + (5 × 7). Sayıların diğer özellikleri bu son ifadeyi 5 × 7 + 7 şekline dönüştürmek için kullanılır. Başlangıçta ve informel olarak aritmetik aracılığıyla geliştirilen bu fikirler genelleştirilip sembolik olarak ifade edildiğinde, genelleştirilmiş biçimdeki güçlü ilişkiler başka sayılarla çalışmak için kullanılabilir hâle gelmektedir.

İkinci sebep ise öğrenciler eşitlik işaretini anlamadıklarında cebirsel ifadelerde bu işaretle karşılaştıklarında zorluklar yaşamaktadırlar (Knuthvd., 2006). $5x - 24 = 81$ gibi basit eşitliklerin çözümü bile öğrencilerden eşitliğin her iki tarafını eşdeğer ifadeler olarak görmelerini gerektirir. Eşitliğin sol tarafıyla "işlem yapmak" mümkün değildir. Fakat her iki taraf da aynı ise o zaman her iki tarafa da 24 eklendiğinde aynı kalmaya devam edeceklerdir.

Eşitlik işaretini denge olarak kavramsallaştırma. İlkokul yıllarının başında öğrencilerin eşdeğerlik fikrini anlamaları somut olarak geliştirilebilir. Aşağıdaki iki etkinlik elle tutulur nesnelerin ve görselleştirmenin eşitlik işareti için "denge" fikrini güçlendirebileceğini örneklendirmektedir (fikirler Mann'dan (2004) adapte edilmiştir).

Etkinlik 14.2

Tahterevalliye Binen Öğrenciler

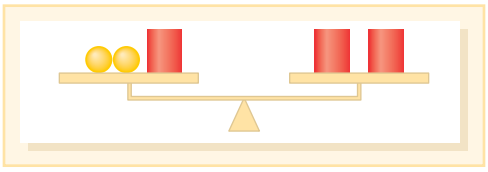
Öğrencilerden kollarını tahterevalliye benzeyecek şekilde kaldırmalarını isteyiniz. Hepsi aynı ağırlıkta olan büyük sulu portakallarınız ve hepsi aynı ağırlıkta olan küçük elmalarınızın olduğunu söyleyiniz. Öğrencilerinizin her birinin sol eline bir portakal yerleştirdiğinizi hayal etmelerini isteyiniz (öğrenciler sol tarafa doğru eğilmelidirler). Bir başka portakalı da öğrencilerinizin sağ eline yerleştirdiğinizi hayal etmelerini isteyiniz (öğrenciler ellerini düz hâle getirirler). Sonra, portakallar yerindeyken öğrencilere sol ellerine bir elma ilave edildiğini düşünmelerini söyleyiniz. Son olarak, bir başka elma daha ekleyeceğinizi söyleyiniz fakat bu da (yine) sol tarafa eklenecek deyiniz. Sonra elmanın birinin sağa doğru kaydığını düşünmelerini isteyiniz.

Tahterevalli hareketleri birkaç kez yaptırıldıktan sonra öğrencilerden Tahterevalli Bulgularını yazmalarını isteyiniz (örn., "eğer dengede bir tahterevalli varsa ve bir tarafına bir şey ilave ederseniz, o tarafa doğru eğilecektir" ve "eğer tahterevallinin her iki tarafından da aynı nesneyi çıkarırsanız hâlâ dengede kalacaktır")

Etkinlik 14.3

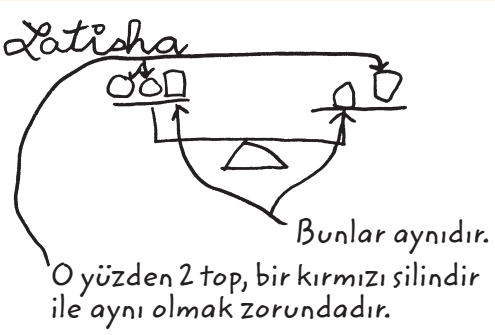
Şekiller hakkında ne biliyorsunuz?

Her iki kolunda nesneler bulunan bir terazi getiriniz ve öğrencilere şekiller hakkında ne bildiklerini sorunuz. Kendinize ait bir tane yapabilirsiniz ama bir örnek şu olabilir:



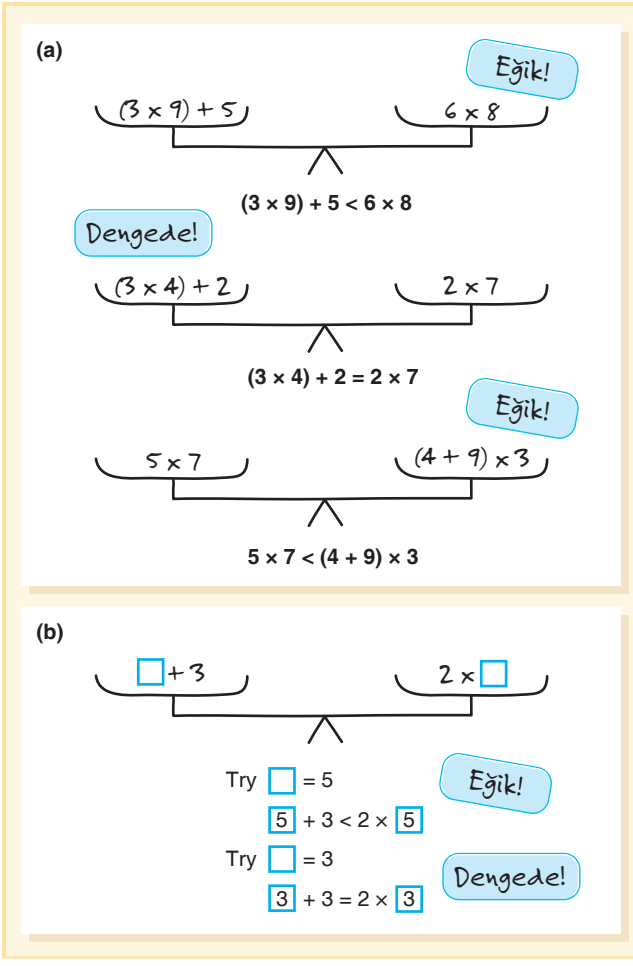
Kırmızı silindirler aynı ağırlıktadır. Sarı toplar aynı ağırlıktadır. Topların ve silindirlerin ağırlıkları hakkında ne biliyorsunuz? Şekil 14.4'te bir üçüncü sınıf öğrencisinin bildiklerine dair açıklaması sunulmuştur. (Erken yaşlardaki öğrenciler için uygun olan bu görevlerin, bölümün ilerleyen kısımlarında sunulacak olan ve daha ileri düzeydeki denge görevleri için iyi bir başlangıç teşkil edeceğine dikkat ediniz.)

Öğrenciler şekillerle deneyim kazandıktan sonra sayıları inceleyebilir ve nihayetinde de değişkenlere geçiş yapabi-



Şekil 14.4 Problem üzerinde Latisha'nın çalışması

Kaynak: Figure 4 from Mann, R. L. (2004). "BalancingAct: TheTruthBehindtheEqualsSign." *Teaching Children Mathematics,* 11(2), p. 68.Reprintedwithpermission. Copyright © 2004 bytheNationalCouncilof Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.



Şekil 14.5 Eşitlik ve eşitsizliklerde ifadeleri ve değişkenleri kullanmak. İki kollu terazi = sembolünün anlamını geliştirmeye yardımcı olur.

lirler. Şekil 14.5'te dengeyi ilgili denklemle ilişkilendiren örnekler yer almaktadır. Bu iki kollu terazi modeli, her bir taraftaki ifadenin bir sayı temsil ettiğini anlatır.

Etkinlik 14.4

Eğik veya Dengede

Tahtaya veya tepegöze, basit iki kollu bir terazi çizin. Her bir kefeye sayısal bir ifade yazın ve hangi kefenin aşağı gideceğini veya her ikisinin dengede mi kalacağını sorun (Bkz. Şekil 14.5(a)). Terazi dengede kalacak şekilde her bir kefesi için öğrencilerden ifadeler yazmalarını isteyiniz. Her bir ifadeye yönelik = sembolünün anlamını açıklamak için karşılık gelen eşitliği yazınız. Eğer terazide eğiklik varsa büyüktür ya da küçüktür (> veya <) sembollerini kullanınız.

Kısa bir müddet sonra ifadeye değişkenleri ekleyiniz ve öğrencilerin istedikleri yöntemle çözmelerine izin veriniz (Bkz. Şekil 14.5(b)). Basit bir gözlemle çözümlerin hemen bulunabileceği kolay bir görev vermeyiniz.

Terazi öğrencilerin şu fikri anlamalarına yardımcı olacak somut bir araçtır: eğer bir tarafa bir değer eklerseniz ya da çıkarırsanız, eşitliği dengede tutmak için benzer bir değeri diğer tarafa da eklemek ya da çıkarmak zorundasınız.

Şekil 14.6'da iki eşitliğin çözümü sunulmuştur. Bunlardan biri teraziyle diğeri terazi kullanmadan çözülmüştür. Terazi kullanımını bıraktıktan sonra bile eşitlikte teraziye veya kefelere işaret ederek teraziyi dengede tutmaya değinilmesi iyi bir fikirdir.

Öğrenciler denklemlerin grafik çizimlerine çalışmaya başladıklarında, denklemler hiçbir değişkenin yalnız bırakılmadığı bir biçimde olacaktır. Örneğin, $3A - B = 2A$ denkleminde A'yı B veya B'yi A cinsinden elde etmek isteyebilirler. Tek değişken için başvurulan çözüm yöntemi, bir değişkenin bir başka değişken cinsinden çözümünde de kullanılır. Bunun için denklemin her iki tarafında yapılan değişiklikler eşitlik dengede kalacak şekilde yapılmalıdır.



PanBalance—Expressions isimli NCTM küçük uygulama yazılımı sanal bir terazi sağlar. Öğrenciler eşdeğer olduğuna inandıkları ifadeleri (sayılarla ve sembollerle) her bir kefeye girerek gerçekten de ifadelerin dengede olup olmadığını görebilirler. ◆

Doğru/Yanlış ve Açık Cümleler. Carpenter, Franke ve Levi (2003), eşitlik işaretinin öğrencilere anlatılmasında iyi bir başlangıç noktası olarak eşitliklerin doğru ve yanlış şeklinde incelenmesini önermektedirler. Aşağıdaki etkinlikte de görüleceği gibi, eşitlik işaretinin anlamını açık hâle getirmek bu türden bir incelemenin sonuçlarından sadece birisidir.

(a)



Her iki taraftan 4 çıkar ve sağdaki ifadeyi çarp.



Her iki taraftan $3x$ çıkar.



Her iki tarafı –9 ile böl.



Kontrol:



Her iki taraf = $3\frac{1}{3}$.

(b)

$4.2N + 63 = \frac{N}{2}$

63 çıkar.

$4.2N = \frac{N}{2} - 63$

2 ile çarp.

$8.4N = N - 126$

N çıkar.

$7.4N = -126$

7.4. ile böl. (Hesap makinesi kullan!)

$N = -17.03$ (yaklaşık)

Şekil 14.6 Denklem çözümü hakkında düşünmek için eşit kollu terazi kullanımı.

Etkinlik 14.5

Doğru veya Yanlış

Doğru/yanlış cümleleri ya da eşitlikleri basit örneklerle anlatarak ne kastettiğinizi açıklayacak şekilde bir giriş yapınız. Sonra, bazıları doğru bazıları yanlış olan, çeşitli basit eşitlikler tahtaya yazınız. Aşağıdakiler ilköğretim sınıfları için uygundur:

5 + 2 = 7 **4 + 1 = 6**

4 + 4 = 8 **8 = 10 − 1**

Sizin yazdıklarınız başka işlemleri de içerebilir fakat işlemlerin basit olmasına dikkat ediniz. Öğrencilerin görevi eşitliklerden hangilerinin doğru ve hangilerinin yanlış olduğuna karar vermektir. Her bir cevap için gerekçelerini açıklamaları gerekir.

Bu doğru/yanlış cümlelerinin incelenmesinden sonra öğrencilere daha az aşina oldukları biçimlerdeki eşitlikleri inceletiniz:

4 + 5 = 8 + 1 **3 + 7 = 7 + 3** **6 − 3 = 7 − 4** **8 = 8**

4 + 5 = 4 + 5 **9 + 5 = 14** **9 + 5 = 14 + 0**

Bir derste tüm alternatifleri incelemeye çalışmayınız. Öğrencilerin cevaplarını açıklarken verdikleri gerekçeleri dinleyiniz ve sonraki günler için buna dayalı ilave eşitlikler hazırlayınız.

Öğrenciler genellikle bir tarafında bir ifadenin diğer tarafında da tek bir sayının yer aldığı eşitlikler üzerinde mutabık kalacaklardır; fakat yine de başlangıçta daha az aşina oldukları $7 = 2 + 5$ biçimindeki eşitlikler bazı kafa karışıklıklarına yol açabilecektir. Hiçbir işlemin olmadığı eşitliklerde ($8 = 8$) tartışma alevlenebilir. Öğrenciler sıklıkla eşitliğin bir tarafında bir işlem olması gerektiğine inanırlar. Eşitlik işaretinin her iki tarafında işlemlerin yer aldığı eşitlikler ciddi tartışmalara yol açabilir ve kavram yanılgılarının ortadan kaldırılmasına yardım edebilir. Eşitlik işaretinin "ile aynıdır" anlamına geldiğini pekiştiriniz. Öğrencilerin bu fikri kendilerine mal etmeleri yapılan tartışmalar ve kendi gerekçelendirmeleri sonucu gerçekleşir. Eşitsizlikler de benzer bir yaklaşımla incelenmelidir.

Öğrenciler doğru/yanlış ifadeleriyle deneyim kazandıktan sonra açık cümleler ile tanıştırınız (yani bir tarafında doldurulması gereken bir kutucuğun ya da bulunması gereken bir harfin bulunduğu ifadeler). Açık cümleleri kavratmak için öğrencileri sayı cümlesine bir bütün olarak bakmaları için teşvik ediniz ve onlarla eşitliğin neyi temsil ettiğini tartışınız.

Etkinlik 14.6

Açık cümleler

Tahtaya birkaç tane açık cümle yazınız. Başlangıçta daha önce incelediğiniz doğru/yanlış cümlelerine benzer şekilde olabilir:

5 + 2 = □ **4 + □ = 6** **4 + 5 = □ − 1**

3 + 7 = 7 + □ **□ + 4 = 8** **□ = 10 − 1**

6 − □ = 7 − 4 **□ + 5 = 5 + 8**

Buradaki görev kutuya hangi sayı konulduğunda cümlenin doğru olacağının belirlenmesidir. Tabi ki cevapla birlikte bir açıklama da yapılması gerekir.

3 ve daha üst sınıflar için toplama ve çıkarmayla birlikte çarpmayı da dâhil ediniz.

Başlangıçta bazı öğrenciler verilen işlemi yaparak sonucunu kutu içine yazacaktır. Bu durum çözülen çok fazla sayıdaki alıştırmada cevap olarak bulunan tek bir sayının eşitlik işaretini takiben yazılmasının bir sonucudur. Hakikatte ise buradaki kutucuk bir değişkenin habercisidir yoksa cevap yazılacak bir yer değildir.

İlişkisel düşünme. Öğrenciler eşitlik işaretinin her iki taraftaki niceliklerin aynı olması anlamına geldiğini anladıklarında, problem çözümlerinde ilişkisel düşünceyi kullanabilirler. İlişkisel düşünme, bir öğrencinin miktarları hesaplamak yerine, eşitlik işaretinin her iki tarafı arasındaki sayısal ilişkilere odaklanıp kullandıklarında ortaya çıkar. Bu türden bir ilişkisel düşünce, aritmetikte görülen ilişkilerin genellemesinde ilk adımdır; bu sayede aynı ilişkiler sayılar yerine değişkenler dâhil olduğunda da kullanılabilir.

$7 - \square = 6 - 4$ açık cümlesindeki kutucuğa yazılan 5 için yapılan şu iki farklı açıklamayı göz önüne alınız.

a. 6 – 4 işlemi 2 olduğu için 7'den bir şey çıkarmalısınız ki 2 elde edesiniz. 7-5 işlemi 2 yapar ve 5 kutunun içine yazılır.
b. Yedi sayısı diğer taraftaki 6'dan bir büyüktür. Bu da, aynı sayıyı elde etmek için sol taraftan çıkarılan sayının bir fazla olmasını gerektirir. 4'ün bir fazlası 5'tir ve 5 kutunun içine yazılır.

Durup Düşün!

Bu iki doğru cevap birbirinden nasıl farklılaşır? Bu öğrencilerden her biri şu açık cümleyi nasıl çözer? $534 + 175 = 174 + \square$

Birinci öğrenci bir taraftaki hesaplamayı yapıyor ve diğer taraftaki sonucu, ifadeyi doğru yapacak şekilde, buna göre düzenliyor. İkinci öğrenci eşitlik işaretinin her iki yanındaki ifadeler arasındaki bir ilişkiyi kullanıyor. Bu öğrenci her bir yandaki değerleri hesaplamak zorunda kalmıyor. Sayılar büyük olduğunda, ilişki yaklaşımı çok daha kullanışlıdır. 174 sayısı 175'ten bir küçük olduğundan, aradaki farkı kapatmak için kutunun içindeki sayı 534'ten bir büyük olmalıdır. Birinci öğrenci işlem yapmak zorunda kalacağından toplanan sayıyı doğru bulmakta zorluk yaşayabilecektir.

İlişkisel düşünmeyi ve eşitlik işaretinin anlamını geliştirmek için sınıfınızla birlikte zorluk dereceleri artacak şekilde doğru/yanlış ve açık cümleleri incelemeye devam ediniz. İşlem yapmaktan ziyade öğrenciyi zorlayıp düşünmeye sevk edebilecek eşitlikler seçiniz. Öğrencileri ilişkisel düşünmeye zorlamak için hesaplaması zor (ama imkânsız olmayan) büyük sayılar seçiniz.

Doğru/Yanlış

$674 - 389 = 664 - 379$ $\quad 5 \times 84 = 10 \times 42$

$37 + 54 = 38 + 53$ $\quad 64 \div 14 = 32 \div 28$

Açık Cümleler

$73 + 56 = 71 + \square$ $\quad 126 - 37 = \square - 40$

$20 \times 48 = \square \times 24$ $\quad 68 + 58 = 57 + 69 + \square$

Durup düşün!

Doğru/yanlış cümlelerinden birisi yanlıştır. İlişkisel düşünmeyi kullanarak bunun sebebini açıklayabilir misiniz?

Matematik eğitimi araştırmacıları olan Marta Molina ve RebeccaAmbrose (2006) üçüncü sınıflarla doğru/yanlış ve açık-uçlu yönlendirmeleri kullanmış ve çalışmanın başlangıcında öğrencilerin hiçbirisi eşitlik işaretini ilişkisel bir şekilde anlayamamışlardır. Örneğin, 13 öğrencinin tamamı 8 + 4 = ___ + 5 sorusunu 12 olarak hesaplamışlardır. Öğrencilerin kendilerine ait açık cümleler yazmaları, eşitlik işaretine dair kavrayışlarının pekiştirilmesinde özellikle etkili olduğu araştırmacılar tarafından ortaya konulmuştur. Aşağıdaki format rehberlik etmesi amacıyla sunulmuştur (isteyen öğrenciler çarpma ve bölme de kullanabilirler):

___ + ___ = ___ + ___

___ − ___ = ___ − ____

___ + ___ = ___ − ____.

Etkinlik 14.7

Doğru/yanlış cümleleri yazmak

Doğru/yanlış ve açık cümleler hakkında tartışmak için yeterince zaman ayrıldıktan sonra, öğrencilerden sınıf arkadaşlarını zorlayacak şekilde kendilerine ait doğru/yanlış cümlelerini oluşturmalarını isteyiniz. Her öğrenci, içerisinde en az bir doğru ve en az bir yanlış ifadenin yer aldığı üç veya dört cümle yazmalıdır. Onları bir tane de "aldatıcı" cümle yazmaları için teşvik ediniz. Yazılan eşitlikler bir eşiyle takas edilebileceği gibi tüm sınıf tartışmasında da kullanılabilir.

Açık cümle problemleri için etkinliği yineleyiniz.

Öğrenciler kendilerine ait doğru/yanlış cümlelerini yazdıklarında, genellikle büyük sayılar ya da birçok sayıyı cümlelerinde kullanmaya çalışmaktadırlar. Bu da onları ilişkisel düşünme içeren cümleler oluşturma konusunda teşvik etmektedir.



Öğrenciler doğru/yanlış ve açık cümle etkinliklerini yaparken, iki şeyin gelişimine bakınız. Birincisi, öğrenciler eşitlik işaretine dair uygun bir kavrayış geliştiriyorlar mı? Bunun için, eşitlik işaretinin her iki yanındaki işlemleri rahatlıkla kullanıp kul-

lanamadıklarını ve açık cümleleri çözerken eşitliği "ile aynıdır" anlamında ele alıp alamadıklarına bakmanız gerekir.

İkinci olarak, ilişkisel düşünmenin ortaya çıkıp çıkmadığını araştırınız. Doğrudan hesaplama yerine eşitlik işaretinin her bir yanındaki işlemlerde bulunan ilişkileri kullanan öğrenciler cebirsel düşünmede bir adım yukarı çıkmışlardır. ◆

Değişkenlerin anlamı

Değişkenlere sahip olan ifadeler veya eşitlikler genellemelere imkân tanırlar. Öğrenciler, harflerin hangi sayı ya da sayılar yerine kullanıldığını bile düşünmeksizin değişkenler içeren ifadelerle çalışabildiklerinde, onlar Kaput'un (1999) ifadesiyle opak formalizm ile işlemler yapmayı başarmışlardır demektir; yani öğrenciler sadece sembollere bakarak onlarla çalışabilirler. Değişkenler, bilinmeyen değerler ya da değişen nicelikler olarak kullanılabilir. Ne yazık ki öğrenciler genellikle birincisini düşünür ve ikincisini akıllarına getirmezler. Takip eden iki kısımda açıklanacağı gibi, ilkokul ve ortaokuldaki deneyimler her ikisini de anlamaya odaklanmalıdır.

Bilinmeyen değerler olarak kullanılan değişkenler. Öğrencilerin değişkenlerle deneyimleri, değişkenlerin genellikle sadece bilinmeyen değerler olarak algılanması üzerine odaklanmaktadır. Açık cümle incelemelerinde, □ gösterimi değişkenin bu şekilde kullanımına işaret etmektedir. Önceleri, açık cümlelerinizde kutucuk yerine çeşitli harfler kullanarak başlayabilirsiniz. Kutunun içine hangi sayının gireceğini sormak yerine öğrencilerinize cümleyi doğrulamak için harfin, hangi sayının yerine kullanıldığını sorunuz. Cümleyi doğrulayan (denklemin çözümü olan) değişkenin değerini bulmak için başlangıçta yapılan çalışmalar ilişkisel düşünmeye dayanmalıdır. Sonra, bu ilişkiler yetersiz kaldığında, öğrenciler denklemleri çözmek için özel teknikler geliştireceklerdir.

Daha önceki kısımda anlatılan denge fikri bu amaca hizmet etmek için de kullanılabilir. Örneğin, NCTM Illumination, okul öncesiyle 2. sınıf aralığına uygun çok güzel iki ders planıyla birlikte "PanBalance-Shapes" isimli bir küçük uygulama yazılımınıkullanır. Bu yazılım yardımıyla öğrencilere her şeklin hangi sayıyı temsil ettiğini keşfettirmek için farklı şekillerin (sanal) ağırlıklarını buldurur.

Şu açık cümleyi göz önüne alalım: □ + □ + 7 = □ + 17 (veya bunun eşdeğeri $n + n + 7 = n + 17$). Çoklu değişkenlerin kullanımına ilişkin geçerli olan şey bir denklemdeki aynı sembol ya da harf kullanıldığı her yerde aynı sayıya işaret eder. Carpenter vd. (2003) bu durumu "matematikçinin kuralı" diye niteler. Az önceki örnekte □ işareti 10 yerine kullanılmaktadır.

Birçok hikâye problemi, değişkenin özel bir bilinmeyen olduğu durumu içerir; işte şu basit örnekte olduğu gibi:

Gary beş tane çilek yemiş ve Jeremy'de birkaç tane yemiştir. 12 tane çilekten oluşan kutu boşalmıştır. Jeremy kaç tane yemiştir?

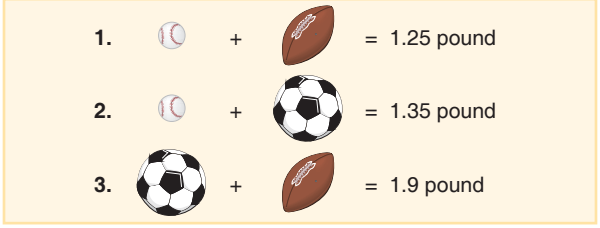
Öğrenciler bu problemi cebir kullanmaksızın da çözebilmelerine rağmen, bunu sembollerle ifade ederek değişkenleri öğrenmeye başlayabilirler: $5 + s = 12$. Bu problemlerin zorluk derecesi zamanla artabilir.

Aşağıdaki etkinlikte olduğu gibi, bir bağlamla birlikte öğrenciler, her biri bilinmeyen bir değere işaret eden, üç değişkeni bile inceleyebilirler:

Etkinlik 14.8

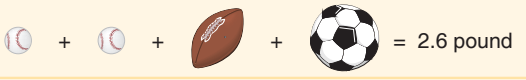
Toplar, toplar, toplar

Aşağıda verilen bilgiler dikkate alındığında her bir topun ağırlığı ne kadardır?



Öğrencilerden verilen bilgileri incelemelerini ve başka bilgiler elde edecek çıkarımlarda bulunmalarını isteyiniz. Örneğin, Amerikan futbol topunun ağırlığı futbol topundan 0.1 pound[1] daha fazla olduğunu fark edebilirler. Bunu da aynen diğer ifadeler gibi yazınız. Bu tür bulguları ortaya çıkarmaya her bir topun ağırlığı bulununcaya kadar devam ediniz. Öğrencileri problemi temsil edecek ve inceleyecek şekilde model kullanmaları için teşvik ediniz (etkinlik Maida'dan (2004) adapte edilmiştir).

Mümkün olan bir yaklaşım: Eşitlik 1 ve 2'yi toplayınız:



Sonra futbol ve Amerikan futbol toplarını çıkarın, bu da ağırlığı 1.9 pound azaltır (3. eşitlikte verilen bilgiye dayalı olarak) ve böylece elinizde ağırlığı 0.7 pound olan iki beysbol topu kalır. İkiye bölerseniz bir beysbol topunun ağırlığı 0.35 pound olur.

Bu son örneğin denklem sistemlerinin somut bir şekilde sunumu olduğunu fark etmişsinizdir. Bu türden çalışmalar, buradaki gibi sunulursa, ilkokul son sınıflar ve ortaokul düzeyi öğrencileri için erişilebilir hâle gelir ve daha sonra denklem sistemleriyle ilgili çalışmalar için temel atılmış olur.

Denklem sistemleri üzerine yapılan çalışmaların bir başka somut yolu ise terazi aracılığıyladır. Eşitlik işareti kavramını inşâ etmek için yapılan çalışmaların şimdi değişkenlerin anlaşılması ve çözümü için kullanıldığına dikkat ediniz.

Şekil 14.7'de, terazideki şekillerin farklı değerleri temsil ettiği bir dizi terazi problemi sunulmaktadır. Tek bir problemde yer alan iki ya da daha fazla terazi, şekiller ya da değişkenler hakkında farklı bilgiler sağlamaktadır. Bu tür

[1] Ç.N: Bir pound 453 gramlık ağırlık birimidir.

problemlerin zorluk dereceleri çocukların sınıf seviyelerine uygun olarak değiştirilebilir. Greenes ve Findell (1999a, b) 1'den 7. sınıflara kadar kitaplardaki bu ve benzeri etkinlikleri bir araya toplamışlardır.

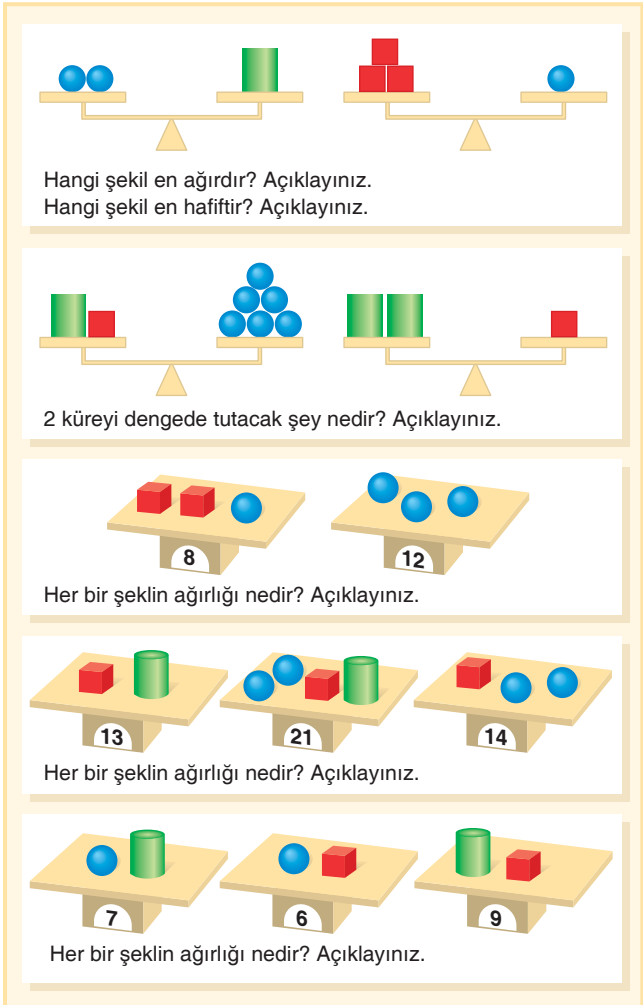
Hiçbir sayı dâhil olmadığında, Şekil 14.7'nin en üstündeki iki örnekte olduğu gibi, öğrenciler tüm terazileri dengede tutan şekiller için sayıların kombinasyonlarını bulabilirler. Eğer şekillerden birisine rastgele bir değer verilirse diğer şekiller için değerler de buna göre bulunabilir.

İkinci örnekte eğer küre 2'ye eşitse o zaman silindir 4'e ve küp de 8'e eşit olmak zorundadır. Eğer küreye farklı bir değer verilirse diğer şekiller de buna göre değişecektir.

Durup düşün!

Şekil 14.7'deki son problemi nasıl çözerdiniz? İki farklı yolla çözebilir misiniz?

Siz (ve öğrencileriniz) başlangıçtaki terazi pozisyonlarıyla çözümlerinizi kontrol ederek doğru çözüp çözmediğinizi söyleyebilirsiniz. İster inanın ister inanmayın ama siz eşzamanlı bir seri denklem çözdünüz; bu beceri genellikle formel cebir derslerine bırakılmaktadır.



Şekil 14.7 Çoklu değişken ve çoklu terazilerler ilgili örnek problemler

İfadeleri ve eşitlikleri sadeleştirmek. Daha önce de belirtildiği gibi eşitlikleri sadeleştirmek ve x için çözmek çoğunlukla anlamsız görevlerdir ve öğrenciler de hangi adımı ne zaman atacaklarından emin olamamaktadırlar. Yine de sadeleştirmenin nasıl yapılacağını bilmek ve eşdeğer ifadeleri fark etmek cebirsel olarak çalışmak için temel becerilerdir. *Öğretim Programı Odak Noktaları*nda (NCTM, 2006) üç odak noktasından birisi cebir hakkındadır: "Matematiksel ifadelerin ve eşitliklerin yazımı, yorumlanması ve kullanımı."

Öğrenciler matematiksel özellikleri nasıl uygulayacakları ve sadeleştirme yaparken eşdeğerliği nasıl muhafaza edebileceklerine dair bir kavrayışa ihtiyaç duyarlar. Bunu sağlamanın bir yolu hatalar yapılan sadeleştirmeler öğrencilere inceletilir ve hataların nasıl giderileceğini açıklamaları istenir (Hawes, 2007). Şekil 14.8'de üç öğrencinin $(2x + 1) – (x + 6)$ işleminin doğru olarak sadeleştirilmesi için sundukları gerekçeler görülmektedir.

Aşağıdaki sadeleştirmenin nasıl düzeltileceğini açıklayınız. Gerekçelerinizi sununuz. $(2x + 1) – (x + 6) = 2x + 1 – x + 6$

Gabrielle'nin çözümü

Eğer x = 3 ise işlem önceliği işin içine girer ve problem (2 - 3 † 1)-(3 † 6) = 2 - 3 † 1 - 3 † 6 gibi bir şey olur 1 † 6 yerine 1 - 3 yapmak zorunda kalırsınız. Fakat bu aslında 3 † 6 ve bu da bir yanlışlıktır.

Prabdheep'in çözümü

Doğru biçimdeki problem şöyle olacaktır (2x † 1)-(x † 6) = 2x † (-1)x † (-6) çünkü () işareti dışında bir eksi işareti vardır. Sol tarafta anlamı-1'dir. Eğer -1 ile x'i çarparsanız -1.x olur 1 - x olmaz. 6'yı da -1 ile çarparsanız -6 olur 6 değil.

Briannon'un çözümü

Siz x ve 6'yı çıkarıyorsunuz; x'i çıkarıp 6 eklemiyorsunuz. Doğru olarak yapılan sadeleştirme şöyledir.

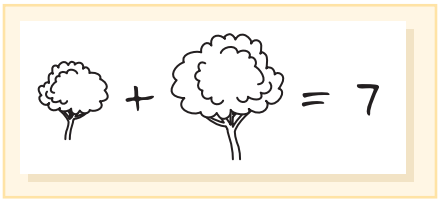
(2x + 1) + -(x + 6) Negatifi dağıt
2x + 1 + -x + -6
x + -5

Şekil 14.8 Üç öğrenci hatalı olarak verilen sadeleştirmeyi düzeltmek için farklı açıklamalar sunuyorlar.

Kaynak: Figure 3 fromHawes, K. (2007). "Using Error Analysis toTeachEquationSolving." *Mathematics Teaching in the Middle School,* 12(5), p. 241.Reprintedwithpermission. Copyright © 2007 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır

Değişkenlerin çeşitlilik gösteren nicelikler olarak kullanımı. Daha önce belirtildiği gibi, değişkenlerin birden fazla eksik değeri temsil edebileceği şeklindeki önemli kavram öğrenciler tarafından iyice anlaşılmamakta ve ilkokul ve ortaokul öğretim programlarında bulunması gereken bu kavram söz konusu programlarda yer almamaktadır. Tek bir eşitlikte farklı değişkenler olduğunda her değişken birçok ve hatta sonsuz sayıyı temsil edebilir. Ortaokul sınıflarında fonksiyonları tanımlamak için kullanılan değişkenler (örneğin $y = 3x - 5$) birçok sayısal çözüme sahip olan değişkenlerdir. Değişkenin bir bilinmeyeni ifade etmesinden bir ilişkiyi temsil etmesi şekline geçiş öğrenciler için zor olabilmektedir. Öğrenciler ilkokul programlarında değişkenlerin çeşitliliği konusunda tecrübe yaşarlarsa bu zorluk azalabilecektir.

Bu bölümde Şekil 14.1'de sunulan iki ağaçtaki maymunlar problemini hatırlayınız. Çok küçük yaştaki öğrenciler bile muhtemel çözümleri semboller kullanarak temsil edebilmektedirler. Örneğin, öğrenciler küçük ağaçtaki maymunlar ile büyük ağaçtaki maymunların toplamını yediye eşitleyen bir gösterim çizebilirler.



Veya harfler kullanabilir ve bağlamdan eşitliğe bağlantı kurmaları için öğrencilere yardım edebilirsiniz. Örneğin, $b = 7 - k$ (burada b büyük ağaçtaki maymun sayısı ve k da küçük ağaçtaki maymun sayısıdır) yazarak büyük ağaçtaki maymunların sayısı, tüm maymunların sayısı eksi küçük ağaçtaki maymunların sayısı şeklinde ifade edilebileceğini iletebilirsiniz.

Ortaokul yılları boyunca öğrencilerin değişkenleri anlamaları için bağlam, sahip olduğu önemi korumaya devam etmektedir. Hyde vd. (2006) çeşitlilik gösteren değişkenleri incelemek için aşağıdaki ortaokul bağlamını sunmaktadırlar:

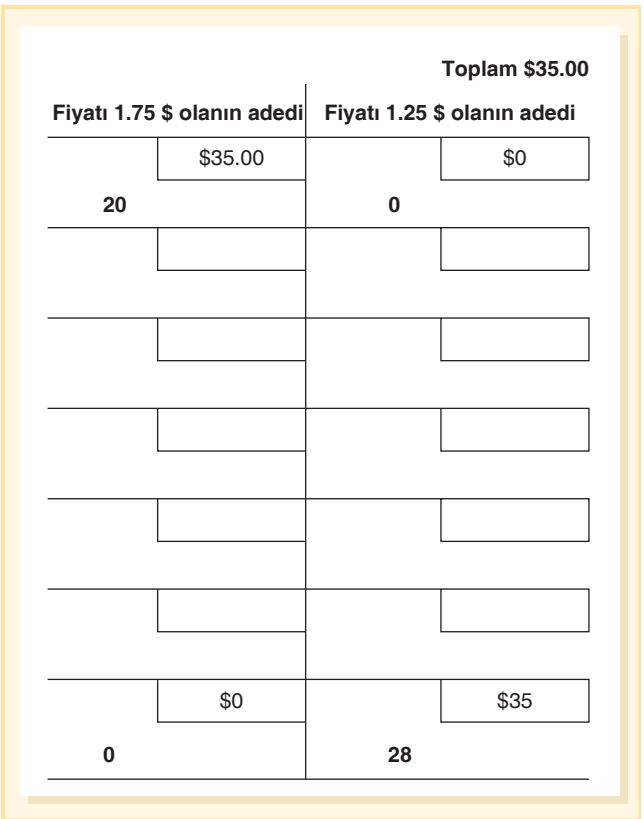
> 2 dolarlık Hershey çikolataları ve 1 dolarlık Tootsie Rolls şekerlemelerinden satın almak için 10 doların varsa kasadan iade almadan kaç farklı yolla paranın hepsini harcayabilirsin?

Bu bağlam öğrenciler için çekicidir; çünkü bu öğrencilerin aşina oldukları bir bağlamdır ve küçük çikolatalar ve şekerlemelerle problemi fiziksel olarak modelleyebilirler (gerçi şekerlerin bağlam olarak kullanılması tavsiye edilmemektedir çünkü sağlıksız yiyeceklerin teşvik edildiği şeklinde yorumlanmaktadır). Bölüm 2'de dile getirildiği gibi siz öğrencilerin ilgisini çekecek, kültürel olarak ilgili olan ve hedeflenen matematik için uygun olan herhangi bir bağlam seçebilirsiniz.

Bu problem üzerine çalışmaya başladığınızda, öğrenciler verileri bir tabloya kayıt eder ve örüntüler ararlar. Hershey çikolatalarının sayısı 1 değiştiği zaman Tootsie-Rolls şekerlemelerinin sayısının 2 değiştiğini fark ederler. Sembolik olarak bu gösterim $2H + T = \$10$ şeklindedir (burada H Hershey çikolatalarının sayısı T ise Tootsie şekerlemelerinin sayısıdır). Değişkenlerin incelenmesinde ondalık ve kesirlerin de dâhil edilmesi de önemlidir. Tüm cebir öğretmenlerinin de onaylayacağı gibi öğrenciler çoğunlukla bu sayılarda zorluk yaşamaktadırlar. Bu ise daha önceden değişkenlerle ondalık sayıların ve kesirlerin bir arada daha somut ve görsel olarak ele alınmamasından kaynaklanmaktadır. Örneğin, eğer fiyatı \$1.75 olan kalemlerden ve \$1.25 olan silgilerden satın alıyorsanız ve toplam \$35'ın tamamını harcarsanız kaç kombinasyon mümkündür? Bu durumu temsil eden denklem nedir?

Özel eğitim öğrencileri veya tablo kullanmaya aşina olmayan öğrenciler için Şekil 14.9'da gösterildiği gibi kaç tane ve ne kadar tuttuğunu içeren bir tabloyu adapte etmek faydalı olacaktır (Hyde vd., 2006). Her bir veri girişinde her iki öğeyi de vurgulayınız (kaç tane ve ne kadar). İlave olarak, hesap makineleri mümkün çözümlerin incelenmesini kolaylaştırabilir. İleri düzey ya da üstün yetenekli öğrencilere yönelik zorluğu artırmak için öğrencilerden değerlerin grafiğini çizmelerini isteyiniz veya daha karmaşık durumları göz önüne alınız.

Öğrenciler sembolik ifadeyi elde ettikleri zaman (bu durumda $1.75x + 1.25y = 35.00$) onlardan her bir sayıyı ve değişkeni bağlamla ilişkilendirmelerini isteyiniz. Bu şekilde, öğrenciler gerçekten de oldukça az anlaşılan şeye anlam verebilecekler ve lise düzeyinde çalışacakları cebir için sağlam bir temel atmış olacaklardır.



Şekil 14.9 Her satır için kaç tane ve ne kadar olduğunu göstermek için adapte edilen tablo.

Kaynak: Hyde, A., George, K., Mynard, S., Hull, C., Watson, S., & Watson, P. (2006). "Creating Multiple Representations in Algebra: All Chocolate, No Change," *Mathematics Teaching in theMiddle School, 11*(6), 262–268. Reprinted with permission. Copyright © 2006 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.

Sayı Sistemindeki Yapıyı Görünür Kılmak



Bölüm 9 her bir işleme yönelik olarak öğrencilerin temel bilgileri ve işlem stratejilerini öğrenmelerinde önem taşıyan bazı özellikleri tartışmaktadır (Bkz. s. 153 ve ss. 160-161). Örneğin, toplama ve çarpma için değişme veya sıralama özellikleri, öğrenilmesi gereken bilgileri ciddi oranda azaltmaktadır. Doğru/yanlış ve açık cümlelerle çalışırken ilişkisel düşünmenin gelişimi esnasında öğrencilerin bu ve diğer özellikleri informel olarak kullanmaları muhtemeldir.

Sonraki adım ise öğrencilere bu yapıları veya özellikleri açıktan incelettirmek ve özel sayılara işaret etmeksizin bunları genel terimlerle ifade etmelerini sağlamaktır. Örneğin, 394 + 176 = *N* + 394 eşitliğini çözen bir öğrenci N'nin 176 olması gerektiğini çünkü 194+176 ifadesinin 176+394 ile aynı olduğunu söyleyebilir. Bu değişme özelliğinin özel bir halidir. Bunu (ve sayı sistemimizin diğer yapısal özelliklerini) $a + b = b + a$ gibi bir formda ifade etmek ve bunun da tüm sayılar için doğru olduğunu belirtmek bir yapıyı incelemenin esas amacıdır. Görünür hâle gelip anlaşıldığında, bu yapılar öğrencilerin işlem yapma araçlarına katkıda bulunmakla kalmaz aynı zamanda sayı sistemine dair anlayışlarını zenginleştirir ve daha yüksek seviyelerde soyutlamalar yapmaları için onlara bir temel sağlar (Carpenter vd., 2003).

Özellikler Hakkında Varsayımlarda Bulunmak

Sayı sisteminin özellikleri öğrencilerin doğru/yanlış ve açık sayı cümleleriyle çalışmaları sırasında inşa edilebilir. Örneğin, üçüncü sınıf öğrencileri genellikle doğru/yanlış cümlesi olarak ifade edilen 41 × 3 = 3 × 41 eşitliğinin doğru olduğunda mutabık kalacaklardır. Fakat buradaki hayati soru "Bu tüm sayılar için doğru mudur?" Bazı öğrenciler, bu ifade doğru gözükmesine rağmen belki de henüz denenmemiş iki sayı için bunun doğru olmayabileceğini iddia edebilirler.

Aşağıdaki sınıf problemi ve tartışması, eşitliğin doğru ya da yanlış olmasına değil de, dağılma ve birleşme özelliklerinin incelenmesi üzerine odaklanmıştır (Baek'ten (2008) alınmıştır):

Bayan J: [*Tahtadaki* $(2\times8)+(2\times8)=16+16$ *ifadesini göstererek*] Bu doğru mu yanlış mı?

LeJuan: Doğru, çünkü iki tane 8, 16 yapar ve iki 8, 16'dır.

Lizett: (2 × 8) + (2 × 8), 32'dir ve 16 + 16, 32'dir.

Carlos: 8 artı 8, 16'dır; bu yüzden 2 kere 8, 16 yapar ve 8 artı 8, 16'dır ve 2 kere 8, 16'dır.

Bayan J: [*Tahtaya* 4x8=(2x8)+(2x8) *yazarak*] Doğru mu yanlış mı?

Öğrenciler: Doğru.

Bayan J: 2 neyi ifade eder?

Reggie: İki kutu sekizi.

Bayan J: O halde kaç kutu vardır?

Öğrenciler: Dört.

Bayan J: [*Tahtaya* 32+16=(4x8)+(ax8) *yazarak*] a nedir?

Micheal: İki, çünkü 4 kere 8, 32'dir ve 2 kere 8, 16'dır.

Bayan J: [*Tahtaya* (4x8)+(2x8)=(bx8) *yazarak*] b nedir?

Öğrenciler: 6. (ss. 151-152)

Öğretmenin bu özelliklerin çeşitli yönlerini kavramsal bir şekilde nasıl geliştirdiğine dikkat ediniz. Öğrencilerin ilk tecrübe ettiklerinde Tablo 14.1'de görüldüğü şekliyle özellikleri sunmak yerine (ki bu anlamsız bir ezber etkinliği olacaktır) onların genelleme yapmalarına rehberlik edecek örnekler üzerine odaklanmaktadır.

Öğrencilerden, belirli bir sayı kullanmaksızın, ana fikri ifade etmelerini isteyerek diyalogda geçen özel örnekleri takip edebilirsiniz. Örneğin, bir sayıyı ikinci bir sayı ile çarparken, birinci sayıyı parçalara ayırır ve her bir parçayı da ikinci sayıyla çarparak aynı cevabı elde edebilirsiniz. Eğer bir genelleme açık değilse veya tam olarak doğru değilse, cümledeki kelimelerin ne anlama geldiği anlaşılıncaya kadar tüm öğrencilerle birlikte tartıştırınız. Özelliğin bu sözel ifadesini tahtaya yazınız. Bunu bir varsayım olarak isimlendiriniz ve sadece biz doğru olduğunu düşündüğümüz için bunun mutlaka doğru olması gerekmediğini açıklayınız. Birisi ispatlayıncaya veya aksi örnek (varsayımın doğru olmadığı bir durum) buluncaya kadar bu bir varsayım olarak kalacaktır.

Öğrenciler birinci ve ikinci sınıflarda bile özellikler hakkında varsayımlarda bulunabilirler. Üçüncü ve dördüncü sınıflarda öğrenciler sözel varsayımları açık cümleler halinde ifade etmeye zorlanmalıdırlar. Az önceki varsayım herhangi iki harf kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir: $c + d = a$ olmak üzere $a \times b = (c \times b) + (d \times b)$. Aynı fikrin sembolik ifadesine geçmeden önce öğrencilerden varsayımlarını sözel olarak ifade etmelerini isteyiniz. Sonra sembolik formdaki her bir değişkenin ne anlama geldiğini açıklatınız.

Etkinlik 14.9

Varsayım Oluşturma

Sizin doğru/yanlış cümlelerinizdeki incelemelerinizden ortaya çıkan birkaç varsayımı gördükten sonra, öğrencilerinizi kendi varsayımlarını (yani sayılar ve işlemler hakkında her zaman doğru olduğuna inandıkları ifadeleri) oluşturmaları için zorlayınız. Varsayımları kelimelerle ifade ettirmek en iyisidir. Tüm sınıf çeşitli varsayımları tartışmalıdırlar; açıklama istemeli ve aksi örnek bulmaya çalışmalıdırlar. Varsayımlar sınıf listesine sözel ve sembolik biçimde yazılarak eklenebilir.

Öğrencilerin varsayımlar geliştirebileceği sayı sisteminin temel özellikler Tablo 14.1'de listelenmiştir.

Öğrencilerin, sıfır ile bölmenin niçin mümkün olmadığını anlamaları ya da bilmeleri neredeyse imkânsızdır. Bu özelliği anlamlandırmaları için onlara bağlamlar sunmak zorunda kalacaksınız.

Table 14.1

Sayı Sisteminin Özellikleri

Sayı Cümlesi	Öğrenci Varsayım İfadesi
	Toplama ve çıkarma
$a + 0 = a$	Bir sayıya sıfır eklediğinizde, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
$a - 0 = a$	Bir sayıdan sıfır çıkardığınızda, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
$a - a = 0$	Bir sayıyı kendisinden çıkardığınızda sıfır elde edersiniz.
$a + b = b + a$	Sayıları bir sırayla toplayıp ve sonra sıralamayı değiştirerek topladığınızda aynı sayıyı elde edersiniz.
	Çarpma ve bölme
$a \times 1 = a$	Bir sayıyı 1 ile çarptığınızda başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
$a \div 1 = a$	Bir sayıyı 1 ile böldüğünüzde başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
$a \div a = 1, a \neq 0$	Sıfırdan farklı bir sayıyı kendisine böldüğünüzde 1 elde edersiniz.
$a \times 0 = 0$	Bir sayıyı sıfırla çarptığınızda sıfır elde edersiniz.
$0 \div a = 0, a \neq 0$	Sıfırı, sıfırdan farklı bir sayıyla böldüğünüzde sıfır elde edersiniz.
$a \times b = b \times a$	İki sayıyı çarparken, çarpmayı istediğiniz sırayla yaparsınız ve aynı sayıyı elde edersiniz.
	Temel özelliklerden elde edilen varsayımlar
$a + b - b = a$	Bir sayıya başka bir sayı eklediğinizde ve sonra eklediğiniz sayıyı çıkardığınızda, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
$a \times b \div b = a, b \neq 0$	Bir sayıyı sıfırdan farklı bir sayıyla çarptığınızda ve sonra aynı sayıya böldüğünüzde, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.

Kaynak: AdaptedfromCarpenter, T. P.,Franke, M. L., andLevi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Varsayımları Doğrulamak

Bir varsayımın doğruluğunu gösterme girişimi önemli bir cebirsel muhakeme biçimidir ve matematik yapmanın ifade ettiği anlamın merkezindedir. Küçük yaştaki öğrencilerin bir şeyin her zaman doğru olduğunu nasıl ispatladıkları görece olarak yeni ve ilginç bir araştırma alanıdır (Ball ve Bass, 2003; Carpenter, Franke ve Levi, 2003; Schifter, 1999; Schifter, Monk, Russell ve Bastable, 2007). Bu araştırmacıların hepsi, öğrencileri ikinci sınıf kadar erken dönemde bile yaptıkları varsayımların her zaman doğru olduğunu göstermeleri için zorlamanın ciddi bir değere sahip olduğuna inanmaktadırlar. Bu yüzden sınıfta varsayımlar yapıldığında cevap vermek yerine onlara şunu sorunuz: "Bunun her zaman doğru olduğunu düşünüyor musun? Bunu nasıl anlayabiliriz?" Öğrenciler bu durumda, başkalarının sözlerine dayanmak yerine kendi düşüncelerine dayalı olarak gerekçe sunmak zorunda kalırlar.

En yaygın doğrulama biçimi, özellikle ilkokullarda, örneklerin kullanımıdır. Öğrenciler birçok özel sayıyı yaptıkları varsayımlarda deneyeceklerdir. "Gördünüz mü, denediğiniz her sayı için çalışıyor." "Herhangi bir" sayı olarak çok büyük sayıları ve hatta rasyonel kesirleri ve ondalık değerleri deneyebilirler. Örneklerle yapılan ispatın bir kimseyi şu soruyu sormaya yöneltmesi ümit edilir: "Doğrulamayan sayılar olmadığını nereden biliyoruz?"

Daha az sıklıkta öğrenciler bir mantık biçimi kullanma girişiminde bulunacaklardır. Genellikle bu yöndeki uğraşlar varsayımın arkasındaki gerekçeyi göstermek için fiziksel materyallerin kullanımını içermektedir. Örneğin, $a + b = b + a$ olduğunu ispatlamaya çalışan bir öğrenci birbirine geçmeli küplerden oluşan, birinde 6 ve diğerinde 8 küpün bulunduğu, iki çubuğu gösterebilir. İki çubuğun sıralaması değiştiğinde çubukların üzerinde bulunan küplerin sayının değişmediğini göstermek için bu çubuklar kullanılır. Bu durumu bir örnek vermenin ötesine taşıyan şey ise çubuklardaki küplerin sayıları öğrencinin ifade veya açıklamasının bir parçası değildir: "her çubukta kaç küp olursa olsun bu her zaman böyledir."

İlkokul düzeyinde öğrencilerin hepsi iddialar geliştiremez ve hatta bazıları başkaları tarafından geliştirilenleri bile takip edemez (Carpenter vd., 2003). Fakat tüm seviyelerde öğrencileri mantık kullanarak gerekçe sunmaları için zorlamak ve otoriteye başvurma ya da örnek kullanımından hoşnut olmamak önemlidir. Unutmayınız ki sizin amacınız öğrencilerin düşüncelerinin bu doğrulama sürecine dâhil olmasıdır; kendi öğrencileriniz için sadece sizin yaptığınız güzel gerekçelendirmelerin çok az bir değeri vardır.

Teklik ve çiftlik ilişkileri

Sayı yapılarının ilginç bir kategorisi tek ve çift sayılardır. Öğrenciler genellikle iki çift sayının toplamının bir çift sayı olduğunu, iki tek sayının toplamının çift sayı olduğunu veya bir tek sayı ile çift sayının toplamının tek sayı olduğunu gözlemlerler. Benzer önermeler çarpma için de yapılabilir.



Durup Düşün!

Okumaya devam etmeden önce, iki tek sayının toplamının her zaman bir çift sayı olduğunu nasıl ispatlayabileceğiniz hakkında düşünün.

Öğrenciler tek/çift varsayımlarına çeşitli ilginç ispatlar sunacaklardır. Diğer varsayımlarda olduğu gibi, onlar tipik olarak birçok sayıyı deneyerek başlayacaklardır. Fakat "bir yerlerde" varsayımı doğrulamayan sadece iki sayının olabileceğini düşünmek biraz daha kolaydır. Sonra öğrenciler tanıma veya tanımı açıklayan bir modele dönerler. Örneğin, eğer bir sayı tek ise ikiye böldüğünüzde kalan birdir. Eğer bunu ikinci bir tek sayıyla yaparsanız o da bir kalanına sahip olacaktır. O halde eğer bu iki sayıyı bir araya koyarsanız iki tane kalan sayı birlikte gidecek ve toplamda hiç kalan olmayacaktır. Öğrenciler çoğunlukla iddialarını desteklemek için birbirine geçmeli küplerden oluşan çubuklar gibi modelleri kullanırlar.

Aşağıdaki hesap makinesi etkinliği öğrencilerin tek ve çift sayıların özelliklerini incelemelerine yardımcı olur.

Etkinlik 14.10

Bozuk Hesap Makinesi: Tamir Edebilir misiniz?



Aşağıdaki iki durumu inceleyiniz ve sonrasında öğrencilere tek ve çift sayılar hakkında yapabilecekleri varsayımları sorunuz.

1. **Eğer çift tuşları (0, 2, 4, 6, 8) kullanamasanız hesap makinesinin göstergesinde bir çift sayı oluşturabilir misiniz? Evet ise, nasıl?**
2. **Eğer tek tuşları (1, 3, 5, 7, 9) kullanamasanız hesap makinesinin göstergesinde bir tek sayı oluşturabilir misiniz? Evet ise, nasıl?**



Tüm öğrencilerin varsayımlar üretmesi önemli değildir. Önemli olan tüm öğrencilerin etkinolarak sınıf arkadaşları tarafından üretilen varsayımların geçerliğini değerlendirmeleridir. Bir varsayımın her zaman doğru olup olmadığını belirlerken, öğrencilerinizin düşüncelerini sınıfla paylaşmadan önce yazmalarını sağlayınız. Eğer hemen sınıf tartışmasına başlarsanız sadece birkaç öğrenci katılacaktır ve diğerleri iddiaları takip etsin veya etmesin dinlemekle yeteneklerdir. Öğrencilerin yazdıklarını ve tartışmaya katkılarını kullanarak onların gerekçe sunmada hangi düzeyde olduklarını değerlendirebilirsiniz: otorite, örnek kullanımı veya mantığa başvurma. ◆

Örüntüler ve Fonksiyonları Çalışmak



Örüntüler matematiğin tüm alanlarında bulunur. Örüntü aramayı ve onların nasıl tarif edileceğini, başka bir duruma aktarılacağını ve genişletileceğini öğrenmek matematik yapmanın ve cebirsel olarak düşünmenin bir parçasıdır.

Tekrar Eden Örüntüler

Tekrar eden örüntüler kavramı ve bir örüntünün nasıl genişletileceği veya sürdürüleceği konularına giriş birkaç yolla yapılabilir. Bir olasılık, tahtaya basit bir şekil örüntüsü çizilip sınıf tartışmasıyla bu örüntü genişletilir. Sözlü örüntüler de ezberden okunabilir. Örneğin "do, mi, mi, do, mi, mi" basit bir şarkı örüntüsüdür. Kollar yukarı, aşağı ve yanlara gibi vücut hareketleri, örneğin, örüntü oluşturmak için üç hareket sağlar: yukarı, yanlara, yanlara, aşağı, yukarı, yanlara, yanlara, aşağı. Kız-erkek örüntüleri veya otur-kalk örüntüleri de güzel hareket örüntüleridir.

Çocuk kitaplarında genellikle tekrar eden örüntüler vardır. Örneğin, çok uzun bir tekrar eden örüntü *If You Give a Mouse a Cookie* (Eğer bir fareye bir kurabiye verirsen) (Numeroff, 1985) kitabında bulunabilir. Bu kitapta, zincirleme olarak tekrar edeceğine işaretle, her olay nihayetinde fareye bir kurabiye vermeye dönmektedir.

Tekrar eden örüntülerin tanımlanması ve genişletilmesi Tekrar eden örüntülerle çalışırken önemli bir kavram öğrencilerin örüntünün özünü tanımlamalarıdır (Warren ve Cooper, 2008). Tekrar eden örüntünün *özü* tekrar eden öğeler şeritidir. Ayrıca öz bilgisini kullanarak örüntüyü genişletmek de önemlidir.

Etkinlik 14.11

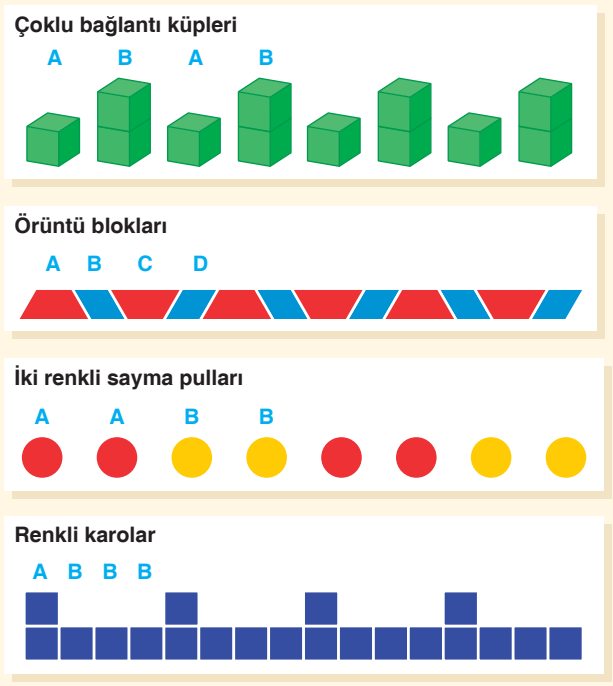
Örüntü Şeritlerinin Yapımı

Öğrenciler basit materyallerden yapılan örüntüleri genişletmek için bağımsız olarak ya da ikili veya üçlü gruplarda çalışabilirler: düğmeler, renkli bloklar, birbirine geçmeli küpler, kürdanlar, geometrik şekiller (bunların hepsini kolaylıkla bulabilirsiniz). Her bir materyal seti için, 5 × 30 cm ebatlarındaki şeritlere iki veya üç kez tekrar etmiş tam bir örüntü çiziniz. Öğrencilerin görevi gerçek materyaller kullanarak gösterilen örüntüyü kopyalamak ve istedikleri kadar genişletmektir. Şekil 14.10 çeşitli manipülatiflerden her biri için olası örüntüleri örneklendirmektedir. Siz de bir manipülatif seçip on farklı örüntü şeridi yapabilirsiniz. Böylece öğrenciler eşleştikleri kişilerle birlikte çalışır, değiş tokuş yapar ve örüntünün özü ve genişletilmesi üzerine çalışabilirler.

Küçük çocuklar farklı materyallerle oluşturulan iki örüntünün aslında aynı örüntüler olduğunu anladıklarında önemli bir genelleme yapmaktadırlar. Örneğin, Şekil 14.10'da olduğu gibi, küplerle tekrarlı bir örüntü oluşturulduğunda, öğrencilerden örüntü bloklarından yapılan örüntülerle şeritlerdekilerden birisiyle aynı olan örüntüyü bulmalarını ya da aynı örüntüyü yapmalarını isteyebilirsiniz.



"Renk örüntüsü olan 'mavi, mavi, kırmızı, mavi, mavi, kırmızı' ile 'el çırpma, el çırpma, adım atma, el çırpma, el çırpma, adım atma' örüntülerinin



Şekil 14.10 Manipülatifler kullanarak yapılan tekrar eden örüntü örnekleri.

aynı biçimde olduğunu öğrenciler fark etmelidirler. Bu farkındalık iki farklı durumun aynı matematiksel özelliklere sahip olabileceği ve böylece bazı önemli yönleriyle aynı olabilecekleri fikrinin temelini oluşturur. Yukarıdaki her bir örüntünün AABAAB biçimine sahip olarak tanımlanması öğrencilerin cebirin gücüyle erken bir tanışmasıdır" (ss. 91-92). ◆

Aşağıdaki etkinlikler *İlkeler ve Standartlar*dan yapılan alıntıda tasvir edilen güçlü cebirsel kavram olan tekrar eden örüntüleri yansıtmaktadır.

Etkinlik 14.12

Örüntüyü Eşleştirme

Tahta ya da tepegöz kullanarak farklı materyaller veya resimlerle (örn. gülen yüzler, farklı yönlere işaret eden oklar vs.) üretilmiş altı ya da yedi farklı örüntü (örn. ABAB, ABCABC vs.) gösteriniz. Öğrencileri ikişerli olarak gruplayınız. Öğrencilerden birisi gözünü kapatır diğeri seçtikleri örüntünün özünü tanımlamak için A, B, C şemasını kullanır.

Örüntüyü duyduktan sonra gözü kapalı olan öğrenci örüntüleri inceler ve hangi örüntünün anlatıldığını bulmaya çalışır. Eğer listedeki örüntülerden ikisi aynı yapıya sahipse tartışma çok ilginç olacaktır.

Tersine olarak öğrencilere bir örüntünün özünü A, B, C etiketleriyle veriniz (örn. ABCD veya ABB) ve iki veya üç farklı model kullanarak bu türden bir örüntü oluşturmalarını isteyiniz. Bir örüntünün bir ortamdan diğerine dönüştürülmesi, örüntüdeki ilişki ile örüntüyü inşa etmek için kullanılan materyalin birbirinden ayrılmasında öğrenciye yardımcı olur.

Tekrar eden örüntünün tahmin edilmesi: bölünebilmeyle ilişkilendirme. Tahminde bulunma cebirsel düşünmenin önemli bir parçasıdır. Aşağıdaki etkinlik fonksiyonları incelemenin ön hazırlığı olarak tahminde bulunma üzerine odaklanır.

Etkinlik 14.13

Sonrakini tahmin et

Tekrar eden örüntülerin çoğunda örüntüdeki ögeler 1, 2, 3,...şeklinde sayılabilir. Öğrencilere genişletilebilecek bir örüntü veriniz. Öğrenciler örüntüyü genişletmeye başlamadan önce, onlardan, örneğin, 15. adımda tam olarak kaç adet öğenin bulunacağını tahmin ettiriniz. Öğrencilerden tahminleri için, tercihen yazılı olarak, gerekçe sunmaları istenmelidir.

ABC örüntüsünde üçüncü, altıncı, dokuzuncu ve on ikinci terimlerinin C olduğuna dikkat ediniz. Öğrenciler, on sekizinci ve yirmi birinci öğenin ne olacağını bulmak için çarpma ve bölme kavramlarını kullanabilirler. Yüzüncü öğenin ne olacağını tahmin etmelerini isteyiniz. 100 ÷ 3 = 33 olduğundan kalan 1'dir; bu da örüntüdeki öğenin A olacağını gösterir. Eğer yüzüncü öğenin tahmin edilmesi istenmişse, öğrenciler örüntüyü genişleterek tahminlerini kontrol edemeyeceklerdir. Gerekçelendirme öğrencilerin çarpma ve bölme bilgilerine odaklanır (Warren ve Cooper, 2008).

Gerçek bağlamların kullanımı. Geometrik örüntüler ve hareketler (el çırpmak gibi) örüntülere giriş için güzel seçenekler olmakla birlikte öğrencilerin örüntüleri çevrelerindeki dünyada da görmeleri önemlidir. Mevsimler, haftanın günleri ve aylar başlangıç için birkaç örnektir. Öğrenciler AB şeklindeki örüntüleri günlük faaliyetlerinde düşünebilirler; örneğin "okula, evden okula" veya "yemekten önce masayı hazırla, yemekten sonra masayı temizle" gibi.

Sonrasında ne olacağının tahmin edilmesi, ilkokul son sınıflar ve ortaokul öğrencilerine uygun olan ilginç gerçek hayat bağlamlarına sahiptir. Bağlamlardan birisi Olimpiyatlardır (Bay-Williams ve Martinie, 2004). Yaz Olimpiyatları 2008, 2012'de ve her dört yılda bir düzenlenir. Kış Olimpiyatları 2010, 2014 şeklindeki yıllarda düzenlenir. Bu da ABCD veya ABAC şeklinde örüntülere yol açar: Olimpiyat yok, Yaz Olimpiyatları, Olimpiyat yok, Kış Olimpiyatları.

İkinci bağlam kasırga isimleridir; ABCDEF tekrarlı örüntüsüne sahiptirler. Yani alfabedeki her bir harf için kullanılan altı isim vardır ve sonra tekrar eder (çok büyük bir kasırgaya verilen isimler emekli edilmekte ve bir daha kullanılmamaktadır; Katrina kasırgasında olduğu gibi) (Fernandez ve Schoen, 2008). Örneğin, A ile başlayan isimler şunlardır: 2006—Alberto, 2007—Andrea, 2008—Arthur, 2009—Ana, 2010—Alex, and 2011—Arlene. (Cinsiyeti dikkate aldığınızda ABAB örüntüsünü fark ettiniz mi?) İsimlerin emekliye ayrılmadığını varsayarak öğrencilere aşağıdaki gibi sorular yöneltiniz:

- Hangi yılda, o yıl içinde oluşan kasırganın adı Alex olacaktır?
- 2020 ve 2050 yıllarındaki ilk kasırgaların isimleri ne olacaktır?
- Yıl verildiğinde, kasırganın ismini nasıl bulduğunuzu yazarak açıklayabilir misiniz?

Sayı örüntüleri. Sonrasında ne olacağı tahmin edilen bağlamların kullanımı gibi sayı örüntüleri de (1, 2, 1, 2 gibi basit tekrarlı örüntülerden çok daha karmaşığına kadar çeşitlilik gösterebilir) öğrencilerin ilgisini çekebilmektedir. Bu haliyle örüntüler, üstün yetenekli öğrenciler için zorlu bir uğraş alanı olabileceği gibi bir öğrenme ortamında diğer çalışmalarını erken bitirenler tarafından da incelenebilir. İşte size birkaç örnek:

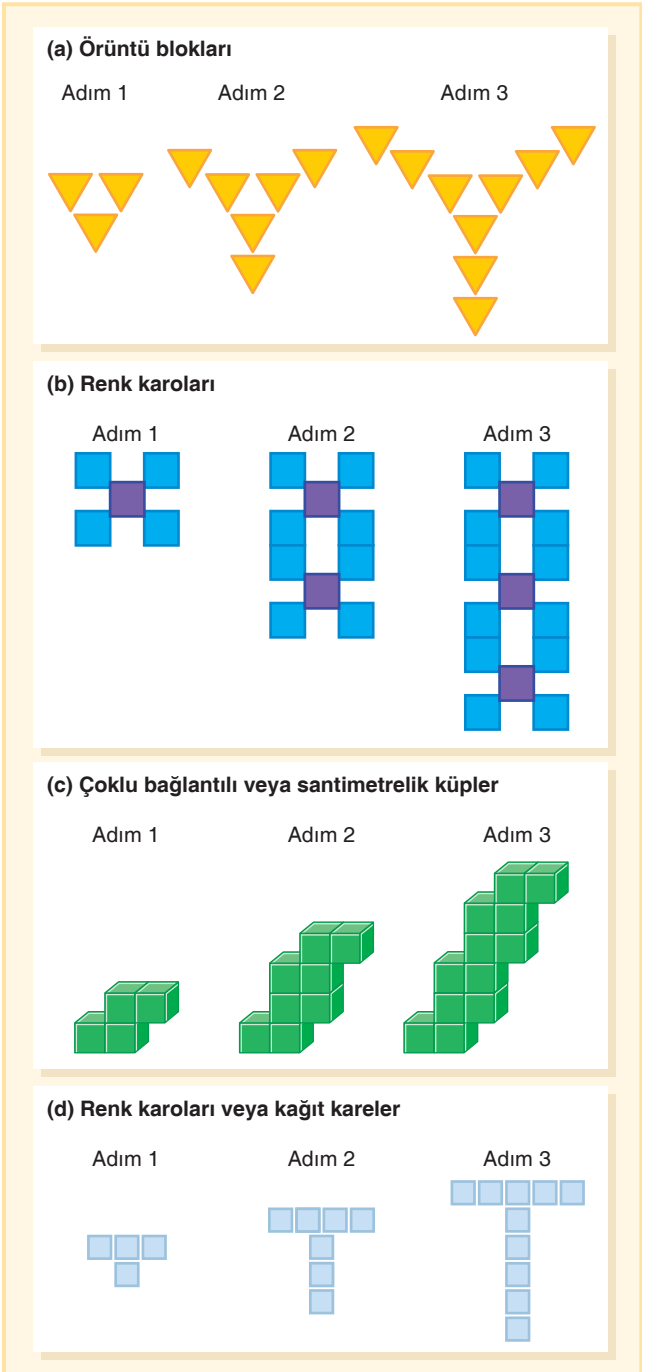
2, 4, 6, 8, 10, . . .	(çift sayılar, her seferinde iki ekle)
1, 4, 7, 10, 13, . . .	(1 ile başla ve her seferinde 3 ekle)
1, 4, 9, 16, . . .	(kareler)
0, 1, 5, 14, 30, . . .	(sonraki kare sayıyı ekle)
2, 5, 11, 23, . . .	(sayının iki katını al ve 1 ekle)
2, 6, 12, 20, 30, . . .	(sayma sayı çiftlerini çarp)
3, 3, 6, 9, 15, 24, . . .	(kendinden önce gelen iki sayıyı topla-Fibanocci dizisine bir örnek)

Bu örüntülerden her biri için öğrenciler on üçüncü veya yüzüncü sayıyı tahmin ederler; nihayetinde dizideki herhangi bir sayıyı bulmak için genel bir kural bulurlar.

Hesap makineleri örüntülere oldukça faydalı bir yaklaşım sağlarlar. Güzel bir örnek için Bölüm 2'deki (s.15) "Saymaya Başla ve Atlayarak Say" etkinliği için yapılan tartışmaya bakınız.

Genişleyen örüntüler

Yaklaşık olarak dördüncü sınıftan başlayarak ortaokul yıllarına uzanan yıllarda öğrenciler bir adımdan diğerine artış gösteren örüntüleri inceleyebilirler. Teknik olarak bunlar diziler olarak isimlendirilir; biz bunları genişleyen örüntüler diye adlandıracağız. Bu örüntülerle öğrenciler sadece örüntüyü genişletmekle kalmaz aynı zamanda örüntünün herhangi bir noktada ne olacağını söyleyecek genellemeler veya cebirsel ilişkiler ararlar. Genişleyen örüntüler fonksiyonlar olabilir ve ders kitaplarında kullanılan genişleyen örüntüler genelde fonksiyondurlar. Şekil 14.11(a) genişleyen bir örüntüdür. Burada tasarım 1, üç tane üçgen gerektirir, tasarım 2 altı üçgen gerektirir ve böyle devam eder. İhtiyaç duyulan üçgenlerin sayısı hangi tasarımda bulunduğuyla ilgili bir fonksiyondur (bu fonksiyon: üçgenler = 3 x tasarım numarası). Bu bölümde daha önce ele alınan Kenarlık Problemi genişleyen örüntü şeklinde adapte edilebilir; bunun için 5'e 5, sonra 6'ya 6, sonra 7'ye 7 ve devam eden şekilde yüzme havuzları yapılır.



Şekil 14.11 Manipülatif kullanımıyla yapılan geometrik genişleyen örüntüler

Geometrik örüntüler güzel örnekler sunarlar çünkü örüntüyü görmek kolaydır ve çünkü öğrenciler nesneleri hareket ettirerek değiştirebilirler. Şekil 14.11'de, ihtimaller sonsuz olmakla birlikte, dört farklı manipülatif için genişleyen örüntüler görülmektedir.

Şekil 14.11(a)'daki örüntülerle eşlenebilecek olan Etkinlik 14.14'teki sorular yaygın olarak kullanılarak (ve kullanımı da güzeldir!) öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri düşünmelerine yardım edilebilir.

Etkinlik 14.14

Kaç tane olduğunu tahmin edin

İki kişi ya da küçük gruplar halinde çalışarak, öğrencilere bir örüntüyü inceletiniz ve aşağıdaki sorulara cevap vermelerini isteyiniz:

- **Her adımdaki üçgenlerin sayısını gösteren tabloyu doldurunuz.**

Adım Sayısı	1	2	3	4	5 . . .	10	20
Üçgen Sayısı							

- **Adım 10 için kaç tane üçgen gerekir? Adım 20? Adım 100? Gerekçenizi açıklayınız.**
- **Herhangi bir adımdaki (*n*) toplam parça sayısını veren bir kural yazınız (kelimeler ve/veya sembollerle).**

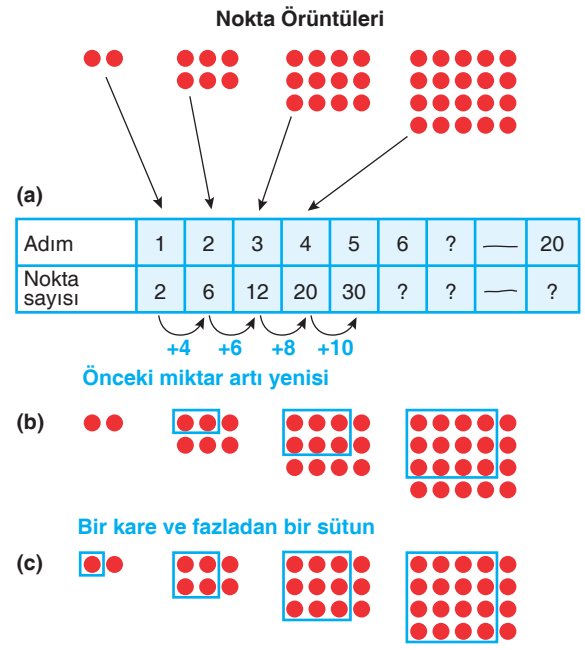
Öğrencilerin artan örüntülerle çalışmaları, oldukça kolay örüntülerle başlamalı (Şekil 14.11'deki gibi) ve sonra daha karmaşık olmalı ve en son çok zorlaşmalıdır (Bkz. Şekil 14.12).

Genişleyen örüntülerle yapılan çalışmalara kesirler ve ondalık sayıların da dâhil edilmesi önemlidir. 2003 yılında, Eğitimde Gelişimin Ulusal Değerlendirmesi (*National Assessment of Educational Progress*) (NAEP) 13 yaşındakileri Şekil 14.13'teki soru ile sınava tabi tuttu. Öğrencilerin sadece % 27'si doğru olarak cevapladı (Lambdin ve Lynch, 2005).

İlişkiler ararken bazı öğrenciler tabloya ve bazıları da fiziksel örüntüye odaklanırlar. Öğrencilerin, keşfettikleri ilişkiler ne olursa olsun, bunların her iki biçimde de var olduğunu görmeleri önemlidir. Tabloda bir ilişki bulunursa, bunun fiziksel formunda nasıl karşılık bulduğunu görmeleri için öğrencileri zorlayınız.

Yinelemeli Örüntüler ve Formüller. Çoğu öğrenci için bir adımdan diğerine örüntüleri görmek daha kolaydır. Şekil 14.12(a)'da her adımdaki sayı, ardışık çift sayıları toplamak suretiyle, bir önceki adımla belirlenebilir. Bir adımdan diğerine bir örüntünün nasıl değiştiğini belirten açıklama yinelemeli örüntü olarak bilinir (Bezuska ve Kenney, 2008).

Yinelemeli örüntü aynı zamanda fiziksel örüntüde de görülebilir. Şekil 14.12(b)'de her adımda önceki adımın



Şekil 14.12 "Nokta örüntüsündeki" ilişkinin iki farklı yolla analizi

çerçevelendiğine dikkat ediniz. Bu eklenen miktarı incelemenize ve çift sayılar üzerine eklenen örüntünün nasıl oluştuğunu görmenize izin verir.

Yinelemeli formüller, size bir adım verildiğinde, sonraki niceliği nasıl elde edeceğinizi gösteren eşitliklerdir. Örneğin, Şekil 14.11'de birinci tasarım her seferinde 3 üçgen

Terim	1	2	3	4
Kesir	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Yukarıdaki kesirlerin listesi aynı örüntüyle devam ederse 0.95'e eşit olan terim hangisidir?

Ⓐ 100.
Ⓑ 95.
Ⓒ 20.
Ⓓ 19.
Ⓔ 15.

Şekil 14.13 NAEP'nin 13 yaşındakiler için kullandığı soru.

Kaynak: Lambdin, D. V.,& Lynch, K. (2005). "Examining Mathematics Tasks from the National Assessment of Educational Progress." *Mathematics Teaching in the Middle School,* 10(6), 314–318. Reprintedwithpermission. Copyright © 2005 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.

olarak artar; bu durumda yinelemeli formül SONRAKİ = ŞİMDİKİ + 3 olarak yazılabilir. Eğer ŞİMDİKİ adım 5'teki nicelik ise o zaman SONRAKİ adım 6'daki niceliktir. Şekil 14.11'deki diğer üç örüntü için yinelemeli formülü yazmayı deneyiniz.

Açık formüller. Yinelemeli formülün yüzüncü adımdaki tablo değerini bulmaya yardımcı olabilmesi için önceki 99 değerin hepsinin bulunması gerekir. Eğer adım sayısı ile adımdaki nesne sayısını ilişkilendiren bir formül bulunabilirse tablodaki her değer, kendisinden önce gelenleri hesaplamak zorunda kalmaksızın, belirlenebilir. Bir adımdaki öğelerin sayısını adım sayısından belirlemeye yarayan kural *açık formül* olarak isimlendirilir. İlk ve ortaokul etkinliklerinde ve ders kitaplarında açık formül, genişleyen örüntü için "kural" olarak isimlendirilir.



Durup Düşün!

Şekil 14.12'deki örüntü için bir açık formül belirleyebilir misiniz? Formülü nasıl buldunuz?

Adım ve adım sayısı arasındaki ilişkiyi bulmak için en iyi yol bir tek değildir ve muhtemelen öğrenciler de bunu farklı yollarla bulacaklardır. Bazıları tabloyu analiz edecek ve şunu fark edecektir: eğer adım sayısını sonraki adım sayısıyla çarparlarsa o adımdaki daire sayısını elde edeceklerdir. Bu da d noktaların sayısı ve n, adım sayısı olmak üzere $d = n(n + 1)$ şeklindeki açık formüle yol açacaktır.

Bazıları neyin değiştiğini görmek için fiziksel örüntüyü inceleyecektir. Şekil 14.12(c)'de bir kare düzeni her adım için çerçevelenmiştir. Her ardışık karenin kenarı öncekinden bir fazladır. Bu örnekte her karenin kenarı adım sayısıyla aynıdır. Her karenin sağındaki sütun aynı zamanda adım sayısıdır. Bu noktada, her adım için sayısal bir ifade yazmak öğrencilerin açık formülü yazmalarına yardımcı olur. Örneğin, Şekil 14.12'deki ilk dört adım $1^2 + 1$, $2^2 + 2$, $3^2 + 3$ ve $4^2 + 4$ şeklindedir. Bu yüzden açık formül $d = n^2 + n$ şeklindedir.

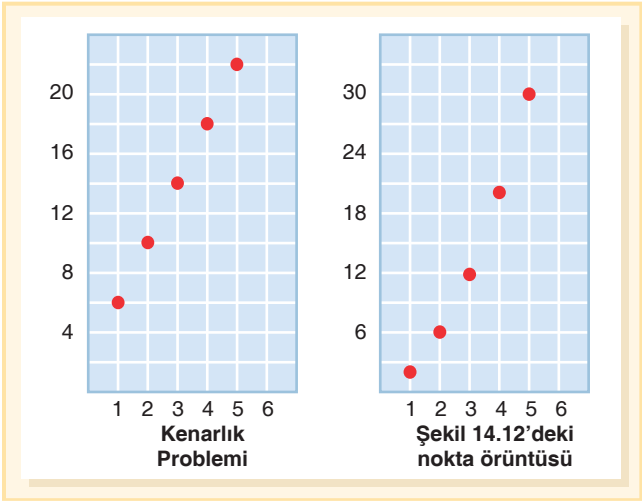
İster tabloyu ister modeli kullansınlar, öğrenciler muhtemelen açık formülü sembollerle yazmadan önce kelimelerle ifade edeceklerdir. Eğer dersinizin amacı kuralı bulabilmekse formülün sözel ifadesiyle yetinmek uygun olacaktır. Bu durumda, bazı öğrencileriniz formülü sembollerle ifade edecek düzeyde olabilirler ve bunu yapmaları için onları zorlayınız ki böylece öğretim şeklinizi bu öğrencilere uygun hâle getirmiş olursunuz. Eğer öğretiminizin amacı formüllerin semboller kullanılarak yazılmasıysa öncelikle öğrencilerden formülü ya da kuralı kelimelerle yazmasını ve sonra da ifadelerini sayı ve sembollere nasıl çevirebileceklerini düşünmelerini isteyiniz.



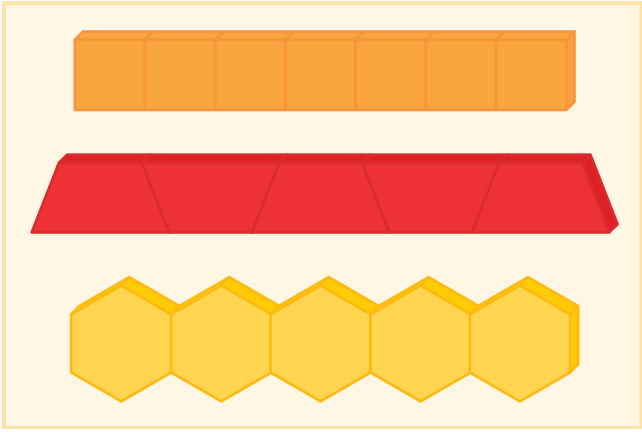
3-5 sınıflardaki öğrenciler sayısal ve geometrik örüntüleri incelemeli ve matematiksel olarak kelimeler ya da sembollerle ifade etmelidirler. Öğrenciler örüntünün yapısını ve nasıl arttığını ya da değiştiğini analiz etmeli, bu bilgileri sistematik olarak organize etmeli ve örüntüdeki matematiksel ilişkiler hakkında genellemeler yapmak için analizlerini kullanmalıdırlar" (s.159). ◆

Fonksiyonların Grafikleri. Şimdiye kadar genişleyen örüntüler şu şekillerde temsil edilmiştir: (1) fiziksel materyaller veya çizimler, (2) tablolar, (3) kelimeler ve (4) semboller. Grafik beşinci bir temsil biçimidir. Şekil 14.14, Kenarlık Problemi ve Nokta Örüntüsü için grafikleri göstermektedir. Birincisi düz çizgi (doğrusal) şeklinde bir ilişkidir ve diğeri de kavisli bir doğru olup noktalar birleştirildiğinde yarım bir parabol elde edilir. Yatay eksen her zaman bağımsız değişken olan adım sayısı için kullanılır.

Grafikler, öğrencilerin artan örüntüler arasındaki ilişkileri hazır olarak görmelerine izin verecek bir görsellik sağlarlar. Örüntü bloklarının bir renginden oluşan şeritleri (Şekil



Şekil 14.14 Genişleyen iki örüntü grafiği



Şekil 14.15 Örüntü bloklarının her bir şeridi için N blokun çevresini belirleyebilir misiniz?

14.15) ve karşılık gelen çevreyi göz önüne alınız. Bu incelemek için güzel bir örüntüdür; aynı kenarlık probleminde olduğu gibi yedi veya sekiz blokluk bir şeritle başlayarak birer birer saymaksızın çevresini hesaplayacak bir yol aranır. Çevreyi hesaplamak için görünüşte birbirinden farklı olan ve genel bir formülle neticelenen en az beş farklı yol vardır.

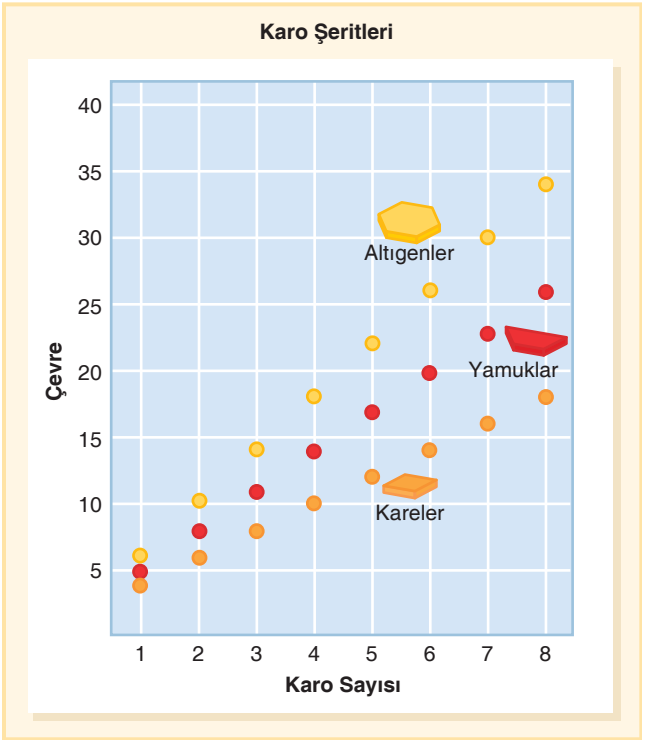
Birbiriyle bağlantılı olan üç tane genişleyen örüntünün grafiği, karşılaştırma yapmak ve grafikleri örüntü ve tablolarla ilişkilendirmek için bir fırsat sunar (Bkz. Şekil 14.16). Örneğin, öğrencilerden bir koordinattan sonrakine (altı yukarı, bir yana) nasıl gideceklerini tartışmalarını isteyiniz ve daha sonra bu bilginin tablodan nasıl bulunabileceğini sorunuz. İkinci olarak, grafikte belli bir noktaya işaret edebilir ve örüntü hakkında bunun bize ne söylediğini sorabilirsiniz.

Aşağıdaki soruları cevaplayıp cevaplayamayacağınıza bakınız; bunları fonksiyonun grafik temsilini anlamaları için öğrencilerinize de yöneltebilirsiniz:

- Her bir grafik şerit örüntülerin her birini nasıl temsil etmektedir?
- Niçin noktaları birbirine bağlayan bir doğru yoktur?
- Niçin bir doğru diğerlerinden daha diktir?
- Niçin y-ekseni üzerinde hiç nokta yoktur?
- Eğer noktalar y-eksenine çizilseydi her bir şerit için ne anlam ifade edecekti? Niçin?



Temsiller arasında ilişkiler kurabilmek fonksiyonların kavranması için önemlidir. Yukarıdakine benzer sorular sorduğunuzda öğrencilerin grafikle bağlam, tablo ve formül arasında bağlantı kurup kurmadığına bakınız. ◆



Şekil 14.16 Üç farklı örüntü blok şeridinin çevrelerinin grafikleri. Doğrular çizilmemiştir; çünkü buradaki bağlamda herhangi iki nokta arasındaki bir değer için çözüm yoktur.

Tüm fonksiyonlar düz çizgi grafiklerine sahip değildirler. Örneğin, 24 yardlık çit ile dikdörtgen bir kümes inşa ederken eni artırırsanız boyu düşüreceksinizdir. Alan da buna dayalı olarak değişecektir (Bkz. Şekil 14.17). En için açık formül $e = 12 - b$ şeklinde (e, en; b, boy anlamında) olup sabit bir oranda azalmaktadır ki bu yüzden bir çizgi gibidir. Tersine kümesin alanı için açık formül $a = b(12 - b)$ olup eğri şeklinde artar, maksimum bir değere ulaşır ve sonra azalır.

Grafikler ve bağlamlar. Öğrencilerin gerçek durumlarla ilişkili grafikleri oluşturabilmeleri ve yorumlayabilmeleri önemlidir. Grafiğin şeklini özel veriler, denklemler ve sayılar olmadan da çizmek önemlidir. Buna benzer etkinliklerin avantajı, bir grafiğin ilgili olduğu ilişkileri nasıl ifade ettiğine odaklanmasıdır.

Etkinlik 14.15

Bir grafik çiziniz

Aşağıdaki durumlar için bir grafik çiziniz. Sayılar veya formüller kullanılmayacaktır.

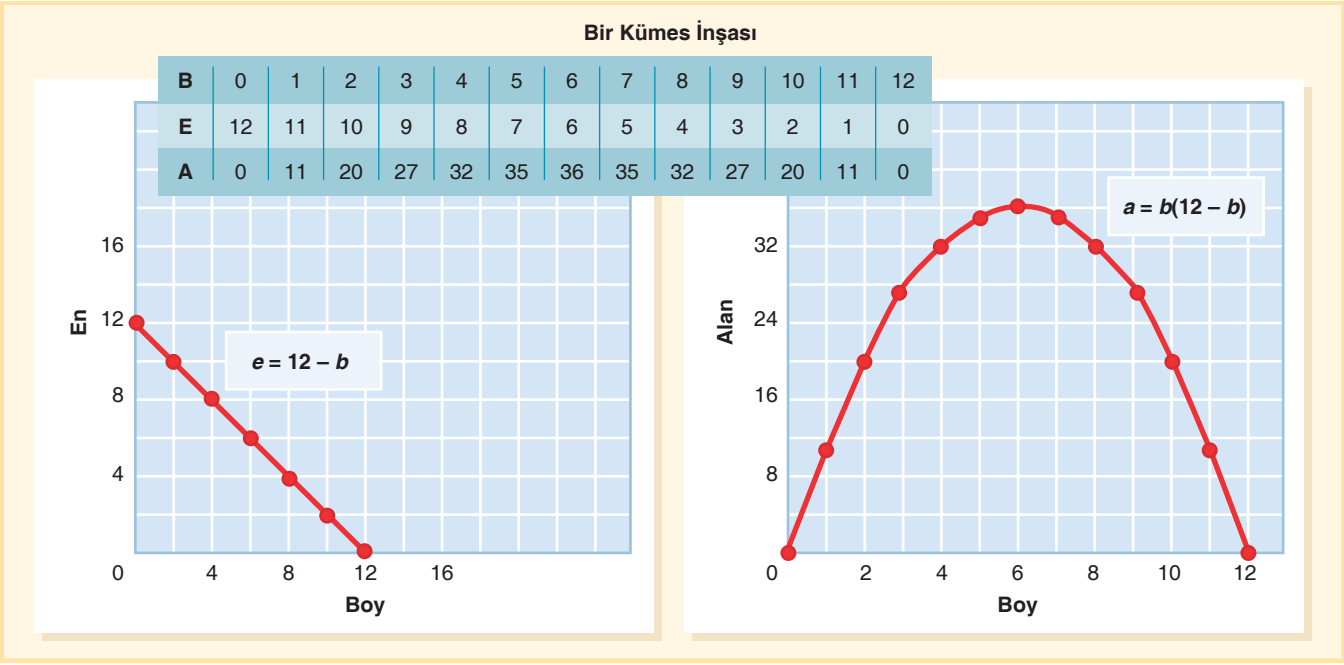
a. **Donmuş bir yemeğin buzluktan alınmazdan 30 dakika öncesinden başlayarak mikrodalgadan çıkarılıp yemek masasına konulması sürecindeki sıcaklığı. (Yemeğin buzluktan alındığı zamanı 0 olarak alınız.)**
b. **1970 model bir Volkswagen Beetle'in satın alındığından günümüze kadarki değeri. (Onu çok seven bir kişi tarafından muhafaza edilmiş ve şu anda çok iyi bir durumda.)**
c. **Küveti doldurmaya başlayıp banyo yaptıktan sonra tamamen boşalıncaya kadar geçen süreçteki su seviyesi.**
d. **Satılan maddelerin sayısı bakımından yapılan kâr.**
e. **Beyzbol topunun atıldıktan yere düşünceye kadarki zaman içerisinde yüksekliği**
f. **Beyzbol topunun e şıkkında verilen durumdaki hızı**



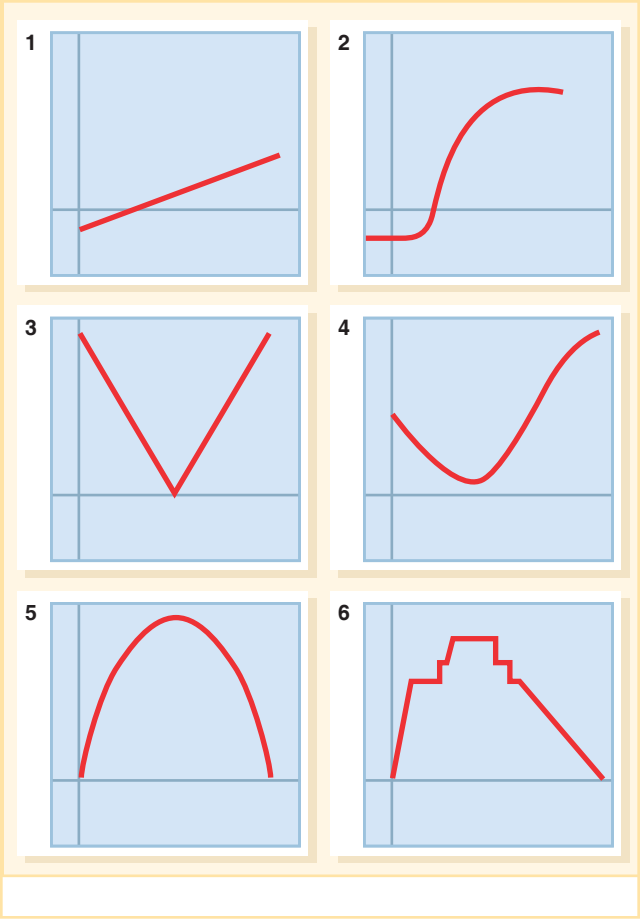
Durup Düşün!

Bir an durunuz ve son etkinlikteki her durum için grafikleri çiziniz.

Sınıfta öğrencilere, hangi durumu seçtiklerini belirlemeksizin (grafiklerde isim yok), grafiklerini asetatlara çizdirmek oldukça eğlencelidir. Öğrencilerin grafiği incelemelerine izin veriniz ve sunulan her bir grafikle hangi durumun ifade edileceğini bulup bulamayacaklarına bakınız. Şekil 14.18, "Bir Grafik Çiziniz" etkinliğindeki durumlarla



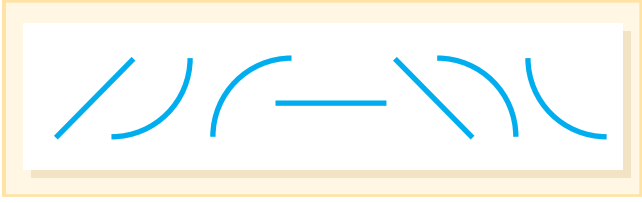
Şekil 14.17 Çevresi 24 birim olan dikdörtgenin boyunun fonksiyonları olarak en ve alan grafikleri



Şekil 14.18 Etkinlik 14.15'te verilen durumlarla grafikleri eşleyiniz. Her bir durumda nelerin değiştiği hakkında konuşunuz.

eşlenebilecek altı grafik bulundurmaktadır. Bu grafikleri altı durumla eşleyebilir misiniz?

Grafikler ve Değişim Oranı. Grafiklerin analizinin, grafiklerin nasıl arttığı veya azaldığı ve ne kadar dik veya eğimli olduğu üzerine odaklandığına dikkat ediniz. Grafik, bir değişkendeki değişim oranının diğeri cinsinden elde edildiği bir resimdir. Temel olarak grafikler, Şekil 14.19'da gösterilen yedi özellikten birisine veya bunların kombinasyonuna sahiptir. Bu tür değişiklikler aşağıdaki etkinlikte görülecektir.



Şekil 14.19 Grafiklerin değişebileceği yedi şekil. Bir grafik genellikle bu özelliklerin kombinasyonlarına sahiptir.

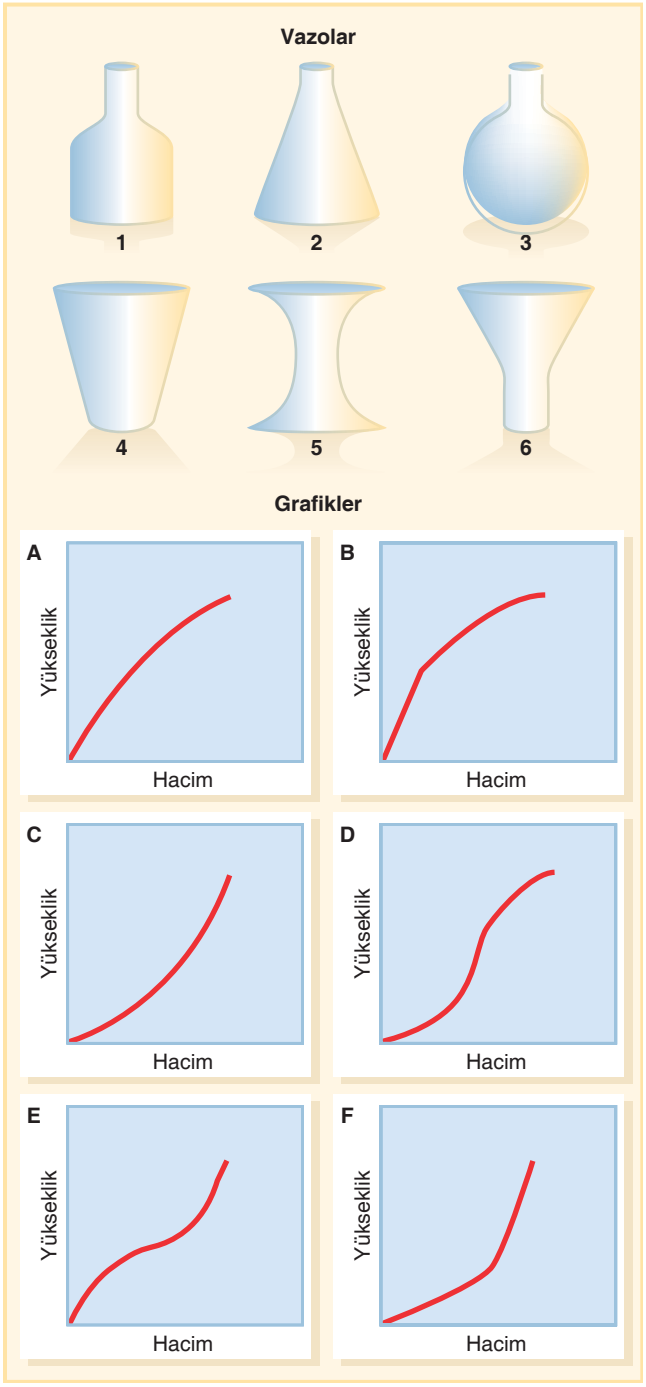
Etkinlik 14.16

Vazolar ve Hacim Grafikleri

Şekil 14.20 altı vazo ve altı grafik göstermektedir. Vazoların sabit bir oranda dolduğunu kabul edelim. Şekillerinden dolayı, vazolardaki sıvının yüksekliği,

vazoların genişlemesi ya da daralmasına bağlı olarak, yavaş veya hızlı artacaktır. Grafiklerle vazoları eşleyiniz.

Farklı şekillerde bazı vazolar bulunuz. Her gruba veya çifte etkinlikte kullanması için bir tane vazo veriniz. Küçük bir kabı (örn. deney tübü veya ilaç kutusu) suyla doldurup vazoya boşaltınız. Bir tablo yaparak kullanılan kap sayısını ve suyu boşalttıktan sonra su seviyesini kaydediniz. Her grup verileri topladıktan sonra bulgularını grafik haline dönüştürür. Grafikler toplanır ve sonra öğrenciler grafikle vazoyu eşlemeye çalışırlar.



Şekil 14.20 Vazoların sabit bir oranda dolduğunu varsayarak vazolarla grafikleri eşleyiniz.

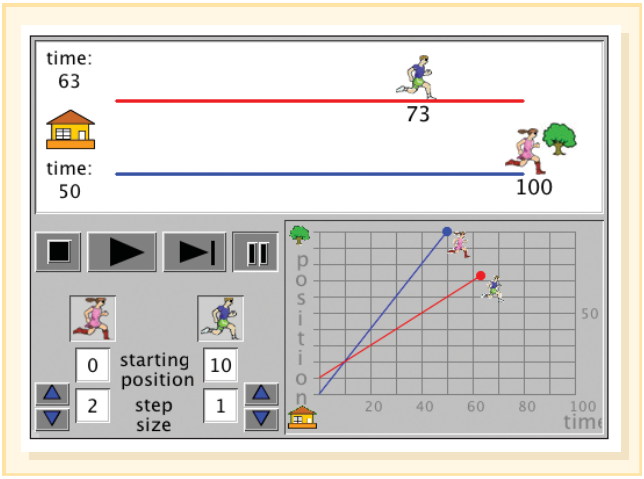
Doğrusal Fonksiyonlar

Doğrusal fonksiyonlar genişleyen örüntülerin ve fonksiyonların bir altkümesidir (fonksiyonlar doğrusal olabilir de olmayabilir de). Doğrusallık ortaokul matematiğinin başlıca bir odağı olduğu için ve ilkokulda genişleyen örüntüler doğrusal durumlar olduğu için bu konuya özel bir kısım ayrılmıştır. *Öğretim Programı Odak Noktaları* ortaokul sınıfları arasında doğrusal fonksiyonların önemini vurgulamakta ve sekizinci sınıfta doğrusallık üzerine özel olarak odaklanmaktadır (NCTM, 2006). Doğrusal fonksiyonlar, doğrusal veya sabit şekilde artan fonksiyonlar olarak tanımlanır. Bir grafikte, yerleştirilmiş noktaların bir doğru üzerinde yer almasına bakarak doğrusallık kolayca belirlenebilir.

Doğrusallık diğer temsillere bakarak da kolaylıkla belirlenebilir. Şekil 14.15'teki altıgen çevre problemi için bir tablo yaparsanız yinelemeli örüntünün her seferinde +4 olduğunu fark edersiniz. Bir adımdan diğerine değişim oranı sabittir (+4). Her zaman yinelenen ilişkiye bakarak bir fonksiyonun sabit bir oranla artıp artmadığını ve bu yüzden de doğrusal olup olmadığını belirleyebilirsiniz.

Eşitlikte, ifadenin değişen kısımlarına bakarak doğrusallık belirlenebilir. Dikdörtgen kümes problemindeki ki formülü karşılaştırınız. Birisi $e = 12 - b$ idi ve diğeri ise $a = b(12 - b)$ veya $a = 12b - b^2$. Birinci durumda değişim b'ye bağlıdır ve her seferinde b, 1 değiştiğinde e'de aynı miktarda değişmektedir-doğrusal durumlardaki gibi sabit bir değişim oranı. Alan formülünde, b aynı miktar değiştiğinde alan farklı miktarlarda değişmektedir. Gerçekte bu bir karesel durumdur. Şekil 14.17 bu grafikleri göstermektedir.

Değişim Oranı ve Eğim. Değişimin analiz edilmesi NCTM Cebir standardındaki dört bileşenden biridir (Bkz. Ek A). Oran (sabit veya değişen) bir şeyin ne kadar hızlı hareket ettiğiyle ilişkilendirilen bir tür değişimdir. Oran doğrusallığı incelemek için oldukça iyi bir bağlam sunar; çünkü sabit oranlar geniş bir yelpazedeki bağlamlarda görülür. Örneğin, örüntü bloklarının geometrik modellerinin çevre örüntüleri ve bir bitkinin büyüme oranı gibi.



Şekiil 14.21 Applet 5.2 Simülasyon yazılımını kullanarak uzaklık, hız ve zaman ilişkilerinin anlaşılması.

NCTM e-Standartlarının izniyle kullanılmıştır. Copyright © 2003 bytheNationalCouncil of Teachers of Mathematics, Inc. Allrightsreserved. Thepresence of thescreenshotfrom NCTM *e-Standards*, http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.2/index.htm, does not constituteorimply an endorsementby NCTM.



NCTM'e-Örnekler'in oranı konu edinen iki küçük uygulama yazılımı vardır. Bunlarda gerçek dünya ve grafikler arasında bağlantı kurulmaktadır. Applet 5.2'de öğrenciler iki koşucunun da hızını, yönünü ve başlangıç pozisyonlarını değiştirebilirler. Koşucular hareket halinde oldukları için yol-zaman grafiği her bir koşucu için dinamik olarak üretilir (Bkz. Şekil 14.21). ◆

NCTM yazılımı iki oranı iki gösterim (görsel model ve grafik) üzerinden karşılaştırmaktadır. Birçok gerçek dünya durumları benzer şekilde tasvir edilebilir. Diğer bir NCTM yazılımı (Applet 6.2), örneğin, bu yolla telefon aramalarının oranlarını inceler. Bir başka örnek Şekil 14.16'da gösterilmektedir. Her üç grafik de farklı oranlarda artmaktadır. Her bir eğimin farklı olduğuna dikkat ediniz. *Eğim*, lineer bir fonksiyonda değişim oranını tasvir eden sayısal değerdir.

Artan altıgen örüntüsünün açık formülerinden birisi $y = 4x + 2$'dir. Değişim oranının 4 olduğuna dikkat ediniz; çünkü her bir yeni parçayla birlikte çevre 4 artmaktadır. Tüm doğrusal fonksiyonlar şu biçimde yazılabilir: $y = mx + b$ ($b = 0$ olduğunda $y = mx$ olur). Bu formüldeki m değeri değişim oranı ya da doğrunun eğimidir.

O halde kavramsal olarak eğim, x 1 arttığında y'nin ne kadar artacağı anlamına gelir. Bir doğru (2, 4) ve (3,-5) noktalarını içeriyorsa, o zaman x, 1 arttığında y'nin 9 azaldığını görebilirsiniz. O halde, değişim oranı ya da eğim -9'dur. (4, 3) ve (7, 9) noktaları için x, 3 arttığında y, 6 artmaktadır. Bu yüzden x'teki 1 artış y'de 2'lik bir değişime yol açmaktadır (6'nın 3'e bölümü). Daha fazla inceleme ve deneyimden sonra öğrencileriniz şunu fark edebilirler: y değerindeki farkları bulup x değerindeki farklara böldüğünüzde eğimi veya değişim oranını elde edebilirsiniz.

Bazen bir eşitlik aşina olduğunuz $y = mx + b$ biçiminde olmayabilir. Örneğin, dikdörtgen kümes probleminde, eğer b ve e harfleri boy ve eni temsil eder ve çevre de 24 ise o zaman $2b + 2e = 24$ eşitliği en ile boyu ilişkilendirir fakat bu denklem sadeleştirilerek $e = -1b + 12$biçimine dönüştürülebilir. Bu da eğimi-1 ve başlangıç değeri 12 olan bir doğrusal denklemdir.

Eğimin sıfır olması ve eğimin olmaması. Karıştırılması oldukça kolay olan bu iki eğim kavramı için bağlam gereklidir (örn. yürüme oranı gibi). Şu hikâyeyi göz önüne alınız:

10 dakika boyunca, saatte 1 mil hızla yürüdünüz. 3 dakika durarak yavru kuşların olduğu yuvayı izlediniz. Sonra saatte 2 millik bir hızla 5 dakika daha yürüdünüz.

Grafik, durduğunuz 3 dakika boyunca nasıl bir şeye benzeyecektir? Durduğunuzda oranınız nedir? Gerçekte, sizin oranınız 0'dır ve 3 dakika boyunca aynı mesafede kaldığınız için grafik yatay bir doğru olacaktır.

Diyelim ki yürümeyi konu edinen bir grafik düşey bir doğruya sahip olsun. Bu ne anlama gelecektir? Hiç zaman geçmeden bir mesafe aldığınız anlamına gelecektir. Şimdi, eğer siz dünya rekoru kıran bir koşucu da olsanız bu imkânsızdır ve bu yüzden de düşey doğrunun eğimi yoktur. Unutmayın, oran x değerindeki değişime dayalıdır ve düşey bir doğru hiçbir zaman x değerinde bir değişime sahip olmayacaktır.

Orantılı ve orantısız durumlar. Doğrusal fonksiyonlar orantılı veya orantısız olabilirler. Daha az önce tartışılan oran örneği orantılıdır. Yürüdüğünüz mesafe ne kadar süre yürüdüğünüz ile orantılıdır. Bir başka örnek, maaş çekiniz çalıştığınız saatle orantılıdır. Fakat örüntü blokunun çevresinin artışı problemi kullanılan blokların sayısı ile orantılı olması durumu söz konusu değildir. 4'ün katları şeklinde sabit bir artış vardır ama fazladan 2 birimlik bir çevre daha vardır. Başka deyişle girdiden (blokların sayısı) yola çıkarak çevreye bir sayıyı çarparak ulaşamasınız; ama bunu orantılı durumlarda yapabilirsiniz.

O zaman $y = mx$ biçiminde eşitliklerdir. Tüm orantısal durumların grafiklerinin orijinden geçen düz bir çizgi olduğuna dikkat ediniz. Öğrenciler bu doğruların eğimlerinin aynı zamanda iki değişken arasındaki değişim oranı olduğunu anlayacaklardır.

Öğretim açısından bir ayırım önemlidir; çünkü orantısal durumları genellemek daha kolaydır. Genişleyen örüntüler seçerken öncelikle orantılı olmasına dikkat etmelisiniz ve orantısız olanları daha sonra kullanırsınız. Şekil 14.11 (a)-(c) orantısal temsilleri göstermektedir. Fakat eğer siz örüntüleri birazcık değiştirirseniz orantısız olacaklardır. Örneğin, birinci örüntüde, eğer üçgenler sa-

dece sivri uçlardan ikisine eklenseydi, yani ters çevrilmiş *V* gibi, o zaman artık siz adım sayısını bir sayıyla çarparak kolay şekilde *n*. terimi bulamazdınız. Örüntü (d) başlangıç değeri 4 kare olan ve üçer üçer artan bir durumu göstermektedir.

Durup Düşün!

Ters çevrilmiş V örüntüsü için açık formülü belirleyebilir misiniz? İlk adımları sırasıyla 3, 5, 7 ve 9 üçgen gerektirecektir.

Tipik orantı problemleri cebirsel bir yaklaşım için adapte edilebilir. Şu örneği düşünelim:

Kafeteryada yemek yiyen her üç öğrenciden ikisi bir pint[2] süt içmektedir. Eğer kafeteryada 450 öğrenci yemek yerse kaç pint süt tüketilir?

Problemin ifade edildiği şekliyle belli bir sayıda öğrenci vardır ve problemin cevabı tektir. Öğrencilerden bir orantı kurmaları ve bilinmeyen için çözüm yapmaları beklenecektir. Fakat problemin sadece ilk cümlesi verilseydi öğrencilerden öğrenci sayısıyla bağlantılı olarak süt miktarını gösteren bir kural (açık formül) bulmaları istenebilirdi. Bu durumda kural; *s*, pint cinsinden süt miktarını ve *ö*'de öğrenci sayısını göstermek üzere $s = \frac{2}{3}ö$ şeklinde olurdu.

Orantısız durumlarda bir değer sabittir. Çevre uzunluğu örüntüsü probleminde, örneğin, hangi adım sayısında olursanız olun 2 birim vardır (dâhil edilmesi gereken her iki uçta birer tane). Benzer şekilde, kenarlık problemi her zaman 4 köşeye sahiptir. Eğer yürüseydiniz (ama 50 metre önden başlayarak) veya eğer bir şey satsaydınız ve başlangıçta masrafınız olsaydı, bu değerler doğrusal fonksiyonda sabit olup onu orantısız yapmaktadır. Sabit değer veya başlangıç değeri, doğrusal fonksiyonun *y*-eksenini kestiği yerdir. Başlangıç değerini, tabloda adım sayısını 0'ı kullanarak, eşitlikte $x = 0$ seçip sadeleştirme yaparak veya grafikte doğrunun *y*-eksenini kestiği yere bakarak bulabiliriz.

Orantısız durumlar öğrencilerin genelleme yapmaları için daha zordur. Öğrenciler yinelenen değeri (örn. +4) çarpan olarak (x4) kullanmak isterler; fakat durumdaki sabit ya da başlangıç değerini göz önüne almazlar. Öğrencilerin sıklıkla yaptığı bir hata, tablo değerini kullanarak onuncu adımı bulurlar ve yirminci adımı bulmak için bunun iki katını alırlar; orantılı durumlarda işleyen bu yöntem orantısız durumlar için geçerli değildir. Matematik eğitimi araştırmacıları, öğrencilere kendi hatalarını analiz ettirmenin onların kavram öğrenimlerini desteklediğini bulmuşlardır (Lannın, Arbaugh, Barker ve Townsend, 2006).

[2] Ç.N: 0.473 litrelik ölçü birimi

Paralel ve Dik Doğrular. Lary ve Mary'nin durumlarını düşünün, her ikisi de yaz aylarında haftalık $30 kazanıyorlar. Mary'nin yaz başında $50 borcu ve Lary'nin cebinde ise $20 vardır. Mary ve Lary ne zaman aynı miktarda paraya sahip olacaklardır? 3. haftada Lary'nin parası Mary'ninkinden ne kadar fazla olacaktır? 7. Haftada ne kadar daha fazla olacaktır? Herhangi bir haftada maddi durumları arasındaki fark ne olacaktır? Lary ve Mary'nin kazançlarının oranları aynıdır ve bu yüzden de grafikleri aynı oranla yükselmelidir; yani eğimleri aynı olmalıdır. $y = 30x + 20$ (Lary'nin parası) ve $y = 30x - 50$ (Mary'nin parası) grafiklerinin, herhangi bir çizim yapmaksızın, paralel olduklarını söyleyebiliriz çünkü oranlar ya da eğimler aynıdır.

Eğimler aynı zamanda iki doğrunun ne zaman birbirine dik olduğunu söyler. Benzer üçgenleri kullanarak yapılacak küçük bir analiz, dik doğruların eğimlerinin çarpmaya göre birbirlerinin negatif tersleri olduğunu gösterecektir.

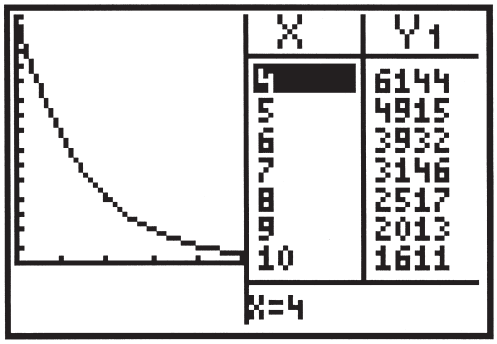
Matematiksel Modelleme

Kaput (1999) modellemeyi gerçek olgularla başlayan ve onları matematiksel olarak ifade etme süreci olarak tanımlar. Matematiksel modeller veya eşitlikler, başka olguları tahmin etmekte kullanılırlar. Matematiksel modeller, manipülatifleri veya görselleri bir örüntü oluşturmak için kullanan modellerle (örüntü blokları) karıştırılmamalıdır.

Matematiksel modellerin birçok örneğini şimdiye kadar zaten görmüş durumdayız. Modelleme tahmin için nasıl kullanılır? Toptan satışta üzerine belli bir yüzdelik kâr konulan eşyaların satışını örnek olarak alalım. Verilen bir fiyat ve artış miktarı için bir formül elde edildiğinde, bu formül farklı satış seviyelerindeki kârı belirlemek için kullanılabilir. Ayrıca, fiyatta ve artış miktarında ayarlamalar yapmak görece olarak daha kolaydır ki bu da daha ileri tahminlerde bulunmaya imkân sağlar. Yani, eşitlik veya matematiksel model gerçek olgularda gözlenemeyecek değerleri bulmamıza izin verir.

Bir arabanın yıllık % 20 değer kaybetmesini tanımlayan bir matematiksel model oluşturmayı düşünelim. Modelin geliştirilmesi şu adımları takip eder: eğer araba 1 yılda değerinin % 20'sini kaybediyorsa, o zaman bir yıl sonunda değerinin % 80'i kıymetindedir. 1 yıl sonra $15,000 olan arabanın değeri $15,000x0.8 olacaktır. İkinci yıl, bu değerin % 20'sini daha kaybedecektir; yani birinci yılın sonundaki değerinin (bu da $15,000x0.8 idi) % 80'i olacaktır. İkinci yılın sonundaki değeri ($15,000x0.8)x0.8 olacak ve böyle devam edecektir. *y* yıl sonra arabanın değeri şu eşitlikle ifade edilebilir: değer=$15,000x0.8^y. Şekil 14.22, grafik çizer hesap makinesinde grafik ve tablo değerlerini göstermektedir.

Sonraki etkinlik, matematiksel model geliştirmeye uygun olan başka bir bağlam sunmaktadır.



Şekil 14.2 Değer = \$15,000x0.8^y için grafik ve tablo. Bağımsız değişken olan yıllar X olarak gösterilmekte ve bağımlı değişken olan değer Y1 olarak gösterilmektedir.

Etkinlik 14.17

Kaç Galon Kaldı?

Bir araba bir galon yakıtla 23 mil yol almaktadır. Aracın yakıt tankı 20 galon almaktadır. Bir yolculuğa çıkacağınızı ve başlangıçta tankı doldurduğunuzu varsayınız. Alınan yol verildiğinde kaç galon yakıt kaldığını gösteren bir matematiksel model oluşturunuz.

Kural kelimesinin "matematiksel model" yerine kullanılabileceğine dikkat ediniz. Bu durumda, olası bir eşitlik $g = 20 - \frac{m}{23}$ şeklindedir. Bu modeli ya da eşitliği kullanarak tahminde bulununuz. Örneğin, "Modelden hareketle 300 mil araba kullandıktan sonra ne kadar yakıt kalacağını nasıl bulabilirsiniz?" "Yakıt tankında 3 galon yakıt kaldığında kaç mil gitmişsinizdir?" İki bağlam daha Şekil 14.23'te sunulmuştur.

Bazen model, veriler ve öğrenciler için önemli bir görev bu formülü anlamak ve kullanmaktır. Michigan Cebir Projesinden gelen aşağıdaki su pompalama problemini ve ilgili eşitliği düşünelim (Herbel-Eisenmannve Phillips, 2005):

Bir pompayı havuzdan su boşaltmak için çalıştırdığınızı varsayalım. Herhangi bir zamanda (T, saat olarak ölçüldüğünde) havuzdaki su miktarı (W, galon olarak ölçüldüğünde) şu eşitlikle verilmektedir: $W = -350(T - 4)$

Durup Düşün!

Ortaokul öğrencilerinin bu eşitliği anlamaları için hangi soruları sorardınız? Üç tane bulmaya çalışınız.

1. Pleasant' Hardware şirketi tanesi \$4.17 olan parçacıkları satın almakta, toptan fiyatı üzerine % 35 fark koyarak satmaktadır. Satılan parçacıklarla (w) elde edilen kârı (p) ilişkilendiren bir matematiksel model oluşturunuz. Yönetici, parçaları % 25 indirimle satıp satmamak konusunda karar vermek için sizden bir formül bulmanızı istiyor. Satılan parça ile elde edilen kârı karşılaştırmak için sizin formülünüz ya da matematiksel modeliniz nedir?
2. Utah'da bulunan Moab'daki Arches Ulusal Parkında kumtaşı kayalıkları vardır. Siyanobakteri olarak isimlendirilen yeşil renkli bir tabaka bazı kumtaşlarını kaplamıştır. Bakteriler belli bir zaman aralığında ikiye bölünerek (yani iki katına çıkarak) büyümektedirler. Eğer kumtaşı 50 bakteriyle başlarsa, kumtaşının üzerinde Siyanobakteri artışını gösterecek bir matematiksel model oluşturunuz.

Şekil 14.23 İleri düzey inceleme için matematiksel model problemleri.

Kaynak: Adapted from Buerman, M. (2007). "The Algebra of the Arches." *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(7), 360–365.

Michigan Cebir Projesinde öğrencilerden bazı problemleri çözmeleri ve eşitliğin cevabı bulmak için nasıl kullanıldığını açıklamaları istenmiştir. Bu sorular ve bir öğrencinin cevapları Şekil 14.24'te sunulmuştur.

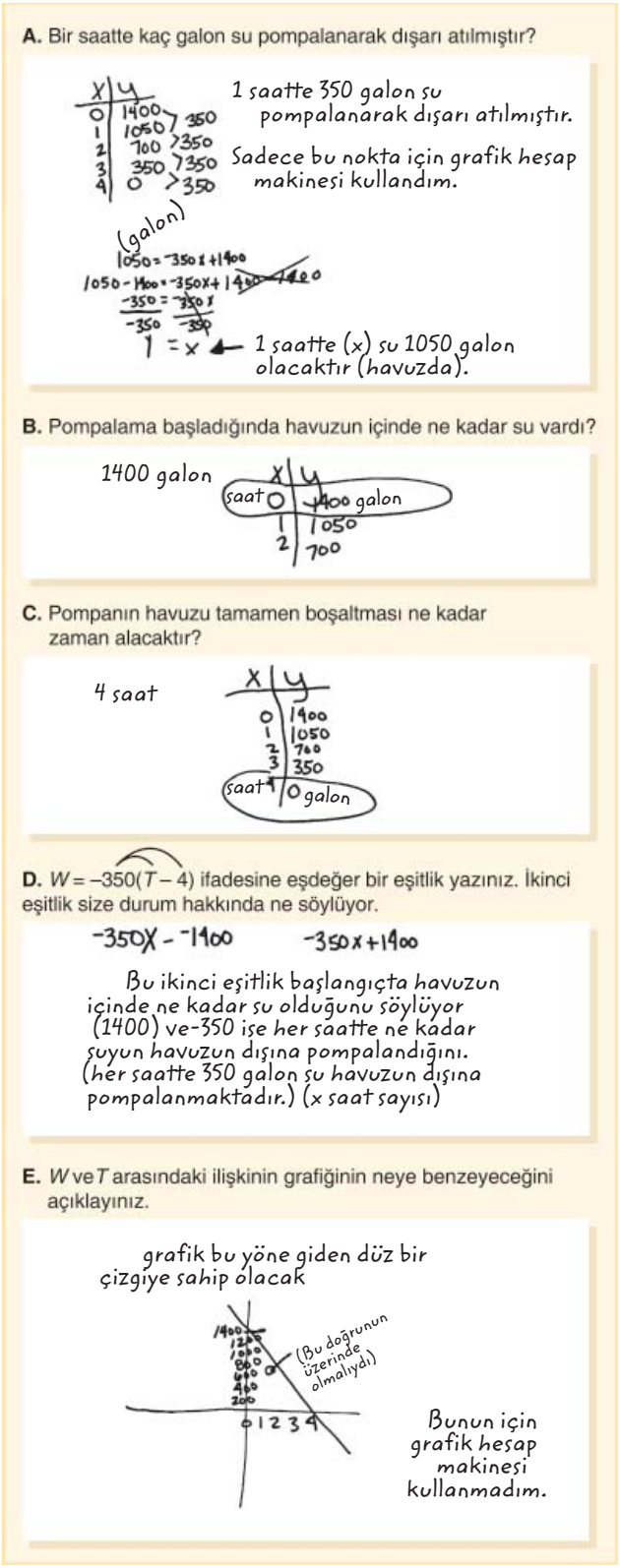
Öğretimde Dikkat Edilecek Hususlar

Öğrencilerin cebir yapmak için kendilerini güçlü hissetmelerine yol açan bazı anahtar hususları vurgulamak önemlidir. Bu fikirlerin bazılarına şimdiye kadar cebirsel kavramlar için yapılan tartışmalarda üstü kapalı olarak işaret edilmiştir.

Uygun cebir terimlerini vurgulayınız

Matematiği anlamanın büyük bir kısmı matematiksel iletişimde bulunma becerisidir. Bu yüzden cebir öğretiminde uygun terminolojiyi kullanmak önemlidir. Bunu yapmak kelime listesi vermekten çok daha fazlasıdır; durumlar için uygun kelimelerin tutarlı olarak kullanılması ve öğrencilere de kullandırılmasıdır. Kelime duvarları oluşturmak ve terimlerin günlüğünü tutmak, tüm öğrencilere ama özellikle de anadili İngilizce olmayan öğrencilere yardımcı olur. Kelimeleri örneklendirmek için grafikler, modeller veya tablolar kullanmak esastır. Burada bazı önemli terimleri paylaşacağız.

Bağımlı ve Bağımsız Değişkenler. "Bağımlı" ve "bağımsız" değişkenlerin anlamlarına kelimelerin kendileri tarafından işaret edilmektedir; fakat yine de bunlar öğrenciler için oldukça zor olabilmektedir. Bağımsız değişken, adım sayısı veya girdi ya da bir başka değeri bulmak



Şekil 14.24 Matematiksel modelin anlamına ilişkin sorulara bir öğrencinin verdiği açıklamalar.

Kaynak: Figure 3 from Herbel-Eisenmann, B. A.,&Philips, E. D. (2005). "Using Student Work to Develop Teachers' Knowledge of Algebra." *MathematicsTeaching in theMiddle School,* 11(2), p. 65. Reprinted with permission.Copyright © 2005 bytheNationalCouncilof Teachers of Mathematics, Inc.www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.

için kullanılan değerdir. Örneğin, örüntü bloklarından oluşan şeritlerde bağımsız değişken şeritteki blokların sayısıdır. Bağımlı değişken gerekli olan nesne sayısı, çıktı veya bağımsız değişkeni kullanarak elde ettiğiniz değerdir. Örüntü blok probleminde çevre ölçüsü bağımlı değişkendir. Blok yapısının çevresinin blok sayısına bağlı olduğunu söyleyebilirsiniz. Şekil 14.17'deki 24 metrelik kümesi temsil eden grafikleri ve eşitlikleri hatırlayınız. Orada boy bağımsız değişken olarak seçilmişti (fakat bu en de olabilirdi) ve bağımlı değişken de endir. Şekil 14.24'teki problem için bağımlı ve bağımsız değişkenler nelerdir?

Kesikli ve sürekli. İlkokuldaki fonksiyon tartışmaları, özellikle de grafik gösterimlerinde, grafik üzerinde işaretlenen noktaların bağlantılı olup olmayacağı ve bunun nedeni hakkında bir tartışmayı da içermelidir. Örüntü bloklarının çevresi probleminde, cevap hayır olmalıdır; çünkü sadece doğal sayı değerleriniz olacaktır. Ayrılan veya seçilen değerler sadece o bağlama uygun olduğunda fonksiyon *kesikli*dir. Bir doğru ya da eğri boyunca tüm değerler fonksiyonun çözümleri iseler o zaman *sürekli*dir. Kümes örneği süreklidir-boy belli bir üst sınıra kadar her değeri alabilir ve en de (veya alan) buna dayalı olarak değişecektir.

Tanım ve Değer Kümesi. Bir fonksiyonun *tanım kümesi*, bağımsız değişken için olası değerleri içerir. Örüntü bloklarının çevresi probleminde olduğu gibi kesikli ise tüm pozitif tamsayıları içerebilir. 24 metrelik dikdörtgen kümes için tanım kümesi 0 ile 12 arasındaki tüm gerçek sayılardır. *Tanım kümesi* bağımlı değişken için karşılık gelen olası değerlerdir. Örüntü bloklarının çevresi probleminde, tanım kümesi pozitif tamsayılardır; dikdörtgen kümes probleminde boy için değer kümesi tanım kümesiyle aynıdır-0 ile 12 arasındaki gerçek sayılardır.

Çoklu gösterimler

Fonksiyonlar şu beş yoldan herhangi birisiyle gösterilebilir: (1) örüntünün kendisi ki biz buna bağlam diyebiliriz; (2) tablo; (3) sözel açıklama; (4) sembolik eşitlik (denklem); (5) grafik. Tekrar eden ve genişleyen örüntü bölümlerinde her bir örnek en az iki gösterim içermektedir (örn. bağlam ve tablo) ve hatta beşinin hepsi de görülmektedir (örn. Şekil 14.12'deki nokta örüntüsü). Her bir gösterim fonksiyona bakmanın bir yoludur; bunların her biri fonksiyon hakkında farklı bir bakış açısı veya düşünme şeklidir. Her bir gösterimin değeri, bizim fonksiyona bakış ve anlayışımızı birbirinden farklı şekillerde oluşturmamıza yardım etmesindendir. Bu hususu örneklendirmek için sosisli sandviç satıcısı bağlamını kullanacağız.

Brian kolej ücretini ödemek için büyük gösteri ve oyunların yapıldığı spor salonun yanında el arabasında sosisli sandviç satarak para kazanmaya çalışıyor. El arabasının sahibine gecelik $35 kira ödüyor. Sosisli sandviçin tanesini $1.25'ten satıyor. Sosisli sandviçler, soslar, peçeteler ve diğer kağıt ürünler için kendisinin masrafı her bir sandviç için ortalama 60 senttir. Dolayısıyla tek bir sosisli sandviçten kendisinin kârı 65 senttir.

Bağlam. Bu fonksiyon bir bağlamla başlıyor: sandviç satımı ve elde edilen kâr. Bizler Brian'ın sattığı sandviç sayısı cinsinden elde ettiği kârla ilgileniyoruz. Brian ne kadar çok sandviç satarsa o kadar çok kâr edecektir. Brian hemen kâr etmeye başlamıyor çünkü öncelikle el arabası için $35 kira bedelini ödemesi gerekiyor. Fakat,Brian'ın kârı (bu bir fonksiyondur) sattığı sandviçlerin sayısına bağlıdır.

Bağlam, öğrencilerin neyin değişip (satılan sandviç sayısı) neyin değişmediğini ($35 kira bedeli) anlamalarına yardımcı olur ki bu da onların açık formülü bulmalarına yardım eder. Bağlam, daha soyut gösterimlerin öğrenciler tarafından kavramsal olarak anlaşılmasını destekler ve aynı zamanda cebirin gerçek dünya olgularını açıklamakta bir araç olduğunu gösterir. Bağlam yine de tek başına yeterli değildir-öğrencilerin cebirsel düşüncelerini desteklemek için bağlamı diğer gösterimlerle ilişkilendirecek dikkatlice seçilmiş yönlendirmelere ihtiyaç vardır (Earnest ve Balti, 2008).

Tablo. Brian, beklenen satışlara dayalı olarak oturup bazı muhtemel gelir hesaplamaları yapabilir. Bu ona zarar etmemesi için kaç tane ve kâr etmesi için kaç tane sandviç satması gerektiği hakkında bazı bilgiler verir. Değerler tablosu Tablo 14.2'dekine benzer bir şey olabilir.

Tabloda gösterilen sandviç sayısı tamamen tercih meselesidir. Her ne kadar bu bağlamda makul olmasa da birisi 10,000 sandviç için kârı (10,000 x 0.65-35) hesaplayabilir. Tablo yinelenen ve açık örüntüye bakmak için kestirme bir yol sağlar. Yinelenen örüntü neyin değiştiğini (eğer değişim sabit orandaysa) ve bunun açık formülü bulmakta nasıl işe yarayacağını görmeye sebep olabilir.

Tablo 14.2

Satılan Sandviç Sayısı (Bağımsız Değişken) ve Kâr (Bağımlı Değişken)

Satılan Sandviç	Kâr
0	−35.00
50	−2.50
100	30.00
150	62.50

Sözel Açıklama. Sandviç satıcısı durumunda, Brian'ın kârı satılan sandviçlerin sayısına bağlıdır. Fonksiyon dilinde, "Kâr, satılan sandviç sayısının bir fonksiyonudur" diyebiliriz. "…nın fonksiyonudur" söylemi bağımlı bir ilişkiyi ifade eder. Sandviç için açık formülün sözel açıklaması öğrenciler tarafından şöyle yapılabilir: "satılan her bir sandviçi $0.65 ile çarparsınız; sonra da el arabası için $35 çıkarırsınız."

Açık formülün sözel ifadesi bağlamdan sembolik gösterime bir bağlantı sağlar. Öğrenciler, değişkenlerin kullanımıyla sorun yaşayabilirler ve formülü öncelikle kelimelerle açıklamak sembolleri kullanabilmek için önemli bir sıçrama tahtasıdır (Lannin, Townsend, Armer, Green ve Schneider, 2008).

Semboller. Brian'ın sattığı sandviçleri temsil etmek için bir harf seçelim, diyelim ki b olsun. Brian'ın kârı (bu p ile gösterilsin) $p = (0.65 \times b) - 35$ eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlik, iki değer ya da iki değişken (kâr ve sandviçler) arasındaki matematiksel ilişkiyi tanımlar.

Bir fonksiyonu eşitlik olarak ifade ederek, sandviçlerin her sayısı için kârı bulmak mümkündür. Tersine, eğer Brian $100 kazanmak istiyorsa, bunun için kaç tane sandviç satması gerektiğini bulabilir. Bu soyut olduğu için, öğrencilerin her bir sayının ve her bir değişkenin neyi temsil ettiğini açıklamaları önemlidir.

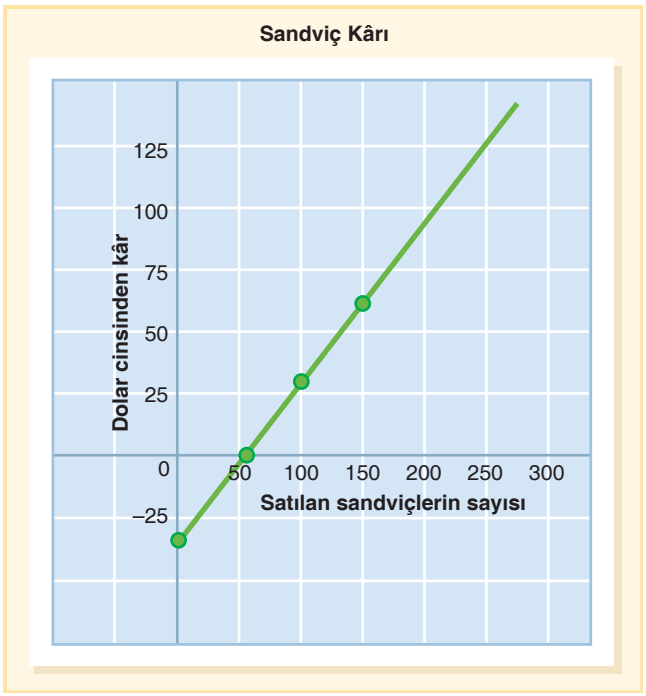


Eşitlik bir grafik hesap makinesine girilebilir ve makine tablo oluşturmak ve grafik çizmek için hesaplamaları yapabilir. Bu, öğrencilerin her birini elleriyle oluşturmaları gereken uzun uzadıya işlemler olmaksızın gösterimler arasında bağlantılar kurmalarına imkân tanır.

Grafikler. Şekil 14.25'te sandviç satımının dört farklı değeri grafik üzerine çizilmiştir. Yatay eksen satılan sandviçlerin sayısını ve düşey eksen kârı göstermektedir. Satışlar arttıkça kâr da artacaktır. Bu durumda altı değere göre doğrusal bir örüntü vardır. Bu bağlamda bunun anlamı şudur: kâr sabit bir oranda artmaktadır; yani her sandviçte 0.65.

Grafik temsili "bir bakışta" satışlar ve kâr arasındaki ilişkinin doğrusal-düz çizgi-ve artan olduğunu görmeye imkân tanır. Ayrıca Brian'ın kârı hakkındaki sorulara hızlı bir şekilde yaklaşık cevaplar vermek için kullanılabilir; örneğin "zarar etmemesi için en az kaç tane sandviç satılmalıdır?" "$100 kazanmak için kaç tane satılmalıdır?" (210 veya 215 civarında gözüküyor.) Bağlam grafiğe anlam verir ve grafik bağlamın anlaşılmasına katkıda bulunur.

Grafik verilerdeki örüntüye işaret eder fakat, bağlam açısından düşünüldüğünde, tüm değerler bağlam için anlamlı olmayabilir. Bu durumda, doğruyu düşey eksenin



Şekil 14.25 Kârı satılan sandviç sayısının fonksiyonu olarak gösteren grafik.

soluna doğru uzatmak anlamlı değildir; çünkü bu negatif sayıda sandviç satılması anlamına gelir. Milyonlarca sandviç satımı hakkında da konuşmak makul değildir (ulusal bir zincir geliştirmediği müddetçe!).

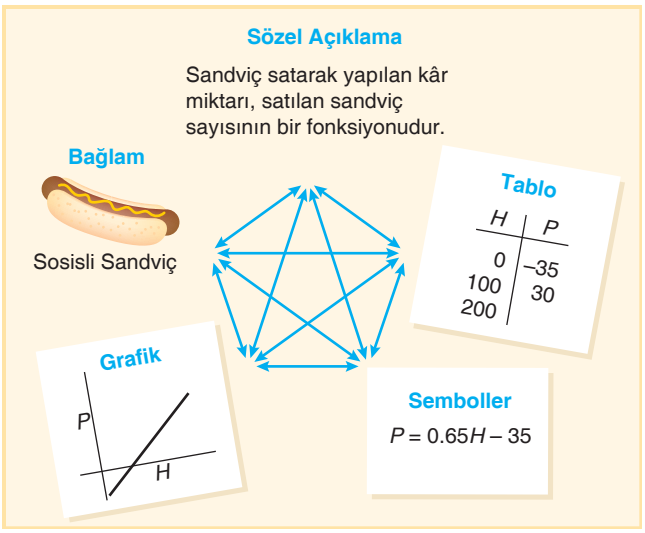
Teknoloji NOTLARI

Geçmişte, öğrenciler noktaları çizmek zorunda oldukları ve bunun için tüm hesaplamaları elleriyle yapmaları gerektiğinden, uzun işlemlerden ve kesirli değerlerin çiziminden kaçınmak için fonksiyonlar, tamsayıları kullanan örneklerle sınırlandırılırdı. Artık teknoloji sayesinde, daha kesin ve "karma karışık" sayıları içeren gerçekçi bağlamları inceleyebiliyoruz. ◆

Gösterimlerin İlişkilendirilmesi

Şekil 14.26 sandviç bağlamı için fonksiyonun beş gösterimini sunmaktadır. Burada fark edilmesi gereken en önemli fikir, verilen bir fonksiyon için bu gösterimlerin her biri aynı ilişkiyi resmetmektedir; öğrenciler gösterimler arasındaki bağlantıları kavramsal şekilde açıklayabilmelidirler. Bu sizin Cebir I ders kitaplarında yaşamış olabileceğiniz tecrübeden daha farklı bir deneyimdir. Bu ders kitaplarında takip etmeniz gereken adımlarla birlikte şu tür yönergeler verirlerdi: "Eşitliği verilen fonksiyonun grafiğini çiziniz." Fark, gösterimler arasındaki geçiş ezbere bir prosedürün takibiyle mi yoksa fonksiyonu anlamlandırmayla mı yapılacağı konusundadır. Sizin bir öğretmen olarak amacınız ikincisidir.

Yedinci sınıf *İlişkili Matematik Projesi* (*Connected-Mathematics Project-CMP II*) "Değişkenler ve Örüntüler"



Şekil 14.26 Bir fonksiyonun beş farklı gösterimi. Verilen her bir fonksiyon için, öğrenciler tüm bu gösterimlerin bağlantılı olduğunu ve aynı ilişkiyi resmettiğini görmelidirler.

başlığında bütün bir üniteye sahiptir. Burada öğrenciler fonksiyonların farklı gösterimlerini gerçek bağlamlarda inceleyip kullanırlar. Sonraki sayfa verilen alıntı, tablolar ve grafikler üzerinde odaklanan bir derstir.

NCTM Standartları

"Ortaokul yıllarında, öğrenciler tablolar, grafikler ve semboller arasındaki ilişkileri anlayabilmeli ve uygulama amaçları için ilişkileri temsil etme biçimlerinin avantaj ve dezavantajlarını muhakeme edebilmelidirler. Fonksiyonların çoklu gösterimleriyle (sayısal, grafik ve sembolik) çalışırlarken, fonksiyonların daha kapsamlı bir kavrayışını geliştireceklerdir" (s. 38). ◆

Değerlendirme NOTLARI

Sandviç problemi için (aslında her görev için adapte edilebilir) güzel bir biçimlendirici ve düzey belirleyici değerlendirme yönlendirmesi şudur: "225 sandviç satımından elde edilen kârı bulmak için her bir gösterimin nasıl kullanılacağını bana gösterebilir misin?" ◆

Öğretim Programlarında Cebirsel Düşünme

"Cebir" kelimesi yerine "cebirsel düşünme" ifadesinin kullanılmasının bir sebebi şudur: örüntü ve genelleme arayışı cebir konuları olarak kategorize edilen öğretim programı konularının ötesine geçmektedir. Siz bu bütünleştirmenin bir kısmını tecrübe ettiniz (geometrik artan örüntülere bakarak ve çevre ve alanları çalışarak). Aslında *Öğretim Programı Odak Noktaları*nda (NCTM, 2006) cebiri içeren odak noktaların çoğu cebiri diğer konu alanlarıyla ilişkilendirmektedir. Takip eden bölümlerde, keşif için bir araç olarak kullanılan cebirsel düşünmeyle birlikte

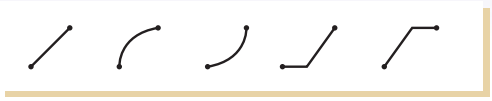
Bağlantılı Matematik

Sınıf 7, *Değişkenler ve Örüntüler*

Çalışma 3: Grafik ve Tabloların Analizi

Bağlam

Bu ünite, bir grup öğrencinin Philadelphia'dan Williamsburg'a, Virginia, birkaç günlük bisiklet turuna çıkması ve sonrasında da kendi bisiklet turu şirketlerini kurmaya karar vermeleri bağlamında oluşturulmuştur. Öğrenciler, zaman, mesafe, hız, masraflar, kârlar ve benzerleri arasındaki fonksiyonel ilişkileri inceliyorlar. Veriler kesikli noktalar olarak resmedildiğinde, öğrenciler noktalar arasında grafiğin nasıl bir şey olacağını inceliyorlar. Örneğin, yolculuğun ilk 10 dakikasında, hızın 0'dan 15 mil/saat değişikliğini gösteren beş grafikten her biri için ne tür yorumlar yapılabilir?



Görev Tanımı

Bu çalışmada ünitedeki hayali öğrenciler kendi tur şirketlerini kurmak için yaptıkları hazırlıklara veriler toplayarak başlamaktadırlar. İlk görevleri olarak, iki farklı bisiklet kiralama şirketinden veri istemişlerdir. Bu şirketlerden birisi verilerini tablo biçiminde diğeri ise grafik şeklinde vermiştir. Görev ilginçtir çünkü durumun gereklerine dayalı olarak öğrenciler bir gösterimin diğerine göre değerini tecrübe etmektedirler. Bu ünitede öğrencilere, bir grafiğin mi yoksa bir tablonun mu daha iyi bir bilgi kaynağı olduğu sorulmaktadır.

Takip eden görevlerde, daha önce tura katılanların hangi ücretle bisiklet turuna katılacaklarını soran bir telefon anketinden elde edilen verileri gösteren bir tablo öğrencilere verilmektedir. Öğrenciler bu verileri grafikleştirecek en iyi yolu bulmak zorundadırlar. Bisiklet turu için bir fiyat belirlendikten sonra, farklı müşteri sayılarına bağlı olarak kâr hakkındaki sorulara karşılık gelen beklenen kâr grafikleri oluşturulmuştur.

Çalışmalar bu noktada formüller kullanmamaktadır. Takip eden çalışma "Örüntüler ve Kurallar" olarak isimlendirilmekte ve eşitlikleri veya kuralları tablo ve grafik gösterimleriyle ilişkilendirmeye başlamaktadır. Son çalışmada, grafiği veren kural değiştiğinde grafiklerin görünüşlerinin nasıl değiştiğini incelemek için öğrenciler grafik çizer hesap makinelerini kullanmaktadırlar.

2.1 Bisiklet Kiralama

Tur işleticileri müşterilerine bisiklet kiralamaya karar verirler. İki bisiklet mağazasından bilgiler alırlar.

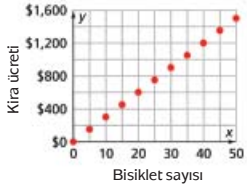
Rocky's Cycle Center mağazası bisikletleri için haftalık kira ücretlerinin bir tablosunu göderir.

Rocky'nin haftalık bisiklet kira oranları

Bisiklet sayısı	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Kira ücreti	$400	$535	$655	$770	$875	$975	$1,070	$1,140	$1,180	$1,200

Adrian's Bike Shop mağazası haftalık kira ücretleri grafiğini gönderir. Kira ücreti bisiklet sayısına bağlı olduğu için bisiklet sayısını x-ekseni üzerine yerleştirmişlerdir.

Adrian's haftalık bisiklet kira oranları



Problem 2.1 Tablo ve Grafik Analizi

A. Ocean Bike Tours hangi bisiklet mağazasıyla çalışmalıdır? Açıklayınız.

B. Rocky's mağazasının tablosu için bir grafik yaptığınızı düşünün. Noktaları birleştirmek anlamlı mıdır?

C. 32 Bisiklet kiralamak için her bir mağazanın ne kadar ücret isteyeceğini düşünüyorsunuz?

D. **1.** Tablo ve grafikte hangi örüntüleri buldunuz?
2. Bulduğunuz örüntülere dayalı olarak, tablo ve grafikte gösterilmeyen değerleri nasıl tahmin ettiniz?

E. **1.** Adrian's mağazasından herhangi bir sayıda bisiklet kiralamanın maliyetini bulmak için bir yöntem geliştiriniz.
2. Rocky's mağazasından herhangi bir sayıda bisiklet kiralamanın maliyetini bulmak için bir yöntem geliştiriniz.

ACE Ev ödevi sayfa 35'te başlar

Kaynak: Connected Mathematics: Variables and Patterns: Teacher Edition by Glenda Lappan, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel, & Elizabeth Difanis Phillips. Copyright © 2006 by Michigan State University. Used by permission of Pearson Education, Inc. Tüm hakları saklıdır.

diğer konu alanları vurgulanacaktır. Bu kısa tartışma, sonraki bölümlerde bütün yönleriyle geliştirilecektir.

Ölçme ve Cebir. Soares, Blanton ve Kaput (2006) ilkokul programlarının nasıl "cebirselleştirileceğini" açıklamaktadır. Verdikleri bir ölçme örneği *Herkes için Spagetti ve Köfte*'yi kullanarak bir araya getirilen masaların sayısı verildiğinde artan sayıda ihtiyaç duyulan sandalye sayısına bakılır.

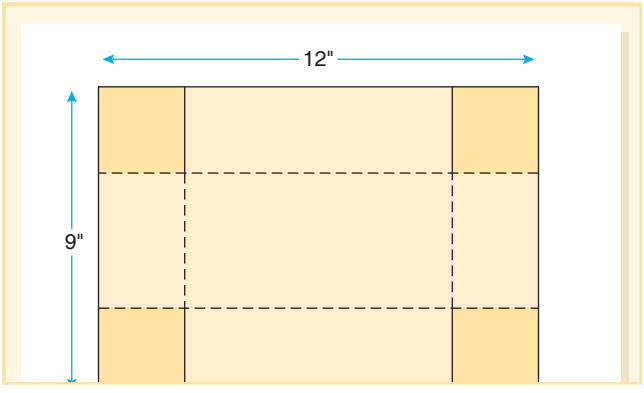
Geometrik formüller, şekillerin çeşitli boyutlarını, alanlarını ve hacimlerini ilişkilendirir. Bu formüllerin her birisi en az bir fonksiyonel ilişki içerir. Bir geometrik şekli ölçmek için aşina olduğunuz herhangi bir formülü düşününüz. Örneğin, çemberin çevresini veren $c = 2\pi r$ formülünü alalım. Yarıçap bağımsız değişkendir ve çevre bağımlı değişkendir. Çevrenin yarıçapa bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Hatta bir koninin hacmi ($V = 1/3\pi r^2 h$) gibi doğrusal olmayan formüller de fonksiyondur. Burada hacim, koninin yüksekliği ve yarıçapın her ikisinin de fonksiyonudur. Eğer yarıçap sabit tutulursa, hacim yüksekliğin bir fonksiyonu olur. Benzer şekilde sabit bir yükseklik için hacim yarıçapın bir fonksiyonudur.

Aşağıdaki etkinlik, bir kutunun hacminin boyutların değişimi neticesinde nasıl çeşitlendiğini incelemektedir.

Etkinlik 14.18

En Büyük Kutuyu Tasarlamak

Dikdörtgen biçiminde kartondan bir sayfa ile başlayınız ve her bir köşeden bir kare kesiniz. Ortaya çıkan dört kanadı katlayınız ve birlikte bantlayarak açık bir kutu yapınız. Kutunun hacmi, karelerin ölçüsüne bağlı olarak değişecektir (Bkz. Şekil 14.27). Kutunun hacmini, kesilen karelerin ölçülerinin bir fonksiyonu olarak veren bir formül yazınız. En büyük hacimdeki kutuyu yapmak için karelerin ölçüsünün ne olması gerektiğini belirlemek amacıyla bu fonksiyonu kullanınız.



Şekil 14.27 Eğer kareler 9 × 12 inç ebatlarında bir kartondan kesilir ve dört kanat katlanırsa, kareler hangi ölçüde kesilmeli ki kutu mümkün olan en büyük hacme sahip olsun?

Veriler ve Cebir. Veriler spor rekorlarından, nüfus sayımı raporlarından, gazetelerin iş dünyası bölümlerinden ve daha birçok farklı kaynaktan toplanabilir. Öğrenciler ölçme örneklerinden ve araştırma verilerinden veriler toplayabilirler. Bölüm 7'nin sonlarına doğru not edildiği gibi, İnternette verilerin bulunabileceği birçok site vardır.

NCTM Standartları

Deney yaparken veya gerçek verilerle uğraşırken, öğrenciler bir doğru ya da eğrinin tam eşlenemeyeceği "düzensiz verilerle" karşılaşabilirler. Öğrenciler böylesi durumları tecrübe etmede ve tahminde faydalı olacak biçimde veriyi yeterince iyi karşılayan fonksiyon bulabilme becerilerini geliştirmek için öğretmenden yardıma ihtiyaç duyacaklardır" (s. 228). ◆

Deneyler. İki değişken arasındaki fonksiyonel ilişkileri, eğer varsa, görmek için öğrencilerin inceleyebileceği birçok deney vardır. Veri toplamak geniş bir yelpazede çeşitlilik gösteren öğrencilerin uğraş vermeleri ve matematiğin gerçek olguları açıklamak amacıyla nasıl kullanılabileceğini görmeleri için oldukça güzel bir yoldur.

Veri toplanmalı ve daha sonra bir tabloda ya da grafikte gösterilmelidir. Burada amaç, aşağıdaki etkinliklerde olduğu gibi, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında bir ilişkinin var olup olmadığını ve eğer varsa doğrusal olup olmadığını belirlemektir.

- 100 öğrencinin yan yana durarak futbol maçlarında görülene benzer bir dalgayı tamamlamaları ne kadar sürer? 5 ile 25 arasında farklı sayılardaki öğrencilerle deneyiniz. Verilen bir dalga zamanı için kaç öğrencinin gerekeceği öngörülebilir mi?
- Kibrit kutusundan yapılan bir araba bir rampadan ne kadar uzağa kaydırılabilir (arabanın yüksekliğine göre rampa da yükseltilir)?
- Bir kâğıt uçağın uçma süresi, uçağın burnuna eklenen kâğıt ataçlarının sayısından nasıl etkilenir?
- Aynı hizadaki domino taşları ile bunların devrilmeleri için gereken zaman arasındaki ilişki nedir? (Domino taşlarını 100'ün katları şeklinde kullanın.)
- Farklı sayıdaki gazete sayfalarından dürülmüş kağıt toplar yapın ve kağıtların top olarak kalması için lastik bantlarla sarın. Sayfa sayısı ile topun atılabileceği uzaklık arasındaki ilişki nedir?
- Kâğıt havlu üzerine damlatılan renkli su damlalarının sayısı ile ortaya çıkan beneğin yarıçapı arasındaki ilişki nedir? Farklı markalarda bu ilişki farklı mıdır?
- Kürdan köprünün kaldırabileceği ağırlık ne kadardır? Kürdanlardan oluşan demeti aralarındaki mesafe 2 inç olan direklere yatay olarak yerleştiriniz. Kürdanlara, içine ağırlık koyabileceğiniz bir çanta veya başka bir kap asınız ve kürdanlar kırılıncaya kadar ağırlık koymaya devam ediniz. Sadece bir kürdanla başlayıp sayıyı artırınız (McCoy, 1997).

Bunlara benzer deneyler eğlencelidir ve geniş bir yelpazedeki öğrenciler için erişilebilirdir. Bunlar ayrıca öğ-

rencilerin deneysel tasarımlarla uğraşmalarına fırsat sağlar. Bağımlı ve bağımsız değişkenleri saptamak, diğer değişkenler için deneyleri kontrol etmek, ölçüm yapmak ve sonuçları kaydetmek ve verileri analiz etmek için öğrencilerin pratik yapmaları gerekir. Bu matematik ve fenin çok güzel bir harmanlamasıdır.

Saçılma Diyagramları. Gerçek dünyada fonksiyonel ilişkiye sahip gözüken olguların hepsi şimdiye kadar sunduğumuz durumlardaki kadar açık veya iyi tanımlanmış bir ilişkiye sahip olmayabilir. Bu durum yukarıda verdiğimiz deneyler için de geçerlidir. Bununla birlikte, özdeş kitapların üst üste konularak artan yüksekliklerinin ölçümünde bile (ki bu doğrusal bir durumdur) ölçüm hatası, tam olarak aynı doğru üzerinde bulunmayan değerlerin ortaya çıkmasına neden olur. Böylesi durumlarda veriler genellikle saçılma diyagramlarının üretilmesinde kullanılır.

Grafiği çizilen verilerin görsel bir incelemesi, eğer varsa, ne tür bir ilişkinin var olduğuna dair fikir verir. Eğer doğrusal bir ilişki varmış gibi gözüküyorsa, örneğin, öğrenciler en iyi uyum doğrusuna[3] yaklaşabilirler veya doğrusal regresyon yapmak için grafik teknolojisiyle en iyi uyum doğrusunu bulurlar (eşitlikle birlikte). Grafik hesap makinasındaki bu özelliği kullanmak için öğrencilerin doğrusal regresyonun ne olduğunu anlamaları gerekmez. Bunun en iyi uyum doğrusunu bulmak için istatiksel bir yöntem olduğunu bilmeleri yeterlidir.

Tüm saçılma diyagramları düz çizgi ilişkisi göstermeyecektir. Öğrencilerin çeşitli yarıçaplara sahip balonların sönme sürelerini bulmaya çalıştıklarını varsayalım (bir başka ilgi çekici deney!). Parabolik veya kübik bir fonksiyon verilerin şekline daha iyi yaklaşabilir. Grafik hesap makineleri ayrıca en iyi uyum eğrilerini de bulabilirler. Diğer konu alanlarındaki cebirsel düşünme için verilen bu kısa örnekler anaokulundan 8. sınıfa kadarki programlarda cebirin önemini açıklamaktadır.

[3] "En iyi uyum doğrusu" ifadesi İngilizcede"the line of best fit" ifadesinin çevirisi olup teknik karşılığı regresyon doğrusudur.

Bölüm 14 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Kaput beş tür cebirsel düşünme sunmaktadır. Bunlardan her birini listelemek yerine, cebirsel düşünmeyi, üç cümleden fazla olmamak şartıyla, Kaput'un ana fikirlerini ve bu bölümün ruhunu yansıtacak şekilde açıklayınız.
2. Eşitlik işaretiyle ilgili öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları nelerdir? Bu yanılgılara yol açan şeyler nelerdir ve öğretimle bunlar nasıl giderilebilir?
3. Değişkenlerle ilgili öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları nelerdir? Bu yanılgılara yol açan şeyler nelerdir ve öğretimle bunlar nasıl giderilebilir?
4. Eşit kollu terazide $4x + 3 = x + 12$ eşitliğinin nasıl çözülebileceğini açıklayınız.
5. Yinelemeli ilişki nedir? Genişleyen örüntü için yapılan bir tabloda yinelemeli ilişki için nereye bakardınız? Bunun örüntünün kendisi açısından anlamı nedir?
6. Yinelenen ilişkiden yola çıkarak genişleyen örüntünün grafiğinin düz mü yoksa eğri mi olacağını nasıl söyleyebilirsiniz?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. İlkokul öğretim programlarında öğrencilere aritmetikten cebire bağlantılar yaptırmak görece olarak yeni bir fikirdir. Sayı alanında, bir algoritmayı alıp bir kural genellemesi yapılacak şekilde sunumuna yönelik ne tür örnekler bulabilirsiniz? (Örnek olarak "Toplamayla Genelleme" kısmına bakınız.)
2. Fonksiyon üzerine odaklanan çevrimiçi küçük uygulama yazılımlarının bazılarını inceleyiniz (bölüm sonundaki "Online Kaynaklar" kısmına bakınız). Öğrenme imkânları açısından her birisi için teknolojinin ne sunduğunu düşününüz. Teknoloji sınıftaki çeşitliliği desteklemek için nasıl kullanılabilir?

Bölüm 14 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Many teachers find pattern explorations sufficiently interesting that they may not think of using literature to provide a springboard for student explorations. However, the following three examples of books are excellent beginnings for patterns and chart building.

Anno's Magic Seeds *Anno, 1994*

Anno's Magic Seeds has several patterns. A wise man gives Jack two magic seeds, one to eat and one to plant. The planted seed will produce two new seeds by the following year. Several years later, Jack decides to plant both seeds. Then he has a family and starts to sell seeds.

At each stage of the story, there is an opportunity to develop a chart and extend the current pattern into the future. Austin and Thompson (1997) describe how they used the story to develop patterns and charts with sixth- and seventh-grade students.

Bats on Parade *Appelt, 1999*

This story includes the pattern of bats walking 1 by 1, then 2 by 2, and so on. One activity from this enjoyable book is determining the growing pattern of the number of bats given the array length (e.g., 3 for the 3-by-3 array). There is also one mouse, so this can be included in a second investigation. Activity sheets for these two ideas and two others can be found in Roy and Beckmann, 2007.

Pattern *Pluckrose, 1988*

This book brings pattern from the real world to the classroom in the form of brilliantly colored photographs. Pattern is seen in the soles of tennis shoes, dishes, butterflies, leaves, and flowers. The book provides a jumping-off point for an exploration of repeating patterns in the world around us.

Two of Everything: *A Chinese Folktale* *Hong, 1993*

The magic pot discovered by Mr. Haktak doubles whatever goes in it, including his wife! This idea of input–output is great for exploring functions from grades 2 through 8; just vary the rule of the magic pot from doubling to something more complex. For more details and handouts, see Suh (2007) and Wickett, Kharas, and Burns (2002).

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Joram, E., Hartman, C., & Trafton, P. R. (2004). "As people get older, they get taller": An integrated unit on measurement, linear relationships, and data analysis. *Teaching Children Mathematics*, *10*(7), 344–351.
This is a wonderful unit for second grade showing students using real data to answer the question of how much taller students in the fourth grade were compared to students in the second grade. They used a best-fit line to create a function from the scatter plot data.

Kalman, R. (2008). Teaching algebra without algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(6), 334–339.
This article includes three contexts that involve simplifying equations and effectively explains how to make sense of the simplification by relating it to the context. An excellent resource for helping middle school students make sense of symbols and properties.

Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching Children Mathematics*, *13*(2), 111–117.
This article helps us understand the conceptual considerations related to the equal sign while simultaneously illustrating the value of errors and misconceptions in creating opportunities for learning.

Kitaplar

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.
This book is a detailed look at helping children in the primary grades develop the thinking and create the generalizations of algebra. The included CD shows classroom-based examples of the ideas discussed. Many of the ideas about equality, true/false sentences, and generalizations discussed in this chapter were influenced by this book.

Driscol, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6–10.* Portsmouth, NH: Heinemann.
Driscol's book is one of the most popular algebra resources—full of rich problems to use and helpful for expanding the reader's understanding of algebra.

Greenes, C. E., & Rubenstein, R. (Eds.). (2008). *Algebra and algebraic thinking in school mathematics.* NCTM 70th Yearbook. Reston, VA: NCTM.
NCTM Yearbooks are always excellent collections of articles for grades pre-K–12. This one is no exception, offering a wealth of thought-provoking and helpful articles about algebraic thinking.

NCTM'nin Navigasyon Serileri

Cuevas, G. J., & Yeatts, K. (2001). *Navigating through algebra in grades 3–5.* Reston, VA: NCTM.

Friel, S., Rachlin, S., & Doyle, D. (2001). *Navigating through algebra in grades 6–8.* Reston, VA: NCTM.

Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in prekindergarten–grade 2.* Reston, VA: NCTM.
These books offer high-quality algebra activities that reflect the Principles and Standards. *Each book includes a CD-ROM with blackline masters for the activities, applets, and selected articles.*

İnternet Kaynakları

Algebra Balance Scales and Algebra Balance Scales—Negative
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html
Linear equations are presented on a two-pan balance with variables on each side. The user can solve equations in the same way as described in the text. The negative version uses balloons for negative values and negative variables.

Graph Sketcher
www.shodor.org/interactivate/activities/GraphSketcher
Works very much like a graphing calculator for graphing functions of any type. A good demonstration tool for making graphs of equations.

Learning about Rate of Change (e-Example)
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.2/index.htm
A nice interactive lesson in which the cost per minute to make a phone call (the slope) can be adjusted and then the graph of the cost can be displayed. A slider helps connect points on the two graphs.

Pan Balance—Shapes
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?id=33
With each problem, four shapes are assigned unknown values. By stacking shapes on the two balance pans, the user attempts to balance the scale and then create additional balances. A numbers version and an expressions version are extensions of this applet.

Patterns, Relations and Functions (eNLVM module)
http://enlvm.usu.edu/ma/nav/toc.jsp?sid=__shared&cid=emready@patterns_relations_functions&bb=course
This site encourages students to generate rules and functions for geometric sequences, describing relationships between the pattern number and characteristics of the pattern.

Slope Slider
www.shodor.org/interactivate/activities/slopeslider
A good interactive tool for illustrating the meaning of slope and the *y*-intercept for a linear equation of the form $y = mx + b$. The user can use a slider to change the value of m or b and see the graph change dynamically.

Fonksiyon Makinesi Apletleri

Function Machine (NLVM)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_191_g_3_t_1.html

Function Machine (Math Playground)
www.mathplayground.com/functionmachine.html
This is a nice, Flash-based tool.

Stop That Creature! (PBS Kids' CyberChase)
http://pbskids.org/cyberchase/games/functions/functions.html
In this fun game, figure out the rule that runs the game to shut down the creature cloning machine.

Function Machine (Shodor Project Interactivate)
www.shodor.org/interactivate/activities/FunctionMachine
The functions on this site have one of the following forms: $y = x \times __$, $y = x + __$, $y = x - __$, where the underline can be any integer between –10 and 10.

Linear Function Machine (Shodor Project Interactivate)
www.shodor.org/interactivate/activities/LinearFunctMachine

Bölüm 15

Kesir Kavramlarını Geliştirme

Kesirler, öğrenciler için ortaokul düzeyinde dahi kayda değer bir zorluk oluşturur. NAEP testinin sonuçları tutarlı bir şekilde öğrencilerin kesir kavramlarını anlama düzeylerininzayıf olduğunu göstermektedir (Sowder & Wearne, 2006; Wearne & Kouba, 2000). Bu anlama eksikliği, kesir hesaplamalarında, ondalık sayılar ve yüzde kavramlarında ve diğer öğrenme alanlarındaki kesir kullanımında, özellikle cebirde, zorluklara dönüşür (NMP, 2008).

Öğretim Programları Odak Noktaları (NCTM, 2006) temel kesir kavramlarının başlangıç gelişimini 3. sınıfta üç odak noktasından birisi olarak belirler: *Kesir ve kesir denkliğinin anlaşılmasının geliştirilmesi*. Hesaplama ve orantısal akıl yürütme gibi konulara odaklanarak 3. sınıfı takip eden her sınıfta da kesir kavramları vurgulanır. İlk ve ortaokul programları, öğrencilere müfredatın bu önemli alanında derinlemesine kavramsal bir anlayış geliştirmeleri için yeterli zaman ve deneyim sağlamalıdır. Bu bölüm, sağlam bir temel oluşturmada öğrencilere yardım etmek için kesir kavramlarının kavramsal gelişimini incelemektedir.

Ana Fikirler

1. Öğrencilerin kesirleri tam olarak anlaması için bir bütünün parçası, oran ve bölme dahil birçok kavram üzerinde tecrübe etmeleri gerekir.
2. Kesirlerle çalışmak için üç model kategorisi vardır – alan (örneğin, bir bahçenin $\frac{1}{3}$'i), uzunluk (örneğin, bir inçin[1] $\frac{3}{4}$'ü) ve küme veya çokluk (örneğin, bir sınıfın $\frac{1}{2}$'i).
3. Parçalara ayırma ve tekrarlama, öğrencilerin kesirlerin anlamını, özellikle pay ve paydayı, anlama yollarıdır.
4. Öğrencilerin kesirlerle tahmin yapma deneyimlerine ihtiyaçları vardır.
5. Denk kesirleri anlamak önemlidir. İki denk kesir, aynı miktarı farklı boyutlarda kesir kısımlarıyla tanımlamanın iki yoludur. Örneğin, $\frac{6}{8}$ kesrinde eğer sekizde birler, ikililer olarak alınırsa herbir sekizde bir ikilisi dörtte bir eder. Sonra altı tane sekizde birin üç tane dörtte bire eşit olduğu görülebilir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Öğrencilerin kesir konusuna getirdikleri şey onların adil paylaşım anlayışlarıdır. Diğer doğal sayı fikirleri, bölümün ilerleyen kısımlarda tartışıldığı gibi, aslında kesir gelişiminin erken safhalarında engel oluşturmaktadır. Bununla birlikte kesir kavramları öğretim programının diğer alanları ile yakından ilişkilidir. Burada verilen diğer öğrenme alanlarıyla olan bağlantı listesine ek olarak, kesirler sıklıkla ölçmede (Bölüm 19) ve olasılıkta (Bölüm 22) kullanılır.

- **Cebirsel Düşünme** (Bölüm 14): Bölüm 14'te açıklandığı gibi kesirler, cebirin bir parçasıdır. Değişken içeren denklemler sıklıkla kesirleri içerir veya kesirler kullanılarak çözülebilir. Örneğin, $\frac{x}{4} = \frac{5}{16}$ denk kesirler içeren bir denklemdir.
- **Kesir Hesaplaması** (Bölüm 16): Kesirlerin sağlam bir kavramsal anlaması olmadan kesirlerle hesaplama, sebepleri olmayan kurallara indirgenmiş olur.
- **Ondalıklar ve Yüzdeler** (Bölüm 17): Öğrenciler için önemli bir düşünce şudur: Ondalık ve yüzde notasyonları sadece kesirlerin iki farklı gösterimidir. Bu üç gösterim arasındaki bağlantıyı kurarak yeni fikirler öğrenme yükü önemli ölçüde azaltılabilir.
- **Oran ve Orantı** (Bölüm 18): Bir kesrin parça-bütün kavramı sadece bir çeşit orandır. Aynı kesir notasyonu parça-parça oranları için kullanılabilir (örneğin, odadaki erkeklerin kızlara oranı 3'e 5 veya $\frac{3}{5}$'tür).

[1] Ç.N. İnç = Uzunluk ölçüsü birimi. 1 inç = 2.54 cm

Kesirlerin Anlamları

Kesirler öğrenciler için kritik öneme sahip temel bir konudur, çünkü çeşitli uzmanlık alanlarındaki ölçmelerde kullanılır ve cebir ve birçok ileri matematikçalışmalarında gereklidir. Bu anlayış, bir bölgenin $\frac{3}{5}$'ü taranmış olma durumunu algılamanın çok ötesine geçmelidir. Bu bölüm kesirlerle ilgili birden çok kavrama ve bunların öğrencilerin doğal sayı bilgileri ile nasıl ilişkili olduğunagöz atarak başlar.

Kesir Yapıları

Kesirleri anlamak demek kesirlerin temsil ettikleri mümkün olan bütün kavramları anlamak demektir. Yaygın olarak kullanılan kesrin anlamlarından bir tanesi bir bütünün parçasının tarandığı örnekleri içeren parça-bütündür. Aslında parça-bütün ilkokul ders kitaplarına kesirleri temsil etme yolu olarak o kadar yerleşmiştir ki kesirlerin başka neyi temsil edebileceğini düşünmekte zorlanabilirsiniz. Parça-bütün modelleri ders kitaplarında en çok kullanılan model olmasına rağmen, kesir anlayışlarını araştıran birçok kişi, kesirlerin diğer anlamlarına daha fazla vurgu yapılarak öğrencilerin kesirleri daha iyi anlayacaklarına inanırlar (Clarke, Roche, & Mitchell, 2008; Siebert & Gaskin, 2006).

Durup Düşün!

Bir şeklin bir bölümünü taramanın ötesinde kesirler başka hangi şekillerde modellenir? Üç fikri isimlendirmeye çalışın.

Parça-Bütün. Parça-bütün kesirlerin bir anlamıdır ve aslında bir bölgeyi taramanın ötesinde bir anlama sahiptir. Örneğin, bir grup insanın bir kısmı olabilir (sınıfın $\frac{3}{5}$'ü alan gezisine gitti) veya bir uzunluğun bir parçası olabilir ($3\frac{1}{2}$ mil[2] yürüdük). Rasyonel sayılar üzerinde araştırmalar yapan Cramer, Wyberg ve Leavitt (2008), daire modelinin parça-bütün ilişkisini göstermede özellikle etkili olduğunu belirtmişlerdir. Belki bunlar, Durup Düşün!'e cevaben listelediğiniz fikirler arasındaydı. Bir sonraki paragraf öğrencilerin, Bölüm 2'de tartışıldığı gibi fikirler arasındaki birçok ilişkilendirmeyle derinlemesine anlamayı başarmaları için tecrübe etmeleri önemli bazı başka anlamları sunmaktadır.

Ölçmek. Ölçme bir uzunluğu belirlemeyi ve daha sonra başka bir nesnenin uzunluğunu ölçmek için o uzunluğu ölçme aracı olarak kullanmayı içerir. Örneğin, $\frac{5}{8}$ kesrinde, $\frac{1}{8}$ birim kesrini seçilmiş uzunluk olarak kullanabilir ve sonra $\frac{5}{8}$'e ulaşmak için ondan beş tane daha gerektiğini göstermek için sayabilir veya ölçebilirsiniz. Bu kavram kaç tane parçadan, ki parça-bütün durumlarında böyledir, ziyade ne kadar'a odaklanır (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Martinie, 2007).

[2] Ç.N. Mil: Uzunluk birimi. 1 mil = 1.61 km

Bölme. \$10'ı 4 kişi ile paylaşma fikrini düşünün. Bu bir parça-bütün senaryosu değildir, fakat hala herkesin paranın dörtte birini ($\frac{1}{4}$) veya $2\frac{1}{2}$ dolar alacağı anlamına gelir. Bölme sıklıkla kesirlerle ilişkilendirilmez ki bu talihsiz bir durumdur. Öğrenciler $\frac{10}{4}$, $4\overline{)10}$, $10 \div 4$, $2\frac{2}{4}$ ve $2\frac{1}{2}$ gibi yazılan buradaki örneği anlamalı ve bu örnekte kendisini rahat hissetmelidir (Flores, Samson, & Yanik, 2006). Kesirlerde bölmeye bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde değinilmiştir.

İşlemci. Kesirler, 20 fit karenin $\frac{4}{5}$'ü ya da pankart açan seyircilerin $\frac{2}{3}$'sindeki gibi bir işlemi belirtmek için kullanılabilir. Bu durumlar bir doğal sayının bir kesrini belirtir ve öğrenciler cevabı bulmak için zihinden matematik kullanabilirler. Araştırmacılar bu yapının okul müfredatında yeterince vurgulanmadığına (Usiskin, 2007) ve kesirlerin nasıl gösterildiğini bilmenin öğrencilerin kesirlerle nasıl işlem yapacaklarını bilmeleri anlamına gelmediğine (öğretim programının kesirleri içeren diğer alanlarında çalışırken ki gibi) dikkati çekerler (Johanning, 2008).

Oran. Bölüm 18'de ayrıntılı olarak tartışılan oran kavramı, kesirlerin kullanıldığı bir başka bağlamdır. Örneğin, $\frac{1}{4}$ kesri, bir olayın olma olasılığı dört tanede birdir anlamına gelebilir.

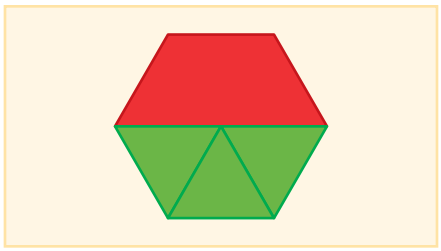
Oran, parça-parça ya da parça-bütün olabilir. Örneğin, $\frac{3}{4}$ oranı ceket giyenlerin (parça) ceket giymeyenlere (parça) oranı olabilir ya da parça-bütün olabilir, yani ceket giyenlerin (parça) sınıftakilere (bütün) oranı. Oranlarla çalışırken öğrenciler parça-parça ve parça-bütün ilişkilerine dikkat etmeli ki bu da bağlama dikkat etmeyi gerektirir.

Doğal Sayı Kavramları Üzerine İnşa Etme

Bölüm 2'de açıklandığı gibi, öğrenciler kavramları önceki bilgileri üzerine inşa ederler. Bu şu anlama gelir: öğrenciler kesirli durumlarla karşılaştıklarında problemleri çözmek için tabii olarak doğal sayılarla ilgili ne biliyorlarsa onu kullanırlar. Onların doğal sayılar ile ilgili bilgileri kesirlerle çalışmalarını hem destekler hem de engeller. Bir öğretmenin öğrencilere kesirlerin doğal sayılara nasıl benzer ve doğal sayılardan nasıl farklı olduğunu göstermesi önemlidir. Sıradaki liste doğal sayıların kesirlere bazı yanlış uygulamalarını göstermektedir:

1. Öğrenciler pay ve paydanın ayrı değerler olduğunu düşünürler. Onlar için $\frac{3}{4}$'ün tek sayı olduğunu görmek zordur. Kesir değerlerinin sayı doğrusu veya cetvel üzerinde bulunması, öğrencilerin bu kavramı geliştirmelerine yardım edebilir. Ayrıca "dördün üçü" (oranlar ve olasılıktan bahsetmiyorsanız) veya "üç bölü dört" ifadelerinden kaçının ve yerine " *dörtte* üç" deyin (Siebert & Gaskin, 2006).

2. Sayıların ayrı düşünülmesinde, öğrenciler $\frac{2}{3}$'nin birbirine eşit parçalar değil de herhangi iki parça anlamına geldiğini düşünebilir. Örneğin, öğrenciler aşağıdaki şeklin $\frac{1}{2}$'in yeşili göstermesinden ziyade $\frac{3}{4}$'ün yeşili gösterdiğini düşünebilir.

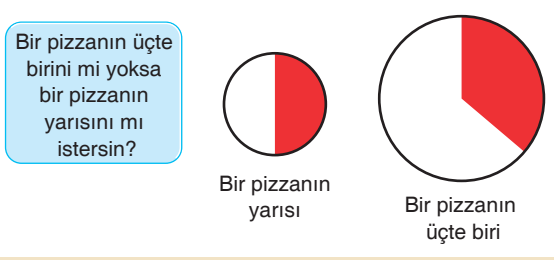


3. Öğrenciler, $\frac{1}{5}$ gibi bir kesrin $\frac{1}{10}$ gibi bir kesirden, 5'in 10'dan az olmasından dolayı daha küçük olduğunu düşünür. Bütünün parçalarını gösteren birçok görsel ve bağlam öğrencilerin anlaması için elzemdir. Örneğin, öğrencilere bir saatin $\frac{1}{2}$'i kadar mı, bir saatin $\frac{1}{4}$'i kadar mı ya da bir saatin $\frac{1}{10}$'i kadar mı dışarı çıkmayı tercih ettiklerini sorun.

4. Öğrenciler, yanlışlıkla doğal sayılar için olan işlem "kurallarını" kesirlerle hesaplama yapmada kullanırlar. Örneğin, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Bu bölümün tahmin etme kısmındaki keşfetmeler kısmı öğrencilere bu cevabın mantıklı olmadığını anlamalarında yardımcı olabilir. Öğrencilerin kesir işlemlerini anlamalarına yardım etmek için daha fazlasını Bölüm 16'da bulabilirsiniz.

Bütün İçin Sadece Tek Büyüklük. Öğrencilerin kesirler hakkında anlamaları gereken anahtar bir fikir kesrin, bütünün veya parçaların büyüklükleri hakkında birşey söylemediğidir. Bir kesir sadece parça ve bütün *arasındaki ilişki* hakkında bir şey söyler. Takip eden durumu düşünün.

Mark'a bir pizzanın üçte biri ya da bir pizzanın yarısını tercih etmesi teklif edildi. Aç olduğu ve pizzayı sevdiği için yarımı seçti. Arkadaşı Jane bir pizzanın üçte birini aldı fakat sonuçta Mark'tan daha fazla pizzası oldu. Bu nasıl olur?



Görsel, Mark'ın seçiminde nasıl yanlış yönlendirildiğini gösteriyor. "Pizza yanıltmacası"nda anlatılmak istenen şey her ne zaman iki ya da daha fazla kesir aynı bağlamda tartışılırsa, kesirlerin hepsinin eşit büyüklükteki bir bütünün parçaları olduğu varsayılmamalıdır (Mark'ın bir pizzanın yarısını tercih ettiğinde yaptığı gibi).

Herhangi bir model ile karşılaştırma sadece her iki kesir de aynı büyüklükteki bir bütünün parçaları olduğunda yapılır. Örneğin, Cuisenaire çubuklarını kullanırken açık yeşil bir şeridin $\frac{2}{5}$'si ile turuncu şeridin $\frac{2}{3}$'si karşılaştırılamaz.

Standartlar, 3. sınıftan 5. sınıfa kadar kesirlerin sağlam kavramsal gelişimini ve hesaplamanın esasen ortaokul konusu olmasını destekler. "3-5. sınıflarda öğrenciler kesir anlayışlarını bir bütünün parçaları ve bölme olarak inşa etmelidirler. Öncelikli olarak yarım, üçte bir, dörtte bir, beşte bir, altıda bir, sekizde bir ve onda bir gibi kesirlere odaklanarak çeşitli modelleri görmeye ve incelemeye ihtiyaçları olacaktır" (s. 150). ◆

Kesirler İçin Modeller

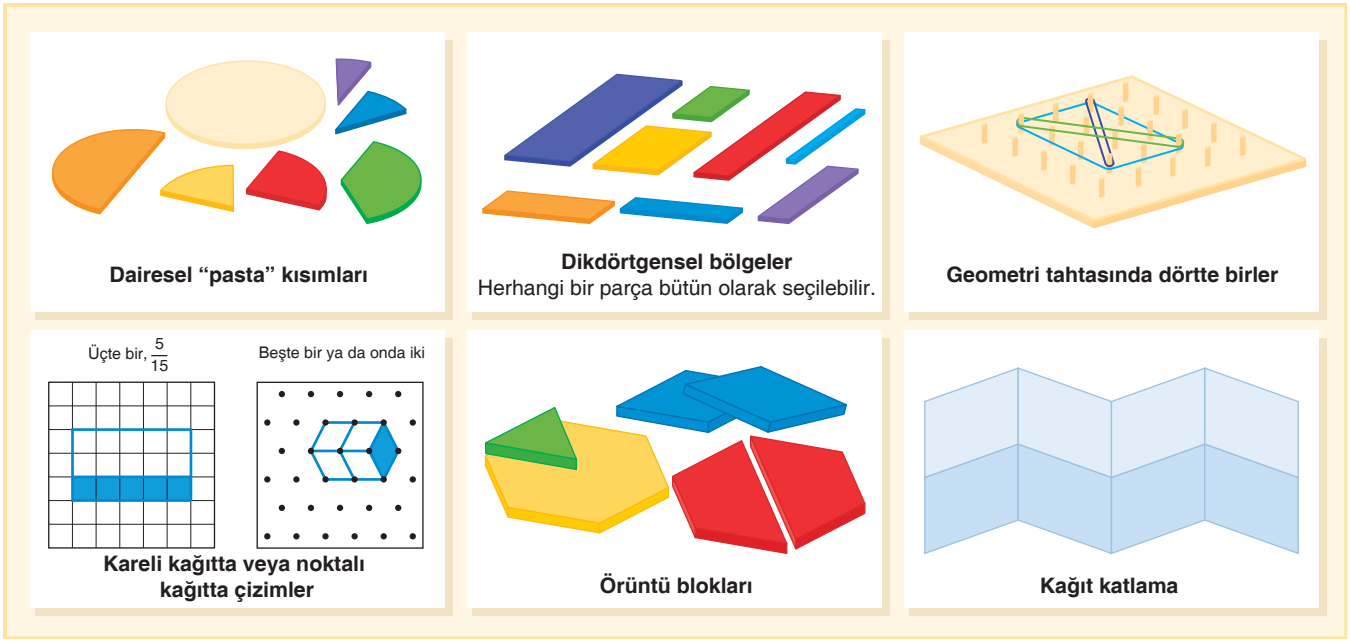
Kesir etkinliklerinde modellerin kullanımının önemli olduğunu ileri süren azımsanmayacak kadar çok kanıt vardır (Cramer & Henry, 2002; Siebert & Gaskin, 2006). Ne yazık ki, modelleri kullanan öğretmenler bile manipülatifleri her zaman kullanmaz veya öğrencilere modelin ışığında kesirlerin anlam ifade etmesi için yeterli zaman ayırmazlar. Bununla birlikte modeller uygun biçimde kullanıldığında öğrencilere, tamamen sembolik biçimde verildiğinde sıklıkla kafalarını karıştıran fikirleri açıklığa kavuşturmalarında yardımcı olabilir. Bazen aynı etkinliği oldukça farklı iki modelle yapmak faydalıdır; öğrencilerin gözünde etkinlikler oldukça farklı olacaktır.

Farklı modeller, öğrenme için farklı fırsatlar sunar. Örneğin, bir alan modeli öğrencilere bir bütünün parçalarını görselleştirmede yardım eder. Doğrusal bir model, herhangi iki kesir arasında her zaman başka bir kesir bulunabileceğini gösterir ki bu kesirlerin öğretiminde yeteri kadar vurgulanmayan önemli bir kavramdır. Ayrıca, bazı öğrenciler için bir model anlam ifade ederken bir başka model anlamsız gelebilir. Uygun modellerin kullanımı ve her çeşit modelin kullanımı öğrencilerin (ve öğretmenlerin) kesir anlayışlarını genişletir ve derinleştirir. Bu bölüm üç farklı modele odaklanır: bölge/alan, uzunluk ve küme.

Bölge ya da Alan Modelleri

Paylaşımın tartışılmasında, etkinliklerin hepsi daha küçük parçalara kesilebilen bir şeylerin paylaşımını içerdi. Kesirler bir alanın veya bölgenin parçasını temel alır. Bu iyi bir başlangıç noktasıdır ve paylaşım etkinliklerini yapmada neredeyse esastır. Şekil 15.1'de gösterildiği gibi birçok faydalı bölge modelleri vardır.

Dairesel kesir modelleri en çok kullanılan alan modelidir. (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 24-26.) Dairesel bölgenin bir avantajı, kesirlerin parça-bütün kavramını ve parçanın bütüne göreceli büyüklüğünün anlamını vurgulamasıdır (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008). Şekil 15.1'deki diğer modeller farklı şekillerin nasıl bütün olabileceğini gösterir. Kareli kağıtlar (birçoğu Çalışma Yaprak Setlerinde buluna-

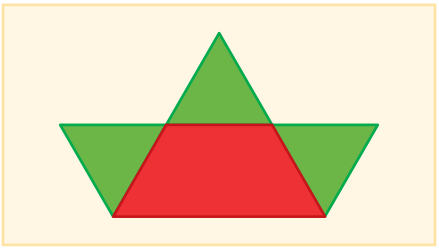


Şekil 15.1 Kesirler için alan ya da bölge modelleri.

bilir) özellikle esnektir ve materyallerin kontrol edilmesini gerektirmez. Alan modellerinin çok çeşitli ticari versiyonları (dairesel ve dikdörtgensel bölgeleri de içeren) mevcuttur. Bir sonraki etkinlik, alan modellerinin öğrencilere eşit paylaşımlar kavramlarını geliştirmelerinde yardım etmek için nasıl kullanılabileceğinin bir örneğidir.

Etkinlik 15.1

Oyun Alanı Kesirleri



Bu "oyun alanını" örüntü blokları ile oluşturun. Bu bütündür. Aşağıdaki her kesir için, oyun alanının parçalarını bulun ve kağıt üzerine çizin.

- $\frac{1}{2}$ oyun alanı
- $\frac{1}{3}$ oyun alanı
- $1\frac{1}{2}$ oyun alanı
- $\frac{2}{3}$ oyun alanı
- 2 oyun alanı
- $\frac{4}{3}$ oyun alanı

Kaynak: **Adapted from Roddick, C., & and Silvas-Centeno, C. (2007). "Developing Understanding of Fractions Through Pattern Blocks and Fair Trade." Teaching Children Mathematics, 14(3), 140–145.**

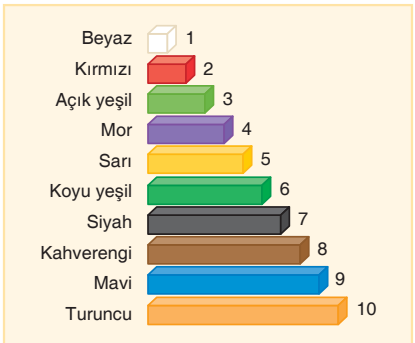
Uzunluk Modelleri

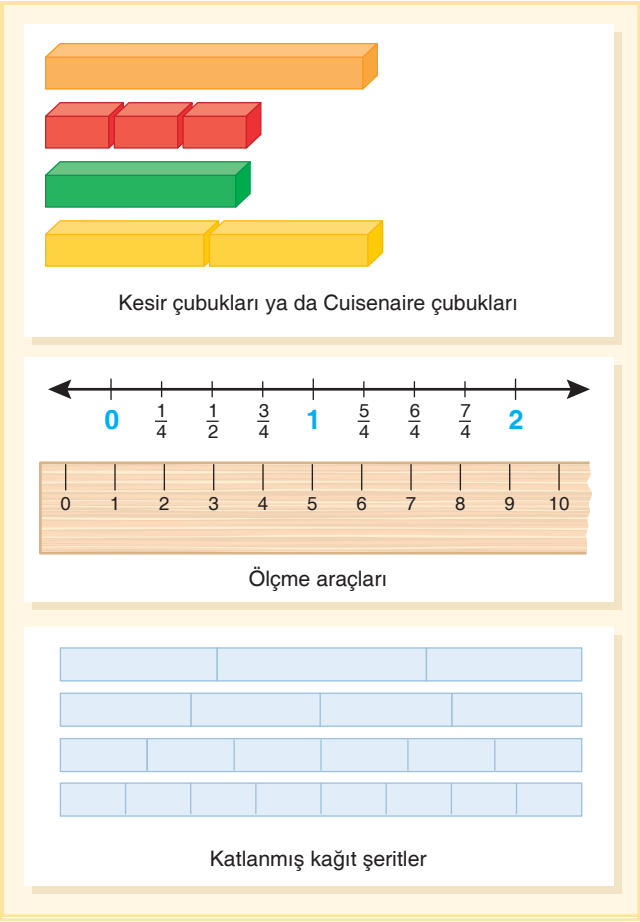
Uzunluk modelleriyle alanlar yerine uzunluklar ve ölçümler karşılaştırılır.Şekil 15.2'de gösterildiği gibi ya çizgiler çizilir ve alt bölümlere ayrılır ya da fiziksel materyaller uzunluk temel alınarak karşılaştırılır.

Cuisenaire çubuklarının, ölçümleri en küçük şerit veya çubuk cinsinden 1'den 10'a kadar olan uzunluklara sahip parçaları vardır. Tanımada kolaylık olması açısından her bir uzunluk farklı renktedir. Öğrenci-yapımı olan kesir çubukları yapmak için kağıt şeritler ya da hesap makinesi şeritleri katlanabilir.

Çubuklar ya da şeritler, herhangi bir uzunluk bütünü temsil edebileceğinden esneklik sağlar. Örneğin, öğrencilerden $\frac{1}{4}$'ler ve $\frac{1}{8}$'lerle çalışmalarını isterseniz, 8 birim uzunluğundaki kahverengi Cuisenaire çubuğu seçiniz. Dolayısıyla, dört çubuğu (mor) $\frac{1}{2}$ olur, iki çubuğu (kırmızı) $\frac{1}{4}$ olur ve bir çubuğu (beyaz) $\frac{1}{8}$ olur. On ikide birleri incelemek için 12 birim uzunluğunda bir bütün yapmak üzere turuncu ve kırmızı çubuğu bir araya getirin.

Cuisenaire çubukları aşağıdaki renk ve uzunluklardan oluşur:





Şekil 15.2 Kesirler için uzunluk ya da ölçme modelleri.

Sayı doğrusu önemli derecede daha üst düzey bir ölçme modelidir (Bright, Behr, Post ve Wachsmuth, 1988). Aslında matematik eğitimindeki birçok araştırmacı sayı doğrusunun kesirlerin öğretilmesinde daha çok vurgulanması gereken temel bir model olduğunu bulmuşlardır (Clarke, Roche, Mitchell, 2008; Flores, Samson, & Yanik, 2006; Middleton, van den Heuvel-Panhuizen, Shew, 1998; Usiskin, 2007; Watanebe, 2006). Doğrusal modeller kesirlerin sıklıkla kullanıldığı gerçek hayat bağlamlarıyla (ölçme) yakından ilişkilidir. Örneğin, müzik $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ve $\frac{1}{16}$ 'leri incelemek için mükemmel bir fırsattır (Goral ve Wiest, 2007).

Sayı doğrusu aynı zamanda kesrin hem bir sayı olduğunu ve hem de diğer sayılara göre göreceli büyüklüğünü vurgular ki bu alan modelleri kullanıldığında açık değildir. Daha önemlisi, sayı doğrusu iki kesir arasında her zaman bulunacak bir kesir daha olduğu fikrini pekiştirir. Aşağıdaki etkinlik öğrencileri doğrusal model kullanarak kesirler hakkında düşündürmek için gerçek hayat bağlamı kullanmanın eğlenceli bir yoludur.

Etkinlik 15.2

Kim Kazanıyor?

Aşağıdaki arkadaşlar kırmızı ışık-yeşil ışık oyunu oynuyorlar. Kim kazanıyor? Kesirler halihazırda ne kadar mesafe hareket ettiklerini söylüyor.

Mary—$\frac{3}{4}$ Harry—$\frac{1}{2}$ Larry—$\frac{5}{6}$

Han—$\frac{5}{8}$ Miguel—$\frac{5}{9}$ Angela—$\frac{2}{3}$

Bu arkadaşları başlangıç ve bitiş arasında nerede olduklarını göstermek için bir çizgiye yerleştirebilir misiniz?

Kaynak: **Adapted from Bay-Williams, J. M., & Martinie, S. L. (2003). "Thinking Rationally about Number in the Middle School." *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(6), 282–287.**

Küme Modelleri

Küme modellerinde bütün, bir nesneler kümesi olarak anlaşılır ve bütünün alt kümeleri kesirsel parçaları oluşturur. Örneğin, 3 nesne 12 nesneden oluşan bir kümenin dörtte biridir. Bu örnekteki 12'lik küme bütünü ya da 1'i temsil eder. Bir yığın sayma nesnesinden tek bir varlık olarak bahsetmek küme modellerini öğrenciler için zorlu kılar. Öğrenciler sıklıkla bütünde bulunan eşit büyüklükteki kümelerin sayısı yerine kümenin büyüklüğüne odaklanacaklardır. Örneğin, eğer 12 sayma nesnesi bir bütünü oluşturuyorsa, 4 sayma nesnesi dörtte bir değil *üçte* birdir çünkü 3 eşit küme bir bütün yapar. Bununla birlikte küme modeli, kesirlerin birçok gerçek yaşam kullanımları ve oran kavramlarıyla önemli bağlantılar kurmaya yardım eder. Şekil 15.3 kesirler için çeşitli küme modelleri gösterir.

Yüzünün iki tarafı farklı renkte olan sayma nesneleri sıklıkla kullanılır. Bir bütün kümenin farklı kesirsel parçalarını modellemek üzere kolayca çevrilip renkleri değiştirilebilir.

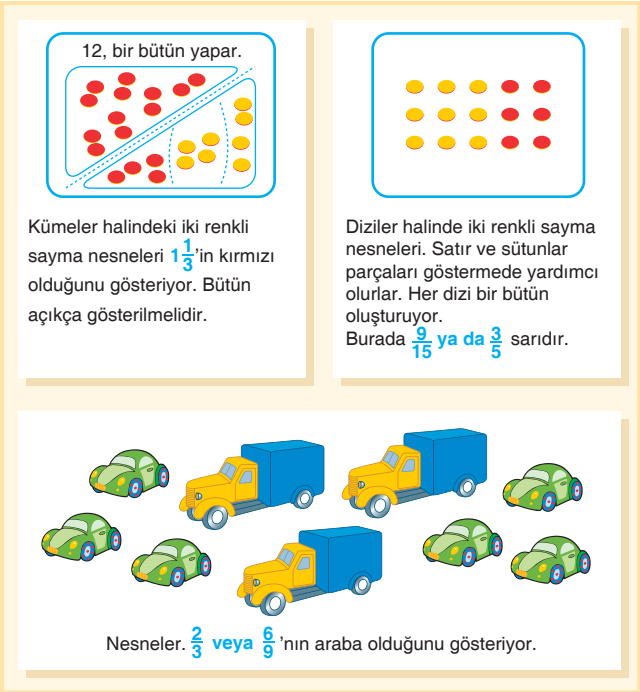
Aşağıdaki etkinlik sınıfı hareketlendirici olarak ya da beş dakikanız olduğunda hızlı bir etkinlik olarak yapılabilir.

Etkinlik 15.3

Sınıf Kesirleri

Bir grup öğrenciyi bir bütün olarak kullanın – örneğin, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{6}$'ler üzerinde çalışmak istiyorsanız altı öğrenci. Öğrencilere "Arkadaşlarınızın kaçta kaçı [tenis ayakkabısı giyiyor, kahverengi saça sahip, vb.]?" diye sorun. Zamanla kişi sayısını değiştirin

Öğrencilerin kesirleri çeşitli modeller üzerinde inceleyebilmeleri gerektiğini hatırlamak önemlidir.Eğer kesirlerin uzunluk olarak temsil edildiğini hiç görmezlerse doğrusal herhangi bir problem ya da bağlamı çözmede zorluk çekeceklerdir. Bir öğretmen olarak öğrencilerin $\frac{1}{4}$ gibi bir kesrin anlamını gerçekten anlayıp anlamadıklarını bir öğrencinin



Şekil 15.3 Kesirler için küme modelleri.

farklı bağlamlar ve modeller kullanarak dörtte biri modellediğini görmedikten sonra bilemezsiniz.

Öğrencilerin kesirsel miktarlar hakkındaki bilgilerini değerlendirmenin dolambaçsız bir yolu onlara bir kağıt parçası verip üçe katlamak ve her bir kısmın üstüne *alan*, *uzunluk*, ve *küme* yazıp onlardan her üç yolla bir kesir için (örneğin, $\frac{3}{4}$) resim göstermelerini ve bir cümle yazmalarını istemektir (NCTM, 2007, s. 32). Bu, yaygın olarak kullanılan kesirler için kesin çözüm ya da $\frac{31}{58}$ gibi kesirler için tahmin etme etkinliği olarak yapılabilir.

Kesirsel Parçalar Kavramı

Kesirlerin gelişiminde ilk hedef çocuklara *bütünün kesirsel parçaları* (bütün ya da birim *eşit büyüklükteki kısımlara* veya *adil paylara* parçalandığında ortaya çıkan parçalar) fikrini inşa etmelerine yardım etmektir.

Çocuklar bir çokluğu arkadaşlar arasında adil olarak paylaştırmak için iki ya da üç parçaya ayırma fikrini anlıyor gibi görünmektedirler. Neticede adil paylaşım fikri ve kesirsel parçalar arasında bağlantı kurarlar. Dolayısıyla, paylaşma etkinlikleri kesirlerin gelişimine başlamak için iyi yerdir.

Paylaşma Etkinlikleri

Birinci sınıftan sekizinci sınıf düzeyine kadar çocuklarla adil paylaşımlar oluşturma sürecine nasıl başladıklarını ve verilen etkinliklerin cevaplarını nasıl etkilediğini belirlemek için epeyce araştırma yapılmıştır (örneğin, Empson, 2002; Lamon, 1996; Mack, 2001; Pothier ve Sawada, 1983).

Paylaşma etkinlikleri genellikle basit bağlamsal problem formunda verilir. *Her bir çocuğun aynı miktarı alması koşuluyla üç çocuk arasında paylaşılmak üzere dört kare brovni olduğunu varsayın. Her bir çocuk ne kadar alır (ya da ne kadar aldığını gösterin)?* Etkinliklerin zorluğu sayılara, paylaşılan şeylerin cinsine (brovnilerdeki gibi bölgeler, sakızlarda olduğu gibi ayrık nesneler) ve bir modelin varlığı ya da kullanımına bağlı olarak değişir.

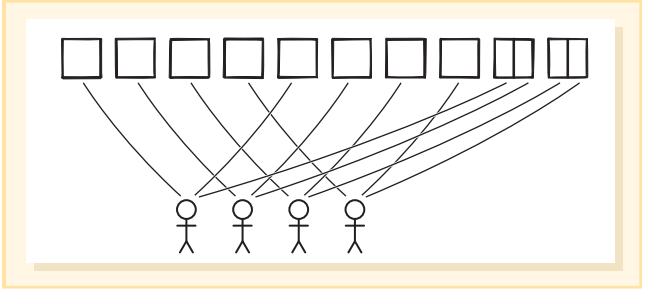
Öğrenciler başlangıçta paylaşma etkinliklerini (bölme) öğeleri her seferinde birer tane dağıtarak yaparlar. Bu sürecin sonunda kalan parçalar olursa öğrencilerin, her bir grubun (ya da kişinin) adil pay alması için nasıl alt bölümlere ayıracaklarını düşünmeleri gerekir. Alanları alt bölmelere ayırmaya uygun olan bağlamlar brovnileri (dikdörtgenler), sandviçleri, pizzaları, krakerleri, kekleri, şekerlemeleri ve benzerlerini içerir. Aşağıdaki problemler ve çeşitlemeler Empson (2002)'den uyarlanmıştır.

Dört çocuk, her biri aynı miktarı alacak şekilde, on tane brovniyi paylaşıyorlar. Her bir çocuk ne kadar alabilir?

Problemin zorluğunu paylaşılacak şeylerin sayısı ile paylaşanların sayısı arasındaki ilişki belirler. Çocukların başlangıçtaki paylaşma stratejileri yarıya bölmeyi içerdiğinden iki, dört ya da hatta sekiz paylaşanla başlamak için iyidir. On brovni ve dört paylaşan için bir çok çocuk her bir çocuğa ikişer tane dağıtacak ve sonra kalan brovnilerin her birini yarıya bölecektir (Şekil 15.4).

Sayılardaki şu çeşitlemeleri düşününüz:

2 çocuk tarafından paylaşılan 5 brovni
4 çocuk tarafından paylaşılan 2 brovni
4 çocuk tarafından paylaşılan 5 brovni
4 çocuk tarafından paylaşılan 7 brovni
8 çocuk tarafından paylaşılan 4 brovni
4 çocuk tarafından paylaşılan 3 brovni



Şekil 15.4 Dört çocuk tarafından paylaşılan on brovni.

Durup Düşün!

Az önceki paylaşma etkinliklerinin her biri için resimler çizmeyi deneyiniz. Sizce hangisi en zordur? Hangileri esasen eşit düzeyde zorluk teşkil eder?

En son örnek, dört çocuk tarafından paylaşılan üç brovni, önemli ölçüde daha zordu. Şekil 15.5 ilk üç örneği kolayca çözen bir üçüncü sınıf öğrencisinin bu problemi çözmek için ne kadar çok çalıştığını gösteriyor. Öğrencinin tahmin et-kontrol et stratejisi önce her bir brovniyi iki, beş, altı, yedi parçaya bölmeyi sonra dört parçaya geri dönmeyi içerdi.

Sayılar bazı öğelerin bütün olarak dağıtılmasına izin veriyorsa (iki şey arasında paylaşılan beş) bazı öğrenciler önce bütün öğeleri paylaşacak sonra kalanları parçalara ayıracaklardır. Diğerleri her bir parçayı yarıya bölecek ve sonra yarımları dağıtacaktır. Öğelerden daha fazla paylaşan varsa çözüm sürecinin başında biraz parçalama yapılması gerekir.

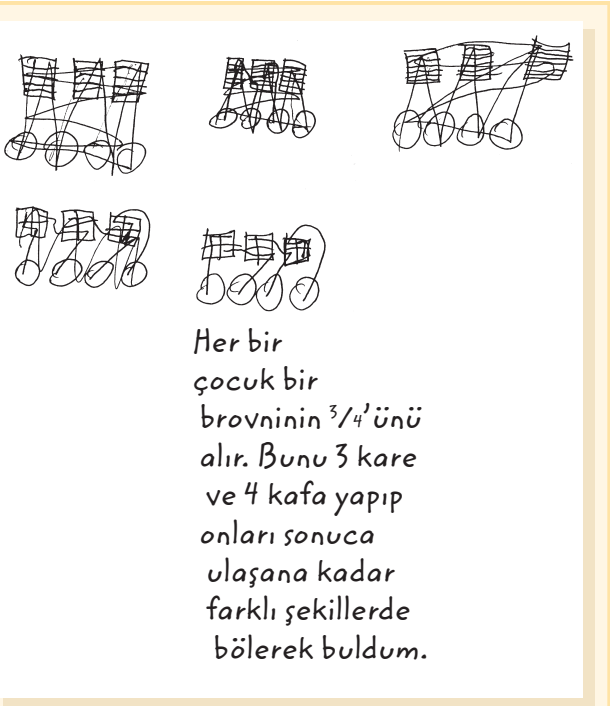
Hala yarımlara ayırma stratejisini kullanan öğrenciler beş şeyi dört çocuk arasında paylaşmayı deniyorlarsa, eninde sonunda dört çocuğa vermek için iki yarıma ineceklerdir. Bazıları için çözüm her bir yarımı yarıya bölmektir; yani "her bir çocuk bir bütün (ya da iki yarım) ve bir yarımın yarısını alır".

Her zamanki gibi sınıfınızdaki çeşitli öğrenci gruplarının ihtiyaçlarını karşılamak önemlidir. Bu etkinliklerin zorluk dereceleri değişir dolayısıyla bütün öğrencilerin dersteki önemli matematiği (kesirlerin bir anlamı olarak adil paylaşma) öğrenmelerini sağlarken farklı öğrenciler için uygun etkinlikler sağlamak üzere kademeli bir ders uygulanabilir. Şekil 15.6 bir öğretmenin brovni paylaşma dersi için nasıl üç kademe sunduğunu gösteriyor (Williams, 2008, s. 326).

Öğrenciler cevaplarını rapor ederken farklı gösterimlerin denkliğini vurgulamak önemlidir (Flores & Klein, 2005). Örneğin, üç kişinin dört brovniyi paylaşmaları durumunda cevap tahtaya şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Paylaşan sayısını üç ya da altı yapmak bir ilerlemedir, çünkü bu öğrencileri yarımlara ayırma stratejileriyle yüzleşmeye zorlayacaktır.



Şekil 15.5 Elizabeth, 3 brovniyi 4 kişiye paylaştırırken her birine düşecek adil payları bulmak için parçalara ayırıyor.

Durup Düşün!

Aşağıdaki çeşitlemeleri çizimler kullanarak çözmeyi deneyin. Bunları farklı yollarla yapabilir misiniz?

6 çocuk tarafından paylaşılan 4 pizza
6 çocuk tarafından paylaşılan 7 pizza
3 çocuk tarafından paylaşılan 5 pizza
4 çocuk tarafından paylaşılan 5 pizza

Bir bölgeyi ikinin bir katından (dört, sekiz, vb.) başka sayıdaki parçalara bölmek öğrenciler için daha zorlayıcıdır. Şekil 15.7 bir öğrencinin üçüncü pizza problemini çözmek için nasıl parçalara ayırdığını gösteriyor. Bu daha çok tahmini ve kontrol etmeyi gerektirdi ve öğretmen "Pizzayı nasıl böldüğüne dair bir örüntü görebiliyor musun ve kaç kişi yemek

1. kademe etkinliği: hala yarımlara ayırma deneyimlerine ihtiyaç duyan öğrenciler için	2. kademe etkinliği: yarımlara ayırma konusunda rahat olan ve başka stratejiler denemeye hazır olan öğrenciler için	3. kademe etkinliği: yarımlara ayırmayı yeni stratejilerle birleştirmeyi içeren etkinlikleri çözmeye hazır öğrenciler için
2 kişi 3 brovniyi nasıl paylaşır?	4 kişi 3 brovniyi nasıl paylaşır?	3 kişi 5 brovniyi nasıl paylaşır?
2 kişi 5 brovniyi nasıl paylaşır?	3 kişi 4 brovniyi nasıl paylaşır?	3 kişi 2 brovniyi nasıl paylaşır?
4 kişi 3 brovniyi nasıl paylaşır?	3 kişi 5 brovniyi nasıl paylaşır?	6 kişi 4 brovniyi nasıl paylaşır?
3 kişi 4 brovniyi nasıl paylaşır?	6 kişi 4 brovniyi nasıl paylaşır?	5 kişi 4 brovniyi nasıl paylaşır?

Şekil 15.6 Bronvi paylaşım problemi için kademeli bir ders örneği.



Şekil 15.7 Öğrenci bir pizzanın eşit paylaşımlarını bulmak için bir örüntü açıklar.

yemektedir?"diye sordu. Bu noktada öğrenci bir örüntü fark eder: eğer üç kişi varsa kalan pizzaların üçe bölünmesi gerekir. Öğrenci bu bilgiyi dördüncü problemi çabucak çözmek için kullandı. Bu bir öğretmenin öğrencilere ne düşünmeleri gerektiğini söylememesinden ziyade öğrencilere durup işlerini analiz etmelerine götürecek sorular sormasının önemine işaret eder. Bağlam ve model uyuşmasına dikkat ediniz (her ikisi de dairedir). Çeşitli bağlamlar kullanmak ve farklı model tipleri (alan, uzunluk ve küme) üzerinde farklı çeşitlerde gösterimler teşvik etmek önemlidir.

Kesir çubukları, Cuisenaire çubukları ve kesir daireleri tekrar bölünebilir. Başka bir ihtimal elişi kağıdından daireler ya da kareler kesmektir. Bazı öğrenciler kesip parçaları fiziksel olarak dağıtma ihtiyacı duyabilirler. Öğrenciler çubuklar yapmak için parçalara ayırabilecekleri birbirine geçmeli küpler kullanabilirler. Ya da dairesel "pasta" parçaları gibi daha geleneksel kesir modelleri kullanabilirler.

Kesir Dili

Öğrencilerin çözümlerinin tartışılması esnasında (ve tartışmalar esastır) kesirsel parçalarla ilgili kelime dağarcığını tanıtmak iyi bir zamanlamadır. Bir brovni ya da başka bir bölge eşit paylara ayrılırsa, basitçe "Bunlara *dörtte bir*ler diyoruz. Bütün dört parçaya kesilmiş. Bütün parçalar eşit büyüklüktedir – dörtte birler" deyiniz.

Bir bütünü parçalara ayırırken çocuklar kesirsel parçaların iki yönünün ya da bileşenlerinin farkında olmalıdırlar: (1) parçaların sayısı kesirsel miktarı belirler (örneğin, 4 parçaya ayırmak demek her parça birimin $\frac{1}{4}$'idir) ve (2) parçalar, aynı şekle sahip olmasalar bile, eşit büyüklükte olmalıdır. Bütünü oluşturan parçaların sayısının kesirsel parçaların ya da paylaşımların adını belirlediğini vurgulayınız. Yarımlara aşinadırlar ama üçte birleri, dörtte birleri, beşte birleri, vb. tarif etmeyi bir an önce öğrenmelidirler.

Öğrencilere *yarımlar*, *üçte birler*, *dörtte birler*, *beşte birler* ve benzeri kelimeleri kullanmaları için yardım etmenin yanı sıra kesirsel parçaları bütünle düzenli olarak karşılaştırdığınızdan emin olunuz. *Bütün* veya *bir bütün* ya da basitçe *bir* terimlerini bilhassa kullanın ki öğrenciler model ne olursa olsun kullanabilecekleri bir söyleme sahip olsunlar.

Fiziksel bir model (renkli karolar gibi) öğrencileri yanıltarak kesirsel parçaların aynı şekle ve büyüklüğe sahip olduğuna inandırabilir. Örneğin:



Öğrencilerin düşünmesini zorlayan ve fikirlerini açığa çıkaran sınıf tartışmaları hem öğrencilere doğru kavramları geliştirmelerinde yardım etmek hem de ne anladıklarını görmek için en iyi yollardır.

Kesir Parçalarının Denk Büyüklükleri

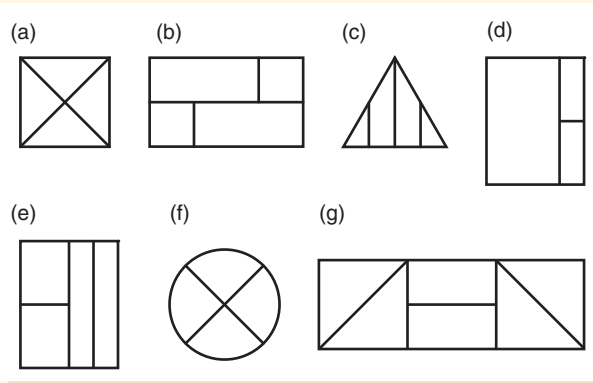
Öğrencilere kaçta kaçı taralı olduğu hakkında sorular sorulduğunda sıklıkla aynı şekle ve büyüklüğe sahip şekiller görürler. Sonuçta öğrenciler eşit paylaşımların aynı şekle sahip olması gerektiğini düşünürler ki bu doğru değildir. Özellikle küçük çocuklar, odak, eşit *büyüklükteki* parçalarda olması gerektiğinde şekil üzerine yoğunlaşma eğilimindedirler.

Aşağıdaki etkinlik (1) aynı şekil, aynı büyüklük; (2) farklı şekil, aynı büyüklük; (3) farklı şekil, farklı büyüklük ve (4) aynı şekil, farklı büyüklükte olan örneklerle bu konuya odaklanır. İlk iki kategori adil paylaşımlar ya da denk paylaşımların örnekleridir. Bu etkinlik paylaşma etkinliklerinin basit bir genişletilmesidir. Öğrencilerin bir bölgenin belli bir tip kesirsel parçaya ayrıldığını söyleyebilmeleri önemlidir.

Etkinlik 15.4

Doğru Paylaşımlar

Şekil 15.8'deki gibi kesirsel parçalara örnek olan/olmayan bölgeler çizin.Öğrencilerden istenilen kesirsel parçalara doğru olarak bölünmüş ve bölünmemiş bütünleri belirlemelerini isteyin. Her bir cevap için öğrencilerden akıl yürütmelerini açıklamalarını isteyin. Bu etkinlik uzunluk ve küme modellerini de içeren çeşitli modellerle yapılmalıdır.



Şekil 15.8 Kesirsel parçaları öğrenen öğrenciler bu şekillerden hangilerinin doğru olarak dörtte birlere ayrıldığını söyleyebilmelidir. Aynı zamanda diğer şekillerin neden dörtte birleri göstermediğini de açıklayabilmelidirler.

"Doğru Paylaşımlar" etkinliğinde öğrencilerden şeklin doğru şekilde parçalanıp parçalanmadığının nedenini açıklamalarını istemek önemlidir. Etkinlikteki diyagramlar aşağıdaki kategorilere girer:

1. Aynı şekil, aynı büyüklük: (a) ve (f) [denk]
2. Farklı şekil, aynı büyüklük: (e) ve (g) [denk]
3. Farklı şekil, farklı büyüklük: (b) ve (c) [denk değil]
4. Aynı şekil, farklı büyüklük: (d) [denk değil]



"Doğru Paylaşımlar" etkinliği öğrencilerin şeklin değil *büyüklüğün* önemli olduğunu anlayıp anlamadıklarını görmek için iyi bir biçimlendirici değerlendirmedir. Eğer öğrenciler sadece e ve g şıklarını yapamazlarsa öğrenciler bu kavrama sahip değildirler ve gelecekte denklik üzerine odaklanan etkinlikler planlamalısınız (örneğin, öğrencilerden etkinlik 15.5'deki gibi bir kare almalarını ve kendilerinin bir resmi tekrar bölmelerini isteyiniz). ◆

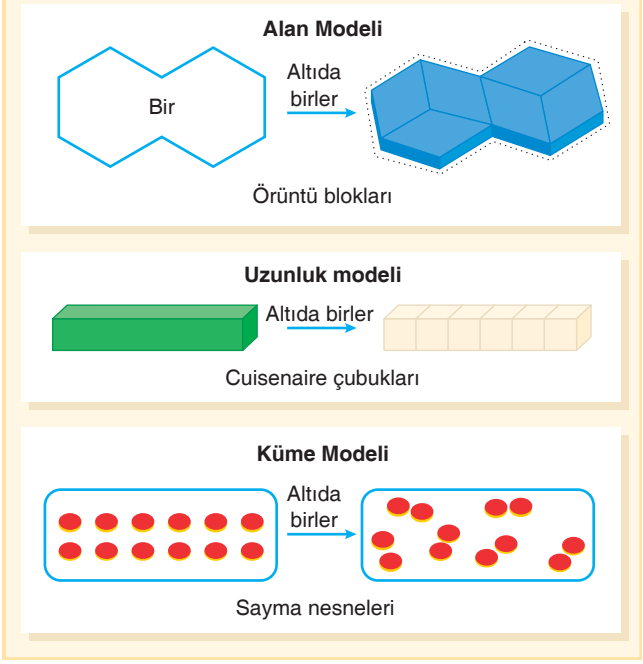
Etkinlik 15.5

Adil Paylaşımları Bulma

Öğrencilere noktalı kağıt verin ve onlardan kapalı bir bölgenin yarımlarını, dörtte birlerini ve başka kesirsel parçalarını bulmalarını isteyin. Bu etkinlik özellikle farklı şekiller farklı alanları temsil ettiğinde ilgi çekicidir.

Parçalara Ayırma

Bir şekli eşit büyüklükteki parçalara bölmeye parçalara ayırma denir ve küçük çocuklarda kesir kavramlarını geliştirmenin başlıca kısımlarından biridir. Bir önceki bölümde alan modelleri olan bölgeler ya da şekilleri parçalara ayırıyordunuz. Uzunlukları ve çoklukları da parçalara ayırmak önemlidir.Kağıt şeritler kullanılabileceği gibi sadece 0 ve 1'in olduğu sayı doğrusu da kullanılabilir. Öğrenciler bozuk para, sayma nesneleri ya da beyzbol kartları gibi kümeler halindeki nesneleri parçalara ayırabilirler.



Şekil 15.9 Bütün verildiğinde kesirsel parçaları bulunuz.

Kümeleri parçalara ayırırken çocukların bir paylaşımdaki sayma nesnelerinin sayısını paylaşımın ismiyle karıştırabileceklerine dikkat ediniz. Şekil 15.9'daki örnekte 12 tane sayma nesnesi 6 kümeye – *altıda birlere* – ayrılmıştır. Her paylaşım ya da parçada iki tane sayma nesnesi var ama parçalara ayırmanın *altıda bir* olduğunu gösteren paylaşımların sayısıdır.

Kesir Dili ve Sembollerini Kullanma

Kesir sembolleri sıklıkla öğrencileri yanıltan oldukça karmaşık kuralları temsil eder. Öğrencilere bir kesrin pay ve paydasının ne anlama geldiği konusunda güçlü bir anlayış geliştirmelerinde yardımcı olmak için harcadığınız zaman oldukça değerlidir.

Kesirsel Parçaları Sayma: Tekrarlama

Çoklu parçaların bütünle karşılaştırılmasını görmek için kesirsel parçaları sayma, kesrin iki parçası için temel oluşturur. Öğrenciler kesirsel parçaları sayma konusunda düşündükleriyle elma ya da diğer başka nesneleri sayma konusunda düşündükleri hemen hemen aynı olmalıdır. Eğer saydığın parçanın cinsini biliyorsan, bire, ikiye vb. ne zaman ulaştığını söyleyebilirsin.

Bu sayma ya da bir parçayı tekrar etmeye *tekrarlama* denir. Parçalara ayırma gibi tekrarlama kesirleri anlama

ve kullanmanın önemli bir parçasıdır. Kesirlerin tekrarlı olduğu görüşü, yani $\frac{3}{4}$ gibi bir kesri *dörtte bir* denilen üç parçanın sayılması olarak görme, çocukların geliştirmesi gereken önemli bir fikirdir (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985; Siebert & Gaskin, 2006; Tzur, 1999). Tekrarlama kavramı kesir sembolleri hakkında aşağıdaki iki fikrin üzerine odaklanınca daha açık hale gelecektir.

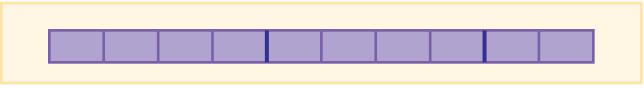
- Üstteki sayı *sayar*. (pay)
- Alttaki sayı *neyin sayıldığını* söyler. (payda)

Kesirlerin *ne*si kesirsel parçalardır. Bunlar sayılabilir. Kesirsel semboller *kaç tane* ve *ne* olduğunu söylemek için sadece bir kısa yoldur.

Tekrarlama uzunluk modelleriyle anlam ifade eder çünkü tekrarlama ölçmeye çok benzerdir. $2\frac{1}{2}$ fit kurdelanız olduğunu ve kaç tane dörtte biriniz olduğunu bulmaya çalıştığınızı düşünün. Bir şerit çizip dörtte birleri saymaya (tekrarlamaya) başlayabilirsiniz:



$\frac{1}{4}$ fit uzunluğundaki bir kurdelayı ölçme aracı olarak kullanarak bir öğrenci on tane dörtte biri işaretler:

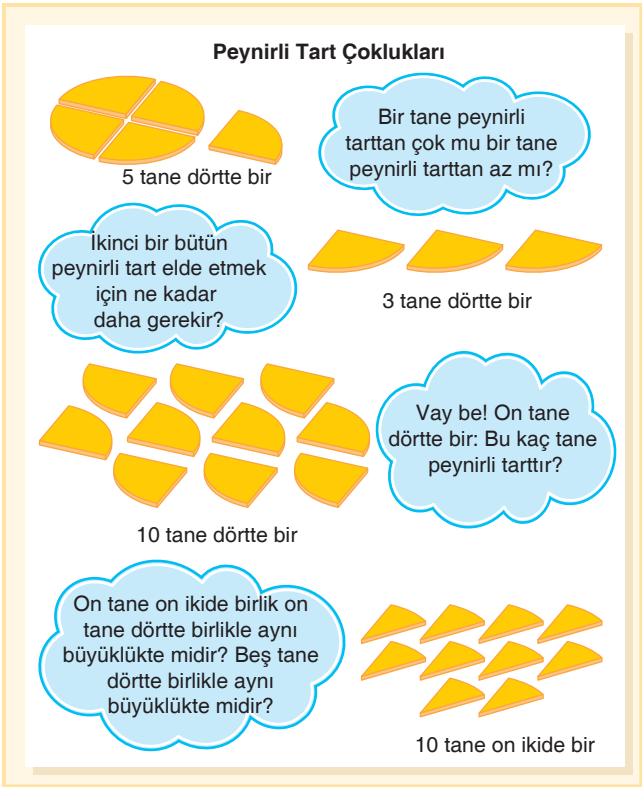


Öğrenciler uzunlukları tekrarlamayı içeren artan zorluklarla ilerleyen etkinliklere katılabilirler. Örneğin, öğrencilere bir şerit kağıt verin ve bunun bir bütünün $\frac{3}{4}$'ü olduğunu söyleyin. Şunları bulmalarını sorun: $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 3 vb. Bunları bulmak için öğrenciler parçayı $\frac{1}{4}$ elde etmek üzere üç kısma ayırmalılar ve sonra listelenen kesirleri bulmak için $\frac{1}{4}$'i tekrarlamalılar.

Tekrarlama alan modelleriyle de yapılabilir. Şekil 15.10'da gösterildiği gibi gruplar halinde bazı dairesel kesir parçaları gösterin. Her bir grup için öğrencilere ne çeşit parça gösterildiğini söyleyin ve basitçe birlikte sayın: "*bir* tane dörtte bir, *iki* tane dörtte bir, *üç* tane dörtte bir, *dört* tane dörtte bir, *beş* tane dörtte bir." "Eğer beş tane dörtte birimiz varsa, bu bir bütünden fazla mıdır, az mıdır ya da bir bütünle aynı mıdır?" Parça büyüklüğünü daha da pekiştirmek için söyleminizi birazcık değiştirebilir ve "bir $\frac{1}{4}$, iki $\frac{1}{4}$, üç $\frac{1}{4}$" ve benzeri diyebilirsiniz.

Öğrenciler her bir parça grubunu sayarken bir bütünle olan ilişkiyi tartışınız. Farklı gruplar arasında informal karşılaştırmalar yapınız. "Neden yedi tane dörtte birden yaklaşık iki bütün elde ettik ama on tane on ikide birden bir tane bile bütün elde edemedik?"

Aynı zamanda bu fırsatı tam sayılı kesirler için temel oluşturmada kullanın."Yedi tane üçte bir diyebilmenin başka bir yolu nedir?" (İki bütün ve bir üçte bir daha ya da bir bütün ve dört tane üçte bir.)



Şekil 15.10 Bir alan modelinde kesirsel parçaları tekrarlama (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 24-26).

Bu girişle öğrenciler sıradaki etkinliğe hazır olacaklardır.

Etkinlik 15.6

Bir Bütünden Fazla mı, Az mı, Yoksa Bir Bütüne Eşit mi?

Öğrencilere bir grup kesirsel parçalar verin (hepsi aynı büyüklükte parçalar) ve sahip oldukları kesirsel parça çeşidini belirtin. Parçalar bir çalışma kağıdına çizilebilir ya da fiziksel modeller bir tanıtım kartıyla birlikte plastik torbalara yerleştirilebilir. Örneğin, Cuisenaire çubukları ya da kesir şeritleriyle yapılırsa grupta yedi tane açık yeşil çubuk/şerit ile "her bir parça $\frac{1}{8}$'dir" diye belirten başlık ya da not olabilir. Görev,grubun bir bütünden az mı, bir bütüne eşit mi ya da bir bütünden fazla mı olduğuna karar vermektir. Öğrencilerden cevaplarını açıklamaları için resim çizmelerini ya da semboller kullanmalarını isteyiniz.

Etkinlik 15.6'yı birbirinden farklı çeşitli kesir modelleriyle, sonra hiç model kullanmadan ve sadece zihinsel imgeler kullanarak deneyiniz. Öğrenciler için kafa karıştırıcı olabilse de tekrarlama küme modelleriyle de yapılabilir. Örneğin, bir grup iki renkli sayma nesnesi gösterin ve "Eğer 5 sayma nesnesi beşte birse, 15 sayma nesnesi kaçtır?" gibi sorular sorun.

Başka sorular öğrenciler için çekici bilmeceler olabilir. Örneğin, "Üç sayma nesnesi kümemin $\frac{1}{8}$'ini temsil ediyor; kümemin büyüklüğü ne kadardır?" "Yirmi sayma nesnesi kümemin $\frac{2}{3}$'sini temsil ediyor; kümenin büyüklüğü ne kadardır?"

Geniş bir öğrenci aralığına ulaşmak için benzer etkinlikler uyarlanabilir. Örneğin, insanlar, şekerleme, boya kalemleri ya da öğrencilerin aşina oldukları bir nesne gibi bağlamlar eklemek onların problemi anlamalarına yardım edecektir. Bu bilmeceleri yapmada çok güçlü olan öğrenciler kendi "bilmece ifadelerini" oluşturabilir ve bunları sınıfa sorabilirler.

Etkinlik 15.7

Hesap Makinesiyle Kesir Sayma



Kesir girişine ve gösterimine izin veren hesap makineleri şimdilerde okullarda oldukça yaygındır. Bir çoğu, TI-15 gibi, kesirleri doğru kesir formatında gösterir ve sonuçları tam sayılı kesir ya da basit kesir olarak gösterme seçeneğini sunar. TI-15 ile dörtte birler ile saymak için önce $\frac{1}{4}$ iki işlem tuşundan birine kaydedilir. Op1 + 1 n 4 d Op1**. Saymak için 0** Op1 Op1 Op1**'a basılır ve istenilen sayıda dörtte bir elde edilene kadar tekrar edilir. Ekran dörtte birlerle sayımları ve de** Op1 **tuşuna kaç defa basıldığını gösterecektir. Öğrencilere şöyle sorular sorunuz: "3 elde etmek için kaç tane $\frac{1}{4}$?" "5 elde etmek için kaç tane $\frac{1}{5}$?" Bunlar gittikçe daha zor hale gelebilir: "$4\frac{1}{2}$ elde etmek için kaç tane $\frac{1}{4}$?" "6 elde etmek için kaç tane $\frac{2}{3}$? Tahmin edin ve sonra hesap makinesinde $\frac{2}{3}$'lerle sayın." Öğrenciler sayımlarını kesir modelleriyle her bir sayım için yığınlarına yeni bir dörtte bir ekleyerek koordine etmeliler. Her zaman ekran bir tuşa basılarak tam sayılı kesirlerden basit kesirlere çevrilebilir. TI-15kesirleri otomatik olarak sadeleştirmeyecek şekilde ayarlanabilir ve bu denk kesirler tanıtılmadan önce uygun olan ayardır.**

Kesir hesap makineleri çocukların kesirsel sembolleri geliştirmelerine yardım etmek için güçlü bir yoldur. Etkinlik 15.7 üzerinde bir değişiklik çocuklara $3\frac{1}{8}$ gibi bir tam sayılı kesir göstermek ve hesap makinesinde bu büyüklüğe kadar saymak için kaç tane $\frac{1}{8}$ sayımı gerektiğini sormaktır. Öğrenciler tam sayılı kesir tuşuna basmadan önce doğru sayıda ($\frac{25}{8}$) durmaya çaba göstermelidirler.

Kesir Notasyonu

Parçalara ayırma ve tekrarlama ile deneyimlerden sonra öğrenciler kesirler için sembolik notasyonları öğrenmeye hazırdırlar. Kesirleri üstte ve altta birer sayı ve aralarında bir çubuk ile yazmak bir uzlaşımdır – diğer bir deyişle, kesirleri temsil etmek için keyfi bir anlaşmadır- ve bu öğrencilere basitçe söyleyeceğiniz kavramlardan biridir. Bununla birlikte, bu uzlaşımın anlaşılması, öğrencileri *size* üstteki ve alttaki sayıların neyi temsil ettiğini söylemeye teşvik edecek bir gösterimle açıklığa kavuşturulabilir. Öğrencileriniz yıllardır sembolik kesirleri "kullanıyorlarsa" dahi aşağıdaki prosedür önerilir.

Şekil 15.10'dakine benzer şekilde çeşitli kesirsel parçalar grubu gösteriniz. Öğrencilerden parçaları birlikte saymalarını isteyiniz. Her bir sayımdan sonra doğru kesri yazınız ve bunun sembol olarak yazımı olduğunu belirtiniz. Birden fazla olan gruplar dahil ediniz ama bunları tam sayılı kesir olarak değil basit ya da "bileşik" kesirler olarak yazınız. $\frac{4}{8}$ ve $\frac{4}{3}$ gibi aynı paya sahip en az iki çift grubu dahil ediniz. Benzer şekilde, paydaları aynı gruplara yer veriniz. En az altı tane kesirsel parça grubunu sınıf saydıktan ve siz de karşılık gelen kesri yazdıktan sonra aşağıdaki soruları sorunuz:

Bir kesirde alttaki sayı bize neyi söyler?
Bir kesirde üstteki sayı bize neyi söyler?

Durup Düşün!

5 tane sekizde birlik bir grup ve 5 tane dörtte birlik bir grup saydığınızı ve bu gruplar için kesirleri yazdığınızı düşününüz. İfadelerinizde çocukların dilini kullanın ve üstteki ve alttaki sayıların ne anlama geldiğini açıklamak için bir yol bulmaya çalışın.

Aşağıda üstteki ve alttaki sayılar için ikinci ve üçüncü sınıfların olası açıklamalarını bulabilirsiniz.

- *Üstteki sayı:* Bu sayan sayıdır. Kaç tane paylaşımımız ya da parçamız olduğunu söyler. Kaç tane sayıldığını söyler. Kaç tane parçadan bahsettiğimizi söyler. Parçaları ya da paylaşımları sayar.
- *Alttaki sayı:* Neyin sayıldığını söyler. Parçanın ne kadar büyük olduğunu söyler. Eğer 4 ise, *dörtte birler*i saydığımız manasına gelir; 6 ise, *altıda birler*i saydığımız manasına gelir ve bu şekide devam edilir.

Pay ve paydanın anlamlarının bu şekilde ifade edilmesi size tuhaf gelebilir. Çoğu zaman üstteki sayının "kaç tane" olduğunu ifade ettiği söylenir. (Bu ifade yarım kalmış gibi görünebilir. Kaç tane *ne*?) Alttaki sayının "bir bütün yapmak için kaç tane parça gerektiğini" ifade ettiği söylenir. Bu doğru olabilir ama yanıltıcıdır. Örneğin, $\frac{1}{6}$'lik bir parça çoğu zaman bir kekten, kekin kalan $\frac{5}{6}$'inde herhangi bir dilimleme yapılmadan kesilir. Kekin sadece iki parça olması alınan parçanın $\frac{1}{6}$ olduğunu değiştirmez. Ya da bir pizza 12 parçaya kesilirse iki parça hala pizzanın $\frac{1}{6}$'ini oluşturacaktır. Bu durumların hiç birinde alttaki sayı kaç tane parçanın bir bütün yaptığını söylemez.

1'den Büyük Kesirler

Bir önceki bölümde, 1'den küçük ve büyük kesirler karışıktı. Bu kasti olarak yapılmıştı ve öğrencilerle de onlar kesirleri öğrenirken benzer şekilde yapılmalıdır. Çok sıklıkla öğrenciler

birden büyük sayılara (örneğin, $\frac{5}{2}$ ya da $4\frac{1}{4}$) muhattap olmazlar ve daha sonra bunlar birleşime (cinas niyeti yoktur!) eklendiğinde öğrenciler bunları kafa karıştırıcı bulurlar.

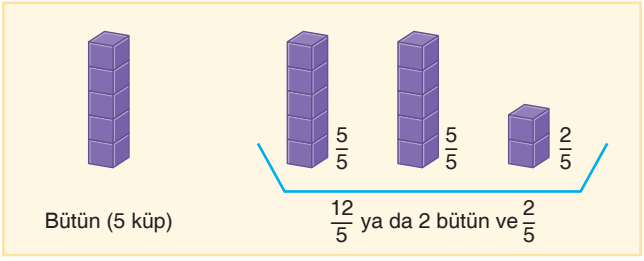
$\frac{5}{2}$ gibi birden büyük kesirleri tarif etmek için İngilizce'de *uygunsuz*[3] kesir terimi kullanılır.Bu terim kafa karışıklığına neden olabilir çünkü *uygunsuz* kelimesi bu gösterimin kabul edilemez olduğunu ima eder ki durum kesinlikle böyle değildir. Aslında, bu cebirde çoğu zaman tercih edilen gösterimdir. Bu ifadeyi kullanmamaya çalışın ve yerine "kesirler" ya da "1'den büyük kesirler" ifadelerini kullanın. Bu terimi kullanırsanız (çünkü örneğin bu terim eyalet standartlarındadır) o zaman öğrencilerinizle birden büyük kesirleri tek bir kesir olarak yazmanın gerçekten uygunsuz olmadığını paylaştığınızdan emin olun.

Dördüncü Eğitimde İlerlemenin Ulusal Değerlendirmesi'inde yedinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık yüzde 80'i tam sayılı bir kesri bileşik kesre çevirebildi ama yarıdan daha azı $5\frac{1}{4}$'in $5 + \frac{1}{4}$ ile aynı olduğunu bilmişti (Kouba ve diğerleri, 1988a). Bu sonuç birçok öğrencinin prosedürleri anlamadan kullandıklarını göstermektedir.

Eğer bir önceki bölümde olduğu gibi bir bütünün ötesinde kesirsel parçalar saydıysanız öğrencileriniz halihazırda nasıl $\frac{13}{6}$ veya $\frac{13}{5}$ yazacaklarını biliyorlardır. Öğrencilerinizden bu değerleri bir modelle göstermelerini ve denk gösterimler bulmalarını isteyiniz. Bir beşinci sınıf öğretmeni olan Neumer (2007) tek geçmeli birim küpler (çok geçmeli birim küpler de kullanılabilir) kullanmanın 1'den büyük kesirleri kaydetmenin her iki biçimini görmelerine yardım etmede en etkili yol olduğunu bulmuştur. Şekil 15.11 tek geçmeli birim küplerin nasıl kullanılacağını göstermektedir.Öğrenciler bir küpü problem için ($\frac{12}{5}$) birim kesir ($\frac{1}{5}$) olarak belirlerler. 12 tane beşte bir sayarlar ve bütünler inşa ederler. Buna karşın tam sayılı kesirle başlayabilir, onu inşa eder ve toplam kaç tane küp (ya da beşte bir) kullanıldığını bulabilirler. Bu prosedür uzunluk modelinin bir örneğidir. Tekrar eden inşa etme deneyimleri ve bu etkinlikleri çözmek öğrencileri, bu iki biçim arasında hareket etme algoritmasına benzeyen bir çarpma ve bölme örüntüsü görmeye götürecektir.

Bağlam, öğrencilerin kesirleri kaydetmenin bu iki yolunun denkliğini anlamalarına yardım edebilir. Etkinlik 15.8'in odağı budur.

[3] Ç.N. İngilizce'de birleşik kesir için improper fraction ifadesi kullanılmaktadır. Improper kelimesi aynı zamanda uygun olmayan/uygunsuz anlamına da gelmektedir. İngilizce'deki bu karmaşaya vurgu yapılmak istenmiştir. Türkçe'de böyle bir durum söz konusu değildir.



Şekil 15.11 Tek geçmeli birim küpler $\frac{12}{5}$ ve $2\frac{2}{5}$'nin denkliğini göstermek için kullanılmıştır.

Etkinlik 15.8

Sürahiler ve Bardaklar

Öğrencilere altı bardağı dolduracak miktarda meyve suyu alabilen bir sürahi gösterin. Hatta sınıfla paylaşmak için gerçek bir sürahi ve gerçek bardaklar kullanabilirsiniz. Şöyle sorular sorunuz: "Eğer $3\frac{1}{2}$ sürahim varsa kaç tane bardak doldurabilirim?" "Sınıfımızda 16 öğrenci varsa kaç tane sürahiye ihtiyacım olacaktır?" Başka kesirlere yer vermek için sürahinin alabileceği miktarları değiştirin.

Bir müddet sonra öğrencilerinizi model kullanmadan iki denk biçimi bulmaları için düşündürün. $3\frac{1}{4}$ için iyi bir açıklama bir bütünde 4 tane dörtte bir olduğu dolayısıyla iki bütünde 8 tane dörtte bir, üç bütünde 12 tane dörtte bir olduğu şeklinde olabilir. Fazladan bir tane dörtte bir ile toplamda 13 tane dörtte bir elde edilir ya da $\frac{13}{4}$. (Tekrarlama kavramının rol oynadığına dikkat ediniz.)

Geleneksel algoritmayı zorlamayın (aşağıdaki sayısı tam sayıyla çarpın üsttekiyle toplayın) çünkü bu iki biçim arasındaki ilişkiyi ve onların denkliğini anlayan öğrencilere engel olabilir.Bu prosedür öğrenciler tarafından, çalışmalarındaki örüntülere bakarak, kendi kelimeleriyle ve tam bir anlamayla kolaylıkla geliştirilebilir.

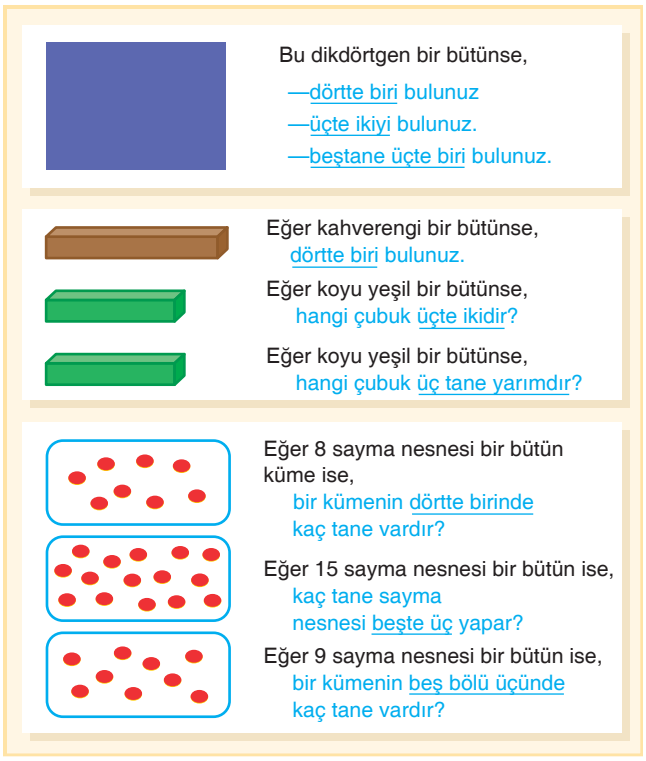
Anlamayı Değerlendirme

Öğrencilere hem kesirsel parçaları hem de bir kesirde üstte ve altta yer alan sayıların anlamlarını anladıklarını göstermelerini isteyen alıştırmalar sunun. Bütünleri ve bütünlerin parçalarını temsil etmek için modeller kullanılır. Her tip alıştırmanın örneği Şekil 15.12 ve 15.13'de verilmiştir. Her bir şekil alan modeli (serbestçe çizilen dikdörtgenler), uzunluk modeli (Cuisenaire çubukları ya da kesir şeritleri) ve küme modeli (sayma nesneleri) örneklerini içermektedir.

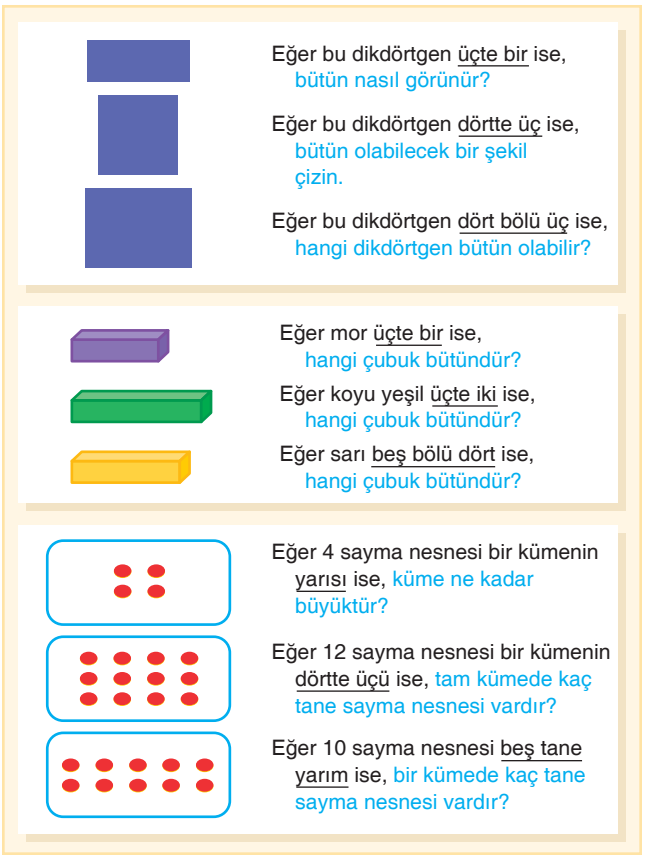
Durup Düşün!

Şekil 15.2 ve 15.3'teki alıştırmaların üzerinde etraflıca çalışınız. Çubuklar ya da sayma nesnelerine erişiminiz yoksa sadece çizgiler ya da daireler çiziniz. Öğrenciler 15.12'deki problemleri çözebiliyor ama 15.13'dekileri çözemiyorsa bundan onların anlayışları hakkında ne öğrenebilirsiniz? Ya öğrenciler kağıt kullanabiliyor ama Cuisenaire çubukları kullanamıyorlarsa? Öğrenciler takıldıysa düşünmelerini desteklemek için her model için hangi bağlamlar kullanılabilir?

İki ya da üç düşündürücü parçalar-ve-bütün sorusu mükemmel bir performans değerlendirmesi oluşturabilir. Etkinlikler sınıfa aynen şekillerde verilen formatta sunulmalıdır. Etkinlikleri sunmak için fiziksel modeller çoğu zaman en iyi yoldur ve böylece öğrenciler sonuçları belirlemek için deneme-yanılma yaklaşımını kullanabilirler. Bütün etkinliklerde olduğu gibi her bir cevabı gerekçelendirmek için bir açıklamanın gerekli olduğu açıklığa kavuşturulmalıdır.



Şekil 15.12 Bütün ve kesir verildiğinde parçayı bulunuz.



Şekil 15.13 Verilen parça ve kesirlere göre bütünü bulun.

Öğrenciler cevaplarını inşa ederken öğrencilerin yanlarında gezinerek anlayışlarını değerlendirmek için gözlemleyebilir ve sorular sorabilirsiniz.

Bu kitap boyunca belirtildiği gibi aynı soruları soran basit bağlamsal problemler ya da bağlamlar oluşturmak iyi bir fikirdir.

Samuels Bey avlusunun $\frac{3}{4}$'ünü bitirdi. Avlu şuna benziyor:



Bitmiş avlunun şekli olabilecek bir resim çiziniz.

Birim kesirler içeren sorular genellikle en kolaylarıdır. En zor sorular genellikle 1'den büyük kesirleri içerir. Örneğin, *15 tane marka bir bütün kümenin beş bölü üçü ise bir bütün kümede kaç tane marka vardır?* Bununla birlikte, her soruda birim kesir önemli bir rol oynar. Eğer $\frac{5}{3}$'ünüz varsa ve bütünü istiyorsanız, önce $\frac{1}{3}$'ü bulmanız gerekir.

Parçalar-ve-bütün soruları düşündürücü ama öğrencilere pay ve paydanın anlamları üzerinde derinlemesine düşünmek için yardım etmede etkili sorulardır. Bunlar aynı zamanda öğrencilerin pay ve paydanın anlamlarını gerçekten anlayıp anlamadıklarını görmek için iyi bir teşhis değerlendirmesidir. Çünkü bu etkinlikler, öğrencilerin sadece bir tanımı ezberden söylemelerini değil bu anlamları *kullanmalarını* gerektirmektedir.



Kesirlerle Tahmin Etme

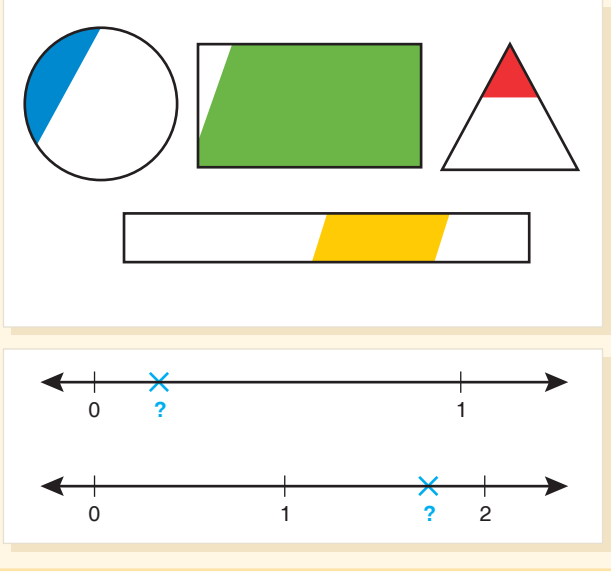
Kesirsel parçalara odaklanma önemli bir başlangıçtır ama kesirlerle sayı hissi fazlasını talep etmektedir (öğrencilerin kesirler için sezgisel hislere sahip olmasını gerektirmektedir). Belirli bir kesrin ne kadar büyük olduğu "hakkında" bilgiye sahip olmalılar ve iki kesirden hangisinin daha büyük olduğunu kolayca söyleyebilmeliler.

Doğal sayılarda olduğu gibi öğrenciler tahmin etmede kesin cevapları hesaplamaya göre daha az kabiliyetlilerdir. Dolayısıyla, öğrencilere tahmin etmeleri için bir çok fırsat sağlamalısınız. Günlük sınıf konuşmalarında dahi "Sınıfımızın yaklaşık kaçta kaçı kazak giyiyor?" gibi sorular sorarak kesirlerle tahmin etme üzerinde çalışabilirsiniz. Ya da en beğenilen akşam yemeği gibi bir konuda anket verisi topladıktan sonra "Sınıfımızın yaklaşık kaçta kaçı spagettiyi seçti?" diye sorunuz. Etkinlik 15.9 bazı görsel tahmin etme etkinlik örnekleri sunmaktadır.

Etkinlik 15.9

Yaklaşık Ne Kadar?

Şekil 15.14'dekilerden birine benzer bir resim çiziniz (ya da daha önceden tepegöz için bir kaç tane hazırlayınız). Her bir öğrenciden gösterilen miktarın (ya da sayı doğrusunda belirtilen işaretin) iyi bir tahmini olduğunu düşündükleri bir kesir yazmalarını isteyin. Bir kaç öğrencinin fikirlerini dinleyiniz ve belirli bir tahminin iyi bir tahmin olup olmadığını sorunuz. Tek bir doğru cevap yoktur ama tahminler "beklenene yakın olmalıdır." Çocuklar bir tahmin yapmada zorluk çekiyorlarsa, miktarın 0'a, $\frac{1}{2}$'e ya da 1'e mi daha yakın olduğunu düşündüklerini sorun.



Şekil 15.14 Yaklaşık ne kadar? Her bir çizim için bir kesir söyleyin ve bu kesri nasıl seçtiğinizi açıklayın.

Sıfır, Yarım ve Bir Referansları

Etkinlik 15.9'da belirtildiği gibi kesirler için en önemli referans noktaları ya da ölçütler 0, $\frac{1}{2}$ ve 1'dir. 1'den küçük kesirler için sadece bunları bu üç sayıyla kıyaslamanız oldukça fazla bilgi verir. Örneğin, $\frac{3}{20}$ küçüktür, 0'a yakındır ama $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ ile 1 arasındadır. 1'den büyük her kesir bir tam sayı artı 1'den küçük bir miktar olduğundan, aynı referans noktaları eşit derecede yardımcıdır: $3\frac{3}{7}$ yaklaşık $3\frac{1}{2}$'dir.

Etkinlik 15.10

Sıfır, Yarım ya da Bir

Bir grup kartın üstüne her bir karta bir tane olacak şekilde 10-15 tane kesir yazın. Bir kaçı 1'den büyük olmalıdır ($\frac{9}{8}$ ya da $\frac{11}{10}$), diğerleri de 0 ve 1 aralığında değişmelidir. Öğrencilerin kesirleri üç grup halinde sınıflandırmasına izin verin: 0'a yakın olanlar, $\frac{1}{2}$'e ve 1'e yakın olanlar. $\frac{1}{2}$'e yakın olanlar için onlardan kesrin $\frac{1}{2}$'den büyük mü küçük mü olduğuna karar vermelerini isteyin. Bu etkinliğin zorluğu büyük ölçüde kesirlere bağlıdır. Bunu ilk denediğinizde $\frac{1}{20}$, $\frac{53}{100}$ ya da $\frac{9}{10}$ gibi üç ölçüte çok yakın olan kesirler kullanın.Takip eden günlerde çoğunlukla paydaları 20'den küçük olan kesirler kullanın. $\frac{2}{8}$ ya da $\frac{3}{4}$ gibi ölçütlerin arasında olan bir ya da iki kesre yer verebilirsiniz. Öğrencilerden karar verirlerken payı ve paydayı nasıl kullandıklarını açıklamalarını isteyiniz.

Bir sonraki etkinlik de kesirler için aynı üç referans noktasını geliştirmeyi amaçlar. Bununla birlikte "Yakın Kesirler"'de öğrenciler halihazırda verilen kesirleri gruplamaktan ziyade kendileri kesirler düşünüp bulacaklardır.

Etkinlik 15.11

Yakın Kesirler

Öğrencilerinizden 1'e yakın ama 1'den büyük olmayan bir kesir söylemelerini isteyiniz. Sonra 1'e ilkinden daha yakın olan başka bir kesir söylemelerini isteyiniz. İkinci cevap için, kesrin neden 1'e bir öncekinden daha yakın olduğuna inandıklarını açıklamaları gerekiyor. Aynı şekilde her biri 1'e bir öncekinden daha yakın olan bir kaç kesir için devam edin. Benzer şekilde 0'a ya da $\frac{1}{2}$'e yakın olanları deneyin (altında ya da üstünde). Bu etkinliği denediğiniz ilk bir kaç seferde öğrencilere düşünmelerine yardım edecek modeller kullanmaları için izin verin. Daha sonra, model ya da çizim kullanmadıklarında açıklamalarının ne kadar etkili olduğunu görün.

Tartışmaları, sonsuz çoklukta kesir olduğu ve dolayısıyla her zaman arada bir kesir bulabilecekleri önemli fikrine odaklayın.

Karşılaştırma Yapmak İçin Sayı Hissini Kullanma

İki kesirden hangisinin daha büyük olduğunu söyleme yeteneği kesirlerle sayı hissinin bir başka yönüdür. Bu beceri, algoritmik bir kabiliyeti ya da sembolik püf noktaları üzerine değil kesir kavramları etrafında inşa edilmiştir. 2000'deki NAEP testinde dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece yüzde 21'i bir birim kesrin bir diğerinden neden daha büyük ya da küçük olduğunu açıklayabilmişlerdi (örneğin, $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{4}$) (Koosterman ve diğerleri, 2004). Sekizinci sınıf öğrencilerinin sadece yüzde 41'i sadeleştirilmiş şekilde verilen üç kesri doğru olarak sıralayabildiler (Sowder, Wearne, Martin ve Strutchens, 2004). Bu araştırmacıların belirttiği gibi "Öğrencilerin kesirlerin göreceli büyüklükleri hakkında hisleri olmadığı müddetçe kesirlerle anlamlı bir şekilde nasıl çalışacaklarını hayal etmek zordur" (s. 116).

Birim kesirleri karşılaştırmak. Öğrencilerin sayılar hakkında kesirlerin göreceli büyüklükleri ile ilgili sorunlara sebep olabilecek son derece sağlam oturmuş zihniyetleri vardır. Tecrübelerinde büyük sayılar "daha fazla" anlamına gelir ki bu şuna çevrilebilir: "Yedi, dörtten büyüktür, dolayısıyla yedide bir, dörtte birden daha büyük olmalıdır" (Mack, 1995). Parçaların sayısı ve parçaların büyüklüğü arasındaki ters ilişki olduğu söylenemez fakat bu birçok deneyimden geçen öğrencilerin kendi düşüncelerinden doğan bir şey olmalıdır.

Etkinlik 15.12

Birim Kesirleri Sıralama

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{10}$ gibi bir grup birim kesri listeleyin. Öğrencilerden kesirleri en küçükten en büyüğe doğru sıralamalarını isteyin. Öğrencileri kesirleri sıraladıkları yolu savunmaları için zorlayın. Bu etkinliği uyguladığınız ilk birkaç sefer onlardan fikirlerini modeller kullanarak göstermelerini isteyin.

Öğrenciler aşağıdaki sayının daha büyük olmasının, kesrin daha küçük olması anlamına geldiğinin farkında olabilir, fakat bu ezberlenmesi gereken bir kural değildir. Bu temel fikri düzenli olarak tekrar gözden geçirin. Öğrenciler bir gün anlamış görünebilir ve bir veya iki gün sonra büyük sayılar hakkında daha rahat oldukları düşüncelerine geri dönebilir. Etkinlik 15.12'yi tüm payların 1'den farklı sayılara eşit olduğu örneklerle tekrarlayın. Bunun öğrenciler için çok daha zor olduğunu gördüğünüze şaşırabilirsiniz.

Kesirleri Karşılaştırma. Muhtemelen iki kesri karşılaştırmak için kurallar veya algoritmalar öğrendiniz. Alışılagelmiş yaklaşım ortak paydayı bulmak ve içler-dışlar çarpımını kullanmaktır. Bu kurallar doğru cevaba ulaşmada etkili olabilir fakat kesirlerin büyüklükleri hakkında düşünmeyi gerektirmez. Eğer bu kurallar öğrencilere çeşitli kesirlerin göreceli büyüklükleri hakkında düşünme fırsatı verilmeden öğretilirse, kesir büyüklükleri ile herhangi bir aşinalık veya kesir büyüklükleri hakkında sayı hissi geliştirmeleri düşük bir ihtimaldir. Karşılaştırma etkinlikleri (hangi kesir daha fazladır?) çocuklara göreceli kesir büyüklükleri kavramlarının gelişiminde yardımcı olmada önemli bir rol oynar. Derinlemesine düşünme, doğru cevabı seçmenin algoritmik bir yöntemi değil, amaçtır.

Durup Düşün!

Bir dakikalığına ortak paydaları veya içler-dışlar çarpım tekniklerini bilmediğinizi varsayın. Şimdi Şekil 15.15'teki kesir çiftlerini inceleyin ve bir dördüncü sınıf öğrencisinin kullanabileceği bir akıl yürütme yaklaşımı ile her çiftten daha büyük olanı seçin.

Takip eden numaralı liste, Şekil 15.15'teki kesirlerin karşılaştırılabileceği yolları göstermektedir:

Her ikilideki hangi kesir daha büyüktür?
Bir veya daha fazla sebep belirtin. Çizimler veya modeller kullanmamaya çalışın. Ortak paydalar veya içler-dışlar çarpımlarını kullanmayın.

A.	$\frac{4}{5}$ veya $\frac{4}{9}$	G.	$\frac{7}{12}$ veya $\frac{5}{12}$
B.	$\frac{4}{7}$ veya $\frac{5}{7}$	H.	$\frac{3}{5}$ veya $\frac{3}{7}$
C.	$\frac{3}{8}$ veya $\frac{4}{10}$	I.	$\frac{5}{8}$ veya $\frac{6}{10}$
D.	$\frac{5}{3}$ veya $\frac{5}{8}$	J.	$\frac{9}{8}$ veya $\frac{4}{3}$
E.	$\frac{3}{4}$ veya $\frac{9}{10}$	K.	$\frac{4}{6}$ veya $\frac{7}{12}$
F.	$\frac{3}{8}$ veya $\frac{4}{7}$	L.	$\frac{8}{9}$ veya $\frac{7}{8}$

Şekil 15.15 Kavramları kullanarak kesirleri karşılaştırmak.

1. *Aynı-büyüklükteki parçalardan daha fazlası* (aynı paydalar) $\frac{3}{8}$ ve $\frac{5}{8}$ kesirlerini karşılaştırmak için, birşeyden 3 tane ve ayrıca aynı şeyden 5 tane olduğunu düşünün. (B, G)

2. *Aynı sayıda ama farklı büyüklüklerde parçalar* (eşit paylar). $\frac{3}{4}$ ve $\frac{3}{7}$ durumunu düşünün. Bir bütün 7 parçaya bölünürse, parçalar kesinlikle sadece 4 parçaya bölünmesinden daha küçük olacaktır. Çocuklar $\frac{3}{7}$'ü daha büyük olarak seçebilirler çünkü 7, 4'ten daha büyüktür ve üstteki sayılar aynıdır. (A, D, H)

3. *Bir yarımdan veya bir bütünden daha fazla veya daha az.* $\frac{3}{7}$'e karşı $\frac{5}{8}$ ve $\frac{5}{4}$'e karşı $\frac{7}{8}$ kesir çiftleri önceki iki düşünce sürecine de uygun değildir. İlk çiftte $\frac{3}{7}$, bir bütün yapacak yedide bir sayısının yarısından azdır ve dolayısıyla $\frac{3}{7}$ bir yarımdan daha azdır. Benzer şekilde $\frac{5}{8}$ bir yarımdan fazladır. Dolayısıyla, $\frac{5}{8}$ daha büyük bir kesirdir. İkinci çifte, kesirlerden birisinin 1'den az olması ve diğerinin 1'den büyük olmasına dikkat edilerek karar verilir. (A, D, F, G, H)

4. *Bir yarıma veya bütüne yakınlık.* Neden $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$'ten daha büyüktür? Herbiri bir bütünden bir kesirsel parça kadar farklıdır ve onda birler dörtte birlerden daha küçüktür. Benzer şekilde, $\frac{5}{8}$'in $\frac{4}{6}$'ten daha küçük olmasının sebebinin $\frac{4}{6}$'ün yarımdan altıda bir fazla iken $\frac{5}{8}$'in yarımdan sadece sekizde bir fazla olması olduğuna dikkat edin. Bu basit fikri $\frac{3}{5}$ ve $\frac{5}{9}$'i karşılaştırmak için kullanabilir misiniz? (*İpucu*: Herbiri $\frac{1}{2}$'den yarım kesirsel parça kadar fazladır). $\frac{3}{5}$ ve $\frac{5}{9}$'i de deneyin. (C, E, I, J, K, L)

Şekil 15.15'teki kesirleri seçmek için sebepleriniz ile bu fikirler kıyaslanır? Bu informal karşılaştırma stratejilerinin çocukların kendi sayı hislerini geliştirmelerine yardım etme kadar kendi sayı hissinizin başlıca unsuru olarak içinize sinmesi önemlidir. D ve H gibi karşılaştırmaların bazıları listelenen stratejilerin birini ya da daha fazlasını kullanarak çözülmüş olabilirdi.

Öğrencileriniz için tasarladığınız görevler, bunları ve muhtemelen iki kesri karşılaştırmanın başka yollarını ge-

liştirmede yardım etmelidir. Fikirlerin öğrencileriniz ve onların tartışmalarından ortaya çıkması önemlidir. "Kesirleri karşılaştırmanın dört yolu"nu öğretmek dört gizemli kural daha eklemek ve öğrencilerinizin kendi sayı hislerini kullanmaları için onları teşvik etme amacını boşa çıkarmak olacaktır.

Kesirleri karşılaştırmak için bu yöntemleri geliştirmek için istenen karşılaştırma stratejisini büyük ihtimalle ortaya çıkartacak kesir çiftleri seçin. Örneğin, bir gün eşit paydalı iki kesriniz olabilir ve bir diğer gün payları eşit. Bir başka gün, her bir kesir bir bütünden tam bir parça uzaklıkta olacak şekilde kesir çiftleri kullanabilirsiniz. Stratejileri, stratejiye bağlı seçilmiş kesir çiftleri ile birkaç gün içinde inşa etmeyi deneyin.

Bölge veya sayı doğrusu modeli kullanımı zihinden muhakeme yapmada zorlanan öğrencilere yardımcı olabilir. Öğrencilerin akıl yürütmelerine ve bunu görsel modellere bağlamalarına daha fazla vurguda bulunun.

Bir sonraki etkinlik karşılaştırma görevini biraz daha genişletir.

Etkinlik 15.13

Sıraya Diz

Öğrencilerin en küçükten en büyüğü doğru sıralamaları için dört veya beş tane kesir seçin. Onlardan her bir kesrin sadece 0 ve 1'in işaretlendiği bir sayı doğrusu üzerinde yaklaşık yerlerini göstermelerini isteyin. Hesap makinesi[4] şeritleri sayı doğrusu olarak kullanılabilir. Öğrenciler kendi sayı doğrularını başkalarınınki ile karşılaştırır ve kesirleri nereye yerleştireceklerine nasıl karar verdiklerini açıklar.

Kesirleri sayı doğrusu üzerine yerleştirmek için öğrenciler kesirleri basitçe sıralamanın yanısıra kesirlerin büyüklüklerini de tahmin etmelidirler.

Denk Kesirleri Dahil Etme. Bu noktaya kadar olan tartışma öğrencilerin karşılaştırma yaparken denk kesir kavramlarını kullanabileceği fikrini bir dereceye kadar doğal olmayan bir şekilde yok saymıştır. Denk kesir kavramları öylesine önemlidir ki sıradaki kısmın tamamı bu fikrin gelişmesine ayrılmıştır. Bununla birlikte, denk kesir kavramları sona kadar geciktirilmemeli ve kesinlikle hangi kesir daha büyüktür tartışmasına dahil edilmelidir.

Smith (2002) sorulacak karşılaştırma sorusunu "Aşağıdaki iki (veya daha fazla) kesirden hangisi daha büyüktür *veya eşitler midir?*" olarak önerir (s. 9, vurgu eklenmiştir). Bu sorunun farklı görünebilen iki kesrin gerçekte eşit olabileceği olasılığını açık bıraktığına işaret eder.

Buna ilave olarak, denk kesir kavramları ile öğrenciler bir kesrin nasıl görüneceğini ayarlarlar ki böylece kendilerine anlam ifade eden fikirleri kullanabilirler. Burns (1999) beşinci sınıftakilerin $\frac{6}{8}$ ile $\frac{4}{5}$ kesirlerini nasıl karşılaştırdıklarını tarif eder. (Bir dakikalığına durmak ve bu kesirleri sizin nasıl karşılaştıracağınızı düşünmek isteyebilirsiniz.) Bir çocuk $\frac{4}{5}$'ü $\frac{8}{10}$'e çeviriр, böylece her iki kesir de bir bütünden iki parça uzak olur ve oradan akıl yürütür. Bir diğeri her iki kesri 12 ortak *paydasına* çevirir.

Karşılaştırma etkinliklerini tekrar gözden geçirme konusunda kesinlikle emin olun ve $\frac{8}{12}$ ve $\frac{2}{3}$ gibi eşit gibi görünmeyen fakat eşit olan kesir çiftlerini dahil edin.

Denk Kesir Kavramları

Bölüm 14'te tartışıldığı gibi denklik önemli fakat sıklıkla yanlış anlaşılan bir kavramdır. Bu, özellikle kesir denkliklerinde doğrudur.

Denkliğe Kavramsal Olarak Odaklanma

Durup Düşün!

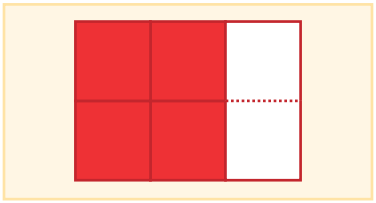
$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$'nin eşit olduğunu nasıl biliyorsun? Daha fazla okumaya devam etmeden en az iki açıklama düşünün.

Yukarıdaki soruya bazı olası cevaplar şöyledir:

1. Eşittir çünkü $\frac{4}{6}$'ü sadeleştirip $\frac{2}{3}$ elde edersin.
2. Eğer 6 nesneden oluşan bir grubun varsa ve 4'ünü alırsan, bu $\frac{4}{6}$ olacaktır. Fakat 6'yı 3 grup yapabilirsin ve 4, 3 gruptan 2 gruba karşılık gelecektir. Bu onun $\frac{2}{3}$ olduğu anlamına gelir.



3. $\frac{2}{3}$ ile başlarsanız üstteki ve alttaki sayıları 2 ile çarpabilirsiniz. Bu size $\frac{4}{6}$'ü verir, dolayısıyla onlar eşittir.
4. Eğer 3 parçaya bölünmüş bir kareniz varsa ve 2'sini taradıysanız, $\frac{2}{3}$'si taranmış olacaktır. 3 parçanın hepsini yarıya bölerseniz, bu 4 taranmış parça ve toplamda 6 parça yapar. $\frac{4}{6}$'tür ve bu aynı miktar olacaktır.



Bu cevapların hepsi doğrudur. Fakat bize ne söylediklerini düşünelim. Etkili olmasalar bile 2 ve 4. cevaplar kavramsaldır. Prosedürel cevaplar (1 ve 3) etkilidir, fakat kavramsal anlayışa işaret etmezler. Eninde sonunda bütün öğrenciler verilen bir kesir için denk bir kesir yazabilecektir. Aynı zamanda, öğrenciler sonuçların ne anlama geldiğini

[4] Ç.N. Şeritli hesap makinesi, üzerinde işlemlerin yapılabildiği ve sonuçlar şerit şeklinde bir kağıttan alınabilen bir çeşit hesap makinesidir.

anlamadan, prosedürler asla öğretilmemeli veya kullanılmamalıdır.

Kavram: İki kesir denktir; eğer aynı miktarı veya niceliği temsil ediyorlarsa – eğer aynı sayılarsa.

Algoritma: Denk bir kesir elde etmek için, üstteki ve alttaki sayıları sıfırdan farklı bir sayı ile çarpın (veya bölün).

Problem temelli bir sınıfta öğrenciler denk kesir anlayışlarını geliştirebilir ve ayrıca kavramsal temele dayanan bir algoritmayı anlayarak da geliştirebilirler. Çoğu algoritmada olduğu gibi kurallara çok çabuk geçmek ciddi öğretimsel bir hatadır. Sabırlı olun! Sezgisel yöntemler başlarda daima en iyisidir.

Denk Kesir Modelleri

Öğrencilerin denk kesirleri anlamalarına yardım etmede genel yaklaşım onlara bir kesir için farklı isimler bulmada bağlamlar ve modeller kullandırmaktır. Sabit bir niceliğin birden fazla isme (aslında sonsuz sayıda) sahip olabilmesini ilk defa tecrübe edeceklerini düşünün. Sıradaki etkinlikler olası başlangıç noktalarıdır.

Etkinlik 15.14

Farklı Dolgu Malzemeleri

Kesirler için öğrencilerinizin aşina olduğu bir bölge modelini kullanarak Şekil 15.16'daki gibi iki veya en fazla üç kesrin dış çerçeveleri olan bir çalışma yaprağı hazırlayın. Kendinizi birim kesirlerle sınırlandırmayın. Örneğin, eğer model dairesel kesir kısımları ise, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{4}$ için çerçeve çizebilirsiniz. Öğrencilerin görevi kendi kesir parçalarını kullanarak bölgedeki kesire denk olan olabildiğince çok kesir bulmaktır. Üç örneği tamamladıktan sonra öğrencilerinize isimleri bulurken dikkat etmiş olabilecekleri fikir ve örüntüleri yazdırın. Sınıf tartışması ile etkinliğe devam edin.

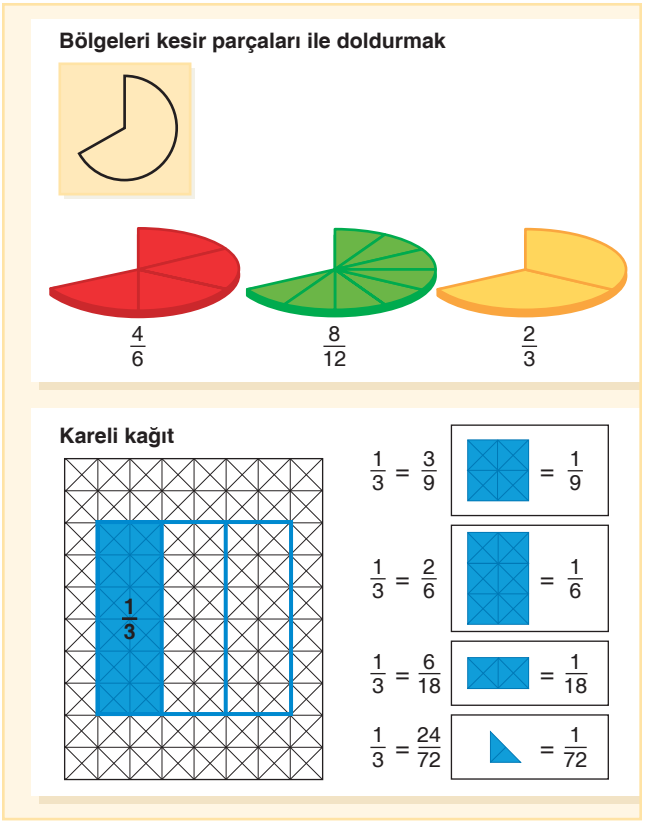
"Farklı Dolgu Malzemeleri" etkinliğini takip eden sınıf tartışmasında, sorulacak güzel bir soru eğer öğrenciler başka büyüklüklerde parçalara sahip olsalardı hangi isimler bulunabilirdi sorusunu içerir. Örneğin, öğrencilere "Kesir kitimizde onaltıda birler olsaydı hangi denk kesri bulabilirdiniz? Herhangi bir büyüklükte olan bir parçanız olsaydı hangi isimleri bulabilirdiniz?" sorularını sorun.

Sıradaki etkinlik, "Farklı Dolgu Malzemeleri" etkinliğinin bir çeşididir. Manipülatif kullanmak yerine etkinlik noktalı kağıt üzerinde oluşturulmuştur.

Etkinlik 15.15

Noktalı Kağıt Denklikleri

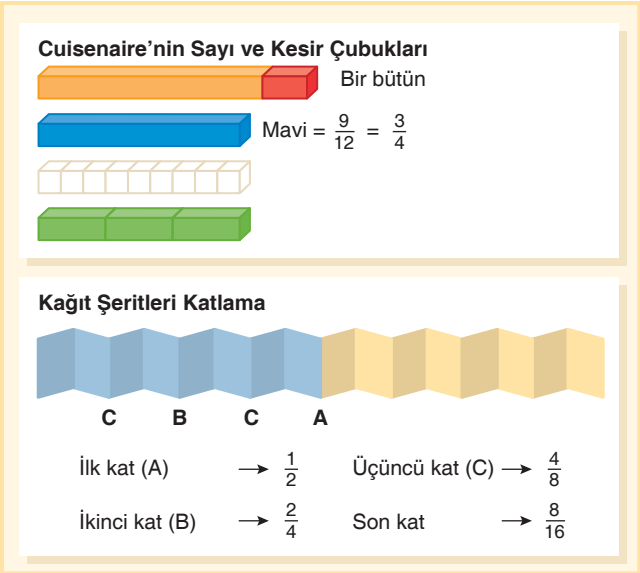
İzometrik veya kare noktalı kağıt parçalarını (bkz. Çalışma Yaprak Seti 37-40) kullanarak bir çalışma kağıdı oluşturun. Kareli kağıt üzerinde bir bölgenin çevresini çizin ve bunu bir bütün olarak belirleyin. Bütünün içerisindeki bölgenin bir parçasını çizin. Görev, bütünün kareli kağıt tarafından belirlenen diğer kısımlarını kullanarak çizilen parça için isim bulmaktır. İzometrik kağıt üzerine çizilmiş bir örneğin verildiği Şekil 15.16'ya bakın. Öğrenciler, her bir kesir ismi için kullandıkları birim kesir kısımlarının resimlerini çizmelidir. Ne kadar büyük bütün varsa, etkinlik o kadar çok isim üretir.



Şekil 15.16 Denk kesirler için alan modelleri.

"Noktalı Kağıt Denklikleri" etkinliği, Lamon'nın (2002) "birimlere ayırma", bir başka ifadeyle verilen bir niceliği isimlendirmek için niceliği parçalara ayırmanın farklı yollarını bulma, diye isimlendirdiğinin bir çeşididir. Lamon bunun sadece denk kesirler için değil ayrıca orantısal akıl yürütmeyle, özellikle oranları karşılaştırırken, ilişkili olan anahtar bir kabiliyet olduğuna işaret eder. (Bkz. Lamon, 1999a,b.)

Uzunluk modelleri, "Farklı Dolgu Malzemeleri" etkinliğine benzer etkinlikler oluşturmada kullanılabilir. Örneğin, Şekil 15.17'de görüldüğü gibi, çubuklar veya kağıt şeritler hem bir bütün hem de bir parça tasarlamada kullanılabilir. Öğrenciler daha küçük çubukları verilen parça için kesir isimlerini bulmada kullanır. Daha büyük bütünlerin olması ve böylece daha fazla olası parçaelde etmek üzere



Şekil 15.17 Denk kesirler için uzunluk modelleri.

bütün ve parçalar için iki veya üç çubuk dizisi kullanın. Kesir isimleri oluşturmada katlanabilir kağıt şeritler kullanmak başka bir yöntemdir. Şekil 15.17'de gösterilen örnekte yarım arka arkaya yarımlara katlayarak tekrar bölünmüştür. Başka katlamalar başka isimler üretecektir ve bu olasılıklar eğer hiç kimse şeridi tek sayıda parçalara katlamayı denemezse tartışılmalıdır.

Bir sonraki etkinlik bir birimlere ayırma etkinliğidir ve öğrenciler bütünün bir parçasını farklı yollarla isimlendirmek için bütünün farklı birim ya da büyük parçalarını ararlar. Bu etkinlik küme modelini kullanmaktadır.

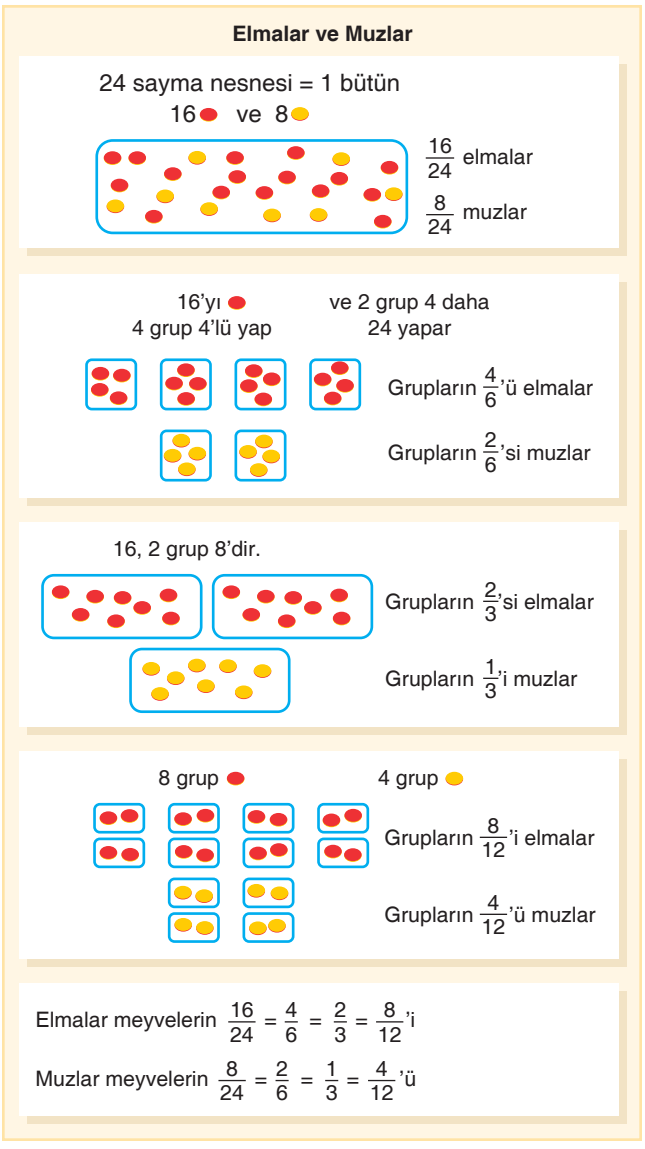
Etkinlik 15.16

Elmalar ve Muzlar

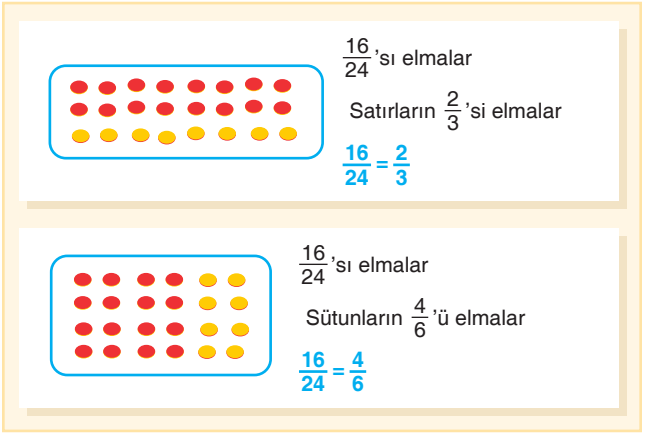
Öğrencilerden belirli bir sayıda iki renkli sayma nesnesini yaymalarını isteyiniz –örneğin, 24 sayma nesnesi, 16 tanesi kırmızı (elmalar) ve 8 tane sarı (muzlar). 24, bütünü oluşturur. Görev, sayma nesnelerini bütünün farklı kesirsel parçalarına gruplamak ve parçaları elmaların kesri ve muzların kesri için isim oluşturmada kullanmaktır. Şekil 15.18'de 24 tane sayma nesnesi farklı gruplarda düzenlenmiştir. Dizilimler kullanmayı da önerebilirsiniz (Bkz. Şekil 15.19).

Sonraki etkinlik için yaptığı adaptasyonunda Lamon, öğrencileri "Dörtlü gruplar yaparsak grubun ne kadarlık bir parçası kırmızıdır?" gibi sorularla hareket geçirir. Bu tür hatırlatmalarla öğrencilerin düşünmesi olası olmayan kesir isimleri önerebilirsiniz.

Şimdiye kadar ki etkinliklerde denk kesirler bulma kuralı için sadece bir ipucu vardı. Takip eden etkinlik algorit-



Şekil 15.18 Denk kesirleri göstermek için küme modelleri.



Şekil 15.19 Denk kesirleri göstermek için dizilimler.

maya biraz daha yaklaşır ama hala algoritma geliştirmeden önce yapılmalıdır.

Etkinlik 15.17

Eksik-Sayı Denklikleri

Öğrencilere iki kesir arasında denkliği gösteren bir denklem veriniz ama sayılardan biri eksik olsun. Çözmek için bir resim çizmelerini isteyiniz. Aşağıda dört farklı örnek bulabilirsiniz:

$\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$ $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$ $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$

Eksik olan sayı pay ya da payda olabilir. Dahası, eksik sayı denk kesirde karşılık gelen sayıdan daha büyük ya da daha küçük olabilir. (Dört olasılığın hepsi örneklerde gösterilmiştir.) Gösterilen örnekler, denk kesirler arasında basit doğal sayı katları içermektedir. Sonra $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$ ya da $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$ gibi çiftleri düşünün. Bu denklemlerde pay ya da paydanın biri diğerinin doğal sayı katı değildir.

"Eksik Sayı Denklikleri" etkinliğini yaparken kümeler ya da pasta dilimleri gibi bir model belirlemek isteyebilirsiniz. Alternatif olarak, öğrencilerin bu problemleri çözmek için istedikleri modeli seçmelerine izin verebilirsiniz.Öğrenme zorluğu yaşayan öğrenciler ve matematikte zorlanan başka öğrenciler denklemleri kurmak için saatleri kullanmaktan yarar sağlayabilirler.Chick, Tierney ve Storeygard (2007) saatlerin son derece karma bir sınıfta çok yararlı olduklarını bulmuşlardır. Öğrenciler $\frac{10}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$ ve benzeri kesirler için denk kesirleri bulmada saatleri kullanabilmişlerdir.



NCTM'nin Illuminations adlı websitesi "Fun with Fractions" isimli üç üniteden oluşan bir set sunar. Her bir ünite model tiplerinden birini (küme, bölge ya da uzunluk) kullanır ve kesirleri karşılaştırma ve sıralamaya ve denkliğe odaklanır. Her bir ünitedeki beş-altı ders, öğrencilerin öğrenmesini desteklemek için çeşitli manipulatifler ve çekici etkinlikler içerir.

Set Model Unit (Küme Modeli Ünitesi): http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U112
Region Model Unit (Bölge Modeli Ünitesi): http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U113
Length Model Unit (Uzunluk Modeli Ünitesi): http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=U152 ◆

Denk-Kesir Algoritması Geliştirme

Kamii ve Clark (1995) fiziksel modellere aşırı bel bağlamanın çocukların denklik için şemalar inşa etmelerine yardım etmediğini ileri sürmüşlerdir. Çocuklar kesirlerin farklı isimler alabileceğini anladıkları zaman denk isimler bulmak için bir yöntem geliştirmeye zorlanmalıdırlar. Örüntü aramada ve bir şeyler yapmak için şemalar geliştirmede deneyimli öğrencilerin daha fazla yardım almadan denk kesirler için bir algoritma icat edebilecekleri de öne sürülebilir. Bununla birlikte aşağıdaki yaklaşım bunun gerçekleşme olasılığını kesinlikle arttıracaktır.

Bölge Modeli Yaklaşımı. Dikdörtgensel bölge kullanma iyi bir görseldir ve algoritmayla yakından ilişkilidir: Aşağıdaki ve yukarıdaki sayıları aynı sayı ile çarpmak her zaman denk bir kesir verecektir. Burada önerilen yaklaşım hem parçadaki hem de bütündeki kesir kısımlarının sayılması şeklinde bir örüntü aramaktır. Etkinlik 15.18 bir başlangıçtır ama etkinliği takiben iyi bir sınıf tartışması gereklidir.

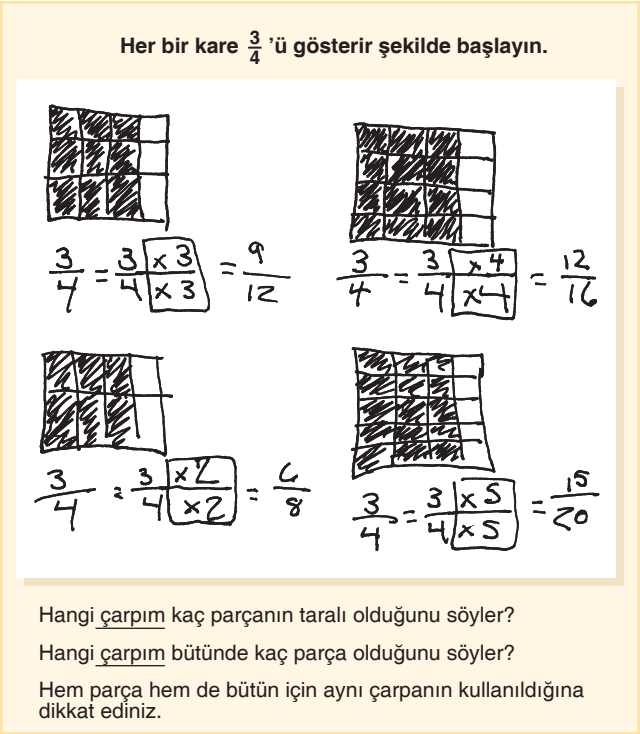
Etkinlik 15.18

Kareleri Dilimleme

Öğrencilere bir satırda, her birinin bir kenar uzunluğu yaklaşık 3 cm olan, dört kare içeren bir çalışma kağıdı verin. Her bir karede, dikey bölme çizgileri kullanarak aynı kesri taramalarını isteyiniz. Bahçe ya da çiftlik bağlamını kullanabilirsiniz. Örneğin, her bir kareyi dörde dilimleyin ve Şekil 15.20'de gösterildiği gibi dörtte üçünü tarayın. Sonra öğrencilerden her bir kareyi eşit büyüklükte yatay dilimlere ayırmasını isteyin. Her bir kare birden sekize kadar dilimler kullanılarak farklı şekilde parçalara ayrılmalıdır. Dilimlenmiş her bir kare için denk kesirleri gösteren bir denklem yazmalarını isteyin. Denklemlerini ve çizimlerini örüntü aramak üzere incelemelerini isteyin. Bunu dört tane kare ekleyerek ve farklı bir kesirle tekrar edebilirsiniz.

Bu etkinliği takiben dört ya da beş farklı kesir ismi için öğrenciler tarafından bulunan denklemleri tahtaya yazın. Keşfettikleri örüntüleri tartışın. Tartışmayı odaklamak için tepegözde Şekil 15.21'de olduğu gibi dikey dilimlerle $\frac{4}{5}$'ü temsil eden bir kare gösterin. Tepegözü kapatın ve kareyi ters yönde altı parçaya dilimleyin. Şekilde gösterildiği gibi karenin iki köşesi hariç tamamını kapatın. "Benim $\frac{4}{5}$'ümün yeni adı nedir?" diye sorun.

Bu alıştırmanın nedeni birçok öğrencinin sadece küçük bölgeleri sayıp çarpma kullanmayı hiç düşünmemeleridir. Üstü kapatılmış kareyle öğrenciler taralı bölgede dört sütun ve altı satır olduğunu göreceklerdir, dolayısıyla 4 × 6 parça taralıdır. Benzer şekilde, bütünde 5 × 6



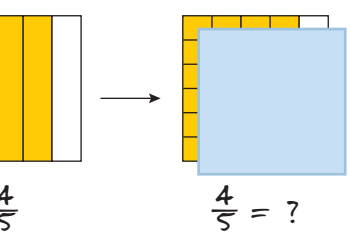
Şekil 15.20 Denk kesir algoritmasını geliştirmek için bir model.

parça olmalıdır. Dolayısıyla, 4/5'ün yeni ismi $\frac{4\times 6}{5\times 6}$ ya da $\frac{24}{30}$'tür.

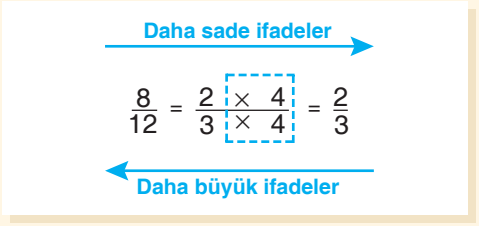
Bu fikri kullanarak, öğrencilerden çalışma kağıtlarındaki kesirlere dönmelerini ve bu örüntünün başka kesirler için de işe yarayıp yaramadığına bakmalarını isteyin.

Başka modellerle oluşturulmuş denk kesir örneklerini inceleyin ve üstteki ve alttaki sayıları aynı sayı ile çarpma kuralının orada da geçerli olup olmadığına bakın. Eğer kural doğruysa $\frac{6}{8}$ ve $\frac{9}{12}$ nasıl denk olabilir?

Kesirleri En Sade Halde Yazma. Denk kesirler için çarpma yöntemi daha büyük paydalı kesirler üretir. Bir kesri *en sade* halde yazmak pay ve paydanın ortak doğal sayı çarpanı olmayacak şekilde yazmak demektir. (Bazı metinlerde *en sade hal* yerine *en küçük terimler* ifadesi kullanılır.) Bu en sade hali bulma etkinliğine anlamlı bir yaklaşım Şekil 15.22'de gösterildiği gibi önceki süreci tersine çevirmektir. Ortak çarpan ya da sadeleştirilmiş kesir arayışı gruplamayla ilişkilendirilmelidir.



Şekil 15.21 Eğer hepsini göremiyorsanız kesirsel parçaları nasıl sayabilirsiniz?



Şekil 15.22 Kesirleri en sade şekilde yazmak için denk kesirler algoritmasını kullanma.

İki ilave not:

1. *Kesirleri indirgeme* ifadesinin kullanılmadığına dikkat ediniz. Bu terminoloji bir kesri daha küçük yapmayı ima eder ve ders kitaplarında artık nadiren kullanılır. Kesirler sadeleştirilir indirgenmez.
2. Öğretmenler öğrencilere kesir cevaplarının en sade halde değillerse yanlış olduklarını söylerler. Bu aynı zamanda öğrencileri kesirlerin denkliği konusunda yanlış bilgilendirir. Öğrenciler $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ işlemini yaptıklarında $\frac{2}{3}$'de ve $\frac{4}{6}$'te doğrudur. En iyisi her ikisinin de doğru ve denk olduklarını pekiştirmektir.

Bir İle Çarpma. Bir çok ortaokul ders kitabı denk kesirler için katı biçimde sembolikbir yaklaşım kullanır. Bu yaklaşım çarpmanın 1 ile çarpılan herhangi bir sayının aynı kaldığını söyleyen özelliğini temel alır. $\frac{n}{n}$ formundaki herhangi bir kesir birim eleman olarak kullanılabilir. Dolayısıyla, $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$. Dahası, birim elemanın payı ve paydası da kesir olabilir. Bu şekilde: $\frac{6}{12} = \frac{6}{12} \times (\frac{1/6}{1/6}) = \frac{1}{2}$.

Bu açıklama çarpmanın birim eleman özelliğini anlamaya dayanır ve çoğu öğrenci bunu 4. sınıftan 6. sınıfa kadar tam olarak idrak edemez. Bu aynı zamanda iki kesri çarpma prosedürüne dayanır. Son olarak, bu görüş rasyonel sayı sisteminin bir aksiyomunu temel alan salt tümdengelim mantığı kullanır. Sezgisel bir modellemeye uygun değildir. Makul bir çıkarım bu önemli açıklamayı en azından yedi ya da sekizinci sınıfta uygun, cebir-öncesi bir bağlama kadar ertelemek ve denk kesirler üretmek için bir yöntem ya da mantıksal açıklama olarak kullanmamaktır.



NCTM'nin e-Examples'ında (http://standards.ctm.org/document/eexamples/index.htm), iki oyuncu için motive edici bir kesir oyunu vardır. (Applet 5.1, Communicating about Mathe-

matics Using Games). Oyun bir sayı doğrusu modeli kullanır ve denk kesirler bilgisi önemli bir rol oynar.

NLVM'nin web sitesinde (http://nlvm.usu.edu) denk kesirleri incelemek için sınırlı bir küçük uygulama yazılımı vardır: *Fractions-Equivalent*. Basit kesirler kare ya da dairesel formatlarda rastgele olarak gösterilir. Öğrenciler hangi dilimlemenin denk kesirler oluşturduğunu görmek için modeli istedikleri kadar parçaya dilimleyebilirler. Kareler için, yeni dilimler başlangıçtaki dilimlerle aynı yöndedir. Daireler için, yeni dilimleri eskilerinden ayırmak biraz zordur. Öğrenciler denk bir kesir girerler ve cevaplarını kontrol etmek için bir tuşa basarlar. ◆

Kesir Kavramları İçin Öğretimde Dikkat Edilmesi Gereken Hususlar

Kesirlerin öğretimi çok önemli olduğundan ve kesirler çoğu zaman yetişkinler tarafından bile iyi anlaşılmadığından ana fikirlerin bir tekrarı gereklidir. Umarız fark etmişsinizdir ki kesirlerin iyi anlaşılmamasının bir nedeni onlar hakkında parça-bütün ilişkilerinden bölmeye kadar uzanan çok şeyin bilinmesinin gerekliliğidir. İlaveten, anlayış inşa etmek, alan, uzunluk ve küme modelleriyle temsil etme ve bu modellere uyan bağlamlara yer vermek demektir. Tahmin etme etkinlikleri öğrencilerin kesirleri anlamalarını destekler ve kendi başına da önemli bir beceridir.

Denklik öğrencilerin üzerinde sağlam bir anlayış ve beceriye sahip olması gereken merkezi bir fikirdir. Görselleri prosedürlerle ilişkilendirmek ve algoritma için çok acele etmemek sürecin önemli yönleridir.

Kesir öğretimi ve öğreniminde tanınmış araştırmacılar olan Clarke, Roche ve Mitchell (2008) "Kesirlerin Hayata Geçmesi ve Anlam İfade Etmesi için 10 Pratik Tavsiye" önerirler. Bu öneriler burada bu bölümün etkili bir özeti olarak listelenmiştir:

1. Kesirlerin anlamlarına, kesirleri manipüle etme prosedürlerinden daha çok vurgu yapınız.
2. Bir kesrin pay ve paydasını açıklamak için genellenebilir bir kural geliştiriniz.
3. Kesirlerin sayılar olduğunu, kesirlerin ve ondalık sayıların gösteriminde sayı doğrularını yoğun olarak kullanarak vurgulayınız.
4. Bileşik kesirler ve denkliklere odaklanmak için fırsatları erken değerlendiriniz.
5. Kesirleri temsil etmek için çeşitli modeller sununuz.
6. Kesirleri anahtar rolü oynayan referanslarla ilişkilendirin ve tahmin etmeyi teşvik edin.
7. Kesirleri bölme olarak vurgulayın.
8. Mümkün olan her yerde kesirler, ondalık sayılar ve yüzdeleri ilişkilendirin.
9. Çok sayıda öğrenciyle bire bir mülakat yapma fırsatlarını değerlendiriniz ... onların düşünme stratejilerinin farkında olmak için.
10. Öğrencileri özelde kesirler, genelde rasyonel sayı fikirleri hakkında düşünme ile meşgul edecek örnekler ve etkinlikler arayın. (s. 374-378)

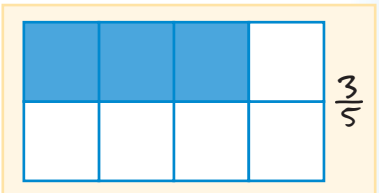
Bölüm 15 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim

1. Paylaşma etkinlikleriyle ne demek istendiğini açıklayınız. Bu etkinliklerin hedefi nedir? Onları ne zaman uygularsınız?
2. Kesir modellerinin üç kategorisinden her birine manipulatif örnekleri veriniz.
3. Parçalara ayırmak ne demektir? Açıklayınız ve gösteriniz.
4. Tekrarlama ne demektir? Açıklayınız ve gösteriniz.
5. Bir öğrencinin pay ve paydanın ne demek olduğunu nasıl açıklayabileceğini tarif ediniz.
6. Öğrencilerin kesirlerle tahmin etmeyi geliştirmelerini destekleyebileceğiniz iki yol nedir?
8. $\frac{11}{4}$ ve $2\frac{3}{4}$ arasında kavramsal ilişkiyi inşa etmenin iki yolu nelerdir?
9. Alan, uzunluk ve küme modellerinin her birinde denklik kavramını geliştirmek için hangi bağlamları kullanabilirdiniz?
10. Öğrencilere denk kesirler algoritmasının gelişimi için nasıl yardım edebilirsiniz?

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Çocukların yaygın olarak yaptıkları bir hata aşağıda temsil edilen kesir için $\frac{3}{5}$ yazmaktır.



Sizce bunu neden yapmaktadırlar? Bu kavram yanılgısına değinmeyi denemek için hangi etkinlik veya stratejiyi kullanırdınız?

2. Kesirler yetişkinler tarafından ve karikatürlerde korkunç bir matematik konusu olarak zikredilmektedir. Sizce bu neden doğrudur? Sizin kesir öğretiminiz öğrencilerin bu algılarını nasıl değiştirebilir?

Bölüm 15 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Context takes children away from rules and encourages them to explore ideas in a more open and meaningful manner. The way that children approach fraction concepts in these contexts may surprise you.

How Many Snails? A Counting Book *Giganti, 1988*

Each page of this book has a similar pattern of questions. For example, "I went walking and I wondered: How many clouds were there? How many clouds were big and fluffy? How many were big and fluffy and gray?" Students can look at the pictures and find the fraction of the objects (e.g., clouds) that have the particular characteristic (big and fluffy). Whitin and Whitin (2006) describe how a class used this book to write their own stories in this pattern and record the fractions for each subset of the objects.

The Doorbell Rang *Hutchins, 1986*

Often used to investigate whole-number operations of multiplication and division, this book is also an excellent early introduction to fractions. The story is a simple tale of two children preparing to share a plate of 12 cookies. Just as they have figured out how to share the cookies, the doorbell rings and more children arrive. You can change the number of children to create a sharing situation that requires fractions (e.g., 5 children).

The Man Who Counted: A Collection of Mathematical Adventures *Tahan, 1993*

This book contains a story, "Beasts of Burden," about a wise mathematician, Beremiz, and the narrator, who are traveling together on one camel. They are asked by three brothers to solve an argument. Their father has left them 35 camels to divide among them: half to one brother, one-third to another, and one-ninth to the third. The story provides an excellent context for discussing fractional parts of sets and how fractional parts change as the whole changes. However, if the whole is changed from 35 to, say, 36 or 34, the problem of the indicated shares remains unresolved. The sum of $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, and $\frac{1}{9}$ will never be one whole, no matter how many camels are involved. Bresser (1995) describes three days of activities with his fifth graders.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). Ten practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 373–380.
This article has the ten suggestions listed in the summary of this chapter. Each is discussed and favorite activities are shared. An excellent overview of teaching fractions.

Flores, A., & Klein, E. (2005). From students' problem-solving strategies to connections in fractions. *Teaching Children Mathematics*, *11*(9), 452–457.
This article offers a very realistic view (complete with photos of student work) of how children develop initial fraction concepts and an understanding of notation as they engage in sharing tasks like those described in this chapter.

Reys, B. J., Kim, O., & Bay, J. M. (1999). Establishing fraction benchmarks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4*(8), 530–532.
This short article describes a simple three-question interview administered to 20 fifth-grade students. The results are both sad and surprising. A significant conclusion is that the teaching of benchmarks for fractions, specifically 0, $\frac{1}{2}$, and 1, is generally neglected in the standard curriculum.

Stump, S. (2003). Designing fraction counting books. *Teaching Children Mathematics*, *9*(9), 546–549.
This article describes the work of several preservice teachers whose students created counting books in which they count by unit fractions.

Kitaplar

Burns, M. (2001). *Teaching arithmetic: Lessons for introducing fractions, grades 4–5*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
Typical of Marilyn Burns, this book offers well-designed lessons with lots of details, sample student dialogue, and Blackline Masters. These are introductory ideas for fraction concepts. Five lessons cover one-half as a benchmark. Assessments are also included.

İnternet Kaynakları

Cyberchase (PBS)
www.pbs.org/teachers/search/results.html?q=fractions&x=0&y=0&num=100&loggedin=0&loggedin=0&active=audiovideo

Cyberchase is a very popular television series targeting important mathematics. The site offers videos that model

fractions with real-world connections. Also offered are activities such as "Make a Match" (http://pbskids.org/cyberchase/games/equivalentfractions/index.html), in which students examine the concept of equivalent fractions and match a fraction with a graphic representation of that fraction. Another activity is "Thirteen Ways of Looking at a Half" (http://pbskids.org/cyberchase/games/fractions/index.html), in which students explore fractions of geometric shapes—in particular, the thirteen ways half of an eight-piece square can be arranged.

Fraction Bars (Math Playground)
http://mathplayground.com/Fraction_bars.html

The user sets the total parts and then the shaded parts for each bar. Explore fractional parts, the concept of numerator and denominator, and equivalency. The user can turn the numbers on or off.

Fraction Concepts (eNLVM Module)
http://enlvm.usu.edu/ma/nav/toc.jsp?sid=__shared&cid=emready@fraction_concepts&bb=published

These part-whole activities provide practice in writing and comparing fractions. A full lesson plan with NCTM standards correlations and worksheets is provided, and the teacher can log in to see how students performed.

Fraction Track
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.1/index.htm

Players position fractions on number lines with different denominators. Fractions can be split into parts. A challenging game involving equivalent-fraction concepts.

Fraction Pointer
www.shodor.org/interactivate/activities/FractionPointer

A good applet for connecting an area model with the number line. After creating area models for two fractions, the user must then create a new fraction between the first two. Similar to the *Illuminations* applet, "Equivalent Fractions."

National Library of Virtual Manipulatives
http://nlvm.usu.edu

This site offers numerous models for exploring fractions, including fraction bars and fraction pieces. Also there is an applet for comparing and visualizing fractions.

Bölüm 16

Kesir Hesaplamaları İçin Stratejiler Geliştirme

Bir beşinci sınıf öğrencisi sorar: "Neden 29 ile dokuzda ikiyi çarpınca sonuç küçülüyor?" (Taber, 2002, s. 67). Doğal sayılardan yapılan genellemeler öğrencilerin kafasını karıştırabilse de şunun farkında olmalısınız: Onların işlemler hakkındaki fikirleri doğal sayılar ile gelişmiştir. Öğrenciler, doğal sayı işlemleriyle ilgili sahip oldukları fikirlerinin üzerine inşa etmeye gerek duyarlar. Biz onların doğal sayı işlemleri ile ilgili önceki anlayışlarını kesir hesaplamalarına anlam vermek için kullanabiliriz. Bu, kesirler hakkında sağlam bir anlamayla birleşince, kesir hesaplamalarını kavramanın temelini oluşturur. Bu temel olmadan öğrencileriniz, neredeyse şüphesiz olarak gerekçelerini bilmeden kuralları öğreniyor olacaklardır ki bu kabul edilemez bir hedeftir.

Ana Fikirler

1. Kesirlerle yapılan işlemlerin her birinin anlamı doğal sayılar ile yapılan işlemlerin anlamlarıyla aynıdır. Kesirlerle olan işlemler bu aynı anlamların kesir kısımlarına uygulanmasıyla başlamalıdır.
   - Toplama ve çıkarma için: Pay, parçaların sayısını ve payda parçaların türünü belirtir. Toplanan veya çıkarılanlar parçalardır.
   - Bir kesirle çarpma için: Tekrarlı toplama ve alan modelleri, kesirlerle çarpma algoritmasının geliştirilmesine destek olur.
   - Bir kesirle bölme için: Bölme işlemiyle ilgili iki düşünme tarzı (parçalara ayırma ve ölçme), bölme için iki farklı düşünce sürecine öncülük eder. Her ikisi de önemlidir.
2. Kesir hesaplamasında tahmin, hemen hemen tamamen kesirlerin göreceli büyüklükleri ve kesirlerle işlem kavramlarıyla ilişkilidir. Tahmin yapmak için bir hesaplama algoritmasına gerek yoktur. Öğrencilerin dikkatini işlemlerin anlamları ve sonuçların beklenen büyüklükleri üzerinde tutabilmek için, tahmin, hesaplamanın gelişiminin ayrılmaz bir parçası olmalıdır.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Biraz önce belirtildiği gibi, kesirlerle işlemler, doğal sayılarla işlemleri anlama ve kesir algısı üzerine inşa edilir (Bölüm 12 ve 15). Kesir hesaplamalarını anlamak aşağıdaki alanlarla da ilişkilidir.

- **Cebirsel düşünme** (Bölüm 14): Değişkenleri içeren denklemler genellikle kesirleri kapsar ya da kesirler kullanılarak çözülebilir. Örneğin, eğer kesirlerde çarpma anlaşıldı ise ve çözüm kesirlerin çarpılmasını (veya bölünmesini) gerektiriyorsa, $\frac{3}{4}x = 15$ denklemi zihinden çözülebilir.
- **Ondalık sayılar ve yüzdeler** (Bölüm 17): Ondalık sayılar ve yüzdeler, kesirlerin alternatif gösterimi olduklarından çoğu kez, özellikle tahmin alanında, hesaplamada akıcılık konusuna yardım edebilirler. Örneğin, 2.452×0.513 yaklaşık $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ veya $1\frac{1}{4} = 1.25$'dir. $132 olan liste fiyatından yüzde yirmibeşlik indirim, 132'nin $\frac{1}{4}$'i alınarak kolaylıkla hesaplanır.
- **Orantısal akıl yürütme** (Bölüm 18): Kesirlerde çarpma, kesirleri işlemci olarak düşünmemize yardımcı olur. Bu da dolayısıyla oran ve orantı kavramları, özellikle ölçekleme ve ölçek katsayısıyla ilişkilidir.
- **Ölçme** (Bölüm 19): Ölçmenin sıklıkla kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölmeyi içerdiği gibi işlemleri anlamak için oluşturulan modeller de ölçme yorumunu içerir (5 inç uzunluğundaki bir ipten $\frac{1}{2}$ inçlik kaç tane parça elde edebilirsiniz?).

Sayı Algısı ve Kesir Algoritmaları

Günümüzde kesirlerle hesaplama yapabilmek, öncelikli olarak tahmin yapmak ve cebir, ölçme ve diğer matematik öğrenme alanlarındaki hesaplamaları anlamak için önemlidir.

Kavramsal Anlama Zaman Alır

Ortak payda ve hesaplama ile ilgili diğer prosedürlerin öğretimi sırasında ve öncesinde öğrencilere, kesir sayı algısını geliştirmeleri için bol ve yeterli imkânı vermek önemlidir. 7 ve 8. sınıflarda dahi öğrenciler kavramsal olarak hazır değillerse, hesaplamayı erteleyip kavramlar üzerinde durmak anlamlı olur.

Kesir hesaplama kurallarına vaktinden önce gösterilen dikkatin ciddi bir takım sakıncaları vardır. Algoritmaların hiçbiri öğrencilerin işlemler ve ne anlama geldikleri hakkında düşünmelerine yardımcı olmaz. Öğrenciler anlamadıkları bir prosedürü takip ettikleri zaman, sonuçlarının anlamlı olup olmadığını değerlendirmek için hiçbir araçları yoktur. İkincisi, yetersiz anlaşılan algoritmanın kısa vadedeki hakimiyeti çabuk kaybedilir. Her işlem için değişen prosedürler birbirine karıştırıldığı zaman kısa süre içinde anlamsız bir karışıklık haline gelir. Öğrenciler sorar: "Ortak bir paydaya ihtiyacım var mı yoksa alttaki rakamları sadece topluyor muyum veya çarpıyor muyum?" "Hangisini ters çeviriyorsunuz, birinci sayıyı mı yoksa ikinci sayıyı mı?". Bir problemdeki sayılar biraz değiştirildiğinde (örneğin bir tamsayılı kesir belirince) öğrenciler algoritmaların uygulanmayacağını düşünür.

NCTM'nin *İlkeler ve Standartları* 3-5. sınıflarda kesirler ve ondalık kesirlerin ana odağının, sayı algısı ve toplama ve çıkarmaya informel yaklaşımların gelişmesi üzerinde olması gerektiğini önermiştir. 6-8. sınıflarda öğrenciler becerilerini kesirler, ondalık sayılar ve yüzdelerle yapılan tüm işlemleri içerecek şekilde genişletmelidirler. ◆

Problem Temelli Bir Sayı Algısı Yaklaşımı

Müfredat rehberiniz kesirlerde dört işlemin tamamını öğretmenizi gerektiriyorsa da, siz öğrencilerinizin hazır olduğu açıkça belli olana kadar algoritmik prosedürlere geçmeyi ertelemelisiniz. Öğrenciler kendilerinin icat ettikleri ve anladıkları informel yöntemleri kullanmada yeteri kadar becerikli hâle gelebilirler.

Kesirlerle hesaplama stratejileri geliştirilirken aşağıdaki ilkeler akılda tutulmalıdır:

1. *Basit bağlamsal etkinliklerle başlayın.* Bu tavsiye neredeyse bütün konulara uygulandığı için dejavu gibi gelebilir. Huinker (1998) bağlamsal problemleri kullanmanın ve kesirlerle hesaplamalar için öğrencilerin kendi yöntemlerini geliştirmelerine izin vermenin neden gerekli olduğunu mükemmel bir biçimde açıklar. İstediğiniz şey, hem işlemlerin anlamı hem de kesirler için bir bağlamdır.

2. *Kesirlerle hesaplamanın anlamını doğal sayılarla hesaplama ile ilişkilendirin.* $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$'ün ne anlama gelebileceğini düşünmek için "2x3 ne demektir?" ve takiben "$2 \times 3\frac{1}{2}$ işleminin anlamı ne olabilir?" diye sormalıyız ve yavaş yavaş iki kesrin çarpımına doğru ilerlemeliyiz. Her işlemin kavramları aynıdır ve doğal sayılardaki işlemlerle ilişkilendirmenin ve neyin benzer neyin farklı olduğunu açıkça tartışmanın faydaları olabilir.

3. *Tahmin ve informel yöntemlerin stratejilerin gelişiminde büyük rol oynamasına izin verin.* "$2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ işleminin sonucu 1'den büyük mü küçük mü olmalıdır? 2'den büyük mü yoksa küçük müdür?" Tahmin etme, odağı sayıların ve işlemlerin anlamları üzerinde tutar, yansıtıcı düşünmeyi teşvik eder ve kesirlerle informel sayı algısını inşa etmeye yardımcı olur. Standart algoritmayı kullanmaksızın kesin cevabı bulabilir misiniz? Bir yol, dağılma özelliğini kullanarak tam sayılı kesri ayırmak ve her iki kısmı ¼ ile çarpmaktır: $(2 \times \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{4})$. İki tane $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ veya $\frac{1}{2}$'dir ve dörtte birin yarısı $\frac{1}{8}$'dir. Dolayısıyla, yarıma sekizde bir ekleyip $\frac{5}{8}$ elde edersiniz.

4. *İşlemlerin herbirini modeller kullanarak inceleyin.* Çeşitli modeller kullanın. Öğrencilerinizden modelleri, basit öğrenci çizimleri dahil, kullanarak çözümlerini savunmalarını isteyiniz. Bazen kağıt-kalem yaklaşımlarına yardımcı olmayacak gibi görünen modelleri içeren cevaplar aldığınızı göreceksiniz. Sorun değil! Bu fikirler çocukların kesirler ve işlemler hakkında düşünmeyi öğrenmelerine yardımcı olacak, zihinsel yöntemlere katkıda bulunacak ve neticede standart algoritmalara geldiğinizde faydalı bir altyapı sağlayacaktır.

Bu dört adım, bölümün her bir alt bölümüne yerleştirilmiştir.

Tahmini Hesaplama

İkinci Eğitimde İlerlemenin Ulusal Değerlendirmesi çalışmasının [Second National Assessment of Educational Progress, NAEP] (Post, 1981) sıkça alıntı yapılan bir sonucu aşağıdaki soru ile ilgilidir:

> $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ işleminin sonucunu tahmin ediniz. Problemi kağıt kalem kullanarak çözmeye zamanınız olmayacaktır.

13 yaşındakilerin nasıl cevapladıklarını aşağıda bulabilirsiniz:

Cevap	13 yaşındakilerin yüzdesi
1	7
2	24
19	28
21	27
Bilmiyorum	14

Daha yakın zamanda altıncı ve sekizinci sınıftaki Tayvanlı öğrencilerle yapılan bir çalışma aynı soruyu içerdi. Sonuçlar NAEP çalışmasının sonuçlarından neredeyse

farksızdı (Reys, 1998). Tayvan çalışmasında öğrencilerin önemli ölçüde daha yüksek bir yüzdesi (yüzde 61 ve yüzde 63) 13 ve 8 için ortak payda bulmayı gerektiren bir süreç olan bu toplamın hesaplanmasını doğru yapabildiler! Bu toplamı tahmin etmenin hesaplama ile ilgili herhangi bir beceri gerektirmediğine – sadece bu iki kesrin büyüklükleri hakkında bir sezgi gerektirdiğine dikkat ediniz.

Toplama ve Çıkarma. Kesir sayı algısının gelişimi kesirlerin toplamları ve farklarını tahmin etmeyi (hesaplama stratejilerinin sunulmasından dahi önce) kesin surette içermelidir. Aşağıdaki etkinlik düzenli olarak tüm sınıfla kısa süreli ısınma etkinliği olarak herhangi bir kesir dersinde yapılabilir.

Etkinlik 16.1

İlk Tahminler

Öğrencilere iki kesrin toplamını ya da farkını tahmin edeceklerini söyleyiniz. Sadece kesin cevabın 1'den büyük veya küçük olduğuna karar vermeleri gerekecek. Tepegözde iki kesri içeren bir toplama veya çıkarma problemini 10 saniyeden fazla olmayacak şekilde gösteriniz. Öğrenciler 1'den büyük veya küçük tercihlerinden birini kağıda veya mini bir beyaz tahtaya yazarlar. Art arda birkaç problem sorunuz. Sonra her bir probleme dönüp öğrencilerin tahminlerine nasıl karar verdiklerini tartışınız.

Etkinlik 16.1, yani 1'den büyük veya küçük olmayı tahmin etme, bağlantılı ama daha karmaşık etkinliklerin başlangıcıdır. Öğrenciler daha çetin bir zorluğa hazır olduklarında aşağıdaki çeşitlemelerden seçiniz:

- 1'den farklı bir hedef cevap kullanınız. Örneğin, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 2 veya 3'ten daha büyük veya küçük olduğunu tahmin ediniz.
- 1'den hem büyük hem de küçük kesirler seçiniz. En yakın yarıma yuvarlayınız.

Bu alıştırmaları takip eden tartışmalarda, öğrencilere, kesin cevabın yaptıkları tahminden daha mı büyük yoksa daha mı küçük olduğu konusunda ne düşündüklerini sorunuz.

"İlk Tahminler" etkinliğinde kullanılabilecek altı tane toplam ve fark örneği Şekil 16.1'de verilmiştir.

Durup Düşün!

Kendi tahmin becerilerinizi Şekil 16.1'deki örnek problemlerle test edin. Her bir hesaplamaya sadece yaklaşık 10 saniye kadar bakın ve tahmininizi yazın. Altı tane tahmininizin hepsini yazdıktan sonra problemlere bakın ve tahmininizin gerçek hesaplamadan daha mı yüksek yoksa daha mı düşük olduğuna karar verin. Rasgele tahmin etmeyin! İyi bir gerekçeniz olsun.

Tahmin Edin

1. $\frac{1}{8} + \frac{4}{5}$
2. $\frac{9}{10} + \frac{7}{8}$
3. $\frac{3}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$
4. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$
5. $\frac{11}{12} - \frac{3}{4}$
6. $1\frac{1}{2} - \frac{9}{10}$

Kağıtlarınızı 1'den 6'ya kadar numaralandırınız. Sadece cevapları yazınız.

Tahmin edin!
Sadece doğal sayıları ve kolay kesirleri kullanın.

Şekil 16.1 Örnek kesir tahmin ifadeleri

Çoğu durumda öğrencilerin tahminleri, kesin farktan veya toplamdan $\frac{1}{2}$'den çok da fazla farklı olmamalıdır.

NCTM Standartları "Rasyonel sayı kavramlarının gelişimi 3-5. sınıflar için başlıca bir amaçtır ve kesirlerle hesaplamalar için informel yöntemlere öncülük eder. Örneğin, $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ gibi bir problem kolaylıkla zihinden çözülmelidir, çünkü öğrenciler $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$'i kafalarında canlandırabilir veya $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ gibi ayırma stratejilerini kullanabilirler" (s. 35). ◆

Çarpma ve Bölme. $3\frac{2}{3} \times 2$'in cevabını nasıl tahmin ederdiniz? Bir tahmin tekniği olan yuvarlama kullanılarak çarpanlardan biri yukarı, diğeri aşağı yuvarlanılır ve çarpım 4×2 olarak tahmin edilebilir. Bu basit tahmin gerçek bir ortamda gerekenin tamamını karşılar. Bu, aynı zamanda öğrencilerin hesapladıkları cevapların beklenene yakın değerde olup olmadığını bilmelerine yardım etmede de yeterince iyidir.

Gerçek hayatta doğal sayılarla kesirlerin çarpılması gerektiği ve zihinsel tahminlerin veya hatta kesin cevapların çok faydalı olduğu birçok durumlar vardır. Örneğin, indirimdeki ürünler sıklıkla "$\frac{1}{4}$'lik indirim" gibi listelenir veya kayıtlı seçmenlerde "$\frac{1}{3}$'lik artış" olduğunu okuruz. Ayrıca, bir sonraki bölümde göreceğiniz gibi kesirler yüzdelerin yerine mükemmel şekilde kullanılabilir. \$36.69'un yüzde 60'ını tahmin etmek için yüzde 60'ı $\frac{3}{5}$ veya $\frac{2}{3}$'den biraz daha az olarak düşünmek faydalı olur.

Kesirler ve büyük doğal sayıların çarpımları üst taraftaki ve alt taraftaki sayıların anlamlarını düşünerek zihinsel olarak hesaplanabilir. Örneğin, $\frac{3}{5}$, 3 tane *bir* bölü beştir. Dolayısıyla, örneğin eğer 350'nin $\frac{3}{5}$'ünü istiyorsanız, önce 350'nin *bir* bölü beşini veya 70'i düşününüz. Eğer *bir* bölü beş 70 ise, o zaman *üç* bölü beş 3×70 veya 210'dur. Bu örnek çok uygun sayılar içerse de büyük bir sayıyı bir kesir ile çarpmak için bir süreci gösterir : Önce birim kesir parçasını belirleyin ve daha sonra istediğiniz parça sayısı ile çarpın.

Sayılar o kadar hoş olmadığında, öğrencilerinizi uygun sayılar kullanmaya teşvik edin. \$36.69'un $\frac{3}{5}$'ünü tahmin etmek için faydalı olabilecek uygun bir değer \$35'dır. 35'in bir bölü beşi 7'dir, dolayısıyla üç bölü beş, 3 × 7 veya 21'dir. Şimdi biraz ekleme yapın (belki ek olarak 50 sent[1] ilave edin ve tahmininiz \$21.50 olur).

Bölmeyi anlamada tahmin etmeyi kullanma önemli bir destek sağlar. 12 ÷ 4 problemini düşününüz. Bu problem "12'de kaç tane dört vardır?" anlamına gelebilir. Benzer şekilde,12 ÷ $\frac{1}{4}$,"12'nin içinde kaç tane dörtte bir vardır" anlamına da gelir. 12'de 48 tane dörtte bir vardır. Bu temel fikri öğrenciler akıllarında tutarak,$4\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$ ve $3\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$ gibi problemlerin cevabını tahmin edebilmeliler. Öğrencilerden önce bu denklemlerin neyi sorduğunu kelimelerle anlatmalarını istemek (örneğin, $4\frac{1}{3}$'de kaç tane yarım vardır) öğrencilerin bölmenin anlamını düşünmelerine sonra da tahmin etmelerine yardım eder.

Diğer işlemlerde olduğu gibi, bağlam kullanmak bölmede tahmin yapmak için önemlidir. Bir örnek olarak: "5 tane sandviçimiz var. Bir kişilik porsiyon bir sandviçin $\frac{2}{5}$'sidir. Yaklaşık kaç kişiye bir tam porsiyon düşecektir?"

Toplama ve Çıkarma

Kesirlerde toplama ve çıkarma genellikle beşinci veya altıncı sınıfta birlikte anlatılır. *Müfredat Odak Noktaları* (NCTM, 2006) kesirlerde ve ondalık sayılarda toplama ve çıkarmayı beşinci sınıf odak noktası olarak alır ve modelleme ve temsil etme yeteneklerini, tahmin etme yeteneğini ve akıcılığı vurgular.

Doğal sayılarla hesaplamada olduğu gibi kuralları veya prosedürleri vermeden önce hesaplama etkinlikleri verin. Öğrencilerin çeşitli yöntemler kullanacaklarını ve bu yöntemlerin problemlerde karşılaşılan kesirlerle birlikte geniş çapta değişeceğini bekleyiniz.

Öğrenciler kesir problemlerini çözmek için çeşitli yollar bulmalıdırlar ve kendi icat ettikleri bu yaklaşımlar standart algoritmaların gelişimine katkıda bulunacaktır (Huinker, 1998; Lappan & Mouck, 1998; Schifter, Bastable, & Russell, 1999c).

İcat Edilen Stratejiler

İcat edilen stratejiler öğrencilerin sayı algısını kullanmaya eğilimli olduklarından, kesirlerin anlaşılmasının gelişimi için kritik öneme sahiptir. Bunun yanı sıra, insanların yetişkinlik hayatlarında topladıkları kesirlerin çoğu, kişilerin en rahat buldukları yöntemlerle zihinden toplayabilecekleri yarımlar, çeyrekler, sekizde birler gibi kesirleri içerir. Bölüm 12'de tartışılan stratejilerin aynılarını uygulayın ve öğrencileri problemi modellemeye veya onlar için anlamlı olan bir yolla çözmeye teşvik edin.

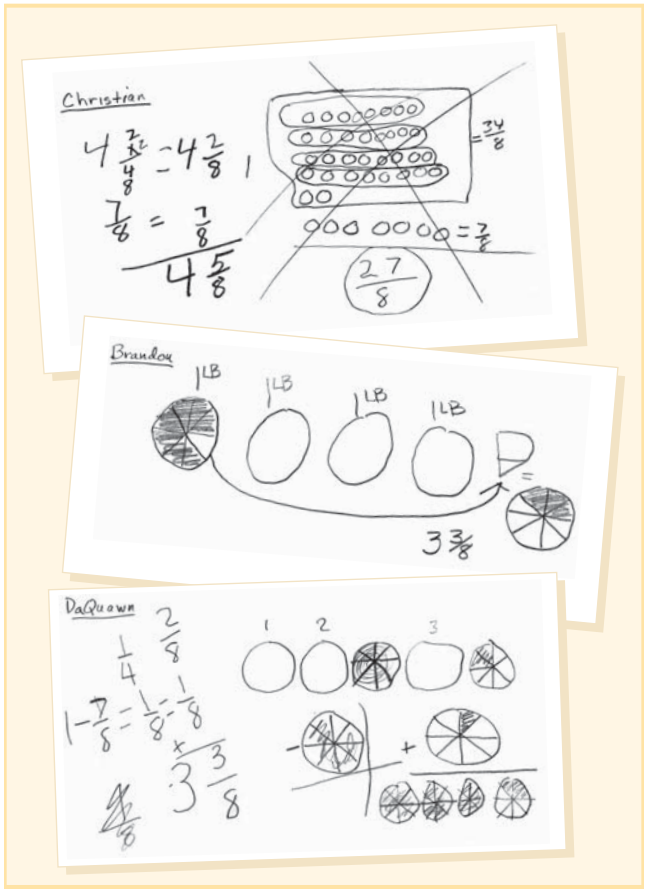
Aşağıdaki problemi düşününüz.

Mark annesi için $4\frac{1}{4}$ pound[2] şekerleme aldı. Şekerleme o kadar güzel görünüyordu ki $\frac{7}{8}$ poundunu kendisi yedi. Mark annesine ne kadar şekerleme verdi?

[1] Ç.N. Sent: Kuruşa eşdeğer ABD para birimi.
[2] Ç.N. Pound: Ağırlık ölçüsü birimi. 1 pound = 453.59 gram.

Beşinci sınıf öğrencilerine bu problemi iki yoldan çözmeleri soruldu. Birçok öğrenci bir yöntem olarak tam sayılı kesirlerde çıkarma işlemi için standart bir algoritma kullanma girişiminde bulundular veya algoritmayı doğru olarak kullandılar. Fakat, sınıfta algoritma için bir tane bile çizim veya başka açıklama bulunamadı. Şekil 16.2'de gösterildiği gibi, Christian algoritmada bir hata yapar ama $4\frac{1}{4} = \frac{34}{8}$ gösteren doğru bir resim çizer ve $\frac{27}{8}$ doğru cevabını bulur. Fakat, çiziminden emin değildir ve üzerini çizer. Birçok öğrenci kullandıkları işlemsel yöntemleri anlamadıkları halde, yöntemlerini gerekçelendirmeleri istenmedikçe algoritmaya kendi muhakemelerinden daha fazla güveneceklerdir.

Sınıfta birçok öğrenci tarafından kullanılan bir çizim yöntemi Brandon'in çiziminde gösterildiği gibi soldaki $\frac{1}{8}$'i $\frac{7}{8}$'den alıp $\frac{1}{4}$'in üzerine eklemeyi içerdi. Sadece DaQuawn bunu ilk önce sembolik olarak yapar. DaQuawn'ın "ikinci yöntemi", çalışmasını destekleyen bir çizimdir. DaQuawn bunu sınıfla paylaştığı zaman şöyle der: "Ben bunu $\frac{1}{8}$'lerden aldım dolayısıyla bunu $\frac{7}{8}$'den çıkarabildim. Böylece $\frac{1}{8}$ kaldı. Sonra [çeyrek daireyi göstererek] $\frac{1}{8}$'e değiştir. $\frac{1}{8}$'i çıkar... hayır, $\frac{1}{8}$'e ekle eşittir $\frac{2}{8}$ artı $\frac{1}{8}$ eşittir $\frac{3}{8}$." DaQuawn'ın "iyi bir



Şekil 16.2 Beşinci sınıf öğrencileri $4\frac{1}{4} - \frac{7}{8}$ problemini nasıl çözdüklerini göstermektedirler. Öğrencilerin çoğu için çizimlere dayalı yöntemler sembolik algoritmaları ile pek alakalı değildir. Zorlanan bir öğrenci olan DaQuawn'ın çalışması bir istisnadır.

sayı algısına sahip olduğu halde okuma ve yazmada zorluk çektiğini" ifade etmektedir. Bu öğretmen, öğrencilerinin düşünmesine değer verir ve matematik öğrenimini öğrencilerinin fikirlerini ifade etme yeteneklerinden dikkatlice ayırt eder.

Bu örnekler, yazılı çalışmaların nasıl öğrencilerin düşünmelerine dair içgörü sağladığını gösterir. Örnekler, bu durumda öğrencilerin sembollerle resimler arasında bağlantı kurmada zorluk çektiklerini göstermektedir.

Dairesel Kesir Gösterimleri. Öğrenciler kesirleri temsil ederken daireler çizmeyi tercih ediyorlar gibi görünüyor. Bu belki o modelin aşırı kullanımı hakkında bir şey söylüyordur. Şekil 16.2'deki çizimler dikkatlice çizilmemiş (parçalara ayırmalar eşit parçaları göstermiyor). Fakat, öğrenciler parçaların büyüklüklerine bağlı olarak sonuca varmıyorlar; daha ziyade, parçaları saymak için çizim yapıyorlar. Öğrenciler parçaların eşit olması gerektiğini bildikleri sürece yetersiz bir şekilde çizilmiş kesir modelleri için endişelenmeyin.

Rasyonel sayılar alanında tanınmış araştırmacılar olan Cramer, Wyberg ve Leavitt (2008) dairenin, kesirlerde toplama ve çıkarma için en iyi model olduğunu, çünkü dairenin öğrencilerin farklı daire parçalarının (kesirlerin) büyüklükleri ile ilgili zihinsel imgeler geliştirmesine olanak sağladığını bulmuşlardır. Şekil 16.3 öğrencilerin nasıl ilk önce tahmin ettiklerini (sayı doğrusunu işaretleme dahil) ve sonra dairesel kesir gösterimleri kullanarak kesirleri nasıl topladıkları hakkında açıklama yaptıklarını gösteriyor.

Öğrencilere bir problemi çözmelerini soruş şekliniz sınıfta olacak şey üzerinde fark oluşturur. Örneğin aşağıdaki problemi düşününüz:

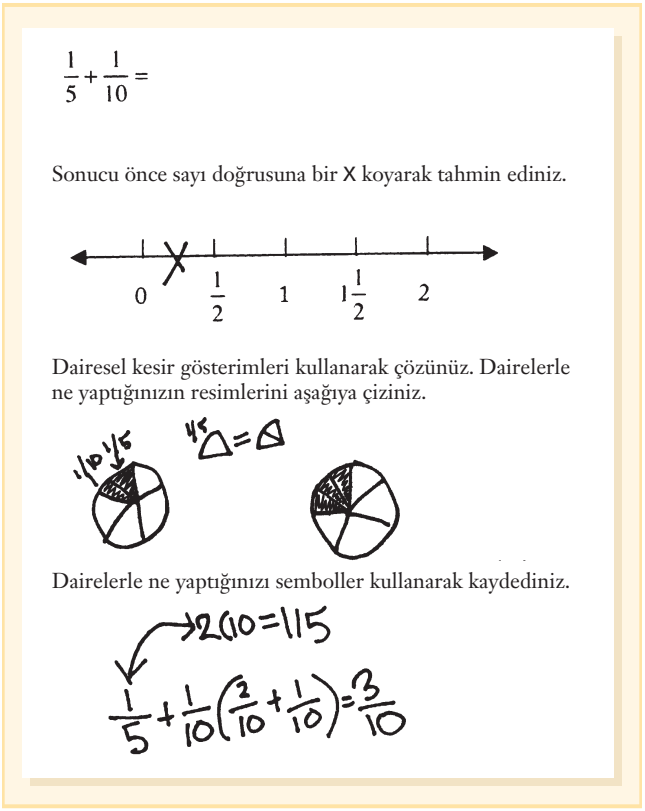
Jack ve Jill biri peynirli biri sucuklu iki orta boy pizza ısmarladılar. Jack bir pizzanın $\frac{5}{6}$'ini ve Jill bir pizzanın $\frac{1}{2}$'ini yedi. Birlikte ne kadar pizza yemiş oldular?

Durup Düşün!

Öğrencilerin bu problemi sembolik ortak-payda yaklaşımını kullanmadan çözebilecekleri iki yol düşünmeye çalışınız.

Eğer öğrenciler bir önceki örnekteki gibi daireler çizerse, bazıları pizzadaki $\frac{1}{6}$'lik boşluğu doldurmaya çalışacaklar. Daha sonra $\frac{1}{2}$'den $\frac{1}{6}$'i nasıl ayıracaklarını çözmeleri gerekecek. Eğer $\frac{1}{2}$'i $\frac{3}{6}$ olarak düşünebilirlerse, boşluğu doldurmak için altıda birlerden birini kullanabilirler. İki pizzayı çizdikten sonra başka bir yaklaşım pizzanın $\frac{5}{6}$'inde bir yarım artı 2 tane daha altıda bir olduğunu fark etmektir. İki yarımı bir bütün oluşturmak için bir araya getir ve $\frac{2}{6}$ daha var – yani $1\frac{2}{6}$. Bunlar teşvik etmeyi istediğiniz düşünme türlerini temsil eden kesinlikle iyi çözümlerdir.

Sayı Doğruları. Kesirleri toplama ve çıkarmada icat edilmiş stratejileri kullanmak için faydalı başka bir model de sayı doğrusudur. Sayı doğrusunun bir avantajı kesirlerde toplama ve çıkarmayı incelemek için tanıdık bir bağlam olan cetvel ile ilişkilendirilebilmesidir. Sayı doğrusu aynı zamanda daire modelinden daha zorlayıcıdır çünkü öğrencinin $\frac{3}{4}$'ü, sadece 4'te 3 olarak değil aynı zamanda 0 ve 1 arasında bir değer olarak da anlamasını gerektirir (Izsak, Tillema, & Tunc-Pekkam, 2008). Daire gibi alan gösterimleriyle birlikte sayı doğrusunu kullanmak öğrencilerin anlamasını kuvvetlendirir (Clarke, Roche, & Mitchell, 2008; Cramer, Wyberg, Leavitt, 2008; Usiskin, 2007).



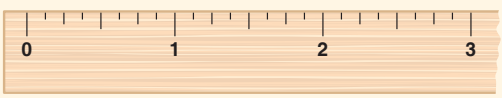
Şekil 16.3 Bir öğrenci tahmin eder ve daha sonra kesirleri dairesel kesir gösterimi kullanarak toplar.

Kaynak: Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). "The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction." *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), p. 495. Reprinted with permission. Copyright © 2008 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.

Durup Düşün!

Görsel bir araç olarak cetveli kullanınız ve aşağıdaki üç problemin cevaplarını ortak payda algoritmasını kullanmadan bulunuz:

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ $\quad 2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}$ $\quad 1\frac{1}{8}+1\frac{1}{2}$



Durup Düşün'deki problemleri nasıl çözdüğünüzü düşünün. Sizce başka yöntemler de var mıdır? Birinci problemde öğrenciler 1'i ölçüt olarak kullanabilirler (10 veya 100'ün doğal sayılarda ölçüt olarak kullanıldığı gibi). Bir bütüne varmak için $\frac{1}{2}$'deki $\frac{1}{4}$'i kullanıyorlar ve daha sonra eklemek için $\frac{1}{4}$ daha var – dolayısıyla $1\frac{1}{4}$. Benzer şekilde, $\frac{1}{2}$ ile bir bütün yapmak için $\frac{3}{4}$'ten $\frac{1}{2}$ çıkarırlar ve daha sonra $\frac{1}{4}$'i eklerler veya sadece $\frac{1}{2}$'in $\frac{2}{4}$ olduğunu bilirler ve daha sonra $\frac{5}{4}$'ü (veya $1\frac{1}{4}$'i) elde etmek üzere sayarlar.

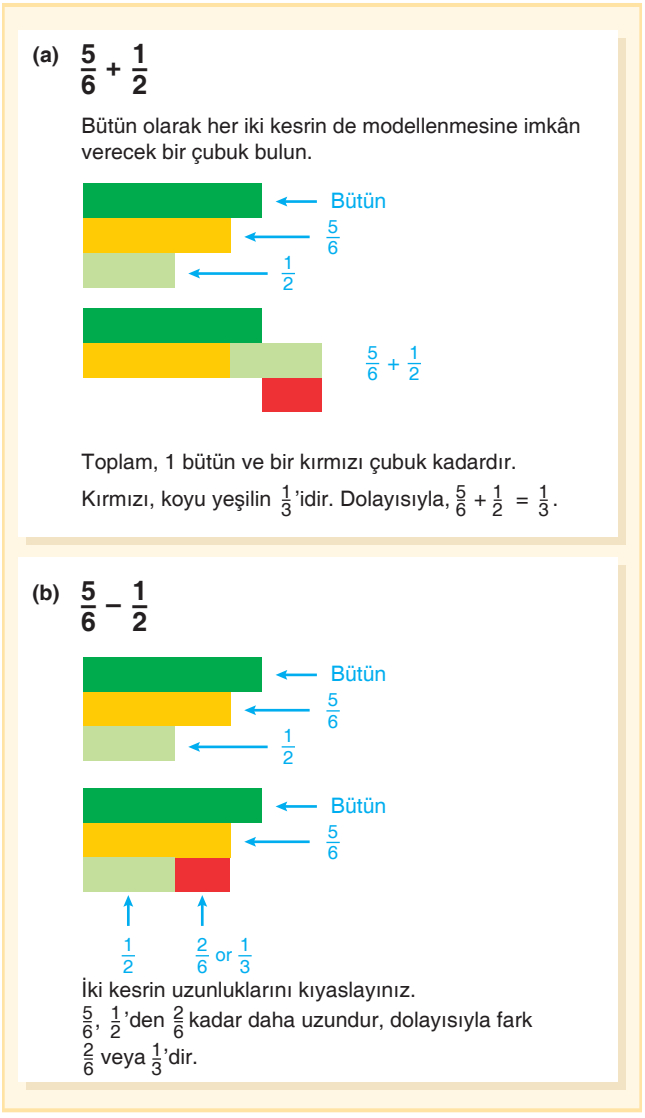
(Doğrusal duruma uyan) bir bağlam eklemek de öğrencilerin icat edilmiş stratejileri kullanmasını destekler. Örneğin, Durup Düşün'de sorulan ikinci problem için olabilecek bir bağlam: Desmond günde $2\frac{1}{2}$ mil[3] koşar. Eğer $1\frac{1}{4}$ mil işaretini az önce geçti ise, daha ne kadar gitmesi gerekir? Öğrenciler ilk önce doğal sayı kısımlarında çıkarma yapıp $1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$elde edebilir ve sonra $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$'in $\frac{1}{4}$ olduğunu bilebilir veya $\frac{1}{2}$'i $\frac{2}{4}$'ye çevirmeyi tercih edebilirler.

Farklı bir bağlamda hikâye farklı olabilir. Örneğin, Desmond $2\frac{1}{2}$ mil noktasında ve James $1\frac{1}{4}$ mil noktasındadır. James'in Desmond'u olduğu yerde yakalayabilmesi için ne kadar gitmesi gerekir? Bu durumda, öğrenciler üzerine sayma stratejisini kullanabilirler ve 2'ye ulaşmak için ¾ gerektiğine dikkat edilirse daha sonra $\frac{3}{4}$'e bir başka $\frac{1}{2}$ eklenmesiyle sonuç $1\frac{1}{4}$ olacaktır. Öğrenciler daha fazla stratejiyi paylaşabilir ve onları sayı doğrusunda gösterebilirlerse, bir kesri nasıl ekleyip çıkaracaklarını seçme konusunda daha esnek hâle geleceklerdir. Doğal sayılarda olduğu gibi icat edilmiş stratejiler bazen en iyi ve en etkili stratejilerdir; ama bazen sayılar zihinsel strateji için elverişli olmazlar ve böyle durumlarda algoritma çok faydalı olabilir.

Varsayalım öğrencilere Jack ve Jill problemini sordunuz ama bağlamı sandviçlere çevirdiniz ve öğrencilerden problemi modellemek için Cuisenaire çubuklarını veya kesir çubuklarını kullanmalarını istediniz. Verilmesi gereken ilk karar hangi çubuğun bir bütün olarak kullanılacağıdır. Dairesel modelde bu karara gerek yoktur. Her kesir için ayrı ayrı en kolay bütünü kullanma yönünde bir eğilim olsa da her iki kesir için bütün aynı olmalıdır. Yine bu sorun dairelerle çalışırken ortaya çıkmaz. Bu durumda, işe yarayacak en küçük çubuk, 6'lık çubuk veya koyu yeşil çubuktur. Şekil 16.4(a) bir çözümü göstermektedir.

Peki ya bunun yerine öğrencilere Jack ve Jill'in yedikleri miktarları karşılaştırmalarını sorarsanız ne olacak? Şekil 16.4(b) uzunluklarını karşılaştırmak için "sandviçlerin" sıralanmasını gösteriyor. Çıkarmanın şu şekillerde düşünülebileceğini hatırlayınız: toplamın bilindiği ve bir parçanın çıkartıldığı durumlarda "ayırma"; aralarındaki farkı bulmak için iki miktar karşılaştırıldığında "karşılaştırma" ve küçük bir değerle başlanıp daha büyük değere ulaşmak için ne kadar daha olduğunun sorulduğu durumlarda "kaç taneye daha ihtiyaç var". Bu sandviç örneği bir karşılaştırma örneğidir (oluşturduğunuz hikâyeler ve örneklerde "ayırma/çıkarma" örneklerinden fazlasına yer verdiğinizden emin olunuz).

İlk baştaki örnekte (Şekil 16.2) gördüğümüz gibi öğrenciler hem toplamada hem de çıkarmada icat edilmiş yöntemleri kullanabilirler ve hatta kullanırlar da. Bu türden akıl yürütme son derece önemlidir. Öğrenciler kolay kesirleri parçalarına



Şekil 16.4 Kesirleri toplamak ve çıkarmak için çubuk kullanma.

ayırıp, kendilerine anlamlı gelen şekillerde tekrar bir araya getirmek için farklı yöntemleri kullanmada kendilerini rahat hissetmelidirler. Problemlerinizdeki kesirleri "uygun" ve paydaları 12'den büyük olmayacak şekilde tutun. Paydaları beş ve yedi olan kesirleri veya hatta paydaları beş veya oniki olan kesirleri toplamaya nadiren ihtiyaç duyarız. Böyle sayılarla çizim, ortak paydalar epey büyük olduğundan zor olur. Kesir çubukları veya daireleri gibi bir modelin kullanılmasını zorlamak öğrencilerin ortak paydalar için hazırlanmasına neden olabilse de, bu vurguyu başlangıçta ertelemek en iyisidir.

Ortak Paydalar Neden "Gerekli"dir? Öğretmenler yaygın olarak öğrencilere "Kesirleri toplamak veya çıkarmak için, önce ortak paydaları elde etmelisiniz." derler. Açıklaması genellikle şöyledir, "Neticede elmalarla armutları toplayamazsınız." Bu iyi niyetli ifade aslında yanlıştır. Doğru bir ifade şöyle olabilir, "Kesirleri toplama veya çıkarmada *standart algoritmayı kullanmak için* önce ortak paydaları elde

[3] Ç.N. Mil: Uzunluk ölçüsü birimi. 1 mil = 1.6 km.

etmelisiniz.“ Ve daha sonraki açıklama ise, “Algoritma sadece ortak paydalarda işe yarayacak sekilde tasarlanmıştır, çünkü o, eşit büyüklükteki parçaları toplama fikrine dayalıdır.”

Öğrenciler, kendi icat ettikleri fikirleri kullanarak hiç ortak payda bulmadan da birçok doğru çözüm bulunabildiğini görecekler. Şu toplamları ve farkları düşününüz:

$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ $1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

Farklı kesir parçalarının birbirleri ile olan ilişkililerini kullanmak sıklıkla ortak paydasız çözümler sağlar. Örneğin, yarımlar, çeyrekler, sekizde birler kolaylıkla ilişkilidir, çünkü $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$'in yarısıdır ve $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$'in yarısıdır. Ayrıca, Şekil 16.5'deki gibi üç tane üçte birliğin daire içinde bir bütün oluşturduğunu kafanızda canlandırın. Hiç bütünün yarısının, bir üçte birlik artı bir üçte birliğin yarısı (veya altıda bir) olduğunu fark ettiniz mi? Benzer şekilde, bir üçte birlikle bir dörtte birliğin arasındaki fark on ikide birdir.

Belirtildiği gibi, sayı doğrusu da toplama ve çıkarmayı ortak payda bulmadan çözmek için zihinden kullanılabilecek bir araçtır. Öğrenciler önce sayı doğrusunda veya cetvelde bir kesir bulmakla başlayabilir ve diğer kesrin değerine “atlayabilirler.” Örneğin, $3\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ işleminde öğrenciler $3\frac{1}{4}$'i bulabilir ve bir birim geriye atlayarak $2\frac{1}{4}$'e ve daha sonra $\frac{1}{2}$ atlayarak onları $1\frac{3}{4}$'e ulaşırlar.

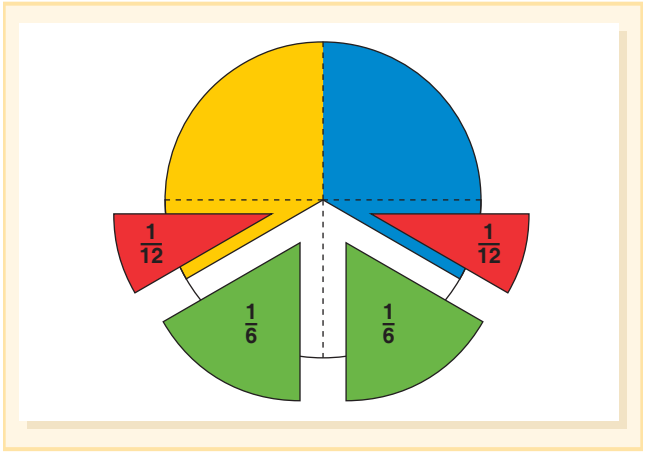
Bir Algoritma Geliştirme

Öğrenciler, kesirlerde toplama ve çıkarma yapmak amacıyla ortak payda yaklaşımını, kendi icat ettikleri stratejilerin ve denklik hakkındaki bilgilerinin üzerine inşa ederek geliştirirler. Bölüm 15'de denk kesirler kısmında tartışıldığı gibi, denklik hakkında güçlü kavramsal bir temele sahip olmak kesir hesaplamaları ve başka birçok matematik konusu için önemlidir. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ ve $\frac{8}{16}$ veya $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ ve $\frac{12}{16}$ sayıları arasında hareket etmede belli bir düzeyde akıcılığa sahip olan öğrenciler ekleme veya çıkarma yaparken gerektiği şekilde kesirleri ayarlayabilirler. İster alan isterse uzunluk veya küme modeli kullanılsın, denkliği oluşturmak esastır ve kesirlerde toplama ve çıkarma öğretimi süresince devamlı pekiştirme gerektirir. Örneğin, öğrencilere $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$ gibi bir toplama yaptırın ve eşitliğin bitmiş halini tahtaya yazın. Sonra, bu eşitliğin altına, burada gösterildiği gibi her bir kesrin kolayca görülen denklerinden oluşan ikinci bir toplama yazın.

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{6}{16} + \frac{1}{2} = ?$$

Kısaca $\frac{4}{8}$'ün $\frac{1}{2}$'e denk olduğu gibi $\frac{3}{8}$'ün $\frac{6}{16}$'ya denk olduğunu tartışın. Şimdi öğrencilerden ikinci eşitliğin cevabını yazmalarını ve cevapları için bir gerekçe vermelerini isteyin. Öğrenciler cevabın $\frac{7}{8}$ olduğunu görmeliler. İkinci toplam birinci ile aynıdır, çünkü kesirler farklı *görünseler* bile onlar aslında aynı sayılardır.



Şekil 16.5 Sadece yarımların, üçte birlerin, dörtte birlerin, altıda birlerin ve on ikide birlerin parçalanmış bir dairenin içine nasıl yerleştiğine bakarak gözlemlenebilecek birçok kesirsel ilişki vardır.

Eşit Paydalar. Hedef listelerinin çoğu ilk önce eşit paydalarla toplama ve çıkarmayı belirtir. Eğer öğrencilerin kesir kavramları hakkında iyi temelleri varsa, paydaları eşit olan kesirleri toplayıp çıkartabilmeliler. $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$ veya $3\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}$ gibi problemleri çözmede kendinden emin olmayan öğrenciler kesir kavramlarında yetersiz olabilirler ve modelleri kullanmada daha fazla deneyime ihtiyaç duyabilirler. Üst taraftaki sayı sayar ve alt taraftaki sayı neyin sayıldığını söyler fikri paydaları eşit kesirlerde toplama ve çıkarmayı doğal sayılarda toplama ve çıkarma ile aynı kılar. Fakat paydaları eşit kesirleri toplama üzerinde çalışırken öğrencilerin şu anahtar fikir üzerine odaklandıklarından emin olmak önemlidir: birimler aynı, dolayısıyla birleştirilebilirler (Mack, 2004).



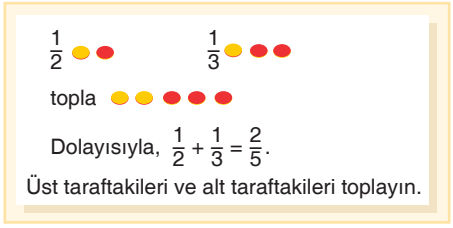
Öğrencilerin paydaları eşit kesirleri toplama/toplayamamada yaşadıkları kolaylık, algoritmaya doğru ileri itmeden önce önemli bir kavram değerlendirmesi olarak görülmelidir. Biraz önce belirtildiği gibi, bu toplam veya farkları basit olarak görmeyen öğrenciler pay ve paydanın anlamlarını muhtemelen anlamıyorlardır. Herhangi bir ek sembolik ilerleme hemen hemen kesindir ki anlamadan olacaktır. ◆

Eşit Olmayan Paydalar. Eşit olmayan paydalarla toplama ve çıkarmaya başlamak için sadece bir kesrin değiştirilmesinin gerektiği $\frac{5}{8} + \frac{1}{4}$ gibi bir etkinlik düşününüz. Öğrencilerin herhangi bir yöntemi kullanmalarına izin verin. Öğrenciler nasıl çözdüklerini açıklarken içlerinden birinin $\frac{1}{4}$'in $\frac{2}{8}$ ile aynı olduğunu açıklaması muhtemeldir. Tahtaya, baştaki eşitliği ve $\frac{1}{4}$'in yerinde $\frac{2}{8}$'nin yer aldığı yeniden yazılmış eşitliği yazın. “Bu hâlâ aynı eşitlik mi? $\frac{1}{4}$'i neden değiştirmek isteriz?” diye sorun. Öğrencilere modeller veya çizimler kullanarak başlangıçtaki problem ile dönüştürülmüş problemin cevabının neden aynı olması gerektiğini açıklattırın.

Bundan sonra her iki kesrin değiştirilmesini gerektiren örnekler deneyin (örneğin, $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$). Öğrencileri bu problemleri mümkünse model veya çizimler kullanmadan çözmeye teşvik edin. Denk kesirleri kullanmanın çizimden daha kolay bir araç olabileceğini önerin (zorunlu kılmayın). Öğrencilerin çözümlerini tartışırken dikkatleri, toplama ve çıkarmayı kolaylaştırmak için *problemi tekrar yazmak* fikri üzerine odaklayın. Öğrencilerin yeniden yazılan problemin başlangıçtakiyle aynı olduğunu ve dolayısıyla aynı cevaba sahip olması gerektiğini anladıklarından emin olun. Eğer öğrencileriniz iki problemin denkliği hakkında herhangi bir şüphe ifade ederlerse ("$\frac{8}{12} + \frac{3}{12}$ gerçekten $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$'in cevabı mıdır?"), bu denk kesirler kavramının iyi anlaşılmadığına dair bir ipucu olmalıdır ve daha fazla görsel ve somut modeller kullanma deneyimine ihtiyaç vardır.

Öğrenciler toplamlar ve farklar ile ilgili çözümleri incelemeye devam ederken modeller, kullanıma hazır olmaya devam etmelidir. Şekil 16.6'daki üç örnek, modellerin nasıl kullanılabileceğini göstermektedir. Her bir modelin, öğrencilerin her iki kesrin birimlerine parçalanabilecek bir bütünün büyüklüğünü düşünmelerini gerektirdiğine dikkat ediniz (örneğin, beşte birler ile yarımlar onda birleri gerektirir).

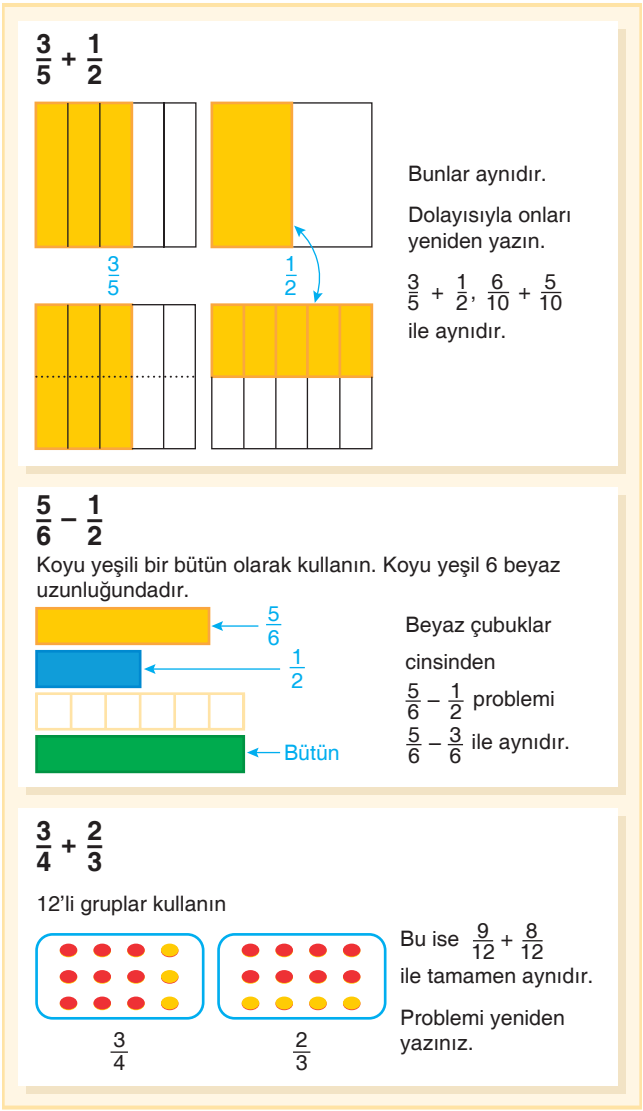
Kesirleri toplarken en sık yapılan hata hem payları hem de paydaları toplamaktır. Atlayıp bu hatayı doğrudan düzeltmeye kalkışmaktansa, bu fırsattan mükemmel bir sınıf tartışması için yararlanın. Bir fikir, öğrencilere $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ işlemi için başka bir sınıftaki hayali bir öğrenciniz tarafından önerildiğini "gördüğünüz" aşağıdaki çözümü göstermektir:



Öğrencilerinizden bu öğrencinin haklı olup olmadığına karar vermelerini isteyiniz. Eğer haklı değilse, çözümdeki problem nedir?

Durup Düşün! Cevap neden $\frac{2}{5}$ olamaz ve öğrencinin akıl yürütmesindeki sorun nedir?

Önce cevap üzerinde odaklanın. Toplam $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$'den daha küçük; aslında $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$'den daha fazla olmalıdır. Öğrenciler toplamın $\frac{2}{5}$ olamayacağına ikna oldukları zaman, akıl yürütmedeki sorunun ne olduğuna karar vermelerine izin vermek oldukça değerlidir. İlk önce öğrencilerin anlamalarının ne düzeyde olduklarını görmelisiniz. Örneğin, bir araştırmacı ve öğretmen olan Nancy Mack beşinci sınıf öğrencilerine şu ifadenin doğru olup olmadığını sordu: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{16}$. Bir öğrenci doğru olarak cevapladı: "Hayır, çünkü onlar sekizde



Şekil 16.6 Kesirlerde toplama ve çıkarma problemlerini ortak paydaları olacak şekilde yeniden yazma.

birdirler (*bir kesir takımından sekizde biri havaya kaldırır*). Eğer onları bir araya getirirseniz hâlâ sekizde birleriniz olacaktır (*kesir takımıyla bunu gösterir*). Gördünüz, topladığınızda onları onaltıda birlere dönüştürmediniz. Onlar hâlâ sekizde birdirler" (Mack, 2004, s. 229).

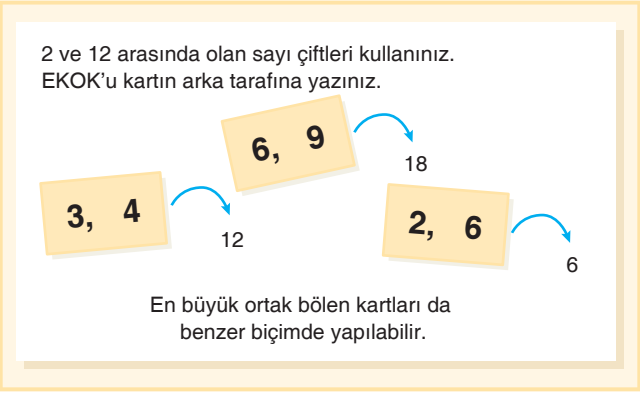
Ortak Katlar. Birçok öğrenci ortak paydaları bulmada sorun yaşar, çünkü paydaların ortak katlarını hızlı bir şekilde bulamazlar. Bu üzerinde alıştırma yapmayı isteyebileceğiniz bir beceridir. Bu, ayrıca çarpmanın temel bilgilerine iyi hakim olmaya da bağlıdır. Etkinlik 16.2 en küçük ortak kat veya ortak paydaları bulma becerisini hedef alır. En küçük ortak katlar tercih edilir, çünkü hesaplamalar daha küçük rakamlarla daha üstesinden gelinebilir olur ve toplama ve çıkarmadan sonra yapılacak daha az sadeleştirme işlemi gerektirir, ama en küçük olsun veya olmasın *herhangi* bir ortak kat işe yarayacaktır. En küçük ortak katları zorunlu kılmayın

(bütün ortak paydaları destekleyin ve tartışmada öğrenciler görecektir ki en küçük katları bulmak daha etkilidir).

Etkinlik 16.2

EKOK Öğrenme Kartları

Olası paydalardan oluşan sayı çiftleriyle öğrenme kartları hazırlayınız. Çoğu 16'dan küçük olmalıdır. Her bir kart için öğrenciler en küçük ortak katı veya EKOK'u bulmaya çalışırlar (Bkz. Şekil 16.7). 9 ve 5 gibi asal sayı olan çiftleri 2 ve 8 gibi birinin diğerinin katı olduğu çiftleri ve 8 ve 12 gibi ortak böleni olan çiftleri dâhil ettiğinizden emin olunuz.



Şekil 16.7 En küçük ortak kat (EKOK) öğrenme kartları.

Tam Sayılı Kesirler ve Bileşik Kesirler

Tam sayılı kesirlere geleneksel ders kitaplarında ve bazı hedef listelerinde sıklıkla ayrı konular gibi muamele edilse de toplama ve çıkarmada tam sayılı kesirler için ayrı bir algoritmaya gerek yoktur. Tam sayılı kesirleri toplama ve çıkarma ile ilgili yapacağınız bütün etkinliklerinize dâhil edin ve öğrencilere bu problemleri kendilerine anlamlı gelen yöntemlerle çözmeleri için izin verin. Öğrenciler doğal olarak tam sayıları ve daha sonra kesirleri toplama veya çıkarma eğiliminde olacaklardır. Bazen yapılması gereken tam da budur, ama diğer durumlarda tam sayı ve kesri tekrar gruplamaya ihtiyaç duyulur. Bu durum, çıkarmada ikinci kesir birincisinden büyük olduğunda ve toplamada kesirlerin toplamı 1'den büyük olduğunda ortaya çıkar.

Önce tamsayılar ile ilgilenmek yine de anlamlıdır. Şu problemi düşününüz: $5\frac{1}{8} - 3\frac{5}{8}$. 5'ten 3'ü çıkardıktan sonra öğrencilerin $\frac{5}{8}$ ile ilgilenmeleri gerekmektedir. Bazıları $\frac{5}{8}$'i tam kısım olan 2'den çıkaracak, geriye $1\frac{3}{8}$ kalacak ve sonra $\frac{1}{8}$ ekleyerek cevabı $1\frac{4}{8}$ bulacaktır. Diğerleri oradaki $\frac{1}{8}$'i alıp sonra $\frac{4}{8}$'ü geriye kalan 2'den çıkaracaklardır. Üçüncü ve pek olası olmayan bir yöntem ise bütünlerden birini $\frac{8}{8}$ ile takas etmek, onu $\frac{1}{8}$'e eklemek ve daha sonra elde edilen $\frac{9}{8}$'den $\frac{5}{8}$'i çıkarmaktır. Bu en son yöntem geleneksel algoritma ile aynıdır.

Yeteri kadar vurgulanmamış olmasına rağmen çok iyi olan bir strateji ise tam sayılı kesirleri tek (veya bileşik) kesirlere çevirmektir. Size bunun çarpma için kullanılan bir süreç olduğu öğretilmiş olabilir fakat bu, bir süreci uygulamak için bir yönteme sahip olunan "mantığı bilinmeyen kurallar" yaklaşımının bir parçasıdır. $5\frac{1}{8} - 3\frac{5}{8}$'e geri dönelim. Bu $\frac{41}{8} - \frac{29}{8}$ olarak yeniden yazılabilir. (Öğrencilere bunu yapmalarında yardım etmede kullanılacak kavramsal yöntemler için Bölüm 15'e bakınız.) 41 – 29 is 12 olduğundan, sonuç $\frac{12}{8}$ veya $1\frac{1}{2}$'dir. Bu kesinlikle etkilidir ve her zaman işe yarayacaktır. Buradaki mesaj öğrencilere seçenekler sunmaktır ve göreceksiniz ki daha çok öğrenci anlıyor ve bu problemleri başarıyla çözebiliyor olacaktır.



Çarpma

"30'un $\frac{2}{3}$'si nedir?" gibi çarpmayı yansıtan informel kesir etkinlikleri daha önce tanıtılsa da kesirlerde çarpma sıklıkla ortaokulda öğretiliyor. *Müfredat Odak Noktaları*'nda (NCTM, 2006) kesirlerde çarpma ve bölmede akıcılık altıncı sınıfta yer alıyor. Akıcılık, öğrencinin sadece algoritmayı yapabildiği değil aynı zamanda algoritmayı anladığı, problemleri modelleyebildiği, kesirlerde çarpma ve bölmeyi içeren durumları çözebildiği ve tahmin edebildiği manasına geliyor.

Çok az kişi kesirlerde çarpma ve bölmeyi, temel prosedürden çok daha fazlasını yapabilecek şekilde öğrendikleri için akıcılığın uygulama kısmını vurgulamak önemlidir. Eğer siz bu kategoriye düşüyorsanız, bu bölümdeki örnekleri dikkatlice okuyun ve problemleri çözmeye çalışın. Kesirlerde çarpmanın anlamını açıklamaya yardımcı olmaları amacıyla birçok şekil sunulmuştur.

Doğal sayılarla çalışırken 3 x 5, "3 tane 5" (tekrar eden toplama) veya "3 sıra 5" (alan veya sıralama) anlamlarına geliyor deriz. Birinci çarpan, ikinci çarpandan sizde ne kadar olduğunu veya ne kadar istediğinizi anlatır. Burası bağlamları kullanmaya başlamak için iyi bir yerdir ve basit bağlamsal problemler bu gelişimde önemli yardımcılardır.

Kavramı Geliştirme

Çocuklara çarpma etkinlikleri sunmak için kullandığınız bağlamsal problemlerin ayrıntılı olmasına gerek yoktur, ama problemlerde kullandığınız sayılar hakkında düşünmek önemlidir. Problemlerin zorlukları için olası bir ilerleme şekli takip eden bölümlerde geliştirilecektir.

Doğal Sayıların Kesirsel Parçaları. Öğrencilerin çarpmayla ilk deneyimleri doğal sayıların kesirsel parçalarını bulmayı içermelidir. Bölüm 15'de bütünün kesirsel parçalarını bulma ile ilgili "Bütün 45 ise, bütünün $\frac{1}{5}$'i kaçtır?" gibi birkaç örnek sunulmuştu. Daha düşündürücü bir örnek

ise: "Bütün 24 ise, bütünün $\frac{3}{8}$'ü nedir?" Bu akıl yürütme etkinlikleri kesirlerde çarpmanın ne anlama geldiği ile ilgili tartışmalara götürebilir. Aşağıdaki üç problemi iyi birer başlangıç etkinliği olarak düşününüz:

Michael'ın küçük oyuncak araba koleksiyonunda 15 tane araba var. Arabaların üçte ikisi kırmızıdır. Michael'ın kaç tane kırmızı arabası vardır?

Öğrenciler bu problem üzerinde nasıl düşünebilirler? 15'i her bir grupta beş tane olacak şekilde üç gruba parçalayabilirler ve daha sonra iki grupta kaç tane olduğunu görürler. Bunu sembollerle kaydetmek şu sonucu verir: $15 \div 3 \times 2$ (15'in $\frac{2}{3}$'si).

Bu, uzunluk bağlamı içerecek biçimde uyarlanabilir:

Okuldan halk kütüphanesine yürümek 15 dakika sürüyor. Anneme ne kadar gittiğimizi sorduğumda, yolun $\frac{2}{3}$'sini yürüdüğümüzü söyledi. Bana kaç dakika yürüdüğümüzü söyleyebilir misiniz? (yürüme hızının sabit olduğunu varsayınız.)

Etkinliklerde daha küçük doğal sayılar olabilir (örneğin, $\frac{1}{4} \times 2$). Bu ne demektir? Bunu nasıl çözebilirsiniz? Ya $\frac{1}{4} \times 5$? 5'in $\frac{3}{4}$'ü müdür?

Birinci çarpanın doğal sayı olduğu problemler de önemlidir.

Wayne 5 bardağı her birinde $\frac{2}{3}$ litre soda olacak şekilde doldurdu. Wayne ne kadar soda kullandı?

Bu durumun "$\frac{2}{3}$'lik 5 grup" olduğuna ve "5'lik bir grubun $\frac{2}{3}$'si" olmadığına dikkat ediniz. Değişme özelliği bu sayıların yer değiştirebildiği manasına gelse de, öğrencilerin her bir durumu anlamları farklı gösterimler olarak anlamaları önemlidir. Bu problem üzerine sayma stratejisini kullanarak çözülebilir. Tekrarlı toplamayı kullanarak da çözülebilir: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. Öğrenciler yaptıklarının payı 5 ile çarpmak olduğunu fark edebilirler, dolayısıyla $5 \times \frac{2}{3} = (5 \times 2)/3 = \frac{10}{3}$'tür.

Bu problem farklı yollarla çözülebilir. Bazı öğrenciler bir bölü üçleri bir araya getirir ve devam ettikçe bütünler oluştururlar. Diğerleri tüm bir bölü üçleri sayacak daha sonra $\frac{10}{3}$'te kaç tane bütün litre olduğunu bulacaklardır.

Alt Bölmeleri Olmayan Birim Parçaları. Az önce sunulan fikirleri genişletmek için şu üç problemi düşününüz:

Elinizde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü kalmış. Bu kalan pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşinize verirseniz, kardeşiniz bir bütün pizzanın ne kadarını almış olur?

Bir kişi bir somun ekmeğin $\frac{1}{10}$'ini yedi ve geriye $\frac{9}{10}$'u kaldı. Kalanın $\frac{2}{3}$'sini yumurtalı ekmek yapmak için kullanırsanız, bir bütün somun ekmeğin ne kadarını kullanmış olursunuz?

Gloria resmindeki gökyüzünü boyamak için mavi boyadan 2 $\frac{1}{2}$ tüp kullandı. Her bir tüpte $\frac{4}{5}$ ons[4] boya vardır. Gloria kaç ons mavi boya kullanmıştır?

Kasıtlı olarak bu problemlerdeki birimler veya kesir parçalarının daha fazla bölünmesine ihtiyaç yoktur. Birinci problem üç şeyin $\frac{1}{3}$'idir, ikincisi dokuz şeyin $\frac{2}{3}$'sidir ve sonuncusu 4 şeyin2$\frac{1}{2}$' idir. Odak, toplamdaki birim parçaların sayısının üzerindedir ve daha sonra parçaların büyüklükleri bütünlerin sayısını belirler. Şekil 16.8 bu tip problemlerin nasıl modellenebileceğini göstermektedir, ama öğrencilere bu problemleri kendi yollarıyla, seçtikleri herhangi model veya çizimi kullanarak modellemeleri ve çözmeleri için izin vermek çok önemlidir. Sadece akıl yürütmelerini açıklayabilmelerini zorunlu tutunuz.

Birim Parçaları Tekrar Bölmek. Parçaların, tekrar daha küçük birim parçalara bölünmesi gerektiğinde problemler daha düşündürücü olur.

Zack'in kesmesi için çimlerin $\frac{2}{3}$'si duruyor. Öğle yemeğinden sonra kalan çimin $\frac{3}{4}$'ünü kesti. Zack öğle yemeğinden sonra bütün çimin ne kadarını kesti?

Hayvanat bahçesi görevlisinde, hayvanların favori sıvı ikramları olan Zoo Cola'dan büyük bir şişe vardı. Maymun şişenin $\frac{1}{5}$'ini içti. Zebra kalanın $\frac{2}{3}$'sini içti. Zebra, Zoo Cola şişesinin ne kadarını içti?

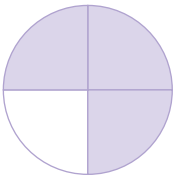
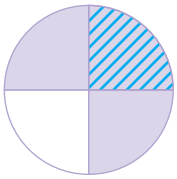
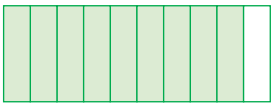
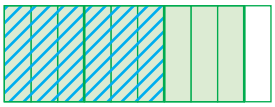
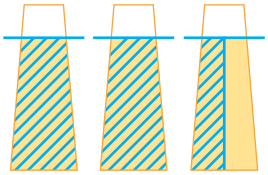


Durup Düşün!

Bir an durun ve bu problemlerin her birini nasıl çözeceğinizi düşünüp bulun. Size yardımcı olması için resimler çizin ama hesaplama algoritması kullanmayın.

Zack'in çim probleminde, iki şeyin, yani kesilmek için duran 2 tane $\frac{1}{3}$ çimin, $\frac{1}{4}$'lerini bulmak gerekiyor. Zoo Cola probleminde, 4 şeyin, yani kalan 4 tane $\frac{1}{5}$ kolanın, $\frac{1}{3}$'lerine ihtiyacınız var. Yine, yukarıdaki sayı sayar aşağıdaki sayı neyin sayıldığının adını söyler kavramları önemli bir rol oynar. Şekil 16.9 Zack'in çim problemi için olası bir çözümü göstermektedir. Zoo Cola problemi için benzer bir yaklaşım

[4] Ç.N. Ons: Ağırlık ölçüsü birimi. 1 ons = 28.35 gram.

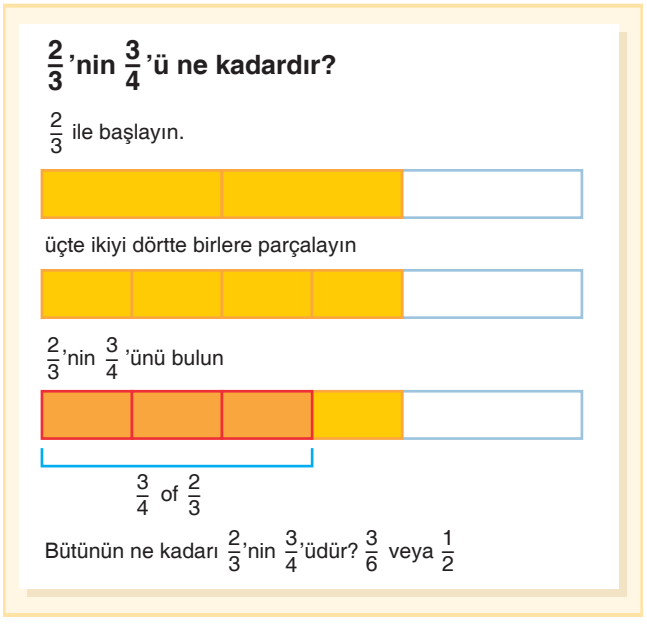
Görev	Başlangıç miktarını bulma	Başlangıç miktarının kesirsel kısmını gösterme	Çözüm
Pizza (Bir pizzanın) $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{1}{3}$'ini bulunuz veya $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$			$\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'i başlangıçtaki pizzanın $\frac{1}{4}$'idir. $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
Ekmek (Bir somun ekmeğin) $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz veya $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$			$\frac{9}{10}$'un $\frac{2}{3}$'si somunun 6 dilimidir veya bütünün $\frac{6}{10}$'sıdır. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{6}{10}$
Boya $\frac{4}{5}$ (ons boyanın) $2\frac{1}{2}$'ini bulunuz veya $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$			$\frac{4}{5}$'ün $2\frac{1}{2}$'i $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5}$'dir.

Şekil 16.8 Çarpmayla ilgili üç problemi örneklendiren modeller.

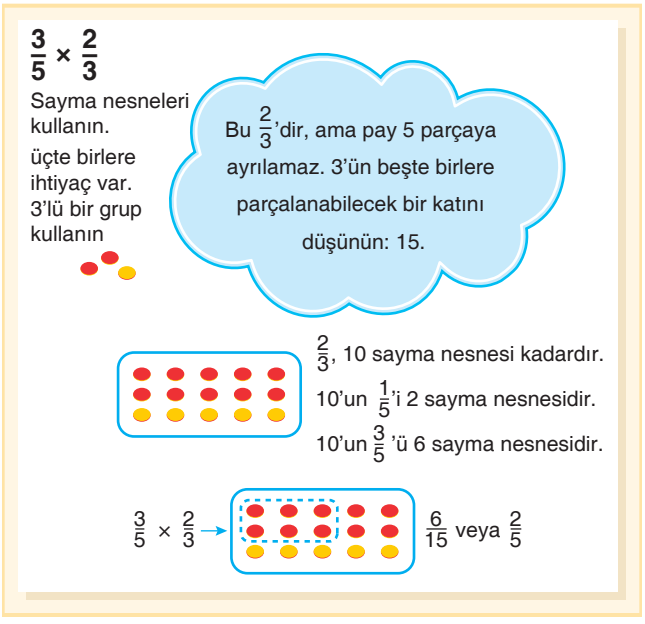
kullanılabilir. Siz başka çizimler kullanmış olabilirsiniz ama fikirler aynı olmalıdır.

Kağıt şerit kullanma ve parçalara ayırma, özellikle ilave parçalama gerektiğinde, çarpma problemlerini çözmek için etkili bir yoldur (Siebert & Gaskin, 2006). Şekil 16.9, $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ problemi için kağıt şeritlerin nasıl kullanılacağını göstermektedir (*Bir bütünün $\frac{2}{3}$'sinin beşte üçü, bütünün ne kadarıdır?*). Bu problemi çözmek $\frac{1}{3}$'lerin tekrar bölünmesini gerektirir.

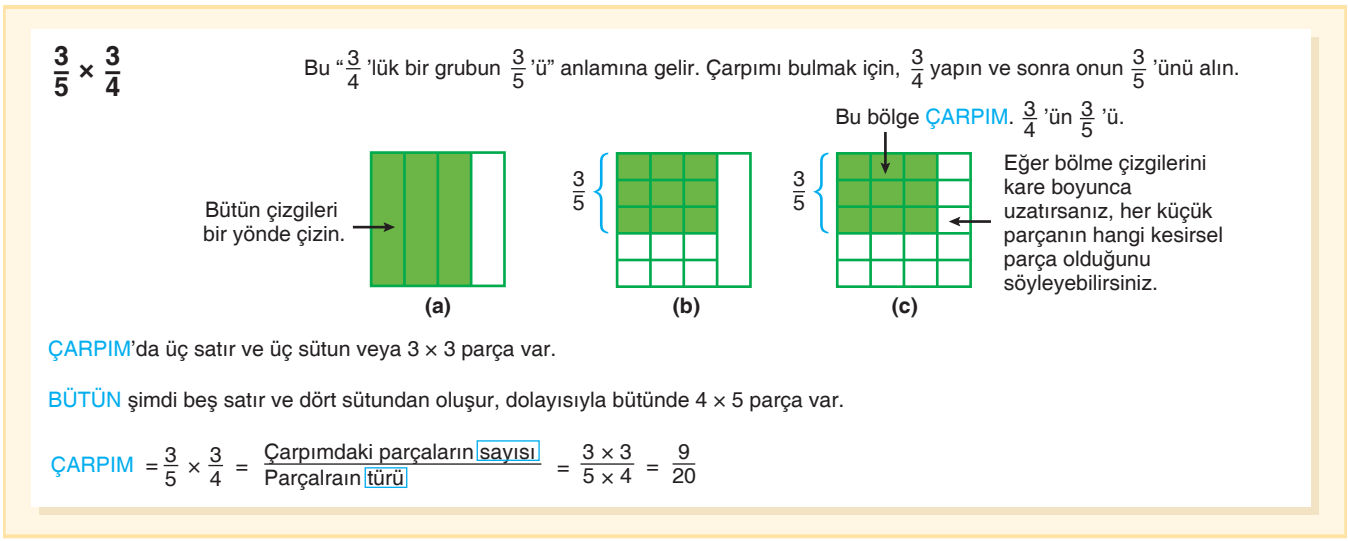
Kesirlerde çarpma sayma nesneleri ile modellenebilir (Bkz. Şekil 16.10). Öğrencilerinizin sayma nesneleri kullanmalarının önüne geçmeyin, ama onlara bütünü belirleme yollarını bulmada yardım etmek için hazırlıklı olun.



Şekil 16.9 Parçaların tekrar bölünmesini gerektiren bir çarpma probleminin çözümleri.



Şekil 16.10 Kesirlerde çarpmayı sayma nesneleri ile modelleme.



Şekil 16.11 Kesirlerde çarpma için algoritmanın geliştirilmesi.

Alan Modeli. Kesirlerde çarpmayı modellemek için alan modelinin bir takım avantajları vardır. İlki, bir uzunluğu parçalamanın uzun ve yorucu olabileceği problemlerde işe yarar. İkincisi, sonucun kullanılan kesirlerden herhangi birisinden oldukça küçük olabileceğini veya kesirlerden her ikisi de 1'e yakınsa sonucun da 1'e yakın olduğunu göstermek için iyi bir görsellik sağlar. Üçüncüsü, kesirlerde çarpma algoritmasıyla ilişki kurmak için iyi bir modeldir.

Öğrencilere Şekil 16.11'deki gibi bir kare verin ve onlardan ilk kesri göstermelerini isteyin. Örneğin, $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$ işleminde $\frac{3}{4}$'ün $\frac{3}{5}$'ünü buluyorsunuz, dolayısıyla önce $\frac{3}{4}$'ü göstermelisiniz (Bkz. Şekil 16.11(a)). $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{5}$'lerini bulmak için $\frac{3}{4}$ boyunca (Bkz. Şekil 16.11(b)) veya bütünü eş büyüklükte parçalara ayıracak şekilde karenin sonuna kadar (Bkz. Şekil 16.11(c)) yatay çizgiler çizin.

Aynı örneği problem temelli tarzda sunmak için aşağıdaki etkinliği verin (Imm, Stylianou, & Chae, 2008, s. 459'dan uyarlanmıştır):

Oyun alanı Problemi

A ve B bölgelerinin halkları 50 yard[5]a 100 yard boyutlarındaki arazilerde oyun alanı inşa ediyorlar. A bölgesinde, arazilerinin $\frac{3}{4}$'ünü oyun alanına dönüştürmeleri istendi ve bu oyun alanının $\frac{2}{5}$'si asfalt yolla kaplanmalı. B bölgesinde oyun alanını, arazinin $\frac{2}{5}$'sine inşa edecekleri ve oyun alanının $\frac{3}{4}$'ünün asfalt olması gerektiği söylendi. Hangi parkta oyun alanı daha büyüktür? Hangi arazide asfalt kısım daha büyüktür? Gösteriniz ve açıklayınız.

Algoritmayı Geliştirme

Alan modelini (ya da doğrusal modeli) kullanmada yeteri kadar deneyimle öğrenciler bir örüntü fark etmeye başlayacaktır. "Yeterli" den kastedilenin muhtemelen genelde verilenin daha fazlası olduğunu akılda tutunuz. Diğer bir deyişle bu, iki veya üç örnek anlamına gelmez. Birkaç gün, hatta hafta, farklı örnekler ve problemlerle çalışmak demektir. Bu alıştırmalar, öğrencileri paydalarla, kareli bölümlerin (veya çizgilerin) parçalanmasının nasıl ilişkili olduğunun ve payların problemin çözümünü nasıl etkilediğinin üzerine odaklanmaya sevk edecektir.

Öğrenciler algoritmayı kullanmaya başlamaya hazır oldukları zaman, aşağıdaki gibi üç örneği çözmelerini isteyiniz:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{9}{10}$$

Her biri için bir kare kullanın ve problemleri modellemek için kareleri dikey ve yatay olarak parçalara ayırın. "Kesrin biriminin [paydanın] ne olduğunu nasıl buldunuz?" diye sorun. Veya daha belirgin olarak, birinci problemde "Paydanın 12 olacağını nasıl buldunuz? Bu, diğer örneklerde de doğru olan bir örüntü müdür?" diye sorunuz. Sonra öğrencilerden parçaların sayısının nasıl belirlendiği (pay) konusunda da benzer bir örüntü bulup bulamayacaklarına bakmalarını isteyiniz.

Öğrencilerinize örüntü üzerinde odaklanmaları ve algoritmayı kullanmayı öğrenmeleri için yardım ederken yaptıklarının anlamları üzerine odaklanmayı unutmayın. Öğrencilere cevabın ne kadar büyük olacağını tahmin etmelerini ve tahminlerinin nedenini isteyen sorular yöneltin. Buradaki ilk örnekte, bir öğrenci cevabın $\frac{1}{2}$'den biraz daha küçük olacağını çünkü $\frac{5}{6}$'in 1'e yakın ama daha küçük olduğunu belirtebilir.

Birden Büyük Çarpanlar

Öğrenciler çarpmayı incelerken çarpanlardan birinin tam sayılı kesir olduğu etkinlikleri dâhil etmeye başlayın (örneğin, $\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{2}$). Birçok ders kitabı öğrencilere tam sayılı kesirleri çarpmak için bileşik kesre çevirtir. Aslında öğrenciler bileşik kesre çevirebilir veya tam sayılı kesirleri kullanabi-

[5] Yard: Uzunluk ölçüsü birimi. 1 yard = 0.9144 metre.

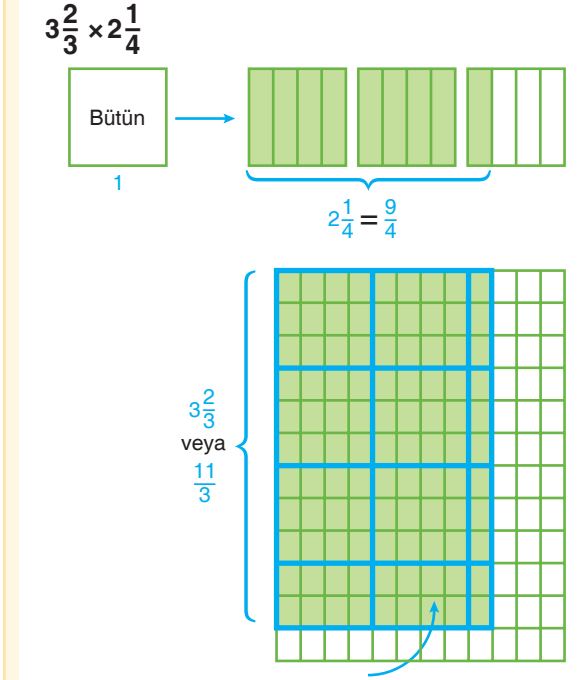
lirler. Şekil 16.12'de gösterildiği gibi, her halükarda problemi modellemek için alan modelleri kullanılabilir. Bu tip problemleri çözmek için bu etkili bir yoldur, ama tek yol değildir. $2\frac{1}{2}$'in $2 + \frac{1}{2}$ anlamına geldiğini anlayan öğrenciler $\frac{3}{4} \times 2$ ve $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ çarpmalarını yapıp sonuçlarını toplayabilir (dağılma özelliği).

Her iki çarpanın da tam sayılı kesir olması durumunda 2 basamaklı sayıları çarparken yapılana benzer şekilde 4 tane kısmi çarpım vardır.

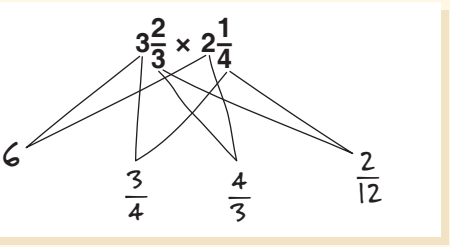


Durup Düşün!

Aşağıdaki çarpmadaki dört kısmi çarpımı bulunuz: $3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4}$.



Şekil 16.12 1'den küçük kesirler için geçerli algoritmayı geliştirirken kullanılan yaklaşımın aynısı tam sayılı kesirlere genişletilebilir.



Şekil 16.13 İki tam sayılı kesri çarparken, dört tane kısmi çarpım olacaktır. Toplam çarpımı elde etmek için bunlar toplanabilir veya bir tahminde bulunmak yeterli olabilir. Burada cevap yaklaşık 8'dir.

Şekil 16.13, tek tek parçaları çarparak bu çarpımın nasıl hesaplanabileceğini göstermektedir. Çoğu durumda, sonuçta oluşan kesirlerin, üzerinde çalışılması zor olan kesirler olması muhtemel değildir. Daha da önemlisi süreç daha kavramsaldır ve tahmin yapmaya (kısmi çarpımlar belirlenmeden önce veya sonra) uygundur. Şekil 16.13'deki kısmi çarpımların aynısının Şekil 16.12'deki dikdörtgende de bulunabileceğine dikkat ediniz.



Bölme

Böleni ters çevir ve çarp belki de ilköğretim matematiğinin en gizemli kurallarından biridir. Biz ne pahasına olursa olsun bu gizemden kaçınmak istiyoruz. Kesirlerde bölmeyi daha tanıdık bir perspektiften incelemek daha anlamlıdır.

Diğer işlemlerde olduğu gibi doğal sayılarla bölmenin anlamına geri dönünüz. Bölmenin iki anlamı olduğunu hatırlayınız: parçalara ayırma ve ölçme (Gregg & Gregg, 2007; Krib-Zalita, 2008; Tirosh, 2000). Her birini kısaca gözden geçireceğiz ve kesirleri içeren bazı bağlamsal problemlere bakacağız. (Hemen şimdi $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ işlemine uygun olacak sözel bir problem oluşturabilir misiniz?)

Öğrencilere hem ölçme hem de parçalara ayırma problemlerini inceletmelisiniz. Biz burada her bir problem türünü anlaşılır olması için ayrı ayrı ele alacağız. Sınıfta farklı türden problemler eninde sonunda bir arada verilmelidir. Çarpmadakine benzer şekilde problemlerde sayıların birbiriyle nasıl ilişkili olduğu konusu zorluğu etkileme eğilimindedir.

Bölmenin Parçalara Ayırma Yorumu

Sıklıkla parçalara ayırma problemlerini kesin surette paylaşma problemleri olarak düşünürüz: 4 arkadaş tarafından paylaşılacak 24 elma. Her bir arkadaş kaç tane alır? Fakat, Bölüm 9'dan hatırlayınız, bu paylaşma yapısının aynısı oran problemlerine de uygulanır: 3 saatte 12 mil yürüyorsan, saatte kaç mil yürürsün? Bu problemlerin her ikisi de aslında "Bir tanesi ne kadardır?", "*Bir* arkadaşa düşen miktar ne-

dir?", "*Bir* saatte kaç mil yürünür?" sorularını soran parçalara ayırma problemidir. 24, 4 arkadaşa düşen miktardır. 12 mil, 3 saate karşılık gelen miktardır.

Doğal Sayı Bölenleri. Toplam miktarın bir kesir ve bölenin bir doğal sayı olması gerçekte büyük bir sıçrama değildir. Bu problemler yine paylaşma durumları olarak düşünülebilir. Bununla birlikte, bu sorular üzerinde çalışırken şu soruyu cevapladığınızı farkediniz: "Bütün ne kadardır?" veya "Bir tanesine ne kadar karşılık gelir?"

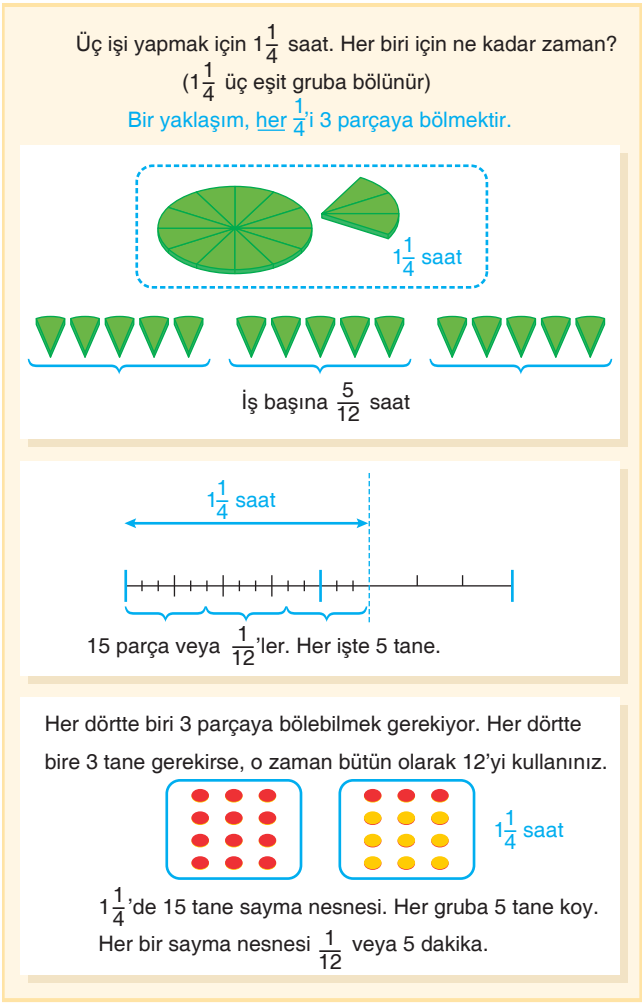
Cassie'nin doğum günü paketlerine dört tane fiyonk yapması için $5\frac{1}{3}$ yard kurdelası var. Her bir fiyonk için eşit uzunlukta kurdela kullanmak istiyorsa her biri için ne kadar kurdela kullanmalıdır?

$5\frac{1}{3}$ kesirsel parçalar olarak düşünüldüğü zaman paylaşılacak 16 tane 1/3 var veya her kurdela için 4 tane 1/3. Alternatif olarak, öncelikle her bir fiyonka 1 yard pay edilmesi düşünülebilir ve bu durumda $1\frac{1}{3}$ yard artar. Bu 4/3 daha sonra her bir fiyonka bir tane olacak şekilde paylaştırılır ve toplamda her bir fiyonka $1\frac{1}{3}$ yard düşer. Birim parçalar (1/3'likler) bölme yapmak için daha fazla parçalara ayırmaya gerek bırakmadı. Aşağıdaki problemde parçaların daha küçük parçalara ayrılması gerekmektedir.

Mark'ın üç tane günlük ev işini bitirmesi için $1\frac{1}{4}$ saati var. Eğer zamanını eşit olarak bölerse, her bir işe kaç saat ayırabilir?

Sorunun "Bir iş için kaç saat?" olduğuna dikkat ediniz. Mark'ın sahip olduğu zaman olan bir saatin $\frac{5}{4}$'ü üç parçaya düzenli bir şekilde bölünmüyor. Dolayısıyla parçaların birazı ya da tamamı parçalanmalıdır. Şekil 16.14 bunu çözmek için üç farklı model gösteriyor. Her bir durumda ¼'lerin tamamı tekrar üç eşit parçaya bölünerek $\frac{1}{12}$'ler ortaya çıkıyor. Toplam 15 tane $\frac{1}{12}$ veya her bir iş için $\frac{5}{12}$ saat var. (Bu cevabı dakika kullanılarak yapılan çözümle kontrol edin:1 $\frac{1}{4}$ saat 75 dakikadır ve 3 iş arasında bölünürse her bir iş için 25'er dakika düşmüş olur).

Kesirsel Bölenler. Bölen bir kesir olduğunda paylaşma kavramının işlemez hâle geldiği görünüyor. Bununla birlikte, parçalama ve oran problemleri için temel sorunun "Bir tanesi ne kadardır?" olduğunu akılda tutmak son derece önemlidir. İlginç şekilde, bu tam olarak Bölüm 15'deki parçalar ve bütün etkinliklerindeki ikinci tip sorudur: Parça verildiğinde bütünü bulunuz (bir tanesi ne kadardır?). Örneğin, 18 sayma nesnesi grubun 2 ¼ 'ini temsil ediyorsa, bir bütün grup ne kadardır? (Daha fazla örnek için Şekil 15.13'e bakınız.) Bu problemleri çözerken ilk görev dörtte birdeki sayıyı bulmak ve daha sonra 4/4 veya *biri* bulmak için 4 ile çarpmaktır. Bakalım aynı süreci aşağıdaki problemde görebilecek miyiz?



Şekil 16.14 Bölenin doğal sayı olduğu parçalara ayırma türündeki bölmenin üç modeli.

Elizabeth \$2.50'a $3\frac{1}{3}$ pound domates aldı. Elizabeth pound başına ne kadar ödedi?

Durup Düşün!

Verilen miktar olan \$2.50, $3\frac{1}{3}$ pound arasında dağıtılacak. 1 pounda ne kadar verilecek? Bu problemi, parçalar ve bütün problemini çözeceğiniz yöntemin aynısı ile çözünüz. Bunu şimdi okumaya devam etmeden deneyiniz.

$3\frac{1}{3}$'de 10 tane 1/3 vardır. \$2.50 10/3'ü karşıladığından (veya arasında dağıtıldığından), birinci basamak parçalara ayırmak ve 1/3'in ne kadar olduğunu bulmaktır. Eğer 10/3, \$2.50 ise o zaman 1/3, \$0.25'tir. Birin içinde 3 tane 1/3 vardır. Dolayısıyla, 75 sent 1 poundu karşılamalıdır veya pound başına 75 sent düşer.

Aşağıdaki problemleri benzer bir strateji kullanarak deneyiniz.

Dan $\frac{3}{4}$ poundluk bir kutu kahvaltılık gevrek için $2.40 ödedi. Bu gevreğin fiyatı, pound başına ne kadardır?

Aidan eğer sabah egzersizinde gerçekten hızlı yürürse $\frac{3}{4}$ saatte $2\frac{1}{2}$ mil katedebildiğini anladı. Aidan saatte kaç mil hızla yürüdüğünü merak ediyor.

Her iki problemde de önce ¼'in miktarını (parçalara ayırma) ve daha sonra bir bütünün miktarını (tekrarlama) bulunuz. Aidan'ın yürüme problemi biraz daha zordur, çünkü $2\frac{1}{2}$ mil veya 5 tane yarım mil, üç parçaya düzgünce bölünmez. Eğer bu sizin için zor idiyse, her bir yarımı üç parçaya bölmeyi deneyiniz. Yardımcı olacağını düşünüyorsanız resimler çiziniz veya modeller kullanınız.

Bölmenin Ölçme Yorumu

Ölçme yorumu tekrarlı çıkarma veya eş gruplar olarak da adlandırılır (NCTM, 2006a). Bu durumda eş bir grup, toplamdan tekrar tekrar çıkartılır. Örneğin, *13 kuart[6] limonatanız varsa 3 kuart alan mataralardan kaç tane doldurabilirsiniz?* Bunun bir paylaşma durumundan ziyade eş çıkarma durumu olduğuna dikkat ediniz.

Bu, bölmenin ders kitaplarında neredeyse her zaman görünen kavramı olduğu ve kesirleri bölmek için bir algoritmanın gelişiminde kullanılacağı için öğrencilerin bu fikri bağlamsal durumlarda incelemesi önemlidir.

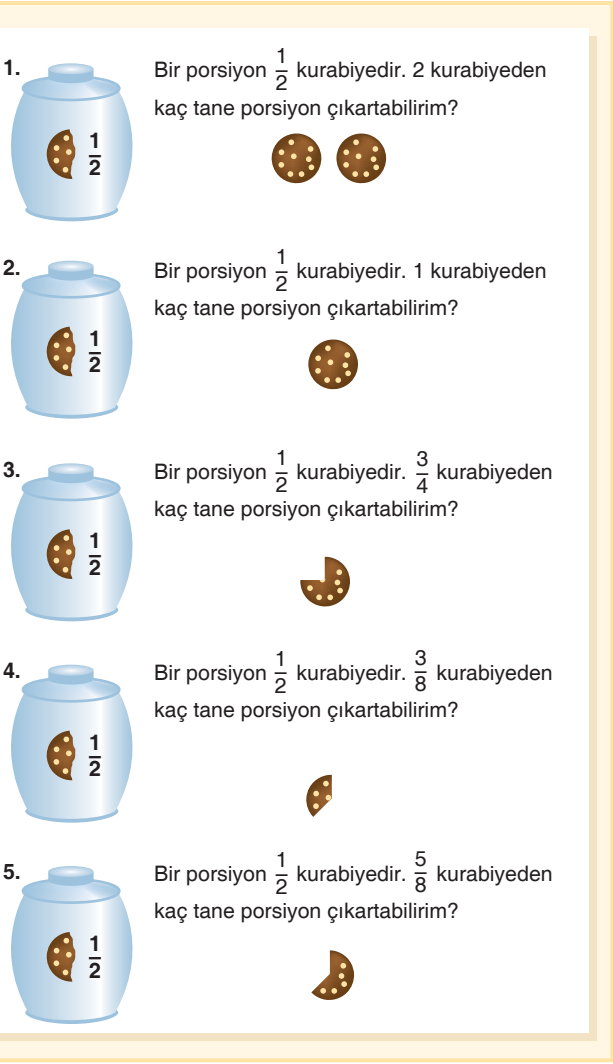
Öğrenciler aşağıdaki gibi problemleri kolaylıkla anlarlar:

Bir doğum günü partisine gidiyorsun. Ben ve Jerry'nin dondurma fabrikasından 6 pint[7] dondurma ısmarlıyorsun. Her bir misafire $\frac{3}{4}$ pint dondurma ikram edersen, kaç tane misafire dondurma servis edilebilirsin? (Schifter, Bastable, & Russell, 1999b, s. 120)

Öğrenciler genellikle 4'e bölünmüş altı öğenin resmini çizerler ve kaç tane $\frac{3}{4}$'lük porsiyonun bulunabileceğini sayarlar. Zorluk, bunu $6 \div \frac{3}{4}$ olarak görmektir ve bu kısım sizin tarafınızdan biraz doğrudan yönlendirme gerektirecektir. Bir fikir, bu problemi doğal sayıları içeren bir problemle kıyaslamak (6 pint, misafir başına 2) ve karşılaştırma yapmaktır.

Gregg ve Gregg (2007) bir ölçme bağlamı olan porsiyonlar üzerinden kesirlerde bölme kavramını geliştirmek için bir yöntem ortaya koydular. Zorlukları artan etkinliklerde problemler sorarlar ve parçaların büyüklükleri ile ilgili görseller dâhil ederler. Şekil 16.15 bu etkinliklerin bir alt kümesini içerir.

Şeklin gösterdiği gibi çok yavaşça daha karmaşık örneklere doğru ilerlemek öğrencilerin bölme işleminin anlaşılmasını inşa etmek için doğal sayılarla ilgili kavramlarını kullanmalarına olanak sağlayacaktır. Zamanla öğrenciler



Şekil 16.15 Bölme kavramını geliştirmek için "Kaç porsiyon?" ölçme yorumunu kullanan etkinlikler.
Kaynak: Gregg, J., & Gregg, D. W. (2007). "Measurement and Fair-Sharing Models for Dividing Fractions." *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(9), p. 491. Reprinted with permission. Copyright © 2008 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.

aşağıdaki örnekteki gibi bağlamları ve içerdikleri sayılar daha karmaşık olan problemleri üstlenebileceklerdir.

Çiftçi Brown $2\frac{1}{4}$ galon[8] sıvı gübre konsantresinin olduğunu buldu. Bir depo karışık gübre yapmak için $\frac{3}{4}$ galon konsantre gerekiyor. Çiftçi Brown kaç depo dolusu karışım yapabilir?

Bu problemi kendiniz çözmeye çalışınız. Ne yaptığınızı anlatmak için istediğiniz model veya çizimi kullanınız. *9 tane $\frac{1}{4}$'den oluşan bir grup içinde kaç tane $\frac{3}{4}$'lük grup vardır?* sorusunu çözmeye çalıştığınıza dikkat ediniz. Cevabınız 3 depo dolusu olmalıdır ($\frac{3}{4}$ değil).

[6] Ç.N. Kuart: Bir galonun dörtte biri olan sıvı ölçü birimi
[7] Ç.N. Pint: Bir galonun sekizde biri olan sıvı ölçü birimi
[8] Ç.N. Galon: Sıvı ölçü birimi. 1 galon = 3.785 litre.

Doğal Sayı Olmayan Cevaplar

Eğer Linda'nın her biri $1\frac{1}{6}$ yard malzeme gerektiren elbiseler yapmak için 5 yard malzemesi olsaydı, Linda sadece dört elbise yapabilirdi çünkü elbisenin bir parçası bir anlam ifade etmez. Fakat Çiftçi Brown'un 4 galon konsantre ile başladığını varsayalım. Beş depo karışım yaptıktan sonra, $\frac{15}{4}$ veya $3\frac{3}{4}$ galon konsantre kullanmış olacaktır. Kalan $\frac{1}{4}$ galonla deponun bir *kısmı* kadar karışım yapabilir. Bir bütünü yapmak 3 tane ¼ galon gerektirdiği ve kendisinin $\frac{1}{4}$ gallonu olduğu için Çiftçi Brown tankın $\frac{1}{3}$'lik kısmı kadar karışım yapabilir.

Denemek için bir başka problem:

John bir avlu inşa ediyor. Avlunun her bir bölmesi için $\frac{1}{3}$ yard³ beton gerekiyor. Beton kamyonu $2\frac{1}{2}$ yard³ beton taşıyor. Eğer sonuçta bir tam bölme için yeterli beton yoksa John bir ayırıcı koyup kısmi bir avlu bölmesi yapabilir. Kamyondaki betonla John kaç tane avlu bölmesi yapabilir?

Durup Düşün!

Bu problemi önce size anlamlı gelen bir yolla çözmeyi denemelisiniz. Durun ve bunu şimdi yapın.

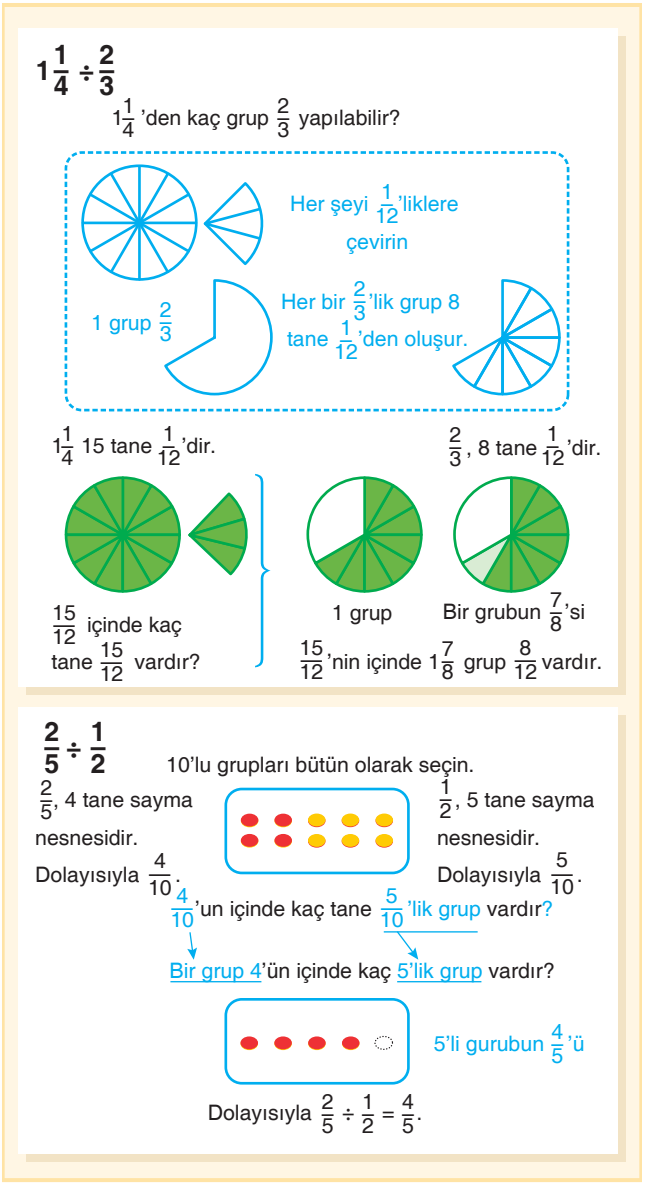
Bunu yapmanın bir yolu $2\frac{1}{2}$'in içinde kaç tane $\frac{1}{3}$ olduğunu saymaktır.



Burada, sarı bütünden 3 avlu bölmesi, turuncu bütünden 3 tane daha ve sonra 1 tane daha tam bir avlu bölmesi ile bir başka avlu bölmesi için ihtiyacınız olanın $\frac{1}{2}$'ini elde ettiğinizi görebiliyorsunuz. Dolayısıyla cevap $7\frac{1}{2}$. Öğrenciler $\frac{1}{3}$ cinsinden ölçtükleri için "kalanı" $\frac{1}{3}$ olarak yazmak isteyeceklerdir. Ama soru kaç tane bölme yapılabilir ve cevap $7\frac{1}{2}$.

Ortak paydalar çarpmada işleyecek mi? Görelim. Biraz önce çözdüğünüz $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$problemi $2\frac{3}{6} \div \frac{2}{6}$ haline gelebilir veya $\frac{15}{6} \div \frac{2}{6}$ olabilirdi. Soru, *15 tane $\frac{1}{6}$'den oluşan bir grup içinde kaç tane $\frac{2}{6}$'lik grup vardır?* haline gelir. Ya da, *15'in içinde kaç tane 2 vardır?* $7\frac{1}{2}$. Bu geleneksel algoritma kadar etkilidir ve bu yolla yapmak öğrencilere daha anlamlı gelebilir.

Şekil 16.16. aynı bu yöntemle ve her biri farklı modelle çözülmüş iki bölme problemi göstermektedir. Yani, bölünen veya verilen miktar ve bölen aynı tip kesir parçaları cinsinden ifade edilmiş. Bu, bir doğal sayı bölme problemi ile sonuçlanır (beton probleminde sayıları $\frac{1}{12}$'liklere çevirdikten sonra cevap $15 \div 8$ ile aynı olur). Sınıfta öğrenciler bunun



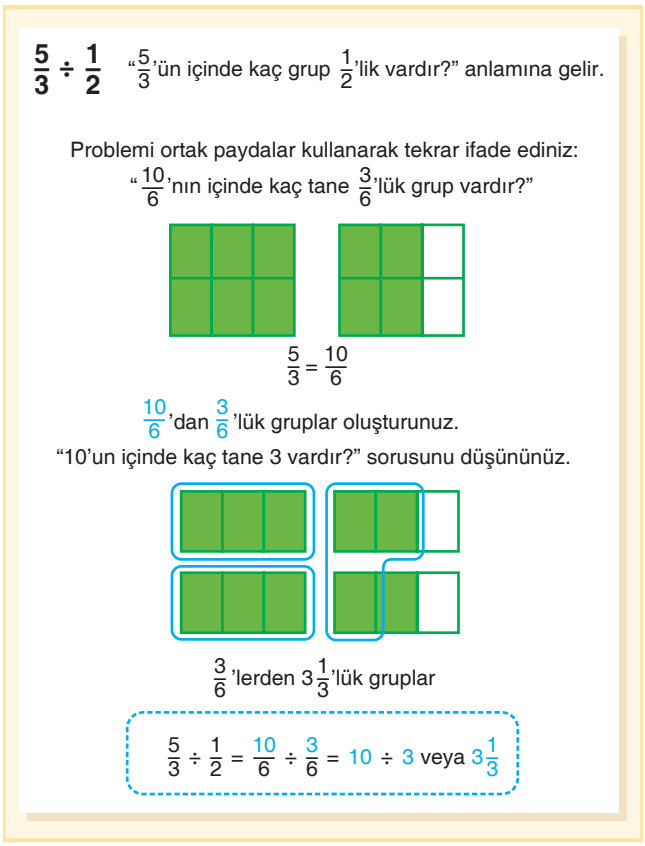
Şekil 16.16 Kesirlerde bölme problemlerini çözmek için ortak paydalar kullanılabilir.

gibi problemleri kendi yöntemlerini kullanarak çözdükten sonra bu ortak birim yaklaşımını önerin.

Algoritmalar Geliştirme

Kesirlerde bölme için iki farklı algoritma vardır. Her iki algoritmayı öğretme yöntemleri burada tartışılmıştır.

Ortak Payda Algoritması. Ortak payda algoritması bölmenin ölçme veya tekrar eden çıkarma kavramına dayanır. $\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$ problemini düşününüz. Şekil 16.17'de gösterildiği gibi her bir sayı aynı kesir parçaları cinsinden ifade edildiği zaman cevap, $10 \div 3$ doğal sayı probleminin cevabı ile tamamen aynıdır. Kesir parçasının ismi (payda) artık önemli



Şekil 16.17 Kesirlerde bölme için ortak payda yöntemine yönelik modeller.

değildir ve problem payları bölme problemidir. Dolayısıyla, sonuçta oluşan algoritma şöyledir: Kesirleri bölmek için önce ortak payda elde ediniz ve sonra payları bölünüz. Örneğin, $\frac{5}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{20}{12} \div \frac{3}{12} = 20 \div 3 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

$1\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ işlemini ortak payda yaklaşımını kullanarak modellemek için dairesel kesir parçaları, kesir çubukları ve daha sonra sayma nesne setleri kullanmayı deneyiniz.

Ters Çevir Çarp Algoritması. Böleni ters çevirip çarpmak Anaokulu-8.sınıf müfredatının en az anlaşılan prosedürlerinden biri olabilir (ters çevirip çarpmanın neden işlediğini biliyor musunuz?). İlginç olarak, Çinli ve ABD'li öğretmenler ile ilgili çok tartışılan bir çalışmada Liping Ma (1999), Çinli öğretmenlerin çoğunun sadece bu algoritmayı kullanıp öğretmediklerini aynı zamanda bu algoritmanın neden işlediğini anladıklarını buldu. ABD'li öğretmenlerin kesirlerde bölme anlayışlarında son derece yetersiz oldukları bulundu.

Bir dizi etkinlik vermek ve öğrencilerden cevapları nasıl bulduklarına dair örüntüleri aramalarını istemek onların algoritmaları keşfetmelerine yardım edebilir. Örneğin, aşağıdaki, bölenin birim kesir olduğu ilk grubu düşününüz. Her bir denkleme eşlik eden ilgili soruyu sormayı hatırlayınız. Bağlam yemek porsiyonları olabilir.

$3 \div \frac{1}{2}$ = (3 kabın içinde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik porsiyon vardır?)

$5 \div \frac{1}{4}$ = (5 kabın içinde kaç tane $\frac{1}{4}$'lik porsiyon vardır?)

$3\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ = ($3\frac{3}{4}$ kabın içinde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik porsiyon vardır?)

$6 \div \frac{1}{3}$ = (6 kabın içinde kaç tane $\frac{1}{3}$'lik porsiyon vardır?)

$8 \div \frac{1}{5}$ = (8 kabın içinde kaç tane $\frac{1}{5}$'lik porsiyon vardır?)

Bu problemlere (ve öğrencilerle çalışıyor iseniz daha fazlasına) bakarken ve bir örüntü ararken, öğrenciler ikinci kesrin paydasıyla çarptıklarını fark edeceklerdir. Örneğin, son örnekte bir öğrenci "Her bütün kap için 5 elde ediyorsunuz, dolayısıyla 5 × 8, 40'tır." diyebilir.

Sonra benzer ama ikinci kesrin birim kesir olmadığı problemler alın.

$5 \div \frac{3}{4} =$

$6 \div \frac{2}{3} =$

$8 \div \frac{2}{5} =$

Öğrencilerden bu cevapları ilk grupta onlara karşılık gelen problemlerle karşılaştırmalarını isteyiniz. 8'in içinde 40 tane $\frac{1}{5}$ varsa, $\frac{1}{5}$'likleri çiftler halinde ($\frac{2}{5}$'likler) grupladığınızda yarısı kadar yani 20 tane elde edeceğinize dikkat ediniz. Porsiyon olarak ifade edersek, eğer porsiyonlar iki katı büyüklüğündeyse, yarısı kadar sayıda porsiyon elde edersiniz. Benzer şekilde, eğer kesir $\frac{3}{4}$ ise, kaç tane $\frac{1}{4}$ olduğunu bulduktan sonra 3'erli gruplar oluşturacaksınız. Bu, porsiyonların sayısının $\frac{1}{3}$'ini elde edeceğiniz anlamına geliyor. Bunun da 3 ile bölmek zorunda olduğunuz anlamına geldiğini görebilirsiniz.

Bu verilen örnekler ölçme idi çünkü grubun (porsiyonun) büyüklüğü biliniyordu ama grupların sayısı bilinmiyordu. Parçalara ayırma veya paylaştırmayı kullanarak, örnekler standart algoritmayı güzel bir şekilde anlatır. Aşağıdaki örneği düşününüz:

$1\frac{1}{2}$ portakalınız var ve bu da bir yetişkin porsiyonunun $\frac{3}{5}$'ü oluyor. Kaç tane portakal (ve portakal parçaları) 1 yetişkin porsiyonu yapar? (Kribs-Zaleta, 2008)

İlk önce $\frac{1}{5}$'in, yani sahip olduğunuz portakalların üçte birinin veya bir portakalın $\frac{1}{2}$'inin ne olacağını bulmanız gerektiğini düşünüyor olabilirsiniz (paya böldüğünüze dikkat ediniz). Daha sonra, bütün porsiyonu, yani bir yetişkin porsiyonundaki $2\frac{1}{2}$ portakalı elde etmek için $\frac{1}{2}$'i 5 (payda) ile çarparsınız.

Gerek ölçme gerekse parçalara ayırma yorumunda payda, sizi kaç tane $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ veya $\frac{1}{6}$'iniz olduğunu bulmaya götürür ve pay size porsiyonun büyüklüğünü söyler, dolayısıyla siz de porsiyonda ne kadar olduğuna göre gruplama yaparsınız. Bu yüzden süreç payda ile çarp ve paya böl manasına gelir. Belli bir noktada biri şöyle düşünmüş: eğer sadece kesri ters çevirirlerse daha dolambaçsız olacak! (yani, yu-

karıdakiyle çarp ve aşağıdakine böl). Ve bu da "ters çevir ve çarp"'ı öğrenmiş olmamızın nedenidir.



NLVM'nin websitesi (http: //nlvm.usu.edu/en/nav/NAV/vlibrary.html) kesirlerle ilgili güzel bir bilgisayar uygulaması koleksiyonuna sahiptir. Sayı Doğrusu Çubukları – Kesirler, kullanıcının sayı doğrusu üzerine herhangi bir kesirsel uzunluğu yerleştirmesine olanak sağlıyor. Sayı doğrusu $\frac{1}{2}$'den $\frac{1}{15}$'e kadar artış aralığına sahip olacak şekilde uyarlanabiliyor ama kullanıcının karar vermesi gerekiyor. Örneğin, eğer $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{3}$ çubukları uç uca eklenirse artış aralıkları $\frac{1}{12}$ olana kadar cevap bilgisayar uygulamasında okunamaz.

Kesirlerin Dikdörtgen Çarpımı (yine NLVM'de) 2 × 2'ye kadar herhangi iki kesrin çarpımı için alan modelini gösteriyor. Bu bilgisayar uygulaması, modeli denklemle ilişkilendirmede çok iyi bir iş yapsa da düşünme kullanıcıya bağlı olacaktır. ◆

Bölüm 16 Üzerine Düşünelim

Yazarak Öğrenelim!

1. Öğrencilere kesir hesaplamalarını tahmin etmeleri ne zaman öğretilmelidir? Kesir hesaplamalarında tahmin etmeyi öğretmek neden önemlidir?
2. Bir öğrenci $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ işlemini yapar ve $\frac{6}{8}$ elde eder. Bu öğrenciye bunun yanlış olduğunu anlaması için nasıl yardım edersiniz ve onu, bunu doğru yapmaya nasıl yeniden yönlendirirsiniz?
3. $3\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}$ problemi için bir "ayırma/çıkarma" ve bir de "karşılaştırma" durumu olan bağlamsal problem düşününüz.
4. Aşağıdakilerin her biri için en az bir zihinsel yöntem (tahmin etme veya zihinsel hesaplama) açıklayınız:

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{2} \qquad 40\text{'ın } 1\frac{1}{8}\text{'i}$$

5. Kesrin bölen olduğu bir sözel problem oluşturunuz. Probleminiz ölçme problemi mi yoksa parçalara ayırma problemi midir? Diğer tip kesirleri (ölçme veya parçalara ayırma) kullanarak ikinci bir sözel problem oluşturunuz.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Müfredatınızın gerektirdiği bir konu olan kesirlerle hesaplamayı altıncı veya yedinci sınıfta öğrettiğinizi hayal edin. Çabucak görüyorsunuz ki öğrencilerinizin kesirleri anlamaları çok zayıftır. Ders kitabınız başlıca algoritmaları hedefliyor. Bazı öğretmenler kesir kavramlarını tekrar öğretmek için zaman olmadığını öne sürüyor. Diğerleri, pay ve paydanın ve denk kesirlerin anlamlarını öğretmenin gerekli olduğunu aksi halde bütün hesaplamaların anlamsız kurallar olacağını savunuyorlar. Öğretiminizi nasıl planlayacaksınız? Yaklaşımınızı gerekçelendiriniz.
2. Aşağıdaki bölmelerin her birini ölçme yaklaşımı kullanarak açıklamak için resimler çiziniz:

$$\frac{2}{4} \div \frac{1}{4} \qquad 2\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{4} \div \frac{1}{8} \qquad 2\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$$

İkinci ve dördüncü örneklerde cevap bir doğal sayı değildir. Cevabın kesir kısmını açıklamanıza yardım etmesi için, neden $13 \div 5 = 2\frac{3}{5}$ olduğunu yine ölçme yaklaşımını kullanarak açıklamak üzere bir sayma nesnesi seti kullanınız. (Yani, 13'lük bir grup içinde 5'lik gruplardan kaç tane vardır?) Aynı problemleri kullanınız ve bölme için bir ortak payda algoritması açıklayınız. Aynı mantığı neden $\frac{13}{79} \div \frac{5}{79} = 13 \div 5 = \frac{13}{5}$ olduğunu açıklamak için kullanınız.
3. Şimdi hem kesir hem de ondalık sayı formunda hesaplamalar yapabilen hesap makineleri mevcut. Bunlardan bazıları otomatik olarak cevabı en sade haliyle veriyor. Böyle bir hesap makinesine ulaşımınız varsa, bunun kesirlerin, özellikle kesirlerde hesaplamanın öğretilmesinde nasıl kullanılabileceğini tartışınız. Bu tür hesap makineleri sıradan bir şey haline gelirse kesirlerle hesaplamayı öğretmeye devam etmeli miyiz?

Bölüm 16 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Alice's Adventures in Wonderland

Carroll, 1865/1982

This well-known children's story needs no introduction. Because Alice shrinks in the story, there is an opportunity to explore multiplication by fractions. S. B. Taber (2007) describes in detail how she used this story to engage students in understanding the meaning of multiplication of fractions. She begins by asking if Alice was originally 54" tall, but was shrunk to $\frac{1}{9}$ of her height, how tall would she be? Later, what if she was restored, but to only $\frac{5}{6}$ her original height? The students were then asked to write their own Alice explanations to multiplication equations.

The Man Who Made Parks *Wishinsky, 1999*

This nonfiction novel explains the remarkable story of Frederick Olmsted, who decided he was going to design a park for New York City—what became Central Park. Creating a park design, students can be given fractional amounts for what needs to be included in the park—for example, $\frac{2}{5}$ gardens, $\frac{1}{10}$ playgrounds, $\frac{1}{2}$ natural habitat (streams and forest), and the rest special features (like a baseball arena). Students can build the plan for their park on a rectangular grid. To include multiplication of fractions include guidelines such as that $\frac{3}{4}$ of the park is natural habitat, with $\frac{1}{3}$ of that to be wooded and $\frac{1}{6}$ to be water features, and so on.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490–496.

This article provides illustrations and student work to show how to teach addition using the fraction circle. Essential considerations of effective instruction are emphasized.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490–496.

These authors provide specific series of tasks to develop the concept of division of fractions—a must read for a teacher needing more experiences exploring division or trying to plan a good sequence for her students.

Huinker, D. (1998). Letting fraction algorithms emerge through problem solving. In L. J. Morrow (Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 170–182). Reston, VA: NCTM.

Huinker takes the idea of students inventing algorithms as described for whole numbers in Chapter 12 and applies it to problems involving fractions. With examples of children's work, this article makes a good case for avoiding rules and letting students work with ideas that make sense.

Imm, K. L., Stylianou, D. A., & Chae, N. (2008). Student representations at the center: Promoting classroom equity. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 458–463.

These authors explain how to use a park context to teach multiplication of fractions. Equity and a culture for learning are at the center of their discussion of the lessons.

Perlwitz, M. D. (2005). Dividing fractions: Reconciling self-generated solutions with algorithmic answers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(6), 278–282.

On the surface, this article is about dealing with the remainder in fraction division. The discussion gets at the importance of understanding algorithms, wrestling with the minimal knowledge that many teachers bring to this subject, and the value of classroom discourse.

Online Kaynaklar

Diffy

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_326_g_3_t_1.html

The goal in a Diffy puzzle is to find differences between the numbers on the corners of the square, working to a desired difference in the center. When working with fractions, the difference of two fractions is a fraction that can be written in many different ways and students must recognize equivalent forms.

Fraction Bars

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_203_g_2_t_1.html

Much like Cuisenaire rods, this applet places bars over a number line on which the step size can be adjusted, providing a flexible model that can be used for all four operations.

Fractions—Adding

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_106_g_2_t_1.html

Two fractions and an area model for each are given. The user must find a common denominator to rename and add the fractions.

Bölüm 17

Ondalık Sayı ve Yüzde Kavramlarının Gelişimi

Amerikan öğretim programı, *Öğretim Programı Odak Noktalar*'ının tavsiyelerini takip etmekte (NCTM, 2006), ondalık sayılara 4. sınıf, ondalık sayılarla hesaplama çalışmalarının çoğuna 5. sınıf düzeyinde yer verirken, 6 ve 7. sınıf düzeylerinde ise bu konuları tekrarlayarak ele almaktadır. İlk önce kesirlerin sonra da ondalık sayıların sunumu şeklindeki bir sıralama, tartışmalı olsa bile muhtemelen en iyi yaklaşımdır. Fakat ne yazık ki, kesir ve ondalık sayı konuları genellikle birbirlerinden ayrı bir şekilde geliştirilmektedir. Kesir kavramının, ondalık sayılarla ilişkilendirilmesi uygulama açısından olduğu kadar pedagojik açıdan da son derece yararlı olabilir. Bu bölümün çoğu, bu bağlantı üzerine odaklanmaktadır.

Ana Fikirler

1. Ondalık sayılar, kesirleri basit bir şekilde yazmanın başka bir yoludur. Her iki gösterim de değerlidir. İki sembol sisteminin nasıl ilişkilendirildiğinin anlaşılmasıyla maksimum esneklik kazanılır.
2. On-tabanlı basamak değer sistemi, iki yönde sonsuz genişler: Büyük değerler kadar küçük değerler için de. Herhangi iki basamak değeri arasında onda-bir oranı aynı kalır.
3. Ondalık nokta, birimin yerini göstermek için geliştirilmiş bir kuraldır. Ondalık noktanın solundaki yer, birler veya tekler olarak sayılan birimdir.
4. Yüzdeler, basitçe yüzde birlerdir ve hem kesirleri hem de ondalık sayıları yazmanın üçüncü bir yoludur.
5. Ondalık sayılarla toplama ve çıkarma, yer/pozisyon değerlerindeki gibi sayıların çıkarılması ve toplanmasına ilişkin temel kavramlara dayanmaktadır- doğal sayıların basit bir genişlemesi.
6. İki sayının çarpımı ve bölümü, ondalık noktanın yerine bakılmaksızın aynı sayıları oluşturacaktır. Bir sonuç olarak, birçok pratik amaç için ondalık sayıların çarpımı ve bölümüne yönelik yeni kurallar geliştirmenin bir mantığı yoktur. Bunun yerine hesaplamalar, tahmini olarak yerleştirilen ondalıklı doğal sayılarmış gibi yapılabilir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Bu bölümde ondalık sayılar için en önemli bağlantılar, ondalık sayılar ve kesir kavramları arasında kurularak inşa edilecektir.

- **Kesir Kavramları** (Bölüm 15): Hem ondalık sayı hem de kesir sembolleri, aynı fikirleri temsil eder- rasyonel sayılar.
- **Orantısal Düşünme** (Bölüm 18): Yüzdeler, bir parça-bütün oranıdır ve orantı kavramlarına genişletilebilir.
- **Ölçme** (Bölüm 19): Metrik sistem, on-tabanlı sistemden sonra modellenir ve tüm metrik ölçüler, kesirlerden ziyade ondalık sayılarla ifade edilir. Ondalık sistem anlayışının verilmesiyle bir metrik ölçüden başka bir metrik ölçüye dönüşüm oldukça basittir.
- **Gerçek Sayı Sistemi** (Bölüm 23): Ondalık sayı gösterimi, rasyonel sayıların yoğunluğunu anlama, özelliklerini belirleme ve irrasyonel sayılara yaklaşım için yardımcı olur.

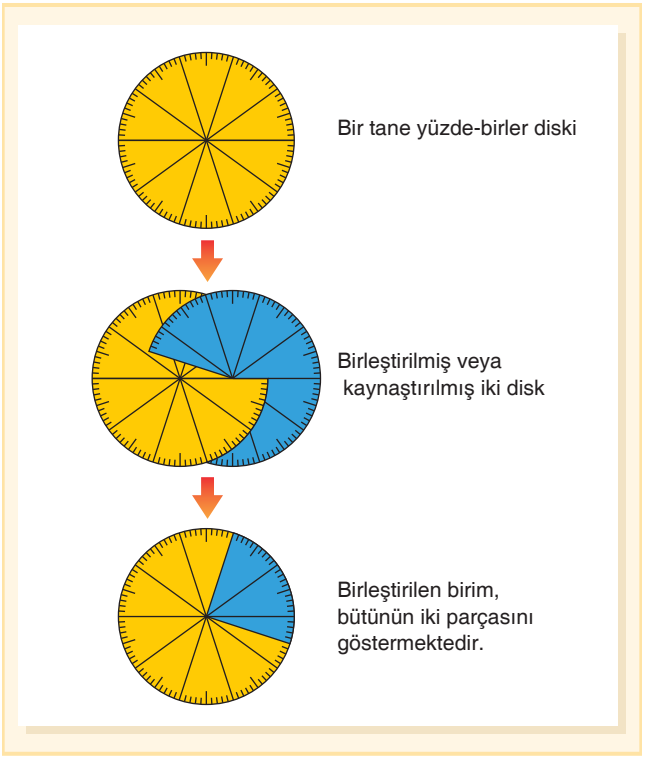
Kesirler ve Ondalık Sayıları İlişkilendirme

Dünyada, neredeyse her şey ölçülebilir. İnsanların, metrik ölçüleri okumak, uzaklıkları hesaplamak, olimpiyatlarda kazanan ve kaybedenleri saniyenin yüzde-biri ile belirlemek ve vurucuların (ve taraftarların) performanslarının puanların binde-biri ile değerlendirildiği beyzbol oyunundaki gibi spor istatistiklerini anlamak gibi çeşitli gereksinimler için ondalık sayıları yorumlayabilmeye ihtiyaçları olabilir. Ondalık sayılar; hemşireler ve eczacılardan, kesinlik düzeyinin toplumun güvenliğini etkilediği uçakların yapımında çalışan işçilere kadar birçok meslek için önemlidir.

Çocuklar, ondalık sayıları anlama noktasında kesirlere göre daha büyük zorluklara sahip olduğu için (Martinie, 2007), ondalık sayıların kavramsal olarak anlaşılması ve kesirlerle bağlantılarının da dikkatli bir şekilde geliştirilmesi gerekir.

3.75 ve $3\frac{3}{4}$ sembolleri, aynı niceliği temsil eder, fakat yüzeysel bir bakışla bile ikisi oldukça farklı görünmektedir. Özellikle çocuklar için, kesirlerin dünyası ile ondalık sayıların dünyası çok farklıdır. Yetişkinler bile kesirlere, kümeler veya bölgeler (herhangi bir şeyin dörtte- üçü) olarak bakmaya meyilli iken ondalık sayıları, daha çok sayılar gibi ele alır. Çocuklara, 0.75 ile $\frac{3}{4}$'ün aynı olduğu söylendiği zaman, ondalık kesirlerde payda gizlendiği için bu durum bir karışıklığa neden olabilir. Sayıları yazmanın farklı yolları icat edilse de, sayıların kendileri farklı değildir. Kesir ve ondalık sayıların gösterimini öğretmenin önemli bir amacı, öğrencilerin her iki sistemin aynı kavramları temsil ettiğini fark etmelerine yardımcı olmaktır.

Öğrencilerin, kesirler ve ondalık sayılar arasındaki bağlantıyı görmelerine yardım etmek için en az üç yol vardır. Birincisi, onda-birler, yüzde-birler ve binde-birler gibi ondalık sayılarla kolayca temsil edilen rasyonel sayıları keşfetmek için bilinen kesir kavramlarını ve modellerini kullanabiliriz. İkincisi, on-tabanlı sistemin, büyük sayılar kadar 1'den küçük sayıları da içermesi için nasıl genişletebileceği konusunda öğrencilere yardımcı olabiliriz. Üçüncüsü, öğrencilerin, kesirler ve ondalık sayılar arasında anlamlı geçişler yapmaları için modeller kullanmalarına yardım edebiliriz. Bu üç bileşen, sırasıyla tartışılmıştır.



Şekil 17.1. Rasyonel sayı çarkı. Örneğin, mavi kaplama üzerinde $\frac{25}{100}$'ü göstermek için çarkı (aynı zamanda çemberin $\frac{1}{4}$'ü) çeviriniz. (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 28).

On-Tabanlı Kesirler

Paydası 10, 100, 1000 vb. olan kesirler, bu bölümde *on- tabanlı kesirler* olarak adlandırılacaktır. Bu basit ve uygun bir nitelendirmedir ve literatürde bir yaygınlığı bulunmamaktadır. $\frac{7}{10}$ veya $\frac{63}{100}$ gibi kesirler, on-tabanlı kesir örneklerdir.

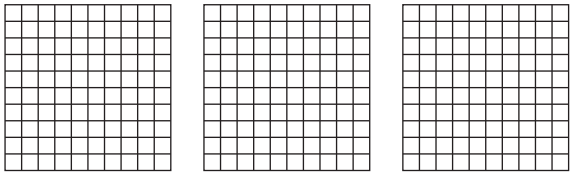
On-Tabanlı Kesir Modelleri. Kesirler için yaygın manipülatif modellerin çoğu, on- tabanlı kesirleri betimleme amacı için biraz sınırlıdır. Genellikle, bilinen kesir modelleri yüzde-bir ve binde-birleri gösteremez. Üçte-bir ve dörtte-birler gibi kesirler için kullanılan benzer kavramsal yaklaşımları kullanarak, bu kesirler için modeller üretmek önemlidir.

Çok faydalı iki bölge modeli, on-tabanlı kesirleri modellemek için kullanılabilir. Birincisi, onda-bir ve yüzde-birleri modellemek için, Şekil 17.1'de gösterildiği gibi dairesel diskler bir karta çizilebilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 28). Her bir disk, kenar boyunca 100 eşit aralık ile işaretlenir ve bir yarıçapı boyunca kesilir. Farklı renkteki iki disk, şekilde gösterildiği gibi birlikte kaydırılır ve 1'den küçük herhangi bir kesri modellemek için kullanılabilir. Bu rasyonel sayı çarkı üzerinde modellenen kesirler, kenardaki aralıklara dikkat edilerek on-tabanlı kesirler olarak okunabilir, fakat hâlâ geleneksel daire modelini çağrıştırır.

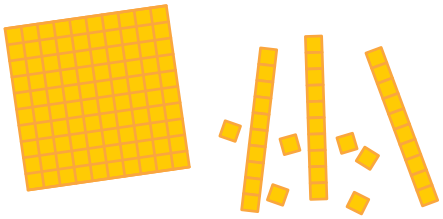
Fakat, on-tabanlı kesirler için en yaygın bölgesel model, 10 × 10'luk karedir (Bkz. Şekil 17.2 ve Çalışma Yaprak Seti 27). Önemli bir değişiklik, on-tabanlı basamak değeri şeritlerini ve karelerini kullanmaktır. Bir kesir modeli olarak, tam sayılar için yüzlük model olarak kullanılan 10 cm kenar uzunluklu kare bütün veya 1 olarak alınmıştır. Buna göre; her bir şerit, 1 onda-birlik ve her bir küçük kare, 1 yüzde-birliktir. Çalışma Yaprak Seti 29, 10.000 küçük kareye bölünmüş büyük bir kare içermektedir. Bir asetat üzerinde gösterildiği zaman, tek bir kare veya on-binde birlikler kolayca belirlenebilir ve bir kalemle taranabilir.

En iyi uzunluk modellerinden biri, cetveldir. Her desimetre, bütün çubuğun onda-biri, her santimetre, bütün çubuğun yüzde-biri ve her milimetre de bütün çubuğun binde-biridir. 100 alt parçaya ayrılmış herhangi bir sayı doğrusu da yüzde-birler için kullanışlı bir modeldir.

Boş sayı doğruları da; basamak değeri, ölçek hakkında düşünme ve ondalık sayıların karşılaştırmasında öğrencilere yardımcı olmada çok kullanışlıdır (Martinie ve Bay Williams, 2003). İki veya daha fazla ondalık sayı verilir ve öğrenciler bu değerlerin yerini belirlemek için boş sayı doğrusunu kullanabilir. Bu şekilde öğrencilerin, sıfır, bir ve diğer doğal sayı değerlerini veya kritik eşikler olarak nitelenen ondalık sayı değerlerini kullanarak, bu ondalık sayıların değerlerine ilişkin ne bildikleri belirlenir. Ek olarak, çoklu temsillerin kullanımı öğrencilerin sadece anlamalarını değil aynı zamanda öğrencilerin performanslarına yönelik sizin anlayışınızı da genişletecektir.



Kağıt üzerinde 10 x 10'luk kareler. Her bir kare, bir bütündür. Öğrenciler, kesir kısımlarını tararlar.



On-tabanlı şeritler ve kareler, on-tabanlı kesirleri modellemek için kullanılabilir. Bir kesir kısmını göstermek için, büyük kare üzerinde tarama yapmak yerine şeritler ve küçük kareler, büyük kare üzerine yerleştirilebilir.

Şekil 17.2 10 × 10'luk kareler, on-tabanlı kesirleri modeller (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 27).

Öğretmenlerin çoğu, ondalık sayılar için bir model olarak para kullanır ve bu kullanım bir yere kadar yardımcı olabilir. Fakat para, çocuklar için neredeyse sadece bir iki-basamaklı sistemdir: 3.2 veya 12.1389 gibi sayılar, para ile ilişkilendirilmez ve karışıklığa neden olabilir. Çocukların, ondalık sayılarla ilk teması çok daha esnek olmalıdır. Bu nedenle para, en azından takdim düzeyinde bir ondalık model olarak tavsiye edilmemektedir. Para, elbette ondalık gösterimin önemli bir *uygulamasıdır*.

Çeşitli İsimler ve Formlar. On-tabanlı kesirlerle ilk çalışma, öğrencilerin öncelikle modelleri tanıması, onda-birler ve yüzde-birler bakımından nicelikleri düşünmeleri ve on-tabanlı kesirleri farklı yollarda okumayı ve yazmayı öğrenmelerine yardımcı olmak için tasarlanmıştır.

Öğrenciler, herhangi bir on-tabanlı kesir modelini kullanarak on-tabanlı kesri gösterebilir. Örneğin, $\frac{65}{100}$ şeklinde bir kesir modellendiğinde, aşağıdaki fikirler araştırılabilir:

- Bu kesir, $\frac{1}{2}$'den büyük mü veya küçük müdür? Peki $\frac{2}{3}$'den? Peki $\frac{3}{4}$'ten? Üzerinde düşünmenin kolay olduğu kesirlerin karşılaştırılması ile on-tabanlı kesirlerle biraz aşinalık sağlanabilir.
- Onda-bir ve yüzde-birleri kullanarak bu kesirleri söylemenin bazı farklı yolları nelerdir? ("6 onda-birlik ve 5 yüzde-birlik","65 yüzde-birlik"). Uygun olduğunda binde-birlikleri de dâhil ediniz.
- Bu kesri yazmak için iki yol gösteriniz $\frac{65}{100}$ veya $\frac{6}{10} + \frac{5}{100}$

Son iki soru çok önemlidir. On-tabanlı kesirler, ondalık sayılar olarak yazıldığı zaman genellikle tek bir kesir gibi okunur. Yani, 0.65 "altmış-beş yüzde-birlik" olarak okunur. Fakat, on-tabanlı kesirleri basamak değeri bakımından anlamak için aynı sayı, 6 onda-birlik ve 5 yüzde-birlik olarak da düşünülmelidir. $\frac{513}{100}$ gibi bir bileşik kesir, genellikle bir ondalık sayı gibi aynı şekilde okunur: 5.13, "beş ve yüzde on üç". Ondalık noktayı temsil etmek için "ve" kelimesini kullanmanın doğru olduğunu lütfen not ediniz. Basamak değeri açısından, bu sayının $5 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$ olduğu da anlaşılmış olmalıdır.

Genişletilmiş biçimler, bu kesirleri ondalık sayılara çevirmede yardımcı olacaktır. Bir kesir, bir modelle verildiğinde, yazıldığında veya söylendiğinde, öğrenciler uygun denk formları da içeren kesrin diğer iki formunu verebilmelidir.

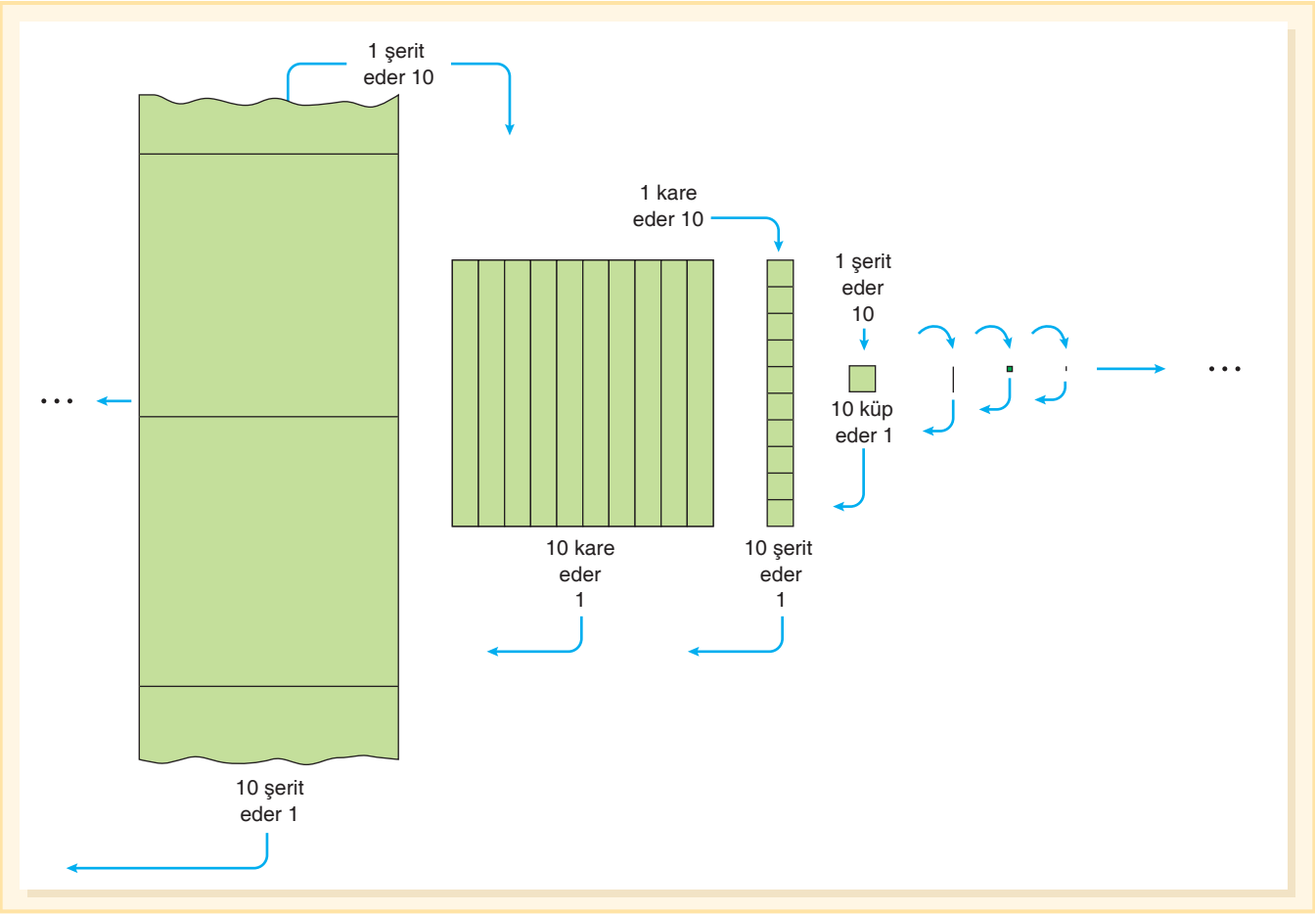
Basamak Değeri Sisteminin Genişletilmesi

Öğrencilerle ondalık sayılar üzerine çalışmadan önce, doğal sayılardaki basamak değerinin bazı kavramlarını tekrar incelemek tavsiye edilmektedir. Bu kavramların en temellerinden biri, herhangi iki komşu basamağın değeri arasındaki 10'a 1 ilişkisidir. Şeritler ve kareler gibi bir on-tabanlı model bakımından, herhangi bir parçanın 10 tanesi, sonraki daha büyük parça 1'i oluşturacaktır ve tersi de doğrudur.

İki-Yollu İlişki. 10 eder 1 kuralı, sonsuza kadar büyük ve daha büyük parçalara veya basamak değerlerine devam eder. Bölüm 11'de öğrendiğiniz gibi örneğin, eğer şerit-ve-kare modelini kullanıyorsanız, şerit ve kare şekilleri daha da büyüyerek sınırsız bir şekilde birbiri ardına gelir. Bu dizgiyi daha büyük parçalarla oluşturup; bu dizgide, her parçanın sağa doğru onda-biri kadar küçüldüğü fikrine odaklanınız. "Burada hâlâ en küçük bir parça var mıdır?" şeklinde kritik bir soru olabilir. Öğrencilerin deneyimlerinde; en küçük parça, santimetre kare veya birim parçadır. Ancak, bu parça bile 10 küçük şeride bölünemez mi? Ve bu küçük şeritler, 10 adet oldukça küçük kareye bölünemez mi? Zihinsel olarak en küçük şerit veya en küçük kare yoktur.

Bu tartışmanın amacı; öğrencilerin, 10'a 1 ilişkisinin *iki yönde de sonsuz* şekilde genişleyebileceğini görmelerine yardımcı olmaktır. Burada, en küçük parça veya en büyük parça yoktur. Komşu parçalar arasındaki ilişki, hangi iki komşu parçanın göz önüne alındığına bakılmaksızın aynıdır. Şekil 17.3, bu fikri göstermektedir.

Ondalık Noktanın Rolü. Bu tartışmada ortaya çıkan önemli bir fikir, herhangi bir basamağın (veya on-tabanlı

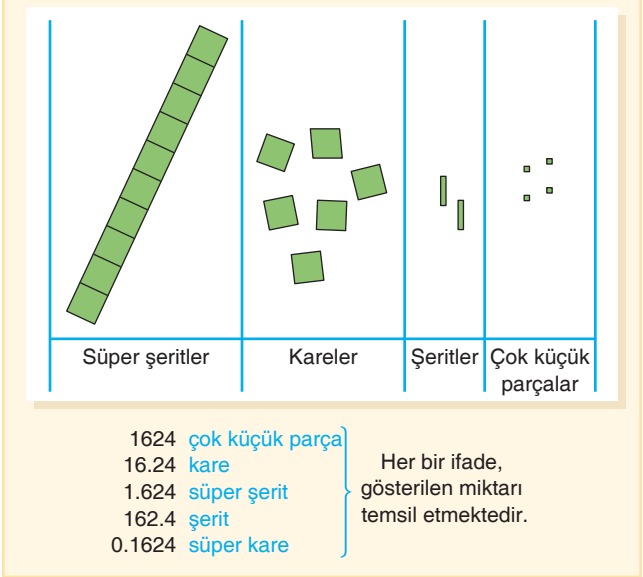


Şekil 17. 3 Teorik olarak, şeritler ve kareler iki yönde de sonsuz genişler.

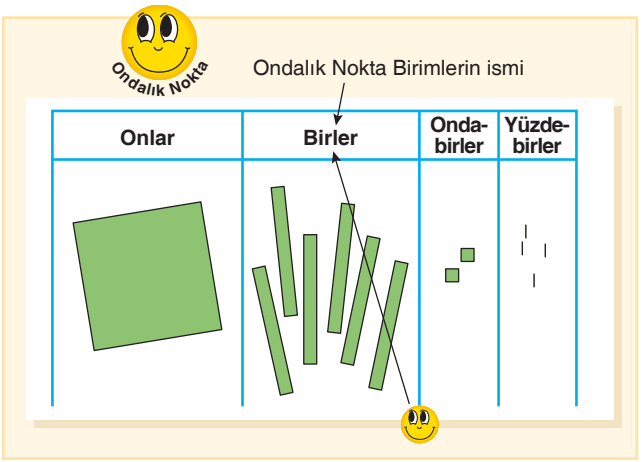
parça) niçin birim veya birler basamağı olarak seçiminin yapılamayacağına dair mantığın inşa edilememesidir. Şeritler ve kareler dikkate alındığında, örneğin; hangi parça, birlik parçadır? Küçük santimetre kare mi? Neden? Niçin daha küçük veya daha büyük kare değil? Neden bir şerit değil? *Herhangi bir parça, etkili bir biçimde birlik parça olarak seçilebilirdi.*

Şekil 17.4'te gösterildiği gibi, verilen bir nicelik, birimin seçimine veya toplamın tamamını saymak için hangi parçanın kullanılacağına bağlı olarak farklı şekillerde yazılabilir. Böylece, ondalık noktanın rolü, *tam kısmın yerini göstermektir* ve tam kısmın sağına konur.

Ondalık sayının uygun bir karikatürü, Şekil 17.5'te gösterilmiştir. Ondalık sayının "gözleri", daima birler basamağına veya birimlerin ismine odaklanır. Eğer "gülümseyen" ondalık nokta, Şekil 17.4'deki kareler ve şeritler arasına yerleştirilirse o zaman kareler, tam kısım olarak işaretlenebilir ve 16.24, modele uygun doğru yazılmış gösterim olacaktır.



Şekil 17.4 Ondalık noktanın yeri, tam kısmın yerini gösterir.



Şekil 17.5 Ondalık nokta, daima "yukarıya" birimin ismine bakar. Bu durumda, 16.24'ü elde ederiz.

Etkinlik 17.1

Ondalık Nokta, Birimi İsimlendirir

Öğrencilerden, sıraları üzerinde belirli sayıda on-tabanlı parçalar göstermelerini isteyiniz. Örneğin, 3 kare, 7 şerit ve 4 çok küçük parça. Parçalardan, "kareler", "şeritler" ve "çok küçük parçalar" olarak bahsediniz ve hem daha küçük hem de daha büyük teorik parçaların isimleri için bir uzlaşmaya varınız. Küçük parçaların sağı için "çok küçük şeritler" ve "çok küçük kareler" olabilir. Karelerin solu için "süper şeritler" ve "süper kareler" olabilir. Her öğrenci, gülümseyen bir ondalık noktaya sahip olmalıdır. Öğrencilerden, şimdi Şekil 17.4'teki gibi kaç tane kareye, kaç tane süper şeride vs. sahip olduklarını söylemelerini ve yazmalarını isteyiniz. Öğrenciler, kendi ondalık noktalatırını buna göre yerleştirir ve niceliği hem yazar hem de söylerler.

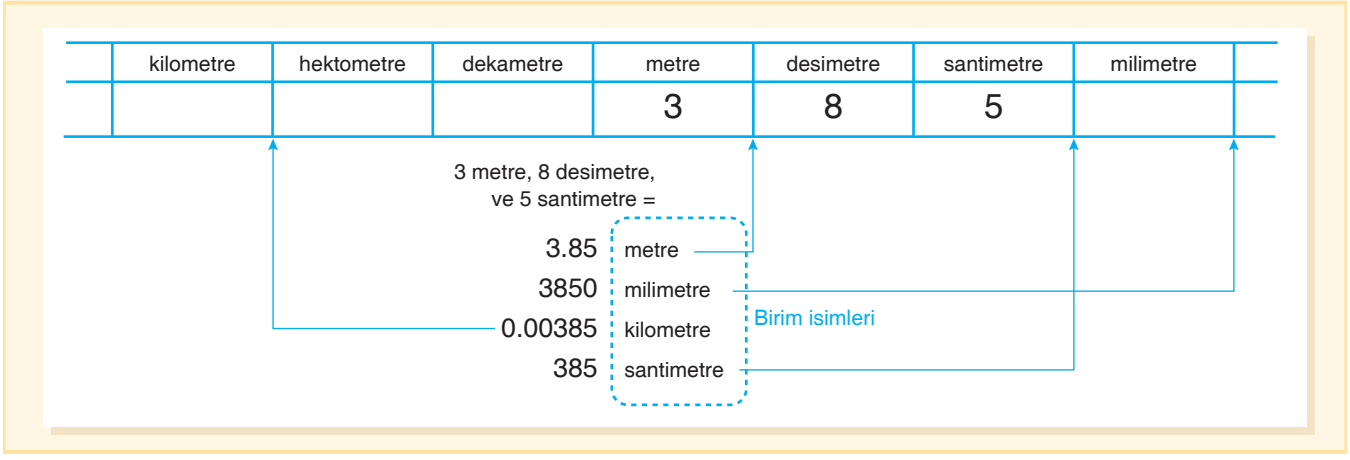
Etkinlik 17.1, ondalık noktanın isimlendirilen birimi işaret ettiğini ve niceliği değiştirmeden birimin değişebileceğini belirgin bir şekilde göstermektedir.

Ölçü ve Para Birimleri ile Ondalık Nokta. Ondalık nokta "birler basamağına bakar" fikri, bağlamın bir çeşidinde kullanışlıdır. Örneğin, metrik sistemde isimleri olan yedi basamak değeri vardır. Şekil 17.6'da gösterildiği gibi; ondalık nokta, gerçek ölçüyü değiştirmeksizin birim olarak, bu basamakların herhangi birini belirlemek için kullanılabilir. Para sistemimiz de bir ondalık sistemdir. $172.95 da; ondalık nokta, birim olarak dolarların yerini belirler. Nasıl yazıldığına bakılmaksızın paranın bu miktarında, 1 yüzlük (doların), 7 onluk, 2 birlik, 9 on kuruş/dimes (onda-birlik), 5 kuruş/peni veya cent (yüzde-birlik) vardır. Eğer kuruşlar, birim olarak işaretlenmişse o zaman aynı miktar, 17,295 on kuruş veya 17,295 kuruş olarak yazılırdı. 0.17295 doların binde-biri veya 1729.5 tane on kuruş (onda-birlik) de doğru olabilirdi.

Amerikan para sistemi, metrik uzunluklar veya ağırlıklar gibi gerçek ölçümlerde, birimin ismi, bir basamak-değeri tablosundaki gibi basamağın yukarısına yazılmak yerine sayıdan sonra yazılır. 1.62 metre uzunluğunda olabilirsiniz, fakat sizin "1.62 uzunluğunda" olduğunuzu söylemek anlamlı olmaz. Gazetede, Kongre'nin $7.3 milyar harcadığını okuyabiliriz. Burada birimler, milyar dolardır, dolar değildir. Bir şehir, 2.4 milyon nüfusa sahip olabilir. Bu, 2,400,000 kişiyle aynıdır.

Kesir-Ondalık Sayı Bağlantısı

Kesirler ve ondalık sayıları ilişkilendirmek için, öğrenciler kavram-yönelimli dönüşümler yapmalıdır. Yani dönüşümler, bir kural veya algoritmadan ziyade anlamaya dayanmalıdır. Bu gibi etkinliklerin amacı, aynı fikirleri ifade etmek için kullanılan her iki sistemin kavramlarını inşa etmenin, bir



Şekil 17.6 Metrik ölçme sisteminde, her basamak-değeri yerinin bir ismi vardır. Ondalık nokta, hangi uzunluğun birim uzunluk olduğunu göstermek için yerleştirilebilir. Yine ondalık nokta, birim uzunluğa bakacaktır. Oklar, ondalık noktanın karşılık geldiği yeri işaret etmektedir.

kesri bir ondalık sayıya dönüştürme becerisiyle yapmaktan daha az olduğunu göstermektir. On-tabanlı kesirler başlanacak yerdir.

Etkinlik 17.2

On-Tabanlı Kesirlerden Ondalık Sayılara

Bu etkinlik için, öğrencilerden basamak değeri şeritlerini ve karelerini kullanmalarını isteyiniz (Çalışma Yaprak Seti 14). Büyük karenin, bir bütünü ifade ettiğini kabul ediniz. Öğrenciler, şeritlerini ve çok küçük parçalarını kullanarak karenin, on-tabanlı kesir miktarını kapatsın. Örneğin, karenin $2\frac{35}{100}$'ini kapatsınlar. Doğal sayılar, ek kareler gerektirir. Buradaki görev, bu kesrin bir ondalık sayı olarak nasıl yazılacağına karar vermek ve bunların fiziksel modellerini kullanarak bağlantılarını göstermektir.

Son etkinlik için, $2\frac{35}{100}$'ün niçin 2.35'le aynı olduğuna yönelik tipik (ve doğru) bir akıl yürütme, burada 2 tam, 3 onda-birlik ve 5 yüzde-birliğin olmasıdır. Bunu, fiziksel olarak görmek önemlidir. Karenin $2\frac{35}{100}$'ini göstermek için kullanılan tamamen aynı materyaller, Şekil 17. 7'de gösterildiği gibi, tam kısmı göstermek için kullanılan bir kağıt ondalık nokta ile hayali bir basamak-değeri tablosunda yeniden düzenlenebilir veya yerleştirilebilir.

Bu etkinliğin tersi de değerlidir. Öğrencilere, 1.68 gibi bir ondalık sayı veriniz ve onlardan bu ondalık sayıyı, on-tabanlı parçalarla göstermelerini isteyiniz. Öğrencilerin görevi, bu ondalık sayıyı bir kesir olarak yazmak ve bir karenin kesirsel bir parçası olarak göstermektir.

Ondalık sayılar ve on-tabanlı kesirler arasındaki bu dönüşümler oldukça basit olmasına rağmen, öğrenciler için asıl gündem, başlangıçtan beri ondalık sayıların, kesirler olduğunu öğrenmeleridir.

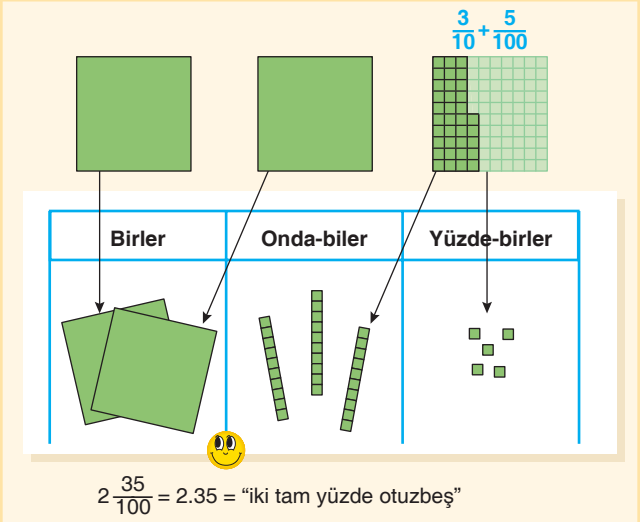


Figure 17.7 Translation of a base-ten fraction to a decimal.

Hesap makinesi de ondalık sayı kavramının gelişiminde önemli bir rol oynayabilir.

Etkinlik 17.3



[+] 1 [=] [=] . . . tuşuna basarak hesap makinesiyle nasıl "sayma" yapıldığını düşününüz. Öğrenciler, şimdi [+] 0.1 [=] [=] . . . tuşuna bassın. Ekranda, 0.9 göründüğünde durunuz ve bunun ne anlama geldiğini ve bir sonraki tuşa basma ile ekrandaki görüntünün neye benzeyeceğini tartışınız. Çoğu öğrenci, 0.10 tahmininde bulunacaktır (9'dan sonra 10 gelir düşüncesiyle). Her bir tuşa basmakla, öğrenciler onda-birler için model olarak bu on-tabanlı şeritleri biriktirirlerse bu tahmin daha da ilginç hale gelecektir. Daha fazla tuşa basmak daha fazla şerit veya 10 tane şerit demektir. Hesap makinesi, niçin 0.10'u göstermemelidir? Onuncu basım 1'i gösterdiği zaman (hesap makinesi, ondalık sayının sağında birbirini takip eden sıfırları çoğu zaman göstermez); tartışma, bir kare için 10 şeridin değiş-tokuşu etrafında dönmelidir. Onda-birliklerle, 4 veya 5'e kadar saymaya devam ediniz. Bir doğal sayıdan bir sonrakini elde etmek için kaç kere basılır? 0.001 veya 0.01 ile saymayı deneyiniz. Bu saymalar, binde-bir ve yüzde-birin ne kadar küçük olduğunu çarpıcı bir şekilde gösterir. Bu, 0.01 elde etmek için 0.001 ile 10 kez sayma ve 1'e ulaşmak için 1000 kez sayma gerektirir.

Aslında hesap makinesi, 0.8-0.9-1-1.1 yerine 0.8-0.9-0.10-0.11 şeklinde sayar ve burada şu soru ortaya çıkar: "Bu, mantıklı mıdır? Eğer mantıklıysa, niçin?"

Kesirleri yazmaya imkân veren hesap makineleri, bir kesir-ondalık sayı dönüştürme tuşuna da sahiptir. Bazı hesap makinelerinde, 0.25 gibi bir ondalık sayı, on-tabanlı kesre $\frac{25}{100}$ şeklinde dönüştürülür ve elle veya otomatik olarak sadeleştirme yapmaya imkân verir. Grafik çizen hesap makineleri; dönüştürme, sadeleştirme veya sadeleştirme olmaksızın ayarlanabilir. Öğrenciler, kesir ve ondalık sayı sembollerini ilişkilendirmeye başladıkça, kesirlerle işlem yapmayı mümkün kılan hesap makinelerinin, kesirler ve ondalık sayılar arasında ileri-geri gitme özelliği bu makineleri değerli bir araç yapar.



Ondalık Sayı Hissinin Gelişimi

Şu ana kadar yapılan tartışma, on-tabanlı kesirler ile ondalık sayıların bağlantıları etrafındadır. Sayı hissi ise daha fazlasını gerektirir. Sayı hissi, sayıların içten bir şekilde anlaşılmasını veya sayılar hakkındaki sezgisel yaklaşımı ifade eder. Bu amaçla, bilinen sayıları kullanarak ondalıklara yaklaşmak, ondalık sayıları kolayca sıralayabilmek ve ondalık sayıları karşılaştırabilmek için, çocukların aşina oldukları kesirlerle ondalık sayıları ilişkilendirmek yararlıdır.

Ondalık Sayılarla İlişkilendirilmiş Bilinen Kesirler

Bölüm 15, öğrencilerin özellikle yarım, üçte-bir, dörtte-bir, beşte-bir ve sekizde-bir gibi basit kesirlerle kavramsal bir aşinalık geliştirebilmelerine nasıl yardımcı olunacağını göstermiştir. Bu kavramsal aşinalığı, ondalık sayılar olarak ifade edilen aynı kavramlara da genişletebiliriz. Bunu yapmanın bir yolu, öğrencilerin bir on-tabanlı model aracılığıyla bilinen kesirleri ondalık sayılara dönüştürmeleridir.

Aşağıdaki iki etkinlik, öğrencilerin yaygın olarak bilinen kesir denklikleri bakımından ondalık sayı düşüncelerinin gelişimi ve bu ilişkilendirmeyi kavramsal biçimde yapmalarına yardımcı olmak için aynı amacı hedeflemektedir.

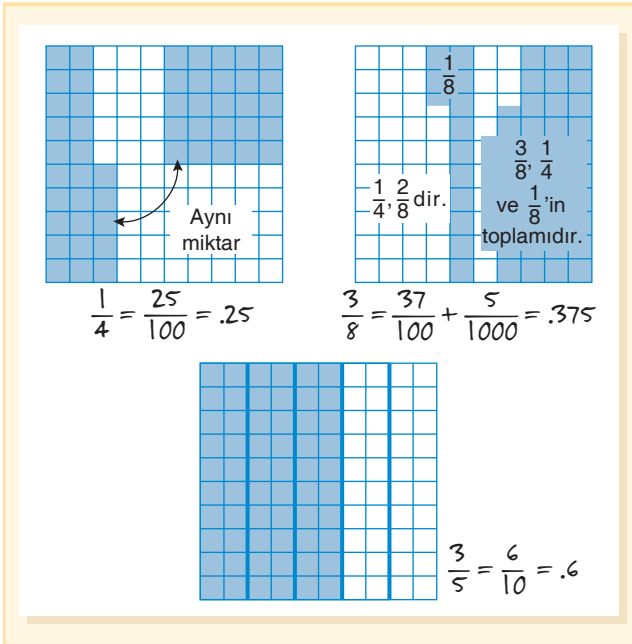
Etkinlik 17.4

Bilinen Kesirleri Ondalık Sayılara Dönüştürme

Öğrencilere, ondalık sayıya dönüştürmeleri için bir "bilinen" kesir verilir. Öğrenciler, verilen kesri, ilk önce ya 10 × 10'luk kareli kağıt ya da on-tabanlı şeritler ve kareler kullanarak modeller. Öğrenciler sonra, modeli bir rehber olarak alarak, verilen kesrin ondalık sayı denkliği için bir açıklama yapar ve yazar. Eğer şeritler ve kareler kullanılırsa, o zaman öğrencilerin, açıklamalarının bir parçası olarak resimler çizdiklerinden emin olunuz.

Yarımlar ve beşte-birlerle sonra dörtte-birler ve mümkünse sekizde-birlerle başlamak iyi bir sıralamadır. Özel bir etkinlik olarak yapılabilecek en iyi etkinlik ise üçte-birlerdir.

Şekil 17.8, en son etkinlikteki dönüştürmelerin 10 × 10'luk bir kareli kağıtla nasıl yapılacağını göstermektedir. Dörtte-birler için, öğrenciler genellikle 5 × 5'lik bir kısmı tarayacaktır (bir yarımın yarısı). Bundan sonraki soru; bu, ondalık sayılara nasıl dönüştürülür. Öğrencilere, sadece dokuz veya daha az küçük kare kullanma izni verilseydi, kare ve şeritler kullanarak $\frac{1}{4}$'lik kısmı nasıl kapatacaklarını sorunuz $\frac{3}{8}$ kesri, harika bir meydan okuma durumunu göstermektedir. İlk önce $\frac{1}{4}$'i bulmak bir ipucu olabilir, sonra $\frac{1}{8}$'in, dörtte-birin yarısı olduğunu fark ediniz. Bir sonraki küçük parçanın, küçük karelerin onda-biri olduğunu hatırlayınız. Bu nedenle, küçük bir karenin yarısı, $\frac{5}{1000}$'dir.



Şekil 17.8 10 × 10'luk bir kare kullanılarak iyi bilinen kesirler, ondalık sayılara dönüşmüştür.

Dairesel model, kesirlere yönelik güçlü bir zihinsel bağ oluşturduğu için, Şekil 17.1'de gösterilen rasyonel sayı diskiyle bazı kesirlerin ondalık sayılara dönüşümlerini yapmaya değerdir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 28).

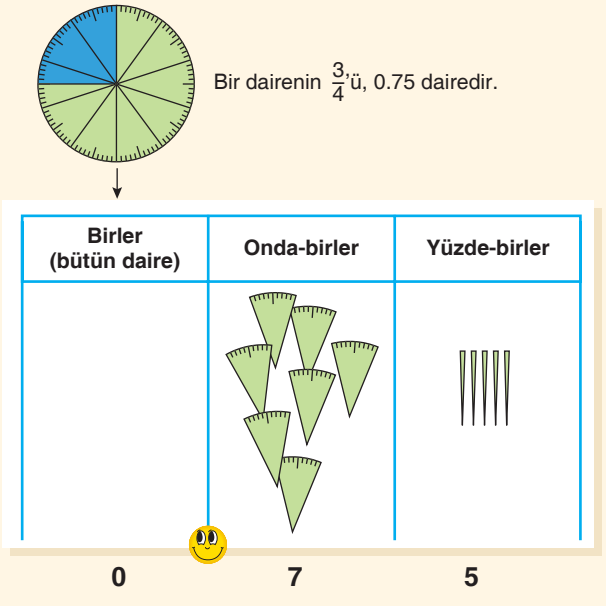
Etkinlik 17.5

Önce Tahmin Et, Sonra Doğrula

Disk yüzeyinin boş tarafını öğrencilere döndürünüz ve öğrencilerden diski, örneğin $\frac{3}{4}$ gibi bilinen bir özel kesri göstermek için ayarlamalarını isteyiniz. Daha sonra, öğrenciler diski çevirir ve tahmin ettikleri kısımda kaç tane yüzde-birlik olduğunu yazarlar (disk çevrildiğinde, rengin terse döneceğini not ediniz). Sonunda, öğrenciler yüzde-birleri gösteren sayının niçin doğru olduğuna ve buna karşılık gelen ondalık sayının da hangi sayı olduğuna yönelik bir gerekçe sunmalıdır.

Son etkinliğin tahmin bileşeni, kesirler için görsel "duygu" katmaktadır. Rasyonel sayı diskindeki kesrin, bir ondalık sayı denkliğini bulmakta zorluğa sahip bir beşinci sınıf düzeyinde, öğretmen kesrin bu parçalarının bir tablo üzerinde yerleştirilebilmesi için bazı ekstra diskleri onda-bir ve yüzde-birlere ayırır (Bkz. Şekil 17. 9).

Bir ondalık sayı olarak $\frac{1}{3}$ modellemesinin incelenmesi, sonsuz tekrarlı ondalık sayı kavramının iyi bir takdimidir. 10



Şekil 17.9 Kesir modelleri, ondalık sayı modelleri olabilir.

× 10'luk bütün kareyi, şeritler ve küçük kareleri kullanarak 3 parçaya ayırmayı deneyiniz. Her parça, bir parça artacak şekilde sadece 3 şerit alır. Artan şeridi bölmekle her parça, 3 küçük kare alır ve 1 tane artar. Küçük kareyi bölmekle her parça, 3 küçük şerit alır ve 1 tane artar (On-tabanlı parçalarla, daha küçük her parçanın, önceki parçanın $\frac{1}{10}$'i kadar olması gerektiğini hatırlayınız). Bu sürecin asla sonlanmayacağı aşikârdır. Sonuç olarak, $\frac{1}{3}$, 0.333333... veya 0.3 ile denktir. Pratik amaçlar için, $\frac{1}{3}$ yaklaşık olarak 0.333'tür. Benzer şekilde, $\frac{2}{3}$ tekrar eden altıların dizisidir veya yaklaşık olarak 0.667'dir. Öğrenciler, sonra çoğu kesrin, sonlu bir ondalık sayıyla gösterilemeyeceğini keşfedecektir.

Sayı doğrusu, bağlantıyı gösteren başka bir modeldir. Öğrenciler; kesirlerden daha çok ondalık sayıları, sayı doğrusunda görünen sayılar olarak düşünmeye daha eğilimlidir. Aşağıdaki etkinlik, kesir-ondalık sayı denkliklerini geliştirmeye devam etmektedir.

Etkinlik 17.6

Bilinen Bir Kesir Doğrusundaki Ondalık Sayılar

Öğrencilere, kesir denkleri bilinen beş ondalık sayı veriniz. Sayıların, ardışık iki doğal sayı arasında olmasına dikkat ediniz. Örneğin, 3.5, 3.125, 3.4, 3.75 ve 3.66 ondalık sayılarını kullanınız. Aynı doğal sayıları içeren bir sayı doğrusu çiziniz. Sayı doğrusundaki alt-bölmeler, isimlendirme olmadan sadece dörtte-birler, üçte-birler veya beşte-birler şeklinde olmalıdır. Öğrencilerin görevi, her bir ondalık sayıyı, sayı doğrusu üzerine yerleştirmek ve her biri için denk olan kesri bulmaktır.

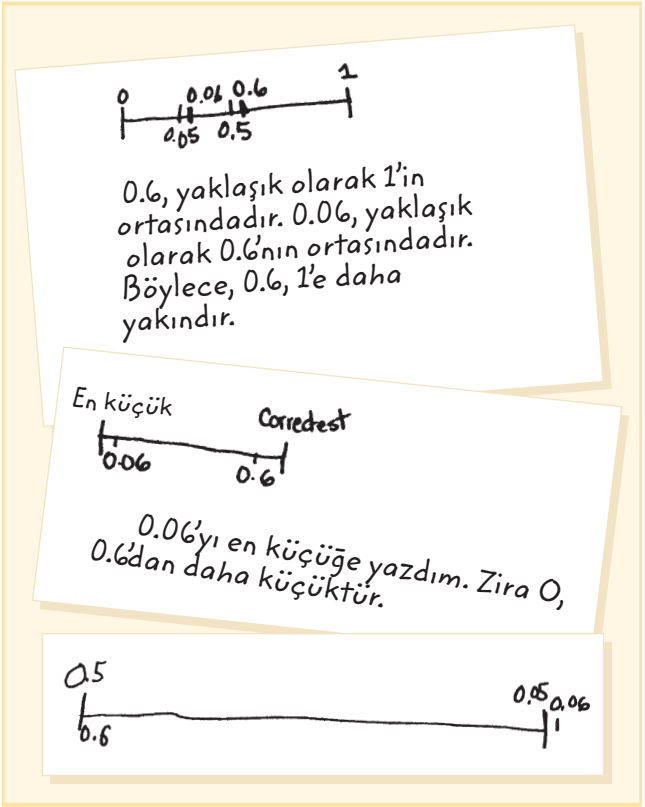
Amerikan Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme Dairesi'nin (NAEP) sonuçları, kesir-ondalık sayı ilişkisine yönelik öğrencilerin sürekli olarak zorlandıklarını göstermektedir. Kouba ve diğ. (1988a), öğrencilerin basit kesirleri ondalık sayılar olarak gösterebildiklerini fakat, 7. sınıf öğrencilerinin sadece % 40'ının bir tamsayılı kesir için ona denk bir ondalık sayı yazabildiğini belirlemiştir. Altıncı NAEP'te de; öğrencilerin, alt-bölümler kesirler olduğu zaman ondalık sayıları, sayı doğrusuna yerleştirmekte zorlandıkları tespit edilmiştir (Kouba, Zawojewski ve Struchens, 1997). NAEP 2005'te ise 8. sınıf öğrencilerinin sadece % 56'sı, artışlar 0.2'nin katları olduğu zaman (artışlar kesir şeklinde olmasa bile) ondalık sayıları, bir sayı doğrusunda doğru şekilde yerleştirmiştir. Payın, paydaya bölünmesi; kesirleri, ondalık sayılara dönüştürmenin bir aracı olabilir, fakat bu durum denkliğin anlaşılmasına hiçbir katkı yapmaz. Bu yöntemin, bu bölümde önerilmediğini ve önerilmeyeceğini not ediniz.



Ondalık sayıları anlamanın basit ama güçlü bir değerlendirmesi, öğrencilerden üç veya dört farklı temsilin her birini kullanarak, 0.6 ve 0.06 gibi ilişkili ondalık sayıları göstermelerini istemektir. Bu temsiller: Sayı doğrusu (öğrencinin çizdiği), 10x10'luk kareli kağıt, para ve on-tabanlı materyallerdir (Martinie ve Bay-Williams, 2003). Ek bilgi için, öğrencilerden temsillerinin gerekçelerini açıklamalarını isteyiniz. Eğer, öğrenciler diğerlerine göre bir modelle daha fazla zorlanıyorsa, bu durum öğrencilerin belirli modellerin nasıl kullanılacağını öğrendikleri anlamına gelmesine rağmen, ondalık kesirlerin kavramsal anlamasının doğru biçimde geliştirildiğini göstermez. Boş bir sayı doğrusu üzerinde ondalık sayıların yerleşmesi, belki en ilginç-ve en çok verilen-görevdir. ◆

Uygun Kesirle Yaklaşık Olarak Bulma

Gerçek dünyada, ondalık sayılar nadiren uygun kesirlere tam olarak denk gelir. Hangi kesir, yaklaşık olarak 0.52 ondalık sayısına karşılık gelir? Altıncı NAEP sınavında, sekizinci sınıfların sadece yüzde 51'i $\frac{1}{2}$'yi seçmiştir. Diğer seçenekler ise $\frac{1}{50}$ (% 29), $\frac{1}{5}$ (% 11), $\frac{1}{4}$ (% 6) ve $\frac{1}{3}$ (% 4) idi (Kouba ve diğ., 1997). Yine, bu performans için olası bir açıklama, kurallara olan güvendir. Öğrencilerin, ondalık sayıların büyüklükleriyle uğraşmaya ve ondalık sayılarla bir aşinalık duygusu geliştirmeye ihtiyaçları vardır.



Şekil 17.10 Üç farklı altıncı sınıf öğrencisinin sayı doğrusunu çizmesi ve 0.6 ile 0.06 sayılarını göstermesi.

Kaynak: Reprinted with permission from Martinie, S. L., & Bay-Williams, J. (2003). "Investigating students' Conceptual Understanding of Decimal Fractions Using Multiple Representations." *Mathematics Teaching in the Middle School, 8,* p. 246. Copyright © 2003 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.

Kesirlerdeki gibi, geliştirilmesi gereken ilk kritik eşikler 0, $\frac{1}{2}$ ve 1'dir. Örneğin; 7.3962, 7'ye mi yoksa 8'e mi daha yakındır? Niçin? (Şu cevabı kabul eder misiniz: "3, 5'ten daha küçük olduğundan 7'ye daha yakındır). Bu sayı, 7 veya $7\frac{1}{2}$'ye mi daha yakındır"?) Bir durumu anlamlandırmada; 0, $\frac{1}{2}$ veya 1 gibi kritik eşikler çoğunlukla kâfi düzeyde uygundur. Eğer, daha hassas bir yaklaşık değer istenirse o zaman öğrenciler, başka uygun kesirleri (üçte-birler, dörtte-birler, beşte-birler ve sekizde-birler) dikkate almaya yönlendirilmelidir. Bu örnekte, 7.3962, 7.4'e yani $7\frac{2}{5}$'e yakındır. Ondalık sayılarla ilgili iyi bir sayı hissi, neredeyse her sayının yerine yakın bir değere karşılık gelen anlamlı bir kesrin hızlıca düşünülmesi yeteneğini gerektirir.

Ondalık sayılarla bu türden aşinalık geliştirmek için, çocukların yeni kavram veya becerilere ihtiyacı yoktur. Çocuklar; aşağıdaki gibi etkinliklerle, ondalık sayı, basamak değeri ve kesirlerin ilişkili kavramlarını tartışmak ve uygulamak için imkânlar sağlanmasına ihtiyaç duyarlar.

Etkinlik 17.7

Bilinen Bir Kesre Yakınlık

Uygun veya bilinen bir kesre yakın ama tam olarak eşit olmayan yaklaşık beş ondalık sayıyı içeren bir liste yapınız. Örneğin, 24.8025, 6.59, 0.9003, 124.356 ve 7.7 ondalık sayılarını alınız.

Öğrencilerin görevi, bu ondalık sayıların her birine yakın ve bildikleri bir bilinen kesir denkliğine de sahip bir ondalık sayıya karar vermektir. Örneğin, 6.59, 6.6'ya yani $6\frac{3}{5}$'e yakındır. Öğrenciler, seçimleri için bir açıklama yazmalıdır. Bazı öğrenciler, hangisinin daha yakın olduğu tartışmasına imkân verecek farklı denk kesirler seçebilirler.

Etkinlik 17.8

En İyi Eşleme

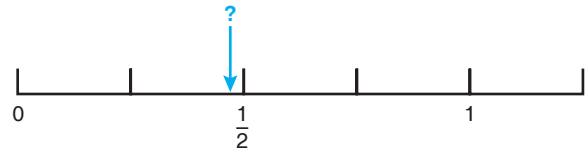
İyi bilinen beş kesri ve bu kesirlere yakın olan ancak tamamen aynı olmayan en az beş ondalık sayıyı tahtaya dağınık bir şekilde yazınız. Öğrenciler her kesri, o kesre karşılık gelen en uygun ondalık sayıyla eşleştirir. Buradaki zorluk, çeşitli kesirlerin birinin diğerine ne kadar yakın olduğunun belirlenmesidir.

Etkinlik 17.7 ve 17.8'de, öğrencilerin cevapları için çeşitli gerekçeleri olacaktır. Düşüncelerini sınıfla paylaşma, öğrencilerin tümüne öğrenmek için değerli bir fırsat sağlar. Cevaplar üzerine değil, cevapların mantığı üzerine odaklanınız.



Modeller ve rasyonel sayılar için iki sembol sistemi (kesirler ve ondalık sayılar) arasındaki bağlantılar, teşhis edici bir mülakat için iyi görevler sağlar. Öğrencilere, bu üç yolun herhangi birinde gösterilen bir sayı veriniz ve diğer iki yol için de bir açıklama sağlayınız. Örneklerden birkaçı:

- $\frac{5}{8}$ kesrini, bir ondalık sayı olarak yazınız. Bir çizim yapınız veya fiziksel model (cetvel veya 10 x10'luk kareli kağıt) kullanınız ve ondalık denkliğinizin niçin doğru olduğunu açıklayınız.
- Hangi kesir, 2.6 ondalık sayısıyla da gösterilir? Cevabınızı açıklamak için kelime, resim ve sayıları kullanınız.
- Aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde işaretlenen noktanın ne olabileceğini söylemek için hem bir kesir hem de bir ondalık sayı kullanınız.



Son örnekte, öğrencilerin ilk olarak hangi temsili (kesir veya ondalık sayı) seçtiğini görmek özellikle ilginçtir. Üstelik öğrenciler, daha sonra bu sayıyı diğer temsile dönüştürüyor mu veya ikinci bir bağımsız tahmin yapıyor mu? ◆

Ondalık Sayıları Sıralama

Ondalık sayıların küçükten büyüğe doğru sıralamasının bir listesini yapmak, az önce tartışılanla yakından ilişkili bir beceridir. Takip eden listeyi göz önüne alınız: 0.36, 0.058, 0.375, 0.4. Doğal sayı kavramlarının doğru olmayan bir uygulamasından kaynaklanan basamak sayısı fazla olan sayının seçimi, en yaygın ortak hatadır. Diğer bir ortak hata ise sağa doğru uzayan basamaklar çok küçük sayıları gösterdiği için daha uzun sayıların daha küçüldüğü fikridir (Steinle ve Stacey, 2004). Her iki hata da, ondalık sayıların nasıl inşa edildiğine yönelik bir kavramsal anlama eksikliğini yansıtmaktadır. Aşağıdaki etkinlikler, ondalık sayıların göreceli büyüklüklerine ilişkin tartışmayı ilerletmeye yardımcı olabilir.

Etkinlik 17.9

Hadi Onlar'ı Sıralayalım

Öğrencilerin sıraya dizmekte zorlanabileceği dört veya beş ondalık sayıdan oluşan bir liste hazırlayınız. Ondalık sayıların hepsi, ardışık iki doğal sayı arasında olmalıdır. Öğrencilerden, ilk olarak sayıları küçükten büyüğe doğru sıralamalarını isteyiniz. Öğrencilerden, yaptıkları sıralamayı savunmaları için seçtikleri bir modeli kullanmalarını isteyiniz. Öğrenciler, bir modelle sayıları göstermeye çalışırken (belki 100 alt-bölmeli bir sayı doğrusunu veya 10,000'lik kareli kağıdı kullanarak), bir ondalık sayının büyüklüğüne en fazla katkıyı hangi basamakların yaptığıyla zorunlu olarak karşılaşacaktır.

Sınıf dışındaki dünyada, ondalık noktadan sonraki basamakların farklı sayılar içerdiği "düzensiz[1*]" ondalık sayıların sıralamasını bile neredeyse düşünmeyiz. "Hadi Onlar'ı Sıralayalım" etkinliğindeki gibi alıştırmaların gerçek amacı, bir beceri geliştirmekten ziyade ondalık sistemin daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır. Bununla birlikte bu türden görevler, ondalıkların anlaşılıp anlaşılmadığının en iyi değerlendirildiği standart testlerde yer almaya devam edecektir.

Etkinlik 17.10

"Uygun" Sayılara Yakın Olma

Tahtaya, dört basamaklı bir ondalık sayı yazınız- örneğin, 3.0917. Doğal sayılarla başlayınız: " Bu sayı, 3'e mi yoksa 4'e mi daha yakındır?" Sonra, onda-birlere gidiniz: "Bu sayı, 3.0'a mı yoksa 3.1'e mi daha yakındır?" Aynı işlemi, yüzde-birler ve binde-birler ile tekrarlayınız. Her cevapta, öğrencilere bir model kullanarak seçimlerini veya başka kavramsal açıklamalarını savunmaları için imkân veriniz. Şekil 17.11'de gösterilen numaralanmayan büyük bir sayı doğrusu kullanışlıdır.

Diğer Kesir-Ondalık Sayı Denklikleri

Paydanın, bir bölen ve payın da bir çarpan olduğunu hatırlayınız. Bu nedenle; örneğin, $\frac{3}{4}$, $3 \times (1 \div 4)$ veya $3 \div 4$ ile aynıdır. Buna göre, dört-işlemli basit bir hesap makinesi üzerinde $\frac{3}{4}$'ü nasıl ifade ederdiniz? Basit bir şekilde, $3 \div 4$ yazınız. O zaman, ekranda 0.75 okunacaktır.

Öğrenciler, kesirleri ondalık sayılara dönüştürmek için genellikle payı, paydaya bölmenin basit bir algoritma olduğunu düşünür, fakat bu işlemin niçin yapıldığına dair bir anlayışa sahip değillerdir. Öğrencilerin, genel olarak $a/b = a \div b$ olduğu fikrini geliştirmelerine yardımcı olmak için bu fırsatı kullanınız (Bkz. Bölüm 15, s. 287).

Hesap makinesi, ondalık sayı kavramlarıyla aşinalık geliştirildiği zaman önemli bir araçtır. Bir hesap makinesiyle ondalık sayı denkliklerini bulmak, bazı ilginç örüntüler ve gözlemler üretebilir. Örneğin, aşağıda incelemek için bazı sorular vardır:

- Hangi kesirler, sonlu ondalık denkliklere sahiptir? Cevap; paya, paydaya veya her ikisine mi dayanır?
- Verilen bir kesir için, ondalık sayının tekrarlayan kısmının maksimum uzunluğunu nasıl söylersiniz? Bir cevaba ulaşmak için, 7, 11 ve 13 ile bölmeye çalışınız.
- Dokuzda-birlerin hepsini—$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \ldots \frac{8}{9}$inceleyiniz. $\frac{1}{3}$'ün $\frac{3}{9}$ ve $\frac{2}{3}$'ün $\frac{6}{9}$ olduğunu hatırlayınız. $\frac{9}{9}$'un ne olması gerektiğini öngörebilmek için sadece keşfettiğiniz örüntüyü kullanınız. Fakat, $\frac{9}{9} = 1$ değil midir?
- 3.454545… şeklindeki tekrarlı ondalık sayıyı, hangi kesrin ürettiğini nasıl bulabilirsiniz?

Bu listedeki son soru, (her tekrarlı ondalık sayının, bir rasyonel sayı olduğunu örneklendirerek) herhangi bir tekrarlı ondalık sayı için genelleştirilebilir. Öğrencilerin bu konuda becerikli olmaları için kullanışlı değildir.

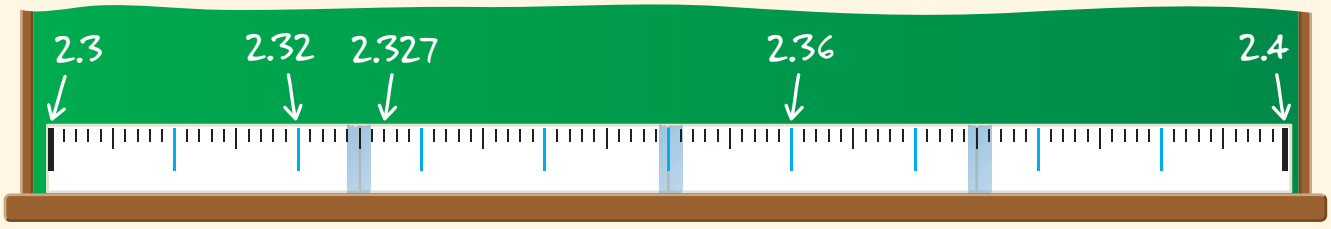
NCTM Standartları

Bu bölümde tartışılanların çoğu, *Standartlar* belgesinde tavsiye edilmiştir. " [3-5. sınıf] öğrencileri, ondalık sayıları temsil etmek ve onlarla çalışmak için modelleri ve başka stratejileri kullanmalıdır. Örneğin öğrenciler, onda-birleri (onda-bir, onda-iki, onda-üç, …) sözlü olarak saymalı veya ondalık sayılarla doğal sayıların bir biriyle bağını kurmak ve ilişkilendirmek için hesap makinesi kullanmalıdır. Öğrenciler, denklik üzerine odaklanarak kesirler ile ondalık sayılar arasındaki ilişkiyi de araştırmalıdır" (s. 150). ◆

Yüzdelerin Takdimi

Yüzde terimi, basitçe *yüzde-bir* ve bu anlamda, paydası 100 olan standart bir oran için kullanılan diğer bir isimdir. Eğer öğrenciler, basit veya bileşik kesirleri ve basit ondalık sayıları *yüzde-bir* olarak ifade edebilirse o zaman *yüzde* terimi, *yüzde-bir* terimi için kullanılabilir. $\frac{3}{4}$ kesrini alınız. Yüzde-birlerle ifade edilen bir kesir, $\frac{75}{100}$'dür. $\frac{3}{4}$ondalık biçimde yazıldığında, 0.75'dir. Hem 0.75 hem de $\frac{75}{100}$ tamamen aynı şekilde okunur, "yüzde-yetmiş-beş." İşlem olarak kullanıldığı zaman herhangi bir şeyin $\frac{3}{4}$'ü aynı şeyin 0.75'i

[1] Ç.N: Örneğin, 0.27 + 0.3



6 × 28 inç ölçüye sahip poster tahtasını dört şeride ayırınız. Uç uca bantlayınız. Yazı tahtasında tebeşirin konduğu yere yerleştiriniz. Tahtada ondalıklara karşılık gelen sayıları üst kısma yazınız. Bitiş yerleri, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ aralıklarından herhangi biri olabilir..

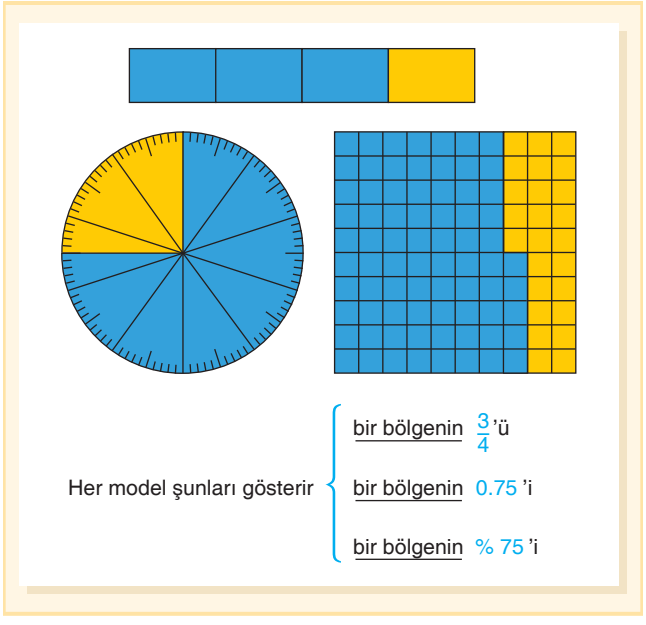
Şekil 17.11 Bir ondalık sayı doğrusu

veya yüzde 75'i ile aynıdır. Böylece yüzde, sadece yeni bir gösterim ve terminolojidir, yeni bir kavram değildir.

NAEP testlerinin ve daha birçok başka çalışmanın sonuçları, öğrencilerin yüzdeler içeren problemlerde sürekli olarak zorlandıklarını göstermiştir (Wearne ve Kouba, 2000). Örneğin, 2005 NAEP'te, sekizinci sınıfların sadece yüzde 37'si, verilen bir artış yüzdesinden sonra elde edilen yeni miktarı belirleyebilmiştir. Öğrencilerin çoğu, asıl miktara yüzdenin kendisi eklenerek elde edilen cevabı seçmiştir. Yani öğrenciler, yüzde 10'luk bir artış için asıl miktardan 10 daha fazla olan cevabı işaretlemiştir. Akşam yemeğini yiyenlerin bıraktığı bahşişin miktarı ve yemeğin fiyatı verildiği zaman, öğrencilerin sadece % 30'u bahşiş yüzdesini doğru biçimde hesaplayabilmiştir. Bu daimi kötü performans için bir neden, yüzde kavramlarını anlamlı bir şekilde geliştirmedeki başarısızlıktır. Bu kitapta, yüzdeyi iki kez incelemekteyiz. Burada; yüzdeleri, kesirlerle ve ondalık sayılarla ilişkilendireceğiz. Bölüm 18'de ise yüzdeleri, orantısal akıl yürütme çalışmasının bir parçası olarak bir oran şeklinde yeniden ele alacağız.

Modeller ve Terminoloji

Şekil 17.12'de gösterildiği gibi modeller, kesirler, ondalık sayılar ve yüzdeler arasındaki temel ilişkiyi sağlar (bkz. Çalışma Yaprak Seti 27 ve 28). On-tabanlı kesir modellerinin hepsi aynı fikri temsil ettiklerinden kesirler, ondalık sayılar ve yüzdeler için uygundur. Öğrenciler on-tabanlı modelleri, ondalık sayılar için kullandıkları şekilde yüzdeler için de kullanmalıdır. Kenarları etrafında 100 parça olarak işaretlenmiş disk (Şekil 17.1), yüzde-birler için bir kesir modeli olduğu gibi artık yüzdeler için de bir modeldir. Aynı durum, bir 10 x 10'luk kare için de doğrudur. İçteki her küçük kare, karenin % 1'idir. 10 kare içeren her sıra veya şerit, karenin sadece onda-biri değil aynı zamanda karenin % 10'udur.



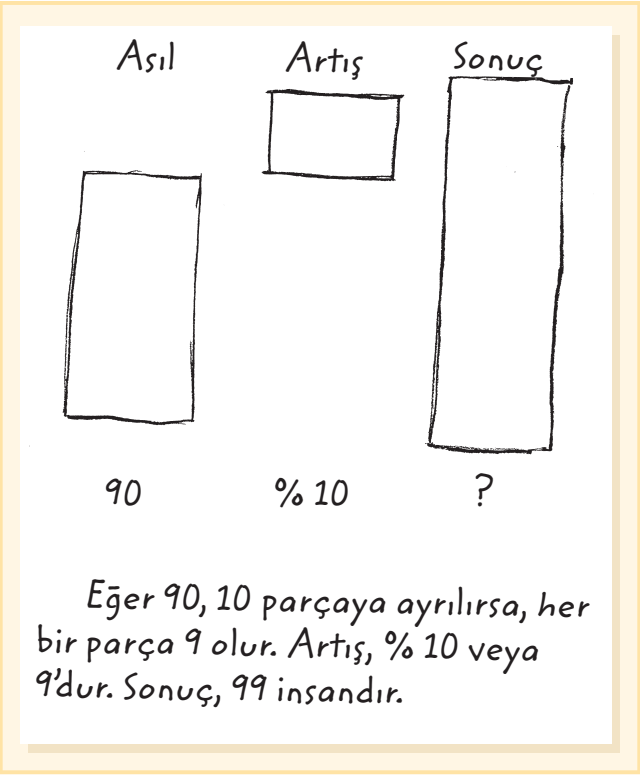
Şekil 17.12 Modeller, üç farklı gösterimi ilişkilendirir.

Zambo (2008), 10x10'luk boş yüzlük kart kullanarak, kesirleri yüzdelerle ilişkilendirmeyi önermiştir. Kart üzerinde her dört karenin birinin işaretlenmesiyle; öğrenciler, $\frac{1}{4}$ ve $\frac{25}{100}$ veya % 25 arasındaki ilişkiyi keşfedebilir. Zambo, $\frac{1}{8}$ gibi daha karmaşık temsillerin, sonuçta 100 karenin $12\frac{1}{2}$'si veya yüzde $12\frac{1}{2}$'si sonucunu veren karelere ilişkin ilginç bir tartışmaya yol açabileceğini de belirtmiştir.

Benzer şekilde; iyi bilinen kesirler (yarım, üçte-bir, dörtte-bir, beşte-bir ve sekizde-birler), ondalıkların yanı sıra yüzdeler bakımından da iyi bilinir olmalıdır. Örneğin; beşte-üç, 0.6 olduğu gibi aynı zamanda yüzde 60'dır. Bir miktarın üçte-biri, yüzde 33.3333 . . . yerine genellikle $33\frac{1}{3}$ şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde, bir niceliğin $\frac{1}{8}$'i, niceliğin yüzde $12\frac{1}{2}$'si veya yüzde 12.5'idir. Bu fikirler, ondalık noktaları kaydırmakla ilgili kurallar yerine on-tabanlı modellerle incelenmelidir.

Veri toplama ile yüzdeleri ilişkilendirmek için kullanılabilen bir temsil, yüzlük kolyedir. Bir balık tutma ipi/misina veya başka kuvvetli bir sicim kullanarak, 100 boncuk ve düğümü, dairesel bir kolyede gergin bir şekilde diziniz. Yüzlük kolye, sınıfta bir daire grafiği oluşturulması veya incelenmesi gerektiğinde, istenen yüzdeler hakkında düşünmeye yardımcı olabilecek bir tahmin aracı olarak kullanılabilir. Verilen herhangi bir dairesel grafik için; örneğin, Sayfa 445'teki Şekil 21.8 gibi kolyeyi, dairesel grafiğin dış kenarları ile hizalamaya çalışmak yerine, kolyeyi daire haline getirerek merkezinin daire grafiğinin merkezi ile çakışması sağlanır. Eğer kolye, eş merkezli geniş bir daire yaparsa o zaman öğrenciler, kolyeyi tam olarak denk getirmek için farklı kategorileri ayırt ederek doğruları genişletmek için bir cetvel kullanabilir. Şekil 21.8'de olduğu gibi eğer daire, kolyeden daha büyük ise kategorileri işaretlemek için merkez ile daire üzerindeki noktaları birleştiren mevcut doğrular kullanılır. Öğrencilerden, dairenin bir noktasını temsil eden verilen herhangi iki doğru arasındaki boncukların sayısını incelemelerini isteyiniz. Örneğin öğrenciler, kaç öğrencinin favori renk olarak maviyi sevdiğini gösteren dairesel grafiğin ilgili kısmında 24 boncuğun olduğunu bulabilir. Bu, öğrencilerin yaklaşık yüzde 24'ünün favori renginin mavi olduğunun bir tahminidir. Boncukların sayımı, yüzde-bir kavramına ilişkin düşünmek için anlamlı bir modeli incelerken aynı zamanda öğrenciler için yüzdeyi tahmin etmeye yönelik informel bir yaklaşım da sunar.

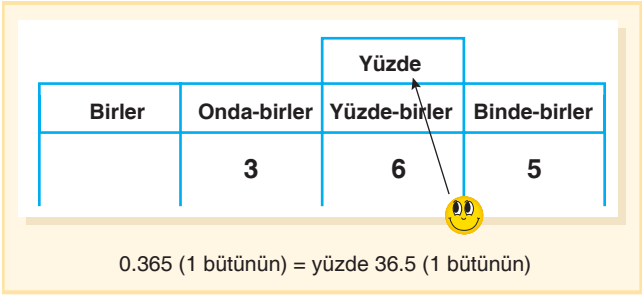
Yüzde kavramları, orantısal düşünmeyle ilişkili başka güçlü görsel temsiller aracılığıyla geliştirilebilir. Bir seçenek, asıl miktarı, azalma/ artış ve son miktarı temsil etmek için üç-parçalı bir modeli kullanmaktır (Parker, 2004). Pozisyonunun ayarlanabildiği veya bölünebilen üç dikdörtgeni kullanarak öğrenciler, modelin her bir parçasını göz önüne alabilir ve bileşenleri analiz edebilir. Dikdörtgenler özellikle daha önce de bahsedildiği gibi (bir şirketteki iş gücünün önceki yüzde 90 düzeyinin üstünden yüzde 10 artış elde edilmesi için kaç işçinin çalıştığının hesaplanmasının öğrencilerden istendiği NAEP 2005 sorusundaki gibi), asıl



Şekil 17.13 Yüzdeler hakkında akıl yürütme için bir orantısal model

miktardan daha büyük bir miktarı bulmak için yüzde artışını içeren karışık problemler için genellikle kullanışlı bir temsildir. Bir öğrencinin doğru bir çözümü elde etmek için bu orantısal modeli nasıl kullandığını Şekil 17.13'te görebilirsiniz. Yüzdeler hakkında düşünmek için orantısal modelin kullanımı, orantısal akıl yürütmeyle ilgili bir sonraki bölümde yeniden ele alınacaktır.

Yüzde terminolojisine yönelik faydalı başka bir yaklaşım, ondalık noktanın rolüne dayanmaktadır. Ondalık noktanın, birimleri belirlediğini hatırlayınız. Birim, birlik olduğunda, 0.659 gibi bir sayı, birin 6 tane onda-birinden biraz daha fazlasını ifade eder. *Birler* kelimesi (*bir* 1'in 6 tane onda-biri veya bir *bütün* olarak) anlaşılmıştır. Ancak 0.659, hem 6.59 onda-birlik hem 65.9 yüzde-birlik hem de 659 binde-birliktir. Birimin ismi, ya açık bir şekilde belirlenmeli ya da birim, ondalık noktanın her bir pozisyonuna göre değişmelidir. Madem *yüzde*, yüzde-birlik için diğer bir isimlendirmedir o zaman ondalık nokta, yüzde-bir kısmını birim olarak belirlediği zaman *yüzde* kelimesi, yüzde-bir için bir eş anlamlı kelime olarak kullanılabilir. Böylece (1'in veya bir bütünün) 0.659'u, aynı bütünün 65.9 tane yüzde-biri veya yüzde 65.9'dur. Şekil 17.14'te gösterildiği gibi, *yüzde yerini belirlemek için* ondalık noktayı yerleştirme fikri, görünürdeki keyfi kuraldan kavramsal olarak daha anlamlıdır: "Bir ondalık sayıyı, yüzdeye dönüştürmek için ondalık noktayı iki basamak sağa kaydırınız." Daha kavramsal odaklı olan bir fikir; yüzdeyi, yüzde-birle hem sözel hem de gösterim olarak eşitlemektir.



Şekil 17.14 Yüzde-birler, yüzdeler olarak da bilinir.

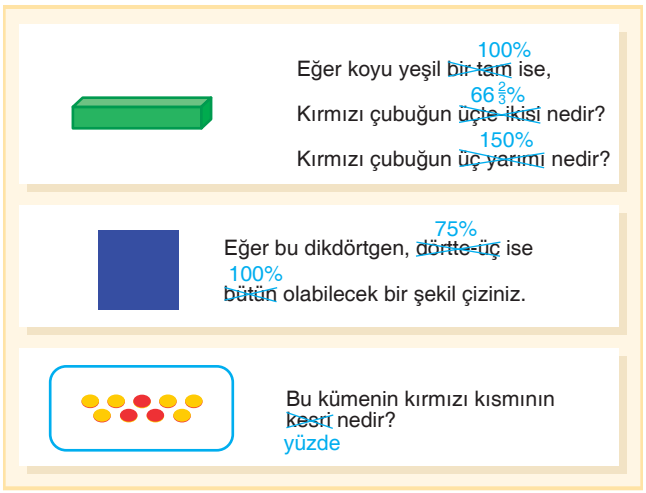
Gerçekçi Yüzde Problemleri

Bazı ortaokul öğretmenleri, "üç yüzde problemi" hakkında konuşabilir. "_____'in yüzde_____'i, _____'dir." cümlesi, sayılar için üç boşluğa sahiptir; örneğin, "80'in yüzde 25'i, 20'dir.". Klasik üç yüzde problemi, bu kısır ifadeden gelir; sayıların ikisi verilir ve öğrencilerden üçüncü sayıyı bulmaları istenir. Öğrenciler, verilen iki sayıyı ya çarpmayı ya bölmeyi, bazen de ondalık noktayı kaydırmak gerektiğini çok hızlı bir şekilde öğrenir. Ancak öğrenciler, ne zaman ne yapacaklarını, hangi sayılara böleceklerini veya ondalık noktanın yerini hangi yöne doğru kaydıracaklarını belirlemenin bir yöntemine sahip değildir. Bunun bir sonucu olarak, yüzde problemlerindeki performans çok kötüdür. Üstelik, yüzde terminolojisini kullanırken yaygın olarak karşılaşılan satış rakamları, vergiler, nüfus sayımı verileri, politikaya ait bilgiler ve ekonomideki eğilimler, neredeyse hiçbir zaman "_____'nin yüzde _____'i, _____'dir." biçiminde değildir. Bu nedenle, günlük hayata yönelik bir yüzde probleminin çözümü istendiği zaman, öğrenciler genellikle ne yapacaklarını şaşırırlar.

Bölüm 15 (parça, bütün veya kesir gibi), bir öğenin bilinmediği üç çeşit kesir alıştırmasını incelemişti. Öğrenciler, üç yüzde problemiyle aslında aynı olan bu alıştırmalarda, modeller ve basit kesir ilişkilerini kullanmıştır. Gelişimsel bakımdan; öğrencilere, yüzdelerle yapılan alıştırmalar ve kesirlerle yapılan alıştırmalar arasında bağlantı kurmaları için yardımcı olmak mantıklıdır. Ama nasıl? Modellerin aynı çeşitlerini ve parça, bütün ve kesirlerin aynı terminolojisini kullanınız. Farklı olan tek husus, *kesir* kelimesi yerine *yüzde* kelimesi kullanılmıştır. Şekil 17.15'te, üç adet parça bütün-kesir alıştırmaları, kesirler ve yüzdeler arasındaki bağlantıyı göstermektedir.

Yüzdelerin Öğretimi. Öğrencilerin, Şekil 17.15'teki bağlamsal olmayan durumlarla ilgili biraz deneyime sahip olmaları gerekmesine rağmen, gerçek bağlamlardaki yüzde ilişkilerini incelemelerini sağlamak önemlidir. Yüzde problemleri bulunuz veya oluşturunuz ve onları, gazete, televizyon ve başka gerçek bağlamlarda göründüğü gibi aynı şekilde sununuz. Günlük hayat problemlerine ve biçimlerine ek olarak, yüzdeleri öğretirken şu kuralları izleyiniz:

- Yüzdeleri, aynı şeyin iyi bilinen kesirlerle (yarım, üçte-bir, dörtte-bir, beşte-bir ve sekizde-bir) veya kolay yüz-



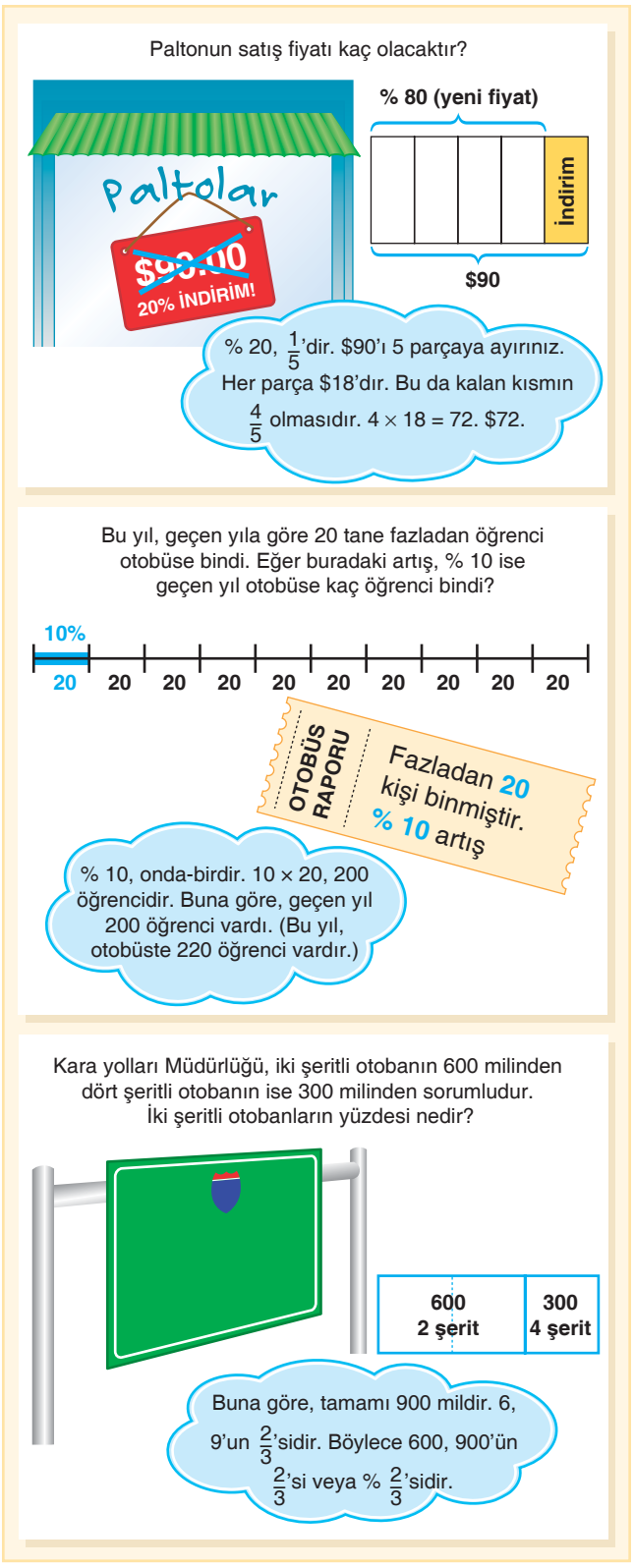
Şekil 17.15 Parça-bütün şeklindeki kesir alıştırmaları, yüzde alıştırmalarına dönüştürülebilir.

delerle ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$) sınırlandırınız ve bu kesirlerle uyuşan sayılar kullanınız. Bu alıştırmaların odağı, içerdiği ilişkilendirmelerdir, karmaşık hesaplama becerileri değildir.

- Farklı problem çeşitleri için, herhangi bir kural veya işlem önermeyiniz. Problem çeşitlerini isimlendirmeyiniz ve sınıflandırmayınız.
- *Parça*, *bütün ve yüzde* (veya *kesir*) terimlerini kullanınız. *Kesir* ve *yüzde*, birbiriyle değiştirebilir. Öğrencilere; bu yüzde alıştırmalarını, basit kesirlerle yaptıkları alıştırmaların benzerleri gibi görmelerinde yardımcı olunuz.
- Öğrencilerden, çözümlerini açıklamaları için modeller kullanmalarını ve çizimler yapmalarını isteyiniz. Bir çizim ve açıklama gerektiren üç problemi görev olarak vermek, sadece hesaplama ve cevap gerektiren 15 problemi vermekten daha akıllı bir yaklaşımdır. Amacın; hesap becerileri değil, ilişkilerin keşfedilmesi olduğunu hatırlayınız.
- Zihinden hesaplamaya yönlendiriniz.

Aşağıdaki örnek problemler, iyi bilinen kesirler ve uyumlu sayılar için bu özellikleri sağlamaktadır. Her problemi, her sayıyı bir parça, bir bütün veya bir kesir olarak belirleyerek çalışmayı deneyiniz. Düşünme süreciniz sırasında çalışırken veya açıklama yaparken uzunluk veya alan modelleri çiziniz. Bu informel akıl yürütmenin örnekleri, Şekil 17.16'da ek problemlerle verilmiştir.

1. **Veli-Öğrenci-Yönetici (VÖY) toplantısı, ailelerin toplam sayısının yüzde 75'inin dün akşam yapılan toplantıda temsil edildiğini rapor etti. Eğer, 320 ailenin çocuğu okula gidiyor ise o zaman toplantıda kaç tanesi temsil edilmiştir?**
2. **Beyzbol takımı, bu yıl oynadığı 25 maçın yüzde 80'ini kazandı. Kaç maç kaybedildi?**
3. **Bayan Carter'ın sınıfında, 20 öğrenci veya yüzde $66\frac{2}{3}$ 'si onur listesindeydi. Bayan Carter'ın sınıfında kaç öğrenci vardır?**



Şekil 17.16 Gerçek yüzde problemleriyle uyuşan sayılar. Basit çizimler, akıl yürütmeye yardım eder.

4. **Zane, yeni bilgisayarını yüzde $12\frac{1}{2}$'lik bir indirimle satın aldı. $700 ödedi. Bilgisayarı, indirimli alarak kaç dolar tasarruf etti?**
5. **Eğer Nicolas, kütüphanesindeki 180 sayfalık kitabın 60 sayfasını okudu ise şu ana kadar kitabın yüzde kaçını okumuştur?**
6. **Bir bilgisayar mağazası, tanesini 80 kuruştan/sentten satın aldığı grafik bileşenleri/widgetsleri, $1'dan satmıştır. Mağaza, her parçanın fiyatını yüzde kaç arttırdı?**

Durup Düşün!

Şekil 17.16'da verilen örnekleri inceleyiniz. Her problemin, basit kesirlerle ve zihinsel matematikle nasıl çözüldüğünü gözlemleyiniz. Sonra, listelenen altı problemin her biri üzerinde çalışınız. Her biri, bilinen kesir denkliklerinin kullanımıyla zihinden ve kolaylıkla yapılabilir. Öğrencilerinizin kullanabileceğini düşündüğünüz bir model veya çizimden yararlanınız.



Gerçek hayatla ilişkilendirilmiş yüzde problemleri, öğrencilerin yüzde kavramını nasıl anladıklarını değerlendirmek için hâlâ en iyi yoldur. Bir veya iki öğrenci seçiniz ve öğrencilerden cevaplarının niçin mantıklı olduğunu düşündüklerini açıklamalarını isteyiniz. Gerçek hayatla ilişkili bir yüzde problemi alabilir ve yüzdeler ile kesirler karşılaştırıldığında, öğrencilerin bu tip problemleri nasıl ele aldığını görmek için yüzdeler yerine kesirleri (örneğin, yüzde 12.5'un yerine $\frac{1}{8}$ kesrini alınız) kullanabilirsiniz.

Eğer odak noktanız, doğru cevap verilen problemlerin sayısından ziyade nedenler ve gerekçelendirmeler üzerine olursa o zaman ihtiyacınız olan bütün değerlendirme bilgisini toplayabilirsiniz. ◆

Tahmin

Elbette, gerçek hayatla ilişkili yüzde problemlerinin hepsi, uygun sayılar içermez. Günlük yaşamda genellikle, yüzde durumlarında bir yaklaşık değer veya bir tahmin istenilmekte veya birisine durum hakkında düşünmesine yardımcı olmak için bu yeterli görülmektedir. Eğer kesin bir cevabı elde etmek için bir hesap makinesi kullanılacaksa bile, ilişkinin bir şekilde anlaşıldığına dayanarak yapılan bir tahmin, doğru işlemin yapıldığını veya ondalık noktanın doğru bir şekilde yerleştirildiğini doğrulayabilir.

Yüzde durumlarındaki tahminle öğrencilere yardımcı olmak için, daha önce tartışılan iki fikir uygulanabilir. Birincisi; yüzdenin "uygun" bir sayı olmadığı durumda, çalışılması kolay yakın bir yüzdeyi bunun yerine almaktır. İkincisi, hesaplamayı zihinden kolay yapmak için ilgili yüzde ile kolay işlem yapılabilen sayıları seçmektir. Aslında burada, kolay işlem yapılamayan yüzde problemi, kolay işlem yapılabilen hâle dönüştürülmektedir. Birkaç örnek:

1. **83.000 koltuk kapasiteli bir stadyumun, yüzde 73'ü doludur. Oyunda kaç kişi vardır?**
2. **Veznedar, harçların yüzde 68.3'ünün (toplam $385) toplandığını rapor etti. Eğer bütün harçlar ödenirse, kulüp kaç dolar daha toplayabilir?**
3. **Max McStrike, 842 vuruşta 217 isabet sağladı. Vuruş ortalaması neydi?**

Durup Düşün!

Bu son üç problemin her birinin çözümünü tahmin etmek için uygun kesirleri ve uyumlu sayıları kullanınız. Okumaya devam etmeden önce bunu yapınız.

Olası Tahminler

1. ($\frac{3}{4}$ ve 80,000'i kullanınız) ⟶ yaklaşık 60,000
2. ($\frac{2}{3}$ ve $380'ı kullanınız; $\frac{1}{3}$ daha fazla toplayacak) ⟶ yaklaşık $190
3. ($4 \times 217 > 842$; $\frac{1}{4}$, yüzde 25 veya 0.250'dir.) ⟶ 0.250'den biraz fazla

Burada, iki sayı kümesinin bulunduğu üç tane daha yüzde problemi vardır. Kümedeki ilk sayı, kesir denkliklerini kullanarak zihinden çalışmaya imkân veren bir uygun sayıdır. İkinci sayı, son etkinlikteki gibi bir tahmine izin vererek yerine yaklaşık bir değeri koymayı gerektirmektedir.

1. Okul {480, 547} öğrenciyi kayıt etmiştir. Dün, öğrencilerin {yüzde $12\frac{1}{2}$ 'si, yüzde 13'si } yoktu. Kaç öğrenci okula gelmiştir?
2. Bay Carver, çim biçme makinesini {$45, $89}'a sattı. Bu fiyat, bay Carver'ın makineyi alırken ödediği paranın {yüzde 60'ı, yüzde 62'si} idi. Bay Carver, çim biçme makinesine ne kadar ödemiştir?
3. Kutu, raftan düştüğünde {720, 500} grafik bileşenlerinin/widgetin {90'ı, 63'ü} kırıldı. Kırılma sonucunda grafik bileşenlerindeki/widgetlerdeki kayıp yüzde kaçtır?

İlk problem, bir parçayı (bütün ve kesir verilmiş), ikinci problem bir bütünü (parça ve kesir verilmiş) ve üçüncü problem ise bir kesri (parça ve bütün verilmiş) sormaktadır.

Basit on-tabanlı denklikleri kullanmak bazen uygundur: Yüzde 1, yüzde 10 ve bunların katları (yarımlar dâhil). Örneğin, bir lokantada yüzde 15 bahşişi hesaplamak için, genellikle yüzde 10 artı yüzde 10'un yarısını kullanırız. Yüzde 0.5'i bulmak için yüzde 1'in yarısını düşünebiliriz.

Gerçek dünya bağlamlarında, yüzdelerin tahmini için birkaç kural vardır. Öğrenciler, kavramsal anlama ve esneklik kazandıkça, alışveriş yaparken veya yüzdelikler hakkında düşünmeyi gerektiren durumlarda kullanışlı olan yüzdeler hakkında düşünme yolları ön plana çıkar. Daha öncede bahsedildiği gibi, bir bahşişi hesaplamak için ilk önce miktarın yüzde 10'unu bulur, sonra yüzde 15'i elde etmek için bulunan miktara, yüzde 10'un yarısını ekleyebilirsiniz. Aynı

yaklaşım, satış vergisine eklemeler için de kullanılmaktadır. Miktarınıza bağlı olarak, yüzde 10'u bulabilir, bunun yarısını alabilir ve sonra yüzde 1'i bulur ve gerekirse bu miktarı ekler veya çıkarırsınız. Bununla birlikte, başka yaklaşımları da teşvik edebilirsiniz. Birincisi; öğrenciler, yüzde bulmanın bir çarpma işlemi olduğunu fark etmelidir. Bu nedenle, 16'nın yüzde 50'sini bulmak, 50'nin yüzde 16'sını bulmakla aynı sonucu üretecektir. Bu, "bir soruyla uğraştığınızda" önemli bir tahmin aracıdır. Aynı zamanda, yüzde 30'luk bir azalma asıl miktarın yüzde 70'i ile aynıdır ve bazen asıl miktara bağlı olarak bu yüzdelerden birinin diğerine göre kullanımı, zihinden hesaplamalarda kullanım için daha kolaydır. Bir kez daha söylemek gerekirse, bunlar işinize yarayacak şekilde yüzde kavramlarının tam olarak anlaşılıp kullanılmasından başka bir şey değildir.

Ondalık Sayılarla Hesaplama

Şüphesiz, öğrenciler ondalık sayılarla işlem yaparken hesaplama akıcılığını geliştirmelidir. Geçmişte, ondalık hesaplama aşağıdaki kurallarla yapılmaktaydı: Ondalık noktaları sıralamak (toplama ve çıkarma), ondalık basamakları saymak (çarpma), bölenin doğal sayı olması için (bölme), bölen ve bölünende ondalık noktayı kaydırmaktır. Bazı ders kitapları, bu kuralları vurgulamaya devam etmektedir. Bu kitapta ve standartlara dayalı öğretim programının bir kısmında takınılan tavır, özellikle de eğer hesaplama, basamak değerinin sağlam bir anlayışı ve ondalık sayılarla kesirler arasındaki bir bağlantının kurulması üzerine inşa edilmiş ise ondalık hesaplama için belirli kuralların gerçekten gerekli olmadığı üzerinedir.

NCTM Standartları

3–5. sınıf düzeylerinde; *Standartlar*; "öğrencilerin deneyimleriyle ilgili durumlarda, kesirleri ve ondalık sayıları içeren hesaplamaları tahmin etmek için stratejiler geliştirmeleri ve kullanmaları gerektiğini" (s. 148) ifade etmektedir. 6–8. sınıf düzeylerinde ise öğrenciler, "ondalık sayılar ve kesirlerle hesaplama yapmak için duruma göre, zihinden hesaplama, tahmin etme, hesap makinesi veya bilgisayar ve kağıt-kalemle yapılan işlemler arasından uygun yöntem ve araçları seçerler" (s. 214) denmektedir. ◆

Tahminin Rolü

Öğrenciler, kağıt-kalemle hesaplama yapmayı öğrenmeden önce ondalık hesaplamaları tahmin etmede usta olmalıdır. Çoğu ondalık hesaplama için; kaba tahminler, sayıları uygun doğal sayılara veya basit on-tabanlı kesirlere yuvarlayarak kolayca yapılabilir. Öğrencileriniz için asgari bir amaç; tahminin, ondalık sayının solundaki kısmın (doğal sayı kısmı) basamakların doğru sayısını içermesini sağlamak olmalıdır. Öğretiminize, tahminlerin çok zor olmadığı problemleri seçerek başlayınız.

Durup Düşün!

Devam etmeden önce, aşağıdaki hesaplamaların doğal sayı tahminlerini yapmayı deneyiniz. Hassas tahminlerde bulunmak için zaman harcamayınız.

1. **4.907 + 123.01 + 56.1234**
2. **459.8 − 12.345**
3. **24.67 × 1.84**
4. **514.67 ÷ 3.59**

Tahminleriniz, aşağıdaki aralıklarda olabilir:

1. 175 ve 200 arasında
2. 400'den fazla veya yaklaşık 425-450 arası
3. 25'den fazla, 50'ye yakın (1.84, 1'den fazladır ve 2'ye daha yakındır)
4. 125'ten fazla, 200'den az (500 ÷ 4 = 125 ve 600 ÷ 3 = 200)

Bu örneklerde, ondalık sayı gösterimine yönelik bir anlayış ve bazı basit doğal sayı tahmin becerileri, kabaca yapılmış tahminler üretebilir. Tahmin yaparken, ondalık basamakların sayımı üzerine değil, işlemlerin ve sayıların anlamlarına odaklanılır. Fakat, ondalık sayı hesaplaması için kağıt-kalem kullanarak geliştirilen kurallar üzerine odaklanmaları öğretilen öğrenciler, bırakın az da olsa tahmin etmeyi, sayıların gerçek değerlerini bile dikkate almazlar.

Bu nedenle tahmin, ondalık sayı hesaplamasına başlamak için iyi bir *başlangıç noktasıdır*. Bu, sadece yüksek düzeyde bir uygulama becerisi değil aynı zamanda çocuklara, cevaplarına mantıklı bir aralıkta bakmaları için de yardımcı olur ve hesap makinesiyle kontrol de yapmalarına da imkân verir.

Ondalık sayılarla hesaplamaya başlamak için en uygun *zaman*, ondalık sayı gösteriminde kavramsal bir zeminin geliştirildiği andır. Ondalık sayı hesaplamasında kurallar gösterilen ve bu kuralları (özellikle çarpma ve bölme ile ilgili olanları) kullanan yedinci ve sekizinci sınıf öğrencileri için bile tahmin etmeyi vurgulamak çok önemlidir. Ondalık sayılar için tamamen kurallara dayalı işlem yapan çoğu öğrenci, sayı hissini kullanmadıkları için farkına varmadan hatalar yapar.

Toplama ve Çıkarma

Aşağıdaki problemi göz önüne alınız:

Jessica ve MacKenna'nın her biri, kendi çeyrek-millik koşularının süresini bir kronometreyle ölçtü. Jessica, kendi çeyreğini 74.5 saniyede koştuğunu söyledi. MacKenna, daha kesin ölçüm yaptı ve koşusunu 81.34 saniye olarak belirtti. Jessica, MacKenna'dan kaç saniye daha hızlı koşmuştur?

Ondalık gösterimi anlayan öğrenciler, ilk önce farkın ne olduğunu (yaklaşık olarak 7 saniyeye yakın) söyleyebilmelidir. Öğrenciler, başlangıçta bir tahminle başlayıp daha sonra kesin farkı bulmaya çalışmalıdır. Tahmin, öğrencilere 4'ün altına 5'in konulması şeklindeki ortak hatadan sakınmalarında yardımcı olacaktır. Çeşitli öğrenci stratejileri mümkündür. Örneğin öğrenciler, 74.5 ve 7'nin 81.5 ettiğini gösterebilir ve sonra bu sonucun ne kadar fazla olduğunu hesaplayabilir. Diğerleri, 74.5'e 0.5 ekleyerek sayabilir, 81 saniyeye ulaşmak için 6 saniye daha ekler ve sonra kalan 0.34 saniyeyi ilave eder. Bu ve başka stratejiler, nihayetinde öğrencileri 0.5 ve 0.34 arasındaki farkla yüzleştirecektir. Öğrenciler, bu sorunu basamak değeri anlayışlarına geri dönerek çözebilirler. Toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren (bir kısmı farklı sayıda ondalık basamak içeren) hikâyeye dayalı benzer problemler, öğrencilere bu iki işleme yönelik bir anlayış geliştirmelerinde yardımcı olacaktır. Hesaplamadan önce daima bir tahmin isteyiniz.

Öğrenciler hikâyeye dayalı toplama ve çıkarma problemlerini çözmek için birkaç fırsata sahip olduktan sonra, aşağıdaki etkinliğin sunumu uygundur.

Etkinlik 17.11

Kesin Toplamlar ve Farklar

Öğrencilere, farklı sayıda ondalık basamakları olan sayıları içeren bir toplam veriniz. Örneğin, 73.46 + 6.2 + 0.582. Birinci görev, bir tahmin yapmak ve tahminin nasıl yapıldığını açıklamaktır. İkinci görev, kesin cevabı hesaplamak ve nasıl yapıldığını açıklamaktır (hesap makinesi kullanmadan). Üçüncü ve son görevde ise öğrenciler, herhangi iki sayıyla kullanılabilecekleri ondalık sayıları toplamak ve çıkarmak için bir yöntem tasarlayacaktır.

Öğrenciler bu üç görevi tamamladıkları zaman, onlardan hesaplama stratejilerini paylaşmalarını isteyiniz ve verdiğiniz yeni bir hesaplama ile onları test ediniz.

Aynı görev, çıkarma için de tekrarlanabilir.

Önceki tahmin pratikleri, öğrencilerin dikkatini sayıların anlamları üzerine odaklayacaktır. Öğrencilerin, ilişkilendirme yapmak için ondalık sayıları, paydası aynı kesirler olarak yeniden yazmayı düşünebileceklerini de hatırlayınız. Öğrencilerin, ondalık noktaları esas itibarıyla aynı sıraya getirerek bir algoritma geliştirmelerini beklemek mantıklıdır.



Eğer öğrenciler, Etkinlik 17.11 ile bir zorluk yaşarlarsa bu, öğrencilerin ondalık sayı kavramlarını ve ondalık noktanın rolünü anlamada zayıf kaldıklarına işaret etmektedir. Bu durum, daha önceki bir sınıf düzeyinde öğrendikleri bir kuralı kullanarak doğru bir toplam elde etmiş fakat bunları açıklamada zorlanan öğrenciler için bile doğrudur. Ondalık sayılarda toplama veya çıkarmanın nasıl yapılacağına odaklanmaktan ziyade bölümde daha önce de tartışıldığı gibi, dikkatinizi ondalık sayı kavramları üzerine yoğunlaştırınız veya kaydırınız. ◆

Çarpma

Tahmin, çarpma için bir algoritma geliştirmede önemli bir rol oynamalıdır. Bir başlangıç noktası olarak, aşağıdaki problemi ele alınız:

Çiftçi, her kabı 3.7 litre elma suyuyla dolduruyor. Eğer, 4 kap satın alırsanız bu kaç litre elma suyu eder?

Bir tahminle başlayınız. 12 litreden fazla mıdır? En fazla ne olabilir? 16 litre olabilir mi? Tahmini bir sonuca karar verildikten sonra, öğrencilerin kesin bir cevap belirlemeleri için kendi yöntemlerini kullanmalarına izin veriniz. Çoğu öğrenci, tekrarlı toplamayı kullanacaktır: 3.7 + 3.7 + 3.7 + 3.7. Başkaları, 3 × 4'ün çarpımıyla başlayabilir ve sonra dört defa 0.7 ekleyebilir. Nihayetinde öğrenciler, 14.8 litrenin kesin sonuç olduğunda uzlaşacaktır. Doğal sayı çarpanları içeren başka problemleri de inceleyiniz. 3.5 veya 8.25 gibi uygun kesir kısımları içeren (burada yarım ve çeyrek) çarpanlar da mantıklıdır.

Bir sonraki adımda, öğrencilerden bir ondalık çarpım ile aynı sayıları içeren fakat ondalık olmayan çarpımı karşılaştırmalarını isteyiniz. Örneğin, 23.4 × 6.5 ile 234 × 65 nasıl benzerdir? İlginç bir şekilde, iki çarpım da tamamen aynı rakamlara sahiptir: 15210 (ondalık çarpımda sıfır eksik olabilir). Bir hesap makinesi kullanarak; öğrencilerden, içerdiği ondalık sayıların yeri hariç birbirine benzeyen başka çarpımları araştırmalarını isteyiniz. Cevaptaki sayılar, daima benzerdir. Bu ilişkili çarpımlar için sayıların nasıl aynı kaldığını gördükten sonra aşağıdaki etkinliği yapınız.

Etkinlik 17.12

Ondalık Noktanın Yeri Neresidir?: Çarpma

Öğrencilerden şu çarpımı hesaplamalarını isteyiniz: 24 × 63. Sadece bu hesaplamanın sonucunu kullanarak ve tahmin yaparak, öğrencilerden aşağıdakilerin her biri için kesin cevap vermelerini isteyiniz:

0.24 × 6.3 24 × 0.63 2.4 × 63 0.24 × 0.63

Her bir hesaplama için; öğrenciler, her cevaptaki ondalık noktanın yerini nasıl belirlediklerine yönelik bir gerekçe yazmalıdır. Cevaplarını, bir hesap makinesiyle kontrol edebilirler. Hatalar kabul edilmeli ve yapılan hatanın düzeltilmesi gerekçelendirilmelidir.



Durup Düşün!

24 × 63 çarpımı, 1512'dir. Bu bilgiyi, önceki etkinlikteki çarpımların her birine cevap vermek için kullanınız. Ondalık basamakları saymayınız. Kesir denkliklerinizi hatırlayınız.

Tahmin yoluyla bir çarpımda ondalık noktayı yerleştirme yöntemi, çarpım küçüldükçe daha da zorlaşır. Örneğin, 54 × 83'ün 4482 olduğunu bilmek, 0.0054 × 0.00083 çarpımında ondalık noktayı yerleştirmeyi kolaylaştırmaz. Hatta 0.054 x 0.83 çarpımı bile zordur. *Çarpma için makul bir algoritma: Ondalık noktaları ihmal ediniz ve hesaplamayı bütün sayıları, doğal sayıymış gibi düşünerek yapınız. Hesaplama bittikten sonra, ondalık noktayı tahmini olarak yerleştiriniz.* Geleneksel algoritmaları öğrenmiş olsalar bile, öğrencilerin ondalık basamakları değiştirme ve "sayma" için 10'un kuvveti ve basamak değeri üzerine kurulan kavramsal gerekçeleri bilmeye ihtiyaçları vardır. Kuralların ezbere uygulamaları üzerine odaklanmayla, öğrenciler işlemlerin etkilerini ve anlamlarını anlamak için fırsatları vurgulayan yaklaşımlarda başarısızlığa uğrar ve işlemleri yanlış uygulamaya daha fazla eğilimli olurlar (Martinie ve Bay-Williams, 2003).



Aşağıdaki gibi sorular, sayı hissi üzerine odaklanacak ve öğrencilerinizin anlayışlarına yönelik sizlere faydalı bilgiler sağlayacaktır.

1. Şu iki hesaplamayı ele alınız: $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$ ve 2.276 × 3.18. Hesaplamaları yapmadan, hangi çarpımın daha büyük olduğunu düşünüyorsunuz? Cevabınız için sınıftaki herhangi biri tarafından anlaşılabilecek bir gerekçe sununuz.
2. 0.76 × 5 çarpımı, 0.75 × 5 çarpımından ne kadar büyüktür? Hesaplamayı yapmadan nasıl söyleyebilirsiniz (Kulm, 1994)?

Bu ve benzeri sorular üzerine yapılan öğrenci tartışmaları ve açıklamaları, öğrencilerin ondalık sayı ve kesir sayı hissini kavramalarını ve bu iki temsil arasında ilişkilendirme yapmalarını sağlayabilir.

Bölme

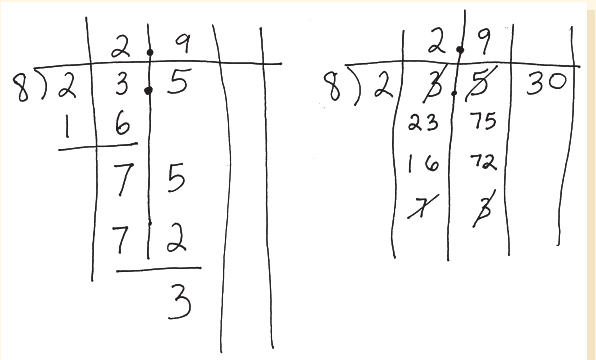
Bölmeye, çarpmaya tamamen paralel bir tarzda yaklaşılabilir. Aslında; bir bölmeyi tahmin için en iyi yaklaşım, genellikle bölmeden ziyade çarpma hakkında düşünmekten geçmektedir. Aşağıdaki problemi düşününüz:

Washington'a yapılacak gezinin mesafesi 282.5 mildir. Washington'a gitmek, tam olarak $4\frac{1}{2}$ veya 4.5 saat almıştır. Saatte ortalama kaç mil yol alınmıştır?

Bu bölmenin bir tahminini yapmak için, kaç kere 4 veya 5'in, 280'e yakın olduğunu düşününüz. 60 x 4.5 = 240 + 30 = 270 şeklinde düşünebilirsiniz. Böylece, saatte yaklaşık 61 veya 62 mil yapılabilir.

Bağlama dayalı olmayan ikinci bir örnek şudur: 45.7 ÷ 1.83 için bir tahmin yapınız. Sadece, kaç tane $1\frac{8}{10}$'in 45'e yakın olduğunu düşününüz.

23.5 ÷ 8



2 onluğu 20 birlik ile değiştiriniz, 23 birlik yapar.
Her gruba 2 birlik veya hepsinde 16 koyunuz.
7 birlik kalır.

7 birliği 70 onda-birlik ile değiştiriniz, 75 onda-birlik yapar. Her grupta 9 onda-birlik veya hepsinde 72 onda-birlik koyunuz. 3 onda-birlik kalır.

3 onda birliği 30 binde-birlik ile değiştiriniz.

(İstediğiniz kadar daha küçük parçalarla değiştirme işlemini devam ettiriniz).

Şekil 17.17 Bölme algoritmasının genişletilmesi



Durup Düşün!

Cevap 45'ten fazla mı yoksa az mı olacaktır? Niçin? Cevap, 20'den fazla mı yoksa az mı olacaktır? Şimdi 1.8'in 2'ye yakınlığını düşününüz. Kaç tane 2, 46'ya yakındır? Bu bilgiyi bir tahminde bulunmak için kullanınız.

1.83, 2'ye yakın olduğundan tahmin, 22'ye yakındır. 1.83, 2'den az olduğu için cevap, 22'den büyük olmalıdır 25 veya 26 olabilir (Gerçek cevap, yaklaşık olarak 24.972677'dir.).

Bu şekilde tahmin, mantıklı bir sonuç üretebilir, fakat çarpma için yapıldığı gibi rakamları üretmek için bir kağıt-kalem algoritmasına hâlâ gerek duyabilirsiniz. Şekil 17.17, bir doğal sayıyla bölmeyi ve bunun istediğiniz kadar çok basamağa nasıl devam ettirilebileceğini göstermektedir (Bölüm 12'de tanımlanan açık-değiş-tokuş yöntemi sağda gösterilmiştir). Ondalık noktayı, bölüm kısmına kaydırmak gerekli değildir. Bu sonuç, tahmin yaparak elde edilebilir.

Etkinlik 17.13

Ondalık Noktanın Yeri Neresidir?: Bölme

Ondalık noktayı yerleştirmeden, cevabı beş basamağa kadar doğru olan 146 ÷ 7 = 20857 gibi bir bölme işlemi veriniz. Görev, sadece bu bilgiyi kullanmak ve takip eden her bir soru için oldukça hassas olan bir tahminde bulunmaktır.

146 ÷ 0.7 1.46 ÷ 7 14.6 ÷ 0.7 1460 ÷ 70

Öğrenciler, her hesaplama için cevaplarına bir gerekçe yazmalı ve sonra bir hesap makinesiyle sonuçlarını kontrol etmelidir. Hatalar kabul edilmeli ve yapılan hatanın düzeltilmesi gerekçelendirilmelidir.

Bölme için makul bir algoritma çarpmaya paraleldir: *Ondalık noktaları ihmal ediniz ve hesaplamayı bütün sayıları, doğal sayıymış gibi düşünerek yapınız. Hesaplama bittikten sonra, ondalık noktayı tahmini olarak yerleştiriniz.* Bu, 1'den büyük veya bilinen bir değere yakın (örneğin, 0.1, 05, 0.01) bölenler için mantıklıdır. Eğer öğrenciler, 45 ile bölmek için bir yönteme sahipseler o zaman 0.45 ve 4.5 ile de bölebilirler.

Bölüm 17 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. Kesirler ve ondalık sayılar için üç farklı on-tabanlı model betimleyiniz ve her birini, on-tabanlı kesirlerin kolay bir şekilde nasıl sunulabileceğini göstermek için kullanınız.
2. Öğrencilerin, milyonlar ve milyarlar gibi çok büyük basamak değerleri hakkında düşünmelerini sağladığımız şekilde, onların binde-bir ve milyonda-bir gibi çok küçük basamak değerleri hakkında da düşünmelerine nasıl yardımcı olabiliriz?
3. Birim yeri belirlemede ondalık noktanın rolünü açıklamak için on-tabanlı parçaları içeren bir örnek kullanınız. Bu fikri, para veya metrik ölçümlerdeki gibi ölçümün birimini değiştirmekle ilişkilendiriniz.
4. Ondalık sayıların toplanması ve çıkarılması için, ondalık noktaları sıralama kuralı, tahmini uygulamalar aracılığıyla makul bir biçimde geliştirilebilir. Açıklayınız.
5. Ondalık sayılarla çarpma ve bölmenin, çoğu problemde, tahmin etme ve doğal sayı yöntemleriyle nasıl yer değiştirebildiğini açıklayan bir örnek veriniz.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Ondalık sayıların bir serisini sıralamanın bir yolu, tüm sayıların aynı ondalık basamak sayısına sahip olması için her bir sayıya sıfırlar eklemektir. Örneğin,

0.34'ü	0.3400
0.3004'ü	0.3004
0.059'u	0.0590

şeklinde yeniden yazınız. Şimdi, ondalık noktaları ve baştaki sıfırları ihmal ediniz ve doğal sayı sonuçlarını sıralayınız. Bu yaklaşımı, çocuklara öğretmenin yararlarını tartışınız. Eğer bu işlem öğretilirse, öğrenciler ondalık gösterim hakkında ne öğrenebilir? Bu sürecin, "mantığa dayanmayan bir kural" olmadığını nasıl garanti edeceksiniz?

Bölüm 17 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Günlük gazetelerde ve haftalık dergilerde, sonsuz sayıda gerçek dünyayla ilişkili ondalık sayı ve yüzde durumları bulacaksınız. Gazetelerde yer alan hikâyelerdeki yüzdelerle ilgili bir sorun, yüzdenin belirlendiği asıl miktarın veya bütünün sıklıkla ihmal edilmesidir. "Video oyunlarının Mart ayı satışlarında, yüzde 3.6 artış olduğu rapor edildi." Bu, Şubat ayı üzerinden veya geçen yılın Mart ayı üzerinden bir artışı mı göstermektedir? Yüzdelerle artış veya azalış, birkaç yıl üzerindeki planlamalar için ilginçtir. Eğer tüketici fiyat endeksi, bir yılda yüzde 3 artarsa, $100 değerindeki bir sepet market alışverişi, öğrencileriniz 21 yaşında olduğunda ne kadar olacaktır?

The Phantom Tollbooth *Juster, 1961*

References to mathematical ideas abound throughout this book about Milo's adventures in Digitopolis, where everything is number-oriented. There, Milo meets a boy who is only half of a boy, appearing in the illustration to be the left half of a boy cut top to bottom. As it turns out, the boy is actually 0.58 since he is a member of the average family: a mother, father, and 2.58 children. The boy is the 0.58. One advantage, he explains, is that he is the only one who can drive the 0.3 of a car—the average family owning 1.3 cars. This section of the tale involves a great discussion of averages that come out in decimal numbers.

An obvious extension of the story is to explore averages of things that are interesting to the students (average number of siblings, average arm span, etc.) and see where these odd decimal fractions come from. In the case of measures of length, for example, an average length can be a real length even if no one has it. But an average number of something like pets can be very humorous.

This same book can be used to develop mathematical concepts such as time (when Milo visits the Doldrums), data collection and analysis through percents (How do students in the class spend their day?), measurement with distances to Digitopolis given in various measures on a chart, and humorous discussions and in some cases misunderstandings of such concepts as infinity and proportional thinking. This book is a gem for use with intermediate and middle grade students.

Piece = Part = Portion: Fraction = Decimal = Percent *Gifford & Thaler, 2008*

Illustrated with vivid photos, this is a beginning look at how fractions relate to corresponding decimals and percents. Written by an elementary classroom teacher, the links between the concepts are drawn through common representations, such as one sneaker representing $\frac{1}{2}$ a pair of shoes, 0.50 in decimal form or 50 percent. Real-world links such as one-seventh of a week and one-eleventh of a soccer team will connect with students. Note that some decimals and percents are rounded. The book is available in English and Spanish.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 399–420.

Irwin's article describes her work with 16 children, ages 11 and 12. The students worked in eight pairs, half of whom solved problems given in contexts. The other four pairs solved the same problems but without contexts. The article is enlightening on a number of fronts, particularly the transcriptions that clearly indicate the students' misconceptions of decimal numeration.

Martinie, S. L., & Bay-Williams, J. (2003). Investigating students' conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(5), 244–247.

This article describes the results of 43 sixth-grade students who were asked to represent 0.6 and 0.06 with four different representations: a number line, a 10 × 10 grid, money, and base-ten materials. The results indicate that students may appear to understand decimals with one model but not with another. The authors make an argument for using multiple models in teaching decimals.

Kitaplar

Albert, L., & McAdam, J. (2007). Making sense of decimal fraction algorithms using base-ten blocks. In W. Gary Martin, Marilyn Strutchens, and Portia Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: Sixty-ninth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 303–315). Reston, VA: NCTM.

This chapter emphasizes the critical need for precise mathematical language in the development of algorithms for multiplying decimal fractions. A classroom example details how teachers can use place-value knowledge and arrays of base-ten blocks to build students' conceptual understanding of decimals. Since the article is about prospective teachers' learning of this material, it is easy to relate to the challenges and connections readers may be experiencing.

Online Kaynaklar

Base Blocks—Decimals
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_264_g_3_t_1.html

Base-ten blocks can be placed on a place-value chart. The number of decimal places can be selected, thus designating any of the four blocks as the unit. Addition and subtraction problems can be created or can be generated randomly.

Circle 3
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_187_g_3_t_1.html

This game challenges students to use logic as they combine decimals to add to 3. Not as easy as it sounds.

Concentration
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=73

This is an engaging matching game using representations of percents, fractions, and a regional model.

Fractions Bar Applet
www.arcytech.org/java/fractions/fractions.html

This applet develops the relationships among fractions, decimals, and percents. Bars for one whole are displayed and can be partitioned according to selected fraction, decimal, or percent values and then labeled in any of these representations. This makes equivalencies easy to explore.

Fraction Model—Version 3
http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=45

The equivalence of fraction, decimal, and percent representations in a circle, set, or rectangle model is demonstrated.

Percentages
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_160_g_3_t_1.html?open=activities

The user enters any two of the values—whole, part, and percent—and clicks on Compute. Although the computer does the work, the applet nicely models percent problems.

Railroad Repair
http://pbskids.org/cyberchase/games/decimals/decimals.html

This fun activity has students repairing a railroad by choosing and combining different sized decimal pieces of railroad tracks to help get Cybertrain back to the station.

Sock
www.interactivestuff.org/sums4fun/sock.html

Click on directional arrows to guide the sphere into pushing the green cubes into holes that contain the decimals that will make the target number.

Bölüm 18

Orantısal Akıl Yürütme

Orantısal akıl yürütme, cebir ve daha sonraki matematik konularının temel taşı ve ilköğretim öğretim programının önemli bir bileşeni olarak görülmektedir (Lesh, Post ve Behr, 1987). Orantısal akıl yürütme, toplamsal ilişkilerden ziyade çarpımsal ilişkileri anlama yeteneğiyle başlar. Orantısal akıl yürütmenin gelişimi, 5- 8. sınıf öğretim programının en önemli amaçlarından biridir.

Orantısal akıl yürütme, bir problemi çözmek için bir orantı kurma fikrinden daha ötelere uzanmaktadır- çarpımsal durumlar hakkında akıl yürütmenin bir yoludur. Aslında orantısal akıl yürütme; matematikte, denklik kavramı gibi birleştirici bir tema olarak değerlendirilir. Bunun kanıtını bu sayfada listelenen öğrenme alanlarının ilişkilendirilmesi sırasında göreceksiniz.

Ana Fikirler

1. Bir oran, iki niceliğin veya ölçümün çarpımsal bir karşılaştırmasıdır. Gelişimsel olarak anahtar bir kilometre taşı; öğrencinin bir oranı, oranı oluşturan iki ölçümden farklı olarak ayrı bir nicelik olarak düşünmeye başlama yeteneğidir.
2. Oran ve orantılar, toplamsal karşılaştırmalardan ziyade çarpımsal karşılaştırmalarla ilgilidir. Eşit oranlar, toplama veya çıkarmanın değil, çarpma veya bölmenin sonucudur.
3. Orantısal düşünme, kurallara veya formüllere başvurmadan çok çeşitli probleme-dayalı bağlam ve durumlardaki oranların denkliğinin belirlenmesi, karşılaştırılması ve orantıların çözülmesini içeren etkinlikler aracılığıyla geliştirilir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Orantısal akıl yürütme, ortaokul ve lise öğretim programlarındaki çok çeşitli temel konuların temel taşıdır.

- **Cebir** (Bölüm 14): Cebirin çoğu, değişimle ilgilenir ve bu nedenle, özellikle birimli değişim oranları[1] (birimsiz oranlar-oranlar) önemlidir. Bu bölümde; denk oranların grafiklerinin orijinden geçen doğrular olduğunu göreceksiniz. Doğrunun eğimi, oranın birimidir.
- **Kesirler** (Bölüm 15): Denk kesirler, pay ve paydanın aynı sayı ile çarpılması veya bölünmesi şeklindeki çarpmaya dayalı bir işlem aracılığıyla bulunur. Denk oranlar da aynı şekilde bulunabilir. Aslında; parça-bütün ilişkileri (kesirler) oranın bir örneğidir. Kesirler, oranları temsil etmenin başlıca yöntemlerinden de biridir.
- **Yüzdeler** (Bölüm 17): Yüzdeler, 100 üzerinden düşünülen miktarı belirlemenin bir yoludur. Bu, bir parça-bütün oranıdır. Örneğin; yüzde 65'lik bir onaylama oranı, onaylayan kişilerin sorulan kişilere oranının 65'e 100 olduğunu ifade etmektedir.
- **Geometri** (Bölüm 20): Aynı biçimde fakat farklı büyüklükteki iki şekil (yani, benzer) olduğunda, bu şekiller bir orantının görsel örneğini teşkil eder. Bir şekildeki doğrusal ölçümlerin oranları, buna karşılık gelen diğer oranlara eşit olacaktır.
- **Veri Grafikleri** (Bölüm 21): Göreceli bir sıklık histogramı, karşılaştırılan tüm çıktılarla ilişkili farklı olayların sıklıklarını (görsel parça-bütün oranlarını) gösterir. Bir saplı kutu diyagramı, bir sayı doğrusu boyunca verilerin göreceli dağılımını gösterir ve çok farklı büyüklükteki nüfus dağılımlarını karşılaştırmak için kullanılabilir.
- **Olasılık** (Bölüm 22): Olasılık, olası tüm çıktılarla bir olaydaki çıktıların sayısını karşılaştıran bir orandır. Orantısal akıl yürütme, öğrencilerin bu oranları- özellikle büyük ve küçük örneklem büyüklüklerini karşılaştırmayı- anlamalarına yardımcı olur.

Oranlar

Yüzde problemlerini veya orantıları çözme yeteneğinizle ilgili hedeflerin, öğretim programınızda nasıl ifade edildiğini dikkate almadan, öğrencilerinizin nihai amacı,

[1] Ç.N. Tüm metin boyunca, ratio yerine birimsiz oran veya oran, rate yerine ise birimli oran kullanılmıştır.

becerilerin bir koleksiyonunu yapmak yerine orantısal akıl yürütmenin gelişimi üzerine odaklanma olmalıdır. Bu amaçla, oran ve orantının nelerden oluştuğunu ve bu matematiksel fikirlerin hangi bağlamlarda kullanıldığını bilmek yararlıdır. Bu bilgiyle, orantısal akıl yürütmenin neyi ifade ettiğini inceleyebilir ve öğrencilerin amaçlara ulaşmasına yönelik çalışmaya başlayabilirsiniz.

Öğretim Programı Odak Noktaları'na (NCTM, 2006) göre; 6. sınıf düzeyinde, çarpım tablosunda ve benzer şekillerde yer alan satır (veya sütun) çiftlerinin incelenmesiyle geliştirilen birimsiz oran/oran ve birimli oran kavramları odak noktasıdır. 7. sınıf düzeyinde ise oranlar, orantısal akıl yürütmeyi anlamak ve uygulamak için genişletilir (örneğin, bahşiş, vergi ve faiz gibi bağlamları incelemenin yanı sıra benzer şekiller, grafikler ve eğimle ilişkilendirmeler yapılabilir). Bu, orantısal akıl yürütmenin ortaokul düzeyine kadar başlamayacağını söylememektedir. Bire-bir eşleme, basamak değeri, kesir kavramları ve çarpımsal akıl yürütmeyi anlama orantısal akıl yürütmenin ilk konuları arasındadır (Seeley ve Schieleck, 2007).

Oran Çeşitleri

Oran, çarpımsal bir ilişkilendirmede (fark ya da toplamsal ilişkilendirmedekinin aksine) verilen bir durumun içindeki iki nicelik veya ölçümü ilişkilendiren bir sayıdır. Oran, ölçümlerin ve niceliklerin göreceli miktarlarının ilk durumla aynı olduğu diğer duruma uygulanabilir (Smith, 2002). Oranlar, çok çeşitli bağlamlarda ortaya çıkar. Orantısal akıl yürütmenin bir bölümü, bu çok çeşitli durumlardaki oranların farkına varabilme yeteneği ile ilişkilidir. Öğrencilerin oranı anlamalarını geliştirmeye başlamak için; farklı ortamlar veya bağlamlar, matematiksel bir bakış açısından temelde aynı olmasına rağmen tamamen farklı fikirler gibi görülebilir.

Çinli ve Amerikalı öğretmenlerle yapılan bir araştırma, Çinli öğretmenlerin kesirler, oranlar ve bölme arasındaki ince ilişkilerin anlaşılmasına daha fazla zaman ayırdıklarını, Amerikalı öğretmenlerin ise birbiriyle ilişkili bu kavramların bir tartışmasını yapmadan oranları hızlı bir şekilde yüzdelerle ilişkilendirdiklerini göstermiştir (Cai ve Wang, 2006). Tablo 18.1; öğrencileri kesirler, oranlar ve bölme kavramları arasındaki ilişkileri tartışmak için teşvik eden Çin okullarındaki derslerde kullanılanlara benzer karşılaştırmaları sunmaktadır.

Parça-Bütün Oranları. Oranlar, bir parçanın bir bütünle karşılaştırılmasını ifade edebilir (örneğin; bir sınıftaki kızların sayısının, sınıftaki öğrencilerin sayısına oranı). Kesirler, parça-bütün oranları olduğundan bunun bir sonucu olarak, her kesir aynı zamanda bir orandır. Aynı şekilde, yüzdeler de oranlardır ve hatta yüzdeler, bazen oranı ifade etmek için de kullanılır. Olasılıklar, örneklem uzayının bir parçasının örneklem uzayının tümüne oranlarıdır.

Parça-Parça Oranları. Oran, bir bütünün bir parçası ile aynı bütünün başka bir parçasının ilişkisini de gösterebilir. Örneğin, sınıftaki kızların sayısı, erkeklerin sayısıyla karşılaştırılabilir. Bir dikdörtgenin uzunluğunun genişliğine oranı, bir parça-parça ilişkisidir. Bir olayın olasılığı, bir parça-bütün oranı olmasına rağmen, bir olayın *göreceli olasılık oranı*, olayın meydana gelebilecek yollarının sayısının, olamayacak yollarının sayısının bir oranıdır ve bu, bir parça-parça oranıdır.

Birimsiz Oranlar Olarak Birimli Oranlar. Hem parça-bütün hem de parça-parça oranları, aynı çeşit nesnenin iki ölçümünü karşılaştırır. Birimsiz oran, *birimli oran* da olabilir. Bu birimli oran, ölçme biriminin her değer için farklı olduğu iki farklı nesnenin veya niceliğin ölçümlerinin bir karşılaştırmasıdır.

Örneğin, 4 tane benzer kayık 36 yolcu taşırsa, o zaman 4 kayığın (b) 36 yolcuyla (p) karşılaştırması bir birimli orandır. Kayıklar ve yolcular, farklı nesne çeşitleridir. Birimli oran, kayık başına düşen yolcu sayısı olabilir: $\frac{p}{b} = \frac{36}{4} = \frac{9}{1}$. Yolcuların kayıklara oranı, $\frac{36}{4}$ veya 36'ya 4 şeklinde de yazılabilen 36: 4'tür. Birimli oran, kayık başına 9 yolcudur. Benzer şekilde, saatte 55 km araba sürme veya bir mili 9 dakikada koşma gibi zaman-uzaklık karşılaştırması olan hızın tüm birimli oranları, birer orandır.

Galon başına alınan mil, bir galon boya başına boyanabilen duvarın yard cinsinden alanı, otobüs başına düşen yolcu sayısı, buket başına düşen güllerin sayısının hepsi, birer birimli orandır. İki ölçme birimi arasındaki ilişkiler, hem birimli hem de birimsiz orandır (örneğin, bir adıma karşılık gelen inç uzunluğu, bir litreye karşılık gelen mililitre ve bir ince karşılık gelen santimetre gibi).

Oran Örnekleri. Geometride, benzer geometrik şekillerin karşılıklı parçalarının oranları daima aynıdır. Bir karenin köşegeni, bir kenarının daima $\sqrt{2}$ katıdır, yani bir karenin köşegeninin kenarına oranı $\sqrt{2}$'dir. π (pi) değeri,

Tablo 18.1

Kesirler, Oranlar ve Bölme'nin Karşılaştırılması

Kavram	İlk Değer	Sembol	İkinci Değer	Sonuç
Oran	İlk terim	: İki nokta üst üste	İkinci terim	Oranın değeri
Kesir	Pay	— Kesir çizgisi	Payda	Kesrin değeri
Bölme	Bölünen	÷ Bölme işareti	Bölen	Bölüm

Kaynak: Cai ve Wang'dan (2006) adapte edilmiştir.

bir çemberin çevresinin çapına oranıdır. Trigonometrik fonksiyonlar, dik üçgenlerin kenarlarının oranlarından elde edilebilir.

Bir doğrunun veya bir çatının eğimi, yükseltinin yatay mesafede (ya da yatay yürümede) kat edilen her bir birim uzunluğa oranıdır. Eğim, cebirde son derece önemli bir orandır. Eğim, sadece bir doğrunun dikliğini belirlemez aynı zamanda bir değişkenin diğer değişken cinsinden değişim oranını da gösterir.

Doğada, deniz kabuklarından çam ağacının veya kozalağının kıvrımlarına kadar birçok spiralde bulunan oran, *altın oran* olarak bilinir. Ressamlar ve mimarlar, göze doğal biçimde hoş gelecek şekiller yaparken altın oranı kullanmıştır.

Bir oranın, ilk durumdaki ile aynı göreceli ölçüm veya niceliklere sahip, ikinci bir duruma uygulanabilecek çarpımsal ilişkiyi ifade eden, bir sayı olduğunu hatırlayınız.



Orantısal Akıl Yürütme

Orantısal akıl yürütmeyi, basit bir veya iki cümlede tanımlamak zordur. O hemen ya tanımı yapılabilen ya da yapılamayan bir şey değildir. Orantısal akıl yürütme, hem nitel hem de nicel bir süreçtir. Lamon'a (1999) göre, orantısal düşünenlerin özelliklerinden birkaçı aşağıdadır:

- Orantısal düşünenler, ilişkili değişim sezgisine sahiptirler. Yani bu tip düşünenler, iki niceliğin birlikte değişimindeki ilişkileri anlar ve birindeki değişikliğin diğeri ile nasıl örtüştüğünü görebilir.
- Orantısal düşünenler, orantısal ilişkilerin gerçek dünya bağlamlarındaki orantısal olmayan ilişkilerden ayrı olduğunu fark edebilir.
- Orantısal düşünenler, oranları karşılaştırmak veya orantıları çözmek için, çoğu önceden belirlenmiş algoritmalardan ziyade, informel stratejilere dayalı çok sayıda farklı stratejiler geliştirir.
- Orantısal düşünenler; oranları, karşılaştırdıkları niceliklerden farklı bir ilişkiyi temsil eden ayrı nicelikler olarak görür.

Yetişkin nüfusun yarısından çoğunun, orantısal düşünenler olarak görülemeyeceği tahmin edilmektedir (Lamon, 1999). Bu durum, sadece yaşın ilerlemesiyle orantısal akıl yürütme alışkanlığının ve becerisinin kazanılamayacağını ifade etmektedir. Diğer taraftan, Lamon'un ve başkalarının araştırmaları; akıl yürütme üzerine odaklı (bir formülden ziyade) erken dönemlerde çarpımsal akıl yürütmeyle başlayan öğretimin, öğrencinin orantısal akıl yürütme yeteneği üzerinde bir etkiye sahip olabileceğine işaret etmektedir. Çinli öğrenciler, ilkokul düzeylerinde oran ve orantının formel incelemelerine başlamaktadır (Cai ve Sun, 2002, 2006). Amerika Birleşik Devletleri'nde ise bu kavramlar, genellikle 6-9. sınıf düzeylerinde öğretilir. Bununla birlikte, sadece bir orantıdaki verilmeyen değeri bulma işlemi üzerine odaklanma, öğrencileri düşünmeden kuralları uygulamaya yönlendirir ve bu nedenle de, öğrencilerin genellikle orantısal akıl yürütme yetenekleri gelişmez.

Bu çeşit ezbere bir çalışma, öğrencilerin ortaokul yılları boyunca ve sonrasında karşılaşacakları, "benzerlik, göreceli büyüme ve büyüklük, genişle(t)me, ölçeklendirme, pi, sabit değişim oranı, eğim, hız, farklı birimli oranlar, yüzde, trigonometrik oranlar, olasılık, göreceli sıklık, yoğunluk, doğru ve ters orantı" gibi birçok önemli kavramın özünde olan orantısal akıl yürütmenin anlaşılmasında özellikle sıkıntı oluşturur" (Heinz ve SterbaBoatwright, 2008, s. 508). Müthiş değil mi?

Orantısal akıl yürütmeyle ilişkilendirilen gelişimsel veya öğretimsel faktörleri ve çocukların çeşitli orantısal görevlerde nasıl akıl yürüttüklerini belirlemek için yapılan araştırmalar incelenebilir (Örneğin; Bright, Joyner ve Wallis, 2003; Karplus, Pulos ve Stage, 1983; Lamon, 1993, 2002; Lo ve Watanabe, 1997; Noelting, 1980 ve Post, Behr ve Lesh, 1988).

Bu araştırmalar, çocukların orantısal düşünme süreçlerinin nasıl geliştirilebileceğine yön vermektedir. Bu fikirler aşağıdaki listede özetlenmiştir:

1. Ölçme, fiyat, geometrik ve diğer görsel bağlamlarla her türden birimli oranları da içeren çok çeşitli bağlamlarda geçen oran ve orantı görevleri veriniz.
2. Oranları karşılaştırma ve öngörmeye yönelik deneme ve tartışma ortamları hazırlayınız. Öğrencilere, orantısal ve orantısal olmayan karşılaştırmaların her birinin örneklerini vererek ve farklarının tartışmasını yaptırarak, bu iki durum arasındaki ayrımı yapabilmelerine yardımcı olunuz.
3. Öğrencilere, hâlihazırda sahip oldukları süreçleri orantısal akıl yürütmeyle ilişkilendirmelerinde yardımcı olunuz. Birim kesir kavramı, birimli oran ile çok benzerdir. Araştırmalar, oranları karşılaştırma ve orantıları çözmek için birimli oranı kullanmanın, içler-dışlar çarpımı yöntemleri öğretilse bile ortaokul öğrencileri arasında en çok kullanılan yaklaşım olduğuna işaret etmektedir (Bu yöntem, daha sonra açıklanacaktır).
4. İçler-dışlar çarpımı algoritması gibi mekanik ve sembolik yöntemleri kullanmanın, orantıları çözmek için orantısal akıl yürütme yeteneğini geliştirmediğinin ve bu yöntemlerin, öğrencilerin sezgisel ve kavramsal yöntemlere yönelik oldukça çok deneyime sahip olunca kadar sunulmaması gerektiğinin farkına varınız.



1989'da yayınlanan *Öğretim Programı Standartları*; orantısal akıl yürütmeyi, "dikkatli bir şekilde gelişimi için gereken zaman ve çabanın harcanmasına değecek büyük öneme sahip" (NCTM, 1989, s.82) şeklinde nitelemiştir. Benzer şekilde *İlkeler ve Standartlar*'da, yüzde, benzerlik, ölçekleme, lineer denklemler, eğim, göreceli sıklık histogramları ve olasılık"

(NCTM, 2000, s. 212) kavramlarını içeren bütünleştirici bir yaklaşıma olan ihtiyaç vurgulanmıştır. ◆

Çarpımsal Durumlar Toplamsal Durumlar

Üst Üste Koyarak İnşa Etme (Adding It Up) (National Research Council, 2001) adlı kitaptan uyarlanan aşağıdaki problemi inceleyiniz.

İki hafta önce, iki çiçeğin boyları 8 inç ve 12 inç olarak ölçülmüştür. Bugün ise çiçekler sırasıyla 11 inç ve 15 inç boyundadır. 8 inçlik çiçek mi yoksa 12 inçlik çiçek mi daha fazla uzamıştır?

Durup Düşün!

Okumaya devam etmeden önce, bu problem için iki farklı cevap bulunuz ve onları savununuz.

Birinci cevap, her iki çiçek de aynı miktarda uzamıştır-3 inç. Bu doğru cevap, toplamsal akıl yürütmeye dayanmaktadır. Yani, iki yeni ölçmedeki sonuç için, her bir ölçüme bir tek nicelik eklenmiştir. Probleme bakışın ikinci bir yolu ise çiçeklerin uzama miktarlarını başlangıç boylarıyla karşılaştırmaktır. Çiçeklerden birincisi kendi boyunun $\frac{3}{8}$'i, ikincisi ise $\frac{3}{12}$'si kadar uzamıştır. Bu çarpımsal bakış açısına göre ($\frac{3}{8}$ *katı kadar büyümüştür)*, ilk çiçek daha çok uzamıştır. Bu, değişim durumuna orantısal olarak bakmaktır. Burada, hem toplamsal hem de çarpımsal akıl yürütme, farklı cevaplar olsa da geçerli cevaplar üretmiştir. Tartışmalar, karşılaştırma üzerine olmalıdır ve böylece, toplamsal ve çarpımsal karşılaştırmalar arasındaki ayrım ortaya konur. Bu durumlar arasındaki farkı anlama yeteneği, orantısal akıl yürütmenin bir göstergesidir.



Orantısal akıl yürütmenin karmaşıklığını anlamanıza yardımcı olması bakımından Şekil 18.1'de gösterilen ve öğrencilerin toplamsal ve çarpımsal akıl yürütmenin uygun kullanımlarını incelemek için tasarlanan beş değerlendirme sorusunu dikkate alınız (Bright, Joyner ve Wallis, 2003). Çarpımsal akıl yürütmeye karşı toplamsal akıl yürütmenin kullanım olasılığını vurgulayan her soruyu fark ediniz. Bu ölçme aracı, sınıfta bir ön değerlendirme aracı olarak kullanılabilir, iyi sınıf görevlerinin bir serisi olarak tartışılabilir veya öğrencilerin çarpımsal karşılaştırmaları anlamalarını iyi düzeyde nasıl kazanacaklarını görmek için, düzey belirleyici bir değerlendirme olarak ele alınabilir. Soru 1'de; yüzde 200 durumunun, fotoğrafın her boyutunu iki katına çıkaracağını öğrencilerinize açıklamak isteyebilirsiniz. ◆

Durup Düşün!

Şekil 18.1'deki soruları cevaplayınız. Meslektaşlarınızla cevaplarınızı tartışınız. Hangi soru, bir orantısal durum değildir? 2. ve 4. sorular arasındaki fark nedir?

Her problem için, doğru cevabı çember içine alınız.

1. Bayan Allen, Cape Hatteras Lighthouse'un 3x5 inçlik fotoğrafını çekti ve onu, bir fotokopi makinesinde % 200 seçeneğini kullanarak büyüttü. Asıl fotoğraf mı yoksa büyütülen fotoğraf mı "daha karemsidir?"
   a. Asıl fotoğraf, "daha karemsidir".
   b. Büyütülen fotoğraf, "daha karemsidir".
   c. Asıl ve büyütülen fotoğraf, eşit şekilde karedir.
   d. Hangisinin "daha karemsi" olduğunu belirlemek için yeterince bilgi yoktur.
2. Bilim kulübünün, bitkilerle deneyler yapmak için dört ayrı dikdörtgensel bölgesi:

   1 foot'a 4 feet — 7 feet'e 10 feet
   17 feet'e 20 feet — 27 feet'e 30 feet

   Hangi dikdörtgensel bölge, daha karemsidir?
   a. 1 foot'a 4 feet
   b. 7 feet'e 10 feet
   c. 17 feet'e 20 feet
   d. 27 feet'e 30 feet
3. Sue ve Julie, bir koşu parkurunda eşit hızlarla koştu. Sue, koşuya önce başladı. Sue, 9 tur koştuğunda, Julie 3 tur koşmuştu. Sue, 15 turu tamamladığında, Julie kaç tur koşmuştur?
   a. 45 tur
   b. 24 tur
   c. 21 tur
   d. 6 tur
4. Basketbol sezonunun ortalarında, yıldızlar karması maçı için en iyi serbest atış atan bir oyuncu önermelisiniz. Dört oyuncunun istatistikleri aşağıdadır:

   Novak: 11 şutun 8'ini isabet ettirdi. — Peterson: 29 şutun 22'sini isabet ettirdi.
   Williams: 19 şutun 15'ini isabet ettirdi. — Reynolds: 41 şutun 33'ünü isabet ettirdi.

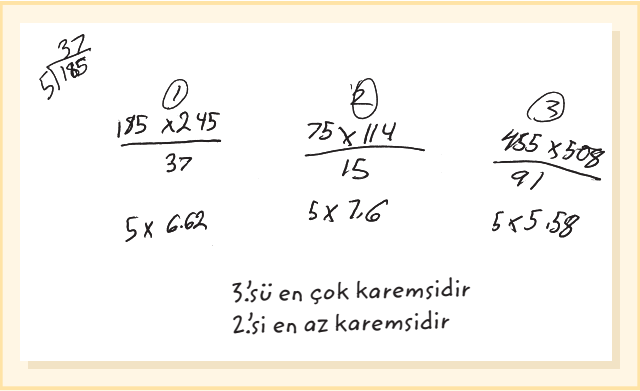
   En iyi serbest atış atan oyuncu hangisidir?
   a. Novak b. Peterson c. Williams d. Reynolds
5. Aşağıdaki problem için cevabınızı yazınız.

   Bir çiftçi, 3 tarlaya sahiptir. İlki, 185x 245 feet, ikincisi, 75x114 feet, üçüncüsü ise 455x508 feet ebatlarındadır. Bu üç tarlaya gökyüzünden bakarsanız, hangi tarla size en çok karemsi gibi görülür? Hangisi en az karemsi gibi görülür? Cevaplarınızı açıklayınız.

Şekil 18.1 Orantısal akıl yürütmeyi değerlendirmek için beş soru

Kaynak: Reprinted with permission from Bright, G. W., Joyner, J. J., & Wallis, C. (2003). "Assessing Proportional Thinking." *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(3), p. 167. Copyright © 2003 by the National Coun-cil of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.

Dikdörtgenler içeren sorular (1, 2 ve 5), daha önce çiçek-uzama probleminde tartışıldığı gibi toplamsal akıl yürütme kullanılarak doğru biçimde cevaplanamayabilir. 132 kişilik sekizinci ve dokuzuncu sınıf öğrenci grubu için,



Şekil 18.2 Jacob, her uzunluğun 5 ile bölünebildiğini fark ettiği için, her uzunluğu 5'in katları şeklinde yazarak her oranı sadeleştirdi ve sonra genişlikleri karşılaştırdı.

2. soru, en kolayı idi (yüzde 67 doğru cevap). Diğer üç çoktan seçmeli soru için doğru cevap yüzdesi ise sadece yüzde 45'ten yüzde 59'a doğru sıralandı. Açık uçlu soru (5. soru), oldukça zor görüldü (en çok karemsi için yüzde 37 doğru, en az karemsi yüzde 28 doğru). Öğrencilerin yüzde 52'sinden fazlası, en çok karemsi için 75 x 114'lük dikdörtgeni, yüzde 45'i ise en az karemsi için 185 x 245'lik dikdörtgeni seçmiştir.

5.soru, toplamsal bir strateji kullanarak (kenarları çıkarma) soruyu başlangıçta doğru olarak çözemeyen bir sekizinci sınıf öğrencisine verildi. 1,000,000 x 1,000,050'lik gibi çok büyük bir dikdörtgenin daha az karemsi gözüküp gözükmediği sorulduğunda; bu öğrenci, "Hayır, bu bir orantılı durumdur" dedi. Sonra, acemi bir yaklaşım kullanarak soruyu çözdü (Bkz. Şekil 18. 2).

Çarpımsal İlişkileri Belirleme

Daha önce de belirtildiği gibi; öğrenciler, çarpımsal durumları toplamsal durumlarla karıştırabilir. İki değer arasında var olan ilişki çeşitlerinin açık bir şekilde ortaya konması, öğrencilerin oran ve orantı anlayışlarını büyük ölçüde destekleyebilir. *Öğretim Programı Odak Noktaları*'nda da tavsiye edildiği gibi; çarpım tablosunun kullanımı, bu anlamayı geliştirmenin bir yoludur. Cai ve Sun tarafından Çinli öğretmenlerin, oran kavramını nasıl takdim ettiklerini gösteren aşağıdaki örnek problemi inceleyiniz (2002, s. 196).

> Miller Ortaokulu'nun, 16 tane altıncı sınıf öğrencisi vardır ve bu öğrencilerin 12'si basketbol taraftarı olduğunu söylemektedir. Geriye kalan öğrenciler, basketbol taraftarı değildir.

Öğrencilerden, basketbol taraftarı olan ve olmayanlar arasında nasıl bir ilişki olabileceğinin belirlenmesi istenmiştir. Basketbol taraftarı olmayan 4 öğrencinin olduğu öncelikle belirlendikten sonra, burada aşağıdakileri içeren birkaç farklı olasılık vardır:

- Basketbol taraftarı olanlar, olmayanlardan 8 fazladır.
- Basketbol taraftarı olanlar, olmayanların 3 katıdır.
- Basketbolu seven her üç öğrenciye karşılık basketbolu sevmeyen bir öğrenci vardır.

Bunların ilki, iki sayı arasındaki farka odaklanan toplamsal ilişkidir. Diğer ikisi ise basketbolu sevenlerin, basketbolu sevmeyenlere oranının, 3'e 1 olduğunu biraz farklı şekilde ifade eden çarpımsal ilişkinin farklı durumlarıdır. Toplamsal ilişkiyle çarpımsal ilişkiyi karşılaştırmak amacıyla yapılan bir tartışma faydalı olur.

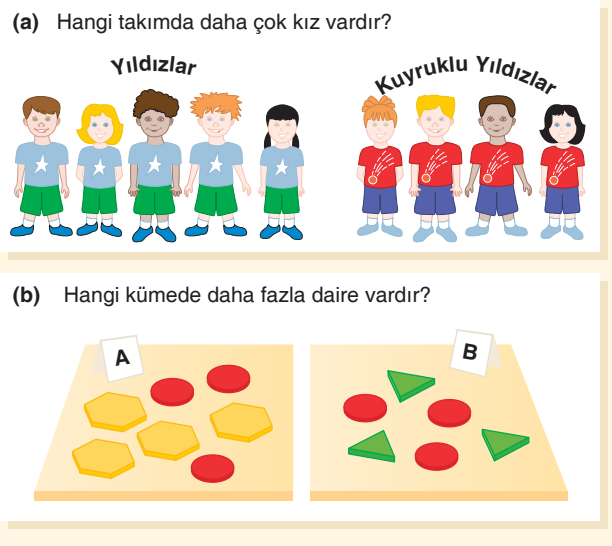
Aşağıdaki etkinliklerde iki oran karşılaştırılmıştır. Oranı tanımlamaya başlamadan önce, ilişkilerin bu iki çeşidi arasındaki kullanışlı bir ayrımın öğrencilere sunulmasıyla; daha önce verilen çiçek-uzama problemindeki gibi ya toplamsal ya da çarpımsal akıl yürütme kullanılarak seçimler yapılabilir.

Etkinlik 18.1

Hangisi Daha Fazla?

Öğrencilerinize, Şekil 18.3'tekine benzer iki veya üç durum veriniz. Öğrencileriniz, ister bireysel isterse gruplarda çalışsın, takip amaçlı bir sınıf tartışması yapmak zorunludur. Bu tartışma, öğrencilerin nasıl düşündüklerine yönelik size göstergeler sağlayabilir, öğrencileriniz açısından da diğer öğrencilerin aynı durumlara farklı perspektiflerden nasıl baktıklarını görme fırsatı sunar.

Öğrencilerinizi çarpımsal bir ilişki aramalarını söyleyerek yönlendirmeyiniz, fakat öğrencilerin ne çeşit cevaplar verdiğini görmek için bekleyiniz.



Şekil 18.3 Ya toplamsal ya da çarpımsal karşılaştırmalar yaparak yorumlanabilecek iki resimli durum.

Şekil 18.3'deki durumlar, ya toplamsal ya da çarpımsal olarak yorumlanabilir. Kilit nokta belirsizliktir: Eğer öğrenciler, toplamsal ve çarpımsal yaklaşımlar arasındaki farkı belirler ve anlarsa, bu orantısal akıl yürütme yapabilmek için bir başlangıç noktasıdır. Çiçek probleminde olduğu gibi her iki yorum da doğrudur. Bu şekilde, aynı durum için farklı bakış açıları olabileceğine yönelik bir farkındalık oluşturursunuz. Öğrenciler önce başka bir yol önermeye gönüllü değilse o zaman farklı bir soru sorunuz: Örneğin, "Amy, ikinci gruptur diyor. Amy'nin niçin bu seçimi yaptığını açıklayabilir misiniz?" veya "Hangi sınıf takımında, kızların oranı daha fazladır?"

Bir an için Şekil 18.1'deki 3. soruya geri dönünüz. Başka çalışmalarda da kullanılan bu soru, öğrencilerin açıkça toplamsal durum olsa bile, bu problemi bir orantı problemi olarak çözmeye çalıştıklarını göstermektedir. İki atlet, başlangıç konumlarıyla aynı şekilde sona geldiklerinde aralarında 6 tur fark olacaktır. Watson ve Shaughnessy (2004), orantı içeren sözel problemlerin genellikle hatalı çıkarımlara neden olacak şekilde ifade edildiğini belirtmiştir. Öğrenciler de, çalışılan birimin orantısal akıl yürütme olduğunu belirleyerek uygun olmayan durumlarda bile (3. sorudaki gibi) orantılar kurarlar. Öğrenciler, bir orantıda dört niceliğin nasıl düzenleneceğini öğrenir, fakat sayılar arasında bir çarpımsal ilişkinin olup olmadığına dikkatlerini vermezler. Öğrenciler, orantı kavramı üzerine değil de orantının yapısı üzerine odaklanır (Heinz ve Boatwright, 2008).

Gelecek problem, hem toplamsal hem de çarpımsal yorumlamaya müsait ve daha önce tartışılan çiçek problemine benzemektedir.

Etkinlik 18.2

Kilo Verme

Aşağıda verilen tablodaki verileri öğrencilere gösteriniz.

Hafta	Max	Moe	Minnie
0	210	158	113
2	202	154	108
4	196	150	105

Max, Moe ve Minnie diyettedir. Diyete başladıklarındaki ağırlıklarını ve iki hafta arayla ağırlıklarını kaydettiler. Dört hafta sonunda, en başarılı diyet yapan hangisidir?

Görev, diyet yapanların her biri lehine üç farklı tez sunmaktır.

"Kilo Verme" etkinliğindeki görevin sunuluş şekliyle öğrenciler, burada farklı tezlerin olacağına ilişkin önceden uyarılacak ve sonuçlar iyi bir tartışmayı garanti edecektir (Moe için sunulan tez, onun en istikrarlı kilo veren kişi olmasıdır).

Denk Oranlar

Seçme etkinliklerinde, bir oran verilir ve öğrenciler diğer verilenlerden ona karşılık gelen denk oranı seçer. Odaklanma, seçilen oran çiftlerinin niçin aynı oranda olduğuna yönelik sezgisel bir gerekçe üzerine olmalıdır. Bazen sayısal değerler, öğrencilerin akıl yürütmelerini açıklamak için onların sayısal yöntemler geliştirmelerine yardımcı olmada rol oynayacaktır. Sonraki etkinliklerde, öğrencilerden seçimler kendilerine sunulmadan bir denk oranı inşa etmeleri istenir.

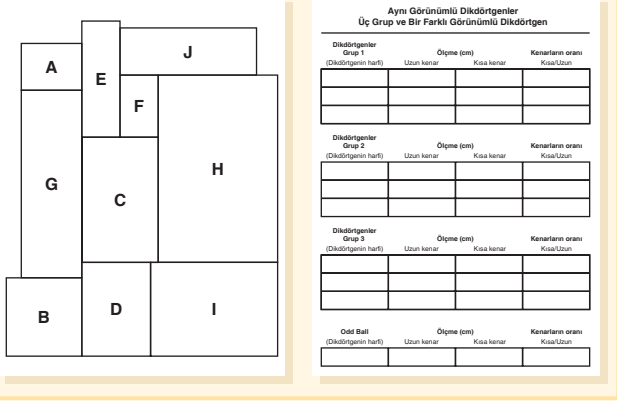
Bu etkinliklerde, orantısal olmayan fakat ortak bir farka sahip oran çiftlerini kullanmak oldukça faydalıdır. Örneğin, $\frac{5}{8}$ ve $\frac{9}{12}$ denk oranlar değildir, fakat karşılıklı farkları aynıdır: $8 - 5 = 12 - 9$. Buradaki toplamsal ilişki üzerine odaklanan öğrenciler, orantısallığın çarpımsal olduğunu görmezler. Oranların karşılaştırıldığı bağlamın kullanımı, öğrencilerin çarpımsal veya orantısal düşünmeye yönelik fikirlerini açık bir şekilde ifade etmelerine yardımcı olur. Etkinlik 18.3, (benzerlik ve ölçekli çizimlerle ilgili önemli kavramlarla ilişkinin kurulabildiği bir bağlam olarak) bir dikdörtgenin kenarlarını kullanır.

Etkinlik 18.3

Aynı Görünümlü Dikdörtgenler

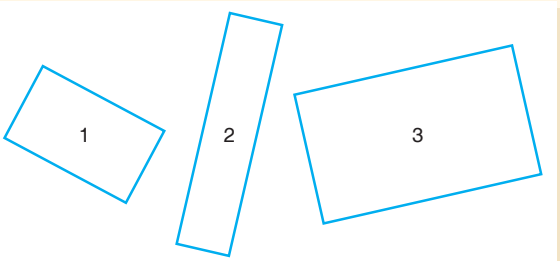
Şekil 18.4'te gösterilen Çalışma Yaprak Seti 30 ve 31'in bir kopyasını öğrenci gruplarına veriniz ve öğrencilerden on tane dikdörtgeni kesip çıkarmasını isteyiniz. Dikdörtgenlerin üçünün (A, I ve D) kenarları oranı, '3'e 4'tür. C, F ve H dikdörtgenlerinin, 5'e 8; J, E ve G dikdörtgenleri ise 1'e 3 'tür. B dikdörtgeni ise bir karedir ve bu nedenle kenarlarının oranı, 1'e 1'dir.

Görev, dikdörtgenleri "aynı görünümlü" olarak üçerli üç kümeye ve kalan bir tanesini de "farklı görünümlü" olacak şekilde gruplamaktır. Eğer, öğrencileriniz geometriden *benzerlik* kelimesini biliyorsa o zaman "aynı görünümlü" yerine benzer kelimesini kullanabilirsiniz. "Aynı görünümlünün" anlamının ne



Şekil 18.4 Etkinlik 18.3 ile beraber kullanmak için Çalışma Yaprak Seti 30 ve 31.

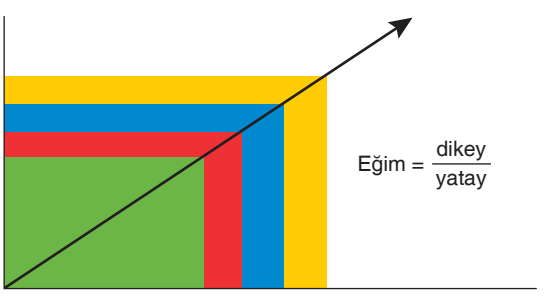
olduğunu açıklamak için, aşağıdaki örnekteki gibi tahtaya ikisi benzer, diğeri açık bir şekilde diğer ikisine benzer olmayan üç dikdörtgen çiziniz. Öğrencilerden 1 ve 3. dikdörtgenlerin niçin benzer olduklarını açıklarken kendi sözcüklerini kullanmalarını isteyiniz.



Öğrenciler gruplamalarına karar verdiğinde, durunuz ve yaptıkları dikdörtgen sınıflamalarının gerekçelerini tartışınız. Kenarları eşleştirmeye çalışan veya kenarları arasındaki farkın aynı olduğu dikdörtgenleri araştıran bazı öğrenciler için hazırlıklı olunmalıdır. Daha sonra öğrencilerden, kenarları ölçmelerini ve her dikdörtgenin kenarlarını en yakın yarım-santimetreye yuvarlayarak kaydetmelerini isteyiniz. Öğrenciler daha sonra, her dikdörtgenin kısa kenarlarının uzun kenarlarına oranlarını hesaplamalıdır. Çalışma Yaprak Seti 31, verileri kaydetmek için kullanılabilir. Bu sonuçları tartışınız ve öğrencilerden, oranları ve grupları nasıl ilişkilendirdiklerini açıklamalarını isteyiniz. Eğer gruplar, orantısal (benzer) dikdörtgenlerden oluşturulmuşsa, her grubun içindeki oranlar aynı olacaktır.

Geometrik bir bakış açısından bakıldığında "Aynı Görünümlü Dikdörtgenler" benzerlikle ilgili bir etkinliktir. İki kavram-orantılılık ve benzerlik-çok yakından ilişkilendirilir.

Orantılı dikdörtgenlerin diğer bir özelliği, Şekil 18.5'teki gibi dikdörtgenlerin bir köşede sıralanarak yerleştirilmesiyle gözlemlenebilir. Köşegenler boyunca düz bir çizgi çizildiğinde, karşı köşelerin de sıraya girdiğini göreceksiniz. Eğer dikdörtgenler, ortak köşeleri orijinde olacak şekilde koordinat eksenine yerleştirilirlerse, o zaman köşeleri birleştiren doğrunun eğimi, kenarların oranıdır. Burada, orantısal akıl yürütme ve cebir arasında bir bağlantı vardır.

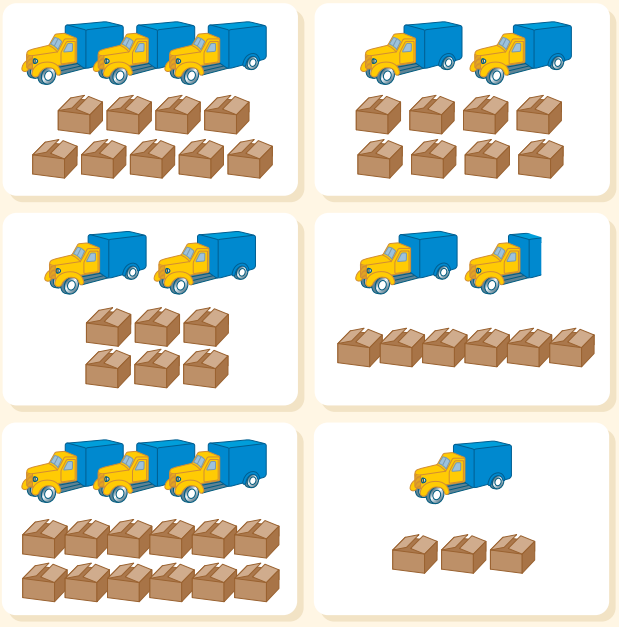


Şekil 18.5 Bir köşede sıralanarak yerleştirilen orantısal dikdörtgenlerin köşelerinden gelen doğrunun eğimi, iki kenarın oranına

Etkinlik 18.4

Farklı Nesneler, Aynı Oranlar

Şekil 18.6'da gösterildiği gibi, birbirlerinden tamamen farklı nesneler içeren kartlar hazırlayınız. Bir kart veriniz ve öğrencilerden, iki çeşidinin oranı aynı olan bir kartı seçmelerini isteyiniz. Bu görev, öğrencileri görsel bir yaklaşımdan ziyade sayısal bir yaklaşıma yönlendirir ve onlara birimli oranlar olarak birimsiz oranlar kavramını tanıtır. Bu bağlamda; kutu başına düşen kamyonların sayısını bulmaktan ziyade kamyon başına düşen kutuların sayısını bulmak daha uygundur. Niceliklerin çiftleri için birimli oranın (1 birimin temsil ettiği miktar) bulunması, karşılaştırmalara (marketlerde verilen birim fiyatların, size farklı ürünleri karşılaştırma imkânı vermesi gibi) imkân verir.



1. Hangi kartlarda, kamyonların kutulara oranı aynıdır?
2. Her bir kart için kamyon başına düşen kutuların birimli oranı nedir?

Şekil 18.6 Birimli oran ve oranları (birimsiz oranları) incelemek için oran kartları.

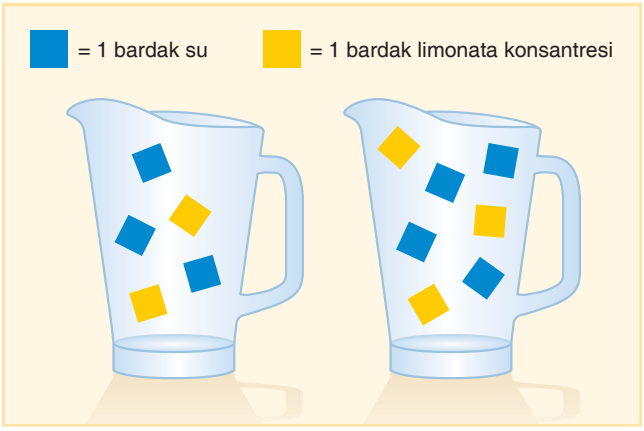
Farklı Oranlar

Orantısal durumların anlaşılması, denk oranları belirlemek kadar iki oranı karşılaştırabilmeyi de içerir. Aşağıdaki etkinlik, orantısal akıl yürütmeyle ilgili çeşitli çalışmalarda kullanılmıştır.

Etkinlik 18.5

Limonata Tarifesi

Öğrencilere, Şekil 18.7'deki gibi iki limonata sürahisinin resmini gösteriniz. Sürahiler, aynı limonata miktarına sahiptir. Küçük kareler, her sürahide kullanılan malzemeleri göstermektedir. Bir sarı kare, 1 bardak limonata konsantresini, bir mavi kare de 1 bardak suyu temsil etmektedir. Hangi sürahide, limonata tadının daha fazla olacağını veya her ikisinde de aynı tadın olup olmayacağını sorunuz. Öğrencilerden cevaplarını gerekçelendirmelerini isteyiniz.



Şekil 18.7 Orantı problemlerinin karşılaştırılması: Hangi sürahide, limonata tadı daha fazladır veya her ikisinde de aynı mıdır?

Durup Düşün!

Limonata problemini çözünüz ve gerekçelerinizi yazınız. Cevabınızı birden fazla yolla gerekçelendirebilir misiniz?

"Limonata Tarifesi" etkinliğindeki görev, çoğu öğrenciye meydan okumaktadır. Bu görev, burada karşılaştırma yapmak için birçok yol olması nedeniyle ilginçtir. Yaygın bir yöntem, limonata karışımının her bir bardağında ne kadar suyun olduğunu hesaplamaktır? Daha sonra görüleceği üzere, bu bir birim-oran kullanımıdır: Limonata karışımlı bardak başına düşen su bardaklarının oranları ($1\frac{1}{2}$ ve $1\frac{1}{3}$). Başka yaklaşımlar, birim oranlar yerine kesirleri kullanır ve kesirleri karşılaştırır: Limonata karışımının, su ile karşılaştırılması ($\frac{2}{3}$ ve $\frac{3}{4}$) veya tersi ve limonata karışımının, toplamın bir kesriyle karşılaştırılması ($\frac{2}{5}$ ve $\frac{3}{7}$). Bu karşılaştırma, toplamın bir kesri olarak su ile de yapılabilir. Bazı öğrenciler, kesirlerin yerine aynı iddiayı gerektiren yüzdeleri kullanabilir. Ya su ya da limonata karışımı her ikisinde eşit miktarda oluncaya kadar, sürahilerin biri veya ikisinin katlarını kullanmak cevabı gerekçelendirmek için diğer bir yoldur.

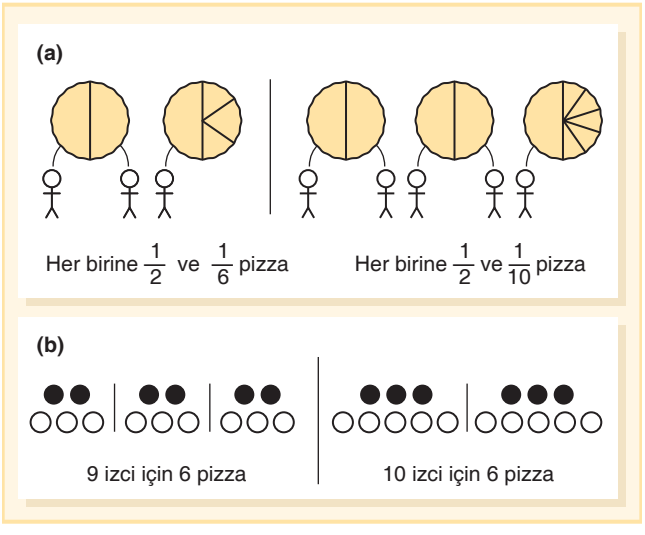
Sürahilerin tatlarının aynı olması ilginç bir tartışmadır. Eğer limonata karışımı ve su, her iki sürahide eşitlenirse o zaman her bir çözeltide artan bir su bardağı olacaktır. Doğru olmamasına rağmen (niçin olduğunu söyleyebilir misiniz?), dersiniz muhtemelen bu fikirlerin canlı bir tartışmasına sahne olacaktır.

Limonata etkinliğinde görevin zorluk düzeyi ayarlanabilir. Verildiği üzere, iki karışım oldukça birbirine yakındır ve iki sürahi arasında basit ilişkilendirmeler yoktur. Eğer çözeltiler, 3'e 6 ve 4'e 8 (eşit tatlar) ise o zaman görev daha da basitleşir. 4'e 9 tarifesine karşı 2'ye 5 tarifesi için, ikincisini iki ile çarpıp, birincisi ile karşılaştırmak kolaydır. 3'e 6 tarifesi, 2'ye 5 tarifesi ile karşılaştırıldığında, birim oranlar daha açık görülebilir (1'e 2 ve 1'e $2\frac{1}{2}$).

Aşağıdaki problem, araştırma yazınına dayalı olarak uyarlanmıştır:

İki izci kampında pizza partisi yapılmaktadır. Ayı kampı, her 3 izciye 2 pizza, Rakunların lideri de, her 5 izciye 3 pizza düşecek şekilde sipariş verdi. Ayı kampındaki izciler mi yoksa Rakun kampındaki izciler mi daha fazla pizza yemiştir?

Şekil 18.8, iki farklı akıl yürütme stratejisini göstermektedir. Pizzalar, Şekil 18.8(a)'daki gibi kesirsel parçalara bölündüğü zaman; yaklaşım, birim oranı araştırmaktır-izci başına düşen pizzalar. Paylaşım yaklaşımı, Bölüm 15'de kesirler için tanımlandığı şekilde her bir oran için de kullanılmıştır. Fakat bu problemin, kamplarda sadece sırasıyla 3 ve 5 izci olduğunu söylemediğini de hatırlayınız. 2'nin 3'e, 3'ün 5'e oranlarının herhangi katları, limonata dolu sürahilerin katlarının alınmasındaki gibi uygun karşılaştırmaları yapmak için kullanılabilir. Bu yaklaşım, Şekil 18.8(b)'te kullanılmıştır. 2'ye 3 oranının üç "kopyası", 3'e 5 oranının iki kopyası kullanılarak başlangıçta, izci sayısına göre istenen pizzaların sayısına ulaşılıp ulaşılmadığı karşılaştırılabilir. Kesirlerin bir avantajından; bu işlem, ortak



Şekil 18. 8 İki oranı karşılaştırmada kullanılabilecek iki akıl yürütme yöntemi.

İlişkilendirilmiş Matematik

Sınıf 7, *Karşılaştırma ve Ölçeklendirme*

İnceleme 3: Oranları Karşılaştırma ve Kullanma

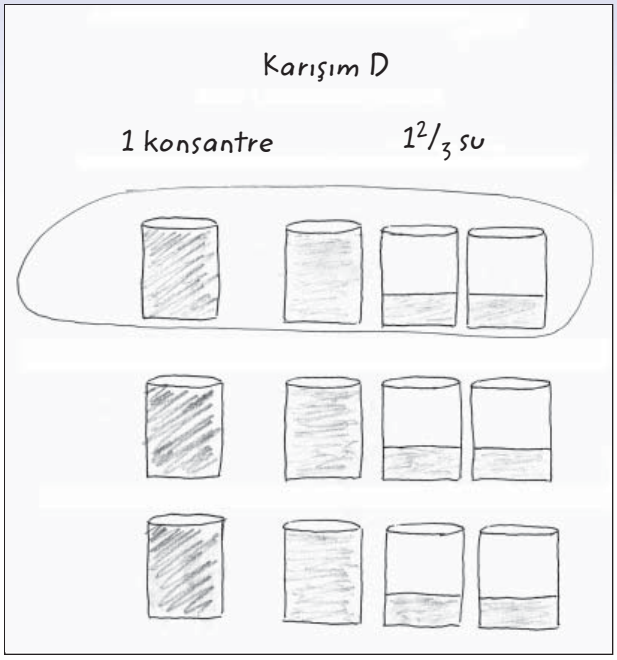
Bağlam

Bu araştırma, oran ve orantı ünitesinin ikinci haftasında yapılır. Daha önceki etkinliklerde, öğrenciler kendi sınıflarından toplanan benzer veriler ile büyük bir örneklemden toplanan verileri karşılaştırmak için oran ve yüzdeleri inceledi. Öğrenciler; kesirleri, ondalık sayıları ve yüzdeleri, oranları ifade etmek için kullandılar ve kendi stratejilerini kullanarak oranları karşılaştırdılar.

Görev Tanımı

Meyve suyu probleminde (2.1: Meyve suyu karışımı) öğrenciler, hangi tarifenin en çok portakalımsı ve hangi tarifenin ise en az portakalımsı olduğunu hesaplamak için orantısal akıl yürütmeyi uygular. Öğrenciler, çözümlerini gerekçelendirmek için kendi oran bilgilerini uygularlar. Öğrenciler bu görevi çeşitli şekillerde çözmüştür. Bunlar:

1. Karşılaştırma yapmak için her tarifenin miktarlarını eşitleyiniz (Örneğin, her birini 120 bardak kadar yapma).
2. Bardak konsantrelerini aynı yapınız ve her birinde ne kadar su olduğuna bakınız (Örneğin, 30 bardak konsantresi için, her tarifede ihtiyaç duyulan su miktarı nedir?)
3. Parça-bütün kesirlerini bulunuz, ortak paydaları bulunuz ve karşılaştırınız.
4. Parça-bütün kesirlerini bulunuz, yüzdelere dönüştürünüz ve karşılaştırınız.
5. Bardak konsantresi başına ne kadar su düştüğünü göstermek için resimler çiziniz. Örneğin, karışım D için



paydaları elde etmeye benzer. Rakunların oranında (daha büyük payda) daha fazla izci olduğu için, burada her izciye daha az pizza düşecektir.

Oran Tabloları

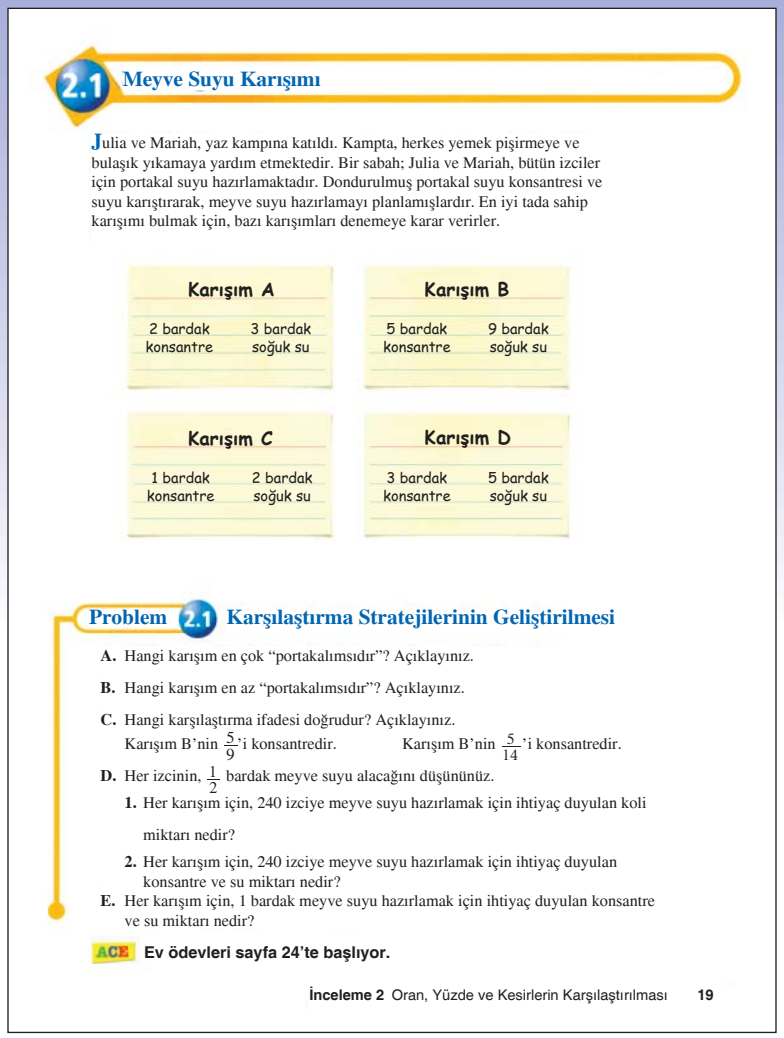
İki değişkenli niceliklerin nasıl ilişkilendirildiğini gösteren oran tabloları veya çizelgeleri, bilgiyi organize etmenin iyi bir yoludur. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

İngiliz Dönümü[1]	5	10	15	20	25		
Çam Ağaçları	75	150	225				

[1] Ç.N: 1 acres (İngiliz Dönümü) = 4047 metrekare

Eğer görev, tarlanın 65 dönümü için ağaç sayısını veya 750 ağaç için ihtiyaç duyulan dönümü bulmak ise o zaman öğrenciler, toplamayı kullanarak ilerleyebilir. Yani öğrenciler, üst satırda 65'e ulaşıncaya kadar 5 ekleyebilir. Bölüm 14'te tartışıldığı gibi, bu tekrarlı bir örüntü veya tekrarlanan bir toplama stratejisidir. Dönümü, çam ağaçlarıyla (×15) ilişkilendirme örüntüsü, üretken bir örüntü ve değişkenler arasında çarpımsal bir ilişkidir. Bu durum için denklem, $y = 15x$'tir ve lineer denklemlerin bir alt kümesi olarak Bölüm 14'te tartışıldığı gibi bu bir orantısal durumdur.

Oran tabloları, içinde daima bir örüntü barındıran düzenlenmiş bağlamlarda olmayabilir. Aslında; oran tabloları, sadece bir oran bilindiğinde ve özel bir denk oran bulmaya



2.1 Meyve Suyu Karışımı

Julia ve Mariah, yaz kampına katıldı. Kampta, herkes yemek pişirmeye ve bulaşık yıkamaya yardım etmektedir. Bir sabah; Julia ve Mariah, bütün izciler için portakal suyu hazırlamaktadır. Dondurulmuş portakal suyu konsantresi ve suyu karıştırarak, meyve suyu hazırlamayı planlamışlardır. En iyi tada sahip karışımı bulmak için, bazı karışımları denemeye karar verirler.

Karışım A		Karışım B	
2 bardak konsantre	3 bardak soğuk su	5 bardak konsantre	9 bardak soğuk su

Karışım C		Karışım D	
1 bardak konsantre	2 bardak soğuk su	3 bardak konsantre	5 bardak soğuk su

Problem 2.1 Karşılaştırma Stratejilerinin Geliştirilmesi

A. Hangi karışım en çok "portakalımsıdır"? Açıklayınız.

B. Hangi karışım en az "portakalımsıdır"? Açıklayınız.

C. Hangi karşılaştırma ifadesi doğrudur? Açıklayınız.
Karışım B'nin $\frac{5}{9}$'i konsantredir. Karışım B'nin $\frac{5}{14}$'i konsantredir.

D. Her izcinin, $\frac{1}{2}$ bardak meyve suyu alacağını düşününüz.

1. Her karışım için, 240 izciye meyve suyu hazırlamak için ihtiyaç duyulan koli miktarı nedir?

2. Her karışım için, 240 izciye meyve suyu hazırlamak için ihtiyaç duyulan konsantre ve su miktarı nedir?

E. Her karışım için, 1 bardak meyve suyu hazırlamak için ihtiyaç duyulan konsantre ve su miktarı nedir?

ACE **Ev ödevleri sayfa 24'te başlıyor.**

İnceleme 2 Oran, Yüzde ve Kesirlerin Karşılaştırılması 19

Kaynak: Connected Mathematics: Comparing and Scaling: Ratio, Proportion, and Percent by Glenda Lappan, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel, & Elizabeth Difanis Phillips. Copyright © 2006 by Michigan State University. Used by permission of Pearson Education, Inc. All rights reserved.

Bu problemin bilinen bağlamı; öğrencilere, problemi nasıl çözeceklerine yönelik yönergeler olmadan bir orantısal durumu çözmek için akıllı stratejiler geliştirmelerine ve kendi yaratıcılıklarını uygulamalarına izin verir.

Ünitenin tamamı, her biri birçok gerçek bağlama dayalı altı inceleme içermektedir. Ölçeklendirme, birim oranların kullanımı ve yüzdeler, orantısal durumları çözmek için önerilen tekniklerdir.

çalıştığınızda kullanılabilir. O zaman oran tablosu, bir orantının çözümü için bir strateji olarak kullanılabilir. Aşağıdaki etkinlik, bazı örnekler sağlamakta ve Şekil 18.9, oran tablosunun bu kullanımını örneklendirmektedir.

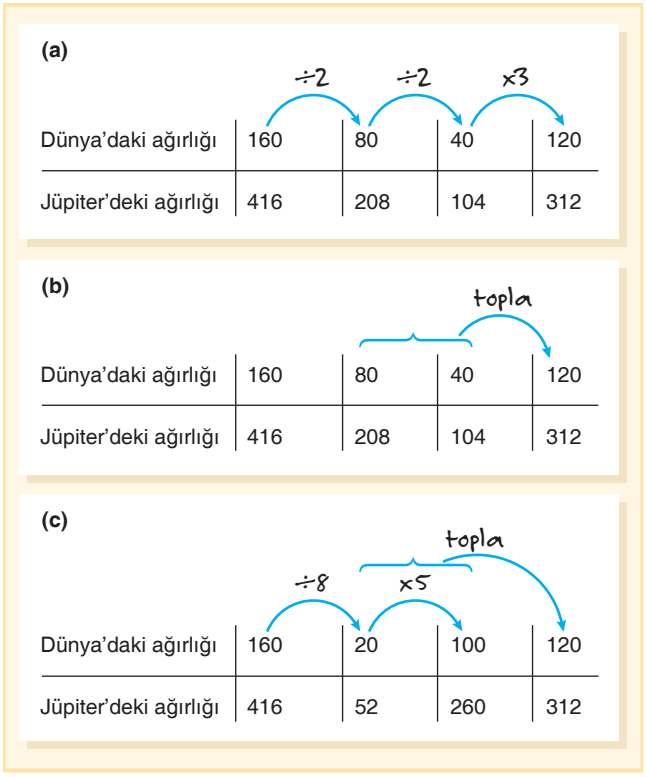
Etkinlik 18.6

Oran Tablolarını Kullanma

Bir oran tablosu oluşturunuz ve onu aşağıdaki soruları cevaplamak için kullanınız. Görevler, Lamon'dan (1999, s. 183) uyarlanmıştır.

- **Dünyadaki ağırlığı, 160 pound (Ç.N: 1 pound = 453 gr) olan bir kişi, Jüpiter gezegeninde 416 pound gelmektedir. Dünyada 120 pound ağırlığındaki bir kişi, Jüpiter'de kaç pound ağırlığında gelir?**
- **Bir yerel üniversitedeki her 8 son sınıf öğrencisinden 5'i apartmanda oturmaktadır. Matematik bölümünde son sınıfta okuyan 30 öğrenciden kaç tanesi muhtemelen bir apartmanda oturmaktadır?**
- **$20'lık bir alışverişteki vergi, $1.12'dır. $45.50'lık bir alışverişteki vergi ne kadar olur?**
- **Avustralya'da, $6 Avustralya dolarını $4.50 Amerikan doları ile değiştirebilirsiniz. $17.50 Avustralya doları, kaç Amerikan doları yapar?**

Bu etkinlikteki görevler, tipik "orantı çözme" görevleridir. Bir oran ve ikinci oranın bir kısmı, dördüncü sayıyı



Şekil 18.9 Dünya'daki 160 pound, Jüpiter'de 208 pounddur. Dünya'da 120 pound olan herhangi bir şeyin ağırlığı, Jüpiter'de kaç pound gelir? Oran tabloları kullanılarak üç çözüm sunulmuştur.

bulmak için görevde verilmiştir. Fakat bu çeşit görevler, herhangi bir formel yaklaşım önerilmeden önce verilmelidir. Orantıda istenilen kısmı bulmak için, basit toplama veya çıkarma işlemlerinin kolay bir şekilde yapılamayacağı da not edilmelidir. Bunun yerine öğrenciler, istenilen sonuca ulaştıracak denk oranları bulmak için bir oran tablosu kullanmalıdır. Şekil 18.9, Jüpiter'deki ağırlığı bulma görevi için oran tablolarının kullanıldığı üç farklı yolu göstermektedir.

Bu oran tablolarının formatı, hiç önemli değildir. Bazı öğrenciler, hiçbir şekilde bir tablo formatı kullanmayabilir ve basitçe oklar çizebilir ve bir orandan diğerine nasıl geçtiklerini kelimelerle açıklayabilir. Daha karmaşık bir formatı değerli bulabilirsiniz.



Durup Düşün!

Etkinlik 18.6'daki son üç problemi çözmek için bir oran tablosu stratejisi kullanınız. Bu yaklaşımların her birinin, içler-dışlar çarpımı algoritmasına göre avantajlarını belirtiniz?

Aşağıdaki problem ve Şekil 18.10'daki tablo, Lamon'dan (1999. s. 233) alınmıştır. Sayıların, hiçbir şekilde "uygun" sayı olmadığına dikkat ediniz.

	Pound	Maliyet	Notlar
A	1	4.25	Verilmiş
B	10	42.50	A × 10
C	2	8.50	A × 2
D	0.1	0.425	A 10
E	12.1	51.425	B + C + D
F	0.01	0.0425	D 10
G	0.03	0.1275	F × 3
H	12.13	51.5525	E + G

Şekil 18.10 İyice yapılandırılmış bir oran tablosu. Notlar sütunu, her bir adımda ne yapıldığını göstermektedir. Görev, 12.13 poundun maliyetini bulmaktır.

Peynirin poundu, $4.25'dır. 12.13 poundluk peynir kaç liradır?

Şekil 18.10'daki format, her adımda ne yapıldığının daha kolay izlenmesine imkân verir. Bu sadece bir formattır. Algoritmayla aynı değildir. Her problem için, muhtemelen birkaç farklı mantıklı oran tablosu vardır. Bu tekniği uygulamada; öğrenciler, verilen bir oranı denk bir orana dönüştürmek için çarpımsal ilişkileri kullanır. Lamon'un da belirttiği gibi, süreç tamamen tesadüfî değildir. Öğrenciler, bir sayıdan başka bir sayıyı elde etmek için zihinsel olarak bir plan yapmalıdır.

18.6'da önerilen etkinlikler oldukça mantıklı sayılar içermektedir. Bununla birlikte, peynir örneğinde görebileceğiniz gibi, bu tekniği neredeyse her bir sayıyla kullanmak da oldukça olasıdır. Kolay çarpan ve bölenler kullanılarak, aritmetik işlemler genellikle zihinden yapılabilir.



Bir oran tablosundaki her iki kısımda niçin aynı çarpanın kullanılması gerektiği öğrencilere açık olmalıdır. Örneğin, Şekil 18.10'daki B satırında, hem 1 hem de 4.25, 10 ile çarpılmıştır. G satırında ise her iki kısımdaki sayı da 3 ile çarpılmıştır. Orantıdaki bölümlerin her bir çifti, bir oran içermektedir. Denk bir kesir, her iki kısmın aynı sayıyla çarpılmasıyla bulunur. ◆

Öğretim Programında Orantısal Akıl Yürütme

Bu bölümün başında da belirtildiği gibi; orantısal akıl yürütme, öğretim programındaki çoğu kavram için gereklidir. Orantısal akıl yürütmenin, cebir, ölçme ve geometri ile istatistik ve sayılarda kullanımına ilişkin bazı örnekler aşağıdadır.

Cebir

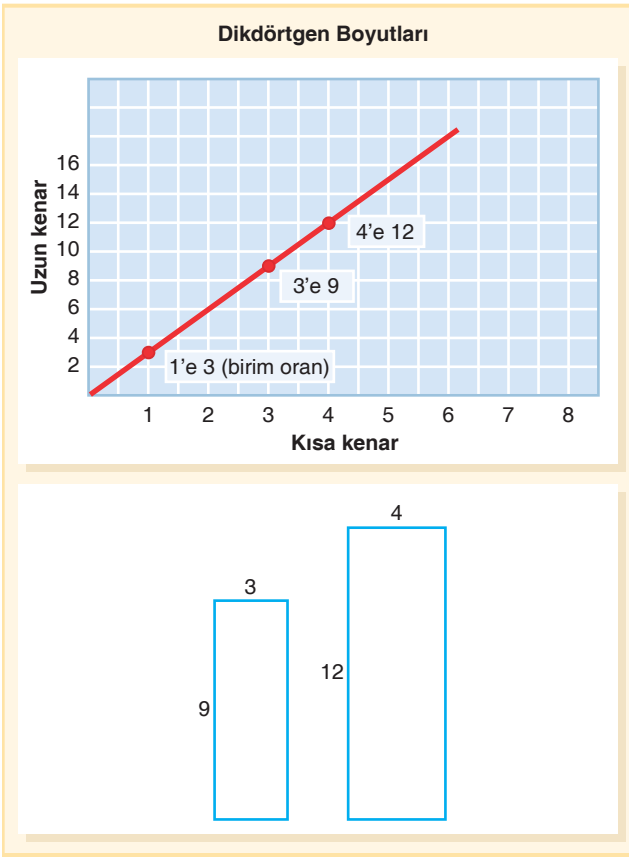
Oranların grafiği, cebirle güçlü bir bağlantı kurar. Bu bölümde ve Bölüm 14'te daha önce tartışıldığı gibi, orantısal akıl yürütme, doğrusal durumlardır. Aslında oranlar, çarpımsal ilişkiler olduğundan daima orijinden geçen doğrusal durumların özel bir durumudur. Birimli oran veya birimsiz oran, grafiğin eğimidir.

Her oran tablosu, grafiğe dönüştürülebilecek veriler sağlar. Tablodaki niceliklerden her birine karşılık gelecek eksenler oluşturunuz. Bu fikir aşağıdaki etkinlikte geliştirilmiştir.

Etkinlik 18.7

Dikdörtgen Oranları—Yeniden İnceleme

Öğrencilerden, tartıştıkları veya ölçtükleri eşit oranların bir koleksiyonundaki verilerin grafiğini çizmelerini isteyiniz. Şekil 18.11'deki grafik, benzer dikdörtgenlerin iki kenarının oranlarına dayanmaktadır. Eğer sadece birkaç oran işaretlenirse, grafik dikkatli bir şekilde çizilebilir ve sonra başka denk oranları belirlemek için kullanılabilir. Dikdörtgen örneğinde; öğrenciler, grafiklerle kenarları belirlenmiş dikdörtgenler çizebilir ve bu dikdörtgenleri, başlangıçtaki dikdörtgenlerle karşılaştırabilirler. Birim oran, x=1 veya y=1 doğrusu üzerinde bir nokta tespit edilerek bulunanabilir. Öğrencilerden birimli oranı, her bir şekilde bulmalarını isteyiniz. Öğrencilere, kenarlarından biri tamsayı olmayan (örneğin, $4\frac{1}{2}$ birimler) bir dikdörtgen bulup bulamayacaklarını sorunuz. Öğrencilerden, eğer kısa kenarı bilirlerse uzun kenarı nasıl bulabileceklerini isteyiniz (ve tersini de).



Şekil 18.11 Grafikler, benzer dikdörtgenlerdeki kenarların oranlarını göstermektedir.

Grafikler, orantılar hakkında düşünmenin başka bir yoludur ve orantısal düşünmesi, cebirsel yorumlamalarla ilişkilendirir. Denk oran grafiklerinin hepsi, orijinden geçen doğrulardır. Eğer bu doğrulardan birinin denklemi, $y = mx$ biçiminde yazılırsa, m eğimi daima denk oranlardan biridir. Orijinden geçen herhangi bir doğrunun eğiminin, herhangi bir noktadaki y-koordinatının aynı noktanın x-koordinatına oranı olduğuna dikkat ediniz.

Ölçme ve Geometri

Bu etkinliklerde, öğrenciler sayısal ilişkileri incelemenin yanısıra bir orantının somut bir örneğini elde etmek için denk oranların fiziksel veya görsel modellerini oluşturabilir veya ölçümler de yapabilir.

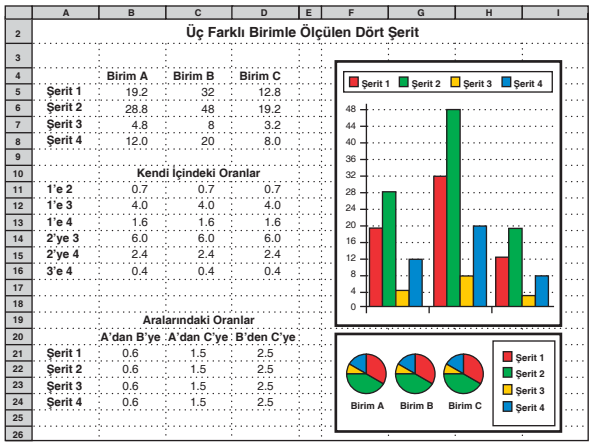
Etkinlik 18.8

Farklı Birimler, Eşit Oranlar

Birbirine eklenmiş yazarkasa fişi şeritlerini, hepsi eşit uzunlukta olacak şekilde kesiniz ve sınıftaki her gruba bir şerit veriniz. Her grup, standart olmayan farklı bir birim kullanarak bu şeritleri ölçer. Olası birimler; farklı renkli çubukları, tebeşir parçasını, bir kurşun kalemi, bir kitabın veya indeks kartının kenarını içerir. Her grup, şeridi ölçtüğünde, grupların birinden ölçümlerini ve ölçme birimlerini göstermesini isteyiniz. Daha sonra, başka bir grup tarafından kullanılan ölçme birimini havaya kaldırınız ve sınıftan onu ilk birimle karşılaştırmasını isteyiniz. Sınıfın, ikinci grubun bulduğu ölçümü tahmin edip edemediğine bakınız. Ölçme birimlerinin oranı, bu birimlerle yapılan ölçümlerin tersi olmalıdır. Örneğin; iki birimin oranı, 2'ye 3 ise bahsedilen ölçümlerin oranı, 3'e 2 olmalıdır. Başka birimlerle yapılan ölçümleri inceleyiniz. Son olarak, grupların kullanmadığı bir birim sununuz ve sınıfın, bu birimle yapılan ölçümü tahmin edip edemediğine bakınız.

Etkinlik 18.8, oldukça farklı uzunluktaki dört şeritli özdeş bir kümenin her gruba verilmesiyle genişletilebilir. 20, 50, 80 ve 120 cm uygun uzunluklar olabilir. Önceki gibi, her gruba şeritleri ölçmeleri için farklı bir birim verilir.

Bu kez, her gruptan bir ortak elektronik tabloya verileri girmelerini isteyiniz (Alternatif olarak, bütün grupların kendi elektronik tablolarına verileri girebilmeleri için grup verileri paylaşılır). Şekil 18.12, her üç grup için



Şekil 18.12 Elektronik tablo, daire ve sütun grafiklerini üretecek ve ilginç oranların tablosunu oluşturacak verileri kaydetmek için kullanılabilir.

Kaynak: Screen reprinted with permission from Apple Computer, Inc.

bir elektronik tablonun neye benzediğini göstermektedir. Daha önceden bir şablon hazırlanabilir veya öğrenciler, kendi elektronik tablolarını oluşturabilir. Neredeyse bütün elektronik tablolar, çeşitli grafik çizme seçenekleri sunar. Bu etkinlikte; sütun grafikleri, her grubun gerçek ölçümlerini, daire grafikler ise her ölçümün toplam ölçüme oranını gösterir (Yani, toplam ölçümlerin yüzdesini).

Grafiklerin çizimi tamamlandığında; kendi içindeki ve aralarındaki oranların çarpımsal ilişkilerini gözlemlemek ve incelemek için birçok imkân vardır. Sütun grafikleri, farklı büyüklüklerde olmasına rağmen hepsi birbirine "benzemektedir". Daire grafikleri, gerçek ölçümlerden ziyade oranları gösterdiği için özdeş veya özdeşe yakın görünecektir. Kendi içindeki oranlar (şeritlerin bir kümesi için) ve aralarındaki oranlar (bir birimin diğerine), elektronik tablolarla kolayca hesaplanabilir (kendi içindeki ve aralarındaki oranlar, bu bölümde daha sonra tartışılacaktır).

Yeni bir şeridin ilave edilmesiyle incelemeyi sürdürünüz. Eğer bu yeni şeridin ölçüsünü herhangi bir birim cinsinden biliyorsanız, o zaman diğer birimler cinsinden ölçüsü ne olacaktır? Benzer biçimde, yeni bir ölçü birimi sunulursa, şeritlerin ölçüleri nasıl belirlenebilir? Eğer bilinen bir şerit, yeni birimle ölçülürse diğer tüm ölçümler ve oranlar belirlenebilir mi?

Yeni tanımlanan görevin öğrencilerle beraber tamamlanması birkaç gün sürebilir; fakat öğrencilerin, sayısal ve grafiksel temsiller vasıtasıyla çarpımsal ilişkileri anlamalarını pekiştirebilmek için zaman iyi değerlendirilmelidir.

Ölçekli Çizimler

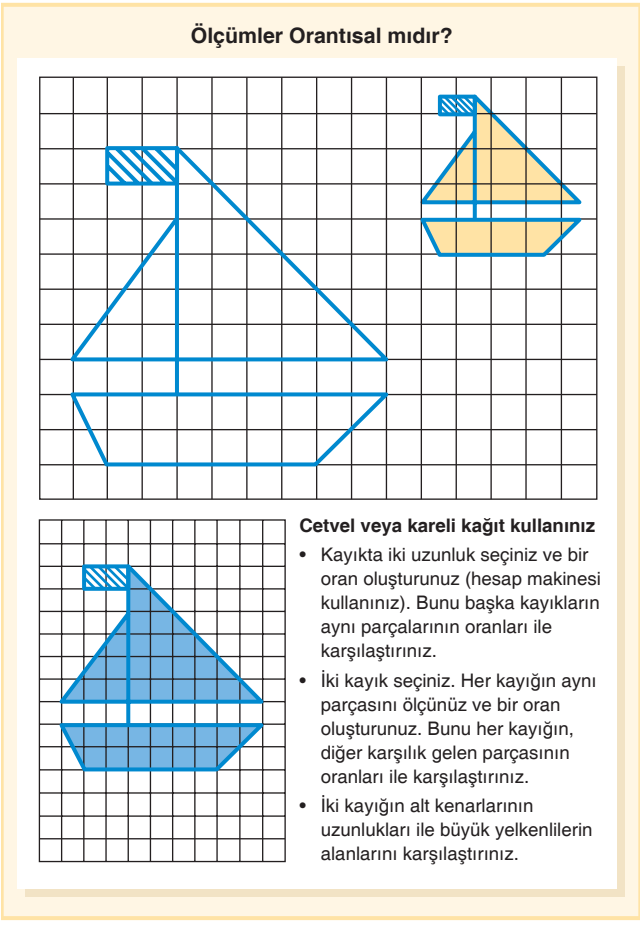
Orantısal akıl yürütme ile geometrideki benzerlik kavramı arasındaki bağlantı çok önemlidir. Benzer şekiller, orantıların görsel bir temsilini sağlar ve orantısal düşünme de, benzerliğin anlaşılmasını geliştirir. Benzer şekillerin tartışması, şekillerin içindeki ve arasındaki oranlar üzerine odaklanmalıdır. Takip eden etkinlik, bu bağlantıyı amaçlamaktadır.

Etkinlik 18.9

Ölçekli Çizimler

Öğrencilerden, kareli veya noktalı bir kağıda (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 34-37) köşeleri noktalar üzerinde olan doğruları kullanarak basit bir şekil çizmelerini isteyiniz. Şeklin çizimi tamamlandıktan sonra, öğrencilerden ilk çizdikleri şekle benzeyen daha büyük veya daha küçük bir şekil çizmelerini isteyiniz. Şekil 18.13'te gösterildiği gibi; bu şekil farklı veya aynı büyüklükteki bir kareli kağıt üzerinde çizilebilir. İlk olarak, şekillerin kendi içindeki oranlarını karşılaştırınız (Bkz. Şekil 18.13'teki ilk problem). Daha sonra, şekillerin aralarındaki oranları karşılaştırınız (Bkz. Şekil 18.13'teki ikinci problem).

Bir şekilden diğerine karşılıklı kenarlar, aynı oranda olmalıdır. Bir şekil içindeki iki kenarın oranı, başka şekildeki karşılıklı iki kenarın oranıyla aynı olmalıdır.



Şekil 18.13 Kareli kağıt üzerinde çizilen benzer şekillerin karşılaştırılması

Etkinlik 18.9'un üçüncü kısmı, uzunluk kadar alanı da içerir. Orantılı şekillerdeki karşılıklı uzunluk, alan ve hacimlerin karşılaştırılması, bazı ilginç örüntülere öncülük eder. Eğer iki şekil orantılı (benzer) ise, ölçtüğünüz herhangi iki doğrusal uzunluk her birinde aynı orandadır, yani 1'e *k*'dır (*k* değişkeni, genellikle oranlarla kullanılırken *m*, eğimi göstermek için denklemlerle birlikte kullanılır-her ikisi de, iki değer arasındaki birimli oranı veya birimsiz oranı ifade etmektedir). Bu durum; eğer benzer şekil, asıl şeklin uzunluğunun iki katı ise o zaman birbirine karşılık gelen her bir kenar için, asıl şeklin yeni şekle oranının 1: 2 olduğunu gösterir. Yeni bir kenarın uzunluğunu bulmak için, 2 ile çarpılır, bu durumda *k*'nın değeri 2'dir.

3 × 3'lük bir karenizin olduğunu hayal ediniz ve 6 × 6'lık yeni bir kare oluşturunuz. Uzunlukları arasındaki oran, 1:2'dir. İki alan arasındaki oran nedir? Niçin bu oran, 1:4'tür? Bir küpün hacmi için aynı kavramı deneyiniz-asıl hacmin yeni hacimle ilişkisi nedir? Neden öyledir? Şekil 18.13'teki yelkenli sorusuna geri dönünüz, iki yelkenlinin alanlarının oranına yönelik varsayımınız ne olabilir? Hipotezinizi, ölçerek test ediniz.

Orantısal durumları toplamalı durumlar ile karşılaştırma yoluyla, kareli kağıt üzerindeki bir şekil veya bloklarla yapılmış bir bina kurmayı deneyiniz ve şekildeki her bir boyuta iki birim ekleyiniz. Sonuç, bu şekil daha büyük olacak fakat asıl şekle benzeyecektir. Bunu boyutları, 1 × 15 cm olan basit bir dikdörtgen ile de deneyiniz. Yeni dikdörtgen, "kalınlık" (2 cm.) olarak öncekinin iki katıdır, fakat sadece biraz daha uzundur. Başlangıçtaki şekille de aynı görünmeyecektir.

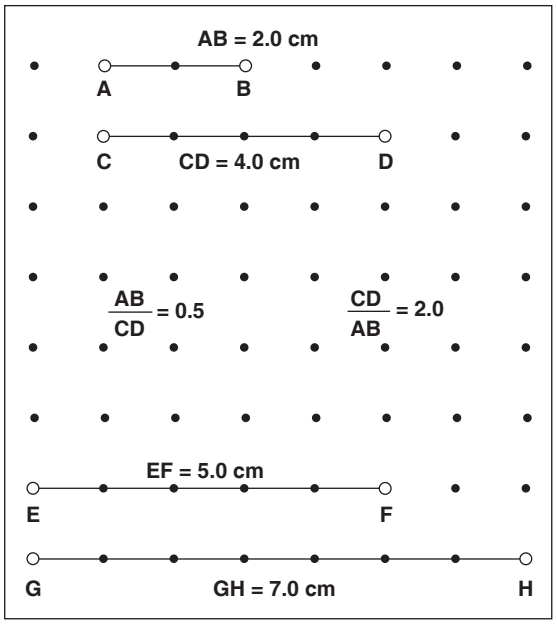


GeoGebra (www.geogebra.org/cms web adresinden ücretsiz olarak indirilebilir) veya *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press) gibi dinamik geometri yazılımları, oran kavramının incelenmesi için çok etkili bir yöntem önermektedir. Şekil 18.14'te, "snap-to grid[1]" seçeneği kullanılarak iki uzunluk bir kareli kağıt üzerine çizilmiştir. Uzunluklar ölçülür ve iki oran hesaplanır. Her iki doğrunun uzunluğu değiştirilerek, ölçümler ve oranlar hemen güncellenir. Buna benzer bir ekran, sınıfınızın tamamıyla beraber ters oranlar kadar uzunlukların oranlarını tartışmak için de kullanılabilir. Bu örnekte, doğruların ikinci çiftinin aynı farka sahip olduğuna, fakat oranların aynı olmadığına dikkat ediniz. Benzer bir çizim, eğer yazılım uygun değilse, bir santimetrelik noktalı kağıt içeren bir asetat üzerinde yapılarak tepegöz için de hazırlanabilir.

Benzer şekilleri ve birbirine karşılık gelen ölçümleri de inceleyebilirsiniz. Genişletme/daraltma özelliğini kullanarak, bir şekil çizebilir ve sonra bu şekli, seçeceğiniz herhangi bir ölçek katsayısına göre genişletebilirsiniz (orantılı şekilde daraltma veya genişletme). Başlangıç oranları ve son ölçümler (uzunluklar ve alanlar), sonra ölçek katsayısına göre karşılaştırılabilir. Hesaplamaların hepsi, yazılımdaki programla yapılabilir. ◆

[1] Ç.N. Geogebra ve Sketchpad programlarına ait bir özellik (ekran özelliği): Kareli kağıttaki çizgilerin kesişimine yakın olan noktaların otomatik olarak hizalanması özelliğidir.

AB ve CD'nin oranı, EF ve GH'ın oranı ile aynı mıdır?



Şekil 18.14 Dinamik geometri yazılımı veya sadece bir santimetrelik kareli kağıt, iki uzunluğun oranlarını tartışmak için kullanılabilir.

Kaynak: From *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, 1150 65th Street, Emeryville, CA 94608, 1-800-995-MATH, www.keypress.com. Reprinted by permission.

Ölçekli çizimi incelemek için daha da ilginç olan durumlar aşağıdaki listede gösterilmiştir:

- Güneş sisteminin ölçekli bir modelini yapmak isteseydiniz ve Pinpon topunu dünyayı temsil etmek için kullansaydınız, güneş ne kadar uzaklıkta olmalıydı? Ne kadar büyük bir topa ihtiyacınız vardır?
- Şehrinizin (veya ilginç bir bölgenin) ölçekli bir haritasını, bir ilan tahtasının standart ölçüsüne zarif biçimde uyacak şekilde çizmek için kullanılması gereken ölçek nedir?
- İlginç iki nokta arasındaki uzaklığı ve seyahat süresini tahmin etmek için bir harita üzerindeki ölçeği kullanınız.
- Bir rampadan bir oyuncak arabayı bırakınız ve kronometre ile seyahat süresini kaydediniz. Araba, saatte kaç mil hız yapmıştır? Eğer hız, arabanın büyüklüğü ile orantılı ise buradaki hız gerçek bir araba için ne olurdu?
- Küçük kız kardeşiniz, oyuncak bebeği için bir masa ve bir sandalye istemektedir. Bebeğin boyu, 14 inç'tir. Masayı, ne kadar büyük yapmalısınız?
- Pedallarından birinin çevrilmesiyle giden on-vitesli bir bisikletin, gidebileceği çeşitli mesafeleri belirleyiniz. Ön ve arka viteslerdeki, zincir dişlilerini saymanız gerekecektir.

İstatistik

Bilim adamlarının bir göldeki levreklerin veya her yıl Meksika'ya göç eden imparator kelebekleri gibi vahşi hay-

vanların sayısını nasıl tahmin ettiklerini hiç merak ettiniz mi? Sık kullanılan bir yöntem, aşağıdaki etkinlikte modellenen yakalayıp kaydet-tekrar yakalayıp kaydet tekniğidir.

Etkinlik 18.10

Yakalayıp kaydet-tekrar yakalayıp kaydet

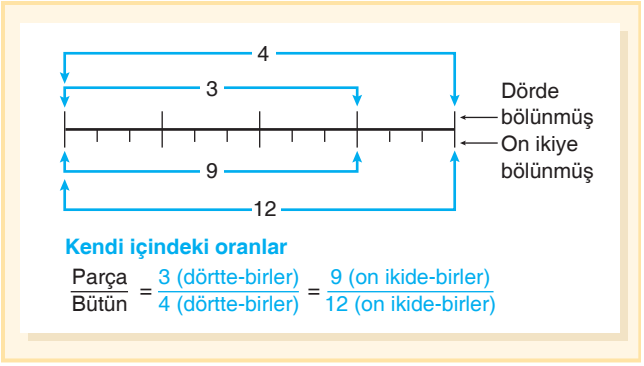
Küçük küp ve plastik çubuklar gibi bazı özdeş küçük nesnelerle dolu bir ayakkabı kutusu hazırlayınız. "Fıstık" ambalajlarıyla dolu suni köpüklü daha büyük bir kutu da kullanabilirsiniz. Eğer; kutuyu göl, içindeki nesneleri de saymak istediğiniz balıklar olarak ele alırsanız, onları fiili olarak saymadan nasıl tahmin edersiniz? Eğer balık olsalardı, onları hiç göremeyeceğinizi bile hatırlayınız! Bir öğrenciden, kutuya elini sokmasını ve "balıkların" temsili bir örneklemini "yakalamasını" isteyiniz. Büyük bir kutuda, bir avuçtan daha fazlasını yakalamayı isteyebilirsiniz. Her balığı, herhangi bir biçimde kalemle veya yapışkan bir noktayla "etiketleyiniz". Daha sonra, etiketlendirilen balıkları sayınız, kaydediniz ve tekrar kutuya koyunuz. Bilim adamlarının varsayımı, etiketli hayvanların daha büyük grupla düzgün biçimde karışacağı yönündedir, bu nedenle onları, iyice karıştırınız. Sonra; 5-10 arası öğrenciden, kutudaki balıkları yeniden yakalamalarını isteyiniz. Öğrencilerin her biri, yakaladıklarının toplamını ve etiketli olanların sayısını belirler. Bu verileri toplayınız.

Şimdi görev, göldeki balık sayısını tahmin etmek için eldeki bütün bilgiyi kullanmaktır. Yeniden yakalama verileri, etiketli balıkların etiketlenmemiş balıklara tahmini bir oranını verir. Etiketlenmiş balık sayısının toplam balık nüfusuna oranı da aynı olmalıdır. Orantıyı çözdükten sonra, öğrencilerden tahminlerinin ne kadar yakın olduğunu görmeleri için kutudaki nesneleri saymalarını isteyiniz.

"Yakalayıp kaydet-tekrar yakalayıp kaydet " etkinliğinin daha detaylı bir açıklaması için şu kitaba bakınız: NCTM Addenda Series book, *Understanding Rational Numbers and Proportions/Rasyonel Sayıları ve Orantıları Anlama* (Curcio ve Bezuk, 1994).

Sayı: Kesirler ve Yüzdeler

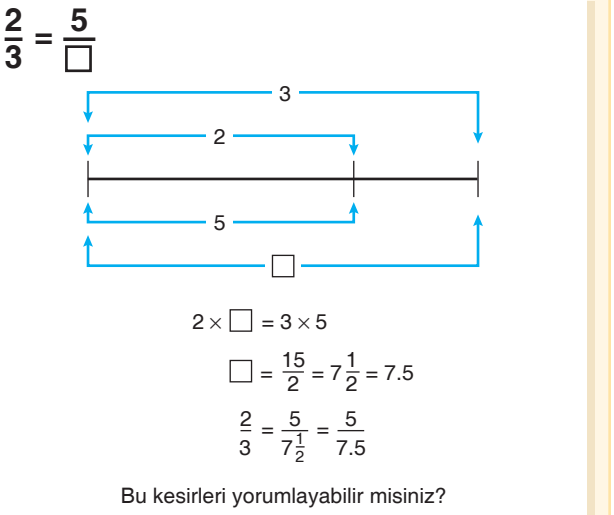
Yüzde, bir oran biçimi (bir parça-bütün oranı) olduğundan geleneksel olarak oran ve orantıyla beraber ele alınan bir konudur. Bölüm 17'de, yüzde problemlerinin kesir kavramlarıyla ilişkilendirilebileceği gösterilmişti. Burada ise yüzdenin aynı parça-bütün kesir kavramı, oran ve orantı kavramlarına genişletilecektir. En iyisi, bu kavramların hepsinin (kesirler, ondalıklar, oran, orantı ve yüzde) kavramsal olarak bütünleştirilmesidir. Öğrenciler; bu kavramları ne kadar ilişkilendirirse, akıl yürütme ve problem çözme becerileri de o kadar kullanışlı ve esnek olacaktır.



Şekil 18.15 Denk kesirleri, orantılar olarak düşünme.

Denk Kesirler. İlk önce; denk kesirlerin, daha önce kullanılan benzer basit modelleri kullanan bir orantı olarak nasıl yorumlanabileceğini düşününüz. Şekil 18.15'te; bir doğru parçası, bir tarafta dörde diğer tarafta ise on ikiye olmak üzere iki farklı şekilde bölünmüştür. Önceki örneklerde; orantılar, iki farklı elma miktarına, iki farklı uzaklığa veya yola ve iki farklı büyüklükteki çizimlere dayandırılarak oluşturulmuştu. Burada sadece bir şey ölçülmektedir (bir bütünün parçası), fakat iki şekilde bölünmüş veya ölçülmüştür: Dörtte birler ve on ikide birler cinsinden.

Herhangi bir denk-kesir problemini orantı kurarak çözmek için (pay ve paydaları doğal sayı olmayanlar bile), Şekil 18.15'tekine benzer basit bir doğru parçası çizimi yapılabilir. Buna ilişkin bir örnek, Şekil 18.16'da gösterilmiştir.

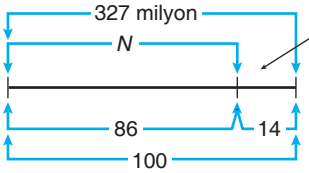


Şekil 18.16 Denk kesir problemlerini, içler-dışlar çarpımını kullanarak denk oranlar olarak çözme

Yüzdeler. Bütün yüzde problemleri, denk kesir örnekleri ile tamamen aynıdır. Yüzdeler, belli bir birimle ölçülen bir parça ve bir bütünü ve yüzde-birlerle ölçülen aynı parça ve bütünü kapsar (yani, yüzdeleri). Basit bir doğru parçası çizimi, üç çeşit yüzde probleminin her biri için kullanılabilir. Doğrunun bir tarafındaki ölçümlerin, problemdeki sayılar ya da ölçümlerle uygun olmasını sağlayınız. Doğrunun bir tarafındaki sayılara karşı gelen sayıları, doğrunun diğer tarafında gösteriniz. Doğrunun uç noktaları yerine parçalarını isimlendiriniz. Her problem çeşidinin örnekleri, Şekil 18.17'de gösterilmiştir.

Bu basit doğru modelinin, yüzde probleminin her çeşidi için nasıl esnekleşebileceğini fark ediniz. Bu model, sadece parça-bütün senaryosunu değil aynı zamanda artma-azalma durumlarını ve iki farklı nicelik arasında bir karşılaştırma yapmanın modellemesine de izin verir. Bunlardan her birine, Şekil 18.17'de yer verilmiştir. Doğru modelinin diğer bir avantajı; öğrencileri, 100'den daha büyük yüzdeler hakkında düşünürken 10x10'luk bir kareli kağıt veya daire grafiği ile kısıtlamamasıdır (Parker, 2004).

1960'ta, Amerikan demir yolları 327 milyon yolcu taşıdı. Takip eden 20 yılda, yolcu sayısında % 14'lük bir azalma oldu. 1980'de demir yollarını kaç yolcu kullandı?

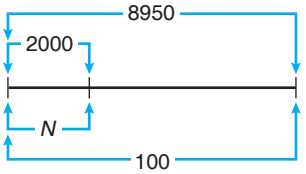


Parça bilinmiyor

$$\frac{N}{327 \text{ milyon}} = \frac{86}{100} = 0.86$$

$N = 0.86 \times 327$ milyon → yaklaşık 281 milyon

Sylvia'nın yeni kayığının fiyatı, $8.950'dır. $2.000 depozito verdi. Sylvia'nın verdiği depozito, satış fiyatının yüzde kaçıdır?



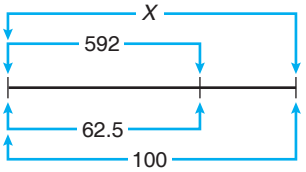
Yüzde (kesir) bilinmiyor

Parça/Bütün

$$\frac{\$2000}{\$8950} = \frac{N}{100}$$

$8950N = 200{,}000 \rightarrow N = 22.35$ veya yaklaşık % 22'dir.

Robious Ortaokulu'nun yedinci ve sekizinci sınıfları, okul festivalinde hangi sınıfın daha fazla piyango bileti sattığını görmek için bir yarışma yaptı. Sekizinci sınıf öğrencileri, 592 bilet sattı. Fakat bu bilet satışı, yedinci sınıf öğrencileri tarafından satılan biletlerin sayısının sadece yüzde 62.5'unu karşılamaktadır. Yedinci sınıf öğrencileri, kaç bilet satmıştır?



Bütün bilinmiyor

Karşılaştırma

$$\frac{592 \text{ bilet}}{X \text{ bilet}} = \frac{62.5}{100}$$

$62.5X = 59{,}200 \rightarrow X = 947.2$ veya 947 bilet.

Şekil 18.17 Basit bir doğru parçası modeli kullanılarak kurulan bir orantıyla çözülen yüzde problemleri.

Orantılar

Bu noktaya kadar yapılan etkinlikler, öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine yardımcı olmada sezgisel bir oran ve orantı kavramına öncülük etmek için tasarlanmıştır.

Orantısal akıl yürütmenin pratik bir değeri, bilinmeyen değerleri bulmak için gözlenen orantıları kullanmaktır. Bir oranın bilinmesi, genellikle diğerindeki bir değerin bulunması için kullanılabilir. Fiyatları karşılaştırma, haritalarda ölçek kullanma ve yüzde problemlerini çözme, çözüm için orantıları kullanmayı gerektiren birkaç günlük yaşam örneğidir. Öğrencilerin, orantıları semboller kullanarak kurmayı öğrenmeye ve çözmeye ihtiyacı vardır.

NCTM Standartları "Rasyonel sayılarla çalışırken esnekliğin geliştirilmesine dikkat etme, öğrencilerin orantısallığı anlamalarına ve becerikli olmalarına imkân verir. Orantısal düşünmede becerikli olma, iki oranı eşitlemek ve çözüm için verilmeyen sayıyı bulmaktan daha fazlasını ister. O, nicelikleri ve bunların ilişkileri hakkında düşünmek için sayıları, tabloları, grafikleri ve denklemleri kullanmayı ve orantılı olarak ilişkilendirilen nicelikleri tanımlamayı içerir" (s. 217). ◆

Orantı, iki oran arasındaki eşitliğin bir ifadesidir. Eğer 4 kayık 36 yolcu taşırsa o zaman aynı boyutlu 2 kayık 18 yolcu, 3 kayık 27 yolcu ve 20 kayık 180 yolcu taşıyacaktır. Buradaki 4'e 36 oranı, her durumda ölçümler farklı olmasına rağmen bu durumların her birine uygulanabilir.

Kendi İçindeki ve Aralarındaki Oranlar

İki oran incelendiğinde; bu oranları, ya *kendi içindeki* ya da *aralarındaki oran* olarak düşünmek faydalıdır. Aynı ortamdaki iki ölçümün oranı, *kendi içindeki oran* olarak ifade edil-

mektedir. Örneğin; benzer dikdörtgenlerde, herhangi bir dikdörtgen için uzunluğun genişliğe oranı, kendi içindeki orandır, yani bu oran, aynı dikdörtgenin bağlamı "içindedir". Benzer dikdörtgenlerin hepsi için, birbirine karşılık gelen kendi içindeki oranlar birbirine eşit olacaktır.

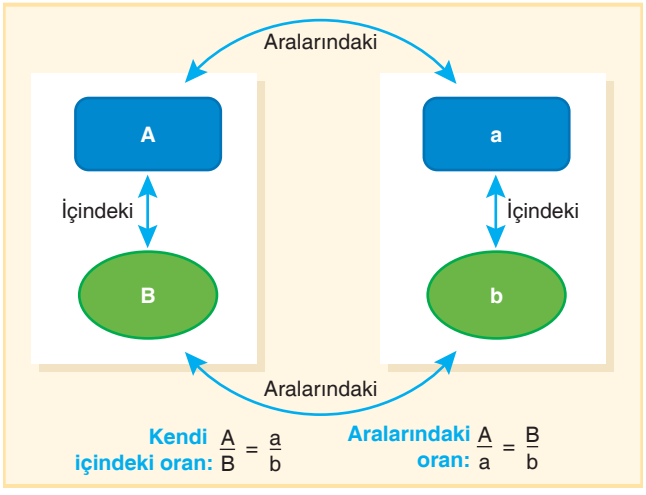
Aralarındaki oran ise farklı durumlarda birbirine karşılık gelen iki ölçümün oranıdır. Benzer dikdörtgenler durumunda, bir dikdörtgenin uzunluğunun, diğer dikdörtgenin uzunluğuna oranı, aralarındaki orandır; yani bu oran, iki dikdörtgenin "arasındadır". İki benzer dikdörtgen için, aralarındaki oranların hepsi birbirine eşit olacaktır.

Durup Düşün!

A, B ve C şeklinde üç dikdörtgen alınız. A'nın ölçüsü, 2 x 6; B'nin ölçüsü, 3 x 9 ve C'nin ölçüsü ise 8 x 24'dır. Her dikdörtgenin kendi içindeki oranını bulunuz. Elde ettiğiniz sonuç, bu üç dikdörtgenin benzer olduğuna yönelik sizi ikna etmelidir. Şimdi, A ile B ve A ile C dikdörtgenleri için aralarındaki oranı inceleyiniz. Bu oranlar, niçin farklıdır?

Başka bir örnek olarak; Şekil 18.6 (s. 354), kamyonları ve kutuları içeren altı resmi göstermektedir. Kendi içindeki oranlar, kamyonların kutulara oranıdır (bir resmin içinde). Aralarındaki oranlar ise kamyonların kamyonlara ve kutuların kutulara oranıdır.

Şekil 18.18'deki çizim, bu iki orana bakmanın ve bir oranın, kendi içindeki oran mı yoksa aralarındaki oran mı olduğunu belirlemenin etkili bir yoludur. Buna benzer bir çizim, özellikle soyut temsillerde zorlanan öğrencilerin orantılar kurmasında çok yardımcı olacaktır. Herhangi iki denk kamyon ve kutu resmini seçiniz ve aşağıdaki resimde sayıları yerleştiriniz.



Şekil 18.18 Orantılı bir durum verildiğinde, kendi içindeki iki oran ve aralarındaki iki oran denk olacaktır.

Akıl Yürütme Yaklaşımları

Geleneksel ders kitapları; öğrencilere, bir bilinmeyen içeren iki oranın denkleminin nasıl kurulacağını ve bilinmeyenin nasıl bulunacağını, "içler-dışlar çarpımı" yaparak gösterir. Bu çok mekanik bir yaklaşım olabilir, karışıklığa ve hataya yol açabilir. Nihayetinde ulaşmak istediğiniz şey içler-dışlar çarpımı algoritması olmasına rağmen, öğrencilerin kendi fikirlerini kullanarak orantıları çözmek için yollar keşfetmeleri için harcadıkları zaman oldukça değerlidir. Eğer orantıları inceler ve kendi içindeki ve aralarındaki oranların ilişkilerini tartışırsanız, öğrenciler kendi yaklaşımlarını inşa etmede iyi bir temele sahip olur.

Tipik orantı görevlerinin çözümü için, bazı sezgisel yaklaşımları gösteren aşağıdaki soruları inceleyiniz:

Tammy, 3 grafik bileşenini (yazılımdaki) $2.40'ya satın aldı. Aynı fiyattaki 10 grafik bileşeni kaç dolardır?

Tammy, 4 grafik bileşenini $3.75'ye satın aldı. Bir düzine grafik bileşeni kaç dolardır?

Durup Düşün!

Daha fazla okumaya devam etmeden önce, yukarıdaki iki problemi içler-dışlar çarpımı algoritmasından başka bir yaklaşım kullanarak çözünüz.

İlk problemde, bir tane grafik bileşeninin fiyatını belirlemek belki de en kolay yöntemdir (birim oran veya birim fiyat). Bu oran, üç grafik bileşeninin fiyatının 3'e bölünmesiyle bulunabilir. Her bir grafik bileşeni için bu $0.80'lık birim oranın, 10 ile çarpılması cevabı verecektir. Bu yaklaşım, orantıları çözmede *birim-oran* yöntemi olarak ifade edilir. Buradaki birim-oranın, kendi içindeki oran olduğuna dikkat ediniz.

İkinci problemde, birim-oran yaklaşımı kullanılabilir, fakat buradaki bölme işlemi kolay gibi görünmemektedir. 12, 4'ün bir katı olduğu için, bir düzinenin fiyatının 4'ün 3 katı olduğunu dikkate almak daha kolaydır. Bu yaklaşım, *ölçek katsayısı* yöntemi olarak isimlendirilir. Bu yöntem, ilk problemde de kullanılabilirdi, fakat kullanışsız olurdu. 3 ve 10 arasındaki ölçek katsayısı, $3\frac{1}{3}$'tür. $2.40'ün $3\frac{1}{3}$ ile çarpımı, doğru sonucu verecektir (Bir oran tablosundaki ilgili kısımları çarparken bir ölçek katsayısı kullanınız). Ölçek katsayısı yöntemi, orantılar hakkında düşünmek için kullanışlı bir yöntem olmasına rağmen, genellikle sayılar uygun olduğunda kullanılır. Öğrencilere; her iki yöntemi de inceleyebilmeleri için, her iki yaklaşıma da uygun sayıları içeren problemler verilmelidir. Ölçek katsayısı, aralarındaki orandır.

Aşağıdaki iki problemi çözmek için, birim-oran veya ölçek katsayısı yöntemlerini kullanmayı deneyiniz. Şekil 18.18'deki formatı kullanarak, orantıları kurabilirsiniz.

Büyük bir kırtasiyede, basit 2 numaralı kalemlerin 4 tanesini 59 cente alabilirsiniz. Bu kalemler aynı kırtasiyede, bir paketinin fiyatı $7.79'dan 5 düzinelik büyük paketler halinde de satılmaktadır. Bu büyük paketi satın almakla ne kadar tasarruf edersiniz?

İki düzine şekerleme içeren bir paketin fiyatı, $4.80'dır. Bridget, 5 tane şekerleme almak istiyor. Ne kadar ödemelidir?

Kalem problemini çözmek için, kalemler arasındaki oranın 4'e 60 veya 1'e 15 olduğunu görebilirsiniz. Eğer 59 centi, 15 (değişim katsayısı) ile çarparsanız, kalemler aynı fiyatla satılmış ise 60 kalemin fiyatını bulacaksınız. Şekerleme probleminde; şekerleme başına düşen 20 centlik birim oranı elde etmek için 24'ün $4.80'a oranını (kendi içindeki oranını) kullanmak kolaydır.

Öğrencilerin bir cevabın mantığını anlamaları için aynı stratejileri uygulayarak daha zor sayılar içeren problemlerle de bu görevleri yapmaya devam etmeleri önemlidir. Örneğin, aşağıdaki probleme her iki stratejiyi de uygulamayı deneyiniz.

Brian, 5 km'yi 18.4 dakikada koşmaktadır. Aynı hızla koşmayı sürdürürse, 23 dakikada ne kadar yol alabilir?

İçler-Dışlar Çarpımı Yaklaşımı

"Öğrencilerin (orantısal akıl yürütmek için) oranlarla düşünme kapasitesinin geliştirilmesindeki temel zorluk, kavramları öğretmek ve hızlı hesaplama yoluyla kendini sınırlandırmaktır" (Smith, 2002, s. 15).

Daha önce tanımlanan yöntemler, içler-dışlar çarpımından bir parça daha esnek olmasına rağmen iyi-tanımlanmış algoritmalara yakındır. Karmaşık hesaplamaların, içler-dışlar çarpımıyla tamamen aynı olduğu bir gerçektir. Altıncı ve yedinci sınıf öğrencileri, içler-dışlar çarpımı yöntemi öğretildiğinde bile, orantı problemlerini çözmek için nadiren bu yöntemi kullanırlar (Smith, 2002). Olası bir neden, bu yöntemin nispeten etkili olmasına rağmen, daha önceki kavramsal yaklaşımlara görünüşte benzememesi olabilir. Eğer içler-dışlar çarpımını öğretirseniz; bu süreci, birim-oran ve/veya ölçek katsayısı yaklaşımlarıyla ilişkilendiriniz.

Basit Bir Model Çiziniz. Oran içeren bir sözel problem verildiğinde; öğrencilerin en büyük zorluğu; oranlardan biri, bir değer içerdiğinde, doğru bir orantı kurmak veya iki oranın denklemini yazmaktır.

Öğrencilerin en sonunda bir şekilde konuyu anlayacaklarını umarak sürekli alıştırma yapmaktan ziyade, parçaların arasındaki ilişkiyi belirlemelerinde yardımcı olacak basit bir resim taslağını nasıl çizebileceklerini gösteriniz.



Şekil 18.19 Basit bir çizim, orantı denklemlerinin doğru biçimde kurulmasına yardım eder.

Şekil 18.19'da, tipik bir birimli oran veya fiyat problemi için basit bir model çizilmiştir. Şekildeki iki denklem, kendi içindeki ve aralarındaki oranların kurulmasına dayalı olarak ortaya çıkmıştır.

Orantıyı Çözünüz. Soldaki (kendi içindeki) oranları inceleyiniz. Sağdaki kesri elde etmek için soldaki kesrin ne ile çarpılacağını hesaplayınız. 1.5'in ölçek katsayısı olduğunu görebilirsiniz veya ölçek katsayısını elde etmek için (6÷4) bölebilirsiniz. Daha sonra, $1.20'ı elde etmek için aynı ölçek katsayısı ile 80 centi çarpınız.

$$\frac{6}{4} \times 80$$

Şekil 18.19'da verilen soldaki aynı denklem incelendiğinde, 80 centi 4'e bölerek birim fiyatı veya 1 poundun fiyatını da bulabiliriz, sonra da 6 poundun fiyatını belirlemek için elde edilen bu sonucu 6 ile çarparız.

$$\frac{80}{4} \times 6$$

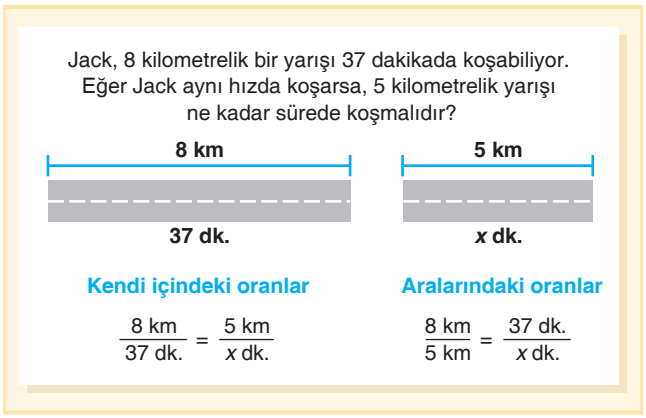
Şimdi, asıl denklemde içler-dışlar çarpımı yapıldığında ne olduğuna bakınız.

$$4n = 6 \times 80$$

$$n = \frac{6 \times 80}{4}$$

Bu denklem, 4'ü 6'ya bölüp, 80 ile çarparak veya 80'i 4'e bölüp, sonucu 6 ile çarparak da çözülebilir. Bunlar, tamamen diğer iki yaklaşımda (ölçek katsayısı ve birim oran) kullandığımız iki araçtır. Eğer aralarındaki oranda, içler-dışlar çarpımı yaparsanız, kesinlikle aynı sonucu elde edersiniz. Üstelik, iki oranı ters çevirip yazmış (yani, her kesrin tersini alma) olsanız da yine aynı sonucu elde edersiniz, Bunu deneyiniz!

Eğer içler-dışlar algoritmasını geliştirmek isterseniz, öğrencileri kendi yöntemlerini kullanmaları için yönlendirirken, onlardan bu türden problemleri çözmelerini istemek mantıksız değildir. Eğer içler-dışlar çarpımı yaklaşımı, tek bir yaklaşım veya en iyi yaklaşım olarak değil herhangi bir strateji olarak anlaşılır ve sunulursa o zaman öğrenciler daha fazla akıl yürütmeye devam edecek ve verilen bağlama uygun ve problemlerdeki sayıları anlamlı yapan stratejiyi seçecektir.



Şekil 18.20 Doğru parçaları, hem zamanı hem de uzaklığı modellemek için kullanılabilir.

Orantıların oluşturulması için görsel ipuçlarının verilmesi, geniş bir öğrenen kitlesine hitap etmede etkili bir yoldur. Şekil 18.20'deki yolun görsel hali, öğrencilere uygun orantıları oluşturma ve karmaşık nicelikleri düşünmede yardımcı olmak için kullanılmıştır. Görselin, oran tablosuna ve Şekil 18.19'daki resme nasıl benzediğini gözlemleyiniz. Bazı öğrenciler, daha mantıksal farklı stratejiler bulacaktır-öğrencileri, kendileri için anlamlı olan bir stratejiyi seçmeleri için teşvik ediniz.

Bölüm 18 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. Oran fikrini kendi kelimelerinizle tanımlayınız. Aşağıdaki ifadelerden her biriyle sizin düşüncenizin nasıl uyuştuğunu açıklayınız.
   - **a.** Kesir, bir orandır.
   - **b.** Oranlar, hiçte birbirine benzemeyen şeyleri karşılaştırabilir.
   - **c.** Oranlar, aynı bütünün iki parçasını karşılaştırabilir.
   - **d.** Fiyat veya hız gibi birimli oranlar, birer orandırlar.
2. Çarpımsal sezgi gibi toplamsal sezginin kullanımıyla da yorumlanabilecek karşılaştırmanın olduğu bir durum tanımlayınız. Daha önceki oran ve orantı tartışmanıza benzeyen böyle bir durumu niçin incelemek isterdiniz?
3. Denk oranların bir koleksiyonunun grafiği hakkında ne söyleyebilirsiniz?
4. Birim-oran veya ölçek katsayısı yaklaşımlarının kullanımıyla zihinden çözülebilecek gerçekçi bir orantısal durum oluşturunuz.
5. Şu problemi ele alınız: 50 galon yakıtın fiyatı $56.95 ise $100 ile kaç galon yakıt alınır? Orantıyı göstermek için bir model çiziniz ve denklemi, iki farklı şekilde kurunuz. Biri, içindeki diğeri aralarındaki oranı gösteren eşitlikler olmalıdır.
6. Gerçekçi bir yüzde problemi hazırlayınız ve problemi temsil etmek için bir doğru parçası modeli oluşturunuz. Sonra bir orantı yazınız.

Araştırma ve Tartışma İçin

1. Orantısal akıl yürütme, matematikte birleştirici bir temadır. Öğrenme alanlarının her biri için (sayılar, cebir, ölçme, geometri, veri analizi ve olasılık), orantısal akıl yürütmeyi içeren ve bütün bu fikirler arasındaki bağlantıları açıklayan bir içerik hakkında düşününüz.
2. Bölüm 17'de, hangi elemanın verilmediği temasına dayandırılarak üç yüzde problemi geliştirilmişti: Parça, bütün veya ikisini ilişkilendirilen kesir. Bu bölümde; yüzde, orantılarla ilişkilendirilmiştir-ikisinden birinin 100'le karşılaştırıldığı iki oranın eşitliği olarak. Bu iki yaklaşım, nasıl benzerdir? Bazı problemlerde, yüzde 100'ün nasıl bir bütünden ziyade bir parça olabileceğini açıklayınız.

Bölüm 18 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Edebi metinler, orantısal akıl yürütmenin incelenmesine heyecan verici bir boyut sağlar. Çoğu kitap ve hikâye, karşılaştırmalı büyüklükleri, haritalardaki gibi ölçek kavramlarını, normal insanlarla orantılı olan devleri ve çok küçük insanları, oranları karşılaştırmayı, özellikle de hız oranlarını ve bunun gibi durumları tartışır. Beckman, Thompson ve Austin (2004), ünlü Henry Potter hikâyeleri, The Lord of the Rings/Yüzüklerin Efendisi

ve The Perfect Storm/Kusursuz Fırtına'da orantısal akıl yürütme için heyecan verici bağlamları incelemiştir.

If You Hopped Like a Frog *Schwartz, 1999*

David Schwartz, the author of *How Much Is a Million?* and *If You Made a Million*, uses proportional reasoning to determine what it would be like if we had the skills or dimensions of familiar animals. "If you hopped like a frog, you could jump from home plate to first base in one mighty leap." This short picture book contains 12 more fascinating comparisons. At the end of the book, Schwartz provides some factual data on which the proportions are based. Students can figure out how strong or tall they would be if they were one of the featured animals.

Holes *Sachar, 2000*

A popular book and movie, this novel tells the story of boys in a "camp" digging holes every day, which provides an opportunity to look at daily rates of dirt removal. Pugalee et al. (2008) describe an excellent activity with this book that not only involves proportional reasoning, but also measurement and algebra.

Literature with Large and/or Small People

There is a plethora of literature involving very little or very big people (or animals). With any of these books, body parts can be compared as a way to explore within and between ratios. The following list of some great literature can lead to wonderful lessons on proportional reasoning:

Alice's Adventures in Wonderland *Carroll, 1865/1982*

In this classic, Alice becomes very small and very tall, opening doors to many ratio and proportion investigations.

The Borrowers *Norton, 1953*

A classic tale of little folk living in the walls of a house. Furnishings are created from odds and ends of the full-sized human world.

Gulliver's Travels *Swift, 1726, amended 1735/1999*

Yet another classic story. In this case Gulliver first visits the Lilliputians, where he is 12 times their size, and then goes to Brobdingnag, where he is $\frac{1}{10}$ the size of the inhabitants.

Jim and the Beanstalk *Briggs, 1970*

What happened to the giant after Jack? Jim comes along. Jim wants to help the poor, pessimistic giant. This heartwarming story is great for multiplicative or proportional reasoning across grades K–8.

Kate and the Beanstalk *Osborne, 2000*

This version of *Jack and the Beanstalk* includes a giantess. The giantess falls to earth and Kate finds out the castle belongs to her family.

"One Inch Tall" in *Where the Sidewalk Ends* *Silverstein, 1973*

Shel Silverstein is a hit with all ages. This poems asks what it would be like if you were one inch tall.

Swamp Angel *Isaacs, 1999*

A swamp angel named Angelica is born very tiny but grows into a giant. Students can explore birth height to current height or compare Angelica's measurements to their own.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(4), 254–261.
The authors describe and give examples of four levels of proportional reasoning using examples from the classroom. A good article on a difficult topic.

Lo, J., Watanabe, T., & Cai, J. (2004). Developing ratio concepts: An Asian perspective. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(7), 362–367.
These well-known researchers discuss the way that the concepts of ratio and proportion are developed in Asian countries. They share a sequence of activities adapted from textbooks used in China, Taiwan, and Japan. The series of examples will certainly be useful in your classroom.

Kitaplar

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Lamon is one of the most prolific researchers and writers on the subject of fractions, ratios, and proportional reasoning. This book is full of specific practical examples of activities and is freely illustrated with children's work. Many of the ideas found in this chapter are adapted from this book and other works by Lamon.

Litwiller, B. (Ed.). (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook.* Reston, VA: NCTM.
Eleven of the 26 short chapters in this NCTM yearbook discuss explicitly the issue of multiplicative relationships and/or proportional reasoning. The remaining chapters are on various aspects of fraction concepts and fraction computation, many illustrating the connection with proportional thinking. Accompanying the yearbook is a book of Classroom Activities *complete with Blackline Masters.*

Online Kaynaklar

Fibonacci Sequence
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_315_g_3_t_1.html

The applet simply computes successive terms of the Fibonacci sequence and shows in both fraction and decimal forms the ratio of successive terms of the sequence. This ratio converges to the *golden ratio*. For what may be the most information assembled anywhere on the Fibonacci sequence, go to www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci.

Fish Simulation Applet I
http://mathforum.org/escotpow/puzzles/fish/applet.html

A collection of two colors of fish is to be placed into three ponds to create specified ratios within each pond. Students should find out if there is more than one solution and then make up similar problems for their classmates.

Learning about Length, Area, Volume, Surface Area of Similar Objects (e-Example 6.3)
http://standards.nctm.org/document/eexamples

A two-part exploration complete with extensive teacher notes. The applets compare two rectangles or two prisms showing ratios of measures in both numeric and graphical form.

Understanding Ratios of Inscribed Figures (e-Example 7.3)
http://standards.nctm.org/document/eexamples

A nice geometry/measurement link to ratio. The user explores the ratio of figures inscribed in polygons formed by joining midpoints of sides. These points can also be adjusted. The supporting lesson and activity suggestions are quite good.

Ameba (The Math Forum's Teacher Exchange)
http://mathforum.org/te/exchange/hosted/ameba

In this game, students select a total number of pellets to eat that is equal to the target ratio given at the top of the board, then return to the start/finish location.

The Futures Channel
www.thefutureschannel.com

This site provides lessons and includes video clips. Two related to proportional reasoning are "How Tall?," which engages students in finding the heights of people and objects using proportional thinking, and "Snow," which explores the ratio of inches of snowfall to liquid water.

Bölüm 19

Ölçme Kavramlarının Gelişimi

Ölçme, matematiğin en önemli kollarından biridir. Meslek hayatından tutun hayat becerilerine kadar birçok şeyin önemli bir parçası durumundadır. Bilgi miktarını ölçen gigabaytlardan bilgisayarlardaki yazı büyüklüğüne, galon başına gidilen milden yemek için ödenen fişlere kadar insanlar günlük hayatlarında çeşitli güncel durumlara uygulanabilen ölçme kavramları ile kuşatılmıştır. Bununla birlikte, ölçme öğrencilerin anladıkları kolay bir konu değildir. TIMMS ve NAEP gibi uluslararası çalışmaların sonuçlarından elde edilen bulgular sürekli olarak öğrencilerin öğretim programındaki konular içerisinde ölçme alanında daha zayıf olduklarını göstermektedir (Thompson & Preston, 2004). Her ne kadar metrik ve geleneksel ölçme sistemlerinin beraber öğrenimi buna etken olabilse de bu düşük performansın sebebi, büyük ihtimalle konunun öğretimi ile ilgilidir (çok fazla resim ve çalışma yapraklarına dayalı pratik deneyimlerden uzak ve becerilerin üzerine yoğunlaşıp ölçme kavramları üzerinde yeterince durulmayışı gibi).

Bu bölümde öğrencilerin ölçme işlemini ve ölçme araçlarını kavramsal olarak anlamalarına nasıl yardım edebileceğinizi öğreneceksiniz. Ayrıca standart ve standart olmayan ölçme birimlerini, kritik eşiklerin kullanılmasıyla ölçme tahminleri yapmasını ve ölçme formüllerini oluşturmasını öğreneceksiniz.

Ana Fikirler

1. Ölçme, bir nesnenin ya da durumun bir özelliğini aynı özelliğe sahip bir birim ile karşılaştırılmasını içerir. Uzunluklar uzunluk birimleriyle, alanlar alan birimleriyle, zaman zaman birimleri gibi birimlerle ölçülür.
2. Anlamlı ölçme ve tahmini ölçümler, kullanılan ölçme birimine olan kişisel aşinalığa bağlıdır.
3. Ölçülerin tahmini ve sıklıkla kullanılan ölçü birimleri için kritik eşiklerin geliştirilmesi, öğrencilerin birimlere olan aşinalıklarına yardımcı olup hata yapmalarını önler ve ölçmenin anlamlı kullanılmasına katkıda bulunur.
4. Ölçme araçları gerçek ölçü birimlerinin yerine kullanılan araçlardır. Ölçme araçlarının nasıl kullanıldığını anlamak önemlidir.
5. Alan ve hacim formülleri sadece uzunluk ölçülerinin kullanılması ile bu niteliklerin ölçümüne yönelik bir yöntem sunar.
6. Alan, çevre ve hacim birbirleriyle ilişkilidir. Örneğin, alanları ya da hacimleri aynı kalmak üzere şekiller ya da üç boyutlu nesneler değiştikçe bunun çevre ve yüzey alanında tahmin edilebilir bir etkisi olur.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Öğrencilere anlamlı ölçme etkinlikleri yapmalarına yönelik daha fazla zaman sağlamak için ölçme, fen ve matematik öğretim programlarının temel bir parçası olmadır.

- **Sayılar** (Bölüm 8): Erken ölçme etkinlikleri sayı saymak için çok anlamlı bağlamlardır. Bilindik ortamlardaki önemli nesnelerin ölçümleri sayılarla ilgili fikirleri gerçek dünya ile ilişkilendirip sayma hissinin gelişmesini sağlar.
- **Basamak Değeri** (Bölüm 11): 10'un katları, küçük çocuklarca standart olmayan ölçülerin sayımında avantajlı bir şekilde kullanılır. Ölçmedeki metrik sistem onluk sayı sistemi üzerine kuruludur.
- **Cebir** (Bölüm 14): Ölçme formüllerinin kendileri birer fonksiyondur. Ölçme, genelleme ve fonksiyonel ilişkileri ortaya çıkartabilecek veriyi sunar.
- **Kesirler** (Bölüm 15): Artan hassasiyet gereksinimi, birimlerin kesir parçalarına bölünmesine neden olur.

- **Orantısal Akıl Yürütme** (Bölüm 18): Ölçülerin tahmininde kritik eşiklerin kullanılması orantısal düşünmenin gelişimini destekler. Ölçüler, ölçekli resimlerin çiziminde kullanılır. Oranlar benzer şekillerde bilinmeyen ölçülerin bulunmasında kullanılır.
- **Geometri** (Bölüm 20): Çevre, alan ve hacim formüllerinin oluşturulması ve anlaşılması, şekillerin ve bu şekillerin içerdikleri ilişkilerin anlaşılmasını gerektirir. Ölçüler şekilleri anlatmaya yardımcı olur ve açı ölçümleri şekillerin özelliklerinde önemli rol oynarlar.
- **Veri** (Bölüm 21): İstatistik ve grafikler dünyamızı tarif etmek için kullanılır ve bununla ilgili soruları cevaplamamıza yardımcı olur. Çoğu zaman bu tarifler ölçüler cinsinden verilmektedir.

Ölçmenin Anlamı ve Ölçme Süreci

Öğrencilerinize boş bir kovayı ölçmelerini sorduğunuz var sayınız. İlk olarak kovanın *neyini* ölçmeleri gerektiğini bilmeleri gerekecekti r. Yüksekliği, derinliği, çapı (bir yandan diğer yana olan uzaklığı) ya da çevresini (çevre uzunluğu) ölçebilirler. Bütün bunlar uzunluk ölçüleridir. Kovanın yüzey alanı belirlenebilir. Kova ayrıca bir hacme (ya da kapasiteye) ve ağırlığa sahiptir. Bu ölçülebilir yanların her biri kovanın bir niteliğidir.

Öğrenciler ölçülebilir niteliği belirledikten sonra o özelliği ölçebilecek bir birim belirlemeye ihtiyaç duyarlar. Uzunluk uzunluğa sahip birimlerle, hacim hacme sahip birimlerle vb. ölçülür.

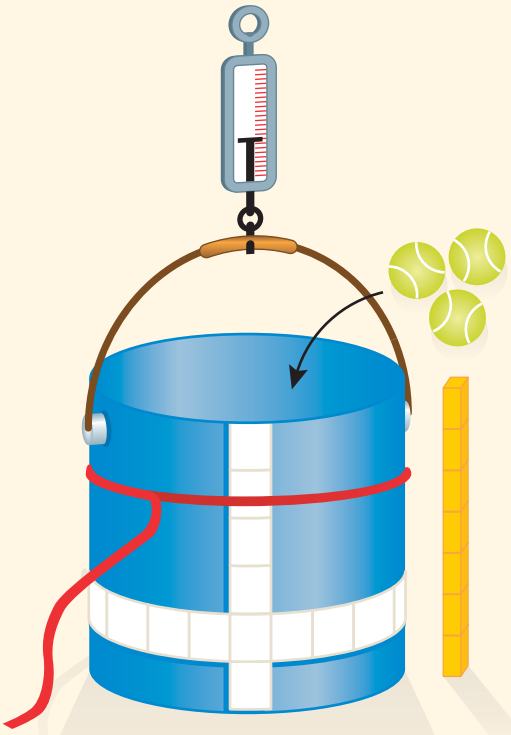
Teknik olarak *ölçme* bir nesnenin (ya da durumun veya olayın) bir özelliğini aynı özelliğe sahip bir birim ile karşılaştırılması sonucu elde edilen sayıyı gösterir. Genellikle, küçük birimler kullanarak ölçülen nesne ve birim arasındaki sayısal ilişkiyi (ölçüm) belirleriz. Örneğin, bir uzunluğu ölçmek için birimleri uzunluk boyunca sıralayıp karşılaştırma yapılabilir. Yerçekimi ya da kuvvet çekimi olan ağırlığı ölçmek için nesnenin ağırlığı önce bir yaya uygulanabilir. Daha sonra kaç tane birim ağırlık yay üzerinde aynı etkiyi bıraktığı karşılaştırılır. Her iki durumda da birimlerin sayısı o nesnenin ölçüsüdür.

Okullarda ölçülen niteliklerin çoğu için diyebiliriz ki *ölç* demek ölçülen niteliğin aynı niteliğe sahip bir birimle doldurulması veya kaplanması ya da eşleştirilmesi anlamına gelmektedir (Şekil 19.1'de gösterildiği gibi).

Özet olarak bir şeyi ölçmek için bir kişi şu üç adımı yerine getirmek zorundadır:

1. Ölçülecek niteliğe karar veriniz.
2. O niteliğe sahip birimi seçiniz.
3. Ölçülen nesnenin niteliği ile doldurarak, kaplayarak, eşleyerek ya da başka bir yöntem kullanarak ölçme için kullanılan birimleri karşılaştırınız. Birimlerin sayısının ölçülen nesne ile eşleşmesi gerekmektedir.

Cetvel, tartı, iletki ve saat gibi standart ölçme araçları doldurma, kaplama ya da eşleştirme sürecini daha kolay yapmaya yarayan araçlardır.



Nitelik: Ağırlık
Birimler: Dinamometredeki yayı geren nesneler
Kovanın yay üzerinde bıraktığı etkiyi kaç tane birim ağırlık bırakabilir?

Nitelik: Hacim/Kapasite
Birimler: küpler, toplar, kap dolu su
Kovayı kaç birim doldurur?

Nitelik: Uzunluk
Birimler: çubuklar, kürdanlar, pipet, şerit
Kaç tanesi birim kovanın yüksekliği kadardır?
Kovanın etrafını sarmak için kaç tane şeride gerek vardır?

Nitelik: Alan
Birimler: indeks kartı, kare kâğıtlar, karolar
Kovanın yüzeyini kaç tane kart kaplar?

Şekil 19.1 Bir kovanın farklı niteliklerinin ölçülmesi.

Kavramlar ve Beceriler

Eğer tipik bir grup birinci sınıf öğrencisi, sınıflarının boyunu 1 metre uzunluğundaki şeritleri uç uca koyup ölçmeye kalkarlarsa bazen bu şeritler üst üste gelebilir ve dalgalı bir hal alabilir. Öğrenciler uzunluk kavramını sınıfın bir niteliği olarak anlarlar mı? Her bir 1-metrelik şeridin bu uzunlukla aynı niteliğe sahip olduğunu bilirler mi? Görevlerinin, küçük uzunluk birimlerini kullanarak, bu sınıfın boyunu eşleştirerek ya da doldurarak bulmak olduğunu bilirler mi? Büyük bir olasılıkla öğrencilerin en iyi anladıkları şey, görevlerinin duvardan duvara şeritlerden oluşan bir çizgi oluşturmak olduğudur (ve kendi bakış açılarına göreyse bunu gayet güzel yapmaktadırlar). Öğrenciler bu görevi işlemsel olarak yerine getirirler ancak kavramsal boyutunu düşünmezler. Bir birim ile ölçme becerisi, nitelikleri karşılaştırma süreci olan ölçme kavramıyla ölçme birimleri ve ölçme araçlarını kullanarak açıkça ilişkilendirilmelidir. Tablo 19.1'de ölçme öğretimine yönelik bir dizi deneyimler özetlenmiş ve bunun devamında yapılan tartışmalar ne tür etkinliklerin bu becerilerin gelişimine katkı sağlayacağı anlatılmıştır.

Tablo 19.1

Ölçme Öğretimi-Bir Dizi Deneyimler

Birinci Adım-Karşılaştırmaların Yapılması

Amaç: Öğrenciler ölçülecek niteliği anlayacaklar.

Etkinlik Çeşidi: Niteliğe dayalı karşılaştırma yapın. Örneğin, uzun/kısa, ağır/hafif gibi. Ne zaman mümkün olursa o zaman doğrudan karşılaştırmalar yapın.

Notlar: Ölçülecek nitelik anlaşıldığında daha fazla karşılaştırma etkinliklerinin yapılmasına gerek yoktur.

İkinci Adım-Ölçme Birimlerinin Modellerinin Kullanılması

Amaç: Öğrenciler doldurma, kaplama, eşleştirme ya da diğer bir niteliğin ölçü birimleri ile karşılaştırması sonucu elde edilen sayıya ölçü denildiğini anlayacaklar.

Etkinlik Çeşidi: Ölçme birimlerinin fiziksel modellerini kullanarak kaplama, eşleştirme ya da ölçü birimi kullanılarak istenen niteliğin karşılaştırmasını yapın.

Notlar: Standart olmayan birimlerle başlayınız. Uygun olduğu durumlarda, elbette formülleri ve ölçme araçlarını kullanmadan önce, standart ölçü birimlerinin doğrudan kullanımına yönelin.

Üçüncü Adım-Ölçme Araçlarının Kullanımı

Amaç: Öğrenciler bilinen ölçme araçlarını anlayarak ve esneklikle kullanacaklar.

Etkinlik Çeşidi: Ölçme araçları yapınız ve gerçek ölçü birim modelleri ile karşılaştırarak ölçme aracının nasıl birim modelleri ile aynı işlevi yerine getirdiğini görün. Öğrencilerin yaptıkları ölçme araçları ile standart araçlar arasında doğrudan karşılaştırmalar yapmayı unutmayın.

Notlar: Öğrenci-yapımı araçlar genellikle standart olmayan birimlerle en iyi yapılır. Bu araçlar standart ölçme araçları ile dikkatlice karşılaştırılmadığı sürece bu araç yapım süreci değerini kaybedebilir.

Karşılaştırmaların Yapılması. Öğrencilerin ölçecekleri niteliği anlamaları birinci ve en kritik amaçtır. Öğrenciler nesneleri ölçülebilen niteliklerine göre karşılaştırdıklarında o nitelik etkinliğin odağı olur. Örneğin, bir kutunun kapasitesi diğer bir kutunun kapasitesine göre az mı, çok mu ya da onunla aynı mı olur? Bunun için ölçmeye gerek yoktur, ancak bir hacmin diğeri ile bir şekilde karşılaştırılması gereklidir. "Kapasite" (kutunun ne kadar alabildiği) niteliğinin karşılaştırılması kaçınılmazdır.

Birçok nitelikler doğrudan karşılaştırılabilir (örneğin bir uzunluğu başka bir uzunlukla aynı doğrultuda yerleştirmek gibi). Hacim ya da kapasite durumunda dolaylı bir yöntem gerekebilir (örneğin bir kabı fasulyelerle doldurup daha sonra fasulyeleri başka bir kaba dökmek gibi). Bir ipin çöp kutusunun yüksekliği ile çevresinin karşılaştırılması amacıyla kullanılması dolaylı karşılaştırmanın başka bir örneğidir. Bu iki uzunluğun doğrudan karşılaştırılması imkânsız olduğu için burada ip vasıtadır.

Ölçülebilir nitelik açısından aynı olan bir şeyin oluşturulması ya da yapılması diğer bir karşılaştırma etkinliğidir (Örneğin, "Tebeşir uzunluğunda bir pipet parçası kesmek" ya da "Bu üçgenin alanı ölçüsünde yaklaşık bir dikdörtgen çizmek" gibi).

Ölçü Birimlerinin Fiziksel Modellerinin Kullanımı. İkinci amaç, öğrencilerin istenilen niteliğe hangi ölçü biriminin kullanılmasının uygun olduğunu ve ölçüm için bu birimlerin nasıl kullanılacağını anlamalarıdır. Sınıf düzeyinden bağımsız olarak öğrencilerin ölçü birimlerini anladıkları varsayamazsınız. İlköğretim okullarında ölçülen niteliklerin çoğu için ölçü birimlerinin fiziksel modellerinin bulunması mümkündür. Zaman ve sıcaklık birer istisnadır. (Okullarda genellikle ölçülmeyen birçok niteliğin de fiziksel modelleri mevcut değildir. Işık yoğunluğu, hız, ses, akışkanlık direnci ve radyoaktiflik sadece birkaç örnektir.) Birim modelleri standart ve standart olmayan (bazen formel olmayan şeklinde de adlandırılır) birimler şeklinde bulunabilir. Uzunluk için, örneğin, içecek pipetleri (standart olmayan) ya da 1 fut uzunluğundaki şeritler (standart) birim olarak kullanılabilir.

Birim modellerinin kullanımını öğrenmenin en kolay yolu bu modellerin gerektiği miktarınca ölçülen niteliği kaplayacak ya da eşleyecek şekilde kullanımı ile olur. Masa üstünün alanını bir fiş kartını birim kabul ederek ölçmek için masayı bu kartlarla tamamen kaplayabilirsiniz. Kısmen daha zor olan, özellikle küçük çocuklar için, bir birimi tekrarlayarak kullanmaktır. Yani, aynı masa üstü tek bir fiş kartı ile kartının bir pozisyondan diğer pozisyona tekrarlı olarak hareket ettirilerek ve aynı zamanda kartın hangi alanları kapladığını takip ederek ölçülebilir.

Aynı nesneyi farklı ebatlardaki birimlerle ölçmek faydalıdır. Sonuçlar önce tahmin edilmeli ve sonra tartışılmalıdır. Bu, öğrencilere kullanılan birimin önemli olduğunu anlamalarına yardımcı olacaktır. Küçük birimlerin büyük sayısal ölçüler oluşturması (ya da bunun tersi) gerçeğini küçük çocukların anlaması zordur. Bu ters orantılı ilişki ancak önce tahmin yoluyla, daha sonra yaparak ve son olarak farklı büyüklükteki birimlerin kullanılması ile elde edilen ölçüler üzerine derinlemesine düşünerek zihinsel olarak inşa edilebilir.

Ölçme Araçlarını Kullanma. Ölçme için kullandığımız araçları anlamak üçüncü amaçtır. 2003 yılında yapılan NAE/Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme (Blume, Galindo, & Walcott, 2007) sonuçlarına göre dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece yüzde 20'si Şekil 19.2'de gösterildiği gibi bir cetvelin başlangıç noktasına göre yerleştirilmeyen bir nesnenin ölçüsünü doğru olarak vermiştir. Bu sonuçlar bir ölçme aracını kullanmakla onun nasıl çalıştığını anlamak arasındaki farka işaret etmektedir. Öğrenciler, ayrıca ölçme aracının üzerindeki artışların bir birim olmadığı durumlarda da zorlandılar.

Eğer öğrenciler gerçekten alışık oldukları birim modellerini kullanarak basit ölçme araçları yapsalar bu araçların nasıl ölçtüğünü anlamaları daha muhtemel olacaktır. Cetvel güzel bir örnektir. Eğer öğrenciler her bir fiziksel birimi mukavva bir şerit boyunca dizseler ve bunları şerit üzerinde işaretleseler, cetvel üzerindeki çizgiler ya da sayılardan ziyade boşlukların önemli olduğunu anlayacaklardır. Öğrencilerin tek tek birimlerle ölçmeyle bir araçla ölçme arasında farkı karşılaştırmaları ve tartışmaları gereklidir. Bu karşılaştırma ve tartışma olmaksızın öğrenciler bu iki yöntemin aslında aynı olduğunu anlamayabilirler.

Farklı nitelikleri ölçmek için hazırlanmış öğrenci yapımı ölçme araçları hakkında yapılan bir tartışma metinde ve Web üzerinde verilmiştir. Elbette, öğrenciler cetvel ve tartı gibi standart, hazır araçları kullanmalıdır ve bu araçlarının kullanımını kendi yaptıkları modellerin kullanımı ile karşılaştırmalıdırlar.

Standart olmayan Birimler ve Standart Birimler: Her birinin Kullanmanın Sebepleri

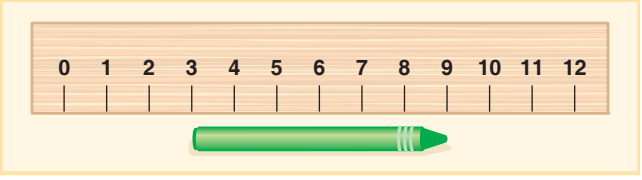
İlkokul düzeyinde standart olmayan birimleri kullanarak uzunluk ve bazen de alan ölçümü yapılması olağan bir durumdur. Ne yazık ki, üst sınıflardaki diğer niteliklerin ölçümünü içeren ölçme etkinlikleri birçok kez standart olmayan birimlerle başlamamaktadır. Standart olmayan ölçme birimlerinin kullanımı ile ölçme etkinliklerine başlanması aşağıda verilen sebeplerden ötürü bütün sınıf düzeylerinde faydalıdır:

- Standart olmayan birimler doğrudan ölçülen niteliğe odaklanmayı kolaylaştırır. Örneğin, düzgün olmayan bir şeklin alanını ölçmeye yönelik yapılan bir tartışmada kuru fasulye, kare taşlar ya da dairesel sayı pullarının birim olarak kullanılması tavsiye edilebilir. Her birim verilen alanı kaplar ve her birime ait farklı sonuçlar elde edilecektir. Tartışma ardından ölçmenin ne anlama geldiğine odaklanmalıdır.
- Standart olmayan birimlerin kullanımı giriş dersindeki çelişen amaçlardan sakındırabilir. Dersiniz alan ölçmenin ne anlama geldiği ile mi alakalı ya da santimetre karenin anlaşılması ile mi alakalı?
- Standart olmayan birimler standart birimlerin kullanımı için iyi bir gerekçe sunar. Sınıfınızdaki gruplar aynı nesneleri kendi birimleri ile ölçüp farklı sonuçlar ve bazen kafa karıştırıcı cevaplar bulduktan sonra standart bir birime olan ihtiyaç üzerine yapacakları tartışmalar daha anlamlı olabilir.
- Standart olmayan birimlerin kullanımı motive edici olabilir.

Standart birimlerin şu sebeplerden dolayı her sınıf düzeyinde ölçme programında kullanımı önemlidir:

- Standart birimler bilgisi bir ölçme programı için gerekli bir amaçtır. Öğrenciler sadece standart birimlerle bir aşinalık geliştirmemeli bunlar arasındaki doğru ilişkileri de öğrenmelidirler.
- Ölçme kavramı oldukça iyi bir şekilde geliştirildikten sonra standart birimler etkili bir şekilde sunulabilir. Eğer standart olmayan birimlerin kullanılması için iyi bir öğretimsel sebep yoksa o zaman öğrencilerin deneyimlerini ve birim hakkındaki aşinalıklarını arttırmak için standart birimleri kullanın.

Standart olmayan birim modellerinin kullanımına yönelik harcanması gereken zaman çocukların yaşlarına ve ölçülen niteliklere göre değişir. Anaokulöncesi-ana sınıfı-1. sınıf öğrenciler standart olmayan uzunluk, ağırlık ve kapasite birimlerine yönelik birçok deneyime ihtiyaç duyarlar. Diğer taraftan, ortaokul düzeyinde açıların ölçümü için standart olmayan ölçme birimlerin kullanımının faydası bir ya da iki gün sürer. Standart olmayan birimler amaçlanan hedefi sağladıkta sonra konulara devam edin.



Şekil 19.2 "Bu boyama kaleminin uzunluğu ne kadardır?"

Tahmin Etmenin ve Yaklaşık Değer Bulmanın Rolü

Öğrencilere ölçmeyi yaptırmadan önce her zaman ölçümü tahmin ettirin. Bu durum standart ve standart olmayan birimlerin her ikisi için de geçerlidir. Ölçme etkinliklerinde tahmin yapılmasının en az dört faydalı sebebi vardır:

- Tahmin etme öğrencilerin ölçülen niteliğe ve ölçme işlemine odaklanmalarına yardımcı olur. Düşünün bu kitabın ön yüzünün alanını standart oyun kartlarını birim olarak kullanarak nasıl tahmin ederdiniz? Bunu yapmak için alanın ne olduğunu ve birimlerin kitabın kapağına nasıl yerleştirileceğini düşünmeniz gerekir.
- Tahminde bulunma ölçme etkinlikleri için içsel motivasyonu sağlar. Tahmininizde ne kadar yaklaşabildiğinizi görmek ilgi çekicidir.
- Standart birimler kullanıldığında tahmin etme, birime olan aşinalığın gelişimine yardımcı olur. Kapının yüksekliğini ölçmeden önce metre cinsinden tahmin ederseniz, bir metrenin büyüklüğünü düşünmek zorundasınız.
- Tahmin yaparken bir kritik referansı kullanmak çarpımsal akıl yürütmeyi geliştirir. Binanın genişliği bir futbol sahasının uzunluğunun yaklaşık dörtte biridir-belki 25 yard'tır.

Bütün ölçme etkinliklerinde yaklaşık değerle ilgili bir dilin kullanılmasına vurgu yapın. Masa yaklaşık 15 turuncu çubuk uzunluğundadır. Sandalye 4 pipet uzunluğundan *biraz daha kısadır*. Yaklaşık değerle ilgili bir dil kullanmak küçük çocuklar için çok faydalıdır, çünkü birçok ölçümler tamsayı olarak sonuçlanmazlar. Büyük çocuklar daha küçük birimler arayışında olacaklar ya da kesirsel birimler kullanarak kesin olarak ölçmeye çalışacaklardır. İşte burada her ölçümün biraz hata içerdiği fikrini geliştirmek için bir fırsat vardır. Öncelikle, her bir küçük birimin ya da alt bölümün *hassasiyet* oranını arttıracağını kabul ediniz. Örneğin, bir uzunluk ölçüsü asla birimin yarısından daha fazla hata payına sahip olamaz. Hal böyleyken, matematiksel "en küçük birim" olmadığı için ölçmede her zaman bir hata mevcut olacaktır.

NCTM Standartları

3-5. sınıf düzeyindeki Ölçme Standardı şunu ifade eetmektedir: "öğrencilerin ölçümlerin birer yaklaşık değer bulma olduğunu ve birimlerdeki değişimin hassasiyeti nasıl etkilediğini anlamaları gerekir" (NCTM, 2000, s. 398). 6-8. sınıf düzeylerinde, NCTM şunu der: "ortaokul öğrencileri doğru bir şekilde uzunluk, alan, hacim ve açı ölçülerini uygun hassasiyet düzeyinde yapmak için gereken yöntemleri ve araçları seçmeli ve uygulayabilmelidir" (s. 300). ◆



Uzunluk

Uzunluk genellikle öğrencilerin ölçmeyi öğrendiği ilk niteliktir. Bununla birlikte uzunluk ölçümünün küçük çocuklarca hemen anlaşılmadığını da unutmayın. Benzer şekilde, ilkokul son ve ortaokul öğrencileri çevre uzunluğunu içeren problemleri incelerken uzunluk kavramı ile ilgili zorluklar yaşayabilirler.

Karşılaştırma Etkinlikleri

Anaokuluöncesi-anaokulu düzeyinde çocuklar iki ya da daha fazla uzunluğun doğrudan karşılaştırması ile başlamalıdırlar.

Etkinlik 19.1

Daha Uzun, Kısa, Aynı

Öğrencilerin nesneleri daha uzun, kısa ya da belirtilen nesne ile yaklaşık aynı diyebilecekleri uzunluklara göre sınıflandırma birkaç öğrenme istasyonları oluşturun. Farklı sınıflar oluşturmak için referans gösterilen nesne değiştirilebilir. Benzer bir görev, nesnelerin en kısadan en uzuna doğru sıraya koymak olabilir.

Etkinlik 19.2

Uzunluk (veya Birim) Avı

İki kişilik öğrenci gruplarına bir mukavva şerit, bir çubuk, bir ip ya da bir uzunluğa sahip başka bir nesne verin. O günkü etkinlik, verilen hedef birime göre daha uzun, kısa ya da yaklaşık aynı olan beş şeyi sınıfta bulmak olabilir. Öğrenciler resim çizebilirler ya da buldukları şeylerin isimlerini yazabilirler.

Hedef uzunluğun bir standart birim cinsinden yapılması (1 metre uzunluğunda bir çubuk ya da 1 metre uzunluğunda 1 ip) ile etkinlik tekrar edilerek önemli standart birimler hakkında aşinalık sağlanabilir.

Düz çizgi şeklinde olmayan uzunlukların karşılaştırılması önemlidir. Bunun yapmanın bir yolu tel ya da ip kullanmaktır. Öğrenciler teli nesnelerin etrafına sararak, örneğin elde ettikleri uzunluğu, zeminden göbek mesafesine kadar olan uzaklıkla ya da başlarının ya da göğüs kafeslerinin çevresi ile karşılaştırabilirler. Vücut ölçüleri her zaman eğlencelidir.

Dolaylı karşılaştırmalar aşağıdaki "Eğri Yollar" etkinliğinde kullanılmıştır.

Etkinlik 19.3

Kıvrımlı Yollar

Yer döşemesi üzerinde (veya dışarıda) tebeşir kullanarak eğri ya da kıvrımlı yollar çizin. Göreviniz, hangi yolun en uzun, ikinci uzun, üçüncü uzun, vb. olduğunu belirlemektir. Öğrenciler kıvrımlı yolları ölçmek için yollar önermeliler ve böylelikle uzunlukları kolaylıkla karşılaştırabilmeliler. Eğer ipucu vermek isterseniz, öğrenci çiftlerine uzun bir ip parçası verebilirsiniz. Eğer ip kıvrımlı yollardan daha uzun ise görev kolaylaşır. Öğrencilerinizden problemi nasıl çözdüklerini açıklamalarını isteyiniz.

Uzunluk Birimleri

Öğrenciler çeşitli standart olmayan birimleri kullanarak uzunluk ölçmeye başlayabilirler-örneğin:

- *Dev ayak izleri:* Poster kâğıdı üzerine yaklaşık $1\frac{1}{2}$ ile 2 fit uzunluğunda 20 adet büyük ayak izleri çiziniz ve bunları ayrı ayrı kesiniz.
- *Ölçme ipleri:* Pamuktan çamaşır iplerini 1 metre uzunluğunda parçalara ayırınız. Bunlar öğretmen masası, ağaç gövdesi ya da sınıf balkabağının çevrelerini ölçmek için kullanılabilir.
- *Plastik pipetler:* İçecek pipetler, büyük miktarlar için işe yarar birimler sağlar. Pipetler, kolayca daha küçük birimler haline getirilebilir ya da birleştirilerek uzun bir şerit oluşturulabilir. Pipet şeritler metre ya da mezura için mükemmel bir köprü vazifesi görür.
- *Kısa birimler:* Kürdan, geçmeli küpler, ahşap küpler ve ataçlar kısa uzunlukları ölçmek için yararlı standart olmayan birimlerdir. Cuisenaire çubukları bir küme birim için iyi bir seçimdir, çünkü on farklı uzunluktan oluşur ve kolaylıkla uç uca eklenir ve birbiriyle kolaylıkla ilişkilendirilebilir. Metrik uzunluklara (cm) sahip olduklarından cetvele geçişte mükemmel köprü oluşturur.

Burada öğrencilere bu birimlerin ölçme amaçlı nasıl kullanılacaklarını dikkatlice anlatmak ve sonra onları serbest bırakarak pratik yapmalarını sağlamak cazip gelebilir. Bu yaklaşım öğrencilerin dikkatini birimlerin kullanılmasıyla ölçmenin kavranmasının gelişmesinden ziyade uygulanan işleme (talimatlarınızı yerine getirerek) kaydırır. Aşağıdaki etkinlikte öğrencilerden ölçme yapmaları istenmektedir. Ancak öğrenciler kendi yöntemlerini geliştirmek zorundadırlar.

Etkinlik 19.4

Öğretmenin boyu ne kadardır?

Müdüre Hanımın sizden önemli bir ricası olduğunu söyleyin. Okuldaki her bir öğretmenin boyunun tam olarak ne kadar olduğunu bilmesi gerekiyor. Öğrencilerin öğretmenlerin boylarını nasıl ölçeceklerine karar vermeleri ve müdüre hanıma her bir öğretmenin boyunun ne kadar olduğunu ve bunu nasıl bulduklarını açıklayan bir not hazırlamaları gerekiyor. Eğer bir ipucu vermek isterseniz, öğrencilerinizden ayaklarını ve başlarını işaretlemelerini isteyerek bu iki işaret arasına düz bir çizgi çizmelerini sağlayabilirsiniz.

Öğrencilerinize müdüre hanımın çeşitli standart olmayan birimlerden BİRİNİ (seçenekler sunun) kullanabileceğinizi söylediğini belirtin. Seçilen her bir birim için ölçülecek uzunluktan daha fazlasını kapsayacak adette birim uzunluklar hazırlayın. Öğrencileri iki kişi çalışacak şekilde gruplandırın ve ölçme için hangi (standart olmayan) birimi seçeceklerine izin verin.

Son etkinliğin değeri tartışma sonucu anlaşılacaktır. Faydalı (tartışma) soruları şunları içerir: "Ölçüm sonucunu nasıl elde ettin?" "Aynı birimi kullanan öğrenciler aynı cevabı buldular mı? Neden aynı değil?" "Müdüre hanım öğretmenin boyu kadar bir çizgiyi nasıl çizebilir?" Sınıf tartışmanızda, birimlerin uç uca ve aynı doğrultuda dikkatlice sıralanmasına odaklanın. Eğer birim uzunluklar üst üste gelirse, aralarında boşluklar olursa ya da düz bir çizgi şeklinde oluşmazsa ne olacağını tartışınız.

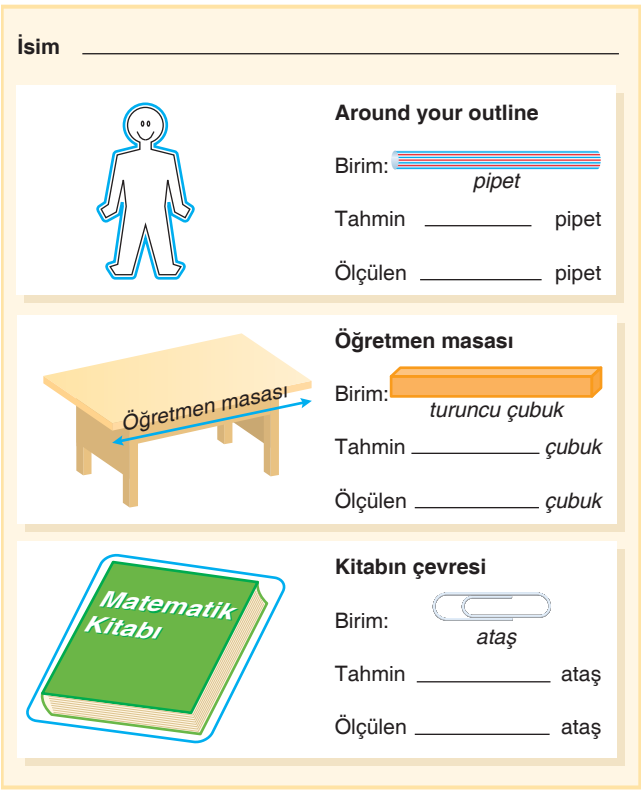
Aşağıdaki etkinlik tahmin boyutunu da ele alacaktır.

Etkinlik 19.5

Tahmin Et ve Ölç

Sınıftaki ölçeceğiniz nesnelerin listelerini oluşturun (Şekil 19.3'e bakınız). Daha küçük çocuklar için ölçülecek nesnelerin boyutları boyunca yapıştırabilecekleri bir parça kağıt bant kullanınız. Listenizde, kullanılacak birimleri belirleyin. Eğri ya da diğer düz olmayan uzaklıkları bulundurmayı unutmayın. Ölçümlerden önce tahmin yaptırın. Küçük çocukların uzunlukları tahmin etmede tecrübelerinin sınırlı olduğunu unutmayın.

Tahmin yapmayı yeni öğrenmeye başlayan öğrenciler için "Tahmin et ve Ölç" adlı etkinliğe şunu ekleyin: Öğrencilere tahminlerinde onlara yardımcı olacak tam olarak 10 birimden oluşan bir sıra ya da zincir yaptırın. Öğrenciler



Şekil 19.3 Standart olmayan birimlerle ölçüm için örnek kayıt defteri.

önce on tane birim uzunluğu nesneye karşı yerleştirir ve sonra tahminlerini yaparlar.

Öğrencilere büyük birim uzunluklarla yapılan ölçümlerin küçük ölçüm değeri üreteceğini veya bunun tersini anlatmak güçtür. Bunun yerine öğrencileri, bu konu üzerine odaklanmış aşağıda verilen bir etkinliği yaptırınız.

Etkinlik 19.6

Ölçme Birimlerinin Değiştirilmesi

Öğrencilerin bir uzunluğu belirlenen bir ölçme birimi ile ölçmelerini sağlayın. Daha sonra onlara önceki ölçme birim uzunluğunun iki katı uzunluğunda ya da yarısı uzunluğunda farklı bir ölçme birimi verin. Öğrencilerin görevi verilen yeni ölçme birimini kullanarak aynı uzunluğun ölçüsünü tahmin etmektir. Öğrenciler tahminlerini ve bunu nasıl yaptıklarını yazmalıdır. Onların tahminleri için bekleyin ve bunlar hakkında tartışın ve ardından gerçek ölçümleri yapmalarını sağlayın. Cuisenaire çubukları bu etkinlik için mükemmeldir. Daha büyük çocuklara, başlangıçtaki ölçme biriminin daha karmaşık katları sorularak düşünmeleri sağlanabilir.

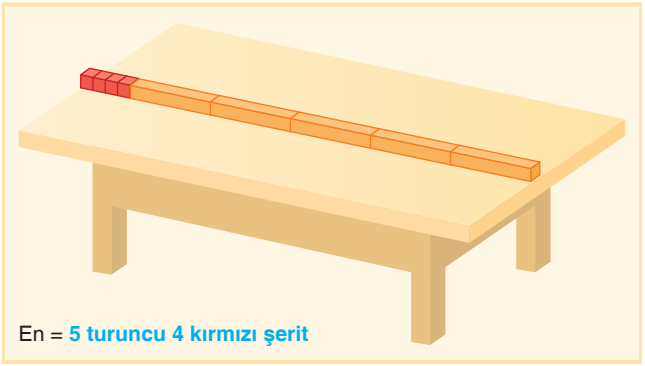
"Ölçme Biriminin Değiştirilmesi" etkinliğinde dikkate alınacak temel fikir ölçme birimi arttıkça ölçüm miktarı küçük ya da bunun tersi olur. Bu etkinlik standart birimlerle birim dönüştürme konusundan hemen önce yapabileceğiniz güzel bir etkinliktir. Örneğin, eğer kapı aralığı 80 inç[1] ise ne kadar fit[2] yapar? Ölçme birimlerinin değiştirilmesi orta okul öğrencileri için mükemmel bir orantısal akıl yürütme etkinliğidir.



Etkinlikler sırasında yapılan gözlem ve tartışmalar öğrencilerinizin uzunluk ölçmeyi ne kadar iyi anladıkları hakkında size bilgi verir. Tanılayıcı görüşme formatında değerlendirme amaçlı kullanılabilecek ilave görevler şunlardır:

- İçerisinde farklı büyüklüklere sahip birimler bulunan bir kutu hazırlayın (Cuisenaire çubukları gibi). Öğrencilerin kutudaki materyalleri kullanarak verilen uzunluğu ölçmelerini sağlayın. Öğrencilerin bütün birimlerin aynı uzunlukta olmaları gerektiğini anlayıp anlamadıklarını gözlemleyin. Eğer farklı birimler kullanılırsa, öğrencilerden ölçümlerini nasıl tarif edeceklerini sorun.
- Belirlenmiş birim adedinin uzunluğunu öğrencilerden bir çizgi çizerek ya da işaretleyerek göstermelerini isteyin. Öğrencilerin birimleri üst üste gelmeyecek ya da boşluklar olmayacak şekilde düz bir hat üzerinde yerleştirmeyi bilip bilmediklerini gözlemleyin.
- Öğrencilerin iki farklı nesneyi ölçmelerini sağlayın. Daha sonra uzun nesnenin ne kadar daha uzun olduğunu sorun. Öğrencilerin cevaplamak için ölçüm sonuçlarını kullanıp kullanamadıklarını ya da farkı bulmak için üçüncü bir ölçüm yapmaya gerek görüp görmediklerini gözlemleyin.
- Öğrencilere bir tel parçası gösterin ve uzunluğunun 6 birim olduğunu söyleyin. Öğrencilere teli kullanarak nasıl 3 birim uzunluğunu elde edebileceklerini sorun. 9 birim uzunluğunu nasıl elde edebileceklerini sorun. Bu görevde, öğrencilerin zihinsel olarak verilen uzunluğu (teli) ölçüsüne bağlı olarak alt parçalara ayırıp ayırmadıklarına bakıyorsunuz. Yani, öğrenciler 6 birimin tel uzunluğuna denk geldiğini ya da bunun yarısının 3 birim olduğunu zihinlerinde canlandırabiliyorlar mı? ◆

Birimlerin Kesirli Parçaları. Öğrencilerin bazen ölçümleri tam sayı ile sonuçlanmadığı zaman akılları karışabilir. Bir öneri olarak küçük öğrencilerden kalan boşluğu Şekil 19.4'te gösterildiği gibi daha küçük birimler kullanarak doldurmalarını isteyebilirsiniz. Diğer bir fikir olarak kesirlerin kullanılmasını önerebilirsiniz. Metrik sistemde birimler nadiren birleştirilir ve kesir birimleri ondalık biçimde gösterilir (3,2 m gibi). Geleneksel sistemde 4 fit 3 inç uzunluğu bazen 51 inç ya da $4\frac{1}{4}$ inç olarak gösterilir. Kesirli birimlerin kullanımı öğrencilerin cetvel üzerinde bulunan ayırma işaretlerini (çizgilerini) anlamalarına yardımcı olur. Inchworm and a Half isimli kitapta kesirli birimler güzel bir şekilde tanıtılmıştır (bölüm sonundaki kaynaklar kısmına bakınız).



Şekil 19.4 İki ölçme birimini kullanarak uzunluk ölçümü.

Cetvel Yapma ve Kullanma

Standart olmayan ölçme birimlerinin kullanımından standart cetvellerin kullanımına geçiş uğraştırıcı bir iştir. Öğrencilerin cetveli anlamalarına yardımcı olmaya yarayan yöntemlerin en iyilerinden bir tanesi onlara gerçek birimlerden kendi cetvellerini yaptırmaktır.

Etkinlik 19.7

Kendi Cetvelini Kendin Yap

5 cm boyunda ve yaklaşık 2 cm eninde elişi kağıt şeritleri önceden kesin. İki farklı renk kullanın. Şeritleri uç uca ekleyerek onları ölçme için nasıl kullanabileceğinizi tartışın. 3 cm eninde mukavvadan

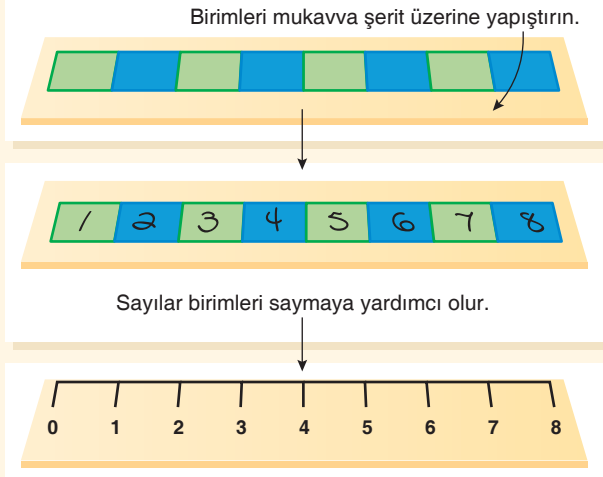
[1] 1 inç: 2,54 cm; (2) 1 fit: 30,48 cm
[2] 1 fut: 12 inç

kesilmiş uzunca şeritler hazırlayın. Doğrudan yönlendirme yapmadan öğrencileri mukavva şeritler üzerine (elişi kağıtlarından hazırlanmış) ölçü birimlerini yapıştırmalarını sağlayın. Birkaç şeyi ölçmek için liste oluşturun. Öğrenciler yeni cetvellerini listede bulunanları ölçmek için kullanırlar. Ölçüm sonuçlarını tartışınız. Sonuçlar arasında cetvelin doğru hazırlanmamasından ya da nasıl kullanılacağını anlamamaktan kaynaklanan tutarsızlıklarla karşılaşmak mümkündür.

Aynı etkinlik daha büyük standart olmayan ölçme birimleri ile yapılabilir. Örneğin öğrencilerin ayak izlerini çizerek hesap makinesi rulo kâğıdı üzerine yapıştırılabilir. Daha büyük öğrenciler standart birimleri (santimetre, inç, fit) şeritler üzerine işaretleyebilir ve aralıkları değişen renklerle boyayabilirler.

Bu etkinlik cetvel inşa etmeyi probleme dayalı bir tecrübeye dönüştürür. Öğrencilere cetvellerini nasıl yapacakları konusunda aşırı rehberlik yapmayarak onların ölçme süreci hakkındaki düşüncelerini değerlendirecek bilgiler elde edeceksiniz. Bu sürecin sonunda bütün öğrenciler doğru bir şekilde cetvel yapabilmiş olmalıdır. Öğrenci yapımı cetvellerin üzerindeki çoklu birimler (işaretler ve sayılardan öte) öğrencilerin cetvel üzerindeki aralıklar ve gerçek birimler arasındaki ilişkiyi kurmalarını azami seviyeye çıkartır. Öğrenciler kendi cetvellerini kullanarak bu cetvellerden daha uzun olan uzunlukları ölçmeliler ve bunun nasıl yapılabileceğini tartışmalıdır. Diğer bir önemli güçlük ise bir uzunluğu cetvel ile ölçmek için birden fazla yöntem bulmaktır. Sondan mı başlamak zorundasın? O anda incelenen birimden başlarsan ne olur?

Öğrenciler Şekil 19.5'te gösterildiği gibi el yapımı cetvellerinin üzerine er ya da geç sayıları yerleştireceklerdir. Küçük çocuklar için sayılar birimlerin adedini açıklığa kavuşturmak için bir yol olarak her bir birimin ortasına yazılabilir. Sayılar standart bir şekilde birimlerin sonuna yazıldığında cetvel bir sayı doğrusu olur. Bu format çok daha karmaşık olup öğrencilerle dikkatlice tartışılmalıdır.



Şekil 19.5 Cetvellerin üzerindeki sayılara anlam vermek.

Öğrenci yapımı cetvellerin sağladığı değer çoğu eğer bu bilgiyi standart cetvellere transfer etmezseniz kaybolabilir. Öğrencilere standart bir cetvel verin ve kendi yaptıkları cetvellere ne yönden benzediklerini ve benzemediklerini tartışınız. Ölçü birimleri nelerdir? Bunun aynısı olan kâğıt ölçü birimlerinden oluşan bir cetvel yapabilir misin? (Cetvel üzerindeki) sayılar ne anlama geliyor? Diğer işaretler neden var? Ölçü birimleri nerede başlıyor?



Araştırmalar öğrencilerin, standart cetvellerde bulunan çizgiler üzerindeki sayıları gördüklerinde çoğu zaman sayıların işaretler arasındaki birimleri ya da boşlukları göstermekten ziyade bu çizgilerin adedini gösterdiğine inanırlar. Cetvellerin bu şekilde yanlış anlaşılması onları kullanırken öğrencileri yanlış sonuçlara götürebilir. Değerlendirme için öğrencilere üzeri işaretli ancak sayıları yazılmamış bir cetvel verin. Öğrencilerin cetvelden küçük bir nesneyi cetveli kullanarak ölçmelerini sağlayın. Eğer öğrenciler çizgiler arasındaki boşlukları sayarlarsa bu cetvelin doğru anlaşıldığını gösterir.

Cetvelin anlaşılmasının diğer bir güzel değerlendirme yolu ise öğrencilerin ilk iki biriminin kırılmış olduğu bir "kırık" cetvelle ölçüm yapmalarını sağlamaktır. Bazı öğrenciler başlangıç noktası olmadığı için böyle bir cetvelle ölçüm yapılmasının mümkün olmadığını söyleyeceklerdir. Cetvelleri anlayanlar ise ölçümlerinde eşleme yapabilecekler ve birimleri anlamlı bir şekilde sayabileceklerdir. (Cetvel kullanımını da içeren öğrencilerin uzunluk ölçümü ile ilgili düşüncelerinin gelişimine yönelik tam bir tartışma için Barret, Jones, Thornton, & Dickson, 2003'e bakınız).

Öğrencileri ellerindeki cetvel ile bu cetvelden daha uzun bir nesneyi ölçerken gözlemlemek de ayrıca bilgilendirici olur. Cetvel üzerindeki son sayıyı basit bir şekilde okuyan öğrenciler cetvelin sürekli birimler dizisini temsil ettiğini anlamadıklarından zorlanabilirler. ◆



Alan

Alan bir bölge içerisindeki iki-boyutlu uzaydır. Diğer özellikleri ile birlikte öğrenciler alanın özelliğini onu ölçmeden önce anlamak zorundadırlar. 2003 NAEP sonuçları dördüncü ve sekizinci sınıf öğrencilerin alan kavramını anlamakta yetersiz olduklarını belirtmektedir (Blume, Galindo, & Walcott, 2007).

Karşılaştırma Etkinlikleri

Alan karşılaştırma etkinliklerinin yapılmasının amaçlarından bir tanesi öğrencilere boyut (ya da alan) ve şekil, uzunluk ve diğer boyutları birbirinden ayırt etmelerine yardımcı olmaktır. Uzun, dar bir dikdörtgen kısa kenarlı bir üçgenin

Sayı, Veri ve Uzayda

İncelemeler

Sınıf Düzeyi 3, *Çevre, Açılar ve Alan*

Bağlam

Çevre etkinliği doğrusal ölçüm hakkındaki fikirlerin gelişimini devam ettirir. Bu ders boyunca öğrencinin standard birimlere olan ihtiyacı anladığı kabul edilir, metrik ve geleneksel sistemlerde 1ölçüm yapan araçları kullanabilir. Öğrenciler çevrenin iki boyutlu bir şeklin dış kenarlarının uzunluk ölçüsü olduğunu fark edebilirler.

Görev

Bu incelemede, öğrenciler gerçek hayattan nesneler seçerler ve çevresini ya da dış sınırlarını ölçerler. Bu süreçte öğrencilerin yaptıkları seçimler önemlidir, örneğin seçtikleri nesne bir masanın üstü gibi düzgün bir çevreye mi sahip yoksa daha uğraştırıcı olan bir çöp sepetinin üst kısmı gibi mi? Öğrenciler ayrıca ölçme için en uygun olacak aleti seçmeleri gerekir (inç ve fit olarak işaretlemiş ölçme araçları, metre ya da hesap makinesi rulo kâğıdı ya da tel gibi). İlk olarak, öğrencilerden grup olarak bir nesne önermeleri istenir. Daha sonra, bir öğrenci bir parmağı ile ölçülecek olan çevreyi çizer. Bütün öğrencilere bu nesneye bir sonraki incelemede yer vermeleri söylenir. Bu yolla, öğrenciler en azından bir ortak nesneyi karşılaştırma fırsatı yakalamış olurlar ve böylelikle ölçüm hatalarını tartışmak için bir zemin oluşmuş olur. Öğrencilerden ölçümlerini yapmadan önce çevre için bir tahminde bulunmaları ve bunu tablolarına kaydetmeleri istenebilir. Ders "sonrası" bölümü için öğrenciler ellerindeki ölçme aletlerinden uzun olan nesneleri nasıl ölçtüklerini ve "esnek" bir ölçme aracı olan tel ya da hesap makinesi rulo kâğıdını ne zaman kullanacaklarını nasıl bildiklerini tartışmalıdır.

[1] Geleneksel sistem diyerek ABD'de kullanılan ölçme sistemi denmek istenmiştir.

İsim Tarih

Çevre, Açılar ve Alan

Çevrenin Bulunması ve Ölçülmesi (sayfa 1)

Sınıfınızdan çevreisni ölçebileceğiniz, duyuru panosu, masanın üstü ya da öğretmen masasının kenarı gibi 5 nesne seçiniz. Çevrelerini ölçünüz ve aşağıdaki tabloya kaydediniz.

Nesne	Ölçülen Nesnenin Çizimi	Çevre
Örnek: Sıramın üstü	30 in. / 18 in. / 18 in. / 30 in.	96 inç
1.		
2.		

Sessions 1.2, 1.3 Unit 4 5

Kaynak: *Investigations in Number, Data, and Space: Grade 3—Perimeter, Angles, and Area,* p. 35. Copyright © 2008 by Pearson Education, Inc., or its affiliate(s). Used by permission. All rights

alanından daha az bir alana sahip olabilir. Bu, özellikle küçük çocukların anlaması için zor bir kavramdır. Ayrıca, birçok 8 ve 9 yaşlarındaki öğrenciler, yeniden düzenlenip farklı şekillere dönüştürülerek oluşan alanların değişmeyeceğini anlamaz.

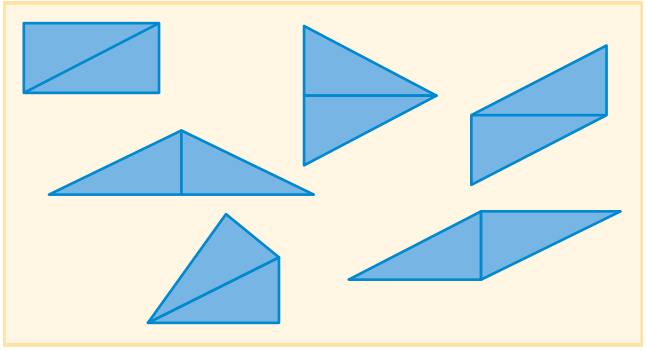
İki alanın doğrudan karşılaştırılması şekiller ortak boyut ya da özelliklere sahip olmadıkça nerdeyse hiç mümkün değildir. Örneğin, aynı ene sahip iki dikdörtgen doğrudan karşılaştırılabildiği gibi herhangi iki çember de karşılaştırılabilir. Bu özel şekillerin karşılaştırılması, bununla birlikte, alan söz konusu olduğunda başarısız olur. Bunun yerine, bir alanın yeniden düzenlenmesini içeren etkinlikler önerilir. Bir şekli iki parçaya ayırmak ve yeniden bir araya getirerek farklı bir şekil oluşturmak önceki ve sonraki şekillerin farklı olmasına rağmen aynı alana sahip olduğunu gösterir. Bu fikir anaokulundan 2. Sınıflardaki öğrenciler için her zaman bu kadar açık değildir.

Etkinlik 19.8

İki parçalı Şekiller

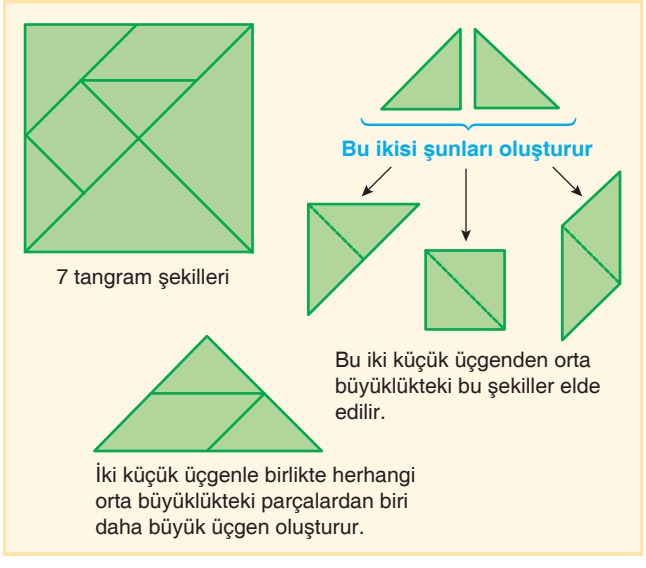
Aynı alana sahip 3 inç'e 5 inç boyutlarında çok sayıda dikdörtgenler kesin. Her bir öğrenci çiftinin altı

dikdörtgene gerek duyacaktır. Öğrencilerin dikdörtgenleri köşegenlerinden katlayıp keserek iki aynı üçgeni elde etmelerini sağlayın. Daha sonra, öğrencilerin bu üçgenleri yeniden düzenleyerek orijinal dikdörtgen de dâhil olmak üzere farklı şekiller oluşturmalarını sağlayın. Kural sadece aynı uzunluğa sahip kenarların eşleştirilmesidir ve bu kenarlar tam olarak eşleştirilmelidir. Her bir grubun bu yolla yapılabilecek bütün şekilleri bulmalarını ve bu şekillerin kaydının tutulması için üçgenleri kâğıt üzerine yapıştırmalarını sağlayın (Şekil 19.6). Elde edilen farklı şekilleri ve alanlarını tartışınız. Bir şekil geri kalan diğer şekillerden büyük mü? Nasıl büyük? Şekillerden birini yapmak için daha çok kâğıt mı gerekir? Öğrencilerin her bir şekil farklı olsa da her birinin aynı alana sahip olduğu sonucuna ulaşmalarına yardımcı olun.



Şekil 19.6 Farklı şekiller, aynı alan

Şekillerden oluşan, çok eski ve yaygın bir bulmaca seti olan tangramlar aynı amaç için kullanılabilirler. Standart yedi parçalı tangram seti, Şekil 19.7'de gösterildiği gibi, bir karenin parçalara ayrılmasıyla elde edilmiştir. İki küçük üçgen, paralelkenarın, karenin ve orta büyüklükte bir üçgenin yapımı için kullanılabilir. Bu aynı ölçüye (alana) sahip parçaların oluşturduğu farklı şekillerle ilgili benzer bir tartışma yapılmasına da izin verir (Seymour, 1971). (Tangram parçaları Çalışma Yaprak Seti 51'de bulunabilir)

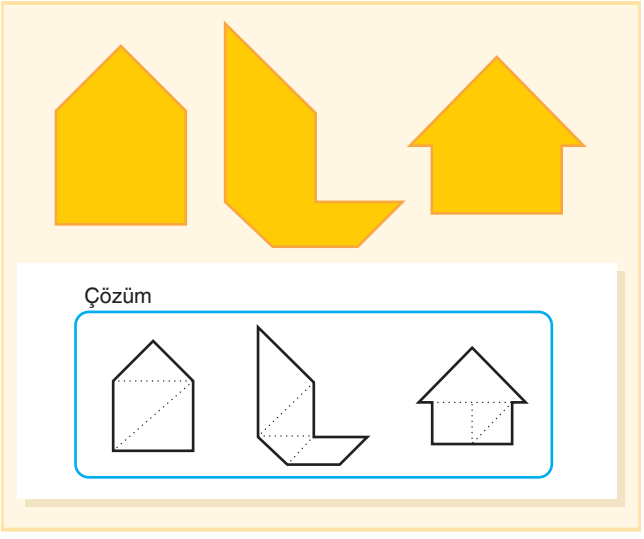


Şekil 19.7 Tangramlar alan kavramlarını araştırmak için fırsatlar tanır (Bkz. Çalışma Yaprak seti 51)

Etkinlik 19.9

Tangram Areas

Şekil 19.8'de gösterildiği gibi tangram parçaları ile oluşturulmuş çeşitli şekillerin taslağını çiziniz. Öğrencilerin trangram parçalarını kullanarak hangi şekillerin aynı alana sahip, hangilerinin daha büyük ve hangilerinin daha küçük olduğuna karar vermelerine izin verin. Şekiller kağıt üzerine kopyalanabilir ve öğrenciler gruplar halinde çalışabilirler. Öğrencilerin sonuçlara nasıl ulaştıklarını açıklamalarına izin verin. Grandfather Tang's Story (Tompert, 1997) (Büyükbaba Tang'in hikâyesi) adlı kaynaktaki hayvan resimlerini kullanarak ilave incelemeler yapabilirsiniz.



Şekil 19.8 Tangram parçalarından oluşan şekilleri karşılaştır.

Durup Düşün!

Burada durup, bir tangram seti alıp Şekil 19.8'de önerilen alan karşılaştırmalarını yapabilirsiniz.

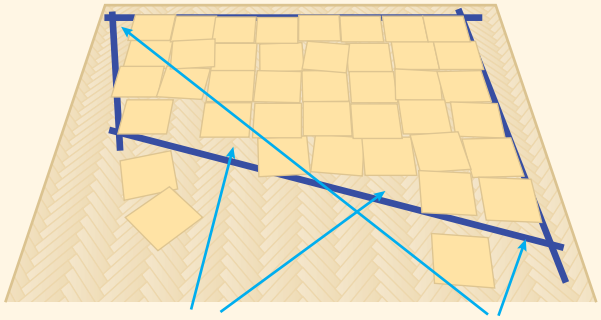
Alan Birimleri

Her ne kadar kareler alan için kullanılan en yaygın birimler olsa da düzlemsel bir bölgeyi rahatlıkla dolduran parçalar da kullanılabilir. Bir alanı aynı büyüklükteki dairelerle ya da kuru fasulye ile doldurmak dahi alan ölçümünün ne anlama geldiği hakkında faydalı bir fikir verir. Kolaylıkla bir araya getirilebilen ya da çok miktarlarda bulunabilen alan birimleri hakkında bazı öneriler şunlardır.

- Yuvarlak plastik cipsler, kuruşlar ya da kuru fasulyeler kullanılabilir. Başlangıç aşamasında alan birimlerinin aralarında boşluk bırakmayacak şekilde olmasına gerek yoktur.
- Renkli karolar (1 inç boyutlu plastik kareler).
- Mukavvadan kesilmiş kareler. Büyük kareler (bir kenarı yaklaşık 20 cm) büyük alanlar için iyi iş görür. Küçük birimlerin bir kenarı 5-10 cm arası olmalıdır.
- Gazete sayfaları çok büyük alanlar için mükemmel birimler oluşturur.

Öğrenciler birimleri sınıftaki masaüstü, ilan panosu ya da kitap gibi yüzeyleri ölçmek için kullanabilirler. Yer döşemesi üzerindeki geniş alanların krokileri kâğıt bantlar kullanılarak çıkarılabilir. Küçük alanlar fotokopi yoluyla çoğaltılabilir ve böylelikle öğrenciler masalarında çalışabilirler. Tuhaf şekiller ve eğri yüzeyler meydan okuyucu ve ilgi çekici olabilir. Bir karpuzun yüzeyini ya da çöp kutusunun yan kısmının alanını bulmak faydalı birer zorlu görevlerdir.

Alan ölçümlerinde birimlerin alanı kısmen doldurduğu durumlarla da karşılaşılabilir. Bu durumlarda şeklin içini birimlerle doldurup kalan boşluklar için yorumlar yapabilirsiniz. *Öğretim Programı Odak Noktaları*'na (NCTM, 2006) göre dördüncü sınıfta öğrenciler parçalı birimlerle çalışmaya başlamalı ve zihinsel olarak iki ya da daha fazla parçalı birimleri bir birim olarak sayabilmelidir. Şekil 19.9 böyle bir olası ölçme etkinliğini göstermektedir.



Şekil 19.9 Yer döşemesi üzerine bantla belirlenmiş geniş bir şeklin alanının ölçülmesi. Birimler aynı ölçülerde kare şeklinde mukavvadan kesilmiş parçalardır.

Aşağıdaki etkinlik öğrencilerinizin alan birimleri hakkında ne düşündüklerini görmek için iyi bir başlangıç noktasıdır.

Etkinlik 19.10

Doldur ve Karşılaştır

Bir kâğıt üzerine iki dikdörtgen ve bir eğrisel kapalı bir şekil çizin. Şekilleri öyle bir çizin ki ne üç alan da birbirine eşit olsun ne de bir alanın diğer alandan açık bir şekilde büyük ya da küçük olduğu anlaşılsın. Öğrencilerin görevi ilk olarak üç şekilden hangisinin en büyük, hangisinin en küçük olduğunu tahmin etmeleridir. Tahminlerini yazdıktan sonra kendi belirledikleri dolgu parçalarını kullanmalıdırlar. Öğrenciler yazarak ne bulduklarını açıklamalıdır.

Sizin amacınız başta alanın kaplama yöntemi ile ölçüldüğü fikrini geliştirmektir. Formülleri bu aşamada göstermeyin. Gruplar büyük ihtimalle aynı alan için farklı ölçüm sonuçları bulacaklardır. Öğrencilerle bu farklılıkları tartışın ve kenarlara yakın olan yerlerde tahmininin zorluklarına işaret edin. Bir "doğru" cevap olduğu fikrinden kaçının.

Dördüncü sınıfa kadar öğrenciler dizileri kullanarak çarpma kavramı ile dikdörtgenin alanını ilişkilendirmeye başlamalıdır. Aşağıdaki karşılaştırma etkinliği bu yönde yapılan iyi bir adımdır.

Etkinlik 19.11

Dikdörtgenlerin Karşılaştırması-Birim Kareler

Öğrencilere aynı alana sahip ya da alanları birbirine yakın bir çift dikdörtgen verilir. Onlara ayrıca bir birimlik kare modeli ya da çizimi ve birimi ölçecek bir cetvel verilir. Öğrencilerin dikdörtgenleri kesmelerine izin verilmez. Eğer isterlerse üzerlerini çizebilirler. Görevleri cetvellerini kullanarak hangi dikdörtgenin daha büyük olduğuna ya da dikdörtgenlerin aynı olup olmadığına karar vermektir. Öğrenciler cevaplarını açıklarken kelimeler, resimler ve sayıları kullanmalıdır. Bazı önerilen çiftler aşağıda verilmiştir:

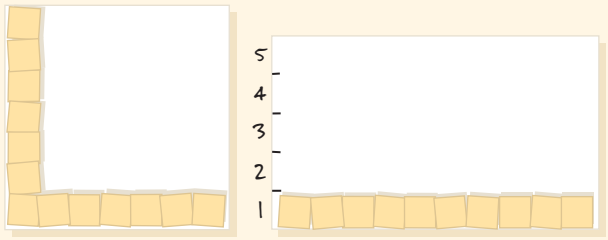
4×10 ve 5×8

5×10 ve 7×7

4×6 ve 5×5

Bu etkinliğin amacı özellikle bir alan formülü geliştirmek olmayıp öğrencilerin gelişen çarpma kavramlarını dikdörtgenlerin alanlarına uygulamaktır. Çarpımsal yaklaşımı bütün öğrenciler kullanmayacaktır. Bir kenar boyunca birim karelerden oluşan bir sırayı sayabilmek ve sonra diğer kenarın uzunluğu ile çarpmak için, karelerden oluşan ilk sırayı dikdörtgenin içini dolduracak bir birim olarak düşünmek gerekir (Outhred & Mitchelmore, 2004). Birçok öğrenci dikdörtgenin içine bütün kareleri çizmeye çalışacaktır. Bununla birlikte, bazıları cetvellerini kullanarak her kenara kaçar tane kare sığacağına karar verebilir ve buradan çarpmayı kullanarak toplam alanı bulabilir (Bkz. Şekil 19.10). Öğrencilerin stratejilerini arkadaşları ile paylaştırarak daha çok öğrenci bu bağlamda çarpmanın kullanılmasına teşvik edilebilir.

Kareli Kâğıtlar. Çeşitli tiplerdeki kareli kâğıtlar, "alan cetvelleri" gibi düşünülebilir. Kareli kağıtlar, bir cetvel uzunluk



Dikdörtgen 49 adet kare ile kaplanmıştır: 7 × 7 = 49

10 kareden oluşan 5 sıra kare 5 × 10 veya 50 kare yapar. Bu dikdörtgen daha büyüktür.

Şekil 19.10 Bazı öğrenciler toplam birim kare sayısını söylemek için çarpmayı kullanırlar.

ölçmek için ne yaparsa alan ölçmek için de onu yapar. Kareli kâğıt sizin için birimleri önünüze serer. Çalışma Yaprak Seti 34-36'da saydam slâyt hazırlamak için kareli kâğıtlar mevcuttur. Öğrencilerin ölçülecek alan üzerine kareli kâğıdı yerleştirmelerini ve alan içindeki birimleri saymalarını sağlayın. Alternatif bir yöntem olarak ölçülmesi planlanan alan kareli kâğıt üzerine çizilebilir.

Alan ve Çevre Arasındaki İlişki

Alan ve çevre (bir alanın etrafındaki uzaklık) öğrenciler için karmaşık bir konudur. Muhtemelen bunun sebebi her ikisinin de ölçüm içermesi ya da her iki kavram için de yaklaşık aynı zamanda öğrencilere ilgili formüllerin öğretilmesi ve formüllerin hatırlanması kafa karıştırıcı olabilir. Sebep ne olursa olsun, beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerin dahi bu iki kavramı karıştırdıklarını görebilirsiniz. Bu kafa karışıklığını hafifletmenin ilginç bir yolu aşağıdaki etkinliklerde olduğu gibi iki fikrin karşılaştırılmasıdır.

Etkinlik 19.12

Sabitlenmiş Çevreler

Öğrencilere çevresi 24 santimetre olan esnemeyen bir tel halka verin. Öğrencilerin görevi çevresi 24 cm olan kaç farklı dikdörtgen yapılabilir buna karar vermektir. Öğrenciler 1 cm'lik kareli kâğıtları ellerindeki telleri üzerlerine koymak için kullanmak isteyebilirler. Farklı dikdörtgenlerin her biri kareli kâğıt üzerine çizilip içine alanı not edilebilir.

Tel halkaya alternatif olarak sadece kareli kağıt kullanılabilir ve öğrencilerden çevresi 24 cm olan dikdörtgenlerin bulunması istenebilir.

Etkinlik 19.13

Sabit Alanlar

Öğrencilere 1 cm'lik kareli kâğıtlar verin. Öğrencilerin görevi alanı 36 cm²'lik dikdörtgenler oluşturmaktır. Dikdörtgenlerin her biri kareli kâğıt üzerine çizilerek boyutları not edilmelidir. Ayrıca, öğrenciler her bir dikdörtgenin çevresini bulmalı ve şeklin içine yazmalıdır (Sayfa 74-75'deki "Sabit Alan" dersine bakınız.)

Durup Düşün!

Daha ilerisini okumadan önce önceki iki etkinliği düşünün. "Sabit Alanlar" etkinliği için bütün dikdörtgenlerin çevreleri aynı olur mu? Eğer olmazsa, çevresi daha uzun ya da kısa olan dikdörtgenler için ne diyebilirsiniz? "Sabit Çevreler" etkinliğinde dikdörtgenlerin alanları aynı kalır mı? Neden aynı ya da neden aynı değil?

Öğrenciler Etkinlik 19.12 ve 19.13'ü küçük gruplar içinde tamamlarken onların dikdörtgenlerin alanlarını ve çevrelerini üzerlerine yazarak kayıt altına almalarını sağlayın (alan= 12 cm²). Daha sonra öğrenciler bütün şekilleri keserek çevreleri aynı olanları bir grup, alanları aynı olanları bir grup yapmalıdırlar. Yazı tahtasında "Çevre" ve "Alan" isimlerinde iki tablo hazırlayıp takımlar gelerek şekillerini Çevre Tablosunda (soldan sağa doğru) en küçük çevreye sahip olandan en büyük çevreye sahip olana doğru ve Alan Tablosunda en az alana sahip olandan en büyük alana sahip olana doğru yerleştirmelidirler. Öğrencilere ne gözlemledikleri sorulmalı, varsayımlarda bulunmaları istenmeli ve herhangi bir sonuca ulaşıp ulaşamadıklarına bakılmalıdır. Öğrenciler çoğu zaman aynı alana sahip iki ya da daha fazla dikdörtgenin illaki aynı çevre ölçüsüne sahip olmamaları karşısında şaşırırlar. Benzer şekilde aynı çevre ölçüsüne sahip iki dikdörtgenin her zaman aynı alana sahip olması gerekmez. Ve, elbette, bu gerçek dikdörtgenlerle sınırlı değildir.

Öğrenciler oldukça ilginç olan bir ilişkinin farkına varacaklardır. Alan sabit tutulduğunda en küçük çevreye sahip şekil bir kare ya da "kare-gibi" bir şekildir. Çevrenin sabit olması durumunda, en büyük alana sahip olan dikdörtgen de aynı şekildedir. Hangi şekil olursa olsun en küçük çevreye ve sabit bir alana sahip olan şekil dairedir. Yani, alanlarının aynı olduğunu kabul edersek daha "şişman" şekil daha küçük çevreye; daha zayıf şekil daha büyük çevreye sahip olur. (Benzer bir sonuç üç boyutlularda da geçerlidir. Çevreyi yüzey alanıyla alanı ise hacimle yer değiştiriniz).

Hacim ve Kapasite

Hacim ve Kapasite

Hacim ve *kapasite* terimlerinin her ikisi de üç boyutlu bölgelerin "büyüklüğü" için kullanılır. *Kapasite* terimi genellikle bir kabın alabileceği miktar için kullanılır. Standart kapasite birimleri kuart[2] ve galon[3] ya da litre ve mililitredir. *Hacim* terimi bir kabın kapasitesi için kullanılabildiği gibi katı cisimlerin büyüklüğü için de kullanılabilir. Standart hacim bi-

2 Kuart: çeyrek (1/4) galon
3 Galon: 3,78541178 litre

rimleri inç küp ya da santimetre küp gibi uzunluk birimleri cinsinden ifade edilirler.

Karşılaştırma Etkinlikleri

Katı cisimlerin hacimlerinin karşılaştırılması çok zordur. İlkokul düzeyindeki öğrenciler için kapasite kavramına yoğunlaşmak uygun olur. Kapasite karşılaştırmanın basit bir yöntemi kabı bir şeyle doldurup bunun karşılaştırılacak kaba dökülmesidir. Üçüncü sınıftan önce öğrencilerin çoğu kaplara istinaden "daha çok alır" kavramını anlar. Katı cisimler için hacim kavramıysa bu kadar kolayca anlaşılmayabilir.

Anaokulu öncesi ve anaokulu yıllarında küçük çocuklar farklı kapların kapasitelerinin karşılaştırmasına yönelik doğrudan deneyimler yaşamalıdır. Çok çeşitli teneke kaplar, küçük kutular ve plastik kaplar toplayın. Mümkün olduğunca farklı şekillerden bir araya getirin. Ayrıca birkaç tane plastik kepçe toplayın. 2 litrelik plastik bir şişeyi ikiye kesin ve üst kısmını huni gibi kullanın. Pirinç ya da kuru fasulye, kullanmak için güzel birer dolgu maddeleridir. Kum ve su da kullanılabilir.

Etkinlik 19.14

Kapasite Sınıflandırması

Öğrencilere bir tanesi "hedef" olarak işaretlenmiş bir dizi işaretli kap verin. Öğrencilerin görevi, verilen kapları "hedef" kapla karşılaştırarak ona göre daha fazla alır, daha az alır ya da yaklaşık aynı miktarda alır şeklinde kapları sınıflara ayırmaktır. Öğrencilere üzerinde kapların listesi olan ve "daha fazla alır," "daha az alır" ve "yaklaşık aynı miktarda alır" şeklinde işaretleyebilecekleri yerler olan bir kayıt defteri verin. Her bir kap için seçenekleri iki kez listeleyin. İlk seçenek gözlem ile yapılan tahmin içindir. İkincisi "gerçekte bulunan" içindir. Dolgu maddesi (fasulye ya da pirinç gibi), kepçe ve huniyi verin. Doğrudan yönlendirmelerde bulunmaktan kaçının, fakat daha sonra öğrencilerin çözüm için kullandıkları fikirleri tartışın.

Öğrencilerin kaplardan hangisinin daha fazla aldığını doğru bir şekilde tahmin edebileceklerini beklemeyin. Yetişkinler dahi bu kararı vermekte zorlanırlar. Aşağıdaki görevi öğrencilerinizin yanında siz de deneyin. İki elişi kâğıdı alın. İlkinin iki uzun kenarını bantlayarak tüp şekli (silindir) yapın. Diğerinin kısa kenarlarını bantlayarak kısa ve daha şişman bir silindir yapın. Silindirleri dik tuttuğunuzda hangisi daha fazla alır ya da ikisi de aynı kapasiteye mi sahiptirler?

Bunu sınıfınızla yapmadan önce anket yaparak öğrencilerinizin kaç tanesi hangi seçeneği seçiyor görün. Öğrencilerin çoğu kabaca üç gruba ayrılırlar: kısa ve şişman olan, uzun ve zayıf olan ya da ikisi de aynı kapasiteye sahipler. Köpük, fıstık ya da lima fasulyesi gibi dolgu maddelerini kullanın. Zayıf silindiri şişman olanın içine yerleştirin. Tüpün içini doldurun ve sonra yukarı kaldırarak içindekileri şişman silindirin içine boşaltın.

Katı cisimlerin görünen hacimleri bazen yanıltıcı olabilir ve karşılaştırma yöntemi ayrıca zordur. Top ve elma gibi katıların hacimlerini karşılaştırmada bazı yerine geçme yöntemi kullanılmak zorundadır. Öğrencilere karşılaştırılacak nesnelerin her birini tutacak iki ya da üç kap ve pirinç ya da fasulye gibi bir dolgu maddesi verin. Bu araç gereçlerle bazı öğrenciler kendi karşılaştırma yöntemlerini geliştirebilirler. Bir yöntem olarak önce bir kabı tamamen doldurup sonra onu boş bir depolama kabına boşaltın. Daha sonra, ilk kabın içerisine nesneyi yerleştirin ve depolama kabının içindekilerle üzerini doldurun. Kalan dolgu maddesinin hacmi nesnenin hacmine eşittir. Depolama kabında kalan dolgu maddesinin seviyesini deneyi başka nesneler için tekrarlamadan önce işaretleyiniz. İki ya da üç nesne için kalan dolgu maddesinin seviyelerinin karşılaştırılması ile nesnelerin hacimleri karşılaştırılabilir.

Aşağıdaki etkinlik Etkinlik 19.13'ün (Sabit Alanlar) üç boyutlu uyarlamasıdır. Burada hacim sabit ve öğrenciler yüzey alanındaki değişime bakıyorlar.

Etkinlik 19.15

Sabit Hacim: Prizmaların Karşılaştırılması

Her bir çift öğrenciye yeterince santimetrelik küpler ya da ağaç küpler verin. Onların görevi, sabit sayıdaki küpler için, farklı dikdörtgenler prizması inşa etmek ve yapılan her prizma için yüzey alanını kayıt altına almaktır. Önerilebilecek küp sayısı 64 olabilir, çünkü minimum yüzey alanı 4x4x4 ile elde edilir. 64 küp ile birçok prizma yapılabilir. Bununla birlikte elinizde yeteri kadar küp yoksa diğer seçenekler 24 ya da 36 küp olabilir. Öğrenciler, oluşturdukları tabloları kullanarak oluşan her türlü örüntüyü gözlemlemelidirler. Özellikle, prizma kısaldıkça, inceldikçe ve küp şeklini aldıkça yüzey alanına ne olur?

Amaç burada öğrencilerin hacmin, yüzey alanını belirlemediğini ve yüzey alanı ile hacim arasındaki örüntünün alan ve çevre arasında buluna örüntüye benzer olduğunu fark etmeleridir. Yani, küp benzeri prizmalar, aynı hacme sahip uzun ve dar prizmalara göre daha az yüzey alanına sahip olurlar.

Öğrenciler alan ve hacim formüllerini oluşturduktan sonra prizmaları inşa etmeden de yüzey alanı ve hacim arasındaki ilişkileri araştırabilirler.

Hacim ve Kapasite Birimleri

Hacim ve kapasiteyi ölçmek için iki çeşit birim kullanılır: katı birimler ve kaplar. Katı birimler ağaçtan küpler ya da eski tenis topları gibi nesneler olup ölçülen kabı doldur-

mak için kullanılabilir. Diğer bir çeşit birim modeli ise içi doldurulup ölçülen kaba tekrar tekrar dökülen küçük bir kaptır. Aşağıda toplamak isteyebileceğiniz birkaç çeşit birim örnekleri verilmiştir:

- Plastik kapaklar ve sıvı ilaç kaplar.
- Plastik kavanozlar ve her boyuttaki kaplar.
- Ahşap küp bloklar ya da her şekildeki bloklar (aynı büyüklükte yeterince sayıda olduğu müddetçe).
- Paket dolgu köpükleri (kusursuz bir şekilde doldurmasa da hacmin kavramsal olarak ölçülmesi sonucunu doğuracaktır).

Aşağıdaki etkinlik "Dikdörtgenlerin Karşılaştırılması-Birim Kareler" isimli Etkinlik 19.11'in bir benzeridir.

Etkinlik 19.16

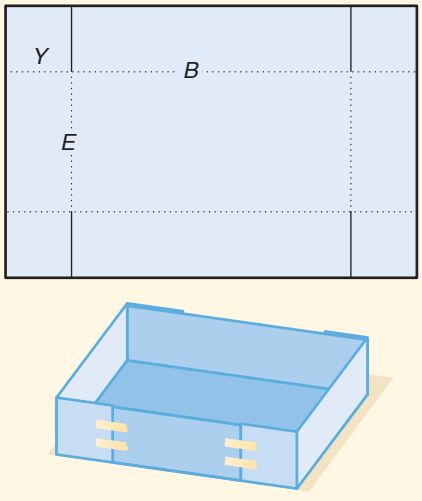
Kutuların Karşılaştırılması-Birim Küpler

Öğrencilere kartondan katlayarak yaptığınız bir çift küçük kutuyu veriniz (Şekil 19.11'e bakınız). Kutuların boyutları birim olarak kullandığınız blokların boyutlarının katları olmalıdır. Öğrencilere iki kutu, tam olarak bir blok ve uygun bir cetvel veriniz. (Eğer 2 cm boyutlarında küp kullanıyorsanız, cetvelin üzerindeki birimleri 2 cm yapınız). Öğrencilerin görevi hangi kutunun daha fazla hacme sahip olduğuna veya hacimlerinin aynı olup olmadığına karar vermeleridir.

Kutu boyutları şunlar olabilir (B × E × Y):

6 × 3 × 4 5 × 4 × 4 3 × 9 × 3 6 × 6 × 2 5 × 5 × 3

Öğrenciler sonuçlarını açıklamak için kelimeler, çizimler ve sayılar kullanmalıdır.



Şekil 19.11 Gösterildiği gibi kutu yapmaya önce dikdörtgenle başlayıp köşelerine birer kare çiziniz. Sürekli çizgiler boyunca kesip katlayınız. Kare köşeleri dışarıdan katlayarak kenarlarına yapıştırın.

Son etkinlik için faydalı bir ipucu, önce kutunun tabanına ne kadar küp sığacağını belirlemek olabilir. Hepsi olmasa da bazı öğrenciler hacim için çarpımsal kuralı keşfedeceklerdir. Cevapları teyit etmek için kutular küplerle doldurulabilir. Öğrenciler açıklayamadıkça formüller kullanılmamalıdır. Bu etkinliğin temel amacı formül geliştirmek değildir.

Ölçü Kaplarının Kullanımı. Kapasite ölçen araçlar, genellikle küçük miktarlardaki sıvıları ya da pirinç veya su gibi dökülebilen materyalleri ölçmek için kullanılır. Bu araçlar sıklıkla mutfaklarda ve laboratuarlarda bulunur. Öğrenciler ölçü kaplarını, kağıt hamuru ya da fen deneyleri için Oobleck[3] yapımı yanında yemek tariflerinin keşfinde kullanmalıdırlar (Google'da tarifler için "Oobleck yapımı" yazın). *The Better Homes and Gardens New Junior Cookbook* (2004) kitabı öğrencilerin kolayca uygulayabilecekleri tarifleri içeren güzel bir başlangıç ve kapasite birimlerinin kullanılabileceği birçok ölçme deneyimini içerir.

Ağırlık ve Kütle

Ağırlık bir cisme uygulanan çekme veya yerçekimi kuvvetinin ölçüsüdür. *Kütle* bir cismin içindeki madde miktarıdır ve ona ivme kazandırmak için bir kuvvet gereklidir. Dünyadaki yer çekiminden daha az yer çekimine sahip ay üzerindeki bir cismin ağırlığı daha az ancak kütlesi dünyadaki ile aynı olur. Pratik amaçlar için, dünya üzerinde kütle ve ağırlık ölçüleri yaklaşık aynı kabul edilecektir. Burada, ağırlık ve kütle terimleri birbirine alternatifli olarak kullanılacaktır.

Karşılaştırma Etkinlikleri

İki cismin ağırlığını karşılaştırmanın en anlamlı yolu bunların her birini bir elde tutup, kolları iki yana açıp ve hangisinin aşağıya doğru çekildiğini tecrübe etmektir (okul öncesi, anaokulu ve 1. sınıf öğrencilerine "daha ağır" ya da "ağır çekmek" ne anlama gelir, bunu göstermenin etkili bir yoludur). Bu kişisel deneyim daha sonra (eşit kollu teraziler ve yaylı el kantarları gibi) iki temel ölçü aletinden birine aktarılabilir.

Öğrenciler nesneleri terazinin iki kefesine yerleştirdikleri zaman, aşağıya doğru hareket eden kefenin daha ağır nesneyi taşıdığı anlaşılır. Oldukça küçük bir terazi dahi küçük farkları tespit edebilir. İki nesneden biri sırasıyla yaylı el kantarına yerleştirildiğinde ağır nesne terazinin kefesini daha aşağıya çeker. Eşit kollu teraziler ve yaylı el kantarların ikisi de sınıf içi kullanım açısından önemlidir. (Teknik olarak, yaylı el kantarları ağırlığı ve eşit kollu teraziler kütleyi ölçer. Neden?)

Her iki terazi kullanılarak küçük çocuklarla, tahminde bulunma, gruplara ayırma ve sıralama yapma etkinlikleri yapmak mümkündür. Daha büyük öğrencilerle, ağırlık karşılaştırma etkinlikleri yapmaya gerek yoktur (Neden?)

[3] Mısır nişastası ve su karışımı.

Ağırlık ya da Kütle Birimleri

Aynı kütleye sahip düzgün nesneler topluluğu ağırlık birimleri olarak kullanılabilir. Çok hafif nesneler için büyük kâğıt ataçları, ahşap bloklar ya da plastik küpler işe yarar. Hırdavatçılarda bulunan büyük metal pullar biraz daha ağır nesneleri ölçmek için kullanılabilir. Kilogram ya da daha fazlasını ölçmek için standart ağırlıklara ihtiyacınız vardır.

Ağırlık doğrudan ölçülemez. Ya eşit kollu terazi ya da yaylı el kantarı kullanılmalıdır. Eşit kollu terazide bir nesneyi bir kefeye yerleştirir ve her iki kefede dengeye gelene kadar tartarsınız. Yaylı el kantarında, nesneyi kefeye yerleştirdikten sonra kefenin arkasına yapıştırılan kâğıt üzerinde kefenin pozisyonunu işaretlersiniz. Nesneyi kaldırıp kefenin içerisine aynı pozisyona gelecek kadar ağırlık koyarsınız. Aynı ağırlıkların yay ya da lastiği nasıl aynı güçle çekeceğini tartışınız.

Daha ağır ve daha hafif kavramı oldukça erken yaşlarda öğrenilirken ağırlık ya da kütle birimleri ile ilgili fikirlerin öğrenilmesi kolay olmamaktadır. Bütün sınıf düzeylerinde formel olmayan birim ağırlıklarla yapılan kısa deneyimler bile standart birimlerin ve terazilerin anlaşılması için faydalı hazırlıklardır.



Zaman

Okullarda sıklıkla ölçülen diğer özelliklere göre zaman biraz daha farklıdır. Çünkü zaman görülemez ya da hissedilemez ve zaman birimlerini kavramak veya onları verilen bir zaman periyodu ya da aralığı ile nasıl karşılaştırılacağını bilmek öğrenciler için daha zordur.

Süre

Zaman bir olayın başlangıcından sonuna kadar geçen süre olarak düşünülebilir. Diğer özellikler ile birlikte öğrencilerin zamanın özelliğini doğru bir şekilde anlamaları için onların farklı sürelere sahip olayların karşılaştırmalarını yapmaları gerekir. Eğer farklı iki olay aynı zamanda başlıyorsa kısa süreli olanı daha önce bitecek ve diğeri daha sonra bitecektir. Örneğin, hangi kapak daha uzun süre dönecektir? Bununla birlikte, bu çeşit karşılaştırma sürenin kendisinden ziyade sürenin bitimine odaklanmaktadır. Zamanı ölçülebilir bir şey olarak düşünebilmek için, aynı anda başlamayan iki olayın karşılaştırmasını yapmak faydalı olur. Bu ise başlangıçtan itibaren bir şekilde zamanın ölçümünü gerektirir.

Formel olmayan zaman birimi tavandan uzunca bir telle sarkıtılmış tenis topundan yapılmış bir sarkacın salınım süresi olabilir. Uzun tel yavaş bir salınım üretir ve bu yüzden saymayı mümkün kılar. Musluğun boş bir kaba akıttığı sabit su damlası diğer bir seçenektir. Periyodun sonunda su seviyesi işaretlenir. İşaretlenmiş kap boşaltılıp ikinci bir süreyi ölçmek için kullanılarak iki işaret karşılaştırılabilir. Su damlası yönteminin bir avantajı sayılacak birimlerin olmamasıdır. Süreye değinen basit görevler aşağıdaki gibidir:

- Onluk bloğu üst üste tek tek istifleyin ve sonra birer birer ayırın
- Alfabenin yazımı
- Belirlenmiş bir yol etrafında yavaşça yürümek
- 15 geçmeli küpten oluşan bir çubuk yapmak

Her bir görevi sadece bir öğrenci yapar, böylelikle bir yarış olmaz.

Öğrenciler ayrıca saniyeleri, dakikaları ve saatleri öğrenmeye ve bu birimlerin ne kadar uzun olduğunu kavramaya gerek duyarlar. Gün içerisinde kısa ve uzun olayların sürelerini not etmek için bilinçli bir çabaya girişerek yardımcı olabilirsiniz. $\frac{1}{2}$ dakika ile 2 dakika arası küçük olayların zamanını tutmak eğlenceli ve faydalıdır. Televizyondaki gösteriler ve reklamlar bunlar için güzel örneklerdir. Öğrencilere günlük hayatlarından benzer olayların zamanlarını tutmalarını sağlayın: diş fırçalamak, akşam yemeğini yemek, okula bisikletle gitmek, ödev yapmak için geçen zaman.

Etkinlik 19.17

Zil İçin Hazır Olun

Öğrencilere üzerinde bir dizi saat yüzleri olan bir kayıt defteri verin (Çalışma Yaprak Seti 33'e bakınız). Gizlice alarmlı saatinizi bir saatte, yarım saatte ya da dakikada bir çalacak şekilde ayarlayın. Zil çaldığında öğrenciler zamana bakmalı ve zamanı kâğıt üzerindeki saat yüzler üzerine kayıt etmeli ve sayı ile de yazmalıdır. Bu yüksek katılımı sağlayıcı etkinlik, öğrencileri sadece zamanı söylemeyi düşündürmek açısından motive etmez, ayrıca anolog saat okuma ve dijital kayıt yapma arasındaki ilişki üzerinde düşünmelerini de sağlar. Geçen süre, alarm aralarındaki sürenin tartışılmasıyla da keşfedilebilir.

Saat Okuma

Zaman ölçmek için kullanılan ortak araç saattir. Bununla birlikte, zamanı söylemeyi öğrenmek zaman ölçme ile çok da ilişkili olmayıp daha ziyade kadranlı aygıtları okumayı öğrenme becerileri ile ilişkilidir. Saat okuma öğretilmesi zor bir beceri olabilir.

Bazı Zorluklar. Birinci sınıftan başlayarak öğrenciler genellikle önce tam saatleri okumayı, sonra yarım ve çeyrek saatleri okumayı ve en sonunda ilerleyen sınıflarda 5 ve 1 dakikalık araklıkları okumayı öğrenirler. Bu sürecin başlangıcında öğrencilere, tam saati ya da yarım saati gösteren saat setleri gösterilir. Bunun için, saat 7: 00 ya da 2: 30 gibi zamanı okuyabilen birçok öğrenci 6: 58 ya da 2: 33 gibi zamanları başlarda okumakta zorlanırlar.

Dijital saatler öğrencilerin zamanı kolaylıkla okumalarını sağlar, ancak zamanları birbirleriyle çok iyi ilişkilendirmez. 7: 58'in dijital okunuşunun yaklaşık 8 olduğunu bilmek

için öğrencinin bir saatte 60 dakika olduğunu ve 58'in 60'a yakın olduğunu ve 2 dakikanın çok uzun bir süre olmadığını bilmesi gerekir. Bu kavramlar, birinci sınıf düzeyindeki öğrencilerin çoğunluğunda ve birçok ikinci sınıf düzeyindeki öğrencilerde gelişmemiştir. Analog saat (el ile) büyük sayıları anlamayı gerektirmeden ve hatta bir saatte kaç dakika olduğunu bilmeye gerek bırakmadan zamanın görsel olarak "neye yakın olduğunu" gösterir.

Önerilen Yaklaşım. Aşağıdaki öneriler öğrencilerin analog saatleri anlamalarına ve okumalarına yardımcı olabilir.

1. Tek kadranlı saat ile başlayın. Sadece saati gösteren kadranı olan bir saat makul doğrulukta okunabilir. Yaklaşık kelimelerden çok kullanın: "Saat yaklaşık 7." "Saat 9'u biraz geçti." "Saat 2 ve 3'ün ortasında" (Bkz. Şekil 19.12).

2. Saatin akrebi bir saatten diğerine giderken yelkovanına ne olur tartışınız. Yelkovan 12'de iken akrep tam olarak bir saati işaret eder. Akrep yaklaşık sayıların orta noktasında iken yelkovan yaklaşık olarak nerededir? Akrep bir saati biraz geçmiş ya da önünde (10-15 dakika gibi) ise, yelkovan yaklaşık nerede olur?

3. Biri tek kadranlı diğeri iki kadranlı iki gerçek saat kullanın. (Eski bir saatin yelkovanını kopartın.) İki kadranlı saati kapatın. Gün içerisinde periyodik olarak dikkatinizi tek kadranlı saate verin. Zamanı yaklaşık dili kullanarak tartışınız. Öğrencilerinize yelkovanın nerde olması gerektiğini tahmin ettirin. Kapattığınız saati açarak kontrol edin.

4. 5 dakika aralıklarla geçen zamanı öğretin. 3. adım başladıktan sonra saatin etrafındaki beş dakikaları sayın. Yelkovanın 4'ü gösterdiğini tahmin etmek yerine öğrencileri saati 20 dakika geçtiğini söylemeye teşvik edin. Becerileri geliştikçe öğrencilere, her zaman önce akrebe bakarak saatin yaklaşık kaç olduğunu bulmalarını ve sonra da daha hassas doğruluk için yelkovana odaklanmalarını önerin.

5. Analog bir saat gösterildiğinde bunun okunuşunu dijital bir saat üzerinde tahmin edin ve bunun tersini de düşünün; dijital bir saat gösterildiğinde bunu analog bir saat üzerinde kurun. Bu hem tek kadranlı hem de çift kadranlı saatler üzerinde yapılabilir.

Öğrenciler iki basamaklı sayıları daha çok öğrendikçe saatlerden sonraki zamanı saatten önce kalan zamanla ilişkilendirilebilir. Bu sadece zamanı söylemek için faydalı değil aynı zamanda sayı hissi için de faydalıdır. Yukarıdaki önerilerin sıralamasında dikkat edin, saatten sonraki zaman özellikle vurgulanmıştır. Saatten önce ya da saate kadar zaman sonra gelebilir.



Şekil 19.12 Tek kadranlı saatlerde zamanı yaklaşık olarak bulma

Aşağıdaki etkinlik, tek kadranlı saatlerin daha önceki sırası takip edilmese dahi ikinci sınıf ve ötesindeki öğrencilere yardım etmek için kullanılabilir.

Etkinlik 19.18

Tek Kadranlı Saatler

Saat yüzlerinin olduğu bir sayfa hazırlayın (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 33). Her saat üzerinde bir akrep çiziniz. Akrebin yaklaşık bir saati çeyrek geçe, çeyrek kala, buçuk ve saate yakın ama üzerinde olmayan durumlarını gösteriniz. Her bir saat yüzü için öğrencilerin görevi dijital zamanı yazmak ve saat üzerinde yelkovanın bulunduğunu düşündüğü yeri çizmektir.



"Tek kadranlı Saatler" öğrencilerin saat okumalarını değerlendirmenin iyi bir yoludur. Eğer öğrenciler üçüncü ya da daha üst sınıflarda saat okumada zorlanıyorlarsa daha önce önerildiği gibi tek kadranlı bir saat ile çalışmak farklı bir yaklaşım sağlayacaktır. ◆

Geçen Süre

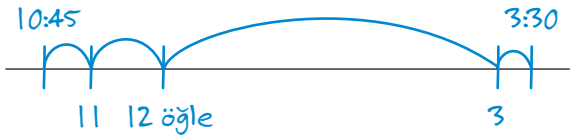
Kalan zamanı belirlemek, birçok eyaletin müfredatında yaklaşık üçüncü sınıf düzeyinde kazanılması gereken bir beceridir. Bu beceri ayrıca öğrenciler için özellikle öğle ya da gece yarısı zaman dilimlerini içerdiğinde uğraştırıcı olabilir. Öğrenciler bir saatin içinde kaç dakika olduğunu bilmek zorundadırlar. 2003 NAEP değerlendirme sınavında sadece dördüncü sınıfların yüzde 26'sı ve sekizinci sınıfların yüzde 55'i bir zaman ölçüsünün diğerine dönüştürülmesini içeren bir problemi çözebilmişlerdir (Blume, Galindo & Walcott, 2007). Eğer dijital saat ya da saatten sonraki zaman verildiğinde öğrenciler diğer saate kalan süreyi söyleyebilmelidirler. Bu kesinlikle 5 dakikanın katlarının üzerine sayıldığı bir zihinsel işlem olmalıdır. Öğrencilerin kalem ve kâğıt kullanarak 60'tan 25'i çıkarmalarından kaçının.

Diyelim ki saat sabah 8: 15 ile sabah 11: 45 arasındaki zamanı belirlemek istiyoruz. Bu nasıl yapılırsa yapılsın birkaç adımı içeren bir görevdir. Ara adımları takip etmek ilk olarak neyin yapılmasına karar verilmesini gerektirdiği için zordur. Bu durumda saatleri 8: 15'ten 11: 15' kadar sayabilir ve sonra 30 dakika üzerine ekleyebilirsiniz. Fakat eğer son noktalar 8: 45 ve 11: 15 olsalar ne yaparsınız? Tek bir yöntem ya da algoritma önermek yardımcı olmaz.

Diğer bir konu da öğleden önce ve öğleden sonra durumlarıdır. Sorun, öğrencilerin öğle ya da gece yarısında saate ne olduğunu anlamamalarından ziyade aralıkları saymada problem yaşamalarıdır.

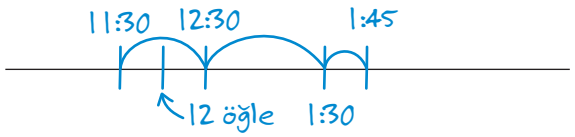
Şu ana kadar yapılan tartışmada, sadece bir çeşit problemi ele aldık. Bunun yanında ayrıca başlangıç ve geçen sürenin verilip bitiş zamanını bulma, ya da bitiş ve geçen

(a) Okul bugün saat 10:45 gibi geç başladı. Eğer saat 3:30'da ayrılırsanız, okulda bugün kaç saat kalmış olacaksınız.



11'den 3'e kadar 4 saat. Sonra, önce 15 dakika ve 30 dakika sonunda—45 dakika. Toplamda 3 saat 45 dakika.

(b) Oyun sabah saat 11: 30'da başlar. Eğer 2 saat ve 15 dakika sürerse ne zaman biter?



11: 30'dan bir saat sonra 12: 30 olur ve ikinci 1 saat seni 1: 30'a götürür ve 15 dakika daha fazlası 1: 45 yapar. Bu P.M.dir çünkü öğleden sonradır.

Şekil 19.13 Boş zaman doğrusu taslağı geçen süreyle ilgili problemler için faydalı olabilir.

sürenin verilip başlangıç zamanın bulma görevleri de vardır. Problem çözme ruhunu canlı tutarak ve modelleri kullanarak aşağıdaki noktaları göz önünde bulundurun.

Geçen süre problemlerinin hepsi için genel bir model olarak öğrencilere boş bir zaman doğrusu (Bölüm 12'de hesaplama için verilen boş zaman doğrusuna benzer) çizmelerini önerin. Örnekler Şekil 19.13'te gösterilmiştir. Çeşitli alternatifleri olduğu için öğrencilere zaman doğrusunu nasıl kullanacakları konusunda aşırı kuralcı olmamak önemlidir (Dixon, 2008). Örneğin, Şekil 19.13'te, bir öğrenci 10: 45'ten başlayarak tam saatleri sayabilir (11: 45, 12: 45, 1: 45, 2: 45, 3: 45) ve sonra 15 dakikayı çıkarabilir.



Para

Burada, genellikle ilkokul düzeyinde bilinmesi gerekli para fikirlerini ve becerilerini içeren bir listeyi verelim:

- Madeni parayı tanıma
- Madeni paraların değerleri
- Madeni paraların değerlerini kullanma
- Madeni para setlerini saymak (iki kümeyi karşılaştırmak ta dahil)
- Madeni paralardan oluşan eş gruplar (aynı miktarlar, farklı madeni paraler)
- Verilen bir miktar kadar madeni paraları seçme
- Para bozmak

Bu fikirler ve beceriler aşağıdaki bölümlerde tartışılacaktır.

Madeni Parayı Tanıma ve Değerleri

Madeni paralarımızın isimleri sosyal sistemimizin gelenekleridir. Öğrenciler bu isimleri günlük çevremizdeki fiziksel nesnelerin isimlerini öğrendikleri gibi (tecrübe ederek ve tekrarlayarak) öğrenirler.

Her bir madeni paranın değeri de öğrencilere söylenmesi gereken bir gelenektir. Bu değerlerin bir anlam ifade etmesi için öğrencilerin 5, 10 ve 25'i anlamaları gerekmektedir. Bundan daha fazlası ise öğrencilerin sayılabilir nesneleri görmeksizin bu miktarlar hakkında düşünebilmeleridir. Bunun dışında hiçbir yerde biz tek bir nesneye işaret ederken "bu 5'tir" demeyiz. Sayı kavramları nesnelerin sayımına bağlı olan bir öğrenci madeni paraların değerini anlamada zorlanabilirler. Madeni para değeri ile ilgili dersler satın alma gücü konusuna odaklanmalıdır (10 kuruş/dime, 10 tane sentin satın alabileceği ile aynı şeyi satın alabilir gibi).

Madeni Para Kümelerini Saymak

Bir grup madeni paranın toplam değerine isim vermek, rakamların görünür olması hariç, onların değerlerini zihinden toplamakla aynı şeydir. Ne gariptir ki, birçok eyalet standartları öğrencilerin zihinden sembolik toplam yapmayı zorunlu kılmadan önce madeni para saymayı zorunlu kılmaktadır. Buna rağmen, ikinci sınıf öğrencilerinden madeni para koleksiyonunu zihinden toplamaları istenebilmektedir. Bu işlem aslında zihinden hesaplama olsa bile neyse ki sayılar, 5'in katlarıyla ve 10'un sonuna 1'lerin eklenmesiyle sınırlandırılmıştır. Aşağıdaki etkinlik para saymak için bir hazırlıktır.

Etkinlik 19.19

Paralarla Ritmik Sayma

Öğrencilere bir sayı ile ritmik saymaya başlayacaklarını ve işaretinizle farklı bir sayı ile ritmik saymaya devam edeceğini belirtin. Sadece iki farklı miktarla, diyelim ki, 25 ve 10 ile başlayın. Bu sayıları tahtaya yazın. Büyük olan sayıyı (25) gösteriniz ve öğrencilerin ritmik saymaya başlamalarını sağlayın. Üç veya daha fazla saymadan sonra elinizi kaldırarak durmalarını işaret edin. Daha sonra elinizi indirin ve küçük sayıyı gösterin (10). Öğrenciler ritmik saymaya kaldıkları yerden bu sefer 10'ar 10'ar sayarak devam ederler. Şu sayılardan herhangi ikisini kullanın: 100, 50, 25, 10, 5, 1. Her zaman büyük sayı ile başlayın. Daha sonra, yine büyükten küçüğe olmak üzere üç sayıyı deneyin.

Unutmayın ki, madeni paralarla uğraşmak sadece bunların değerini toplamayı gerektirmez, ayrıca önce zihinsel olarak her bir bozuk paraya bir değer vermeyi ve sonra bozuk paraları sıralamayı gerektirir.

Bozuk paraların sayımını içeren durumların çözümlerini tartışırken işe yarayan her yaklaşıma değer verdiğinizden emin olun. Bununla beraber, büyük değerlerle başlayan ve 10'ar düşünmeyi kullanarak güzel kombinasyonlar yapan öğrencilere özel dikkat edin.

Para Bozmak

Bir farkı üzerine ekleyerek bulmak öyle değerli bir beceridir ki (her zaman ki çıkarma işlemini kullanmaktan çok daha kolay) öğrencilere bozukluk yapmayı sormadan önce onlara üzerine ekleyerek farkları bulacakları birçok deneyim kazandırın. Öğrenciler, üzerine saymada daha hünerli oldukça para bozma işlemini kazandıkları becerinin bir uzantısı olarak görebilirler.

Burada önerilen etkinlikler dizisi, öğrencilerin para ile ilgili karşılaştıkları zorluklara yüzde yüz bir çözüm değildir. Bu dizi, ön koşul sayı ve basamak değeri becerileri ile madeni para kullanmadan önceki kavramlar üzerine inşa edilmek için tasarlanmıştır.



Açılar

Açı ölçümü iki nedenle zorlayıcı olabilir: Açı ölçüsünün niteliğinin sıklıkla yanlış anlaşılması ve açıölçerlerin nasıl çalıştıkları anlaşılmadan tanıtılması ve kullanılması.

Karşılaştırma Etkinleri

Açı ölçüsünün niteliği "açıyı oluşturan ışınların açıklığı" şeklinde ifade edilebilir. Açılar sonsuz uzunlukta ve ortak bir başlangıç noktası olan iki ışından oluşur. Büyüklükleri arasındaki tek fark, ışınların ne kadar geniş ya da dar açıldıklarıdır.

Öğrencilerin ışınların açıklıklarını anlamalarına yardımcı olmak için iki açıdan biri çizilip diğeri üzerine konulmak üzere doğrudan karşılaştırılabilir. Öğrencilerin farklı uzunluklara sahip kenarları olan açıları karşılaştırdıklarından emin olun. Kısa kenarlı bir geniş açı, uzun kenarlı bir dar açıdan küçük görünebilir. Bu durum öğrenciler arasında yaygın olarak görünen bir kavram yanılgısıdır (Munier, Devichi, & Merle, 2008). Öğrenciler kenar uzunluklarına bakmazsızın bir büyük açı ve bir küçük açı arasındaki farkı söyler söylemez, açıların ölçülmesine geçebilirsiniz.

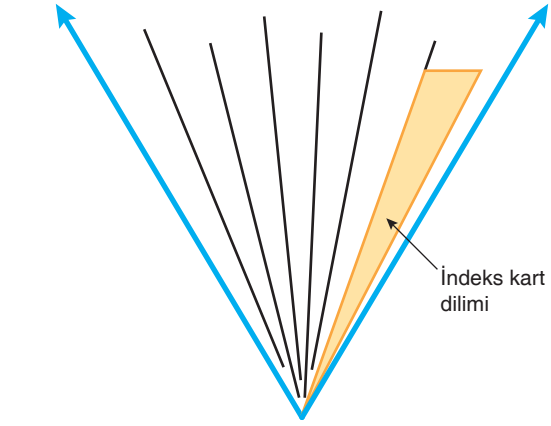
Açısal Ölçü Birimleri

Açı ölçme birimi bir açı olmak zorundadır (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 32). Başka hiçbir şey ölçmek istediğimiz aynı açıklığın niteliğine sahiptir. (Birçok insanın düşündüğünün aksine, açıları ölçmek için dereceleri kullanmaya ihtiyacınız yoktur.)

Etkinlik 19.20

Bir Birim Açı

Her öğrenciye bir indeks kartı ya da küçük bir mukavva kağıdı verin. Öğrencilerin bunun üzerine bir cetvel kullanarak dar bir açı (ya da Çalışma Yaprak Seti 32'deki dilimleri kullanın) çizmelerini ve sonra onu kesmelerini sağlayın. Elde edilen bu dilim daha sonra Şekil 19.14'te gösterildiği gibi verilen bir açının içerisine kaç tane sığdığını sayarak bir açısal ölçü birimi olarak kullanılabilir. Üzerinde çeşitli açılar bulunan bir çalışma yaprağını dağıtın ve öğrencilerin kendi birimlerini kullanarak bunları ölçmelerini sağlayın. Öğrenciler kendi birim açılarını yaptıkları için sonuçlar farklı olacaktır ve sonuçlar, birimin büyüklüğü açısından tartışılabilir.



Şekil 19.14 Bir indeks kart dilimi birim açı olarak kullanıldığında bu açının ölçüsü $7\frac{1}{2}$ dilim olur. Bu standart olmayan açılardaki doğruluk payı, bir açının diğer bir açının ölçüsünü ölçmekte nasıl kullanıldığı fikrine göre daha az önemlidir.

Etkinlik 19.20 bir açının ölçümünün uzunluk ya da alan ölçümü ile aynı olduğunu göstermektedir: Birim açılar bir açı aralığının doldurulması ya da kaplanması için kullanılır (birim uzunlukların bir uzunluğu doldurmasında ya da kaplamasında olduğu gibi). Bir kez bu kavram iyice anlaşıldı mı artık ölçme araçlarının kullanımına geçebilirsiniz.

Açıölçerlerin ve Açı Cetvellerinin Kullanımı

Açıölçer, ölçme araçlarının içinde en az anlaşılan aletlerden biridir. Zorluğun bir kısmı birimlerin (derecelerin) küçük olmasından kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin tek bir dereceyi kesip bir açıyı doğru bir şekilde ölçmek için kullanmaları fiziksel olarak mümkün olmazdı. Ayrıca, birçok açıölçerin üzerinde görünen sayılar saat yönünde çalışırken

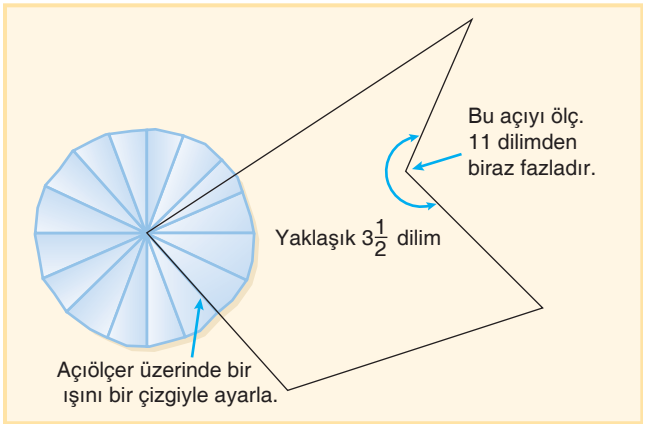
kenar boyunca ise saat yönünün tersinde çalışmaktadır ve güçlü bir kavramsal temel olmadan dereceli cetvelin anlaşılması zorlaşmaktadır.

Öğrenciler, standart olmayan parafinli kâğıttan yapılmış açıölçerler yapabilir (Bkz. Şekil 19.15) ama muhtemelen hızlıca standart araçlara geçeceklerdir. Bir açıölçer ya da açı cetveli üzerindeki ölçüleri en iyi bir şekilde anlamak için öğrencilerin açı büyüklüğü hakkında yaklaşık bir zihinsel görüntüye ihtiyaçları vardır. Böylelikle açıölçerin yanlış okunuşları giderilecektir. Bir yaklaşım sayfa 329, Şekil 17.1'deki gibi rasyonel sayı çarkı gibi bir çarkı kullanmaktır. Yüzleri ölçmektense bu durumda çark "açı saptayıcı" olarak kullanılabilir. İki kâğıt tatlı tabağı, biri beyaz diğeri canlı bir renk olmak üzere, kesilebilir ve Şekil 17.1'deki gibi birleştirilebilir. Tabakları daha sonra "açı saptayıcı" meydana getirmek için döndürerek ölçmek istediğiniz açılarla eşleştirir ve neticede 30, 45, 60, 90, 135, 180 ve 270 dereceler gibi önemli referans açılarını tahmin etmek için kullanabilirsiniz. Eğer öğrenciler açıların yaklaşık büyüklükleri ile ilgili sağlam bir anlayışa sahipseler, bu onların açıölçer ve açı cetveli gibi standart ölçme araçlarına geçmeleri için bir altyapı sağlayacaktır (Bkz. Şekil 19.16).

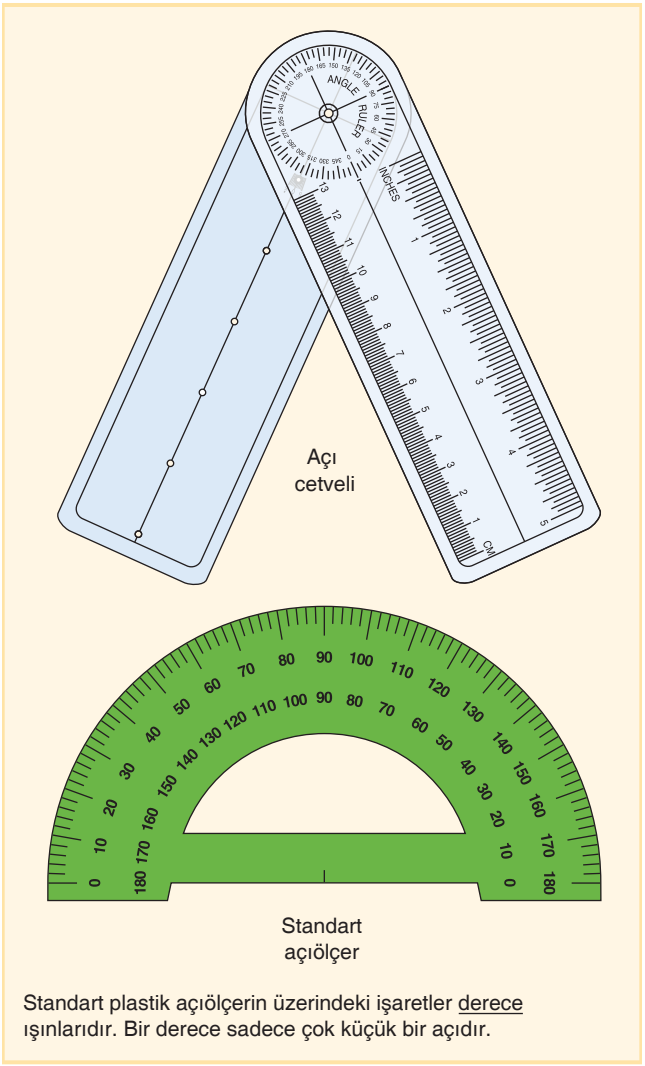
Standart Birimlerin Tanıtımı

Daha önce işaret edildiği gibi, ölçme öğretiminde standart olmayan birimlerin kullanılmasının birçok sebebi vardır. Bununla beraber, ölçme hissi öğrencilerin standart ölçme birimlerine aşina olmalarını ve bu birimlerle tahmin edebilmelerini ve standart birimlerle elde edilen ölçümleri anlamlı bir şekilde yorumlamalarını gerektirir.

Ölçme eğitiminde belki de en büyük hata iki çeşit amacın fark edilemeyişi ve ayırt edilemeyişidir: Belirli bir niteliğin anlamını ve ölçme tekniğini anlamak ve (2) bu niteliği ölçmek için yaygın bir şekilde kullanılan standart birimleri öğrenmek.



Şekil 19.15 Parafin kâğıt açıölçer kullanılarak birçokgen içerisindeki açıların ölçümü.



Standart plastik açıölçerin üzerindeki işaretler derece ışınlarıdır. Bir derece sadece çok küçük bir açıdır.

Şekil 19.16 Açıları Ölmek için Farklı Araçlar (Bkz. Çalışma yaprak seti 32).

Öğretim Hedefleri

Ölçme standart birimlerinin öğretimi üç geniş hedefi merkeze alarak düzenlenebilir:

1. *Birime olan aşinalık.* Öğrenciler yaygın kullanılan birimlerin büyüklükleri ve bunların ne ölçtüğü hakkında temel bir fikre sahip olmalıdır. 1 litre suyun yaklaşık ne kadar olduğunu ya da 5 fit uzunluğunda bir rafı tahmin edebilmek, bunların her ikisini de doğru bir şekilde ölçmekten daha önemlidir.

2. *Uygun bir birimi seçebilme becerisi.* Öğrenciler verilen bir durum için mantıklı bir ölçü biriminin ne olduğunu bilmelidirler. Uygun birimin seçimi de ayrıca hassaslık ge-

rektiren bir konudur. (Çimen tohumu satın almak için çimenliğinizi ölçerken ve bir pencere için cam levha alırken aynı hassasiyetle mi ölçüm yapardınız?) Öğrencilerin uygun standart birimlerin seçiminde sağduyularını kullanarak pratik yapmaya ihtiyaçları vardır.

3. *Birimler arasındaki ilişki bilgisi.* Öğrenciler yaygın bir şekilde kullanılan inç, fit ve yard ya da mililitre ve litre arasındaki ilişkileri bilmelidirler. Can sıkıcı dönüştürme alıştırmaları ölçme hissinin gelişimine çok az etki yapar.

Birim Aşinalığının Geliştirilmesi. İki çeşit etkinlik standart birimlere yönelik aşinalığı geliştirebilir: (1) tek bir birime odaklaşan karşılaştırmalar ve (2) tek tek birimler ya da basit birimlerin katları için kişisel ölçüt ya da referanslarını geliştiren etkinlikler.

Etkinlik 19.21

Bir Birime Dair

Öğrencilere herhangi bir standart birimin bir modelini verin ve onların o birimle yaklaşık aynı şeyi ölçen nesneleri araştırmalarını isteyin. Örneğin, metre ile aşinalığı geliştirmek için öğrencilere 1 metre uzunluğunda bir parça ip verin. Onlardan yaklaşık 1 metre olan şeylerin listelerini yapmalarını isteyin. 1 metreden biraz kısa (ya da uzun) olanları ya da iki katı (ya da yarısı) uzunluğunda olanları ayrı bir şekilde listeleyin olarak tutun. Öğrencileri günlük hayatlarında benzer nesneler bulmaya teşvik edin. Uzunlukları bulma durumu için eğrisel ya da dairesel uzunlukları dâhil etmeyi unutmayın. Daha sonra, öğrenciler verilen bir nesnenin 1 metreden fazla, az ya da ona yakın olup olmadığını tahmin etmeye çalışabilirler.

Aynı etkinlik diğer birim uzunluklarla da yapılabilir. Ailelerin öğrencilere yaklaşık 1 mil ya da 1 kilometre olan mesafeleri bulmaları için destekleri sağlanabilir. Bir mektup içinde onlara okula ya da alışveriş merkezine ya da sıklıkla seyahat ettikleri güzergâhlar gibi semtlerindeki mesafeleri kontrol etmelerini önerin. Eğer mümkünse, uzaklıkları ölçmek için 1 metre ya da 1 yard çevre uzunluğuna sahip bir çarkı evlerine (ya da sınıfta kullanın) gönderin.

Çeyrek litre, Kuart/çeyrek galon ve litre gibi kapasite birimleri için öğrenciler üzerinde tek bir birim için işaret bulunan bir kaba gerek duyarlar. Öğrenciler daha sonra evlerinde ya da okullarında aynı miktarda, fazla ya da az tutabilen diğer kapları bulmalıdır. Unutmayın ki kapların şekilleri kapasiteleri tahmin ederken çok yanıltıcı olabilir.

Standart ağırlıklar olan gram, kilogram, ons ve pound için öğrenciler bu birimlerin bir tanesi ile iki kefeli terazi üzerinde nesneleri karşılaştırabilirler. 10 gram ya da 5 ons ile çalışmak daha faydalı olabilir. Öğrenciler, evlerinden aşina oldukları nesneler getirmeleri teşvik edilerek, sınıftaki terazi üzerinde karşılaştırma yapılabilir.

Standart alan birimleri uzunluk cinsindendir (örneğin, inç kare ya da fit kare). Dolayısıyla uzunluklara aşina olmak önemlidir. Tek bir dereceye aşina olmak, 30, 45, 60 ve 90 dereceler hakkındaki bazı fikirlere sahip olmak kadar önemli değildir.

Birim aşinalığına ikinci bir yaklaşım da çok tanıdık nesnelerle başlamak ve onların ölçülerini referans ya da ölçüt olarak kullanmaktır. Bir kapı girişi 2 metre yüksekliğinden biraz daha fazladır ve bir kapı kolu zeminden yaklaşık 1 metre mesafede olur. Bir torba un 5 pound için iyi bir referanstır. Bir ataç yaklaşık 1 gram gelir ve yaklaşık 1 santimetre genişliğindedir. Bir galon süt 4 kilogramdan biraz daha az ağır gelir.

Etkinlik 19.22

Bilinen Referanslar

Measuring Penny (Leedy, 2000) isimli kitabı, öğrencilerinizin ilgisini bilinen nesnelerin ne çeşitli yollarla ölçülebileceği üzerine çekmek için kullanın. Bu kitapta, yazar oyuncak köpek Penny'i ölçerek standart ve standart olmayan (örneğin köpek bisküvisi gibi) birimler arasında köprü kurar. Penny'i ölçme fikrini kullanarak öğrencilerinizden evde (ya da sınıfta) standart birimleri birçok yolla kullanabilecekleri nesneleri bulmalarını isteyin. Ölçümler (öğrenciler kesirsel bir birimi toplamanın daha kesin olduğunu önermedikçe) doğal sayılara yuvarlanmalıdır. Sınıfta, seçilen tanıdık nesneleri ve ölçülerini tartışınız, böylelikle farklı fikirler ve nirengi noktaları paylaşılmış olur.

Vücudumuz üzerinde bulunan nirengi noktalarının özel önemi vardır. Bunlar zaman geçtikçe daha da tanınır hâle gelir ve birçok durumlarda birer cetvelmiş gibi kullaılabilirler. Her ne kadar küçük çocuklar oldukça hızlı bir şekilde gelişseler de üzerlerinde taşıdıkları uzunlukları yaklaşık olarak tanımaları faydalıdır.

Etkinlik 19.23

Kişisel Nirengi Noktaları

Vücudunuzu ölçün. Yaklaşık olarak ayağınız, adımınız, karışınız (açılmış ve parmaklarınız yan yana) ne kadar uzunluğundadır, parmağınızın genişliği, kol uzunluğunuz (parmaktan diğer parmağa ve parmaktan burnunuza kadar), el bileğinizin ve belinizin çevresi ve göğsünüze kadar olan yükseklik, omzunuza kadar olan yükseklik ve başınıza kadar olan yükseklik nedir? Bazıları yararlı nirengi noktaları bazıları ise tek birimler için mükemmel modeller olabilir (Ortalama bir öğrencinin tırnak genişliği yaklaşık 1 cm'dir ve birçok insan ellerinin üzerindeki herhangi bir yerde 10 cm uzunluğunu bulabilirler).

Bu referansları hatırlamalarına yardımcı olmak için bunların uzunluk, hacim ve benzerlerinin nirengi noktalarıyla karşılaştırılarak ölçümleri tahmin etmenin istendiği etkinliklerde kullanılması zorunludur.

Uygun Birimlerin Seçimi. Oda fit ya da inç ile mi ölçülmelidir? Beton bloklar gramla mı ya da kilogramla mı tartılmalıdır? Bu gibi sorulara verilen cevaplar, her ne kadar bunu bilmek elbette gerekli olsa da birimlerin basitçe ne kadar büyük olduğunu bilmekten fazlasını içerir. Diğer bir önemli husus ölçmedeki hassasiyeti içerir. Eğer bir parça pervaz veya doğrama kesmek için duvarınızı ölçüyor olsaydınız, bunu çok hassas bir şekilde yapmanız gerekecekti. En küçük birim inç veya santimetre olurdu ve küçük kesirsel parçaları da kullanırdınız. Fakat, satın almak için 8 ft uzunluğunda kaç adet pervaz çıtasının gerektiğini belirlemeniz gerekseydi ft muhtemelen yeterli olacaktı.

Etkinlik 19.24

Birimi Tahmin Et

Gazetelerde, trafik levhalarında ya da diğer günlük durumlarda karşılaşılabilecek her çeşit ölçümlerin örneklerini bulun. Bağlamı ve birimleri olmadan ölçüleri bildirin. Görev, hangi ölçü birimlerinin kullanıldığını tahmin etmektir. Öğrencilerin kendi seçeneklerini birbirleriyle tartışmalarını sağlayın.

Önemli Standart Birimler ve Aralarındaki İlişkileri

Geleneksel ve metrik sistemlerin her ikisi de günlük yaşamda nadiren kullanılan birçok birimleri barındırır. Eyalet veya yerel öğretim programınız öğrencilerinizin hangi birimleri bilmesi gerektiği konusunda size yardımcı olacak en iyi rehberdir. NCTM'in (2006) metrik sistem üzerine beyanı şöyle der: "Öğrencileri bilim ve diğer konularda çeşitli durumlarla başa çıkabilmeleri için donatmak ve onları küresel toplumdaki hayata hazırlamak için okullar, bir yandan öğrencilerin metrik ve geleneksel ölçme sistemlerindeki problem çözme becerilerini geliştirirken, diğer taraftan her iki sistemde de çalışabilecekleri zengin deneyimler kazandırmaları gerekir." İfade, dünyadaki hemen hemen bütün ülkelerin metrik sistemi kullandığı için çeşitli ülkelerin Uluslararası ticarette metrik birimlerin kullanılmasını zorunlu hâle getiren yasaları geçirdiğini açıklayarak devam eder. Eğer Birleşik Devletler öğrencileri küresel çalışma alanı için hazırlanacaksa, onların sık kullanılan metrik birimler hakkında bilgili ve rahat olmaları gerekir. 2004 NAEP sonuçları dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece yüzde 40'ının bir bisikletin ağırlığını verilen 1.5, 15, 150 ve 1500 kg seçenekleri arasından doğru bir şekilde belirleyebildiğini ortaya çıkarmıştır. Sekizinci sınıflar arasında sadece yüzde 37'si bir litre içinde kaç mililitre olduğunu bilmişlerdir. (Perie, Moran, & Lutkus, 2005). İlginç olarak, ulusal değerlendirmelerdeki performanslar ölçmenin zayıf bir alan olduğunu göstermesine rağmen Birleşik Devletler öğrencileri geleneksel birimlere göre metrik sistemleri daha iyi yapabilmektedir (Preston & Thompson, 2004).

Gerek metrik sistemde gerekse geleneksel sistemlerde birimler arasındaki ilişkilerde kurallar vardır. Böyle olunca da, öğrencilere bu ilişkilerin ne olduğu basitçe söylenmelidir ve öğretim deneyimleri onları güçlendirmek için düzenlenmelidir. Ne kadar sıvının bir litre yaptığını bilmek ya da 3 metreyi adımlayabilmek (birim aşinalığı) bir litrede kaç tane santimetre küp olduğunu bilmekten daha önemlidir şeklinde bir iddiada bulunulabilir. Bununla birlikte, ara sınıflarda temel kuralları bilmek sınavlar açısından daha önemli hâle gelir. Öğretim programınız sizin rehberiniz olmalıdır.

Geleneksel sistem, öğrencilerin birimleri dönüştürmelerinde rehberlik edecek çok az örüntü ya da kural barındırır. Diğer taraftan, metrik sistem 10'nun kuvvetleri çerçevesinde sistematik bir şekilde tasarlanmıştır. Ondalık virgülün rolünün anlaşılması birimlerin konumunu belirttiğinden metrik dönüşümlerin yapılması için önemli bir kavramdır (Bölüm 17, Şekil 17.6'ya bakınız). Öğrenciler ondalık gösterimin yapısını anlamaya başladığında, metrik sistem tüm yedi yerle birlikte geliştirilebilir ve geliştirilmelidir de: daha küçük birimler için üç ön ek (desi-santi-mili) ve daha büyük birimler için üç ön ek kullanılır (deka-hekto-,kilo-). "Santimetreyi metreye çevirmek için ondalık hanedeki virgülü iki basamak sola kaydırın" gibi mekanik kurallardan kaçının. Öğrencilerin kendileri, birim dönüştürmeleri için kavramsal, anlamlı yöntemler geliştirmedikçe keyfi seçilen kurallar yanlış kullanılmaya ve unutulmaya mahkûmdurlar.

Metrik ve geleneksel sistem arasında tam dönüşümler yapılmasından kaçınılmalıdır. Her iki ölçme sistemini de beraber kullanan bir ülkede yaşadığımız müddetçe "uygun" dönüşümler yararlıdır. Örneğin, bir litre bir galonun dörtte birinden bir yudum fazladır ve bir metre bir yard'dan biraz daha uzundur. Aynısı bilinen referanslar için de doğrudur. Yüz metre yaklaşık (Amerikan futbolundaki) bir futbol sahası ve gol bölgesi veya yaklaşık 110 yard kadardır.



Öğrencilerin anlamalarını ve standart birimlere olan aşinalıklarını değerlendirirken geleneksel dönüştürme problemlerine odaklanma gibi bir tehlike vardır. Aşağıdaki iki görevi düşünün:

1. 4 fit = _____ inç.
2. Bu ipin uzunluğunu önce fit ve sonra inç cinsinden tahmin edin. Tahmininize nasıl karar verdiniz?

Her iki görev de fit ve inç'leri ilişkilendirmektedir. Bununla birlikte, ikinci görev öğrencilerin birimlere olan aşinalıklarını da gerektirmektedir. Tahmin etme görevi ile öğrencilerin birinci tahmini ikinci tahmin için kullanıp kullanmadıklarını (fit-inç ilişkisini anlamak ve *kullanmak*) ya da aksine iki ayrı tahmin yaptıklarını gözlemleyebiliriz. Bu görev ayrıca tahminin nasıl yapıldığını görmemizi sağlar (bu bilgiye birinci görevde ulaşmak mümkün değildir). ◆



Ölçüleri Tahmin Etme

Ölçüm tahmini, ölçme araçlarını kullanmadan zihinsel ve görsel bilgileri ölçme veya karşılaştırma yapma işlemidir. Bu nerdeyse her gün kullanılan pratik bir beceridir. Kurabiye yapmak için yeterli şekerim var mı? Topu 15

metre uzağa atabilir misin? Bu valiz ağırlık limitinin üzerinde mi? Çit yaklaşık ne kadar uzunlukta?

Sınıf dışı değerinin yanında, ölçme etkinliklerindeki tahmin, öğrencilerin ölçülen niteliğe odaklanmalarına yardımcı olur, içsel motivasyonu arttırır ve standart birimlere olan aşinalığın gelişmesine yardımcı olur. Bu nedenle, ölçümü tahmin etme hem ölçmeyi anlamayı ilerletir hem de değerli bir hayat becerisini geliştirir.

Ölçme Tahminleri İçin Yöntemler

Tıpkı hesap tahminlerinde olduğu gibi ölçüleri tahmin etmek için de belirli yöntemler mevcuttur. Özel olarak öğretilebilen dört strateji bulunmaktadır:

1. *Önemli birimler için nirengi noktaları veya referanslar geliştirmek ve kullanmak.* Araştırmalar ölçme için zihinsel nirengi noktalarını ya da referans noktalarını kazanmış ve bunları sınıf etkinliklerinde kullanan öğrencilerin nirengi noktalarını kullanmayı öğrenmeyen öğrencilere göre daha iyi tahmin edebildiklerini göstermiştir (Joram, 2003). Referanslar öğrencilerce kolayca zihinde canlandırılabilmelidir. Bir örnek Şekil 19.17'de gösterilen bir çocuğun boy uzunluğu olabilir. Öğrenciler, tek tek birimler ve standart birimlerin katları için iyi birer başvuru kaynağı olmalıdırlar.

2. *Uygun olduğunda "bölümleme" kullanın.* Şekil 19.17 bir örnek göstermektedir. Bütün bir duvarın uzunluğunu tahmin etmektense duvar boyunca daha kısa bölümleri tahmin etmek daha kolay olabilir. Kitaplardan oluşan bir yığının ağırlığını bulmak "ortalama" bir kitabın ağırlığı tahmin edildiğinde daha kolay olur.

3. *Alt bölümleri kullanın.* Bu yöntem bölümlere ayırma yöntemine benzer bir yöntemdir. Bölümler tahminci tarafından nesneye uygulanır. Örneğin, bütün duvarın uzunluğunu tahmin etmek için elde faydalı bölümler yoksa zihinsel olarak duvar ikiye ve sonra dörde ve hatta sekiz bölüme tekrarlayan ikiye bölme yöntemiyle bölünerek üstesinden gelinebilir bir uzunluğa ulaşıncaya kadar bölümlere ayrılabilir. Uzunluk, hacim ve alan ölçümlerinin hepsi bu yöntem ile tahmin edilebilir.

4. *Zihinsel ya da fiziksel olarak bir birimi tekrarlayın.* Uzunluk, alan ve hacim için bazen görsel olarak bir birimin sınırlarını işaretlemek kolaydır. Elinizi kullanabilir ya da işaretler veya kıvrımlar yaparak süreci takip edebilirsiniz. Örneğin adımınızın yaklaşık $\frac{3}{4}$ metre geldiğini biliyorsanız bir uzunluk boyunca yürüyebilir ve tahmininizi elde etmek için sonra bunu çarparsınız. Daha kısa ölçüler için ise el ve parmak genişliği faydalıdır.

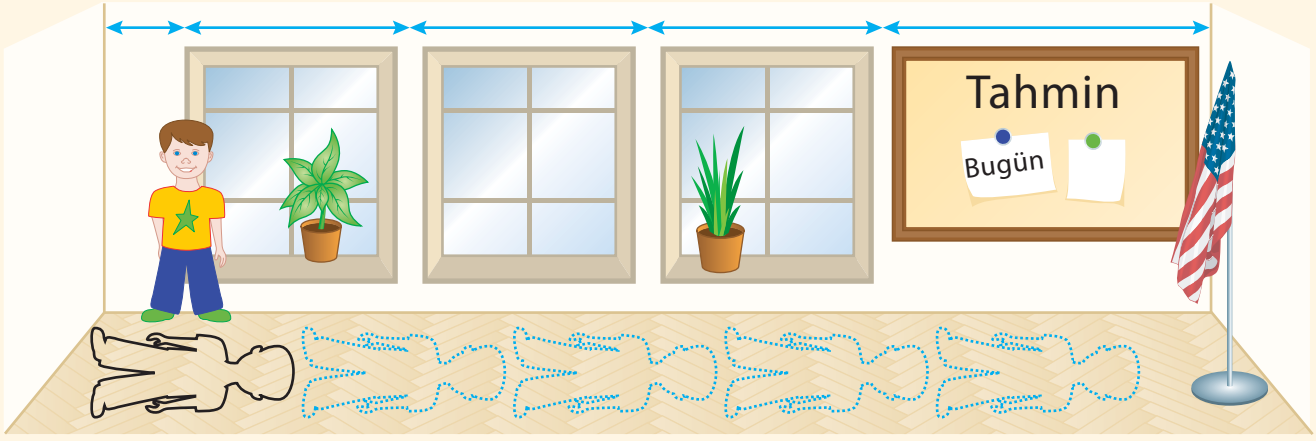
Tahmin Öğretimi için İpuçları

Burada listelenen bu dört yöntemin her biri doğrudan öğretilmeli ve öğrencilerle tartışılmalıdır. Kullanışlı ölçüler için önerilen nirengi noktaları geliştirilebilir ve sınıf çizelgesi üzerine yazılabilir. Evlerde bulunan öğeleri de dâhil edin. Fakat tahmin becerilerini geliştirmenin en iyi yolu öğrencilere birçok tahmin yaptırmaktır. Aşağıdaki ipuçlarını aklınızda tutun:

1. Belirli bir yaklaşımı kullandırarak öğrencilerin yöntemleri öğrenmelerine yardımcı olun. Daha sonraki etkinlikler öğrencilerin kendi isteklerine göre teknikler seçmelerine izin vermelidir.

2. Farklı öğrencilerin tahminlerini nasıl yaptıklarını tartışın. Bu ise öğrencilerin tahmin için tek bir doğru yolun olmadığını anlamalarına yardımcı olacak ve ayrıca kullanışlı farklı yaklaşımları hatırlatacaktır.

3. Belirli bir aralıktaki tahminleri kabul edin. Nispi olarak neyin iyi bir tahmin olduğunu düşünün. Uzunluk için yüzde 10 dahilinde yapılan bir tahmin oldukça iyidir. Yüzde 30 hatayla yapılan tahminler bile ağırlık ya da hacimler için kabul edilebilir. "Kazanan" tahmin şeklinde bir teşvik yapmayın.



Oda uzunluğunu tahmin edin.

Pencereler, ilan panosu ve boşluklar arasını "parçalar" olarak kullanın.
Zihinsel nirengi noktaları—"Boyum yaklaşık 5 fit uzunluğunda. Buraya 5 öğrenci uzandırabilirim, belki ilave olarak ta 3 fit olur. 28 fit diyelim.

Şekil 19.17 Kıstaslar ve bölümlere ayırma yöntemini kullanarak ölçüleri tahmin etmek.

5. Öğrencileri, gerçek ölçümü içerdiğine inandıkları bir dizi ölçümler vermeye cesaretlendirin. Bu sadece gerçek hayattaki pratik bir yaklaşım değil ayrıca tahminin yaklaşık olma doğasına odaklanmaya yardımcı olur.

6. Ölçme tahmini yapmayı süregelen bir etkinlik haline getirin. Günlük bir ölçme tahmini panoda ilan edilebilir. Öğrenciler tahminlerini kağıt üzerinde teslim edebilirler ve 5 dakikalık bir süre içinde onları tartışabilirler. Hatta, daha büyük öğrencilere, bireysel ya da takım halinde görevlendirerek, her hafta ölçümleri tahmin etme görevi verilebilir.

Ölçümü Tahmin Etme Etkinlikleri

Tahmin etkinliklerinin ayrıntılı olması gerekmez. Herhangi, ölçme etkinliği "önce tahmin et" bileşenine sahip olabilir. Tahmin sürecinin kendisine daha fazla vurgu için sadece tahmin edilebilir ölçüleri düşünün ve öğrencilerden tahmin etmelerini isteyin. İşte size iki öneri:

Etkinlik 19.25

Şipşak Tahmin

Bir kutu, bir balkabağı, bir kavanoz (veya hatta müdür) gibi tek bir nesne seçin. Her gün, tahmin için farklı bir nitelik ya da boyut seçin. Balkabağı için, örneğin, öğrenciler boyunu, çevresini, ağırlığını, hacmini ve yüzey alanını tahmin edebilirler.

Etkinlik 19.26

Scavenger Hunt Tahmini

Scavenger Hunt tahmin oyununu oynayın. Takımlara ölçümleri içeren bir liste verin ve onlardan bu listedeki ölçümlere yaklaşık şeyler bulmalarını isteyin. Ölçme araçlarını kullanmalarına izin vermeyin. Liste aşağıdaki öğeleri içerebilir:

3.5 m uzunluğunda bir şey.

Bazen 1 kg'dan fazla gelir ancak 2 kg'dan azdır.

Yaklaşık 200 ml kapasitesindeki bir kap.

45 derecelik veya 135 derecelik bir açı.

Öğrencilere, sonuçları doğruluk açısından değerlendirmeleri için önerilerde bulunmalarına izin verin.



Tahmin görevleri, öğrencilerin ölçme ve standart birimler hakkındaki bilgilerini değerlendirmek için iyi bir yoldur. Oda içinde ve dışındaki gerçek nesneleri ve uzaklıkları kullanın. Zaman ve uzun mesafeler, öğrencilere anlamlı gelen olay ve uzaklıklarla karşılaştırılarak tahmin edilmelidir. Öğrencilerin ölçme bilgisinin bütün bir resmini görebilmek için onlardan tahminlerini nasıl yaptıklarını açıklamalarını isteyin. Sadece sayısal bir tahmini sonucu istemek anlama eksikliğini maskeleyebilir ve uygun iyileştirme yapmanız için ihtiyacınız olan bilgiyi size vermez. ◆

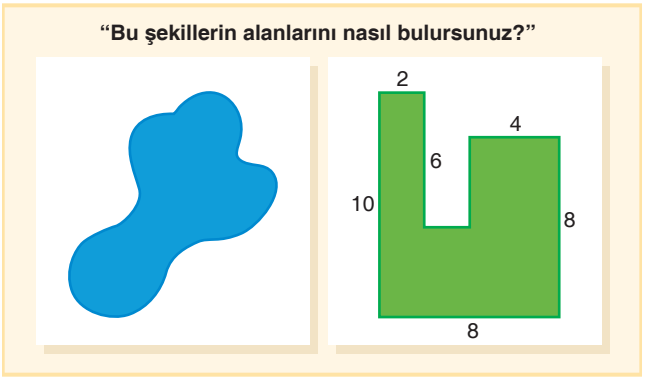
Alan ve Hacim İçin Formüller Geliştirme

Sizin eyalet ve yerel sınav programlarınız sınav sırasında formüllere ulaşmayı mümkün kılsa dahi formül geliştirmeyi es geçme gibi bir hataya düşmeyin. Öğrenciler formülleri geliştirdiği zaman kavramsal ilgili fikir ve ilişkiler hakkında kavramsal bilgiler kazanırlar ve matematik yapmanın gerçek süreçlerinden birine katılmış olurlar. Öğrencilerin alan ve çevreyi karıştırmaların ya da sınavda yanlış formülü seçmeleri daha az olasıdır. Bunlar arasındaki genel ilişkiler gelişmiştir. Örneğin, öğrenciler tüm alan formüllerinin nasıl bir fikirle ilişkili olduğunu görebilirler: taban uzunluğu çarpı yükseklik. Ve formüllerin nereden geldiğini anlayan öğrenciler, onları gizemli olarak görmezler, onları hatırlamak eğilimindedirler ve matematiğin mantıklı olduğu fikrini güçlendirirler. Bir kitaptan ezbere kullanılan formüller bu avantajların hiçbirini sunmazlar.

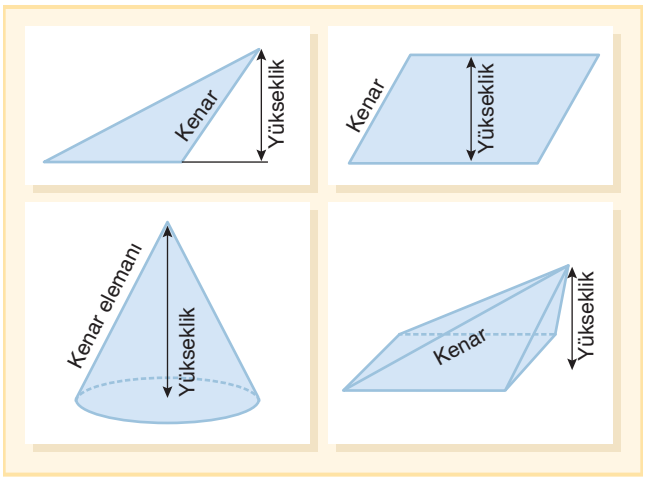
Öğrencilerin Kavram Yanılgıları

Ulusal Eğitim Gelişimini Değerlendirme (NAEP) sınavının sonuçları öğrencilerin formülleri çok iyi anlamadıklarını açıkça göstermiştir. Örneğin, 2007 NAEP sınavında, dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece yüzde 39'u 15 metre boyunda ve 12 metre genişliğinde olan bir halının alanını doğru olarak bulabilmiştir. Alan ve çevre formüllerinin karıştırılması ortak olan bir hatadır. Böyle sonuçlar çok az veya hiç kavramsal temelleri olmadan formüllere yapılan aşırı vurgu yüzünden kaynaklanmaktadır.

Şekil 19.18'de verilen görevler basit formüllerle çözülemez; bunları çözmek kavramların anlaşılmasını ve formül-



Şekil 19.18 Alanın niteliğini anlamak.



Şekil 19.19 Şekillerin yükseklikleri her zaman bir kenar veya bir yüzey boyunca ölçülmezler.

lerin nasıl çalıştığını anlamayı gerektirir. "Boy çarpı en" bir alan tanımı değildir.

Diğer bir yaygın hata, öğrencilerin formülleri kullanırken iki ve üç boyutlu şekillerde yükseklik ve tabanı kavramadaki başarısızlıktan ileri gelmektedir. Şekil 19.19'daki şekillerin her biri eğimli bir kenara sahip ve bir yükseklikleri vardır. Öğrenciler bu ikisini karıştırma eğilimindedirler. Şeklin herhangi bir kenarı veya düz yüzeyi şeklin bir tabanı olarak adlandırılabilir. Şeklin her tabanına karşılık gelen bir yüksekliği vardır. Şekil seçilen bir tabanı üzerinde bir oda içine sürüklenseydi, *yüksekliği*, devirmeden geçebileceği en kısa kapının yüksekliği olurdu (yani, tabana dik mesafedir). Öğrencilerin dikdörtgende yüksekliğin tam olarak bir kenar uzunluğuyla aynı olduğu boy-çarpı-en formülüne yönelik birçok erken deneyimleri vardır. Belki de kafa karışıklığının kaynağı budur. Yükseklikler içeren formüller tartışılmadan önce öğrenciler bir şeklin her tabanına ait yüksekliği belirleyebilmeleri gerekir.

Dikdörtgenlerin, Paralelkenarların, Üçgenlerin ve Yamukların Alanları

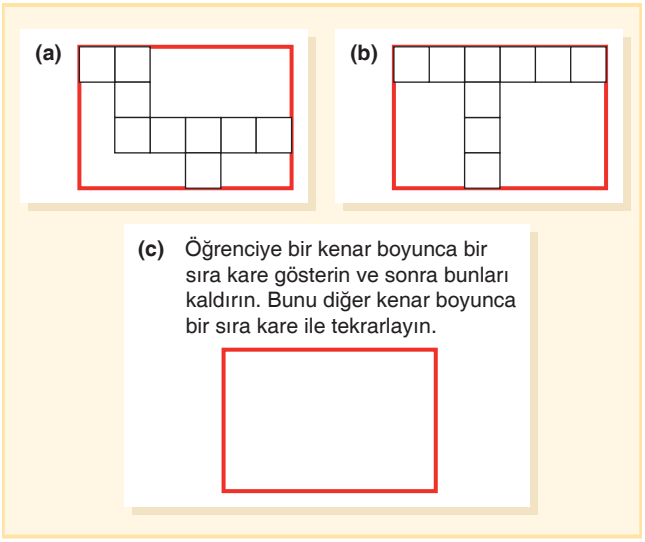
Bir dikdörtgenin alanına ait formül ilk olarak irdelenen formüllerden biridir ve genellikle $A = E \times B$ "alan eşittir boy çarpı en" şeklinde verilir. İleriye yönelik diğer alan formülleri düşünüldüğünde eşdeğer ancak daha birleştirici bir fikir $A = t \times y$, "alan eşittir taban çarpı yükseklik" olabilir. Taban çarpı yükseklik formülasyonu tüm paralelkenarlara genellenebilir (sadece dikdörtgenler için değil) ve üçgenlerle yamuklara yönelik alan formülleri geliştirmek için kullanışlıdır. Ayrıca, aynı yaklaşım üç boyutlulara da uygulanabilir (silindirlerin hacimlerinin taban alanı çarpı yükseklik şeklinde olduğu gibi). Taban çarpı yükseklik, daha sonra, geniş bir formül ailesini ilişkilendirmenize yardımcı olur, aksi takdirde her birinin bağımsız bir şekilde öğrenilmesi gerekecektir.

Dikdörtgenler. Araştırmalar, öğrenciler için dikdörtgenin içindeki karelerin sayımından bir formülün kavramsal gelişimine geçişin önemli bir sıçrama olduğunu öne sürmektedir. Battista (2003) öğrencilerin yaygın bir şekilde dikdörtgenlerin içini karelerle doldurup ve sonra bunları tek tek sayarak sonucu bulmaya çalıştıklarını bulmuştur.

İncelenmesi gereken önemli bir kavram ise çarpmanın diziler şeklinde ele alınan anlamıdır. Öğrencilere satır ve sütun şeklinde sıralanmış nesneleri veya kareleri gösterin ve neden çarpmanın toplam miktarı verdiğini tartışın. Biz ya tek bir satırı ya da bir sütunu sayarız ve sonra orada toplam kaç tane sütun veya satır olduğunu buluruz. Bu bir dikdörtgenin alanına uygulamak için ihtiyaç duydukları aynı kavramdır. Boy ve eni çarptığımız zaman "karelerle kareleri" çarpmıyoruz. Aksine bir kenarın *uzunluğu* o kenara kaç tane karenin sığacağını gösterir. Eğer bu kare kümesi bir birim olarak kabul edilirse, o zaman diğer kenarın *uzunluğu* (karelerin sayısı değil) bu *kare dizisinden* dikdörtgenin içine kaç tane sığacağını söyleyecektir.

Alan formüllerini keşfetmeye başlamak için iyi bir etkinlik, "Dikdörtgenlerin Karşılaştırılması-Birim Kareler" (s. 379) isimli Etkinlik 19.11'i yeniden incelemek olacaktır. Tüm kareleri çizip ve sayan öğrenciler, karelerden oluşmuş bir satırı, çoğaltılabilen tek bir satır olarak düşünmemektedirler. İlgili görevler, Battista'nın (2003) çalışmasına dayanarak Şekil 19.20'de gösterilmiştir.

Öğrencileriniz, karelerden oluşmuş bir satır (bir kenarın uzunluğuna göre belirlenir) ve dikdörtgenin içini dolduracak bu satırların adedi ile çarpımı (diğer kenarın uzunluğuna



Şekil 19.20 Alan bulmak için sırayla yapılabilecek üç farklı etkinlik. Öğrenciler, her bir durum için dikdörtgenleri dolduracak kare sayısını söyleyecekler.

Kaynak: Battista, M. T.'nin (2003) önerilerine dayanarak. "Understanding Students; Thinking about Area and Volume Measurement." In D. H. Clements (Ed.), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 122–142). Reston, VA: NCTM.

göre belirlenir) fikrine dayalı bir alan yaklaşımını formüle ettiği zaman, bu fikirleri güçlendirmenin zamanı gelmiştir. Öğrencilere bir kenarı ölçerek o kenar boyunca kaç satır kare sığacağını söyleme fikrini beğendiğinizi ifade edin. Onlardan bu kenarı, bazı insanlar boy veya en olarak adlandırsa da, dikdörtgenin tabanı olarak adlandırmalarını veya düşünmelerini isteyin. Daha sonra, diğer kenarı yükseklik olarak adlandırabilirsiniz. Fakat, hangi kenar taban olur? Öğrencilerin her iki kenarın da taban olabileceği sonucuna ulaştıklarından emin olun. Eğer $A = t \times y$ formülünü kullanırsanız, hangi kenarı taban alırsanız alın aynı alan bulunacaktır.

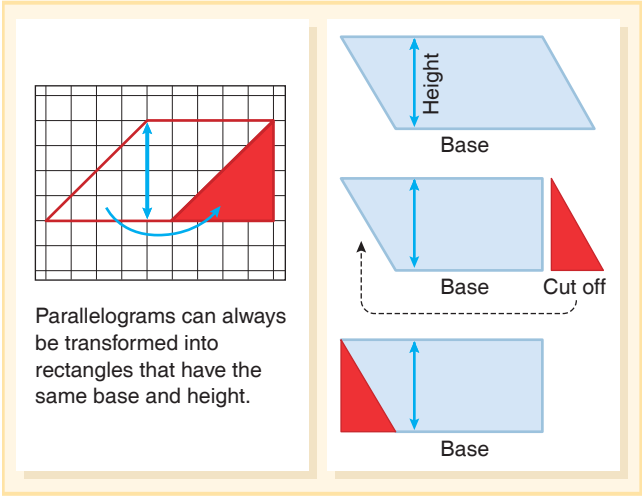
Dikdörtgenlerden Diğer Paralelkenarlara. Öğrenciler dikdörtgenler için taban çarpı yükseklik formülünü anladıklarında sonraki uğraştırıcı konu paralelkenarların alanlarının bulunmasıdır. Bir formül veya başka bir açıklama vermeyin. Aksine, yine kendi formüllerini bulmalarını isteyen aşağıdaki etkinliği deneyin.

Etkinlik 19.27

Bir Paralelkenarın Alanı

Öğrencilere kareli veya biraz daha zorlamak için, düz kâğıt üzerine bütün boyutları ile çizilmiş (tüm kenarlarının uzunlukları ve yüksekliği belli) iki veya üç paralelkenar verin. Öğrencilerin görevi, dikdörtgenlerin alanı hakkında öğrendiklerini bu paralelkenarların alanlarını bulmak için kullanmaktır. Öğrencilerin kareli kâğıt üzerine çizilmemiş dahi olsa tüm paralelkenarlar için uygulanabilecek bir yöntem bulmaları gerekmektedir.

Eğer öğrencilerin kafası karışırsa, onlara paralelkenarın dikdörtgenle benzerliklerini veya onun nasıl bir dikdörtgene dönüşebileceğini incelemelerini isteyin. Şekil 19.21'de gösterildiği gibi, bir paralelkenar her zaman bir dikdörtgene aynı tabana, aynı yüksekliğe ve aynı alana sahip olmak üzere dönüştürülebilir. Bu nedenle, bir paralelkenarın alan formülü bir dikdörtgeninki ile aynıdır: taban çarpı yükseklik.



Şekil 19.21 Bir paralelkenarı bir dikdörtgene dönüştürmek..

Paralelkenarlardan Üçgenlere. Bu arka plan ile bir üçgenin alanı oldukça basittir. Yine, bir sonraki etkinlikte olduğu gibi problem temelli bir yaklaşım kullanın.

Etkinlik 19.28

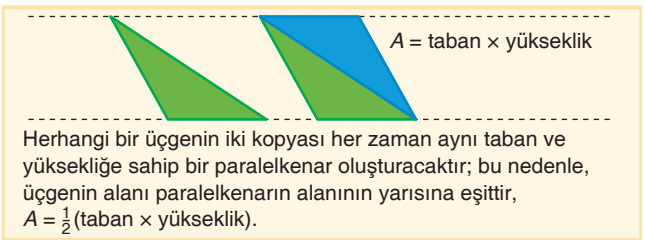
Bir Üçgenin Alanı

Öğrencilere kareli kağıt üzerine çizilmiş en az iki adet üçgen verin. Dik üçgenlerden kaçının, çünkü onlar kolay özel bir durumdur. Öğrenciler için zorluk, paralelkenarların alanları hakkında öğrendiklerini her bir üçgenin alanını bulmak için kullanmaları ve her üçgen için uygulanabilecek bir yöntem geliştirmektir. Öğrenciler yöntemlerinin, en azından bir tane daha çizecekleri üçgen için ve kendilerine verilen tüm üçgenler için geçerli olduğundan emin olmalılar.

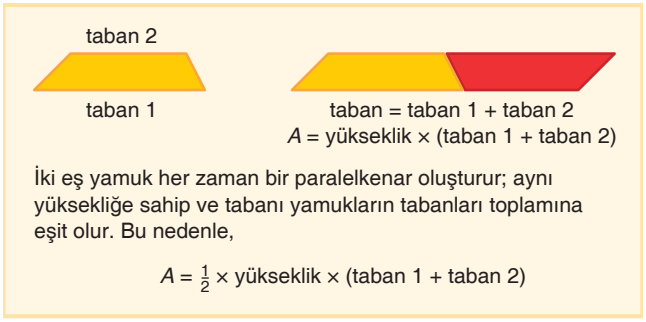
Öğrencilerin kafaları karıştığında önerebileceğiniz birkaç ipucu vardır. *Üçgeninle bağlantılı bir paralelkenar bulabilir misin?* Eğer bu yeterli değilse, onlara bir kağıt parçasını ikiye katlamalarını önerin, katlanmış kağıt üzerinde bir üçgen çizin ve iki aynı kopya olacak şekilde kesin. Öğrenciler, bu kopyaları kullanarak bir üçgenin bir paralelkenarla nasıl ilişkili olduğunu bulmalıdırlar.

Aşağıdaki Şekil 19.22'de gösterildiği gibi iki eş üçgen her zaman üçgenin taban ve yüksekliği ile aynı olan bir paralelkenar oluşturacak şekilde düzenlenebilir. Üçgenin alanı, bu nedenle, paralelkenarın alanının yarısına eşit olacaktır. Öğrencilerden olası üç durumu da (üçgenin her bir kenarını taban kabul eden tüm paralelkenarların incelendiği) incelemelerini isteyiniz. Hesaplanan alanlar her zaman aynı olacak mı?

Paralelkenarlardan Yamuklara. Paralelkenarlar ve üçgenler için formüller geliştirdikten sonra, öğrencileriniz yamuklarla uğraşmak isteyebilir. (oldukça zorlayıcı bir örnek için s. 36'daki Şekil 3.1'e bakınız). Orada yamuk formülüne ulaşmak için en az 10 farklı yöntem olup her biri paralel-



Şekil 19.22 İki eş üçgen her zaman bir paralelkenar oluşturur.



Şekil 19.23 İki eş yamuk her zaman bir paralelkenar oluşturur.

kenarların veya üçgenlerin alanları ile ilgilidir. Bir yöntem, üçgenler için kullanılan aynı genel yaklaşımı kullanır. Öğrencilere iki eş yamukla üçgenlerle yaptıkları gibi çalışmalarını önerin. Şekil 19. 23 bu yöntemin formülle nasıl ifade edildiğini göstermektedir. Bu formüller sadece birbirleriyle ilişkili değil ayrıca bunları geliştirmek için de benzer yöntemler kullanılmıştır.

Burada her biri yamuğun alanını bulmak için farklı bir yaklaşıma giden birkaç ipucu verelim.

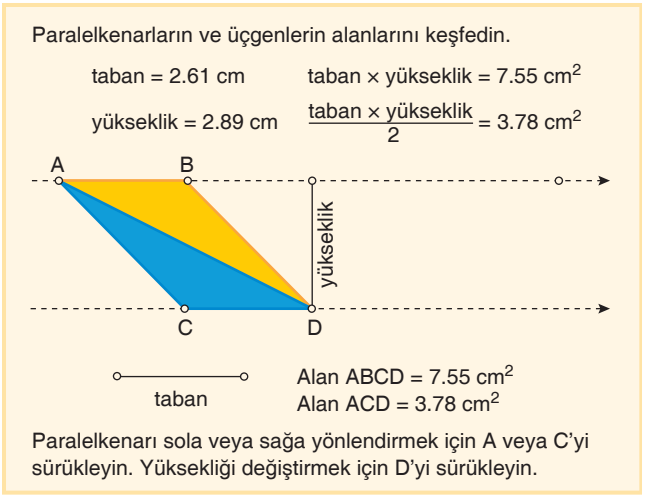
- Verilen yamuğun üç kenarını kullanarak bir paralelkenar oluşturun.
- Yamuğu çevreleyen üç kenarı kullanarak bir paralelkenar oluşturun.
- İki üçgen oluşturacak şekilde bir köşegen çizin.
- Paralel olmayan kenarların orta noktalarını bir çizgi ile birleştirin. Oluşan çizginin uzunluğu, paralel iki kenarın uzunluğunun ortalamasıdır.
- İki üçgen oluşacak şekilde yamuğun içine bir dikdörtgen çizin ve sonra o iki üçgeni bir araya getirin.

Durup Düşün!

Öğrencilerin karenin alanı için özel bir formül öğrenmeleri gerektiğini düşünüyor musunuz? Neden öyle düşünüyorsunuz veya neden öyle değil? Öğrencilerin kare ve dikdörtgenlerin çevreleri için formüle ihtiyaçları olduğunu düşünüyor musunuz?

Teknoloji Notları

Dikdörtgenlerin, paralelkenarların ve üçgenlerin alanları arasındaki ilişki, *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press), *Cabri Geometry* (Texas Instruments) veya *Wingeom* (ücretsiz online olarak bulunabilen bir program) gibi bir dinamik geometri programı kullanarak gösterilebilir. Şekil 19.24'te gösterildiği gibi, iki paralel doğru üzerine iki eş doğru parçası çiziniz. Ardından, doğru parçalarının uç noktalarını birleştirerek bir paralelkenar ve iki üçgen oluşturun. Paralel doğrular arasında ve bunlara dik doğru parçası yüksekliği belirtir. Her iki doğru parçasından her biri sola veya sağa sürüklenerek taban veya yükseklik



Şekil 19.24 Dinamik geometri programı aynı taban ve yüksekliğe ait şekillerin aynı alanı koruduklarını göstermektedir.

değişmeden paralelkenarın ve üçgenin "yönü değiştirilebilir". Tüm alan ölçüleri sabit kalır. ◆

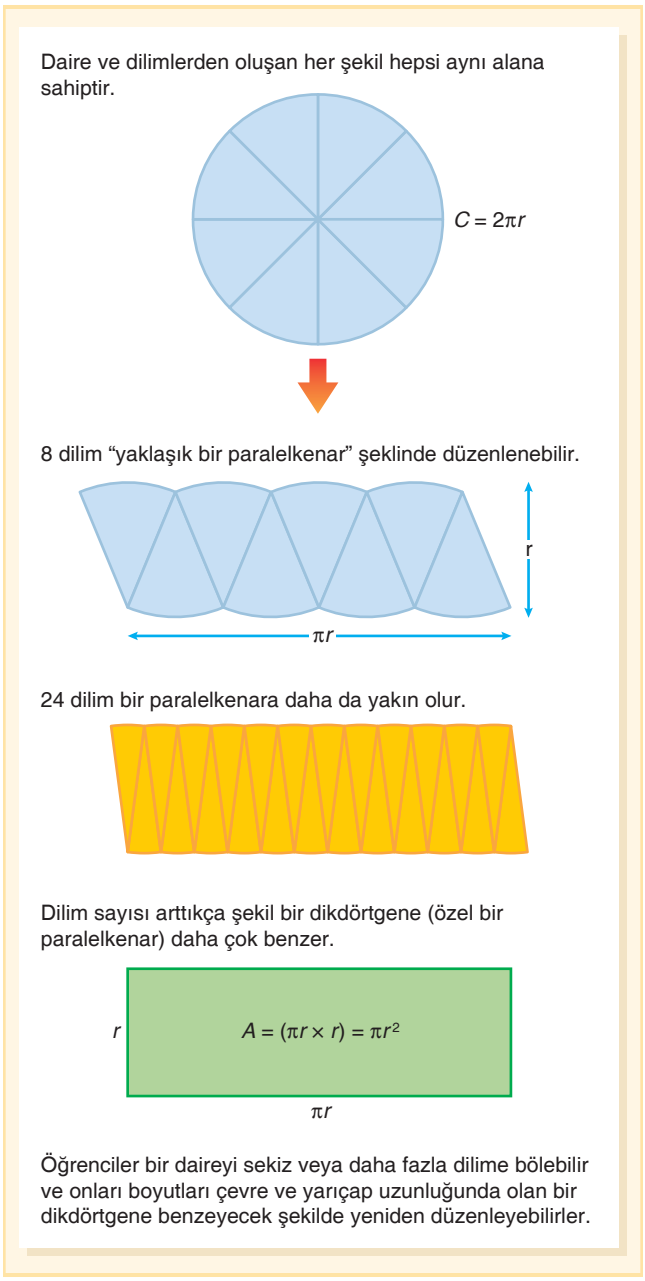
Dairelerin Çevresi ve Alanı

Bir daireyi *çevreleyen hat* (etrafındaki mesafe veya çevre) ve dairenin *çapının* uzunluğu (daire üzerindeki iki noktayı birleştiren ve merkezden geçen doğru) arasındaki ilişki öğrencilerin keşfedebilecekleri en ilginç şeylerden biridir. Her dairenin çevresi çapının uzunluğunun yaklaşık 3,14 katıdır. Kesin oran bir irrasyonel sayı olup 3,14'e yakındır ve Yunan harfi π ile gösterilir. Böylece, çevrenin (C) çapa (D) bölümü $\pi = C/D$ olur. Biraz farklı bir biçimde, $C = \pi D$ şeklinde de gösterilebilir. Çapın yarısı yarıçaptır (r), böylelikle aynı eşitlik $C = 2\pi r$ şeklinde yazılabilir. (Bölüm 20'deki Etkinlik 20.10, π kavramını ve öğrencilerin bu önemli oranı nasıl keşfedebileceklerini detaylı bir şekilde ele alacaktır.)

Şekil 19.25, alan formülü $A = \pi r^2$ için bir delil sunmaktadır. Bu, yaygın olarak ders kitaplarında bulunan bir oluşumdur.

Alan formülü geliştirmek için kullandığınız yaklaşıma bakılmaksızın öğrencilerin bunu kendilerinin bulmaları için zorlanmalıdır. Örneğin, öğrencilere 8 veya 12 daire diliminin nasıl bir araya getirilerek yaklaşık olarak bir paralelkenar oluşturduğunu gösterin. Onların görevi bunu daire için bir alan formülü geliştirilmesi yönünde bir ipucu olarak kullanmak olmalıdır. Öğrencilerin, dilimlerin düzeninin yaklaşık bir paralelkenarı oluşturduğu ve dilimler küçüldükçe düzenlemenin bir dikdörtgene dönüşeceğini anlamalarına yardımcı olmanız gerekebilir. Ancak alan için tam deliller öğrencilerinizden gelmelidir.

Yüzey Alanı. *Öğretim Programı Odak Noktaları'na* (NCTM, 2006) göre beşinci sınıfta öğrenciler prizma-



Şekil 19.25 Daire alan formülünün geliştirilmesi.

nın yüzey alanını keşfedecekler ve yedinci sınıfta ise silindirler incelenecektir. Konuyu öğrencilerin iki boyutlu şekillerin alanlarına yönelik sahip oldukları bilgileri üzerine inşa edin. Eğer onlar bir katı cismin her yüzünü iki boyutlu karşılığı olarak düşünürlerse, her yüzün alanını ve toplam alanı bulabilirler. Üç boyutlu şekillerin yüzey alanını öğretmenin en iyi yollarından bir tanesi kartlardan yapılmış kenarları küçük bant parçaları ile tutturulmuş dikdörtgenler prizması, küpler veya silindirler yapmaktır. Bu yolla öğrenciler şeklin bileşenlerini veya katı cismi yüzlerine ayırarak ve yüzey alanını bularak "açınımı" düşünebilirler.

Yaygın Olarak Bilinen Katı Cisimlerin Hacimleri

Hacim formülleri arasındaki ilişkiler alan için olanlara tamamen benzerdir. Okuduğunuz gibi, paralelkenarlar ile prizmalar arasındaki, paralelkenarla "sapmış" (eğik) prizmalar arasındaki ve üçgenlerle piramitler arasındaki benzerliklere dikkat edin. Sadece formüller ilişkili değil ayrıca formülleri geliştirme süreçleri de benzerdir.

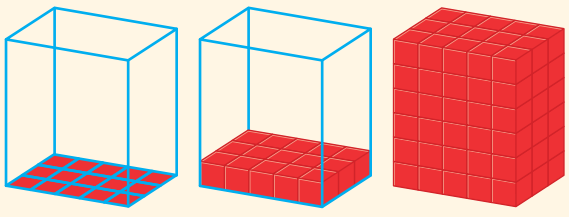
Silindirlerin Hacimler. Bir *silindir* iki eş paralel tabanı olan ve yanal yüzü tabanlar üzerindeki karşılıklı noktaları birleştiren paralel unsurlardan oluşan bir katı cisimdir. *Prizmaları* (tabanları çokgen olan), *dik prizmaları*, *dikdörtgen prizmaları* ve *küpleri* (Bkz. Bölüm 20) içeren birkaç özel silindir sınıfı vardır. İlginçtir ki, bütün bu katı cisimler aynı hacim formülüne sahip olup bu tek bir formül paralelkenarlar için olan alan formülünü andırmaktadır.

Etkinlik 19.29

Bir Kutunun Hacmi

Öğrencilere birkaç karton ayakkabı kutusu veya benzer karton kutular, aynı ölçülerde birkaç küp ve bir cetvel verin. Dikdörtgenlerle yapıldığı gibi, görev kutunun içerisine kaç adet küp sığacağını belirlemektir. Büyük olasılıkla, kutularınız doğal sayı değerlerine sahip boyutlara sahip olmayacaktır, bu yüzden öğrencilerinize küplerin kesirsel bölümlerini görmezden gelmelerini söyleyin. Her ne kadar, onlar bir hacim formülünü görmüş veya kullanmış olsalar da, bu görev için bir formüle bağlı olmayacaklardır. Aksine, öğrencileriniz küpleri kullanarak açıklayabilecekleri veya doğrulayabilecekleri bir yöntem bulmak zorundadır. Eğer bir ipucu gerekirse, kutunun tabanına kaç tane küp sığacağını bulmakla başlamalarını önerin.

Bu kutu keşfinden yapılan hacim formülü geliştirilmesi Şekil 19. 26'da gösterildiği gibi bir dikdörtgenin alan formülünün geliştirilmesine paraleldir. Taban *alanı* (dikdörtgenlerin taban uzunluğu yerine) tabana, bir birim oluşturan,

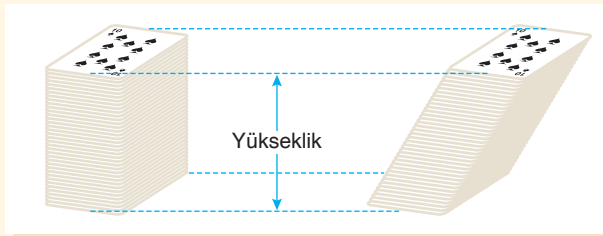


Tabanı 3 × 5. Taban alanı 15 karedir.

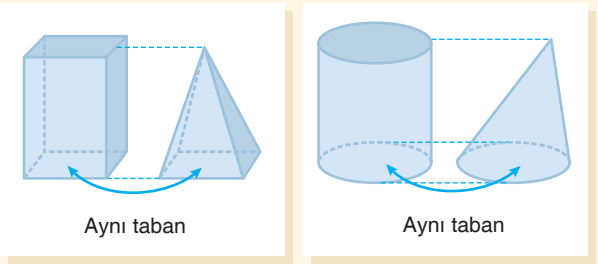
Taban 15 adet küp tutar.

15 küpten oluşan altı katman küp kutuyu doldurur. $V = 6 \times 15$ küptür.

Şekil 19.26 Bir dik prizmanın hacmi: Taban alanı × yükseklik.



Şekil 19.27 Aynı taban alanı ve yüksekliğe sahip iki prizma aynı hacme sahiptir.



Bir piramidin veya koninin hacmi aynı taban ve yüksekliğe sahip bir prizmanın veya silindirin hacminin üçte biridir.

Şekil 19.28 Piramitlerin hacimlerinin prizmaların hacimleri ile karşılaştırılması ve konilerin hacimlerinin silindirlerin hacimleri ile karşılaştırılması.

kaç tane *küp* sığabileceğini belirler (bir katman küp gibi). Kutunun *yüksekliği de* bu katmanlardan kaç tanesinin kutunun içine sığacağını belirler, tıpkı, dikdörtgenin yüksekliğinin kaç tane kare satırının dikdörtgeni doldurduğu belirlediği gibi.

Paralelkenarın dinamik geometri programı ile izah edildiği gibi "eğik" dikdörtgen gibi düşünülebileceğini hatırlayın (Bkz. Şekil 19.24). Öğrencilere üç veya dört iskambil kartı destesi (veya kitap ya da kâğıt yığını) gösterin. Yığınlar düz olduğunda dikdörtgensel bir katı cisim oluşturur. Hacim biraz önce tartışıldığı gibi $V = A \times h/Axy$ olur ki A bir oyun kartının alanına eşittir. Eğer yığın Şekil 19.27'de gösterildiği gibi bir tarafa eğik veya yatık ise bu yeni şeklin hacmi ne olacaktır? Öğrencilerin bu şeklin orijinal yığın gibi aynı hacme (ve aynı hacim formülüne) sahip olduğunu tartışabilmelidirler.

Bu etkinlikteki kartlar başka bir şekle sahip olsalardı ne olurdu? Dairesel olsaydı, hacim hâlâ taban alanı çarpı yükseklik olurdu; üçgensel olsaydı, hacim hâlâ aynı olurdu. Sonuç olarak *herhangi* bir silindirin hacmi *taban alanı* çarpı *yüksekliktir.*

Konilerin ve Piramitlerin Hacimleri. Paralelkenarlar ve üçgenler aynı taban uzunluğu ve yüksekliğe sahip olduklarında alanları arasında 2 ye 1 ilişkisinin olduğunu hatırlayın. İlginç bir biçimde, aynı taban ve yüksekliğe sahip silindirlerin ve konilerin hacimleri arasında 3'e 1 ilişkisi bulunmaktadır. Yani, *alan* iki boyutlu şekillerin *hacim* ise üç boyutlu şekillerin bir özelliğidir. Ayrıca, üçgenlerle paralelkenarlar arasındaki ilişki konilerle silindirler arasındaki ilişkiyle aynıdır.

Bu ilişkiyi incelemek için saydam Katı Cisimler gibi (Learning Resources veya diğer şirketlerden temin edilebilir) ilgili şekillerin plastik modellerini kullanın. Öğrencilerin, piramidin kaç tanesinin prizmanın içine sığacağını tahmin etmelerini isteyin. Daha sonra onların tahminlerini piramidin içerisine su veya pirinç doldurup prizmanın içine koyarak test etmelerini sağlayın. Öğrenciler tam üç piramidin aynı taban ve yüksekliğe sahip bir prizmayı dolduracağını keşfedeceklerdir (Bkz. Şekil 19.28). Bir koninin veya piramidin hacmi aynı taban ve yüksekliğe sahip bir silindirin hacminin tam olarak üçte biridir.

Aynı taban çarpı yükseklik fikrini kullanarak bir kürenin yüzey alanını (aynı yarıçapa sahip bir dairenin alanının 4 katı) ve hacmini ($\frac{1}{3}$ çarpı yüzey alanı çarpı yarıçap) keşfetmek mümkündür. Yani, bir kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$ ve hacmi $\frac{1}{3}(4\pi r^2)r$ veya $\frac{4}{3}\pi r^3$'tür.

Formüller Arasındaki Bağlantılar

Matematiksel fikirlerin ilişkili olduğu, tüm bu formüllerin taban çarpı yükseklik kavramı ile ilişkilendirilmesinden daha iyi gösterilemezdi.

Bu son bölümün başından sonuna kadar gösterildiği gibi formüllerin geliştirilmesindeki kavramsal yaklaşım, öğrencilerin bu araçları anlamlı ve çevremizdeki nesnelerin farklı özelliklerini ölçmek için etkili yollar olarak öğrenmelerine yardımcı olur. Formülleri anlamlı bir şekilde geliştirdikten sonra öğrencilerin artık onları birbirinden kopuk matematiksel bilgi parçaları olarak ezberlemelerine gerek yoktur, bunun yerine formülleri mevcut bilgilerinden çıkarabilirler. Matematik anlamlı gelmektedir!

Bölüm 19 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. Bir şeyi ölçmenin ne anlama geldiğini açıklayın. Açıklamanız uzunluk, alan, hacim ve zaman için de eşit derecede geçerli midir?
2. Ölçme için genel bir öğretim planı üç adımdan oluşur. Her adımda kullanılan etkinlik çeşidinin öğretim hedefini nasıl gerçekleştirdiğini açıklayın.
3. Öğretim etkinliklerinde standart birimlerin yerine standart olmayan birimlerin kullanılmasına yönelik dört sebep önerilmişti. Bunlardan hangisi sizin için en önemlisidir ve neden?
4. Dikdörtgenler, paralelkenarlar, üçgenler ve yamuklar için alan formülerini ilişkili bir şekilde geliştirin. Resimler çizin ve açıklamalarda bulunun.
5. Bir dairenin alanı, bir paralelkenarın alanı için kullanılan temel formülü kullanarak nasıl belirlenebilir, açıklayın (Dairesel dilimlerden oluşan bir setiniz varsa bunlar bir dairenin parçaları olarak kullanılabilir).

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Ölçme üzerine hazırlanmış bir ders kitabı uzunluk, alan, hacim ve kapasite konularını genellikle metrik ve geleneksel birimlerle beraber anlatacaktır. Herhangi bir düzey için ders kitabının öğretmen baskısını alın ve ölçme ile ilgili bölümlere bakın. Kitap ne kadar iyi bir şekilde metrik ölçü fikirlerini kapsamaktadır? Orada bulunan dersleri nasıl değiştirir veya genişletirsiniz?

Bölüm 19 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

How Big Is a Foot? *Myller, 1990*

The story in this concept book is very attractive to young children. The king measures his queen using his feet and orders a bed made that is 6 feet long and 3 feet wide. The chief carpenter's apprentice, who is very small, makes the bed according to his own feet, demonstrating the need for standard units.

Every Minute on Earth: Fun Facts That Happen Every 60 Seconds *Murrie & Murrie, 2007*

This is an amazing book that is not just about the concept of time. The authors provide fun facts about what can happen in 60 seconds: a snow avalanche travels 4.2 miles (6.8 kilometers); the adult heart pumps 3.3 liters (3.5 quarts) of blood; movie film travels 90 feet (27.4 meters) through a projector; a garden snail moves 0.31 inches (7.8 millimeters); people in the United States throw away 18,315 pounds (8325 kilograms) of food; and consumers spend $954.00 on chewing gum. Students can use the facts provided or identify others as they think and discuss these relationships.

Inchworm and a Half *Pinczes, 2001*

In this wonderfully illustrated book, an inchworm happily goes about measuring various garden vegetables. One day a measurement does not result in a whole number, and the worm gets very upset. Fortunately, a smaller worm drops onto the vegetable and measures a half unit. Eventually, other fraction-measuring worms appear. (Be wary of the $\frac{1}{3}$ worm as $\frac{1}{3}$ is not a common measurement unit.) The story provides a great connection between fractions and measurement concepts, especially for the introduction of fractional units in measurement. Moyer and Mailley (2004) describe a nice series of activities inspired by the book.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Austin, R., Thompson, D., & Beckmann, C. (2005). Exploring measurement concepts through literature: Natural links across disciplines. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(5), 218–224.
This article includes a rich collection of almost 30 children's books that emphasize overall systems of measurement, length, weight, capacity, speed, area, perimeter, and volume. Three books are described in detail as the authors share how to link measurement to science, history, geography, and economics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2004). Measurement [Focus Issue]. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*.
This focus issue of NCTM's middle school journal is full of great information for teachers at that level. Of particular note are several articles that involve scale drawings or other aspects of proportional reasoning, which is a great way to integrate measurement into the curriculum.

Pumala, V. A., & Klabunde, D. A. (2005). Learning measurement through practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(9), 452–460.
A mathematics teacher and a science teacher collaborated on a series of six activities to help their students learn about measurement.

Included in the article are descriptions of the activities and detailed rubrics, along with samples of student work.

Whitin, D. (2008). Learning our way to one million. *Teaching Children Mathematics, 14*(8), 448–453.
Through an exploration of the topic of one million, Whitin suggests ways for children in grades 2–5 to explore several mathematics topics, including length, area, and money. All investigations emphasize the need for active problem solving in real-world contexts that reflect students' interests.

Kitaplar

Clements, D. H. (Ed.). (2003). *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
This book brings both a practical and a research perspective on measurement that expands and provides additional details concerning the ideas in this chapter. Discussions include beginning measurement in the pre-K–2 classroom, assessment strategies, and the importance of benchmarks in estimation.

Önerilen Okuma Parçaları

Alan Aracı
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=108
There are three separate applets that explore how changes in the base and height of these shapes affect the area.

Saat Yönü
www.shodor.org/interactivate/activities/clockwise
A clock face is shown and the user enters the digital time. Four difficulty levels.

Küpler
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=6
An excellent interactive applet that illustrates the volume of a rectangular prism (box). Units of single cubes, rows of cubes, or layers of cubes can be used to fill a prism.

Geoboard
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_279_g_4_t_3.html
This electronic geoboard measures the area and perimeter of any shape made. What is nice is that the measures are not shown until the user clicks the Measure button. Students can be challenged to make shapes with specified areas and/or perimeters.

Ne kadar Yüksek
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_275_g_3_t_4.html
Two cylinders are shown along with the area of the base shown as a grid of squares. One cylinder is filled to a specified height. The task is to determine the height of this same liquid when it is poured into the second container.

Simge Aracı
www.shodor.org/interactivate/activities/imagetool/index.html
The user can measure angles, distances, and areas in several different images (choices include maps, aerial photos, and others). A scale feature allows the user to set the scale used for measuring distances and areas. Unique!

Para
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_325_g_2_t_4.html
This site gives students an opportunity to make a dollar, find an exact amount, or fill in how much money is shown.

Çevre Kaşifi
www.shodor.org/interactivate/activities/PerimeterExplorer
The user sets a fixed number of square units and the applet randomly creates shapes on a grid with this area. The object is to determine the perimeter. There is also an *Area Explorer* (fixes the perimeter) and a *Shape Explorer*, which asks the user for both the area and perimeter of the randomly produced shapes.

Saat Kaç Olacak?
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_318_g_2_t_4.html
Elapsed-time problems are presented in word format. Two clocks are shown, one with the start time and the other to be set. Some problems are digital, others analog.

Bölüm 20

Geometrik Düşünme ve Geometrik Kavramlar

Geometri, hemen hemen her eyalet ve bölgenin öğretim programlarında yer alan bir öğrenme alanıdır. Bunun nedeni, 1989'ların başlarında ortaya çıkan NCTM standartlarının etkisinin büyük olması ve Küresel Konumlama Sistemlerinden (GPS) bilgisayar animasyonuna kadar hemen her şeyde geometrinin artan kullanımıdır. Öğrencilerin uzamsal kavramlarla ilgili nasıl akıl yürüttüklerini anlamamıza yardımcı olan kuramsal bir bakış açısına artan ilgi ise bir diğer önemli etkidir.

Ana Fikirler

1. Şekilleri birbirine benzer veya birbirinden farklı kılan şeyin ne olduğu geometrik özellikler yardımıyla belirlenebilir. Örneğin, şekiller, birbirine paralel, dik veya ne paralel ne de dik kenarlara sahip olabilirler; doğru simetrisine, dönme simetrisine veya ne doğru simetrisine ne de dönme simetrisine sahip olabilir ve birbirlerine benzer, eş veya ne benzer ne de eş olabilirler..
2. Şekiller, bir uzayda veya düzlemde hareket ettirilebilirler. Bu değişiklikler öteleme (kaydırma), yansıma (çevirme, tersyüz etme) ve dönme (döndürme) hareketleriyle açıklanırlar.
3. Şekiller, bir düzlem ya da uzaydaki konumları cinsinden tarif edilirler. Şekillerin yerlerini kesin olarak belirlemek için koordinat sistemleri kullanılabilir. Bir şekle koordinatları açısından bakmaya gelince bu da, şekillerin belli özelliklerini, pozisyonundaki değişiklikleri (dönüşümler) ve nasıl göründüklerini ve büyüklüklerini (görselleştirme) anlama olanakları sunar.
4. Şekiller farklı açılardan incelenebilir. Şekilleri farklı bakış açılarıyla algılama becerisi, iki ve üç boyutlu şekiller arasındaki ilişkileri anlamamıza ve zihinsel olarak şekillerin pozisyon ve büyüklüğünü değiştirmemize yardımcı olur.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Geometrinin zengin bir bakış açısıyla anlaşılmasının müfredatın diğer alanları için aşikar ve önemli sonuçları olacaktır. Mümkün olan her durumda bu ilişkilerin sağladığı avantajlardan yararlanmaya çalışınız.

- **Cebir** (Bölüm 14): Koordinatları kullanarak grafik çizme, eğim kavramına ve dolayısıyla diklik ve paralelliğe analitik olarak bakma olanağı sağlar. Şekillerin dönüşümleri (kaydırma, çevirme ve döndürmeler), dijital manipülasyonlarına izin verilerek koordinatlar yardımıyla tarif edilebilir.
- **Orantısal Akıl Yürütme** (Bölüm 18): Benzer geometrik nesneler, orantısal boyutlara sahiptirler ve orantısallığın görsel temsillerini görmemizi sağlarlar.
- **Ölçme** (Bölüm 19): Ölçme, alan ve hacim formüllerini ve alan/çevre ve yüzey alanı/hacim ilişkilerini geliştirecek şekilde düzenlenmiştir. Koordinat geometrisi, uzunluk, alan ve hacimleri belirlemenin yeni yollarını sunmaktadır. Pisagor bağıntısı, cebirsel, geometrik ve metrik ilişkilerin tamamı birlikte düşünülerek oluşturulur.
- **Tamsayılar** (Bölüm 23): Hem pozitif hem de negatif sayılar, düzlem ve uzayda pozisyonu tarif etmede kullanılır.

Öğrenciler İçin Geometrideki Hedefler

Geometri hedeflerinizi ilişkili iki temel çerçevede düşünmeniz faydalı olacaktır: (1) Uzamsal his ile geometrik akıl yürütme ve (2) eyaletiniz veya bölgenizin hedefleri arasında yer alan özel geometrik içerik. İlki öğrencilerinizin şekil ve uzayla ilgili düşünme tarzı ve akıl yürütme yoluyla ilişkili olmak zorundadır. Geometrik düşüncenin gelişimini düzenlemede bu çerçeveye rehberlik edecek araştırmaya dayalı oldukça iyi teorik temel bulunmaktadır. İkinci çerçeve, geleneksel anlamda simetrinin, üçgenlerin, paralel doğru vb. ne olduğunu bilmeyi gerektiren içerikle ilgilidir. NCTM'nin *Okul Matematiği için İlkeler ve Standartlar ve Müfredat Odak Noktaları* belgeleri, sınıflara yayılmış içerik hedeflerini betimlemede yardımcı olmaktadır. Akıl yürütme ve içerik gibi geometrinin iki yönünü anlamamız gerekir ki öğrencilerimizin gelişmesine en iyi şekilde yardımcı olabilelim.

Uzamsal His ve Geometrik Akıl Yürütme

Uzamsal his, şekillerin kendisine ve birbirleriyle olan ilişkilerine yönelik bir sezgi olarak tanımlanabilir. Uzamsal his nesneleri ve uzamsal ilişkileri zihinsel olarak (şeylerle ilgili zihinde manipülasyonlar yaparak) görselleştirmeyi içerir. Nesnelerin geometrik tanımlarıyla pozisyonları arasındaki uyumu içerir. İyi gelişmiş uzamsal hisse sahip insanlar, sanatta, doğada ve mimarideki geometrik yapıları takdir ederler. Geometri ile ilişkili sahip oldukları görüşlerini kullanarak kendi dünyalarını açıklayıp analiz edebilirler.

İnsanların bir kısmı şekillerle aralarının iyi olduğunu ya da uzamsal hislerinin zayıf olduğunu söylerler. Tipik bir inanç ya uzamsal hisle doğarsınız ya da doğmazsınız şeklindeki inançtır. Basit olarak söylemek gerekirse bu inanç doğru değildir. Sürekli olarak zamana yayılacak biçimde şekiller ve uzamsal ilişkilerle ilgili zengin deneyimler sunulduğunda, bu deneyimlerin uzamsal ilişkiyi geliştirebildiğini ve geliştirdiğini artık biliyoruz. 1990 ve 2000 yılları arasında NAEP verisi, 8. sınıflardaki öğrencilerin geometrik akıl yürütmelerinde kararlı ve sürekli gelişimin olduğunu ortaya koymaktadır (Sowder & Wearne, 2006). Öğrenciler birden bire sadece zekileşmemiştir. Bundan ziyade tüm sınıflarda geometri üzerine artan bir vurgu olduğu görülmektedir. Eğer Amerikalı çocuklar, Avrupalı ve Asyalı emsalleriyle aynı seviyeye yükseleceklerse hâlâ daha yapılması gereken çok şey vardır.

Durup Düşün!

Bir bireyin uzamsal his alanındaki bireysel yeterliliklerine yönelik inançlarınız hakkında birazca derinlemesine düşününüz. Bazılarının uzamsal hislerinin diğerlerinden daha iyi olmasının nedenleri sizce ne olabilir?

NCTM Standartları

Standartlar, tüm öğrencilerin geometriyle ilişkili becerilerinin ve anlayışlarının gelişebileceği şeklindeki görüşü desteklemektedir. "Tüm sınıflarda geometriyle ilgili (informelden daha formele doğru gelişen) kavrayışı oluşturma görüşü, kuramcı ve araştırmacıların düşünceleriyle uyumludur" (s. 41). ◆

Geometrik İçerik

Amerika Birleşik Devletleri müfredatı, uzunca bir süre terminolojinin öğrenilmesini vurgulamıştır. Ama aynı zamanda da geometriye yönelik artan ilgi, öğrenciler için geniş bir alana yayılmış fevkalade görevler üretmiştir. NCTM'nin içerik standartlarının her birinde olduğu gibi geometri standardı da tüm sınıf düzeylerine uygulanabilecek çok sayıda hedefler içermektedir. Geometrideki dört içerik hedefi aşağıdaki dört başlık altında özetlenebilir.

- *Şekiller ve Özellikleri*, iki veya üç boyutlu şekillerin özellikleri üzerine inşâ edilebilecek ilişkiler kadar şekillerin bizatihi kendi özellikleriyle ilgili çalışmaları da içermektedir.
- *Dönüşümler*; öteleme, yansıma ve dönme (kaydırma, çevirme ve döndürme) dönüşümleriyle simetriler üzerinde yapılan çalışmaları ve benzerlik kavramını içermektedir.
- *Konum* ile esas olarak, koordinat geometrisi ya da uzaydaki veya düzlemdeki nesnelerin yerlerini belirlemenin farklı yolları kastedilmektedir
- *Görselleştirme*, çevredeki şekilleri tanımayı, iki ve üç boyutlu nesneler arasındaki ilişkileri geliştirmeyi ve nesnelerin farklı perspektiflerini çizebilme ve tanıyabilme becerisini içermektedir.

Sonunda, bu içerik hedeflerinden dolayı, hem öğretmenlerin hem de müfredat geliştiricilerin yıllara göre geometrik gelişimi görebilecekleri ve sınıflar arasında köprü kurabilecekleri belli bir içerik çerçevesi oluşmuştur. Bu müfredat alanlarına daha detaylı bakabilmek için, kitaptaki Ek A'ya bakıp NCTM'nin sınıfların her birisi için beklentileri ve hedeflerini inceleyiniz. Size yardımcı olmak için, bölümdeki etkinlikler bu dört başlığa göre gruplandırılmıştır.

Geometrik Düşünmenin Gelişimi

İnsanların tamamı, geometrideki görüşler hakkında aynı tarzda düşünmemelerine rağmen, geometri bağlamlarında düşünebilme ve akıl yürütme becerimizi geliştirebilme kabiliyetine sahibiz. Hollandalı iki eğitimcinin (Pierre van Hiele ve Dina van Hiele Geldof-karı koca) araştırması, geometrik düşüncedeki farklılıklar ve bu farklılıkların neden böyle olduğuna yönelik bir içgörü sağlamıştır.

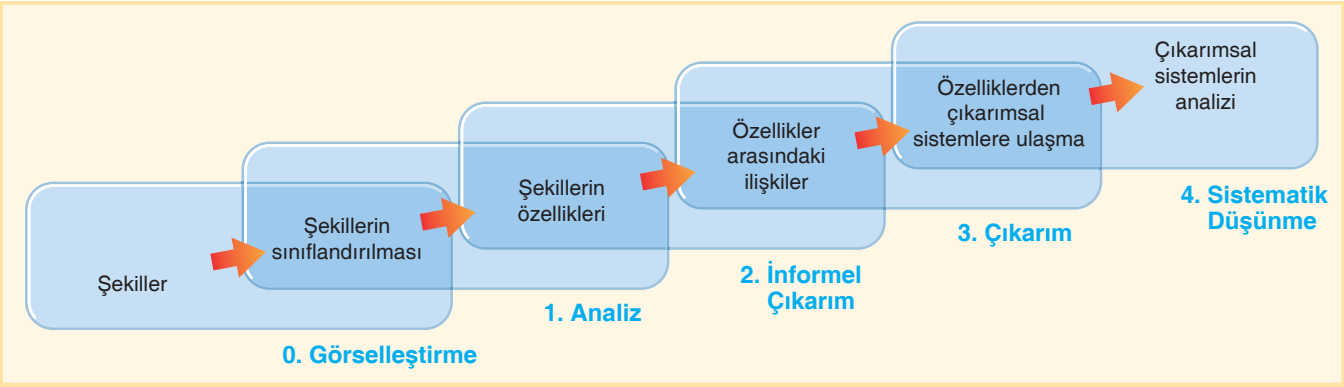
van Hiele'lerin çalışması 1959 yılında başlamış ve eski Sovyetler Birliği'nde hemen dikkatleri çekmiştir. Ama yaklaşık 20 yıl boyunca Amerika Birleşik Devletleri'nde fazlaca fark edilmemiştir (Hoffer & Hoffer, 1992). Fakat günümüzde, van Hiele teorisi Amerikan geometri müfredatında çok büyük bir etkiye sahip olmuştur.

van Hiele Geometrik Düşünce Düzeyleri

Bu modelin en baskın özelliği, uzamsal fikirleri kavrama yollarını hiyerarşik yapıdaki beş düzeyde ele almasıdır. Beş düzeyin her biri, geometri bağlamlarında kullanılan düşünme süreçlerini açıklamaktadır (Bkz. Sekil 20.1). Düzeyler, sahip olmamız gereken bilginin ne kadar olmasından ziyade, üzerinde düşünebileceğimiz farklı geometrik fikir çeşitlerinin ne olduğunu ve nasıl düşündüğümüzü tanımlamaktadır. Bir düzeyle takip eden düzey arasındaki belirgin fark, düşünülen şeyler/nesnelerdir (geometrik olarak ne düşünebildiğimizdir).

Düzey 0: Görselleştirme

Düzey 0'da üzerinde düşünülen şeyler/nesneler, şekiller ve şekillerin "neye benzediği"dir.



Şekil 20.1 van Hiele Geometrik Düşünce Kuramı

Düzey 0'daki öğrenciler, şekillerin genel görsel özelliklerine dayalı olarak onları tanır ve adlandırırlar. Örneğin, Düzey 0'daki bir öğrenci kareyi "kareye benzediği için" kare olarak tanımlar. Bu düzeyde görünüm belirleyici olduğundan, görünümler bir şeklin sahip olduğu özellikleri görmemizi engeller. Örneğin, bir karenin tüm kenarları yatay olarak 45 derece döndürüldüğünde artık o şekil bir kare değil bir eşkenar dörtgendir. Bu düzeydeki öğrenciler şekilleri görünümlerine bakıp birbirlerinden ayırarak sınıflandıracaklardır: "Şu şekilleri, hepsi noktalı olduğu için bir araya getirdim" (veya "Şişman" ya da "Bir eve benziyor", vb.). Öğrenciler, şekillerin görünümlerine yoğunlaşarak birbirlerine benzeyip benzemediklerini görebilirler. Bunun bir sonucu olarak bu düzeydeki öğrenciler, şekilleri sınıflandırabilir ve bu sınıflandırmayı anlamaya başlayabilirler.

Düzey 0'daki düşüncenin sonuçları/ürünleri, sınıflar ve "benzer" görünen şekil gruplarıdır.

Düzey 0'da vurgu, öğrencilerin gözleyebileceği, hissedebileceği, oluşturabileceği, birbirinden ayırabileceği veya bir şekilde kendisiyle çalışabileceği geometrik şekiller üzerinedir. Genel amaç, şekillerin benzer ve farklı olup olmadığını incelemek ve bu fikirleri kullanarak (hem fiziksel hem de zihinsel) şekil sınıfları oluşturabilmektir. Bu şekil sınıflarından bazıları dikdörtgenler, üçgenler, prizmalar, silindirler gibi isimler alır. Paralelkenar, simetri, dik açılar vb. şekillerin özellikleri bu düzeyde, gözleme dayalı tarzda ve informel bir yaklaşımla ele alınır.

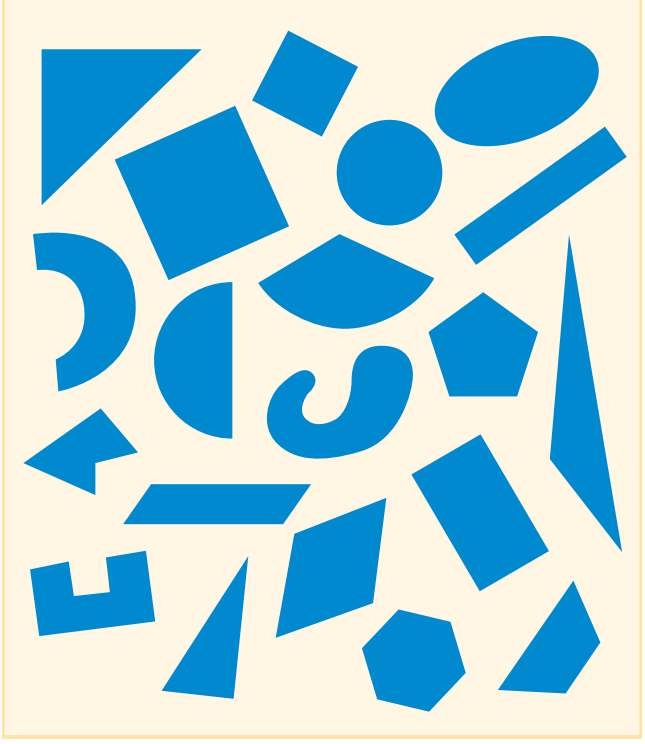
van Hiele kuramı herhangi bir geometri konusunu öğrenen her yaştaki öğrenciye uygulanabilmesine rağmen teoriyi, şekiller ve özellikler kategorisine uygulamak daha kolay gözükmektedir. Aşağıdaki etkinlik, Düzey 0'a uygun etkinliği temsil eden güzel bir örnektir.

Etkinlik 20.1

Şekil Gruplandırmaları

Öğrencilerinizden, dört kişilik gruplar oluşturarak Şekil 20.2'deki şekillere benzer 2 boyutlu şekiller üzerinde çalışmalarını isteyiniz. Aşağıdaki ilgili etkinlikleri sırasıyla yapınız:

- **Her çocuk bir şekil seçecektir. Sırayla, öğrenciler şekilleriyle ilgili ilgi çekici gördükleri bir ya da iki şeyi söyleyecekler. Doğru ya da yanlış cevap diye bir şey olmayacaktır.**
- **Çocukların her biri, rastgele iki şekil seçip bu iki şekille ilgili benzer olan bir şey ve farklı olan bir şey bulmaya çalışacaktır.**
- **Belli bir grup rastgele bir şekil seçip çalışma alanının ortasına yerleştirecektir. Onların görevi, aynı kurala uyan hedef şekle benzer olan diğer şekiller bulmaktır. Örneğin, "Bu şekil, bir eğri kenara ve bir düz kenara sahip olduğundan hedef şekle benzemektedir". Daha**



Şekil 20.2 Gruplandırmak için kullanılabilecek şekiller. Daha fazla sayıda şekil için Çalışma Yaprak Seti 41-47'ye bakınız.

sonra gruba dâhil edilen tüm diğer şekiller bu özelliklere sahip olmalıdır. Hedef şekil aynı olacak ama farklı bir kural kullanarak şekilleri ikinci kez gruplandırmalarını isteyiniz.

- **Bir "gizli gruplama" yapınız. Siz (ya da öğrencilerinizden birisi) bu gizli kurala uyan yaklaşık beş şekilden oluşan bir grup oluşturun. Grubunuza ait olan diğer şekilleri olduğu yerde bırakınız. Diğer öğrenciler, bu kümeye ait olan diğer parçaları bulmaya ve/ya gizli kuralı tahmin etmeye çalışırlar.**

Öğrenciler şekilleri incelerken sınıf düzeyine bağlı olarak, çok çeşitli fikirleri edinecektirler. Bu fikirlerin çoğu için bunlar, tipik geometri kavramlarından ziyade "eğri" veya "bir rokete benziyor" şeklinde olacaktır. Fakat öğrenciler daha karmaşık özellikleri fark etmeye başlayabilir ve öğretmenler de öğrenciler, şekillerin özelliklerini açıklarken bunların uygun isimlerini belirtme fırsatını yakalarlar. Örneğin, öğrenciler bazı şekillerin "bir kare gibi" köşelerinin olduğunu (dik açılar) veya bazı şekiller için "bu şekiller her iki tarafta da aynıdır" (doğru simetrisi) gibi özellikleri fark edebilir.

Bu etkinliği açıkça Düzey 0 etkinliği yapan şey, geleneksel geometriyle ilgili terimlerin veya özelliklerin olup olmaması değildir. Aksine, öğrenciler önlerinde gördükleri şekillerle işlemler yapmaktadırlar. Ayrıca, Düzey 0'daki öğrenciler için şekiller, yeniden düzenlendiklerinde veya döndürüldüklerinde farklı özelliklere sahip olabilirler veya hatta "değişebilirler". Bu etkinliğin hedefi, öğrencilerin şekillerdeki benzerlik ve farklılıkları görmeye başlamalarını sağlamaktır. Öğrenciler şekillerin gruplarını oluşturarak, orada bulunmayan şekillerin de bu sınıflara ait olabileceğini hayal etmeye başlayabilirler.

Düzey 1: Analiz

Düzey 1'de üzerinde düşünülen nesneler, şekillerin bizzat kendisi değil şekil sınıflarıdır.

Analiz düzeyindeki öğrenciler, sıralarının üzerindeki tek bir şekilden ziyade bir sınıfa ait olan tüm şekilleri düşünebilmektedirler. *Belli bir* dikdörtgen hakkında konuşma yerine, *tüm* dikdörtgenler hakkında konuşmak mümkündür. Şekillerin belli sınıfı üzerine yoğunlaşarak öğrenciler, bir dikdörtgeni dikdörtgen yapan şeyin (dört kenarlı, karşılıklı kenarları paralel, karşılıklı kenarları aynı uzunlukta, dört dik açılı, eş köşegenlere sahip, vb.) ne olduğunu düşünebilmektedirler. Şekille ilişkili olmayan özellikler (örneğin, büyüklük ve yönelim) arka plana itilir ve öğrenciler özelliklerine bağlı olarak şekilleri gruplandırmayı anlamaya başlarlar. Eğer şekil küp gibi belli bir sınıfa ait ise, bu sınıftaki özelliklere sahip olmalıdır. "Bütün küpler birbirine eş altı yüze sahiptir ve bu yüzlerin her biri bir karedir". Bu özellikler Düzey 0'da gizli olarak vardı. Düzey 1'deki öğrenciler, karelerin, dikdörtgenlerin ve paralelkenarların tüm özelliklerini listeleyebilirler ama bunların birbirinin alt kümeleri olduğunu göremeyebilirler (bütün kareler dikdörtgendir ve tüm dikdörtgenler aynı zamanda paralelkenardır). Düzey 1'de düşünenler bir şekli tanımlarken, o şekille ilgili bildikleri ne kadar çok özellik varsa onları listeleyebilirler.

Düzey 1'deki düşüncenin ürünleri, şekillerin özellikleridir.

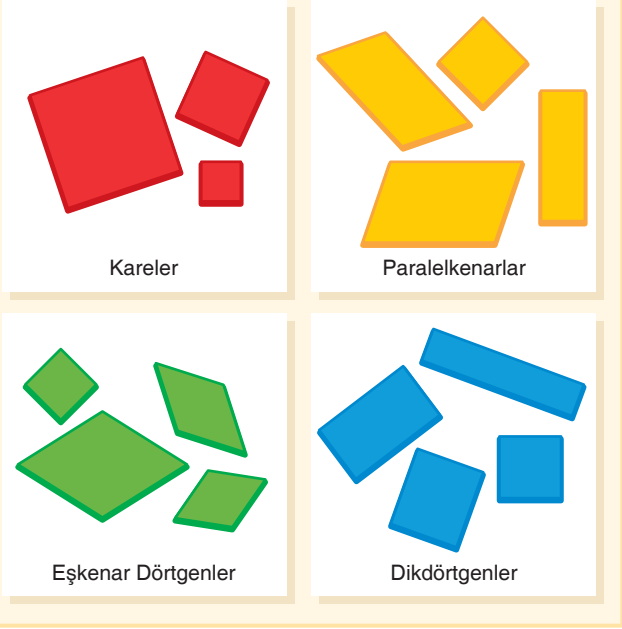
Düzey 0 ile Düzey 1 arasındaki en göze çarpan fark, öğrencinin düşünce nesnesidir. Düzey 1'deki öğrenciler modeller kullanmaya ve şekiller çizmeye devam ederlerken bunları şekil sınıflarının temsilleri olarak görmeye başlarlar. Şekillerin (simetri, dik ve paralel doğrular gibi) özellikleri hakkındaki anlayışlarını sürekli gözden geçirirler.

Aşağıdaki etkinlikte öğrenciler, önceki etkinliklerde (muhtemelen Düzey 0'da) öğrendikleri şekillerin özelliklerini kullanmaktadırlar. Bu şekiller, simetri, açı sınıflandırması (dik, dar, geniş), paralel ve dik ile açı ve doğru parçalarının denkliği kavramı gibi fikirleri içermektedir.

Etkinlik 20.2

Dörtgenler için Özellikler Listesi

Paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kareler için çalışma yaprakları hazırlayınız (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 54-57 ve Şekil 20.3). Belli bir tipteki dörtgen için üç ya da dört kişilik gruplarda çalışacak şekilde öğrencileri gruplara dağıtınız. Öğrencilerin görevi, kendi çalışma yaprağındaki şekillerin tümüne uygulanabilecek bulabildikleri kadar çok sayıda özelliğin bir listesini oluşturmaktır. Öğrenciler, dik açıları kontrol etmek, kenarları karşılaştırmak ve doğruları çizmek için indeks



Şekil 20.3 "Dörtgenler için Özellikler Listesi" etkinliğinde kullanılabilecek şekiller (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 54-57)

kartlarına ihtiyaç duyacaktır. Aynalar (doğru simetrisini kontrol etmek için) ve aydıngerler (açı denkliği ve dönme simetrisi için) da kullanışlı araçlardır. Bir şeyden kaç tane olduğunu açıklarken öğrencilerinizi "en az" ifadesini kullanmaya teşvik ediniz: Örneğin, kareler (dikdörtgenleri içerdiğinden) dört doğru simetrisine sahipken "dikdörtgenler en az iki doğru simetrisine sahiptir".

Öğrencilerinizin özellik listelerini şu başlıklar altında hazırlamalarını isteyiniz: Kenarlar, Açılar, Köşegenler, Simetriler. Gruplar daha sonra kendi listelerini sınıfla paylaşırlar ve sonunda şeklin her bir kategori için birlikte bir sınıf listesi geliştirilecektir.

Bu ve daha önceki sınıflandırma etkinliği, geometrik özellikler üzerinde yoğunlaşarak şekilleri incelemektedir. Bu etkinliği Düzey 0'daki sınıflandırma etkinliğinden ayıran şey, öğrencinin düşünme nesnesidir. Öğrenciler, özelliklerin belli bir kategorideki tüm şekillere uygulanıp uygulanamayacağını değerlendirmek zorundadırlar. Eğer karelerde geçerliyse, gözlemlerini, örneğin mil kareye olduğu kadar santimetre kareye de uygulayabilmelidirler.

Düzey 2: İnformel Çıkarım

Düzey 2'de üzerinde düşünülen nesneler, şekillerin özellikleridir.

Belli bir nesne sınırlaması olmaksızın geometrik şekillerin özellikleri hakkında düşünebilmeye başlarlarken öğrenciler, şekiller ve şekillerin özellikleri arasında ilişkiler geliştirmeye başlayabilirler. "Dört açısı da dik açıysa bu şekil dikdörtgen olmak zorundadır. Eğer şekil kareyse, tüm açıları dik açıdır. Şekil kareyse bir dikdörtgen olmalıdır". "Eğer-ise" akıl yürütmesi becerili bir şekilde uğraşılarak kullanılırsa şekiller en az sayıda özellikler yardımıyla sınıflandırılabilir. Örneğin, dört eş kenar ve en az bir dik açı, bir kareyi tanımlamak için yeterlidir. Dikdörtgenler bir dik açıya sahip paralelkenardırlar. Gözlemler, özelliklerin ötesine giderek özellikler *hakkında* mantıksal argümanlar üzerinde yoğunlaşmaya başlar. Düzey 2'deki öğrenciler, şekiller ve şekillerin özellikleriyle ilgili informel çıkarımsal argümanları takip edecek ve anlayabileceklerdir. "İspatlar" adım adım çıkarılarak elde edilmekten ziyade sezgisel olabilirler; fakat yine de mantıksal bir argümanın daha ikna edici olduğunun anlaşılması söz konusudur. Bununla birlikte formel çıkarıma dayalı bir sistemin aksiyomatik yapısının anlaşılması arka planda kalmaktadır.

Düzey 2'deki düşüncenin ürünleri, geometrik nesnelerin birbirleriyle olan ilişkileridir.

Düzey 2'deki etkinliklerin en belirleyici niteliği informel mantıksal akıl yürütme gerektirmesidir. Öğrenciler şekillerin farklı özelliklerine yönelik bir anlayış geliştireceklerinden, tahmin etmenin ve "Neden?" veya "Eğer şöyleyse?" gibi soruların teşvik edilmesinin tam sırasıdır. Aşağıdaki etkinlikte gerekli olan düşünme tarzını karşılaştırınız.

Etkinlik 20.3

En Az Sayıyla Tanımlama Listeleri

(Bu etkinlik Etkinlik 20.2'nin ("Özellikler Listesi"), bir devamı/tamamlayıcısı olarak yapılmalıdır). Paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare için bir kez özellikler listesi üzerinde tüm sınıf hem fikir olduğunda bu listeleri duvara asınız. Öğrencilerinizin gruplara ayrılarak her bir şekil için "En az sayıyla tanımlama listeleri"ni oluşturmalarını isteyiniz. Bu liste, belli bir şekli tanımlayan ve "en az sayıda" özelliğin bir alt kümesidir. Buradaki "tanımlama", bu listedeki özelliklerin tamamına sahip herhangi şeklin bu şekil olması gerektiği anlamına gelmektedir. "En az sayıda" ise eğer tek bir özellik listeden çıkarıldığında artık o şekli tanımlamıyor anlamına gelmektedir. Örneğin, kare için en az sayıda tanımlama listeleri, dört eş kenara ve dört dik açıya sahip bir dörtgen olmayı içermektedir. Öğrenciler bu listelerden, ellerindeki şekil için en az iki ya da üçünü bulmaya çalışmalıdırlar. Önerilen liste, ya en az sayıda ya da tanımlayan olmama durumuyla eşleştirilmelidir. Eğer tanımlanan şekilden farklı-karşı bir örnek sadece listedeki özellikler kullanılarak üretiliyorsa bu liste tanımlayan değildir.

Bu ve diğer Düzey 2 etkinliklerinin ayırt edici özelliği mantık bileşenidir. "*Eğer* bir dörtgen bu özelliklere sahip *ise* o kare olmalıdır". Bir listenin doğru olup olmadığını (ya en az sayıda değil ya da tanımlayan değil) ispatlarken de mantık devreye girmektedir. Öğrenciler burada, bir tanımın doğasını veya karşı örneklerin değerini öğrenmeye başlarlar. Aslında herhangi bir en az sayıda tanımlama listesi potansiyel bir tanım demektir. Düzey 2 kategorisine açık bir şekilde uygun düşen bu etkinliğin bir başka yönü, öğrencilerin şekillerin özellik listeleri (önceki Düzey 1 etkinliğinde yer alan faktörlerin tam da birer ürünüdür bu) üzerinde yoğunlaşmalarıdır. En az sayıyla tanımlama listesinin bir sonucu olarak öğrenciler, iki veya daha fazla şekil arasında var olan yeni ilişkilerin bir derlemesini oluştururlar.

Düzey 3: Çıkarım

Düzey 3'te üzerinde düşünülen nesneler, geometrik nesnelerin özellikleri arasındaki ilişkilerdir.

Düzey 3'teki öğrenciler, şekilleri özelliklerinden ziyade etraflıca inceleyebilmektedirler. Önceki düşünmeleri, şekiller arasındaki ilişkilerle alakalı varsayımları üretmektedir. Bu varsayımlar "doğru" mudur? İnformel argümanların analizleri yapıldıkça, aksiyom, tanım, teorem, teoremin sonuçları ve önermelerle oluşturulan bir sistem gelişir ve bunlar geometrik doğruluklar oluşturmak için gereken araçlar olarak anlaşılırlar. Bu düzeydeki öğrenci geometrik özelliklerle ilgili soyut önermeler üzerinde çalışabilmekte ve sezgiden ziyade mantığa dayanan çıkarımlarda bulunabilmektedir. Düzey 3'te çalışan bir öğrenci dikdörtgenin köşegenlerinin birbirlerini ortaladığının farkındadır. Ancak Düzey 3'te, bir dizi çıkarımsal önermelere dayalı olarak is-

pat yapmanın gerekliliği anlaşılmalıdır. Bunun tersi olarak Düzey 2'de düşünen biri, argümanı takip eder ama daha fazlasına gerek olduğunu anlamakta başarısız olur.

Düzey 3'teki düşüncenin ürünleri, geometriye özgü çıkarıma dayalı aksiyomatik sistemlerdir.

Düzey 3'te düşünen birini ayırt etmeye yarayan akıl yürütme tipi, sıradan bir lise geometrisi için gerekenle aynıdır. Orada öğrenciler, teoremleri bir dizi aksiyom listesi ve tanımlar üzerine inşâ ederler. Ayrıca teoremleri ispatlarken açık bir mantıksal akıl yürütme kullanırlar. Oysa Düzey 2'deki akıl yürütme oldukça informeldir. Çok iyi planlanmış geometri derslerinde öğrenciler, daha sonra ispatlayabilecekleri ilişkilerin ele alındığı etkinliklerle meşgul olurlar.

Çok genel bir bakışla lise düzeyinde geometri alan öğrenciler, bütün bir geometrik çıkarım sistemini oluşturmak için çalışırlar. Genel olarak bu da içinde yaşadığımız dünyayı en iyi şekilde açıklayan Öklit sistemidir. Ek olarak öğrenciler, tüm doğruların bir kürenin üzerine çizilebildiği veya doğruların "caddelerin" sadece dikdörtgensel çizimini takip edebildiği (taxicap geometry/taksi güzergâh geometrisi gibi) diğer geometrik sistemleri de incelerler.

Düzey 4: Sistematik Düşünme

Düzey 4'te üzerinde düşünülen nesneler, geometri için geçerli çıkarımsal aksiyomatik sistemlerdir.

van Hiele hiyerarşisinin en yüksek düzeyinde dikkate alınan nesneler, sadece bir sistemdeki çıkarımlar değil aksiyomatik sistemlerin bizatihi kendileridir. Farklı aksiyomatik sistemler arasındaki benzerlikler ve farklılıklar anlaşılır. Örneğin, küresel geometri, sıradan bir uzayda veya bir düzlemde çizilen doğrulardan ziyade bir küre üzerinde çizilen doğrular üzerine temellendirilir. Bu geometri kendine özgü aksiyom ve teorem kümesine sahiptir. Genel olarak bu, matematiksel bilimlerin bir dalı olarak geometri üzerinde yoğunlaşan üniversite matematik programının düzeyidir.

Düzey 4'teki düşüncenin ürünleri, farklı geometrilerin aksiyomatik sistemleri arasındaki benzerlik ve farklılıklardır.

van Hiele Düzeylerinin Belirleyici Özellikleri Her bir düzeydeki düşünme ürünlerinin bir sonraki düzeyin düşünme nesneleriyle aynı olduğunu şüphesiz fark etmişsinizdir. van Hiele düzeyleri arasındaki nesne-ürün ilişkisi Şekil 20.1'de gösterilmiştir. Nesneler (fikirler) bir düzeyde oluşturulabilmelidir ki bu nesneler arasındaki ilişkiler bir sonraki düzeyin temelini oluşturabilsin. Ek olarak, van Hiele düzeyleri birçok ortak özelliğe sahiptir:

- Düzeyler sıralıdır. Bir düzeye erişmek için öğrenciler önceki düzeyleri sırasıyla geçmelidir.
- Her bir düzeydeki düşünme ürünleri bir sonraki düzeydeki düşünme nesneleriyle aynıdır.
- Düzeyler yaşa bağlı değildir. Üçüncü sınıftaki biri ile lisedeki bir öğrenci Düzey 0'da olabilir.
- Düzeyler arasındaki ilerlemeyi etkileyen en önemli tek etken geometrik deneyimlerdir. Öğrenciler araştırma yapabilmeli, üzerinde konuşabilmeli ve mevcut düzeyde deneyimlerini arttırırken bir sonraki düzeydeki içerikle de etkileşime girebilmelidir.
- Öğretim ve kullanılan dil öğrencinin o anda bulunduğu seviyeden daha yüksek bir seviyede olduğunda, bir iletişim kopukluğu olacaktır. Bir öğrenci ilişkiyi kurmaksızın bir işlem veya kuralı (örneğin, tüm kareler aynı zamanda dikdörtgendirler) ezberleyebilir.

Beş van Hiele düzeyinin ilk üçü bu bölümün odak noktasını oluşturacaktır. Anaokulu öncesi-8. sınıflardaki öğrencilerin çoğu bu üç kategori altında düşünülebilir. Geometriyle çalışırken vurguladığınız hususlar bu fikirleri yansıtacaktır.

Öğretime Yönelik Öneriler

Eğer van Hiele kuramı doğruysa (onu destekleyen çok sayıda delil bulunmaktadır), o zaman anaokulu öncesinden 8. sınıfa kadarki müfredatın en temel amacı öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri arasında ilerlemelerini sağlamak olmalıdır. Öğrenciler, lise ve sonrasının çıkarımsal geometri müfredatına uygun şekilde yetiştirilebilirse o zaman sekizinci sınıfın sonuna kadar en az Düzey 2'ye ulaşacak şekilde düşünmelerinin geliştirilmesi önemli olacaktır.

Öğretmenlerin tümü, çocukları gelişimsel merdivenin bir üst basamağına çıkarmada sunabilecekleri deneyimlerin en önemli tek unsur olduğunun farkında olmalıdırlar. Her öğretmen yıllar içinde öğrencilerinin geometrik düşünmelerinin gelişimini görebilmelidirler.

van Hiele kuramı ve bu kitabın gelişimsel perspektifi, çocuğun düşünme düzeyine uygun öğretimin gerekliliğini öne çıkarmaktadır. Yalnız hemen her etkinlik, düşünmenin iki düzeyini kapsayacak hatta aynı sınıfın içinde olacak şekilde düzenlenebilir. Birçok etkinlik için her bir çocukla birebir etkileşimin nasıl olacağı, bir sonraki düzeyde işlemler yapacak şekilde onları zorlarken aynı zamanda düzeylerine uyacak şekilde belirlenecektir.

Takip eden bölümler, ilk üç düzeyin her biri için uygun olan etkinlik ve soru tiplerini tanımlayan hususları içermektedir. Bu tanımlamaları öğrenciye sunduğunuz görevlere uygulayınız ve öğrencilerle etkileşiminize rehberlik edecek şekilde kullanınız.

Düzey 0'da Öğretim. Düzey 0'a uygun geometrideki öğretimsel etkinlikler:

- Çok sayıda ayırma ve sınıflandırmayı içermelidir. Şekillerin benzerlik ve farklılığının nasıl olduğunu görme, Düzey 0'ın yoğunlaştığı asıl konudur. Öğrenciler daha

fazla konu gördükçe farkına varacakları ilişkiler daha üst düzey ilişkiler olacaktır.
- Öğrenciler, hem iki hem de üç boyuttaki şekilleri çizebilecek, inşâ edebilecek, oluşturabilecek, bir araya getirebilecek (birleştirme) ve parçalara ayırabilecekleri (ayrıştırma) çok sayıda duruma ihtiyaç duyarlar. Bu etkinlikler, belli özellikler veya ayırt edici nitelikler üzerine bina edilmelidir ki öğrenciler, geometrik özelliklerle ilgili bir anlayışı geliştirebilsin ve onları doğal bir şekilde kullanabilsinler.

Düzey 0'dan Düzey 1'e geçebilmelerine yardımcı olmak için öğrencilere, belli bir kategoriden çok çeşitli şekillerle fikirlerini sınayacakları zorlayıcı sorular sorulmalıdır. Onlara, " hadi, diğer dikdörtgenler için bunun doğru olup olmadığına bakalım" veya "Dik açısı *olmayan* bir üçgen çizebilir misiniz?" deyiniz. Genel olarak öğrenciler, belli bir şekil için gözlediklerini benzer türde diğer şekillere uygulayıp uygulayamayacaklarını görmelerini sağlamak için düşünmeye zorlanmalıdırlar.

Düzey 1'de Öğretim. Düzey 1'e uygun geometrideki öğretimsel etkinlikler:

- Basitçe şekilleri tanıma yerine özellikler üzerine yoğunlaşmalıdır. Yeni geometrik kavramlar öğrenildikçe şekillerin sahip oldukları özelliklerin sayısı genişletilebilir.
- Fikirleri, tek tek modellerden ziyade tüm şekil sınıflarına uygulayınız (*tüm* dikdörtgenler, *tüm* prizmalar gibi). Örneğin, olası tüm üçgenleri belli gruplara ayırmanın yollarını bulunuz. Bu gruplar yardımıyla üçgen çeşitlerini tanımlayınız.

Öğrencilerin Düzey 1'den Düzey 2'ye geçmelerine yardımcı olmak için onları, "Neden?" gibi sorularla ve o konuyla ilgili akıl yürütme gerektiren türde sorularla düşünmeye zorlayınız. Örneğin, " Dörtkenarlı bir şeklin tüm kenarları birbirine eşse her zaman bir karemiz var diyebilir misiniz?" ve "Karşı bir örnek bulabilir misiniz?".

Düzey 2'de Öğretim. Düzey 2'ye uygun geometrideki öğretimsel etkinlikler:

- Varsayım ve hipotezleri oluşturma ve test etmeyi teşvik etmelidir. "Bunun her zaman doğru olduğunu düşünüyor musun?", "Bu tüm üçgenler için mi yoksa sadece eşkenar üçgenler için mi doğrudur?".
- Farklı şekiller ve kavramlar için gerek ve yeter şartları belirlemek amacıyla şekillerin özelliklerini incelemelidir. "Köşegenlerin hangi özelliklerinin o şeklin bir kare olmasını garantilediğini düşünüyorsunuz?".
- İnformel çıkarım terminolojisini kullanmalıdır. *Tüm*, *bazı*, *hiç*, *… ise o zaman*, *… olursa ne olur*, vb.
- İnformel ispatlar yapmak için çaba göstermelerini teşvik etmelidir. Farklı bir seçenek olarak onlardan, diğer öğrencilerin veya sizin önerdiğiniz informel ispatların mantığını açıklamalarını isteyiniz.

Görev Seçme ve Düşünme Düzeyleri. Anaokulu öncesi-Anaokulu-3. sınıf düzeyinde öğretiyorsanız, öğrencilerinizin hemen tamamı Düzey 0'da olacaktır. Üst sınıflarda ise aynı sınıftaki çocuklar ya ikinci ya da üçüncü düzeyde olabilirler. Öğrencilerin her birinin düzeyini nasıl ortaya çıkarabilirsiniz? Bir kez bunu bildikten sonra, öğrencilerinizin düzeyleriyle örtüşen doğru etkinlikleri nasıl seçeceksiniz?

Bir öğrencinin sahip olduğu düzeyi belirlemenin basit bir değerlendirmesi yoktur. Ama ilk iki düzeyin tanımlayıcılarını inceleyiniz. Bir etkinliği yaparken öğrencilerinizin gözlemlerini dinleyiniz. Şekilleri sınıflar şeklinde düşünüp konuşabiliyorlar mı? Belli bir dörtgen, örneğin, dikdörtgen hakkında tartışmalarını temellendirirken tüm "dikdörtgenlere" mi atıfta bulunuyorlar? Şeklin yönelimi veya büyüklüğü değiştiğinde şeklin değişmediğini anlayabiliyorlar mı? Bu türden dikkatli gözlemlerinizle çok kolayca Düzey 0 ve Düzey 1'i birbirinden ayırt edebileceksinizdir.

Üst sınıflardaki öğrencilerinizin Düzey 1'den Düzey 2'ye çıkmaları için çaba gösteriniz. Öğrencileriniz, mantıksal argümanları takip edemez ve anlamazlarsa ve varsayımlar ile "…ise o zaman" şeklinde düşünmede rahat değillerse büyük bir ihtimalle bu öğrenciler ya Düzey 1 ya da Düzey 0'dadır.

Bu bölümün geri kalan kısmı, NCTM'nin standartlarındaki dört içerik hedeflerini merkeze alacak şekilde etkinliklerin bir örneklemini sunmaktadır: Şekiller ve özellikleri, Konum, Dönüşümler ve Görselleştirme. Bu içerik gruplamalarının her birisinin içinde yer alan etkinlikler, van Hiele düzeylerinin ilk üçüne göre sıralanmıştır. Bu alt bölümlerin tamamının oldukça esnek olduğunu unutmayınız. Bir düzeyde yer alan etkinlik, öğrencilere sunularak kolay bir şekilde onu takip eden düzeye uyarlanabilir.

Şekiller ve Özelliklerini Öğrenme



Çoğu insanın Anaokulu öncesi-Anaokulu-8. sınıflardaki geometriyi düşündüklerinde dikkate aldıkları içerik alanı şunun hakkındadır: Çocuklar iki ve üç boyutlu şekillerin her ikisiyle de uğraşmaktadır. İncelenen şekilleri birbirine benzer ve farklı kılan şeyin ne olduğunu anlamaya çalışırlar ve süreç içinde şekillerin özelliklerini (bu özelliklerin geleneksel olarak adlandırılışını da içerecek şekilde) keşfetmeye başlarlar. Yeteri kadar deneyimle öğrenciler, belli şekil sınıflandırmalarını geliştirirler: Üçgenler, paralelkenarlar, silindirler, piramitler, vb. Ayrıca tüm sınıflara uygulanabilecek bazı özellikleri öğrenirler. Neticede öğrenciler, şekillerin özelliklerinin geometrik ilişkilerdeki mantıksal sonuçlarının ne olacağını araştıracaklardır ve şekiller ve özellikleriyle ilgili akıl yürütme becerisi gelişecektir.

Düzey 0'da Düşünenler için Şekiller ve Özellikleri

Küçük çocuklar hem iki hem de üç boyutlu şekillerin zengin farklı örneklerini tecrübe etmeye gerek duyarlar. Üçgenler, sadece eşit kenar olmadan daha fazla bir şeyi ifade etmeli ve

köşesi en tepede olacak şekilde gösterilmemelidir. Şekiller, eğri kenarlara, düz kenarlara ve her ikisine birden sahip olmalıdır. Süreç içinde şekillerin adları ve özellikleri tanıtılabilir.

Ayırma ve Sınıflandırma. Küçük öğrencilerin, şekillerin sınıflandırması konusunu çalışırlarken, "bükülmüş" veya "ağaca benziyor" gibi "gerçek" geometrik özellikler olarak dikkate almayacağınız bazı özellikleri fark etmelerine hazır olunuz. Bu düzeydeki çocuklar, "yukarıya doğru yönelmiş noktalar" veya "tahtanın kenarıyla aynı bir kenara sahiptir" gibi şeklin esas bir unsuru olmayan fikirleri şekillerle ilişkilendireceklerdir.

İki boyutlu şekillerdeki çeşitliliği arttırmak için kendinize özgü materyaller yapınız. Farklı şekillerden oluşmuş iyi bir set Çalışma Yaprak Seti 41-47'de bulunabilir. Çok sayıda kopya hazırlayınız ki çocukların oluşturduğu grupların tümü aynı şekillerle çalışabilsinler. Kümelerinizi bir kez oluşturdunuz mu iyi bir başlangıç olarak sayfa 401-402'de bulunan Etkinlik 20.1'i (Şekil Gruplandırmaları) yapınız.

Herhangi bir ayırma etkinliğinde öğrenciler, öğretmenler yerine kendileri şekilleri nasıl ayıracaklarına karar vermelidirler. Bu da öğrencilere, sahip oldukları fikirleri ve *kendi* anladıklarını kullanmalarına olanak verir. Kendi gruplandırmalarında şekillerin hangi özelliklerini kullandıklarını dinleyerek, hangi özellikleri bildiklerini ve kullandıklarını ve şekillerle ilgili nasıl düşündüklerini söyleyebilmeniz mümkün olacaktır. Şekil 20.4, bir kümenin gruplandırılmasının birçok olası yolundan birisini örneklendirmektedir.

Etkinlik 20.1'in gizli sıralama kısmı yeni bir özelliği tanıtmak için bir seçenek olarak kullanılabilir. Örneğin, en az bir dik açıya veya "kare köşeye" sahip olan tüm şekilleri ayırınız. Öğrenciler kuralı keşfettiklerinde bu özellik hakkında daha fazla konuşma fırsatına sahip olursunuz.

Takip eden etkinlik 2 boyutlu şekillerle yapılabilir.

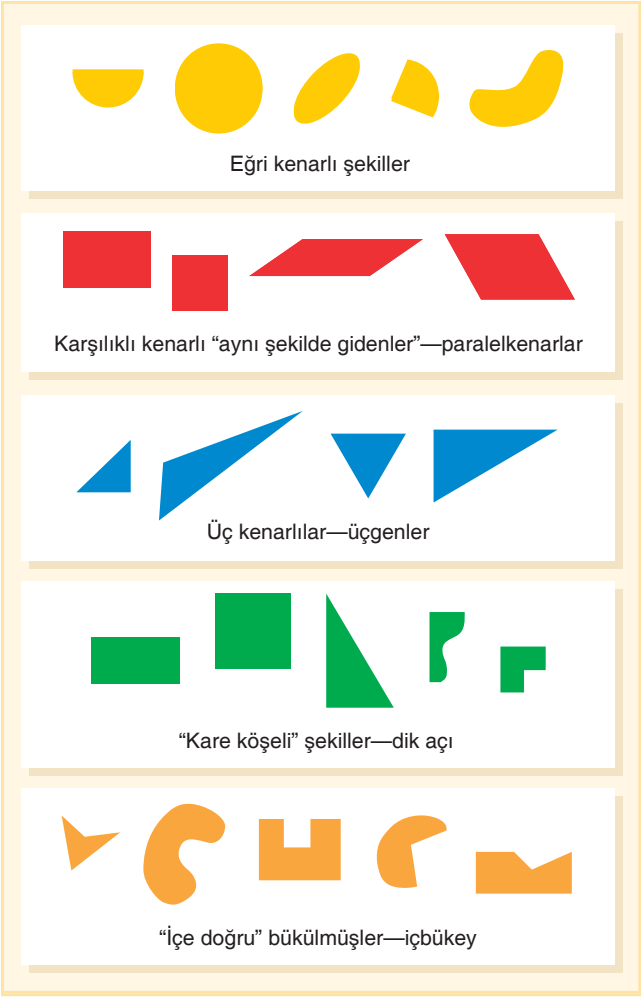
Etkinlik 20.4

Şeklim Hangisi?

Çalışma Yaprak Seti 41-47'deki 2 boyutlu belli özelliklere sahip şekillerden mukavva kartonları kullanarak bir çift set oluşturunuz. Şekillerden bir seti kesip ayırınız ve el işi kağıdını ikiye katlayıp iç kısmına yapıştırarak "gizli şekil" klasörleri oluşturunuz.

Gruptaki bir öğrenci lider olarak tayin edilerek gizli şekil klasörü kendisine verilir. Diğer öğrenciler, liderin sadece "evet" veya "hayır" cevabını verebildiği sorular sorarak klasördeki şekille uyuşan şekli bulacaklardır. Grup, soruları sorup olasılıkları daraltarak şekilleri eleyebilir. Belli bir parçayı göstererek "şekil bu mu?" şeklinde soruları sormalarına izin verilmez. Bunun yerine, seçenekleri bir şekil üzerine yoğunlaştıracak biçimde şeklin özüne ve niteliklerine yönelik sorular sormaya devam etmelidirler. En sona kalan parça, liderin klasöründekiyle karşılaştırılarak kontrol edilir.

Etkinlik 20.4'teki zorluk düzeyi, büyük ölçüde klasördeki şekle bağlıdır. Koleksiyonda ne kadar çok sayıda gizli şekle benzeyen şekil varsa bu görev de o kadar zordur.

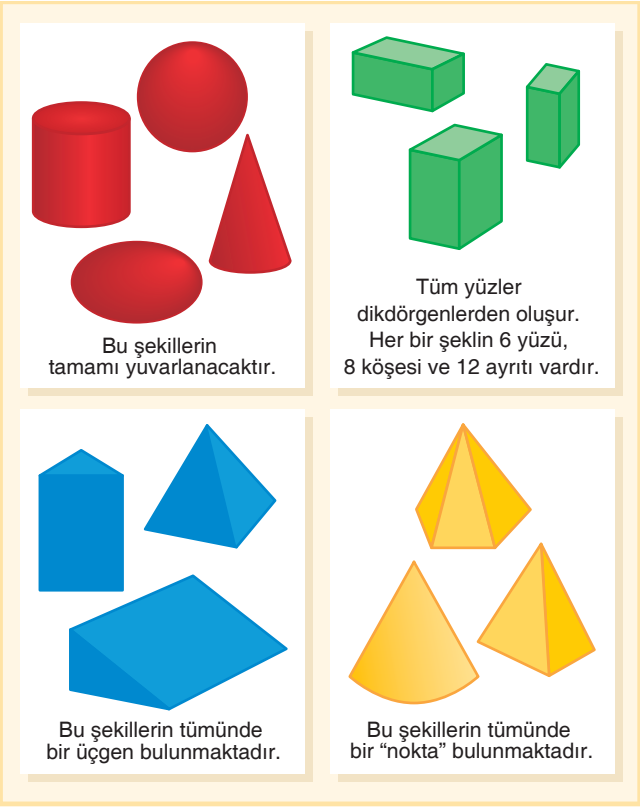


Şekil 20.4 Öğrenciler şekilleri ayırarak şekillerin özelliklerini tanımaya başlarlar.

"Şekil Gruplandırmaları" ndaki etkinliklerin çoğu üç boyutlu şekillerle yapılabilir ve yapılmalıdır da. Zorluk, yeteri kadar farklı bir koleksiyon bulmada ve oluşturmadadır. Geoblocks, farklı satıcılarda bulunabilen çok sayıda tahta bloklardan oluşan bir settir. Çeşitlilik iyi bir şeydir ama blokların hiçbirinde eğri yüzeyler yoktur. Çok sayıda farklı setleri bir araya getirerek çeşitlilik sağlamayı düşününüz. Bir diğer seçenek, teneke kutu, karton kutu, top ve plastik köpükten yapılmış şekiller gibi gerçek nesneleri toplamaktır. Şekil 20.5, katı cisimlerin bazı sınıflandırmalarını örneklendirmektedir.



"Şekil Gruplandırmaları"ndaki şekilleri açıklarken kullandıkları yollar ve üç boyutlu şekillerle yapılan benzer etkinlikler çocukların düşünme düzeylerinin iyi birer delilidirler. Düzey 0'da düşünenlerin yaptıkları sınıflandırmalar genel olarak, gözleri önündeki şekillerle sınırlı olacaktır. Şekillerin özellikleri açısından düşünmeye başladıklarında artık özeliklere dayalı gruplandırmalar yapacaklardır ve kullandıkları dil, fiziksel olarak mevcut olan şekillerden daha fazlasının o grupta oldu-



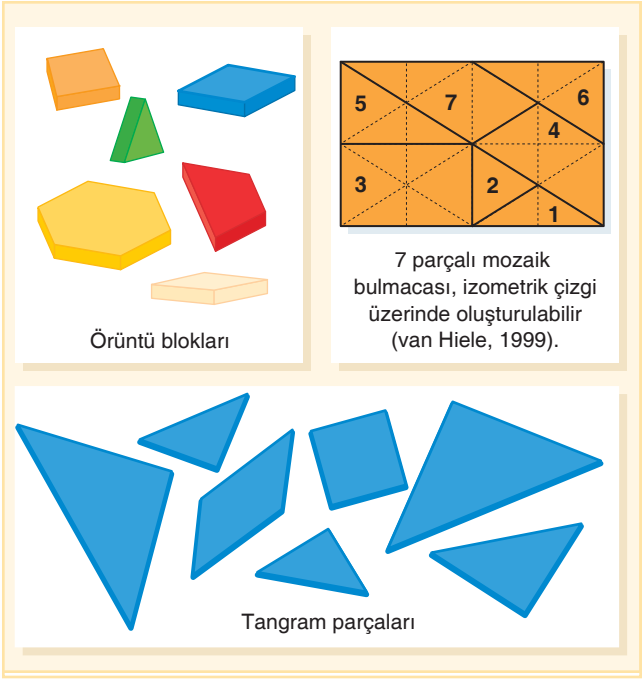
Şekil 20.5 Üç boyutlu şekillerin erken dönem sınıflandırmaları.

ğunu gösterecektir (Mack, 2007). Öğrenciler, "Bu şekiller dikdörtgenlerdeki gibi kare köşelere sahiptirler." veya "Bunlar kutulara benziyorlar. Kutuların tamamında kare (dikdörtgen) kenarlar bulunmaktadır." gibi şeyler söyleyebilirler. ◆

Şekilleri Bir Araya Getirme ve Parçalara Ayırma. Çocuklar, şekilleri bir araya getirerek daha büyük şekillerin nasıl oluştuğunu ve daha büyük şekillerin küçük parçalara nasıl ayrılabileceğini özgürce inceleme gereksinimi duyarlar. Bu türden etkinliklerde kullanılabilecek şekillerden en iyi bilinenleri örüntü blokları ve tangramlardır. 1999 yılında yayınlanan bir makalede Pierre van Hiele, mozaik bulmacası olarak adlandırdığı ilginç bir karo setini betimlemektedir (Bkz. Şekil 20.6). Bu mozaik bulmacasındaki örüntüler ve tangramlar Çalışma Yaprak Seti 51'de bulunabilir.

Şekil 20.7, artan zorluk derecesine göre dört farklı tangram bulmacasını göstermektedir. NCTM'nin e-Examples'ı zorlayıcı birçok soru içeren küçük bir tangram uygulama yazılımı içermektedir (Example 4.4). Bu küçük uygulama yazılımın bir çeşidi, yedi parçanın tamamı kullanılarak yapılabilen sekiz bulmacayı içermektedir. Tangramların elektronik-versiyonları motive etme avantajına sahiptir ancak şekilleri yeniden düzenlemede daha temkinli olmalısınız.

van Hiele'nin mozaik bulmacasının önemi, setin beş farklı açı içermesi olgusunda yatmaktadır (Bkz. Şekil 20.8). Parçaları kullanarak kare köşeler (*dik* açılar) ve bir dik açıdan daha küçük ve daha büyük açılar (*dar* ve *geniş* açılar) hakkında konuşabilirsiniz.



Şekil 20.6 Etkinliklerde kullanılabilecek muhtelif karolar.

Geometri tahtası, iki boyutlu şekilleri "çizmede" kullanılabilecek en uygun araçlardan biridir. Aşağıdaki etkinlikler, Düzey 0'a uygun olası birçok etkinlikten sadece üçüdür.

Etkinlik 20.5

Geometri Tahta Kopyası

Tepe gözde veya projeksiyon cihazında yansıtılmış geometri tahtasında gösterilebilecek şekil, tasarım ve örüntüleri çoğaltınız. Bir lastik kullanarak oluşturulabilen tasarımlarla başlayınız. Sonrasında ise daha karmaşık tasarımlar oluşturunuz (Sayfa 409'daki Şekil 20.9'a bakınız).

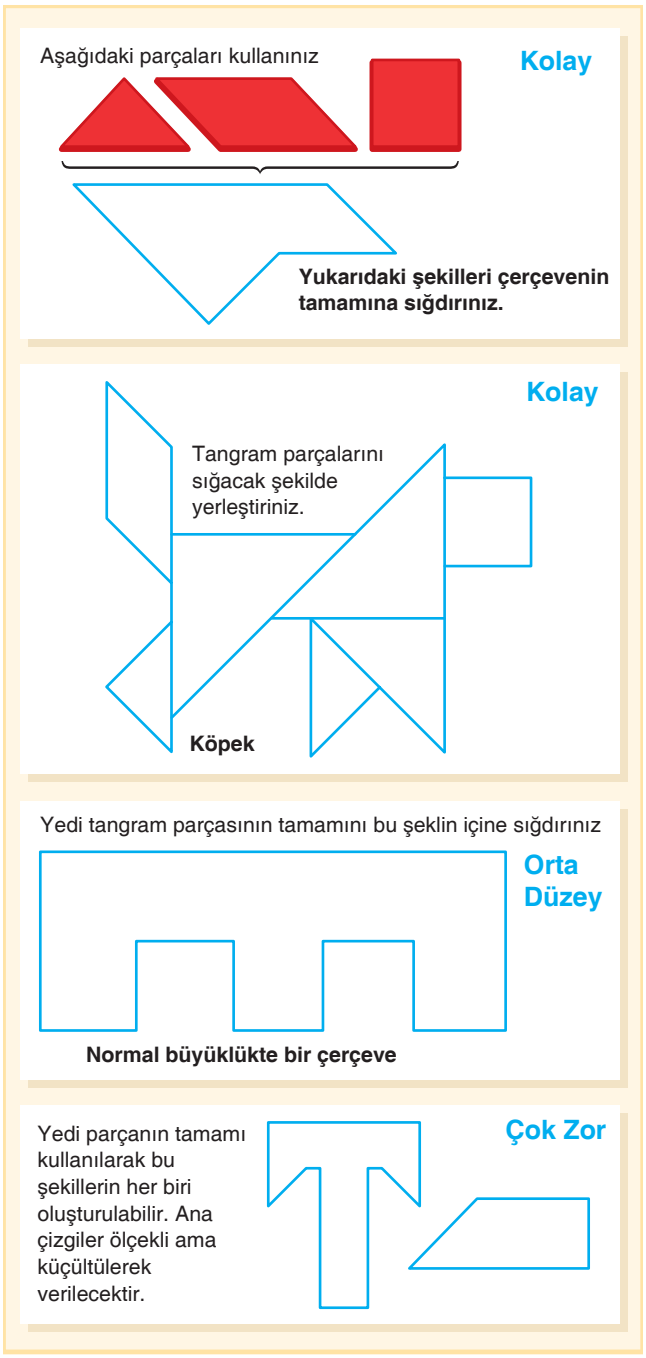
Etkinlik 20.6

Eş Parçalar

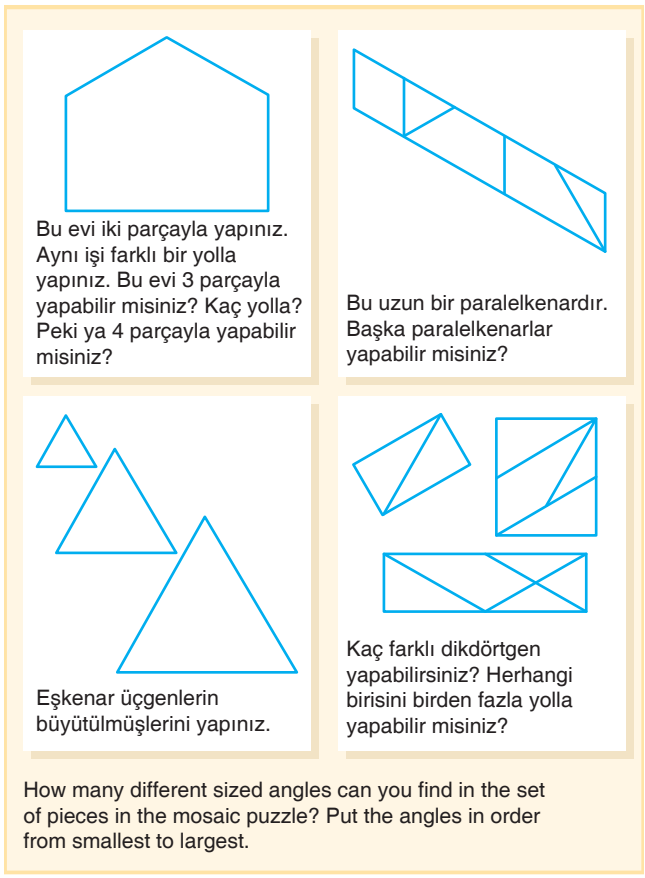
Bir karttan bir şekil kopyalayınız ve öğrencilerinizin kendi geometri tahtaları üzerinde bunları daha küçük parçalara bölmelerini veya ayırmalarını isteyiniz. Kaç tane küçük parça olacağını belirtiniz. Ayrıca, parçaların tümünün birbirine eş mi yoksa Şekil 20.10'da (s. 409) gösterildiği gibi basitçe aynı tipte mi olacağını belirtiniz.

Sınıfınızda çok sayıda geometri tahtası bulundurunuz. İki veya üç çocuğun, her birinin bir tane geometri tahtasına sahip olmasındansa belli bir çalışma köşesinde 10 veya 12 tane geometri tahtasının bulunması daha iyidir. Bu şekilde çeşitli şekiller yapılabilir ve bu şekiller değiştirilmeksizin birbirleriyle karşılaştırılabilir.

Öğrencilerinize, ta en başından itibaren oluşturdukları geometri tahtası tasarımlarını kaydetmelerini öğretiniz. Kağıt kopyalar (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 49-50), belli bir



Şekil 20.7 Dört çeşit tangram bulmacası (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 51).



Şekil 20.8 Mozaik bulmacasıyla ilgili yapılabilecek etkinliklere bir örnek (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 51).

Kaynak: Based on van Hiele, P. M. (1999). "Developing Geometric Thinking Through Activities That Begin with Play." *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310–316. Reprinted with permission. Copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.

görevi yerine getirecekleri tamamlanmış çizim setleri oluşturmalarını mümkün kılar. İlk sınıflardaki öğrencilerinize yardımcı olmak için geometri tahtası tasarımlarını kopyalayınız ve öncelikle şekillerinin köşelerin ("ikinci satıra, çivilerin sonuncusuna") noktalarla işaretlemelerini öneriniz. Köşeleri belirlendikten sonra şekli oluşturmak için gereken doğruları çizmek daha kolay olacaktır.

Çizimler, sınıflandırmak ve tartışmak için, gruplanabilir; tartışılan yeni bir fikri örnekklendirmesi için broşürlere yerleştirilebilir ve eve ailelerine gönderilebilirler.

önceki sayfada metni alacak yer yok. sağ sütunu 5 satır kısaltmak gerekiyor.



NCTM'nin internet sitesinde "Standartların Odak Noktaları/Standards Focal Points" başlığı altında yer alan e-Examples, iyi bir elektronik geometri tahtası örneği sunmaktadır (küçük uygulama yazılımı/Applet 4.2). A-2/K-2. sınıflar bölümünde ve "Üçgen Kavramını İnceleme/Investigating the Concept of a Triangle" başlığı altında yer almasına rağmen herhangi bir sınıf için de kullanılabilecek oldukça önemli bir geometri tahtası programıdır. Lastikleri ve köşeleri seçme ve silmenize izin verir. Ulusal Sanal Manipülatifler Kütüphanesi/National Library of Virtual Manipulatives (http: //nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html) sitesinde yer alan *Geometri Tahtası/Geoboard* küçük uygulama yazılımı da esas olarak aynıdır ama farkı "ölçüler/measure" tuşunu tıklayarak şekillerin çevre ve alanını anında hesaplayabilmesidir. ◆

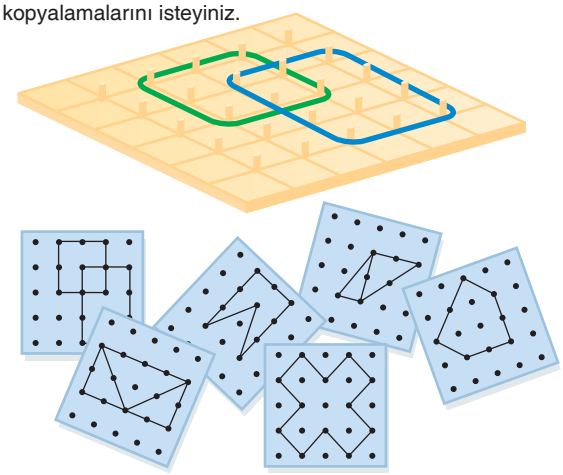


Durup Düşün!

Şu ana kadar bir geometri tahtası kullanmadıysanız bu elektronik geometri tahtalarını inceleyiniz. Geometri tahtasını biliyor ama hiç elektronik geometri tahtası/e-geoboard kullanmadıysanız şimdi denemenin tam zamanıdır.

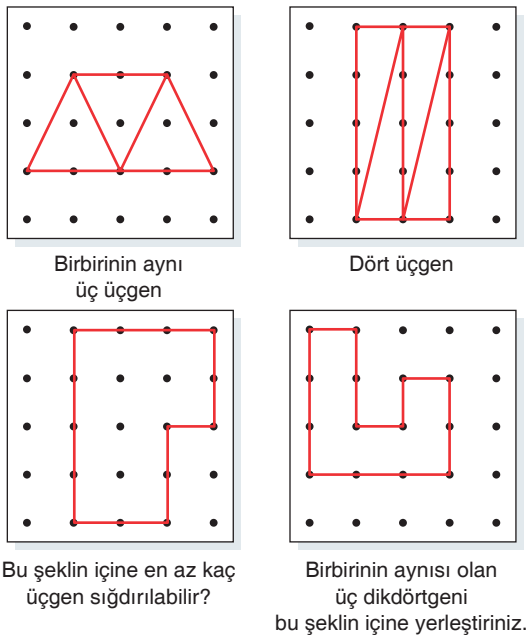
İki boyutlu şekillere göre üç boyutlu şekilleri oluşturmak biraz daha zordur. Çok sayıda ticari materyaller, geo-

Çocuklardan örüntü kartlarındaki şekilleri geometri tahtasına kopyalamalarını isteyiniz.



Noktalı veya noktasız örüntü kartlarına ek olarak öğrencilerinizden, tablo, ev, alfabedeki harfler vb. gerçek şekilleri kopyalamalarını isteyiniz.

Şekil 20.9 Geometri tahtasındaki şekiller (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 49 ve 50).



Bir şekilde başlayıp o şekli küçük parçalara ayırınız. Özel şartlar ekleyerek etkinliğin zorluk düzeyini artırınız.

Şekil 20.10 Şekilleri parçalara bölme (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 49 ve 50)

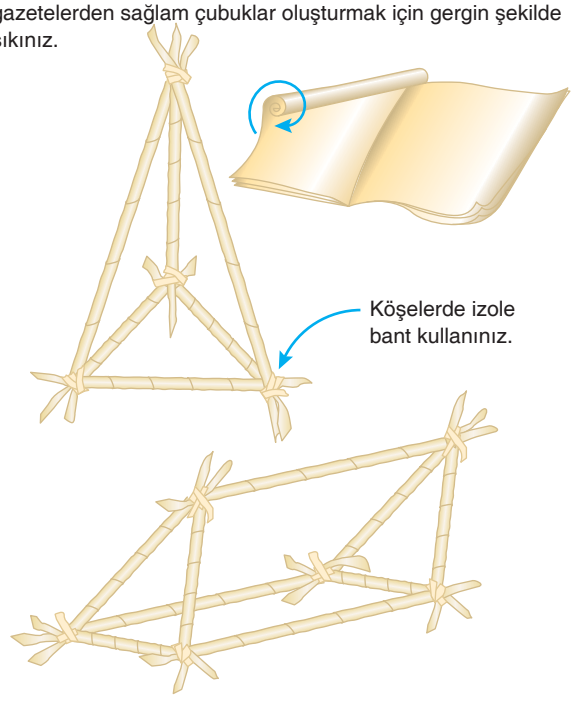
metrik cisimleri yaratıcı bir şekilde oluşturmanıza olanak tanır (örneğin, 3D Geoshapes, Polydron, Zome System). Takip eden kısım, hazır modellere el yapımıyla yaklaşabilecek şiddetle tavsiye edilen üç örneği içermektedir:

- *Plastik bükülebilir bağlantıları olan kahve karıştırıcılar veya modelleme hamuru*. Plastik karıştırıcılar, farklı uzunluklara sahip olacak şekilde kolayca kesilip parçalara ayrılabilir. Köşeleri birleştirmek için uç kısımlardaki bükümlü bağlantıları veya (yaklaşık 2 cm çapında) oyun hamuru yığınlarını kullanınız.
- *Plastik içme kamışları*. Kamışları yukarıdan aşağıya doğru boylamasına makasla esnek noktasına kadar kesiniz. Daha sonra bu kesimin bitim noktası, esnek ama güçlü bir eklem noktası oluşturmak için diğer kamışların kesilmeyen alt kısımlarına geçirilsin. İki boyutlu çokgenleri oluşturmak için üç ya da daha fazla kamış bu şekilde birleştirilsin. Bükümlü bağlantı noktalarını bantlayarak çokgenleri birleştiriniz.
- *Gazeteleri yuvarlayıp bükerek oluşturulan çubuklar*. Gazete ve maskeleme veya izole bant[1] kullanılarak harika büyük iskeletler oluşturulabilir (Bkz. Şekil 20.11).

El yapımı bu modeller yardımıyla öğrenciler, bir üçgeninesnemezliği ile üçten daha fazla kenara sahip çokgenlerin esneme özelliğinin olmamasını karşılaştırmalıdır. Üçgenlerin, çok sayıdaki köprülerde, çok yüksek inşaatlarda kullanılan vinçlerde ve binaların kolon ve kirişlerinde kullanıldıklarına dikkat çekiniz. Bunun neden böyle olduğunu tartışınız. Çocuklar büyük iskeletsel yapılar inşa ettikçe, üçgen oluştururken güçlendirmek için köşegenleri eklemeleri gerektiğini fark edecekler. Ne kadar üçgen kullanılırsa, yapılarının yıkılma olasılığı da o kadar az olacaktır. İlköğretimin ilk sınıflarındaki öğrenciler serbestçe oluşturulmuş yapıları oluşturmanın sağladığı avantajdan faydalanabilir. Büyük yaştaki öğrenciler ise daha iyi tanımlanmış şekilleri yapmaları istenerek düşünmeye zorlanabilir.

[1] Ç.N. Masking tape: bir yeri boyarken boyanması istenilmeyen kısımları örtmek için kullanılan yapışkan bant.

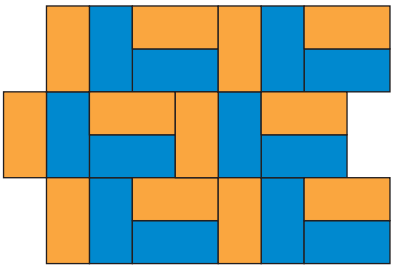
Üç gazete kağıdını köşegen boyunca oldukça sıkı bir şekilde yuvarlayınız. İzole bant ile sağlamlaştırınız. Bükülmüş gazetelerden sağlam çubuklar oluşturmak için gergin şekilde sıkınız.

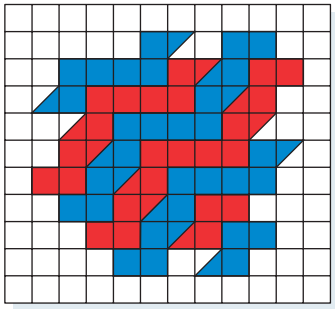


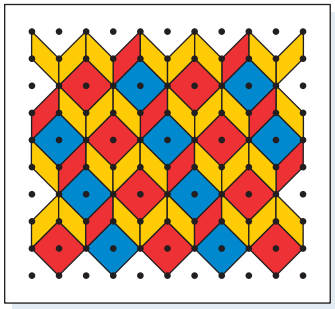
Şekil 20.11 Gazeteleri rulo şeklinde yuvarlayarak büyük iskeletsel yapılar ve özel şekilleroluşturulabilir.

bu sayfa sığmıyor

Süslemeler, el işi kağıdı kullanılarak oluşturulmuş karolarla yapılabilir veya noktalı/kareli kağıtlar üzerine çizilebilir.







Şekil 20.12 Süslemeler (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 34-40).

Süslemeler. Süsleme, düzlemin bir ya da iki şeklin arasında boşluk kalmayacak veya üst üste gelmeyecek şekilde döşenmesidir. Süslemeler yapmak, birinci sınıftan sekizinci sınıfa kadar Düzey 0'daki öğrencilerin şekillerdeki örüntüleri incelemeleri ve şekillerin bir araya gelerek başka şekilleri nasıl oluşturduklarını görmelerinin sanatsal bir yoludur. Süsleme etkinlikleri farklı zorluk düzeylerinde olabilir.

Tek şekilli süslemeler, birden fazla şekille yapılan süslemelere göre oldukça kolaydır. Örneğin, öğrencileri geometrik olarak en alt düzeyde zorlamasına rağmen, kare ve eşkenar üçgenler, sadece kendileri kullanılarak oldukça kolay bir şekilde süsleme oluşturur. Belli bir örüntüden daha fazlasını oluşturmak için şekiller bir araya getirildiklerinde, hem problem çözme hem de yaratıcılık düzeyi artar. Gerçekten yüzlerce şekil, örüntüler oluşturmak için karo olarak kullanılabilir (Bkz. Şekil 20.12).

Çoğu öğrenci, örüntülerle ilk deneyimleri sırasında örüntüleri oluştururken gerçek karoları kullanmanın faydasını görecektir. Elişi kâğıtlarıyla basitçe oluşturulmuş karolar makasla kolayca kesilebilir. Ya da çok sayıda örüntü blokları da oldukça işe yarar. Daha büyük çocuklar, noktalı[2] veya kareli kâğıtlar kullanabilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 34-40) ve kağıt-kalem kullanarak kendi süslemelerini yapabilirler. Bir örüntüyü planlarken, dikkati uzamsal ilişkiler üzerinde yoğunlaştırmak için sadece tek renk kullanınız.

Durup Düşün!

Şekil 20.12'de verilen ortadaki süslemeye bakınız. Hangi tek bir karo (kare ve yarım karelerin bir birleşimi) kullanılarak bu örüntü oluşturulmuş?

Düzey1'de Düşünenler İçin Şekiller ve Özellikleri

Öğrenciler Düzey1'de düşünmeye geçerkendikkatleri daha çok, geleneksel olarakşekillerin sınıflandırıldığı özelliklere

[2] Ç.N. Noktalı kağıt, kareli veya izometrik olabilir.

Tablo 20.1

İki Boyutlu Şekillerin Sınıflandırılması

Şekil	Tanım
Basit Kapalı Eğriler	
Dışbükey, içbükey	İçbükeyin sezgisel bir tanımı, "içerisinde bir çökmeye/çukura" sahip olan şekil olabilir. Kapalı basit bir eğri içbükey değilse, dışbükeydir. İçbükeyin daha net bir tanımını, daha büyük çocuklarla incelemek ilginç olabilir.
Simetrik, simetrik değil	Şekiller, bir veya daha fazla simetri doğrusuna ya da dönme simetrisine sahip olabilir/olmayabilir. Bu kavramlar daha detaylı bir incelemeyi zorunlu kılmaktadır.
Çokgenler	Tüm kenarları doğru olan basit kapalı eğriler.
Dışbükey, içbükey, Simetrik, simetrik olmayan, Düzgün	Tüm kenarları ve tüm açıları birbirine eş.
Üçgenler	
Üçgenler	Üç kenarlı çokgenler.
Şekillerine göre sınıflandırılabilir:	
Eşkenar	Tüm kenarları birbirine eştir.
İkizkenar	En az iki kenarı birbirine eştir.
Çeşitkenar	Herhangi iki kenarı birbirine eş değildir.
Açılarına göre sınıflandırılabilir:	
Dik	Bir dik açısı vardır.
Dar	Bütün açıları, bir dik açıdan küçüktür.
Geniş	Bir açısı, dik açıdan büyüktür.
Dışbükey Dörtgenler	
Dışbükey dörtgenler	Sadece dörtkenara sahip dışbükey çokgenler.
Uçurtma	Komşu kenarları birbirine eş karşılıklı iki çift.
Yamuk	En az bir paralelkenar çiftine sahip.
İkizkenar yamuk	Karşılıklı bir çift kenarı birbirine eş.
Paralelkenar	İki çift paralelkenarı olan.
Dikdörtgen	Bir dik açısı olan paralelkenar.
Eşkenar dörtgen	Bütün kenarları birbirine eş olan paralelkenar.
Kare	Bütün kenarları birbirine eş ve bir dik açısı olan paralelkenar.

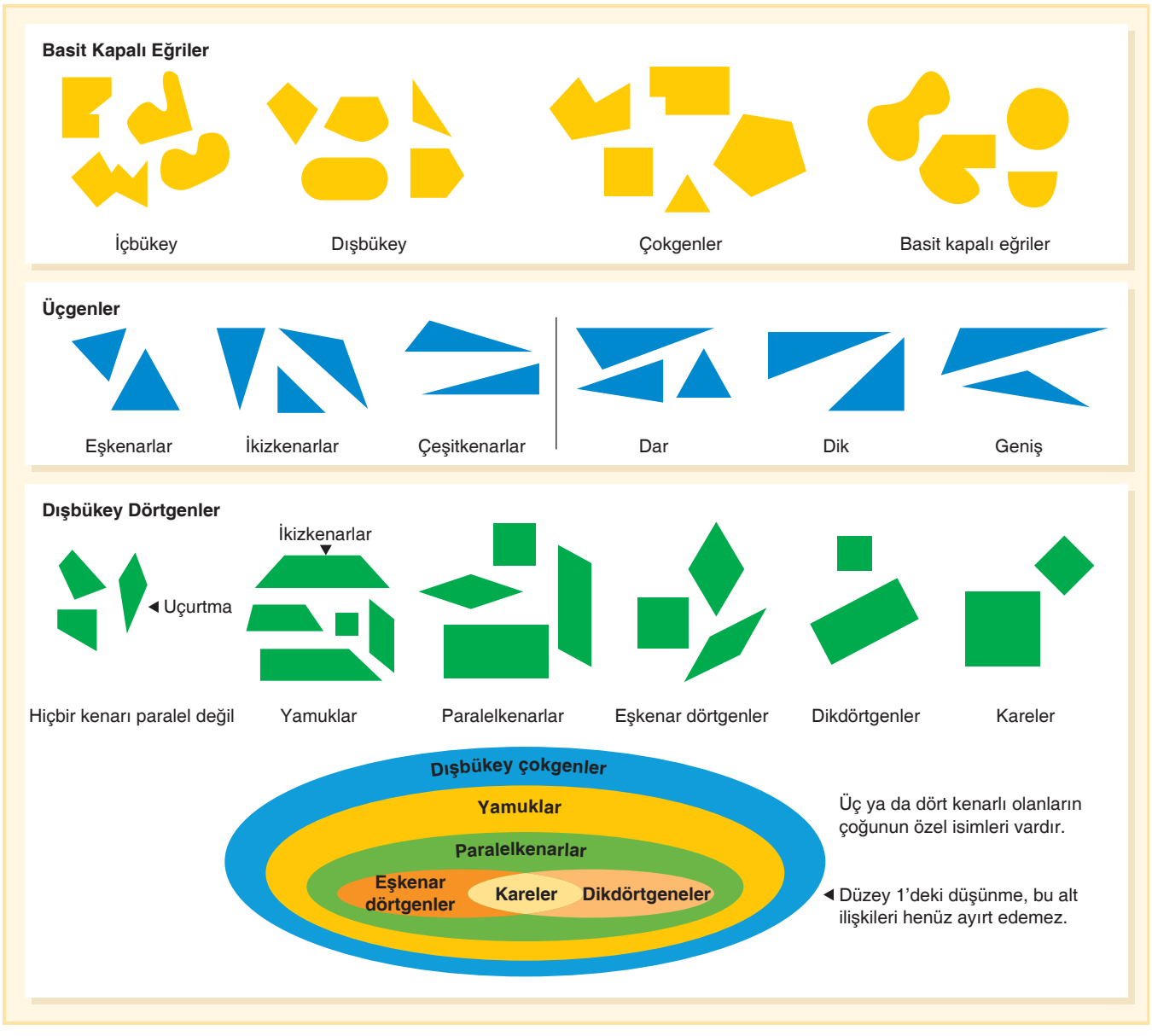
çevrilir. Bu dönemde, öğrencilere şekillerin doğru isimlerini ve özelliklerini öğrenmek anlamlı gelecektir.

Anlaşılsın diye, iki ve üç boyutlu şekillerin tanımları burada verilmiştir. Şekillerin tanımlarının, iki ya da üç şekil arasındaki ilişkileri içerdiğini fark edeceksiniz.

İki Boyutlu Şekillerin Özel Kategorileri Tablo 20. 1 (s. 410), iki boyutlu şekillerin bazı önemli sınıflandırmalarını listelemektedir. Bu şekillerin örnekleri, Şekil 20.13'te bulunabilir.

Dörtgenler ve paralelkenarların sınıflandırılmasında bazı alt kümeler örtüşmektedir. Örneğin, bir kare hem dikdörtgen hem de eşkenar dörtgendir. Bütün paralelkenarlar aynı zamanda yamuktur ama bütün yamuklar paralelkenar değildir[3]. Düzey 1'deki çocuklar bu türden alt ilişkileri görmede zorluk yaşamaya devam ederler. Bir karenin, eşkenar dörtgenin ve dikdörtgenin özelliklerini doğru olarak listeleyebilir ama kareyi "eşkenar dörtgen" veya "dikdörtgen" değilmiş gibi sınıflandırırlar. Öğrencilerinizi; dördüncü veya beşinci sınıfa gelince, sınıflandırmalarında daha net olmaları konusunda teşvik ediniz. Burger (1985), ilköğretimin daha üst sınıflarındaki öğrencilerin diğer bağlamlar-

[3] Yamuğun bazı tanımları, *sadece bir paralelkenar çiftini* özellikle belirtmektedir. Bu durumda paralelkenar yamuk olmayacaktır. University of Chicago's School Mathematics Projects-UCSMP (Chicago Üniversitesi Okul Matematiği Projesi) "en az bir paralelkenar çifti" ifadesini kullanmaktadır. Bu da paralelkenar ve dikdörtgenlerin yamuk olduğu anlamına gelir.



Şekil 20.13 İki boyutlu şekillerin sınıflandırılması.

daki bu türden sınıflandırma şemalarını doğru bir şekilde kullanabildiklerine dikkat çekmiştir. Örneğin, bir sınıftaki öğrenciler, bireysel olarak birden fazla kulübe üye olabilir. Kare, diğer iki kulübe ait olan bir dörtgen örneğidir.

Tablo 20.2

Üç Boyutlu Şekillerin Sınıflandırılması

Şekil	Tanım
Ayrıt ve köşelerine göre sınıflandırma	
Küre ve "yumurtamsı" şekiller	Ayrıtı ve köşesi (köşeleri) olmayan şekiller. Ayrıtı olup köşesi olmayan şekiller (örneğin, uçan daire). Köşesi olup ayrıtı olmayan şekiller (örneğin, Amerikan futbol topu).
Yüz ve yüzeylerine göre sınıflandırma	
Çokyüzlü	Bütün yüzleriyle oluşturulmuş şekiller (yüz, bir katı cismin düz yüzeyidir). Tüm yüzeyleri yüzlerden oluşmuşsa bütün ayrıtlar düz doğrular olur. Yüzlerin ve yuvarlak yüzeylerin bir kombinasyonu (dairesel silindirler bunun örneğidir, ama bu bir silindirin tanımı değildir). Eğri yüzeylere sahip şekiller. Ayrıta sahip olan/olmayan ve köşesi olan/olmayan şekiller. Yüzleri paralel olabilir. Paralel yüzleri birbirini kesmeyen düzlemlerde bulunanlar.
Silindirler	
Silindir	İki eş ve birbirine paralel yüzler tabanlar olarak adlandırılır. İki tabandaki tüm noktaları karşılıklı olarak birleştiren doğrular her zaman paraleldir. Bu paralel doğrular, silindirin elemanları olarak adlandırılır.
Dik silindir	Tabanlarına dik elemanlara sahip silindir. Dik olmayan silindir, *eğik silindir*dir.
Prizma	Tabanları çokgen olan silindir. Bütün prizmalar silindirlerin özel durumlarıdır.
Dikdörtgen prizma	Tabanları dikdörtgen olan silindir.
Küp	Kare kenarlara sahip kare prizma.
Koniler	
Koni	Sadece bir yüze ve bu yüze ait olmayan bir köşeye sahip katı cisim. Tabanın kenarlarındaki herhangi bir noktadan köşeye düz doğrular (elemanlar) çizilebilir. Taban herhangi bir şekil olabilir. Köşenin doğrudan tabana karşılık bir yerde olması zorunluluğu yoktur.
Dairesel Koni	Tabanı daire olan koni.
Piramit	Tabanı çokgen olan koni. Köşeleri birleştiren bütün yüzler üçgendir. Piramitler tabanlarındaki şekillere göre adlandırılırlar: üçgen piramit, kare piramit, sekizgen piramit, vb. Bütün piramitler, konilerin özel durumlarıdır.

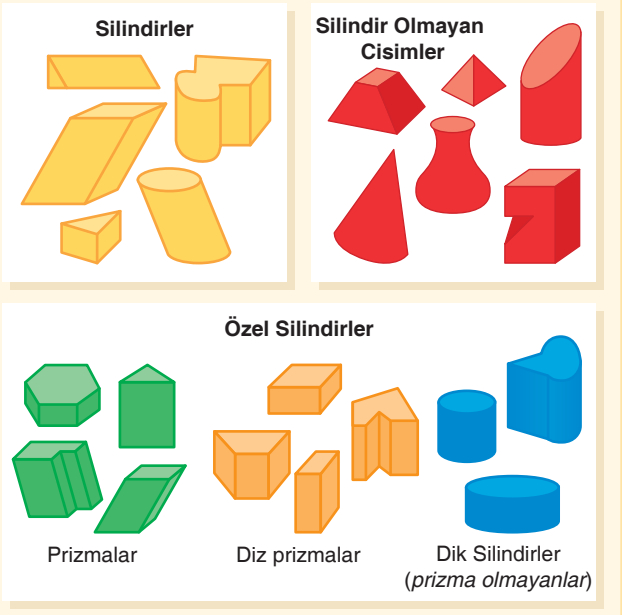
Üç Boyutlu Şekillerin Özel Kategorileri. Üç boyutta da önemli ve ilginç şekil ve ilişkiler vardır. Tablo 20. 2, katı cisimlerin sınıflandırılmasını açıklamaktadır. Şekil 20. 4'te silindir ve prizma örnekleri yer almaktadır. Burada verilen prizmaların, silindirlerin özel bir sınıfı (çokgen bir tabana sahip silindir) olarak tanımlandığına dikkat ediniz. Şekil 20.15, koni ve silindirlerin benzer bir gruplamasını göstermektedir.

Durup Düşün!

Takip eden şu ifadeyi açıklayınız: Prizmalar nasıl silindir iseler piramitler de konidirler. Hacim formüllerini öğrenirken bu ilişki nasıl faydalı olabilir?

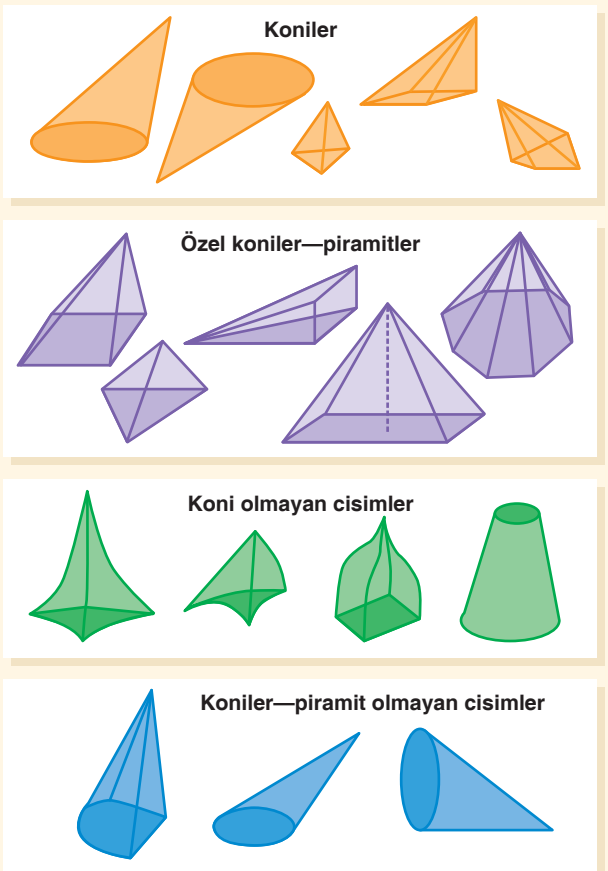
Çoğu ders kitabı; silindiri, çok katı bir şekilde dairesel silindir olarak tanımlamaktadır. Bu kitapların diğer silindirler için özel isimleri yoktur. Bu tanıma göre, prizma silindirin özel bir hali değildir. Bu da, tanımların geleneksel olarak yapıldığı olgusuna işaret etmektedir ve tüm gelenekler üzerinde de evrensel bir uzlaşı yoktur. Bölüm 19'daki hacim formüllerine tekrar geri dönerseniz burada verilen silindir ve konilerin daha kapsamlı tanımlarının, herhangi bir silindir için de (dolayısıyla prizmalar için de) geçerli olan tek bir formüle (piramit ve koniler için de doğru olan benzer ifadeye) izin verdiğini görürsünüz.

Ayırma ve Sınıflandırma Etkinlikleri. Aşağıdaki etkinlik, şekillerin sınıflandırmasını yaparken kullanabileceğiniz iyi bir yöntem sağlamaktadır.



Silindirler birbirine paralel iki yüze sahiptirler ve paralel doğrular bu yüzlerdeki karşılıklı noktaları birleştirirler. Paralel yüzler çokgen ise silindir, prizma olarak adlandırılır.

Şekil 20.14 Silindir ve prizmalar



Koni ve çokgen tabanlı konilerin (piramitlerin) tümü, tabandaki her bir noktayı köşeyle birleştiren dik doğru elemanlarına sahiptir. (Evet, piramit koninin sadece özel bir halidir.)

Şekil 20.15 Koni ve piramitler.



Şekillerin ortak sahip olduğu şeyin ne olduğunu keşfetmek için özelliklerin dikkatlice incelenmesi gerekmektedir.

Şekil 20.16 Gizemli bir tanım.

Etkinlik 20.7

Gizemli Tanım

Tepegöz veya beyaz tahtayı kullanarak Şekil 20.16'daki örneğe benzer mantık etkinliklerini yapınız. İlk setinizde, tüm olası değişkenleri dikkate aldığınızdan emin olunuz. Örneğin, Şekil 20.16'da eşkenar setinde bir kare bulunmaktadır. Benzer şekilde, net bir tanıma ulaşmalarına yardımcı olacak örneklere mümkün olduğu kadar yakın olacak çekici karşı örnekler seçiniz. Üçüncü veya karışık bir set, öğrencilerin çoğunun büyük bir olasılıkla kafalarının karışacağı bu türden karşı örnekleri de içermelidir. Öğrenciler, seçimlerini gerekçelendirmelidir.

"Gizemli Tanım" yaklaşımının değeri, öğrencilerin kavramsal gelişimleri üzerine fikirlerini ve tanımlarını dayandırabilmelerini müm kün kılmasıdır. Tanımlar karşılaştırılıp tartışıldıktan sonra, konunun anlaşılması için klasik "kitabi" tanımı verebilirsiniz.

Bir sonraki etkinlik, özellikle üçgen tiplerini veya sınıflarını tanımlamak için iyi bir örnektir ve farklı bir yaklaşımı kullanmaktadır.

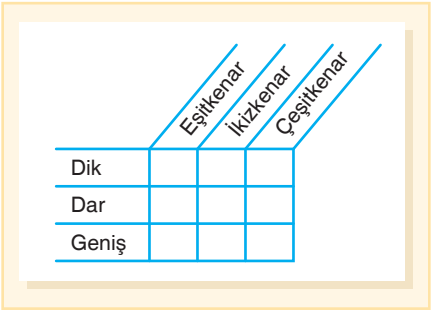
Etkinlik 20.8

Üçgen Gruplaması

Çeşitli üçgenlerin bulunduğu çalışma yaprağından çoğaltınız (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 58). Dik, dar ve geniş açılı üçgen örneklerine, eşit kenar, ikizkenar ve çeşitkenar üçgen örneklerine ve bu kategorilerin olası tüm kombinasyonlarını temsil eden üçgenlerin olmasına dikkat ediniz. Öğrencilerinizden bu üçgenleri çalışma yapraklarından kesip çıkarmalarını isteyiniz. Görev, herhangi bir üçgen iki gruba birden ait olmayacak şekilde tüm seti birbirinden ayrı üç gruba ayırmaktır. Bu görev yerine getirildiğinde ve grupların açıklamaları yazıldıktan sonra öğrenciler, üç farklı gruplama oluşturmak için gereken ikinci bir ölçüt bulmalıdır. Öğrenciler, sadece açı büyüklerine veya sadece eşkenarlara bakmaları konusunda ipucuna gerek duyabilirler ama mümkünse bu ipuçlarını vermeyiniz.

"Üçgen Gruplaması", tahtaya tanımların listesi yazılmadan ve bu tanımları öğrencilerin ezberlemesi istenmeden

üçgen çeşitlerinin altı farklı tanımı sonucunu doğurur. Tamamlayıcı bir etkinlik olarak takip eden tabloyu yapınız.



Durup Düşün!

Tablodaki dokuz hücreden ikisi doldurmak mümkün değildir. Hangi ikisi olduğunu ve neden doldurulamayacağını söyleyebilir misiniz?

Dörtgenler (dört kenarlı çokgenler), özellikle üzerinde inceleme yapmak için zengin bir kaynak oluşturmaktadır. Dik, dar ve geniş açı, eş doğru parçası ve eş açı ile simetri (hem doğru hem de dönme simetrisi) kavramlarıyla öğrenciler bir kez aşinalık kazandı mı sayfa 402-403'teki Etkinlik 20.2-Dörtgenler için Özellikler Listesi bu fikirleri bir araya getirmenin ve özelliklerin farklı setlerinin şekillerin özel sınıflarına nasıl uygulanabileceğini görmeye başlamalarının iyi bir yoludur. Öğrenciler bu etkinlikte, belli bir şekil sınıfı için bulabilecekleri tüm özellik listelerini oluşturmaya çalışırlar. Öğrenciler önce paralelkenarla başlayarak, sonra eşkenar dörtgen, daha sonra dikdörtgen ve sonunda kareler için özellik listelerini paylaşırlar.

Sınıf, listeye konan her şeyle aynı fikirde olmak zorundadır. Sunum ve tartışma sırasında yeni ilişkiler ortaya çıktıkça uygun terminolojiyi tanıtabilirsiniz. Örneğin, iki köşegen kare köşe oluşturacak şekilde kesişirse o zaman köşegenler birbirine *dik*tir. *Paralellik*, *eşlik*, *açıortay*, *orta nokta* vb. diğer ifadeler öğrenciler tanımlarını yazdıkları sırada netleştirilebilir. Bu, aynı zamanda "eşlik" için ≅ veya "paralellik" için ∥ sembollerini tanıtmanın tam sırasıdır. Genişletme etkinliği olarak, Etkinlik 20. 2'yi uçurtma ve yamuklar için tekrarlayınız. Ayrıca, benzer etkinlikler üç boyutlu şekilleri tanıtmak için de kullanılabilir.

Çizim Etkinlikleri. Öğrencilerin şekilleri oluşturmaları veya çizmeleri, Düzey1'de önemli bir yer tutmaya devam eder. Dinamik geometri yazılımları (*The Geometer's Sketchpad*, *Cabri* ve *Wingeom*), şekilleri bu düzeyde incelemeyi çarpıcı bir şekilde zenginleştirir.

Aşağıdaki etkinlikte öğrenciler, farklı dörtgen sınıflarının köşegenlerini inceleyebilirler.

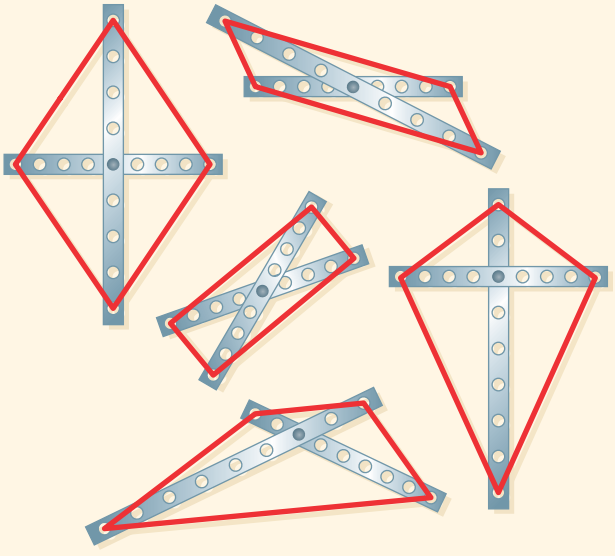
Etkinlik 20.9

Köşegen Şeritleri

Bu etkinlik için öğrenciler, 2 cm genişliğinde üç adet mukavvadan şeritlere gerek duyacaktır. İkisi aynı uzunlukta (yaklaşık 30 cm) ve üçüncüsü biraz daha kısa (yaklaşık 20 cm) olmalıdır. Şerit boyunca birbirine eşit mesafede dokuz delik açınız. İki şeridi birleştirmek için bir raptiye kullanınız. Şekil 20.17'de gösterildiği gibi deliklerin uç kısımlarını birleştirerek bir dörtgen oluşturunuz. Açı, uzunluk ve parçaların oranları için olası özellikler listesini öğrencilerinize veriniz. Görevleri, farklı çokgenler üretecek köşegenlerin özelliklerini belirlemek için şeritleri kullanmaktır. Öğrenciler, farklı varsayımları denemek için noktalı kâğıtlar üzerinde çizimler yapmak isteyebilir.

Her çeşit dörtgen, sadece uzunluk, parçalarının oranları ve dik olup olmamasına göre köşegenleri yardımıyla tek bir şekilde tanımlanabilir. Herhangi bir dinamik geometri yazılımı da bu inceleme için mükemmel bir araçtır.

Daireler. Dairelerin farklı parçalarını ölçerek birçok ilginç ilişki gözlenebilir. Bunlar arasında en önemli ve şaşırtıcı olanı, dairenin çevre uzunluğu ile çapı arasındaki orandır.



Dörtgenler köşegenleri yardımıyla belirlenebilir. Her bir köşegenin uzunluğunu, nereden geçtiğini ve birbirleriyle yaptıkları açıları dikkate alınız. Hangi şartlar paralelkenar/dikdörtgen/eşkenar dörtgen sonucunu doğurur? Şu soru üzerinde düşünmelerini isteyiniz: Hangi özellikler ikizkenar olmayan bir yamuk sonucunu doğurur?

Şekil 20.17 Dörtgenlerin köşegenleri.

Etkinlik 20.10

Pi'yi Keşfetme

Kavanoz kapakları, borular, konserveler, çöp kovaları vb. dairesel nesnelerin, hem çap hem de çevrelerini dikkatli bir şekilde ölçmeleri için öğrencileri gruplara ayırınız. Çevreyi ölçmek için nesnenin etrafını bir kez iple dolayın ve sonra da ipin uzunluğunu ölçünüz. Jimnastik salonlarının zeminlerinde ve oyun alanları üzerinde yer alan büyük dairelerin de çevrelerini ölçünüz. Çevreyi ölçmek için, küçük bir yuvarlak tekerlek veya ip kullanınız.

Tüm gruplardan çevre ve çap uzunluklarını toplayarak bir tabloya kaydediniz. Ayrıca, her bir daire için çevre uzunluklarının çapa oranları da hesaplanmalıdır. Elde edilen veriler; yatay eksen, çapları; düşey eksen ise çevre uzunluklarını gösterecek şekilde grafik ekseninde noktalar şeklinde gösterilmelidir.

Oranların çoğu, 3.1 veya 3.2 civarında olmalıdır. Dağılım grafiği, orijinden geçecek şekilde bir doğruya yaklaşmalıdır. Bu doğrunun eğimi de, 3.1'e yakın olmalıdır (Denk oranların grafiklerinin her zaman orijinden geçen doğrular olacağını Bölüm 18'den hatırlayınız). Bu oranın tam değeri, Yunan alfabesinde (yaklaşık 3.14159) π (pi) ile gösterilen bir irrasyonel sayıdır.

Etkinlik 20.10'daki en önemli husus, öğrencilerin herhangi bir dairede, çevrenin çapa oranı olarak π'yi kavramada açık bir anlayış geliştirmeleridir. π sayısı, matematik formüllerinde geçen garip bir sayı değil doğal olarak karşımıza çıkan ve evrensel bir orandır.

Dinamik Geometri Yazılımı. Herhangi bir dinamik geometri yazılımında, nokta, doğru ve geometrik şekiller bilgisayarda sadece bir fare veya kalem (stylus) kullanılarak kolayca çizilebilir. Geometrik nesneler bir kez çizildi mi, üzerinde sınırsız çeşitlikte hareketler yapılabilir ve manipüle edilebilir. Uzaklık, uzunluk, alan, açı, eğim ve çevreler ölçülebilir. Şekiller değişirken, ilgili tüm ölçümler de anında güncellenir.

Başka doğru veya doğru parçalarına dik ya da paralel doğrular çizilebilir. Başka açı ve doğru parçalarına eş, açı ve doğru parçaları çizilebilir. Bir doğru parçasının ortasına bir nokta yerleştirilebilir. Bir şeklin, yansıması, dönmesi ve belli bir oranda büyültülmüş/küçültülmüş şekli üretilebilir. Buradaki en anlamlı fikir, bir geometrik şekil diğeriyle belli bir ilişkiye sahip olacak şekilde oluşturulduktan sonra, her iki nesneyi nasıl hareket ettirirseniz ettirin veya nasıl değiştirirseniz değiştirin bu ilişkinin korunmasıdır.

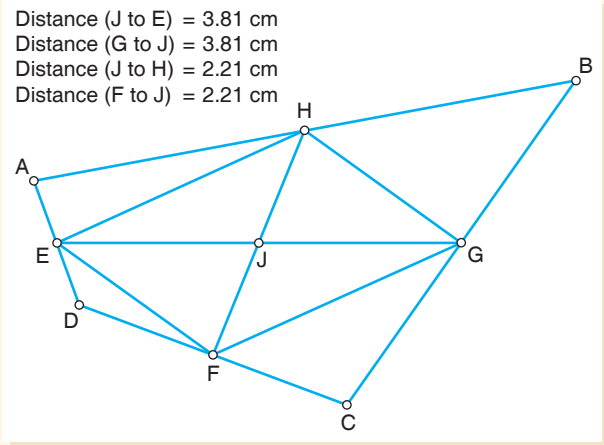
En yaygın olarak bilinen dinamik geometri programları, *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press), *Wingeom* (Peanut Software'in açık kaynaklı yazılımı), *Geogebra* (açık kaynak yazılım) ve *Cabri Geometry II*'dir (Texas Instruments).

Dinamik Geometri Örnekleri. Dinamik geometri yazılımlarının sahip olduğu potansiyeli (ve keyfi) takdir etmek için onu gerçekten tecrübe etmelisiniz. Şimdilik bu programların nasıl çalıştığını göstermek için burada bir örnek verilmeye çalışılacaktır.

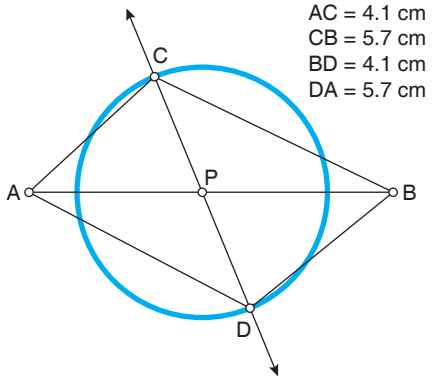
Şekil 20.18'de, serbestçe çizilen bir ABCD dörtgeninin orta noktaları birleştirilmiştir. Ayrıca bu noktalar kullanılarak oluşturulan dörtgenin (EFGH) köşegenleri çizilmiş ve ölçülmüştür. A, B, C ve D noktaları, ekranda nasıl hareket ettirilirse ettirilsin (hatta dörtgen ters bile çevrilebilir), (orta noktaları ve köşegenleri birleştiren) doğrular aynı ilişkileri koruyacak ve ölçme sonuçları anında güncellenecektir.

Düzey1'deki düşünme nesnelerinin, şekillerin *sınıfları* olduğunu hatırlayınız. Bir dinamik geometri yazılımı yardımıyla dörtgen çizilirse sadece bir şekil gözlenebilir (kağıt veya geometri tahtasında olduğu gibi). Ama burada, dörtgen sınırsız şekilde büyültülebilir/küçültülebilir veya değiştirilebilir. Böylece öğrenciler, aslında bir şekli değil şekillerin sınıfında yer alan çok sayıda örneği inceleyebilir. Şekil değiştiğinde bir özellik veya oluşturulmuş ilişki değişmezse bu özellik, belli bir şekilden ziyade şekillerin sınıfıyla ilişkilendirilebilir.

Şekil 20.19'daki diğer örnek, dinamik geometri yazılımlarıyla dörtgenleri köşegenlerinden yola çıkarak incelemenin nasıl yapılabileceğini göstermektedir. Çizim bu tarzda oluşturulduktan sonra ACBD'nin köşegenleri, çizim



Şekil 20.18 Dörtgenlerinsahip olduğu ilginç bir özelliği gösteren bir *Sketchpad* çizimi.



Orta noktası P olan bir AB doğru parçası çiziniz.

Kontrol noktası C ve merkezi P olan bir çember çiziniz.

C ve P noktalarından geçen doğruyu çiziniz. Sonra kesişim noktası olan D'yi oluşturunuz.

ABCD'yi oluşturunuz ve her bir kenarını ölçünüz.

C noktasını tutup sürükleyiniz. Birbirinden farklı hangi dörtgenleri oluşturabilirsiniz?

Oluşturduğunuz her şeklin köşegenleri için doğru olan şey nedir?

Oluşturduğunuz şekillerin köşegenleriyle ilgili ne söyleyebilirsiniz?

Şekil 20.19 Köşegenleri birbirine ortalayan dörtgenler.

nasıl değiştirilirse değiştirilsin her zaman birbirini ortalayacak şekilde kesecektir. C noktası sürüklenerek, ACBD paralelkenara, dikdörtgene, eşkenar dörtgene ve kareye dönüştürülebilir. Bu şekillerin her birisi için köşegenlerle ilgili ek bilgi, çizimlere bakılarak elde edilebilir.

Dinamik geometri programları, simetri ve dönüşüm (kaydırma, çevirme ve döndürme) kavramlarını incelemek için de etkilidir. NCTM'nin yayımladığı dergilerde veya internette, Düzey1'e uygun çok sayıda mükemmel etkinlik bulunmaktadır.

Düzey 2'de Düşünenler İçin Şekiller ve Özellikler

Düzey-2'de odak, şekillerin özelliklerini basitçe gözlemekten mantıksal akıl yürütmenin kullanıldığı incelemelere kaymaktadır. Öğrenciler, farklı geometrik özelliklerle ilgili bir anlayış geliştirip bu özellikleri şekillerin önemli kategorileriyle ilişkilendirirken, varsayımlar oluşturma ve informel çıkarımsal argümanları incelemek esas amaç olacaktır. Öğrenciler, basit ispatları yapmak (veya en azından takip etmek) ve cebirle doğrudan ilişki kurulabilecek fikirleri incelemek için çaba göstermeye başlamalıdır.

Tanımlar ve İspatlar. Önceden verilen Düzey 1 etkinliği olan "Dörtgenler için Özellikler Listesi" (Etkinlik 20.2) ve Düzey 2 etkinliği olan "En az sayıyla tanımlama listeleri/EAST" (Etkinlik 20.3) etkinlikleri, gerçekten de bu iki düzeyi birbirinden açık şekilde ayırmaktadır (daha fazla bilgi için bkz. Groth, 2006). Paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve karenin her biri, en az dört tane tanımlama listesine sahiptir. Her bir şekil için oluşturulan bu listenin en ilginç özelliği, bu listenin sadece şeklin köşegenleriyle ilgili özellikleri içermesidir. Örneğin, köşegenleri birbirini dik (dik açıyla birbirini kesen) ortalayan dörtgen, eşkenar dörtgendir.

EAST, gerçekte şekilleri gözlemekten ziyade mantıksal düşünmeyle ilgilidir. Öğrenciler, genel karar verme süreciyle meşguldür: "Özelliklerin sadece bu listesini seçersek o liste belli bir şekil olmasını garantiler mi?". Bunun diğer bir özelliği, bir tanımı oluşturan şeyin ne olduğunu tartışmak için imkân sunmasıdır. Gerçekte, herhangi bir EAST, şeklin tanımı bile olabilir. Genelde kullandığımız tanımlar, muhtemelen kendisiyle anlamamız daha kolay olduğu için seçilen bu listelerin bizzat kendisidir. Özelliklerin bir tanımını içeren listede olmasına rağmen, köşegenleri birbirini ortalayan dörtgen deyince akla hemen paralelkenar gelmez.

Aşağıdaki etkinlik, dörtgenlerle sınırlandırılmamasına ve üç boyutlu şekilleri de içermesine rağmen, "Özellik Listeleri" etkinliğinin bir devamı olarak iyi bir etkinliktir.

Etkinlik 20.11

Doğru/Yanlış

Takip eden formatlara benzer şekilde, doğru ve yanlış önerme listesi hazırlayınız: "_____ ise, o zaman _____", "Bütün _____", "Bazı _____"

Çok sayıda olası önerme olmasına rağmen birkaç örnek şu şekilde önerilebilir:

- **Şekil kare ise o zaman eşkenar dörtgendir.**
- **Bütün kareler, dikdörtgendir.**
- **Bazı paralelkenarlar, dikdörtgendir.**
- **Bütün paralelkenarların, eş köşegenleri vardır.**
- **Bir şekil, iki doğru simetrisine sahipse bir dörtgen olmak zorundadır.**
- **Cisim silindirse o zaman prizmadır.**
- **Bütün prizmaların bir simetri düzlemi vardır.**
- **Bütün prizmaların kare tabanları vardır.**
- **Prizmanın bir simetri düzlemi varsa o prizma dik prizmadır.**

Buradaki görev, önermelerin doğru olup olmadığına karar vermek ve bu kararı destekleyen delillerisunmaktır. İyi bir ders için dört ya da beş doğru/yanlış önermesi yeterlidir. Bu türden önermeler anlaşıldığında, öğrencilerinizden kendi hazırladıkları beş önermeyi arkadaşlarına sormalarını isteyiniz. Listeler, doğru ve

yanlış önermelerinin bir kombinasyonunu içermelidir. Daha fazla fikir sahibi olmak için Renne'nin (2004) önerdiği makaleye bakınız. Öğrencilerin hazırladıkları listeler, daha sonra takip eden derslerde kullanılabilir.

Durup Düşün!

Kare ve dikdörtgenler için hazırlanan özellik listesini kullanarak "Bütün kareler dikdörtgendir." önermesini ispatlayınız. Bu önermeyi anlamak için mantıksal akıl yürütmeyi kullanmanız gerektiğine dikkat ediniz. Bu ilişkiyi geliştirmeye hazır olmayan öğrencilerinizi bunu yapmaya hemen zorlamak iyi bir fikir değildir.

Aşağıdaki etkinlik, öğrencilerin liseden çok önce bile geometride ispatlar yapabileceklerini göstermek için Sconyers (1995) tarafından tasarlanmıştır.

Etkinlik 20.12

Bir Çokgenden İki Çokgen Elde Etme

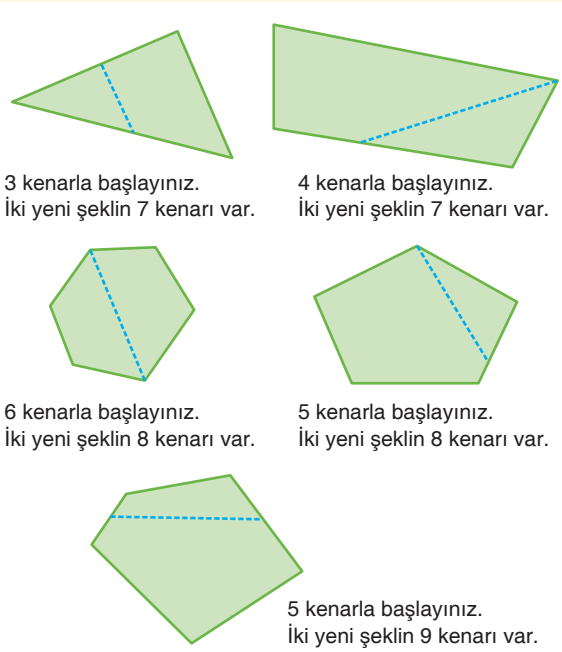
Aşağıdaki problemi öğrencilerinize veriniz:

> **Belli bir sayıda kenara sahip dışbükey bir çokgenle başlayınız. Çokgene ait iki noktayı bir doğru parçasıyla birleştirerek iki yeni çokgen oluşturunuz. Yeni oluşan bu iki çokgenin toplam kaç kenarı vardır.**

Birkaç örnek gösteriniz (Bkz. Şekil 20.20). Öğrencilerinizden çokgenleri çizmelerini ve kesip ayırarak incelemelerini isteyiniz. Öğrencilerinizi, başlangıçtaki çokgenin kenar sayısı ile daha sonra elde edilen çokgenlerin kenar sayılarını bir tablo yaparak göstermeye teşvik ediniz. İlk olarak öğrenciler, genel bir kural için varsayımlarda bulunmalıdır. Gruplar, varsayımları konusunda rahat olduklarında, önermelerinin neden doğru olduğunu açıklamaya (bu ise varsayımı ispatlamaktır) gayret göstermelidirler.

Sonuçta ortaya çıkan şekillerin kenar sayısı, açıkça şeklin nereden kesildiğine bağlıdır. Üçgen haricindeki şekiller için üç olasılık vardır. Her bir olasılık için açık bir argüman ortaya konmalıdır. Uygun bir varsayım ve ispatı size bırakılmıştır ama birlikte çalışan öğrencilerinizin bu görevi yapacağına inanınız.

Diğerlerinde incelediğimiz gibi bu görevde de önermelerin ispatının öğrencileriniz tarafından yapılmasına önem veriniz. Tahtaya bir teorem yazıp öğrencilerinizin ispatlamasını isterseniz o teoremin zaten doğru olduğunu söylemiş olursunuz. Tam tersi olarak sınıfın incelediği bir geometrik durumla ilgili öğrenciler bir önerme geliştirirse yanına bir soru işareti konup bir *kestirim*(doğru olduğu henüz belirlenmemiş önerme) olarak tahtaya yazılabilir. Şu soruları sorabilirsiniz: "Doğru mudur?", "Her zaman doğru mudur?", "İspatlayabilir misiniz?", "Karşı bir örnek bulabilir misiniz?". Tartışmaların bir sonucu olarak akıl yürütmeye dayalı çıkarımsal argümanlar yaptırabilir (Boats, Dwyer, Laing, & Fratella, 2003).



Şekil 20.20 Herhangi birçokgenle başlayıp bu çokgeni iki parçaya ayıracak bir doğru parçası çiziniz. Oluşan iki yeni çokgenin toplam kaç kenarı vardır?

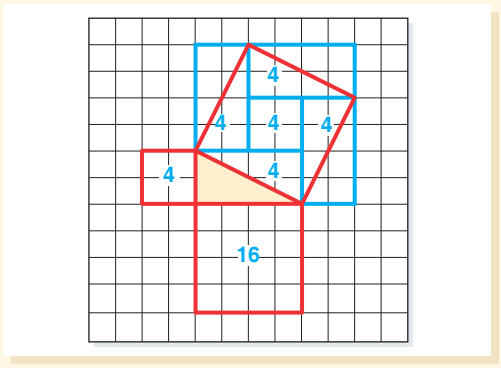
Pisagor Bağıntısı. *Pisagor bağıntısı*, özel bir dikkati hak edecek kadar önemlidir. Geometri terimlerini kullanarak bu bağıntı şöyle ifade edilebilir: Bir dik üçgenin her bir kenarı üzerine kare çizilirse daha küçük olan iki karenin alan toplamı en uzun kenar üzerindeki (hipotenüs) karenin alanına eşittir. Bu bağıntıyı keşfetmek için aşağıdaki etkinliği dikkate alınız.

Etkinlik 20.13

Pisagor Bağıntısı

Öğrencilerinizden yarım santimetrelik kareli-kağıt üzerine bir dik üçgen çizmelerini isteyiniz (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 36). İki dik kenarın uzunluklarını belirterek her bir öğrenciye farklı bir dik üçgen veriniz. Öğrenciler, dik kenarlar ve hipotenüs üzerine birer kare çizip karelerin her birinin alanını bulacaktır (Hipotenüsteki karenin alanı her bir kenarı bir dikdörtgenin köşesi olacak şekilde parçalara ayrılarak bulunabilir. (Bkz. Şekil 20.21). Alanları, bir tabloya kaydediniz (Birinci kenardaki karenin alanı, ikinci kenardaki karenin alanı, hipotenüsteki karenin alanı) ve öğrencilerinizden kareler arasındaki ilişkiyi görmelerini isteyiniz.

Bu son etkinliği genişletme adına öğrenciler, dik üçgenlerin dik kenarları üzerine farklı şekiller çizme ve alanları



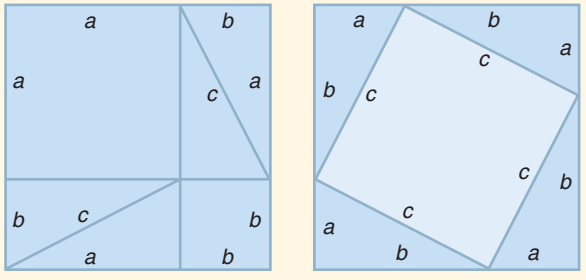
Şekil 20.21 Pisagor bağıntısı. Kareli kağıt üzerine çizildiğinde, bütün karelerin alanlarının kolayca belirlenebildiğini fark ediniz.

hesaplama üzerinde çalışabilir. Örneğin, kare yerine yarım daire ve eşkenar üçgenler çiziniz. Dik üçgenin üç kenarı üzerinde çizilecek bütün düzgün çokgenler aynı bağıntıya sahip olacaktır.

Ya ispatı için ne söylenebilir? Şekil 20.22'deki birbirine eş iki büyük kare birlikte Pisagor bağıntısının görsel bir ispatını göstermektedir (Nelson, 2001). Her iki karenin de birbirinin aynısı ama farklı şekilde dizilmiş dört üçgen içerdiğine dikkat ediniz. Kare ve üçgenlerin alanları toplanarak birbirine eşitlenir ve her iki karedeki ortak alanlar çıkarılarak Pisagor bağıntısı elde edilebilir.

Durup Düşün!

Pisagor bağıntısının ispatını yapmak için Şekil 20.22'de verilen iki çizimi kullanınız.



$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$a^2 + b^2 = c^2$

Şekil 20.22 İki kare birlikte "Kelime kullanmaksızın bir ispat" sunmaktadır. Bu kelimeleri söyleyebilir misiniz?

Teknoloji Notları

NCTM'nin internet sitesinde, "Standards & Focal Points" başlığı altında yer alan e-Examples, öğrencilerinizle paylaşmaya değer kelime kullanmaksızın dinamik bir ispatı içermektedir (Applet 6.5). Bu uygulama, aynı tabana ve yüksekliğe sahip paralelkenar ve dikdörtgenlerin alanlarının aynı olduğunu bilmeyi gerektirdiğinden iyi bir özet olarak düşünülebilir. ◆

İlişkileri Açıklamak mı Bulmak mı?. Düzey2'de odaklanılan nokta çıkarımsal düşünme veya akıl yürütmedir. Dinamik geometri programları, öğrencilerin tümevarımsal akıl yürüterek bulduklarına inandıkları ilişkileri desteklemeyen çıkarımsal argümanları geliştirmelerine yardımcı olabilir mi? Takip eden durumu inceleyiniz.

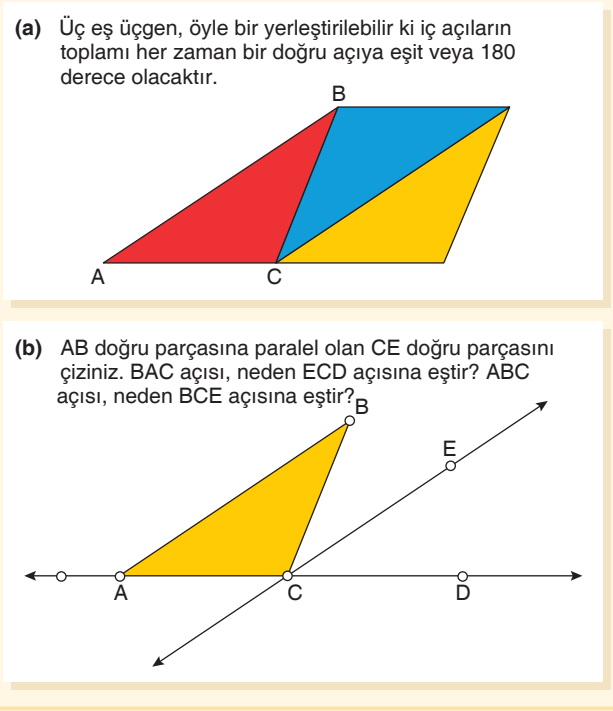
Öğrencilerinizin dinamik geometri programı kullanarak bir üçgen çizebildiklerini, tüm açıları ölçüp toplamlarını bulabildiklerini varsayınız. Üçgenin köşelerinden tutup sürüklerken açıların toplamı hep 180° kalacaktır. Öğrenciler, bir üçgenin iç açılarının toplamının her zaman 180°olacağını kestirebilecek ve tümevarımsal deneye dayalı olarak bu kestirimin doğru olduğuna ikna olacaktır (bilgisayar dışında yapılan çok sayıda etkinlik de aynı sonuca ulaştıracaktır). Yalnız az önce açıklanan bu deneyim, *sonucun neden böyle olduğunu* açıklamada başarısız olacaktır. Kağıt ve makasla veya herhangi bir dinamik geometri programıyla çarpıcı bir şekilde kolayca yapılabilecek aşağıdaki etkinliği inceleyiniz.

Etkinlik 20.14

Üçgende Açı Toplamı

Öğrencilerinizin tamamından birbirine eş iki üçgeni kesip ayırmalarını isteyiniz (üç dosya kağıdını üst üste koyunuz ve üç şekli aynı anda kesiniz). Üçgenlerden birini, bir doğru üzerine diğerini ise yönelimi aynı kalacak şekilde bu üçgenin yanına yerleştiriniz. Üçüncü üçgeni ise Şekil 20.23 (a)'da gösterildiği gibi bu iki üçgenin arasına yerleştiriniz. Bu deneyime dayanarak bir üçgendeki iç açıların toplamına yönelik nasıl bir varsayımda bulunabilirsiniz?

Bir dinamik geometri programı kullanılarak Şekil 20.23 (a)'daki gibi üç üçgeni, bir üçgenle başlayıp AC doğru parçasının sağına öteleyip ve daha sonra da aynı üçgeni BC doğru parçasının orta noktası etrafında döndürerek oluşturabilirsiniz. Başlangıçtaki üçgenin köşeleri tutulup sürüklendiğinde diğer üçgenler aynı anda değişecek ve eş olarak kalacaktır. Biz hâlâ neden açı toplamının bir doğru açı olduğunu bilmiyoruz ama bu inceleme, öğrencilerin bunun neden böyle olduğunu görmelerini mümkün kılar. İki paralel doğrunun bir kesenle yaptığı açıların özelliklerini



Şekil 20.23 Çıkarımsal ve mantıksal akıl yürütme, gözlemlerde doğru görünen ilişkileri ispatlamak için gerekmektedir.

kullanarak açı toplamının her zaman bir doğru açı olacağını iddia etmek oldukça kolaydır. İspat, size bırakılmıştır (Bkz. Şekil 20.23 (b)).

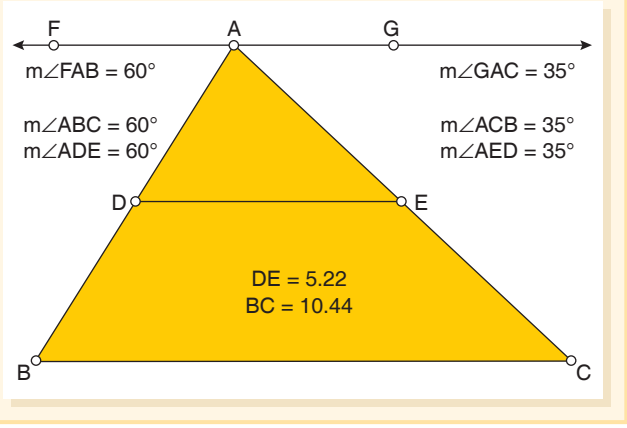
Dinamik geometri yazılımları, öğrencilerin geometrik ilişkileri gözlemelerine ve kestirimlerde bulunmalarına yardımcı olan oldukça güçlü araçlardır. Varsayımların doğruluğu, çoğunlukla aşikâr olacaktır. Bununla birlikte, Düzey 2'de niçin sorusunu sormaya başlamalıyız. Aşağıdaki etkinlik, bu noktayı destekleyerek örneklendirmektedir.

Etkinlik 20.15

Üçgenin Orta Tabanları

Bir dinamik geometri programını kullanıp bir üçgen çizerek köşelerini A, B ve C olarak adlandırınız. AB ve AC doğru parçalarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasını çiziniz ve Şekil 20.24'teki gibi DE doğru parçası olarak adlandırınız. DE ve BC doğru parçalarının uzunluklarını ölçünüz. Ayrıca ADE ve ABC açılarını ölçünüz. A, B ve C noktalarını tutarak sürükleyiniz. DE doğru parçası ile ABC üçgeninin orta tabanı ve BC ile ABC üçgenin tabanı arasındaki bağıntılarla ilgili ne tür varsayımlarda bulunabilirsiniz?

Orta tabanın, taban uzunluğunun yarısı olduğu ve tabana paralel olduğu aşikârdır ama bu neden böyle olmuştur?



Şekil 20.24 Üçgenin orta tabanı, her zaman üçgenin tabanına paralel ve tabanın yarı uzunluğu kadardır.

Öğrencilerin biraz daha rehberliğe ihtiyaçları vardır. Ama bu, onlara gerekli argümanı sunmak zorunda olduğunuz anlamına gelmemelidir. A noktasından geçen ve BC doğru parçasına paralel doğru çizmelerini öneriniz. Eş olarak bildikleri tüm açı çiftlerini listeleyiniz. ABC üçgeninin ADE üçgenine benzer olduğuna dikkat ediniz. Neden birbirine benzerdirler? Bu türden ipuçlarıyla ortaokul öğrencileri, gözledikleri şeylerin gerçekten de neden doğru olduklarını açıklamak için mantıksal argümanlar sunmaya başlayabilir.

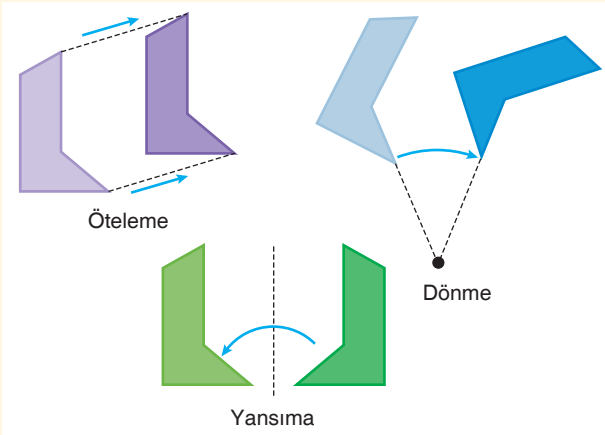
Dönüşümleri Öğrenme

Dönüşümler, bir şeklin büyüklüğünde ve pozisyonundaki değişikliklerdir. Hareket ettirilen nesnenin şeklini veya büyüklüğünü değiştirmeyen hareketler "sabit hareketler" olarak adlandırılır. Genel olarak üç sabit hareket dönüşümü tartışılacaktır: *Ötelemeler* veya kaydırmalar, *yansımalar* veya çevirmeler ve *dönme* veya döndürmeler. İlginç olması sebebiyle simetri konusu da dönüşüm konusu içine dâhil edilmiştir. Sizce neden?

Düzey 0'da Düşünenler İçin Dönüşümler

Bu düzeydeki dönüşümler kaydırma, çevirme ve döndürme gibi temel kavramları ve doğru simetrisiyle dönme simetrisinin başlangıç gelişimini tanıtmayla ilgilidir.

Kaydırma, Çevirme ve Döndürmeler. Başlangıç düzeyinde *kaydırma*, *çevirme* ve *döndürme* terimlerinin kullanımı daha uygundur. Başlangıçtaki amaç, öğrencilerin bu dönüşümleri tanımalarına yardımcı olmak ve basit şekiller üzerindeki etkilerini incelemeye başlamaktır. Bu ifadeleri tanıtırken simetrik olmayan bir şekil kullanabilirsiniz (Bkz. 20.25). Büyük bir ihtimalle ders kitabınız, dönme noktası olarak sadece bir şeklin merkezini kullanacak ve yansımaları



Şekil 20.25 Öteleme (kaydırma), yansıma (çevirme), dönme (döndürme).

merkezden geçen yatay ve düşey doğrularla sınırlandıracaktır. Bu sınırlamalar gereksizdir ve hatta yanıltıcıdır.

Takip eden kısımdaki Hareketli Adam etkinliği de öğrencilere kaydırma, çevirme ve döndürme terimlerini tanıtmak için kullanılabilir. Bu etkinlikteki dönmeler, saat yönünde çeyrek $\frac{1}{4}$, yarım $\frac{1}{2}$ve üç çeyrek $\frac{3}{4}$ dönme ile sınırlandırılmıştır. Dönme merkezi şeklin merkezi olacaktır. Yansımalar, yatay veya düşey doğrulara göre yapılacaktır. Bu sınırlandırmalar, basitleştirmek için yapılmıştır. Genel olarak dönme merkezi, şeklin üzerindeki herhangi bir yerde veya şeklin dışındaki bir yerde de olabilir. Aynı şekilde yansıma doğruları da herhangi bir yerde olabilir.

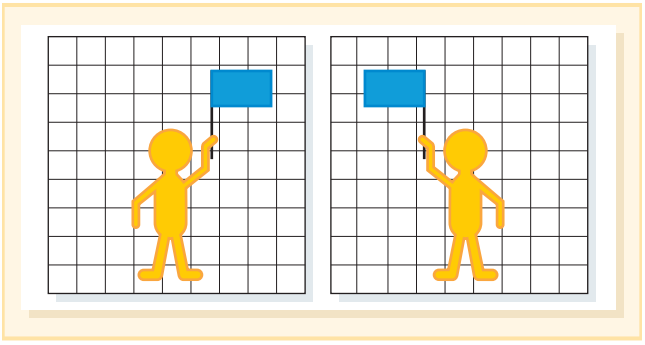
Etkinlik 20.16

Hareketli Adam

Çalışma Yaprak Seti 52-53'ü kullanarak ilk Hareketli Adam'ın kopyasını çoğaltınız ve daha sonra bu kopyaların arka kısımlarına şeklin ayna görüntüsünün kopyalayınız (Bkz. Şekil 20.26). Önce deneyiniz. Işığa tutulduğunda öndeki görüntünün arkadaki görüntüyle eşleşmesini isteyeceksiniz. Karesel bölge elde edilecek şekilde kağıdı kesiniz.Öğrencilerinizin tümüne, iki tarafında da Hareketli Adam olan kağıdı veriniz.

Olası her bir hareketi gösteriniz. Bunlardan en basiti kaydırmadır. Şekil dönmez veya tersyüz olmaz. Döndürmeleri gösteriniz. Bu etkinlikte sadece saat yönünde yapılan döndürmelerin kullanılacağını vurgulayınız. Benzer şekilde yatay çevirmeyi (tepe kısmı en alt tarafa gelir) ve düşey çevirmeyi (sol taraf sağ tarafa gelir) gösteriniz. Sınıftaki herkesten, kendi Hareketli Adam şekillerinin yöneliminin aynı olmasını dikkate alarak denemelere başlamalarını isteyiniz. Hareketlerden birisini sınıfa duyurduğunuzda öğrenciler, uygun şekilde Hareketli Adamı kaydıracak, çevirecek ve döndüreceklerdir.

Daha sonra iki Hareketli Adam'ı, herhangi bir yönelimde olacak şekilde yan yana koyarak gösteriniz.



Şekil 20.26 Kaydırma, çevirme ve döndürmeleri göstermek için Hareketli Adam kullanılmıştır (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 52 ve 53).

Görev, hangi hareket ya da hareketlerin kombinasyonunun soldaki adamla sağdaki adamı eşleştireceğine karar vermektir. Öğrenciler kendi adamlarını kullanarak bir sonuç bulmaya çalışacaktır. Öğrencilerin sunduğu çözümleri test ediniz. Eğer her iki adam da aynı pozisyonda ise, bu hareketi kaydırma olarak adlandırınız.

Durup Düşün!

İlk olarak Şekil 20.26'da solda gösterilen pozisyondaki Hareketli Adam'ı alınız. Bunun yanına ikinci Hareketli Adam'ı yerleştiriniz. Birincisinden ikincisini elde etmek için tek hareket mi yoksa birden fazla hareket (dönüşüm) mi gerekecektir? Birden fazla hareket gerektiren olası tüm durumları açıklayabilir misiniz? İkiden fazla hareket gerektiren durumlar var mıdır?

Başlangıçta, bir hareketle Hareketli Adam'larını yeni duruma getiremediklerinde öğrencilerin kafaları karışacaktır. Bu ise mükemmel bir probleme yol açar. İki hareket ihtiyaç olabileceğini önermekte çok acele etmeyiniz. Hareketli Adam'a yatay ve düşey çevirmelere ek olarak iki köşegen boyunca çevirmeler uygulandığında, istenen yeni pozisyona sadece bir hareketle getirilebilir. Bu ise öğrencilere sorgulama olanağı sunar. İki öğrenci, başlangıçta aynı konumda olan Hareketli Adam'larıyla başlasınlar. Biri, kendi Hareketli Adam'ının duruşunu değiştirerek arkadaşına, iki Hareketli Adam'ı eşleştirmek için gerekli olacak hareketin ne olduğunu söylemesini isteyebilir. Çözüm kontrol edilir ve sonra da roller değiştirilir.

Doğru ve Dönme Simetrisi. Şekil, bir doğru boyunca iki yarımı birbiriyle eşleşecek şekilde katlanabilirse, o zaman *doğru simetrisi* (ayna simetrisi) vardır denir. Katlama doğrusunun aslında yansıma doğrusu (şeklin doğrunun bir tarafında kalan parçası doğrunun diğer tarafına yansıtılır) olduğuna dikkat ediniz. Böylece doğru simetrisi ile dönüşümler arasındaki ilişki gösterilmiş olur.

Çocuklara doğru simetrisini tanıtmanın bir yolu, Şekil 20.16'daki gibi tamamı/hiçbiri yaklaşımını kullanarak örnek ve zıt örnekleri göstermektir. Diğer bir yaklaşım ise öğrencilerden bir dosya kâğıdını ortasından ikiye katlayıp

seçtikleri şekli kesip çıkarmalarını istemek olabilir. Kağıdı açtıklarında katlama çizgisi bir doğru simetrisi olacaktır. Üçüncü bir yol ise aynaları veya simetri aynalarını (simetri aynası, simetri ve denklik kavramlarını incelemek için kullanılabilen kırmızı renkli plastik görüntü yansıtıcıdır) kullanmaktır. Aynayı bir resim veya tasarım üzerine masaya dik olacak şekilde yerleştirip aynanın içine baktığınızda simetriğe sahip bir şekil göreceksiniz.

Aşağıdaki etkinlik doğru simetrisini incelemektedir.

Etkinlik 20.17

Örüntü Bloklarının Ayna Simetrisi

Öğrenciler, ortasından düz bir çizgi geçen temiz bir dosya kâğıdına ihtiyaç duyacaktır. Yaklaşık 6-8 adet örüntü bloğunu kullanarak doğrunun bir tarafında ve doğruya değecek şekilde tam bir şekil/tasarım yapacaklar. Görev, doğrunun diğer tarafında bu şeklin/tasarımın ayna görüntüsünü oluşturmaktır. Görev bittiğinde aynayı (veya simetri aynasını) kullanarak cevaplarını kontrol edecekler. Aynayı doğru üzerine yerleştirerek başlangıçtaki şeklin/tasarımın bulunduğu taraftan aynaya bakacaklardır. Ayna yerindeyken gördüğünüzle aynayı kaldırdığınızda göreceğiniz görüntü birebir aynı olmalıdır. Öğrencilerinizden birden fazla doğru simetrisine sahip şekiller/tasarımlar oluşturmalarını isteyiniz.

Simetri doğrusu düşey ise örüntü bloklarıyla simetrik tasarımları oluşturmak daha kolay gibidir. Simetri doğrusu yatay ve köşegen boyunca yerleştirildiğinde görev daha zordur.

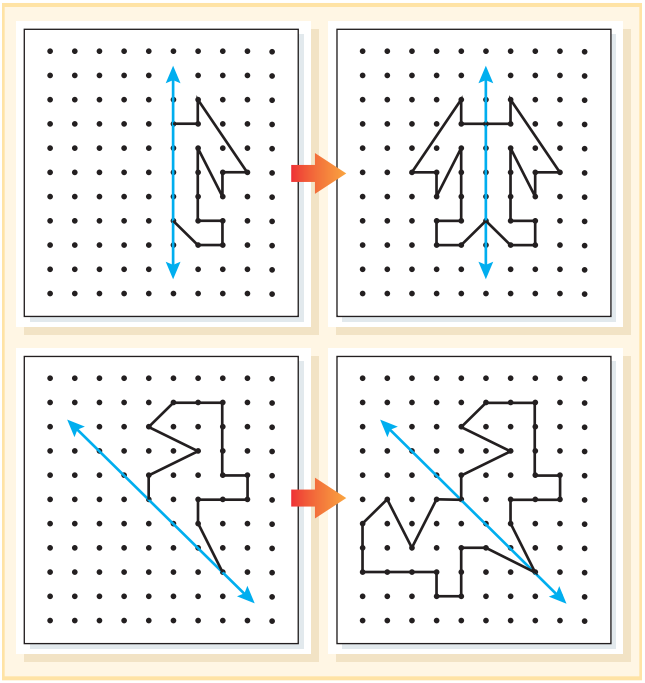
Aynı görev, geometri tahtası kullanılarak da yapılabilir. Önce, lastiği merkezden veya köşeden köşeye geçecek şekilde uzatınız. Doğrunun bir tarafında bir şekil/tasarım diğer tarafında ise görüntüsünü oluşturunuz. Aynayla kontrol ediniz. Aynı işlemler, Şekil 20.27'de gösterildiği gibi izometrik veya karesel noktalı kağıt üzerinde ya da dinamik geometri yazılımıyla da yapabilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 34 ve 38).

Üç boyuttaki düzlem simetrisi, iki boyuttaki doğru simetrisine benzemektedir. Şekil 20.28, küplerle oluşturulmuş düzlem simetrisine sahip bir şekli örneklendirmektedir.

Etkinlik 20.18

Düzlem Simetrisine Sahip Yapılar

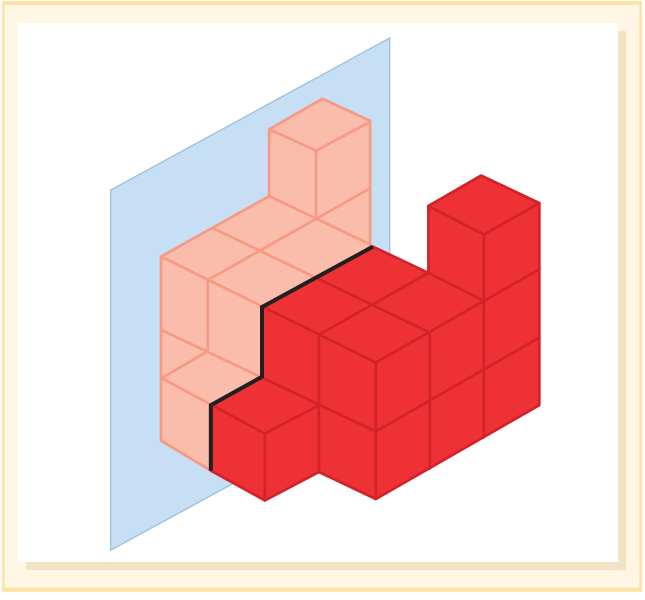
Küpleri kullanarak düzlem simetrisine sahip bir yapı oluşturunuz. Simetri düzlemi küplerin ortasından geçiyorsa yapı, iki simetrik parçaya ayrılacak şekilde bölünmüş olur. İki ya da üç simetri düzlemine sahip yapılar oluşturmayı deneyiniz. Çeşitli prizmalar oluşturunuz. Köşegen boyunca blokları ikiye ayıracak bir düzlemin olduğunu unutmayınız.



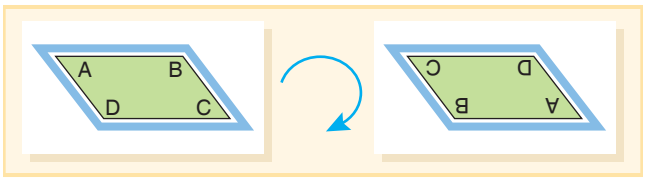
Şekil 20.27 Noktalı kağıt üzerinde simetriyi inceleme (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 37 ve 39).

Bir şekil bir nokta etrafında döndürüldüğünde başlangıçtaki pozisyonuyla birebir çakışacak şekilde üst üste örtüşüyorsa şekil *dönme simetrisi*ne sahiptir (*nokta simetrisi* olarak da adlandırılır). Eşkenar üçgen gibi kare de, dönme simetrisine sahiptir.

Dönme simetrisini iyice anlamanın bir yolu dönme simetrisine sahip (kare gibi) şekille başlamak ve kâğıt üzerinde bu şeklin sınırlarını çizmektir. Bu izi şeklin "parmak



Şekil 20.28 Tek düzlem simetrisine sahip küplerle/bloklarla oluşturulmuş bir yapı.



Şekil 20.29 Bu paralelkenar, çevirmeksizin kendi ayak iziyle iki şekilde örtüşmektedir. O yüzden 2. derece/mertebe dönme simetrisine sahiptir.

izi" olarak adlandırınız. Dönme simetrisinin derecesi, şekli çevirmeden şeklin ayak iziyle kaç farklı şekilde örtüşmesinin sayıdır. Eşkenar üçgen 3. derece dönme simetrisine sahipken kare 4. derece dönme simetrisine sahiptir. Şekil 20.29'daki paralelkenar, 2. derece dönme simetrisine sahiptir. Bazı kitaplar, 2. derece simetriyi "180 derece simetrisi" olarak adlandırmaktadır. Dereceler, şeklin kendisiyle çakışması (ayak iziyle örtüşmesi) için gereken en küçük dönme açısı anlamında kullanılmaktadır. Kare, 90 derece dönme simetrisine sahiptir.

Etkinlik 20.19

Örüntü Bloklarıyla Dönme Simetrisi

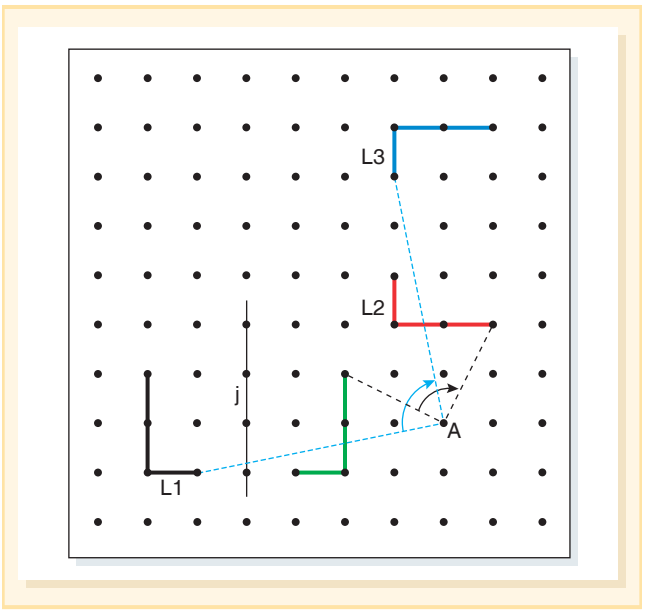
Öğrencilerinizden örüntü bloklarını kullanarak farklı dönme simetrisine sahip yapılar oluşturmalarını isteyiniz. Öğrenciler, 2, 3, 4, 6 veya 12. derece dönme simetrisine sahip yapılar oluşturabilmelidir. Bu yapılardan hangisi aynı zamanda ayna simetrisine sahiptir.

Düzey 1'de Düşünenler İçin Dönüşümler

Düzey 1'de düşünmeye geçen öğrenciler, dönüşümler bağlamında biraz daha analitik düşünerek analiz etmeye başlayabilir ve dönüşümleri gördükleri şekillere uygulayabilirler. Bu düzeyde iki tip etkinlik uygun gözükmektedir: Bileşke dönüşümler ve dönüşümleri kullanarak süslemeler oluşturmak.

Bileşke Dönüşümler. Bir dönüşüm diğer dönüşümü takiben uygulanabilir. Örneğin, şeklin bir doğruya göre simetrisi alınabilir ve daha sonra bu şekil bir nokta etrafında döndürülebilir. İki veya daha fazla dönüşümün kombinasyonu *bileşke* olarak adlandırılır.

Öğrencilerinizin, dikdörtgensel noktalı kağıt üzerinde çizilmiş basit bir şekil kullanarak iki hatta üç dönüşüm kombinasyonuyla deneyim kazanmalarını sağlayınız. Örneğin, öğrencilerinize L şeklini noktalı kağıt üzerine çizdiriniz ve şekli L_1 olarak adlandırınız (Bkz. Şekil 20.30). Bir doğru boyunca yansıtınız sonra da şekil üzerinde olmayan bir nokta etrafında saat yönünde çeyrek ($\frac{1}{4}$) dönme uygulayınız. Yansıma ve dönmenin kombinasyonu olan bu görüntüyü L_2 olarak adlandırınız. L_1 şekline az önce kullanılan nokta etrafında saat yönünde çeyrek ($\frac{1}{4}$) dönme uygulanarak L_3 elde edildiğinde L_2 ve L_3 arasında ortaya çıkan bir ilişki



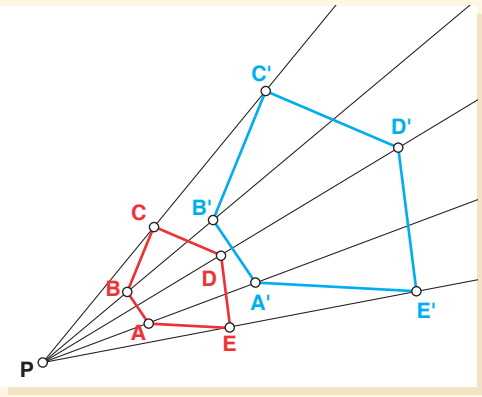
Şekil 20.30 L_1 şekline, j doğrusuna göre yansıtma ve A noktası etrafında çeyrek dönme uygulanırsa L_2 elde edilir. L_1 şekline ayrıca A noktası etrafında çeyrek dönme uygulanmıştır. L_2 ve L_3 birbiriyle nasıl ilişkilidir? Bu her zaman geçerli olan bir ilişki midir?

olduğuna dikkat ediniz. Farklı dönüşüm kombinasyonlarını inceleyerek devam ediniz. Bileşkelere, ötelemeleri (kaydırmaları) de dâhil ediniz. Bileşkeler, farklı türde dönüşümlerle yapılmak zorunda değildir. Örneğin, yansıma dönüşümünü takiben başka bir yansıma dönüşümü uygulanabilir.



NCTM'nine-Examples sitesinde "Standards & Focal Points" başlığı altında yer alan "Understanding Congruence, Similarity, and Symmetry"(Applet 6.4), basit ama oldukça değerli etkileşimli küçük uygulama yazılım örneklerinden en önemli birisidir. Bu uygulamanın ilk bölümünde öğrenciler, üç temel hareketin tümüne yönelik bir anlayış geliştirirler. İkinci bölümde dönüşüm tamamlanmıştır ve öğrenciler tahmin ve kontrol yöntemini kullanarak tam olarak hangi dönüşümün uygulandığına karar verirler. Son iki bölümde öğrenciler önce yansıma dönüşümlerinin farkı kombinasyonlarını ve daha sonra en fazla üç tane olacak şekilde diğer dönüşümlerin bir kombinasyonunu inceleyebilirler. Bu küçük uygulama yazılımı önemle tavsiye edilmektedir. ◆

Benzer Şekiller ve Orantısal Akıl Yürütme. Orantısal akıl yürütme bölümünde (Bölüm 18) benzer şekillerin,"benzer ama farklı büyüklükteki" şekiller olarak verilen oldukça güzel bir ilk tanımını görmüştük (Bkz. Etkinlik 18.3, s.353). Daha açıkça söylenirse, "karşılıklı açılarının tümü birbirine eş ve karşılıklı kenarları orantılı" olan iki şekil birbirine *benzer*dir. Benzer şekillerdeki orantısal ilişkileri ve ölçekli çizimlerinin yapıldığı Etkinlik 18.9' daki gibi diğer orantısal akıl yürütme etkinlikleri de geometriyle ilişkilidirler.

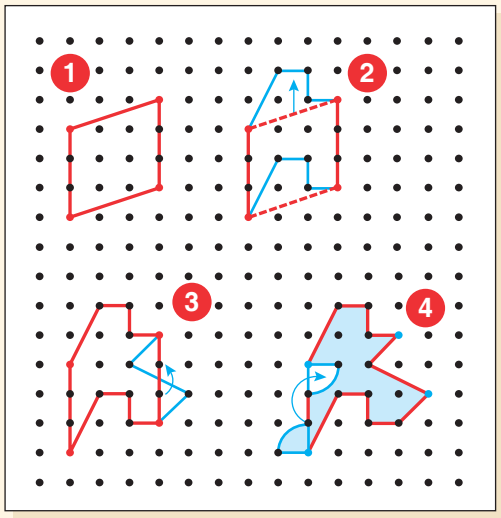


Şekil 20.31 ABCDE şekliyle başlayınız ve P noktasını istediğiniz herhangi bir yere yerleştiriniz. P noktasından şeklin her bir köşesinden geçecek şekilde doğrular çiziniz. P noktasının A noktasına olan uzaklığının iki katı bir uzaklıkta olacak şekilde A' noktasını yerleştiriniz (ölçek faktörü 2). Benzer şekilde bu işlemi diğer noktalar için de yapınız. ABCDE ile A'B'C'D'E'birbirine benzerdiler.

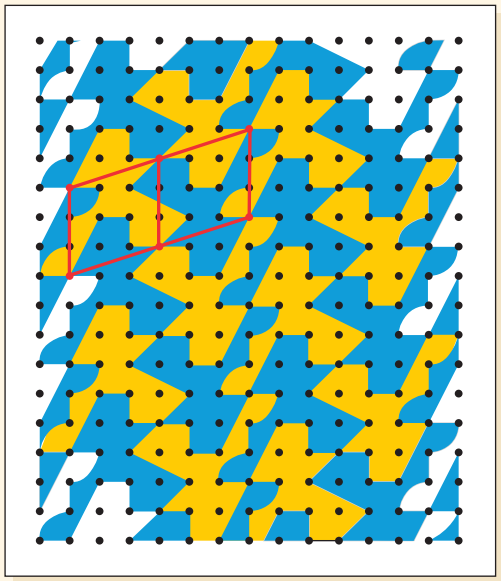
Genişletme/büzüştürme, benzer şekli üretecek şekilde şeklin değişime uğradığı dönüşümdür. Şekil 20.32, bir şeklin daha büyük veya küçük yapılacak şekilde nasıl genişletilebileceğini/büzüştürülebileceğini göstermektedir. Farklı öğrenci grupları aynı ölçek katsayısını kullanarak bir şekli genişletir/büzüştürürlerse, sonuçta elde edecekleri tüm şekillerin (hatta her bir grup farklı genişlettirme/büzüştürme noktalarını kullansalar bile) eş olduklarını göreceklerdir. Dinamik geometri yazılımı bu alıştırmalarla elde edilen sonuçları oldukça etkili bir şekilde göstermektedir. Yazılım, ölçek katsayısının istenen herhangi bir değer seçilmesine izin vermektedir. Bir kez genişletmeye/büzüştürmeye karara verildi mi genişletme/büzüştürme noktası ekranda tutulup sürüklenebilir ve şeklin görüntüsünün ve büyüklüğünün hep aynı kaldığı görülür. 1'den küçük ölçek faktörü, daha küçük şekiller üretir.

Yeniden Süslemeler/Döşemeler Konusu. Düzey 1'de düşünen öğrenciler, ister dönüşümleri ister uygun çokgenleri kullanarak sanatsal yönü olan ve karmaşık yapıda süslemeler oluşturabilir.

Hollandalı sanatçı M. C. Escher, girift ve çoğunlukla da kuş, at, melek veya kertenkelelere dönüşen süslemeleriyle tanınmaktadır. Escher, üçgen, paralelkenar veya altıgen gibi basit şekillerin kenarlarına dönüşümler uygulamıştır. Örneğin, bir kenara çizilen eğri öteleme (kaydırma) uygulanarak diğer kenarına dönüştürülebilir. Bir diğer fikir ise bir kenarın orta noktasından komşu köşeyi birleştirecek şekilde bir eğri çizmektir. Bu eğri daha sonra tamamen yeni bir karonun kenarını oluşturacak şekilde orta nokta etrafında döndürülür. Bu iki fikir, Şekil 20.32'de örneklendirilmiştir. Doğruları çizmeye yardımcı olsun diye noktalı kağıt kullanılmıştır. *Escher tipi süslemeler* (bu türden şekiller böyle adlandırılmaktadır), beşinci ve daha üst sınıftaki öğrenciler için dönüşümlerin önemli uygulamalarıdır. Bir kez karo tasarlandı mı bu karo, noktalı kağıt üzerinde süslemeyi gösterme yerine iki farklı renkteki el işi kağıtlarından kesilerek elde edilebilir.



1. Basit bir şekille başlayınız.
2. Karşılıklı iki kenar üzerinde aynı şekli çiziniz.
3. Herhangi bir eğriyi bir kenarın orta noktası etrafında döndürünüz.
4. Herhangi bir başka eğriyi karşı kenarın orta noktası etrafında döndürünüz. Bu karoyu süslemeniz için kullanınız (aşağıda verilmiştir).



En son elde edilen karo sütunu, tam bir dönme yapmış sütuna benzeyecek şekilde eşleşecektir. Buradaki süslemede gösterilen bu dönmüş sütunları bulunuz.

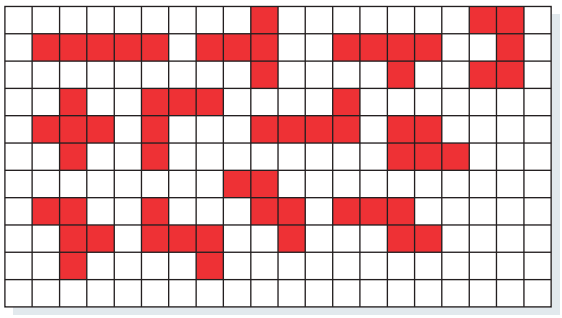
Şekil 20.32 Escher tipi süslemeler oluşturma (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 37).

Düzgün süsleme, düzgün bir çokgenin (bütün açıları ve kenarları eş) kullanıldığı tek bir karodan yapılır. Düzgün bir süslemenin her bir köşesi, o noktada birleşen karoların

sayısı kadar karoya sahiptir. Dama tahtası basit bir düzgün süsleme örneğidir. *Yarı düzgün süsleme*, her biri düzgün bir-çokgen olan iki ya da daha fazla karodan yapılır. Yarı düzgün süslemenin her bir köşesinde, aynı düzgün çokgen grubu aynı şekilde bir araya gelir. Herhangi bir köşe (ve dolayısıyla tamamlanmış yarı düzgün süsleme), o köşede birleşen şekil dizileri yardımıyla tanımlanabilir. Öğrenciler, bir köşede hangi çokgenlerin bir araya gelebileceğini fark edebilir ve kendi yarı düzgün süslemelerini tasarlayabilirler.

Düzey 2'de Düşünenler İçin Dönüşümler

Aşağıdaki etkinlik, öğrencilere bu iki fikir arasındaki ilginç ilişkiyi kurarak simetri ve dönüşümlerle ilgili anladıklarını kullanmaya zorlayan bir etkinliktir. Bu etkinlik için kullanılan şekiller 5 karelilerdir (5 kareden oluşur ve her bir kare diğer karelerin en az biriyle ortak bir kenara sahiptir-çok kareliler takımı). Kaç farklı 5 kareli kombinasyonu oluşabileceğini araştırmak, iyi bilinen bir geometri etkinliğidir (Bkz. Etkinlik 20.27). Dönüşüm ve simetrileri tartışırken 12 farklı 5 kareli takımını kullanmak, basit olarak şekilleri belli bir şekilde toplama amacına hizmet etmektedir (Bkz. Şekil 20.33).



Toplam 12 tane 5 kareli vardır.

Beş kareli veya altı kare ("altı kareliler" olarak adlandırılır) ya da 6 eşkenar üçgenliler vb. kullanılarak oluşturulabilecek tüm olası şekilleri bulma uzamsal problem çözme konusu için güzel bir alıştırmadır.

Şekil 20.33 5 karelilerin sayısı 12'dir. Bu şekilleri bulmak için sayfa 429'daki Etkinlik 20.27 incelenebilir.

Etkinlik 20.20

5 Karelilerin Pozisyonları

Öğrencilerinizden 2 cm'lik kareli kağıtta yer alan 12 tane 5 kareli takım setini kesip çıkarmalarının isteyiniz (Bkz. Şekil 20.33). Şekilleri ters-yüz edildiğinde karıştırmamak için her bir şeklin bir tarafına işaret koyunuz. Bu görevin ilk kısmındaki amaç, kareli kâğıt üzerinde her bir parçasının kaç farklı pozisyonunun olacağını belirlemektir (Walter, 1970). Bir yansıma veya dönme dönüşümü yapılarak şekiller eşleşiyorsa bu duruşları "farklı" olarak adlandırınız. Dolayısıyla çaprazşekilli parça sadece bir pozisyona sahip olacaktır. 5 kareli şerit iki pozisyona sahip olacaktır. Bazı parçalar en fazla sekiz pozisyona sahip olacaktır. Bu görevin ikinci kısmındaki amaç, her bir parça için doğru simetrileriyle dönme simetrileri arasında bir ilişkiyi ve çizgili kağıt üzerinde bir şeklin sahip olabileceği farklı pozisyonların sayısını bulmaktır. Öğrenciler bildiklerinin bir tablosunu yapmaya gerek duyabilirler.

Konumu Öğrenme

İlkeler ve Standartlar'daki konum standardı, öğrenciler "konumları belirlemeli ve koordinat geometrisini veya başka temsil sistemlerini kullanarak uzamsal ilişkileri açıklamalıdır" demektedir (NCTM, 2000, s.42). Nesnelerin diğer nesnelere göre konumlarının belirlemek için (örneğin, top masanın *altındadır*) gerekli ilk terimlerin gelişiminden sonra, konum etkinlikleri haritadaki bir noktadan diğer noktaya yolların analizini ve koordinat sistemlerinin kullanımını içerir.

Düzey 0'da Düşünenler için Konum

Anaokulu öncesi ve anaokulunda çocuklar günlük pozisyon belirleyici (*üstünde*, *altında*, *yakın*, *uzak*, *arasında*, *sol* ve *sağ*) ifadeleri öğrenirler. *Standartlar*ın konumları belirleme hedefinin başında bu ifadeler vardır. Bununla beraber, doğrultu, uzaklık ve konumla ilgili soruları cevaplama yollarını gözden geçirmelerine yardımcı olmak uzamsal anlayışları geliştirir. Sayıları da içeren çizgi sistemi veya çizgi üzerindeki belirli bir konumun bulunabildiği koordinatların kullanımı, geometri, ölçme ve cebirin üçünü birden desteklemektedir. Öğrenciler deneyim kazandıkça koordinat kullanımları onlarla birlikte mesafe kateder. Daha önemlisi, ilkokul düzeyindeki öğrenciler konumu belirlemede çizgi sistemlerinin terimleriyle düşünmeye başlayabilirler.

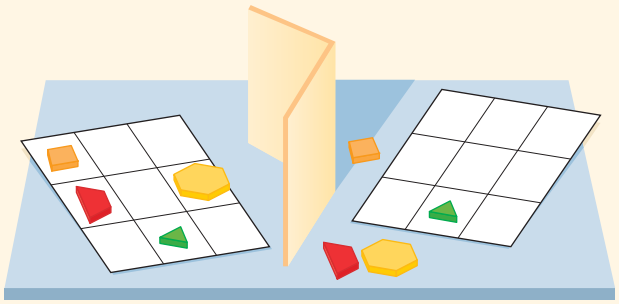
Sonraki etkinlik, koordinatlara hazırlıklı olma görevini yerine getirebilir ve öğrencilere parmakla işaretlemeden konumu belirleyebilmenin bir yoluna sahip olmanın değerini görmelerine yardımcı olabilir.

Etkinlik 20.21

Gizli Pozisyonlar

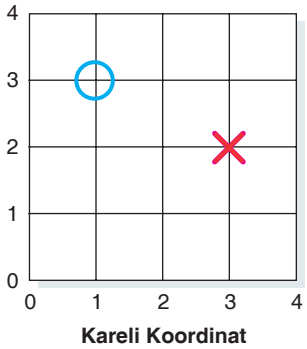
Oyun zemini oluşturmak için 8 inçlik bir kareyi mukavva karton üzerine çiziniz. Kareleri 3 × 3'lük çizgilerle parçalara ayırınız. İki öğrenci, masaları üzerinde bir "perdeyle" birbirinden ayrılarak birbirlerini görmeyecek şekilde otururlar (Bkz. Şekil 20.34). Her bir öğrencinin dört farklı örüntü bloğu vardır. Birinci oyuncu çizgili bölümlerin dört farklı yerine birer blok yerleştirir. Sonra diğer oyuncuya, onunkiyle eşleşecek şekilde blokları nereye koyacağını söyler. Dört parçanın tümünün pozisyonu belli olduğunda iki çizgili bölme

kontrol edilerek birbirine benzeyip benzemediğine bakılır. Sonrasında oyuncular rolleri değişirler. Bir seferlik birinci öğrenciyle bu oyunu oynayarak öğrencilerinize oyunun nasıl oynanacağını gösteriniz. *Üst satır, orta, sol* ve *sağ* gibi sözcükleri kullanınız. Bir istasyon etkinliği olarak öğrenciler, çiftler halinde bu oyunu oynayabilirler.



Şekil 20.34 "Gizli Pozisyonlar" oyunu.

"Gizli Pozisyonlar" oyunu, 6 × 6 boyutuna kadar kolayca genişletilebilir. Çizgi sayısı arttıkça pozisyonları adlandırmanın bir sistematiğine olan gereksinim de artar. Öğrenciler, en erken birinci sınıftan itibaren basit bir koordinat sistemini kullanmaya başlayabilirler. Şekil 20.35'te gösterilene benzer bir kareli koordinatı kullanınız (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 48). Çizgilerin kesiştiği noktayı belirlemek için iki sayının nasıl kullanılabileceğini açıklayınız. İlk sayı sağa doğru ne kadar uzağa gitmemizi söyler. İkinci sayı ise yukarı doğru ne kadar gideceğimizi söyler. Küçük çocuklar sayıyla birlikte sözcükler kullanırlar: 3 sağa ve 0 yukarı. Tanıtım yaparken 0'ı da dâhil ettiğinizden emin olunuz. Çizgi üzerinde bir nokta seçiniz ve öğrencilerinizden hangi iki noktanın bu noktayı tanımlayacağına karar vermelerini isteyiniz. Noktanız (2, 4) ve öğrencileriniz yanlışlıkla "dört, iki" derse o zaman basitçe onların



Şekil 20.35 Basit bir koordinat çizgisi. X, (3,2) noktasında ve O, (1,3) noktasındadır. Çizgiyi kullanarak üçü bir sırada oyununu (üç taş oyununu) oynayınız. Kesişimleri işaretleyiniz, boşlukları değil (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 48).

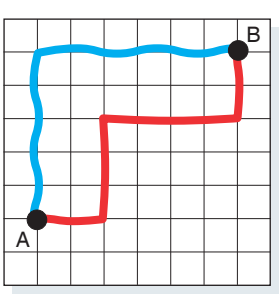
adlandırdıkları noktanın neresi olduğunu gösteriniz. Farkı öğrencileriniz için görselleştirmenin bir diğer yolu, ikinci sırada oturan dördüncü öğrenciyle dördüncü sırada oturan ikinci öğrenciyi karşılaştırmaktır.

Aşağıdaki etkinlik kareli kağıt üzerindeki farklı yollarla ilgili bir kavramı incelemektedir.

Etkinlik 20.22

Yollar

Şekil 20.36'da gösterildiği gibi, 2 cm'lik kareli kağıt üzerinde A ve B olarak adlandırılmış iki farklı noktayı işaretleyiniz. Tepegözü, yazı tahtasını veya zemin karolarını kullanarak A'dan B'ye giden bir yolun nasıl betimleneceğini uygulamalı olarak anlatınız. Şekildeki noktalar için bir yol, "yukarıya 5 ve sonra sağa 6" demektir. Diğer bir yol, "sağa 2, yukarı 2, sağa 2, yukarı 3 ve sağa 2" şeklindeki ifade edilen yoldur. Her bir yolun uzunluğunu ölçünüz. Hedef noktasına her zaman ulaştığınız müddetçe (ister yukarı ister sağa doğru giderek olsun) yol uzunlukları hep aynı kalacaktır. Buradaki uzunluk 11 birimdir. Öğrenciler, farklı renkte kalemler kullanarak A'dan B'ye üç farklı yolu kendi kareli kağıtları üzerinde çizerler. Yolların her biri için yol tarif eden yönleri yazarlar. "Yol boyunca yapacağınız dönmelerin sayısı en fazla kaçtır?", "En az kaçtır?", "Hiçbir dönme yapmadan A'dan B'ye ulaşmak için A ve B nerede olmalıydı?" gibi sorular sorunuz.



Şekil 20.36 Kareli kağıt üzerinde A'dan B'ye ulaşmanın farklı yolları.

"Yollar" etkinliğindeki kareli kağıt üzerine herhangi bir koordinat sistemini ekler iseniz öğrenciler buldukları yollarını koordinatlarla betimleyebilirler. Örneğin, (1, 2) ⟶ (3, 2) ⟶ (3, 5) ⟶ (7, 5) ⟶ (7, 7) gibi.



NCTM'nin e-Examples internet sitesinde "Standards & Focal Points" başlığı altında, önceki etkinliğe benzer ama ek bazı zorlayıcı sorular sunan güzel bir uygulama yazılımı yer almaktadır (Applet 4.3). Öğrenciler yönleri

kullanarak uğur böceğini (ladybug) hareket ettirirler. Görev, uğur böceğini bir yaprağın altında saklayacak şekilde sonuçlar doğuran yönlendirme listesini oluşturmaktır. Yönlendirmeler tamamlandığında uğur böceği bu yönlendirmeleri takip ederek o hareketleri yerine getirecek şekilde serbest bırakılır. Uğur böceği kullanılarak çevrilmiş pozisyonda bulunan dikdörtgen gibi şekiller çizdirilir veya labirent boyunca gezinmesi sağlanır. Bu küçük uygulama yazılımı, güçlü programlama dili olan Logo'nun oldukça basit bir çeşididir. ◆

Düzey 1'de Düşünenler için Konum

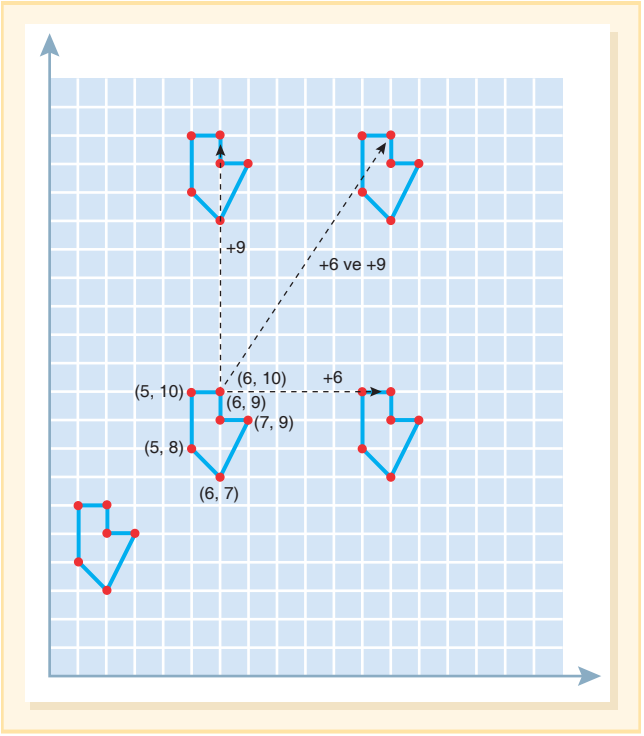
Birinci düzeyde koordinatlı kareli kağıdın kullanım amaçlarından biri dönüşümleri daha analitik bir tarzda incelemektir. Negatif sayıların kullanılarak dört çeyreğe koordinatları genişletme hariç koordinatlarla ilgili çok sayıda bilgiye gerek yoktur. Hatta dördünce ve beşinci sınıf öğrencileri negatif sayıları kullanabilir ki bu da tüm düzlemin temsil edebilmesi demektir.

Etkinlik 20.23

Koordinat Kaydırmaları

Öğrenciler, santimetreli kareli kâğıdın alt sol kısmına iki koordinat eksenini çizebilecekleri bir kareli kağıda ihtiyaç duyacaklardır. Kareli kağıt üzerinde beş veya altı nokta işaretleyip birleştirerek küçük bir şekil oluşturmalarını isteyiniz (Bkz. Şekil 20.37). Öğrencilerinizi sadece 5 ile 12 arasındaki koordinatları kullanmaya yönlendirirseniz oluşacak şekil, makul bir şekilde küçük ve kağıdın merkezine yakın olacaktır. Daha sonra öğrenciler, başlangıçtaki şekli oluşturan her bir noktanın ilk koordinatına (x-koordinatı olarak adlandırılır) 6 ekleyerek yeni bir şekil oluşturacaklardır. Yani, (5,10) noktasının yeni yeri (11,10) olarak işaretlenen nokta olacaktır. Her bir nokta için yeni noktalar işaretlendiğinde bu noktalar önceki gibi birleştirilecektir. Bu şekil, başlangıçtaki şekle eş olmalı ve sağa doğru ötelenmelidir. Daha sonra öğrenciler, başlangıçtaki şeklin koordinatların ikincisinin her birine 9 ekleyerek üçüncü bir şekil oluştururlar.

Başlangıçta yol göstersin diye yapılan bu iki kaydırmadan sonra durunuz ve öğrencilerinizle köşegen boyunca ve sağa doğru koordinatları hareket ettirmek için ne yapılması gerektiğini tartışınız. Öğrencilerinizden kestirimlerde bulunmalarını ve kestirimlerini test etmelerini isteyiniz. Şekil 20.37, koordinatların ilkine (x-koordinatına) 6 ekleyip daha sonra tüm ikinci koordinatlara (y-koordinatına) 9 ekleyerek oluşturulan şekli göstermektedir. Tüm birinci koordinatlar aynı miktarda ve tüm ikinci koordinatlar aynı miktarda değiştirildiği müddetçe şekil herhangi bir değişime uğramadan ötelenmiş olacaktır. Öğrencilerinizden, şekli aşağıya ve sola doğru ötelenecek şekilde koordinatları nasıl değiştireceklerinin bir yolunu bulmalarını isteyiniz (koordinatlara ekleme yerine koordinatlardan çıkarma). Öğrencilerin kareli kağıtları, kağıt üzerinde her biri farklı bir yerde olacak şekilde başlangıçtaki şekli ve dört kopyasını göstermelidir.



Şekil 20.37 Basit bir şekille başlayıp koordinatları kayıt ediniz. Koordinatlara ekleyerek veya koordinatlardan çıkararak yeni şekiller (başlangıçtaki şeklin ötelenmiş/kaydırılmış halleri) bulunur.

Öğrencilerinize neler öğrendiklerini özetlemelerinde yardımcı olunuz. Birinci koordinata bir sayı ekleme (veya koordinattan bir sayı çıkarma) nasıl bir sonuca neden olur? Peki, ikinci koordinatlara bir sayı eklense veya koordinatlardan bir sayı çıkarılsa ne olurdu? Ya her ikisine birden bu işlemler yapılsaydı? Öğrencilerinizden, her iki koordinatın birden değiştirilerek bulunan noktalarla başlangıçtaki şekli oluşturan ve onlara karşı gelen noktaları birleştiren doğruları çizmelerini isteyiniz. Ne gözlediler? (doğrular paralel ve aynı uzunlukta). En son çizimdeki beş şekilden istediğiniz herhangi ikisini seçiniz. Bu şekillerden birisiyle başlayıp diğerini nasıl elde edebilirdiniz?

"Koordinat Kaydırmaları" etkinliğindeki şekil, bükülmemiş, döndürülmemiş, tersyüz edilmemiş veya şekli ve büyüklüğü değiştirilmemiştir. Şekil, karşılıklı noktaları doğrularla eşleştirilecek şekilde bir yol boyunca "kaydırılmıştır". Yansımalar, ötelemelere oldukça benzer biçimde koordinatlı kareli kağıt üzerinde incelenebilir. Yansıma doğrularını, başlangıç düzeyinde, takip eden etkinlikteki gibi x veya y-eksenleriyle sınırlandırmak tavsiye edilir.

Etkinlik 20.24

Koordinat Yansımaları

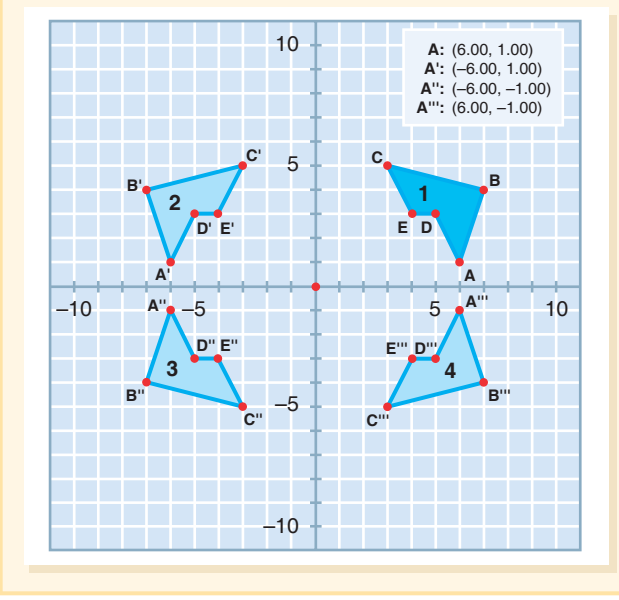
Öğrencilerinizden, koordinatlı kareli kağıt üzerinde çizgilerin kesiştiği yerler köşe olacak şekilde beş

kenarlı bir şekil çizmelerini isteyiniz. Bu şekli ABCDE olarak etiketlendiriniz ve 1. şekil olarak adlandırınız. *y*-eksenini simetri doğrusu olarak kullanınız ve şeklin yansımasını ikinci çeyrekte çiziniz. İkinci çeyrekteki bu şekli 2. şekil olarak adlandırınız ve yansıma noktalarını A'B'C'D'E' olarak etiketlendiriniz. Şimdi ise *x*-eksenini simetri doğrusu olarak kullanınız. 1. ve 2. şeklin her birini sırasıyla üçüncü ve dördüncü çeyreklere yansıtınız ve bu şekilleri 3. ve 4. şekil olarak adlandırınız. Bu şekillerin noktalarını iki veya üç kesme işaretiyle (A" ve A"', vb.) etiketlendiriniz. Dört şeklin her bir köşesinin koordinatlarını yazınız.

- **3. şekil ile 4. şekil arasında nasıl bir ilişki vardır? 3. şekli başka hangi yolla elde ederdiniz? Bulduğunuz 4. şekli başka nasıl elde ederdiniz?**
- **1. şeklin koordinatları ile onun *y*-eksindeki görüntüsü (2. şekil) arasında nasıl bir ilişki vardır? 4. şeklin koordinatları için ne söyleyebilirsiniz?**
- **Bir şeklin *y*-eksenine göre yansımasının koordinatları için bir kestirimde ve bir şeklin *x*-eksenine yansıması içinse başka bir kestirimde bulununuz.**
- **1. şeklin köşelerinden 2. şeklin ona karşılık gelen köşelerine doğrular çiziniz. Bu doğrularla ilgili ne söyleyebilirsiniz? *y*-ekseni bu doğrulardan her biriyle nasıl ilişkilidir?**

Şekil 20.38'e göre bu soruları cevaplayınız.

Önceki etkinliği yapan öğrenciler, genel olarak koordinatların tümü cinsinden ötelemeleri ve bir eksen boyunca yapılan yansımaları tanımlayabilmelidirler. Dönme de koordinatlar kullanılarak incelenebilir. Aşağıdaki etkinlikte



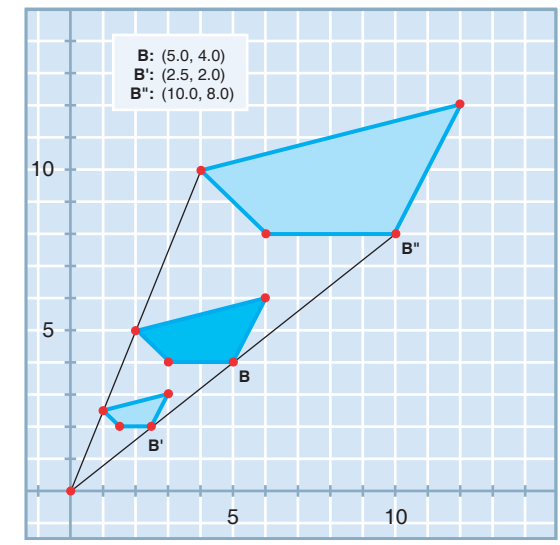
Şekil 20.38 Koordinatlı kareli kağıt üzerinde yansımaların incelenmesi.

görüldüğü gibi tüm koordinatları bir sabitle çarpma, değişmez/sabit olmayan bir dönüşümdür.

Etkinlik 20.25

Koordinat Genişletme/Büzüştürmeleri

Öğrenciler, birinci çeyrekteki dört kenarlı bir şekille başlarlar. Sonrasında ilk şeklin koordinatlarının bir listesini ve her bir koordinatın 2 ile çarpılması sonucu ortaya çıkan koordinat setinin yeni bir listesini yaparlar. Ortaya çıkan şekli çizerler. Sonuçta ne oldu? Başlangıçtaki koordinatların her birini $\frac{1}{2}$ ile çarparak ortaya çıkan şekli çizerler. Sonuçta ne oldu? Sonraki aşamada öğrenciler, kağıtlarında oluşan en büyük şeklin bir köşesiyle orijini birleştiren doğruyu çizerler. Aynı işlemi bir ya da iki köşeyle tekrar ediniz ve neler gözlediklerini sorunuz (Şekil 20.39'da bir örnek verilmiştir).



Şekil 20.39 Koordinatların Genişletilmesi/Büzüştürülmesi.

Durup Düşün!

Koordinatların 2 ile çarpılması durumunda oluşan şekillerin kenar uzunlukları ile alanlarını nasıl karşılaştırırsınız? Ya koordinatlar 3 veya $\frac{1}{2}$ ile çarpılsaydı?

En son yapılan etkinlikteki gibi bir şeklin koordinatlarının her biri aynı çarpanla çarpıldığında şekil ya büyür ya küçülür. Şekil değişmez ama büyüklük değişir. Yeni şekil ilk şekle benzerdir. Bu *genişletme/büzüştürme* olarak adlandırılır. Şekil değiştiğinden bu dönüşüm değişmez/sabit dönüşüm değildir.

Öğrencileriniz bu olguyu biraz daha detaylı şekilde incelemekten hoşlanabilir. Basit bir yüz, bot veya köşeleri doğrularla birleştirerek çizebilecekleri diğer bir şekli bir doğru ile çizerek başlarlarsa sadece birinci koordinatları, sadece ikinci koordinatları veya her birisi için bir çarpan kullanarak çarpma ilginç sonuçlar doğuracaktır. Sadece ikinci koordinat çarpıldığında (yalnız düşey boyutlar çarpıldığında), şekil düşey yönde orantılı olarak uzayacak(büzüşecek) biçimde genişleyecek/büzüşecektir.

Aritmetik bir işlemin (çarpma) şekli kontrol edebildiğini görmek oldukça etkileyicidir. Sadece düzlemde değil üç boyutlu şekillerde de kaydırma, çevirme, döndürme ve genişletme/büzüştürmeleri kontrol edebildiğinizi hayal ediniz. Süreç, bilgisayar animasyon teknikleriyle birebir aynıdır.

Düzey 2'de Düşünenler için Konum

Dıştan bakıldığında Düzey 1'de düşünenler için yapılan koordinat etkinlikleriyle Düzey 2'de düşünenler için yapılan (veya en azından mantıksal muhakemeye geçişe hazır öğrenciler için) koordinat etkinlikleri arasında net bir ayrım olmayabilir. En son bölümde yer alan dönüşüm etkinlikleri incelenirken öğrenciler, hazırlarsa, basit incelemelerden biraz daha zor olan aşağıdaki sorular sorularak düşünmeye zorlanabilirler:

- Yansıma doğrusu, *y*-ekseni değil de bu eksene paralel bir doğru ise koordinatlar nasıl değiştirilmelidir ki sonuçta bir yansıma meydana gelsin?
- Koordinatlara uygulandığında, eksenlerden birine göre yansıma ve daha sonra da bir çeyrek dönme sonucunu doğuracak bir kural keşfedebilir misiniz? Bu kural tersi için de (önce bir çeyrek dönme sonra bir eksene göre yansıma) geçerli midir?
- Koordinatlara uygulanarak arka arkaya iki kaydırma uygulanırsa ve hangi sayıların eklendiğini veya çıkarıldığını biliyorsanız, hangi sayı eklenmeli veya çıkarılmalıdır ki son şekli sadece bir hareketle elde edebilesiniz?
- Genişletme/büzüştürmede farklı koordinatlar için farklı çarpanların kullanılması durumunda tahminen ne olabilir?



Öğrencileriniz bu türden soruları incelemeye bir kez başladılar mı kendileri soru ve inceleme konuları ortaya atarlar. Dinamik geometri yazılımı koordinatlı kareli kâğıt seçeneğine sahiptir. Noktaları kareli kağıt üzerindeki çizgilere "bağlayarak/sabitleyerek" çizimler yapılırsa koordinat dönüşümleri daha kolayca incelenebilir. ◆

Pisagor Bağıntısının Uygulaması. Pisagor bağıntısının geometrik yorumu alanlarla ilgilidir. Aşağıdaki etkinlikte öğrenciler, koordinatlı kareli kağıdı kullanarak Pisagor bağıntısı yardımıyla iki nokta arasındaki uzaklık için bir formül geliştireceklerdir.

Etkinlik 20.26

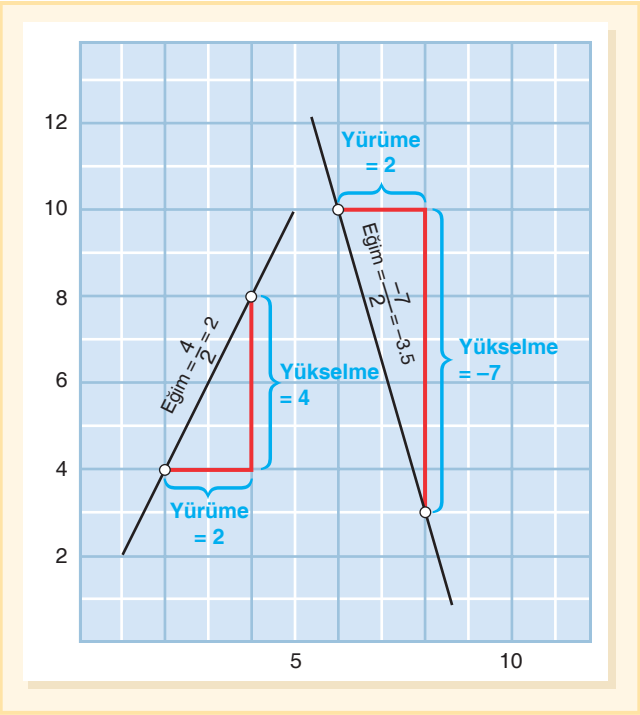
Uzaklık Formülü

Öğrencilerinize, birinci çeyrekte aynı yatay veya düşey doğru üzerinde olmayan iki noktayı birleştiren bir doğru çizdiriniz. Görev, sadece uç noktaların koordinatlarını kullanarak iki nokta arasındaki uzaklığı kareli kâğıttaki birimler cinsinden bulmaktır. Bu amaca ulaşmak için çizdikleri doğruyu bir dik üçgenin hipotenüsü olacak şekilde kullanarak dik üçgen çizmelerini öneriniz. Dik açının oluştuğu köşe, her bir ve noktadan bir koordinata ortak olarak sahip olacaktır. Öğrenciler, dik kenarlar üzerindeki karelerin alanlarını hesaplayacak ve bunları toplayarak hipotenüsü kenar kabul eden karenin alanını bulacaktır. Başlangıçtaki doğru parçasının uzunluğu (iki nokta arasındaki uzaklık), karesi hipotenüsü kenar kabul eden karenin alanına eşit olan sayıdır (bu son cümle karekökün bir geometrik yorumudur). Öğrencilerinizden doğru parçasının uzunluğunu hesaplamak için bu yönergeleri takip etmelerini isteyiniz.

Daha sonra öğrencilerinizden, yaptığı hesapları gözden geçirmelerini ve iki uç noktanın koordinatlarının nasıl kullanıldığını görmelerini isteyiniz. Öğrencilerinizden, şekil çizmeden aynı türden hesaplamaları kullanarak yeni iki nokta arasındaki uzaklığı bulmalarını isteyiniz.

Düzey 2'deki öğrenciler, ispatları yapmak zorunda değildir ama gösterilen ispatların mantığını takip edebilmelidir. Öğrencilerden, bir doğru parçasının uzunluğunu (veya iki uç nokta arasındaki uzaklığı) bulmak için gerek işlemleri takip etmelerini isteyerek başka doğruların uzunluklarını hesaplamaları için gereken yeterli bilgiyi vermiş olursunuz. Öğrenciler, ihtiyaç duydukları tek şeyin üç karenin alanını hesaplamak için iki noktanın koordinatları dolayısıyla da hipotenüsün uzunluğu olduğunu göreceklerdir. Sonrasında belli koordinatların yerine harfleri kullanmalarına yardım ederseniz genel bir uzaklık formülüne ulaşacaklardır.

Eğim. Eğim konusu, geometri ile cebir arasındaki bir diğer önemli bağlantıdır ve doğrusal denklemleri incelemek için beklemeye gerek yoktur. Eğim tartışmasına başlamak için farklı yönelimli çok sayıda doğru çiziniz. Bu doğruların nasıl farklı olduğunu tartışınız. Bazıları diğerlerinden daha diktir. Bazıları yukarı bazıları aşağı doğrudur. Soldan sağa doğru eğimin yukarı gitmesinin "yukarı" anlamına geldiği konusunda hem fikirseniz o zaman hangisinin yukarı hangisinin aşağı doğru gittiği konusunda da hem fikirsiniz demektir. Bir doğrunun bu "dikliği" diğer ölçülebilir nitelikler gibi bir niteliktir. Eğime bir sayı atamak için bir referans doğrusu gerekmektedir. Koordinatlı kareli kağıt, bir referansı (x-ekseni) ve ölçmede kullanmak için sayıları göstermektedir. Öğrencilerinizin doğrunun dikliğini bir sayıyla



Şekil 20.40 Bir doğrunun eğimi, yükselme ÷ yürüme oranına eşittir.

ilişkilendirmelerinde kendi yöntemlerini geliştirmeleri için belli bir zaman tanıyınız.

Bir doğrunun dikliğini ölçmek için kullanılan geleneksel yaklaşım, doğru üzerindeki herhangi iki nokta arasında *yükselme* ve *yürüme* fikirlerine dayanmaktadır. *Yükselme*, sol noktadan sağ noktaya doğru düşey değişimdir (yukarıysa pozitif, aşağıya doğruysa negatiftir). *Yürüme*, sol noktadan sağ noktaya doğru yatay değişimdir. Öyleyse *eğim*, *yükselme* ÷ *yürüme* oranı (düşey değişimin yatay değişime oranı) olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 20.40). Düşey doğruların eğiminin olmaması veya eğimin "tanımsız" olması bir kabuldür. Bu tanımın bir sonucu olarak yatay doğruların eğimi 0'dır.

Öğrencilere bu tanım bir kez verildi mi koordinatlı kareli kâğıtta çizilen herhangi düşey olmayan doğruların eğimlerini yardıma gerek duymadan veya formül kullanmadan hesaplayabilmelidirler. İyi bir problem temelli görev, paralel ve dik doğruların eğimleri için ne söylenebileceğini bulmalarını istemektir.

Görselleştirmenin Öğrenilmesi

Görselleştirme, "zihinden geometri yapma" olarak adlandırılır. Görselleştirme, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturma ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı (farklı perspektiflerden nasıl görüneceği ve çeşitli dönüşümlerin sonuçlarını tahmin etmeyi) içerir. İki ve üç boyutların zihinsel koordinasyonunu (bir kutunun veya netin açınımını tahmin etmeyi ya da üç boyutlu bir şeklin iki boyutlu çizimini anlamayı) kapsar. Bir şekil hakkında zihnen düşünmeyi, şekli zihinsel olarak dönüştürme veya manipüle etme veya görsel olarak göründüğü haliyle şekli temsil etmeyi gerektiren herhangi bir etkinlik öğrencilerin görselleştirme becerilerinin gelişimine katkıda bulunacaktır.

Düzey 0'da Düşünenler İçin Görselleştirme

Öğrenciler Düzey 0'da, şekiller hakkında düşünürken tamamen şeklin göründüğü durumla ilgili ifadeleri kullanmayla kendilerini sınırlarlar. Bu düzeydeki görselleştirme etkinlikleri, çeşitli fiziksel şekiller kullanmayı gerektirecek ve öğrencileri farklı yönelimlerdeki bu şekiller hakkında düşünmeye zorlayacaktır.

Belli sayıda verilen basit karolardan kaç tanesini kullanarak şekillerin oluşturulabileceğini bulma öğrencilerden, zihinsel olarak çevirmeyi, zihinlerinde şekilleri döndürmeyi ve tüm olası durumları bulup bulmadıklarına karar vermeyi talep etmektedir. Takip eden etkinliğin odak noktası budur.

Etkinlik 20.27

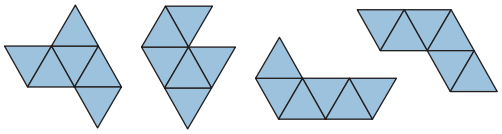
Beş Kareliler

Bir beş kareli, sanki kareli kağıttan kesilmiş beş karenin birleştirilmesiyle oluşan şekildir. Her kare bir diğeriyle en az bir ortak kenara sahip olmalıdır. Öğrencilerinize beş kareli karoları ve kayıtlarını tutmak için bir kareli kağıt temin ediniz. Kaç farklı beş kareli şekiller bulabileceklerini görmeleri için öğrencileri zorlayınız. Diğer şekillerin tersyüz edilmesi veya çevrilmesi sonucu elde edilen şekiller farklı olarak düşünülmeyecektir. Kaç tane beş kareli olduğunu öğrencilerinize söylemeyiniz. Faydalı tartışmalar, bazı şekillerin gerçekten farklı olup olmadığına veya tüm şekillerin bulunup bulunmadığına karar verilmesi sırasında ortaya çıkacaktır.

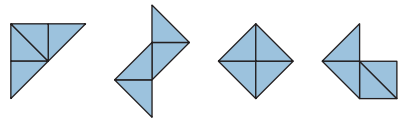
Öğrencileriniz bir kez sadece 12 adet beş kareli olduğuna (Şekil 20.33'e tekrar bakınız) karar verdiler mi, bu 12 parça çeşitli etkinliklerde kullanılabilir. Çocuklarla birlikte kareli kağıtlarında oluşturdukları beş karelileri mukavva üzerine yapıştırınız ve 12 şekli keserek ayırmalarını öğrencilerinizden isteyiniz.

Şekil 20.41'de gösterildiği gibi altı tane eşkenar üçgen veya dört tane 45 derecelik dik üçgenlerden (karelerin yarısından) yapılmış şekilleri incelemek de oldukça eğlencelidir. Dik üçgenlerde birbirine değen kenarlar aynı uzunlukta olmalıdır. Tahminen bu "altı eşkenar üçgenlilerin" her birinden kaç tane vardır?

Beş karelilerle çok sayıda etkinlik yapılabilir. Örneğin, 12 parçayı 6 × 10 veya 5 × 12 boyutlarındaki bir dikdörtgene uyacak şekilde yerleştirmeye çalışınız. 12 şeklin her biri bir süsleme karosu olarak da kullanılabilir. Bir diğer görev, 12 adet beş karelilerin her birini incelemek ve açık bir kutu (net



Altı eşkenar üçgenle oluşturulabilecek dört farklı şekil



Dört adet "yarım kare" üçgenle oluşturulabilecek dört farklı şekil

Şekil 20.41 Üçgenlerle oluşturulabilecek tüm olası şekiller bulma.

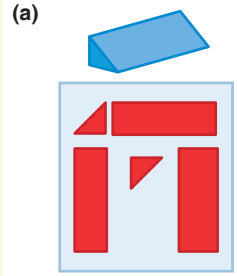
olarak da adlandırılır) yapmak için nasıl kapatılabileceğine karar vermektir. "Kutu oluşturanlar" içinde karelerden hangisi tabanda yer alır.

Küçük çocuklarda görselleştirmenin başka bir tarafı, katı cisimleri yüzleri ve kenarları yardımıyla inceleyebilmeyi mümkün kılmasıdır. Bu türden etkinliklerde kullanmak için, bir şeklin farklı yüzlerinin sınırları boyunca çizerek oluşturulan "yüz kartlarına" gerek duyacaksınızdır (ya tüm yüzleri bir kart üzerinde ya da her bir kartta bir yüz olacak şekilde ayrı bir kart seti üzerinde yapabilirsiniz) (Bkz. Şekil 20.42).

Etkinlik 20.28

Yüz Eşleştirme

Bu görevi iki farklı şekilde yapabilirsiniz: Verilen bir yüz kartından ona karşılık gelen katı cismi bulmak veya verilen bir katı cisimden yüz kartını bulmak. Öğrenciler, tek yüzlü kartların bir koleksiyonuyla belli bir bloğa uygun kartları seçebilir. Bu etkinliğin diğer bir biçimi olarak belli bir bloğa karşılık gelen tek yüzlü kartları yüzleri görülmeyecek şekilde üst üste koyunuz. Bloğu bulmaları için bir ipucu olarak her seferinde bir tek kart çekip gösteriniz.



Şekil 20.42 Katı cisimlerle yüzleri eşleştirme.

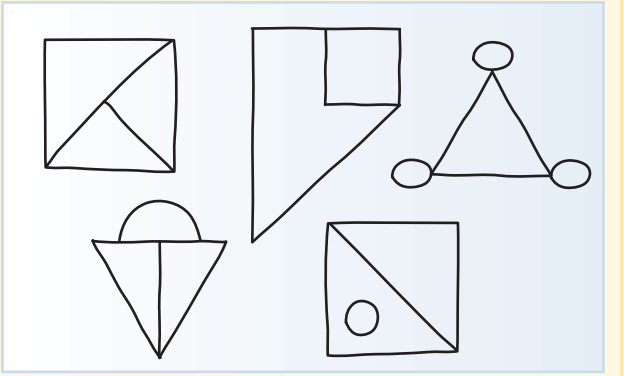
Aşağıdaki etkinlik, NTCM'nin *İlkeler ve Standartlar* belgesinden uyarlanmıştır ve geometri öğrenme alanı Anaokulu - 2. sınıflar bölümünde bulunabilir.

Etkinlik 20.29

Hızlı Görüntüler

Asetatlar üzerine basit taslaklar çizerek öğrencilerinize birer birer göstereceksiniz. Bu taslaklar öyle çizimler olmalıdır ki öğrenciler kolayca çoğaltabilsinler. Bazı örnekler Şekil 20.43'te gösterilmiştir. Tepegözde veya tahtada bu şekillerden birisini yaklaşık 5 saniye kadar gösteriniz. Sonra öğrencilerinizden bu şekli kendi başlarına yapmalarını isteyiniz. Aynı şekli birkaç saniye kadar gösterip öğrencilerinizin çizimlerini değiştirmelerine izini veriniz. Aynı işlemi farklı şekillerle tekrar ediniz.

Öğrencilerle yaptığınız tartışmalarda şekil hakkında nasıl düşündüklerini, anlatmalarını veya gördüklerini hatırlamalarına yardımcı olan kelimelerle açıklamalarını isteyiniz. Öğrenciler gördüklerini sözel olarak açıklamayı öğrendikçe görsel hafızaları gelişecektir.



Şekil 20.43 "Hızlı Görüntüler" etkinliğinde kullanılabilecek çizimlere örnekler.

Bu son etkinlikte görsel hafıza kadar doğruların pozisyonlarını ve şeklin özelliklerini düşünmek de önemlidir.

Düzey 1'de Düşünenler İçin Görselleştirme

Hem Düzey 0 hem de Düzey 1'deki bir görselleştirme görevini tanımlarken, belli şekillerin özelliklerine verilmesi gereken dikkatin mertebesi/düzeyi göz önünde bulundurulması gereken bir husustur. Bu bölümdeki etkinlikler kesin olarak Düzey 0'daki öğrencilerin için oldukça zordur.

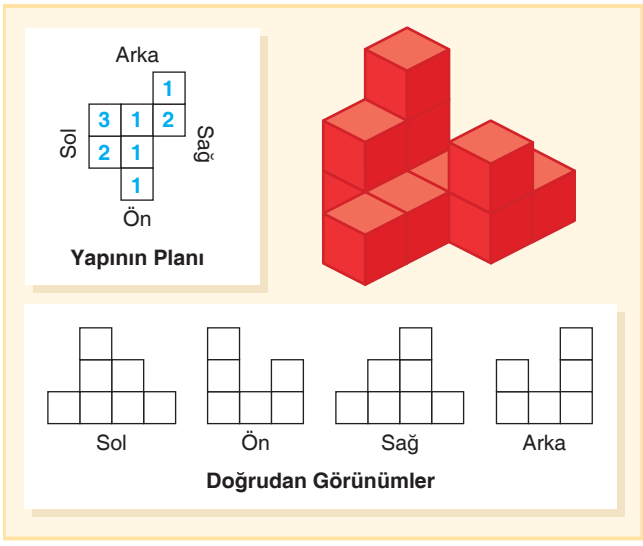
Geometri standardının görselleştirme alt-öğrenme alanının temel amaçlarından biri, üç boyutlu şekillerin iki boyutlu görünümlerini belirleyebilmek, çizebilmek ve iki

boyutlu görünümden üç boyutlu yapıyı oluşturabilmektir. Bu hedefe ulaşmak için tasarlanan etkinlikler, çoğunlukla bir inçlik küpten yapılmış küçük "yapıları" çizmeyi içerir.

Etkinlik 20.30

Bakış Açıları

- **Bu etkinliğin ilk biçiminde öğrenciler, bir yapıyla işe başlar ve yapının sol, sağ, ön ve arka kısımların doğrudan görünümlerini çizerler. Şekil 20.44'te yapının planı, binanın üstten görünümünü ve her bir pozisyondaki blokların sayısını göstermektedir. Bu türden bir plana dayanarak öğrenciler bir bina inşa ettikten sonra görevleri, şekilde gösterildiği gibi ön, sağ, sol ve arka kısımların doğrudan görünümlerini çizmektir.**
- **Bu görevin tersten yapılan biçiminde öğrencilere sağ ve ön görünüm verilir. Görev, bu görünümlere sahip bir yapıyı inşa etmektir. Sonuçları kaydetmek için yapının bir planını (küplerin sayısının verildiği üst görünümünü) çizerler.**



Şekil 20.44 "Bakış Açıları" görevi.

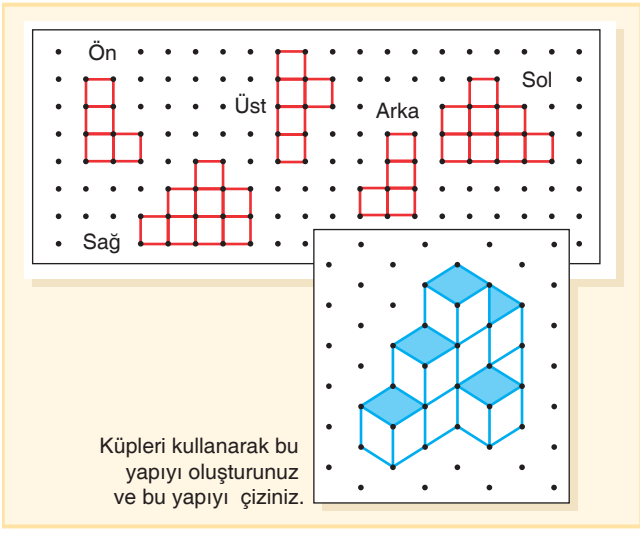
Hem sol ve sağ kısımların doğrudan görünümlerinin hem de ön ve arka kısımların doğrudan görünümlerinin birbirinin simetriği olduğuna dikkat ediniz. Etkinliğin ikinci kısmında ikisinden sadece birinin verilmesinin nedeni budur.

"Bakış Açıları" etkinliğinde öğrenciler, 1 inçlik küplerden "yapılar" oluşturmuş ve bu yapılarla yan ve üst kısımların doğrudan görünümlerini ilişkilendirmişlerdir. Anlamlı ve oldukça da zorlayıcı olan bir etkinlik ise bloklardan oluşmuş bu yapıların perspektiflerini çizmek veya çizimlerle bir yapıyı eşleştirmektir. İzometrik noktalı kağıtlar çizimlerde kullanılır (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 38 ve 39). Takip eden etkinlik, bu türden bir görselleştirme etkinliğinin nasıl olabileceğine kısaca değinmektedir.

Etkinlik 20.31

Perspektif Çizimleri

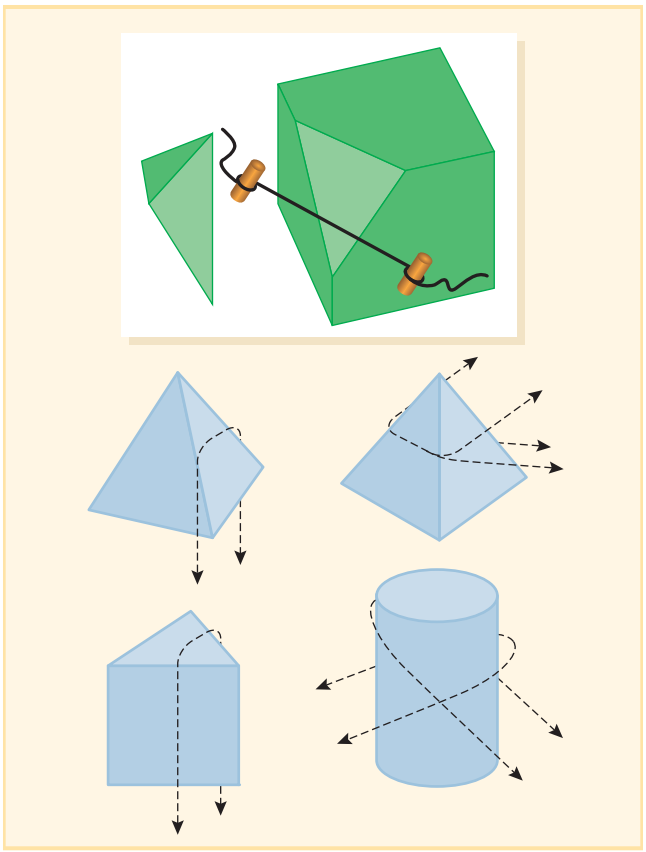
- **İlk biçiminde öğrenciler, bir yapının perspektif çizimiyle başlarlar. Gizli blokların olmadığı varsayılır. Öğrenciler çizimlerden yola çıkarak kendi bloklarıyla gerçek yapıyı oluştururlar. Sonucu kaydetmek için her bir pozisyonda kaç tane bloğun olduğunu gösterecek şekilde yapının bir planını çizerler.**
- **İkinci biçiminde öğrencilere ya bloklardan oluşmuş plan verilir ya da beş adet doğrudan görünüm verilir (Bkz. Şekil 20.45). Buna göre yapıyı oluştururlar ve iki veya daha fazla perspektif çizimini yaparlar. Yukarıdaki tabloya göre dört olası perspektif vardır: ön sol ile sağ, arka sol ile sağ. Farklı bakış açıları karışmasın diye kenarlarına "Ön", "arka", "sol" ve "sağ" sözcüklerini yazarak yapıyı bir dosya kağıdı üzerinde oluşturmak kullanışlı olacaktır.**



Şekil 20.45 Bloklarla oluşturulmuş "yapıların" izometrik kağıtlar üzerindeki gösterimi.

Teknoloji NOTLARI

Bloklarla oluşturulmuş yapıların iki veya üç boyutlu görünümlerini çizmek için kullanılabilecek müthiş bir bilgisayar yazılımı, Illuminations sitesindeki Isometric Drawing Tool'dur (http: // illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125). Bu küçük uygulamayla, küplerin tamamı,bir küpün tek bir yüzü veya sadece doğrular, fareye bir kez tıklanarak çizilebilir. Ama çizimler, gerçekte "yapıların" kendisidir ve üç boyutlu nesneler olarak görülebilirler. Uzayda istenildiği şekilde döndürülerek istenilen bir perspektiften görünümlerine bakılabilir. Hazırlanan incelemeler, bilgi amaçlıdır ve bu aracın farklı özelliklerini gözden geçirmeleri için öğrencilere öncülük etmektedir. ◆



Şekil 20.46 Potter'in teli ile bir hamur modelini kesme.

İki ve üç boyutlar arasındaki bir diğer ilginç ilişki, katı cisimleri farklı şekillerde keserken bulunabilir. Bir katı cisim iki parçaya ayrılacak şekilde dilimlendiğinde kesilen yüzlerde iki boyutlu bir şekil oluşur. Şekil 20.46, köşe boyunca kesilmiş bir küpü göstermektedir (kesimden kalan üçgensel bir yüzdür). Dilimler, şekilde gösterildiği gibi oyun hamurlarını Potter'in teliyle keserek incelenebilirler. Daha hoş başka bir yöntem plastikten yapılmış katı bir cismi suyla doldurmaktır. Suyun yüzeyi, suyun yüzeyiyle örtüşen bir dilimin yüzüyle aynıdır. Şekli farklı biçimlerde yatırarak her bir olası "dilim" gözlenebilir. Power Solids gibi küçük plastik katı cisimler bunu göstermek için mükemmel bir araçtır.

Düzey 2'de Düşünenler İçin Görselleştirme

Bir kez daha mantıksal akıl yürütmenin, Düzey 2'de düşünenler için yapılan etkinlikleri Düzey 1'de düşünenler için yapılan etkinliklerden ayıran şey olduğunu açıkça görmekteyiz. Ama görselleştirmenin, buradaki gibi ayrımın çok keskin olmadığı geometrinin bir alanı olduğunu not etmek önemlidir. Düzey 1 için verilen etkinlikler Düzey 2'de düşünenleri zorlayacak şekilde kolayca değiştirilebilirler. Benzer şekilde bu bölümdeki etkinlikler, Düzey 1'deki öğrencilerin düşünme biçimlerini daha üst düzeye çıkarmalarına yardım edecektir.

Daha Önceki Etkinlikleri Düzey 2'deki Görselleştirmeyle İlişkilendirme. Hazır olan öğrenciler, olası dilimleme tiplerine yönelik tahminler yapmaya zorlanabilirler. Örneğin, verilen belli bir katı cismi önceden açıklandığı gibi suyla test etmeden önce öğrenciler, üçgen ve dörtgen tiplerinin bir listesini gözden geçirebilir ve hangisinin yapılabileceğine ve hangisinin yapılamayacağına karar verebilirler. Yapılamayacağını düşünenler bu hipotezleri için bir gerekçe sunmalıdırlar.

Aşağıdaki bölüm, 5 kareliler etkinlikleriyle Düzey 2'dekilere uygun görselleştirme görevlerinin derinlemesine incelenebileceği durumları vermektedir:

- Kaç tane 6 kareliler vardır? 6 kareli, 5 karelilerdeki kurala göre oluşturulmuş altı kareden oluşmaktadır. Oldukça az sayıda 6 kareli (35) olduğundan, şekilleri kategorilere ayırmak için iyi bir mantıksal şema planlama, tamamını bulduklarına emin olmalarının nadir yollarından biridir.
- Öğrenciler, beş kareyi bir araya getirmeden ziyade beş küpün tüm olası bir araya getirilebilme durumlarının belirleyebilirler. Bu şekiller 5 küplüler olarak adlandırılırlar. Genel olarak, bir yüzün tamamını paylaşacak şekilde küpleri bir araya getirerek oluşturulan şekiller *5 küplüler* olarak adlandırılır.

Platonik Cisimler. *Çok yüzlü* bütün yüzleri çokgen olan üç boyutlu şekildir. Bu çok yüzlüler arasında Platonik cisimler özellikle ilgi çekicidir. *Platonik cisimler*, tamamen düzgün çok yüzlü setine verilen addır. "Tamamen düzgün", her bir yüzün düzgün bir çokgen ve her bir köşenin aynı sayıda yüze sahip olduğu ve bu yüzlerin o köşede birleştiği anlamına gelmektedir. Bu düzeydeki ilginç bir görselleştirme görevi, tüm Platonik cisimleri bulmak ve betimlemektir.

Etkinlik 20.32

Platonik Cisimleri Bulma

Katı cisimleri oluşturmak için kullanılan plastik setlerden (örneğin, Polydron veya Geofix) eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgenleri öğrencileriniz için temin ediniz. Tamamen düzgün bir katı cismin ne olduğunu açıklayınız. Görev, mümkün olan tüm olası tamamen düzgün cisimleri bulmaktır.

Bazı öğrenciler (özellikle özel gereksinimli olanlar) ek yapıya gerek duyabilirler. Bu yüzden takip eden bölümdeki sistematik bir yaklaşımı önerebilirsiniz. Bir yüzün sahip olabileceği en az sayıda kenar sayısı üç olduğundan üçgenlerle başlayınız, sonra kare, daha sonra beşgen, vb. ile devam ediniz. Buna ek olarak her bir köşe aynı sayıda yüze sahip olacağından, bir noktada üç yüzü, daha sonra dört yüzü vb. deneyiniz (bir noktada sadece iki yüze sahip olma durumu açıkçası mümkün değildir).

Bu yaklaşımla öğrenciler, üçgenler için üç, dört veya beş üçgenin aynı noktada birleşeceğinin farkına varacaklardır. Bunların her birisi için öğrenciler üçgenlerden oluşmuş bir "çadırla" başlayabilir ve her bir köşede aynı sayıda üçgen olacak şekilde daha fazla üçgen ekleyebilir. Üçünün bir noktada birleşmesiyle *dörtyüzlü/tetrahedron* (Yunancada *tetra* = dört) olarak adlandırılan dört-kenarlı katı cismi elde edersiniz. Dördünün bir noktada birleşmesiyle sekizyüzlü/*octahedran* (Yunancada *octa* = sekiz) olarak adlandırılan sekiz-kenarlı katı cismi elde ederiz. Her bir noktada beş üçgenli bir katı cisim oluşturmak oldukça heyecan vericidir. Bu cismin 20 kenarı vardır ve *yirmi-yüzlü/icosahedran* (*icosa* = yirmi) olarak adlandırılır.

Benzer bir yaklaşımla öğrenciler, her bir noktada üç ve toplamda altı kareden oluşturulabilecek tek bir katı cisim-*altı-yüzlü/hexadedron* (*hex* = altı)-olduğunu bulacaklardır. Bu cisim küp olarak ta adlandırılır. Ayrıca, beşgenlerle ilgili her bir noktada üç ve toplamda 12 yüzlü olan tek bir cisim vardır. Bu şekil *onikiyüzlü/dodecahedron* (*dodeca* = oniki) olarak adlandırılır.

Durup Düşün!

Neden altı veya daha fazla üçgen veya dört ya da daha fazla karelerle oluşturulabilecek düzgün çok yüzlü yoktur? Altıgen veya altıdan fazla kenara sahip çokgenle yapılabilecek düzgün çok yüzlü neden yoktur? Bu sorulara cevap vermenin en iyi yolu çokgenlerle deneme yapmak ve cevapları kendi kelimelerinizle açıklamaktır. Öğrenciler de aynısını yapmalıdır.

Daha önce tarif edildiği gibi (Bkz. sayfa 409'daki Şekil 20.11) gazete rulosu kullanılarak yirmi yüzlünün iskeletsel yapısı mükemmel şekilde oluşturulabilir. Beş üçgen aynı noktaya doğru birleştiğinden her bir noktada da beş ayrıt olacaktır. Beş çubuğu basitçe her bir köşeye getirmeye çalışınız ve her bir yüzün üçgen olduğunu unutmayınız. Bu yirmi-yüzlü cisim yaklaşık olarak 4 ft uzunluklu ve hayret verici şekilde sağlam olacaktır.

Bölüm 20 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim

1. van Hiele Geometrik Düşünce Düzeyleri'nin ilk üçünü (Düzey 0, 1 ve 2'yi) kendi kelimelerinizle açıklayınız. Açıklamanızı yaparken üzerinde düşünülen nesneleri ve o düzeydeki düşüncenin ürünlerini de dikkate alınız. Düzey 0, 1 ve 2'yi hedefleyen etkinlikler nasıl farklılık gösterir?
2. Bu bölümde ve *Standartlar* 'da yer alan dört geometri konusunun (Şekiller ve özellikleri, konum, dönüşümler ve görselleştirme) her birisindeki içeriğin doğasını özetle açıklayınız.
3. Sınıftaki öğrencilerinizin farklı van Hiele Geometri Düşünme Düzeyleri'ne sahip olması durumunda ne yapabilirsiniz?
4. Geometri için önerilen küçük uygulama yazılımlarından (applets) birisini bulunuz ya da *Wingeom* programını inceleyiniz. Bu programların nasıl kullanılabileceğini açıklayınız. Geometride somut materyaller veya çizimler yerine bilgisayar kullanmanın avantajları neler olabilir?
5. Bir öğretmen, geometrik gelişim veya uzamsal his açısından öğrencilerini nasıl değerlendirebilir? van Hiele teorisinin doğru olduğunu kabul ederek, öğrencilerin bulunduğu düzeyi bu teoriyi kullanarak anlamanın niçin önemli olduğunu cevaplayınız.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Herhangi bir sınıfın öğretmen kılavuz kitabını inceleyiniz. Geometriden herhangi bir konuyu seçiniz. Derslerin van Hiele düzeylerinden hangisine karşılık geldiğini nasıl delillendirirsiniz? Çok farklı düzeylerdeki öğrencileriniz için bu ders nasıl uyarlanabilir?
2. Teknoloji, ilkokul ve ortaokul düzeyinde öğretimsel araçlarınızın önemli bir bileşeni olmalıdır. Bu bölümde tartışılan teknolojilere aşina değilseniz, önerilen her bir dijital araç veya programın ne yapabildiğini öğrenmeye çalışınız (dinamik geometri programını öğrenmeniz önemle tavsiye edilmektedir).

Bölüm 20 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

The Greedy Triangle *Burns, 1995*

This delightful book starts off with the story of a triangle that is very busy being a sail or musical instrument, or fitting into the crook of someone's arm when standing with hand on hip. It isn't long before he becomes bored and travels to the local shapeshifter for a change. Adding a new side and angle and becoming a quadrilateral gives the triangle new things to try as he fits into different four-sided figures in the environment.

The greedy triangle goes through several other shape-shifts. This book links well with activities at level 0 and level 1. Using a meter-long loop of yarn for every pair of students (or three ace bandages in a loop for a class demonstration), have students follow and discuss events in the book by creating appropriate shapes with the loop (holding it in the air between their hands). First they can explore the different triangles that were made and eventually they can investigate properties as they shift from one shape to the next.

Snowflake Bentley *Martin, 1998*

This amazing true story describes the life of a persistent young scientist in Vermont who wanted to learn more about snowflakes. Living in an area averaging 120 inches of snow a year, Wilson Bentley established a lifelong dedication to this work. Using a photographic innovation he created, Bentley was able to produce beautiful and detailed images of these short-lived wonders. This book is a natural to use with symmetry and hexagonal shapes.

Color Farm, 1990

Color Zoo, 1989 *Ehlert*

These visually motivating books can engage young children in thinking about shapes. Using cut-out overlays of circles, rectangles, ovals, triangles, and other familiar shapes, images of either farm or zoo animals are created. The reader turns the page to remove a shape, transforming the image into a new animal. Because this book reinforces shapes, animals, and colors, it is a good vocabulary development book to engage English language learners and their families.

Cubes, Cones, Cylinders and Spheres, 2000

Shapes, Shapes, Shapes, 1996

So Many Circles, So Many Squares, 1998 *Hoban*

These books without words are a collection of vivid photographs on a geometric theme. Each one can engage students of all ages in thinking about and locating shapes in the environment. It is easy to see how students can use digital cameras to create their own Hoban-like books that invite readers to seek and identify two- and three-dimensional shapes in the world around them. Student-made books are great for children to take home to their families, for students in upper grades to make for younger children, or to add to the collection in the school or classroom library.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Glass, B. (2004). Transformations and technology: What path to follow? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(7), 393–397.

Glass explores compositions of transformations with his middle school students. Part of their discourse revolve around this question: Is a composition of two or more transformations the same as the single transformation that will accomplish the same thing? For those exploring transformations at the upper grades, this is a useful article.

Koester, B. A. (2003). Prisms and pyramids: Constructing three-dimensional models to build understanding. *Teaching Children Mathematics*, *9*(8), 436–442.

Koester's activities and explorations with third to fifth graders involves building models using straws and pipe cleaners. The activities involve classification and definitions of shapes and also Euler's formula relating faces, vertices, and edges.

Renne, C. G. (2004). Is a rectangle a square? Developing mathematical vocabulary and conceptual understanding. *Teaching Children Mathematics*, *10*(5), 258–263.

The voices of children in this article are clear examples of the difficulty that students at level-1 reasoning have in attempting to make logical conclusions about geometric properties and relationships.

Kitaplar

Findell, C. R., Small, M., Cavanagh, M., Dacey, L., Greenes, C. E., & Sheffield, L. J. (2001). *Navigating through geometry in prekindergarten–grade 2.* Reston, VA: NCTM.

Gavin, M. K., Sinelli, A. M., & St. Marie, J. (2001). *Navigating through geometry in grades 3–5.* Reston, VA: NCTM.

Pugalee, D. K., Frykholm, J., Johnson, A., Slovin, H., Malloy, C., & Preston, R. (2002). *Navigating through geometry in grades 6–8.* Reston, VA: NCTM.

Each of these three excellent books from the Navigations Series provides both a perspective on the geometry standard and also a collection of excellent activities appropriate for the grade band of the book.

İnternet Kaynakları

Cutting Corners
http://illuminations.nctm.org/tools/CutTool/CutTool.asp

A cutting tool allows any one of three simple shapes to be sliced into parts along any straight line. Shapes can be rearranged, rotated, and flipped.

Geoboards
http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_2_t_3.html

The NLVM library has four geoboards. The first measures areas and perimeters. The circular board has pins in a circular arrangement. The isometric board has pins in a triangular arrangement (like isometric dot paper). The coordinate board shows coordinates for each peg when the cursor is on it. It measures the slope and distance between two points joined by a band and then the perimeter and area of banded shapes.

GeoGebra
www.geogebra.org/cms

This is a free downloadable dynamic geometry software that emphasizes geometry and algebra. Like *Geometer's Sketchpad*, you can construct with points, segments, and lines.

Maze Game
www.shodor.org/interactivate/activities/coords/index.html
The maze game provides practice with coordinates. The user plots points to guide a robot through a mine field.

Mirror Tool
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=24
A nice tool for early investigations of mirror or line symmetry.

Space Blocks
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_195_g_3_t_3.html?open=activities
This applet allows the user to create "buildings" made of cubic blocks rather easily. Use it to explore surface area.

Tangrams
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_268_g_1_t_3.html
These virtual tangrams can be manipulated freely. Plus, there are 14 puzzle shapes to fill in with all 7 tangrams.

Visualizing Transformations
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.4/index.htm
This four-part applet provides an excellent exploration of the three rigid-motion transformations including composition of two transformations.

Bölüm 21

Veri Analizi Kavramlarının Gelişimi

Grafikler ve istatistikler halkı, reklam, kamuoyu yoklamaları, güvenilirlik tahminleri, nüfus değişim eğilimleri, sağlık riskleri ve öğrencilerin okullardaki ilerlemeleri gibi alanlarda bombardımana tutmaktadır. Bu yaz gerçekleşen yağış miktarının geçen yazdan daha fazla olduğunu veya ortalama bir Amerikalı ev halkının 1.86 kişiden oluştuğunu duyarız. ABD nüfus sayım web sayfası (www.census.gov) üzerinde 2000 yılındaki medyan ev fiyatının 119,600 dolar ve Mayıs 2008 yılındaki medyan ev fiyatının 281,000 dolar olduğunu okuruz. Mayıs 2008'deki ortalama ev fiyatı 311,300 dolardı. Bu istatistikleri bilmek bir dizi soruyu gündeme getirmelidir: Bu veriler nasıl toplandı? Amaç neydi? Ortalama 1.86 insana sahip olmak ne anlama gelmektedir? Neden medyan ve ortalama ev fiyatları bu kadar farklı? Hangi istatistiksel bilgi ev fiyatları hakkında konuşmak için daha mantıklı?

İstatistiksel okuryazarlık çevremizdeki dünyayı anlamak için çok önemlidir. İstatistiğin yanlış kullanımı gazete gibi güvenilir kaynaklarda bile olmakta ve orada grafikler genellikle bir bulguyu abartmak için tasarlanabilmektedir. Anaokulu öncesinden sekizinci sınıf düzeyine kadar öğrenciler okul yılları boyunca istatistiğin temel kavramlarına yönelik anlamlı deneyimleri olmalıdır. Anaokulu-2. sınıf düzeylerindeki öğrenciler bu anlayışı verilerin nasıl sınıflandırılabileceğini ve çeşitli grafiksel formlarda nasıl gösterilebileceğini öğrenerek başlayabilirler. 3-5. sınıf düzeylerindeki öğrencileri, veri gruplarını toplama ve organize etme ve bunun yanında verileri sıklık tabloları, sütun, nokta ve resim grafikleri ile temsil etme konusunda birçok deneyime sahip olmalıdırlar. Öğrencilerin anlamaları geliştikçe onlara saplı kutu diyagramı,saçılma grafiği ve kök ve yaprak grafikleri gibi yeni veri temsilleri tanıtılmalıdır. Öğrenciler, ayrıca merkezi eğilim ölçülerini incelemelidirler: örneğin medyan ve ortalama (NCTM, 2006; Schrelack&Seeley, 2007).

Ana Fikirler

1. İstatistik kendine özgü bir alandır ve matematikten farklıdır. Bir temel farklılık istatiksel akıl yürütmede verilerin değişkenliği üzerine odaklanmaktır.
2. İstatistik yapmak dört adımlık bir süreci içerir: soruları oluşturma, verileri toplama, verileri analiz etme ve sonuçları yorumlama.
3. Veriler, verilerin geldiği popülasyon hakkında soruları cevaplamak için toplanır ve organize edilir. Popülasyonun sadece bir örneğinden elde edilen verilere dayalı olarak o popülasyon hakkında çıkarımlar yapılır.
4. Farklı grafik çeşitleri ve diğer veri çerçeveleri veriler hakkında farklı bilgileri sağlar ve bu nedenle verilerbu popülasyondan alınır. Grafiksel temsilin seçimi verilerin ne kadar iyi anlaşılacağını etkiler.
5. Verileri sayılarlarla ifade eden ölçülere *istatistik* denir. Veriler bilgiyi görsel olarak iletmek için çeşitli grafiksel formlarda organize edilebilir. Belirli bir grafik türünün veya istatistiğin kullanımı verinin popülasyon hakkında ne dediğine aracılık yapabilir.
6. Grafikler ve istatistikler verilerin nasıl yayıldıkları veya nasıl kümelendikleri gibi şekilsel olarak bir fikir verebilir. Veriler hakkında fikir sahibi olmak, bir grup sayıdan ziyade veriler hakkındaki büyük resmî görmeyi sağlar.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

İstatistik dünyamızı tasvir etmek için verilerin sayılar ve grafikler formunda kullanılmasını içerir. Kuşkusuz, öğretim programının sayısal alanları ile bağlantıları vardır. Bununla birlikte, cebir ile olan bağlantısı belki de en önemli matematiksel bağlantılarından bir tanesidir.

- **Sayı Hissi** (Bölüm 8): Küçük yaştaki öğrenciler sınıf verilerine dayalı (örneğin "Çoraplar hangi renkte? veya "Kaç tane düğme var? gibi) olarak grafikler oluşturur ve bu grafikleri kullanarak nicelikler hakkında konuşurlar.
- **Cebir** (Bölüm 14): Cebir, ilişkileri analiz ve betimlemek için kullanılır. Her ne zaman iki ilişkili değişkene (boy ve kol uzunluğu, yaş ve büyüme gibi) yönelik veriler toplandığında cebir değişkenler arasındaki ilişkiyi tasvir etmek için kullanılır. Çıkan ilişki

daha sonra henüz toplanmamış verilerin sonuçlarını tahmin etmek için kullanılabilir. Verilercebirsel ilişki veya fonksiyon şeklinde ne kadar yaklaşık olarak bulunabilirse, fonksiyonun sahip olduğu tahmin etme değeri o kadar güçlü olur.

- **Kesirler, Ondalık Kesirler ve Yüzdeler** (Bölüm 15 ve 17): Kesirler, ondalık kesirler ve yüzdeler verileri betimlemekiçin kullanılır.
- **Orantısal Akıl Yürütme** (Bölüm 18): İstatistiksel akıl yürütme orantısal akıl yürütmedir. Bir popülasyondan bir örneklem seçildiğinde (bir alt küme seçildiğinde), o örneklemin büyük popülasyonla orantılı olduğu var sayılır.
- **Ölçme** (Bölüm 19): Gerçek hayattan toplanan verilerin birçoğu ölçümleriçerir. Pedagojik olarak ölçme, öğrencilerin soruları cevaplamak ve analiz edilecek verileri oluşturmak gibi veri analizi ile iç içe olabilir.

İstatistik Yapmak Ne Anlama Geliyor?

Bölüm 2'ye yeniden bakıldığında matematik yapma konusunda aynı başlığı bulacaksınız. Aslında istatistik yapmak matematik yapmaktan farklı bir işlem olup son zamanlarda standartları içeren belgeler ve araştırmalar tarafından (Burrill&Elliott, 2006; Franklin et al., 2005; Shaugnessy, 2003) çok ilgi gören bir fikirdir.Eski Amerikan İstatistik Derneği başkanı(ASA)Richard Scheaffer'in belirttiği gibi,

> Matematik sayılar ve işlemler, genellemeler ve soyutlamalarla alakalıdır; uzamsal konumlar ve onların ölçümleri hakkındadır, dönüşümler ve soyutlamalar… İstatistik de sayılarla ilgilidir-ancak bağlam içerisindeki sayılardır: bunlara veri denir. İstatistik değişkenlerle ve durumlarla, dağılım ve varyasyonla, amaca yönelik tasarım veya çalışmalar ve çalışmaların tasarımında rastgeleliğin rolüyle ve sonuçların yorumlanması ile ilgilidir. (Scheaffer, 2006, pp. 310–311)

Bu bölüm istatistikle ilgili bazı ana fikirleri tasvir etmekte ve istatistik yapmanın genel bir sürecini açıklamaktadır. Süreçteki dört adımın her biri bu bölümün organizasyonunda ana bir altbölüm olarak ele alınmıştır.

Bu İstatistik midir Yoksa Matematik midir?

İstatistik ve matematik iki farklı alandır; bununla beraber, istatistiksel sorular değerlendirmelerde genellikle istatistikselden ziyade matematiksel doğaya sahip sorular şeklinde sorulmaktadır. Bundaki zararlı durum, aşağıda Scheaffer (2006) tarafından sunulan mükemmel örneklerde gösterildiği gibi, öğrencilerin istatistiksel akıl yürütmeye odaklanmıyor oluşlarıdır.

Durup Düşün!

Aşağıdaki soruları okuyun ve her birini "matematik yapmak" veya "istatistik yapmak" şeklinde kodlayın.

1. Domates yetiştirme yarışmasında ödül kazanmış 50 domatesin ortalama ağırlığı 2.36 pound'dur. Bu 50 domatesin toplam ağırlığı pound olarak nedir? (NAEP örnek sorusu)
   a. 0.0472 **b.** 11.8 **c.** 52.36 **d.** 59 **e.** 118
2. Joe'nun 78, 76 ve 74 olmak üzere üç adet sınav sonucu varken Mary'nin sınav sonuçları 72, 82, ve 74'tü. Joe'nun ortalama sınav sonucu Mary'nin ortalama sonucuna göre nasıldır? (açıklanan TIMSS sekizinci sınav sorusu)
   a. Joe'nunki 1 puan fazladır.
   b. Joe'nunki 1 puan azdır.
   c. Her iki ortalamada aynıdır.
   d. Joe'nunki 2 puan fazladır.
   e. Joe'nunki 2 puan azdır
3. Tablo 21.1her bayan yarışmacının bu yılki 100 metrelik yedi tane yarışmalarının sonuçlarını vermektedir. Sadece bir bayan yarışmacı yaklaşan turnuvada yarışabilir. Hangi bayan yarışmacıyı bu turnuva için seçerdiniz ve neden?

Tablo 21.1

Üç Koşucunun Yarış Zamanları

	Yarış						
Koşucu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Suzie	15.2	14.8	15.0	14.7	14.3	14.5	14.5
Tanisha	15.8	15.7	15.4	15.0	14.8	14.6	14.5
Dara	15.6	15.5	14.8	15.1	14.5	14.7	14.5

Bunlardan hangisi istatistiksel akıl yürütmeyi içerir? Hepsi? Hiçbiri? Schaeffer'in açıkladığı gibi sadece son soru istatistiksel bir doğaya sahiptir. İlki, ortalamalar için formül bilmeyi gerektirmektedir, ancak yapılması gereken formülü kullanarak geriye doğru işlem yapmaktır-bu matematiksel bir düşüncedir, istatistiksel değil. Benzer şekilde, ikinci problemde birinin ortalama için gerekli formülü bilmesi gerekmektedir, fakat soru, formülü kullanarak hesaplama süreci ile ilgilidir. Bunların her ikisinde de bağlamın problemle ilgisi olmadığını fark edebilirsiniz. Son soru doğası gereği istatistikseldir, çünkü verilen durumun analiz edilmesini gerektirmektedir (bir çözüm belirlemek için grafikler veya ortalamalar kullanılabilir). Buradaki matematik temel düzeydedir; odaklanma istatistik üzerinedir. Bağlamın, sorunun esasınıoluşturduğunufark etmişsinizdir.

İstatistikte bağlam verilerin analizi ve yorumlanmasında gereklidir (Franklin & Garfield, 2006; Franklin et al., 2005; Rossman, Chance, &Medina, 2006; Schaeffer, 2006). Verinin dağılımına veya şekline bakarak ve dikkate alarak sıra dışı veri noktalarının (aykırı değerlerin) anlamı bulunduğu bağlama göre belirlenir.

Değişkenlik

İstatistikte önemli ve kendine has ikinci bir kavram ise değişkenliktir. İstatistikçiler verilerdeki değişkenlikle uğraş-

mak zorundadırlar (Franklin & Garfield, 2006; Franklin et al., 2005; Rossman, Chance, &Medina, 2006; Schaeffer, 2006). Öğrencilerin değişkenliği net olarak kavrayamamalarının sebebi belki de matematiksel veri analiz sürecinin, veri analiz aşamasına göre daha ağır basmasından kaynaklanmaktadır. İstatistik eğitimi üzerine tanınmış bir araştırmacı olan Shaughnessy (2006), aşağıdaki listede öğrencilerin değişkenlik üzerine ne bildikleri hakkındaki bulguları temel kavramlarla başlayıp daha karmaşık fikirlere doğru ilerleyerek özetlemiştir:

1. Sadece aykırı veya uç değerlereodaklanmak (veri dağılımının tamamınaodaklanmamak).
2. Zamanla değişimi göz önünde bulundurmak (diğer varyasyon çeşitlerini tartışmaya yol açabilir).
3. Tam veri aralığı olarak değişkenliğin incelenmesi.Aralık, aralık kapsamında her şeyin meydana geldiği, amafarklı olayların sıklığını ortaya çıkarmayan durumdur.
4. Değişkenliği olası aralık veya beklenen değer olarak göz önünde bulundurmak.
5. Veri noktalarının merkezden ne kadar uzakta olduğuna bakmak (ortalama gibi).
6. Bir grup verinin sabit bir değerden uzaklığına bakmak.

Bütün bunlar öğrenciler soruları cevaplamak için deneyler yaparken ilkokul ve ortaokul öğrencilerine erişilebilir olur (Shaughnessy, 2006).Öğrencilere aykırı ve uç değerlerin ötesindeki değişkenliği öğretmeye hazırlıklı olmak amacıyla, istatistikte değişkenliğin meydana gelmesinin yolunu bilmek önemlidir.

Değişkenlik çeşitli şekillerde ortaya çıkabilir. *İstatistik Eğitiminde Ölçme ve Öğretim için Yönergeler*(GAISE) raporu (Franklin et al., 2005) istatistiksel düşünmenin üç seviyesinianlatmakta olup bu seviyeler gelişimsel bir doğaya sahip olsa da ilkokul, ortaokul ve lise düzeyindeki müfredatla kabaca eşleştirilebilir. Rapor, değişkenliğin ilkokul düzeyinde odaklanılması gerektiğini belirtip bir grup içindeki değişkenliği içerenöğrenci adlarının değişen uzunlukları, değişen aile fert sayısı ve buna benzer örnekleri ele almıştır. Öğrenciler sınıf verilerinin bir sütun grafiğini çizip ve toplanan verileri karşılaştırdıklarında bir grup içindeki değişkenliği tartışıyor olacaktır.

Bir sonraki seviyede, bir grup içindeki değişkenlik devam etmekte, fakat veri grupları da dikkate alınmaktadır. Öğrenciler, gruplar arasındaki değişkenliğe bir örnek olarak beşinci sınıfların favori müzik seçimlerinin değişkenliğini sekizinci sınıfların müzik seçimleri ile karşılaştırabilirler. Ayrıca, ortaokul öğrencileri bir değişkendeki değişimin diğer bir değişkendeki değişimle nasıl ilişkili olduğunu incelerler: Evet, cebir! Öğrenciler iki değişkeni aralarında bir ilişki olup olmadığını anlamak için analiz ederler (saçılma grafiklerini konu alan bölümde daha derinlemesine ele alınmıştır).

Anaokulöncesi-Anaokulu-8. sınıf düzeylerinde diğer bir tip uygun değişkenlik,örnekleme değişkenliğidir (Franklin et al., 2005). Öğrenciler bir parayı 10 kez havaya attıklarında, örnek olarak, 5 tura ve 5 yazı gelebilir, ancak pek çok diğer sonuçlarda elde edebilirler (0 tura ve 10 yazı gibi). Buna örnekleme değişkenliği denir. Örneklemin büyüklüğü arttıkça daha fazla veri beklenen değerleri yansıtır (yüzde 50 tura, yüzde 50 yazı). Örnekleme Bölüm 22'de (olasılık) tartışılmıştır.

Son olarak, üçüncü seviyede, öğrenciler doğal ve yapay değişkenliği inceleyebilir. Örneğin, bitkiler farklı hızlarda büyürler. Bahçedeki bir çiçeğin yanı başındaki çiçekten daha uzun yetiştiğinde buna doğal değişkenlik denir. Eğer iki bitki iki farklı bahçede ise diğer değişkenler devreye girerler: gübreleme, güneş ışığı miktarı, su miktarı gibi değişkenler farklı büyüme hızına "neden olabilirler." Bu değişkenlik terimlerini bilmek bir deneyi tasarlarken bir faktöre (güneş ışığı gibi) bakarken diğer tüm faktörlerin aynı tutulması gerektiğini bilmeye göre daha az önemlidir. İşte bu istatistik yapmanın özünde yer alır(Franklin & Garfield, 2006).

Öğrencilerin değişkenliği anlamaları gerekir. Bunu yapmalarına yardımcı olmanın bir yolu verilerin tartışılmasına değişkenlikle ilgili soruların dâhil edilmesidir. Friel, O'Conner, andMamer (2006), kalp hızı bağlamını kullanarak, aşağıdaki soruları öğrencilerin nasıl veri ve değişkenlik üzerine odaklandırılabileceğine bir örnek olarak önermiştir:

- Eğer 9 yaşından 10 yaşına kadar olanların ortalama kalp atış hızı dakikada 88 atış ise bu, bu yaştaki her öğrencinin dakikada 88 atış kalp çarpma hızına sahip olduğu anlamına mı gelir? (Aralığın oldukça büyük olduğuna dikkat edin-dakikada 60-110 kalp atışı.)
- Eğer sınıftaki herkes için (30 kişilik bir sınıf) kalp atış hızını bulsaydık verilerin dağılımı neye benzerdi?
- Eğer diğer bir sınıf (30 kişilik) ölçülseydi, onların dağılımı bizim sınıfınkine benzer miydi?
- 200 öğrencilik bir veri dağılımı iki sınıfın dağılımına benzer miydi?

Verinin Şekli

Veri analizindekiönemli bir kavramsal fikir *verinin şekli* olarak ifade edilebilir: veri nasıl yayılmış veya gruplandırılmış, bir bütün olarak veri seti ile ilgili hangi özellikler tarif edilebilir ve veriler toplandıkları popülasyona ait bize genel olarak ne söylemektedir gibi bir anlayışa sahip olmaktır.

Verinin şeklini bize söyleyebilen tek bir teknik yoktur. Anokulöncesi-Anaokulu-8. sınıf müfredatı boyuncaöğrenciler çeşitli grafikleri inceleyerek verinin şekline bakmaya başlarlar. Farklı grafik teknikleri veya grafik çeşitleri bir bütün olarak verinin farklı bir anlık durum görüntüsünü verebilir. Örneğin, sütun ve daire grafiklerinin (yüzde grafikleri) her biri verinin nasıl farklı kategorilerde kümelendiğini gösterir. Daire grafiği bu kümelenmenin göreceli değerlerine daha çok odaklanırken sütun grafikleri miktar boyutunu katmaktadır. Bu grafiklerdeki hangi ve kaç tane kategorinin kullanılacağının seçimi, veri şeklinin farklı görünmesine sebep olacaktır.

Verinin şeklinin anlaşılmasının bir bölümü verilerin nasıl yayılmış olduğunun veya kümelendiğinin farkında

olunmasıdır. Erken sınıflarda bu, formel olmayan şekillerde hemen hemen her grafiğin incelenmesiyle tartışılabilir.

Sayısal veriler için verinin nasıl yayıldığını bize söyleyen istatistikler vardır. Bunlardan en basiti *aralıktır.* Ortalamalar **(***aritmetik ortalama ve medyan)* bize verinin "merkezinin" nerde olduğunu söyler. Lisede öğrenciler bir yayılma ölçüsü de olan standart sapma istatistiğini öğreneceklerdir. Ortaokul seviyesinde, saplı kutu diyagramı olarak adlandırılan basit bir grafiksel teknik, verinin yayılması hakkında bize görsel bilgi vermek için tasarlanmıştır.

İstatistik Yapma Süreci

Toplamayı öğrenme bir araya getirme işleminden çok daha fazlasını gerektirdiği gibi istatistik yapmak,aritmetik ortalamayı bulmak için gereken hesaplama işlemlerinden veya bir daire grafiği oluşturma sürecinden çok daha fazlasını gerektirir. Öğrencilerin anlamlı bir şekilde istatistik öğrenme ve yapmak için katılımlarını sağlamak, onlar sorular sormak ve tanımlamaktan sonuçları yorumlamaya kadar geçen tüm sürece dâhil edilmelidir. Bu geniş yaklaşım, arka plandaöğrencilerin nasıl grafikler oluşturacaklarını, aritmetik ortalamayı nasıl bulacakları ve verileri diğer yollarla nasıl analiz edebilecekleri bir çerçeve ve amaç sağlar. Bu bölüm, Şekil 21.1'de sunulduğu gibi bu sürecin etrafında organize edilmiştir.

I. Soruları Formüle Edin
- Eldeki problemi netleştirin
- Veriler ile cevaplanabilecek bir (veya daha fazla) soruyu formüle edin

II. Verileri Topla
- Uygun veriyi toplamak için bir plan tasarlayın
- Verileri toplamak için planı uygulayın

III. Verileri Analiz Edin
- Uygun grafiksel ve sayısal yöntemleri seçin
- Bu yöntemleri kullanarak verileri analiz edin

IV. Sonuçları Yorumlayın
- Analizi yorumlayın
- Yorumunuzu başlangıçtaki soruyla ilişkilendirin

Şekil 21.1 İstatistik yapma süreci.

Kaynak: Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005, August). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K–12 Curriculum Framework*, p. 11. Reprinted with permission. Copyright 2005 by the American Statistical Association. All rights reserved.



Soruların Formüle Edilmesi

İstatistik, grafik çizmek ve veri analizi yapmaktan daha öte bir anlam taşımaktadır. İstatistik, dünyamız hakkında hem soru sormayı hem de soruları cevaplamayı içerir. *İlkeler ve Standartlar*'ınVeri Analizi ve Olasılık standardının ilk hedefinin öğrencilerin "verilerle cevaplanabilecek soruları formüle edebilmelerini ve bunları cevaplamak için ilgili verileri toplayabilmelerini, organize edebilmelerini ve gösterebilmelerini" söyler (NCTM, 2000, p. 48).Gerçek hayatta olduğu gibi veri toplamanın belli bir amaç için olması gerektiğine dikkat edin: Bir soruyu cevaplamak. Sonra, veri analizi aslında siyasi anketörlerin, reklam ajanslarının, pazar araştırmacılarının, nüfus sayımını yapanların, vahşi yaşamla ilgili yöneticilerin, tıp araştırmacılarının ve diğerlerinin soruları cevaplamak için veri topladıkları gibi dünyamızın bazı yönleriyle ilgili bilgi sağlamaktadır.

Öğrencilere, kendi sorularını üretmeleri, bu sorulara cevap bulmaya yardımcı olacak uygun verileri seçmeleri ve veri toplama yöntemlerini belirlemeleri için fırsat verilmelidir. Örneğin,Susan JoRussell (Ivestigations kitaplarının baş yazarı)tarafından incelenen bir ikinci sınıfta, öğrencilerden birikendi sokağında kaç tane ev olduğunu öğrenmek istedi (Russel, 2006). Veya bir öğretmen "Kaç tane kız ve erkek kardeşiniz var?" şeklinde soru sorabilir. Soru ister öğretmen tarafından isterse öğrenci tarafından sorulsun, öğrencilerin sorunun ne kadar iyi tanımlanmış olduğuna yönelik yapılan konuşmalarda katılımlarının sağlanması gereklidir. Ev örneğinde, öğrenciler henüz bitmemiş evleri veya apartmanları sayıp saymamaları gerektiğini merak etmişlerdir. İkinci durumda, örneğin üvey kardeşlerin durumunun tartışılması gerekmektedir.

Öğrenciler sormak istedikleri soruları formüle ettikleri zaman topladıkları veriler daha anlamlı hâle gelir. Verileri nasıl organize ettiklerinin ve onları analiz yöntemlerinin bir amacı vardır.

Sorular için Fikirler

Genellikle, veri toplama ihtiyacı sınıfın doğal bir şekilde yaptığı tartışmalardan veya diğer içerik alanlarında ortaya çıkan sorulardan gelecektir. Fen, kuşkusuz, ölçümlerle doludur ve bu nedenle analiz gerektiren verilerçok sayıdadır. Sosyal bilgiler de ayrıca veri toplamayı gerektiren soruları yöneltmek için fırsatlarla doludur. Sonraki birkaç bölüm bazı ek fikirleri önermektedir.

Sınıf Soruları. Öğrenciler, kendileri, aileleri ve evcil hayvanları hakkındaki bilgileri, kol uzunlukları veya okula gitme süreleri gibi ölçüleri, sevdikleri ve sevmedikleri gibi konuları öğrenmek isterler. Üstesinden gelinebilecek en kolay sorular verilerin bir kısmının toplanmasına katkıda bulunan her sınıf üyesince cevaplanabilecek olanlardır. İşte birkaç öneri:

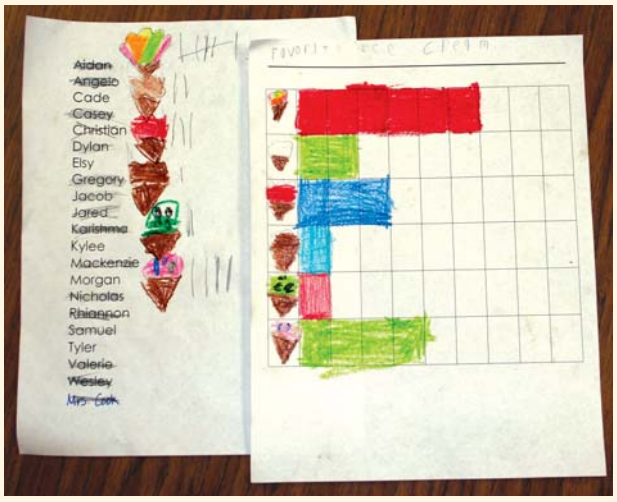
- *Favoriler:* TV şovları, oyunlar, filmler, dondurmalar, video oyunları, spor takımları, müzik CD'leri. (Birçok olasılık olduğunda, öğrencilere seçenek sayısını kısıtlamalarını önerin.)
- *Sayılar:* Evcil hayvan, kız kardeş veya erkek kardeş sayısı; TV izleme veya uyuma süreleri, uyku zamanı, bilgisayar başında geçirilen süre.
- *Ölçüler:* Boy, kol uzunluğu, ayak alanı, uzun atlama mesafesi, gölge uzunluğu, yol etrafında koşmak için geçen saniyeler, otobüste geçen dakikalar.

Bir Sınıfın Ötesinde. Önceki bölümdeyer alansorular öğrencilerin kendileri hakkında veri toplamalarına katkı sağlamak için tasarlanmıştır. Bu sorular, "Bu diğer sınıfla

karşılaştırıldığında nasıl olur?" gibi soru sorarak genişletilebilir. Karşılaştırma soruları, öğrencilerin topladıkları verilere ve bu verilerin içindeki değişkenliğe odaklanmalarına yardımcı olmak için iyi bir yoldur (Russell, 2006). Öğrenciler büyüdükçe çeşitli popülasyonları ve onlar arasındaki farklılıkları düşünmeye başlarlar. Örneğin, beşinci sınıf öğrencileri ortaokul öğrencilerinden nasıl benzer veya farklıdır? Öğrenciler, erkeklerin kızlara karşı, yetişkinler veya öğretmenlerin öğrencilere yönelik veya işçilerin üniversite mezunlarına yönelikolan soruları inceleyebilirler. Bu durumlar örnekleme konularını ve genellemeler ve karşılaştırmaları içerir. Buna ek olarak, öğrenciler sınıfın ötesindeki şeyler hakkında da sorular sorabilir. Topluluklar hakkındaki tartışmalar sosyal bilgiler ve matematiği entegre etmek için iyi bir yol sağlar.

Gazete verilerle ilgili her türlü soruları akla getirir. Örneğin, haftanın farklı günlerinde kaç tam sayfa reklam çıkmaktadır? Ön sayfada ne tür hikâyeler vardır? Hangi karikatürler gerçekten çocuklar içindir ve hangileri değildir?

Fen, soruların sorulabileceği ve verilerin toplanabileceği diğer bir alandır. Örneğin, yere düşen meşe yapraklarının genişliği nedir? Aynı yükseklikten düşen farklı türdekitoplar kaç defa zıplar? Nemli kağıt havlularda saklanan farklı baklagil türlerine ait, kabak ve bezelye tohumlarının çimlenme süreleri kaç gün olur?



Şekil 21.2 Anaokulu öğrencileri dondurma tatları üzerine arkadaşlarının tercihlerini içerenverileri topluyorlar.Kiminle anket yaptıklarını, verilerin çetelesini tutarak ve yatay bir sütun grafik çizerek kayıtlarını tutuyorlar.

Kaynak: Cook, C. D. (2008). "I Scream, You Scream: Data Analysis with Kindergartners." *Teaching Children Mathematics, 14*(9), p. 539. Reprinted with permission. Copyright © 2008 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.

Veri Toplama

Veri toplama, öğrenciler-özellikle küçük yaştakiler için kolay değildir. Bir birinci sınıfta öğretmen öğrencilerine "6 yaşında mısınız?" sorusu üzerine veri toplamalarını ister. Bu isteğin üzerine, 18 tane istekli öğrenci sınıftaki diğerlerine 6 yaşında olup olmadıklarını sorarlar ve evet ve hayırların çetelesini tutarlar. Peki problem nedir? Kime birden fazla sorduklarını veya kime hiç sormadıkları hakkında hiçbir fikirleri yoktur. Bu istatistikçilerin nasıl veri toplaması gerektiği ile ilgili yapılacak tartışmaya mükemmel bir giriş sağlamıştır.Bir anaokulu öğretmeni olanCarolyn-Cook, öğrencilerine sınıf arkadaşlarının favori dondurma tatlarını belirlemeleriiçin organize bir biçimde veri toplamaya yönelik düşünmelerine yardımcı olmalarını istedi. Öğrenciler, bir sınıf listesinin (Bkz. Şekil 21.2) onların takip etmelerineolanak vereceğine karar verdi (Cook, 2008).

Veri toplama ayrıca, değişkenliği dikkate almalıdır. Küçük yaştaki çocuklar, bir grup birinci sınıf ve bir grup beşinci sınıf öğrencisine onların favori TV programlarının sorulması sonucu farklı cevapları elde edeceklerini anlayabilirler. Cevaplar ayrıca sorulan güne göre veya son zamanlarda tartışılan belirli bir program olup olmamasına göre değişkenlik gösterebilir.

Daha büyük öğrenciler için (GAISE bunu istatistiksel düşünmenin ikinci seviyesinde öneriyor) veri toplama planlaması,daha temsili bir örnek aramak veya hatta rasgele örnekleme yöntemi kullanmak için verilerin birden fazla sınıftan toplanmasını içerir. Aslında, ortaokul öğrencileri için çoğu değişkenin(yapay)aynı tutulduğu ve böylelikle bir değişkenin analiz edilebileceği bir deneyi tasarlamalarını içeren tüm bir istatistik süreci içerisinde yer almaları önemlidir.

Mevcut Veri Kaynaklarının Kullanılması

Veriler anket yoluyla toplanmak zorunda değildir; çeşitli yerlerde veriler bol miktarda bulunur (örneğin aşağıda verilen yazılı ve Web veri kaynaklarında gösterildiği gibi).

Yazılı Kaynaklar: Gazeteler, almanaklar, spor rekorlar kitapları, haritalar ve çeşitli devlet yayınları öğrenci sorularını cevaplamak için kullanılabilecek olası veri kaynaklarıdır.

Çocuk edebiyatı mükemmel ve merak uyandıran bir kaynaktır. Küçük yaştaki çocuklar "Hikori, Dikori, Dak" gibi tekerlemeler içinde yer alan kelimelerin çetelesini tutabilirler (Niezgoda & Moyer-Packenham, 2005). Benzer şekilde, *Good Night Moon* (Brown 1947) veya *Green Eggs and Ham* (Dr. Seuss 1960) gibi kitaplarda birçok tekrar eden kelimeler veya cümleler vardır. Özellikle, ileri yaştaki öğrenciler için kurgusal olmayan düzyazılar bir veri kaynağı olabilir. Örneğin, *Fun Facts, Weird Trivia, and Amazing Lists on Nearly Everything You Need to Know!* (Buckley & Stremme, 2006) isimli kitaplar çeşitli istatistiklerle ilgili raporlar ve her bölümün sonunda anketler içermektedir. *A Negro League Scrapbook* (Weatherform, 2005) gibi spor kitapları, öğrencilerin keşfedebilecekleri ve karşılaştırabilecekleri tarihi dönemlere ait çok ilginç istatistikleri sahip olabilir.

Web siteleri. Öğrenciler bir sosyal bilgiler ünitesinin sonunda veya haberlerde gördükleri bir ülkeden esinlenerek bir başka ülke hakkındaki gerçeklerle ilgilenebilirler. Çeşitli etkinliklerdeki olimpiyat rekorları veya uzay uçuşları ile ilgili veriler öğrenci sorularının formüle edilebileceği diğer konu örnekleridir. Bunlar ve yüzlerce diğer sorular için internette veriler bulunabilir. Burada size birçok ilginç veriyi içeren dört web sitesini verelim.

- ABD Nüfus Sayımı İdaresi (www.census.gov): Bu web sitesi eyalet, il veya oy bölgesine yönelik bol miktarda istatistiksel bilgileri içerir.
- İktisadi Araştırma Servisi, USDA (www.ers.usda.gov/data/foodconsumption): Burada, yüzlerce gıdaların ulaşılabilirliği ve tüketimi üzerine veri setlerini bulabilirsiniz. Yıllık kişi başına düşen tahminler genellikle 1909 yılı gibieskiye gider.
- Dünya Gerçekleri Kitabı (https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/index.html): Bu web sitesi dünyadaki her ülkeye ait nüfus, yaş dağılımı, doğum ve ölüm oranları, ekonomi, hükümet, ulaşım ve coğrafya gibi bilgileri sağlar. Bunlara haritalar da dahildir.
- İnternet Film Veritabanı (www.imdb.com): Bu web sitesi tüm film türleri ile ilgili bilgileri sunmaktadır.

Veri Analizi: Sınıflandırma

Sınıflandırma, veri analizi için temel bir etkinlik olan olayları kategorize etme konusunda kararlar almayı içerir. Soruları formüle edebilmek ve toplanan verilerin nasıl temsil edileceğine karar vermek olayların nasıl kategorize edilebileceğiyle ilgili alınması gereken kararlardır. Küçük yaştaki çocuklar, çiftlik hayvanlarını, örneğin, ayak sayılarına, ne tip ürün verdiklerine, yük hayvanı olup olmadıklarına, ürün verip vermediklerine, evcil olup olmadıklarına, boyut veya renklerine, ne tür yiyecek yediklerine ve buna benzer özelliklere göre gruplandırabilirler. Bu gruplandırmaların her biri hayvanların farklı bir özelliğine dayanmaktadır.

Küçük yaştaki çocuklar, gerçek hayattaki verileri anlamlandırmak için farklı yollarla yapılan sınıflandırmalara yönelik deneyimlere ihtiyaç duyarlar. Nitelikleri içeren etkinlikler veri nitelikleri hakkında esnek bir akıl yürütmeyi geliştirmek için açıkça tasarlanırlar.

Özellikli Materyaller

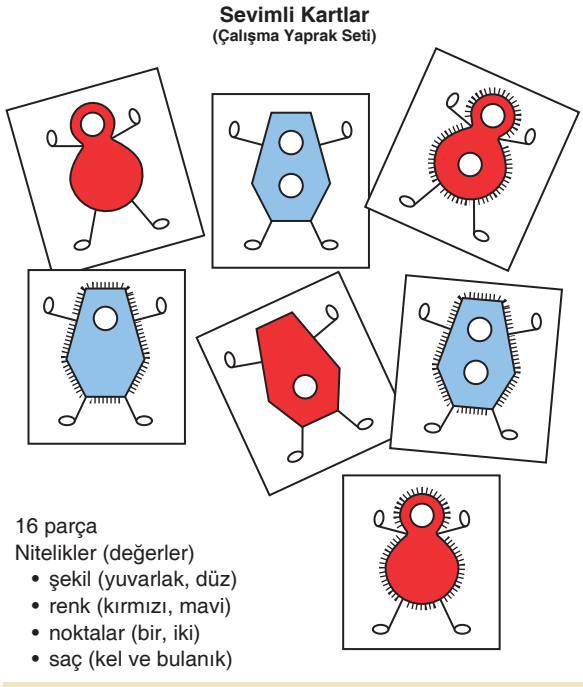
Özellikli materyaller, farklı şekillerde seçilip ayrılabilen ve sınıflandırılabilen nesnelerin herhangi bir kümesi olabilir (örneğin deniz kabukları, yapraklar, çocukların kendileri veya çocuk ayakkabılarının bir kümesi gibi).Özellikler, materyallerin sınıflandırılabileceği yollardır. Örneğin, saç rengi, boy uzunluğu ve cinsiyet çocukların nitelikleridir. Her nitelik birtakım farklı değerlere sahiptir: örneğin, sarışın, kahverengi, siyah veya kırmızı (saç renginin özelliği için); uzun veya kısa (boy uzunluğu için); erkek veya kadın (cinsiyet için). Öğretmen yapımı özellik setinin bir örneği Şekil 21.3'te gösterilmiştir. Bu kartlarıÇalışma Yaprak Seti 59'da bulabilirsiniz.

Ticari olarak mevcut özellik blokları, her bir parçası dört özelliğe sahiptir: renk (kırmızı, sarı, mavi), şekil (daire, üçgen, dikdörtgen, kare, altıgen), boyut (büyük, küçük) ve kalınlık (kalın, ince). 60 adet plastik malzeme setleri şeklinde bulunur. Bir setin sahip olabileceği belirli değerler, değerlerin sayısı veya özelliklerin sayısı önemli değildir.

NCTM Standartları

"Verileri kategoriler şeklinde düzenlemek, yiyecekleri seçip ayırmaya yardım etmek gibi formel olmayan ayırma deneyimleriyle başlamalıdır… Küçük yaştaki çocuklar nesnelerin ve verilerin niteliklerine odaklanan etkinliklerle devam etmeli, böylece ikinci sınıf itibariyle birden fazla özelliği kullanarak aynı anda sıralama yapıp sınıflandırabilirler" (s. 109-110). ◆

Özellikli Materyallerle Etkinlikler. Özeliklerle ilgili etkinliklerin birçoğu,küçük yaştaki çocukların yerde halka şeklinde oturup hepsinin materyalleri görebileceği ve uzanabileceği bir biçimde en iyi şekilde yapılır. Anaokulu sınıfları basit Venn şeması etkinlikleri ile eğlenceli olabilir. *Ve*,



Şekil 21.3 Sevimli Kartlar, kart stoklarındaki kırmızı ve mavi renkli kartlar üzerinekopyalanıp çoğaltılabilirler. Daha sonra da kat kat konarak ayrı kartlar halinde kesilebilir (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 59).

veya ve *değil* gibi kelimelerin kullanımıyla halka etkinlikleri beşinci sınıf öğrencileri için bile oldukça zorlayıcıdır.

Etkinlik 21.1

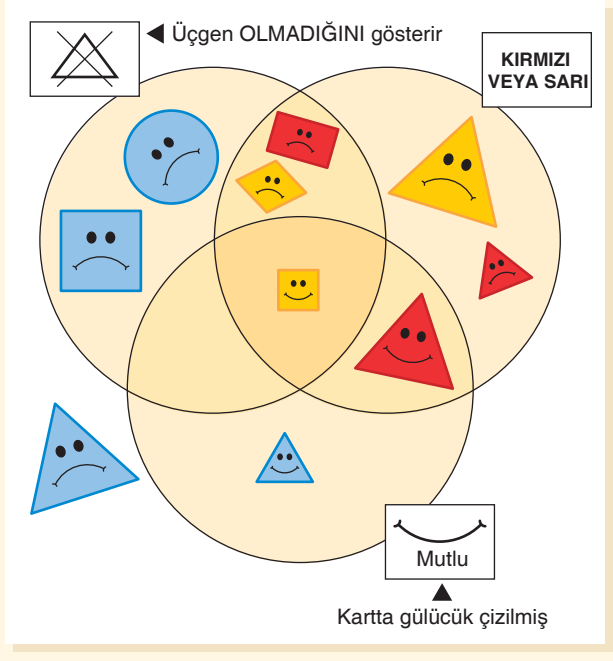
"Her İkisine" Ne Dersin

Öğrencilere iki büyük halka ip veya tel ve özellikli blokları verin. Onları tüm kırmızı parçaları bir halkanın içine ve tüm üçgenleri diğerinin içine koymalarını söyleyin. Kırmızı üçgenlerle ne yapılacağı sorununu öğrencilerin çözmeye çalışmalarına izin verin. Halkaların birbirinikeserek ortak bir alan oluşturma fikri belirince daha zorlu etkinlikler araştırılabilir.

Her bir halka üzerine etiketler yapıştırın veya çizin ve öğrencilerin sırayla uygun bölgelere parçaları yerleştirmelerini sağlayın. Şekil 21.4'te görüldüğü gibi etiketlerintek bir özellikle sınırlı olması gerekmez.Eğer bir parça herhangi bir bölgeye sığmazsa tüm bu halkaların dışına yerleştirilir.

"Kırmız değil" veya "küçük değil" gibi negatif nitelikler için etiketleri göstermek önemlidir. Ayrıca, "kırmızı ve kare" veya "büyük veya mutlu" gibi gösterildiği şekliyleve ve *veya* bağlaçların nihai kullanımı da önemlidir. *Ve*, *veya* ve *değil'in bu* kullanımı öğrencilerin sınıflandırma şemalarını önemli bir oranda arttırır.

Eğlenceli ve zorlayıcı bir etkinlik ise halkalar etiketlenmediğinde parçaların nasıl sınıflandırılacağını anlamaktır.



Şekil 21.4 Nitelik parçalarıyla bir Venn Şeması etkinliği. Her bir kartın üzerine bir kural yazılmıştır.

Etkinlik 21.2

Kuralımı Tahmin Et

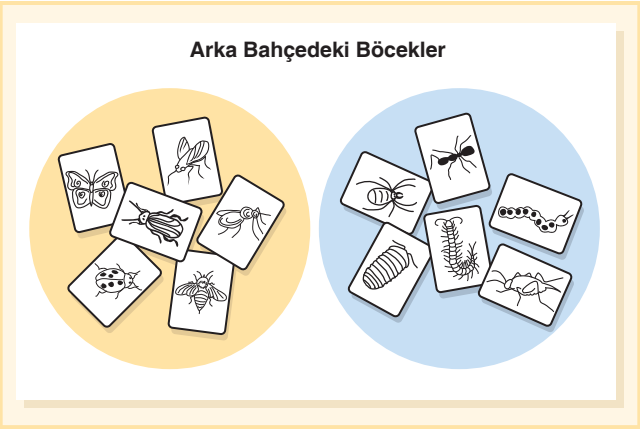
Bu etkinlik için nitelik "parçaları" olarak şekiller yerine öğrencileri kullanmayı deneyin. Öğrencilerinizin bir özelliğini (örneğin "mavi kotlular" veya "çizgili elbiseliler" gibi) belirleyin ve bu kuralı sınıfınıza söylemeyin. Her defasında bu nitelik kuralına göre bir öğrenciye sessizce bakarak onu sağa veya sola ayırın. Birtakım öğrenciler ayrıldıktan sonra diğer bir öğrencinin gelip öğrencilere kendinin hangi gruba ait olduğunu tahmin etmelerini isteyin. Kural açıkça söylenmeden önce etkinliği bir süre devam ettirin ve böylece sınıftaki diğerlerinin kuralı belirlemek için bir fırsatı olacaktır. Bu aynı etkinlik öğrencilerin ayakkabıları, kabuklar veya düğmeler gibi ayrılabilen görsel her materyalle yapılabilir.

Etkinlik 21.3

Saklanmış Etiketler

Tel halkalar içine koymak için etiket kartlarını seçin ve kartları yüzü aşağıya bakacak şekilde ters çevirin. Öğrencilerden yerleştirmeniz için bir kart seçmelerini isteyin. Üzerindeki etiketlere göre kartları ayırmaya başlayın. Siz ayırırken, öğrencilerin her halka için bir etiket belirlemeye çalışmalarını isteyin. Etiketleri tahmin ettiklerini düşünen öğrencilere bir kartı uygun halka içine koymalarına izin verin ancak etiketleri sesli bir şekilde tahmin etmelerinden kaçının. Etiketleri bildiğini düşünen öğrencilerden "öğretmen oyna" ve diğerlerinin tahminlerini cevaplamaları istenebilir. Etiketler hakkındaki bir fikri test etmenin yollarından birinin belirli bir bölüme yerleştirmenin uygun olduğunu düşündüğünüz kartları seçmek olduğunu ifade edin. Öğrencilerin çoğu oyunun kuralını bulmadıkça kartları çevirmeyin. Bu etkinlik, basit tek değerli etiketler ve iki halkakullanılarak anaokulunda kolaylıkla oynanabilir.

"Kuralımı Tahmin Et" etkinliği öğrencilerin güncel araştırmalarına bağlantılı gerçek hayat materyalleri ile tekrarlanabilir ve tekrarlanmalıdır da. Örneğin, eğer arka bahçenizdekihayvanlar üzerine bir ünite işliyor olsaydınız, hayvan resimlerini kullanabilirsiniz (Bkz. Şekil 21.5). Nitelikli materyallerle kullanılan halkalar veri sunumunun ilk biçimini sağlamaktadır. Sınıfınız, etiketlenmiş halkaların içerisine bilgileri yerleştirerek kendileri hakkındaki verilerin "grafiğini çıkarabilirler." "Evcil Hayvanlarımızın" bir grafiği her bir öğrencinizin evcil veya favori doldurulmuş hayvanının (bir evcil hayvan yerine) bir resmini içerebilir ve bir duvara yapıştırılarak evcil hayvanların nasıl sınıflandırıldığı gösterilebilir.



Şekil 21.4 Bu böcekleri sınıflandırmak için kullanılan kuralı tahmin edebilir misiniz?

Veri Analizi: Grafiksel Temsiller

Verilerin nasıl düzenlendiği her şeyden önce sizin veri toplamanıza sebep olan soruyla doğrudan ilintili olmalıdır. Örneğin, diyelim ki öğrenciler elbiseleri üzerinde kaç tane cepleri olduğunu bilmek istiyorlar (Burns, 1996; Russell et al., 2007). Sınıftaki her bir öğrenci ceplerini sayarlar ve veriler toplanır.

Durup Düşün!

Eğer ikinci sınıf düzeyindeki sınıfınız bu verileri toplamış olsaydı, verileri düzenlemeleri ve grafiklerini çizmeleri için onların hangi yöntemleri kullanmalarını önerirdiniz? Kaç tane cep hakkındaki bu soruyu cevaplamak için fikirlerinizden bir tanesi diğerlerinden dahamı iyidir?

Eğer büyük bir sütun grafiği her öğrenci için bir sütun ile yapılırsa bu kuşkusuz her öğrencinin kaç tane cebi olduğunu söyleyecektir. Ancak bu yöntem, soruyu cevaplamanın en iyi yolumudur? Eğer veriler cep sayısına göre sınıflandırılmış olsaydı, grafik iki cebe, üç cebe ve buna benzer cep sayılarına sahip öğrencileri kolaylıkla gösterecek ve hangi cep sayısının en fazla olduğunu ve cep sayılarının sınıftaki dağılımını gösterecektir.

Öğrenciler verilerini nasıl temsil etmek istiyorlarsa bu süreçte öyleceyer almalıdırlar. Bununla birlikte, verileri çeşitli yöntemlerle temsil etmekte deneyimsiz öğrencilere alternatifleri önerebilirsiniz.

Öğrenciler grafiksel gösterimi yaptıktan sonra, onun önemini tartışabilirler. Sayısal verilerle (cep sayısı) kategorik verilerin (çorapların rengi) karşılaştırmalı analizi,grafikleri anlamlandırmaya çalışan öğrenciler için ek bir sorundur (Russell, 2006). Eğer örneğin, grafikte beşsayısına karşılıkyedi çıkartma varsa öğrenciler beş kişinin yedi cebi olduğunu veya yedi kişinin beş cebi olduğunu düşünebilirler.

Bu öğretimin vurgusu ya da amacı, öğrencilerin grafiklerin ve çizelgelerin bilgileri yansıttığını ve farklı türdeki temsillerin aynı veri hakkında farklı şeyleri anlattığınıgörmelerine yardımcı olmaktır. Öğrencilerin gerçekten kendi grafiklerini oluşturmalarını isteminin değeri, onların teknikleri öğrenmelerinden ziyade kişisel olarak verilerle ilgilenip bir grafiğin bilgileri nasıl naklettiğini öğrenmelerindedir. Bir grafik oluşturulduğunda en önemli etkinlik onu gören insanlara, özellikle grafiğin oluşturulmasında yer almayan insanlara, ne söylediğinin tartışılmasıdır. Toplanmasında öğrencilerin kendilerinin yer aldığı gerçek verilerin grafikleri hakkındaki tartışmalar onlara gazeteler ve televizyonda gördükleri diğer grafikler ve çizelgeleri analiz etmelerine ve yorumlamalarına yardımcı olacaktır.

Yapmamamız gereken şey grafik oluşturulmasındaki yorucu ayrıntılar hakkında aşırı endişeli olmaktır. Analiz ve iletişimhususlarısizin gündeminizi oluşturmaktadır ve teknikten çok daha önemlidir! Gerçek hayatta teknoloji, ayrıntıların sorumluluğunu üstlenecektir.

Öğrencilerin grafikleri veya tabloları elle ve teknoloji ile oluşturmaları gerekir. İlk olarak, öğrencilerin iletmek istedikleri bilgileri ulaştırdığını sezdikleri ve anlamlı gelen çizelgeleri ve grafikleri yapmalarını teşvik edebilirsiniz. Küçük yaştaki öğrenciler elle yaptıkları zaman işlerine kişisel olarak daha çok zaman ayırdıklarını ve teknolojinin sunduğu tekniklerden dikkatlerinin dağılmadığını düşünebilirler. Buradaki niyet öğrencilerin verileri hakkındaki mesajı doğru bir şekilde anlamalarını sağlamaktır.

Teknoloji NOTLARI Teknoloji kullanımı grafiksel temsillerde çok yaygındır. Bilgisayar programları ve grafik çizebilen hesap makineleri çok az bir çaba ile çeşitli grafiksel görüntüler sağlayabilirler. O zaman tartışma her bir görüntünün sağladığı bilgiye odaklanabilir. Öğrenciler farklı grafikler arasından kendi seçimlerini yapabilirler ve seçimlerini kendi amaçlarına göre doğrulayabilirler. ◆

Sütun Grafikler ve Çetele Tabloları

Sütun grafikleri ve çetele tabloları verileri gruplamanın ve sunmanın ilk yollarından bir tanesi olup özellikle Anaokulu öncesi-Anaokulu-3. sınıflardakullanışlıdır. Bu erken aşamadasütun grafikleri kullanılmalıdır, böylelikle her bir sütun kareler, nesneler, çetele çizgileri veya nesnelerin resimleri gibi sayılabilen parçalardan oluşur. Şekil 21.6, tüm sınıfla hızlı bir şekilde grafik yapmak için kullanılabilen birkaç tekniği göstermektedir.

"Gerçek bir grafik" grafiği çizilen gerçek nesneleri kullanır. Örnekler, ayakkabı, deniz kabukları ve kitap türlerini içerir. Her bir nesne bir kare içerisine ya da bir zemin taşının üzerine yerleştirilebilir ve böylelikle karşılaştırmalar ve saymalar kolaylıkla yapılır.

Resim grafikleri grafiği çizilen nesneleri temsil eden bir çizimi kullanır.Öğrenciler kendi çizimlerini yapabilirler veya renklendirilecek çizimleri çoğaltabilirsiniz ya daözel ihtiyaçlara uygun çizimleri kesebilirsiniz.

Sembolik grafikler, grafikte sayılan nesneleri temsil etmek için kareler, bloklar, çetele çizgileri veya X'ler gibi sembolleri kullanır. Kolay bir fikir, grafik öğeleri olarak yapışkan notlar kullanmaktır. Bunlar doğrudan yazı tahtasına veya diğer tabloya yapıştırılabilir ve gerekirse yeniden düzenlenebilir.

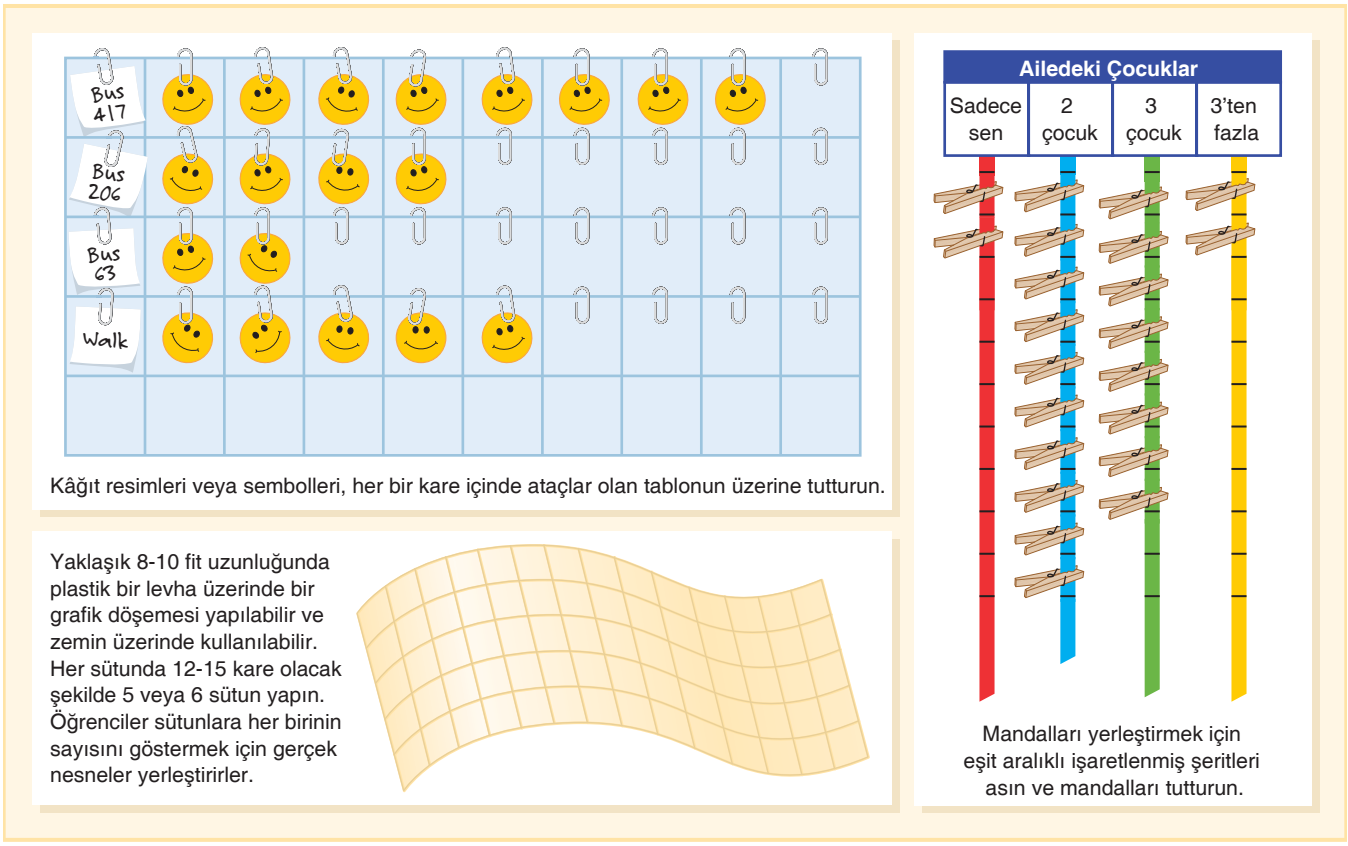
Verileri bu şekilde analiz etmenin istatistik yapma sürecinin üçüncü adımı olduğunu hatırlayın. Bir soru sorulmaktadır ve veriler grafikleri çizilecek kategorilere göre toplanır. Şekil 21.6,istatistik yapmanın 2 ve 3. adımlarını birleştirerek bilgi toplamak için iki hızlı yolu göstermektedir; böylelikle bilgi bir sütun ile gösterilmiş olur. 25-30 kişilik bir sınıf, 10 dakikadan az bir sürede bir grafik çizebilir, böylece sorular ve gözlemler için yeterli zaman kalmış olur.

Bir grafik oluşturulduktan sonra grafiğin hangi bilgileri söylediğine veya naklettiğine yönelik sınıfın tartışmasını sağlayın. "Bu ayakkabı grafiğine baktığınızda sınıfımız hakkında ne söyleyebilirsiniz?" Grafikler olgusal bilgileri (diğer ayakkabı çeşitlerine göre lastik ayakkabıları daha fazla kişi giymektedir)nakletmektedir ve grafikte doğrudan gözlemlenebilir olmayan çıkarımları yapmak için fırsatlar sağlar (bu sınıftaki çocuklar deri ayakkabı giymeyi sevmiyorlar). Olgusal gerçekler ve çıkarımlar arasındaki fark grafik inşasında önemli bir fikir olup fende de önemli bir düşüncedir. Yaşça daha büyük öğrenciler gazetelerde veya magazinlerde bulunan grafikleri inceleyebilirler ve grafiklerdeki *gerçekleri*ve grafiği yapan kişi tarafından verilmek istenmiş olabilecek *mesajı* tartışabilirler.

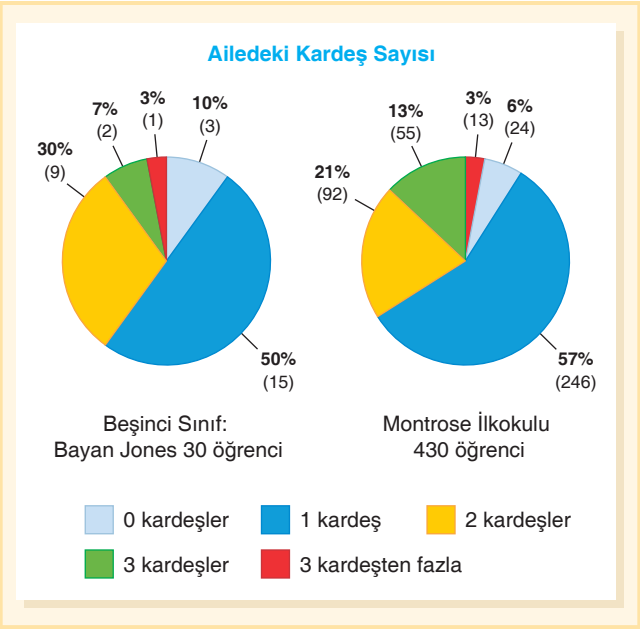
Daire Grafikleri

Genellikle, daire grafiklerinin yüzdeleri gösterdiğini düşünürüz ve böyle olunca da ilkokul öğrencileri için muhtemelen uygun olmadığı kanısına sahip olabiliriz. Bununla beraber, Şekil 21.7'ye dikkat ederseniz daire grafiği beş kategorinin her birindeki sadece veri noktalarının sayısını (bu durumda öğrenciler) belirtmek için kullanılabilir. Birçok bilgisayar grafik programları benzer bir grafik oluşturacaktır. Bilgisayar grafiği oluştururken yüzdelerin anlaşılması gerekli değildir.

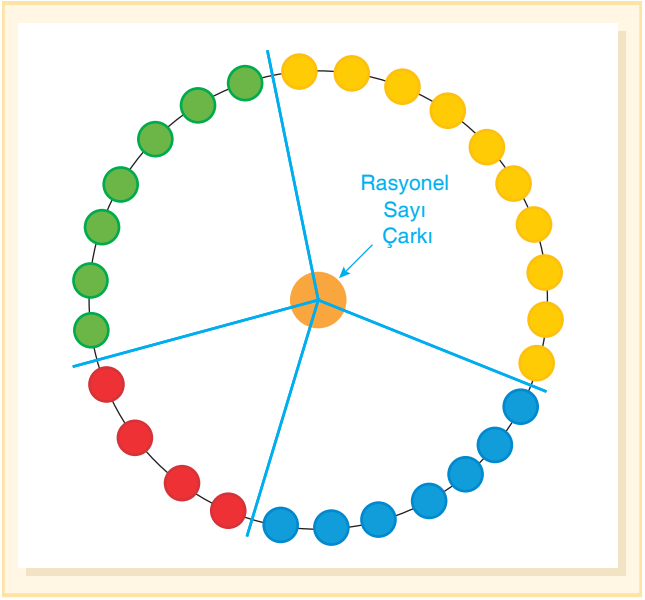
Ayrıca daire grafiğinin diğer grafiklerce kolay gösterilemeyen bilgileri gösterdiğine dikkat edin. Örneğin, iki çok farklı büyüklüğe sahip popülasyon arasında karşılaştırmalar yapıldığında daire grafiği bu karşılaştırmaları yapmaya izin veren görsel oranlar sunar. Şekil 21.7'deki iki grafik, farklı kardeş sayılarına sahip öğrencilerin yüzdelerini göstermektedir. Bir grafik sınıf verilerine diğeri okul çapındaki verilere dayanmaktadır. Daire grafikleri miktardan ziyade oranları gösterdiği için sütun grafiklerikullanılarakyapılması mümkün olmayan küçük sınıf veri setinin büyük okul veri setiyle karşılaştırılması mümkün olmaktadır.



Şekil 21.6 Grafikleri hızlıca çizmek için tekrar tekrar kullanılabilecekbazı fikirler.



Şekil 21.7 Daire grafikleri, parçanın bütüne oranını gösterir ve oranları karşılaştırmak için kullanılabilir.



Şekil 21.8 Bir insan çember grafiği: Bölümleri göstermek için öğrenciler çember şeklinde aralarında bir ip gerilmiş olarak bir araya gelirler.

Kolayca Yapılabilen Daire Grafikleri. Sınıfınızdaki öğrencilerin daire grafikleri çabucak ve oldukça çarpıcı bir şekilde yapılabilir. Varsayalım, örneğin, her öğrenci kendisinin NCAA turnuvasının "Son Dört'ündeki" favori basket takımını seçsin. Sınıftaki bütün öğrencileri aynı takımı tutanlar bir arada olacak şekilde sıraya koyun. Şimdi tüm grubu bir halka öğrenci şekline getirin. Dört uzun şeridin uçlarını dairenin merkezindeki zemine yapıştırın ve onları, dairenin üzerindeki takımların değiştiği noktalara kadar uzatın. Ve İşte!Hiçbir ölçüm ve yüzdeler olmadan çok hoş bir daire grafiği yapıldı. Rasyonel sayıçarkını kopyalar ve keserseniz (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 28) ve dairenin merkezine yerleştirirseniz, yaylar grafiğinizdeki her bir parçanın yaklaşık yüzdelerini gösterecektir (Bkz. Şekil 21.8). Bölüm 17'de anlatıldığı gibi yüzlük kolyeler veya bir halka içinde 100 parçadan oluşan renkli tahıllar (FrootLoops[1] gibi) benzer bir şekilde kullanılabilir.

Daire grafikleri için diğer kolay bir yaklaşımise insanlardan oluşan daire grafiğine benzemektedir. Öğrencilerin verilerin bir sütun grafiğini yapması suretiyle işe başlayın. Tamamlandığında, sütunları kendileri kessinler ve uç uca yapıştırsınlar. Daha sonra, iki ucu bir çember oluşturacak şekilde bantlayın. Çemberin merkezinin nerede olduğunu tahmin edin, çubukların birleşim noktalarına çizgiler çizin ve tüm halkanın etrafını işaretleyin. Daha önce olduğu gibi rasyonel sayı çarkını veya yüzlük kolyeyi kullanarak yüzdelikleri tahmin edebilirsiniz.

Yüzdelerin Belirlenmesi. Eğer öğrenciler bahsedilen iki yöntemden herhangi birini tecrübe etmişsekendi hesaplamalarını kullanarak daire grafiği yapmaları daha anlamlı olacaktır. Her kategorideki sayılar toplam veya bütünü oluşturmak için toplanır. (Bu bütün şeritlerin birbirine bantlanması veya öğrencilerin sıraya konulmasıyla aynıdır).Bir hesap makinesi ile her bir parçanın bütüne bölünmesiyle öğrenciler ondalık kesirleri bulacak ve yüzdelere dönüştüreceklerdir. Bu öğrenciler için yüzdeler ve dereceler arasında dönüştürme yapmak için ilginç bir orantısal problemdir, çünkü biri 100 üzerinden, diğeri ise 360 üzerindendir. Öğrencilerin daha zor değerlere geçmeden önce yüzde 50, yüzde 25 ve yüzde 10 gibi bariz değerlerle başlaması yararlı olur.



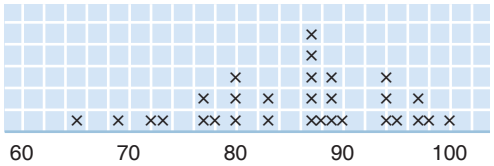
Öğrencileri grafik çizme alanında değerlendirirken, grafik çizme becerisi üzerine aşırı yoğunlaşmamak önemlidir. Bundan daha önemlisi öğrencilerin sorularını cevaplamaya veya projelerini tamamlamaya yardımcı olacak grafiklerin seçimi hakkında düşünmeleridir. Öğrenciler için hedefiniz bir grafiğin bir soruyu cevaplamaya yaradığını ve verilerin bir resmini gösterdiğini anlamalarıdır. Farklı grafikler bizlere veriler hakkında farklı şeyleri söylerler.

Öğrenciler grafikleri hakkında yazıp grafiğin ne dediğini ve verileri göstermek için neden bu grafik türünü seçtiklerini açıklamalıdır. Bu bilgileri değerlendirmenizde kullanın. ◆

Sürekli Veri Grafikleri

Sütun grafikleri veya resim grafikleri, sayısal sıralaması olmayan veri kategorilerini göstermek için kullanışlıdır (örneğin, renkler veya TV şovları gibi). Veriler sürekli bir ölçek boyunca gruplandığı zaman, bir sayı doğrusu hattı boyunca sıralanmalıdır. Örnek olarak zaman-sıcaklık, yaş-boy veya

[1] Ç.N. Renkli ve halka şeklinde mısır gevrekleri.



Şekil 21.9 Sıcaklıkların nokta grafiği

yaş-kilo ve olası puanları içeren ölçek-farklı aralıklarda puan alan kişilerin yüzdeleri verilebilir.

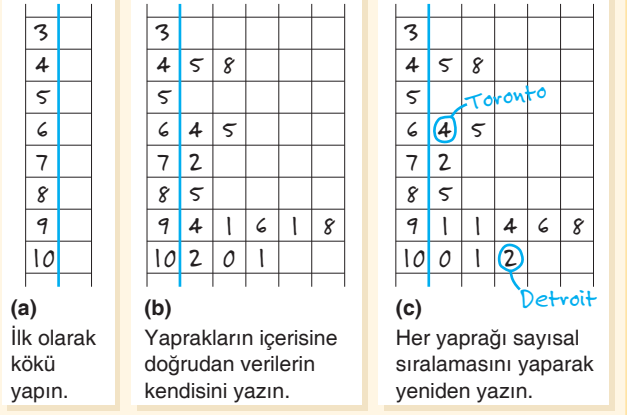
Nokta Grafikleri. *Nokta grafikleri* bir sayısalölçek boyunca olayların/nesnelerin sayılarıdır. Bir nokta grafiği yapmak için bir sayı doğrusu çizilir ve doğru üzerine her veri elemanına karşılık gelen değerler için X'ler konur. Nokta grafiğinin bir avantajı her veri parçasının grafik üzerinde gösterilmesidir. Ayrıca öğrenciler için yapılması çok kolay bir grafik türüdür. Bu aslında bir sütun grafiği olup her olası değer için potansiyel bir sütun vardır. Basit bir örnek Şekil 21.9'da gösterilmiştir.

Kök ve Yaprak Grafikleri. *Kök ve yaprak* grafikleri sütun grafiğinin bir formu olup sayısal verilerin, bir liste olarak grafikleri çizilir ve gösterimleri yapılır. Örnek olarak, Amerikan Ligi beysbol takımlarının, geçen sezon kazandıkları maçların aşağıdaki kayıtlarını göndermiş olduğunu varsayın:

Baltimore	45	Tampa Bay	91
Boston	94	Minnesota	98
Los Angeles	85	New York	100
Chicago	72	Oakland	101
Cleveland	91	Seattle	48
Detroit	102	Toronto	64
Kansas City	96	Texas	65

Eğer verilerin 10'lu olarak gruplanması gerekiyorsa, Şekil 21.10(a)'dakigibi 10'lar basamağınıküçükten büyüğe sıraya koyup sağına bir çizgi çizin.Bunlar grafiğin "kök"ünüoluşturur. Sonra, puan listesini gözden geçirin ve Şekil 21.10(b)'de gösterildiği gibi birler basamaklarını uygun onlar basamağının yanına yazın. Bunlar "yaprak"lardır. Grafik yapma süreci verileri sizin için gruplandırır. Bundan başka, her veri parçası grafikten elde edilebilir. (Dikkat edin, kök veyaprak grafikleri en iyi grafik kağıtları üzerine yapılır, böylelikle her basamak aynı miktarda yer kaplar.) Şekil 21.10(c)'de gösterildiği gibi grafik hızlı bir şekilde, her bir yaprak en azdan en fazlaya doğru sıralanarak yeniden yazılabilir.

Kök ve yaprak grafikleri iki basamaklı verilerle sınırlı değildir. Örneğin, veriler 600 ile 1300 aralığında iseler, kök, 6 ile 13 arasındaki sayılar olabilir ve yapraklar virgül ile ayrılan iki basamaklı sayılardan oluşturulmuştur.



Şekil 21.10 Kök ve yaprakgrafiği yapımı

Şekil 21.11 iki ek varyasyon göstermektedir. İki veri seti karşılaştırılacağı zaman yapraklar aynı kökten zıt yönlerde uzatılabilir. Aynı örnekte, verilerin onlu yerine beşli olarak gruplandığına dikkat edin. 62 çizilirken, 2, 6'nın yanına yazılır; 67 için, 7, 6'nın altındaki noktanın yanına yazılır.

Şekil 21.11'deki kök-ve-yaprak grafiğinin verilerin şeklini açıkça gösterdiğine dikkat edin.Verilerin nasıl yayıldığını ve nasıl kümelendiğini gözlemleyebilirsiniz. Öğrenciler gözlemlerine dayanarak aralık, medyan, mod ve aykırı değerleri bulabilirler. Şekil 21.11'de yine onlar yerine beşli gruplanmış satırların kullanımı verilerin

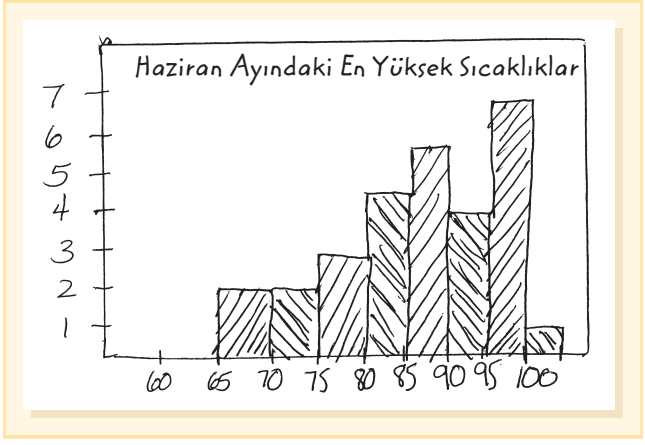


Şekil 21.11 Kök ve yaprak grafikleri iki veri setinin karşılaştırılması için kullanılabilir.

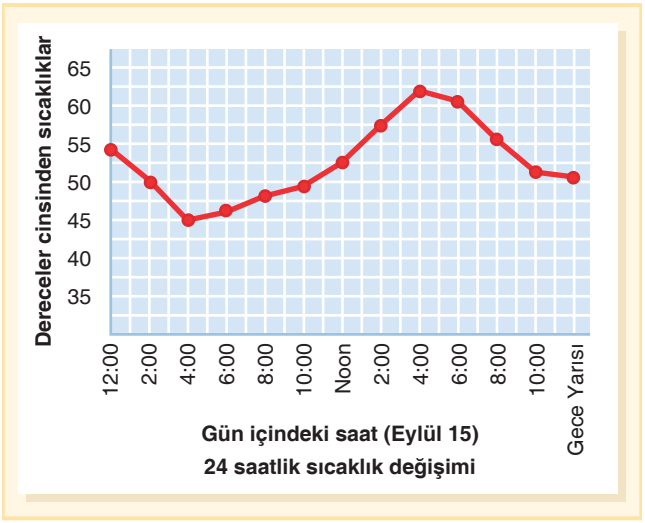
dağılımını göstermektedir, muhtemelen belirli notları göstermek içindir (örneğin, B'den B+'ya).Kök ve yaprak grafiğinin nasıl kurulacağını belirlemek bağlama ve sorulan soruya bağlıdır.

Histogramlar. Histogram sütun grafiğinin bir biçimi olup içerisinde kategoriler bir sayısal ölçek boyunca ardışık eşit aralıklar şeklindedir. Her bir sütunun yüksekliği veya uzunluğu,o aralığa düşen veri elemanlarının sayısı ile belirlenir. Histogramlar kavram olarak zor değillerdir, ancak onları oluşturan öğrenciler için problemlere neden olabilirler. Sütün genişliği için kullanılacakuygun aralık nedir? Sütunların uzunlukları için kullanılacak iyi bir ölçek nedir? Her bir aralıktaki tüm verilerin gruplandırılma ve sayılma zorunluluğu ayrı bir zorluğa neden olur. Şekil 21.12'de Şekil 21.9'da kullanılan aynı sıcaklık verileri için bir histogram gösterilmektedir. Verilerin dağılımını ve kümelenmesini gösteren iki gösterimin nasıl benzer olduğuna dikkate edin. Histogramlar grafik hesap makineleri veya bilgisayar yazılımları ile hızlı bir şekilde oluşturulabilir.

Çizgi Grafikleri. Sürekli bir sayı skalası boyunca eşit aralıklı noktalarla ilintili bir sayısal değer varsa çizgi grafiği kullanılır. Noktalar, iki ilişkili veri parçasını temsil etmek için çizilir ve noktaları birleştirmek için bir çizgi çizilir. Örneğin, bir çizgi grafiği,gün boyunca bir bayrak direği gölgesinin bir saatten diğer saate nasıl değiştiğini göstermek için kullanılabilir. Yatay ölçek zamanı ve dikey ölçekse gölgenin uzunluğu olurdu. Ayrık noktalar yapılabilir ve bunları birleştiren düz çizgiler çizilebilir. Önceki örnekte, gölge her zaman mevcuttu, fakat uzunluğu bir çizilen değerden diğerine atlamadı veya düşmedi. Grafikte gösterildiği gibi sürekli olarak değişti. Sıcaklık değişimi üzerine bir çizgi grafiği örneği görmek için Şekil 21.13'e bakınız. Çizgi grafikleri Bölüm 14'te ayrıntılarıyla tartışıldı.



Şekil 21.12 Haziran ayı en yüksek sıcaklıkları gösteren histogram.



Şekil 21.13 Bir gününboyunca ölçülensıcaklıkları gösteren çizgi grafiği.

Saçılma Diyagramları

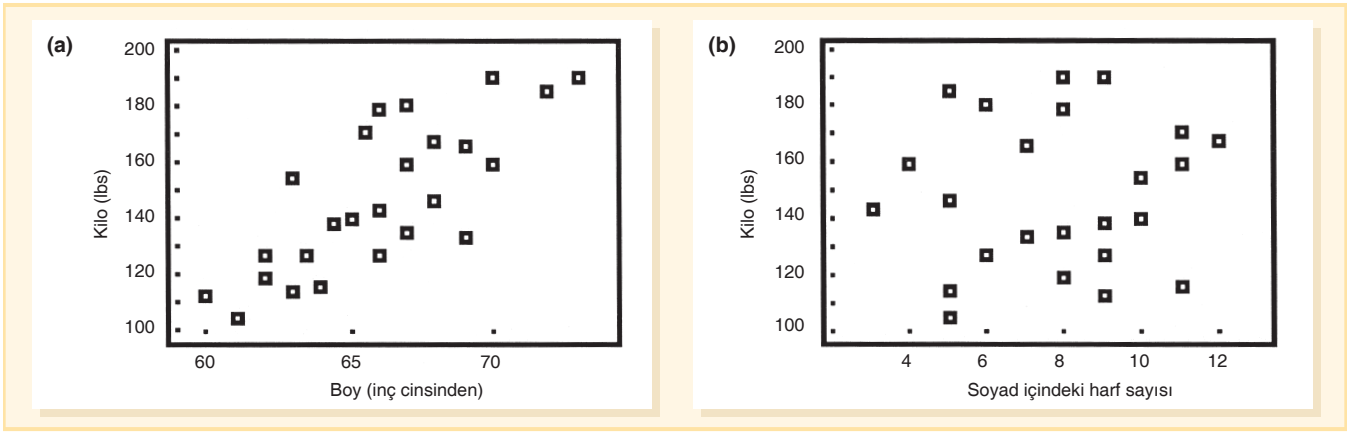
Veriler genellikle iki veri seti veya olayların arasındaki ilişkileri araştırmak veya göstermek için analiz edilir. Örneğin, televizyon seyretmek için harcanan zaman ve genel notlar arasındaki ilişkiler, eğer varsa, nelerdir?

İki değişken veya iki sayısalolay arasındaki ilgilendiğimiz ilişkiler her türlü gerçek durumlarda mevcuttur. Düzlem açısı değişirken oyuncak bir araba eğik bir düzlem üzerinde ne kadar gider? Bir balonun içindeki hava ile havanın boşalması için geçen süre arasında bir ilişki var mıdır? Bu tür veriler genellikle kurulan ve ölçümler alınarak gözlemlenen bir çeşit deneyden elde edilirler.

İlişkili olabilecek veriler çiftler halinde toplanırlar. Örneğin, televizyon izleme saatleri ve notlar arasındaki olası ilişkiyi inceleyecek olsaydınız, anketinizdeki her bir kişi veya örnek, biri televizyon izleme saati ve diğeri ortalama not olmak üzere iki sayı çiftini üretirdi.

İki değişken içeren veriler her bir eksenin değişkenlerden birini temsil ettiği koordinat düzlemi üzerindeki bir noktalar grafiği olan saçılma grafiği üzerine çizilebilir. İki veri setinden alınan her bir sayı çifti çizildiği zaman olası ilişkilere dair bir ipucu oluşturmasının yanı sıra verinin görsel bir görüntüsünü oluşturur. Varsayın ki aşağıdaki bilgi sekizinci sınıftaki 25 erkek öğrenciden toplandı: inç olarak boy uzunluğu, pound olarak kilo ve soyadlarındaki harf sayısı. Şekil 21.14'deki iki grafik iki olasılığı göstermektedir. Grafik (a) boy-kilo dağılım grafiği ve grafik (b) ise kilo ile ad uzunluğunun gösterildiği bir grafiktir.

Beklediğiniz gibi erkek öğrencilerin kiloları, boyları arttıkça artmaktadır. Bununla birlikte, bu ilişki mükemmel olmaktan uzaktır. İsim uzunluğu ile kilo arasında bir ilişki beklemek için bir neden yoktur ve aslında noktalar nerdeyse rastgele dağılmış gibi görünmektedir.



Şekil 21.14 Saçılma diyagramları olası ilişkileri veya ilişkilerin olmaması durumlarını gösterir.

NCTM Standartları "Öğretmenler, öğrencileri birçok veri setlerini çizmeleri ve bu [saçılım] diyagramların içindeki ilişkilere bakmaları için teşvik etmelidir; bilgisayar grafik yazılımları ve grafik hesap makineleri bu iş için çok yararlı olabilir. Öğrenciler, doğrusal ilişkileri gösteren ve hiçbir belirgin ilişki göstermeyen veri setlerini içeren bir dizi örneği görmelidir" (s. 253). ◆

En iyi uyum doğruları[2]. Eğer sizin saçılma diyagramınız bir ilişki gösterirse, bu kelimelerle basit bir şekilde tarif edilebilir. "Erkek çocuklar uzadıkça kilo alma eğilimindedirler." Bu doğrudur ancak özel bir faydası yoktur. İlişki tam olarak nedir? Eğer bir erkek çocuğun boyunu bilseydim bu bilgiye dayanarak onun ağırlığını tahmin edebilir miydim? Birçok istatistiksel analizde olduğu gibi, istatistiğin değeri henüz gözlemlenmeyen bir şeyi tahmin etmekte yatmaktadır. Seçimden önce,tüm popülâsyonun nasıl oy kullanacağını tahmin etmek için küçük bir oy veren gruba anket yaparız. Burada, 30 öğrenciden oluşan bir örnekleme bakarak diğer öğrencilerin kilolarını tahmin edebilir miyiz? En iyi uyum doğrusu öğrencilerin varsayımlarını geliştirmelerine yardımcı olur.

Bu durumlardaki ilişki, ortalama veya standart sapma gibi bir sayıdan ziyade bir doğru veya eğridir. Saçılma diyagramı üzerinde tüm noktaları yaklaşık olarak "en iyi" temsil eden ve gözlemlenen eğilimi göstermek üzere çizilebilen bir doğru var mıdır? Eğer saçılma diyagramı durmadan artan veya durmadan azalan bir ilişkiyi (boy-kilo grafiğinde olduğu gibi) gösteriyor görünüyorsa, muhtemelen noktaları yaklaşık olarak temsil eden bir doğru bulmaya çalışacaksınızdır. Bazen grafik eğimli bir ilişki olduğunu gösterecektir, bu durumda noktaları yaklaşık olarak temsil etmek için parabol gibi düzgün bir eğri çizmeyi deneyebilirsiniz.

En İyi Uyum Doğrusunu Belirler? Tam olarak görsel bir bakış açısından, seçtiğiniz doğru gözlenen ilişkiyi tanımlar ve veri setinde bulunmayan diğer değerlerin tahmininde kullanılabilir. Saçılma diyagramındaki noktalar seçtiğiniz doğruya ne kadar yakın olursa doğrunun tahmin etme değeri için daha fazla güveniniz olurdu. Kuşkusuz isim uzunluğu-kilo grafiğinin bir yerinde düz bir doğru çizmeyi deneyebilirdiniz, ancak onun öngörü kapasitesine çok fazla inancınız olmazdı; çünkü çizeceğiniz herhangi bir doğrudan noktalar oldukça uzakta olurdu.

Etkinlik 21.4

En İyi Uyum Doğrusu

Öğrenciler ilgili verileri topladıktan ve bir saçılma diyagramı hazırladıktan sonra her öğrenci grubu için grafiğin doğru bir örneğini çoğaltın. Bir doğru olarak kullanmak üzere öğrencilere pişirilmemiş bir spagetti parçası verin. Görev, noktalardaki ilişkiyi temsil etmek için "en iyi" doğru olacak şekilde doğruyu grafik üzerine yapıştırmaktır. Ayrıca, öğrenciler neden doğruyu o şekilde yerleştirdiklerini açıklayan bir gerekçe geliştirmelidirler.

Grafiğin çizili olduğu bir tepegöz asetatı kullanarak çeşitli gruplar tarafından seçilen doğrular ve onların gerekçeleri ile karşılaştırın.

Durup Düşün!

Okumaya devam etmeden önce, Şekil 21.14(a)'daki boy-kilo grafiğine dönün ve en iyi uyum doğrusu olduğunu düşündüğünüz bir düz çizgi çizin (Sınıfınızda kullanmak için o şeklin büyütülmüş bir fotoğrafını yapmak isteyebilirsiniz). Doğruyu neden oraya çizdiğinizi açıklayan ne sebep gösterebilirsiniz?

Öğrencileri, doğrunun neden en iyisi olduğunu açıklamalarına dair "matematiksel" bir neden kullanmaya teşvik edin. İyi bir doğru, etrafında birçok noktanın kümelenmiş olanı olduğu için iyi uyan bir doğru, noktaların doğruya olan uzaklığının minimum düzeyde olanıdır. Tüm noktaların doğruya en az mesafede olmasıgenel kavramı verilen noktalar kümesi için özgün bir doğru oluşturacak algoritmaya yol

[2] En iyi uyum doğrusu regresyın doğrusunu ifade etmektedir.

açabilir.Bu tür iki algoritma istatistikte çok iyi bilinmekte ve kullanılmaktadır. Daha karmaşık olan yaklaşım,*en küçük kareler regresyon* doğrusu olarak adlandırılır. Bu cebirsel bir işlem olup ortaokul öğrencileri için erişilebilir değildir ve ayrıca hesaplaması oldukça sıkıcıdır. İkinci algoritma belirlemesi daha kolay olan medyan-medyan çizgisini oluşturur. Bu, temel olarak, verilerin üç kümeye bölünmesini ve her birinin medyanınınbulunmasını içerir. Medyanlar çizilir ve en iyi uyum doğrusunu bulmak için ilave ayarlamalar yapılır. Daha özel bilgi online arama ile bulunabilir.

Saçılma diyagramları ve en iyi uyum doğruları, ayrıca Bölüm 14'teki fonksiyonlar bölümünde tartışılmıştır. Gerçek dünya, istatistik ve cebirsel fikirler arasında bağlantı kurmak değerli bir iştir.



Veri analizi müfredatın bir alanı olup bu müfredatta yer alan teknoloji, öğretim şeklimizi gerçekten değiştirmiştir. Geçmişte, grafik çizimine ve istatistik hesaplamaya vurgu yapılırdı. Öğrenciler ölçekli çizmek, eksenleri etiketlemek, grafikleri boyamak ve bunun gibi grafik kâğıdı üzerinde çalışmak zorundaydılar. Bugün, bu bölümde bahsedilen her grafiksel teknik ve istatistik, muhtemel kök ve yaprak grafikleri hariç çeşitli teknolojilerde kolayca bulunabilmektedir. Teknolojinin yardımıyla veri analizinde öğretiminin odak noktası, grafiklerin ve istatistiğin kullanımındaki ana fikirlere kayabilir ve kaymalıdır da: bunlar verileri tarif etmek, verilerin şekli hakkında bir fikir sahibi olmak, verilerle ilgili soruları yanıtlamak ve bu bilgileri diğerlerine iletmek şeklinde sıralanabilir.

Elektronik tablolar sütunlardan veya satırlardan oluşan veriler için herhangi bir istatistiği hesaplayabilir. Veriler değişirse ilgili istatistik anında değişir. Elektronik tablolar ayrıca çok hoş sütun grafikleri, çizgi grafikleri ve daire grafikleri yapar. Öğretmenler ayrıca kullandıkları ders kitaplarının yayıncısının grafik yazılım imkânı sunup sunmadıklarını kontrol etmelidirler.

Grafik hesap makineleri her öğrenciye veri analiz teknolojisini kullanma imkânını verir. TI-73 hesap makinesi ortaokul öğrencileri için tasarlanmıştır. Daire grafikleri, sütun grafikleri ve resim grafikleri olmak üzere sekiz çeşit çizim veya grafik yapar ve en iyi uyum doğrularını hesaplar ve grafiğini çizer.

Öğrencilerin teknolojiyi kullanmadan grafik çizmeleri ve istatistik hesaplamaları yapmaları tartışılabilir. Uygun yöntemler bu bölümde önerilmiştir. Bununla birlikte, el ile yapılan yöntemlerin amacı sorulan soruyu analiz etme ve sonuçları yorumlama olmalıdır. ◆

Veri Analizi: Merkezi Eğilim Ölçüleri

Her ne kadar grafikler verilerin görsel imgelerini sağlasa da, verilerin ölçüleri, verileri tarif etmek için farklı ve önemli bir yoldur. Veri kümesinin en yaygın sayısal açıklamaları, yayılım (değişim aralığı) ve merkez (*aritmetik ortalama*, *medyan* veya *mod*) ve değişim aralığındaki dağılım ölçüleri (*varyans* veya *dağılma*) ile ilgilidir. Öğrenciler bu istatistiklerin önemini, fikirleri formel olmayan yollarla keşfederek edinebilirler.

Ortalamalar

Ortalama terimi günlük yaşamda oldukça sık duyulmaktadır. Bazen "ortalama günlük yağış." örneğinde olduğu gibi kesin bir aritmetik ortalamayı ifade eder. Bazen "O ortalama boydadır." gibi oldukça genel hatlarıyla kullanılır. Her iki durumda da ortalama, büyük bir sayı grubunu açıklayıcı tek bir sayı veya ölçüdür. Eğer sizin ortalama test puanınız 92 ise, bir şekilde sizin tüm test puanlarınızın bu sayı ile yansıtıldığı varsayılır.

Aritmetik ortalama, *medyan* ve *mod* belirli ortalama türleri olup merkez ölçüleri veya merkezi eğilim ölçüleri olarak da adlandırılır. *Mod* veri kümesinde en sık karşılaşılan değerdir.

Aritmetik ortalama küme içindeki tüm sayıların toplanıp küme elamanlarının toplam sayısına bölünerek hesaplanır.

Medyan sıralı veri seti içerisindeki orta değerdir. Değerlerin yarısı medyanda veya medyan üzerinde bulunurken diğer yarısı medyanda veya altında bulunur. Medyanı anlamak ve hesaplamak daha kolaydır ve aritmetik ortalamada olduğu gibi oldukça büyük veya oldukça küçük bir veya iki verinin varlığından etkilenmez. Medyan ayrıca ilköğretim çağındaki öğrenciler için daha anlaşılırdır. Birçok araştırmacı ve müfredat geliştiriciler medyanın ilköğretimin ilerleyen yılları için daha uygun bulmaktadırlar, ancak bu medyanın ortaokul yıllarına kadar ertelenmesi gerektiği anlamına gelmektedir (Russell, 2006). *Öğretim Programı Odak Noktaları*betimsel istatistiği sayılar ve cebir ile entegreederek sekizinci sınıfın bir konusu olarak ele almaktadır (NCTM, 2006).

Daha önce belirtildiği gibi, istatistikteki bağlam önemlidir. Bir durumun bağlamı, sizin ölçü olarak mod, aritmetik ortalama veya medyanı kullanmak isteyip istemeyeceğinizi belirleyecektir. Örneğin, ev fiyatlarını bildirirken (Bkz. s. 436), medyan, aritmetik ortalamadan oldukça farklı olup aritmetik ortalama daha büyüktür. Hangisi konut maliyetini daha iyi resmetmektedir? Çok pahalı evler ortalamayı yükseltebilir, bu yüzden genellikle medyan konut maliyetlerinin merkezini tanımlamak için daha yaygın bir ölçüdür. Eğer bir seyahat acentesi, bir promosyon tatil paketi planlama parçası olarak ailelerin genellikle kaç gün seyahat ettikleri üzerine veri toplasaydı, acente mod ile daha çok ilgilenirdi, çünkü bu soruyu cevaplamak için diğer ölçüler bu kadar yardımcı olmazdı.

Aritmetik Ortalamayı Anlamak: İki Yorum

Aritmetik ortalama hakkında düşünmek için aslında iki yol vardır. Birincisi, aritmetik ortalama, eğer tüm veriler dengelenmiş olsa, tüm veri öğelerini temsil eden bir sayı olur. Bu

açıdan, aritmetik ortalama tüm veri öğelerini temsil eder. İstatistikçiler aritmetik ortalamayı merkezi bir denge noktası olarak düşünmeyi tercih ederler. Bu aritmetik ortalama kavramı, verinin "merkezi"nin bir ölçüsü veya merkezi eğilim ölçüsü düşüncesine daha uygundur. Her iki kavramaşağıdaki bölümlerde tartışılmıştır.

Seviyeleri EşitlemeYorumu. Sınıfınızdaki öğrencilerin ortalama aile fertlerinin sayısının 5 olduğunu varsayın. Bunu yorumlamanın bir yolu tüm anneler, babalar, kız kardeşler ve erkek kardeşler topluluğunu her bir öğrenciye dağıtarak her birinin aynı büyüklükte bir "aileye" sahip olmalarını düşünmektir. Sınıfınızdaki dört test sonucunuzun ortalaması 93 diyebilmek tüm notlarınızın toplamını dört teste eşit olarak yaymak gibidir. Bu her öğrencinin sanki aynı sayıda aile ferdine sahip olduğu ve sanki her test puanının aynı olduğunu düşünmek gibidir, fakat toplamlar gerçek dağılımlarla örtüşmüştür.Bu aritmetik ortalama kavramının, aritmetik ortalamayı hesaplamak için algoritma bağlantısını kurduğundan ek yararı vardır.

Etkinlik 21.5

Sütunların Seviyesini Eşitleme

Öğrencilerin plastik iç içe geçmeli küpleri kullanarak bir sütun grafiği yapmalarını isteyin. 5 veya 6 değerli bir durum seçiniz. Örneğin Şekil 21.15'teki grafik altı oyuncak için fiyatları göstermektedir. Öğrenciler için görev grafiğin kendisini kullanarak tüm oyuncakların sayısının aynı kaldığını varsayarak ve tüm oyuncakların fiyatları aynı olma durumunda oyuncak fiyatının ne olduğunu belirlemektir. Öğrenciler çeşitli teknikler kullanarak grafikteki küpleri yeniden düzenleyeceklerdir, ancak sonunda, olası bazı kalanların kesirsel miktarlarda zihinsel olarak dağıtılabildiği altı eşit sütun oluşturacaklardır.

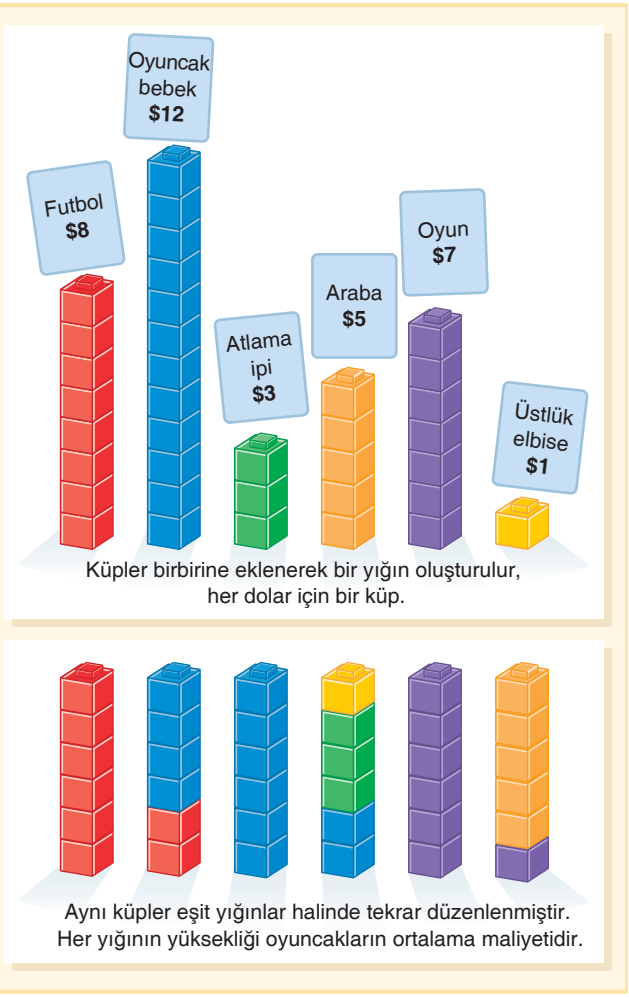
Öğrencilere seviyeleri eşitlenmişsütunların miktarının verinin aritmetik ortalaması olduğunu açıklayın-bu, toplam fiyatın aynı kaldığı ve her bir öğenin aynı ücrete sahip olma durumunda her bir öğenin maliyetidir.

"Sütunların Seviyesini Eşitleme'nin ardından aritmetik ortalamayı bulmaya yönelik bir algoritma geliştirmeye yardımcı olmak için bir sonraki etkinlikledevam edin.

Etkinlik 21.6

Ortalama Ayak

Şu soruyu sorun: Ayaklarımızın ortalama uzunluğu inç cinsinden nedir? Her bir öğrencinin ayak uzunluklarına uyacak şekilde bir kâğıt şerit kesmelerini isteyin. Öğrenciler şeritlerin üzerine isimlerini ve ayak uzunluklarını inç cinsinden yazarlar. Sınıf için ortalama bulmadan önce, ilk olarak küçük gruplar için ortalamaları bulmalarını önerin. Öğrencileri dörderli, altışarlı veya sekizerli gruplara ayırın. (Beşerli veya yedişerli gruplar problemli çıkacaktır.) Her gruptan, öğrencilerin ayakları için hazırladıkları kağıt şeritleri uç uca eklemelerini isteyin. Her grubun görevi şeritler üzerine yazılan uzunluklardan hiçbirini kullanmadan aritmetik ortalamayı bulmak için bir yöntem üretmektir. Öğrenciler sadece birleştirilmiş şerit kullanabilirler. Her grup kendi yönteminisınıf ile paylaşacaktır. Bu iş sonunda tüm sınıfa yönelik aritmetik ortalamayı belirlemek için bir yöntem tasarlayacaklardır.



Şekil 21.15 Verilerin düzeylerinin eşitlenmesi olarak aritmetik ortalamayı anlama.

Durup Düşün!

Okumaya devam etmeden önce, öğrencilerin "Ortalama Ayak" için kullanabilecekleri bir yöntem ne olabilir?

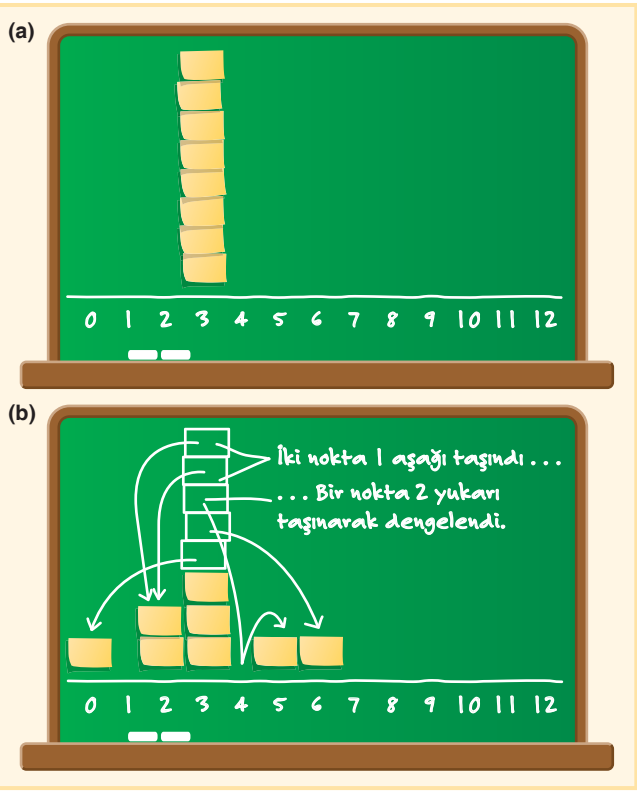
Her öğrencinin ayakları için inçleri, grup üyeleri arasında eşit olarak dağıtmak için öğrenciler şeridi eşit parçalara katlayabilirler; böylelikle gruptaki öğrenci sayısı kadar şerit üzerinde bölümler olur. Sonra, herhangi bir bölümün uzunluğunu ölçebilirler.

Tüm sınıf için aritmetik ortalamayı nasıl bulabilirsiniz? Sınıfınızda 23 öğrenci olduğunu varsayın. Uç uca yapıştırılmış şeritleri kullanarak tüm sınıf için çok uzun bir şerit yapın. Bu uzun şeridi 23 eşit parçaya bölmek makul değildir. Ancak, ortaya çıkan şeridin uzunluğunun ne kadar olduğunu öğrenmek isteseydiniz, bu nasıl yapılabilirdi? Şeridin toplam uzunluğu 23 ayrı ayak şeritlerinin uzunluklarının toplamına eşittir. Eğer şerit gerçekten 23 parçaya katlanmış olsaydı bir katlanmış bölümün uzunluğunu bulmak için sadece 23'e bölerdiniz. Aslında, öğrenciler şerit boyunca "ortalama ayağı" işaretleyebilirler. Oradaki değer 23 tane eşit uzunlukta "ayağa"çok yakın olmalıdır. Bu, aritmetik ortalama bulmak için gerekli olan algoritmayı çarpıcı biçimde göstermektedir.

Denge Noktası Yorumu. İstatistikçiler aritmetik ortalamayı sayı doğrusu üzerinde bir nokta ve verilerin bu noktanın her iki tarafında dengeli olarak bulunması şeklinde düşünürler.Aritmetik ortalama hakkında bu şekilde düşünmeye yardımcı olmak için verileri bir çizgi grafiği üzerine yerleştirilmiş olarak düşünmekte fayda vardır. Önemli olan aritmetik ortalamanın veya denge noktasının her iki tarafında kaç parça veri olduğu değil verilerin aritmetik ortalamaya olan mesafeleridir.

Bunu göstermek için, tahtaya bir sayı doğrusu çizin ve Şekil 21.16(a)'da gösterildiği gibi 3 sayısının üzerine sekiz adet yapışkanlı not kâğıdını yerleştirin. Her yapışkanlı not kâğıdı bir aileyi temsil etmektedir. Notlar sayı doğru üzerine ailenin kaç tane evcil hayvana sahip olduğunu göstermek için yerleştirilmiştir. Bu şekilde yığın yapmak tüm ailelerin aynı sayıda evcil hayvana sahip olduğunu gösterir. Aritmetik ortalama 3 evcil hayvandır. Ancak, farklı aileler muhtemelen farklı sayıda evcil hayvana sahiptir. Bu yüzden sekiz ailenin hayvan sayılarını bir aralıkta düşünebiliriz. Bazıları hiç hayvana sahip olmayabilir ve bazıları on kadar veya daha fazla sayıda hayvana sahip olabilirler. Bu sekiz aile için hayvan sayısını, aritmetik ortalama 3 kalacak şekilde nasıl değiştirirdiniz? Öğrenciler yapışkan not kâğıtlarını zıt yönlerde, muhtemelen çiftler halinde, taşımayı önereceklerdir. Bu simetrik bir düzenleme ile sonuçlanacaktır. Fakat ailelerden birinin sekiz hayvanı var ise, 3'ten 5 aralık uzaklıkta olma durumunda ne olur? Bu durum iki aileyi sola kaydırarak dengelenebilir, biri 0'a üç aralık uzaklıkta ve diğeri 1'e iki aralık uzaklıkta. Şekil 21.16(b), ortalama 3'ü korumak için ailelerin yeniden düzenlenebileceği bir yolu göstermektedir. Burada durun ve ailelerin her birinin ortalama 3 hayvana sahip olması için onların en az iki dağıtım şeklini bulun.

Aşağıdaki etkinliği verilen veriler için aritmetik ortalamayı veya denge noktasını bulmak için kullanın.

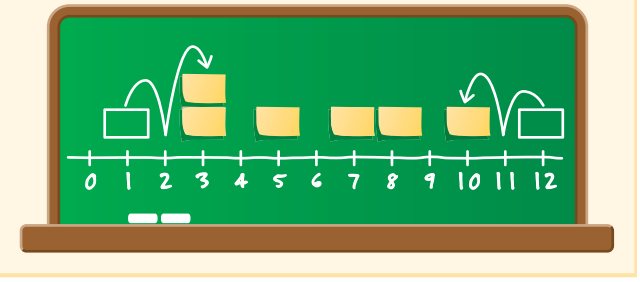


Şekil 21.16 (a) Eğer tüm veri değerleri aynı olsa, aritmetik ortalama o değer olur. (b) Veri değerlerini aritmetik ortalamadan dengeli bir şekilde taşıyarak aynı aritmetik ortalamaya sahip farklı dağılımlar bulunabilir.

Etkinlik 21.7

Denge Noktasının Bulunması

Öğrencilerden her bir sayı arasında yaklaşık 1 inç mesafe bırakacak şekilde 0 ile 12 aralığında bir sayı doğrusu çizmelerini isteyin. Şekil 21.17'de gösterildiği gibi altı oyuncağın fiyatlarını temsil etmek için altı küçük yapışkan kâğıdı kullanın. Öğrencilerin sayı doğrusu üzerinde aritmetik ortalamanın olabileceğini düşündükleri bir noktayı hafifçe kurşun kalemle işaretlemelerini sağlayın. Şuan için, topla ve böl hesabını yapmaktan kaçının. Burada görev gerçek aritmetik ortalamayı yapışkan kağıt notları "merkeze" doğru taşıyarak belirlemektir. Yani, öğrenciler sayı doğrusu üzerinde hangi fiyat veya noktanın doğru üzerindeki altı fiyatı dengelediğini buluyorlar. Yapışkan kâğıdın sola bir adım hareketinin her birine karşılık (düşük fiyattaki bir oyuncak), farklı bir yapışkan kâğıt sağa bir adım kaydırılmalıdır (yüksek fiyattaki bir oyuncak). Sonunda, tüm yapışkan kâğıtlar aynı sayının yani denge noktası veya aritmetik ortalamanın üzerinde yığılmalıdır.



Şekil 21.17 Veri noktalarını merkeze veya denge noktasına doğru o nokta etrafındaki dengeyi bozmadan taşıyın. Tüm noktalar aynı değerin üzerinde oldukları zaman denge noktasını veya ortalamayı bulursunuz.

Durup Düşün!

Şimdi durun ve bu alıştırmayı yapmayı siz deneyin. Dikkat edin dağılımı dengede tutan herhangi bir çiftin hareketinden sonra aslında aynı ortalamaya sahip yeni bir fiyat dağılımına sahip oluyorsunuz. Aynısı, aynı noktaya yığılmış yapışkan notları aritmetik ortalamadan dışarı taşıdığınızda da geçerliydi.

Aritmetik Ortalamadaki Değişiklikler. Dikkat edin aritmetik ortalama sadece bir veri setinin "merkezini" tanımlar ve bu yüzden tek başına verilerin şeklini anlamak için çok faydalı değildir. Aritmetik ortalamanın denge yaklaşımı açıkça birçok farklı dağılımların aynı aritmetik ortalamaya sahip olabileceğini göstermiştir.

Özellikle küçük veri setleri için, aritmetik ortalama uç değerlerden önemli ölçüde etkilenir. Örneğin, örneklerde kullandığımız altı oyuncağa $20 değerinde bir başka oyuncak eklendiğini varsayın. Aritmetik ortalama nasıl değişecektir. Eğer $1'lık oyuncak çıkarılmış olsaydı aritmetik ortalama nasıl etkilenirdi? Varsayın ki bir yeni oyuncak eklendiğinde aritmetik ortalama $6'dan $7'a yükseldi. Yeni eklenen oyuncağın fiyatı ne kadardır? Öğrenciler, küçük veri setlerini kullanarak ve denge veya seviyeleri eşitleme kavramlarından birini kullanarak bu tip sorularla düşünmeye zorlanmalıdırlar.

NCTM Standartları

NCTM'in web sitesinde, Standartlar ve Odak Noktaları'nın altında bulunan elektronik örneklerdeki "Aritmetik Ortalamanın Özelliklerinin Karşılaştırılması" adlı Uygulama 6.6, bir sayı doğrusu boyunca ileri geri sürüklenebilenyedi adet veri noktalarını ve buna bağlı olarak anında güncellenen aritmetik ortalamave medyanı göstermektedir. Uygulama, öğrencilerin medyanın nasıl değişmez olduğunu ve bir noktanın değişmesinin aritmetik ortalamayı nasıl etkileyebileceğini görmelerine izin verir. ◆

Saplı Kutu Diyagramları

Saplı kutu diyagramları(veya *sadece kutu diyagramları*) sadece görsel olarak merkezi (medyan) gösteren bir yöntem değil ayrıca aralık ve dağılım veya verilerin varyansı hakkında bir bilgidir. Şekil 21.18'de 27 tane altıncı sınıf öğrencisinin ay olarak yaşları ile birlikte tüm sınıf için kök ve yaprak diyagramları ile erkekler ve kızlar ayrı olarak verilmiştir.Saplı kutu diyagramları Şekil 21.19'da gösterilmiştir.

Her bir saplı kutu diyagramının şu üç özelliği vardır:

1. Verilerin "orta yarısını" içeren bir kutu, medyanın solunda ve sağında dörtte biri. Kutunun uçları *alt çeyrektedir*, verilerin alt yarısının medyanı ve üst çeyrekte, verilerin üst yarısının medyanı.
2. Kutunun içindeki bir çizgi verinin medyanı üzerindedir.
3. Her bir kutunun ucundan verilerin *alt ucuna* ve *üst ucuna* uzanan bir çizgi vardır. Her çizgi, bu yüzden, verilerin alt ve üst çeyreklerini kapsar.

Aşağıdaki sayılar bir altıncı sınıftaki öğrencilerinyaşlarını ay olarak temsil etmektedir.

Erkekler		Kızlar	
132	122	140	131
140	130	129	128
133	134	141	131
142	125	134	132
134	147	124	130
137 (Joe B.)	131	129	127
139	129	125 (Whitney)	

Tüm öğrenciler

12	2, 4
•	5, 5, 7, 8, 9, 9, 9,
13	0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4
•	7, 9
14	0, 0, 1, 2
•	7

Erkekler

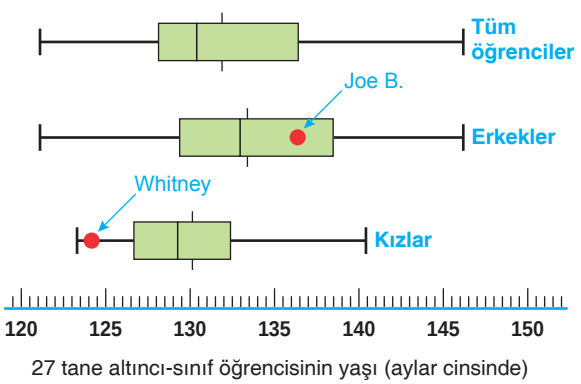
12	2
•	5, 9
13	0, 1, 2, 3, |4, 4
•	7, 9
14	0, 2
•	7

Kızlar

12	4
•	5, 7, |8, 9, 9
13	0, 1, 1, 2, |4
•	
14	0, 1
•	

Şekil 21.18 Kök ve yaprak diyagramlarıbeşli olarak sıralanmıştır. Medyanlar ve çeyrekler daire içine alınmış veya eğer iki öğe arasına düşmesi halinde bir çubuk (|) ile temsil edilmiştir.

Bu kutu diyagramlarının gösterdiği bilgilere bir bakıverin! Kutu ve doğruların uzunlukları verilerin nasıl yayıldıkları veya birlikte nasıl gruplandığına dair bir işaret belirtir.



Şekil 21.19 Saplı kutu diyagramlarıbirçok bilgiyi gösterir. Verilerin nasıl dağıldığını göstermenin yanında özel ilgilenilen veri noktaları gösterilebilir.

Medyan gösterildiği için bu yayılma veya gruplama verilerin her bir çeyreği için belirlenebilir. Bu örnekteki tüm sınıf alt yarımdan daha fazla olarak üst yarımda yayılmıştır. Kızlar erkeklere veya tüm sınıfa göre yaş olarak çok daha yakın gruplanmıştır. Kızların en az dörtte üçünün erkeklerin medyan yaşından daha küçük olduğu hemen belli olmaktadır. Veri *aralığı* (üst ve alt uçlar arasındaki fark) grafiğin uzunluğu ile temsil edilmektedir ve uç değerler doğrudan okunabilir. Aritmetik ortalama her kutunun üzerinde ve altında küçük işaretlerle gösterilmiştir. Kutu diyagramı bir veri setinin şeklini anlamaya yardımcı olmak için faydalı görsel bilgiler sunar.

Bir saplı kutu diyagramı yapma için verileri sıraya koyun. Sonra, medyanı bulun. Basitçe değerlerin sayısını sayın ve ortadaki değeri belirleyin. Bu, Şekil 21.18'deki kök ve yaprak diyagramları üzerinde yapılabilir. İki çeyreği bulmak için medyanın kendisini görmezden gelin ve verilerin üst ve alt yarımlarının medyanlarını bulun. İki uç noktayı işaretleyin: iki çeyreği ve uygun bir sayı doğrusu üzerindeki medyanı. Kutuyu ve çizgileri çizin. Kutu diyagramları ayrıca dikey olarak çizilebilir.

Bizim örneğimizdeki veriler için aritmetik ortalamaların medyanlardan biraz daha büyük olduğuna dikkat edin (sınıf= 132.4; erkekler= 133.9; kızlar= 130.8). Bu örnek için, aritmetik ortalamaların kendileri kutu diyagramları kadar bilgi vermemektedir.



Grafik çizen hesap makineleri ve çeşitli bilgisayar programları kök ve yaprak diyagramlarını çizmektedir ve hatta bu işlemi daha erişilebilir yapmaktadır. TI-73, TI-84 ve TI Nspire hesap makineleri aynı eksen üzerinde üç veri setine kadar saplı kutu diyagramlarını çizebilmektedir. Şunu unutmayın saplı kutu diyagramı, herhangi diğer grafikler gibi, sorulan soru hakkında bir şeyler öğrenmek için bir araçtır bir son değildir (McClain, Leckman, Schmitt, &Regis, 2006). Saplı kutu diyagramı verilerin dağılımı ve merkezi hakkında çok fazla bilgi sunduğu için dikkatli incelenerek kendisinden birçok şey öğrenilebilir ve özellikle de ilgili verilerin iki saplı kutu diyagramıyla karşılaştırılmasından. ◆



Durup Düşün!

Dikkat edin Şekil 21.19'da erkekler için olan kutu aslıda tüm sınıf için olana göre biraz daha uzundur.Tüm sınıfta erkeklerden daha çok öğrenci olduğu açıkken bu nasıl olabilir? Bu bariz tutarsızlığı yedinci sınıflardan oluşan bir sınıfa nasıl açıklayabilirsiniz?



Sonuçların Yorumlanması

Yorumlama, istatistik yapma sürecinde dördüncü adımdır. Daha önce gösterilen örnek test maddelerinde görüldüğü gibi bazen sorular istatistiksel fikirlerden ziyade matematiksel fikirlere odaklanırlar. Matematiksel sorular sorulması faydalı olsa da istatistiksel doğaya sahip sorular sormak esastır. Yani sorular durumun bağlamına ve verilerden ne öğrenilebildiği veya ne anlaşılabildiğini görmeye odaklanır. Buna ek olarak, sorular değişkenlik, verilerin merkezi ve verilerin şekli gibi istatistiğin temel fikirlerine odaklanmalıdır. Yorumlama esnasında, öğrenciler verilere farklı bir bakış elde etmek için geriye dönüp farklı bir veri gösterimi oluşturmak isteyebilirler veya sonuçlarının temsil etme durumunu görmek için farklı bir popülasyondan veri toplamak isteyebilirler.

Farklı araştırmacılar istatistiksel düşünmeye odaklanan soruları tavsiye etmektedirler (Franklin et al., 2005; Friel, O'Conner, &Mamer, 2006; Russell, 2006; Shaughnessy, 2006). Burada verileri yorumlamak üzere anlamlı tartışmalar başlatabilmeniz için kendi listelerinden bazı fikirler verilmiştir:

- Sayılar (semboller) sınıfımız (veya diğer bir popülasyon hakkında) bize ne söyler?
- Eğer başka bir sınıfı (popülasyonu) sormuş olsaydık, verilerimiz nasıl görünürdü? Ya daha büyük bir gruba sormuş olsaydık veriler nasıl görünürdü?
- Bu grafikteki (popülasyondaki) sayılar diğer grafikteki (popülasyondaki) sayılarla nasıl karşılaştırılabilir?
- Veriler nerede "kümelenmektedir"? Verilerin ne kadarı kümededir? Ne kadarı küme dışındadır? Yaklaşık yüzde kaçı kümede veya kümenin dışındadır?
- Bu verileri yorumlarken ne türden değişkenliğin dikkate alınması gerekebilir?
- Sonuçlar farklı olur muydu eğer … (örnek/popülasyon/ortam değişimi) olsaydı? (Örnek: Bir üçüncü sınıf kitabında kelime uzunluğu üzerine toplanan veri bir beşinci sınıf kitabından farklı olur muydu? Bir fen kitabı bir okuma kitabına göre farklı sonuçlar verir miydi?)
- İki değişken (saçılma diyagramı) arasındaki ilişki ne kadar güçlüdür? Nereden biliyorsun? Eğer x'i bilirsen bu ne anlama gelir? Eğer y'yi bilirsen bu ne anlama gelir?
- Grafik bize ne söylemez? Ne çıkarımda bulunabiliriz?
- Bu verilerden hangi sorular ortaya çıkar?

Bu bölüm veri analizi bölümlerinden daha kısadır, ama bu sadece yönlendirici bilgilerin birçok veri gösterimlerine uygulanabilmesinden kaynaklanmaktadır. Kesinlikle öğretiminizin önemli bir odak noktası bu olmalıdır. Bunu ders *sonrası* bölümü için düşünün, gerçi bu soruların bazıları ders *esnası* bölümüne de entegre edilecektir.

Dünyamız tanımlayıcı istatistikten farklı grafiklere kadar çeşitli verilerle kaplanmıştır. Öğrencileri verilerden ne yorumlanabileceği ve ne yorumlanamayacağı hakkında, neye dikkat edilmesi gerektiği ve neyin yanıltıcı veya kötü tasarlanmış bir istatistik olarak atılabileceği konusunda hazırlamamız gereklidir. Bu hem okul başarısı için hem de matematiksel açıdan okuryazar bir vatandaş olmak için önemlidir.

Bölüm 21 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim!

1. İstatistik matematikten nasıl farklıdır? Aritmetik ortalama üzerine hazırlanan bir derste, hangi matematiksel ve istatistiksel soruları sorabilirsiniz?
2. "Verinin şekli" ile ne demek istenmiştir?
3. Veri analizi becerilerinin gelişiminde neden nitelik etkinliklerinin önemli olduğunu açıklayınız.
4. Veriler soruları cevaplamak için toplanmalıdır. Anaokulu-2. sınıf düzeylerinde ve daha üst düzeylerde öğrencilerin verileri kullanarak araştırabilecekleri bazı soru örnekleri nelerdir?
5. Kategoriler içine konabilen veriler için ne tür grafikler kullanılabilir?
6. Sütun grafiği ile histogram arasındaki fark nedir? Bir histogram için ne tür veriler gereklidir?
7. Bir daire grafiği yapmak için üç yol nedir? Bir daire grafiğinin anlattığı ama bir sütun grafiğinin anlatamayacağı nedir? Neden bahsetmez?
8. Medyanı kullanmayı aritmetik ortalamayı kullanmaya tercih edeceğiniz bir bağlam örneği verin ve ne zaman aritmetik ortalamayı kullanmayı medyanı kullanmaya (metin içinde verilenler değil) tercih ederdiniz?
9. Ortalamayla ilgili İki farklı kavramı tarif ediniz. Her biri nasıl geliştirilir? Bu fikirlerden hangisi aritmetik ortalamayı hesaplama yöntemine götürür?
10. Bu bölümdeki bağlamlardan birini seçin ve öğrencilerinize sorabileceğiniz istatistiksel düşünceye odaklanan üç soru verin.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. Time veya Newsweek gibi haftalık popüler bir dergi seçin. Derginin en az bir sayısını dikkatlice inceleyerek tipik bir okuyucunun anlaması beklenilen grafiklere ve istatistiksel bilgilere bakınız. Unutmayın, basitçe grafiklere bakarak bunu yapmak mümkün olmayacaktır. İstatistikler sıklıkla onlara karşılık gelen grafikler olmadan kullanılırlar.
2. İstatistik yapma süreci öğrenciler için anlaşılır olmalıdır, onlar bu süreç içinde bir iş üzerinde (örneğin daire grafikleri) çalışıyor olsalar bile. Bir düzey topluluğu (Anaokul öncesi-Anaokulu-2. sınıf, 3-5, 6-8) seçin ve özgün ve ilgi çekici (ve araştırılabilir) sorular için olasılıkları düşünün. Sonra dört adımlık süreci ve öğrencileri istatistiksel düşünmeye dâhil edebilmek içinöğretimi nasıl planlardınız?

Bölüm 21 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Literature is full of situations in which things must be sorted, compared, or measured. Each of these can be the springboard for a data-collection and representation activity. As noted earlier in this chapter, books of lists also are fruitful beginnings for data explorations. Students can use the data in the books and/or compare similar data collected themselves.

The Best Vacation Ever *Murphy, 1997*

This is in the MathStart series, designed as a collection of single-concept books to generate simple activities in mathematics. In this book, appropriate for first or second grade, a little girl gathers data from her family on what is important to them to decide where the family would have the best vacation.

This book nicely introduces the concept of gathering data to answer a question. Use the book as an introduction to this important topic.

Frog and Toad Are Friends *Lobel, 1970*

When Frog and Toad go walking, Frog loses a button. As they search to find the button, they find many buttons. Whenever one of Frog's friends asks, "Is this your button?" Frog responds (with a touch of frustration), "No, that is not my button! That button is _____, but my button was _____."

This classic story is a perfect lead-in to sorting activities as described in this chapter. Young students can model the story directly with sets of buttons, shells, attribute blocks, Woozle Cards (Blackline Master 59), or other objects with a variety of attributes.

200% of Nothing: An Eye-Opening Tour Through the Twists and Turns of Math Abuse and Innumeracy *Dewdney, 1993*

This middle school–friendly chapter book has explanations of the many ways that "statistics are turned" to mislead the common person. Because the examples are *real*, provided by readers of *Scientific American*, this book is an excellent tool for showing the power of statistics and how important it is to be statistically literate in today's society. Reading the examples can launch a mathematics project into looking for error in advertisements and at how overlapping groups (as in a Venn Diagram) can be reported separately to mislead readers. (See Bay-Williams and Martinie, 2009, for more ideas connected with this book.)

If the World Were a Village: A Book about the World's People *Smith, 2002*

This is a favorite as well as important book about how wealth, culture, language, and other influences play out in the world. Each beautiful two-page spread shares the statistics for the topic (e.g., language). This book can give rise to other questions about the world, which can be researched and interpreted into the village metaphor. The data can also be compared to other populations (e.g., within the school).

The Inch Boy *Morimoto, 1991*

Swamp Angel *Isaacs and Zelinsky, 2000*

Both of these are examples of books with a character who is *not* average. The Inch Boy is very small and the Swamp Angel is very large. These books create interest in gathering descriptive statistics and seeing the impact of outliers on the mean and median. Beyond height, many things can be measured—weight of backpacks, shoulder width, shoe length, and so on. For an engaging investigation with *The Inch Boy*, see Foss (2008).

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Harper, S. R. (2004). Students' interpretations of misleading graphs. *Mathematics Teaching in the Middle Grades*, *9*(6), 340–343.

Harper explores some of the types of misleading graphing techniques that are often seen in the popular press and discusses how she explored these graphs with students. This is a very short version of a few of the ideas found in the classic book How to Lie with Statistics *(Huff, 1954/1993).*

Manchester, P. (2002). The lunchroom project: A long-term investigative study. *Teaching Children Mathematics*, *9*(1), 43–47.

A third-grade teacher describes how her class decided to do something about their dislike of the cafeteria food. She explains the difficulty of designing appropriate questions and gathering the data. Student work shows how the students dealt with the data collected.

Kitaplar

Burrill, G. F., & Elliott, P. C. (Eds.). (2006). *Thinking and reasoning about data and chance: Sixty-eighth yearbook.* Reston, VA: NCTM.

This NCTM Yearbook is full of excellent articles that can inform and improve your understanding and teaching of statistics. Many of the articles are cited in this chapter.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education* (GAISE Report). Alexandria, VA: American Statistical Association.

The examples provided in this excellent framework for teaching statistics, prepared by statistics educators, are great tasks to use with students in pre-K–8.

Sheffield, L. J., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C. R., Greenes, C. E., & Small, M. (2002). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten–grade 2.* Reston, VA: NCTM.

Chapin, S., Koziol, A., MacPherson, J., & Rezba, C. (2002). *Navigating through data analysis and probability in grades 3–5.* Reston, VA: NCTM.

Bright, G. W., Brewer, W., McClain, K., & Mooney, E. S. (2003). *Navigating through data analysis in grades 6–8.* Reston, VA: NCTM.

Each of these books is strongly suggested as a reference for excellent activities and explorations with students.

İnternet Kaynakları

Bar Graph
www.shodor.org/interactivate/activities/BarGraph

The user of this applet can enter data as well as manipulate the *y*-axis values to create a bar graph. The ability to manipulate the *y*-axis values allows the creation of potentially misleading graphs, a good source of discussion.

Box Plotter
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=77

The user can enter data and create box-and-whisker plots.

Circle Grapher
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=60

Make your own circle graph with your own data, or display a circle graph from a given set of data.

Collecting, Representing, and Interpreting Data Using Spreadsheets and Graphing Software
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap5/5.5/index.htm

Data are provided in a spreadsheet. The data can be changed and/or ordered in different ways with simple buttons. Scatter plots and bar graphs are also easily made with various combinations of data. Lesson suggestions are provided.

Histograms
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=78

Each of these sites offers an interactive applet allowing the user to create and manipulate histograms. User data can be entered or data are supplied.

Stem-and-Leaf Plot
www.shodor.org/interactivate/activities/StemAndLeafPlotter

Enter data and calculate mean, median, and mode.

Bölüm 22

Olasılık Kavramlarının İncelenmesi

Olasılıkla ilgili konular hemen her alanda itibar görmektedir: Hava tahmincisi %60 olasılıkla kar yağacağını tahmin etmekte, tıp alanındaki araştırmacılar belli diyeti uygulayan insanların kalp hastalığına yakalanma olasılığının yüksek olduğunu tahmin etmekteler, yatırımcılar belli hisse senetlerinin risklerini hesaplamaktalar ve bunun gibi birçok örnek. Karmaşık durumların simülasyonları çoğunlukla olasılıklar üzerine dayandırılmaktadır. Böylece bu simülasyonlar, uzay gemisi, otobanlar, su tahliye sistemleri veya felaket durumlarında nasıl davranılacağının planlanması ile ilgili süreçlerin tasarımında kullanılmaktadır. Bugünün dünyasında olasılık yöntemleri ve fikirleri çok öne çıktığından dolayı, matematiğin bu öğrenme alanının okul müfredatındaki görünürlüğü artmıştır.

Şansla ilgili gerçekçi kavramlar, çocukların gelecekteki bir olayın meydana gelme olasığıyla ilgili formel anlayışları yapılandırmaya hazır hale gelmelerinden önce, önemli bir ön gelişimi zorunlu kılmaktadır. Büyük bir ihtimalle, çocuklar olasılıkla ilgili çok sayıda durumları akranlarıyla birlikte inceleyip tartıştıkça bu gelişim gerçekleşecektir. Bu konuda vurgu, formel tanımlar ve kurallardan ziyade konu üzerinde araştırma yapma üzerine olmalıdır. Eğer başarılı bir biçimde uygulanabilirse, bu informel deneyimler, ortaokul ve lise matematiğindeki formel fikirlerin gelişimi için kullanışlı bir alt yapı sağlayabilir. Müfredat Odak Noktalarında (NCTM, 2006) olasılık, 7. sınıf konularıyla bir bağlantı noktası oluşturmaktadır.

Ana Fikirler

1. Şansın hafızası yoktur. Basit bir deneyin çok sayıda tekrar edilmesi açısından, önceki denemelerin çıktılarının bir sonraki deneme üzerinde hiç bir etkisi yoktur. Madeni bir para atıldığında arka arkaya 6 yazının gelme şansının, bir sonraki atışta yine yazı gelmesi üzerinde etkisi yoktur. Şans hala % 50-% 50 dir.
2. Gelecekte meydana gelecek bir olayın olma olasılığı, kesinden imkânsıza doğru bir spektrumla belirlenebilir.
3. Bir olayın olma olasılığı 0 ile 1 arasında bir sayı ile ifade edilir. Bu sayı ise verilen bir olayın meydana gelebilme şansının ölçümüdür. 0 olasılık, imkânsızlığı; 1 olasılık ise kesinliği ifade eder. $\frac{1}{2}$ olasılık iki olayın meydana gelme şansının eşit olduğunu belirtir.
4. Çıktıların (deneylere dayandırılan) göreceli sıklığı, bir olayın meydana gelme olasılığının tahmini bir değeri olarak kullanılabilir. Deneme sayısı ne kadar büyükse yapılan tahmin de o kadar iyi olacaktır. Az sayıdaki denemeye dayandırılan sonuçlar, uzun vadede elde edilen deney sonuçlarından oldukça farklı olabilir.
5. Bazı olaylarda, olayın bizzat kendisi analiz edilerek olasılığın kesin değeri belirlenebilir. Bu şekilde belirlenen olasılık teorik olasılık olarak adlandırılır.
6. Simülasyon, gerçek dünya sorularına cevap bulmak veya şansla ilgili bir konuyla ilişkilendirilebilecek karmaşık durumlarda karar vermek için kullanılan bir tekniktir. Gerçek dünyada bir olayın olma olasılığını anlamak için, gerçek dünya ile aynı olasılığa sahip bir model geliştirilmelidir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Matematik müfredatından ve sınıflar ilerledikçe gerçek bir matematiksel bağlantıdan bahsedildiğinde olasılık ve veri analizi hep bir arada düşünülmüştür.

- **Kesirler ve yüzdeler** (Bölüm 15 ve 17): Öğrenciler bir torbadaki sayma pul setleri veya bir çarkı oluşturan kesir parçalarıyla karşılaşırlar ve bu kesirleri olasılıkları belirlemede kullanırlar. Yüzdeler, oranları karşılaştırırken kullanışlı ortak paydalar sunarlar (örneğin, ilk 20 atışta 3 kez yedi gelmesi durumu (veya % 15) ve 80 atışta 6 kez yedi gelmesi durumu (veya % 20).
- **Oran ve orantı** (Bölüm 19): Olasılıkları karşılaştırma parçanın bütüne oranı anlamına gelmektedir. Bu türden karşılaştırmaları anlamak için orantısal akıl yürütmeye gerek vardır.
- **Veri Analizi** (Bölüm 21): Olasılıkta amaç istatistikle ilgili soruları cevaplamaktır. Olasılıkla ilgili bir deney yapıldığında, sonuçlar veridir: Teorik olarak sonsuz sayıda yapılabilecek deneylerin örnekleminin olduğu bir veri.

Olasılığı Tanıtma

Küçük çocukların gelecekte meydana gelebilecek bir olayın meydana gelme olasılığıyla ilgili kavrayışı oldukça şaşırtıcıdır. Zarın bir sonraki atışta üst yüzüne gelecek sayının kesinlikle 3 olacağı konusunda ikna olmuşlardır. "Çünkü öyle olacağından eminim!" veya "çünkü 3 benim şanslı sayım!"

Mümkün veya Mümkün Değil

Bu ilk kavram yanılgılarını değiştirmek için iyi bir başlangıç noktası, mümkün veya mümkün değil (Etkinlik 22.1), daha sonra ise imkânsız, mümkün ve kesin (Etkinlik 22.2) kavramları üzerinde durmaktır. Bu etkinliklere öğrencileri hazırlarken, *imkânsız* ve *kesin* sözcüklerini tartışın. Çocuklar için bu sözcükler içinde en zoru *kesin* sözcüğüdür.

Etkinlik 22.1

Anaokul Manilerinin Sunduğu Olasılıklar

İki sütünlu bir tablo oluşturunuz: Bir sütunun başlığı "imkânsız" diğerinin başlığı "mümkün" olsun. Resimli bir kitap veya "Hey Didle, Didle[1]" adlı ritmik şarkıyı alın ve her satırdan sonra o bölümde geçen durumun "mümkün değil" veya "mümkün"sütununa yazılıp yazılmayacağını öğrencilerinize sorunuz. Her ifadeyi uygun sütuna kaydediniz.

Etkinlik 22.2

Mümkün mü?

Öğrencilerinizden farklı olaylar için *kesin, imkânsız* veya *mümkün* ("olabilir") olup olmadıklarına karar vermelerini isteyiniz. Şu örnekleri dikkate alınız:

- **Yarın yağmur yağacak**
- **Suya bir taş bıraktığında o taş suya batacaktır**
- **Yarın öğleden sonra ağaçlar bize konuşacaklar**
- **Yarın sabah güneş doğacak.**
- **Üç öğrenci yarın derse gelmeyecek**
- **George, bu gece saat 8: 30 dan önce yatacak**
- **Bir yılda iki kez doğum günüm olacak.**

Öğrencilerden, kesin, imkânsız ve mümkün olayları tanımlamalarını veya örnekler bulmalarını isteyiniz. Her olay için, seçimlerinin olma olasılığını gerekçelendirmelidirler.

Şans veya olasılık kavramlarının bir spektrum içinde gelişmesinde temel fikir, öğrencilerin bazı olası olayların diğerlerine göre olma olasılığının yüksek veya düşük olduğunu görmelerine yardım etmektir. Örneğin, yarışmaya katılan bir grup öğrenciden, oldukça hızlı koşan Gregg'in yarışmayı birinci bitirmesi kesin olmamakla beraber yüksek bir olasılıktır. Ayrıca, Gregg'in ön gruba yakın bir yerde yarışmayı bitirme olasılığı arka gruba yakın bir yerde bitirme olasılığına göre daha muhtemeldir.

İyi analiz edilmiş farklı araç-gereçlerin (örneğin, çarkların, sayma küplerinin, madeni paraların, bir torbadan çekilen renkli küplerin) rastgele kullanımı, öğrencilerin bir olayın olma olasılığını tahmin etmelerinde yardımcı olabilir. Bir olayın olma olasılığının araştırılması süreci, *ders öncesi*, *ders sırası* ve *ders sonrası* olarak adlandırılan ders plan modeliyle ilişkilendirilebilir. *Ders öncesi* aşamasında, öğrenciler kendilerine göre olması muhtemele yönelik tahminler yaparlar, *ders sırası* aşamasında, olayın olma olasılığını araştırdıkları deneyler yaparlar ve *ders sonrası* aşamasında, olayın olma olasılığını belirlemek için deney sonuçlarını analiz ederler.

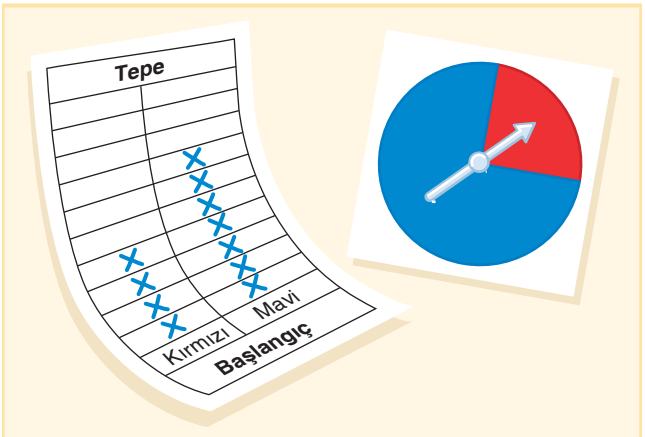
Aşağıdaki etkinlik veya onun farklı biçimleri, ya aynı rastgele seçilmiş araç-gereçler kullanılarak ya da farklı araç-gereçlerle tekrarlanmalıdır.

Etkinlik 22.3

Tepeye Doğru Yarış

Şekil 22.1'deki çarkı öğrencilerinize göstererek: "Kırmızı ve mavi bölmelere denk gelen okları saydığınızda, hangi renk tepeye en önce ulaşacaktır" sorusunu sorunuz. İki oyuncu sırayla oyun çarkını çevirirler. Her oyun için basit bir 10 satırlı veya 10 satır yazının sığabileceği boş bir kayıt defterine ihtiyaç vardır. İki renkli çark için örnek bir kayıt defteri Şekil 22.1 de verilmiştir. Oyunun en basit biçimi olarak sadece bir çark kullanınız: $\frac{1}{4}$'i kırmızı, $\frac{3}{4}$'ü mavi renkli bölümlensin. Oyundan önce her öğrenci hangi rengin (kırmızı mı mavi mi?) geleceğini tahmin etmelidir. (Yarışı kazananın oyuncu değil renk olduğu unutulmamalıdır). Her çevirmeden sonra kayıt defterinin ilgili yerine X işareti konacaktır. Kayıt defterinin en üst noktasına bir renk ulaşıncaya kadar oyun devam eder.

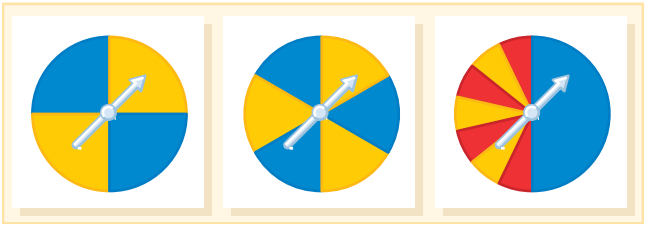
Öğrenciler "Tepeye Doğru Yarış" oyununu birçok kez oynamalıdırlar. Bütün öğrenciler oynadıktan sonra "Hangi rengin kazanması daha olasıdır? Neden böyle düşünüyorsunuz" sorularını sorunuz.



Şekil 22.1 Öğrenciler sırayla çarkı çevirip sonuçları kaydederler. Tepeye ilk ulaşan renk yarışı kazanır.

[1] Ç.N. Hey diddle diddle, the cat and the fiddle,
The cow jumped over the moon,
The little dog laughed to see such sport,
And the dish ran away with the spoon.

"Tepeye Doğru Yarış" gibi etkinliklerde farklı çarkları kullanınız. Aynı alana sahip iki renkli çarkı kullanınız. Ayrıca burada gösterildiği gibi farklı alanları kaplayan renkleri kullanın.



Rastgele seçilmiş bir araç-gereç olarak çarklar, öğrencilere bütün içindeki her rengin göreceli bölümlemesini veya çıktıyı görebilme avantajını sağlamaktadırlar. İlk iki çarkta veya iki bölüme ayrılmış bir çarkta öğrenciler, mavi gelme olasılığının sarı gelme olasılığıyla aynı olduğunu hemen görememektedirler(Cohen, 2006; Jones, Langrall, Thornton, & Magill, 1997; Nicol-son, 2005). Bu yüzden, farklı şekillerde bölümlenmiş çarkların kullanımı önemlidir. Çarkların yüzlerinin farklı çıktılar sağlayacak şekilde düzenlenmesi oldukça kolaydır. Çarktaki büyük bölgenin dönme sonunda denk gelme olasılığının yüksek olması fikrinin, öğrencilerin sıklık tabloları kullanarak sonuçları kaydetmeleriyle ilişkilendirilmesi etkili bir yöntemdir. Şekil 22.2 de bir öğrenci, hangi daire grafiğinin hangi sıklık tablosuyla ilişkili olduğunu açıklamaktadır.

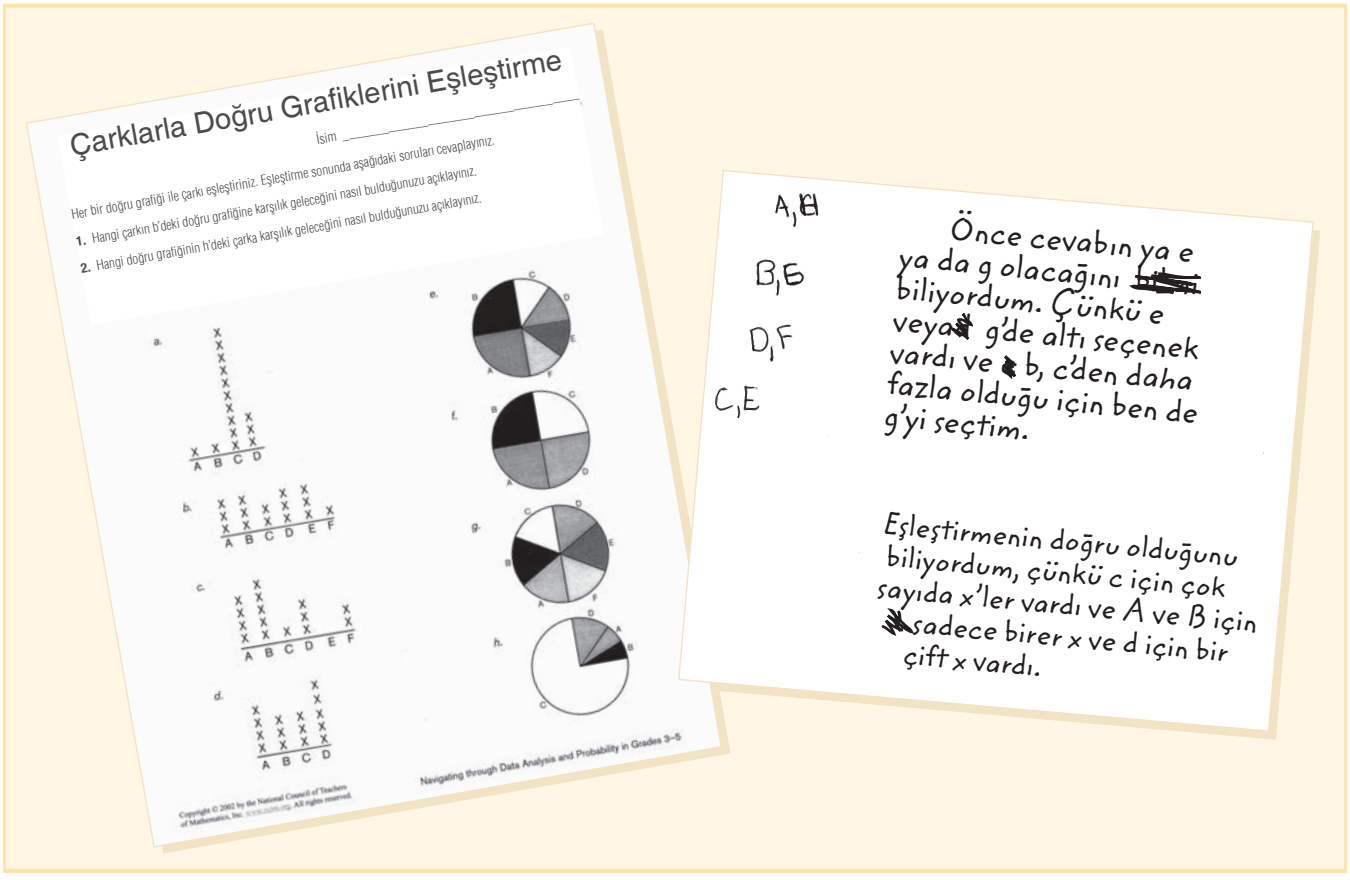
"Tepeye Doğru Yarış" ve benzeri etkinlikler için çark dışındaki araç-gereçler de kullanılmalıdır. Tahta küpün kenarlarına yapıştırılan renkli noktalar kullanılarak farklı renk olasılıkları oluşturulabilir. Benzer şekilde, 8 kırmızı ve iki mavi renkte karoların saklandığı içerisi gözükmeyen torbaları veya kırmızının maviye oranlarını yansıtan farklı materyaller kullanılabilir. Öğrenciler torbadan bir karo çeker ve her çekişten sonra torbaya geri atar. Her deneyin *ders sonrası* aşamasında, mümkün/mümkün değil ve kesin/imkânsız kavramları üzerinde yoğunlaşılmalıdır.

Eşit olmayan çıktılarla ilgili bir şans oyunu takip eden etkinlikte verilmiştir. Ama öğrenciler, hangi sonucun en olası çıktı olduğunu tahmin edebilmede hazır olmayabilirler. Dolayısıyla bu etkinlik iyi bir tartışma olanağı sunacaktır.

Etkinlik 22.4

Önce Topla, Sonra Çetelesini Tut

Yüzlerinde 1, 1, 2, 3, 3 ve 3 sayıları bulunan sayma küpleri yapın. Her oyun için 2 küpe ihtiyaç vardır. Öğrenciler sırayla iki küpü atarak üst yüze gelen sayıların toplamını kaydetsinler. Sonuçları kaydetmek için, 1 den 6 ya kadar etiketlendirilmiş 6 satır ve her



Şekil 22.2 Sıklık tablolarını çarklarla ilişkilendiren öğrenci açıklamaları.

Kaynak: Adapted from Chapin, S., Kozial, A., MacPherson, J., & Rezba, C. (2002). *Navigating Through Data Analysis and Probability in Grades 3–5.* Reston, VA: NCTM, p. 116. Reprinted with permission. Copyright © 2002 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. Tüm hakları saklıdır.

satırda 10 kare bulunan (Bkz. Şekil 22.3) çetele kayıt defterleri kullandırınız. Satırlardan biri doluncaya kadar öğrenciler küpleri atmaya devam etsinler. Sürenin uygun olması durumunda yeni bir çetele kayıt defteri kullanarak bu oyunu tekrar edebilirler. Oyuna başlamadan önce, öğrencilere hangi satırın daha hızlı bir şekilde dolabileceğini tahmin etmelerini sorunuz.



Şekil 22.3 "Önce Topla, Sonra Çetelesini Tut" etkinliği için bir çetele çalışma yaprağı.

"Önce Topla, Sonra Çetelesini Tut" etkinliğini bitirdikten sonra öğrencilerle konuşmak önemlidir: Hangi sayılar en çok ve en az sıklıkta "kazanmıştır"? Oyunu tekrar etselerdi kazanmak için hangi sayıyı seçerlerdi, neden? Bir diğer konu, 1 toplamının meydana gelmesi durumu imkânsız olmasına rağmen, 2 den 6 ya kadar tüm diğer çıktıların meydana gelmesi mümkündür. Toplamın 4 olması durumu en olası durumken, toplamların 2 veya 3 olması en az olası durumdur.



Öğrencilerin şans hakkındaki fikirleri deneyimlere dayanarak gelişmelidir. Mümkün olaylarla ilgili öğrenci deneyimleri, şans hakkında kavram yanılgılarının oluşmasına neden olabilir. Örneğin, bazı öğrencilerin zar atıldığında zarın üst yüzüne 1 gelme olasılığının 5 gelme olasılığına eşit olmayacağını düşünmelerinin nedeni belki de 1'in çıktı olarak istendiği bir oyun olabilir. Diğer 5 seçenekle karşılaştırıldığında 1 durumu az olası durumdur ama diğer sayılarla karşılığında 1 diğerleriyle aynı olasılığa sahiptir (Nicolson,2005; Watson & Moritz, 2003). Sizin göreviniz tartışmalar sırasında öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmaktır. Buradaki temel fikir, zar atıldıktan sonra elde edilen toplamın sadece şansla ilişkili olmadığı belki zarın ya da çarkın tasarımından dolayı bazı sonuçların daha çok ya da az muhtemel olmasıyla ilişkili olması fikridir. ◆

Olasılık Spektrumu

Bazı olayların meydana gelme olasılığının diğerine göre az ya da çok olması fikrini netleştirmek için, olasılık spektrumunun bir ucunda imkânsız diğer ucunda ise kesinin bulunduğu fikrini öğrencilerinize sununuz. Şekil 22.4'te gösterildiği gibi tahtaya uzun bir çizgi çiziniz. Çizginin sol ucuna "imkânsız", sağ ucuna "kesin" sözcüklerini yazınız. Çizginin üst kısmına ise "Çarkın Mavi Gelme Şansları" ifadesini yazınız. Doğru üzerinde seçilen farklı noktalara karşı gelebilecek çarkların hangilerinin olabileceğini tartışınız. Bu fikirleri özetlemek için, teker teker oyun çarklarını göstererek doğru üzerindeki işaretlenmiş noktalardan hangisinin seçilen bu çarktaki mavi gelme şansını temsil ettiğini sorunuz. Buna ek olarak öğrencilerinize farklı olay örneklerini (mesela, karlı bir gün olma durumunu) vererek bu durum sayı doğrusu üzerindeki hangi noktanın temsil ettiğini sorabilirsiniz (öğrencilerinizin doğru üzerinde seçilen noktalara karşı gelebilecek olay örnekleri üzerinde düşünmelerini de isteyebilirsiniz.)

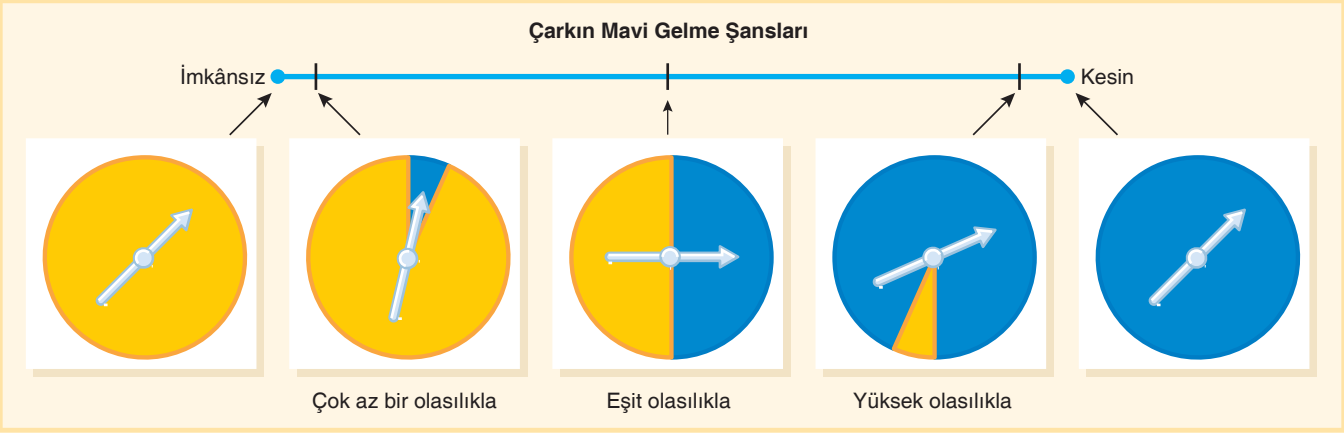
Bir sonraki etkinlikte öğrenciler, olasılık doğrusu üzerinde seçilen farklı noktalara karşılık gelebilecek olası durumları gösterebilecekleri rastgele seçilmiş araç-gereçler tasarlayacaklardır.

Etkinlik 22.5

Bir Torba Tasarla

(Az önce tanıtılan olasılık spektrumu fikri öğrencilere sunulmalıdır).

Şekil 22.5'te verilen çalışma yaprağını kullanınız (Bkz. Çalışma Yaprakları Seti 60) ve bir kopyasını öğrencilerinize temin ediniz. Tahtada olasılık doğrusunu

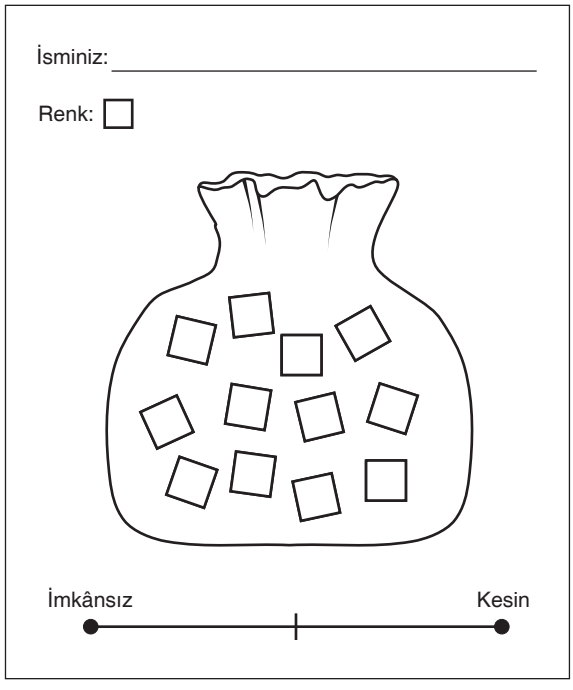


Şekil 22.4 Olasılık Spektrumu. Bu çarkları kullanarak, öğrencilerinizin imkânsız ile kesin arasındaki spektrumun farklı yerlerindeki olasılıkları görmelerine yardımcı olunuz.

çizerek üzerinde aşağı yukarı % 20'ye karşılık gelecek noktayı işaretleyiniz. Bu noktada öğrencilerinizle yüzde ve kesir gösterimlerini kullanmayınız. Kendi çalışma yapraklarında yer alan olasılık doğruları üzerinde bu noktayı (% 20 noktasını) işaretlesinler. Öğrencileriniz çalışma yaprağının üst kısmında yer alan "renk" bölümdeki kareyi seçtikleri bir renkle boyasınlar. Öğrencilerinize, olasılık doğrusu üzerinde işaretlenen olasılık değerine eşit olacak şekilde 12 karodan belirlenen renkteki karoların hangilerini torbaya koyacaklarına karar vermeleri gerektiğini vurgulayınız. Kendi torbalarını tasarlamaya başlamadan önce öğrencilerinize, "eğer işaretlenen sayı olasılık doğrusunun orta noktasına yakın bir yerde olsaydı hangi renkteki karoların torbaya konulabileceği" sorusu hakkındaki görüşlerini sorunuz. Sayfada tasarlanmış torbayı dikkate alarak gerçek torbaların nasıl doldurulabileceğini gösteriniz. Torba içindeki karoların, tasarımda seçilen belli renkteki karelerin torba içindeki yerini belli etmeyecek şekilde karılması gerektiğini vurgulayınız.

Öğrencileriniz, her yaprağın alt kısmında (ve gerekirse arka kısmında), karoları neden o şekilde seçtiklerini açıklayacaklardır. Onlara şöyle bir örnek veriniz: 8 kırmızı ve 4 diğer renkten koyduk, çünkü _____

"Bir Torba Tasarla" etkinliğinde geliştirilen tasarımları toplayıp öğrencilerinize gösteriniz. Öğrencilerin torbalarına koydukları birçok sayıda belli renklerle ilgili fikirlerini tartışınız. (Bazı farklılıklar olabilir.)



Şekil 22.5 "Bir Torba Tasarla" etkinliği için kullanılabilecek çalışma yaprağı (Bkz. Çalışma Yaprak Seti 60)

"Bir Torba Tasarla" etkinliği öğrencilerinize, şansın spektrumdaki temsili yardımıyla nasıl kavranabileceğini görmeleri için kullanışlı bilgi sağlamaktadır. Takip amaçlı bir sonraki etkinlik, öğrencilerin tahmin ettikleri tasarımların makul olup olmadığını görmeleri için bir deney üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Etkinlik 22.6

"Torba Tasarımlarını Test Etme"

Etkinlik 22.5'te tasarlanmış ve % 20'ye karşılık gelmesinin uygun olduğu konusunda çoğu öğrencinin aynı fikirde olduğu bir torbayı seçiniz. Öğle yemeği çantaları ile renkli karo veya küpleri öğrenci çiftlerine dağıtarak seçilen tasarıma göre doldurmalarını isteyiniz. Doldurma tamamlandıktan sonra öğrenciler, torbayı sallarlar ve içinden bir karo çekerler. Belirlenen renk için Evet, diğer renk için Hayır çeteleleri tutularak kaydedilir. En az on kez tekrar edilir. Öğrencilerinizin çektikten sonra karoları torbaya tekrar geri koyduklarından emin olunuz.

Sınıfla ayrı ayrı yapılan deneyin sonuçlarını tartışınız. Öğrencilerin bekledikleri şekilde mi deney sonuçlandı? Az sayıda deneme yaptıklarında beklenmeyen sonuçlara ulaşan gruplar olabilecektir.

Daha sonra, tüm gruplardan elde edilen verilerin gösterildiği büyük bir sütun grafiği veya çetele tablosu oluşturunuz. Sonuçlar Evetlerden çok Hayırların olduğunu göstermelidir. Bu noktada tartışmak, bir deneyin çok sayıda tekrar edilmesi durumunda sonuçların beklenen değerlere yaklaşacağı sonucunu görmelerine yardımcı olacaktır.

Olasılık doğrusu üzerinde işaretlenen iki farklı değer için hem "Bir Torba Tasarla" hem de "Torba Tasarımlarını Test Etme" etkinlikleri birlikte tekrar edilebilir ve etmelidir de. Olasılık doğrusunda $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{4}$'e yakın yerleri işaretleyerek deneyiniz.

"Bir Torba Tasarla" ve "Torba Tasarımlarını Test Etme" etkinlikleri önemli etkinliklerdir. Olasılıklar için belli bir sayı kullanılmadığı için "doğru" cevaplar da yoktur. Bir tasarımın küçük bir grupla test edilmesi öğrencilere, kısa vadede şansın kesin olarak bir tahminin olmadığını gösterecektir. Grupların oluşturdukları grafikler öğrencilere, şansın uzun vadede beklenen değere yaklaşması gibi zor bir kavramı anlamalarına yardım edebilir.

"Bir Torba Tasarla" etkinliğinin farklı bir biçimi, öğrencilerden bir çark tasarlamaları şeklinde olabilir.

Teorik Olasılık ve Deneyler

Olasılık bir olayın meydana gelme şansının bir ölçüsüdür. Belli bir olayın meydana gelmesindeki kesinliğin bir ölçüsüdür (Franklin, 2005). Bu noktaya kadar öğrencilerden sadece, bir olayın diğer olaya göre olma olasılığını karşılaştırmaları veya bir olayın olma olasılığını imkânsızdan kesine doğru bir spektrumda yerleştirmeleri istendi. Öyleyse şansı

nasıl ölçebiliriz? Gerçekte bu ölçüyü ölçmek için çoğu durumda iki yol vardır.

İki farklı tip olasılık vardır. Birinci tip olasılık, bir olayın meydana gelme olasılığının bilindiği olaylarla ilişkilidir (örneğin, hilesiz bir zar atıldığında üst yüze gelen sayıların her birinin olasılığının $\frac{1}{6}$ olması). Bir olayın olma olasılığının bilinmesi durumunda olasılık, tüm olasılıklar gözlenerek teorik olarak hesaplanabilir.

İkinci tip olasılık bir olayın olma olasılığının gözlenememesi durumuyla ilişkilidir. Gözlenememesine rağmen bu olasılık, deneye dayalı verilere veya geçmiş deneylerin sonuçlarına ya da veri toplanarak belirlenebilir (Colgan, 2006; Nicolson, 2005). Örneklerden birkaçı, bir maç sırasında basketbol oyuncusunun 3 sayılık serbest atışta sayı yapma olasılığı (oyuncunun önceki oyun sonuçları dikkate alınarak), bir iletişim uzmanın başarılı olma şansı (önceki başarı oranına bakılarak) veya yağmur yağma şansıdır (aynı şartlar altında yağmur yağma sıklığına bakılarak). Bu tipteki olasılık okul müfredatında çok az yer almasına rağmen, olasılığın kullanıldığı birçok alana uygulanabilmesinden dolayı, öğretiminizde bu tipteki olasılığa yer vermeniz önemlidir (Franklin et al., 2005).

Her iki durumda da deneyler veya simülasyonlar, ele alınan durumu inceleyebileceğimiz şekilde tasarlanabilirler (bu, istatistikçiler tarafından kullanılmamasına rağmen, bazen Anaokulu-12. sınıf müfredatında deneysel olasılık olarak adlandırılır).

Madeni paranın atılması durumunda sonucun meydana gelme olasılığı bilenen bir olasılıktır. Hilesiz bir madeni para atıldığında mantıksal olarak, yazı gelme olasılığı tura gelme olasılığına eşit olduğunu iddia edebiliriz. Aynı olma olasılığına sahip iki olası çıktı olduğundan her birinin olma olasılığı $\frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla yazı gelmenin teorik olasılığı $\frac{1}{2}$'dir. Tüm olası çıktıların olma olasılığı aynı olduğu basit bir deneyde, bir olayın teorik olasılığı

$$\frac{\text{Belli bir olaydaki çıktıların sayısı}}{\text{Olası çıktıların sayısı}}$$

Bu durumun aksine "Madeni para hilesiz mi?" sorusunu düşünün. Cevabı, bir deney yapılarak ve uzun vadede yazı ve turaların sıklığı incelenerek cevaplanabilecek basit bir istatistik sorusudur (Franklin vd., 2005). Cevap deneysel veri gerektirir ve olasılık:

$$\frac{\text{Olayda gözlenen çıktıların sayısı}}{\text{Toplam deneme sayısı}}$$

Bu da olasılığın, belli olayları tek tek tahmin etmeden ziyade uzun vadede tahminler yapmak olduğu görüşünü vurgulamaktadır.

Teorik Olasılık

Teorik olasılığı problem temelli bir yaklaşımla tanıtmanın bir yolu, öğrencilerle adil olmayan bir oyunun incelendiği bir etkinlik yaparak daha sonra teorik olarak oyunun adil olup olmamasının oyundaki olasılıklarını inceleyerek belirlemelerini istemektir. Takip eden etkinlikte oyunun sonuçları, öğrencilerin sezgisel fikirlerinin aksine olacaktır. Beklenenin aksine olan bu durum, öğrencilere oyunu belli bir mantıkla analiz etmeleri için gerçek bir akıl yürütme imkânı verecek ve olayların neden öyle meydana geldiklerini (teorik olasılığı) anlamalarını sağlayacaktır.

Etkinlik 22.7

Adil mi Değil mi?

Üç öğrenci birbirinin aynı 2 madeni parayı atsın (örneğin, 2 tane 1 kuruşluk veya 2 tane on kuruşluk). Şu kurala göre puanlar verilsin: İkisi de yazı gelirse A oyuncusu 1 puan, İkisi de tura gelirse B oyuncusu 1 puan ve bir yazı bir tura gelirse C oyuncusu 1 puan alır. Oyun 20 atıştan sonra bitecektir. En çok puan alan oyuncu oyunu kazanır. Öğrencilerinizin bu oyunu en az iki veya 3 kez oynamalarını sağlayınız. Her oyundan sonra oyuncular durup bu oyunun adil olup olmadığını ve bir sonraki oyunu kimin kazanacağını tartışacaklardır.

Tüm sınıf bu oyunu birçok kez oynadıktan sonra, oyunun adilliği konusunda bir tartışma düzenleyiniz. Öğrencileriniz bir olayın adil olup olmadığını ve nedenini tartışırlarken, onlardan iddialarını sadece veriye dayandırmamalarını isteyerek farklı düşünmelerini sağlayınız.

Etkinlik 22.7'deki oyunun ortak bir analizi şöyle yapılabilir: Toplam 3 olası çıktı vardır: 2 tura, bir yazı bir tura veya 3 yazı. Her biri aynı şansa sahiptir. Dolayısıyla oyun adil olmalıdır. Yalnız, "Adil mi değil mi?" oyununu oynadıktan sonra, (en çok puan alan) oyuncu C'nin adil olmayan bir avantaja sahip olduğunun farkına varacaklardır (özellikle oyunu çok sayıda oynadıklarında veya sınıftaki tüm veriyi incelediklerinde). Bu gözlem, çıktıların eş olasılıklı olması görüşüyle çelişkili gözükmektedir.

Benzer şekilde Rubel (2006, 2007) iki madeni para atma etkinliğini, 5. sınıftan 11. sınıfa kadar öğrencilere iki madeni para atıldığında bir yazı ve bir tura gelme olasılığını sorarak yaptırmıştır. Tüm sınıflar dikkate alındığında öğrencilerin yaklaşık yarısı (% 54) doğru cevap vermiştir. Yalnız 5 ve 7. sınıf öğrencilerinin çoğu, bir deneyde şansın % 50-% 50 eşit olacağı şeklinde yanlış akıl yürüterek doğru sonuca ulaşmışlardır. Öğrencilerin yaklaşık % 25 i, olası üç şeyin mümkün olması gerektiğini (iki yazı, bir yazı ile bir tura ve 2 tura) düşünerek olasılığın $\frac{1}{3}$ olacağını söylemişlerdir.

Öğrencilerinizden incelenen durumu iyi analiz etmelerini ve tüm olası çıktıları düşünmelerini isteyerek onları teşvik ediniz. Bir öğrenci açıklaması şu şekilde olabilir:

İki yazı ve iki tura gelmesi durumunun sadece bir yolu vardır ama bir yazı ve bir tura gelmesi durumunun iki yolu vardır: Birincisi yazı ikincisi tura veya birincisi tura ikincisi yazı. Bu da olası çıktı toplamını 3 değil 4 yapar (Bkz. Şekil 22.6). Bir yazı ve bir tura gelmesi dört olası çıktıdan sadece ikisinde mümkün olacaktır. Her çıktı eş olasılıklı olduğundan, bir yazı ve bir tura gelme olasılığı $\frac{2}{4}$ veya $\frac{1}{2}$ dir.

Birinci Para	İkinci Para
Yazı	Yazı
Yazı	Tura
Tura	Yazı
Tura	Tura

Şekil 22.6 İki madeni paranın atılması durumundaki olası dört çıktı.

Teorik olasılık, deney sonuçları üzerine değil deneyin mantıksal analizi üzerine temellendirilir.

Diğer oyuncu "aynı" olduğunda 1 puan ve "farklı" olduğunda iki puan alır oyunun uyarlanmış bir biçimi olan"Taş, kâğıt ve makas " oyunu bağlamı bir diğer bağlamdır. Bunun bir adil olay olup olmadığına karar veriniz (Ellis, Yeh, & Stump, 2007).

Deneyler

Önceden belirtildiği gibi bazı olasılıklar, teorik olasılıkla veya bir olayın teorik olarak meydana gelme olasılığıyla analiz edilemez. Bu türden olasılıklar deneysel verilerle belirlenebilir. Bu türden veriler ya deneylere dayalı olarak önceden vardır veya göreceli sıklığın teorik olasılığın yaklaşık bir değeri olduğuna ikna olununcaya kadar yeteri kadar çok sayıda deneme yapılarak deneylerden elde edilirler. Takip eden etkinlik böylesi bir durumu öğrencilere sunmaktadır.

Etkinlik 22.8

Kap Atma

Bir çift öğrencinize küçük bir plastik kap veriniz. Havaya fırlatılılıp yere düştüğünde meydana gelebilecek olası durumları (baş aşağı düşme, düz şekilde veya yana düşme) listelemelerini isteyiniz. Hangisinin olma olasılığı (baş aşağı düşme, düz şekilde veya yana düşme) en düşük veya en yüksektir? Neden? Öğrencilerinizin kapları 20 kez atmalarını sağlayınız ve her durumda kabın duruşunu kaydetmelerini isteyiniz. Tarafsız sonuçların gelmesini sağlamak için öğrencileriniz, kapları atmanın belli bir yöntemi üzerinde anlaşmalıdırlar (örneğin, kapları hep ayın yükseklikten atma). Sınıftaki bir çizelgeye her öğrenci çiftinin sonuçlarını kaydediniz. Farklılıkları tartışınız ve nedenlerinin ortak yönlerini belirleyiniz. Tüm veriyi bir araya getirdiklerinde sonucun ne olacağını tahmin etmelerini isteyiniz. Tüm veriyi bir araya getiriniz ve her bir durum için elde edilen sayıların (3 durum: baş aşağı düşme, düz düşme veya yana düşme) toplam atış sayısına oranlarını hesaplayınız. Birleştirilmiş verinin göreceli sıklığı gerçek olasılığa yaklaşmalıdır.

Kap atma deneyinde, deneye başlamadan önce sonuçları tahmin etmenin pratik bir yolu yoktur. Ama 200 kez atıp sonuçlar elinizde olduğunda, bir sonraki 100 atışın sonuçlarını tahmin etmede şüphesiz daha rahat hissedeceksinizdir. 1000 deneme yapıp verileri topladıktan sonra, kendinizi çok daha rahat hissedeceksiniz. Ne kadar çok atış yaparsanız o kadar daha emin olacaksınız. Kabın bir tarafına düşme olasılığının $\frac{4}{5}$ veya % 80 olduğunu buldunuz. Elde edilen veri, kabın teorik bir analizinden ziyade deney sonuçlarından elde edildiğinden dolayı deneysel veridir.

Büyük Sayılar Kuralı Göreceli sıklığın veri grubunun (örneklemin) büyüklüğü arttıkça teorik olasılığa veya gerçek olasılığın yaklaşık değerine yaklaşması olgusu *büyük sayılar kuralı* olarak adlandırılır. Veri grubu ne kadar büyükse örneklem de evreni o kadar iyi temsil eder. İstatistik açısından bakıldığında, 1000 kişiyle yapılan bir görüşme, 5 kişiyle yapılan bir görüşmeden daha ikna edici ve güvenilir veri sunar. Deneme sayıları ne kadar büyükse (görüşme yapılan kişi sayısı) verinin daha büyük bir evreni temsil ettiği konusunda o kadar emin olabilirsiniz. Aynı şey, veri toplayarak bir olayın olma olasılığını belirlemeye çalıştığınızda da geçerlidir.

Olasılığı anlamada oldukça kritik olmasına rağmen bu kavram, çoğu öğrencinin anlamakta zorlandığı bir kavramdır. Genelde öğrenciler, bir olasılığın kısa vadedeki anlamını düşünmekteler ki bu kavram yanılgısı da bazen "Küçük Sayılar Yasası" olarak adlandırılır (Flores, 2006; Tarr, Lee, & Rider, 2006). Bu yüzden de öğrenciler, örneğin ard arda çok sayıda yazı gelmesi durumunda büyük bir olasılıkla çok sayıda tura geleceğini düşünmektedirler. Ama madeni paranın hafızası yoktur o yüzden de yazı ve turaların gelme olasılıkları hâlâ % 50-% 50 dir. Bir sonraki etkinlik, kısa vadede (oldukça az sayıda denemede) verideki büyük değişkenliği vurgulamaktadır.

Etkinlik 22.9

6'sını birden bulma!

Öğrencilerinizden sıklık tablosunun alt kısmına 1'den 6'ya kadar sayıları listelemelerini isteyiniz. Bir zar atmalarını ve her bir sayıyı en az bir kez buluncaya kadar her sayının altına X işareti koymalarını isteyiniz. Beş ya da altı kez tekrar ediniz. Her bir durumdaki sıklık tablolarını nasıl karşılaştırabileceklerini tartışınız. Öğrenciler, bazı durumlarda-örneğin 4'lerin çok sayıda olduğunu ve diğer tüm sayıları buluncaya kadar 25 atış yaptıklarını, diğer durumlarda ise tüm sayıları sadece 10 atışta bulduklarını göreceklerdir. Az sayıda yapılan deneylerden elde edilen verideki bu çeşitliğin büyük olduğu ama uzun vadede " birbirine yaklaşacağı" olgusu üzerinde yoğunlaşınız. Bu etkinlik grafik çizer hesap makineleriyle de yapılabilir (Flores, 2006).

Gerçekte rastgele olaylar çoğunlukla beklenmeyen gruplarda meydana gelirler: hilesiz bir madeni para atıldığında arka arkaya 5 kez yazı gelebilir. 100 yılda bir olan su felaketi on yılda iki kez bir kasabayı vurabilir. Çark, zar veya bir torbadan çekilen küp gibi araç-gereçler öğrencilere, rastgele dağılımın mükemmel olmadığına dair sezgisel bir his verebilir. Öğrenciler bu araçların tarafsız çıktılar verdiğine inanırlar. Bunun tersi ise bu araçları kullanma, çok sayıda deneme üretmemizi sağlar ancak oldukça zaman gerektirir. Bu noktada teknoloji çoğu durumda yardım edebilir.

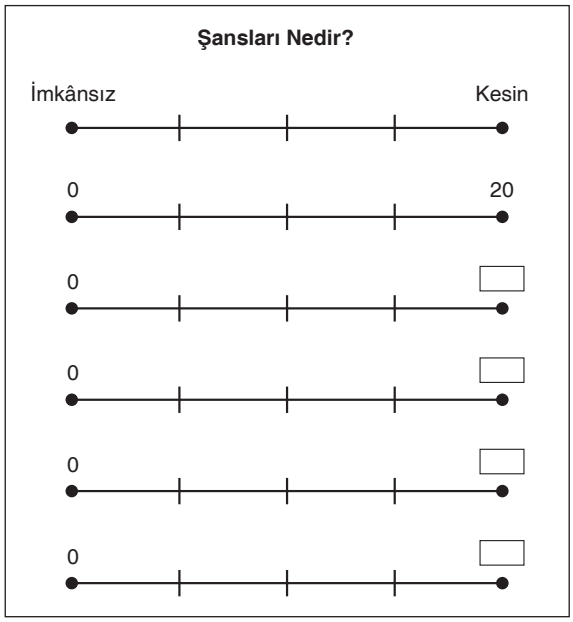
Takip eden etkinlik zorlayıcı bu görüşe sahip olan öğrencilere, bu fikrin kesirlerle ifade edilebilen oranların karşılaştırılmasına indirgemeden incelemelerine yardımcı olmak için tasarlanmıştır.

Etkinlik 22.10

Şansları Nedir?

Şekil 22.7'de gösterilen Çalışma Yaprak Seti 61'in bir saydam çıktısını çoğaltınız. Yarısı kırmızı diğer yarısı mavi olan bir çark yüzeyini öğrenci çiftlerine dağıtınız. Mavi gelme şanslarını tartışınız. İmkânsız-Kesin spektrumu üzerinde $\frac{1}{2}$ noktasını işaretleyiniz. Bu noktanın altına tüm doğruların üzerinde aynı noktaya karşılık gelecek düşey doğruyu çiziniz. Her bir çiftten çarklarını 20 kez çevirmelerini isteyiniz ve mavi ve kırmızı gelme sayılarını çetele tutarak kayıt altına almalarını isteyiniz. İkinci doğruda mavi gelme sayısını işaretleyiniz. Örneğin, 13 mavi ve 7 kırmızı geldiğinde sayı doğrusunda 0-20 arasında yaklaşık olarak 13'e karşılık gelen yere bir işaret koyunuz. 20 çevirmede renklerin gelme sayıları 10 a 10 değilse, bunun olası nedenlerinin ne olabileceğini tartışınız.

Şimdi de öğrenci çiftlerinin 20 kez daha çarklarını çevirmelerini isteyiniz. Sonuçları toplayıp ilk 20 çevirmedeki çetelelere ekleyiniz. Üçüncü doğrunun sağındaki kutunun içine toplamı yazarak önceki doğruya benzer şekilde mavilerin sayısını belirleyiniz. Bu işlemi iki kez daha tekrar ediniz ve yeni çevrilen çarklardan elde edilen sonuçları her seferinde önceki sonuçlara eklemeye devam ediniz. Her seferinde, önceki doğruyla aynı uzunlukta olan yeni bir doğru oluşturarak sağındaki kutunun içine toplamı yazınız. Toplam çevirme sayısı mümkünse en az 200 olacak şekilde çevirmeye devam ediniz. Hatta kısa bir süre içinde, hesap makinesi kullanarak 1000 deneme yapmak mümkündür.



Şekil 22.7 Bu etkinlik olasılığı kısa ve uzun vadede inceleme amacıyla kullanılabilir (Çalışma Yaprakları Seti-61).

"Şansları Nedir?" etkinliğinde kullanılan ardışık sayı doğruları aynı uzunluğa sahiptirler ve her biri toplam deneme sayısını temsil etmektedirler. Sonuçlar bir sayı doğrusunda işaretlendiğinde, toplam çevirme sayısının kesirle gösterildiği yer tüm doğrunun hangi kısmına karşılık geldiğinin görsel bir temsilidir. Deneme sayısı arttıkça işaretler, sayfanın başında çizilen doğrudan işaretlenen $\frac{1}{2}$ noktasına her seferinde daha yaklaşacaktır. 500 çevirmede 240 kez mavi gelmesinin % 48'e eşit veya yarıma yakın olduğuna dikkat ediniz. Kırmızıların sayısı mavilerin sayısından 20 fazla olmasına (260) rağmen değerler birbirine yakındır. Sadece 100 çevirmede ne kadar yakın olduğuna bakılsaydı sonuçlar 48 ve 52 olacaktı.

Aynı çalışma yaprağı ve aynı veri toplama süreci diğer deneyler için de kullanılabilir ve kullanılmalıdır da. Örneğin, bu yaklaşımı "Kap Atma" deneyi ile deneyiniz. Veri toplamadan önce düşey bir doğru çizme yerine, sayılar çoğaldıktan sonra gerçek olasılığın en iyi tahminin ne olacağına karar veriniz. Sonra, daha çok denemeden elde edilen sonuçların doğruya nasıl yaklaştığının gözlendiği anda düşey doğruyu çiziniz. Yüzdeleri bir şekilde anlayan

öğrenciler için her bir aşamadaki olasılıklar yüzdelerle ifade edilebilir.



Uzun vadeli sonuçlarla kısa vadeli sonuçları karşılaştırmaya yönelik görüşlerini değerlendirmek için takip eden durumu öğrencilerinize sununuz. Öğrencilerinizden görüşlerini yazmalarını isteyiniz.

> Margaret, çarkı 10 kez çevirmiştir. Üç çevirmede Mavi gelmiştir. Kırmızı ise yedi çevirmede gelmiştir. Margaret, mavinin gelme şansının 10 da 3 olduğunu belirtmiştir. Sonra Carla, aynı çarkı 100 kez çevirmiştir. 53 kez mavi ve 47 kez kırmızı geldiğini Carla kaydetmiştir. Carla, mavi gelme şansı ile kırmızı gelme şansının birbirine eşit olduğunu söylemiştir.
>
> Size göre, büyük bir olasılıkla Margaret mi yoksa Carla mı haklıdır ? Nedeninizi açıklayınız. Onların kullandıklarını düşündüğünüz bir çark çiziniz.

Öğrencilerinizin, 10 çevirmenin bile olasılığın iyi bir ispatı olmadığını ve 100 kez çevirmenin şanslarla ilgili daha fazla bilgi verdiği konusunu anlayıp anlamadıklarından emin olunuz. Ayrıca, şansın hafızasının olmadığı temel fikrini öğrencilerinizin anlayıp anlamadıklarını değerlendirmek için, takip eden durumla ilgili yazmalarını veya tartışmalarını öğrencilerinizden isteyiniz:

> Duane'nın birçok defa kullandığı şanslı bir madeni parası vardır. Parasının hilesiz olduğundan (yazı ve tura gelme şansının eşit olmasından) emindir. Duane parasını 6 kez atmıştır ve arka arkaya 6 kez yazı gelmiştir. Arka arkaya hiç 7 kez yazı gelmediği için Duane, bir sonraki atışta tura geleceğinden emindir. Duane'nın bir sonraki atışında yazı gelmesi şansıyla ilgili görüşünüz nedir? Cevabınızı açıklayınız.

Bu durumda peşinde olduğumuz ana fikir, madeni paranın her atışının önceki atışlardan bağımsız olduğudur. ◆

Öğretime Yönelik Sonuçlar

Ortaokul düzeyindeki sınıflarda olasılığa, deneyler tasarlama ve çıktıları gözleme şeklindeki deneysel yaklaşımın birçok nedeni vardır.

- Bu, problemleri çözmeye simülasyonla yaklaşmanın takdir edilmesini geliştirecektir. Aslında çoğu gerçek dünya problemleri, deneyler tasarlanarak veya simülasyonlar yardımıyla çözülebilmektedir.
- Bu yaklaşım anlamlı ve daha sezgiseldir. Sonuçlar anlamlı gelmeye başlar ve bazı soyut kuralların bir sonucu olarak görülmez.
- Bu yaklaşım olasılıkları tahmin etmeyi ve "Acaba sonuçlarım doğru mu?" diye düşünmeyi önler. Sezgisel bir alt yapı olmaksızın, sayma veya örnek uzaydaki öğelerin sayısını belirlemeye çalışma oldukça zor olabilir.
- Teorik modeli anlamak için deneysel bir alt yapı sağlar. İki yazının gelme olasılığının $\frac{1}{3}$ yerine $\frac{1}{4}$ olması gerektiğini anlamaya başladığınızda, Şekil 22.6'daki analiz oldukça makul gözükmektedir.
- Bu yaklaşım öğrencilerin, belli bir çıktının sayısının toplam deneme sayısına oranın sabit bir sayıya yakınsadığını görmelerine yardımcı olur. Sonsuz sayıda deneme yapılması durumunda teorik olasılık ile göreceli sıklık değeri aynı olacaktır.
- Oldukça eğlenceli ve ilginçtir. Hatta teorik modelin doğru bir açıklamasını araştırırken daha ilgi çekicidir.

Öğrencilerinize araştırmaları için ilginç problemler vererek mümkün olması durumundaysa deneysel yaklaşımı sınıfta kullanmaya çalışınız. Teorik bir analizin mümkün olması durumda ("Adil mi Değil mi?" etkinliğindeki iki madeni para deneyinde olduğu gibi), durum incelenmeli ve sonuçlar beklenen çıktıyla karşılaştırılmalıdır.

Bu deneysel yaklaşım, *ders öncesinde*, *ders sırasında ve ders sonrasında* olarak adlandırılan ders formatına temel oluşturan araştırma yaklaşımına oldukça benzemektedir. Deneye bir problemle başlarsınız (*ders öncesinde*), onu araştırmak için bir yöntem belirleyip uygularsınız (*ders sırasında*) ve deneyin sonuçlarını analiz edersiniz (*ders sonrasında*).

Deneylerde Teknoloji Kullanımı

Bazı basit hesap makineleri ve grafik çizer hesap makineleri de dâhil olmak üzere teknolojik aygıtlar, bir tuşa basıldığında rastgele çıktılar üretecek biçimde tasarlanmışlardır. Bilgisayar yazılımları, şapkadan sayılar çekebilmeyi, çarkları çevirmeyi ve madeni paraları atmayı mümkün kılabilmektedirler. Hesap makineleri, istenilen aygıtlar cinsinden yorumlanabilecek şekilde rastgele sayılar üretebilmektedir. Öğrenciler, fiziksel aygıtlara denk ve gerçek rastgele sonuçların bu teknoloji tarafından üretildiğini kabul ettikleri müddetçe, kendilerine deneyleri uygulamada önemli avantajlar sunmaktadırlar.

Teknolojiyle bazı içeriğe ulaşabilmek çok daha mümkündür ve bu durum olasılıkla ilgili deneyler için de geçerlidir. Grafik çizer hesap makineleri veya yazılımları kullanmanın avantajı çok sayıda deneyi daha kısa sürede yapabilmektir. Birbirinden farklı çok sayıda araç gereç (sanal zar, madeni para, kartlar, vb.) arasında da inceleme yapma bu aygıtlarla mümkündür ve bu aygıtlar denemelerin görsel temsillerini de sunmaktadırlar. Öğretmenler açısından teknoloji, programı çalıştırıp bir zar atma ve çarklar üzerinde kolayca dilimler oluşturabilme anlamına gelmektedir (Beck & Huse, 2007; Phillips-Bey, 2004). İncelenebilecek bir site NLVM'dir (Ulusal Sanal Manipülatif Kütüphanesi). Kitabın birçok bölümünde bu site tavsiye edilmektedir. Burada özellikle sanal deneyleri kolayca yapabilmeyi mümkün kıldığı için tekrar vurgulanmıştır.

Olasılıkla ilgili kavramları incelemede kullanılan yazılımlar genel olarak bilgisayar animasyonlu rastgele aygıtlar olarak tanımlanırlar. Grafikler öğrencilerin atılan madeni paraları ve dönmeye başlayan çarkları görmelerini sağlamaktadır. Çoğu farklı hızlarda deneyleri yapmaya izin vermektedir. Yavaş sürümlerde öğrenciler, bir madeni paranın atılmasını veya bir çarkın dönmesini izleyebilmektedirler. Çok daha hızlılarında ise her bir denemenin kaydı gösterilmekte ama grafikler verilmemektedir. Daha hızlı bir formatta ise sadece yığılmalı toplam sonuçlar gösterilmektedir. Kullanıcı deneme sayılarını kendisi ayarlayabilir.

Örnek Uzaylar ve İki Olayın Olasılığı

Çıktı ve örnek uzay kavramlarını anlama olasılığı anlamanın temelini oluşturmaktadır. Bir deney ve şans durumu için *örnek uzay*, bu deneyin olası tüm çıktılarının kümesidir. Örneğin, bir torbada iki kırmızı, üç sarı ve beş mavi renkte karo varsa, örnek uzay bu on karonun tamamını içerir. *Olay* ise örnek uzayın bir alt kümesidir. Bir sarı karo çekme olayı, örnek uzaydaki çıktıların veya elemanların üçünü içerir. Bir mavi karo çekme olayı ise örnek uzaydaki beş elemanı içerir. Küp atıldığında üst yüze bir sayı gelme olayı için örnek uzay, her zaman 1'den 6'ya kadar rakamlardan oluşur.

Bir zarı atma, torbadan renkli sayma pulunu çekme veya yarın yağmur yağması durumları bir olaylı deneylerin örnekleridir. Bir çıktıyı belirlemek için iki (veya daha fazla) etkinliği gerektiren deney ise iki olaylı deney örneğidir. Örneklerden birkaçı, iki zar atma, bir torbadan iki küp çekme veya yağmur yağma ve şemsiyeyi unutmadır.

İki olaylı deneyler incelendiğinde, dikkate alınması gereken bir diğer etken şudur: Belli bir aşamada olayın meydana gelmesinin diğer aşamada başka bir olayın medya gelmesi üzerinde bir etkisi var mıdır? *Bağımlı* olay ve *bağımsız* olay örneklerinin her ikisinin dikkate alındığı iki olaylı deney örneklerini bir sonraki bölümde inceleyeceğiz.

Bağımsız Olaylar

"Adil mi Değil mi?" adlı Etkinlik 22.7'yi hatırlayınız. Bu etkinlikte öğrenciler, iki madeni para atılması durumunda ortaya çıkan sonuçları incelemişlerdi. Bir madeni paranın atılmasının diğeri üzerinde hiçbir etkisi yoktu. Bunlar, *bağımsız olaylar*a örnektirler: bir olayın meydana gelmesi ya da gelmemesi diğer olay üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir. Aynı şey iki zar atılması durumu için de geçerlidir: Bir zarın atılması ile elde edilen sonucun diğer zarın atılması durumunda elde edilen sonuç üzerinde etkisi yoktur. Hem iki madeni para atılması hem de iki zar atılmasıyla ilgili ortak hata, iki olayı birbirinden ayırt edememedir. Özellikle, "bir yazı ve bir tura" veya iki zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamı gibi çıktıların birleştirilmesi istendiğinde bu hata belirginleşmektedir.

İki madeni para atılması problemini önceden çözmüştük. İki zar atılması ve sonuçların toplanması olayını inceleyelim. Öğrencilerinizin iki zar atıldığında elde ettikleri sonuçların çetelelerini tuttuklarını varsayınız. Sonuçlar Şekil 22.8'dekine benzer çıkacaktır. Bu olayların eş olasılıklı olmadıkları açıktır ve hatta toplamın 7 olma şansı en yüksektir. Öğrencilerin şu sayı kombinasyonlarına bakmalarını sağlayarak bu durum açıklanabilir: 1 ile 6, 2 ile 5 ve 3 ile 4. 6 ve 8 toplamları için ise üç farklı kombinasyon vardır. Sanki 6 ve 8 toplamı ile 7 toplamının şansı aynıymış gibi gözüküyor ama aynı değildir.

Şimdi de aynı deneyin bir kez daha tekrar edildiğini varsayınız. Konuyu netleştirme amacıyla bu kez öğrencilerinize iki farklı renkte zarı atmalarını önererek Şekil 22.8 (b) deki gibi çetele tablosunda sonuçları kaydetmelerini isteyiniz.

(a)

İki Zardan Elde Edilen Toplamlar

2	𝍸
3	𝍸 𝍸
4	𝍸 𝍸 𝍸
5	𝍸 𝍸 𝍸
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
7	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
8	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
9	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
10	𝍸 𝍸 𝍸
11	𝍸
12	𝍸 𝍸

(b)

Kırmızı Zar

Yeşil Zar	1	2	3	4	5	6
1	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸
2	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸
3	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸
4	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸
5	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸
6	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸

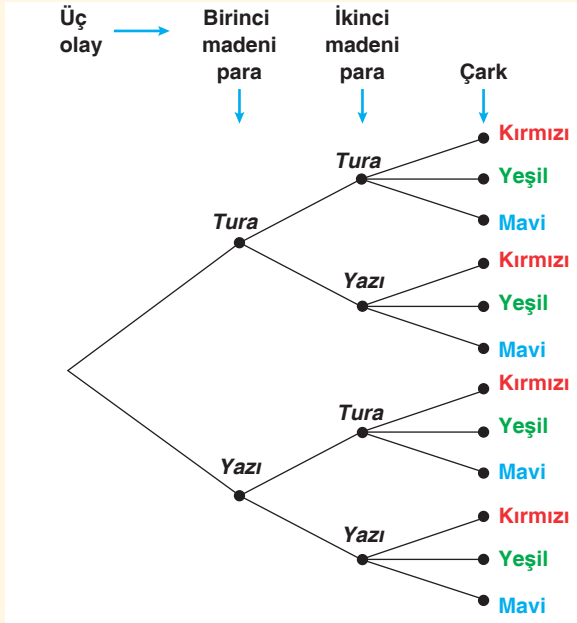
7 toplamını elde etmenin altı yolu vardır.



Şekil 22.8 Çeteleler sadece toplamları ifade etmede (a) veya her bir zardan elde edilen sonuçların kaydını tutmada kullanılabilir (b).

Çok sayıda zar atılarak elde edilen sonuçlar beklenece-ği üzere, çetele tablosunu oluşturan 36 hücredeki her birinin eş olasılıklı olmasıdır. Ama toplamı 7 olan hücrelerin sayısının diğer toplamlardan daha fazla olduğu görülmektedir. Bu yüzden de öğrenciler, iki zar atıldığında 7 toplamını elde etmenin üç değil altı farklı yolu olduğunu düşünerek bu kısımları dikkate alıyorlardı. Olasılığın $\frac{6}{36}$ veya $\frac{1}{6}$ olması için toplam 36 çıktıdan istenilen çıktı sayısı 6'dır.

İki bağımsız olayın örnek uzayını belirlemede, çizelge veya diyagramda iki olayın ayrı ayrı kayıtlarını tutmak ve olası tüm kombinasyonlarını göstermek oldukça faydalıdır. Sadece iki olayın olması durumunda Şekil 22.8 (b)'deki



Şekil 22.9 İki madeni para ve 3 renkten oluşan bir çark düşünüldüğünde olası çıktıların bir ağaç diyagramı

matris kullanılabilecek iyi bir öneridir. İstenilen çokluktaki olayları incelemede ağaç diyagramı (Şekil 22.9), örnek uzayı oluşturmak için kullanılabilecek diğer bir yöntemdir. Örneğin, dondurma alma bağlamını düşününüz. Farklı iki görünüme sahip dondurma külahları ile bandırma/bandırmama tercihine sahip olduğunuz birbirinden farklı üç çeşit dondurma seçebilirsiniz. Bu durumun benzeri, Şekil 22.9 daki gibi madeni paralar ve bir çark kullanılarak oluşturulabilir.

Durup Düşün!

Kenarlarında 1, 1, 2, 3, 3 ve 3 bulunan iki küp kullanılarak elde edilen toplamları analiz etmek için Çizelge ve/veya ağaç diyagramı kullanınız ("Önce Topla, Sonra Çetelesini Tut"-Etkinlik 22.4'te kullanılan küplerin aynısıdır). 1 den 6'ya kadarki toplamların her birinin olasılığı nedir?

Etkinlik 22.11

Çok Adımlı Olayları İnceleme

Bağımsız olaylardan oluşan çok aşamalı örnekler takip eden bölümde verilmiştir:

- **İki zar atıldığında toplamı aynı olanları belirleme**
- **Bir çarkta maviyi iki kez bulma**
- **Bir kap veya bir raptiyenin birer kez atılması sonunda duruş pozisyonu.**
- **Dört madeni para atıldığında en az iki yazı gelmesi durumu**

Öncelikle öğrencilerinizden, olayın olasılığını tahmin etmelerini ve tahminlerini savunmalarını isteyiniz. Tahminlerini karşılaştırabilmek için çok sayıda deneme yapabildikleri bir deney oluşturmalıdırlar. Sonunda farklılıklar üzerinde uzlaşma sağlamalıdırlar. Uygun olması halinde deneylerinin son bir analizi olarak deneysel olasılığı belirlemeye çalışmalıdırlar.

Ve, *veya*, *en az* ve *en fazla* gibi kelime veya ifadeler öğrencilerin zorlanmalarına neden olabilmektedir. Günlük kullanımıyla matematikteki sıkı mantıksal kullanımı genel olarak aynı olmadığında burada özellikle *veya* sözcüğüne dikkate ediniz. *Veya'nın* matematikteki kullanımı *iki* durumu da içermektedir. Dolayısıyla kap ve raptiye deneyindeki olay, raptiyenin düz, kabın düz ve hem raptiyenin hem de kabın düz pozisyonlarını içermektedir.

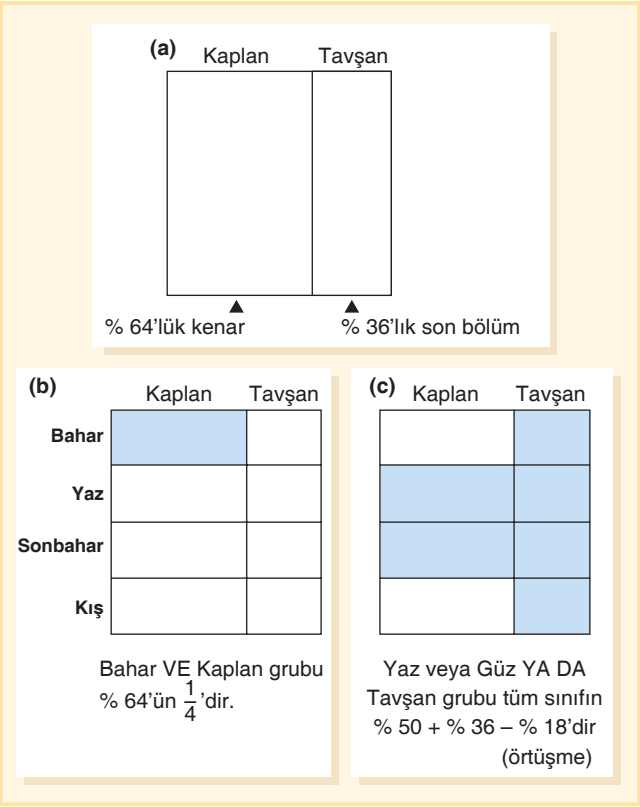
Bir Alan Modeli ile İki Olaylı Olasılıklar

Çok adımlı bir olayın teorik olasılığını belirlemenin bir yolu, tüm olası çıktıları listelemek ve istenen olaya uygun çıktıları saymaktır. Bu yöntem etkili olmasına rağmen bazı sınırlılıkları vardır. İlk olarak, ya olaylar eş olasılıklı değilse? Örneğin, çarkın sadece $\frac{1}{4}$'i mavi olabilir. İkincisi, çok olasılık olması durumunda işlemler oldukça karmaşıklaşır. En çok beşinci sınıfa devam eden öğrencilerle alan modeli yaklaşımı başarılı olarak uygulanmıştır ve belli bir zorluk düzeyine sahip bazı problemleri çözmede oldukça faydalıdır.

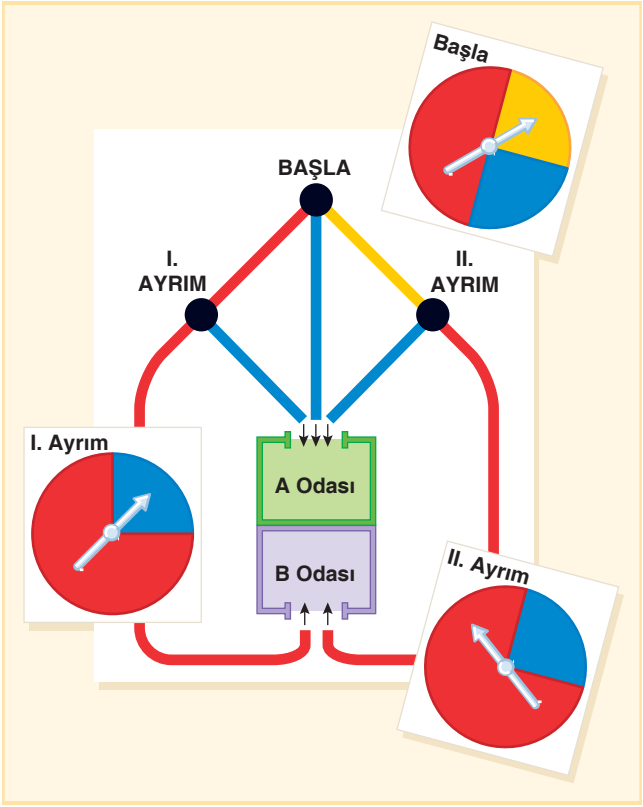
Öğrenciler kendi başlarına verileri analiz etmekten hoşlanırlar. Tüm 7. Sınıftakilerin doğum günü bağlamını düşününüz. Hangi hayvanın Çin takvimine göre kendi doğum günlerini temsil ettiğini ve doğdukları hangi mevsimin iki bağımsız olayı temsil ettiğini öğrencilerinize sorunuz. Şekil 22.10 bu durumun, bir alan modeli kullanılarak nasıl modellenebileceğini göstermektedir: Sınıfın % 64'ü kaplan yılında ve % 36'sı ise tavşan yılında doğmuştur. Mevsimlerin ise eş olasılıklı olduğu varsayılmıştır.

Şekil 22.10 (b)'de öğrencilerden kaplan yılında ve ilkbaharda doğanların tüm sınıfın % 64'nün ¼' ni oluşturduğunu görsel olarak görebilirsiniz. Bunun kesirlerle çarpmada kullanılan sürece oldukça benzediği görülmelidir. Şekil 22.10 (c)'deki durum, VEYA durumu olduğundan daha karmaşıktır. Sınıfın yarısı ya yaz ya da güz doğmuştur ve bu durumdaki öğrenciler tavşan yılında doğanların % 34'ünü oluşturmaktadır. Ama öğrenciler her iki durumu da sağladıklarından iki kez sayılmıştır. Diyagramda bu örtüşme, ilgili satırlar ve sütunlar taranarak gösterilmektedir. İncelenen bu durumdaki değer, 36'nın ½'dir (veya % 18). Dolayısıyla, tavşan yılında olup yaz veya güz doğanların sayısı, tüm sınıfın % 68 (50 + 36 - 18)'idir.

Alan yaklaşımı, eşitlik veya ağaç diyagramlarından daha az soyut olduğundan birçok öğrenciye daha anlaşılır gelmektedir. İkiden fazla bağımsız olayı incelerken her bölgenin daha fazla sayıda alt bölgeye ayrılması, bir zorunluluk olmasına rağmen yine de bölgeye ayırma oldukça makuldür.



Şekil 22.10 Olasılığı belirlemek için bir alan modeli



Şekil 22.11 Sizi özgürlüğe götürecek anahtarı A odasına mı B odasına mı yerleştirmelisiniz? Yol ayrımındaki her bir çark sizin yolunuzu belirleyecektir.

Ve ve *veya* bağlacının kullanımı daha etkili bir şekilde modellenebilir. Öğrenciler açısından formülleri ezberlemeye gerek kalmadan bağımsız olayların olasılığının nasıl bulunacağı oldukça açıktır.

Bağımlı Olaylar

İkinci olayın meydana gelmesinin birinci olaya bağlı olması durumunda bağımlı olay gerçekleşir. Örneğin, birbirinin aynı iki kutu olduğunu varsayınız. Bir kutuda bir adet kağıt 1 dolar ve 2 adet sahte kağıt para bulunsun. Diğer kutuda ise bu paraların her birinden birer adet bulunsun. Bir kutuyu ve bu kutunun içine bakmadan bir adet kağıt para seçebildiğinizi kabul edelim. Sahte olmayan bir doları bulma şanslarınız nelerdir? Buradaki iki olay, bir kutu seçme ve bir adet kağıt para seçmedir. İkinci olaydaki bir doları seçme olasılığı hangi kutuyu birinci seçtiğinize bağlıdır. Bu olaylar bağımsız değil *bağımlı* olaylardır.

Tuhaf ama ilişkili bir bağlam olarak varsayın ki uzakta bir yerde hapistesiniz. Şekil 22.11 deki labirent size gösteriliyor. Başlangıçta ve yol üzerindeki her yol ayrımında, bir çarkı çevirerek çarkın gösterdiği yönü takip etmelisiniz. İki odanın birisine yerleştirilmiş sizi hapisten kurtaracak anahtarı isteyebilirsiniz. Anahtarı hangi odaya yerleştirmelisiniz ki özgürlüğe kavuşma şansınız en fazla olsun. Labirentin sonuna ulaşma olasılığının birinci çarkın çevrilmesi sonucunda ortaya çıkan duruma bağlı olduğuna dikkat ediniz.

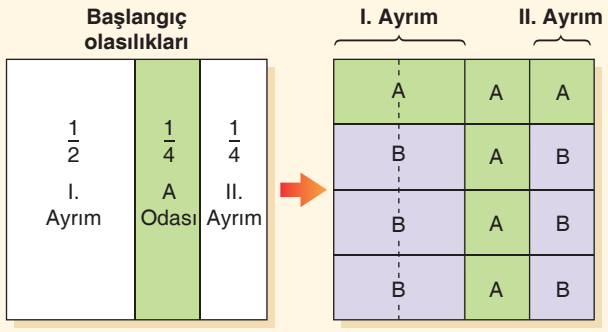
Bu problemlerin her biri deneysel bir yaklaşımla (similasyonla) incelenebilirdi. Deneylerin teorik olasılık için iyi bir ön adım olduğunu unutmayınız. Teorik olasılıkları belirlemek için alan modelini kullanabilirsiniz. Mahkum probleminin alan modeli kullanılarak bir çözümü Şekil 22.12'de gösterilmiştir. Ayrım I ve II deki çarklar $\frac{1}{3}$ A ve $\frac{2}{3}$ B çarkları olsaydı, bu problemin alan modeli nasıl olurdu?



Durup Düşün!

Alan modeli yaklaşımını sahte kağıt para problemi için deneyiniz. Bir doların gelme şansı $\frac{5}{12}$'tir. Bu sonucu tahmin edebilir misiniz?

Alan modeli tüm olasılık problemlerini çözmeyecektir. Ama, kavramsal olduğundan, mevcut kesir bilgisi üzerine temellendirilebileceğinden ve kendisiyle daha çok sembolik yaklaşımlar türetilebileceğinden konuya gelişimsel olarak yaklaşmaya oldukça uygundur. Aynı problem için Şekil 22.13'te yol boyunca tüm olasılıkların yazıldığı ağaç diyag-



I. ayrımda, sürenin $\frac{3}{4}$'ü kadarında B odasına gideceksiniz. (Not: Burada karenin $\frac{3}{4}$'ü değil, sürenin $\frac{3}{4}$'ünde I. ayrıma gideceksiniz).

II. ayrımda, bu sürenin $\frac{3}{4}$' ü kadarında (veya toplam sürenin $\frac{3}{16}$'ünde) B odasına gideceksiniz.

Dolayısıyla, sürenin $\frac{7}{16}$'sinde A odasına, $\frac{9}{16}$'unda ise B odasına ulaşacaksınız.

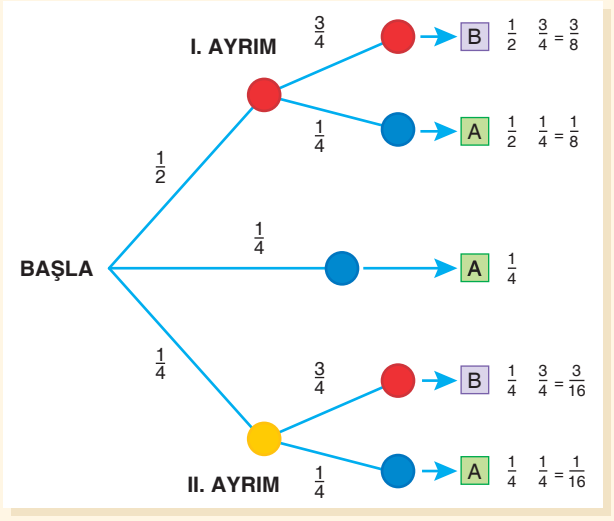
Şekil 22.12 Alan modelini kullanarak labirent problemini çözme.

ramı gösterilmiştir. Olasılık problemleriyle belli bir deneyim kazandıktan sonra, ağaç diyagramı modelini daha geniş farklı durumlara uyarlamak ve kullanmak muhtemelen daha kolay olacaktır. Şekil 22.12'deki karenin her bir bölümünü Şekil 22.13'teki ağaç diyagramının her bir dalı ile eşleştirebilmelisiniz. Ağaç diyagramının bütün bir dalı için olasılığın, neden dallar boyunca bulunan olasılıkların çarpımıyla belirlendiğini açıklamada alan modelini kullanınız.

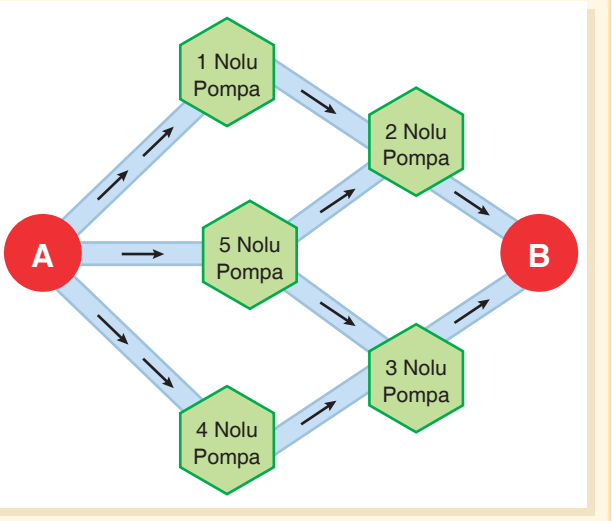
Simülasyonlar

Simülasyon, şansla ilgili bir öğenin karıştığı karmaşık durumlarda karar verirken veya gerçek dünya problemlerini cevaplarken kullanılan bir tekniktir. Gerçek dünya durumlarını incelemenin tehlikeli, karmaşık veya pahalı olmasından dolayı çoğu durumlarda simülasyonlar kullanılır. Gerçek bir olayda ne olabileceğini görmek için gerçek dünyadakiyle aynı olasılıklara sahip olacak şekilde bir model tasarlanmalıdır. Örneğin, bir roket tasarlarken, daha fazla sayıdaki ilgili sistemlerin tümü belli bir başarısızlık şansına sahiptirler. Başarısızlıkların farklı kombinasyonları roketle ilgili ciddi problemlere neden olabilir. Ciddi başarısızlıkların olasılıklarını bilme, sistemlerin yedeğinin alınmasının veya yeniden tasarlanmasının gerekli olup olmadığını belirlemede yardımcı olacaktır. Gerçek roketle yapılan testleri tekrarlamak mantıklı değildir. Bunun yerine, olası durumların benzetildiği bir model tasarlanabilir ve bu model bilgisayar yardımıyla tekrarlanarak denenebilir. Bilgisayar modeli binlerce uçuşun benzerini oluşturabilir ve başarısızlık şansının bir tahmini yapılabilir.

Takip eden problem ve model, Quantitative Literacy Project tarafından geliştirilen mükemmel materyallerden uyarlanmıştır (Gnanadesikan, Schaeffer, & Swift, 1987). Şekil 22.14 teki diyagram, A ile B'yi birleştiren bir pompalama sistemi için gereken su borularını göstermektedir. Beş pompa eskimiştir ve herhangi bir anda bir pompanın arızalanma şansı $\frac{1}{2}$'dir. Pompa arızalandığında, su bu istasyondan geçemez. Örneğin, 1, 2 ve 5 numaralı pompalar arızalanırsa, su sadece 4 ve 3 numaralı pompalardan geçebilir. Böyle bir sistemle ilgili sorulabilecek takip eden soruları dikkate alınız.



Şekil 22.13 İki ya da daha fazla bağımlı olayın çıktılarını modellemenin diğer bir yolu ağaç diyagramıdır.



Şekil 22.14 Beş pompadan her birinin arızalanma şansı % 50'dir. A dan B'ye arıza olmadan giden bir yolun olasılığı nedir?

- Suyun herhangi bir anda borulardan geçme olasılığı nedir?
- Herhangi bir anda tamir gerektiren istasyonların sayısı ortalama olarak kaçtır?
- 1-2 yolunun herhangi bir anda sağlam olma olasılığı nedir?

Takip eden adımlar, herhangi bir simülasyon için faydalı bir rehber olarak hizmet edebilir:

1. *Problemdeki varsayımları ve anahtar bileşenleri belirleyiniz.* Su problemindeki anahtar bileşen, bir pompanın durumudur. Herhangi bir pompa ya sağlamdır ya da arızalıdır. Bu durumdaki varsayım ise bir pompanın sağlam olma olasılığının $\frac{1}{2}$ olmasıdır.

2. *Anahtar bileşenler için rastgele bir araç-gereç seçiniz.* Anahtar bileşendekiyle aynı çıktılara sahip olan herhangi bir araç-gereç seçilebilir ki bu örnekte pompalardır.

3. *Bir deneme tanımlayınız.* Deneme, durum bir kez tamamen modelleninceye kadar bir dizi anahtar bileşenin benzerini içermektedir. Bu problemdeki bir deneme, her bir atışın farklı bir pompayı temsil ettiği bir madeni parayı beş kez atmayı içermelidir.

4. *Daha fazla sayıda denemeleri uygulayıp bilgiyi kaydediniz.* Beşli setin her biri, bir deneme olduğundan ve bütün pompaları temsil ettiğinden, bu problem için beşli gruplar halinde yazı ve turaların kaydını tutmak faydalı olacaktır.

5. *Çıkarımlarda bulunmak için verileri kullanınız.* Suyun akabileceği dört farklı yol vardır. Yolların her biri beş pompadan ikisi boyunca geçmektedir. Çekilişte sıralandığı gibi eğer 1–2, 5–2, 5–3 ve 4–3 çiftlerinden herhangi biri açıksa diğer pompaların sağlam olup olmamasının sonuç üzerinde bir etkisi yoktur. Her ikisinde de yazıların geldiği bu dört madeni para çiftlerinden en az birisindeki denemeleri sayarak, suyun borudan geçme olasılığını tahmin edebilirsiniz. İkinci soruyu cevaplayabilmek için her denemedeki yazıların sayısının ortalaması alınabilir.



Durup Düşün!

1–2 yolunun açık olmasıyla ilgili üçüncü soruyu nasıl cevaplandırırdınız?

Simülasyon etkinliklerinin dikkat çekici problem çözme yönleri, gerçek dünyanın bir modele dönüştürüldüğü bu üç aşamada görülmektedir. 4 ve 5. adımlar deneysel araçlarla bir olasılık problemini çözmeyle aynıdır. Gerçek dünya bilgisini modellere dönüştürme, deneysel veri toplamak için kullanılabilir.

Bir simülasyon kullanılarak deneysel verinin toplanabileceği birkaç problem örneği şunlardır:

Bir doğru/yanlış testinde sadece tahminle 10 sorudan 7 sini doğru cevaplama olasılığı nedir? (*Anahtar bileşen*: Bir soruyu cevaplama. *Varsayım*, doğru cevabı bulma şansının $\frac{1}{2}$ olmasıdır)

***Simülasyon Seçeneği*: Bir deney için madeni parayı 10 kez atma.**

Beş kişilik bir grupta iki kişinin aynı ayda doğma şansı nedir? (*Anahtar bileşen*: Doğulan ay. *Varsayım,* 12 ayın tamamının eş olasılıklı olmasıdır)

***Simülasyon Seçeneği*: 12 yüzlü zar veya 12 kart. Bir zar atınız/bir kart çekiniz, yerine koyunuz ve tekrar bir zar atınız/bir kart çekiniz.**

Casey'in (beyzbol oyununda) sopa ile vurma ortalaması 0.350'dir. Dokuz turlu tam bir beyzbol oyununda[2] Casey'in vurulmama şansı nedir? (*Anahtar bileşen*: Vurulma. *Varsayımlar*, her bir vuruş için isabet etme olasılığının 0.35 olması ve ortalama bir oyunda Casey'in, dört kez sopa ile vurma şansını yakalamasıdır).

***Simülasyon seçeneği*: % 35'i taranmış bir çark. Bir deneme için çarkı 4 kez çeviriniz.**

Simülasyonlarına uygun rastgele bir araç-gerecin seçiminde öğrenciler çoğunlukla zorluk yaşamaktadırlar. Yüzleri istenilen olasılıkla eşleşecek şekilde ayarlanabileceğinden çarklar, açık bir alternatiftirler. Olasılığın $\frac{1}{2}$ olması durumunda, madeni paralar veya iki renkli sayma pulları kullanışlıdırlar. $\frac{1}{6}$'in katları olan olasılık durumları için standart bir zar kullanılabilir. Eğitsel amaçlı olarak üretilmiş 4, 8, 12 ve 20 yüzlü zarlar da vardır.



Oldukça basit çok sayıda hesap makinesindeki bir tuşla deneyleri canlandırmak için kullanılabilecek rastgele sayılar üretilebilir (örneğin, 1 in anlamı doğru, 2'nin anlamı yanlış). Rastgele sayılar genellikle 0 ile 1 arasındadır. Bu rastgele sayı üreteçlerini kullanan öğrencilerin doğru şekilde bu sayıları kullanabilmeleri için yönlendirmeye ihtiyaçları vardır. Üretilen her bir sayı büyük olasılıkla 8 ya da 9 basamak ondalıklı kısımlar içerecektir. Beş sayılı bir liste şöyle olabilir:

0.8904433368
0.0232028877
0.1669322714
0.1841957303
0.5523714952

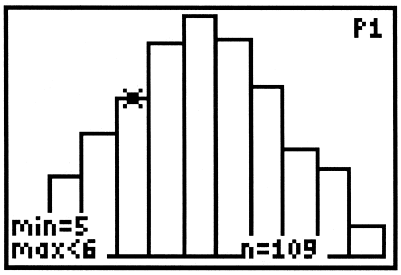
Bir madeni para atarak ya da bir çark çevirerek elde edeceğimiz sonuçlar ile yukarıdakine benzeyen ondalıklı sayıları nasıl eşleştirebilirsiniz? Her birinin 2 ile çarpıldığını varsayınız. Sonuçlar 0 ile 2 arasında çıkacaktır. Ondalıklı kısmını ihmal ettiğinizde çok sayıda sıfır ve birler elde edersiniz. Sıfır ve birleri, yazı ve tura için, kızlar ve erkekler veya doğru ve yanlışlar için ya da eş olasılıklı iki çıktılı durumlar için kullanabilirsiniz. Üç çıktılı durum için (çarkın $\frac{1}{4}$,

[2] Ç.N. Beyzbolda iki tarafın sıra ile vurucu mevkiine gelmesi en fazla 9 kez olabilir.

$\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2}$ oranında bölümlenmesinde olduğu gibi), sayının ilk iki basamağındaki kısma bakarak 0-24 ve 25-49 arasındaki değerleri çarkın iki çeyreklik bölümüne ve 50-99 arasındaki değerleri ise çarkın yarısına karşılık düşünebilirsiniz. Farklı bir alternatif ise her sayıyı 4 ile çarpıp, ondalıklı kısmı ihmal ederek sonuçta 0, 1, 2 ve 3 sayılarını elde edebilirsiniz. Sonuçta rastgele sayılar basit herhangi bir araç-gerece benzetilebilirler.

Grafik çizer hesap makinelerine yüklenen basit bir program kullanılarak rastgele sayılar üretilebilir ve sonuçlar liste şeklinde kaydedilebilir. Sonra da bu liste grafik biçiminde gösterilebilir. Şekil 22.15'teki program TI-83 hesap makinesi için kullanılabilir. Program istediğiniz sayıda zarı atacaktır. Programın sonunda her bir toplamdan elde edilen toplamlar bir histogramla gösterilecektir. İZİNİ SÜRME özelliğiyle histogramı oluşturan her bir sütundaki değerlerin ne olduğu takip edilebilir. İki zarın 1000 kez atılması sonucu elde edilen sonuçlar grafikte gösterilmektedir. Program yaklaşık 2.5 dakika çalışarak grafiği oluşturmuştur (Bilgisayar yazılımları bu sonuçları anında üretebilmektedir). Ortaokul öğrencileri için tasarlanan TI-73 model hesap makinesine para ve zar atma fonksiyonları yüklenmiştir. ◆

```
ClrHome
ClrDraw
FnOff
Disp "ROLLING DICE"
Input "HOW MANY DICE?",D
Input "HOW MANY ROLLS?",N
6D→dim(L1)
6D→dim(L2)
For(I,1,6D)
I→L1(I)
End
Fill(0,L2)
0→M
For(I,1,N)
0→S
For(J,1,D)
S+int((6rand)+1→S
End
L2(S)+1→L2(S)
If L2(S)>M
M+1→M
End
D→Hmin
6D+1→Hmax
1→Hscl
0→Ymin
M+1→Ymax
0→Yscl
Plot1(Histogram,L1,L2)
DispGraph
```



Şekil 22.15 TI-83 için yazılmış bu program kullanılarak binlerce zar atma deneyi yapılarak elde edilen sonuçların kaydı tutulabilir.

Bölüm 22 Üzerine Düşünelim!

Yazarak Öğrenelim

1. Olasılıkla ilgili öğrencilerin geliştirmesi gereken ilk fikirler nelerdir? Öğrencilerinize bu fikirlerle ilgili nasıl yardımcı olabilirsiniz?
2. Etkinlik 22.3 ve 22.4'teki ("Tepeye Doğru Yarış" ve "Önce Ekle Sonra Çetelesini Tut") etkinliklerin her biri öğrencilerin bazı çıktıların diğerlerine göre olma olasılığının daha fazla olduğunu görmelerine yardımcı olmak amacıyla tasarlanmıştı. Bu İki etkinlik arasındaki fark nedir? Öğrencilere yardımcı olmak için bu fark neden kullanışlı olabilir?
3. "Şansın hafızası yoktur" ifadesi ile ne kastedilmiştir, açıklayınız.
4. Deneysel olasılık ile teorik olasılık arasındaki farkı açıklayınız. Bu iki olasılık hiç birbirine eşit olabilir mi? Hangisi "doğru" olasılıktır?
5. Teorik olasılığı bulma çabasına girmeden önce öğrencilerin deneyler yapmalarına izin vermenin avantajları nelerdir?
6. "Büyük Sayılar Kuralı"nı açıklayınız. Öğrencilerin bu fikri takdir etmelerine yardımcı olabilecek bir etkinlik betimleyiniz.
7. Tek adımlı ile çok adımlı deney arasındaki farkı açıklayınız. Çok adımlı olaylarda bağımlı olaylar ve bağımsız olaylar nelerdir? Her birisi için birer örnek veriniz.
8. Takip eden durumdaki olasılığı belirlemek için bir alan modeli veya ağaç diyagramı kullanınız.

   Dod bir adet 5 dolarlık ve üç adet 1 dolarlık kağıt parayı birinci kutuya koyuyor. İkinci kutuya ise, birer adet 1 dolarlık ve 5 dolarlı kağıt paraları koyuyor. Araba yıkamak için Junior, birinci kutudan bir kağıt parayı alıp bakmadan ikinci kutuya koyuyor. İkinci kutudaki paralar iyice karıldıktan sonra, bir adet kağıt para çekiyor. Çekilen paranın 5 dolarlık kağıt para olma olasılığı nedir?

   Bu probleme uygun bir simülasyon tasarlayarak deneyiniz. Simülasyonunuz hesapladığınız teorik olasılıkla uyumlu mudur?
9. Bir örnek uzayın üç çıktısının olasılıkları $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ve $\frac{1}{2}$'dir. Bu olasılıkları hesap makinesi veya bilgisayarda benzetmek için bir rastgele sayı üretecini nasıl kullanacağınızı betimleyiniz.

Araştırma ve Tartışma Konuları

1. "Monty Hall Problemi[3]" klasik problemlerden birisidir. Oyunun gösterisinde, yarışmacılar üç kapıdan birisini seçerler. Monty Hall, yarışmacının seçmediği kapılardan birisinin arkasındaki keçiyi gösterdikten sonra seçtiği kapıları değiştirmesine izin verir. Yarışmacı kapıyı değiştirerek mi yoksa başlangıçtaki seçimini koruyarak mı şansını arttırır, yoksa bu iki tercih arasında hiçbir fark yok mudur? Bu soruyu cevaplamanın birçok yöntemi vardır. Bu bölümde öğrendiğiniz teknikleri ve görüşleri dikkate alarak cevabınız için ikna edici bir açıklama yapınız.
2. Olasılıkla ilişkili etkinlikleri Illimunations web sitesine girerek bulunuz. Farklı denemelere yönelik ödevleri inceleyiniz. a) Sanal deneylerin avantaj ve dezavantajlarını ve b) öğrencilerin buradaki küçük programları incelemelerini takiben bu bölümdeki içeriği tartışınız.

[3] Oyun şöyle oynanır: Yarışmacıdan üç kapıdan birisini seçmesi istenir. Amaç arkasında arabanın bulunduğu kapıyı bulmaktır. Kapılardan birinin arkasında araba, diğer ikisinde ise keçiler vardır. Diyelim ki 1 numaralı kapıyı seçtiniz ve kapı açık değil. Monty Hall hangi kapıların ardında hangilerinin olduğunu bilmektedir ve diyelim ki 3 nolu kapıyı açar. Bu kapının ardında ise bir keçi vardır. Yarışmacıya şu soruyu sorar: 2 numaralı kapıyı mı seçmek istersin? Seçimini değiştirmen sana bir avantaj sağlar mı?

Bölüm 22 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Burada listelenen kitaplar olasılığı incelemek için hem hayali hem de gerçek dünya verileri sunmaktadır. Ayrıca, önerilen okuma parçalarında listelenen bir makalede iki tane daha ilgili edebi metin verilmiştir.

Go Figure! A Totally Cool Book about Numbers *Ball, 2005*

This wonderful book could be placed in every chapter of this book. About 40 different topics are covered, one of which is called "Take a Chance." This two-page spread is full of interesting contexts for probability, including a match-dropping experiment and genetics.

Harry Potter Books *Rowling, 1998, 1999a, 1999b, 2000, 2003, 2005, 2007*

The game of Qidditch can lend itself to creating a simulation to explore the likelihood of winning. Wagner and Lachance (2004) suggest that sums of two dice be linked to Qidditch actions. For example, a roll of 7 means a player scores a Quaffle, which is worth 10 points. Rolls of 2 or 12 mean the player catches the snitch and the game ends, 150 points; 3, 5, 9, 11 means hit by bludger—lose a turn; 4, 6, 8, 10 means dodge a bludger, no points.

Do You Wanna Bet? Your Chance to Find Out about Probability *Cushman, 1991*

The two characters in this book, Danny and Brian, become involved in everyday situations both in and out of school. Each situation has an element of probability involved. For example, two invitations to birthday parties are for the same day. What is the chance that two friends would have the same birthday? In another situation, Danny flips heads several times and readers are asked about Brian's chances on the next flip. An excellent opportunity to explore this possible misconception. These and other situations lead to a probability experiment or discussion. Students might create simulations to examine some of the ideas.

My Little Sister Ate One Hare *Grossman, 1996*

This counting book will appeal to the middle school set as well as to young children due to the somewhat gross thought of a little girl eating one rabbit, two snakes, three ants, and so on, including bats, mice, worms, and lizards. Upon eating ten peas, she throws up everything she ate.

Bay-Williams and Martinie (2004) used this tale with middle school students to create a wonderful introductory lesson in probability. If one of the things the little sister "spilled" on the floor is picked up at random in the process of cleaning up, what is the probability of getting a polliwog (or other animal or category of animal)? Students can use cards for the correct number of each thing eaten and approach the task experimentally and also compare the results to the theoretical probability.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Coffey, D. C., & Richardson, M. G. (2005). Rethinking fair games. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(6), 298–303.

Students explore the fairness of a matching game both experimentally and using a theoretical model. They then set out to create a variation of the game that would be fair by assigning points to a match and to a mismatch. A TI-73 program is included that simulates the revised game.

Edwards, T. G., & Hensien, S. M. (2000). Using probability experiments to foster discourse. *Teaching Children Mathematics*, *6*(8), 524–529.

Fifth-grade students experiment with outcomes of flipping a coin, spinning a spinner, and rolling a die. The discourse is directed to the disparity between the observed outcomes and the theoretical probabilities. For example, is it reasonable that there are 77 heads out of 150 tosses?

Lawrence, A. (1999). From *The Giver* to *The Twenty-One Balloons:* Explorations with probability. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4*(8), 504–509.

Lawrence uses two award-winning books to motivate some nontrivial explorations for her middle school students. One task was to decide how often in a series of 50 births there will be 25 boys and 25 girls. In a related task, students tried to find out if it was more likely to have the same number of girls and boys in a small family or a large family. The ideas here are quite challenging and the results are interesting.

McMillen, S. (2008). Predictions and probability. *Teaching Children Mathematics*, *14*(8), 454–463.

This article provides a series of high-quality probability lessons—various contexts and models are used, as well as calculators. The lessons include a number of key concepts discussed in this chapter and two handouts are provided.

Kitaplar

Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students' understanding of probability. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 216–226). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy's chapter offers interesting insights from research and makes useful recommendations. Teachers serious about the teaching of probability will benefit from checking this out.

Online Kaynaklar

Ayarlanabilir Çarklar (Shodor)
www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner
A virtual spinner can be adjusted to have any number of sections of any size. It can then be spun any number of times in increments of 100,000.

Daha iyi bir atış! (Shodor's Project Interactivate)
www.shodor.org/interactivate/activities/ABetterFire
This site offers a realistic simulation of actual forest fires, with controls for wind speed and direction to add more realism. The simulation uses a virtual "die" to see if a tree should be planted for each square. Then the fire is set and allowed to burn. An excellent authentic use of simulations.

Kutu Modeli (NLVM)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html
The applet permits creating a box of up to 16 colored cubes, including the possibility of duplicates. Cubes can then be drawn at random (with replacement). A bar graph shows the results that can be compared to the theoretical results.

Madeni Para Atma (NLVM)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html
A single coin can be "tossed" any number of times. The results are shown in order, which can help with the concept of randomness. A bar graph shows results.

Marble Mania
www.sciencenetlinks.com/interactives/marble/marblemania.html
This applet explores randomness and probability. You'll be able to control how many and what color marbles to place in a virtual marble bag. An advantage of this applet is that you can run a large number of different trials in a short amount of time.

Olasılık (Shodor)
www.shodor.org/interactivate/activities/ExpProbability/index.html
A spinner can be created with up to four regions or two like dice can be made with each side adjustable from 1 to 6. The devices can then be used in experiments.

Çarklar (NLVM)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_186_g_1_t_1.html
This site provides a spinner that can be customized and used for experiments.

Bölüm 23

Üslü Sayı, Tamsayı ve Gerçek Sayı Kavramlarının Gelişimi

Ortaokul çağındaki öğrencilerin, doğal sayıların tamsayılara genişletilmesi ve kesirlerin de rasyonel sayı (hem negatif hem pozitif) olarak düşünülmesi de dahil, sayı sistemini daha bütüncül olarak anlamaları gerekmektedir. Bu sayede öğrenciler gerçek sayı sisteminin bütünlüğünü anlamaya başlayabileceklerdir.

Bu bölümde sunulan fikirler kitap boyunca daha önce geliştirilenler üzerine inşa edilmiştir. Üsler, cebirsel ifadelerde kullanılmış ve işlemler konusuna eklenmiştir. Bilimsel gösterim çok büyük ve çok küçük sayıların gösterimleri konusunun genişletilmesi olarak basamak değeri kavramı üzerine inşa edilmiştir. Tamsayılar, 0'dan küçük olan sayma sayıları konusunu açmış ve böylece sayı doğrusunu (işlemlerle birlikte) negatif sayıları içerecek şekilde genişletmiştir. Öğretim Programı Odak Noktaları (NCTM, 2006) yedinci sınıf öğrencilerinin "tüm rasyonel sayılarlarla işlemler ve lineer denklemlerin çözümüne ilişkin kavrayış geliştirmelerinin"(s.19) gerekliliğini belirtir. Ayrıca yine aynı belge sekizinci sınıf için "Öğrenciler çok büyük ve çok küçük sayıları ifade ederken üsleri ve bilimsel gösterimleri kullanırlar. Pisagor teoremini uygularken karekök kullanırlar"(s.20) ifadelerine yer vermektedir.

Ana fikirler

1. Aynı sayının tekrarlı çarpımını ifade etmenin bir yolu üslü gösterimdir. Özellikle 10 sayısının kuvvetleri, çok büyük ve çok küçük sayıları ekonomik bir biçimde ifade eder.
2. Tamsayılar, sayı sistemine negatif (ve pozitif) sayma sayılarını ilave eder ki bu sayede her bir sayı hem bir büyüklüğe hem de diğer sayılarla pozitif veya negatif bir ilişkiye sahip olur. Negatif sayı aynı büyüklükteki pozitif sayının aksidir/zıt tarafındaki sayıdır.
3. Doğal sayılar, kesirler ve tamsayılar, rasyonel sayılardır. Her bir rasyonel sayı bir kesir olarak ifade edilebilir.
4. Birçok sayı rasyonel değildir; irrasyonel sayılar sadece sembolik olarak veya yakın bir rasyonel sayı ile yaklaşık olarak ifade edilebilirler. Örnek olarak $\sqrt{2} \approx 1.41421\ldots$ ve $\pi \approx 3.14159\ldots$ sayıları verilebilir.

Diğer Matematik Öğrenme Alanları ile Bağlantılar

Bu bölümde sunulan fikirler sayıları gösterim şeklimizin bir genişlemesini temsil etmektedir. Bu gösterimler daha önce ele aldığımız doğal sayılar, kesirler ve ondalık sayıları genişletir veya geliştirirler.

- **Doğal sayılarda basamak değeri, kesirler ve ondalık sayılarlar** (Bölüm 11, 15 ve 17): Üslü gösterim, ondalık ifadelerle birlikte kullanıldığında, çok küçük ya da çok büyük sayılar daha kullanışlı olarak ifade edilebilir. Ondalık sayılar ve kesirler rasyonel ve irrasyonel sayılar arasındaki farkı belirtmeye yardımcı olurlar. Negatif sayılar sayı doğrusunu her iki yönde de genişletirler.
- **Cebir** (Bölüm 14): Sayılar ile yapılan sembole dayalı işlemler, işlem önceliği konusu da dâhil olmak üzere, değişkenlerle yapılan işlemlerin birebir aynısıdır. Tam sayılarda çalışmak negatif işareti ile gösterilen "tersi" kavramının anlaşılmasına yardımcı olur: sayısı sayısının tersi olduğu gibi, sayısının negatif ya da pozitifliğinden bağımsız olarak, sayısı da sayısının tersidir. Üsler aynı zamanda değişken de olabilir ki bu durumda üstel fonksiyonlar elde edilir.

Üslü Sayılar

Teknolojik dünyamızda sayılar çok büyük ya da çok küçük olabildikleri için bunları standart biçimde ifade etmek külfetli olmaktadır. Üstel gösterim, sayısal ya da niceliksel bilgilerin iletişiminde çok daha kullanışlıdır.

İfadelerdeki Üsler ve Denklemler

Öğrenciler cebir derslerinde üslü sayıların kurallarını hatırlamaya çalışırken kafa karışıklıkları yaşarlar. Örneğin, bir sayının kuvveti alınırken, sayıyı çarpacak mısınız yoksa toplayacak mısınız? Bu, kavramsal bilgi olmaksızın öğrenilen işlemsel bilgiye bir örnektir. Öğrenciler cebire geçme-

den önce, değişkenler ve harflerden ziyade doğal sayıların üsleriyle ilgili çalışmalar yapmak için fırsat bulmalıdırlar. Öğrenciler bu sayede doğrudan kavramla ilgilenebilecek ve kuralları kendileri üretebileceklerdir.

Bir *doğal sayı üssü*, en yalın haliyle, bir sayının *üs*teki sayı adedince kendisiyle tekrar eden çarpımıdır; örneğinde olduğu gibi.

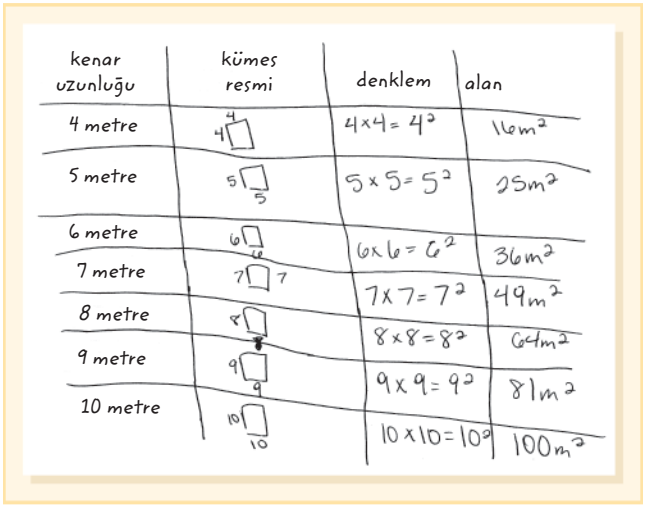
Alışılagelmiş sembolik kullanımların da öğrenilmesi gereklidir. Bunlar kavramsal temeli olmayan rasgele kurallardır. Bunlardan ilki *bir üs doğrudan kendi tabanına uygulanır*. Örneğin, $2 + 5^3$ ifadesinde üs olan 3 sayısı sadece 5'e uygulanır; böylece bu ifade $2 + (5 \times 5 \times 5)$ ifadesine eşit olur. Fakat $(2 + 5)^3$ ifadesi dikkate alındığında, buradaki 3 sayısı $2 + 5$ toplamının üssüdür ve $(2 + 5) \times (2 + 5) \times (2 + 5)$ ya da $7 \times 7 \times 7$ şeklinde hesaplanır.

Öğrencilerin üslerle ilk karşılaşmaları kare ya da küp şeklinde geometrik olarak temsil edilebilecek sayılar olmalıdır. Örneğin aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

Minia kare şeklindeki kümeslerin, sağladıkları alan miktarı itibariyle, en ekonomik olduğunu bilmektedir. Minia için her bir kenar uzunluğu 4 ile 10 metre arasında değişen kare şeklindeki kümeslerin alanlarını veren bir tablo hazırlar mısınız?

Öğrenciler kümes için mümkün olan alanları gösteren Şekil 23.1'dekine benzer bir tablo hazırlayabilirler.

Öğrenciler küp ve/veya kareler içeren, cebirsel olarak artan örüntüler üzerinde de çalışmalar yapabilirler. *İlişkilendirilmiş Matematik* öğretim programı (Connected Mathematics curriculum) da dâhil olmak üzere birçok yerde geçen kare ve küpleri içeren bir çalışma olan *Boyalı Küp Problemi* oldukça popülerdir (Bkz. Şekil 23.2). Bu problemdeki küplerin yüzleri karelerdir. Bu yüzden boyanan yüzler kare olduğu gibi artış örüntüsü de karedir. Hiçbir kenarı boyanmayan küpler boyanan küpün içinde saklı kalan küplerdir. $2 \times 2 \times 2$ boyutlarındaki bir küp içerisinde 0 tane, fakat $3 \times 3 \times 3$ boyutlarındaki bir küpün içerisinde saklı kalan ve böylece boyanmayan 1 tane küp bulunmaktadır. Bu "saklı küp" miktarı kübik bir oranda artar. Buradaki örüntü üzerine çalışırken, öğrenciler kare ve küplerle ilgili tecrübe kazanırlar.



Şekil 23.1 Bir öğrenci kare bir kümes yapımı için tüm ihtimalleri kayıt ediyor.

İşlem önceliği. Bir başka kabul edilen kullanım *işlem önceliği*dir: Çarpma ve bölme her zaman toplama ve çıkarmadan önce yapılır. Üs alma tekrar eden çarpma olduğu için yine toplama ve çıkarma işlemlerinden önce yapılır. $5 + 4^2 - 6 \div 3$ ifadesindeki 4^2 ve $6 \div 3$ işlemleri ilk yapılır. Bu yüzden işlem $5 + 16 - 2 = 21 - 2 = 19$ şeklinde hesaplanır.

Durup Düşün!

Aynı ifadeyi soldan-sağa doğru işlemler yaparak hesaplayınız. 4 sonucunu elde ettiniz mi?

Parantezler ilk önce yapılacak olan işlemleri gruplandırmak için kullanılırlar. Bu yüzden ifadesinde, parantez içerisindeki toplama işlemi ilk önce yapılır, ya da dağılma özelliği de kullanılabilir ve işlemin sonucu 16 olarak bulunur. Bazen "Please excuse my dear Aunt Sally[1]" ifadesi işlemlerde ilk önce parantezlerin, sonra üs almanın, daha sonra çarpma ve bölmenin ve en son olarak da toplama ve çıkarmanın yapılması gerektiğini hatırlamalarına yardımcı olmak için kullanılmaktadır.

Bu deyim iyi bir hatırlatıcı ipucu olmasına rağmen, toplamanın çıkarmadan önce yapılacağı ve çarpmanın da bölmeden önce geleceği şeklindeki bir düşünceye öğrencileri sevk edebilir. Bir iyileştirme bu deyimi beyitler halinde ve son dört kelimeyi de ikişerli olarak yan yana yazmak olabilir. Bir başka yol ise sadece akronimi olan PEMDAS kullanmak ve bunu da satırlar halinde listeleyerek sıralamaya işaret etmektir:

P = parantez
E = üslü sayılar
MD = çarpma ve bölme (soldan sağa doğru hangisi önce gelirse)
AS = toplama ve çıkarma (soldan sağa doğru hangisi önce gelirse)

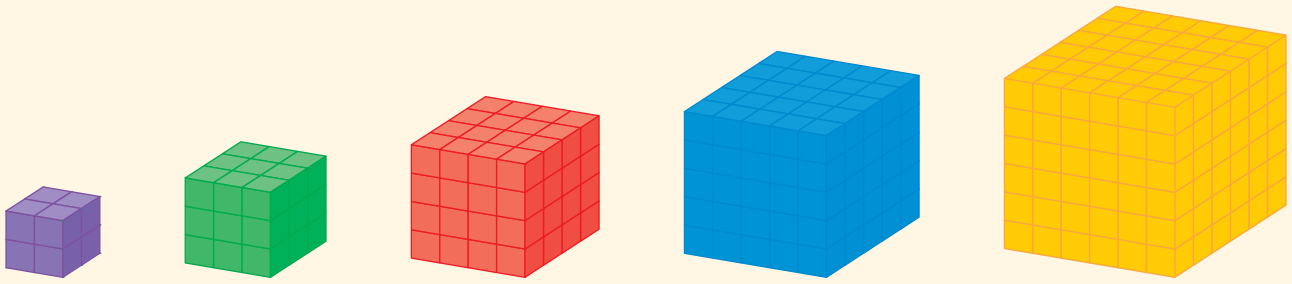
Bazen öğrencilerin bu konudaki tek tecrübesi verilen ifadelere işlem önceliğini uygulayarak sonuca ulaşmak şeklinde olmaktadır. Öğrencilere, aşağıdaki etkinlikte olduğu gibi, uygun işlem önceliğine işaret eden denklemler yazdırarak onların bu süreci anlayışlarını hem değerlendirebilir hem de güçlendirebilirsiniz.

Etkinlik 23.1

Düşündüğüm Sayıyı Tahmin Et

Bu cebirsel etkinlik, öğretmenin bir sayı hakkında ipuçları vermesi ve öğrencilerin de geriye doğru

[1] Ç.N. "Please excuse my dear Aunt Sally" ifadesi Türkçeye "Lütfen benim kıymetli halam Sally'i bağışlayınız" şeklinde çevrilebilir. Fakat bu çeviri yazarların ifade etmeye çalıştıkları anlamın kaybolmasına yol açacağı için cümlenin İngilizcesi aynen muhafaza edilmiştir. Cümlede geçen kelimelerin akroniminin (PEMDAS) öğrencilerin işlem önceliğini hatırlamalarına yardımcı olabileceği belirtilmektedir. Cümledeki kelimelerin ilk harfleri sırasıyla Parenthesis (parantez), Exponents (üslü sayılar), Multiplication (Çarpma), Division (bölme), Addition (toplama) ve Substraction (çıkarma) işlemlerine işaret etmektedir.



Verilerinizi aşağıdaki gibi bir tabloda organize ediniz.

Büyük küpün ayrıt uzunluğu	Santimetre küplerin sayısı	Santimetre küplerden üzerinde boya bulunanların sayısı			
		3 yüzünde	2 yüzünde	1 yüzünde	0 yüzünde
2					
3					
4					
5					
6					

Tablodaki örüntü üzerine çalışınız.

1. Büyük küpün ayrıt uzunluğu ve santimetre küplerin toplam sayısı arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
2. Büyük küpün ayrıt uzunluğu ve
   a. üç yüzünde **b.** ikiyüzünde **c.** bir yüzünde **d.** sıfır yüzünde
   boya bulunan santimetre küplerin sayısı arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

Şekil 23.2 Boyalı Küp Problemi kare ve küpleri keşfetmek için bir bağlam sağlar.

Uyarlanan kaynak: Connected mathematics: Frogs, Fleas and Painted Cubes: Quadratic Relationships by Glenda Lappan, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel & Elizabeth Difanis Phillips. Copyright © 2006 by Michigan State University. Used by permission of Pearson Education, Inc. Tüm

düşünerek bu sayıyı (mantıksal muhakemeyi kullanarak) bulmasını içerir. Aşağıdaki üç örnekte olduğu gibi öğrenciler, öğretmenin verdiği ipuçlarını yansıtacak şekilde, parantezleri uygun şekilde kullanmak suretiyle denklemler oluştururlar:

- **Bir sayı düşünüyorum; 5 ekliyorum, iki katını alıyorum ve 22 sonucunu elde ediyorum. [$(n + 5) \times 2 = 22$]**
- **Bir sayı düşünüyorum; 2 çıkarıyorum, karesini alıyorum ve 36 sonucunu elde ediyorum. [$(n - 2)^2 = 36$]**
- **Bir sayı düşünüyorum; iki katını alıyorum, 2 ekliyorum, küpünü alıyorum ve 1000 sonucunu elde ediyorum. [$(2n + 2)^3 = 1000$]**

Hikâye yazma etkinliği, işlem önceliğinin uygulanışı ve öğrenimi için mükemmel bir araçtır. Öğrencilerden tüm işlemleri ve parantezleri kullanarak bir ifade yazmaları - örneğin gibi - ve daha sonra oluşturdukları bu ifadeye uygun, kendi seçtikleri bir bağlamı kullanarak, bir hikâye yazmaları istenebilir (Golembo, 2000).



Hikâye yazımı öğrencilerin işlem önceliğine ilişkin kavrayışlarının mükemmel bir değerlendirmesidir. Golembo (2006) bir öğrenci sayfasıyla birlikte değerlendirme sayfaları da eklemiştir. Öğrenciler hikâyeleri veya ifadeleri yazarken, çarpma ve bölmeyi (ve toplama ve çıkarmayı) öncelik sıralamasında eşit tutup tutmadıklarını ve soldan sağa doğru işlem yapıp yapmadıklarını belirleyiniz. Ayrıca, parantezlerin ne zaman zorunlu olmadığını ve ne zaman gerekli olduğunu anlayıp anlamadıklarını görmek için öğrencilere sorular sorunuz. ◆

Hesap makinasındaki üstel gösterim. Bilimsel hesap makinalarının büyük çoğunluğu işlem önceliğini kullanarak ifadeleri değerlendiren ve parantezlerle gruplandırmaya izin veren "cebirsel mantık" kullanırlar. Fakat TI-MathMate ve sadece okullarda kullanım amacıyla tasarlanan yeni hesap makinaları haricinde, basit dört işlem hesap makinalarının büyük çoğunluğu cebirsel mantık kullanmazlar. İşlemler girildikçe işlenirler. Cebirsel mantığa dayanmayan hesap makinalarında aşağıdaki iki farklı tuşa basma süreci, aynı sonucu üretirler:

Tuş: →	3	+	2	×	7	=	
Görüntü →	3		2	5	7	35	
Tuş: →	3	+	2	=	×	7	=
Görüntü →	3		2	5		7	35

Ne zaman bir işlem işaretine basılırsa, sanki önce [=] işaretine daha sonra da işleme basılmış etkisi ortaya çıkar. Tabi ki her iki cevap da işleminin doğru sonucu değildir (bu işlem 3 + 14 ya da 17 olarak hesaplanmalıdır). Ortaokullar için tasarlanan hesap makinaları cebirsel mantık kullanır ve parantez tuşu içerirler ki bu sayede ve ifadeleri sembollerin gözükme sırasıyla girilebilir. Farkı görmek için aşağıdaki girdiyi inceleyiniz:

Tuş: →	3	+	2	×	7	=
Görüntü →	3		2		7	17

Aşağıda [×] tuşuna basıldığında görüntünün değişmediğine ve sağ parantezin gözükmediğine dikkat ediniz. Bunun yerine sağ parantez kapatıldığında hesaplama yapılmakta ve sonuç gözükmektedir.

Tuş: →	(	3	+	2	)	×	7	=
Görüntü →	[	3		2	5		7	35

Bazı temel hesap makinaları ve grafik hesap makinaları $3 + 2 \times (6^2 - 4)$ ifadesini gösterirler. Siz [Enter] ya da [EXE] tuşlarına basıncaya kadar sonuç hesaplanmaz. Daha sonra sonuç, takip eden satırda ve ekranın sağında gözükür.

$3 + 2 * (6^2 - 4)$	
	67

Ayrıca girilen son ifade yeniden çağrılabilir ve değişiklik yapılabilir ki böylece öğrenciler farklı ifadelerin nasıl hesaplandığını görebilirler. Bunun için sadece birkaç tuşa basmak gerekmektedir.

$3 + 2 * (6^2 - 4)$	67
$(3 + 2) * (6^2 - 4)$	160
$(3 + 2) * 6^2 - 4$	176
$3 + 2 * 6^2 - 4$	71

Basitçe dört işlem yapan hesap makinaları keşif amacıyla kullanılabilecek güçlü araçlar olarak önemlerini korurlar. Örneğin, 3^8 işleminin sonucu için 3 [×] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] tuşlarına basınız. ([=] tuşuna birinci basışınız 3 × 3 yani 9 ile sonuçlanacaktır). Öğrenciler sayıların ne kadar hızlı büyüdüğünü görmekten heyecan duyacaklardır. Herhangi bir sayı giriniz, [×] tuşuna basınız ve daha sonra sürekli olarak [=] tuşuna basınız. İki basamaklı sayıları deneyiniz. 0.1 sayısını deneyiniz.

Üslü sayıları içeren ifadeleri keşfetmeleri için öğrencilere yeterince fırsat veriniz. Bu deneyim sağlam bir altyapı oluşturduğunda, üslü sayılar için kurallar anlamlı hale gelecek ve ezber gerektirmeyecektir.

Etkinlik 23.2

İfadelerin girilmesi

Öğrencilere sayısal ifadeler vererek sonuçlarını basit dört-işlem hesap makinaları ile buldurunuz. Onlara sorunuz: "İşlem önceliğini doğru bir şekilde uygulayabilmek için hesap makinasına nasıl bir girdi sağlamalısınız?" Bu ifadeleri hesap makinasına girilebilecek şekilde yeniden yazınız. İşte size bazı örnek ifadeler:

$3 + 4 \times 8$
$4 \times 8 + 3$

$3^6 + 2^6$
$(3 + 2)^6$

$3^4 \times 7 - 5^2$
$(3 \times 7)^4 - 5 \times 2$

$3^4 \times 5^2$
$(3 \times 5)^6$

$\frac{5^3 \times 5^2}{5^6}$

$4 \times 3 - 2^3 \times 5 + 23 \times 9$

$\frac{4 \times 3^5}{2}$ $4 + \frac{3^5}{2}$

Üslü sayılarla zorluk yaşandığında, öğrenciler eşdeğer ifadeleri üsler olmaksızın yazmalı ya da açık bir gruplamaya işaret etmek için parantezler kullanmalıdırlar. Örneğin:

$$\begin{aligned}(7 \times 2^3 - 5)^3 &= (7 \times (2 \times 2 \times 2) - 5) \times \\ &\quad (7 \times (2 \times 2 \times 2) - 5) \times \\ &\quad (7 \times (2 \times 2 \times 2) - 5) \\ &= ((7 \times 8) - 5) \times \\ &\quad ((7 \times 8) - 5) \times \\ &\quad ((7 \times 8) - 5) \\ &= (56 - 5) \times (56 - 5) \times (56 - 5) \\ &= 51 \times 51 \times 51\end{aligned}$$

Birçok ifadenin sonucu birden fazla yolla elde edilebilir ve bu farklı yolları paylaşmak önemlidir.

Tabi ki cebirsel mantıkla çalışan hesap makinaları otomatik olarak doğru sonuçları üreteceklerdir. Fakat öğrencilerin bu kuralları bilmesi önem taşır ve hesap makinaları işlem önceliğinin kavranmasının yerini almamalıdır. Bu kurallar cebirde sembolik işlemler yapmada uygulanabilir ve zihinden hesaplamalar yapmak veya temel hesap makinalarını kullanmak için bu kuralların kavranmaları gereklidir.

Negatif Üsler

Öğrenciler üslü sayılarla çalışma yapmaya başladığında ve negatif sayılar konusunda da bir deneyim kazandıklarında,

bir sayıyı negatif üs olarak yazmanın ne anlama gelebileceği üzerine düşünmek ilginç olacaktır. Örneğin ne anlama gelir? Birbiriyle ilişkili olarak aşağıda sunulan iki alternatif, negatif üssün muhtemel anlamlarının araştırılmasında öğrencilere yardım edebilir. Birinci olarak, örüntülerin matematikteki önemine dayalı olarak, sayıların bir örüntüsünü inceleyiniz ve negatif üssün en iyi nasıl uyarlanabileceğini düşününüz. Doğrudan doğruya basamak değeriyle ilişkili olduklarından, 10'un kuvvetleri araştırma ve inceleme yapmak için kullanışlıdır. Öğrencilerin sayısını aşağıdaki gibi göz önünde bulundurmalarını sağlayınız:

$10^4 = 10{,}000$
$10^3 = 1000$
$10^2 = 100$
$10^1 = 10$
$10^0 = ?$
$10^{-1} = ?$

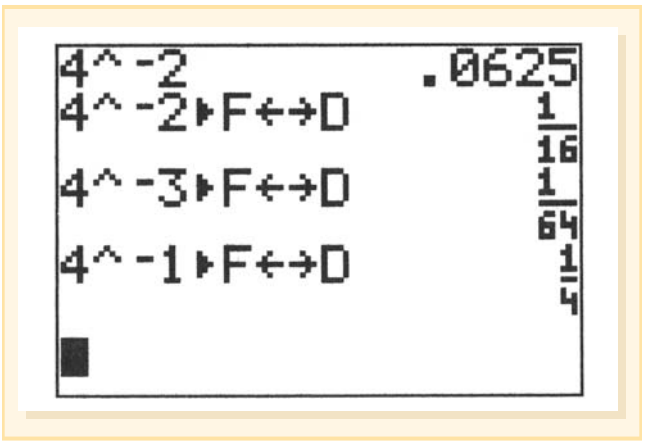
Bu dizide, 10^0 için en belirgin sonuç 1'dir ki bu da 10^0 sayısının tanımıdır. Yani, 10 veya sıfırdan farklı herhangi bir sayının üssü 0 olduğunda bu sayının değeri 1'dir. O halde 10^{-1} nedir? Eğer örüntü devam ederse 1 sayısı sağdaki ondalık kısma geçmelidir.

$10^0 = 1$
$10^{-1} = 0.1$
$10^{-2} = 0.01$
$10^{-3} = 0.001$

Bu sayılardan her birisinin bir kesir olarak nasıl yazıldığına dikkat ediniz.

$10^{-1} = 0.1 = \frac{1}{10}$
$10^{-2} = 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$
$10^{-3} = 0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

İkinci olarak, öğrenciler negatif üsleri hesap makinasında inceleyebilirler. Örneğin, öğrencilerinize şunu söyleyiniz: "Hesap makinanızı kullanarak 4^{-3} veya 2^{-5} sayılarının eşitlerini bulup bulamayacağınıza karar veriniz." Tabi ki hesap makinaları matematikteki bir şey için asla *gerekçe* olarak görülmemelidir; fakat siz burada yaygın bir kullanımın anlamını araştırıyorsunuz. Eğer hesap makinası ondalıktan kesre çevirme özelliğine sahipse, öğrencilerinize, bu özelliği kullanarak negatif üslerin anlamını bulmalarını öneriniz. Şekil 23.3 bunun grafik hesap makinalarında neye benzeyeceğine dair bir örnek vermektedir.



Şekil 23.3 Grafik hesap makinaları ifadeleri ondalık olarak hesaplar. Fakat aynı zamanda ondalıkları kesirlere dönüştürebilirler. Bu şekilde TI-73 makinasının ekranı gözükmektedir. Burada görüldüğü gibi, F↔D tuşu kesirleri ondalık sayılara (ve ondalık sayıları kesirlere) dönüştürür.

Bilimsel gösterim

Günlük hayatımızda çok büyük ve çok küçük sayıların kullanımları yaygınlaştıkça, bu sayıların gösterimleri için kullanışlı yolların bulunması da önem kazanmaktadır. Bir alternatif bu sayıları bilindik şekli ile yazıp söylemektir. Fakat bu kullanım bazı durumlarda elverişsiz olabilmektedir. Bir başka alternatif ise üstel gösterimi ve onluk-tabanlı basamak değeri sistemini, yani bilimsel gösterimi kullanmaktır. Bilimsel gösterimde bir sayı, 1'e eşit ya da büyük ve aynı zamanda 10'dan küçük olan bir sayının (yani ondalık kısımdan önce sadece bir basamağın bulunması) 10'un katıyla çarpımı olarak ifade edilir. Örneğin 3,414,000,000 sayısı 3.414×10^9 olarak yazılabilir. Ondalık kısmı dokuz basamak birden geriye doğru kaydırdığınız için (sayının 1 milyara bölünmesi) sayıyı eşit olarak muhafaza edebilmek için 1 milyar (10^9) ile çarpmalısınız.

Farklı gösterimler farklı amaç ve değerlere sahiptirler. Şu gerçekliği göz önüne alalım: 1990 yılında dünya nüfusu 5,050,700,000 kişiden fazlaydı; bu da 2000 yılındaki dünya nüfusundan 1 milyar daha azdır. Bu çeşitli şekillerde ifade edilebilir:

5 milyar 50 milyon 700 bin
5,050,700,000
5.0507×10^9
5.1 milyardan daha az
5 milyardan biraz daha fazla

Bu sayının ifade edilme şekillerinden her birisi farklı ortamlarda farklı bir değer ve amaca sahiptir. Sayıları standart biçimlerinden bilimsel gösterimlere dönüştürme alıştırmalarına zaman harcamak yerine, gazete, dergi ve atlaslarda bulunan büyük sayıları göz önünde bulundurunuz. Nasıl yazılmışlardır? Yüksek sesle nasıl okunurlar? Ne zaman yuvarlanırlar? Ne zaman yuvarlanmazlar ve niçin? Sayıların hangi yazım biçimleri hangi amaçlar için en uygundur?

NCTM Standartları

Standartlar, çok büyük sayıların ve bilimsel gösterimin çeşitli bağlamlarda kullanıldığını bize hatırlatır. "Bir gazete manşeti 'Petrol Sızıntısının Temizlik Masrafları 2 Milyar Doları Geçti' şeklinde bir beyan verirken bir fen bilgisi ders kitabı insan vücudundaki alyuvarların sayısının yaklaşık 1.9×10^{13} olduğunu belirtebilir" (s.217). ◆

Çok Büyük sayılar için bağlamlar. Gerçek dünya çok büyük miktar ve ölçümlerle doludur. Medyada çok büyük sayılara gönderme yapıldığını sürekli olarak görürüz. Ne

yazık ki büyük bir kısmımız, aşağıdaki örneklerdekine benzer olan, çok büyük sayılara ilişkin bir anlayış geliştirebilmiş değilizdir:

- 44 sayı arasından 6 tanesinin seçildiği bir eyalet piyangosunda bu 6 sayının mümkün olan tüm kombinasyonlarının sayısı 7 milyonunun üzerindedir. Kazandaki topların dışarı çıkma durumları $44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39$ farklı şekilde olabilecektir (5,082,517,440) Fakat topların üzerindeki sayıların çıkış sırası önemli değildir. Dolayısıyla 6 sayının farklı şekillerde düzenlenme sayıları $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ olup 6 sayıdan oluşan her bir koleksiyon 720 kez ortaya çıkabilecektir. Bu yüzden *sadece* 5,082,517,440 720 muhtemel piyango sayıları vardır, ya da bir başka deyişle, piyangoyu kazanmak için 7,059,052'de 1 ihtimal vardır.
- Evrenin tahmin edilen ölçüsü 40 milyar ışık yılıdır. Bir ışık yılı, ışığın *bir yıl* boyunca kat ettiği mil sayısıdır. Işığın hızı saniyede 186,281.7 mil veya günde 16,094,738,880 mildir.
- İnsan vücudu yaklaşık 100 milyar hücreye sahiptir.
- Güneşe olan uzaklık yaklaşık 150 milyon kilometredir.
- Dünya nüfusu 2008 yılında yaklaşık 6.71 milyar idi.

Böylesi çok büyük sayıları anlamlı referans noktaları ile ilişkilendirmek bu sayıların gerçek büyüklüklerini anlayabilmeleri için öğrencilere yardımcı olabilir. Örneğin, öğrencilerin kendi şehir nüfusunu 500,000 kişi olarak belirlediklerini varsayalım. O zaman dünya nüfusunu elde edebilmek için aynı büyüklükte 12,500 şehre ihtiyaç duyulacağını hesaplayabilirler. Ya da öğrencilerin San Francisco, California ve Washington, DC arasının yaklaşık 4600 kilometre olduğunu belirlediklerini varsayalım. Bu ise güneşle dünya arasındaki mesafenin bu iki şehir arasında 32,000 defadan daha fazla yolculuk yapmaya eşit olduğu anlamına gelecektir. Büyük sayıları böylesi bilindik ya da anlamlı referans noktalarından yola çıkarak inşa etmek, bu sayıları anlamlandırma ve üzerinde çalışmaları için öğrencilerin bir ölçüt geliştirmelerine yardımcı olabilecektir.

Takip eden etkinlikte gerçek veriler kullanılmakta ve öğrencilerden bilimsel gösterimi kullanmaları ve ölçekli bir çizim oluşturmaları istenmektedir.

Etkinlik 23.3

Güneşten Ne Kadar Uzaklıkta?

Bilimsel gösterimi problem tabanlı olarak inceleme yollarından birisi öğrencilerin gezegenlerin güneşe olan uzaklıklarını (km olarak) araştırmalarını, verileri bilimsel gösterimle kayıt etmelerini ve uzaklıkları bir ölçek üzerinde göstermelerini sağlamaktır. Alternatif olarak aşağıdaki sayılar da öğrencilere verilebilir.

Merkür	57,909,000	Jüpiter	778,400,000
Venüs	108,200,000	Satürn	1,423,600,000
Dünya	149,600,000	Uranüs	2,867,000,000
Mars	227,940,000	Neptün	4,488,400,000

Çok Küçük Sayılar için Bağlamlar. Çok küçük sayılara ilişkin gerçek örneklerin kullanılması çok önemlidir. Gerçek bağlamlar olmaksızın, alıştırma sorularına başvurmayı düşünebilirsiniz fakat bunlar öğrenciler için çok az anlam taşırlar. Çok büyük sayılarda olduğu gibi, çok küçük sayıları da referans noktalarıyla ilişkilendirmek, aşağıdaki gerçek hayat örneklerinde gösterildiği gibi, bu sayıların gerçekte ne kadar da küçücük olduklarını anlamaları konusunda öğrencilere yardımcı olabilir.

Bir hücredeki DNA zincirinin uzunluğu yaklaşık metredir. Bu uzunluk aynı zamanda 1000 angström olarak da ölçülür. (Bu bilgiye dayanarak, bir angströmün uzunluğu ne kadardır?) Size bir fikir vermesi için, insan saç telinin çapı metre olarak ölçülür.

- İnsanların saçı saatte mil hızla uzar. Bahçe salyangozunun saatteki hızı yaklaşık mildir.
- Virginia piyangosunu, 1 ile 44 arasında 6 sayı seçerek, kazanma ihtimali 7.059 milyonda birdir. Bu ise olasılığından daha küçüktür.
- Bir hidrojen atomunun ağırlığı 0. 000 000 000 000 000 000 000 001 675 gramdır; bir kâğıt maşasının (ataş) ağırlığı ise yaklaşık 1 gramdır.
- Ses, bir futbol sahasının uzun kenarını 0.28 saniyede () kat eder. TV sinyali ise bir tam mili yaklaşık 0.000005368 saniyede veya saniyede kat eder. Evdeki bir televizyon izleyicisi futbol topuna vurulmasını sahada servis karşılayan oyuncudan daha önce işitir.

Hesap makinasında bilimsel gösterim. İlköğretim öğrencileri, uygun sayıda sıfır ekleyerek, 10, 100 ve 1000 ile çarpma işleminin nasıl yapılacağını öğrenmektedirler. Üslü ifadeleri alabilen hesap makinalarında 10'un kuvvetlerini inceleyerek öğrencilerin bu fikirlerinin gelişmesine yardım ediniz.

Etkinlik 23.4

10'un Kuvvetlerinin Araştırılması

Üslü sayıların girilmesine izin veren hesap makinalarını öğrencilerinize kullandırarak aşağıdakilerden bazılarını inceletiniz.

- **Farklı 10^N değerleri için ifadesini inceleyiniz. Hangi örüntüleri fark ettiniz? 1E15 ne anlama gelmektedir? (1E15 ifadesi hesap makinasında ifadesinin karşılığıdır).**
- **Bin, bir milyon, bir milyar ve bir trilyon sayılarının farklı ifade şekillerini bulunuz. Bulduğunuz ifadelerde hangi örüntüler vardır?**
- **Hesap makinasına 45 yazınız ve ardından bir dizi sıfır giriniz. Hesap makinanız kaç tane sıfıra izin veriyor? Enter tuşuna bastığınızda ne oluyor? 4.5E10 ne anlama gelmektedir?**
- **5.689E6 ne anlama gelmektedir? Bunu bir başka şekilde girebilir misiniz?**
- **$(4.5 \times 10^N) + (27 \times 10^K)$ benzeri toplamları, farklı N ve K değerleri için hesaplayınız. Ne buldunuz?**
- **Yukarıdakine benzer sayıların çarpımlarında ne olmaktadır?**

Etkinlik 23.4'te yer alan 10'un kuvvetleri şeklindeki ifadelerde esneklik kazanmak yararlıdır. Bilimsel ya da grafik hesap makinalarının, gösterge ekranlarının alabileceğinden daha fazla sayıda basamak olması durumunda, bilimsel gösterimi kullandıkları öğrenciler tarafından fark edilmelidir. Örneğin, TI-73 model hesap makinasında, 45,000,000 × 8,000,000 çarpımının sonucu 3.6E14 olarak gözükmektedir; bu da ya da 360,000,000,000,000 (360 trilyon) demektir.

Öğrencilerinize niçin sadece 13 tane sıfır olduğunu sorunuz. İşlemdeki sayılar birçok sıfır içermediği zaman ne olacaktır?

Durup Düşün!

Her bir çarpanın bilimsel gösterimle ifade edildiği çarpma işleminin $(4.5 \times 10^7) \times (8 \times 10^6)$, veya 4.5E7 × 8.0E6 işleminin sonuçlarını zihinden hesaplayabilir misiniz?

Özellikle çarpma ve bölme için bilimsel gösterimin avantajlarına dikkat ediniz. Burada belirleyici olan basamaklar (4.5 ve 8) zihinden çarpılabilir ($4.5 \times 8 = 36$) ve üstler de toplanarak hızlı bir şekilde 36×10^{13} ya da 3.6×10^{14} 3. sonucuna ulaşılır.

Tam sayılar

Neredeyse her gün öğrenciler negatif sayılarla etkileşim halindedirler ya da negatif sayılarla modellenebilecek bir olguyu tecrübe ederler; aşağıdaki listede buna örnekler verilmiştir:

Sıcaklık	Para
Yükseklik (deniz seviyesinin üstünde ve altında)	Zaman çizelgesi (MÖ dâhil olmak üzere)
Golf	Futbol yardı[2] (kazanma/kaybetme)

Gerçekte, nicelik ve yöne sahip olan neredeyse tüm kavramlar muhtemelen pozitif ve negatif değerlere de sahiptirler.

Genel olarak negatif değerler, ondalıklar ve kesirler yerine, tamsayılarla birlikte tanıtılır-doğal sayılar ve onların negatifleri ya da tersleri.

Fakat sadece tamsayı değerleri üzerinde durmak bir hatadır; çünkü öğrencilerin $^{-}4.5$ ve $^{-}1\frac{3}{4}$ gibi sayıların tamsayılarla ilişkili olarak nereye ait olduklarını anlamaları gereklidir. Gerçekten de araştırmalar göstermektedir ki öğrenciler sıklıkla $^{-}1\frac{3}{4}$ sayısını $^{-}2$ ve $^{-}1$ aralığı yerine $^{-}1$ ile 0 arasına yerleştirmektedirler.

Tamsayıları İncelemek İçin Bağlamlar

Herhangi bir yeni konu ya da yeni bir sayı türü söz konusu olduğunda öğrencilerin aşina oldukları bağlamları kullanmak önemlidir; böylelikle öğrenciler önceki bilgilerini kullanarak yeni anlamlar oluştururlar. Tamsayılarla birlikte, hangi sayının daha büyük olduğu veya işlem yaparken hangi yöne doğru hareket edecekleri konusunda öğrencilerin kafaları karışmaktadır; işte bu yüzden bir bağlam oluşturmak özellikle önemlidir. Öğrenciler karşılaştırmayı ve işlem yapmayı öğrenirken, düşüncelerini bir yere oturtmak ve cevaplarını temellendirmek için bağlamları kullanabilirler. Tamsayılar için bağlamların bazılar nicelik içerirken bazıları da doğrusaldır.

Durup Düşün!

Bu alt başlığın başlangıcında verilen bağlamların listesini yeniden gözden geçiriniz. Sizce bunlardan hangileri nicelik içeren ve hangileri de doğrusal bağlamlardır? Takip eden kısımlarda nicelik içeren ve doğrusal bağlamların her ikisi de ele alınacak ve her iki tür için tamsayıların örneklendirildiği modeller sunulacaktır.

Nicelik içeren bağlamlar

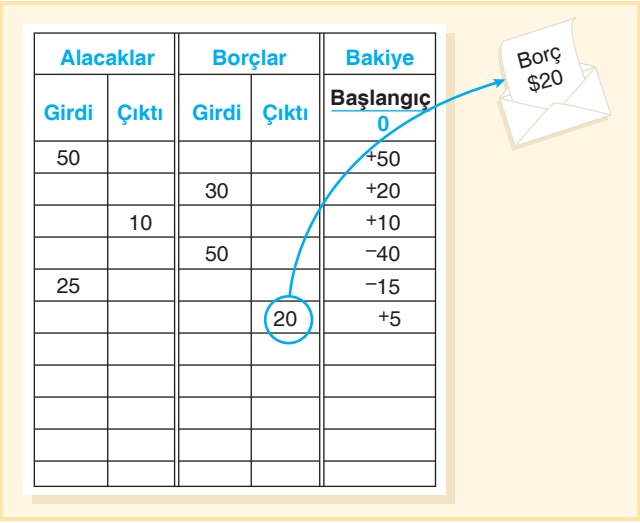
Golf puanları. Golf oyununda kazanılan puan, oyun oynanan saha için belirlenen vuruş sayısı ile ilişkili olarak verilir. Eğer saha için belirlenen vuruş sayısı 70 ise günü 67 vuruş ile tamamlayan golf oyuncusunun $^{-}3$ puanı olur. Bir turnuvadaki oyuncunun gün sonlarında aldığı puanların $^{+}5$, $^{-}2$, $^{-}3$ ve $^{+}1$ olduğunu düşünelim. Bu kişinin turnuvadaki sonucu ne olacaktır? Bununla ilgili düşünceniz ne olurdu? Pozitifleri ve negatifleri eşleştirebilir (az önceki durum için $^{+}5$ ile $^{-}2$ ve $^{-}3$ eşlenerek net sonuç olan 0 elde edilir) ve geriye kalanın ne olduğunu görebilirsiniz (bu durumda $^{+}1$ olacaktır). Zıtların ($^{+}5$ ve $^{-}5$) sıfıra eşit olduğu düşüncesi tamsayıların öğretiminde önemli bir fikirdir. Golf puanlarının karışık olarak yer aldığı bir sayı tabelası (skorbord) afişi asabilir ve öğrencilerden puanları birinciden onuncuya kadar sıralamalarını isteyebilirsiniz. İlk sırada *en düşük* puan ve bu yüzden de *en küçük* sayı olduğunu vurgulayınız. Gördüğünüz gibi golf puanları tamsayıların karşılaştırılması ve hesaplanması için önemli bir bağlam sağlar.

Para: Borçlar ve Alacaklar. Küçük bir işletmenin muhasebecisi olduğunuzu varsayınız. Herhangi bir zamanda, sizin kayıtlarınız şirketin hesabında kaç doları olduğunu gösterir. Her zaman için bir miktar paranız (alacaklarınız veya hasılatınız) ve bir miktar ödemeniz (borçlarınız) vardır. Borçlarınızın ve alacaklarınızın toplamları arasındaki fark hesabınızdaki miktarı verecektir. Eğer alacaklar borçlardan daha fazla ise hesap pozitifte ya da "cebi sağlamdadır." Eğer alacaklardan daha fazla borç varsa o zaman hesap borçlu olup negatif para değeri gösterir ya da "zarar etmektedir." Muhasebecilik bağlamında, Şekil 23.4'teki örnekte gösterildiği gibi, negatif ve pozitif tamsayılarda toplama ve çıkarma işlemlerinin incelenmesi mümkündür. Paranın bir avantajı, tamsayı olmayan negatif sayılarda da, özellikle ondalık sayılarda, kullanılabilmesidir. Daha önce de belirtildiği gibi, tamsayı değerlerini keşfettikten sonra öğrencilerin ondalık ve kesir olan negatif sayılar üzerine düşünmelerini sağlamak önemlidir.

Doğrusal bağlamlar[3]. Negatif sayılar için gerçek bağlamların birçoğu doğrusaldır. Ayrıca, öğrencilerin doğal sayılar ve kesirlerle daha önceden yapmış oldukları işlemlerle yakından ilişkili olduğundan, sayı doğrusu işlemleri öğrenmek için iyi bir araç sağlar.

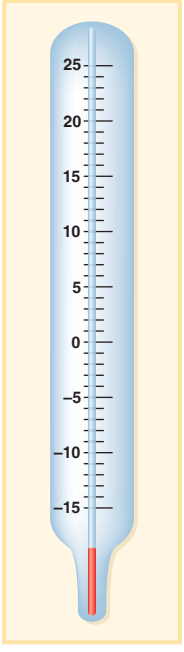
[2] Ç.N. Amerikan futbolunda oyun sırasında duruma göre ileriye doğru gitme veya geriye doğru gelme durumlarında yard kazanma/kaybetme ifadeleri kullanılır.

[3] Ç.N. Doğrusal kelimesi burada sayı doğrusu düşünülerek kullanılmaktadır.



Şekil 23.4 Kasa defteri sayfası bağlamında tamsayılar

Sıcaklık. Sıcaklığı ölçen "sayı doğrusu" düşeydir. Sıfırın altında sıcaklıkları tecrübe ettikleri ya da Kuzey veya Güney kutuplarında sıcaklıkları bildikleri için negatif sayıları gösteren bu bağlam belki de öğrencilere en aşina olandır. Öğrenciler için iyi bir başlangıç etkinliği termometredeki çeşitli sıcaklıkların nerede olduğunun bulunmasıdır. Örneğin, Şekil 23.5 beşer derecelik artışların işaretlendiği bir termometreyi göstermekte ve öğrencilerden Kuzey Dakota'da bir hafta içinde ölçülen şu sıcaklıkları sayı doğrusuna yerleştirmeleri istenmektedir: 8, $^{-}2$, $^{-}12$, 4, $^{-}8$. Öğrencilerden bunları en soğuktan en sıcağa (en azdan en çoğa) doğru sıralamalarını isteyiniz. Sıcaklıklar, bağlam olarak, ondalık ve kesir değerleri kullanabileceğiniz bir avantaja sahiptirler.



Şekil 23.5 Termometreler negatif ve pozitif sayıların keşfedilmesi için mükemmel bir araç sağlarlar.

Yükseklik. Bir başka düşey sayı-doğrusu modeli olan yükseklik, tamsayılar için iyi bir bağlamdır. Deniz seviyesinin altındaki yerlerin yükseklikleri negatiftir. Örneğin İsrail'deki Ölü Deniz şehri $^{-}1371$ fit yüksekliğe ve Amerika'nın California eyaletinde Ölü Vadi'de bulunan Badwater $^{-}282$ fit yüksekliğe sahiptir. Yükseklik için pozitif değerlere bir örnek 20,322 fit yüksekliğe sahip McKinley Dağı (Kuzey Amerika'daki en yüksek dağ) verilebilir. Öğrenciler Amerika Birleşik Devletleri ya da dünya üzerindeki çeşitli yerlerin yüksekliklerini sıralayabilir (bu konuda veriler Web üzerinde Google araması ile kolayca bulunabilir) veya iki değişik yerin yükseklikleri arasındaki farkı bulabilirler. Bu da tamsayılarda çıkarma işlemi için iyi bir bağlamdır. Gerçek yükseklikleri incelemenin ötesinde, oyuncak bir arabanın inip çıktığı tepe ve vadi modeli kullanımı tamsayı işlemlerini keşfetmek için grafiksel bir yol olabilir.

Zaman çizelgesi. Öğrencilerden tarihsel olayları zaman çizelgesi üzerine yerleştirmelerini istemek disiplinler arası mükemmel bir fırsattır. Zaman çizelgesi büyük değerli (örn. 1950) ve negatif değerli (örn. $^{-}3000$) örnekler için kullanışlıdır. Ya da öğrenciler, kendileri doğmadan önce (örn. abi ya da ablasının doğumu) ve hayatta bulundukları süre içinde gerçekleşen önemli olayları (örn. yeni bir eve taşınma) ortaya çıkaracak şekilde kendi şahsi zaman çizelgeleri üzerine çalışabilirler (Weidemann, Mikovich, & Hunt, 2001). Öğrenciler daha sonra bu olayları bir sayı doğrusu üzerine yerleştirirler. Bir yılı aylara bölmek suretiyle, öğrenciler sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılarla (on ikide birler) ilgili deneyim kazanabilirler. Öğrencilere "hangi sayı (yıl) en küçüktür (en erkendir)?" sorusunu yönelterek sayının büyüklüğüyle bağlantı kurmalarını destekleyiniz.

Futbol. Bir futbol karşılaşmasında her bir oyun için verilen istatistik kazanılan ve kaybedilen yardlardır[4]. Bu da özellikle tamsayıların karşılaştırılması ve toplanması için oldukça iyi bir bağlam sağlar. Öğrencilere şu tür sorular yöneltilebilir: "Eğer Steelers takımı koşuya 20-yard çizgisinden başlamış ve ilk üç oyun $^{-}4$, $^{+}9$, $^{+}3$ olarak kaydedilmişse, takım birinci golü atmış mıdır?" veya "Broncos takımının ilk oyununda kat edilen yard $^{-}4$'tür. Hücum çizgisiyle karşılaştırıldığında nerede bulunmaktadırlar (eğer hücum çizgisinin gerisindelerse negatifler kullanarak; bu durumda $^{-}4$ olacaktır) ve gol çizgisine göre nerededirler ($^{-}14$)?"

Etkinlik 23.5

Futbol istatistikleri

Ulusal Futbol Liginde (NFL) veya öğrencileriniz arasında popüler olan kolej takımlarında, en iyi hücum oyuncularının kazandıkları ortalama yardlara bakınız. Atılan bir golde kazanılan yardların ortalamalarını kullanarak bir oyuncu için kazanılan ve kaybedilen yardların muhtemel

[4] Ç.N. Bir yard 0,914 metrelik ölçü birimidir.

bir listesini oluşturmalarını isteyiniz. Örneğin, bir oyuncu bir karşılaşmada 4 yardlık bir ortalamaya sahipse, şu değerler bu oyuncunun verileri olabilir:

10, ⁻3, ⁻2, 21, ⁻5, 3, ⁻1, 5, ⁻1, 13

Öncelikle buna benzer değerleri birlikte yapmak isteyebilir ve sonra da öğrencilerinize yaptırabilirsiniz. Futbol bağlamı, tamsayıları ortalama kavramına entegre ederek anlamlı bir şekilde kullanmak için mükemmel bir imkân sağlar.



Hesap makinası tamsayıların incelendiği başlangıç aşamasında kullanılabilecek bir araçtır. Öğrencilerin sayı doğrusu üzerinde veya betimlenen bağlamların birisiyle gerekçelendirebileceği doğru ve hızlı sonuçlar verir.

Hesap makinası tamsayıların incelendiği başlangıç aşamasında kullanılabilecek bir araçtır. Öğrencilerin sayı doğrusu üzerinde veya betimlenen bağlamların birisiyle gerekçelendirebileceği doğru ve hızlı sonuçlar verir.

Öğrencileri 5 – 8 = ? şeklindeki çıkarma işlemleri üzerine çalıştırınız ve sonuçları tartıştırınız. (Negatif işaretinin farklı hesap makinalarında farklı yerlerde gözüktüğünün farkında olunuz).

Öğrenciler hesap makinelerini, bahsi geçen sezgisel modeller ve sorularla birlikte kullanarak fayda sağlayabilirler. Örneğin, toplama yaparak ⁻5'ten ⁻17'yi nasıl elde edebilirsiniz? 13'ten *ne* çıkarsa 15 kalır?

Negatif sayıların anlamı

Negatif sayılar, doğal sayılara dayalı olarak tanımlanır. Bu yüzden negatif 3'ün tanımı 3 + ? = 0 denkleminin çözümüdür. Genel olarak, *n*'nin tersi *n* + ? = 0 denkleminin çözümüdür. Genel olarak, eğer bir pozitif sayı ise *n*'nin tersi negatif bir sayıdır. Dolayısıyla tamsayılar kümesi, doğal sayılar, doğal sayıların tersleri veya negatif sayılar ve ne pozitif ne de negatif olan 0 sayısından oluşur. Bu, öğrencilerin ders kitaplarında bulunan tanımdır. Matematiğin birçok alanında olduğu gibi soyut veya sembolik tanımlar, kavramsal ilişkilerle formel matematik arasında bağlantı kurulduğunda en iyi şekilde anlaşılırlar.

Mutlak değer. İki nokta arasındaki uzaklık, ister sayı doğrusu üzerinde olsun isterse düzlemde, özellikle matematiğin uygulamasında oldukça önemli bir konudur. Örneğin, tren yolu üzerinde, yönünün kuzeye ya da güneye mi olduğu fark etmeksizin, bir trenin bir istasyondan ne kadar uzaklıkta olduğunu bilgisayara söyleyebilmeliyiz. "Uzaklık" aynı zamanda, bir ölçüm ile gerçek değer arasında mümkün olan hata miktarında olduğu gibi, matematiksel uzaklığa da işaret edebilir ve bu ölçümler de ağırlık, zaman, volt ve benzeri olabilir.

Bir sayının mutlak değeri, o sayı ile sıfır arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Mutlak değer gösterimi sayının her iki yanında yer alan birer düşey çizgiden oluşur. Böylece *n* sayısının mutlak değeri şeklinde gösterilir. Sayıların tersleri, örneğin ⁻12 ve 12, sıfırdan aynı uzaklıktadır ve böylece aynı mutlak değere sahiptirler.

Birçok ortaokul ders kitabında öğrencilerden sadece |⁻8| veya |6 – 10| gibi sayısal ifadeleri hesaplamaları istenmektedir. Böylesi alıştırmaların talihsiz bir sonucu olarak öğrenciler sadece işlemi çabucak yapmayı öğrenirler ve sonra eğer varsa negatif işaretini göz ardı eder ya da "atarlar".

Gösterimler. Öğrenciler negatif işaretini sadece çıkarma yaparken gördüklerinden, tamsayıların sembolik gösterimleri kafa karıştırıcı olabilir. Öğrencilerin uygun sembolleri kullanmaları ve anlamalarına yardımcı olmak önemlidir. Öğrenciler negatif işaretinin bazen farklı yüksekliklerde (örn. –7 ve ⁻7) gözükmesini kafa karıştırıcı bulabilirler. Ayrıca bazen parantezler sayının etrafını yerleştirilir ki böylece sayı, yapılan işlemden ayırt edilir; 8 – (–5) örneğinde olduğu gibi. Öğrenciler parantezlerin bu yolla kullanımını görmediklerinden çarpmanın sürece dâhil olduğunu düşünebilirler. Öğrencilerin önbilgileriyle bağlantı kurmak ve bu bilgiye dayandırmak önemlidir. Bu durumda öğrencilere "Matematikte parantezleri ne zaman kullanırız?" sorusunu yöneltiniz. Öğrenciler cevap olarak, önce ne yapılacağını göstermek için bir dizi işlemin gruplandırılmasında kullanılacağını ve aynı zamanda çarpma anlamına gelebileceğini söyleyebilirler. Parantezlerin ayrıca bir sayı cümlesini, daha okunaklı yapmak (negatif sayıyı işlemden ayırt etmek) için kullanıldığını belirtiniz.

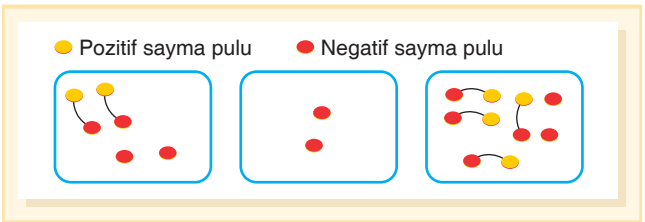


Grafik hesap makinalarında bu işlemler "negatif" tuşu ve "çıkarma" tuşu kullanılarak girilir. Bu iki sembol arasındaki fark gösterimde aşikârdır. Fazlalık olan üst-takıdaki artı işareti gösterilmez. Öğrenciler 3 + ⁻5 ve 3 – 5 işlemlerinin ⁻2 sonucunu verdiğini ve 3 – ⁻5 ve 3 + 5 işlemlerinin de eşit olduğunu görebilirler. ◆

Tamsayıların öğretimi için iki model

Öğrencilerin tamsayılarda karşılaştırmayı ve dört işlemi (+, –, × ve ÷) anlamalarına yardımcı olmak için kullanılan ve birisi nicelik ve diğeri de doğrusal işlemlere işaret eden iki model yaygındır.

Sayma pulları. Birinci model, birisi pozitif ve diğeri negatifleri saymak için kullanılan, iki farklı renkteki sayma pullarından oluşur. Farklı türden iki sayma pulu sıfır ile sonuçlanır (⁺1 + ⁻1 = 0). Parayı göz önüne alınız: eğer sarılar alacaklar ve kırmızılar da borçlar ise 5 sarı ve 7 kırmızı birlikte 2 kırmızı ya da 2 borç yapar ve ⁻2 ile temsil edilir (Bkz. Şekil 23.6). Bu modelin kullanımında öğrencilerin bir hususu kavramaları önemlidir: bir pozitif ve bir negatif sayma pulundan oluşan çiftlerden bir yığına istendiği kadarının eklenmesi veya çıkarılması her zaman mümkündür ve bu ekleme veya çıkarma sonucunda yığının değeri değişmez.



Şekil 23.6 Her bir koleksiyon ⁻2 sayısının bir modelidir.

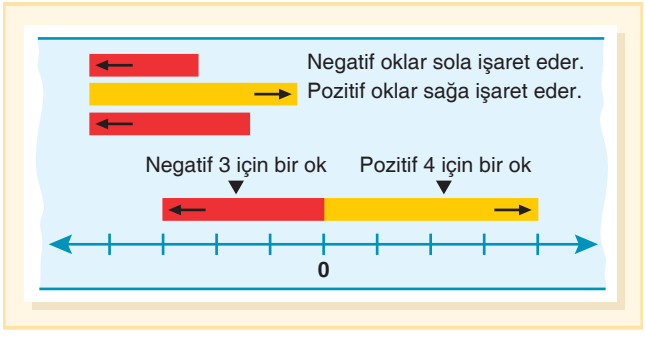
(Sezgisel olarak bu durum eşit miktarda borç ve alacağın eklenmesi gibidir.)

Sayı doğruları. Sayı doğrusu ikinci modeldir. Örneğin, bir termometre bir sayı doğrusu olarak göz önüne alınabilir. Sayı doğrusu birçok avantaja sahiptir. Birinci olarak, 0'dan uzaklığı gösterir (veya sayının mutlak değerini). İlave olarak, işlemleri modellemek için de mükemmel bir araçtır. Sıçramalar, doğal sayılar ve kesirlerle gösterildiği gibi gösterilebilir (Bkz. Bölüm 12 ve 16). Öğrenciler, tamsayıların sağa doğru gidildikçe büyüdüğünü ve sola doğru gidildikçe küçüldüğünü görebilirler. Ayrıca sayı doğrusu, tamsayı olmayan ve sayma pulları tarafından çok iyi bir şekilde modellenemeyen negatif ve pozitif değerlerin (örn. $^{-}4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}$) incelenmesi için de öğrencilere olanak sağlar.

İşlemlerin modellenmesinde, oklar mesafe ve yönü göstermek için kullanılabilirler. Örneğin, 4 sayısı dört birim uzunluğunda sağa doğru bir ok ve sayısı üç birim uzunluğunda sola doğru bir ok ile modellenebilir (Bkz. Şekil 23.7). Oklar, tamsayı nicelikleri yönlendirilmiş mesafeler olarak düşünmeleri için öğrencilere yardım ederler. Pozitif bir ok sola işaret etmez ve negatif bir ok da asla sağa işaret etmez. Ayrıca, her bir ok uzunluk (boy veya mutlak değer) ve yönüyle (işaret) birlikte bir niceliktir. Bunlar her bir ok için, okun sayı doğrusu üzerindeki pozisyonundan bağımsız olarak, değişmez olan özelliklerdir.

Hangi modelin kullanımı. Oldukça farklı gözükseler de her iki model de matematiksel olarak benzerdir. Tamsayılar iki kavram içerirler-nicelik ve terslik. Nicelik sayma pullarının sayısı ya da okların uzunlukları ile modellenirler. Terslik ise farklı renkler ya da farklı yönler kullanılarak temsil edilir.

Birçok öğretmen sadece öğrencilerinin sevdikleri ya da daha iyi anladıkları modeli kullanmaktadır. Bu bir hatadır! Unutmayınız ki kavramlar modellerin bizatihi kendisinde değil aksine öğrenciler tarafından oluşturulmalı ve onlar modellere uygulanmalıdır. Her iki model üzerinden tamsayıları görmek, amaçlanan kavramları elde etmekte öğrencilere yardımcı olacaktır. Öğrenciler her iki modeli de tecrübe etmelidirler ve belki daha da önemlisi, her ikisinin birbirine nasıl benzediğini tartışmalıdırlar.



Şekil 23.7 Tamsayılar için sayı doğrusu modeli

Tamsayılarla işlemler

Öğrencileriniz tamsayıların her bir model tarafından nasıl temsil edildiğini anladıktan sonra tamsayılar için işlemleri problem biçiminde sunabilirsiniz. Bir başka deyişle, tamsayılarda toplamanın nasıl yapıldığını açıklamak ve modellerle alıştırma sorularını nasıl çözeceklerini öğrencilere göstermek yerine onlara bir tamsayı işlemi veriniz ve bir çözüm bulmaları için öğrencilerinizin modelleri kullanmalarına izin veriniz. Çözüme ulaşıldığında, bu bölümde daha önce açıklanan modeller ya da bağlamlardan birini kullanarak gruplar kendi sonuçlarını karşılaştırabilir ve gerekçelendirebilirler.

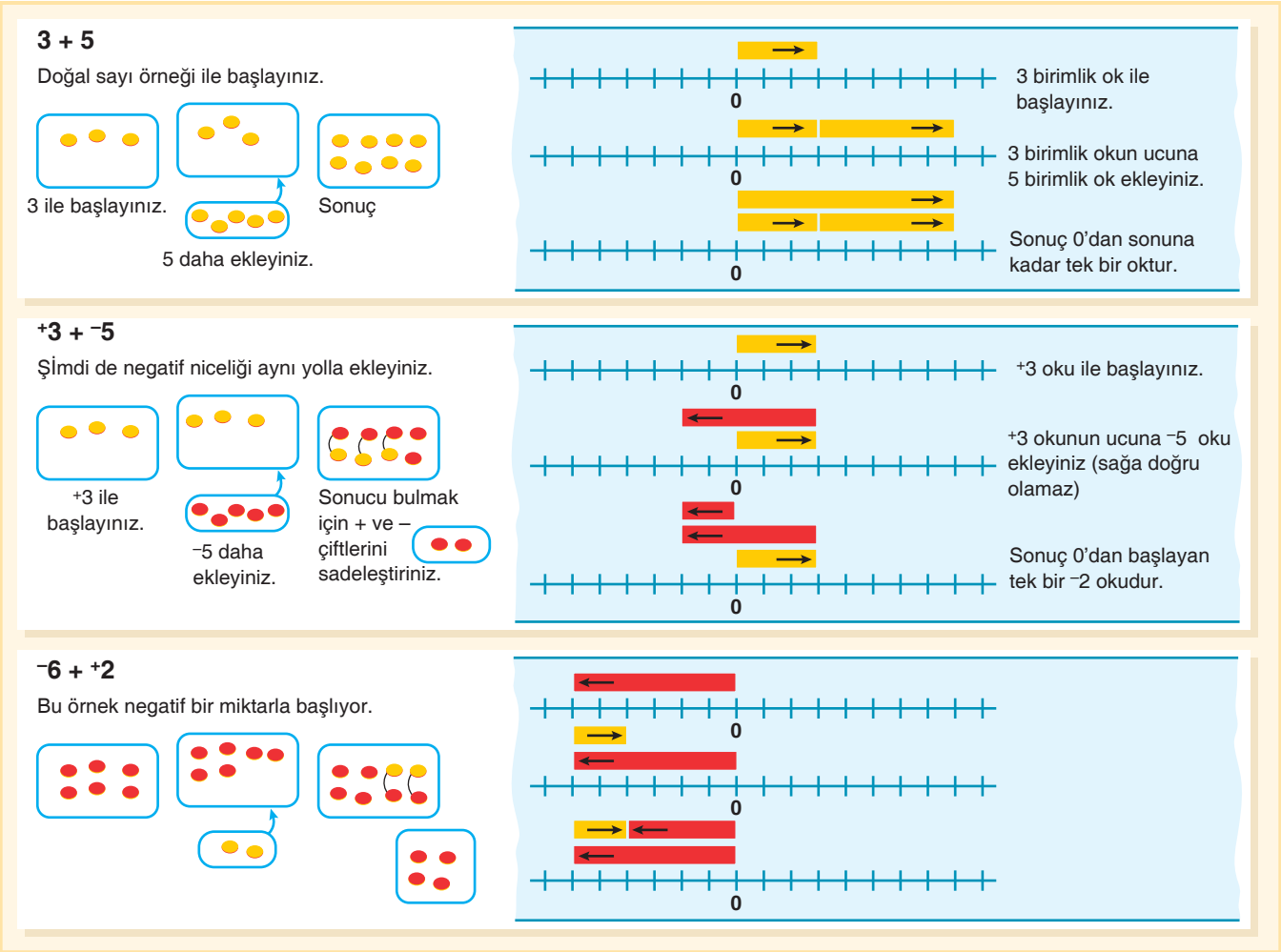
Toplama ve çıkarma

Ortaokul öğrencileri belli bir zamandır sayma pulları veya sayı doğrularını kullanmamış olabileceklerinden, pozitif tamsayıları kullanarak bu modellerden birisiyle çalışmaya başlamak iyi olacaktır. Tamsayılarla toplama veya çıkarma için modellerle aşina olmalarına yardımcı olacak birkaç alıştırmadan sonra tamamen aynı muhakemeyi kullanarak tamsayılarla ilgili bir örnek üzerine öğrencileri çalıştırınız. Unutmayınız ki üzerinde durduğunuz husus öğrencilerin kısa sürede doğru cevabı elde etmeleri değil mantığını açıklamalarıdır.

Bu bölümde daha önce açıklanan bağlamlardan birini kullanarak negatif değerlere giriş yapınız. Örneğin, golf puanları bir bağlam olarak kullanılabilir. Her hafta sonu cumartesi ve pazarları golf oynadığınızı söyleyerek hikâyeyi kişiselleştiriniz. Birinci hafta sonunda puanlarınız ve, sonraki hafta ve ve en son hafta ise ve 'dir. Genel olarak her hafta sonu başarınız nasıldı? Bu nicel bir model olduğu için sayma pulları modelleme için iyi bir tercihtir (fakat sayı doğruları da kullanılabilir). Doğrusal bağlam iki oyunda kazanılan ve kaybedilen futbol yardları olabilir. Toplama için her iki modelin nasıl kullanılacağına ilişkin Şekil 23.8'e bakınız.

Birkaç toplama örneği her iki yolla Şekil 23.8'de modellenmiştir: pozitif ve negatif sayma pulları ile sayı doğrusu ve ok modeli. Öncelikle sayma pulu modelini inceleyiniz. İki nicelik birleştirildikten sonra negatif ve pozitif sayma pullarından birer tanesi bir araya getirilerek bu çiftler sıfıra eşitlenir ve sonucun daha kolay görülmesi için öğrenciler bu çiftleri atarlar.

Ok modelini kullanarak toplama yapmak için bir önceki okun sonuna diğer okun başlangıcı gelecek şekilde ekleneceğini belirtiniz. Unutmayınız ki çıkarma işlemi eksiltme (örn. 7 ile başla ve 10 eksilt) veya karşılaştırma durumlarında kullanılabilir (7 ile $^{-}3$ arasındaki fark nedir?). Nicelik modeli eksiltme durumu için uygun iken sayı doğrusu hem eksiltme durumu için hem de karşılaştırmalarda kullanılabilir.



Şekil 23.8 Sayma pulları ve sayı doğrusu ile tamsayılarda toplama işlemini doğal sayılarda toplama ile ilişkilendiriniz.

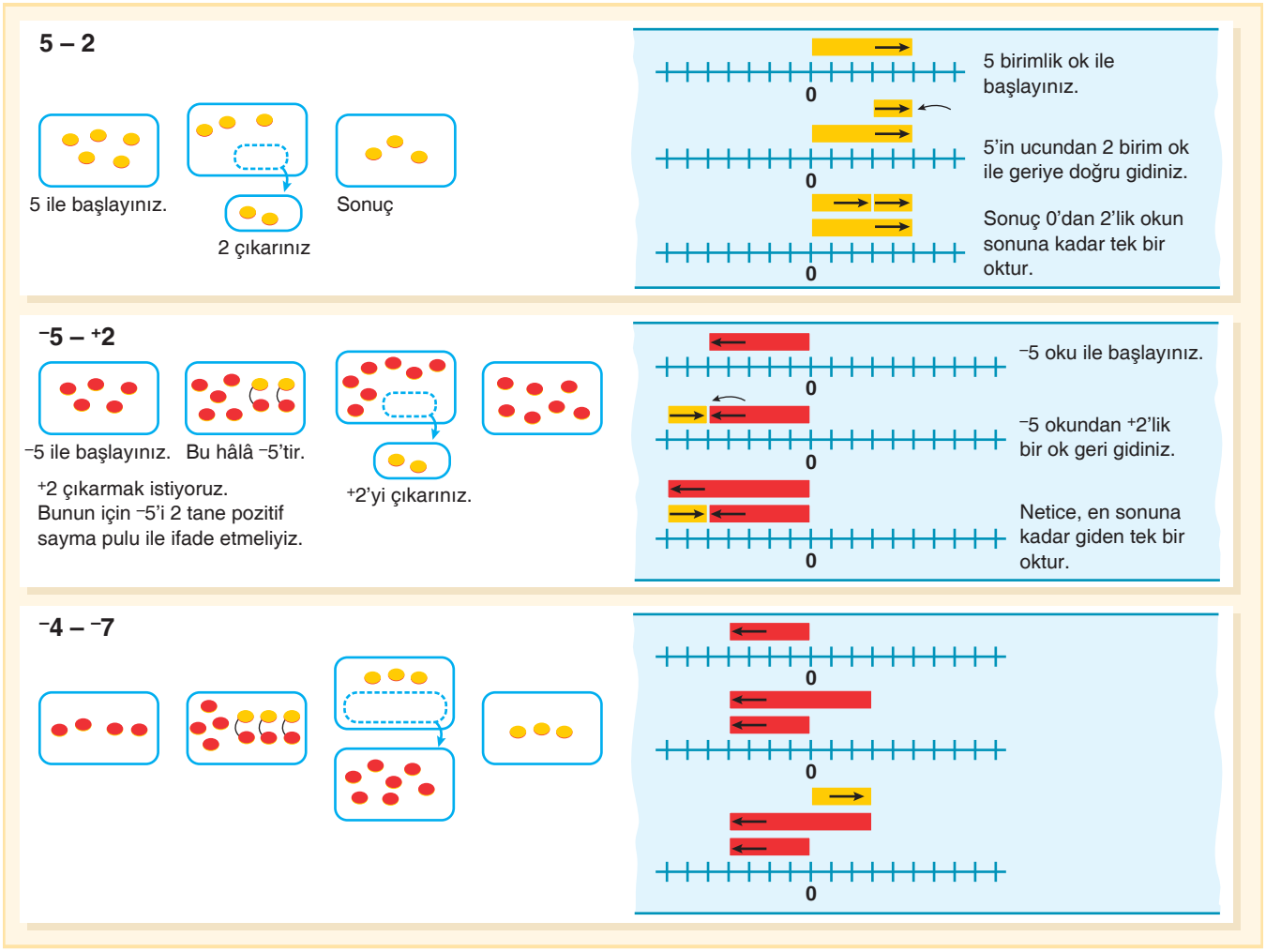
Şekil 23.9'daki ikinci örnekte (birinci örnek ilişki kurulmasını sağlamak amacıyla doğal sayılarla ilgilidir) modellenen $^{-}5 - {}^{+}2$ problemini göz önünde bulundurunuz. Nicelik modeli kullanılacaksa bağlam para olabilir; örneğin "5 dolarlık bir borcum vardı ve sonra 2 dolar daha borçlandım (hesaptan çektim). Banka hesabımdaki bakiyem ne olacaktır (kredi hesabımdan çektiğim fazladan miktar için herhangi bir ücretlendirme yapılmadığını varsayalım)?" Bunu modellemek için 5 tane kırmızı sayma pulu ile başlarsınız. 2 tane pozitif sayma pulunu hiç pozitif sayma pulu bulunmayan bir kümeden çıkarmak için öncelikle $^{-}5$ için farklı bir gösterim yapılmalıdır. Herhangi sayıdaki nötr çift (bir pozitif, bir negatif) kümenin değeri değişmeden eklenebileceğinden, iki pozitif sayma pulunu çıkarabilmek için bu kümeye iki nötr çift eklenir. Net sonuç daha fazla negatif sayma pulunun olmasıdır.

Bir sayı modelinde, çıkarma işlemi oklar kullanılarak modellenebilir. Pozitif değerleri çıkarırken, Şekil 23.9'daki ikinci örnekte olduğu gibi, doğal sayılardaki ile aynı şekilde işlem yapılır yani sola doğru hareket edilir. Sıcaklığı bağlam olarak kullanarak şöyle bir açıklama yapılabilir: "Gün sıfırın altında 5 derece ile başlar. Sonra sıcaklık +2° derece daha düşer. Bunun anlamı hava daha da soğumuştur ve şimdi sıcaklık $^{-}7$ derecedir." Esas zorluk negatif bir değeri çıkarmak için gerçekçi bir açıklama yaparken ortaya çıkar. Örneğin $^{-}4 - {}^{-}7$ (Bkz. Şekil 23.9'daki üçüncü örnek). Burada eksiltme üzerine düşünerek başlarsınız; fakat eksiltilen şey negatif sıcaklık (veya soğukluk) olduğu için gerçekte siz tam tersini yapıyor, yani 7 derece ısıtıyorsunuz. Sayı doğrusu üzerinde modellerken $^{-}4$'ten başlarsınız, sonra sola doğru giden okun yönünü değiştirip 7 birim sağa doğru hareket edersiniz. Sayı doğruları aynı zamanda karşılaştırma ve uzaklık için de kullanılabilir. $^{-}7$ ve $^{-}4$ arasındaki fark nedir? Bir başka deyişle, $^{-}7$'den $^{-}4$'e nasıl gidebilirsiniz? 3 sayarsınız.

Durup düşün!

Okumaya devam etmeden önce Şekil 23.8 ve 23.9'daki örnekleri tek tek inceleyiniz. Her bir problemi nicelik ve doğrusal bağlamlar kullanarak açıklayınız. Her iki modeli de rahatlıkla kullanabilmelisiniz.

Öğrencilerinize tamsayılarda işlemlerle birlikte kullanılabilecek resimler çizdiriniz. Küme resimleri oldukça kolaydır; kümeler, örneğin, X ve O'lardan oluşabilir. Sayı doğrusu



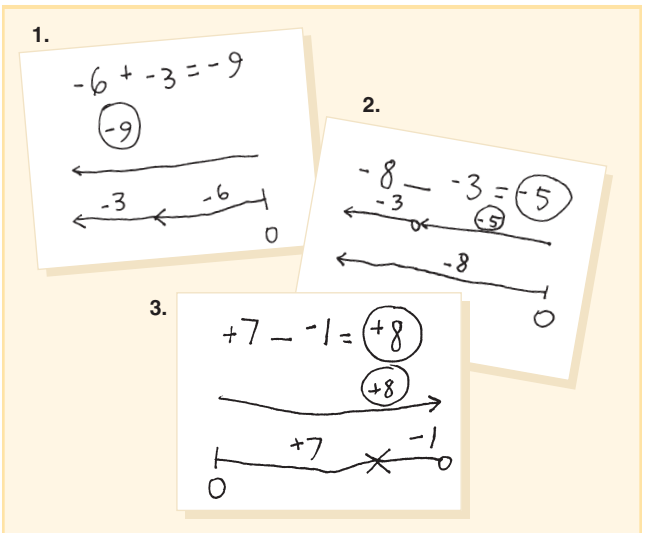
Şekil 23.9 Tamsayılarda çıkarma işlemi de doğal sayılardakiyle ilişkilidir.

için oklar kullanılabilir. Şekil 23.10, basit toplama ve çıkarma alıştırmaları için herhangi bir öğrencinin sayı doğrusunu kullanmadan da okları nasıl çizebileceğini göstermektedir.

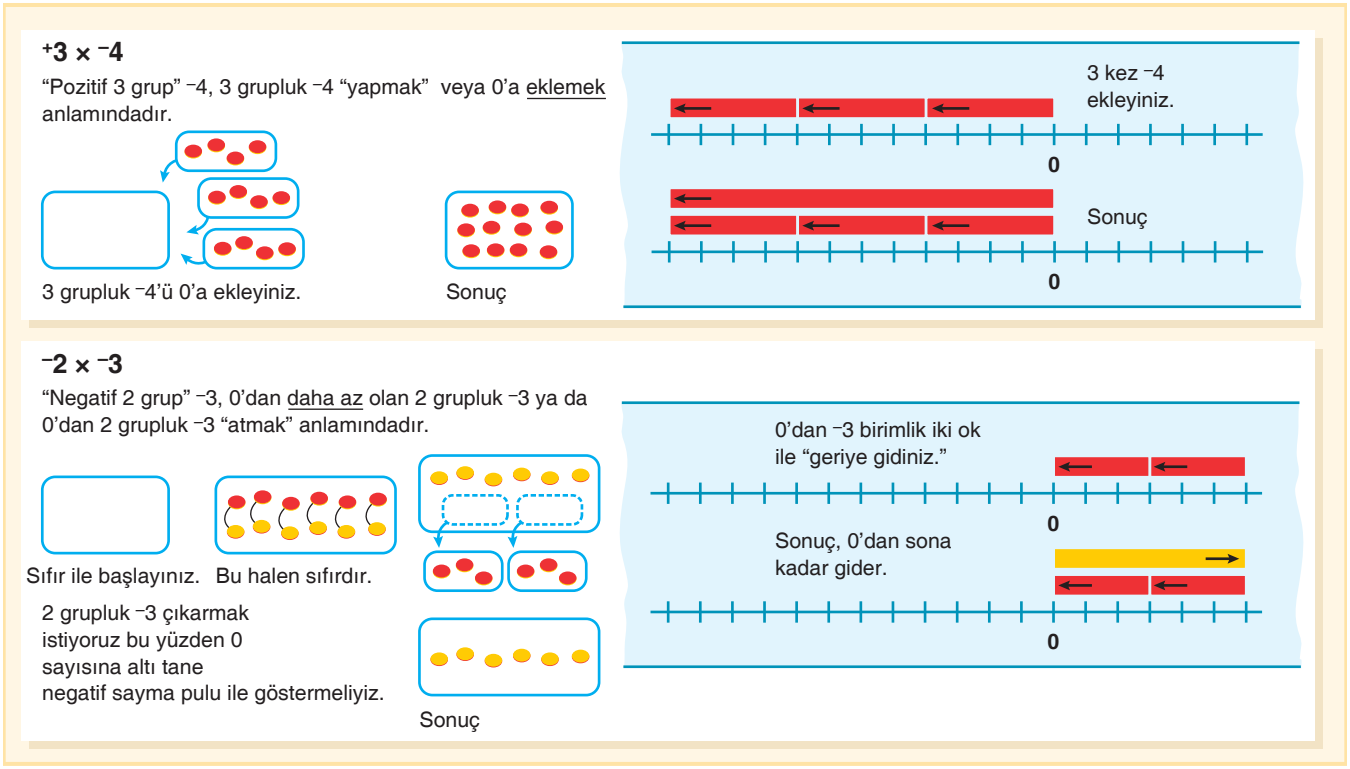
Öğrencilerin, ⁺3 + ⁻5 ile ⁺3 – ⁺5 işleminin ve ⁺2 – ⁻6 ile ⁺2 – ⁻6 işleminin aynı olduklarını görmeleri önemlidir. Toplama ve çıkarma işlemlerini her iki yolla modellemek suretiyle, öğrenciler ilişkileri görecek ve ifadeler farklı olmalarına rağmen sonuçların aynı olduklarını fark edeceklerdir.

Çarpma ve bölme

Toplama ve çıkarma işlemlerinin doğal sayılarla ilişkilendirilmesinde olduğu gibi tamsayıların çarpımı da doğal sayılarda çarpma konusunun doğrudan bir genişletilmesi olmalıdır. Bizler sıklıkla doğal sayıların çarpımını tekrar eden toplama olarak açıklamaktayız. Birinci çarpan, 0'dan başlamak üzere, bir gruptan kaç tane olduğunu ya da toplamda kaç tane eklendiğini ifade eder. Birinci çarpanın işareti pozitif olduğunda, ikinci çarpanın işareti ne



Şekil 23.10 Öğrenciler tamsayılarla toplama ve çıkarmayı temsil etmek için basit ok çizimleri kullanabilirler.



Şekil 23.11 Birinci çarpanı pozitif olan çarpma tekrarlı toplamadır. Birinci çarpanı negatif olan çarpma tekrarlı çıkarmadır.

olursa olsun, bu durum tamsayıların çarpımına doğrudan doğruya uyarlanabilir. Şekil 23.11'deki ilk örnek birinci çarpanın pozitif ve ikinci çarpanın negatif olduğu durumu gösterir.

Birinci çarpanın negatif olması, $^{-}2 \times {}^{-}3$ örneğinde olduğu gibi, ne anlama gelebilir? Eğer pozitif birinci çarpan tekrarlı toplama (0'a kaç kez eklendiği) ise, negatif birinci çarpan tekrarlı çıkarma anlamında olmalıdır (0'dan kaç kez çıkarıldığı). Şekil 23.11'deki ikinci örnek birinci çarpanı negatif olan çarpmanın nasıl modellenebileceğini göstermektedir.

Görünüşte basit olan "aynı işaretlilerin çarpımı pozitiftir" ve "zıt işaretlilerin çarpımı negatiftir" gibi kurallar çabucak tesis edilirler. Bu modeller ise öğrencilerin bu kuralların niçin geçerli olduğunu anlamalarına imkân tanırlar.

Tamsayılarla bölme işleminde yine öncelikle doğal sayılardaki durumu inceleyiniz. Doğal sayılarda $8 \div 4$ işleminin iki verilmeyen-çarpan şeklindeki ifadesinde iki farklı anlamı vardır: $4 \times ? = 8$ ifadesi "*Neyin* dört tanesi sekiz yapar?" diye sorarken, $? \times 4 = 8$ ifadesi "Kaç tane dört sekiz yapar?" sorusunu yöneltir. Her iki kavram da iki model ile gösterilebilmekle birlikte tamsayılarla birlikte genellikle ölçme yaklaşımı ($? \times 4$) kullanılır. Verilmeyen çarpanı bulmak için tekrarlı toplamayı ya da 0'dan itibaren bölenler ile bölünen sayıyı inşa etmeyi düşünmek faydalıdır.

Şekil 23.12'deki ilk örnek iki modelin doğal sayılarda nasıl işlediğini göstermektedir. Sonraki, bölenin pozitif bölünenin ise negatif olduğu bir örnektir.

Durup düşün!

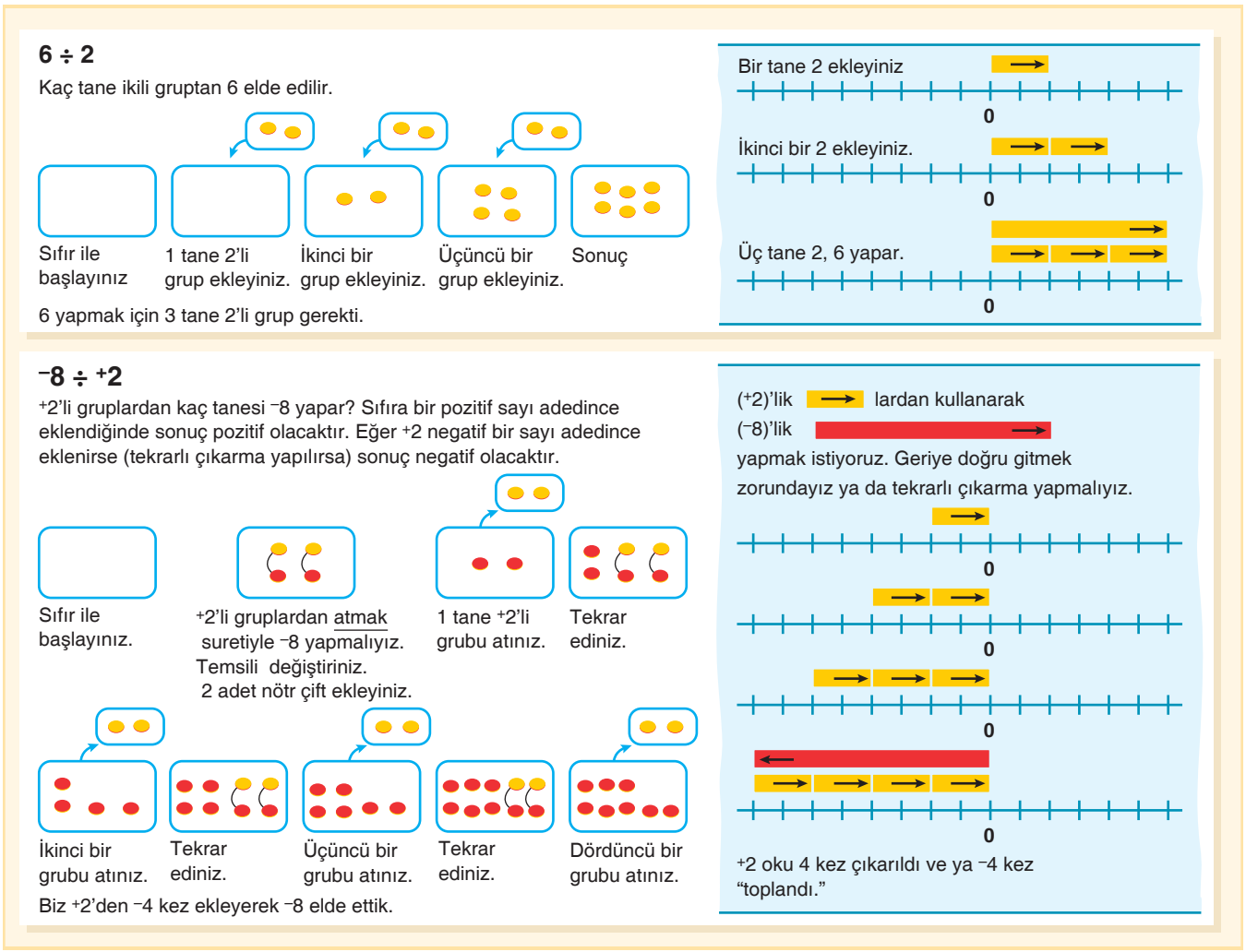
$^{-}8 \div {}^{+}2$ işlemini her iki modeli kullanarak hesaplamayı deneyiniz. X ve O'lar ve ayrıca oklar kullanarak resimler çiziniz. Şekil 23.12'deki örneklere bakarak ne kadar anladığınızı kontrol ediniz. Örnekleri anladıktan sonra $^{+}9 \div {}^{-}3$ ve $^{-}12 \div {}^{-}4$ işlemlerini yapmayı deneyiniz.

Tamsayılarda bölmenin anlaşılması, çarpma işlemi için negatif birinci çarpan kavramına ve çarpma ile bölme işlemleri arasındaki ilişkinin çok iyi bilinmesine dayanır.

Öğrencilerinize zor problemleri çözdürmek için aceleci olmayınız. Öğrencilerin öncelikle doğal sayı durumlarını nasıl modelleyecekleri hakkında düşünmeleri ve sonrasında, sizin de rehberliğinizle, tamsayıları nasıl ele alacaklarını anlamaları çok daha iyi olacaktır.

NCTM Standartları

"Pozitif ve negatif tamsayılar nispi değişimleri veya değerleri göstermek için faydalı olarak görülmelidir. Çözümleri negatif tamsayı olan denklemlerle, örneğin $2x + 7 = 1$ gibi, çalışırken öğrenciler bu sayıların yararlılığını kavrayabileceklerdir" (s.218). ◆



Şekil 23.12 Ölçüm yaklaşımıyla tamsayıların bölümü

Gerçek sayılar

Bu kitabın ikinci kısmı doğal sayılarla başlamış, sonra rasyonel sayılara geçmiş ve şimdi de bu bölümde tamsayıları ele almış durumdadır. Bu sayıların tümü rasyonel sayılardır. İrrasyonel sayılar gibi sayılar olup bunlar kesir olarak yazılamaz ve değerleri ancak tahmin edilebilir. Tüm bu sayılar *gerçek sayıların* bir parçasıdır; gerçek sayılar da öğrencilerin lisede negatif sayıların kareköklerini göz önünde bulundurdukları sanal olarak isimlendirilen sayılara gelinceye kadar inceledikleri tek sayı türüdür. Bu sayı kümelerinin hepsi birbiriyle ilişkilidir ve bazıları diğerlerinin altkümeleridir. Şekil 23.13 sayı türleri ve aralarındaki ilişkileri resmetmektedir.

Rasyonel sayılar

Rasyonel sayılar, bir kesir veya bir tamsayının bir tamsayıya oranı olarak temsil edilebilen tüm sayıların kümesini içerir. Hatta doğal sayılar ve sonlu ondalık sayılar da kesir olarak yazılabileceklerinden rasyonel sayılardır. Gerçekten de birçok ders kitabında ve ulusal öğretim programı kılavuzlarında da rasyonel sayılar terimi kesirlere, ondalık sayılara (sonlu ve devirli) ve yüzdeliklere işaret etmektedir. Bunlar



Şekil 23.13 Gerçek sayıların temsili bir resmi

rasyonel sayılardır ama aynı zamanda doğal sayıları içeren tamsayılar da rasyonel sayılardır. Rasyonel sayıların bu şekilde kavramsallaştırılması için kesirler ile ondalık sayılar arasında ve kesirlerle doğal sayılar arasında geçiş yapabilmek önemlidir.

Temsiller arası geçiş. Öğrenciler kesirleri grupların ya da nesnelerin parçaları olarak görme eğiliminde olduklarından, kesirler öğrencilerin zihinlerinde sayıdan ziyade fiziksel bir obje olarak yer almaktadır. Öğrencilerin kesirleri sayı doğrusu üzerine yerleştirirken zorlanmalarının bir sebebi de budur. Kesirlerin sayı olarak düşünülmesine yönelik önemli bir sıçrama, öğrencilerin ondalık sayıları kesrin bir başka gösterimi olduğunu anladıklarında ortaya çıkar. Bölüm 17'de "dostane" kesirler (yarımlar, üçte birler, çeyrekler, beşte birler, sekizde birler) fikrini bu kesirlerin ondalık eşitleri açısından incelemiştik.

Ortaokul yılları, tüm bu fikirleri birleştirme zamanıdır:

- $4\frac{3}{5}$ sayısı 4.6'dır; çünkü $\frac{3}{5}$ bir bütünün onda altısıdır bu yüzden 4 tam ve onda altı 4.6 yapar.
- $4\frac{3}{5}$ sayısı yapar ve bu da $23 \div 5$ ile veya eğer ondalık sayıları kullanırsam 4.6 ile aynıdır.
- 4.6 sayısı "dört tam onda altı" diye okunur ve bu yüzden bu sayıyı $4\frac{6}{10} = 4\frac{3}{5}$ olarak yazabilirim.

Benzer şekilde şu üç ifadeyi karşılaştırınız:

$$24\text{'ün } \tfrac{1}{4}\text{'i} \qquad \tfrac{24}{4} \qquad 24 \div 4$$

Bu tartışma, bir kesrin, payın paydaya bölümü olarak düşünülmesi ya da kesrinin $\frac{a}{b}$ ile aynı olduğu fikrinin genel bir gelişimine yol açabilir.

Öğrencilerin önbilgileri üzerine inşa edilen tartışmada açığa çıkması gereken şey pozitif veya negatif herhangi bir sayı, kesir olarak yazılabiliyorsa aynı zamanda ondalık sayı olarak da yazılabileceği fikridir. Bu fikri tersten düşünebilir ve ondalık sayıları kesirlere dönüştürebilirsiniz. Unutmayınız ki buradaki esas amaç dönüşümleri yapma becerisini kazandırmak değil aynı nicelik için farklı sembolik gösterimler olduğunu kavratmaktır.

Bir kesir ondalık sayıya çevrildiğinde, ondalık sayı ya bir yerde son bulur (örn. 3.415) veya devirli tekrar eder (örn. 2.5141414 . . .).

Verilen bir kesrin sonlu mu yoksa devirli tekrar eden bir ondalık sayı mı olduğunu söylemenin bir yolu var mıdır? Cevap paydada gizlidir. Aşağıdaki etkinlik bunun sebebini açığa çıkarmak için kullanılabilir.

Etkinlik 23.6

Tekrar Eder veya Sona Erer

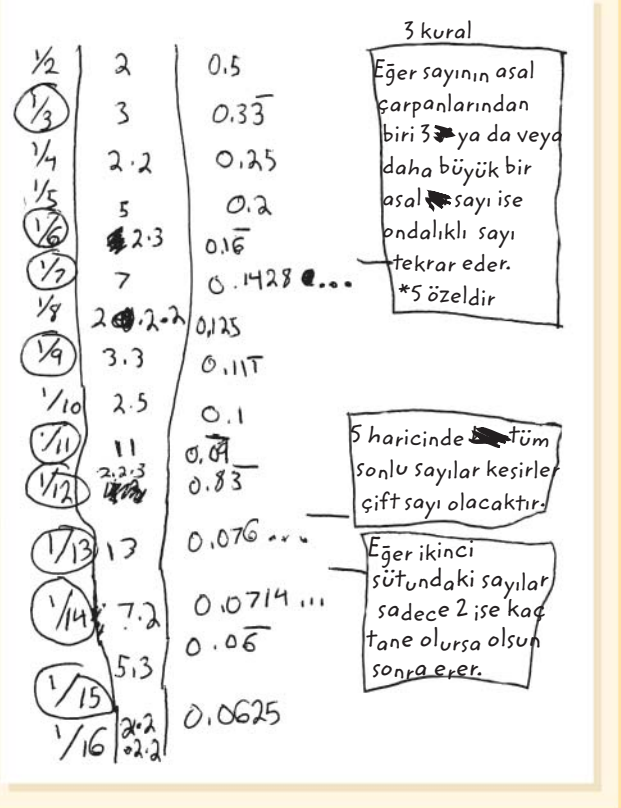
Öğrencilerinize birinci sütununda ilk 20 birim kesrin () yer aldığı bir tablo yaptırınız. İkinci sütunda paydaların asal çarpanları listelenir ve üçüncü sütuna da kesrin ondalık sayı olarak karşılığı yazılır. Ondalık sayı karşılığının bulunması için öğrencilerinize hesap makinası kullandırınız.

Tablo tamamlandıktan sonra, öğrencilerin görevi ondalık sayının tekrarlı mı yoksa sonlu mu olduğunu önceden söyleyecek bir kural bulunup bulunamayacağını araştırmaktır. Öğrenciler buldukları kuralı paydası 21'den büyük olan kesirler için de test edebilirler. Ayrıca öğrenciler, pay ne olursa olsun bir fark olmayacağını teyit etmek de isteyebilirler.

Eğer bu etkinliği kendiniz yaparsanız, kısa bir sürede paydasının tüm çarpanları 2 ve/veya 5 olan kesirlerin sonlu ondalık sayı olduğunu fark edersiniz. Bunun gerekçesinin açıklanması da öğrencilerin yapabileceği bir şeydir. Öğrenciler bu görev üzerinde çalışırken, Şekil 23.14'te sunulan öğrenci çalışmasından da görüleceği gibi, değişik örüntüler de fark edeceklerdir.

İrrasyonel sayılar

Öğrenciler irrasyonel sayılarla beşinci sınıf gibi erken bir dönemde sayısını öğrendikleri zaman karşılaşmaktadırlar. Fakat bir irrasyonel sayının ne olduğu konusundaki tartışma daha ileriki ortaokul yıllarında, muhtemelen yedinci veya sekizinci sınıfta, ortaya çıkmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi ir-



Şekil 23.14 Bir öğrenci "tekrar eder veya sona erer" etkinliğinde çalışırken örüntüleri not eder.

rasyonel sayılar rasyonel değildirler; yani bu sayılar kesir biçimine sokulamazlar. İrrasyonel sayılar, rasyonel sayılarla birlikte *gerçek* sayıları oluştururlar. Gerçek sayılar sayı doğrusundaki tüm boşlukları, bu boşluklar sonsuz küçük de olsa, doldururlar. Öğrencilerin irrasyonel sayılarla ilk deneyimleri tipik olarak doğal sayıların köklerini incelerken gerçekleşir.

Kök kavramının tanıtılması. Takip eden kısımda karekök ve küp köklere güzel bir giriş etkinliği sunulmaktadır. Bu başlangıçtan sonra herhangi bir dereceden kök kavramı kolayca geliştirilebilir.

Etkinlik 23.7

Karelerin ve Küplerin Kenarları

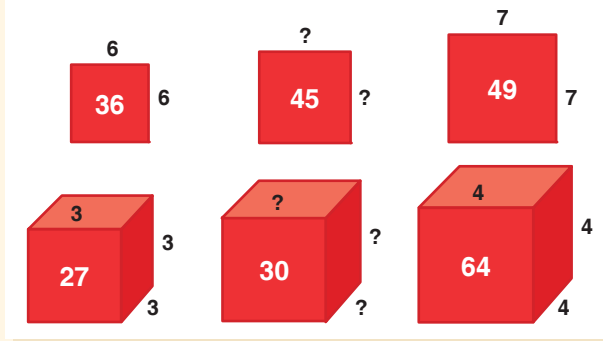
Şekil 23.15'tekine benzer üç karenin (veya üç küpün) resmini öğrencilere gösteriniz. Birinci ve sonuncu şeklin kenarları ardışık doğal sayılardır. Her üç şeklin alanları (hacimleri) sunulmaktadır. Öğrencilerin görevi ise hesap makinası kullanarak ortadaki şeklin kenar uzunluğunu bulmaktır. Öğrencilere karekök tuşunu kullanmamalarını fakat bunun yerine kenar uzunluğunun ne olacağını tahmin etmelerini ve bunun karesini alarak tahminlerini test etmelerini söyleyiniz. 45'e (veya küp durumunda 30'a) mümkün olan en yakın değeri yüzde birler basamağına değin buluncaya kadar tahminlerine devam etmelerini söyleyiniz. Cevaplar şu denklemleri sağlayacaktır:

$\square \times \square = 45$, **veya** $\square^2 = 45$

ve

$\square \times \square \times \square = 30$, **veya** $\square^3 = 30$

Örneğin, küp problemini çözmek için öğrenciler 3.5 ile başlayabilir ve 3.5^3 değerinin 42.875 olduğunu bulabilirler ama bu sayı çok büyüktür. Öğrenciler çabucak çözümün 3.1 ve 3.2 arasında olduğunu bulacaklardır. Arasında ama nerede? Bir hesap makinası bu karekök ve küp kökleri hızlıca bulabilse de, tahmin etkinliği öğrencilerin kareyi ve kare-



Şekil 23.15 Karekök ve küp köklerin geometrik yorumu

kökü ve sayıların nispi büyüklüklerine ilişkin anlayışlarını kuvvetlendirir.

Durup düşün!

30 sayısının küp kökünün yüzde birler basamağına kadar yaklaşık değerini elde etmek için hesap makinası kullanınız.

Bu basit girişten sonra öğrencilerden $\square^2 = 8$ şeklindeki denklemlerin çözümlerini bulmaları istenebilir. Bundan sonra öğrenciler, bir sayının (*N*) *n*. dereceden kökünün genel tanımını *n*. kuvveti *N* olan bir sayı olarak kavramaya hazır hâle gelirler. *Kare* ve *küp kökler*, ikinci ve üçüncü köklerin diğer isimleridir. Geleneksel gösterim olan kök işareti en son gündeme gelir. O hâlde $\sqrt{6}$ ifadesinin işlemden ziyade bir sayı olduğu açıktır. Sekizin küp kökü ile $\sqrt[3]{8}$ aynı şeydir ki bu da 2 yazmanın sadece bir diğer yoludur.

Ortaokulda öğrenciler, irrasyonel sayılarla esasen iki nokta arasındaki uzaklığı bulmak için kullanılan (uzaklığın köşegen olduğu veya c olarak isimlendirildiği) Pisagor teoremiyle ($a^2 + b^2 = c^2$) yaptıkları çalışmalarda karşılaşmaktadırlar. Eğer $a = 3$ ve $b = 4$ ise $c = 5$'tir. Tüm kenarlar rasyonel sayılardır. Fakat bu istisnai bir durumdur. Daha sık karşılaşılan kenarlar 4 ve 7 birim gibi sayılar olacaktır ki bu durumda $c = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$ olur. Bazen sadeleştirilebilen tam kareler ortaya çıksa da bu durumda tam kare yoktur ve uzaklık olup $\sqrt{65}$ bir irrasyonel sayıdır.

Etkinlik 23.8'de tasvir edilen, merak uyandırıcı bir ortaokul projesi Pisagor teoremi ve irrasyonel sayıların Theodorus Çarkı elde etmek için kullanılmasıdır. Theodorus, erken dönemde irrasyonel sayıların varlığına inananlardan birisiydi (Pisagorcular için oldukça tartışmalı bir konudur çünkü onlar irrasyoneller fikrine karşıydılar!)

Etkinlik 23.8

Theodorus Çarkı

Öğrencilerinizden dik kenarları 1 santimetre olan bir dik üçgen çizmelerini isteyiniz ve sonra da hipotenüsü çizerek ölçüsünü kaydediniz. Daha sonra bu hipotenüsü bir dik kenar kabul eden ve diğer dik kenarı da 1 santimetre olan başka bir dik üçgen oluşturunuz. Yeni hipotenüsü çiziniz ve ölçümünü kayıt ediniz ($\sqrt{3}$). Aynı şekilde bir sonraki dik üçgeni oluşturunuz; bu üçgenin dik kenar uzunlukları $\sqrt{3}$ ve 1, hipotenüsü de $\sqrt{4}$ ya da 2 olacaktır. Bu şekilde dik üçgenler oluşturmaya devam ediniz. Bu işlemin yaklaşık 30 kez yapılması çarkı oluşturacaktır. (Bu konuda bir ders için Bay-Williams & Martinie, 2009, kaynağına bakınız veya internet üzerinden yönergeler ve diyagramları araştırınız.)

NCTM Standartları

"6–8. sınıflarda, öğrenciler Pisagor bağıntısını kullandıklarında sıklıkla kareler ve karekökler ile karşılaşırlar. Öğrenciler sayı doğrusu üzerindeki doğal sayılar arasında kareköklerin yerlerini yaklaşık olarak belirlemek için ters bağıntıyı kullanabilirler" (s. 220).

Örnek olarak kitabın yazarları şunu belirtirler: $\sqrt{27}$ sayısı 5'ten birazcık daha büyüktür çünkü $5^2 = 25$'tir ve $10^2 = 100$ olduğundan $\sqrt{99}$ sayısı 10'dan birazcık daha küçüktür ◆

Gerçek sayıların yoğunluğu

Gerçek sayıların öğrenciler tarafından iyice anlaşılmayan önemli bir özelliği bu sayıların sonsuz olmasıdır. Bunun anlamı şudur ki herhangi iki değer verildiğinde, örneğin $\frac{7}{9}$ ve $\frac{8}{9}$, bu iki sayı arasında sonsuz adet rasyonel sayı bulabilirsiniz. Bu kavram detaylı bir inceleme ve tartışma gerektirir ki Etkinlik 23.9'un amacı da budur.

Eğer rasyonel sayıların yoğunluğu ilginç ise daha da şaşırtıcı olanı irrasyoneller de yoğundur. Ve irrasyonel ile rasyonellerin hepsi de birlikte yan yanadırlar. İrrasyonellerin yoğunluğunu göstermek kolay değildir ve ortaokul konuları kapsamına da girmez.

Takip eden etkinlik rasyonel sayı sisteminin yapısının daha iyi anlaşılmasında öğrencilere yardımcı olabilir.

Etkinlik 23.9

Yakın Ne Kadar Yakındır?

Öğrencilere, birbirlerine "gerçekten yakın" olduklarını düşündükleri herhangi iki kesir ya da ondalık sayı seçtiriniz. Öğrencilerin seçtikleri sayıların veya bu sayıların gerçekte birbirlerine ne kadar yakın olduklarının önemi yoktur. Şimdi öğrencilerinizden bu iki sayı arasında en az on tane daha sayı bulmalarını isteyiniz (kesirler veya ondalık sayılar).

"Yakın Ne Kadar Yakındır?" etkinliği öğrencilerinizin kesirler ve ondalıkları nasıl anladıklarını belirlemek için bir fırsattır. (Etkinlik nihayetinde her iki sayı türü için de yapılmalıdır). Bu etkinlik tartışma yapmak, öğrencilerin bireysel olarak kesir ve ondalık kavramlarını değerlendirmek ve rasyonel sayı sisteminin belki de en ilginç özelliği olan yoğunluk kavramına giriş yapmak için önemli bir fırsat sağlar. Rasyonel sayıların *yoğun* oldukları söylenir çünkü herhangi iki rasyonel sayı arasında *sonsuz* sayıda başka rasyonel sayılar vardır.



Aşağıdakilerden herbirisi için öğrencilerinize "iki sayı arasında kaç tane sayı vardır?" sorusunu yöneltiniz.

$\frac{3}{5}$ ve $\frac{4}{5}$

0.6 ve 0.7

$^{-}2$ ve $^{-}3$

Bu "mülakat" şeklindeki değerlendirmenin bir parçası olarak öğrencilerden örnekler sunmalarını ve aradaki sayıları nasıl bulduklarını açıklamalarını isteyiniz. Öğrenciler iki sayı arasındaki değerleri bulmak için sayılarla işlemler yapabilmeli ve ikisi arasında sonsuz tane sayı olduğunu bilmelidirler.

Eğer öğrenciler takılırlar ve sayı olmadığını söylerlerse o zaman iki sayı arasındaki değerleri bulmaya yardımcı olacak şekilde sayıların eşitlerini yazıp yazamayacaklarını sorunuz. ◆

Bölüm 23 Üzerine Düşünelim

Yazarak öğrenelim

1. Öğrencilerin İşlem önceliğini anlamalarına yardımcı olmak ve uygun olarak kullanmalarını sağlamak için hangi stratejileri kullanabilirsiniz?
2. Bir hesap makinası işlem önceliğini incelemek için nasıl kullanılabilir?
3. 10'un kuvvetlerinin çok küçük ve çok büyük sayıları yazmak için nasıl kullanılacağını açıklayınız. 10'un kuvvetlerinin bilimsel gösterim ve hesap makinasındaki özel kullanım şekli nedir?
4. Aşağıdakilerin çözümü için bir bağlam ve bir model kullanınız:

   $^{-}10 + {}^{+}13 = {}^{+}3$ $\quad$ $^{-}4 - {}^{-}9 = {}^{+}5$ $\quad$ $^{+}6 - {}^{-}7 = {}^{+}13$

   $^{-}4 \times {}^{-}3 = {}^{+}12$ $\quad$ $^{+}15 \div {}^{-}5 = {}^{-}3$ $\quad$ $^{-}12 \div {}^{-}3 = {}^{+}4$
5. Aşağıdaki sayıların her birisi için ne tür bir sayı (gerçek, rasyonel, tamsayı, doğal sayı) olduğunu söyleyiniz. Örneğin, $^{-}8\frac{1}{2}$ sayısı gerçek ve rasyoneldir.

   $^{-}3$ $\quad$ 120 $\quad$ $\frac{4}{5}$ $\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad$ .323232 . . . $\quad$ $^{-}1.4$
6. Bir ortaokul öğrencisine rasyonel ve irrasyonel bir sayı arasındaki farkı nasıl açıklardınız?
7. $\sqrt{6}$ ne anlama gelir? $\sqrt{6}$ sayısıyla $\sqrt{4}$ sayısı arasında nasıl bir fark vardır? Hangi yönleriyle aynıdırlar?
8. Rasyonel sayıların yoğun olması ne anlama gelir?

Araştırma ve tartışma konuları

1. Sayıların eşdeğer temsilleri arasında rahatça geçiş yapmaları için, örneğin, duruma uygun olarak kesirleri ondalık sayılara esnek bir şekilde dönüştürmede, öğretmenler öğrencilere nasıl yardımcı olabilirler?
2. Bazı üs değerleri öğrenciler tarafından karıştırılmaktadır. En yaygın durumlardan ikisi aşağıda sunulmuştur. Her bir örnek için,
   - Değerlerin anlam olarak nasıl farklı olduklarını açıklayınız.
   - Nasıl farklı olduklarını göstermek için bir gösterim çiziniz.
   - Bu değerlerdeki farklılıkları görmelerine yardımcı olmak için öğrencilerin ne tür bir inceleme yapmalarını planlardınız?

   Durum 1: 2^3 ve 2×3 ve 3^2

   Durum 2: $2n$ ve n^2 ve 2^n

Bölüm 23 ile İlgili Kaynaklar

İlgili Edebi Metinler

Some topics in this chapter present opportunities for "playing around" with ideas and numbers. In the middle grades using literature is a great springboard for doing mathematics. The following ideas offer a change of pace in the upper grades.

The Number Devil *Enzensberger, 1997*

Full of humor and wit, *The Number Devil* lays out a collection of interesting ideas about numbers in 12 easily read chapters. Robert, a boy who hates mathematics, meets up with a crafty number devil in each of 12 dreams. On the fourth night's dream, Robert learns about infinitely repeating decimals and the "Rutabaga of two" (the square root of two), providing a connection to rational and irrational numbers.

Oh, Yikes! History's Grossest, Wackiest Moments *Masoff, 2006*

In this picture-rich reference book, the author describes important historical events and people with facts that are interesting to middle schoolers. Her topics include, "Aztec Antics," "Cruel Constructions," "Humongous Hoaxes," "Pirates," and so on. In several cases, she takes a topic, such as brushing teeth and briefly describes how this was handled across all of history, which provides the opportunity to do time lines that include dates such as 2500 BC. Students can create a time line that is proportionally accurate to tell the events related to the topic they have selected. In addition to integers, this lesson includes measuring, proportional reasoning, and fractions.

Önerilen Okuma Parçaları

Makaleler

Graeber, A. O., & Baker, K. M. (1992). Little into big is the way it always is. *Arithmetic Teacher, 39*(8), 18–21.

This is one of the few articles that discusses the issue of a fraction as an indicated division. The authors look at practices in the elementary school that suggest why the difficulty exists and make practical suggestions for working with middle school students.

Reeves, C. A., & Webb, D. (2004). Balloons on the rise: A problem-solving approach to integers. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(9), 476–482.

Expanding on a discussion of the possibility of helium party balloons making you weigh less if held while on a scale, the fifth-grade students in this article generalize the concepts of integers and use their ideas for addition and subtraction. The authors point clearly to the value of a context to help students develop a new concept.

Online Kaynaklar

The Evolution of the Real Numbers
www.themathpage.com/areal/real-numbers.htm

This is an interesting description of many topics related to the real number system. Although mostly text, the pages are filled with interactive questions.

National Library of Virtual Manipulatives (NLVM)
http://nlvm.usu.edu

Among the many applets on this site are "Color Chips—Addition," "Color Chips—Subtraction," "Rectangle Multiplication of Integers," and "Integer Arithmetic." These applets focus on using models for integer computation.

Tic-Tac-Go Negative Numbers (Freudenthal Institute)
www.fi.uu.nl/toepassingen/03088/toepassing_wisweb.en.html

In this game, students pick addition, subtraction, or multiplication and find the equation to match an answer, trying to get three in a row.

Volt Meter (Illuminations)
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=152

Click and drag batteries with negative and positive voltage to explore integer addition and subtraction.

Exponential Growth (Otherwise)
www.otherwise.com/population/exponent.html

This site offers an applet to experiment with population (exponential) growth.

The Next Billion (Illuminations)
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L715

In 1999 the world population passed 6 billion. In this lesson, students predict when it will reach 7 billion. Students discuss their predictions, past trends in population growth, and social factors—a good interdisciplinary opportunity.