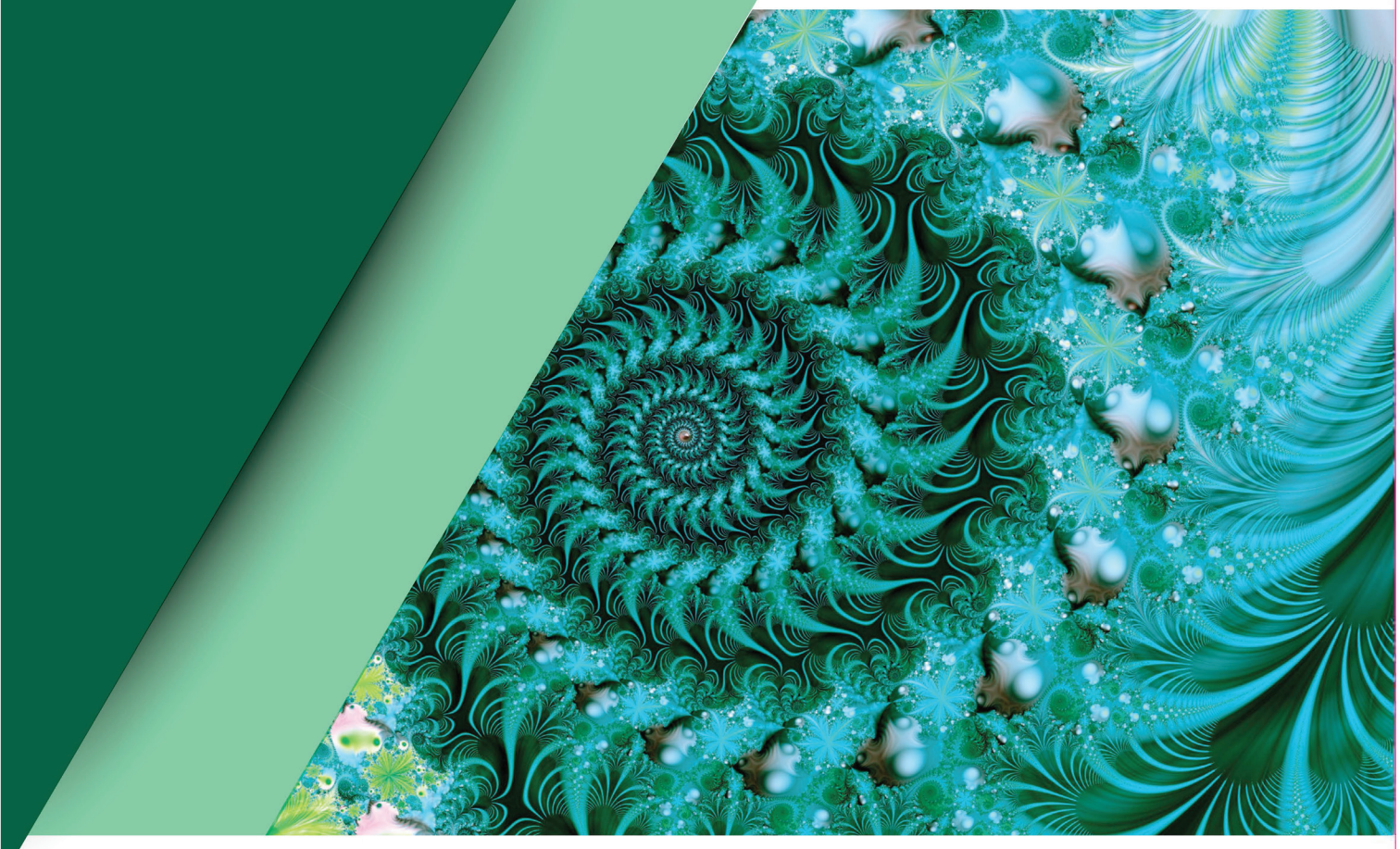
Matematik Analiz 1

PROF. DR.
MUSTAFA BALCI



PALME YAYINEVİ
Ankara, 2018

PALME YAYINLARI: 1231
Matematik ANALİZ-1 / Prof. Dr. Mustafa BALCI
Yayın Koordinatörü : H. İbrahim SOMYÜREK
Yayına Hazırlama : **PALME** Dizgi-Grafik Tasarım Birimi
Palme Yayınevi © 2018
Yayıncı Sertifika No : 14142
ISBN : 978-605-355-641-1

Baskı : Vadi Grup Basım AŞ.
Basımevi Sertifika No : 26687

Bu kitap 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre kısmen ya da tamamen basılamaz, dolaylı dahi olsa kullanılamaz, teksir, fotokopi ya da başka bir teknikle çoğaltılamaz. Her hakkı saklıdır, PALME YAYINEVİ'ne aittir.

GENEL DAĞITIM
PALME YAYINEVİ

Merkez:
A. Adnan Saygun Caddesi
No: 10/1 Sıhhiye/ANKARA
Tel : 312 433 37 57
Faks: 312 433 52 72

Şube 1:
Ölgunlar Sokak, No.: 4/5
Bakanlıklar/ANKARA
Tel. : 312 417 95 28
Faks: 312 419 69 64

Şube 2:
Kazım Dirlik Mahallesi, Ankara Caddesi,
No.: 259/C Bornova/İZMİR
Tel. : 312 417 95 28
Faks: 312 419 69 64

bilgi@palmeyayinevi.com www.palmeyayinevi.com

Önsöz

Üniversitelerin matematik bölümü birinci sınıf öğrencileri için hazırlanmış olan kitabımız, bazı teorik kısımlar atlandığında, mühendislik fakültelerinde "Genel Matematik" kitabı olarak da okutulabilir.

Kitabımızdaki konuların anlatımında mümkün olduğu kadar yeni yöntemler kullanıldı. Orta öğretim müfredatı ile arada uçurum oluşmamasına dikkat edildiği için üniversiteye yeni başlayan öğrencilerin kitabımızı yadırgamayacağı kanısındayız.

Kitabımız hazırlanırken matematiksel kavramların açık ve anlaşılır bir şekilde verilmesine gayret edildi. İşlenen her konuda yeterli sayıda örnek çözüldü. Bilgilerin pekiştirilmesi için çok sayıda problem verildi ve bölüm sonlarına yerleştirilen "Bölüm Problemleri" ile konuların yeterince kavranıp kavranmadığı ölçülmeye çalışıldı.

Daha önce tek renk olarak basılan kitabımız, konuların daha iyi anlaşılmasına görsel açıdan yardımcı olmak için bu baskıdan itibaren renklendirildi. Ayrıca kitap, içerik açısından da zenginleştirildi.

Prof. Dr. **Mustafa BALCI**

İçindekiler

1. KÜMELER 1
   - 1.1. KÜMELER 2
   - 1.2. SAYILAR 10
     - 1.2.1 Reel Sayılar 10
     - 1.2.2. Tümevarım Yöntemi 12
     - 1.2.3. Toplam ve Çarpım Sembolleri 17
   - 1.3. LİNEER NOKTA KÜMELERİ 21
2. FONKSYİONLAR 41
   - 2.1. FONKSİYON KAVRAMI 42
   - 2.2. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR 50
   - 2.3 PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR 58
   - 2.4 POLİNOMLAR VE RASYONEL FONKSİYONLAR 60
   - 2.5 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE TERSLERİ 64
   - 2.6 ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR 68
   - 2.7 EĞRİLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMİ 71
3. LİMİT 77
   - 3.1. DİZİLER VE LİMİTLERİ 78
   - 3.2. TERİMLERİ ARASINDA TEKRARLAMA BAĞINTISI BULUNAN DİZİLER 50
   - 3.3 BİR FONKSİYONUNUN LİMİTİ 103
4. SÜREKLİLİK 115
   - 4.1. SÜREKLİ FONKSİYONLAR 116
   - 4.2. SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ 121
5. TÜREV 134
   - 5.1. TÜREV KAVRAMI 134
   - 5.2. TÜREV ALMA KURALLARI 138
   - 5.3. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ 141
   - 5.4. BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ 142
   - 5.5. TERS FONKSİYONLARIN TÜREVİ 146
   - 5.6. LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ 148
   - 5.7. ÜSTEL FONKSİYONUNUN TÜREVİ 149
   - 5.8. LOGARİTMİK TÜREV ALMA 150
   - 5.9. HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ 150
   - 5.10. PARAMETRİK OLARAK TANIMLANAN FONKSİYONLARIN TÜREVİ ... 151
   - 5.11. KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ 152
   - 5.12. YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER 152
   - 5.13. TÜREVİN GEOMETRİK TÜREVİ 157
   - 5.14. TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI 158
   - 5.15. TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER 161

5.16. KONVEKS FONKSİYONLAR 172
5.17. BELİRSİZ ŞEKİLLER 179
5.18. DİFERESİYELLER 184
5.19. EĞRİ ÇİZİMİ 188
5.20. KUTUPSAL KOORDİNATLAR 196
5.20.1 Kutupsal Denklemi Verilen Eğrilerin Çizimi 201
6. BELİRSİZ İNTEGRAL 209
6.1. BELİRSİZ İNDEGRAL 210
6.2. İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ 210
6.2.1 İntegrasyonda Değişken Değiştirme 214
6.2.2 Kısmi İntegrasyon Yöntemi 220
6.2.3 İndirgeme (Rekürans) Formülleri 223
6.2.4 Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi 234
6.2.5 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ İfadesini Bulunduran İntegraller 239
6.2.6 Binom İntegralleri 243
7. BELİRLİ İNTEGRAL 249
7.1. ARALIKLARIN PARÇALANMASI 250
7.2. MERDİVEN FONKSİYONLARI 252
7.2.1 Merdiven Fonksiyonlarının İntegrali 253
7.3. RIEMANN İNTEGRALİ 256
7.4. İNTEGRALLENEBİLEN FONKSİYON SINIFARI 268
7.4.1 Parçalı Sürekli Fonksiyonların İntegrali 273
7.5. BAZI LİMİTLERİN İNTEGRAL YARDIMIYLA HESABI 285
8. BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI 293
8.1. ALAN HESABI 293
8.1.1 Kartezyen Koordinat Sisteminde Alan Hesabı 294
8.1.2 Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı 298
8.2. YAY UZUNLUĞU HESABI 304
8.2.1 Kartezyen Koordinatlarda Yay Uzunluğu Hesabı 304
8.2.2 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu Hesabı 305
8.2.3 Parametrik Denklemleri Verilen Eğrilerin Yay Uzunluğu Hesabı 307
8.3. HACİM HESABI 309
8.3.1 Kesit Yöntemi 309
8.3.2 Disk Yöntemi 311
8.4. DÖNEL YÜZEYLERİN ALAN HESABI 318
8.4.1 Kartezyen Koordinatlarda Yüzey Alanı 318
8.4.2 Eğri Denklemlerinin Parametrik Olarak Verilmesi Durumunda Yüzey Alanı Hesabı 321
8.4.3 Kutupsal Koodinatlarda Yüzey Alanı Hesabı Bölüm Problemleri 324
9. SERİLER 327
9.1. SERİLER 328
9.2. POZİTİF TERİMLİ SERİLER 335
9.3. ALTERNE SERİLER 353
9.4. HERHANGİ TERİMLİ SERİLER 359

Bölüm

1

KÜMELER VE SAYILAR



1.1 KÜMELER

Kesin bir tanımı yapılamamakla beraber, sezgisel olarak, küme bazı özelliklere sahip nesnelerin sıralı olmayan bir topluluğu, bir sınıfı, bir koleksiyonu olarak düşünülebilir. Kümeyi meydana getiren nesnelere kümenin **elemanları** adı verilir. Bizim bu kitapta gözönüne alacağımız kümelerin hemen hepsi elemanları sayılar olan kümelerdir. Kümeleri genellikle A, *B, C, X, Y, Z,* ... gibi büyük harflerle, elemanlarını da *a, b, c, x, y, z,*... gibi küçük harflerle gösteririz. Eğer *a* bir A kümesinin bir elemanı ise, bunu

$$a \in A$$

biçiminde gösteririz. Eğer *a* bir *B* kümesinin elemanı değilse, bunu da

$$a \notin B$$

şeklinde yazarız.

Bir kümenin verilmesi için, o kümenin elemanlarının teker teker belirtilmesi veya o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan karakteristik özelliğin verilmesi gerekir. Yani bir nesnenin kümeye ait olup olmadığını ayırmaya yarayan kesin bir kuralın verilmesi gerekmektedir. Buna göre bir kümeyi gösterirken, ya o kümenin elemanlarını {...} parantezi içine yazmakla ya da

$$\{x : (x \text{ in karakteristik özelliği})\}$$

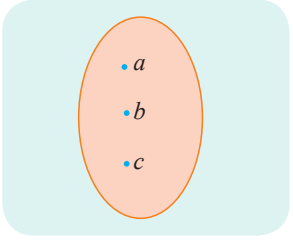
sembolü kullanılır. Örneğin elemanları *a, b, c* olan kümeyi

$$\{a, b, c\}$$

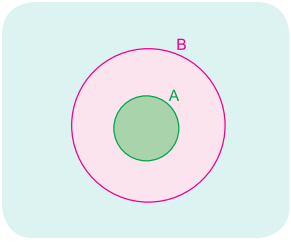
ile, Fen Fakültesi öğrencilerinin kümesini

$$\{x : x, \text{Fen Fakültesi öğrencisi}\}$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu yazışta kümenin genel elemanı *x* harfi ile gösterilmiş, *":"* işareti de "*öyle ki*" anlamına gelen bir sembol olarak kullanılmıştır.



Kolaylık sağlamak amacıyla bazen kümeleri bir bölge içinde kalan noktalar ile göstermek adet olmuştur. Bu suretle elde edilen şekillere **Venn Diyagramları** adı verilir. {*a, b, c*} kümesi Venn diyagramı olarak yandaki şekilde gösterilebilir.



TANIM

Eğer bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B nin bir **alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir, yani

$A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]$.

Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre her A kümesi için

$$A \subset A$$

olur.

ÖRNEK :

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x : x \text{ bir rakam}\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ kümelerinden hangisi bir diğerinin alt kümesidir?

Çözüm :

A ve C nin elemanları B nin de elemanı olduğundan $A \subset B$ ve $C \subset B$ dir. A nın bazı elemanları C de ve C nin bazı elemanları A da olmadığından A ve C kümelerinden biri diğerinin alt kümesi değildir. Bu durum

$$A \not\subset C \quad ve \quad C \not\subset A$$

biçiminde gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin **eşitliği**

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$

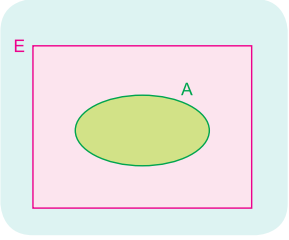
şeklinde tanımlanır. Eğer A kümesinin en az bir elemanı B de değilse veya B nin en az bir elemanı A da değilse A ile B **farklıdır** denir, $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre A ve B eşit kümelerse aynı elemanlardan meydana gelmişlerdir. Eğer $A \subset B$ fakat $A \neq B$ ise A ya B nin bir öz alt kümesidir denir.

TANIM

Hiç bir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir, $\varnothing$ sembolü ile gösterilir.

Boş kümeyi $\varnothing = \{x : x \neq x\}$ şeklinde de tanımlamak mümkündür. $x \neq x$ hiçbir zaman gerçeklenemeyecek bir bağıntı olduğundan $\varnothing$ nin hiç elemanı yoktur.



TEOREM 1.1

Boş küme her kümenin alt kümesidir.

İspat : A herhangi bir küme olsun. Kabul edelim ki $\varnothing \not\subset A$ olsun. Bu $\varnothing$ kümenin A da olmayan en az bir eleman ihtiva etmesi demektir ki bu $\varnothing$ nin tanımına aykırıdır. Şu halde her A kümesi için $\varnothing \subset A$ dır.

TANIM

Küme teorisinin herhangi bir uygulamasında uğraştığımız tüm kümeleri sabit bir kümenin alt kümeleri olarak düşünebiliriz. Bu kümeye **evrensel küme** denir ve E ile gösterilir.

Şurasını belirtelim ki herşeyi içine alan bir mutlak evrensel küme yoktur. Bunun çeşitli ispat yolları olmakla beraber biz sadece bir tanesini vereceğiz.

Kendini eleman olarak ihtiva etmeyen bir kümeye normal küme, kendini eleman olarak kabul eden kümeye anormal küme denir. Bütün normal kümeleri eleman olarak kabul eden ve bunlar dışında elemanı olmayan kümeyi $\mathcal{N}$ ile gösterelim.

Herhangi bir küme ya normaldir ya da anormal. Tanım gereği bir kümenin her iki özelliğe birden sahip olması mümkün değildir.

$\mathcal{N}$ kümesi normal olsun. $\mathcal{N}$ normal kümelerden oluştuğundan $\mathcal{N}$ normal kümesini eleman olarak kabul etmek zorundadır. Bu durumda kendini eleman olarak kabul etmiş olur. Bu taktirde $\mathcal{N}$ kümesi bir anormal kümedir.

$\mathcal{N}$ kümesi anormal olsun. Bu taktirde $\mathcal{N}$ kümesi, $\mathcal{N}$ kümesini eleman olarak kabul eden bir kümedir. Halbuki $\mathcal{N}$ kümesinin tanımına göre bu kümenin tüm elemanları normal kümelerdir. O halde $\mathcal{N}$ bir normal kümedir. Demek ki $\mathcal{N}$ kümesi hem normal hem de anormal kümedir. Bu imkânsız olduğuna göre, bir çelişkiye düşülmüştür. Bundan kurtulmak için, bir kümeyi aynı anda hem eleman hem küme olarak gözönüne almamak gerekir.

Buna göre, her şeyi içine alan bir kümenin varlığı kabul edildiğinde yukarıdaki paradokslara düşülür.

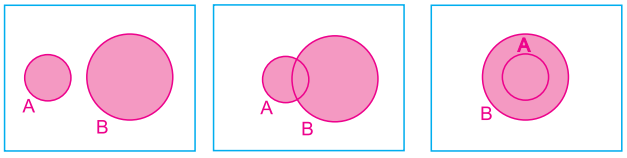
TANIM

A ve B kümelerinin elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin **birleşimi** denir, A ∪ B ile gösterilir. Buna göre

$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \ veya \ \ x \in B\}$

dir.

A ve B nin durumuna göre A ∪ B kümesi aşağıda kırmızı renkli olarak gösterilmiştir



$A \cup B$ kümesi

Yukarıdaki diyagramlardan da kolayca görüleceği gibi

$$A \subset A \cup B \quad \text{ve} \quad B \subset A \cup B$$

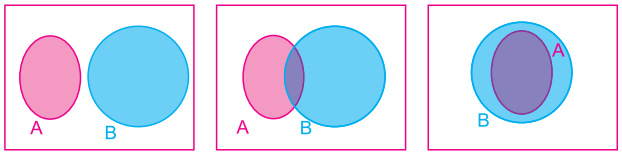
olur.

TANIM

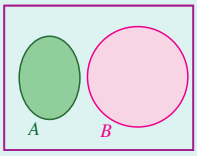
A ve B kümelerinin ortak elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B kümelerinin **arakesiti** veya **kesişimi** denir, $A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \ \text{ve} \ \ x \in B\}$.

A ile B nin durumuna göre $A \cap B$ kümesi aşağıda mor renkte gösterilmiştir.



$A \cap B$ kümesi



Ayrık kümeler

Yukarıdaki tanım gözönüne alındığında

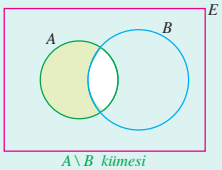
$$A \cap B \subset A \quad \text{ve} \quad A \cap B \subset B$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

TANIM

$A \cap B = \varnothing$ ise A ile B kümeleri **ayrıktır** denir.

Örneğin; $A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ ise A ile B ayrıktır.



$A \setminus B$ *kümesi*

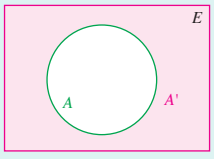
TANIM

A kümesinde olup da B de bulunmayan elemanların kümesine B nin A kümesine göre **tümleyeni** denir. $A \setminus B$ ile gösterilir.

Buna göre

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \neq B\}$$

dır.



TANIM

Bir A kümesinin E evrensel kümesine göre tümleyenine A kümesinin **tümleyeni** denir. A' ile gösterilir. Buna göre

$$A' = \{x : x \notin A\}$$

dir.

Bu küme yanda renkli olarak gösterilmiştir.

$A \setminus B$ ile B' kümelerinin tanımları gözönüne alındığında

$$A \setminus B = A \cap B'$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca

$$\varnothing' = E, \quad E' = \varnothing, \quad (A')' = A$$

olduğu açıktır. Şimdi **De Morgan kuralları** denilen bir özelliği ifade ve ispat edelim.

TEOREM 1.1

A ve B herhangi iki küme olsun.

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

dır.

İspat : (a) ve (b) nin ispatı birbirine benzer olduğundan (a) nın ispatını yapacak, (b) yi bir alıştırma olarak okuyucuya bırakacağız.

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ve } x \notin B \Leftrightarrow$$

$$x \in A' \text{ ve } x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'.$$

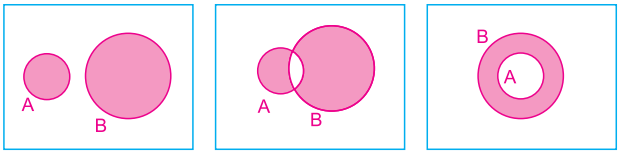
TANIM

A ve B kümelerinin **simetrik farkı**, kümelerden birine ait olup da diğerine ait olmayan elemanların kümesidir. Buna göre;

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

dır.

A ve B kümelerinin durumuna göre $A \Delta B$ kümesi aşağıda taralı olarak gösterilmiştir.



$A \Delta B$ kümesi

Sonlu sayıda elemanı olan kümenin eleman sayısı $s(A)$ veya $n(A)$ ile gösterilir.

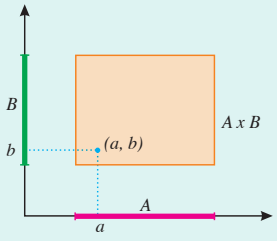
$A \cup B$ kümesinin tanımı gözönüne alındığında kolayca gösterilebilir ki

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \qquad (1.1)$$

dir. Bu eşitlikten yararlanarak

$$s(A \cup B \cup C) = s(A \cup B) + s(C) - s[(A \cup B) \cap C]$$
$$= s(A \cup B) + s(C) - s[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$
$$= s(A \cup B) + s(C) - [s(A \cap B) + s(B \cap C) - s(A \cap B \cap C)]$$
$$= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

yazılabilir.



TANIM

A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı**, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm sıralı (a, b) ikililerinin kümesidir. Buna göre,

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

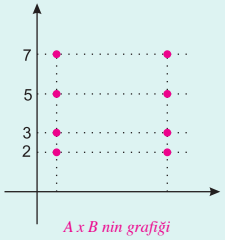
olur.

Bu küme yandaki şekilde gösterilmiştir.

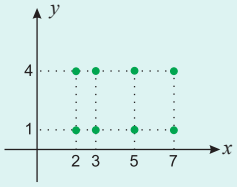
Sonlu A ve B kümeleri için

$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$$

olur. Burada s(A) ve s(B), A ve B kümelerinin eleman sayılarını göstermektedir.



A x B nin grafiği



B x A nın grafiği

ÖRNEK : $A = \{1, 4\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 7\}$ kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulup düzlemde gösteriniz.

Çözüm :

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (5, 1), (5, 4), (7, 1), (7, 2)\}$

Bu çarpımların grafikleri yanda verilmiştir.

UYARI

İki sıralı (a, b) ve (c, d) ikililerinin eşitliği

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

şeklinde tanımlandığından, $(a, b) \neq (b, a)$ dır. Dolayısıyla

$$A \times B \neq B \times A$$

dır. Eşitlik ancak $A = B$ olması halinde veya bu kümelerden en az birinin $\varnothing$ olması halinde vardır.

PROBLEMLER-1.1

1. A, B, C herhangi üç küme olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $A \setminus A = \varnothing$

   b. $A \setminus \varnothing = A$

   c. $A \Delta \varnothing = A$

   d. $A \cup B = B \cup A$

   e. $A \cap B = B \cap A$

   f. $A \Delta B = B \Delta A$

   g. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   h. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   ı. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   j. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   k. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

   m. $A' \setminus B' = B \setminus A$

   n. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

   o. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

   p. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

   b. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

   c. $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

   d. $A \Delta B = E \Leftrightarrow A = B'$

   e. $A \subset B \Leftrightarrow A' \supset B'$

   f. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subset A'$

   g. $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$

   h. $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

   i. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ veya $B = \varnothing$

   j. $(A \setminus B)' = (B \setminus A)' \Leftrightarrow A = B$

3. Her A kümesi için $(A')' = A$ olduğunu gösteriniz.

4. A, B, C kümeleri için

   a. $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

   b. $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

   eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

5. A, B, C kümeleri için

   $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

   olacağını gösteriniz.

6. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $A \Delta A = \varnothing$ d. $A \Delta E = A'$

   b. $A \Delta \varnothing = A$ e. $A \Delta A' = E$

   c. $A \Delta B = B \Delta A$

7. $A \Delta B = A \Delta C$ ise $B = C$ midir?

8. $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ olsun.

   $\bigcup_{n=1}^{m} A_n$ ve $\bigcap_{n=1}^{m} A_n$ kümelerini bulunuz.

1.2 SAYILAR

Bir kimsenin öğrenme sürecinde algılamaya başladığı kavramlardan biri de sayılardır. Bütün bilim dallarının gelişmesinde kaçınılmaz şekilde kullanılan matematik, en basit tanımı ile, insanların sayılarla uğraşmasından başka bir şey değildir. Deneye dayanan bütün bulguların da ancak sayılarla ifade edildikleri zaman bir değer kazanacağını hepimiz biliriz. Hayatımızın her anında nasıl sorusu yanında ne kadar sorusunun da aynı derecede öneme sahip olduğunu hatırlayacak olursak, sayıların vazgeçilmez kavramlar olarak bizimle beraber olduklarını anlarız.

Biz bu bölümde reel sayıların kısa bir özetini verecek, daha sonra lineer nokta kümelerinin özelliklerini inceleyeceğiz.

1.2.1. REEL SAYILAR

Herhangi bir teori kurulurken bu teorinin dayanacağı bazı temel kavramlara ihtiyaç vardır. Yani başta bazı şeyler kabul edilerek kavram ve teoriler bunların üzerine kurulur. Sayılar teorisinin gelişmesinde bu temel kavramlardan biri de Doğal Sayılar kavramıdır. Bilindiği gibi

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

kümesine **doğal sayılar kümesi***, bu kümenin elemanları olan *1, 2, 3, ...* sayılarına da **doğal sayılar** adı verilmektedir.

Matematikte karşımıza çıkabilecek bütün problemleri bu sayılar ile çözmek mümkün değildir. Örneğin $x + 2 = 1$ denkleminin doğal sayılar kümesinde bir çözümü yoktur. Başka bir deyişle bu denklemin kökü bir doğal sayı değildir. Çünkü x yerine *1, 2, 3, ...* sayılarından hangisini koyarsanız koyun denklem sağlanmaz. Bu sebeple doğal sayılar kümesi, m ve n doğal sayılar olmak üzere,

$$x + m = n$$

tipindeki denklemlerin köklerini de ihtiva edecek şekilde genişletilmiş ve **tam sayılar kümesi** denilen

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

kümesi elde edilmiştir. Demek ki tam sayılar kümesi doğal sayılara bu sayıların negatifleri ile sıfırın katılmasıyla elde edilmiştir.

* Bazı yazarlar sıfır sayısını da doğal sayılar kümesine katarlar.

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri için aşağıdaki önermelerin doğruluğu açıktır.

(i) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ ve $n \neq 1$ ise $n-1 \in \mathbb{N}$

(iii) $n \in \mathbb{Z}$ ve $n > 0$ ise $n \in \mathbb{N}$ dir.

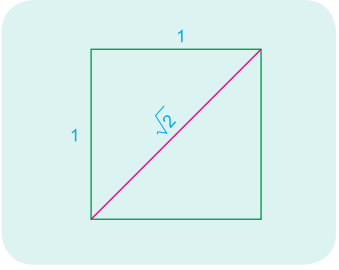
Tam sayılar kümesi de bütün ihtiyaçlarımıza cevap veremez. Örneğin p ve q birer tam sayı olmak üzere ($q \neq 0$),

$$qx = p$$

şeklindeki bir denklemin kökü bir tam sayı olmayabilir. Bu nedenle tam sayılar kümesi $qx = p$ tipindeki tüm denklemlerin köklerini de ihtiva edecek şekilde genişletilmiş ve bu kümeye **rasyonel sayılar kümesi** adı verilmiştir. $qx = p$ tipindeki denklemlerin kökleri $\frac{p}{q}$ şeklinde olduklarından rasyonel sayılar $\frac{p}{q}$ şeklinde yazılabilen sayılardır. Şu halde, rasyonel sayılar kümesini $\mathbb{Q}$ ile gösterecek olursak

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad ve \quad q \neq 0 \right\}$$

olur. İki tam sayının ± 1 den başka ortak böleni yoksa bu iki sayıya **aralarında asaldır**lar denir. c sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere $p/q = cp/cq$ olduğundan yukarıdaki p ile q sayıları aralarında asal kabul edilecektir. Aksi taktirde $\mathbb{Q}$ kümesinde birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunur. Diğer taraftan her m tam sayısı $m/1$ şeklinde yazılabildiğinden, bir rasyonel sayıdır. Demek ki $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini kapsar.



Bir kenarının uzunluğu 1 metre olan karenin köşegeninin uzunluğu $\sqrt{2}$ metredir. Şimdi bu $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olup olmadığını araştıralım. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu göstermek için bunun p/q şeklinde yazılabildiğini göstermek gerekir. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ rasyoneldir. O halde p ve q aralarında asal sayılar olmak üzere $\sqrt{2} = p/q$ biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın karesi alınır ve q^2 ile çarpılırsa $2q^2 = p^2$ bulunur. Birinci taraf çift sayı olduğundan ikinci taraf, yani p^2 de çifttir. Dolayısıyla p çifttir. O halde r bir tam sayı olmak üzere $p = 2r$ yazılabilir. O zaman $2q^2 = (2r)^2$ buradan da $q^2 = 2r^2$ bulunur ki bu q^2 nin ve dolayısıyla q nun çift olduğunu gösterir. Hem p hem de q çift olduğundan 2 sayısı bunların ortak bölenidir. Halbuki biz p ve q sayılarını asal kabul etmiştik. Bu bir çelişmedir. O halde $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir. Rasyonel olmayan bu sayılara **irasyonel sayılar** adı verilir. Rasyonel ve irasyonel sayıların hepsine birden **reel sayılar kümesi** denir, $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Yukarıdaki tanımlar gözönüne alındığında sayı kümeleri arasında

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

bağıntılarının bulunduğu açıktır.

TANIM

a sayısı $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ kümesinin en küçük elemanıdır $\Leftrightarrow a \in \mathbb{E}$ ve $\forall x \in \mathbb{E}$ için $a \leq x$ dir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ den farklı en önemli özelliğini bir postulat olarak verelim.

İyi Sıralı Olma Özelliği **POSTÜLAT**

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin hiçbiri için yukarıdaki özellik geçerli değildir, zira bu kümelerin hiç birinin en küçük elemanı yoktur.

1.2.2. TÜMEVARIM YÖNTEMİ

Şimdi **tümevarım yöntemi** denilen ispat yönteminin geçerliliğini gösteren bir teoremi verelim.

TEOREM 1.2

$P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bir önerme olsun. Bu önerme için

(i) $P(1)$ doğru

(ii) bir $k \in \mathbb{N}$ için $P(k)$ doğru olduğunda $P(k+1)$ doğru ise $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

İspat : Kabu edelim ki teorem yanlış olsun. Bu taktirde

$$\mathbb{E} = \{n \in \mathbb{N} : \ P(n) \text{ yanlıştır}\}$$

kümesi boş değildir. Bu durumda iyi sıralı olma özelliğinden E nin bir en küçük elemanı vardır. Bu eleman a olsun. (i) hipotezinden $a \neq 1$ dir. O halde $a-1 \in \mathbb{N}$ dir. $a-1 < a$ olduğundan $P(a-1)$ doğrudur. (ii) hipotezinde $k = a-1$ alınıra $P(k+1) = P(a)$ doğru olur. Bu durumda $a \notin \mathbb{E}$ bulunur. Bu çelişkidir. Şu halde $P(n)$ önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. □

Bu teoreme göre bir $P(n)$ önermesinin doğruluğunu göstermek için

(i) önermenin $n = 1$ için doğru olduğunu,

(ii) önermenin $n = k$ için doğru olduğu kabul edildiğinde $n = k + 1$ için de doğru olacağını göstermek yeterdir. Bu metoda **Tümevarım Yöntemi** adı verilir.

ÖRNEK : Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}\, n(n+1)(n+2) \qquad (1.2)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $n = 1$ için $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 2 = 2$ doğru olduğundan önerme $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için önerme doğru olsun. Yani bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3}\, k(k+1)(k+2) \qquad (1.3)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Bundan faydalanarak, önermenin n = k + 1 için de doğru olacağını, yani

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}\,(k+1)(k+2)(k+3) \qquad (1.4)$$

olduğunu göstereceğiz.

(1.3) eşitliğinin her iki yanına $(k+1)(k+2)$ ifadesi eklenirse eşitlik bozulmaz. Buna göre

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}\, k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

olur. Şimdi bu eşitliğin sağ tarafında bulunan ifadenin (1.4) eşitliğinin sağ tarafında bulunan ifadeye eşit olduğunu göstermek gerekir. Basit bir cebirsel işlemle

$$\frac{1}{3}\, k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}\,(k+1)(k+2)(k+3)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. O hâlde önerme $n = k + 1$ için de doğrudur, yani $k \in D$ ise $(k+1) \in D$ dir. Buna göre verilen önerme her n $\in \mathbb{N}$ için doğrudur.

ÖRNEK : $a > -1$ reel sayısı ve her n $\in \mathbb{N}$ için

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad (1.5)$$

olduğunu ispatlayınız **(Bernoulli Eşitsizliği)**.

Çözüm : $n = 1$ için $1 + a \geq 1 + a$ bulunur ki doğrudur ($p \geq q$ önermesinin $p = q$ veya $p > q$ önermelerinden birinin doğru olması halinde doğru olduğunu hatırlayınız.) Bu önerme $n = k$ için doğru, yani

$$(1+a)^k \geq 1+ka \qquad (1.6)$$

olsun. Bundan yararlanarak

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)\,a \qquad (1.7)$$

olduğunu göstereceğiz. (1.6) eşitsizliğinin her iki yanını pozitif $1+a$ sayısı ile çarparsak

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)\,(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a,$$

buradan da

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu (1.7) eşitsizliğidir.

ÖRNEK : Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^{3n+2}-2^{n+1}$ sayısının 7 ile bölünebileceğini gösteriniz.

Çözüm : Buradaki önerme "Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^{2n+2}-2^{n+1}$ sayısı ile 7 ile bölünür" dür.

$n=1$ için

$$3^{2n+2}-2^{n+1} = 3^4-2^2 = 81-4 = 77 = 7\cdot 11$$

olup 7 ile bölünür. O halde önerme $n=1$ için doğrudur.

Önerme $n=k$ için doğru olsun. Bu taktirde $3^{2k+2}-2^{k+1}$ sayısı 7 nin bir tam katıdır. Buna göre öyle bir p tam sayısı vardır ki

$$3^{2k+2}-2^{k+1} = 7p \qquad (1.8)$$

dir. Şimdi önermenin $n=k+1$ için de doğru olduğunu, yani

$$3^{2(k+1)+2}-2^{(k+1)+1} = 3^{2k+4}-2^{k+2}$$

sayısının 7 ile bölünebileceğini göstereceğiz. (1.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 3^{2k+4}-2^{k+2} &= 3^{2k+2}\cdot 3^2-2^{k+1}\cdot 2 = 3^{2k+2}(7+2)-2^{k+1}\cdot 2 \\ &= 7\cdot 3^{2k+2}+2.(3^{2k+2}-2^{k+1}) = 7\cdot 3^{2k+2}+2\cdot 7p \\ &= 7(3^{2k+2}+2p) \end{aligned}$$

yazılabilir. $3^{2k+2}+2p$ bir tam sayı olduğundan $3^{2k+4}-2^{k+2}$ sayısı 7 nin bir tam katıdır, yani 7 ile bölünür. ❐

Şurasını belirtelim ki, tümevarım metodunda n nin 1 den başlama mecburiyeti yoktur. Örneğin herhangi bir $p(n)$ önermesi $n=r$ tam sayısı için doğru ve k için

doğruluğundan $k + 1$ için de doğruluğu elde edilebiliyorsa $p(n)$ önermesi $n \geq r$ şartını sağlayan her n tam sayısı için doğrudur. r bir tam sayı olmak üzere

$$\mathbb{N}_r = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$$

olsun.

ÖRNEK : Her $n \in \mathbb{N}_5$ için

$$3^{n-1} < n!$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $n = 5$ için $3^4 < 5!$ buradan da $81 < 120$ bulunur ki doğrudur. $n = k$ için doğru olsun, yani

$$3^{k-1} < k! \qquad (1.9)$$

bulunsun. Bundan faydalanarak önermenin $n = k + 1$ için de doğru, yani

$$3^k < (k+1)! \qquad (1.10)$$

olduğunu göstermeliyiz. k ≥ 5 için

$$3 < k + 1$$

olduğu açıktır. (1.9) eşitsizliği ile bu son eşitsizliği taraf tarafa çarparsak, eşitsizlikteki terimler pozitif olduğundan, eşitsizlik bozulmaz. Buna göre

$$3^{k-1} \cdot 3 < k!\,(k+1) \Rightarrow 3^k < (k+1)!$$

yazılabilir ki bu (1.10) eşitsizliğidir. ❐

$a + b$ şeklindeki bir cebirsel ifadeye iki terimli veya binom denir. k bir doğal sayı ve p bir reel sayı olmak üzere

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

şeklinde tanımlanan $\binom{p}{k}$ sayısına **binom katsayısı** adı verilir.

Eğer n ve k birer doğal sayı iseler, $k \leq n$ için

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

yazılabilir. Eğer $k > n$ ise

$$\binom{n}{k} = 0$$

olur. Basit cebirsel işlemlerle

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (1.11)$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k} \tag{1.12}$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \tag{1.13}$$

eşitliklerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi Newton'un binom formülünü ifade ve ispat edelim.

ÖRNEK : a ve b herhangi iki reel sayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n \tag{1.14}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $n = 1$ için $(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}b^1 \Rightarrow a+b=a+b$ olur ki bu doğrudur.

Verilen eşitlik $n = k$ için doğru olsun. Yani

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k \tag{1.15}$$

olsun. Şimdi bundan yararlanarak (1.14) binom formülünün $n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Bunun için (1.15) eşitliğinin her iki yanını $(a + b)$ ile çarpalım. (1.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\right]\\&=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\ldots+\binom{k}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\\&+\binom{k}{0}a^kb+\ldots+\binom{k}{k-2}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k-1}ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}\\&=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right]a^kb+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k-2}\right]a^2b^{k-1}\\&=\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right]ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}\\&=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^k+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}\end{aligned}$$

yazılabilir. Demek ki verilen eşitlik $n = k + 1$ için de doğrudur.

Binom formülünde $a = b = 1$ alınırsa

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (1.16)$$

$a = 1, b = -1$ alınırsa,

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (1.17)$$

bağıntıları elde edilir.

(1.16) ve (1.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots\right]=2^n$$

bulunur. Her iki taraf 2 ile bölünürse

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1} \qquad (1.18)$$

eşitliği elde edilir.

(1.16) eşitliğinden (1.17) çıkarılırsa

$$2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\right]=2^n$$

buradan da

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1} \qquad (1.19)$$

eşitliği elde edilir. (1.18) ve (1.19) eşitliklerindeki toplamlar, n nin tek veya çift oluşuna göre $\binom{n}{n}$ veya $\binom{n}{n-1}$ ile sonlanırlar.

1.2.3. TOPLAM VE ÇARPIM SEMBOLLERİ

Matematikte en çok kullanılan sembollerden ikisi $\sum$ ve $\prod$ dir. Bunlar

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \qquad (1.20)$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n \qquad (1.21)$$

şeklinde tanımlanırlar.

ÖRNEK : $x \neq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

bağıntısının doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm : $n = 0$ için

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2}$$

olur.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{-(1+x)+2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$$

olduğundan önerme doğrudur.

Önerme $n = p$ için doğru, yani

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{p+1}}{1-x^{2^{p+1}}} \qquad (1.22)$$

olsun. $n = p + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. (1.22) eşitliğinin her iki tarafına $2^{p+1} / \left(1+x^{2^{p+1}}\right)$ ifadesi eklenirse

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{p+1}}{1+x^{2^{p+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{p+1}}{1-x^{2^{p+1}}} + \frac{2^{p+1}}{1+x^{2^{p+1}}} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{p+1} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + 2^{p+1}\left(\frac{1}{1-x^{2^{p+1}}} + \frac{1}{1+x^{2^{p+1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} + 2^{p+1}\frac{1+x^{2^{P+1}}+1-x^{2^{p+1}}}{1-\left(x^{2^{p+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{2^{p+1}}{1-x^{2^{p+1}}}$$

elde edilir ki bu, önermenin $n = p + 1$ için de doğru olduğunu gösterir.

PROBLEMLER-1.2

1. a ve b pozitif iki sayı olsun,

   $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

   olduğunu gösteriniz.

2. a bir tek sayı olduğunda $a^2 - 1$ sayısının 8 ile bölünebildiğini gösteriniz.

3. a ve b, $a < b$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun

   $a < \frac{a+b}{2} < b$

   olduğunu gösteriniz.

4. x ve y, $x < y$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun. $x < z < y$ olacak şekilde en az bir z reel sayısının varlığını gösteriniz. Bu özellikten yararlanarak, "Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz çoklukta reel sayı vardır" diyebilir miyiz?

5. x rasyonel, $x \neq 0$ ve y irrasyonel olsun.

   $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, x / y ve y / x sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

6. İki irrasyonel sayının toplamı ve çarpımı daima irrasyonel midir?

7. "Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ dir" önermesini $p(n)$ ile gösterelim.

   a. Herhangi bir k doğal sayısı için $p(k)$ doğru olduğunda $p(k + 1)$ de doğrudur, gösteriniz.

   b. "Tümevarım metodu gereğince $p(n)$ önermesi her n doğal sayısı için doğrudur" diyebilir miyiz?

8. Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

   b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1)$

   c. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

   d. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

   e. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$

   f. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n (n + 1)(2n + 1)$

   g. $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (n + 1) 2^{n-1} = n \cdot 2^n$

   h. $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

   ı. $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n - 1) d)$
   $= \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$

   i. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   j. $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, $(a \neq 1)$

9. $x \neq 1$ için

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$ olduğunu gösteriniz.

10. $x \neq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}$$

olduğunu gösteriniz.

11. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

olduğunu gösteriniz.

12. $0 < p < 1$ için

$(1-p)^n \geq 1-np$

olduğunu gösteriniz.

13. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_n \geq 0$ için

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\geq 1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

14. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha_n < 1$ için

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)\geq 1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

15. Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $(2n)! \leq 2^{2n}(n!)^2$

b. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

c. $3^n \geq n \cdot 2^n$

d. $2! \cdot 4! \ldots (2n)! \geq [(n+1)!]^n$

16. Her $n \in \mathbb{N}_2$ için

$3^n + 4^n \leq 5^n$

olduğunu gösteriniz.

17. Her $n \in \mathbb{N}$ için

a. $n(2n+1)(7n+1)$ sayısının 6 ile

b. $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile

c. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ sayısının 7 ile

d. $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ sayısının 17 ile

e. $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$ sayısının 5 ile

f. $12^n + 10$ sayısının 11 ile

bölünebileceğini gösteriniz.

18. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ifadesini sadeleştirerek sonucu bulunuz. Bulduğunuz sonucu tümevarımla ispatlayınız.

19. n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

20. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$

olduğunu gösteriniz.

21. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}=4^n$$

olduğunu gösteriniz.

22. Ardışık n tane ardışık doğal sayının çarpımının n! ile bölünebildiğini gösteriniz.

1.3 LİNEER NOKTA KÜMELERİ

Bilindiği gibi her bir reel sayıya sayı doğrusu üzerinde bunu absis olarak kabul eden bir tek nokta ve her bir noktaya absis olarak bir tek reel sayı karşılık gelir. Bu nedenle elemanları reel sayılar olan kümelere lineer nokta kümeleri adı verilir.

Bu kesimde gözönüne alacağımız kümeler lineer nokta kümeleri olacaktır. Bu kümelerin temel özelliklerini bir özet halinde vereceğiz. Lineer nokta kümeleri içinde en çok kullanılanları aralıklardır. Aralıkları tanımlamadan önce $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $<$ bağıntısının aşağıdaki özellikleri sağladığını hatırlayalım :

(i) **Üç durum özelliği :** $\mathbb{R}$ de a ve b elemanları verildiğinde

$a < b$, $a > b$ veya $a = b$

bağıntılarından sadece biri sağlanır.

(ii) **Geçişme özelliği :**

$a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ dir.

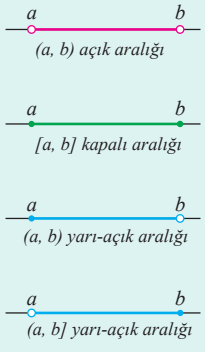
(iii) **Toplama özelliği :**

$a < b$ ve $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$ dir.

(iv) **Çarpılabilme özelliği :**

$a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow ac < bc$ dir.

$a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ dir.



TANIM

a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun.

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine a ve b sayıları ile belirtilen **açık aralık** denir ve (a, b) biçiminde gösterilir. Benzer olarak

$$\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$$

kümesine **kapalı aralık** adı verilir $[a, b]$ ile gösterilir.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x < b\}$$

kümelerine de **yarı–açık aralıklar** adı verilir.

TANIM

A bir lineer nokta kümesi olsun. Eğer A kümesinin her x elemanı için $x \geq a$ bağıntısını sağlayan bir a sayısı varsa A kümesine **alttan sınırlıdır** denir, a sayısına da A kümesinin bir **alt sınırı** adı verilir. Benzer olarak, eğer A nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesine **üstten sınırlı** bir küme ve b sayısına da A kümesinin bir **üst sınırı** adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı kümelere kısaca **sınırlı kümeler** denir.

Her sonlu lineer küme sınırlıdır. Çünkü, kümenin en küçük elemanı (veya ondan daha küçük herhangi bir sayı) kümenin bir alt sınırı, kümenin en büyük elemanı (veya ondan büyük herhangi bir sayı) kümenin bir üst sınırıdır.

ÖRNEK :

$C = \{x \in \mathbb{R} : \ 1 < x < 2\}$ kümesi sonlu mudur? C kümesi sınırlı mıdır?

Çözüm : C kümesi sonsuz elemanlıdır. 1 veya 1 den küçük her sayı bir alt sınır, 2 veya 2 den büyük her sayı bir üst sınırdır. Dolayısıyla C kümesi sınırlıdır.

ÖRNEK :

$\mathbb{A} = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi sınırlı mıdır?

Çözüm :

$\mathbb{A} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ kümesi sınırlıdır. Çünkü 1 ve 1 den büyük her sayı bir üst sınır, 0 ve 0 dan küçük her sayı bir alt sınırdır.

ÖRNEK : $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sınırlı mıdır?

Çözüm : $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir, zira $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \leq M$ olacak biçimde bir M reel sayısı yoktur.

En küçük üst sınır ve en büyük alt sınırla ilgili olan aşağıdaki önermeyi aksiyom olarak veriyoruz.

AKSİYOM

Üstten sınırlı bir kümenin üst sınırları içinde bir en küçüğü, alttan sınırlı bir kümenin alt sınırlarının bir en büyüğü vardır.

TANIM

A, reel sayılar kümesinin üstten sınırlı bir alt kümesi olsun. a kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A kümesinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir ve *sup*A ile gösterilir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A nın **en büyük alt sınır** veya **infimumu** denir, *inf*A ile gösterilir*.

Bir kümenin bir üst sınırı varsa sonsuz çoklukta üst sınırı, fakat bir tane supremumu vardır. Bir küme alttan sınırlı ise sonsuz çoklukta alt sınırı fakat bir tek infimumu vardır.

ÖRNEK : $A = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin varsa supremum ve infimumunu bulunuz. Bu sayılar kümenin birer elemanı mıdır?

Çözüm : $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ kümesi için 1 ve 1 den büyük her sayı birer üst sınırdır, zira $\forall\, x \in A$ için $x \leq 1$ dir. Üst sınırların en küçüğü 1 dir. 1 den küçük üst sınır yoktur. Çünkü kümenin elemanlarından biri 1 dir. O halde sup A = 1 olup kümenin bir elemanıdır. *İnf*A = 0 dır. Zira her $x \in A$ için $x > 0$ dır. Sıfır alt sınırların en büyüğüdür. Eğer bir $b > 0$ sayısının bir alt sınır olduğu düşünülürse,

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \geq b$ olur ki bu mümkün değildir, zira yeter derece n ler için $\left(n > \frac{1}{b} \text{ için}\right)$ $\frac{1}{n} < b$ dir. $0 \notin A$ dır.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi, *sup*A ve *inf*A, A kümesine ait olabilir de olmayabilir de.

ÖRNEK : Aşağıdaki kümelerin varsa supremum ve infimumlarını bulunuz. Bunların kümeye ait olup olmadığını belirtiniz.

a. $A = \left\{\frac{1}{r} : \ r \in \mathbb{Q} \ \text{ ve } \ r < 0\right\}$

b. $B = \{x \ : \ 1 < x < 2, \ x \in \mathbb{R}\}$

c. $C = \left\{\frac{n^2+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

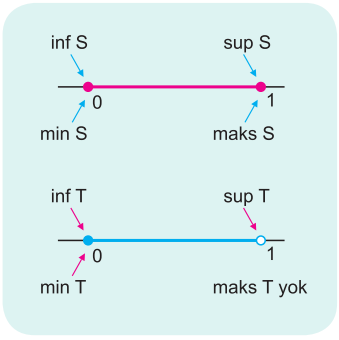
Çözüm :

a. A kümesi için supA = 0 olup kümenin bir elemanı değildir. *inf*A yoktur.

* Bazı kaynaklar sup yerine eküs, inf yerine ebas yazılışını kullanırlar.

b. B kümesi $(1, 2)$ açık aralığıdır. $sup\mathrm{B} = 2$, $inf\mathrm{B} = 1$ olup her ikisi de B nin elemanı değildir.

c. $\mathrm{C} = \left\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \ldots, n + \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ kümesi üstten sınırlı olmadığından $sup\mathrm{C}$ yoktur. C nin en küçük elemanı 2 olduğundan $inf\mathrm{C} = 2$ olup C ye aittir.



TANIM

Eğer bir A kümesinin en küçük üst sınırı bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin **en büyük elemanı** veya **maksimum elemanı** denir, $maksA$ ile gösterilir. Benzer olarak, eğer kümenin en büyük alt sınırı kümenin bir elemanı ise bu elemana A kümesinin **en küçük elemanı** veya **minimum elemanı** denir, $minA$ ile gösterilir.

$S = [0, 1]$ ve $T = [0, 1)$ olsun. $SupS = SupT = 1$, $infS = infT = 0$ dır. S kümesinin supremumu ve infimumu kümeye ait olduğundan $maksS = 1$, $minS = 0$ olacaktır. $infT$ kümeye ait olduğundan $minT = 0$ dır. T kümesinin maksimumu yoktur, çünkü supremumu kümeye ait değildir.

Supremum ve infimumun yaklaşım özellikleri **TEOREM 1.3**

A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\dot{I}nf\mathrm{A} = a$, $sup\mathrm{A} = b$ diyelim. a ve b sayılarının şu özellikleri vardır :

1. Her $x \in \mathrm{A}$ için $x \geq a$ dır.
2. Her $\delta > 0$ için

$$x < a + \delta \qquad (1.23)$$

olacak şekilde en az bir $x \in \mathrm{A}$ vardır.

3. Her $x \in \mathrm{A}$ için $x \leq b$ dir.
4. Her $\delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir $x \in \mathrm{A}$ vardır.

İspat :

1. a bir alt sınır olduğundan her $x \in \mathrm{A}$ için $x \geq a$ dır.
2. $\forall x \in \mathrm{A}$ için $x \geq a + \delta$ olsaydı $a + \delta$ da bir alt sınır olurdu. $a < a + \delta$

olacağından a dan büyük bir alt sınır bulunmuş olur. Bu a nın en büyük alt sınır olmasıyla çelişir.

(3) ve (4) benzer biçimde ispatlanır. ❐

$E \subset \mathbb{N}$ bir sınırlı küme ise yukarıdaki teoremden

$$sup E - \varepsilon < n \leq sup E$$

olacak biçimde en az bir $n \in E$ vardır.

Eğer $sup E = n_0$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$n_0 - \varepsilon < n \leq n_0 \Rightarrow n = n_0$$

yazılabilir. Bu da $sup E = n_0$ sayısının E nin bir elemanı olduğunu gösterir.

Şimdi de birçok yerde kullanacağımız, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin supremumunun varlığı ile ilgili önemli bir sonucu bir aksiyom olarak ifade edelim.

AKSİYOM

Tamlık Aksiyomu

E, $\mathbb{R}$ nin üstten sınırlı bir alt kümesi ise E bir sonlu supremuma sahiptir.

TANIM

Bir a reel sayısının **mutlak değeri**

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|a|$ sayısıdır.

Yukarıdaki tanıma göre, a ister negatif ister pozitif olsun. $|a|$ daima pozitiftir. $|0| = 0$ olacağından her a reel sayısı için $|a| \geq 0$ dır. Ayrıca daima $|a|^2 = a^2$ olacağından

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

yazılabilir. Bu ifadeye mutlak değerin **cebirsel tanımı** denir.

Şimdi mutlak değerle ilgili özellikleri teoremler halinde özetleyelim.

TEOREM 1.4

$x \in \mathbb{R}$ ve $a \geq 0$ olsun.

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

dır.

İspat : $|x| \leq a$ olsun. Bu eşitsizlik -1 ile çarpılırsa $-|x| \geq -a$ bulunur.

$x \geq 0$ olsun. Tanım gereği $|x| = x$ olacağından $-a \leq 0 \leq x = |x| \leq a$, buradan da $-a \leq x \leq a$ bulunur.

$x < 0$ olsun. Bu taktirde $-a \leq -|x| = x < 0 \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ bulunur. O halde her x için $-a \leq x \leq a$ olur.

Karşıt olarak, $-a \leq x \leq a$ olsun. Bu durumda $x \leq a$ ve $-a \leq x$ dir. İkinci eşitsizlik -1 ile çarpılırsa $a \geq -x$ bulunur.

$x \geq 0$ için $|x| = x \leq a$ ve $x < 0$ için $|x| = -x \leq a$ olur. Şu halde her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \leq a$ dır.

TEOREM 1.5

Her $a \in \mathbb{R}$ için $-|a| \leq a \leq |a|$ dır.

İspat : $a < 0$ ise $-a > 0$ ve $|a| = -a$ yani $a = -|a| < 0$ dır. Şu halde $a < 0$ için $-|a| = a < |a|$ dır. $a = 0$ ise $|a| = 0$ ve $-|a| = 0$ olup $-|a| = a = |a|$ dır. $a > 0$ ise $a = |a|$ buradan da $-|a| = -a < 0$ olur. Buna göre $-|a| < a = |a|$ dır.

TEOREM 1.6

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.24}$$

dır **(Üçgen eşitsizliği)**.

İspat : Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \leq |a|$, $b \leq |b|$ olacağından $a + b \leq |a| + |b|$ dir. Aynı şekilde $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$ olduğundan $-(a + b) \leq |a| + |b|$ dir. O halde, mutlak değer tanımı gereğince,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.25}$$

olur. Bu eşitlikte a yerine $-a$, b yerine de $a + b$ yazalım. Eşitsizlik her $a, b \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan bu değerler için de doğru olacaktır. Bu durumda

$$|b| - |a| \leq |a + b| \tag{1.26}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (1.25) eşitsizliğinde b yerine $-b$, a yerine de $a + b$ yazılırsa

$$-(|b| - |a|) \le |a + b| \qquad (1.27)$$

bulunur. (1.26) ve (1.27) den

$$\big||a| - |b|\big| \le |a + b|$$

eşitsizliği elde edilir.

(1.25) eşitsizliği ikiden fazla reel sayı için de doğrudur. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ reel sayılar olmak üzere, tümevarımla gösterilebileceği gibi

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| \qquad (1.28)$$

yazılabilir.

TEOREM 1.7

x, y, $a \in \mathbb{R}$ olsun.

(i) $\forall \varepsilon > 0$ için $x < y + \varepsilon$ ise $x \le y$ dir.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $x > y - \varepsilon$ ise $x \ge y$ dir.

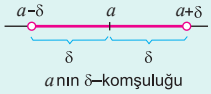
(iii) $\forall \varepsilon > 0$ için $|a| < \varepsilon$ ise $a = 0$ dır.

İspat : (i) $\forall \varepsilon > 0$ için $x < y + \varepsilon$ olsun. Kabul edelim ki $x > y$ olsun. $x - y = \varepsilon_0$ denirse $\varepsilon_0 > 0$ dır. Buradan $x = y + \varepsilon_0$ olur. Bu durumda $y + \varepsilon_0$, x den büyük olamaz. Bu da $\varepsilon = \varepsilon_0$ için hipotezle çelişir. Şu halde $x \le y$ dir.

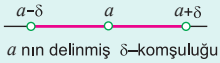
Karşıt olarak verilen bir $\varepsilon > 0$ için $x \le y$ olsun. Bu durumda ya $x < y$ ya da $x = y$ dir. Eğer $x < y$ ise $x < y + \varepsilon$ olacağı açıktır. Eğer $x = y$ ise $x < y + \varepsilon$ dir, zira $0 < \varepsilon \Rightarrow x + 0 < x + \varepsilon = y + \varepsilon \Rightarrow x < y + \varepsilon$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) Kabul edelim ki $\forall \varepsilon > 0$ için $x > y - \varepsilon$ olsun. Buradan $-x < -y + \varepsilon$ yazılabilir. (i) den $-x \le -y$, buradan da $x \ge y$ bulunur. Karşıtı (i) dekine benzer olarak yapılır.

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ için $|a| < \varepsilon$ olsun. Bu taktirde $-\varepsilon < a < \varepsilon \Rightarrow 0 - \varepsilon < a < 0 + \varepsilon$ yazılabilir. (i) ve (ii) den $0 \le a \le 0 \Rightarrow a = 0$ bulunur.



a nın δ–komşuluğu



a nın delinmiş δ–komşuluğu

TANIM

δ bir pozitif sayı olsun.

$$K = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < \delta\}$$

kümesine a noktasının **δ–komşuluğu** denir. $K \setminus \{a\}$ kümesine de a nın **delinmiş δ–komşuluğu** adı verilir.

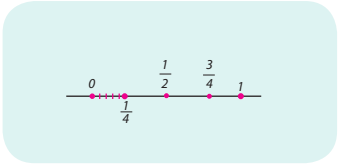
$|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$ olduğundan, bir a noktasının δ–komşuluğu $(a-\delta, a+\delta)$ açık aralığından ibarettir.

TANIM

$\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her δ–komşuluğunda $\mathbb{A}$ kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına $\mathbb{A}$ kümesinin bir **yığılma noktasıdır** denir.

ÖRNEK : $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right.$ kümesinin yığılma noktasını bulunuz. Yığılma noktası A ya ait midir?

Çözüm : $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right.$ kümesinin yığılma noktası 0 noktasıdır. Bu nokta kümeye ait değildir.



ÖRNEK : $B = [0, 1]$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

Çözüm : $B = [0, 1]$ kümesinin her elemanı bir yığılma noktasıdır. Kümenin kendisine ait olmayan yığılma noktası yoktur.

ÖRNEK : Eğer varsa $\mathbb{N}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

Çözüm : $\mathbb{N}$ kümesinin yığılma noktası yoktur, zira her $a \in \mathbb{N}$ sayısının $\frac{1}{2}$–komşuluğunda $\mathbb{N}$ kümesinin a dan farklı elemanı yoktur.

TEOREM 1.8

Bir kümenin supremumu (veya infimumu) kümeye ait değilse kümenin bir yığılma noktasıdır.

İspat : C bir küme ve $sup C = b$ olsun. b kümeye ait olmadığından her $x \in C$ için

$$x < b$$

dir. (1.22) den her $\delta > 0$ için C nin en az bir x elemanı vardır ki

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde en az bir x elemanı vardır. O hâlde C nin en az bir x *elemanı* için

$$b - \delta < x < b + \delta$$

eşitsizliği sağlanır. b nin her δ– komşuluğunda kümenin b den farklı en az bir x elemanı bulunduğundan b, C kümenin bir yığılma noktasıdır.

İnfimumu için ispat benzer şekilde yapılabilir.

TANIM

Bir A kümesinin en sağda olan yığılma noktasına üst limit veya limit süperiyör denir ve

$limsup\mathbb{A}$ veya $\overline{lim}\mathrm{A}$

şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, $\mathbb{A}$ kümesinin en solda olan yığılma noktasına alt limit veya limit inferiyör denir.

$liminfA$ veya $\underline{lim}\mathrm{A}$

ile gösterilir.

TEOREM 1.9

a ve b pozitif reel sayıları verildiğinde $b < na$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat : $b < a$ ise $n = 1$ alınabilir. $a \leq b$ olsun.

$$E = \{k \in \mathbb{N} : \ ka \leq b\}$$

kümesini gözönüne alalım. E boş değildir. Çünkü $1 \in E$ dir. E deki herbir K için $ka \leq b$ ve $a > 0$ olduğundan $k \leq \frac{b}{a}$ olur. Şu halde E kümesi üstten $\frac{b}{a}$ ile sınırlıdır. Tamlık Aksiyomumundan E nin bir s supremumu vardır ve $s \in E$ dir. Dolayısıyla $s \in \mathbb{N}$ dir. $n = s + 1$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olup $n \notin E$ dir. Böylece $na > b$ dir.

TEOREM 1.10

$a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için $a < b$ olsun. $\mathbb{Q}$ nun $a < q < b$ olacak biçimde en az bir q elemanı vardır.

İspat : $b - a > 0$ olduğundan, Arşimet prensibi gereğince $n(b-a) > 1$ olacak biçimde en az bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

1. durum : $b > 0$ olsun. $\left\{k \in \mathbb{N} : \ b < \frac{k}{n}\right\}$ kümesini gözönüne alalım. Arşimet prensibinden $E \neq \varnothing$ dir. Böylece İyi Sıralama Prensibinden, E en küçük elemana sahiptir. Bu eleman k_0 olsun. $m = k_0 - 1$ ve $q = \frac{m}{n}$ diyelim. $m < k_0$ ve k_0, E nin en küçük elemanı olduğundan $m \notin E$ dir. Bu durumda m için iki durum sözkonusudur. Ya $m \leq 0$ veya $b > \frac{m}{n} = q$ dur. Her iki durumda da $q < b$ olur. $k_0 \in E$ olduğundan $b \leq \frac{k_0}{n}$ dır. Buradan

$$a = b - (b - a) < \frac{k_0}{n} - \frac{1}{n} = \frac{k_0 - 1}{n} = q$$

olacak biçimde bir n seçilebilir. Bu durumda $a < q < b$ bulunur.

2. durum : $b \le 0$ olsun. $k + b > 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. 1. duruma göre bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır ki $k + a < r < k + b$ olur. $q = r - k$ denirse $q \in \mathbb{Q}$ olup $a < q < b$ dir.

SONUÇ

$x > 1$ ve $x \notin \mathbb{N}$ ise $\exists n \in \mathbb{N}$ öyle ki $n < x < n + 1$ olur.

İspat: Arşimet Prensibinden $E = \{m \in \mathbb{N} : x < m\}$ boş değildir. İyi Sıralı Olma Özelliğinden, E bir en küçük elemana sahiptir. Bu eleman m_0 olsun. $n = m_0 - 1$ diyelim. $m_0 \in E$ olduğundan $n + 1 = m_0 > x$ dir. m_0 en küçük eleman olduğundan $n = m_0 - 1 \le x$ dir. $x \notin \mathbb{N}$ olduğundan $n \neq x$ dir. Dolayısıyla $n < x < n + 1$ dir. □

Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde x den büyük olmayan tam sayıların bir en büyüğü ile x den küçük olmayan tam sayıların bir en küçüğü vardır.

TANIM

$x \in \mathbb{R}$ olsun. x den büyük olmayan tam sayıların en büyüğüne x in **tabanı** denir. $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir. Bu sayı bazı kaynaklarda x in **tam kısmı** olarak adlandırılıp $[\![x]\!]$ sembolüyle gösterilir. x den küçük olmayan tam sayıların en küçüğüne x in **tavanı** denir $\lceil x \rceil$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre

$$[\![2,5]\!] = 2, \quad [\![3,1]\!] = 3, \quad [\![-3,7]\!] = -4, \quad [\![\pi]\!] = 3, \quad [\![5]\!] = 5$$

$$\lceil 2,5 \rceil = 3, \quad \lceil 3,1 \rceil = 4, \quad \lceil -3,7 \rceil = -3, \quad \lceil \pi \rceil = 4, \quad \lceil 5 \rceil = 5$$

olur. Yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi, her a sayısı onun $[\![a]\!]$ tam kısmı ile $0 \le t < 1$ özelliğini sağlayan kesir kısmının toplamı olarak

$$a = [\![a]\!] + t, \quad 0 \le t < 1 \qquad (1,29)$$

biçiminde yazılabilir. Örneğin

$2,5 = 2 + 0,5$

$3,1 = 3 + 0,1$

$\sqrt{2} = 1 + 0,41...$

$-3,7 = -4 + 0,3$

yazılabilir. a bir tam sayı olduğunda $t = 0$, diğer durumlarda $0 < t < 1$ dir.

ÖRNEK : $2[\![1,7]\!]$ ve $[\![2.(1,7)]\!]$ sayılarını hesaplayınız.

Her k tam sayısı ve her a reel sayısı için $k.[\![a]\!] = [\![ka]\!]$ yazılabilir mi?

Çözüm : $2.[\![1,7]\!] = 2.1 = 2$ ve $[\![2.(1,7)]\!] = [\![3,4]\!] = 3$ olacağından

$2.[\![1,7]\!] \neq [\![2.(1,7)]\!]$ dir. O halde $k.[\![a]\!] = [\![ka]\!]$ eşitliği bazen sağlanmaz.

ÖRNEK : $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. $[\![a+b]\!] \geq [\![a]\!] + [\![a]\!]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : (1.29) dan

$$a = [\![a]\!] + t_1 \ , \ 0 \leq t_1 < 1$$

$$b = [\![b]\!] + t_2 \ , 0 \leq t_2 < 1$$

yazılabilir. Bunlar taraf tarafa toplanırsa

$$a + b = [\![a]\!] + [\![b]\!] + (t_1 + t_2), \quad 0 \leq t_1 + t_2 < 2$$

elde edilir.

$0 \leq t_1 + t_2 < 1$ ise

$$[\![a+b]\!] = [\![a]\!] + [\![b]\!] \tag{1.30}$$

olur. $1 \leq t_1 + t_2 < 2$ ise $t_1 + t_2$ nin içinde bir tam sayı bulunacağından

$$[\![a+b]\!] = [\![a]\!] + [\![b]\!] + 1 \tag{1.31}$$

olur. (1.30) ve (1.31) den

$$[\![a+b]\!] \geq [\![a]\!] + [\![b]\!] \tag{1.32}$$

yazılabilir.

ÖRNEK : m bir tam sayı olduğunda, her x reel sayısı için

$$[\![x+m]\!] = [\![x]\!] + m \tag{1.33}$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm : $x = [\![x]\!] + t, \qquad (0 \leq t < 1)$

yazalım. Bu taktirde

$$x + m = [\![x]\!] + m + t, \quad (0 \leq t < 1)$$

olur. O halde

$$[\![x+m]\!] = [\![x]\!] + m$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!]$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x = [\![x]\!] + t, \quad (0 \le t < 1)$

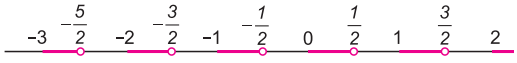
olsun. Bu taktirde

$$2x = 2[\![x]\!] + 2t, \quad (0 \le t < 1)$$

yazılabilir. $0 \le t < 1$ olduğundan $0 \le 2t < 2$ dir. Buna göre $0 \le 2t < 1$, yani $0 \le t < \frac{1}{2}$ ise $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!]$ olur $\frac{1}{2} \le t < 1$ ise $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!] + 1$ dir. O halde $[\![2x]\!] = 2[\![x]\!]$ olması için $0 \le t < \frac{1}{2}$ olmalıdır. Bu, x sayısının kesir kısmının $\frac{1}{2}$ den küçük olması demektir. Bu reel sayılar, m bir tam sayı olmak üzere, $\left[m, m + \frac{1}{2}\right)$ tipindeki aralıkları meydana getirirler. O hâlde denklemin çözüm kümesi

$$Ç = \bigcup_{m \in Z} \left[m, m + \frac{1}{2}\right)$$

kümesidir. Bu kümeye sayı doğrusu üzerinde karşılık gelen noktalar aşağıda kırmızı renkte gösterilmiştir.



ÖRNEK : $[\![3x]\!] = [\![x]\!]$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm : $x = [\![x]\!] + t, \qquad (0 \le t < 1)$

yazılabilir. Bu durumda

$$3x = 3[\![x]\!] + 3t, \qquad (0 \le 3t < 3)$$

olur. Şu halde

$$[\![3x]\!] = \begin{cases} 3[\![x]\!] & , \quad 0 \le 3t < 1 \text{ ise} \\ 3[\![x]\!] + 1 & , \quad 1 \le 3t < 2 \text{ ise} \\ 3[\![x]\!] + 2 & , \quad 2 \le 3t < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3[\![x]\!] & , \quad 0 \le t < \frac{1}{3} \text{ ise} \\ 3[\![x]\!] + 1 & , \quad \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3} \text{ ise} \\ 3[\![x]\!] + 2 & , \quad \frac{2}{3} \le t < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir.

(a) $0 \le t < \frac{1}{3}$ olsun. $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!]$ olacağından $[\![x]\!] = 3[\![x]\!]$ buradan da $[\![x]\!] = 0$ bulunur. Tam kısmı sıfır olup da kesir kısmı 0 ile $\frac{1}{3}$ arasında bulunan sayılar $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ aralığının elemanlarıdır.

(b) $\frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3}$ olsun. $[\![x]\!] = [\![3x]\!] = 3[\![x]\!] + 1 \Rightarrow [\![x]\!] = -\frac{1}{2}$ bulunur. Hiçbir sayının tam kısmı $-\frac{1}{2}$ olamayacağından kesir kısmı $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$ arasında olan hiçbir reel sayı verilen denklemi sağlamaz.

(c) $\frac{2}{3} \le t < 1$ olsun. $[\![x]\!] = [\![3x]\!] = 3[\![x]\!] + 2 \Rightarrow [\![x]\!] = -1$ olur. O halde $\frac{2}{3} \le t < 1$ olmak üzere

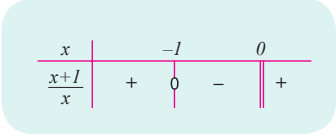
$$x = -1 + t$$

şeklindeki reel x sayıları verilen denklemi sağlar. Bu sayılar $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ aralığının elemanlarıdır. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi

$$Ç = \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, 0\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

aralığıdır.

ÖRNEK : $\left[\!\left[\frac{x-1}{x}\right]\!\right] = 1$ denklemini çözünüz.



Çözüm : $\left[\!\left[\frac{x-1}{x}\right]\!\right] = 1$ ise $1 \le \frac{x-1}{x} < 2$ dir. $\frac{x-1}{x} < 2 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{x} \Rightarrow x < 0$ olmalıdır. $\frac{x-1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-x-1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x} > 0$ olmalıdır. Şimdi bu eşitsizliği çözelim. Önce işaret tablosunu yapalım.

Bu tabloya göre $x < -1$ veya $x > 0$ olmalıdır. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi

$$C = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$$

olur.

ÖRNEK : $[\![x]\!]+[\![2x]\!]=4$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x=[\![x]\!]+t,\ 0\le t<1$ olsun. Bilindiği gibi,

$$[\![2x]\!]=\begin{cases}2[\![x]\!] & ,\ 0\le t\le \frac{1}{2} \text{ ise}\\ 2[\![x]\!]+1 & ,\ \frac{1}{2}\le t<1 \text{ ise}\end{cases}$$

yazılabilir.

a) $0\le t\le \frac{1}{2}$ olsun.

$$[\![x]\!]+[\![2x]\!]=4 \Rightarrow [\![x]\!]+2[\![x]\!]=4 \Rightarrow 3[\![x]\!]=4 \Rightarrow [\![x]\!]=\frac{4}{3}$$

olur. Şu halde kesir kısmı $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ aralığında olan hiçbir sayı denklemi sağlamaz.

b) $\frac{1}{2}\le t<1$ olsun.

$$[\![x]\!]+[\![2x]\!]=4 \Rightarrow [\![x]\!]+2[\![x]\!]+1=4 \Rightarrow [\![x]\!]=1$$

olur.

$$x=[\![x]\!]+t=1+t,\quad \frac{1}{2}\le t<1$$

olacağından verilen denklemin çözüm kümesi $\left[\frac{3}{2},2\right)$ aralığıdır.

ÖRNEK : $[\![2x-1]\!]\ge[\![x]\!]$ eşitsizliğini çözünüz.

Çözüm : Verilen denklem

$$[\![2x]\!]-1\ge[\![x]\!] \Rightarrow [\![2x]\!]\ge 1+[\![x]\!]$$

biçiminde yazılabilir.

$0\le t<\frac{1}{2}$ olsun. $[\![2x]\!]=2[\![x]\!]$ olacağından

$$2[\![x]\!]\ge 1+[\![x]\!]\Rightarrow [\![x]\!]\ge 1 \Rightarrow x\ge 1$$

olur. Bu durumda birinci çözüm kümesi

$$\mathbb{C}_1=\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left[2,\frac{5}{2}\right]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right)\cup\ldots=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n,n+\frac{1}{2}\right)$$

olur.

$\frac{1}{2}\le t<1$ olsun. $[\![2x]\!]=2[\![x]\!]+1$ olacağından

$$2[\![x]\!]+1\ge 1+[\![x]\!]\Rightarrow [\![x]\!]\ge 0\Rightarrow x\ge 0$$ olur.

İkinci çözüm kümesi

$$\mathbb{C}_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right) \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[n + \frac{1}{2}, n+1\right)$$

dir.

$$C = C_1 \cup C_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

olur.

ÖRNEK : $5\llbracket x \rrbracket = 3x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm : $x = \llbracket x \rrbracket + t,\ 0 \le t < 1$ olsun.

$5\llbracket x \rrbracket = 3(\llbracket x \rrbracket + t) \Rightarrow 2\llbracket x \rrbracket = 3t \Rightarrow t = 0$ veya $t = \frac{2}{3}$ olmalıdır.

$t = 0$ için $2\llbracket x \rrbracket = 0 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$t = \frac{2}{3}$ için $2\llbracket x \rrbracket = 2 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ bulunur.

Çözüm kümesi $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$ kümesidir.

$\lfloor x \rfloor$ in tanımından aşağıdaki özelliklerin doğru olduğu açıktır. Burada x ve y reel sayılar, m ile n tam sayılardır.

(a) $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n - 1 < x \le n$

(b) $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x \le n < x + 1$

(c) $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$

(ç) $n \le \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow n \le x$

(d) $\lfloor x + y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

(e) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \le \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

(f) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 1, & x \notin \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$

ÖRNEK : $\lfloor x \rfloor = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm : $\lceil x \rceil = 2 \Rightarrow 1 < x \leq 2 \Rightarrow \mathbb{C} = (1, 2]$ olur. ❐

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & x \in Z \text{ ise} \\ 1, & x \notin Z \text{ ise} \end{cases}$$

olacağından, tavan değerlerini bulunduran denklem ve eşitsizlikler, tam kısım bulunduran denklem ve eşitsizliklere dönüştürülebilir.

ÖRNEK : $\lceil 2x \rceil = \lceil x \rceil$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm :

(i) x tam sayı ise $2x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathbb{C}_1 = \{0\}$.

(ii) $0 < t < \frac{1}{2}$ olmak üzere $x = \lceil x \rceil - t$ olsun.

$2x = 2\lceil x \rceil - 2t \Rightarrow \lceil 2x \rceil = \lceil 2\lceil x \rceil - 2t \rceil = 2\lceil x \rceil + \lceil -2t \rceil$ yazılabilir. $0 < t < \frac{1}{2} \Rightarrow$ $-1 < -2t < 0$ olacağından $\lceil -2t \rceil = 0$ bulunur. Bu durumda $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil$ olur.

Buna göre verilen denklemden

$$2\lceil x \rceil = \lceil x \rceil \Rightarrow \lceil x \rceil = 0 \Rightarrow x = \lceil x \rceil - t = 0 - t = -t \Rightarrow x = -t,\ 0 < t < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow C_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

bulunur.

(iii) $\frac{1}{2} \leq t < 1$ olsun. $x = \lceil x \rceil - t \Rightarrow 2x = 2\lceil x \rceil - 2t \Rightarrow \lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil + \lceil -2t \rceil$ eşitliğinde $-2 < -2t \leq -1 \Rightarrow \lceil -2t \rceil = -1$ olacağından $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil - 1$ olur. Bu durumda verilen denklemden

$$2\lceil x \rceil - 1 = \lceil x \rceil \Rightarrow \lceil x \rceil = 1 \Rightarrow x = 1 - t,\ \frac{1}{2} \leq t < 1 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow C_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

bulunur. Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{0\} \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

olur.

PROBLEMLER-1.3

1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olsun. A ile B nin ***noktasal toplamı***

   $A + B = \{x + y : \ x \in A \text{ ve } y \in B\}$

   şeklinde tanımlanır.

   a. $[1, 3] + [5, 6]$, $(a - p, a + p) + (b - q, b + q)$ ve $(-\infty, 5) + (7, +\infty)$ kümelerini bulunuz.

   b. $[-1, 0] + [0, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$ olduğunu gösteriniz.

   c. Daima $A + B = A \cup B$ yazılabilir mi?

   Daima

   $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

   yazılabilir mi?

2. a ve b herhangi iki reel sayı olsun.

   $\text{maks}\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b) + |a - b|)$

   $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$

   eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

3. a, b, c, d reel sayılar ve $[a, b] \cap [c, d] \neq \varnothing$ olsun.

   $$[a,b] \cap [c,d] = \left[\frac{a+c+|a-c|}{2}, \frac{b+d-|b-d|}{2}\right]$$

   $$[a,b] \cup [c,d] = \left[\frac{a+c-|a-c|}{2}, \frac{b+d+|b-d|}{2}\right]$$

   olduğunu gösteriniz.

4. Herhangi bir C kümesi için

   $\inf C \leq \underline{\lim} C \leq \overline{\lim} C \leq \sup C$

   olduğunu gösteriniz.

5. $A, B \subset \mathbb{R}$ ve $B = \{a + b : a \in A \text{ ve } b \in B\}$ olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. A ve B bir supremuma sahipse C de sahiptir ve

   $$\text{Sup} C = \sup A + \sup B$$

   dir. Gösteriniz.

   b. A ve B bir infimuma sahipse C de sahiptir ve

   $$\inf C = \inf A + \inf B$$

   olacağını gösteriniz.

6. $A, B \subset \mathbb{R}$ olsun. A nın her bir a elemanı ve B nin her bir b elemanı için $a \leq b$ oluyorsa bu taktirde A bir supremuma, B bir minimuma sahiptir ve

   $$\sup A \leq \inf B$$

   dir. Gösteriniz.

7. Aşağıda (a_k) eşitsizliklerinin her birinin çözümü bir (b_l) eşitsizliğidir. Hangi (a_k) eşitsizliğine hangi (b_j) eşitsizliğinin karşılık geldiğini bulunuz.

   (a_1) $|x| < 3$ (b_1) $4 < x < 6$

   (a_2) $|x - 1| < 3$ (b_2) $-3 < x < 3$

   (a_3) $|3 - 2x| < 1$ (b_3) $x > 3$ veya $x < -1$

   (a_4) $|1 + 2x| \geq 1$ (b_4) $x > 2$

   (a_5) $|x - 1| > 2$ (b_5) $-2 < x < 4$

(a_6) $|x+2| \geq 5$ (b_7) $x \geq -7$ *veya* $x \geq 3$

(a_7) $|5 - x^{-1}| < 1$ (b_8) $1 < x < 2$

(a_8) $|x-5| < |x+1|$ (b_9) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$

(a_9) $x < x^2 - 12 < 4x$ (b_{10}) $-1 \leq x \leq 0$

8. a. $|x| \leq 1$ için $|x^2 - 1| \leq 2|x-1|$ olduğunu gösteriniz.

b. $-1 \leq x \leq 2$ için $|x^2 + x - 2| \leq 4|x-1|$ olduğunu gösteriniz.

9. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a. $[\![3x]\!] = 2[\![x]\!]$ d. $\left[\!\left[\frac{x-1}{3}\right]\!\right] = 2$

b. $[\![5x]\!] = [\![x]\!]$ e. $[\![x^2-3x]\!] = -2$

c. $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!]$ f. $[\![x + [\![x+1+[\![x+2]\!]]\!]]\!] = -3$

10. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz. a. ve b. deki eşitliklere benzer bir eşitliği $[\![nx]\!]$ için yazınız. Yazdığınız eşitliği ispatlayınız.

a. $[\![2x]\!] = [\![x]\!] + \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right]$

b. $[\![3x]\!] = [\![x]\!] + \left[\!\left[x + \frac{1}{3}\right]\!\right] + \left[\!\left[x + \frac{2}{3}\right]\!\right]$

c. $[\![4x]\!] = [\![x]\!] + \left[\!\left[x + \frac{1}{4}\right]\!\right] + \left[\!\left[x + \frac{2}{4}\right]\!\right] + \left[\!\left[x + \frac{3}{4}\right]\!\right]$

11. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a. $\left[\!\left[\frac{2x}{3}\right]\!\right] < 4$ b. $\left[\!\left[\frac{1-2x}{5}\right]\!\right] \leq 3$

c. $\left[\!\left[\frac{1-x}{x}\right]\!\right] > 2$ ç. $[\![3x-2]\!] \geq [\![x]\!]$

d. $[\![x]\!] \leq [\![2x]\!] - 1$ e. $\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] < [\![x]\!]$

12. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $\left\lceil\frac{2x}{3}\right\rceil = 2$ b. $\lceil 2x \rceil + \lceil x \rceil = 3$

c. $\left\lceil\frac{x+1}{3}\right\rceil = -2$ ç. $\lceil x \rceil + \left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil = 9$

d. $\lceil 2x \rceil = \lceil x \rceil$ e. $\lceil 2x \rceil = \lceil x \rceil + 1$

13. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a. $\left\lceil\frac{3x}{2}\right\rceil \geq 6$ b. $\left\lceil\frac{x+3}{2}\right\rceil < 2$

c. $\left\lceil\frac{2x}{3}\right\rceil > 5$ ç. $\left\lceil\frac{2x+1}{3}\right\rceil \leq 4$

d. $\lceil 2x \rceil \leq \lceil x \rceil$ e. $\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil > \lceil x \rceil$

14. $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x + y \rceil$ eşitliği hangi x ve y reel sayıları için doğrudur?

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

   a. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$

   $=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

   b. $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)(2+3)$

   $=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

2. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $n!\geq n^{\frac{n}{2}}$ (n ≥ 2)

   b. $n!\geq 2^{n-1}$ (n ≥ 1)

   c. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ (n ≥ 3)

   ç. $n^{n+1}>(n+1)^n$ (n ≥ 3)

   d. $(1-a)^n<\frac{1}{1+na}$ (n ≥ 1)

3. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $1\cdot\binom{n}{0}+2\cdot\binom{n}{1}+\ldots+(n+1)\cdot\binom{n}{n}=(n+2)\cdot 2^{n-1}$

   b. $2\cdot\binom{n}{2}+6\cdot\binom{n}{3}+\ldots+n(n-1)\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}$

   c. $1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\ldots+n^2\binom{n}{n}=n(n+1)2^{n-2}$

   ç. $\frac{1}{2}\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{n}{n+1}$

   d. $\frac{1}{1!(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-3)!}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)!\,1!}=\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$

4. m, $n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   a. $\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\ldots+\binom{m+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{m+1}$

   b. $\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\ldots+\binom{m+n-1}{m}=\binom{m+n}{m+1}$

5. $1+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

   olduğunu gösteriniz.

6. $p\geq 0$ $a, b\in\mathbb{R}$ için

   $|a+b|^p\leq 2^p\,(|a|^p+|b|^p)$

   olduğunu gösteriniz.

7. $a>0, b>0$ ve $n\geq 2$ için

   $\sqrt[n]{a+b}\leq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

   olduğunu gösteriniz.

8. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $6\,|\,n(n^2-1)$ olduğunu gösteriniz.

9. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $35\,|\,(3^{6n}-2^{6n})$ olduğunu gösteriniz.

10. n^2+n+41 sayısı her bir n doğal sayısı için asal mıdır?

11. $2^p - 1$ sayısının $p = 2, 3, 4, 7$ asal sayıları için asal olacağını gösteriniz.

"p asal ise $2^p - 1$ *asaldır."* önermesi doğru mudur?

12. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

13. x rasyonel olduğunda $x + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olacağını gösteriniz.

14. Herhangi iki farklı reel sayı arasında en az bir rasyonel sayının var olduğunu gösteriniz.

15. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|x^2 - 7x + 6| > x^2 - 7x + 6$

b. $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$

c. $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$

16. $\lfloor x + \lfloor x + 1 + \lfloor x + 2 + \lfloor ... + \lfloor x + n \rfloor \rfloor \rfloor \rfloor ... \rfloor = 0$

denkleminin bir köke sahip olması için n ne olmalıdır? $n = 6$ için denklemi çözünüz.

17. $\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 90$ eşitliğini sağlayan n doğal sayısını bulunuz.

18. $[1, x]$ aralığında n ile bölünebilen doğal sayıların sayısının $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ olacağını gösteriniz.

19. $x - \lfloor x \rfloor$ farkı $[0, 1)$ aralığında bir sayı olup x in **kesir kısmı** adını alır. Bu sayı $< x >$ ile gösterilir. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $<x + m> = <x>$

b. $< x > + < -x > = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Z} \text{ ise} \\ 1, & x \notin Z \text{ ise} \end{cases}$

c. $< x > + < x + \frac{1}{n} > + ... + < x + \frac{n-1}{n} >$

$= < nx > + \frac{n-1}{2}$

20. $n \in \mathbb{N}$, p asal sayı ve $\alpha \in \mathbb{N}$ olsun. $n!$ sayısını bölen p^α sayıları için α nın en büyük değeri

$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

doğal sayısıdır. Burada k, $p^{k+1} > n$ eşitsizliğini sağlayan bir doğal sayıdır.

21. $\binom{65}{32}$ sayısının sonunda kaç tane sıfır bulunur?

22. $4\lfloor x \rfloor = 3x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

23. *m ve n, 1 den büyük doğal sayılardır.* $\sqrt[m]{n}, \sqrt[n]{m}$ *sayılarından en az birinin 2 den küçük olduğunu gösteriniz.*

24. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$ *eşitliğini sağlayan a ve b doğal sayıların aralarında asal olacaklarını gösteriniz.*

Bölüm

2

FONKSİYONLAR



2.1 FONKSİYON KAVRAMI

Uygulamalı bilimlerde, değişebilen büyüklükler arasında bazı bağıntıların bulunması, o olayların incelenmesini kolaylaştırmaktadır. Örneğin belli bir sıcaklıkta tutulan bir gazın basıncı, bu gazın kapladığı hacme ve bu hacimdeki moleküllerin sayısına sıkı sıkıya bağlıdır. Benzer olarak bir iletkenin direncinin sıcaklığa bağlılığını, bir hareketlinin aldığı yolun o hareketlinin hızına ve harekette geçen zamana bağlılığını biliyoruz. İşte bu gibi hallerde değişen büyüklükler arasındaki matematiksel bağıntının sağladığı özelliklerin bilinmesi çok önemlidir. Biz bu bölümde fonksiyon adı verilen özel bağıntıları ele alacak ve en çok kullanılan fonksiyonların özelliklerini inceleyeceğiz.

TANIM

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemanlarının $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sıralı n – lisi, a_i elemanlarının bir kolleksiyonudur. Burada a_1 birinci, a_2 ikinci, ..., a_n de n. bileşendir.

Tanımdan da açıkça görüldüğü gibi, sıralı n– lilerde elemanların sırası çok önemlidir.

Özel olarak, (a, b) biçimindeki sıralı ikililer matematikte önemli bir rol oynarlar. Önce bu sıralı ikililerin eşitliğini tanımlayalım.

TANIM

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

Bu tanıma göre (a, b) ve (b, a) ikilileri sadece $a = b$ için eşittir. $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ olur .

TANIM

A ve B iki küme olsun. A ve B nin **kartezyen çarpımı** $A \times B$ ile gösterilir. Bu küme $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm (a, b) sıralı ikililerinin kümesidir. Böylece

$$A \times B = \{(a, b) : \quad a \in A \quad \text{ve} \quad b \in B\}$$

olacaktır.

ÖRNEK : $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$ olduğuna göre $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulunuz.

Çözüm : $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$

$B \times A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$

olur. Açıkça görüldüğü gibi

$$A \times B \neq B \times A$$

dır.

ÖRNEK : A bir fakültede okuyan tüm öğrencilerin kümesi, B de o fakültede okutulan tüm derslerin kümesi ise $A \times B$ kümesi hangi kümedir?

Çözüm : $A \times B$ kartezyen çarpımı; a, o fakültede okuyan bir öğrenci; b, o fakültede okutulan bir dersi göstermek üzere tüm (a, b) sıralı ikililerin kümesidir.

TANIM

A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n kümelerinin kartezyen çarpımı

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesidir.

ÖRNEK : $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 5\}$, $C = \{7\}$ kümeleri için $A \times B \times C$ kartezyen çarpımını bulunuz.

Çözüm : $A \times B \times C = \{(1, 0, 7), (1, 5, 7), (2, 0, 7), (2, 5, 7), (3, 0, 7), (3, 5, 7)\}$

olur.

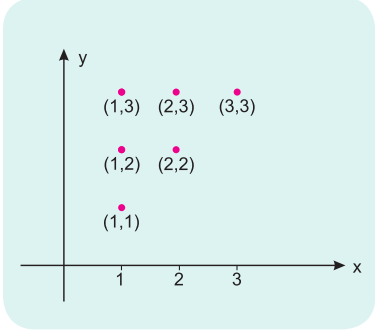
TANIM

$A \times B$ kümesinin her bir alt kümesine A dan B ye bir bağıntıdır denir. A dan A ya olan bağıntıya kısaca, A da bir bağıntıdır denir.

ÖRNEK : $A = \{1, 2, 3\}$ olsun. A da bir β bağıntısı

$$\beta = \{(x, y) : x \leq y\}$$

biçiminde tanımlanıyor. β bağıntısını liste biçiminde yazınız. Bu bağıntının grafiğini çiziniz.



Çözüm : $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

olacağından

$$\beta = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

dir. Bunun grafiği yanda verilmiştir.

TANIM

A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye A dan B ye bir fonksiyondur denir.

(a) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.

(b) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$ dir.

Yukarıdaki (a) özelliği A nın her bir elemanının mutlaka bir karşılığının olacağını, (b) özelliği de bu karşılığın tek olacağını ifade etmektedir. Başka bir ifadeyle bir fonksiyonda birinci bileşenleri aynı fakat ikinci bileşenleri farklı sıralı ikililerin bulunamayacağını göstermektedir.

A dan B ye bir fonksiyon

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{veya} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

biçiminde gösterilir. Burada A kümesine ***tanım kümesi***, B kümesinin ***değer kümesi*** adı verilir.

Eğer $(x, y) \in f$ ise bu $f : x \to y$ veya $y = f(x)$ biçiminde de gösterilebilir. Bu durumda f, x elemanını y elemanına dönüştürür veya x in f altındaki görüntüsü y dir denir.

Yukarıdaki açıklamalardan, A dan B ye bir f fonksiyonu, A nın her bir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bir matematik varlık (kural) olarak da tanımlanabilir.

Tanım kümesinin her bir elemanını değer kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen kural herhangi bir şekilde verilebilir. Örneğin $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye olan bir fonksiyonun eşleştirme kuralını "her sayıya karesini karşılık getirme" olarak alabiliriz. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonu

$$f : x \to x^2$$

şeklinde yazabiliriz. Belirsiz bir reel sayı olan x elemanına değişken adı verilir. x elemanına karşılık gelen x^2 de bir reel sayıdır. Bu sayıyı başka bir değişkenle, örneğin y ile gösterirsek, yukarıdaki fonksiyonu

$$f : x \to y = x^2$$

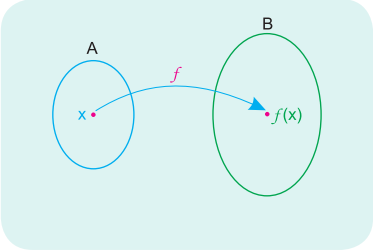
veya, kısaca

$$y = x^2$$

şeklinde yazarız. Burada x elemanına ***bağımsız değişken***, y elemanına da ***bağımlı değişken*** adı verilir. Değişkenleri gösteren harflerin değiştirilmesi fonksiyonu değiştirmez. Örneğin;

$$t \to t^2, \quad \alpha \to \alpha^2, \quad u \to u^2, \quad y \to y^2$$

sembollerinin hepsi yukarıda tanımladığımız fonksiyonu gösterirler. Fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki hususların bilinmesinde yarar vardır.



x, $f(x)$ ve f farklı şeylerdir. Zira x, A tanım kümesinin, $f(x)$ de B değer kümesinin elemanıdır. f de A nın x elemanlarını B nin $f(x)$ elemanlarına dönüştüren bir matematiksel varlıktır.

Bilindiği gibi bozuk olmayan bir tartı aletinin üzerine çıkan her insan için alet o insanın ağırlığını gösteren bir sayı gösterir. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

1. Tartı aleti her insana onun ağırlığını karşılık getirir mi?
2. Bir insana iki farklı ağırlık karşılık gelir mi?
3. Bazı insanların ağırlıkları aynı olabilir mi?

İnsan, tartı aileti ve ağırlık kavramlarından hangisi değişken, hangisi görüntü hangisi fonksiyondur?

$f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x elemanlarına f fonksiyonunun sıfır yerleri veya kökleri denir.

TANIM

f ve g aynı küme üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve bu kümenin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ ise f ile g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu ile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = (x-1)(x+1)$ fonksiyonu eşittir, çünkü her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

dir.

TANIM

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun $f + g$ toplamı, $f - g$ farkı, $f \cdot g$ çarpımı ve f / g bölümü

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x) / g(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f + g$, $f - g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları $A \cap B$ üzerinde, f / g fonksiyonu da $A \cap B$ kümesinde $g(x) = 0$ denklemini sağlayan x ler hariç diğer tüm x ler için tanımlıdır. Bir f fonksiyonunun bir c sayısı ile çarpımı da

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ fonksiyonları için $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f / g fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm : $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + x) + x = x^2 + 2x$

$f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + x) - x = x^2$

$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x) \cdot x = x^3 + x^2$

$f / g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(f / g)(x) = f(x) / g(x) = (x^2 + x) / x = x + 1$

olur. Burada $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır.

TANIM

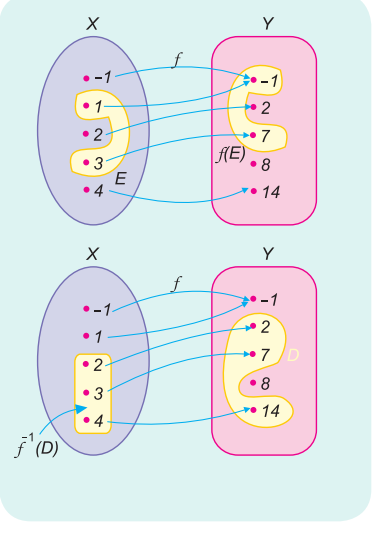
$f : X \to Y$ bir fonksiyon. $E \subset X$ ve $D \subset Y$ olsun.

$$f(E) = \{ f(x) \in Y : \ x \in E \}$$

kümesine E nın f altındaki görüntüsü, $f(X)$ kümesine görüntü kümesi,

$$f^{-1}(D) = \{ x \in X : \ f(x) \in D \}$$

kümesine de D nin f altındaki ters görüntüsü adı verilir.



ÖRNEK : $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 2, 7, 8, 14\}$ kümeleri için A dan B ye $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonu tanımlanıyor. $E = \{1, 3\}$ ve $d = \{2, 7, 14\}$ kümeleri için $f(E)$ ve $f^{-1}(D)$ kümelerini bulunuz.

Çözüm : $f(1) = 1^2 - 2 = -1$, $f(3) = 3^2 - 2 = 7$ olduğundan $f(E) = \{-1, 7\}$ dir. Görüntüsü D de olan elemanlar $2, 3, 4$ olduğundan $f^{-1}(D) = \{2, 3, 4\}$ olacaktır.

Şimdi, görüntü ve ters görüntü ile ilgili özellikleri veren iki teorem ispatlayalım.

TEOREM 2.1

f, X den Y ye bir fonksiyon ve $A, B \subset X$ olsun.

(a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(d) $f(A \setminus B) \subset f(A)$

olur.

İspat :

(a) Eğer $x \in A$ ise $x \in B$ ve dolayısıyla $f(x) \in f(B)$ dir. Bu A daki her x için doğru olduğundan $f(A) \subset f(B)$ dir.

(b) $A \cap B \subset A$ olduğundan $f(A \cap B) \subset f(A)$ ve benzer olarak $A \cap B \subset B$ olduğundan $f(A \cap B) \subset f(B)$ dir. O halde

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \qquad (2.1)$$

yazılabilir.

(c) $A \subset A \cup B$ *ve* $B \subset A \cup B$ olduğundan $f(A) \subset f(A \cup B)$ ve $f(B) \subset f(A \cup B)$ dir.

Buna göre

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \qquad (2.2)$$

yazılabilir. Karşıt olarak, $y \in f(A \cup B)$ olsun. Bu taktirde bir $x \in A \cup B$ vardır ki $f(x) = y$ dir. $x \in A$ veya $x \in B$ olduğundan $y = f(x)$ elemanı ya $f(A)$ nın ya da $f(B)$ nin elemanıdır. O hâlde $y \in f(A) \cup f(B)$ olur ki bu da

$$f(A) \cup f(B) \supset f(A \cup B) \qquad (2.3)$$

demektir. (2.2) ve (2.3) den

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

olur.

(d) $A \setminus B \subset A$ olduğundan (a) gereğince $f(A \setminus B) \subset f(A)$ dır.

ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanıyor. $A = \{-1, 0, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ kümeleri için $f(A \cap B)$ ve $f(A) \cap f(B)$ kümelerini bulunuz. Bu kümeler eşit midir?

Çözüm : $f(A) = \{0, 1, 9\}$, $f(B) = \{0, 1, 4\}$ olduğundan $f(A) \cap f(B) = \{0, 1\}$ dir.

$A \cap B = \{0\}$ olduğundan $f(A \cap B\} = f(\{0\})$ dır. O halde

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{olup} \quad f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \quad \text{dir.}$$

TEOREM 2.2

f, X den Y ye bir fonksiyon ve E, F ⊂ Y olsun.

(a) $E \subset F \Rightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$

(b) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$

(c) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$

(d) $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$

(e) $f^{-1}(F') = [f^{-1}(F)]'$

(f) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

olur.

İspat: $(a)\ x \in f^{-1}(E)$ olsun. Ters görüntü tanımından $f(x) \in E$ dir. Hipotezden $f(x) \in F$ olur. Buradan da $x \in f^{-1}(F)$ olur. O hâlde $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ dir.

(b) $E \cap F \subset E$ *ve* $E \cap F \subset F$ olduğundan (a) gereğince

$f(E \cap F) \subset f^{-1}(E)$ *ve* $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(F)$ olur. Buradan da

$$f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) \qquad (2.4)$$

bulunur. Karşıt olarak, eğer $x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$ ise $x \in f^{-1}(E)$ *ve* $x \in f^{-1}(F)$ dir. O hâlde $f(x) \in E$ *ve* $f(x) \in F$ olur. Şu halde $f(x) \in E \cap F$ ve dolayısıyla $x \in f^{-1}(E \cap F)$ dir. Buradan

$$f^{-1}(E \cap F) \supset f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) \qquad (2.5)$$

olur. (2.4) ve (2.5) den istenen eşitlik elde edilir.

(c) E ve F, $E \cup F$ nin alt kümeleri olduğundan (a) gereğince

$f^{-1}(E) \subset f^{-1}(E \cup F)$ *ve* $f^{-1}(F) \subset f^{-1}(E \cup F)$

buradan da

$$f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) \subset f^{-1}(E \cup F) \qquad (2.6)$$

yazılabilir. Karşıt olarak, eğer $x \in f^{-1}(E \cup F)$ ise $f(x) \in E \cup F$ buradan da $f(x) \in E$ veya $f(x) \in F$ olur. O halde $x \in f^{-1}(E)$ veya $x \in f^{-1}(F)$ dir. Buna göre $x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$ olacaktır. Bu durumda

$$f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) \supset f^{-1}(E \cup F) \qquad (2.7)$$

olur. (2.6) ve (2.7) den istenen eşitlik elde edilir.

(d) Eğer $x \in f^{-1}(E \setminus F)$ ise $f(x) \in E \setminus F$ dir. Buna göre $f(x) \in E$ ve $f(x) \notin F$ dir. O halde $x \in f^{-1}(E)$ ve $x \notin f^{-1}(F)$ dir. Buradan $x \in f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ olur ki bu $f^{-1}(E \setminus F) \subset f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ (2.8)

demektir. Karşıt olarak, eğer $t \in f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ ise $t \in f^{-1}(E)$ ve $t \notin f^{-1}(F)$ dir. Buradan $f(t) \in E$ ve $f(t) \notin F$ olur. O halde $f(t) \in E \setminus F$ dolayısıyla $t \in f^{-1}(E \setminus F)$ olur. Buna göre

$$f^{-1}(E \setminus F) \supset f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F) \tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.8) ve (2.9) dan

$$f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F) \tag{2.10}$$

eşitliği elde edilir.

(e) (2.10) da $E = Y$ alınırsa istenen eşitlik elde edilir.

(f) (2.10) da $F = E$ alınırsa

$$f^{-1}(E \setminus E) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(E)$$

elde edilir. Herhangi bir M kümesi için $M \setminus M = \varnothing$ olduğundan

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

bulunur.

Yukarıdaki teoremde $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ olduğunu gördük. Şimdi aklımıza şu soru gelebilir. Acaba $f^{-1}(E) = \varnothing$ ise $E = \varnothing$ midir? Bu soruya cevap verebilmek için şu örneği inceleyim.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $E = \{-1\}$ kümesini gözönüne alalım. $E \neq \varnothing$ olmasına rağmen

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in E\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \varnothing$$

dir. O halde $f^{-1}(E) = \varnothing$ olması $E = \varnothing$ olmasını gerektirmez.

2.2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Fonksiyonlar, tanım kümeleri, değer kümeleri, görüntü kümelerinin durumlarına ve eşleme kuralının özelliklerine göre çeşitli adlar alırlar. Bu kesimde bunlardan önemli olan bazılarını tanıtacağız.

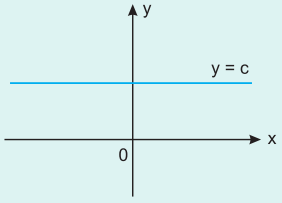
TANIM

Bir f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi ise f fonksiyonuna ***reel değişkenli fonksiyon*** adı verilir. Eğer değer kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi ise fonksiyona ***reel değerli fonksiyon*** denir.

Biz bu kitapta reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları inceleyeceğiz.

TANIM

$f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(x) = c$ ise f fonksiyonuna ***sabit fonksiyon*** adı verilir.



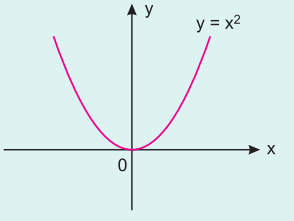
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonun grafiği, y eksenini c noktasında kesen ve x eksenine paralel olan bir doğrudur.

TANIM

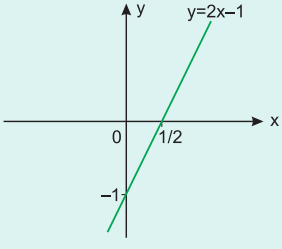
$f : A \to B$ fonksiyonu için

$$f(A) = B$$

oluyorsa f fonksiyonuna ***örten fonksiyon***, aksi taktirde fonksiyona ***içine fonksiyon*** adı verilir. Buna göre eğer f örtense her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.



ÖRNEK : $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu içine fonksiyon, $g(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten fonksiyondur. Çünkü $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$ ve $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ dir. Bu iki fonksiyonun grafikleri yanda verilmiştir.

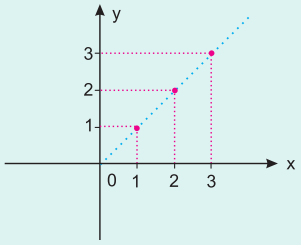


TANIM

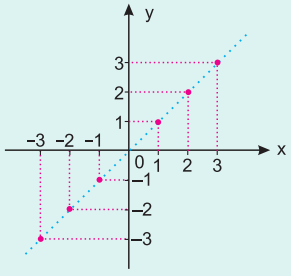
f, A dan A ya bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için

$$f(x) = x$$

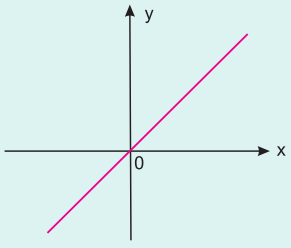
ise f fonksiyonuna ***özdeşlik*** veya ***birim fonksiyon*** denir, I_A ile gösterilir.



$I_{\mathbb{N}}$ fonksiyonunun grafiği



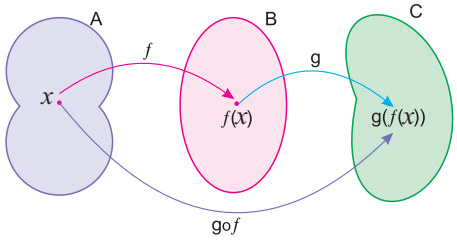
$I_{\mathbb{Z}}$ fonksiyonunun grafiği



$I_{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun grafiği

TANIM

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu taktirde g fonksiyonu $f(A)$ daki her $f(x)$ elemanını C kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına dönüştürür. Böylece A nın her bir x elemanını C nin bir $z = g(f(x))$ elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının ***bileşkesi*** denir **ve** $g \circ f$ ile gösterilir.



Bileşke Fonksiyonu

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile $g(x) = x + 1$ şeklinde tanımlanan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ dir. Diğer taraftan $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$ olduğundan, genelde $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer farklı elemanların görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna ***birebirdir*** denir.

Bu tanımı sembollerle daha kısa olarak şöyle verebiliriz :

[Her $x_1, x_2 \in A$ *ve* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$] $\Leftrightarrow f$ birebirdir.

TANIM

Hem birebir hem de örten olan fonksiyona ***birebir örten fonksiyon*** denir.

TANIM

A ve B iki küme olsun. Eğer birebir örten bir f : A → B fonksiyonu varsa A ile B kümeleri ***denktir*** veya ***aynı kardinale sahiptir*** denir. A ile B denk ise bu A ≈ B biçiminde gösterilir.

ÖRNEK : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ ve $Ç = \{2, 4, 6, ...\}$ kümelerinin denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = 2x$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{N} \to Ç$ fonksiyonu birebir örtendir.

TANIM

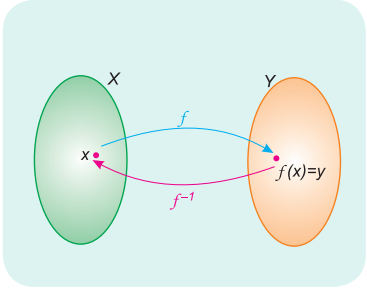
S = ∅ veya bir n doğal sayısı için S ≈ {1,2, ..., n} ise S kümesi ***sonludur*** denir. Sonlu olmayan kümelere ***sonsuz küme*** adı verilir.

S bir sonlu küme veya S ≈ N ise S ye ***bir sayılabilir*** küme denir.

Yukarıdaki tanım gözönüne alındığında $\mathbb{N}$ kümesinin kendisi, $\mathbb{N}$ nin her bir alt kümesi ve her sonlu küme birer sayılabilir kümedir.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x & , x \le 0 \text{ ise} \\ 2x-1 & , x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu birebir örten olduğundan $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi sayılabilirdir.



Eğer $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir örten ise Y kümesinin her bir $y = f(x)$ elemanını X in x elemanına dönüştüren bir g fonksiyonu vardır. Bu g fonksiyonu için

$$f(g(y)) = y \quad \text{ve} \quad g(f(x)) = x$$

veya başka bir yazılışla

$$f \circ g = I_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = I_X$$

dir. Şimdi şu tanımı verelim.

TANIM

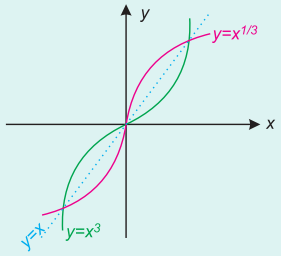
f : X → Y fonksiyonu birebir örten olsun.

$$(f \circ g)(y) = y \quad \text{ve} \quad (g \circ f)(x) = x$$

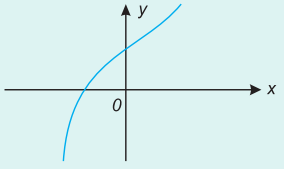
eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f nin ***tersi*** denir, f^{-1} ile gösterilir.

Demek ki $f \circ f^{-1} = I_Y$ ve $f^{-1} \circ f = I_X$ dir. f^{-1} fonksiyonunun grafiği ile f nin grafiği birim fonksiyonunun grafiğine göre simetriktirler.

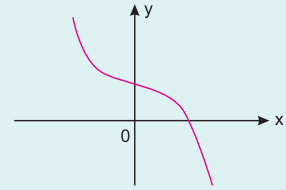
ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^3$ şeklinde tanımlanıyor. f^{-1} fonksiyonunu bulunuz. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



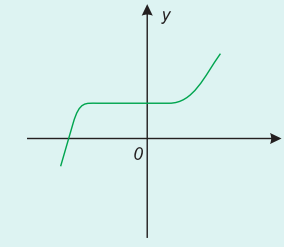
f fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ olacağından $f^{-1}(x^3) = x$ dir. Bu eşitlikte x yerine $x^{1/3}$ konursa $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ elde edilir. O halde f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ şeklinde tanımlanan $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. f^{-1} in grafiği f nin grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından yandaki gibi olacaktır.



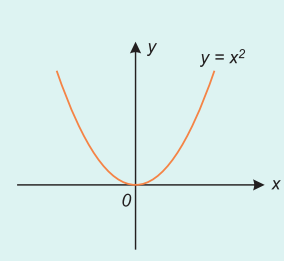
(a) Artan Fonksiyon



(b) Azalan Fonksiyon



(c) Azalmayan Fonksiyon



TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde ***artan***, $f(x_1) \leq f(x_2)$ olursa ***azalmayandır*** denir. Benzer olarak, F kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu F üzerinde ***azalan***, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise ***artmayandır*** denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona ***monotondur*** denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona ***parçalı monoton fonksiyon*** adı verilir.

Verilen bir fonksiyonun grafiği çizildiğinde,

(a) Eğer fonksiyon artan ise onun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktadan sağda bulunanı solda bulunanından daha "yukarıdadır".

(b) Eğer fonksiyon azalan ise grafik üzerinde alınan herhangi iki noktadan solda olanı sağda olanından daha "yukarıdadır".

(c) Eğer fonksiyon azalmayan ise onun grafiği üzerinde alınan iki noktadan solda olanı sağda olanın "yukarısında" olamaz.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton mudur?

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun yandaki grafiğinden de görüldüğü gibi bu fonksiyon $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ üzerinde artan, $B = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ üzerinde azalandır. O halde bu fonksiyon monoton olmayıp parçalı monotondur.
Matematikte kullanılan fonksiyonların büyük çoğunluğu parçalı monoton fonksiyonlardır. Fakat parçalı monoton olmayan fonksiyonlar da vardır. Bunlardan biri

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \quad \text{rasyonel ise} \\ 0 & , \quad x \quad \text{irasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

TANIM

Eğer $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine bir ***simetrik küme*** denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir ***çift fonksiyondur*** denir. Eğer her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ **oluyorsa f fonksiyonu bir *tek fonksiyondur* denir.**

ÖRNEK : $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $h(x)=x+1$ ve $k(x)=0$ kuralları ile verilen f, g, h ve k fonksiyonları tek veya çift midir ?

Çözüm : Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

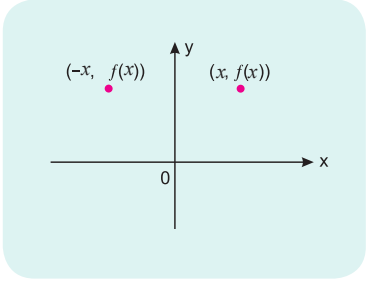
olduğundan g fonksiyonu tektir.

$$h(-x) = -x + 1 \neq h(x)$$

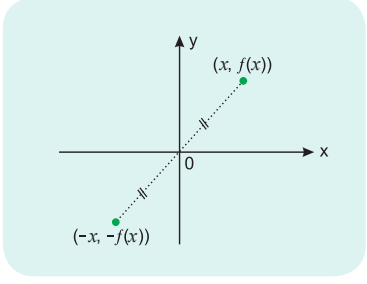
olduğundan h fonksiyonu çift değildir.

$$h(-x) = -x + 1 \neq -h(x)$$

olduğundan h tek fonksiyonda değildir. Demek ki h fonksiyonu ne tek ne de çifttir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $k(-x)=0=k(x)$ olacağından k fonksiyonu çifttir. Benzer şekilde $k(-x) = 0 = -0 = -k(x)$ yazılabileceğinden k fonksiyonu tektir. O halde sıfır sabit fonksiyonu hem tek hem de çift fonksiyondur.



f çift fonksiyon olduğunda, eğer $(x, f(x))$ noktası onun grafiğinin bir noktası ise $(-x, f(x))$ de grafiğinin bir noktasıdır. Diğer taraftan $(x, f(x))$ ile $(-x, f(x))$ noktaları y – eksenine göre simetrik olduğundan f nin grafiği y eksenine göre simetriktir.



Benzer düşünceyle, $(x, f(x))$ ve $(-x, -f(x))$ noktaları $O(0, 0)$ noktasına göre simetrik olduğundan tek fonksiyonların grafikleri $O(0, 0)$ orijin noktasına göre simetrik olurlar.

PROBLEMLER-2.1

1. Aşağıdaki ifadelerin $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon tanımlayıp tanımlamadığını belirtiniz.

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ **b.** $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = \pm\sqrt{1+x^2}$ **d.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

2. Aşağıdaki ifadelerin $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon tanımlayıp tanımlamadığını belirtiniz.

a. $f(x) = \pm x$ **b)** $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

c. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{3x}{2x-5}$

3. Aşağıdaki reel değerli fonksiyonların (en geniş) tanım kümesini bulunuz.

a. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ **b.** $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}$

4. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 - 4$ biçiminde tanımlanan f ve g fonksiyonları için

$$f+g,\quad f-g,\quad f\cdot g \quad \text{ve} \quad \frac{f}{g}$$

fonksiyonlarının eşleştirme kuralını ve tanım kümelerini bulunuz.

5. $x \in [-2, 2]$ için $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ olsun.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $f(-x) = f(x)$ **b.** $f(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

c. $f(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$ **d.** $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

e. $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{t}$ **f.** $\frac{1}{2+f(x)} = \frac{2-f(x)}{x^2}$

6. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \quad \text{ise} \\ 2, & 1 < x \le 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor.

a. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b. $g(x) = f(2x)$ biçiminde tanımlanan g fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

c. $h(x) = f(x-2)$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

d. $k(x) = f(2x) + f(x-2)$ biçiminde tanımlanan k fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

7. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olan

$D = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$

kümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye olan bir fonksiyonun grafiği olabilir mi? Nedenini açıklayınız.

8. Aşağıdaki kuralları verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a. Her bir pozitif tamsayıya kendisinden bir sonraki tamsayıyı karşılık getiren fonksiyon

b. Herbir pozitif tamsayıya o sayının son rakamını karşılık getiren fonksiyon

c. Herbir sıralı doğal sayı ikilisine o ikilinin birinci bileşenini karşılık getiren fonksiyon

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ olsun.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin f altındaki görüntüsünü bulunuz.

10. Öyle f, g, h fonksiyonları bulunuz ki aşağıdaki eşitlikler doğru olsun.

a. $f(x^2) = f^2(x)$

b. $g(x + y) = g(x) + g(y)$

c. $h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h(x)}$

11. Öyle f, g, h fonksiyonları bulunuz ki problem 10 daki eşitlikler sağlanmasın.

12. $f(n) = n!$ şeklinde tanımlanan ve **faktöriyel fonksiyonu** adı verilen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz. Bu fonksiyon örten midir?

13. $\lambda(x)$, x den büyük olmayan asal sayıların sayısını göstermek üzere $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **asal sayı fonksiyonu** adı verilir. Bu fonksiyonun $[0, 15]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

14. $\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye öyle bir f fonksiyonu tanımlayınız ki

a. birebir fakat örten olmasın

b. örten fakat birebir olmasın

c. hem örten hem de birebir olsun (birim fonksiyon dışında)

d. ne örten ne de birebir olsun.

15. $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}^+$ ya tanımlı

a. birebir fakat örten olmayan

b. örten fakat birebir olmayan

c. birebir ve örten olan

d. ne birebir ne de örten olan

birer fonksiyon tanımlayınız.

16. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki $f \neq g$ fakat $f \circ g = g \circ f$ olsun.

17. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. f ve g birebir ise $f \circ g$ birebirdir.

b. f ve g örten ise $f \circ g$ örtendir.

18. $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için

a. f ve $f \circ g$ birebir ise g birebir midir?

b. f ve $f \circ g$ örten ise g örten midir?

19. $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ olsun.

$f \circ g = g \circ f$ olması için a, b, c, d katsayıları arasında hangi bağıntı olmalıdır?

20. f ve g tersi olan iki fonksiyon olsun. $f \circ g$ fonksiyonun da tersi vardır ve

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

dir, gösteriniz.

21. f ve g çift çift olduğunda $f + g$ nin de çift olacağını gösteriniz. Bu iddia tek fonksiyonlar için de geçerli midir?

22. f ve g tek fonksiyon olduğunda $f \cdot g$ fonksiyonunun çift olacağını gösteriniz.

23. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $g \circ f$ birebirdir $\Rightarrow$ g birebirdir.

b. $g \circ f$ örtendir $\Rightarrow$ f örtendir.

24. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. f artandır $\Rightarrow f$ birebirdir.

b. f azalandır $\Rightarrow f$ birebirdir.

f birebir ise monoton mudur?

25. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ fonksiyonu için aşağıdaki iki önerme denktir.

a. $f \circ g = f \circ h$ eşitliğini sağlayan g ve h fonksiyonları için $g = h$ dir. Yani bileşke işlemine göre f soldan sadeleşebilir.

b. f birebirdir.

26. Aşağıdaki iki önerme denktir.

a. $g \circ f = h \circ f$ eşitliğini sağlayan tüm g ve h fonksiyonları için $g = h$ dir. Yani bileşke işlemine göre f sağdan sadeleşebilir.

b. f örtendir.

27. f ve g, $\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ tek ise} \\ n, & n \text{çift ise} \end{cases} \qquad \text{ve } g(n) = 2n$$

biçiminde tanımlanıyor.

Aşağıdaki önermelerin doğru olup olmadığını araştırınız.

a. f örtendir. **b.** g örtendir.

c. f birebirdir. **d.** g birebirdir.

e. fog birebirdir. **f.** gof birebirdir.

28. Eğer varsa aşağıdaki fonksiyonların terslerini bulunuz.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$

b. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^4$

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$

d. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

29. Her bir n sayısına n den büyük olmayan ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını karşılık getiren $\varnothing : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonuna ***Euler Fonksiyonu*** adı verilir.

a. $\varnothing(1)$, $\varnothing(4)$, $\varnothing(10)$ sayılarını bulunuz.

b. $\varnothing$ bire bir midir?

c. $\varnothing$ örten midir?

d. p bir asal sayı olduğunda $\varnothing(p) = p - 1$ olacağını gösteriniz.

e. $k \in N$ ve p asal sayısı için $\varnothing(p^k) = p^k - p^{k-1}$ olacağını gösteriniz.

f. m ile n aralarında asal pozitif tam sayılar olsun.

$\varnothing(m \cdot n) = \varnothing(m) \cdot \varnothing(n)$ olacağını gösteriniz.

2.3 PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR

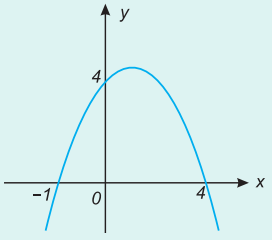
Bir fonksiyon bazen tanım kümesinin farklı alt kümeleri üzerinde farklı kurallarla tanımlanabilir. Bu kesimde parçalı tanımlı fonksiyonlar denilen bu tip fonksiyonlar üzerinde durulacaktır.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f, A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \quad \text{ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun ***mutlak değer fonksiyonu*** denir.

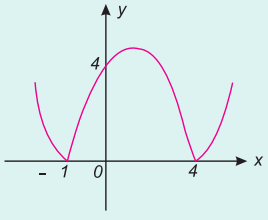


(a) $y = -x^2 + 3x + 4$ eğrisi

Yukarıdaki tanıma göre $|f|$ nin grafiği, f nin negatif olmadığı yerde f nin grfiği ile aynıdır. f nin negatif olduğu bölgede $|f|$ nin grafiği f nin grafiğinin x eksenine göre simetriğidir. Buna göre, $y = |f(x)|$ in grafiğini çizmek için $y = f(x)$ in grafiği çizilir. x ekseninin üst tarafında kalan eğri (noktalar) aynen bırakılır, x ekseninin altında kalan noktaların x eksenine göre simetriği alınır.

ÖRNEK : $f(x) = |-x^2 + 3x + 4|$ eşitliği ile verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Önce $y = -x^2 + 3x + 4$ eşitliği ile verilen eğriyi çizelim. Bu eğrinin grafiği yandaki gibidir. Daha sonra x ekseninin üstünde kalan eğri parçası aynen bırakılıp eksenin altında kalan parçaların x eksenine göre simetriği alınarak $y = |-x^2 + 3x + 4|$ eğrisi çizilir.



(b) $y = |-x^2 + 3x + 4|$ eğrisi

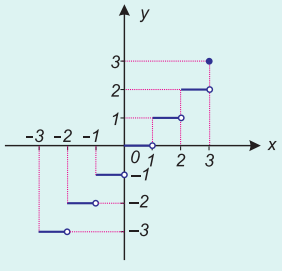
TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$f(x) = [\![x]\!]$$

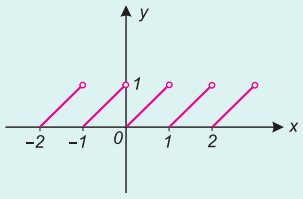
şeklinde tanımlanan $f : A \to R$ fonksiyonuna ***tam kısım fonksiyonu*** adı verilir.

Burada $[\![x]\!]$, x sayısından büyük olmayan tam sayıların en büyüğünü göstermektedir.



$y = [\![x]\!]$ in grafiği

$[\![x]\!]$, $n \leq x$ eşitsizliğini gerçekleyen n tam sayılarının en büyüğünü gösterdiğinden, p bir tam sayı olmak üzere, $p \leq x < p + 1$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayıları için $[\![x]\!] = p$ dir. Buna göre $-3 \leq x < -2$ için $[\![x]\!] = -3$, $-2 \leq x < -1$ için $[\![x]\!] = -2$, $-1 \leq x < 0$ için $[\![x]\!] = -1$, $0 \leq x < 1$ için $[\![x]\!] = 0$, $1 \leq x < 2$ için $[\![x]\!] = 1$, $2 \leq x < 3$ için $[\![x]\!] = 2$ ve $[\![3]\!] = 3$ olacağından $f(x) = [\![x]\!]$ şeklinde tanımlanan $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.



$y = x - \lfloor x \rfloor$ in grafiği

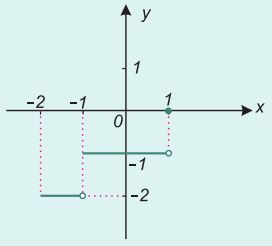
Şimdi tam kısım ifadesi ihtiva eden fonksiyonların grafikleri ile ilgili bazı örnekler verelim.

ÖRNEK : $y = x - \lfloor x \rfloor$ eşitliği ile verilen $f : \lfloor -2, 2 \rfloor \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $-2 \le x < -1$ için $\lfloor x \rfloor = -2$ olacağından $y = x + 2$ olur. Benzer şekilde $-1 \le x < 0$ için $y = x + 1$, $0 \le x < 1$ için $y = x$, $1 \le x < 2$ için $y = x - 1$ ve $x = 2$ için $y = 0$ olur. $y = x - \lfloor x \rfloor$ fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir.

ÖRNEK : $f(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$ eşitliği ile verilen $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $[-2, 1)$ aralığında $\frac{x-1}{2}$ ifadesinin bir tam sayı olması için x in -1 veya 1 olması gerekir.



$y = f(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$ in grafiği

O halde inceleme $[-2, -1)$, $[-1, 1)$ aralıklarında yapılacaktır.

$$-2 \le x < 1 \Rightarrow -3 \le x - 1 < -2 \Rightarrow \frac{-3}{2} \le \frac{x-1}{2} < -1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = -2$$

$$-1 \le x < 1 \Rightarrow -2 \le x - 1 < 0 \Rightarrow -1 \le \frac{x-1}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = -1$$

olur. $x = 1$ için $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$ olacağından verilen fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

Reel değerli bazı fonksiyonların aldığı değerlerin pozitif veya negatif oluşu önem taşır. Bu sebeple işaret (signum) fonksiyonu denilen bir fonksiyon tanımlanır.

TANIM

f, $A \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

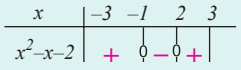
şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin ***işaret fonksiyonu*** denir, $sgnf$ ile gösterilir.

f reel değerli olduğunda bir x noktasında ya $f(x) > 0$ ya $f(x) < 0$ veya $f(x) = 0$ dır.

$f(x) > 0$ ise $\frac{|f(x)|}{f(x)} = 1$, $f(x) < 0$ ise $\frac{|f(x)|}{f(x)} = -1$ olacağından işaret fonksiyonu

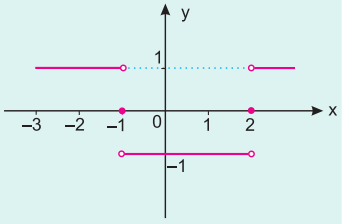
$$(sgn\, f)(x) = sgn\, f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \quad \text{ise} \\ 0, & f(x) = 0 \quad \text{ise} \\ -1, & f(x) < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabilir.



ÖRNEK : $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonu veriliyor. $Sgnf$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : Önce f nin işaretini inceleyelim. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 2$ olduğundan $f(x) = x^2 - x - 2$ nin işaret tablosu yandaki biçimde olacaktır.



Şu halde

$$\text{sgn}\, f(x) = sgn\,(x^2 - x - 2) = \begin{cases} 1, & x \in [-3, -1) \cup (2, 3] \quad \text{ise} \\ 0, & x \in \{-1, 2\} \quad \text{ise} \\ -1, & x \in (-1, 2) \quad \text{ise} \end{cases}$$

yazılabilir. Buna göre sgn$f$ nin grafiği yandaki gibidir.

2.4 POLİNOMLAR VE RASYONEL FONKSİYONLAR

TANIM

n bir doğal sayı ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ler de, $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir ***polinom (çok terimli)*** denir. Buradaki n doğal sayısına ***polinomun derecesi***, $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da ***polinomun katsayıları*** adı verilir.

Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında polinomlarla ilgili olarak şu özellikler ifade edilebilir:

(a) İki polinomun toplamı ve çarpımı yine bir polinomdur.

(b) Bir polinomun bir sayı ile çarpımı yine bir polinomdur.

(c) Eğer r sayısı n–ninci dereceden bir polinomunun m katlı bir sıfır yeri (kökü) ise $n - m$ ninci dereceden öyle bir q polinomu vardır ki her $x \in \mathbb{R}$ için

$$p(x) = (x - r)^m\, q(x)$$

olur.

(d) n–ninci dereceden reel katsayılı bir polinomun en fazla n tane farklı reel kökü vardır.

ÖRNEK : $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3$ polinomunun köklerini (sıfır yerlerini) bulunuz.

Çözüm : $P(x) = x^3\,(x + 1)\,(x^2 + 1)$ eşitliği ile verilen p polinomunun reel kökleri (sıfır yerleri) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -1$ dir. Diğer iki kök reel değildir.

TANIM

$q \neq 0$ olmak üzere p ve q iki polinom olsun.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir ***rasyonel fonksiyon*** denir.

Bu fonksiyon q polinomunun sıfır yerleri hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır. Her polinom $p(x) = p(x) / 1$ şeklinde yazılabileceğinden polinomlar rasyonel fonksiyonların bir özel halidir. Örneğin;

$x \to \frac{1}{x}$, $x \to \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x \to 5x^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar birer rasyonel fonksiyondur.

Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında şu sonuç ifade edilebilir :

SONUÇ

Her rasyonel fonksiyon, ortak böleni olmayan iki polinomun oranı şeklinde yazılabilir.

İspat : $q \neq 0$ olmak üzere p ve q polinomları verilmiş olsun. $f = p / q$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer p ve q polinomları $x - r$ biçiminde bir ortak bölene sahipse, bu durumda dereceleri, sırası ile p ve q nun derecelerinden birer küçük olan p_1 ve q_1 polinomları bulunabilir ki

$$p(x) = (x - r)p_1(x), \quad q(x) = (x - r)q_1(x)$$

olur. Bu durumda

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-r)\,p_1(x)}{(x-r)\,q_1(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

olur. Eğer p_1 ve q_1 polinomlarının da ortak bölenleri varsa aynı işlem tekrarlanır. ❐

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ olsun. Burada pay ve payda $x-2$ ortak çarpanına sahiptir. O hâlde

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

yazılabilir. Bu geçişle f fonksiyonunun tanım kümesinin de genişletilmiş olduğuna dikkat edilmelidir.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon ve $E \subset A$ olsun. Her $x \in E$ elemanına $g(x) = f(x)$ elemanını karşılık getiren $g : E \to B$ fonksiyonuna f fonksiyonunun E kümesine ***kısıtlanması*** denir ve $f_{|E}$ ile gösterilir.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde bir pozitif T sayısı varsa f fonksiyonuna bir ***periyodik fonksiyon***, T sayısına da f nin bir ***peryodu*** denir. Eğer varsa, periyotların en küçüğüne fonksiyonun ***esas (asli) periyodu*** adı verilir.

ÖRNEK : $f(x) = x - [\![x]\!]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun esas (asli) periyodu 1 olan bir periyodik fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm : m bir pozitif tam sayı olsun.

$$f(x+m) = x + m - [\![x+m]\!] = x + m = x + m - ([\![x]\!] + m)$$
$$= x + m - [\![x]\!] - m = x - [\![x]\!] = f(x)$$

olduğundan her m pozitif tam sayısı bir periyottur. Pozitif tam sayıların en küçüğü 1 olduğundan fonksiyonun esas periyodu 1 dir. Bu fonksiyonun grafiği sayfa 58 de verilmişti.

UYARI

f ve g periyodik olduğunda $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonları da periyodik olurlar. Ancak f ve g nin esas periyodu T olduğunda bu fonksiyonların esas periyodu T olmayabilir. Hatta esas periyotları bile bulunmayabilir. Sayfa 76 daki problem 25 ve 26 yı inceleyiniz.

PROBLEMLER-2.2

1. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - x|$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^3|$

c. $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x(x-1)^2|$

2. $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde

$y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$ ve $|y| = f(|x|)$ bağıntılarının grafiklerinin nasıl çizileceğini açıklayınız.

$y = f(x) = x^2 - x$ eğrisinin grafiğinden yararlanarak yukarıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

3. Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki

a. $f(|x|) = |f(x)|$ **b.** $g(\llbracket x \rrbracket) = \llbracket g(x) \rrbracket$

eşitlikleri sağlansın.

4. Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki problem 3 deki eşitlikler sağlanmasın.

5. $[-2, 2]$ üzerinde aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların grafiğini çiziniz.

(a) $y = \llbracket x \rrbracket$ **(e)** $y = 2\llbracket x \rrbracket$

(b) $y = \llbracket -x \rrbracket$ **(f)** $y = |\llbracket x \rrbracket|$

(c) $y = -\llbracket -x \rrbracket$ **(g)** $y = \llbracket |x| \rrbracket$

(d) $y = \llbracket 2x \rrbracket$ **(h)** $y = \llbracket x \rrbracket + 3$

6. Aşağıdaki f fonksiyonlarının, karşılarında yazılı aralıklar üzerindeki grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$ $[-3, 3]$

b. $f(x) = \llbracket x \rrbracket^2$ $[0, 3]$

c. $f(x) = \llbracket -x^2 \rrbracket$ $[0, 5]$

7. $f(x) = \dfrac{\llbracket x \rrbracket}{x}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. $sgnf$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

8. $[-1, 2]$ aralığında $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ ve $g(x) = \llbracket 2x \rrbracket$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları veriliyor. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların $[-1, 2]$ aralığındaki grafiklerini çiziniz.

a. $h(x) = f(x) + g(x)$

b. $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

c. $k(x) = f(x) + g\left(\dfrac{x}{2}\right)$

d. $q(x) = \dfrac{1}{4} f(2x) \cdot g\left(\dfrac{x}{2}\right)$

9. $f(x) = sgn\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{\llbracket x \rrbracket^2 - 9}}\right)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

10. $\lceil x \rceil$, x den küçük olmayan tamsayıların en küçüğünü (tavanını) gösterdiğine göre, aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

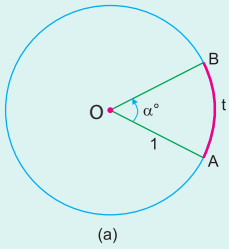
a. $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lceil x \rceil$

b. $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lceil x - 1 \rceil$

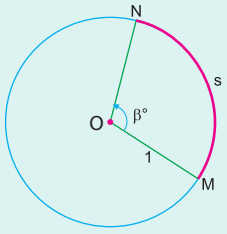
c. $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lceil 2x \rceil$

d. $f: [-4, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\lceil \dfrac{x}{2} \right\rceil$

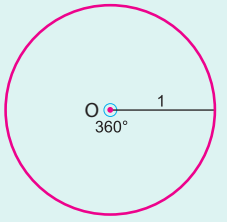
2.5 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE TERSLERİ



(a)



(b)



(c)

Bilindiği gibi, açı ölçü birimlerinden biri derecedir. 1 derece, bir çemberin merkez açısının tamamının ölçüsünün 360 da biridir.

Açıların ölçülerini başka birimlerle de ölçmek mümkündür. Yarıçapı 1 birim olan çemberi (birim çember) gözönüne alalım. Bu çemberde her bir merkez açıya bir çember yayı uzunluğu karşılık gelir.

Yandaki şekilllerde ölçüsü $\alpha°$ olan $\widehat{AOB}$ açısına t uzunluğunda bir AB yayı, ölçüsü $\beta°$ olan MON açısına uzunluğu s olan bir $\widehat{MN}$ yayı karşılık gelmektedir.

Ölçüsü 360° olan açıya da 2π uzunluğunda bir yay karşılık gelir.

Birim çemberde, verilen bir açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna o açının ***radyan*** olarak ölçüsü denir. Buna göre

360 derece = 2π radyan

olacaktır. Şu halde

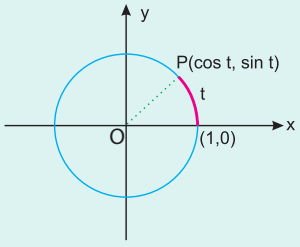
$$1 \text{ radyan} = \frac{360}{2\pi} \text{ derece} = \frac{180}{2\pi} \text{ derece}$$

yazılabilir.

Bu bağıntılardan yararlanarak, derece cinsinden verilen tüm ölçüler radyan, radyan cinsinden verilen tüm ölçüler derece cinsinden yazılabilir.

Analizde en çok kullanılan derece ve bunlara karşılık gelen radyanlar liste halinde aşağıda verilmiştir.

Derece	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radyan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Periyodik fonksiyonların en çok kullanılanları trigonometrik fonksiyonlar veya dairesel fonksiyonlar denilen fonksiyonlardır. Okuyucuların temel trigonometri bilgilerine sahip olduğunu farzederek bu fonksiyonları tanıtmaya başlıyoruz.

Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi çizelim. (1, 0) noktasından başlayarak çember üzerinde $|t|$ birim ilerleyelim (eğer $t > 0$ ise saat yönünün tersine, $t < 0$ ise saat yönünde ilerlenecek). Bu durumda çember üzerinde bir P noktası elde edilecektir. P noktasının apsisi cost (kosinüs t), ordinatı sint (sinüs t) olarak tanımlanır. Böylece her bir t sayısına bir cost ve bir sint sayısı karşılık gelir. Yandaki şekilden de görüleceği gibi

$$-1 \le sint \le 1 \quad ve \quad -1 \le cost \le 1$$

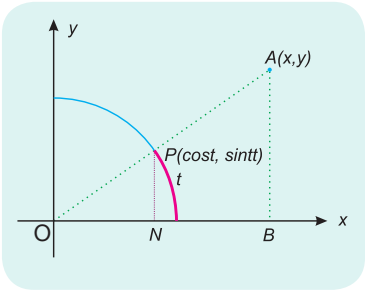
dir. sinüs ve kosinüs fonksiyonlarından başka en çok kullanılan diğer dört fonksiyon tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant fonksiyonlarıdır. Bunlar

$$sect = \frac{1}{\cos t} \quad , \quad csct = \frac{1}{\sin t} \quad , \quad tant = \frac{\sin t}{\cos t} \quad , \quad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Bu şekilde tanımladığımız fonksiyonlar, bir açının ölçüsü cinsinden tanımlanan fonksiyonlarla aynıdır.

Bir AOB açısı verildiğinde bu açının köşesini orijin ve OB başlangıç kenarını da x ekseni üzerinde alalım. Bu açının ölçüsü t radyan olsun. O halde her bir AOB açısına bir t sayısı karşılık gelmektedir. OPN üçgeni ile OAB üçgenlerinin benzerliğinden, $r = |OA|$ olmak üzere,



$$\sin t = \frac{|PN|}{1} = \frac{y}{r} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$
$$\cos t = \frac{|ON|}{1} = \frac{x}{r} \qquad \sec t = \frac{r}{x}$$
$$\tan t = \frac{|PN|}{|ON|} = \frac{y}{x} \qquad \csc t = \frac{r}{y}$$

olur ki, daha önce bir açı için verilen trigonometrik oranlardan başka bir şey değildir.

Trigonometrik ifadeler arasındaki bağıntılardan önemli olan bazılarını aşağıda hatırlatacağız. Bunlar yeri geldiğinde kullanılacaktır. Diğer bağıntıların birçoğu bunlardan elde edilebilir.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin(t + z) = \sin t \cos z + \cos t \sin z$$

$$\cos(t + z) = \cos t \cos z - \sin t \sin z$$

$$\tan(t + z) = \frac{\tan t + \tan z}{1 - \tan t \tan z}$$

$$\cos t \cos z = \frac{1}{2}[\cos(t + z) + \cos(t - z)]$$

$$\sin t \sin z = \frac{-1}{2}[\cos(t + z) - \cos(t - z)]$$

$$\sin t \cos z = \frac{1}{2}[\sin(t + z) + \sin(t - z)]$$

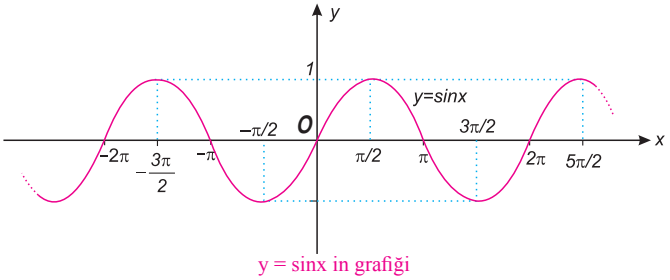
Bu bağıntılardan faydalanarak sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının 2π, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının π periyodlu oldukları, yani

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t$$
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t$$
$$\tan(t + \pi) = \tan t$$
$$\cot(t + \pi) = \cot t$$

bağıntılarının gerçeklendiği kolayca gösterilebilir. Herhangi bir t verildiğinde ona karşılık gelen trigonometrik değerleri hesaplamak kolay olmayabilir. Bu sebeple bunlar için trigonometri cetvelleri denilen bazı cetveller verilmiştir. Fakat bazı özel t değerleri için bu ifadeleri hesaplamak çok kolaydır. Bu özel değerlerin trigonometrik değerlerini bir tablo halinde veriyoruz.

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\cot t$
0	0	1	1	tanımsız
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	tanımsız	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	tanımsız

$f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ne birebir ne de örtendir.

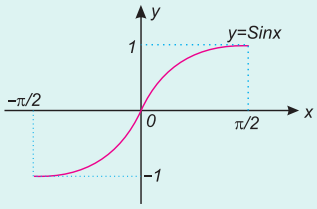


y = sinx in grafiği

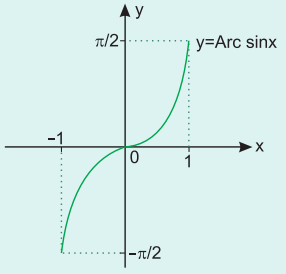
Eğer bu fonksiyonun değer kümesini $[-1, 1]$ aralığı olarak alırsak,

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin x$$

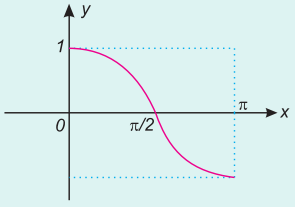
fonksiyonu örten olur fakat birebir olmaz.



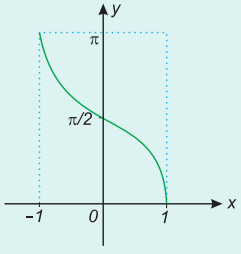
y = Sinx in grafiği



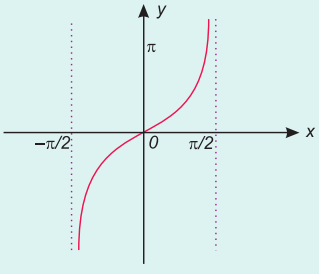
y = Arc sinx in grafiği



y = Cosx in grafiği



y = Arc cosx in grafiği



y = Tanx in grafiği

Şimdi bu fonksiyonun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına olan kısıtlanmasını gözönüne alalım. Bu fonksiyona Sinüs fonksiyonu (sinüs fonksiyonunun kısıtlanması olan bu fonksiyon, baş harfi büyük yazılarak sinüs fonksiyonundan ayırdedilmiştir) adı verilir. Buna göre

$$sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = Sin$$

olacaktır. O halde Sinüs fonksiyonu

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad Sinx = sinx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyondur. Bu fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir. Bu eğri $y = sinx$ eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına karşılık gelen parçasından ibarettir. Sinüs fonksiyonu birebir örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyona **Arksinüs** (Arcsin) fonksiyonu denir. Şu halde Arcsin fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından y = Arcsinx eğrisi yandaki gibidir.

Yukarıdaki düşünceye paralel olarak, kosinüs fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanması olan

$$Cos : [0, \pi] \to [-1, 1], \; Cos\, x = cosx$$

fonksiyonu birebir ve örtendir. Şu halde bu fonksiyonun bir tersi vardır. Bu ters fonksiyona ***Arkkosinüs*** (Arccos) fonksiyonu adı verilir. Arccos$x$ in anlamı kosinüsü x olan yay demektir. Örneğin Arccos 1 = 0 dır, çünkü kosinüsü 1 olan yayın ölçüsü 0 dır. Kosinüs ve Arkkosinüs fonksiyonlarının grafikleri yanda çizilmiştir.

Aynı şekilde tanjant fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığına kısıtlanması olan Tanjant fonksiyonunun

$$Tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

biçiminde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona ***Arktanjant*** (kısaca Arctan yazılır) fonksiyonu adı verilir. Arctanx in anlamı Tanjantı x olan yayın uzunluğu demektir. Tanjant ve Artanjant fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından bunların grafikleri yandaki gibi olacaktır. Yukarıdaki tanıma göre

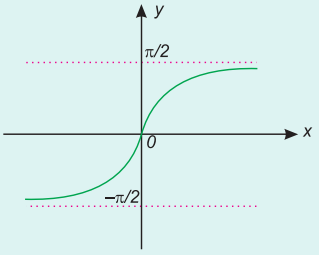
$$u = Arctanv \;\Leftrightarrow\; tan\, u = v \;\; ve \;\; u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

demektir.

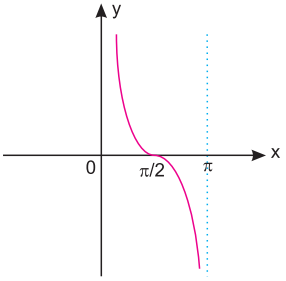
Kotanjant fonksiyonu da $(0, \pi)$ aralığında birebir örten olduğundan bu fonksiyonun da bir tersi vardır. Bu ters fonksiyona Arkkotanjant (Arccot) fonksiyonu denir. Demek ki,

$$u = Arccot\, v \Leftrightarrow v = cot\, u \;\; ve \;\; u \in (0, \pi)$$

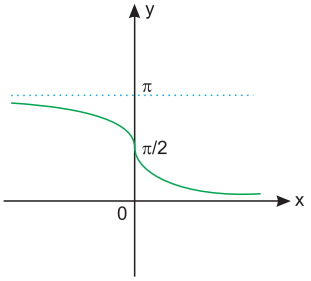
dir. Kotanjant ve Arkkotanjant fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



y = Arctan*x* in grafiği



y=Cot*x* in grafiği

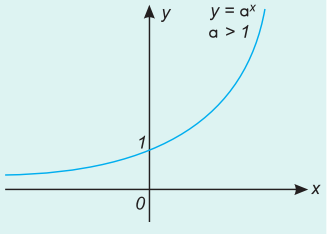


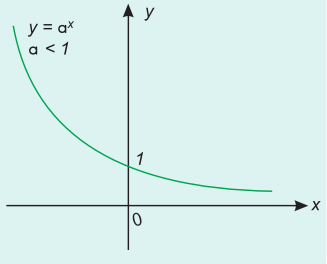
y=Arccot*x* in grafiği

UYARI

Trigonometrik fonksiyonların birebir ve örten olduğu aralıklar başka türlü de seçilebilir. Örneğin sinüs fonksiyonu $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ 3\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında birebir örten bir fonksiyon olup tersi vardır. Dolayısıyla $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ aralığı yerine bu aralık alınabilir. Hatta t bir tam sayı olmak üzere, $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\ ,\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ aralıklarının hepsinde sinüs fonksiyonu birebir örtendir. Fakat bu aralıkların içerisinde en çok kullanılan $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ aralığıdır. Bu sebeple, biz ***esas aralıklar*** denilen yukarıdaki aralıkları kullanacağız.

2.6 ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR





TANIM

$a \neq 1$ herhangi bir pozitif reel sayı olsun.

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir ***üstel fonksiyon*** denir.

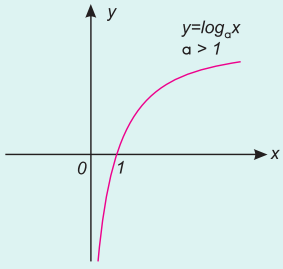
$a > 1$ için bu fonksiyon monoton artan, $a < 1$ için monoton azalandır. a nın 1 den büyük ve küçük olmasına göre fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir.

Üslü ifadelerden bilindiği gibi, $f(x) = a^x$ *ise*

$$f(0) = 1\ , \qquad f(x+t) = f(x)\cdot f(t)$$

$$f(1) = a\ , \qquad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

eşitlikleri vardır.

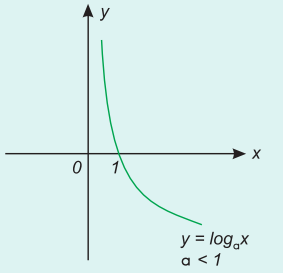


TANIM

$y = a^x$ in grafiğinden de kolayca görülebileceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu birebir örtendir. Dolayısıyla bu fonksiyonun $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona ***logaritma fonksiyonu*** adı verilir ve fonksiyonun kuralı $y = \log_a x$ (a tabanına göre logaritma x okunur) biçiminde yazılır. Demek ki $x > 0$ için

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \qquad (2.11)$$

dir.



$y = \log_a x$ in grafiği $y = a^x$ in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından, yandaki gibidir.

(2.11) önermesinden yararlanarak logaritma fonksiyonunun şu özellikleri sağlandığı kolayca gösterilebilir.

I. $\log_a a = 1$

II. $\log_a 1 = 0$

III. $\log_a (x \cdot t) = \log_a x + \log_a t$

IV. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

V. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

VI. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Pratikte en çok kullanılan logaritma ***doğal*** (tabii) ***logaritma*** denilen e tabanına göre yazılan logaritmalardır. Burada e sayısı, değeri 2,7182818... olan bir sayıdır. İleride bu sayı üzerinde etraflıca durulacaktır. $\log_e x$ yerine çok kez $\ln x$ yazılır. Biz de bu kitapta $\log_e x$ yerine, $\ln x$, $\log_{10} x$ yerine $\log x$ yazış biçimini kullanacağız. O hâlde,

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

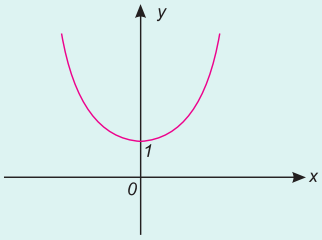
Simetrik bir küme üzerine tanımlı her f fonksiyonu, biri çift biri de tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. Zira her f fonksiyonu için

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{çift}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{tek}}$$

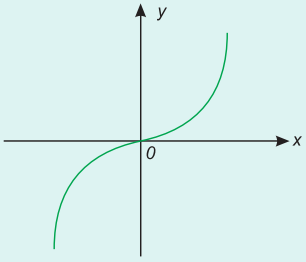
yazılabilir. $f(x) = e^x$ alınırsa

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

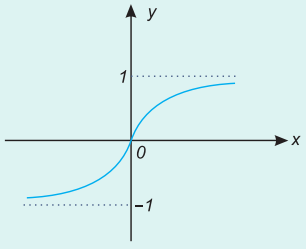
yazılabilir. e^x in çift ve tek parçalarına, sırası ile, x in **hiperbolik kosinüsü** ve **hiperbolik sinüsü** denir. Buna göre,



y = coshx in grafiği



y = sinhx in grafiği



y = tanhx in grafiği

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olur. Bu fonksiyonların grafikleri yanda verilmiştir.

Diğer hiperbolik fonksiyonlar trigonometrik fonksiyonlardaki gibi tanımlanır :

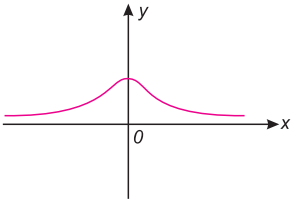
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

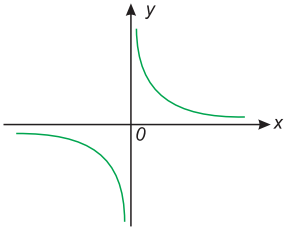
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

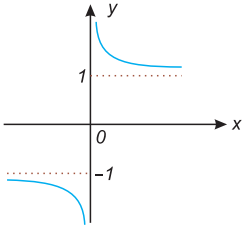
Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir.



y = sechx in grafiği



y = cschx in grafiği



y = cothx in grafiği

Eğer $u = \cosh x$ ve $v = \sinh x$ denirse

$$u^2 - v^2 = 1$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu denklem $uv - dik$ koordinat sisteminde bir ikizkenar hiperbol denklemi olduğundan bu fonksiyonlara **hiperbolik fonksiyonlar** adı verilmiştir.

Hiperbolik fonksiyonlar arasında da tıpkı trigonometrik fonksiyonlara benzer bağıntılar vardır. Önemli olanlarını aşağıda sıralıyoruz.

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $\cosh(-x) = \cosh x$

(c) $\sinh(-x) = -\sinh x$

(d) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

(e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(f) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\sinh^2 x + 1$

Bunlardan (f) yi ispatlayıp diğerlerini birer alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

$$\cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{1}{2}[(e^x)^2 + (e^{-x})^2] = \frac{1}{2}[(e^x + e^{-x})^2 - 2]$$

$$2\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - 1 = 2(\cosh x)^2 - 1 = 2\cosh^2 x - 1$$

bulunur. (a) dan $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ yazılabilir. Bu değer bulunan eşitlikte yerine yazılırsa

$$\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$$

bulunur. Yine (a) dan

$$\cosh 2x = 2\sinh^2 x + \cosh^2 x - \sinh^2 x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

yazılabilir.

2.7 EĞRİLERİNİN PARAMETRİK GÖSTERİMİ

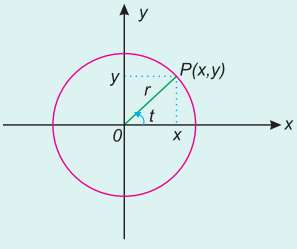
TANIM

Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun $y = f(x)$ eşitliği ile verilen kuralı başka şekillerde de verilebilir. Örneğin $x = g(t)$ alınırsa x değişkeni A kümesini taradığında t de belli bir C kümesini tarar. Buna bağlı olarak $y = f(g(t))$ olur. Demek ki bir f fonksiyonunun grafiği

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \quad t \in C$$

şeklinde de verilebilir. Burada C, t parametresinin taradığı küme olup çoğunlukla bir I aralığıdır. u ile v de aynı C kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. t parametresinin değişim kümesi $I = [a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık olduğunda $A(u(a), v(a))$ noktasına eğrinin ***başlangıç noktası*** $B(u(b), v(b))$ noktasına da ***bitiş noktası*** adı verilir. Böyle eğrilere de ***yönlendirilmiş eğriler*** denir.

Şimdi bazı eğrilerin parametrik denklemini yazmaya çalışalım.



ÖRNEK : r yarıçaplı merkezil $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin bir parametrik denkleminin

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

olacağını gösteriniz. Burada t, çember üzerindeki $P(x, y)$ noktasını orijine birleştiren doğru ile x ekseni tarafından oluşturulan pozitif açının (saatin ters yönündeki açının) ölçüsüdür.

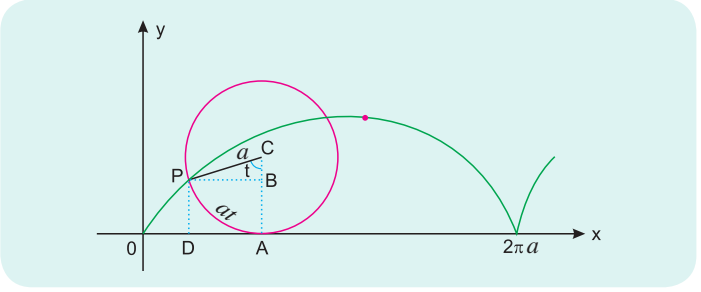
Çözüm : $sint = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\,sint$

$$cost = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\,cost$$

olur.

ÖRNEK : Bir doğru üzerinde yuvarlanan a yarıçaplı bir çemberi gözönüne alalım. Çember üzerinde alınan bir P noktasının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm : Çemberin yuvarlandığı doğruyu x–ekseni, t parametresi de P noktası, çemberin C merkezi ve çemberin x–eksenine değme noktasını birleştiren açının radyan olarak ölçüsü olsun (Şekil 2.38).



$|\widehat{PA}| = at$

$|\widehat{OA}| = |\widehat{PA}| = at$

$$x = |OA| - |DA| = |OA| - |PB| = at - asint = a(t - sint)$$

olur. Benzer şekilde

$$y = |PD| = |BA| = |CA| - |CB| = a - a\,cost = a(1 - cost)$$

olur. Buna göre **cycloid (sikloid)** denilen eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

dır. Bu eğrinin fizikte önemli bir yeri vardır.

TANIM

Bir fonksiyonun kuralı $y = f(x)$ biçiminde verilmiş ise bu fonksiyona ***açık olarak verilmiş bir fonksiyon*** veya kısaca, bir ***açık fonksiyon*** adı verilir. Eğer x ile y arasındaki bağıntı $F(x, y) = 0$ biçimindeki bir bağıntı ile verilmişse, bu fonksiyona ***kapalı olarak verilmiş bir fonksiyon*** veya kısaca, ***bir kapalı fonksiyon*** denir.

PROBLEMLER-2.3

1. $\theta \neq 2k\pi$ için aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu tümevarım metodu ile gösteriniz.

a. $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta + \ldots + \sin n\theta = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

b. $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

c. $\sin\theta + 2\sin2\theta + \ldots + n\sin n\theta$
$= \dfrac{(n+1)\sin n\theta - n\sin(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

d. $\cos\theta + 2\cos2\theta + \ldots + n\cos n\theta =$
$= \dfrac{(n+1)\cos n\theta - n\cos(n+1)\theta - 1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

2. $\theta \neq k\pi$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\sin\theta + \sin3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

b. $\cos\theta + \cos3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$

c. $\cos\theta \cdot \cos2\theta \cdot \ldots \cdot \cos2^n\theta = \dfrac{\sin 2^{n+1} n\theta}{2^{n+1}\sin\theta}$

3. $y = \sin x$ eğrisinin grafiğinden yararlanarak

$y = \sin2x$ ve $y = \sin\frac{x}{2}$

eğrilerini çiziniz.

4. $y = \cos x$ in grafiğinden yararlanarak

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ve $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

eğrilerinin grafiklerini çiziniz.

5. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\arcsin\frac{1}{2}$

c. $\arctan 0$ **d.** $\operatorname{arccot} 1$

6. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. $\arcsin\frac{x-1}{x+1} = \arccos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c. $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

ç. $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - 1$

e. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

f. $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

g. $\arccos x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right)$

h. $\arctan x - \arctan t = \arctan\frac{x-t}{1+xt}$

ı. $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

b. $\arctan(-x) = -\arctan x$

c. $\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x$

d. $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$

10. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$, $|x| \geq 1$

b. $\operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x}$, $|x| \geq 1$

c. $\operatorname{arccot} x = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & , x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}$

11. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a. $\cot(\operatorname{arcsec} x)$ **b.** $\sin(\arccos x)$

c. $\sin(\operatorname{arccot} x)$ **d.** $\cos(\operatorname{arccot} x)$

e. $\sin(\operatorname{arcsec} x)$ **f.** $\cos(\operatorname{arccsc} x)$

12. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a. $\sec\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$ **b.** $\cos\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$

13. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, $|x| \leq 1$

b. $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

c. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

14. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \arcsin(\sin x)$ **b.** $f(x) = \arccos(\cos x)$

c. $f(x) = \arctan(\tan x)$

15. $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$ için

$\arctan x + \arctan y = \frac{x+y}{1-xy}$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$

b. $2\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

c. $\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$, $x > -1$

16. Reel değerli aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \log_7(4 - x^2)$ **b.** $f(x) = \log \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 5}$

c. $f(x) = \log(\sin x)$ **d.** $f(x) = \arccos(\log_5 x)$

17. Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını araştırınız.

a. $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ **b.** $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

c. $f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 1} x$ **d.** $f(x) = \log \frac{x}{1+x^2}$

18. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

19. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $\log_2(2^x) = 5$

b. $\log_2 x^2 + \log_x 2 = 3$

c. $2\, e^{-3x} = 5$

d. $x\, e^{-x} + 3\, e^{-x} = 0$

e. $e^x - e^{-x} = 2$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki kurallarla tanımlanan fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \sqrt{6 + 5x - x^2}$

b. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

c. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{9 - x^2}}$

ç. $f(x) = \sqrt{4 - 2\sqrt{1 + x^2}}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

e. $f(x) = \log |1 - x^2|$

f. $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

g. $f(x) = \log_3 (\log_4 (\log_5 x)))$

2. $a \le x \le 1$ için $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dir. $f(f(x)) = x$ olduğunu gösteriniz.

3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dir. $x \neq 1$ için $f(f(f(f(x)))) = x$ olduğunu gösteriniz.

5. $f(x) = \log \dfrac{1-x}{1+x}$ olsun. $a, b \in (-1, 1)$ için $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ olacağını gösteriniz.

6. Derecesi 2 den büyük olmayan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan p polinomlarını bulunuz.

a. $p(x) = p(1 - x)$ **b.** $p(x) = p(1 + x)$

c. $p(2x) = 2p(x)$ **d.** $p(3x) = p(x + 3)$

7. Katsayıları tam sayı olan $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ şeklindeki bir cebirsel denklemin tam sayı olmayan bir rasyonel kökünün olamayacağını gösteriniz.

8. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tamsayılar, a_0 ve a_n sıfırdan farklı olmak üzere

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$

denklemi veriliyor. Gösteriniz ki, eğer bu denklemin bir $\dfrac{p}{q}$ rasyonel kökü varsa $p | a_n$ ve $q | a_0$ dır.

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

bağıntısını sağladığına göre, $f(0)$ kaçtır?

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

bağıntısını sağlıyor. f sabit fonksiyon olmadığına göre $f(0)$ kaçtır?

11. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için $f(1) = 3$ ve $n > 1$ için $f(n+1) = \dfrac{3f(n) + 1}{3}$ olduğuna göre, $f(100)$ kaçtır?

12. $f(x) = mx + n$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için

a. $(f \circ f)(x) = f(x)$

b. $(f \circ f)(x) = x$

eşitliğini sağladığına göre m ve n sabitlerini bulunuz.

13. Artan fonksiyonun tersinin de artan, azalan fonksiyonun tersinin de azalan olacağını gösteriniz.

14. $[\![-x]\!] = -[\![x]\!]$ eşitliği hangi x ler için doğrudur?

15. Bir şirket x *TL* kâr ettiğinde $V(x)$ *TL* vergi ödüyor.

$$V(x) = \begin{cases} (0,2)x & , \ 0 \le x \le 1000 \ \text{ise} \\ 200 + (0,3)(x-1000) & , \ 1000 < x \le 5000 \ \text{ise} \\ 1700 + (0,4)(x-5000) & , \ x > 5000 \ \text{ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, bu şirket

a. *600 TL* **b.** *3000 TL* **c.** *15.000 TL*

kâr ettiğinde kaç *TL* vergi öder?

16. $a^2 + bc \neq 0$ olduğunda

$y = \frac{ax+b}{cx-a}$

eğrisinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olacağını gösteriniz.

17. $a\cos x + b\sin x + c = 0$ denkleminin $x_1 - x_2 \neq 2k\pi$ bağıntısını sağlayan x_1, x_2 kökleri için;

a. $\sin(x_1 + x_2) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

b. $\cos(x_1 + x_2) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

c. $\tan\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{b}{a}$

olacağını gösteriniz.

18. Bir dik üçgenin dar açılarından birinin ölçüsü α olsun. $s > t > 0$ için

$\sin\alpha = \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ olduğuna göre,

$\alpha = \arctan\left(\frac{s^2-t^2}{2st}\right)$ olacağını gösteriniz.

$\sin\alpha + \cos\alpha = s$ ve $\sin\alpha - \cos\alpha = t$ olduğunda

$\alpha = \arctan\left(\frac{s+t}{s-t}\right)$ olacağını gösteriniz.

19. $f(x)=\sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz. $f + g$ periyodik midir? $f + g$ fonksiyonunun esas periyodu var mıdır?

20. $f(x) = \sin^4 x$ *ve* $g(x) = \cos^4 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz. $f + g$ periyodik midir? $f + g$ nin esas periyodu f *ve* g nin esas periyodu-na eşit midir?

21. $f(x) = \tan x + \cot x$ biçiminde tanımlanan fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

22. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

a. $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+4 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 3-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t \end{cases}$; $-8 \le t \le 1$

d. $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$; $0 \le t \le 2\pi$

Bölüm

3

LİMİT



3.1 DİZİLER VE LİMİTLERİ

Bu bölümde Analizin temel konulardan biri olan limit konusunu işleyeceğiz. Daha ileriki bölümlerde vereceğimiz konuların (süreklilik, türev, ... vb.) birçoğu bu kavrama dayanır.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini vermeden önce özel bir fonksiyon olan ve dizi denen fonksiyonları tanımlayıp bunların limitini vereceğiz. Daha sonra bundan yararlanarak reel değerli fonksiyonların limitini inceleyeceğiz.

TANIM

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona ***dizi*** denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye ***reel terimli dizi***, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye ***rasyonel terimli dizi*** adı verilir.

Biz bu bölümde reel terimli dizileri, yani

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

şeklindeki fonksiyonları inceleyeceğiz.

$s(1)$, $s(2)$, $s(3)$, ... reel sayılarına dizinin birinci, ikinci, üçüncü, ... terimleri, $s(n)$ terimine dizinin genel terimi ve n doğal sayısına da terimin indisi adı verilir. Birçok kitapta $s(n)$ yerine s_n gösterimi kullanılır. Biz de bu kitapta genel terimi s_n ve genel terimi s_n olan diziyi (s_n) ile göstereceğiz.

Bir dizinin belirtilmiş olması için o dizinin genel teriminin belirtilmiş olması gerekir. Bir dizinin birkaç teriminin verilmesi ile dizi verilmiş olmaz. Örneğin terimleri *1, 1/2, 1/3, 1/4, ...* olan dizi belli değildir. Zira bu dört terim

$$\left(\frac{1}{n}\right),\ \left((n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+\frac{1}{n}\right),\ \left(n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+\frac{1}{n}\right)$$

dizilerinin her üçünün de ilk dört terimidir. Daha bunlar gibi birçok dizi bulunabilir. Halbuki bu üç dizinin beşinci terimleri, sırasıyla *1/5, 121/5, 601/5* dir.

TANIM

Her n doğal sayısı için $s_n = t_n$ ise (s_n) ve (t_n) dizilerine ***eşit diziler*** denir, $(s_n) = (t_n)$ yazılır.

Dikkat edilecek olursa bu tanım iki fonksiyonun eşitliği tanımından başka birşey değildir.

ÖRNEK : $(1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1))$ ile (n^2) dizileri eşittir. Çünkü her n doğal sayısı için

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

dir.

TANIM

(s_n) ve (t_n) birer dizi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Dizilerin toplamı, çarpımı ve bir dizinin bir sayı ile çarpımı

$$(s_n) + (t_n) = (s_n + t_n)$$

$$(s_n) \cdot (t_n) = (s_n \cdot t_n)$$

$$\lambda \cdot (s_n) = (\lambda \cdot s_n)$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK : $s_n = 1 + (-1)^n$, $t_n = 1 - (-1)^n$ olsun. $(s_n) + (t_n)$, $(s_n) \cdot (t_n)$ ve $5 \cdot (s_n)$ dizilerini bulalım.

Yukarıdaki tanıma göre,

$$(s_n) + (t_n) = (s_n + t_n) = (1 + (-1)^n + 1 - (-1)^n) = (2)$$

$$(s_n) \cdot (t_n) = (s_n \cdot t_n) = (1 - (-1)^{2n} = (1 - 1) = (0)$$

$$5 \cdot (s_n) = (5 + 5(-1)^n)$$

olacaktır.

TANIM

Her n doğal sayısı için $s_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine ***üstten sınırlıdır*** denir. M sayısına da bu dizinin bir ***üst sınırı*** adı verilir. Her n doğal sayısı için $s_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye ***alttan sınırlıdır*** denir, m sayısına da bu dizinin bir ***alt sınırı*** adı verilir.

ÖRNEK : $(-n)$ dizisi üstten sınırlı bir dizidir. Çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-n \leq 1$ dir. $(n^2 + 1)$ dizisi alttan sınırlı bir dizidir. Zira $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^2 + 1 \geq 2$ dir.

TANIM

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine ***sınırlı dizi*** denir.

Üstten ve alttan sınırlı bir dizinin sınırlı olacağı açıktır.

ÖRNEK : Genel terimi $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$ olan dizi sınırlı bir dizidir. Zira $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ dir.

$\frac{(n^2+1)}{n}$ dizisi sınırlı değildir. Zira $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{(n^2+1)}{n} \leq K$ olacak şekilde bir K sayısı yoktur.

TANIM

Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin ***en küçük üst sınırı*** (eküs) veya ***supremumu*** denir.

Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin ***en büyük alt sınırı*** (ebas) veya ***infimumu*** denir.

Bir dizinin en büyük terimi varsa, o terim dizinin supremumu, en küçük terimi varsa o terim de dizinin infimumudur. Fakat bir dizinin supremum veya infimumunun dizinin bir terimi olması gerekmez.

ÖRNEK : $(a_n) = \left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin supremum ve infimumunu bulunuz.

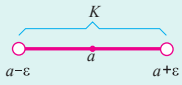
Çözüm : Dizinin terimlerinin kümesi

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, -\frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots\right\}$$

dir. Bu kümenin ne en küçük elemanı, ne de en büyük elemanı vardır. Kümenin supremumu 1, infimumu –1 olduğundan

$$sup\,(a_n) = 1, \quad inf\,(a_n) = -1$$

dir. Ne *1* ne de *–1* kümenin bir elemanıdır.



TANIM

$\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : \ |x-a| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ***ε–komşuluğu*** denir.

$$|x-a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

olduğundan a nın ε (epsilon) komşuluğu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ aralığıdır.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir s reel sayısının ε– komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisinin ***limiti*** s dir. (veya (s_n), s ye ***yakınsaktır***) denir ve

$$\lim s_n = s \quad \text{veya} \quad (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanımdan şu sonucu çıkarabiliriz. Madem ki $(s-\varepsilon,\ s+\varepsilon)$ aralığının dışında dizinin ancak sonlu sayıda terimi vardır, o halde bu elemanların indislerinin (kaçıncı terim olduklarının) en büyüğü bulunabilir. Bu indis n_0 ile gösterilirse $n > n_0$ için (s_n) dizisinin terimleri $(s-\varepsilon,\ s+\varepsilon)$ aralığının içine düşer. Buna göre yuarıdaki tanıma denk olan şu tanımı verebiliriz.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye ***yakınsaktır*** denir ve

$$\lim s_n = s \quad \text{veya} \quad (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yazabiliriz.

TANIM

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{öyle ki} \ \forall n > n_0 \quad \text{için} \quad |s_n - s| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ (s_n) \to s$$

Burada dikkat edilecek husus n yi yeter derece büyük seçerek s_n ile s arasındaki farkın istenildiği kadar küçük yapılabileceğidir.

ÖRNEK : $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\varepsilon > 0$ olsun. $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı seçelim. $\forall n > n_0$ için

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

olur ki bu da $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ olduğunu gösterir.

ÖRNEK : $\left(\frac{3n+5}{2n+3}\right)$ dizisinin $3/2$ sayısına yakınsadığını gösteriniz.,

Çözüm :

$$\left|\frac{3n+5}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+6 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}$$

olur. Demek ki n_0 sayısı $\frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}$ sayısının tam kısmıdır. Örneğin, $\varepsilon = 1/100$ alınırsa $\frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon} = 23,5$ olduğundan $n_0 = [\![23,5]\!] = 23$ dür. Demek ki verilen dizinin 23. teriminden sonraki bütün terimleri $3/2$ nin $1/100$ komşuluğunda, yani $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{100}, \frac{3}{2} + \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{149}{100}, \frac{151}{100}\right)$ aralığındadır.

Şimdi yakınsak dizilerin özellikleri ile ilgili bazı teoremler verelim.

TEOREM 3.1

Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

İspat : Kabul edelim ki (s_n) dizisinin limiti tek olmasın. Örneğin

$$(s_n) \to s \text{ ve } (s_n) \to s'$$

olsun. $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_1$ için

$$|s_n - s| < \varepsilon / 2$$

olur.

$(s_n) \to s'$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_2$ için

$$|s_n - s'| < \varepsilon / 2$$

olur. maks $(n_1, n_2) = n_0$ diyelim. Her $n > n_0$ için

$$|s - s'| = |s - s_n + s_n - s'| \le |s_n - s| + |s_n - s'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Herhangi iki reel sayı arasındaki farkın mutlak değerinin her pozitif sayıdan küçük olması bu iki sayının eşit olması ile mümkün olacağından $s = s'$ olmalıdır.

TEOREM 3.2

Yakınsak her dizi sınırlıdır.

İspat : $(s_n) \to s$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$ dir.

$$|s_n - s| < \varepsilon \Rightarrow s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon.$$

Dizinin en fazla n_0 tane terimi $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ aralığının dışında bulunabileceğinden bunların en küçük ve en büyüklerini seçmek mümkündür.

$$A = min\ \{s_1, s_2, ..., s_{n_0}, s - \varepsilon\}$$

$$B = maks\ \{s_1, s_2, ..., s_{n_0}, s + \varepsilon\}$$

denirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \le s_n \le B$ olur. (s_n) alttan ve üstten sınırlı olduğundan sınırlıdır. ❐

Şimdi yakınsak dizilerle ilgili bazı teoremler verelim.

TEOREM 3.3

$(s_n) \to s$ ise $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda (s_n) \to \lambda \cdot s$ dir.

İspat : $\lambda = 0$ için teorem açıktır. $\lambda \neq 0$ olsun. $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *öyle ki* $\forall n > n_0$ için

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

kalır. Buna göre $\forall n > n_0$ için

$$|\lambda s_n - \lambda s| = |\lambda|\ |s_n - s| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

olur. Yani $(\lambda s_n) \to \lambda s$ dir.

TEOREM 3.4

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t \Rightarrow (s_n + t_n) \to s + t$ dir.

İspat : $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall n > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_1$ için $|s_n - s| < \varepsilon/2$ olur. $(t_n) \to t$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_2$ için $|t_n - t|\ \varepsilon / 2$ kalır. $n_0 = \text{maks}\ (n_1, n_2)$ denirse $\forall n > n_0$ için

$$|s_n + t_n - (s + t)| \le |s_n - s| + |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani $(s_n + t_n) \to s + t$ dir.

TEOREM 3.5

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t \Rightarrow (s_n \cdot t_n) \to s \cdot t$ dir.

İspat: (s_n) dizisi yakınsak olduğundan Teorem 3.2 gereğince sınırlıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| < M$ olsun. Diğer taraftan $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_1$ için $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{|t| + M}$ kalır.

Burada ε yerine $\varepsilon/(|t| + M)$ alınmasının nedeni sonucun düzgün çıkması içindir. ε istenildiği kadar küçük seçildiğinde $\frac{\varepsilon}{|t| + M}$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. $(t_n) \to t$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_2$ için $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{|t| + M}$ kalır. $n_0 = maks\,(n_1, n_2)$ dersek $\forall n > n_0$ için

$$|s_n t_n - st| = |s_n t_n - s_n t + s_n t - st| \le |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$$
$$= |s_n|\,|t_n - t| + |t|\,|s_n - s| < M \frac{\varepsilon}{|t| + M} + |t| \frac{\varepsilon}{|t| + M} = \varepsilon$$

olduğundan $(s_n t_n) \to st$ dir.

Demek ki çarpımın limiti limitlerin çarpımına eşittir.

TEOREM 3.6

$(s_n) \to s$, $s \neq 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \neq 0$ ise

$\left(\frac{1}{s_n}\right) \to \frac{1}{s}$ dir.

İspat : $s > 0$ olsun. (Eğer $s < 0$ ise Teorem 3.3 gereğince dizinin terimleri (-1) ile çarpılmak suretiyle $s > 0$ yapılabilir.) Önce $\left(\frac{1}{s_n}\right)$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$ dur. Yani $\forall n > n_0$ için $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$ dur. Bu eşitsizliğin sol tarafı kullanılırsa $\forall n > n_0$ için $s_n > s - \varepsilon$ yazılabilir. ε istenildiği kadar küçük seçilebildiğinden $s - \varepsilon > 0$ dır. Sonlu çoklukta olan $s_1, s_2, \ldots s_{n_0}$, $s - \varepsilon$ sayılarının en küçüğü bulunabilir.

$$M = min\ \{\ |s_1|\ ,\ |s_2|\ ,\ \ldots\ ,\ |s_{n_0}|,\ s-\varepsilon\ \}$$

dersek $M > 0$ dir. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \geq M$ ve dolayısıyla $\left|\frac{1}{s_n}\right| \leq \frac{1}{M} = K$ olur. Yani $\left(\frac{1}{s_n}\right)$ sınırlıdır. $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ n > n_0$ için

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n \cdot s}\right| < |\ s_n - s\ | \cdot \frac{1}{|\ s_n\ | \cdot s} \leq \frac{K}{s} \cdot \varepsilon$$

olduğundan $\left(\frac{1}{s_n}\right) \to \frac{1}{s}$ dir.

SONUÇ

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t,\ (t \neq 0)$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $t_n \neq 0$ ise

$\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \to \frac{s}{t}$

dir.

İspat : $\left(\frac{s_n}{t_n}\right) = (s_n)\left(\frac{1}{t_n}\right)$ olduğundan Teorem 3.6 ve Teorem 3.7 den $\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \to \frac{s}{t}$ elde edilir.

TANIM

(s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $s_n < s_{n+1}$ ise diziye **monoton artan dizi**

2) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq s_{n+1}$ ise diziye **azalmayan dizi**

3) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $s_n > s_{n+1}$ ise diziye **monoton azalan dizi**

4) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $s_n \geq s_{n+1}$ ise diziye **artmayan dizi**

denir.

TEOREM 3.7

Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

İspat : (s_n) monoton artan ve sınırlı olsun. $sup\ (s_n) = s$ diyelim. s bir üst sınır olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n \leq s \qquad (3.1)$$

dir. Supremum özelliğinden, her $\varepsilon > 0$ için

$$s - \varepsilon < s_{n_o}$$

olacak şekilde en az bir s_{n_o} terimi (başka bir deyişle bir n_0 doğal sayısı) vardır. (s_n) monoton artan olduğundan her $n > n_0$ için

$$s - \varepsilon < s_n \tag{3.2}$$

olur. (3.1) eşitsizliği de gözönüne alındığında her $n > n_0$ için

$$s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon \tag{3.3}$$

yazılabilir ki, bu (s_n) dizisinin s ye yakınsadığını gösterir. Şu halde (s_n) monoton artan ve sınır ise

$$lim\ s_n = sup\ s_n \tag{3.4}$$

olur. Dizi monoton azalan olduğunda ispat benzer şekilde yapılabilir. Bu durumda

$$lim\ s_n = inf\ s_n$$

olur.

ÖRNEK : $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ genel terimi ile verilen (s_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

olduğundan $s_{n+1} > s_n$ dir. Yani verilen dizi monoton artandır.

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğundan (s_n) sınırlıdır. O halde Teorem 3.7 gereğince (s_n) yakınsaktır.

ÖRNEK : $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ genel terimi ile verilen dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

olur. Diğer taraftan Bernoulli eşitsizliğinden

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

bulunur. Şu halde

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} > \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow e_{n+1} > e_n$$

olur. Demek ki $(e_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisi monoton artandır.

Şimdi (e_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Binom formülünden

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} < \frac{1}{k!}$$

olduğundan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

bulunur. Her $n\in\mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

bulunur. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, yani sınırlıdır. O halde $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ dizisi yakınsaktır. Ayrıca $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ olduğundan $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ dizisinin limiti 2 ile 3 arasındaki bir sayıdır. Bu sayı e ile gösterilir. Şu halde

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

olur.

TEOREM 3.8

(a_n), (b_n) ve (c_n) reel terimli diziler ve n_0 bir doğal sayı olsun.

(i) Eğer $(a_n)\to a$, $(b_n)\to a$ ve $\forall n > n_0$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ ise $(c_n)\to a$ dır.

(ii) $(a_n)\to 0$ ve (b_n) sınırlı ise $(a_n b_n)\to 0$ dır.

İspat : (i) $\varepsilon > 0$ olsun. (a_n) *ve* (b_n) dizileri a sayısına yakınsadıklarından, öyle n_1 ve n_2 sayıları bulunabilir ki

$$\forall\, n \geq n_1 \text{ için } |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$\forall\, n \geq n_2 \text{ için } |b_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

kalır.

$p = max\,\{n_0, n_1, n_2\}$ olsun. $\forall n > p$ için

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

olur. Şu halde $\forall n > p$ için $|c_n - a| < \varepsilon$ olur. Bu da $(c_n) \to a$ olduğunu gösterir.

(ii) (b_n) sınırlı olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|b_n| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $(a_n) \to 0$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $|a_n| < \varepsilon / M$ kalır. Bu durumda $\forall\, n > n_0$ için

$$|a_n\, b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

olur. Bu da $(a_n\, b_n) \to 0$ olduğunu gösterir.

ÖRNEK : Genel terimleri $a_n = 2^{-n}$ ve $b_n = \frac{1}{n} sin(n^2 + 3)$ olan dizilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

Çözüm : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2^n > n$ olduğundan $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ dir. $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ olur.

$lim\ 0 = lim\ \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $lim\ \frac{1}{2^n} = 0$ dır.

$$|b_n| = \left|\frac{1}{n} sin\,(n^2 + 3)\right| = \frac{1}{n} |\,sin\,(n^2 + 3)\,|$$

olur. $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ ve $|sin\,(n^2 + 3)| \leq 1$ olduğundan $(b_n) \to 0$ dır.

TEOREM 3.9

(y_n) artan, $lim\, y_n = +\infty$ ve $lim\, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \mathbb{R}$ ise $lim\, \frac{x_n}{y_n} = l$ dir.

İspat : $\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right) \to l$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki her $n > n_0$ için

$$l - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \varepsilon \Rightarrow$$

$$(l-\varepsilon)(y_n-y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (l+\varepsilon)(y_n-y_{n-1}) \Rightarrow$$
$$(l-\varepsilon)\sum_{n=p+1}^{m}(y_n-y_{n-1}) < \sum_{n=p+1}^{m}(x_n-x_{n-1}) < (l+\varepsilon)\sum_{n=p+1}^{m}(y_n-y_{n-1}) \Rightarrow$$

$$(l-\varepsilon)(y_m-y_p) < x_m - x_p < (l+\varepsilon)(y_m-y_p)$$

bulunur. Her terim y_m ile bölünürse

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{y_p}{y_m}\right) < \frac{x_m}{y_m} - \frac{x_p}{y_m} < (\ell+\varepsilon)\left(1-\frac{y_p}{y_m}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $m \longrightarrow °$ yapılırsa $\left(\frac{x_p}{y_m}\right) \to 0, \left(\frac{y_p}{y_m}\right) \to 0$ olacağından

$$(l-\varepsilon)(1-0) \le \lim\frac{x_m}{y_m} - 0 \le (l+\varepsilon)(1-0) \Rightarrow \lim\frac{x_m}{y_m} = l$$ bulunur.

SONUÇ

$(a_n) \longrightarrow a$ ise $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right) \to a$ dır. Bu, bir yakınsak dizinin aritmetik ortalaması dizinin limitine yakınsar, biçiminde ifade edilebilir.

İspat : Stolz Teoreminde

$$x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \text{ ve } y_n = n$$

alınırsa $x_n - x_{n-1} = a_n$ ve $y_n - y_{n-1} = n-(n-1) = 1$ olacağından

$$\lim\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right) = \lim a_n = a$$

bulunur.

ÖRNEK : $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\right)$ dizisinin liminiti bulunuz.

Çözüm : Verilen dizi $a_n = \frac{1}{n}$ dizisinin aritmetik ortalaması ve $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ olduğundan, verilen dizi sıfıra yakınsar.

SONUÇ

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun.

$\lim a_n = a$ ise $\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = a$

olur.

İspat : $lim\ log\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = lim \frac{1}{n} log(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)$

$$= lim \frac{log\, a_1 + log\, a_2 + \ldots + log\, a_n}{n}$$

$$= lim\, (log\, a_n) = log\, a$$

olduğundan

$$lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$$

bulunur. [$lim\ a_n = a \Rightarrow lim\ log\ a_n = log a$ dır.

ÖRNEK : $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm : $a_n = \frac{1}{n}$ olsun. $(a_n) \to 0$ *dır.*

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

olduğundan

$$lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = lim \frac{1}{n} = 0$$

bulunur.

TEOREM 3.10

$a_n > 0$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ dir.

İspat : Stolz Teoreminde $x_n = ln\, a_n$, $y_n = n$ alınırsa

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{ln(a_{n+1}) - ln(a_n)}{n + 1 - n} = ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

bulunur. Şu halde

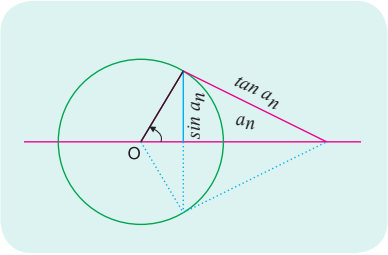
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{ln\, a_n}{n} = ln\, r \Rightarrow \lim_{n \to \infty} ln \sqrt[n]{a_n} = ln\, r \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

ÖRNEK : $(\sqrt[n]{n})$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm : $a_n = n$ alınırsa $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ olur.

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1$ olduğundan $\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = \left(\sqrt[n]{n}\right) \to 1$ dir.



ÖRNEK : $(a_n) \to 0$ olduğuna göre $\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ dizisinin limitini hesaplayınız.

Çözüm : a_n birim çemberde merkez açının ölçüsü olsun. Bu ölçü açının karşısındaki yayın uzunluğu ile ölçülür. Yandaki şekilden de görüldüğü gibi

$$2 \sin a_n < 2a_n < 2 \tan a_n$$

yazılabilir. Buradan da

$$\sin a_n < a_n < \tan a_n$$

olur. Pozitif bu a_n için

$$\cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1$$

yazılabilir. (a_n) sıfıra yaklaşırken $(\cos a_n)$ dizisi 1 sayısına yaklaşacağından

$$1 \le \lim \frac{\sin a_n}{a_n} \le 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

olur. Şu halde

$$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

bulunur.

a_n teriminin sıfıra yakın bir negatif sayı olması halinde de ispat benzer şekilde yapılabilir.

TANIM

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$ dizisi verilmiş olsun.

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k(n) = k_n$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$(a \circ k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

bileşke fonksiyonuna a dizisinin bir ***alt dizisi*** adı verilir.

$$(a \circ k)(n) = a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$$

olacağından (a_n) dizisinin bir alt dizisini bulmak için, (k_n) doğal sayıların artan bir dizisi olmak şartıyla, n yerine k_n koymak yetecektir.

Doğal sayıların sonsuz çoklukta artan (k_n) dizisi bulunabileceğinden, bir (a_n) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır.

(a_{k_n}) alt dizisinin her teriminin (a_n) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

ÖRNEK : $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin bazı alt dizilerini bulunuz.

Çözüm : Bu dizinin terimleri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ dir. Bir alt dizi elde etmek için n yerine doğal sayıların bir artan k_n dizisini koymak yeter. Örneğin, n yerine $2n$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

terimlerinden oluşan dizi, yani $\left(\frac{1}{2n}\right)$ dizisi elde edilir. O halde $\left(\frac{1}{2n}\right)$ dizisi $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin bir alt dizisidir. Aynı şekilde $\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ ve $\left(\frac{1}{3n}\right)$ dizileri de $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin birer alt dizisidir. Bunlar gibi daha birçok alt dizi bulunabilir.

TEOREM 3.11

$\left(s_{k_n}\right)$ dizisi (s_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. $(s_n) \to s$ ise $\left(s_{k_n}\right) \to s$ dir. Yani yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı sayıya yakınsaktır.

İspat : $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ aralığındadır. $\left(s_{k_n}\right)$ dizisinin terimleri aynı zamanda (s_n) dizisinin terimleri olacağından $\left(s_{k_n}\right)$ dizisinin de sonlu sayıdaki terimi hariç diğer bütün terimleri $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ aralığındadır. Şu halde $\left(s_{k_n}\right) \to s$ dir.

UYARI

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Örneğin $\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ ve $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$ alt dizileri yakınsak oldukları halde kendisi yakınsak değildir.

TEOREM 3.12

Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

İspat : (x_n) bir sınırlı reel sayı dizisi olsun. Şu halde her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \le M$ olacak şekilde bir M reel sayısı vardır.

$S = \{s :$ sonsuz çokluktaki n ler için $x_n \ge s\}$

kümesini gözönüne alalım. Bu küme boş değildir. Çünkü en azından $-M \in S$ dir. S kümesi üstten sınırlıdır. Zira M bu küme için bir üst sınırdır. S nin en küçük üst sınırına u diyelim. Şimdi şu önermenin doğruluğunu gösterelim :

"$\forall \varepsilon > 0$ için $u - \varepsilon \le x_n \le u + \varepsilon$ olacak şekilde sonsuz çoklukta n bulunabilir."

Kabul edelim ki bu iddia doğru olmasın, yani sadece sonlu sayıdaki n ler için $u-\varepsilon \le x_n \le u+\varepsilon$ olsun. u, S kümesinin bir üst sınırı olduğundan $u+\varepsilon \notin S$ dir. Dolayısıyla $x_n \ge u+\varepsilon$ eşitsizliği sadece sonlu sayıdaki n ler için gerçeklenir. Şu halde S nin $y \ge u-\varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen bir y elemanı yoktur (Neden ?). Böylece $u-\varepsilon$, S nin bir üst sınırı olur ki bu u nun en küçük üst sınır olmasıyla çelişir. Demek ki yukarıdaki önerme doğrudur.

$u-\varepsilon \le x_n \le u+\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayıları, küçükten büyüğe doğru, $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$ ile gösterelim. Buna göre her bir k için

$$u-\varepsilon \le x_{n_k} \le u+\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da (x_{n_k}) dizisinin u sayısına yakınsadığını gösterir. (x_{n_k}) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan ispat tamamlanmıştır.

SONUÇ

Sonsuz elemanlı ve sınırlı her reel sayı kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat : A sonsuz elemanlı ve sınırlı bir küme ve (x_n) de terimleri A dan alınan, terimleri farklı bir dizi olsun. (x_n) sınırlı bir dizidir. Bolzano – Weierstrass teoreminden (x_n) dizisinin yakınsak olan en az bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. (x_{n_k}) dizisinin yakınsadığı sayı x olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, (x_{n_k}) dizisinin sonsuz çokluktaki terimi x in ε –komşuluğundadır. Dolayısıyla A nın sonsuz çokluktaki terimi x in ε– komşuluğundadır. Bu, x in A kümesinin bir yığılma noktası olduğunu gösterir.

TANIM

(s_{k_n}), (s_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (s_{k_n}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (s_n) dizisinin bir ***limit noktası***dır denir.

ÖRNEK :

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n}{n+1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan (s_n) dizisinin limit noktalarının kümesini bulunuz.

Çözüm : Yakınsak alt dizilerin limitlerinin kümesi istenmektedir. $(s_{2n}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ dizisinin limiti 1, $(s_{2n-1}) = \left(\frac{1}{2n-1}\right)$ dizisinin limiti 0 olduğundan, 0 ve 1, (s_n) dizisinin birer limit noktasıdır. (s_n) dizisinin yakınsak olan diğer alt dizilerinin limiti *0* veya *1* dir. Şu halde limit noktalarının kümesi $C = \{0, 1\}$ kümesidir.

TANIM

(s_n) bir reel terimli dizi ve C de (s_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C, genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. *supC ve infC* genişletilmiş reel sayılarına, sırasıyla, (s_n) dizisinin ***üst limiti*** ve ***alt limiti*** denir. Üst limit, limsup s_n veya $\overline{lim}\, s_n$, alt limit, liminf s_n veya $\underline{lim}\, s_n$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan $\underline{lim}\, s_n \leq \overline{lim}\, s_n$ olacağı açıktır.

TEOREM 3.13

(s_n) reel terimli bir dizi olsun.

$$lim\, s_n = s \Leftrightarrow \underline{lim}\, s_n = \overline{lim}\, s_n = s.$$

İspat : $lim\, s_n = s$ olsun. (s_n) nin tüm alt dizileri s ye yakınsayacağından $C = \{s\}$ olur. $supC = infC = s$ olcağından $\underline{lim}\, s_n = \overline{lim}\, s_n = s$ olur.

$\overline{lim}\, s_n = \underline{lim}\, s_n = s$ olsun. $supC = infC = s \Rightarrow C = \{s\}$ olur. Bütün alt dizilerin limiti s olacağından (s_n) dizisinin limiti s olur. ❐

$\overline{lim}\, s_n$ ve $\underline{lim}\, s_n$ nin şu özellikleri sağladığı açıktır.

1) $\overline{lim}\, s_n = L$ ise, $\forall \varepsilon > 0$ için $L + \varepsilon$ nun sağında artık dizinin sonlu sayıda terimi vardır.

2) $\underline{lim}\, s_n = l$ ise, $\forall \varepsilon > 0$ için $l - \varepsilon$ nun solunda (s_n) nin sonlu sayıda terimi vardır.

$\sup\limits_{k \geq n} x_k = sup\ \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = y_n$ denirse (y_n) bir azalan dizidir.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} x_k) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} x_k)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\limsup_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} x_k) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} x_k)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_k = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} x_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq n} x_k)$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $(x_n) = ((-1)^n)$ dizisinin alt ve üst limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\sup_{k \geq n} x_k = \sup_{k \geq n} (-1)^k = 1$ olduğundan $\limsup_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

$\inf_{k \geq n} x_n = \inf_{k \geq n} (-1)^k = -1$ olduğundan $\liminf x_n = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1$ dir.

TEOREM 3.14

(x_n) bir reel terimli dizi ve x de bir genişletilmiş reel sayı olsun.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow \limsup_{n \to \infty} x_n = \liminf_{n \to \infty} x_n = x$$

İspat : $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ olduğundan (x_n) dizisinin tüm (x_{n_k}) alt dizilerinin limiti x dir. Dolayısıyla $\limsup_{n \to \infty} x_n = x$ ve $\liminf_{n \to \infty} x_n = x$ dir.

Karşıt olarak, $\limsup_{n \to \infty} x_n = \liminf_{n \to \infty} x_n = x$ olsun. Tüm alt dizilerin limitleri x olacağından (x_n) yakınsak ve limiti x dir.

TEOREM 3.15

Yeter derece büyük n ler için $x_n \leq y_n$ ise

$$\limsup_{n \to \infty} x_n \leq \limsup_{n \to \infty} y_n \text{ ve } \liminf_{n \to \infty} x_n \leq \liminf_{n \to \infty} y_n$$

olur.

İspat : $k > n_0$ için $\sup_{k \geq n} x_n \leq \sup_{k \geq n} y_n$ olacağından

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{k \geq n} x_k) \leq \lim_{n \to \infty} (\sup_{k \geq n} y_k) \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} x_n \leq \limsup_{n \to \infty} y_n$$

bulunur. $\lim_{n \to \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \to \infty} \inf y_n$ olduğu benzer biçimde gösterilebilir.

Bir dizinin limitini bulmadan da yakınsaklığına karar verilebilir. Bunun için Cauchy dizisi kavramına ihtiyaç vardır.

TANIM

(s_n) bir reel terimli dizi olsun. (s_n) bir ***Cauchy dizisi*** dir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $m, n \geq n_0$ ise $|s_m - s_n| < \varepsilon$

Bu tanımdan anlaşılacak şey, Cauchy dizilerinde belli bir terimden sonra, terimlerin birbirine istenildiği kadar yakın olacaklarıdır.

Yakınsak dizilerde terimler, belli bir yerden sonra bir s sayısına istenildiği kadar yakın oluyorlardı. Biraz sonra göreceğimiz gibi, reel terimli dizilerde bu iki özellik denktir.

Eğer (s_n) bir Cauchy dizisi ise, $m = n+1$ alınarak $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = 0$, $m = n+2$ alınarak $\lim_{n\to\infty}(s_{n+2} - s_n) = 0$ olacağı kolayla gösterilebilir. Bunun karşıtı doğru değildir. $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty}(s_{n+2} - s_n) = 0$ olması (s_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

TEOREM 3.16

(s_n) bir Cauchy dizisi ise sınırlıdır.

İspat : (s_n) bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon = 1$ alalım. Öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $m, n \geq n_0$ için $|s_m - s_n| < 1$ olur. $m = n_0$ alınırsa $n > n_0$ için $|s_{n_0} - s_n| < 1$ olur. Buradan

$$s_{n_0} - 1 < s_n < s_{n_0} + 1$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\forall n \geq n_0$ için

$$|s_n| < |s_{n_0}| + 1$$

olur.

$$B = maks\ \{|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{n_0}|, |s_{n_0}| + 1\}$$

denirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq B$ olur ki bu da (s_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi bir dizinin yakınsaklığını karakterize eden bir test verelim.

TEOREM 3.17

(s_n) bir reel terimli dizi olsun. (s_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat : (s_n), s sayısına yakınsak olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir n_0 bulunabilir ki her $n \geq n_0$ için $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. Buna göre $m, n \geq n_0$ için

$$|s_m - s_n| = |s_m - s + s - s_n| \leq |s_m - s| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ki bu (s_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

(s_n) bir Cauchy dizisi olsun. Teorem 3.15 den (s_n) sınırlıdır. Teorem 3.11 den, yakınsak bir (s_{k_n}) alt dizisi vardır. $\lim_{n\to\infty} s_{k_n} = s$ olsun. (s_n) bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $m, n \geq n_1$ için $|s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ kalır. (s_{k_n}), s ye yakınsak olduğundan öyle bir n_2 sayısı vardır ki $\forall\ n \geq n_2$ için $|s_{k_n} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

$n_0 = maks\ \{n_1, n_2\}$ denirse $\forall n \geq n_0$ için

$$|s_n - s| = |s_n - s_{k_n} + s_{k_n} - s| \leq |s_n - s_{k_n}| + |s_{k_n} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur ki, bu $lims_n = s$ olduğunu gösterir.

TANIM

$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Leftrightarrow \forall\ B_1 \in \mathbb{R}$ için $\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_1$ için $s_n > B_1$

$\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\ B_2 \in \mathbb{R}$ için $\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_2$ için $s_n < B_2$

$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ olması halinde **"(s_n) *artı sonsuza gidiyor*"**, $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ olması halinde de **"(s_n) *eksi sonsuza gidiyor*"** denir.

ÖRNEK : $(s_n) = (\sqrt{n})$ dizisi bir Cauchy dizisi midir? Her $k \in \mathbb{N}$ için

$\lim_{n\to\infty}(s_{n+k} - s_n) = 0$ olması (s_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasını gerektirir mi?

Çözüm : (s_n) bir Cauchy dizisi olsaydı yakınsak olurdu. Halbuki $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ olup ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+k} - s_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})(\sqrt{n+k} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+k-n}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = 0$$

olur. Şu halde $\lim_{n\to\infty}(s_{n+k} - s_n) = 0$ olduğunda (s_n) bir Cauchy dizisi olmak zorunda değildir.

ÖRNEK :

$$s_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ tek ise} \\ n & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan (s_n) dizisi sınırlı mıdır? $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ mudur? Üstten sınırsız her dizinin limiti $+\infty$, alttan sınırsız her dizinin limiti $-\infty$ mudur?

Çözüm : Verilen dizinin terimleri 0, 2, 0, 4, ..., 0, 2n, 0, 2n + 2, ... dır. Bu dizi üstten sınırsız bir dizidir. $B = 1$ alınırsa $n > n_1$ olduğunda $s_n > 1$ olacak şekilde bir n_1 sayısı yoktur. Çünkü dizinin sonsuz çokluktaki terimi sıfırdır. O halde dizi $+\infty$'a gitmez. Öyleyse üstten sınırsız bir dizinin limiti $+\infty$ olmayabilir. Benzer şekilde alttan sınırsız dizilerin limiti $-\infty$ olmayabilir.

3.2 TERİMLERİ ARASINDA TEKRARLAMA BAĞINTISI BULUNAN DİZİLER

(a_n) dizisi ve $p_1, p_2, ..., p_r$ reel sayıları verilmiş olsun. $r < n$ için

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + ... + p_r a_{n-r} = 0 \qquad (3.5)$$

eşitliği varsa, bu eşitliğe, (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki r–ninci dereceden ***tekrarlama bağıntısı*** denir. (a_n) dizisinin r tane terimi verilirse $r + 1$ –inci terimi bu bağıntı yardımıyla bulunabilir. Bu işlem arka arkaya uygulanarak dizinin tüm terimleri bulunabilir.

(3.5) eşitliğinde $a_n = x^n$ konursa

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + ... + p_r x^{n-r} = 0 \Rightarrow$$
$$x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + ... + p_{r-1} x + p_r = 0 \qquad (3.6)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.5) in **karakteristik denklemi** adı verilir. Bu denklemin farklı $x_1, x_2, ..., x_r$ gibi r tane kökü varsa (a_n) genel terimi, $A_1, A_2, ..., A_r$ reel sayılar olmak üzere,

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + ... + A_r x_r^n$$

biçiminde olur. (a_n) dizisinin $a_1, a_2, ..., a_r$ terimleri verildiğinde bunlar yardımıyla $A_1, A_2, ..., A_r$ sabitleri bulunabilir.

Karakteristik denklemin köklerinden bazıları eşitse, örneğin $x_3 = x_4 = x_5$ ve diğerleri farklı ise

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + (A_3 + nA_4 + n^2 A_5) x_3^n + A_6 x_6^n + ... + A_r x_r^n$$

olur.

ÖRNEK :

$a_1 = 5,\ a_2 = 13$ ve $n \geq 2$ için

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm : $a_n = x^n$ denirse

$$x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2} \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$$

olur. Genel terim

$$a_n = A_1\, 2^n + A_2\, 3^n$$

formundadır. $a_1 = 5,\ a_2 = 13$ olduğundan

$$\begin{cases} 5 = 2A_1 + 3A_2 \\ 13 = 4A_1 + 9A_2 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu çözülerek $A_1 = 1,\ A_2 = 1$ bulunur. Şu halde dizinin genel terimi $a_n = 2^n + 3^n$ dir.

ÖRNEK : $a_1 = 9,\ a_2 = 45$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ olduğuna göre, (a_n) genel terimini bulunuz.

Çözüm : Karakteristik denklem

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

olur. $x_1 = x_2 = 3$ olacağından, genel terim

$$a_n = (A_1 + nA_2)3^n$$

biçimindedir. $a_1 = 9,\ a_2 = 45$ olduğundan

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)\cdot 3 = 9 \\ (A_1 + 2A_2)\cdot 3^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ A_1 + 2A_2 = 5 \end{cases}$$

sistemi bulunur. Bunun kökleri $A_1 = 1,\ A_2 = 2$ dir. Genel terim

$$a_n = (1 + 2n)\, 3^n$$

olur.

ÖRNEK : $x_1 > 0, \quad a > 0$ olmak üzere her $n > 1$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

biçiminde bir (x_n) dizisi tanımlanıyor.

(i) $\dfrac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \left(\dfrac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$

olduğunu gösteriniz.

(ii) (x_n) dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm : $y_n = \dfrac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$ olsun.

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$$

$$x_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) + \sqrt{a} = \frac{\left(x_n + \sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$$

olduğundan

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\right)^2$$

bulunur. Bu durumda $y_{n+1} = y_n^2$ bağıntısı elde edilir.

Buna göre

$$y_n = (y_{n-1})^2 = \left[(y_{n-2})^2\right]^2 = y_{n-2}^{2\cdot 2} = (y_{n-2})^{2^2} = \left(y_{n-3}^2\right)^{2^2} = \ldots (y_1)^{2^{n-1}}$$

olur. Şu halde

$$\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

yazılabilir. $\left|\dfrac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}}\right| < 1$ olduğundan

$$\lim \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = \lim \left(\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} = 0 \;\Rightarrow\; \lim \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim \left(x_n - \sqrt{a}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lim x_n = \sqrt{a}$$

bulunur.

PROBLEMLER- 3.1

1. $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin artan olduğunu gösteriniz.

2. $\left(\frac{3n-1}{2n-7}\right)$ dizisinin monoton (artan veya azalan) olup olmadığını araştırınız.

3. Genel terimi

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

olan dizinin artan olduğunu gösteriniz.

4. Aşağıdaki dizilerin limitini hesaplayınız.

a. $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ **b.** $\left(\frac{3n+1}{n}\right)$ **c.** $\left(\frac{n+2}{n}\right)$

5. (x_n) bir sıfır dizisi olduğuna göre, aşağıda genel terimleri verilen dizilerin limitini bulunuz.

a. $a_n = 2x_n - 3$ **b.** $c_n = \frac{5x_n}{3x_n + 4}$

6. $((-1)^n)$ dizisinin yakınsak olmadığını gösteriniz.

7. (a_n) bir sınırlı dizi olsun. $\forall \alpha > 0$ için $\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)$ dizisinin bir sıfır dizisi olduğunu gösteriniz.

8. $\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisinin $\frac{a}{c}$ sayısına yakınsadığını gösteriniz. Burada a, b, c, d reel sayılar olup $c \neq 0$ dır.

9. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2}\right)$

c. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$

ç. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

d. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

e. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

f. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

g. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

10. $((-1)^n)$ dizisinin farklı 5 alt dizisini bulunuz. Bu dizinin başka alt dizileri var mıdır?

11. $s_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olsun. (s_n) dizisine eşit olan bir dizi bulunuz. Bu dizi yakınsak mıdır?

12. $\left(\frac{3n}{2n-7}\right)$ dizisinin en küçük üst sınırını (sup) ve en büyük alt sınırını (inf) bulunuz.

13. $((-1)^n / n)$ dizisinin kaç terimi $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ aralığının dışındadır?

14. $|a| < 1$ için $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

15. $inf\, a_n + inf\, b_n \le inf\,(a_n + b_n) \le sup\,(a_n + b_n) \le sup\, a_n + sup\, b_n$

olduğunu gösteriniz.

16. $\left(\frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)}\right)$

dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

17. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$ **c.** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n}$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ **d.** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-5}$

18. $(a_n) > 0$ ve $a > 0$ olsun. $(a_n) \to a$ olduğunda $log\,(a_n) \to log\, a$ dır, gösteriniz.

19. (a_n) dizisinin tekrarlama bağıntısı

$a_{n+2} - a_{n+1} + 6a_n = 0$

dır. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ olduğuna göre, (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

20. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan dizilerin yakınsak olup olmadığını araştırınız. Yakınsak olanların limitini bulunuz.

a. $a_1 = 0, n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

b. $0 < a_1 < 1, n \ge 1$ için $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$

c. $a_1 \ge 2, n \ge 1$ için $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n - 1}$

d. $0 < a_1 \le 3, n \ge 1$ için $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$

21. İki Cauchy dizisinin toplamının da Cauchy dizisi olacağını gösteriniz.

22. $a \ne 0$ için $(|a|^{1/n}) \ne 1$ olduğunu gösteriniz.

23. $(a_n) = (log\, n)$ dizisi için $lim\,(a_n - a_{n+1}) = 0$, fakat (a_n) dizisinin Cauchy dizisi olmadığını gösteriniz.

24. Aşağıdaki dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

a. $a_n = 2 - (-1)^n$ **b.** $b_n = cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

25. (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

i) $\lim_{n\to\infty} sup\,(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} inf(a_n)$

ii) $\lim_{n\to\infty} inf\,(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} sup(a_n)$

eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

26. (a_n) bir reel terimli dizi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

i) $limsup\ a_n < r$ ise yeter derece büyük n ler için $a_n < r$ dir.

ii) $limsup\, a_n > r$ ise sonsuz çokluktaki n ler için $x_n > r$ dir.

27. Sınırlı (a_n) ve (b_n) dizileri için

$liminf\, a_n + liminf\, b_n \le liminf\,(a_n + b_n)$

$\le limsup\,(a_n + b_n) \le limsup\, a_n + limsup\, b_n$

olacağını gösteriniz.

28. $lim\, a_n$ mevcut ve (b_n) sınırlı olsun.

i) $liminf\,(a_n + b_n) = lim\, a_n + liminf\, b_n$

ii) $limsup\,(a_n + b_n) = lim\, a_n + limsup\, b_n$

olacağını gösteriniz.

3.3 BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

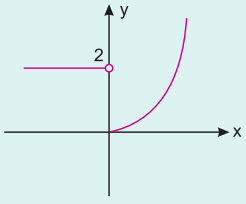
TANIM

$A \subset R$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi, a limit noktasının A tanım kümesine ait olma zorunluluğu yoktur.



ÖRNEK :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \text{ ise} \\ 2 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonunun $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ noktalarındaki limitlerini bulunuz.

Terimleri $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ de olan ve 2 noktasına yakınsayan herhangi bir dizi (x_n) olsun. Bu dizinin sonlu sayıda terimi hariç diğer bütün terimleri 2 nin komşuluğundadır. Dolayısıyla bu dizinin sonlu sayıda terimi hariç diğer tüm terimleri pozitiftir. O hâlde sonlu sayıdaki x_n terimleri hariç $f(x_n) = (x_n)^2 = x_n^2$ dir. $(x_n) \to 2$ olduğunda $(f(x_n)) \to 4$ olacağından

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

bulunur.

Şimdi fonksiyonun $a_2 = 0$ noktasındaki limitini bulalım. 0 noktasına yakınsayan herhangi iki dizi alalım. Örneğin $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(t_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ dizileri böyle dizilerdir. $\frac{1}{n} > 0$ olduğundan

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

olur. Dolayısıyla $f(x_n) \to 0$ dır. $f(t_n) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2$ olduğundan $(f(t_n)) \to 2$ dir. O hâlde f fonksiyonunun 0 noktasında limiti yoktur. Çünkü limitin var olması için 0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi aynı sayıya yakınsamalıdır.

TANIM

$+\infty$ 'a ıraksayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi bir L sayısına yakınsıyorsa f nin $+\infty$ daki limiti L dir denir ve

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir. $-\infty$ için limit benzer şekilde tanımlanır.

ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x^2+1}$ şeklinde tanımlanıyor. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : (x_n) , $+\infty$ 'a ıraksayan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin sonlu sayıda terimi hariç diğer tüm terimleri pozitiftir.

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2+3x_n}{x_n^2+1} = 2+\frac{3x_n-2}{x_n^2+1} = 2+\frac{\frac{3}{x_n}-\frac{2}{x_n^2}}{1+\frac{1}{x_n^2}}$$

olduğundan $(f(x_n)) \to 2$ dir. O hâlde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2+1} = 2$$

dır.

Diziler konusunda gördüğümüz teoremden yararlanarak şu teoremi kolayca ispatlayabiliriz.

TEOREM 3.18

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{x\to a} f(x)$ ve $\lim_{x\to a} g(x)$ limitleri varsa

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(2) $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

(3) Her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

(4) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x\to a}(\alpha\cdot f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

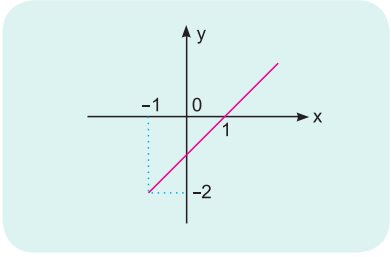
olur.

İspat : Yukarıdaki dört özelliğin ispatları birbirlerine benzer olduğundan birincisinin ispatını verip diğerlerini birer alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ olsun. O hâlde terimleri $A \setminus \{a\}$ da olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \to L_1$ ve $(g(x_n)) \to L_2$ dir. Teorem 3.4 ten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}(f+g)(x_n) = \lim_{x\to a}\left[f(x_n)+g(x_n)\right]\\ &= \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = L_1 + L_2\\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\end{aligned}$$

olur.



ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x \neq -1 \ ise \\ -2 & , \ x = -1 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. $\lim_{x\to -1} f(x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Terimleri –1 den farklı olan ve –1 sayısına yakınsayan herhangi bir dizi (x_n) olsun.

$$f(x_n) = \frac{x_n^2-1}{x_n+1} = \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n+1} = x_n - 1$$

olduğundan $(f(x_n)) \to -2$ bulunur. Şu halde

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -2$$

dır. ❐

Eğer f fonksiyonu (a, b) açık aralığında tanımlı ise a ve b noktaları tanım kümesine ait değillerdir. Fakat birer yığılma noktasıdırlar. Terimleri (a, b) aralığından alınan ve a noktasına yakınsayan diziler, terimleri a dan büyük olan dizilerdir. Benzer olarak terimleri (a, b) aralığında alınan ve b ye yakınsayan dizilerin terimleri b den küçük olmak zorundadır.

Bu durumları da içine almak üzere aşağıdaki tanımı verelim.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. (1) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi aynı bir L_1 reel sayısına yakınsıyorsa, bu L_1 sayısına f fonksiyonunun a noktasında **sol *tarafı limiti*** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \text{ veya } \lim_{x \to a-0} f(x) = L_1$$

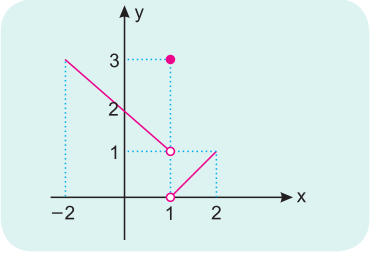
şeklinde gösterilir.

(2) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi L_2 sayısına yakınsıyorsa bu L_2 sayısına fonksiyonun ***sağ taraflı limiti*** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 \text{ veya } \lim_{x \to a+0} f(x) = L_2$$

biçiminde yazılır.

Şimdi sağ ve sol taraflı limitlerle ilgili örnekler yapalım.



ÖRNEK : $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x\ , & -2 \le x < 1 \ \ ise \\ 3\ , & x = 1 \ \ \ \ ise \\ x - 1\ , & 1 < x \le 2 \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun $a = 1$ noktasındaki sağ ve sol taraflı limitlerini hesaplayınız.

Çözüm : Terimleri $[-2, 1)$ aralığında bulunan ve 1 noktasına yakınsayan herhangi bir dizi (x_n) olsun. $f(x_n) = 2 - x_n$ olduğundan $(f(x_n)) \to 1$ olacaktır. O halde

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

dır. Şimdi sağ taraflı limiti bulalım. Terimleri $(1, 2]$ aralığında bulunan ve 1 noktasına yakınsayan bir dizi (t_n) olsun. $f(t_n) = t_n - 1$ olduğundan $(f(x_n)) \to 0$ dır. Şu halde

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

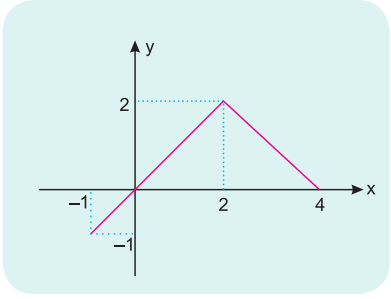
dır. Görüldüğü gibi, bu fonksiyon için

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

dır.

ÖRNEK : $f: [-1, 4] \to \boldsymbol{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & -1 \le x \le 2 \ \text{ise} \\ 4 - x\ , & 2 < x \le 4 \ \text{ise} \end{cases}$$



şeklinde tanımlanıyor. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm : Terimleri $[-1, 2)$ aralığında bulunan ve 2 sayısına yakınsayan her (x_n) dizisi için $f(x_n) = x_n$ dir. Dolayısıyla $(f(x_n)) \to 2$ dir. O halde

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

olacaktır. Terimleri $(2, 4]$ aralığında olan ve 2 ye yakınsayana herhangi bir dizi (t_n) olsun.

$$(f(t_n)) = (4 - t_n) \to 2$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

dir. Görüldüğü gibi bu dizi için $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ dir.

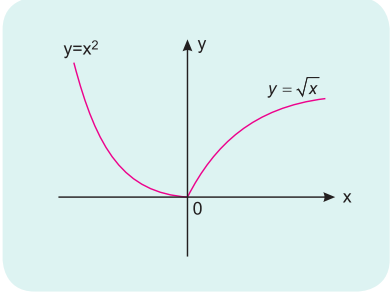
Sağ ve sol limit tanımları ile limit tanımı gözönüne alındığı zaman şu sonuç ifade edilebilir.

TEOREM 3.19

Bir f fonksiyonunun bir noktada limitinin var olması için gerek ve yeter şart o noktada sağ ve sol limitlerin mevcut ve eşit olmasıdır.

ÖRNEK : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ , & x \le 0 \ \text{ise} \\ \sqrt{x}\ , & x > 0 \ \text{ise} \end{cases}$$



şeklinde tanımlanıyor. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm : Teoremleri $(-\infty, 0)$ da olan ve 0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) = (x_n^2) \to 0$ olduğundan

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

olacaktır. Terimleri $(0, +\infty)$ da olan ve 0 noktasına yakınsayan her (t_n) dizisi için

$$(f(t_n)) = \left(\sqrt{t_n}\right) \to 0$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

dır. Demek ki sağ ve sol limitler mevcut ve birbirine eşittir. O hâlde

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

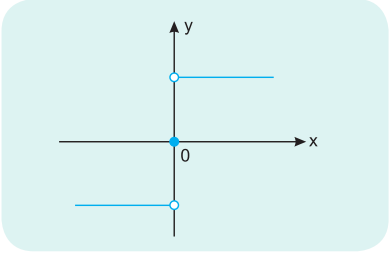
dır.

$\lim_{x \to a} f(x)$ limitini hesaplarken x değişkenini a noktasına yakınsayan bir dizi gibi düşünerek işlem yapabiliriz. Bu durumda $x \neq a$ olduğuna dikkat edilmelidir.

ÖRNEK :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$



şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki liminitini bulunuz.

Çözüm : $x > 0$ için $|x| = x$ ve $x < 0$ için $|x| = -x$ olduğundan

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

olacaktır. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan 0 noktasında limit yoktur.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 2} (x - [\![x]\!])$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x \to 2^+} (x - [\![x]\!]) = 2 - 2 = 0$$

ve

$$\lim_{x \to 2^-} (x - [\![x]\!]) = 2 - 1 = 1$$

olduğundan limit yoktur.

ÖRNEK : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim_{x\to 0} \frac{\tan \alpha x}{\tan \beta x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan \alpha x}{\tan \beta x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} \cdot \frac{\cos \beta x}{\sin \beta x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos \beta x}{\sin \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x/\alpha x}{\sin \beta x/\beta x} \cdot \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

olur. ❐

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ olduğunda a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisi de L sayısına yakınsar. Yani $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır ki $|x_n - a| < \delta$ olduğunda $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ kalır. O halde x_n terimleri a noktasına yeterince yakın alındığında $f(x_n)$ ile L arasındaki fark istenildiği kadar küçük yapılabilir. x değişkeni (x_n) dizisi gibi düşünüldüğünde de aşağıdaki tanım verilebilir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Burada dikkat edilecek husus δ sayısının ε sayısına bağlı olacağıdır, yani ε sayısına bağlı bir δ sayısının bulunmasıdır.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0} (x^2 + 3) = 3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $|(x^2 + 3) - 3| = |x^2| < \varepsilon$ olması için $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ kalması yeterlidir. O halde $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$ olmalıdır. Örneğin $\varepsilon = 10^{-4}$ ise $1/100$ (veya 1/100 den küçük her sayı) δ olarak alınabilir.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki eşitliğin doğru olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunmalıdır ki, $|x - 2| < \delta$ olduğunda $|(3x + 1) - 7| = |3x - 6| < \delta$ olmalıdır.

$|x - 2| < \delta \Leftrightarrow 2 - \delta < x < 2 + \delta \Leftrightarrow 6 - 3\delta < 3x < 6 + 3\delta \Leftrightarrow -3\delta < 3x - 6 < 36$

$\Leftrightarrow |3x - 5| < 3\delta$ olur.

Şu halde $3\delta \le \varepsilon$, buradan da $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ olmalıdır. O halde $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ (veya $\frac{\varepsilon}{3}$ den küçük herhangi bir pozitif sayı) alınabilir.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir δ sayısı bulunacaktır ki $|x - 3| < \delta$ olduğunda $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ kalsın.

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|3 - x|}{|3x|} < \frac{\delta}{|3x|}$$

olur. Diğer taraftan $|x - 3| < \delta$ ise $|x| > 3 - \delta$ dır. O halde

$$|3x| = 3|x| > 3\,(3 - \delta) = 9 - 3\delta$$

olacağından

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \frac{\delta}{9 - 3\delta}$$

kalacaktır. Bu durumda

$$\frac{\delta}{9 - 3\delta} \le \varepsilon$$

olacak şekilde bir δ bulmak yeter. Bu δ sayılarının en büyüğünü bulmak gerekmez. Bu sebeple yukarıdaki eşitsizliği sağlayan ve 1 den küçük olan δ sayılarını bulalım.

$$\delta < 1 \Leftrightarrow -3\,\delta > -3 \Leftrightarrow 9 - 3\delta > 6 \Leftrightarrow \frac{1}{9 - 3\delta} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\delta}{9 - 3\delta} < \frac{\delta}{6}$$

dır. O halde $\frac{\delta}{6} \le \varepsilon \Rightarrow \delta \le 6\varepsilon$ olmalıdır. Buna göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta < 1$ ve $\delta \le 6\varepsilon$ eşitsizliklerini gerçekleyen her δ için

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

olur.

PROBLEMLER–3.2

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı a noktalarındaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}2x+1, & x>1 \text{ ise}\\ 3, & x=1 \text{ ise}\\ 4x-1, & x<1 \text{ ise}\end{cases}\quad a=1$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1},\quad a=1$

c. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x-2},\quad a=2$

2. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı noktalardaki limitlerini bulunuz.

a. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|2x|}{x},\quad a=0$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x/2, & x<1 \text{ ise}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\\ 1/2, & x>1 \text{ ise}\end{cases}, a=1$

c. $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & x\neq\pi \text{ ise}\\ 0, & x=\pi \text{ ise}\end{cases}, a=\pi$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{|2x|}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 2}[\![x]\!]$

ç. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+h)^m-x^m}{h},(m\in\mathbb{N})$

g. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3\sqrt{x}-3\sqrt{a}}{x-a}$

h. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{1-x}}{x}$

ı. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

i. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

j. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right)$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$ **ç.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$ **e.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

f. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ **g.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ **ç.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$

d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$

6. "$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ise $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$ dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz. Bu önermenin karşıtı da doğru mudur?

7. $f(x) = 9x - 5$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $|f(x) - 4| < \frac{1}{10}$ kalsın.

8. $(g(x) = 2x^2 + 3$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x) - g(0)| < \frac{1}{2}$ olsun.

9. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki $|x - 1| < \delta$ olduğunda $\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ kalsın.

10. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hangi noktalarda limiti yoktur?

a. $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$

b. $f(x) = [\![x^2]\!]$

c. $f(x) = 1 - x + [\![x]\!] + [\![1 - x]\!]$

ç. $f(x) = x\, sgn\, x$

11. $f : [-\pi, \pi] \setminus [\,[0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{[\![\sin x]\!]}{\sin [\![x]\!]}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun hangi noktalarda limiti yoktur.

12. $a \in \mathbb{R}$ ve I da a noktasını bulunduran bir açık aralık olsun. f, g, h I $\setminus \{a\}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

i. Her $x \in I \setminus \{a\}$ için $f(x) \le h(x) \le g(x)$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ ise $\lim_{x\to a} h(x) = L$ dir. (Sandviç özelliği)

ii. Her $x \in I \setminus \{a\}$ için $|g(x)| \le M$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ise $\lim f(x)\, g(x) = 0$ dır.

13. $a \in \mathbb{R}$ ve I da a noktasını bulunduran bir açık aralık olsun. f ve g I $\setminus \{a\}$ üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer f ve g nin a noktasında limiti varsa ve $\forall x \in I \setminus \{a\}$ için

$$f(x) \le g(x)$$

ise

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

dır. İspatlayınız.

14. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \text{ ise} \\ 0, & x \notin Q \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun hangi noktalarda limiti vardır ?

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $\lim a_n \neq 0$ olduğunda $((-1)^n a_n)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

2. $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin monoton artan ve sınırlı olduğunu gösteriniz. Dizi yakınsak mıdır? Yakınsaksa limitini bulunuz.

3. $F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için

$F_{n+2} = F_{n-2} + F_n$ bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine **Fibonacci dizisi** denir. Fibonacci dizisinin genel terimini bulup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

olduğunu gösteriniz.

4. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ biçiminde tanımlanan dizinin limitini bulunuz.

5. (a) $(a_n) \to a$ ve $\forall n \in \mathbf{N}$ için $a_n \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

(b) (b_n) yakınsak ve tüm terimleri negatif olan bir dizi ise limit negatif veya sıfırdır.

(c) (c_n) yakınsak ve tüm terimleri pozitif olan bir dizi ise limit pozitif veya sıfırdır.

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

6. $(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$ olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$ ise $s \leq t$ dir, gösteriniz.

7. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. $a_1 = \alpha$ ve $n > 1$ için

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha + a_{n-1}^2)$$

biçiminde tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

8. Tüm terimleri rasyonel olan bir dizinin limiti irrasyonel olabilir mi?

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \ldots = 2$

b. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\ \ldots = 3$

c. $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}\ \ldots = 5$

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x - [\![x]\!]}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun limitinin olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

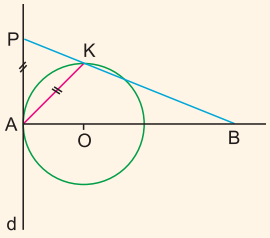
11. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \text{ rasyonel ise} \\ x^2 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

fonksiyonunun hangi noktalarda limiti vardır?

12. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun x = 0 noktasındaki limitini bulunuz.

13. Şekildeki merkezi O olan birim çembere A noktasında d teğeti çizilmiştir. P noktası d üzerinde |AP| = |AK| olacak biçimde hareket ettirildiğinde B noktası AO doğrusu üzerinde hareket eder.



$$\lim_{P\to A} |AB|$$

limitini hesaplayınız. Başka bir söyleyişle, P noktası A ile çakışırken B noktası A dan ne kadar uzaklaşır?

14. $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(t_n)=\left(\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}\right)$ dizileri ile

$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ fonksiyonu veriliyor. $(f(x_n))$ ve $(f(t_n))$ görüntü dizilerinin limitlerini bulunuz. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limiti var mıdır? Bulduğunuz sonucu yorumlayınız.

15. $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun eğer varsa $x = 0$ noktasındaki limitini bulunuz.

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 0}[\![x]\!]$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{6x-2}}{x^2-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 9^-}\frac{\sqrt{x}-3}{|x-9|}$

ç. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4x-2}-x+1$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}-1\right)\frac{1}{t}$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin\pi x}$

17. $f(x)$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)=L$ olsun.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

limitleri için ne denebilir?

18. $f(x)$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to\infty} f(t)=L$ olsun.

$\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

limitini hesaplayınız.

19. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^x}{x^x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x+1|^x}{|x|^x}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$

ç. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^x}{x^x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^x}{x^x}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x-1|^x}{|x|^x}$

20. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right]$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{n^2}\right]$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

ç. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

Bölüm

4

SÜREKLİLİK



4.1 SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu Bölümde hemen hemen tüm matematik dallarını ilgilendiren çok önemli kavramlardan biri olan süreklilik kavramı üzerinde duracağız.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4.1}$$

ise f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon **A üzerinde süreklidir** denir.

Yukarıdaki tanıma göre, bir f fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için,

a) f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalıdır.

b) f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalıdır.

c) f fonksiyonunun a noktasındaki limiti, a noktasındaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır.

Limit tanımı hatırlanacak olursa, süreklilik kavramı şu şekilde tanımlanabilir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında **süreklidir.** $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur.

Şimdi süreklilik ile ilgili bazı örnekler verelim.

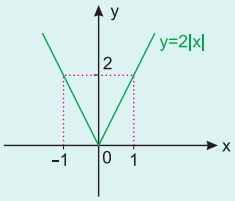
ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan sabit fonksiyon $\mathbb{R}$ de süreklidir. Bunu göstermek için verilen fonksiyonun $\mathbb{R}$ de keyfi olarak seçilen herhangi bir noktada sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre verilen fonksiyonun bir a noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a)$$

olduğundan verilen fonksiyon her a noktasında ve dolayısıyla $\mathbb{R}$ de süreklidir.

ÖRNEK :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x|$ fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir?



Çözüm :

$\varepsilon > 0$ olsun. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ seçelim.

$|x - 0| < \delta$ için $|f(x) - f(0)| = |2|x| - 0| = 2|x| < 2\delta = \varepsilon$ olur. Şu halde f fonksiyonu $x = 0$ da süreklidir.

Sağ ve sol taraflı limitlerin tanımları göz önüne alındığında aşağıdaki tanım verilebilir.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a da **sağdan süreklidir.**

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a da **soldan süreklidir** denir.

Bu tanıma göre, bir f fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart, a noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

f bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olduğunda, eğer f

i) (a, b) açık aralığının her noktasında sürekli,

ii) a noktasında sağdan sürekli,

iii) b noktasında soldan sürekli,

ise f, $[a, b]$ üzerinde sürekli olur. Çünkü a noktasında sol taraflı süreklilikten, b noktasında da sağ taraflı süreklilikten bahsedilemez.

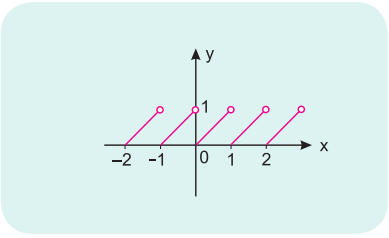
Diziler yardımıyla yapılan limit tanımı göz önüne alındığında aşağıdaki tanım verilebilir. Bu tanıma **sürekliliğin dizisel tanımı** denir.

TANIM

$f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ da A nın bir yığılma noktası olsun.

Elemanları A kümesinden alınan ve a noktasına yakınsayan her bir (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi $f(a)$ reel sayısına yakınsıyorsa f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir.

ÖRNEK : $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonu tam sayılarda sürekli midir?



Çözüm : m bir tam sayı olsun. f nin m noktasındaki limitini araştıralım.

$$\lim_{x \to m^+} f(x) = \lim_{x \to m^+} x - [\![x]\!] = m - m = 0$$

$$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^-} (x - [\![x]\!]) = m - (m-1) = 1$$

olduğundan $x = m$ noktasında limit yoktur. Dolayısıyla f, m noktalarında sürekli değildir.

ÖRNEK : $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm : f fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösterelim. Her u için

$$|\sin u| \le |u| \quad \text{ve} \quad |\cos u| \le 1$$

olduğundan

$$|\sin x - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right|$$

$$= 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|$$

$$\le 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot 1 = |x - a|$$

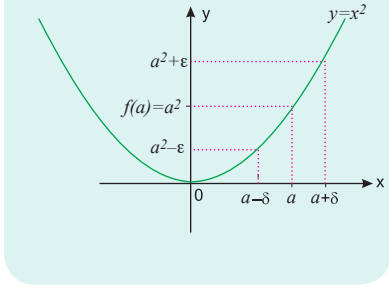
bulunur. Şu halde $|x - a| \le \delta$ olduğunda $|\sin x - \sin a| < \delta$ olur. Yani $\varepsilon = \delta$ alınabilir. Demek ki sinüs fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu göstermek için $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a noktasında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$|x - a| < \delta$ olsun. $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta$ olacağından $\delta = \varepsilon$ dur. Şu halde $f(x) = x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun her $a \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.



Çözüm : $\varepsilon > 0$ olsun. $|x - a| < 1$ bağıntısını sağlayan x ler için

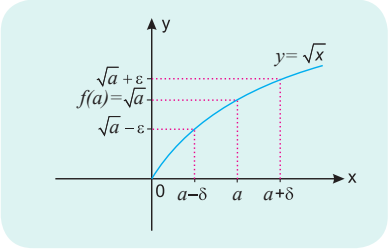
$$|f(x) - f(a) = |x^2 - a^2| = |x - a|\,|x + a| < |x + a| < |x - a + 2a|$$

$$\le |x - a| + 2a < 1 + 2a$$

olur. $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+2a}\right)$ seçilirse $|x - a| < \delta$ bağıntısını sağlayan tüm x ler için $|f(x) - f(a) < \varepsilon$ kalır. Bu da f nin a noktasında sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK : $f[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.



$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

bulunur. $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$ seçilirse $|x - a| < \delta$ olduğunda $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ bulunur. Bu da f nin a noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi $a = 0$ olsun.

$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x}$ olur. $|x| < \varepsilon^2$ seçilirse $|\sqrt{x}| < \varepsilon$ kalır. Şu halde $\delta = \varepsilon^2$ seçilebilir.

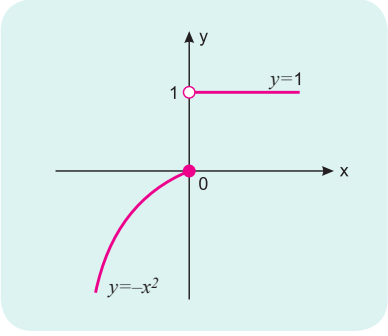
Bu durumda $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $x = 0$ da da süreklidir.

ÖRNEK : $\mathbb{R}$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm : Önce bu fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limitini bulalım.



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$$

olacağından $x = 0$ noktasında limit mevcut değildir. Dolayısıyla fonksiyon bu noktada sürekli değildir.

ÖRNEK :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

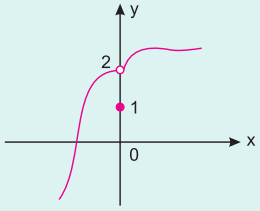
Çözüm : sinüs fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan $\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu $x \neq 0$ için her yerde süreklidir. O halde f fonksiyonu $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarında süreklidir.

$\lim_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \sin\frac{1}{x}$ limtileri mevcut olmadığından f fonksiyonu $x = 0$ da sürekli değildir.

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında şu sonuç ifade edilebilir.

SONUÇ

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart a noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.



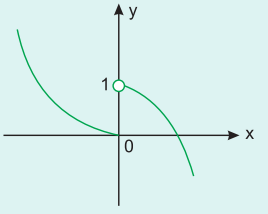
kaldırılabilir süreksizlik

TANIM

Bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse, fonksiyon bu noktada **süreksizdir** denir.

Bir fonksiyon a noktasında süreksiz ise şu durumlardan biri mevcuttur.

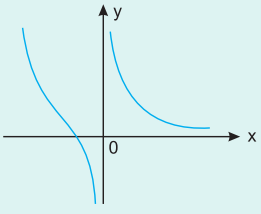
(1) $\lim_{x \to a} f(x)$ vardır, fakat bu limit, fonksiyonun a noktasındaki değeri olan $f(a)$ dan farklı olabilir, ya da fonksiyon a da tanımlı olmayabilir. Bu durumdaki fonksiyonun süreksizliğine **kaldırılabilir süreksizlik** adı verilir. Bu fonksiyonun a noktasındaki değeri limit değerine eşit olarak tanımlanırsa (yeni) fonksiyon sürekli olur.



sıçrama süreksizliği

(2) a noktasındaki sağ ve sol limitler mevcut fakat farklı olabilir. Bu durumdaki süreksizliğe **sıçrama süreksizliği** adı verilir.

(3) Sağ ve sol limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise veya mevcut değilse, bu fonksiyon a noktasında bir **sonsuz süreksizliğine** veya **kutup süreksizliğine** sahiptir denir.



kutup süreksizliği

Limit konusundaki teoremler (Teorem 3.16) göz önüne alındığında ona benzeyen şu teorem ifade edilebilir :

TEOREM 4.1

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ da sürekli ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise $\beta g, f \cdot g$ fonksiyonları da a noktasında süreklidir. Ayrıca, eğer $g(a) \neq 0$ ise f / g fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

Teoremin ispatı Teorem 3.16'nın ispatına benzer olduğundan bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

Yukarıdaki teoreme göre

$$x^2 = x \cdot x, \quad x^3 = x^2 \cdot x, \ldots, x^n = x^{n-1} \cdot x$$

ve bunların sabitlere çarpımları süreklidir. Dolayısıyla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

polinomları süreklidir.

TEOREM 4.2

Eğer f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu $b = f(a)$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.

İspat : $\varepsilon > 0$ olsun. g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli olduğundan öyle bir δ' pozitif sayısı vardır ki

$|y - f(a)| < \delta'$ şartını sağlayan tüm y ler için $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ kalır. (1)

f, a noktasında sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|x - a| < \delta$ şartını sağlayan tüm x ler için $|f(x) - f(a)| < \delta'$ kalır. (2)

Şu halde (2) gerektirmesindeki $f(x)$, (1) deki y lerden biridir. Bu durumda

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

bulunur ki bu da $g \circ f$ nın a da sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK : $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $h(x) = 4 + x^2$ bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ de süreklidir. $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu da $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli olduğundan

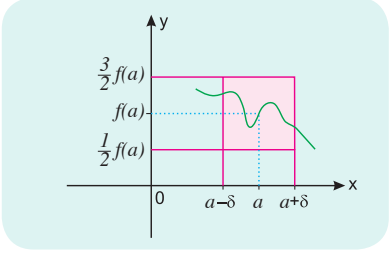
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{4 + x^2} = f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

4.2 SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

Sürekli fonksiyonların kümesi matematikte önemli bir yer tutar. Bu fonksiyonların önemi sahip olduğu zengin özelliklerden gelmektedir. Bu kesimde bu özelliklerden bazılarını kısa olarak vermeye çalışacağız.

İşaret Koruma Özelliği **TEOREM 4.3**

f fonksiyonu a noktasında sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. a nın öyle bir δ– komşuluğu vardır ki bu komşuluktaki her x için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işarettedir.



İspat : Kabul edelim ki $f(a) > 0$ dır. Süreklilik tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır, öyleki $a - \delta < x < a + \delta$ olduğunda $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ dir. Özel olarak bu δ sayısını $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$ sayısına karşılık alırsak, $a - \delta < x < a + \delta$ olduğunda

$$\frac{1}{2}f(a) < f(x) < \frac{3}{2}f(a)$$

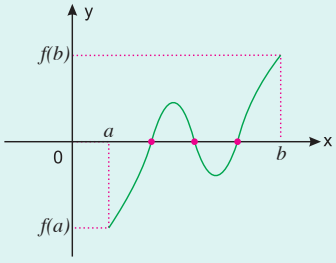
bulunur. Bu $(a - \delta, a + \delta)$ aralığındaki her x için $f(x) > 0$ *demektir.*

Eğer $f(a) < 0$ ise $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(a)$ alarak aynı sonuca varılır.

Eğer a noktasında tek taraflı süreklilik varsa, bu taktirde bir $[a, a+\delta)$ veya $(a-\delta, a]$ aralığı vardır ki bu aralıktaki her x için $f(x)$ ler aynı işarettedir.

Bolzano Teoremi **TEOREM 4.4**

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli ise (a, b) aralığındaki enaz bir c noktası için $f(c) = 0$ dır.



İspat : Özel olarak kabul edelim ki $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ dır. a ile b arasında $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan çok sayıda x noktaları bulunabilir. Bizim problemimiz bunlardan birini bulabilmektir. Şimdi bu x lerin en büyüğünü bulacağız.

$$S = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$$

olsun. S kümesi boş değildir, zira en azından $f(a) < 0$ dır. S üstten sınırlı bir küme olduğundan bir supremuma sahiptir. $c = sup\ S$ diyelim. $f(c) = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$f(c)$ için üç durum söz konusu olabilir : $f(c) > 0$, $f(c) < 0$ veya $f(c) = 0$. Eğer $f(c) > 0$ ise Teorem 4.3 den bir $(c-\delta, c+\delta)$ (veya $c = b$ olduğundan bir $(c-\delta, c]$ aralığı) vardır ki bu aralıkta f pozitiftir. Bu durumda S nin hiçbir elemanı $c-\delta$ nın sağında bulunamaz. Böylece $c-\delta$, S nin bir üst sınırı olur. Fakat $c-\delta < c$ ve $c = sup\ S$ olduğundan bu mümkün değildir. Çünkü c üst sınırların en küçüğüdür. O halde $f(c) > 0$ olamaz.

$f(c) < 0$ olsun. Bu taktirde c nin öyle bir $(c-\delta, c+\delta)$ komşuluğu ($c = a$ olması halinde $[c, c+\delta)$ aralığı) vardır ki bu aralıkta f negatiftir. Böylece c den büyük bazı x ler, Örneğin $[c, c+\delta)$ aralığındaki x ler için $f(c) < 0$ dır. Bu da c nin, S cümlesinin supremumu olmasıyla çelişir. O hâlde $f(c) < 0$ olamaz. Geriye bir tek durum kaldığından $f(c) = 0$ dır.

Benzer ispat $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ alınarak da tekrarlanabilir.

ÖRNEK : $x^3 + x + 1 = 0$ denkleminin en az bir reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x^3 + x + 1$ olsun. f, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$ ve $f(0) = 1 > 0$ olduğundan $(-1, 0)$ aralığındaki en az bir x_0 için $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 + x_0 + 1 = 0$ olur. Şu hâlde verilen denklemin $(-1, 0)$ aralığında en az bir kökü vardır.

Ara Değer Teoremi **TEOREM 4.5**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ de $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1, x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1, x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

İspat : Kabul edelim ki $f(x_1) < f(x_2)$ ve k da $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasında bir sayı olsun.

$$g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - k$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu sürekli olup,

$$g(x_1) = f(x_1) - k < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - k > 0$$

dır. Bolzano teoremi gereğince, x_1 ve x_2 arasında öyle bir c sayısı vardır ki $g(c) = 0$ dır. Bu da $f(c) = k$ olmasını gerektirir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Bolzano ve Ara Değer Teoremi fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli olması halinde geçerlidir. Eğer fonksiyon $[a, b]$ aralığının bir uç noktasında bile süreksiz olsa bu teoremler geçersiz olur.

TEOREM 4.6

$f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

İspat : $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ kümesinin sınırlı olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $f([a, b])$ sınırlı olmasın. Bu taktirde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n)| \geq n$ olacak şekilde bir $x_n \in [a, b]$ noktası vardır. $[a, b]$ sınırlı bir küme olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir. Bolzano Weierstrass Teoremi gereğince (x_n) dizisinin en az bir yakınsak (x_{n_i}) alt dizisi vardır.

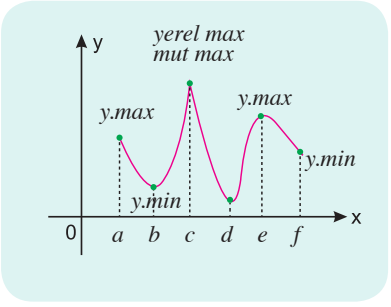
$(x_{n_i}) \to x_0$ olsun. $[a, b]$ aralığının tüm yığılma noktaları kendisine ait olduğundan $x_0 \in [a, b]$ dir. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında da süreklidir. Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kalır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ alalım. x_0 noktasının δ – komşuluğunda

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leq |f(x) - f(x_0)| < 1$$

buradan da

$$|f(x)| < 1 + |f(x_0)|$$

yazılabilir. Bu $|f(x_0)| \geq n$ kabulü ile çelişir. O hâlde $f([a, b])$ sınırlı, yani f sınırlıdır.



TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ olsun.

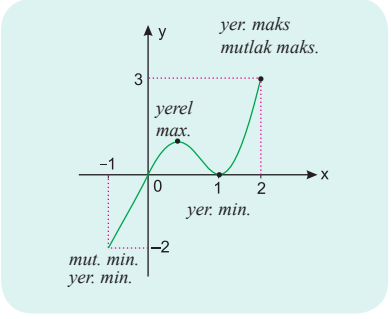
$|x - c| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in A$ için $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu c noktasında **bir yerel** (lokal, rolatif) **maksimuma*** sahiptir denir. $f(c)$. f nin bir **yerel maksimum değeridir** denir.

$d \in A$ olsun. $|x - d| < \delta$ şartını sağlayan her x için $f(x) \geq f(d)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonu d noktasında bir **yerel** (lokal, rölatif) **minimuma** sahiptir denir. $f(d)$, f nin bir **yerel minimum değeridir** denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine fonksiyonun **ekstremumları** veya **ekstrem değerleri** adı verilir.

Eğer her $x \in A$ için $f(x) \leq f(r)$ olacak şekilde bir $r \in A$ varsa, f fonksiyonu r noktasında bir **mutlak maksimuma** sahiptir denir. $f(r)$, f nin $[a, b]$ de aldığı **en büyük değerdir denir.**

Eğer her $x \in A$ için $f(x) \geq f(p)$ olacak şekilde bir $p \in A$ varsa f fonksiyonu p noktasında bir **mutlak minimuma** sahiptir denir. $f(p)$, f nin $[a, b]$ de aldığı **en küçük değerdir**.



Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerleri birden fazla olabilir, fakat mutlak maksimum değeri ve mutlak minimum değeri varsa tektir. Yanda bazı fonksiyonların maksimum ve minimumları gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden de anlaşılacağı gibi, sürekli bir $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini ya tanım aralığının uç noktalarında ya da yerel maksimum ve yerel minimum noktalarında alır.

TEOREM 4.7

Sürekli bir $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak maksimum ve mutlak minimuma sahiptir, yani $[a, b]$ aralığında öyle x_1 ve x_2 noktaları vardır ki

$$\sup \{f(x) : \ x \in [a, b]\} = f(x_1)$$

$$\inf \{f(x) : \ x \in [a, b]\} = f(x_2)$$

olur.

İspat : Teoremin ispatını maksimum için yapalım. Minimum için ispat benzer şekilde yapılabilir. f fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 4.6 gereğince sınırlıdır. $\sup \{f(x) : x \in [a, b]\} = u$ olsun. $[a, b]$ de $f(x_1) = u$ olacak şekilde bir x_1 elemanının varlığını göstereceğiz. Kabul edelim ki $[a, b]$ de $f(x_1) = u$ olacak şekilde bir x_1 elemanı yoktur. Bu taktirde her $x \in [a, b]$ için $u - f(x) > 0$ dır ve

* Bazı kaynaklar tanım kümesinin uç noktalarında aldığı reel ekstremum noktalarını yerel ekstremum noktası olarak almazlar.

bu durumda $g(x) = \frac{1}{u - f(x)}$ şeklinde tanımlanan $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Teorem 4.6'dan $\forall x \in [a, b]$ *için,*

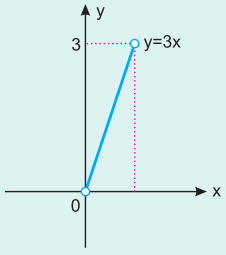
$$g(x) = \frac{1}{u - f(x)} \leq K$$

kalacak şekilde bir K pozitif sayısı vardır. Buradan

$$f(x) \leq u - \frac{1}{K}$$

yazılabilir ki bu u nun en küçük üst sınır (supremum) olmasıyla çelişir. Şu halde $f(x_1) = u$ olacak şekilde $x_1 \in [a, b]$ vardır. Supremum kümeye ait olduğunda kümenin maksimum elemanı olacağından f fonksiyonu maksimum değerini x_1 noktasında almaktadır.

Şimdi bu teoremin hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

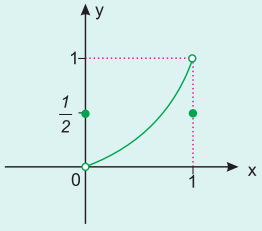


ÖRNEK : $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ fonksiyonunun bir yerel ekstremumu var mıdır?

Çözüm : f fonksiyonu ne mutlak maksimuma ne de mutlak minimuma sahiptir. Çünkü bu fonksiyonun görüntü kümesi $(0, 3)$ açık aralığı olup ne en büyük ne de en küçük elemanına sahiptir. Eğer $(0,1)$ açık aralığı yerine $[0, 1]$ kapalı aralığı alınırsa, görüntü kümesi $[0, 3]$ aralığı olur. Bu durumda,

$$\underset{0 \leq x \leq 1}{maks}\, f(x) = f(1) = 3, \quad \underset{0 \leq x \leq 1}{min}\, f(x) = f(0) = 0$$

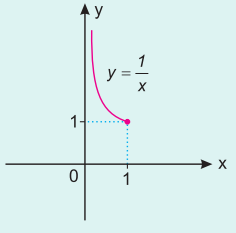
olur.



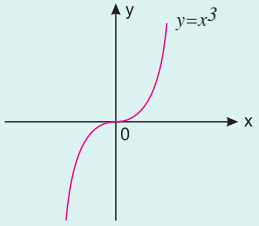
ÖRNEK : $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ 0 < x < 1 \ \text{ise} \\ \frac{1}{2} \ , \ x = 0 \ \text{veya} \ x = 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyon $[0, 1]$ aralığında sürekli değildir. Bu fonksiyonun görüntü kümesi $(0, 1)$ aralığı olup maksimum ve minimum elemanı yoktur. Dolayısıyla fonksiyonun maksimum ve minimum değeri yoktur.



ÖRNEK : $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğu hâlde maksimum değeri yoktur. $f(1) = 1$ sayısı f nin mutlak minimum değeridir.



ÖRNEK : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğu halde ne mutlak maksimumu ne de mutlak minimumu vardır. Bunun sebebi fonksiyonun tanım kümesinin $[a, b]$ tipinde sınırlı ve kapalı bir aralık olmayışıdır.

Bire bir örten fonksiyonların terslerinin var olduğunu biliyoruz. Şimdi böyle bir fonksiyonun tersinin hangi özelliklere sahip olduğunu gösteren bir teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 4.6

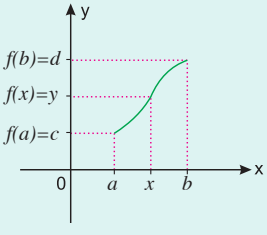
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$, sürekli ve artan bir fonksiyon olsun.

$f(a) = c$ ve $f(b) = d$ ise

(1) $f: [a, b] \to [c, d]$ fonksiyonunun f^{-1} tersi vardır.

(2) f^{-1} fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde kesin olarak artandır.

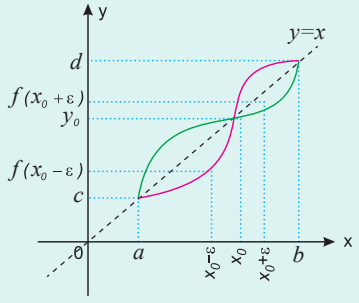
(3) f^{-1} fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde süreklidir.



İspat :

(1) f artan olduğundan $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacaktır. Dolayısıyla f birebirdir. Şimdi $f : [a, b] \to [c, d]$ fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim. $y \in [c, d]$ olsun. $[a, b]$ de $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir x elemanının varlığını göstereceğiz. Ara değer Teoremi gereğince f fonksiyonu c ile d arasındaki her değeri en az bir kere alır. O halde en az bir $x \in [a, b]$ için $f(x) = y$ dir. Demek ki f birebir ve örtendir. Dolayısıyla tersi vardır.

(2) $[c, d]$ aralığında $y_1 < y_2$ olacak şekilde y_1 ve y_2 elemanlarını alalım. $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$ diyelim. Bu durumda $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ dir. $y_1 < y_2$ olduğundan $f(x_1) < f(x_2)$ ve f artan olduğundan $x_1 < x_2$ dir. O halde $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ dir. Bu da f^{-1} fonksiyonunun artan olduğunu gösterir.



a, b, c, d

(3) f^{-1} fonksiyonunun herhangi bir y_0 noktasında sürekli olduğunu göstermek için, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır ki $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ olduğunda $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$ kalsın. $f^{-1}(y_0) = x_0$ olsun. Bu durumda $y_0 = f(x_0)$ dır. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (ε sayısı $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$ sayıları $[a, b]$ aralığında kalacak şekilde seçildiğinde genellikten birşey kaybedilmiş sayılmaz.) Eğer δ sayısını,

$$f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{ile} \quad f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$$

sayılarından daha küçük seçersek $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ eşitsizliğini sağlayan y ler için $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$ olur. Bu f^{-1} fonksiyonunun y_0 noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Monoton azalan fonksiyonlar için de yukarıdaki teoreme paralel bir teorem verilebilir. Yani sürekli ve azalan bir fonksiyonun tersi de sürekli ve azalandır. Bunu ispat etmek için $(-f)$ fonksiyonuna yukarıdaki teoremi uygulamak yeterlidir.

TANIM

$A \subset R$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde **düzgün süreklidir** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dır.

Bu tanım ilk bakışta f fonksiyonunun A üzerinde sürekli olması tanımına benzemektedir. Fakat bunlar birbirlerinden farklıdır. Çünkü f fonksiyonu A üzerinde sürekli olduğunda bulunacak olan δ sayısı hem ε, hem de A da alınan x_0 noktasına bağlıdır. Halbuki düzgün sürekli olması için δ nın sadece ε sayısına bağlı olması gerekir. Dolayısıyla düzgün sürekli olan bir fonksiyon süreklidir fakat bunun karşıtı doğru değildir. Eğer f fonksiyonu A üzerinde sürekli ve

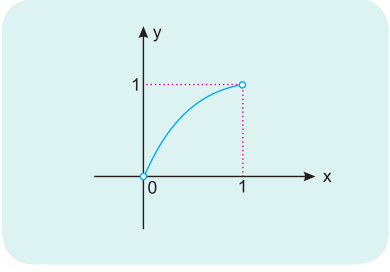
$$inf\{\delta(\varepsilon, x)| : x \in A\} = \delta(\varepsilon) > 0$$

oluyorsa f, A üzerinde düzgün süreklidir. Fakat düzgün süreklilik için bunun gerçekleşmesi gerekmez.

Şimdi düzgün süreklilik için bazı örnekler verelim.

ÖRNEK :

$f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.



Çözüm : Bir $\delta > 0$ sayısının seçildiğini farzedelim. $(0, 1)$ aralığındaki seçilen x_0 noktasının büyüklüğüne göre iki durum söz konusudur.

1) $0 < x_0 < \delta$ olsun. $|x - x_0| < \delta$ ise $0 < x < 2\delta$ ve dolayısıyla

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \le \sqrt{x} + \sqrt{x_0} < \sqrt{2\delta} + \sqrt{\delta} < 2\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta} = 3\sqrt{\delta}$$

olur.

2) Eğer $x_0 \ge \delta$ ise,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} < 3\sqrt{\delta}$$

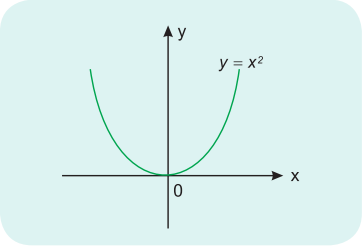
olur. Şu halde, $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < 3\sqrt{\delta}$ kalır.

Buna göre, $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $3\sqrt{\delta} = \varepsilon$ yani $\delta = \frac{\varepsilon^2}{9}$ alınırsa $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kalır.

Buradaki δ sayısı sadece ε sayısına bağlı olduğundan f fonksiyonu $(0, 1)$ aralığında düzgün süreklidir.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün sürekli midir?

Çözüm : Kabul edelim ki f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olsun. Bu taktirde $|x-a| < \delta$ olduğunda her $x, a \in \mathbb{R}$ için $|f(x)-f(a)| < 1$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Arşimet prensibinden $n\delta > 1$ olacak biçimde yeter derece büyük bir $n \in \mathbf{N}$ vardır. $a = n$ ve $x = n + \frac{\delta}{2}$ seçelim. Bu durumda $|x - a| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ve $1 > |f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = \left|\left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2 - n^2\right| = n\delta + \frac{\delta^2}{4} > n\delta > 1$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Şu halde $f, \mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.



Şimdi akla şu soru gelebilir : Acaba bir sürekli fonksiyon ne zaman düzgün süreklidir? Aşağıda vereceğimiz teorem bu soruyu kısmen cevaplamaktadır.

TEOREM 4.6

Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün süreklidir.

ÖRNEK : $0 < a < 1$ olsun. $f: [a, 1] \to f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu düzgün sürekli midir?

Çözüm : $[a, 1]$ kapalı ve sınırlı bir aralık ve $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $[a, 1]$ üzerinde sürekli olduğundan f, $[a, 1]$ üzerinde düzgün süreklidir.

TANIM

$A \subset R$ ve f de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin A daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonu A üzerinde **parçalı süreklidir** denir.

ÖRNEK : $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu parçalı süreklidir. Çünkü süreksizlik noktaları $-1, 0, 1$ noktaları olup 3 tanedir.

ÖRNEK :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \tan x\,, & x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 0, & x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$, $k \in Z$ fonksiyonu parçalı sürekli değildir.

Çünkü fonksiyon $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ noktalarında süreksiz olup bunların sayısı sonlu değildir.

PROBLEMLER 4.1

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda sürekli olup olmadığını inceleyiniz. Süreksiz olanların çeşidini belirtiniz.

a. $f(x) = x - [\![x]\!]$, $x = 2$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} , & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ $x = 0$

2. a, b ve c sabit sayılar olmak üzere, bir f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} sinx , & x \geq c \text{ ise} \\ ax + b , & x > c \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlanıyor. b ve c verildiğinde f fonksiyonunu $x = c$ noktasında sürekli yapan a değerlerini bulunuz.

3. Problem 2 deki soruyu,

$$f(x) = \begin{cases} 2cosx , & x \geq c \; ise \\ ax^2 + b , & x < c \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için cevaplandırınız.

4. $f(x) = \begin{cases} 2x , & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ c - 2x , & 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$

eşitliği ile tanımlanan $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması için c ne olmalıdır?

5. Tanjant ve Kotanjant fonksiyonları nerede süreklidir?

6. $x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.?

7. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanıyor.

Bu fonksiyon $\left[-2, -\frac{1}{5}\right]$ ve $\left[\frac{1}{5}, 2\right]$ aralıklarındaki grafiğini çiziniz. Sıfır noktasındaki sağ ve sol limitlerini hesaplayınız. Bu fonksiyon $x = 0$ da sürekli olacak şekilde $f(0)$ tanımlanabilir mi?

8. Bir çift fonksiyon $x = 0$ da sağdan sürekli olduğunda $x = 0$ da sürekli olacağını ve $f(0) = 0$ eşitliğini sağlayacağını gösteriniz.

9. Bir tek fonksiyon $x = 0$ da sağdan sürekli olduğunda $x = 0$ da sürekli olacağını ve $f(0) = 0$ eşitliğini sağlayacağını gösteriniz.

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x} , & x \neq 0 \text{ ise} \\ k , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olması için k ne olmalıdır? (Burada n bir doğal sayıdır.)

11. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye öyle bir fonksiyon tanımlayınız ki bu fonksiyon hiçbir noktada sürekli olmasın.

12. Kendileri sürekli olmadıkları halde çarpımları sürekli olan iki fonksiyon bulunuz.

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt{x-\llbracket x\rrbracket}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların kümesini bulunuz.

14. f ve g, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x\geq 0 \text{ ise} \\ x & , \ x<0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçimde tanımlanan fonksiyonlar olsun. $f\circ g$ bileşke fonksiyonunu bulunuz. Bileşke fonksiyonu hangi noktalarda süreklidir?

15. $f(x)=\tan x$ olsun. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ ve $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ olduğu halde, $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında $f(c)=0$ olacak şekilde c sayısı var mıdır? Bu sonuç Bolzano Teoremi ile çelişir mi? Neden?

16. $f:[0,1]\to[0,1]$ bir sürekli fonksiyon olsun. İspat ediniz ki $[0,1]$ aralığındaki en az bir c için $f(c)=c$ dir. (Böyle noktalara f nin **sabit noktaları** denir). Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f:[0,1]\to[0,1]$ fonksiyonlarının sabit noktalarını bulunuz.

a. $f(x)=1-x^2$, **d.** $f(x)=1-x$

b. $f(x)=x^2$, **e.** $f(x)=x$

c. $f(x)=\sin x$, **f.** $f(x)=\frac{1}{2}$

17. Aşağıdaki denklemlerin en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

a. $e^x=x^2$ **b.** $e^x=1+\cos x$

c. $2^x=2-x$

18. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

19. $f(x)=\frac{x}{\llbracket x\rrbracket}$, $f:\mathbb{R}\setminus[0,1)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz. Bu fonksiyon parçalı sürekli midir?

20. $$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \ x\neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , \ x=0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $(-\infty,0)$ ve $(0,+\infty)$ aralıklarında sürekli olduğunu gösteriniz.

f fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli midir?

21. Tanımdan yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

a. $f(x)=x^3$ **b.** $f(x)=x^2-x$

c. $f(x)=x\sin 2x$

22. $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli ve $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ olsun.

a. f nin $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

b. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $A, B \subset \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonunu a noktasında, g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekli olduğunda gof fonksiyonu da a noktasında süreklidir, ispatlayınız.

2. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğunda $|f|$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz. $|f|$ sürekli olduğunda f sürekli olmak zorunda mıdır?

3. $A \subset \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler,

$$p = maks\{f, g\}, \quad q = min\{f, g\}$$

fonksiyonları da a noktasında süreklidir, gösteriniz.

4. Polinomların her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

5. Bir aralığın sadece bir noktasında sürekli, fakat diğer tüm noktalarında süreksiz olan bir fonksiyon var mıdır?

6. $[a, b]$ aralığındaki her u, v için

$$|f(u) - f(v)| \leq k\,|u - v|$$

olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında süreklidir, gösteriniz.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir sürekli ve artan fonksiyon olsun. $f^{-1}[(a, b)]$ kümesinin bir açık aralık olduğunu gösteriniz.

8. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ polinomunun c_0 ve c_n katsayıları zıt işaretli olduğunda en az bir pozitif a için $p(a) = 0$ olacağını gösteriniz.

9. $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir f fonksiyonu veriliyor. $f(a) \geq a$ ve $f(b) \leq b$ olduğunda f fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olacağını gösteriniz.

10. $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli fakat düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

11. Logaritma fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

12. Tek dereceli tüm polinomların en az bir sıfır yerinin (kökünün) var olduğunu gösteriniz.

13. $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun her $n \geq 1$ tam sayısı için $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

14. Bir reel değerli f fonksiyonu için

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \text{ ve } f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

fonksiyonlarına, sırası ile f nin **pozitif parçası** ve **negatif parçası** adı verilir. f sürekli ise f^+ ve f^- sürekli midir? f^+ ve f^- sürekli ise f sürekli midir?

15. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $f(nx) = n f(x)$ dir.

b. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{Q}$ için $f(rx) = r f(x)$ dir.

c. f, $x = 0$ da süreklidir $\Leftrightarrow f$, $\mathbb{R}$ de süreklidir.

d. Eğer f, $x = 0$ da sürekli ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = mx$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ vardır.

16. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, f ve g, A dan $\mathbb{R}$ ye düzgün sürekli iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. αf ve $f + g$, A üzerinde düzgün süreklidir.

b. f ve g, A üzerinde sınırlı ise $f \cdot g$, A üzerinde düzgün süreklidir.

c. f ve g, $[a, b]$ üzerinde düzgün sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, $[a, b]$ üzerinde düzgün süreklidir.

17. $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

18. Sürekli ve periyodik fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

19. f, a noktasında sürekli ve $\varepsilon > 0$ olsun. Tanım kümesinde

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde x_1, x_2 noktalarının varlığını gösteriniz.

20. f ve g, $[a, b]$ üzerinde sürekli iki fonksiyon, $f(a) \leq g(a)$ ve $f(b) \geq g(b)$ olsun. $[a, b]$ de

$f(c) = g(c)$

olacak biçimde bir c noktasının bulunduğunu gösteriniz.

21. $$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 \quad , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun x = 0 noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

[YG : $a_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ ve $b_n = \frac{1}{2n}$ dizilerinden yararlanınız]

22. n. dereceden bir polinomun düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $n = 0$ veya $n = 1$ olmasıdır, gösteriniz.

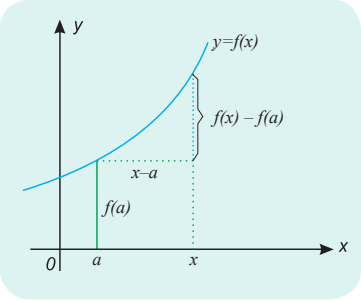
Bölüm

5

TÜREV



5.1 TÜREV KAVRAMI



Matematik ve mühendislikte karşılaşacağımız hususlardan birisi de değişkene vereceğimiz bir artmanın fonksiyonun alacağı değerlerde meydana getireceği değişikliğin limit durumunda ne olacağıdır. Yani limit ve süreklilik kavramlarının doğal bir uzantısı olan türev kavramının da fen ve mühendislikte çok önemli bir yeri vardır. Örneğin yolun zamana göre türevinin hızı, hızın zamana göre türevinin de ivmeyi verdiğini göstereceğiz.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve a, A nın bir yığılma noktası olsun. $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{5.1}$$

limiti varsa bu limite f nin a noktasındaki **türevi** denir. f nin a noktasındaki türevi $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $Df(a)$ sembollerinden biri ile gösterilir. f, a noktasında türevli ise f, a da **diferensiyellenebilirdir** denir.

Türev tanımındaki (5.1) ifadesinde x yerine $a + h$ yazılırsa, x in a noktasına yaklaşması için gerek ve yeter şart h nin sıfıra yaklaşması olduğundan, türevin varlığı

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{5.2}$$

limitinin varlığı olarak ifade edilebilir.

ÖRNEK : $f(x) = x^3$ biçiminde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 4+4+4 = 12$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x} = -1$

olarak bulunur.

TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve A nın tüm elemanları A nın birer yığılma noktası olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A nın tüm noktalarında türevli ise f fonksiyonu A üzerinde **diferensiyellenebilirdir** veya **türevlenebilirdir** denir.

Eğer I, bir aralık ise I nın tüm noktalarının birer yığılma noktası olduğu açıktır. Bu nedenle bir I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyonun I üzerinde türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall\, x \in I$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

limitinin var olmasıdır.

ÖRNEK : $I = [0, 1]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu I üzerinde türevlenebilir midir? $f'(0)$ ve $f'(1)$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+2)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

olduğundan $\forall x \in I$ için $f'(x) = 2x$ olduğundan f, I üzerinde türevlenebilirdir.

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ ve $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ dir. ❐

ÖRNEK : $f(x) = x|x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x| - 0.|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$ olur. ❐

Bilindiği gibi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

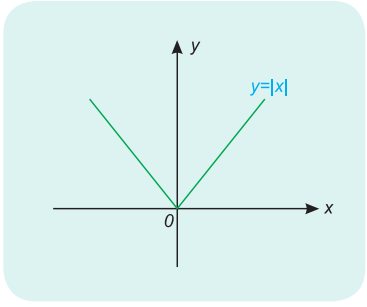
limitinin varolması için gerek ve yeter şart sağdan ve soldan limitlerin mevcut ve eşit olmasıdır.

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ifadelerine, sırasıyla, f nin a noktasındaki **sağ taraflı türevi** ve **sol taraflı türevi** denir.

Açıkça görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin varolması için gerek ve yeter şart sağ ve sol taraflı türevlerinin mevcut ve eşit olmasıdır. Süreklilik konusunda anlatıldığı gibi, eğer tanım kümesi $[a, b]$ aralığı ise a noktasındaki türevin varlığı için a noktasındaki sağ taraflı türevin, b noktasında türevli olması için b noktasındaki sol taraflı türevin varlığı yeterlidir.

ÖRNEK : $f(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki türevini inceleyiniz.



Çözüm :

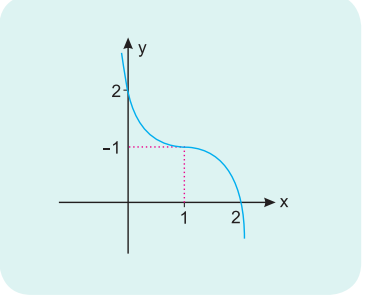
$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow f'(0^+) = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow f'(0^-) = -1$$

olduğundan verilen fonksiyonun $x_0 = 0$ noktasında türevi yoktur.

ÖRNEK : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & , x < 1 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun x = 1 noktasındaki türevini hesaplayınız.



Çözüm :

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2+2x-(-1+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2+2x-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} -(x-1) = 0$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2-2x+2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (x-1) = 0$$

olduğundan $f'(1) = 0$ dır.

$f(x) = |x|$ fonksiyonu her noktada sürekli olduğu halde 0 noktasında türevli değildir. $f(x) = x^2$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu her yerde sürekli ve her yerde türevlenebilirdir. Şu halde bazı fonksiyonlar sürekli oldukları yerlerde türevli olmayabilir. Demek ki süreklilik, türevlenebilmeyi gerektirmeyen bir özelliktir.

Şimdi şu teoremi verelim.

TEOREM 5.1

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve f de A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında türevlenebiliyorsa, bu noktada süreklidir.

İspat : f fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olduğundan

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

şeklinde tanımlanan $g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun a noktasında limit vardır ve bu limit $f'(a)$ dır. Yukarıdaki eşitlikten

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, g(x)$$

yazılabileceğinden

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(a) + (x - a)(g(x))]$$
$$= f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a)$$

olur. O halde f fonksiyonu a da süreklidir. □

Yukarıdaki teoremden şu sonucu çıkarabiliriz.

SONUÇ

f bir a noktasında sürekli değilse türevli de değildir.

TANIM

Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A üzerinde türevli ve f' türev fonksiyonu da A üzerinde sürekli ise f fonksiyonu A üzerinde **sürekli türevlenebilirdir** denir.

ÖRNEK : $f(x) = x^4$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir midir?

Çözüm : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} = \frac{(x+h-x)[(x+h)^3 + (x+h)^2 x + (x+h)x^2 + x^3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [(x+h)^3 + (x+h)^2 x + (x+h)x^2 + x^3]$$

$$= x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 4x^3$$

olur. $f'(x) = 4x^3$ polinom fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinse sürekli olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir.

Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir olan fonksiyonların kümesi $C^1[a, b]$ ile gösterilir.

5.2 TÜREV ALMA KURALLARI

Temel türev alma kurallarını bir teoremle ifade edelim.

TEOREM 5.2

(a) Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

olur.

(c) f ve g, bir x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ise $f+g$ de x noktasında türevlenebilir ve

$$[f+g]'(x) = (f' + g')(x)$$

dir.

(ç) f ve g, bir x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ise $f \cdot g$ de x noktasında türevlenebilir ve

$$(f \cdot g)'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x)$$

dir.

(d) f ve g, bir x noktasında türevlenebilen iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de x noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}(x)$$

olur.

İspat : (a)

f fonksiyonu, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = c$ şeklinde tanımlanmış olsun.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

olur. O halde

$$(c)' = 0$$

olarak bulunur.

(b)
$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\} = nx^n$$

olur.

(c)
$$(f+g)' = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x) = (f'+g')(x)$$

(ç)
$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$= f'(x)\cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\cdot g'(x)$$

yazılabilir. Diğer taraftan g fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan bu noktada süreklidir. Dolayısıyla

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

olacaktır. Buna göre,

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f'g + fg')(x)$$

olur. O hâlde f ve g nin türevlenebilir olduğu her $x \in A$ için,

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f'g + fg')(x)$$

elde edilir.

Özel olarak $g = c$ sabit fonksiyon ise,

$$(c\,.\,f(x))' = c\,.\,f'(x)$$

bulunur.

$$(d)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{f(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\ g(x)g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{g^2(x)},\ (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$$

olur. O halde f ve g nin türevlenebilir ve g nin sıfır olmadığı her x noktasında

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

olur.

ÖRNEK : $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x^{-n}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0.x^n - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$

olur. Demek ki $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(x^k)' = k\,x^{k-1}$$

yazılabilir.

ÖRNEK : Aşağıdaki bağıntılarla verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^{-5}$

b) $g(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{3x+2}$

ç) $u(x) = 5(x^3 - 3x)$

d) $v(x) = (x^3 + 2x)(1 + x^2)$

Çözüm :

a) $f'(x) = -5x^{-5-1} = 5x^{-6}$

b) $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

c) $h'(x) = \dfrac{2x(3x+2) - 3(x^2+1)}{(3x+2)^2}$

$= \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{(3x+2)^2}$

ç) $u'(x) = 5(x^3 - 3x)' = 5(3x^2 - 3) = 15(x^2 - 1)$

d) $v'(x) = (3x^2 + 2)(1 + x^2) + 2x(x^3 + 2x)$

$= 5x^4 + 9x^2 + 2$

5.3 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

(a) $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun türevini bulalım.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \sin x + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x$$

olur.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}\right) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\left(\sin \frac{h}{2}\right)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} = \lim_{h\to 0} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\right) = 0$$

ve $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

olduğundan

$$(\sin x)' = \cos x$$

olur.

(b) $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevi

$$(\cos x)' = -\sin x$$

dir. Bunun ispatını bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

(c) $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

olur. Bu türevin $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ noktalarında var olduğu açıktır.

(ç) $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun türevinin, $x \neq k\pi$ için,

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

olduğunu gösterme işini bir alıştırma olarak okuyuculara bırakıyoruz.

olduğunu gösterme işini bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

5.4 BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM 5.3

$A, B \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. g fonksiyonu $f(A)$ kümesini içine alan bir B kümesinde tanımlı ve bu kümenin $b = f(a)$ noktasında türevlenebilir ise $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında türevlenebilirdir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

dır.

İspat :

$(gof)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(gof)(x_0 + h) - (gof)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0 + h) - g(f(x_0))}{h}$ dır.

$f(x_0 + h) - f(x_0) = k$ diyelim. k, h ya bağlı olup f nin x_0 da sürekli olmasından

$\lim_{h \to 0} k = 0$ dır. Ayrıca

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = f'(x_0)$$

olacaktır. Eğer x_0 noktasının bir komşuluğunda $k \neq 0$ ise yukarıdaki limit, pay ve payda k ile çarpılarak,

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\frac{k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{k}{h}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$(gof)'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

bulunur.

x_0 noktasının her komşuluğunda $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ ifadesi sonsuz çokluktaki noktada sıfır değerini alabilir. Bu durumda yukarıdaki çarpma işlemini yapmak hatalı olur.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{g(y_0+t)-g(y_0)}{t} - g'(y_0) & , \ t \neq 0 \ \ ise \\ 0 & , \ t = 0 \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan λ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\lim_{h\to 0}\lambda(t) = 0 = \lambda(0)$$

olduğundan λ fonksiyonu $t = 0$ da süreklidir.

$$g(y_0 + t) - g(y_0) = t\,[\,\lambda(t) + g'(y_0)]$$

olacağından,

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(y_0+h)-g(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k[\lambda(t)+g'(y_0)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[\lambda(t)+g'(y_0)]\cdot \lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

bulunur.

Buna göre $(gof)(x) = g(f(x))$ fonksiyonunun türevini almak için önce $(g_o f)$ nin f ye göre türevini alıp, f nin x e göre türevi ile çarpmalıdır.

Bileşik fonksiyonların bu türev alma kuralına **zincir kuralı** denir ve bu kural daha karışık bileşik fonksiyonlar için de kullanılır. Örneğin

$$y = f(u(v(w(x))))$$

şeklinde bir bileşik fonksiyon verilirse ve gerekli türevlenebilme şartları sağlanırsa,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

olur.

Şimdi bu türev alma kuralı ile ilgili birkaç örnek yapalım.

ÖRNEK : $f(x) = sin(x^2)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : Bu fonksiyon $g(x) = x^2$ ve $h(x) = sinx$ fonksiyonlarının bileşkesi olarak düşünlebilir. Gerçekten

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = sinx^2$$

olur. Buna göre,

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = cos(g(x)) \cdot 2x$$

$$= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$$

olur. Bu türevi daha basit olarak şöyle alabiliriz. $x^2 = u$ denirse, $f(u) = sinu$ olur.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2)$$

olur.

ÖRNEK : $y = tan^5(2x - 1)$ için y' türevini bulunuz.

Çözüm : $2x - 1 = v$, $tanv = u$ dersek $y = u^5$ olur. Buna göre,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 5u^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 2 = 10 \cdot (\tan v)^4 \frac{1}{\cos^2 v}$$

$$= 10\tan^4(2x-1) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x-1)} = 10 \cdot \frac{\tan^4(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = sin^4[cos(x + 2)]$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm : $x + 2 = u$, $cosu = v$, $sinv = w$ denirse $f = w^4$ olur. Buna göre

$$f'(x) = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4w^3 \cdot \cos v \cdot (-\sin u) \cdot 1$$

$$= -4\sin^3 v \cdot \cos v \cdot \sin v = -4\sin^3(\cos u) \cdot \cos v \cdot \sin u$$

$$= -4\sin^3(\cos u) \cdot \cos(\cos u) \cdot \sin u$$

$$= -4\sin^3[\cos(x+2)].\cos[\cos(x+2).\sin(x+2)$$

olduğundan

$$f'(0) = -4sin^3(cos0) \cdot cos0 \cdot sin0 = 0$$

olur.

PROBLEMLER 5.1

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının, eğer varsa, karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz. Fonksiyonlar bu noktalarda sürekli midir?

a) $f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 2 \ \text{ise} \\ 2 & , \ x = 2 \ \text{ise} \\ 4 - x & , \ x > 2 \ \text{ise} \end{cases}$; $a = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \ x \geq 0 \ \text{ise} \\ -x^2 & , \ x < 0 \ \text{ise} \end{cases}$; $a = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geq 0 \ \text{ise} \\ 0 & , \ x < 0 \ \text{ise} \end{cases}$; $a = 2$

ç) $f(x) = [\![x]\!]$, ; $a = 1$

d) $f(x) = [\![x^2 - 2x]\!]$, ; $a = 1$

e) $f(x) = x[\![x]\!]$, ; $a = 0$

f) $f(x) = x - [\![x]\!]$, ; $a = \frac{1}{2}$

2. I, sıfır noktasını bulunduran bir açık aralık ve f de I üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in I$ için

$$|f(x)| \leq |x|^{\alpha}$$

olacak şekilde bir $\alpha > 1$ sayısı varsa f, $x = 0$ da türevlenebilirdir. Gösteriniz.

3. $f(0) = 5$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$ ve

$g(x) = (x^2 + 2x + 3) f(x)$ olduğuna göre $g'(0)$ türevini hesaplayınız.

4. Tek fonksiyonun türevinin çift, çift fonksiyonun türevinin tek olacağını gösteriniz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **b.** $f(x) = x(x^2 - 1)^3$

c. $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 5}$ **d.** $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = 1 - 2x + x^3 + 4x^5$, $x = 1$

b. $f(x) = (3x - x^5)(2 + 5x)$, $x = -1$

c. $f(x) = \frac{3x - 4}{2x + 7}$, $x = -3$

ç. $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{2x}$, $x = 3$

7. Aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

a. $y = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5)$

b. $y = \frac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10 \tan^2 x + 1)}{3 \tan^3 x}$

c. $y = \frac{x \cos x - \sin x}{x \cos x + \cos x}$

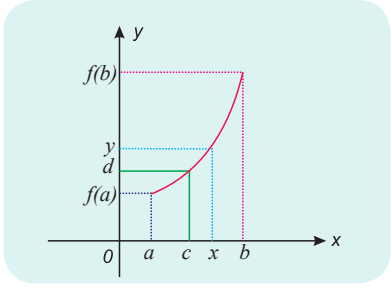
ç. $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \ \text{ise} \\ 0 & , \ x = 0 \ \text{ise} \end{cases}$

fonksiyonu sürekli türevlenebilir midir?

5.5 TERS FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$A, B \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu birebir örten ise bu taktirde $f(x) \in B$ sayısını $x \in A$ noktasına dönüştüren bir $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonunun var olduğunu biliyoruz. Şimdi f fonksiyonunun türevi ile f^{-1} fonksiyonunun türevi arasındaki ilişkiyi açıklayan teoremi verelim.



TEOREM 5.4

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer $a < c < b$ ve $f'(c) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu $d = f(c)$ noktasında türevlenebilir ve

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

olur.

İspat : $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ fonksiyonu bire bir örten olacağından bunun $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ters fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon da sürekli ve monoton artandır. $y \in [f(a), f(b)]$ ve $y \neq d$ ise $[a, b]$ aralığında c den farklı öyle bir x vardır ki $f(x) = y$ dir. Bu durumda

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

yazılabilir. f^{-1} sürekli olduğundan $y \to d$ için $f^{-1}(y) \to f^{-1}(d)$ ve dolayısıyla $x \to c$ olur. Yukarıdaki eşitlikten

$$\lim_{y \to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

buradan da

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

bulunur.

Yukarıdaki teoremin, fonksiyonun azalan olması durumunda da doğru olacağı açıktır. Yukarıdaki bağıntı, $c = f^{-1}(d)$ olacağından,

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

biçiminde de yazılabilir.

ÖRNEK : $f(x) = x^3 + x$ eşitliği ile tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(2)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $d = 2$ olduğundan, $y = x^3 + x = 2$ eşitliğinden $x = 1$ olur. Şu halde, $c = 1$ dir.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

olacaktır zira $f'(x) = 3x^2 + 1$ ve $f'(1) = 4$ tür.

ÖRNEK : $y = x^{1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$ için y' türevini hesaplayınız.

Çözüm : Bu fonksiyon $x = y^n$ nin ters fonksiyonu olduğundan,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{-n+1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

olur. Özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y = x^{m/n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ için y' türevini hesaplayınız.

Çözüm : $y = (x^{1/n})^m$ olduğundan $u = x^{1/n}$ denirse $y = u^m$ olur. Bu taktirde,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = m \cdot u^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

bulunur. Demek ki $r \in \mathbb{Q}$ için

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $f(x) = Arcsinx$ eşitliği ile tanımlanan $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : Bu fonksiyon $g(y) = siny$ şeklinde tanımlanan $g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan,

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

$$(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad (|x| < 1)$$

olur.

ÖRNEK : $y = Arctanx$ *ifadesinin* türevini hesaplayınız.

Çözüm : $y = Arctanx$ ise $x = tany$ dir. O halde

$$(Arc\tan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$(Arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

olur.

$$(Arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(Arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

eşitliklerini gösterme işini okuyucuya bırakıyoruz.

5.6 LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

olur. $\frac{h}{x} = k$ dersek $h \to 0$ için $k \to 0$ olacağından

$$(\log_a x)' = \lim_{k\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1+k)}{k} = \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \log_a(1+k)^{1/k}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{r\to \alpha} \log_a\left(1+\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{x}\cdot \log_a e \qquad \left(k = \frac{1}{r}\right)$$

bulunur. Buna göre

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

olur. Özel olarak $a = e$ alınırsa

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

eşitliği elde edilir.

ÖRNEK : y = ln(sinx) ifadesinin türevini bulunuz.

Çözüm : $y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

olur.

ÖRNEK : $y = log_3(x^2 - 1)$ ifadesinin türevini bulunuz.

Çözüm : $y' = \frac{1}{x^2-1} \cdot log_3 e \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1} \cdot log_3 e$

olur.

ÖRNEK : $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$ ifadesinin türevini bulunuz.

Çözüm :

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot (x+\sqrt{a^2+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right]$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

bulunur.

5.7 ÜSTEL FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu logaritma fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan $y = a^x \Leftrightarrow x = log_a y$ dir. Bu nedenle,

$$(a^x)' = \frac{1}{(log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} log_a e} = y \cdot log_e a = a^x \ln a$$

olur. O halde

$$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a}$$

dır. Özel olarak a = e alınırsa,

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y = e^{\sin(x^3)}$ olduğuna göre y' türevini bulunuz.

Çözüm : $x^3 = v$, $\sin v = u$ denirse $y = e^u$ olur. Buna göre,

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^u \cdot \cos v \cdot 3x^2 = e^{\sin(x^3)} \cos(x^3)\, 3x^2$$
$$= 3x^2 \cos(x^3) e^{\sin(x^3)}$$

olur.

5.8 LOGARİTMİK TÜREV ALMA

$y = [f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki bir ifadenin türevini almak için önce her iki tarafın logaritması alınır.

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

bulunur. Sonra her iki tarafın türevi alınır.

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x)$$

olur. Buradan

$$y' = y\left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\right]$$
$$= [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\right]$$

olur.

ÖRNEK : $y = x^{\sin x}$ olduğuna göre y' türevini bulunuz. $(x > 0)$

Çözüm : $\ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$

$$y' = y\left[\cos x \ln + \frac{\sin x}{x}\right] = x^{\sin x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

olur.

5.9 HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Hiperbolik fonksiyonların tanımlarından,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},\ \cot hx = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x,$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

olur. Buna göre

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

olur. Benzer şekilde $(\coth hx)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$ olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $f(x) = e^{ax}\ coshbx$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = a \cdot e^{ax} \cdot coshbx + e^{ax}\ b\ sinhbx$

$= e^{ax}\ (a\ coshbx + b\ sinhbx)$

olur.

5.10 PARAMETRİK OLARAK TANIMLANAN FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $y = f(x)$ şeklinde belirtildiği gibi $x = h(t)$, $y = k(t)$ denklemleriyle de belirtilebilir. Burada $t \in \mathbb{R}$ ye ***parametre*** denir. $x = h(t)$ *ve* $y = k(t)$ denklemleri arasında t yok edilerek $y = f(x)$ denklemi elde edilebilir. h ve k fonksiyonları t ye göre türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$\Delta x = h(t + \Delta t) - h(t)$$

$$\Delta y = k(t + \Delta t) - k(t)$$

olduğundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

olur. $\Delta t \to 0$ için $\Delta x \to 0$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

bulunur. Buradan da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(t + \Delta t) - k(t)}{\Delta t} : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

yazılabilir. x ve y fonksiyonları t ye göre türevli olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

yazılabilir.

$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ ve $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ile gösterilirse

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t \end{cases}$ şeklinde verilen fonksiyonun türevini bulunuz.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2b\sin t\cos t}{-2a\cos t\sin t} = -\frac{b}{a}$

bulunur.

5.11 KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$F(x, y) = 0$ şeklinde verilen bir ifadeye kapalı fonksiyon denir. Böyle bir fonksiyonun türevini bulmak için $F(x, y) = 0$ eşitliğinde her iki tarafın x değişkenine göre türevi alınır, bulunan eşitlikten y' hesaplanır.

ÖRNEK : $x^2 + 3x^2 - 8x + 4y - 1 = 0$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $2x + 3(y^2 + 2xy \cdot y') - 8 + 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{8 - 2x - 3y^2}{6xy + 4}$

olur.

5.12 YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

TANIM

Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x_0 noktasında $n - 1$. mertebeden türevlenebilir ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa ise bu limite f nin x_0 noktasındaki n. mertebeden türevi denir,

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \quad ise \\ 0 & , \quad x = 0 \quad ise \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ikinci türevini araştırınız.

Çözüm : Bu fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki birinci türevi

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

dır. $x \neq 0$ için

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

olacağından verilen fonksiyonun birinci türevi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

olur. Bu fonksiyon $x_0 = 0$ da sürekli olmadığından bu noktada türevlenemez. Yani $x_0 = 0$ noktasındaki ikinci türev mevcut değildir. Şu halde sürekli türevlenebilen bir fonksiyonun ikinci türevi olmayabilir.

ÖRNEK : $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = x^{\alpha}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun n. türevini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha-3}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$$

olur. Son eşitliğin ikinci tarafını $n!$ ile çarpar ve bölersek,

$$f^{(n)}(x) = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} n! x^{a-n} = \binom{\alpha}{n} n! \; x^{\alpha-n}$$

bulunur.

ÖRNEK : u ve v türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, f fonksiyonu

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

biçiminde parametrik olarak veriliyor.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

olacağını gösteriniz. (Burada $\dot{y}$, y nin t ye göre türevini, $\dot{x}$ da x in t ye göre türevini göstermektedir.)

Çözüm :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

olduğundan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^{\alpha} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun $\frac{d^2y}{dx^2}$ ikinci türevini hesaplayınız.

Çözüm : $\dot{x} = \frac{1}{t}$, $\ddot{x} = -\frac{1}{t^2}$, $\dot{y} = \alpha t^{\alpha-1}$, $\ddot{y} = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$

olduğundan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3} = \frac{\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\cdot t^{-1} - (-t^{-2})\cdot\alpha t^{\alpha-1}}{(t^{-1})^3}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\,t^{\alpha} + \alpha t^{\alpha} = \alpha^2 t^{\alpha}$$

bulunur.

PROBLEMLER 5.2

1. Aşağıdaki ifadelerin türevini bulunuz.

a. $y = \arctan\frac{1}{x}$

b. $y = \arccos\sqrt{x}$

c. $y = \operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

ç. $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

d. $y = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}x$

e. $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$

f. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$

g. $y = \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$

h. $y = \frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax-a^2} + a^2\arcsin\frac{x-a}{a}\right]$

ı. $y = \frac{2}{\sqrt{ac-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}$, $(ac > b)$

i. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\frac{a\sin x + b}{a + b\sin x}\right)$, $a^2 > b^2$

2. Aşağıdaki ifadelerin türevlerini bulunuz.

a. $y = e^{x^2-2x}$

b. $y = e^{(1/x)+x}$

c. $y = 2^{x^3}$

ç. $y = 3^{\sin x - \cos x}$

3. Aşağıdaki ifadelerin türevini bulunuz.

a. $y = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

b. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

c. $y = \ln(a + x + \sqrt{2ax+x^2})$

ç. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$

d. $y = \frac{m}{2}\ln(x^2-a^2) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$

e. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\tan\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}\right)$

f. $y = x\arctan\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$

4. Aşağıdaki parametrik denklemleri verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

ç. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

e. $\begin{cases} x = \cos^3 t(\cos t)^{-\frac{1}{2}} \\ y = \sin^3 t(\cos t)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

5. Aşağıdaki eşitliklerden y' türevini bulunuz.

a. $x^2 + y^2 = a^2$

b. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

c. $x^2 + xy + y^2 = 6$

ç. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

d. $x = y + \operatorname{arccot} y$

e. $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

6. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ eşitliğinden y' türevinin $x = 0$ için değerini bulunuz.

7. **a)** $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $(\operatorname{arc\,cot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

bağıntılarının doğruluğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının türevini bulunuz.

a. $f(x) = x^x$ **b.** $f(x) = (1+x^2)^x$

c. $f(x) = x^{(x^x)}$ **ç.** $f(x) = x^{\tan x}$

d. $f(x) = x^{(1/x)}$ **e.** $f(x) = x^{\sin x}$

9. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların n-ninci mertebeden türevini bulunuz.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b.** $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = \sin x$ **d.** $f(x) = \cos 2x$

e. $f(x) = \cos^2 x$

10. $f(x) = x^n$ olsun.

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

olduğunu gösteriniz.

11. Aşağıdaki eşitliklerden y'' türevini hesaplayınız.

a) $x^2 - y^2 = a^2$ **b)** $\arctan y = x + y$

c) $x^2 + xy + y^2 = a^2$

12. $f(x) = e^{-x^2}$

a) $f^{(n)}(0) = -2(n-1) f^{(n-2)}(0)$ **b)** $f^{(2m-1)}(0) = 0$

c) $f^{(2m)}(0) = (-2)^m (2m-1)(2m-3) \ldots 5.3.1$

olduğunu gösteriniz

13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! \ , & n \text{ çift ise} \\ 0 \ , & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

14. $f(x) = x(1+x)^{-1/2}$ olsun. $n \geq 2$ için

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^{n-1}} \cdot n$$

olduğunu gösteriniz.

15. $f(x) = x\, e^{x/a}$ fonksiyonu için

$$f^{(n)}(x) = \frac{x+na}{a^n} e^{x/a}$$

olacağını gösteriniz.

16. $f(x) = x^{n-1} \ln x$ fonksiyonu için

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$$

olacağını tümevarım yöntemiyle gösteriniz.

17. $f(x) = x^{n-1}\, e^{1/x}$ fonksiyonu için

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

olacağını gösteriniz.

18. f ve g, n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olduğunda $f \cdot g$ fonksiyonu da n-inci mertebeden türevlenebilir ve

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

dir, gösteriniz. **(Leibniz Formülü)**

19. $f(x) = x^3 \sin x$ olduğuna göre $f^{(30)}(x)$ türevini bulunuz.

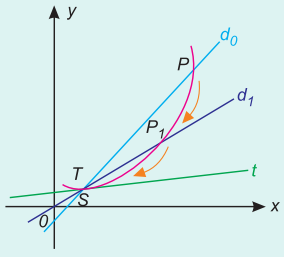
20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

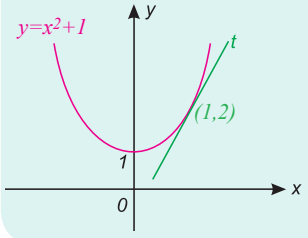
biçiminde parametrik olarak veriliyor.

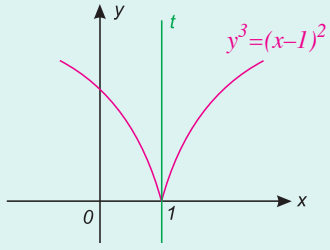
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevinin $t = \dfrac{\pi}{4}$ noktasındaki değerini bulunuz.

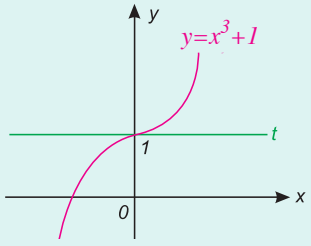
5.13 TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

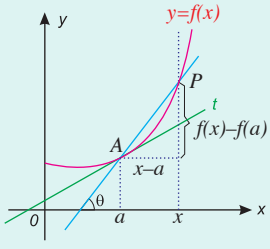


Bir eğri parçası üzerinde P ve S noktalarını gözönüne alalım. P ve S den geçen doğru d_0 olsun. P noktası eğri üzerinde S ye doğru hareket ettirildiğinde d_0 doğrusu P_1 ve S den geçen d_1 doğrusunun pozisyonuna gelir. İşleme bu şekilde devam edildiğinde P noktası S ile çakışırken d_0 ın aldığı t pozisyonuna, eğrinin S noktasındaki teğeti denir. Aşağıda bazı eğrilere çizilen teğetler verilmiştir.









f fonksiyonu a noktasında türevli ve $(a, f(a))$ noktasında çizilen teğet t olsun. AP kirişinin eğimi

$$m = \tan\theta = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

olur. P noktası eğri üzerinde A ya doğru hareket ettiğinde AP keseni t teğetine yaklaşır. x, a ile çakışırken AP keseni t teğeti ile çakışır. O halde teğetin m eğimi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

limitine eşittir. Halbuki bu limit $f'(a)$ dır. O halde

$$\boldsymbol{m = f'(a)}$$

olur. Buna göre $y = f(x)$ eğrisine üzerindeki $A(a, f(a))$ noktasından çizilen teğetin denklemi

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)\,(x - a)}$$

olacaktır. $m \neq 0$ olduğunda, eğriye A noktasından çizilen normalin denklemi

$$y - f(a) = -\frac{1}{m}(x - a)$$

olur, zira normalle teğet dik olduğundan

$$m \cdot m_n = -1$$

dir.

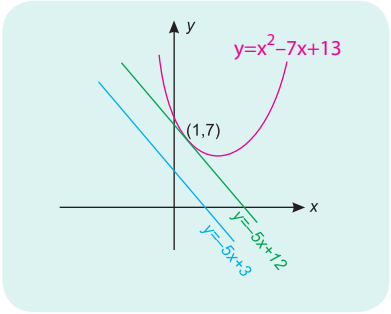
ÖRNEK : $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ eğrisine $A(1, -4)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm : $y' = f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 4 = 3$ olduğundan $m = 3$ tür. O halde teğetin denklemi,

$$y + 4 = 3\,(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 7$$

olur.

ÖRNEK : $y = x^2 - 7x + 13$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti, $5x + y - 3 = 0$ doğrusuna paraleldir? Bu teğetin denklemini bulunuz.



Çözüm : $5x + y - 13 = 0$ doğrusunun eğimi $m = -5$ dir. O halde teğetin eğimi -5 olmalı. Eğim o noktadaki türeve eşit olduğundan,

$$y' = 2x - 7 = -5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

olmalı. $x = 1$ ise $y = 1 - 7 + 13 = 7$ dir. O halde parabolün $(1, 7)$ noktasındaki teğeti $5x + y - 3 = 0$ doğrusuna paraleldir. Teğetin denklemi

$$y - 7 = -5(x - 1) \Rightarrow 5x + y - 12 = 0$$

olur.

5.14 TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Sabit bir hızla hareket eden bir cismin hızı, alınan yolun, bu yolu almak için harcanan zamana bölmekle hesaplanır. Eğer hız her an değişiyorsa yine bölüm oluşturulabilir. Bu bölüme hareket eden cismin ortalama hızı denir. Eğer bir zaman aralığında cismin hızına mümkün olduğu kadar yakın bir değer elde etmek istersek bu zaman aralığını çok küçük almak zorundayız. Hareket eden cismin aldığı s yolu t zamanının bir fonksiyonu olduğundan bunu $s(t)$ ile gösterelim. Bir t_0 zamanına kadar cismin aldığı yol $s(t_0)$ olur. t zamanına kadar alınan yol da $s(t)$ olduğundan cismin $\Delta t = t - t_0$ zaman aralığı içindeki ortalama hızı

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

olacaktır. Şu halde cismin t_0 anındaki hızını bulmak için yukarıdaki bölümün $t \to t_0$ için limitini almak gerekir. Yani bu cismin t_0 anındaki hızı

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

olacaktır. Benzer düşünce ile yukarıdaki hareketlinin ivmesinin

$$a = v'(t_0) = s''(t_0)$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $s(t) = 2t + 8t^2$ denklemi ile verilen bir hareketlinin 2. saniye sonundaki hızını bulunuz. Bu hareketlinin ivmesini hesaplayınız.

Çözüm : $v(t) = s'(t)$ olduğundan

$$v(t) = 2 + 16t \Rightarrow v(2) = 34$$

olur. Eğer alınan yol metre ile ölçülürse hızın birimi metre/saniye olacaktır.

$$a = s''(t) = (2 + 16t)' \Rightarrow a = 16$$

bulunur. Şu halde hareket sabit ivmeli bir harekettir.

PROBLEMLER 5.3

1. $y = x^3 - 6x + 2$ eğrisine teğet ve $y = 6x - 2$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

2. $y = \frac{x}{1+x^2}$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

3. $(0,3)$ ve $(5,-2)$ noktalarından geçen doğrunun $y = c(x + 1)^{-1}$ eğrisine teğet olması için c ne olmalıdır?

4. $y = \frac{ax}{a^2+x^2}$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri $y = \sqrt{2ax - x^2}$ eğrisinin $x = 0$ noktasındaki teğetine paralel olur.

5. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve $(4, 0)$ noktasından geçen doğruların denklemini yazınız.

6. $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçen ve $x^2 - 4y + 4 = 0$ parabolüne teğet olan doğruların birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

7. c herhangi bir sabit olmak üzere, $x = -c$ doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktadan $y^2 = 4cx$ parabolüne çizilen iki teğetin dik kesiştiklerini gösteriniz.

8. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6$ eğrisine $A(2, 2)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

9. $y = 2x$ doğrusunun $y = x^2 + ax + b$ parabolüne $A(2, 4)$ noktasında teğet olması için a ve b ne olmalıdır?

10. $y = -x$ doğrusunun $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz. Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?

11. $y = x^3$ eğrisinin $(0, 0)$ noktasındaki teğetini bulunuz. Teğet değme noktasında eğriyi keser mi?

12. m nin hangi değerleri için $y = mx$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberine teğettir?

13. $xy = 2$ *ile* $x^2 - y^2 = 3$ eğrilerinin kesim noktalarında bu eğrilere çizilen teğetlerin dik kesiştiklerini gösteriniz.

14. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisine, bu eğrinin $y = -x$ doğrusu ile kesim noktasından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

15. $y^2 = 4px$ parabolüne üzerindeki bir (x_1 , y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsine üzerindeki bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

17. $y = x^2 + 1$ ve $y = -x^2 - 1$ parabollerinin ortak teğetlerinin denklemini bulunuz.

18. $y = arcsin\frac{x-1}{2}$ eğrisine, bu eğrinin x – eksenini kesim noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini yazınız.

19.
$$\begin{cases} x = tcost \\ y = tsint \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen eğriye $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

20. Aşağıdaki eğri çiftlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.

a. $y^2 = 6x + 9$ *ile* $y^2 = 9 - 6x$

b. $x^2 - y^2 = 5$ ile $4x^2 + 9y^2 = 72$

21. $y = x(|x| + 2)$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

22. $y^2 = x^3$ eğrisine $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ apsisli noktalarından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

23. $x^m y^n = a^{m+n}$ eğrisinin (x_0 , y_0) noktasından eğriye çizilen teğetin denklemini yazınız.

24. Aşağıdaki eğrilere karşılarında yazılı noktalarındaki teğetlerinin denklemini yazınız.

a. $4x^2 + y^2 = 80$, $A(4, 4)$

b. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, $A(2, 2)$

c. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $A(1, 1)$

d. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $A(3, 1)$

e. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $A(1, 0)$

f. $x^2(x^2 - 4) = y^2(y^2 - 9)$, $A(0, 3)$

25. Bir hareketlinin t. saniyede aldığı yol

$s = 2t + 3t^2 + t^3$

metredir.

a) Bu hareketlinin 5. saniyedeki hızını

b) 3. saniyedeki ivmesini

hesaplayınız.

5.15 TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER

Fonksiyonun bir a noktasındaki türevinin bilinmesi bu nokta komşuluğunda fonksiyonun durumunun aydınlanmasını sağlar. Aşağıda bununla ilgili teoremler göreceğiz.

TEOREM 5.5

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $c \in (a, b)$ noktasında türevli ve $f'(c) \neq 0$ olsun. (a, b) aralığının öyle bir $(c - \delta, c + \delta)$ alt aralığı vardır ki bu aralıktaki her x için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ile $f'(c)$ aynı işarettedir.

İspat : f, c noktasında türevli olduğundan

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

olacaktır. Buna göre herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğine buna bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir, öyle ki $c - \delta < x < c + \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm x ler için

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

olur. Eğer özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{2}|f'(c)|$ alınırsa, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki

$c - \delta < x < c + \delta$ olduğunda

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \frac{1}{2}|f'(c)| \qquad (5.3)$$

kalır.

Eğer $f'(c) > 0$ ise (5.3) eşitsizliği

$$\frac{1}{2}f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{3}{2}f'(c)$$

şeklini alır ki bu $(f(x) - f(c)) / (x - c) > 0$ olmasını gerektirir.

Eğer $f'(c) < 0$ ise (5.3) eşitsizliği

$$\frac{3}{2}f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{1}{2}f'(c)$$

hâlini alır. Bu da $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$ olmasını gerektirir.

SONUÇ

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f'(c)>0$ ise c nin öylebir δ–komşuluğu vardır ki bu komşulukta f artandır. Eğer $f'(c)<0$ ise bu komşulukta f azalandır.

İspat : $f'(c)>0$ olsun. Teorem 5.4 ten c nin öyle bir δ – komşuluğu $[(c-\delta, c+\delta)$ aralığı] vardır ki bu aralıktaki tüm x elemanları için

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$$

dır. O halde $x>c$ ise $f(x)>f(c)$ ve $x<c$ ise $f(x)<f(c)$ dir. Bu f nin $(c-\delta, c+\delta)$ aralığında artan olduğunu gösterir.

$f'(c)<0$ olduğunda ispat benzer şekilde yapılır. □

Yukarıdaki sonuçtan şu şekilde yararlanmak mümkündür :

Herhangi bir f fonksiyonu verildiğinde bunun türevi alınıp işareti incelenir. Türevin pozitif olduğu aralıkta fonksiyon artan, negatif olduğu aralıkta azalandır.



Pierre de Fermat
1601 – 1665

Fransız hukukçu ve matematikçidir. Matematik Analiz ve Sayılar Teorisinde çok önemli çalışmaları bulunmaktadır.

Fermat Teoremi **TEOREM 5.6**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c\in(a,b)$ noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa

$$\boldsymbol{f'(c)=0}$$

olur.

İspat : f fonksiyonu c noktasında bir yerel maksimuma sahip olsun. Bu taktirde öyle bir $\delta\in\mathbb{R}^+$ vardır ki $|x-c|<\delta$ şartını sağlayan her x için $f(x)\le f(c)$ dir. $|h|<\delta$ olacak şekilde seçilen her h için $c+h$ da bu komşuluğa dahil olduğundan h ister negatif ister pozitif olsun

$$f(c+h)\le f(c)\Rightarrow f(c+h)-f(c)\le 0$$

ve dolayısıyla

$$\text{h}>0 \text{ için } \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0 \qquad (5.4)$$

$$\text{h}<0 \text{ için } \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0 \qquad (5.5)$$

dır. Hipotez dolayısıyla f, c noktasında türevlenebilir olduğundan h ister

pozitif değerlerden, ister negatif değerlerden sıfıra yaklaşsın

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$$

olur. (5.4) ve (5.5) ten $f'(c) \leq 0$ ve $f'(c) \geq 0$ dır. Bu ikisinin de gerçekleşmesi için $f'(c) = 0$ olmalıdır.

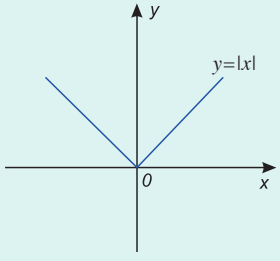
UYARI

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış reel değerli bir f fonksiyonunun $c \in (a, b)$ noktasında türevinin mevcut ve $f'(c) = 0$ olması fonksiyonunun c noktasında bir yerel maksimum veya bir yerel minimuma sahip olmasını gerektirmez. Yani Fermat teoreminin karşıtı doğru değildir.

Gerçekten, $f(x) = x^3$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun türev fonksiyonu

$$f'(x) = 3x^2$$

olup, $f'(0) = 0$ dır. Halbuki $\forall x > 0$ için $f(x) > f(0) = 0$ ve $\forall x < 0$ için $f(x) < f(0) = 0$ dır. Böylece $c = 0$ noktası $f(x) = x^3$ fonksiyonu için ne bir yerel maksimum ne de bir yerel minimum noktasıdır.



Bir fonksiyonun herhangi bir noktada yerel maksimum veya yerel minimuma sahip olması o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

fonksiyonu sıfır noktasında bir yerel minimuma sahiptir fakat fonksiyon bu noktada türevli değildir.

TANIM

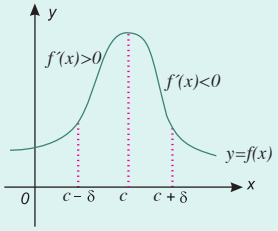
Bir $A \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde

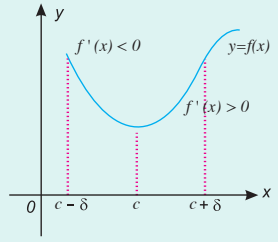
$$f'(c) = 0$$

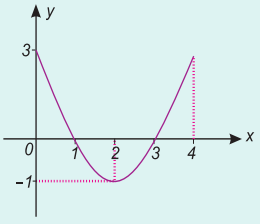
şartını sağlayan c noktalarına f fonksiyonunun **Duraklama noktaları** veya **Kritik noktaları** denir.*

Bu tanıma göre bir sürekli $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevli ise bu fonksiyon ekstrem değerlerini ya

*Bazı kaynaklar fonksiyonun türevsiz olduğu noktaları da kritik noktalara katarlar.







1) a ve b uç noktalarında

2) ya tekil noktalarda

ya da

3) duraklama noktalarında

alırlar.

Bilindiği gibi $f'(c) = 0$ olması, fonksiyonun c noktasında bir ekstremuma sahip olmasını gerektirmez. Yani duraklama noktasının ekstremum noktası olması gerekmez. Eğer, c herhangi bir duraklama noktası olmak üzere, bir $(c-\delta, c)$ aralığında $f'(x) > 0$ (yani f artan), $(c, c+\delta)$ aralığında $f'(x) < 0$ (yani f azalan) ise c noktası fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır. Benzer şekilde, eğer bir $(c-\delta, c)$ aralığında $f'(x) < 0$ ve $(c, c+\delta)$ aralığında $f'(x) > 0$ ise c noktası bir yerel minimum noktasıdır.

ÖRNEK :

$f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 2x - 4$ olduğundan $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ dir. O halde fonksiyonun duraklama noktası $x = 2$ noktasıdır. Şimdi $f'(x)$ ifadesinin işaretini inceliyelim.

x	0		2		4
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	3	azalan ↘	−1	artan ↗	3

Şu hâlde fonksiyonun $x = 2$ noktasında bir yerel minimumu $x = 0$ ve $x = 4$ te mutlak ve yerel maksimumu vardır.

İkinci türevin işareti ile ekstremumların varlığı ve cinsleri arasında sıkı bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi şu teoremle verebiliriz.

TEOREM 5.7

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası ve $f''(c)$ mevcut ve sıfırdan farklı olsun.

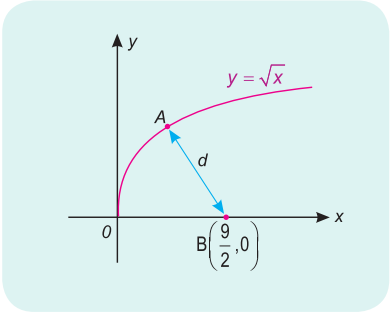
(1) Eğer $f''(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum

(2) Eğer $f''(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum

vardır.

İspat : 1) $f'(x) = g(x)$ diyelim. Buna göre $g'(c) > 0$ dır. Sayfa 162

deki sonuçtan c nin öyle bir δ – komşuluğu vardır ki bu aralıkta g artandır. Bu durumda $(c-\delta, c)$ aralığında
$g(x) < g(c) = 0$ ve $(c, c+\delta)$ aralığında $0 = g(c) < g(x)$ dir. O halde $(c-\delta, c)$ aralığında $f'(x) < 0$ ve $(c, c+\delta)$ aralığında $f'(x) > 0$ dır. Demek ki f fonksiyonu c noktasında bir yerel minimuma sahiptir. (2) nin ispatı (1) in ispatına benzer olarak yapılır.



ÖRNEK : $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

Çözüm : Eğri üzerinde aranan nokta $A(x, y) = A(x, \sqrt{x})$ olsun. Bu noktanın $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ noktasına olan uzaklığı

$$d = \sqrt{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x}$$

olur. d yi minimum yapan değer

$$f(x) = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x$$

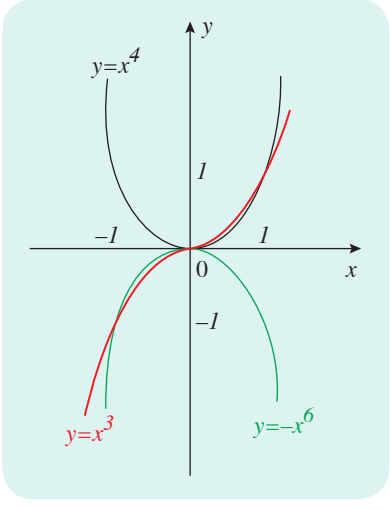
ifadesini minimum yapan değerdir. $f'(x) = 2x - 8$ ve $f''(x) = 2$ olduğundan

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

bulunur.

$$f''(4) = 2 > 0$$

olduğundan $x = 4$ noktasında yerel minimum mevcuttur. Eğri üzerinde $x = 4$ olduğun da $y = 2$ olur. Şu halde aranan nokta A(4, 2) noktasıdır. ❐



İkinci türevin de sıfır olduğu noktalarda çeşitli durumlar ortaya çıkabilir.

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = -x^6$$

şeklinde tanımlanan f, g ve h fonksiyonlarının duraklama noktası $x = 0$ noktasıdır. Her üç fonksiyonun da ikinci türevleri bu noktada sıfırdır. Bu fonksiyonların grafiklerinden de görüleceği gibi, f fonksiyonunun sıfır noktasında ekstremumu yoktur. g fonksiyonu sıfırda bir yerel minimuma, h da bir yerel maksimuma sahiptir.

Yerel maksimum ve minimumla ilgili yeter şartları veren bir teoremi ifade edeceğiz. Bu teoremin ispatı ileride göreceğimiz Taylor Formülüne dayandığından daha sonra verilecektir.

TEOREM 5.8

f fonksiyonunun (a, b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve (a, b) aralığının bir c noktasında

$f'(c) = f''(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$ ve $f^{(n)}(c) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f^{(n)}$ fonksiyonu c de sürekli bulunsun.

(1) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum vardır.

(2) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum vardır.

(3) Eğer n tek ise c de ne yerel minimum ne de yerel maksimum vardır.

ÖRNEK : $f(x) = (x - 2)^3 + 8$ eşitliği ile verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ekstremum yerlerini ve cinslerini belirtiniz.

Çözüm : $f'(x) = 3(x-2)^2$, $f''(x) = 6(x-2)$, $f'''(x) = 6$ olduğundan $f'(2) = f''(2) = 0$ ve $f'''(2) > 0$ olduğundan teoremde sözü edilen n sayısı 3 tür. 3 tek olduğundan fonksiyonun ne yerel minimumu ne de yerel maksimumu vardır.



Michel Rolle

1652 – 1919

Fransız matematikçi. En önemli çalışması kendi adıyla anılan kuramıdır.

Rolle Teoremi **TEOREM 5.9**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise, (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat : f nin $[a, b]$ de aldığı en büyük değer M, en küçük değer m olsun. Eğer $M = m$ ise fonksiyon sabit fonksiyon olur ki bu taktirde $f'(x) = 0$ olacağından teorem açıktır.

Şimdi $M \neq m$ olsun. Yani $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan fonksiyon hem M, hem de m değerlerini aralığın bitim noktalarında alamaz. Kabul edelim ki f fonksiyonu M değerini bir $c \in (a, b)$ noktasında alsın. Fermat teoreminden dolayı $f'(c) = 0$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

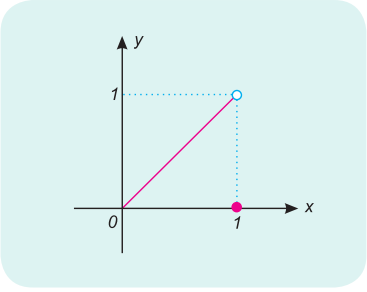
ÖRNEK : $f : [-2, 2] \to R$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$ fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse teoremde adı geçen c noktalarını bulunuz.

Çözüm : $f(-2) = f(2) = 9$ ve f bir polinom olduğundan $(-2, 2)$ aralığında türevli ve $[-2, 2]$ aralığında süreklidir. Dolayısıyla Rolle teoremi uygulanabilir.

$f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ olduğundan $(-2, 2)$ aralığındaki c noktaları $-1, 0, 1$ dir.

UYARI

Rolle teoremindeki f nin $[a, b]$ de sürekli olma şartı kaldırılamaz.

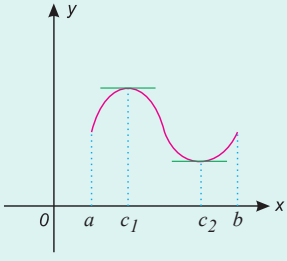


Örneğin

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, 1)$ aralığı üzerinde sürekli ve $(0, 1)$ üzerinde türevlidir. Ayrıca $f(0) = f(1) = 0$ dır. Fakat $\forall x \in (0, 1)$ için $f'(x) = 1 \neq 0$ dır.

Özel olarak $f(a) = f(b) = 0$ alınırsa Rolle Teoreminin şu cebirsel yorumu elde edilir.



Rolle Teoreminin Cebirsel Yorumu

Kapalı bir aralıkta sürekli ve iç kısmında türevlenebilen bir fonksiyonun iki sıfır yeri arasında türevinin sıfır olduğu en az bir yer vardır.

ÖRNEK : $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ise $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri için birer sınır bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 0$ denkleminin üç reel kökü vardır ve bu kökler $0 < x_1 < 1, \quad 1 < x_2 < 2, \quad 2 < x_2 < 3$ bağıntısını sağlarlar. (Neden ?)

ÖRNEK : $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu her yerde sürekli ve türevlidir.

$f(-2) = -8 + 4 - 2 + 1 = -5 < 0$ ve $f(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15 > 0$ olduğundan, ara değer teoremi gereğince $(-2, 2)$ aralığında $f(c) = 0$ olacak biçimde en az bir c noktası vardır. Şu hâlde verilen denklemin $(-2, 2)$ aralığında en az bir kökü vardır. Şimdi reel kök sayısının birden fazla olamayacağını gösterelim. Eğer $f(x) = 0$ denkleminin a ve b gibi farklı iki kökü olsaydı türevinin de (a, b) aralığında bir kökü olurdu. Halbuki

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 2 = 0$$

denkleminin reel kökü yoktur. O halde verilen denklemin a ve b gibi farklı ve reel kökü yoktur. □

Rolle Teoremi, Geometrik Yorumu

Rolle Teoreminin hipotezleri gerçeklendiğinde, fonksiyonun en az bir noktasındaki teğeti x eksenine paraleldir.

TEOREM 5.10 Diferensiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi

$f: f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde, (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

İspat : k bir sabit olmak üzere,

$$G : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad G(x) = f(x) + kx$$

fonksiyonunu oluşturalım. Bu fonksiyon da $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilirdir. Şimdi k sabitini $G(a) = G(b)$ olacak şekilde seçelim.

$$f(a) + ka = f(b) + kb \quad \text{eşitliğinden} \quad k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bulunur. Şu halde

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

fonksiyonu Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Bu sebepten (a, b) aralığında öyle bir x_0 noktası vardır ki $G'(x_0) = 0$ dır. Buradan

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bulunur. Bu $f'(x_0)$ değerine, fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri denir.

a ile b arasındaki bir sayı, $0 < \theta < 1$ olmak üzere, $a + \theta(b - a)$ şeklinde yazılabileceğinden, Ortalama değer teoreminin hipotezleri altında $0 < \theta < 1$ şartını sağlayan en az bir θ vardır ki bu θ sayısı için

$$f'(a+\theta(b-a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olur.

ÖRNEK : $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.

Çözüm : $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$

olur. $f'(x_0) = 2x$ olduğundan ortalama değer teoremini sağlayan x_0 noktası

$$2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2$$

olur.

ÖRNEK : Her $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq 1 + x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $x > 0$ olsun. $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\frac{e^x - e^0}{x-0} = e^{x_0} \quad (0 < x_0 < x)$$

ve buradan da

$$\frac{e^x - 1}{x} > e^0 = 1 \Rightarrow e^x > x + 1$$

bulunur.

$x = 0$ ise eşitlik durumu vardır. $x < 0$ ise $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[x, 0]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulandığında

$$\frac{f(0)-f(x)}{0-x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{1-e^x}{-x} = e^{x_0} < e^0 = 1$$

olur. $-x > 0$ olduğundan

$$1 - e^x < -x \Rightarrow e^x > 1 + x$$

bulunur.

ÖRNEK : α bir pozitif sayı ve $p \geq -1$ olsun. Eğer

1) $0 < \alpha \leq 1$ ise $(1+p)^\alpha \leq 1 + p\alpha$
2) $\alpha \geq 1$ ise $(1+p)^\alpha \geq 1 + p\alpha$.

olur.

İspat :1) $0 < \alpha \leq 1$ ve $f(x) = x^\alpha$ olsun.

i) $p = 0$ *için* $(1+p)^\alpha \leq 1 + p\alpha$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

ii) $p > 0$ *olsun.* f fonksiyonuna $[1, 1+p]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa, $(1, 1+p)$ aralığında

$$f(1+p)-f(1)=\alpha\cdot c^{\alpha-1}p$$

olacak şekilde bir c sayısının varlığı söylenebilir.

$\alpha-1\le 0$ ve $c>1$ olduğundan $c^{\alpha-1}\le 1$, dolayısıyla $p\,\alpha\,c^{\alpha-1}\le p\,\alpha$ dır. Buradan

$$f(1+p)-f(1)\le p\,\alpha \Rightarrow (1+p)^{\alpha}-1\le p\,\alpha$$

bulunur.

ii) $-1\le p<0$ olsun. Ortalama değer teoreminden $(1+p,\ 1)$ aralığında

$$f(1)-f(1+p)=(-p)\,\alpha c^{\alpha-1} \Rightarrow f(1+p)-f(1)=p\,\alpha c^{\alpha-1}$$

olacak biçimde bir c sayısı vardır. $c<1$ olduğundan $c^{\alpha-1}\ge 1$ dir. Dolayısıyla $pc^{\alpha-1}\le p$ dir. Bu durumda

$$f(1+p)-f(1)\le \alpha\,p \Rightarrow (1+p)^{\alpha}-1\le \alpha\,p$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

2) $a\ge 1$ için ispat benzer şekilde yapılır.

Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi **TEOREM 5.11**

f ve g fonksiyonları $[a,\ b]$ aralığında sürekli ve bunun iç kısmında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca

$\forall x\in(a,\ b)$ için $g'(x)\neq 0$ olsun. Bu taktirde, $(a,\ b)$ aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

İspat : Ortalama değer teoreminden dolayı

$$g(b)-g(a)=g'(a+\theta\,(b-a))\,(b-a)\,,\quad (0<\theta<1)$$

dır ve $g'(a+\theta\,(b-a))\neq 0$ olduğundan $g(b)-g(a)\neq 0$ dır. Şimdi k bir sabit olmak üzere

$$T(x)=f(x)+k\,g(x)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $T(a)=T(b)$ olacak şekilde k yı tespit edelim.

$$T(a)=T(b)\Leftrightarrow f(a)+k\,g(a)=f(b)+k\,g(b) \Rightarrow\ k=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olur. Şu halde

$$T(x)=f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ g(x)$$

yazılabilir. Bu fonksiyon $[a,\ b]$ aralığında sürekli ve bu aralığın iç kısmında

türevlenebilir olduğundan Rolle teoreminin şartlarını sağlar. Bu sebepten (a, b) aralığında en az bir x_0 noktası vardır ki $T'(x_0) = 0$ dır. Yani

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x_0) = 0$$

dır. Buradan da

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

bulunur. O halde (0, 1) aralığındaki en az bir θ için

$$\frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonlarına [1, 2] aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoremini uygulayarak, teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm :

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \frac{2x_0}{3x_0^2} = \frac{2^2+2-(1^2+2)}{(2^3-1)-(1^3-1)} \Rightarrow \frac{2x_0}{3x_0^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow x_0 = \frac{14}{9}$$

olur. ❐

Bilindiği gibi, türevlenebilen bir fonksiyonun türevi olan fonksiyon sürekli olmayabilir. Aşağıdaki teorem, türev fonksiyonunun sürekli fonksiyonlara ait bir özelliği sağladığını göstermektedir.



Jean Gaston Darboux
1842 – 1917
Fransız matematikçi. Matematik Analizde önemli çalışmaları vardır.

Darboux Teoremi **TEOREM 5.12**

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevli bir fonksiyon ve $f'(a) \neq f'(b)$ olsun. y_0, $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasında bir reel sayı ise (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = y_0$$

olacak biçimde bir x_0 sayısı vardır.

İspat : $f'(a) < y_0 < f'(b)$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $F(x) = f(x) - y_0 x$ olsun. F, $[a, b]$ üzerinde türevlidir. Dolayısıyla süreklidir. O hâlde $[a, b]$ üzerinde en

küçük değerini alır. F, bu en küçük değeri x_0 noktasında almış olsun. Şu hâlde F nin [a, b] üzerinde aldığı en küçük değer F(x_0) dır.

$F'(a) = f'(a) - y_0 < 0$ olduğundan yeter derece küçük $h > 0$ sayıları için

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} < 0 \Rightarrow F(a+h) - F(a) < 0 \Rightarrow F(a+h) < F(a)$$

olur ki bu F nin en küçük değerini a noktasında almadığını, yani $x_0 \neq a$ olduğunu gösterir. Benzer biçimde $x_0 \neq b$ olduğu gösterilebilir. O halde $x_0 \in (a, b)$ dir. F fonksiyonu, (a, b) aralığındaki bir x_0 noktasında yerel minimuma sahip olduğundan

$$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = y_0$$

bulunur.

ÖRNEK : $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \ x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor. $y_0 = 1$ için Darboux teoreminde sözü edilen x_0 noktasını bulunuz.

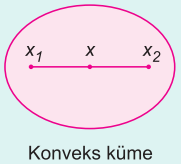
Çözüm :

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

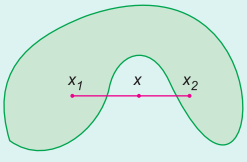
olup f' fonksiyonu x = 0 da sürekli değildir.

$f'(0) = 0$ ve $f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi$ dir. $y_0 = 1 \in (0, \pi)$ sayısına karşılık gelen x_0 noktası $\frac{2}{\pi}$ dir, zira $f'\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1$ dir.

5.16 KONVEKS FONKSİYONLAR



Konveks küme



Konveks olmayan küme

TANIM

$K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K ya bir **konveks küme** adı verilir.

Yandaki şekilde konveks ve konveks olmayan kümeler görülmektedir.

x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

$$[x_1, x_2] = \{x : \ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 , \ \ \lambda \in [0, 1]\}$$

şeklinde gösterilebileceğinden K kümesinin konveksliği şu şekilde de tanımlanabilir.

TANIM

$K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun.

K konvekstir $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in K$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in K$

Bu tanıma göre, aralıklar ve çemberlerin iç bölgeleri birer konveks kümedir.

TANIM

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (5.6)$$

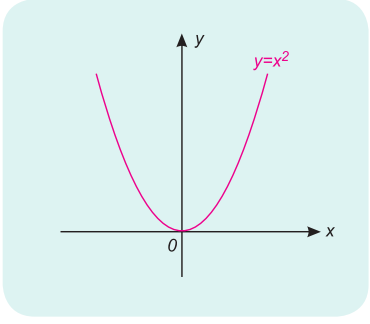
oluyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde **konvekstir** denir.

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (5.7)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ de **konkavdır** denir.

ÖRNEK :



$f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$$

$$= (\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2]^2 - (\lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2)$$

$$= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda\,(1-\lambda)\, x_1 x_2 + (1-\lambda)^2\, x_2^2 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda) x_2^2$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\,(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = (\lambda^2 - \lambda)\,(x_1 - x_2)^2$$

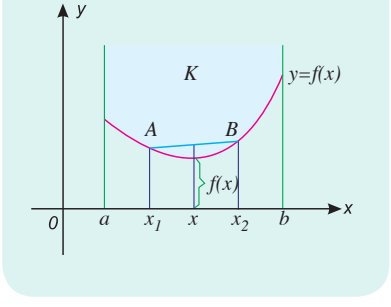
olur. $0 \le \lambda \le 1$ için $\lambda^2 \le \lambda$ ve dolayısıyla $\lambda^2 - \lambda \le 0$ olacağından

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \le 0$$

olur. Şu halde

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

dir. Bu da f fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir. ❐



Şimdi konveksliğe geometrik olarak bir anlam vermeye çalışalım. $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde bu eğrinin üst tarafında kalan bölgeyi, yani

$$K = \{(x, y) : \quad x \in [a, b] \quad \text{ve} \quad y \ge f(x)\}$$

kümesini gözönüne alalım. $[a, b]$ aralığında herhangi iki nokta x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ olsun. Eğri üzerinde $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren [AB] doğ-

ru parçası üzerinde bulunan noktalar, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

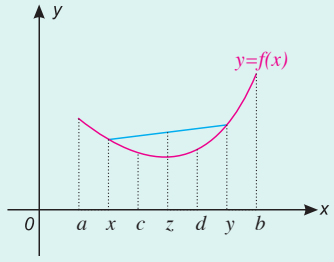
$$P(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2),\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$$

tipindeki noktalardır. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de konveks ise

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanacağından P noktalarının tümü K bölgesindedir. Başka bir deyişle, [AB] doğru parçasının bütün noktaları K bölgesindedir. Yani K bölgesi konveks bir kümedir.

Şimdi bir fonksiyonun ikinci türevi ile konveksliği arasındaki ilişkiyi veren bir teoremi ifade ve ispat edelim.



TEOREM 5.3

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci türevi var olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için $f''(x) \ge 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ de konvekstir.

İspat : $a \le x < y \le b$ olacak şekilde $x, y \in [a, b]$ seçelim. $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere,

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \tag{5.8}$$

denirse $x \le z \le y$ dir. (5.8) in her iki yanına $-\lambda z$ eklenirse

$$z - \lambda z = \lambda x + (1-\lambda) y - \lambda z$$

elde edilir. Basit bir işlemle

$$(1-\lambda)(y-z) = \lambda (z-x) \tag{5.9}$$

yazılabilir. Ortalama değer teoreminden

$$f(z) - f(x) = f'(c)(z-x) \tag{5.10}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (x, z)$ ve

$$f(y) - f(z) = f'(d)(y-z) \tag{5.11}$$

olacak şekilde en az bir $d \in (z, y)$ vardır. Diğer taraftan $f''(x) \ge 0$ olduğundan f' artandır ve dolayısıyla $f'(c) \le f'(d)$ dir. (5.9), (5.10) ve (5.11) den

$$\begin{aligned}\lambda(f(z) - f(x)) &= f'(c) \cdot \lambda (z-x) \le f'(d)\, \lambda (z-x) \\ &= f'(d)(1-\lambda)(y-z) = (1-\lambda)(f(y) - f(z))\end{aligned}$$

bulunur. Şu halde $\lambda (f(z) - f(x)) \le (1-\lambda)(f(y) - f(z))$ dir.

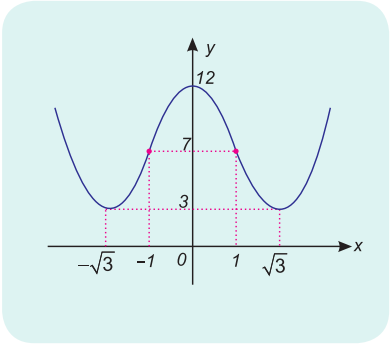
Buradan

$$f(z) \le f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

olur. z nin değeri yerine konursa

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

bulunur ki bu f nin konveks olduğunu gösterir.



Yukarıdaki teoreme paralel olarak, [a, b] deki her x için $f''(x) \le 0$ olduğunda f fonksiyonunun [a, b] de konkav olduğunu gösterilebilir.

ÖRNEK : $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12$ eşitliği ile verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12$ olduğundan $12x^2 - 12$ ifadesinin işareti incelenmelidir.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$	+		0	–	0	+	
$f(x)$	konveks		konkav		konveks		

Bu tabloya göre $(-\infty, -1]$ ve $[1, +\infty)$ aralıklarında fonksiyon konveks, $[-1, 1]$ aralığında konkavdır. Verilen fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir.

TANIM

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya **büküm (dönüm) noktası** adı verilir.

Yukarıdaki incelemeler gözönüne alındığında dönüm noktası için şu önermeler ifade edilebilir:

1) a noktası f için bir dönüm noktası ise *ya* $f''(a) = 0$ ya da $f''(a)$ mevcut değildir.

2) f'' fonksiyonu a noktasında işaret değiştiriyorsa, a noktası f nin bir dönüm noktasıdır.

Yukarıdaki örnekte $x = -1$ ve $x = 1$ noktaları f fonksiyonunun birer dönüm noktasıdır.

PROBLEMLER 5.4

1. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 1$ olsun. f nin artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz. f nin yerel ve mutlak ekstremumlarını belirtiniz.

2. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklardaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-3, 10]$

b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-2, 10]$

c. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$

d. $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$

e. $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$, $[-1, 3]$

f. $f(x) = e^x \sin x$, $[0, 2\pi]$

g. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $[-1, 1]$

h. $f(x) = x^4 + 1$, $[-1, 3]$

3. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların

a. Kritik noktalarını bulunuz.

b. f' türev fonksiyonunun işaretini inceleyerek artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

c. Yerel minimum ve yerel maksimum noktalarını bulunuz.

a. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

b. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

c. $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$

d. $f(x) = xe^{-x}$

4. $y = x^3 (x - 1)^2$ eğrisinin

a. kritik noktalarını

b. yerel ekstremum noktalarını

c. dönüm noktalarını

bulunuz.

5. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$ fonksiyonu veriliyor. k ne olmalıdır ki f fonksiyonu

a. $x = 2$ de yerel minimuma,

b. $x = -3$ de yerel minimuma

c. $x = 1$ de büküm noktasına

sahip olsun. Bu fonksiyon bir yerel maksimuma sahip olabilir mi?

6. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün $(0, 1)$ noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

7. A$(0, 5)$ noktasının $4y = x^2$ parabolüne olan uzaklığını bulunuz.

8. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin hangi noktası $(3, 4)$ noktasına en yakındır?

9. $f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x}{4}$ eşitliği ile verilen f fonksiyonunun ekstrem değerini bulunuz.

10. a yarıçaplı bir çember içine çizilebilen dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

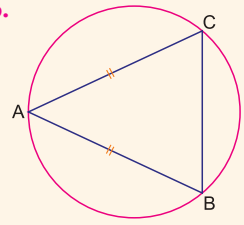
11. Köşeleri, orijin, x – ekseni, y – ekseni ve $y = 4 - x^2$ parabolü üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

12. İki köşesi x – ekseni, iki köşesi de $y = 16 - 3x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanın alanını bulunuz.

13. Toplamları 1000 ve kareleri toplamı mümkün olduğu kadar küçük olan iki sayı bulunuz.

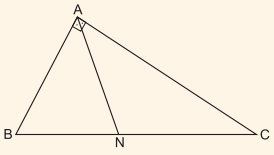
14. Yarıçapı a olan bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel silindirin hacmi en fazla ne olabilir?

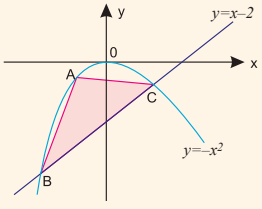
15. a yarıçaplı bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel dik koniler içinde hacmi en fazla olanın hacmini hesaplayınız.

16. 

Yandaki şekilde çemberin yarıçapı r; $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{A}) < \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\triangle ABC$ üçgeninin çevresi en fazla kaç birim olabilir?

17. $\triangle ABC$, A açısı dik olan bir üçgendir. $|AB| \cdot |AC| = 1\ br^2$ olduğuna göre $|AN|$ açıortayının uzunluğu, en fazla kaç birim olabilir?



18. 

$y = x - 2$ doğrusu $y = -x^2$ parabolünü B ve C noktalarında kesiyor. A, $\overset{\frown}{BOC}$ yayı üzerinde herhangi bir nokta olduğuna göre, $\triangle ABC$ üçgeninin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?

19. L uzunluğunda bir tel iki parçaya bölünerek bir çember ile bir kare yapılmak istenmektedir. Kare ile dairenin alanları toplamının en büyük olabilmesi için çemberin yarıçapı ne olmalıdır? Karenin kenar uzunluğu ile toplam alanı hesaplayınız.

20. Bir hareketlinin hızı, zamana bağlı olarak, $v = t(t + 2)$ şeklinde değişmektedir. Bu hareketlinin minimum hızını bulunuz.

21. Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin ivmesi zamana bağlı olarak
$a = sin\,(t^2) \cdot (t > 0)$
biçiminde verilmektedir. Bu hareketlinin ivmesi ne zaman maksimum olur?

22. Aşağıdaki eşitsizliklerin karşılarında yazılı x değerleri için doğruluğunu gösteriniz.

a. $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $(x > 0)$

b. $tanx > x$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

c. $\frac{x}{1+x^2} < arctanx < x$, $(x > 0)$

ç. $|sinx - sint| \leq |x - t|$, $x, t \in \mathbb{R}$

d. $|arctanx - arctany| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$

e. $\frac{x-a}{x} < ln\frac{x}{a} < \frac{x-a}{a}$, $(0 < a < x)$

f. $\frac{x}{1+x} < ln\,(1 + x) < x$, $(x > 0)$

23. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[0, 1]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse teoreme uyan c sayısını bulunuz.

24. $e^x = 1 + x$ denkleminin $x = 0$ dan başka kökünün olmadığını gösteriniz.

25. Rolle teoreminden yaralanarak

$5x^4 - 4x + 1 = 0$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

26. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

27. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan eğrilerin konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz. Bu eğrilerin büküm (dönüm) noktalarını bulunuz.

a. $y = 2x^2 + 1$

b. $y = -2x^3 + 3x^2 - 12x$

c. $y = \frac{1}{x}$

d. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

e. $y = e^{-x^2}$

28. Ortalama değer teoreminden yaralanarak

$$\sin(x + h) - \sin x = h \cdot \cos x_0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (x, x + h)$ sayısının varlığını gösteriniz.

29. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa bu teoremde adı geçen x_0 sayısını bulunuz.

30. Ortalama değer teoreminden faydalanarak Rolle Teoremini ispat ediniz.

31. İspat ediniz ki, eğer $[a, b]$ aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

32. f ve g, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) de türevli olsun. Ayrıca $f(a) = g(a)$ ve $a < x < b$ için $f'(x) < g'(x)$ olsun. $f(a) < f(b)$ olacağını gösteriniz.

33. Sıfır yerleri reel olan bir polinomun türevinin kompleks sıfır yerlerinin olamacağını gösteriniz.

34. $f(x) = x^{51} + x^{21} + x + 1$ fonksiyonunun bir yerel ekstremum değerine sahip olamayacağını gösteriniz.

35. $f(x) = |x - 1|$ olsun.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$$

olacak şekilde bir c noktası var mıdır? Bu sonuç ortalama değer teoremiyle çelişir mi?

36. Üçüncü dereceden bir polinom denkleminin en fazla 3 reel köke sahip olacağını gösteriniz.

37. $3x + \cos x = 1$ denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

38. Ortalama değer teoreminden yararlanarak

$$|\sin A - \sin B| \leq |A - B|,$$

$$|\cos A - \cos B| \leq |A - B|$$

eşitsizliklerinin varlığını gösteriniz.

39. $1 < f'(x) < 3$ olduğunda $2 < f(3) - f(1) < 6$ olacağını gösteriniz.

5.17 BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir F fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti hesaplanırken belirsiz ifadeler denilen,

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},0^{0},\ \infty^{0}$$

ifadelerden biri karşımıza çıkabilir. Bu belirsiz şekiller türev yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

1) $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali

TEOREM 5.12

(l' Hospital kuralı) f ve g, $A \subset \mathbb{R}$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar a, A nın bir yığılma noktası ve D de a nın, bir delinmiş komşuluğu olsun. f ve g fonksiyonları A ile D nin her ortak x noktasında türevli,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad ve \quad \lim_{x\to a} g'(x) \neq 0$$

ise

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

İspat : f ve g fonksiyonları a noktasında tanımlı ise,

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

olur (Neden ?).

f ve g fonksiyonları, $x = a$ noktasında tanımlı değilse bu fonksiyonları $f(a) = g(a) = 0$ olarak tanımlayalım. O hâlde

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

yazılabilir. Öte yandan, ortalama değer teoremine göre, (a, x) aralığında

$$f(x) - f(a) = (x-a)\cdot f'(x_1)$$
$$g(x) - g(a) = (x-a)\cdot g'(x_2)$$

olacak şekilde x_1 ve x_2 noktaları vardır. $a < x_1 < x$ ve $a < x_2 < x$ olduğundan $x \to a$ için $x_1 \to a$ ve $x_2 \to a$ dır. O halde

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(x_1)}{(x-a)g'(x_2)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

Eğer $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ şeklinde ise L'Hospital kuralı bir defa daha uygulanır. $\frac{0}{0}$ belirsizlik halinden kurtuluncaya kadar işleme devam edilir.

Bu teoremin tek taraflı limitler, yani sağ ve sol limitler için de doğru olacağı açıktır.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen ifade $x\to 0$ için $\frac{0}{0}$ şeklindedir. O halde

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

olur.

L'Hospital kuralı çeşitli şekillerde genişletilebilir. x sınırsız olarak büyütüldüğünde, yani $+\infty$ 'a yaklaştırıldığında $\frac{f(x)}{g(x)}$ oranının $\frac{0}{0}$ belirsizlik şeklini aldığını kabul edelim. $t\neq 0$ olmak üzere $x=\frac{1}{t}$ yazılırsa $x\to+\infty$ için $t\to 0^+$ olacaktır. Bu durumda herhangi bir F fonksiyonu için $\lim_{x\to\infty}F(x)=L$ ise $\lim_{t\to 0^+}F\left(\frac{1}{t}\right)=L$ olacaktır. Buna göre şu sonucu ifade edebiliriz :

SONUÇ

f ve g fonksiyonları sabit bir M reel sayısından büyük her x noktasında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

ver her $x>M$ için $g'(x)\neq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur..

İspat : $f\left(\frac{1}{t}\right)=F(t)$ ve $g\left(\frac{1}{t}\right)=G(t)$ olsun. $t\to 0^+$ için $\frac{F(t)}{G(t)}$ ifadesi $\frac{0}{0}$ formundadır. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

$x \to -\infty$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edildiğinde aynı metodun uygulanabileceği açıktır.

ÖRNEK : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $x \to +\infty$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edildiğinden,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\right] = \cos 0 \cdot 1 = 1$$

bulunur.

2) $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik hali

Bu durumda da L'Hospital kuralı geçerlidir. İspat tamamen $\frac{0}{0}$ haline benzer olduğundan yapmıyoruz.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $x \to 0$ için ifade $\frac{\infty}{\infty}$ halindedir. Şu halde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

yazılabilir. Bu limit $\frac{0}{0}$ halindedir. O halde L'Hospital kuralı tekrar uygulanabilir.

$$-\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{1} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = 0$$

olur.

3) $0.\infty$ belirsizlik hâli

Bu hâl $f\cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline getirilebilir.

ÖRNEK : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} e^{2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}e^{2x}$ ifadesi $0.\infty$ hâlindedir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\cdot e^{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$$

yazılarak $\frac{\infty}{\infty}$ haline dönüştürülebilir. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2} = \infty$$

olur.

4) $\infty - \infty$ belirsizlik hali

Bu belirsizlik hâli de $f-g = \quad f-g = \dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ şekline getirilebilir.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen ifadede $\infty - \infty$ halindedir.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan^2 x}{x^2\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \quad \left(\frac{0}{0}\ hali\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x+\sin x)(x\cos x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x(\sin x+2x\cos x)}$$

olur. Pay ve payda *sinx* ile sadeleştirilirse,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = -2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x+2x\cos x}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+2\cos x-2x\sin x} = -2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

bulunur.

5) ∞^0, 0^0, 1^∞ belirsizlik hâlleri

x sonlu bir değere veya sonsuza yaklaştığı zaman $y=[f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonu bu belirsiz hallerden birini veriyorsa her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = g(x)\cdot \ln f(x)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu üç hal evvelce incelenen $0\cdot\infty$ haline dönüşmektedir. Bu belirsizlik hesaplandıktan sonra

$$\lim_{x\to a} \ln y = k \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} y = e^k$$

özelliğinden yararlanılır..

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Bu limit 0^0 şeklindedir. $y=x^x$ denirse $\ln y = x\cdot \ln x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Bu limit 1^∞ şeklindedir $y=\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x$ denirse

$$\ln y = x\cdot \ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{\lambda}{x^2}}{1+\lambda/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{\lambda}{x^2}\cdot\frac{x}{x+\lambda}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cdot \frac{\lambda x}{x+\lambda} = \lambda$$

olur. O halde

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{x}\right)^x = e^\lambda$$

dır.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{1/\ln x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Bu limit ∞^0 formundadır. $y = (\cot x)^{1/\ln x}$ denirse

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \cot x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \cot x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{\cot x}{\frac{1}{x}}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = -1 \cdot 1 = -1$$

olur. O hâlde

$$\lim_{x \to 0} (\cot x)^{1/\ln x} = e^{-1}$$

dir.

5.18 DİFERENSİYELLER

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ da türevlenebilir olsun. $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$ olmak üzere,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

yazılabilir. Şu halde

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

olur. Buradaki $f'(x)\, \Delta x$ terimine f fonksiyonunun sabit x noktasına ve değişkenin Δx artımına göre diferensiyeli denir. Bu diferensiyel dy veya $d f(x)$ şeklinde gösterilir.

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $y = f(x) = x$ şeklinde alırsak $dy = 1 \cdot \Delta x$ olur. Diğer taraftan $dy = dx$ olacağından $\Delta x = dx$ dir. O halde Δx yeter derece küçük ise

$$\Delta y = f'(x)\, dx$$

olur. Yani $dy = \Delta y$ dir. O halde $y = f(x)$ in diferensiyeli

$$dy = f'(x)\, dx$$

olacaktır.

Diferensiyel, türev ile dx in çarpımı olduğundan türev alma kaideleri burada aynen uygulanır. Örneğin;

$$y = x^m \Rightarrow dy = m x^{m-1}\, dx$$

$$y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x\, dx$$

$$y = f(g(x)) \Rightarrow dy = f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

olur.

f fonksiyonunun ikinci diferensiyeli de şöyle hesaplanır :

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f''(x)\,dx^2 + 0 \cdot f'(x)\,dx = f''(x)\,dx^2$$

Benzer olarak k. diferensiyel

$$d^k y = f^{(k)}(x)\,dx^k$$

olur.

Şimdi diferensiyel yardımıyla bazı sayıların yaklaşık değerlerinin nasıl bulunabileceğini görelim. Δx çok küçük ise,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx \Delta x \cdot f'(x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x) \qquad (5.13)$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $\sqrt{5}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm : $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

$$\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

yazılabilir. $x = 4,\ \Delta x = 1$ alınırsa

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \approx 2 + 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

bulunur. Daha yaklaşık bir değer bulmak istenirse Δx daha küçük seçilmelidir. Örneğin $x = 4,84$ ve $\Delta x = 0,16$ seçilirse

$$\sqrt{5} \cong 2,2 + 0,16 \cdot \frac{1}{2 \cdot (2,2)} = 2,2 + 0,0363636 = 2,2363636$$

bulunur.

PROBLEMLER 5.5

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$ **b.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin x}$ **ç.** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+x-2}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$ **e.** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x}$

f. $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ **g.** $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$

h. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^3}$ **ı.** $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

i. $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$ **j.** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

k. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ **l.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}$

m. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ **n.** $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$

o. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$ **ö.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\ln(\tan x)}$

p. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$ **r.** $\lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)}$

s. $\lim_{x\to 1}\frac{x^c-cx+c-1}{(x-1)^2}$ **ş.** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^x-x}{x^2}$

t. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x\ln x}$ **u.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

ü. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$ **v.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$

y. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln x}{e^x+x}$ **z.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{1}{x}\right)$ **e.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

b. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ **f.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}\right)$ **g.** $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-x^{-2}\right)$

ç. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ **h.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{x}\right)$

d. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$ **b.** $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{a}{x}$

c. $\lim_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$ **ç.** $\lim_{x\to\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(a.\arctan\frac{\sqrt{x}}{a}-b.\arctan\frac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x\sqrt{x}}$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$ **b.** $\lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\sin x}$

c. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\tan 2x}$ **d.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

f. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ **g.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

h. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ **ı.** $\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)]^x$

i. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x}$

5. $a_1 > 0$ olmak üzere

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{a_1^a + a_2^a + ... + a_n^a}{n} \right)^{1/a} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 ... a_n}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $a,b > 0$ için $\lim_{x \to 0} (a^x + b^x - 1)^{\frac{1}{x}} = ab$ olduğunu gösteriniz.

7. $f(x) = \begin{cases} x+2\,, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0\,, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x+1\,, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0\,, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları için

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ fakat $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ olduğunu gösteriniz. Bu sonuç L'Hospital kuralı ile çelişir mi?

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}\,, & x \neq 0 \text{ ise} \\ m\,, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması için m ne olmalıdır?

9. Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L'Hospital kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.

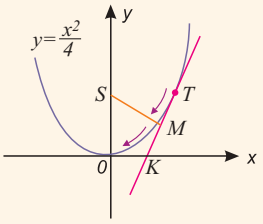
a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})} \frac{\sec x}{\tan x}$

10. $\lim_{x \to \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ limitini hesaplayınız.

11. $f(x) = (e^x + ax)^{\frac{b}{x}}$ ifadesinde a ve b sabit sayılardır.

$l_1 = \lim_{x \to 0} f(x)$ ve $l_2 = \lim_{x \to \infty} f(x)$ olduğuna göre $l_1 = b \cdot l_2$ eşitliğini sağlayan a sayısının en büyük değerini bulunuz.

12.



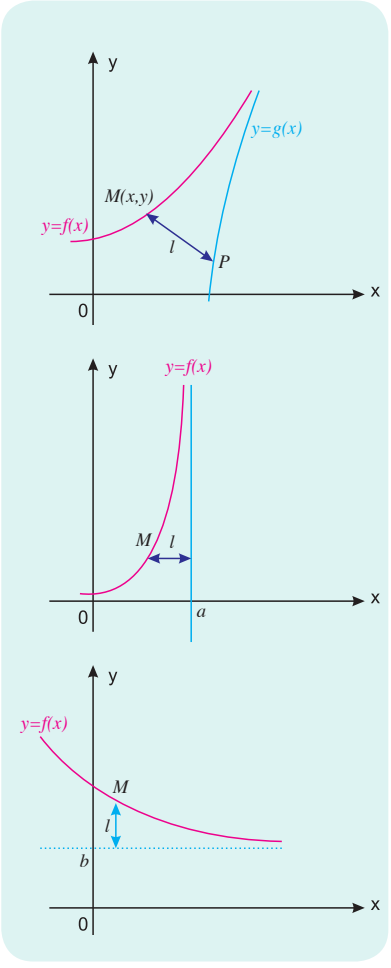
$y = \frac{x^2}{4}$ eğrisi üzerindeki T noktasında çizilen teğet x eksenini K noktasında, [TK] doğru parçasının orta dikme doğrusu da y eksenini S de kesiyor. T noktası O noktasına doğru hareket ettirildiğinde S noktası da y–ekseni üzerinde hareket eder.

$\lim_{T \to O} |OS|$ limitini hesaplayınız.

13. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerini bulunuz.

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{26}$ c) $\sqrt[4]{65}$ d) $\sqrt[5]{130}$

5.19 EĞRİ ÇİZİMİ



$A \subset \mathbb{R}$ olsun $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için fonksiyonun çeşitli özelliklerinin (artan azalan, konveks, konkav, ... vs.) bilinmesi gerekir. Grafik sonsuz çoklukta nokta ihtiva edebileceğinden bu noktaların hepsini koordinat sisteminde işaretlemek mümkün olmayabilir. Bu sebeple grafiğin (eğrinin) bazı özelliklerinin bilinmesi çizimi kolaylaştırır.

Eğri çizimlerine geçmeden önce eğri çizimlerine yardımcı olan ve asimptot denilen bazı doğru ve eğrileri tanıtmaya çalışalım.

$y = f(x)$ eşitliği ile verilen f fonksiyonunun tanım veya görüntü kümelerinden en az biri sınırsız bir küme olsun. Eğri üzerinde alınan bir $M(x, y)$ noktasının $0(0, 0)$ noktasına olan uzaklığı r olsun. $r^2 = x^2 + y^2$ dir. $x \to +\infty$ olduğunda $r \to \infty$ olur. Koordinat sisteminde bir g polinomunun grafiği olan C eğrisini göz önüne alalım. $M(x, y)$ noktasının bu C eğrisine olan uzaklığını l ile gösterelim.

$$\lim_{r \to \infty} l = 0 \qquad (5.14)$$

ise, yani M noktası orijinden sonsuz uzaklaştığında C eğrisi $y = f(x)$ eğrisine teğet oluyorsa, C eğrisine $y = f(x)$ eğrisinin bir **asimptotudur** denir.

Şimdi $y = f(x)$ eğrisinin durumuna göre C eğrisinin alabileceği şekileri inceleyelim.

1) Eğer x değişkeni bir a sayısına yaklaşırken y sınırsız olarak büyüyor ve küçülüyorsa $r \to \infty$ oluyor demektir.

C eğrisi olarak $x = a$ doğrusu alınırsa

$$\lim_{r \to \infty} l = \lim_{x \to a} |x - a| = 0$$

olur. Şu halde $x = a$ doğrusu bir asimptottur. Bu asimptota eğrinin bir **düşey asimptotu** denir.

2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ ise $y = b$ doğrusu bir asimptottur. Çünkü bu durumda,

$$l = |f(x) - b|$$

olup $\lim_{x \to \infty} |f(x) - b| = 0$ dır. Benzer şekilde $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ ise y = c de bir asimptottur. Bu tip asimptotlara **yatay asimptot** adı verilir.

3) x değişken sınırsız olarak büyütüldüğünde veya küçüldüğünde y sınırsız olarak büyüyor veya küçülüyorsa verilen eğrinin düşey ve yatay asimptotlardan farklı asimptotları bulunabilir. Şimdi verilen bir $y = g(x)$ eğrisinin asimptot olması için sağlanması gereken şartları araştıralım. g egrisi üzerinde $M(x, f(x))$ noktasına en yakın nokta $P(t, g(t))$ olsun.

Bu durumda

$$l = \sqrt{(x-t)^2 + (f(x)-g(t)^2}$$

olur. l nin sıfıra yaklaşması x in t ye, $f(x)$ in de g(t) ye yaklaşması ile mümkündür. g polinomu sürekli olacağından, $x \to t$ için $g(x) \to g(t)$ olur. Bu durumda yeter derece büyük x ler için

$$l \equiv \sqrt{(f(x)-g(x))^2} = |f(x)-g(x)|$$

dir. Şu halde $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-g(x)) = 0 \text{ veya } \lim_{x\to-\infty} (f(x)-g(x)) = 0 \qquad (5.15)$$

olacak şekilde bir $y = g(x)$ polinomu varsa bu eğriye $y = f(x)$ eğrisinin **eğri asimptotu** denir. Eğer $y = g(x)$ özel olarak bir doğru denklemi ise bu asimptota eğik asimptot adı verilir.

Eğri asimptotlar içinde en çok kullanılanlar

$$g(x) = mx + n$$

tipindeki eğik asimptotlardır. Şimdi asimptotun bu tipte olması halinde m ve n katsayılarının nasıl hesaplanabileceğini görelim. Önce $g(x) = mx + n$ doğrusunun eğriye

$x > 0$ bölgesinde asimptot olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx-n] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] x - n = 0$$

olmalıdır. Bu limitin var olması için

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0$$

olması gerekir. Aksi taktirde limit mevcut olmaz. Çünkü ikinci çarpanın limiti $+\infty$ dur. Şu halde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

olmalıdır. m için bulunan bu değer

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

eşitliğinde yerine konularak n bulunur. Buna göre

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\right]$$

olacaktır.

$x < 0$ bölgesindeki asimptot için, benzer olarak,

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - x \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \right]$$

olur.

ÖRNEK : $y = \sqrt{x^2 - 1}$ eğrisinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : Bu hiperbol eğrisinin asimptotları birer doğrudur.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x] = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

olduğundan $x > 0$ bölgesindeki asimptot $y = x$ doğrusudur. Benzer şekilde, $x < 0$ bölgesindeki asimptotun denklemi $y = -x$ olarak bulunur.

ÖRNEK : $y = e^{1/x}$ eğrisinin eğer varsa asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ olduğundan $x = 0$ düşey asimptottur.

$\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$ olduğundan $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur.

ÖRNEK : $y = 2^{-1/x^2}$ eğrisinin eğer varsa asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : $\lim_{x \to 0^+} 2^{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^-} 2^{-1/x^2} = 0$ olduğundan $x = 0$ asimptot değildir.

$\lim_{x \to \infty} 2^{-1/x^2} = 1$ olduğundan $y = 1$ yatay asimptottur.

ÖRNEK : $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ eğrisinin eğer varsa asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$

olduğundan $x = 0$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

olduğundan eğrinin eğik veya eğri asimptotu vardır.

$g(x) = x$

seçilirse

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

olur. Şu halde $y = x$ doğrusu eğik asimptottur.

ÖRNEK : Eğer varsa $y=\sqrt{x^2-2x+2}$ eğrisinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : Her $a\in\mathbb{R}$ için $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{a^2-2a+2}$ olduğundan düşey asimptot yoktur.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+2}=+\infty$ olduğundan eğrinin eğik veya eğri asimptotu vardır. $x\neq 1$ için

$\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}=|x-1|\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}$ olduğundan $g(x)=|x-1|$ alındığında,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$$

olur. Şu halde

$$y=|x-1|=\begin{cases}x-1\ ,\ x\geq 1 \text{ ise}\\ 1-x\ ,\ x<1 \text{ ise}\end{cases}$$

eğrisi eğri asimptottur.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir eğrinin çizilebilmesi için o eğrinin çeşitli özelliklerinin bilinmesi gerekir. Şimdi bunların belli başlı olanlarını vermeye çalışalım. Bir eğriyi çizmek için şu yolu takip etmek yararlıdır :

I. Tanım kümesi bulunur.
II. Asimptotlar bulunur.
III. Eğrinin eksenleri kestiği noktalar bulunur.
IV. Türevin kökleri ve işaretleri incelenir.
V. Değişim tablosu yapılır.
VI. Tabloya göre eğrinin çizimi yapılır.

I ve II nin nasıl bulunduğunu biliyoruz. III de eksenlerin kesim noktasını bulmak için $y = f(x)$ eğrisinde $x = 0$ alıp y bulunur. Bu eğrinin $0y$ eksenini kestiği noktaların apsisleridir. $y=0$ alıp $f(x) = 0$ denklemi bulunur. Bunun kökleri varsa o kökler eğrinin $0x$ – eksenini kestiği noktalardır. IV de türevin kökleri ve işareti incelendiğinde fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları bulunur. Değişim tablosu yukarıdaki bilgilerin yer aldığı bir tablodur. Bu tabloya göre çizim yapılır.

Şimdi bir kaç tip eğrinin grafiğini çizelim.

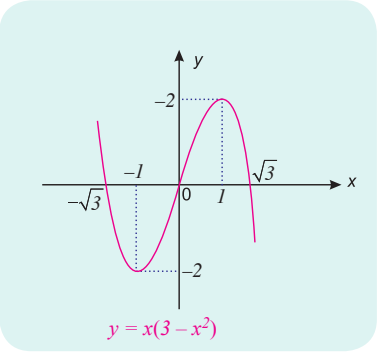
ÖRNEK : $y = x(3 - x^2)$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

I. Polinomlar her yerde tanımlı olduğundan tanım cümlesi $T = \mathbb{R}$ dir.

II. Asimptot yok.

$$\lim_{x \to -\infty} x(3 - x^2) = +\infty \,, \quad \lim_{x \to \infty} x(3 - x^2) = -\infty$$



$y = x(3 - x^2)$

III. $x = 0$ için $y = 0$ ve $y = 0$ için $x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$

IV. $y' = 3(1 - x^2)$ olur. $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -2$, $y_2 = 2$

V.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y′		−		−	0	+		+	0	−		−	
y	$+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

VI. Bu tabloya göre eğri çizilirse yandaki grafik elde edilir.

ÖRNEK : $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

I. $T = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dir. Çünkü $x = -1$ ve $x = 1$ için $x^2 - 1 = 0$ dır.

II. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$

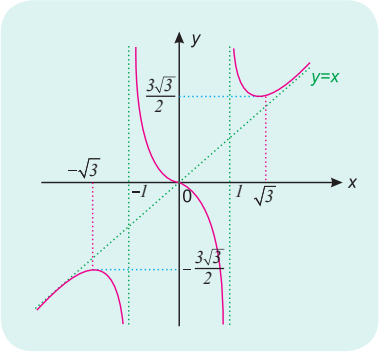
olduğundan $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları düşey asimptotturlar.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$ dur. $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ yazılabildiğinden $g(x) = x$ eğik asimptottur. Çünkü,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \text{ olur.}$$

IV. $y' = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ olduğundan

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \,, \; x_3 = -\sqrt{3} \,, \; x_4 = \sqrt{3}$$



dir. Bunlara karşılık gelen y değerleri, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ dir.

V.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y′	+	0	−	−	−	0	+
y	$-\infty$ ↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗ $+\infty$

Grafik yanda çizilmiştir.

ÖRNEK : $y = x\sqrt{1-x^2}$ ve $y = -x\sqrt{1-x^2}$ eğrilerini çiziniz.

Çözüm : Önce $y = x\sqrt{1-x^2}$ eğrisini çizelim. Diğeri bunun $0x$ – eksenine göre simetriği olacaktır.

I. Fonksiyonun tanımlı olması için kök içerisinin negatif olmaması gerekir. $1 - x^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözümünden $-1 \leq x \leq 1$ elde edilir. Şu halde tanım kümesi $T = [-1, 1]$ aralığıdır.

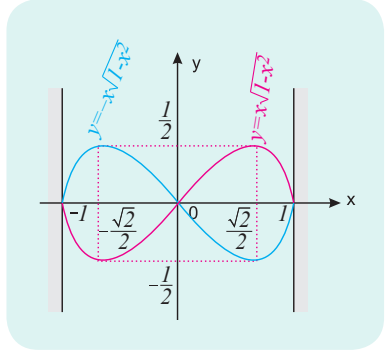
II. Asimptot yok. Çünkü hem tanım cümlesi hem de görüntü kümesi sınırlıdır.

III. $x = 0$ için $y = 0$, $y = 0$ için $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ olur.

IV. $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ dir. $(-1, 1)$ aralığında payda pozitif olduğundan türevin işareti sadece paya bağlıdır.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0,\ x_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2},\quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}$$

olur.



V.

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y′	−	0	+	0	−
y	0 ↘	$\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↘	0

Mavi olarak çizilen eğri $y = -x\sqrt{1-x^2}$ eğrisidir.

ÖRNEK : $y = ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm :

I. Logaritma fonksiyonu pozitif sayılar üzerinde tanımlı olduğundan $\frac{x^2-4}{1-x^2} > 0$ olmalıdır. Şimdi bu eşitsizliği çözelim.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1,\ x_4 = 3$

Bu köklere göre işaret tablosu yapılırsa yandaki tablo elde edilir.

x		-2		-1		1		2	
x^2-4	+	0	−		+		−	0	+
$1-x^2$	−		−	0	+	0	−		−
Bölüm	−		+		−		−		+

Bu tabloya göre $T = (-2, -1) \cup (1, 2)$ dir.

II. $\lim_{x\to -2^+} ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = -\infty$ olduğundan x = –2 bir düşey asimptot,

$\lim_{x\to -1^-} ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = +\infty$ $\lim_{x\to -1^-} ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = +\infty$ olduğundan x = –1 bir düşey asimptot,

$\lim_{x\to -1^+} ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = +\infty$ olduğundan x = 1 bir düşey asimptot,

$\lim_{x\to 2^-} ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = -\infty$ olduğundan x = 2 bir düşey asimptot

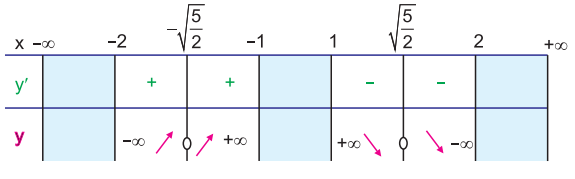
III. $x = 0 \notin T,\ y = 0 \Rightarrow ln\frac{x^2-4}{1-x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{1-x^2} = 1 \Rightarrow 2x^2 = 5$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\ x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

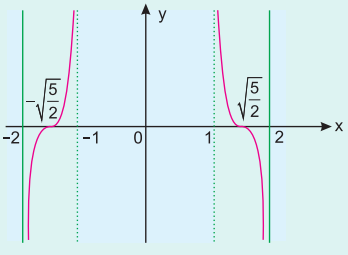
IV. $y' = \frac{2x}{(x^2-4)(1-x^2)}$ olur. $y' = 0 \Rightarrow x = 0 \notin T.$

payda tanım kümesindeki x ler için pozitif olduğundan türevin işareti sadece paya bağlıdır.

V.



Bu tabloya göre grafik yanda verilmiştir.



Verilen fonksiyon bir çift fonksiyon olduğundan grafik 0y – eksenine göre simetrik olacaktır. Bu nedenle eğrinin (1, 2) aralığındaki parçasını çizip 0y–eksenine göre simetri almak yeterlidir.

ÖRNEK : $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm :

I. $T = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ dir. Çünkü fonksiyon $x^2 - 1 = 0$ denkleminin köklerinde tanımlı değildir.

II. $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$

olduğundan $x = -1$ ve $x = 1$ düşey asimptotlar.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimptottur.

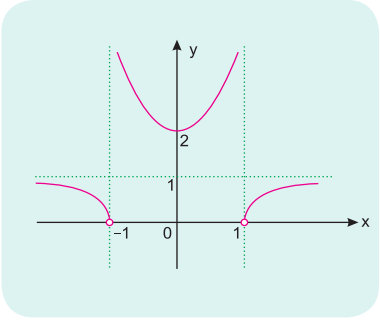
III. $x = 0$ için $y = 2$ dir. Üstel fonksiyon daima potizif olduğundan, $y = 0$ denkleminin kökü yoktur, yani eğri x – eksenini kesmez.

IV. $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \ln \frac{1}{2} = y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln 2$

$y' = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

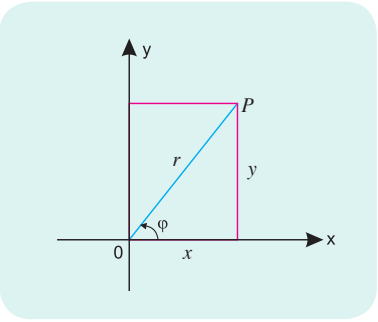
V.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$-\infty$ ‖ 0	↗	1



Grafik yanda çizilmiştir.

5.20 KUTUPSAL KOORDİNATLAR



Kartezyen koordinat sisteminde $P(x, y)$ noktasını gözönüne alalım. P noktasının $O(0,0)$ orijin noktasına olan uzaklığını r, $[OP]$ doğru parçasının $0x$–ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsünü φ ile gösterirsek x ve y koordinatlarını r ve φ cinsinden

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{5.16}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

(r, φ) ikilisine P noktasının **kutupsal koordinatları**, O noktasına **kutup noktası**, φ açısına P noktasının **kutup açısı,** 0x – eksenine de **kutup ekseni** adı verilir.

Şurasını belirtelim ki P noktasının kutupsal koordinatları tek değildir. Yani bir noktanın sonsuz çoklukta kutupsal koordinatı vardır. Örneğin (r, φ) bir noktanın kutupsal koordinatları ise k bir tam sayı olmak üzere $(r, \varphi + 2k\pi)$ koordinatları da aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır.

r ve φ kutupsal koordinatlarını x ve y kartezyen koordinatları cinsinden ifade etmek de mümkündür. (5.16) da her iki tarafın karesi alınıp toplanırsa

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

buradan da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.17}$$

bulunur. (5.17) den

(5.18)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{5.19}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} \tag{5.20}$$

yazmak mümkündür. x ve y koordinatları verildiğinde φ hesaplanırken (5.20) eşitliği kullanılacaksa dikkatli olmak gerekir. Zira tanjantı pozitif olan açılar

birinci ve üçüncü bölgede, negatif olan açılar ikinci ve dördüncü bölgededir. Söz konusu olan açının hangi bölgede olduğunu anlamak için x ve y koordinatlarının işaretlerine bakmak gerekir.

ÖRNEK : $P(-1, \sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ dir. $\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = Arc\,tan(-\sqrt{3})$ olur. Tanjantı $-\sqrt{3}$ olan açıların ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ ve $\frac{5\pi}{3}$ dir. $P(-1, \sqrt{3})$ noktası ikinci bölgede olduğundan $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ olacaktır. Şu halde $P(-1, \sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatları $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ olacaktır. ❐

(r, φ) sayı ilişkilerini herhangi bir noktanın koordinatları olarak gözönüne alabilmek için bazı kabullere ihtiyaç vardır. Bunlar şunlardır :

I. $(r; \varphi)$, P noktasının kutupsal koordinatları ise $(r; \varphi + 2k\pi)$ de P noktasının kutupsal koordinatlarıdır.

II. $(r; \varphi)$, P noktasının kutupsal koordinatları ise $(-r; \varphi + \pi)$ de P nin kutupsal koordinatlarıdır.

III. Her bir φ için (0, φ) koordinatları kutbun (orijinin) koordinatlarıdır.

ÖRNEK : Kutupsal koordinatları $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ olan noktaların kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Önce $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulalım.

$$x = r\cos\varphi = 2 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\varphi = 2\sin\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

olduğundan istenen koordinatlar $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dir. Şimdi diğer noktanın kartezyen koordinatlarını bulalım.

$\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ noktası $\left(2, \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ noktası ile aynı noktayı gösterdiğinden $x = 2\cos\frac{7\pi}{6} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$ ve $y = 2\sin\frac{7\pi}{6} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ olur. Aynı değerler $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ eşitliklerinde $r = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ konularak da hesaplanabilirdi. Şu halde verilen noktanın kartezyen koordinatlar sistemindeki koordinatları $(-\sqrt{3}, -1)$ olur.

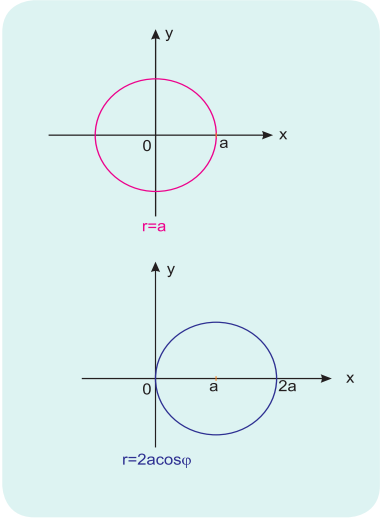
Kartezyen koordinat sisteminde olduğu gibi, eğrilerin denklemini kutupsal koordinatlar cinsinden de ifade etmek mümkündür. Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi verilen bir eğrinin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini bulmak için verilen denklemde x yerine $r\ cos\ \varphi$, y yerine $r\ sin\ \varphi$ yazmak yeterlidir. Mümkün olduğu taktirde, r çekilerek

$$r = f(\varphi)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Şimdi bununla ilgili olarak bazı örnekler yapalım.

ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ olan çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm : Verilen denklemde $x = r\ cos\ \varphi$, $y = r\ sin\ \varphi$ yazılırsa $r^2\ cos^2\ \varphi + r^2\ sin^2\ \varphi = a^2 \Rightarrow r^2\ (cos^2\ \varphi + sin^2\ \varphi) = a^2 \Rightarrow\ r^2 = a^2\ \Rightarrow\ r = a$ bulunur.



ÖRNEK : Merkezi $(a, 0)$ da olan a yarıçaplı çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm : Bilindiği gibi bu çemberin kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

dir. $x = r\ cos\ \varphi$, $y = r\ sin\ \varphi$ yazılırsa

$$(r\ cos\ \varphi - a)^2 + r^2\ sin^2\ \varphi = a^2\ \Rightarrow r^2\ (cos^2\ \varphi + sin^2\ \varphi) = 2ra\ cos\ \varphi\ \Rightarrow\ r = 2a\ cos\ \varphi$$

bulunur.

ÖRNEK : Kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemi

$$r^2\ cos\ \varphi\ sin\ \varphi = 1$$

olan eğrinin kartezyen koordinatları sistemindeki denklemini bulunuz. Bu eğrinin cinsini belirtiniz.

Çözüm : $\cos\ \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\ \varphi = \frac{y}{r}$ yazılabilir. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$x \cdot y = 1$$

bulunur. Şu halde verilen eğri bir hiperboldür. ❐

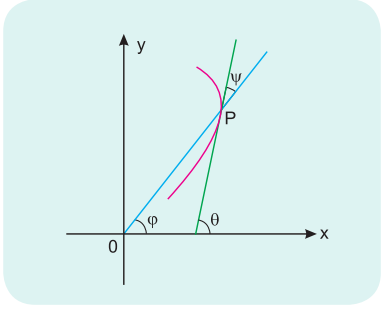
Bir eğri, üzerindeki bir noktanın kutupsal koordinatları r ve φ olmak üzere, $r = f(\varphi)$ olarak tanımlandığında bu eğri üzerindeki bir (x, y) noktasının koordinatları

$$\begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \qquad (5.21)$$

olacaktır. Bu, verilen eğrinin parametrik gösteriminden başka bir şey değildir. Şimdi buradan yararlanarak, $r = f(\varphi)$ eşitliği ile tanımlanan bir eğrinin bir kutup açısına karşılık gelen bir $P(r, \varphi)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

$$dx = d[r\cos\varphi] = \frac{d}{d\varphi}(r\cos\varphi)\cdot d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$dy = d[r\sin\varphi] = \frac{d}{d\varphi}(r\sin\varphi)\cdot d\varphi = (r'\sin\varphi - r\cos\varphi)\,d\varphi$$



olduğundan, teğetin m eğimi,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

olur. Bunun bir anlama sahip olması için f nin sürekli türevlere sahip olması gerektiği açıktır. θ, teğetin 0x – ekseni ile yaptığı açının pozitif yöndeki ölçüsü olsun. Bu taktirde

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

olur. OP doğrusunun teğette pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü Ψ ise $\Psi = \theta - \varphi$ olacağından

$$\tan\Psi = \tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan\theta - \tan\varphi}{1 + \tan\theta\cdot\tan\varphi} = \frac{\dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \dfrac{r\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - \sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tan\Psi = \frac{r}{r'}$$

bulunur. Teğetin eğim açısı hesaplanmak istenirse

$$\theta = \Psi + \varphi$$

eşitliğinden yararlanılır.

ÖRNEK : $r = a(1 + \cos\varphi)$ eğrisinin $\varphi = \frac{\pi}{3}$ kutup açılı noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

Çözüm : $\tan\psi = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = \dfrac{1+\cos\varphi}{-\sin\varphi} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$

olduğundan $\Psi = \frac{2\pi}{3}$ olur. Şu halde teğetin eğim açısı

$$\theta = \psi + \varphi = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

olacaktır. Buna göre teğetin eğimi

$$m = tan\ \theta = tan\ \pi = 0$$

olur. Şimdi değme noktasının koordinatlarını bulalım.

$$x_0 = r\ cos\ \varphi = a(1 + cos\ \varphi)\ cos\ \varphi = a\left(1 + cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot cos\frac{\pi}{3} = \frac{3a}{4}$$

$$y_0 = r\ sin\ \varphi = a(1 + cos\ \varphi)\ sin\ \varphi = \left(1 + cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

olur. Buna göre teğetin denklemi

$$y - \frac{a \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 0 \cdot \left(x - \frac{3a}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

olur. Eğer bu denklemin kutupsal koordinat sistemindeki denklem istenirse, x yerine $r\ cos\ \varphi$, y yerine r sin φ yazılarak.

$$r\ sin\ \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

denklemi elde edilir. □

Şimdi, $r = f(\varphi)$ eğrisine (r_0, φ_0) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım. 0x–ekseni ile yaptığı açının ölçüsü θ olsun. $m = tan\ \theta$ olduğundan teğetin denklemi

$$y - y_0 = m\ (x - x_0)$$

denkleminin kutupsal biçiminden ibarettir. Buna göre teğetin denklemi

$$r\ sin\ \varphi - r_0\ sin\ \varphi_0 = tan\ \theta\ (r\ cos\ \varphi - r_0\ cos\ \varphi_0)$$

olur. Buradan da

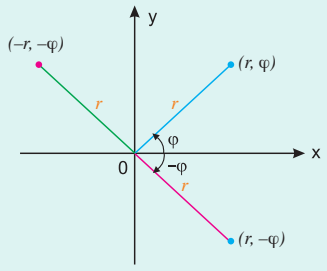
$$cos\ \theta\ (r\ sin\ \varphi - r_0\ sin\varphi_0) = sin\ \theta\ (r\ cos\ \varphi - r_0\ cos\ \varphi_0) \Rightarrow$$

$$r\ (sin\ \varphi\ cos\ \theta - sin\ \theta\ cos\ \varphi) = r_0\ (sin\ \varphi_0\ cos\ \theta - sin\ \theta\ cos\ \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{r\ sin\ (\varphi - \theta) = r_0\ sin\ (\varphi_0 - \theta)} \qquad (5.23)$$

bulunur.

5.20.1. KUTUPSAL DENKLEMİ VERİLEN EĞRİNİN ÇİZİMİ



$r = f(\varphi)$ eşitliği ile verilen eğriyi çizmek için şu yolu takip etmek kolaylık sağlar.

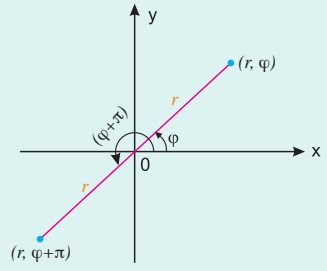
1. Tanım kümesi bulunur.

2. f periyodik ise periyodu bulunur. Periyot T ise uzunluğu T olan herhangi bir aralıkta inceleme yapmak yeterdir. Diğer tüm aralıklarda r nin alacağı değerler bu aralıktakilerle aynıdır.

3. Simetri araştırılır. Bunun için belli başlı birkaç yol vardır. Şimdi bunları verelim.

a) $f(-\varphi) = f(\varphi)$ oluyorsa, yani f çift ise, kutup ekseni simetri eksenidir. Zira (r, φ) ile $(r, -\varphi)$ kutup eksenine göre simetrik iki noktadır.

b) $f(-\varphi) = -f(\varphi)$ oluyorsa, yani f tek ise, eğri $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna (0y – eksenine) göre simetriktir. Çünkü (r, φ) ile (–r, –φ) noktaları $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetrikdir.

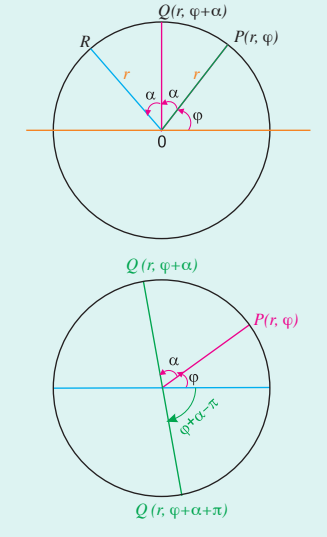


c) $f(\varphi + \pi) = f(\varphi)$ oluyorsa eğri kutup noktasına (orijine) göre simetriktir. Zira (r, φ) ile $(r, \varphi + \pi)$ kutba göre simetrik iki noktadır. Eğrinin periyodu T ise uzunluğu $T/2$ olan bir aralıkta eğri çizilir. Elde edilen eğrinin kutba göre simetriği alınır.

d) $f(\varphi + \pi) = -f(\varphi)$ oluyorsa uzunluğu T/2 olan bir aralıkta çizim yapmak yeterlidir. Zira (r, φ) *ile* $(-r, \varphi + \pi)$ aynı noktadır.

e) $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$ ise eğri $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. (Neden ?).

f) $f(\pi - \varphi) = -f(\varphi)$ ise kutup ekseni simetri eksenidir. (Neden ?).



g) Bir reel α sayısı için $f(\varphi + \alpha) = f(\varphi)$ oluyorsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(r, \varphi + \alpha)$ aynı çember üzerindedir. Q noktası P noktasının kutup noktası etrafında α kadar döndürülmesi ile elde edilir. Q noktasının kutup etrafında α kadar döndürülmesiyle elde edilen R noktası da eğri üzerinde bir noktadır. Bu sebeple bu noktalardan biri bilinirse diğerleri bu noktayı kutup etrafında α kadar döndürmekle elde edilir. Bu durumda incelemeyi α uzunluğundaki bir aralıkta yapmak yeterlidir. Bu suretle elde edilen eğri parçasını kutup etrafında α kadar döndürmek ve bu döndürmeleri eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar devam ettirmek suretiyle eğrinin çizimi tamamlanır.

h) $f(\varphi + \alpha) = -f(\varphi)$ ise α uzunluğundaki bir aralıkta çizim yapılıp elde edilen eğri parçasını negatif yönde $\pi - \alpha$ kadar döndürmelidir. Döndürme işlemine, eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar devam edilmelidir.

$f(\alpha + \varphi) = -f(\varphi)$ oluyorsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(-r, \alpha + \varphi)$ noktaları kutuptan eşit uzaklıkta olan iki noktadır. Q noktası $(r, \alpha + \varphi - \pi)$ koordinatları ile de gösterilebilir.

$\alpha + \varphi - \pi = \varphi - (\pi - \alpha)$ yazılabildiğinden Q noktasını bulmak için P noktasını φ açısının ters yönünde $\pi - \alpha$ kadar çevirmek yeterdir. Buna göre eğrinin α uzunluğundaki bir aralıkta incelemesi yapılır, bu incelemeye göre eğri çizilir. Elde edilen eğri negatif yönde $\pi - \alpha$ kadar döndürülür ve döndürme işlemine, eğri kendisi ile üst üste gelinceye kadar devam edilir.

4. r' türevinin işareti incelenerek eğrinin kutba nerede yaklaştığı nerede uzaklaştığı tesbit edilir.

5. Fonksiyonun, inceleme aralığındaki özel noktalarda (fonksiyon değerlerinin kolayca hesaplanabileceği noktalarda) aldığı değerler bulunur.

Burada sözü edilen özel noktalar trigonometrik oranlarını bildiğimiz noktalardır. $0\ ,\ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\ ,\ \cdots$ v.s. gibi noktalar özel noktalardır.

İnceleme aralığında ne kadar çok özel nokta gözönüne alınırsa, çizim o kadar gerçeğe yakın olur.

6. Değişim tablosu çizilir. Bulunan değerler bu tabloda belirtilir.

7. Değişim tablosuna göre çizim yapılır.

8. Simetri söz konusu ise, gerekli simetriler alınarak çizim tamamlanır.

ÖRNEK : $r = 1 + \cos\varphi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm :

1. $\cos\varphi$, 2π periyotlu olduğundan fonksiyon 2π periyotludur. Şu halde incelenme 2π uzunluktaki bir aralık üzerinde yapılmalıdır.

2. $f(-\varphi) = 1 + \cos(-\varphi) = 1 + \cos\varphi = f(\varphi)$ olduğundan eğri kutup eksenine göre simetriktir. Şu halde eğrinin $[0, \pi]$ aralığında grafiğini çizmek yeterdir. Bu çizildikten sonra, kutup eksenine göre simetri alınarak eğri tamamlanır.

3. $r' = -\sin\varphi$ dir. $[0, \pi]$ aralığında $\sin\varphi \geq 0$ olduğundan bu aralıkta $r' \leq 0$ dır. Yani φ büyüdükçe eğrinin noktaları kutba yaklaşır. Şu halde r en büyük değerini 0 da, en küçük değerini π de alır.

4. $[0, \pi]$ aralığında, fonksiyon değerlerini kolayca hesaplayabileceğimiz noktalar $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ noktalarıdır.

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{p}{6}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1,85\ , \quad f\left(\frac{p}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 1,7\ ,$$

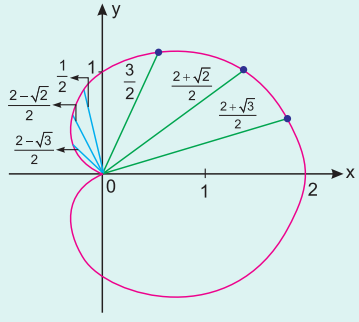
$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{1}{2}=1,5$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0,3$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cong 0,15$, $f(\pi)=0$ dır.

Bu noktaların tümünü almak gerekmez. Ama ne kadar çok nokta alınırsa grafik esas grafiğe o kadar yakın olur.

5. Değişim tablosu

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r'		–	–	–	–	–	–	–	–
r	2	$\searrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}$	$\searrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}$	$\searrow \frac{3}{2}$	$\searrow 1$	$\searrow \frac{1}{2}$	$\searrow \frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\searrow \frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$\searrow 0$



$r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoid

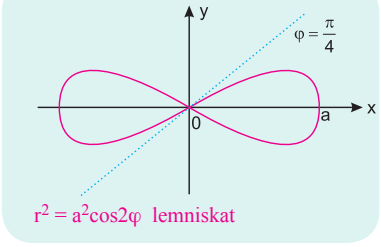
6. Tabloya göre çizim yapıldıktan sonra kutup eksenine göre simetri alınır. Grafik yanda çizilmiştir. Bu eğriye **Kardiyoid** adı verilir.

ÖRNEK : $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ eğrisini çiziniz.

Çözüm : $r^2 = a^2 \cos^2 \varphi$ olduğundan $r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ yazılabilir. $\cos 2\varphi$ nin periyodu π olduğundan inceleme π uzunluğunda bir aralık üzerinde yapılmalıdır. Tanım kümesine ait her bir φ değerine iki farklı r değeri karşılık geldiğinden, eğri kutup notkasına göre simetriktir. Şu halde;

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

eğrisi çizilmeli, elde edilen eğrinin kutba göre simetriği alınmalıdır. $\cos 2\varphi \geq 0$ olması gerektiğinden $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(-\varphi) = f(\varphi)$ olduğundan eğri kutup eksenine göre de simetriktir. Şu halde, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında inceleme yapmak yetecektir. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında çizilen eğrinin, kutup eksenine göre simetriği alındıktan sonra, elde edilen eğrinin kutup noktasına göre simetriği alınacaktır. $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ için



$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskat

$$r' = \frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \leq 0 \text{ dır.}$$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r'		–	–
r	a	$\searrow \frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\searrow 0$

Bu eğriye lemniskat adı verilir.

ÖRNEK : $r = a\cos 3\varphi$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

1. Fonksiyon her yerde tanımlıdır. Periyodu $\frac{2\pi}{3}$ tür.

2. $f(-\varphi) = a\cos(-3\varphi) = a\cos 3\varphi = f(\varphi)$ olduğundan eğri kutup eksenine göre simetriktir. Ayrıca $f\left(\varphi + \frac{p}{3}\right) = a\cos(3\varphi + p) = -a\cos 3\varphi = -f(\varphi)$ olduğundan incelemeyi uzunluğu $\frac{\pi}{3}$ olan bir aralıkta yapmak yetecektir. Bu aralığı $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ olarak seçelim. Ayrıca eğri kutup eksenine göre simetrik olduğundan inceleme aralığı olarak $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığı alınabilir. Bu aralıkta eğri parçası çizildikten sonra kutup eksenine göre simetri alınır. Bulunan eğri parçası kutup etrafında negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$ kadar döndürülerek diğer parçası çizilir. Bu çizimden sonra tekrar ters yönde $2\frac{\pi}{3}$ kadar döndürülür, çizim yapılır. Üçüncü döndürmede eğri kendi üstüne kapanır.

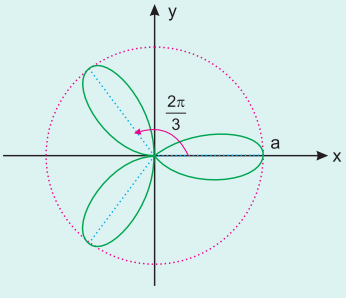
3. $r' = -3a\sin 3\varphi$ dir. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında $r' \le 0$ dır. Bu aralıkta $r' = 0$ denkleminin kökü $\varphi = 0$ dır.

4. $\varphi = 0$ için $r = a$ ve $\varphi = \frac{\pi}{6}$ için $r = 0$ dır.

5. Değişim Tablosu

φ	0		$\frac{\pi}{6}$
r'		$-$	
r	a	$\searrow$	0

6. Grafik yanda çizilmiştir. Bu eğriye üç yapraklı gül adı verilir.



$r = a\cos 3\varphi$ üç yapraklı gül

$r = a\cos n\varphi$ (veya $r = a\sin n\varphi$) eğrisi genel olarak **gül eğrilerini** gösterir. Eğer n tek ise $r = a\cos n\varphi$ denklemi n – yapraklı gülü, n çift ise 2n – yapraklı gülü gösterir.

PROBLEMLER–5.6

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a. $y = x\,(x-1)^2\,(x+1)$

b. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

c. $y^2 = x^2 - 4x + 5$

ç. $y = \sqrt{6x - x^2}$

d. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

e. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

f. $y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x}$

g. $y = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$

ğ. $y = \dfrac{x^2 - 4}{(x+1)^2}$

h. $\dfrac{x^2 + 1}{x}$

ı. $y = ln\,(2x - x^2)$

i. $y = x + sinx$

j. $y = lnx$

k. $y = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$

l. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$

2. Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaları düzlemde gösteriniz.

a) $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $B\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $C\left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$

3. Aşağıda kartezyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

a) $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **b)** $B(-3, -3\sqrt{3})$

c) $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **d)** $D(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaların kartezyen koordinatlarını bulunuz.

a) $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $B\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $C\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$

5. Aşağıda kartezyen denklemleri verilen eğrilerin kutupsal denklemini yazınız.

a) $xy = 4$ **b)** $x^2 + y^2 = 2x$

c) $x^2 = 9(x^2 + y^2)^2$ **d)** $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$

e) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$

6. Yarıçapı a, merkezi (r_0, α) olan çemberin kutupsal denkleminin $r^2 - 2rr_0\,cos(\varphi - \alpha) + r_0^2 = a^2$ olacağını gösteriniz.

7. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a. $r = 4\,cos\,2\varphi$ **c.** $r^2 = cos\,2\varphi$

b. $r = sin\,3\varphi$ **d.** $r = 1 - cos\,\varphi$

8. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarındaki teğetlerini bulunuz. Bu teğetlerin oluşturdukları açıların ölçülerini hesaplayınız.

a. $r = 2(1 - cos\,\varphi)$, $r = -6\,cos\,\varphi$ **b.** $r = sin\,\varphi$, $r = cos\,2\varphi$

9. Aşağıda denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

a. $r = sin\,3\varphi$ **b.** $r = 1 - 2\,cos\,\varphi$

c. $r^2 = sin\,2\varphi$

10. $r = 2(1 - cos\,\varphi)$ kardiyoidine $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasından çizilen teğetin kutup doğrusu (0x – ekseni) ile yaptığı açının ölçüsünü bulunuz.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıda tanımlanan fonksiyonların $x = 0$ noktasında türevli olup olmadığını araştırınız.

a) $f(x) = x\,|x|$ **c)** $f(x) = x^{2/3}\,sinx$

b) $f(x) = |x|\,sinx$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot(1-\cos x)$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}\ , & x \neq 0 \ \ ise \\ 0\ \ \ \ , & x = 0 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevli midir ? f' türev fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir? $x = 0$ da f'' türevi var mıdır? Bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

3. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$ eğrisi veriliyor. Bu eğriye üzerindeki herhangi bir noktadan çizilen teğetin eksenlerden ayırdığı parçaların uzunlukları u ile v ise

$$u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

dır, gösteriniz. $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = \frac{2}{3}$ özel halleri için bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

a) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$

b) $f(x) = 1 + xg(x)$,

bağıntılarını sağlayan bir f fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevli olacağını ve $f'(x) = f(x)$ bağıntısının sağlanacağını gösteriniz. (Burada g, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ özelliğine sahip bir fonksiyondur.)

5. f'', $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıkta $f(x) = 0$ denkleminin üç kökü olsun. $f''(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığında en az bir köke sahip olacağını gösteriniz.

6. f, $[a,b]$ üzerinde türevli ve $f(b) < f(a)$ olsun. f' fonksiyonunun (a, b) aralığındaki en az bir noktada negatif olacağını gösteriniz.

7. f ile g, $[a,b]$ üzerinde türevli iki fonksiyon, $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ olsun. (a, b) aralığının en az bir c noktasında f ve g nin grafiklerine ait teğetlerin paralel olacağını gösteriniz.

8. f, $\mathbb{R}$ üzerinde türevli bir fonksiyon olsun.

$f(1) = 1$, $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ ise

a. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 1$ dir, gösteriniz.

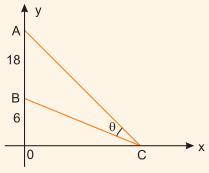
b. $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

9. a ve b iki pozitif sayı ve $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde sözü edilen x_0 sayısının, a ile b nin geometrik ortalaması olan $\sqrt{ab}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

10. a ile b iki reel sayı ve $f(x) = x^2$ olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen x_0 sayısının, a ile b nin aritmetik ortalaması olan $\frac{a+b}{2}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

11. Kabul edelim ki, $y = f(x)$ in türevi $y' = (x-1)^2(x-2)$ olsun. f nin yerel ekstremum ve dönüm noktalarını bulunuz.

12. a bir reel sayı olsun. $\forall x \in (-\infty, a)$ için $f'(x) > 0$ ve $\forall x \in (a, +\infty)$ için $f'(x) < 0$ ise a noktası bir yerel maksimum noktası mıdır?

13. 

$m(\widehat{ACB}) = \theta$ açısı en büyük olduğunda C noktası orijinden kaç birim uzakta bulunur?

14. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $y = \dfrac{4|x|}{(x-1)^2}$ **b.** $y = \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{4+x|x|}$ fonksiyonunun f' ve f'' türevlerini bulup işaretlerini inceleyiniz. Fonksiyonun artan ve azalan oldukları aralıkları bulup yerel ekstremum noktalarını belirtiniz. Konveks ve konkav oldukları aralıkları belirtip dönüm noktalarını bulunuz. Asimptotların denklemini bulunuz. Eğrinin grafiğini çiziniz.

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$

17. $xy = 8$ hiperbolü üzerinde, $A(3, 0)$ noktasına en yakın olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

18. $y = x^3 + 3x^2 - 4$ eğrisinin hangi noktasındaki teğetinin eğimi en büyüktür? Bu teğetin denklemini bulunuz.

19. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 1 \text{ ise} \\ (2-x)^3 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun yerel ekstremum ve dönüm noktalarını bulunuz.

20. Aşağıdaki eğrilerin grafiğini çiziniz.

a) $r = 1 + 2\cos\varphi$ **b)** $r = 2 + \cos\varphi$

c) $r = 1 + 2\sin\dfrac{\varphi}{2}$ **d)** $r = 1 + 2\cos 2\varphi$

21. Aşağıdaki eğrilerin yanlarında belirtilen noktalardaki teğetlerini bulunuz.

a) $r = 2\cos\varphi$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

b) $r = 2 - \cos\varphi$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

c) $r = \sin 3\varphi$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

22. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarını bulunuz.

a) $r = \sqrt{3}\sin\varphi$, $r = \cos\varphi$

b) $r = \sqrt{2}\cos\varphi$, $r^2 = \cos 2\varphi$

c) $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$

d) $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$

23. $r = a\sin\varphi$, $r = a\cos\varphi$ çemberlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz [İki eğrinin kesişme noktalarındaki teğetleri dikse o eğriler dik kesişiyorlar denir.]

24. $r = 2a\cos(\varphi - \theta)$ eğrisini çiziniz. Burada θ bir sabit açı ölçüsüdür.

25. $m, n \in Z^+$ olmak üzere

$f(x) = x^m (1 - x)^n$

fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun [0,1] aralığında Rolle teoreminin hipotezini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen C noktasının [0,1] aralığını $\frac{m}{n}$ oranında böldüğünü gösteriniz.

26. $f(x) = 1 - x^{2/3}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ üzerinde sürekli ve $f(-1) = f(1) = 0$ dır. $(-1, 1)$ de $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir C noktası var mıdır? Bu sonuç Rolle teoremiyle çelişir mi?

27. Rolle teoreminden yararlanarak

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

28. $f(x) = x^{2/3}$ fonksiyonunun $[-1, 27]$ aralığında ortalama değer teoreminin koşullarını sağlamadığını fakat $[-1, 27]$ aralığında

$f'(x_0) = \frac{f(27) - f(-1)}{27 - (-1)}$

olacak şekilde bir x_0 noktasının var olduğunu gösteriniz.

29. $x^3 - 8x + 1 = 0$

denkleminin kaç reel kökü vardır.

30. $y = x^3 + bx^2 + cx + d$

eğrisinin $x = 1$ de bir dönem noktasına sahip olması için b ne olmalıdır? Burada b, c, d birer sabit sayıdır.

31. *$y = ax^3 + b^2 + cx + d$ $(c \neq 0)$ eğrisinin bir dönüm noktasına sahip olmadığını gösteriniz.*

Bu dönüm noktasının apsisini hesaplayınız. Bulduğunuz sonucu yorumlayınız.

32. $y = ax^2 + bx + c$ $(c \neq 0)$ eğrisinin bir tek dönüm noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

33. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $y = x^n$ eğrisinin en fazla bir dönüm noktasına sahip olabileceğini gösteriniz.

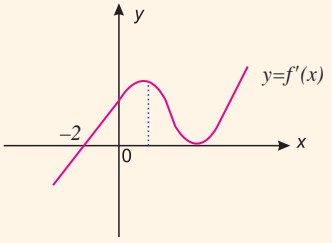
34. $y = |x|$ eğrisi konveks midir?

35. f çift ve f nin grafiği $(0, +\infty)$ aralığında konveks ise $(-\infty, +0)$ aralığında da konveks midir?

36. $f(x) = x^7 - 448x + 310$

eğrisi x eksenini kaç noktada keser?

37.



Yukarıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Varsa f nin yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Bölüm

6

BELİRSİZ İNTEGRAL



6.1 BELİRSİZ İNTEGRAL

Bir bakıma türev alma işleminin tersi olan integral alma işlemi fen ve mühendisliğin en çok ihtiyaç duyduğu matematik konularının başında gelir.

Bu bölümde belirsiz integral kavramını tanıtacak, daha sonra çeşitli integral alma yöntemlerini vermeye çalışacağız.

TANIM

Türevi $f(x)$ veya diferensiyeli $f(x)\,dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$ in **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{6.1}$$

şeklinde gösterilir. Buna göre

$$F(x) = \int f(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

olacaktır. Diğer taraftan her sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x)$$

yazılabilir ki bu da $f(x)$ in integralinin $F(x) + C$ şeklinde de yazılabileceğini gösterir. Tamamen keyfi olan bu C sabitine **integrasyon sabiti** denir. O halde (6.1) ifadesi

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{6.2}$$

şeklinde yazılabilir. Demek ki $\int f(x)\,dx$ integralini hesaplamak demek türevi $f(x)$ olan fonksiyonu bulmak demektir.

ÖRNEK :

$\int 2x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Bu integrali hesaplamak için türevi $2x$ olan ifadeyi bulmak gerekir. Bu ifadenin x^2 olduğunu türev kavramını incelerken görmüştük. Şu halde

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

olur.

Şimdi belirsiz integrallere ait bazı özellikleri inceleyelim.

Özellik 1 : Her a reel sayısı için

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (6.3)$$

dir. Yani integral içindeki sabit çarpan integralinin dışına alınabilir. Bu özelliğin sağlandığını Bölüm 5 deki

$$\frac{d}{dx}[a\cdot F(x)] = a\cdot\frac{d}{dx}F(x)$$

türev alma kuralını kullanarak gösterebiliriz.

Özellik 2 : Sonlu sayıda terimlerin toplamından oluşan bir ifadenin integrali, bu terimlerin ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir. Yani sonlu bir p doğal sayısı için

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+...+f_p(x)]dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+...+\int f_p(x)dx \quad (6.4)$$

dır. Özellik 1 ve 2 gözönüne alınırsa $a_1, a_2, ..., a_P$ reel sayılar olmak üzere,

$$\int [a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+...+a_Pf_P(x)]dx$$
$$= a_1\int f_1(x)dx+a_2\int f_2(x)dx+...+a_p\int f_p(x)dx$$

yazılabilir. Bu eşitlik sonlu sayıdaki toplamlar için doğrudur. Sonsuz toplamlar için bu eşitlik gerçeklenmeyebilir.

Bir integral alma işleminde, integrali alınacak olan ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu görülebiliyorsa, bu fonksiyona keyfi bir C sabiti eklemek suretiyle integral alınmış olur. Buna göre, türev konusunda gördüğümüz bağıntılar yardımıyla aşağıdaki integral formülleri yazabiliriz.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+C \quad (m\neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int e^x dx = e^x+C$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x+C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x+C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x+C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+C = -\operatorname{arccot} x+C_1$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C = -\arccos x+C_1$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x+C$
12. $\int \cosh x dx = \sinh x+C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

Şimdi bu formüllerden yararlanarak bazı integralleri hesaplayalım.

ÖRNEK : $\int (9x^2+6x+3)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int (9x^2+6x+3)dx = 9\int x^2dx + 6\int xdx + 3\int dx$

$$= 9\cdot\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} + 3x + C = 3x^3 + 3x^2 + 3x + C$$

ÖRNEK : $\int (3\cos x + x^{3/2} + \frac{1}{2x})dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int (3\cos x + x^{3/2} + \frac{1}{2x})\,dx = 3\int \cos x dx + \int x^{3/2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$

$$= 3\sin x + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

ÖRNEK : $\int (2\sinh x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x})\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int (2\sinh x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x})\,dx = 2\int \sinh x dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int x^{1/2}dx$

$$= 2\cosh x + 3\arcsin x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

ÖRNEK : $\int (2e^x + 3\cdot 5^x + \frac{2}{1+x^2})\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int (2e^x + 3\cdot 5^x + \frac{2}{1+x^2})\,dx = 2\int e^x dx + 3\int 5^x dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= 2e^x + \frac{3}{\ln 5}5^x + 2\arctan x + C$$

ÖRNEK : $\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}dx = \int x^{3/2}dx - 2\int x^{1/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$

ÖRNEK : Bir eğrinin x apsisli noktasındaki teğetinin eğimi $4x^3 - 2x + 1$ dir. Bu eğri $(0, 1)$ noktasından geçtiğine göre, eğrinin denklemini bulunuz.

Çözüm : $y' = 4x^3 - 2x + 1 \Rightarrow y = \int (4x^3 - 2x + 1)\,dx \Rightarrow$

$$y = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + x + C = x^4 - x^2 + x + C$$

olur. Eğri $(0, 1)$ noktasından geçtiğinden bu noktanın koordinatları eğri denklemini sağlar.

$$1 = 0 - 0 + 0 + c \Rightarrow C = 1$$

bulunur. İstenen eğri denklemi

$$y = x^4 - x^2 + x + 1$$

olur.

PROBLEMLER 6.1

1. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $f(x)$ ifadesini bulunuz.

a. $\int xf(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x + x\ln x + C$

b. $\int e^x f(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

c. $\int x^2 f(x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int (\sqrt[5]{x} + x^2)dx$

b. $\int (2x^2 - 5x + 3)\,dx$

c. $\int (1-x)^3\sqrt{x}\,dx$

ç. $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2}\,dx$

d. $\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1}\,dx$

e. $\int (a+x)^3\,dx$

f. $\int \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

g. $\int (2^x + x^2)\,dx$

ğ. $\int (1+x)^4\,dx$

h. $\int (x^3+1)^2 x^2\,dx$

ı. $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$

i. $\int \frac{2 + x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

j. $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{2}{1+x^2}\right)dx$

k. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

l. $\int \sqrt{x}\,(1 - \sqrt[3]{x})dx$

m. $\int (\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)dx$

3. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ olduğuna göre, $\int f^{-1}(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

4. $\int \frac{\cos^4 x}{\cos 2x}\,dx - \int \frac{\sin^4 x}{\cos 2x}\,dx$ işleminin sonucunu hesaplayınız.

5. $y = f(x)$ eğrisinin her bir (x, y) noktasındaki teğetinin eğimi $2x - 3$ dir. Bu eğri $(1, 4)$ noktasından geçtiğine göre $f(x)$ ifadesini bulunuz.

6. Türevi $f'(x) = x^3$ ve grafiği $x + y = 0$ doğrusuna teğet olan f fonksiyonunu bulunuz.

7. f fonksiyonunun grafiği $(0, 1)$ noktasından geçmektedir. Eğrinin her bir noktasındaki teğetinin eğimi o noktanın koordinatlarının çarpımına eşittir. f fonksiyonunun kuralını bulunuz.

8. Türevi kendisine eşit olan negatif bir f fonksiyonu için $f(-1) = -1$ ise $f(0)$ nedir?

9. İvmesi sabit a değerine eşit olan bir hareketlinin $t = 0$ anındaki hızı V_0, başlangıçtan uzaklığı s_0 olsun. Bu hareketlinin t anındaki hızının

$$V = V_0 + at,$$

aldığı yolun

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

olacağını gösteriniz.

6.2 İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

Bazen integrali alınacak ifadenin (integrantın) hangi ifadenin türevi olduğunu görmek çok zordur. Bunun için bazı integrasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Şimdi bu yöntemlerden en kullanışlı olanlarını verelim.

6.2.1. İNTEGRASYONDA DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

$\int f(x)\,dx$ integralinde, $x = u(t)$ fonksiyonu tersi olan bir fonksiyon olmak üzere, $x = u(t)$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapıldığında $\int f(u(t))\,u'(t)\,dt$ integrali elde edilir. Eğer bu son integral alınabilirse, $t = u^{-1}(x)$ konularak tekrar ilk değişken olan x değişkenine dönülür. Şimdi bu anlattıklarımızı örneklerle açıklamaya çalışalım.

ÖRNEK : $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x - 1 = u^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $dx = 2u\,du$ olacağından

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2+1)u\cdot 2u\,du = 2\int (u^4+u^2)dt = 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)+C$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{2x-5}{x^2-5x-7}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x^2 - 5x - 7 = t$ denirse $(2x - 5)\,dx = dt$ olur. Bu değerler yerine konulursa,

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x-7}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|x^2-5x-7\right|+C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $g(x) = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $g'(x)\,dx = dt$ olacağından

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = ln|\,t\,| + C = ln|\,g(x)\,| + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int (x^3+x)^9 (3x^2+1)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x^3 + x = 1$ değişken değiştirmesi yapılırsa $(3x^2 + 1)\,dx = dt$ olacağından

$$\int (x^3+x)^9 (3x^2+1)dx = \int t^9\,dt = \frac{1}{10}t^{10} + C = \frac{1}{10}(x^3+x)^{10} + C$$

bulunur.

Yukarıdaki örneklerden de gördüğümüz gibi, her bir integrale ayrı bir değişken değiştirmesi uygulanmaktadır. Fakat bazı özel tipte olan integraller vardır ki bu integrallere uygulanacak değişken değiştirmeleri bellidir. Bu özel değişken değiştirmelerden birkaçını verelim.

1. ***$\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade ihtiva etmeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için***

$x = a\,sint$

değişken değiştirmesi yapılır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = a\,sin\,t$ denirse $dx = a\,cost\,dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2 sin^2 t}} = \int \frac{a\cos t dt}{a\sqrt{1-sin^2 t}}$$
$$= \int dt = t + C = arcsin\frac{x}{a} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

yazılabilir. $2x = u$ denirse $2dx = du$ olacağından,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}arcsin\,u + C = \frac{1}{2}arcsin\,2x + C$$

bulunur.

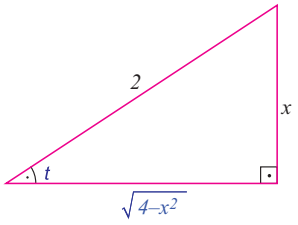
ÖRNEK : $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = 2\,sint$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $dx = 2\,cost\,dt$ olacağından

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2\sin t+1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,dt = -2\cos t + t + C$$

bulunur.

$x = 2\,sint \Rightarrow \frac{x}{2} = sint \Rightarrow t = arcsin\,\frac{x}{2}$ olduğundan



$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\cos\left(arcsin\frac{x}{2}\right) + arcsin\frac{x}{2}$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + arcsin\frac{x}{2} + C$$

olur.

2. $\sqrt{x^2-a^2}$ ***den başka köklü ifade ihtiva etmeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için***

$$x = \frac{a}{cost} \text{ veya } x = acosht$$

değişken değiştirmesi yapılır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = \frac{a}{\cos t}$ denirse $dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sin t/\cos^2 t}{\frac{a}{\cos t}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}}\,dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C$$

$$= \frac{1}{a}arccos\frac{a}{x} + C$$

3. $\sqrt{a^2+x^2}$ ***den başka köklü ifade ihtiva etmeyen fonksiyonların integrasyonu için***

$$x = a\tan t$$

değişken değiştirmesi kolaylık sağlar.

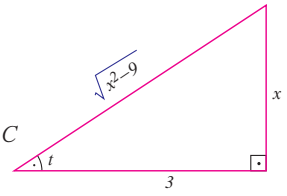
ÖRNEK : $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = 3\tan t$ denirse $dx = (3/\cos^2 t)\,dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3/\cos^2 t}{9\tan t\sqrt{9\tan^2 t+9}}dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{9}\int \sin^{-2} t\cos t\,dt$$

olur. $\sin t = u$ denirse $\cos t\,dt = du$ olacağından

$$\int \sin^{-2} t\cos t\,dt = \int u^{-2}\,du = -\frac{1}{u} + C \text{ dir. O halde}$$



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\sin\left(\arctan\frac{x}{3}\right)} + C = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x} + C$$

olur.

4. ***$\sqrt[n_i]{ax+b}$ şeklindeki ifadeleri ihtiva eden fonksiyonların integralini hesaplamak için n_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı p olmak üzere***

$$ax + b = t^p$$

değişken değiştirmesi yapılır.

ÖRNEK : $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Kök kuvvetleri 2 ile 3 olduğundan EKOK (2,3) = 6 dır.

$$x + 1 = t^6$$

değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = 6\,t^5\,dt$ olacağından

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{t^3+1}{t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int (t^6+t^3)\,dt$$

$$= \frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{4}t^4 + C$$

bulunur. $x + 1 = t^6 \Rightarrow \sqrt[6]{x+1} = 1 \Rightarrow t = (x+1)^{1/6}$ olduğundan

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \frac{6}{7}(x+1)^{7/6} + \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} + C$$

olur.

5. ***Trigonometrik fonksiyonlar cinsinden rasyonel olarak ifade edilen fonksiyonların integrasyonu için, yarım açı yöntemi denilen***

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

olacağından karşımıza t nin bir rasyonel ifadesinin integrali çıkar.

ÖRNEK : $\int \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\tan\frac{x}{2} = t$ denirse $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

olacağından

$$\int \frac{1+\sin x}{\cos(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+t}{1-t}dt = \int\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)dt$$

$$= -t - 2\ln|1-t| + C = -\tan\frac{x}{2} - 2\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

bulunur. □

$\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü bazı durumlarda karşımıza çok karışık integraller çıkarabilir. Bu bakımdan bu dönüşümü uygulamadan önce şu iki durumu kontrol etmekte yarar vardır :

1. Eğer $\sin x$ ve $\cos x$ in rasyonel ifadesi olan integrant $\sin x$ veya $\cos x$ in tek fonksiyonu, yani $\sin x$ veya $\cos x$ yerine $-\sin x$ veya $-\cos x$ yazıldığında integrant işaret değiştiriyorsa diğer büyüklüğe t demek uygun olur.

2. Eğer integrant, $\sin x$ veya $\cos x$ in işareti değiştirildiğinde işaret değiştirmiyorsa $\tan x = t$ veya $\cot x = t$ değişken değiştirmesi uygun olur.

PROBLEMLER 6.2

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int xe^{x^2}\,dx$

b. $\int x^2(1+x^3)^4\,dx$

c. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

ç. $\int \frac{x^7}{1-x^4}\,dx$

d. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

e. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

f. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$

g. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

h. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

ı. $\int e^{-3x}\,dx$

i. $\int (e^{x/2}+e^{-x/2})dx$

j. $\int (3-2x)^4\,dx$

k. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

l. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

m. $\int \tan x\,dx$

n. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$

o. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$

ö. $\int e^{x^3}x^2\,dx$

p. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

r. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

s. $\int xe^{-x^2}\,dx$

ş. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

t. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}\,dx$

u. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

ü. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+3}{\sqrt[4]{x-1}}\,dx$

v. $\int \frac{dx}{\sin x}$

y. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

z. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx$

b. $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\,dx$

c. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[4]{x-1}}\,dx$

3. Aşağıdaki integralleri, karşılarında yazılı dönüşümler yardımıyla hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$, $x=\frac{1}{t}$

b. $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x=-\ln t$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$, $x=\ln(1+t^2)$

ç. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $x=\ln(t^2-1)$

d. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^4 x}$, $t=\tan x$

e. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$, $t=\tan x$

f. $\int \sin^5 x\,dx$, $t=\cos x$

4. $a(\sin x+\cos x)+b(\cos x-\sin x)=5\cos x+\sin x$ eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

Bundan yararlanarak

$$\int \frac{5\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

6.2.2. KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

u ile v, x değişkeninin birer fonksiyonu olsunlar. Bir çarpımın diferensiyelinden

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + dv \cdot u \Rightarrow$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın integralini alırsak

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du \qquad (6.5)$$

bulunur. Eğer $\int v\,du$ integralinin hesabı $\int u\,dv$ integralinin hesabından daha kolay ise bu yöntem oldukça fayda sağlar. Demek ki bu yöntemi kullanmak için integral içini u ve dv diye öyle iki çarpana ayırmalıdır ki, $\int v\,du$ integrali $\int u\,dv$ integralinden daha kolay olsun.

ÖRNEK : $\int x \sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x, \quad \sin x\,dx = dv$ denirse $du = dx, \; v = \int \sin x dx = -\cos x$ olur. O zaman (6.5) formülü gereğince

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \ln x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\ln x = u, \quad dx = dv$ denirse $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ olacağından

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int e^{ax}\cos bxdx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = e^{ax}$, $\cos bxdx = dv$ denirse $du = ae^{ax}\,dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$

olacağından

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx$$

olur. Son integrale aynı yöntem tekrar uygulanırsa

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx$$

elde edilir. Son integral hesaplanması gereken integraldir. Bu integral eşitliğin soluna geçilirse

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

bulunur. Her iki taraf $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ile bölünürse

$$\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} + C$$

eşitliği elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = xe^x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$ denirse, $du = (1+x)\,e^x\,dx$, $v = -\frac{1}{x+1}$

olacağından

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = xe^x\cdot\frac{-1}{x+1} - \int \frac{1}{x+1}(1+x)e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x\,dx$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

bulunur.

PROBLEMLER 6.3

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int arcsin\,x dx = x\cdot arcsin\,x + \sqrt{1-x^2} + C$

b. $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2-2x+2)+C$

c. $\int sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[sin(\ln x) - cos(\ln x)] + C$

d. $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

e. $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

f. $\int x^2 sin\,x dx = -x^2 cos\,x + 2x sin\,x + 2\,cos\,x + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int arctan\,x\,dx$

b. $\int e^{2x} sin\,3x dx$

c. $\int x^3 \ln x dx$

d. $\int e^x sin\,x dx$

e. $\int e^{ax} sin\,bx dx$

f. $\int (\ln x)^2\,dx$

g. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

h. $\int x(x-1)^8\,dx$

i. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

j. $\int x^2 e^{-3x} dx$

k. $\int cos(\ln x)dx$

l. $\int (x^2-2x+5)e^x\,dx$

m. $\int (ax^2+bx+c)e^{-x}dx$

n. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

o. $\int arc\,cot\,x dx$

ö. $\int x \ln(x^2) dx$

p. $\int x sec^2 x\,dx$

r. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int xe^{3x}\,dx$

b. $\int x\,cos\,x dx$

c. $\int arccos\,x dx$

ç. $\int x \ln(x^2-1)dx$

d. $\int x^3 \ln^2 x\,dx$

e. $\int x \ln^2 x\,dx$

f. $\int \frac{x\,arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

g. $\int \ln(x^2+1)\,dx$

ğ. $\int \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2}\,dx$

h. $\int sin\sqrt{x}\,dx$

ı. $\int \frac{\ln(sin\,x)}{tan\,x}\,dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. (Önce uygun bir değişken değiştirmesi sonra kısmi integrasyon yöntemi uygulayınız.)

a. $\int e^{2x} cos\,e^x dx$

b. $\int \frac{\ln x \cdot cos(\ln x)}{x}$dx

c. $\int sin\,2x \ln(cos\,x)$dx

ç. $\int cos\,x \ln(1+sin\,x)$dx

5. $P(x)$, n–ninci dereceden bir polinom olsun.

$\int P(x)e^{mx}dx = e^{mx}\left(\frac{P(x)}{m} - \frac{P'(x)}{m^2} + \frac{P''(x)}{m^3} - + ...\right) + C$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak $\int x^5 e^x\,dx$ integralini hesaplayınız.

6.2.3. İNDİRGENME (REKÜRANS) FORMÜLLERİ

Kısmi integrasyon metodu yardımıyla, yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli ifadelerin integrali kolayca hesaplanabilir. Şimdi bu indirgeme formüllerinden bazılarını çıkaralım.

I. $\int \sin^n x\,dx$, $(n \in \mathbb{N})$ integrali için indirgeme formülü :

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= \int \sin^{n-1}x \cdot \sin x dx = -\sin^{n-1}x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cdot \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1}x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cdot (1-\sin^2 x)dx \\ &= -\sin^{n-1}x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x dx - (n-1)\int \sin^n x dx\end{aligned}$$

buradan

$$n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1}x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx$$

olur. Her iki taraf n ye bölünürse istenen

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \qquad (6.6)$$

indirgeme formülü elde edilir.

ÖRNEK : $\int \sin^4 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 4$ konulursa

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx$$

elde edilir. Yine aynı formülde $n = 2$ alınırsa

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

bulunacağından

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C\end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK : $\int \sin^5 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 5$ alınırsa

$$\int sin^5 x dx = -\frac{1}{5} sin^4 x \cdot cos x + \frac{4}{5} \int sin^3 x \, dx$$

olur. Yine indirgeme formülünde $n = 3$ konursa

$$\int sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int sin x \, dx$$
$$= -\frac{1}{3} sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C$$

elde edileceğinden

$$\int sin^5 x \, dx = -\frac{1}{5} sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3} sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{5} sin^4 x \cos x - \frac{4}{15} sin^2 x \cos x - \frac{8}{15} \cos x + C$$

olur.

Bu integrali başka yollardan hesaplamak da mümkündür. Bu yollardan biri şudur :

$$\int sin^5 x dx = \int sin^4 x \cdot sin x dx = \int (sin^2 x)^2 sin x dx$$
$$= \int (1 - cos^2 x)^2 sin x dx$$

yazılabilir. $cos\, x = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $-sinx \cdot dx = dt$ olacağından

$$\int sin^5 x dx = \int (1 - t^2)^2 (-dt) = -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt$$
$$= -\left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{t^5}{5}\right) + C$$
$$= -\left(\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x\right) + C$$

bulunur..

II. $\int \frac{dx}{cos^n x}$, $(n > 1)$ integrali için indirgeme formülü :

$\int \frac{dx}{cos^n x} = \int \frac{dx}{cos^{n-2} x \cdot cos^2 x}$ integralinde $\frac{1}{cos^{n-2} x} = u$, $\frac{dx}{cos^2 x} = dv$

denirse $du = (n-2)\frac{sin x}{cos^{n-1} x} dx$, $v = tan x$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}dx = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{1-\cos^2 x dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\cos^n x} + \nu - 2\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

olur. $(n-2)\int \frac{dx}{\cos^n x}$ integrali eşitliğin soluna geçirilirse,

$$(n-1)\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

elde edilir. O halde indirgeme formülü

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \qquad (6.7)$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 6$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{1}{5}\frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

bulunur. Yine indirgeme formülünde $n = 4$ konursa

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{1}{5}\frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}\tan x\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{4}{15}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8}{15}\tan x + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 3$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}$$

elde edilir. Şimdi $\int \frac{dx}{\cos x}$ integralini hesaplayalım.

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{1}{\cos x}}$$

yazılabildiğinden

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{1}{\cos x}} dx$$

olur. $\tan x + \frac{1}{\cos x} = t$ denirse $\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos x}\right)dx = dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2} + \frac{\tan x}{\cos x}}{\tan x + \frac{1}{\cos x}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$
$$= \ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

olur. Bu değer yerine konursa

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

bulunur.

III. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ $(m, n \in \mathbb{N})$ integrali için indirgeme formülü

$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin^{n-1} x \cos^m x \sin x\, dx$ integralinde $\sin^{n-1} x = u$,

$\cos^m x \sin x\, dx = dv$ denir ve kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int \sin^{n-1} x \cos^m x \sin x dx = -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x dx$$
$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^m x \cos^2 x\, dx$$
$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^m x(1-\sin^2 x)dx$$
$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^n x \cos^m x\, dx$$

elde edilir. Son integral eşitliğin soluna geçirilirse

$$\frac{m+n}{m+1}\int \sin^n x \cos^m x\,dx = -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx$$

bulunur. Buradan

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx \quad (6.8)$$

bulunur.

ÖRNEK : $I = \int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $I = \int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^3 x\cos^3 x\sin x\,dx$ integralinde

$\sin^3 x = u,\ \cos^3 x\sin x\,dx = dv$ dersek

$du = 3\sin^2 x\cos x\,dx,\quad v = \int \cos^3 x\sin x dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x$

olacağından

$$I = \int \sin^3 x\cos^3 x\sin x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\cos^5 x dx$$
$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\cos^3 x\cos^2 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\cos^3 x(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\cos^3 x dx - \frac{3}{4}\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$$

olur. Son integral eşitliğin soluna geçirilir ve her iki taraf $\frac{4}{7}$ ile çarpılırsa

$$\int \sin^4 x\cos^3 dx = -\frac{1}{7}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{7}\int \sin^2 x\cos^3 x dx$$

bulunur. Şimdi son integrali hesaplayalım. Bu integral aynı yol tekrarlanarak hesaplanabildiği gibi şu şekilde de hesaplanabilir :

$\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\cos x\,dx$ olur.

$\sin x = t$ denirse, $\cos x\,dx = dt$ olacağından

$$\int (\sin^2 x - \sin^4 x)\cos x\,dx = \int (t^2 - t^4)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

bulunur. O halde

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{7}\sin^3 x \cos^4 x + \frac{1}{7}\sin^3 x - \frac{3}{35}\sin^5 x + C$$ dir.

IV. $\int \tan^n x dx \ (n \in N)$ integrali için indirgeme formülü

$n = 1$ ise

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

olur.

$n > 1$ olsun.

$$\int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2} x(1 + \tan^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int \tan^{n-2} x \cdot (1 + \tan^2 x)\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$$
$$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

olur. Demek ki

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx \qquad (6.9)$$

dir. Şimdi bununla ilgili bir örnek yapalım.

ÖRNEK : $\int \tan^4 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \tan^4 x\,dx = \int (\tan^2 x \tan^2 dx = \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x - 1)dx$
$$= \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x)dx - \int \tan^2 x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int (1 + \tan^2 x - 1)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

olur.

V. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ tipindeki integrallerin hesaplanması.

$n = 1$ için

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

olduğunu biliyoruz.

$n > 1$ olsun.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

integralinde $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}$, $dv = dx$ alınır, kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{a^2+x^2-a^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - (2n-2)a^2\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}\end{aligned}$$

bulunur. Son integral eşitliğin soluna geçirilir ve her iki taraf $(2n-2)\,a^2$ ile bölünürse

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \qquad (6.10)$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(4+x^2)^3}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Yukarıdaki eşitlikte $n = 3$, $a = 2$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^3} = \frac{x}{16(4+x^2)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$$

bulunur. Yine yukarıdaki formül son integrale uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(4+x^2)^3} &= \frac{x}{16(4+x^2)^2} + \frac{3}{16}\left[\frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{4+x^2}\right] \\ &= \frac{x}{16(4+x^2)^2} + \frac{3x}{128(4+x^2)} + \frac{3}{256}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

bulunur.

VI. $b^2 - 4ac < 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

integralinin hesabı,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

olduğundan

$$x+\frac{b}{2a}=u, \quad \frac{4ac-b^2}{4a^2}=k^2$$

denirse

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n}\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}$$

integrali elde edilir. $n = 1$ ise

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}, \ \frac{1}{k}\arctan\frac{u}{k}+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C$$

olur. n > 1 olsun. (6.10) dan

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n}\left[\frac{u}{(2n-2)k^2(k^2+u^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)k^2}\int \frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}}\right]$$

bulunur. u nun ve k nın değerleri yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa, $n > 1$ için

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2a(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (6.11)$$

indirgeme formülü elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : (6.11) de $n = 2$ alırsa, $a = 1, b = -2$ ve $c = 2$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$
$$= \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$
$$= \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}Arc\tan(x-1)+C$$

olur.

VIII. $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ $(n \in \mathbb{N},\ b^2-4ac<0)$ integralinin hesabı.

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$
$$= -\frac{A}{2a(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

yazılabilir. (6.11) den yararlanarak son integral hesaplanırsa

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(2AB-Ab)(2ax+b)}{(n-1)2a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)(2aB-Ab)}{2a(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (6.12)$$

indirgeme formülü elde edilir.

PROBLEMLER 6.4

1. Aşağıdaki indirgeme formüllerinin doğruluğunu gösteriniz. Burada n doğal sayıları verilen eşitlikleri tanımlı kılan sayılardır.

a. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

b. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

c. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

ç. $\int \cot^n x\,dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2}x\,dx$

d. $\int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1}x + \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}\,dx$

e. $\int \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = \frac{-1}{n-1}\sin^{n-1}x + \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}\,dx$

f. $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{-\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2}x}\,dx$

g. $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2}x}{\sin^n x}\,dx$

h. $\int (a^2-x^2)^n\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}\,dx$

ı. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$

i. $\int x^n(\ln x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n - \frac{n}{n+1}\int x^n(\ln x)^{n-1}dx$

j. $\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\left[x^n \sin ax - n\int x^{n-1}\sin ax\,dx\right]$

k. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

2. $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ olduğuna göre $n \geq 2$ için

$$I_n = \frac{2\sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

3. $I_n = \int \frac{x^n\,dx}{1+x^2}$ olduğuna göre $n > 1$ için

$$I_n = \frac{x^n - 1}{n-1} - I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin^4 x\,dx$

b. $\int \cos^7 x\,dx$

c. $\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$

d. $\int \tan^5 x\,dx$

e. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx$

f. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$

g. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}\,dx$

h. $\int \cot^4 x\,dx$

m. $\int (4-x^2)^3\,dx$

n. $\int \frac{\sin 5x}{\sin x}\,dx$

o. $\int \frac{x^4\,dx}{1+x^2}$

ö. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$

p. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$

r. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x}\,dx$

s. $\int (x\ln x)^3\,dx$

ş. $\int x^3\cos 2x\,dx$

ı. $\int x^{10} \ln x \, dx$

i. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

j. $\int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^5 dx$

k. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

l. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$

t. $\int \frac{x^6}{1+x^2} dx$

u. $\int \frac{x^5}{4+x^2} dx$

v. $\int x^4 \sin x dx$

y. $\int (4-x^3)^4 dx$

z. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

5. $\int x^m (\ln x)^n dx$ integrali için bir indirgeme bağıntısı bulunuz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x^3 (\ln x)^2 dx$

b. $\int x^2 (\ln x)^3 dx$

c. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

ç. $\int x^2 \sqrt{\ln x} \, dx$

d. $\int x^2 \ln x dx$

e. $\int x^5 \ln^2 x dx$

f. $\int x^2 \ln^3 x$

g. $\int x^{3/2} \ln x dx$

6. $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$ integrali için

a. $I_0 = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|$

b. $I_1 = \sqrt{x^2+a}$

c. $I_n = \frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{a^2+a} - \frac{n-1}{n} a I_{n-2}$

olduğunu gösteriniz.

7. *f*, türevlenebilen bir fonksiyon ve $f'(x) = 0$ olsun.

a) Kısmi integrasyon yönteminden yararlanarak $\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)dx$ olduğunu gösteriniz.

b) (*a*) dan yararlanarak $y = f(x)$ olduğunda $\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$ olacağını gösteriniz.

c) $f(a) = \alpha$ ve $f(b) = \beta$ olsun (*b*) den yararlanarak $\int_a^b f^{-1}(x)dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx$ olacağını gösteriniz.

6.2.4. BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

$P(x)$ ve $Q(x)$, birer polinom olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

yazılabilir. Burada $K(x)$ bir polinomdur ve $R(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden küçüktür. Şu halde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel fonksiyonunun integrallenmesi payının derecesi paydasının derecesinden küçük olan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenmesine indirgenir. Diğer taraftan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ifadesi $b^2 - 4ac < 0$ ve $n > 1$ olmak üzere

$$\frac{M}{px+q} \quad , \quad \frac{N}{(px+q)^n} \quad , \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad \text{ve} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

şeklindeki bazı kesirlerin toplamı şeklinde yazılabilir. O hâlde $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ şeklinde bir integral, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int K(x)dx, \ \int \frac{dx}{px+q}, \ \int \frac{dx}{(px+q)^n}, \ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx, \ \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

şeklindeki integrallerin hesabına indirgenmiş olur. Bu integrallerin nasıl hesaplandığını daha önce görmüştük.

ÖRNEK : $\int \frac{2dx}{x^2-1}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ olduğundan

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde A ve B sabitlerini bulalım. Paydalar eşitlenirse

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

elde edilir. Buradan da

$$2 = (A+B)x + A - B$$

yazılabilir. Belirsiz katsayılar teoreminden

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden $A = 1, B = -1$ olduğu görülür. A ve B nin bu değerleri yerine konursa

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = ln|x-1| - ln|x+1| + C = ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{2x^2-5x+9}{(x-1)^2(x+2)} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{2x^2-5x+9}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

olacak şekilde A, B ve C sabitlerini bulalım. Paydalar eşitlenirse

$2x^2 - 5x + 9 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \Rightarrow$

$2x^2 - 5x + 9 = (A + C)x^2 + (A + B - 2C)x - 2A + 2B + C \Rightarrow$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A + B - 2C = -5 \\ -2A + 2B + C = 9 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Şimdi bu denklem sistemini çözelim. Birinci denklemden $C = 2 - A$ olur. C nin bu değeri diğer iki denklemde yerine konursa

$$\begin{cases} 3A + B = -1 \\ -3A + 2B = 7 \end{cases}$$

bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa $3B = 6 \Rightarrow B = 2$ bulunur.

$$3A + B = -1 \Rightarrow 3A + 2 = -1 \Rightarrow A = -1$$

ve

$$C = 2 - A = 2 - (-1) = 3$$

olur. Bunlar yerine konursa

$$\int \frac{2x^2-5x+9}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \left[\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2}\right] dx$$

$$= -ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + 3ln|x+2| + C$$

$$= ln\left|\frac{(x+2)^3}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

olacak şekilde $A,\ B,\ C$ sabitlerini bulalım (Payda ikinci dereceden bir ifade olduğu zaman, payın birinci dereceden genel bir ifade olduğuna dikkat ediniz). Paydalar eşitlenirse

$$5x^2 + 3 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)\,(2x + 1) \Rightarrow$$

$$5x^2 + 3 = (A + 2B)x^2 + (B + 2C)\,x + 4A + C \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + 2B = 5 \\ B + 2C = 0 \\ 4A + C = 3 \end{cases}$$

bulunur. Bu sistemin çözümünden

$$A = 1,\ B = 2,\ C = -1$$

bulunur. Bunlar yerine konursa

$$\int \frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx = \int \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{2x-1}{x^2+4}\right] dx = \int \frac{dx}{2x+1} + \int \frac{2x-1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|2x+1\right| + \int \frac{2xdx}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|2x+1\right| + ln(x^2+4) - \frac{1}{2} arctan\frac{x}{2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

yazılır ve katsayıları hesaplanırsa

$$A = B = D = 1,\ C = -3,\ E = -4$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(x-3)dx}{x^2+x+1} + \int \frac{(x-4)dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-7}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{(x-4)dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln(x^2+x+1) - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-9}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^4+x^3+x^2) - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^4+x^3+x^2) - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{7}{\sqrt{3}}arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{3(2x+1)}{2(x^2+x+1)} - 2\sqrt{3}\,arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^4+x^3+x^2) - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{13}{\sqrt{3}}arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3(2x+1)}{2(x^2+x+1)} + C$$

olur.

PROBLEMLER 6.5

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

b. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} = ln\left|\frac{(x-2)^{3/10}(x+3)^{-2/15}}{x^{1/6}}\right| + C$

c. $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1} = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

ç. $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx = ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3} arctan\frac{x+2}{3} + C$

d. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5} ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$

b. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

c. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$ **d.** $\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$

e. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$ **f.** $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$

g. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$ **ı.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$

i. $\int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}dx$ **j.** $\int \frac{x^3}{(x+1)^3}dx$

k. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}dx$ **l.** $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$

m. $\int \frac{-2x+4}{(1+x^2)(x-1)^2}dx$ **n.** $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$ **b.** $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^3}$

c. $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}dx$ **ç.** $\int \frac{dx}{x^3+x}$

d. $\int \frac{x+4}{x^3+4x}dx$ **e.** $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

f. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-1}dx$ **g.** $\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

4. Aşağıdaki integralleri önce bir değişken değiştirmesiyle rasyonel fonksiyonların integraline dönüştürünüz. Sonra integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}du$ **b.** $\int \frac{sin\,t\,cos\,t\,dt}{(1+sin\,t)(1+sin^2 t)}$

c. $\int \frac{sin\,y\,dy}{cos^2 y + cos\,y - 6}$ **ç.** $\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

d. $\int \frac{cos\,\theta d\theta}{sin^2\theta + sin\,\theta - 2}$ **e.** $\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$

5. $\int \frac{dx}{a\,sin\,px + b\,cos\,px} = \frac{1}{p\sqrt{a^2+b^2}} ln\left|tan\frac{px + arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integrallerin değerini bulunuz.

a. $\int \frac{dx}{3\,sin\,x + \sqrt{3}\,cos\,x}$ **b.** $\int \frac{1}{sin\,x}dx$

6.2.5. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ İFADESİNİ BULUNDURAN İNTEGRALLER

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ***integralinin hesabı.***

Bu integralin hesaplanması a, b, c sayılarının değerine göre değişir.

1. $b^2-4ac>0$ ve $a<0$ ise kök içi k^2-u^2 haline dönüştürülebilir.

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{k}+C$$

formülü ile integral hesaplanır.

2. $b^2-4ac>0$ ve $a>0$ ise kök içi u^2-k^2 formuna getirilebilir.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-k^2}\right)+C$$

bağıntısından faydalanılarak integral hesaplanır.

3. $b^2-4ac<0$ ve $a>0$ ise kök içi u^2-k^2 haline getirilir ve

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-k^2}\right)+C$$

bağıntısından yararlanılır.

4. $b^2-4ac=0$ ve $a>0$ ise ax^2+bx+c bir tamkare olup, kök dışına çıkar.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $-x^2+2x+3 = 3-(x^2-2x) = 4-(x^2-2x+1) = 4-(x-1)^2$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = Arc\sin\frac{u}{2}+C = \arcsin\frac{x-1}{2}+C$$

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left[\left(x-\frac{3}{4}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left(4x-3+\sqrt{16x^2-24x+8}\right) + C$$

olur.

II. $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ***integralinin hesabı.***

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

olur. Son integral **(I)** tipinde bir integraldir. Bunun nasıl hesaplandığını biliyoruz.

ÖRNEK : $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\right)$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\,ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$$

III. $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ***integralinin hesabı.***

Bu integralde $\frac{1}{mx+n} = t$ dönüşümü yapılırsa **(II)** tipinde bir integral elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{1}{x+1}=t$ denirse $x=\frac{1-t}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$ olacağından

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C$$

bulunur.

IV. $P_n(x)$, n inci dereceden bir polinom olmak üzere

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

şeklindeki integrallerin hesabı.

$Q_{n-1}(x)$, $n-1$ inci dereceden, bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bir sayı olmak üzere

$$\int \frac{P_n(x)\cdot dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın türevi alınır ve x'lerin katsayıları eşitlenirse $Q_{n-1}(x)$ in katsayıları ile λ sayısı bulunur. İş (**I**) tipindeki bir integralin hesaplanmasına dönüşür.

ÖRNEK : $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=(ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

eşitliğinde iki tarafın türevi alınır, paydalar eşitlenir ve x in kuvvetlerine göre sıralanırsa

$$x^4+4x^2=4ax^4+3bx^3+(2c+12a)x^2+(8b+d)x+(4x+\lambda)$$

elde edilir. Katsayılar karşılaştırılırsa

$$a=\frac{1}{4},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{2},\quad d=0,\quad \lambda=-2$$

bulunur. O hâlde

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$$

olur.

V. $n\in\mathbb{N}$ ***olmak üzere*** $\int \frac{dx}{(x-p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ***integralinin hesabı.***

Bu integralde $\frac{1}{x-p}=t$ dönüşümü yapılırsa **(IV)** tipinde bir integral elde edilir.

ÖRNEK : $I=\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{1}{x+1}=t$ dönüşümü yapılırsa $x=\frac{1-t}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$ olacağından

$$I=\int \frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+2\left(\frac{1-t}{t}\right)}}-\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

bulunur. Bu **(IV)** tipinde bir integraldir.

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=(At+B)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\Rightarrow$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}=A\sqrt{1-t^2}+(At+B)\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}\Rightarrow$$

$$t^2=-2At^2-Bt+A+\lambda\ \Rightarrow\ A=-\frac{1}{2},\quad B=0,\quad \lambda=\frac{1}{2}$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t+C$$

dır. Buna göre

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)+C$$

olur.

6.2.6. BİNOM İNTEGRALLERİ

a ve b herhangi reel sayılar, p, q ve r rasyonel sayılar olmak üzere

$$\int x^r (a + bx^p)^q \, dx \qquad (6.13)$$

şeklindeki integrallere **binom integralleri** denir.

I. q tam sayı ise, r ile p nin paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere

$$x = t^k$$

dönüşümü yardımıyla integral rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1/2}(1+x^{1/3})^{-2}\,dx$ olduğundan

$r = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$ ve $q = -2$ dir, q bir tamsayı olduğundan

$$x = t^6$$

dönüşümünü yapmak gerekir. $x = t^6$ olduğunda $dx = 6t^5\,dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} = 6\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = 6\int \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= 6\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 6\arctan t - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

bulunur. Şimdi bu son integrali hesaplayalım.

$\int \frac{dt}{1+t^2}$ integralinde, $u = \frac{1}{1+t^2}$ ve $dv = dt$ alınarak, kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} + 2\int \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{1+t^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

bulunur. Buradan

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa ve $t = x^{1/6}$ konursa

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} = -\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + 3\arctan(x^{1/6}) + C$$

bulunur.

II. q bir tam sayı olmasın. (6.13) integralinde $x^p = y$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{p}\int (a+by)^q\, y^{\frac{r+1}{p}-1} dy \qquad (6.14)$$

integrali elde edilir. $\frac{r+1}{p}$ tam sayı ise, q nun paydası n olmak üzere

$$a + by = t^n$$

değişken değiştirmesi yapıldığında yukarıdaki integral bir rasyonel fonksiyonun integraline indirgenir. Şu halde $q \notin \mathbb{Z}$ ve $\frac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$ ise, q nun paydası n olmak üzere,

$$a + bx^p = t^n$$

değişken değiştirmesini yapmak gerekir.

ÖRNEK : $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Burada $r = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ ve $q = \frac{1}{3}$ olup $\frac{r+1}{p} = 2 \in \mathbb{Z}$ dir.

$$1 + x^{1/4} = t^3 \Rightarrow x = (t^3 - 1)^4$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12\int (t^6 - t^3)\, dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C$$
$$= \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3} + C$$

bulunur.

III. Yukarıdaki (6.13) integrali

$$\int \left(\frac{a+by}{y}\right)^q y^{\frac{r+1}{p}+q-1} dy$$

formunda da yazılabilir. $\frac{r+1}{p} \notin \mathbb{Z}$ fakat $\frac{r+1}{p}+q \in \mathbb{Z}$ ise q nun paydası n olmak üzere

$$\frac{a+by}{y} = t^n$$

dönüşümü ile integral bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüşür.

Şu halde $\frac{r+1}{p}+q$ tamsayı ise

$$ax^{-p} + b = t^n$$

dönüşümü ile rasyonel bir fonksiyonun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\mathrm{I} = \int \sqrt{\frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^{11}}}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen integral $\mathrm{I} = \int x^{1/2}(1+\sqrt[3]{x})^{-11/2} dx$ şeklinde yazılabileceğinden

$r = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$ ve $q = -\frac{11}{2}$ dir. $\frac{r+1}{p}+q = -1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$$x^{-1/3} + 1 = t^2$$

değişken değiştirmesini yapmak gerekir. $x = (t^2-1)^{-3} \Rightarrow dx = -6t(t^2-1)^{-4}\, dt$ değerleri integralde yerine konulduğunda

$$\mathrm{I} = -6\int t^{-10} dt = -6 \cdot \frac{t^{-9}}{-9} + C = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^{-1/3}+1)} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right]^{9/2} + C$$

bulunur.

PROBLEMLER 6.6

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$ **b.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$ **ç.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x-4}}$

d. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$ **e.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ **b.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

c. $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ **ç.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-2x+x^2}}dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$ **b.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x}}$ **d.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ **b.** $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c. $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$ **ç.** $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

b. $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x+2}}$

c. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}}dx$

d. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx$ **b.** $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

c. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^5}}$ **d.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

e. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$ **f.** $\int \frac{x^5dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

g. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ **h.** $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}$

ı. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$ **i.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

j. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x^3}dx$ **k.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

l. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$ **m.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
4. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$
5. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
7. $\int \cos(\ln x)dx$
8. $\int x\cos^2 x\,dx$
9. $\int \frac{\sin x dx}{a^2+\cos^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$
11. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx$
12. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
13. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$
14. $\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}dx$
15. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
16. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x}+1}$
17. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$
18. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$
19. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$
20. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$
21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$
22. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$
23. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-\sin x}$
24. $\int \frac{dx}{1+3\sin 2x}$
25. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+2\cos x)}$
26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$
27. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$
30. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$
31. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$
32. $\int (e^x+1)^3 e^x dx$
33. $\int \frac{dx}{1+e^x}$
34. $\int e^x \sin e^x\,dx$
35. $\int \frac{x^5}{x^{12}-1}dx$
36. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
37. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
38. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$
39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$
40. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
41. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$
42. $\int |x|dx$
43. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

44. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$

45. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

46. $\int \sin x \cdot e^{-\cos x}\,dx$

47. $\int x^2 e^{2x}\sin x dx$

48. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

49. $\int \frac{dx}{x^4+16}$

50. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

51. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,(ab \neq 0)$

52. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,(a \neq 0)$

53. $\int \frac{dx}{1+a\cos x}\,(a > 0)$

54. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

55. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}$

56. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,dx$

58. $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$

59. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

60. $\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx$

61. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

62. $\int \frac{\sin x dx}{5+4\sin x}$

63. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}\,(a^2+b^2 \neq 0)$

64. $\int \frac{a+\tan x}{1-a\tan x}\,dx$

65. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$

66. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

67. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

68. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

69. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$

70. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$

71. $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

72. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}}$

73. $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)...(x+p)}\,(p \in \mathbb{N})$

75. $\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x + \cos x)^2}$

76. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

77. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

78. $\int \frac{xdx}{1+x\tan x}$

79. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$

80. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$

81. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

82. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)^2}$

83. $\int \frac{\sin x - 5\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

Bölüm 7

BELİRLİ İNTEGRAL



7.1 ARALIKLARIN PARÇALANMASI

TANIM

$[a, b]$ aralığını

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b \qquad (7.1)$$

özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim.

Uygunluğu sağlamak için a sayısını x_0, b sayısını da x_n ile gösterelim.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

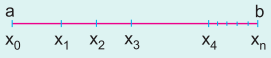
kümesine $[a, b]$ aralığının bir **parçalanması** veya **bölüntüsü** denir.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a, b]$ nin P parçalanmasına karşılık gelen **kapalı alt aralıkları,**

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_{n-1}, x_n)$$

aralıklarına da **açık alt aralıkları** adı verilir.



$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının **boyu** veya **ölçüsü** denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** denir, $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde,

$$\|P\| = maks\ \{\Delta x_k :\ \ k = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (7.2)$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirlerine eşit ise bu parçalanmaya **düzgün parçalanma** adı verilir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi, bir $[a, b]$ aralığının sonsuz çoklukta parçalanması vardır. Bu parçalanmalardan bazılarını karşılaştırmak mümkündür.

TANIM

$[a, b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha **ince** veya daha **sıktır** denir.

ÖRNEK : $[0, 1]$ aralığının iki parçalanması

$$P_1 = \left\{0 , \frac{1}{2} , 1\right\} \quad , \quad P_2 = \left\{0 , \frac{1}{4} , \frac{1}{2} , \frac{3}{4} , \frac{7}{8} , 1\right\}$$

olsun. Bu iki parçalanmayı ve bu parçalanmaların normlarını karşılaştırınız.

Çözüm : $P_1 \subset P_2$ olduğundan P_2 , P_1 den daha incedir. $\|P_1\| = \frac{1}{2}$, $\|P_2\| = \frac{1}{4}$ olduğundan $\|P_1\| \geq \|P_2\|$ dir.

Bir $[a, b]$ aralığının P_1 , P_2 , ... , P_n parçalanmaları için

$$P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n \Rightarrow \|P_1\| \geq \|P_2\| \geq ... \geq \|P_n\|$$

olacağı açıktır. Yani parçalanma inceldikçe normu küçülür. $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşması demek her bir alt aralığın boyunun sıfıra yaklaşması ve dolayısıyla alt aralıkların sayısı olan n nin $+\infty$ değerine yaklaşması demektir. Bunun karşıtı doğru değildir. Yani $n \to +\infty$ olması $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşmasını gerektirmez. Örneğin

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, ..., 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, ..., 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1\right\}$$

parçalanması gözönüne alındığında $\forall_n \geq 2$ için $\|P\| = \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla $n \to +\infty$ için $\|P\| = \frac{1}{2} \neq 0$ dır.

Eğer P parçalanması düzgün ise bu taktirde

$$\|P\| \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$$

önermesi doğrudur.

7.2 MERDİVEN FONKSİYONLARI

Belirli integral kavramı birçok değişik şekilde verilebilir. Bunların en yaygın olanı merdiven fonksiyonları yardımıyla verilenidir. Bu nedenle bu kesimde merdiven fonksiyonlarını tanıtmaya çalışacağız.

TANIM

$s : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir **merdiven fonksiyonudur**. $\Leftrightarrow [a, b]$ nin öyle bir P parçalanması vardır ki s fonksiyonu $[a, b]$ nin her açık alt aralığı üzerinde sabittir.

Yukarıdaki tanıma göre, eğer s bir merdiven fonksiyonu ise, herbir $k = 1, 2, ..., n$ için öyle bir s_k sabit sayısı vardır ki $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ dır.

s fonksiyonu $[a, b]$ de tanımlı olduğundan $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarında da tanımlı olmalıdır, fakat fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler s_k sayılarından biri olmak zorunda değildir.

$[a, b]$ üzerinde tanımlı merdiven fonksiyonlarının kümesi $M[a, b]$ ile gösterilir.

ÖRNEK : $s : [0, 4] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \quad \text{ise} \\ 1, & 1 < x \le 2 \quad \text{ise} \\ 2, & 2 < x < 3 \quad \text{ise} \\ \frac{5}{2}, & x = 3 \quad \text{ise} \\ 3, & 3 < x \le 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonu mudur?

Çözüm :

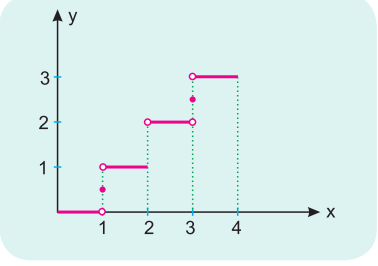
$0 < x < 1$ için $s(x) = 0$

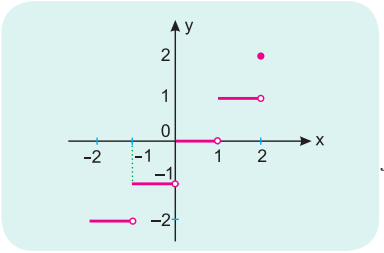
$1 < x < 2$ için $s(x) = 1$

$2 < x < 3$ için $s(x) = 2$

$3 < x < 4$ için $s(x) = 3$

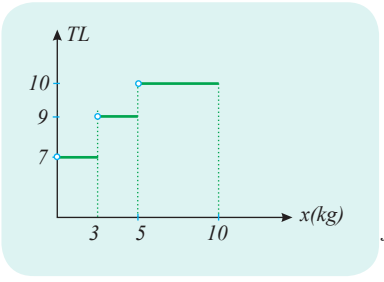
olduğundan bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonudur. Grafik yanda verilmiştir.





ÖRNEK : $f(x)=[\![x]\!]$ şeklinde tanımlanan $f:[-2,\,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir merdiven fonksiyonu mudur?

Çözüm : $-2<x<-1$ için $f(x)=-2$, $-1<x<0$ için $f(x)=-1$, $0<x<1$ için $f(x)=0$, $1<x<2$ için $f(x)=1$ dir. Şu halde verilen fonksiyon bir merdiven fonksiyonudur.



ÖRNEK : Posta ile gönderilen kolilerden 3 kilograma kadar 7 TL, 5 kilograma kadar 9 TL, 10 kilograma kadar 10 TL ücret alınmaktadır. 10 kilograma kadar olan her bir ağırlığa bir taşıma ücreti karşılık getiren ve "Posta ücret fonksiyonu" denilen fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonu mudur?

Çözüm : Bu fonksiyonu f ile gösterirsek $x\in(0,3)$ için $f(x)=7$, $x\in(3,\,5)$ için $f(x)=9$ ve $x\in(5,\,10)$ için $f(x)=10$ dur. O halde bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonudur. Grafik yanda çizilmiştir.

7.2.1. MERDİVEN FONKSİYONLARININ İNTEGRALİ

İntegral kavramını verirken önce merdiven fonksiyonlarının integralini verecek, daha sonra diğer fonksiyonların integraline geçeceğiz.

TANIM

$s:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ bir merdiven fonksiyonu, $P=\{x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_n\}$, $[a,\,b]$ aralığının bir parçalanması ve $x\in(x_{k-1},\,x_k)$ için $s(x)=s_k$ olsun.

$$\int_a^b s(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}s_k\Delta x_k=s_1(x_1-x_0)+\ldots+s_n(x_n-x_{n-1}) \qquad (7.4)$$

sayısına s merdiven fonksiyonunun a dan b ye kadar **integrali** denir, a ve b sayılarına da **integrasyon sınırları** adı verilir.

Şu halde bir s merdiven fonksiyonunun $[a,\,b]$ aralığındaki integralini bulmak için, fonksiyonun $(x_{k-1},\,x_k)$ aralıkları üzerinde aldığı s_k değerleri ile bu aralıkların uzunluklarını çarpıp elde edilen sayıları toplamalıdır.

ÖRNEK :

$$s(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1 & \text{ise}\\ \frac{1}{2}, & x=1 & \text{ise}\\ 1, & 1<x<2 & \text{ise}\\ 2, & 2\le x\le 3 & \text{ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $s:[0,\,3]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0,\,3]$ aralığındaki integralini bulunuz.

Çözüm : $\int_0^3 s(x)dx = 0(1-0)+1(2-1)+2(3-2) = 0+1+2 = 3$

Örnekten de görüldüğü gibi, integralin değeri, fonksiyonun x_k parçalanma noktalarında aldığı değerlerden bağımsızdır.

Şimdi merdiven fonksiyonlarının integrallerinin özelliklerini gösteren bazı teoremler verelim.

Toplanabilme Özelliği **TEOREM 7.1**

$s, t \in M[a, b]$ ise

$$\int_a^b [s(x)+t(x)]dx = \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)dx$$

dır.

İspat : $[a, b]$ aralığında bir $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ parçalanması vardır ki $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ ve $t(x) = t_k$ dır.

$$\int_a^b [s(x)+t(x)]dx = \sum_{k=1}^n (s_k+t_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n s_k(x_k-x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n t_k(x_k-x_{k-1})$$

$$= \int_a^b s(x)dx + \int_a^b t(x)\,dx$$

Homogenlik Özelliği **TEOREM 7.2**

$s \in M[a, b]$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\int_a^b c \cdot s(x)\,dx = c \cdot \int_a^b s(x)dx \qquad (7.6)$$

dır.

İspat : $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ ise $cs(x) = c \cdot s_k$ dır. Buna göre

$$\int_a^b c \cdot s(x)\,dx = \sum_{k=1}^n c \cdot s_k(x_k-x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^n s_k(x_k-x_{k-1}) = c \cdot \int_a^b s(x)\,dx$$

olur.

Toplanabilme ve homogenlik özelliklerinden yararlanarak şu teoremi verebiliriz.

Lineerlik Özelliği **TEOREM 7.3**

$s, t \in M[a, b]$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b [c_1 \cdot s(x) + c_2 \cdot t(x)]\,dx = c_1 \int_a^b s(x)\,dx + c_2 \int_a^b t(x)\,dx \qquad (7.7)$$

dır.

Karşılaştırma Özelliği **TEOREM 7.4**

$s, t \in M[a, b]$ olsun. Her $x \in [a, b]$

için $s(x) \le t(x) \Rightarrow \int_a^b s(x)\,dx \le \int_a^b t(x)\,dx \qquad (7.8)$

dır.

İspat : $\forall x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s_k \le t_k$ dır, dolayısıyla

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} t_k \Delta x_k = \int_a^b t(x)\,dx$$

olur.

İntegrasyon Aralığına Göre Toplanabilme Özelliği **TEOREM 7.5**

$s \in M[a, b]$ ve $a < c < b$ olsun.

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx \qquad (7.9)$$

olur.

İspat : $[a, c]$ aralığının bir parçalanması $P_1 = [x'_0, x'_1, \ldots, x'_n]$, $[c, b]$ aralığının bir parçalanması $P_2 = [x''_0, x''_1, \ldots, x''_m]$ olsun. Bu durumda

$P = P_1 \cup P_2 = [x'_0, x'_1, \ldots, x'_n = x''_0, x''_1, \ldots, x''_m]$ parçalanması $[a, b]$ nin bir parçalanmasıdır. Bu parçalanmanın noktalarını, $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$ diye yeniden indislersek $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m}\}$ olur. s fonksiyonunun (x_{k-1}, x_k) aralığında aldığı değer s'_k, (x''_{k-1}, x''_k) aralığında aldığı değer s''_k ise

$$\int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} s'_k \Delta x'_k + \sum_{k=1}^{m} s''_k \Delta x''_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k \Delta x_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} s_k \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+m} s_k \Delta x_k = \int_a^b s(x)\,dx$$

olur. Yukarıdaki (7.9) eşitliği $a < b < c$ durumunda da doğrudur. Bunun ispatını ileride vereceğiz.

7.3 RİEMANN İNTEGRALİ

Bu bölümde, $M[a, b]$ merdiven fonksiyonları yardımıyla, $[a, b]$ de tanımlı reel ve sınırlı fonksiyonların Riemann anlamında integrallerini tanımlayacağız.

TANIM

f, $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{s \geq f} \left\{ \int_a^b s(x)\,dx : \quad s \in M[a,b] \right\} \tag{7.10}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{t \leq f} \left\{ \int_a^b t(x)\,dx : \quad t \in M[a,b] \right\} \tag{7.11}$$

sayılarına sırası ile, **Üst Darboux İntegrali** ve **Alt Darboux İntegrali** denir.

Şu halde f fonksiyonunun üst Darboux integrali, $s \geq f$ olmak üzere $\int_a^b s(x)\,dx$ integrallerinin en büyük alt sınırı, Alt Darboux integrali ise $t \leq f$ olmak üzere $\int_a^b t(x)\,dx$ integrallerinin en küçük üst sınırıdır. Bu integraller için

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{7.12}$$

olacağı açıktır.

TANIM

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \mathrm{I} \qquad (7.13)$$

ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında **Riemann anlamında integrallenebilirdir** denir ve fonksiyonun bu integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımı kullanarak bir fonksiyonun integralini hesaplamak çok zordur. Şimdi integrali başka türlü tanımlamaya çalışacağız.

TANIM

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a, b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ parçalanması için

$$M_k = sup \{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\},$$

$$m_k = inf \{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

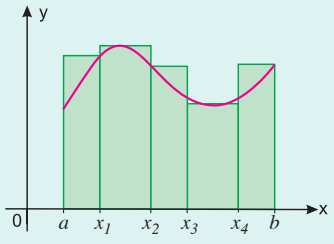
olsun.

$$\ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad (7.14)$$

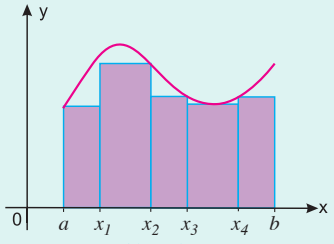
ve

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad (7.15)$$

toplamlarına, sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Üst Darboux Toplamı** ve **Alt Darboux Toplamı** adı verilir.



Üst toplam



Alt toplam

TEOREM 7.6

f, $[a, b]$ de tanımlı sınırlı bir fonksiyom ve P de $[a, b]$ nin bir parçalanması olsun.

$$inf\, \ddot{U}(f, P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \quad sup\, A(f, P) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \qquad (7.16)$$

dır. Burada infimum ve supremum $[a, b]$ aralığının tüm P parçalanmaları üzerinden alınmaktadır.

İspat : $sup\ A(f, P) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ olduğunu gösterelim. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında m_k sabit olduğundan $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $m_k = t(x)$ yazalım. Bu halde

$$sup\ A(f, P) = sup\ \{\int_a^b t(x)\,dx : t \in M\ [a,b],\ t \le f\} = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

bulunur. Benzer şekilde

$$inf\ \ddot{U}\ (f\ ,\ P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

olduğu gösterilebilir. Şu halde

$$inf\ \ddot{U}\ (f\ ,\ P) = sup\ A(f\ ,\ P) = \boldsymbol{I} \qquad (7.17)$$

ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{I}$$

dır.

ÖRNEK : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ rasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Eğer varsa $\int_0^1 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $[0, 1]$ aralığının herhangi bir parçalanması P olsun. Her parçalanma ve her $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\mathrm{M_k} = \sup\ \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1$$

$$m_k = inf\ \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \Rightarrow inf\ \ddot{U}\ (f, P) = 1$$

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \Rightarrow sup\ A\ (f, P) = 0$$

olur. O halde verilen fonksiyonun $[0, 1]$ aralığında integrali yoktur.

Şimdi alt ve üst Darboux toplamlarının infimum ve supremumunu bulmada yardımcı olacak bir teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 7.7

P_1 ve P_2, $[a, b]$ aralığının iki parçalanması ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. P_1, P_2 dan daha ince ise

(a) $A(f, P_2) \leq A(f, P_1)$

(b) $\ddot{U}(f, P_2) \geq \ddot{U}(f, P_1)$

dir.

İspat : İspatı önce şu özel hal için yapalım.

$P_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}$, $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x^*, x_k, \ldots, x_n\}$ olsun. $P_2 \subset P_1$ olduğu açıktır.

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad , \quad M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m'_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x^*]\} \quad , \quad M'_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x^*]\}$$

$$m''_k = inf\{f(x) : x \in [x^*, x_k]\} \quad , \quad M''_k = sup\{f(x) : x \in [x^*, x_k]\}$$

denirse

$$m_k \leq m'_k \ , \ m_k \leq m''_k \ , \quad M'_k \leq M_k \quad \text{ve} \quad M''_k \leq M_k$$

yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} A(f, P_1) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + m'_k (x^* - x_{k-1}) + m''_k (x_k - x^*) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta m_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + m_k (x^* - x_{k-1}) + (x_k - x^*) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + m_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= A(f, P_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\ddot{U}(f, P_2) \geq \ddot{U}(f, P_1)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi kabul edelim ki P nin P_0 dan r tane fazla noktası olsun. Bu noktaları $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$ ile gösterelim. $[a, b]$ aralığının

$$P_1 = P_0 \cup \{x_1^*\}\ ,\ P_2 = P_1 \cup \{x_2^*\}\ ,\ \ldots\ ,\ P_r = P_{r-1} \cup \{x_r^*\}$$

parçalanmalarını gözönüne alırsak,

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P$$

yazabiliriz. Yukarıdaki ispattan

$$A(f, P_0) \le A(f, P_1)$$
$$A(f, P_1) \le A(f, P_2)$$
$$A(f, P_{r-1}) \le A(f, P)$$

eşitsizlikleri, buradan da

$$A(f, P_0) \le A(f, P)$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde

$$Ü(f, P_0) \ge Ü(f, P)$$

olduğu gösterilebilir.

Bu teoremden yararlanarak şu sonuç ifade edilebilir.

SONUÇ

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) de $[a, b]$ aralığının parçalanmalarının artan bir dizisi (yani, $n < m$ için $P_n \subset P_m$) olsun. $(A(f, P_n))$ alt toplamlar dizisi artan, $(Ü, (f, P_n))$ üst toplamlar dizisi azalandır.

f sınırlı olduğunda Üst Darboux Toplamları üstten sınırlı, Alt Darboux Toplamları da alttan sınırlıdır. Çünkü $m \le f(x) \le M$ ise her P parçalanması için

$$m(b-a) \le A(f, P) \le Ü(f, P) \le M(b-a) \qquad (7.18)$$

yazılabilir. Dolayısıyla alt toplamların bir supremumu, üst toplamların bir infimumu vardır.

$$m_k = inf\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}\ ,\ M_k = sup\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}\ \text{ve}$$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olsun. Her bir n için

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

olduğundan

$$A(f,P) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \ddot{U}(f,P) \qquad (7.19)$$

yazılabilir. P parçalanması inceldikçe alt toplamlar artıp, üst toplamlar azaldığından, gerek üst toplamların infimumunu hesaplarken gerekse alt toplamların supremumunu hesaplarken parçalanmayı mümkün olduğu kadar inceltmek gerekir. P parçalanması, normu sıfıra gidecek şekilde, inceltildiğinde alt toplamlar supremumuna, üst toplamlar infimumuna yaklaşır. Dolayısıyla (*7.19*) da $\|P\| \to 0$ için limit alınırsa

$$sup\, A(f,P) \le \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le inf\, \ddot{U}(f,P)$$

buradan da

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (7.20)$$

bulunur. Buna göre, eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ise

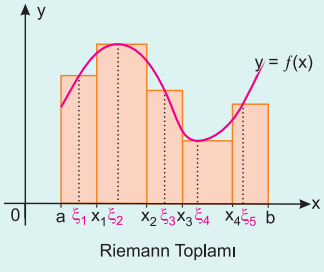
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (7.21)$$

olur.

TANIM

$R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann Toplamı** denir.

Şimdi integrallenebilen fonksiyonları karakterize eden bir teorem verelim.



Riemann Toplamı

TEOREM 7.8

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \qquad \text{(Riemann Şartı)} \qquad (7.22)$$

kalacak şekilde $[a, b]$ nin bir P parçalanmasının var olmasıdır.

ispat : f integrallenebilir ve $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{I}$ olsun. Bu taktirde

$$\dot{I}nf\, \ddot{U}\,(f, P) = I$$

dır. İnfimum özelliğinden, $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir P_1 parçalanması vardır ki

$$\ddot{U}(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7.23)$$

olur. Üst toplamlar azalan olduğundan P_1 den ince her P parçalanması için de (7.23) gerçeklenir. Aynı şekilde

$$sup\, A(f\,, P) = I$$

olacağından, supremum özelliği gereğince öyle bir P_2 parçalanması vardır ki

$$A(f\,, P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7.24)$$

dır. Bu eşitsizlik P_2 den daha ince her parçalanma için de doğrudur.

$P = P_1 \cup P_2$ dersek $P_1 \subset P$ ve $P_2 \subset P$ olacağından

$$\ddot{U}(f\,, P) < I + \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad A(f, P) > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$$

bulunur.

Riemann şartı sağlanmış olsun. Şu halde her bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir P parçalanması vardır ki

$$\ddot{U}\,(f\,, P) - A(f, P) < \varepsilon$$

kalır. Alt ve üst Darboux integrallerinin tanımından

$$A(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \ddot{U}\,(f, P)$$

yazılabilir. Şu halde $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$$

olur.

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \varepsilon$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

buradan da

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

bulunur. Bu da f fonksiyonunun $[a, b]$ de integrallenebilir olduğunu gösterir.

Şimdi integrallenebilen fonksiyonların özelliklerini veren bir teoremi verelim.

TEOREM 7.9

f ve g, $[a, b]$ de integrallenebilen fonksiyonlar olsunlar

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise αf ve βg fonksiyonları da $[a, b]$ de integrallenebilir ve

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \qquad (7.25)$$

olur.

(b) $f \ge 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ dır.

(c) f^2 integrallenebilir.

(d) $f \ge 0$ ise $\sqrt{f}$ integrallenebilir.

(e) $|f|$ integrallenebilir ve $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ dir.

(f) $f \cdot g$ integrallenebilir.

İspat : (a) $\alpha = 0$ ise αf sıfır sabit fonksiyonu ve dolayısıyla merdiven fonksiyonu olduğundan integrallenebilirdir. Benzer şekilde $\beta = 0$ ise $\beta g = 0$ olup integrallenebilirdir. $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olsun. f ve g integrallenebilir olduğundan, $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir P_ε parçalanması vardır ki $\forall P \supset P_\varepsilon$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha f(x_k^*)\,\Delta x_k - \alpha\int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\,\Delta x_k - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} \beta f(x_k^*)\,\Delta x_k - \beta\int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan da

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha f(x_k^*)\Delta x_k + \beta g(x_k^*)\Delta x_k\right] - \left[\alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx\right]\right|$$

$$\le \left|\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha f(x_k^*)\Delta x_k - \alpha\int_a^b f(x)dx\right]\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\beta g(x_k^*)\Delta x_k - \beta\int_a^b g(x)dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ki bu da $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun integrallenebilir ve bunun integralinin

$$\alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

değerine eşit olduğunu gösterir.

(b) $f \ge 0$ olsun. f integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir. $f \ge 0$ olduğundan toplamdaki her bir $f(x_k^*)\Delta x_k$ terimi pozitif veya sıfırdır. Dolayısıyla $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ dır.

(c) f sabit fonksiyon ise f^2 de sabittir ve dolayısıyla integrallenebilirdir. f sabit olmasın. Önce kabul edelim ki $f \ge 0$ dır. $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = M$ olsun. f integrallenebilir olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a, b]$ nin öyle bir P parçalanması bulunabilir ki

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

kalır, $m_k = inf\,\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = sup\,\{f(x) :\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dersek

$f \geq 0$ olduğundan $m_k^2 = inf\{f^2(x):\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k^2 = sup\{f^2(x):\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dır. Böylece

$$Ü(f^2, P) - A(f^2, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^2 - m_k^2)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k + m_k)(M_k - m_k)\Delta x_k$$

$$\leq 2M \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = 2M\ [Ü(f, P) - A(f, P)] < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

olur. Şu halde $f \geq 0$ için f^2 integrallenebilirdir.

Şimdi f, $[a, b]$ de integrallenebilen herhangi bir fonksiyon olsun.

$m = inf\,\{f(x) : x \in [a, b]\}$ dersek $f - m \geq 0$ dır. Yukarıdaki ispat tekrarlanarak $(f - m)^2$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu gösterilebilir.

$$(f - m)^2 = f^2 - 2mf + m^2 \Rightarrow f^2 = (f - m)^2 + 2mf - m^2$$

eşitliğinde $(f - m)^2$, $-2mf$ ve m^2 integrallenebilen fonksiyonlar olduklarından f^2 de integrallenebilirdir.

(d) f integrallenebilir olduğundan, $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir P parçalanması vardır ki bu parçalanma ve bundan ince herbir parçalanma için

$$Ü(f, P) - A(f, P) < \varepsilon^2$$

kalır. $m_k = inf\ \{\sqrt{f(x)}:\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = sup\ \{\sqrt{f(x)}:\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

ve $A = \{k :\ M_k + m_k < \varepsilon\}$, $B = \{k :\ M_k + m_k \geq \varepsilon\}$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k \in A} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \sum_{k \in A} (M_k + m_k)\Delta x_k < \varepsilon \sum_{k \in A} \Delta x_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b - a),$$

$$\sum_{k \in B} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k \in B} (M_k^2 + m_k^2)\Delta x_k \frac{1}{M_k + m_k} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k \in A} (M_k^2 - m_k^2)\Delta x_k$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} (M_k^2 + m_k^2)\Delta x_k = \frac{1}{\varepsilon}[Ü, (f, P) - A(f, P)] < \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 = \varepsilon$$

olur. Buna göre,

$$Ü\left(\sqrt{f},P\right)-A\left(\sqrt{f},P\right)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k=\sum_{k\in A}(M_k-m_k)\,\Delta x_k+\sum_{k\in B}(M_k-m_k)\,\Delta x_k$$
$$<\varepsilon(b-a)+\varepsilon=\varepsilon(b-a+1)$$

olur, ki bu $\sqrt{f}$ nin integrallenebilir olduğunu gösterir.

(e) $|f|=\sqrt{f^2}$ olduğundan $|f|$ integrallenebilirdir. Çünkü f integrallenebilir olduğunda (c) den f^2 de integrallenebilirdir. $f^2 \geq 0$ olduğundan (d) gereğince $\sqrt{f^2}=|f|$ integrallenebilirdir.

$|f|+f \geq 0$ olduğundan (b) gereğince $\int_a^b \left(|f(x)|+f(x)\right)dx \geq 0$, buradan da

$$-\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{7.26}$$

elde edilir. $|f|-f \geq 0$ olacağından $\int_a^b \left(|f(x)|+f(x)\right)dx \geq 0$, buradan da

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{7.27}$$

bulunur. (7.26) ve (7.27) eşitsizliklerinden

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

eşitsizliği elde edilir.

(f) f ve g integrallenebilir olduğundan, (a) gereğince, $f-g$ ve $f+g$ integrallenebilirdir. (c) den $(f-g)^2$ ve $(f+g)^2$ fonksiyonları integrallenebilirdir. (a) dan $\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$ integrallenebilirdir. Diğer taraftan

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

olduğundan $f\cdot g$ de integrallenebilirdir.

7.4 İNTEGRALLENEBİLEN FONKSİYON SINIFLARI

Bu kesimde Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonların önemli bazı sınıfları verilecektir.

TEOREM 7.10

$[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.

İspat : f, $[a, b]$ de sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ öyle ki $|x - x'| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan x ve x' için

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

kalır. Şimdi $[a, b]$ aralığının, $\|P\| < \delta$ şartını sağlayan P parçalanmasını gözönüne alalım. Bu taktirde f nin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki maksimum ve minimumunu gösteren M_k ve m_k için

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

yazılabilir. Şu halde

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

olur. Riemann şartı gerçeklendiğinden f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir.

TEOREM 7.10

$[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

İspat : f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki süreksizlik noktalarının sayısı m olsun. $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verdiğinde δ sayısını da $4Mm\,\delta_\varepsilon < \varepsilon$ kalacak şekilde seçelim. $[a, b]$ aralığının $\|P_0\| \le \delta_\varepsilon$ şartını sağlayan $P_0 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ parçalanmasını gözönüne alalım.

$A_0 = \{k :\ f, [x_{k-1}, x_k]$ üzerinde süreklidir$\}$, $B_0 = \{1, 2, ..., n\} \setminus A_0$ diyelim. Bu taktirde B_0 kümesi en fazla $2m$ tane (süreksizlik noktalarının x_k noktalarından bazıları olması durumunda) eleman ihtiva eder ve

$$\sum_{k\in B}\Delta x_k \le 2m\cdot\delta_\varepsilon$$

dır. $k\in A_0$ ise $f:[x_{k-1},x_k]\to\mathbb{R}$ sürekli ve dolayısıyla düzgün süreklidir. Böylece $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ öyle ki $\forall k\in A_0$ ve $|x-t|<\delta$ şartını sağlayan $\forall x,t\in[x_{k-1},x_k]$ için $|f(x)-f(x)|<\varepsilon$ kalır. $P=\{t_0,t_1,...,t_r\}$ de $[a,b]$ aralığının $\|P\|<\delta$ şartını sağlayan, P_0 dan daha ince olan bir parçalanması olsun.

$$A=\{i:\ \exists\, k\in A_0 \text{ öyleki } [t_{i-1},t_i]\subset[x_{k-1},x_k]\}$$

ve

$$B=\{1,2,...,r\}\setminus A$$

diyelim. Eğer $i\in A$ ise $M_i=sup\{f(x):x\in[t_{i-1},t_i]\}$ ve $inf\{f(x):x\in a[t_{i-1},t_i]\}=m_i$ olmak üzere $M_i-m_i<\varepsilon$ kalır. Ayrıca

$$\sum_{i\in B}\Delta t_i=\sum_{k\in B}\Delta x_k$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\ddot{U}(f,P)-A(f,P) &= \sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta t_i+\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i\\ &< \varepsilon(b-a)+4Mm\delta_\varepsilon<\varepsilon(b-a)+\varepsilon=\varepsilon(b-a+1)\end{aligned}$$

olur. Riemann şartı sağlandığından fonksiyon integrallenebilirdir.

TEOREM 7.12

$[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan (veya azalan) ise f fonksiyonu $[a,b]$ de Riemann anlamında integrallenebilirdir.

İspat : f fonksiyonu monoton artan olsun. f sabit foksiyon ise ispat açıktır. f sabit olmasın. Bu durumda $f(b)-f(a)>0$ dır. $\varepsilon>0$ verilmiş olsun $[a,b]$ aralığının öyle bir $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ parçalanmasını alalım ki

$$\|P\|<\varepsilon/[f(b)-f(a)]$$

bulunsun.

$$m_k=inf(f(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_{k-1})$$
$$M_k=sup(f(x):\ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_{k-1})$$

olacağından

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(x_n)-f(x_0)]$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon$$

bulunur. Riemann şartı gerçeklendiğinden f integrallenebilirdir.

f monoton azalan olsun. Bu taktirde $-f$ monoton artandır. Dolayısıyla $-f$ integrallenebilirdir. Teorem 7.8 (a) dan $-1.(-f)=f$ integrallenebilirdir.

Şimdi önemli bir fonksiyon sınıfını kısaca tanıtacak, daha sonra bu sınıfa ait fonksiyonların integrallenebilir olduğunu göstereceğiz.

TANIM

$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ fonksiyonu **sınırlı salınımlıdır** $\Leftrightarrow$ $[a,b]$ nin her P parçalanması için

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le M \qquad (7.29)$$

kalacak şekilde en az bir M sayısı vardır.

Supremum $[a,b]$ nin tüm P parçalanmaları üzerinden alınmak üzere

$$s_f(a,b)=sup\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \qquad (7.29)$$

genişletilmiş reel sayısına f nin $[a,b]$ aralığındaki **total salınımı** adı verilir.

Şu halde $s_f(a,b)<\infty$ ise f fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

TEOREM 7.13

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter şart iki monoton artan fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilmesidir.

İspat : f foksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı ve

$$a\le x\le x'\le b$$

olsun. f nin $[x,x']$ aralığındaki total salınımını $s_f(x,x')$ ile gösterirsek

$$s_f(a,x')=s_f(a,x)+s_f(x,x')$$

yazılabilir. Zira (7.30) da $[x, x']$ aralığına ait ilgili toplamlarda x noktasını bir bölüm noktası olarak alabiliriz. Şu halde $s_f(a, x)$ monoton artan bir fonksiyondur. Şimdi $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(x) = s_f(a, x) - f(x) \tag{7.31}$$

şeklinde tanımlayalım. $x' > x$ için

$$\begin{aligned} g(x') - g(x) &= s_f(a, x') - f(x') - s_f(a, x) + f(x) \\ &= [s_f(a, x') - s_f(a, x)] - [f(x') - f(x)] = s_f(x, x') - [f(x') - f(x)] \\ &\geq |f(x') - f(x)| - [f(x') - f(x)] \geq 0 \end{aligned}$$

olacağından g fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur. (7.31) den

$$f(x) = s_f(a, x) - g(x)$$

yazılabilir. Şu halde f fonksiyonu iki monoton artan fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir.

Şimdi kabul edelim ki f fonksiyonu g ve h gibi monoton artan iki fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilsin. $f = g - h$ olsun. Önce monoton artan bir fonksiyonun sınırlı salınımlı olduğunu gösterelim. g monoton artan olsun.

$$s_g(a, b) = \sup \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \sup \sum_{k=1}^{n} g(x_k) - g(x_{k-1}) = g(b) - g(a)$$

olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla g fonksiyonu sınırlı salınımlıdır. Benzer şekilde h fonksiyonunun da sınırlı salınımlı olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |[g(x_k) - h(x_k)] - [g(x_{k-1}) - h(x_{k-1})]| &\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| \\ &\leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \end{aligned}$$

olduğundan $g - h = f$ fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

SONUÇ

$[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı her fonksiyon Riemann anlamında integrallenebilirdir.

İspat : f sınırlı salınımlı olsun. f fonksiyonu, bir önceki teorem gereğince, monoton artan iki fonksiyonun farklı şekilde yazılabilir $f = g - h$ olsun. Teorem 7.12 gereğince g ve h fonksiyonları integrallenebilirdir. Teorem 7.9 dan $g - h$ integrallenebilirdir. Dolayısıyla f integrallenebilirdir.

Şimdi belirsiz integral ile belirli integral arasındaki ilişkiyi veren ve integral Hesabın Esas Teoremi denilen bir teoremi vereceğiz.

İntegral Hesabın Temel Teoremi **TEOREM 7.14**

f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \to R$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (7.32)$$

dır.



Gootfried Leibniz
1646 – 1716
Alman matematik, metafizik, mantık alanında çalışmaları olan bir filozof

İspat : $[a, b]$ aralığının herhangi bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Diferensiyel hesabın ortalama değer teoremi gereğince

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

olacak şekilde en az bir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Hipotezden, $F'(x) = f(x)$ olduğundan her bir $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

olacak biçimde en az bir $(x_k^*) \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

yazılabilir. Birinci tarafta gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $x_0 = a$, $x_n = b$ yazılırsa

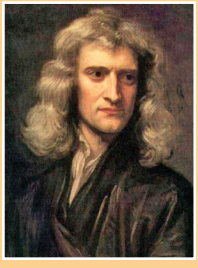
$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

elde edilir. f integrallenebilir olduğundan, $\|P\| \to 0$ için sağdaki toplam f nin $[a, b]$ aralığındaki integraline yaklaşır. Sol taraf ise P parçalanmalarından bağımsızdır. Şu halde

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

dir. Bu eşitliğe **Newton – Leibniz formülü** adı verilir.

$F(b) - F(a)$ ifadesi kısaca $F(x)\Big|_a^b$ sembolüyle gösterilir.



İsaac Newton
İngiliz matematik ve fizikçi

NOT : $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmak f nin belirsiz integralini bulmak demektir. Şu halde $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için önce $\int f(x)dx$ integrali hesaplanacak, sonra bulunan $F(x)$ ifadesinde x yerine önce b üst sınırı, sonra a alt sınır konulacak ve $F(b) - F(a)$ farkı hesaplanacaktır.

Yukarıdaki F fonksiyonuna f nin **ilkeli** de denir.

Zaman zaman karşılaşacağımız iki integral şöyle tanımlanır :

$$(1)\ \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

$$(2)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ÖRNEK : $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $F(x) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int (x^{-2} + x^{-3/2})\,dx = -\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

olacağından

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = -\left[\left(\frac{1}{4}+1\right) - (1+2)\right] = \frac{7}{4}$$

olur.

Şimdi, yukarıdaki teoremin basit bir sonucu olan bir teoremi ifade edeceğiz. Bu teoremin ispatı çok kolay olduğundan, bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

TEOREM 7.15

f, $[a, b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz \qquad (7.33)$$

ve

(2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (7.34)$$

dır.

7.4.1. PARÇALI SÜREKLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ koşulunu sağlayan sonlu sayıdaki c_i noktalarının bazı noktalarında f sürekli olmasın.

Eğer herbir i için $[c_{i-1}, c_i]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve (c_{i-1}, c_i) açık aralığında $f(x) = F_i(x)$ olacak biçimde sürekli F_i fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)$$

olur.

ÖRNEK :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \quad \text{ise} \\ x + \text{i}, & 2 < x < 3 \quad \text{ise} \\ 2x, & 3 \le x \le 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $\int_0^5 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 (x+1)dx + \int_3^4 2x dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_2^3 + x^2\Big|_3^4$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{7}{2} + 7 = \frac{79}{6}$$

ÖRNEK : $\int_{-1}^{4} |x^2 - 4x + 3|\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Önce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ifadesinin işaretini inceleyelim.

x		-1		1		3		4	
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$			

Tablodan da görüldüğü gibi $-1 \le x \le 1$ ve $3 \le x \le 4$ için $x^2 - 4x + 3 \ge 0$ dir. Dolayısıyla bu aralıklarda $|x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$ olur. $1 < x < 3$ için $x^2 - 4x + 3 < 0$ olduğundan, bu aralıkta $|x^2 - 4x + 3| = -(x^2 - 4x + 3)$ dır. Dolayısıyla

$$\int_{-1}^{4} |x^2-4x+3|\,dx = \int_{-1}^{1} |x^2-4x+3|\,dx + \int_{1}^{3} |x^2-4x+3|\,dx + \int_{3}^{4} |x^2-4x+3|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x^2-4x+3)\,dx - \int_{1}^{3} (x^2-4x+3) + \int_{3}^{4} (x^2-4x+3)\,dx$$
$$= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int_{1}^{4} x^{[\![x]\!]}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $1 \le x \le 2$ için $[\![x]\!] = 1$, $2 \le x < 3$ için $[\![x]\!] = 2$, $3 \le x < 4$ için $[\![x]\!] = 3$ olduğundan

$$\int_{1}^{4} x^{[\![x]\!]}\,dx = \int_{1}^{2} x\,dx + \int_{2}^{3} x^2\,dx + \int_{3}^{4} x^3\,dx$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{19}{3} + \frac{175}{4} = \frac{619}{12}$$

bulunur.

Şimdi f nin F ilkel fonksiyonunun özelliklerini veren iki teoremi ispat edelim.

TEOREM 7.16

$f, [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a, b]$ üzerinde

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \qquad (7.35)$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dır.

İspat : f fonksiyonu x noktasında sürekli olsun. $h > 0$ için

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left\{\int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)\,dt\right\} - f(x)$$
$$= \frac{1}{h}\left\{\int_{x}^{x+h} f(t)dt\right\} - f(x)$$

yazılabilir. $\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} dx = 1$ olduğundan $f(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)dt$ yazılabilir. Bu durumda

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa, Teorem 7.8 den

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$$

yazılabilir. f, x noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon>0$ için $\exists \delta>0$ öyle ki $|t-x|<\delta$ şartını sağlayan her $t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ kalır. $h>\delta$ seçersek $|t-x|<\delta$ olacağından

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|<\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon\,dt=\varepsilon$$

bulunur ki, bu

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \qquad (7.36)$$

olduğunu gösterir. Eğer $h<0$ ise, benzer yolla

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \qquad (7.37)$$

olduğu gösterilebilir. (7.36) ve (7.37) den

$$F'(x)=f(x)$$

bulunur.

TEOREM 7.17

Eğer $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ fonksiyonu sürekli ise her $x\in[a,b]$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde $[a,b]$ üzerinde türevli bir F fonksiyonu vardır.

İspat : f sürekli olduğundan, $x\in[a,b]$ olmak üzere, her bir $[a,x]$ aralığında integrallenebilirdir.

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (7.38)$$

denirse, Teorem 7.16 den F her x noktasında türevlidir ve $F'(x)=f(x)$ dir.

(7.38) eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonuna f nin **belirsiz integrali** de denir.

Şimdi integral işareti altında değişken değiştirmemize imkân sağlayan bir teoremi ispatlayalım.

TEOREM 7.18

$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve f de φ nin görüntü kümesi üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \qquad (7.39)$$

dir.

İspat : f nin belirsiz integrali F olsun. Şu halde

$$F'(x) = f(x)$$

dir. $G(x) = F(\varphi(x))$ denirse

$$G'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

bulunur. Buradan

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) \qquad (7.40)$$

bulunur.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(t)\,dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a) \qquad (7.41)$$

olacağından (7.40) ve (7.41) den (7.39) eşitliği elde edilir.

ÖRNEK : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dir. $\varphi(t) = sint$ alalım. $sint = 0 \Rightarrow t = 0$ ve $sint = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $a = 0$ ve $b = \frac{\pi}{2}$ dir.

$$f(\varphi(t)) = f(sint) = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{cos^2 t} = |\cos t|$$

olur. $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ için $cost \ge 0$ olduğundan $f(\varphi(t)) = cost$ olur. Buna göre

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\, x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $1 + x^2 = t$ denirse $2x\, dx = dt$ olur. $x = 0$ için $t = 1$ ve $x = \sqrt{3}$ için $t = 4$ olacağından

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

bulunur.

Bazı integralleri hesaplarken birden fazla değişken değiştirmesi yapmak gerekebilir. Bununla ilgili iki örnek aşağıda verilmiştir.

ÖRNEK : $A = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = tan\ \varphi$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1+tan\varphi)\, d\varphi$$

İntegrali elde edilir. $tan\ \varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi}$ olduğundan

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln[cos\varphi + sin\varphi]\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} lncos\varphi\, d\varphi$$

bulunur. Şimdi son integrali $\varphi = \frac{\pi}{4} - \theta$ dönüşümünü yaparak hesaplayalım.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} lncos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} lncos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\frac{cos\theta + sin\theta}{\sqrt{2}}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(cos\theta + sin\theta)\, d\theta - \frac{\pi}{4} ln\sqrt{2}$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine konursa

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln[cos\varphi + sin\varphi]\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln[cos\theta + sin\theta]\, d\theta + \frac{\pi}{4} ln\sqrt{2}$$

bulunur. İntegralin değeri integral değişkenine bağlı olmadığından birinci ve ikinci integraller eşittir. Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\,ln\,2$$

ÖRNEK : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ için

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,sin\,x}{\sqrt{1+tan^2\alpha\,sin^2 x}}\,dx = \frac{\pi\alpha}{tan\,\alpha}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $x = \pi - t$ dönüşümünü yapılırsa

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\,sin\,x}{\sqrt{1+tan^2\alpha\,sin^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)sin(\pi-t)}{\sqrt{1+tan^2\alpha\,sin^2(\pi-t)}}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{sin\,t\,dt}{\sqrt{1+tan^2\,\alpha\,sin^2 t}} - \int_0^{\pi} \frac{t\,sin\,t\,dt}{\sqrt{1+tan^2\alpha\,sin^2 t}}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{sin\,t\,dt}{\sqrt{1+tan^2\,\alpha\,sin^2 t}} - I$$

bulunur. O halde

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{sin\,t\,dt}{\sqrt{1+tan^2\alpha\,sin^2 t}}$$

olur. $cost = -u$ değişken değiştirmesi ile

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1+tan^2\alpha\cdot(1-u^2)}}$$

bulunur. $u = \frac{\theta}{sin\,\alpha}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{tan\,\alpha}\int_{-sin\,\alpha}^{sin\,\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{\pi}{2\,tan\,\alpha}\,arcsin\,\theta\,\Big|_{-sin\,\alpha}^{sin\,\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{2\,tan\,\alpha}\cdot(\alpha+\alpha) = \frac{\alpha\pi}{tan\,\alpha}$$

elde edilir. Şimdi α ya bazı özel değerler verelim. Örneğin $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ise

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,sin\,x}{\sqrt{1+sin^2 x}}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

bulunur. α ya buna benzer çeşitli değerler verilebilir.

Bazı durumlarda f nin ilkeli olan F fonksiyonu bulunmadan da integral hesaplanabilir. Şimdi buna bir örnek verelim.

ÖRNEK : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = \frac{\pi}{2} - t$ dönüşümü yapılırsa

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

bulunur. Verilen integral ile bu integral toplanırsa

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla $I = \frac{\pi}{4}$ dür.

ÖRNEK : $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

(a) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ dır.

(b) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ dir.

Gösteriniz.

Çözüm : $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = I_1 + I_2$ olsun.

I_1 integralinde $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa, integralin değeri değişkene bağlı olmadığından

$$I_1 = -\int_a^b f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$

yazılabilir. O halde

$$I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx$$

olur.

(a) f tek olduğunda $f(-x) = -f(x)$ olacağından

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)-f(x)]dx = \int_{0}^{a} 0 \cdot dx = 0$$

olur.

(b) f çift fonksiyon olsun. $f(-x) = f(x)$ olduğundan

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(x)]dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

bulunur.

Şimdi de belirli integraller için kısmi integrasyon formülünü verelim.

TEOREM 7.19

f ve g, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve $[a, b]$ de türevli olsunlar.

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx \qquad (7.42)$$

dir.

İspat : $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)$ olduğundan, integral hesabın esas teoremi gereğince

$$\int_{a}^{b} [f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx + \int_{a}^{b} f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

olur. Şu halde (7.42) bağıntısı doğrudur.

$u = f(x)$, $v = g(x)$ yazılırsa, yukarıdaki eşitlik

$$\int_{a}^{b} u\,dv = u \cdot v\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du$$

şeklinde de ifade edilebilir.

ÖRNEK : $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $f(x) = lnx,\ g(x) = x$ alınırsa (7.42) den

$$\int_1^e ln\,x\,dx = x\cdot ln\,x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\cdot ln\,e - 1.ln\,1 - x\Big|_1^e\ dx = 1$$

olur.

ÖRNEK : $I = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ integralini hesaplayınız ($n \in \mathbb{N}$).

Çözüm : $x = sint$ değişken değiştirmesi yapılırsa, (7.42) den

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}x\cdot cos\,x\,dx$$

$$= sin\,x\,cos^{2n}x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n\,sin^2x\,cos^{2n-1}x\,dx$$

$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos^2x)cos^{2n-1}x\,dx$$

$$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1}x\,dx - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx$$

olur. Buna göre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1}x\,dx - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx$$

yazılabilir. Son integral başa alınır ve her iki taraf $2n+1$ ile bölünürse

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1}x\,dx$$

indirgeme formülü elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-3}x\,dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,x\,dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

bulunur. Şu hâlde

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

olur.

İntegral hesabın ortalama değer teoremi **TEOREM 7.20**

f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile fg bu aralıkta integrallenebilir olsun. g, $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[\inf f, \sup f]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx \qquad (7.44)$$

dır. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise $[a, b]$ aralığındaki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx \qquad (7.45)$$

olur.

İspat : $m = \inf f$ *ve* $M = \sup f$ diyelim. $[a, b]$ aralığında $g(x) \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$$

yazılabilir. Buradan

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

elde edilir. Şu halde m ile M arasında öyle bir k sayısı vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx$$

olur. $[a, b]$ üzerinde $g(x) < 0$ olduğunda ispat benzer şekilde yapılır.

f, $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunda, $\sup f$ ile $\inf f$ arasındaki her değeri, dolayısıyla k sayısını, en az bir defa alır. Yani $[a, b]$ de öyle bir x_0 noktası vardır ki $f(x_0) = k$ dır. Bu değer yukarıda k yerine yazılırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$$

eşitliği bulunur ki bu ispatı tamamlar.

Eğer $\int_a^b g(x)dx = 0$ ise (7.44) eşitliği aşikar olarak sağlanır.

$$\int_a^b g(x)dx \neq 0 \quad ise$$

$$k = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \tag{7.46}$$

olur. Özel olarak $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) = 1$ alınırsa

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{7.47}$$

bulunur. Bu değere f nin $[a, b]$ aralığındaki **ortalama değeri** veya **varyansı** denir.

ÖRNEK : $f(x) = 2 + sinx$ fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Fonksiyon bu değeri hangi noktada alır?

Çözüm :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + sinx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left(2\frac{\pi}{2} - cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2\frac{\pi}{2} - cos\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$

olur. $2 + sinx = 2 \Rightarrow sinx = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan fonksiyon bu ortalama değeri $x_0 = 0$ noktasında alır.

TEOREM 7.21

f ve g, $[a, b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar, $g \geq 0$, fg ile g integrallenebilir, f sınırlı ve

$$m \leq inf\, f \leq sup\, f \leq M$$

ise, $[a, b]$ aralığında öyle bir c noktası vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = m\int_a^c g(x)dx + M\int_c^b g(x)dx \tag{7.48}$$

dır.

İspat : $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$G(x) = m \int_a^x g(t)dt + M \int_x^b g(t)\,dt$$

şeklinde tanımlayalım. G süreklidir. (Bak. Bölüm problemleri 10) ve

$$\min g \le G(b) = m \int_a^b g(t)\,dt \le \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \le M \int_a^b g(t)\,dt$$
$$= G(a) \le maksG$$

dır. G sürekli olduğundan $minG$ ile $maksG$ arasındaki her değeri en az bir kere alır. $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ bu değerlerden biri olduğudan G fonksiyonu bu değeri de bir noktada alır. Yani $\exists c \in [a, b]$ öyle ki

$$G(c) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

olur. Diğer taraftan

$$G(c) = m \int_a^c g(t)\,dt + M \int_c^b g(t)\,dt$$

olduğundan

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = m \int_a^c g(t)\,dt + M \int_c^b g(t)\,dt$$

bulunur.

Yukarıdaki teoremde f azalan bir fonksiyon ise $M = f(a)$, $m = f(b)$ alınabilir. Bu durumda (7.48) eşitliği,

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b) \int_a^c g(t)dt + f(a) \int_c^b g(t)\,dt \qquad (7.49)$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde f artan ise

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt + f(b) \int_c^b g(t)\,dt \qquad (7.50)$$

yazılabilir.

7.5 BAZI LİMİTLERİN İNTEGRAL YARDIMIYLA HESABI

Bu kesimde bazı özel tipteki limitlerin integraller yardımıyla nasıl hesaplanacağını göreceğiz.

TEOREM 7.22

Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (7.51)$$

dır.

İspat : $[a, b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ dir. $x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}$ alınırsa

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum f(x_k^*)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

olur. Sol taraf f nin $[a, b]$ aralığındaki integrali olduğundan (7.51) doğrudur.

Özel olarak $a = 0,\ b = 1$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (7.52)$$

bulunur.

ÖRNEK : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}\right)$ liminitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$

bulunur.

ÖRNEK : $p \geq 2$ için $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{pn}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{pn} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}\right) + \ldots + \frac{1}{pn}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(p-1)n+k}$$

$$= \sum_{r=1}^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m+k} \right) = \sum_{r=1}^{p-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r+\frac{k}{n}} \right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{pn} \right) = \sum_{r=1}^{p-1} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r+\left(\frac{k}{n}\right)} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p-1} \left(\int_0^1 \frac{1}{r+x}\, dx \right) = \sum_{r=1}^{p-1} \left[\ln(r+1) - \ln r \right] = \ln p$$

bulunur.

Daha önce bölüm 3 de $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right)$ dizisinin yakınsak olduğunu göstermiştik. Şimdi bu dizinin limitini bulalım.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \ln|1+x| \Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

olur.

Bu sonuç bir önceki örnekte $p = 2$ konularak da bulunabilir.

PROBLEMLER 7.1

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların $[-1, 3]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

a. $f(x) = [\![x]\!]$

b. $f(x) = [\![-x]\!]$

c. $f(x) = 2[\![x]\!]$

ç. $f(x) = \lceil x \rceil$

d. $f(x) = [\![2x]\!]$

e. $f(x) = \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right]$

f. $f(x) = [\![x]\!] + \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right]$

g. $f(x) = \lceil 2x \rceil$

ğ. $f(x) = \lceil x \rceil + \lceil -x \rceil$

h. $f(x) = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$

2. $\int_a^b [\![x]\!]\,dx + \int_a^b [\![-x]\!]\,dx = a - b$

olduğunu gösteriniz.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n [\![x]\!]\,dx = \frac{n(n-1)}{2}$

olduğunu gösteriniz.

4. $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x [\![t]\!]\,dt$ olsun. f fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

5. $\int_0^2 [\![x^2]\!]\,dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

olduğunu gösteriniz.

6. **a.** $\int_0^9 [\![\sqrt{t}]\!]\,dt$ integralini hesaplayınız.

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^{n^2} [\![\sqrt{t}]\!]\,dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$

olduğunu gösteriniz.

7. İntegral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 x\,dx$ **b.** $\int_0^1 x^2\,dx$ **c.** $\int_0^1 x^3\,dx$

d. $\int_0^1 e^x\,dx$ **e.** $\int_0^{10} 2^x\,dx$

8. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx = \frac{100}{3}$

b. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx = \frac{16}{3}$

c. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} = \ln\frac{9}{8}$

d. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{4}{3}$

e. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \frac{\pi}{16}$

f. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$

g. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

h. $\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ı. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}$

i. $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}$

j. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2$

k. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = 0$

l. $\int_{a}^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{12a}$

m. $\int_{0}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} \, dx = \frac{a}{4}(\pi - 2)$

n. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}} = 2 - \ln 2$

o. $\int_{0}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^4}{16}$

p. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x + x^2} = \ln \frac{3}{2}$

r. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

s. $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

t. $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}}$

u. $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \, dx = 4 - \pi$

v. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + \pi}{4}$

y. $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

z. $\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = 1 - \cos 1$

9. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $c \geq 0$ sayısını bulunuz.

a. $\int_{0}^{c} x(1-x) \, dx = 0$ **b.** $\int_{0}^{c} |x(1-x)| \, dx = 0$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \quad ise \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \quad ise \end{cases}$

olduğuna göre $\int_{0}^{2} f(x) \, dx$ integralini hesaplayınız.

11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int_{0}^{1} x^m (1-x)^n \, dx = \int_{0}^{1} x^n (1-x)^m \, dx$

b. $\int_{x}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1 + t^2} \qquad (x > 0)$

12. f ve g, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise

$\int_{a}^{b} f(x) \, dx \leq \int_{a}^{b} g(x) \, dx$ dir, gösteriniz.

13. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int_{0}^{\pi} f(\sin x) \, dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx$

b. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx$

c. $\int_{0}^{\pi} x \cdot f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} f(\sin x) \, dx$

d. $\int_{0}^{\pi} f(\sin x) \cos x \, dx = 0$

14. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx$

b. $\int_{-a}^{a} f(x^2)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x^2)\,dx$

c. $\int_{-a}^{a} xf(x^2)\,dx = 0$

15. Sürekli f fonksiyonu çift fonksiyon olduğunda

a. $\int_{0}^{\pi} f(\cos x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

olacağını gösteriniz.

16. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının karşılarında yazılı aralıklardaki ortalama değerini hesaplayınız. Ortalama değer teoreminde sözü geçen x_0 noktasını bulunuz.

a. $f(x) = x^2$ $[0, 1]$

b. $f(x) = a + b\cos x$ $[-\pi, \pi]$

c. $f(x) = \sin^2 x$ $[0, \pi]$

d. $f(x) = \sqrt{x}$ $[0, 4]$

17. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \text{ için } f(x) = 0$$

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

18. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

a. $f(x) = \sin^{2n+1} x$ **b.** $f(x) = \sin^n x$ **c.** $f(x) = \cos^n x$

19. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}\right) = e-1$

c. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}$

ç. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^\lambda+2^\lambda+3^\lambda+\ldots+n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1}\ (\lambda \geq 0)$

d $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right) = 2$

e. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = 1$

f. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right) = 2\ln 2 - 1$

g $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{\pi}{2}$

20. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_{0}^{2} |x^3 - 3x^2 + 2x|\,dx$ **b.** $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x|\,dx$

c. $\int_{0}^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^n [\![t]\!]^2\, dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx$ integralini hesaplayınız.

3. İkinci dereceden öyle bir p polinomu bulunuz ki

$p(0) = p(1) = 0$ ve $\int_0^1 p(x)\, dx = 1$ olsun.

4. $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\, dx$ olduğunu gösteriniz.

5. f, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $k \neq 0$ için

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$$

olduğunu gösteriniz.

6. f sürekli bir tek fonksiyon olduğunda

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = 0$$

olacağını gösteriniz.

7. Sürekli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$\int_a^b f(x)dx = 0$ ise fonksiyonu (a, b) aralığının en az bir c noktasında sıfır değerini alır; gösteriniz.

8. $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^3 x + b\sin^3}{\cos x + \sin x}\, dx$ ve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\cos^3 x + a\sin^3 x}{\cos x + \sin x}$ integrallerini hesaplayınız.

9. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

10. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

11. f fonksiyonu sürekli ve tersi bulunan bir fonksiyon olsun.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)\, dt = 1$$

olduğuna göre $f(x)$ ifadesini bulunuz.

12. f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve $a < b$ olsun.

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\, dt$$

olduğuna göre $g'(x)$ türevini bulunuz.

13. $x = 1 - \cos^2 u$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$I = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

14. $x = \sin u$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 x^m (1-x^2)^n \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x \, du$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{10} \, dx$$ integralini hesaplayınız.

15. $f : [a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ de

$$\int_a^{\theta} f(x)dx = \int_{\theta}^b f(x)dx$$

olacak şekilde bir θ sayısının varlığını gösteriniz.

16. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| \, dx$ **b.** $\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| \, dx$

17. $a < b$ ve $f, [a, b]$ üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}] \, dx = 0$$

olacağını gösteriniz. Burada $\bar{f}$, f nin $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeridir.

18. $a < b$ ve $f, [a, b]$ üzerinde sürekli olsun.

$$\int_a^b [f(x) - k]^2 dx$$

integralini minimize eden k sabitini bulunuz.

19. f ve $g, [a, b]$ üzerinde sürekli ikinci türevlere sahip fonksiyonlar olsun.

$f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$ olduğunda

$$\int_a^b f(x)g''(x)dx = \int_a^b f''(x)g(x)\,dx$$

eşitliğinin gerçekleneceğini gösteriniz.

20. Aşağıdaki eşitliklerden $f(x)$ ifadesini bulunuz.

a. $f(x) = \pi \left(1 + \int_1^x f(t)dt\right)$ **b.** $f(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt$

21. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^5)dt}{x^3}$ **b.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

22. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\dfrac{2\pi}{7} < \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5 + 2\cos x} < \dfrac{2\pi}{3}$

b. $3 < \int_0^1 \sqrt{9 + x^2} \, dx < \sqrt{10}$

23. $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

olduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak $\int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}$ integralini hesaplayınız.

24. $$\int_0^{\pi} x \sin^m x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2} \cdot \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{m çift ise} \\ \pi \cdot \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{m tek ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz. Burada

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)$,

$(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n + 1)$

dir.

25. $[0,1]$ aralığının bir parçalanması

$$P_n = \left\{0\ ,\ \frac{1}{2^n}\ ,\ \frac{2}{2^n}\ ,\ \frac{3}{2^n}\ ,\ \ldots\ ,\ 1\right\}$$

dır. $\forall m > n$ için P_m nin P_n den daha ince olduğunu gösteriniz.

26. [a, b] aralığı üzerinde tanımlı $f(x) = c$ sabit fonksiyonu veriliyor. Her P parçalanması için

$$Ü(f, P) - A(f, P) = c\,(b - a)$$

olacağını gösteriniz.

27. P ve Q, $[a, b]$ aralığının her hangi iki parçalanması olsun.

$$A(f, P) \le Ü(f, P)$$

olduğunu gösteriniz. Burada f herhangi bir sınırlı fonksiyondur.

28. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun.

a) $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$ dır. önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

b) Önermedeki mutlak değer kaldırıldığında önerme doğru olur mu? Cevabınız evet ise ispatlayınız.

Hayır ise bir karşıt örnek veriniz.

29. $A = \left\{\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a) f, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir mi?

b) $\int_0^1 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

30. f, $[a, b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.

$\forall c \in [a,b]$ için $\int_0^c f(x)\,dx = 0$

olması için gerek ve yeter şartın

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ olduğunu ispatlayınız.

31. $[0,1]$ aralığı n eşit parçaya bölünüyor. Bu parçalanmaya göre $f(x) = x$ fonksiyonu için alt ve üst toplamları hesaplayınız. $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

32. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Bölüm

8

BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

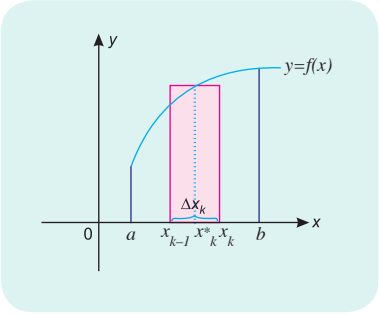


8.1 ALAN HESABI

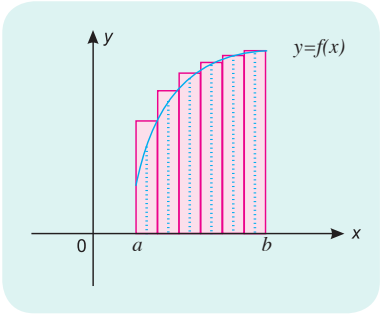
Eski Babiller, bir çember gibi doğru parçalarıyla sınırlandırılamayan düzlemsel bölgelerin alanlarının tahmini ile uzun süre ilgilenmişlerdir. Bu tip alanların bulunmasına yönelik modern yaklaşım belirli integrallerle yakından ilişkilidir.

8.1.1. KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE ALAN HESABI

a) $y = f(x)$ eğrisi; $x = a$, $x = b$ doğruları ve x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı



f, $[a, b]$ aralığında pozitif tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$ olsun. Hesaplanması istenen alan, yaklaşık olarak, taban uzunlukları Δx_k, yükseklikleri $f(x_k^*)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir. Burada x_k^* , (x_{k-1} , x_k) aralığında herhangi bir noktadır. Şu hâlde sözkonusu bölgenin A alanı için



$$A \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. Δx_k aralıkları ne kadar küçük seçilirse, yani P parçalanması ne kadar ince seçilirse yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. Sağ taraftaki limit, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki integrali olacağından

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (8.1)$$

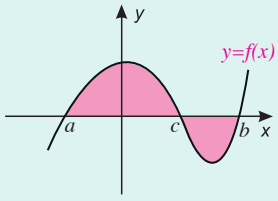
bulunur.

$[a, b]$ aralığında $f(x) < 0$ ise söz konusu dikdörtgenlerin yükseklikleri $-f(x_k^*)$ olacağından

$$A = \int_a^b -f(x)\,dx \qquad (8.2)$$

olur.

(c) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının bazı yerlerinde pozitif, bazı yerlerinde negatif ise fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı bulunup toplanır. Örneğin f fonksiyonu (a, c) aralığında pozitif, (c, b) aralığında negatif ise



$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx \qquad (8.3)$$

olacaktır. Buna göre, (8.1), (8.2), (8.3) formülleri göz önüne alındığında alan formülü olarak

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (8.4)$$

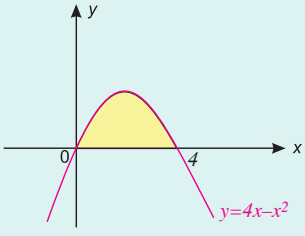
verilebilir.

Benzer şekilde, $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ile y–ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |g(y)|\,dy \qquad (8.5)$$

olacaktır.

ÖRNEK : $y = 4x - x^2$ eğrisiyle x–ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



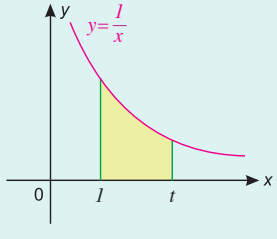
Çözüm : $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$

bulunur. Eğri x–eksenini $(0, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarında keser. Buna göre

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= 32 - \frac{64}{3} - \frac{32}{3}$$

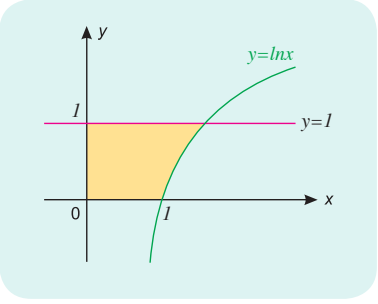
br^2 olur.



ÖRNEK : $y = \frac{1}{x}$ eğrisi $x = 1$ ve $x = t\ (t > 1)$ doğruları ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $A = A(t) = \int_1^t \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_1^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^t = \ln t$

olur. Şu halde her bir t sayısına pozitif bir $A(t)$ sayısı karşılık gelmektedir. Bu alan $\ln t$ olduğundan logaritma fonksiyonu integral yardımıyla ve dolayısıyla $A(t)$ alanı yardımıyla tanımlanabilir. $A(t)$ alanına t nin doğal (tabii) logaritması denir ve logaritmanın özellikleri bu alanın özelliklerinden elde edilebilir. Örneğin, $A(1) = 0$ olduğundan $\ln 1 = 0$ olduğu söylenebilir.

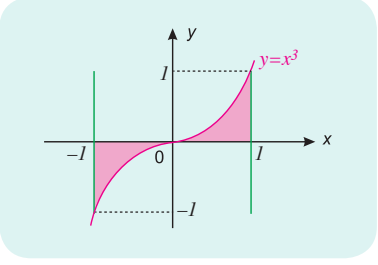


ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, $y = 0$, $y = 1$ doğruları ve y–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ olduğundan

$$A = \int_0^1 |e^y|\,dy = \int_0^1 e^y\,dy = e^y\Big|_0^1 = e - e^0 = e - 1$$

br^2 olur.



ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisi, $x = -1$, $x = 1$ doğruları ve x– ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : $f(x) = x^3$ eğrisinin grafiğinden de anlaşılacağı gibi, $x < 0$ için $f(x) = x^3 < 0$ ve $x > 0$ için $f(x) = x^3 > 0$ dır. Şu halde

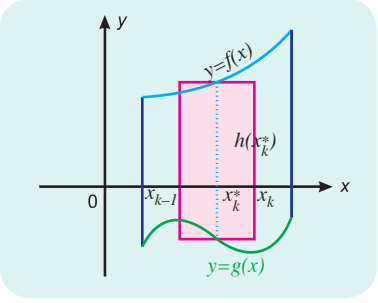
$$A = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |x^3|\,dx = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

br^2 olur.

b) $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileriyle, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

(i) $[a, b]$ aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise, alanların hesaplanmasında kullanılan dikdörtgenlerin yükseklikleri $h(x_k^*) = f(x_k^*) - g(x_k^*)$ olacağından istenen alan, yaklaşık olarak,



$$A \approx \sum_{k=1}^{n} h(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

olur.

P parçalanması ne kadar ince alınırsa yaklaşıklık o derece iyi olur. Parçalanma-

nın normu sıfıra yaklaştırıldığında sağ taraftaki ifadenin limiti $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ integrali olacağından istenen alan

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \tag{8.6}$$

olur.

(b) $[a, b]$ aralığında $f(x) \le g(x)$ ise $h(x_k^*)=g(x_k^*)-f(x_k^*)=-\left[f(x_k^*)-g(x_k^*)\right]$ olacağından

$$A=-\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \tag{8.7}$$

olur.

(c) $[a, b]$ aralığının bazı yerlerine $f(x) \le g(x)$, bazı yerlerinde $f(x) > g(x)$ ise $h(x_k^*)=\left|f(x_k^*)-g(x_k^*)\right|$ olacağından, sözkonusu alan yine

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \tag{8.8}$$

olacaktır. Şu hâlde $[a, b]$ aralığında f ve g nin durumları ne olursa olsun, $y=f(x)$, $y=g(x)$ eğrileri ile $x=a$, $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlem parçasının alanı

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \tag{8.9}$$

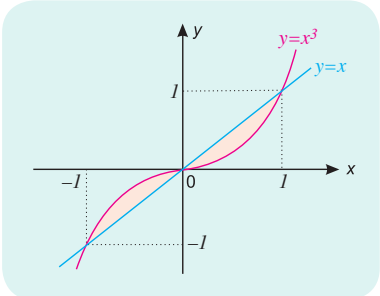
olacaktır.

Benzer şekilde, $x=u(y)$, $x=v(y)$ eğrileri, $y=c$ ve $y=d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanının

$$A=\int_c^d |u(y)-v(y)|dy \tag{8.10}$$

olacağı açıktır.

ÖRNEK : $y=x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğrusu tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : Söz konusu alan yandaki şekilde gösterilmiştir. $y=x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğrusu $(-1, -1)$, $(0, 0)$ $(1,1)$ noktalarında kesişirler. Şu halde bulunacak alan, $y=x^3$ eğrisi, $y=x$, $x=-1$ ve $x=1$ doğruları tarafından sınırlanan alan olacaktır. Şekilden de görüleceği gibi $(-1, 0)$ aralığında $x^3 > x$ ve $(0, 1)$ aralığında $x > x^3$ tür. Şu hâlde

$$A = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx$$

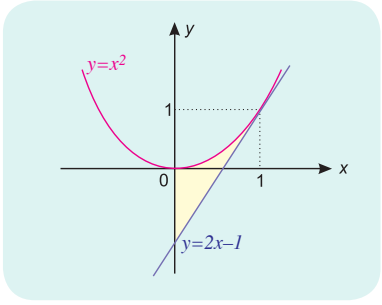
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

br^2 olacaktır.

Alanların simetrik oluşundan yararlanarak, söz konusu alan

$$A = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,br^2$$

şeklinde de hesaplanabilirdi.



ÖRNEK : $y = x^2$ parabolü, bu parabole *(1, 1)* noktasından çizilen teğet ve y–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Önce $y = x^2$ eğrisine *(1, 1)* noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

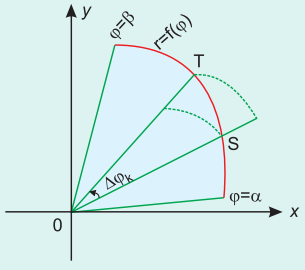
formülünden $y - 1 = 2 \cdot 1\,(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$ bulunur. Şu halde problem $y = x^2$ parabolü, $y = 2x - 1$ doğrusu ve y– ekseni doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulmaya indirgenir. Buna göre;

$$A = \int_{0}^{1} |x^2 - (2x - 1)|\,dx = \int_{0}^{1} (x^2 - 2x + 1)\,dx = \int_{0}^{1} (x - 1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x - 1)^3\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

br^2 olur.

8.1.2. KUTUPSAL KOORDİNATLARDA ALAN HESABI

Kutupsal koordinat sistemindeki denklemi $r = f(\varphi)$ olan eğriyi göz önüne alalım. $r = f(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin A alanını bulalım.



$\varphi \in [\alpha, \beta]$ için $f(\varphi) \geq 0$ ve f bu aralıkta sürekli olsun. $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğrularının oluşturduğu açıyı

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

şeklinde parçalayalım.

$$M_k = sup\,\{f(\varphi) : \quad \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

$$m_k = inf\,\{f(\varphi) : \quad \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

olsun. M_k ve m_k yarıçaplı daire dilimlerinin alanları sırası ile

$\frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k$ ve $\frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k$ olduğundan

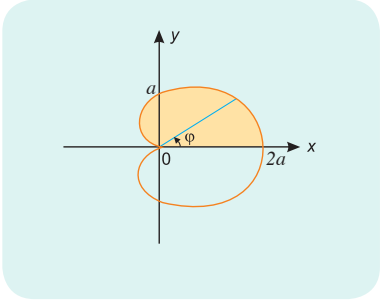
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k \le A \le \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan integrallenebilirdir. Dolayısıyla alt ve üst Riemann-Darboux toplamlarının $\|P\| \to 0$ için limitleri aynı olup $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)\,d\varphi$ integraline eşittir. Şu halde istenen A alanı için

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi \qquad (8.11)$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



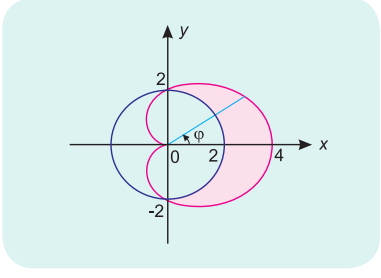
Çözüm : Yandaki şekilde taralı olan bölgenin alanı, istenen alanın yarısıdır. Buna göre

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2\,d\varphi = \int_0^\pi a^2(1+\cos j)^2\,d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

bulunur.

ÖRNEK : $r = 2$ çemberinin dışında, $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.



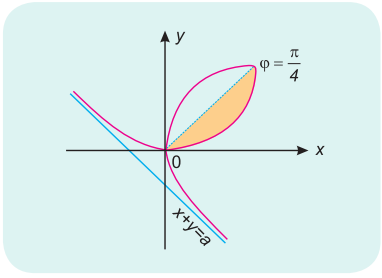
Çözüm : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $2(1 + \cos\varphi) \ge 2$ olduğundan

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |4 - 4(1+\cos\varphi)^2|\,d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -[4 - 4(1+\cos\varphi)^2]\,d\varphi$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\,d\varphi\right] = \pi + 8$$

olur.



ÖRNEK : Descartes Yaprağı denilen

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

eğrisinin ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Söz konusu eğrinin grafiği yanda verilmiştir. Eğrinin kutupsal koordinat sistemindeki denklemini bulalım.

$$r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi - 3a\cdot r\cos\varphi\, r\sin\varphi = 0 \Rightarrow r = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

olur. Taralı kısım esas bölgenin yarısıdır. (Neden ?)

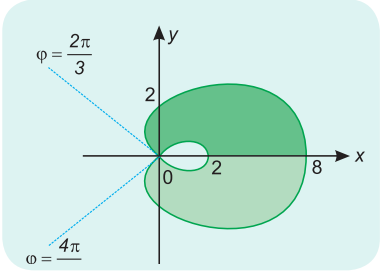
$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

olur. Pay ve payda $\cos^6\varphi$ ile bölünür ve $\tan\varphi = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$A = 9a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan^3\varphi)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 9a^2\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+u^3)^2}$$
$$= 3a^2\int_0^1 (1+u^3)^{-2}\,3u^2\,du = -3a^2(1+u^3)^{-1}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}a^2$$

bulunur.

ÖRNEK : $r = 2 + 4\cos\varphi$ limaçonunun iki ilmeği arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm : Eğrinin grafiği yanda verilmiştir.

$0x$– ekseninin üst tarafındaki alan istenen alanın yarısıdır. φ açısı $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ aralığında değiştikçe (r, φ) noktaları dış ilmek, $\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$ aralığında değiştikçe iç ilmek üzerinde bulunur. Şu halde istenen alan

$$A = 2\cdot\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} r^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} r^2\,d\varphi\right\}$$
$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (4 + 16\cos\varphi + 16\cos^2\varphi)\,d\varphi - \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} (4 + 16\cos\varphi + 16\cos^2\varphi)\,d\varphi$$
$$= (8\pi + 6\sqrt{3}) - (4\pi - 6\sqrt{3}) = 4\pi + 12\sqrt{3}$$

br^2 olur.

8.1.3. EĞRİ DENKLEMLERİNİN PARAMETRİK OLARAK VERİLMESİ DURUMUNDA ALAN HESABI

Parametrik denklemi, g türevlenebilir ve h sürekli olmak üzere,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

olan bir C eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

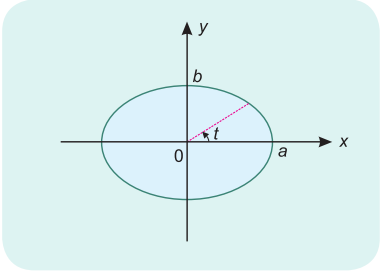
$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |y|\,dx$$

integralini t cinsinden ifade etmek gerekir. $y = h(t)$, $dx = g'(t)\,dt$ dir. t nin a ve b ye karşılık gelen değerlerine t_1 ve t_2 denirse

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)|g'(t)\,dt \qquad (8.12)$$

olur.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ parametrik denklemiyle verilen elips tarafından çevrelenen bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : Önce elipsin dörtte bir parçasının alanını bulalım.

$x = 0$ için $t = \frac{\pi}{2}$, $x = a$ için $t = 0$ olacağından,

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,|\sin t|\cdot(-a\sin t)\,dt$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

br^2 bulunur.

PROBLEMLER 8.1

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile x–ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanını hesaplayınız.

a) $y = 2 + x - x^2$ **b)** $y = 2x - x^2$

c) $y = x(x-1)(x-2)$

2. $y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. $y = [\![x]\!]$, $x = -1$, $x = 2$ ve x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

a. $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{x}{2} + 2$

b. $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

c. $x = y^3 - 4y$, $x = 4 - y^2$

d. $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$

e. $y = x^3$, $y = x^2$

f. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$

g. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$

h. $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$, $y = 0$

ı. $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$

i. $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$

j. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$

k. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

5. $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

6. $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{5\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. $y = 4 - |x|$ eğrisi, x–ekseni ve $x = -2$, $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı $A(k)$ olsun. $\sum_{k=1}^{n} A(k)$ ifadesini bulunuz. n yeter derece büyük seçildiğinde bu alanların toplamı hangi sayıya yaklaşır?

10. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = a^2$ ve $x^2 + y^2 = b^2$ çemberleri ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi çiziliyor. Bu elipsin çemberler arasındaki bölgeyi, alanları oranı $\frac{a}{b}$ olacak şekilde böldüğünü gösteriniz.

11. $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 2)$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

12. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ absisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

13. $y = \sin^2 x$ ve $y = \cos^2 x$ eğrileri ile bunların ardışık iki kesim noktası arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

14. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

a. $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

b. $r = a \cos 2\varphi$ (dört yapraklı gül)

c. $r = 4 + 2\cos \varphi$ (limaçon)

d. $r = a\,(1 - \sin \varphi)$ (kardiyoid)

e. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)

15. $r = \sqrt{|\cos \varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

16. $r = 1 + 2\sin\varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

17. $r = \varphi$ Arşimet spiralinin $[0, 2\pi]$ aralığındaki parçası ile kutup ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

18. $r = a\varphi$ Arşimet spiralinin birinci ve ikinci sarmalı arasındaki bölgenin alanını bulunuz.

19. $r = 2 \sin \varphi$ ve $r = 2 \cos \varphi$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

20. $r = 2a \cos 3\varphi$ eğrisinin içinde $r = a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

21. $r = 2a \cos 2\varphi$ gülünün içinde, $r = \sqrt{2}\, a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

22. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ lemniskatları arasındaki ortak bölgenin alanını bulunuz.

23. $r = 2\,(1 - \cos \varphi)$ kordiyoidinin dışında $r = 2$ çemberin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

24. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

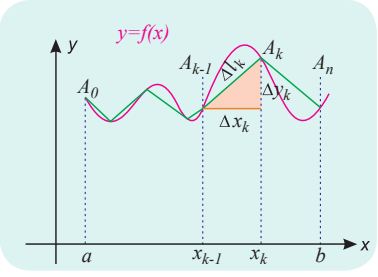
25. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

26. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

27. $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8.2 YAY UZUNLUĞU HESABI

8.2.1. KARTEZYEN KOORDİNATLARDA YAY UZUNLUĞU HESABI



$y=f(x)$ eşitliğiile verilen, $[a,b]$ aralığındatürevli f fonksiyonunungrafiğiolaneğrinin uzunluğunu bulalım. $[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanması $P=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ve $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ noktalarına karşılık gelen eğri üzerindeki noktalar A_n, $A_1, ..., A_n$ olsun. A_0 , A_n noktalarını birleştiren eğri parçasının uzunluğu $[A_{k-1}, A_k]$ doğru parçalarının uzunlukları toplamına yaklaşık olarak eşittir. Parçalanma ne kadar ince yapılırsa, yaklaşıklık o derece iyi olur.

$$\Delta l_k = \sqrt{Ax_k^2 + Ay_k^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

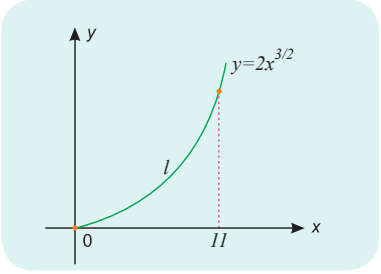
olacağından, eğrinin l uzunluğu için

$$l = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

yazılabilir. f integrallenebilir olduğundan

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (8.13)$$

bulunur.



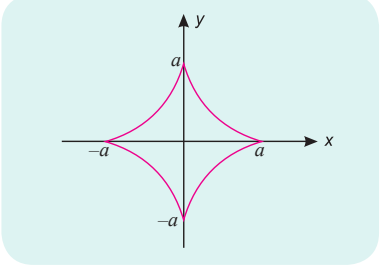
ÖRNEK : $y = 2x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 11$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm :

$$y = 1 + 2x^{3/2} \Rightarrow y' = 3x^{1/2} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + 9x$$

$$l = \int_0^{11} \sqrt{1+9x}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{11} (1+9x)^{1/2}\cdot 9dx = \frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{11} = \frac{2}{27}(10^3-1) = 74$$

birim olur.



ÖRNEK : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm : Eğrinin grafiği yanda verilmiştir.

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

olduğundan

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$= 4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}\,dx = 6a$$

birim olur.

8.2.2. KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YAY UZUNLUĞU HESABI

Kartezyen koordinatlarda $y = f(x)$ denklemi ile verilen eğrinin yay diferensiyelinin

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$

olduğundan

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2 = r^2 + (r')^2$$

dir. Buna göre, yay diferensiyeli

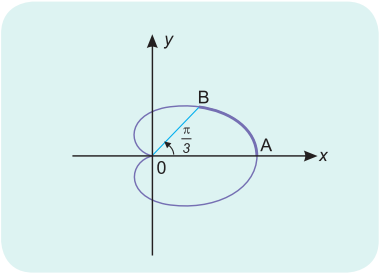
$$dl = \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

olur. O hâlde, eğri üzerinde $P(r_1, \alpha)$, $Q(r_2, \beta)$ noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi \tag{8.14}$$

olur.

ÖRNEK : $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin $\varphi = 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{3}$ doğruları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm : $r^2 = a^2\,(1+\cos\varphi)^2 = a^2\,(1+2\cos\varphi)^2 = a^2\,(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)$

$$(r')^2 = a^2\sin^2\varphi$$

olduğundan

$$r^2+(r')^2 = a^2\,(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 2a^2\,(1+\cos\varphi)$$

$$= 2a^2\left(1+2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = \left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

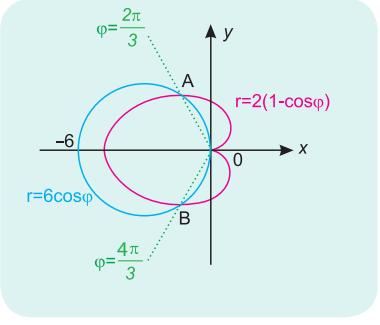
dır. Buna göre

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi = 2a\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 4a\cdot\frac{1}{2} = 2a$$

olur.

ÖRNEK : $r = 2\,(1-\cos\varphi)$ kardiyoidinin $r = -6\cos\varphi$ dairesi içinde kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm : Önce bu iki eğrinin kesim noktalarını bulalım.

$$2\,(1-\cos\varphi) = -6\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$$

olur. Bu açılara karşılık gelen uzunluk r = 3 tür.O halde kesim noktaları $A\left(3,\frac{2\pi}{3}\right), B\left(3,\frac{4\pi}{3}\right)$ noktalarıdır. Diğer taraftan

$$r^2+(r')^2 = 4\,(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+4\sin^2\varphi = 8(1-\cos\varphi) = \left(4\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$l = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left|4\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = 16\cdot\frac{1}{2} = 8$$

birim bulunur.

8.2.3. PARAMETRİK DENKLEMLERİ VERİLEN EĞRİLERİN YAY UZUNLUĞUNUN HESABI

Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

olan bir C eğrisinin üzerindeki herhangi iki noktanın parametreleri t_1 ve t_2 olsun. Bu iki noktayı birleştiren eğri parçasının uzunluğunu bulmak istiyoruz.

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

olduğundan C eğrisinin yay diferensiyeli

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt$$

olur. Dolayısıyla

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt \qquad (8.15)$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$ $\quad -\pi \le t \le \pi$

denklemiyle verilen eğri parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm : $\dot{x} = -\sin t$, $\quad \dot{y} = 1 + \cos t$ olduğundan

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \sin^2 t + 1 + 2\cos t + \cos^2 t = 2(1 + \cos t)$$
$$= 2\left(1 + 2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right) = 4\cos^2\frac{t}{2} = \left(2\cos\frac{t}{2}\right)^2$$

olur.

$-\pi \le t \le \pi \Rightarrow \; -\frac{\pi}{2} \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$ için $\cos\frac{t}{2} \ge 0$ olacağından

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^2}\,dt = \int_{\pi}^{\pi} 2\cos\frac{t}{2}\,dt = 4\sin\frac{t}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 8$$

bulunur.

PROBLEMLER 8.2

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin, karşılarında apsisleri yazılı noktalar arasında kalan parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a. $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

b. $y = x^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$

c. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

d. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

e. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

f. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

2. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının ordinatları verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a. $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$, $y = 1$, $y = 2$

b. $x = \ln(\sec y)$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$

c. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y = 1$, $y = e$

3. Parametre aralıkları karşılarında verilen aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

a. $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $-1 \le t \le 1$

b. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \end{cases}$, $0 \le t \le 2$

c. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \alpha$

ç. $\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $[0, 2\pi]$

d. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t^2 \end{cases}$, $[0, \sqrt{5}]$

e. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ y = \frac{4}{3}t^{3/2} \end{cases}$, $[0, 2]$

4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının uzunluğunu hesaplayınız.

5. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan, aşağıdaki eğri parçalarının uzunluğunu hesaplayınız.

a. $r = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$

b. $r = \sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$

c. $r = \frac{3}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

d. $r = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

e. $r = \sqrt{1 + \sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

6. $r = a\,e^{\varphi}$ logaritmik spiralinin $r = 2a$ çemberi içinde kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

7. $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\ dt$ eşitliğiyle tanımlanan eğrinin $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

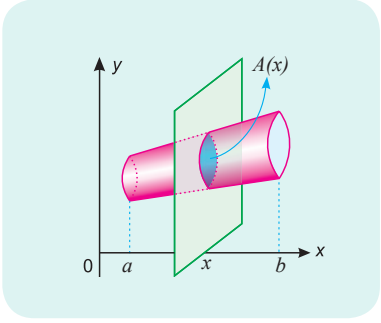
8.3 HACİM HESABI

Bir katı cismin hacmini, integral yardımıyla, çeşitli yollardan hesaplamak mümkündür. Bu yöntemlerden üçünü bu kesimde vermeye çalışacağız.

8.3.1. KESİT YÖNTEMİ

Üç boyutlu uzaydaki bir D bölgesinin (cisminin) şu özelliklere sahip olduğunu kabul edelim :

Cisim $[a, b]$ aralığı üzerine yerleştirilmiş ve bu aralıktaki herbir x noktasında x –eksenine dik olan düzlemle cismin $A(x)$ arakesiti x in bir sürekli fonksiyonudur.



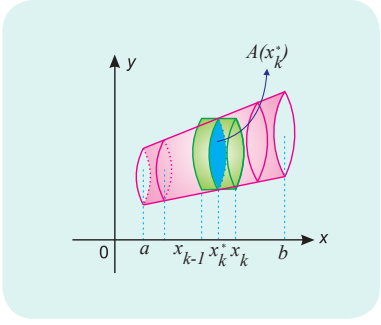
$P = \{x_0 , x_1 , \ldots , x_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $x_k^* , [x_{k-1}, x_k]$ aralığının herhangi bir noktası olsun. Her x_k^* noktasında x eksenine dik olarak çizilen düzlemler D cismini n parçaya böler. Her parçacığın hacmi, yaklaşık olarak $A(x_k^*)$ kesit alanı ile Δx_k yüksekliğinin (kalınlığının) çarpımına eşittir.

Dolayısıyla D bölgesinin V hacmi için

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. P ne kadar ince seçilirse, yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$



yazılabilir. Sağdaki toplam bir integral toplam olduğundan

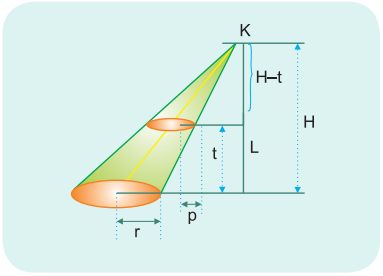
$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad (8.16)$$

bulunur.

ÖRNEK : Tepe noktasının taban düzlemine olan uzaklığı H birim olan bir dairesel koni veriliyor. Taban yarıçapı r olduğuna göre bu koninin hacmini bulunuz.

Çözüm : K tepe noktasından taban düzlemine indirilen dikmeye L diyelim. Tabandan t kadar yükseklikten L ye dik çizilen düzlemin koni ile arakesiti yine bir dairedir. Dairenin yarıçapına p dersek, benzer üçgenlerden

$$\frac{p}{r} = \frac{H-t}{H} \Rightarrow p = r\left(1 - \frac{t}{H}\right)$$



olur. Böylece kesitin alanı

$$A(t) = \pi p^2 = \pi r^2 \left(1 - \frac{t}{H}\right)^2$$

ve dolayısıyla koninin hacmi

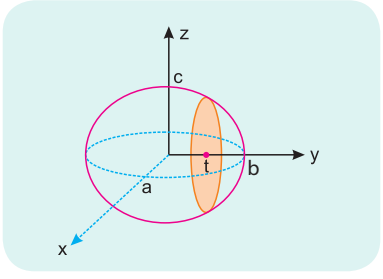
$$V = \int_0^H \pi r^2 \left(1 - \frac{t}{H}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

birim küp olur. Şu halde bir koninin hacmi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

ÖRNEK : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidinin hacmini bulunuz.

Çözüm : Elipsoidin y–eksenine dik $y = t$ düzlemiyle kesitleri, denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{t^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right)} = 1$$



olan elipstir. Bu elipsin eksen uzunlukları $a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}$ ve $c\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}$ olduğundan, alanı

$$A(t) = \pi \cdot a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}} \cdot c\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}} = \pi ac\left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right)$$

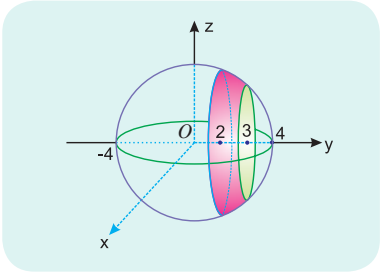
birim kare olur. $-b \le t \le b$ olacağından

$$V = \int_{-b}^{b} A(t)\,dt = \pi ac \int_{-b}^{b} \left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right) dt$$

$$= \pi ac\left(t - \frac{t^3}{3b^2}\right)\Big|_{-b}^{b} = \frac{4}{3}\pi abc$$

bulunur. $a = b = c$ ise elipsoid bir küre olacağından, yarıçapı a birim olan bir kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ olacaktır.

ÖRNEK : $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ küresinin $y = 2$ ve $y = 3$ düzlemleri arasında kalan parçasının hacmini bulunuz.



Çözüm : $2 \le t \le 3$ olmak üzere söz konusu küre parçasını $y = t$ düzlemiyle keselim. Arakesit bir dairedir. Bu dairenin denklemi $x^2 + z^2 = 16 - t^2$ olacağından yarıçapı $r = \sqrt{16 - t^2}$ dir. Dolayısıyla kesitin alanı $A(t) = \pi r^2 = \pi(16 - t^2)$ dir. Bu durumda küre parçasının hacmi

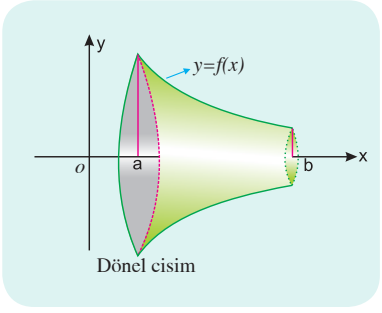
$$V = \int_2^3 A(t)\ dt = \int_2^3 \pi(16 - t^2)\ dt = \pi\left(16t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_2^3 = \frac{29}{3}$$

birimküp olur. ❐

Bir düzlemsel bölge bir eksen etrafında döndürüldüğünde meydana gelen cisme bir **dönel cisim** denir. Dönel cisimlerin hacmi integral yardımıyla kolayca hesaplanabilir. Bununla ilgili iki önemli yöntemi verelim.

8.3.2. DİSK YÖNTEMİ

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif tanımlı ve integrallenebilir olsun. $y = f(x)$ eğrisi; $x = a$, $x = b$ doğruları ve x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

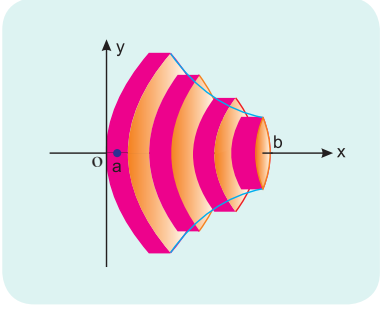


Dönel cisim

$[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ bağıntısını sağlayan x_k noktaları yardımıyla n aralığa bölelim. Herbir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında bir x_k^* noktası seçelim. Yarıçapları $f(x_k^*)$ ve yükseklikleri Δx_k olan disklerin (dairesel silindirlerin) hacimleri toplamı, yaklaşık olarak, dönel cismin hacmine eşittir. Parçalanma ne kadar ince olursa yaklaşım o kadar iyi olur. Şu halde dönel cismin hacmi

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k^*)\, \Delta x_k$$

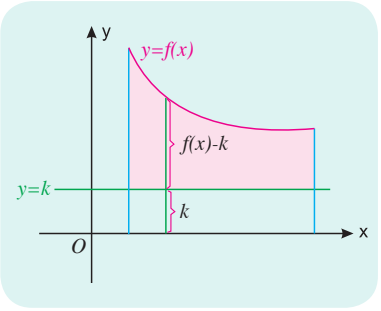
yazılabilir. f integrallenebilir olduğundan f^2 ve πf^2 fonksiyonları da integrallenebilirdir. Sağ taraf πf^2 fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki integrali olacağından



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \qquad (8.17)$$

bulunur.

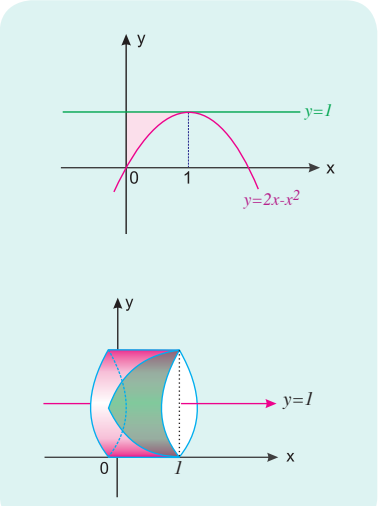
Yukarıdaki bağıntıda $f(x)$ ifadesi eğri üzerinde apsisi x olan noktanın x–eksenine (dönme eksenine) olan uzaklığıdır.



$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$, $y = k$ doğruları tarafından sınırlanan bölge $y = k$ doğrusunun bir tarafında kalsın. Bu bölge, $y = k$ ekseni etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 \, dx \qquad (8.18)$$

olur, zira eğri üzerindeki bir (x, y) noktasının dönme ekseni olan $y = k$ doğrusuna olan uzaklığı $|f(x) - k|$ kadardır.



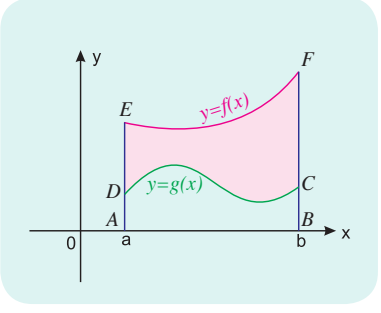
ÖRNEK : $y = 2x - x^2$ parabolü, $y = 1$ doğrusu ve y–ekseni tarafından sınırlanan bölge $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm :

$$V = \pi \int_0^1 [f(x) - k]^2 \, dx = \pi \int_0^1 (2x - x^2 - 1)^2 \, dx = \pi \int_0^1 -(x-1)^4 \, dx$$

$$= -\pi \cdot \frac{1}{5}(x-1)^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

olur.



$x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y–ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen dönel cismin hacminin

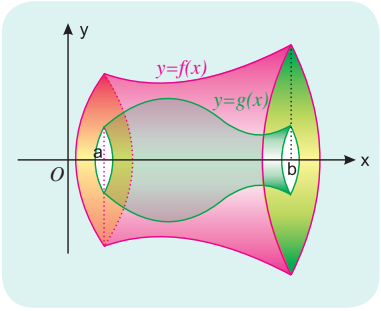
$$V = \pi \int_c^d g^2(y) \, dx \qquad (8.19)$$

olacağı gösterilebilir.

$[a, b]$ aralığında $0 \le g(x) \le f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile

$x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \, dx \qquad (8.20)$$

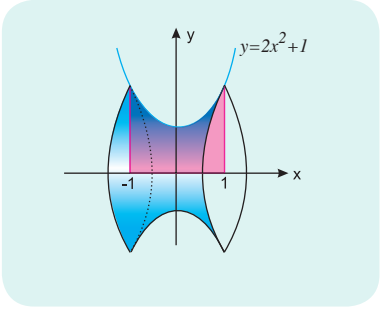


olacaktır. Bu, ABFE bölgesinin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen hacimden ABCD bölgesinin döndürülmesiyle elde edilen hacmin çıkarılmasından, yani

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$$

farkından başka birşey değildir.

ÖRNEK : $y = 2x^2 + 1$ parabolü, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile x–ekseni tarafından sınırlanan bölge x–ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.

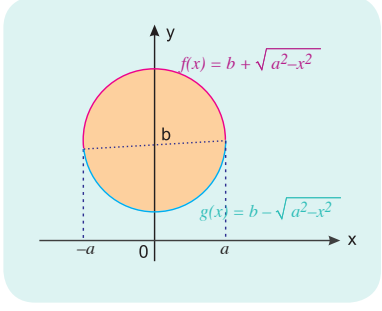


Çözüm :

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2x^2+1)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (4x^4+4x^2+1)\,dx$$

$$\pi.2\int_0^1 (4x^4+4x^2+1)\,dx = 2\pi\left(\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1 = \frac{47}{15}\pi$$

ÖRNEK : $0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0, b)$ de bulunan a yarıçaplı dairenin x–ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin (torun) hacmini bulunuz.



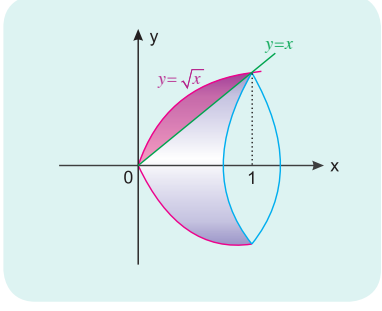
Çözüm : Verilen çemberin denklemi $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ dir. Bu eşitlikten y çekilirse $y_1 = b + \sqrt{a^2-x^2} = f(x)$, $y_2 = b - \sqrt{a^2-x^2} = g(x)$ bulunur. Sözü edilen bölge yanda gösterilmiştir. Buna göre istenen hacim

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2\right]\,dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 8b\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = 2\pi^2 a^2 b$$

birimküp olur.

ÖRNEK : $y = \sqrt{x}$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

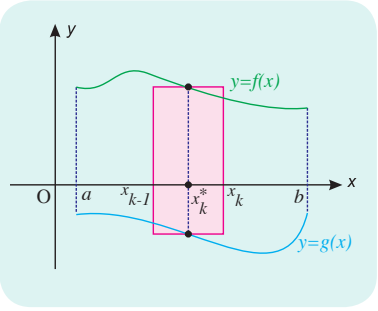


Çözüm :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - x^2\right]dx = \pi \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\ br^3$$

Kabuk (Silindirik Tabakalar) Yöntemi



$y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Oy–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

olsun. Her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında bir x_k^* seçelim. Boyu $|f(x_k^*) - g(x_k^*)|$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $0y$–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\Delta V_k = \left|\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2\right| \cdot \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| = 2\pi \cdot \frac{\left|x_{k-1} + x_k\right|}{2} \cdot \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| \cdot \Delta x_k$$

olur. İstenen V hacmi, yaklaşık olarak, bu ΔV_k hacimlerinin toplamına eşittir. Buna göre,

$$V \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|x_{k-1} + x_k\right|}{2} \cdot \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| \cdot \Delta x_k$$

olur. Parçalanma ne kadar ince alınırsa yaklaşıklık o kadar iyi olur. $\|P\| \to 0$ yapılırsa, $\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \approx x_k^*$ olacağından

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} 2\pi \sum |x_k^*|\,|f(x_k^*) - g(x_k^*)|\,\Delta x_k$$

bulunur. Eğer $f - g$ integrallenebilir ise sağ taraftaki limit $2\pi \int_a^b \left|x[f(x) - g(x)]\right| dx$ integraline eşit olacağından

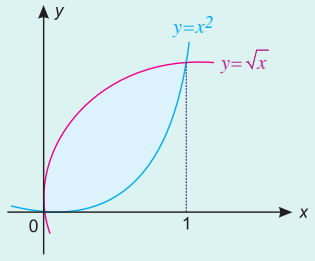
$$V = 2\pi \int_a^b \left|x[f(x) - g(x)]\right| dx \qquad (8.21)$$

bulunur.

Benzer olarak $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri $y = c$ ve $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d \left|y[u(y) - v(y)]\right| dy \qquad (8.22)$$

olur.

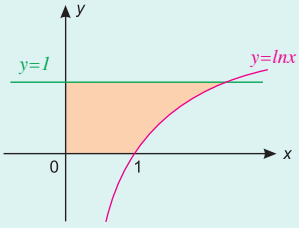


ÖRNEK : $y = x^2$ ile $y^2 = x$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin $0y$– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : Söz konusu bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Üstteki eğrinin denklemi $y = \sqrt{x}$, alttaki eğrinin denklemi $y = x^2$ olduğundan

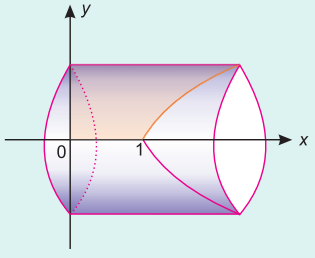
$$V = 2\pi \int_0^1 x\left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{3\pi}{10}$$

olur.



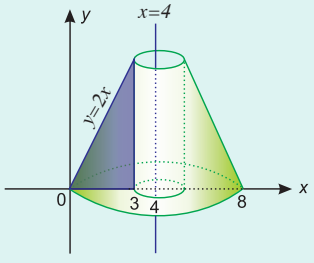
ÖRNEK : $y = lnx$ eğrisi, $y = 1$ doğrusu ve koordinat eksenleri tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = lnx \Rightarrow x = e^y$ dir.



$$V = 2\pi \int_0^1 |y|\,|u(y) - v(y)|\, dy$$
$$= 2\pi \int_0^1 |y|\,|e^y - 0|\, dy = 2\pi \int_0^1 ye^y\, dy$$
$$= 2\pi\, e^y(y-1)\Big|_0^1 = 2\pi\,(1) = 2\pi$$

br^3 bulunur.



ÖRNEK : $y = 2x$, $x = 3$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan üçgensel bölgenin $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm : Sözkonusu üçgensel bölgede alınan bir noktanın dönme eksenine olan uzaklığı $4 - x$ olduğundan hacim formülünde x çarpanı yerine $4 - x$ gelecektir. Buna göre

$$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)\, 2x\, dx = 4\pi\,(2x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^3 = 36\pi$$

olur.

PROBLEMLER 8.3

1. Bir cismin tabanı yarıçapı 2 cm olan bir dairedir. Cismin x eksenine dik düzlemlerle arakesitleri birer kare olduğuna göre, bu cismin hacmini bulunuz.

2. Bir cismin x–eksenine dik düzlemlerle arakesiti uzun ekseni kısa ekseninin iki katına eşit olan elipslerdir. Bu cisim $x0y$–düzlemine paralel düzlemlerle kesildiğinde elde edilen en geniş kesitin üst sınırı $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$ parabolüdür. Bu cismin uzunluğunun 3 birim olduğu bilindiğine göre, hacmi nedir?

3. Tabanı, bir kenarı a birim olan kare ve yüksekliği h birim olan piramidin hacmini kesit yöntemiyle hesaplayınız.

4. Bir cisim xOy düzlemi tarafından $x^2 + y^2 = a^2$ dairesi boyunca kesilmektedir. Bu cismin x–eksenine dik düzlemlerle elde edilen kesitleri, bir kenarı bu düzlemlerin daire üzerinde ayırdığı kirişlere eşit olan eşkenar üçgenlerdir. Bu cismin hacmini bulunuz.

5. Bir cismin tabanı, eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Bu cismin büyük eksene dik düzlemlerle arakesiti, yüksekliği 6 cm olan birer ikizkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

6. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

a. $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

b. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

c. $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

ç. $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

d. $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x$, $y = 0$

e. $y = 3x - x^2$, $y = x$

f. $y^2 = 2px$, $x = h$, $y = 0$

g. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

h. $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$

ı. $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

7. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

a. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$

b. $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

c. $y = a - \frac{x^2}{a}$, $x + y = 0$

d. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

a. $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ $\quad$ *eksen* $y = 1$

b. $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ $\quad$ *eksen* $y = 2$

c. $y = 4x - x^2$, $y = 0$ $\quad$ *eksen* $y = 4$

d. $y = 1 - x^2$, $y = -3$ $\quad$ *eksen* $y = -3$

e. $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ $\quad$ *eksen* $x = -3$

f. $x = y^2$, $x = 2 - y^2$ $\quad$ *eksen* $x = -1$

9. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

a. Ox–ekseni

b. Oy–ekseni,

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

10. $y = sinx$, $y = cosx$ eğrileri, $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox–ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin $0x$–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

12. $x = a\,(t - sint)$,

$y = a\,(1 - cost)$

sikloidinin bir yayı ile $0x$–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin $0x$–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

13. Aşağıda eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin $0x$–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk metodu ile hesaplayınız.

a. $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

b. $y = 4x - x^2$, $y = 0$

c. $y = sinx$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

d. $y = -x + 6$, $xy = 5$

e. $xy = 2, xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$

f. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

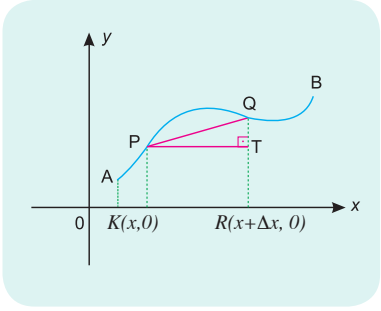
14. $y = sinx$, $y = cosx$ eğrileri ile $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox ve Oy–eksenleri etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

15. $r = a\,(1 + cos\varphi)$ kardiyoidinin kutupsal eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

8.4 DÖNEL YÜZEYLERİN ALAN HESABI

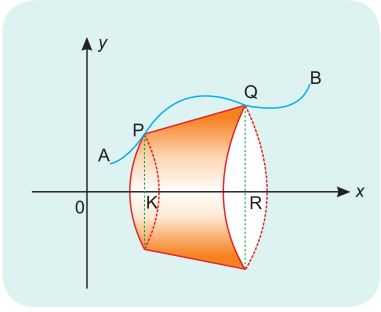
Bilindiği gibi bir eğri parçası bir doğru etrafında döndürüldüğü zaman dönel yüzey denilen yüzeyler elde edilir. Bu kesimde bu tip yüzeylerin alanlarını hesaplamaya çalışacağız.

8.4.1. KARTEZYEN KOORDİNATLARDA YÜZEY ALANI HESABI



$y = f(x)$ eşitliği ile verilen eğrinin $[a, b]$ aralığına karşılık gelen AB parçasının $0x$–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayalım.

$[a, b]$ aralığında bir $K(x, 0)$ noktası ile bir $R(x + \Delta x, 0)$ noktasını alalım. Eğrinin $P(x, f(x))$ ve $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ noktalarını birleştiren parçasının $0x$–ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin ΔS alanı, $[PQ]$ doğru parçasının dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin (kesik koninin) yüzey alanları, yaklaşık olarak eşittir. Şu halde;



$$\Delta S \approx 2\pi \frac{|PK| + |QR|}{2} \cdot |PQ| = 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x+\Delta x)|}{2} \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]^2}$$

$$= 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x+\Delta x)|}{2} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]^2}\, \Delta x$$

yazılabilir. Buna göre

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \approx 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x+\Delta x)|}{2} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]^2}$$

olur. Δx ne kadar küçük seçilirse bu yaklaşıklık o kadar iyi olur. f türevlenebilir olduğunda

$$S' = 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}$$

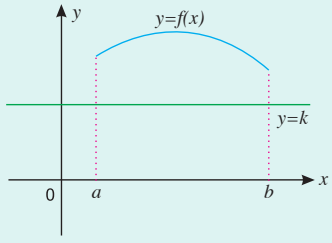
olur. İntegral Hesabın Temel Teoreminden

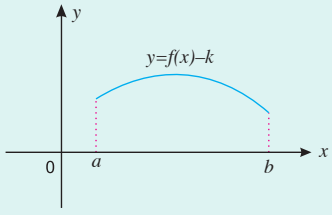
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (8.23)$$

bulunur. Benzer olarak, denklemi $x = u(y), \quad c \le y \le d$ olan eğri parçasının y–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |u(y)| \sqrt{1+[u'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1+(x')^2}\, dy \qquad (8.24)$$

olacaktır. ❐





$y = f(x)$, $a \le x \le b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı ile $y = f(x) - k$, $a \le x \le b$ eğri parçasının $y = 0$ (x–ekseni) doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı aynı olcaktır [Yandaki şekillere bakınız.]

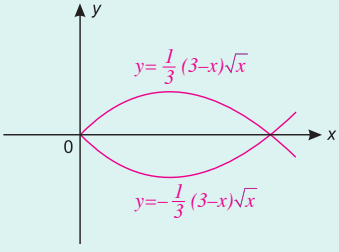
Diğer taraftan $[f(x) - k]' = f'(x)$ olacağından, $y = f(x)$, $a \le x \le b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı olarak

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - k| \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_a^b |y-k| \sqrt{1+(y')^2}\, dx \qquad (8.25)$$

bulunur. Benzer düşünceyle, $x = u(y)$, $c \le y \le d$ eğri parçasının $x = p$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen döney yüzeyin alanının

$$S = 2\pi \int_c^d |u(y) - p| \sqrt{1+[u'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_c^d |x-p| \sqrt{1+(x')^2}\, dy$$

olduğu gösterilebilir.



ÖRNEK : $9y^2 = x(3-x)^2$ eğrisinin ilmeğini oluşturan eğrinin $0x$–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

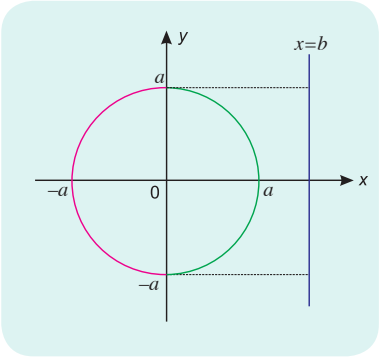
Çözüm : Eğrinin grafiği yanda verilmiştir. Döndürülen eğri parçası olarak $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ veya $y = -\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ eğrilerinin $[0, 3]$ aralığındaki parçalarını almak yeterlidir. $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ eğrisinin $[0, 3]$ aralığındaki parçasını $0x$–ekseni etrafında döndürelim.

$$S = 2\pi \int_0^3 |y| \sqrt{1+(y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\, \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3-x)(x+1)\, dx = 3\pi$$

bulunur.

ÖRNEK : $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $x = b$ $(b > a)$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin (torun) alanını bulunuz.



Çözüm : Söz konusu olan $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ ve $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ eğri parçalarının $x = b$ doğrusu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanları toplamıdır. Buna göre;

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} \left| -\sqrt{a^2 - y^2} - b \right| \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}}\, dy + 2\pi \int_{-a}^{a} \left| \sqrt{a^2 - y^2} - b \right| \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2 - y^2} + b - \sqrt{a^2 - y^2} + b \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}\, dy$$

$$= 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 4\pi ab \; Arc\sin \frac{y}{a} \Big|_{-a}^{a}$$

$$= 4\pi ab \, (Arc\sin 1 - Arc\sin(-1)) = 4\pi ab \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 4\pi^2 ab$$

olur.

Bilindiği gibi, $\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, $y = f(x)$ eğrisinin; $\sqrt{1 + (x')^2}\, dy$ de $x = u(y)$ eğrisinin dl yay diferensiyelidir. Buna göre (8.23), (8.24), (8.25) ve (8.26) formülleri

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} |y|\, dl \qquad (8.27)$$

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} |x|\, dl \qquad (8.28)$$

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} |y - k|\, dl \qquad (8.29)$$

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} |x - p|\, dl \qquad (8.30)$$

şeklinde de verilebilir.

8.4.2. EĞRİ DENKLEMİNİN PARAMETRİK OLARAK VERİLMESİ DURUMUNDA YÜZEY ALANI HESABI

Eğri parçasının denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$$

şeklinde verilmiş olsun. Yüzey alanını veren formülleri vermek için (8.27) – (8.30) formüllerini t parametresine göre yazmak yetecektir. Bilindiği gibi, eğri parametrik olarak verildiğinde

$$dl = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt$$

dır. Şu halde yukarıdaki formüller

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{8.31}$$

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{8.32}$$

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y - k| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{8.33}$$

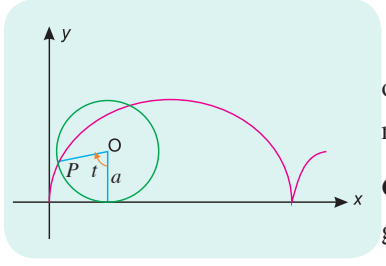
$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x - p| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt \tag{8.34}$$

şeklini alır. Bu integrallerin hesaplanmasında x ve y yerine t cinsinden değerlerinin konulması unutulmamalıdır.

ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

olan sikloid eğrisinin bir yayının $0x$–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzey alanını bulunuz.



Çözüm : Bir yayın çizilmesi için t parametresi $[0, 2\pi]$ aralığını taramalıdır. Buna göre

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} |y| \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\, du = 16\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u\, du$$

$$= 16\pi a^2 \left(-\cos u + \frac{1}{3}\cos^3 u\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2$$

olur.

8.4.3. KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YÜZEY ALANI HESABI

Eğri parçasının denklemi

$$r = f(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

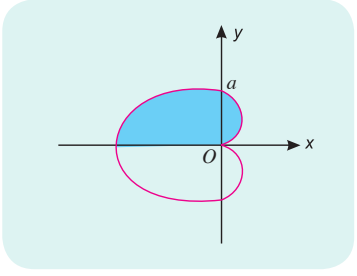
olduğunu biliyoruz. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ olduğu da gözönüne alınırsa, (8.27) den, verilen eğri parçasının kutup eksenİ etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r\sin\varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \tag{8.34}$$

olacaktır. Aynı eğrinin $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı (8.28) den

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r\cos\varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \tag{8.35}$$

olur.



ÖRNEK : $r = a(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısının kutup ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : $r^2 + (r')^2 = a^2(1 - \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi$

$$= 2a^2(1 - \cos\varphi)\, 4a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = \left(2a\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} |r\sin\varphi| \left|2a\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)\sin\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 32\pi a^2 \cdot \frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının x–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

a. $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $0 \le x \le 3$

b. $y = x^3$, $0 \le x \le 1$

c. $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 8$

d. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının y–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

a. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$

b. $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$

3. Orijin ile (h, r) noktasını birleştiren doğru parçasının x–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen koninin yanal alanını bulunuz.

4. Yarıçapı a olan bir kürenin yüzey alanını bulunuz.

5. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $[x_1, x_1 + h]$ aralığına karşılık gelen parçasının y–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen küre parçasının alanını bulunuz.

6. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^2$ Astroid eğrisinin x–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz. Eğri y ekseni etrafında döndürüldüğünde yüzey alanı değişir mi?

7. $4x^2 + y^2 = 4$ elipsinin üst yarısının y–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

8. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

olan eğri parçasının $0x$–ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

9. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının

a. y–ekseni

b. en yüksek noktasında teğet olan doğru

etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. $r = 2a\cos\varphi$ eğrisi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

11. $r^2 = a^2\cos^2\varphi$ lemniskatının y–ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $y = \sqrt{|x|}$ eğrisiyle $x - 5y + 6 = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

2. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

a. $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

b. $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

c. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

d. $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, $4y = x^2$

e. $y = x + 1$, $y = cosx,\ y = 0$

f. $x = y^2 - 1$, $x = |y|\sqrt{1-y^2}$

g. $x = y^2\,(1 - y)$, $x = 0,\ y = 0$

3. $y^2 = (1 - x^2)^3$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.

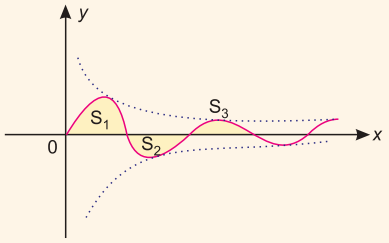
4. $(y - 2)^2 = x^2$ eğrisinin iki kolu ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. $y = f(x)$ eğrisi ile $[0, x]$ aralığı arasında kalan bölgenin alanı

$A(x) = x = e^x - 2$

olduğuna göre f(x) ifadesini hesaplayınız.

6.



$y = e^{-x}\,sinx$ eğrisiyle x–ekseni arasında kalan kapalı bölgelerin alanları $S_1,\ S_2,\ S_3$ ... *olsun.* (S_n) dizisinin, ortak oranı $e^{-\pi}$ olan bir geometrik dizi olduğunu gösteriniz.

7. $r = 12\,cos3\varphi$ gülünün içinde, $r = 6$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. Kutupsal koordinatlara geçerek

$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. Aşağıdaki eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

a. $y = \dfrac{2}{5}x^{5/4} - \dfrac{2}{3}x^{3/4}$, $1 \le x \le 16$

b. $y = \displaystyle\int_0^x \sqrt{sec^4 t - 1}\,dt$, $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

c. $24xy = y^4 + 48$, $2 \le y \le 4$

ç. $x = cos2t$, $y = sin2t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

d. $y = ln(sex)$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

10. $y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$ eğrisinin sınırladığı bölge x–ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

11. $(y-x)^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge x–ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin x–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

a. $y = \sqrt{\cos x}\ , y = 0, x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

b. $y = \sqrt{x}$, y = 2, x = 0, y = 0

c. $y = x^2 + 1,\ y = -x + 3$

d. $y = x^{3/2},\ x = 1,\ y = 0$

e. $y = \sqrt{x+1}\ , y = \sqrt{x=1},$ x = 1, x =

f. $y = \cos x + \sin x,\ g(x) = \cos x - \sin x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

12. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayınız.

a. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

b. $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

c. $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

d. $y = x^2\sqrt{x^2+1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

e. $y = |x - 2|$, $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$

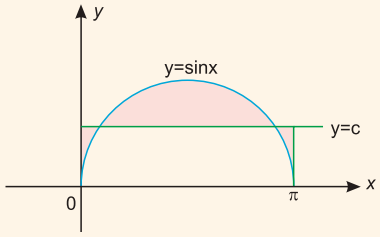
f. $x = \sqrt{1+y^3}$, $y = 1$, $y = 2$

13. Birinci bölgede $x = y - y^3$, $x = 1$, $y = 1$ tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

a. x–ekseni **b.** y–ekseni

c. $x = 1$ **d.** $y = 1$

14.

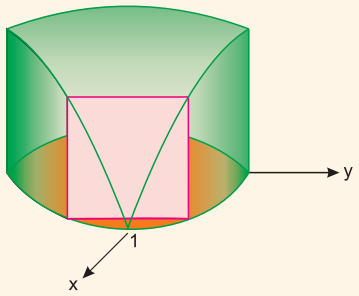


Yukarıdaki şekilde $y = \sin x$ eğrisi, $x = 0, x = \pi, y = c$ doğruları tarafından sınırlanan taralı bölge $y = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacminin minimum olması için c ne olmalıdır?

15. f, $[a, b]$ üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve $0x$–ekseni tarafından sınırlanan bölge, $c \le a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

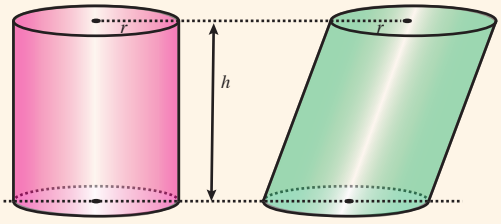
16. $y = x^4$, x–ekseni, y–ekseni ve $x = 1$ tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

17.



Bir cismin x–eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Bu karelerin iki köşesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde bulunduğuna göre cismin hacmini bulunuz.

18.



Yukarıda bir dik dairesel silindir ile bir eğik dairesel silindir verilmiştir. Bu silindirlerin taban yarıçapları ile yükeklikleri aynı olduğunda hacimlerinin de aynı olacağını göteriniz.

19. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}$, $\sqrt{3} \le t \le 2\sqrt{2}$

eğri parçasının x–ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

20. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right)$, $0 \le x \le 1$

eğri parçasının x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

21. Birinci bölgede $y = 4 - x^2$ parabolü, y–ekseni ve $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin y–ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

22. $y = \frac{1}{4}x^2$ eğrisi, y–ekseni ve y = 1 doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin.

a) y–ekseni

b) x–ekseni

c) x = 2 doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.

23. y = 4 – x2 eğrisiyle x–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin

a) y – ekseni

b) y = – 1 doğrusu

c) y = 5 doğrusu

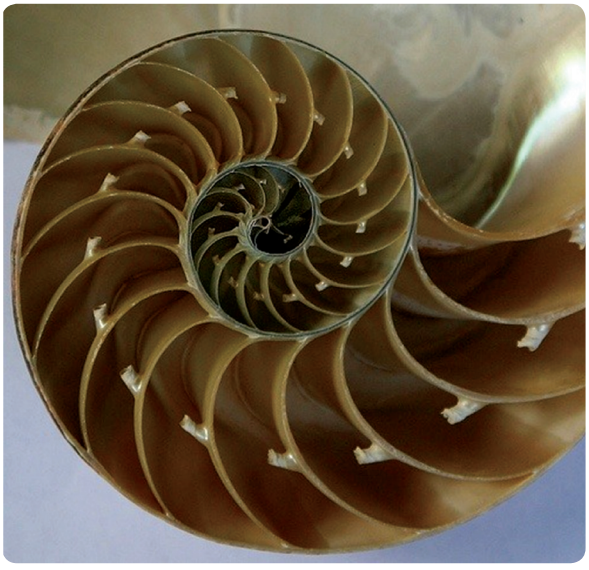
d) x = 3 doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Bölüm

9

SERİLER



9.1 SERİ KAVRAMI

Bu bölümde analizde çok geniş uygulama alanları olan sonsuz serileri inceleyeceğiz. Sonsuz seriler kullanılarak π ve e gibi irrasyonel sayılara, milyonlarca rakamdan oluşan ondalık gösterimlerle yaklaşmak mümkün olacaktır. Ayrıca değişken katsayılı diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri seriler yardımıyla bulunabilir.

Şifrelerin okunması, radar ve televizyon ekranlarında görülen görüntü dağınıklıklarının giderilmesine kadar birçok uygulamanın temelinde sonsuz seriler vardır.

TANIM

(a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini gözönüne alalım. $((a_n), (s_n))$ ikilisine ***seri*** adı verilir. a_n terimine, serinin ***genel terimi***, (s_n) dizisine de serinin ***kısmi toplamlar dizisi*** denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak, yani

$$\lim s_n = s$$

ise $((a_n, s_n))$ serisi ***yakınsak*** ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsan olmayan seriye ***ıraksak seri*** adı verilir.

Genel terimi a_k olan yakınsak serinin toplamı s ise, bu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

şeklinde gösterilir. Demek ki $\sum a_k$ sembolü, yakınsak olan serinin toplamını göstermektedir. Fakat alışılmış olduğu için, seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi a_k olan seri $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ile gösterilir.

$$\gamma = \left\{(a_k): \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ yakınsak}\right\}$$

kümesine ***yakınsak seri oluşturan diziler kümesi*** adı verilir. Buna göre

$(a_k) \in \gamma \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ifadesindeki k değişkeni keyfi bir değişkendir. k yerine herhangi bir değişken alınabilir. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aynı serilerdir.

Bir seride, değişkenin 1 den başlama zorunluluğu da yoktur. Değişken herhangi bir tam sayıdan başlayabilir. Örneğin $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2-4}$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$ da birer seridir. Eğer değişkenin başlangıç değeri belirtilmemişse başlangıç değeri 1 olarak düşünülecektir.

ÖRNEK : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$ serisinin karakterini (yakınsaklık durumunu) inceleyiniz.

Çözüm : Serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

olacaktır.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

olduğundan

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

olur. Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

bulunur. $\lim s_n = 1$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

olur. Şu halde seri yakınsak ve toplamı 1 dir.

ÖRNEK : $|a| < 1$ olduğuna göre, ***geometrik seri*** denilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} + a^n + a^{n+1} + \ldots$$

serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm : $s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$

ve $|a| < 1$ için $\lim a^n = 0$ olduğundan

$$\lim s_n = \frac{1}{1 - a}$$

olur. Dolayısıyla $|a| < 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = \frac{1}{1 - a} \qquad (9.1)$$

eşitliği elde edilir. ❐

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} s_n &= \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \ldots + \log\frac{n+1}{n} \\ &= \log\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \ldots \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) \end{aligned}$$

dir. $\lim s_n = \infty$ olduğundan (s_n) ıraksak ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ serisi ıraksaktır. ❐

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

ve

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

olduğundan, $n \geq 2$ için

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

dir. Eğer $\sum a_n$ serisi yakınsak ve toplamı s ise

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

olacağından yakınsak bir seri için aşağıdaki teoremin doğruluğu açıktır.

TEOREM 9.1

Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani genel teriminin limiti sıfır olan bir serinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ serisinin genel teriminin limiti sıfır olduğu halde bu seri ıraksaktır. O halde bu teoremden şu şekilde faydalanılabilir.

TEOREM 9.2

Eğer bir serinin genel terimi sıfıra gitmiyorsa (limiti sıfır değilse) bu seri ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum \frac{k}{k+1}$, $\sum 2^{1/k}$, $\sum \frac{3k^2}{k^2+1}$ serilerinin karakterlerini inceleyiniz.

Çözüm : Verilen seriler ıraksak serilerdir. Çünkü :

$\lim \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$, $\lim 2^{1/k} = 2^0 = 1 \neq 0$ ve $\lim \frac{3k^2}{k^2+1} = 3 \neq 0$ dır.

TANIM

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ ifadesine $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin ***kalan terimi*** denir.

Şimdi bununla ilgili olan şu teoremi ispatlayalım.

TEOREM 9.3

Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.

İspat : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n + R_n$ yazılabildiğinden

$$s = \lim_{n\to\infty}(s_n + R_n) \Rightarrow s = s + \lim_{n\to\infty} R_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

olur. □

Dizilerde yaptığımız bazı işlemler seriler için de geçerlidir. Örneğin,

$$\sum a_k = a \text{ ve } \sum b_k = b \Rightarrow \sum (a_k + b_k) = a + b$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\sum \lambda a_k = \lambda a$$

dır. Gerçekten,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lambda \cdot a$$

olur.

PROBLEMLER 9.1

1. (a_k) dizisi yakınsak ise ***teleskopik seri*** denilen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ serisinin de yakınsak ve toplamının $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ olacağını gösteriniz.

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(4k-3)(4k+1)} = 1$

ç. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$

e. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k - 3^k}{12^k} = \frac{1}{6}$

f. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{1+p} \quad (p > 0)$

g. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \ln\frac{2}{3}$

h. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k}\theta = \tan^2\theta, \qquad \left(\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

ı. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = +\infty$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$

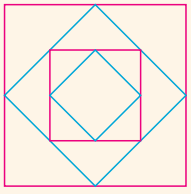
j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)} = \frac{1}{4}$

k. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$

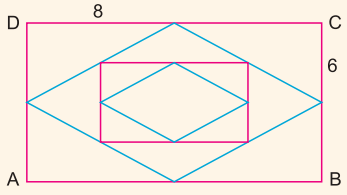
l. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}$

3. Şekildeki dörtgenler birer kare olup herbiri bir öncekinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulmuştur. En dıştaki karenin bir kenarının uzunluğu 6 cm ise sonsuz çokluktaki bu karelerin çevrelerinin uzunlukları toplamı kaç cm dir?

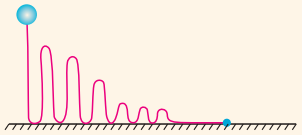


4.



ABCD eni 6cm, boyu 8 cm olan bir dikdörtgendir. Diğer sonsuz çokluktaki dörtgenlerden herbirinin köşeleri, bir öncekinin kenarlarının orta noktalarıdır. Tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı kaç cm olur ?

5. 6 m yüksekten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{2}{3}$ si kadar yükseliyor. Top durduğunda kaç m yol almış olur?



6. $|r| < 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki serilerin toplamını hesaplayınız.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ **b.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{3^k}$ **c.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{5^k}$

7. $(s_n) = \left(5 - \frac{n}{3^n}\right)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olduğuna göre a_n genel terimini ve $\sum a_n$ serisinin toplamını bulunuz.

8. Yakınsak bir serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olacağını gösteriniz. Kısmi toplamlar dizisi sınırlı olan bir seri yakınsak mıdır?

9. Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3(a^k - a^{k-1})(a^k + a^{k-1})$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz.

10. Aşağıdaki serilerin ıraksak olduğunu gösteriniz.

a. $\sum \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

11. Aşağıdaki serilerin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ **b.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$ **ç.** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)^2$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k$$

olsun.

a. $\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$ olacağını gösteriniz.

b. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k$ yakınsak mıdır?

13. $F_1 = F_2 = 1$ ve $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ biçiminde tanımlanan ve Fibonacci dizisi denilen (F_n) dizisi için

a. $\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = 1$

c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = 2$

olduğunu gösteriniz.

9.2 POZİTİF TERİMLİ SERİLER

Bütün serilerin kısmi toplamlar dizisini hesaplayıp yakınsaklığını incelemek mümkün olmayabilir. Bu hallerde serinin yakınsaklığı hakkında birşeyler söylemek için yakınsaklık testleri (kriterleri) denilen bazı testler mevcuttur. Önce pozitif terimli seriler ve onlarla ilgili testleri verelim.

TANIM

Her k doğal sayısı için $a_k \geq 0$ ise $\sum a_k$ serisine bir ***pozitif terimli seri*** denir.

Pozitif terimli serilerin kısmi toplamlar dizisi monoton artan olduğundan bu serilerin yakınsak olduğunu göstermek için kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi bu seriler için yakınsaklık testlerini verelim.

Karşılaştırma Testi **TEOREM 9.3**

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve $a_k \leq C \cdot b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

1. $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.
2. $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

İspat : **1.** $\sum b_k = b$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \leq C \cdot b_k$ olduğundan

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq C(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k = C \cdot b$$

olur. $\sum a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsak ve dolayısıyla $\sum a_k$ yakınsaktır.

2. $\sum a_k$ ıraksak olsun. O halde $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ sınırsızdır.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq C\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

olduğundan $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ dizisi sınırsız dolayısıyla ıraksaktır. O halde $\sum b_k$ ıraksaktır.

Bir serisinin baştan birkaç teriminin alınıp alınmaması serinin karakterini değiştirmeyeceğinden yukarıdaki test şöyle de verilebilir :

$p \in N$ ve $k \geq p$ için $a_k \leq C \cdot b_k$ olacak şekilde bir C sabit mevcut olsun.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $k \in \mathbb{N}$ için $\cos^2 k \leq 1$ olduğundan $\frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)}$ dir.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ yakınsak olduğundan (326. sayfadaki örnek) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)}$ serisi de yakınsaktır. ❐

Şimdi karşılaştırma testinde çok kullanılan ve ***harmonik seri*** denilen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyelim.

I) $\alpha = 1$ olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dir. Bu dizi monoton artandır. Şimdi bu dizinin sınırlı olup olmadığına bakalım. $B > 0$ istenildiği kadar büyük bir sayı olsun. $m > 2B$ ve $n > 2^m$ seçelim.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{2}{2^m} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2} > B \end{aligned}$$

olur. s_n, istenildiği kadar büyük bir sayıdan daha büyük olduğundan sınırsız ve dolayısıyla ıraksaktır. O halde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır.

II. $\alpha < 1$ olsun. $k^{\alpha} \le k \Rightarrow \frac{1}{k^{\alpha}} \ge \frac{1}{k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\alpha < 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ serisi ıraksaktır.

III. $\alpha > 1$ olsun. $k^{r} > n$ olacak şekilde r sayısını tesbit edelim. Bu taktirde $n > 1$ için

$$s_n = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\le 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) + \ldots + \left[\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(\frac{1}{2^{r}-1}\right)^{\alpha}\right]$$

$$< 1 + 2\frac{1}{2^{\alpha}} + 4 \cdot \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + 2^{r-1}\left(\frac{1}{2^{r-1}}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{r-1})^{\alpha-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{r-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{r}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$

olur. Yani (s_n) sınırlıdır. Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \alpha > 1$ için yakınsaktır.

Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ serisi $\alpha \le 1$ için ıraksak $\alpha > 1$ için yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2}{2k^2+1}\right)^{k}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$1 < 2k \Rightarrow 2k^2 + 1 < 2k^2 + 2k \Rightarrow \frac{1}{2k^2+1} > \frac{1}{2k^2+2k}$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2}{2k^2+1} > \frac{2k^2}{2k^2+2k} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2k^2}{2k^2+1}\right)^{k} > \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k} > 1 - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

dır. $\sum \frac{1}{k+1}$ serisi ıraksak olduğundan verilen seri ıraksaktır.

Karşılaştırma testinin limit formu **TEOREM 9.4**

$\sum a_k$ ve $\sum b_k$ pozitif terimli seriler ve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \gamma \tag{9.2}$$

olsun.

1. $0 < \gamma < +\infty$ ise $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serilerinin karakterleri aynıdır.
2. $\gamma = 0$ ise $\sum b_k$ yakınsak olduğunda $\sum a_k$ yakınsaktır.
3. $\gamma = +\infty$ ve $\sum b_k$ ıraksak ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

İspat : 1. $0 < \gamma < \infty$ olsun. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \gamma$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, öyle ki her $k > k_0$ için

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - \gamma\right| < \varepsilon$$

olur. Buradan da

$$\gamma - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < \gamma + \varepsilon \Rightarrow (\gamma - \varepsilon)\, b_k < a_k < (\gamma + \varepsilon)\, b_k$$

yazılabilir. $\varepsilon < \gamma$ seçilirse $\gamma - \varepsilon > 0$ olur. Karşılaştırma testinden $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serilerinin aynı karakterde oldukları görülür.

2. $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ bir sıfır dizisi olur. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için $\exists k_1 \in \boldsymbol{N}$ öyle ki $\forall k > k_1$ için

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| < \varepsilon \Rightarrow a_k < \varepsilon \cdot b_k$$

olur. $\sum b_k$ yakınsak ise karşılaştırma testinden $\sum a_k$ yakınsak olur.

3. $\gamma = +\infty$ olsun. Bu durumda $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ dizisi sınırsız bir dizidir. $B > 0$ istenildiği kadar büyük bir sayı olsun. $k > k_2$ olduğunda

$$\frac{a_k}{b_k} > B \Rightarrow a_k > B \cdot b_k$$

kalacak şekilde en az bir k_2 doğal sayısı vardır. Karşılaştırma testine göre $\sum b_k$ ıraksak ise $\sum a_k$ ıraksak olur.

Eğer yukarıdaki teoremde $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yerine $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ harmonik serisi alınırsa oldukça kullanışlı olan şu test elde edilir.

Limit Testi **TEOREM 9.5**

$\sum a_k$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k = \gamma$$

olsun.

1. $0 \le \gamma < +\infty$ ve $\alpha > 1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.
2. $\gamma > 0$ ve $\alpha \le 1$ ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3+2}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim_{k\to\infty} k^2 \cdot \frac{k}{5k^3+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{5k^3+2} = \frac{1}{5}$ ve $\alpha = 2 > 1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k+1}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim_{k\to\infty} k^{1/2} \frac{\ln k}{\sqrt{k+1}} = +\infty > 0$ ve $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

Şimdi karşılaştırma testlerinden çıkan başka testler verelim.

D' alembert Oran testi **TEOREM 9.6**

Pozitif terimli $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olsun. Eğer

1. $r < 1$ ise $\sum a_k$ yakınsak
2. $r > 1$ ise $\sum b_k$ ıraksaktır.
3. $r = 1$ ise şüpheli durum vardır.

İspat : 1. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=r<1$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\exists k_0\in N$ öyle ki $\forall k>k_0$ için

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}-r\right|<\varepsilon$ olur. $\Rightarrow r-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k}<r+\varepsilon$ bulunur. $r+\varepsilon=p$ dersek $k>k_0$ için $\frac{a_{k+1}}{a_k}<p$ olur. $r<1$ ise ε yeter derece küçük seçilerek $r+\varepsilon=p$ de 1 den küçük yapılabilir. O halde $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=r<1$ ise $\exists p<1$ ve $\exists\, k_0\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall k\geq k_0$ için

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}<p<1 \;\Rightarrow\; a_{k+1}<p\cdot a_k$$

dır. O halde

$$a_{k+1}<pa_k$$
$$a_{k+2}<pa_{k+1}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{k+s}<pa_{k+s-1}\ (s\in N)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$a_{k+s}<p^s a_k$$

bulunur. $k_0+s=k$ dersek

$$a_k<p^{k-k_0}\cdot a_k$$

olur. a_k bir sabit ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p^{k-k_0}$ serisi $0\leq p<1$ için yakınsak olduğundan $\sum a_k$ serisi yakınsaktır.

2. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=r>1$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\exists k_0\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall k>k_0$ için

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}-r\right|<\varepsilon \Rightarrow r-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k}<r+\varepsilon$ olur. ε yeter derece küçük seçildiğinde $r-\varepsilon>1$ olacağından $k>k_0$ için $\frac{a_{k+1}}{a_k}>1\Rightarrow a_{k+1}>a_k$ dir. O halde (a_k) dizisinde a_k dan sonraki terimleri monoton artandır. Dolayısıyla

$\lim a_k\neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ ıraksaktır.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ serisinin ıraksak, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$$

dir. Demek ki hem yakınsak hem de ıraksak seriler için $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ olabilmektedir. Bundan dolayı $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ olduğunda serinin karakteri hakkında birşey söylenemez.

ÖRNEK : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$

olduğundan verilen seri yakınsaktır. Yakınsak olan bu serinin toplamı e ile gösterilir. Yani

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

olmaktadır. Bölüm 4 de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n$$

olduğu gösterilmişti. O halde

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < s_n < e$$

yazılabilir. Buna göre

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \qquad (9.3)$$

olacaktır. Diğer taraftan $m > n$ için

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{m}\frac{1}{n^m} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$
$$> \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{m}\frac{1}{n^2}$$

ve

$$\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-q+1)}{m!\cdot n^q}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{q-1}{n}\right)}{m!}$$

yazılabilir. Şimdi q sayısı sabit tutulup $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{m}\frac{1}{n^m}=\frac{1}{m!}$$

olur. Şu halde

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!}$$

olacaktır.

$\forall q\in\mathbb{N}$ için bu eşitsizlik sağlandığından m sayısı sınırsız büyütüldüğü zaman da sağlanır. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...=e \qquad (9.4)$$

dir. (9.3) ve (9.4) den

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

bulunur.

$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ dizisinin limitinin 2 ile 3 arasındaki bir sayı olabileceğini göstermiştik. Öyleyse e sayısı 2 ile 3 arasında bir sayıdır. e nin yaklaşık değerini bulmak için $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ serinin baştan itibaren mümkün olduğu kadar fazla sayıda terimini toplamak gerekir. Yaklaşık olarak

$$e\approx 2{,}71828...$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{2^n\cdot n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}<1$$

olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

Cauchy Kök Testi **TEOREM 9.7**

Pozitif terimli $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=r$$

olsun. Eğer

1. $r<1$ ise $\sum a_k$ yakınsak,
2. $r>1$ ise $\sum b_k$ ıraksak,
3. $r=1$ ise şüpheli durum vardır.

Bu testin ispatı tamamen D'alembert oran testine benzediğinden bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

ÖRNEK : $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{k}\right)^k$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{k}\right)^{k/k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{k}\right)=\dfrac{1}{5}<1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k^2}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{\frac{k^2}{k}}$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e>1$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ olması halinde oran testi sonuç vermez. Bu durumda aşağıdaki testler yardımcı olabilir.

Kummer Testi **TEOREM 9.8**

$\sum a_k$ bir pozitif terimli seri ve (P_k) da

$$\lim\left(P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1}\right) = L$$

limiti var olacak şekilde bir pozitif dizi olsun.

1. $L > 0$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2. $L < 0$ ve $\sum \frac{1}{P_k}$ ıraksak ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

İspat : 1. $L > 0$ olsun. $0 < r < L$ olacak şekilde herhangi bir r sayısı seçelim. Bu taktirde öyle bir K sayısı vardır ki $\forall k \geq K$ için

$$P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1} > 1$$

buradan da

$$P_k a_k - P_{k+1} a_{k+1} > r\, a_{k+1}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte k yerine $K, K+1, \ldots, K+m-1$ yazıldığında eşitsizlik doğru olacağından

$$\begin{aligned} P_K a_K - P_{K+1} a_{K+1} &> r\, a_{K+1} \\ P_{K+1} a_{K+1} - P_{K+2} a_{K+2} &> r\, a_{K+2} \\ P_{K+m-1} a_{K+m-1} - P_{K+m} a_{K+m} &> r\, a_{K+m} \end{aligned}$$

olur. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$P_K a_K - P_{K+m} a_{K+m} > r \sum_{k=K+1}^{K+m} a_k$$

bulunur. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ denirse, yukarıdaki eşitsizlik

$$P_K a_K - P_{K+m} a_{K+m} > r\,(s_{K+m} - s_K)$$

buradan da

$$rs_{K+m} < r\,s_K + a_K P_K - P_{K+m} a_{K+m} < r\,s_K + P_K a_K$$

yazılabilir. Böylece herbir $m \in \mathbb{N}$ için

$$s_{K+m} < s_K + \frac{P_K a_K}{r}$$

olur ki bu (s_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu, dolayısıyla $\sum a_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

2. $L < 0$ olsun. Bu taktirde öyle bir M sayısı vardır ki $\forall k \geq M$ için

$$P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1} \leq 0$$

olur. Bu durumda $\forall k \geq M$ için

$$P_k\, a_k \leq P_{k+1}\, a_{k+1}$$

yazılabilir. Buradan $\forall n \geq M$ için

$$P_M a_M \leq P_{M+1}\, a_{M+1} \leq \ldots \leq P_n\, a_n \quad \Rightarrow \quad a_n \geq P_M a_M \cdot \frac{1}{P_n}$$

yazılabilir. $\sum \frac{1}{P_n}$ ıraksak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\sum a_n$ ıraksak olur.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots (3k)}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots (3k)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots (3k+3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k+1)} = \frac{3k+3}{3k+1}$

$\lim \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1$ olduğundan oran testine göre birşey söylenemez. Şimdi $P_k = k$ alarak Kummer testini uygulayalım.

$$P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1} = k \cdot \frac{3k+3}{3k+1} - (k+1) = \frac{-k-1}{3k+1}$$

olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} \left(P_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - P_{k+1} \right) = \lim \frac{-k-1}{3k+1} = -\frac{1}{3} < 0$$

dır. O halde verilen seri ıraksaktır.

Raabe Testi **TEOREM 9.9**

$\sum a_k$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)=s$$

olsun.

1. $s<-1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır.
2. $s>-1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır.

İspat: Yukarıdaki limitin varolması için $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}=1$ olmalıdır. Kummer testinde $P_k=k$ alınırsa şu önerme elde edilir.

"$\lim\left(k\cdot\frac{a_k}{a_{k+1}}-(k+1)\right)>0$ *ise* $\sum a_k$ yakınsak,

$\lim\left(k\cdot\frac{a_k}{a_{k+1}}-(k+1)\right)<0$ *ise* $\sum a_k$ ıraksaktır."

$$\lim\left(k\cdot\frac{a_k}{a_{k+1}}-(k+1)\right)=-\lim\left[\frac{(k+1)a_{k+1}-ka_k}{a_{k+1}}\right]=-\lim\left[\frac{(k+1)\frac{a_{k+1}}{a_k}-k}{\frac{a_{k+1}}{a_k}}\right]$$

$$=-\lim\left[\frac{k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)+\frac{a_{k+1}}{a_k}}{\frac{a_{k+1}}{a_k}}\right]=-\frac{s+1}{1}=-(s+1)$$

olur. O halde $-(s+1)>0$, yani $s<-1$ ise $\sum a_k$ serisi yakınsak, $-(s+1)<0$ yani $s>-1$ ise $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2k+2)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}$

$$=\lim\frac{2k+1}{2k+2}=1$$

olduğundan şüpheli hal vardır.

$$\lim\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=\lim k\left(\frac{2k+1}{2k+2}-1\right)=\lim\frac{-k}{2k+2}=-\frac{1}{2}>-1$$

olur. Raabe testinden verilen seri ıraksaktır.

Bertrand Testi **TEOREM 9.10**

(a_k) pozitif terimli bir dizi ve

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}=q$$

olsun.

1. $q<1$ ise $\sum a_k$ ıraksak,
2. q > 1 ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

İspat : 1. $q<1$ olsun. $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}=q<1$ olacağından öyle bir k_0 sayısı vardır ki, $\forall\, k>k_0$ için

$$\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}<1\Rightarrow \ln\frac{1}{a_k}<\ln k\Rightarrow \frac{1}{a_k}<k\Rightarrow a_k>\frac{1}{k}$$

olur. Karşılaştırma testinden $\sum a_k$ ıraksaktır.

2. $q>1$ olsun. $1<\alpha<q$ olacak şekilde bir α sayısı seçelim. Öyle bir k_1 sayısı vardır ki, $\forall\, k>k_1$ için,

$$\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}\geq\alpha\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{a_k}\right)\geq\ln k^{\alpha}\Rightarrow a_k\leq\frac{1}{k^{\alpha}}$$

olur. Karşılaştırma testinden $\sum a_k$ yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln k^2}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_k}}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(\ln k)^{\ln k^2}}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln k\ln(\ln k)}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}2\ln(\ln k)=+\infty>1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Pozitif terimli $\sum a_k$ serisi yakınsak ise bu $\sum a_k < \circ$, ıraksak ise $\sum a_k = \circ$ biçiminde gösterilebilir. Bu gösterim sadece pozitif terimli seriler için kullanılır.

Şimdi de pozitif ve monoton azalan terimli serilerle ilgili iki önemli testi ifade ve ispat edelim.

Benzerlik Testi **TEOREM 9.11**

(a_k) pozitif ve monoton azalan bir dizi olsun.

$\sum a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ yakınsaktır.

Yani, $\sum a_k$ serisinin yakınsaklık durumu ile $\sum_{p=0}^{\infty} 2^p a_{2^p}$ serisinin yakınsaklık durumu aynıdır.

İspat : $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $t_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k}$ olsun. $n \geq 2^p$ için

$$s_n < a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (2_{2^p} + 2_{2^{p+1}} + \ldots + 2_{2^{p+1}-1})$$

$$< a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + a_{2^p} = \mathrm{t_p} \Rightarrow s_n < t_p$$

olur. Aynı şekilde $n > 2^{p-1}$ için

$$s_n > a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots (a_{2^{p-2}+1} + a_{2^{p-1}})$$

$$> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{p-2} a_{2^{p-1}} = \frac{1}{2} \left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{p-1} a_{2^{p-1}}\right)$$

yazılabilir. O halde $s_n > \frac{1}{2} t_{p-1}$ dir. Demek ki

$$\frac{1}{2} t_{p-1} < s_n < t_p$$

dir. Buradan görüldüğü gibi (t_p) sınırlı ise (s_n) sınırlı, (s_n) sınırlı ise (t_p) sınırlıdır. Dolayısıyla (t_p) nin karakteri ile (s_n) nin karakteri aynıdır. Biri yakınsak ise diğeri de yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)$ dizisi monoton azalan olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ serisinin karakteri ile

$$\sum 2^k \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

serisinin karakterleri aynıdır. $\sum \frac{1}{k}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1}{k \ln k}$ serisi de ıraksaktır.

İntegral Testi **TEOREM 9.12**

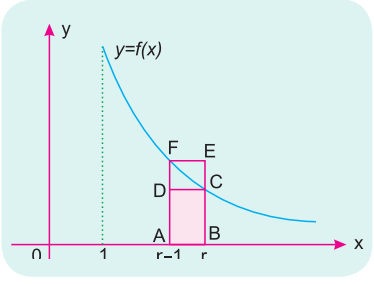
(a_k) pozitif ve monoton azalan bir dizi f de $[1, +\infty)$ aralığında monoton azalan bir fonksiyon olsun. Her $k \in N$ için

$$f(k) = a_k$$

ise $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\int_1^n f(x)dx\right)$$

dizisinin sınırlı olmasıdır.



İspat : f fonksiyonun grafiği şekildeki gibi olsun. $r \geq 2$ için $ABCF$ bölgesinin alanı

$$\int_{r-1}^{r} f(x)dx$$

dır. Bu alan ABCD dikdörtgenin alanından büyük, ABEF dikdörtgeninin alanından küçüktür.

$$\text{Alan (ABCD)} = |AB| \cdot |BC| = 1 \cdot f(r) = a_r$$
$$\text{Alan (ABEF)} = |AB| \cdot |AF| = 1 \cdot f(r-1) = a_{r-1}$$

olduğundan

$$a_r < \int_{r-1}^{r} f(x)dx < a_{r-1}$$

dir. $r = 2, 3, \ldots, n$ için bu eşitsizlikler yazılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

bulunur. Buradan da

$$s_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < s_{n-1}$$

elde edilir.

$\sum a_k$ yakınsak ise (s_{n-1}) yakınsak ve dolayısıyla sınırlıdır. Bu durumda $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ sınırlı olur. Karşıt olarak bu dizi sınırlı ise $(s_n - a_1)$ sınırlı ve dolayısıyla (s_n) sınırlı olur. Bu da $\sum a_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

$\sum a_k$ yakınsak ve toplamı s ise $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ yakınsaktır. Bu dizinin limiti I ise $s - a_1 \le I \le s$ bulunur. Buradan

$$I \le s \le I + a_1$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $f(x) = xe^{-x^2}$ fonksiyonu $x \ge 1$ için monoton azalandır. Çünkü

$$f'(x) = xe^{-x^2}(-2x + 1) < 0$$

dır. O halde bu seriye integral testi uygulanabilir.

$$\int_1^n xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^n = -\frac{1}{2}(e^{-n^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{n^2}} < \frac{1}{2e}$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip

$$\frac{\pi}{4} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm : $\int_1^n \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan n - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

olduğundan sınırlı, dolayısıyla verilen seri yakınsaktır.

$I = \lim_{n\to\infty} \arctan n - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ olduğundan

$$\frac{\pi}{4} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \le \frac{\pi}{4} + a_1$$

olacaktır. $a_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$ olacağından yukarıdaki bağıntı

$$\frac{\pi}{4} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

biçiminde yazılabilir.

PROBLEMLER 9.2

1. Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{2k+3}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^{\frac{1}{2}}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

ç. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

f. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{2^k}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5n}}{(2n)!n^{3n}}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

ı. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (k!)}{k^k}$

j. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

k. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

l. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

m. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}$

n. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot 2^k}$

o. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$

ö. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{100}}$

p. $\sum_{n=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^k$

r. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

s. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}$

ş. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!}$

t. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$

u. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots (3k)}\right]^2$

ü. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)$

v. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k^k}$

y. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}$

z. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}$

2. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$, $\sum_{k=3} \frac{1}{[\ln(\ln k)]^{\ln k}}$ serilerinin yakınsak, $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

3. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$ serisi hangi p ler için yakınsaktır?

4. $\frac{9}{8} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \frac{5}{4}$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\right)^p \cdot \frac{1}{n}$ serisinin $p \in N^+$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

6. Pozitif terimli ve yakınsak $\sum a_n$ serisi veriliyor. $p > \frac{1}{2}$ için $\sum \sqrt{a_n} \cdot n^{-p}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

7. $\sum \frac{\ln k}{k^\alpha}$ serisinin $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \le 1$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

8. $\sum a_k$ bir pozitif terimli seri ve (b_k), bir $b > 0$ sayısına yakınsayan pozitif terimli bir dizi olsun. $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum a_k b_k$ serisinin yakınsak olmasıdır. İspatlayınız.

9. $a_n > 0$ ve $\sum a_n < \infty$ olduğunda $\sum \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} < \infty$ olacağını gösteriniz.

10. $\sum a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. Aşağıdaki serilerin de yakınsak olacağını gösteriniz.

a. $\sum a_n^2$ **b.** $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ **c.** $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$

11. (a_n) artmayan bir dizi olsun. $\sum a_n$ yakınsak ise (na_n) bir sıfır dizisidir, ispatlayınız. Bunun karşıtı doğru mudur? (a_n) pozitif terimli monoton azalan bir dizi ve $(n\, a_n)$ sıfır dizisi değilse $\sum a_n$ serisinin karakteri için ne söylenebilir?

12. 11. sorudan yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

13. Öyle bir sınırsız (a_n) dizisi bulunuz ki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ serisi yakınsak olsun.

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ serisinin yakınsan olması için gerek ve yeter şartın $\alpha > 1$ olduğunu gösteriniz.

15. $0 \le a_k \le M$ ve $b_k \ge k^2$ olduğunda $\sum \frac{a_k}{b_k}$ serisinin yakınsak olacağını gösteriniz.

16. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ ve $\sum a_k$ yakınsak olduğunda $\sum \frac{1}{a_k}$ serisinin ıraksak olacağını gösteriniz.

17. $a_k > 0$ ve $\sum a_k < \infty \Rightarrow \sum a_k^2 < \infty$.

Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

$\sum a_k^2 < \infty$ ise $\sum a_k < \infty$ mudur?

18. (F_n) Fibonacci dizisi olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$$

serisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

19. $\alpha > 0$ dır. α nın hangi değerleri için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k^{\alpha}}$$

serisi yakınsaktır.

20. Genel terimi $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = \frac{3n+2}{2n+1} a_n$ bağıntısını sağlayan $\sum a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

9.3 ALTERNE SERİLER

Şimdi, terimlerinin işareti ardışık olarak değişen ve **Alterne Seriler** adı verilen seriler için bir yakınsaklık testi verelim.

Leibnitz Testi **TEOREM 9.13**

Eğer

1. Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$

ve

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ise bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi yakınsaktır.

İspat : $\sum (-1)^{n-1} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun.

$0 < a_{n+1} \leq a_n$ olduğundan

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

şeklinde tanımlanan (S_{2n}) dizisi artan bir dizidir. S_{2n} genel terimi

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu toplamdaki ilk terim hariç diğer tüm terimler negatif veya sıfırdır. Dolayısıyla herbir n için

$$S_{2n} \leq a_1$$

yazılabilir. şu halde (S_{2n}) dizisi sınırlıdır.

Monoton artan ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan (S_{2n}) yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$$

diyelim. $L \leq a_1$ olacaktır.

$$\begin{aligned} \lim S_{2n-1} &= \lim [S_{2n} + a_{2n}] \\ &= \lim S_{2n} + \lim a_{2n} \\ &= L + \lim a_{2n} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan (a_{2n}) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan n

$$\lim a_{2n} = \lim a_n = 0$$

dır. Şu halde,

$$\lim S_{2n-1} = L$$

dır. Demek ki n ister tek ister çift olsun (S_n) kısmi toplamlar dizisi aynı bir L sayısına yakınsamaktadır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

dır. Şu halde

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ alterne serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a_k = \frac{1}{k}$ alınırsa $0 < a_{k+1} < a_k$ ve $\lim a_k = 0$ olur. Leibnitz kriterinden verilen seri yakınsak olur.

TANIM

Terimleri $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisi ***mutlak yakınsaktır*** denir. $\sum a_k$ yakınsak fakat $\sum |a_k|$ ıraksak ise bu taktirde $\sum a_k$ serisi ***şartlı yakınsaktır*** denir.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm : $\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$ ve $\sum \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan verilen seri mutlak yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}$ serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm : Verilen seri yakınsak fakat $\left|\frac{(-1)^{k}}{k}\right| = \frac{1}{k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksak olduğundan verilen seri şartlı yakınsaktır.

TEOREM 9.14

Seriler için genel yakınsaklık Prensibi

$\sum a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $m > n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \text{ dır.}$$

İspat : $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ olsun. Buna göre $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n) dizisinin yakınsak ve dolayısıyla Cauchy dizisi olmasıdır.

Buna göre serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için, $m > n \geq n_0$ olduğunda $|s_m - s_n| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir n_0 sayısının varolmasıdır. s_m ve s_n yerine a_k cinsinden değerleri yazılırsa

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

bulunur.

TEOREM 9.15

Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

İspat : $\sum a_k$ mutlak yakınsak olsun. Bu durumda $\sum |a_k|$ yakınsaktır. Teorem 9.13 den, $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir n_0 bulunabilir ki $m > n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

olur. Diğer taraftan

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

olduğundan $m > n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

bulunur. Bu da $\sum a_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. □

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin kümesi l_1 ile gösterilir.

Buna göre

$$l_1 = \left\{(a_k): \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\right\}$$

dır. Yukarıdaki teoreme göre

$$l_1 \subset \gamma$$

olacaktır. Buradaki kapsama kesin bir kapsamadır. Başka bir deyişle l_1, γ nın bir öz alt kümesidir. Gerçekten $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ yakınsak fakat mutlak yakınsan değildir. Bu nedenle

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \in \gamma \quad \text{ve} \quad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \notin l_1$$

dir.

TEOREM 9.16

$\sum a_n$ reel terimli bir seri ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \; q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

olsun.

1. $\sum a_n$ şartlı yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikisi de ıraksaktır.

2. $\sum a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin her ikisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

olur.

İspat : Eğer $a_n \geq 0$ ise $p_n = a_n$ ve $a_n = 0$; $a_n \leq 0$ ise $p_n = 0$ ve $a_n = -a_n$ olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = p_n - q_n$ ve $|a_n| = p_n + q_n$ dir.

1. $\sum a_n$ şartlı yakınsak, yani $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum |a_n|$ ıraksak olsun. Eğer $\sum q_n$ yakınsak ise $p_n = a_n + q_n$ olduğundan $\sum p_n$ de yakınsak olurdu. Benzer şekilde $\sum p_n$ yakınsak olsaydı $\sum q_n$ de yakınsak olurdu. Halbuki $\sum p_n$ *ve* $\sum q_n$ serilerinin yakınsak olması halinde, $|a_n| = p_n + q_n$ olduğundan $\sum |a_n|$ yakınsak olur. Halbuki $\sum |a_n|$ ıraksaktır. Şu halde $\sum p_n$ *ve* $\sum q_n$ serilerinin her ikisi de ıraksaktır.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak olsun. Teorem 9.15 den $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsaktır. Bu da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|+a_n}{2} \quad ve \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|-a_n}{2}$$

serilerinin, yani $\sum p_n$ ve $\sum q_n$ serilerinin yakınsak olmasını gerektirir. $a_n = p_n - q_n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

bulunur. ❐

TEOREM 9.17

$\sum a_k$ bir yakınsak seri olsun.

$b_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{m_1}$, $\quad b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + ... + a_{m_2}, ...,$

$b_n = a_{m_{(n-1)}+1} + ... + a_{m_n}$

ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak olup $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dır.

İspat : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t_n$ denirse $t_n = s_{m_n}$ olacağından (t_n) dizisi (s_n) dizisinin bir alt dizisidir. (s_n) yakınsak ve limiti s ise (t_n) de yakınsak ve limiti s dir. Başka bir deyişle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ olur. ❐

Yukarıdaki teorem bize, yakınsak bir serinin terimlerinin parantezlere alınarak gruplandırılabileceğin, yani

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = (a_1 + a_2 + ... + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + ... + a_{m_2}) + ...$$

yazılabileceğini ifade etmektedir. Burada, terimler parantezlere alınırken terimlerin sırasının değişmediğine dikkat edilmelidir.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = s$ dir, gösteriniz.

Çözüm : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + ...$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k)}$$

olur.

PROBLEMLER 9.3

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n!}$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!-1}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^5 \frac{5}{4^n}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} \frac{n+1}{(2n!)}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2}$

ı. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{n \cdot n!}$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}$

l. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{\frac{k}{k+1}}$

m. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln \frac{1}{k+1}$

n. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

o. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$

ö. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$

p. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

r. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n+5}$

s. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\log n}$

2. (a_n) monoton azalan bir sıfır dizisi olsun.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \le a_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 1$ olduğunu gösteriniz.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ serisi veriliyor. Bu serinin toplamı ilk 5 terimin toplamı ile yaklaşık olarak ifade edildiğinde yapılan hata en fazla ne olur? (2. sorudan yararlanınız.)

5. Aşağıdaki serilerin baştan itibaren kaç teriminin toplamı ile serinin toplamı arasındaki fark 0,01 sayısından küçük kalır?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{n^2}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$

f. $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$

6. Aşağıdaki önermelerden doğru olanlarını ispatlayınız. Yanlış olanlara birer karşıt örnek veriniz.

a. $\sum a_n$ yakınsak ise $\sum (-1)^{n-1} a_n$ yakınsaktır.

b. $\sum a_n$ ve $\sum (-1)^{n-1} a_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır.

c. $\sum a_n$ mutlak yakınsak ise $\sum (-1)^{n-1} a_n$ mutlak yakınsaktır.

9.4 HERHANGİ TERİMLİ SERİLER

Şimdiye kadar pozitif terimli seriler ve alterne seriler ile ilgili testler verdik. Bu kesimde pozitif veya alterne olması gerekmeyen seriler için bazı testler vereceğiz. Verilecek olan bu testler tüm seriler için de geçerlidir. Önce testlerin ispatında kullanacağımız bir eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

Abel Kısmi Toplam Formülü **TEOREM 9.18**

(a_k) ve (b_k) herhangi iki dizi ve

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$$

olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

dır.

İspat : $s_0 = 0$ olarak tanımlansın. Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = s_k - s_{k-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= (s_1 - s_0) b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + (s_3 - s_2) b_3 + \ldots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \ldots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k\end{aligned}$$

olur. ❐

Albel kısmi toplam formülünden şu teorem kolayca ispatlanabilir.

TEOREM 9.19

(a_k) ve (b_k) dizileri için $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$ olsun.

1. $(s_n b_n)$ dizisi yakınsak
2. $\sum s_k \Delta b_k$ serisi yakınsak

ise $\sum a_k b_k$ serisi yakınsaktır.

İspat : $\lim (s_n b_n) = l$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k = s$ olsun. Abel kısmi toplam formülünden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_{n\to\infty} (s_n b_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = l + \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k = l + s$$

olur. Bu, $\sum a_k b_k$ serisinin yakınsak ve toplamının $l + s$ olduğunu gösterir. □

ÖRNEK : (nc_n) dizisi ve $\sum n(c_n - c_{n+1})$ serisi yakınsak ise $\sum c_n$ serisi de yakınsaktır, gösteriniz.

Çözüm : $a_k = 1,\ b_k = c_k$ alıp yukarıdaki teoremi uygulayalım.

$S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ olduğundan $(s_n b_n) = (nc_n)$ olup yakınsaktır.

$\sum s_k \Delta b_k = \sum k(c_k - c_{k+1})$ serisi de yakınsak olduğundan

$\sum a_k b_k = \sum 1 \cdot c_k = \sum c_k$ serisi de yakınsaktır.

Abel Testi **TEOREM 9.20**

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak,
2. (b_k) monoton ve sınırlı

ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ yakınsaktır.

İspat: $\sum a_k$ yakınsak olduğundan $(s_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ yakınsak ve dolayısıyla sınırlıdır. $|s_n| \le M$ olsun. (b_n) monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktır. O halde $(s_n b_n)$ yakınsaktır.

$$|s_k \Delta b_k| = |s_k| \cdot |\Delta b_k| \le M |\Delta b_k|$$

ve $\sum |\Delta b_k|$ serisi $\sum (b_k - b_{k+1})$ veya $\sum (b_{k+1} - b_k)$ teleskopik serilerinden biri olacağından yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $\sum s_k \Delta b_k$ mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır. Bu durumda Teorem 9.19 un (1) ve (2) hipotezleri sağlanmış olur. Öyleyse $\sum a_k b_k$ yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum a_k$ yakınsak ve $\alpha \ge 0$ olsun. $\sum a_k k^{-\alpha}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Abel testine göre $(b_k) = (k^{-\alpha})$ dizisinin monoton ve sınırlı olduğunu göstermek yeterdir.

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} > 0$$

olduğundan (b_k) monoton azalan bir dizidir. $\forall k \geq 1$ için $0 < \frac{1}{k^\alpha} \leq 1$ olacağından (b_k) sınırlıdır. Abel testine göre $\sum a_k b_k = \sum a_k k^{-\alpha}$ yakınsaktır.

UYARI

Abel testinde (b_k) dizisinin monotonluk şartı kaldırılamaz. Başka bir deyişle (b_k) monoton olmadığında $\sum a_k b_k$ yakınsak olmayabilir. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi yakınsak ve $(b_k) = ((-1)^k)$ dizisi sınırlı olduğu halde $\sum a_k b_k = \sum \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır.

Dedekind Testi **TEOREM 9.21**

(a_k) ve (b_k) herhangi iki dizi ve

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, , \, \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$$

olsun.

1. (s_n) sınırlı
2. $\sum |\Delta b_k| < \infty$
3. $\lim b_n = 0$

ise $\sum a_k b_k$ yakınsak ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

dir.

İspat : (s_n) sınırlı ve $\lim b_n = 0$ olduğundan $\lim s_n b_n = 0$ dır. Ayrıca (s_n) sınırlı olduğundan $\forall n \in N$ için $|s_n| \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı vardır. Bu durumda

$$\sum |s_k \Delta b_k| \leq M \sum |\Delta b_k| < \infty$$

olur ki bu $\sum s_k \Delta b_k$ serisinin mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterir.

Teorem 9.19 den $\sum a_k b_k$ serisinin yakınsaklığı çıkar.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

Abel kısmi toplam formülünde, $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

eşitliği elde edilir.

ÖRNEK : $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : **1.** $a_k = (-1)^{k-1}$ ve $b_k = \frac{1}{k}$ olsun.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, \, n \text{ tek ise} \\ 0, \, n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olacağından $|s_n| \le 1$ dir. Şu halde (s_n) sınırlıdır.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ olacağından yakınsaktır. (Örnek 1.1)

3. $\lim b_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ olduğundan Dedekind testi gereğince $\sum a_k b_k = \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ serisi yakınsaktır.

Dirichlet Testi **TEOREM 9.22**

(a_k) ve (b_k) dizileri için $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$ olsun.

1. (s_n) sınırlı,

2. (b_n) azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi

ise $\sum a_k b_k$ yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$$

dır.

İspat : Dedekind testinin hipotezlerinin gerçeklendiğini göstermek yeterlidir.

1. Hipotezden (s_n) sınırlıdır.

2. (b_k) azalan olduğundan

$$\sum|\Delta b_k| = \sum|b_k - b_{k+1}| = \sum(b_k - b_{k+1}) = b_1 - \lim b_n = b_1$$

olup $\sum|\Delta b_k|$ yakınsaktır.

3. Hipotezden $\lim b_n = 0$ dır.

O hâlde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ serisi yakınsak ve toplamı $\sum_{k=1}^{\infty} s_k \Delta b_k$ dır.

ÖRNEK : c tamsayı olmayan bir reel sayı olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-c}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a_k = (-1)^{k-1}$ ve $b_k = \frac{1}{k-c}$ olsun. $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, \text{ n tek sayı} \\ 0, \text{ n çift ise} \end{cases}$

olduğundan sınırlıdır. $(b_n) = \left(\frac{1}{n-c}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisidir. Dirichilet testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k}$ serisinin her $\varphi \in \mathbb{R}$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a_k = \sin k\varphi$, $b_k = \frac{1}{k}$ diyelim. φ, π nin tamkatı ise tüm terimler sıfır olacağından verilen seri yakınsak ve toplamı sıfırdır. $\varphi \neq m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ olsun.

$$s_n = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi \cdot \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

olduğundan

$$|s_n| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi \cdot \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}$$

dir. Şu halde (s_n) sınırlıdır. $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisi olduğundan Dirichlet testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

PROBLEMLER 9.4

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2}$ serileri veriliyor. Birinci serinin $\varphi \neq 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ ikinci serinin her φ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

2. (a_n) ≠ monoton azalan bir sıfır dizisi olsun. $\sum a_n \sin n\varphi$ ve $\sum a_n \cos n\varphi$ serileri yakınsak mıdır?

3. Abel testinden yararlanarak $\sum \frac{1}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

4. $\sum a_k$ yakınsak ve $\sum |\Delta b_k| < \infty$ olsun. (b_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. $\sum a_k b_k$ yakınsak mıdır?

5. $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ ve $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ olduğunu gösteriniz.

6. $BV = \{(a_k): \sum |\Delta a_k| < \infty\}$ kümesine ***sınırlı salınımlı diziler kümesi*** denir.

$l_1 \subset BV \subset c$

olduğunu gösteriniz. γ ile BV kümelerinin birbirine kısmen örttüğünü fakat birinin diğerini kapsamadığını gösteriniz.

7. Dirichlet testinden yararlanarak Leibnitz testini ispatlayınız.

8. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos \frac{\pi k^2}{k+1}$ **b.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k \cdot \sin(k^2)}{\ln k}$

c. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{2^{2k}} \cos \frac{3}{2^{2k-1}}$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-ne}$, $(\theta \geq 0)$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}$

g. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \cos \frac{k\pi}{2}$

9. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki seri olsun.

$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ olmak üzere $\sum c_n$ serisine $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin çarpımı denir.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ serisinin kendisiyle çarpımı olan seriyi bulunuz.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n\theta}{n}$ serisini yakınsak yapan θ değerlerini bulunuz.

11. Abel Kısmi Toplam formülünden yararlanarak $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n!)^2}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ **d.** $\sum \frac{1}{n^{\ln 3}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}$ **f.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{2n}}$ **h.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

ı. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ **i.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)^n}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!}$ **k.** $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n}-1)$

l. $\sum_{n=2}^{\infty} (2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\ldots(2-\sqrt[n]{e})$

2. Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

3. $0 < p < 1$ için $\sum p^n \sqrt[n]{n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

4. $0 < q < p < 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}$ serilerinin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

5. Pozitif a ve b sayıları için $\sum \frac{1}{a^n + b^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

6. Hangi α sayıları için aşağıdaki seriler yakınsak olur?

a. $\sum n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ **b.** $\sum a^n n^{\alpha}$

c. $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$

7. Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

c. $\sum (-1)^n \frac{n!}{10^n}$

d. $\sum (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n!)}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n)}{2^n \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$

h. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{\frac{1}{k}}$

ı. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

j. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(2^{\frac{1}{k}} - 2^{\frac{1}{k+1}}\right)$

8. $a > e$ için $\sum \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2\right)$ serisinin karakterini inceleyiniz.

9. $0 < r < 1$ için $\sum r^{k+\sqrt{k}}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

10. $\sum a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri ve K_n de bu serinin kalan terimi olsun.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n$ serisinin yakınsak olacağını gösteriniz.

11. $\sum a_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri ve (s_n) de bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s_n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

12. $\sum a_n$ yakınsak ve (b_n) bir sıfır dizisi ise $\sum a_k b_k$ yakınsak mıdır?

13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ olacağını gösteriniz. Bu problemin karşıtının doğru olmadığına dair bir örnek veriniz.

14. Öyle $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri bulunuz ki, $\sum a_n$ yakınsak, $b_n \le a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak olsun.

15. $|a_n| > 0$ olsun.

1. $\overline{lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır.

2. $\underline{lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

testini ispat ediniz.

16. $\overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ olsun.

1. $r < 1$ ise $\sum a_n$ mutlak yakınsak

2. $r > 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

tespitini ispatlayınız.

17. a_n genel terimi, $|r| < 1$ için

$$a_n = \begin{cases} r^{n+\sqrt{n}}, & n \text{ çift ise} \\ r^{n-\sqrt{n}}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. $\sum a_n$ serisinin karakterini inceleyiniz.

18. $a_1 = 1$ ve $n \ge 1$ için $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} \cdot a_n$ olsun. $\sum a_n$ serisinin karakterini inceleyiniz.

19. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+m)} = \frac{1}{m \cdot m!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2}$