Prof. Dr. BEKİR KARAOĞLU

I. ve II. Cilt Birarada

Üniversiteler için

FİZİK

seçkin

seçkin

Üniversiteler İçin Fizik
Bekir Karaoğlu

SEÇKİN | Fen Bilimleri
No: 24

ISBN
978-975-02-1961-0

Birinci Baskı:
Temmuz - 2012

Kapak Tasarımı:
İsmail Çam

Kapak Fotoğrafı:
Wladyslaw Taxiarchos 228
Üç ülke (Fransa, Almanya ve İsviçre) sınırındaki Dreiländerbrücke köprüsü

400 Sayfa, 20,5x27 cm.

Anahtar Kelimeler
1. Genel Fizik
2. Üniversite Fiziği
3. Mekanik
4. Termodinamik
5. Elektromanyetizma
6. Optik

© Seçkin Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş.
Bu kitabın her türlü yayın hakkı Seçkin Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş.'ye aittir. Yayınevinin yazılı izni olmadan, tanıtım amaçlı toplam bir sayfayı geçmeyecek alıntılar hariç olmak üzere, hiçbir şekilde kitabın tümü veya bir kısmı herhangi bir ortamda yayımlanamaz ve çoğaltılamaz.

Yayın ve Dağıtım:

Merkez
Sağlık Sok. No: 21
06410 Sıhhiye / Ankara
Tel: (312) 435 30 30
Faks: (312) 435 24 72
satis@seckin.com.tr

Şube
Strazburg Cad. No: 23/B
Sıhhiye / Ankara
Tel: (312) 230 52 62
ankarasube@seckin.com.tr

Şube
Abide-i Hürriyet Cad.
No: 193/A Şişli / İSTANBUL
Tel: (212) 234 34 77
Faks: (212) 231 24 69
sislisube@seckin.com.tr

Şube
Ankara Adliye Sarayı
K-Blok Zemin Kat
Sıhhiye / ANKARA
Tel: (312) 309 52 48
adliyesube@seckin.com.tr

Seçkin Yayıncılık Sertifika No: 12416

Web Adresi
www.seckin.com.tr / seckin@seckin.com.tr

Baskı:
Sözkesen Matbaası, Tel: (0-312) 395 21 10 / Sertifika No: 13268

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ 4

1 BİRİMLER VE VEKTÖRLER 7
- 1.1 BOYUTLAR ve BİRİMLER 7
- 1.2 HATA PAYI – ANLAMLI HANE SAYISI 10
- 1.3 VEKTÖRLER 13
- TEST 24
- PROBLEMLER 25

2 DOĞRUSAL HAREKET 27
- 2.1 KONUM, YERDEĞİŞTİRME, HIZ ve İVME 27
- 2.2 SABİT İVMELİ HAREKET 32
- 2.3 SERBEST DÜŞME 34
- TEST 37
- PROBLEMLER 38

3 İKİ BOYUTTA HAREKET 41
- 3.1 KONUM ve YERDEĞİŞTİRME VEKTÖRLERİ 42
- 3.2 ATIŞ HAREKETİ 44
- 3.3 DÜZGÜN DAİRESEL HAREKET 47
- 3.4 GÖRELİ HAREKET 49
- TEST 52
- PROBLEMLER 53

4 NEWTON HAREKET YASALARI 57
- 4.1 NEWTON YASALARI 58
- 4.2 MEKANİKTE KARŞILAŞILAN KUVVET TÜRLERİ 60
- 4.3 NEWTON YASALARI UYGULAMALARI 66
- 4.4 DAİRESEL HAREKET 70
- TEST 73
- PROBLEMLER 74

5 İŞ VE ENERJİ 77
- 5.1 İŞ 78
- 5.2 GÜÇ 81
- 5.3 KİNETİK ENERJİ 82
- 5.4 POTANSİYEL ENERJİ 84
- 5.5 ENERJİ KORUNUMU YASASI 87
- TEST 91
- PROBLEMLER 92

6 İMPULS, MOMENTUM VE KÜTLE MERKEZİ 95
- 6.1 İMPULS VE MOMENTUM 96
- 6.2 MOMENTUM KORUNUMU YASASI . . 97
- 6.3 BİR BOYUTLU ÇARPIŞMALAR 98
- 6.4 İKİ-BOYUTLU ÇARPIŞMALAR 102
- 6.5 KÜTLE MERKEZİ 103
- 6.6 *ROKET HAREKETİ 106
- TEST 108
- PROBLEMLER 109

7 KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ 113
- 7.1 AÇISAL KİNEMATİK 114
- 7.2 BİR KUVVETİN MOMENTİ (TORK) . . 118
- 7.3 DÖNME DİNAMİĞİ 119
- 7.4 EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESAPLARI 123
- 7.5 YUVARLANMA HAREKETİ 126
- 7.6 AÇISAL MOMENTUM ve KORUNUMU 128
- TEST 129
- PROBLEMLER 131

8 STATİK DENGE 135
- 8.1 STATİK DENGENİN İKİ KOŞULU . . . 135
- 8.2 UYGULAMALAR 137
- PROBLEMLER 140

9 HARMONİK HAREKET 143
- 9.1 BASİT HARMONİK HAREKET 143
- 9.2 SARKAÇ HAREKETİ 151
- 9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET . . 153
- 9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET. REZONANS 155
- TEST 156
- PROBLEMLER 157

10 DALGALAR 161
- 10.1 DALGALARIN GENEL ÖZELLİKLERİ . 162
- 10.2 DALGALARIN GİRİŞİMİ, YANSIMA VE GEÇMESİ 166
- 10.3 DOPPLER OLAYI VE ŞOK DALGASI . . 172
- TEST 175
- PROBLEMLER 176

11 AKIŞKANLAR 179
- 11.1 AKIŞKANLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ 180
- 11.2 ARCHİMEDES KALDIRMA KUVVETİ . 185
- 11.3 YÜZEY GERİLİM VE KILCALLIK 187
- 11.4 VİSKOZLUK 188
- 11.5 BERNOULLİ DENKLEMİ 190
- TEST 194
- PROBLEMLER 196

12 SICAKLIK VE ISI 199
- 12.1 TERMODİNAMİK DENGE VE SICAKLIK 200
- 12.2 ISI 201

12.3 ISIL GENLEŞME 205
12.4 ISI İLETİMİ 207
12.5 İDEAL GAZ 209
TEST 212
PROBLEMLER 213

13 TERMODİNAMİK YASALARI 215
13.1 BİR GAZIN YAPTIĞI İŞ 215
13.2 İÇ ENERJİ – TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ YASASI 218
13.3 BİRİNCİ YASANIN UYGULAMALARI . 219
13.4 BASINCIN KİNETİK HESABI 223
13.5 ISI MAKİNALARI 226
13.6 TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ YASASI – CARNOT ÇEVRİMİ 229
TEST 231
PROBLEMLER 232

14 ELEKTRİK ALAN 235
14.1 ELEKTRİK YÜKÜ 235
14.2 COULOMB YASASI 238
14.3 ELEKTRİK ALAN 240
TEST 248
PROBLEMLER 249

15 GAUSS YASASI 253
15.1 ELEKTRİK AKISI (Φ) 253
15.2 GAUSS YASASI 254
15.3 GAUSS YASASI UYGULAMALARI . . . 256
15.4 İLETKENLERDE ELEKTRİK ALAN . . . 260
PROBLEMLER 262

16 ELEKTRİK POTANSİYEL 265
16.1 ELEKTRİK POTANSİYEL 265
16.2 NOKTASAL YÜK DAĞILIMLARININ POTANSİYELİ 268
16.3 SÜREKLİ YÜK DAĞILIMLARININ POTANSİYELİ 271
16.4 İLETKENLER VE EŞPOTANSİYEL YÜZEYLER 273
TEST 275
PROBLEMLER 276

17 KONDANSATÖRLER VE DİELEKTRİKLER 279
17.1 SIĞA 280
17.2 KONDANSATÖRLERİN BAĞLANMASI 283
17.3 DİELEKTRİKLER 286
TEST 292
PROBLEMLER 294

18 AKIM, DİRENÇ VE DEVRELER 297
18.1 ELEKTRİK AKIMI 297
18.2 OHM YASASI VE DİRENÇ 300
18.3 DOĞRU AKIM DEVRELERİ 303
18.4 DİRENÇLERİN BAĞLANMASI 306
18.5 ELEKTRİK ÖLÇÜ ALETLERİ 308
TEST 310
PROBLEMLER 311

19 MANYETİK ALAN 315
19.1 MANYETİK KUVVET 316
19.2 AKIM GEÇEN TELE ETKİYEN MANYETİK KUVVET 319
19.3 BİR ÇERÇEVE ÜZERİNDEKİ MANYETİK TORK – ELEKTRİK MOTORU . . . 320
TEST 323
PROBLEMLER 324

20 MANYETİK ALAN KAYNAKLARI 327
20.1 BİR AKIMIN MANYETİK ALANI. BİOT-SAVART YASASI 328
20.2 MANYETİK ALAN HESAPLARI 329
20.3 PARALEL AKIMLAR ARASINDAKİ KUVVET – AMPERE BİRİMİ 333
20.4 AMPERE YASASI 335
20.5 MADDENİN MANYETİK ÖZELLİKLERİ 337
TEST 342
PROBLEMLER 343

21 FARADAY YASASI – İNDÜKSİYON 345
21.1 FARADAY YASASI 346
21.2 JENERATÖR VE TRANSFORMATÖRLER 349
21.3 İNDÜKTANS – MANYETİK ENERJİ . . 352
21.4 RLC DEVRELERİ 355
TEST 356
PROBLEMLER 357

22 GEOMETRİK OPTİK 361
22.1 IŞIĞIN DALGA KARAKTERİ 362
22.2 YANSIMA VE KIRILMA 365
22.3 YANSIMA İLE GÖRÜNTÜ – AYNALAR 368
22.4 KIRILMA İLE GÖRÜNTÜ – MERCEKLER 373
22.5 OPTİK ALETLER 377
TEST 380
PROBLEMLER 381

23 FİZİKSEL OPTİK 383
23.1 YOUNG ÇİFT-YARIK DENEYİ 384
23.2 İNCE FİLMLERDE YANSIMA İLE GİRİŞİM 386
23.3 KIRINIM 387
PROBLEMLER 390

EKLER 393
A. FİZİK SABİTLERİ 393
B. MATEMATİK FORMÜLLERİ 393
C. TRİGONOMETRİK CETVEL 394
D. PERİYODİK CETVEL 395
RESİM HAKLARI / PHOTO CREDITS 396

DİZİN 397

ÖNSÖZ

Bu kitap üniversitelerimizin Fen-Edebiyat, Mühendislik, Eğitim ve Tıp fakültelerinin 1. sınıflarında okutulan Fizik derslerinde kullanılmak üzere, bir ders kitabı olarak hazırlanmıştır.

Böyle bir kitaba ihtiyaç bulunduğu pekçok öğretim üyesi tarafından son yıllarda ifade edilmekteydi. Bu derslerde halen İngilizceden tercüme edilmiş ders kitapları yaygın olarak kullanılmaktadır. Kendim de bir süre kullandığım bu kitapların içerdiği Fizik hakkında elbette olumsuz birşey söylenemez. Fakat, bizim üniversitelerimizde 2 yarıyıla kısaltılmış ve saatleri azaltılmış olan Fizik derslerinde tam yararlı olamadıkları da bir gerçektir. Bunun sebepleri başında kitapların aşırı hacimli olması gelmektedir. 1500 sayfalık tuğla kalınlığındaki bu kitapların, daha baştan öğrencide paniğe ve umutsuzluğa yolaçtığını bizzat gözlemledim. Bu hacim sorunu yüzünden, öğretim üyeleri de anlatabilecekleri ve öğrenciden isteyebilecekleri kısımları ayıklamak ve bunu öğrenciye bildirmekte güçlük çekmektedirler.

Elinizdeki bu kitaba Amerikan ders kitaplarının iki yarıyıllık bir derse indirgenmiş hali gibi bakabilirsiniz. Hangi konuları işlemeyi seçmişseniz, aynı modern yaklaşımla, mutlaka verilmesi gereken kavramları bulabilecek ve fazla zaman kaybetmeden, sayfa atlama derdi olmadan dersi işleyebileceksiniz.

KİTABIN FİZİĞE YAKLAŞIMI

Tek bir kitabın elbette çok geniş bir öğrenci kitlesine hitap edecek düzeyde olması beklenemez. Bu kitapta seçilen düzeyi ve akla gelebilecek diğer soruları cevaplamak üzere, kitabın felsefesini kısaca açıklamak isterim:

Üniversitelerimizde fizik eğitimini kısıtlayan başlıca iki sorun bulunmaktadır: (1) Öğrencinin liseden geldiği düzey, (2) Matematik altyapısı.

Ortalama olarak, öğrencinin liseden getirdiği fizik bilgisi maalesef ezbere dayalı olup, öğrenci soru sorma, kendi düşüncesini ifade etme veya inisyatif alma gibi becerileri gelişmemiş olarak gelmektedir. Bu öğrenci problemleri dahi fiziğe yabancı bazı tekniklerle çözmektedir. O halde, dersin amaçlarından biri ***fizikte analitik düşünme becerisini geliştirmek*** *olmalıdır.*

İkinci olarak, bu derse paralel olarak verilen matematik dersleri fiziğin temposuna yetişememekte, integral, diferansiyel denklem, kompleks analiz gerektiren ileri düzeyde fizik konularının anlatımı verimsiz kalmaktadır. O halde, dersin diğer amacı: ***konuları, matematiği makul düzeyde tutarak işlemek*** *olmalıdır.*

Bu iki ilke uyarınca, kitapta ileri düzeyde matematik gerektiren konulara girilmemiştir. Fakat, her konunun işlenişinde, varılan sonuçların ve kavramların genel fizik yasalarına dayanıyor olmasına özen gösterilmiştir. Böylece öğrenci fiziğin bütünlüğünü görebilecek ve ezbere gerek duymadan sonuçları hatırlayabilecektir.

KİTABIN KULLANIMI HAKKINDA

Yukarda açıkladığımız anlayışa uygun olarak, kitabın belirgin özellikleri şunlardır:

(1) *Kitaptaki her teorik anlatım, peşinden gelen çözümlü örnekle beraber düşünülmelidir. Örnekler teoriyi biraz daha genişletmekte, böylece kitabın hacmi ve dersin süresi makul düzeyde kalabilmektedir. Her konuda, derste çözülebilecek miktardan fazla sayıda örnek verilmiştir.*

(2) *Fizik dersinde öğrencinin problem çözebilmesi, dersin ayrılmaz bir parçasıdır. Ancak bu şekilde ezberden kaçınılabilir. Bu amaçla, bölüm sonlarında, konuyu çalışmış olan öğrencinin kendi başına çözebileceği, yani ödev olarak verilebilecek problemlerin düzeyi itinayla seçilmiştir. Her problemin sayısal cevabı problemin hemen altında verilmiş, böylece öğrencinin kendi çözümünü kolayca kontrol edebilmesi amaçlanmıştır. Bu yaklaşımda problemin sayısal sonucu değil, gidiş yolu önemli olmalıdır.*

(3) Bazı üniversitelerde, kalabalık sınıflar ve aşırı ders yükü gerekçe gösterilerek, sınavlarda test soruları tercih edilmektedir. Yukarda açıkladığımız düşünme anlayışına ters düşen bu uygulamayı tasvip etmek mümkün değildir. Fakat, değiştiremediğimiz bu durumu, hiç olmazsa fiziğin ruhuna uygun test sorularıyla iyileştirebilme amacıyla, her bölüm sonunda test soruları da kitaba eklenmiştir.

TEŞEKKÜRLER

Bu kitabın üç yıl süren yazım aşamasında dünyanın her köşesinden pekçok insan yardımcı oldu. Özellikle, görsel malzemelerini kullanmak için yazıştığımız kişilerin tümünün, hiçbir maddi karşılık beklemeden böyle bir kitap projesine katkıda bulunmak istemeleri bizim için şaşırtıcı oldu. Pekçok öğretim üyesi de, kitabı derslerinde kullanarak veya okuyup düzelterek, daha iyi bir kitap oluşmasına yardımcı oldular.

*Bu iyi niyetli insanlar arasında, değerli eğitimci sayın **Hayrettin Sönmez**'in katkısını özellikle belirtmeden geçemem. Engin tecrübesiyle lise eğitiminde öğrencinin hangi bilgilerle üniversiteye geldiğini, hangi konularda güçlük çektiğini kavramama yardımcı oldu. Kendisine burada şükranlarımı ifade ediyorum.*

*Yine, kitabı taslak aşamasında okuyan, derslerinde kullanan veya görsel malzeme sağlayan öğretim üyeleri arasında Pamukkale Üniversitesi'nden **Muzaffer Adak**; Yıldız Teknik'ten **Birtan Kavanoz**; İTÜ'den **Yaşar Yılmaz** ve **Orhan Kamer**, Haliç Üniversitesi'nden **Hakan Ömer Öztek**'e sonsuz teşekkürleri sunuyorum.*

*Kitap ayrıca uluslararası bir işbirliği ile gerçekleştirilebildi. Bilgisayar yazılımında yardımcı olan George Mason Üniversitesi'nden **Boris Veytsman** ve görsel malzemelerini kullanmamıza izin veren **Dave Jackson**, **Erik Forsberg**, **Christophe Ehlen**, **Mehmet Akif Malatyalı** ve Harvard Üniversitesi'nden **Wolfgang Rueckner**. Ayrıca, **Mehmet Karaoğlu** ve bilgisayar uzmanı **Eren Öztürk** teknik sorunların çözümünde yardımcı oldular. Tüm bu yetenekli insanlara minnettarım.*

*Seçkin Yayıncılık sahibi **Koray Seçkin** kitabın yüksek öğrenime kazandırılması gerektiğine hep inandı ve her türlü imkanları bize sağladı. Grafiker **İsmail Çam** gecesini gündüzüne katıp 800 küsur şekli tek başına çizdi, **Mesut Yıldırım** baskının her aşamasında görev aldı. Onlara da sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.*

Son olarak, kitapta gördükleri eksikleri ve daha iyi bir kitap için önerilerini bize (`karabekirus@gmail.com` veya `yayin@seckin.com.tr`) bildirecek olan öğretim üyeleri ve öğrencilere şimdiden teşekkür ediyorum.

Kitabın ülkemiz yükseköğretimine yararlı olmasını diliyorum.

Prof.Dr. Bekir Karaoğlu
İstanbul, 1 Haziran 2012

1 BİRİMLER VE VEKTÖRLER



ISS (Uluslararası Uzay İstasyonu) penceresinden, Rus yapımı Soyuz uzay gemisi ve arka planda Dünya. Bu iki uzay gemisi Ocak 2011 de yerden 400 km yüksekte kenetlendiler.
Şu görüntünün gerçekleşebilmesi Fizik biliminin yüzyıllarca süren gelişmesi sayesinde mümkün olabilmiştir.

1.1 BOYUTLAR ve BİRİMLER

Doğa bilimlerinin başlaması **ölçme** ile olmuştur. Ölçme, tarihçilere göre, Milattan 3000 yıl kadar önce Eski Mısır'da başladı. Nil nehri her sene taşıyor ve tarlaları sular altında bırakıyordu. Sular çekildikten sonra insanların eski tarla sınırlarını bulabilme sorunu vardı. Bunu nasıl çözdüklerini kolayca tahmin edebiliriz: Önce sabit bir kaya parçası veya ağaç tespit ettiler. Sonra, bir uzunluk birimi kararlaştırdılar. Bu birim cinsinden tarla sınırlarının orijine uzaklıklarını ölçüp kayıt altına aldılar.

Buradan, ölçme işleminin genel yapısını görebiliriz:

Önce, fiziksel bir etkiyi veya durumu belirleyen **fiziksel nicelikler** gözleriz: uzaklık, hız, kuvvet, basınç, ... gibi. Bu fiziksel niceliklerin temel karakteri olan **boyutlar** vardır: Örneğin, en, boy, çap, çevre, ... farklı olsalar da, ortak yönleri bir **uzunluk boyutu**nda olmalarıdır. Bir tabloda bazı örnekler verelim:

Fiziksel nicelik	Boyut
mesafe, genişlik, derinlik, boy ...	**uzunluk**
gün, ay, yıl, mevsim, periyot,...	**zaman**

Bazı niceliklerin boyutları, daha temel boyutlar cinsinden ifade edilebilirler. Örneğin:

$$\text{Yüzey alanı} = \text{en}\times\text{boy} = (\text{uzunluk})^2$$
$$\text{Hacim} = \text{en}\times\text{boy}\times\text{yükseklik} = (\text{uzunluk})^3$$

Daha sonra, her bir boyut için bir **boyut standardı** veya **birim** kararlaştırırız. Örneğin, uzunluk boyutu için tarih boyunca arşın, fersah, metre, yarda, ... gibi farklı birimler kullanılmıştır.

Böylece ölçme işlemi, o fiziksel niceliğin kendi boyut standardı, yani birimi cinsinden ne kadar geldiğinin tespit edilmesi işlemidir. Örneğin, bir masanın enini veya boyunu ölçmek için bir metre çubuğu alıp, masa uzunluğunu kaç birim ile katettiğimizi sayarız: 3.45 metre, 0.86 metre, ... gibi.

Burada önemli bir noktayı vurgulayalım: **Her ölçümün sonucu birimli olarak ifade edilmelidir**. Günlük hayatta "Boyum 1.67," diye konuşulsa da, aslında yanlıştır; bilimsel olarak doğru olanı "boyum 1.67 metre" ifadesidir.

Uluslararası Birim Sistemi (SI)

Çok sayıda birim arasından hangileri **temel birimler** olarak alınmalıdır? Bu seçim tarih boyunca, farklı ülkelerde farklı şekillerde yapılmıştı. Fakat, günümüz biliminde uluslararası kabul gören **Uluslararası Birim Sistemi SI** (**S**ysteme **I**nternationale) veya eski adıyla **MKS Birim Sistemi** kullanılmaktadır.

SI Birim Sistemi 7 adet temel birimden oluşur. Böylece, tüm fiziksel nicelikler bu temel birimler cinsinden eksiksiz olarak ifade edilebilir ve ölçülebilirler.

Boyut	**Birim**	**Kısaltma**
Zaman	saniye	s
Uzunluk	metre	m
Kütle	kilogram	kg
Elektrik akımı	amper	A
Sıcaklık	kelvin	K
Işık şiddeti	kandela	cd
Madde miktarı	mol	mol

Bu birimlerden ilk 3 tanesi, **M**etre, **K**ilogram ve **S**aniye (**MKS**) mekanik konuları için yeterlidirler. Diğer birimler sırası geldiğinde tanımlanacaklardır.

Şimdi, bu temel birimleri tanımlayalım:

- **Metre**: Işığın boşlukta 1/299 792 458 saniyede aldığı yoldur.
- **Saniye**: Cs^{133} atomunun belirli bir titreşim periyodunun 9 192 631 770 katıdır.

Bu iki birimin atomik yöntemlerle tanımlandıklarına dikkat edelim. Metre ve saniye birimleri geçmişte farklı şekillerde tanımlanmışlardı: Metre için

meridyen uzunluğunun bir kesri veya, Fransa'da saklanan özel bir platin çubuğun uzunluğu alınıyordu. Keza, saniye için Dünya'nın Güneş çevresindeki hareketinin (yıl) veya kendi ekseni etrafındaki dönüşünün (gün) kesirleri kullanılmıştı. Fakat, bilimde ölçümlerin hassasiyeti giderek artınca, bunlar yetersiz kaldı. Atomik tanımlar hem çok hassas, hem de Fransa'ya gitmeye gerek kalmadan dünyanın her yerinde tekrarlanabilir niteliktedir.



Şekil 1.1: Metre birimini tespit eden lazerli düzenek (solda). **Saniye** birimini veren sezyumlu atomik saat (ortada). **Kilogram** standardı olarak Paris'de saklanan platin-iridyum silindir (sağda).

- **Kilogram** : Paris'te Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) kurumunda saklanan platin-iridyum alaşımı bir silindirin kütlesidir.
  Kütle biriminin atomik yolla tanımlanamıyor olması, pratik bir sebepten kaynaklanır: Atom kütleleri yaklaşık 10^{-26} kg mertebesindedir. Yani, 1 kilogram platin elde etmek için, her defasında yaklaşık 10^{26} tane atomu tek tek sayıp biriktirmek gerekir ki süre olarak insan kapasitesinin ötesindedir. Yine de, atomik yolla kütle tanımı için değişik yollar aranmaktadır.

Askatlar ve Üskatlar

Sayıların bilimsel gösteriminde üsler kullanılır. Örneğin, 1 350 000 yerine 1.35×10^6 veya, 0.000047 yerine 4.7×10^{-5} gibi. Fakat, konuşma dilinde bunu ifade etmek sorun yaratır. Bunun yerine, her birimin önüne takılar konularak, as ve üskatlar kolayca ifade edilebilirler. En çok kullanılan takılar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Üskatlar			Askatlar		
adı	**kısaltma**	**miktarı**	**adı**	**kısaltma**	**miktarı**
kilo	k	10^3	santi	c	10^{-2}
mega	M	10^6	mili	m	10^{-3}
ciga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
tera	T	10^{12}	nano	n	10^{-9}

Bu takılar günlük hayata da girmiştir: kilometre (km), gigahertz (GHz), terabayt (TB), ... gibi.

Türetilmiş Birimler

Yukarda verdiğimiz 3 temel birim (metre, kilogram ve saniye) diğer tüm fiziksel niceliklerin birimlerini tayin etmeye yeterlidir. Bunun için, o niceliğin tanımından yararlanırız. Bazı örnekler şunlardır:

Bazı türetilmiş birimler

nicelik	tanımı	birimi	kısaltması
Alan	en×boy	$(\text{metre})^2$	m^2
Hacim	en×boy×yükseklik	$(\text{metre})^3$	m^3
Hız	yol/zaman	metre/saniye	m/s
İvme	hız/zaman	metre/$(\text{saniye})^2$	m/s^2
Kuvvet	kütle×ivme	kilogram×metre/$(\text{saniye})^2$	$kg \cdot m/s^2$
İş	kuvvet×yol	kilogram×metre^2/$(\text{saniye})^2$	$kg \cdot m^2/s^2$

Birimlerin Tutarlılığı

Fiziksel formüllerde eşitliğin iki tarafında sadece sayıların eşit olması yetmez. Birimler de tutarlı olmalıdır. Diğer bir deyişle, "elmalarla armutları toplamamak" gerekir.

Fiziksel ilişkileri ifade eden formüllerde terimlerin herbiri aynı birimde olmalıdır.

Örnek olarak, liseden bildiğiniz ivmeli hareket formülüne bakalım:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Bu eşitliğin sol tarafı uzunluk birimindedir. O halde, sağ taraftaki her terim de uzunluk biriminde olmalıdır. Hız ve ivmenin birimlerini açık yazalım:

$$\text{metre} = \frac{\text{metre}}{\cancel{\text{saniye}}} \times \cancel{\text{saniye}} + \frac{\text{metre}}{\cancel{\text{saniye}^2}} \times \cancel{\text{saniye}^2} = \text{metre}$$

Bu bize, kullandığımız formülün tutarlı olup olmadığı hakkında daha baştan bir ipucu verir.

Birimler üzerine örnekleri bir sonraki kısımla birlikte, sayısal hesapları nasıl yürüteceğimizi öğrendikten sonra ele alacağız.

Diğer Birim Sistemleri

SI birim sistemi dışında, diğer iki birim sistemini tanımakta yarar vardır:

- **CGS sistemi**nde temel birimler cm, gram ve saniye olduğu için SI sistemine dönüştürmesi kolaydır.
- **İngiliz Birim Sistemi** anglo-sakson dünyasında kullanılır. Uzunluk birimi ayak (foot), kütle birimi paund (pound) ve zaman birimi saniyedir. Uzunluk biriminin askatları inç (inch) ve üskatları yard ve mil olurlar.

Bu birimler SI sistemine şu bağıntılarla dönüştürülür:

1 ayak (ft)	=	12 inch (in)	=	0.3048 metre
1 paund (lb)	=	16 ons (oz)	=	0.453 kg

1.2 HATA PAYI – ANLAMLI HANE SAYISI

Mutlak Hata – Bağıl Hata

Fiziksel niceliklerin ölçüm hassaslığı, kullanılan ölçü aletinin kapasitesiyle sınırlıdır. Bir niceliğin gerçek değeri ile ölçülen değeri arasındaki farka **hata**

payı denir. Her ölçüm bir hata payı içerir. Ölçme ve hesaplarda hata payını gözönüne alarak, sonucu doğru ifade etmek gerekir. Örneğin, bir bakkal terazisinde kütlenin ölçüm sonucunu 3.528461 gram, veya bir cetvelle ölçülecek uzunluğu 25.87346 cm olarak öngörmek yanlıştır.

Bir ölçü aletinin ölçebildiği en küçük değere **mutlak hata** denir. Bir cetvelle kitabınızın boyunu ölçtüğünüzü düşünün. Cetvel üzerindeki en küçük bölme 1 milimetredir. Bu cetvelle milimetreden daha küçük uzunlukları ölçmek mümkün değildir. O halde, bu cetvelle yapılan ölçümlerin mutlak hatası $\Delta L = 1\,\text{mm}$ demektir. (Aslında milimetrik cetvelin mutlak hatası 0.5 mm dir, çünkü iki bölme arasındaki okumanın hangi tarafa daha yakın olduğu kestirilebilir. Burada anlatımı basit tutmak amacıyla 1 mm kabul edelim.)

Kitabın boyu, örneğin $L = 294\,\text{mm}$ olsun. Bu durumda ölçme sonucu, hata payını da hesaba katarak, şöyle ifade edilir:

$$L \pm \Delta L = 294\,\text{mm} \pm 1\,\text{mm}$$

Buna göre, kitabın boyu $(293\,\text{mm} < \text{L} < 295\,\text{mm})$ aralığında olacak demektir.

$\Delta L/L$ oranına **bağıl hata** denir ve yüzde (%) olarak ifade edilir. Örneğin, bir cismin kütlesi $m = (35 \pm 1)\,\text{g}$ olarak verilmişse bağıl hatası şöyle hesaplanır:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{35} = 0.029 \approx \%\,3$$

Gerek mutlak hata ve gerekse bağıl hata, bu ölçümlerle yapılan hesaplara da yansır. Örneğin, yukardaki cetvelle kitabın en, boy ve yüksekliğini ölçtükten sonra, kitabın V hacmini hesaplayıp yine $V \pm \Delta V$ hata payı ile vermek gerekir.

Hesaplarda hata payını yürütmek için iki basit kural vardır:

- **Toplama ve çıkarmada mutlak hatalar toplanır:**

$$z = a \pm b \quad \Longrightarrow \quad \Delta z = \Delta a + \Delta b$$

- **Çarpma ve bölmelerde bağıl hatalar toplanır:**

$$y = \begin{cases} ab \\ a/b \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Bu iki kural daha karmaşık hesapların hata payını bulmak için yeterlidir. Örneğin, $z = a^3\,(b+c)^2$ ifadesinin hata payı şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} z &= a^3\,(b+c)^2 \\ \frac{\Delta z}{z} &= \frac{\Delta(a^3)}{a^3} + \frac{\Delta(b+c)^2}{(b+c)^2} \\ &= \frac{3a^2\,\Delta a}{a^3} + \frac{2(b+c)\,\Delta(b+c)}{(b+c)^2} \\ \frac{\Delta z}{z} &= 3\,\frac{\Delta a}{a} + 2\,\frac{\Delta b + \Delta c}{b+c} \end{aligned}$$

Bir verinin ifadesinden hata payını görmek mümkündür. Örneğin, iki ayrı kütle ölçümü 45 g ve 45.0 g olarak verilmiş ise, birinci ölçümde gramdan sonrası bilinmiyor demektir, yani mutlak hata $\Delta m = 1\,\text{g}$ dır. İkinci ölçümde gramın ondalığı da ölçülmüş ve 0 bulunmuştur, yani mutlak hata $\Delta m = 0.1\,\text{g}$ dır.

Anlamlı Hane Sayısı

Bir fiziksel verinin hassaslığı her zaman mutlak hatasıyla verilmez. Bazen de veriyi ifade eden sayının **anlamlı hane sayısı** ile anlaşılır.

Örneğin, bir cismin kütlesi 76.4 g olarak verilmişse, anlamlı hane sayısı 3 tür. Bunu kilogram olarak 0.0764 kg şeklinde ifade ettiğimizde, anlamlı hane sayısı değişmez, yine 3 tür. *Bir sayının anlamlı hane sayısı soldaki sıfırları gözönüne almadan hesaplanır.* Örneğin,

1.2398	Anlamlı hane sayısı: 5
0.00000039	Anlamlı hane sayısı: 2
3.00007	Anlamlı hane sayısı: 6
2.70	Anlamlı hane sayısı: 3

(Son satırdaki veride en sağdaki sıfır yazıldığına göre, ölçülmüş demektir ve bu yüzden anlamlı hane sayısı 3 olur.) Anlamlı hane sayısı ne kadar çok ise, o nicelik daha hassas biliniyor demektir.

Böyle iki sayıyla dört işlem yapıldığında sonucun anlamlı hane sayısı ne kadar olur? Örneğin, hareketli bir cisim 3.0 saniye içinde 8.0 metre yol almışsa, hız değeri $v = 8/3 = 2.6666\ldots$ olarak uzayıp gider. Bunu nerede kesmek gerekir?

Hesap sonuçlarının anlamlı hane sayısı için, yine çok basit üç kural vardır:

- **Toplama ve çıkarmada, ondalık basamak sayısı en az olan korunur:**

$$3.2339 + 5.4 = 8.6339 = 8.6$$
$$9.12 - 5.4317 = 3.6883 = 3.69$$

(Son satırda iki haneye indirirken, atılan kısmın ilk rakamı 5 ten büyük olduğu için, yuvarlama yapıldı.)

- **Çarpma ve bölmede, anlamlı hane sayısı en az olan korunur:**

$$3.4567 \times 2.7 = 9.33309 = 9.3$$
$$15.67 \times 0.00012 = 0.0018804 = 0.0019$$

- **Saymakta kullanılan doğal sayıların anlamlı hane sayısı sonsuzdur.** Örneğin, bir kitabın kütlesi 285.6 g ise, 3 kitabın kütlesi $3 \times 285.6 = 856.8$ g olur, yani hane kaybetmez.

Bu kurallara göre, yukardaki hız örneğinde, cismin hızı $v = 8.0/3.0 = 2.666666\ldots = 2.7$ mm/s alınmalıdır. Bu dersteki hesaplarda genel kuralımız şu olacaktır:

Aksi belirtilmedikçe, anlamlı hane sayısı ara hesaplarda 3, sonuçta 2 tutulacaktır.

Örnek 1.1

Bir halının boyutları,

(a) $a = (5.2 \pm 0.1)$ *ve* $b = (8.3 \pm 0.2)$ m *olarak veriliyor. Halının yüzölçümünü hata payıyla hesaplayın.*

(b) *Boyutlar sadece* $a = 5.2$ m *ve* $b = 8.3$ m *olarak veriliyor. Yine yüzölçümü hesaplayın.*

Çözüm

(a) Önce, halının yüzölçümü hesaplanır:

$$A = ab = 5.2 \times 8.3 = 43.16\,\text{m}^2$$

Yüzölçüm bir çarpım gerektirdiği için, bağıl hata formülü kullanılır:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta A}{43.2} = \frac{0.1}{5.2} + \frac{0.2}{8.3} = 0.043$$
$$\Delta A = 43.2 \times 0.043 = 1.87 \approx 2\,\mathrm{m}^2$$

Son satırda yüzölçümün hatasını tek haneye indirdik, çünkü en ve boyun hata payları tek haneli idi. Buna göre, halının yüzölçümünü yazarken, mutlak hatasından daha ötedeki haneleri yazmayız:

$$A \pm \Delta A = (43 \pm 2)\,\mathrm{m}^2$$

(b) En ve boyun anlamlı hane sayısı 2 dir. Buna göre, ikisinin çarpımında sadece 2 anlamlı hane korunur:

$$A = ab = 5.2 \times 8.3 = 43.16 \approx 43\,\mathrm{m}^2$$

Örnek 1.2

Bir otomobilin hızı 34 mph (mil/saat) *olarak veriliyor. Hızı* km/saat *ve* m/s *cinsinden hesaplayın. (*1 mil = 1 609 m*).*

Çözüm

Hız 2 anlamlı hane ile verilmiştir. O halde sonuçlarda 2 anlamlı hane tutulacaktır. 1 mil = 1.609 km alınırsa,

$$34\,\mathrm{mph} = 34 \times 1.609 = 54.706 = 55\,\mathrm{km/saat}$$

Benzer şekilde, 1 saat = 60 dakika ve 1 dakika = 60 saniye alınırsa,

$$55\,\mathrm{km/saat} = \frac{55 \times 1000}{3600\,\mathrm{s}} = 15.27 = 15\,\mathrm{m/s}$$

Örnek 1.3

Kütlenin enerjiye dönüşümü Einstein'ın meşhur formülü ile hesaplanır:

$$E = mc^2$$

Burada $c = 2.997925 \times 10^8$ m/s *ışık hızı, E enerji olup SI sisteminde birimi joule* (J) *dir. (*1 J = 1 kg · m^2/s^2*).*

1.0 gram *maddenin enerjisini hesaplayın.*

Çözüm

$m = 1.0$ g maddenin, sağdaki sıfırı da hesaba katarsak, anlamlı hane sayısı 2 dir. O halde, sonucu 2 anlamlı hane ile vermek gerekir. Bunu bildikten sonra, ışık hızını 3 haneye yuvarlamak yeterli olur::

$$E = mc^2 = (1 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}) \times (3.00 \times 10^8)^2$$
$$E = 9.0 \times 10^{15}\,\mathrm{J}$$

1.3 VEKTÖRLER

Fiziksel niceliklerin ölçümlerine bakıldığında hemen bir özellik açısından iki gruba ayrıldıkları gözlenir: Bazı nicelikler için sadece sayısal bir değer belirtmek yeterlidir. Bunların türüne **skaler nicelikler** diyoruz. Örneğin, "bu odanın sıcaklığı 18° derece," veya "şu masanın kütlesi 25 kg," demek yeterlidir. Skaler türden diğer nicelikler arasında zaman, enerji, hacım, periyot, sığa, elektrik direnci, kırılma indisi, ... sayılabilir.

Diğer bazı nicelikler için sadece sayısal değer belirtmek yeterli olmaz. Örneğin, "bu geminin hızı 10 km/saat," dediğimizde bize sorarlar: "Ama hangi yönde 10 km/saat?" Oysa, "kuzey-doğu yönünde 10 km/saat," dersek, geminin hızını tam olarak belirtmiş oluruz.

Tanım: Bir *büyüklük* (veya, şiddet, norm) ve bir de *yön* ile belirlenen niceliklere **vektör** diyoruz. Vektör nicelikler arasında yerdeğiştirme, hız, ivme, kuvvet, momentum, elektrik alan, ... sayılabilir. Vektörler, harfin üzerine ok işareti ($\vec{}$) konarak gösterilir: $\vec{A}$, $\vec{F}$ ... gibi.

Bir vektörün **büyüklüğü** (şiddeti, normu) $|\vec{A}|$ veya kısaca A ile gösterilen pozitif skaler bir sayıdır.

Vektörü bir şekil üzerinde göstermek istersek, o vektörün yönünde bir ok çizilir. Okun boyu, vektörün şiddetinin bir ölçüsüdür.



Şekil 1.2: $\vec{A}$ vektörünün gösterimi.

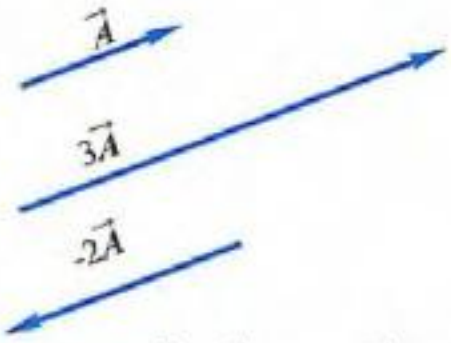
Bir Vektörün Skaler Bir Sayı İle Çarpımı

Bir c sayısı ile $\vec{A}$ vektörünün çarpımı olan $c\vec{A}$ vektörü, şiddeti cA kadar olan yeni bir vektördür. Bunun yönü,

c pozitif ise $\vec{A}$ ile $c\vec{A}$ aynı yönde,

c negatif ise $c\vec{A}$ zıt yönde olur.

Örneğin $3\vec{A}$ vektörü, $\vec{A}$ vektörü yönünde 3 kat daha uzun bir ok, $-2\vec{A}$ vektörü ise zıt yönde iki kat uzunlukta bir ok ile gösterilir.

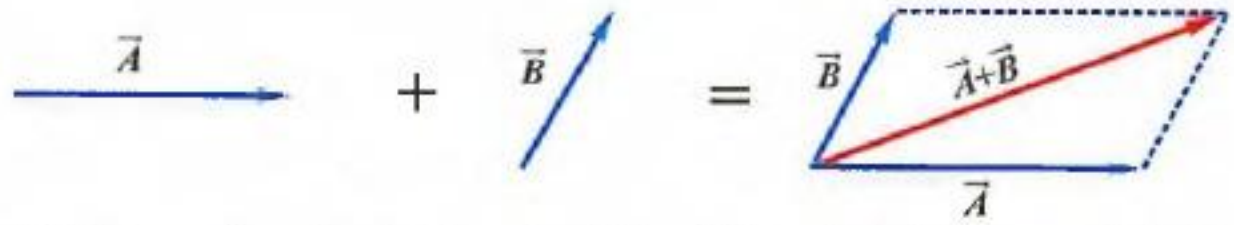


Şekil 1.3: $\vec{A}$, $3\vec{A}$ ve $-2\vec{A}$ vektörleri.

İki Vektörün Toplamı

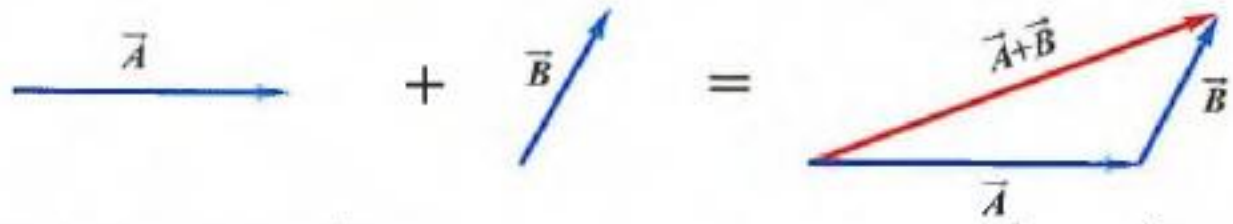
İki vektörün toplamı aritmetik toplamaya benzemez, çünkü bunlar yönlü niceliklerdir. Örneğin, bir gemi önce doğuya 3 km, sonra kuzeye 4 km yer değiştirdiğinde, toplam yerdeğiştirme $3 + 4 = 7$ km değil, sadece 5 km olur. O halde, vektör cebiri skaler sayılardan farklıdır, tüm cebirsel işlemler yeniden tanımlanmalıdır.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı olan $\vec{A} + \vec{B}$ vektörü *üçgen kuralı* veya *paralelkenar kuralı* ile tanımlanır. Bu kurallar Şekil 1.4 ve 1.5 da gösterilmiştir.



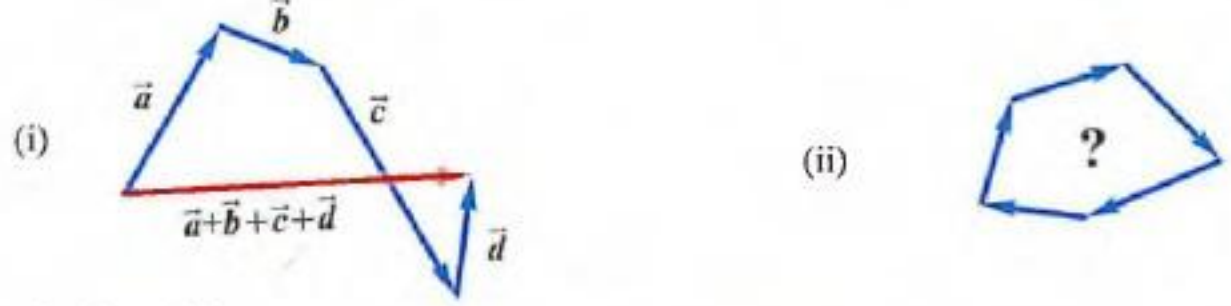
Şekil 1.4: Paralelkenar kuralı.

Paralelkenar kuralında önce her iki vektör, *yönleri korunarak*, başlangıçları aynı noktaya gelecek şekilde kaydırılır. Daha sonra, herbir vektörün bitiş noktasından diğerine paralel doğrular çizilerek bir paralelkenar oluşturulur. Bu paralelkenarın vektörler arasında kalan köşegeni $\vec{A} + \vec{B}$ vektörü olur.



Şekil 1.5: Üçgen kuralı.

Daha kullanışlı olan **Üçgen kuralı**nda, vektörlerden biri ($\vec{A}$ veya $\vec{B}$), kendisine paralel kaydırılarak diğer vektörün bitiş noktasına kadar getirilir (Şekil 1.5). Birinci vektörün ($\vec{A}$) başlangıç noktasından ikinci vektörün ($\vec{B}$) bitiş noktasına çizilen vektör $\vec{A} + \vec{B}$ olur.



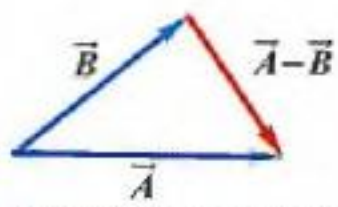
Şekil 1.6: (i) Üçgen kuralıyla, çok sayıda vektörün toplamı daha kolay olur. (ii) Sağ taraftaki beş vektörün toplamı sizce ne olur?

Her iki kural da aynı sonucu verir. Fakat, ikiden fazla vektör toplanmak istendiğinde paralelkenar kuralı uygun değildir, şekil hemen karışır. Oysa, üçgen kuralı ile ikiden çok vektörün toplamı bir anda çizilebilir (Şekil 1.6). Vektörleri uç uca dizdikten sonra, birinci vektörün başlangıç noktasından sonuncu vektörün bitiş noktasına bir vektör çizmek kafidir.

Vektörlerin Çıkarılması

Vektörlerin çıkarılması da aynı kuralla yapılır. $\vec{A} - \vec{B}$ farkı $\vec{A}$ ile $-\vec{B}$ vektörlerinin toplamından başka bir şey değildir:

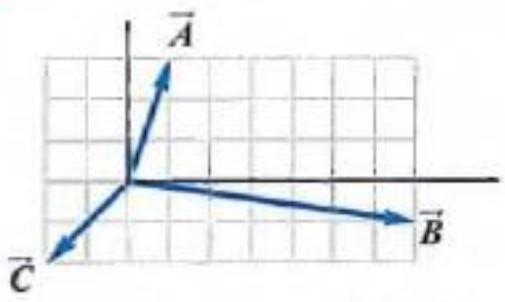
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.1}$$



Şekil 1.7: İki vektörün farkı.

Şekil 1.7 de dikkat edilirse, $\vec{A} - \vec{B}$ vektörünün ucu, artı işaretli olan vektörde $(+\vec{A})$ bitmektedir.

Örnek 1.4



Şekilde grafik kağıdında gösterilen $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin,

(a) *$\vec{A} + \vec{B}$ ve $\vec{B} + \vec{C}$ toplamlarını,*

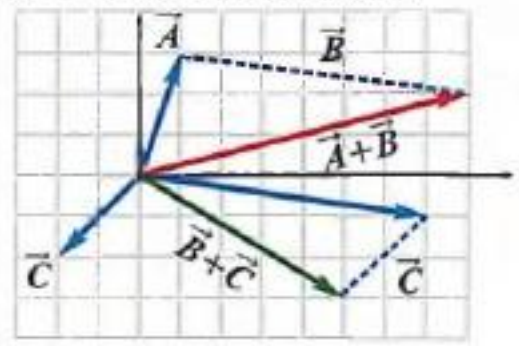
(b) *$\vec{A} - \vec{B}$ ve $\vec{C} - \vec{B}$ farklarını,*

üçgen kuralına göre grafik yolla hesaplayın.

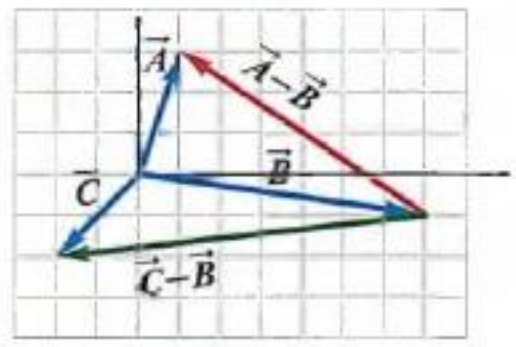
Çözüm

Üçgen kuralına göre, iki vektörden biri alınıp diğerin uç noktasına kadar, kendisine paralel kalacak şekilde kaydırılır. Daha sonra, sabit tutulan vektörün başlangıç noktasından, kaydırılan vektörün uç noktasına çizilen vektör toplam olur.

Şekilde bu toplam vektörler çizilmiştir:



(b) İki vektörün farkı $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ şeklinde yazılarak toplama dönüştürülür. Burada $-\vec{B}$ vektörü $\vec{B}$ ye zıt yöndedir. Üçgen kuralı yine uygulanırsa, sonuçlar şekildeki gibi olur:



Bir Vektörün Bileşenleri

Vektörler için toplama ve diğer işlemleri, grafik olarak değil de cebirsel olarak yapabilmek için vektör bileşenleri tanımlanır. Bileşenler birer sayıdır.

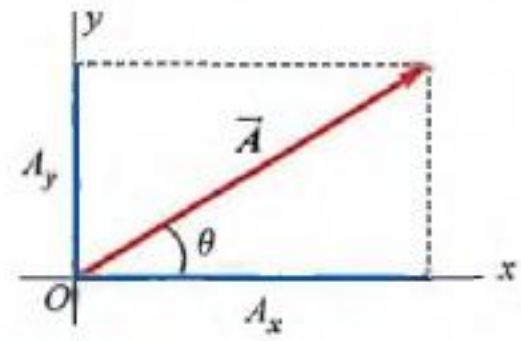
Önce, düzlemde bildiğimiz dik koordinat sistemi alınır. Buna **kartezyen koordinat sistemi** diyoruz. Bu sistem bir O orijini ve x-, y- gibi iki koordinat ekseninden oluşur. Eksenlerin orijinden ok işareti yönündeki yarısında pozitif koordinatlar, diğer yarısında negatif koordinatlar bulunur.

Orijine yerleştirilmiş bir $\vec{A}$ vektörünün uç noktasından x- ve y-eksenlerine birer paralel çizelim.

Bu paralellerin eksenleri kestiği uzunluklar $\vec{A}$ vektörünün x- ve y- **bileşenleri** olup, sırasıyla A_x ve A_y ile gösterilirler. Bunu belirtmek için,

$$\vec{A} : (A_x, A_y)$$

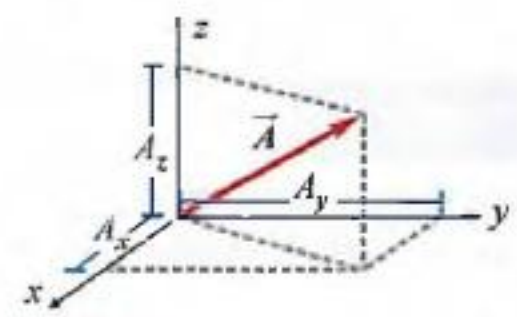
yazılır.



Şekil 1.8: Bir $\vec{A}$ vektörünün bileşenleri.

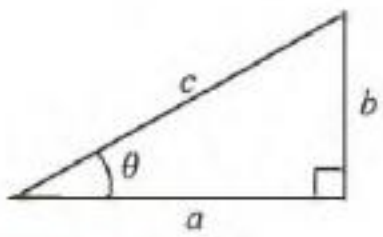
Daha genel olarak, üç boyutlu uzayda, x-, y-, z- gibi üç koordinat ekseni olduğunda, bileşenler şöyle bulunur: $\vec{A}$ vektörünün uç noktasından xy-düzlemine bir dikme inilir. Bunun düzlemi kestiği noktadan x- ve y-eksenlerine birer paralel çizilir. Bu paralellerin eksenleri kestiği uzunluklar $\vec{A}$ vektörünün A_x ve A_y bileşenleri olurlar. Düzleme inilen dikme, veya onun z-ekseni üzerindeki izdüşümü ise A_z bileşeni olur:

$$\vec{A} : (A_x, A_y, A_z)$$



Şekil 1.9: 3-boyutta vektör bileşenleri.

Şimdi, düzlemde bir $\vec{A}$ vektörünün bileşenlerini veren bağıntıları çıkaralım. Bu vektörün büyüklüğü A ve $+x$ ekseniyle yaptığı açı θ olsun. *θ açısının pozitif yönü, saat ibrelerinin dönme yönünün tersi yönünde kabul edilir.*



Şekil 1.10: Dik üçgen.

Bir dik üçgendeki trigonometrik bağıntıları hatırlayalım:

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{c}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} \tag{1.2}$$

Bu formülleri $\vec{A}$ nın bileşenlerine uygularsak,

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \longrightarrow A_x = A\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \longrightarrow A_y = A\sin\theta$$

olur.

Bunun tersi durumda, yani bileşenler verilmişse, bir vektörün şiddeti ve yönü, şu bağıntılarla bulunur (Pisagor bağıntısını hatırlayalım):

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

Böylece, bir vektörü ister bileşenleri cinsinden, ister şiddet ve yönü cinsinden göstermek istediğimizde, birinden diğerine bu formüllerle geçebiliriz.

Bu önemli bağıntıları toplu halde gösterelim.

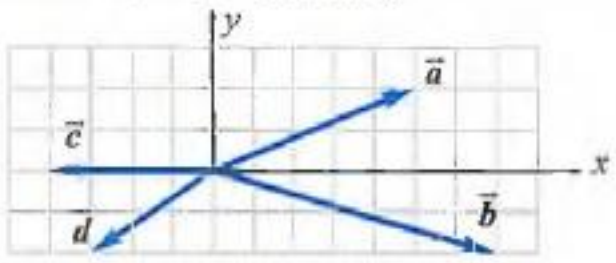
$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta & A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ A_y &= A\sin\theta & \tan\theta &= \frac{A_y}{A_x} \end{aligned}} \tag{1.3}$$

θ açısının tayininde dikkat edilecek nokta: (1.3) formülündeki $\tan\theta$ ifadesi hesap makinasında ters trigonometrik fonksiyon olarak hesaplandığında, her zaman doğru cevabı vermeyebilir. Bazen, o açının tümleyenini verir, çünkü makina için $(-3)/4$ ile $3/(-4)$ aynı -0.75 değerindedir.

Fakat, $\vec{A}$ vektörünün düzlemin hangi çeyreğinde olacağı önceden tahmin edilirse, makinanın cevabı düzeltilebilir. Bunu bize A_x, A_y bileşenlerinin işareti söyler. Örneğin, $A_x = -3$, $A_y = 4$ ise, $\vec{A}$ vektörü 2. çeyrekte, yani $[90° < \theta < 180°]$ olmalıdır. Keza, $B_x = 2$, $B_y = -5$ ise, $\vec{B}$ vektörü dördüncü çeyrekte, yani $[-90° < \theta < 0°]$ olur. (Burada $[270° < \theta < 360°]$ demek yanlıştır, 180° den büyük açılar negatif taraftan söylenir.)

Örnek 1.5

Şekilde gösterilen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektörlerinin bileşenlerini tayin edin. (Herbir bölme 1 birim *dir.)*



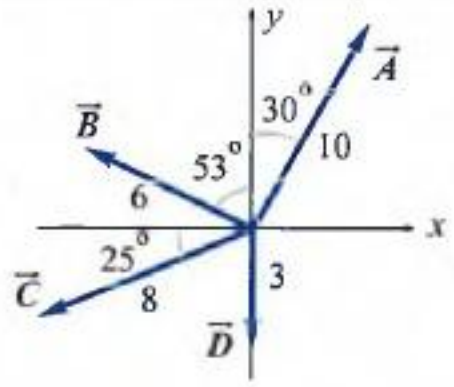
Çözüm

Bileşenlerin işaretlerine dikkat ederek grafik kağıdından okuyabiliriz:

$$a_x = 5 \qquad a_y = 2$$
$$b_x = 6 \qquad b_y = -2$$
$$c_x = -4 \qquad c_y = 0$$
$$d_x = -3 \qquad d_y = -2$$

Örnek 1.6

Şekilde, boyları ve açıları belirtilmiş olan $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ vektörlerinin bileşenlerini hesaplayın. (Bilinmeyen sinüs ve kosinüsler için, kitabın sonundaki Ek C yi kullanabilirsiniz.)



Çözüm

Gerekli açılar ve şiddetler kullanılarak hesaplanır:

$$A_x = A\cos(90-30)^\circ = 10\times\cos 60^\circ = 10\times 0.5 = 5$$
$$A_y = A\sin 60^\circ = 10\times 0.87 = 8.7$$
$$B_x = B\cos(180-37)^\circ = 6\times(-\cos 37^\circ) = -6\times 0.8 = 4.8$$
$$B_y = B\sin(180-37)^\circ = 6\times\sin 37^\circ = 6\times 0.6 = 3.6$$
$$C_x = -C\cos 25^\circ = -8\times 0.91 = -7.3$$
$$C_y = -C\sin 25^\circ = -8\times 0.42 = -3.4$$

Bir vektör eksenlerden biri üzerindeyse, diğer bileşeni sıfır demektir:

$$D_x = 0 \quad \text{ve} \quad D_y = -3$$

Örnek 1.7

$\vec{F}$ ve $\vec{G}$ vektörleri bileşenleri ile verilmiştir:

$$F_x = 3, \qquad G_x = -5$$
$$F_y = -4, \qquad G_y = -12$$

Bu vektörlerin şiddetlerini ve yönlerini bulun.

Çözüm

(1.3) formüllerinin şiddet ve yönü veren ifadeleri kullanılırsa,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$
$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-4}{3} = -1.33$$

Tanjantı 1.33 olan iki açı $+127^\circ$ ve -53° dir. Bunlardan hangisi olacağına bileşenlerin işaretine bakarak karar veririz. $\vec{F}$ nin sadece y-bileşeni negatif olduğu için, bu açı 4. çeyrektedir. O halde, cevap $\theta = -53^\circ$ olur.

$\vec{G}$ için hesapta aynı yolu izleriz:

$$G = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$
$$\tan\theta = \frac{-12}{-5} = 2.4$$

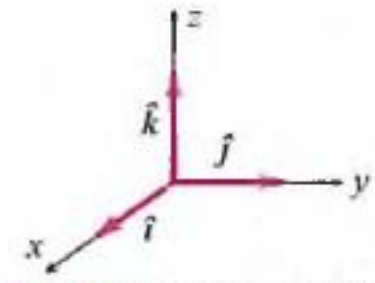
Tanjantı 2.4 olan iki açı $+64^\circ$ ve -113° dir. $\vec{G}$ nin her iki bileşeni negatif olduğu için, bu açı 3. çeyrektedir. O halde, cevap $\theta = -113^\circ$ olur.

Birim Vektörler

Vektör işlemlerini kolaylaştırmak üzere, eksenler boyunca birim (1) uzunlukta vektörler tanımlanır. Önce, x-ekseni boyunca, pozitif yönde, birim uzunlukta $\hat{\imath}$ vektörü alınır. Bunun bileşenlerini yazalım:

$$\hat{\imath} : (1,0,0)$$

Burada şapka (ˆ) işareti, bir vektörün birim uzunlukta olduğunu belirtmek için kullanılır. Her vektör için bir birim vektör tanımlanabilir. Örneğin $\hat{A}$ yazdığımızda, $\vec{A}$ vektörü yönündeki birim vektörü anlarız.

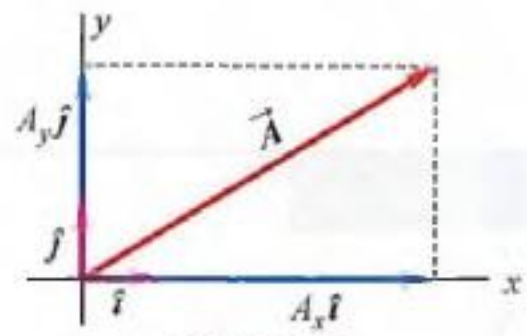


Şekil 1.11: Birim vektörler.

Benzer şekilde, y-ekseni yönündeki birim vektörü $\hat{\jmath}$ ve z-ekseni yönündeki birim vektörü $\hat{k}$ tanımlanır. Bunların da bileşenleri şöyledir:

$$\hat{\jmath} : (0,1,0), \qquad \hat{k} : (0,0,1)$$

Şimdi, bu öğrendiklerimizle, düzlemde bir $\vec{A}$ vektörünü inşa edelim. Önce, $A_x\hat{\imath}$ çarpımının ne olduğunu görmeye çalışalım. Bu, A_x sayısı ile çarpılmış birim uzunlukta bir vektördür. Büyüklüğü A_x kadar, yönü de $\hat{\imath}$, yani $+x$-ekseni yönündedir. Benzer şekilde, $A_y\hat{\jmath}$ çarpımı da $+y$ yönünde ve boyu A_y kadar olan bir vektör olur.



Şekil 1.12

Şimdi, bu iki vektörün toplamına bakalım: Bunları orijinden itibaren uç uca yerleştirirsek, üçgen kuralına göre varacağımız yer $\vec{A}$ vektörü olur:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

Bu yazılım şekli 3-boyutlu uzayda kolayca genelleştirilir:

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}} \tag{1.4}$$

Bu ifade çok kullanılacaktır. Vektörler üzerine yapılan her türlü toplama ve çarpma işlemleri, bu gösterimle yazıldıktan sonra, bildiğimiz aritmetik işlemleri gibi sürdürülebilirler. Keza, böyle bir gösterimde verilen vektörün bileşenleri hemen görülebilmektedir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 6\hat{k} \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &D_x \quad D_y \quad D_z \end{aligned}$$

ifadesi bize, $D_x = 3$, $D_y = -5$, $D_z = 6$ olduğunu gösterir.

Vektör Bileşenleriyle Toplama

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörü bileşenleri ve birim vektörler cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \end{aligned}$$

Buradan $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ vektörünü oluşturalım:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \\ \vec{C} &= C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k} \end{aligned}$$

Son iki satır karşılaştırılırsa, **$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı olan $\vec{C}$ vektörünün bileşenleri, her iki vektörün bileşenlerinin aritmetik toplaması olurlar.** Diğer bir ifadeyle,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \iff \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases} \tag{1.5}$$

Bileşenlerle bildiğimiz toplama ve çıkartma yaparak çalışmak grafik yöntemlerden çok daha kolaydır. Bu yöntem ikiden fazla ve katsayılarla çarpılmış vektör ifadeleri için de geçerlidir.

Örnek 1.8

$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 3\hat{k}$ $\vec{C} = 8\hat{\jmath}$ vektörleri veriliyor.

(a) *Herbir vektörün bileşenlerini yazın.*
(b) *$\vec{A} + \vec{B}$ toplamını ve $\vec{B} - \vec{C}$ farkını hesaplayın.*
(c) *$3\vec{A} - 8\vec{B} + 9\vec{C}$ ifadesini hesaplayın.*

Çözüm

(a) $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ birim vektörlerinin önündeki katsayılar sırasıyla x-, y- ve z-bileşenleri olurlar. Verilen vektör ifadelerinden bileşenler tespit edilir:

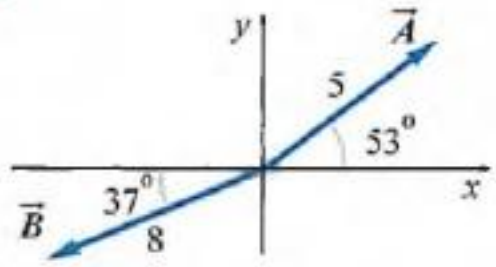
$$\begin{array}{lll} A_x = 3 & A_y = -4 & A_z = 7 \\ B_x = 2 & B_y = 0 & B_z = -3 \\ C_x = 0 & C_y = 8 & C_z = 0 \end{array}$$

(b) Bileşenlerle toplama ve çıkarma yaparken, birim vektör-

lerin katsayıları cebirsel olarak toplanır veya çıkarılır:

$$\vec{A} + \vec{B} = (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}) + (2\hat{\imath} - 3\hat{k})$$
$$= 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$
$$\vec{B} - \vec{C} = (2\hat{\imath} - 3\hat{k}) - (8\hat{\jmath}) = 2\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

Örnek 1.9



Şekilde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin boyları ve açıları verilmiştir.

(a) *Bileşenleri hesaplayın ve bu iki vektörü birim vektörler cinsinden ifade edin,*

(b) *$\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{B}$ olan $\vec{R}$ vektörünü hesaplayın.*

(c) *$\vec{R}$ vektörünün şiddeti ve yönünü tayin edin.*

Çözüm

(a) Bileşenler:

$$A_x = 5\cos 53^\circ = 3 \qquad A_y = 5\sin 53^\circ = 4$$

$$B_x = -8\cos 37^\circ = -6.4 \qquad B_y = -8\sin 37^\circ = -4.8$$

Buna göre, birim vektörler cinsinden:

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = -6.4\hat{\imath} - 4.8\hat{\jmath}$$

(b) $\vec{R}$ vektörü hesaplanır:

$$\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = 3(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) - 2(-6.4\hat{\imath} - 4.8\hat{\jmath})$$
$$\vec{R} = 24.8\,\hat{\imath} + 18.63\,\hat{\jmath}$$

(c) $\vec{R}$ nin şiddeti hesaplanır:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{24.8^2 + 18.6^2} = 31$$

Yönü $+x$ ekseniyle yaptığı açı olarak hesaplanır:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{18.6}{24.8} = 0.75$$

Bileşenler pozitif olduğundan açı $\theta = 37^\circ$ dir.

Skaler Çarpım

Fizikte pek çok bağıntı vektör çarpımları olarak ifade edilebilmektedir. Bu amaçla 2 farklı çarpım tanımlanır:

(1) Skaler çarpım,

(2) Vektörel çarpım.

Adlarından da anlaşılacağı üzere, birincisinin sonucu skaler bir sayı, ikincisinin sonucu bir vektördür. Önce, skaler çarpımı ele alalım.

Tanım: Aralarındaki açı θ olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin **skaler çarpımı** $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ile gösterilen bir sayıdır ve değeri,



Şekil 1.13: Skaler çarpım.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\cos\theta \qquad \text{(Skaler çarpım)} \qquad (1.6)$$

olur. Burada A ve B, vektörlerin şiddetini, θ açısı iki doğrultu arasında daha küçük olan açıyı gösterir.

Skaler çarpımın önemli özelliklerini vurgulayalım:

- Sıra değiştirme: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- Dağılma: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
- $\theta = 90^\circ$ ise, yani **iki vektör birbirine dik ise, skaler çarpımın sonucu sıfır olur.** ($\cos 90^\circ = 0$). Bu özellik hesaplarda **diklik koşulu** olarak çok kullanılır.
- $\vec{A}\cdot\vec{A} = A\,A\cos 0^\circ = A^2$ veya, bir vektörün kendisiyle skaler çarpımı şiddetinin karesini verir.
- Skaler çarpımın işareti $\cos\theta$ teriminden gelir. İki vektör arasındaki açı 90° den küçükse çarpım pozitif, büyükse çarpım negatif olur.

Skaler Çarpımın Bileşenler Cinsinden İfadesi

Önce, $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ birim vektörlerinin birbirleriyle skaler çarpımlarını bulalım:

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} &= 1.1.\cos 0 = 1 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} &= 1.1.\cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\hat{\jmath}$ ve $\hat{k}$ vektörlerinin kendileriyle skaler çarpımları 1, diğer karışık çarpımlar sıfır olurlar. O halde,

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Şimdi, bu sonuçları bileşenleriyle verilmiş iki vektörün skaler çarpımında kullanalım:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{\imath} + B_y \hat{\jmath} + B_z \hat{k})$$

Parantezler içindeki skaler çarpımlar açılırken, birer sayı olan bileşenler katsayı olur ve sadece birim vektörlerin skaler çarpımları kalır:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} = \quad & A_x B_x (\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) + A_x B_y (\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}) + A_x B_z (\hat{\imath} \cdot \hat{k}) + \\ & + A_y B_x (\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath}) + A_y B_y (\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}) + A_y B_z (\hat{\jmath} \cdot \hat{k}) + \\ & + A_z B_x (\hat{k} \cdot \hat{\imath}) + A_z B_y (\hat{k} \cdot \hat{\jmath}) + A_z B_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \end{aligned}$$

Bu ifade içindeki birim vektörlerin skaler çarpımları ya 1 yahut da 0 olacağından, sonuç şöyle sadeleşir:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Özel olarak, bir vektörün kendisiyle skaler çarpımı, şiddetinin karesini verir:

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{1.8}$$

Sonuç olarak, skaler çarpımı iki farklı yoldan hesaplayabiliriz. Vektörlerin bileşenleri verilmişse bu formülü, şiddeti ve yönü verilmişse (1.6) formülündeki tanımı kullanırız:

$$\boxed{\text{Skaler Çarpım}: \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{cases} A\,B\cos\theta \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{cases}} \tag{1.9}$$

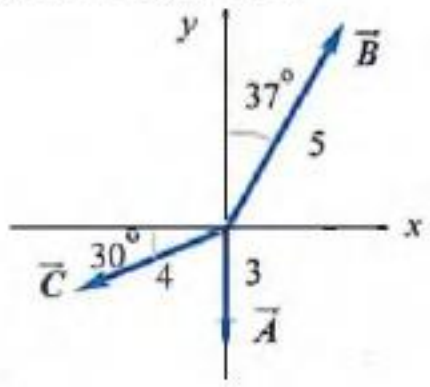
Skaler çarpımın iyi bir uygulaması, iki vektör arasındaki açıyı bulmaktır. Yukardaki iki ifadeyi birleştirip, $\cos\theta$ için yazılırsa,

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{A\,B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \tag{1.10}$$

Skaler çarpım fizikte iş, elektrik potansiyel, manyetik akı, ... gibi pekçok tanımda kullanılacaktır.

Örnek 1.10

Şekilde gösterilmiş olan $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin birbirleriyle skaler çarpımlarını tayin edin.



Çözüm

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ formülünü kullanırken, vektörler arasındaki açılar şekilden hesaplanır:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(180^\circ - 37^\circ) = 3\times 5\times(-\cos 37^\circ)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 15\times(-0.8) = -12$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = AC\cos(90^\circ - 30^\circ) = 3\times 4\times\cos 60^\circ$$
$$\vec{A}\cdot\vec{C} = 12\times(0.5) = 6$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = BC\cos(90^\circ + 67^\circ) = 5\times 4\times\cos 157^\circ$$
$$\vec{B}\cdot\vec{C} = 20\times(-\cos 23^\circ) = 20\times(-0.92) = -18$$

Örnek 1.11

$\vec{p} = 3\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}, \quad \vec{q} = 8\hat{\imath} + 7\hat{k}$

(a) *$\vec{p}\cdot\vec{q}$ skaler çarpımını bulun,*

(b) *Bu iki vektör arasındaki açıyı tayin edin.*

Çözüm

(a) Skaler çarpımın bileşenli ifadesi kullanılır:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_x q_x + p_y q_y = 3\times 8 + (-8)\times 7 = -32$$

(b) Önce vektörlerin şiddetleri bulunur:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{3^2 + (-8)^2} = \sqrt{73} \approx 8.5$$

$$q = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} \approx 11$$

Bu veriler (1.10) formülünde kullanılır:

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{pq} = \frac{-32}{8.5\times 11} = -0.34$$

$$\theta = 110^\circ$$

Skaler çarpım eksi olduğundan sonuç geniş açı olur.

Örnek 1.12

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

Bu iki vektörün birbirine dik olması için, bilinmeyen A_x koordinatı ne olmalıdır?

Çözüm

İki vektör dik ise skaler çarpımları sıfır olmalıdır. Bu koşulu bileşenler cinsinden yazarsak,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 0$$
$$A_x\times 4 + 12\times 5 = 0 \quad\rightarrow\quad A_x = -60/4 = -15$$

Vektörel Çarpım

Fizikte iki vektörel niceliğin yeni bir vektöre yolaçtığı pekçok bağıntı vardır. Bu amaçla, sonucu vektör olan bir vektörel çarpım tanımlamak kolaylık sağlar.

Tanım: Aralarındaki açı θ olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin **vektörel çarpımı,**

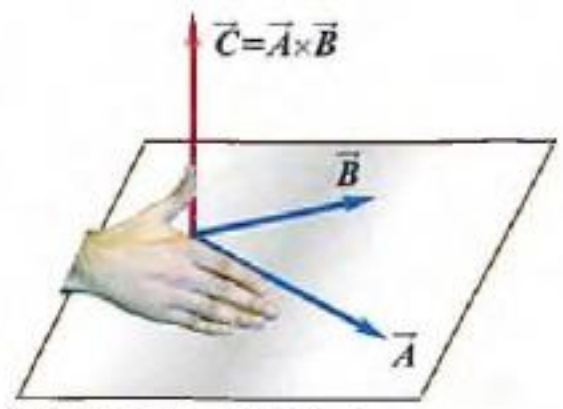
$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

ile gösterilen yeni bir vektör olup,

- **Şiddeti:** $C = AB\sin\theta$ olur.
- **Yönü:** $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin oluşturduğu düzleme dik doğrultuda ve **sağ-el kuralı** ile verilir.

Sağ-el Kuralı: Bu derste sağ-el kuralı pekçok yerde kullanılacağı için, baştan iyice kavramak yararlı olacaktır. Bu kural değişik kitaplarda farklı şekillerde anlatılabilmektedir. Burada vereceğimiz ifade şekli çok yaygın olmakla birlikte, size uygun gelen başka ifade tarzı varsa, onu kullanmaya devam edebilirsiniz.

Sağ elin dört parmağı 1. vektör ($\vec{A}$) yönünde ve avuçiçi 2. vektöre ($\vec{B}$) bakacak şekilde uzatıldığında, baş parmak $\vec{C}$ vektörünün yönünü verir.



Şekil 1.14: Vektörel çarpımın yönü sağ-el kuralı ile verilir.

Vektörel çarpımın önemli özelliklerini vurgulayalım:

- **Vektörel çarpımda sıra önemlidir:** $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$
- Dağılma özelliği: $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$
- İki vektör paralel ($\theta = 0$) veya anti-paralel ($\theta = 180°$) ise, sinüsler sıfır olacağından, vektörel çarpımın sonucu sıfır olur.

  Özel olarak, bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır: $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

Vektörel Çarpımın Bileşenler Cinsinden İfadesi

Önce, $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ birim vektörlerinin birbirleriyle vektörel çarpımlarını bulalım. Her vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfır olacağından,

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

olur. Sonra, $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$ çarpımına bakalım: Boylar 1 ve aradaki açı $90°$ olduğundan, vektörel çarpımın sonucunda boyu $1.1.\sin 90° = 1$ olan bir vektör çıkacaktır. Bunun yönü de sağ-el kuralına göre, $+z$ yönünde oluşur. Oysa bu, bildiğimiz $\hat{k}$ birim vektörüdür.

Ayrıca, vektörel çarpım sıra değiştirmediğinden, $\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$ olacaktır.

Böylece, birim vektörlerin vektörel çarpımları şöyle olur:

$$\begin{aligned}&\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0\\ &\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.11}$$

Şimdi, bu sonuçları bileşenleriyle verilmiş iki vektörün vektörel çarpımında kullanalım:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$$

Parantezler açılıp bileşenler vektörel çarpımların dışına alınırsa,

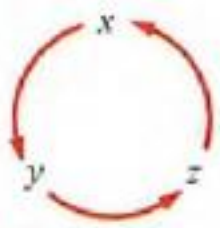
$$\begin{aligned}\vec{C} = {} & A_xB_x(\hat{\imath}\times\hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) + A_xB_z(\hat{\imath}\times\hat{k}) +\\ & + A_yB_x(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}) + A_yB_z(\hat{\jmath}\times\hat{k}) +\\ & + A_zB_x(\underbrace{\hat{k}\times\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}}) + A_zB_y(\underbrace{\hat{k}\times\hat{\jmath}}_{-\hat{\imath}}) + A_zB_z(\underbrace{\hat{k}\times\hat{k}}_{0})\end{aligned}$$

Bu terimlerde birim vektörlerin vektörel çarpım ifadeleri kullanılırsa, sonuç şöyle sadeleşir:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \underbrace{(A_yB_z - A_zB_y)}_{C_x}\hat{\imath} + \underbrace{(A_zB_x - A_xB_z)}_{C_y}\hat{\jmath} + \underbrace{(A_xB_y - A_yB_x)}_{C_z}\hat{\imath} \tag{1.12}$$

Bu formülü akılda tutmak için **döner permütasyon** tekniği kullanılır. İndislerin birbiri peşinden şöyle döndüğünü düşünün:

$$x \to y \to z, \qquad y \to z \to x, \qquad z \to x \to y$$



Şekil 1.15: Döner permütasyon.

Buna göre, C_x bileşenini (x) yazarken önce $\vec{A}$ nın y-bileşeni ile $\vec{B}$ nin z-bileşeni çarpılır, sonra indisler yer değiştirilip çıkarılır. Diğer bileşenler için de, indislerin dönel permütasyonu yapılır:

$$\underbrace{C_x = A_yB_z}_{x\to y\to z} - A_zB_y, \qquad \underbrace{C_y = A_zB_x}_{y\to z\to x} - A_xB_z, \qquad \underbrace{C_z = A_xB_y}_{z\to x\to y} - A_yB_x$$

Diğer bir gösterim, determinant çarpımı şeklinde yazmaktır. Determinant açılımı kuralları hatırlanırsa,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

Bu determinantı 1. satırın minörlerine göre açtığımızda vektörel çarpımın Denklem 1.12 ifadesini aynen verir.

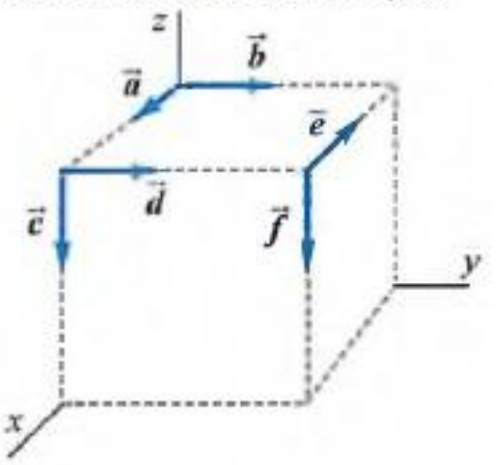
Fizikte vektörel çarpım olarak ifade edilen nicelikler arasında bir kuvvetin momenti (tork), açısal momentum, manyetik kuvvet ... sayılabilir.

Burada sınırlı olarak verdiğimiz vektör bilgisi, daha ilerdeki konuları anlamada kaçınılmaz olan bilgilerdir. Bunları özümsemeden geçmek yanlış olur.

Örnek 1.13

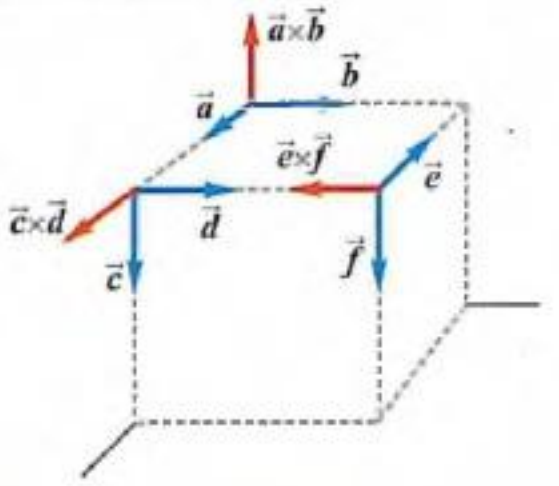
Şekilde bir kenarı birim (1) uzunlukta olan kübün köşelerine çizilmiş olan vektörler görülmektedir.

$\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}\times\vec{d}$, $\vec{e}\times\vec{f}$ vektörel çarpımlarının sadece yönlerini tayin edin ve bir şekil üzerinde işaretleyin.



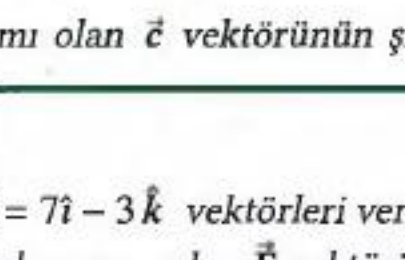
Çözüm

Sağ-el kuralına göre, dört parmak 1. vektör yönünde ve avuçiçi 2. vektöre bakacak şekilde uzatılırsa, başparmak çarpım yönünde olur. Buna göre, sonuçlar şu şekilde oluşur:



Örnek 1.14

Şekilde xy-düzleminde yeralan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektörlerinin boyları sırasıyla $a = 15$ ve $b = 12$ birimdir.



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ çarpımı olan $\vec{c}$ vektörünün şiddeti ve yönünü tayin edin.

Çözüm

Önce $\vec{c}$ vektörünün şiddetini bulalım. Şekilden iki vektör arasındaki açının $90 - (23 + 30) = 37°$ olduğu tayin edilir. Buna göre,

$$c = a\,b \sin 37 = 15 \times 12 \times 0.6$$

$$c = 108 \text{ m/s}$$

$\vec{c}$ nin doğrultusu xy-düzlemine dik, yani z-doğrultusunda olmalıdır. Sağ-el kuralı uygulanırsa, $-z$ yönünde bulunur.

Örnek 1.15

$\vec{D} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$, $\vec{E} = 7\hat{\imath} - 3\hat{k}$ vektörleri veriliyor.

$\vec{F} = \vec{D}\times\vec{E}$ vektörel çarpımı olan $\vec{F}$ vektörünün bileşenlerini hesaplayın.

Çözüm

Bileşenleri veren (1.12) formüllerini kullanırız. Bileşen indislerinin döner permütasyonu indisleri kolay hatırlamamızı sağlar:

$$F_x = D_yE_z - D_zE_y = -5 \times (-3) - 0 \times 0 = 15$$

$$F_y = D_zE_x - D_xE_z = 0 \times 7 - 3 \times (-3) = 9$$

$$F_z = D_xE_y - D_yE_x = 3 \times 0 - 5 \times 7 = -35$$

Buna göre, $\vec{F} = 15\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 35\hat{k}$ olarak yazılır.

Test

1. 0.003804 sayısında anlamlı hane sayısı kaçtır?
   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2. $1.2 + 0.222 = ?$ sonucu nasıl ifade edilmelidir?
   (a) 1.2 (b) 1.22 (c) 1.4 (d) 1.422

3. Bir madeni liranın kütlesi (8.2 ± 0.1) gramdır. İki madeni liranın kütlesi kaç gram olur?
   (a) 16.4 (b) 16.4 ± 0.2 (c) 16.6 (d) 16 ± 0.1

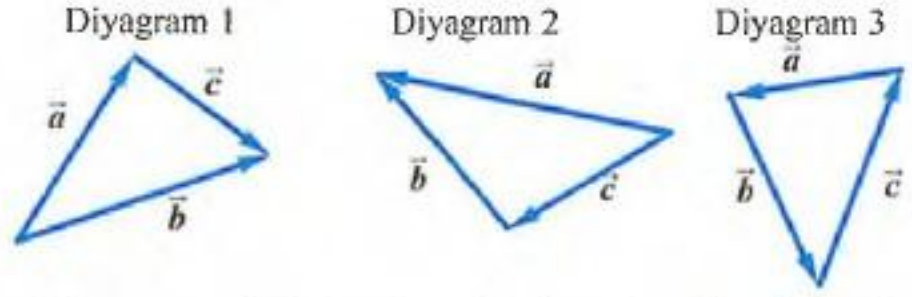
4. Bir kübün bir kenarının ölçümünde bağıl hata %1 dir. Kübün hacminin bağıl hatası ne olur?
   (a) %1 (b) %2 (c) %3 (d) %4

5. Bir cismin kütlesi 8.888 g ve hacmi $2.0\,\text{cm}^3$ dür. Bu cismin yoğunluğu kaç g/cm^3 olur?
   (a) 4 (b) 4.4 (c) 4.44 (d) 4.444

6. Aşağıdaki niceliklerden hangisi vektörel bir nicelik değildir?
   (a) Hız
   (b) Kuvvet
   (c) Elektrik alan
   (d) Hacim

7. İki vektör birbirine dik ise, aşağıdakilerden hangisi kesin doğrudur?
   (a) Vektör şiddetleri aynıdır.
   (b) Skaler çarpımları sıfırdır.
   (c) Vektörel çarpımları sıfırdır.
   (d) Bileşenleri eşit olur.

Diyagram 1 Diyagram 2 Diyagram 3



8. Diyagram 1 deki üç vektör için hangi toplam doğrudur?
   (a) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ (b) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ (c) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (d) Hiçbiri

9. Diyagram 2 deki üç vektör için hangi fark doğrudur?
   (a) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ (b) $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$ (c) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (d) Hiçbiri

10. Diyagram 3 deki üç vektör için hangi eşitlik doğrudur?
    (a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
    (b) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$
    (c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$
    (d) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$

11. İki vektörün vektörel çarpımı sıfır ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Vektörler paraleldir.
    (b) Vektörler diktir.
    (c) Vektör şiddetleri eşittir.

12. Bir vektörün kendisiyle skaler çarpımı $(\vec{A} \cdot \vec{A})$,
    (a) Sıfırdır.
    (b) Şiddetine eşittir.
    (c) Şiddetinin karesine eşittir.

13. Aşağıdaki eşitliklerden hangisi doğrudur?
    (a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
    (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
    (c) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
    (d) Hepsi

14. $\vec{a}$ vektörünün şiddeti 5 birim ve $\vec{b}$ vektörünün şiddeti 3 birimdir. Buna göre, $\vec{a} + \vec{b}$ nin şiddeti aşağıdakilerden hangisi olamaz?
    (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7

15. Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?
    (a) Boyları farklı olan iki vektörün toplamı sıfır olabilir.
    (b) Vektörün boyu, dik bileşenlerinden daha büyüktür.
    (c) $(\hat{i} + \hat{j})$ vektörlerinin toplamı da birim vektördür.
    (d) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ ise, $a > b$ ve $a > c$ olur.

16. Aşağıdaki vektör cebri işlemlerinden hangisi kurallara uygun değildir?
    (a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$
    (b) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$
    (c) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$
    (d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

17. Aşağıdaki vektör eşitliklerden hangisi yanlıştır?
    (a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
    (b) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
    (c) $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$
    (d) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{B}) = B^2 \vec{A}$

18. Üç vektörün toplamı sıfır oluyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Vektörlerin üçü aynı düzlemde olurlar.
    (b) Vektörler birbirine dik olurlar.
    (c) Vektörler birbirine eşit boyda olurlar.
    (d) Üç vektörün toplamı sıfır olamaz.

19. İki vektörün skaler çarpımı negatif ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

    (a) Vektörler eşit ve zıt yönde olurlar.
    (b) Aralarındaki açı geniş açı olur.
    (c) Vektörler birbirine diktir.

20. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

    (a) $\vec{b} = \vec{c}$
    (b) $\vec{b}$ ile $\vec{c}$ aynı yöndedir.
    (c) $\vec{b}$ ile $\vec{c}$ birbirine diktir.
    (d) $\vec{b}$ ile $\vec{c}$ nin $\vec{a}$ yönündeki izdüşümleri eşittir.

Problemler

1.1 Boyutlar ve Birimler

1.1 Bir otomobilin yakıt tüketimi 60.0 mil/galon olarak veriliyor. Bunu km/litre birimine dönüştürün. (1 mil = 1.609 km ve 1 galon = 3.788 litre.) [Cevap: 25.5 km/L]

1.2 Astronomide kullanılan bir uzunluk birimi olan *ışık-yılı*, ışığın $c = 2.998\times10^8$ m/s hızıyla 1 yılda aldığı yoldur. Diğer bir uzunluk birimi *Astronomik Birim* (AB) ortalama Dünya-Güneş uzaklığı olup 1 AB = 1.50×10^8 km dir. (a) 1 ışık-yılı kaç metre eder? (b) 1 ışık-yılı kaç AB eder?
[C: (a) 9.46×10^{15} m, (b) 6.31×10^4 AB]

1.3 1.0 litre boya ile 6.0 m^2 duvar boyanabilmektedir. Boya kalınlığı ne kadar olur? [C: 0.17 mm]

1.4 Şu verileri temel birimlerin askat veya üskatları olarak ifade edin: 3×10^{-9} m, 8×10^{13} bayt, 5×10^{-6} saniye.
[C: 3 nm, 80 terabayt, 5 μm.]

1.2 Hata Payı – Anlamlı Hane Sayısı

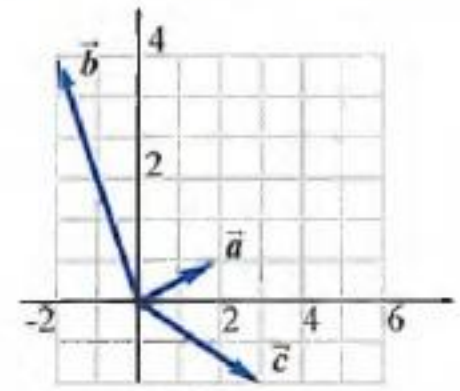
1.5 Bir kürenin yarıçapı 6.5 ± 0.2 cm olarak ölçülüyor. Bu kürenin yüzölçümünü ve hacmini artı-eksi hata payı ile hesaplayın. (Kürenin yüzölçümü $A = 4\pi r^2$, hacmi ise $V = (4/3)\pi r^3$ tür.)
[C: $A = (531 \pm 30)\,cm^2$, $V = (1150 \pm 100)\,cm^3$.]

1.6 Bir saat markası saatlerinin 1 yılda 8 saniyelik hata yapabildiğini iddia ediyor. (a) Bu saatin bağıl hatası ne kadardır? (b) 90 dakikalık bir maçın sonunda ne kadar hata yapar?
[C: (a) 3×10^{-7}, (b) 0.001 s.]

1.7 Bir levhanın boyu milimetrik cetvelle ölçülüp 18 mm bulunuyor. Daha sonra eni mikrometre ile daha hassas ölçülüp 3.5 mm bulunuyor. (a) En ve boyun bağıl hatalarını bulun. (b) Levhanın yüzölçümünü art-eksi hata payı ile bildirin. [C: (a) 0.05, 0.03. (b) $(63 \pm 5)\,mm^2$.]

1.8 FİFA kurallarına göre bir futbol sahasının eni 64 – 75 m ve boyu 100 – 110 m arasmda olmalıdır. (a) En ve boyun bağıl hataları ne kadar olur? (b) Bu sahayı çimle kaplamak istersek, sahanın yüzölçümünü artı-eksi hata payı ile hesaplayın. [C: %08, %05. (b) $7280 \pm 950\,m^2$.]

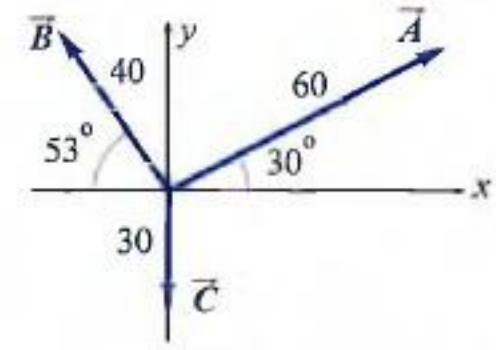
1.3 Vektörler



Problem 1.9

1.9 Şekilde milimetrik kağıtta gösterilen vektörler için, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ ve $\vec{a}+\vec{c}$ toplamlarını üçgen kuralına göre, çizerek bulun.

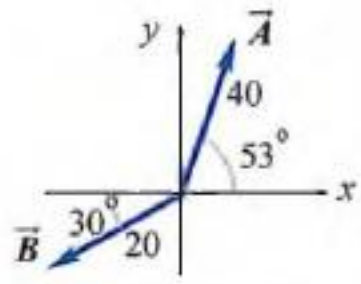
1.10 Üç vektörün boyları ve $+x$ ekseniyle yaptıkları açılar şöyle verilmiştir: (a) 33 m/s, 60°, (b) 128 m/s, 150°, (c) 22 m/s, −145°. Bu vektörlerin bileşenlerini hesaplayın.
[C: (a) 27, 29, (b) −111, 64, (c) −19, −13.]



Problem 1.11

1.11 Şekilde boyları ve yönleri verilen $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin bileşenlerini hesaplayın.
[C: $A_x = 52, A_y = 30$, $B_x = -24, B_y = 32$, $C_x = 0, C_y = -30$]

1.12 Bileşenleri ile verilen şu üç vektörün boylarını ve yönlerini (x ekseniyle yaptıkları açıyı) hesaplayın: $a_x = 5$, $a_y = 12$, $b_x = -4$, $b_y = -3$, $c_x = -3$, $c_y = 1$.
[C: $a = 13$, 67°, $b = 5$, −143°, $c = \sqrt{10}$, 162°.]



Problem 1.13

1.13 (a) Şekilde gösterilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini ($\hat{i}$, $\hat{j}$) birim vektörleri cinsinden yazın. (b) $\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$ vektörünü bulun. (c) $\vec{C}$ vektörünün şiddeti ve yönünü hesaplayın.

[C: (a) $\vec{A} = 24\hat{\imath}+32\hat{\jmath}$, $\vec{B} = -17\hat{\imath}-10\hat{\jmath}$. (b) $\vec{C} = 99\hat{\imath}+94\hat{\jmath}$. (c) $C = 137$, $\theta = 44°$.]

1.14 $\vec{F} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ ve $\vec{G} = 4\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ vektörleri veriliyor. (a) Vektörlerin boylarını hesaplayın. (b) $\vec{F}-\vec{G}$ vektörünü hesaplayın.

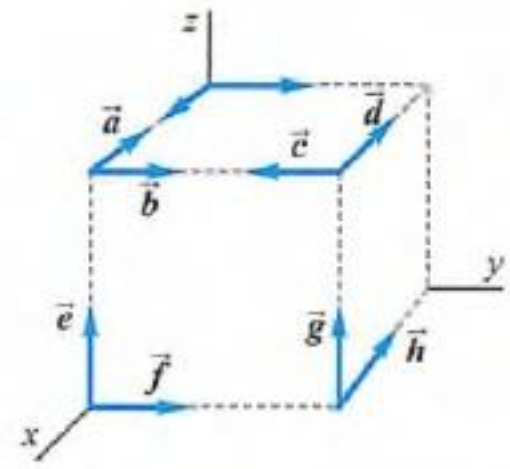
[C: (a) 7 ve 9 (b) $\vec{F}-\vec{G} = -6\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 10\hat{k}$.]

1.15 (a) $\vec{A} = 2\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$ ile $\vec{B} = 6\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$ vektörlerinin şiddetlerini hesaplayın. (b) Skaler çarpımlarını hesaplayın. (c) İki vektör arasındaki açıyı bulun.

[C: (a) 3 ve 7. (b) 5. (c) 76°.]

1.16 $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ vektörleri veriliyor. $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$ skaler çarpımını hesaplayın. [C: 10.]

1.17 $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$ vektörüne dik olan öyle bir $\vec{b}$ vektörü bulun ki b_x bileşeni 4 birim olsun. [C: $\vec{b} = 4\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}$.]



Problem 1.18

1.18 Şekilde gösterilen vektörler için $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}\times\vec{d}$, $\vec{e}\times\vec{f}$, $\vec{g}\times\vec{h}$ çarpımlarının sadece yönlerini şekil üzerinde gösterin.

1.19 $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin boyları $A = 1.2$ ve $B = 5$ olarak biliniyor. Bu iki vektörün vektörel çarpımı $\vec{A}\times\vec{B} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ oluyor. Bu iki vektör arasındaki açıyı bulun. [C: 53°.]

1.20 (a) $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ ile $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ vektörlerinin şiddetlerini hesaplayın. (b) $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ vektörel çarpımının bileşenlerini bulun. (c) $\vec{C}$ nin şiddetini hesaplayın. (d) İki vektör arasındaki açıyı bulun.

[C: (a) 3 ve 9, (b) $C_x = 18$, $C_y = -18$, $C_z = 0$, (c) $C = 18\sqrt{2}$, (d) 71°.]

2 DOĞRUSAL HAREKET



Japon toplu taşımacılığının şaheseri *Şinkansen* (mermi tren) Tokyo'dan Osaka'ya giderken Fuji Yama dağı önünden geçiyor.
Şinkansen'in ortalama hızı 320 km/saat olabilmektedir. Bu trenin daha sonraki bir zamanda nerede olacağını nasıl kestirebiliyoruz?

Fiziğin en temel uğraş alanı harekettir. **Mekanik** adı verilen fizik dalı küçücük bir taş parçasından otomobillere, top mermilerinden gezegenlere ve dev yıldızlara kadar, hareket eden tüm cisimler hakkında öngörülerde bulunur.

Harekete yol açan sebeplere bakılmaksızın, sadece cisimlerin konumları ile zaman arasındaki ilişkileri inceleyen Mekanik dalma **Kinematik** denir. Bu bölümde bir-boyutlu kinematiği inceleyeceğiz. Burada vektörel kavramlara gerek olmayacaktır, ama geliştireceğimiz kavramlar, daha sonra iki ve üç- boyutlu hareketlerde vektörel bağıntılar olarak yine geçerli olacaklardır.

2.1 KONUM, YERDEĞİŞTİRME, HIZ ve İVME

Konum ve zaman fiziğin en temel iki kavramıdır. **Zaman**, tekdüze ve herkes için aynı tempoda akan bir niceliktir. Bu özelliklerinden dolayı, üzerinde

oynama mümkün olmadığı için, **kinematikte bağımsız değişken zamandır.** Denklemlerde t sembolüyle gösterilir.

Konum ve Yerdeğiştirme

Bir cismin **konumu**, seçilen bir koordinat sistemindeki yeridir. Üç boyutlu uzayda konum (x, y, z) kartezyen koordinatları ile belirtilir. En genel bir hareket sırasında bu koordinatlar zamanın bir fonksiyonu olarak değişirler:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

Bir-boyutlu uzayda ise, sadece bir koordinat ekseni gerekir. Bu amaçla, sonsuz bir doğru alınır, bir ucu okla işaretlenerek pozitif yön seçilmiş olur. Daha sonra, ölçümlerin nereden itibaren yapılacağını belirlemek üzere bir mihenk noktası, yani **orijin** (O) seçilir. Bu, herkesin bildiği bir ağaç veya direk olabilir. Orijin, eksen üzerinde pozitif konumlu bölgeyi negatif konumlu bölgeden ayırır.

O halde, doğrusal harekette P noktasındaki bir cismin konumu, onun t anındaki x koordinatıdır:

$$x = x(t) \qquad \text{(Konum)} \qquad (2.1)$$



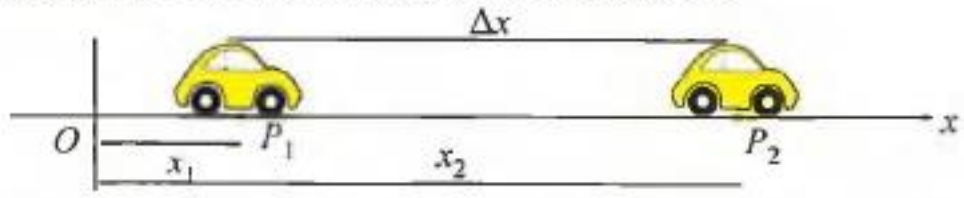
Şekil 2.1: 1-boyutlu koordinat sisteminde cismin konumu.

Hareketi belirleyen özellik konumdaki değişmedir. Bu amaçla yerdeğiştirme tanımlanır.

Yerdeğiştirme: Bir cismin t_1 anındaki konumu x_1 ve daha sonraki bir t_2 anındaki konumu x_2 ise,

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{(Yerdeğiştirme)} \qquad (2.2)$$

farkına **yerdeğiştirme** adı verilir. Birimi metre (m) dir.



Şekil 2.2: Yerdeğiştirme.

(Fizikte, bir sembolün önüne ' Δ ' işareti konulduğunda, o nicelikteki değişme kastedilir: $\Delta a = a_{\text{son}} - a_{\text{ilk}}$.)

Yerdeğiştirmenin işareti hareketin yönünü belirler. $\Delta x > 0$ ise, $x_2 > x_1$ demektir, yani cisim zaman arttıkça daha büyük x konumuna doğru yerdeğiştirmektedir. Tersine, $\Delta x < 0$ ise, $x_2 < x_1$ veya, cisim negatif yönde yerdeğiştiriyor demektir.

Ortalama ve Ani Hız

Herkes 100 metre koşar ama, bazıları daha kısa sürede koşar. Yerdeğiştirmenin hangi zaman aralığında ne kadar olduğunu bilmek önemlidir. Bu amaçla hız tanımlanır.

Tanım: Bir cismin t_1 anındaki konumu x_1 ve daha sonraki bir t_2 anındaki konumu x_2 ise,

$$v_{\text{ort}} = \frac{\text{yerdeğiştirme}}{\text{geçen zaman}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(ortalama hız)} \qquad (2.3)$$

oranına **ortalama hız** denir. Birimi metre/saniye (m/s) dir.

Hareketin yönü daima hızın işaretiyle belirlenir. Δt her zaman pozitif olduğundan Δx yerdeğiştirmesinin işaretine bakılır. Buna göre, yerdeğiştirme $\Delta x > 0$ ise, hız da pozitif olur ve cisim $+x$ yönünde ilerler. Tersine, $\Delta x < 0$ ise hız negatif olur ve cisim $-x$ yönünde gider.

Ortalama hız fizik hesapları için kullanışlı değildir. Çünkü, iki noktada ölçüm yapmak gerekir ve hareketli x_2 noktasına varmadan hızını bilmek mümkün değildir. Oysa, belli bir andaki hızı bilmek isteriz. Bu amaçla ani hız kavramı tanımlanır.

Matematikteki türev kavramını hatırlayalım. Ortalama hızı ölçmek üzere, bir yol boyunca x_1 ve x_2 konumlarına birer çubuk diktiğimizi düşünelim. Hareketli cismin bu çubukların hizasından geçtiği t_1, t_2 zamanlarını ölçelim. Bu ölçme bize $[x_1, x_2]$ aralığındaki ortalama hızı verecektir. Şimdi, x_2 çubuğunu biraz daha x_1 noktasına yaklaştıralım, yani Δx daha küçük olsun. Bu durumda, Δt değeri de daha küçük olacaktır. Fakat, $\Delta x/\Delta t$ oranı küçük olmayabilir.

Böylece, $\Delta x \to 0$ olacak şekilde, giderek x_2 değerini x_1 değerine yaklaştıralım. Bu durumda zaman aralığı da sıfıra gidecektir. Evet, $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ olmaktadır ama, şaşılacak şekilde, $\Delta x/\Delta t$ oranı sonlu bir değerde kalır. Bu "sıfıra eşit olmadan, ayırdedilemeyecek kadar sıfıra yaklaşma" işlemi matematikte **limit** olarak bilinir. $\Delta x/\Delta t$ oranına ise "x'in t'ye göre **türevi**" denir. Birinci türev dx/dt veya x' ile gösterilir.

Tanım: Ortalama hızın limitine **ani hız** (veya, sadece **hız**) denir:

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(hız)} \qquad (2.4)$$

Böylece, her t anında hızı bilmiş oluruz. Yine, hareketin yönü v hızının işaretine bağlıdır.

Kısa türev bilgisi: Matematik dersinde türev kavramı ve türev alma teknikleri geniş olarak incelenir. Burada, en çok karşılaşılan türden fonksiyonların türevlerini kısaca, ispatsız olarak hatırlatalım. Bazı $y(x)$ fonksiyonlarının bağımsız x değişkenine göre türevleri şöyledir:

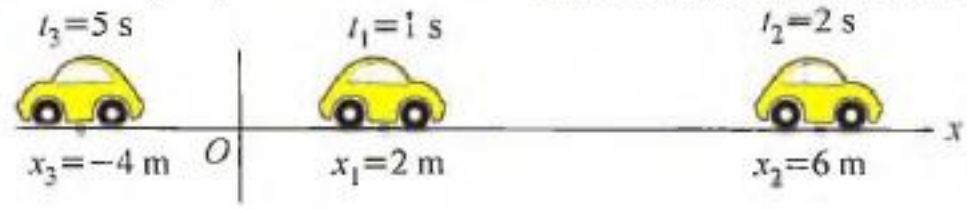
Bazı fonksiyonların türevleri

fonksiyon (y)	$y' = \frac{dy}{dx}$ türevi	fonksiyon (y)	$y' = \frac{dy}{dx}$ türevi
x	1	$\sin x$	$\cos x$
x^3	$3x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
x^{-5}	$-5x^{-6}$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	e^x	e^x
x^n	$n x^{n-1}$	$\ln x$	$1/x$

Kinematikte bu formülleri kullanırken, bağımsız değişken t alınmalıdır.

Örnek 2.1

Hareketli bir cismin değişik t zamanlarındaki konumları şekilde x-ekseni üzerinde gösterilmiştir: **(a)** $\Delta x = x_2 - x_1$ *ve* $\Delta x = x_3 - x_2$ *yerdeğiştirmelerini tayin edin,* **(b)** $\Delta t = t_2 - t_1$ *ve* $\Delta t = t_3 - t_2$ *zaman aralıklarındaki ortalama hızları bulun.*



Çözüm

(a) Cismin değişik zamanlardaki konumları şekilden okunursa,

$[t_1, t_2]$ arası: $\Delta x = x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4\,\text{m}$

Cisim pozitif yönde 4 m yerdeğiştirmiştir.

$[t_2, t_3]$ arası: $\Delta x = x_3 - x_2 = -4 - 6 = -10\,\text{m}$

Cisim negatif yönde 10 m yerdeğiştirmiştir.

(b) Ortalama hız bu yerdeğiştirmelerin geçen zamana oranıdır:

$$[t_1, t_2] \text{ arası: } v_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4}{2-1} = 4\,\text{m/s}$$

$$[t_2, t_3] \text{ arası: } v_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10}{5-2} = -3.3\,\text{m/s}$$

Örnek 2.2

Bir cismin konumu zaman içinde,

$$x = t^3 - 5t^2 + 8 \quad \text{(metre)}$$

fonksiyonu olarak verilmiştir.

(a) *Cismin $t = 1$ s ve $t = 5$ s anlarındaki konumlarını bulun,*

(b) *Cismin bu zaman aralığındaki ortalama hızını hesaplayın,*

(c) *Cismin $t = 1$ s ve $t = 5$ s anlarındaki hızlarını bulun,*

(d) *Cismin hızının sıfır olduğu konumları bulun.*

Çözüm

(a) Verilen fonksiyonun $t = 1$ s ve $t = 5$ s anlarında aldığı x değerleri konumları verir:

$t = 1$ s için: $x(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 + 8 = 4\,\text{m}$

$t = 5$ s için: $x(5) = 5^3 - 5 \times 5^2 + 8 = 8\,\text{m}$

(b) $v_{\text{ort}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{8-4}{5-1} = 1\,\text{m/s}$

(c) Hızın genel ifadesi dx/dt türevidir:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t$$

Bu ifadenin istenilen t anlarında aldığı değerler ani hız olur:

$t = 1$ anındaki hız: $v(1) = 3 \times 1^2 - 10 \times 1 = -7\,\text{m/s}$

$t = 5$ anındaki hız: $v(5) = 3 \times 5^2 - 10 \times 5 = 25\,\text{m/s}$

(d) Hızın sıfır olduğu yerlerde $v(t) = 0$ olur:

$$v = 3t^2 - 10t = 0$$

Bu ifadenin kökleri olan $t = 0$ ve $t = 10/3$ anlarında hız sıfır olur. Bu t değerlerine karşılık gelen x konumları hesaplanır:

$x(0) = 8\,\text{m}$ ve $x(10/3) = -11\,\text{m}$

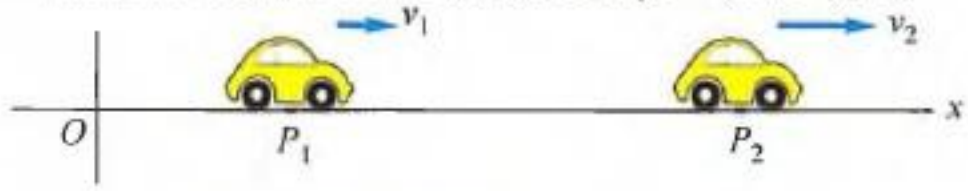
Ortalama ve Ani İvme

Hız bize cismin hareketi hakkında çok önemli bilgi verir. Fakat bazen, hızın zamanla değişme oranını da bilmek isteriz. İki hareketli için "Hangisi daha çabuk hızlanıyor?" diye sorduğumuz olmuştur. İşte, hızın değişme oranına ivme diyoruz.

Tanım: Bir cismin hızı t_1 anında v_1 iken, daha sonraki bir t_2 anında v_2 oluyorsa,

$$a_{\text{ort}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(ortalama ivme)} \qquad (2.5)$$

oranına **ortalama ivme** denir. Birimi metre/saniye^2 (m/s^2) dir.



Şekil 2.3: Ortalama ivme.

İvmenin işaretini anlamak önemlidir. Bazen "cisim hızlanıyorsa ivme pozitif, yavaşlıyorsa negatiftir," diye kesin yargılar duyarız. Bu, yanlıştır. Yukardaki ivme ifadesi, bunun seçilen koordinat sistemine bağlı olduğunu gösteriyor. Örneğin, cisim pozitif yönde ilerliyorsa, ($v_1, v_2 > 0$) ve hız artıyorsa ($v_2 > v_1$), elbette $\Delta v > 0$ ve dolayısıyla a_{ort} pozitif olacaktır. Ama, bir de şu durumu düşünün,

cisim negatif yönde ilerliyor olsun (v_1, v_2 negatif). Eğer hızı artıyorsa, negatif sayılar için bu, $v_2 < v_1$ demektir (mesela, $-5 < -3$). Bu durumda $\Delta v = v_2 - v_1 < 0$ ve dolayısıyla a_{ort} negatif olur!

İvme işaretinin doğru yorumu şudur: *Pozitif yönde hızlanan veya negatif yönde yavaşlayan cisimlerin ivmesi pozitiftir.* Buna karşılık, pozitif yönde yavaşlayan veya negatif yönde hızlanan cisimlerin ivmesi negatif olur.

Yine, ortalama ivme kullanışsız bir nicelik olur, çünkü ancak $[t_1, t_2]$ zaman aralığı sonunda değerini bulur. Bunun yerine, her t anındaki ivmeyi tanımlarız.

Tanım: Ortalama ivmenin limitine **ani ivme** (veya, sadece **ivme**) denir:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{(ivme)} \qquad (2.6)$$

Yani, ivme hızın zamana göre türevidir. Ayrıca, hız da konumun türevi olduğu için, ivmeye konumun ikinci türevi gözüyle bakabiliriz. Matematikte ikinci türev d^2x/dt^2 ile veya x'' ile gösterilir.

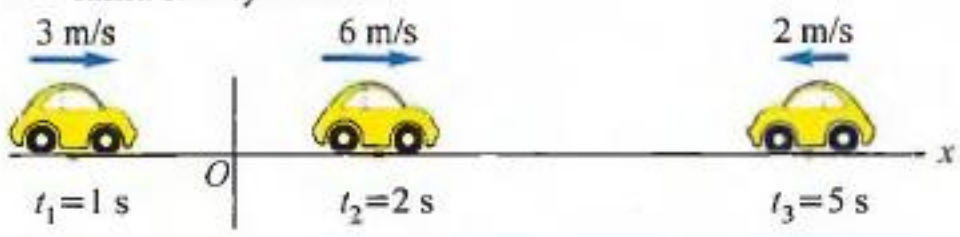
Böylece, her t anında ivmeyi bilmiş oluruz. İvme günlük hayatta pek kullanılmaz. Ama, bazı yarış otomobillerinin performansından sözederken, "100 km/saat hıza 6 saniyede ulaşıyor," diye sözedilir. Bu aslında ivmenin başka türlü bir ifadesidir.

Örnek 2.3

Hareketli bir cismin değişik t zamanlarındaki hızları şekilde x-ekseni üzerinde gösterilmiştir.

(a) *$\Delta v = v_2 - v_1$ ve $\Delta v = v_3 - v_2$ hız farklarını tayin edin,*

(b) *$\Delta t = t_2 - t_1$ ve $\Delta t = t_3 - t_2$ zaman aralıklarındaki ortalama ivmeyi bulun.*



Çözüm

(a) Cismin değişik zamanlardaki hızları şekilden okunursa,

$[t_1, t_2]$ arası: $\Delta v = v_2 - v_1 = 6 - 3 = 3\,\text{m/s}$

$[t_2, t_3]$ arası: $\Delta v = v_3 - v_2 = -2 - 6 = -8\,\text{m}$

(b) Ortalama ivme bu hız farklarının geçen zamana oranıdır:

$[t_1, t_2]$ arası: $a_{ort} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{3}{2-1} = 3\,\text{m/s}$

$[t_2, t_3]$ arası: $a_{ort} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-8}{5-2} = -2.7\,\text{m/s}$

Örnek 2.4

Bir cismin konumu zaman içinde,

$$x = t^3 - 5t^2 + 4 \quad \text{(metre)}$$

fonksiyonu olarak verilmiştir.

(a) *Hız ve ivme fonksiyonlarını türev yoluyla tayin edin,*

(b) *Cismin $t = 1$ s ve $t = 5$ s anlarındaki hızlarını bulun,*

(c) *Cismin bu zaman aralığındaki ortalama ivmesini hesaplayın,*

(d) *Cismin $t = 1$ s ve $t = 5$ s anlarındaki ivmelerini bulun,*

(e) *İvmenin sıfır olduğu anı bulun.*

Çözüm

(a) x in 1. türevi v hızı, 2. türevi a ivmesi olur:

$$v = x' = 3t^2 - 10t$$

$$a = v' = 6t - 10$$

(b) $t = 1$ için $v = 3 \times 1^2 - 10 \times 1 = -7\,\text{m/s}$.

$t = 5$ için $v = 3 \times 5^2 - 10 \times 5 = 25\,\text{m/s}$.

(c) Bu hızlar ortalama ivme tanımında kullanılır:

$$a_{ort} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25 - (-7)}{5 - 1} = 8\,\text{m/s}^2$$

(d) $t = 1$ ve 5 değerlerini ivme ifadesinde kullanırız:

$a(1) = 6 \times 1 - 10 = -4\,\text{m/s}^2$

$a(5) = 6 \times 5 - 10 = 20\,\text{m/s}^2$

(e) İvme ifadesini sıfır yapan zaman hesaplanır:

$0 = 6t - 10 \;\rightarrow\; t = 1.7\,\text{s}$.

2.2 SABİT İVMELİ HAREKET

Bir doğru üzerinde giden cismin hızı bazen artıyor bazen de azalıyorsa, ivmeli hareketten sözederiz. En genel ivmeli hareketin incelenmesi zordur, ileri matematik gerektirir. Fakat, cismin hızındaki değişme oranı sabitse, yani eşit zaman aralıklarında hız değişimi hep aynı ise, **sabit ivmeli hareket** olur. En basit ivmeli hareket şekli budur.

Ortalama ivme ve ortalama hız için elde ettiğimiz formülleri hatırlayalım:

$$a_{\text{ort}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \qquad v_{\text{ort}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Burada yine notasyon değiştirelim: Cisim başlangıçta $t_1 = 0$ anında x_0 konumlu yerden v_0 ilk hızıyla harekete başlıyor olsun ve $t_2 = t$ son anında x konumlu yerdeki son hızı v olsun. Ayrıca, sabit a ivmesinin ortalaması da a olacağından, bu formüllerde kullanılır ve yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a_{\text{ort}} &= a = \frac{v - v_0}{t - 0}, & v_{\text{ort}} &= \frac{x - x_0}{t - 0} \\ v &= v_0 + a\,t, & x &= x_0 + v_{\text{ort}}\,t \end{aligned}$$

Bu son ifadedeki v_{ort} değişkenini şöyle eleyebiliriz: v_0 değerinden v değerine düzgün değişen hızın ortalaması,

$$v_{\text{ort}} = \frac{v + v_0}{2}$$

olacaktır. Bu ifadeyi de kullandıktan sonra, konum formülü şöyle yazılır:

$$x = x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Sabit ivmeli harekette x konumunun zamanın karesi (t^2) ile değiştiğine dikkat edelim.

Hız bağıntısındaki zaman $t = v - v_0/a$ olarak çekip alınır ve konum ifadesinde kullanılırsa, **zamansız hız formülü** bulunur:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0)$$

Bu formüller, başlangıç durumu, yani x_0 ilk konumu ve v_0 ilk hızı verilen bir cismin a ivmesiyle hareketinin her t anındaki konumu ve hızını hesaplamamızı sağlarlar.

Sabit ivmeli hareket formüllerini toplu yazalım:

$$\boxed{\begin{aligned} &v = v_0 + a\,t \\ &x = x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad \text{(sabit ivmeli hareket)} \\ &v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0) \end{aligned}} \tag{2.7}$$

Düzgün Doğrusal Hareket

İvmeli hareketin özel bir hali, bir doğru boyunca sabit hızla giden cismin hareketidir. Bunun için ayrı formüller çıkarmaya gerek yoktur. Hız sabit ise ivme

sıfır olur. Yukardaki formüllerde $a = 0$ alırsak, düzgün doğrusal hareket formülü bulunmuş olur:

$$x = x_0 + v_0 t \qquad \text{(düzgün doğrusal hareket)} \qquad (2.8)$$

Eğer, cismin son konumunu değil de aldığı yolu bilmek istersek, bu formülü $s = x - x_0$ alman s yol cinsinden şöyle yazabiliriz:

$$s = x - x_0 = v t \qquad \text{(alınan yol)} \qquad (2.9)$$

Örnek 2.5

Durmakta olan bir araba sabit $2\,\text{m/s}^2$ *ivme ile hızlanıyor.*

(a) 3 s *sonra hızı ve aldığı yol ne kadar olur?*

(b) 10 m/s *hıza kaç saniyede ulaşır?*

(c) 64 m *uzaklığa kaç saniyede ulaşır?*

Çözüm

Cismin harekete başladığı yeri orijin seçersek $x_0 = 0$ olur. Durduğu yerden harekete başladığı için $v_0 = 0$ dır. İvme de $a = 2\,\text{m/s}^2$ verildiğine göre, (2.7) formülleri kullanılırsa,

$$v = v_0 + at = 0 + 2t = 2t$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}2t^2 = t^2$$

Bu denklemlerle her şıkkı çözebiliriz:

(a) $t = 3\,\text{s}$ anındaki hız ve konum, bulduğumuz v ve x ifadelerinde $t = 3$ alınarak elde edilir:

$$v = 2 \times 3 = 6\,\text{m/s} \quad \text{ve} \quad x = (3)^2 = 9\,\text{m}.$$

(b) Hız ifademizde $v = 10\,\text{m/s}$ alınarak t zamanı bulunur:

$$10 = 2t \longrightarrow t = 5\,\text{s}.$$

(c) Konum ifadesinde $x = 64\,\text{m}$ veren t değeri hesaplanır:

$$64 = t^2 \longrightarrow t = 8\,\text{s}.$$

Örnek 2.6

72 km/saat *hızla gitmekte olan bir otomobil frene basılarak yavaşlıyor ve* 5 s *içinde hızı* 36 km/s *ye düşürülüyor.*

(a) *Arabanın sabit ivmesi ne kadardır?*

(b) *Bu süre içinde ne kadar yol alır?*

(c) *Başlangıçtan itibaren, arabanın tamamen durması için geçen süre ne kadardır?*

Çözüm

Önce km/saat olarak verilen ilk ve son hızları m/s birimine çevirmek gerekir:

$$v_0 = 72\,\text{km/saat} = 7200/3600\,\text{m/s} = 20\,\text{m/s}$$
$$v = 36\,\text{km/saat} = 10\,\text{m/s}$$

(a) Bu iki hız arasında geçen $t = 5\,\text{s}$ zamanını kullanıp ivmeyi buluruz:

$$v = v_0 + at \;\rightarrow\; 10 = 20 + a \times 5 \;\rightarrow\; a = -2\,\text{m/s}^2$$

Araba pozitif yönde yavaşladığı için ivmesi negatif çıkar.

(b) Arabanın başlangıç konumunu orijin alırsak $x_0 = 0$ olur. Buna göre,

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = 0 + 20 \times 5 + \tfrac{1}{2}(-2) \times 5^2 = 75\,\text{m}.$$

(c) Arabanın tamamen durması, son hızının $v = 0$ olması demektir. Bu değer kullanılırsa,

$$v = v_0 + at \;\rightarrow\; 0 = 20 - 2t \;\rightarrow\; t = 10\,\text{s}$$

Örnek 2.7

4 m/s *hızla koşmakta olan bir yarışçı aniden hızlanmaya başlıyor ve* 11 m *yol sonunda* 7 m/s *hıza ulaşıyor.*

(a) *Yarışçının sabit ivmesi ne kadardır?*

(b) *Yarışçının hızlanması ne kadar sürmüştür?*

Çözüm

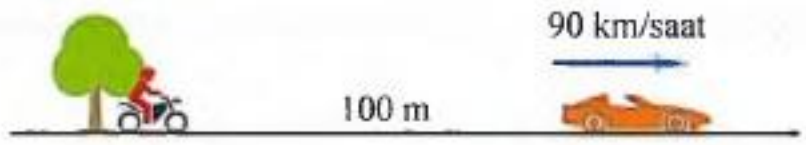
(a) Yarışçının ivmelenmeye başladığı noktayı orijin alırsak $x_0 = 0$ olur. İlk ve son hızlar verildiği için, zamansız hız formülünü kullanmak uygun olur. $x = 11\,\text{m}$ konumu ve hızlar yerine konursa,

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \;\rightarrow\; 7^2 - 4^2 = 2a \times 11 \;\rightarrow\; a = 1.5\,\text{m/s}^2$$

(b) t zamanı için hem v hem de x formülü kullanılabilir. Hız formülü daha çabuk sonuç verir:

$$v = v_0 + at \;\rightarrow\; 7 = 4 + 1.5t \;\rightarrow\; t = 2\,\text{s}$$

Örnek 2.8



Sabit 90 km/saat *hızla gitmekte olan bir arabanın trafik kurallarını çiğnediğini gören motosikletli trafik polisi, araba* 100 m *uzaklaşmışken, beklemekte olduğu ağaç altından yola çıkıyor ve sabit* $3\,\text{m/s}^2$ *ivmeyle hızlanarak peşine düşüyor.*

(a) *Bir koordinat sistemi ve zaman başlangıcı seçerek, araba ve motosikletin konum ve hızlarını veren denklemleri yazın.*

(b) *Motosiklet arabayı kaç saniye sonra yakalar?*

(c) *Yakaladığı anda motosiklet ne kadar yol almıştır?*
(d) *Yakaladığı anda motosikletin hızı ne kadardır?*

Çözüm

İki hareketlinin olduğu problemlerde tek bir koordinat sistemi seçip, her ikisinin denklemlerini de aynı sistemde yazmak gerekir. Bu sistematik yaklaşım uzun vadede çok daha verimli olacaktır.

Önce, arabanın hızını m/s birimine dönüştürelim:

$$90\,\text{km/saat} = 90\,000/3\,600 = 25\,\text{m/s}.$$

(a) Motosikletlinin yola çıktığı yeri orijin olarak alalım ve zamanı da motosikletli ile başlatalım. Buna göre, motosikletlinin ilk hız ve konumu sıfırdır: $x_{M0} = v_{M0} = 0$. Daha sonraki hızını v_M ve konumunu x_M ile gösterirsek, ivmeli hareket formülleri şöyle olur:

$$v_M = v_{M0} + at = 0 + 3t \quad \rightarrow \quad v_M = 3t$$
$$x_M = x_{M0} + v_{M0}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + 1.5t^2 \quad \rightarrow \quad x_M = 1.5t^2$$

Araba 25 m/s sabit hızıyla düzgün doğrusal hareket yapmaktadır, yani ivmesi sıfırdır. $t = 0$ anında arabanın ilk konumu 100 m dir. Daha sonraki konumunu x_{A0} ile gösterirsek,

$$v_A = v_{A0} = 25\,\text{m/s} = \text{sabit}$$
$$x_A = 100 + 25t$$

Bu sistematik yaklaşımda, her iki cismin hareket denklemlerini elde ettikten sonra, gerisi çok kolay çözülür.

(b) Motosiklet otomobili yakaladığı anda, her ikisi de aynı konumlu yerde olacaklardır. Bunun matematik ifadesi şudur:

$$x_M = x_A$$

x_M ve x_A için bulduğumuz ifadeleri yerlerine koyalım:

$$1.5t^2 = 100 + 25t$$

Buradan ikinci derece denklemi çıkar:

$$3t^2 - 50t - 200 = 0$$

Bu denklemin kökleri $t = -3.3$ ve $t = 20$ dir. Negatif kök fiziksel olarak geçerli olmadığından, aranan sonuç $t = 20\,s$ olur.

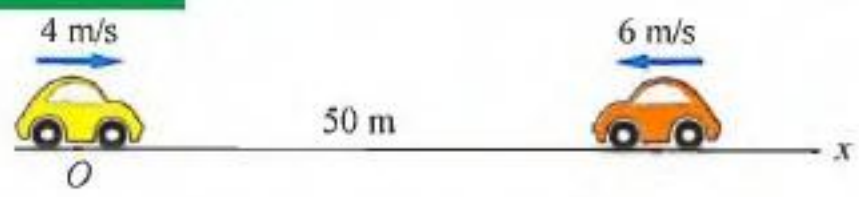
(c) x_M ifadesinde $t = 20\,\text{s}$ değeri kullanılırsa, motosikletin aldığı yol bulunur:

$$x_M = 1.5t^2 = 1.5 \times 20^2 = 600\,\text{m}$$

(d) $v_M = 3t$ ifadesinde $t = 20\,\text{s}$ değeri kullanılır:

$$v_M = 3 \times 20 = 60\,\text{m/s}$$

Örnek 2.9



Aralarındaki uzaklık 50 m olan iki noktadan 2 araba aynı anda birbirlerine doğru yola çıkıyorlar. 1. araba harekete 4 m/s hızla başlıyor ve 1 m/s² ivmeyle hızlanıyor. 2. araba karşı yönden 6 m/s hızıyla çıkıyor ve 3 m/s² ivmesiyle hızlanıyor.

(a) *Bir koordinat sistemi seçerek, 1. ve 2. arabanın konumlarını ve hızlarını veren denklemleri yazın.*
(b) *Arabalar ne zaman karşılaşırlar?*
(c) *Karşılaştıkları yerin orijinden uzaklığı ne olur?*
(d) *Karşılaştıkları anda herbirinin hızı nedir?*

Çözüm

Bu problem, herbir hareketli için ayrı bir koordinat sistemi seçilerek çözülebilir. O takdirde iki orijin ve iki pozitif yön gerekecektir. Oysa, bir önceki problemde izlediğimiz yolda, sadece bir koordinat sistemi seçip iki hareketi de aynı sistemde yazmak daha tutarlıdır.

(a) Orijini 1. arabanın başladığı yerde ve pozitif yönü 2. arabaya doğru seçelim. Buna göre, 1. arabanın hareket denklemlerini verilerden hemen yazabiliriz:

$$v_1 = v_{10} + a_1 t = 4 + 1 \times t$$
$$x_1 = x_{10} + v_{10}t + \tfrac{1}{2}a_1 t^2 = 0 + 4t + \tfrac{1}{2}t^2$$

2. araba 100 m öteden başlar ve hızı eksi yöndedir. Ayrıca, eksi yönde hızlandığı için ivmesi de negatiftir. O halde, 2. arabanın hareket denklemleri şöyle olur:

$$v_2 = v_{20} + a_2 t = -6 - 3t$$
$$x_2 = x_{20} + v_{20}t + \tfrac{1}{2}a_2 t^2 = 100 - 6t + \tfrac{1}{2}(-3)t^2$$

Bu denklemleri yazdıktan sonra problemin çözümü kolaylaşmış olur.

(b) Arabalar karşılaştıkları anda aynı konumda olurlar:

$$x_1 = x_2$$

Bu eşitlik, aynı mesafeyi katettikleri anlamına gelmez. İkisinin de orijinden aynı uzaklıkta olmaları koşuludur. O halde, bulduğumuz x_1, x_2 ifadelerini yerlerine koyarsak,

$$4t + \tfrac{1}{2}t^2 = 100 - 6t - \tfrac{3}{2}t^2$$

Buradan t için 2. derece bir denklem çıkar:

$$t^2 + 5t - 50 = 0$$

Bu denklemin kökleri -10 ve 5 olur. Negatif zaman anlamsız olduğundan, çözüm $t = 5\,\text{s}$ dir.

(c) Karşılaştıkları yerin konumu, x_1 veya x_2 ifadelerinden birinde $t = 5$ alınarak bulunur, çünkü ikisi de aynı konumdadırlar. x_1 kullanılırsa,

$$x_1 = 4 \times 5 + \tfrac{1}{2}(5)^2 = 32.5\,\text{m} = x_2.$$

(d) Yukarda bulduğumuz v_1, v_2 ifadelerinde $t = 5$ değerini kullanırız:

$$v_1 = 4 + 5 = 9\,\text{m/s}$$
$$v_2 = -6 - 3 \times 5 = -21\,\text{m/s}$$

2.3 SERBEST DÜŞME

Sabit ivmeli hareketin çok önemli bir örneğine günlük hayatımızda her an tanık oluyoruz. Yüksekten bırakılan bir taşın hızlanarak yere düşmesi, yukarı

atılan bir topun giderek yavaşlayıp geri düşmesi ... Tüm bu hareketlerin sabit bir **yerçekimi ivmesi** altında geliştiğini ilk keşfeden kişi **Galileo** oldu. 16. yüzyıla kadar herkes, Aristo'nun kitabında yazılı olan "ağır cisimler daha hızlı düşer," hükmüne inanıyordu. Galileo Pisa kulesinden farklı cisimler bırakarak bunun böyle olmadığını, hava sürtünmesi ihmal edilirse tüm cisimlerin aynı sabit ivmeyle düştüğünü gösterdi.



Şekil 2.4: Boşlukta tüm cisimler aynı ivmeyle düşerler.

Günümüzde Galileo'nun deneyi laboratuvarda havası boşaltılmış tüp içinde kolayca tekrarlanabilir. Havası boşaltılmış tüp içinde bir tüy ile bir madeni paranın aynı ivmeyle hızlandıkları görülür.

Dünya üzerinde her yerde cisimleri yerin merkezine doğru hızlandıran sabit bir ivme vardır. Buna **yerçekimi ivmesi** denir ve mutlak değeri g ile gösterilir. Coğrafi konuma göre ufak değişiklikler gösterse de, mutlak değeri,

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

yaklaşık değerindedir. Bu kitaptaki problem çözümlerinde,

$$g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$$

yaklaşık değeri alınacaktır. Buradan kaynaklanan %2 kadar hata payı ihmal edilebilir.



Şekil 2.5: Düşen bir cismin eşit zamanlarda aldığı yollar.

Önemli not: Bu g yerçekimi ivmesini, sabit ivmeli hareketin (2.7) formüllerinde kullanırken, a yerine ne alacağız? $a = +g$ mi, yoksa $a = -g$ mi? Bu nokta, çoğu kitaplarda yanlış işlenir. Öğrenciler arasında da "cisim yukarı atılıyorsa $-g$, aşağı atılıyorsa $+g$" diye yanlış olarak yayılmıştır.

Bu sorunun cevabı y-ekseninin nasıl seçildiğiyle alakalıdır: Eğer, y ekseni yukarı yönde seçilmişse, *cisim hangi yönde atılıyorsa atılsın*, $a = -g$ olur. Çünkü, yerçekimi ivmesi yer merkezine doğru, yani eksene zıt yöndedir. Keza, y-ekseni aşağı yönde seçilmişse, atılma yönüne bakılmaksızın, $a = +g$ olur, çünkü ivme eksenle aynı yöndedir.

Basit problemlerde bu önemli olmayabilir; yukarı atış için y-ekseni doğal olarak yukarı seçildiğinden, $a = -g$ seçilmiş olur. Keza, aşağı atışlarda, ekseni aşağı yönde seçeriz ve $a = +g$ olur. Fakat, cisim iki yönde birden hareket ediyorsa veya, iki ayrı cismin hareketi birlikte inceleniyorsa, seçilmiş tek bir y-ekseniyle çalışmak ve onu hiç değiştirmemek kolaylık sağlar.

O halde, sabit ivmeli hareketin (2.7) formüllerini, serbest düşmeye uygularken, y-ekseni seçimini de belirtmek gerekir: Serbest düşme formüllerini toplu yazalım:

y-ekseni yukarı ise:	y-ekseni aşağı ise:		
$a = -g$	$a = +g$	(serbest düşme)	(2.10)
$v = v_0 - g\,t$	$v = v_0 + g\,t$		
$y = y_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$	$y = y_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$		

Önemli not: Bu hareket denklemleri, koordinat sistemini değiştirmediğimiz sürece, cisim yukarı çıkarken de yere düşerken de geçerlidirler. Örneğin, yukarı yönde atılan bir taşın hareketini, yere düşünceye kadar aynı denklemle bulabiliriz. Aşağıda bunun örnekleri görülecektir.

Bu temel bağıntılar dışında, özel durumlar için formüller ezberlemek yararsızdır. Her problemin koşulları bu temel bağıntılara uygulanarak çözülebilir.

Örnek 2.10

Bir top 15 m/s *hızla yerden yukarı doğru fırlatılıyor.*

(a) *Bir koordinat sistemi seçerek topun hız ve konumunu veren hareket denklemlerini yazın.*

(b) $t = 1$ s *sonraki konumu ve hızı ne kadardır?*

(c) *Maksimum yüksekliğe kaç saniyede çıkar?*

(d) *Maksimum yükseklik ne kadardır?*

(e) *Yerden* 10 m *yükseklikten hangi zamanlarda geçer?*

(f) *Atıldığından itibaren kaç saniye sonra yere düşer?*

Çözüm

(a) $+y$ yönünü yukarı seçersek ivme $-g$ olacaktır. Topun atıldığı yeri orijin alırsak ($y_0 = 0$), $v_0 = 15$ m/s hızla pozitif yönde atılan topun hareket denklemleri şöyle olur:

$$v = v_0 - gt = 15 - 10t$$
$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 15t - 5t^2$$

(b) $t = 1$ s değerindeki hız ve konum doğrudan hesaplanabilir:

$$v = 15 - 10 \times 1 = 5\,\text{m/s}$$
$$y = 15 \times 1 - 5 \times 1^2 = 10\,\text{m}$$

(c) Maksimum yüksekliğin özelliği, orada hızın sıfır olmasıdır: $v = 0$. Bu koşulu kullanıp zamanı buluruz:

$$0 = 15 - 10t \;\rightarrow\; t = 1.5\,\text{s}$$

(d) y denkleminde $t = 1.5$ s zamanını kullanırsak maksimum yüksekliği buluruz:

$$y = 15 \times 1.5 - 5 \times 1.5^2 = 11.3\,\text{m}$$

(e) Topun çıkış zamanı iniş zamanına eşit olacağından, (c) şıkkında bulduğumuz zamanın iki katını alırız. Fakat, bu özelliği bilmiyor olsaydık, yukardaki hareket denkleminden doğrudan bulabilirdik. Top ister yukarı yönelik, ister aşağı yönelik olsun, $y = 15t - 5t^2$ denklemi hareketin her anında geçerlidir. Çünkü, eksenleri değiştirmediğimiz için ivme her iki yönde de $-g$ dir. Özel olarak, top yer hizasındayken $y = 0$ olmalıdır. Bu koşulu kullanırsak,

$$0 = 15t - 5t^2 = t(15 - 5t) \;\rightarrow\; t = 0 \text{ ve } t = 3\,\text{s}.$$

Bulunan iki çözüm de geçerlidir. Bunlardan $t = 0$ olanı başlangıç anı ve $t = 3$ s olanı düşüş anıdır. Yani, her iki zamanda da top $y = 0$ yüksekliğindedir.

Örnek 2.11

Yerden 35 m *yükseklikteki bir binanın çatısından bir taş yukarı yönde* 30 m/s *hızla fırlatılıyor.*

(a) *Bir koordinat sistemi seçerek taşın hız ve konum denklemlerini yazın.*

(b) *Maksimum yüksekliği ve çıkış zamanını hesaplayın.*

(c) *Yere düşünceye kadar kaç saniye geçer?*

(d) *Yere hangi hızla çarpar?*

Çözüm

(a) Yer hizasını orijin ve yukarı yönü pozitif alırsak, $y_0 = 35$ m ve $a = -g$ olur. Buna göre, hareket denklemleri şöyle ifade edilir:

$$v = v_0 + at = 30 - 10t$$
$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = 35 + 30t - 5t^2$$

Bu iki denklemle her soruya cevap verebiliriz.

(b) Maksimum yükseklikte $v = 0$ olur:

$$0 = 30 - 10t \;\rightarrow\; t = 3\,\text{m/s}$$

Bu t değeri y nin hesabında kullanılırsa,

$$y = 35 + 30 \times 3 - 5 \times 3^2 = 80\,\text{m}$$

Bu, orijinden yani yerden itibaren maksimum yüksekliktir. Atıldığı yerden yüksekliği bulmak istersek $y - y_0 = 80 - 35 = 45$ m olur.

(c) Taşın yere düşmesi $y = 0$ konumuna gelmesi demektir:

$$0 = 35 + 30t - 5t^2 = 0 \;\rightarrow\; t = -1 \text{ ve } 7\,\text{s}$$

Negatif çözüm alınmaz, aranan çözüm $t = 7$ s olur. Burada, taşın atıldığı andan itibaren aynı denklemi kullandığımıza dikkat edin. Aynı koordinat sisteminde kaldığımız için, hareketi yukarı-aşağı diye iki kısma ayırmadan, bir defada çözebilmekteyiz.

(d) Taşın yere değme hızı v denkleminde $t = 7$ alınarak bulunur:

$$v = 30 - 10t = 30 - 10 \times 7 = -40\,\text{m/s}.$$

Burada eksi işareti, hızın seçtiğimiz pozitif yöne ters, yani aşağıya yönelik olduğunu bildirir.

Örnek 2.12

Farklı zamanlar tekniği. *Yerden* 45 m *yükseklikteki bir binanın çatısından* 1 *saniye aralıklarla su damlıyor.*

Bir damla yere çarptığı anda, ikinci damlanın yerden yüksekliği ne kadardır?

Çözüm

Bu problemi bildiğimiz yoldan çözmeye kalkarsak, gereksiz yere uzun ve karmaşık olur. Oysa, herbir damlayı kendi kronometresiyle ayrı bir t zamanı cinsinden yazarsak çözüm basitleşir.

Orijini çatıda ve y yönünü aşağı doğru alalım. 1. damla yola çıktığında kronometreyi başlatıp ölçtüğümüz zamanı t_1 ile gösterelim. Buna göre, hareket denklemi şöyle olur:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}gt_1^2$$

2. damla 1 saniye sonra yola çıktığında onun için de ayrı bir kronometrede t_2 zamanı başlatalım. Onun da hareketi $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$ olacaktır.

Damlalar birer saniye aralıklarla yola çıktıkları için, her aşamada 2. kronometre birinciden 1 saniye daha eksik gösterecektir. Yani, iki zaman arasındaki bağıntı şöyle olur:

$$t_2 = t_1 - 1$$

O halde, y_2 koordinatının ifadesi $y_2 = \frac{1}{2}g(t_1 - 1)^2$ olur.

Şimdi, 1. damla yere vardığında $y_1 = 45$ m yol almış

demektir. Bu değeri kullanıp t_1 zamanını buluruz:

$$45 = 5t_1^2 \rightarrow t_1 = 3\,\text{s}$$

Bu t_1 zamanı sonunda 2. damlanın aldığı yol:

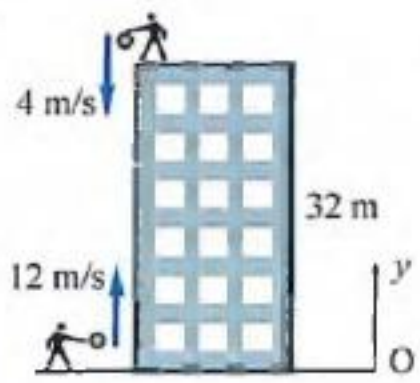
$$y_2 = \tfrac{1}{2}g(t_1 - 1)^2 = 5 \times 2^2 = 20\,\text{m}$$

İki yol arasındaki fark 2. damlanın ne kadar geride olduğunu verir:

$$y_1 - y_2 = 45 - 20 = 25\,\text{m}.$$

2. damla yerden 25 m yukardadır.

Örnek 2.13



Yerden bir top 12 m/s *hızla yukarı doğru atıldığı anda,* 32 m *yükseklikteki bir binanın çatısından ikinci bir top* 4 m/s *hızla aşağı yönde fırlatılıyor.*

(a) *Aynı bir koordinat sistemi içinde kalarak, her iki topun hareket denklemlerini yazın.*

(b) *İki top ne zaman çarpışırlar?*

(c) *Hangi yükseklikte çarpışırlar?*

(d) *Çarpıştıkları anda herbirinin hızı ne kadardır?*

Çözüm

Bu problemde yine iki cismin hareketini aynı bir koordinat sisteminde inceleyeceğiz.

(a) Orijini yerde ve pozitif yönü yukarı doğru seçersek, yerden atılan 1. topun ilk konumu $y_{10} = 0$ ve ilk hızı $v_{10} = 12$ m/s olur. Binanın tepesinden ve aşağı yönde atılan 2. top için bu değerler $y_{20} = 32$ m ve $v_{20} = -4$ m/s olur. Buna göre, her iki topun hareket denklemlerini yan yana yazalım:

1. top	2. top
$v_1 = 12 - 10t$	$v_2 = -4 - 10t$
$y_1 = 0 + 12t - 5t^2$	$y_2 = 32 - 4t - 5t^2$

(b) İki top çarpıştıkları anda, y konumları aynı olur:

$$y_1 = y_2$$
$$12t - 5t^2 = 32 - 4t - 5t^2$$

Bu denklemin çözümü, iki topun $t = 2$ s anında çarpıştıklarını bildirir.

(c) Bu t zamanını y_1 veya y_2 den birinde kullanırsak, çarpışma yüksekliğini buluruz:

$$y_1 = 12 \times 2 - 5 \times 2^2 = 4\,\text{m} = y_2$$

(d) Yine bu t zamanını hız formüllerinde kullanarak hızları buluruz:

$$v_1 = 12 - 10 \times 2 = -8\,\text{m/s}$$
$$v_2 = -4 - 10 \times 2 = -24\,\text{m/s}$$

Çarpışma anında v_1 hızının negatif olduğuna dikkat edin. Yani, 1. top maksimum yüksekliğe çıkıp geri dönmüş ve aşağı yönde giderken çarpışma olmuştur.

Test

1. Bir koordinat sisteminde, ivmesi $a = +2\,\text{m/s}^2$ olan bir cisim için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır:
   (a) Pozitif yönde gidiyorsa hızı artmaktadır.
   (b) Negatif yönde gidiyorsa yavaşlamaktadır.
   (c) Hızı daima sıfırdan farklıdır.
   (d) Hızı, eşit zaman aralıklarında eşit miktarda artar.

2. Bir koordinat sisteminde pozitif yönde gitmekte olan bir cismin ivmesi negatif ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Cismin hızı artar.
   (b) Cismin bir yerde durup geri döner.
   (c) Cismin hızı sabit kalır.

3. İvmeli hareket için hangisi doğrudur?
   (a) Hız sıfır ise ivme de sıfırdır.
   (b) Hız pozitif ise ivme de pozitiftir.
   (c) Sabit ivmeli cisim durabilir.
   (d) Sabit ivmeli bir cisim durgun kalamaz.

4. 20 m yükseklikten bırakılan bir cisim kaç saniyede yere düşer?
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5. Yüksekten bırakılan bir cisim 5 s de kaç metre yol alır?
   (a) 50 (b) 75 (c) 100 (d) 125

6. Yüksekten bırakılan bir cismin hızı 4 s sonra 40 m/s oluyor. Bu zaman aralığında ortalama hızı ne kadardır?
   (a) 0 (b) 10 m/s (c) 20 m/s (d) 40 m/s

7. Bir taş yerden yukarı doğru atılıyor. $+y$ ekseni yukarı yönde seçildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Yukarı çıkarken ivmesi $+g$ dir.
   (b) Maksimum yükseklikte ivmesi sıfır olur.
   (c) Aşağı inerken ivmesi $+g$ dir.
   (d) Aşağı inerken ivmesi $-g$ dir

8. Yüksekten bırakılan bir taş yere 5 saniyede düşüyor. Ortalama ivmesi kaç m/s^2 olur?
   (a) 0 (b) 2 (c) 5 (d) 10

9. Bir taş yukarı doğru atılıyor. Maksimum yükseklikte, hangisi doğrudur?
   (a) Hızı ve ivmesi sıfırdır.
   (b) Hızı sıfır, ivmesi maksimumdur.
   (c) Hızı maksimum, ivmesi sıfırdır.
   (d) Hızı sıfır, ivmesi yerçekimi ivmesidir.

10. v hızıyla giden bir araba frene basıldığında d uzaklığında durabiliyorsa, aynı araba $2v$ hızında giderken aynı şekilde frene basıldığında hangi uzaklıkta durur?
    (a) $d/2$ (b) d (c) $2d$ (d) d^2

11. Pozitif yönde ilerleyen bir cismin hızı 5 s içinde 8 m/s artıyor. İvmesi kaç m/s^2 olur?
    (a) 1.0 (b) 1.2 (c) 1.4 (d) 1.6

12. Bir cismin konumu $x = t^3$ (metre) olarak değişiyor. $t = 1$ s anındaki ivmesi kaç m/s^2 olur?
    (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

13. Ay'ın yerçekimi ivmesi Dünya'nınkinden daha küçüktür. Ay'da yüksekten bırakılan bir taş için, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Dünyadakinden daha çabuk düşer.
    (b) Daha yavaş düşer.
    (c) Aynı zamanda düşer.

14. 10 m/s hızla gitmekte olan bir bisikletli frene basarak 5 s içinde duruyor. Duruncaya kadar aldığı yol kaç metredir?
    (a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

15. Bir cismin $t = 1, 2, 3, 4$ s anlarındaki konumları $x = 2, 7, 9, 15$ m dir. Bu cismin $[2, 4]$ s aralığındaki ortalama hızı kaç m/s olur?
    (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

16. Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?
    (a) Sabit hızla giden bir cismin ivmesi sıfırdır.
    (b) Negatif yönde yavaşlayan bir cismin ivmesi pozitiftir.
    (c) Negatif yönde hızlanan bir cismin ivmesi negatiftir.
    (d) Hepsi.

17. Durduğu yerden sabit ivmeyle hızlanan bir cismin ilk 1, 2, 3 saniyede aldığı yolların oranı nedir?
    (a) 1:2:3 (b) 1:3:5 (c) 1:4:8 (d) 1:4:9

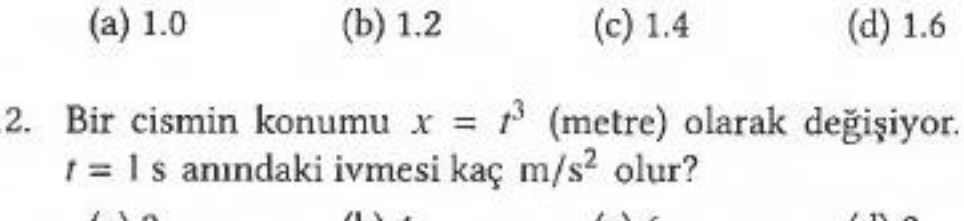
18. Durmakta olan bir cisim sabit ivmeyle hızlanıyor. 3. saniyede ve 4. saniyede aldığı yolların oranı ne olur?
    (a) 3/4 (b) 5/7 (c) 7/9 (d) 9/16

19. Yerden yukarı yönde iki taş v_0 ve $2v_0$ huzlarıyla atılıyorlar. Hızı büyük olanın maksimum yüksekliğinin diğerine oranı ne kadar olur?
    (a) 2/1 (b) 4/1 (c) $\sqrt{2}/1$ (d) $1/\sqrt{3}$

20. İki cisim aynı yerden, aynı anda ve aynı yönde harekete başlıyorlar. A cismi sabit 10 m/s hızla gidiyor. B cismi sabit $4\,m/s^2$ ivmeyle hızlanıyor. İki cisim kaç saniye sonra tekrar aynı hizaya gelirler?
    (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Problemler

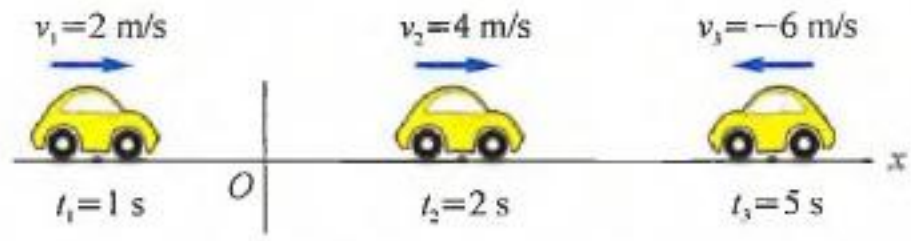
2.1 Konum, Yerdeğiştirme, Hız ve İvme



Problem 2.1

2.1 Bir cismin değişik zamanlardaki konumları üstteki şekilde gösterilmiştir. (a) $[t_1, t_2]$ ve $[t_2, t_3]$ aralığında yerdeğiştirmeleri bulun. (b) Aynı aralıklarda ortalama hızları hesaplayın. [C: (a) $\Delta x = 4$ m ve $\Delta x = -2$ m, (b) $v_{ort} = 4$ m/s ve $v_{ort} = -0.67$ m/s]

2.2 Bir hareketlinin konumu zamanla $x = 5t^2$ (metre) olarak değişiyor. (a) $t = 1$ s ve $t = 3$ s anlarındaki konumları nedir? (b) $t : [1, 3]$ aralığında ortalama hızı ne olur? (c) $t = 1$ s ve $t = 3$ s anlarındaki ani hızı ne olur?
[C: 1 ve 45m, (b) 20 m/s, (c) 10, 30 m/s.]



Problem 2.3

2.3 Bir cismin değişik zamanlardaki hızları üstteki şekilde gösterilmiştir. (a) $[t_1, t_2]$ ve $[t_2, t_3]$ aralıklarında ortalama ivmeleri hesaplayın. [C: $a_{ort} = 2\,m/s^2$ ve $a_{ort} = -3.3\,m/s^2$.]

2.4 Bir cismin hızı $v(t) = 20 - 3t^2$ olarak değişiyor. (a)

t = [1, 2] s aralığında ortalama ivmesini hesaplayın. (b) $t = 1$ ve $t = 2$ s anlarındaki ani ivmeleri bulun.
[C: (a) $a_{ort} = -9\,m/s^2$, (b) $a = -6, -12\,m/s^2$.]

2.5 Bir top 24 m/s hızla bir duvara dik olarak çarpıyor ve aynı hızla geri yansıyor. Topun duvarla teması 0.03 s sürmüştür. (a) Hızdaki değişme ne kadardır? (b) Çarpışmadaki ortalama ivme ne olur? [C: (a) 48 m/s, (b) 1600 m/s^2.]

2.2 Sabit İvmeli Hareket

2.6 Bir uçağın güvenle piste iniş yapabilmesi için yere 100 m/s hızla değmesi ve 5 m/s^2 ivmeyle yavaşlaması gerekiyor. (a) Uçak pistte kaç sanide durur? (b) Pistin uzunluğu en az ne kadar olmalıdır? [C: (a) 24 s, (b) 1440 m.]

2.7 Sabit ivmeli hareket eden bir cisim, aralarında 25 m mesafe bulunan iki noktanın birinden 10 m/s hızla girip, ikinciden 15 m/s hızla çıkıyor. (a) Cismin ivmesi ne kadardır? (b) İki nokta arasını kaç saniyede geçer?
[C: $a = 2.5\,m/s^2$, t = 2 s.]

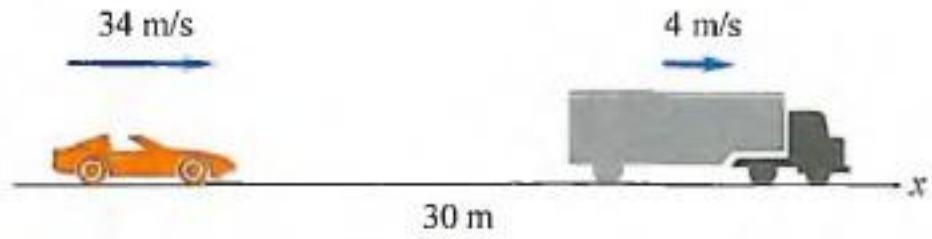
2.8 Sabit ivmeli hareket eden bir cisim, aralarında 10 m mesafe bulunan iki nokta arasını 2 s de geçiyor. İkinci noktadan geçerken hızı 8 m/s dir. Cismin ivmesini ve birinci noktadaki hızını bulun. [C: $a = 3\,m/s^2$, $v_0 = 2$ m/s.]

2.9 Bir tren birinci istasyondan kalkışta 12 s boyunca 2 m/s^2 ivmeyle hızlanıyor. Daha sonra hızını sabit tutup 50 s boyunca yol alıyor. En sonunda 4 m/s^2 ivmeyle yavaşlayıp ikinci istasyonda duruyor. İki istasyon arası kaç metredir? [C: 1416 m.]

2.10 Bir jet uçağı kalkış sırasında 4 m/s^2 ivmeyle hızlanabilmekte ve 80 m/s hıza eriştiğinde havalanabilmektedir. Fakat, pilot havalanmaktan vazgeçmek isterse 5 m/s^2 ivmeyle yavaşlayarak durabilmektedir. Bir pilot kalkış hızına ulaştığı anda uçuştan vazgeçiyor. Güven içinde durabilmesi için, uçak pistinin uzunluğu en az ne kadar olmalıdır?
[C: 1440 m.]

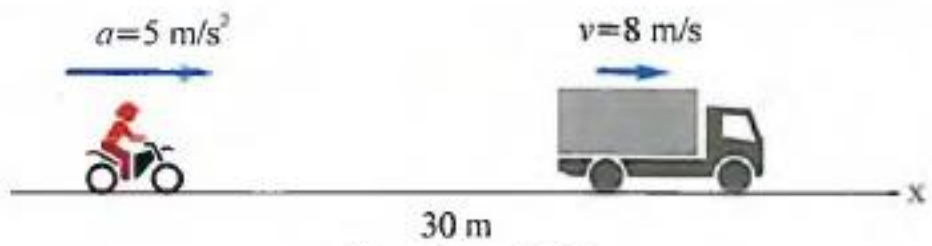
2.11 Bir trenin maksimum ivmesi 8 m/s^2 dir. Bu tren, aralarında 1800 m mesafe bulunan iki istasyon arasını en kısa sürede katetmek istiyor. Bu amaçla, yolun ilk yarısında hızlanıyor, ikinci yarısında yavaşlayıp istasyonda duruyor. Trenin ulaşabileceği en yüksek hızı ve yolu kaç saniyede aldığını hesaplayın. [C: $v = 60$ m/s ve $t = 15$ s.]

2.12 Bir otomobil 20 m uzunluğunda bir TIR kamyonunu sollamak istiyor. Başlangıçta otomobil ve kamyon aynı şeritte ve aynı sabit 15 m/s hızıyla gitmektedirler. Otomobil karşı tarafın boşaldığını görünce sol şeride geçip 5 m/s^2 ivmeyle hızlanmaya başlıyor ve kamyonun ön ucuna vardığında sollamayı başarmış oluyor. (a) Sollama kaç saniye sürer? (b) Bu sollama kaç metrelik bir boş şerit gerektirir? (*Not:* Otomobilin uzunluğu kamyonunkine katılmış olup, ihmal edilecektir.) [C: (a) 8 s, (b) 140 m.]



Problem 2.13

2.13 Bir spor otomobilin sürücüsü sabit 34 m/s hızla giderken, birdenbire 30 m önünde bir kamyonun aynı yönde sabit 4 m/s hızla gitmekte olduğunu görüp frene basıyor. Otomobil 6 m/s^2 ivmeyle yavaşladığına göre, kamyona arkadan çarpar mı? (*Yol gösterme:* Otomobilin yavaşlayıp durması şart değildir. Kamyonla aynı hıza düştüğü anda, kamyondan daha az yol gitmiş olması yeterlidir.)
[C: Çarpar. Otomobilin hızını 4 m/s ye düşürmek için 5 s zamana ve 95 m yola ihtiyacı vardır. Oysa, bu arada kamyon sadece $30 + 4 \times 5 = 50$ m yol almıştır.]



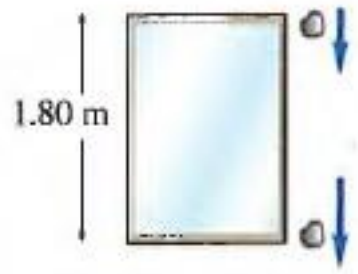
Problem 2.14

2.14 Kırmızı ışıkta beklemekte olan bir motosiklet, yeşil yandığında 5 m/s^2 ivmeyle hızlanıyor. Tam o anda, yan şeritte sabit 8 m/s hızla gelmekte olan bir kamyon, hızını kesmeden, yeşil ışıkla beraber yoluna devam ediyor. (a) Motosiklet kamyona ne kadar zaman sonra yetişir? (b) Yetiştiği anda motosiklet ne kadar yol almıştır?.
[C: (a) $t = 3.2$ s, (b) $x = 25.6$ m.]

2.3 Serbest Düşme

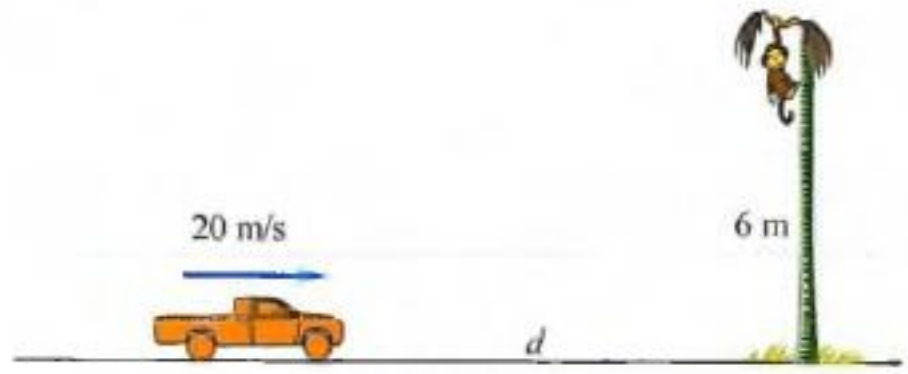
2.15 Bir taş 105 m yükseklikteki bir binanın çatısından aşağı yönde 20 m/s hızla fırlatılıyor. (a) Yere kaç saniyede düşer? (b) Yere hangi hızla çarpar? [C: (a) 3 s, (b) 50 m/s.]

2.16 Bir kuyunun ağzından bırakılan taşın dipteki suya çarpma sesi 4.5 s sonra yukarda işitiliyor. Sesin havada yayılma hızı sabit 340 m/s olduğuna göre, kuyudaki suyun derinliğini hesaplayın. [C: 90 m.]



Problem 2.17

2.17 Bir binanın çatısından bir top bırakılıyor. Aşağı katlardan birinde, pencere önünde oturan bir adam topun kendi penceresinden 0.2 saniyede geçtiğini görüyor. Pencere yüksekliği 1.80 m dir. Taşın bırakıldığı çatı, adamın penceresinin üst kenarından ne kadar yüksektedir? (*Yol gösterme:* Veriler taşın pencerenin üst kenarındaki hızını bulmaya yeterlidir.) [C: 3.2 m.]



Problem 2.18

2.18 Yol kenarındaki bir ağaçta, yerden 6 m yüksekteki bir dalda oturan bir maymun, 20 m/s hızla gelmekte olan bir kamyonetin kasasına atlamak istiyor. Kamyonet hangi d uzaklığındayken, maymun kendini bırakmalıdır ki kasanın içine düşebilsin? [C: 22 m.]

2.19 Bir hokkabaz havaya bir top attıktan sonra, 9 m uzaktaki kapıya 5 m/s hızla gidip geliyor ve topu yere düşmeden yakalıyor. Bunu yapabilmesi için topu hangi hızla yukarı fırlatmalıdır? [C: 18 m/s.]

2.20 Bir hokkabaz elindeki topu, salonun 5 m yükseklikteki tavanına ancak erişecek şekilde havaya fırlatıyot. (a) Topun ilk hızı nedir? (b) Bu top tavan hizasındayken ikinci bir topu yine aynı ilk hızla fırlatıyor. İki top ne zaman ve hangi yükseklikte karşılaşırlar? [C: (a) 10 m/s, (b) 0.5 s ve 3.75 m.]

3

İKİ BOYUTTA HAREKET



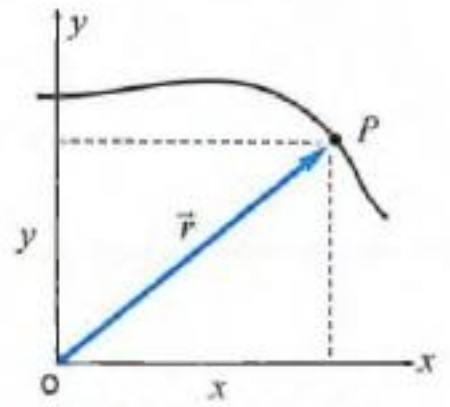
Dünya şampiyonu Kenan Sofuoğlu (54) bir dönemeçte Gimbert Sebastien'i geçmeye çalışıyor.
Eğer yol kaygan ise, veya yeterince eğimli değilse, dönme hareketi neden zorlaşır?

Havada uçan bir kuş, denizde yüzen bir balık veya, bir topçu atışında namludan fırlayan bir top... Tüm bu cisimlerin hareketi nasıl incelenebilir? Önceki bölümde incelediğimiz yöntemi doğrudan uygulayamayız, çünkü bunlar doğrusal hareket etmezler. Üç-boyutlu bir dik koordinat sisteminde bu cisimlerin (x, y, z) koordinatları hep birlikte t zamanına bağlı olarak değişmektedirler:

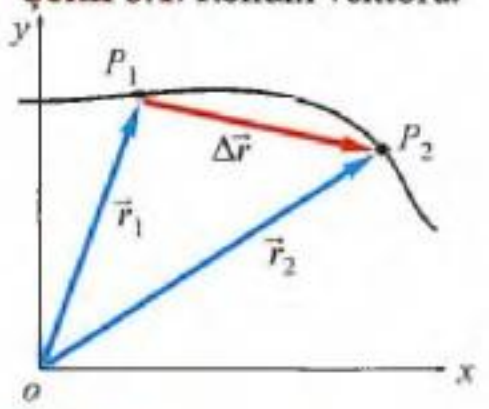
$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)$$

Dikkat edilirse, cisim uzayda dolaşırken, koordinatların herbiri, kendi ekseni üzerinde gidip gelmekte, yani doğrusal hareket yapmaktadır! O halde, doğrusal hareket için geliştirdiğimiz kavramları cismin (x, y, z) koordinatlarının herbirine uygulayabiliriz.

Bu derste sadece iki-boyutlu hareketi inceleyeceğiz. Kullanacağımız yöntemler 3-boyutlu harekete kolayca genişletilebilirler.



Şekil 3.1: Konum vektörü.



Şekil 3.2: Yerdeğiştirme vektörü

3.1 KONUM ve YERDEĞİŞTİRME VEKTÖRLERİ

xy-koordinat sisteminde bir P noktasının koordinatları (x, y) olsun. Orijinden bu noktaya çizilen vektöre **konum vektörü** denir ve $\vec{r}$ ile gösterilir. Şekilden görüldüğü gibi, bu $\vec{r}$ vektörünün bileşenleri P noktasının koordinatları olurlar:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \tag{3.1}$$

Tanım: t_1 anında $\vec{r}_1$ konumlu P_1 noktasında bulunan bir cisim, daha sonraki bir t_2 anında $\vec{r}_2$ konumlu bir P_2 noktasında oluyorsa,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} \tag{3.2}$$

vektörüne **yerdeğiştirme vektörü** denir. Şekilde görüldüğü gibi, $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü cismin yörüngesine çizilen P_1P_2 kirişi olur.

Bu Δt zaman aralığında cismin **ortalama hız vektörü** $\vec{v}_{\text{ort}}$, yerdeğiştirme vektörünün zaman farkına oranıdır:

$$\vec{v}_{\text{ort}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Bu, bir boyutlu hareketteki tanımın iki bileşene birden uygulanmasıdır. Daha açık yazarsak,

$$\vec{v}_{\text{ort}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right)\hat{\jmath} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath}$$

$$v_{\text{ort},x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad v_{\text{ort},y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Yine, hızın bir andaki değeri olan **ani hız vektörü**, bir-boyuttaki gibi türev alarak tanımlanır:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.4}$$

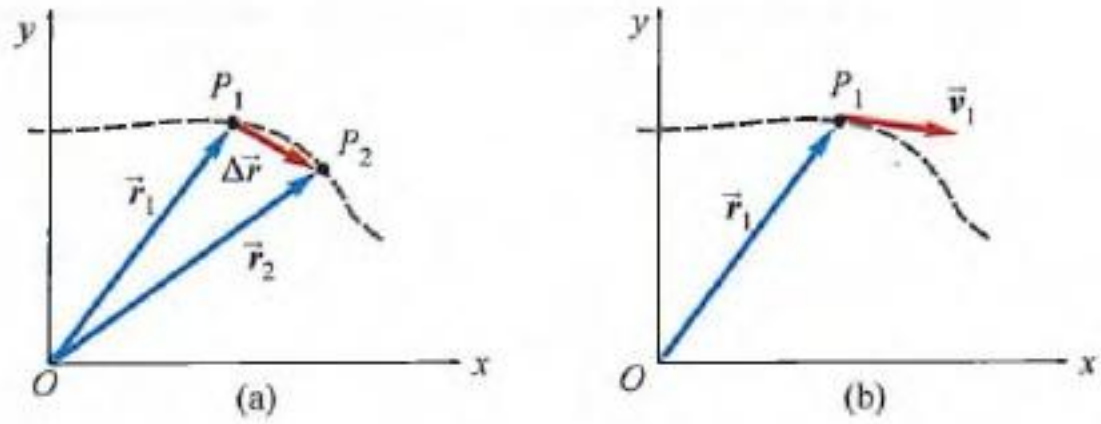
Bir vektörün türevinden şunu anlıyoruz: O vektörün x ve y bileşenlerinin ayrı ayrı türevi alınır ve bunlar türev vektörünün bileşenleri olurlar:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{\jmath} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$$

Hız vektörünün şiddeti (büyüklüğü, normu) ve $+x$ ekseniyle yaptığı açı, bildiğimiz formüllerle bulunur:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.5}$$

Hızın yönü nedir? Bunu görebilmek için $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2}$ kirişini gözönüne alalım. $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü hareket yönündedir. Ayrıca, $\Delta t \to 0$ olurken, P_2 noktası giderek P_1 noktasına yaklaşacak ve P_1P_2 kirişi sonunda teğet doğrultuya gelecektir. O halde, iki boyutlu harekette, **hız vektörü daima yörüngeye teğet ve hareket yönündedir.**



Şekil 3.3: (a) Yerdeğiştirme vektörünün limit yönü, (b) $\vec{v}$ hız vektörünün yönü.

İvme Vektörü

İvme, hızın zamanla değişme oranıdır. Bunu iki-boyutlu harekete genişletmek istediğimizde, aynı yöntemi bileşenler için kullanırız.

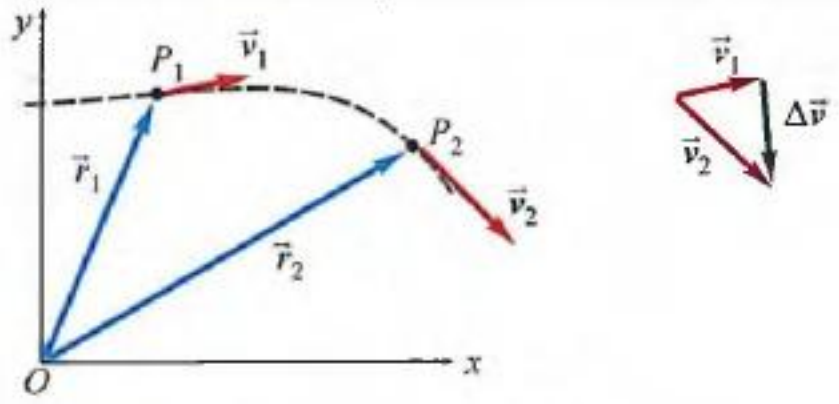
Tanım: Bir cismin t_1 anındaki hız vektörü $\vec{v}_1$ ve daha sonraki bir t_2 anındaki hız vektörü $\vec{v}_2$ ise, **ortalama ivme vektörü**

$$\vec{a}_{ort} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{3.6}$$

olur. Yine, bunun anlamı bileşenlerle görülebilir:

$$a_{ort,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}, \qquad a_{ort,y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{t_2 - t_1}$$

Buna bağlı olarak, **ani ivme vektörü**, ortalama ivmenin limiti alınarak bulunur:



Şekil 3.4: Hız vektörlerinden $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ vektörü böyle kurulur.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.7}$$

Veya, bileşenler cinsinden daha açık yazarsak,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{dv_y y}{dt}}_{a_y}\hat{\jmath} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

Hız vektörünün kendisi konumun türevi olduğu için, ivmeyi konumun ikinci türevi olarak da yazabiliriz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.8}$$

İvme vektörünün büyüklüğü ve açısı,

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{3.9}$$

İki-boyutlu harekette ivme vektörünün yönü, yörünge doğrultusunda olmak zorunda değildir, hareket türüne göre her yönde olabilir.

Örnek 3.1

Düzlemde bir hareketlinin koordinatları,

$$x = t^3 - 2t^2 + 5$$
$$y = 3t^2 - 4t + 4$$

olarak veriliyor.

(a) *Hız ve ivmeyi zamanın fonksiyonları olarak ifade edin.*
(b) $t = 1$ s *anında konum, hız ve ivmenin bileşenlerini hesaplayın.*
(c) $t = 1$ s *anında hız ve ivmenin büyüklüğünü bulun.*
(d) $t = 1$ s *anında hız ve ivme arasındaki açıyı hesaplayın.*

Çözüm

(a) Konum bileşenlerinin zamana göre türevi hız bileşenlerini verir:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4t \text{ (m/s)}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 6t - 4 \text{ (m/s)}$$

Hız bileşenlerinin zaman göre türevi ivme bileşenlerini verir:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t - 4 \text{ (m/s}^2\text{)}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

(b) Bu x, v, a ifadelerinde $t = 1$ alınarak bileşenler bulunur:

$x = 4$ $\quad y = 3$
$v_x = -1$ $\quad v_y = 2$
$a_x = 2$ $\quad a_y = 6$

(c) Bileşenleri verilen vektörlerin büyüklükleri hesap edilir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,\text{m/s}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{38}\,\text{m/s}$$

(d) İki vektör arasındaki açı skaler çarpım yoluyla bulunur (1.10 formülü):

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va} = \frac{(-1)\times 2 + 2\times 6}{\sqrt{5}\,\sqrt{38}} = 0.73$$

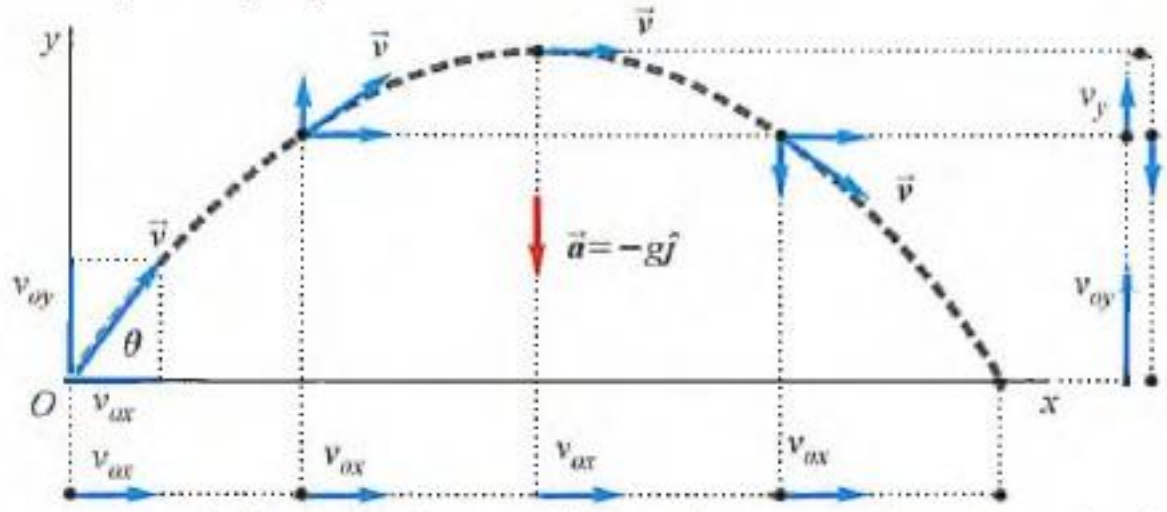
Buradan açının kendisi $\theta = 44°$ bulunur.

3.2 ATIŞ HAREKETİ

İki-boyutlu harekete ilk örnek, yeryüzünde atılan cisimlerin yerçekimi ivmesi altında yaptıkları hareket olacaktır. Burada ivmenin daima düşey doğrultuda ve yerin merkezine yönelik olduğunu biliyoruz. Bunu, vektörel olarak ifade etmek istersek,

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = -g\hat{j} \tag{3.10}$$

Hareketin bileşenlerinin ne olacağı bu ifadeden anlaşılmaktadır: Yatay x-yönünde düzgün doğrusal hareket, dikey y-yönünde sabit ivmeli hareket gözleriz. Bölüm 2 de her iki hareket türünü incelemiştik. Burada yapılacak iş, o formülleri bileşenler için yazmak olacaktır.



Şekil 3.5: Atış hareketinde koordinatlar. Yatay x-bileşeni düzgün doğrusal hareket yaparken, dikey y-bileşeni ise dikey atış hareketi yapar.

Dünya yüzeyinde bir noktadan v_0 ilk hızıyla ve yatayla θ açısı altında atılan bir cisim gözönüne alalım. İlk hızın bileşenleri şöyle yazılabilir:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{3.11}$$

Cismin atıldığı yeri orijin ve y yönünü yukarı doğru seçersek, atış hareketi formülleri toplu halde yazılabilir:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_x = v_0 \cos\theta & v_y = v_0 \sin\theta - gt \\ x = v_0 \cos\theta\, t & y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \quad \text{(atış hareketi)}} \qquad (3.12)$$

Yörünge denklemi: Cismin atış hareketi sırasında, hangi zamanda nerede olduğuna bakmaksızın, havada çizeceği eğriyi (yörüngeyi) bulmak istersek, bu denklemler arasından t zamanını eleriz. x-konumu formülünden $t = x/v_0 \cos\theta$ şeklinde alıp y-denkleminde yerine koyar ve sadeleştirirsek, yörünge denklemini elde ederiz:

$$y = (\tan\theta)\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad \text{(Yörünge denklemi)} \qquad (3.13)$$

Bu bir parabol denklemidir (Şekil 3.5).

Cisim orijinden değil de, herhangi bir (x_0, y_0) konumlu başlangıç noktasından atılmışsa, yukardaki formüllere x_0 ve y_0 eklemek yeterlidir:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 \cos\theta\, t \\ y &= y_0 + v_0 \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Hava direncinin ihmal edilebileceği tüm atış hareketleri için bu formüller geçerlidir. Özel bazı atışlar için, veya maksimum yükseklik ve menzil için, ayrı ayrı formüller geliştirmeye gerek yoktur. Örneğin, yatay atış için, $\theta = 0$ olacağından, formüllerde $\sin\theta = 0$ ve $\cos\theta = 1$ yapmak yeterlidir:

$$\begin{array}{ll} v_x = v_0 & v_y = -gt \\ x = x_0 + v_0 t & y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \quad \text{(yatay atış)} \qquad (3.15)$$

Benzer şekilde, maksimum yükseklikte hızın y-bileşeninin sıfır ($v_y = 0$) olduğunu bilmek yeterlidir.

Örnek 3.2

Bir futbolcunun vurduğu top 30 m/s ilk hızla ve yatayla 37° açı altında yükseliyor.

(a) *Topun hareket denklemlerini yazın.*

(b) *$t = 1$ s anında topun konum ve hız bileşenleri ne olur?*

(c) *Maksimum yüksekliğe kaç saniyede çıkar?*

(d) *Topun maksimum yüksekliği ne kadardır?*

(e) *Top ne kadar uzağa düşer?*

Çözüm

(a) Önce ilk hızın bileşenlerini hesaplayalım:

$$v_{0x} = v_0 \cos 37^\circ = 30 \times 0.8 = 24 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin 37^\circ = 30 \times 0.6 = 18 \text{ m/s}$$

Topun atıldığı yer orijin olarak alınır ve atış hareketinin (3.12) denklemleri yazılır:

$$\begin{array}{ll} v_x = v_0 \cos 37 = 24 & v_y = v_0 \sin 37^\circ - gt = 18 - 10t \\ x = v_0 \cos 37\, t = 24\, t & y = v_0 \sin 37^\circ\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 18t - 5t^2 \end{array}$$

(b) Bu ifadelerde $t = 1$ alınırsa,

$$\begin{array}{ll} v_x = 24 \text{ m/s} & v_y = 18 - 10 \times 1 = 8 \text{ m/s} \\ x = 24 \text{ m} & y = 18 - 5 = 13 \text{ m} \end{array}$$

(c) Maksimum yükseklikte hız yatay hale gelir, yani hızın y-bileşeni sıfır olur:

$$v_y = 18 - 10t = 0 \;\rightarrow\; t = 1.8 \text{ s}$$

(d) Bu $t = 1.8$ s anındaki y değeri maksimum yükseklik olur:

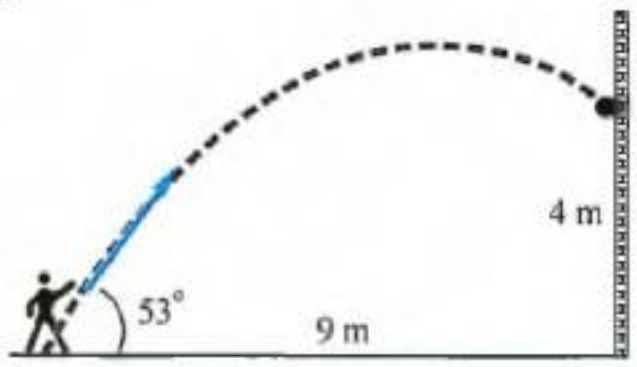
$$y_{\max} = 18 \times 1.8 - 5 \times 1.8^2 = 16.2 \text{ m}$$

(e) Topun menzili, yani düştüğü yerin yatay uzaklığı x koordinatının $t = 2 \times 1.8 = 3.6$ s de aldığı değerdir. Menzil R ile gösterilir:

$$R = x_{\max} = 24 \times 3.6 = 86 \text{ m}$$

Örnek 3.3

Bir top 9 m *ötedeki bir duvara yatayla* 53° *açı altında atılıyor. Top duvara yerden* 4 *yükseklikte çarpıyor. Topun ilk hızı ne idi?*



Çözüm

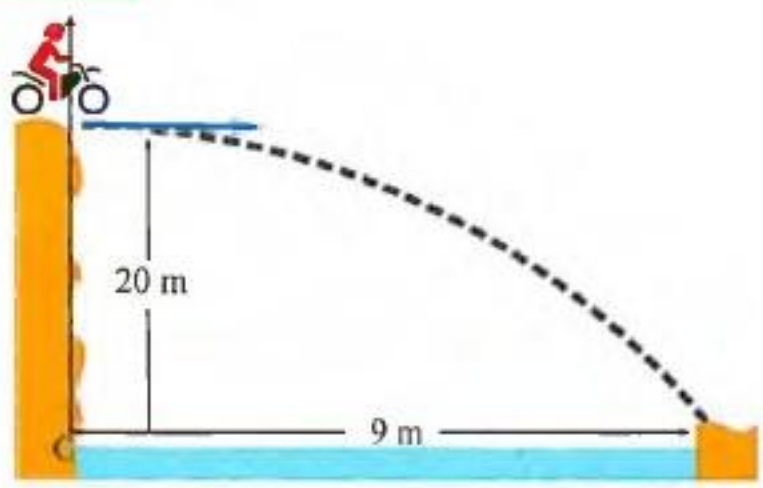
Bu problemde zaman verilmediği için yörünge denklemini kullanmak en çabuk çözümü verir. Yörüngenin (3.13) formülünde $x = 9\,\text{m}$, $y = 4\,\text{m}$, $\cos 53° = 0.6$ ve $\tan 37° = 4/3$ değerleri kullanılırsa,

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$4 = \frac{4}{3}\times 9 - \frac{10}{2v_0^2\times 0.6^2}\times 9^2$$

$v_0^2 = 225 \;\rightarrow\; v_0 = 15\,\text{m/s}$ bulunur.

Örnek 3.4



Bir motosikletli yerden 20 m *yükseklikteki bir uçurumdan* v_0 *yatay hızıyla atlayıp* 9 m *genişliğindeki bir nehrin öte tarafına geçebilmek istiyor.*

(a) *Motosikletin uçuş süresi ne kadardır?*

(b) *Motosikletin ilk hızı ne olmalıdır ki nehri geçebilsin?*

(c) *Motosikletin yere çarpmadan hemen önceki hızı ne olur?*

Çözüm

Orijini motosikletin atladığı yerin altında ve yerde, y eksenini yukarı yönde seçelim. Motosiklet yatay doğrultuda atladığı için, eğik atışın (3.12) formüllerinde $\theta = 0°$ alırız:

$$v_x = v_0 \qquad v_y = -gt = -10t$$

$$x = v_0 t \qquad y = y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2 = 20 - 5t^2$$

(a) Motosiklet yere değdiğinde y koordinatı sıfır olmalıdır:

$0 = 20 - 5t^2 \;\rightarrow\; t = 2\,\text{s}$

(b) Nehri geçebilmek için yere değdiği $t = 2\,\text{s}$ anında x koordinatı 9 m ye eşit veya daha büyük olmalıdır:

$x = v_0 t \;\rightarrow\; 9 = v_0 \times 2 \;\rightarrow\; v_0 = 4.5\,\text{m/s}$

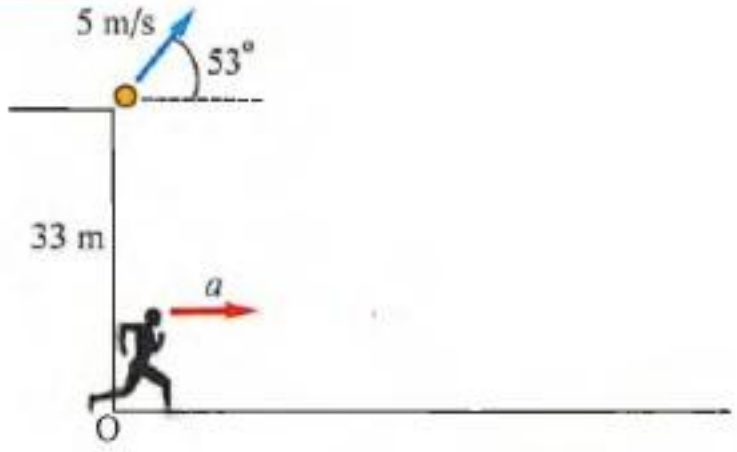
(c) $t = 2\,\text{s}$ anındaki hız bileşenleri hesaplanır:

$v_x = v_0 = 4.5\,\text{m/s} \qquad v_y = -10t = -20\,\text{m/s}$

v_y bileşeninin eksi olması aşağı yönelik olduğunu gösterir. Buradan hızın şiddeti hesaplanır:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4.5)^2 + (-20)^2} = 21\,\text{m/s}$$

Örnek 3.5



Bir top 33 m *yükseklikte bir binanın çatısından, yatayla* 53° *açı altında* 5 m/s *hızıyla atılıyor. Yerde, binanın kapısında beklemekte olan bir çocuk topla aynı anda ve aynı yönde, sabit* a *ivmesiyle koşmaya başlıyor.*

(a) *Bir koordinat sistemi seçip topun ve çocuğun hareket denklemlerini yazın.*

(b) *Topun yere düşünceye kadar uçuş süresi ne olur?*

(c) *Top binadan ne kadar uzağa düşer?*

(d) *Çocuğun ivmesi ne olmalıdır ki top yere düşmeden onu tutabilsin?*

Çözüm

Önce topun ilk hız bileşenleri hesaplanır:

$v_{0x} = v_0\cos 53° = 5\times 0.6 = 3\,\text{m/s}$

$v_{0y} = v_0\sin 53° = 5\times 0.8 = 4\,\text{m/s}$

(a) Çocuğun harekete başladığı yeri orijin alırsak, topun x ve y koordinatları şöyle olur:

$x_1 = v_{0x}t = 3t$

$y_1 = y_{1o} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 33 + 4t - 5t^2$

Çocuk x yönünde ivmeli hareket yapar, y yönünde hareket etmez:

$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \qquad y_2 = 0$

(b) Top yer hizasına geldiğinde y koordinatı sıfır olmalıdır:

$y_1 = 33 + 4t - 5t^2 = 0 \;\rightarrow\; t = -11/5 \text{ ve } +3\,\text{s}$

Çözüm artı işaretli olan $t = 3\,\text{s}$ dir.

(c) Bu t zamanında topun x konumu bulunur:

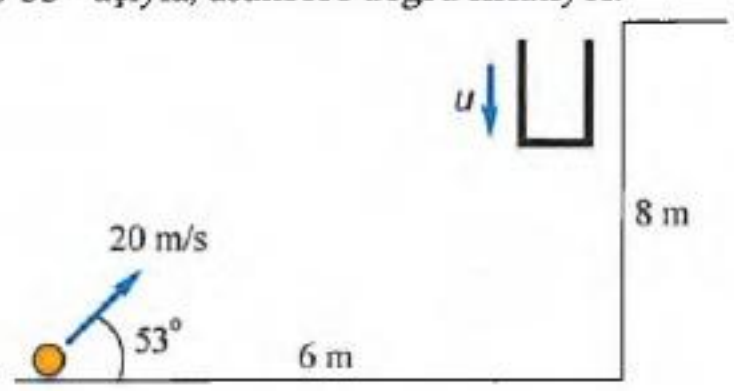
$x_1 = 3t = 9\,\text{m}$

(d) Çocuk aynı $t = 3\,\text{s}$ süresinde aynı $x = 9\,\text{m}$ konumuna gelebilmelidir:

$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \;\rightarrow\; 9 = \frac{1}{2}a\times 3^2 \;\rightarrow\; a = 2\,\text{m/s}^2$

Örnek 3.6

Bir binanın dış asansörü yerden 8 m yükseklikteyken sabit bir u hızıyla inmeye başlıyor. Aynı anda, binadan 6 m yatay uzaklıkta beklemekte olan bir çocuk, elindeki topu 20 m/s hızla ve 53° açıyla, asansöre doğru fırlatıyor.



(a) *Bir koordinat sistemi seçip asansörün ve topun hareket denklemlerini yazın.*

(b) *Top duvara kaç saniye sonra çarpar?*

(c) *Top hangi yükseklikte duvara çarpar?*

(d) *Asansörün u hızı ne olmalıdır ki top asansöre çarpsın?*

Çözüm

Önce topun ilk hız bileşenleri hesaplanır:

$$v_{0x} = v_0 \cos 53^\circ = 20 \times 0.6 = 12\,\text{m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 53^\circ = 20 \times 0.8 = 16\,\text{m/s}$$

(a) Topun atıldığı yeri orijin alırsak, topun denklemleri şöyle olur:

$$x_1 = v_{0x}\,t = 12\,t \qquad y_1 = v_{0y}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 = 16t - 5t^2$$

Asansörün yatay uzaklığı sabit olup, y yönünde sabit hızla hareket etmektedir:

$$x_2 = 6\,\text{m} \qquad y_2 = y_{20} - ut = 8 - ut$$

(b) Top duvara çarptığında x yönünde 6 m yol almıştır:

$$6 = 12\,t \;\rightarrow\; t = 0.5\,\text{s}$$

(c) Bu t zamanında topun y konumu hesaplanır:

$$y_1 = 16 \times 0.5 - 5 \times (0.5)^2 = 6.75\,\text{m}$$

(d) Bu t zamanında asansör de aynı y konumunda olmalıdır:

$$6.75 = 8 - u \times 0.5 \;\rightarrow\; u = 2.5\,\text{m/s}$$

Örnek 3.7

Maksimum atış uzaklığı (menzil). *Yatay bir düzlemdeki cisim hangi açıda atılırsa en uzağa düşer, yani menzili (erimi) maksimum olur?*

Çözüm

Menzil formülü elde etmek için yörünge denklemini kullanalım. Cisim yer hizasmdayken $y = 0$ olmalıdır. Bu koşul (3.13) yörünge formülünde kullanılır:

$$0 = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Çözüm: $x = 0$ ve $x = \dfrac{2v_0^2\cos^2\theta\,\tan\theta}{g}$

$x = 0$ çözümü cismin atıldığı yerdir. Diğer çözüm menzil olur ve R ile gösterilir. Triginometriden $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ ve $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ özdeşlikleri kullanılırsa, menzil formülü bulunmuş olur:

$$R = \frac{v_0^2\,\sin 2\theta}{g}$$

Aynı v_0 ilk hızları için, R nin maksimum olması için sinüs fonksiyonu maksimum olmalıdır. Sinüs fonksiyonu 90° de maksimum 1 değerini alır. O halde,

$$2\theta = 90^\circ \;\rightarrow\; \theta = 45^\circ$$

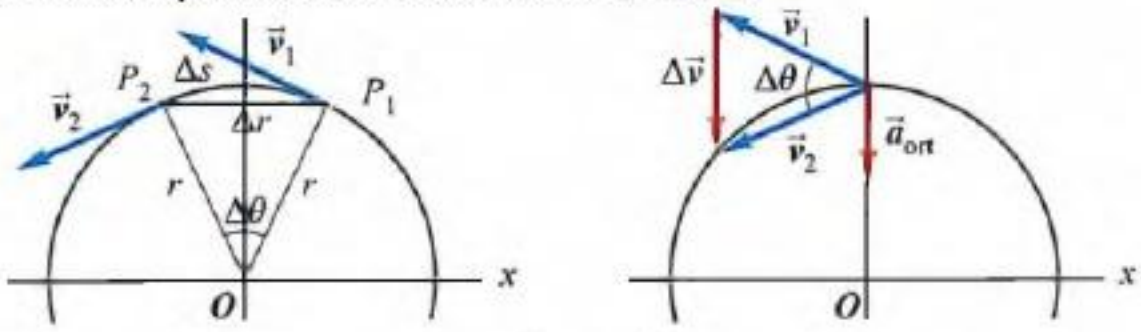
45° açı altında atılan cisimler maksimum uzaklığa düşerler.

3.3 DÜZGÜN DAİRESEL HAREKET

Merkezcil İvme

İki-boyutlu harekete ikinci örnek, bir daire çevresinde sabit hızla dönen cismin hareketidir. Her ne kadar hızın büyüklüğü sabit olsa da, dönmekte olduğu için bir ivmeye sahip olur. Bunun nasıl olduğunu görmeye çalışalım.

r yarıçaplı bir çember üzerinde sabit v hızıyla dönmekte olan cismin t_1 anında bulunduğu P_1 konumlu yerdeki hız vektörü $\vec{v}_1$, daha sonraki bir t_2 anındaki P_2 konumlu yerdeki hız vektörü de $\vec{v}_2$ olsun.



Şekil 3.6: Dairesel harekette hız vektörleri ve $\Delta\vec{v}$ değişme vektörü.

Bu iki hızın büyüklüğü aynıdır: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Fakat, yönleri farklı olduğu için iki farklı vektör saymak gerekir.

Şimdi, ortalama ivme vektörünün tanımını burada uygulayalım:

$$\vec{a}_{\text{ort}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Bu $\Delta\vec{v}$ vektörünü daha iyi görebilmek için, ayrı bir yerde $\vec{v}_2$ vektörünü, kendisine paralel kaydırarak $\vec{v}_1$ vektörünün yanına taşıyalım. Oluşan üçgenin ikiz kenarları $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, diğer karşı kenar ise $\Delta\vec{v}$ olur.

Şimdi bu üçgenle, hareket çemberindeki OP_1P_2 üçgenini karşılaştıralım. Bu üçgenler benzerdir, çünkü ikisi de ikizkenar olup, merkez açıları $\Delta\theta$ eşittir. Çünkü, cisim $\Delta\theta$ kadar döndüğünde, hız vektörü de aynı miktar döner. O halde, benzer üçgenlerdeki kenar oranları eşit olur:

$$\frac{|\Delta\vec{r}|}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}$$

Buradaki $|\Delta\vec{r}|$ kiriş uzunluğu yerine Δs yay uzunluğunu kullanırsak küçük bir hata oluşur, fakat limite gidildiğinde aradaki fark sıfıra gideceğinden ihmal edilebilir: $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$. O halde,

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v\,\Delta s}{r}$$

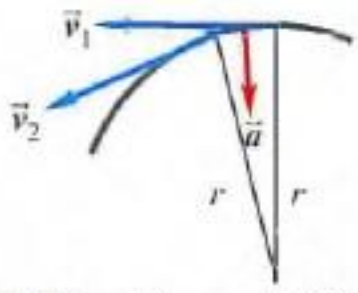
Şimdi, $\vec{a}$ ivmesinin hesabına geçebiliriz. Önce, ivmenin şiddetini hesaplayalım. Bu amaçla $\Delta t \to 0$ limitine gidildiğinde,

$$a = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v\,\Delta s}{r\,\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

olur. Burada, sabitleri limitin dışına aldık. Bu ifadedeki limit bildiğimiz v hızının tanımıdır, çünkü alınan yol Δs nin geçen zamana oranıdır: $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta s/\Delta t = v$. O halde, ivmenin büyüklüğü şöyle olur:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

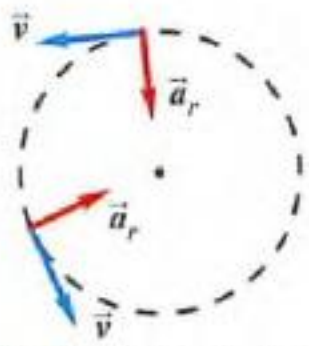
Bu ivme sabit değerdedir, çünkü r yarıçapı ve v hızı sabit alınmıştır.



Şekil 3.7: $\Delta\theta \to 0$ limitine giderken, $\Delta\vec{v}$ vektörü dairenin merkezine yönelir.

Peki, bu a ivmesinin yönü ne olacaktır? Bunu görmek için, $P_2 \to P_1$ olurken, yandaki hızlar üçgeninde $\Delta\vec{v}$ nin hangi tarafa yöneldiğine dikkat edelim. İki hız birbirine yaklaştıkça aralarındaki açı sıfıra gidecek, ikizkenar üçgenin diğer eşit açıları 90° değerine gidecektir. Yani, $\Delta\vec{v}$ vektörü $\vec{v}$ hızına dik ve merkeze yönelik olur.

O halde, düzgün dairesel hareketin her noktasında sabit ve daima merkeze yönelik bir ivme oluşur. Buna **merkezcil ivme** denir ve a_r ile gösterilir:



Şekil 3.8: Dairesel harekette $\vec{a}_r$ merkezcil ivmesi her yerde merkeze yönelik olur.

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(merkezcil ivme)}} \tag{3.16}$$

Bu formüldeki hız yerine **periyot**, yani komple bir tur için geçen T zamanı kullanılabilir. Komple bir turda alınan yol çevre uzunluğu $2\pi r$ olacağından,

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

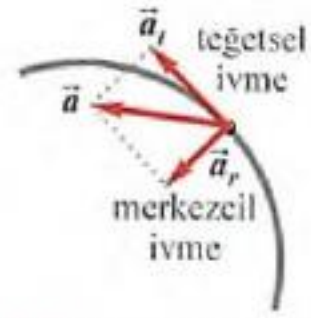
$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{3.17}$$

merkezcil ivmenin periyot cinsinden ifadesi olur.

Teğetsel İvme

Eğer, dairesel harekette hızın sadece yönü değil, büyüklüğü de değişiyorsa, bu durumda merkezcil ivmeye ek olarak, bir de **teğetsel ivme** oluşur. $\vec{a}$ ivmesi bu merkezcil ve teğetsel ivmelerin bileşkesi olur:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \tag{3.18}$$



Şekil 3.9: Hızın büyüklüğü de değişiyorsa, ayrıca $\vec{a}_t$ teğetsel ivmesi de oluşur.

Bu yüzden, en genel eğrisel harekette $\vec{a}$ ivmesi merkezcil yönde olmak zorunda değildir, herhangi bir yönde olabilir.

Teğetsel ivmenin ifadesi hız şiddetindeki değişmedir:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{3.19}$$

Teğetsel ivmeyi daha sonra Bölüm 7 de dönme hareketi içinde ele alacağız.

Örnek 3.8

80 cm yarıçaplı dairesel bir yörüngede dönen bir cismin dakikada 150 tur attığı gözleniyor.

(a) *Cismin hızı ne kadardır?*

(b) *Cismin merkezcil ivmesi ne kadardır?*

Çözüm

(a) Sabit v hızı, gidilen yolun zamana oranı olarak hemen hesaplanır. Dairenin çevresi $2\pi r$ olduğundan, 150 turda alınan yol 1 dakikaya bölünür:

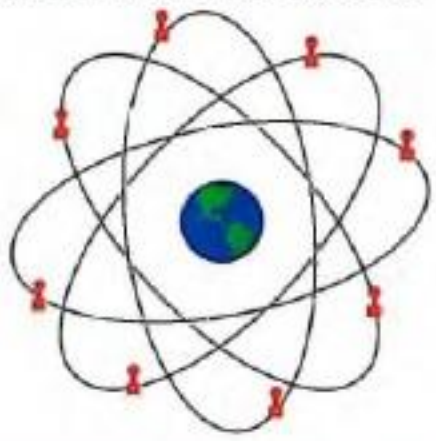
$$v = \frac{\text{yol}}{\text{zaman}} = \frac{150 \times 2\pi r}{60\,\text{s}} = 5\pi r = 12.5\,\text{m/s}$$

(b) Yukarda bulunan hız merkezcil ivme formülünde kullanılır. ($\pi^2 \approx 10$):

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(5\pi r)^2}{r} = 25\pi^2 r = 200\,\text{m/s}^2$$

Örnek 3.9

Küresel Konuçlandırma Sistemi (GPS) Dünya yüzeyinden 20 000 km yükseklikte dönen 20 küsur uydudan oluşur. Bu uydulardan herbiri günde iki defa Dünya çevresinde dolanır. Dünyanın yarıçapı ortalama 6 400 km dir.



(a) *Bir GPS uydusunun periyodunu hesaplayın.*

(b) *Bir GPS uydusunun merkezcil ivmesini hesaplayın.*

Çözüm

(a) Uydunun periyodu, yani bir tam dönüş zamanı yarım gündür. Bunu saniye cinsinden hesaplarız:

$$T = \tfrac{1}{2} \times \text{gün} = \tfrac{1}{2} \times 24 \times 60 \times 60 = 43\,200\,\text{s}$$

(b) Merkezcil ivmeyi periyot cinsinden ifade eden formülü kullanırız. Burada r daire merkezinden itibaren ölçülen uzaklıktır. Dünyanın yarıçapı R ve uydunun yüzeyden yüksekliği h ise, $r = R + h = 6400 + 20000 = 26400\,\text{km} = 26.4 \times 10^6\,\text{m}$ olur. Bu değerleri yerine koyarız ($\pi^2 \approx 10$):

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{40 \times 26.4 \times 10^6}{(43.2 \times 10^3)^2} = 0.14\,\text{m/s}^2.$$

3.4 GÖRELİ HAREKET

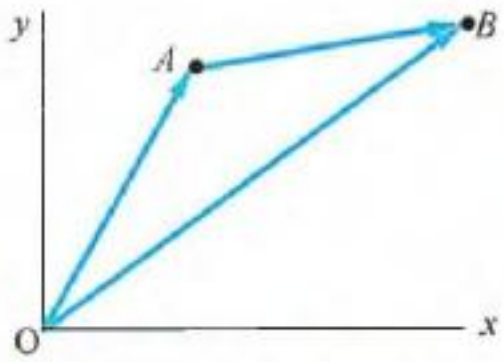
Bir nehir boyunca kürek çekerek ilerlemeye çalışan bir kayıkçı düşünün. Kıyıda duran bizler, aynı kayıkçının akıntı yönünde biraz daha hızlı, akıntıya karşı biraz daha yavaş ilerlediğini gözleriz. Hatta, akıntıya karşı gitmeye çalışırken, kayığın geri geri gittiği dahi gözlenebilir. Keza, yürüyen merdivende durduğumuz halde, yerdekiler bizim ilerlediğimizi gözlerler.

Bu gözlemler bize hız, konum gibi kavramların "hangi gözlemci tarafından gözlendiğine bağlı" olduğunu anlatır. Eğer gözlemcinin kendisi de hareketli ise, onun ölçeceği hız ile yerdeki gözlemcinin ölçeceği hız farklı olacaktır. Fakat, iki

gözlemcinin birbirine göre hızı biliniyorsa, bu farklı ölçümler arasındaki ilişki hesaplanabilir.

Bir-boyutlu harekette hızlar arasındaki bağıntıyı görmek kolaydır. Durgun suda hızı v olan bir yüzücü, akış hızı u olan bir nehre girdiğinde yerden gözlenen hızı, akıntı yönünde yüzerken $v + u$, akıntıya karşı yönde yüzerken $v - u$ olacaktır.

Göreli hızları iki-boyutta incelemek üzere, A, B noktalarında bulunan iki cismin O orijininde hareketsiz duran bir gözlemci tarafından incelendiğini kabul edelim. Bu iki hareketlinin orijinden çizilen konum vektörlerini $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ ve $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$ ile gösterelim. B noktasının A ya göre konum vektörü de $\overrightarrow{AB}$ olsun. Şekilden görüldüğü gibi, bu üç vektör arasında şöyle bir bağıntı oluşur:



Şekil 3.10: A ve B cisimlerinin O gözlemcisine göre konumları.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

Bu ifadenin zamana göre türevini alalım.

$$\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

Burada her terimin ne anlama geldiğine dikkat edelim:

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} &= \vec{v}_{BO} = B \text{ cisminin yerdeki } O \text{ orijinine göre hızı} \\ \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} &= \vec{v}_{AO} = A \text{ cisminin yerdeki } O \text{ orijinine göre hızı} \\ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} &= \vec{v}_{BA} = B \text{ cisminin hareketli } A \text{ cismine göre hızı}\end{aligned}$$

Buna göre, hızlar arasındaki bağıntı şöyle olur:

$$\boxed{\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO} \qquad \text{(göreli hız toplama kuralı)}} \tag{3.20}$$

Bu formülü hatırda tutmak kolaydır: (O, A, B) indislerinden herhangi iki tanesinin arasına üçüncü bir indis katıp, diğer terimi o indisten devam ettiririz. Örneğin,

$$\begin{aligned}\vec{v}_{OA} &= \vec{v}_{OB} + \vec{v}_{BA} \\ \vec{v}_{AB} &= \vec{v}_{AO} + \vec{v}_{OB}\end{aligned}$$

Ayrıca, indisleri ters sırada olan vektörler eksi yönde olurlar: Örneğin, $\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$ veya $\vec{v}_{AO} = -\vec{v}_{OA}$ ...gibi.

Denklem 3.20 ile verilen **göreli hız toplama kuralı** sadece klasik fizikte geçerlidir. Çok yüksek hızlarda, yani ışık hızına yaklaşıldığında, yanlış sonuç verir. Bunun yerine Einstein'ın *Görelilik Teorisi* ile geliştirdiği formüller kullanılır.

Bağıl İvme

Hızlar arasındaki ilişkiyi veren (3.20) denklemini yeniden ele alalım:

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO}$$

Eğer, hızlar değişiyorsa, hareketler ivmeli olacaktır. Bu denklemin zamana göre ikinci türevi ivmeler arasındaki bağıntıyı verir:

$$\vec{a}_{BO} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{AO} \tag{3.21}$$

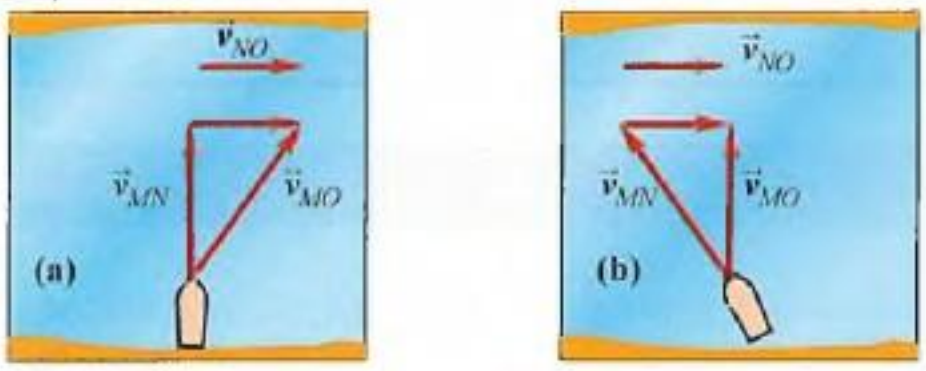
Bu genel ifadeyi derste kullanmayacağız. Fakat, önemli bir sonucu çıkarmak amacıyla, sadece B cisminin hızının değiştiğini, A cisminin ise orijine göre düzgün doğrusal hareket yaptığını varsayalım. Bu durumda $\vec{a}_{AO} = 0$ olur ve,

$$\vec{a}_{BO} = \vec{a}_{BA} \tag{3.22}$$

bulunur. Bunun anlamı şudur: **Birbirine göre düzgün doğrusal hareket yapan gözlemciler aynı ivmeyi ölçerler.** Bu sonuç, daha sonra dinamik yasalarını anlamayı kolaylaştıracaktır.

Örnek 3.10

Durgun sudaki hızı 20 km/saat *olan bir motor, genişliği* 2 km *olan bir nehri geçmeyi deniyor. Nehirde akıntı hızı* 5 km/saat *tir.*



(a) *Kaptan tekneyi kıyıya dik olarak sürmek istediğinde, motorun yere göre hızı ve yönü ne olur?*

(b) *Kaptan bu kez nehri dikine geçmek istiyor. Teknenin burnunu hangi yönde tutmalıdır ki yerden gözlenen hızı kıyıya dik olsun? Bu durumda yere göre hızı ne olur?*

(c) *Her iki şıkta karşıya geçiş sürelerini hesaplayın.*

Çözüm

Hız toplama formülünü uygulamak üzere, nehri N ile, motoru da M ile gösterelim. Buna göre, verileri yazalım:

Nehrin yere göre hızı: $v_{NO} = 5$ km/saat

Motorun nehre göre hızı: $v_{MN} = 20$ km/saat

Geçmekte olan motorun yere göre hızı $v_{MO} = ?$

Hız toplama formülü: $\vec{v}_{MO} = \vec{v}_{MN} + \vec{v}_{NO}$

Bu vektörel eşitlik her iki şık için geçerlidir, sadece vektörlerin yönleri değişir.

(a) Motorun nehre göre hızı $\vec{v}_{MN}$ kıyıya dik tutulduğunda, Şekil (a) da görülen durum elde edilir. Bu dik üçgende hipotenüs ve açı bağıntıları yazılırsa,

$$v_{MO} = \sqrt{v_{MN}^2 + v_{NO}^2} = \sqrt{20^2 + 5^2} = 21 \text{ km/saat}$$

$$\tan\theta = v_{NO}/v_{MN} = 5/20 = 0.25 \;\rightarrow\; \theta = 14°.$$

(b) Motorun nehre göre hızı $\vec{v}_{MN}$ belli bir açıda tutulup, yere göre $\vec{v}_{MN}$ hızının kıyıya dik olması sağlandığında, Şekil (b) deki durum elde edilir. Yine dik üçgen bağıntılarından hesap yapılır:

$$v_{MO} = \sqrt{v_{MN}^2 - v_{NO}^2} = \sqrt{20^2 - 5^2} = 19 \text{ km/saat}$$

$$\sin\theta = v_{NO}/v_{MN} = 5/20 = 0.25 \;\rightarrow\; \theta = 15°.$$

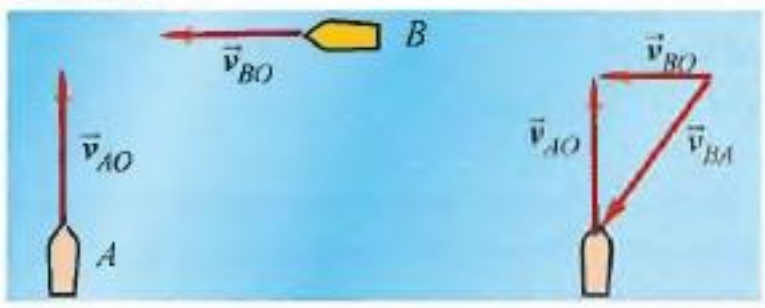
(c) Nehrin genişliğine L dersek, (a) şıkkında alınan çapraz yol $L/\cos\theta$ olur. Buna göre,

$$t_a = \frac{L}{v_{MO}\cos 14°} = \frac{2}{21 \times 0.97} = 0.10 \text{ saat} = 6 \text{ dk}.$$

(b) şıkkında alınan yol L dir. Buna göre geçiş süresi hesaplanır:

$$t_b = \frac{L}{v_{MO}} = \frac{2}{19} = 0.11 \text{ saat} = 6.5 \text{ dk}.$$

Örnek 3.11



Akdeniz ortasındaki iki geminin hızları yerden ölçülüyor. A gemisinin 25 km/saat *hızla güney-kuzey yönünde, B gemisinin de* 40 km/saat *hızıyla doğu-batı yönünde gittikleri gözleniyor.*

A gemisinin kaptanı B gemisinin hangi yönde ve hangi hızla gittiğini gözleyecektir?

Çözüm

B gemisinin A ya göre hızına $\vec{v}_{BA}$ dersek, göreli hız toplama formülünü (indisleri takip ettirerek) şöyle yazabiliriz:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BO} + \vec{v}_{OA}$$

Burada $\vec{v}_{OA}$ yerin A gemisine göre hızı olup $\vec{v}_{OA} = -\vec{v}_{AO}$ yazılırsa, aradığımız formül şöyle olur:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BO} - \vec{v}_{AO}$$

Bu iki vektörün farkı şekilde gösterilmiştir. A gemisinin $\vec{v}_{BA}$ vektörünü gördüğü açıya θ dersek, dik üçgen bağıntıların-

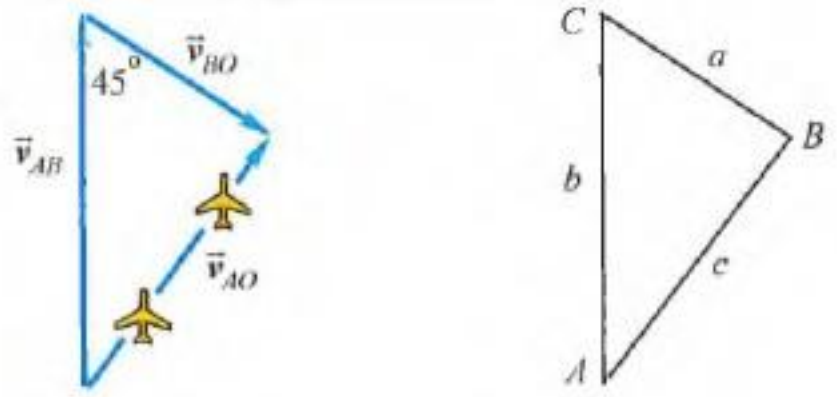
dan v_{BA} hızını ve açısını hesaplayabiliriz:

$$v_{BA} = \sqrt{v_{BO}^2 + v_{AO}^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47\,\text{km/saat}$$

$$\tan\theta = \frac{v_{BO}}{v_{AO}} = \frac{40}{25} = 1.6 \;\rightarrow\; \theta = 58^\circ$$

Örnek 3.12

Durgun havada hızı 60 m/s *olan bir uçağın pilotu, rüzgarın Güney-Doğu yönünde* 20 m/s *olduğu bir bölgede uçağın burnunu kuzey yönünde tutarak uçuyor. Uçağın yere göre hızı ve kuzeyle yaptığı açı ne kadar olur?*



Çözüm

Uçak A, rüzgar B ve yer O olsun. Uçağın rüzgara göre $\vec{v}_{AB}$ hızına, rüzgarın yere göre $\vec{v}_{BO}$ hızını eklersek, uçağın rüzgarlı havada yere göre $\vec{v}_{AO}$ hızını buluruz:

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BO}$$

Bu hız vektörleri şekilde gösterilmiştir.

Matematikte dik olmayan üçgenler Sinüs ve Kosinüs teoremleriyle çözülürler (bkz. Ek B):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \qquad \text{(Kosinüs teoremi)}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \text{(Sinüs teoremi)}$$

Bu iki üçgeni karşılaştırarak, aranan v_{AO} hızını ve yönünü hesaplarız:

$$v_{AO} = \sqrt{v_{AB}^2 + v_{BO}^2 - 2v_{AB}v_{BO}\cos 45}$$

$$= \sqrt{60^2 + 20^2 - 2\times 60\times 20\times \sqrt{22}} = 48\,\text{m/s}$$

$$\frac{\sin\theta}{20} = \frac{\sqrt{2}/2}{48} \;\rightarrow\; \theta = 36^\circ$$

Test

1. Düzlemde hareket eden bir cismin hız büyüklüğü sabit ise, aşağıdakilerden hangileri doğru olabilir?
   (a) Cismin ivmesi sıfırdır.
   (b) Cismin hızı yörüngeye paraleldir.
   (c) Cismin merkezcil ivmesi olabilir.
   (d) Hepsi.

2. Eğrisel bir yörüngedeki hareket için hangisi doğrudur?
   (a) İvme ile hız vektörleri aynı yöndedir.
   (b) Hız vektörü yörüngeye teğettir.
   (c) Hız yörüngeye diktir.
   (d) İvme ile hız birbirine diktir.

3. İki top aynı yükseklikten atılıyor. A topu serbest düşmeye bırakıldığı anda B topu yatay yönde bir hızla fırlatılıyor. Hangisi yere daha önce varır?
   (a) A (b) B (c) $t_A = t_B$ (d) Hiçbiri

4. Eğik atışta hangisi sabit kalır?
   (a) Hızın büyüklüğü.
   (b) Hızın yatay bileşeni.
   (c) Hızın düşey bileşeni.
   (d) Hızın açısı.

5. Eğik atışta maksimum yükseklikte hangisi doğrudur?
   (a) Hız sıfırdır.
   (b) Hızın yatay bileşeni sıfırdır.
   (c) Hızın düşey bileşeni sıfırdır.
   (d) Hız maksimumdur.

6. A cismi r yarıçaplı dairede sabit v hızıyla dönüyor. B cismi $2r$ yarıçaplı dairede $2v$ hızıyla dönüyor. Hangisinin merkezcil ivmesi daha büyüktür?
   (a) A (b) B (c) Eşit (d) Hiçbiri

7. A cismi r yarıçaplı çember üzerinde sabit v hızıyla dönüyor. B cismi $2r$ yarıçaplı çemberde $v/2$ hızıyla dönüyor. Hangisinin merkezcil ivmesi daha büyüktür?
   (a) A (b) B (c) Eşit (d) Hiçbiri

8. Düzlemde ivmeli hareket eden bir cisim için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Hız vektörü sabit olabilir.
   (b) Hızın büyüklüğü sabit olabilir.
   (c) Hızın yönü sabit olabilir.
   (d) Hız yön değiştirebilir.

9. 80 metre yükseklikten bırakılan bir cisim yere kaç saniyede varır?
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

10. Bir doğru boyunca aynı yönde giden iki cisimden, A cisminin hızı 10 m/s, B cisminin hızı 4 m/s dir. A cismi aşağıdakilerden hangisini gözler?
    (a) B nin kendisinden 6 m/s hızla uzaklaştığını gözler.
    (b) B nin kendisinden 14 m/s hızla uzaklaştığını gözler.
    (c) B nin kendisine 6 m/s hızla yaklaştığını gözler.
    (d) B nin kendisine 14 m/s hızla yaklaştığını gözler.

11. Bir doğru boyunca karşılıklı birbirine doğru gelen iki cisimden, A cisminin hızı 10 m/s, B cisminin hızı 4 m/s dir. A cismi aşağıdakilerden hangisini gözler?
    (a) B nin kendisinden 6 m/s hızla uzaklaştığını.
    (b) B nin kendisinden 14 m/s hızla uzaklaştığını.
    (c) B nin kendisine 6 m/s hızla yaklaştığını.
    (d) B nin kendisine 14 m/s hızla yaklaştığını.

12. Düzgün dairesel harekette merkezcil ivme nereden kaynaklanır?
    (a) Hız büyüklüğünün değişmesinden.
    (b) Hız yönünün değişmesinden.
    (c) Konumun değişmesinden.
    (d) Hızm yörüngeye teğet olmasından.

13. Hareket halindeki bir trenin penceresinden dışarı bir taş bırakılıyor. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Trendeki gözlemci taşın serbest düşme yaptığını gözler.
    (b) Yerdeki gözlemci taşın serbest düşme yaptığını gözler.
    (c) Yerdeki gözlemci taşın yatay atış yaptığını gözler.
    (d) Yerdeki gözlemci taşın eğik atış yaptığını gözler.

14. Eğik atış için hangisi yanlıştır?
    (a) Çıkış süresi iniş süresine eşittir.
    (b) Aynı bir yükseklikte iki yönde de geçiş hızları eşittir.
    (c) Yerdeki hız maksimum hıza eşittir.
    (d) Maksimum yükseklikteki hız yerdeki hızın düşey bileşenine eşittir.

15. Bir yatay atışta cisim yere t saniyede düşüyor. Atış yüksekliği 3 katına çıkarılırsa, yere düşüş süresi ne kadar olur?
    (a) $3t$ (b) $\sqrt{3}t$ (c) $1/\sqrt{3}t$ (d) $9t$

16. Dairesel harekette hızın yönü ve büyüklüğü değişiyorsa, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Merkezcil ivme vardır.
    (b) Teğetsel ivme vardır.
    (c) İvme hıza diktir.
    (d) İvme herhangi bir yönde olabilir.

17. Akıntının soldan sağa doğru olduğu bir nehirde yüzerek tam karşınızdaki noktaya ulaşmak istiyorsunuz. Hangi yönde yüzersiniz?
    (a) Tam karşıya yönelik.
    (b) Sola yönelik.
    (c) Sağa yönelik.
    (d) Yarısında sola, yarısında sağa yönelik.

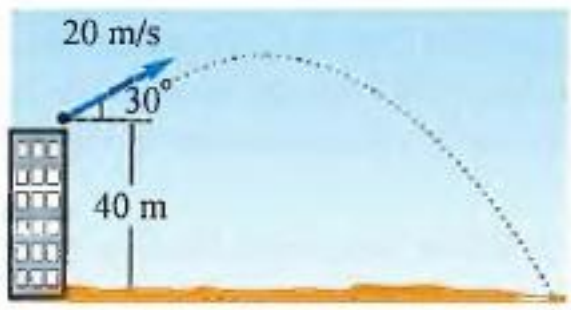
18. Durgun suda 4 m/s hızla yüzebilen bir çocuk, akıntının 3 m/s olduğu bir nehirde, kıyıya dik yönde yüzmeye kalktığında, yerden gözlenen hızı ve yönü ne olur?
    (a) 4 m/s kıyıya dik
    (b) 5 m/s kıyıya dik
    (c) 5 m/s ve 37° yana
    (d) 5 m/s ve 53° yana

19. Bir adam yürüyen bir merdivenle üst kata çıkmak istiyor. Merdiven durmakta iken adam kendi adımlarıyla 6 s sürede çıkıyor. Yürüyen merdiven hareketliyken adam basamakta durduğunda 3 s de çıkıyor. Yürüyen merdiven hareketliyken yürüyen adam kaç saniyede çıkar?
    (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

20. Aynı bir noktadan aynı açıyla eğik atılan iki cisimden B cisminin maksimum yüksekliği A cisminin 3 katı oluyor. B nin ilk hızı A nın kaç katıdır?
    (a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $1/\sqrt{3}$ (d) 9

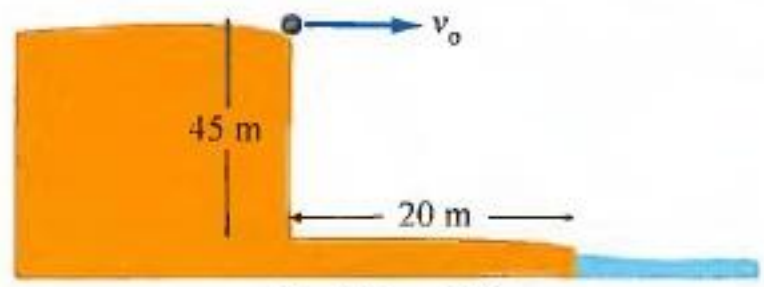
Problemler

3.2 Atış Hareketi



Problem 3.1

3.1 Yerden 40 m yükseklikteki bir binanın çatısından bir top 20 m/s hızla ve yatayla 30° açı altında atılıyor. (a) Topun uçuş süresi ne kadardır? (b) Binadan ne kadar uzağa düşer? (c) Top yere çarpmadan önce hız bileşenleri ne kadardır? [C: (a) 4 s, (b) 69 m, (c) $v_x = 17$ $v_y = -30$ m/s.]

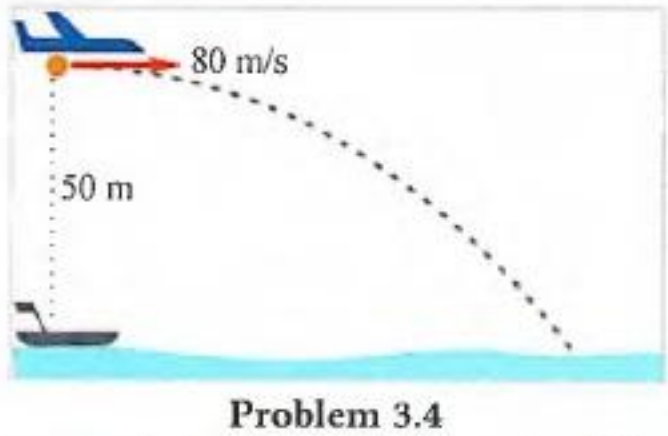


Problem 3.2

3.2 Yerden 45 m yükseklikte bir uçurumdan denize doğru yatay doğrultuda bir taş atılıyor. Uçurumun altında denize doğru 20 m uzanan bir kumsal vardır. (a) Taşm uçuş süresi

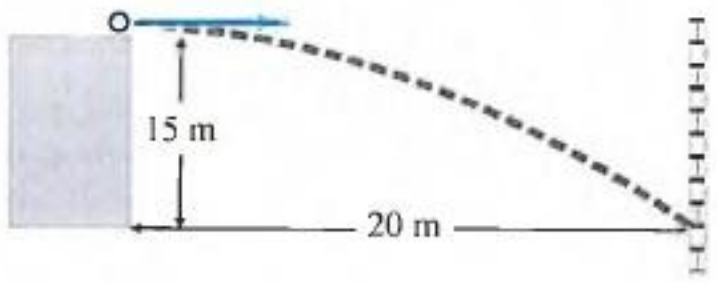
ne olur? (b) Taşın denize düşmesi için atış hızı en az ne olmalıdır? [C: (a) 3 s, (b) 6.7 m/s.]

3.3 Bir atlet yerden 8 m/s hızla zıplıyor ve yatay 6.2 m öteye düşüyor. (a) Hangi açıyla zıplamıştır? (b) Atlama kaç saniye sürer? (*Yol gösterme:* Yörünge denklemi kullanın.) [C: (a) 37°, (b) 1 s.]



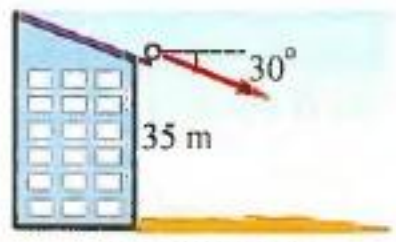
Problem 3.4

3.4 Deniz seviyesinden 50 m yüksekte yatay 80 m/s hızıyla uçmakta olan bir yardım uçağı, denizdeki kayık tam altında iken yardım paketini bırakıyor. (a) Paket yere kaç saniyede düşer? (b) Kayıktan ne kadar uzağa düşer? [C: (a) 3.2 s, (b) 256 m.]



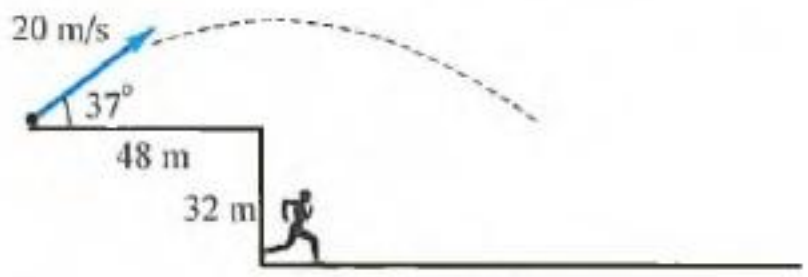
Problem 3.5

3.5 Yerden yüksekte bir noktadan yatay doğrultuda atılan bir top 20 m uzaktaki bir duvara 15 m aşağıda çarpıyor. (a) Topun uçuş süresi ne kadardır? (b) Topun ilk hızı ne idi? [C: (a) $\sqrt{3} = 1.7$ s, (b) $20/\sqrt{3} = 11.5$ m/s.]



Problem 3.6

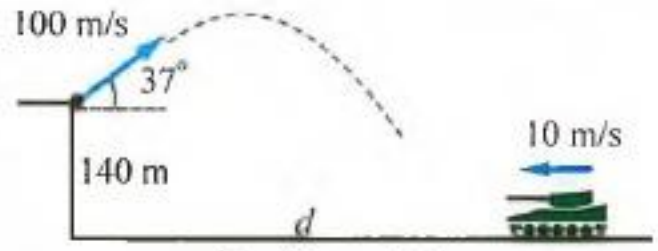
3.6 Bir kenarı yerden 35 m yükseklikte olan bir çatıya atılan top geri yuvarlanıyor ve yatayın 30° altında yere düşüyor. Top yere 2 s de düştüğüne göre, (a) İlk hızı nedir? (b) Çatı kenarından ne kadar uzağa düşer? [C: (a) 15 m/s, (b) 26 m.]



Problem 3.7

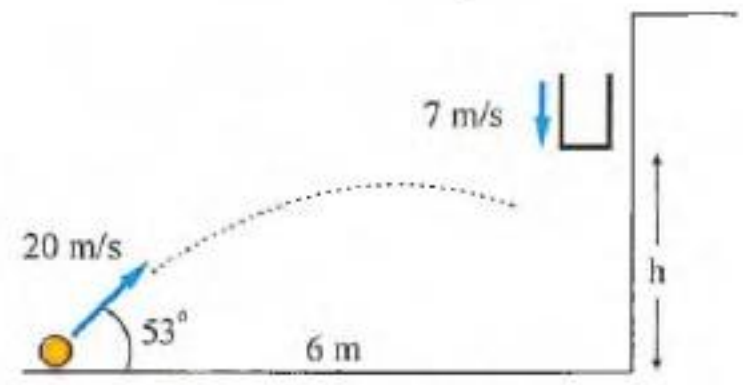
3.7 Uzunluğu 48 m ve yüksekliği 32 m olan yatay bir platformun bir ucundan, yatayla 37° açı altında ve 20 m/s hızla bir top atılıyor. Aynı anda, yerde durmakta olan bir çocuk a ivmesiyle hızlanarak koşmaya başlıyor. Çocuğun topu yakalayabilmesi için a ivmesi ne kadar olmalıdır? Topun uçuş süresi ne kadar olur? [C: $a = 2\,\text{m/s}^2$, $t = 4$ s.]

3.8 Bir basketbol oyuncusu 4 m uzakta ve el hizasından 2 m yüksekte olan potaya atış yapıyor. Atış açısı 53° olduğuna göre, isabet ettirmesi için topun ilk hızı ne olmalıdır? [C: 8.2 m/s.]



Problem 3.9

3.9 Yerden 140 m yükseklikteki bir tepedeki topçu yatayla 37° altında 100 m/s ilk hızla mermiler atabilmektedir. Yerdeki yatay yolda bir tankın sabit 10 m/s hızıyla gelmekte olduğunu gören topçu, tank d uzaklığındayken atış yapıyor. Merminin tanka isabet etmesi için d uzaklığı ne kadar olmalıdır? Merminin havada uçuş süresi kaç saniyedir? [C: 14 s ve $d = 1260$ m.]



Problem 3.10

3.10 Bir binanın dış duvarındaki asansör sabit 7 m/s hızla aşağı inmektedir. Asansör h yüksekliğinden geçerken, yerde binadan 36 m uzaklıkta bir çocuk elindeki taşı 20 m/s ilk hızı ve 53° açıyla asansöre doğru atıyor.

Topun asansöre isabet etmesi için, taş atıldığında asansör hangi h yüksekliğinde olmalıdır? Topun uçuş süresi ne kadar olur? [C: 4 s ve $h = 24$ m.]

3.3 Düzgün Dairesel Hareket

3.11 Dünyanın kendi ekseni etrafındaki dönüşü sırasında, yüzeydeki bir noktanın merkezcil ivmesi ne kadar olur? Dünyanın yarıçapı 6400 km dir. [C: 0.03 m/s^2.]

3.12 Bir yarış otomobili virajlarda kaymadan dönebilmesi için merkezcil ivmesi en fazla 9 m/s^2 olmalıdır. Yarıçapı 150 m olan dairesel bir virajda en fazla hangi hızla dönebilir? [C: 37 m/s.]

3.13 İnsan vücudu en fazla $9g$ büyüklükte bir ivmeye dayanabilmektedir. Hızı 900 km/saat olan bir savaş uçağı pilotu havada en fazla hangi yarıçapta dairesel bir takla atabilir? [C: 694 m.]

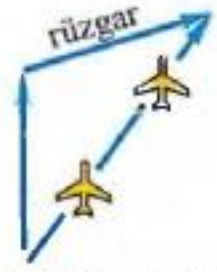
3.14 Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi (CERN) hızlandırıcılarında protonlar hızlandırılarak birbirleriyle çok yüksek enerjide çarpışmaları sağlanır. En son verilere göre, protonlar çevresi 27 km uzunluğunda dairesel bir yörüngede 1 saniyede 11 000 devir yapmaktadırlar. Protonların merkezcil ivmesi ne olur? [C: 21×10^{12} m/s^2.]

3.15 Dünya, Güneş çevresinde yaklaşık 15×10^7 km yarıçaplı bir yörüngede 365 günde dönmektedir. Merkür gezegeni 6×10^7 km yarıçaplı bir yörüngede 88 günde dönmektedir. Merkürün merkezcil ivmesinin Dünya'nınkine oranını hesaplayın. [C: a_r(Merkür)/a_r(Dünya) = 7.]

3.4 Göreli Hareket

3.16 Bir nehirde motorun hızı, akıntı yönünde giderken 10 m/s, akıntıya ters yönde giderken 4 m/s ölçülüyor. Motorun ve akıntının hızlarını hesaplayın.

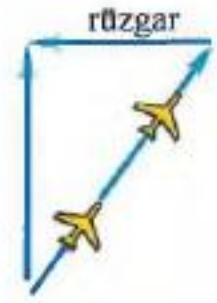
[C: 7 m/s ve 4 m/s.]



Problem 3.17

3.17 Durgun havada hızı 60 m/s olan bir uçağın pilotu, rüzgarın Kuzey-Doğu yönünde 20 m/s olduğu bir bölgede uçağın burnunu kuzey yönünde tutarak uçuyor. Uçağın yere göre hızı ve kuzeyle yaptığı açı ne kadar olur?

[C: 76 m/s ve $\theta = 22°$.]



Problem 3.18

3.18 Durgun havada hızı 250 km/saat olan bir uçağın pilotu, rüzgarın Doğu-Batı yönünde 60 km/saat olduğu bir günde Güney-Kuzey yönünde uçmak istiyor. Uçağın burnunu hangi yöne tutmalıdır ve uçağm yere göre hızı ne olur?

[C: Kuzeyle 17° Doğuya ve 191 km/saat.]

3.19 Havadaki iki uçağın hızları yerden ölçülüyor. *A* uçağı 250 km/saat hızla Güney-Kuzey yönünde, *B* uçağı 200 km/saat hızıyla Doğu-Batı yönünde gittikleri gözleniyor. *B* uçağının pilotu *A* uçağının hangi yönde ve hangi hızla seyrettiğini gözleyecektir?

[C: 320 m/s ve Kuzeyle 39° Batı yönünde.]

3.20 Güney-Kuzey yönünde 60 km/saat hızla gitmekte olan bir A gemisinin kaptanı, diğer bir B gemisinin Batı-Doğu yönünde 50 km/saat hızla seyretmekte olduğunu gözlüyor. B gemisinin yere göre hızı ve yönü ne olur?

[C: 54 km/saat ve Kuzeyle 22° Doğu yönünde.]

4 NEWTON HAREKET YASALARI



Ariane 5 roketi 22 Nisan 2011 de uzay yolculuğuna başlıyor. Avrupa Uzay Birliği (ESA) tarafından geliştirilen bu roket 9.5 ton yükü Dünya'nın çekim kuvvetinden kurtarıp uzaya taşıyarak bir rekor kırmıştır.
Hareketi doğuran temel etken kuvvettir. Hareketin, *kuvvet* ve *kütle* gibi kavramlarla ilişkisi tam olarak nedir?

Bundan önceki bölümlerde, hareketin konum ve zamana bağlı özelliklerini incelemiştik, fakat cisimleri harekete zorlayan sebepler üzerinde durmamıştık. Günlük hayatımızdan da biliyoruz ki cisimleri harekete zorlayan şey kuvvetlerdir. Her cisim bu kuvvetlerin etkisi altında kendi kütlesine bağlı olarak farklı davranış gösterir.

Cisimlere etkiyen kuvvetlerin etkisiyle oluşan hareketin konum, hız ve ivmeleri arasındaki ilişki tarih boyunca pekçok bilim adamı tarafından incelendi. Kopernik, Kepler ve Galileo hareketin pekçok özelliğini ortaya koydular. Nihayet, 1686 yılında İngiliz bilim adamı İsaac Newton yayınladığı *Principia Mathematica* adlı kitabında, daha önceki katkıları da tutarlı bir şekilde ele alarak modern **Mekanik** biliminin temelini atmış oldu.

200 yıl boyunca Newton mekaniğinin mutlak doğru olduğuna inanıldı.

Sonra, 1900 lü yıllarda atomik boyutlardaki parçacıklar için bu yasaların yanlış sonuçlar verdiği gözlendi. Yeni arayışlar sonucunda Kuantum Mekaniği adıyla modern bir teori kuruldu. Fakat bu, Newton mekaniğinin terkedilmesi anlamına gelmez, çünkü Kuantum Mekaniği atomik ölçekte fark gösterir, ama makroskopik cisimler için Newton mekaniği hala geçerlidir.

4.1 NEWTON YASALARI

Newton Mekaniği 3 temel yasa üzerine kurulmuştur. Bu yasaları ispatsız kabul ederseniz, taş ve toplardan arabalara, roket ve mermilerden yıldızların ve gezegenlerin hareketine kadar tüm cisimlerin hareketini açıklayabilirsiniz.

Önce, Newton yasalarını sırayla gözden geçirip yorumlayalım.

Birinci Newton Yasası

Galileo'nun keşfetmiş olduğu birinci yasa, üzerine net bir kuvvet etkimeyen cisimler içindir:

1. Newton Yasası

Üzerine net kuvvet etkimeyen bir cisim ya hareketsizdir, yahut da düzgün doğrusal hareket yapar.

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \iff \vec{a} = 0 \qquad (4.1)$$

Bu yasadaki $\vec{F}_{\text{net}}$ kuvveti, çok sayıda kuvvetin vektörel toplamı olup, buna **net kuvvet** veya **bileşke kuvvet** adı verilir:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i$$



Şekil 4.1: Bu sporcular ilerleyen körling taşının önünü niçin süpürüyorlar?

Galileo'nun yaşadığı 1600 lü yıllara kadar insanlar Aristoteles'in şu yasasına inanıyorlardı: "Üzerine kuvvet etkiyen cisimler hareket eder, kuvvet kaldırılırsa cisim durur." Bugün dahi fizik bilmeyen pekçok kişi böyle düşünmektedir. Öyle ya, masanın üzerinde elimizle ittiğimiz bir silgi, elimizi çektiğimizde durmaz mı?

Galileo görünmeyen bir sürtünme kuvvetinin olayı anlamayı zorlaştırdığını düşünüyordu. Sürtünmeyi azaltmak amacıyla tahta ve mermer yüzeyleri mükemmel şekilde parlatıp cilalayarak deneylerini yaptı. İtme kuvveti kaldırıldığında cisimler hemen durmuyor, yüzey ne kadar cilalıysa o kadar uzağa gidebiliyorlardı. Böylece, birinci yasayı keşfetti.

Birinci yasada dikkat edilmesi gereken noktaları vurgulayalım:

- Bu yasada **net** (bileşke) kuvvetin sıfır oluşu önemlidir: Cisim üzerine çok sayıda kuvvet etkiyor olabilir, ama bunların bileşkesi sıfırsa, birinci yasa geçerlidir.
- Yasanın denklemli ifadesini de anlamak kolaydır: Cismin duruyor veya düzgün doğrusal hareket yapıyorsa, ivmesi sıfır demektir.
- **Birinci yasa aslında kuvvetin tanımıdır.** Gerçekten de, yasanın denklemli ifadesindeki ok işareti çift yönlüdür. Bunu tersinden okuyalım: *Eğer bir cisim ivmeleniyorsa üzerine net bir kuvvet etkiyor demektir.* Başka bir deyişle ivme, kuvvetin varlığının habercisidir.

İkinci Newton Yasası

Eğer cisimler üzerine net bir kuvvet etkiyorsa, ivmeli hareket yapacaklardır. Bu ivmenin miktarını bize ikinci yasa söyler.

2. Newton Yasası

Bir cisim, üzerine uygulanan net kuvvetle doğru orantılı ve onunla aynı yönde bir ivme kazanır. Orantı katsayısı cismin kütlesi olur.

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\,\vec{a} \tag{4.2}$$

Yine bu yasayı da Galileo, eğik düzlemler kullanarak yaptığı zahmetli araştırmalar sonunda keşfetmiştir. Galileo iyice parlatıp sürtünmesini azalttığı eğik düzlemin eğimi arttıkça, üzerine bırakılan bir cismin ivmesinin de arttığını gösterebilmiştir.

İkinci yasanın neler getirdiğini vurgulayalım:

- İkinci yasa kuvvet birimini belirler. SI sisteminde Newton adı verilen ve kısaca (N) ile gösterilen bu birim, türetilmiş bir birimdir. Yasa ifadesinin iki tarafının birimleri yazılırsa,

  $$1\ \text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

  olur. Daha açık deyişle, 1 kg lık kütleye $1\ \text{m/s}^2$ ivme kazandıran kuvvetin şiddeti 1 Newton olur.

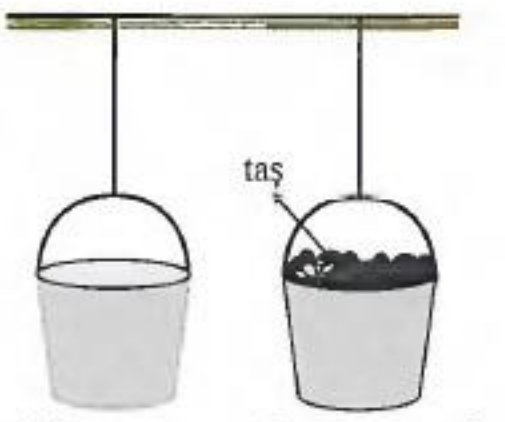
- İkinci yasa vektörel bir eşitliktir. Yani, xy-koordinat sisteminde bu eşitlik her bileşen için geçerli olmalıdır:

  $$\vec{F}_{\text{net}} = m\,\vec{a} \iff \begin{cases} F_{x,\text{net}} = m\,a_x \\ F_{y,\text{net}} = m\,a_y \end{cases} \tag{4.3}$$

- İlk bakışta 1. yasanın, ikincisinin özel bir hali olduğunu düşünebilirsiniz. Öyle ya, ikinci yasada $\vec{a} = 0$ yaparsak $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ olur ve 1. yasayı verir, değil mi? Bu yanlıştır. Zira, *ikinci yasa aslında kütlenin tanımıdır.* Birinci yasa kuvvetin ne olduğunu söylemeseydi, ikinci yasa bunu kütle ve ivmeyle ilişkilendiremezdi.

- İkinci yasa kütleyi, cismin ivmelenmeye direncinin bir ölçüsü olarak tanımlamıştır. Yani, aynı bir kuvvet uygulanan iki cisimden, kütlesi daha büyük olanı ivmelendirmek daha zor demektir (Şekil 4.2). Cisimlerin bu "ivmelenmeye direnme' özelliğine **eylemsizlik** adı verilir. Başka bir deyişle kütle, cisimlerin eylemsizlik karakterinin ölçüsüdür.

- Newton yasaları hangi gözlemciler için geçerlidir? Örneğin, kendisi ivmelenen bir gözlemci, yerde durmakta olan bir cismi ters yönde ivmelenmiş gibi görecektir ve yanlış sonuç bulur: Net kuvvet sıfır olduğu halde ivme gözler. Bu soruya cevap verebilmek için Bölüm 2 deki bağıl hız konusunu hatırlayalım. Orada, (Denklem 3.22), *birbirine göre düzgün doğrusal hareket yapan gözlemcilerin aynı ivmeyi ölçtüğünü* görmüştük. O halde, **Newton yasaları birbirine göre düzgün doğrusal hareket yapan gözlemciler için geçerlidir.** Bunlara **eylemsiz referans sistemleri** diyoruz.



Şekil 4.2: Hangi kovayı itmek daha zordur?

Üçüncü Newton Yasası (Etki-tepki prensibi)

Bir insan havaya nasıl zıplar, hiç düşündünüz mü? Bu sorunun cevabı basittir: Ayaklarımızla beton zemini ani bir hareketle aşağı doğru iteriz, zemin de bizi ters yönde yukarı iter. Demek ki zeminin bir tepki kuvveti vereceğini sezgilerimizle biliyoruz.

Etki eden her kuvvetin daima bir tepki doğurduğunu ilk defa İsaac Newton düşündü. Üçüncü yasa bu etki ve tepki arasındaki ilişkiyi belirler.

3. Newton Yasası

Bir cisim diğer ikinci bir cisme $\vec{F}_{12}$ kuvveti uyguluyorsa, ikinci cisim de birinciye eşit büyüklükte ve zıt yönde bir $\vec{F}_{21}$ kuvveti uygular.

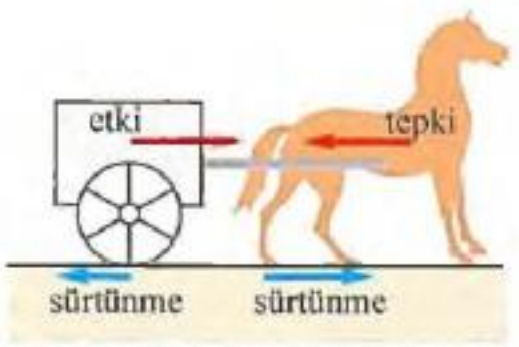
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{4.4}$$

Roketler yapılmadan önce bazı bilim adamları hava olmayan uzay boşluğunda uçabilmenin imkansız olduğunu iddia ediyorlardı. Oysa, roketler yakıtlarını büyük bir itmeyle geri yönde atarken oluşan tepki kuvvetinden yararlanarak boşlukta uçabilmektedirler. Bu, üçüncü yasayla mümkündür.

Etki-tepki yasasını uygularken dikkat edilecek noktalar şunlardır:

- **Etki ve tepki farklı cisimlere uygulanmaktadır.** Bu ayrım yapılmazsa çelişkiye düşülebilir.

  Örneğin, bir at arabasını düşünelim. Şöyle bir soruya nasıl cevap verirdiniz: "At arabayı hangi kuvvetle öne çekiyorsa, araba da atı eşit bir kuvvetle geri yönde çekecektir. Böylece iki kuvvet birbirini sıfırlar ve araba yerinden kımıldamaz." Bu düşünce yanlıştır, çünkü etki ve tepkinin farklı cisimlere uygulandığını gözardı etmektedir. Bu cisimlerden birini incelerken sadece o cisme etkiyen kuvvetler gözönüne alınmalıdır. Örneğin at, arabanın tepki kuvvetini zeminde oluşturduğu sürtünme kuvvetiyle dengeleyip geri gitmemeyi başarır. Fakat, arabanın tekerlerindeki sürtünme çok küçük olduğu için, ileri gitmeyi engelleyemez.



Şekil 4.3: At ve araba üzerindeki kuvvetler.

- **Bir cismin hareketi incelenirken, sadece ona uygulanan dış kuvvetler gözönüne alınırlar.** Çünkü, iç kuvvetler 3. yasaya göre karşılıklı olarak birbirini götürürler. Bir kayığın içindeki adamın kayığı iterek ilerletmesi mümkün müdür? Hayır. Kayık ve içindeki adamı bir bütün halinde inceleyelim. Bu durumda, adamın kayığa ve kayığın adama uyguladığı etki-tepki çifti, incelediğimiz (kayık+adam) sisteminin **iç kuvvetleri** olurlar ve 3. yasaya göre toplamları sıfırdır.

- İki cisim arasındaki bu kuvvetlerden hangisinin etki, hangisinin tepki olduğunu sormak yersizdir. İkisi de aynı anda oluşur, yani aralarında bir sebep-sonuç ilişkisi yoktur. Bunu belirtmek için sadece etki-tepki çiftinden sözedilir.

4.2 MEKANİKTE KARŞILAŞILAN KUVVET TÜRLERİ

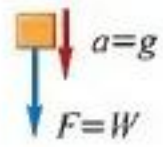
Cisimlerin hareketine sebep olabilecek çeşitli türden kuvvetler vardır. Bunlar arasında yerçekimi (gravitasyon) kuvveti ve onun özel hali olan ağırlık kuv-

veti, yüzeylerde oluşan sürtünme ve normal tepki kuvveti, iplerdeki gerilim kuvveti... sayılabilir. Her problemde bu kuvvetlerden biri veya birkaçı yeralabilir. Bunların nasıl hesaba katılacaklarını bilmeden doğru çözüme varamayız.

Şimdi en önemli kuvvetleri sırayla gözden geçirelim.

Ağırlık (Yerçekimi kuvveti)

Serbest düşme ve eğik atış problemlerinde gördüğümüz üzere, Yeryüzü yakınlarında serbest bırakılan her cisim, yerin merkezine doğru sabit g ivmesiyle hızlanarak düşer.



Bunu 2. yasayla yorumlarsak, bu ivmeye sebep olan bir kuvvet var olmalıdır. Bu özel kuvvete **ağırlık** adı verilir ve büyüklüğü W ile gösterilir. Ağırlık da $F = ma$ yasasını g ivmesiyle sağlayacağı için,

$$W = mg \qquad \text{(ağırlık kuvveti)} \qquad (4.5)$$

olup, düşey yöndedir. Örneğin, 1 kg kütleli bir cismin ağırlığı $W = 1{\times}9.8 \approx 10\,\text{N}$ olur. Cisim hareket ediyor olsun veya olmasın, bu kuvvet daima vardır.



Şekil 4.4: Ağırlık yerçekimi ivmesine yolaçan kuvvettir.

Bazı öğrenciler ağırlık ve kütle kavramlarını karıştırabilmektedirler. Bu karışıklığı şöyle giderebiliriz: Ağırlık Dünyanın cisimlere uyguladığı bir çekim kuvvetidir. Başka gezegenlerde veya Ay yüzeyinde farklı çekim kuvveti olacağı için, oralarda farklı ağırlık olabilir. Fakat uzay boşluğunda, yani civarda başka bir kütle yoksa, cismin ağırlığı yoktur.

Kütle ise, cismin özünde varolan bir niceliktir, onun ivmelenme özelliğinin bir ölçüsüdür. Cisim uzayın neresinde olursa olsun kütlesi hep vardır. Bunu şöyle çarpıcı bir şekilde örnekleyelim: Uzay boşluğunda 1 ton kütleli bir kayayı elinizin bir parmağı üzerine tutabilirsiniz, çünkü ağırlığı yoktur. Ama, o kayaya bir tekme atıp ivmelendirmek isterseniz, ayağınızı kırabilir, çünkü kütlesi büyük olduğundan ivmelendirmek zordur.

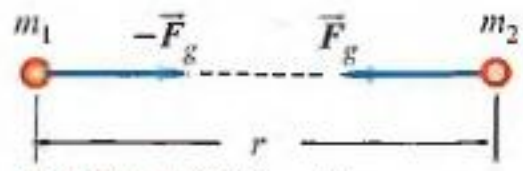
Kütle Çekim Yasası (Gravitasyon)

Ağırlık çok daha genel bir çekim kuvvetinin özel halidir. Doğadaki 4 temel kuvvet (kütleçekimi, elektromanyetizma, çekirdek kuveti ve zayıf kuvvet) arasında bilinen en eskisi olan bu kuvvet, gezegenleri Güneş çevresinde dolaştıran, Ay uydusunu Dünya çevresinde yörüngede tutan veya ağaçtan kopan bir elmayı yere düşüren kuvvettir. İsaac Newton'un diğer bir keşfi olan bu **kütle çekim yasası** (veya, gravitasyon kuvveti) şöyle ifade edilir:

Newton'un Kütle Çekim Yasası

Evrendeki her iki cisim arasında, kütlelerin çarpımıyla doğru orantılı ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir çekim kuvveti vardır:

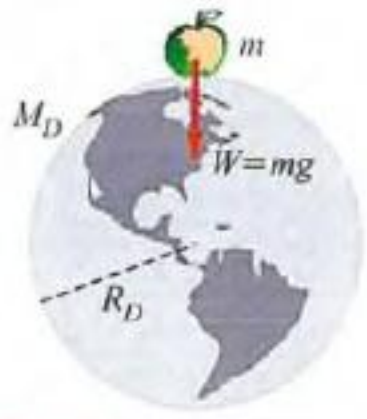
$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(Kütle çekim yasası)} \qquad (4.6)$$



Şekil 4.5: Kütle çekim yasası.

Buradaki orantı katsayısı G **gravitasyon sabiti** olup temel fizik sabitlerinden biridir:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \qquad \text{(gravitasyon sabiti)} \qquad (4.7)$$



Şekil 4.6: Ağırlık, kütle çekim yasasından kaynaklanır.

Şimdi, bu yasayı Dünya üzerindeki m kütleli bir cisme uygulayalım. Birinci cisim m kütlesi, ikinci cisim ise kütlesi M_D ve yarıçapı R_D ile gösterilen Dünya olsun. Buna göre,

$$F_g = G\frac{mM_D}{R_D^2} = m\left(\frac{GM_D}{R_D^2}\right)$$

olur. Parantez içindeki ifade sadece Dünya'nın kütle ve yarıçap değerlerine bağlı olan bir sayıdır. Dünyanın kütlesi $M_D = 5.97 \times 10^{24}$ kg ve yarıçapı $R_D = 6.38 \times 10^6$ m olup bu değerleri kullandığımızda, m kütlesine etkiyen kütle çekim kuvveti,

$$F_g = m \times (9.80\,\mathrm{m/s^2})$$

bulunur. Buradaki ivme boyutunda ve $9.80\,\mathrm{m/s^2}$ değerinde olan sabit, bildiğimiz g yerçekimi ivmesidir. İşte bu kütle çekim kuvveti W ağırlığının ta kendisidir:

$$W = F_g = mg \qquad \text{(Ağırlık)} \tag{4.8}$$

$$g = \frac{GM_D}{R_D^2} \qquad \text{(Dünya yüzeyindeki yerçekimi ivmesi)} \tag{4.9}$$

Bu bağıntı bize g yerçekimi ivmesinin yükseklikle nasıl azaldığını göstermektedir. Yeryüzünden h yükseklikteki g değerini bulmak için, bu formülde R_D yerine $(R_D + h)$ kullanmak yeterlidir. Keza, Ay veya gezegenlerin yüzeyindeki yerçekimi ivmesi de bu yolla hesaplanabilir.

Hacimli cisimler arasındaki kütle çekim kuvveti hesaplanırken, formüldeki r uzaklığı iki cismin kütle merkezleri arasındaki uzaklık olur.

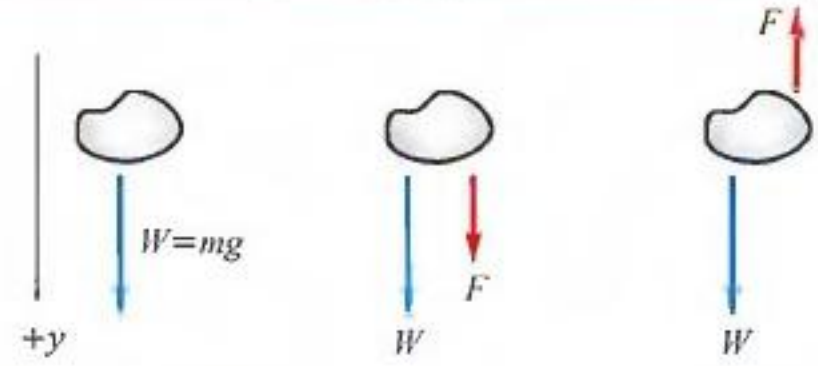
Örnek 4.1

Serbest düşmekte olan $m = 2\,\mathrm{kg}$ kütleli bir taş üzerine dikey doğrultuda bir F kuvveti uygulanıyor.

(a) *$F = 0$ ise, taşın ivmesi ne kadardır?*

(b) *Kuvvet aşağı yönde $F = 5\,\mathrm{N}$ ise, taşın ivmesi ne kadardır?*

(c) *Kuvvet yukarı yönde $F = 25\,\mathrm{N}$ ise, taşın ivmesi ne kadar olur?*



Çözüm

(a) Taşın üzerinde $F = 0$ olsa bile, $W = mg$ ağırlığı vardır. 2. yasaya göre, düşey yönde $F_{net} = ma$ ifadesinde F_{net} için $W = mg$ alınırsa, $a = g$ olur. Yani, cisim g ivmesiyle serbest düşme yapar.

(b) Bu defa W ağırlığına ilave olarak, aynı yönde bir F kuvveti vardır. İkinci yasa yazılırsa,

$$F_{net} = W + F = ma$$

$$mg + F = ma \;\rightarrow\; a = g + F/m = 10 + 5/2 = 12.5\,\mathrm{m/s^2}$$

(c) W ağırlığı ve zıt yönde F kuvveti için 2. yasa yazılır:

$$mg - F = ma \;\rightarrow\; a = g - F/m = 10 - 5/2 = 7.5\,\mathrm{m/s^2}$$

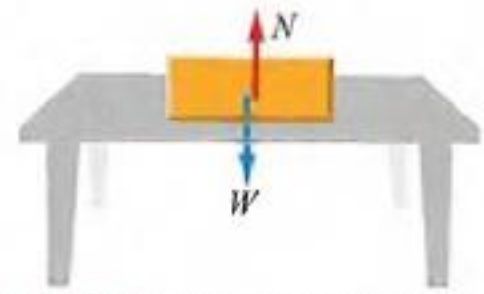
Yüzeylerde Normal Kuvvet ($\vec{N}$)

Bir masanın üzerinde duran bir kitabı düşünün. Bu kitabın bir ağırlığı olduğunu, yani Dünya merkezine doğru $W=mg$ kadar bir kuvvetle çekildiğini biliyoruz. Eğer sadece bu kuvvet etki ediyor olsaydı, $F=ma$ yasasına göre, kitap masanın içinden geçip aşağı doğru hızlanmaya başlardı.

Oysa, kitap hareketsiz, yani ivmesi sıfırdır. O halde, ağırlığa zıt ve yukarı yönde bir kuvvet daha etkiyor olmalıdır ki net kuvvet sıfır olsun. Yüzeye dik ve daima yüzeyden dışarı yönde etkiyen bu kuvvete **normal kuvvet** denir ve $\vec{N}$ ile

gösterilir. Cisim sadece yüzeye temas ettiğinde ortaya çıkar, cisim yüzeyden ayrıldığında ortadan kalkar. Normal kuvvetin kaynağı, masayı ve kitabı oluşturan moleküller arasındaki karmaşık etkileşmelerdir.

Normal kuvvet daima yüzeye dik, ve cismin yüzey içine girmesini engellemeye yetecek büyüklüktedir. Örneğin, masa üzerinde kitap örneğinde $N=W$ idi. Şimdi, kitabı masaya doğru bastıran ilave bir F kuvveti daha uyguladığımızı düşünelim. Bu defa normal kuvvet, W ve F kuvvetlerini birlikte karşılayacak değere çıkar, yani $N=W+F$ olur.



Şekil 4.7: Masa yüzeyinde oluşan normal tepki kuvveti N daima yüzeye diktir.

Burada şöyle bir soru akla gelebilirdi: "Normal kuvvetin tepki kuvveti yok mudur?" Evet, vardır. Gerçekten de üçüncü yasaya göre N kuvvetine eşit ve zıt bir kuvvet olmalıdır. Bu $(-N)$ kuvveti kitap tarafından masaya uygulanmaktadır, ama biz kitaba uygulanan kuvvetlerle ilgilendiğimiz için, masaya uygulanan bu $(-N)$ kuvvetini şekilde göstermedik.

Banyo terazileri üzerine çıkıldığında, ölçülen şey bu $(-N)$ kuvvetidir. O sırada birisi omuzunuzdan bastırsa, terazi bunu da kilonuza ekler.

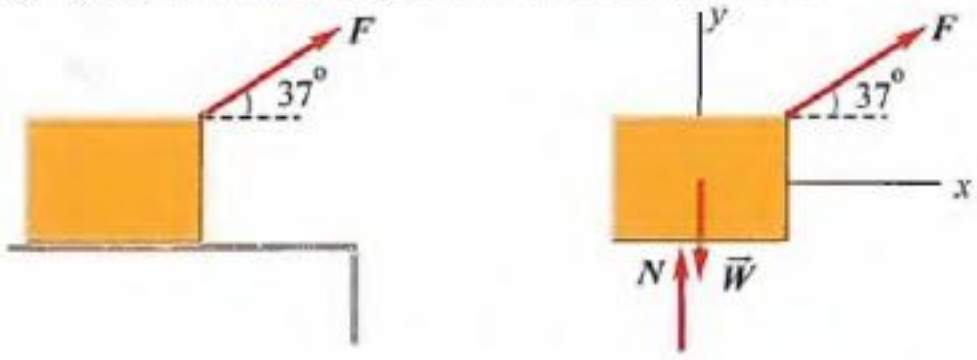
Örnek 4.2

Sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde durmakta olan m = 3 kg kütleli bir cisme, yatayla 37° açı yapan F = 12 N luk bir kuvvet uygulanıyor.

(a) *Cisim üzerindeki tüm kuvvetleri gösterin.*

(b) *Cismin ivmesi ne kadardır?*

(c) *Masanın normal tepki kuvveti ne kadar olur?*



Çözüm

(a) Cisim üzerinde, verilen $\vec{F}$ kuvvetine ek olarak, düşey yönde $W = mg$ ağırlığı ve masa yüzeyinin uyguladığı dikey N tepki kuvveti vardır. Bu kuvvetler şekilde gösterilmiştir.

(b) Eksenleri şekildeki gibi gösterirsek, ivme sadece x-yönünde olacaktır. Masaya dik, yani y-yönünde net kuvvet sıfırdır. O halde, ikinci yasa bileşenler cinsinden şöyle yazılır:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \;\rightarrow\; \begin{cases} F_{x,\text{net}} = ma \\ F_{y,\text{net}} = 0 \end{cases}$$

Birinci denklem ivmeyi verir. x-yönünde sadece F kuvvetinin bileşeni vardır:

$$F\cos 37° = ma \;\rightarrow\; 12 \times 0.8 = 3a \;\rightarrow\; a = 3.2\,\text{m/s}^2$$

(c) Düşey yöndeki bileşen N normal tepki kuvvetini verir. Burada W ağırlığının yanısıra, F nin düşey bileşenini de unutmamak gerekir:

$$N + F\sin 37° - mg = 0 \;\rightarrow\; N + 12 \times 0.6 - 3 \times 10 = 0$$

$$N = 12.8 \text{ newton}$$

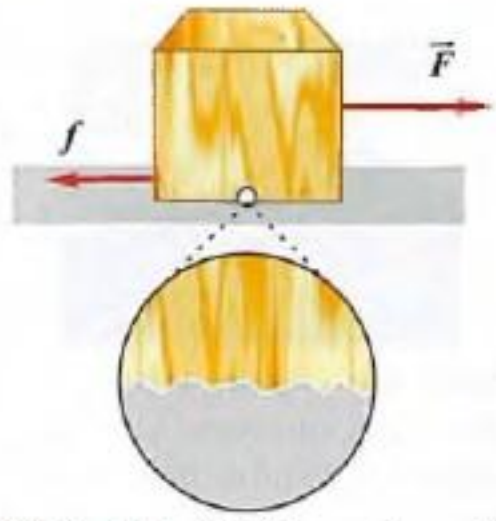
Görüldüğü gibi, N tepki kuvveti her zaman mg ye eşit olmayabilir.

Sürtünme Kuvveti

Yine bir masa üzerinde konulan kitabı gözönüne alalım. Bu kitabı elimizle, masaya paralel bir F kuvvetiyle itelim. Kitap masa boyunca hareket eder mi? Elbette sorunun cevabı kuvvetin şiddetine bağlıdır. Tecrübemizle biliyoruz ki hareketi engelleyen bir sürtünme kuvveti olacaktır ve en az onu yenecek kadar bir kuvvet uygulamak gerekir.

Sürtünme kuvvetini hayatımızın her cephesinde yaşıyoruz. Hatta denilebilir ki sürtünme olmasa canlı hayat olmazdı. Yerde yürüyemez ve elimizle hiçbir şeyi tutamazdık. Öte yandan, pekçok teknoloji sürtünmeyi azaltmakla mümkün olabilmiştir. Örneğin, bir otomobilin motoruna yağ konulmasaydı, araba bir kilometre dahi gidemeden silindir ve pistonları değiştirmek gerekirdi.

Sürtünme kuvveti de, normal kuvvet gibi, bir yüzeyle temas halinde ortaya çıkar. Her ikisi de **temas kuvvetleri** denilen türden kuvvetlerdir. Kitap ile ma-



Şekil 4.8: Sürtünme kuvveti yüzeylerin pürüzlü oluşundan kaynaklanır.

sanın temasta olan arakesit yüzeylerine bir mikroskopla bakacak olursak, mükemmel cilalı dahi olsalar, atomik ölçekte pürüzler gözleriz. Bu engebeli yüzeylerin uçlarındaki atomlar veya kimyasal kırık bağlar hemen orada etkileşir ve neredeyse zayıf bir kaynak yaparlar. Cisim harekete başlasa dahi, bu bağlar yol boyunca hemen oluşur ve sonra koparlar. Böylece hareketi engelleyici bir etki oluşur.

Sıvı ve gazlarda da hareketi engelleyici birer kuvvet oluşur. Bunların karakteri daha farklıdır. Burada sadece katı yüzeyler arasındaki sürtünme kuvveti ile ilgileneceğiz.

Yapılan deneyler sürtünme kuvvetinin şu özelliklerini ortaya koymuştur:

- Cismin hangi yüzü temasta olursa olsun, hepsi aynı pürüzlükte ise, sürtünme kuvveti yaklaşık aynı olur.
- Cismin hızı ne olursa olsun, sürtünme kuvveti yaklaşık aynı olur.
- Yüzey üzerinde duran cisim harekete başladıktan sonra sürtünme kuvvetinin maksimum değeri biraz azalır. Buna göre **statik sürtünme kuvveti** ve **kinetik sürtünme kuvveti** farklıdır.
- Cisme uyguladığımız kuvveti giderek artıralım. Sürtünme kuvveti de bunu dengeleyecek kadar zıt yönde artar, ta ki maksimum bir değere ulaşıncaya kadar. *Sürtünme kuvvetinin maksimum değeri yüzeydeki normal kuvvetle orantılı olur:*

$$f_{\max} = \mu N \tag{4.10}$$

Buradaki boyutsuz orantı katsayısı μ, iki yüzey arasındaki sürtünme katsayısı olup, sürtünen yüzeylerin cinsine ve pürüzlülük derecesine bağlıdır. Hareket eden cisimler için **kinetik sürtünme katsayısı** μ_k, hareketsiz cisimler için de **statik sürtünme katsayısı** μ_s tanımlanır:

$$\begin{aligned} 0 \le f_s \le \mu_s N \quad & \text{(cisim hareketsiz ise)} \\ f_k = \mu_k N \quad & \text{(cisim hareketli ise)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Bazı yüzeyler arasında ölçülen statik ve kinetik sürtünme katsayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Bazı yüzeylerin sürtünme katsayıları

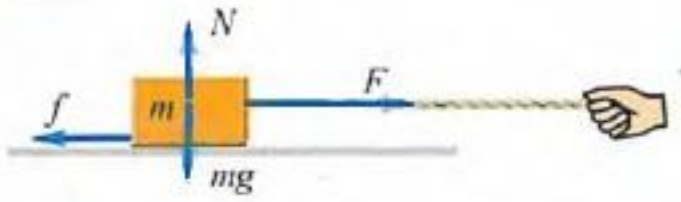
Yüzey	Statik sürtünme, μ_S	Kinetik sürtünme, μ_K
Tahta–tahta	0.35	0.30
Çelik–çelik	0.80	0.50
Çelik–buz	0.1	0.05
Lastik–kuru asfalt	1.0	0.8
Lastik–yaş asfalt	0.7	0.5



Şekil 4.9: Kömür yığınlarının eğim açısı sürtünme kuvvetine bağlıdır. Yağmurda ıslanırsa değişebilir.

Bu değerler yaklaşıktır, her malzemenin pürüzlü veya ıslak oluşuna göre değerleri değişebilir. Bu yüzden, bu kitaptaki problemlerde statik veya kinetik ayırımı yapılmadan sadece μ katsayısı kullanılacaktır.

Örnek 4.3



$m = 3\,\text{kg}$ kütleli bir cisim yatay bir düzlem üzerindedir. Cisimle düzlem arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları eşit olup $\mu = 0.5$ değerindedir.

(a) *Bu cisme yatay $F_1 = 12\,\text{N}$ kuvveti uygulanıyor. Sürtünme kuvveti ne kadardır?*

(b) *Bu kez yatay $F_2 = 18\,\text{N}$ luk bir kuvvet uygulanıyor. Cismin ivmesi ne kadar olur?*

Çözüm

Cisme etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Düşey doğrultuda sadece W ağırlığı ve N tepki kuvveti olduğundan $N = W = mg$ olur. Buna göre, önce sürtünme kuvvetinin maksimum değeri hesaplanır:

$$f_{\max} = \mu N = \mu mg = 0.5 \times 3 \times 10 = 15\,\text{N}$$

(a) $F_1 = 12\,\text{N}$ kuvveti sürtünme kuvvetinin maksimum değerinden küçüktür. O halde, sürtünme kuvveti F yi tamamen karşılar ve cisim hareket edemez:

$$f = 12\,\text{N}$$

(b) $F_2 = 18\,\text{N}$ kuvveti sürtünme kuvvetinin maksimum değerinden büyük olduğu için cisim hareket eder. Hareket sırasında sürtünme kuvveti maksimum değerdedir:

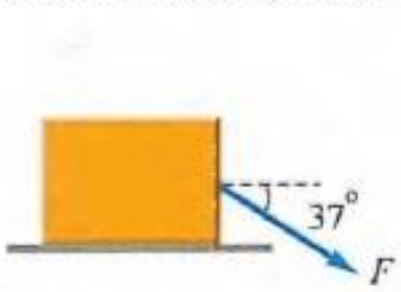
$$f = f_{\max}$$

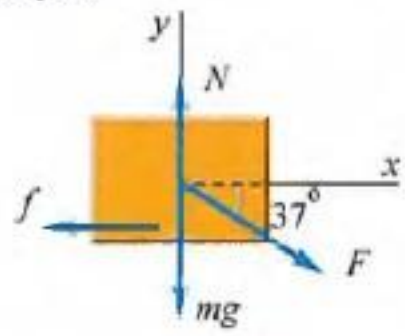
İkinci yasayı kullanarak ivmeyi buluruz:

$$F_{\text{net}} = ma \;\rightarrow\; F_2 - f = ma$$
$$18 - 15 = 3a \;\rightarrow\; a = 2\,\text{m/s}^2$$

Örnek 4.4

$m = 3\,\text{kg}$ kütleli bir cisim yatay bir düzlem üzerindedir. Cisimle düzlem arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları eşit olup $\mu = 0.3$ değerindedir. Bu cisme yatayın altında $37°$ açı yapan $F = 20\,\text{N}$ kuvveti uygulanıyor. Normal tepki kuvvetini ve cismin ivmesini hesaplayın.





Çözüm

Cisme etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. İkinci yasayı bileşenler cinsinden yazarsak,

$$F_{x,\text{net}} = F\cos 37° - f = ma$$
$$F_{y,\text{net}} = N - F\sin 37° - mg = 0$$

İkinci denklemden N tepki kuvveti hesaplanır:

$$N = mg + F\sin 37° = 30 + 20\,0.6 = 42\,\text{N}$$

Şimdi, hareket olup olmayacağını tayin etmek gerekir. Bu amaçla, uygulanan kuvvetin hareket yönündeki $F\cos\theta$ bileşeni ile sürtünme kuvvetinin maksimum değerini karşılaştırmak gerekir:

$$F\cos 37° = 20 \times 0.8 = 16\,\text{N}$$
$$f = \mu N = 0.3 \times 42 = 12.6\,\text{N}$$

$F\cos\theta > f$ olduğundan cisim hareket edecektir. Yukarda ikinci yasanın x-bileşeni için yazdığımız ifadede bu değerleri kullanarak ivmeyi buluruz:

$$F\cos 37° - f = ma \;\rightarrow\; 16 - 12.6 = 3a$$
$$a = 1.1\,\text{m/s}^2$$

Örnek 4.5

$37°$ eğimli bir düzlem üzerine $m = 5\,\text{kg}$ kütlesi konulmuştur. Eğik düzlemle cisim arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları eşit olup $\mu = 0.2$ değerindedir.

(a) *Cisim üzerine etkiyen kuvvetleri bir şekil üzerinde gösterin.*

(b) *Sürtünme kuvveti ne kadardır? Buna göre, cisim hareket eder mi? Ederse ivmesi ne kadar olur?*





Çözüm

(a) Cisme etkiyen üç kuvvet şekilde gösterilmiştir. Bunlardan N tepki kuvveti eğik düzleme diktir. Cisim aşağı yöne kaymak isteyeceği için, sürtünme kuvveti f eğik düzlemin yukarısı yöndedir.

Koordinat eksenlerinden x-ekseni eğik düzlem boyunca, ve hareket yönünde, yani aşağı yönde alınır. y-ekseni eğik düzleme dik alınır.

(b) Önce, sürtünme kuvvetini normal tepki kuvvetinden bulmak üzere, 2. yasanın y-bileşeni yazılır.

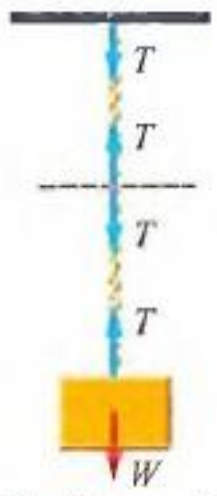
$$F_{y,\text{net}} = N - mg\cos 37° = 0 \;\rightarrow\; N = mg\cos 37°$$
$$f_{\max} = \mu N = \mu mg\cos 37° = 0.2 \times 5 \times 10 \times 0.8 = 8\,\text{N}$$

Cismi hareket ettirecek olan kuvvet ağırlığın eğik düzlem boyunca bileşenidir:

$mg\sin 37° = 50 \times 0.6 = 30\,\text{N} > f_{\max}$ olduğu için cisim hareket eder.

İvmeyi bulmak için 2. yasanın x-bileşeni kullanılır:

$$F_{x,\text{net}} = mg\sin 37° - f = ma \;\rightarrow\; 30 - 8 = 5a$$
$$a = 4.4\,\text{m/s}^2$$



Şekil 4.10: İpte gerilme kuvveti.

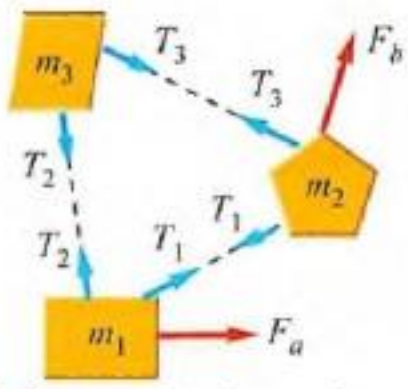
İplerde Gerilme Kuvveti

İp, kablo veya tel gibi **bükülebilen** cisimler tarafından uygulanan kuvvet türüne **gerilme kuvveti** adı verilir. Gerilme kuvvetinin en önemli özelliği cismi sadece çekebiliyor olmasıdır. Bir iple cisimleri itemezsiniz.

Bükülebilir, fakat esnek olmayan bir ipin ucuna m kütleli bir cisim bağlayıp tavana asalım. Bu cisim ivmelenmediğine göre, ağırlık kuvvetine eşit ve zıt yönde bir $\vec{T}$ gerilme kuvveti tarafından dengeleniyor demektir: $T=mg$. İkinci bir kütle daha ilave edildiğinde, bu kez gerilme kuvveti bu ikisinin ağırlığına eşit olur. O halde gerilme kuvveti, ip kopmadığı sürece, daima dengeyi sağlayacak miktarda çekici bir kuvvet uygular.

Şimdi, ipin tavana asılı ucuna doğru ilerleyelim. İpin herhangi bir kesitindeki alt ve üst parçalar, 3. yasaya göre, birbirlerini eşit ve zıt bir gerilme kuvvetiyle çekerler. Buradaki gerilme kuvveti cismin bağlandığı alt uçtaki değerine genellikle eşit olmaz. Çünkü, ipin de bir kütlesi vardır ve bu gerilme kuvveti her defasında, (asılı cisim+altta kalan ip) toplamının ağırlığına eşit olur.

Fakat, ipin kütlesi ihmal edilebilecek kadar küçükse, her kesitte aynı $T=mg$ değerinde kalır ve böylece tavana vardığımızda, bu uçtaki gerilme kuvveti de T kadar olur. O halde, **kütlesi sıfır olan ipin iki ucundaki gerilme kuvveti aynıdır.** İp hareketli olsa dahi iki uçtaki gerilmeler aynı kalır.



Şekil 4.11: 3 kütleye etkiyen iç ve dış kuvvetler.

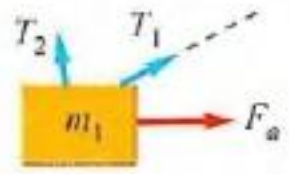
Serbest-Cisim Diyagramları

Dinamikte ele alınan sistemi açıkça belirtmek önemlidir. Çok sayıda kuvvet çok sayıda kütleye etki ediyorsa, bu kuvvetler daha baştan iki gruba ayrılırlar:

1. **İç kuvvetler:** Ele alınan sistemin içindeki kütlelerin birbirine uyguladığı kuvvetlerdir. 3. Newton yasasına göre, bu kuvvetler daima çift olarak yer alırlar. Bunlar denklemlerde yer alamazlar, çünkü hem artı hem de eksi işaretli olup birbirlerini götürürler.
2. **Dış kuvvetler** Sistemin dışından kaynaklanan kuvvetlerdir.

Konuyu daha iyi anlayabilmek için, yandaki şekilde m_a, m_b, m_c kütlelerine etkiyen kuvvetleri gözönüne alalım:

- Örneğin, sistem olarak sadece m_1 kütlesini gözönüne alıyorsak, buna etkiyen kuvvetler (T_1, T_3, F_a) hepsi birer dış kuvvettir.
- Sistem olarak $(m_2 + m_3)$ kütlelerini birlikte gözönüne alıyorsak, bu kez dış kuvvetler (T_1, T_3, F_b) olur, ama T_2 kuvveti şimdi bu sistemin iç kuvvetidir.
- Eğer, sistem $(m_1 + m_2 + m_3)$ kütlesi ise, bu kez sadece F_a ve F_b dış kuvvet olurlar, kütlelerin birbirine uyguladığı (T_1, T_2, T_3) kuvvet çiftleri birer iç kuvvet olurlar ve denklemlerde yer alamazlar.



Şekil 4.12: m_1 kütlesinin serbest-cisim diyagramı.

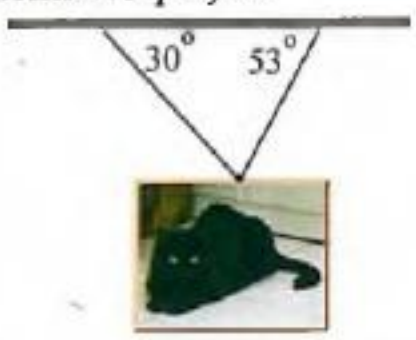
Bir sisteme etkiyen tüm dış kuvvetleri hesaba kattıktan sonra, onu yalnız başına gösterebiliriz. Buna **serbest-cisim diyagramı** denir. Örneğin, yine aynı üç kütleli sistemde m_1 kütlesine etkiyen T_1, T_3, F_a kuvvetlerini gösterdikten sonra, artık diğer kütleleri göstermeye gerek yoktur, çünkü onların etkilerini hesaba katmışızdır.

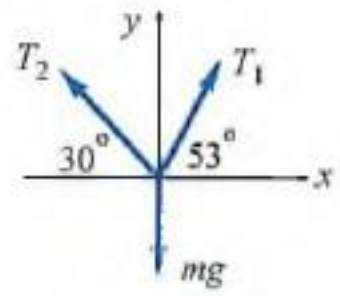
4.3 NEWTON YASALARI UYGULAMALARI

Bu kısımda Newton yasalarını kullanarak, cisimlere etkiyen muhtelif kuvvetlerin etkisi altında oluşabilecek hareket problemlerini örnekler üzerinde ele alacağız.

Örnek 4.6

Kütlesi $m = 5\,\text{kg}$ olan bir tablo şekilde açıları verilen iki iple tavana asılarak dengede tutuluyor. İplerdeki gerilim kuvvetlerini hesaplayın.





Çözüm

Herbir ip kendi doğrultusunda ve cismi çekici yönde bir gerilme kuvveti uygular. Bu kuvvetler şekilde T_1 ve T_2 olarak gösterilmiştir. Cisim dengede olduğu için 1. yasayı uygularız:

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0$$

Bu eşitlik bileşenler için de geçerli olur:

$$F_{x,\text{net}} = 0 \;\rightarrow\; T_1 \cos 53° - T_2 \cos 30° = 0$$

$$F_{y,\text{net}} = 0 \;\rightarrow\; T_1 \sin 53° + T_2 \sin 30° - mg = 0$$

Bu iki denklemden T_1 ve T_2 bulunur:

$T_1 = 44\,\text{N}$ ve $T_2 = 30\,\text{N}$.

Örnek 4.7

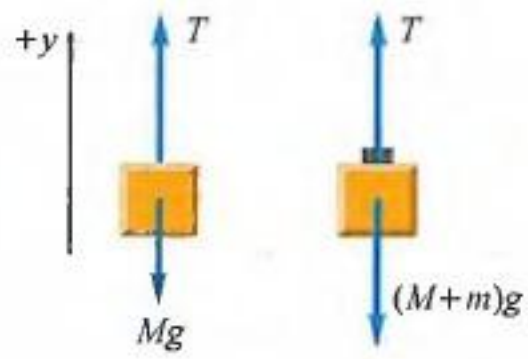
Atwood aleti. *Şekildeki iki eşit $M = 10\,\text{kg}$ kütleleri bir makaradan geçirilen ipin iki ucuna asılmışlardır. Makara sürtünmesiz ve ipin kütlesi önemsizdir. Kütlelerden biri üzerine ilave küçük bir $m = 1\,\text{kg}$ kütlesi konuluyor.*

(a) *Her iki cisme uygulanan kuvvetleri bir şekilde gösterin. (Makaraya uygulanan kuvvetleri göstermenize gerek yoktur.)*

(b) *Kütlelerin herbirini ayrı inceleyip, ivmeyi ve ipteki gerilmeyi veren denklemleri bulun.*

(c) *Bu denklem sistemini çözüp a ivmesini hesaplayın.*





Çözüm

İpin iki ucundaki gerilme kuvvetleri eşit alınır, çünkü ipin kütlesi önemsiz ve makara sürtünmesiz alınmıştır. Ayrıca, ip esnek olmadığı için her noktasının ivmesi aynıdır. Yani, iki kütle aynı a ivmesiyle hızlanacaktır.

Buna göre, herbir cismin üzerindeki ağırlık ve gerilme kuvveti şekilde gösterilmiştir.

Problem 1 boyutludur. İkinci yasayı düşey doğrultuda, herbir kütleye kendi hareketi yönünde uygularız:

$(M + m)$ kütlesi: $\quad (M + m)g - T = (M + m)a$

M kütlesi: $\quad T - Mg = Ma$

Bu iki denklem çözülerek a ivmesi ve T gerilmesi bulunur:

$$a = 0.5\,\text{m/s}^2 \text{ ve } T = 105\,\text{N}$$

Not: Bu düzenek asansör ve füniküler işletiminde kullanılır. Küçük bir m kütlesi ile daha büyük M kütlesi kolayca ivmelendirilebilir. Eğer, M kütlesini aynı a ivmesiyle tek başına yukarı çekmeye kalksaydık, buradaki mg kuvvetinden çok daha büyük bir F kuvveti kullanmak zorunda kalırdık.

Örnek 4.8

Sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerindeki $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütleleri bir iple birbirlerine bağlanmışlardır. m_1 kütlesine yatay $F = 5\,\text{N}$ kuvveti uygulanıyor.



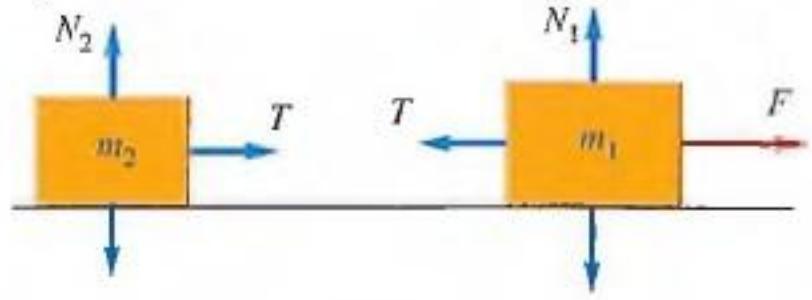
(a) *Bir şekil çizerek, herbir kütlenin serbest-cisim diyagramlarını gösterin.*

(b) *m_1 ve m_2 kütlelerini ayrı ayrı ele alarak, ivmeyi ve ipteki gerilmeyi bulun.*

(c) *İki kütleyi birlikte ele alıp, $(m_1 + m_2)$ sisteminin ivmesini hesaplayın.*

Çözüm

(a) İpin iki ucunda yine kütleleri çekici yönlerde, eşit ve zıt T gerilme kuvvetleri vardır. Düşey doğrultuda normal tepki kuvvetleri ağırlıkları dengeler. Kuvvetler şekilde gösterilmiştir.



(b) Herbir kütle için, hareket yönünde ikinci yasa yazılır (Sürtünme olmadığı için, düşey yöndeki ifadeleri yazmaya gerek yoktur):

m_1 kütlesi: $\quad F - T = m_1 a \qquad 5 - T = a$

m_2 kütlesi: $\quad T = m_2 a \qquad T = 2a$

Buradan ivme ve gerilme kuvveti bulunur:

$$a = 1.7\,\text{m/s}^2 \text{ ve } T = 3.3\,N$$

(c) Bu problem iki kütleyi birlikte ele alarak da çözülebilir. Bu, ivmeler aynı olduğu için mümkündür. İki kütleli sistemde ipteki gerilme kuvveti iç kuvvet olur, yani etki-tepki

eşit olduğundan denklemde, hem T hem de $-T$ olarak yer alacağından, sonuçta görünmez. Buna göre, toplam sistemin ivmesi sadece F kuvvetinden kaynaklanır:

$$F = (m_1 + m_2)a \quad \rightarrow \quad a = 5/3 = 1.7\,\text{m/s}^2$$

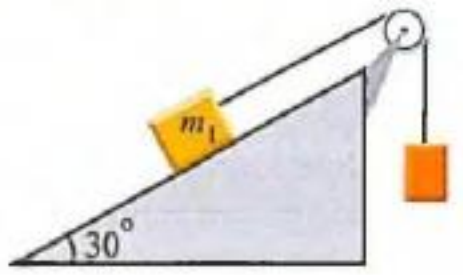
Toplam sistemde T gerilmesini bulmak mümkün değildir, mutlaka kütlelerden birini ayrı incelemek gerekir.

Örnek 4.9

Sürtünmesiz ve 30° eğimli bir eğik düzlem üzerindeki m_1 = 7 kg kütlesi makaradan geçen ipin bir ucuna bağlıdır. İpin diğer ucuna m_2 = 5 kg kütlesi asılmıştır.

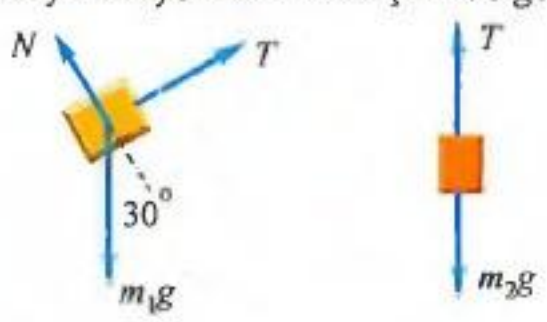
(a) *Hareket yönünü tayin edin.*

(b) *m_1 ve m_2 kütleleri için ayrı ayrı hareket denklemlerini yazın. İvmeyi ve ipteki gerilme kuvvetini hesaplayın.*



Çözüm

(a) Her iki kütleye etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir.



Sisteme bir bütün olarak bakarsak, bir yandan m_2g ağırlığı m_2 kütlesini aşağı çekmek isteyecek, diğer yandan m_1 kütlesinin eğik düzleme paralel olan ağırlık bileşeni $m_1 g \sin\theta$ onu aşağı çekmek isteyecektir.

Bu kuvvetlerden hangisinin galip geldiğini hesaplayalım:

$$m_2 g = 5 \times 10 = 50\,\text{N}$$

$$m_1 g \sin 30 = 7 \times 10 \times 0.5 = 35\,\text{N}$$

$m_2 g > m_1 g \sin\theta$ olduğu için hareket, m_2 için aşağı yönde ve m_1 için eğik düzlemden yukarı yönde olacaktır.

(b) Sürtünme olmadığı için ikinci yasayı sadece hareket yönündeki bileşen için yazmak yeterlidir.

$$m_1 \text{ için}: \quad T - m_1 g \sin\theta = m_1 a \qquad T - 35 = 7a$$

$$m_2 \text{ için}: \quad m_2 g - T = m_2 a \qquad 50 - T = 5a$$

Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa a ivmesi bulunur:

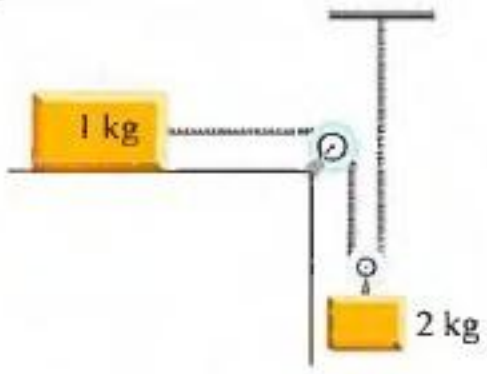
$$50 - 35 = 12a \quad \rightarrow \quad a = 1.25\,\text{m/s}^2$$

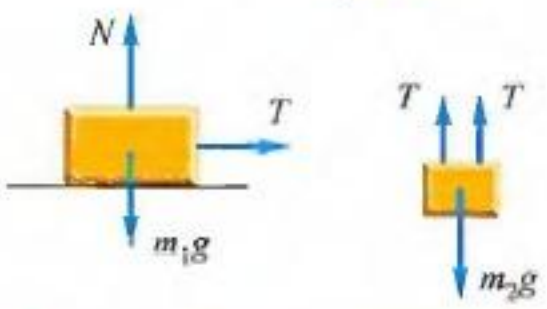
Bu a değerini iki denklemden birinde kullanıp T gerilmesini buluruz:

$T = 44\,\text{N}$ olur.

Örnek 4.10

Şekilde gösterilen ipin kütlesi sıfır, yüzeyler ve makara sürtünmesizdir. **(a)** *Kütlelerin serbest cisim diyagramlarını çizin.* **(b)** *İvmeler arasındaki ilişki nedir?* **(c)** *İvmeleri ve ipteki gerilmeyi hesaplayın.*





Çözüm

(a) Bu problemde kütlelerin ivmeleri farklıdır. Herbirine etkiyen kuvvetler yandaki şekilde gösterilmiştir:

(b) Makaraya bağlı olan m_2 kütlesinin ivmesi daha küçük olacaktır, çünkü aşağı doğru inerken ipin bir kısmını diğer tarafa aktarır. İvmeler arasındaki ilişkiyi bulmak için şöyle düşünelim: m_1 kütlesi 1 m sağa gittiğinde m_2 kütlesi ne kadar aşağı iner? Cevap 1/2 m dir. O halde, ilişki şöyle olur:

$$a_1 = 2a_2$$

(c) Herbir kütlenin kendi hareket yönünde ikinci yasayı yazarız:

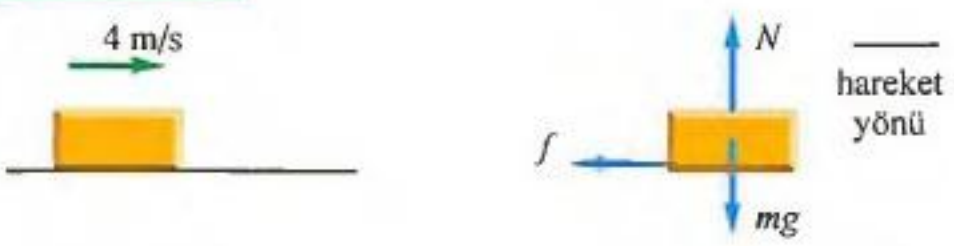
$$m_1 \text{ için}: \quad T = m_1 a_1 \qquad \rightarrow \qquad T = a_1$$

$$m_2 \text{ için}: \quad 2T - m_2 g = m_2 a_2 \quad \rightarrow \quad 2T - 20 = 2a_2$$

Bu iki denklemde 3 bilinmeyen vardır: a_1, a_2, T. Çözüm için gerekli üçüncü bağıntı (b) şıkkında bulduğumuz, ivmeler arasındaki $a_1 = 2a_2$ ilişkisidir. Bu üç denklem çözülürse, sonuçlar şöyle olur:

$$a_1 = 6.7\,\text{m/s}^2,\ a_2 = 3.3\,\text{m/s}^2 \quad \text{ve} \quad T = 6.7\,\text{N}.$$

Örnek 4.11



Kütlesi m olan bir blok 4 m/s hızla, sürtünmeli yatay bir düzleme paralel fırlatılıyor. Blok ne kadar gittikten sonra durur? Yüzeyler arasında sürtünme katsayısı $\mu = 0.25$ tir.

Çözüm

Bu problemde cisme hareket yönünde etkiyen kuvvet yok-

tur, sadece ilk hızı dolayısıyla hareket eder, fakat ters yönde etkiyen f sürtünme kuvveti yüzünden yavaşlar. Cisme etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir.

Hareket denklemlerini yazalım:

$F_{x,\text{net}} = ma \;\rightarrow\; -f = ma$

$F_{y,\text{net}} = 0 \;\rightarrow\; N - mg = 0$

Sürtünme kuvveti $f = \mu N = \mu mg$ olarak yerine konulursa, yavaşlatıcı a ivmesi negatif işaretli bulunur:

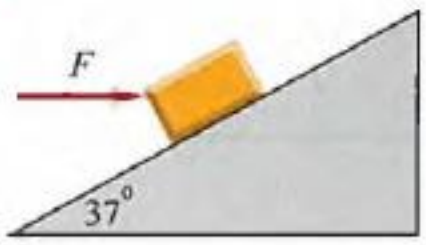
$$a = -\mu g = -0.25 \times 10 = -2.5\,\text{m/s}^2$$

Kinematikten bildiğimiz zamansız hız formülünden, durunca kadar ($v = 0$) alınan yol bulunur:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \;\rightarrow 0 - 4^2 = 2(-2.5)x$$

$$x = 3.2\,\text{m}.$$

Örnek 4.12



$m = 1\,\text{kg}$ lık kütle, sürtünme katsayısı $\mu = 0.3$ ve eğim açısı $37°$ olan eğik bir düzlem üzerine konulmuştur. $F = 20\,\text{N}$ kuvveti cisme yatay doğrultuda etkiyor. **(a)** *Cisim hangi yönde gider? Buna göre, cisme etkiyen kuvvetleri şekil çizip gösterin.* **(b)** *Cismin ivmesini hesaplayın.*

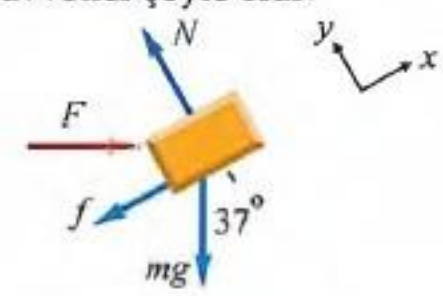
Çözüm

(a) Cismin hangi yöne gideceğini tayin etmeden sürtünme kuvvetinin yönünü bilemeyiz. Eğik düzlem doğrultusunda, cismi aşağı yönde çeken $mg \sin\theta$ kuvvetine karşılık, yukarı yönde iten $F\cos\theta$ kuvveti vardır. Bu ikisini karşılaştıralım:

$$mg \sin 37° = 10 \times 0.6 = 6\,\text{N}$$

$$F\cos 37° = 20 \times 0.8 = 16\,\text{N}$$

$F\cos\theta$ daha büyük olduğundan, cisim yukarı gitmek isteyecektir. Sürtünme kuvveti dolayısıyla hareket edemeyebilir, ama her halükarda aşağı yönde gitmeyecektir. O halde, cisme etkiyen kuvvetler şöyle olur:



(b) x-ekseni eğik düzleme yukarı yönde paralel ve y-ekseni düzleme dik alınırsa, hareket yasaları şöyle olur:

$$F_{x,\text{net}} = ma \;\rightarrow\; F\cos 37° - mg\sin 37° - f = ma$$

$$F_{y,\text{net}} = 0 \;\rightarrow\; N - mg\cos 37° - F\sin 37° = 0$$

Ve sürtünme ile normal kuvvet arasındaki ilişki yazılır:

$$f = \mu N.$$

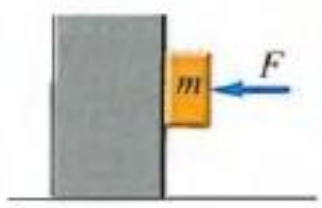
Bu 3 denklem arasında a ivmesi hesaplanır:

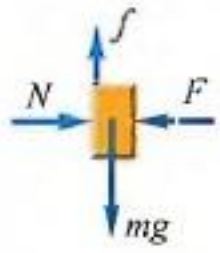
$$a = \frac{(F\cos 37° - mg\sin 37°) - \mu(mg\cos 37° + F\sin 37°)}{m}$$

$$a = 4\,\text{m/s}^2$$

Eğer burada artı ivme çıkmasaydı, cismin hareket etmediği sonucu çıkardı.

Örnek 4.13





Kütlesi $2\,\text{kg}$ olan bir blok, bir duvara yatay yönde $F = 30\,\text{N}$ kuvvetiyle bastırılırken aşağı doğru kayabiliyor. Blok ile duvar arasında sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ tir. Bloğa etkiyen kuvvetleri gösterin ve ivmesini bulun.

Çözüm

Bu problem yüzey tepki kuvvetinin her zaman mg ye eşit olmadığını çok güzel gösterir. Yüzey tepki kuvveti, yüzeye dik olan tüm kuvvetleri karşılayan kuvvettir. Bu problemde mg nin yüzeye dik bileşeni yoktur, sadece F kuvveti vardır. O halde,

$$N - F = 0 \;\rightarrow\; N = F = \text{olur.}$$

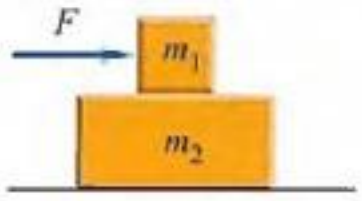
Cisim sadece aşağı yönde hareket edebilir. Bu yönde hareket denklemi yazılırsa,

$$mg - f = ma$$

olur. Yine, sürtünme kuvveti $f = \mu N$ bağıntısıyla tanımlandığı için, $f = \mu F$ olur. bu iki denklem arasından a ivmesi bulunur:

$$a = (mg - \mu F)/m = (20 - 0.5 \times 30)/2 = 2.5\,\text{m/s}^2.$$

Örnek 4.14

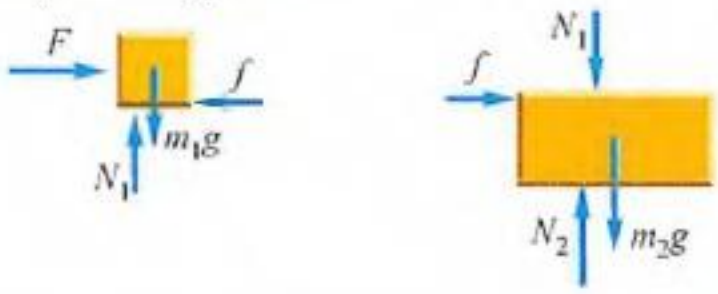


Şekilde gösterilen $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütleli bloklar arasındaki yüzeyin sürtünme katsayısı $\mu = 0.3$ tür. Alttaki m_2 bloğu ile yatay düzlem arası sürtünmesizdir. m_1 bloğuna yatay F kuvveti uygulanıyor. (a) Bloklara etkiyen kuvvetleri birer şekilde gösterin. (b) İki bloğun birbiri üzerinde kaymadan, birlikte gidebilecekleri maksimum ivme ne kadardır? (c) Bu maksimum ivmeyi sağlayan F kuvveti ne kadar olur?

Çözüm

(a) Bu örnek sürtünmenin her zaman harekete zıt olmadığını, bazen harekete yardımcı olabildiğini gösterir. Sürtünme

sadece iki blok arasındadır. m_1 kütlesi alttakine göre sağa hareket etmek isteyeceği için, onu engelleyici $(-f)$ kuvveti sola doğru olur. Fakat, 3. yasaya göre, buna eşit ve zıt bir f kuvveti de alttaki bloğa etki eder. Bu zıt f kuvveti m_2 kütlesini hareket ettirici kuvvettir. O halde, cisimlere etkiyen kuvvetler şekildeki gibi olurlar.



(b) Alttaki bloğun hareket denklemini yazalım:

$$f = m_2 a$$

Bu f sürtünme kuvvetinin bir maksimum değeri vardır: $f_{max} = \mu N_1 = \mu m_1 g$. Alttaki kütleye hareket yönünde etkiyecek maksimum kuvvet budur. Buradan a ivmesi bulunur:

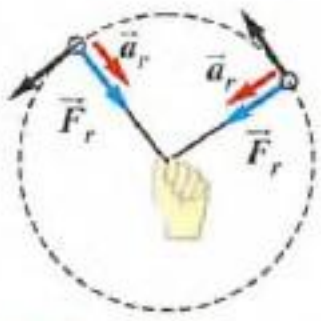
$$\mu m_1 g = m_2 a \;\rightarrow\; a = (m_1/m_2)\mu g = 0.5 \times 0.3 \times 10 = 1.5\,\text{m/s}^2$$

O halde, iki kütlenin ortak gidebilecekleri maksimum ivme $a = 1.5\,\text{m/s}^2$ olur.

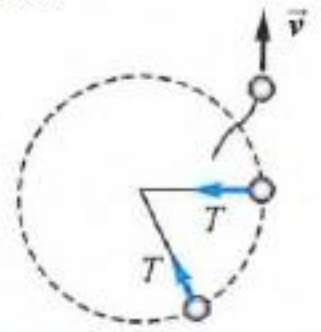
(c) Bu maksimum ivmeyi üstteki m_1 bloğu için de kullanıp maksimum F kuvvetini buluruz:

$$F - f = m_1 a \;\rightarrow\; F = \mu m_1 g + m_1 a = 4.5\,\text{N}.$$

4.4 DAİRESEL HAREKET



Şekil 4.13: Merkezcil ivmeyi sağlayan merkezcil bir kuvvet olmalıdır.



Şekil 4.14: Merkezcil ivmeyi sağlayan kuvvet ortadan kalkarsa ne olur?

Bölüm 3 te dairesel hareketi incelemiş ve r yarıçaplı daire çevresinde sabit v hızıyla dönen bir cismin üzerinde *daima merkeze yönelik* bir a_r merkezcil ivmesi olacağını görmüştük:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(merkezcil ivme)} \qquad (4.12)$$

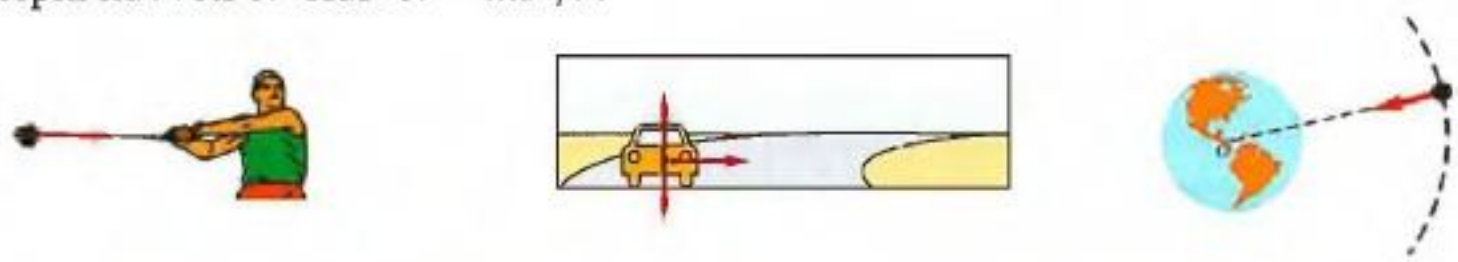
İkinci yasaya göre cisim üzerinde, bu ivmeyle aynı yönde, yani merkeze yönelik bir F_r kuvveti etkiyor olmalıdır:

$$F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{(merkezcil kuvvet)} \qquad (4.13)$$

F_r ile gösterilen bu **merkezcil kuvvet** yeni bir kuvvet çeşidi değildir, sadece radyal doğrultudaki kuvvetlerin toplamıdır. Bu, çeşitli yollarla sağlanıyor olabilir. Örneğin, bir ipin ucuna bağlanıp yatay düzlemde döndürülen cisim için, merkezcil kuvvet T gerilmesi olur ve $F_r = T = mv^2/r$ yazılır.

Cisim sabit hızla dönerken bu kuvvete gerek var mı, diye düşünülebilir. Merkezcil kuvvet olmasaydı, cisim düzgün doğrusal hareket yapardı. Nitekim, cisim dönerken aniden ipin koptuğunu düşünelim. O andan itibaren cisim doğrusal bir yörüngede gidecektir, çünkü dönmeyi sağlayan T gerilmesi artık yoktur.

Bir virajı dönen arabada merkezcil kuvveti tekerleklerdeki sürtünme kuvveti oluşturur. Keza, raylı bir çemberin içinde dönen cisim için bu, rayların normal tepki kuvveti N olur: $N = mv^2/r$.



Şekil 4.15: Merkezcil kuvvet örnekleri.

Diğer bir örnek gezegenlerin Güneş çevresindeki hareketini sağlayan kütle çekim kuvvetidir. Örneğin, Dünya çevresinde r yarıçaplı dairesel yörüngede dönen m kütleli bir uydu için, kütle çekim kuvvetini kullanırsak,

$$F_r = G\frac{M_E m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

olur. Bu eşitlikten hangi yükeklikteki uydunun hangi hızla döndüğü bulunabilir.

Burada çok yaygın bir yanlışı düzeltelim: Bazı kitaplarda *merkezkaç kuvveti* adı altında, merkezden dışarı doğru bir kuvvetin varlığından sözedilmektedir. Öğrenci de bunu sezgileriyle kolayca kabul edebilmektedir. Öyle ya, "otobüs virajı dönerken beni dışarı yöne savuran bir kuvvet var," açıklaması makul görünüyor, değil mi?

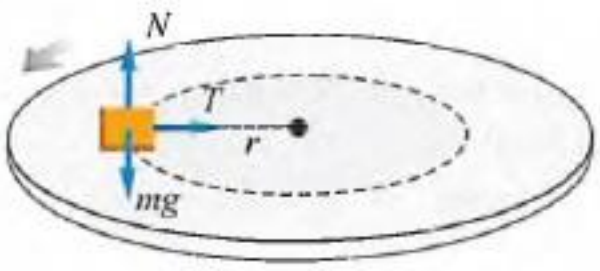
Bu düşünce tarzı kesinlikle yanlıştır. Doğru yorum şudur: "*Dışarı savruluyor değiliz, otobüs dairesel yörüngeye girdiğinde, eğer bir yere tutunmuyorsak, düzgün doğrusal hareket boyunca gitmeye devam ederiz. Aslında, içeri doğru dönen otobüsün duvarı bize yaklaşmaktadır.*" İkna olmak için şöyle düşünün: Otobüs dönerken bir tutma koluna yapıştığınızda, kol size hangi yönde kuvvet uygulamaktadır? Elbette, merkeze doğru.

Merkezkaç kuvvet kavramı bazı problemleri statik gibi çözmek üzere düşünülmüş bir tekniktir. Dönen cisim üzerindeki bir gözlemciye göre tüm kuvvetleri yazarken, dışarı yönde $-mv^2/r$ kadar bir kuvvet eklenerek, cisim hareketsizmiş gibi tüm kuvvetler sıfıra eşitlenir. Ama bunun gerçekle bir alakası yoktur. Çünkü, dönen cisimdeki gözlemci eylemsiz referans sistemi oluşturmaz, Newton yasaları orada geçerli değildir. O halde, merkezkaç kuvveti terimini kullanmaktan kaçınmalıyız.

Örnek 4.15

Sürtünmesiz yatay bir düzlemde 80 cm *uzunluktaki bir ipin ucunda sabit hızla dönen* $m = 200$ g *kütleli blok 3 dakikada 500 devir yapmaktadır.*

Bloğun merkezcil ivmesini ve ipteki gerilme kuvvetini hesaplayın.



Çözüm

Merkeze yönelmiş hangi kuvvet varsa dairesel hareketi o sağlar. Şekilde görüldüğü gibi, cismin ağırlığı ve düzlemin N tepki kuvvetinin merkeze yönelik bileşenleri yoktur, sadece T gerilmesi vardır. O halde,

$$F_r = ma_r \quad \rightarrow \quad T = m\frac{v^2}{r}.$$

Önce v hızı hesaplanır. r yarıçaplı dairesel yörüngede bir tur $2\pi r$ uzunlukta olacağı için, toplam yol toplam zamana bölünür:

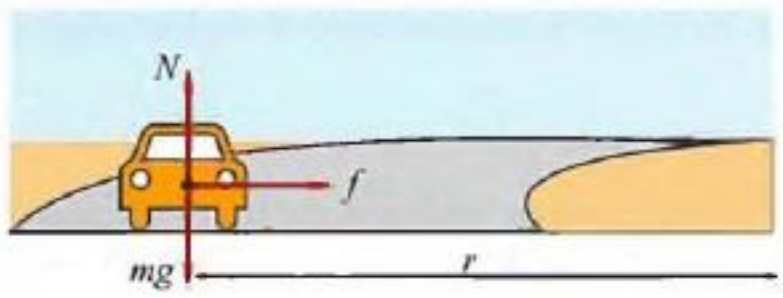
$$v = \frac{\text{alınan yol}}{\text{geçen zaman}} = \frac{500 \times 2\pi \times 0.80\,\text{m}}{3 \times 60\,\text{s}} = 14\,\text{m/s}$$

Buradan merkezcil ivme ve ipteki gerilme hesaplanır:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{14^2}{0.8} = 245\,\text{m/s}^2.$$

$$T = ma_r = 0.2 \times 245 = 49\,\text{N}.$$

Örnek 4.16



(a) *Kütlesi* 1200 kg *olan bir otomobil* $r = 200$ m *yarıçaplı yatay ve dairesel bir virajı* 72 km/saat *hızıyla dönmektedir. Tekerlekler ile yol arasındaki sürtünme kuvveti ne kadardır?*

(b) *Bu yoldaki sürtünme katsayısı* $\mu = 0.8$ *ise, otomobilin kaymadan dönebileceği maksimum hız ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Şekilde görüldüğü gibi, merkezcil ivmeyi sağlayan f sürtünme kuvvetidir:

$$f = m\frac{v^2}{r} = 1200 \times \frac{(72 \times 1000/3600\,\text{m/s})^2}{200} = 2400\,\text{N}$$

(b) Sürtünme kuvvetinin maksimum değeri $f_{\max} = \mu N$, merkeze yönelmiş maksimum kuvvet demektir. Bunun sağlayacağı merkezcil ivme yazılırsa,

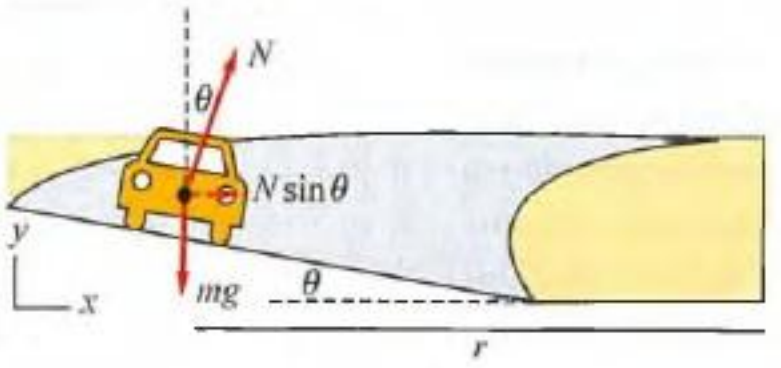
$$\mu mg = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \mu gr \quad \text{olur.}$$

Bu maksimum hız hesaplanır:

$$v = \sqrt{\mu gr} = \sqrt{0.8 \times 10 \times 200} = 40\,\text{m/s} = 144\,\text{km/saat}.$$

Örnek 4.17

Bir otomobil $r = 100\,\text{m}$ yarıçaplı ve yatayla 30° açı yapan sürtünmesiz bir virajı v hızıyla alıyor. Otomobil savrulmadan hangi hızla dönebilir?



Çözüm

Bu kez sürtünme yoktur. O halde, dönmeyi sağlayan merkezcil yöndeki kuvvet hangisidir? Şekilde görüldüğü gibi, yol eğimli olduğu için, düzlemin normal tepki kuvveti N nin merkeze yönelik bir bileşeni oluşur. Dönmeyi sağlayan merkezcil kuvvet budur.

Şekilde gösterilen x- ve y-yönlerinde, hareket denklemleri yazılır:

x- yönünde: $N \sin\theta = mv^2/r$

y- yönünde: $N \cos\theta = mg$

İki denklem taraf tarafa bölünürse,

$$\tan\theta = v^2/gr$$

Buradan maksimum dönme hızı hesaplanır:

$$v = \sqrt{gr \tan 30^\circ} = \sqrt{10 \times 100 \times 0.58}$$

$$v = 24\,\text{m/s} = 87\,\text{km/saat}.$$

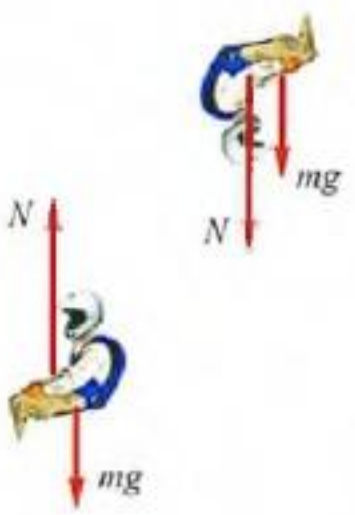
Örnek 4.18

Bir savaş uçağı 2 km yarıçaplı düşey bir dairede 300 m/s hızıyla dönüş yapıyor.

(a) *Uçağın merkezcil ivmesini hesaplayın.*

(b) *m kütleli pilota koltuk tarafından uygulanan normal tepki kuvvetini yörüngenin tepe noktasında ve en alçak noktasında, pilotun mg ağırlığının katları cinsinden hesaplayın.*





Çözüm

(a) Bu problemde merkezcil kuvvet pilotun mg ağırlığı ile koltuğun N normal tepki kuvvetinin bileşkesi olur. (Uçağı döndüren merkezcil kuvvet kanatlarda oluşan kuvvettir, ama bu konumuzun dışındadır.)

(a) Önce merkezcil ivmeyi g nin katı olarak hesaplayalım:

$$a_r = v^2/r = (300^2/2000) = 45\,\text{m/s}^2 = 4.5\text{g}$$

(b) Şekilde görüldüğü gibi, dairenin üst ve alt noktalarında N tepki kuvveti hep merkeze yönelik, fakat mg ağırlığı üstte merkeze yönelik olduğu halde, altta merkez dışına doğrudur. O halde, merkeze yönelik bileşke kuvvet her iki durumda yazılır:

Üstte: $N + mg = ma_r \rightarrow N = ma_r - mg = 4.5mg - mg$

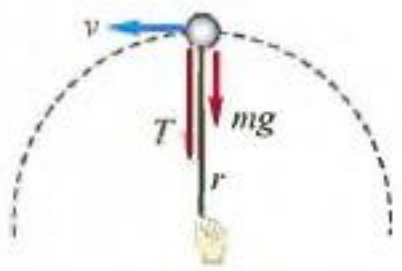
$$N = 3.5mg$$

Altta: $N - mg = ma_r \rightarrow N = ma_r + mg = 4.5mg + mg$

$$N = 5.5mg$$

Görüldüğü gibi, pilotun manevrasında en zorlandığı yer dairenin alt noktasıdır

Örnek 4.19



Bir taş r uzunluğunda bir ipin ucunda düşey bir dairede döndürülüyor. En tepedeki noktadan geçerken ipin gevşememesi için taşın oradaki hızı ne olmalıdır?

Çözüm

Taşın dairesel hareketinin tepe noktasında hem mg ağırlığı, hem de ipin T gerilmesi merkeze yönelik olurlar.

O halde, merkezcil kuvvet bu ikisinin toplamından oluşmalıdır:

$$mg + T = m\frac{v^2}{r}$$

Taşın v hızını giderek azaltırsak ne olur? Bu ifadenin sağ tarafı küçülür. Sol tarafta ağırlık sabit olduğuna göre, T gerilmesi de azalır. Sonunda öyle bir hıza gelindiğinde $T = 0$ olur, yani artık ip gevşer.

O halde, minimum v hızı $T = 0$ sınırındaki hız olur:

$$mg + 0 = m\frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{gr}$$

Test

1. Bir bisiklet ile bir kamyon kafa kafaya çarpıyor. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Bisiklet üzerindeki kuvvet daha büyüktür.
   (b) Kamyon üzerindeki kuvvet daha büyüktür.
   (c) Her ikisi üzerine uygulanan kuvvet eşittir.
   (d) Hepsi

2. Düşen bir topun zeminden tekrar yukarı yükselmesini sağlayan kuvvet hangisidir?
   (a) Yerçekimi kuvveti
   (b) Ağırlık
   (c) Sürtünme kuvveti
   (d) Normal tepki kuvveti

3. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Durmakta olan araba üzerindeki net kuvvet sıfırdır.
   (b) Sabit hızla giden araba üzerindeki net kuvvet sıfırdır.
   (c) Hızlanan arabanın ivmesi sıfırdır.
   (d) Sabit hızla giden arabanın ivmesi sıfırdır.

4. Bir araba fren yaparak duruyor. Arabayı durduran kuvvet hangisidir?
   (a) Ağırlık
   (b) Sürtünme kuvveti
   (c) Yüzeyin normal tepki kuvveti
   (d) Yerçekimi kuvveti

5. Eğik atışta bir taşın maksimum yüksekliğinde hangisi doğrudur?
   (a) Taş üzerindeki kuvvet sıfırdır.
   (b) Taş üzerinde yatay kuvvet vardır.
   (c) Taş üzerinde yerçekimi ivmesi vardır.
   (d) Taşın ivmesi sıfırdır.

6. Sürtünme kuvvetinin 6 N olduğu bir masa üzerinde, yatay 8 N ile çekilen 2 kg lık bir cismin ivmesi kaç m/s^2 dir?
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

7. Penceresiz bir trende sabit hızla gitmekte yolcular, döşeme üzerinde duran bir topun ileriye doğru yuvarlanmaya başladığını görüyorlar. Aşağıdakilerden hangileri doğru olabilir?
   I. Tren yavaşlıyor olabilir.
   II. Tren hızlanıyor olabilir.
   III. Tren yokuş yukarı çıkıyor olabilir.
   IV. Tren yokuş aşağı iniyor olabilir.
   (a) I ve III (b) I ve IV (c) II ve III (d) II ve IV

8. İki kişi halat çekme oyunu oynuyor. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Daha kuvvetli çeken kazanır.
   (b) Kütlesi büyük olan kazanır.
   (c) Yerde sürtünme kuvveti büyük olan kazanır.
   (d) Hiçbiri.

9. Newton yasaları hangi gözlemciler için geçerli değildirler?
   (a) Duran gözlemciler
   (b) Düzgün doğrusal hareketli gözlemciler.
   (c) İvmeli gözlemciler.
   (d) Hepsi.

10. Kablosu koptuğunda serbest düşme yapan bir asansörün tavanından kopan bir vida, asansördeki gözlemciye göre nasıl hareket eder?
    (a) g ivmesiyle hızlanır.
    (b) Sabit hızla düşer.
    (c) Havada asılı durur.
    (d) Yukarı yönde hızlanır.

11. Aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?
    I. Bir cismin uzay boşluğunda kütlesi sıfırdır.
    II. Cismin uzay boşluğunda ağırlığı sıfırdır.
    III. Cismin Ay yüzeyinde kütlesi daha küçüktür.
    IV. Cismin Ay yüzeyinde ağırlığı daha küçüktür.
    (a) I ve II (b) III ve IV (c) I ve III (d) II ve IV

12. Dikey yönde $4\,m/s^2$ ivmeyle yükselen 1 kg lık cisme uygulanan F kuvveti ne kadardır?
    (a) 6 N (b) 10 N (c) 14 N (d) 18 N

13. Bir asansördeki adam elindeki çantayı bıraktığında, çanta yere düşmüyorsa, aşağıdakilerden hangisi doğru olabilir?
    I. Asansör serbest düşme halindedir.
    II. Asansör sabit hızla inmektedir.
    III. Asansör aşağı yönde g ivmesiyle hızlanmaktadır.
    IV. Asansör yukarı yönde g ivmesiyle hızlanmaktadır
    (a) I ve II
    (b) I ve III
    (c) II ve III
    (d) I ve IV

14. Sürtünme kuvveti için hangisi doğrudur?
    (a) Her zaman harekete zıt yöndedir.
    (b) Her zaman mg ile orantılıdır.
    (c) Her zaman normal tepki kuvveti N ile orantılıdır.
    (d) Her zaman yüzeye diktir.

15. Sürtünmesiz yatay bir düzlemde, bir ipin ucuna bağlı olarak dönen top, ip koptuğunda nasıl hareket eder?
(a) Durur.
(b) Dönmeye devam eder.
(c) Doğru boyunca gider.
(d) Merkeze doğru gider.

16. 10 kg lık bir cisim 2 m yarıçaplı dairesel yörüngede 3 m/s hızla dönüyor. Cisme etkiyen merkezcil kuvvet kaç newtondur?
(a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45

17. Bir otomobilin virajda dönebilmesini sağlayan neler olabilir?
I. Sürtünme kuvveti.
II. Otomobilin kütlesi.
III. Otomobilin hızı.
IV. Asfaltın normal tepki kuvveti.
(a) I ve II (b) II ve III (c) III ve IV (d) I ve IV

18. Bir otomobil r yarıçaplı virajda kaymadan v hızıyla dönebiliyorsa, yarıçapı $2r$ olan virajda kaymadan hangi hızla dönebilir?
(a) v (b) $\sqrt{2}v$ (c) $2v$ (d) $4v$

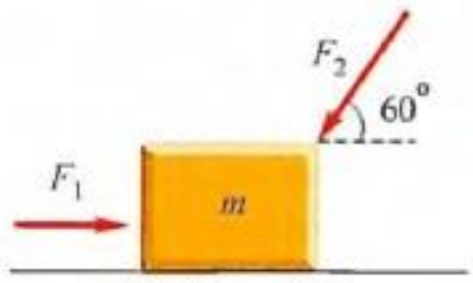
19. r yarıçaplı virajı v hızıyla dönen m kütleli A otomobili ile, $2r$ yarıçaplı virajı $2v$ hızıyla dönen $2m$ kütleli B otomobilinin merkezcil kuvvetleri oranı F_B/F_A ne kadardır?
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) 4

20. r uzunluğunda ipin ucunda dönen bir taşın hızı 10 m/s olduğunda ip kopuyor. Aynı malzemeden $4r$ uzunluğunda ip kullanılırsa, taşın hızı kaç m/s iken ip kopar?
(a) 10 (b) 20 (c) $10\sqrt{2}$ (d) $10/\sqrt{2}$

Problemler

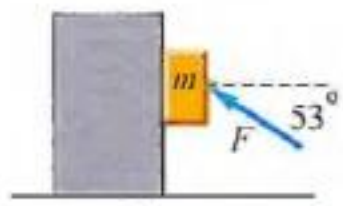
4.3 Newton Yasaları Ugulamaları

4.1 Bir banyo terazisi, üzerindeki kişiye uyguladığı N normal tepki kuvvetini ölçer. 50 kg kütleli bir çocuk bir asansördeki terazinin üzerinde bulunuyor. (a) Asansör yukarı doğru $2\,m/s^2$ ivmelendiğinde terazi kaç newton gösterir? (b) Asansör aşağı doğru aynı ivmeyle hızlandığında terazi ne gösterir? [C: (a) 600 N, (b) 400 N.]



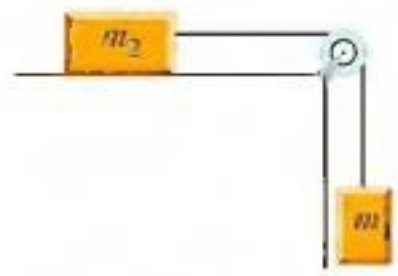
Problem 4.2

4.2 Şekilde yatay düzlemdeki $m = 1$ kg kütleli bloğa $F_1 = 40$ N ve $F_2 = 20$ N kuvvetleri uygulanmaktadır. Düzlemin sürtünme katsayısı $\mu = 0.2$ tir. Bloğun ivmesini hesaplayın. [C: $2.5\,m/s^2$.]



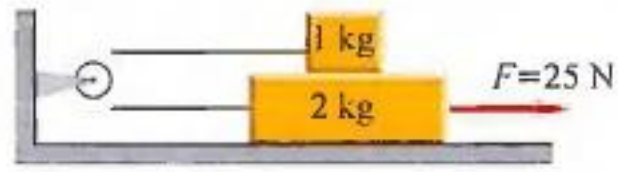
Problem 4.3

4.3 Kütlesi 2 kg olan bir blok, yatayla 53° açı yapan bir $F = 30$ N kuvvetiyle düşey bir duvara bastırılıyor. Blok ile duvar arasında sürtünme katsayısı $\mu = 0.2$ dir. Blok hangi yönde hareket eder ve ivmesi ne kadar olur?
[C: Yukarı $a = 0.2\,m/s^2$.]



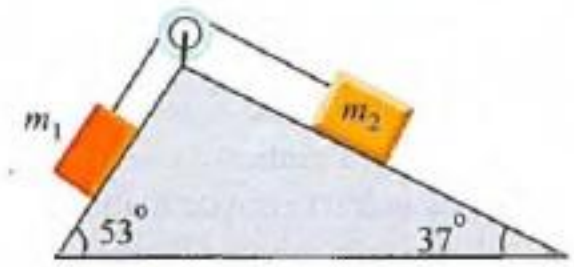
Problem 4.4

4.4 Şekildeki $m_1 = 1$ kg ve $m_2 = 2$ kg kütleli bloklar, sürtünmesiz bir makaradan geçirilen ve kütlesi ihmal edilen bir ip ile birbirlerine bağlanmışlardır. m_2 kütlesinin temas ettiği yatay düzlemin sürtünme katsayısı $\mu = 0.3$ tür. Blokların ivmesini ve ipteki gerilmeyi hesaplayın.
[C: $a = 1.3\,m/s^2$, $T = 8.7$ N.]



Problem 4.5

4.5 Şekilde üst üste konmuş $m_1 = 1$ kg ve $m_2 = 2$ kg lık bloklar, sürtünmesiz bir makaradan geçen iple birbirine bağlanmışlardır. Alttaki blok düzleme paralel $F = 25$ N kuvvetiyle çekiliyor. Blokların ivmesini ve ipteki gerilmeyi bulun.
[C: $a = 3\,m/s^2$, $T = 18$ N.]

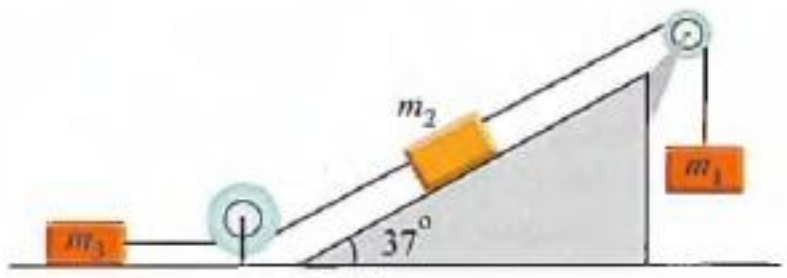


Problem 4.6

4.6 Şekildeki $m_1 = 1$ kg ve $m_2 = 2$ kg kütleleri, eğimleri sırasıyla 53° ve 37° olan iki eğik düzlem üzerine konulmuş ve

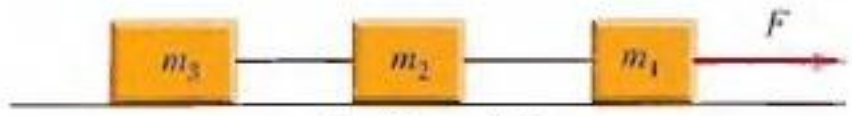
sürtünmesiz bir makaradan geçen sıfır kütleli ip ile birbirlerine bağlanmışlardır. Yüzeylerin sürtünme katsayısı $\mu = 0.1$ dir. (a) Hareket yönünü tayin edin. (b) Blokların ivmesini ve ipteki gerilmeyi hesaplayın.

[C: (a) m_2 aşağı iner, (b) $a = 0.6\,\text{m/s}^2$, $T = 8\,\text{N}$.]



Problem 4.7

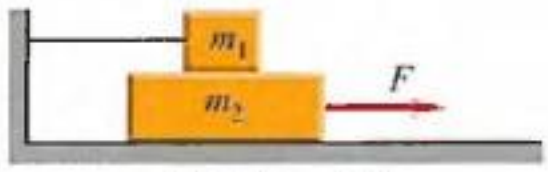
4.7 Şekildeki kütleler eşit olup $m_1 = m_2 = m_3 = 1\,\text{kg}$ dır. Tüm düzlemler ve makaralar sürtünmesiz, iplerin kütleleri sıfır alınabilir. Blokların ivmesini ve iplerdeki gerilmeleri hesaplayın. [C: $a = 1.7\,\text{m/s}^2$, $T_1 = 8.3\,\text{N}$ ve $T_2 = 1.7\,\text{N}$.]



Problem 4.8

4.8 Sürtünmesiz yatay düzlemde birbirine bağlanmış üç bloğun kütleleri $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3\,\text{kg}$ dır. m_1 kütlesi yatay $F = 12\,\text{N}$ kuvvetle çekiliyor. Blokların ivmesini ve iplerdeki gerilmeleri hesaplayın.

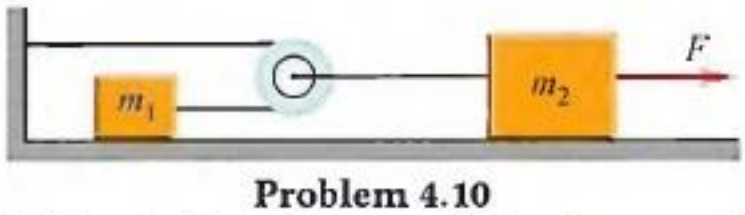
[C: $a = 2\,\text{m/s}^2$, $T_1 = 10$, $T_2 = 6\,\text{N}$.]



Problem 4.9

4.9 Şekilde görülen $m_1 = 1\,\text{kg}$ kütleli blok yatay bir iple duvara bağlanmış ve $m_2 = 3\,\text{kg}$ kütleli bloğun üzerine konulmuştur. Tüm yüzeylerde sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ dür. m_2 bloğu yatay $F = 30\,\text{N}$ kuvvetiyle duvardan uzağa çekiliyor. m_2 nin ivmesini ve ipteki gerilmeyi hesaplayın.

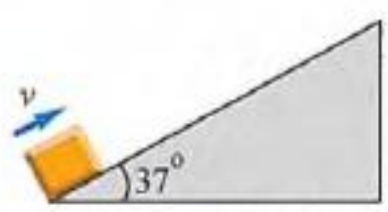
[C: $a = 3.3\,\text{m/s}^2$, $T = 4\,\text{N}$.]



Problem 4.10

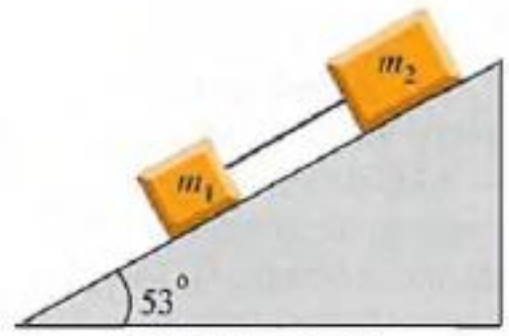
4.10 Şekilde sürtünmesiz yatay düzlemde $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve $m_2 = 4\,\text{kg}$ kütleleri, bir makara ve iplerle birbirine bağlanmışlardır. m_2 kütlesi yatay $F = 20\,\text{N}$ luk bir kuvvetle çekiliyor. Blokların ivmelerini ve m_1 in bağlı olduğu ipteki gerilmeyi hesaplayın.

[C: $a_1 = 2.5$, $a_2 = 5\,\text{m/s}^2$, $T_2 = 10\,\text{N}$.]



Problem 4.11

4.11 Kütlesi m olan bir blok 37° eğimli bir düzlemin alt ucundan $v_0 = 8\,\text{m/s}$ ilk hızla eğik düzlem boyunca yukarı yönde fırlatılıyor. Sürtünme katsayısı $\mu = 0.3$ tür. Bloğun ivmesini ve duruncaya kadar eğik düzlemde aldığı yolu bulun. [C: $a = 8.4\,\text{m/s}^2$, $3.8\,\text{m}$.]



Problem 4.12

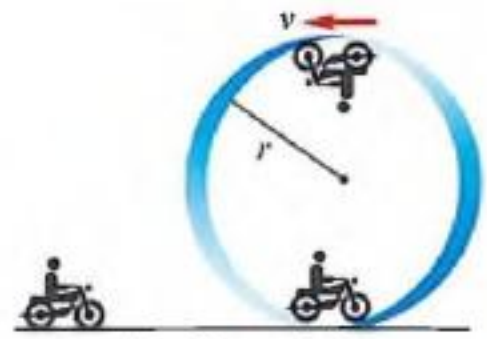
4.12 53° eğimli bir düzlem üzerinde $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütleleri bir iple birbirine bağlanmışlardır. Kütleler farklı malzemeden yapılmış olduğu için sürtünme katsayıları farklıdır. m_1 ile eğik düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $\mu_1 = 0.1$, m_2 ninki $\mu_2 = 0.2$ dir. Blokların ivmesini ve ipteki gerilme kuvvetini hesaplayın.

[C: $a = 7\,\text{m/s}^2$, $T = 0.4\,\text{N}$.]

4.4 Dairesel Hareket

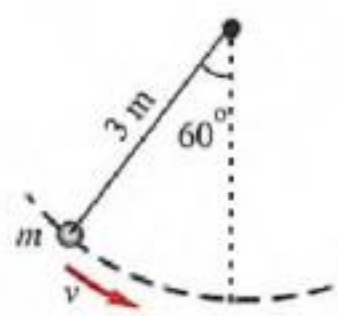
4.13 Bir otomobil $r = 200\,\text{m}$ yarıçaplı yatay ve dairesel bir virajı dönmektedir. Tekerlekler ile yol arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.8$ dir. Otomobilin kaymadan virajı dönebileceği maksimum hız ne kadar olur? [C: $v = 40\,\text{m/s}$.]

4.14 Kütlesi m olan bir A cismi r yarıçaplı dairesel yörüngede v hızıyla dönmektedir. Kütlesi $5m$ olan B cismi $3r$ yarıçaplı dairede $2v$ hızıyla dönmektedir. B cismi üzerindeki F_B merkezcil kuvvetinin A cismi üzerindeki F_A merkezcil kuvvetine oranı ne kadar olur? [C: $F_B/F_A = 6.7$.]



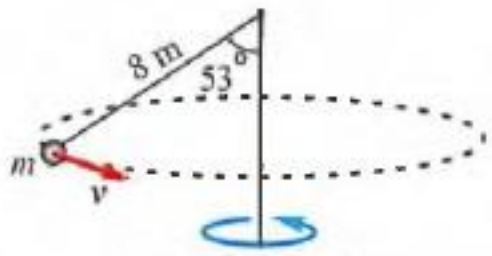
Problem 4.15

4.15 Kütlesi m olan motosikletli bir gösterici, yarıçapı $r = 40\,\text{m}$ olan düşey bir dairesel pistte bir tur atıyor. En üst noktada motosikletin pistten ayrılmaması için, o noktadaki v hızı en az ne kadar olmalıdır? [C: $20\,\text{m/s}$.]



Problem 4.16

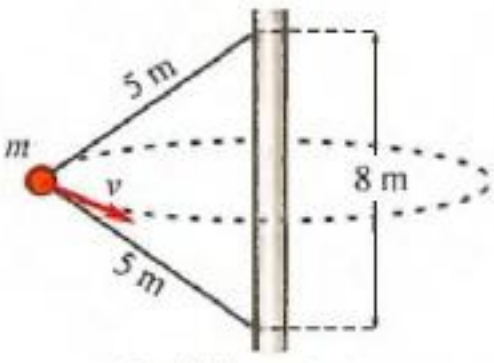
4.16 3 m uzunlukta bir sarkacın ucuna bağlı $m = 2\,\text{kg}$ kütlesinin hızı, ip düşeyle 60° açı yaptığı konumda $10\,\text{m/s}$ dir. İpteki gerilme kuvvetini hesaplayın. [C: $T = 77\,\text{N}$.]



Problem 4.17

4.17 Konik sarkaç. Tavana asılı 8 m uzunluğunda bir ipin diğer ucuna $m = 1\,\text{kg}$ kütleli bir top bağlanmıştır. Top, ipin düşeyle 53° açı yaptığı bir konumda, yatay düzlemde dairesel bir yörüngede dönmektedir. (a) İpteki gerilme ne kadardır? (b) Topun hızı ne kadar olur?

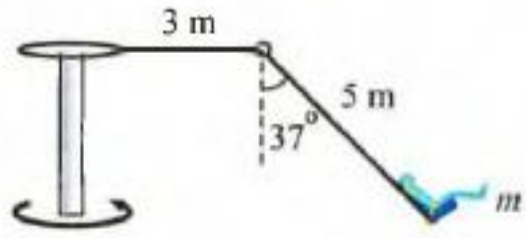
[C: (a) $T = 16.7\,\text{N}$, (b) $v = 9.2\,\text{m/s}$.]



Problem 4.18

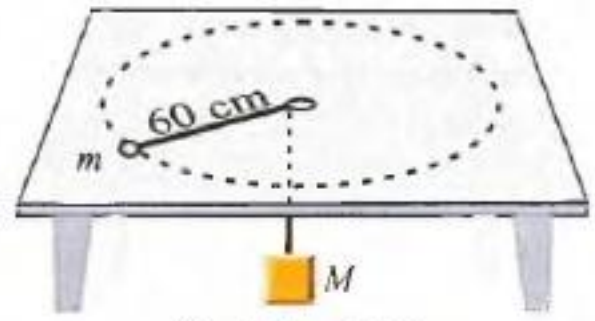
4.18 Uzunlukları eşit $L = 5\,\text{m}$ olan iki ip $m = 4\,\text{kg}$ lık bir kütleye bağlandıktan sonra, diğer uçları düşey bir eksene birbirinden 8 m uzaklıkta bağlanmışlardır. m kütlesi ipler gergin olacak şekilde eksen etrafında $v = 6\,\text{m/s}$ hızıyla dönmektedir. İplerdeki gerilme kuvvetlerini bulun.

[C: $T_1 = 65\,\text{N}$ ve $T_2 = 15\,\text{N}$.]



Problem 4.19

4.19 Bir eğlence parkında zincirli dolap, yatay 3 m uzunluktaki kolun ucunda serbestçe sallanabilen 5 m uzunluktaki zincirin ucunda insanları döndürebilmektedir. Kütlesi $m = 50\,\text{kg}$ olan bir çocuk, bu dolapta düşeyle 37° açı yaparak dönüyor. Çocuğun v hızını ve zincirdeki gerilme kuvvetini hesaplayın. [C: $v = 6.7\,\text{m/s}$, $T = 625\,\text{N}$.]



Problem 4.20

4.20 Sürtünmesiz bir masa üzerindeki $m = 2\,\text{kg}$ kütlesine bağlanan bir ipin diğer ucu, masanın ortasındaki bir delikten geçirilerek sarkıtılmış ve ucuna $M = 3\,\text{kg}$ kütlesi asılmıştır. Masa üzerindeki m kütlesi ipin 60 cm uzunluğundaki kısmı etrafında dairesel bir yörüngede döndüğünde, asılı M kütlesini dengede tutabiliyor. m kütlesinin dönme hızı ne kadardır? [C: 3 m/s.]

5 İŞ VE ENERJİ



Bir lunaparkta hız treni alçalıp yükseldikçe hızı artar veya azalır.
Hız azaldığı zaman depolanan ve yükseklik azaldığında geri kazanılan şey nedir?

İlke olarak, tüm mekanik problemleri sadece Newton'un üç yasası kullanılarak çözülebilirler. Fakat bu yöntem çoğu zaman karmaşık veya, yorumlaması zor olabilir. Oysa, günlük hayattaki sezgilerimize daha yakın olan iş, enerji, momentum gibi kavramlarla hem daha kolay çalışabilir, hem de teknolojiye kolay uyarlanabilen yorumlar getirebiliriz.

Bu bölümden itibaren, yeni yasalar getirecek değiliz, sadece yeni kavramlar tanımlayıp bunlar cinsinden çözümler arayacağız. Bu yeni kavramların en önemli özelliği, genel korunum yasalarına uymalarıdır.

5.1 İŞ

Günlük hayattan ödünç alınan "iş" kavramı fizikte kesin bir anlam kazanır. İş, bir cisme uygulanan kuvvetin ona yerdeğiştirme yaptırabilme yeteneğidir.

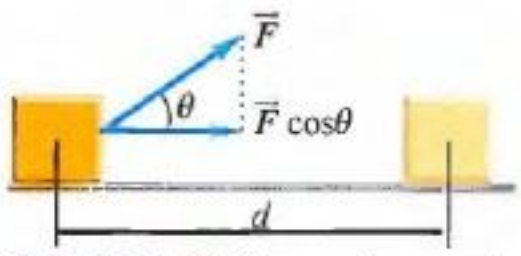
Sabit Kuvvetin Yaptığı İş

İş kavramını daha kolay anlayabilmek için, önce sabit bir kuvvetin yaptığı işi tanımlayalım.

Tanım: Bir cisme, d kadar yerdeğiştirmesi sırasında uygulanan F kuvvetinin bu cisim üzerinde yaptığı **iş**,

$$W = Fd\cos\theta \qquad \text{(İş)} \tag{5.1}$$

olur. Burada θ kuvvetin yerdeğiştirme ile yaptığı açıdır. Şekilden görüldüğü gibi, $F\cos\theta$ kuvvetin d yolu boyunca izdüşümüdür. O halde iş, kuvvetin yol boyunca izdüşümünün yerdeğiştirme ile çarpımı olur.



Şekil 5.1: Bir kuvvetin yaptığı iş.

İş birimi (newton×metre) dir. Bu türetilmiş birime, İngiliz bilim adamı James P. Joule'un anısına "Joule" adı verilmiştir ve J olarak kısaltılır.

Bu tanıma göre, işin en önemli özelliklerini vurgulayalım:

- Kuvvet uygulandığı halde, *cisim yerdeğiştirmiyorsa ($d = 0$), yapılan iş sıfırdır.*
  Bu nokta günlük hayattaki sezgilerimize aykırı gelebilir. Örneğin, bir halterci 200 kiloluk halteri havada hareketsiz tutuyorsa, fizik tanımına göre yaptığı iş sıfırdır. Oysa, ter içinde kalan sporcunun iş yapmış biri kadar yorulduğu bellidir. Bu bir çelişki olarak görülmemeli, fizik kavramlarının daha dar çerçevede tanımlandığı düşünülmelidir.
- *Kuvvet yerdeğiştirmeye dik doğrultuda etkiyorsa ($\cos 90^\circ = 0$), yaptığı iş sıfırdır.*
- Kuvvet gidilen yönle geniş açı yapıyorsa, yani *kuvvetin yol boyunca izdüşümü yerdeğiştirme ile ters yönde ise, yapılan iş negatif olur.*

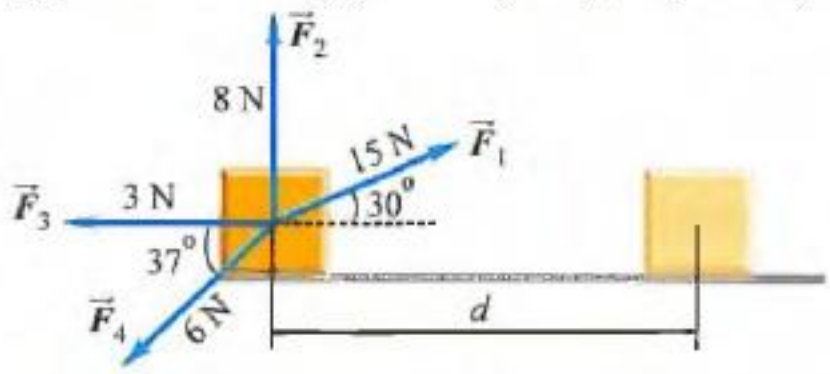
İşin Skaler Çarpım Olarak Gösterimi

İş tanımı, vektörler konusunda tanımladığımız, iki vektörün skaler çarpımı yapısına uygun düşmektedir. Orada $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ile gösterdiğimiz vektörler yerine, burada $\vec{F}$ kuvvet vektörü ve $\vec{d}$ yerdeğiştirme vektörünü alırsak, (5.1) ifadesini şöyle yazabiliriz:

$$W = Fd\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d} \tag{5.2}$$

Örnek 5.1

Şekildeki cisme etkiyen kuvvetlerin $+x$ yönünde $d = 2$m yerdeğiştirme sırasında yaptıkları işleri ayrı ayrı hesaplayın.



Çözüm

(5.1) formülündeki iş tanımını herbir kuvvete uygulayalım:

$W_1 = F_1 d\cos 30^\circ = 15\times 2\times 0.87 = 26\,\text{J}$

$W_2 = F_2 d\cos 90^\circ = 8\times 2\times 0 = 0$ (Yola dik).

$W_3 = F_3 d\cos 180^\circ = 3\times 2\times(-1) = -6\,\text{J}$ (Yola zıt)

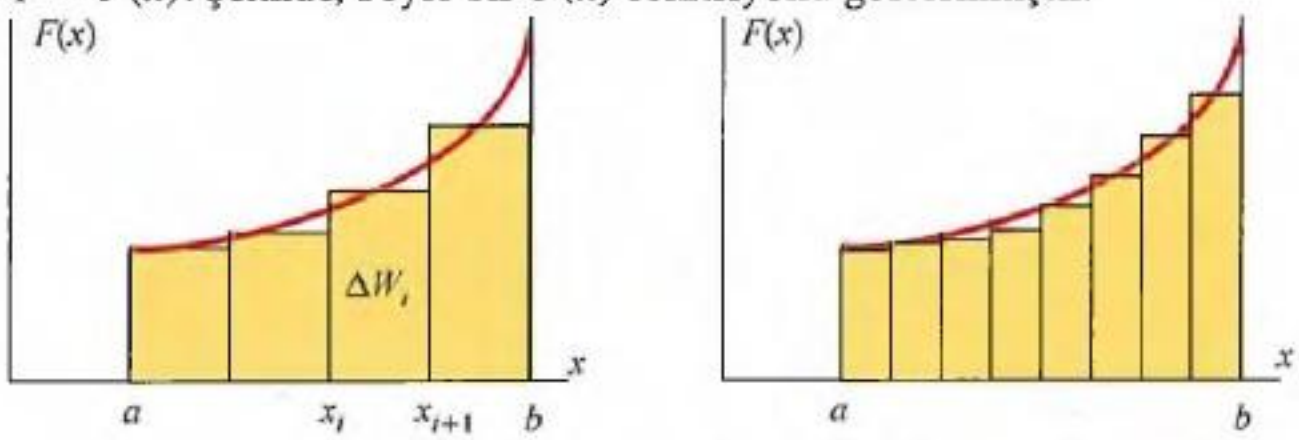
$W_4 = F_4 d\cos(180^\circ - 37^\circ) = 6\times 2\times(-0.8)$

$= -9.6\,\text{J}$ (yerdeğiştirme ile zıt yönde).

Değişken Kuvvetin Yaptığı İş

İş kavramı çok genel durumlarda kullanılacağı için, büyüklüğü yol boyunca değişen bir kuvvetin yaptığı işi de hesaplayabilmek gerekir. Bunu yapabilmek için matematikte görülen integral kavramı gerekir. Burada, yola paralel bir kuvvetin yaptığı iş için integralin nasıl inşa edileceğini göstereceğiz.

İncelenen cisim x-ekseni boyunca $x = a$ konumundan $x = b$ konumuna gidiyor olsun. Buna göre, gidilen yol $d = b - a$ olur. Bu aralıkta cisme etkiyen değişken kuvvetin de konumun bir fonksiyonu olarak değiştiğini farzedelim: $F = F(x)$. Şekilde, böyle bir $F(x)$ fonksiyonu gösterilmiştir.



Şekil 5.2: $[a, b]$ aralığındaki toplam iş, küçük Δx aralıklarında yapılan ΔW_i işlerinin toplamıdır. Δx mesafesi giderek küçültülürse ($\Delta x \to 0$), dikdörtgenler ile eğri arasındaki fark da küçülür.

$[a, b]$ yolunu, herbirinin kalınlığı Δx kadar küçük olan N sayıda aralığa böldüğümüzü düşünelim. Bu aralıklardan herhangi birinde, örneğin x_i ile $x_i + \Delta x$ arasında F kuvvetinin yaklaşık sabit kaldığını varsaydığımızda, bu aralıkta yapılan küçük iş,

$$\Delta W_i \approx F(x_i)\,\Delta x \qquad i = 1, 2, 3, \ldots N$$

olur. Şekilde görüldüğü gibi, ΔW_i, i. aralığa çizilen ince dikdörtgenin alanı olur. Bu aralıkta kuvveti $F(x_i)$ sabit değerinde kabul etmekle küçük bir hata yapmış oluyoruz. Fakat, daha sonra $\Delta x \to 0$ limiti alındığında bu hata sıfıra gidecektir.

Böylece, toplam işi bu küçük aralıklardaki işlerin toplamı olarak yazabiliriz:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i \approx \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\,\Delta x$$

Şimdi matematikteki limit kavramını kullanırsak, yani Δx değerini sıfıra eşit olmadan, giderek sıfıra yaklaştırırsak, bu toplama ifadesi $F(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki **belirli integrali**nin tanımı olur:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\,\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx$$

Sonuç olarak, değişken $F(x)$ kuvvetinin $[a, b]$ aralığında yaptığı işin integralli ifadesi şöyle olur:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \qquad \text{(Değişken kuvvetin yaptığı iş)} \tag{5.3}$$

Kısa İntegral Bilgisi

Matematik dersinde integral kavramı ve integral alma teknikleri geniş olarak incelenir. Burada, en çok karşılaşılan türden fonksiyonların integrallerini kısaca, ispatsız olarak hatırlatalım:

Yukarda iş için bulduğumuz integral ifadesinin anlamı şudur: Öyle bir $\Phi(x)$ fonksiyonu bulalım ki onun türevi, integrali alınan $F(x)$ fonksiyonu olsun:

$$\Phi(x) = \int F(x)\,dx \qquad \text{veya} \qquad \frac{d\Phi}{dx} = F(x)$$

Burada sınırları yazılmamış ifadeye **belirsiz integral** denir. Bu Φ fonksiyonu bilindiği takdirde, integral şöyle hesaplanır:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Veya, Φ fonksiyonunun üst sınırdaki değerinden alt sınırdaki değeri çıkarılır.

Bazı fonksiyonların belirsiz integralleri (c bir sabit).

fonksiyon (y)	$\int y(x)\,dx$	fonksiyon (y)	$\int y(x)\,dx$
1	$x + c$	$\cos x$	$\sin x + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\sin x$	$-\cos x + c$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$	e^x	$e^x + c$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + c$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\ln x$	$x \ln x - x + c$

Eğer türevleri biliyorsanız bu tabloyu hatırlamanıza gerek yoktur. Aradığınız integral, verilen fonksiyonu türev olarak kabul etmelidir.

Örnek 5.2

x-ekseni boyunca $F(x) = x^3$ olarak değişen bir kuvvetin $a = 1$ konumundan $b = 5$ konumuna kadar yaptığı işi integralle hesaplayın.

Çözüm

İntegralli iş tanımı kullanılır:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_1^5 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4}$$

$$W = 131\ \text{J}$$

Yay Kuvvetinin Yaptığı İş

Teknolojide yaygın olarak kullanılan sarmal yayı hepimiz biliriz. Tükenmez kalemlerde, çamaşır mandalında, yatak şilteleri içinde, arabaların amortisör ve karbüratörlerinde çelikten yapılmış yaylar kullanılır. Bir yayı çekip uzatmak veya sıkıştırmak istediğimizde, yay zıt bir kuvvetle karşı koyar.

Normal uzunluğu L_0 olan yayın bir ucunu duvara tespit edip, diğer ucunu x-ekseni boyunca uzatalım (veya, sıkıştıralım). Yayın yeni boyu L olsun. Yayın uzama miktarını,

$$x = L - L_0 \tag{5.4}$$

ile gösterelim. x değeri uzama için pozitif, sıkışma için negatif olur.

Yayda oluşan kuvvetin ifadesi, İngiliz bilim adamı Robert Hooke'un anısına **Hooke yasası** diye anılır:

Bir yayda oluşan kuvvet, yayın uzama miktarıyla orantılı olup, uzamaya karşı koyacak yönde oluşur.

$$F = -kx \qquad \text{(Hooke yasası)} \tag{5.5}$$

Bu bağıntıdaki k katsayısına **yay sabiti** veya **esneklik sabiti** adı verilir. Birimi newton/metre olup, yayın imal edildiği malzemenin cinsine bağlıdır.

Hooke yasasının önemli noktalarını vurgulayalım:

- Yay kuvveti, yayın uzunluğuyla değil, $x = L - L_0$ uzama veya sıkışma miktarıyla orantılıdır.
- Formüldeki eksi işareti, kuvvetin uzamaya ters yönde olduğunu belirtir. Eğer yay uzuyorsa ($x > 0$), kuvvet ters yönde, yani $F < 0$ olur. Tersi durumda, yay kısalıyorsa ($x < 0$), kuvvet pozitif yönde $F > 0$ olur.
- Yay esnekliğinin belli bir sınırı vardır. Belli bir x değerinden fazla uzatıldığında yay deforme olur ve esneklik özelliğini kaybeder.

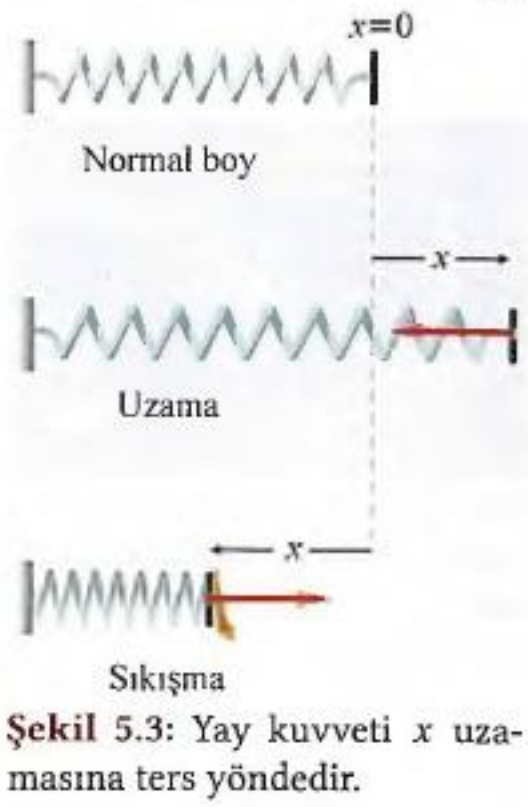
Bir yayı normal uzunluğundan ($x = 0$) itibaren $x = d$ değerine getirinceye kadar uzattığımızda yay kuvvetinin yapmış olduğu işi hesaplamak istiyoruz. Elbette yay kendiliğinden uzamayacaktır, bizim en az $(-F)$ kadar bir kuvvet uygulamamız gerekir. Ama biz sadece yay kuvvetinin yaptığı işle ilgileniyoruz. O halde, integral sınırlarını $a = 0$ ve $b = d$ olarak alırsak, yay kuvvetinin yaptığı işi şöyle yazabiliriz:

$$W_{\text{yay}} = \int_0^d F\,dx = \int_0^d (-kx)\,dx = -k\int_0^d x\,dx = -k\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^d$$

$$W_{\text{yay}} = -\tfrac{1}{2}kd^2$$

Beklendiği üzere, yay kuvveti uzamaya ters yönde olduğu için, yaptığı iş negatif olur. Bizim yayı uzatabilmek için buna karşı pozitif bir iş yapmamız gerekir.

Bu sonucu ilerde potansiyel enerji bahsinde kullanacağız.



Şekil 5.3: Yay kuvveti x uzamasına ters yöndedir.

Örnek 5.3

Bir yaya 30 N *luk bir kuvvet uygulandığında* 10 cm *uzadığı gözleniyor. Bu yayı* 40 cm *uzatmak için ne kadar iş yapılmalıdır?*

Çözüm

Önce, bu verilerden yay sabitini hesaplarız. Hooke yasasını kullanalım (eksi işareti önemli değil):

$$F = kx \;\rightarrow\; 30 = k \times 0.10$$

$$k = 300\,\text{N/m}$$

Buradan yayı $x = 0.40$ m uzatmak için yay kuvvetine *karşı* yapılan iş hesaplanır:

$$W = -W_{\text{yay}} = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2} \times 300 \times 0.4^2 = 24\,\text{J}$$

5.2 GÜÇ

Herkes bir yükü 100 metre öteye taşıyabilir, ama bazıları daha kısa sürede taşırlar. Günlük hayatta ve teknolojide birim zamanda yapılan işi bilmek gerekir. Bunu güç kavramıyla anlatırız.

Tanım: Δt zaman aralığında yapılan iş miktarı ΔW ise, **ortalama güç**,

$$P_{\text{ort}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(ortalama güç)} \tag{5.6}$$

ve herhangi bir t anındaki **ani güç**,

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(ani güç)} \tag{5.7}$$



Şekil 5.4: Tarihte beygir gücü, kömür ocağından çıkarılan kömür miktarının ölçüsü olarak kullanıldı.

şeklinde, işin türevi olarak tanımlanır.

Güç birimleri: SI sisteminde güç birimi joule/saniye = watt dır ve kısaca (W) ile gösterilir. Sanayide bunun bin katı olan kilowatt (kW) kullanılır.

Watt hem bilim dünyasında hem de teknolojide kullanılan ender birimlerdendir. Yukardaki tanım $dW = P\,dt$ olarak yazılıp, iş birimi Joule yerine watt×saat veya kilowatt-saat (kWh) kullanılır. Elektrik harcamalarımızı "kilowatt" diye söyleriz, ama bu harcadığımız enerji olduğu için, aslında kilowatt-saat demektir.

Otomotiv sanayiinde kullanılan diğer bir güç birimi **beygir gücü** (buhar beygiri) olup, kısaca (HP) diye yazılır:

$$1\ \text{HP} = 746\ \text{watt} = 0.746\ \text{kW}$$

Beygir gücü birimi, tarihte ilk kez İngiltere'de maden ocaklarından kömür çıkarmakta kullanıldı. O zamanlar, İskoçyalı bilim adamı James Watt (1736–1819) kendi icadı olan buhar makinasının gücünü atların gücüyle karşılaştırabilmek için, "buhar beygiri" adını verdiği bu birimi öne sürdü.

Mekanikte gücü kuvvet ve hız cinsinden ifade eden yararlı bir formül daha vardır. Yukardaki tanımda ΔW işini, bir $\vec{F}$ kuvvetinin $\Delta\vec{r}$ yerdeğiştirmesi boyunca yaptığı iş olarak yazarsak,

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right)$$

Parantez içindeki limit $\vec{v}$ hız vektörü olur. O halde, $\vec{F}$ kuvvetinin t anında harcadığı gücü şöyle yazabiliriz:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \text{(Güç)} \qquad (5.8)$$

Örnek 5.4

Bir vinç 2 ton *kütleli kömürü yerin dibinden* 12 km/saat *hızla çıkarıyor. Motorun gücünü watt ve beygir gücü olarak hesaplayın.*

Çözüm

Vinç m kütlesini sabit hızla çektiğine göre, mg ağırlığını eşit ve zıt bir F kuvveti uygulamaktadır. Güç için bulduğumuz (5.8) formülünü kullanırız:

$$P = F\,v = mgv = 2000 \times 10 \times (12000/3600)$$
$$= 67000\ \text{watt} = 67\ \text{kW}$$

Bir beygir gücü 1 HP = 0.746 kW bağıntısı kullanılır:

$$P = 67/0.746 = 91\ \text{HP}$$

Örnek 5.5

Gücü 3 kilowatt *olan bir klima aleti 1 ayda ne kadar enerji harcar? Elektriğin kilovat-saat ücreti 20 kuruş ise, 1 aylık maliyeti ne kadardır?*

Çözüm

Harcanan enerji $\Delta W = P\,\Delta t$ olarak hesaplanır:

$$\Delta W = 3 \times 3 \times (30 \times 24) = 2160\ \text{kilowatt} - \text{saat}$$

Bu enerji birim fiyatıyla çarpılıp aylık maliyet bulunur:

$$2160 \times 0.2 = 432\ \text{TL}.$$

5.3 KİNETİK ENERJİ

Bir kuvvetin yaptığı iş neye harcanabilir? Örneğin, bir cisme kuvvet uyguladığımızda hız kazanabilir. Veya, cismi belli bir yüksekliğe çıkarabilir. Tüm bunlar **enerji** adı verilen kavramın değişik yüzleridir. Fizikte tanımlanan en önemli kavram olan enerji, kısaca "iş yapabilme kabiliyeti" olarak görülmelidir. Enerji kavramıyla çalışmak hem kolaylık sağlar, hem de mekaniğin dışında elektrik, kimya, biyoloji gibi diğer alanlarda da kullanılabilir.

Fizikte kinetik enerji, potansiyel enerji, elektrostatik enerji, manyetik enerji, kimyasal enerji ... gibi enerji çeşitleri vardır. Mekanikte sadece kinetik ve potansiyel enerji kullanılır.

Tanım: Kütlesi m olan ve v hızıyla giden bir cismin **kinetik enerjisi**,

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 \qquad \text{(kinetik enerji)} \tag{5.9}$$

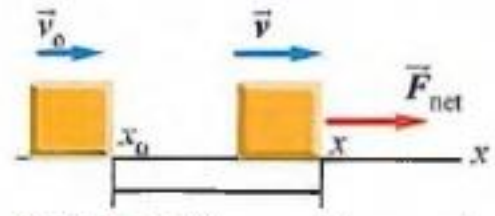
olur. Kinetik enerji daima sıfırdan büyüktür. Duran bir cismin kinetik enerjisi sıfırdır. Kinetik enerjinin iş birimiyle ifade edildiğine dikkat edelim:

$$\text{kg} \times (\text{m/s})^2 = \frac{\text{kg} \times \text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m} = \text{newton} \times \text{m} = \text{joule}$$

İş-Enerji Teoremi

İş ile kinetik enerji arasındaki ilişkiyi göstermek amacıyla, m kütleli bir cisme etkiyen net kuvvetin yaptığı işi hesaplayalım. Fakat, en genel üç-boyutlu ve değişken kuvvet yerine, işlemlerin basit olması için, burada bir-boyutlu sabit net kuvvetin yaptığı işi ele alacağız.

m kütleli cisim başlangıçta x_0 konumlu yerde v_0 hızına sahipken, sabit F_{net} kuvvetinin etkisiyle x konumuna vardığında hızı v olsun. Sabit kuvvetin yaptığı net işi yazalım:



Şekil 5.5: İş-enerji teoremi.

$$W_{\text{net}} = F_{\text{net}}\, d = F_{\text{net}}\,(x - x_0)$$

Kuvveti ikinci yasadan $F_{\text{net}} = ma$ olarak alır ve zamansız hız formülünü [$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$] kullanırsak,

$$W_{\text{net}} = ma\,(x - x_0) = \tfrac{1}{2} m \underbrace{2a(x - x_0)}_{(v^2 - v_0^2)}$$

$$W_{\text{net}} = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = K - K_0 \tag{5.10}$$

bulunur. Bu sonuç **İş-Enerji Teoremi** olarak bilinir:

Bir cisme etkiyen net kuvvetin yaptığı iş, cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

Bu sonuç çok geneldir; hareket üç-boyutlu olsa da, kuvvet değişken olsa da, daima doğrudur:

$$\boxed{W_{\text{net}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \tfrac{1}{2} mv_2^2 - \tfrac{1}{2} mv_1^2 = K_2 - K_1 \quad \text{(İş-enerji teoremi)}} \tag{5.11}$$

Burada $d\vec{r}$, bileşenleri (dx, dy, dz) olan küçük yerdeğiştirme vektörünü gösterir.

İş-Enerji Teoremi 2. Newton yasasının değişik bir ifadesidir. Buna göre, bir cisim üzerinde net kuvvetin yaptığı iş pozitif ise, cismin kinetik enerjisi artar. Net iş negatif ise, cismin kinetik enerjisi azalır. Bu ifade tarzının bir avantajı da, sadece skaler sayılarla çalışma kolaylığı getirmesidir. Bazı problemler bu teoremle çok kestirme yoldan çözülebilirler.


Şekil 5.6: Bu yarışçıların kızağı iterek yaptıkları iş nereye gider?

Örnek 5.6

5 m/s hızla gitmekte olan 3 kg kütleli bir cisim üzerine bir F kuvveti uygulandığında, 9 m yol sonunda onun hızını 10 m/s ye çıkarıyor.

Kuvvetin büyüklüğünü hesaplayın.

Çözüm

İş enerji teoremine göre, bu F kuvvetinin yaptığı iş, kinetik enerjideki değişmeyi verir:

$$Fd = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$F = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2d} = \frac{3 \times (10^2 - 5^2)}{2 \times 9} = 12.5\,\text{N}.$$

Örnek 5.7

Sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ olan yatay bir düzlem boyunca 6 m/s hızla atılan m kütlesi kaç metre sonra durur?

Çözüm

Cisme uygulanan kuvvetlerden, düşey yöndeki ağırlık ve normal kuvvet birbirini dengelediği için, sadece harekete zıt yönde sürtünme kuvveti vardır. Bunun yaptığı iş negatif olur ve kinetik enerjiyi sıfırlar ($v_0 = 0$):

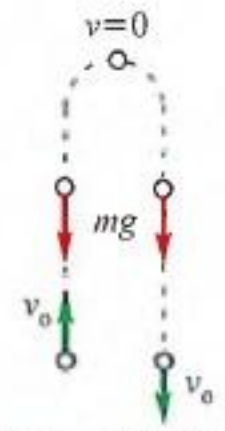
$$-fd = -(\mu mg)d = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$d = v_0^2/(2\mu g) = 6^2/(2 \times 0.4 \times 10) = 2.25\,\text{m}.$$

5.4 POTANSİYEL ENERJİ

Korunumlu ve Korunumsuz Kuvvetler

Mekanikteki kuvvetler belli bir özellikleri açısından iki gruba ayrılırlar. Korunumlu ve korunumsuz kuvvetler olarak yapılan bu ayırım, potansiyel enerjiyi tanımlamakta kolaylık sağlar.

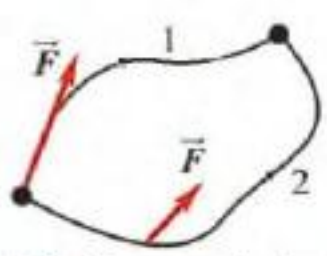


Şekil 5.7: Yerçekimi kuvveti etkisiyle kinetik enerji azalabilir, ama kaybolmaz. Tekrar geri alınabilir.

Bunu anlamak üzere, yerden v hızıyla yukarı atılan bir taşı gözönüne alalım. Bu taş havadayken, hava sürtünmesi ihmal edilirse, sadece yerçekimi kuvvetinin etkisindedir. Taşın yerdeki kinetik enerjisi $K_1 = \frac{1}{2}mv^2$ dir. Taş yukarı doğru yükselerek maksimum yüksekliğe eriştiğinde hızı sıfırdır: $K_2 = 0$. O halde, cismin kinetik enerjisi kaybolmuştur diyebilir miyiz? Hayır, çünkü cisim hemen aşağı doğru hızlanarak hareketine devam eder ve yere vardığında eski kinetik enerjisine kavuşur.

Öte yandan, sürtünmeli yatay bir düzleme v hızıyla fırlatılan bir m kütlesine bakalım. Bu cisme yol boyunce etkiyen net kuvvet sürtünmedir. Cismin başlangıçtaki kinetik enerjisi $K = \frac{1}{2}mv^2$ iken giderek yavaşlar ve durduğu anda kinetik enerjisi sıfır olur. Şimdi, saatlerce beklesek dahi bu cismin yeniden hızlandığını göremeyiz.

Bu iki örnekten birincisinde cisme yerçekimi kuvveti etkiyordu. Yerçekimi kuvveti cismin kinetik enerjisini azaltıyor, ama bir şekilde depoluyor ve sonra geri verebiliyor. Bu, korunumlu bir kuvvet örneğidir. İkinci durumda sürtünme kuvveti cismin kinetik enerjisini, bir daha geri vermemek üzere almakta ve başka bir enerji türüne (ısıya) dönüştürmektedir. Bu da korunumsuz kuvvete örnek olur.



Şekil 5.8: Korunumlu kuvvetin yaptığı iş gidilen yoldan bağımsızdır.

Potansiyel enerji, yapılan işi depolayabilen ve geri verebilen enerji türüdür. Yukardaki örneklere göre, sadece korunumlu kuvvetler için bir potansiyel enerji tanımlanabilir.

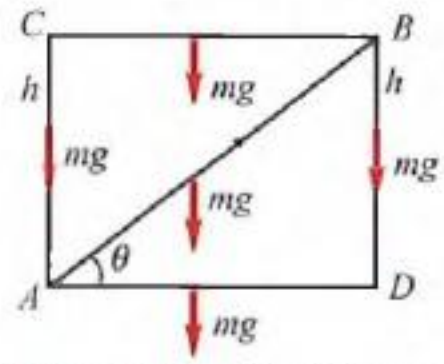
Bir kuvvetin korunumlu olup olmadığını belirleyen kriter şudur:

Bir kuvvetin yaptığı iş gidilen yoldan bağımsız ise, o kuvvet korunumludur.

Bu kriteri yerçekimi örneğinde test edelim. Şekildeki m kütlesinin A dan B ye gittiği değişik yollarda yerçekimi kuvvetinin yaptığı işi hesaplayalım. Yerçe-

kiminin yola dik olduğu yerlerde iş sıfır olacağından,

$$\begin{aligned} &ACB \text{ yolu:} && W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = -mg \times AC + 0 = -mgh \\ &ADB \text{ yolu:} && W_{ADB} = W_{AD} + W_{DB} = 0 - mg \times DB = -mgh \\ &AB \text{ köşegeni:} && W_{AB} = (-mg \sin\theta) \times AB = -mg \times (AB \sin\theta) = -mgh \end{aligned}$$



Şekil 5.9: Yerçekimi kuvvetinin üç farklı yolda yaptığı iş.

Her üç yol boyunca yapılan iş aynı olmaktadır. Bu, yerçekimi kuvvetinin korunumlu olduğunu gösterir. Aynı hesabı sürtünme kuvveti için yapmış olsaydık, işin gidilen yola göre değiştiğini bulurduk.

Potansiyel Enerjinin Genel Tanımı

Korunumlu kuvvete karşı yapılan iş, potansiyel enerjideki değişme miktarına eşittir.

Korunumlu kuvvet $\vec{F}_{kor}$ ise, buna karşı iş yapan kuvvet $(-\vec{F}_{kor})$ olacaktır. Potansiyel enerjiyi U ile gösterirsek, bu tanımı şöyle yazabiliriz:

$$-\int_1^2 \vec{F}_{kor} \cdot d\vec{r} = U_2 - U_1 \qquad \text{(potansiyel enerji tanımı)} \tag{5.12}$$

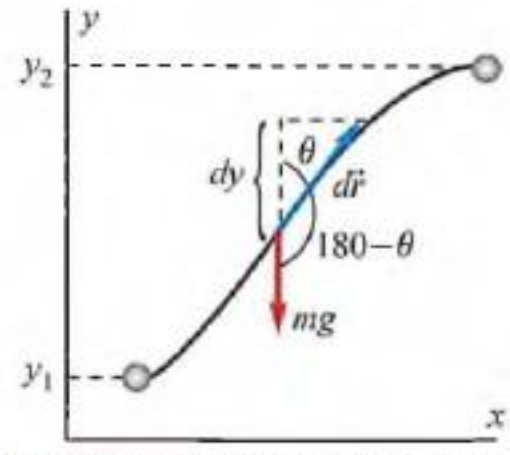
Burada potansiyel enerjideki artışın negatif iş olarak tanımlanması akla uygundur. Çünkü, yapılan negatif iş kinetik enerjiyi azaltıyorsa, potansiyel enerjiyi artırıyor demektir.

Şimdi, bu genel tanıma uygun olarak, yerçekimi ve esneklik potansiyel enerjilerini tanımlayalım.

Yerçekimi Potansiyel Enerjisi

Kütlesi m olan bir cismin Dünya üzerinde (x_1, y_1) konumlu bir A noktasından (x_2, y_2) konumlu bir B noktasına, herhangi bir eğrisel yol üzerinden gittiğini varsayalım. Cismin ağırlığını $m\vec{g}$ vektörüyle, yol boyunca küçük bir yerdeğiştirmeyi $d\vec{r}$ ile, ve $d\vec{r}$ nin y-ekseniyle yaptığı açıyı θ ile gösterelim. Buna göre, korunumlu kuvvete karşı yapılan işi, yani $(-m\vec{g})$ vektörünün yaptığı işi skaler çarpım olarak yazalım:

$$-W = \int_A^B (-m\vec{g}) \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-mg)\, dr \cos(180^\circ - \theta)$$



Şekil 5.10: Yerçekimi potansiyel enerjisinde koordinatlar.

Şekilden görüldüğü gibi, $dr\cos(180^\circ - \theta) = -dr\cos\theta = -dy$ olur. Buna göre,

$$-W = \int_A^B mg\, dy = mg \int_{y_1}^{y_2} dy = mg(y_2 - y_1)$$

bulunur. Görüldüğü gibi, yerçekimi kuvvetine karşı yapılan iş, gidilen yoldan bağımsız olup, sadece iki noktanın y-koordinatlarına bağlıdır. Şimdi, yukardaki 5.12 denklemindeki genel tanımı kullanarak, yerçekimi potansiyel enerjisini tanımlayabiliriz:

$$U_2 - U_1 = (\text{Yerçekimi kuvvetine karşı yapılan iş}) = -W = mg(y_2 - y_1)$$

Bu denklemin iki tarafı karşılaştırıldığında, herhangi bir y koordinatlı yerdeki potansiyel enerji,

$$U(y) = mgy + C$$

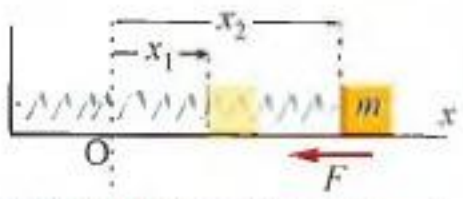
olarak yazılabilir. Buradaki C sabiti potansiyel enerjinin sıfır referans noktası belirlendikten sonra tayin edilir. Örneğin, $y = 0$ düzeyinde $U = 0$ olarak seçilmişse, $C = 0$ olur. Bu düzeyin altında potansiyel enerji eksi değerler alır. Sonuç olarak, yerçekimi potansiyel enerjisini şöyle yazabiliriz:

$$\boxed{U(y) = mgy \qquad \text{(yerçekimi potansiyel enerjisi)}} \tag{5.13}$$

Yerçekimi potansiyel enerjisinin sıfır düzeyinin seçimi keyfidir, istenilen yükseklikte alınabilir. Bunun bir önemi yoktur çünkü, daha sonra göreceğimiz gibi, önemli olan iki yükseklik arasındaki potansiyel enerji farkıdır. Sıfır düzeyi nerede seçilirse seçilsin, bu fark değişmez.

Esneklik Potansiyel Enerjisi

Şimdi bir yay kuvvetine karşı yapılan işten giderek esneklik potansiyel enerjisini bulalım. Şekilde görüldüğü gibi, x-ekseni üzerinde x kadar bir uzama miktarına karşı gelen yay kuvveti $F = -kx$ olup zıt yöndedir. Bu kuvvete karşı iş yapan $(-\vec{F})$ kuvveti ise $+kx$ olur, yani, x ile aynı yöndedir. Bu durumda, herhangi bir x_1 değerinden x_2 son değerine kadar olan uzama sırasında yapılan karşı iş,



Şekil 5.11: Esneklik potansiyel enerjisinde koordinatlar.

$$-W = \int_{x_1}^{x_2} (-F)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (+kx)\,dx = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = k\,\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

olur. Potansiyelin 5.12 denklemindeki genel tanımını kullanırsak,

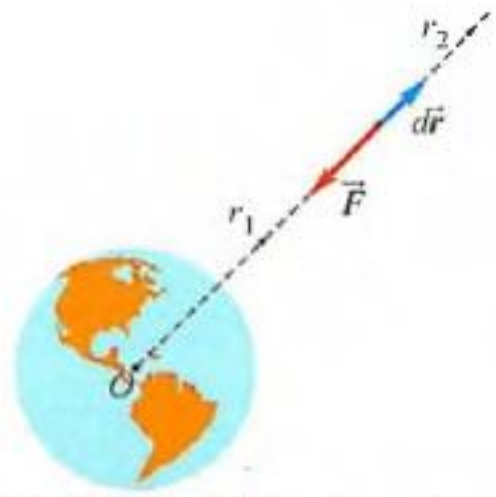
$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 \\ U(x) &= \tfrac{1}{2}kx^2 + C \end{aligned}$$

bulunur. Yine, potansiyelin sıfır olduğu yer keyfi olarak seçilerek C sabiti tayin edilir. Yayın normal uzunluğunda, yani $(x = 0)$ da potansiyeli sıfır aldığımızda $C = 0$ olur. Sonuç olarak, esneklik potansiyel enerjisini şöyle yazabiliriz:

$$\boxed{U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(esneklik potansiyel enerjisi)}} \tag{5.14}$$

Kütleçekim Potansiyel Enerjisi

Dünya yüzeyi üzerinde yükseklik giderek artarsa, g yerçekimi ivmesi sabit olmaktan çıkar ve yerçekimi potansiyeli için $U = mgy$ ifadesi geçerliliğini yitirir. Bunun yerine, tekrar Newton'un kütle çekim yasasına dönmek ve potansiyel enerjiyi oradan hesaplamak gerekir.



Şekil 5.12: Kütleçekim potansiyel enerjisinde koordinatlar.

Kütle çekim yasasını Dünya (kütlesi M_D) ve merkezden r uzaklıkta bir m kütlesi için tekrar yazalım:

$$F = G\frac{mM_D}{r^2} \tag{5.15}$$

Yine potansiyel enerjiyi, kütle çekim kuvvetine karşı yapılan iş olarak hesaplarız. Bu amaçla, m kütlesi r_1 uzaklığından r_2 uzaklığına giderken etkiyen bu $\vec{F}$ kuvvetine karşı, bizim $-\vec{F}$ kuvveti uygulamamız gerekir. Buna göre,

$$-W = \int_{r_1}^{r_2} (-\vec{F})\cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} F\,dr\,\cos 180^\circ$$

Çekim kuvveti $\vec{F}$ ile $d\vec{r}$ yerdeğiştirme vektörü arasındaki açının $180°$ olduğu şekilde görülmektedir. $\cos 180° = -1$ alınır ve F ifadesi yerine konursa,

$$\begin{aligned} -W &= GmM_D \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GmM_D \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= -GmM_D \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Yine potansiyel enerjideki değişimin bu karşı işe eşit olduğu yazılırsa,

$$-W = U_2 - U_1$$

Buradan, herhangi bir r uzaklığındaki potansiyel enerji yazılabilir:

$$U(r) = -\frac{GmM_D}{r} + C$$

C sabitini nasıl seçeceğiz? Orijini seçmek imkansızdır, çünkü bu formülde $r = 0$ alınırsa sonsuz olur. Bunun yerine, en doğal olarak, cisimler birbirlerinden etkileşmeyecek kadar uzak olduklarında, yani $r \to \infty$ için $U = 0$ seçilir. O zaman $C = 0$ olur ve kütle çekim potansiyel enerjisi elde edilir:

$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM_D}{r} \qquad \text{(kütle çekim potansiyel enerjisi)}} \tag{5.16}$$

Potansiyel enerjinin sonsuzda sıfır olduğu bu formülden görülmektedir.

5.5 ENERJİ KORUNUMU YASASI

Buraya kadar tanımladığımız iş, kinetik enerji ve potansiyel enerji kavramlarını birleştirerek, artık fiziğin en önemli korunum yasasını ifade edebiliriz.

İş-Enerji teoremine göre, bir cisme etkiyen net kuvvetin yaptığı iş cismin kinetik enerjisindeki artışa eşit oluyordu (Denklem 5.11):

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Cisme uygulanan kuvvetleri, korunumlu ve korunumsuz olarak iki grupta toplayabileceğimizi gördük. O halde, bunların yaptıkları işi de şöyle iki toplama ayırabiliriz:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{kor}} + \vec{F}_{\text{korsz}}$$

$$\int_1^2 (\vec{F}_{\text{kor}} + \vec{F}_{\text{korsz}}) \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

Şimdi, potansiyel enerji tanımını hatırlayalım: Korunumlu kuvvetlere karşı yapılan iş, potansiyel enerjideki artışa eşit oluyordu;

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_{\text{kor}} \cdot d\vec{r}}_{-(U_2 - U_1)} + \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_{\text{korsz}} \cdot d\vec{r}}_{W_{\text{korsz}}} = K_2 - K_1$$

Bu formülde, korunumsuz kuvvetlerin yaptığı işi W_{korsz} ile gösterdik. Terimleri iki tarafta yeniden düzenlersek **Enerji Korunumu Yasası** ortaya çıkar:

$$\boxed{(K_1 + U_1) + W_{\text{korsz}} = K_2 + U_2 \quad \text{(Genel Enerji Korunumu)}} \tag{5.17}$$

Burada $K = \frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjiyi gösterir, U ise yerçekimi, esneklik veya diğer potansiyel enerjiler olabilir.

Enerji korunumu yasası, bir cismin başlangıçtaki (kinetik+potansiyel) enerjileri toplamının, bir kısmı korunumsuz kuvvetlerin (sürtünmenin) yapacağı işe harcandıktan sonra, geriye kalan miktarının sondaki (kinetik+potansiyel) enerjiler toplamına eşit olacağını bildirir. Bu bir tür enerji bilançosudur.

Burada sadece mekanik enerjinin korunumunu ele aldık. Aslında, diğer tüm enerji türleri (elektrik, manyetik, nükleer ...) gözönüne alındığında, enerji korunumu yine geçerli olup, fiziğin evrensel bir yasasıdır.

Özel Hal: Eğer bir cisme uygulanan korunumsuz kuvvet yoksa, veya korunumsuz kuvvetlerin yaptığı iş sıfır oluyorsa,

$$\boxed{W_{\text{korsz}} = 0 \implies K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad \text{(Özel Enerji Korunumu)}} \tag{5.18}$$

Bu durumda, enerji kaybı olmaz ve (kinetik+potansiyel) enerjiler toplamı hareket boyunca sabit kalır.

Kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamına **toplam mekanik enerji** adı verilir ve E ile gösterilir:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + U \qquad \text{(toplam mekanik enerji)} \tag{5.19}$$



Şekil 5.13: Bir lunapark treninde yüksekteki potansiyel enerji aşağıda kinetik enerjiye dönüşür.

Enerji korunumu yasası bize, kinetik veya potansiyel enerjiler değişse bile, toplam mekanik enerjinin korunduğunu bildirir. (5.17) denkleminde $K_1 + U_1 = E_1$ ve $K_2 + U_2 = E_2$ dersek,

Genel: $E_1 + W_{\text{korsz}} = E_2$

$W_{\text{korsz}} = 0$ için: $E_1 = E_2$

Enerji korunumu yasasındaki terimler sadece skaler niceliklerdir. Newton'un 2. yasası $\vec{F} = m\vec{a}$ gibi vektörel denklemlerle çalışmanın zorluğu gözönüne alınırsa, enerji korunumu bağıntıları büyük kolaylık sağlar.

Örnek 5.8

Kütlesi 4 kg *olan bir blok, sürtünmesiz yatay bir yolda* 3 m/s *hızla gelip, bir ucu duvara tespit edilmiş olan yaya çarpıyor. Yayın esneklik sabiti* $k = 100\,\text{N/m}$ *dir. Blok yayı en fazla ne kadar sıkıştırır?*



Çözüm

Başlangıç ve sondaki toplam enerji korunur:

$$E_1 = E_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

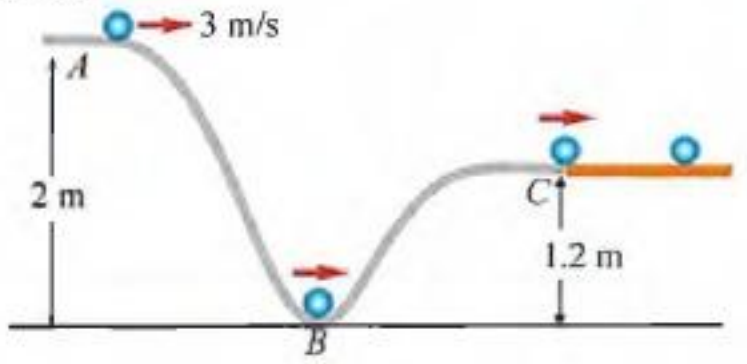
$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v = \sqrt{\frac{4}{100}}\,3 = 0.60\,\text{m}$$

Örnek 5.9

Şekildeki yolun ABC kısmı sürtünmesiz, C den ötesinde sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ *tir. Kütlesi* $m = 2\,\text{kg}$ *olan bir top, yerden 2m yüksekteki A noktasından* 3 m/s *hızıyla yol boyunca atılıyor.*

(a) *Topun B ve C noktalarındaki hızlarını bulun.*

(b) *Top C noktasından itibaren duruncaya kadar kaç metre yol alır?*



Çözüm

(a) Sürtünme olmadığı için, A,B,C noktalarında toplam mekanik enerji korunur:

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C$$

Bu eşitliklerde $y_A = 2$, $y_B = 0$, $y_C = 1.2\,\text{m}$ değerleri kullanılarak, v_B, v_C hızları bulunur:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gy_A} = \sqrt{3^2 + 2\times 10\times 2} = 7\,\text{m/s}$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gy_C} = \sqrt{7^2 + 2\times 10\times 1.2} = 5\,\text{m/s}$$

(b) C noktasından itibaren cismin kinetik enerjisi sürtünmenin yaptığı iş olarak harcanır:

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 - (\mu mg)\,d = 0$$

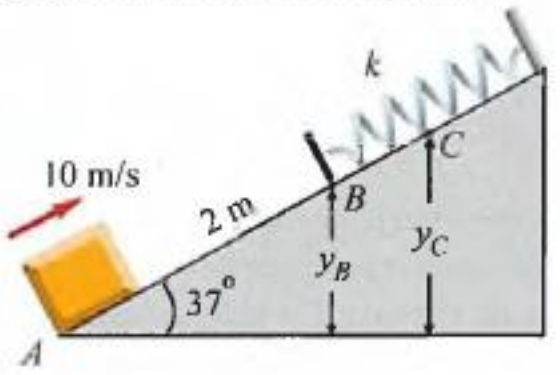
$$d = v_C^2/(2\mu g) = 5^2/(2\times 0.5\times 10) = 2.5\,\text{m}.$$

Örnek 5.10

Sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ ve eğimi 37° olan bir düzlemin alt ucundaki A noktasından 1 kg kütleli bir blok 10 m/s ilk hızıyla düzlemden yukarı doğru fırlatılıyor. Eğik düzlemin üst ucuna tespit edilmiş olan $k = 100\,\text{N/m}$ sabitli bir yayın serbest B ucu, A noktasından 2 m uzaklıktadır.

(a) *Blok B noktasına vardığında hızı ne kadar olur?*

(b) *Blok yayı en fazla ne kadar sıkıştırır?*



Çözüm

(a) A ile B noktaları arasında genel enerji korunumunu yazarız:

$$E_A + W_f = E_B$$

Burada $W_f = -fd$ sürtünme kuvvetinin yaptığı iş olup, $f = \mu mg\cos 37°$ dir. O halde,

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A - (\mu mg\cos 37°)\,d = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B$$

Potansiyel enerjinin sıfır düzeyini A da seçersek, $y_A = 0$ ve d uzaklıktaki B noktasının yüksekliği $y_B = d\sin 37°$ olur. Diğer değerler de yerine konulursa v_B hızı bulunur:

$$10^2 - 16 = v_B^2 + 24 \;\rightarrow\; v_B = 7.7\,\text{m/s}$$

(b) Blok, yayı en fazla sıkıştırdığı C noktasına geldiğinde durur: $v_C = 0$. Enerji korunumunu A ile C arasında yazarız. Bu kez, yerçekimi potansiyel enerjisine ilaveten, esneklik potansiyel enerjisi de vardır. Yayın maksimum sıkışmasına x dersek,

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 - \mu mg(d+x) = 0 + mgy_C + \tfrac{1}{2}kx^2$$

olur. C noktasının yüksekliği $y_C = (d+x)\sin 37°$ alınır ve sayısal değerler yerlerine konur:

$$100 - 20(2+x) = 100x^2 \;\rightarrow\; 5x^2 + x - 3 = 0$$

Bu 2. derece denklemin pozitif kökü sonucu verir:

$$x = 0.68\,\text{m}$$

Örnek 5.11

Dünyaya yaklaşan bir meteorun Dünya yüzeyinden 900 km uzaklıkta hızı 100 m/s olarak ölçülüyor. Bu meteor Dünya yüzeyine hangi hızla çarpar?

($GM_D = 4\times 10^{14}\,\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ ve $R_D = 6400\,\text{km}$.)

Çözüm

Kütle çekim potansiyel enerjili problemlerde sabitler çarpımı GM_D nin sayısal değerini kullanmak kolaylık sağlar. Enerji korunumu yazılır:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_Dm}{R_1} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_Dm}{r_2}$$

Sadeleştirme yapılır:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + GM_D\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

Burada verilen r_1, r_2 uzaklıkları Dünya yüzeyinden itibaren ölçülmüş olup, bunları formülde Dünya merkezine göre kullanmak gerekir:

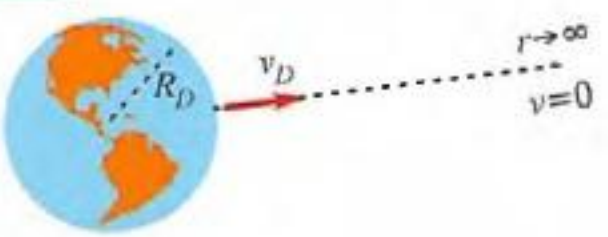
$$r_1 = 6400 + 900 = 7300\,\text{km} = 7.3\times 10^6\,\text{m}$$

$$r_2 = 6400\text{km} = 6.4\times 10^6\,\text{m}$$

Bu değerler yerine konulursa, meteorun Dünya'ya çarpma hızı bulunur:

$$v_2 = 2780\,\text{m/s}$$

Örnek 5.12



Dünyadan kurtulma hızı. *Dünya yüzeyinden atılan bir roket veya bir taş, tekrar Dünya yüzeyine düşmemesi için, minimum bir hıza sahip olmalıdır. Buna kurtulma hızı denir. Bu hızın değerini hesaplayın. ($GM_D = 4\times 10^{14}\,\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ ve $R_D = 6400\,\text{km}$.)*

Çözüm

Cismin Dünya'ya tekrar düşmemesi için koşul ne olmalıdır? Cisim yavaşlarken, sonlu bir uzaklıkta hızı sıfır olursa, tekrar geri döner. O halde, hızı sıfır olduğunda sonsuza varmış olmalıdır: $v_\infty = 0$. Buna göre, m kütleli bir cisim için enerji korunumunu Dünya yüzeyi ile sonsuz arasında yazarız.

$$\tfrac{1}{2}mv_D^2 - \frac{GM_Dm}{R_D} = \tfrac{1}{2}mv.0^2 - \frac{GM_Dm}{\infty}$$

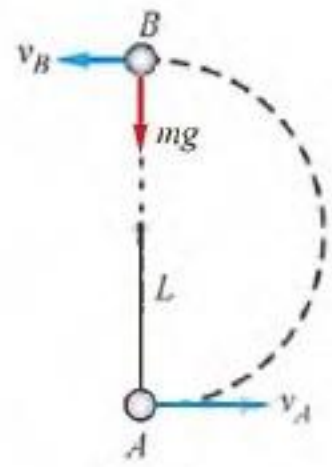
$1/\infty = 0$ olduğundan, kurtulma hızı formülü,

$$v_D = \sqrt{\frac{2GM_D}{R_D}}$$

olur. Sayısal değerler yerlerine konur:

$$v_D = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 11.2 \text{ km/s}$$

Örnek 5.13



$L = 50\,\text{cm}$ yarıçaplı bir ipin ucuna bağlanan m kütlesi, en alttaki A noktasından yatay v_A hızıyla atılıyor. En üstteki B noktasından geçerken ipin gevşememesi için hangi v_A hızıyla atılmalıdır?

Çözüm

Örnek 4.19 da, ipin gevşememe koşulunun, B noktasında T gerilmesinin minimum $T = 0$ değerinde olması gerektiğini görmüştük. Buna göre, B noktasında merkezcil ivmeyi kullanarak v_B hızını buluruz:

$$F_r = ma_r \rightarrow mg = m\frac{v_B^2}{L}$$

$$v_B^2 = gL$$

Şimdi, A ile B noktaları arasında enerji korunumunu yazarız. B noktasının yüksekliği $2L$ olduğundan,

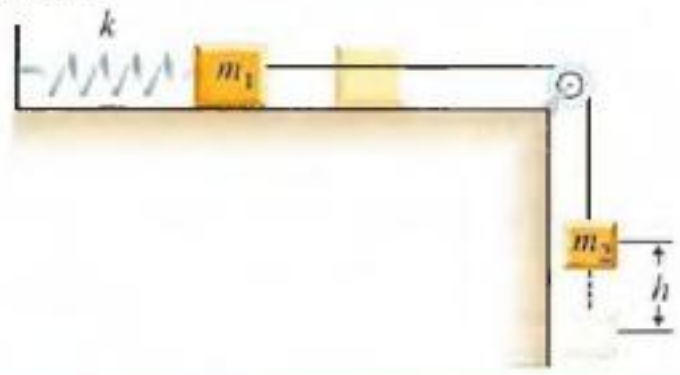
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + mg(2L)$$

Yukarda bulduğumuz v_B^2 ifadesi burada kullanılırsa, v_A hızı bulunur:

$$v_A^2 = gL + 4gL = 5mgL \quad v_A = \sqrt{5gL} = 5\text{ m/s}$$

Örnek 5.14

$m_1 = 1\,\text{kg}$ ve $m_2 = 2\,\text{kg}$ blokları sürtünmesiz bir makaradan geçen hafif bir iple birbirlerine bağlanmışlardır. m_1 kütlesi sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ olan yatay düzlemde $k = 100\,\text{N/m}$ sabitli bir yaya bağlanırken, m_2 kütlesi serbestçe sarkmaktadır. Yay normal uzunluğundayken, iki blok serbest bırakılıyor. m_2 kütlesinin en fazla ineceği h mesafesini hesaplayın.



Çözüm

Bu problemi yine enerji korunumu bağıntısını formel olarak yazıp, uzun uzun çözebilirdik. Fakat, artık kestirme düşünüp çözebilmek gerekir. Bu sistem başlangıçta hareketsiz ve yay uzamamış iken, nasıl hareket edebiliyor? Tüm bunlar m_2 kütlesinin mgh kadar potansiyel enerji kaybı sonucudur. O halde, bu enerjiyi yayın potansiyel enerjisi ile sürtünme kuvvetinin yaptığı iş toplamına eşitlemek yeterlidir:

$$m_2gh = \tfrac{1}{2}kh^2 + \mu m_1gh$$

(m_2 kütlesi h kadar indiğinde, yay da h kadar uzar ve m_1 kütlesi de h kadar yol alır.)

Buradan h yüksekliği hesaplanır:

$$h = \frac{2(m_2 - \mu m_1)g}{k} = \frac{2(2 - 0.4 \times 1) \times 10}{100} = 0.32\,\text{m}$$

Örnek 5.15



$m = 1\,\text{kg}$ kütleli bir blok sürtünmesiz yatay bir düzlemde, yay sabitleri $k_1 = 30\,\text{N/m}$ ve $k_2 = 70\,\text{N/m}$ olan iki yaya birlikte bağlanmıştır. Başlangıçta yaylar normal uzunluğunda ve blok dengededir. Blok denge konumundan itibaren, sağa doğru $x_0 = 50\,\text{cm}$ kadar çekilip bırakılıyor.

(a) *Blok denge konumundan 40 cm uzaklıktayken hızı ne olur?*

(b) *Bloğun maksimum hızı ne olur ve bu hıza nerede erişir?*

Çözüm

(a) Yaylardan biri ne kadar uzamışsa, diğeri de o kadar sıkışmış demektir. O halde, bu sistemi $(k_1 + k_2)$ yay sabitli tek bir yay gibi düşünebiliriz. Blok başlangıçta x_0 kadar uzadığı yerden ilk hızsız bırakılıyorsa, daha sonraki bir x uzamasında v hızı enerji korunumundan bulunur:

$$\tfrac{1}{2}k_1x_0^2 + \tfrac{1}{2}k_2x_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)(x_0^2 - x^2)}{m}}$$

$x = 0.4\,\text{m}$ için hesap yapılırsa, $v = 3\,\text{m/s}$ bulunur.

(b) Yukarda bulunan ifadeye göre, hızın maksimum olması için, karekök içindeki $(x_0^2 - x^2)$ çarpanı maksimum olmalıdır. x_0 baştan verildiğine göre, x en küçük yani $x = 0$ olmalıdır. O halde, blok maksimum hıza denge konumundan geçerken ulaşır. Bu formülde $x = 0$ alınırsa maksimum hız bulunur:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\, x_0 = 5\ \text{m/s}$$

Test

1. Kütlesi 2 kg olan ve 2 m/s hızla gitmekte olan bir cismin kinetik enerjisi ne kadardır?
   (a) 2 J (b) 4 J (c) 6 J (d) 8 J

2. Hangisi yanlıştır?
   (a) Yola dik kuvvet iş yapmaz.
   (b) Yola ters kuvvet negatif iş yapar.
   (c) İş, kuvvetin yola paralel bileşeni ile gidilen yolun çarpımıdır.
   (d) İş, kuvvetin yola dik bileşeni ile gidilen yolun çarpımıdır.

3. 4 m/s hızla giden 2 kg lık cismin kinetik enerjisi ne kadar dır?
   (a) 4 J (b) 8 J (c) 12 J (d) 16 J

4. Bir cisme etkiyen net kuvvetin yaptığı iş sıfır ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Kinetik enerjisi sabit kalır.
   (b) Potansiyel enerjisi sabit kalır.
   (c) Kinetik enerjisi artar, potansiyel enerjisi azalır.
   (d) Kinetik enerjisi azalır, potansiyel enerjisi artar.

5. Bir basit sarkaç için hangisi doğrudur?
   (a) En üst noktada potansiyel enerji minimum olur.
   (b) En üst noktada kinetik enerji maksimum olur.
   (c) En alt noktada potansiyel enerji maksimum olur.
   (d) En alt noktada toplam enerji minimum olur.

6. Bir vinç 100 kg kütleyi 2 m/s hızla yukarı çekebiliyorsa, gücü ne kadardır?
   (a) 1 kW (b) 2 kW (c) 3 kW (d) 4 kW

7. Hangisinin yaptığı iş daha büyüktür?
   (a) Bir taşı 10 N kuvvetle 2 m taşıyan adam.
   (b) Bir taşı 5 N kuvvetle 3 m taşıyan adam.
   (c) 200 kg lık halteri havada sabit tutabilen halterci.
   (d) 20 kg kütleyi 1 m yükseğe çıkaran çocuk.

8. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Korunumlu kuvvetin yaptığı iş yoldan bağımsızdır.
   (b) Korunumsuz kuvvetin yaptığı iş yola bağımlıdır.
   (c) Korunumlu kuvvet için potansiyel enerji tanımlanabilir.
   (d) Korunumsuz kuvvet için potansiyel enerji tanımlanabilir.

9. Bir asansör sabit hızla yukarı doğru çekiliyor. Asansör üzerinde yapılan iş,
   (a) Sıfırdır.
   (b) Pozitiftir.
   (c) Negatiftir.
   (d) Sabittir.

10. Duran bir cisim üzerindeki net kuvvetin yaptığı iş 2 katına çıkarılırsa, hızı kaç katına çıkar?
    (a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 4

11. Duran bir cisme etkiyen net kuvvetin yaptığı işi kaç kat artırmalıdır ki son hızı 4 kat artsın?
    (a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

12. Bir yayın boyunu 1 cm uzatmak için 5 J iş yapmak gerekiyorsa, 2 cm uzatmak için ne kadar iş yapmak gerekir?
    (a) 6 J (b) 10 J (c) 15 J (d) 20 J

13. Dünya'nın kütle çekim potansiyel enerjisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Dünya merkezinde sıfırdır.
    (b) Sonsuzda sıfırdır.
    (c) Dünya yüzeyinde sıfırdır.
    (d) Güneş merkezinde sıfırdır.

14. Kinetik enerji için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Cismin hareket yönüne bağlıdır.
    (b) Negatif olabilir.
    (c) Daima pozitiftir.
    (d) Her gözlemci için aynıdır.

15. Kütle çekim potansiyel enerjisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Uzaklığın karesiyle ters orantılıdır.
    (b) Toplam kütleyle orantılıdır.
    (c) Uzaklıkla ters orantılıdır.
    (d) Kütleyle ters orantılıdır.

16. Dünya etrafında bir yörüngede dönen yapay uydunun dönme yarıçapı iki katına çıkarılıyor. Potansiyel enerjisi nasıl değişir?

(a) 2 kat azalır.
(b) 2 kat artar.
(c) 4 kat azalır.
(d) 4 kat artar.

17. Bir otomobil yatay bir yolda fren yaparak duruyor. Kaybettiği kinetik enerji nereye harcanmıştır?

(a) Sürtünme kuvvetinin yaptığı işe.
(b) Potansiyel enerji artışına.
(c) Motorun ısınmasına.
(d) Hepsi.

18. Bir yüzeyde kaymakta olan cisim için hangisi doğrudur?

(a) Sürtünme kuvveti iş yapmaz.
(b) Normal kuvvet iş yapmaz.
(c) Normal kuvvet negatif iş yapar.
(d) Sürtünme kuvveti negatif iş yapar.

19. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

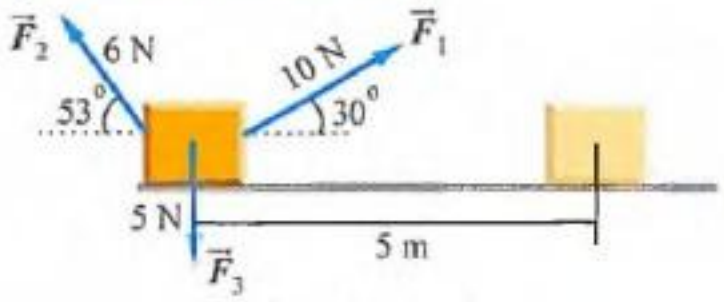
(a) Sürtünme kuvveti korunumludur.
(b) Yerçekimi kuvveti korunumludur.
(c) Yay kuvveti korunumludur.
(d) Sürtünme kuvveti korunumsuzdur.

20. Dünya çevresinde iki uydu $r_1 < r_2$ yarıçaplarında dönmektedirler. Kütle çekim potansiyel enerjisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(a) $U_1 < U_2$ (b) $U_1 = U_2$ (c) $U_1 > U_2$ (d) Hiçbiri.

Problemler

5.1–3 İş, Kinetik Enerji, Güç

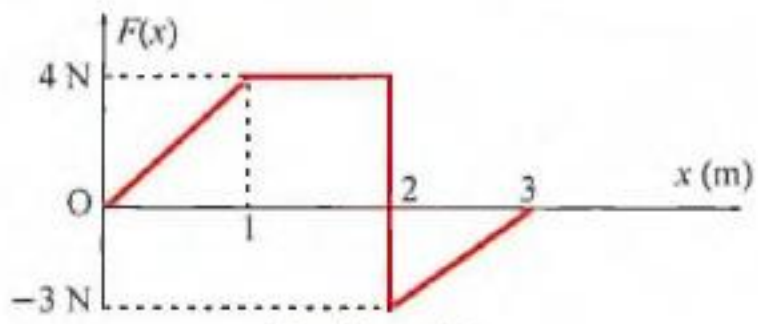


Problem 5.1

5.1 Şekildeki kuvvetlerin 5 m yatay yol boyunca yaptıkları işleri hesaplayın. [C: 44 J, −18 J, 0.]

5.2 Ağırlığı $W = 10\,\text{N}$ olan bir blok, 37° eğimli bir düzlemden yukarı yönde, eğik düzleme paralel $F = 9\,\text{N}$ luk kuvvetle, sabit hızla 2 m kadar çekiliyor. (a) F kuvvetinin yaptığı iş, (b) Yerçekimi kuvvetinin yaptığı iş, (c) Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş ne kadar olur?

[C: (a) 18 J, (b) −12 J, (c) −6 J.]



Problem 5.3

5.3 Şekildeki değişken $F(x)$ kuvvetinin yaptığı işi bulun. [C: 4.5 J.]

5.4 Bir cisme etkiyen değişken kuvvet:

$$F(x) = 6x^2 - 2x \ \text{(newton)}$$

olarak veriliyor. Bu kuvvetin x : [0, 5 m] aralığında yaptığı işi hesaplayın. [C: 225 J.)

5.5 Bir yayı 10 cm uzatmak için 5 J iş yapılıyor. Bunun üzerine 30 cm *daha* uzatmak için ne kadar iş yapılır? [C: 80 J.]

5.6 Durduğu yerden harekete geçen 2 kg lık bir cismin 5 m uzakta hızı 8 m/s oluyor. Bu cisme uygulanan net kuvvet ve yaptığı iş ne kadardır? [C: 12.8 N ve 64 J.]

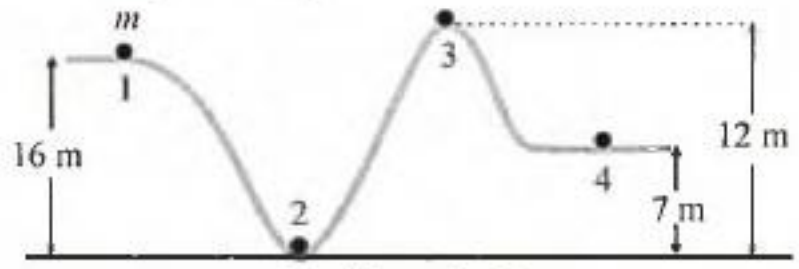
5.7 Bir sahra topunun namlu uzunluğu 6 m dir. 20 kg lık bir mermi ateşlendiğinde topu 200 m/s hızla terkediyor. (a) Merminin kinetik enerjisi ne kadardır? (b) Namlu içinde topa etkiyen net kuvvetin yaptığı iş ne kadardır? (c) Namlu içinde mermiye etkiyen ortalama kuvvet ne kadardır?

[C: (a) 400 kJ, (b) 400 kJ, (c) 33 kN.]

5.8 60 kg kütleli bir sporcu 10 m uzunluktaki halata 20 s de tırmanıyor. Sprocunun gücünü watt ve beygir gücü cinsinden hesaplayın. [C: 300 W, 0.4 HP.]

5.9 Bir otomobilin motoru 100 HP gücü kullanarak otomobili sabit 72 km/saat hızıyla götürebilmektedir. Otomobilin çekiş kuvveti 1400 N olduğuna göre, motor gücünün yüzde kaçı sürtünme ve hava direncine gitmektedir? [C: %62.]

5.4 Potansiyel Enerji



Problem 5.10

5.10 $m = 3\,\text{kg}$ lık kütlenin şekilde gösterilen 1,2,3,4 noktalarında yerçekimi potansiyel enerjisini hesaplayın. (Sıfır düzeyini nerede aldığınızı belirtin.)

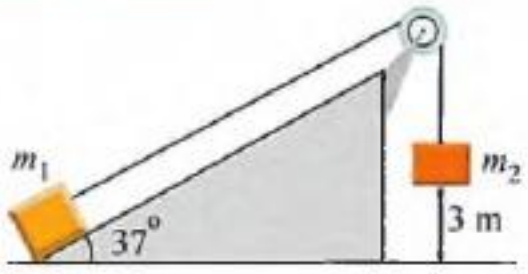
[C: Sıfır düzeyi yerde seçilirse: 480, 0, 360, 210 J.]

5.11 Tavana bağlı bir yayın normal uzunluğu 1 m dir. Bu yayın serbest ucuna 200 g bir kütle asıldığında boyu 105 cm oluyor. (a) Yay sabitini hesaplayın. (b) Bu yayın potansiyel enerjisi 5 J olduğunda boyu ne kadar uzamış olur?

[C: (a) 40 N/m, (b) 50 cm.]

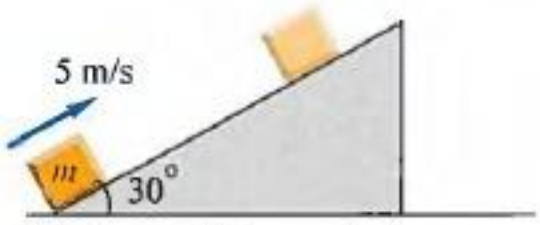
5.12 TURKSAT 3A uydusunun kütlesi 3 ton olup, 2008 yılında Dünya yüzeyinden 36 000 km yüksekte bir yörüngeye yerleştirilmiştir. Bu uyduyu o yüksekliğe çıkarabilmek için gerekli enerji ne kadardır? ($GM_D = 4 \times 10^{14}$ ve $R_D =$ 6400 km değerlerini kullanın.) [C: 1.6×10^{11} J.]

5.5 Enerji Korunumu Yasası



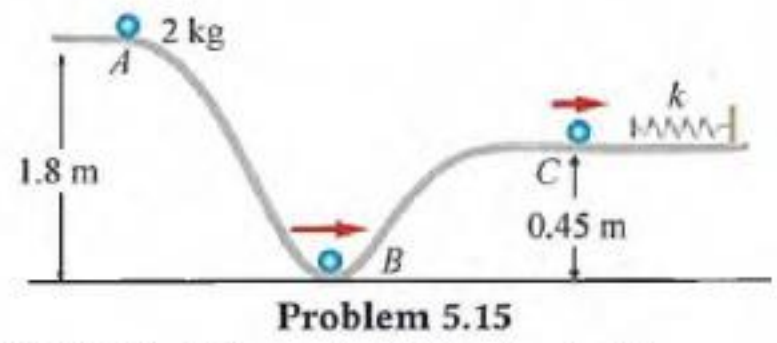
Problem 5.13

5.13 Şekildeki 37° eğimli sürtünmesiz düzlem üzerindeki $m_1 = 1$ kg kütlesi, sürtünmesiz bir makaradan geçen iple $m_2 = 2$ kg kütlesine bağlanmıştır. Başlangıçta m_2 kütlesi yerden 3 m yüksekten serbest bırakılıyor. m_2 kütlesi yere hangi hızla ulaşır? [C: 5.3 m/s.]



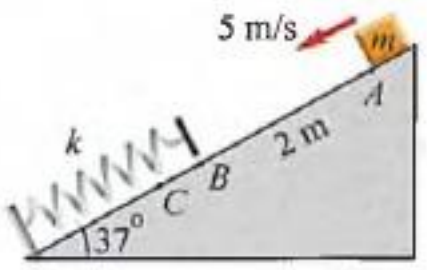
Problem 5.14

5.14 Şekildeki 30° eğimli ve sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ olan bir düzlemin alt ucundan m kütleli bir blok 5 m/s hızla fırlatılıyor. Duruncaya kadar eğik düzlem boyunca ne kadar yol alır? (*Not*: m kütlesi hesap sonunda sadeleşecektir.) [C: 1.34 m.]



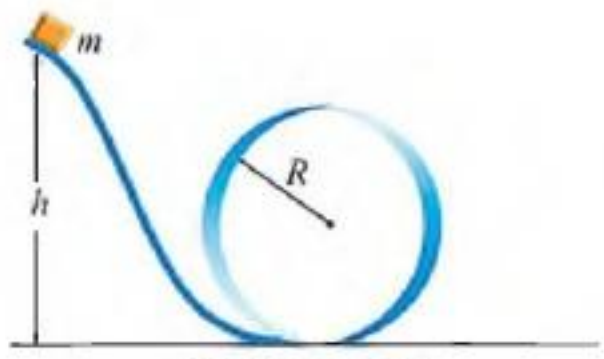
Problem 5.15

5.15 Şekildeki sürtünmesiz ABC yolunda C den sonra $k =$ 200 N/m sabitli bir yay tespit edilmiştir. Kütlesi 2 kg olan bir blok A noktasından ilk hızsız bırakılıyor. (a) Bloğun B ve C noktalarındaki hızları ne olur? (b) Blok yayı en fazla ne kadar sıkıştırır? [C: (a) $v_B = 6$, $v_C = 5$ m/s, (b) $x = 0.5$ m.]



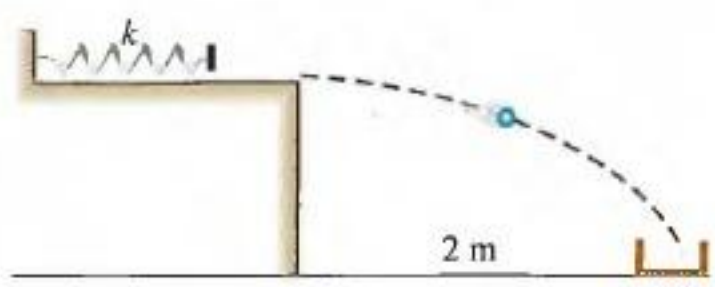
Problem 5.16

5.16 37° eğimli ve sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ olan bir düzlemin alt ucuna $k = 200$ N/m sabitli bir yay tespit edilmiştir. $m = 1$ kg kütleli bir blok düzlemin A noktasından, aşağı yönde 5 m/s hızıyla fırlatılıyor. Yayın B serbest ucu $AB = 2$ m uzaktadır. (a) Blok yayın serbest ucuna hangi hızla çarpar? (b) Yayı en fazla ne kadar sıkıştırır, yani $BC = x$ ne kadardır? [C: (a) 6 m/s, (b) 0.44 m.]



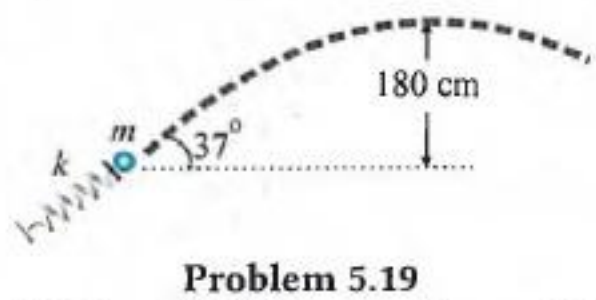
Problem 5.17

5.17 Şekildeki sürtünmesiz raylı bir pistin bir kısmı R yarıçaplı çember şeklinde bükülmüştür. m kütleli bir blok rayın bir ucundan h yükseklikte bırakılıyor. Blok en az hangi h yüksekliğinden bırakılmalıdır ki çemberin tepe noktasında raydan ayrılmadan dönebilsin? (*Yol gösterme:* Tepe noktasında rayın normal tepki kuvvetinin minimum değeri ne olmalıdır?) [C: $h = 5R$.]



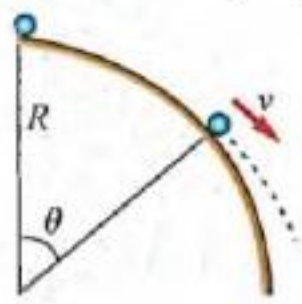
Problem 5.18

5.18 Sürtünmesiz bir masa üzerine tespit edilmiş olan bir yayla sıkıştırılan topun uçarak, yerde masanın ucundan 2 m uzaklıkta bir kabın içine isabet etmesi isteniyor. Birinci denemede yay 20 sıkıştırıldığında top kaptan 40 cm öne düşüyor. İkinci denemede topun kaba isabet etmesi için yay ne kadar sıkıştırılmalıdır? (*Yol gösterme:* Yatay atış problemini çözmeye gerek yoktur. Her iki atışta da topun uçuş zamanı aynı olacaktır.) [C: 25 cm.]



Problem 5.19

5.19 Yay sabiti $k = 500$ N/m olan bir yaylı tabanca 50 g lık mermiler atabilmektedir. Bu tabancanın yatayla 37° açı altında gönderdiği bir merminin 180 cm maksimum yüksekliğe eriştiği gözlenmektedir. (a) Merminin ilk hızını, (b) Yayın sıkışma miktarını bulun. [C: (a) 10 m/s, (b) 0.1 m]



Problem 5.20

5.20 r yarıçaplı sürtünmesiz bir küre yüzeyinin tepe noktasına bırakılan bir bilya yüzeyden aşağı kaymaya başlıyor. Hangi θ açısında yüzeyi terkeder? (*Yol gösterme:* Yüzeyi terkettiği yerde normal tepki kuvveti sıfır olur. Merkezcil kuvvet ise ağırlığın merkeze yönelik bileşenidir.) [C: $\cos\theta = 2/3, \theta = 48°$.]

6 İMPULS, MOMENTUM VE KÜTLE MERKEZİ



Bilardo toplarının çarpışması sırasında oluşan kuvvetler çok karmaşık yapıda olup, incelenmesi zordur.
Oysa, çarpışma öncesi ve sonrasında hep aynı kalan bir nicelik vardır. Bunun ne olduğunu bu bölümde öğreneceğiz (Foto: Dave Jackson)

Newton yasalarının doğrudan uygulanmasının zor olduğu durumlardan biri de çarpışma problemleridir. İki bilardo topu çarpıştığında, o çok kısa süre içinde aralarında etki-tepki kuvvetleri oluşur. Bu kuvvetlerin yapısı çok karmaşık olabilir ve incelenmesi zordur. Oysa, bu iki top başlangıçta belli hızlara sahiptiler ve çarpışmadan sonra da belli hızlar kazandılar. Acaba, çarpışmanın iç mekanizmasına bakmadan, başlangıç ve son durumlar arasında bir ilişki kurabilir miyiz?

Bu bölümde, iki veya daha çok sayıda parçacığın etkileşmesi sırasında yorumlaması kolay olan, impuls ve momentum kavramlarını tanımlayacağız. Bu kavramlardan momentumun bir korunum yasasına uyuyor olması, pekçok problem çözümünü de kolaylaştıracaktır.

6.1 İMPULS VE MOMENTUM

İkinci Newton yasasını gözönüne alalım. Bu yasadaki ivmenin hızın türevi olduğunu biliyoruz:

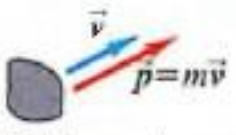
$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

m kütlesi sabit olduğu için türevin içine katılabilir. Bu ifadeye bakıldığında, kuvvetin kendisi de başka bir niceliğin türevi olmaktadır.

Tanım: Kütlesi m ve hız vektörü $\vec{v}$ olan bir cismin **momentum vektörü**,

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad \text{(Momentum)} \qquad (6.1)$$

olur. Momentum birimi kg.m/s olup, özel bir adı yoktur. O halde, ikinci Newton yasası şöyle de yazılabilir (Newton da kitabında 2. yasayı böyle yazmıştı):



Şekil 6.1: Momentum vektörü.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (6.2)$$

Bu m kütleli cisim başlangıçta $\vec{p} = m\vec{v}$ momentumuna sahip iken, küçük bir Δt zaman aralığında sabit $\vec{F}$ kuvvetinin etkisiyle $\vec{p}\,' = m\vec{v}\,'$ momentumuna geçmiş olsun. Yukardaki ifadeyi Δt için yazarsak,

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}\,' - \vec{p}}{\Delta t}$$

veya,

$$\begin{aligned} \vec{p} + \vec{F}\Delta t &= \vec{p}\,' \\ m\vec{v} + \vec{F}\Delta t &= m\vec{v}\,' \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Bu ifade Bölüm 5 te gördüğümüz iş-enerji teoremine çok benzemektedir. Orada, kinetik enerjideki artış $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı işe eşit oluyordu. Bu formülde ise, momentumdaki artış kuvvetin zamanla çarpımına eşit olmaktadır. Bu kuvvetin zamanla çarpımı yeni bir kavram olarak tanımlanır:

Tanım: Değişken bir $\vec{F}$ kuvvetinin sonlu bir $[t_1, t_2]$ aralığındaki integrali,

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \qquad \text{(İmpuls)} \qquad (6.4)$$

olup, **impuls** adı verilir. Birimi momentumla aynı, kg.m/s olur. İmpuls kavramı daha çok, kısa süreli etkiyen kuvvetler için kullanılır.

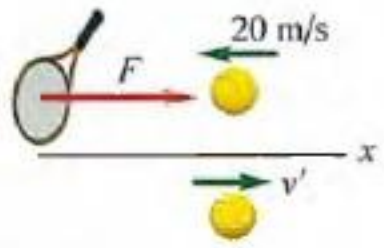
İmpuls-momentum teoremi: Yukardaki bağıntıyı momentum ve impuls cinsinden yeniden yazalım:

$$\vec{p} + \vec{J} = \vec{p}\,' \qquad \text{(İmpuls-momentum teoremi)} \qquad (6.5)$$

Bu ifadeye impuls-momentum teoremi denir. Böylece, cismin ivmesini bilmeye gerek kalmadan, ilk ve son hızlar arasında kolay yorumlanabilen bir ifade elde edilmiş olur. Bu, 2. Newton yasasına eşdeğerdir.

Önemli not: İş ve enerjinin aksine, impuls ve momentum *vektörel* niceliklerdir. Formüllerde kullanılırken yönleri dikkate alınmalıdır.

Örnek 6.1



Bir tenisçi kendisine doğru 20 m/s *hızla gelmekte olan topa vurarak onu* 30 m/s *hızla geri gönderiyor.* 56 g *kütleli topun raketle teması* 0.05 *saniye sürdüğüne göre, top üzerindeki ortalama kuvveti hesaplayın.*

Çözüm

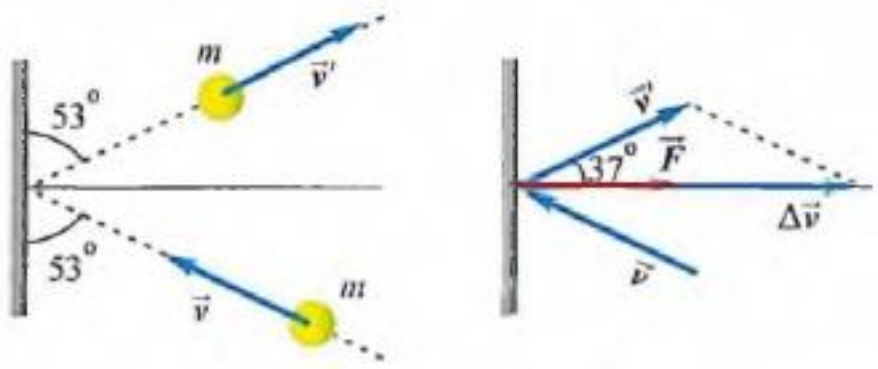
Burada hızların işaretine dikkat etmek gerekir. İmpuls-momentum teoremi bir boyutta yazılır:

$$mv + F\,\Delta t = mv'$$

Pozitif x-yönü son hız yönünde seçilirse, buna ters yöndeki ilk hız negatif olur:

$$F = \frac{mv' - mv}{\Delta t} = \frac{0.056 \times 30 - 0.056 \times (-20)}{0.05} = 56\,\text{N}$$

Örnek 6.2



Kütlesi 1 kg *ve hızı* $v = 10$ m/s *olan bir top, bir duvara* 53° *açıyla çarpıp, aynı açı ve aynı hızla yansıyor. Topun duvarla teması* 0.02 s *sürdüğüne göre, duvarın topa uyguladığı kuvvetin yönü ve şiddeti ne kadar olur?*

Çözüm

İmpuls-momentum teoremini iki boyutta $\vec{F}$ kuvveti için yazalım:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} \;\rightarrow \vec{F} = \frac{m}{\Delta t}\Delta\vec{v}$$

Buna göre, $\vec{F}$ vektörü $\Delta\vec{v}$ vektörü yönünde olacaktır. Şekilde görüldüğü gibi, $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ vektörü, $[\vec{v}' + (-\vec{v})]$ toplamı olarak çizildiğinde, duvara dik olur.

O halde, $\Delta\vec{v}$ ile orantılı olan $\vec{F}$ vektörü de duvara dik ve $+x$ yönünde olur.

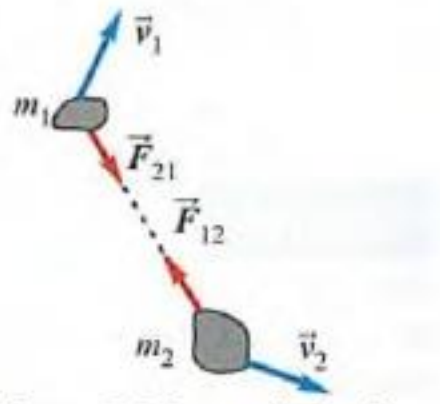
İlk ve son hızların büyüklüğü eşit olduğundan, şekilden görüldüğü gibi, $\Delta v = 2v\cos 37°$ olur. Buradan F kuvvetinin şiddeti hesaplanır:

$$F = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{2mv\cos 37°}{\Delta t} = \frac{2 \times 10 \times 0.8}{0.02} = 800\,\text{N}$$

6.2 MOMENTUM KORUNUMU YASASI

Newton yasasını momentum cinsinden yazmak, tek cisim için fazla bir yenilik getirmez. Onun asıl gücü, etkileşen iki cisim için yazıldığında görülür.

Başlangıçta momentumları $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ ve $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ olan iki kütle gözönüne alalım. Bu sisteme hiçbir dış kuvvetin etkimediğini, kütlelerin sadece birbirleriyle etkileştiğini varsayalım (Şekil 6.2). Bu etkileşme sonunda momentumlar $\vec{p}_1\,' = m_1\vec{v}_1\,'$ ve $\vec{p}_2\,' = m_2\vec{v}_2\,'$ değerlerini alsın.



Şekil 6.2: Etkileşen iki kütle.

m_1 kütlesi için Newton yasasını (6.3) denklemindeki haliyle yazalım:

$$\vec{p}_1 + \vec{F}_{21}\,\Delta t = \vec{p}_1\,'$$

Burada 2. cismin birinciye uyguladığı kuvveti $\vec{F}_{21}$ ile gösterdik. Aynı yasayı 2. cisim için yazalım:

$$\vec{p}_2 + \vec{F}_{12}\,\Delta t = \vec{p}_2\,'$$

Bu iki denklemi alt alta yazıp toplayalım:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12})\,\Delta t = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,'$$

Parantez içindeki toplam sıfır olur, çünkü etki-tepki yasasına göre, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ olmak zorundadır. Buradan **momentum korunumu yasası** çıkar:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,' = \text{sabit} \qquad \text{(momentum korunumu yasası)} \tag{6.6}$$

Dikkat edilirse, iki cisim arasındaki etkileşmenin ayrıntılarını bilmeye gerek yoktur.

Bu sonuç çok genel olup, ikiden fazla cisim için de geçerlidir. Bu durumda, **bir sistemin toplam momentumu** şöyle tanımlanır:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N \qquad \text{(toplam momentum)} \tag{6.7}$$

O halde, genel momentum korunumu yasası şöyle ifade edilebilir:

Momentum Korunumu Yasası

Bir sisteme etkiyen dış kuvvetler sıfır ise, sistemin toplam momentumu sabit kalır:

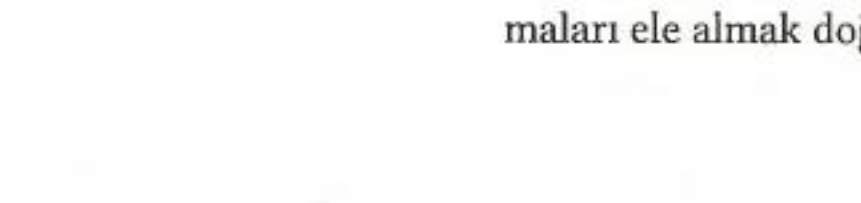
$$\sum_i F_i^{\text{dış}} = 0 \implies \vec{P} = \vec{P}'$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' + \cdots + \vec{p}_N{}' \tag{6.8}$$

Bu vektör eşitlik, hesaplarda bileşenler için yazılır. Sadece 2 cisim için bileşenleri yazalım:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Örnek 6.3

Kütlesi $m_1 = 1\,\text{kg}$ olan bir blok sürtünmesiz raylar üzerine $8\,\text{m/s}$ hızla gelip, aynı yönde $5\,\text{m/s}$ hızla gitmekte olan $m_2 = 10\,\text{kg}$ lık bloğa çarpıyor. Çarpışma sonrasında, m_2 bloğunun yine aynı yönde $6\,\text{m/s}$ hızla gittiği gözleniyor. m_1 bloğunun son hızını bulun.



Çözüm

Momentum korunumu için bulunan (6.9) formüllerini bir boyutta yazalım (indisleri yazmaya gerek yoktur):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$+x$ yönü iki cismin hareket yönünde seçilirse,

$$1 \times 8 + 10 \times 5 = 1 \times v'_1 + 10 \times 6$$

Buradan $v'_1 = -2\,\text{m/s}$ bulunur. Eksi işaret m_1 bloğunun geri yönde gittiğini bildirir.

Örnek 6.4

Sürtünmesiz yatay bir yolda $8\,\text{m/s}$ hızıyla gitmekte olan $M = 10\,\text{kg}$ kütlesi birden patlıyor ve iki parçaya ayrılıyor. Parçalardan $m_2 = 7\,\text{kg}$ kütleli olanı aynı yönde $14\,\text{m/s}$ hızla hareket ettiğine göre, $3\,\text{kg}$ kütleli parçanın hızını bulun.



Çözüm

Başlangıçta bir M kütlesi vardır. Bunun hızına V dersek momentum korunumu şöyle yazılır:

$$MV = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$m_1 = 3$, $m_2 = 7\,\text{kg}$ alınır ve sayısal değerler yerine konulur:

$$10 \times 8 = 3v'_1 + 7 \times 14$$

Buradan $v'_1 = -13\,\text{m/s}$ bulunur. m_1 kütlesinin hızı geri yöndedir.

6.3 BİR BOYUTLU ÇARPIŞMALAR

Bu kısımda iki cismin çarpışması sonrasında neler olabileceğini yorumlayabilmek istiyoruz. Çarpışma deyince "çok kısa süren etkileşme" anlaşılır. Bu, temas eden iki bilardo topu olabileceği gibi, birbirine değmeden kütle çekim kuvvetiyle etkileşen iki gökcismi de olabilir.

Matematik zorlukları en aza indirebilmek amacıyla, önce bir-boyutlu çarpışmaları ele almak doğru olur. Bu incelemede çarpışmalar iki grupta toplanırlar.

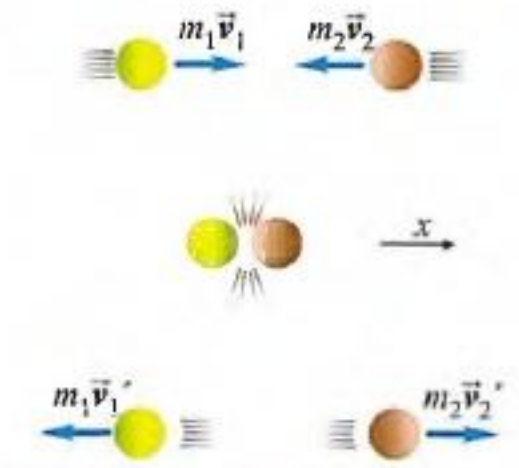
Elastik (Esnek) Çarpışmalar

Tüm çarpışmalarda momentumun korunduğunu biliyoruz. Bunu sadece x bileşeni için yazalım:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{6.10}$$

(Burada x-indislerini yazmadık, fakat bu v hızlarının birer bileşen olduğunu, yani artı-eksi değerler alabileceğini unutmayalım.)

Çelik veya cam topların çarpışmaları yakından incelendiğinde, bunların mekanik enerjiyi korudukları gözlenir. Toplar birbirine değdiğinde, yüzeyler birer yay gibi esneyip geri çekilirler ve enerjiyi depolarlar. Çarpışmadan sonra eski formlarına dönerken, bu potansiyel enerjiyi tekrar kinetik enerji olarak geri verirler. Kil veya hamurdan yapılmış cisimlerin çarpışmasında bu özellik yoktur, deformasyona uğrayıp kinetik enerjiyi ısı olarak kaybederler. O halde, **kinetik enerjinin korunduğu çarpışmalara elastik (esnek) çarpışma diyoruz.**



Şekil 6.3: Bir boyutlu çarpışma.

Bu tanıma göre, esnek çarpışmalarda, kinetik enerji de korunur:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{6.11}$$

Böylece bu iki denklem (6.10 ve 6.11) çözülerek, çarpışma sonrasındaki v_1' ve v_2' hızları bulunur. Enerji denkleminde hızların kareleri yer aldığı için, genel çözümün analitik ifadesi karmaşıktır.

Burada özel bir durum için çözüm arayalım. Eğer m_2 kütlesi başlangıçta hareketsiz ise, yukardaki iki denklemde $v_2 = 0$ alıp şöyle sadeleştiririz:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{aligned}$$

Her iki denklemde v_2' bilinmeyenini yalnız bırakalım:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_1') &= m_2 v_2' \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 v_2'^2 \end{aligned}$$

İki kare farkını $(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')$ olarak yazıp taraf tarafa bölersek,

$$v_1 + v_1' = v_2'$$

olur ve kareli enerji denkleminden kurtulmuş oluruz. Şimdi, bu son ifadeyi momentum korununum denklemi (6.10) ile birlikte ele alırsak, çözüm şöyle çıkar:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Şimdi, bu sonuçları günlük hayattan örneklerle irdeleyelim:

1. Eğer kütleler eşitse ($m_1 = m_2$): $v_1' = 0$ ve $v_2' = v_1$ olur. Yani, gelen kütle çarpışma sonucu tüm enerjisini kaybedip durur, diğeri onun hızıyla harekete başlar. Bilardo toplarında tam merkezden çarpışmalarda bunu gözleriz. Yandaki şekilde, "Newton beşiği" denilen zarif oyuncak bu özelliği kullanır: Bir uçtaki top çekilip bırakıldığında, aradaki toplar hareketsiz kalır ve diğer uçtaki top dışarı fırlar. Kütleler eşit olduğundan, aradaki her top tüm enerjisi ve momentumunu bir sonrakine aktarıp hareketsiz kalır.



Şekil 6.4: Newton beşiği. Kütleler eşit olduğu için gelen topun momentumu tamamen sonuncu topa aktarılır.

2. Eğer $m_1 > m_2$, yani gelen kütle daha ağır ise, her iki kütlenin son hızları da pozitiftir, ikisi de aynı yönde yollarına devam ederler. Bir kamyon duran bir otomobile çarptığında, onu önüne katıp sürükler. (Kamyon-otomobil çarpışması esnek değildir, bu formülü uygulamak yanlış olur. Fakat, yaklaşık olarak bu davranışı bekleyebiliriz.)
3. Eğer $m_1 < m_2$, yani gelen kütle daha hafif ise, gelen kütlenin son hızı negatif, yani geri yönde olur. Bir otomobil duran bir kamyona çarptığında onu önüne katıp sürükleyemez, kendisi geri zıplar.
4. Eğer gelen kütle çok daha hafif ise, yani $m_1/m_2 \approx 0$ ise, son hızlar $v_1' \approx -v_1$ ve $v_2' \approx 0$ olur. Yani gelen hafif kütle aynı hızla geri zıplar, duran kütle yerinden kımıldamaz. Bu, bir duvara çarpıp yansıma demektir. Rutherford atom yapısını böyle keşfetmişti. Kütlesi büyük olan altın (Au) atomlarını hafif alfa parçacıklarıyla bombardıman ettiğinde, bazı alfa parçacıklarının aynı hızla geri zıpladığını gözledi. Bu, atomun merkezinde çok ağır bir çekirdek olduğunun bir göstergesiydi.

Plastik (Esnek Olmayan) Çarpışmalar

Kinetik enerjinin korunmadığı çarpışmalara **plastik** veya **esnek olmayan** çarpışma adı verilir. Burada çarpışan cisimler deforme olabilir, kinetik enerji ısıya dönüşebilir. Her iki durumda kinetik enerji azalmış olur. Sporda kullanılan lastik veya plastik topların çarpışmaları veya trafikteki araba çarpışmaları birer plastik çarpışmadır.

Plastik çarpışmalarda momentum korunumu halâ geçerlidir:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{6.13}$$

Fakat, kinetik enerjinin korunumunu artık yazamayız. Bu yüzden, son hızların ikisini birden tayin etmek imkansızdır. Bazı durumlarda ek bilgi verilmiş olabilir. Bu durumda, son hızlar hesaplanabilir.

Tam Plastik Çarpışma

Plastik çarpışmanın bu özel halinde, iki kütle çarpışma sonrasında birbirine yapışır veya kenetlenirler. Dünyaya çarpan bir göktaşı, hedefe saplanan mermi veya ok bu türden çarpışmalara örnektir. Bu durumda cisimlerin son hızları ortaktır ve momentum korunumu çözümü verir:

$$\begin{aligned} v_1' = v_2' &= v' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v' \end{aligned}$$



Şekil 6.5: Otomobiller bir çarpışmada ön ve arka tarafları çökecek şekilde imal edilirler. Böylece yolculara daha az enerji ve momentum yansıyacaktır.

Buradan ortak son hız bulunur:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{6.14}$$

Örnek 6.5

Kütlesi 3 kg *olan bir top* 10 m/s *hızla gelip, durmakta olan* 5 kg *lık diğer bir topa çarpıyor. Çarpışma esnek olduğuna göre topların son hızlarını bulun.*

Çözüm

Kütlelerden biri durgun olduğu için, esnek çarpışma için bulunan (6.12) formülü kullanılır:

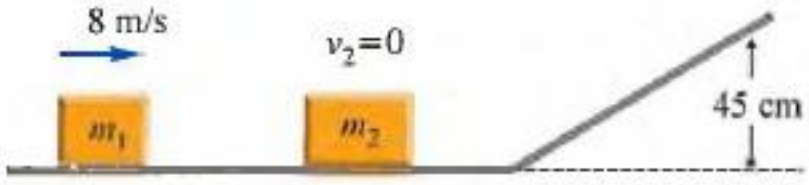
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{3-5}{3+5} \times 10 = -2.5\,\text{m/s}$$

Eksi işareti m_1 topunun geri zıpladığını gösterir. İkinci topun hızı da aynı formülle hesaplanır:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \times 3}{8} \times 10 = 7.5\,\text{m/s}$$

Örnek 6.6

Kütlesi $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve hızı $8\,\text{m/s}$ olan blok durmakta olan $m_2 = 2\,\text{kg}$ lık bloğa çarpıyor. Çarpışmadan sonra, m_2 bloğu sürtünmesiz bir eğik düzlemde $45\,\text{cm}$ yükseğe çıkıyor. İki kütlenin çarpışmadan hemen sonraki hızlarını hesaplayın.



Çözüm

Önce, m_2 bloğunun çarpışmadan hemen sonraki hızı bulunur. Enerji korunumuna göre, kinetik enerjinin tamamı potansiyel enerjiye dönüşür:

$$\tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = m_2gh \;\rightarrow\; v_2' = \sqrt{2gh}$$

Buradan v_2' hızı hesaplanır:

$$v_2' = \sqrt{2\times 10\times 0.45} = 3\,\text{m/s}$$

Sonra, çarpışma için momentum korunumu yazılır:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

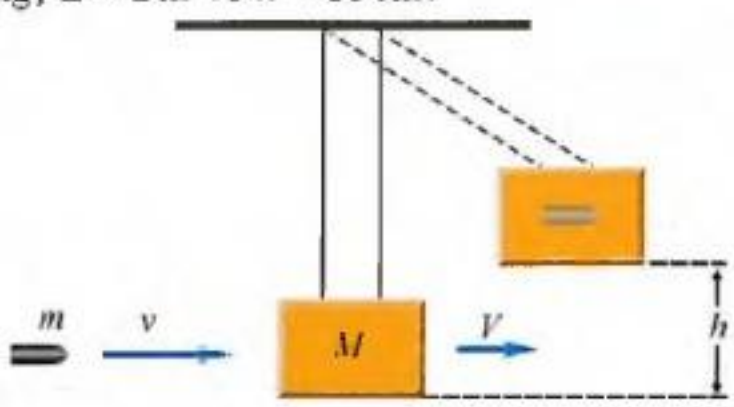
Sayısal değerler yerine konularak v_1' hesaplanır:

$$1\times 8 + 0 = 1\times v_1' + 2\times 3$$

$$v_1' = 2\,\text{m/s}$$

Örnek 6.7

Balistik sarkaç. *Mermi hızlarını tayin etmekte kullanılan bu alet, L uzunluğunda bir ipin ucuna kütlesi çok büyük olan bir tahta blok asılarak yapılmış bir sarkaçtır. m kütleli mermi v hızıyla gelip M kütleli bloğa saplandığında, (mermi+blok) sistemi h kadar yükselir. Merminin hızını h yüksekliği cinsinden hesaplayın. Sayısal örnek: $m = 50\,\text{g}$, $M = 5\,\text{kg}$, $L = 2\,\text{m}$ ve $h = 80\,\text{cm}$.*



Çözüm

Önce (mermi+blok) sisteminin, çarpışmadan hemen sonraki hızı, yani sarkaç düşey konumundayken olan hızı bulunur. Bu plastik çarpışma için momentum korunumu yazılır:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

olur. Burada $m_1 = m$ ve $m_2 = M$ ve sistemin son hızı V ile gösterilirse,

$$mv + M.0 = (m + M)\,V \;\rightarrow\; V = \frac{m}{m+M}\,v$$

(Mermi+blok) sisteminin bu V hızıyla çıkabileceği yüksekliğe h diyelim. Enerji korunumuna göre, başlangıçtaki kinetik enerjinin tümü yerçekimi potansiyel enerjisine dönüşür:

$$\tfrac{1}{2}(m + M)\,V^2 = (m + M)\,gh$$

V değeri yerine konur ve v için çözülürse,

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

Sayısal değerler yerine konulursa, $v = 400\,\text{m/s}$ bulunur.

Örnek 6.8

Sürtünmesiz yatay bir düzlemde durmakta olan $2\,\text{kg}$ lık bir bloğun ön tarafına yay sabiti $k = 100\,\text{N/m}$ olan bir yay monte edilmiştir. Kütlesi $1\,\text{kg}$ olan diğer bir blok $6\,\text{m/s}$ hızıyla gelip yaya çarpıyor. (a) Yay en fazla ne kadar sıkışır ve bu anda blokların hızları ne kadar olur? (b) Bloklar birbirinden ayrıldıktan sonra hızları ne kadar olur?



Çözüm

Çarpışma sırasında enerji yay tarafından depolandığı ve sonra geri verildiği için, bu da elastik bir çarpışma türüdür. Buna göre, (b) şıkkını hemen çözebiliriz. Fakat (a) şıkkında bir incelik vardır: Hem blokların son hızları ve hem de yayın sıkışma miktarı 3 bilinmeyen demektir. Oysa, şu noktaya dikkat edelim: yayın maksimum sıkışma anında, blokların hızları (bir an için) eşit olurlar. Böylece, enerji ve momentum korunumu çözüm için yeterli olurlar.

(a) Yayın sıkışması maksimum iken, blokların ortak hızına v' dersek, momentum korunumu yazılır:

$$m_1v_1 + 0 = (m_1 + m_2)\,v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2} = \frac{1\times 6}{1+2} = 2\,\text{m/s}$$

Enerji korunumunu yazarken, esneklik potansiyel enerjisi de hesaba katılır:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v'^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Buradan yayın sıkışma miktarı hesaplanır:

$$x = \sqrt{\frac{m_1v_1^2 - (m_1+m_2)v'^2}{k}} = 0.49\,\text{m}.$$

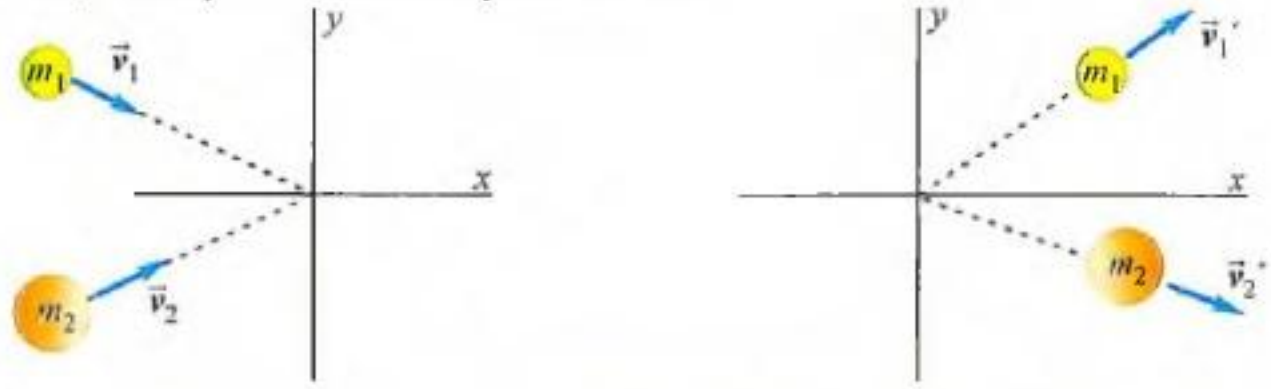
(b) Bloklar ayrıldıktan sonra, enerji başlangıçtaki değerini alır, yani çarpışma elastik olur. m_2 bloğu başlangıçta hareketsiz olduğundan, (6.12) formülleri kullanılır:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\,v_1 = \frac{1-2}{1+2}\times 6 = -2\,\text{m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\,v_1 = \frac{2}{3}\times 6 = 4\,\text{m/s}$$

6.4 İKİ-BOYUTLU ÇARPIŞMALAR

Bir boyutlu çarpışmalar çok nadir gözlenir. Genelde, çarpışan iki cisim apayrı yönlerde uzaklaşırlar. En genel durumda, üç-boyutlu uzaydaki çarpışmalar da iki boyutta incelenebilirler. Çünkü, iki cismin doğrultusu çarpışma noktasında birleştiğine göre, bir düzlem oluştururlar. **Çarpışma düzlemi** denilen bu düzlemde çalışılırsa, iki-boyutlu inceleme yeterli olur.



Şekil 6.6: İki boyutlu çarpışmada koordinatlar.

Momentum korunumu yasasını veren Denklem 6.6 vektörel bir eşitlik olarak bulunmuştu. O halde, iki boyutlu çarpışmalarda, her iki bileşen için ayrı ayrı geçerli olmalıdır:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,' \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{cases} \tag{6.15}$$

Bu iki denklemli sistemde, son hızlar iki bileşenle yeraldığı için, 4 bilinmeyen vardır ve ek bilgi olmadan çözümü imkansızdır. Eğer, çarpışma elastik ise, bir denklem de kinetik enerji korunumundan gelir:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 \qquad \text{(elastik çarpışma için)} \tag{6.16}$$

Çözüm için bilinmeyenlerden birinin ölçülerek belirlenmesi gerekir.

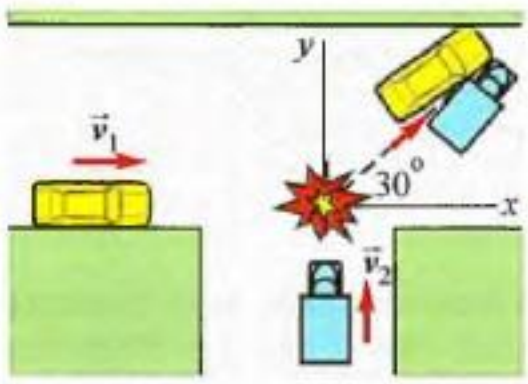
Tam plastik çarpışma için bu sorun yoktur. Son hızların eşit olduğu yazılırsa,

$$\vec{v}_1\,' = \vec{v}_2\,' = \vec{v}'$$

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= (m_1 + m_2) v'_x \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= (m_1 + m_2) v'_y \end{aligned} \tag{6.17}$$

Bu iki bilinmeyenli iki denklem son hızın bileşenlerini verir.

Örnek 6.9



Bir kavşakta Doğu yönünde gitmekte olan $m_1 = 800\,\text{kg}$ kütleli bir otomobil ile kuzey yönüne gitmekte olan $m_2 = 1200\,\text{kg}$ kütleli bir kamyonet kafa kafaya çarpışıp kenetleniyorlar. İki sürücü de diğerinin kavşağa aşırı hızlı girdiğini iddia ediyor. Siz bir bilirkişi olarak olay yerine geliyorsunuz. Asfaltta çarpışmadan sonraki siyah lastik izlerinin Doğu yönü ile 30° açı yaptığını ölçüyorsunuz. Sadece bu bilgiden yararlanarak, v_2/v_1 oranını hesaplıyor ve hangi sürücünün daha hızlı gittiğini tespit ediyorsunuz. Bu hesabı nasıl yaparsınız?

Çözüm

Şekildeki eksen seçimine göre, 2-boyutlu plastik çarpışma için bulduğumuz (6.17) formüllerini kullanırız:

$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v'_x \;\rightarrow\; m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v' \cos 30°$

$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v'_x \;\rightarrow\; 0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \sin 30°$

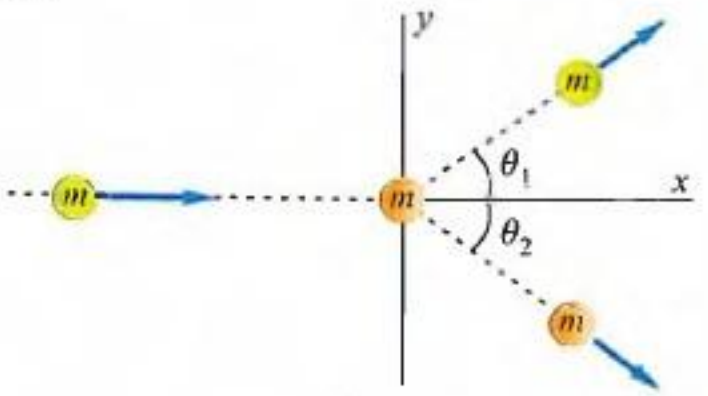
Bu iki denklem taraf tarafa bölünürse, v_2/v_1 oranı bulunur:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \tan 30° = \frac{800}{1200} \times 0.58 = 0.38$$

Bu sonuca göre, m_1 kütleli otomobilin kamyonetten yaklaşık 3 kat daha hızlı gittiği anlaşılır. (Bu örneği hafife almayın. Trafik bilirkişlerinin en büyük yardımcısı momentum ve enerji korunumudur.)

Örnek 6.10

Nükleer fizikte proton-proton çarpışmaları önemli bir bilgi kaynağıdır. Hızı 5×10^6 m/s olan bir proton durmakta olan diğer bir protonla esnek çarpışma yapıyor. Gelen protonun çarpışma sonrasında 3×10^6 m/s hızıyla saçıldığı gözleniyor. Protonların saçılma açılarını ve ikinci protonun hızını hesaplayın.



Çözüm

İkinci protonun v_2' hızı enerji korunumundan hemen bulunabilir ($m_1 = m_2 = m$):

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_1'^2 + \tfrac{1}{2}mv_2'^2$$

$$v_2' = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} \times 10^6 = 4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Açıları bulmak üzere, şekilde gösterilen eksenlere göre iki-boyutlu momentum korunumu yazılır:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v_{1x}' + m_2v_{2x}' \;\rightarrow\; v_1 = v_1' \cos\theta_1 + v_2' \cos\theta_2$$

$$m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1v_{1y}' + m_2v_{2y}' \;\rightarrow\; 0 = v_1' \sin\theta_1 + v_2' \sin\theta_2$$

Bu iki denklem arasından θ_1 ve θ_2 bulunur:

$$v_2' \cos\theta_2 = v_1 - v_1' \cos\theta_1$$

$$v_2' \sin\theta_2 = -v_1' \sin\theta_1$$

İki tarafın karesi alınıp toplanır ve $(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1)$ özdeşliği kullanılırsa,

$$v_2'^2 = v_1'^2 \sin^2\theta_1 + (v_1 - v_1' cos\theta_1)^2$$

olur. Parantez açılır ve enerji korunumundan $v_1^2 - v_2^2 = v_1'^2$ değeri de kullanılır:

$$\cos\theta_1 = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{3}{5}$$

Buradan $\theta_1 = 53°$ bulunur.

Bu θ_1 değeri momentumun y-bileşeni denkleminde kullanılırsa θ_2 bulunur:

$$\sin\theta_2 = \frac{-3}{4}\sin\theta_1 = -\frac{3}{5} \;\rightarrow\; \theta_2 = -37°$$

6.5 KÜTLE MERKEZİ

Bir kalası taşımak istediğimizde, onu ortasından kaldırıp götürürüz. Bir ucu daha ağır olan çubuğu ortasından değil de, ağır ucuna yakın bir yerden tutarız. Bir kayığa binen kişiler hepsi bir yere toplanmaz, kayığın devrilmemesi için değişik yerlere otururlar. Bu örnekler, kapsamlı cisimlerde, bu kütleyi temsil eden ortalama bir noktanın varlığına işaret eder.



Şekil 6.7: Bir ucu daha ağır olan çubuğu dengede tutan yer.

Tanım: Bir sistemi oluşturan kütle konumlarının "ağırlıklı" ortalamasına **kütle merkezi** denir. Burada ağırlıklı ortalamadan şunu anlıyoruz: Her konum kendi kütlesi kadar bir katsayıyla çarpılarak ortalamaya katılır.

Bu tanıma göre, bir boyutta x-ekseni boyunca $x_1, x_2 \ldots x_N$ konumlarında bulunan $m_1, m_2 \ldots m_N$ kütlelerinin kütle merkezi ifadesi şöyle olur:

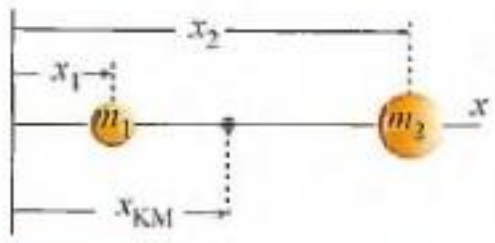
$$x_{\text{KM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{6.18}$$

3-boyutlu uzayda kütle merkezinin y- ve z- koordinatları da benzer şekilde tanımlanır:

$$y_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_iy_i}{M}, \qquad z_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_iz_i}{M} \tag{6.19}$$

Burada $M = m_1 + \cdots + m_N$ **toplam kütle** olur. Bu üç bağıntı, vektörel olarak bir defada yazılırsa,

$$\boxed{\vec{r}_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{(kütle merkezi)}} \tag{6.20}$$



Şekil 6.8: İki cismin kütle merkezi.

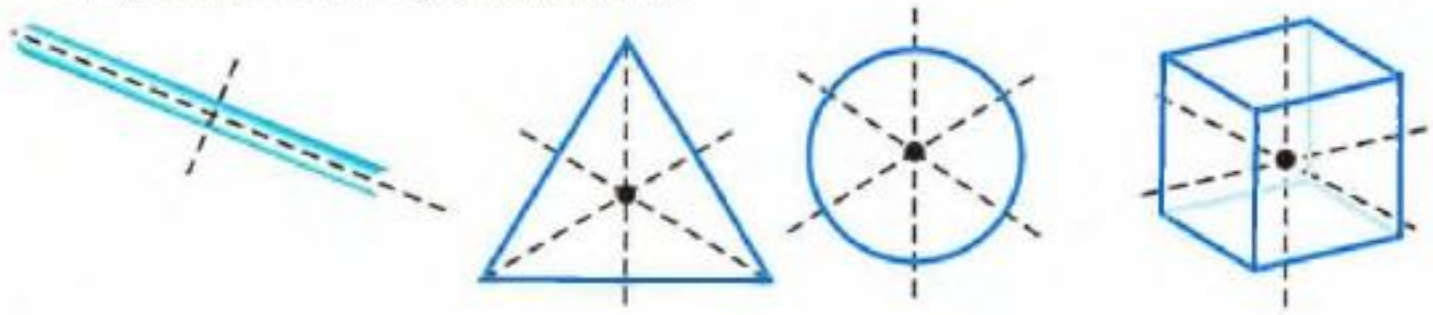
En basit sistemde, x-ekseni üzerinde, x_1 ve x_2 konumlarında bulunan m_1 ve m_2 kütlelerini gözönüne alalım. Kütle merkezi formülü uygulanırsa,

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{6.21}$$

olur. Eğer kütleler eşitse ($m_1 = m_2$), kütle merkezi $x_{KM} = (x_1 + x_2)/2$ yani tam ortada olur. Bu ifade günlük deneyimlerimize uygundur. Düzgün bir çubuğu ortasından tutarız ama, bir ucuna ilave kütle konulmuşsa, o tarafa yakın bir yerden tutarız.

Sürekli Dağılmış Kütlenin Merkezi

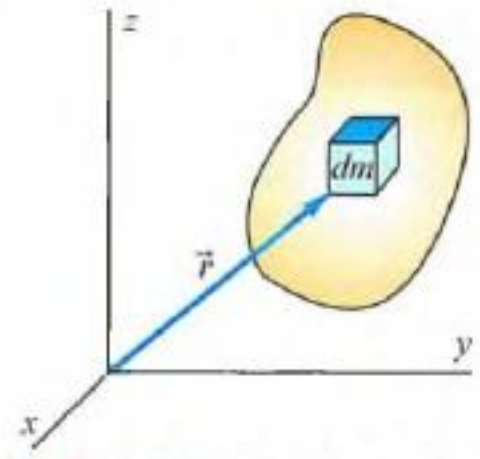
Hacimli cisimlerde kütle sürekli dağılmış olduğundan toplama yapamayız. Bunun yerine, iki farklı yol bulunabilir:



Şekil 6.9: Kütlesi homojen dağılmış simetrik cisimlerin kütle merkezleri.

1. **Homojen ve simetrik parçalardan oluşan cisimler.** Şekilde görüldüğü üzere üçgen, kare, dikdörtgen, daire, çember gibi geometrik şekiller homojen ise, yani yoğunlukları düzgün dağılmışsa, herbirinin kütlesini kendi simetri merkezinde toplanmış gibi varsayabiliriz. Böylece, noktasal cisimler için bulduğumuz kütle merkezi ifadesi burada da kullanılabilir.
2. **İntegralli kütle merkezi.** Kütlenin uzayda dağılımı bir fonksiyon olarak biliniyorsa, integral tekniği kullanılır.
   Hacimli cismi, herbiri (x_i, y_i, z_i) konumlu yerde bulunan, N sayıda küçük Δm_i kütlelerine bölelim. Bu küçük parçalar için kütle merkezi formülü uygulanırsa, örneğin x-bileşeni

$$x_{KM} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$



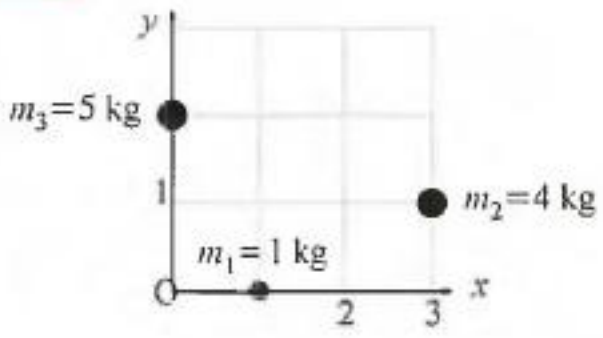
Şekil 6.10: Sürekli dağılmış kütle için dm kütle elemanı.

olur. Paydadaki toplam M toplam kütlesi olarak yazıldı. y- ve z-bileşenleri için de benzer formüller yazılabilir.
Şimdi $\Delta m_i \to 0$ limitine gidildiğinde, paydaki toplam integral olur. O halde, her üç bileşenin integralli ifadeleri şöyle yazılır:

$$x_{KM} = \frac{\int x\, dm}{M}, \qquad y_{KM} = \frac{\int y\, dm}{M}, \qquad z_{KM} = \frac{\int z\, dm}{M} \tag{6.22}$$

Bu integrallerde kütlenin, konuma bağlı bir yoğunluk cinsinden $dm = \rho(r)\, dr$ şeklinde ifade edilmesi gerekir.

Örnek 6.11



Şekilde kütleleri ve xy düzleminde konumları belirtilen 3 kütleli sistemin kütle merkezini tayin edin.

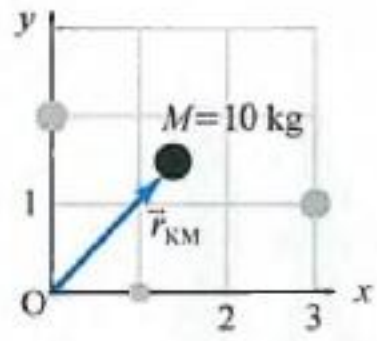
Çözüm

Kütle merkezi koordinatları için bulduğumuz (6.20) formülünü x- ve y-bileşeni için yazıp hesaplarız:

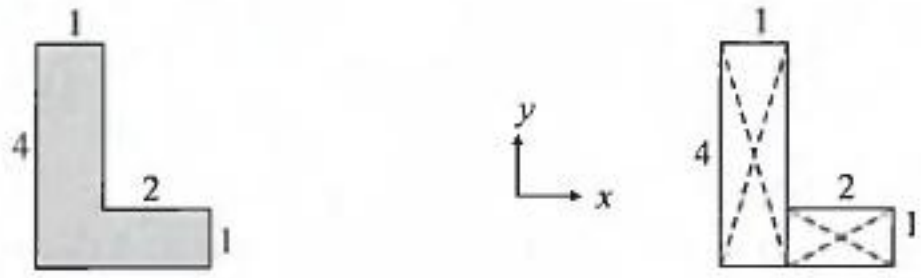
$$x_{KM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{1\times 1 + 4\times 3 + 5\times 0}{1+4+5} = 1.3\,\text{m}$$

$$y_{KM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{1\times 0 + 4\times 1 + 5\times 2}{10} = 1.4\,\text{m}$$

Kütle merkezinin yeri şekilde işaretlenmiştir.



Örnek 6.12



Şekilde boyutları gösterilen **L** *harfi şeklindeki ve yoğunluğu homojen olan levhanın kütle merkezini bulun.*

Çözüm

Önce levhayı şekildeki gibi iki basit parçaya ayıralım. Her parçanın kütlesi kendi yüzey alanı olarak alınabilir, çünkü pay ve paydada aynı yoğunluk çarpanı birbirini götürecektir. Yoğunlukları homojen olduğu için bu parçaların kütle merkezleri kendi orta noktaları olurlar.

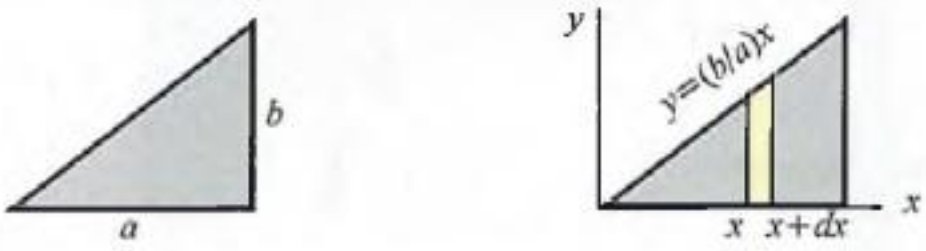
Buna göre, kütle merkezinin koordinatları hesaplanır:

$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{4\times 0.5 + 2\times 2}{4+2} = 1\ \text{birim}$$

$$y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{4\times 2 + 2\times 0.5}{6} = 1.5\ \text{birim}$$

Örnek 6.13

Şekildeki dik kenarları a, b uzunlukta ve yoğunluğu homojen olan diküçgen şeklindeki levhanın kütle merkezinin koordinatlarını integral yoluyla hesaplayın.



Çözüm

Diküçgen homojen olduğundan kütleler yüzölçümleriyle orantılıdır. Eksenleri şekildeki gibi seçelim ve x-ekseni üzerinde x ile $x+dx$ arasında, kalınlığı dx kadar olan bir parça seçelim. Bu parçanın alanı $y\,dx$ olup, kütle merkezi kendi x koordinatı olur. Orijinden geçen ve eğimi (b/a) olan doğrunun denklemi $y = (b/a)x$ dir. Buna göre, (6.22) formülünü yazalım:

$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{ab/2}\int_0^a x(y\,dx)$$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a x(b/a)x\,dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{a^2}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^a$$

$$x_{KM} = \tfrac{2}{3}a$$

Benzer bir hesapla $y_{KM} = \frac{1}{3}b$ bulunur.

Kütle Merkezinin Dinamiği

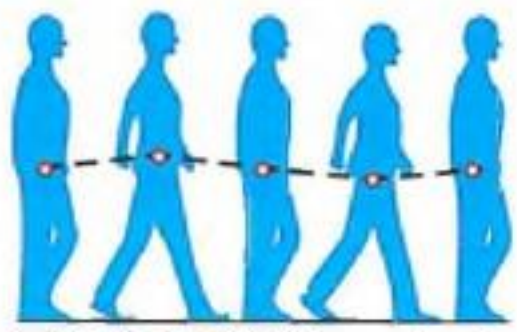
İki parçacıktan oluşan bir sistem gözönüne alalım. Bölüm 4 de bu kütlelere etkiyen kuvvetlerin iki grupta toplanabileceğini görmüştük: Dış kuvvetler ve birbirlerine uyguladıkları kuvvetler. Buna göre, m_1 kütlesine uygulanan dış kuvveti $\vec{F}_1^{\text{dış}}$ ile ve 2. kütle tarafından uygulanan kuvveti $\vec{F}_{21}$ ile gösterelim. Newton yasasını her iki parçacık için ayrı ayrı yazarken, ivmeleri de konumun 2. türevi olarak kullanalım:

$$m_1 \text{ için:} \qquad \vec{F}_1^{\text{dış}} + \vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1 = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1)$$

$$m_2 \text{ için:} \qquad \vec{F}_2^{\text{dış}} + \vec{F}_{12} = m_2\vec{a}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(m_2\vec{r}_2)$$

olur. Bu iki denklemi taraf tarafa toplayalım:

$$(\vec{F}_1^{\text{dış}} + \vec{F}_2^{\text{dış}}) + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}) = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$



Şekil 6.11: Yürürken vücudunuzun kütle merkezi yukarı-aşağı hareket eder ve yerçekimine karşı iş yapmış olursunuz. Küçük adımlar atarsanız daha az yorulursunuz.

3. yasaya göre, kütleler arasındaki etki tepki kuvvetleri eşit ve zıt olacağından, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ve sol taraftaki ikinci parantez sıfırdır. Sağ tarafı M toplam kütlesiyle çarpıp bölerek, kütle merkezini oluştururuz:

$$(\vec{F}_1^{\text{dış}} + \vec{F}_2^{\text{dış}}) = M\,\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}\Big) = M\,\frac{d^2\vec{r}_{\text{KM}}}{dt^2}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci türev, kütle merkezinin $\vec{a}_{\text{KM}}$ ivmesi olur. Sonuç olarak, kütle merkezinin hareketini belirleyen Newton yasası şöyle yazılır:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{dış}} = M\,\vec{a}_{\text{KM}} \qquad \text{(kütle merkezinin hareketi)} \tag{6.23}$$

Bu sonuç önemlidir: **Çok parçacıklı sistemlerde, dış kuvvetlerin bileşkesiyle hareket eden öyle bir nokta vardır ki aynı toplam kütle bir noktaya toplanmış gibi Newton yasasına uyar.** (6.23) ifadesi aslında kütle merkezinin gerçek tanımıdır.

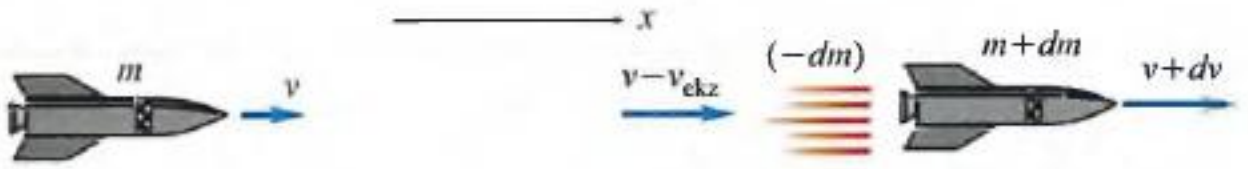


Şekil 6.12: Denize atlayan bu çocuğun kol ve bacakları karmaşık yörüngeler çizebilir, ama öyle bir noktası vardır ki eğik atıştaki parabolü izler. O nokta kütle merkezidir. Resimdeki çocuğun karın hizasında bulunan kütle merkezinin mükemmel bir parabol çizdiğine dikkat edin. (Foto: Erik Forsberg).

6.6 *ROKET HAREKETİ

Uçaklar havanın normal tepki kuvvetinden yararlanarak uçarlar. Bu sebeple, uzun yıllar boyunca, atmosfer dışındaki uzay boşluğunda uçabilen araçların yapılamayacağına inanılıyordu, çünkü itecek bir hava yoktu. Oysa, günümüzde roketler uzay boşluğunda momentum korunumu ilkesini kullanarak uçuyorlar. Bir roket, yakıtını geri yönde yüksek hızla fırlatarak, ileri yönde kazandığı momentumla hareket eder.

Roket hareketini yerdeki bir gözlemciye göre inceleyelim. Yerçekimi olmayan bir ortamda, herhangi bir t anında roketin yakıtıyla beraber toplam kütlesi m ve hızı pozitif yönde v olsun. Daha sonraki bir $t + dt$ anında roketin kütlesi $m + dm$ olsun. Buradaki dm nin negatif bir sayı olacağına dikkat edelim. Aynı zaman aralığında roketten dışarı, geri yönde $(-dm)$ kadar bir yakıt kütlesi, *rokete göre* v_{ekz} ekzos hızıyla atılmış olsun. Bu hızı yerdeki gözlemci $v - v_{\text{ekz}}$ olarak ölçecektir. Bu dt zamanı sonunda roketin $m + dm$ kütlesinin hızı $v + dv$ olsun.



Şekil 6.13: Roket-yakıt sisteminin önceki ve sonraki hızları.

Roket+yakıt sistemi için momentum korunumu yazılırsa,

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)\,(v - v_{\text{ekz}})$$

Sadeleştirme yapılırken, $dm\,dv$ çarpımı da çok küçük olduğu için ihmal edilir:

$$-v_{\text{ekz}}\,dm = m\,dv \tag{6.24}$$

Bu ifadeyi daha iyi yorumlamak üzere, her iki tarafı dt ile bölerek türevler oluşturalım:

$$\underbrace{-v_{\text{ekz}}\frac{dm}{dt}}_{F} = m\frac{dv}{dt} = ma \qquad \text{(roket hareketi)} \tag{6.25}$$

Eşitliğin sol tarafındaki $-dm/dt$ oranı, birim zamanda atılan yakıt kütlesidir. Sağ tarafta roketin kütlesiyle ivmesinin çarpımı yer alır. Bu ifadeye $F = ma$ yasası gözüyle bakılırsa, sol taraftaki çarpıma yakıtın **itici kuvveti** (thrust) adı verilir. Görüldüğü gibi, yakıt kütlesi ne kadar yüksek bir hızla atılırsa, itici kuvvet o kadar büyük olur.

Dünya yüzeyinden kalkışta, bu ifadenin sol tarafına $-mg$ ağırlığını da eklemek gerekir, yani itici kuvvet ağırlıktan büyük olmalıdır: $F - mg > 0$.

Tekrar (6.24) ifadesine dönelim ve onu şöyle yazalım:

$$-v_{\text{ekz}}\frac{dm}{m} = dv$$

Roketin başlangıçtaki kütlesi m_0 ve hızı v_0 iken, sonunda m ve v değerine geliyor olsun. Taraf tarafa integral alınırsa,

$$-v_{\text{ekz}}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$-v_{\text{ekz}}\,\ln\frac{m}{m_0} = v_{\text{ekz}}\,\ln\frac{m_0}{m} = v - v_0$$

(Eksi işaretten kurtulmak için logaritmanın $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$ özelliği kullanıldı.) Buradan, kütle kaybı cinsinden roketin son hızı bulunur:

$$v = v_0 + v_{\text{ekz}}\,\ln\frac{m_0}{m} \tag{6.26}$$

Örnek 6.14

Uzay boşluğunda sabit 80 m/s *hızıyla giden bir roket, kütlesinin* 1/20 *oranındaki miktar yakıtı kendine göre* 200 m/s *hızıyla geri atıyor. Roketin son hızı ne olur?*

Çözüm

Kütle kaybı m_0/m verilmiş olduğundan, (6.26) formülüyle hız hesaplanır:

$$v = v_0 + v_{\text{ekz}}\,\ln\frac{m_0}{m}$$

Burada $m_0/m = 20/19$ dur. Ayrıca, v_{ekz} ve v_0 sayısal değerleri de, formüldeki tanımlara uygun olarak, pozitif olarak verilmiştir. Buradan son hız bulunur:

$$v = 80 + 200\,\ln(20/19) = 80 + 10 = 90\,\text{m/s}$$

Örnek 6.15

Kütlesi 1000 kg *olan bir roket dünya yüzeyinden kalkışta, her saniyede* 10 kg *yakıtı* 1200 m/s *hızla fırlatıyor. (a) İtici güç ne kadardır (b) Roketin başlangıç ivmesi ne kadar olur?*

Çözüm

(a) İtici kuvvet için bulunan (6.25) formülünü kullanalım:

$$F = -v_{ekz}\frac{dm}{dt}$$

dm nin negatif olduğunu belirtmiştik. $dm = -10\,\text{kg}$ ve $dt = 1\,\text{s}$ alınırsa,

$$F = -1200 \times \frac{-10}{1} = 12000\,\text{N}$$

(b) Rokete etkiyen net kuvvet için 2. yasa yazılır:

$$F - mg = ma \;\rightarrow\; a = \frac{F - mg}{m} = \frac{12000 - 10000}{1000} = 2\,\text{m/s}^2$$

Bu ivme, kütle değiştiği için, daha sonra geçerli olmaz.

Test

1. Tüm çarpışmalarda korunan nicelik hangisidir?
   (a) Potansiyel enerji.
   (b) Kinetik enerji.
   (c) Momentumun büyüklüğü.
   (d) Momentum vektörü.

2. Hangisi yanlıştır?
   (a) Kinetik enerji sıfırsa momentum da sıfırdır.
   (b) Hız sıfırsa momentum da sıfırdır.
   (c) Potansiyel enerji sıfırsa momentum da sıfırdır.
   (d) Hiçbiri.

3. m kütleleri eşit olan iki cisim, eşit ve zıt v hızlarıyla çarpışıyorlar. Sistemin toplam momentumu ne kadardır?
   (a) 0 (b) mv (c) $2mv$ (d) $-mv$

4. Bir parçacığın hızı 2 katına, kütlesi 3 katına çıkarılıyor. Momentumu kaç kat artar?
   (a) 2 (b) 6 (c) 12 (d) 18

5. İki cisim için hangisi doğrudur?
   (a) Momentumları eşitse, kinetik enerjileri de eşittir.
   (b) Momentumları eşitse hızları da eşittir.
   (c) Momentumları eşitse yönleri de aynıdır.
   (d) Momentumları eşitse kütleleri de eşittir.

6. Elastik (esnek) çarpışma için hangisi doğrudur?
   (a) Sadece momentum korunur.
   (b) Sadece kinetik enerji korunur.
   (c) Hem momentum, hem de kinetik enerji korunur.
   (d) Hiçbiri.

7. Hızı 3 m/s olan bir blok, durmakta olan eşit kütleli diğer bir bloğa esnek olarak çarpıyor. Gelen bloğun son hızı ne olur?
   (a) 0 (b) −3 m/s (c) +3 m/s (d) 6 m/s

8. Kinetik enerjinin momentum cinsinden ifadesi hangisidir?
   (a) $K = p^2/2$
   (b) $K = p^2/2m$
   (c) $K = 2mp^2$
   (d) $K = 2p^2$

9. Sürtünmesiz yatay bir düzlemde duran $2m$ kütleli bir çocuk, elindeki m kütleli paketi v hızıyla $+x$ yönünde fırlatıyor. Çocuğun hızı ne kadar olur?
   (a) 0 (b) $-v$ (c) $-2v$ (d) $-v/2$

10. İki kütle birbirine çarpıp yapıştığında, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Momentum korunur.
    (b) Kinetik enerji korunur.
    (c) Hem momentum hem de kinetik enerji korunur.

11. Duran bir cisme t saniye süreyle etkiyen F kuvveti, cisme v hızı kazandırıyor. $3t$ saniye etkiyen $3F$ kuvveti ne kadar hız kazandırır?
    (a) v (b) $3v$ (c) $9v$ (d) $v/3$

12. İki blok arasına bir yay koyup sıkıştırılıyor. Bloklar serbest bırakıldığında, hangisi doğru olur?
    (a) eşit ve zıt hızlarla giderler.
    (b) Kütlesi büyük olanın hızı da büyük olur.
    (c) Kütlesi büyük olanın hızı küçük olur.
    (d) Hiçbiri.

13. İki blok arasına bir yay koyup sıkıştırılıyor. Bloklar serbest bırakıldığında, hangisi doğru olur?
    (a) Blokların kinetik enerjileri eşit olur.
    (b) Momentumları eşit ve zıt olur.
    (c) Kütlesi büyük olanın momentumu büyük olur.
    (d) Hiçbiri.

14. Bir otomobil ile bir kamyonet çarpışıp kenetleniyorlar. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Otomobil üzerindeki kuvvet daha büyüktür.
    (b) Kamyon üzerindeki kuvvet daha büyüktür.
    (c) Kamyonun kaybettiği kinetik enerjiyi otomobil alır.
    (d) Kamyonun kaybettiği momentumu otomobil alır.

15. Bir sistemin toplam momentumu sıfır ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Kinetik enerjisi de sıfır olur.
    (b) Kütle merkezi hareketsizdir.
    (c) Sisteme etkiyen net kuvvet sıfırdır.
    (d) Hepsi.

16. Bir cisme etkiyen net kuvvet sıfır ise, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    (a) İmpuls sıfırdır.
    (b) Momentum sabit kalır.
    (c) Kütle merkezi düzgün doğrusal hareket yapar.
    (d) Hepsi.

17. m kütlesinin konumu $x_1 = 0$ ve $2m$ kütlesinin konumu $x_2 = 6$ birim ise, kütle merkezinin x_{KM} konumu ne olur?
    (a) 2 (b) 2.5 (c) 3 (d) 4

18. Konumları x_1 ve x_2 olan eşit kütlelerin kütle merkezi koordinatı ne olur?
    (a) $x_2 - x_1$
    (b) $x_2 + x_1$
    (c) $(x_2 + x_1)/2$
    (d) $(x_2 - x_1)/2$

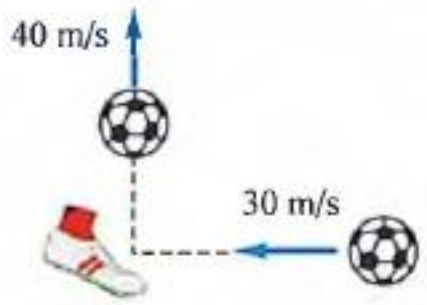
19. Bir tüfek ateşlendiğinde aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Tüfek ve merminin momentumları eşit ve zıttır.
    (b) Tüfek ve merminin kinetik enerjileri eşittir.
    (c) Tüfeğin kinetik enerjisi merminkinden büyüktür.
    (d) Hiçbiri.

20. İki blok arasına bir yay koyup sıkıştırılıyor. Bloklar serbest bırakıldığında, hangisi doğru olur?
    (a) Kütle merkezi sabit hızla gider.
    (b) Kütle merkezi ağır olan bloktan tarafa gider.
    (c) Kütle merkezi hareketsiz kalır.
    (d) Hiçbiri.

Problemler

6.1 İmpuls ve Momentum

6.1 Bir futbolcu kendisine doğru 30 m/s hızla gelmekte olan 400 g kütleli futbol topuna vurarak, onu aynı doğrultuda 40 m/s hızla geri gönderiyor. Topun ayakla teması 0.04 s sürdüğüne göre, futbolcunun ayağındaki ortalama kuvvet ne kadardır? [C: 700 *N*.]



Problem 6.2

6.2 Bir futbolcu sağdaki kornerden 30 m/s hızla gelmekte olan 400 g kütleli topa vurup, geliş doğrultusuna dik yönde 40 m/s hızla kaleye gönderiyor. Topun ayakla teması 0.05 s sürdüğüne göre, topa etkiyen ortalama kuvveti ve yönünü bulun. [C: 400 N ve 53°.]

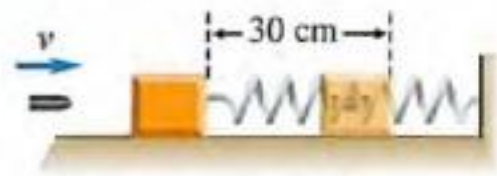
6.3 Kütlesi 0.5 kg olan bir top $h_1 = 5$ m yükseklikten bırakılıyor. Top yere çarptıktan sonra $h_2 = 3.2$ m yüksekliğe zıplıyor. Yere çarpma sırasında topa etkiyen impuls ne kadardır? [C: $J = 9\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$.]

6.2-3 Momentum Korunumu-Bir Boyutlu Çarpışmalar

6.4 Sürtünmesiz yatay bir yolda 10 m/s hızıyla gitmekte olan 1 kg kütleli bir blok, hareketsiz duran 4 kg kütleli diğer bir bloğa çarpıyor. Çarpışma elastik olduğuna göre, blokların son hızlarını bulun. [C: −6, +4 m/s.]

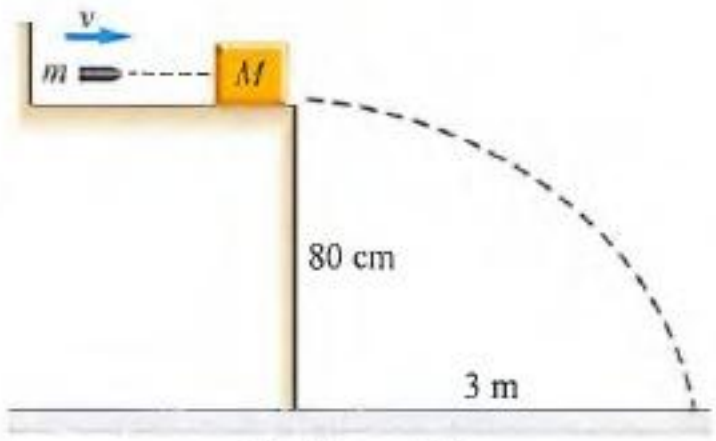
6.5 Sürtünmesiz yatay bir yolda 8 m/s hızıyla gitmekte olan 2 kg kütleli bir blok, karşı yönden 6 m/s hızıyla gelmekte olan 3 kg kütleli diğer bir bloğa çarpıp kenetleniyor. Çarpışma sonrası blokların hızını bulun. [C: −0.4 m/s.]

6.6 Sürtünmesiz yatay bir yolda, kütlesi 1 kg olan bir blok 30 m/s hızla giderken, karşı yönden gelmekte olan 4 kg kütleli diğer bir blokla çarpışıyor. Çarpışma sonrası iki blok da hareketsiz kalıyorlar. İkinci bloğun ilk hızı ne idi? [C: 7.5 m/s.]



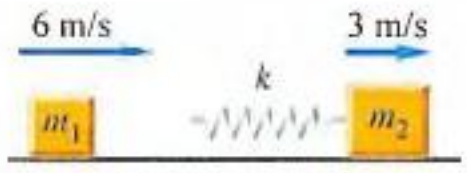
Problem 6.7

6.7 Kütlesi 950 g olan tahta bir blok sürtünmesiz yatay düzlemde $k = 100$ N/m sabitli bir yayın serbest ucuna bağlanmıştır. Başlangıçta yay normal uzunluğundadır. Kütlesi 50 g olan bir mermi v hızıyla gelip tahta bloğa saplanıyor. Yay 30 cm sıkıştığına göre, merminin ilk hızı ne kadardır? [C: 60 m/s.]



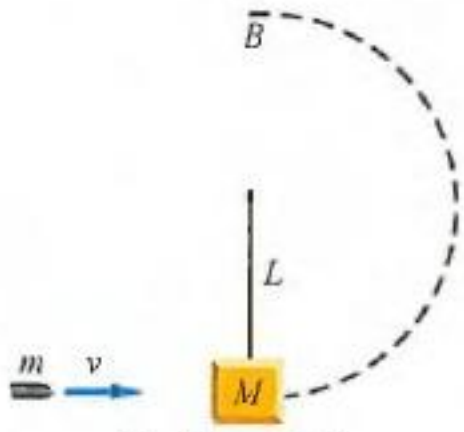
Problem 6.8

6.8 Yatay doğrultuda ateşlenen 50 g kütleli bir mermi, yerden 80 cm yüksekte bir masanın kenarında durmakta olan $m_2 = 950$ g kütleli tahta bloğa çarpıp saplanıyor. (Blok+mermi) kütlesi masadan 3 m uzakta yere düşüyor. Merminin ilk hızını bulun. [C: 150 m/s.]



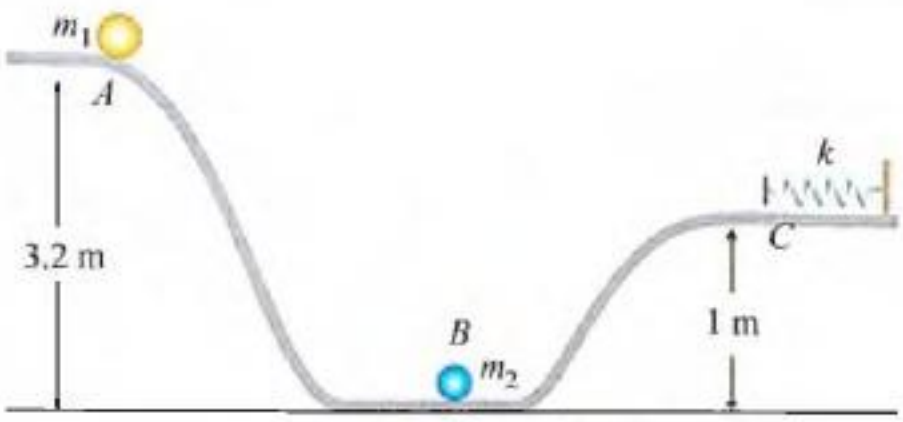
Problem 6.9

6.9 Sürtünmesiz yatay bir düzlemde 3 m/s gitmekte olan 2 kg lık bir bloğun arka tarafına yay sabiti $k = 100$ N/m olan bir yay monte edilmiştir. Kütlesi 1 kg olan diğer bir blok 6 m/s hızıyla gelip yaya çarpıyor. Yay en fazla ne kadar sıkışır ve bu anda blokların hızları ne kadar olur?
[C: 4 m/s ve 24 cm.]



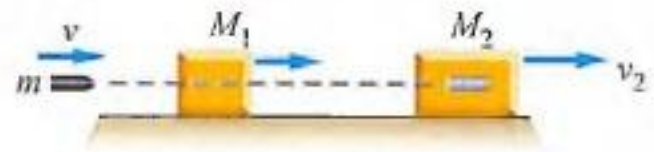
Problem 6.10

6.10 $m = 50$ g kütleli mermi v hızıyla gelip, $L = 2$ m uzunluğunda ipe bağlı olan $M = 950$ g kütleli bloğa saplanıyor. (Mermi+blok) sisteminin B noktasından ip gevşemeden bir tur atabilmesi için merminin v hızı ne kadar olmalıdır?
[C: 200 m/s.]



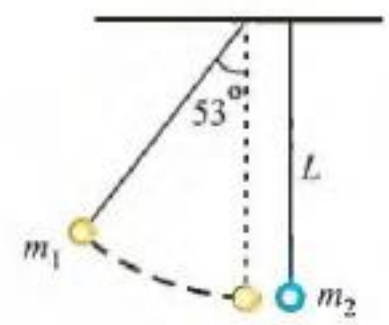
Problem 6.11

6.11 Sürtünmesiz *ABC* yolu üzerinde, 3.2 m yükseklikte bir A noktasından ilk hızsız bırakılan $m_1 = 3$ kg kütleli top, B noktasında durmakta olan $m_2 = 1$ kg kütleli diğer bir topa çarpıp yapışıyor. Çarpışmadan sonra $(m_1 + m_2)$ sistemi 1 m yükseklikteki C noktasına tırmanıp, düzleme tespit edilmiş olan $k = 400$ N/m sabitli yayı sıkıştırıyor. (a) Çarpışmadan hemen sonraki hız, (b) C noktasındaki hız, (c) Yayın sıkışma miktarı ne kadar olur?
[C: (a) 8 m/s, (b) 4 m/s, (c) 40 cm.]



Problem 6.12

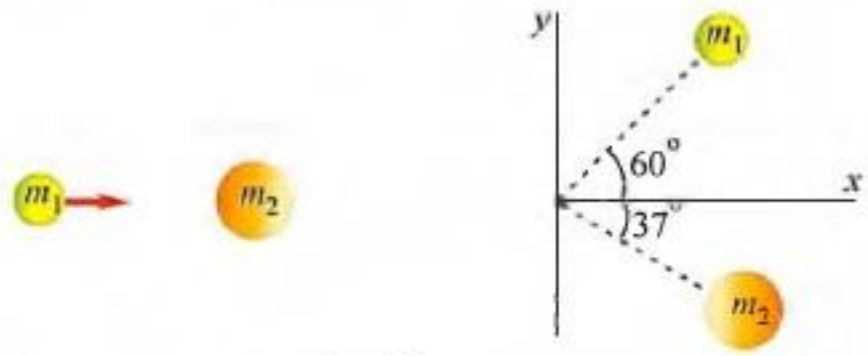
6.12 Sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde $M_1 = 5$ kg ve $M_2 = 0.95$ kg kütleli bloklar hareketsiz durmaktadırlar. $v = 400$ m/s hızıyla ateşlenen $m = 50$ g lık bir mermi birinci bloğu delip geçiyor ve ikinci bloğa saplanıyor. Çarpışma sonrası birinci bloğun hızı 3 m/s olarak ölçülüyor. İkinci bloğun hızını bulun. [C: 5 m/s.]



Problem 6.13

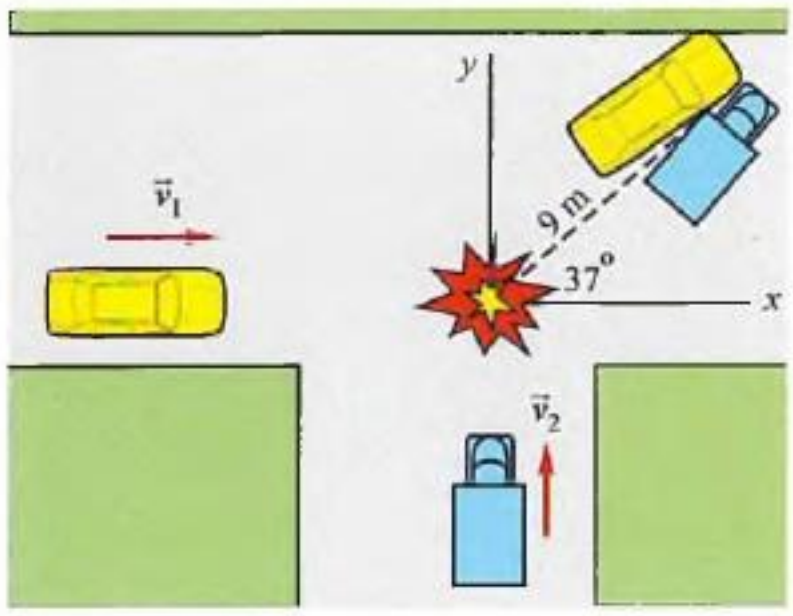
6.13 Eşit L uzunlukta iki ipin ucuna kütleleri $m_1 = 3$ kg ve $m_2 = 2$ kg olan iki top asılarak yanyana iki sarkaç yapılmıştır. Birinci top ip düşeyden 53° ayrılarak serbest bırakılıyor. İki top elastik çarpıştığına göre, ikinci topun düşeyle yaptığı maksimum açı ne kadar olur? [C: 65°.]

6.4 İki Boyutlu Çarpışmalar



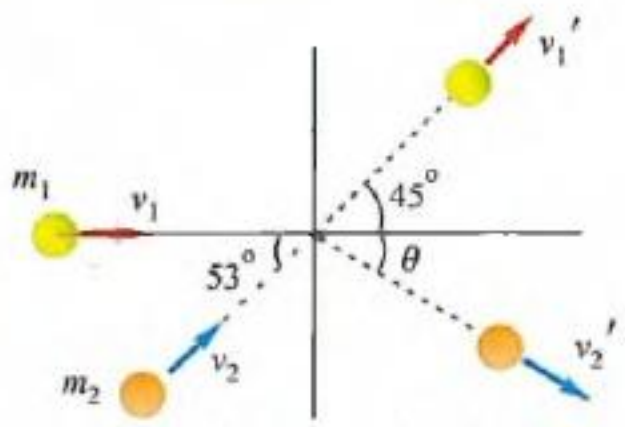
Problem 6.14

6.14 Sürtünmesiz yatay bir düzlemde $m_1 = 1$ kg kütleli top $v_0 = 10$ m/s hızıyla gelip, durmakta olan $m_2 = 2$ kg kütleli topa çarpıyor. Çarpışma sonrası m_1 topu 60° açıyla saçılırken, m_2 topu −37° açıyla saçılıyor. Topların son hızlarını hesaplayın. [C: $v_1 = 6.0$, $v_2 = 4.4$ m/s.]



Problem 6.15

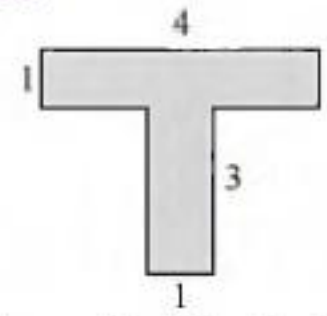
6.15 Doğu yönünde gitmekte olan 800 kg kütleli bir otomobil ile kuzey yönünde gitmekte olan 1200 kg kütleli bir kamyonet bir kavşakta çarpışıp kenetleniyorlar. Yerdeki tekerlek izlerine göre, araçlar Doğu ile 37° açı yapan bir doğrultuda 9 m sürükleniyorlar. Asfaltın sürtünme katsayısı $\mu = 0.8$ olduğuna göre, her iki aracın çarpışmadan önceki hızlarını tayin edin. [C: Otomobil: 24 m/s, kamyonet: 12 m/s.]



Problem 6.16

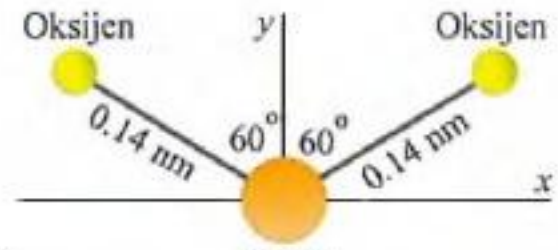
6.16 Şekildeki $m_1 = 1$ kg kütleli top $+x$ yönünde $v_1 = 10$ m/s hızla giderken, x ekseniyle $-53°$ açı altında $v_2 = 5$ m/s hızla gelmekte olan $m_2 = 2$ kg kütleli top ile çarpışıyor. Çarpışma sonrasında m_1 kütlesi x-ekseniyle 45° açıyla ve 15 m/s hızla saçılıyor. m_2 kütlesinin hız bileşenlerini hesaplayın. [C: 2.7, −1.3 m/s.]

6.5 Kütle Merkezi



Problem 6.17

6.17 Şekilde boyutları verilen T şeklindeki homojen levhanın kütle merkezini bulun. [C: $y_{KM} = 2.6$]



Problem 6.18 Kükürt

6.18 Kükürt dioksit (SiO_2) molekülünde Si-O bağları 0.14 nm uzunlukta olup, aralarındaki açı 120° dir. Kükürtün kütlesi oksijenin yaklaşık iki katı olduğuna göre, bu molekülün kütle merkezinin Si atomuna uzaklığını bulun.
[C: $y_{KM} = 0.035$ nm.]

6.6 Roket Hareketi

6.19 Uzay boşluğunda sabit 120 m/s hızıyla doğrusal hareket yapmakta olan bir roket, motorlarını ateşleyip, kütlesinin 1/30 oranındaki miktar yakıtı kendine göre 300 m/s hızıyla geri yönde atıyor. Roketin son hızı ne olur?
[C: 130 m/s.]

6.20 Kütlesi 800 kg olan bir roket dünya yüzeyinden kalkışta, dakikada 500 kg yakıtı 1500 m/s hızla fırlatıyor. (a) İtici güç ne kadardır (b) Roketin başlangıç ivmesi ne kadardır? (c) Kütlesinin yarısını kaybettiğinde hızı ne olur?
[C: (a) 12500 N, (b) 5.6 m/s^2, (c) 832 m/s.]

7 KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ



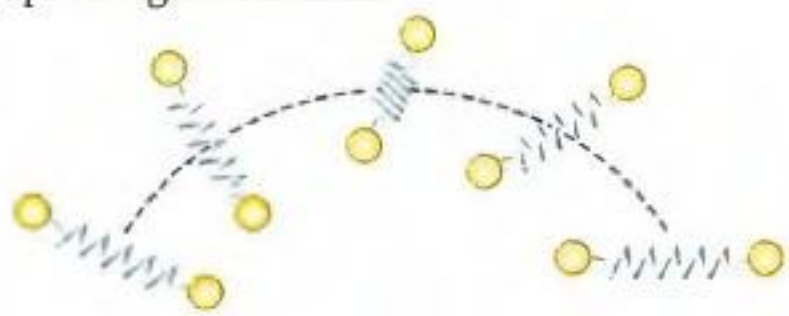
Mitch kasırgası (1998) Meksika körfezinde dönerek ilerlerken, uç noktalarında fırtına hızı 250 km/saat hıza ulaşmıştır. Kasırganın her noktasının hızı ve ivmesi farklı olsa da, hepsinde aynı olan bir nicelik vardır. Bunun ne olduğunu bu bölümde öğreneceğiz.

Buraya kadar olan bölümlerde cisimlerin öteleme hareketini inceledik. Cismi bir bütün olarak bir hıza ve ivmeye sahip olarak düşündük. Şimdi, dönen bir araba tekerleğini gözümüzün önüne getirelim. Bu tekerleğin herbir noktası farklı bir hız ve ivmeyle dönmektedir. O halde, bu hareketi buraya kadar öğrendiğimiz yöntemlerle inceleyemeyiz.

Bölüm 4 teki incelememizde, cisim üzerindeki tüm kuvvetlerin bir noktada etki ettiğini kabul ederek hesaplar yapmıştık. Buna **noktasal cisim** yaklaşımı denir. Cisimleri araba, blok veya top olarak çiziyor olsak da, hep noktasal cisim olarak inceledik. Fakat, gerçek hayatta cisimlerin bir hacmi vardır ve kuvvetler cisim üzerinde farklı noktalara uygulanırlar. Bu bölümde katı cisimlerin bu özelliğini gözönüne alacağız.

Uzayda bir hacim kaplayan ve şekil değiştirmeyen cisimlere **katı cisim** diyoruz. (Buna rijit cisim de denir.) Tekerlek, kapı, otomobil, Dünya, Ay...hepsi birer katı cisim sayılırlar.

Katı bir cismin hareketi, noktasal cisimden daha zengindir. Katı cisimlerin ne tür hareketler yapabildiğine bakalım:



Şekil 7.1: Bir cismin en genel hareketi: Öteleme, dönme ve titreşim.

1. Katı cismin kütle merkezinin hareketine **öteleme hareketi** denir. Bir bando şefinin havaya attığı sopanın iki ucu döne döne yükselebilir, fakat sopanın kütle merkezi, tıpkı atılan bir taş gibi, havada bir parabol çizerek gider.
2. Katı cismin kütle merkezi hareketsiz olsa dahi, kütle merkezi etrafında **dönme hareketi** yapabilir. Bir çubuğun bir ucuna dik $\vec{F}$ kuvveti, diğer ucuna $-\vec{F}$ kuvveti uygulayalım. Çubuğun üzerindeki net kuvvet sıfır olacağı için, birinci yasaya göre, kütle merkezi hareketsiz kalır veya düzgün doğrusal hareket yapar. Fakat, çubuğun kendi kütle merkezi etrafında dönmesini engelleyen bir şey yoktur.



Şekil 7.2: Bu çubuğa etkiyen net kuvvet sıfırdır. Ama dengede değildir, dönme hareketi yapar.

3. Cisimler **titreşim hareketi** de yapabilirler. Bir yayla birleştirilmiş iki kütleyi merkeze doğru itersek, kütle merkezi sabit kaldığı halde, cisim titreşir. Fakat, titreşim hareketinde cisim şekil değiştirdiği için katı cisim tanımı dışında kalır ve daha sonra Bölüm 9 da ayrıca ele alınacaktır.

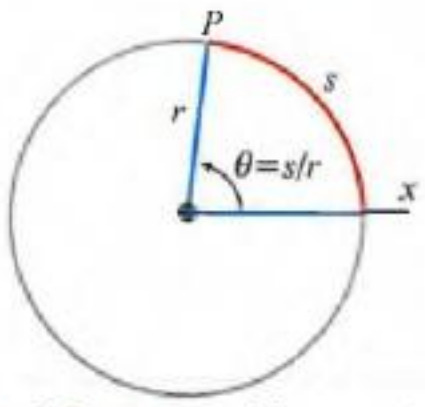
Bölüm 6 da kütle merkezinin, tüm kuvvetler kütle merkezinde toplanmış gibi, hareket ettiğini görmüştük. Katı cismin öteleme hareketi de, onun kütle merkezinin hareketi olur. O halde, burada sadece katı cisimlerin dönme hareketini incelemek yeterli olacaktır.

7.1 AÇISAL KİNEMATİK

Katı cismin dönme hareketi ilk bakışta karmaşık görünebilir. Cismin her noktası ayrı konum, hız ve ivmeye sahiptir, bunların hepsini birlikte ele almanın matematik zorluğunu tahmin edebilirsiniz.

Fakat, şuna dikkat edelim: Tekerleğin her noktası ayrı hızda dönüyor olsa da, tekerlek bir tam devir yaptığında her noktası bir devir yapmış olur. Bir noktası belli bir açı kadar dönüyorsa, tüm noktalar o açı kadar dönecektir. O halde, katı cisimleri en doğal olarak açısal koordinatlarla incelemek gerekir. Açısal hız ve açısal ivme kavramlarıyla çalışacağımız bu konuya **açısal kinematik** adı verilir.

Açısal Konum (θ)



Şekil 7.3: Açısal konum θ.

Katı cismin r yarıçaplı dairesel yörüngede dönen bir P noktasını gözönüne alalım. Açıların başladığı bir **referans çizgisi** seçelim. P noktasının referans çizgisinden itibaren aldığı yol s yayı ise,

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(açısal konum)} \tag{7.1}$$

açısına, P nin **açısal konumu** adı verilir. En yaygın kabule göre, *saat ibreleri tersi yönündeki açılar pozitif, diğer yöndekiler negatif alınır.*

Açısal kinematikte açı birimi **radyandır**. Diğer derece (°) türünden birimler kullanmak yanlış sonuçlar verir. $\theta = s/r$ bağıntısı aslında, hiçbir keyfi seçime

gerek kalmadan, doğal birimin radyan olduğunu gösterir. Gerçekten de, daire çevresini $s = 2\pi r$ olarak yerine koyarsak, açı 2π radyan olarak çıkar. O halde, açısal kinematik hesaplarında açılar radyan olarak alınmalıdır. Dereceleri radyana çevirmek için şu kuralı hatırlamak yeterli olur:

$$\boxed{1 \text{ devir} = 360^\circ = 2\pi \text{ radyan}}$$

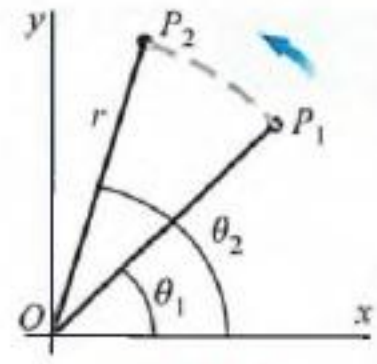
Buna göre, $180^\circ = \pi$ radyan, $60^\circ = \pi/3$ radyan, $45^\circ = \pi/4$ radyan ...vb. olur.

Açısal Hız (ω)

Yine, r yarıçaplı çember üzerinde dönen P noktasını gözönüne alalım. Bu noktanın t_1 anındaki açısal konumu θ_1 ve daha sonraki bir t_2 anındaki açısal konumu θ_2 oluyorsa,

$$\omega_{\text{ort}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{7.2}$$

oranı, bu zaman aralığındaki **ortalama açısal hız** olur.



Şekil 7.4

Açısal hız birimi radyan/saniye (rad/s) dir. Sanayide kullanılan diğer bir birim devir/dakika (rpm) dır:

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ dev/dk} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} \approx 0.1 \text{rad/s}$$

Doğrusal harekette olduğu gibi, **ani açısal hız**, $\Delta t \to 0$ limitinde türev alınarak tanımlanır:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(açısal hız)} \tag{7.3}$$

Açısal İvme (α)

Açısal hızın birim zamandaki değişme miktarı açısal ivme olarak tanımlanır:

$$\alpha_{\text{ort}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{7.4}$$

oram, bu zaman aralığındaki ortalama açısal ivme olur.

Ortalama ivmenin $\Delta t \to 0$ limiti **ani açısal ivme** olur:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{(açısal ivme)} \tag{7.5}$$

Açısal ivmenin birimi rad/s^2 dir. Cisim pozitif yönde, yani saat ibrelerinin tersi yönde dönerken hızlanıyorsa ivme pozitif, yavaşlıyorsa negatif olur.

Tekrar vurgulayalım: *Açısal hız ve ivme, dönen katı cismin her noktasında aynı değere sahiptir.*

Sabit Açısal İvmeli Hareket

Katı cismin açısal hızı düzgün olarak değişiyorsa, α açısal ivmesi sabit olur. Bu durumda, tıpkı doğrusal harekette yaptığımız gibi, açısal konum ve hız için formüller elde ederiz. Bu hesabı tekrar yapmaya gerek yoktur. Sonuçları bir tabloda doğrusal hareket formülleriyle karşılıklı verelim:

Sabit ivmeli dönme ve öteleme hareketleri.

Dönme	Öteleme
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

Örnek 7.1

Duran bir tekerlek sabit açısal ivmeyle hızlanarak dönmeye başlıyor ve 10 s *sonra* 90 devir/dakika *açısal hızına ulaşıyor.*

(a) *Tekerleğin açısal ivmesi ne kadardır?*

(b) *Bu süre içinde kaç devir yapmıştır?*

Çözüm

(a) Sabit ivmeli hareket için bulduğumuz hız formülünü kullanırız:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Tüm bu formüllerde radyan birimi kullanmak gerekir. İlk hız sıfırdır: $\omega_0 = 0$. Son hızı radyan/saniye birimine dönüştürerek yerine koyalım:

$$90 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0 + \alpha \times 10 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.3\pi \text{ rad/s}^2$$

(b) Açısal konum formülünü kullanırız:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Burada tekerleğin $\theta_0 = 0$ olan noktasını gözönüne alırız:

$$\theta = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} \times 0.3\pi \times 10^2 = 15\pi \text{ radyan}$$

Dönülen açı devir olarak istenmektedir. Bir devir 2π radyan alınır:

$$\theta = 15\pi \text{ radyan} = \frac{15\pi}{2\pi} = 7.5 \text{ devir}.$$

Örnek 7.2

600 dev/dk *açısal hızıyla dönmekte olan bir elektrik motoru, akım kesilince yavaşlamaya başlıyor ve* 3 s *içinde açısal hızı* 150 dev/dk *değerine düşüyor.*

(a) *Açısal ivmesi ne kadardır?*

(b) *Bu zaman aralığında kaç devir yapar?*

(c) *Başlangıçtan itibaren, duruncaya kadar kaç devir yapar?*

Çözüm

(a) Verilen hızlar, açısal hız formülünde rad/s olarak yerine konulup ivme bulunur:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(150 - 600) \times \pi/30}{3}$$

$$\alpha = -5\pi \text{ rad/s}^2$$

(b) Açısal konum formülü kullanılır:

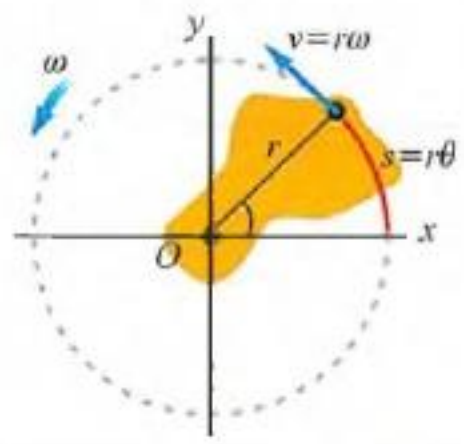
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{600 \times \pi}{30} \times 3 + \tfrac{1}{2} \times (-5\pi) \times 3^2$$

$$\theta = 37.5\pi \text{ radyan} = 18.8 \text{ devir}.$$

(c) Motor durduğunda son hızı sıfırdır. Zamansız hız formülü kullanılır:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

$$\theta = \frac{0 - (600\pi/30)^2}{2 \times (-5\pi)} = 40\pi \text{ radyan} = 20 \text{ devir}$$



Şekil 7.5: Açısal ve çizgisel koordinatlar.

Açısal ve Çizgisel Kinematik Arasındaki İlişki

Katı bir cismin dönme hareketi sırasında, onun herhangi bir noktası, belli bir yarıçapta dairesel hareket yapmaktadır. Bu noktanın çizgisel hız ve ivmesiyle, katı cismin açısal hız ve ivmesi arasındaki ilişkiyi bilmek gerekir.

Burada, açısal ve çizgisel kinematik arasındaki ilişkiyi sağlayan formülleri gözden geçirelim. Açısal konumu tanımlayan (7.1) denklemini s yayı için tekrar yazalım:

$$s = r\theta$$

θ açısı zaman içinde değiştikçe s yayı da değişecektir. Her iki tarafın t zamanına göre türevi alınırsa,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

bulunur. (Ele alınan P noktasının r yarıçapı değişmediğinden türev dışına alınmıştır.) Sağ taraftaki türev açısal hız, sol taraftaki türev ise bildiğimiz **çizgisel hız** olur:

$$v = r\omega \tag{7.6}$$

Dairesel harekette ivmenin iki bileşeni vardı. Bunlardan **merkezcil ivmenin** formülünü hatırlayalım:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Çizgisel hız için bulduğumuz ifadeyi kullanırsak,

$$a_r = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \tag{7.7}$$

bulunur.

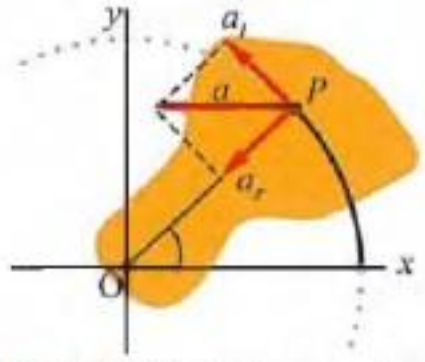
Teğetsel ivme için Bölüm 3 de bulduğumuz (3.19) ifadesini tekrar yazalım:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Çizgisel hız için bulduğumuz $v = r\omega$ ifadesini yerine koyup türev alındığında, r yarıçapı sabit olduğundan,

$$a_t = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{7.8}$$

bulunur.



Şekil 7.6: Teğetsel ve merkezcil ivmeler.

Bu formüller, katı cismin dönme hareketi ile, onun herhangi bir noktasının çizgisel hareketi arasındaki ilişkiyi tam olarak belirler. Bu formülleri bir tabloda özetleyelim:

Açısal ve çizgisel kinematik arasındaki ilişki.

	Açısal	Çizgisel
Konum	θ	$s = r\theta$
Hız	ω	$v = r\omega$
İvme	α	$a_r = r\omega^2$ (merkezcil ivme) $a_t = r\alpha$ (teğetsel ivme)

Örnek 7.3

Duran bir tekerlek sabit ivmeyle hızlanmaya başlıyor ve 5 devir *sonra* 60 dev/dk *hızına ulaşıyor.*

(a) *Tekerleğin açısal ivmesi ne kadardır?*

(b) *Tekerlek üzerinde, merkezden* 2 m *mesafede bulunan bir noktanın çizgisel hızı, teğetsel ve merkezcil ivmesi ne kadardır?*

Çözüm

(a) Tekerleğin açısal hızı $60\,\text{dev/dk} = 60 \times \pi/30 = 2\pi$ eder. Zamansız hız formülünden açısal ivmeyi buluruz:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\theta} = \frac{(2\pi)^2}{2 \times 5\pi} = 0.4\pi\ \text{m/s}^2$$

Açısal hesaplarda π çarpanını öyle bırakmak yerinde olur. Daha sonra, ya sadeleşirler veya $\pi^2 \approx 10$ değeri yazılabilir.

(b) $r = 2\,\text{m}$ için, çizgisel kinematiğe geçiş formülleri kullanılır:

Çizgisel hız: $v = r\omega = 2 \times 2\pi = 4\pi\,\text{m/s}$

Teğetsel ivme: $a_t = r\alpha = 2 \times 0.4\pi = 0.8\pi\,\text{m/s}^2$

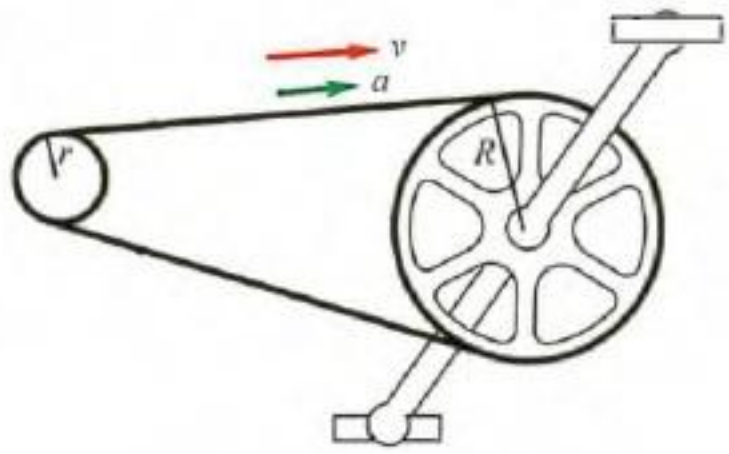
Merkezcil ivme: $a_r = r\omega^2 = 2 \times (2\pi)^2 = 8\pi^2 \approx 80\,\text{m/s}^2$.

Örnek 7.4

Bir bisiklet zincirinde pedala bağlı diskin yarıçapı 10 cm, *arka tekerleğe bağlı diskin yarıçapı* 5 cm *dir.*

(a) *Pedalın açısal hızı* $\omega_1 = 40\,\text{dev/dk}$ *ve açısal ivmesi* $\alpha_1 = 7\,\text{rad/s}^2$ *iken, arka tekerleğin açısal hızı ve açısal ivmesi ne kadar olur?*

(b) *Her iki diskin merkezcil ivmeleri ne kadardır?*



Çözüm

(a) İki tekerlek arasında ilişkiyi sağlayan şey zincirdir. Bu zincirin her noktasının çizgisel hızı ve çizgisel ivmesi aynıdır. Özel olarak, her iki diske değen noktalarının çizgisel hızları ve ivmeleri eşit olmalıdır. O halde,

$$v_1 = v_2 = v$$
$$a_1 = a_2 = a$$

İlk bağıntıda çizgisel hız ile açısal hız arasındaki ilişki kullanılır:

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1$$

Burada oranlarla çalışıldığı için, birim değiştirmeye gerek yoktur:

$$\omega_2 = \frac{10\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} \times 40\,\text{dev/dk} = 80\,\text{dev/dk}$$

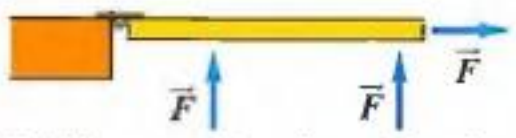
Zincirin diske değen noktasındaki çizgisel ivmesi, diskin oradaki teğetsel ivmesi demektir. Teğetsel ivme için $a_t = r\alpha$ bağıntısı kullanılırsa, açısal ivmeler arasında aynı oran bulunur:

$$\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\alpha_1 = \frac{10\,\text{cm}}{5\,\text{cm}}\,7\,\text{dev/dk} = 14\,\text{rad/s}^2$$

(b) Merkezcil ivmeyi veren $a_r = r\omega^2$ bağıntısı her iki disk için kullanılır:

$$a_{1r} = r_1\omega_1^2 = 0.10 \times (40 \times \pi/30)^2 = 1.8\,\text{m/s}^2$$
$$a_{2r} = r_2\omega_2^2 = 0.05 \times (80 \times \pi/30)^2 = 3.6\,\text{m/s}^2$$

7.2 BİR KUVVETİN MOMENTİ (TORK)



Şekil 7.7: Bu kuvvetlerden hangisi kapıyı en kolay döndürür?

Bir kapıyı nasıl döndürürüz? Kapının serbest tarafından dik bir kuvvetle itersek kapı döner. Fakat, aynı kuvveti menteşelere yakın bir yerden uygularsak döndürmekte zorlanırız. Keza, kapıyı dış tarafından tutup, kapıya paralel çekersek yine dönmez. Tüm bu durumlarda, aynı kuvvetin cismi döndürme kabiliyeti farklı olmaktadır.

Bir kuvvetin cismi döndürme kabiliyetine **moment** veya **tork** adı verilir.

Tanım: Orijinden r uzaklıkta etkiyen bir kuvvetin r doğrultusuyla yaptığı açı θ olsun. Buna göre, F kuvvetinin O merkezine göre momenti,

$$\tau = F\,r\,\sin\theta \tag{7.9}$$

olur.

Kuvvetin döndürme yönü önemlidir. Yaygın olan kabule göre, kuvvet r çubuğunu O merkezi etrafında, *saat ibrelerinin tersi yönde döndürmeye çalışıyorsa, momentin işareti pozitif alınır.* Aksi yöndeki döndürmede moment eksi işaretli alınmalıdır.

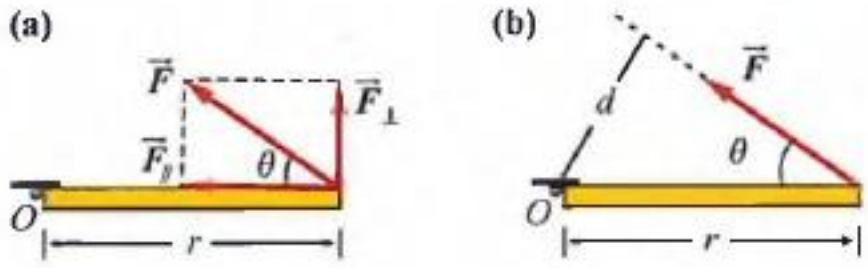
Moment birimi newton × metre (N · m) olup özel bir adı yoktur.

Yukardaki tanımı iki farklı şekilde yazabiliriz: Bunlardan birincisinde $F\,\sin\theta$ çarpanı, kuvvetin r doğrultusuna dik $F_\perp$ bileşeni olur (Şekil 7.8-a):

$$\tau = \underbrace{F\,\sin\theta}_{F_\perp}\,r = F_\perp\,r \tag{7.10}$$

İkinci ifade, $r\,\sin\theta$ çarpımının, üçgendeki karşı dik kenar olduğu gözönüne alınırsa (Şekil 7.8-b),

$$\tau = F\,\underbrace{r\,\sin\theta}_{d} = F\,d \tag{7.11}$$



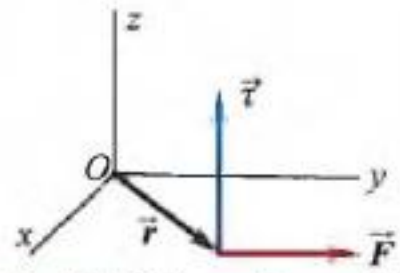
Şekil 7.8: Moment hesaplamanın iki farklı yolu.

yazılabilir. Burada d uzaklığına **moment kolu** denir. Bu ifadelerden hangisi verilen probleme uyuyorsa, onu kullanırız. Genellikle $F_\perp r$ ifadesi daha kullanışlı olur.

Momentin Vektörel Çarpım Olarak İfadesi

Dönme momentini tanımladığımız (7.9) ifadesindeki $\sin\theta$ çarpanı, bunun bir vektörel çarpım olarak ifade edilebileceğini gösterir. Gerçekten de, dönme ekseninden $\vec{F}$ kuvvetinin tatbik noktasına olan uzaklığı bir $\vec{r}$ vektörü ile gösterirsek, moment vektörü şöyle yazılabilir:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{7.12}$$



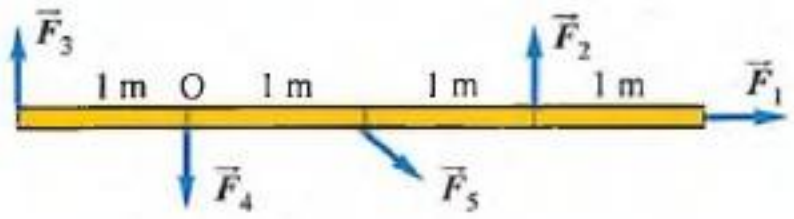
Şekil 7.9: Momentin vektörel çarpım olarak ifadesi.

Bu tanımın, yukarda verdiğimiz moment tanımını doğruladığını kolayca görebiliriz: $\vec{r}$ ve $\vec{F}$ vektörlerini xy-düzleminde varsayalım. Vektörel çarpımın yönü sağ-el kuralıyla bulunuyordu. Bu tanıma göre, moment vektörünün doğrultusu z-ekseni, yani dönme ekseni üzerinde olacaktır. Kuvvetin eksen etrafında döndürme yönü saat ibrelerinin dönme yönüne ters ise, moment $+z$ yönünde, yani pozitif olur. Tersi yönde döndürüyorsa, moment negatif olur.

Bu bölümde ele alacağımız kuvvetler hep aynı bir düzlemde olacağı için, momentler hep z-ekseni doğrultusunda, artı veya eksi bileşenli olacaktır. Böylece, momentin vektörel çarpım özelliğine başvurmaya gerek kalmadan çalışabiliriz.

Örnek 7.5

Şekilde gösterilen kuvvetlerin hepsinin şiddeti aynı 10 N *değerindedir. Bu kuvvetlerin O merkezine göre torklarını hesaplayın.*



Çözüm

Torkun $\tau = rF_\perp$ veya $\tau = Fd$ ifadelerinden hangisi uygunsa onu kullanırız:

$\tau_1 = rF_{1\perp} = 0$, çünkü kuvvetin r ye dik bileşeni sıfırdır. Kuvvetin uzantısı dönme merkezinden geçiyorsa, tork sıfır olur.

$\tau_2 = rF_{2\perp} = 2 \times 10 = +20\,\text{N}\cdot\text{m}$. F_2 kuvvetinin döndürme yönü saat ibresinin tersi yönde olduğundan, tork pozitif olur.

$\tau_3 = -rF_{3\perp} = -1 \times 10 = -10\,\text{N}\cdot\text{m}$. F_3 kuvvetinin döndürme yönü saat ibresi yönünde olduğundan, tork negatif olur.

$\tau_4 = F_4 d = 0$. Moment kolu $d = 0$ olduğundan, tork sıfırdır.

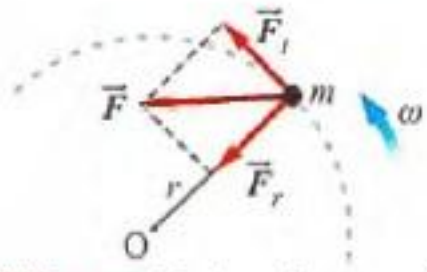
$\tau_5 = rF_5 \sin 37° = 1 \times 10 \times 0.6 = 6\,\text{N}\cdot\text{m}$. F_5 kuvvetinin döndürme yönü saat ibresinin tersi yönde olduğundan, tork pozitif olur.

7.3 DÖNME DİNAMİĞİ

Noktasal Cismin Dönme Dinamiği

Newton yasasını katı cisim için yazmadan önce, izleyeceğimiz yolu daha basit bir hareket üzerinde gösterelim.

Noktasal bir m kütlesi, üzerine uygulanan net $\vec{F}$ kuvvetinin etkisiyle r yarıçaplı dairesel bir yörüngede dönüyor olsun. Bu $\vec{F}$ kuvvetini iki ayrı yönde bileşenlerine ayıralım: Bunlardan F_r bileşeni O merkezine yönelik etkimekte ve



Şekil 7.10: Noktasal cisme dairesel harekette etkiyen kuvvetin teğetsel ve radyal bileşenleri.

dolayısıyla a_r merkezcil ivmesine sebep olmaktadır. Diğer F_t bileşeni teğet doğrultuda, yani yarıçapa dik etkimekte ve dolayısıyla a_t teğetsel ivmesine sebep olmaktadır.

Bu iki kuvvet için Newton yasasını yazalım ve çizgisel ivmeleri açısal niceliklere çevirelim:

$$F_r = ma_r = mr\omega^2$$
$$F_t = ma_t = mr\alpha$$

Bu denklemlerden birincisi, ω açısal hızında dönebilmek için gerekli merkezcil kuvveti belirler. Fakat, açısal ivme hakkında bilgi vermediği için, bir kenara koyabiliriz. İkinci denklemi, teğetsel kuvveti r yarıçapıyla çarparak tekrar yazalım:

$$F_t r = mr^2\alpha$$

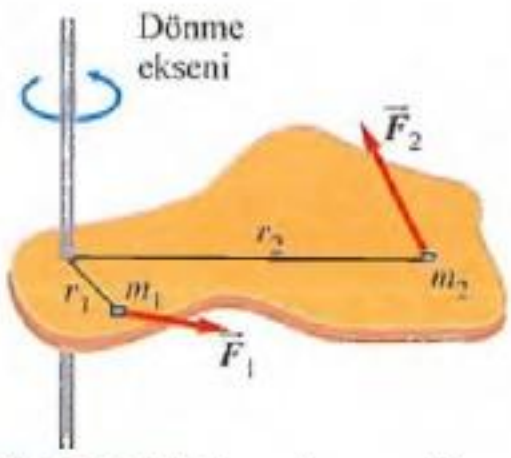
Eşitliğin sol tarafı F kuvvetinin O merkezine göre momenti olur:

$$\tau = (mr^2)\alpha \tag{7.13}$$

Bu ifade şekil bakımından Newton yasası $F = ma$ yı andırmaktadır. F kuvvet yerine τ momenti, a ivmesi yerine α açısal ivmesi ve kütle yerine de (mr^2) çarpımı gelmiştir. Newton yasasının bu değişik ifadesi, noktasal cisim için bir yenilik sayılmaz. Ama, katı cismin dönme hareketini nasıl yazacağımızın ipucunu verir. Katı cismi oluşturan tüm parçacıkların aynı α açısal ivmesiyle dönüyor olması, eşitliğin sağ tarafında yer almış bulunmaktadır.

Katı Cismin Dönme Dinamiği

Şimdi, katı bir cismin dönmesini tayin eden dinamik yasayı ele alabiliriz. Sabit bir O merkezi etrafında dönmekte olan katı bir cismi N sayıda küçük $\Delta m_1, \Delta m_2 \ldots \Delta m_N$ gibi noktasal kütleden oluştuğunu varsayalım. Bu kütlelerin herbirine etkiyen dış kuvvetler, sırasıyla $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_N$ olsun. (İç kuvvetler karşılıklı olarak birbirini sıfırladığı için gözönüne almaya gerek yoktur.)



Şekil 7.11: Katı cisme etkiyen dış kuvvetler.

Noktasal cisim için geliştirdiğimiz (7.13) denklemini herbir küçük kütle için yazarsak

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= F_{1t} r_1 = (\Delta m_1 r_1^2)\alpha \\
\tau_2 &= F_{2t} r_2 = (\Delta m_2 r_2^2)\alpha \\
\cdots &= \cdots \\
\tau_N &= F_{Nt} r_N = (\Delta m_N r_N^2)\alpha
\end{aligned}$$

denklemler sistemine ulaşırız. Bu denklemleri taraf tarafa topladığımızda, sağ tarafta α açısal ivmesi ortak çarpan olur:

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N = (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \Delta m_N r_N^2)\alpha$$
$$\sum_i \tau_i = \Big(\sum_i \Delta m_i r_i^2\Big)\alpha$$

Bu eşitliğin sol tarafı katı cisme etkiyen kuvvetlerin toplam momentidir. Sağ taraftaki parantez içindeki toplam, herbir noktasal kütle parçasının kendi r_i yarıçapının karesiyle çarpılıp toplandığı yeni bir terim olur. Buna katı cismin **eylemsizlik momenti** adı verilir ve I ile gösterilir:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad \text{(eylemsizlik momenti)} \tag{7.14}$$

Eylemsizlik momenti dönme hareketinde kütlenin görevini yapar, yani I ne kadar büyükse cisme açısal ivme vermek o kadar zorlaşır.

Bu tanımdaki r_i uzaklıklarına dikkat edilirse, eylemsizlik momenti hangi dönme eksenine göre alındığına bağlıdır.

Sürekli dağılmış kütle için, $\Delta m_i \to 0$ limitinde, toplam yerine integral gelir:

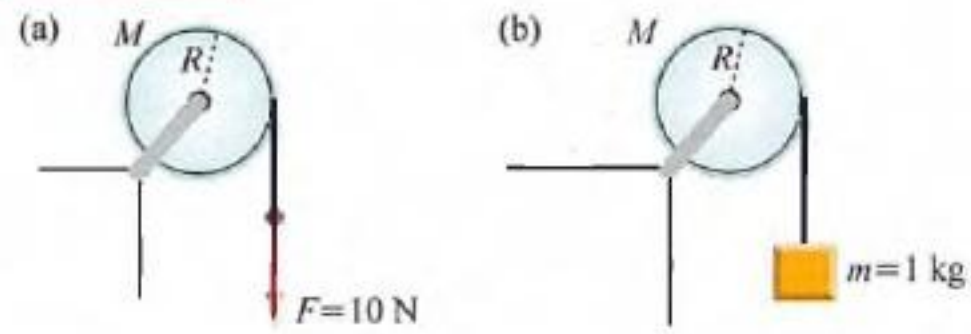
$$I = \int dm\, r^2 \qquad \text{(eylemsizlik momenti)} \tag{7.15}$$

Sonuç olarak, katı cismin dönme hareketini veren denklem şöyle yazılır:

$$\boxed{\tau_{\text{net}} = I\,\alpha \qquad \text{(Katı cismin dönme dinamiği)}} \tag{7.16}$$

Burada önemli bir noktayı vurgulayalım: Momentin işareti için, saat ibreleri yönü değil, hareket yönü dikkate alınır. Yani, katı cismin dönme yönündeki momentler pozitif, ters yöndekiler negatif alınır.

Örnek 7.6



Şekilde sürtünmesiz dönebilen $R = 2\,\text{m}$ yarıçaplı bir tekerleğin kütlesi $M = 5\,\text{kg}$ ve eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ dir.

(a) *Tekerleğin çevresine sarılı bir ipin ucundan $F = 10\,\text{N}$ luk bir kuvvetle çekiliyor. Tekerleğin açısal ivmesini bulun.*

(b) *İpin ucuna kütlesi $m = 1\,\text{kg}$ olan bir cisim asılarak serbest bırakılıyor. İvmeleri ve ipteki gerilme kuvvetini hesaplayın.*

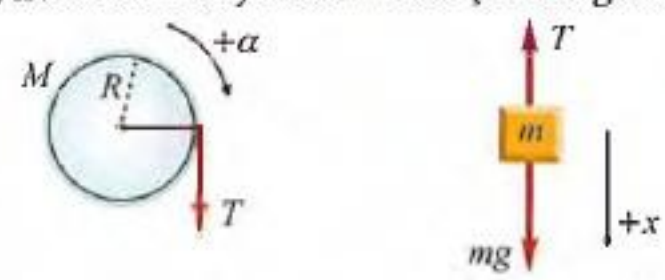
Çözüm

Tekerleğin ekseninde oluşabilecek normal veya tepki kuvvetleri dikkate alınmaz, çünkü bunlar dönme ekseninden geçtikleri için momentleri sıfır olur. Buna göre, sadece F kuvvetinin momenti harekete sebep olur. Dönme dinamiğinin (7.16) denklemi yazılır:

$$\tau_{\text{net}} = I\,\alpha \;\to\; F.R = \left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2\times 10}{5\times 2} = 2\,\text{rad/s}^2$$

(b) Bu kez, hareket eden iki cisim vardır: Dönen tekerlek ve çizgisel hareket yapan m kütlesi. Bunları birbirinden yalıtmak için, herbirine etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir:



Her iki cisim için hareket yönü pozitif olarak alınırsa, denklemler şöyle olur:

M için: $\quad T.R = I\,\alpha = \frac{1}{2}MR^2\,\alpha$ (1)

m için: $\quad mg - T = ma$ (2)

Burada 3 bilinmeyen vardır: T, α, a. Bu durumda, iki denkleme ilave bir denklem daha gerekir. Bu da ivmeler arasındaki ilişkiden gelir. İpin her noktası aynı a ivmesine sahip olacağından, tekerleğe değen noktada, tekerleğin teğetsel ivmesi olur. O halde, üçüncü bağıntı şöyle olur:

$$a = R\,\alpha \tag{3}$$

Bu 3 bağıntı arasından bilinmeyenler bulunur. (1) denkleminden T değeri çekilip (2) denkleminde $a = R\alpha$ ile birlikte kullanılırsa,

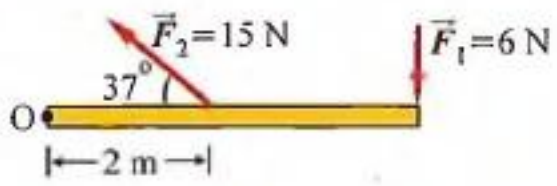
$$\alpha = \frac{mg}{(m + M/2)}R = \frac{10}{(1 + 5/2)\times 2} = 1.4\,\text{rad/s}^2$$

Buradan, diğer bilinmeyenler bulunur:

$$a = R\alpha = 2.8\,\text{m/s}^2$$

$$T = m(g - a) = 7\,\text{N}.$$

Örnek 7.7



$L = 5\,\text{m}$ uzunluğunda bir çubuk O ucu etrafında sürtünmesiz dönebilmektedir. Çubuğun O noktasına göre eylemsizlik momenti $I_o = 5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ dir. Bu çubuğa şekilde gösterilen iki kuvvet etkiyor. Çubuğun dönme yönünü ve açısal ivmesini bulun.

Çözüm

İki kuvvetin momentleri farklı yönlerdedir. Hangisinin daha büyük olduğunu görmek üzere, bunların momentlerini ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\tau_1 = F_1 L = 6 \times 4 = 30\,\mathrm{N \cdot m}$$

$$\tau_2 = r F_{2\perp} = r F_2 \sin 37^\circ = 2 \times 15 \times 0.6 = 18\,\mathrm{N \cdot m}$$

τ_1 değeri daha büyük olduğu için, çubuk F_1 in döndürme yönünde dönecektir.

Pozitif dönme yönü F_1 için seçilir ve dönme dinamiği denklemi yazılır:

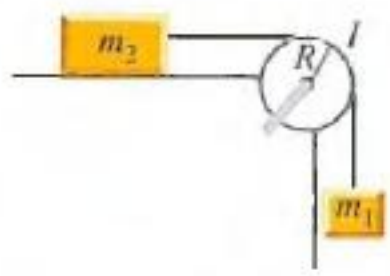
$$\tau_{net} = \tau_1 - \tau_2 = I_0 \alpha$$

Buradan açısal ivme bulunur:

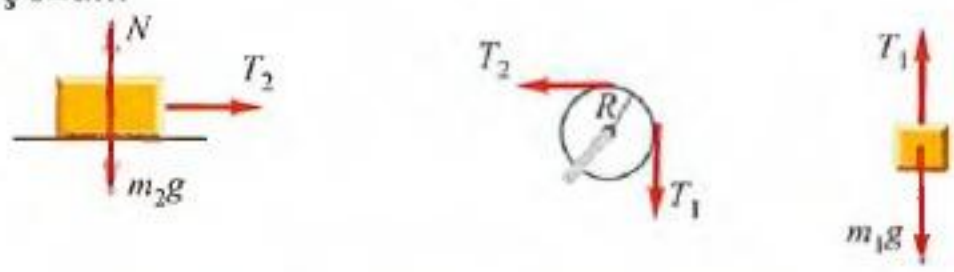
$$\alpha = \frac{30 - 18}{5} = 2.4\,\mathrm{rad/s^2}$$

Örnek 7.8

Eylemsizlik momenti $I = 3\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ ve yarıçapı $R = 20\,\mathrm{cm}$ olan bir makaranın çevresinden geçen ipin bir ucuna $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ lık kütle asılmış, diğer ucuna sürtünmesiz yatay bir düzlemde duran $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ lık kütle bağlanmıştır. İvmeleri ve iplerdeki gerilmeleri hesaplayın.



Çözüm



Bu problemde dikkat edilecek nokta, ipin iki ucundaki gerilmelerin farklı oluşudur. Nitekim, gerilmeler eşit olsaydı, bu takdirde makarayı döndürecek net bir tork oluşmazdı. O halde, herbir cisme etkiyen kuvvetler şöyle gösterilebilir: Düzlemdeki kütlenin ağırlığı ve N tepki kuvveti birbirini sıfırladığı için hesaba katılmaz.

Herbir cisim için hareket denklemi yazılır:

m_1 için: $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

m_2 için: $T_2 = m_2 a$ (2)

Makara için: $T_1.R - T_2.R = I\alpha$ (3)

Bunlara ek olarak, ivmeler arasındaki ilişki yazılır:

$$a = R\alpha \quad (4)$$

Bu 4 denklem arasından ivmeler ve gerilmeler bulunur. (1) ve (2) den gerilmeler alınıp, (3) denkleminde yerine konursa,

$$\alpha = \frac{m_1 g R}{I + (m_1 + m_2)R^2} = \frac{10 \times 0.2}{3 + 3 \times 0.2^2} = 0.64\,\mathrm{rad/s^2}$$

elde edilir. Buradan diğer bilinmeyenler hesaplanır:

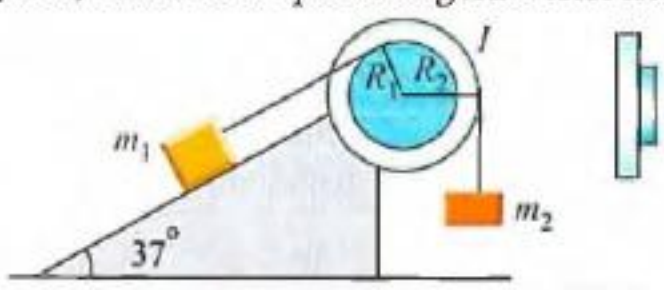
$$a = R\alpha = 0.2 \times 0.64 = 0.13\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T_1 = m_1(g - a) = 9.9\,\mathrm{N}$$

$$T_2 = m_2 a = 0.3\,\mathrm{N}.$$

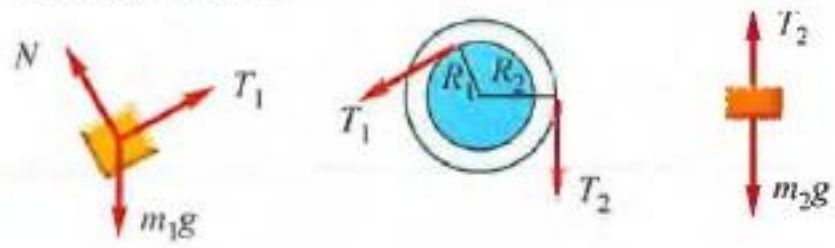
Örnek 7.9

Eylemsizlik momenti $I = 3\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ olan bir makaranın $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ olan iç yarıçapına sarılı ipin diğer ucu 37° eğimli, sürtünmesiz bir düzlemde duran $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ lık bloğa bağlıdır. Makaranın $R_2 = 20\,\mathrm{cm}$ olan dış yarıçapına sarılı ipin ucuna $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ lık blok asılmıştır. Bu sistem serbest bırakıldığında, ivmeleri ve iplerdeki gerilmeleri hesaplayın.



Çözüm

Bu problemde blokların çizgisel ivmeleri farklıdır, çünkü farklı yarıçaplarda bağlanmışlardır. Herbir cisme uygulanan kuvvetleri gösterelim:



Herbirinin hareket yönü pozitif alınır ve denklemler yazılır:

m_1 için: $T_1 - m_1 g \sin 37^\circ = m_1 a_1$ (1)

m_2 için: $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$ (2)

Makara için: $T_2.R_2 - T_1.R_1 = I\alpha$ (3)

Yine, çizgisel ivmeler makaranın teğetsel ivmesi olacağı için, herbiri ile açısal ivme arasındaki ilişki yazılır:

$$a_1 = R_1 \alpha \quad (4)$$

$$a_2 = R_2 \alpha \quad (5)$$

Bu 5 denklem arasından ivmeler ve gerilmeler bulunur. (1) ve (2) den T_1, T_2 alınıp (3) denkleminde yerine konursa, açısal ivme bulunur:

$$\alpha = \frac{m_2 g R_2 - m_1 g R_1 \sin 37^\circ}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = 1.1\,\mathrm{rad/s^2}$$

Bu değer kullanılarak ivmeler ve gerilmeler hesaplanır:

$$a_1 = R_1\alpha = 0.1 \times 1.1 = 0.11\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_2 = R_2\alpha = 0.22\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T_1 = m_1 g \sin 37^\circ + m_1 a_1 = 6.1\,\mathrm{N}$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 a_2 = 19.6\,\mathrm{N}.$$

7.4 EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESAPLARI

Dönme hareketinde kütle vazifesi gören eylemsizlik momenti, sadece kütleye değil, kütlenin dönme ekseni etrafında nasıl dağıldığına da bağlıdır. Eylemsizlik momenti hesabı iki türlü yapılabilir. Eğer katı cisim noktasal parçacıklardan oluşuyorsa, 7.14 denklemiyle, herbirinin eylemsizlik momenti toplanır:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Kütle dağılımı sürekli ise 7.15 formülüyle integral alınır:

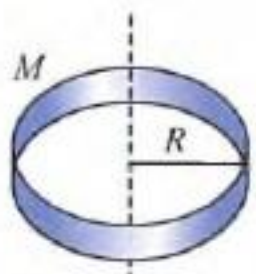
$$I = \int dm\, r^2 \tag{7.17}$$

Bu bağıntılardaki mr^2 çarpımına dikkat edilirse, aynı bir kütle eksenden ne kadar uzakta yer alırsa, eylemsizlik momenti o kadar büyük olur.

Burada integralli eylemsizlik momenti hesaplarına girmeden, hesap sonuçlarını bir tabloda özetleyelim:

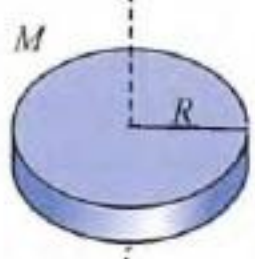
Bazı cisimlerin eylemsizlik momentleri

Halka: $I = MR^2$



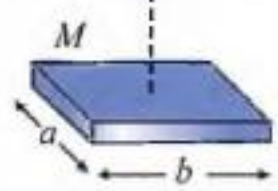
Disk veya silindir

$I = \frac{1}{2}MR^2$

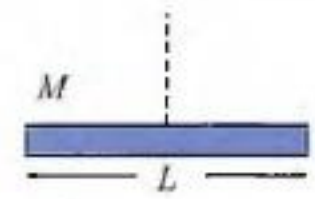


Dikdörtgen levha

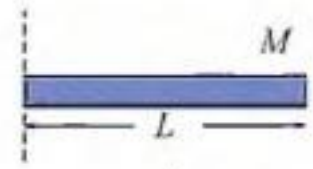
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



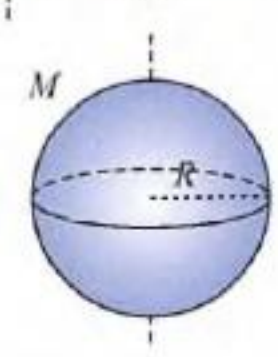
Çubuk: $I = \frac{1}{12}ML^2$



Çubuk: $I = \frac{1}{3}ML^2$



Küre: $I = \frac{2}{5}MR^2$

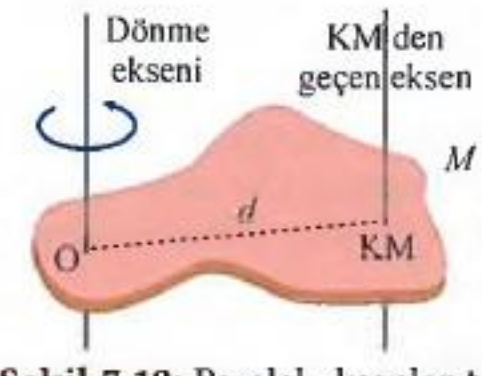


Paralel Eksenler Teoremi

Eylemsizlik momentinin değeri hangi eksene göre alındığına bağlıdır. Yukardaki tabloda katı cisimlerin, kütle merkezlerinden geçen eksenlere göre eylemsizlik momentleri I_{KM} olarak verilmiştir. Eğer, katı cisim başka bir eksen etrafında dönüyorsa, yine bu tablodan eylemsizlik momenti türetilebilir. Mekanikte bu ilişki, **paralel eksenler teoremi** (veya, Steiner teoremi) olarak bilinir:

Bir cismin kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti I_{KM} ise, herhangi bir d uzaklıkta buna paralel olan diğer bir eksene göre eylemsizlik momenti,

$$I = I_{KM} + M d^2 \qquad \text{(Paralel eksenler teoremi)} \tag{7.18}$$

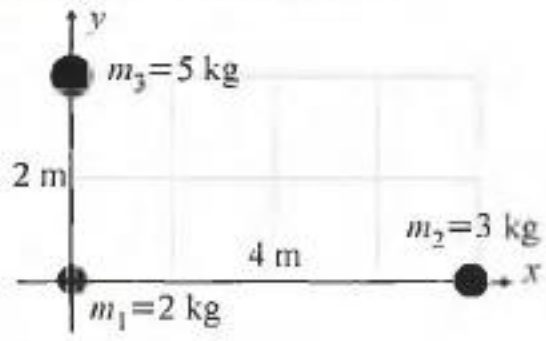


Şekil 7.12: Paralel eksenler teoremi.

olur. Burada M katı cismin kütlesidir. Bu sonucu ispatsız veriyoruz. Bu teoreme göre, Md^2 teriminin pozitif olduğu gözönüne alınırsa, cismin eylemsizlik momentinin en küçük olduğu eksen, yani en kolay dönebildiği eksen, kütle merkezinden geçen eksendir.

Örnek 7.10

Şekilde gösterilen 3 kütlenin x-, y- ve z-eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini hesaplayın.



Çözüm

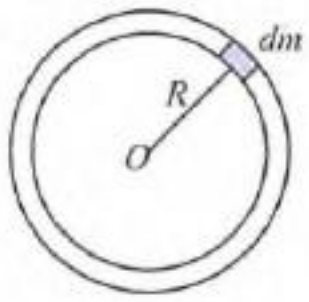
Noktasal kütleler için eylemsizlik momenti $\sum_i m_i r_i^2$ olur. m_1 kütlesi eksen üzerinde olduğundan $r_1 = 0$ olup, katkısı olmaz:

$$I_x = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 0 + 5 \times 2^2 = 20\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 3 \times 4^2 + 0 = 48\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 48 + 20 = 68\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Örnek 7.11

(a) *Kütlesi m ve yarıçapı R olan bir halkanın düzlemine dik ve merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini bulun.*

(b) *Bir önceki sonuçtan yararlanarak, kütlesi M ve yarıçapı R olan diskin düzlemine dik ve merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini bulun.*

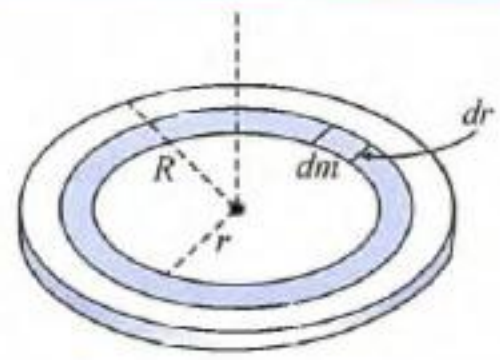


Çözüm

(a) Halkanın üzerinde küçük bir dm kütlesi seçer ve (7.17) integral formülünü kullanırız:

$$I = \int dm R^2 = R^2 \int dm = MR^2$$

Her dm kütlesi sabit R uzaklığında olduğu için, integralin dışına alınmıştır. dm lerin toplamı da m kütlesi olur.



(b) Disk üzerinde, r ile $r+dr$ yarıçapları arasında kalan küçük bir halkayı gözönüne alalım. Bunun yüzölçümü yaklaşık $2\pi r\,dr$ olur. Toplam kütle M ise, bu küçük diskin kütlesi orantı ile bulunur:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r = \frac{M}{R^2} 2r\,dr$$

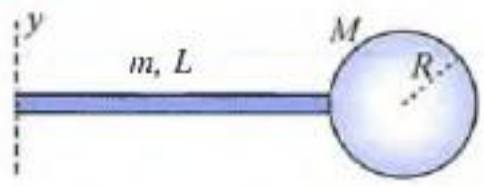
Bu küçük diskin katkısının $dm\,r^2$ olduğunu (a) şıkkında bulduk. O halde, bunların katkıları $r = 0$ dan $r = R$ ye kadar toplanır, yani integral alınır:

$$I = \int dm\, r^2 = \int_0^R \left(\frac{M}{R^2} 2r\,dr\right) r^2 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3\,dr$$

İntegralin değeri $R^4/4$ olup, sadeleştirme yapılırsa, diskin eylemsizlik momenti bulunur:

$$I = \tfrac{1}{2} MR^2$$

Örnek 7.12



Kütlesi m ve uzunluğu L olan bir çubuğun ucuna M kütleli ve R yarıçaplı bir dolu küre kaynak yapılmıştır. Bu sistemin diğer uçtaki y-eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayın.

Çözüm

Çubuk ve kürenin kendi kütle merkezlerine göre eylemsizlik momentleri Sayfa 123 deki tablodan bulunur:

Çubuk: $I_{\text{KM}} = \dfrac{1}{12} mL^2$

Dolu küre: $I_{\text{KM}} = \dfrac{2}{5} MR^2$

Herbir cismin y-eksenine göre eylemsizlik momenti paralel eksenler teoremi (7.18 formülü) ile bulunur. Paralel eksenin uzaklığı, çubuk için $L/2$, küre için $(L+R)$ olur:

Çubuk: $I_y = I_{\text{KM}} + m\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{12} mL^2 + \dfrac{1}{4} mL^2 = \dfrac{1}{3} mL^2$

Dolu küre: $I_y = I_{\text{KM}} + M(L+R)^2 = \dfrac{2}{5} MR^2 + M(L+R)^2$

Sistemin toplam eylemsizlik momenti, bu ikisinin toplamı olur:

$$I_{y,\text{toplam}} = \frac{1}{3} mL^2 + \frac{2}{5} MR^2 + M(L+R)^2$$

Dönme Kinetik Enerjisi

Dönen katı cismin kinetik enerjisini $\frac{1}{2}mv^2$ formülüyle hesaplayamayız, çünkü her noktasının çizgisel hızı farklıdır. Bunun yerine, açısal hız cinsinden bir ifade yazabilmek gerekir.

Katı cismi N sayıda küçük $m_1, m_2 \ldots m_N$ kütlelerinden oluşmuş varsayalım. Bu kütlelerin herbirinin çizgisel hızı $v_1, v_2 \ldots v_N$ olsun. Katı cismin kinetik enerjisi, bu noktasal cisimlerin kinetik enerjileri toplamı olacaktır:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}m_Nv_N^2$$

Bu kütlelerin herbiri eksenden itibaren $r_1, r_2 \ldots r_n$ uzaklıklarda dönüyor olsun. Çizgisel hızla açısal hız arasındaki $v = r\omega$ ilişkisi herbiri için yazılırsa,

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}m_N(r_N\omega)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\underbrace{\left[\, m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_N^2 \,\right]}_{I}\omega^2 \end{aligned}$$

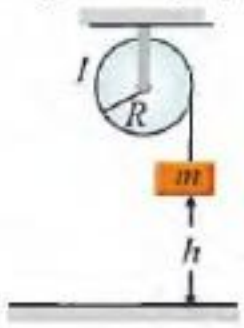
O halde, dönme kinetik enerjisi şöyle yazılabilir:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(dönme kinetik enerjisi)}} \tag{7.19}$$

Bu ifadenin öteleme kinetik enerjisinin $\frac{1}{2}mv^2$ ifadesiyle olan benzerliğine dikkat edelim. Böylece, enerji korunumu yasası katı cisimler için, bu kinetik enerji ifadesiyle kullanılabilir.

Örnek 7.13

Eylemsizlik momenti $I = 0.5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan bir makaranın $R = 20\,\text{cm}$ olan yarıçapına dolanan bir ipin ucuna $m = 1\,\text{kg}$ kütlesi asılmıştır. Kütle yerden $h = 2.7\,\text{m}$ yükseklikte serbest bırakılıyor. Yere hangi hızla çarpar?



Çözüm

Enerji korunumu, makara ve kütle için birlikte yazılır. Başlangıçta sadece m kütlesinin potansiyel enerjisi vardır. Kütle h kadar indiğinde, bu enerji tümüyle kinetik enerjiye dönüşür:

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

m kütlesinin çizgisel hızı v ile makaranın açısal hızı arasındaki ilişki yazılır:

$$v = R\omega$$

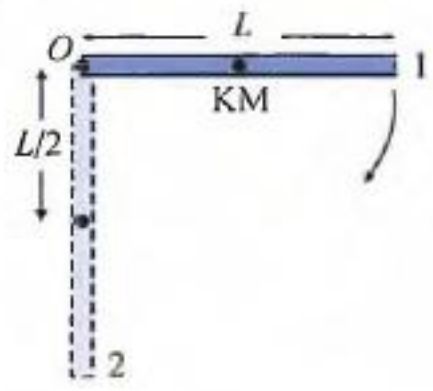
Bu değer yerine konulup açısal hız bulunur:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I + mR^2}} = \sqrt{\frac{20 \times 2.7}{0.5 + 0.2^2}} = 10\,\text{rad/s}$$

Buradan çizgisel hıza geçilir:

$$v = R\omega = 2\,\text{m/s}$$

Örnek 7.14



Kütlesi m ve uzunluğu $L = 1.2\,\text{m}$ olan bir çubuk, bir ucundan duvara menteşelenmiştir. Çubuk yatay konumda serbest bırakılıyor. Düşey konuma geldiğinde açısal hızı ne olur?

Çözüm

Çubuğun kütle merkezi $L/2$ kadar aşağı inerken potansiyel enerjisi, düşey konuma geldiğinde kinetik enerjiye dönüşür:

$$mg\,(L/2) = \tfrac{1}{2}I_0\omega^2$$

Buradaki eylemsizlik momenti, dönme ekseni O ya göredir. Bunun I_{KM} ile ilişkisini daha önce paralel eksenler teoremiyle bulmuştuk:

$$I_o = I_{KM} + m(L/2)^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + mL^2/4 = \tfrac{1}{3}mL^2$$

Bu değer yerine konulup açısal hız bulunur:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{30}{1.2}} = 5\,\text{rad/s}.$$

7.5 YUVARLANMA HAREKETİ

Katı cisimlerin en genel hareketinde öteleme ve dönme birlikte yer alırlar. Bu genel hareket çok karmaşık olabilir. Yine de, her türlü hareket daima iki bileşene ayrılıp incelenebilir:

1. **Kütle merkezinin öteleme hareketi:** Bu hareket Newton yasasıyla belirlenir:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{KM} \qquad \text{(öteleme hareketi için)} \qquad (7.20)$$

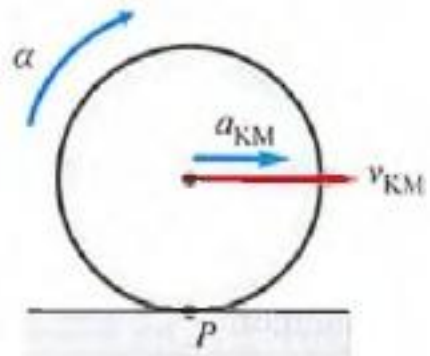
2. **Kütle merkezi etrafında dönme hareketi:** Bu da dönme dinamiği yasasıyla belirlenir:

$$\sum_i \tau_{i,KM} = I_{KM}\,\alpha \qquad \text{(dönme hareketi için)} \qquad (7.21)$$

Buradaki momentler kütle merkezine göre alınmalıdır.

En genel harekette çizgisel ivme a_{KM} ile açısal ivme α arasında bir ilişki yoktur, herbiri ayrı değerler alabilir. Fakat, bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanan cisimde, bu iki ivme birbirine bağlıdır.

Yatay bir düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanan bir silindiri gözönüne alalım. Bu silindirin her noktasının hızı farklıdır, ama öyle bir noktası vardır ki bir an için hareketsiz, yani hızı sıfır olur. Bu nokta, cismin yüzeye değdiği P noktasıdır (Şekil 7.13). Gerçekten de, eğer cisim kaymıyorsa, yüzey ve cismin temas ettiği ortak iki nokta eşit hızda olmak zorundadırlar. Bu da, cisim üzerindeki noktanın hızı sıfır anlamına gelir.



Şekil 7.13: Yuvarlanma.

Bu, bir an için böyledir. Cismin bu değen noktası hemen sonra yüzeyden ayrılacak ve hız kazanacaktır. Fakat, onun yerini başka bir nokta alır ve onun da yüzeye değdiği anda hızı bir an için sıfır olur. Yüzeye değen bu nokta cismin **ani dönme ekseni** olur. O halde, bu eksenden R uzaklıktaki kütle merkezinin çizgisel ivmesini açısal ivme cinsinden yazabiliriz:

$$a_{KM} = R\,\alpha \qquad \text{(yuvarlanma koşulu)} \qquad (7.22)$$

Yukardaki öteleme ve dönme denklemlerine bu koşul eklendiğinde, yuvarlanma hareketi kolayca hesaplanabilir.

Önemli nokta: Yuvarlanan cismin yüzeye değdiği noktada f sürtünme kuvveti de vardır. Fakat, cisim kaymadığı için $f = \mu N$ bağıntısı kullanılamaz.

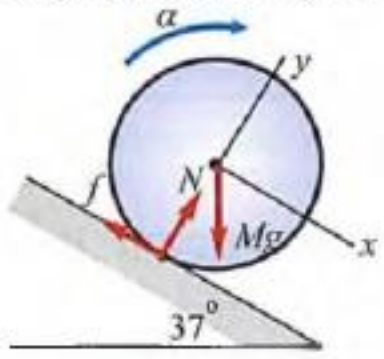
Yuvarlanma hareketinde, dönme ve öteleme birlikte yeraldığı için, kinetik enerji her iki tür enerjinin toplamı olur:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_{KM}^2 + \tfrac{1}{2}I_{KM}\,\omega^2 \qquad \text{(yuvarlanma kinetik enerjisi)} \qquad (7.23)$$

Bu kinetik enerji ifadesi, yuvarlanma hareketi içeren enerji korunumu problemlerinde kullanılır. (*Not:* Yuvarlanmada sürtünme kuvveti olduğu halde, enerji korunumu yazılabilmesi şaşırtıcı gelebilir. Fakat, cismin yüzeye değen noktası hareketsiz olduğu için, sürtünme kuvveti iş yapmaz.)

Örnek 7.15

37° eğimli bir düzlemde serbest bırakılan $R = 50\,\text{cm}$ yarıçaplı ve $M = 4\,\text{kg}$ kütleli silindirin açısal ivmesini bulun.



Çözüm

Silindire etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Sürtünme kuvveti f nin yönünü tayin etmek için şöyle düşünün: Buzlu bir eğik düzlem olsaydı, silindir dönmeden aşağı kayacaktı. O halde, sürtünme yukarı yönde olur.

Yuvarlanma hareketi için bulduğumuz (7.20 ve 7.21) formüllerini, gösterilen eksenler için yazalım ($a_{\text{Km}} = a$ diyelim):

x-yönünde: $Mg\sin\theta - f = Ma$

y-yönünde: $N - Mg\cos\theta = 0$

(y-denklemine ihtiyaç olmayacaktır, çünkü cisim kaymadığı için $f = \mu N$ bağıntısı geçerli değildir.)

KM etrafında dönmeyi sağlayan kuvvet f sürtünme kuvvetidir, diğerlerinin momenti sıfır olur:

$$fR = I\alpha$$

Ayrıca, silindir kaymadığı için, çizgisel ve açısal ivme arasındaki ilişki yazılır:

$$a = R\alpha$$

Bu denklemler arasında f elenir:

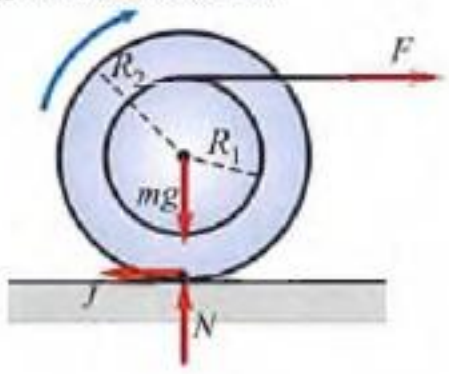
$$\alpha = \frac{MgR\sin 37^\circ}{I + MR^2}$$

Silindirin eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ ve diğer sayısal değerler yerine konursa açısal ivme bulunur:

$$\alpha = \frac{MgR\sin 37^\circ}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2g\sin 37^\circ}{3R} = \frac{20\times 0.6}{3\times 0.5} = 8\,\text{rad/s}^2.$$

Örnek 7.16

Yatay bir düzleme paralel $F = 12\,\text{N}$ kuvvetiyle, merkezden $R_1 = 30\,\text{cm}$ uzaklıkta sarılmış bir iple çekilen $R_2 = 40\,\text{cm}$ yarıçaplı ve $M = 1\,\text{kg}$ kütleli silindirin açısal ivmesini ve kütle merkezinin ivmesini bulun.



Çözüm

Silindire etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Yine, (7.20 ve 7.21) formüllerini uygularız:

x-yönünde öteleme: $F - f = Ma$

KM etrafında dönme: $FR_1 + fR_2 = I\alpha$

İvmeler arasındaki ilişki: $a = R_2\alpha$

Bu denklemler arasında, f kuvveti elenirse, α ivmesi bulunur:

$$\alpha = \frac{F(R_1 + R_2)}{I + MR_2^2}$$

Silindirin eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ ve diğer sayısal değerler yerine konursa açısal ivme bulunur:

$$\alpha = \frac{F(R_1 + R_2)}{\frac{3}{2}MR_2^2} = \frac{12\times(0.3 + 0.4)}{\frac{3}{2}\times 0.4^2} = 35\,\text{rad/s}^2$$

Buradan, ani dönme merkezinden R_2 uzaklıktaki kütle merkezinin çizgisel ivmesi bulunur:

$$a = R_2\alpha = 0.4\times 35 = 14\,\text{m/s}^2.$$

Örnek 7.17

Eğik bir düzlemde yerden h yükseklikte bırakılan R yarıçaplı ve M kütleli dolu bir küre, yere doğru yuvarlanarak iniyor. Yere vardığında kütle merkezinin hızı ne kadar olur? (Küre için: $I_{\text{KM}} = \frac{2}{5}MR^2$)

Çözüm

Enerji korunumuna göre, kürenin başlangıçta h yükseklikteki potansiyel enerjisi, aşağıda öteleme ve dönme kinetik enerjisine dönüşür:

$$Mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Çizgisel hız ile açısal hız arasındaki $v = R\omega$ ilişkisi ve $I = \frac{2}{5}MR^2$ ifadesi bu denklemde kullanılırsa,

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{1.4gh}$$

bulunur. Noktasal cismin h kadar indiğinde hızı $v = \sqrt{2gh}$ olduğu gözönüne alınırsa, $\sqrt{2}$ yerine $\sqrt{1.4}$ çarpanından dolayı, kürenin daha yavaş indiği gözlenecektir, çünkü enerjinin bir kısmı dönmeye harcanmaktadır.

7.6 AÇISAL MOMENTUM ve KORUNUMU

Öteleme hareketinde momentum, kütle ile hızın çarpımı olarak $\vec{p} = m\vec{v}$ şeklinde tanımlanmıştı. Benzer şekilde, dönme hareketinde de bir açısal momentum tanımlanır. Kütle yerine eylemsizlik momenti I ve hız yerine açısal hız ω alınarak,

$$L = I\,\omega \qquad \text{(açısal momentum)} \tag{7.24}$$

ifadesiyle, katı bir cismin **açısal momentumu** tanımlanır. Birimi $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$ olup, özel bir adı yoktur.

Çizgisel harekette Newton yasasını nasıl momentumu cinsinden yazdığımızı hatırlayın:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Benzer şekilde, dönme hareketi denklemi de şöyle yazılabilir:

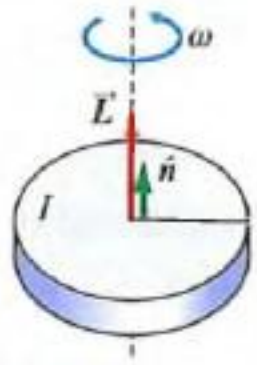
$$\tau = I\,\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \tag{7.25}$$

En basit durumda, v hızıyla giden noktasal cismin r uzaklıktaki dönme eksenine göre açısal momentumu şöyle olur:

$$L = I\omega = (mr^2)\,\omega = mr\,(r\omega)$$

$$L = = mvr \qquad \text{(noktasal cismin açısal momentumu)} \tag{7.26}$$



Şekil 7.14: $\vec{L}$ açısal momentum vektörü, dönme düzlemine dik doğrultudadır.

Gerçekte, açısal momentum vektörel bir niceliktir. En genel tanımı, $\vec{p}$ çizgisel momentum vektörünün torku olarak yapılır:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

Yönü, cismin dönme düzlemine diktir. Burada açısal momentumun vektörel özelliğini kullanmayacağız, sadece bilgi olarak veriyoruz.

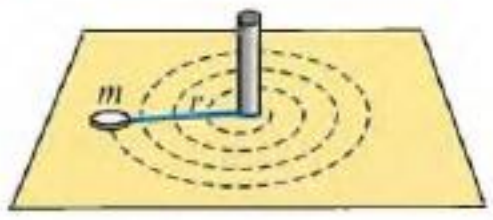
Eğer, katı bir cisme etkiyen dış kuvvetlerin momenti sıfır oluyorsa, 7.25 denklemine göre, açısal momentum sabit kalır. Bu ifade **açısal momentum korunumu** yasasıdır:

$$\tau = 0, \quad \Longrightarrow \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

$$L_1 = L_2 = \text{sabit} \qquad \text{(açısal momentum korunumu)} \tag{7.27}$$

Bir cisim dönerken, dış kuvvetlerin momenti sıfır olsa dahi, iç kuvvetlerin etkisiyle eylemsizlik momenti I değişime uğrayabilir. Örneğin, dönen bir platform üzerindeki adam kollarını iki yana açarak eylemsizlik momentini büyütebilir. Son durumda yine katı cisim olarak ele alınabildiği için, açısal momentumu korumak üzere açısal hızı azalacaktır.

Örnek 7.18



Sürtünmesiz bir masa üzerinde eksene bağlı $r = 50\,\text{cm}$ uzunluğunda bir ipin ucunda m kütlesi $\omega = 3\,\text{rad/s}$ açısal hızıyla dönmektedir. İp giderek eksene dolandığında, ipin uzunluğu 25 cm olduğu anda, cismin açısal hızı ne kadar olur?

Çözüm

Açısal momentumun korunumu noktasal cisim için yazılır:

$$mvr = mv'r'$$

Çizgisel hızlar $v = r\omega$ formülüyle açısal hız cinsinden yazılır:

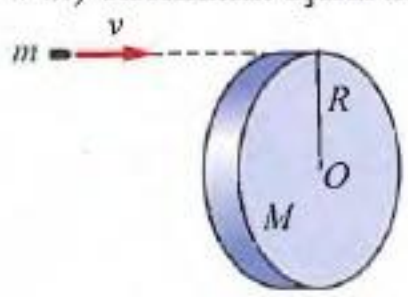
$$r^2\omega = r'^2\omega' \quad \rightarrow \quad \omega' = \frac{r^2}{r'^2}\omega$$

$r' = r/2$ değeri yerine konursa, son açısal hız bulunur:

$$\omega' = 4\omega = 4 \times 3 = 12\,\text{rad/s}.$$

Örnek 7.19

Kütlesi $m = 50\,\text{g}$ olan bir mermi $v = 200\,\text{m/s}$ hızıyla gelip, O ekseni etrafında serbestçe dönebilen durgun diske $R = 60\,\text{cm}$ uzaklığında saplanıyor. Diskin kütlesi $M = 900\,\text{g}$ ve eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ olduğunu göre, çarpışmadan sonra, $(M + m)$ sisteminin açısal hızını bulun.



Çözüm

Çarpışma sırasında oluşan kuvvetler (mermi+disk) sisteminin iç kuvvetleri olur, ve net tork sıfırdır. Açısal momentumun korunumu yazılır:

$$L_{\text{mermi}} + L_{\text{disk}} = L'_{\text{mermi+disk}}$$

Başlangıçta sadece noktasal m kütlesinin mvr açısal momentumu vardır. Çarpışma sonrası, bu kütle R uzaklığında diskle beraber ω açısal hızıyla dönecektir. O halde,

$$mvr + 0 = (I_{\text{disk}} + I_{\text{mermi}})\,\omega$$

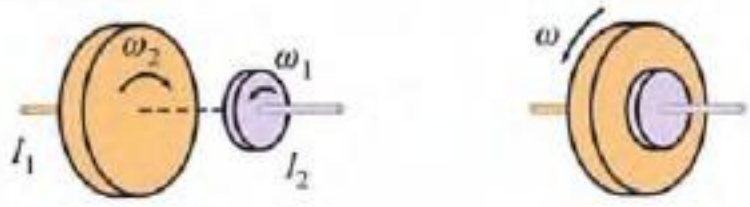
Diskin $I = \frac{1}{2}MR^2$ ve merminin $I = mR^2$ eylemsizlik momentleri yerine konursa, açısal hız bulunur:

$$\omega = \frac{mvr}{(M/2 + m)R^2}$$

Sayısal değerler yerine konarak açısal hız bulunur:

$$\omega = \frac{mvr}{(M/2 + m)R^2} = \frac{0.05 \times 200 \times 0.6}{(0.9/2 + 0.05) \times 0.6^2} = 33\,\text{rad/s}$$

Örnek 7.20



Bir otomobilin şanzımanında, motora bağlı dönen bir diskle, aktarma miline bağlı olarak dönen diğer bir disk birbirine kenetlenirler. Motora bağlı diskin eylemsizlik momenti $I_1 = 2\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$ olup $\omega_1 = 2000\,\text{dev/dk}$ açısal hızıyla dönmektedir. Şanzıman çıkış milindeki ikinci diskin eylemsizlik momenti $I_2 = 5\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$ olup, ters yönde $\omega_2 = 100\,\text{dev/dk}$ açısal hızıyla dönmektedir. Diskler birbirine kenetlendiğinde, son açısal hız ne kadar olur?

Çözüm

Açısal momentum korunumu yazılır:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\,\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

Pozitif dönüş ω_1 yönünde alınırsa, $\omega_2 = -100\,\text{dev/dk}$ alınmalıdır. Buradan son açısal hız bulunur (I oranları alındığı için birim değiştirmeye gerek yoktur):

$$\omega = \frac{2 \times 2000 + 5 \times (-100)}{2 + 5} = 500\,\text{dev/dk}.$$

Test

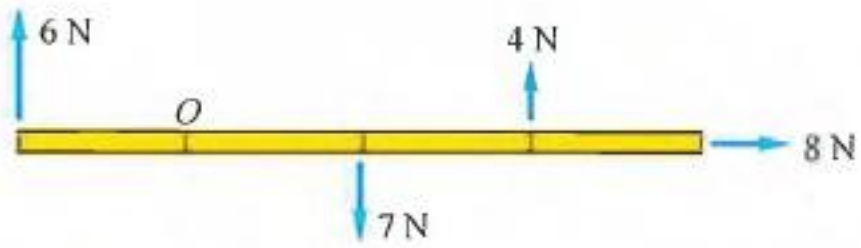
1. Aşağıdaki bağıntılardan hangisi yanlıştır?
   (a) $v = r\omega$ (b) $a_t = r\alpha$ (c) $a_r = r\omega^2$ (d) $L = I\omega^2$

2. Bir diskin kütlesi 2 kat, yarıçapı 3 kat artırılıyor. Eylemsizlik momenti kaç kat artar?
   (a) 5 (b) 6 (c) 12 (d) 18

3. Bir kuvvetin momenti (torku) tanımı için, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Kuvvet×moment kolu
   (b) Uzaklık×kuvvetin dik bileşeni
   (c) Kuvvet×uzaklık

4. Bir cisme teğetsel olarak uygulanan üç kuvvetten, F kuvveti dönme eksenine R uzaklığında, $2F$ kuvveti $3R$ uzaklığında, $3F$ kuvveti $2R$ uzaklığında etkiyorlar. Hangisinin momenti (torku) daha küçüktür?
   (a) F (b) $2F$ (c) $3F$ (d) Hiçbiri

5. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Bir cisme uygulanan net kuvvet sıfır ise, cisim dönmez.
   (b) Bir cisme uygulanan net tork sıfır ise, cisim dönmez.
   (c) Bir cisme uygulanan net tork sıfır ise, cisim dönmez veya sabit açısal hızla döner.
   (d) Hiçbiri.



6. Şekilde eşit dört parçası işaretlenmiş olan çubuk O ekseni etrafında dönebilmektedir. Gösterilen kuvvetlerden hangisinin momenti daha büyük olur?
   (a) 4 N (b) 6 N (c) 7 N (d) 8 N

7. Bir cismin eylemsizlik momenti hakkında aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Kütle arttıkça artar.
   (b) Eksenden uzaklık arttıkça artar.
   (c) Eksenden uzaklığın karesiyle orantılıdır.
   (d) Hız arttıkça artar.

8. Dönen bir cismin açısal ivmesi sıfır ise, aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?
   I. Net moment (tork) sıfırdır.
   II. Açısal hız sıfırdır.
   III. Merkezcil ivme sıfırdır.
   IV. Teğetsel ivme sıfırdır.
   (a) I (b) I ve II (c) II ve III (d) IV

9. m kütlesi R yarıçaplı çemberde dönüyor. $2m$ kütlesi $R/2$ yarıçaplı çemberde dönüyor. Hangisinin eylemsizlik momenti daha büyüktür?
   (a) m (b) $2m$ (c) Eşit

10. Kütleleri ve yarıçapları eşit olan bir halka ve bir diske aynı teğetsel F kuvveti uygulanıyor. Hangisi daha çabuk hızlanır?
    (a) Halka (b) Disk (c) Eşit

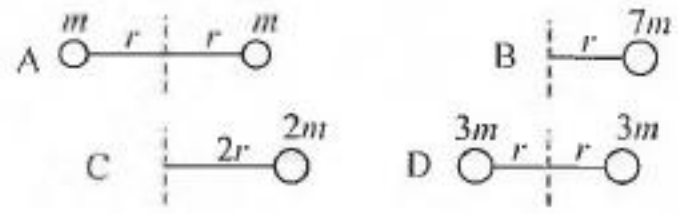
11. Dönen bir cismin açısal hızı 2 kat, eylemsizlik momenti 3 kat artırılıyor. Kinetik enerjisi kaç kat artar?
    (a) 5 (b) 6 (c) 12 (d) 18

12. Dönen bir cismin açısal hızı 2 kat, eylemsizlik momenti 3 kat artırılıyor. Açısal momentumu kaç kat artar?
    (a) 5 (b) 6 (c) 12 (d) 18

13. "Küresel ısınma" sonucunda, kutuplardaki buz dağları erirse, Dünya'nm dönme hızı ne olur?
    (a) Artar
    (b) Azalır
    (c) Aynı kalır
    (d) Hiçbiri

14. Sabit açısal hızla dönmekte olan bir tekerleğin merkezinden 1 cm uzaklıktaki A noktası ile, 2 cm uzaklıktaki B noktası için hangisi doğrudur?
    (a) Merkezcil ivmeleri aynıdır.
    (b) Çizgisel hızları aynıdır.
    (c) Teğetsel ivmeleri aynıdır.
    (d) Açısal hızları aynıdır.

15. 3 kg lık bir cismin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = 5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ dir. Kütle merkezinden 2 m uzaktaki paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti kaç $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olur?
    (a) 10 (b) 15 (c) 17 (d) 20



16. Şekildeki cisimlerin hangisinin eylemsizlik momenti daha büyüktür?
    (a) A (b) B (c) C (d) D

17. Yuvarlanan bir cisim için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Cismin her noktasının çizgisel hızı farklıdır.
    (b) Cismin yere değen noktasının hızı sıfırdır.
    (c) Cisim üzerinde sürtünme kuvveti yoktur.

18. Dolu bir silindirin eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}MR^2$, boş silindirinki ise MR^2 dir. Kütleleri ve yarıçapları eşit olan boş ve dolu iki silindir, eğik bir düzlemde aynı yükseklikten bırakılıyorlar. Hangisi yuvarlanarak aşağıya daha çabuk varır?
    (a) Dolu silindir.
    (b) Boş silindir.
    (c) Aynı zamanda varırlar.

19. Bir cisme uygulanan net tork sıfır ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Cismin kinetik enerjisi sabit kalır.
    (b) Cismin açısal ivmesi sabit kalır.
    (c) Cismin açısal momentumu düzgün artar.
    (d) Cismin açısal momentumu sabit kalır.

20. Yuvarlanan bir cisim için hangisi doğrudur?
    (a) Dönme ekseni kütle merkezidir.
    (b) Dönme ekseni yere değen noktadır.
    (c) Cismin öteleme kinetik enerjisi sıfırdır.
    (d) Cismin dönme kinetik enerjisi sıfırdır.

Problemler

7.1 Açısal Kinematik

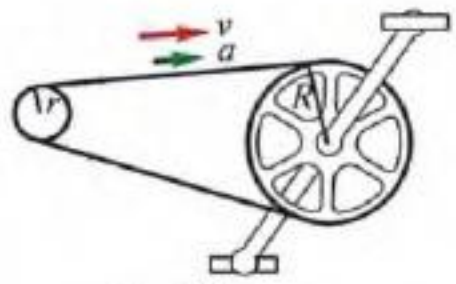
7.1 Bir tekerlek durduğu yerden dönmeye başlıyor ve 3 s içinde 54 dev/dk açısal hıza erişiyor. Tekerleğin açısal ivmesini ve bu sürede kaç devir yaptığını hesaplayın.
[C: 0.6π rad/s^2 ve 1.4 devir.]

7.2 90 dev/dk açısal hızıyla dönmekte olan bir motor, elektrikler kesilince 6 devir yaptıktan sonra duruyor. Açısal ivmesini ve kaç saniyede durduğunu hesaplayın.
[C: -0.38 rad/s^2 ve 8 s.]

7.3 Başlangıçta belli bir açısal hızla dönmekte olan bir makara, aniden ivmeleniyor ve 2 saniye içinde 3 devir yaptıktan sonra, 120 dev/dk açısal hıza ulaşıyor. Makaranın açısal ivmesini ve ilk hızını bulun. [C: 0.5π rad/s^2 ve 3π *rad/s*.]

7.4 30 cm yarıçaplı bir tekerlek 20 rad/s^2 açısal ivmesiyle hızlanıp 45 dev/dk açısal hızına ulaşıyor. Tekerlek çevresindeki bir noktanın çizgisel hızı, teğetsel ve merkezcil ivmesi ne kadar olur?
[C: $v = 0.45\pi$ m/s, $a_t = 6$ m/s^2, $a_r = 6.8$ m/s^2.]

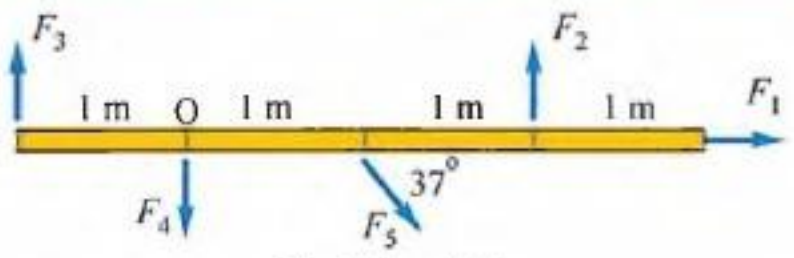
7.5 80 cm yarıçaplı dönen bir makara, çevresindeki bir noktanın çizgisel hızı 24 m/s iken, yavaşlıyor ve 5 saniye sonra duruyor. (a) Açısal ivmesi ve duruncaya kadar devir sayısı, (b) Başlangıçtaki teğetsel ve çizgisel ivmesi ne kadardır?
[C: (a) $\alpha = -6$ rad/s^2, 6 devir, (b) $a_t = -4.8$ m/s^2, $a_r = 720$ m/s^2.]



Problem 7.6

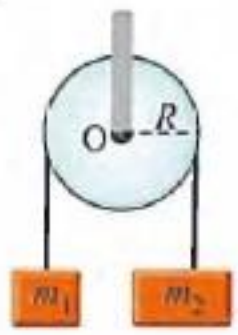
7.6 Bir bisiklet zincirinde pedala bağlı büyük diskin yarıçapı 10 cm, arka tekerleğe bağlı küçük diskin yarıçapı 5 cm dir. Bisikletçi durduğu yerden harekete başlıyor ve pedalın açısal hızını 2 saniye içinde $\omega_0 = 30$ dev/dk ya çıkarıyor. (a) Pedalın açısal ivmesi ne kadardır? (b) Bu süre sonunda arka tekerleğin açısal hızı ve açısal ivmesi ne kadar olur? (c) Son durumda her iki diskin merkezcil ivmeleri ne kadardır?
[C: (a) $\alpha_1 = 1.57$ rad/s^2, (b) $\omega_2 = 3.14$ rad/s, $\alpha_2 = 6.28$ rad/s^2, (c) $a_{1r} = 0.99$ m/s^2, $a_{2r} = 1.97$ m/s^2.]

7.2-3 Bir Kuvvetin Momenti-Dönme Dinamiği



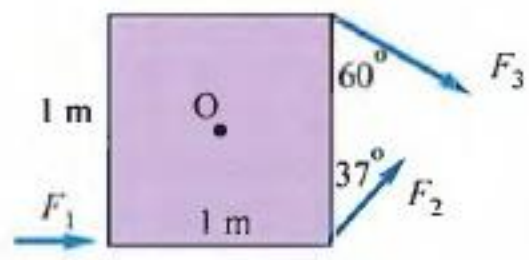
Problem 7.7

7.7 Şekilde gösterilen kuvvetlerin hepsinin şiddeti aynı 10 N değerindedir. Çubuğun O merkezi etrafında eylemsizlik momenti $I_O = 5$ kg · m^2 olduğuna göre, çubuğun dönme yönünü ve açısal ivmesini hesaplayın.
[C: Saat ibrelerine ters yönde 0.8 rad/s^2.]



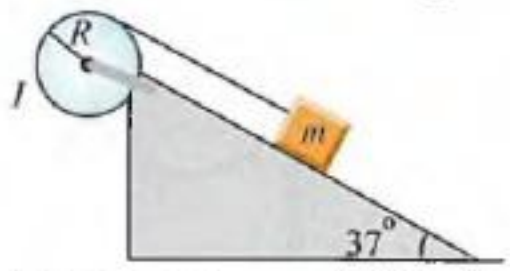
Problem 7.8

7.8 Şekildeki makaranın yarıçapı $R = 10$ cm ve eylemsizlik momenti $I = 0.1$ kg · m^2 dir. Makaranın çevresine sarılı bir ipin uçlarına $m_1 = 1$ kg ve $m_2 = 2$ kg kütleleri asılmıştır. Sistem serbest bırakıldığında, ivmeleri ve iplerdeki gerilme kuvvetlerini hesaplayın.
[C: $\alpha = 7.7$ rad/s^2, $a = 0.77$ m/s^2, $T_1 = 11$ N, $T_2 = 19$ N.]



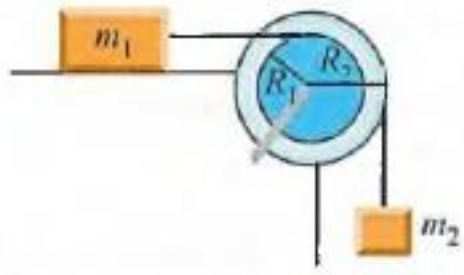
Problem 7.9

7.9 Şekilde bir kenarı 1 m olan kare şeklindeki levhanın O dönme merkezine göre eylemsizlik momenti $I_0 = 7$ kg · m^2 dir. Bu karenin köşelerine $F_1 = 10$ N, $F_2 = 20$ N ve $F_3 = 30$ N kuvvetleri, gösterilen yönlerde uygulanmaktadır. Levhanın açısal ivmesi ne kadar olur? [C: 5 rad/s^2.]



Problem 7.10

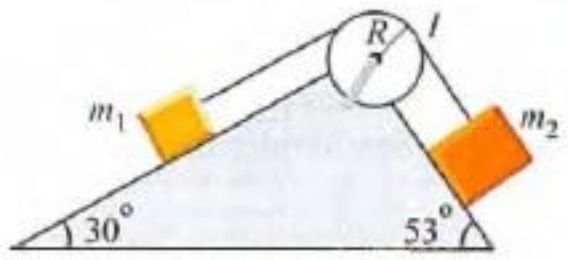
7.10 Şekildeki eğik düzlemin üst ucuna tesbit edilmiş olan makaranın yarıçapı $R = 20$ cm ve eylemsizlik momenti $I = 0.4$ kg · m^2 dir. Düzlemin eğimi 37° ve sürtünme katsayısı $\mu = 0.2$ dir. $m = 1$ kg kütleli blok makaraya sarılı ipin ucuna asılıp eğik düzlemde serbest bırakılıyor. İvmeleri ve ipteki gerilmeyi bulun. [C: 2 rad/s^2, 0.4 m/s^2, 4 N.]



Problem 7.11

7.11 Şekilde gösterilen makaranın eylemsizlik momenti $I = 0.45$ kg · m^2 dir. Makaranın $R_1 = 10$ cm olan yarıçapına sarılı ipin diğer ucu, sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ olan yatay düzlemde $m_1 = 1$ kg kütleli bloğa bağlanmıştır. Diğer $R_2 = 20$ cm yarıçapına sarılı ipin ucuna ise $m_2 = 2$ kg kütlesi asılmıştır. Sistem serbest bırakıldığında, ivmeleri ve iplerdeki gerilmeleri hesaplayın.

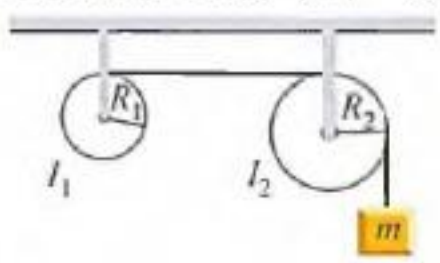
[C: $\alpha = 7.2\,\text{rad/s}^2$, $a_1 = 0.7$, $a_2 = 1.4\,\text{m/s}^2$, $T_1 = 4.7$, $T_2 = 17\,\text{N}$.]



Problem 7.12

7.12 Eğimleri 30° ve 53° olan sürtünmesiz iki eğik düzlemden, birincisine $m_1 = 1\,\text{kg}$ ve ikincisine $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütleleri konulmuştur. Bu iki kütle, yarıçapı $R = 50\,\text{cm}$ ve eylemsizlik momenti $I = 2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan bir makaradan geçen ipin iki ucuna bağlanmışlardır. İvmeleri ve ipteki gerilmeleri bulun.

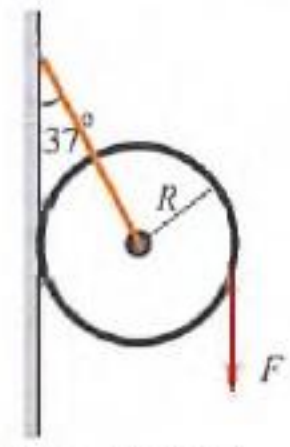
[C: $2\,\text{rad/s}^2$, $1\,\text{m/s}^2$, $T_1 = 6$, $T_2 = 14\,\text{N}$.]



Problem 7.13

7.13 Şekilde gösterilen $I_1 = 0.1\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ve $R_1 = 10\,\text{cm}$ olan makaranın çevresine sarılı ip, $I_2 = 0.2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ve $R_2 = 20\,\text{cm}$ olan diğer bir makaranın çevresinden dolandırılıp, ucuna $m = 5\,\text{kg}$ kütlesi asılmıştır. Sistem serbest bırakıldığında ivmeleri ve ipteki gerilmeleri hesaplayın.

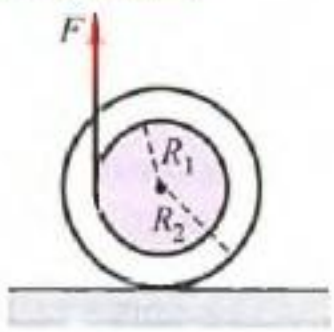
[C: $a = 2.5\,\text{m/s}^2$, $\alpha_1 = 25$, $\alpha_2 = 12.5\,\text{rad/s}^2$, $T_1 = 25$, $T_2 = 37.5\,\text{N}$.]



Problem 7.14

7.14 Silindir şeklinde bir kağıt havlu rulosunun yarıçapı $R = 10\,\text{cm}$ ve eylemsizlik momenti $I = 0.2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ dir. Bu rulo duvarla 37° açı yapan bir iple düşey duvara bağlanmıştır. Duvarın sürtünme katsayısı $\mu = 0.3$ tür. Ruloya teğet ve aşağı yönde $F = 10\,\text{N}$ kuvveti uygulanıyor. Rulonun açısal ivmesini bulun. (*Yol gösterme:* Genel hareketin (7.20–7.21) denklemlerini kullanın.) [C: $\alpha = 3.5\,\text{rad/s}^2$.]

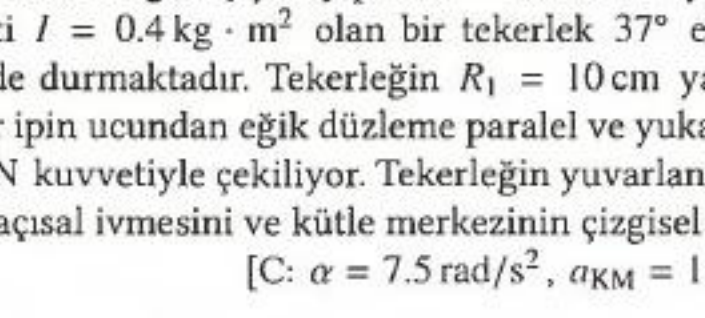
7.5 Yuvarlanma Hareketi



Problem 7.15

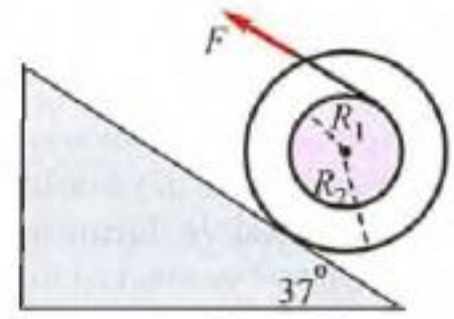
7.15 Kütlesi 1 kg, dış yarıçapı $R_2 = 20\,\text{cm}$ ve eylemsizlik momenti $I = 0.2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan bir tekerlek yatay bir düzlemde durmaktadır. Tekerleğin $R_1 = 10\,\text{cm}$ yarıçapına sarılı bir ipin ucundan dikey yönde $F = 8\,\text{N}$ kuvvetiyle çekiliyor. Tekerleğin yuvarlanma hareketinin açısal ivmesini ve kütle merkezinin çizgisel ivmesini bulun.

[C: $\alpha = 3.3\,\text{rad/s}^2$, $a_{KM} = 0.67\,\text{m/s}^2$.]



Problem 7.16

7.16 Kütlesi m ve yarıçapı R olan bir küre, yatay düzlemde $v = 7\,\text{m/s}$ hızıyla giderken, $h = 2.8\,\text{m}$ yükseklikteki bir düzlüğe yuvarlanarak çıkıyor. Kürenin eylemsizlik momenti $I = \frac{2}{5}MR^2$ olduğuna göre, son hızını bulun. (*Not:* Enerji korunumu denklemi kurulduğunda kütle ve yarıçap sadeleşecektir.) [C: 3 m/s.]

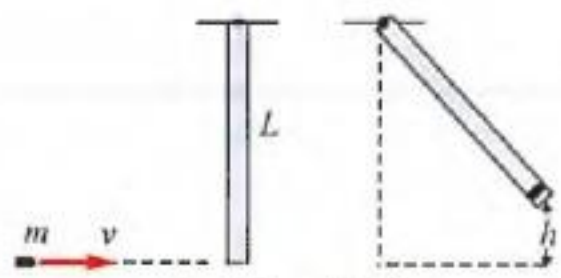


Problem 7.17

7.17 Kütlesi 1 kg, dış yarıçapı $R_2 = 20\,\text{cm}$ ve eylemsizlik momenti $I = 0.4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan bir tekerlek 37° eğimli bir düzlemde durmaktadır. Tekerleğin $R_1 = 10\,\text{cm}$ yarıçapına sarılı bir ipin ucundan eğik düzleme paralel ve yukarı yönde $F = 15\,\text{N}$ kuvvetiyle çekiliyor. Tekerleğin yuvarlanma hareketinin açısal ivmesini ve kütle merkezinin çizgisel ivmesini bulun. [C: $\alpha = 7.5\,\text{rad/s}^2$, $a_{KM} = 1.5\,\text{m/s}^2$.]

7.6 Açısal Momentum ve Korunumu

7.18 Eylemsizlik momenti $I_1 = 2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan ve $\omega_1 = 8\,\text{rad/s}$ açısal hızıyla dönen bir disk, aynı eksen üzerinde zıt yönde $\omega_2 = 6\,\text{rad/s}$ hızıyla dönen ve eylemsizlik momenti $I_2 = 3\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ olan diğer bir diskle kenetleniyor. İki diskin ortak açısal hızı ne olur? [C: $-0.4\,\text{rad/s}$.]



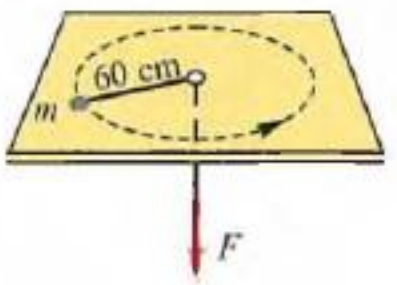
Problem 7.19

7.19 Kütlesi $M = 10\,\text{kg}$ ve uzunluğu $L = 1\,\text{m}$ olan bir çubuk, tavana menteşelendiği ucu etrafında serbestçe dönebilmektedir. Kütlesi $m = 100\,\text{g}$ ve hızı $v = 100\,\text{m/s}$ olan bir mermi çubuğun serbest ucuna saplanıyor. Çubuğun kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = ML^2/12$ dir. (a) Çarpışmadan hemen sonra, (çubuk+mermi) sisteminin açısal hızı ne olur? (b) Mermi ne kadar yükselir? (*Not:* Mermi

h kadar yükseldiğinde, çubuğun kütle merkezi $h/2$ kadar yükselir.) [C: (a) $\omega = 2.9\,\text{rad/s}$, (b) $h = 0.29\,\text{m}$.]

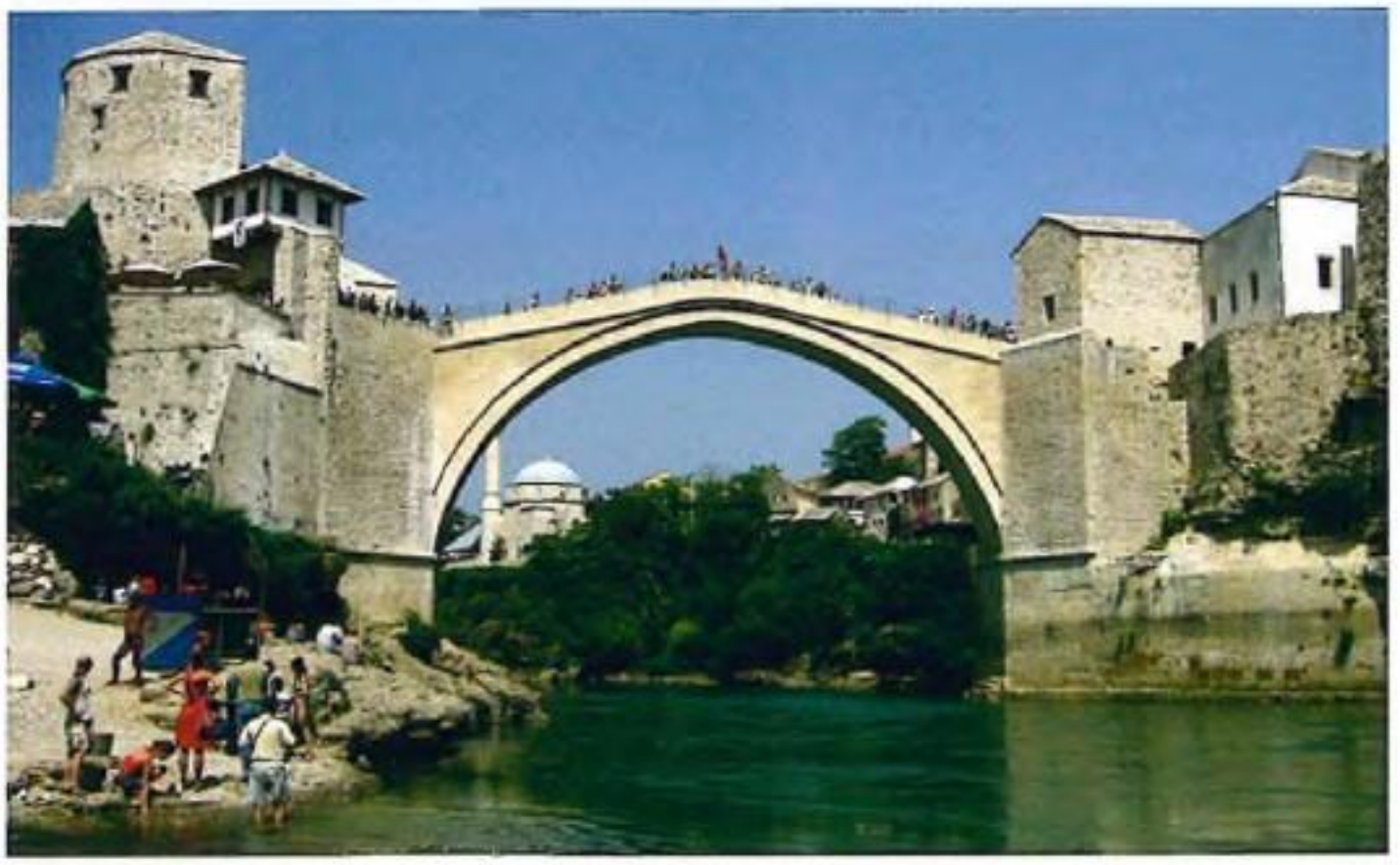
7.20 Sürtünmesiz bir masa üzerindeki $m = 1\,\text{kg}$ lık kütleye bağlanan bir ip, masanın ortasındaki bir delikten geçirildikten sonra diğer ucuna F kuvveti uygulanmıştır. (a) m kütlesinin 60 cm yarıçaplı bir dairesel yörüngede $\omega = 5\,\text{rad/s}$ açısal hızıyla dönebilmesi için F kuvveti ne kadar olmalıdır? (b) İp çekilerek dönme yarıçapı 30 cm ye getirildiğinde açısal hız ne olur?

[C: (a) $F = 15\,\text{N}$, (b) $\omega' = 4\omega = 20\,\text{rad/s}$.]



Problem 7.21

8 STATİK DENGE



Mostar Köprüsü. 1566 yılında Mimar Sinan'ın talebesi Mimar Hayruddin tarafından Bosna-Hersek'te Neretva nehri üzerinde yapılmıştı. Yapıldığı döneme göre teknolojisi çok ileriydi. 1993 yılında iç savaşta Sırplar tarafından yıkıldı. Daha sonra UNESCO öncülüğünde bir Türk şirketi tarafından yeniden inşa edildi.
Bu köprüyü dengede tutmak için bileşke kuvvetin sıfır olması yeter mi? Ayrıca, kuvvetlerin belli bir dağılıma uyması gerekmez mi?

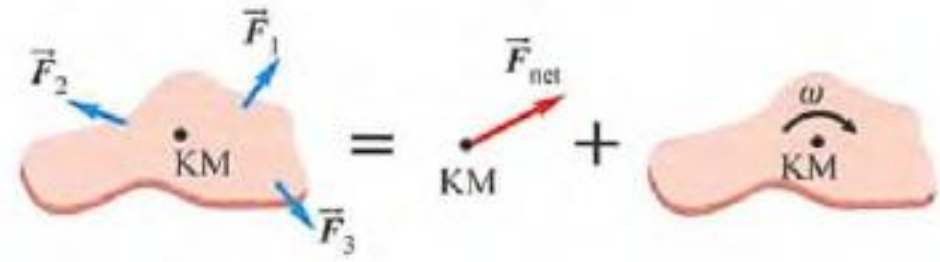
Hareketsiz katı yapılar günlük yaşamımızın bir parçasıdırlar. İçinde yaşadığımız evler, trafikte geçtiğimiz yollar ve köprüler, barajlar ...Tüm bu yapılar aslında üzerlerine etkiyen kuvvetleri dengede tutabildikleri için hareketsiz durumlarını sürdürebiliyorlar, yani **statik denge** durumunda kalıyorlar. Statik denge konusu, inşaat, makina, mimarlık ve diğer pekçok bilim dalında ve sanayide önemli bir uğraş alanıdır.

Bu bölümde katı cisimlerin statik denge koşullarını ele alacağız.

8.1 STATİK DENGENİN İKİ KOŞULU

Bölüm 7 de katı cisimlerin yuvarlanma hareketini incelerken, cismin en genel hareketinin iki bileşene ayrılabileceğini görmüştük. Bunlardan birincisi **kütle merkezinin öteleme hareketi** idi ve Newton yasasıyla belirleniyordu (Denklem 7.20):

$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\mathrm{KM}} \qquad \text{(öteleme hareketi için)} \qquad (8.1)$$



Şekil 8.1: Katı cismin en genel hareketi, biri kütle merkezinin öteleme hareketi, diğeri kütle merkezi etrafında dönme hareketi olarak ikiye ayrılır.

İkinci hareket türü olan **kütle merkezi etrafında dönme hareketi** dönme dinamiği yasasıyla belirleniyordu (Denklem 7.21):

$$\sum_i \tau_{i,\mathrm{KM}} = I_{\mathrm{KM}}\,\alpha \qquad \text{(dönme hareketi için)} \tag{8.2}$$

O halde, katı bir cismin statik dengede olabilmesi için bu iki hareket türünün engellenmiş olması gerekir. Bunlardan birincisinin, yani öteleme hareketinin engellenmiş olması için gerekli koşul doğrudan yazılabilir:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{8.3}$$

Bu vektör eşitlik, kuvvetlerin bulunduğu düzlemde bileşenler için yazılırsa dengenin 1. koşulu olur:

Dengenin 1. Koşulu

Bir cisme etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfır olmalıdır:

$$\sum_i F_{i,x} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \sum_i F_{i,y} = 0 \tag{8.4}$$

Kütle merkezini hareketsiz kıldıktan sonra, cismin dönme hareketine bakalım. Dönmeyi engellemek için,

$$\sum_i \tau_{i,\mathrm{KM}} = 0$$

olmalıdır. Bu moment dönme hareketinde kütle merkezine göre alınıyordu. Fakat statik durumda, momentin hangi eksene göre alındığının bir önemi kalmaz. Çünkü cisim dönmüyorsa, hangi eksen seçilirse seçilsin, dönme gözlenmez ve net moment sıfır olur. (Aksi halde, çelişki olurdu.) O halde, dengenin 2. koşulu şöyle yazılır:

Dengenin 2. Koşulu

Bir cisme etkiyen kuvvetlerin, keyfi bir eksene göre net momenti sıfır olmalıdır:

$$\sum_i \tau_i = 0 \tag{8.5}$$

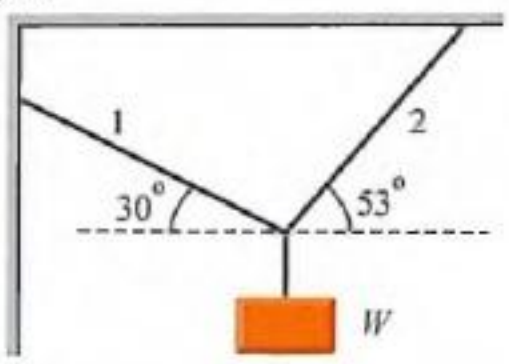
Bu iki koşul, ilke olarak statik denge için yeterlidir. Fakat, gerçek hayatta çok sayıda parçadan oluşan karmaşık cisimlerin (köprüler, binalar ...) statik dengesini hesaplamak için bunlar yeterli olmaz. O takdirde, başka koşullar daha eklenerek problemin tam çözümüne ulaşılır. Bu diğer koşullardan en temel olanları örnekler üzerinde göreceğiz.

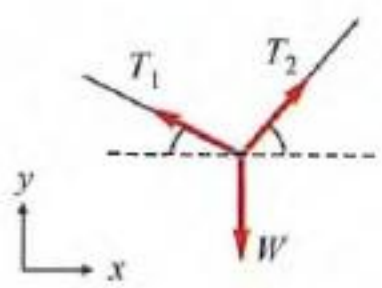
8.2 UYGULAMALAR

Şimdi denge koşullarıyla statik problemlerinin nasıl çözülebildiğini görelim.

Örnek 8.1

$W = 10\,\text{N}$ ağırlığında bir blok, şekilde görülen iki iple asılı olarak dengededir. İplerdeki gerilme kuvvetlerini hesaplayın.





Çözüm

İplerdeki gerilmeler ve W ağırlığı bir noktada birleştiği için, dönme hareketi olmaz ve sadece 1. denge koşulu yeterlidir. Gösterilen eksenlere göre, 1. koşul yazılır:

$$F_{x,\text{net}} = -T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 53^\circ = 0$$

$$F_{y,\text{net}} = +T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 53^\circ - W = 0$$

Sayısal değerler yerine konur:

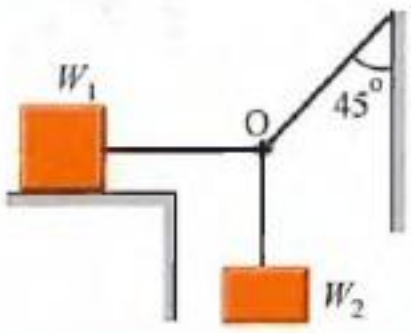
$$-0.87T_1 + 0.6T_2 = 0$$

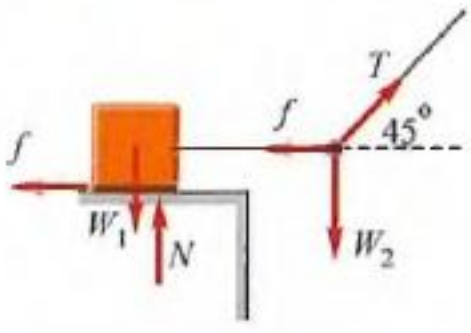
$$0.5T_1 + 0.8T_2 = 10$$

Buradan $T_1 = 6\,\text{N}$ ve $T_2 = 8.7\,\text{N}$ bulunur.

Örnek 8.2

Şekildeki W_2 ağırlığı duvara 45° açıyla bağlı bir ip ve $W_1 = 20\,\text{N}$ ağırlığına yatay bağlanmış diğer bir iple dengede tutulmaktadır. W_1 = ağırlığı sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ olan yatay bir düzlem üzerinde durmaktadır. W_1 ağırlığı kaymadan en fazla bağlanabilecek W_2 ağırlığı ne kadar olur?





Çözüm

O noktasında birleşen 3 kuvvet vardır: W_2 ağırlığı, ipteki T gerilmesi ve yatay f sürtünme kuvveti. Bunlardan sürtünme kuvveti herhangi bir değerde olabilir, fakat W_1 ağırlığı tam kaymaya başladığında N_1 normal kuvvetiyle orantılı olur:

$$f = \mu N_1 = \mu W_1$$

O halde, bu üç kuvvetin O noktasındaki 1. denge koşulu yazılır:

$$F_{x,\text{net}} = -\mu W_1 + T \cos 45^\circ = 0$$

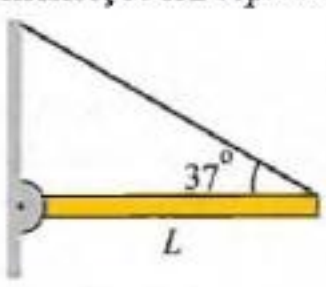
$$F_{y,\text{net}} = +T \sin 45^\circ - W_2 = 0$$

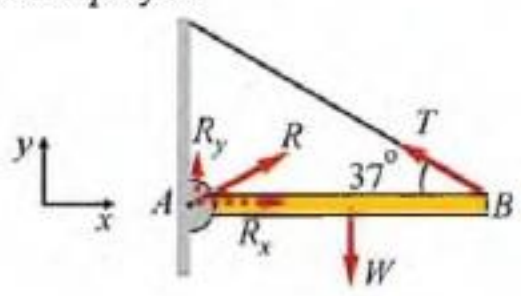
İkinci denklemden T bilinmeyeni çekilip, birincide yerine konularak W_2 bulunur:

$$W_2 = \mu W_1 \tan 45^\circ = 0.4 \times 20 \times 1 = 8\,\text{N}$$

Örnek 8.3

Ağırlığı $W = 10\,\text{N}$ olan bir kalas, bir ucundan duvara menteşelenmiş olup, diğer ucu yatayla 37° açı yapan bir kabloyla duvara bağlanmıştır. Kablodaki gerilme kuvvetini ve menteşedeki tepki kuvvetini hesaplayın.





Çözüm

Kalasa etkiyen 3 kuvvet vardır: W ağırlığı, kablo doğrultusundaki T gerilmesi ve menteşedeki R tepki kuvveti. R tepki kuvveti herhangi bir doğrultuda olabilir.

Önce 1. denge koşulunu, şekilde gösterilen eksenlere göre yazarız:

$$F_{x,\text{net}} = -T \cos 37^\circ + R_x = 0$$

$$F_{y,\text{net}} = +T \sin 37^\circ + R_y - W = 0$$

2. denge koşulunda, keyfi bir eksene göre moment alırız. Fakat ekseni, bilinmeyenlerden biri görünmeyecek şekilde seçersek, hesapta kolaylık sağlar. Burada ekseni menteşe üzerinde (A noktasında) seçmek akıllıca olur, çünkü iki bilinmeyen (R_x, R_y) birlikte sıfır momentli olup denklemde görünmezler:

$$\tau_{\text{net,A}} = 0 \;\rightarrow\; -W.\frac{L}{2} + T \sin 37.L = 0$$

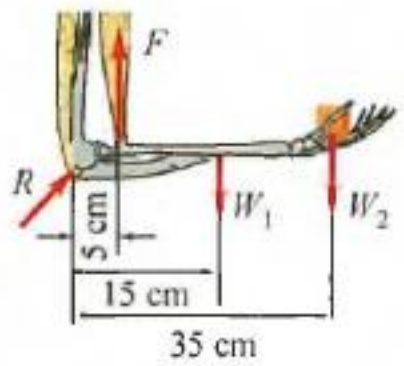
Bu son denklemden hemen T bulunur:

$$T = \frac{W}{2 \sin 37^\circ} = \frac{10}{2 \times 0.6} = 8.3\,\text{N}$$

Bu değer diğer iki denklemde yerine konursa, tepki kuvvetinin R_x, R_y bileşenleri bulunur:

$$R_x = 6.7\,\text{N} \quad \text{ve} \quad R_y = 5\,\text{N}$$

Örnek 8.4



Ortalama bir insan kolunun boyutları şekilde gösterilmiştir. Pazu kası dirsekten 5 cm *uzakta etkimektedir. Kolun alt yarısı* $W_1 = 20\,\text{N}$ *ağırlığında olup, kütle merkezi dirsekten* 15 cm *uzakta bulunmaktadır. Elin dirseğe uzaklığı ise* 35 cm *dir.* $W_2 = 10\,\text{N}$ *ağırlığını kaldırmak için pazu kasının uyguladığı* F *kuvveti ne kadar olur?*

Çözüm

Koldaki kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Dirsekteki R tepki kuvvetine ihtiyaç olmadığından, momenti dirseğe göre alırız:

$$\tau_{\text{net,A}} = 0$$
$$\rightarrow \quad F \times 0.05 - W_1 \times 0.15 - W_2 \times 0.35 = 0$$

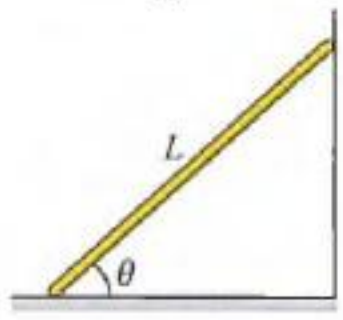
Buradan F kuvveti hesaplanır:

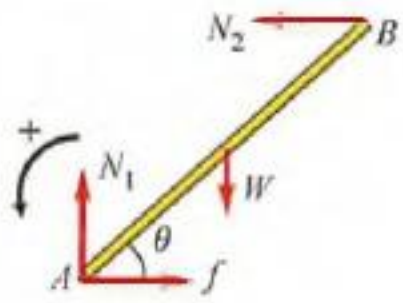
$$F = \frac{0.15W_1 + 0.35W_2}{0.05} = 150\,\text{N}.$$

Pazudaki kuvvetin 15 kat büyük oluşu şaşırtıcı gelebilir, fakat doğrudur. Kolun yatay durumunda yük taşıması zordur, bu yüzden kol kısa sürede yorulur.

Örnek 8.5

Ağırlığı W *ve uzunluğu* L *olan bir merdiven duvara* θ *açısıyla dayanmıştır. Duvar sürtünmesiz, fakat yatay zeminin sürtünme katsayısı* $\mu = 0.5$ *dir. Bu merdivenin kaymadan durabileceği minimum* θ *açısı ne kadardır?*





Çözüm

Merdivene etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Duvar sürtünmesiz olduğu için sadece dik tepki kuvveti N_2 olur. Yerde hem normal tepki kuvveti N_1 ve hem de f sürtünme kuvveti vardır.

Merdiven dengedeyken f sürtünme kuvveti herhangi bir değerde olabilir, ama kayma başladığı anda alabileceği maksimum değer $f = \mu N_1$ olur. O halde, hesapları bu sınır değer için yaparız.

Dengenin 1. koşulu yazılır:

$$F_{x,\text{net}} = \mu N_1 - N_2 = 0$$
$$F_{y,\text{net}} = +N_1 - W = 0$$

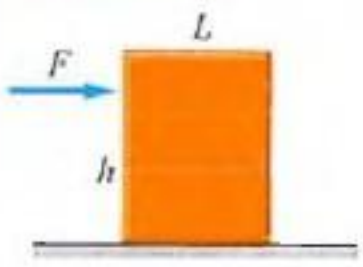
2. koşulda momenti A noktasına göre alırsak denklemde 2 bilinmeyen gözükmez:

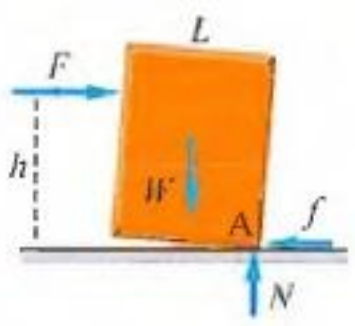
$$\tau_{\text{net,A}} = 0 \quad \rightarrow \quad -W\frac{L}{2}\cos\theta + N_2 L \sin\theta = 0$$

Bu denklemler arasından N_1, N_2 bilinmeyenleri elenip, θ bulunur:

$$\tan\theta = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{0.5} = 4 \quad \rightarrow \quad \theta = 76°$$

Örnek 8.6





Bir sandığı devirmeden itmek istiyoruz. Sandığın ağırlığı $W = 500\,\text{N}$ *ve uzunluğu* $L = 2\,\text{m}$ *olup, sürtünme katsayısı* $\mu = 0.8$ *olan yatay bir düzlemde durmaktadır. (a) Sandığı itebilen minimum yatay* F *kuvveti ne kadardır? (b) Bu* F *kuvvetini, sandığı devirmeden, en fazla hangi* h *yüksekliğinden uygulayabiliriz?*

Çözüm

(a) Sandığı itebilmek için sürtünme kuvvetinden biraz fazla bir kuvvet uygulamak yeterlidir. Sandık kaymaya başladığında $f = \mu N$ değerini alacağından,

$$F = f = \mu N = \mu W$$

olur. O halde, önce gerekli F kuvvetini hesaplarız. Sayısal değerler yerine konur:

$$F = 0.8 \times 500 = 400\,\text{N}$$

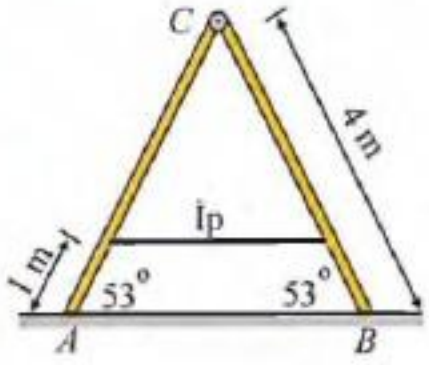
(b) Sandık devrilmek üzereyken sadece A noktası yüzeyle temasta olur. A noktası etrafında F kuvvetinin momenti W ağırlığının momentine eşit veya daha büyükse, sandık devrilir. Sınır durumda hesap yaparsak,

$$\tau_{\text{net,A}} = 0 \quad \rightarrow \quad -F\,h + W\frac{L}{2} = 0$$

(a) şıkkında bulduğumuz F değeri yerine konularak, sınırdaki h yüksekliği bulunur:

$$h = \frac{L}{2\mu} = \frac{2}{2 \times 0.8} = 1.25\,\text{m}$$

Örnek 8.7

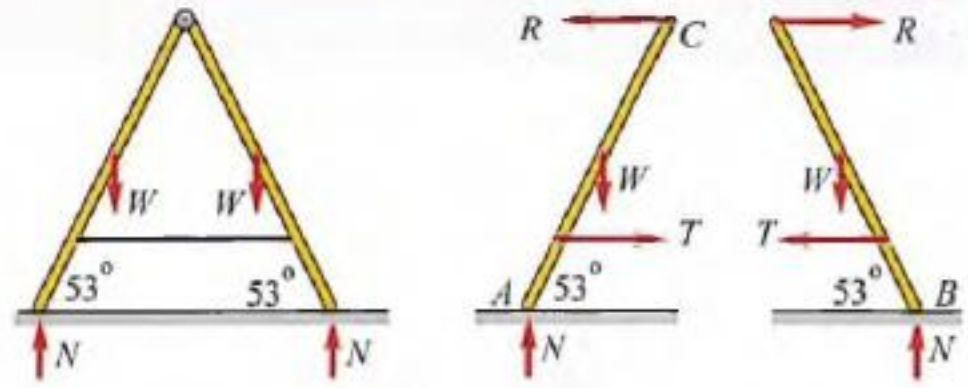


Sürtünmesiz yatay bir düzlemde duran 'A' şeklinde bir merdivenin iki kolu üstten menteşelenmiş ve aşağıda yatay bir iple birbirine bağlanmıştır. Merdiven kollarından herbirinin ağırlığı $W = 30\,\text{N}$ ve uzunluğu $L = 4\,\text{m}$ dir. İpin bağlanma yeri merdiven kolunun alt ucundan 1 m ötededir. İpteki gerilmeyi ve menteşedeki tepki kuvvetini bulun.

Çözüm

Bu problem iki cismin denge probleminde yalıtma tekniğine güzel bir örnektir.

Önce, merdiveni bir bütün olarak ele alalım (soldaki şekil). Menteşedeki ve ipteki kuvvetler, bu sistemin iç kuvvetleri olduğu için görünmezler. Sadece yerdeki tepki kuvvetleri için $N = W$ yazılabilir.



O halde, merdivenin bir kolunu diğerinden yalıtmak gerekir (sağdaki şekil). Etki-tepki yasasına göre, bu kuvvetler herbir kol üzerinde eşit ve zıt yönde yer alırlar. (Simetriye göre R kuvveti de yatay olmak zorundadır, aksi takdirde birinde aşağı diğerinde yukarı yönde olurdu.)

Şimdi, bir kol için denge koşullarını yazabiliriz. AC kolu için

1. denge koşulu:

$$F_{x,\text{net}} = +T - R = 0$$
$$F_{y,\text{net}} = +N - W = 0$$

Buradan $T = R$ ve $N = W$ sonuçları çıkar.

2. koşulu A noktasına göre yazmak avantajlıdır:

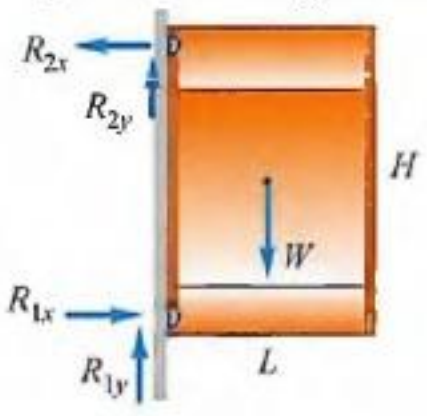
$$\tau_{\text{net,A}} = R(4\sin 53^\circ) - T(1\ \sin 53^\circ) - W(2\ \cos 53^\circ) = 0$$

$R = T$ olduğu bu son denklemde kullanılırsa, sonuç bulunmuş olur:

$$T = R = \frac{2W}{3\ \tan 53^\circ} = \frac{2\times 30}{3\times 1.33} = 15\,\text{N}$$

Örnek 8.8

Eni $L = 1\,\text{m}$, boyu $H = 2\,\text{m}$ ve ağırlığı $50\,\text{N}$ olan bir kapı üst ve alt kenarları hizasından duvara menteşelenmiştir. Alt ve üst menteşedeki tepki kuvvetlerinin yatay bileşenlerini ayrı ayrı, düşey bileşenlerinin ise toplamını hesaplayın.



Çözüm

Bu problem, statik denge problemlerinin her zaman tam çözümü olmadığını, bazen denklem sayısının yeterli olmayabileceğini göstermesi bakımından ilginçtir.

Kapıya etkiyen kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Kuvvetlerin yönleri, üst menteşe kapıyı çekecek, alt menteşe de itecek şekilde seçilmiştir.

1. denge koşulu yazılır:

$$F_{x,\text{net}} = R_{1x} - R_{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{1x} = R_{2x}$$
$$F_{y,\text{net}} = R_{1y} + R_{2y} - W = 0 \quad \rightarrow \quad R_{1y} + R_{2y} = W$$

2. koşulu A noktasına göre moment alarak uygulayalım:

$$\tau_{\text{net,A}} = R_{2x}H - W.\frac{L}{2} = 0$$

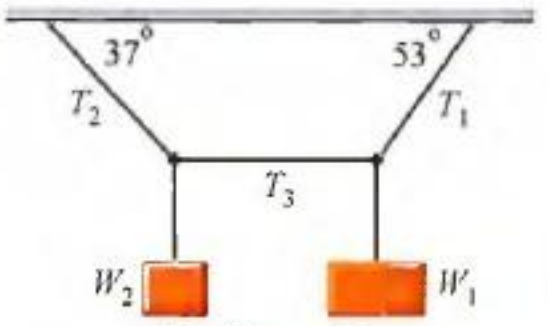
Buradan tepki kuvvetlerinin yatay bileşeni bulunur:

$$R_{1x} = R_{2x} = \frac{L}{2H}W = \frac{1}{4}50 = 12.5\,\text{N}$$

Tepki kuvvetinin düşey bileşenleri için, yukarda bulduğumuz $R_{1y} + R_{2y} = W$ denklemi dışında, elimizde başka bilgi yoktur. Başka bir noktaya göre moment almış bile olsaydık, yine bu iki düşey bileşenin toplamları denklemde görünecekti. O halde, düşey bileşenleri ayrı ayrı hesaplamak mümkün değildir, ancak toplamlarını bilebiliriz:

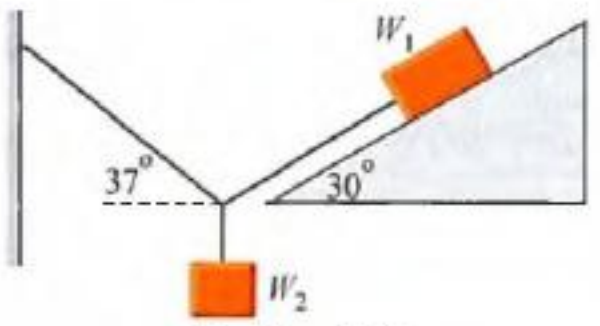
$$R_{1y} + R_{2y} = W = 50\,\text{N}.$$

Problemler



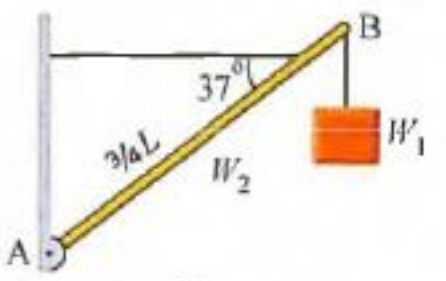
Problem 8.1

8.1 Şekilde iplerle asılı olarak dengede olan ağırlıklardan $W_1 = 10\,\text{N}$ dur. W_2 ağırlığını ve iplerdeki gerilme kuvvetlerini bulun. [C: $W_2 = 13$, $T_1 = 20$, $T_2 = 22$, $T_3 = 17\,\text{N}$.]



Problem 8.2

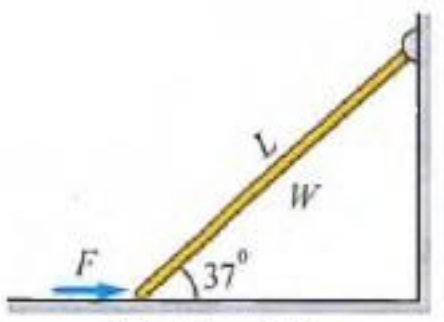
8.2 Şekilde gösterilen $W_1 = 10\,\text{N}$ ağırlığı, eğimi 30° ve sürtünme katsayısı $\mu = 0.9$ olan eğik düzlem üzerine konulmuştur. W_2 kütlesi eğik düzleme paralel bir iple W_1 ağırlığına ve diğer bir iple duvara 37° açıyla bağlanmıştır. W_1 ağırlığı kaymadan, asılabilecek en büyük W_2 ağırlığı ne kadar olur? [C: 2.1 N.]



Problem 8.3

8.3 Şekildeki ağırlığı $W_2 = 20\,\text{N}$ uzunluğu L olan çubuğun bir ucu duvara menteşelenmiş, diğer ucuna $W_1 = 10\,\text{N}$ ağırlık asılmıştır. Çubuk yatayla 37° açı yapacak şekilde, A ucundan $3L/4$ uzaklıktaki bir noktasından, yatay bir iple duvara bağlanmıştır. İpteki gerilmeyi ve menteşedeki tepki kuvvetinin yatay ve düşey bileşenlerini bulun.

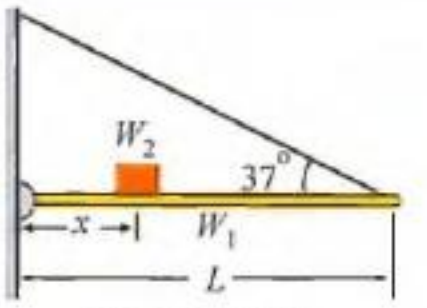
[C: $T = R_x = 36$, $R_y = 30\,\text{N}$.]



Problem 8.4

8.4 Ağırlığı ihmal edilebilen 5 m uzunluğunda bir çubuk, bir ucundan duvara menteşelenmiş, diğer ucu sürtünmesiz yatay düzlem üzerine serbetçe dayanmaktadır. Çubuğun alt ucundan yatay $F = 10\,\text{N}$ kuvveti etkiyor. Menteşede oluşan tepki kuvvetinin yatay ve düşey bileşenlerini hesaplayın.

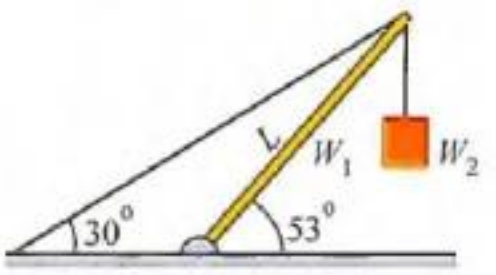
[C: $R_x = 10$, $R_y = 7.5\,\text{N}$.]



Problem 8.5

8.5 Uzunluğu $L = 1\,\text{m}$ ve ağırlığı $W_1 = 10\,\text{N}$ olan yatay bir çubuk, bir ucundan duvara menteşelenmiş, diğer ucundan yatayla 37° açı yapan bir iple duvara bağlanmıştır. Ağırlığı $W_2 = 40\,\text{N}$ olan bir blok bu çubuk üzerinde x uzaklığına konuluyor. İp en fazla 50 N gerilmeye dayanabilmektedir. Bloğun en fazla gidebileceği x uzaklığını ve bu durumda menteşedeki tepki kuvvetinin bileşenlerini bulun.

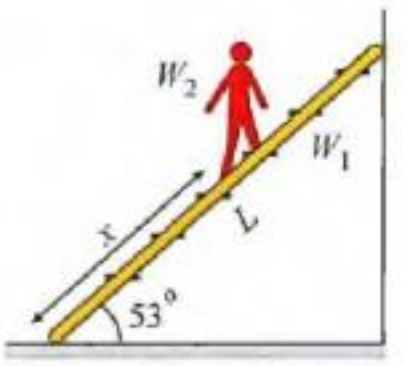
[C: $x = 0.63\,\text{m}$, $R_x = 40$, $R_y = 20\,\text{N}$.]



Problem 8.6

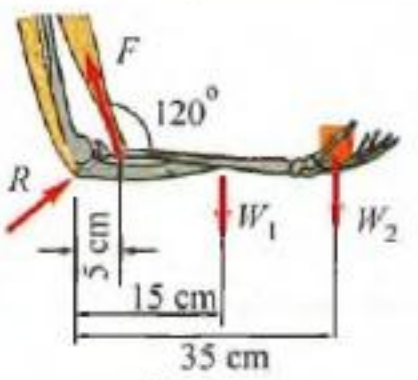
8.6 Şekilde uzunluğu L ve ağırlığı $W_1 = 10\,\text{N}$ olan çubuk yatayla 53° açı yapacak şekilde, bir ucundan yere menteşeli, diğer ucundan yatayla 30° açı yapan bir iple yere bağlıdır. Çubuğun ucuna $W_2 = 20\,\text{N}$ ağırlığı asılıyor. İpteki gerilmeyi ve menteşedeki tepki kuvvetinin bileşenlerini hesaplayın.

[C: $T = 15$, $R_x = 13$, $R_y = 38\,\text{N}$.]



Problem 8.7

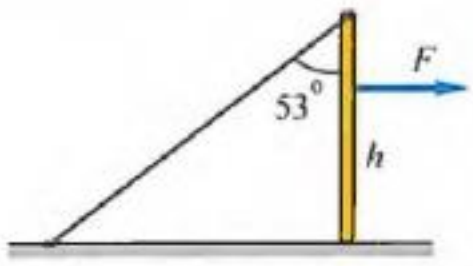
8.7 Ağırlığı $W_1 = 50\,\text{N}$ ve uzunluğu $L = 3\,\text{m}$ olan bir merdiven yatayla 53° açıyla bir duvara dayanmıştır. Yerin sürtünme katsayısı 0.4 ve duvar sürtünmesizdir. Ağırlığı $W_2 = 700\,\text{N}$ olan bir adam merdivene tırmanıyor. Merdiven kaymadan, alt uçtan ne kadar uzağa tırmanabilir? [C: 1.61 m.]



Problem 8.8

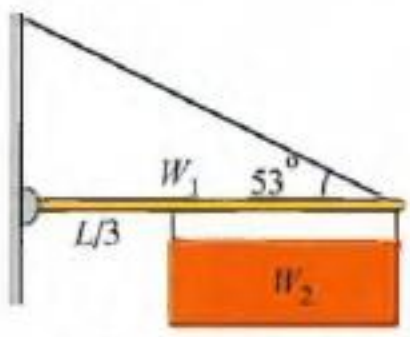
8.8 Ortalama bir insan kolunun boyutları şekilde gösteril-

miştir. Pazu kası dirsekten 5 cm uzakta etkimektedir. Kolun alt yarısı $W_1 = 20\,\text{N}$ ağırlığında olup, kütle merkezi dirsekten 15 cm uzakta bulunmaktadır. Elin dirseğe uzaklığı ise 35 cm dir. $W_2 = 50\,\text{N}$ ağırlığını kaldırmak için pazu kasının uyguladığı F kuvveti ne kadar olur? [C: 460 N.]



Problem 8.9

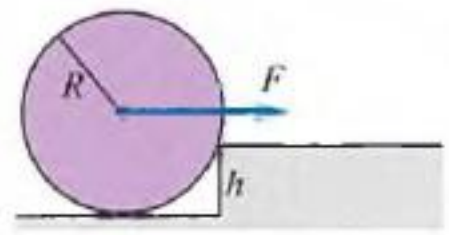
8.9 Ağırlığı $W = 10\,\text{N}$ ve uzunluğu $L = 1\,\text{m}$ olan bir çubuk, sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ olan yatay bir düzlem üzerinde serbestçe dikilmiştir. Çubuğun üst ucu düşeyle 53° açı yapan bir iple yere bağlanmıştır. Çubuk yerden h yükseklikte etkiyen yatay $F = 20\,\text{N}$ kuvvetiyle çekilmektedir. Hangi h yüksekliğinde çubuğun alt ucu kayar? [C: $h = 0.67\,\text{m}$.]



Problem 8.10

8.10 Uzunluğu L ve ağırlığı $W_1 = 10\,\text{N}$ olan yatay bir kalas, bir ucundan duvara menteşelenmiş, diğer ucundan yatayla 37° açı yapan bir iple duvara bağlanmıştır. Bu kalasa ağırlığı $W_2 = 20\,\text{N}$ olan bir tabela asılıyor. Tabelanın bir ucu çubuğun dış ucuna, diğer ucu menteşeden $L/3$ uzaklığa asılmıştır. İpteki gerilmeyi ve menteşedeki tepki kuvvetinin bileşenlerini hesaplayın. (*Yol gösterme:* Tabela, asıldığı noktaların herbirine eşit $W_2/2$ kuvveti uygular.)

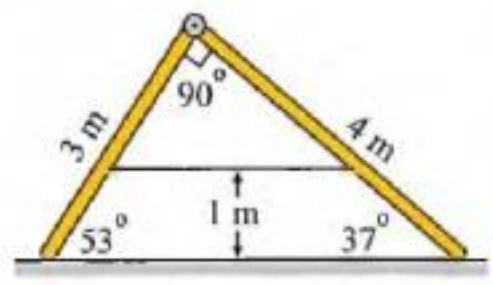
[C: $T = 31$, $R_x = 24$, $R_y = 12\,\text{N}$.]



Problem 8.11

8.11 Yarıçapı $R = 50\,\text{cm}$ ve kütlesi 1 kg olan bir silindir, yatay bir düzleme paralel F kuvvetiyle çekilmek isteniyor. Fakat, düzlemde $h = 10\,\text{cm}$ yüksekliğinde bir çıkıntı hareketi engellemektedir. F kuvveti en az ne kadar olmalıdır ki silindir engeli aşabilsin? (*Yol gösterme:* Silindir yerden kalktığında normal tepki kuvveti ne kadar olur?)

[C: $F = 7.5\,\text{N}$.]



Problem 8.12

8.12 Bir merdivenin iki kolundan birinin uzunluğu 3 m ve ağırlığı 30 N, diğerinin uzunluğu 4 m ve ağırlığı 40 N dur. Merdivenin iki kolu tepede bir menteşeyle birleştirilmiş, ayrıca yerden 1 m yükseklikte yatay bir iple birbirlerine bağlanmışlardır. Merdiven sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde dengede durmaktadır. İpteki gerilmeyi, menteşedeki tepki kuvvetinin bileşenlerini ve zeminin normal tepki kuvvetlerini hesaplayın.

[C: $T = R_x = 29$, $R_y = 7$, $N_1 = 37$, $N_2 = 33\,\text{N}$.]

9 HARMONİK HAREKET



Kolibri (sinekkuşu) 2 cm lik boyuyla, nesli tükenmemiş en küçük kuştur. Kanatlarını saniyede 80 titreşim yapabilecek kadar hızlı çırpar.
Titreşim hareketini hangi kavramlarla tanımlamak gerekir? Bu kavramlarla hareket yasalarını nasıl bağdaştıracağız?

Doğada, günlük yaşamımızda ve teknolojide rastlanan en yaygın hareket türü titreşim veya salınım hareketidir. Bir salıncağın veya sarkacın salınımı, bir saz telinin veya davul zarının titreşimi, kalp atışlarımız veya ses tellerimizin titreşimi, otomobillerde motor pistonunun titreşimi, darbeli matkabın hareketi, cep telefonlarının titreşimi, med-cezir olayında deniz suyunun çekilip yükselmesi, ... Belirli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan bu hareketin temel kavramlarını ve özelliklerini bu bölümde inceleyeceğiz.

9.1 BASİT HARMONİK HAREKET

Titreşim hareketinin temel kavramlarını en yalın görebileceğimiz hareket, bir yaya bağlı kütlenin titreşim hareketidir. Sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde, esneklik sabiti k olan yayın bir ucunu duvara tespit edelim ve diğer ucuna bir m kütlesi bağlayalım.

Yayı normal uzunluğundan itibaren x kadar çekip bıraktığımızda kütle titreşmeye başlar. Harekete dik yöndeki ağırlık ve normal kuvvet birbirini dengele-

diği için, gözönüne alınmaz. Kütleyi hareket ettiren yay kuvveti olduğuna göre, Newton yasasını yazalım:

$$F = ma$$
$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,x''$$

Burada x konumunun ikinci türevini x'' ile gösterdik. Böylece, konum ve onun türevi arasındaki ilişkiyi belirleyen bir denklem elde etmiş olduk:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{9.1}$$

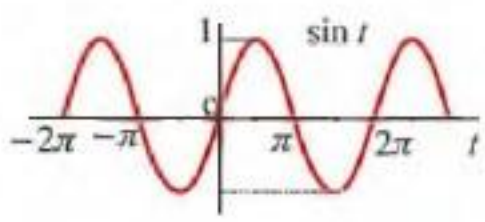


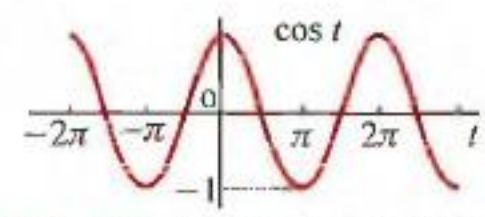
Şekil 9.1: Yay kuvveti uzamaya daima ters yöndedir.

Bu ifadeye **titreşim hareketinin diferansiyel denklemi** denir. Bunun çözümü $x = x(t)$ şeklinde, konumu zamanın bir fonksiyonu olarak bulunabilirse hareketi elde etmiş oluruz.

Diferansiyel denklemler ileri matematik konusudur ve çözüm yöntemleri bellidir. Fakat, burada ileri tekniklere gerek kalmadan çözümü bulabiliriz. Denklemi şöyle yazalım:

$$x'' = -\frac{k}{m}x$$





Şekil 9.2: Sinüs ve kosinüs fonksiyonları

Öyle bir $x(t)$ fonksiyonu bulmalıyız ki, onun ikinci türevi kendisinin eksi işaretlisiyle orantılı olsun. Bu fonksiyonu biliyoruz: sinüs ve kosinüs fonksiyonları. O halde, çözümü şöyle tahmin edebiliriz:

$$x = A\,\cos\omega t \tag{9.2}$$

Burada A ve ω daha sonra belirlenecek iki sabittir. Çözümü sinüs fonksiyonu olarak da seçebilirdik. Fakat, genellikle kosinüs seçilir, çünkü sinüs fonksiyonu cismi $t = 0$ anında $x = 0$ konumunda başlatır. Oysa, cismi çekip uzattığımız noktadan hareketi başlatırsak kosinüs fonksiyonu uygun düşer.

Önce, bu fonksiyonun diferansiyel denklemi sağladığından emin olalım. İki kez türev alalım:

$$x' = -\omega A\,\sin\omega t$$
$$x'' = -\omega^2 A\,\cos\omega t$$

Bu x ve x'' ifadeleri Denklem 9.1 de yerine konulur ve sadeleştirme yapılırsa,

$$-\omega^2 A\,\cos\omega t + \frac{k}{m}A\,\cos\omega t = 0$$
$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right]A\,\cos\omega t = 0$$

Bu eşitliğin her t anında doğru olabilmesi gerekir. Kosinüs daima sıfır olamaz, A sabitini sıfır almak anlamsız olur, o halde parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır:

$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0$$

Buradan ω sabiti, kütle ve yay sabiti cinsinden bulunmuş olur:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(açısal frekans)}} \tag{9.3}$$

Açısal frekans adı verilen bu sabitin titreşim frekansıyla ilişkisini birazdan göreceğiz. Bu aşamada, m kütlesinin titreşim hareketinin denklemi şöyle yazılabilir:

$$\boxed{x = A\cos\omega t \qquad \text{(basit harmonik hareket)}} \tag{9.4}$$

Zamana göre kosinüsün fonksiyonu olan bu harekete **basit harmonik hareket** veya **sinüsel hareket** adları da verilir. Şekil 9.3 de x konumunun t zamanı içinde nasıl değiştiği görülmektedir.

Kosinüs veya sinüs fonksiyonu seçimi: Yukarda (9.4) denkleminde, titreşim hareketi için kosinüs fonksiyonu seçtik. Bunu sinüs fonksiyonu olarak da seçebilirdik, çünkü sinüs de aynı hareket denklemini sağlar. Bunlardan hangisinin seçileceğini, hareketin başlangıç zamanı belirler.

Eğer, cisim maksimum uzaklığa çekilmiş olup, $t = 0$ anında oradan bırakılıyorsa, $x = A\cos\omega t$ alınır. Gerçekten de bu seçimde, $t = 0$ için, $\cos 0° = 1$ ve $x = A$ olur. Diğer bir durumda, cisim yayın denge konumunda iken ($x = 0$), $t = 0$ anında v hızıyla atılıyorsa, o zaman $x = A\sin\omega t$ alınmalıdır, çünkü sinüs fonksiyonu $t = 0$ anında $x = 0$ verir.

(Aslında, kosinüs veya sinüs aynı eğridir. Sadece, dikey ekseni nereden çektiğinize bağlı olarak adı değişir. Dikey ekseni fonksiyonun maksimum noktasından geçirirseniz kosinüs, sıfır konumundan geçirirseniz sinüs elde edersiniz.)

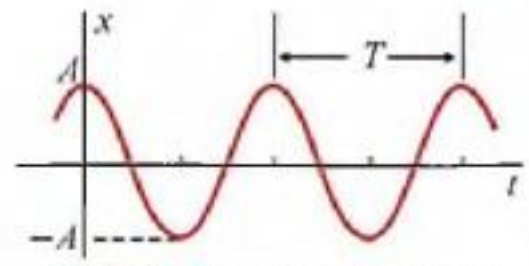
Sonuç olarak, fonksiyon seçimi şöyle olur:

$$x = \begin{cases} A\cos\omega t & \text{(cisim maksimum uzaklıktan başlarsa)} \\ A\sin\omega t & \text{(cisim } x = 0 \text{ dan başlarsa)} \end{cases} \tag{9.5}$$

Şimdi, kosinüslü ifade üzerinden, bu hareketin temel kavramlarını öğrenelim.

Genlik (A)

Kosinüs fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığında değer alan bir fonksiyon olduğu için, x konumu da $[-A, +A]$ değerleri arasında değişecektir. Yaya bağlı kütleyi bir A uzaklığına kadar çekip bıraktığımızda, gerçekten de $[-A, +A]$ arasında gidip gelir, bu aralığın dışına çıkamaz. Maksimum uzamanın mutlak değeri olan bu A büyüklüğüne **genlik** adı verilir.



Şekil 9.3: Genlik ve periyot.

Periyot (T)

Titreşim hareketi periyodik bir harekettir, yani belli bir zaman aralığında kendini tekrar eder. Bu zaman aralığına **periyot** denir. Periyot formülünü hareket denkleminden bulalım.

Herhangi bir t anında cismin konumunu tekrar yazalım:

$$x = A\cos\omega t$$

Bu t anından itibaren öyle bir T zamanı geçmelidir ki cisim tekrar aynı x konumundan geçsin:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ A\cos\omega(t+T) &= A\cos\omega t \\ \cos\omega(t+T) &= \cos\omega t \end{aligned}$$

Kosinüs fonksiyonu $[0, 2\pi]$ aralığında periyodiktir, yani 2π sonra kendini tekrar eder. O halde, eşitliğin iki tarafındaki kosinüslerin argümanları arasındaki fark 2π kadar olmalıdır:

$$\begin{aligned} \omega(t+T) - \omega t &= 2\pi \\ \omega T &= 2\pi \end{aligned}$$

Buradan, tireşim hareketinin periyodu bulunmuş olur:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(periyot)}} \tag{9.6}$$

Bu ifade her türlü sinüsel hareket için geçerlidir. Özel olarak, bir yaya bağlı kütle sisteminin açısal frekansı için bulduğumuz (9.3) ifadesini kullanırsak, yay-kütle sisteminin periyot formülü şöyle olur:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(Yay-kütle periyodu)}} \tag{9.7}$$

Bu ifadenin periyot birimini saniye (s) olarak verdiği kontrol edilebilir. Bu formüle göre, m kütlesi bilinen bir cismi k sabiti bilinen bir yaya bağlayıp titreştirdiğimizde, o hareketin T periyodu tayin edilmiş demektir.

Frekans (f)

Titreşim hareketinin bir periyotluk kısmına **tam salınım** denir. Cismin birim zaman aralığında yaptığı tam salınım sayısına **frekans** denir ve f ile gösterilir. Buna göre, frekans periyodun tersidir. Örneğin, periyot 3 saniye ise, 1 saniyedeki salınım sayısı 1/3 olur. O halde, frekans ifadesi

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(frekans)}} \tag{9.8}$$

Bu ifade her türlü periyodik hareket için geçerlidir. Özel olarak, yay-kütle sisteminin frekansı

$$f = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.9}$$

olur. Frekans birimi $1/\text{saniye} = \text{s}^{-1}$ olup, teknolojide Hertz (Hz) olarak da adlandırılır:

$$1\ \text{s}^{-1} = 1\ \text{Hz} \tag{9.10}$$

(9.8) formülündeki ω frekans cinsinden yazılırsa,

$$\omega = 2\pi f \tag{9.11}$$

olur. Bu ifade, ω ya neden açısal frekans adı verildiğini anlatır. Frekans 1 olduğunda, yani 1 saniyede 1 tam salınım yapıldığında, ω sanki bir açı gibi $360° = 2\pi$ değerini alır.

Sonuç olarak, basit harmonik hareketin denklemi, şu üç şekilden biri olarak yazılabilir:

$$x = \begin{cases} A\cos\omega t \\ A\cos\dfrac{2\pi}{T}t \\ A\cos 2\pi f t \end{cases} \qquad (9.12)$$

Hareket $x = 0$ dan başlıyorsa, bu ifadelerin sinüslü karşılıkları alınmalıdır.

Örnek 9.1

Basit harmonik hareket yapan $m = 3\,\text{kg}$ lık bir cismin konumu, zaman içinde,

$x = 6\cos 0.8\pi t$ (metre)

olarak değişiyor.

(a) *Hareketin genliği, açısal frekansı ve periyodu ne olur?*

(b) *Yayın esneklik sabiti ne kadardır?*

(c) *$t = 5/12\,\text{s}$ anında cismin konumu nedir?*

(d) *$x = 0\,\text{m}$ ve $x = 2\,\text{m}$ konumlarına kaç saniyede varır?*

Çözüm

(a) Genlik maksimum uzama demektir. Kosinüs fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığında değişirken, cisim de $[-6, +6]$ aralığında gidip gelecektir. O halde, genlik $A = 6\,\text{m}$ olur.

Açısal frekans t değişkeninin önündeki katsayıdır. O halde, $\omega = 0.8\pi\,\text{s}^{-1} = 0.8\pi\,\text{Hz}$ olur. (Bu hesaplarda, π sabitini öyle bırakmak yerinde olur. Bazen sadeleşir, bazen de $\pi^2 \approx 10$ alınır.)

Periyodu açısal frekans cinsinden veren (9.6) formülünü kullanırız:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.8\pi} = 2.5\,\text{s}$$

(b) Yay sabiti ile açısal frekans arasındaki ilişkiyi veren (9.3) formülü kullanılır:

$$\omega = \sqrt{k/m} \;\rightarrow\; k = m\omega^2$$

$$k = 3\times(0.8\pi)^2 = 1.92\pi^2 \approx 19\,\text{N/m}.$$

(c) Hareket denkleminde $t = 2.5\,\text{s}$ kullanılır:

$$x = 6\cos 0.8\pi \times \frac{5}{12} = 6\cos\frac{\pi}{3}$$

$\cos\pi/3 = \cos 60° = 0.5$ değeri yerine konursa, $x = 3\,\text{m}$ bulunur.

(d) $x = 0$ konumu maksimum uzaklıktan itibaren, bir salınımın dörtte biridir. O halde, $x = 0$ konumuna $T/4 = 2.5/4 = 0.63\,\text{s}$ de gelecektir.

Diğer $x = 2$ konumuna geliş zamanını bulmak için, hareket denkleminde $x = 2\,\text{m}$ değeri konulup, kosinüsün içindeki t hesaplanır:

$$x = 6\cos 0.8\pi t \;\rightarrow\; 2 = 6\cos 0.8\pi t$$

$$\cos 0.8\pi t = 1/3 = 0.33$$

Kosinüsü 0.33 olan açı Ek C deki tablodan $71° = 1.23$ radyan olarak bulunur. *Denklemde radyan cinsinden kullanmak gerekir.* Buradan t zamanı bulunur:

$$0.8\pi t = 1.23 \;\rightarrow\; t = 0.49\,\text{s}.$$

Örnek 9.2

$k = 125\,\text{N/m}$ sabitli bir yaya bağlı m kütlesi 4 saniyede 5 salınım yapabiliyor.

(a) *Periyot, açısal frekans ve m kütlesi ne kadardır?*

(b) *Bu cisim denge konumundan itibaren 60 cm çekilip bırakılıyor ve tam denge konumundan geçerken kronometrede $t = 0$ zamanı başlatılıyor. Basit harmonik hareketin denklemini kurun.*

Çözüm

(a) Periyot bir salınım için geçen süredir. Buna göre,

$$T = \frac{4\,\text{s}}{5} = 0.8\,\text{s}.$$

Buradan açısal frekans ve cismin kütlesi hesaplanır:

$$\omega = \frac{2\pi}{0.8} = 2.5\pi\,\text{Hz}$$

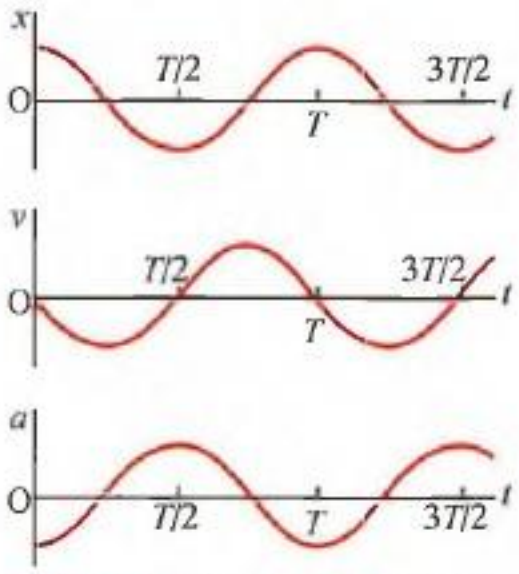
$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{125}{(2.5\pi)^2} = 2\,\text{kg}.$$

(b) Cismin $t = 0$ anındaki konumu $x = 0$ dır. O halde, $t = 0$ da sıfır olan sinüs fonksiyonu kullanılmalıdır. Genlik $A = 0.6\,\text{m}$ olarak verilmiştir. Denklem şöyle olur:

$$x = 0.6\sin 2.5\pi t.$$

Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Bir yaya bağlı kütlenin salınım hareketinde x konumun t zamanına göre nasıl değiştiğini öğrendik. Bu cismin her t anındaki hız ve ivmesi ne kadardır?



Şekil 9.4: Konum, hız ve ivme.

Bunu öğrenebilmek için, hız ve ivmenin türevli tanımlarından yola çıkalım:

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t \tag{9.13}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t \tag{9.14}$$

Bu değişimler yandaki şekilde görülmektedir. Harmonik hareketin konum, hız ve ivmesi hakkında önemli noktaları vurgulayalım:

- Harmonik hareketin hız ve ivmesi de harmoniktir, yani konumla aynı frekansta sinüs veya kosinüs olarak salınım yaparlar.
- Konum ile hızın değişimi birbirine tamamen zıt olur. Yani, konum maksimum değere vardığında ($x = A$) cismin hızı sıfır olur. Tersine, cisim denge konumundan geçerken ($x = 0$) hızı maksimumdur.
- Hız ile ivmenin davranışı da birbirine terstir. Yani, cismin hızı maksimumken (denge konumundan geçiş) ivmesi sıfır olur. Tersine, cisim maksimum uzaklığa varıp hızı sıfır olduğunda, geri yönde maksimum ivmeye sahiptir.
- t zamanı ne olursa olsun, hız ve ivme arasında daima bir bağıntı vardır. Bunu görebilmek için, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ özdeşliğinden yararlanırız:

$$\cos^2\omega t = \frac{x^2}{A^2}$$

$$\sin^2\omega t = \frac{v^2}{\omega^2 A^2}$$

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

Bu ifade sadeleştirilirse,

$$v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \tag{9.15}$$

bulunur. Görüldüğü gibi, zamanı bilmeye gerek kalmadan, hız veya ivmeden biri biliniyorsa, diğeri hesaplanır.

- Konum ile ivme arasında da her zaman bir ilişki vardır:

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t$$

$$a = -\omega^2 x \tag{9.16}$$

Böylece, cismin konumu veya ivmesi biliniyorsa, diğeri buradan hesaplanır.

Örnek 9.3

$k = 72\,\mathrm{N/m}$ sabitli yaya bağlı $m = 2\,\mathrm{kg}$ lık kütle, denge konumundan 50 cm çekilip bırakılıyor.

(a) *Maksimum hızı ve ivmesi ne kadar olur?*

(b) *$x = 30\,\mathrm{cm}$ konumlu yerden geçerken hızı ve ivmesi ne kadardır?*

Çözüm

(a) Önce, açısal frekansı hesaplarız:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = 6\,\mathrm{Hz}$$

Hız ve ivme için bulduğumuz (9.13–9.14) formüllerinde, sinüs ve kosinüsün katsayıları, hız ve ivmenin alabileceği maksimum değerler olurlar:

$$v_{\max} = \omega A = 6\times 0.5 = 3\,\mathrm{m/s}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = 6^2\times 0.5 = 15\,\mathrm{m/s^2}.$$

(b) Konum ile hız arasındaki ilişkiyi veren (9.15) formülü kullanılır:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 6\sqrt{0.5^2 - 0.3^2} = 6\times 0.4 = 2.4\,\mathrm{m/s}.$$

Konum ile ivme arasındaki ilişkiyi veren (9.16) formülü kullanılır:

$$a = -\omega^2 x = -6^2\times 0.3 = -11\,\mathrm{m/s^2}.$$

Örnek 9.4

Basit harmonik hareket yapan bir cismin açısal frekansı 5 Hz *dir. Bu cisim* $x = 3$ m *konumlu yerden* $v = 20$ m/s *hızıyla geçiyor.* **(a)** *Hareketin genliği ne kadardır?* **(b)** *Maksimum hızı ne olur?*

Çözüm

(a) Konum ve hız arasındaki ilişkiyi veren (9.15) formülü kullanılır:

$$v^2 = \omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$$

Bu formülden A genliği çekilip alınır:

$$A = \sqrt{x^2 + (v/\omega)^2}$$

$$A = \sqrt{3^2 + (20/5)^2} = 5\,\text{m}.$$

(b) Yukardaki formülde $x = 0$ olduğunda, yani denge konumundan geçerken, hız maksimum olacaktır. Buna göre,

$$v_{\max} = \omega A = 5 \times 5 = 25\,\text{m/s}.$$

Harmonik Hareketin Enerjisi

Titreşim hareketinde kütlenin hızına bağlı olarak bir kinetik enerji ve yayın uzama miktarına bağlı olarak da bir potansiyel enerji sözkonusudur. Her iki tür enerji de zamana bağlı olarak azalıp artabilirler.

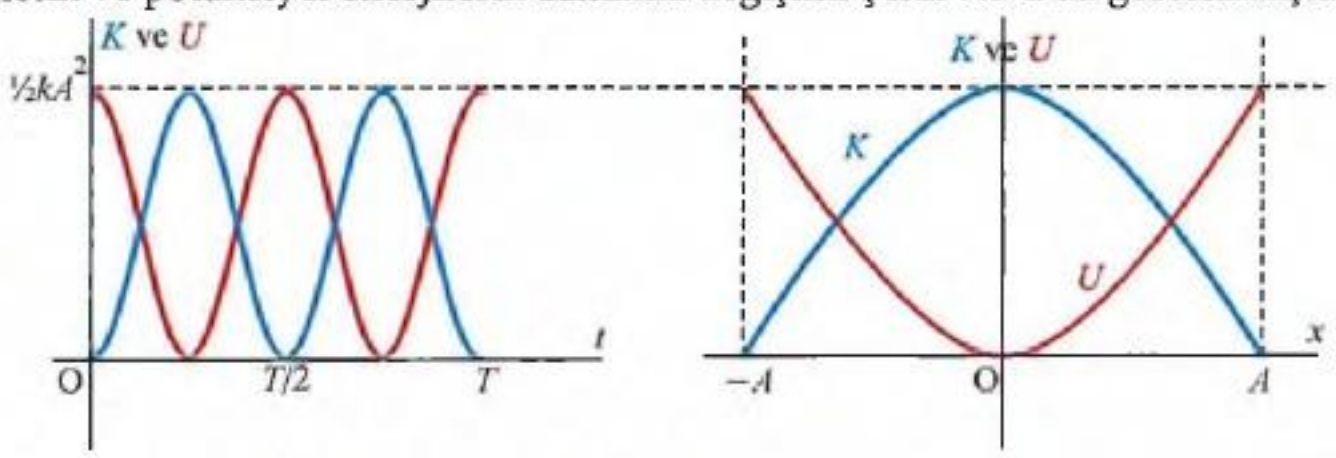
Kinetik enerji tanımında, (9.13) denklemindeki hız ifadesi kullanılırsa,

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \qquad (9.17)$$

olur. Yayın esneklik potansiyel enerji formülünde de, (9.4) denklemindeki x konum ifadesi kullanılırsa,

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}k A^2 \cos^2 \omega t \qquad (9.18)$$

Kinetik ve potansiyel enerjilerin zamanla değişimi Şekil 9.5-a da gösterilmiştir.



Şekil 9.5: (a) Kinetik ve potansiyel enerjilerin değişimi: (a) t zamanına göre, (b) x konumuna göre.

Toplam mekanik enerjiyi hesaplayalım:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k} A^2 \sin^2 \omega t + \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

$$= \tfrac{1}{2}kA^2 \underbrace{(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}_{1} = \tfrac{1}{2}k A^2 = \text{sabit}$$

O halde, basit harmonik harekette toplam enerji sabit olup, maksimum uzamadaki potansiyel enerji kadardır. Bunu anlamak kolaydır, çünkü maksimum uzamaya geldiğinde hız sıfır olacak, yani tümü potansiyel enerjiye dönüşmüş olacaktır:

$$\boxed{E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \text{(titreşim hareketinin toplam enerjisi)}} \qquad (9.19)$$

Kinetik ve potansiyel enerjilerin bir salınım içinde nasıl değiştiği ve toplam E enerjisinin sabit olduğu Şekil 9.5-b de gösterilmiştir.

Titreşim hareketinde enerjinin A genliğinin karesiyle orantılı oluşuna dikkat edelim. Genliği iki katına çıkardığınızda enerji 4 katına çıkar. Depremlerin yıkıcı etkisi bu yüzden genliğe bağlı olarak artar.

Örnek 9.5

$k = 400\,\mathrm{N/m}$ sabitli yaya bağlı $m = 1\,\mathrm{kg}$ kütleli sistemin toplam enerjisi $800\,\mathrm{J}$ dur.

(a) *Salınım hareketinin genliği ne kadar olur?*

(b) *Sistemin potansiyel enerji $200\,\mathrm{J}$ olduğunda, m kütlesinin hızı ne kadardır?*

Çözüm

(a) Toplam enerji için bulduğumuz (9.19) formülü kullanılır:

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{1600}{400}} = 2\,\mathrm{m}$$

(b) Potansiyel enerji $200\,\mathrm{J}$ ise, kinetik enerji $800 - 200 = 600\,\mathrm{J}$ olur:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = 600 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2\times 600}{1}} = 35\,\mathrm{m/s}$$

Örnek 9.6

Basit harmonik hareket yapan bir sistemde,

(a) *Hangi x/A oranında sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri birbirine eşit olur?*

(b) *$x = A/2$ olduğu konumunda kinetik ve potansiyel enerjilerin oranı ne kadardır?*

Çözüm

(a) Basit harmonik harekette, toplam enerji ifadesi yazılır:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Kinetik ve potansiyel enerjilerin eşit olması demek, herbirinin toplam enerjinin yarısına sahip olması demektir. Potansiyel enerji için bu değer alınır:

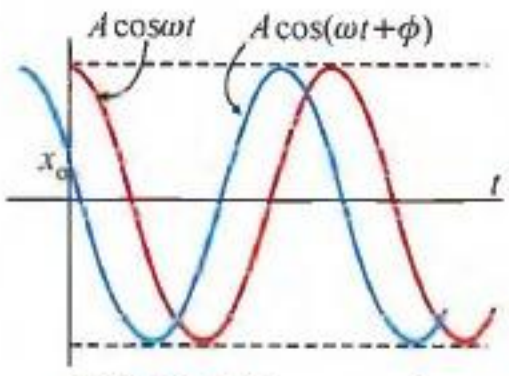
$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}kA^2\right) \;\rightarrow\; \frac{x}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) Hızı konum cinsinden veren formülü yazalım:

$$v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

Bu ifadede $x = A/2$ değerini kullanıp, enerjilerin oranı yazılır:

$$\frac{K}{U} = \frac{mv^2}{kx^2} = \frac{m\omega^2(A^2 - A^2/4)}{k(A/2)^2} = 3$$



Şekil 9.6: Faz açısı ϕ.

Faz Açısı

Harmonik hareket denkleminde ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanacağımızı daha önce görmüştük: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa sinüs, maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa kosinüs fonksiyonu alınıyordu.

Peki, hareket bu iki nokta dışında herhangi bir yerden başlıyorsa hangi fonksiyonu kullanmak gerekir? Bu sorunun cevabı Şekil 9.6 de görülmektedir. Kosinüsün argümanı olan (ωt) nin yanına bir terim daha ekleyerek, fonksiyonu istediğimiz noktadan başlatabiliriz. Bir açı biriminde olan bu sabit argümana **faz açısı** veya faz farkı denir ve ϕ ile gösterilir:

$$x = A\,\cos(\omega t + \phi) \tag{9.20}$$

Bu ifadede $\phi = -90^\circ = -\pi/2$ alındığında, yani kosinüs fonksiyonundan 90° geriden başladığımızda, sinüslü fonksiyonu bulmamız gerekir. Gerçekten de,

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin\alpha$$

trigonometrik özdeşliği bize sinüslü denklemi verir.

Cisim başlangıç anında herhangi bir x_0 konumlu yerden başlıyorsa, bu ifadede $t = 0$ yaptığımızda,

$$x_0 = A\,\cos\phi \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\phi = \frac{x_0}{A} \tag{9.21}$$

olur ve buradan faz açısı bulunur.

İki harmonik hareketin toplamı alınırken, bunlar arasındaki faz farkı önemlidir. Bu noktaya daha sonra, optik girişim konusunda döneceğiz.

Örnek 9.7

Açısal frekansı 5 Hz *olan bir harmonik salınıcıda kütle, denge konumundan* 2 m *çekilip bırakılıyor. Kütle* $x = 1$ m *konumundan geçerken* $t = 0$ *zamanı başlatılıyor. Faz açısını bulun ve harmonik hareketin denklemini yazın.*

Çözüm

En genel harmonik hareket ifadesi yazılır:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$t = 0$ anında bu denklemin $x = 1$ m değerini sağlaması istenir:

$$1 = 2\cos(0 + \phi) \rightarrow \cos\phi = 0.5$$

Kosinüsü 0.5 olan açı $60^\circ = \pi/3$ tür. O halde, hareketin denklemi şöyle yazılır:

$$x = 2\cos(5t + \pi/3)$$

Örnek 9.8

Bir harmonik hareketin denklemi,

$$x = 3\cos(0.2\pi t - \pi/4)$$

olarak veriliyor. **(a)** *Başlangıç anındaki konumu nedir?* (b) *Maksimum konuma hangi anda ulaşır?*

Çözüm

(a) Başlangıç anı, yani $t = 0$ değeri, verilen denklemde kullanılıp, konum bulunur:

$$x = 3\cos(0 - \pi/4) = 3\cos(\pi/4) = 3 \times \sqrt{2}/2 = 2.1\,\text{m}.$$

(b) Maksimum konum $x = A$ genliği demektir. x için genlik değeri yerine konulur:

$$3 = 3\cos(0.2\pi t - \pi/4) \rightarrow \cos(0.2\pi t - \pi/4) = 1$$

Kosinüsü 1 olan açılar $0, 2\pi, 4\pi \ldots$ olur. Bunlardan en küçüğü 0 seçilip t zamanı bulunur:

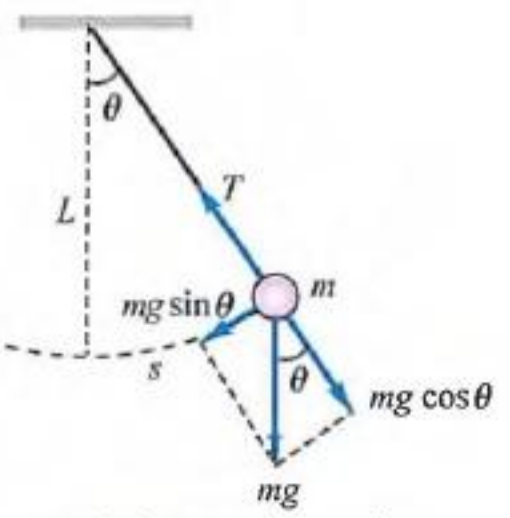
$$0.2\pi - \pi/4 = 0 \rightarrow t = 1.25\,\text{s}.$$

9.2 SARKAÇ HAREKETİ

Basit Sarkaç

Bir ipin ucuna bağlı kütlenin salınım hareketi yaptığını biliriz. Eski duvar saatlerinde zamanı ölçmek için bir sarkacın periyodu kullanılırdı. Bu hareket belirli koşullar içinde basit harmonik hareket olarak incelenebilir.

Tavana asılı L uzunlukta ipin ucuna bir m kütlesi bağlanmış olsun. İpi düşey doğrultudan itibaren θ açısı kadar ayırıp bırakalım. Bu anda, ipe uygulanan kuvvetler Şekil 9.7 de gösterilmiştir.



Şekil 9.7: Basit sarkaç.

T gerilme kuvveti ip doğrultusunda olduğu için harekete bir katkıda bulunmaz. Fakat, mg ağırlık kuvvetinin L yarıçaplı daireye teğet yönde bir bileşeni olur. Kütleyi merkeze doğru hareket ettiren bu $mg\sin\theta$ kuvvetidir.

Teğet doğrultusunda Newton yasasını yazarken, θ açısının arttığı yönü pozitif seçelim. İvmeyi de hızın türevi olarak yazarsak,

$$F_t = ma_t$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

olur. Kütle L yarıçaplı dairesel hareket yaptığı için, v hızını açısal hız cinsinden yazabiliriz. Açısal hız da, θ açısının türevi olur. Buna göre,

$$v = L\omega = L\frac{d\theta}{dt}$$

olur. Bu ifade yerine konur ve terimler düzenlenirse,

$$-mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (9.22)$$

Bu denklem titreşim hareketi için bulduğumuz (9.1) denkleminin θ açısı için yazılmış hali gibi durmaktadır. Fakat, burada θ yerine $\sin\theta$ gelmiştir ve bu yüzden çözümü bulamayız.

Fakat, küçük açılı salınımları gözönüne alırsak, yaklaşık olarak $\sin\theta \approx \theta$ alınabilir. Bu durumda, θ açısı için basit harmonik hareket denklemini elde ederiz:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2}\theta = 0 \tag{9.23}$$

Bu ifadeyi (9.1) denklemi ile karşılaştırırsak, θ teriminin katsayısı açısal frekansın karesi ω^2 olur. Buradan, $T = 2\pi/\omega$ bağıntısıyla, sarkacın T periyodu bulunmuş olur:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(Basit sarkacın periyodu)}} \tag{9.24}$$

Salınım hareketi denklemini yazarken A genliği yerine θ_{max} maksimum açısı kullanılır. Buna göre, sarkaç hareketinin çözümü,

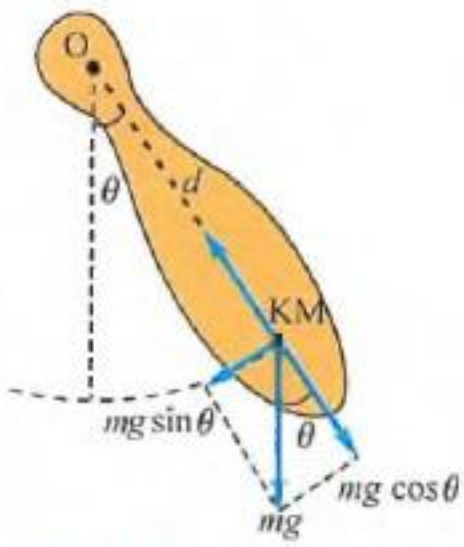
$$\theta = \theta_{max}\cos\omega t \tag{9.25}$$

olup, küçük açılı salınımlar için geçerlidir.

Sarkaç periyodu için bulduğumuz (9.24) ifadesinin kütleden ve genlikten bağımsız olduğuna dikkat edelim. Bu özelliğinden dolayı sarkaç yüzyıllar boyunca saat yapımında kullanılmıştır.

Fiziksei Sarkaç

Basit sarkaç ideal bir durumdur. Aslında, her katı cisim sarkaç hareketi yapabilir. Kütle merkezi dışında bir eksene asılı katı cisme **fiziksel sarkaç** diyoruz. Duvar saatlerinde ve sanayide kullanılan sarkaçlar birer fiziksel sarkaçtır.



Şekil 9.8: Fiziksel sarkaç.

Böyle bir sarkacın periyodunu hesaplamak üzere Şekil 9.8 da görülen durumu gözönüne alalım. Kütlesi m ve eylemsizlik momenti I_{KM} olan katı bir cisim, kütle merkezinden d uzaklıkta bir eksene asılmış olsun. Dönme hareketini sağlayan sadece ağırlığın $mg\sin\theta$ bileşeni olur.

θ açısının arttığı yön pozitif dönme yönü seçilir ve O dönme merkezine göre moment alınırsa,

$$\begin{aligned} F_t\, d &= I_0\,\alpha \\ -mg\,\sin\theta\, d &= I_0\,\alpha \end{aligned}$$

olur. α açısal ivmesini θ açısal konumunun ikinci türevi olarak yazar ve terimleri düzenlersek,

$$\theta'' + \frac{mgd}{I_0}\sin\theta = 0$$

olur. Yine, küçük açılı salınımlar için $\sin\theta \approx \theta$ yaklaşık değerini kullanırız:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{mgd}{I_0}}_{\omega^2}\theta = 0 \tag{9.26}$$

Böylece, basit harmonik hareket denklemi yapısını elde etmiş olduk. Bu ifadeye göre, θ teriminin katsayısı ω^2 açısal frekansı olacaktır. $T = 2\pi/\omega$ ile periyot formülüne geçilir:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgd}} \qquad \text{(Fiziksel sarkacın periyodu)} \tag{9.27}$$

Bu formüldeki eylemsizlik momentinin O eksenine göre olduğuna dikkat edelim. Tablolarda verilen I_{KM} değerine geçmek için, paralel eksenler teoremi kullanılır:

$$I_o = I_{KM} + m\,d^2$$

Örnek 9.9

Periyodu 1 s olan bir basit sarkaç yapılmak isteniyor.

(a) *Kullanılacak ipin uzunluğu ne kadar olmalıdır?*

(b) *Yerçekimi ivmesi 24 m/s² olan Jupiter gezegeninde ne kadar uzunlukta ip gerekir?*

Çözüm

Sarkaç periyodu için bulduğumuz (9.24) formülü L uzunluğu için yazılır:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \;\rightarrow\; L = \frac{gT}{4\pi^2}$$

$T = 1$ s ve $g = 10$ değeri kullanılır:

$$L = \frac{10\times 1}{4\pi^2} = 0.25\,\text{m}$$

(b) Aynı formülde $g = 24$ alınırsa, Jüpiter'deki sarkaç uzunluğu bulunmuş olur:

$$L = \frac{24\times 1}{4\pi^2} = 0.60\,\text{m}.$$

Örnek 9.10

Uzunluğu $L = 60$ cm ve kütlesi m olan bir çubuk, bir ucundan asılarak fiziksel sarkaç yapılmıştır.

(a) *Salınım periyodunu hesaplayın.*

(b) *Periyodun 2 s olması için, kütle merkezinden ne kadar uzağa asılmalıdır?*

Çözüm

(a) Çubuğun kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{3}mL^2$ dir. Bir ucuna göre eylemsizlik momentini, daha önce paralel eksenler teoremiyle $\frac{1}{12}mL^2$ olarak bulmuştuk. O halde, (9.27) formülüyle $d = L/2$ için periyodu hesaplarsak,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2/12}{mgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{6g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.60}{6\times 10}} = \frac{\pi}{5} = 0.63\,\text{s}.$$

(b) d uzaklıktaki eksene göre, $I_o = I_{KM} + md^2$ değeri periyot formülünde yazılıp d için çözülürse,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2 + md^2}{mgd}} \;\rightarrow\; d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \tfrac{1}{3}L^2 = 0$$

olur. $T = 2$ s ve diğer sayısal değerler yerine konursa,

$$d^2 - d + 0.12 = 0$$

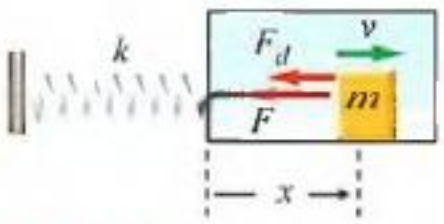
Bu denklemin iki çözümü $d = 0.14$ ve 0.86 olup, $L = 0.6$ dan büyük olan değer alınmaz. O halde, çözüm şöyle olur:

$$d = 0.14\,\text{m}$$

9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET

Kendi haline bırakılan salınım hareketi bir süre sonra durur. Salıncak itilmezse genliği giderek azalır ve durur. Masa üzerinde yaya bağlı kütlenin enerjisi sürtünme yüzünden azalır ve hareket biter. Fakat, bazı durumlarda salınımın sönmesini biz isteriz. Örneğin, otomobiller bir çukur üzerinden geçtiğinde amortisörlerdeki yaylar sayesinde salınım hareketi yapıp çarpmayı yumuşatır ve yolcuları korurlar. Fakat, bu salınımın fazla sürmemesi gerekir. Keza bir yaylı terazinin ibresinin fazla salınmadan durması gerekir.

O halde, basit harmonik hareket ideal bir durumu tasvir eder. Gerçek bir salınım hareketinde sönme (damping) etkisi de hesaba katılmalıdır. Sönümlü harmonik hareketi en yalın bir şekilde görmek üzere, yine bir yaya bağlı kütleyi



Şekil 9.9: Sönümlü salınıcı.

gözönüne alalım. Bu kez kütleyi bir yağ kutusu içine koyalım. Böylece, kütlenin hareketi sırasında oluşan yağ direnci veya sürtünmesi, gerekli sönümü sağlayacaktır.

Sıvılarda sürtünme kuvveti hareket eden cismin hızıyla orantılıdır. Bunu, denizde yürürken hissedebiliriz. Yavaş adımlarla kolay gideriz ama, koşmak istediğimizde suyun direnci birden artar. Bu sürtünme kuvvetini F_d ile gösterirsek,

$$F_d = -b\,v \tag{9.28}$$

olup, b sabitine **sönüm katsayısı** denir. Bu ifadedeki eksi işareti kuvvetin daima hıza ters yönde olduğunu gösterir.

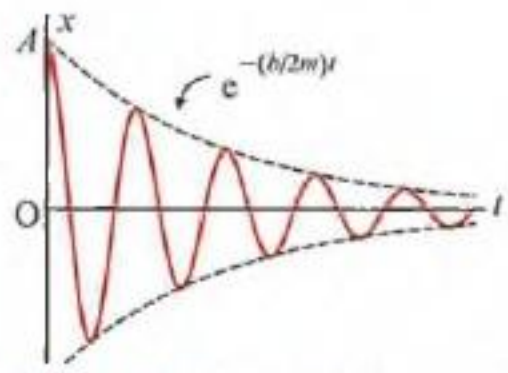
Bu yeni düzenekte, m kütlesine etkiyen iki kuvvet vardır: Yay kuvveti F ile sürtünme kuvveti F_d. Newton yasasını yazalım:

$$F + F_d = ma$$

$$-kx - bv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Terimleri yeniden düzenleyip yazalım:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



Şekil 9.10: Sönümlü harmonik hareket. Bir yandan üstel olarak azalırken, bir yandan da sinüsel salınımlar yapar.

Görüldüğü gibi, basit harmonik hareket denklemine ilave olarak, 1. türevli bir terim daha gelir.

Yine, diferansiyel denklem konusunu bilmeden de bu denklemin çözümünü tahmin edebiliriz. Basit harmonik harekette, ikinci türevi kendisiyle orantılı olan fonksiyonların kosinüs ve sinüs olduğunu tahmin ederek çözümü bulmuştuk. Burada ilave olarak 1. türevli sürtünme terimi vardır. Yine, hangi fonksiyonların türevinin kendisiyle orantılı olduğunu düşünelim. Bu, üstel fonksiyondur. O halde, her iki davranışı birlikte bulunduran, yani üstel ve kosinüs çarpımı bir çözüm ararız. Sonra, bu çözümün denklemi sağlamasını isteyerek, gerekli katsayıları tayin ederiz. Bu uzun işlemin ayrıntılarına girmeden çözümü doğrudan yazalım:

$$x = A\,e^{-(b/2m)\,t}\,\cos\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m}}\,t \tag{9.29}$$



Şekil 9.11: Kritik ve aşırı sönümlü salmımlar.

Bu formülde ($\omega_0^2 = k/m$) olup, aynı kütle ve yay sabitine sahip olan basit salınıcının açısal frekansıdır.

Bu ifadenin nasıl bir hareketi belirlediğini irdeleyelim:

- Şekil 9.10 de gösterildiği gibi, hareket zaman içinde üstel olarak azalırken bir yandan da sinüsel olarak salınmaktadır.
- Eğer, sürtünme sıfır ise, yani $b = 0$ olduğunda, bu denklemin basit harmonik harekete indirgendiği kolayca görülebilir.
- **Kritik sönüm:** Kosinüsün argümanı sıfır olduğunda, $\cos 0° = 1$ olur ve cisim salınım yapmadan, genlik üstel olarak azalır. Bunun için,

$$\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad b = \sqrt{4k}$$

olmalıdır. Bu sınır değerin üstündeki b sürtünme katsayıları için, salınım gözlenmez, cisim üstel olarak denge konumuna gelir. Bu durumda cisme **aşırı sönüm** uygulandığı söylenir.

Hangi tür sönüm olursa olsun, sonunda sistemin mekanik enerjisi sıfıra gider ve tümüyle ısı enerjisine dönüşür. Bu özellik teknolojide **amortisör** denilen düzenekle sağlanır. Otomobil ve motosiklerde titreşimleri önleyerek sürüş kolaylığı sağlar. Ayrıca, modern binalarda ve köprülerde, depremden kaynaklanabilecek titreşimleri söndürmekte kullanılır.

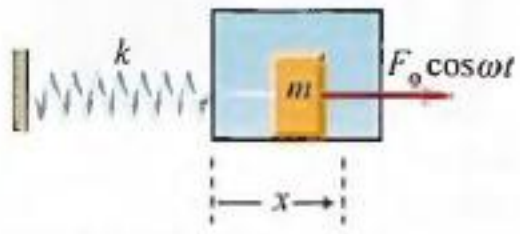


Şekil 9.12: Bir motosiklette amortisör.

9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET. REZONANS

Bir salıncağa binen çocuğu nasıl salladığımızı hiç düşündünüz mü? Salıncağı her salınım sonunda hafifçe iteriz. Yani, biz de periyodik bir kuvvet uygularız. Bu kuvveti uygularken de, salıncağın geri gitmek üzere olduğu anı bekleriz. Yani, salıncakla aynı fazda bir kuvvet uygularız.

Bir harmonik salınıcıya dışardan bir kuvvet uygulandığında, hem sürtünmenin etkisi karşılanmış olur, hem de çok daha zengin davranışlar gözlenir. Bunu incelemek üzere, yine sönümlü hareketteki düzeneği kullanalım. Bu kez ilave olarak, m kütlesini dışardan ω açısal frekanslı bir $F_a \cos \omega t$ kuvvetiyle beslediğimizi düşünelim.



Şekil 9.13: Periyodik kuvvetle zorlanan salınıcı.

Bu kez sisteme etkiyen üç kuvvetin toplamı için Newton yasası yazılır:

$$F + F_d + F_a \cos \omega t = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_a \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Denklemi yeniden düzenleyelim:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_a \cos \omega t \tag{9.30}$$

Bu kez, sönümlü hareketten farklı olarak, eşitliğin sağ tarafında x bilinmeyenine bağlı olmayan, fakat zamanın fonksiyonu olan yeni bir terim gelmiştir.

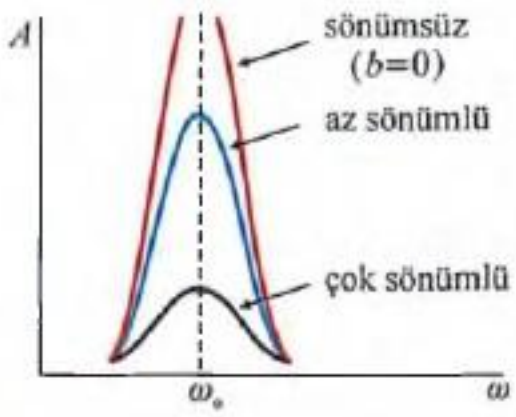
Yine, bu denklemin analitik çözümüne girişmeden, sadece sonucu yazacağız:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \tag{9.31}$$

$$A = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \tag{9.32}$$

Zorlamalı harmonik hareketin özelliklerini bu formüller üzerinden vurgulayalım:

- Oluşan hareket ($\cos \omega t$ den dolayı) yine basit harmonik harekettir. Bunun açısal frekansı zorlayıcı kuvvetin frekansıyla aynı olup, onu bir faz farkıyla takip eder.
- En önemli özellik A genliğinin uygulanan kuvvetin frekansına bağlı oluşudur. Bu genlik $A(\omega)$ fonksiyonu olarak Şekil 9.14 de gösterilmiştir.
- **Rezonans olayı.** Burada $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ salınıcıyı oluşturan yay ve kütlenin özellikleriyle tespit edilmiş olup, **doğal frekans** adını alır. Dış kuvvetin ω frekansı ise keyfi olarak değiştirilebilir.
  Şekilde görüldüğü gibi, $\omega \to \omega_0$ olduğunda, salınıcının frekansı muazzam bir şekilde artar. Buna **rezonans** denir. Dış kuvvetin genliği F_a küçük olsa da, aynı etkiyi yapıyor olması şaşırtıcıdır.



Şekil 9.14: Zorlamalı harmonik harekette genliğin dış frekansla değişimi.

- Rezonans bazı durumlarda istenen bir olaydır:
  - ► Müzik aletlerinde her tel ayrı bir frekansta rezonansa geçecek şekilde akortlanır.
  - ► Radyoda istasyon ararken, antenin istenilen vericinin yayın frekansında rezonansa geçmesi sağlanır.
  - ► Mikrodalga fırını, yiyeceklerin içindeki su moleküllerini rezonansa geçirecek şekilde elektromanyetik dalga yayınlar.
  - ► **Manyetik Rezonans**. Tüm atom çekirdeklerindeki nötron ve protonların mıknatıslık özelliği vardır. Bunlar uygulanan dış manyetik alandan ancak belli frekanslarda enerji alıp bunu tekrar geri verirler. Belli atomların frekanslarına yakın manyetik alan uygulanarak rezonansa geçmeleri sağlanır ve bunların verdikleri radyasyonun yeri ölçülerek organların profili çıkarılabilir.



Şekil 9.15: Manyetik rezonans (MR) cihazı.

- Bazen de rezonans istenmeyen bir olaydır:
  - ► Askerler bir köprüden uygun adım geçirilmezler. I. Dünya savaşında fark edilen bu olayda, askerlerin periyodik adımları köprünün rezonansa geçip yıkılmasına sebep olabilir.
  - ► Kristal camdan yapılmış bazı araç ve gereçler, çevredeki bir titreşimden rezonansa geçip kırılabilirler.
  - ► Binaların doğal titreşim frekanslarının deprem frekanslarına yakın olmamasına dikkat edilir, çünkü bina sağlam olsa dahi, rezonansa geçip yıkılabilir. Amerika'da Tacoma Nehri üzerindeki köprünün rüzgarın zorlamasıyla rezonansa geçip yıkılışı buna örnektir. Bu tehlikeyi önlemek için, binaların doğal frekansları ölçülüp amortisörler yardımıyla rezonans genliği azaltılabilir.

Test

1. Basit harmonik hareket için hangisi yanlıştır?
   (a) Birim zamandaki salınım sayısı frekanstır.
   (b) Bir salınım için geçen zaman periyottur.
   (c) Maksimum salınım uzaklığı genliktir.
   (d) İvme sabittir.

2. ω açısal frekansı aşağıdakilerden hangisine eşittir?
   (a) $2\pi/f$ (b) $2\pi/T$ (c) $2\pi/A$ (d) $2\pi A$

3. Bir harmonik salınıcı $t = 0$ anında denge konumundan geçiyorsa, hareket denklemi hangisidir?
   (a) $A\cos\omega t$
   (b) $A\sin\omega t$
   (c) $A\tan\omega t$
   (d) $A\cos(\omega t + \pi/3)$

4. Toplam enerjisi E olan bir harmonik salınıcının genliği iki katına çıkarılırsa, toplam enerjisi ne olur?
   (a) $E/2$ (b) $2E$ (c) $4E$ (d) $E/4$

5. Basit harmonik hareket için hangisi yanlıştır?
   (a) Konum maksimum olduğunda hız sıfırdır.
   (b) Hız maksimum olduğunda konum sıfırdır.
   (c) Hız maksimum olduğunda ivme sıfırdır.
   (d) Konum maksimum olduğunda ivme sıfırdır.

6. Kütle+yay sisteminin periyodu için hangisi yanlıştır?
   (a) Yay sabitine bağlıdır.
   (b) Kütleye bağlıdır.
   (c) Genliğe bağlıdır.

7. Bir sarkacın uzunluğu 4 katma çıkarılırsa, periyot kaç kat artar?
   (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

8. Harmonik salınıcının enerjisi için hangisi yanlıştır?
   (a) Maksimum konumda potansiyel enerji maksimumdur.
   (b) Maksimum hızda kinetik enerji maksimumdur.
   (c) Kinetik+potansiyel enerji sabittir.
   (d) Konum sıfır ise kinetik enerji sıfırdır.

9. Kütle+yay sisteminde yay sabiti 2 katına çıkarılırken, kütle 2 kat azalıyor. Periyot kaç kat artar?
   (a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

10. Basit sarkacın salınım periyodu hangisine bağlıdır?
   (a) Kütle
   (b) Genlik
   (c) Uzunluk
   (d) Açısal hız

11. Basit sarkaçtan yapılmış bir saat geri kalıyor. Nasıl düzeltirsiniz?
   (a) Boyunu uzatırım.
   (b) Boyunu kısaltırım
   (c) Kütleyi artırırım.
   (d) Kütleyi azaltırım.

12. Basit sarkaç salınırken, ucundaki kütlenin yarısı kopup düşüyor. Hareket nasıl değişir?
   (a) Yavaşlar.
   (b) Hızlanır.
   (c) Değişmez.
   (d) Durur.

13. Bir harmonik salınıcının periyodu 2 katma çıkarılıyor. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Frekans 2 katına çıkar.
   (b) Açısal frekans 2 kat azalır.
   (c) Genlik 2 kat artar.
   (d) Genlik 2 kat azalır?

14. Harmonik salınıcının genliği 2 katına çıkarıldığında, hangisi yanlıştır?
   (a) Maksimum hız 2 katına çıkar.
   (b) Maksimum ivme 2 katma çıkar
   (c) Enerji 4 katına çıkar.
   (d) Periyot 4 katına çıkar.

15. Kütle+yay sisteminin maksimum hızını artırmak için hangisi doğrudur?
   (a) Genliği artırırım.
   (b) Açısal frekansı artırırım.
   (c) Enerjisini artırırım
   (d) Faz açısını artırırım.

16. Sarkaçlı bir saat Ay yüzeyine götürüldüğünde, nasıl çalışır?
   (a) Geri kalır.
   (b) İleri gider.
   (c) Değişmez
   (d) Durur.

17. Sönümlü harmonik harekette sönüm nereden kaynaklanır?
   (a) Yay kuvvetinden.
   (b) Sürtünme kuvvetinden.
   (c) Genlikten.
   (d) Potansiyel enerjiden.

18. Fiziksel sarkacın periyodu, aşağıdakilerden hangisiyle orantılı değildir?
   (a) Eylemsizlik momenti
   (b) Kütle
   (c) Eksen-kütle merkezi uzaklığı
   (d) Genlik

19. Harmonik salınıcının başlangıç $t = 0$ zamanı değiştiğinde hangisi değişir?
   (a) Genlik
   (b) Frekans
   (c) Enerji
   (d) Faz açısı

20. Kütle+yay sisteminden oluşan salınıcı dışardan periyodik bir kuvvetle besleniyor. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Dış kuvvetin genliği arttıkça rezonansa yaklaşır.
   (b) Dış kuvvetin genliği azaldıkça rezonansa yaklaşır.
   (c) Dış frekans doğal frekansa yaklaştıkça rezonansa yaklaşır.
   (d) Rezonans gözlenmez.

Problemler

9.1 Basit Harmonik Hareket

9.1 Basit harmonik hareket yapan $m = 2\,\text{kg}$ lık bir cismin konumu, zaman içinde,

$$x = 3\cos 4\pi t \text{ (metre)}$$

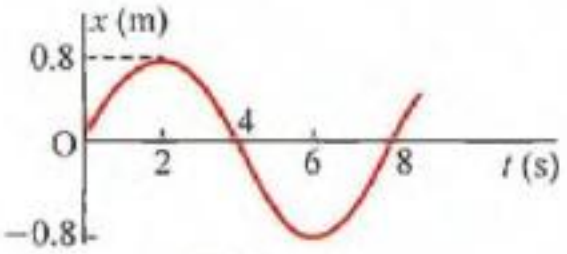
olarak değişiyor. (a) Hareketin genliği, açısal frekansı ve periyodu ne olur? (b) Yayın esneklik sabiti ne kadardır? (c) $t = 1/24\,\text{s}$ anında cismin konumu nedir? (d) $x = -3\,\text{m}$ ve $x = 1.5\,\text{m}$ konumlarına kaç saniyede varır?
[C: (a) $A = 2\,\text{m}$, $\omega = 4\pi\,\text{Hz}$, $T = 0.5\,\text{s}$, (b) $k = 320\,\text{N/m}$, (c) 2.6 m, (d) 1/4 ve 1/12 s.]

9.2 Bir yaya bağlı $m = 0.5\,\text{kg}$ lık kütle 10 saniyede 25 salınım yapabiliyor. (a) Periyot, açısal frekans ve k yay sabiti ne kadardır? (b) Bu cisim denge konumundan itibaren 40 cm çekilip bırakıldığı anda kronometrede $t = 0$ zamanı başlatı-

lıyor. Basit harmonik hareketin denklemini kurun.
[C: (a) $T = 0.4\,\text{s}$, $\omega = 5\pi\,\text{Hz}$, $k = 125\,\text{N/m}$, (b) $x = 0.4\cos 5\pi t$.]

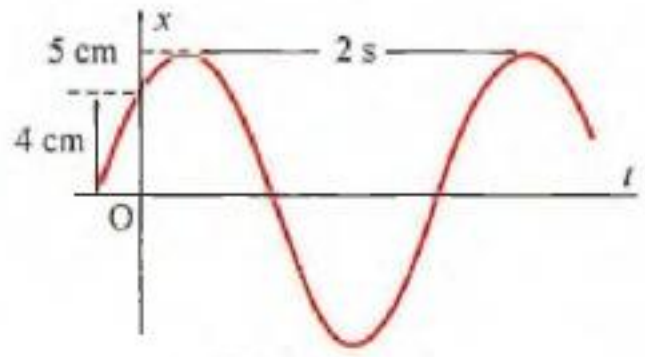
9.3 $k = 75\,\text{N/m}$ sabitli yaya bağlı $m = 3\,\text{kg}$ lık kütle, denge konumundan 50 cm çekilip bırakılıyor. (a) Maksimum hızı ve ivmesi ne kadar olur? (b) $x = 20\,\text{cm}$ konumlu yerden geçerken hızı ve ivmesi ne kadardır?
[C: (a) $2.5\,\text{m/s}$, $12.5\,\text{m/s}^2$, (b) $1.5\,\text{m/s}$, $-0.5\,\text{m/s}^2$.)

9.4 Basit harmonik hareket yapan bir cismin açısal frekansı 2 Hz dir. Bu cisim $x = 1\,\text{m}$ konumlu yerden $v = 4.8\,\text{m/s}$ hızıyla geçiyor. (a) Hareketin genliği ne kadardır? (b) Maksimum hızı ne olur? [C: (a) 2.6 m, (b) 5.2 m/s.]



Problem 9.5

9.5 Bir yaya bağlı $m = 2\,\text{kg}$ lık kütlenin salınım hareketi üstteki şekilde gösterilmiştir. (a) Açısal frekansı ve yay sabitini bulun. (b) Bu hareketin denklemini yazın.
[C: (a) $\omega = \pi/4$, $k = 1.25\,\text{N/m}$, (b) $x = 0.8\sin\pi t/4$.]



Problem 9.6

9.6 Şekilde gösterilen basit harmonik hareketin denklemini yazın. [C: $x = 0.05\cos(\pi t - 37°)$.]

9.7 $k = 72\,\text{N/m}$ sabitli yaya bağlı $m = 2\,\text{kg}$ kütleli sistemin toplam enerjisi 900 J dur. (a) Salınım hareketinin genliği ne kadar olur? (b) Sistemin kinetik enerjisi 500 J olduğunda, yayın uzaması ne kadardır? [C: (a) 5 m, (b) 3.3 m.]

9.8 Kütlesi 1200 kg olan bir otomobilin kaportasına üstten bastırıp bırakıldığında, titreşim frekansı 3 Hz oluyor. Bu otomobile, herbiri ortalama 70 kg gelen 5 kişi bindiğinde, titreşim frekansı ne kadar olur? [C: 2.6 Hz.]

9.9 Basit harmonik hareket yapan bir sistemde, (a) Hangi x/A oranında sistemin kinetik enerjisi potansiyel enerjinin 2 katı olur? (b) $x = A/5$ olduğu konumunda kinetik ve potansiyel enerjilerin oranı ne kadardır?
[C: (a) $x/A = 1/\sqrt{3}$, (b) $K/U = 4$.]

9.10 Açısal frekansı 3 Hz olan bir harmonik salınıcıda kütle, denge konumundan 5 m çekilip bırakılıyor. Kütle $x = 4\,\text{m}$ konumundan geçerken $t = 0$ zamanı başlatılıyor. Faz açısını bulun ve harmonik hareketin denklemini yazın.
[C: $x = 5\cos(3t + 37°)$.]

9.11 Bir harmonik hareketin denklemi,

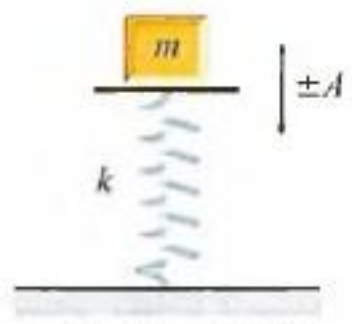
$$x = 4\cos(\pi t - \pi/3)$$

olarak veriliyor. (a) Başlangıç anındaki konumu nedir? (b) Maksimum konuma hangi anda ulaşır?
[C: (a) 2 m, (b) 0.33 s.]



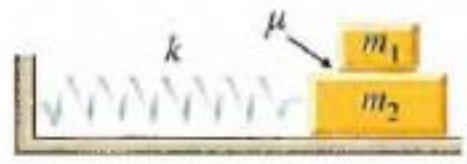
Problem 9.12

9.12 Kütlesi $m = 50\,\text{g}$ ve hızı $v = 200\,\text{m/s}$ olan bir mermi, sürtünmesiz yatay düzlemde $k = 64\,\text{N/m}$ sabitli yaya bağlı olan $M = 950\,\text{g}$ lık tahta bloğa saplanıyor. Oluşan harmonik hareketin açısal frekansını ve genliğini hesaplayın.
[C: $\omega = 8\,\text{Hz}$, $A = 1.25\,\text{m}$.]



Problem 9.13

9.13 Düşey yönde titreşim yapabilen $k = 50\,\text{N/m}$ sabitli bir yayın tablasına $m = 1\,\text{kg}$ kütlesi konulmuştur. Kütlenin tabladan ayrılmaması için titreşim hareketinin genliği en fazla ne kadar olmalıdır? Tablanın kütlesi ihmal edilebilir. (*Yol gösterme:* Salınım hareketinin maksimum ivmesini gözönüne alın.) [C: $A < 0.2\,\text{m}$.]



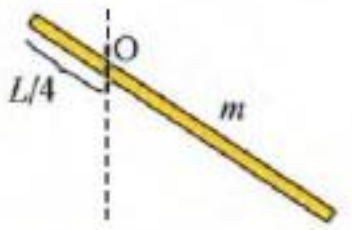
Problem 9.14

9.14 Sürtünmesiz yatay düzlemde $k = 60\,\text{N/m}$ sabitli yaya bağlı olan $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütlesinin üstüne $m_1 = 1\,\text{kg}$ kütlesi konmuştur. İki kütle arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.5$ dir. Üstteki kütle kaymadan, iki kütlenin birlikte salınım yapabilmesi için, genlik en fazla ne kadar olmalıdır? (*Yol gösterme:* Sürtünme kuvvetinin tek başına m_1 kütlesine verebileceği maksimum ivme ile salınım hareketinin maksimum ivmesini karşılaştırın.)
[C: $A < 0.25\,\text{m}$.]

9.2 Sarkaç Hareketi

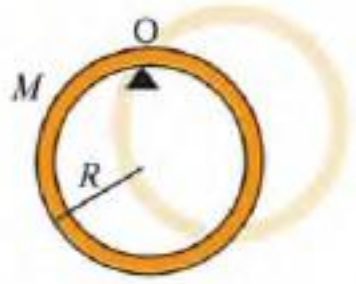
9.15 Yerkürenin kutuplarda daha basık olması ve ekvatorda merkezcil ivmenin daha büyük olmasının birlikte etkisiyle, ekvatorda $g = 9.78\,\text{m/s}^2$ iken, kutuplarda $g = 9.83\,\text{m/s}^2$ olur. Ekvatorda periyodu 1 saniye olan bir sarkaçlı saat, kutuplarda 1 günde ne kadar geri kalır? [C: 87 s.]

9.16 Uzunluğu 2.5 m olan bir basit sarkaç denge konumundan 5° ayrılıp bırakılıyor. (a) Denge konumuna kaç saniyede gelir? (b) $\theta = 2.5°$ açısına kaç saniyede gelir?
[C: (a) $T/4 = \pi = 3.14\,\text{s}$, (b) $\pi/6\,\text{s}$.]



Problem 9.17

9.17 Kütlesi m ve uzunluğu $L = 1.20\,\text{m}$ olan bir çubuk, bir ucundan $L/4$ mesafedeki bir O ekseni etrafında dönebilmektedir. Sarkaç hareketinin periyodunu hesaplayın. [C: 5.5 s.]



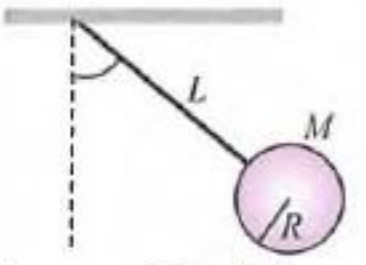
Problem 9.18

9.18 Kütlesi M ve yarıçapı R olan bir çember, şekilde görüldüğü gibi, bir çiviye asılmıştır. Çemberin O ekseni etrafındaki salınım periyodunun

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

olduğunu gösterin.

9.19 Kütlesi $m = 1\,\text{kg}$ olan katı bir cisim, kütle merkezinden 20 cm uzakta bir eksen etrafında salındığında, periyodu 2 s oluyor. Katı cismin kütle merkezine göre eylemsizlik momentini hesaplayın. [C: $0.84\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.]



Problem 9.20

9.20 Şekilde, $L = 1\,\text{m}$ uzunlukta ipin ucuna asılmış olan $R = 20\,\text{cm}$ yarıçaplı dolu kürenin salınım periyodunu hesaplayın. Dolu kürenin merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{2}{5}MR^2$ dir. [C: 2.2 s.]

10 DALGALAR



İstanbul Boğazı'nda dalgalar. Bir dalga hareketinde gerçekten ilerleyen şey nedir? Beraberinde neyi iletir?

Bir göldeki suya taş attığımızda oluşan dalgaların nasıl çevreye yayıldığını biliriz. Keza, bir ipi ucundan salladığımızda ip boyunca dalgaların ilerlediğini görmüşüzdür.

Fakat dikkat edilirse, bu yayılan şey maddenin kendisi değildir. Dalgalı bir suda yüzen şişeyi izlerseniz, dalga geçerken şişenin yukarı aşağı inip çıktığını ama dalgayla beraber ilerlemediğini görürsünüz. O halde, ilerleyen şey nedir? İlerleyen şey enerji ve momentumdur. Her su molekülü, bulunduğu yerde inip çıkarken, aldığı enerji ve momentumu bir sonrakine iletir. Belli bir uyum içinde iletilen enerji ve momentum, dalganın yayılmasına aracılık etmiş olur.

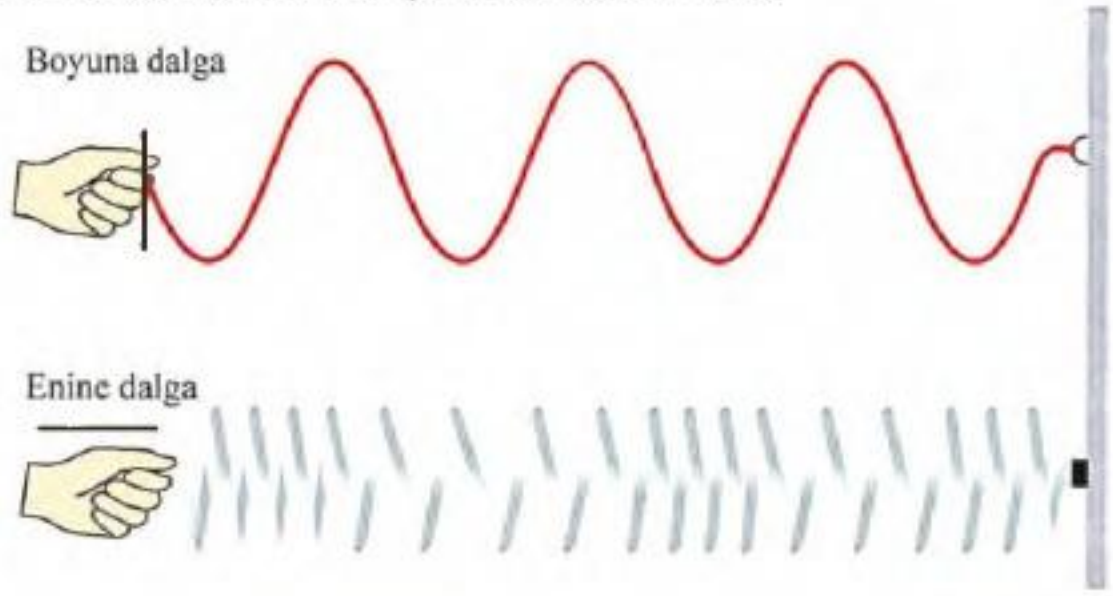
Bir ortamda, herhangi bir değişim, tireşim veya tedirgemenin yayılmasına **dalga** denir. Doğada dalga hareketi çok çeşitli olabilir: Ses dalgası, ısı dalgası, ışık dalgası, kimyada konsantrasyon dalgası, hatta ekonomide para dalgalanmasından sözedilir.



Şekil 10.1: Dalga ilerlerken şişe ilerlemez, sadece yukarı-aşağı inip çıkar.

10.1 DALGALARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

Dalgalar çeşitli özelliklerine göre sınıflandırılabilirler. En genel olarak, tedirgemenin türüne göre, iki tür dalga vardır (Şekil 10.2):



Şekil 10.2: Enine ve boyuna dalgalar.

- **Enine dalgalar:** Tedirgeme dalganın ilerleme yönüne dik olur. Bir teldeki dalgalar buna iyi bir örnektir.
- **Boyuna dalgalar:** Tedirgeme dalganın ilerleme yönüyle aynı olur. Spiral bir yayı sıkıştırıp gevşettiğimizde, oluşan dalganın yay boyunca ilerlediği gözlenir.

  Boyuna dalgalara en iyi örnek ses dalgalarıdır. Ses dalgası hava moleküllerinin dalga doğrultusunda ileri-geri hareketinden oluşur.

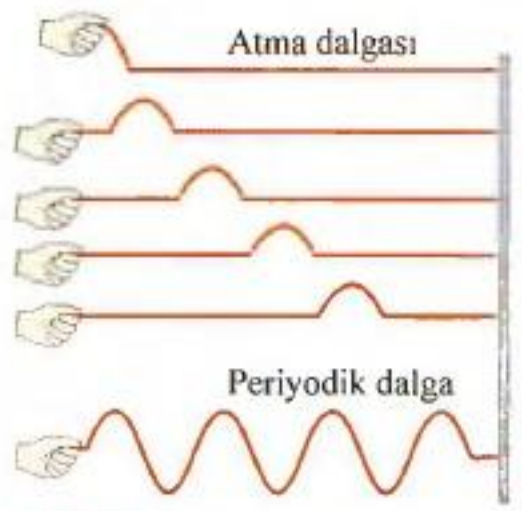


Şekil 10.3: Ses dalgası boyuna dalgadır.

Diğer bir sınıflandırma, dalganın içinde ilerlediği ortama göre yapılır:

- **Mekanik dalgalar:** Dalganın ilerleyebilmesi için esnek bir ortama ihtiyaç vardır. Bir teldeki dalga, teli hareket ettirerek ilerler. Ses dalgası hava ortamı olmazsa ilerleyemez.
- **Elektromanyetik dalga:** Boş uzayda ilerleyebilir, esnek bir ortama ihtiyaç yoktur. Diğer bir deyişle, tüm uzayı dolduran elektromanyetik alandaki tedirgemeler dalgayı oluşturur.

Bu bölümde sadece mekanik dalgaları ele alacağız. Elektromanyetik dalgalara ışık bahsinde değinilecektir.



Şekil 10.4: Atma dalgası ve periyodik dalga.

Dalgaların diğer bir sınıflandırması zamana bağımları yönünden olur:

- **Periyodik dalga:** Tedirgeme zaman içinde kendini tekrarlayarak ilerler. Örneğin, bir ipin ucun titreşim hareketi yapıyorsa, telde ilerleyen dalga periyodik olur.
- **Atma dalgası:** Sadece bir tedirgemenin ilerlemesidir. Örneğin, telin ucunu bir defa sarsıp bırakırsak, bir tek bu sarsmanın ilerlediğini gözleriz:

Hangi tür olursa olsun, her dalganın bir **ilerleme hızı** vardır. Bu hız v ile gösterilir. Eğer ortam homojen ise v hızı sabit olur.

Dalga Hızı

Bir ortamdaki dalga hızı yoğunluk, sıcaklık, basınç, gerilme kuvveti ... gibi ortamın çeşitli özelliklerine bağlıdır. Telde enine dalgalar, su dalgaları veya ses dalgaları için dalga hızı, ortamın özellikleri cinsinden hesaplanabilir.

Herbiri ayrı yöntem gerektiren bu hızların nasıl çıkarıldığına girmeden, sadece sonuçları verelim:

- **Telde dalga hızı:** Bir telin boyca yoğunluğu $\mu = m/\ell$ (kg/m) olarak tanımlanır. Buna göre, telin iki ucu arasında F gerilme kuvveti uygulanmışsa,

dalga hızı,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(Telde dalga hızı)} \qquad (10.1)$$

bağıntısıyla bulunur. (Burada, T periyodu ile karışmaması için, gerilme kuvveti F ile gösterildi.) Tel ne kadar kuvvetli gerilmişse dalga hızı o kadar büyük olur. Daha yoğun malzemeden yapılmış tellerde dalga hızı daha küçük olur.

- **Havada ses hızı:** Kütle yoğunluğu ρ (kg/m^3) olan bir gazın basıncı P ise, bu gaz içinde ses dalgalarının hızı,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \text{(Havada ses hızı)} \qquad (10.2)$$

Burada γ gazın termodinamik özelliklerini betimleyen boyutsuz bir sabit olup, hava için yaklaşık $\gamma = 1.4$ kadar olur.

- **Sıvı dalgaları:** Dalga hızı, λ dalgaboyuna ve sıvının h derinliğine bağlıdır:

$$v = \begin{cases} \sqrt{gh} & \text{(Sığ sularda : } h \ll \lambda) \\ \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}} & \text{(Derin sularda : } h \gg \lambda) \end{cases} \qquad (10.3)$$

- **Elektromanyetik dalga:** Boşlukta elektromanyetik dalganın hızı c ışık hızına eşittir:

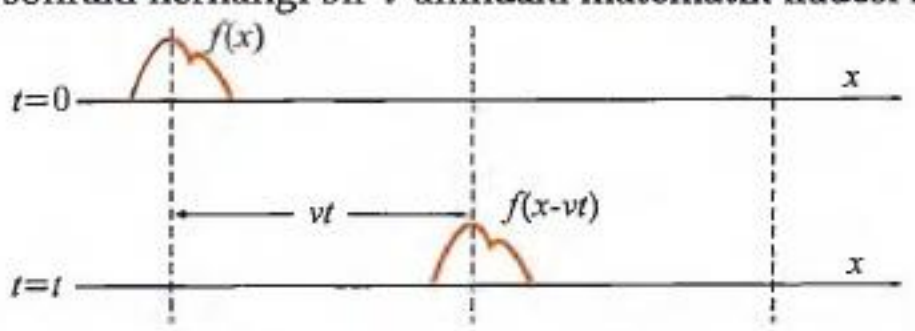
$$v = c = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Madde ortamına girildiğinde elektromanyetik dalganın hızı küçülür. Kırılma indisi n olan bir ortamda elektromanyetik dalga hızı,

$$v = \frac{c}{n} \qquad \text{olur.}$$

Dalga Fonksiyonu

İlerleyen bir dalganın matematik ifadesi nasıl olur? Şekil 10.5 de, bir telde v hızıyla $+x$ yönünde ilerleyen bir atma dalgasının değişik iki zamandaki görüntüleri yer almaktadır. $t = 0$ anında telin profili $f(x)$ gibi bir fonksiyon olsun. Bu dalganın daha sonraki herhangi bir t anındaki matematik ifadesi nasıl olur?



Şekil 10.5: v hızıyla ilerleyen bir dalganın değişik zamanlardaki görüntüsü.

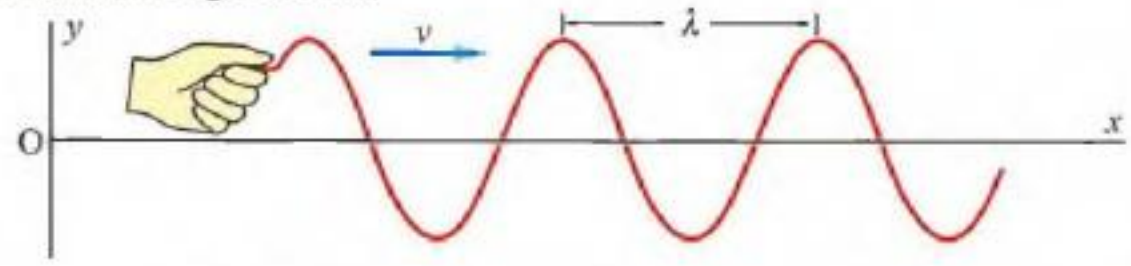
Dikkat edilirse dalga, f fonksiyonuyla verilen profili değişmeden, sadece ötelenmektedir. $t = 0$ anındaki dalga, her t anında komple $+vt$ kadar ötelenmiş olur. O halde, aynı fonksiyonu $+vt$ kadar öteleyerek yazmak yeterlidir. Bu da $f(x-vt)$ fonksiyonu olur. (Bunu basit bir fonksiyonla kontrol edebilirsiniz: $y = x$ fonksiyonu x-eksenini 0 da keser, ama $y = x - a$ fonksiyonu $+a$ da keser, $y = x - 2a$ fonksiyonu $+2a$ da keser...)

O halde, $f(x - vt)$ *yapısındaki her fonksiyon* $+x$ *yönünde* v *hızıyla ilerleyen bir dalgayı temsil eder.*

Bunun tersi de doğrudur: $f(x + vt)$ yapısındaki her fonksiyon $-x$ yönünde v hızıyla ilerleyen bir dalgayı temsil eder.

Sinüsel Dalga

Bir telin serbest ucunu periyodik olarak titreştirmeye başladığımızda, bu titreşimler tel boyunca yayılan sinüsel bir dalga oluştururlar. Şekil 10.6 da x-ekseni boyunca uzatılmış telin y-doğrultusundaki yerdeğiştirmesi gösterilmiştir. Bu profil sinüs veya kosinüs olarak gösterilebilir. Şimdi, sinüsel dalgalar için gerekli kavramları öğrenelim.



Şekil 10.6: Sinüsel bir dalgada iki maksimum arasındaki uzaklık dalgaboyu λ olur.

Dalgaların uzayda periyodik oluşunu belirtmek için dalgaboyu tanımlanır. Bir dalganın iki maksimumu arasındaki uzaklığa **dalgaboyu** denir ve λ (lamda) ile gösterilir.

Bu dalga titreşim periyodu T olan bir kaynaktan üretiliyorsa ve dalga v hızıyla yayılıyorsa, iki maksimum arasındaki λ uzaklığı şöyle yazılabilr:

$$\text{dalgaboyu} = \text{hız} \times (\text{bir titreşim için geçen zaman})$$
$$\lambda = vT \tag{10.4}$$

Bir dalganın maksimum yerdeğiştirmesine **genlik** denir ve A ile gösterilir.

Telin $t = 0$ anındaki profilini sinüs fonksiyonu olarak yazalım. Dalgaboyu λ ve genliği A olan bu fonksiyon,

$$y = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \tag{10.5}$$

olur. Burada 2π çarpanı, dalganın λ nın katları olan konumlarda periyodik olmasını sağlamak için eklenmiştir.

Şimdi, $t = 0$ anındaki bu tel profilinin v hızıyla ilerleyen bir dalga olmasını sağlayalım. Bunun nasıl yapıldığını yukarda görmüştük: $f(x)$ fonksiyonu yerine $f(x - vt)$ alınırsa, $+x$ yönünde ilerleyen bir dalga oluyordu. O halde, v hızıyla ilerleyen sinüsel dalga fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$y = A \sin \frac{2\pi(x - vt)}{\lambda}$$

Bu ifadeyi daha simetrik hale getirmek için $v/\lambda = 1/T$ şeklinde periyodu kullanırsak, sinüsel dalga ifadesi bulunmuş olur:

$$y(x,t) = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \qquad \text{(Sinüsel dalga fonksiyonu)} \tag{10.6}$$

Yerdeğiştirme $y(x,t)$ şeklinde, hem x konumu hem de t zamanına bağlı iki değişkenli bir fonksiyondur.

Bu ifade dalganın hem uzayda hem de zamanda periyodik olduğunu açıkça göstermektedir: $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$ olduğu için, her zaman x konumlu yer ile $x + \lambda$ konumlu yerin y yerdeğiştirmesi aynı, keza her t zamanındaki ve $t + T$ zamanındaki yerdeğiştirme aynı olacaktır.

Diğer bir gösterim şekli için **dalgasayısı** denilen ve k ile gösterilen bir nicelik şöyle tanımlanır:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{(dalgasayısı)} \tag{10.7}$$

Dalgasayısı birim uzunluktaki dalgaboyu sayısının bir ölçüsüdür, ama 2π cinsinden verir. Örneğin, dalgaboyu uzunluğu 1 m, , $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, ... ise, dalgasayısı $k = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ olur.

Diğer taraftan, salınım hareketinden bildiğimiz ω açısal frekansını hatırlayalım:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{10.8}$$

Bu iki büyüklük cinsinden sinüsel dalga şöyle yazılır:

$$\boxed{y(x,t) = A\,\sin(kx - \omega t) \qquad \text{(Sinüsel dalga fonksiyonu)}} \tag{10.9}$$

Eğer, dalga $-x$ yönünde ilerliyorsa, $A\,\cos(kx + \omega t)$ alınır.

Bu ifade tarzı hesaplarda kolaylık sağlar, çünkü x ve t nin katsayıları doğrudan bellidir. Diğer büyüklükler ω ve k cinsinden şöyle ifade edilirler:

$$v = \frac{\omega}{k}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{10.10}$$

Bu dalga fonksiyonlarında bir de ϕ kadar bir faz açısı olabilirdi. Faz açısını gerektiği yerde ekleyeceğiz.

Örnek 10.1

Sesin havadaki hızı 340 m/s *dir. Bir müzik aletinden çıkan 'La' notasının frekansı* 440 Hz *dir. 'La' notasının dalga boyunu hesaplayın.*

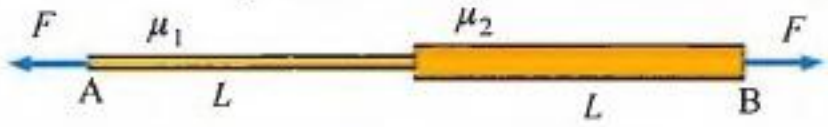
Çözüm

Frekans ile dalga boyu arasındaki ilişki yazılır:

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{f} = \frac{340}{440} = 0.77\,\text{m} = 77\,\text{cm}.$$

Örnek 10.2

Uç uca eklenmiş ve eşit $L = 1\,\text{m}$ *uzunlukta iki telden birincisinin boyca yoğunluğu* $\mu_1 = 0.1\,\text{kg/m}$, *diğerininki* $\mu_2 = 0.2\,\text{kg/m}$ *dir. Her iki tele* $F = 40\,\text{N}$ *gerilme kuvveti uygulanmıştır. Bu bileşik telde bir dalga, A ucundan B ucuna ne kadar zamanda gider?*



Çözüm

Önce, herbir tel için dalga hızı, (10.1) formülü ile hesaplanır:

$$v_1 = \sqrt{F/\mu_1} = \sqrt{40/0.1} = 20\,\text{m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{F/\mu_2} = \sqrt{40/0.2} = 4.5\,\text{m/s}$$

Hızı v olan bir dalganın L uzunluğunu katetme zamanı L/v dir. Buna göre, toplam zaman hesaplanır:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{4.5} = 0.27\,\text{s}$$

Örnek 10.3

Boyca yoğunluğu $\mu = 0.1\,\text{kg/m}$ *olan bir teldeki sinüsel dalga,*

$$y(x,t) = 0.03\,\sin(5\pi x - 0.4t) \quad \textit{(metre)}$$

olarak veriliyor.

(a) *Dalga genliği, dalgaboyu, periyot ve dalga hızı nedir?*

(b) *Teldeki gerilme kuvveti ne kadardır?*

Çözüm

(a) Dalga $A\,\sin(kx - \omega t)$ formunda verildiği için, doğrudan şunları yazabiliriz:

$$A = 0.03\,\text{m}, \quad \omega = 5\pi\,\text{Hz}, \quad k = 0.4\,\text{m}^{-1}$$

Diğerleri (10.10) formülleriyle bulunur:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{5\pi}{0.4} = 12.5\pi\,\text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi\,\text{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0.4\,\text{s}$$

(b) Teldeki dalga hızı için bulunan (10.1) formülü kullanılır:

$$v = \sqrt{F/\mu} \;\rightarrow\; F = \mu v^2$$

Sayısal değerler yerine konur:

$$F = 0.1 \times (12.5\pi)^2 = 154\,\text{N}.$$

Örnek 10.4

Aşağıda fonksiyonları verilen dalgaların, hangi yönde ve hangi hızla gittiklerini tayin edin.

(a) $y = 2\ \sin(3x - 18t)$
(b) $y = 3\ \cos(4t - 10x)$
(c) $y = 4\ \sin(3x + 21t)$

Çözüm

Bir fonksiyon $f(x - vt)$ yapısında ise, $+x$ yönünde v hızıyla ilerleyen dalgadır. Fakat, $f(x+vt)$ yapısında ise, $-x$ yönünde ilerleyen dalga olur.

O halde, verilen fonksiyonları (genlik veya işaretleri gözönüne almadan) bu şekle dönüştürelim:

(a) $\sin(3x - 18t) = \sin[3(x - 6t)]$

$\rightarrow\ v = 6\,\text{m/s},\ +\text{x yönünde}$

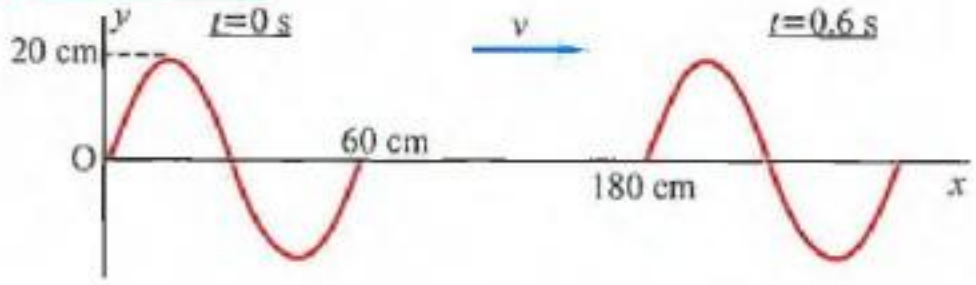
(b) $\cos(4t - 10x) = \sin[-10(x - \frac{2t}{5})]$

$\rightarrow\ v = \frac{2}{5}\,\text{m/s},\ +\text{x yönünde}$

(c) $\sin(3x + 21t) = \sin[3(x + 7t)]$

$\rightarrow\ v = 7\,\text{m/s},\ -\text{x yönünde}$

Örnek 10.5



Bir teldeki sinüsel dalganın şekli, $t = 0$ ve $t = 0.6\,\text{s}$ zamanlarında şekilde gösterilmiştir. Bu dalganın fonksiyonunu çıkarın.

Çözüm

Şekil incelendiğinde genlik ve dalgaboyu hemen görülmektedir:

$$A = 0.20\,\text{m}, \qquad \lambda = 0.60\,\text{m}$$

Dalga hızını bulmak için, $t = 0$ anında orijinde olan noktanın $t = 0.6\,\text{s}$ zamanında $1.80\,\text{m}$ kadar yer değiştirdiğine dikkat edelim. Buna göre, dalga hızı hesaplanır:

$$v = \frac{1.80}{0.6} = 30\,\text{m/s}$$

Buradan, periyot hesaplanır:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.6}{30} = 0.02\,\text{s}.$$

Bu bilgilerle dalga fonksiyonu kurulur:

$$y = A\ \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = 0.2\ \sin 2\pi\left(\frac{x}{0.6} - \frac{t}{0.02}\right)$$

Örnek 10.6

Boyca yoğunluğu $\mu = 0.25\,\text{kg}$ olan bir telin iki ucu $F = 100\,\text{N}$ kuvvetiyle geriliyor. Tel bir ucundan enine doğru $3\,\text{cm}$ çekilip $8\,\text{Hz}$ frekansıyla titreştiriliyor.

(a) *Dalga hızını, periyot ve dalgaboyunu hesaplayın.*
(b) *Oluşan sinüsel dalganın denklemini kurun.*

Çözüm

(a) (10.1) hız formülü kullanılır:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{100}{0.25}} = 20\,\text{m/s}.$$

Periyot ve dalgaboyu hesaplanır:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125\,\text{s}$$

$$\lambda = vT = 20 \times 0.125 = 2.5\,\text{m}.$$

(b) Dalga fonksiyonunu T ve λ cinsinden ifade eden (10.6) formülü kullanılır:

$$y = A\ \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = 0.03\ \sin 2\pi\left(\frac{x}{2.5} - \frac{t}{0.125}\right)$$

10.2 DALGALARIN GİRİŞİMİ, YANSIMA VE GEÇMESİ

Üst-üste Binme İlkesi

İki veya daha fazla dalga aynı ortamda bulunuyorlarsa, bunların birlikte etkisi nasıl olur? Örneğin, bir orkestrada çok sayıda müzik aletinden çıkan ses dalgası kulağımıza hep birlikte etkimektedir. Keza, çok sayıda TV istasyonundan çıkan elektromanyetik dalgalar televizyon antenini aynı anda etkilemektedirler.

Dalgaların birlikte etkisini *üst-üste binme ilkesi* belirler:

Üst-üste Binme İlkesi

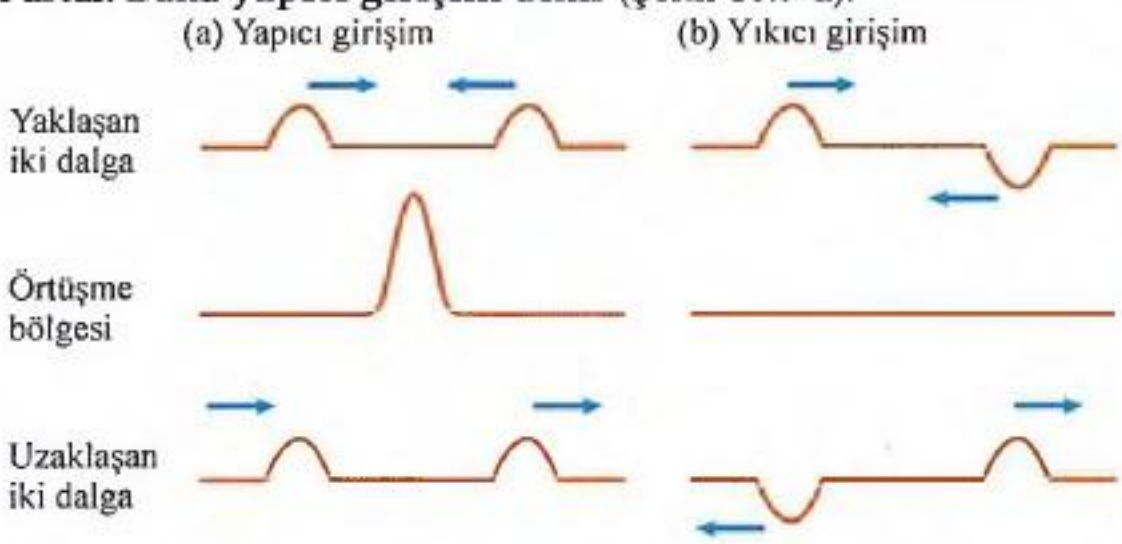
Aynı bir ortamda ilerleyen iki veya daha fazla dalganın bir noktadaki toplam etkisi, dalga fonksiyonlarının cebirsel toplamına eşittir:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x.t) \qquad (10.11)$$

Üst-üste binme ilkesinin kaynağını kabaca şöyle açıklayabiliriz: $f(x-vt)$ yapısındaki fonksiyonların sağladığı bir diferansiyel denklem vardır. Bu denklemin özelliği şudur: y_1, y_2 iki ayrı çözüm ise, bunların toplamı olan y_1+y_2 fonksiyonu da yeni bir çözüm olur.

Üst-üste binme ilkesinden çıkarılabilecek en önemli sonuçları vurgulayalım:

- İki dalga bir noktaya aynı işaretli geliyorsa, o noktanın toplam yerdeğiştirmesi artar. Buna **yapıcı girişim** denir (Şekil 10.7-a).



Şekil 10.7: İki dalganın üst-üste binmesinde, (a) Yapıcı girişim, (b) Yıkıcı girişim.

- İki dalganın bir noktadaki cebirsel toplamı sıfır oluyorsa, o nokta hareketsiz kalır. Buna **yıkıcı girişim** denir (Şekil 10.7-b).
- Dalgalar örtüşüp ayrıldıktan sonra, önceki şekilleri bozulmadan yollarına devam ederler. Diğer bir deyişle, sanki hiç etkileşmemiş gibidirler.

Girişim

Yukarda sözünü ettiğimiz yapıcı ve yıkıcı girişimi daha somutlaştırmak üzere, aynı ortamda ilerleyen iki sinüsel dalga gözönüne alalım. En basit durumda, iki dalganın genlik, dalgaboyu ve frekansları eşit olsun. Aralarındaki tek fark, birinin ϕ açısı kadar bir faz farkı olsun:

$$\begin{aligned} y_1 &= A\,\sin(kx-\omega t) \\ y_2 &= A\,\sin(kx-\omega t+\phi) \end{aligned}$$

Üst-üste binme ilkesine göre, ortamdaki toplam dalga bu ikisinin cebirsel toplamı olacaktır:

$$y = y_1 + y_2 = A\,\sin(kx-\omega t) + A\,\sin(kx-\omega t+\phi)$$

Trigonometrideki bir özdeşliği bu toplama uygularsak,

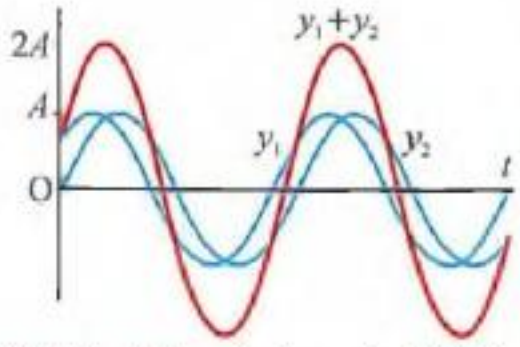
$$\sin a + \sin b = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(kx-\omega t) + \sin(kx-\omega t+\phi) = 2\,\sin(kx-\omega t+\phi/2)\,\cos(-\phi/2)$$

$\cos(-a) = \cos a$ olduğu için, toplam dalga fonksiyonu sonuçta şöyle yazılabilir:

$$y = \underbrace{\left[2A\,\cos(\phi/2)\right]}_{A'}\,\sin(kx-\omega t+\phi/2) \qquad (10.12)$$

Buradaki $\sin(kx-\omega t+\phi/2)$ terimi, bu ifadenin yine $+x$ yönünde, aynı dalgaboyu ve freklansla ama $\phi/2$ faz farkıyla ilerleyen bir dalga olduğunu gösterir. Bunun



Şekil 10.8: Aralarında küçük bir faz farkı olan özdeş iki dalganın girişimi.

önündeki $2A\cos\phi/2$ çarpanı, x ve t den bağımsız olup, bu yeni dalganın genliği sayılır:

$$y = A' \sin(kx - \omega t + \phi/2) \qquad A' = 2A\cos(\phi/2) \tag{10.13}$$

Faz açısının iki özel durumuna bakalım:

- $\phi = 0°$ yani iki dalga aynı fazda ise, $\cos 0° = 1$ olur. O zaman, y dalga fonksiyonu aynı dalganın $2A$ genlikli hali olur. Buna **yapıcı girişim** diyoruz.
- $\phi = 180°$ yani iki dalga zıt fazda ise, $\cos\phi/2 = 0$ olur. Bu durumda, x ve t nin her değerinde, $y = 0$ olur ve iki dalga birbirini söndürür. Buna da **yıkıcı girişim** denir.

Burada en basit örnek olarak, özdeş iki dalganın girişimini ele aldık. Oysa, çok daha genel durumda girişim, dalgaboyu ve frekansı farklı iki dalga arasında olur.

Durağan Dalga

Diğer önemli bir girişim örneği, zıt yönde ilerleyen iki dalganın yaptığı girişimdir. Aynı ortamda, biri $+x$ yönünde diğeri $-x$ yönünde ilerleyen aynı genlik, aynı dalgaboyu ve aynı frekansa sahip iki dalga gözönüne alalım:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \qquad (+x \text{ yönünde ilerleyen dalga})$$
$$y_2 = A\sin(kx + \omega t) \qquad (-x \text{ yönünde ilerleyen dalga})$$

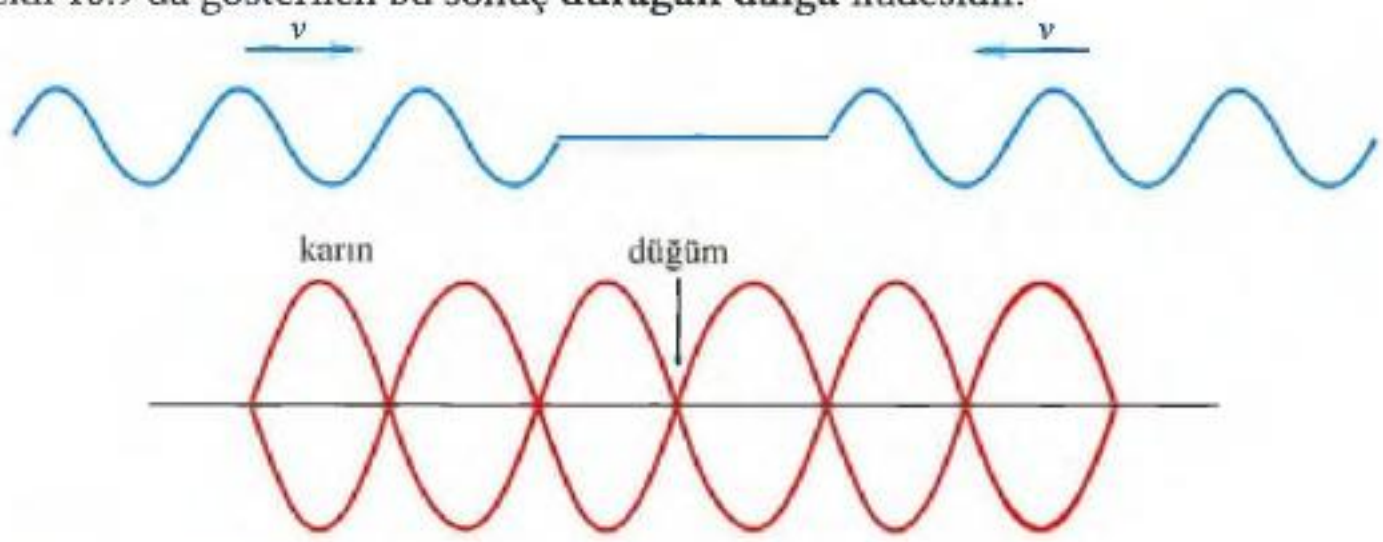
Üst-üste binme ilkesine göre, ortamdaki toplam dalga fonksiyonu,

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

olur. Yine, yukarda kullandığımız trigonometrik özdeşliği hatırlarsak,

$$y = 2A\sin kx\sin\omega t \tag{10.14}$$

Şekil 10.9 da gösterilen bu sonuç **durağan dalga** ifadesidir.



Şekil 10.9: Zıt yönde ilerleyen iki dalganın oluşturduğu durağan dalga.

Durağan dalgaların önemli noktalarını vurgulayalım:

- Bu dalga artık ilerleyen bir dalga değildir, çünkü $f(x - vt)$ şeklinde yapısı yoktur. Bir saz telinde oluşan dalgayı gözlerseniz, ilerlemediğini görürsünüz. Her nokta farklı genlikte titreşim hareketi yapar. Bu, genliği $A' = A\sin kx$ olan $\cos\omega t$ titreşim hareketidir:

$$y = \underbrace{[2A\sin kx]}_{A'}\sin\omega t$$

- Bazı x değerlerindeki noktalar hiç hareket etmezler. **Düğüm** denilen bu yerler $\sin kx = 0$ değerlerinde oluşur:

$$\sin kx = 0 \qquad \longrightarrow \qquad kx = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$$

Dalgasayısı için $k = 2\pi/\lambda$ tanımı kullanılırsa,

$$x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2}\ \ldots = n\,\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(Düğümler)} \qquad (10.15)$$

- Bazı x değerlerindeki noktalar maksimum genlikte titreşirler. **Karın** denilen bu yerler $\sin kx = 1$ değerlerinde oluşur:

$$\sin kx = 1 \qquad \longrightarrow \qquad kx = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$x = \frac{\lambda}{4},\ \frac{3\lambda}{4},\ \frac{5\lambda}{4}\ \ldots = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(Karınlar)} \qquad (10.16)$$



Şekil 10.10: Laboratuvarda üretilen bir durağan dalga (Lecture Demonstration Services, Harvard Science Center).

Bir Müzik Aletinde Harmonikler

Keman, saz, gitar gibi aletlerde iki ucu tespit edilmiş bir telde dalga üretilir. Yukardaki durağan dalga incelememize göre, bu telin sabit iki ucu düğüm noktası olmak zorundadır. O halde, L uzunluğundaki bir telin $x = 0$ ve $x = L$ noktaları şu koşulu sağlamalıdır:

$$\sin k.0 = \sin kL = 0$$

Buradan, yukarda düğüm noktaları için bulduğumuz (10.15) formülü çıkar. Bunu, dalgaboyu için yazarsak,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

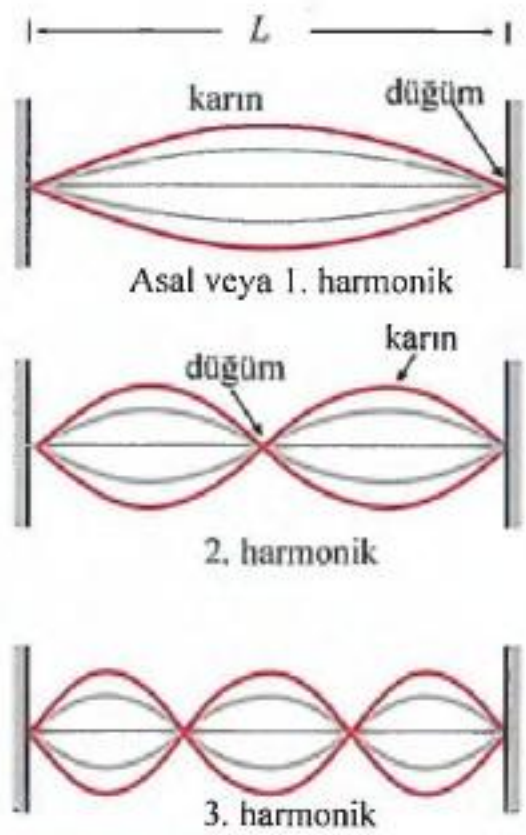
Bu sonuca göre, iki ucu tespit edilmiş bir telde ancak λ_n değerlerindeki dalgaboyuna sahip dalgalar üretilebilir.

Bu dalgaboylarını frekansa dönüştürmek için $f = v/\lambda$ bağıntısını kullanırız:

$$f_n = n\,\frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (10.17)$$

Burada, teldeki dalga hızı için daha önce verdiğimiz (10.1) formülünü de hatırlatalım:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



Şekil 10.11: L uzunluğunda bir telde harmonikler.

Belli uzunlukta ve belli gerginlikteki bir telin üretebileceği bu titreşimlere **normal titreşim kipleri** adı verilir. Bunlardan, $n = 1$ olanına **asal frekans** denir:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \qquad \text{(Bir telin asal frekansı)} \qquad (10.18)$$

Bir müzik aletini "akort" ederken telin gerginliğini değiştirerek, istenilen frekansta kararlı dalga üretmesini sağlarız.

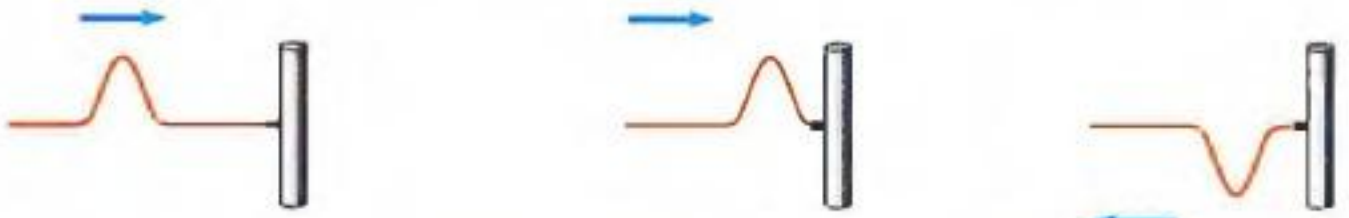
Diğer $n = 2, 3, \ldots$ değerlerindeki $f_n = 2f_1, 3f_1 \ldots$ frekanslarına da **harmonikler** adı verilir.

Tını: Bir keman sesini saz sesinden ayıran özelliğe *tını* denir. Tını bu harmoniklerden kaynaklanır. Her alette asal frekansla birlikte bu harmoniklerden birkaçı daha üretilir. Bu harmoniklerin hangi miktarda olduğu, o müzik aletinin türüne bağlıdır. Kemanda farklı bir harmonik karışımı, sazda ayrı bir harmonik karışımı oluşur.

Dalgaların Yansıma ve Geçmesi

Bir dalga engelle karşılaştığında veya ortamın sonuna geldiğinde nasıl davranır? Eğer ikinci ortam da esnek ise, dalganın bir kısmı geçecek, diğer kısmı geri yansıyacaktır. Yansıma ve geçmenin ayrıntılı hesabına girmeden, genel kurallarını burada gözden geçirelim.

Şekil 10.12 de bir ucu duvara tespit edilmiş olan gergin bir telde duvara doğru ilerleyen bir dalga görülmektedir. Dalga duvara eriştiğinde, ikinci tarafa geçemiyeceği için, tümüyle geri yansır. Fakat, bu yansıma sırasında telin duvara bağlanan A noktası, üst-üste binme ilkesi uyarınca, hareketsiz kalmalıdır. Bunu sağlamanın tek yolu, yansıyan dalganın gelen dalga ile zıt fazda olmasıdır.



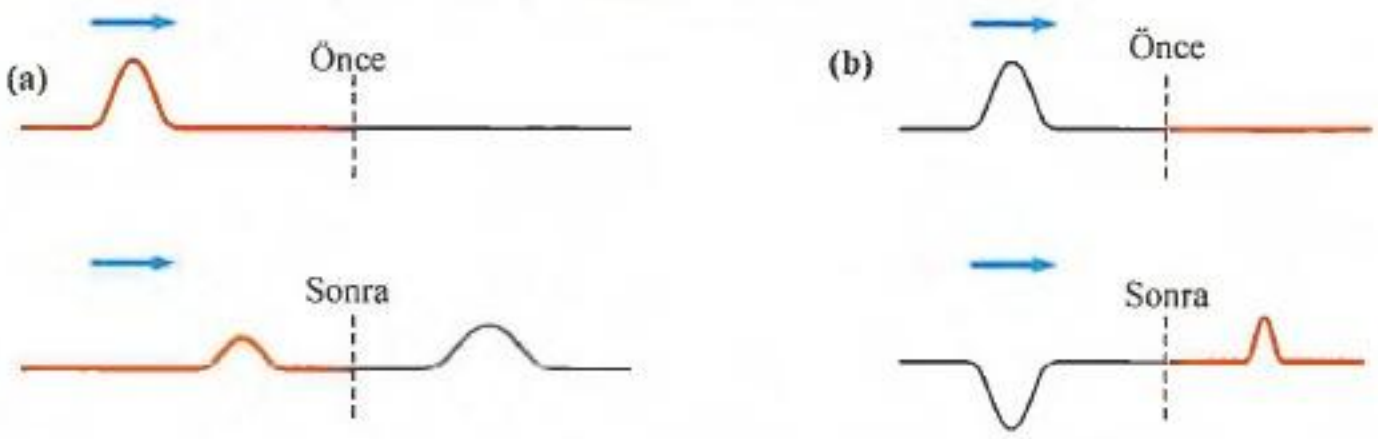
Şekil 10.12: Sabit bir uçtan yansıyan dalga 180° zıt fazda olur.

O halde, **sabit uçtan yansıyan dalga, gelen dalgayla zıt fazda olur.** Bunu görmenin diğer bir düşünce yolu şudur: Tel duvara dalga ile vurduğu anda, Newton'un üçüncü yasasına göre, duvar da teli eşit ve zıt bir kuvvetle geri itecektir. Yani, dalga yukarı yönde yerdeğiştirmek istiyorsa, aşağı doğru itilecektir.



Şekil 10.13: Serbest bir uçtan yansıyan dalga aynı fazda olur.

Buna karşılık, telin ucu serbestçe titreşebiliyor olabilir. Örneğin duvara bağlandığı yerde sürtünmesiz yukarı-aşağı kayabilen bir bilezik düşünebiliriz (Şekil 10.13). Bu durumda, yansıma aynı fazda olur, çünkü telin bu ucu, her iki yöndeki dalga için, aynı yönde yerdeğiştirmektedir.



Şekil 10.14: (a) Daha yoğun bir ortamdan gelen dalga aynı fazda yansır. (b) Daha yoğun bir ortama geçmek isteyen dalga zıt fazda yansır.

Bu iki uç durum dışında, genellikle dalga ikinci bir esnek ortama kısmen geçer ve kısmen geri yansır. Geri yansıma sırasında faz farkı olup olmaması iki ortamın kütle yoğunluğuna bağlıdır. Dalga daha yoğun bir ortamdan geliyorsa faz farkı olmadan yansır. Tersine, dalga daha yoğun bir ortama geçmek istiyorsa, yansıyan dalga zıt fazda olur. Her iki durum Şekil 10.14 de özetlenmiştir.

Örnek 10.7

Bir tel üzerinde ilerleyen iki dalga,

$$y_1 = 3\sin(5\pi x - 4t)$$
$$y_1 = 3\sin(5\pi x + 4t)$$

olarak veriliyor.

(a) *Oluşan durağan dalganın karın ve düğüm noktalarını tayin edin.*

(b) $x = 0.05$ m *noktasının titreşim genliğini hesaplayın.*

Çözüm

(a) Birbirine zıt yönde ilerleyen $A\sin(kx \pm \omega t)$ dalgalarının oluşturduğu kararlı dalga (10.14) formülüyle bulunmuştu:

$$y = 2A\sin kx\cos\omega t$$

O halde, $k = 5\pi$ ve $\omega = 4$ değerleri bu formülde yerine konulur:

$$y = (6\sin 5\pi x)\cos 4t$$

Düğüm ve karın noktalarını bulmak için önce dalgaboyu hesaplanır:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0.4\,\text{m}.$$

Düğüm noktaları $\lambda/2$ nin tam katlarında, karın noktaları ise $\lambda/4$ ün tek katlarında oluşacaktır:

Düğümler: $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2 \cdots = 0,\ 0.2,\ 0.4 \cdots$ m

Karınlar: $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4 \cdots = 0.1,\ 0.3,\ 0.5 \cdots$ m

(b) Herhangi bir x konumlu yerin titreşim hareketinin genliği $\cos\omega t$ nin katsayısı olur:

$$A' = 2A \sin kx = 6 \sin 5\pi x$$

Bu formülde $x = 0.05$ değeri konularak genlik hesaplanır:

$$A' = 6 \sin 5\pi \times 0.05 = 6 \sin \pi/4 = 6/\sqrt{2} = 4.2\,\text{m}.$$

Örnek 10.8

Uzunluğu 1 m *ve boyca yoğunluğu* 0.1 kg/m *olan bir telin iki ucuna* $F = 100\,N$ *luk gerilme uygulanmıştır. Bu telde oluşan titreşimin asal (1. harmonik) frekansı ve 2. harmonik frekansı ne kadar olur?*

Çözüm

Önce teldeki dalga hızını hesaplayalım:

$$v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{100/0.1} = 33\,\text{m/s}$$

Asal ve harmonik frekansları için formüller çıkarmıştık. Fakat, bunları ezberlemek yerine, dalgaboyu koşulunu hatırda tutmak daha kolaydır.

Asal dalgaboyu, telin içine yarım dalgaboyu yerleşecek şekilde olmalıdır:

$$L = \frac{\lambda_1}{2} \rightarrow \lambda_1 = 2L$$

Dalgaboyu ve v hızı bilinirse, frekans hesaplanır:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{33.3}{2} = 16\,\text{Hz}$$

Benzer şekilde, 2. harmonikte L uzunluğuna 2 tane yarım dalgaboyu sığmalıdır:

$$L = 2\,\frac{\lambda_2}{2} \rightarrow \lambda_2 = L$$

Buradan frekans hesaplanır:

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{33.3}{1} = 33\,\text{Hz}$$

Örnek 10.9

Uzunluğu 80 cm *olan bir telde dalga hızı* 240 m/s *dir.*

(a) *Asal frekans ne kadar olur?*

(b) *İnsan kulağı en fazla* 10 000 Hz *frekanslı sesleri duyabildiğine göre, bu telde duyabileceği en yüksek harmonik ne kadardır?*

Çözüm

(a) Harmonik frekanslarını veren (10.17) formülünü kullanırız:

$$f_n = n\,\frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Asal frekans için bu formülde $n = 1$ alınır:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{240}{2 \times 0.80} = 150\,\text{Hz}.$$

(b) Harmonik frekansları asal frekans cinsinden yazarız:

$$f_n = n\,f_1$$

İnsan kulağının duyabilmesi için, $f_n n$ frekansı 10 000 Hz değerine en yakın olmalıdır:

$$n\,f_1 \le 10\,000 \rightarrow n \le \frac{10000}{150} = 66.7$$

Bu sayıya en yakın değer $n = 66$ olur:

$$f_{66} = 66 \times 150 = 9900\,\text{Hz}.$$

Örnek 10.10

Boyca yoğunluğu $\mu = 0.001$ kg/m *ve uzunluğu* 60 cm *olan bir saz teli, asal frekansı 'DO' notası (frekansı* 262 Hz*) verecek şekilde akortlanmıştır.*

(a) *Tel ne kadar gerilmiştir?*

(b) *Telin neresine parmakla basmalıdır ki 'RE' sesi (frekansı* 294 Hz*) verebilsin?*

Çözüm

Önce dalga hızı hesaplanır:

$$v = \lambda f$$

Asal frekansın dalga boyu $\lambda/2 = L$ olacak şekildedir. Buradan dalga hızı hesaplanır:

$$v = 2L\,f = 2 \times 0.60 \times 262 = 314\,\text{m/s}$$

Bu hızı veren F gerilmesi hesaplanır:

$$v = \sqrt{F/\mu} \rightarrow F = \mu v^2$$

$$F = 0.001 \times 314^2 = 99\,\text{N}$$

(b) Telin gerilmesi değişmediği için dalga hızı v aynıdır. Fakat bu defa, telin boyu L' uzunluğuna getirildiği için asal frekans f' olarak değişir.

$$v = \lambda' f' = 2L' f' \rightarrow L' = \frac{v}{2f'}$$

Re notasının frekansı ve (a) şıkkında bulunan dalga hızı kullanılır:

$$L' = \frac{314}{2 \times 294} = 0.53\,\text{m}.$$

Bu sonuca göre, telin bir ucundan $60 - 53 = 7$ cm içerden parmakla basılmalıdır.

10.3 DOPPLER OLAYI VE ŞOK DALGASI

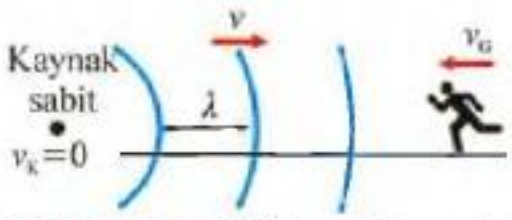
Bu kısımda dalgaların oluşturduğu iki ilginç etkiyi ele alacağız. Doppler olayı denilen etki, dalga kaynağının veya gözlemcinin hareketli olduğu durumda gözlenir. Şok dalgası ise dalga kaynağı dalgadan daha hızlı hareket ettiğinde oluşur.

Her iki etkinin de çok önemli teknolojik uygulamaları vardır.

Doppler Olayı

Bir otobanın kenarında dururken son hızla yanınızdan geçip giden bir otomobilin sesini hiç incelediniz mi? Otomobil yaklaşırken duyduğunuz ses ile uzaklaşırken duyduğunuz ses arasında kulakla ayırdedilebilecek kadar bir fark vardır. Otomobil yaklaşırken sesi biraz daha tiz, uzaklaşırken biraz daha kalın olur. Frekanslar cinsinden ifade edersek, yaklaşan sesin frekansı daha büyük, uzaklaşan sesin frekansı daha küçük olur. Buna Doppler olayı denir.

Doppler olayı hem dalga kaynağı hem de gözlemcinin hareketli olduğu durumlarda da gözlenir. Önce, iki etkiyi ayrı ayrı hesaplayalım.



Şekil 10.15: Sabit ses kaynağı ve kaynağa doğru v_G hızıyla koşan bir gözlemci.

Kaynak sabit, gözlemci hareketli. Şekil 10.15 de görüldüğü gibi, f_0 frekanslı ses çıkaran ve sabit duran bir kaynağın yakınında, bir gözlemci u_G hızıyla kaynağa yaklaşıyor olsun.

Sesin havadaki hızı v ise, duran bir kaynaktan çıkan f_0 frekansı ile dalgaboyu arasındaki ilişkiyi hatırlayalım:

$$f_0 = \frac{v}{\lambda}$$

olur. Diğer bir deyişle, ardışık iki dalga cephesi arasındaki mesafe λ olur. Bu dalganın yere göre hızı v iken, v_G hızıyla koşmakta olan gözlemci dalganın kendisine doğru $v + v_G$ hızıyla geldiğini görür. Bu durumda, gözlemcinin işittiği frekans,

$$f = \frac{v + v_G}{\lambda}$$

olur. Bu iki bağıntı arasından λ dalgaboyu elenir ve terimler yeniden düzenlenirse,

$$f = \frac{v + v_G}{v} f_0 \qquad (10.19)$$

bulunur. Gözlemci sesi daha yüksek bir frekansta işitecektir.

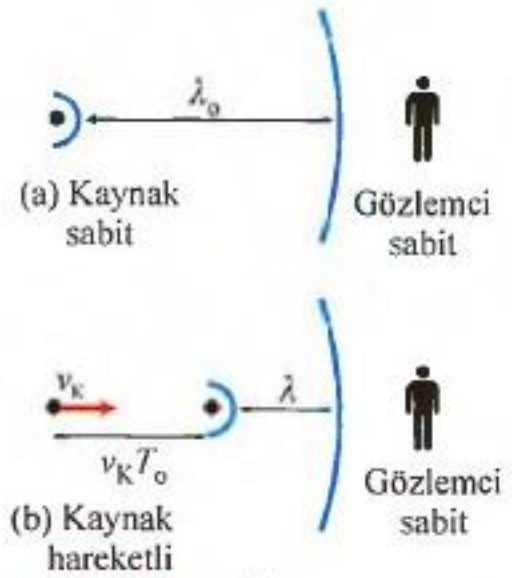
Eğer gözlemci kaynaktan uzaklaşıyorsa, bu kez sesin gözlemciye göre bağıl hızı $v - v_G$ olacaktır. Bu durumda, yukardaki formülde $v + v_G$ yerine $v - v_G$ alınır. Böylece, gözlemcinin işittiği sesin frekansı daha küçük olur.

Kaynak hareketli, gözlemci sabit. Şekil 10.16 da görüldüğü gibi, ses kaynağı, duran bir gözlemciye v_K hızıyla yaklaşıyor olsun. Kaynak sabit iken çıkan sesin frekansı f_0 ve periyodu $T_0 = 1/f_0$ ise, duran kaynaktan çıkan sesin dalgaboyu,

$$\lambda_0 = v T_0 = \frac{v}{f_0}$$

olur. Şimdi, iki dalga cephesinden birincisinin yola çıktığını düşünelim. İkinci cephe yola çıkıncaya kadar geçen zaman içinde kaynak $v_K T_0 = v_K / f_0$ kadar yol almış olacaktır. Bu durumda yeni dalgaboyu, yani ardışık iki cephe arasındaki yeni mesafe,

$$\lambda = \lambda_0 - v_K T_0 = \lambda_0 - \frac{v_K}{f_0}$$



Şekil 10.16: (a) Kaynak sabit iken λ_0 dalgaboyunda ses üretiyor. (b) Kaynak hareket ettiğinde iki cephe arasındaki mesafe (dalgaboyu) küçülüyor.

olur. Duran gözlemci λ dalgaboyuyla gelen sesin frekansım şöyle algılayacaktır:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

λ değeri yerine konur ve yeniden düzenlenirse,

$$f = \frac{v}{v - v_K} f_0 \tag{10.20}$$

bulunur. Gözlemci yine sesi daha yüksek frekansta izleyecektir.

Eğer kaynak gözlemciden uzaklaşıyorsa, formülde v_K değeri eksi alınır. Bu durumda, gözlemcinin işittiği sesin frekansı azalır.

Burada bir noktaya dikkat edelim: Bu formüllerde kaynak ile gözlemcinin hızları simetrik olarak yer almaz. Yani, duran gözlemciye u hızıyla yaklaşan kaynak ile, duran kaynağa aynı u hızıyla yaklaşan gözlemci durumlarında, Doppler etkisi farklı sonuç verir. Çünkü, havada ilerleyen sesin dalgaboyu her iki durumda farklıdır. Bağıl hız bu olguyu değiştirmez.

Hem kaynak hem gözlemci hareketli. Yukarda sadece gözlemci ve sadece kaynak hareketliyken bulduğumuz iki formülü kullanarak, bu durumu kolayca hesaplayabiliriz.

Duran gözlemcinin hareketli kaynaktan işittiği f frekansı (10.20) formülüyle veriliyordu. Bu f değeri, hareketli gözlemci için bulduğumuz (10.19) formülünde f_0 yerine geçer. O halde, her iki formülü peşpeşe uygularsak,

$$f = \frac{v + v_G}{v} \frac{v}{v - v_K} f_0$$

$$\boxed{f = \frac{v + v_G}{v - v_K} f_0 \qquad \text{(Doppler formülü)}} \tag{10.21}$$

Bu formülü kullanırken v_K, v_G hızlarının işaretine dikkat edelim: *Hem kaynak hem de gözlemci için geçerli olmak üzere, yaklaşan yöndeki hız pozitif, uzaklaşan yöndeki hız negatif alınır.*

Elektromanyetik dalgalar için Doppler formülü bundan biraz farklıdır. Çünkü ışık hızının göreli hız toplama kuralı klasik fiziktekinden farklı olur.

Doppler olayının bilim ve teknolojide çok çeşitli uygulamaları vardır. Bunlardan en önemlisi gökcisimlerinin hızlarını tayin etmektir. Dünyaya göre hareket eden bir yıldızın yaydığı ışığın içinde bildiğimiz bir rengin frekansındaki değişme miktarı ölçülerek, o yıldızın uzaklaşma veya yaklaşma hızı hesaplanabilir. Nitekim, yapılan ölçümlere göre, çoğunlukla yıldızların birbirinden uzaklaştığı gözlenmiştir. Bu, evrenin genişlediği anlamına gelir.

Diğer bir uygulama, trafik polislerinin hız ölçmekte kullandıkları ve halk arasında "radar" denilen aletin çalışma ilkesini oluşturur. Bu alette, ileri yönde gönderilen bir elektromanyetik dalga (X-ışım), hareketli bir araçtan yansıtılarak alete geri dönmesi sağlanır. Giden ve gelen dalganın frekansları arasındaki farktan aracın hızı hesaplanabilir.

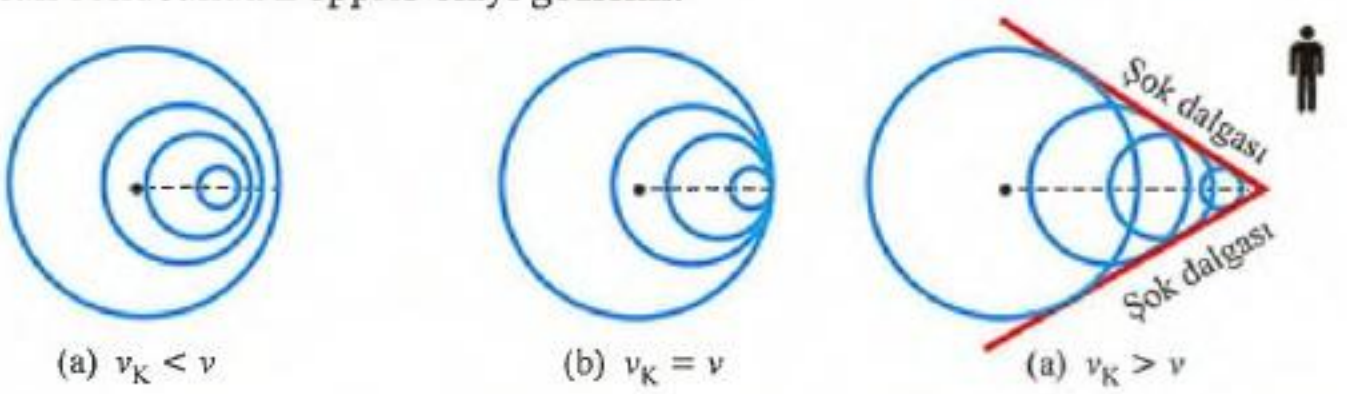


Şekil 10.17: Trafikte *radar* denilen hız kontrol aleti Doppler olayı ile çalışır.

Şok Dalgası

Bir dalga kaynağı, kendi ürettiği dalgadan daha hızlı giderse ne olur? Bu soruyu yine dalga cepheleriyle cevaplayabiliriz. Şekil 10.18 de v_K hızıyla giden bir

kaynağın değişik zamanlarda ürettiği dalga cepheleri görülmektedir. Bunlar, üç-boyutlu uzayda yayılan küresel yüzeylerdir. Eğer $v_K < v$ ise, yani kaynağın hızı dalga hızından küçük ise [(a) durumu], Doppler olayında gördüğümüz gibi, ardışık cepheler arasındaki mesafe hareket yönünde azalacak, arka yönde artacaktır. Bunun sonucunda Doppler olayı gözlenir.



Şekil 10.18: Dalga kaynağının v_K hızı, v dalga hızına göre (a) Küçük ise, (b) Eşit ise, (c) Daha büyük ise, oluşan dalga cepheleri.

Fakat $v_K > v$ ise, yani kaynağın hızı dalga hızından büyük ise [(c) durumu], kaynak daha önce yayınladığı dalga cephelerini geride bırakarak ilerler. Bu dalga cephelerinin hepsine teğet olan koni şeklindeki yüzeye bakalım. Bu koni, yan tarafta sabit duran bir gözlemciye eriştiğinde, gözlemci tüm cephelerdeki dalga şiddetini aynı anda hep birlikte duyacaktır. Bir ses dalgası için bu, bir patlamayı andırır. Bu etkiye **şok dalgası** denir.



Şekil 10.19: Bir savaş uçağı ses duvarını aştığında şok dalgası, geçtiği yerdeki havanın yoğunlaşmasına sebep olur ve konik bir dalga cephesi gözlenir.

Modern savaş uçakları sesten hızlı uçtuklarında, bu konik dalga cephesi geçtiği heryerde patlamayı andıran bir ses oluşturur. Halk arasında "uçak ses duvarını aştı," denir ama bu yanlıştır. Çünkü, şok dalgası bir anlık bir mesele değildir. Uçak zaten bir süredir sesten hızlı uçmaktadır, ama konik dalga cephesi bir yerden bir defa geçer. Bu geçişte tüm cephelerin enerjisini bir defada uyguladığı için, camları kıracak kadar şiddetli olur.

Şok dalgası modern tıpta böbrek taşı kırmak için kullanılan bir yöntemdir. Vücut dışından gönderilen *ültrases* denilen frekanslardaki dalgalar daha yoğun taşlara enerjilerini aktarıp kırar ve küçük parçalara ayırır.

Örnek 10.11

Bir ambülansın sireni 440 Hz *frekanslı ses çıkarabilmektedir. Ambülans bir kavşağa* 144 km/saat *hızla yaklaşıyor. Kavşakta duran bir gözlemci,*

(a) *Ambülans yaklaşırken hangi frekanslı ses duyar?*

(b) *Ambülans uzaklaşırken hangi frekanslı ses duyar? (Sesin havada hızı $v = 340$ m/s dir.)*

Çözüm

(a) Doppler olayı için bulduğumuz (10.21) formülünü kullanırız:

$$f = \frac{v + v_G}{v - v_K} f_0$$

Durgun gözlemcinin hızı $v_G = 0$ olur. Ambülansın v_K hızı m/s birimine çevrilir:

$$v_K = \frac{144 \times 1000}{3600} = 40 \text{ m/s}$$

Ambülans yaklaşırken hızı pozitif alınır. Buna göre, gözlemcinin işittiği frekans hesaplanır:

$$f = \frac{340 + 0}{340 - 40} 440 = 499 \text{ Hz}$$

(b) Ambülans uzaklaşırken hızı negatif alınır:

$$f = \frac{340 + 0}{340 + 40} 440 = 394 \text{ Hz}.$$

Örnek 10.12

Üstü açık bir trende bir orkestra 'La' notası (frekansı 440 Hz*) çalarak ilerlemektedir.*

(a) *Tren yolu kenarında duran bir otomobildeki gözlemci bu sesi 'Si bemol' notası (frekansı* 466 Hz*) olarak işitmektedir. Trenin hızını hesaplayın.*

(b) *Gözlemci bu sesi 'Si' notası (frekansı* 494 Hz*) olarak işitebilmek için, arabasını hangi yönde hangi hızla sürmelidir?*

(Not: Doppler olayının deneysel kanıtlanması 1845 yılında buna benzer bir deneyle yapılmıştı.)

Çözüm

(a) Gözlemci hareketsiz olduğundan, Doppler formülü şöyle olur:

$$f = \frac{v}{v - v_K} f_0$$

Frekanslar ve ses hızı yerine konarak kaynağın hızı bulunur:

$$466 = \frac{340}{340 - v_K} 440 \rightarrow v_K = 19\,\text{m/s}.$$

(b) Hem kaynak hem gözlemcinin hareketli olduğu Doppler formülü kullanılır:

$$f = \frac{v + v_G}{v - v_K} f_0$$

Kaynağın hızı (a) şıkkında bulunmuştu. Frekanslar da yerine konularak, gözlemci hızı bulunur:

$$494 = \frac{340 + v_G}{340 - 19} 440 \rightarrow v_G = +20\,\text{m/s}$$

Hız pozitif olduğu için, gözlemci arabayı trene doğru sürmelidir.

Test

1. Bir teldeki dalga hızı hangisine bağlı değildir?
   (a) Teli geren kuvvet.
   (b) Telin yoğunluğu.
   (c) Telin uzunluğu.

2. Bir tel bir ucundan titreştiriliyor. Titreşim frekansı 2 kat artırılırsa, aşağıdakilerden hangisi yanlış olur?
   (a) Dalga hızı 2 kat artar.
   (b) Açısal frekans 2 kat artar.
   (c) Periyot yarıya düşer.
   (d) Dalgaboyu yarıya düşer.

3. Eşit uzunlukta iki tel eşit birer kuvvetle geriliyorlar. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Yoğunluğu büyük olanın dalga hızı daha büyüktür.
   (b) Yoğunluğu küçük olanın dalga hızı daha küçüktür.
   (c) Dalga hızları eşittir.
   (d) Yoğunluğu büyük olanın dalga hızı daha küçüktür.

4. Size doğru yaklaşan bir ses kaynağının frekansını nasıl işitirsiniz?
   (a) Frekans artmış gibi.
   (b) Frekans azalmış gibi.
   (c) Frekans değişmez.

5. Gerginliği sabit tutulan bir telde, dalganın frekansı iki katına çıkarılırsa, hangisi doğrudur?
   (a) Hızı 2 kat artar.
   (b) Dalgaboyu iki kat artar.
   (c) Dalgaboyu 2 kat azalır.
   (d) Periyodu 2 kat artar.

6. İki dalga bir noktaya aynı anda geldiklerinde, hangisi doğrudur?
   (a) Aynı fazda gelirlerse yıkıcı girişim olur.
   (b) Zıt fazda gelirlerse yapıcı girişim olur.
   (c) Zıt fazda gelirlerse yıkıcı girişim olur.
   (d) Girişim olmaz.

7. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Ses dalgası enine dalgadır.
   (b) Su dalgası boyuna dalgadır.
   (c) Elektromanyetik dalga enine dalgadır.
   (d) Teldeki dalga boyuna dalgadır.

8. Şok dalgası ne zaman oluşur?
   (a) Kaynağın hızı ses hızından küçük ise.
   (b) Kaynağın hızı ses hızına eşit ise.
   (c) Kaynağın hızı ses hızından büyük ise.
   (d) Sesin genliği büyük ise.

9. Aynı bir telde ilerleyen iki dalga için hangisi yanlıştır?
   (a) Frekansları farklı olabilir.
   (b) Hızları farklı olabilir.
   (c) Dalgaboyları farklı olabilir.
   (d) Genlikleri farklı olabilir.

10. Bir telin gerilmesi 4 kat artırılıyor. Dalga hızı ne olur?
    (a) 4 kat azalır.
    (b) 2 kat azalır.
    (c) 2 kat artar.
    (d) 4 kat artar.

11. Bir telin yoğunluğu 4 kat artırılıyor. Dalga hızı ne olur?
    (a) 4 kat azalır.
    (b) 2 kat azalır.
    (c) 2 kat artar.
    (d) 4 kat artar.

12. Yoğunlukları farklı iki tel uç uca bağlanmıştır. Periyodik bir dalga telin birinden diğerine geçerken hangisi sabit kalır?
    (a) Hız
    (b) Dalgaboyu
    (c) Frekans
    (d) Genlik

13. Hafif bir telde ilerleyen dalga daha yoğun bir telin ucuna geldiğinde, hangisi doğrudur?
    (a) Aynı fazda yansır.
    (b) Zıt fazda yansır.
    (c) Aynı fazda geçer.

14. Aynı bir telde karşılıklı ilerleyen iki dalga için hangisi doğrudur?
    (a) Bilardo topu gibi çarpışırlar.
    (b) Birbirleri içinden geçip giderler.
    (c) Birbirlerine yapışır, tek bir dalga olurlar.
    (d) Elastik çarpışma yaparlar.

15. Aşağıdakilerden hangisi $-x$ yönünde ilerleyen bir dalgadır?
    (a) $\sin 3x \cos 5t$
    (b) $\sin(3x - 5t)$
    (c) $\sin(3x + 5t)$
    (d) $\cos(3t - 5x)$

16. Hangisi durağan dalgadır?
    (a) $\sin 3x \cos 5t$
    (b) $\sin(3x - 5t)$
    (c) $\sin(3x + 5t)$
    (d) $\cos(3t - 5x)$

17. Bir telde ilerleyen dalga aşağıdakilerden hangisini iletmez?
    (a) Madde (b) Enerji (c) Momentum

18. İki dalga girişim yaptığında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Enerji alışverişi yaparlar.
    (b) Birbirlerinin ilerlemesini etkilerler.
    (c) Girişim sırasında enerji kaybederler.
    (d) Cebirsel olarak toplanırlar.

19. Keman sesini saz sesinden ayıran dalga özelliği hangisidir?
    (a) Genlik
    (b) Frekans
    (c) Dalgaboyu
    (d) Harmonikler

20. Doppler olayında hangisi gözlemcinin işittiği frekansı azaltır?
    (a) Gözlemci kaynağa yaklaştığında.
    (b) Kaynak gözlemciye yaklaştığında.
    (c) Keynak ve gözlemci birlikte yaklaştığında.
    (d) Kaynak gözlemciden uzaklaştığında.

Problemler

(Bu bölümdeki problemler için sesin havada yayılma hızı 340 m/s alınmalıdır.)

10.1 Dalgaların Genel Özellikleri

10.1 Bir müzik aletinden çıkan 'Do' notasının frekansı 262 Hz dir. 'Do' notasının dalga boyunu hesaplayın. [C: 1.3 m.]

10.2 Bir tür elektromanyetik dalga olan ışığın görünür bölgesi 4.3×10^{14} Hz frekanslı kırmızı ışık ile, 7.5×10^{14} Hz frekanslı mor ışık arasında yer alır. Işık hızı $c = 3\times10^{8}$ m/s olduğuna göre, görünür ışığın dalgaboyu aralığını nanometre (nm) birimi cinsinden hesaplayın. [C: 400 – 700 nm.]

10.3 İnsan kulağının duyabileceği en yüksek frekans olan 20 000 Hz üzerindeki ses dalgalarına *ultrases* denir. Ultrases insan derisini geçip organlardan yansıyarak görüntü elde etmekte kullanılır. Vücut içinde ultrases hızı 1540 m/s dir. İyi bir görüntü için dalgaboyu 1 mm civarında olmalıdır. Vücut içinde 1 mm dalgaboyu veren ultrasesin frekansı ne kadar olmalıdır? [C: 1.54 MHz.]

10.4 Bir telin iki ucu arasına 9 N luk gerilme uygulandığında dalga hızı 30 m/s oluyor. Dalga hızının 40 m/s olması için ne kadar bir gerilme uygulanmalıdır? [C: 16 N.]

10.5 Boyca yoğunlukları $\mu_1 = 0.05$ kg/m ve $\mu_2 = 0.2$ kg/m olan eşit $L = 1.20$ m uzunlukta iki tel uç uca eklenmiştir. İki dış uçtan $F = 50$ N gerilme kuvveti uygulandığında, bir dalga bir uçtan diğerine ne kadar zamanda gider? [C: 0.36 s.]

10.6 Okyanuslarda tsunami dalgaları çok uzun dalgaboyuna sahiptir. Japonya'daki bir deprem sonrası oluşan tsunami dalgasının dalgaboyu uydudan 200 km olarak ölçülmüştür. Bu dalganın Avustralya sahillerine 9 saatte vardığı gözleniyor. (a) Dalga hızı nedir? (b) Dalgaboyu okyanus derinliğine kıyasla çok büyük olduğuna göre, Japonya-Avustralya arasında ortalama okyanus derinliği ne kadardır? [C: (a) 216 m/s, (b) 4.7 km.]

10.7 Boyca yoğunluğu $\mu = 0.2$ kg/m olan bir teldeki sinüsel dalga,

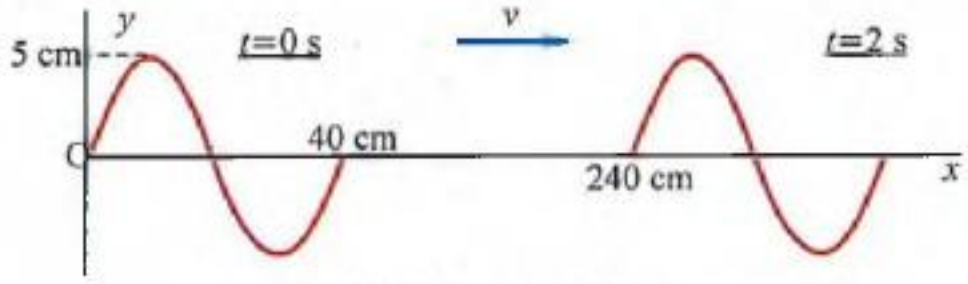
$$y(x,t) = 0.7\ \sin(0.4\pi x - 12t) \quad \text{(metre)}$$

olarak veriliyor. (a) Dalga genliği, dalgaboyu, periyot ve dalga hızı nedir? (b) Teldeki gerilme kuvveti ne kadardır?
[C: (a) $A = 0.7$ m, $\lambda = 5$ m, $T = \pi/6$ s, $v = 9.5$ m/s, (b) $T = 18$ N.]

10.8 Aşağıda fonksiyonları verilen dalgaların, hangi yönde ve hangi hızla gittiklerini tayin edin.

(a) $y = 2\ \sin(2x - 7t)$
(b) $y = 3\ \cos(3t - 8x)$
(c) $y = 4\ \cos(7x + 21t)$
[C: (a) $+x$ yönünde 3.5 m/s, (b) $+x$ yönünde 0.38 m/s, (c) $-x$ yönünde 3 m/s.)

10.9 Boyca yoğunluğu $\mu = 0.5$ kg olan bir telin iki ucu $F = 8$ N kuvvetiyle gerilmiştir. Tel bir ucundan enine doğru 5 cm çekilip 20 Hz frekansıyla titreştiriliyor. (a) Dalga hızını, periyot ve dalgaboyunu hesaplayın. (b) Oluşan sinüsel dalganın denklemini kurun.
[C:(a) 4 m/s, 0.05 s, 0.2 m, (b) $y = 0.05\ \sin(10\pi x - 40\pi t)$.]



Problem 10.10

10.10 Bir teldeki sinüsel dalganın şekli, $t = 0$ ve $t = 2\,s$ zamanlarında şekilde gösterilmiştir. Bu dalganın fonksiyonunu çıkarın. [C: $y = 0.15\,\sin(5\pi x - 6\pi t)$.]

10.11 Bir havuzdaki su dalgasının iki maksimum arası mesafe 1.5 m olarak ölçülüyor. Gözlemcinin önünden 5 s zaman içinde 10 maksimum geçmektedir. (a) Dalga hızı ne kadardır? (b) Havuz sığ olduğuna göre, ortalama derinliği ne kadardır? [C: (a) 3 m/s, (b) 0.9 m.]

10.2 Dalgaların Girişimi, Yansıma ve Geçmesi

10.12 Bir tel üzerinde ilerleyen iki dalga,

$$y_1 = 2\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}x - 7t\right)$$

$$y_1 = 2\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}x + 7t\right)$$

olarak veriliyor. (a) Oluşan durağan dalganın karın ve düğüm noktalarını tayin edin. (b) $x = 0.25$ m noktasının titreşim genliğini hesaplayın.

[C: (a) Düğümler: $x = 0,\ 1.5,\ 3 \ldots$ m, Karınlar: $x = 0.75,\ 2.25 \ldots m$. (b) $A' = 3.5$ m.]

10.13 Uzunluğu 1.20 m ve boyca yoğunluğu 0.1 kg/m olan bir telin iki ucuna $F = 90\,N$ luk gerilme uygulanmıştır. Bu telde oluşan titreşimin asal (1. harmonik) frekansı ve 3. harmonik frekansı ne kadar olur? [C: 25 Hz, 75 Hz.]

10.14 Uzunluğu 40 cm olan bir telde dalga hızı 360 m/s dir. (a) Asal frekans ne kadar olur? (b) İnsan kulağı en fazla 10 000 Hz frekanslı sesleri duyabildiğine göre, bu telde duyabileceği en yüksek harmonik ne kadardır?

[C: (a) 900 Hz, (b) $n = 11$.]

10.15 Uzunluğu 40 cm olan bir telde, art arda gelen iki harmoniğin frekansları 440 Hz ve 500 Hz dir (a) Asal frekans ne kadar olur? (b) Telde dalga hızı ne kadardır?

[C: (a) 60 Hz, (b) 48 m/s.]

10.16 Boyca yoğunluğu $\mu = 0.001$ kg/m ve uzunluğu 30 cm olan bir saz teli, asal frekansı 'Mi' notası (frekansı 330 Hz) olacak şekilde akortlanmıştır. (a) Tel ne kadar gerilmiştir? (b) Telin neresine parmakla basmalıdır ki 'Fa' sesi (frekansı 349 Hz) verebilsin? [C: (a) 39 N, (b) 2 cm.]

10.17 Bir salonun bir ucundan hoparlörle gönderilen ses dalgası karşı duvara çarpıp yansıyor. Bir gözlemci bu iki duvar arasında yürürken 2 m aralıklarla sesi duymadığını farkediyor. Sesin frekansını hesaplayın. [C: 85 Hz.]

10.3 Doppler olayı ve Şok Dalgası

10.18 Bir tren düdüğü 330 Hz frekanslı ses çıkarabilmektedir. Trenyolu kenarında durmakta olan bir gözlemci, (a) Tren yaklaşırken, (b) Tren uzaklaşırken, hangi frekanslı ses duyar? [C: (a) 387 Hz, (b) 288 Hz.]

10.19 Bir tren düdüğü 'Do' notası (frekansı 262 Hz) çalarak ilerlemektedir. (a) Tren yolu kenarında duran bir otomobildeki gözlemci bu sesi 'Re bemol' notası (frekansı 277 Hz) olarak işitmektedir. Trenin hızını hesaplayın. (b) Gözlemci bu sesi 'Re' notası (frekansı 294 Hz) olarak işitebilmek için, arabasını hangi yönde hangi hızla sürmelidir?

[C: (a) 18 m/s, (b) Trene doğru 21 m/s.]

10.20 Trenyolu kenarında bekleyen bir gözlemci, yaklaşan bir trenin düdük sesinin frekansını ölçüyor. Tren yaklaşırken frekansı 400 Hz, uzaklaşırken 240 Hz buluyor. Trenin hızını ve düdük sesinin gerçek frekansını hesaplayın.

[C: 85 m/s ve 300 Hz.]

11

AKIŞKANLAR



Niagara şelalesi, Kanada-A.B.D. sınırında üç ayrı parçadan oluşan ve Dünyada debisi en büyük olan şelaledir.
Sıvıların özellikleri katılardan çok daha zengin ve karmaşıktır. Herbir molekülün hareketine bakmadan, sıvıyı bir bütün olarak tanımlayan nicelikler nelerdir? Bunlar arasındaki ilişkiler hangi fizik yasalarıyla belirlenir?

Maddenin katı, sıvı ve gaz olarak bilinen üç halini fiziksel davranışlarıyla ayırdedebiliyoruz. Katılar serttir, sıvılar akar, gazlar uçucudur. Fakat, neden böyle davrandıkları, mikroskopik düzeye inilip atomlar arasındaki kuvvetlere bakıldığında anlaşılabilir. Katı cisimler düzenli bir diziliş içinde, atomik bağlar ile sıkı sıkıya bağlıdırlar, bulundukları konumlardan ayrılamaz, sadece denge konumu etrafında titreşebilirler. Sıvı molekülleri ise, fazla düzenli olmayan bir yapıda olup, moleküller arası kuvvet çok zayıftır. En ufak etkide yer değiştirir ve yeniden başka yerde diğer moleküllerle zayıf bağ kurabilirler. Gazlarda ise moleküller tamamen düzensiz, birbiriyle etkileşemeyecek kadar uzakta bulunur ve serbestçe öteleme hareketi yaparlar. Gazları bir arada tutan kuvvet sadece kabın duvarları olur. Sıvı ve gazlar birlikte ele alındığında **akışkan** adıyla bilinirler.

Buraya kadar öğrendiğimiz dinamik ve statik yöntemleri akışkanlar için uygulayabilir miyiz? Akışkanların hareketi çok daha karmaşıktır, hem bir bütün halinde hareket edebilirler, hem de moleküller kendi aralarında yer değiştirirler. Bu kadar çok sayıda molekül için Newton yasalarıyla çalışmak pratik olarak imkansızdır. Bunun yerine, enerji kavramlarıyla pekçok sonuca ulaşabiliriz.

11.1 AKIŞKANLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

Yoğunluk

Sıvı ve gazlarda toplam kütleyle çalışmak kullanışlı değildir, varılan sonuçlar sadece o miktarda sıvı için geçerli zannedilebilir. Bunun yerine, birim hacımdaki akışkan kütlesi ile, yani **yoğunluk** ile çalışmak daha anlamlıdır.

Bir akışkanın belli bir noktası etrafındaki küçük bir ΔV hacmindeki kütlesi Δm ise, akışkanın o nokta civarındaki yoğunluğu,

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{11.1}$$

olup, akışkan içinde başka bir yerde yoğunluk farklı olabilir. Yoğunluk birimi kg/m^3 tür, fakat günlük hayatta g/cm^3 kullanmak daha yaygındır. Aşağıdaki tabloda bazı akışkanların yoğunlukları gösterilmiştir.

Bazı sıvı ve gazların yoğunlukları
(Değerler, aksi belirtilmedikçe, 0°C ve 1 atm basınç içindir.)

madde	yoğunluk (kg/m^3)	madde	yoğunluk (kg/m^3)
Su	1000	Hava	1.20
Deniz suyu	1030	Karbon dioksit	1.98
Zeytinyağı	920	Hidrojen	0.09
Etil alkol	790	Oksijen	1.33
Benzin	680	Su buharı (100°C)	0.80

Diğer tüm elementlerin yoğunluklarını Ek D deki periyodik cetvelde bulabilirsiniz.

Basınç

Bir bisiklet veya otomobil lastiği, içinde hava olmasına rağmen, çok ağır yükleri taşıyabilmektedir. Keza, denizde dibe daldığımızda kulaklarımızda rahatsız edici bir baskı hissederiz. Tüm akışkanlar, içinde bulundukları kabın duvarlarına ve içlerinde yer alan cisimlere bir kuvvet uygularlar. Bu kuvvet yüzeye diktir, akışkanlar yüzeye paralel kuvvet uygulayamazlar.



Şekil 11.1: Basıncın günlük yaşamda yeri: Otomobil lastiği, düdüklü tencere, kalp tansiyon aleti.

Bir akışkanın A yüzeyine uyguladığı dik kuvvet F ise, bu yüzeye uyguladığı **basınç**,

$$p = \frac{F}{A} \tag{11.2}$$

olur. Basınç birimi N/m^2 olup, adına pascal (Pa) denir:

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

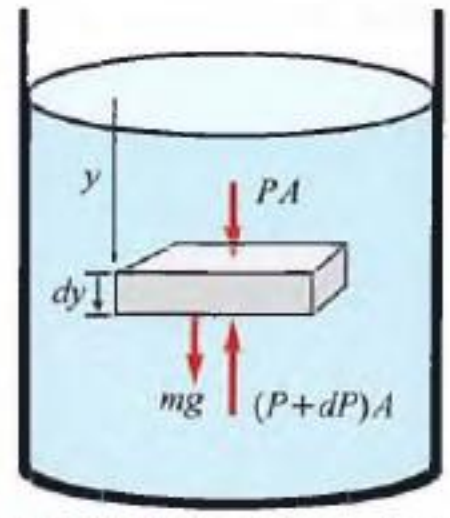
Teknolojide ve meteorolojide **atmosfer**, **bar**, **milibar** ve **civa sütun yüksekliği** adlı diğer birimler de kullanılır:

$$1\,\text{atm} = 76\,\text{cm Hg} = 1.013\,\text{bar} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$$
$$1\,\text{bar} = 1000\,\text{milibar} = 10^5\,\text{Pa}$$

Hidrostatik Basınç

Sıvı içinde derine inildikçe basınç artar. Bunu hesaplamak üzere, yoğunluğu ρ olan bir sıvı içinde, yüzeyden y derinlikte, taban alanı A ve kalınlığı dy kadar olan küçük bir sıvı tabakası gözönüne alalım. Bu tabakadaki sıvının kütlesi, hacim ile yoğunluğun çarpımı kadardır:

$$m = \rho V = \rho A\, dy$$



Şekil 11.2: Sıvı içinde dy kalınlığında bir tabakanın alt ve üst yüzeylerine etkiyen kuvvetler.

Bu sıvı kütlesinin üst tarafındaki basınç P ise, alt tarafındaki basınç bundan dP kadar fazla olacaktır. Silindirin yanal yüzeyindeki kuvvetler birbirini dengelediği için, sadece düşey doğrultudaki kuvvetlerin dengesini yazabiliriz:

$$F_{\text{üst}} + mg = F_{\text{alt}}$$
$$PA + \rho A\, dy\, g = (P + dP)A$$

olur. Sadeleştirme yapılırsa,

$$dP = \rho g\, dy$$

bulunur. Sıvı yüzeyini $y = 0$ düzeyi olarak seçelim. Yüzeyde dışardan etkiyen bir P_0 dış basıncı varsa, buradan itibaren h derinliğine kadar integral alınır:

$$\int_{P_0}^{P} dP = \rho g \int_0^y dy$$
$$P - P_0 = \rho g\, y$$

O halde, bir sıvı içindeki basıncın derinlikle değişimi şöyle olur:

$$\boxed{P = P_0 + \rho g\, y \qquad \text{(Hidrostatik basınç)}} \tag{11.3}$$

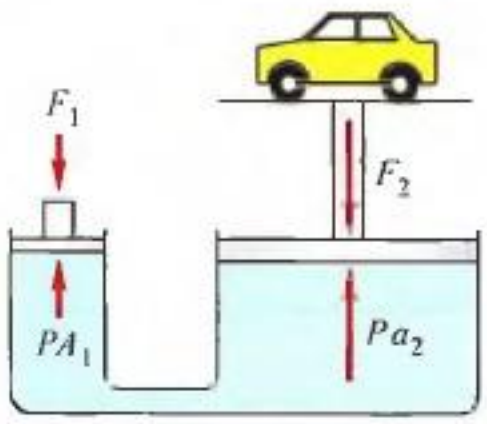
Bu formülü elde ederken, yoğunluğu ve yerçekimi ivmesini sabit kabul edip, integralin dışına aldık. Fakat, yükseklik değişimi çok fazla ise, yoğunluğun ve yerçekimi ivmesinin değişimini de hesaba katmak gerekir.

Deniz seviyesinden çok derinlere inildiğinde denizaltılar ve dalgıçlar üzerinde çok büyük basınçlar oluşur. Denizaltı yüzeyi özel çelik kafeslerle sağlamlaştırılmıştır. Keza, dalgıçların özel giysileri göğüs kafeslerinin içeri çökmesini önler.

Pascal İlkesi

Basıncın derinlikle değişimi için bulduğumuz (11.3) ifadesinde, P_0 yüzey basıncının her derinlikte etkin olduğuna dikkat edelim. Yüzey basıncını değiştirdiğimiz anda, bunun etkisi her derinlikte hissedilecektir. Buna **Pascal ilkesi** denir:

Bir sıvıya uygulanan dış basınç sıvının her noktasına aynı değerde iletilir.



Şekil 11.3: Hidrolik vinç.

Sanayide pekçok yük kaldırma işlerinde kullanılan hidrolik vinçler Pascal ilkesine göre çalışır. Sıvının küçük bir yüzeyine uygulanan kuvvet diğer büyük bir yüzeye basınç olarak iletileceği için, Pascal ilkesine göre her iki yüzeyde basıncın eşitliği yazılırsa,

$$P_1 = P_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{11.4}$$

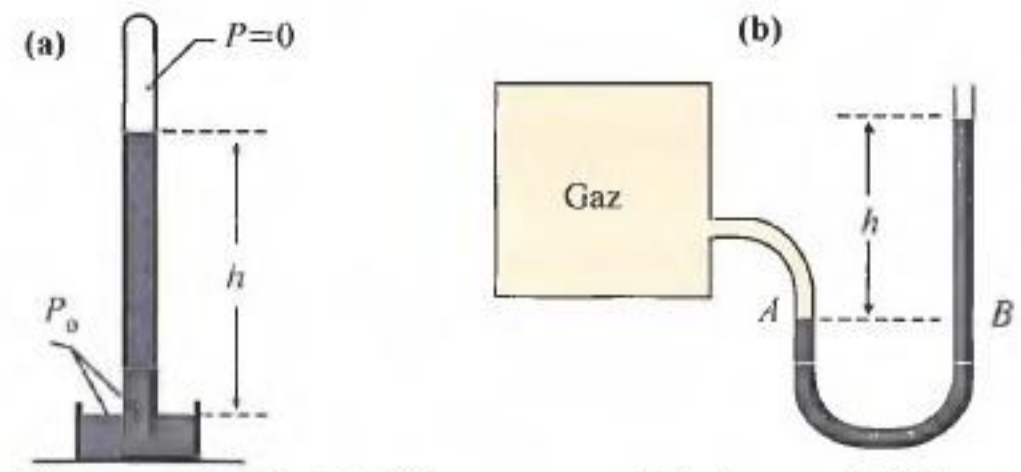
olup, büyük yüzeyde kuvvet de büyük olur. Keza, otomobillerin hidrolik fren sistemi bu ilkeyi kullanır. Ayağımızın uyguladığımız küçük bir kuvvetle fren balatalarının tekerlek diskini çok daha büyük bir kuvvetle sıkıştırmasını sağlarız.

Basınç Ölçme Aletleri

Basınç ölçen aletlerin genel adı **manometre**dir, ancak atmosfer basıncı ölçümünde kullanılanlara **barometre** adı verilir. Kapalı tüplü ve açık tüplü olmak üzere, başlıca iki tür manometre vardır.

Kapalı tüplü manometre Şekil 11.4-a da gösterilmiştir. Bir tarafı kapalı cam tübün içi tamamiyle civa ile doldurulup, açık ucu civa haznesine batırılır. Dış atmosfer basıncı bir miktar civayı sütun içinde kalmaya zorlar. Civa sütunu yüksekliği dış atmosferin P_0 basıncına eşit olur:

$$P_0 = \rho_{Hg} g h$$



Şekil 11.4: (a) Kapalı tüplü manometre, (b) Açık tüplü manometre.

Açık tüplü manometrede bir U borusunun iki sütunundaki basınçlar karşılaştırılır. Şekil 11.4-b de görüldüğü gibi, içinde sıvı bulunan U borusunun bir ucu basıncı ölçülmek istenen kaba bağlanır. Diğer ucu açıktadır. İki sütun arasındaki yükseklik farkına bakalım. Örneğin, açık sütunda sıvı yüksekliği h kadar fazla olsun. Hidrostatik basınç aynı yükseklikte iki noktada eşit olacağından, A ve B noktalarının basınçları eşit olmalıdır:

$$P_A = P_B$$

A ucu ölçülmek istenen P basıncındadır. B ucu ise, gördüğü sıvı yüzeyinden h kadar derindedir. O halde bu eşitlik,

$$P = P_0 + \rho g h \tag{11.5}$$

olarak yazılırsa, P basıncını sütundaki sıvı yüksekliği ve yoğunluk cinsinden verir.

Örnek olarak, içinde civa bulunan bir U borusu kullandığımızı düşünelim. Ölçülen yükseklik farkı $h = 35\,\text{cm}$ olsun. Açık ucun üst tarafında atmosfer basıncı olduğunu hesaba katarsak, mutlak basınç şöyle olur:

$$P = P_0 + \rho g h = 1\,\text{atm} + \frac{35}{76}\,\text{atm} = 1.46\,\text{atm}$$

Geyç basıncı

U borusundaki basınç formülüne tekrar dönelim:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Buradaki 1 atmosferlik P_0 hava basıncı Dünya yüzeyinde tüm ölçümlerde yer alır. U borusundaki seviye farkından kaynaklanan basınç bu değere ilave edilerek mutlak basınç bulunur.

Fakat sanayide mutlak basınç değil, atmosfer basıncından itibaren olan fark önemlidir. Buna **geyç basıncı** denir. Buna göre, yukardaki U borusunda, sadece civa sütununun ρgh basınç değeri hesaplanırsa geyç basıncı hesaplanmış olur, üzerine 1 atmosfer eklemek gerekmez:

$$P_g = \rho g h \tag{11.6}$$

Otomobil lastikleri için önerilen basınç değerleri, kan basıncını veren kalp tansiyonu rakamları, şehir suyu ve havagazı basınç değerleri ...hepsi geyç basıncı olarak algılanmalıdır.

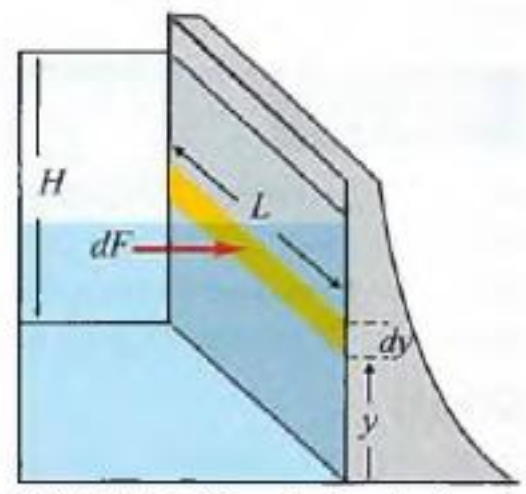
Bir Baraj Duvarına Etkiyen Kuvvet ve Moment

Hidrostatik basıncın önemli bir uygulaması olarak bir baraj duvarına etkiyen toplam kuvveti ve barajı devirmeye çalışan momenti hesaplayalım.

Şekil 11.5 de görüldüğü gibi, genişliği L ve su yüksekliği H olan bir baraj gözönüne alalım. Suyun duvara uyguladığı basınç her yükseklikte farklı olduğundan, toplam kuvveti ancak integral alarak bulabiliriz. Bu amaçla, baraj dibindeki bir O noktasından itibaren y ile $y + dy$ arasındaki L uzunlukta ve dy yükseklikte bir su şeridinin uyguladığı küçük dF kuvvetini hesaplayalım. Orijin suyun dibinde seçildiği için, bu şeridin yüzeyden itibaren derinliği $(H - y)$ olur. Buna göre, yüzölçümü $dA = L\,dy$ olan şeride etkiyen kuvvet,

$$dF = P\,dA = [\rho g(H - y)]\,(L\,dy) = \rho g L\,(H - y)\,dy$$

olur. Bu küçük şeritlerin katkılarını $y = 0$ değerinden $y = H$ değerine kadar toplayarak, yani integralini alarak, toplam kuvveti buluruz:



Şekil 11.5: Baraj yüzeyinde dy kalınlığında bir şeride etkiyen kuvvet.

$$F = \rho g L \int_0^H (H - y)\,dy = \rho g L \left| Hy - \frac{y^2}{2} \right|_0^H$$

İntegral sınırları yerine konularak toplam kuvvet bulunur:

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g L H^2 \tag{11.7}$$

Kuvvetin su yüksekliğinin karesi ile arttığına dikkat edelim.

Barajı O noktası etrafında devirmeye çalışan kuvvetin momenti de benzer şekilde, integral alınarak hesaplanır. Yine şekildeki dF kuvvetinin O noktası etrafındaki küçük $d\tau$ momenti yazılır:

$$d\tau = dF\,y = \rho g L\,(H - y)\,dy\,y$$

Toplam moment bu küçük $d\tau$ katkılarının integrali olur:

$$\tau = \int dF\,y = \rho g L \int_0^H (Hy - y^2)\,dy = \rho g L \left| H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right|_0^H$$

İntegral sınırları yerine konulursa toplam moment bulunur:

$$\tau = \tfrac{1}{6}\rho g L H^3 \tag{11.8}$$

Toplam momentin su yüksekliğinin kübü ile orantılı olduğuna dikkat edelim. Baraj yapımında su kuvvetinin büyüklüğünden çok, devirme momenti daha büyük tehlike arzeder.

Örnek 11.1

Boyutları $10 \times 20 \times \times 4\,\mathrm{m}^3$ *olan bir sınıftaki toplam hava kütlesi ne kadardır?*

Çözüm

Önce, Sayfa 180 daki tablodan havanın yoğunluğu $1.2\,\mathrm{kg/m}^3$ olarak alınır. sınıfın hacmiyle birlikte havanın kütlesi hesaplanır:

$$m = \rho V = 1.2 \times (10 \times 20 \times 4) = 960\,\mathrm{kg}$$

Normal bir salondaki havanın bu kadar ağır oluşu şaşırtıcıdır.

Örnek 11.2

Suyun yoğunluğu $1.0\,\mathrm{g/cm}^3$, *etil alkolün yoğunluğu ise* $0.8\,\mathrm{g/cm}^3$ *tür. Hacmi* $150\,\mathrm{cm}^3$ *olan bir su-etil alkol karışımının kütlesi* 132 g *geliyor. Bu karışımdaki su ve etil alkol miktarlarını hesaplayın.*

Çözüm

Toplam hacim, suyun V_1 hacmi ile alkolün V_2 hacimleri toplamı olacaktır. Suyun kütlesini m_1 ile gösterirsek, etil alkol kütlesi $(132 - m_1)$ olur. Hacimleri $V = m/\rho$ şeklinde yazıp toplarız:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{132 - m_1}{\rho_2}$$

$$150 = \frac{m_1}{1.0} + \frac{132 - m_1}{0.8}$$

Bu denklemden suyun kütlesi ve daha sonra alkolün kütlesi bulunur:

$m_1 = 60\,\mathrm{g}$ ve $m_2 = 150 - 60 = 90\,\mathrm{g}$.

Örnek 11.3

Atmosfer basıncının 72 cm Hg *olduğu bir yerde, bir balondaki gazın basıncı açık uçlu bir manometre ile ölçülmek isteniyor. Manometrenin civa sütunu* 38 cm *gösterdiğine göre, gazın mutlak basıncı ve geyç basıncı ne kadar olur?*

Çözüm

Geyç basıncı sadece civa sütununun basıncıdır, yani 38 cm Hg olur

Mutlak basınç civa sütunu ve onun üstündeki atmosfer basıncı, yani $38 + 72 = 110\,\mathrm{cm\,Hg}$ olur.

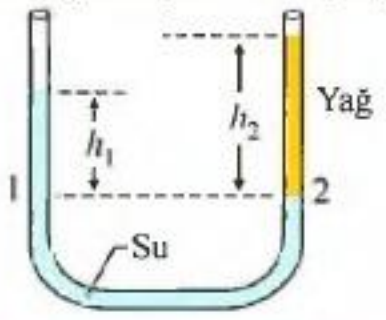
Bu basınçları atmosfer cinsinden bulmak istersek $1\,\mathrm{atm} = 76\,\mathrm{cm\,Hg}$ tanımını kullanırız:

Geyç basıncı: $P = 38/76 = 0.5\,\mathrm{atm}$

Mutlak basınç: $P = 1 + 0.5 = 1.5\,\mathrm{atm}$

Örnek 11.4

İki ucu açık bir U borusunda su sütunu üzerine, yoğunluğu bilinmeyen bir yağ ekleniyor. Şekilde görüldüğü gibi, suyun yüksekliği $h_1 = 36\,\mathrm{cm}$ *ve yağın yüksekliği* $h_2 = 50\,\mathrm{cm}$ *olduğuna göre, yağın yoğunluğunu hesaplayın.*



Çözüm

İki sütundaki suyun aynı yükseklikteki 1 ve 2 noktalarındaki hidrostatik basınç eşit olur:

$$P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

Buradan yoğunluklar arasındaki ilişki bulunur:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$$

Suyun yoğunluğu $1\,\mathrm{g/cm}^3$ alınıp hesaplanır:

$$\rho_2 = 1 \times \frac{36}{50} = 0.72\,\mathrm{g/cm}^3$$

Örnek 11.5

Otomobilleri kaldırmakta kullanılan hidrolik vinçte, otomobilin konulduğu platformu iten silindirin yarıçapı 20 cm *dir. Sıvıyı iten pistonun yarıçapı* 4 cm *dir.* 1500 kg *lık bir otomobili kaldırmak için ne kadar kuvvet gerekir?*

Çözüm

Pascal ilkesine göre, pistonun ve platformun üzerindeki basınçlar eşittir. Buna göre, kuvvetler arasındaki bağıntı,

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

olur. Dairelerin alanı πr_1^2 ve otomobilin ağırlığı $W = mg$ alınarak kuvvet hesaplanır:

$$F_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} mg = \frac{4^2}{20^2} \times 12000 = 48\,\text{N}$$

Örnek 11.6

Atatürk Barajı'nın duvarı 170 m *yükseklikte ve* 1800 m *uzunluktadır. Baraj duvarına etkiyen toplam kuvveti ve devirmeye çalışan momenti hesaplayın.*

Çözüm

Kuvvet yükseklikle değiştiği için integral alınmış ve (11.7) formülü bulunmuştu. Sayısal değerler yerine konularak hesap yapılır:

$$F = \tfrac{1}{2}\rho g L H^2 = \tfrac{1}{2}\times 1000\times 10\times 1800\times 170^2 = 2.6\times 10^{11}\,\text{N}$$

Benzer şekilde, duvar dibindeki bir noktaya göre moment (11.8) formülüyle bulunmuştu:

$$\tau = \tfrac{1}{6}\rho g L H^3 = \tfrac{1}{6}\times 1000\times 10\times 1800\times 170^3$$

$$\tau = 1.5\times 10^{13}\,\text{N}\cdot\text{m}$$

11.2 ARCHİMEDES KALDIRMA KUVVETİ

Bir akışkan içinde bulunan cisimler daha hafifmiş gibi olurlar. Helyum gazıyla doldurulmuş bir balon havada yükselir. Balıklar hava keselerini sıkıştırıp genişleterek suda alçalır veya yükselirler. Denizaltılarda bulunan dalma sarnıçları içine, hava veya su pompalanarak, yüzeye çıkması veya suya dalması sağlanır. Keza, balinalar karaya vurduğu zaman, kendi ağırlığı altında ciğerleri ezilip ölürler.

Akışkanlar, içlerinde bulunan cisimlere daima bir **kaldırma kuvveti** uygularlar. İlk defa Archimedes tarafından bulunan bu ilke şöyle ifade edilebilir:

Archimedes kaldırma kuvveti

Bir sıvıya batırılan her cisim, taşırdığı sıvının ağırlığı kadar bir kuvvetle yukarı doğru itilir.

Bu ilkede dikkat edilmesi gereken nokta "taşırdığı sıvı" ifadesidir. Cisim tamamen sıvı içine batmışsa, cismin tüm hacmi alınır. Fakat, bir tahta parçasında olduğu gibi, bir kısmı batmış halde yüzüyorsa, sadece sıvı içinde kalan hacmi gözönüne alınır.

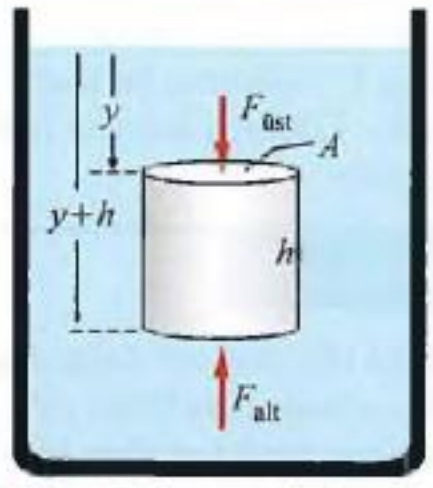
Kaldırma kuvvetinin kaynağı hidrostatik basıncın derinlikle değişmesidir. Bunu en kolay silindir şeklinde bir cismin yüzeylerine uygulanan kuvvetleri hesaplayarak görebiliriz (Şekil 11.6).

Yoğunluğu ρ_0 olan bir sıvı içine batırılmış, taban yüzölçümü A ve yüksekliği h olan bir silindir gözönüne alalım. Silindirin yanal yüzeyindeki kuvvetler karşılıklı olarak birbirini dengeleyeceği için gözönüne almaya gerek yoktur. Silindirin üst tabanı y derinliğinde, alt tabanı $y+h$ derinliğinde olsun. Buna göre, F_A kaldırma kuvveti, alt ve üst yüzeylerdeki kuvvetlerin farkı olur. Her yüzeydeki kuvveti, o derinlikteki basıncın yüzey alanıyla çarpımı olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} F_A = F_{\text{alt}} - F_{\text{üst}} &= P_{\text{alt}} A - P_{\text{üst}} A \\ &= \rho_0 g(y+h) A - \rho_0 g y A \\ &= \rho_0 g\, hA = \rho_0 g\, V \end{aligned}$$

olur. Burada $A.h$ değeri cismin V hacmi olarak yazılmıştır. O halde, Archimedes kaldırma kuvveti F_A ifadesi bulunur:

$$F_A = \rho_0 g\, V \qquad \text{(Archimedes kaldırma kuvveti)} \tag{11.9}$$



Şekil 11.6: Sıvı içinde üst ve alt yüzeye etkiyen kuvvetler.

Arşimet ilkesi kısmen batmış cisimler için de geçerlidir, ama bu kez sadece batan kısmın hacmi hesaba katılır. Yine, cismin alt ve üst yüzeyleri arasındaki hidrostatik basınç farkı yazılır ve hesap tekrarlanırsa, cismin V hacmi yerine batan kısmının V' hacmi gelir:

$$F_A = \rho_0 g\, V' \qquad \text{(kısmen batmış cisimler için)} \tag{11.10}$$

Sıvı içindeki bir cismin görünür ağırlığı ifadesi de buradan yazılabilir. Cisim ρ yoğunlukta bir malzemeden yapılmışsa, gerçek ağırlığı $mg = \rho V g$ olur. Kaldırma kuvvetinin hafifletici etkisi bundan çıkarılırsa,

$$W' = W - F_A = mg - F_A = \rho V g - \rho_0 V g$$

$$W' = (\rho - \rho_0) V g \qquad \text{(görünür ağırlık)} \tag{11.11}$$

Örnek 11.7

Denizde yüzen bir buzdağının hacminin yüzde kaçı suyun altındadır? Deniz suyunun yoğunluğu $\rho_0 = 1.03$ ve buzun yoğunluğu $\rho = 0.92\,\text{g/cm}^3$ tür.

Çözüm

Suyun kaldırma kuvveti buzdağının ağırlığını dengelemektedir. Hacmi V olan buzdağının batan kısmı V' ise, F_A kaldırma kuvveti taşırdığı suyun ağırlığı kadar olur:

$$mg = F_A$$

$$\rho V g = \rho_0 V' g$$

Buradan hacim oranı bulunur:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{0.92}{1.03} = 0.89$$

Örnek 11.8

Bir tahta blok suya bırakıldığında yarısı batmış olarak yüzüyor. Yağ içine bırakıldığında hacminin %60 oranı batmış oluyor. Tahtanın ve yağın yoğunluklarını bulun.

Çözüm

Tahtanın, suyun ve yağın yoğunluklarını sırasıyla ρ_1, ρ_2, ρ_3 ile gösterelim. V hacimli tahtanın suda batan kısmının hacmi V' oluyorsa, bu hacmi kaplayan suyun ağırlığı kadar bir F_A kaldırma kuvveti tahtanın mg ağırlığını karşılıyor demektir:

$$mg = F_A \;\rightarrow\; \rho_1 g V = \rho_2 g V'$$

Suyun yoğunluğu $\rho_2 = 1\,\text{g/cm}^3$ alınıp tahtanın yoğunluğu bulunur:

$$\rho_1 = \frac{V'}{V}\rho_2 = 0.5\,\text{g/cm}^3$$

Benzer şekilde, yağa batan kısmın hacmi V'' oluyorsa, taşırdığı yağın ağırlığı tahtanın ağırlığına eşit olur:

$$\rho_1 g V = \rho_3 g V''$$

$$\rho_3 = \frac{V}{V''}\rho_1 = \frac{1}{0.6} \times 0.5 = 0.83\,\text{g/cm}^3$$

Örnek 11.9

Hacmi $0.01\,\text{cm}^3$ ve yoğunluğu $\rho = 2.7\,\text{g/cm}^3$ olan bir taş blok, şekilde görüldüğü gibi, bir ipe bağlı olarak su içinde asılmıştır. İpteki gerilme kuvvetini hesaplayın.



Çözüm

Taşın aşağı yönde olan ağırlığını, yukarı yönde olan kaldırma kuvveti ve gerilme kuvveti birlikte karşılamaktadırlar. Kuvvetlerin dengesi yazılır:

$$F_A + T = mg$$

Kaldırma kuvveti V hacminin taşırdığı su kütlesinin $\rho_0 V g$ ağırlığıdır. Buradan T gerilmesi hesaplanır:

$$T = mg - F_A = \rho V g - \rho_0 V g = (\rho - \rho_0)\, V g$$

$$T = (2.7 - 1) \times 10^3\,\text{kg/m}^3 \times 0.01 \times 10 = 170\,\text{N}.$$

11.3 YÜZEY GERİLİM VE KILCALLIK

Günlük yaşamda karşılaştığımız sıvı yüzeyleri çok şaşırtıcıdır. Yağmurda ağaç yaprakları veya otomobil camları üzerine düşen damlalar yüzeye yayılmaz, küresel kabarcıklar oluşturur. Keza, sıvı civa bir yüzeye yapışmaz, küçük topaklar halinde kümelenir.

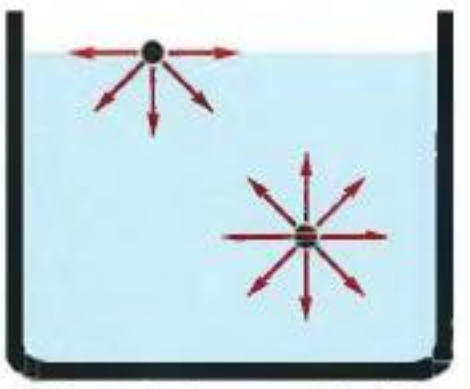
Tüm bu örneklerde sıvı yüzeyi sanki esnek bir zarmış gibi davranmaktadır. Sıvı molekülleri bir şekilde kendi aralarında kenetlenip gergin bir yüzey oluşturmaya çalışırlar. Örneğin, su yüzeyine itinayla bırakılan bir dikiş iğnesi, suya batmadan yüzebilir. Sivrisinekler ve bazı böcekler su yüzeyinde batmadan dolaşabilirler.



Şekil 11.7: Yüzey gerilime örnekler: Yağmur damlaları, civa habbeleri ve suda batmadan yüzen böcek.

Sıvı yüzeylerinin bir dış kuvvete karşı koyucu özelliğine **yüzey gerilim** denir. Sıvı molekülleri nötr olmalarına rağmen birbirlerini çekerler. Su molekülü bir ucu pozitif diğer ucu negatif yüklü bir çubuk gibi düşünülürse, iki molekül arasında **van der Waals kuvvetleri** denilen zayıf ama çekici bir kuvvet oluşur. Yüzey gerilimini sağlayan bu kuvvettir.

Sıvı içindeki bir molekül ile sıvı yüzeyindeki diğer bir molekülü gözönüne alalım. Sıvı içindeki moleküle etkiyen kuvvetler birbirini dengelediği için, bu molekül sıvı içinde serbestçe dolaşabilir. Fakat, yüzeydeki bir molekül için kuvvetler dengede olmaz, bu molekülü sıvı içine doğru çeken, yüzeyden ayrılmasını önleyen bir kuvvet vardır.

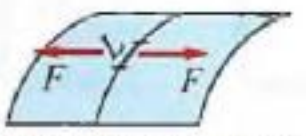


Şekil 11.8: Sıvı moleküllerine içerde ve yüzeyde etkiyen kuvvetler.

Sıvı yüzeyinde L uzunlukta çizilmiş hayali bir çizgi düşünelim. Bu çizginin iki yanındaki molekülleri birbirinden ayırmak için gerekli kuvvet F oluyorsa,

$$\gamma = \frac{F}{L} \qquad \text{(yüzey gerilim katsayısı)} \qquad (11.12)$$

oranına **yüzey gerilim katsayısı** denir. Bazı sıvıların yüzey gerilim katsayıları şöyledir:



Şekil 11.9: Yüzey gerilim katsayısı.

Bazı sıvıların yüzey gerilim katsayıları.

sıvı	γ (N/m)	sıvı	γ (N/m)
Su (0°)	0.076	Civa	0.487
Su (20°)	0.072	Etil alkol	0.023
Su (100°)	0.059	Aseton	0.024
Sabunlu su (20°)	0.025	Gliserin	0.064

Çamaşır yıkamada suyun kumaş lifleri arasındaki kirlere ulaşabilmesi gerekir. Normal durumda suyun yüzey gerilimi büyük olduğundan, bu küçük boşluklara nüfuz edemez. Fakat, su ısıtıldığında ve sabun katıldığında yüzey gerilim katsayısı çok azalır ve en ince aralıklardan geçebilir.

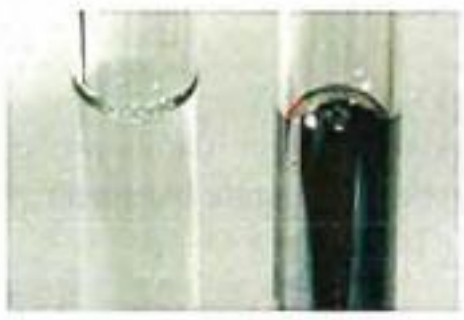


Şekil 11.10: Sabunlu suyun oluşturduğu bir minimal yüzey.

Sabunlu suyun yüzey gerilimi küçük olduğundan, daha büyük bir yüzeye kopmadan açılabilir, daha iri balon köpükleri oluşturabilir. Bir tel çerçeve üzerine sabunlu sudan bir yüzey gerilebilir. Bu yüzeylerin yüzölçümü minimum olur. Böyle çeşitli minimal yüzeyler oluşturulabilir.

Kılcallık

Bir sıvı içine iki ucu açık bir boru batırıldığında, boru içinde sıvının yükseldiği görülür. Boru çapı ne kadar küçükse sıvı o kadar çok yükselir. Çok küçük çaplı borularda suyun metrelerce yükseldiği görülebilir. Bu etkiye **kılcallık** denir. Fakat, civa gibi diğer bazı sıvılar kılcal boruda yükselmez, tersine alçalırlar.

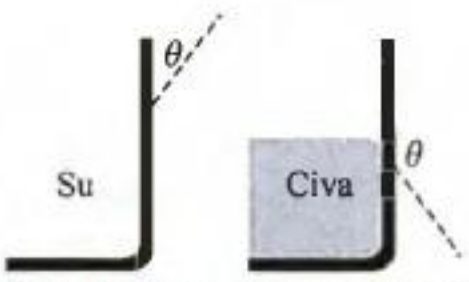


Şekil 11.11: Cam boruda su yüzeyi çukurlaşır, civa yüzeyi tümsekleşir.

Bir sıvı, katı bir yüzeyle temas ettiğinde moleküller arasındaki kuvvetlere bağlı olarak iki farklı davranış gösterir. Örneğin, bir cam boruda çoğu sıvı yüzeyinin çukurlaştığı gözlenir. Buna karşılık, civa yüzeyi tümsekleşir.

Bu davranış benzer ve farklı moleküller arasındaki kuvvetlerle açıklanabilir. Bir sıvıda özdeş moleküllerin birbirini çekme kuvvetine **kohezyon kuvveti** denir. Buna karşılık, bir katı-sıvı arakesitinde farklı moleküllerin birbirini çekme kuvveti **adezyon kuvveti** olur. Eğer, su-cam yüzeyinde olduğu gibi, adezyon kuvveti daha büyükse, su cama doğru daha kuvvetle çekilir ve tümsek bir yüzey oluşur. Yüzeye çekilen bu moleküllerin yerini iç bölgeden su molekülleri doldurmak istediğinde sıvı yüzeyi yükselir. Yükselme sırasında temas açısı bozulduğu için, adezyon kuvveti tekrar devreye girer ve yeni sıvı molekülleri çeker. Bu süreç, sonunda yerçekimi kuvvetiyle dengelendiğinde cam boruda sıvı yükselmiş olur.

Sıvı yüzeyinin katı duvarla yaptığı θ açısına **menisküs açısı** adı verilir. Katı yüzeyden itibaren ölçülen bu açı, su gibi çukur yüzeyliler için dar açı ($90°$ den küçük), civa gibi tümsek yüzeyli sıvılar için geniş açı olur.



Şekil 11.12: Civa ve suyun cam boruyla temas açıları.

Kılcal bir boruda sıvı yüksekliği, menisküs açısı, yüzey gerilim katsayısı ve boru yarıçapı cinsinden şöyle ifade edilir:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r} \tag{11.13}$$

Yüzey gerilimin belki de en hayati uygulaması kılcallık olayıdır. Canlıların yaşam faaliyetlerini sürdürmelerinde çok önemli bir rolü vardır. Bir ağacın metrelerce yükseklikteki dallarına özsu çıkabilmesi, insan ve hayvanların dolaşım sisteminde kanın en ince damarlara kadar ulaşabilmesi, hep kılcallık etkisiyle olabilmektedir. Tıp ve teknolojide pekçok uygulamada kılcallık etkisinden faydalanılır. Günlük yaşamda, örneğin kağıt havlular, kılcallık özelliğine göre suyu emer.

11.4 VİSKOZLUK

Her sıvının bir kıvamı vardır. Su, alkol gibi sıvılar kolay akar. Buna karşılık gliserin, katran, bal gibi sıvılar daha kıvamlıdır, karıştırmakta zorlanırız. Öte yandan, sıvı içinde katı bir cismi hareket ettirirken yine zorlanırız. Suda yavaş yürümek nisbeten kolaydır, fakat hızlanmak istediğimizde suyun direnci birden artar.

Bir sıvının kendi akışkanlığına ve içindeki cisimlerin hareketine karşı koyan iç sürtünme etkisine **viskozluk** adı verilir. Kıvamlı sıvıların viskozluğu büyük,

daha akışkan sıvıların viskozluğu küçük olur. Gazların da bir iç sürtünmesi vardır, fakat sıvılara göre çok daha düşük olur.

Viskozluğun kaynağı sıvı ve gazlarda farklıdır: Sıvılarda çekici van der Waals kuvvetleri, gazlarda ise moleküllerin birbiriyle çarpışması iç sürtünme oluşturur. Bu farktan dolayı, sıcaklık arttıkça sıvıların viskozluğu azalır, gazlarınki artar.



Şekil 11.13: Sıvı ne kadar kıvamlı ise viskozitesi o kadar büyük olur.

İç sürtünme etkisini belirlemek üzere bir viskozluk katsayısı tanımlanır: Yatay iki katı levha arasında L genişlikte bir sıvı tabakası gözönüne alalım. Alttaki levha sabit tutulurken, üstteki sabit bir v hızıyla çekiliyor olsun. Sıvı tabakasının hızı bir levhadan diğerine farklı olacaktır: Alttaki tabakaya değen sıvı yüzeyi hareketsiz kalırken, üstteki tabakaya değen yüzeyin hızı v olur. Katının hızını takip etmesi adezyon kuvvetinden kaynaklanır. Eğer v hızı çok büyük değilse, sıvının hızı bir tabakadan diğerine düzgün olarak artar. Buna tabaka yapısında (laminer) akış denir. Levhalardan herbirinin yüzölçümü A ise, uygulanan kuvvet,



Şekil 11.14: Tabakalı akışta hız profili.

$$F = \eta A \frac{v}{L} \tag{11.14}$$

olup, orantı sabitine **viskozluk katsayısı** denir ve Yunanca η (eta) harfiyle gösterilir. Birimi $(\mathrm{N/m^2}) \cdot \mathrm{s} = \text{Pascal} \times \mathrm{s} = (\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s})$ olur. Sanayide kullanılan diğer bir birim poise (puaz) olup, kısaca P ile gösterilir ve değeri Sİ biriminin onda biri kadardır. Puazın yüzde birine santipuaz denir ve cP ile gösterilir:

$$1\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = 10\ \text{poise} = 1000\ \mathrm{cP}$$

Bazı sıvıların viskozluk katsayıları şöyledir:

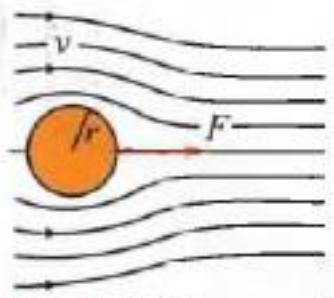
Bazı sıvıların viskozluk katsayıları.

sıvı	η (cP)	sıvı	η (cP)
Su (20°)	1.00	Zeytinyağı (20°)	84
Su (40°)	0.65	Motor yağı (SAE20, 20°)	125
Su (100°)	0.28	Motor yağı (SAE20, 150°)	3
Bal (20°)	10	Katran (20°)	30 000

Viskozluk sıcaklıkla çok hızlı değişir. Oda sıcaklığında kıvamlı olan motor yağları, motorun çalışma sıcaklığına ulaştığında su gibi akıcı olur.

Stokes Yasası

Sıvı içinde hareket eden katı cisimler, viskozluktan kaynaklanan bir direnç kuvvetine maruz kalırlar. Bu kuvvetin şiddeti cismin hızına, geometrik şekline ve sıvının viskozluk katsayına bağlı olur. Her geometrik şekil için sonuç farklı olabilir. r yarıçaplı bir küreye etkiyen direnç kuvveti için, İngiliz bilim adamı G.G. Stokes tarafından bulunan formül şöyledir:



Şekil 11.15: Viskoz sıvı içinde bir küre.

$$F = 6\pi \eta r v \qquad \text{(Stokes yasası)} \tag{11.15}$$

Burada v akışkanın (veya, zıt yönde giden cismin) hızıdır.

Sıvılarda iç direncin v hızıyla orantılı olması, pekçok salınım ve titreşim hareketinin sönümlenmesine yolaçar. Bölüm 9 da incelediğimiz sönümlü harmonik

salınıcıda, kütle bir yağ ortamında hareket ettiğinde, salınımların genliği üstel olarak azalıyordu.

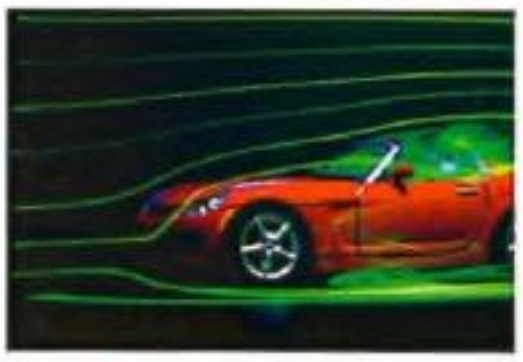
Gazlarda ise sürtünmenin hıza bağımı çok daha farklı olabilir. Alçak hızlarda yine v hızıyla orantılı olan iç sürtünme, sesten hızlı (süpersonik) giden uçaklar üzerinde v^2 ile orantılı olur ve bu hızlarda muazzam bir güç harcaması gerekir.

11.5 BERNOULLİ DENKLEMİ

Bir akışkan kitlesinin hareketi çok çeşitli görünümler arzeder. Sakin bir derede tabakalı akış, bir uçağın ekzos gazının türbülanslı akışı, denizlerde oluşan girdaplar ...Tüm bu akış türleri apayrı birer inceleme konusudur. Biz burada, ideal bir akışkanı ele alıp, genel enerji korunumu çerçevesinde bazı sonuçlara varacağız.

Önce, gerekli bazı tanımları öğrenelim.

İdeal akışkan viskozluğu sıfır olan ve sıkıştırılamayan akışkan türüdür. Elbette, tüm akışkanların iç sürtünmesi vardır ve basınç altında esneyerek hacim değiştirebilirler. Fakat, az bir hata payı ile, su ve diğer viskozluğu küçük olan sıvıları ideal kabul edebiliriz.



Şekil 11.16: Bir otomobil çevresinde akış çizgileri.

Bir sıvı ortamında, hızı her noktasında teğet kabul eden eğrilere **akış çizgileri** adı verilir. Akış çizgileri ortamın değişik noktalarından boyalı sıvı verilerek görünür hale getirilebilirler. Eğer akış çizgileri zaman içinde değişmiyorsa, o zaman **kararlı akış** var demektir.

Akış çizgilerinin yapısı hareketin türü hakkında bilgi verir. Eğer akış çizgileri pürüzsüz ve yumuşak eğriler oluşturuyorsa, buna **tabakalı akış** (veya, laminer akış) adı verilir. Tersi durumda, çizgiler ani çalkantılar gösteriyorsa, o zaman **girdaplı akış** (veya, türbülanslı akış) var demektir.

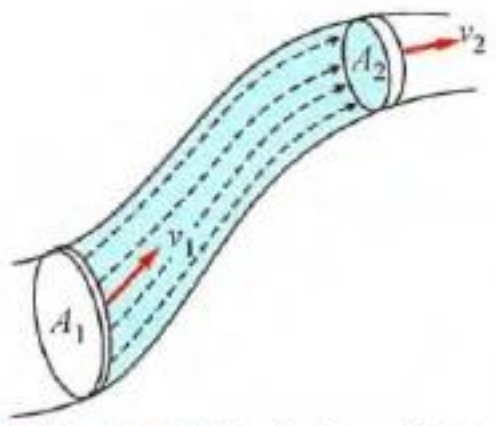
Tabakalı akış rejimi küçük hızlarda oluşabilir. Hız arttıkça, belli bir değerden sonra girdaplı akış rejimi başlar, yer yer türbülanslar oluşur. Girdaplı akışın incelemesi karmaşık olduğundan, burada sadece tabakalı akışı ele alacağız.

Debi ve Süreklilik Denklemi

Bir akışkanın A kesitli bir yüzeyden birim zamanda geçen hacmine **debi** denir ve Q ile gösterilir. Birimi m^3/s dir. Akışkan A kesiti içinden sabit v hızıyla geçiyorsa, Δt zaman aralığında bu kesitten geçen hacim, uzunluğu $v\,\Delta t$ ve taban alanı A olan bir silindirin hacmi olur. Buna göre, debi ifadesi şöyle olur:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\,v\,\Delta t}{\Delta t}$$

$$Q = A\,v \tag{11.16}$$



Şekil 11.17: Her kesitten birim zamanda eşit hacimde madde geçer.

Tabakalı akışta akış çizgileri birbirine karışmazlar. Herhangi bir A kesitini çevreleyen akış çizgileri sıvı içinde bir tüp şeklinde uzanırlar. Böyle bir tübün farklı iki kesitini gözönüne alalım. A_1 kesitinden geçiş hızı v_1 ve A_2 kesitinden geçiş hızı da v_2 olsun. Bu akışkan ideal, yani sıkıştırılamaz olduğundan, her kesitinden birim zamanda eşit hacimde sıvı geçmelidir. O halde, her iki kesitteki debiler eşit olmalıdır:

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(süreklilik denklemi)} \tag{11.17}$$

Bu eşitlik **süreklilik denklemi** adıyla bilinir. Bir bahçe hortumunun ucunu başparmağımızla sıkıştırıp suyun çok hızlı fışkırmasını sağlarız, çünkü aynı miktar su daha dar bir kesitten geçmektedir. O halde, debisi aynı kalması için daha hızlı akmalıdır.

Süreklilik denklemi hacimlerin korunduğunu ifade etmektedir, ama sıkıştırılamaz sıvı olduğu için, aslında kütlenin korunduğunu söyler. Yani akış çizgisi boyunca gidildiğinde, sıvının kütle kaybı yoktur.

Enerji korunumu

Bir akış tübündeki akışkan kütlesinin iki farklı yerdeki enerjilerini karşılaştıralım. Başlangıçta y_1 yüksekliğinde bulunan A_1 kesitinden v_1 hızıyla geçen akışkan kütlesi, daha sonra y_2 yüksekliğindeki A_2 kesitinden v_2 hızıyla geçiyor olsun.

Bu tübe etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı iş, toplam enerjideki artışa eşit olacaktır. Bölüm 5 de enerji konusunu işlerken, genel enerji korunumu için bulduğumuz (5.17) ifadesini hatırlayalım:

$$(K_1 + U_1) + W_{\text{net}} = K_2 + U_2 \tag{11.18}$$

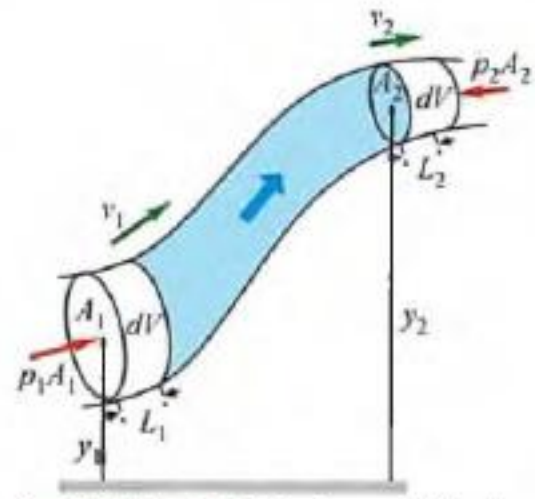
Burada K kinetik enerji, U yerçekimi potansiyel enerjisi ve W_{net} korunumsuz kuvvetlerin yaptığı net işi belirtiyordu. Kolaylık amacıyla bu yasayı şöyle yazalım:

$$W_{\text{net}} = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1)$$

Akış tübüne etkiyen korunumsuz dış kuvvet iki uçtaki basınçlardan kaynaklanır. Tübe etkiyen yanal kuvvetler, yola dik olduğundan, iş yapmazlar. Birinci kesitteki P_1 basıncının uyguladığı kuvvet $P_1 A_1$, diğer uçtaki P_2 basıncının uyguladığı kuvvet $P_2 A_2$ olur. Birinci kesitteki kuvvetin etkisiyle akışkan kütlesi L_1 kadar yol, ikinci kesitteki kütle de L_2 kadar yol alıyor olsun. Buna göre, yapılan net iş,

$$W_{\text{net}} = F_1 L_1 - F_2 L_2 = P_1 A_1 L_1 - P_2 A_2 L_2$$

olur. Her iki kuvvet tübün içine doğru yönelik olduğundan, ikinci kuvvetin yaptığı iş negatif olur. Şimdi, her iki kesitteki kütlenin yerçekimi potansiyel enerjisini yazalım. Sıvı kütlesi her iki yerde aynı m değerinde olduğundan,



Şekil 11.18: Bir akış tübünün iki kesiti.

$$U_2 - U_1 = mgy_2 - mgy_1$$

olur. Yine, kinetik enerjiler farkı doğrudan yazılabilir:

$$K_2 - K_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Tüm bu terimleri (11.5) denkleminde toplarsak,

$$P_1 A_1 L_1 - P_2 A_2 L_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1$$

olur. m kütlesini yoğunluk ve hacim cinsinden yazalım. Tübün iki kesiti ve alınan yollar farklı olabilir, ama hacim aynı kalacaktır:

$$V = A_1 L_1 = A_2 L_2$$

Kütleyi de yoğunluk cinsinden ifade edecek olursak,

$$m = \rho V = \rho A_1 L_1 = \rho A_2 L_2$$

yazılır. O halde, A_1L_1 ve A_2L_2 çarpımları m/ρ olarak yazıldığında, yukardaki ifade şöyle sadeleşir:

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

Terimler yeniden düzenlenirse **Bernoulli denklemi** bulunmuş olur:

$$\boxed{P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \qquad \text{(Bernoulli denklemi)}} \tag{11.19}$$

Bernoulli denklemi enerji korunumunun akışkanlar için yazılmış halidir. Bu denklem ideal, yani viskoz olmayan ve sıkıştırılamayan akışkanlar için geçerlidir, Diğer akışkanlar için yaklaşık doğru olur.



Şekil 11.19: Bernoulli denklemi uygulamaları: Otomobil motorunda karbüratör, parfüm spreyi, uçaklarda Pitot tübü.

Bernoulli denklemininden çıkarılabilecek sonuçları vurgulayalım:

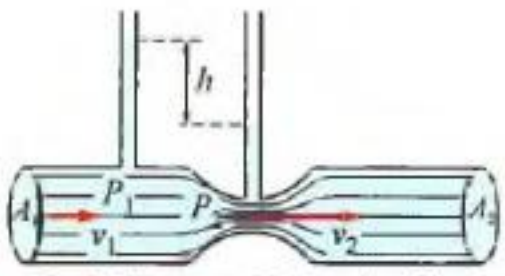
- **Hidrostatik basınç.** Durgun bir sıvı kütlesi için Bernoulli denkleminde $v_1 = v_2 = 0$ alınırsa,

$$P_1 + \rho g y_1 = P_2 + \rho g y_2$$

olur. Veya, iki ucun yüksekliklerini $y_1 = 0$ ve $y_2 = y$ değerinde alırsak,

$$P = P_0 + \rho g y$$

olur. Bu, daha önce gördüğümüz hidrostatik basınç formülüdür.



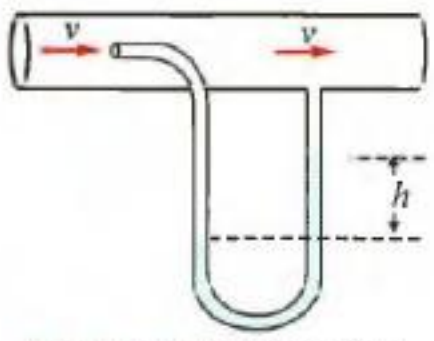
Şekil 11.20: Venturi tübü.

- **Venturi tübü.** Aynı yükseklikte iki boru kesiti gözönüne alalım. Bernoulli denkleminde $y_1 = y_2$ alınırsa,

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Süreklilik denklemine göre, borunun dar kesitinde hız daha büyük olacağından, dar kesitte basınç daha düşük olur. *Venturi tübü* denilen bu düzenek teknolojide çok kullanılır.

Benzinli motorların karbüratörlerinde benzinin havaya karışması, tarım ilacı püskürtücüleri veya parfüm spreylerinde bu düzenek kullanılır. Şekil 11.20 de görüldüğü gibi, sıvının açık ucundan geçen bir borudan hava üflendiğinde, basınç orada azalacağından, haznedeki sıvı yükselir ve geçen havaya karışır.



Şekil 11.21: Pitot tübü.

Buna benzer bir düzenek olan **Pitot tübü** uçağın havaya göre hızını ölçmekte kullanılır. İçi sıvı dolu bir U borusunun bir ucu önünden hava v hızıyla geçerken, diğer ucunda hızın sıfır olması sağlanır. Basınç farkından dolayı yükselen sıvının h yüksekliği ölçülürse, Bernoulli denklemindan havanın hızı hesaplanabilir.

- **Torricelli formülü.** İçinde sıvı bulunan kapalı bir hazneden, yüzeyin h kadar aşağısından bir delik açıldığını düşünelim. Kap içindeki sıvı yüzeyi ile, deliğin bulunduğu noktayı Bernoulli denkleminde karşılaştıralım. Kap içindeki sıvı yüzeyi çok geniş olduğundan hızı sıfır alınabilir. Kabın içindeki

sıvı yüzeyi P basınçta ve havaya açık olan delikteki basınç P_0 atmosfer basıncında olsun. Buna göre,

$$P + 0 + \rho g h = P_0 + \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2(P - P_0)}{\rho}} \tag{11.20}$$

Eğer, kabın üstü de atmosfer basıncına açıksa, $P = P_0$ olur ve

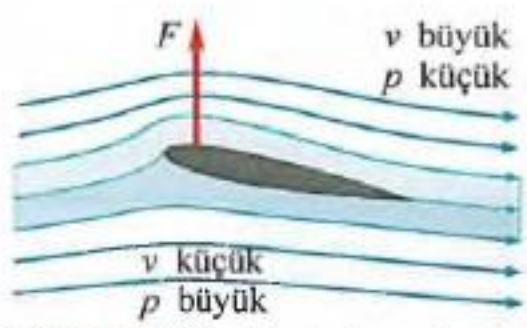
$$v = \sqrt{2gh} \tag{11.21}$$

bulunur. **Torricelli formülü** denilen bu bağıntı, tıpkı serbest düşmede h yüksekliğinden bırakılan taş gibi, sıvının da $v = \sqrt{2gh}$ hızını kazanacağını göstermektedir. Bu, şaşırtıcı değildir, çünkü Bernoulli yasası da zaten enerji korunumu ifadesidir. Şekil 11.22 de farklı derinliklerde açılmış deliklerden çıkan suyun hızları görülmektedir.



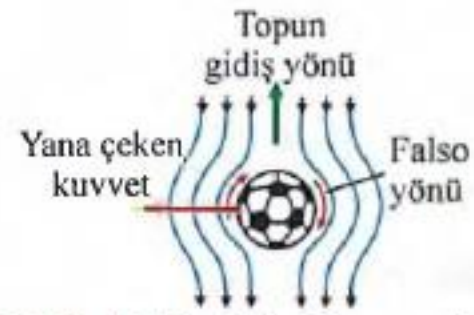
Şekil 11.22: Torricelli formülüne göre, farklı derinliklerde su hızı.

- Bernoulli denkleminin en gözalıcı uygulaması uçak teknolojisidir. Havadan ağır bir çelik kuşun kanatlarında nasıl bir kaldırma kuvveti oluştuğu, bu denklemle anlaşılabilir. Bir uçak kanadının kesidine bakıldığında, kanadın alt kısmı daha düz, üst kısmı ise daha kavisli bir görünümdedir. Uçak bir akım çizgileri demetine girdiğinde, üst taraftan geçen hava alttakine göre daha uzun bir yol katedip arkada diğerleriyle buluşacaktır. Bu da, üstteki hava hızının daha büyük olması demektir.
  O halde, Bernoulli denklemine göre, kanadın üst tarafındaki basınç alt taraftakinden küçük olur. Bu basınç farkı kanat üzerinde yukarı doğru net bir **kaldırıcı kuvvet** oluşturur. Bu kuvveti, Archimedes kaldırma kuvvetiyle karıştırmamak gerekir.



Şekil 11.23: Uçak kanadı altında ve üstünde hız ve basınç.

Yine, futbol topuna falso vererek yapılan vuruşlarda Bernoulli etkisi gözlenir. Top dönerek giderken, dönüş hızının bir yanda artı diğer yönde eksi katkısı sebebiyle, havaya göre hız iki tarafta farklı olur. Bu hız farkı, Bernoulli denklemine göre iki yanda basınç farkına yol açacaktır. Buna bağlı olarak, basıncın az olduğu, yani hızın büyük olduğu tarafa topu çeken net bir kuvvet doğar ve top kavisli gider.



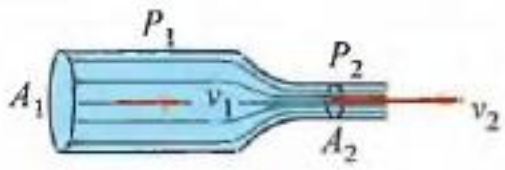
Şekil 11.24: Falsolu vurulan topun iki yanındaki hız farkından doğan kuvvet.

Örnek 11.10

Şekildeki şehir suyu şebekesinin ana borusunun kesiti $A_1 = 4\,\mathrm{m}^2$ *ve buna bağlı diğer borunun kesiti* $A_2 = 2\,\mathrm{m}^2$ *dir.* A_1 *kesitinden akan suyun debisi* $Q = 24\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ *oluyor.*

(a) *Her iki kesitte suyun akış hızını hesaplayın.*

(b) *Birinci kesitteki basınç* $P_1 = 2\,\mathrm{atm}$ *ise, ikinci kesitteki basınç ne olur?*



Çözüm

(a) Debi tanımı (11.16) denklemi ile verilmişti:

$$Q = A_1 v_1$$

Buradan v_1 hızı bulunur:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{24}{4} = 6\,\mathrm{m/s}$$

İkinci kesitteki hızı bulmak için debiyi veya süreklilik denklemini (11.17) kullanırız:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \;\rightarrow\; v_2 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{2} \times 6 = 12\,\mathrm{m/s}$$

(b) Bernoulli denklemi (11.19) yazılır:

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Kesitlerin yükseklikleri aynı olduğu için $y_1 = y_2$ alınır ve P_2 için çözülür:

$$P_2 = P_1 - \tfrac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Atmosfer birimi pascal birimine çevrilerek basınç hesaplanır:

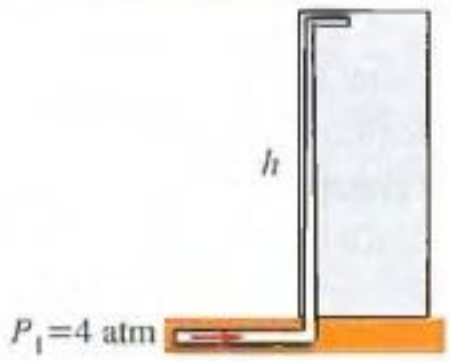
$$P_2 = 2 \times 1.013 \times 10^5 - \tfrac{1}{2} \times 1000 \times (12^2 - 6^2)$$
$$P_2 = 1.5 \times 10^5\,\text{Pa} = 1.5\,\text{atm}$$

Örnek 11.11

Bir binanin girişindeki su borusundan $P_1 = 4\,\text{atm}$ *basınçla su veriliyor. Girişte* $5\,\text{cm}^2$ *kesitli borudan suyun akış hızı* $2\,\text{m/s}$ *dir.*

(a) $4\,\text{m}$ *yükseklikteki 2. katta* $1\,\text{cm}^2$ *kesitli bir musluktan akan suyun hızı ve basıncı ne kadar olur?*

(b) $40\,\text{m}$ *yükseklikteki 10. kata su çıkabilmesi için girişteki basınç en az ne kadar olmalıdır?*



Çözüm

(a) Süreklilik denkleminden 2. kattaki hız bulunur:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \;\rightarrow\; v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{5}{1} \times 2 = 10\,\text{m/s}$$

Basınç Bernoulli denkleminden bulunur:

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Yerde $y_1 = 0$ alınıp P_2 için çözülür:

$$P_2 = P_1 - \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g y_2$$

Basınç değerleri pascal birimine çevrilir ve suyun basıncı $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ alınıp hesap yapılır:

$$P_2 = 4\times1.013\times10^5 - \tfrac{1}{2}\times1000\times(10^2-2^2) - 1000\times10\times4$$
$$P_2 = 320\,000\,\text{Pa} = 3.1\,\text{atm}.$$

(b) 10. kata suyun çıkabilmesi demek, en az sıfır hızla ve en az atmosfer basıncıyla gelmesi demektir.O halde, $v_2 = 0$ ve $P_2 = 1\,\text{atm}$ alındığında, süreklilik denklemine göre yerdeki hız da $v_1 = 0$ olmalıdır. Böylece, Bernoulli denklemi sadeleşir:

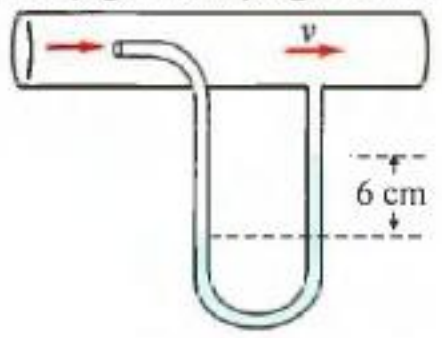
$$P_1 + 0 + 0 = P_0 + 0 + \rho g y_2$$

Buradan P_1 hesaplanır:

$$P_1 = 1\times1.013\times10^5 + 1000\times10\times40 = 501\,000\,\text{Pa} = 5\,\text{atm}$$

Örnek 11.12

Havadaki bir uçağın kanadındaki Pitot tübünde civa sütunu $6\,\text{cm}$ *yükselmiştir. Uçağın havaya göre hızı ne kadardır?*



Çözüm

İki sütunun uç noktasını karşılaştıralım. Sütunlardan birinde hava hızı sıfır, diğerinde v olur. $y_1 = y_2 = y$ olduğundan, Bernoulli formülü şöyle yazılır:

$$P_1 + 0 + \rho g y = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y$$
$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

Basınç farkı civa sütunu basıncına eşit yazılır:

$$\rho_{Hg} g h = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$
$$v = \sqrt{2gh\,\frac{\rho_{Hg}}{\rho}}$$

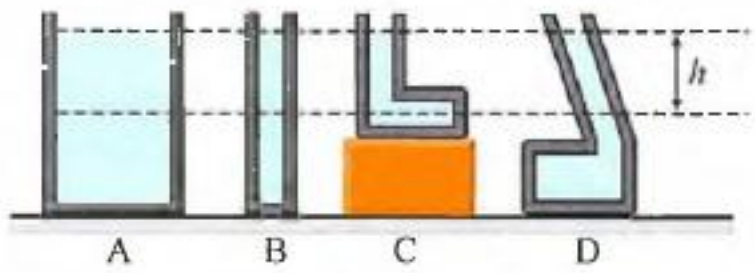
Havanın yoğunluğu 1.2 ve civanınki $\rho_{Hg} = 13600\,\text{kg/m}^3$ alınıp hız hesaplanır:

$$v = \sqrt{20 \times 0.06 \times \frac{13600}{1.2}} = 117\,\text{m/s}.$$

Test

1. Aşağıdaki şekildeki kapların hangisinde h derinlikte basınç daha büyüktür?

   (a) A (b) B (c) C (d) Eşit



2. Yukardaki şekildeki kapların hangisinin tabanındaki basınç daha büyüktür?

   (a) A (b) B (c) C (d) Eşit

3. Yukardaki şekildeki kapların hangisinin tabanındaki kuvvet daha büyüktür?

   (a) A (b) B (c) C (d) Eşit

4. Hidrostatik basınç için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

   I. Derine inildikçe artar.
   II. Derine inildikçe azalır.
   III. Sıvının yoğunluğu arttıkça artar.
   IV. Sıvının yoğunluğu arttıkça azalır.

   (a) I (b) I ve II (c) I ve III (d) I ve IV

5. Sıvıların kaldırma kuvveti için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   (a) Derine inildikçe artar.
   (b) Sıvının yoğunluğu arttıkça artar.
   (c) Cismin hacmi arttıkça artar.
   (d) Yerçekimi ivmesi arttıkça artar.

6. Bir kayık göl suyunda mı, yoksa tuzlu deniz suyunda mı daha çok batar?
   (a) Gölde (b) Denizde (c) Aynı

7. Kurşun bakırdan daha yoğundur. Kütleleri eşit olan kurşun ve bakır bloklara su içinde etkiyen kaldırma kuvveti hangisinde daha büyüktür?
   (a) Kurşunda (b) Bakırda (c) Aynı

8. Kurşun bakırdan daha yoğundur. Hacimleri eşit olan kurşun ve bakır bloklara su içinde etkiyen kaldırma kuvveti hangisinde daha büyüktür?
   (a) Kurşunda (b) Bakırda (c) Aynı

9. Archimedes kaldırma kuvveti aşağıdakilerden hangisine eşittir?
   (a) Cismin batan kısmının ağırlığına.
   (b) Cismin yüzen kısmının ağırlığına.
   (c) Taşırdığı sıvının ağırlığına.

10. Bir tahta bloğa demirden yapılmış bir küre yapıştırılıp suya bırakıldığında suda yüzmektedir. Hangisinde suyun kaldırma kuvveti daha büyük olur?
    (a) Demir üstte, suyun dışında ise.
    (b) Demir altta, suyun içinde ise.
    (c) Kaldırma kuvveti aynıdır.

11. Bir bardak suyun içinde bir buz parçası yüzmektedir. Buz tamamen eridiğinde su seviyesi ne olur?
    (a) Artar (b) Azalır (c) Aynı kalır

12. Bir havuzdaki kayığın içindeki adam, kayıktan suya iniyor. Havuzdaki su seviyesi ne olur?
    (a) Artar (b) Azalır (c) Aynı kalır

13. Civa dolu bir kapta yarıya kadar batmış olarak yüzen bir demir blok, Ay üzerine götürüldüğünde civa içinde ne kadar yüzer?
    (a) Daha çok (b) Daha az (c) Aynı



14. Birbirine karışmayan iki sıvı (su ve civa) bir U borusunun iki tarafında, ortadaki musluk kapalı iken, eşit yüksekliktedirler. Musluk açıldığında hangi tarafta seviye yükselir?
    (a) Su (b) Civa (c) Aynı

15. Bir havuzdaki kayığın içinde oturmakta olan bir adamın başına bir kuş gelip konuyor. Havuzdaki su seviyesi ne olur?
    (a) Yükselir (b) Azalır (c) Aynı kalır

16. Bir sıvı içinde v hızıyla ilerleyen bir küreye etkiyen viskozluk kuvveti, aşağıdakilerden hangisine bağlıdır?
    (a) Kürenin yarıçapına.
    (b) Kürenin hızına.
    (c) Sıvının cinsine.
    (d) Hepsine.

17. Yarıçapları eşit olan kurşun ve tahtadan yapılmış iki küre aynı yükseklikten bırakılıyorlar. Herbiri üzerindeki hava direnç kuvvetinin aynı olduğunu varsayalım. Hangisi yere daha önce varır?
    (a) Kurşun (b) Tahta (c) Aynı

18. Aşağıdaki şekildeki borunun hangi kesitinde hız daha fazladır?
    (a) A (b) B (c) C (d) Eşit



19. Yukardaki şekildeki borunun hangi kesitinde basınç daha fazladır?
    (a) A (b) B (c) C (d) Eşit

20. Yukardaki şekildeki borunun hangi kesitinde debi daha fazladır?
    (a) A (b) B (c) C (d) Eşit

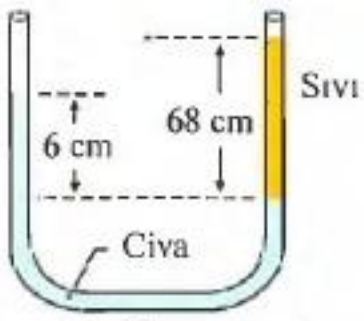
Problemler

11.1 Akışkanların Genel Özellikleri

11.1 Atmosfer basıncının 1.2 atm olduğu bir yerde, açık uçlu bir manometre ile bir balondaki gazın basıncı ölçülmek isteniyor. Manometrenin civa sütunu 40 cm gösterdiğine göre, gazın mutlak basıncı ve geyç basıncı ne kadar olur? [C: 1.73 ve 0.53 atm.]

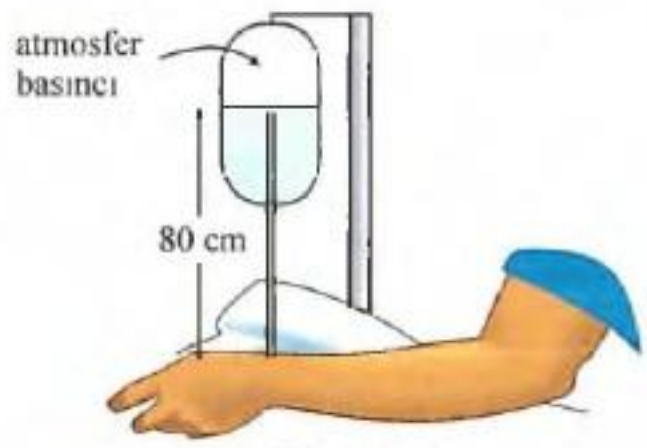
11.2 Deniz seviyesinde havanın yoğunluğu 1.3 kg/m^3 tür. Eğer havanın yoğunluğu yükseklikle azalmayıp sabit kalsaydı, Dünya atmosferinin kalınlığı ne kadar olurdu? [C: 7.8 km.]

11.3 (a) Okyanusun 1200 m derinliğinde basınç ne kadardır? Pascal ve atmosfer cinsinden hesaplayın. (b) Bu derinlikte bir araştırma kamerasının 1 cm^2 lik cam objektifi ne kadar bir kuvvete dayanabilmelidir? Deniz suyunun yoğunluğu $\rho = 1030\,\text{kg/m}^3$ tür. [C: (a) 1.25×10^7 Pa, 123 atm, (b) 1250 N.]



Problem 11.4

11.4 İki ucu açık bir U borusunda civa sütunu üzerine, yoğunluğu bilinmeyen bir sıvı ekleniyor. Şekilde görüldüğü gibi, civanın yüksekliği $h_1 = 6$ cm ve diğer sıvının yüksekliği $h_2 = 68$ cm olduğuna göre, sıvının yoğunluğunu hesaplayın. [C: 1.2 g/cm^3.]



Problem 11.5

11.5 Damarlardaki kan basıncına *tansiyon* adı verilir. Bu, atmosfer basıncına ilave olan geyç basıncıdır. Hastaları serumla beslerken, vücuda girdiği yerde serum basıncının kan basıncından daha büyük olması gerekir. Şekilde görülen şişedeki serumun yoğunluğu 1040 kg/m^3 tür. Serum şişesi ancak 80 cm yükseğe asıldığında sıvı kana girebilmektedir. Hastanın kan basıncını (geyç basıncını) pascal ve cm Hg biriminde hesaplayın. [C: 8320 Pa, 6.2 cm Hg.]

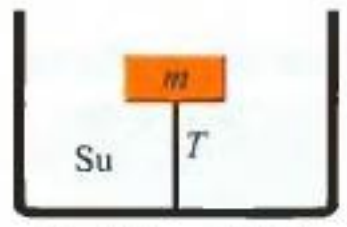
11.6 Otomobilleri kaldırmakta kullanılan hidrolik vinçte, aracın konulduğu platformu iten silindirin yarıçapı 30 cm dir. Sıvıyı iten pistonun yarıçapı 3 cm dir. 5 tonluk bir kamyonu kaldırmak için ne kadar kuvvet gerekir? [C: 500 N.]

11.7 Keban Barajı'nın duvarı 210 m yükseklikte ve 1100 m uzunluktadır. Baraj duvarına etkiyen toplam kuvveti ve devirmeye çalışan momenti hesaplayın. [C: 2.4×10^{11} N ve 1.7×10^{13} N · m.]

11.2 Archimedes Kaldırma Kuvveti

11.8 Yoğunluğu 0.7 g/cm^3 olan tahta bir blok, yoğunluğu 0.92 g/cm^3 olan yağ içine konulduğunda, hacminin yüzde kaçı batar? [C: %76.]

11.9 Yoğunluğu 2.7 g/cm^3 olan alüminyum bir blok, yoğunluğu 13.6 g/cm^3 olan civa üzerinde kısmen batmış olarak yüzmektedir. Civa üzerine su ilave edilerek alüminyum bloğun tamamen batması sağlanıyor. Blok hacminin yüzde kaçı su içindedir? [C: %87.]



Problem 11.10

11.10 Kütlesi 2 kg ve yoğunluğu 400 kg/m^3 olan tahta bir blok, şekilde görüldüğü gibi, suyun dibindeki bir ipe bağlanıp batırılmıştır. İpteki gerilme kuvvetini hesaplayın. [C: 30 N.]

11.11 Göl üzerinde 1000 kg lık bir otomobili taşıyabilecek olan buz tabakasının hacmi en az ne kadar olmalıdır? Buzun yoğunluğu 0.92 g/cm^3 tür. (*Yol gösterme:* Sınır durumda, buzun tamamı batmış olarak yüzdüğünü gözönüne alın.) [C: 12.5 m^3.]



Problem 11.12

11.12 Şekildeki terazi, üzerinde sadece su dolu kap bulunduğunda 2.4 kg göstermektedir. Kütlesi 780 g ve yoğunluğu 7.8 g/cm^3 olan bir demir parçası ipe bağlanıp su içine sarkıtılıyor. Terazi ne kadar gösterir? [C: 2.5 kg.]

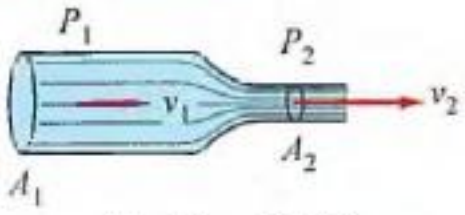


Problem 11.13

11.13 Metalden yapılmış içi boş bir küresel kabuğun iç yarıçapı 5 cm ve dış yarıçapı 6 cm dir. Bu cisim suya bırakıldığında yarısına kadar batmış olarak yüzmektedir. Metalin yoğunluğunu hesap edin. [C: 1.2 g/cm^3.]

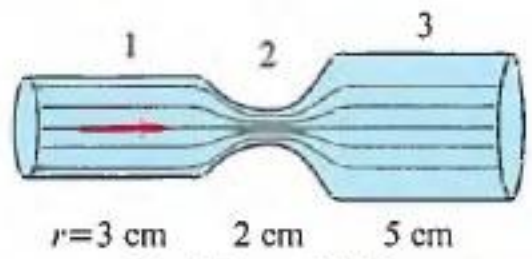
11.14 Yaylı bir kantara asılı bir blok sırasıyla su, yağ ve bilinmeyen bir sıvı içine sarkıtıldığında kantar sırasıyla 1.4, 1.9 ve 2.5 kg gösteriyor. Suyun yoğunluğu 1000 kg/m^3 ve yağın yoğunluğu 900 kg/m^3 olduğuna göre, bilinmeyen sıvının yoğunluğu ne kadar olur? [C: 780 kg/m^3.]

11.5 Bernoulli Denklemi



Problem 11.15

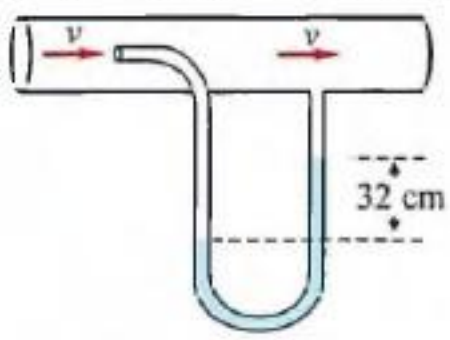
11.15 Şekildeki şehir suyu şebekesinin ana borusunun kesiti $A_1 = 3\,m^2$ ve buna bağlı diğer borunun kesiti $A_2 = 1\,m^2$ dir. A_1 kesitinden akan suyun debisi $Q = 15\,m^3/s$ oluyor. (a) Her iki kesitte suyun akış hızını hesaplayın.(b) Birinci kesitteki basınç $P_1 = 8$ atm ise, ikinci kesitteki basınç ne olur? [C: 5 ve 15 m/s (b) 7 atm.]



Problem 11.16

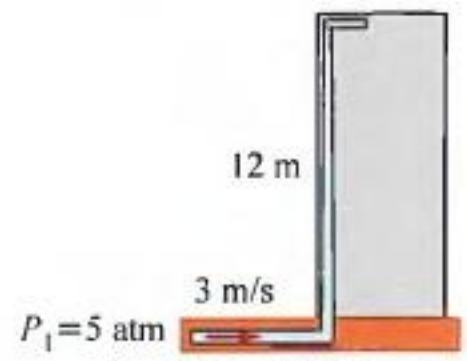
11.16 Şekildeki borunun 3 ayrı kesitinin yarıçapları $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ ve $r_3 = 5$ cm dir. Suyun birinci kesitten akış hızı 2 m/s olduğuna göre, (a) Diğer iki kesitteki hızları, (b) Suyun debisini hesaplayın.

[C: (a) $v_2 = 4.5$, $v_3 = 0.72$ m/s, (b) 0.006 m^3/s.]



Problem 11.17

11.17 Havadaki bir uçağın kanadındaki Pitot tübünde alkol bulunmaktadır. Alkol sütunu 32 cm yükseldiğine göre uçağın havaya göre hızı ne kadardır? Alkolün yoğunluğu 800 kg/m^3 ve havanın yoğunluğu 1.2 kg/m^3 tür. [C: 65 m/s.]

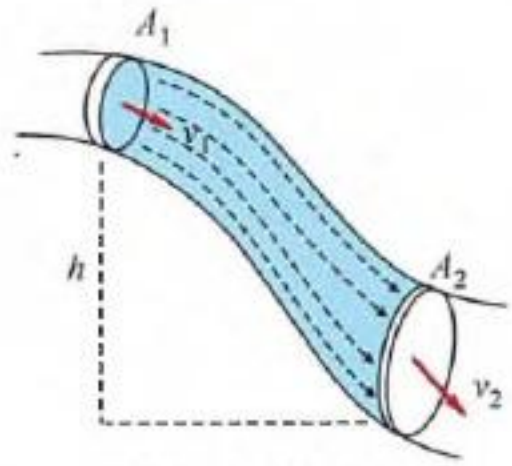


Problem 11.18

11.18 Bir binanin girişindeki 5 cm^2 kesitli su borusundan $P_1 = 5$ atm basınçla ve 3 m/s akış hızıyla su veriliyor. 12 m yükseklikteki 3. katta 1.5 cm^2 kesitli bir musluktan akan suyun hızı ve basıncı ne kadar olur?

[C: 10 m/s ve 3.4×10^5 Pa = 3.3 atm.]

11.19 Bir itfaiye hortumunda suyun debisi sabit 1 m^3/s dir. Hortumun ucuna takılan metal başlıkla, suyun 40 m yüksekteki bir yangına su püskürtmek isteniyor. Suyun yangına ulaşabilmesi için başlığın yarıçapı en fazla ne kadar olmalıdır? [C: 0.11 m.]



Problem 11.20

11.20 Şekildeki borunun $h = 12$ m yüksekteki $A_1 = 4\,cm^2$ kesitinden 3 m/s hızla su geçmektedir. Üst kesitteki basınç 1.2 atm ise, alttaki $A_2 = 5\,cm^2$ kesitinde basınç ne kadardır? [C: 2.4×10^5 Pa = 2.4 atm.]

12
SICAKLIK VE ISI



Umman'da Şarkiyya çölünde sıcaklık, gölgede 50 °C ye kadar yükselebilmektedir.
Atomlar açısından *sıcaklık* neyin ölçüsüdür? Sıcaklık değişmesi fiziksel özelliklerin değişmesine nasıl yolaçar?

Buraya kadar olan bölümlerde hep az sayıda parçacığın hareketini inceledik. Fakat, muazzam sayıda parçacıktan oluşan sistemlerde bunu yapmak güçleşir. Bir bardak suyu gözönüne alalım. Bu bardağın içinde yaklaşık 10^{24} sayıda molekül vardır. İlke olarak, bu moleküllerin herbiri için Newton yasalarını tek tek yazıp çözümleri bulabiliriz. Ama pratikte, en hızlı bilgisayarlarda dahi bu kadar çok sayıda denklemi çözmek yıllar sürer.

Diyelim ki bu kadar çok denklemi çözüp herbir molekülün konum ve hızlarını bulduk. Bu kadar çok bilgi ne işe yarar ki? Oysa, bir bardak suyun durumunu belirtmek için bize 3-5 tane nicelik yeterlidir: Sıcaklık, hacim, basınç, vb. Bunlar ele aldığımız sistemi bir bütün olarak belirleyen, yani makroskopik niceliklerdir.

Bir sistemin çevresiyle olan etkileşmelerini makroskopik olarak inceleyen bilim dalına **Termodinamik** denir. Bu bölümde termodinamik konusunun temel kavramlarını öğrenip, sonraki bölümde uygulayacağız.

12.1 TERMODİNAMİK DENGE VE SICAKLIK

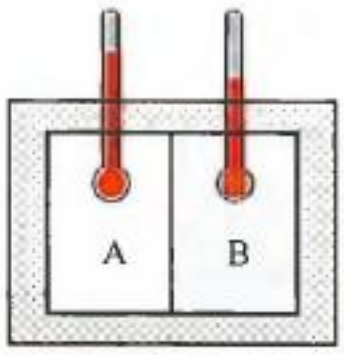
Bir sistemi bir bütün olarak tanımlayan niceliklere **durum değişkenleri** adı verilir. Bu değişkenler arasında T sıcaklığı, P basıncı, V hacmi, m kütlesi, ve daha sonra göreceğimiz E iç enerjisi, ... sayılabilir. Makroskopik bir sistemin iç yapısı ne kadar karmaşık olursa olsun, sınırlı sayıda durum değişkeni ile sistemi bir bütün olarak tanımlamak mümkündür.

Bir bardak çayı gözönüne alalım. Bu çayı kendi haline bırakırsak, soğumaya başlar ve bir süre sonra oda sıcaklığına gelir. Veya, bir kaşıkla karıştırıp bırakırsak, sıvının dönme hareketi bir süre sonra durur. Keza, çaya bir parça şeker atıp karıştırırsak, bir süre sonra şeker konsantrasyonu çayın içinde düzgün olarak dağılır.

İşte, *bir sistemin durum değişkenleri zaman içinde değişmiyorsa ve sistemin heryerinde aynı değerde ise, bu duruma* ***termodinamik denge*** *(veya, kısaca denge) denir.*

Sıcaklık

Bir cisme dokunduğumuzda "sıcak" veya "soğuk" olduğunu hissederiz. Farklı sıcaklıkta iki suyu bir kaba döküp beklersek, sıcaklıkların eşitleneceğini biliriz.



Şekil 12.1: Çevreden yalıtılmış iki cisim dengeye geldiğinde sıcaklıkları eşit olur.

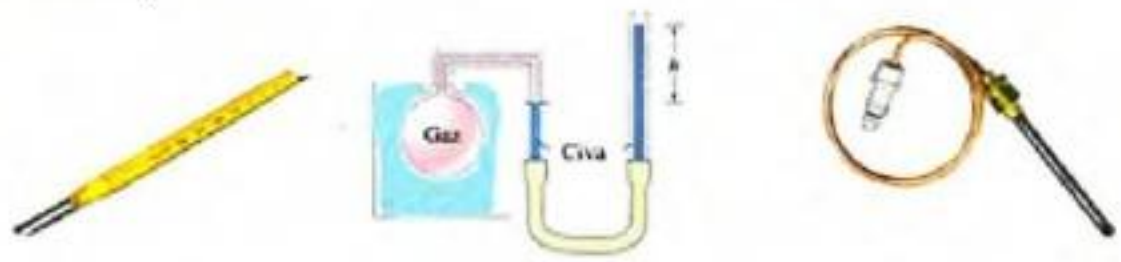
En temel termodinamik nicelik olan sıcaklık, termodinamik dengenin nicel ölçüsüdür. A ve B gibi iki cisim alıp birbirleriyle temas ettirelim ve diğer tüm dış dünyadan yalıtalım. *Bu iki cisim termodinamik dengeye geldiğinde sıcaklıkları eşit olur.* Bu tanımın tersi de doğrudur, yani sıcaklıkları eşit olan iki cisim termodinamik dengede olurlar.

Bu tanım sıcaklığı makroskopik olarak belirler. Fakat, mikroskopik olarak yorumlamak gerekirse *sıcaklık, sistemi oluşturan moleküllerin ortalama kinetik enerjisinin bir ölçüsüdür.* Bu mikroskopik yorum İstatistik Fizik denilen fizik dalının konusudur.

Sıcaklık Ölçümü – Termometre

Her cismin sıcaklığı değiştikçe mutlaka başka bir niceliği daha değişir. Örneğin, ısınan demir çubuk genleşir; ısınan bir gazın basıncı artar; veya ısınan bir telin elektrik direnci artar. İşte bu özellikler cinsinden sıcaklık birimi tanımlanır ve böylece diğer cisimlerin sıcaklıkları ölçülebilir.

Sıcaklık ölçen alete **termometre** denir. En bilinen cinsi **civalı termometre**dir. Dipteki bir haznede toplanmış olan sıvı civa, sıcaklık ile orantılı olarak genleşir ve bir sütunda yükselir. Civa sütunu yüksekliğinden sıcaklık hesaplanabilir. (Civa zehirli bir madde olduğundan, günümüzde bunun yerine boyalı alkol kullanılmaktadır.)



Şekil 12.2: Termometre çeşitleri: civalı termometre, sabit hacimli gaz termometresi, termokupl.

Diğer bir termometre türü **sabit hacimli gaz termometresi**dir. Bu alette bir cam hazne içindeki gaz bir U-borusunu dolduran civa sütunu ile hapsedilmiştir. Hazne içindeki gaz, sıcak bir sıvı içine konulup ısıtıldığında hacmi ve basıncı artar. Fakat, civa sütunu ayarlanarak hacmin sabit kalması, sadece basıncın artması sağlanır. Yine, civa sütunu yüksekliğinden sıcaklık ölçülebilir.

Teknolojide ve laboratuvarlarda ise **termokupl** denilen bir termometre türü kullanılır. Termokupl iki farklı metal (bakır, demir, tungsten) veya alaşımdan (konstantan, alumel, nisil) yapılmış iki uca sahiptir. Bu uçlardan biri standart bir sıcaklıkta (0°) tutulup, diğer uç farklı bir sıcaklığa getirildiğinde, iki uç arasında bir voltaj farkı oluşur. Sıcaklıkla orantılı olan bu voltaj ölçülerek sıcaklık bulunur.

Sıcaklık Ölçekleri – Celsius, Fahrenheit, Kelvin

Sıcaklık ölçebilmek için, önce herkes tarafından kolayca gerçekleştirilebilecek sabit iki sıcaklık kararlaştırılır. Bu iki sıcaklık arası eşit parçalara bölünerek bir sıcaklık ölçeği oluşturulur. Dünya ülkelerinde yaygın olarak kullanılan iki sıcaklık ölçeği vardır: Celsius (°C) ve Fahrenheit (°F). Bilim dünyasında ise Kelvin (K) ölçeği kullanılır.

Celsius ölçeğinde 1 atmosfer basınçta suyun donma noktası sıfır derece celsius (0 °C), kaynama noktası ise (100 °C) alınır. Bu iki nokta arası 100 eşit parçaya bölünür.

Fahrenheit ölçeğinde 1 atmosfer basınçta suyun donma noktası 32 derece fahrenheit (32 °F), kaynama noktası ise (212 °F) alınır. Bu iki nokta arası 180 dereceye bölünür.

Celsius ve Fahrenheit ölçekleri arasında geçiş formülü şöyle olur:

$$T_C = \frac{5}{9}\,(T_F - 32°\text{F}) \tag{12.1}$$

Gerek Celsius ve gerekse Fahrenheit ölçeği iki sabit nokta gerektirir.

Günümüzde bilim dünyasında sadece bir sabit nokta gerektiren **mutlak sıcaklık ölçeği** veya **Kelvin ölçeği** kararlaştırılmıştır. SI birim sisteminde sıcaklık birimi Kelvin olup kısaca K ile gösterilir (° işareti kullanılmaz.) Bu ölçeğin sabit noktası **suyun üçlü noktası** denilen ve suyun her üç halinin (su-buz-buhar) birlikte bulunduğu yerdir. Üçlü noktanın özelliği sıcaklık ve basıncın tek bir değerinde gerçekleşiyor olmasıdır.

Kelvin ölçeğinde suyun üçlü noktasının sıcaklığı şöyle kararlaştırılır:

$$T_K = 273.16\ \text{K} \qquad \text{(Üçlü nokta sıcaklığı)} \tag{12.2}$$

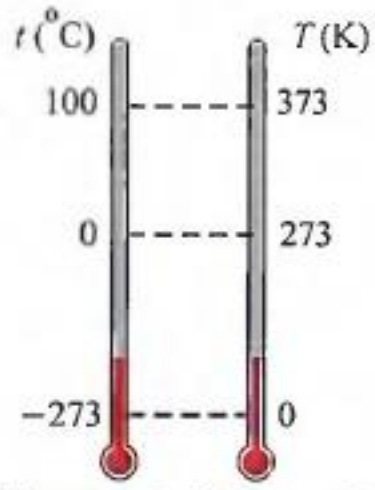
Kelvin ile Celsius ölçeği arasındaki ilişki şöyledir:

$$T_K = T_C + 273.15 \tag{12.3}$$

Suyun üçlü noktası celsius ölçeğindeki sıfırdan biraz farklıdır, ama bu derste pratik olarak sıfır alacağız:

$$0\ °\text{C} \approx 273\ \text{K} \qquad 100\ °\text{C} \approx 373\ \text{K} \tag{12.4}$$

Kelvin ölçeğinin sıfır noktası, yani −273.16 °C sıcaklık evrenin mutlak sıfırdır. Bu sıcaklıkta evrende her türlü hareket durur, daha aşağı sıcaklığın anlamı kalmaz.



Şekil 12.3: Celsius ve Kelvin ölçekleri.

12.2 ISI

Bir tencere suyu ocağın ateşi üstüne koyduğumuzda ısınmaya başlar. Burada gazın yanma enerjisi suya geçmektedir. Yanan gaz sudan daha sıcak olduğu için

bu enerjiyi suya verebilmektedir. O halde, bu enerji aktarımının başlıca sebebi sıcaklık farkıdır.

Bir sistemin çevresiyle olan sıcaklık farkından dolayı aldığı veya verdiği enerjiye türüne ısı denir. Isı Q ile gösterilir.

Isı bir enerji türü olduğu için, birimi Joule (J) dur. Sanayide kullanılan **kalori** (cal) biriminin joule cinsinden değeri şu kadardır:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

(*Not:* Günlük hayatta gıdalar için kullanılan "kalori" deyimi aslında "kilo-kalori" (kcal) birimidir.)

Burada bir noktayı vurgulayalım: Isı daima alınıp verilen birşeydir. Bir sistemin durduğu yerde ısısı olmaz, yani "bir kap suyun ısısı" demek yanlıştır, "aldığı ısı" veya "verdiği ısı" denilebilir. Termodinamik diliyle söylemek gerekirse, ısı bir durum değişkeni değildir.

Özgül Isı

Her cisim aldığı ısıyı çeşitli şekillerde kullanır: Cismin sıcaklığı artabilir, kaynamaya başlar, veya genleşir,... vb. Bunları sırasıyla ele alalım.

Her cismin ısınma oranı farklıdır. Bu özelliği belirtmek üzere **özgül ısı** denilen bir katsayı tanımlanır:

Bir cismin m kütlesinin sıcaklığını ΔT kadar artırmak için gerekli ısı miktarı Q ise,

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta T}$$

oranına cismin **özgül ısısı** denir.

Burada $\Delta T = T_2 - T_1$ sıcaklık artışıdır. Diğer bir deyişle, birim kütlenin sıcaklığını 1 birim artırmak için gerekli ısı miktarı özgül ısı olur. Özgül ısı birimi $\text{J/kg} \cdot \text{K}$ olur.

Bu tanımdan yola çıkarak, verilen bir ΔT sıcaklık artışı için gerekli ısı şöyle ifade edilir:

$$Q = mc\,\Delta T \tag{12.5}$$

Bu formül kalorimetri denilen teknikte kullanılır. Farklı sıvılar karıştırıldığında, son sıcaklığı bulmak için, alınan ve verilen ısıların cebirsel toplamı sıfır olur.

Çeşitli maddelerin özgül ısıları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Özgül ısı sıcaklıkla az miktarda değişir, fakat küçük ΔT farkları için sabit alınabilir.

Özgül ısılar

	c (J/kg·K)	c (cal/g·°C)		c (J/kg·K)	c (cal/g·°C)
Bakır	390	0.092	Su	4186	1.000
Aluminyum	900	0.215	Buz	2100	0.5
Altın	129	0.030	Su buharı	2010	0.48
Gümüş	234	0.056	Etil alkol	2400	0.58
Demir	448	0.107	Cam	837	0.200

Bu tabloda en yüksek özgül ısının suya ait olduğuna dikkat edin. Suyu ısıtmak veya soğutmak için o kadar enerji gerekir ki bu da komşu ortamlarda ani sıcaklık değişimlerini önler. Yani su, çevresindeki iklimi ılıman yapar.

Burada özgül ısıyı kütle başına tanımladık; gazlar için daha kullanışlı olan moler özgül ısı daha sonra tanımlanacaktır. Gazlarda özgül ısı tanımlanırken, ısıtmanın türüne göre ayrı özgül ısılar tanımlanır. Isıtma hacmi sabit tutarak oluyorsa c_V sabit hacım özgül ısısı, basıncı sabit tutarak oluyorsa c_P sabit basınç özgül ısısı tanımlanır.

Gizli Isı

100°C sıcaklıktaki suyu ısıtmaya devam ettiğimizde buharlaşmaya başlar. Bu hal değişikliği sırasında sistem devamlı ısı alır, ama sıcaklığı değişmez. Alınan ısı 100° C daki suyu 100° C da buhara dönüştürmeye harcanmaktadır.

Aynı durum buzun erimesi[1] sırasında da gözlenir. 0° C daki buza ısı verdiğimizde erimeye başlar ve 0° C da suya dönüşür. Bir sıcaklık artışı olmadığı halde, ısı aktarıldığı zaman, orada bir gizli ısıdan sözedilir.



Şekil 12.4: Su kaynarken sıcaklığı hep sabit kalır.

Bir sistemin hal değişimi sırasında birim kütlesinin aldığı veya verdiği ısıya **gizli ısı** denir. Gizli ısı L ile gösterilir. Bu tanıma göre, kütlesi m olan bir cismin hal değişimi sırasında aldığı veya verdiği ısı,

$$Q = mL \qquad \text{(Gizli ısı)} \tag{12.6}$$

olur. Eğer cisim buharlaşıyor veya eriyor ise L artı işaretli, yoğunlaşıyor veya donuyorsa eksi işaretli olur. Sistemin aldığı ısı daima pozitif kabul edilir. Termodinamikte çok çeşitli gizli ısılar tanımlanmışsa da, burada sadece erime ısısı ve buharlaşma ısısı gözönüne alınacaktır. Bazı erime ve buharlaşma gizli ısıları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Erime ve buharlaşma gizli ısıları.

	Erime noktası	Erime ısısı		Kaynama noktası	Buharlaşma ısısı	
	(°C)	(cal/g)	(kJ/kg)	(°C)	(cal/g)	(kJ/kg)
Su	0	80	333	100	540	2260
Etil alkol	−114	25	104	78	204	850
Kurşun	327	6	25	1750	208	870
Gümüş	961	21	88	2193	558	2300
Tungsten	3410	44	184	5900	1150	4800

Örnek 12.1

(Not: Bu bölümdeki problemlerde gerekli olan özgül ısılar tablolardan alınacaktır.)

(a) 100 °F *ve* −30 °F *sıcaklıklarını* °C *birimine çevirin.*

(b) 100 °C *ve* −30 °F *sıcaklıklarını Kelvin birimine çevirin.*

Çözüm

(a) Fahrenheit değerinden 32 çıkarılır, 9 a bölünüp 5 ile çarpılır:

$$T_C = \tfrac{5}{9}\,(T_F - 32°\text{F})$$

$T_F = 100\,°\text{F}$ için $T_C = 38\,°\text{C}$

$T_F = -30\,°\text{F}$ için $T_C = -34\,°\text{C}$ bulunur.

(b) Celcius sıcaklıklara 273 ekleyerek Kelvin birimine çevrilir:

$T_C = 100\,°\text{C}$ için $T_K = 100 + 273 = 373\,\text{K}$

$T_C = -30\,°\text{C}$ için $T_K = 243\,\text{K}$ bulunur.

[1] *Erime* terimi daha önce "şekerin suda erimesi" anlamında kullanılıyor ve buz için *ergime* terimi kullanılıyordu. Artık lise eğitiminde birincisine *çözünme*, diğerine de *erime* denilmektedir. Bu kitapta da yeni terimleri kullanacağız.

Örnek 12.2

250 g lık demirin sıcaklığını 20 °C den 80 °C ye çıkarmak için ne kadar ısı gerekir?

Çözüm

(12.5) formülü kullanılır:

$$Q = mc\,\Delta T$$

Bu tür kalorimetri hesaplarını kalori ve gram birimlerinde halletmek kolaylık sağlar. Hesap sonucunda 1 cal = 4.18 J alıp joule birimine dönüştürülebilir.

Demirin özgül ısısı tabloda $c = 448\,\text{J/kg} = 0.11\,\text{cal/g}$ olarak verilmiştir. Sayısal değerler yerine konularak hesaplanır:

$$Q = 250 \times 0.11 \times (80 - 20) = 1650\,\text{cal}$$

$$Q = 1650 \times 4.18 = 6900\,\text{J}.$$

Örnek 12.3

Sıcaklığı 20 °C olan 200 g su ile sıcaklığı 30 °C olan 100 g alkol karıştırılıyor. Karışımın son sıcaklığı ne olur?

Çözüm

Tablodan suyun özgül ısısı $c_1 = 1\,\text{cal/g}$, alkolünki $c_2 = 0.58\,\text{cal/g}$ alınır. Son sıcaklığa T dersek, suyun aldığı ısı alkolün verdiği ısıya eşit olmalıdır:

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1c_1(T - T_1) = m_2c_2(T_2 - T)$$

Bu eşitlikte sağ tarafta alkolün verdiği ısıyı da pozitif yapmak için $(T - T_2)$ yerine $(T_2 - T)$ alındı.

Sayılar yerine konularak son sıcaklık hesaplanır:

$$200 \times 1 \times (T - 20) = 100 \times 0.58 \times (30 - T)$$

$$T = 22\,^\circ\text{C}.$$

Örnek 12.4

−30 °C sıcaklığındaki 50 g buz kütlesini 20 °C da suya dönüştürmek için gerekli ısı ne kadardır?

Çözüm

Bu problemde buzun erimesi sırasında gizli ısı da gereklidir. Tablodan erime gizli ısısı $L = 80\,\text{cal/g}$, buz için özgül ısı $c_1 = 0.5$ ve su için $c_2 = 1\,\text{cal/g}$ alınır.

Toplam sürecin aşamalarını yazalım:

−30 °C de buz → 0 °C de buz → 0 °C de su → 20 °C de su.

Herbir aşama için gerekli ısı yazılıp toplanır:

$$Q = mc_1[0 - (-30)] + mL + mc_2(T - 0)$$

Sayısal değerler yerine konup sonuç hesaplanır:

$$Q = 50 \times [0.5 \times 30 + 80 + 1 \times 20]$$

$$Q = 5750\,\text{cal}.$$

Örnek 12.5

Yalıtılmış bir kapta −20 °C sıcaklığındaki 30 g buzun üzerine 110 °C sıcaklıkta bir miktar su buharı gönderiliyor. Karışımın son sıcaklığı 20 °C olduğuna göre, ne kadar buhar harcanmıştır? (Kabın kütlesi ihmal edilebilir.)

Çözüm

Son durumda hepsi su olduğu için, buz ve su buharı son duruma gelinceye kadar hal değişikliğine uğramışlardır. Tablodan erime gizli ısısı $L_1 = 80\,\text{cal/g}$, buharlaşma gizli ısısı 540 cal/g, buzun özgül ısısı $c_1 = 0.5$, suyun $c = 1$ ve buharın özgül ısısı $c_2 = 0.48\,\text{cal/g}$ değerleri alınır.

m_1 kütleli buzun aldığı ısı m_2 kütleli buharın verdiği ısıya eşitlenir:

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1c_1[0 - (-20)] + m_1L_1 + m_1c(20 - 0) =$$

$$= m_2c_2(110 - 100) + m_2L_2 + m_2c(100 - 20)$$

Sayılar yerine konularak buhar miktarı bulunur:

$$30 \times [0.5 \times 20 + 80 + 1 \times 20] =$$

$$m_2[0.48 \times 10 + 540 + 1 \times 80$$

$$m_2 = 5.3\,\text{g}.$$

Örnek 12.6

Yalıtılmış bir kapta 0 °C sıcaklıktaki 500 g su içine −10 °C sıcaklıkta 100 g buz atılıyor. Son durum ne olur?

Çözüm

Bu problemde sonuçta buz miktarının artıyor olması, ilk bakışta şaşırtıcı gelebilir, ama doğrudur. Buz (−10 °C de) sudan daha soğuk olduğu için, sudan ısı alacaktır. 0 °C deki suyun ısı vermesi ancak bir kısmının buz haline dönüşmesiyle mümkündür.

Suyun buz haline dönüşen miktarına m diyelim. (Hesap sonunda bu m değeri toplam su miktarından fazla çıkarsa, son sıcaklık sıfırdan daha düşük anlamına gelecektir. O zaman farklı bir yol izleriz.)

Son durumda su ve buz birlikte bulunduğu için sıcaklık 0 °C olacaktır. m_1 kütleli buzun aldığı ısıyı m kütleli suyun verdiği ısıya eşitleriz:

$$m_1c_1[0 - (-10)] = mL$$

Buzun özgül ısısı $c_1 = 0.5\,\text{cal/g}$ ve erime gizli ısısı 80 cal/g alınıp hesaplanır:

$$100 \times 0.5 \times 10 = m \times 80 \;\rightarrow\; m = 6.3\text{g}.$$

Bu sonuca göre, kapta 0 °C de 100 + 6.3 = 106.3 g buz ve 500 − 6.3 = 493.7 g su bulunur.

12.3 ISIL GENLEŞME

Isınan cisimlerin genleştiğini günlük hayattan biliriz. Civalı termometrede ısınan civanın genleştiğini, sıcak havada elektrik iletim hatlarında tellerin sarktığını, ısıtılan balonun şiştiğini, ...görmüşüzdür. Genleşme bazen istenmeyen sonuçlar verebilir. Bunu önlemek için bina, köprü ve yol yapımında ısıl genleşme için pay bırakılır.



Şekil 12.5: Delaware nehri üzerinde sıcaktan genleşen tren rayları (ABD, 1935).

Bir T_0 referans sıcaklığında boyu L_0 olan bir cismin T sıcaklığında boyu L oluyorsa, boyca $\Delta L = L - L_0$ artışı, $\Delta T = T - T_0$ sıcaklık artışıyla ve başlangıçtaki L_0 uzunluğuyla orantılı olur:

$$\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta T$$

Burada α **boyca genleşme katsayısı** olup, malzemenin cinsine bağlıdır. Birimi $(1/°C)$ veya $(1/K)$ olur. Bu bağıntıyı cismin son boyu L cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \Delta L \\ L &= L_0 \, [1 + \alpha(T - T_0)] \end{aligned} \qquad (12.7)$$

olur. α katsayısı sıcaklıkla pek az değiştiği için, hesaplarda sabit kabul edilir.

Hacim genleşmesi için de benzer bir davranış gözlenir. ΔT sıcaklık artışının yolaçtığı ΔV hacım artışı,

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta T \qquad (12.8)$$

olup, β sabitine **hacımca genleşme katsayısı** denir. Katı cisimler 3-boyutta da aynı genleşme özelliğine sahip olduğu için, α ve β katsayıları arasında şöyle bir ilişki olur:

$$\beta \approx 3\,\alpha \qquad (12.9)$$

Bazı maddelerin genleşme katsayıları tabloda verilmiştir:

Bazı maddelerin 20 °C de genleşme katsayıları.

Katılar	$\alpha\,(°C)^{-1}$	Sıvı ve gazlar	$\beta\,(°C)^{-1}$
Bakır	17×10^{-6}	Su	2.1×10^{-4}
Demir veya çelik	12×10^{-6}	Etil alkol	11×10^{-4}
Aluminyum	23×10^{-6}	Civa	1.8×10^{-4}
Beton	12×10^{-6}	Benzin	9.5×10^{-4}
Cam	9×10^{-6}	Hava	34×10^{-4}

Tabloya bakıldığında, demir ve betonun genleşme katsayıları küçük (onbinde bir mertebesinde) gibi görünebilir, ama bu azımsanmayacak bir genleşme demektir. $[-20, +40\,°C]$ sıcaklık aralığındaki bir iklimde, bu uzunluk farkı 10 metrede 1 cm kadar demektir. Bina, köprü ve demiryolu yapımında buna dikkat edilir ve genleşme payı bırakılır.



Şekil 12.6: Bir köprüde genleşme payı.

Bu tablodaki en çarpıcı özellik, demir, çelik ve betonun genleşme katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Çelik ve betondan yapılmış binaların çok geniş sıcaklık aralıklarında çatlamadan sağlam durabilmeleri, betonun bu özelliği sayesinde mümkün olabilmektedir.

Tabloda ayrıca, alkolün genleşme katsayısının su ve civadan çok büyük olduğuna dikkat edelim; bu yüzden alkol termometre yapımında tercih edilir. Ayrıca,



Şekil 12.7: Kışın göllerde hayat böyle devam eder.

benzinin de alkol kadar çok genleştiği görülmektedir. Bu yüzden araçlara benzin doldururken, depoda genleşme payı bırakılmalıdır.

Suyun anormal davranışı: Suyun genleşmesi [0, 4 °C] sıcaklık aralığında anormal bir davranış gösterir. 0 °C deki su ısıtıldığında hacmi küçülmeye başlar. Bu anormal davranış 4 °C ye kadar sürer. Daha sonra, sıcaklık arttıkça genleşmeye başlar. Yani, suyun en yoğun olduğu sıcaklık 4 °C dir. Bu özellik balık ve diğer canlıların donmuş göllerde buzun altında hayatta kalabilmesini sağlar. Suyun bu anormal davranışı H_2O moleküllerinin özel yapısından kaynaklanmaktadır.

Örnek 12.7

0 °C de uzunluğu 1200 m olan çelik bir köprünün 50 °C de uzunluğu ne kadar artar?

Çözüm

Uzunluk artışını veren (12.3) formülü kullanılır:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

Çeliğin genleşme katsayısı tabloda $\alpha = 12\times10^{-6}$ olarak verilmiştir. Değerler yerine konur:

$$\Delta L = 12 \times 10^{-6} \times 1200 \times (40 - 0)$$

$$\Delta L = 0.58\,\text{m} = 58\,\text{cm}$$

Örnek 12.8

20 ° C de hacmi 5 litre olan bakır kazan ağzına kadar su doldurulup ocakta ısıtılıyor. 95 °C sıcaklıkta ne kadar su taşar?

Çözüm

İki cisim birlikte genleştiğinde, bunların genleşme katsayıları farkı olan $(\alpha_2 - \alpha_1)$ ile çalışmak kolaylık sağlar.

Buna göre, kazanın hacmindeki artış ΔV_1 ve suyun hacmindeki artış ΔV_2 alınırsa, (12.8) formülüne göre,

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = \beta_2 V_0 \Delta T - \beta_1 V_0 \Delta T$$

olur. Hacimce genleşme katsayıları boyca genleşme cinsinden $\beta \approx 3\alpha$ olur. Buradan hacim farkı ifadesi şöyle olur:

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = 3(\alpha_2 - \alpha_1) V_0 \Delta T$$

Bakır ve su için α katsayıları tablodan bulunup yerine konulur ve sonuç hesaplanır:

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = 3\times(210-17)\times10^{-6}\times5\times10^{-3}\times(95-20)$$

$$\Delta V_2 - \Delta V_1 = 0.00022\,\text{m}^3 = 220\,\text{cm}^3$$

Örnek 12.9

Zaman ölçmekte kullanılan bir basit sarkaç çelik bir telin ucuna bağlı kütleden oluşmaktadır. Sıcaklık 0 °C iken sarkacın periyodu doğru olarak 1 s gösteriyor. Sıcaklık 40 °C olduğunda sarkaç bir günde ne kadar hatalı ölçer?

Çözüm

(a) Basit sarkacın periyot ifadesini Bölüm 9 da görmüştük (9.24 formülü). Fakat, burada T sıcaklığıyla karışmaması için, periyodu t ile gösterelim:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

0 °C deki t_0 periyot ifadesini T sıcaklığındaki t periyodu ifadesine bölüp sadeleştirelim ve ısıl genleşme formülünü kullanalım:

$$\frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{L}{L_0}} = \sqrt{\frac{L_0(1+\alpha\Delta T)}{L_0}} = \sqrt{1+\alpha\Delta T}$$

Çelik için $\alpha = 12\times10^{-6}$ ve $t_0 = 1$ s alınıp, $\Delta T = 40$ °C sıcaklık farklı için yeni periyot hesaplanır:

$$t - t_0 = \sqrt{1 + 12\times10^{-6}\times40} - 1 = 24\times10^{-6}\,\text{s}$$

Bir günlük sürede bu fark hesaplanır:

$$24\times3600\times(t - t_0) = 20\,\text{s}$$

Sarkaç günde 20 s geri kalır.

Örnek 12.10

Çelikten yapılmış bir cetvel 0 °C sıcaklıkta doğru gösteriyor. Bu cetvelle 0 °C de aluminyum bir çubuğun boyu ölçüldüğünde 2.800 m gösteriyor. **(a)** *Çelik cetvel ve alüminyum çubuk birlikte 400 °C sıcaklığa çıkarıldığında, cetvel alüminyum çubuğun boyunu ne kadar gösterir?* **(b)** *Alüminyum çubuğun boyu gerçekte ne kadar uzamıştır?*

Çözüm

(a) Bu problem birkaç farklı şekilde çözülebilir: Çeliğin ve aluminyumun uzama miktarlarını bulup, orantı kurulur. Fakat, daha kolay olanı, birlikte genleşen cisimler için $(\alpha_2-\alpha_1)$ katsayı farkıyla çalışmaktır:

Aynı bir $L_0 = 2.8$ m boyuna sahip olan iki cisimden, çelik cetvelin uzaması $\alpha_1 L_0 \Delta T$ ve alüminyum çubuğun uzaması $\alpha_2 L_0 \Delta T$ oluyorsa, aradaki uzama farkı $(\alpha_2-\alpha_1)L_0\Delta T$ olacaktır. Aynı sonuca, çelik cetvelin uzamadığını, fakat alüminyum çubuğun $(\alpha_2 - \alpha_1)$ katsayısıyla uzadığını düşünerek, yine ulaşırız. Fakat bu kez, çelik cetvelin işaretleri aynı yerde kalacak ve alüminyumun bağıl uzamasını doğru olarak gösterecektir.

O halde, $(\alpha_2 - \alpha_1)$ katsayısı ile alüminyumun bağıl uzamasını hesaplarız:

$$L = L_0 [1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T]$$

Tablodan uzama katsayıları alınıp hesap yapılır:

$$L = 2.800 \times [1 + (23 - 12) \times 10^{-6} \times 400] = 2.812\,\text{m}$$

Uzayan cetvel uzamış çubuğun uzunluğunu 2.812 m göstermektedir.

(b) Alüminyumun mutlak uzama miktarı hesaplanır:

$$L = L_0 [1 + \alpha_2 \Delta T] = 2.8[1 + 23 \times 10^{-6} \times 400] = 2.826\,\text{m}.$$

12.4 ISI İLETİMİ

Isının bir ortamdan diğerine aktarılması 3 farklı mekanizmayla mümkündür: Kondüksiyon, konveksiyon ve ışıma. Kondüksiyonda madde yerdeğiştirmeden ısıyı iletir. Konveksiyonda madde yerdeğiştirerek enerjisini aktarır. Işımada ise elektromanyetik dalgalarla ısı iletilir.

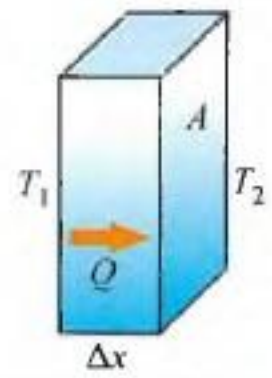
Şimdi bunları sırayla ele alalım:

Kondüksiyon

Bir bakır çubuğu bir ucundan tutup diğer ucunu ocaktaki ateşin üzerine sürelim. Biraz sonra elimizin yandığını hissederiz. Çünkü, çubuğun bir ucundan diğerine ısı *kondüksiyon* yoluyla iletilmektedir. Bunun nasıl olduğunu anlamak için atomik düzeye inmek gerekir. Bakır atomları bulundukları konumlardan ayrılmazlar ama, enerjileri arttığında titreşim genlikleri artar ve böylece enerjilerini komşu atomlara iletirler. Ayrıca, metallerde ortamdaki serbest elektronlar da ısı iletimine yardımcı olurlar. (Bu yüzden, elektriği iyi ileten metaller ısıyı da iyi iletirler.)

Bir ortamdan diğerine iletilen ısının miktarı pekçok şeye bağlıdır: ortamın kalınlığı, sıcaklık farkı.... Bunu incelemek üzere, kalınlığı Δx ve kesiti A olan bir ortam gözönüne alalım. Bu ortamın yüzeylerinden biri T_1 ve diğeri T_2 sıcaklığında tutuluyor olsun. Buna göre, ortamın bir kesitinden t zamanı içinde aktarılan Q ısısı,

$$\frac{Q}{t} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{12.10}$$



Şekil 12.8: Kondüksiyon yoluyla ısı iletimi.

Buradaki k sabiti malzemenin cinsine bağlı olup **ısı iletkenlik katsayısı** adını alır. Birimi watt/m $\cdot^\circ$ C olur. Bu formüldeki $\Delta T = T_2 - T_1$ sıcaklık farkının Δx kalınlığına oranına $\Delta T/\Delta x$ **sıcaklık gradyanı** denir.

Bazı maddelerin ısı iletkenlik katsayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Bazı maddelerin ısı iletkenlik katsayıları .

	k (W/m $\cdot^\circ$ C)		k (W/m $\cdot^\circ$ C)
Bakır	397	Su	0.6
Demir	80	Cam	0.8
Alüminyum	238	Beton	0.8
Gümüş	427	Lastik	0.2
Altın	314	Tahta	0.1

k katsayısı ne kadar büyükse ısı o kadar iyi iletilir. Teknolojide ve günlük hayatta herhangi bir iş için malzeme seçerken, ısı iletkenliğinin az veya çok olması istenir. Ocaktaki bir yemeği ısıtırken, ısıyı iyi ileten bir malzeme gerekir. Bu yüzden bakır ve alüminyum tencereler kullanılır. Buna karşılık, evlerde soğuğa karşı yalıtmak ve ısı kayıplarını önlemek için, kötü iletken malzeme kullanmak gerekir. Bu yüzden cam (veya daha iyisi, arada hava olan çift cam) kullanılır.



Şekil 12.9: NASA'da geliştirilen süper yalıtkan aerojel.

Tablodan görüldüğü gibi, elektriği iyi ileten bakır, gümüş ve alüminyum gibi metaller ısıyı da iyi iletirler. Çünkü, metallerin yapısında bulunan serbest elektronlar elektrik yükünü iletirken enerji de iletmiş olurlar.

Tablodan havanın da kötü bir iletken olduğu görülmektedir. Bu, durgun hava için böyledir. Nitekim, çift cam, izocam veya stirofom köpük denilen malzeme içinde hapsedilmiş olan hava, o maddenin ısı iletkenliğini çok azaltır. Uçak ve uzay teknolojilerinde yeni geliştirilen "süper yalıtkanlar" giderek yaygınlaşmaktadır.

Konveksiyon

Sıcak bir günde bir vantilatörün veya klimanın karşısına geçtiğimizde yüzümüze üflenen soğuk havayla serinleriz. Burada ısı iletimi havanın hareketiyle birlikte olmaktadır. Maddenin yerdeğiştirmesiyle gerçekleşen ısı iletimine **konveksiyon** denir.



Şekil 12.10: Isıtılan bir odada hava konveksiyonu.

Konveksiyon iki türlü olabilir. Bir odada sobanın veya kaloriferin çevresinde ısınan hava genleşerek yoğunluğu azalır ve yükselmeye başlar. Onun yerini daha yukardaki soğuk hava alır ve o da kısa sürede ısınıp yükselir. Böylece kendiliğinden bir konveksiyon akımı oluşur. Buna *doğal konveksiyon* denir.

İkinci tür konveksiyon bir dış etken tarafından başlatılan *zorlanmış konveksiyon*dur. Bir vantilatör veya klimanın ürettiği serin hava vantilatörün motoru tarafından istenilen yöne itilir. Durgun hava kötü bir iletken olduğu halde, konveksiyon akımlarıyla iyi iletken haline gelir.

Konveksiyonun en önemli örneği, atmosferde ve okyanuslarda oluşan akımlardır. Hava ve suyun doğal konveksiyonu her türlü yaşamın devam etmesini sağlayan en önemli etkendir.

Konveksiyonun fiziksel incelemesi karmaşıktır, iletilen ısı maddenin cinsine, hız dağılımına, çevredeki basınç ve sıcaklık koşullarına ...pekçok etmene bağlıdır. Bu yüzden Akışkanlar Mekaniği adlı bilim dalında ayrıntılı olarak incelenir.

Işıma



Şekil 12.11: Sıcak kömürün ışıması.

Üçüncü ısı iletim mekanizması olan **ışıma**, elektromanyetik dalgalarla iletilen ısı türüdür. Bunun en önemli özelliği, arada hiçbir madde olmadan, boşlukta iletilebiliyor olmasıdır. Dünya ile Güneş arasında, hiçbir iletici madde olmayan uzay boşluğunu geçerek gelen Güneş ışınları Dünya'yı ısıtmakta ve her türlü yaşamın kaynağı olmaktadır.

Tüm cisimler her sıcaklıkta ışıma yaparlar. Fakat biz bunun sadece görünür ışık bölgesinde olan kısmını görürüz. Bir mangalda yanan kömürler kırmızı ışık vererek ışıma yaparlar. Kömürler soğuduğunda, ışıma kızılötesi dalga olarak devam eder, ama biz bunu göremeyiz. Günümüzde kızılötesi ışınlarla çalışan dürbün veya kameralarla, her cismin verdiği ışıma görüntülenebilir.

Işıyan enerjinin sıcaklığa bağımı **Stefan-Boltzmann yasası** ile verilir:

$$\frac{Q}{t} = \sigma A \epsilon T^4 \qquad \text{(Stefan-Boltzmann yasası)} \qquad (12.11)$$

Burada A cismin yüzey alanı ve T kelvin biriminde sıcaklıktır. Diğer iki katsayıdan, $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$ *Stefan-Boltzmann sabiti* olup, tüm cisimler için aynıdır. Diğer boyutsuz ϵ katsayısına *yayınlama oranı* denir. Bu, $[0, 1]$ arasında değer alabilen ve ışıyan maddenin cinsine bağlı bir parametredir.

Işıyan enerjinin sıcaklıkları farklı cisimler arasında iletimi bu formülden elde edilir. Sıcaklığı T_1 olan bir cisim, T_2 sıcaklıkta bir ortamda bulunuyorsa, ışıyan

güç,

$$\frac{Q}{t} = \sigma A \epsilon \left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{12.12}$$

olur. Bu ifadede ışıyan enerjinin sıcaklığın dördüncü kuvvetiyle orantılı oluşu önemlidir. Işıma yoluyla ısı kayıpları sıcaklık arttıkça aşırı derecede yükselir.

Isı iletimi çok ayrıntılı bir konudur. Burada sadece temel kavramları bilmekle yetineceğiz.



Şekil 12.12: Kızılötesi dürbünde gece vakti bir kedi.

12.5 İDEAL GAZ

Termodinamikte gazların özel bir yeri vardır. Çok geniş bir sıcaklık aralığında, basınç ve hacimlerindeki değişmeler ve çevreyle ısı ve enerji alışverişlerindeki kolaylıklar sebebiyle sanayide pekçok alanda kullanılırlar. Gaz yakıtlar, gaz türbinleri, gaz motorları, buhar kazanları ... vb. Bu kısımda gazların incelenmesinde kullanılan temel kavramları ele alacağız.

Avogadro Sayısı ve Mol

Bir kaptaki gazın miktarını atomik ölçekle ilişkilendirmekte, **Avogadro Sayısı** denilen sabit bir sayı kullanılır. Bu sayının değeri,

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \qquad \text{(Avogadro sayısı)} \tag{12.13}$$

dir. *Bir maddenin Avogadro sayısı kadar atom (veya molekül) içeren miktarına* **1 mol** *denir.* Diğer bir deyişle, 1 mol karbon içinde N_A sayıda karbon atomu, 1 mol su içinde yine N_A sayıda H_2O molekülü bulunur.

Bir maddenin 1 mol miktarındaki atomların (veya moleküllerin) toplam kütlesine **mol kütlesi** denir ve M ile gösterilir.[2] Buna göre, karbonun mol kütlesi $M = 12\,\text{gram}$, suyun mol kütlesi $M = 18\,\text{gram}$ olur.

Verilen bir miktar gazdaki mol sayısı n ile gösterilir. $n = 3$ mol miktardaki karbonda $3N_A$ sayıda atom bulunur, toplam kütlesi ise $3 \times 12 = 36\,\text{gram}$ olur.

Bir maddenin verilen kütlesi m ise, içerdiği n mol sayısı şöyle bulunur

$$n = \frac{m}{M}$$

Burada M o maddenin mol kütlesidir. Örneğin, 100 gram oksijenin (O_2) mol sayısını bulmak için, oksijenin mol kütlesi $M = 32\,\text{g}$ değerine böleriz:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{100\,\text{g}}{32\,\text{g}} = 3.125$$

Bazı maddelerin mol kütleleri tabloda verilmiştir:

[2] M için değişik kitaplarda *atom ağırlığı, atom kütlesi, molekül kütlesi* veya *molar kütle* terimleri kullanılmaktadır. Bunların kimisi kavram, kimisi dilbilgisi açısından yanlıştır ve terketmek gerekir. Çünkü sözkonusu olan bir atomun değil Avogadro sayısı kadar atomun kütlesidir. O halde, bu kargaşaya son vermek açısından, **mol kütlesi** kullanmak BDiğer bazı kitaplarda ise *molar kütle* kavramı kullanılması da, Türkçe dilbilgisi kuralları açısından, yanlıştır.

Bazı maddelerin mol kütleleri.

Gazlar	M (gram/mol)	Katı ve sıvılar	M (gram/mol)
Hidrojen (H_2)	2	Su (H_2O)	18
Helyum (He)	4	Alüminyum(Al)	27
Oksijen (O_2)	32	Demir (Fe)	56
Azot (N_2)	28	Bakır (Cu)	64
Argon(Ar)	40	Gümüş (Ag)	108
Karbondioksit (CO_2)	44	Civa (Hg)	201
Hava	29	Kurşun (Pb)	207

İdeal Gaz Durum Denklemi

Bir gazın durumunu ve davranışlarını tam olarak belirlemek imkansızdır, çünkü yaklaşık Avogadro sayısı kadar çok sayıda molekül içerir. Fakat, **ideal gaz varsayımı** ile çalışmak gerçeğe çok yakın sonuçlar verir. Tanım olarak ideal gaz, moleküller arası etkileşmenin ihmal edildiği gazdır. Bunun için, *gazın basıncı düşük ve sıcaklığı yüksek olmalıdır.*

Bir gazın herhangi bir durumunda kütlesi, sıcaklığı, hacmi ve basıncı arasındaki ilişkiyi belirleyen denkleme **durum denklemi** denir. İdeal gazın durum denklemi şöyledir:

$$PV = nRT \qquad \text{(İdeal gaz durum denklemi)} \tag{12.14}$$

Burada P basınç, V hacim, n mol sayısı ve T Kelvin biriminde sıcaklıktır. R ile gösterilen orantı katsayısına **evrensel gaz sabiti** denir ve değeri,

$$R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \qquad \text{(evrensel gaz sabiti)} \tag{12.15}$$

dir. Pratik hesaplarda, basıncın atmosfer biriminde ve hacmin litre biriminde verildiği durumlarda kullanmak üzere, R sabiti şöyle de ifade edilir:

$$R = 0.082 \text{ litre} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K} \tag{12.16}$$

Eğer, gazın m kütlesi verilmişse, mol sayısı $n = m/M$ olarak yazıldığında, durum denklemi şöyle de ifade edilebilir:

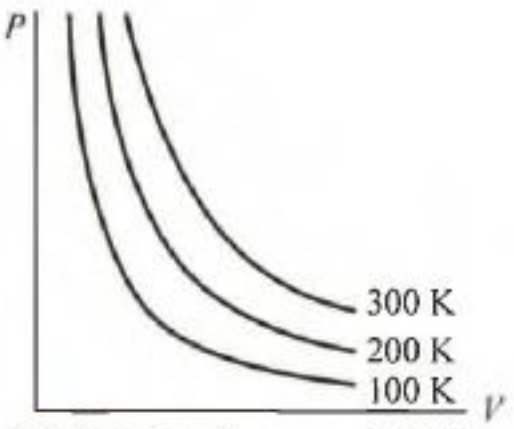
$$PV = \frac{m}{M}RT \tag{12.17}$$

Gazın ρ yoğunluğunu ifade etmek istersek, son denklemde ρ = kütle/hacım = m/V oranını oluştururuz:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \tag{12.18}$$

İdeal gaz denklemi bir gazın durum değişimi sırasında hangi niceliğin nasıl değişeceğini görmemizi sağlar. Örneğin, gazın V hacmi sabit tutulduğunda, sıcaklık arttıkça basıncı artar. Keza, basıncı sabit tutarak ısıttığımızda gazın hacmi artar.

Sıcaklık sabit tutulduğunda *izotermal* denilen eğriler elde edilir (Şekil 12.13). İzotermal değişimlerde basınç arttıkça hacim küçülür, hacim arttıkça basınç küçülür.



Şekil 12.13: İzotermal eğriler.

Örnek 12.11

(Bu problemlerde gereken mol kütleleri için Sayfa 210 deki tablo kullanılacaktır.)

(a) *Bakırın mol kütlesi* 64 g *dir.* 100 g *bakır kaç mol eder?*

(b) 100 g *oksijende ne kadar sayıda molekül bulunur?*

Çözüm

(a) Mol sayısı, verilen m kütlesi içindeki M mol kütlesi sayısıdır:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{100}{64} = 1.6\,\text{mol}.$$

(b) Bir mol madde içinde N_A Avogadro sayısı kadar molekül bulunur. Verilen kütle miktarından n mol sayısı ve dolayısıyla N molekül sayısı hesaplanır. Oksijenin mol kütlesi 32 g alınarak molekül sayısı bulunur:

$$N = n\,N_A = \frac{m}{M}\,N_A = \frac{100}{32} \times 6.02 \times 10^{23} = 19 \times 10^{23}$$

Örnek 12.12

Hacmi 8 litre *olan bir kapta* 27 °C *sıcaklıkta* 10 g *hidrojen* (H_2) *gazı bulunmaktadır.*

(a) *Kapta kaç mol hidrojen vardır?*

(b) *Gazın basıncı ne kadardır?*

Çözüm

(a) Verilen kütleyi hidrojenin (H_2) mol kütlesi olan 2 g ile böleriz:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{10}{2} = 5\,\text{mol}.$$

(b) İdeal gaz denklemi (12.14) P basıncı için çözülür:

$$PV = n\,RT \;\rightarrow\; P = \frac{nRT}{V}$$

Bu hesaplarda R sabitini litre × atmosfer biriminde almak kolaylık sağlar:

$$R = 0.082\ \text{litre} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$$

(b) Önceki şıkta bulduğumuz mol sayısı ve diğer veriler, ideal gaz denkleminde yerine konularak basınç hesaplanır. Sıcaklığı kelvin birimine dönüştürmeyi unutmayalım:

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{5 \times 0.082 \times (273 + 27)}{8} = 15\,\text{atm}$$

Örnek 12.13

(a) 1 mol *ideal gaz standart sıcaklık ve basınçta (STP) ne kadar hacim kaplar?*

(b) *STP şartlarında 1 mol oksijenin* (O_2) *yoğunluğu ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Gazlar için STP (standart T ve P) denilen referans noktası, 0 °C sıcaklık ve 1 atm basınç demektir. Bu durumda, ideal gaz denkleminden 1 mol gazın hacmi hesaplanır:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{1 \times 0.082 \times 273}{1} = 22.4\ \text{litre}$$

Tüm gazlar STP şartlarında aynı 22.4 litre hacme sahip olurlar.

(b) İdeal gaz denklemini kütleler cinsinden veren (12.17) formülünü kullanırız:

$$P\,V = \frac{m}{M}\,R\,T$$

Bu denklemde yoğunluğu $\rho = m/V$ olarak oluştururuz:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

STP sıcaklığı 273 K ve basıncı 1 atm alınır ve oksijenin 32 g olan mol kütlesi kullanılır. Burada R sabiti litre × atmosfer cinsinden alınırsa, diğer birimler sadeleşir ve yoğunluk gram/litre biriminde çıkar:

$$\rho = \frac{32 \times 1}{0.082 \times 273} = 1.43\,\text{g/litre}$$

Örnek 12.14

Boyutları $6 \times 10 \times 4\,\text{m}^3$ *olan bir odada STP şartlarında hava bulunmaktadır.*

(a) *Odada kaç mol hava vardır?*

(b) *Oda* 37 °C *sıcaklığa ısıtıldığında, içerde kaç mol hava kalır?*

Çözüm

(a) İdeal gaz denklemi n mol sayısı için çözülür:

$$PV = nRT \;\rightarrow\; n = \frac{PV}{RT}$$

Odanın hacmi $6 \times 10 \times 4 = 240\,\text{m}^3$ ve STP değerleri alınarak mol sayısı hesaplanır. Bu kez Sİ birim sisteminde hesaplayalım: 1 atmosfer basıncın pascal değeri $1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5\ \text{Pa}$ ve evrensel gaz sabiti $R = 8.31\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$ alınırsa,

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 240}{8.31 \times 273} = 10\,700$$

(b) İdeal gaz denklemini her iki sıcaklık için yazıp orantı kurarız. Basınçlar ve hacimler eşit olduğundan,

$$n_2 T_2 = n_1 T_1 \;\rightarrow\; n_2 = \frac{T_1}{T_2}\,n_1$$

olur. Veriler yerine konup hesaplanır:

$$n_2 = \frac{273}{300} \times 10700 = 9750$$

Örnek 12.15

Bir dizel motorunun 4 lt *hacimli silindiri içinde* 27 °C *sıcaklıkta ve* 1 atm *basınçta hava bulunmaktadır. Piston itilerek havanın hacmi 16 kat küçültülüyor ve basıncı* 40 *kat artırılıyor.*

(a) *Silindir içinde kaç mol hava bulunmaktadır?*

(b) *Havanın son sıcaklığı ne olur?*

Çözüm

(a) İdeal gaz denkleminden mol sayısı hesaplanır:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \times 4}{0.082 \times 300} = 0.16\,\text{mol}.$$

(b) Gazın hal değişikliği problemlerinde orantı kurmak kolaylık sağlar. Başlangıçtaki değişkenleri (P_1, V_1, T_1) ve sondaki değişkenleri (P_2, V_2, T_2) ile gösterirsek, ideal gaz denklemini herbir durum için yazıp taraf tarafa böleriz:

$$\frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{\cancel{n}RT_2}{\cancel{n}RT_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Bu ifadeyi T_2 son sıcaklığı için çözeriz:

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1$$

Sayısal değerler yerine konup son sıcaklık hesaplanır:

$$T_2 = \frac{40}{1} \times \frac{1}{16} \times 300 = 750\,\text{K}$$

Örnek 12.16

Bir silindir içinde 27 °C *sıcaklıkta ve* 5 atm *basınçta ideal gaz bulunmaktadır. Gaz hep aynı başlangıç durumundan itibaren aşağıdaki işlemlere tabi tutuluyor:*

(a) *Sabit basınçta ısıtılarak hacmi* 3 *katına çıkarılıyor. Son sıcaklığı ne olur?*

(b) *Bu defa sabit hacimde ısıtılarak basıncı* 4 *katına çıkarılıyor. Son sıcaklığı ne olur?*

(c) *Hem basıncı hem de hacmi 3 kat artacak şekilde ısıtılıyor. Son sıcaklığı ne olur?*

(d) *Sabit hacimde ısıtılarak mutlak sıcaklığı 2 katına çıkarılıyor. Son basıncı ne olur?*

Çözüm

(a) Bu problemde orantılar kurmak yeterlidir. Herbir işlem için ideal gaz denklemini iki kere yazıp orantı kurduğumuzda, formüllerde sadece değişen nicelikler kalır.

Sabit basınçta ısıtma için orantı şöyle olur:

$$\frac{PV_2}{PV_1} = \frac{nRT_2}{nRT_1} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Buradan son sıcaklık hesaplanır:

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1}T_1 = 3 \times T_1 = 3 \times 300 = 900\,\text{K}.$$

(b) Benzer yöntemle, sabit hacimde işlemde orantı şöyle bulunur:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1}T_1 = 4 \times 300 = 1200\,\text{K}.$$

(c) Hem basınç hem hacim değiştiğinde orantı şöyle olur:

$$\frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1 = 3 \times 3 \times 300 = 2700\,\text{K}.$$

(d) Sabit hacimde ısıtmada orantı (b) şıkkında bulunmuştu:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1 = 2 \times 5 = 10\,\text{atm}.$$

Test

1. Aşağıdakilerden hangisi bir sıcaklık ölçeği değildir?
   (a) Fahrenheit
   (b) Kelvin
   (c) Santigrad
   (d) Celsius

2. 373 K sıcaklık kaç °C eder?
   (a) 0 °C (b) 73 °C (c) 100 °C (d) 173 °C

3. Metal telden yapılmış bir sarkaçlı saat, sıcaklık arttığında saati nasıl gösterir?
   (a) Geri kalır.
   (b) İleri gider.
   (c) Değişmez.

4. Demirin özgül ısısı gümüşün özgül ısısının yaklaşık 2 katıdır. Aynı kütleli demir ve gümüşe aynı miktarda ısı verildiğinde, sıcaklık artışları nasıl olur?
   (a) Demir daha çok ısınır.
   (b) Gümüş daha çok ısınır.
   (c) Aynı miktar ısınırlar.

5. Kütleleri eşit olan 20 °C ve 50 °C sıcaklıkta iki su karıştırılıyor. Son sıcaklık ne olur?
   (a) 25 °C (b) 30 °C (c) 35 °C (d) 40 °C

6. Kapalı bir kaptaki gazın hacmi sabit tutularak, mutlak sıcaklığı 2 katına çıkarılıyor. Basıncı ne olur?
   (a) $2P$ (b) $4P$ (c) $P/2$ (d) $P/4$

7. Kapalı bir kaptaki gazın basıncı sabit tutularak, mutlak sıcaklığı 2 katma çıkarılıyor. Hacmi ne olur?
   (a) $2V$ (b) $4V$ (c) $V/2$ (d) $V/4$

8. Kapalı bir kaptaki gazın mutlak sıcaklığı sabit tutularak, hacmi 2 kat artırılıyor. Basıncı ne olur?
   (a) $2P$ (b) $4P$ (c) $P/2$ (d) $P/4$

9. Kapalı bir kaptaki gazın basıncı 2 kat artırılırken, hacmi 2 kat azaltılıyor. Sıcaklığı ne olur?
   (a) $2T$ (b) $4T$ (c) T (d) $T/2$

10. Kapalı bir kapta 1 atm basınçtaki V hacimli gazın sıcaklığı 0 °C den 273 °C ye çıkarılıyor. Hacmi ne olur?
    (a) V (b) $2V$ (c) $V/2$ (d) $4V$

11. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
    (a) Isıtılan buzun hacmi küçülür.
    (b) 10 °C de ısıtılan su genleşir.
    (c) Isıtılan su buharı genleşir.
    (d) 2 °C de ısıtılan su genleşir.

12. Isıl genleşme katsayıları küçükten büyüğe doğru sıralandığında, hangi sıra doğrudur?
    (a) Katı→sıvı→gaz.
    (b) Sıvı→katı→gaz.
    (c) Katı→gaz→sıvı.
    (d) Gaz→sıvı→katı.

13. 2 mol hidrojen (H_2) gazında kaç gram madde vardır?
    (a) 1 g (b) 2 g (c) 4 g (d) 10 g

14. 10 g hidrojen (H_2) gazında kaç mol vardır?
    (a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 10

15. N_A Avogadro sayısı cinsinden, 16 g oksijen (O_2) gazında ne kadar sayıda atom vardır?
    (a) N_A (b) $2N_A$ (c) $3N_A$ (d) $8N_A$

16. İdeal gaz durum denklemi aşağıdakilerden hangisi değildir?
    (a) $\frac{PV}{nT} = R$ (b) $P = \frac{nRT}{V}$ (c) $V = \frac{P}{nRT}$

17. 0 °C deki buza ısı verildiğinde aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    I. Sıcaklığı artar.
    II. Sıcaklığı sabit kalarak erir.
    III. Hacmi azalır.
    IV. Hacmi artar.
    (a) I ve II (b) I ve IV (c) II ve III (d) II ve IV

18. Bir sistem çevresiyle termodinamik dengede ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Sıcaklıklar eşittir.
    (b) Basınçlar eşittir.
    (c) Hacimler eşittir.

19. Hangi koşullarda gerçek gazlar ideal gaz modeline yaklaşırlar?
    (a) Alçak sıcaklık ve alçak basınçta.
    (b) Alçak sıcaklık ve yüksek basınçta.
    (c) Yüksek sıcaklık ve alçak basınçta.
    (d) Yüksek sıcaklık ve yüksek basınçta.

20. Aşağıdakilerden hangileri birer gizli ısı türüdür?
    I. Özgül ısı.
    II. Erime ısısı.
    III. Buharlaşma ısısı.
    (a) I (b) I ve II (c) II ve III (d) I ve III

Problemler

12.2 Isı

(Not: *Bu kısımdaki problemlerde kalorimetre kapları ısıca yalıtılmış ve özgül ısıları sıfır varsayılacaktır.*)

12.1 30 °C sıcaklıktaki 100 g suyu 120 °C da buhara dönüştürmek için ne kadar ısı gerekir? [C: 63 kcal.]

12.2 Bir kaptaki 20 °C sıcaklıktaki 400 g suyun içine 90 °C sıcaklıkta 600 g su daha katılıyor. Son sıcaklık ne olur? (Kap ısıca yalıtılmış olup, özgül ısısı ihmal edilebilir.) [C: 62 °C.]

12.3 Bir kapta 20 °C sıcaklıktaki 300 g suyun içine 300 °C sıcaklıkta 200 g lık bir alüminyum blok atılıyor. Son sıcaklık ne olur? [C: 55 °C.]

12.4 Yalıtılmış bir kapta 120 °C sıcaklığındaki 10 g su buharı içine −40 °C sıcaklıkta bir miktar buz atılıyor Karışımın son sıcaklığı 30 °C olduğuna göre, ne kadar buz kullanılmıştır? [C: 48 g.]

12.5 Bir kapta 30 °C sıcaklıkta bulunan 100 g su içine 500 °C sıcaklıkta 600 g kütleli bir demir parçası atılıyor. Suyun ne kadarı buharlaşır? [C: 35 g.]

12.6 Yalıtılmış bir kapta bulunan −10 °C deki 50 g buz üzerine 400 °C sıcaklıkta 200 g kütleli bir demir parçası konuluyor. Son durum ne olur? [C: 60 °C de su ve demir.]

12.7 Yalıtılmış bir kapta 100 °C sıcaklıktaki 100 g su içine

150 °C sıcaklıkta 400 g buhar gönderiliyor. Son durum ne olur? [C: 100 °C sıcaklıkta 82 g su, 418 g buhar.]

12.3 Isıl Genleşme

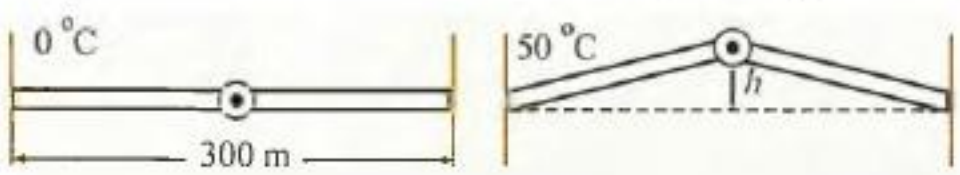
(Not: *Bu kısımdaki problemlerde gerekebilecek genleşme katsayıları Sayfa 205 deki tablodan alınacaktır.*)

12.8 0 °C de yüksekliği 800 m olan çelik bir kulenin 40 °C sıcaklıkta yüksekliği ne kadar artar? [C: 3.8 cm.]

12.9 Tabanı 1 cm^2 ve yüksekliği 1 olan cam tüp 0 °C de ağzına kadar civa ile doludur. Sıcaklık 150 °C olduğunda ne kadar civa taşar? [C: 2.3 cm^3.]

12.10 Uzunluğu 1 m olan alüminyum çubuktan yapılmış bir fiziksel sarkaç zamanı ölçmekte kullanılmaktadır. Sarkacın periyodu 0 °C sıcaklıkta 1 s dir. Sıcaklık 50 °C olduğunda sarkaç bir günde ne kadar hatalı ölçer? (L uzunluğundaki fiziksel sarkacın periyodu $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$ dir.)

[C: 50 s geri kalır.]



Problem 12.11

12.11 Çelikten yapılmış bir köprü, herbiri 150 m uzunluğunda ve ortasından menteşelenmiş iki parçadan oluşmaktadır. Sıcaklık 0 °C iken köprü yatay konumda dümdüz uzanabilmektedir. Sıcaklık 50 °C olduğunda orta nokta ne kadar yükselir? [C: 5.2 m.]

12.12 Çelikten yapılmış bir şerit-metre 0 °C sıcaklıkta doğru gösteriyor. Bu şerit-metreyle bakırdan yapılmış bir borunun uzunluğu 0 °C de ölçüldüğünde 25 m gösteriyor. (a) şerit-metre ve boru birlikte 250 °C sıcaklığa ısıtıldığında, bakır borunun boyunu ne kadar gösterir? (b) Boru gerçekte ne kadar uzamıştır? [C: (a) 25.03 m, (b) 25.11 m.]

12.4 İdeal Gaz

12.13 Hidrojen atomunun (H) mol kütlesi 1 g, oksijen atomunun (O) mol kütlesi 16 g ve karbon atomunun (C) mol kütlesi 12 g dır. (a) 100 g su (H_2O) kaç mol eder? (b) 5 mol karbondioksit gazı (CO_2) kaç gram gelir?

[C: (a) 5.6 mol, (b) 220 g.]

12.14 Hacmi 20 litre olan bir kapta 25 atm basınçta 160 g oksijen (O_2) gazı bulunmaktadır. (a) Kapta kaç mol oksijen vardır? (b) Gazın sıcaklığı ne kadardır?

[C: (a) 5 mol, (b) 1220 K.]

12.15 Hacmi 1 m^3 olan bir ocağın içinde STP şartlarında (0 °C ve 1 atm) hava bulunmaktadır. (a) Ocağın içinde kaç mol hava vardır? (b) Ocak 200 °C sıcaklığa ısıtıldığında, ocağın içinde kaç mol hava kalır?

[C: (a) 4.5 mol, (b) 2.4 mol.

12.16 Sanayide kullanılan bir oksijen tübünün 200 litre hacmi içinde, 27 °C sıcaklıkta ve 100 atm basınçta sıkıştırılmış oksijen gazı bulunmaktadır. (a) Tüpteki oksijenin kütlesi ne kadardır? (b) Tüp musluğundaki bir sızıntıdan dolayı, ertesi hafta bakıldığında, basıncın 80 atm değerine düştüğü gözleniyor. Tüpte ne kadar oksijen kalmıştır? (Sıcaklığın değişmediğini varsayın.) [C: (a) 7.3 kg, (b) 5.9 kg.]

12.17 Kimyada kullanılan *Loschmidt sabiti*, STP şartlarında 1 cm^3 hacimdeki gaz molekülü sayısı olarak tanımlanır. Loschmidt sabitini hesaplayın. [C: 2.7×10^{19}.]

12.18 Bir benzinli motorun 3 lt hacimli silindiri içinde 27 °C sıcaklıkta ve 1 atm basınçta hava+benzin karışımı bulunmaktadır. Piston itilerek havanın hacmi 8 kat küçültülüyor ve basıncı 12 kat artırılıyor. Karışımın son sıcaklığı ne olur? [C: 450 °C.]

12.19 Bir silindir içinde 27 °C sıcaklıkta 10 litre ideal gaz bulunmaktadır. Gaz hep aynı başlangıç durumundan itibaren aşağıdaki işlemlere tabi tutuluyor:

(b) Sabit hacimde ısıtılarak basıncı 5 katına çıkarılıyor. Son sıcaklığı ne olur?

(a) Sabit basınçta ısıtılarak hacmi 8 katına çıkarılıyor. Son sıcaklığı ne olur?

(c) Hem basıncı hem de hacmi 2 katına çıkacak şekilde ısıtılıyor. Son sıcaklığı ne olur?

(d) Sabit basınçta ısıtılarak *mutlak sıcaklığı* 4 katına çıkarılıyor. Son hacmi ne olur?

[C: (a) 1500 K, (b) 2400 K, (c) 1200 K, (d) 40 litre.]

12.20 Hava basıncının 1 atm ve sıcaklığın 27° olduğu bir günde, 25 m derinlikteki bir gölün dibinden, hacmi 1 cm^3 olan bir hava kabarcığı kopup yüzeye çıkıyor. Yüzeye vardığında hacmi ne kadar olur? (*Yol gösterme:* Bölüm 11 de sıvılarda hidrostatik basınç için bulduğumuz $P = P_0 + \rho gh$ formülünü kullanıp orantı kurun.) [C: 2.5 cm^3.]

13 TERMODİNAMİK YASALARI



Endüstri çağını başlatan ısı makinası: Buharlı tren.
Buhar genleşir ve pistonu iterken bir iş yapar. Bu işin kaynağı nedir? Isı kavramının mekanik iş ile ilişkisini bu bölümde kavrayacağız. (Foto: Christoph Ehlen).

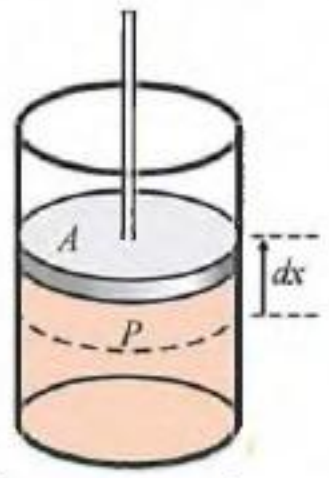
Önceki bölümde termodinamiğin temel kavramlarını öğrendik. Şimdi, bir sistemin aldığı ısıyla neler yapabileceğini, ne tür değişimlere uğrayabildiğini ele alacağız. Termodinamiğin 1. yasası enerji alışverişinin kurallarını belirler. Sistemin davranış yönünü ve dengeye ulaşmasını ise 2. yasa tayin eder.

13.1 BİR GAZIN YAPTIĞI İŞ

Bir sistemin çevresiyle ısı şeklinde enerji alışverişi yapabileceğini görmüştük. Enerji alışverişi için diğer bir yol iş yapmaktır.

Bir silindir içinde bulunan gazı gözönüne alalım. Bu silindirin üst tabanı Şekil 13.1 deki gibi, hareket edebilen bir piston olsun. Bu gazı ısıttığımızda pistonu iterek genleşir. Böylece bir iş yapmış olur. Bu işin miktarını hesaplayalım.

Silindir içindeki gazın basıncı P ve hacmi V olsun. Bu basınçtaki bir gazın, yüzölçümü A olan piston yüzeyine etkidiği toplam kuvvet $F = PA$ olur. Piston bu kuvvetin etkisiyle dx kadar yerdeğiştirirse, gazın bu yol boyunca yaptığı



Şekil 13.1: Gazın basıncı pistonu $F = PA$ kuvvetiyle iter.

küçük iş,

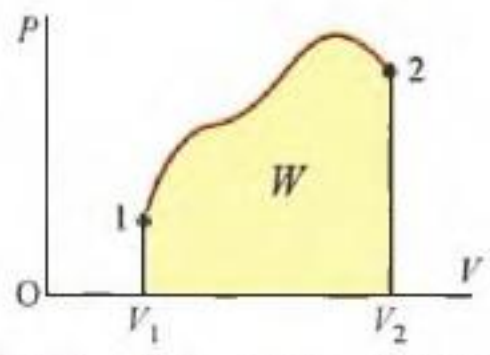
$$dW = F\,dx = PA\,dx = P\,dV$$

olur. Burada $dV = A\,dx$, şekilde görüldüğü gibi, gazın hacim artışıdır. Gaz genişliyorsa ($dV > 0$) yaptığı iş pozitiftir, genişlerken pistonu iter. Fakat, hacim küçülüyorsa ($dV < 0$) dışardan pistonu itmek gerekir, yani gazın yaptığı iş negatif olur.

Sonlu bir genleşmede, gazın hacmi V_1 den V_2 değerine geçiyorsa, gazın yaptığı toplam iş, bu küçük işlerin limit toplamı, yani integrali olur:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \qquad \text{(Bir gazın yaptığı iş)} \qquad (13.1)$$

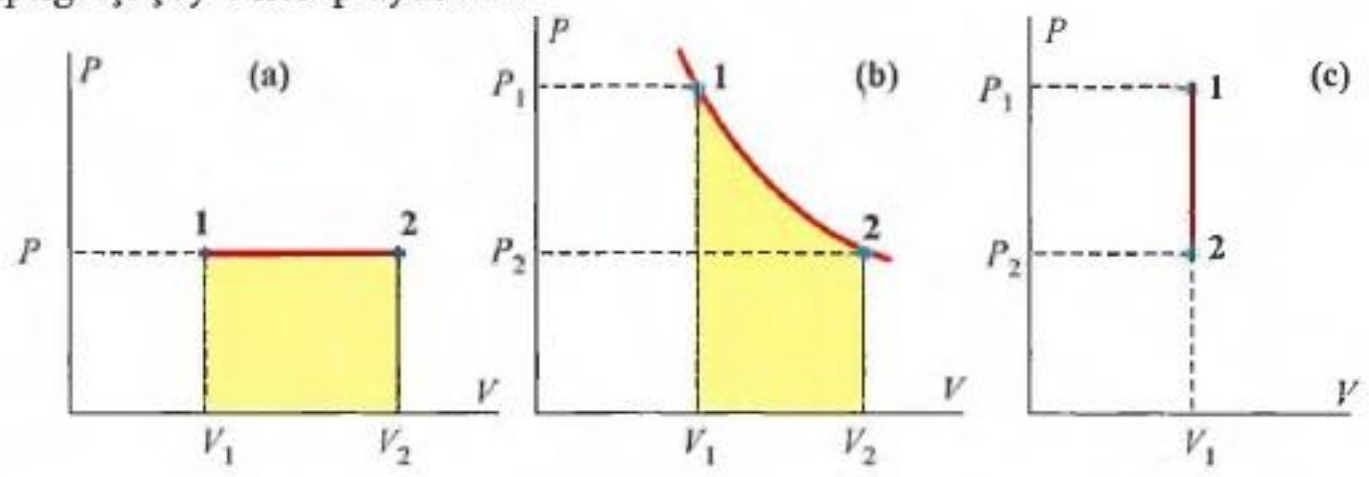
İntegral içindeki P basıncı, hem V hacminin hem de T sıcaklığının bir fonksiyonu olduğu için integral dışına alınamaz.



Şekil 13.2: P-V diyagramında, eğrinin altında kalan alan, gazın yaptığı W işi olur.

Gazın yaptığı işi bir P-V diyagramında görmek öğreticidir. Şekil 13.2 de görüldüğü gibi, integral tanımını hatırlarsak, eğrinin altında kalan bölgenin alanı W işi olur.

Genleşme sırasında gazın V_1 den V_2 ye giderken hangi yolu izlediği önemlidir. Gidilen yola göre iş farklı olur. Şekil 13.3 de gösterilen süreçler için gazın yaptığı işi şöyle hesaplayabiliriz:



Şekil 13.3: Gazın (a) Sabit basınçta, (b) Sabit sıcaklıkta (izotermal), (c) Sabit hacımda gazın yaptığı iş.

(a) Sabit basınçta iş: Şekil 13.3-a daki yol boyunca P basıncı sabit olduğundan, sadece dikdörtgenin alanını hesaplamak yeterli olur. Veya, (13.1) denkleminde P integral dışına alınabilir:

$$W = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P\,(V_2 - V_1) \qquad \text{(Sabit basınçta iş)} \qquad (13.2)$$

(b) Sabit sıcaklıkta (izotermal) iş: İdeal gaz denklemini $P = nRT/V$ şeklinde yazarsak, P-V diyagramında sabit sıcaklık eğrileri $P \sim 1/V$ şeklinde azalırlar (Şekil 13.3-b). Böyle bir eğri üzerinde yapılan işi integral yoluyla hesaplayalım. İntegral içindeki P basıncını ideal gaz denkleminden $P = nRT/V$ şeklinde yazarsak,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

olur. Bu ifadenin integrali logaritma fonksiyonudur:

$$W = nRT\,\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad \text{(Sabit sıcaklıkta iş)} \qquad (13.3)$$

(c) Sabit hacimde iş: Hacim sabitse $dV = 0$ ve integral sıfır olur. Bunu Şekil 13.3-c de görmek mümkündür, dikey bir doğrunun altında kalan alan sıfır demektir.

Örnek 13.1

Hacmi 3 litre *olan bir kapta* 27 °C *sıcaklıkta ve* 2 atm *basınçta bir gaz bulunmaktadır. Bu gazın aşağıdaki işlemler sırasında yaptığı işi hesaplayın:*

(a) *Sabit hacimde sıcaklığı 5 katına çıkarılıyor.*

(b) *Yine başlangıç durumundan itibaren, sabit basınçta hacmi 4 katına çıkarılıyor.*

(c) *Yine başlangıç durumundan itibaren, sabit sıcaklıkta hacmi 2 katma çıkarılıyor.*

Çözüm

(a) İş tanımı $dW = P\,dV$ dir. Hacim değişmiyorsa $dV = 0$ ve yapılan iş sıfır olur: $W = 0$.

(b) Basınç sabit olduğundan, integrale gerek yoktur:

$$W = P\,dV = P(V_2 - V_1)$$

Son hacim $V_2 = 4V_1 = 4 \times 3 = 12$ lt olur. SI birimleri (pascal ve metreküp) kullanılırsa,

$$W = 2 \times 1.013 \times 10^5 \times (12 - 3) \times 10^{-3} = 1800\,\text{J} = 1.8\,\text{kJ}$$

(c) Sabit sıcaklıkta iş formülü (13.3) denklemi olarak bulunmuştu:

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Son hacim $V_2 = 2V_1$ alınırsa, $\ln 2V_1/V_1 = \ln 2$ olur:

$$W = nRT \ln 2$$

Buradaki n mol sayısı ayrıca hesaplanabilirdi, ama buna gerek yoktur, çünkü $PV = nRT$ ideal gaz denkleminde eşitliğin sağ tarafı yerine sol tarafını kullanabiliriz:

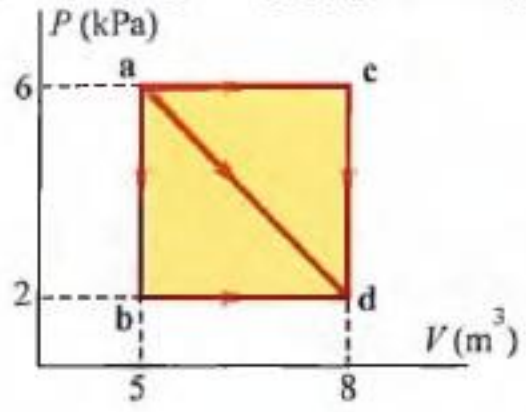
$$W = P_1 V_1 \ln 2$$

$\ln 2 = 0.69$ değeri ve diğer veriler yerine konur:

$$W = 2 \times 1.013 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3} \times 0.69 = 420\,\text{J}$$

Örnek 13.2

Şekilde P-V *diyagramında gösterilen her 3 süreç (abd, acd, ad) boyunca gazın yaptığı işi hesaplayın.*



Çözüm

abd yolu:

Gidilen yolu iki adımda hesaplarız:

$$W_{abd} = W_{ab} + W_{bd}$$

ab yolu boyunca hacim sabit olduğundan iş sıfır olur: $W_{ab} = 0$. Diğer iş sabit basınçta olduğundan $W = P(V_2 - V_1)$ formülünden bulunur:

$$W_{abd} = 0 + P_b (V_d - V_b) = 2 \times 10^5 \times (8 - 5) = 600\,\text{kJ}$$

acd yolu:

Yine iki adımda hesaplanır ve sabit hacimde gidilen yolda iş yapılmaz:

$$W_{acd} = W_{ac} + W_{cd} = P_a (V_c - V_a) + 0$$

$$W_{acd} = 6 \times 10^5 \times (8 - 5) = 1800\,\text{kJ}$$

ad yolu:

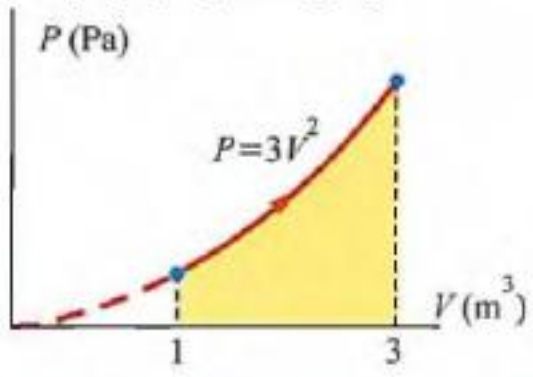
İş P-V diyagramında eğrinin altında kalan alan oluyordu. Buna göre, W_{ad} işi, köşegenin altında kalan alandır. Bu da, daha önce hesapladığımız W_{bd} işi üzerine, üçgenin alanını ekleyerek hesaplanır:

$$W_{ad} = W_{bd} + \frac{(P_a - P_b)(V_d - V_b}{2}$$

$$W_{ad} = 600\,\text{kJ} + \tfrac{1}{2} \times (6 - 2) \times 10^5 (8 - 5) = 1200\,\text{kJ}.$$

Örnek 13.3

Bir gaz şekilde gösterilen $P = 3V^2$ (Pa) *parabol eğrisi boyunca,* $V_1 = 1\,\text{m}^3$ *hacminden* $V_2 = 3\,\text{m}^3$ *hacmine kadar genleşiyor. Gazın yaptığı işi hesaplayın.*



Çözüm

Basınç değişiyorsa yapılan iş integralle bulunur:

$$W = \int_1^3 P\,dV$$

Gidilen yol eğrisinin denklemi $P = 3V^2$ olarak yerine konur ve integral alınır:

$$W = \int_1^3 3V^2\,dV = \left|V^3\right|_1^3.$$

$$W = 3^3 - 1^3 = 8\,\text{J}.$$

13.2 İÇ ENERJİ – TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ YASASI

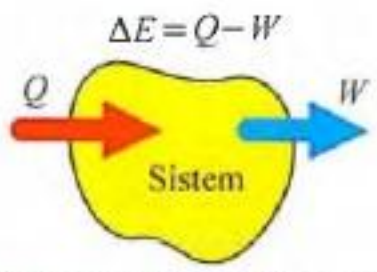
Hacmi sabit tutulan bir kapta bir gazı ısıttığımızı düşünelim. Hacım sabit olduğu için gaz iş yapmaz, $W = P\,dV = 0$ olur. O zaman, verdiğimiz bu ısı enerjisi nereye gidiyor? Bu enerjiyi elbette gazın molekülleri alacaktır. Gazı ısıttıkça moleküllerin kinetik enerjileri de giderek artacaktır. Böylece gazın toplam enerjisi ve dolayısıyla sıcaklığı artacaktır.

Diğer bir durumu gözönüne alalım: Bu kez bir pistonla kapatılmış kabı, çevreyle ısı alışverişi yapamayacak şekilde yalıtalım. Sonra bu gazı sıkıştırmaya başlayalım. Gazın hacmi küçüleceği için negatif iş yapar, yani dışardan iş alır. Fakat, gaz yalıtılmış olduğu için bunu ısı olarak dışarı veremez. O halde, bu iş nereye gider? Yine bu iş gaz moleküllerinin enerjilerini artırmaya harcanacaktır. Böylece gaz molekülleri giderek daha hızlı hareket ederler ve kinetik enerjileri artar.

Bu iki durum bize bir gazın aldığı ısı veya işi kendi içinde bir enerjiye dönüştürebildiğini göstermektedir. Termodinamikte bu, iç enerji olarak tanımlanır:

Bir gazı oluşturan moleküllerin (veya atomların) durgun bir referans sistemindeki toplam enerjisine **iç enerji** *denir.* İç enerji E ile gösterilir.

Bu aşamada, iç enerjiyi nasıl hesaplayacağımızı henüz bilmiyoruz. Bunu bize birinci yasa söyler.



Şekil 13.4: Birinci Yasa: Giren ısı ile çıkan iş arasındaki fark iç enerji artışı olur.

Termodinamiğin 1. Yasası

Herhangi bir değişim sırasında, bir sistemin aldığı Q ısısı ile yaptığı W işi arasındaki fark, gidilen yoldan bağımsız olup, sistemin iç enerjisindeki ΔE artışına eşittir:

$$\Delta E = Q - W \tag{13.4}$$

Birinci yasanın önemli noktalarını vurgulayalım:

- Birinci yasa bir tür enerji bilançosudur: Giren ısı ile çıkan iş arasındaki farkın iç enerjideki artışa harcandığını söyler.
- Q ve W nin işaretleri arasındaki farka dikkat edelim: Sisteme giren ısı ve sistemden çıkan iş pozitif kabul edilmiştir. Bu yüzden net enerji, bunların farkı olarak yasada yer almıştır.
- İç enerji bir durum değişkenidir. Daha önce, Q ısısı ve W işinin yola bağımlı olduğunu söylemiştik, yani "bir cismin ısısı" veya "bir cismin içindeki iş" demek yanlıştır. Fakat, "bir cismin iç enerjisi" demek doğrudur. Nasıl elde ediliyor olursa olsun, bu iç enerji artık gidilen yoldan bağımsızdır.
- **İki özel durum:**
  - Sistem iş yapmadan ($W = 0$) durum değiştiriyorsa, 1. yasaya göre,

$$\Delta E = Q$$

olur. Yani, alınan ısının tamamı iç enerji artışına gider.

  - Sistem iş yapıyor, ama ısı almıyorsa, $Q = 0$ ve yasaya göre

$$\Delta E = -W$$

olur. Yani, bu işi iç enerjiden harcayarak yapar.

- Bu yasa sadece gazlara değil, tüm sistemlere uygulanabilen evrensel bir yasadır. Her türlü alet, makina vb. bu yasayı sağlayarak çalışabilir. Örneğin, hiç enerji almadan çalışan devri-daim makinası iddiaları, birinci yasayı ihlal ettiği için, bilimde ciddiye alınmaz.
- Fakat, birinci yasa bize değişmenin hangi yönde olacağım söyleyemez. Örneğin, sıcak ve soğuk iki cismi bir araya getirelim. Bu cisimlerden biri diğerine Q ısısı verecektir, ama hangisi? Doğadaki olayların hangi yönde gelişeceğini bize ikinci yasa söyler. Birinci yasa, birinin aldığı ısı Q ve diğerinin aldığı ısı $-Q$ olduğu, yani net ısı sıfır olduğu müddetçe, gerisine karışmaz, her iki yönde ısı geçişine izin verir. Oysa, doğada hep sıcak cisim soğuk olana ısı verir.



Şekil 13.5: İngiliz bilim adamı Robert Boyle (1627–1691) tarafından önerilen devri-daim makinası. Bu makinada su kendi kendine dönüp akmaz, çünkü suyun hortumdan çıktığı nokta, kaptaki su yüzeyinin altında olmalıdır.

13.3 BİRİNCİ YASANIN UYGULAMALARI

Birinci yasa, ısı, iş ve iç enerji arasındaki ilişkiyi belirliyordu. Bu ilişkiyi kullanarak pekçok değişim süreçlerini hesaplayabiliriz.

İdeal Gazın İç Enerjisi

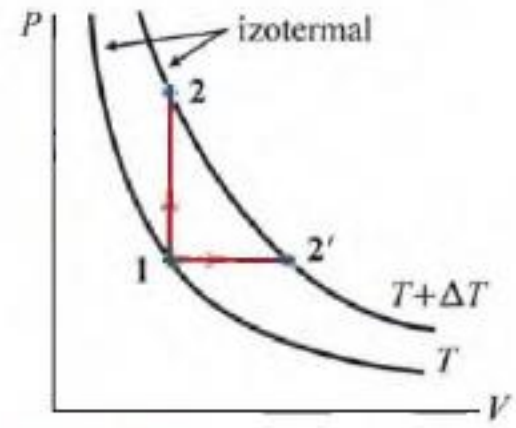
Önce gazlar için özgül ısı tanımını biraz değiştirmek gerekir. Kısım 12.2 de, özgül ısıları kütle başına şöyle tanımlamıştık:

$$Q = mc\,\Delta T$$

Aynı tanımı mol sayısına göre $Q = nc\Delta T$ şeklinde de yapabiliriz. Bu, daha sonra göreceğimiz üzere, gazlar için daha kullanışlı olmaktadır.

Fakat, bu sıcaklık artışı sabit basınçta veya sabit hacımda olabilir ve her ikisi için ayrı birer özgül ısı şöyle tanımlanır:

$$Q = \begin{cases} nc_v\,\Delta T & \text{(Sabit hacimde ısıtma)} \\ nc_p\,\Delta T & \text{(Sabit basınçta ısıtma)} \end{cases} \qquad (13.5)$$



Şekil 13.6: $1 \rightarrow 2$: Sabit hacimde ısıtma. $1 \rightarrow 3$: sabit basınçta ısıtma.

Şimdi, bir gazın sıcaklığını sabit hacimde ΔT kadar artırdığımızı düşünelim. Hacim sabit olduğundan, bu süreçte yapılan iş sıfır olur. Birinci yasada $W = 0$ alırsak,

$$\Delta E = Q = nc_v\,\Delta T$$

Bu ifadenin $T = 0$ dan T ye kadar integrali alınırsa,

$$E - E_0 = nc_v\,(T - 0)$$

olur. Mutlak $T = 0$ sıcaklıkta gazın iç enerjisinin $E_0 = 0$ olduğunu kararlaştırırsak, bir gazın T sıcaklıkta iç enerjisini bulmuş oluruz:

$$\boxed{E = nc_v\,T \qquad \text{(İdeal gazın iç enerjisi)}} \qquad (13.6)$$

Bu ısıtmayı sabit basınçta yapmış olsaydık, iç enerjideki artış yine $nc_v\Delta T$ olurdu. Çünkü, iç enerji bir durum değişkenidir, o sıcaklıkta aldığı değer, oraya nasıl gelindiğinden bağımsızdır.

c_v ile c_p Arasındaki İlişki

Şimdi aynı gazı sabit basınçta ΔT kadar ısıttığımızı düşünelim. Bu süreçte hem ısı hem de iş yapılacaktır. Isıyı doğrudan yazabiliriz:

$$Q = nc_p \Delta T$$

Sabit P basıncında gazın hacmi V_1 den V_2 ye değişiyorsa, işi şöyle yazılabilirler:

$$W = P(V_2 - V_1)$$

Burada $PV = nRT$ ideal gaz denklemini kullanırsak,

$$W = PV_2 - PV_1 = nR\,T_2 - nR\,T_1 = nR\,\Delta T$$

olur. Şimdi bu ısı ve iş ifadelerini birinci yasada kullanalım:

$$\begin{aligned} \Delta E &= Q - W \\ nc_v \Delta T &= nc_p \Delta T - nR\,\Delta T \end{aligned}$$

Sadeleştirme yaparak özgül ısılar arasındaki ilişkiyi buluruz:

$$\boxed{c_p = c_v + R \qquad \text{(İdeal gazın özgül ısıları)}} \tag{13.7}$$

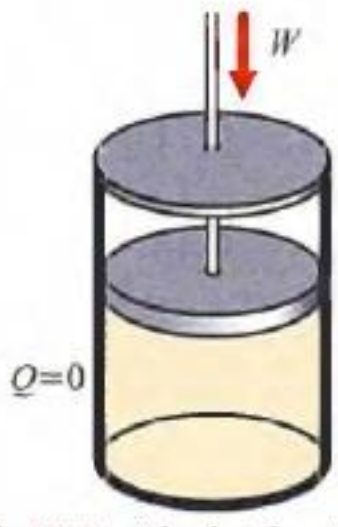
Bu ifade özgül ısılardan birisi bilindiği takdirde, diğerini bulmakta kullanılır. c_v özgül ısısını nasıl bulacağımızı daha sonra göreceğiz. Burada sonuçları ispatsız verelim:

Gazların özgül ısıları

	c_v	c_p
Tek-atomlu gazlar (He, Ne, Ar, Kr ...)	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
İki-atomlu gazlar (H_2, O_2, N_2 ...)	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$

Çok-atomlu gazlar için özgül ısı ifadeleri biraz daha karmaşıktır.

Adyabatik Süreç



Şekil 13.7: Adyabatik süreçte ısı alışverişi olmaz: $Q = 0$.

Bir sistemin hiç ısı alışverişi yapmadan ($Q = 0$) geçirdiği sürece **adyabatik süreç** denir. Bu durumda çevreyle sadece iş alışverişi olur. Bir kaptaki gazı gözönüne alalım. Kap yalıtılmışsa çevreyle ısı alışverişi yapamaz ve her türlü hal değişimi adyabatik olur. Keza, bir silindirdeki gazı, pistonu aniden iterek sıkıştıralım. Süreç kısa sürede gerçekleştiği için, gaz çevreyle ısı alışverişine vakit bulamaz.

Adyabatik süreç sonunda ideal gazın yeni sıcaklık, basınç ve hacmini birinci yasayı kullanarak hesaplayabiliriz. Bir gazın adyabatik süreçte sıcaklığının dT kadar arttığı küçük bir değişmeyi gözönüne alalım. Birinci yasada $Q = 0$ alınır ve iş için $P\,dV$ ve iç enerji artışı için $nc_v\,dT$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta E &= 0 - W \\ nc_v\,dT &= -P\,dV \end{aligned}$$

Basıncı ideal gaz denkleminden $P = nRT/V$ olarak çekip alalım:

$$nc_v\,dT = -\frac{nRT}{V}\,dV$$
$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v}\frac{dV}{V} = 0$$

Bu ifadede R sabiti yerine, yukarda özgül ısılar için bulduğumuz formülü $R = c_p - c_v$ şeklinde kullanalım:

$$\frac{dT}{T} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\frac{dV}{V} = 0$$

Özgül ısılar oranını $\gamma = c_p/c_v$ şeklinde, boyutsuz bir γ sabiti olarak tanımlarsak, daima $\gamma > 1$ olur.

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0$$

Bu ifadenin taraf tarafa belirsiz integrali alınırsa,

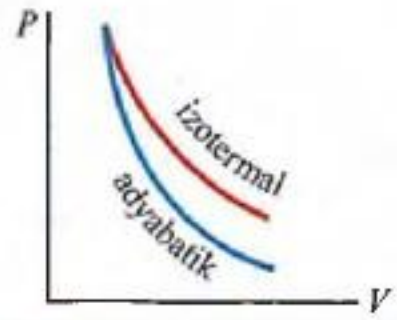
$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{sabit}$$

Logaritmanın $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ ve $c \ln d = \ln d^c$ özellikleri kullanılırsa, sonuç şöyle olur:

$$T\,V^{\gamma-1} = \text{sabit}$$

Hacimler arasındaki bağıntıyı bulmak istersek, bu bağıntıda sıcaklığı ideal gaz yasasından $T = PV/nR$ şeklinde yerine koyar ve sadeleştiririz:

$$P\,V^{\gamma} = \text{sabit}$$



Şekil 13.8: Adyabatik ve izotermal eğrilerin karşılaştırması.

Basınç ve hacim arasındaki bu ilişkiyi P-V diyagramında eşsıcaklık (izotermal) eğrilerle karşılaştırmak anlamlıdır. Şekil 13.8 de görüldüğü gibi, adyabatik eğri izotermalden daha hızlı azalır.

İstenirse (P, T) için de benzer bağıntı bulunabilir. Bu sonuçlara göre, adyabatik sürecin her aşamasında bu çarpımlar sabit kalır. Özel olarak, başlangıç ve son değerler için,

$$\begin{aligned} P_1 V_1^{\gamma} &= P_2 V_2^{\gamma} \\ P_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} &= P_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \qquad \text{(Adyabatik süreç)} \\ T_1\, V_1^{\gamma-1} &= T_2\, V_2^{\gamma-1} \end{aligned} \tag{13.8}$$

Bu bağıntılardan sadece birincisini hatırda tutmak yeterlidir, diğerleri ideal gaz yasasından elde edilebilir.

Adyabatik süreçte iş. Adyabatik süreçte $Q = 0$ olduğundan, 1. yasaya göre, $\Delta E = -W$ olur. İç enerjiyi veren (13.3) formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta E &= nc_v\,\Delta T \\ W &= -\Delta E = -nc_v\Delta T \end{aligned} \tag{13.9}$$

Gazın yaptığı iş tamamen iç enerjiden karşılanmaktadır.

Örnek 13.4

Bir kapta bulunan 5 mol *iki-atomlu gaza, sabit basınçta* 600 J *ısı vererek ısıtılıyor.* ($c_v = 5R/2$, $c_p = 7R/2$.)

(a) *ΔT sıcaklık artışı ne kadar olur?*

(b) *İç enerjideki artış ne kadar olur?*

(c) *Gazın yaptığı iş ne kadardır?*

Çözüm

(a) Bu problemde yeterince veri yokmuş gibi görtünmektedir, fakat istenilen hesaplar için yeterlidir. Sabit basınçta ısı artışı formülü kullanılır:

$$Q = nc_p\,\Delta T$$

Veriler yerine konulup ΔT hesaplanır:

$$\Delta T = \frac{Q}{nc_p} = \frac{600}{5 \times \frac{7}{2} \times 8.31} = 4.1\,\text{K}$$

(b) Süreç ne olursa olsun, iç enerji artışı daima $\Delta E = nc_v\,\Delta T$ olur:

$$\Delta E = n\tfrac{5}{2}R\,\Delta T = 5 \times \tfrac{5}{2} \times 8.31 \times 4.1 = 426\,\text{J}$$

(c) Isı ve iç enerji artışını bildikten sonra, iş 1. yasadan hesaplanır:

$$\Delta E = Q - W \;\rightarrow\; W = Q - \Delta E = 600 - 426 = 174\,\text{J}.$$

Örnek 13.5

Bir kapta 0 °C *sıcaklıkta* 4 mol *tek-atomlu gaz bulunmaktadır.*

(a) *Sabit hacimde gazın sıcaklığı* 50 °C *ye çıkarılıyor. Verilen ısıyı, gazın yaptığı işi ve iç enerjideki artışı hesaplayın.*

(b) *Sabit basınçta gazın sıcaklığı* 50 °C *ye çıkarılıyor. Verilen ısıyı, gazın yaptığı işi ve iç enerjideki artışı hesaplayın.*

Çözüm

(a) Gazın sabit hacimde aldığı ısı (13.5) formülü ve tablodaki $c_v = \frac{3}{2}R$ değeriyle hesaplanır:

$$Q = nc_v\,\Delta T = 4 \times \tfrac{3}{2} \times 8.31 \times (50 - 0) = 2500\,\text{J}.$$

Hacim sabit olduğu için, iş sıfır olur: $W = 0$. Buradan, 1. yasayı kullanarak, iç enerji artışını buluruz:

$$\Delta E = Q - W = Q - 0 = 2500\,\text{J}.$$

(b) Sabit basmça alman ısı, benzer şekilde $c_p = \frac{5}{2}R$ alınarak hesaplanır:

$$Q = nc_p\,\Delta T = 4 \times \tfrac{5}{2} \times 8.31 \times (50 - 0) = 4200\,\text{J}.$$

Gazın yaptığı işi hesaplayacak veriler elimizde yoktur. Fakat, önce iç enerji artışını hesaplarsak, sonra 1. yasadan işi bulabiliriz. İç enerji artışı (13.3) formülünden hesaplanır:

$$\Delta E = n\,c_v\,\Delta T = 4 \times \tfrac{3}{2}R \times (50 - 0) = 2500\,\text{J}$$

Q ve ΔE bilindikten sonra, 1. yasadan iş hesaplanır:

$$\Delta E = Q - W \;\rightarrow\; W = Q - E = 4200 - 2500 = 1700\,\text{J}.$$

Örnek 13.6

100 °C sıcaklıkta ve 1 atm *basınçta bulunan* 1 g *su ısıtılarak* 100 °C *de buhara dönüştürüldüğünde, hacmi* 1670 cm^3 *oluyor. Suyun buharlaşma ısısı* $L = 540\,\text{cal/g}$ *olduğuna göre, iç enerjideki artışı hesaplayın.*

Çözüm

Bu problemde ısı ve iş hesaplanır, sonra 1. yasadan iç enerji artışı bulunur. Hal değişimi sırasında alınan ısıyı yazalım:

$$Q = m\,L = 1 \times 540 = 540\,\text{cal} = 540 \times 4.18 = 2260\,\text{J}$$

1 g suyun hacmi 1 cm^3 iken, buhar haline dönüştüğünde genleşmiş olur. 1 atm sabit basınçta iş hesaplanır:

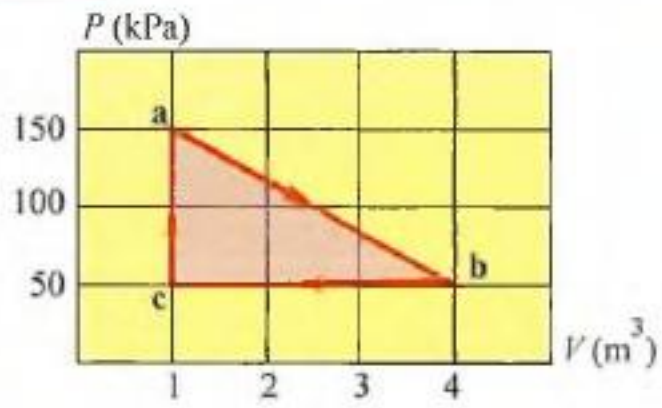
$$W = P(V_2 - V_1) = 1.013 \times 10^5 \times (1670 - 1) \times 10^{-6}$$

$$W = 170\,\text{J}$$

Q ve W değerleri kullanılıp, iç enerji artışı bulunur:

$$\Delta E = Q - W = 2260 - 170 = 2100\,\text{J}.$$

Örnek 13.7



Bir gaz, şekilde gösterilen 3 aşamalı süreçte ($a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$) kapalı çevrimini tamamlıyor. Gaza verilen net (toplam) ısı ne kadardır?

Çözüm

Bu problem karmaşık görünse de, biraz düşününce basitleşir. Gaz A noktasından başlayıp istediği kadar işlem görsün, tekrar A noktasına döndüğünde aynı iç enerjiye sahip olur, yani iç enerjideki artış sıfırdır: $\Delta E = 0$. Buna göre, bir çevrim sırasında alınan net ısı, yapılan net işe eşit olacaktır:

$$\Delta E = Q_{abca} - W_{abca} = 0 \;\rightarrow\; Q_{abca} = W_{abca}$$

Isıyı doğrudan hesaplayacak bilgiye sahip değiliz, ama işi P-V diyagramından hesaplayabiliriz. Çevrimin adımlarından herbirinde yapılan iş, o eğrinin altında kalan alandır. Fakat, gidiş yönünde V azalıyorsa iş negatif olur. Buna göre, AB yolunda yapılan iş pozitif, BC yolunda yapılan iş negatif, CA yolunda yapılan iş sıfırdır. Sonuçta net iş, şekilde görülen üçgenin alanına eşit olur.

$$Q_{abca} = W_{abca} = ABC \text{ üçgeninin alanı}$$

$$Q_{abca} = \tfrac{1}{2} \times (4 - 1) \times (150 - 50) \times 10^3 = 150\,000\,\text{J}$$

$$Q = 150\,\text{kJ}.$$

Örnek 13.8

Hacmi 5 lt *olan bir silindir içinde* 27 °C *sıcaklıkta ve* 1 atm *basınçta iki-atomlu ideal gaz bulunmaktadır* ($\gamma = 1.4$). *Piston aniden itilerek, gaz ısı alışverişine zaman bulamadan, hacmi* 1 lt *değerine sıkıştırılıyor.*

(a) *Gazın son sıcaklık ve basıncı ne olur?*

(b) *Gazın yaptığı iş ne kadardır?*

Çözüm

(a) Isı alışverişi olmadığı için ($Q = 0$) bu bir adyabatik süreçtir. (13.8) denklemlerinden önce basıncı buluruz:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

Buradan son basınç hesaplanır:

$$P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1 = \left(\frac{5}{1}\right)^{1.4} \times 1 = 9.5\,\text{atm}$$

Son sıcaklığı bulmak için ideal gaz denklemini iki kere yazıp orantı kurarız:

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} T_1$$

$$T_2 = \frac{9.5 \times 1}{1 \times 5} \times 300 = 570\,\text{K}$$

(b) Adyabatik iş, iç enerjideki azalmaya eşit oluyordu (13.9 denklemi):

$$W = -\Delta E = -nc_v \Delta T = -nc_v (T_2 - T_1)$$

Buradaki n mol sayısını hesaplamak yerine, $nRT = PV$ bağıntısıyla basınç ve hacimleri oluştururuz:

$$W = \frac{c_v}{R}(nRT_1 - nRT_2) = \frac{c_v}{R}(P_1 V_1 - P_2 V_2)$$

İki-atomlu gazlar için, Sayfa 220 deki tablodan $c_v = \frac{5}{2}R$ değeri alınır:

$$W = \tfrac{5}{2}(P_1 V_1 - P_2 V_2)$$

Buradan gazın yaptığı iş hesaplanır:

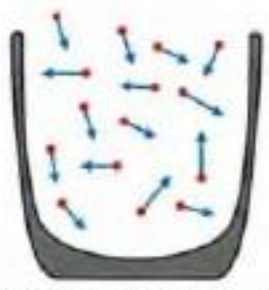
$$W = \tfrac{5}{2} \times (1 \times 5 - 9.5 \times 1) \times 1.013 \times 10^{5-3} =$$

$$W = -1140\,\text{J}.$$

13.4 BASINCIN KİNETİK HESABI

Bir otomobilin yükünü kaldıran lastiğin içindeki hava basıncının kaynağı nedir? Buna mikroskopik ölçekte cevap vermek gerekirse, o küçük moleküllerin lastik duvarla yaptıkları çarpışmalar o ağır otomobili havada tutmaktadırlar.

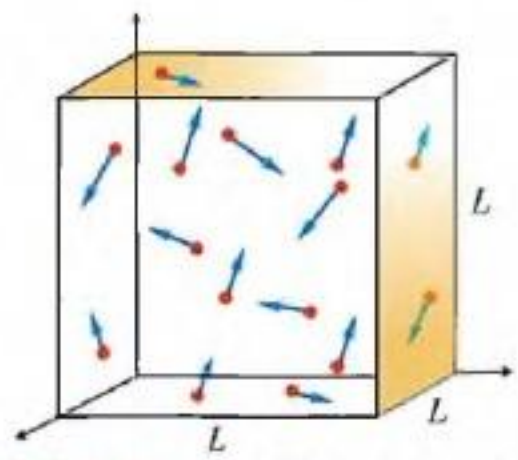
Bir gazın sıcaklık, basınç gibi termodinamik özelliklerini, onu oluşturan atom veya moleküllerin mikroskopik hareketlerinden yola çıkarak açıklayan bir *gazların kinetik teorisi* vardır. Bu teoride nasıl hesap yapıldığını göstermek amacıyla, bir gazın basıncını kinetik teoriye göre hesaplayalım.



Şekil 13.9: Otomobil lastiğindeki basınç, moleküllerin lastik duvarla çarpışmalarından kaynaklanır.

Hesabı basit tutmak açısından, bazı varsayımlar yapılır:

- Gaz molekülleri tek-atomlu olarak kabul edilir. Böylece, noktasal parçacık gibi davranırlar, dönme veya titreşim hareketi olmaz, sadece öteleme hareketi yapabilirler.
- Moleküllerin birbiriyle çarpışmaları ihmal edilir.
- Moleküllerin duvarla esnek çarpışma yaptıkları kabul edilir.



Şekil 13.10: Kübik hacimde gaz.

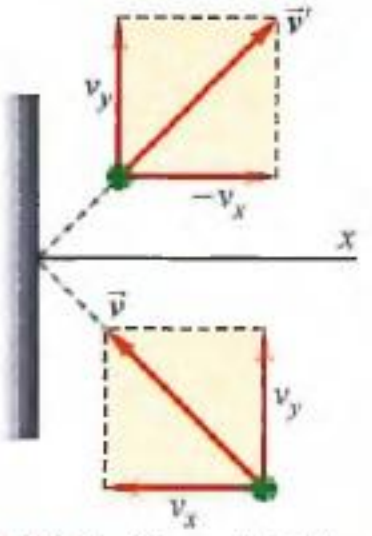
Mekanikte impuls ve momentum konusunu hatırlayalım: m kütleli bir cisme Δt zaman aralığında uygulanan F kuvveti ile cismin momentumundaki değişim,

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

oluyordu. Şimdi, bir kenarı L uzunluğunda küp şeklinde bir hacimde, bir molekülün x-eksenine dik bir duvara $\vec{v}$ hızıyla çarptığını düşünelim. Şekil 13.11 da görüldüğü gibi, esnek çarpışma sonucunda, molekülün duvara paralel v_y bileşeni değişmez, duvara dik v_x bileşeni geri yansır. O halde, sadece x-yönünde oluşan kuvveti yazarsak,

$$F\,\Delta t = m_0 v_x - m_0(-mv_x) = 2m_0 v_x$$

olur. Burada, karışıklık olmaması için, bir molekülün kütlesini m_0 ile gösteriyoruz.



Şekil 13.11: Bir molekülün duvarla çarpışması.

Bu molekül duvarla çarpıştıktan sonra geri yansır ve karşı duvara gidip tekrar döner ve bir kez daha çarpışır. O halde, iki çarpışma arasında geçen Δt zamanı bir çarpışmanın zamanı olur. Kenar uzunluğu L olduğundan, gidiş-geliş için gerekli $2L$ yolunu alma zamanı hesaplanır:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

Bu zamanı momentum denkleminde kullanarak F kuvvetini yazarız:

$$F = \frac{2m_0 v_x}{\Delta t} = \frac{m_0 v_x^2}{L}$$

Bu, moleküle etkiyen kuvvetti. Etki-tepki yasasına göre, molekül de duvarı buna eşit ve zıt bir kuvvetle iter. Burada kuvvetin şiddetiyle ilgilendiğimiz için işareti gözönüne almayacağız.

Bir molekülün duvara etkidiği kuvveti bulduk. Gaz içinde N sayıda molekül varsa, bunların herbirinin duvara uyguladıkları kuvvet aynı formülle verilir. O halde, N tane molekülün kuvvetini bulmak için gerekli toplama şöyle yazılabilir:

$$F_{\text{top}} = \frac{m_0}{L}\left(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2\right)$$

Parantez içindeki toplamı ayrı ele alalım: Bu toplamı molekül sayısına bölersek v_x^2 hızlarının $\langle v_x^2 \rangle$ ortalamasını buluruz:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2}{N}$$

Bu ifadede $\langle v_x^2 \rangle$ bileşen ortalaması yerine, hızın kendi ortalamasını görmek isteriz. Bu amaçla, her hız vektörü $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ şekinde yazılabileceğinden, iki tarafın ortalaması,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

olur. Yerçekimi ihmal edilirse, moleküllerin her üç doğrultuda hız ortalamaları, simetriden dolayı eşit olacaktır:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \\ \langle v^2 \rangle &= 3\langle v_x^2 \rangle \end{aligned}$$

Şimdi, yukardaki kuvveti bu ortalama hız cinsinden yazabiliriz:

$$F_{\text{top}} = \frac{Nm_0}{L}\frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Buradan basıncı hesaplarız: Kenar yüzölçümü $A = L^2$ ve hacım $V = L^3$ olduğundan, sonuçta basınç şöyle ifade edilir:

$$P = \frac{F_{\text{top}}}{A} = \frac{Nm_0}{3L^3}\langle v^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V}\langle v^2 \rangle$$

Bu ifadeden pekçok önemli sonuçlar çıkar:

- **İç enerji ve özgül ısı:** Bu formülde hacmi sol tarafa alalım ve bir molekülün ortalama kinetik enerjini oluşturalım:

$$PV = \tfrac{2}{3}\underbrace{N\tfrac{1}{2}m_0\langle v^2\rangle}_{E}$$

Bir molekülün ortalama kinetik enerjisi $m_0\langle v^2\rangle/2$ ile N sayısının çarpımı, gazın toplam kinetik enerjisi olur. Başlangıçta moleküllerin birbiriyle etkileşmediğini ve duvarla esnek çarpışma yaptığını varsaymıştık. O halde, tanıma göre, toplam kinetik enerji bu gazın E iç enerjisi demektir:

$$PV = \tfrac{2}{3}E$$

Bu eşitliğin sol tarafını ideal gaz denkleminden $PV = nRT$ şeklinde alırsak,

$$\begin{aligned} nRT &= \tfrac{2}{3}E \\ E &= \tfrac{3}{2}nRT \qquad \text{(Tek-atomlu gazın iç enerjisi)} \end{aligned} \tag{13.10}$$

İç enerjinin c_v özgül ısısı cinsinden ifadesini daha önce (13.6) denklemiyle bulmuştuk:

$$E = nc_vT$$

Görüldüğü gibi, sıcaklık bir cismin toplam enerjisinin bir ölçüsü olmaktadır. Son iki ifade karşılaştırılırsa, ideal gazın sabit-hacımda c_v özgül ısısı bulunur:

$$c_v = \tfrac{3}{2}R \qquad \text{(Tek-atomlu gazın özgül ısısı)} \tag{13.11}$$

Buna bağlı olarak $c_p = c_v + R = \frac{5}{2}R$ bulunur.

Böylece, ideal gazların her türlü süreçte aldığı ısı, yaptığı iş ve iç enerji artışı, bu E, c_v, c_p formülleriyle kesin olarak hesaplanabilirler.

- **Ortalama hız:** (13.4) ifadesine tekrar dönelim ve onu PV çarpımı şeklinde yazalım:

$$PV = \frac{Nm_0}{3}\langle v^2\rangle$$

Eşitliğin sağ tarafındaki Nm_0 çarpımı, molekül sayısı ile bir molekülün kütlesi çarpımı, yani gazın toplam m kütlesi olur. Bunu n mol sayısı ile M molekül kütlesi cinsinden $m = nM$ olarak yazabiliriz. Sol tarafta yine ideal gaz denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} nRT &= \tfrac{1}{3}nM\langle v^2\rangle \\ \langle v^2\rangle &= \frac{3RT}{M} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin karekökü alınarak **kök-ortalama hız** formülü bulunmuş olur:

$$v_{\text{ko}} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad \text{(Kök-ortalama hız)} \tag{13.12}$$

Bu formül çok-atomlu gaz molekülleri için de geçerlidir. Formüle göre, molekül kütlesi hafif olan gazların (hidrojen, helyum) ortalama hızı daha büyük olur. Bu yüzden atmosferde hafif gazlar çok az bulunur, çünkü çok önceden yerçekiminden kurtulup gitmişlerdir.

Örnek 13.9

Mol kütlesi 4 g *olan Helyum* (He) *gazının, kök-ortalama hızının* 1500 m/s *olduğu sıcaklıkta, mol kütlesi* 32 g *olan oksijen* (O_2) *gazının kök-ortalama hızı ne kadar olur?*

Çözüm

Kök-ortalama hız için bulunan (13.12) formülü her iki gaz için yazılıp, orantı kurulur:

$$v_{ko} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \rightarrow \quad \frac{v_{ko,2}}{v_{ko,1}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$$

Mol kütleleri yerine konularak hız bulunur:

$$v_{ko,2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\, v_{ko,1} = \sqrt{\frac{4}{32}} \times 1500 = 530\,\text{m/s}$$

Örnek 13.10

Hacmi 3 lt *olan bir kapta* 27 °C *sıcaklıkta, mol kütlesi* 20 g *olan 2 mol neon* (Ne) *gazı vardır.*

(a) *Gaz moleküllerinin toplam kinetik enerjisi ne kadardır?*

(b) *Bir molekülün kök-ortalama hızı ne olur?*

Çözüm

(a) Gaz tek-atomlu ise, yani dönme veya titreşim enerjileri yoksa, iç enerji tamamen toplam kinetik enerjiden ibarettir. İç enerjiyi hesaplamak için (13.10) formülünü kullanırız:

$$E = \tfrac{3}{2} nRT = \tfrac{3}{2} \times 2 \times 8.31 \times 300 = 7500\,\text{J}$$

(b) Kök-ortalama hız için bulunan (13.12) formülü kullanılır:

$$v_{ko} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Neonun mol kütlesi ve sıcaklık yerine konularak hesaplanır:

$$v_{ko} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{0.020}} = 610\,\text{m/s}.$$

13.5 ISI MAKİNALARI

Her türlü teknolojinin temelinde enerjiyi işe çevirmek vardır: Hidroelektrik santrallar suyun potansiyel enerjisini, rüzgar türbinleri havanın kinetik enerjisini, benzinli motorlar ise yanma enerjisini işe çevirerek çalışırlar.

Aldıkları ısının bir kısmını işe dönüştüren aletlerin genel adı **ısı makinalarıdır**. Buharlı makina, benzinli veya dizel motor birer ısı makinasıdır.



Şekil 13.12: Isı makinası şeması.

Ayrıntıları ne olursa olsun, her ısı makinası T_H sıcaklığında bir *sıcak kaynak*tan aldığı Q_H ısısı ile W kadar iş yapar, kalan Q_C miktarını da T_C sıcaklığındaki bir *soğuk kaynağa* verir.

Isı makinaları **çevrim** düzeninde çalışırlar, yani her ısı alıp iş yapma sürecinden sonra, tekrar başlangıçtaki durumlarına dönerler. Örneğin, buhar makinası kazandan aldığı buharın Q_H ısısıyla pistonu iterken W kadar iş yapar ve sonra genleşmiş buharla birlikte Q_C ısısını dış atmosfere atar. Bu çevrim sonunda tekrar başladığı noktada olur.

Birinci yasayı bir çevrim için yazarsak, sistemin iç enerji artışı sıfırdır:

$$\Delta E = Q - W$$
$$0 = (Q_H + Q_c) - W$$

Burada Q_C aslında negatif bir büyüklüktür. Bunun anlaşılması için, ısıların mutlak değerini yazarsak,

$$W = |Q_H| - |Q_C|$$

olur. Yapılan iş daima bu farka eşit olacaktır.

Verim

Bir ısı makinasınm verimi, yapılan net işin harcanan ısıya oranıdır:

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|}$$

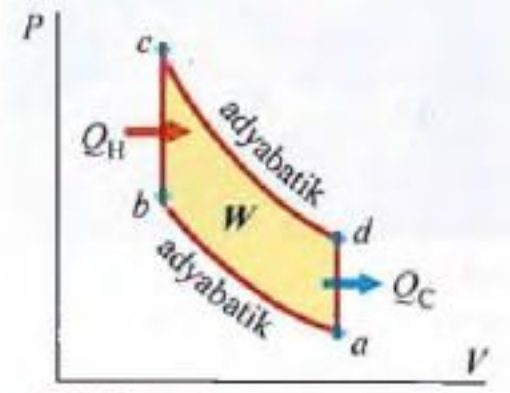
$$e = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| \qquad \text{Isı makinasının verimi)} \qquad (13.13)$$

Verim [0, 1] aralığında bir sayıdır, örneğin $e = 0.3$ ise verim % 30 demek olur.

Şimdi, ençok kullanılan bazı ısı makinalarının çalışma ilkelerini ve verimlerini gözden geçirelim.

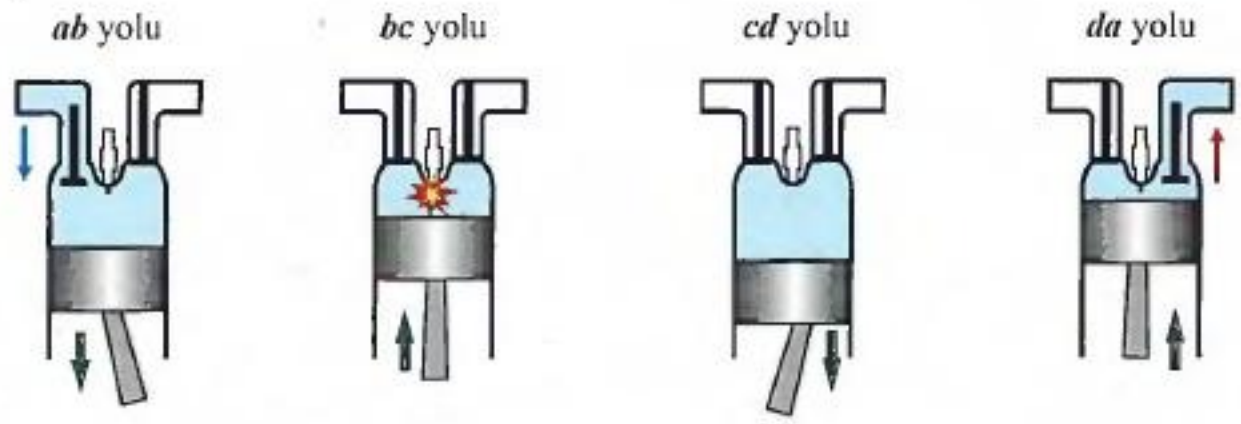
Benzin Motoru – Otto Çevrimi

İçten yanmalı veya 4-zamanlı da denilen benzin motorunda bir çevrim 4 süreçten oluşur. Bu süreçleri yandaki P-V diyagramında takip ederek ele alalım:



Şekil 13.13: Otto çevrimi.

Benzin-hava karışımı a noktasında silindir içinde iken ab yolu boyunca aniden sıkıştırılır. Bu sırada sistem ısı alışverişine zaman bulamadığı için ab süreci adyabatik olur. b noktasında yakıt ateşlendiğinde sistem genleşmeye fırsat bulamadan, sabit sıcaklıkta Q_H ısısı alır ve basıncı bc yolu boyunca artar. Bu basınç artışı sonucu gaz aniden, adyabatik genleşerek pistonu cd yolu boyunca iter. Harcanan yakıt-hava karışımı da yolu boyunca ekzos gazı olarak atılırken, aynı anda silindir içine yeni benzin-hava karışımı emilir. Böylece bir çevrim tamamlanmış olur.



Şekil 13.14: 4-zamanlı benzin motoru. Herbir şekil grafikteki ayrı bir sürece karşılık gelir.

Otto çevrimi denen adyabatik ve sabit hacimli ikişer süreçten oluşan bu çevrimin verimini hesaplayalım. Adyabatik süreçlerde ısı alışverişi olmayacağından, sadece bc ve da yolları boyunca ısıyı hesaplamak yeterlidir:

$$\text{Sabit hacımda } bc \text{ süreci:} \qquad Q_H = nc_v(T_c - T_b)$$

$$\text{Sabit hacımda } da \text{ süreci:} \qquad Q_C = nc_v(T_a - T_d)$$

Diyagramdan $T_c > T_b$ ve $T_a < T_d$ olduğu gözlenirse, Q_H ısısının pozitif, Q_C ısısının da negatif olduğu anlaşılabilir.

Verim tanımı kullanılırsa,

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = \frac{(T_c - T_b) + (T_a - T_d)}{T_c - T_b}$$

Buradaki dört sıcaklık aslında bir parametreye indirgenebilir. Otto çevriminde gazın en fazla sıkıştığı $V_b = V_c$ değerini V ile gösterelim. Gazın genleştiği $V_a = V_d$ hacimlerine de rV dersek, burada r motorun *sıkıştırma oranı* olarak tanımlanmış olur. Şimdi, ab ve cd adyabatik süreçleri için, daha önce bulduğumuz (13.8) formüllerini kullanırsak,

$$ab \text{ süreci:} \qquad T_a(rV)^{\gamma-1} = T_b V^{\gamma-1}$$

$$cd \text{ süreci:} \qquad T_d(rV)^{\gamma-1} = T_c V^{\gamma-1}$$

Bu denklemlerde $V^{\gamma-1}$ ortak terimi elenir ve bulunan T sıcaklıkları yerine konursa, formül şöyle sadeleşir:

$$e = \frac{T_d r^{\gamma-1} - T_a r^{\gamma-1} + T_a - T_d}{T_d r^{\gamma-1} - T_d r^{\gamma-1}}$$

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \qquad \text{(Otto çevriminin verimi)} \qquad (13.14)$$



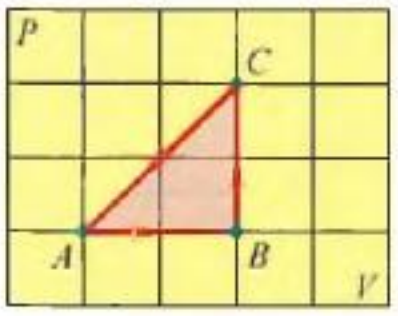
Şekil 13.15: Jaguar V12 motoru ($r = 14$) gibi rekor bir sıkıştırma oranına sahiptir.

Burada $\gamma = c_p/c_v$ oranı olup hava için yaklaşık $\gamma = 1.4$ değerindedir. Bu sonuç şaşırtıcıdır. Benzin motorunda istediğiniz yakıtı veya boyutları kullanın farketmez, verim sadece motorun r sıkıştırma oranıyla artar. Elbette, bazı yakıtları fazla sıkıştırmak mümkün değildir, yarı yolda kendiliğinden alev alırlar. Günümüzde yüksek oktanlı benzin kullanan motorlarda $r = 10$ civarındadır.

$r = 10$ ve hava için $\gamma = 1.4$ alınırsa, verim $e = 0.6$ çıkar. Fakat, gerçekte benzin motorlarının verimi % 25 kadardır. Çünkü tekerleklere aktarıncaya kadar sürtünme ve diğer etkilerle verim azalır.

Örnek 13.11

Şekilde gösterilen ABC çevriminin herbir adımında ısı (Q), iş (W) ve iç enerji artışı (ΔE) nin işaretinin pozitif veya negatif olduğunu belirleyip, tabloyu doldurun.



	Q	W	ΔE
$A \to B$			
$B \to C$			
$C \to A$			

Çözüm

Bu problem çevrimleri incelemekte temeli oluşturur. Önce, bazı genel ilkeleri hatırlayalım:

- P-V diyagramında orijinden uzaklaştıkça sıcaklık artar.
- İç enerji daima sıcaklıkla artar: $\Delta E = nc_v \Delta T$.
- Sıcaklık artıyorsa ısı pozitiftir: $Q = nc_v \Delta T$ veya $nc_p \Delta T$
- Gaz genleşiyorsa yaptığı iş pozitiftir: $dW = P\,dV$

Şimdi, bu ilkelere göre herbir adımı irdeleyelim:

AB süreci:

Bu yol boyunca T sıcaklığı ve V hacmi artmaktadır. O halde, hem Q hem ΔE ve hem de W pozitif olur.

BC süreci:

Bu yol boyunca T sıcaklığı artmakta fakat V hacmi sabit kalmaktadır. O halde, Q ve ΔE pozitif, fakat $W = 0$ olur.

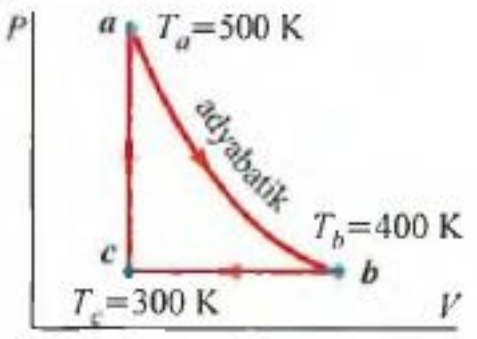
CA süreci:

Bu yol boyunca T sıcaklığı ve V hacmi azalmaktadır. O halde, hem Q hem ΔE ve hem de W negatif olur. Sonuçta tablo şöyle tamamlanır:

	Q	W	ΔE
$A \to B$	+	+	+
$B \to C$	+	0	+
$C \to A$	−	−	−

Örnek 13.12

$\gamma = c_p/c_v = 1.4$ olan bir gaz şekilde gösterilen 3 adımlı bir çevrimin ab yolunda adyabatik genleşiyor, bc yolunda sabit basınçta sıkıştırılıyor ve ca yolunda sabit hacimde ısıtılıyor. $T_a = 500\,\text{K}$, $T_b = 400\,\text{K}$ ve $T_c = 300\,\text{K}$ dir. Çevrimin verimini hesaplayın.



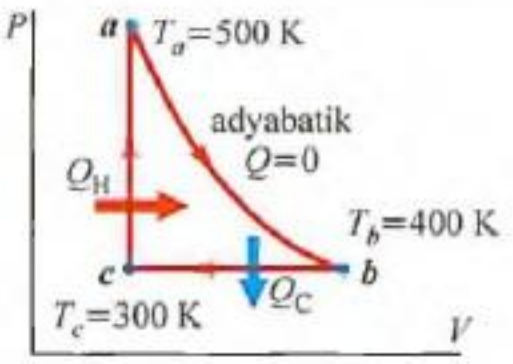
Çözüm

Bir çevrimin verimini hesaplamak karmaşık görünse de, biraz düşünüldüğünde kolaylaşır. Verim, gazın yaptığı net W işinin, aldığı (pozitif) Q_H ısısına oranıdır. Ayrıca, bir çevrim sonunda daima $\Delta E = 0$ olduğundan, 1. yasaya göre net iş $W = Q_H - |Q_C|$ olur. Burada Q_C gazın verdiği negatif ısıdır. Buna göre verim,

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H}$$

olur. O halde, çözüm yöntemimiz şöyle olur: Gazın, çevrimin hangi adımında ısı aldığı ve hangi adımda ısı verdiğini hesaplar, bunların oranını verim formülünde kullanırız. Genelde, sonuç sadece sıcaklık farklarına bağlı olacaktır.

Bu problemde ab adımı adyabatik olduğundan ısı alışverişi olmaz. bc adımında gaz sıkıştırıldığında, basıncı sabit tutabilmek için dışarıya ısı vermek zorundadır. O halde, $Q_C = Q_{bc}$ olur. ca adımında sabit hacimde ısıtılarak basıncı artırılır. O halde, $Q_H = Q_{ca}$ dır. Özet olarak durum şu şekildeki gibidir:



Şimdi Q_H ve Q_C ısılarını hesaplayalım:

$$Q_H = Q_{ca} = nc_v \Delta T = nc_v (T_a - T_c)$$

$$Q_C = Q_{bc} = nc_p \Delta T = nc_p (T_c - T_b)$$

Bu ısıların oranı verim formülünde kullanılır:

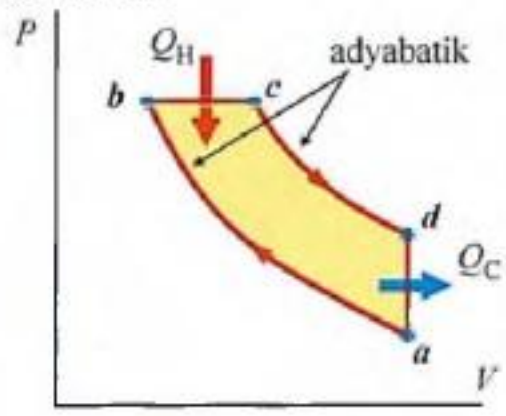
$$\epsilon = 1 - \frac{|nc_p(T_c - T_b)|}{nc_v(T_a - T_c)} = 1 - \gamma \frac{T_b - T_c}{T_a - T_c}$$

Veriler yerine konularak verim hesaplanır:

$$\epsilon = 1 - 1.4 \times \frac{400 - 300}{500 - 300} = 0.30 = \%\,30$$

Örnek 13.13

Dizel çevrimi. *Bir dizel motorunda yüksek sıcaklıkta sıkıştırılmış hava üzerine püskürtülen yağ patlayarak yanar. Böylece ısı alan gaz karışımı genleşerek pistonu iter. Çevrimin aşamaları şunlardır:*



ab : adyabatik sıkıştırma
bc : sabit basınçta genleşme (yağ püskürtme ve patlama)
cd : adyabatik genleşme (gaz pistonu iterek iş yapar)
da : sabit hacimde soğuma (yanmış gaz ekzostan atılır)

Şekilde gösterilen Dizel çevriminde T_a=300 K, T_b=1000 K, T_c = 1600 K ve T_d = 800 K olduğuna göre, bu çevrimin verimini hesaplayın. (Hava için $\gamma = c_p/c_v = 1.4$)

Çözüm

Bu çevrimde Q_H ve Q_C ısılarının nerede alınıp verildiğini görmek kolaydır. Adyabatik adımlarda ısı alışverişi olmaz. *bc* yolu bounca gaz ısındığı için ısı alır, *da* yolunda ise soğur ve ısı verir. O halde, $Q_H = Q_{bc}$ ve $Q_C = Q_{da}$ olur. Bunları hesaplayalım:

Sabit basınçta : $Q_H = Q_{bc} = nc_p(T_c - T_b)$

Sabit hacimde : $Q_C = Q_{da} = nc_v(T_a - T_d)$

Bu ısıların oranı verim formülünde kullanılır:

$$\epsilon = 1 - \frac{|nc_v(T_a - T_d)|}{nc_p(T_c - T_b)} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}$$

Veriler yerine konularak verim hesaplanır:

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{1.4} \times \frac{800 - 300}{1600 - 1000} = 0.40 = \%\,40$$

13.6 TERMODİNAMİĞİN İKİNCİ YASASI – CARNOT ÇEVRİMİ

Sıcak ve soğuk iki cisim yanyana getirildiğinde, ısı sıcaktan soğuğa doğru akar. Bir suya damlatılan mürekkep damlası su içinde yayılır, yayılmış mürekkep kendiliğinden bir noktada toplanmaz. Keza, bitişik iki kaptakı farklı türden iki gaz arasındaki duvarı kaldırsak, iki gaz birbirine karışır, ama kendiliğinden iki tarafa ayrışmazlar.

Tüm bu süreçler enerji bakımından mümkün, yani birinci yasaya uygun oldukları halde, doğada gözlenmezler. Termodinamik olaylarda doğanın tercih ettiği bir gelişme yönü vardır. Bu yönü termodinamiğin ikinci yasası tayin eder.

İkinci yasanın makroskopik ve mikroskopik düzeyde çok farklı ifadeleri vardır. Mikroskopik ifadesi entropi, düzensizlik, faz uzayı vb. gibi kavramlar içerir ve İstatistik Mekanik denilen fizik dalının konusudur. Burada ısı makinalarına dayalı makroskopik ifadeyi ele alacağız.

Termodinamiğin 2. Yasası

Bir çevrimli ısı makinasının belli sıcaklıktaki bir kaynaktan aldığı ısının tümünü işe çevirmesi mümkün değildir.

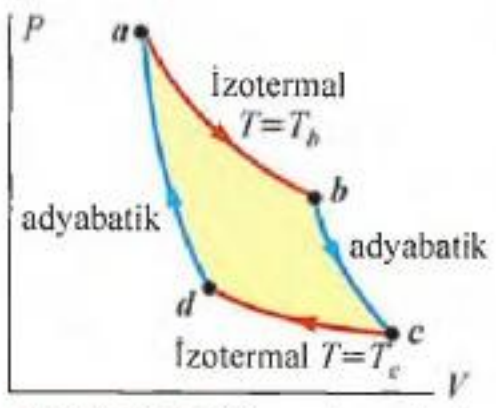
İkinci yasanın önemli noktalarını vurgulayalım:

- Eğer ısı makinası aldığı ısının tamamını işe çevirseydi, (13.13) denklemindeki verim tanımına göre, $Q_c = 0$ ve verim % 100 olurdu. Bu, 1. yasaya göre mümkündür, çünkü alınan ısı yapılan işe eşit olmaktadır. Fakat, 2. yasa hiçbir ısı makinanın % 100 verimle çalışamayacağını ifade etmektedir. Yani, doğada olayların gelişme yönünü belirlemektedir.

- İkinci yasaya göre benzinli motorun yanmış gazı, veya buhar makinasının genleşmiş buharı dışarı atmadan çalışması mümkün değildir. Eğer bu ısıyı çevreye atamasaydı, giderek makinanın kendisi ısınır ve çalışamaz hale gelirdi.
- Eğer soğuk kaynağa ısı vermenin bir yolu yoksa, iş de yapılamaz. Örneğin, bir geminin motoru deniz suyundan ısı alır ve bir kısmını işe çevirebilirdi. Ama, bu ısının işe çevrilen kısmından arta kalanını yine denize veremeyeceği için, makina çalışmaz.

Carnot Çevrimi

İkinci yasa % 100 verimli ısı makinası yapılamayacağını söylüyordu. Peki, yapılabilecek en verimli makina hangisidir ve verimi ne kadar olur? Buharlı makinanın icadından sonra bilim adamları ve mühendisler, ısı makinasının verimini artırmak için çeşitli arayışlara girdiler. O zaman Sadi Carnot (1796-1832) adlı Fransız mühendis en verimli ısı makinasının hangisi olduğunu gösterdi. Carnot, kendi adıyla anılan *Carnot çevrim*inden daha verimli ısı makinası yapılamayacağını ispat etti. Carnot çevrimi ideal bir çevrimdir, yani gerçek hayatta uygulaması yoktur.



Şekil 13.16: Carnot çevrimi.

Carnot çevrimi iki adyabatik ve iki izotermal süreçten oluşan bir çevrimdir. Şekil 13.16 da görüldüğü gibi, T_H yüksek sıcaklığında bulunan a noktasından itibaren ab yolu boyunca sabit sıcaklıkta (izotermal) genleşme, sonra bc yolunda T_c sıcaklığına kadar adyabatik genleşme yoluyla soğutma, daha sonra cd yolunda izotermal sıkıştırma ve nihayet da yolu boyunca adyabatik sıkıştırma ile çevrim tamamlanmış olur.

Carnot çevriminin verimini hesaplamak üzere, nerede ısı alınıp verildiğine bakalım. Adyabatik süreçlerde $Q = 0$ olduğundan, sadece izotermal süreçlerde ısı alışverişi olur. ab sürecinde gaz genleştiği için ısı alır, cd sürecinde sıkıştığı için çevreye ısı verir. O halde, ab yolunda alınan ısı sıcak kaynaktan alman Q_H, cd yolunda verilen ısı ise soğuk kaynağa verilen Q_C ısısı olur.

İzotermal süreçlerde $\Delta T = 0$ olduğu için, $\Delta E = 0$ olur. O halde, birinci yasaya göre, $\Delta E = Q - W$, yani izotermal süreçlerde $Q = W$ demektir. Böylece ısı yerine işi doğrudan (13.3) formülüyle hesaplayabiliriz:

$$\text{Sabit sıcaklıkta } ab \text{ süreci:} \qquad Q_H = W_{ab} = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$\text{Sabit sıcaklıkta } cd \text{ süreci:} \qquad Q_C = W_{cd} = nRT_C \ln \frac{V_d}{V_c}$$

Son ifadede $V_d < V_c$ olduğundan Q_c ısısı negatif olacaktır.

Bu değerler verim tanımında kullanılırsa,

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{T_C \ln(V_d/V_c)}{T_H \ln(V_b/V_a)}$$

Şimdi adyabatik süreçlerdeki $TV^{\gamma-1}$ = sabit bağıntısını bc ve da yolları için kullanalım:

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_C V_c^{\gamma-1}$$
$$T_H V_a^{\gamma-1} = T_C V_d^{\gamma-1}$$

Bu iki denklemi taraf tarafa bölersek,

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

olur. Ayrıca, $\ln(V_d/V_c) = -\ln(V_c/V_d)$ yazılabileceğinden, sonuçta verim ifadesi şöyle çıkar:

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} \qquad \text{(Carnot çevriminin verimi)} \qquad (13.15)$$

Verimin sadece sıcak ve soğuk kaynağın sıcaklıklarına bağlı olması ilginçtir. Carnot çevriminde T_C/T_H oranı ne kadar küçükse, yani sıcaklıklar farkı ne kadar büyükse, verim o kadar büyük olur. Carnot, diğer hiçbir çevrimin veriminin bu verimden daha büyük olamayacağını da ispatladı.

Test

1. Termodinamiğin 1. yasası hangisidir?
   (a) $\Delta E = Q + W$
   (b) $\Delta E = Q - W$
   (c) $\Delta W = E - Q$
   (d) $\Delta Q = E - W$

2. Termodinamiğin 2. yasası için hangisi doğrudur?
   (a) Alınan ısının tamamı işe çevrilir.
   (b) Alınan ısı ile verilen ısı farkı işe çevrilir.
   (c) Alınan ısı ile verilen ısının toplamı işe çevrilir.
   (d) Alınan ısının tamamını işe çevirmek mümkün değildir.

3. Adyabatik süreç için hangisi doğrudur?
   (a) Gaz iş yapmaz.
   (b) Gaz ısı alışverişi yapmaz.
   (c) İç enerji artmaz.
   (d) İç enerji azalmaz.

4. İzotermal süreç için hangisi doğrudur?
   (a) Hacim sabit kalır.
   (b) Basınç sabit kalır.
   (c) Sıcaklık sabit kalır.
   (d) Gaz ısı alışverişi yapmaz.

5. Bir gazın yaptığı işin formülü aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) $P\,dV$ (b) $V\,dP$ (c) PV (d) dP/V

6. Bir ısı makinasının verimi aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) Gazın yaptığı işin aldığı ısıya oranı
   (b) Yaptığı işin verdiği ısıya oranı
   (c) Yaptığı işin toplam ısıya oranı
   (d) Yaptığı işin iç enerjiye oranı

7. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Gaz ısınıyorsa iş yapar.
   (b) Gaz soğuyorsa iş yapar.
   (c) Gaz genleşiyorsa iş yapar.
   (d) Gaz sıkıştırılıyorsa iş yapar.

8. Basıncı 10 Pa olan gazın hacmi 2 m^3 artırılıyor. Gazın yaptığı iş ne kadardır?
   (a) 5 J (b) 1/5 J (c) 5 J (d) 20 J

9. Hacmi 3 m^3 ve basıncı 2 atm olan bir gaz, sabit hacimde ısıtılarak, basıncı 10 atm değerine çıkarılıyor. Gazın yaptığı iş ne kadardır?
   (a) 0 (b) 18 J (c) 12 J (d) 30 J

10. Bir gaz 50 J ısı alıyor ve 30 J iş yapıyor. İç enerjideki değişim ne kadardır?
    (a) -20 J (b) 20 J (c) 20 J (d) -80 J

11. İdeal gazın iç enerjisi hangisiyle değişir?
    (a) Sıcaklıkla. (b) Hacimle. (c) Basınçla.

12. İdeal gazın sabit hacimdeki c_v özgül ısısı ile sabit basınçtaki c_p özgül ısısı arasındaki ilişki hangisidir?
    (a) $c_p = c_v$ (b) $c_p = 2c_v$ (c) $c_p = c_v + R$ (d) $c_v = c_p + R$

13. Bir gazın basıncı mikroskopik ölçekte nereden kaynaklanır?
    (a) Atomların kap duvarlarıyla çarpışmasından.
    (b) Atomların birbirleriyle çarpışmasından.
    (c) Atomlar üzerindeki yerçekimi kuvvetinden.
    (d) Atomların kinetik enerjilerinden.

14. Bir gaz moleküllerinin ortalama hızı hangisine bağlı değildir?
    (a) Sıcaklık
    (b) Mol kütlesi
    (c) Gaz sabiti R
    (d) Basınç

15. Benzinli motorun verimi hangisine bağlıdır?
    (a) Sıcaklık farkına
    (b) Basınç farkına
    (c) Hacim farkına
    (d) Hava-benzin karışımının miktarına

16. Hangileri doğrudur?
    I. % 100 verimli ısı makinası yapılamaz.
    II. Carnot çevriminden daha verimli ısı makinası olamaz.
    III. Carnot çevrimi % 100 verimlidir.
    IV. Carnot çevriminden daha verimsiz ısı makinası olamaz.
    (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve IV (d) I ve IV

17. Aynı sıcaklıktaki hidrojen (H_2), oksijen (O_2) ve karbondioksit (CO_2) gazlarından, hangisinin moleküllerinin ortalama hızı daha büyüktür?
    (a) H_2 (b) O_2 (c) CO_2 (d) Eşit

18. Bir gaz sabit sıcaklıkta sıkıştırılıyor. Hangisi doğrudur?
    (a) Isı alır (b) Isı verir (c) Isı sıfırdır

19. Bir gazın sıcaklığını aynı miktar artırmak için hangi süreçte daha fazla ısı vermek gerekir?
    (a) Sabit hacimde
    (b) Sabit basınçta
    (c) Eşit miktarda

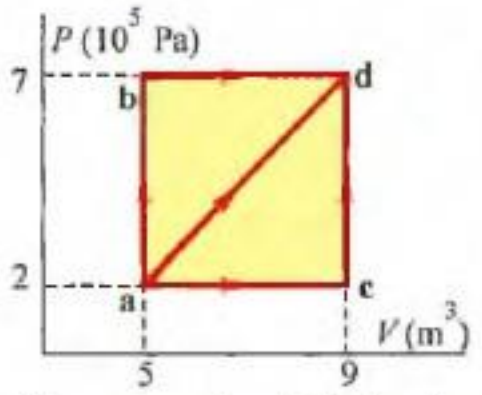
20. Bir gaz adyabatik olarak genleşirken, yaptığı iş nereden karşılanır?
    (a) Aldığı ısıdan
    (b) Verdiği ısıdan
    (c) İç enerjideki artıştan
    (d) İç enerjideki azalmadan

Problemler

13.1 Bir Gazın Yaptığı İş

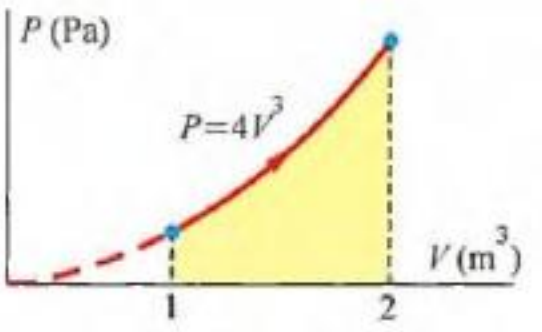
13.1 Hacmi 20 litre olan bir kapta 27 °C sıcaklıkta 3 mol gaz bulunmaktadır. Bu gazın aşağıdaki işlemler sırasında yaptığı işi hesaplayın: (a) Sabit basınçta sıcaklığı 4 katına çıkarılıyor. (b) Sonra, sabit hacimde basıncı 4 katına çıkarılıyor. (c) Daha sonra, sabit sıcaklıkta basıncı 2 katma çıkarılıyor. [C: (a) 220 J, (b) 0, (c) −51 J.]

13.2 Bir silindir içinde 27 °C sıcaklıkta 5 mol gaz bulunmaktadır. Bu gaz üzerine dışardan, sabit basınçta 2000 J iş yapılmaktadır. Gazın son sıcaklığı ne olur? [C: 348 K.]



Problem 13.3

13.3 Şekilde P-V diyagramında gösterilen her 3 süreç (abd, acd, ad) boyunca gazın yaptığı işi hesaplayın.
[C: $W_{abd} = 2800$ kJ, $W_{acd} = 800$ kJ, $W_{ad} = 1800$ kJ.]



Problem 13.4

13.4 Bir gaz şekilde gösterilen $P = 4V^2 - 3$ (Pa) eğrisi boyunca, $V_1 = 1\,m^3$ hacminden $V_2 = 2\,m^3$ hacmine kadar genleşiyor. Gazın yaptığı işi hesaplayın. [C: 15 J.]

13.2-3 İç Enerji - Termodinamiğin 1. Yasası

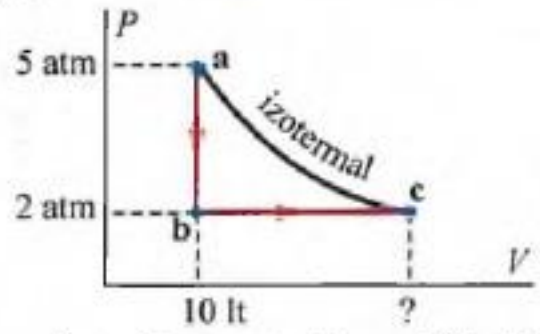
13.5 Bir gaza 3000 J enerji verilerek ısıtılırken, gaz aynı anda 500 J iş yapmaktadır. Gazın iç enerjisindeki değişme ne kadar olur? [C: $\Delta E = +2500$ J]

13.6 Bir kapta bulunan 4 mol tek-atomlu gaza, sabit basınçta 800 J ısı vererek ısıtılıyor. ($c_v = 3R/2$, $c_p = 5R/2$.) (a) ΔT sıcaklık artışı ne kadar olur? (b) İç enerjideki artış ne kadar olur? (c) Gazın yaptığı iş ne kadardır?
[C: (a) 9.6 K, (b) 480 J, (c) 320 J.]

13.7 Bir kapta 27 °C sıcaklıkta 3 mol iki-atomlu gaz bulunmaktadır ($c_v = 5R/2$, $c_p = 7R/2$). (a) Sabit hacimde gazın sıcaklığı 127 °C ye çıkarılıyor. Verilen ısıyı, gazın yaptığı işi ve iç enerjideki artışı hesaplayın. (b) Sabit basınçta gazın sıcaklığı 127 °C ye çıkarılıyor. Verilen ısıyı, gazın yaptığı işi

ve iç enerjideki artışı hesaplayın.

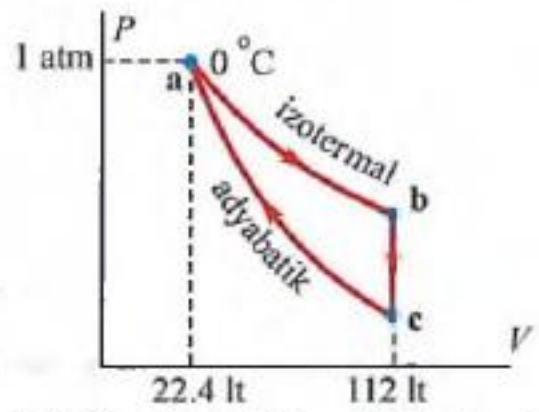
[C: (a) $Q = \Delta E = 6.2\,\text{kJ}$, $W = 0$, (b) $Q = 8.7\,\text{kJ}$, $\Delta E = 6.2\,\text{kJ}$, $W = 2.5\,\text{kJ}$.]



Problem 13.8

13.8 Bir kapta $P_a = 5\,\text{atm}$ basınçta $V_a = 10\,\text{lt}$ ideal gaz bulunmaktadır. Bu gaz önce, şekildeki *ab* yolu boyunca basıncı $P_b = 2\,\text{atm}$ oluncaya kadar, sabit hacimde soğutuluyor. Daha sonra, sabit hacimde genleşerek tekrar ilk T_a sıcaklığına getiriliyor. (a) V_c hacmi ne kadar olur? (b) Gazın yaptığı toplam iş ne kadardır? (c) İç enerjideki toplam artış ne kadar olur? (d) Gaz toplam ne kadar ısı alır veya verir?

[C: (a) 25 lt, (b) $W = 3000\,\text{J}$, (c) $\Delta E = 0$, (d) $Q = 3000\,\text{J}$ ısı alır.]



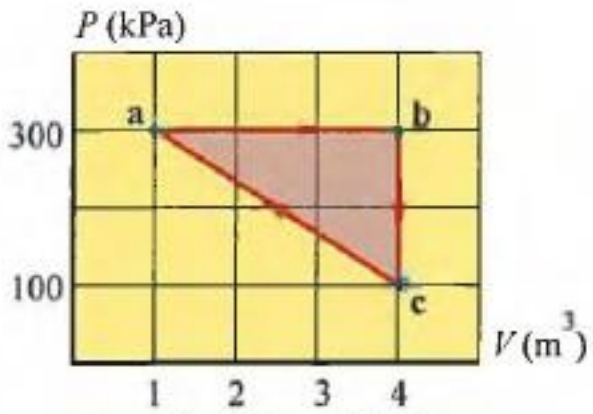
Problem 13.9

13.9 STP şartlarında (0 °C ve 1 atm) 1 mol tek-atomlu ideal gazın hacminin 22.4 lt olduğunu görmüştük. Bu gaz şekildeki *a* noktasından itibaren, iki farklı şekilde, hacmi 5 kat artırılıyor. *ab* süreci izotermal (T = sabit) ve *ac* süreci adyabatiktir. Gazın yaptığı işi her iki durumda hesaplayıp karşılaştırın. ($c_v = 3R/2$.)

[C: İzotermal 3700 J, adyabatik 1600 J, izotermal iş daima daha büyüktür.]

13.10 Bir silindir içinde 27 °C sıcaklıkta 3 mol iki-atomlu gaz bulunmaktadır ($c_v = 5R/2$). Bu gaz üzerine dışardan, sabit basınçta 1000 J iş yapılmaktadır. (a) Gazın son sıcaklığı ne olur? (b) İç enerjisi ne olur? (c) Gaz ne kadar ısı almış veya vermiştir? (*Not:* İşin negatif olduğuna dikkat edin.)

[C: (a) 260 K, (b) $\Delta E = -2500\,\text{J}$, (c) $Q = -3500\,\text{J}$, ısı vermiştir.]



Problem 13.11

13.11 Bir gaz, şekilde gösterilen 3 aşamalı süreçte ($a \to b \to c \to a$) kapalı çevrimini tamamlıyor. Gaza verilen net (toplam) ısı ne kadardır? [C: 300 kJ.]

13.12 Hacmi 4 lt olan bir silindir içinde 27 °C sıcaklıkta ve 3 atm basınçta tek-atomlu ideal gaz bulunmaktadır ($\gamma = 1.67$). Piston aniden itilerek, gaz ısı alışverişine zaman bulamadan, hacmi 1 lt değerine sıkıştırılıyor. (a) Gazın son sıcaklık ve basıncı ne olur? (b) Gazın yaptığı iş ne kadardır?

[C: (a) 750 K, 30 atm, (b) −2.7 kJ.]

13.4 Basıncın Kinetik Hesabı

13.13 Bir silindir içindeki oksijen gazının molekülleri, kesiti $100\,\text{cm}^2$ olan piston yüzeyine 1 s içinde 3×10^{23} kez çarpıyorlar. Herbir molekülün ortalama hızı 500 m/s ise, (a) Bir molekülün 1 s içinde pistona uyguladığı kuvvet ne kadardır? (b) Gazın pistona uyguladığı basınç ne kadardır? (Oksijen molekülünün kütlesi $5.3 \times 10^{-26}\,\text{kg}$ dır.)

[C: (a) $5.3 \times 10^{-23}\,\text{N}$, (b) 1600 Pa.)

13.14 Mol kütlesi 40 g olan argon (Ar) gazının, kök-ortalama hızının 200 m/s olduğu sıcaklıkta, mol kütlesi 32 g olan oksijen (O_2) ve mol kütlesi 28 g olan azot (N_2) gazlarının kök-ortalama hızları ne kadar olur?

[C: 224 ve 239 m/s.]

13.15 Hacmi 5 lt olan bir kapta 127 °C sıcaklıkta, mol kütlesi 4 g olan 3 mol helyum (He) gazı vardır. (a) Gaz moleküllerinin toplam kinetik enerjisi ne kadardır? (b) Bir molekülün kök-ortalama hızı ne olur?

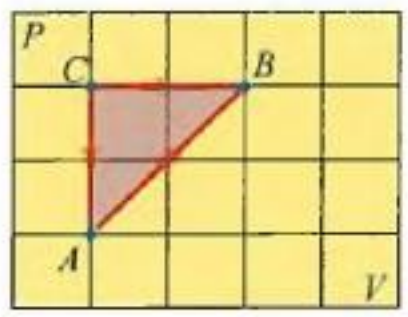
[C: (a) 15 kJ, (b) 1580 m/s.]

13.5 Isı Makinaları

13.16 (a) Bir ısı makinası sıcak kaynaktan 5000 J ısı alıp çevreye 2000 J ısı atıyor. Makinanın verimi ne kadardır? (b) %20 verimle çalışan bir ısı makinası bir çevrimde 300 J iş yapmaktadır. Bu makina çevreye ne kadar ısı verir?

[C: (a) %60, (b) 1200 J.)

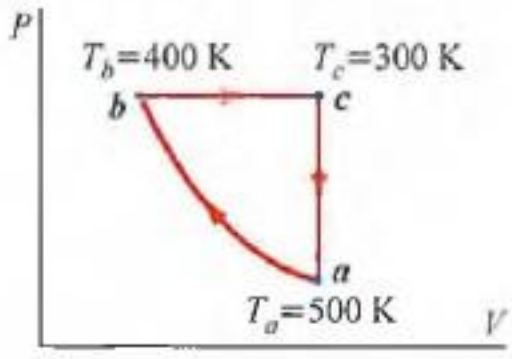
13.17 Otto çevrimi ile çalışan benzinli bir motorun veriminin %50 olabilmesi için r sıkıştırma oranı en az ne kadar olmalıdır? [C: $r = 5.7$.]



	Q	W	ΔE
$A \to B$			
$B \to C$			
$C \to A$			

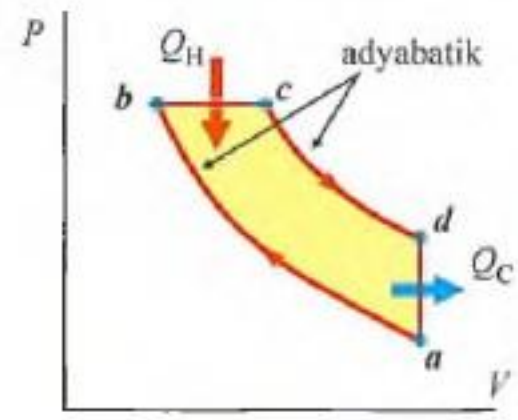
Problem 13.18

13.18 Üstteki şekilde solda gösterilen *ABC* çevriminin herbir adımında ısı (Q), iş (W) ve iç enerji artışı (ΔE) nin işaretinin pozitif veya negatif olduğunu belirleyip, sağdaki tabloda işaretleyin.



Problem 13.19

13.19 $\gamma = c_p/c_v = 1.67$ olan bir gaz şekilde gösterilen 3 adımlı bir çevrimin *ab* yolunda adyabatik olarak sıkıştırılıyor, *bc* yolunda sabit basınçta genleşiyor ve *ca* yolunda sabit hacimde soğutuluyor. $T_a = 300\,\text{K}$, $T_b = 400\,\text{K}$ ve $T_c = 600\,\text{K}$ dir. Çevrimin verimini hesaplayın. [C: % 10.]



Problem 13.20

13.20 Dizel çevrimi. Şekilde gösterilen Dizel çevriminde $T_a = 300\,\text{K}$, $T_b = 900\,\text{K}$, $T_c = 1400\,\text{K}$ ve $T_d = 700\,\text{K}$ olduğuna göre, bu çevrimin verimini hesaplayın. (Hava için $\gamma = c_p/c_v = 1.4$) [C: % 43.]

14 ELEKTRİK ALAN



İstanbul Boğaz Köprüsü üzerinde yıldırımlar.
Elektriğin doğadaki en görkemli belirtisi yıldırımdır. Bulutlarda biriken eksi yüklü elektronlar, havanın iletken hale gelmesiyle aniden yeryüzüne akar ve büyük miktarda enerji iletirler.
(Foto: Mehmet Akif Malatyalı)

Doğadaki temel kuvvetler arasında en önce keşfedileni yerçekimi kuvveti oldu. Elektrik ve manyetizma daha sonraları, ancak 1600 yıllarında anlaşıldı. Oysa, doğa olaylarını düzenleyen, canlıların yaşamında ve teknolojide baş rolü üstlenen, belki de en önemlisi elektriksel ve manyetik kuvvetlerdir. İnsan vücudundaki sinir sistemi elektrik akımıyla çalışır, kandaki oksijen alışverişi elektriksel potansiyel farkları ile gerçekleşir. Aydınlatma, radyo, televizyon ve diğer aletler ev yaşamını kolaylaştırır, teknolojide elektrik motorları ve elektronik bileşenler her türlü alet ve makinanın yapısında yer alırlar.

Başlangıçta ayrı ayrı gelişen elektrik ve manyetizma bilimleri, daha sonra tek bir teoride birleştiler. Bu ve daha sonraki bölümlerde, önce elektrik ve daha sonra manyetizmanın temel kavramlarını ve yasalarını öğreneceğiz.

14.1 ELEKTRİK YÜKÜ

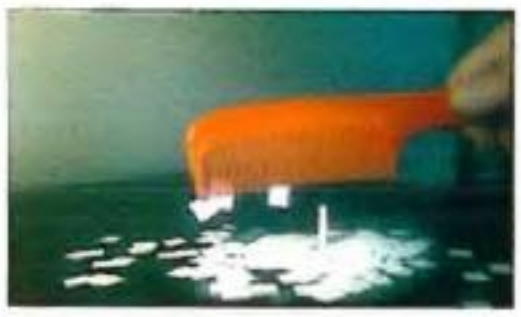
Elektriksel kuvvetlerin varlığı çok eski çağlardan beri gözleniyordu. Kehribar veya amber denilen fosilleşmiş çam reçinesi parçaları bir yere bırakıldığında küçük cisimleri kendine çekebiliyordu. Yunancada kehribar anlamına gelen *electron* kelimesi kökünden "elektriklenme" terimi türetildi. Daha sonra görüldü ki cam, lastik, plastik veya kürkten yapılmış diğer maddeler de sürtünme



Şekil 14.1: Amber, fosilleşmiş ağaç reçinesidir.

yoluyla elektriklenme özelliğine sahip olabiliyorlar.

Bu deneyleri siz de evinizde yapabilirsiniz. Bir plastik tarak veya kalemi, bir kumaş parçasına sürttükten sonra, küçük kağıt mendil parçalarına yaklaştırın. Kalemin kağıt parçalarını çektiğini gözleyeceksiniz.



Şekil 14.2: Sürtünme ile elektriklenmiş olan tarak, kağıt parçalarını çeker.

Fakat, ikinci bir plastik kalemi sürtünme yoluyla elektrikledikten sonra birinci kaleme yaklaştırdığınızda, birbirlerini ittikleri gözlenir. (Bu etkiyi gözlemek için kalemi bir iple asmak gerekebilir.) Keza, başka bir cam çubuğu sürtünmeyle elektriklendirdikten sonra plastik çubuğa yaklaştırdığımızda, bu kez birbirlerini çektiklerini gözleriz. Bu itici-çekici özelliği, elektriksel kuvvetin yerçekiminden farklı bir yapıda olduğunu kanıtlar, çünkü yerçekimi kuvveti sadece çekici olabiliyordu.

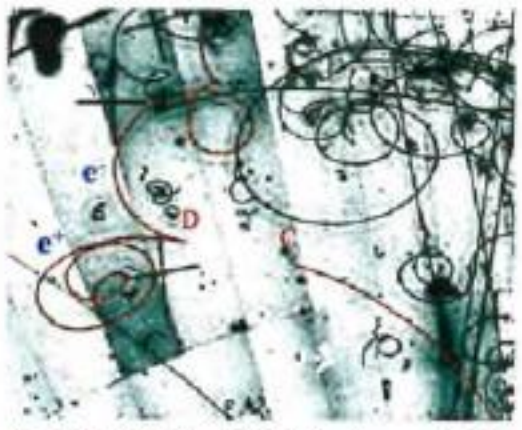
Doğadaki her kuvvet maddenin özünde sahip olduğu bir nicelik aracılığıyla etkisini gösterir. Yerçekimi kuvveti gözlendikten sonra bunun **kütle** denilen bir nicelikten kaynaklandığı anlaşılmıştı. Benzer şekilde, elektriksel kuvvetler de maddenin özünde başka bir nicelikten kaynaklanmalıydı.



Şekil 14.3: İki farklı elektriklenme türü.

Elektrik yükü denilen bu niceliğin taşıması gereken özellikleri vurgulayalım:

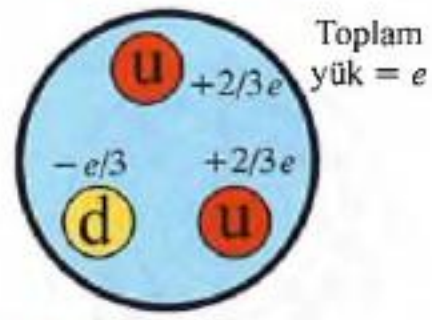
- **Elektrik yükü zıt işaretli iki türde bulunur.** Elektrik yükünün, kuvvetin itici-çekici özelliğini verebilmesi için, iki farklı türden olması gerekir. Bunlara artı ve eksi yükler denildi. Daha sonra keşfedilen temel parçacıklar arasında protonlar (p^+) artı yüklü, elektronlar (e^-) eksi yüklü kabul edildi. Bunun sadece bir kabul olduğunu vurgulayalım. Günümüzde bilim adamları bu kabülün talihsiz olduğunu, elektronların artı kabul edilseydi daha doğru olacağını düşünmektedirler. Gerçekten de madde içinde genelde hep elektronlar hareket eder, artı yüklü protonlar ve iyonlar genelde çok ağır olduğundan fazla hareket etmezler. Daha sonra göreceğimiz elektrik akımı da, aslında ters yönde bir elektron akımından ibarettir.



Şekil 14.4: CERN deneyinde elektron-pozitron çifti üretimi. D noktasında üretilen elektron ve pozitron, manyetik alan içinde zıt yönlere saparlar.

- Elektrik yükü korunumludur. Yani, **kapalı bir bölgedeki elektrik yüklerin cebirsel toplamı sabittir.** Örneğin, +5 birim yüklü bir cisme -3 birim yük ilave edilirse, cismin yükü +2 birim olur. Nötr (yüksüz) kabul edilen cisimler üzerinde aslında artı ve eksi yükler birlikte bulunur ve bunlar eşit miktarda olduğundan yüksüz görünmektedir. Böyle nötr bir cisimden bir miktar eksi yük çekip alınırsa geriye artı yüklü bir cisim kalır.
  Modern fizikte yük korunumu sadece cebirsel olmayıp, çok daha temel ölçekte doğrudur. Temel parçacıklarla yapılan deneylerde, boşlukta elektron-pozitron çiftleri üretilebilmektedir. Pozitronun yükü elektrona eşit ve zıt olduğundan, net yük yine sıfır kalmakta, yani yük korunmaktadır.
- **Elektrik yükü temel birim yükün katları olarak artar veya azalır.** Elektrik yükünün sürekli değerler almadığı, en küçük bir yük birimin katları olarak *kesikli* değiştiği gözlenmiştir. Buna modern fizik dilinde elektrik yükü **kuantalanmış** denir. En küçük yük birimi e ile gösterilir. Elektron yükü $(-e)$ ve proton yükü $(+e)$ olup, birbirlerine tam olarak eşit ve zıt olurlar.

Bu dediğimiz aslında modern fizikte tam doğru sayılmaz. Temel parçacıkların yapıtaşları olduğu düşünülen **kuark** adlı parçacıkların yüklerinin $e/3$ veya $2e/3$ şeklinde, elektron yükünün kesirleri olduğu düşünülmektedir. Fakat, kuarklar henüz doğrudan gözlenmemişlerdir.



Şekil 14.5: Modern fiziğe göre proton, yükleri kesirli olan 3 kuarktan oluşur.

- **Elektrik yük birimi.** SI sisteminde elektrik yükü birimi **Coulomb** olup (C) sembolüyle gösterilir. Bu birim cinsinden temel yük birimi olan e nin değeri şöyledir:

$$\boxed{1\ e = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C} \qquad \text{(elektron yükü)}} \tag{14.1}$$

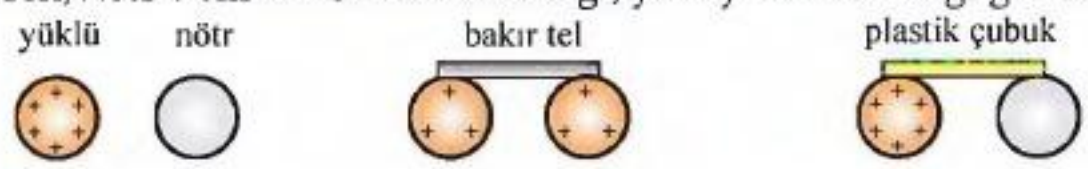
Coulomb değeri çok büyük olduğundan, pratikte bunun askatları kullanılır:

$$1\ \text{mC (mili Coulomb)} = 10^{-3}\ \text{C}$$
$$1\ \mu\text{C (mikro Coulomb)} = 10^{-6}\ \text{C}$$

- Hemen belirtelim ki Sİ birim sisteminde elektriksel temel birim Coulomb değildir. Onun yerine, akım birimi olam **ampere** (A) temel birim olarak seçilmiştir. Bunun sebebi pratik olarak yükün değil, akımın daha kolay ölçülebiliyor olmasıdır. Akım birimini daha sonra Bölüm 20 de tanımlayacağız.

İletkenler ve Yalıtkanlar. Atomun Yapısı.

Sürtünmeyle elektriklenmiş bir cisim alıp, bunu nötr bir cisimle yan yana koyalım. Bu iki cismi bakır bir telle birleştirdiğimizde, elektrik yükün bir kısmının nötr (yüksüz) olan cisme aktarıldığını gözleriz. Aynı iki cismi naylon bir iple birleştirirsek, nötr cismin elektriklenmediği, yine yüksüz kaldığı gözlenir.



Şekil 14.6: İletken ve yalıtkan örneği: Bakır tel yükü iletir, plastik çubuk iletmez.

Bu deney, bakır, demir gibi metal maddelerin elektriği kolay ilettiğini, diğer plasik, cam gibi maddelerin elektriği hiç iletmediklerini gösterir. Tüm maddeler elektrik iletkenliği bakımından **iletken** veya **yalıtkan** özellik gösterirler. Metallerin tümü iletkendir. Yalıtkanlar ise, çok yüksek yük birikimi durumunda iletken duruma geçebilirler.

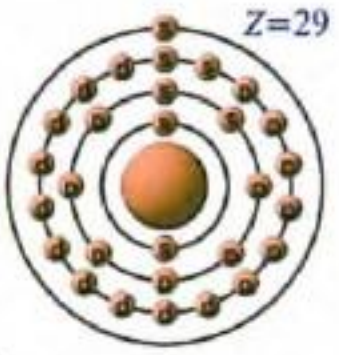
Bunların dışında, laboratuvarlarda geliştirilen ve modern elektronik aletlerin yapımında kullanılan **yarıiletken** türden maddeler de vardır. Ayrıca, pekçok element çok düşük sıcaklıklarda **süperiletken** duruma geçebilmektedirler. Bu iki tür madde klasik elektromanyetizma ile açıklanamaz, modern kuantum teorisiyle incelenebilirler.

Maddenin niçin elektriği iyi veya kötü ilettiği ancak atomun yapısına bakarak anlaşılabilir. Modern kuantum teorisinin sonuçlarına göre, tüm elementlerin yapısı, pozitif yüklü bir **çekirdek** ve onun etrafında yörüngelerde dönen elektronlardan oluşur. Çekirdek içinde + yüklü protonlar (p^+) ile yüksüz nötronlar (n) bulunur.



Şekil 14.7: Atomun yapısı.

Bu bir bakıma Güneş ve onun etrafında dönen gezegenler sistemine benzetilebilir, ama benzerlik tam doğru değildir. Elektronlar ancak belli yarıçaplardaki yörüngelerde dönebilirler ve her yörüngede bulunabilecek elektron sayısı sınırlıdır. Örneğin, en içteki yörüngede en fazla 2 elektron, bir sonrakinde 8 elektron ... bulunabilir.



Şekil 14.8: Bakırın atom yapısında, kapalı yörüngeler dışında kalan tek elektron, bakırın iletken olmasını sağlar.

Bu yörüngeler alabilecekleri kadar elektronla dolmuşsa, buna **kapalı yörüngeler** denir, bir sonraki elektron daha dış bir yörüngeye yerleşmek zorundadır. En içteki yörüngelerdeki elektronlar çekirdeğe çok kuvvetli bağlıdırlar, dışa doğru gidildikçe elektronlar daha zayıf bağlı olurlar.

Bir atom dışardan parçacıklarla bombardıman edilerek elektronları koparılabilir. Gözlemlere göre, kapalı yörüngelerdeki ve iç yörüngelerdeki elektronlar, çekirdeğe daha kuvvetli bağlı olduğu için onları koparmak daha zordur. Fakat, en dış ve tam dolmamış bir yörüngedeki elektronlar çok daha kolay koparılabilirler.

Atomlar katı bir cisim oluşturmak üzere bir araya geldiğinde, bu dış yörüngedeki zayıf bağlı elektronların durumu, o maddenin elektrik iletkenliğini belirler. Metallerde dış yörüngede bulunan 1 veya 2 elektron, dış bombardımana gerek kalmadan, kendiliğinden serbest kalırlar ve katı ortamda dolaşırlar. Yalıtkanlarda ise, dış yörüngeler tam dolu, yani kapalı olduğu için, katı ortamda da kendi atomlarına sıkıca bağlı kalırlar.

İşte, elektrik iletkenliğinin kaynağı bu **serbest elektronlar**dır. Metaller, serbest elektronlar kolayca bir yerden diğerine aktarıldıkları için, iletken olurlar. Yalıtkanlarda serbest elektron bulunmadığı için yük aktaramazlar.

14.2 COULOMB YASASI



Şekil 14.9: Coulomb'un kullandığı terazi.

İki elektrik yükü arasındaki kuvvetin nasıl bir yapıda olduğunu ilk kez Fransız bilim adamı Charles Coulomb (1736–1806) inceledi. Onun elektrik yükleriyle deneyler yaptığı devirde yük birimi filan hiçbir şey yoktu. Fakat, Coulomb bu sorunu şöyle çözdü: Bir metal küreyi belli bir oranda yükledikten sonra, bununla özdeş ikinci bir metal küreyi onunla temas ettirdi. Bu işlem sonunda, yükün her iki kürede eşit paylaşılacağını varsaydı. Böylece, yarım yüklü, dörtte bir yüklü, sekizde bir yüklü ... kürelere sahip oldu. Bu küreler arasında oluşan çok küçük kuvvetleri ölçmek için de bir burulma terazisi kullandı.

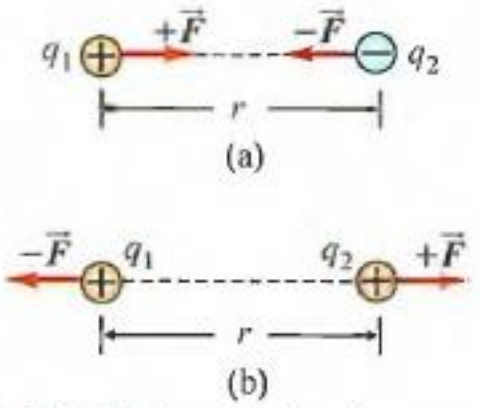
Coulomb'un bulduğu yasa onun adıyla tarihe geçti:

Coulomb Yasası

İki elektrik yükü arasındaki kuvvetin şiddeti yüklerin çarpımıyla doğru, aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (14.2)$$

Aynı işaretli yükler birbirini iter, zıt işaretli yükler birbirini çekerler.



Şekil 14.10: Coulomb yasası. (a) Zıt yükler birbirini çeker, (b) Benzer yükler birbirini iter.

Coulomb yasasının önemli noktalarını vurgulayalım:

- Coulomb yasası durgun yükler için geçerlidir. Bu yüzden, **elektrostatik kuvvet** diye de bilinir.
- Bu formül sadece kuvvetin büyüklüğünü verir. Denklemlerde kullanmak gerektiğinde, yüklerin işaretine bakarak itici veya çekici olduğunu tayin etmek gerekir.
- Coulomb yasasında k ile gösterilen orantı sabitine **Coulomb sabiti** denilir. Kuvveti newton biriminde ve yükleri coulomb biriminde alırsak, sabitin

değeri,

$$k = 8.99 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \tag{14.3}$$

olur. Problemlerde yaklaşık değer kullanılacaktır.

- Daha sonra geliştireceğimiz bazı ifadelerde, k sabiti yerine, ε_0 ile gösterilen yeni bir sabit tanımlamak daha kullanışlı olmaktadır:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{14.4}$$

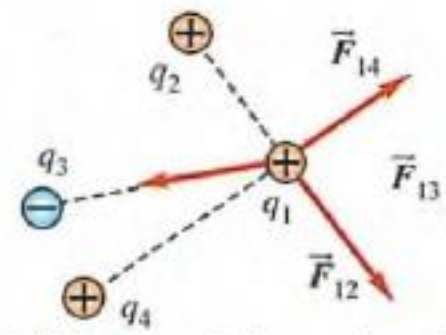
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)} \tag{14.5}$$

ε_0 sabitine **boşluğun elektrik geçirgenliği** denir.

Çok Sayıda Yükün Coulomb Kuvveti

Eğer ortamda ikiden fazla yük varsa, bunlardan herhangi biri üzerindeki net kuvvet, diğer yüklerin buna uyguladıkları kuvvetlerin *vektörel toplamı* olur. Örneğin, q_1, q_2, q_3, q_4 gibi dört yük olsun. Bunlardan biri, örneğin q_1 üzerindeki net kuvvet şöyle yazılır:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} \tag{14.6}$$

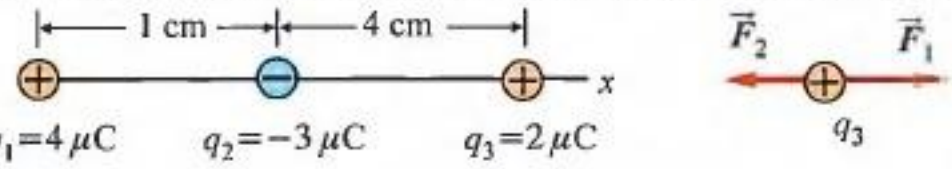


Şekil 14.11: Çok sayıda yük.

Buradaki F_{ij} kuvvetlerinin şiddetleri Coulomb yasasıyla bulunduktan sonra, vektörel toplamları alınır.

Örnek 14.1

Şekildeki $q_1 = 4\,\mu C$ ve $q_2 = -3\,\mu C$ yükleri tarafından $q_3 = 2\,\mu C$ yükü üzerine etkiyen toplam kuvveti hesaplayın.



Çözüm

Aynı işaretli yükler birbirini iter ve zıt işaretleri yükler birbirini çeker. Buna göre, q_1 yükünün uyguladığı F_1 kuvveti ve q_2 yükünün uyguladığı F_2 kuvvetinin yönleri şeklin sağında gösterilmiştir.

Her iki kuvvetin şiddeti Coulomb yasasıyla hesaplanır. Şiddetler hesaplanırken yüklerin işareti dikkate alınmaz:

$$F_1 = k\frac{q_1 q_3}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(4 \times 10^{-6}) \times (2 \times 10^{-6})}{(0.01 + 0.04)^2}$$

$$F_1 = 36\,\mathrm{N}$$

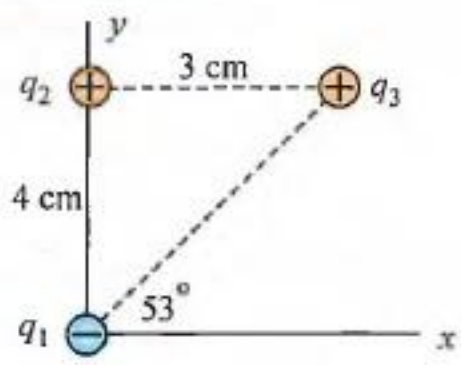
$$F_2 = k\frac{q_2 q_3}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(3 \times 10^{-6}) \times (2 \times 10^{-6})}{0.04^2}$$

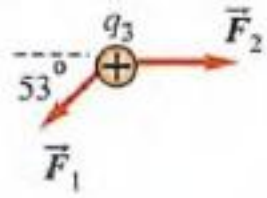
$$F_1 = 34\,\mathrm{N}$$

Pozitif x-yönü sağa doğru alınarak, toplam kuvvet hesaplanır:

$$F = F_1 - F_2 = 2\,\mathrm{N}.$$

Örnek 14.2





Şekilde gösterilen $q_1 = -3\,\mu C$ ve $q_2 = +2\,\mu C$ yükleri için,

(a) *$q_3 = +4\,\mu C$ yükü üzerine etkiyen toplam kuvvetin bileşenlerini hesaplaym.*

(b) *Toplam kuvvetin şiddetini ve yönünü bulun.*

Çözüm

(a) q_1 ve q_2 yüklerinin uyguladığı $\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$ kuvvetleri şekilde gösterilmiştir. Önce bu kuvvetlerin şiddetleri hesaplanır:

$$F_1 = k\frac{q_1 q_3}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(3 \times 10^{-6}) \times (4 \times 10^{-6})}{0.05^2}$$

$$F_1 = 43\,\mathrm{N}$$

$$F_2 = k\frac{q_2 q_3}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 10^{-6}) \times (4 \times 10^{-6})}{0.03^2}$$

$$F_2 = 80\,\mathrm{N}$$

Toplam kuvvet $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ olup, bileşenleri hesaplanır:

$$F_x = F_2 - F_1 \cos 53^\circ = 80 - 43 \times 0.6 = 54\,\mathrm{N}$$

$$F_y = -F_1 \sin 53^\circ = -43 \times 0.8 = -35\,\mathrm{N}$$

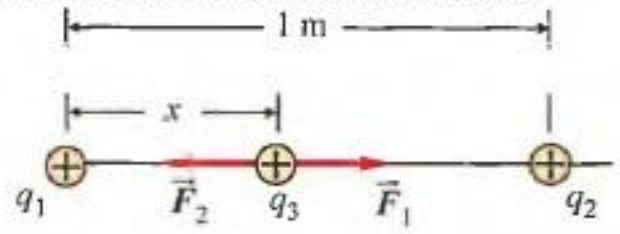
(b) Bileşenleri bilinen kuvvetin şiddeti ve açısı hesaplanır:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 64\,\text{N}$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-35}{54} = -0.65 \;\rightarrow\; \theta = -33°$$

Örnek 14.3

Şekilde gösterilen $q_1 = +1$ mC ve $q_2 = +9$ mC yükleri arasındaki mesafe 1 m dir. Üçüncü bir q_3 yükü nereye konulmalıdır ki üzerindeki net kuvvet sıfır olsun?



Çözüm

q_1 ve q_2 yükleri aynı işaretli olduğundan, dış taraftaki yüklere aynı yönde kuvvet uygularlar. Sadece aradaki noktalarda uyguladıkları kuvvet birbirine zıt olur. Kuvvetlerin birbirini sıfırladığı noktanın koordinatına x diyelim. Buna göre, toplam kuvvet yazılıp sıfıra eşitlenir:

$$F_1 = F_2 \;\rightarrow\; k\frac{q_1 q_3}{x^2} = k\frac{q_2 q_3}{(1-x)^2}$$

Sadeleştirme yapılırsa, ikinci dereceden bir denklem elde edilir:

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(1-x)^2} \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\,x^2 + 2q_1 x - q_1 = 0$$

$$8x^2 + 2x - 1 = 0$$

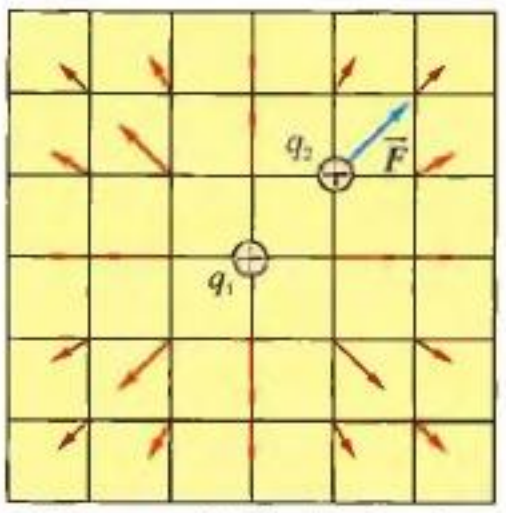
Bu denklemin kökleri -0.5 ve $+0.25$ dir. Negatif kök yükler dışında olacağı için alınmaz. Çözüm pozitif kök olur:

$$x = 0.25\,\text{m}.$$

14.3 ELEKTRİK ALAN

Coulomb kuvveti birbirinden uzakta iki yük arasında etkiyen bir kuvvettir. Newton'un kütle çekim kuvveti de böyleydi, birbirine değmeyen iki kütle arasında oluşuyordu. Bu "uzaktan etkime" özelliği, Newton da dahil olmak üzere, pekçok bilim adamını rahatsız eden bir şeydi. Bir düşünün: q_1 yükü uzaktan yoklayarak çevrede diğer bir q_2 yükü olduğunu anlıyor, sonra bunun uzaklığını ve yük miktarını tayin ediyor, buna göre Coulomb kuvvetini uyguluyor. Böyle bir şey inandırıcı olabilir mi?

İngiliz bilim adamı Michael Faraday (1791–1867) bu sorunu çözmek üzere, **elektrik alan** kavramını ortaya attı. Faraday'a göre, bir q_1 yükü bir yere konduğunda, çevresindeki uzayın her noktasını etkileyerek değiştiriyor, her noktada bir elektrik alan oluşturuyor (Şekil 14.12). Bu elektrik alan, ikinci yük olmasa dahi, her daim mevcut kalıyor. Daha sonra getirilen ikinci q_2 yükü, bu elektrik alanla etkileşerek Coulomb kuvvetini oluşturuyor. Yani, birinci yükün yerini ve şiddetini yoklamak gibi bir durum sözkonusu değil. Alan kavramı daha sonraları modern fizikte çok daha ileri götürüldü ve doğru bir yaklaşım olduğu anlaşıldı.



Şekil 14.12: Elektrik alan kavramı. Önce q_1 yükü elektrik alanı oluşturur. Bu alanda q_2 yüküne $\vec{F} = q_2\vec{E}$ kuvveti etkir.

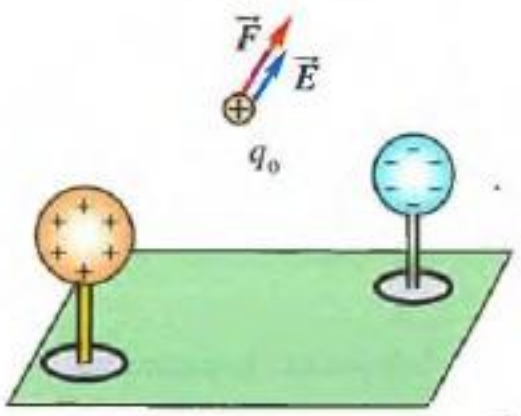
Mademki bir yük çevresinde mevcut bulunan elektrik alanla etkileşiyor, o halde çok küçük bir pozitif q_0 **test yükü** alıp, uzayda bir noktaya koyalım. Bu q_0 yükü üzerine etkiyen elektrostatik kuvvet $\vec{F}$ oluyorsa, uzayın o noktasındaki elektrik alan,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (14.7)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bunun tersi de doğrudur, yani $\vec{E}$ elektrik alanı içine konulan herhangi bir q yüküne etkiyen kuvvet,

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \qquad (14.8)$$

olur.



Şekil 14.13: q_0 test yüküne $\vec{F}$ kuvveti etkiyorsa, orada $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ elektrik alanı vardır.

Elektrik alanın başlıca özelliklerini vurgulayalım:

- Elektrik alanı, "birim yüke etkiyen kuvvet" olarak da düşünebiliriz.

- Elektrik alan birimi newton/coulomb (N/C) olur.
- Tanımda kullanılan q_0 pozitif test yükünün çok küçük seçilmesi, ortamda mevcut olan elektrik alan dağılımını fazla bozmamak içindir. Daha doğru bir tanımda $q_0 \to 0$ limiti alınması gerekirdi. Fakat, bu incelik üzerinde durmayacağız.
- Bu tanıma göre, bir noktadaki $\vec{E}$ elektrik alan vektörü ile $\vec{F}$ kuvvet vektörü aynı doğrultuda olurlar. Eğer, konulan q yükü pozitif ise, iki vektör aynı yönde, yük negatif ise, $\vec{E}$ ile $\vec{F}$ zıt yönde olurlar. Buradan, akılda tutulması kolay olan bir kural çıkar:
  Pozitif yükler daima elektrik alan yönünde gitmek isterler, negatif yükler ters yönde.

Noktasal Yükün Elektrik Alanı

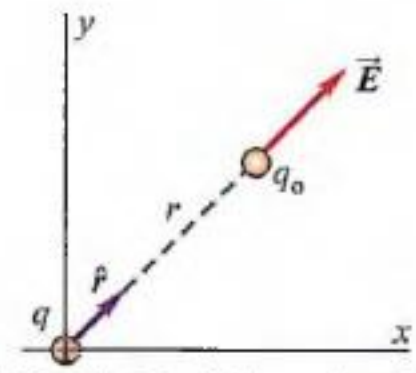
En basit elektrik alan olarak, orijinde bulunan bir q yükünün $\vec{r}$ konumlu bir yerde oluşturduğu elektrik alanı hesaplayalım. Tanıma göre, $\vec{r}$ konumlu yere bir q_0 test yükü koyup, bunun üzerine etkiyen kuvvete bakarız. Coulomb yasasını q ve q_0 yükleri için yazarsak, kuvvetin şiddeti,

$$F = k\frac{qq_0}{r^2}$$

olur. Buradan elektrik alan tanımına göre,

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{kq}{r^2}$$

bulunur. Bu elektrik alanın yönü, q yükünün işaretine bağlıdır: q pozitif ise, diğer pozitif q_0 test yükünü iteceği için, orijinden dışa doğru, yani $\vec{r}$ ile aynı yönde olacaktır. q yükü negatif ise, q_0 test yükünü çekecek, yani kuvvet orijine yönelik olup $-\vec{r}$ yönünde olacaktır.



Şekil 14.14: Noktasal yükün elektrik alanı.

Her iki durumu da tek bir vektör halinde göstermek mümkündür. Bunun için, Bölüm 1 de tanımladığımız birim vektör kavramını hatırlayalım: Orada, herhangi bir $\vec{A}$ vektörü ile aynı yönde ve boyu 1 birim olan $\hat{A}$ vektörünü tanımlamıştık. Burada $\vec{r}$ konum vektörü yönündeki birim vektörü $\hat{r}$ ile gösterirsek, noktasal yükün elektrik alan vektörü şöyle ifade edilebilir:

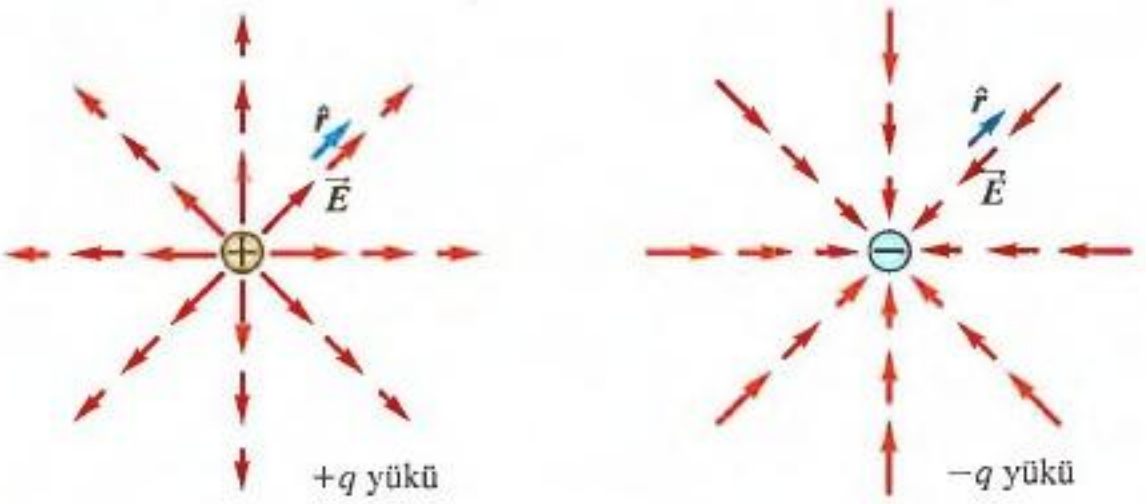
$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(Noktasal yükün elektrik alanı)} \tag{14.9}$$

Bu ifadenin hem pozitif hem de negatif q yükü için elektrik alan yönünü doğru olarak verdiğine dikkat edelim. q pozitif ise $\vec{E}$ alanı ve $\vec{r}$ konumu aynı yönde olurlar. q yükü eksi olduğunda, $\vec{E}$ alanı $\vec{r}$ vektörüne ters yönde olur.

Çok Sayıda Noktasal Yükün Elektrik Alanı

Nasıl ki çok sayıda yükün Coulomb kuvveti vektörlerin toplamı olarak yazılabiliyordu, elektrik alan için de aynı yol geçerlidir. $q_1, q_2, \ldots q_N$ gibi N sayıda yükün herhangi bir P noktasındaki net elektrik alanı, herbirinin elektrik alanlarının vektörel toplamı olur:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N$$



Şekil 14.15: Elektrik alan vektörleri + yükten dışa doğru (birim $\hat{r}$ vektörü ile aynı yönde), yahut da dıştan − yüke doğru ($\hat{r}$ ye zıt yönde) olurlar.

Bu yüklerin herbirinin bulunduğu konumdan P noktasına çizilen vektörler $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_N$ ile gösterilir ve bunlar doğrultusundaki birim vektörler kullanılırsa,

$$\vec{E}_P = \frac{kq_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{kq_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \cdots + \frac{kq_N}{r_N^2}\hat{r}_N$$

$$\vec{E}_P = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i \tag{14.10}$$

olur. Hesap yaparken, önce $E_1, \ldots E_N$ alan şiddetleri bulunur, sonra bileşenler yardımıyla toplama yapılır.

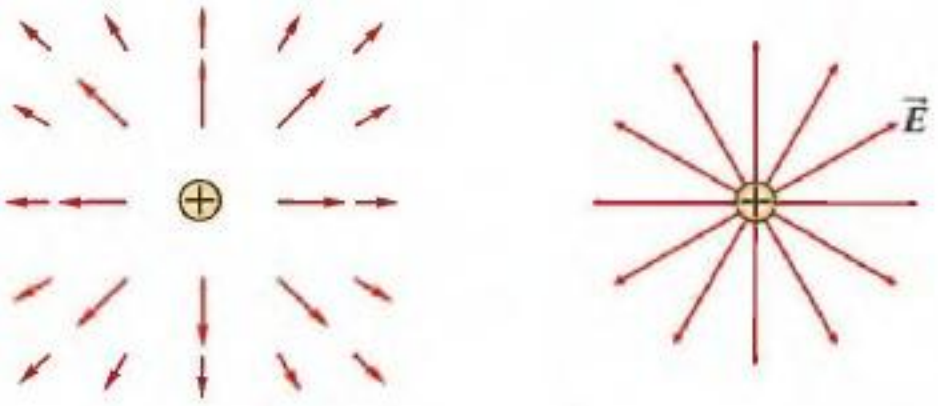
Elektrik Alan Çizgileri

Elektrik alan maalesef gözle görünen bir şey olmadığı için, çeşitli durumları algılamak kolay olmaz. Elektrik alan kavramını ortaya atan Michael Faraday bunu gözönüne getirmeyi kolaylaştırmak için **elektrik alan çizgileri** tekniğini geliştirdi.

Orijindeki pozitif bir q yükünün $\vec{r}$ konumlu herhangi bir noktada oluşturduğu $\vec{E}$ alanını tekrar yazalım:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

Bu elektrik alanı uzayın her noktasında ayrı bir vektör olarak göstermek isteseydik, sonsuz sayıda küçük oklar çizmek gerekirdi. Bu, hem zahmetli hem de kullanışsız bir yol olurdu. Bunun yerine şöyle bir yol düşünelim:



Şekil 14.16: Çok sayıda ok çizmek yerine, yükten başlayan ışınlar çizmek daha anlamlı olur.

Noktasal yükün elektrik alanını aynı bir $\vec{r}$ vektörü doğrultusunda giderek daha uzakta birkaç yerde çizelim. Bu $\vec{E}$ vektörlerinin boyu giderek küçülecektir.

Ayrıca, bu vektörlerin geometrik yeri orijinden sonsuza kadar uzanan bir tek doğru olacaktır. Başka bir doğrultuda aynı işi yapalım ve orijinden sonsuza uzanan bir doğru çizelim. Böylece, orijindeki yükten dışarı, ışık ışınları gibi yayılan bir demet elde ederiz. Bu ışınların herbiri üzerine elektrik alan yönünü belirten birer ok işareti koyarız.

Bu basit örnek bize en genel durumda elektrik alan çizgilerini nasıl oluşturacağımızı gösterir:

- Elektrik alan çizgileri öyle eğrilerdir ki, her noktasında **elektrik alan vektörü, eğriye o noktada çizilen teğet yönünde olur.** Alan çizgilerinin ortasındaki ok, teğeti hangi yönde çizeceğimizi belirler.
- **Bir noktadaki elektrik alan şiddeti, o nokta civarındaki eğri demetinin sıklığı ile orantılıdır.** Örneğin, noktasal yükün elektrik alanı orijinden uzaklaştıkça azalır; bu yüzden alan çizgileri de, orijinden uzaklaştıkça seyrekleşir. Yandaki şekilde, A noktasındaki elektrik alan B noktasındakinden daha büyük demektir.
- Orijindeki noktasal yük negatif ise, her noktada elektrik alan orijine yönelik olur. O halde, **elektrik alan çizgileri (+) yüklerde başlar, (−) yüklerde, veya sonsuzda biter.**
- **Elektrik alan çizgileri birbirini kesmez.** Tersi olsaydı çelişkili olurdu, o noktadan farklı iki teğet, yani iki elektrik alan varmış gibi olurdu.



Şekil 14.17: Hangi noktada elektrik alan şiddeti daha büyüktür?

Örnek 14.4

(a) *Noktasal bir yükten* 1.5 m *uzakta elektrik alanın şiddeti* 10 000 N/C *olarak ölçülüyor. Yük ne kadardır?*

(b) *Bu yükten* 1 mm *uzağa konan bir elektrona etkiyen kuvvet ne kadar olur? (Elektron yükü:* $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C*).*

Çözüm

(a) q noktasal yükünden r uzaklıkta elektrik alan ifadesi yazılır ve q için çözülür:

$$E = \frac{kq}{r^2} \quad \rightarrow \quad q = \frac{r^2 E}{k}$$

Veriler yerine konulup q hesaplanır:

$$q = \frac{1.5^2 \times 10000}{9 \times 10^9} = 2.5 \times 10^{-6}\,\text{C} = 2.5\,\mu\text{C}$$

(b) $\vec{E}$ alanında e yüküne etkiyen kuvvet $\vec{F} = e\vec{E}$ olur. Noktasal yükün E alan ifadesi kullanılırsa, kuvvetin şiddeti şöyle olur:

$$F = eE = e\,\frac{kq}{r^2}$$

(a) şıkkında bulunan q değeri, elektronun e yükü ve $r = 0.001$ m uzaklığı yerine konulup kuvvet hesaplanır:

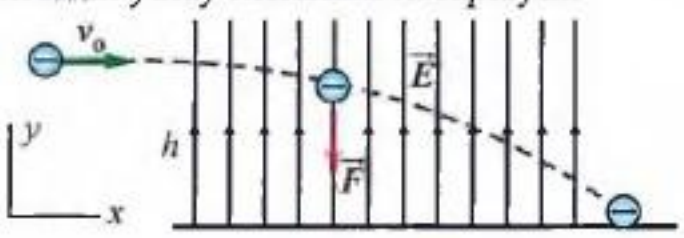
$$F = 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{9 \times 10^9 \times 2.5 \times 10^{-6}}{0.001^2} = 3.6 \times 10^{-9}\,\text{N}.$$

Örnek 14.5

Bir laboratuvarda dikey yönde sabit $E = 10$ N/C *elektrik alanlı bir bölge vardır. Bir elektron bu bölgeye yerden* $h = 2$ m *yukarda ve yatay* $v_0 = 10^6$ m/s *hızıyla atılıyor. (Elektron için* $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg *ve* $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.*) Yerçekimi kuvvetini ihmal ediniz.*

(a) *Elektronun ivmesi ne kadardır?*

(b) *Elektronun yatay menzilini hesaplayın.*



Çözüm

Bir q yüküne $\vec{E}$ alanında etkiyen kuvvet $\vec{F} = q\vec{E}$ olur. Elektronun yükü $q = -e$ olduğundan, uygulanan kuvvet $\vec{E}$ alanına zıt, yani aşağı yönde olur. Newton'un 2. yasası yazılır:

$$F = ma \quad \rightarrow \quad qE = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{qE}{m}$$

Bu ivme aşağı yönde olur. Veriler yerine konup ivme hesaplanır:

$$a = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10}{9.1 \times 10^{-31}} = 1.8 \times 10^{12}\,\text{m/s}^2$$

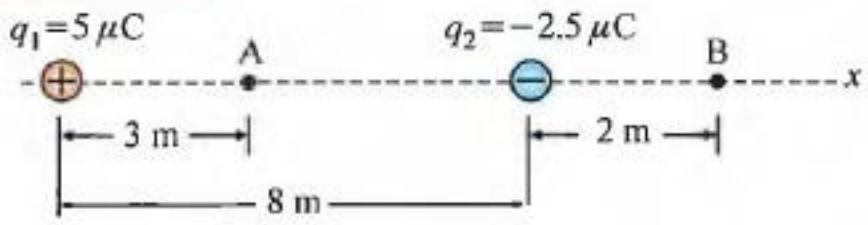
(b) Bu problem, g ivmesi yerine a ivmesi gelmiş olan bir yatay atış problemidir. Hareketin düşey bileşeninden t zamanı bulunup, yatay harekette kullanılarak R menzili bulunur:

$$h = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{2h/a}$$

$$R = v_0 t = v_0\sqrt{2h/a}$$

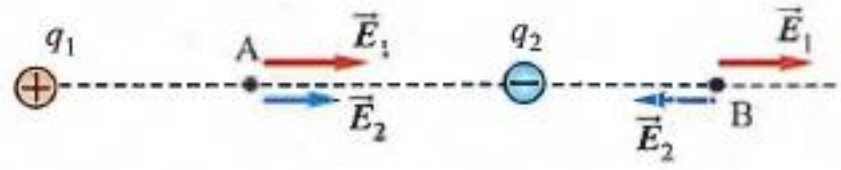
$$R = 10^6 \times \sqrt{\frac{2 \times 2}{1.8 \times 10^{12}}} = 1.5\,\text{m}$$

Örnek 14.6



Şekilde gösterilen q_1 *ve* q_2 *yüklerinin A ve B noktalarındaki toplam elektrik alanını hesaplayın.*

Çözüm



Noktasal yükün elektrik alanı pozitif yükten dışa doğru, dış-

tan da negatif yüke doğrudur. Buna göre, A ve B noktalarındaki $\vec{E}_1$ ve $\vec{E}_2$ alanları yukarda gösterilmiştir.

O halde, önce bu noktalardaki E_1 ve E_2 alan şiddetleri hesaplanır ve sonra vektörel olarak toplanır.

A noktasında:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{(9\times10^9)\times(5\times10^{-6})}{3^2} = 5000\,\text{N/C}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9\times10^9)\times(2.5\times10^{-6})}{5^2} = 900\,\text{N/C}$$

A noktasındaki paralel elektrik alanlar toplanır:

$$E_A = E_1 + E_2 = 5900\,\text{N/C}.$$

B noktasında:

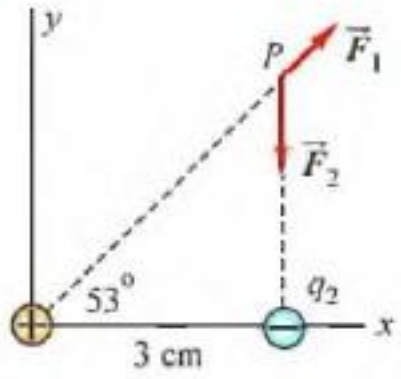
$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{(9\times10^9)\times(5\times10^{-6})}{(8+2)^2} = 450\,\text{N/C}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9\times10^9)\times(2.5\times10^{-6})}{2^2} = 5600\,\text{N/C}$$

B noktasındaki zıt elektrik alanların farkı alınır:

$$E_B = E_1 - E_2 = -5150\,\text{N/C (orijine doğru)}.$$

Örnek 14.7



Şekildeki $q_1 = 5\,\mu C$ ve $q_2 = -3\,\mu C$ yüklerinin P noktasındaki toplam elektrik alanın bileşenlerini hesaplayın.

Çözüm

q_1 ve q_2 yüklerinin P noktasında oluşturdukları $\vec{E}_1$ ve $\vec{E}_2$ elektrik alanları şekilde gösterilmiştir.

Önce, bu alanların şiddetleri ayrı ayrı hesaplanır:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-6}}{5^2} = 1800\,\text{N/C}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{9\times10^9\times3\times10^{-6}}{4^2} = 1690\,\text{N/C}$$

Sonra, bu vektörlerin bileşenleri kullanılarak $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ vektörünün bileşenleri hesaplanır:

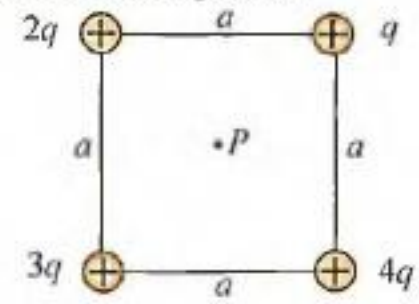
$$E_x = E_1\cos53^\circ = 1800\times0.6 = 1080\,\text{N/C}$$

$$E_y = E_1\sin53^\circ - E_2 = 1800\times0.8 - 1690 = -250\,\text{N/C}.$$

Bu sonuca göre, x-bileşeni pozitif ve y-bileşeni negatif olduğu için, $\vec{E}$ vektörü düzlemin 4. çeyreğinde olur.

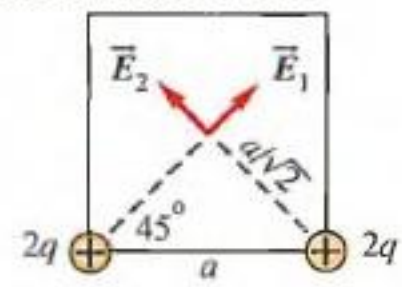
Örnek 14.8

Şekilde bir kenarı a uzunlukta olan karenin köşelerinde sırasıya q, $2q$, $3q$, $4q$ yükleri bulunmaktadır. Karenin P merkezindeki elektrik alanı hesaplayın.



Çözüm

Bu problem simetri kullanımına iyi bir örnektir. Bu problemde 4 ayrı yükün elektrik alanını hesaplamaya gerek yoktur, çünkü karşılıklı simetri vardır. İki eşit yükün orta noktasında elektrik alan sıfır olur, çünkü karşılıklı olarak birbirlerine eşit ve zıt yöndedirler. O halde, bu problemde P noktasının iki tarafında karşılıklı olarak yükleri azaltabiliriz. Sonuçta, şöyle bir durum elde ederiz:

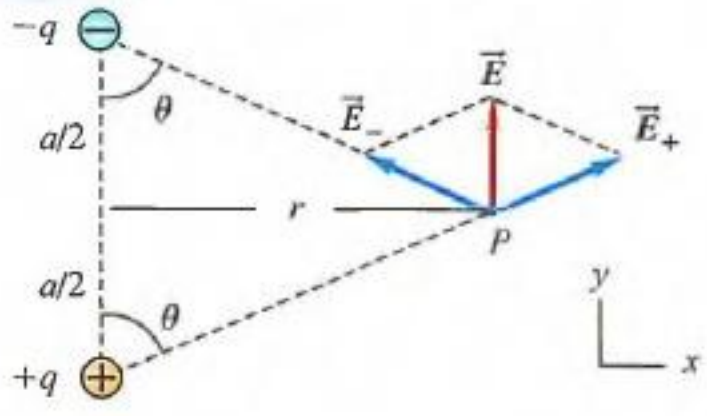


Böylece, daha basit olan bu problemi çözeriz. Eşit $2q$ yüklerinin P noktasındaki toplam elektrik alanın x-bileşeni sıfır olur. y-bileşeni ise, bir tanesinin y-bileşenini bulup 2 ile çarparız:

$$E = E_y = 2E_{1y} = 2E_1\sin45^\circ = \frac{k2q}{(a/\sqrt{2})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}$$

Örnek 14.9



Elektrik dipol. *Aralarında küçük bir a mesafesi bulunun eşit ve zıt iki $\pm q$ yükünden oluşan sisteme elektrik dipol denir. Bu nötr sistemin özellikleri pekçok açıdan önemlidir. Dipolün elektrik alanı maddenin yapısında önemli bir rol oynar. Nötr moleküllerin birbirini çekmesi, radyo ve TV antenlerinin çalışma prensibi, dielektrik maddelerin davranışı ... hep dipolün elektrik özelliklerinden kaynaklanır.*

(a) *Yüklerin orta dikmesi üzerinde, r uzaklıkta bir P nok-*

tasında toplam elektrik alan ifadesini çıkarın.

(b) *Dipolden çok uzakta, yani $r \gg a$ olduğunda, elektrik alanın limitini bulun.*

Çözüm

(a) $\pm q$ yüklerinin elektrik alanlarını $\vec{E}_+$ ve E_- ile gösterirsek, P noktasındaki toplam elektrik alan bu ikisinin vektörel toplamı olur:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Noktasal $\pm q$ yüklerinin $\sqrt{r^2 + (a/2)^2}$ uzaklıkta elektrik alanlarının şiddeti aynıdır:

$$E_+ = E_- = \frac{kq}{r^2 + a^2/4}$$

Bu iki vektörün bileşenleri ile toplam $\vec{E}$ vektörünün bileşenlerini hesaplarsak, x-bileşenleri eşit ve zıt yönde olup, simetriden dolayı birbirini götürürler. O halde, sadece y bileşenlerini hesaplayıp toplarız:

$$E_x = E_{+x} + E_{-x} = 0$$
$$E_y = E_{+y} + E_{-y} = 2E_+ \cos\theta$$
$$E = E_y$$

Şekilden açının kosinüsü bulunur ve yerine konur:

$$\cos\theta = \frac{a/2}{\sqrt{r^2 + a^2/4}}$$
$$E = \frac{kqa}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

Burada *dipol momenti* adıyla yeni bir nicelik tanımlanır:

$$p = q\,a \qquad \text{(dipol momenti)} \qquad (14.11)$$

Buna göre, dipolün elektrik alan ifadesi şöyle bulunur:

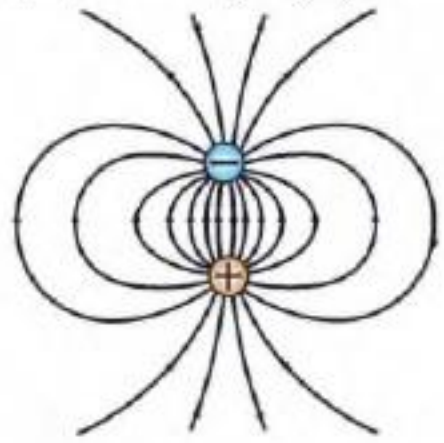
$$E = \frac{kp}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

(b) Çok uzaklarda, yani $r \gg a$ olduğunda, paydadaki a^2 terimi, diğerinin yanında ihmal edilebilir. Böylece, elektrik dipolün limit alanı şöyle olur:

$$E \approx \frac{kp}{r^3} \qquad (r \gg a \text{ için})$$

Noktasal yükün alanı $1/r^2$ olarak azalırken, dipol alanının $1/r^3$ olarak azalması, dipolün temel özelliğidir.

Dipolün elektrik alanı tüm uzayda şöyle bir dağılım gösterir:



Sürekli Dağılmış Yükün Elektrik Alanı

Atomik ölçekte elektrik yükü noktasal parçacıklardan oluştuğu halde, bunlar arasındaki küçük mesafeler makroskopik ölçekte bakıldığında ayırt edilemezler ve sürekli dağılmış gibi görünürler. Sürekli yük dağılımlarının oluşturduğu elektrik alanı hesaplamak için integral tekniği gerekir.

Bir bölgeye sürekli dağılmış olan yükü, herbiri çok küçük boyutta olan $\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots$ yüküne sahip küçük elemanlara bölüştürelim. Bu elemanlardan herhangi birinin, bir P noktasındaki elektrik alana yaptığı $\Delta\vec{E}_i$ katkısını, noktasal yük için bulduğumuz (14.9) denklemiyle ifade edebiliriz. Örneğin, i. elemanın katkısı,

$$\Delta\vec{E}_i = \frac{k\,\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

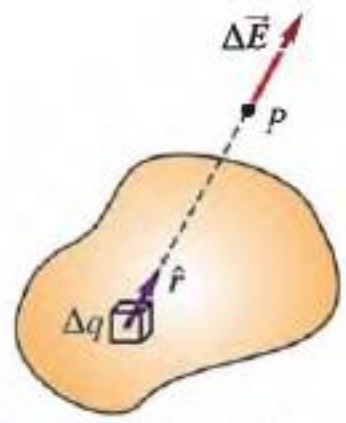
olur. Tüm yük dağılımının elektrik alanı, yaklaşık olarak, bu küçük katkıların vektörel toplamı olacaktır.

$$\vec{E} \approx \sum_i \Delta\vec{E}_i = \sum_i \frac{k\,\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

Daha sonra, $\Delta q_i \to 0$ limitine gidildiğinde, yaklaşık ifade tam doğru olur ve bu toplam integrale dönüşür:

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{k\,\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

$$\vec{E} = k\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r} \qquad \text{(Sürekli dağılmış yükün } E \text{ alanı)} \qquad (14.12)$$



Şekil 14.18: Küçük bir Δq elemanının elektrik alana $\Delta\vec{E}$ katkısı.

Bu vektörel integrali bildiğimiz bir boyutlu integralle karıştırmamak gerekir. Burada herbir yük elemanının katkısı ayrı yönde olup, bunların her bileşeni için ayrı bir integral gerekir. Bunun nasıl yapıldığını örnek çözümlerinde göreceğiz.

Yük Yoğunlukları

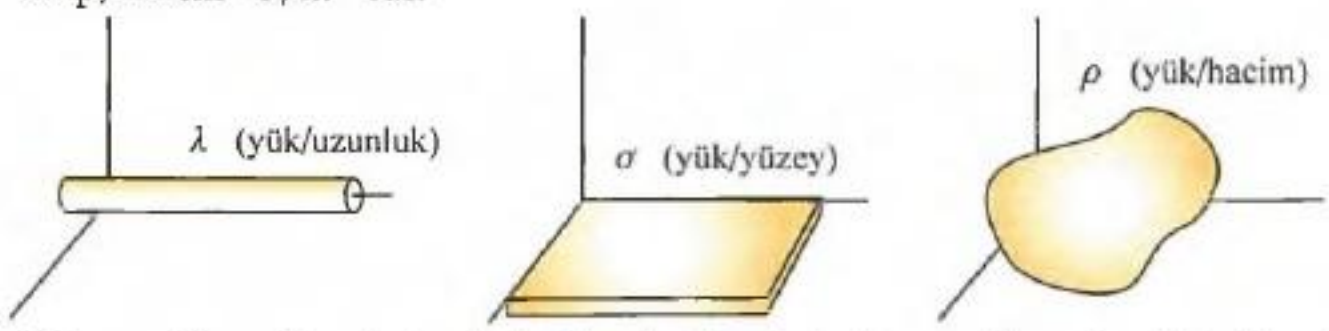
Sürekli yükün bir bölgede dağılmış olması, yük yoğunluğu kavramıyla daha açık ifade edilebilir. Bu kavram, yukarda integral ifadesinde dq olarak bıraktığımız yük elemanının integrale katılmasında gerekli olacaktır.

Olabilecek yük dağılımları ve bunlara karşılık gelen yük yoğunlukları şöyledir:

- **Hacim yük yoğunluğu** (ρ): Bir V hacmi içine toplam Q yükü düzgün olarak dağılmışsa, hacim yük yoğunluğu,

$$\rho = \frac{Q}{V} \tag{14.13}$$

olup, birimi C/m^3 tür.



Şekil 14.19: Boyca yük yoğunluğu λ, yüzey yük yoğunluğu σ ve hacim yük yoğunluğu ρ.

- **Yüzey yük yoğunluğu** (σ): Bir A yüzeyi üstüne toplam Q yükü düzgün olarak dağılmışsa, yüzey yük yoğunluğu,

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{14.14}$$

olup, birimi C/m^2 dir.

- **Boyca yük yoğunluğu** (σ): L uzunlukta bir çubuk üserine toplam Q yükü düzgün olarak dağılmışsa, boyca yük yoğunluğu,

$$\lambda = \frac{Q}{L} \tag{14.15}$$

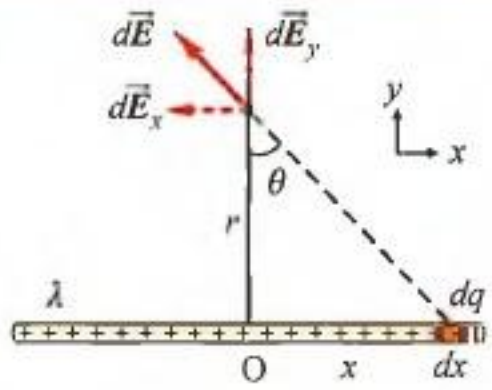
olup, birimi C/m olur.

- **İntegral yük elemanı.** Yük yoğunluğu sabit değilse, her noktanın konumuna bağlı olarak değişecektir. Bu durumda, küçük bir dV hacim elemanı veya dA yüzey elemanı veya dL uzunluk elemanı üzerindeki küçük dq yükü, bunlara karşılık gelen yük yoğunlukları cinsinden şöyle ifade edilebilirler:

$$dq = \rho\, dV \qquad dq = \sigma\, dA \qquad dq = \lambda\, dL \tag{14.16}$$

Örnek 14.10

Sonsuz doğrusal tel. *Sonsuz bir doğrusal tel üzerinde düzgün λ (birimi: C/m) boyca yük yoğunluğu bulunmaktadır. Telden r uzaklıkta elektrik alanı hesap edin.*



Çözüm

Şekildeki koordinat sisteminde, teli x-ekseni olarak alalım. Orijinden x uzaklıkta ve dx kalınlığında küçük bir yük elemanının P noktasındaki elektrik alana katkısı yazılır. Birim uzunlukta λ yükü varsa, dx üzerinde $dq = \lambda\, dx$ yükü olacaktır:

$$dE = \frac{k\,dq}{x^2 + r^2} = \frac{k\lambda\,dx}{x^2 + r^2}$$

Bu küçük $d\vec{E}$ katkılarının bileşenleri toplam alanın bileşenleri olacaktır. Fakat, simetriden dolayı E_x bileşeni sıfır olacaktır, çünkü orijinin iki tarafındaki noktaların karşılıklı katkıları, x yönünde birbirine zıttır:

$$E_x = \int dE_x = 0$$

O halde, E alanı sadece y-bileşenlerinin integrali olur:

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta$$

$$E = k\lambda \int \frac{\cos\theta\,dx}{x^2 + r^2}$$

Kosinüs terimi $\cos\theta = r/\sqrt{x^2 + r^2}$ olarak yerine konur ve yüklerin $[-\infty, +\infty]$ aralığında yer aldığı gözönüne alınırsa,

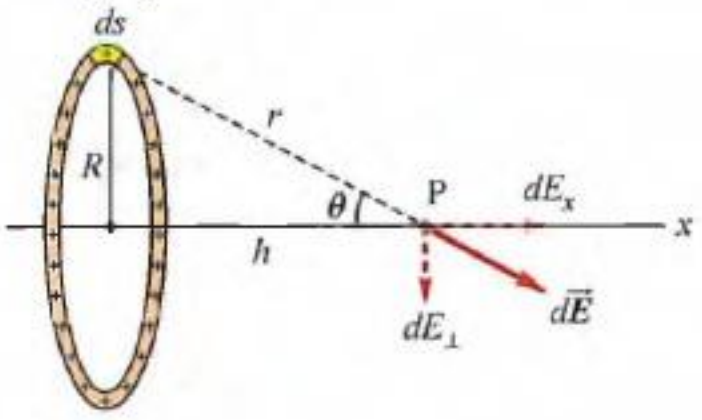
$$E = k\lambda r \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}}_{2/r^2}$$

olur. Bu integralin sonucu tablolardan bakılıp $2/r^2$ olarak bulunur. O halde, yüklü sonsuz telin elektrik alanı şöyledir:

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

Örnek 14.11

Yüklü halka. *R yarıçaplı halka şeklinde kıvrılmış ince bir tel üzerinde toplam Q yükü düzgün olarak dağılmıştır. Halka ekseni üzerinde h uzaklıktaki bir P noktasında elektrik alanı hesaplayın.*



Çözüm

Şekildeki koordinat sistemine göre, çember üzerinde ds uzunluğunda bir yay parçası gözönüne alalım. Bu yay üzerindeki küçük dq yükünün P noktasındaki elektrik alana katkısı yazılır:

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k\,dq}{h^2 + R^2}$$

Çevre uzunluğu $2\pi R$ olan çember üzerinde Q yükü varsa, ds yayı üzerindeki yük miktarı orantı yoluyla hesaplanır ve yerine konur:

$$dq = \frac{Q}{2\pi R}\,ds$$

$$dE = \frac{kQ}{2\pi R}\,\frac{ds}{h^2 + R^2}$$

ds yay parçası çember çevresinde dolanırken, bu küçük dE katkılarının $dE_\perp$ dik bileşenleri, simetriden dolayı karşılıklı olarak birbirini götürecektir. Fakat, dE_x bileşenleri hep aynı yönde birbirine eklenecektir. O halde, toplam elektrik alan bu dE_x bileşenlerinin integrali olur:

$$E_\perp = \int dE_\perp = 0$$

$$E = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{kQ}{2\pi R}\int \frac{ds\cos\theta}{h^2 + R^2}$$

Açının kosinüsü $\cos\theta = h/\sqrt{h^2 + R^2}$ yerine konur ve tüm sabitler integral dışına alınırsa,

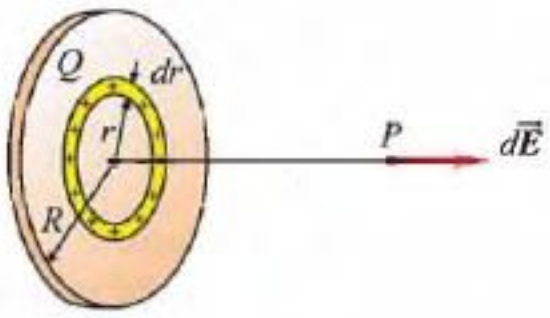
$$E = \frac{kQ}{2\pi R}\cdot\frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}\int ds$$

ds yaylarının tüm çember üzerinden integrali, yani toplamı, çemberin çevre uzunluğu $2\pi R$ olacaktır. Sadeleştirme yapılırsa, çemberin elektrik alanı bulunur:

$$E = \frac{kQh}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

Elektrik alan çember düzlemine dik olur.

Örnek 14.12



Yüklü disk. *Yüzeyi üzerine toplam Q yükü düzgün olarak dağılmış olan R yarıçaplı diskin, ekseni üzerinde h uzaklıkta bir P noktasında elektrik alanı hesaplayın.*

Çözüm

Bu problemi, bir önceki örnekteki yüklü halka yardımıyla çözeriz. Disk üzerinde, yarıçapı $[r, r + dr]$ aralığında olan dr kalınlığında ince bir halka gözönüne alalım. Bu halka üzerindeki küçük yük miktarına dq dersek, önceki örneğe göre, bunun P noktasındaki elektrik alana katkısı şöyle olur:

$$dE = \frac{kh\,dq}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

dq yük miktarını bulmak için, dr kalınlıktaki parçanın yüzölçümünü hesaplayalım: Bu halkayı bir yerinden kesip açarsak, genişliği dr ve uzunluğu $2\pi r$ olan, ince uzun bir dikdörtgen olur. Bunun yüzölçümü yaklaşık $2\pi r\,dr$ dir. Yüzölçümü πR^2 olan disk üzerinde toplam Q yükü varsa, bu küçük yüzey üzerindeki yük miktarı orantıyla bulunur ve

yerine konur:

$$dq = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r\, dr$$

$$dE = \frac{kQh}{R^2} \frac{2r\, dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \qquad \text{(eksen yönünde)}$$

Bu küçük halkaların katkıları hep aynı yönde olduğundan, toplam elektrik alanı bulmak için, bileşenlere gerek kalmadan, doğrudan integral alırız:

$$E = \frac{kQh}{R^2} \int_0^R \frac{2r\, dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

Bu integral değişken değiştirme yöntemiyle hesaplanır. $u = r^2 + h^2$ değişkeni tanımlanır ve du hesaplanır:

$$u = r^2 + h^2 \;\rightarrow\; du = 2r\, dr$$

Bu u değişkeniyle integral basitleşir:

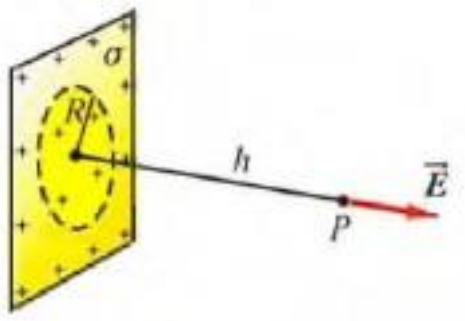
$$E = \frac{kQh}{R^2} \int u^{-3/2}\, du = \frac{kQh}{R^2} \left| -\frac{2}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right|_0^R$$

Sınır değerleri yerine konur ve sadeleştirilirse, diskin elektrik alan ifadesi bulunmuş olur:

$$E = \frac{2kQ}{R^2} \left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right]$$

Örnek 14.13

Sonsuz düzlem. *Üzerinde sabit σ yüzey yük yoğunluğu bulunan sonsuz düzlemden h uzaklıkta elektrik alanı hesaplayın.*



Çözüm

Bu problemi bir önceki örnekteki yüklü diskin yardımıyla çözeriz. Yukarda bulduğumuz R yarıçaplı yüklü diskin elektrik alan ifadesini yazalım:

$$E = \frac{2kQ}{R^2} \left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right]$$

Önce, bu elektrik alan ifadesini σ yük yoğunluğu cinsinden yazalım. Diskin toplam yükü Q ve yüzölçümü πR^2 ise, yüzey yük yoğunluğu,

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

olur. Bu ifadeyi Q için çözer ve yerine koyarız. Ayrıca, k sabitini de $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ şeklinde ifade edelim:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right]$$

Şimdi, σ yüzey yük yoğunluğu sabit kalmak üzere, diskin R yarıçapı sonsuza giderse ne olur? Sonsuz disk ile sonsuz düzlem arasında bir fark kalmaz. O halde ($R \to \infty$) limitinde bu ifade, sonsuz düzlemin elektrik alanını verir. $R \to \infty$ limiti alındığında, parantez içindeki ikinci terim sıfır olur. Böylece, sonsuz düzlemin elektrik alanını buluruz:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Elektrik alanın h uzaklığına bağlı olmadığına, heryerde sabit $\sigma/2\varepsilon_0$ değerinde olduğuna dikkat edelim.

Test

1. Elektrik yükü için hangileri doğrudur?
   I. En küçük yük 1 Coulomb dur.
   II. En küçük yük yoktur, sürekli artar veya azalır.
   III. En küçük yük elektron yüküdür.
   IV. Yük, elektron yükünün katları olarak artar.
   (a) I ve II (b) II ve III (c) III ve IV (d) I ve IV

2. İletken maddelerde akımı taşıyan hangisidir?
   (a) Elektron (b) Proton (c) İyon (d) Nötron

3. Elektrik alanın sağa doğru olduğu bir noktaya konulan elektrona etkiyen kuvvet hangi yönde olur?
   (a) Sağa (b) Sola (c) Yukarı (d) Aşağı

4. A yükü +3 C ve B yükü +2 C ise, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) A yüküne etkiyen kuvvet daha büyüktür.
   (b) B yüküne etkiyen kuvvet daha büyüktür.
   (c) Kuvvetler eşittir.

5. Atom yapısının iletkenlikle ilişkisi hakkında aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. İletkenlerde en dış yörüngedeki elektronlar zayıf bağlıdır.
   II. Yalıtkanlarda en dış yörüngedeki elektronlar kuvvetli bağlıdır.
   III. İletkenlerde iç yörüngedeki elektronlar zayıf bağlıdır.
   IV. Yalıtkanlarda iç yörüngedeki elektronlar zayıf bağlıdır.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve IV (d) I ve IV

6. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Nötr bir cisimde elektrik yükü yoktur.
   II. Nötr bir cisimde + ve - yükler eşit sayıdadır.
   III. Artı yüklü cisimde elektron fazlası vardır.
   IV. Artı yüklü cisimde elektron eksiği vardır.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) II ve IV

7. Yalıtkanlar niçin elektriği iyi iletmezler?
   (a) Elektrik yükleri yoktur.
   (b) Elektrik yükleri atom çekirdeğine sıkı bağlıdır.
   (c) Atomları nötrdür.

8. Aralarında 1 m mesafe bulunan 2 yük birbirini 100 N kuvvetle çekiyorsa mesafe 2 katına çıktığında, çekici kuvvet ne kadar olur?
   (a) 10 N (b) 25 N (c) 50 N (d) 75 N

9. Eşit iki Q yükü, aralarında uzaklık 1 m olduğunda birbirlerini F kuvvetiyle itiyorlar. Her iki yük $3Q$ değerine çıkarıldığında, kuvvet ne kadar olur?
   (a) $3F$ (b) $6F$ (c) $9F$ (d) $12F$

10. Elektrik alan tanımı aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) 1 C yüke etkiyen kuvvet.
   (b) Bir elektrona etkiyen kuvvet.
   (c) Birim yükün enerjisi.
   (d) Bir elektronun momentumu.

11. Noktasal bir yükten R uzaklıkta elektrik alan şiddeti E_0 ise, hangi uzaklıkta $E_0/10$ değerinde olur?
   (a) $2R$ (b) $5R$ (c) $\sqrt{10}R$ (d) $10R$

12. Elektrik alanın 3 N/C olduğu bir yere konulan 5 C yüke etkiyen kuvvet ne kadardır?
   (a) 3 N (b) 5 N (c) 8 N (d) 15 N

13. Yüklü sonsuz telin elektrik alanı, telden r uzaklığıyla nasıl değişir?
   (a) r ile doğru orantılı.
   (b) r ile ters orantılı.
   (c) r^2 ile ters orantılı.
   (d) r^3 ile ters orantılı.

14. Yüklü sonsuz düzlemin elektrik alanı uzaklıkla nasıl değişir?
   (a) r ile orantılı.
   (b) r ile ters orantılı.
   (c) r^2 ile ters orantılı.
   (d) Uzaklığa bağlı değildir.

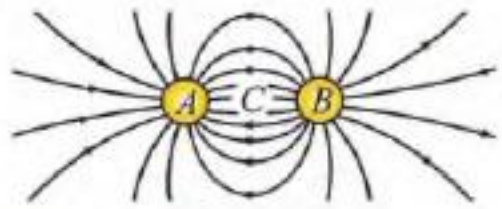
15. Bir elektrik dipolün elektrik alanı uzaklıkla nasıl değişir?
   (a) r ile orantılı.
   (b) r ile ters orantılı.
   (c) r^2 ile ters orantılı.
   (d) r^3 ile ters orantılı.

16. Bir karenin bir köşesine konulan Q yükünün kare merkezindeki elektrik alanı E dir. Karenin dört köşesine eşit Q yükleri konulduğunda, merkezdeki elektrik alan ne kadar olur?
   (a) 0 (b) $E/4$ (c) $4E$ (d) $16E$

17. Uzayda bir noktaya konulan elektrona yukarı yönde bir kuvvet etkiyor. Bu noktadaki elektrik alan hangi yöndedir?
   (a) Yukarı (b) Aşağı (c) Sağa (d) Sola

18. $+Q$ yüklü bir metal küreye, yüksüz ikinci bir özdeş küre dokunduruluyor. İkinci kürenin yükü ne olur?
   (a) $-Q/2$ (b) $-Q$ (c) $+Q/2$ (d) $+Q$

19. Aşağıdaki şekilde artı (+) yük hangi noktadadır?
   (a) A (b) B (c) C (d) Hiçbiri

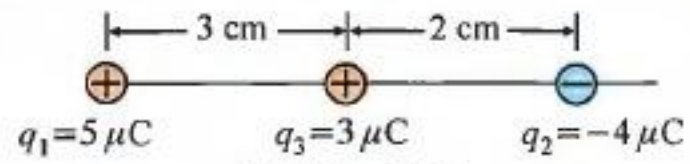


20. Yukardaki şekilde eksi (−) yük hangi noktadadır?
   (a) A (b) B (c) C (d) Hiçbiri

Problemler

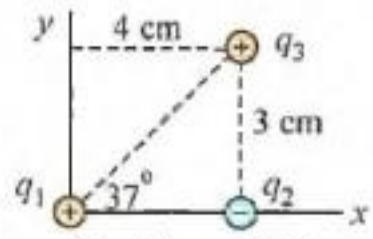
14.2 Coulomb Yasası

14.1 Aralarında 3 cm uzaklık bulunan iki küçük iletken küreden biri üzerinde $+12\,\mu C$ yükü, diğeri üzerinde $-6\,\mu C$ yükü bulunmaktadır. (a) Kürelerden birine etkiyen kuvvet ne kadardır? (b) Küreler iletken bir telle birbirine temas ettiriliyor. Yeni kuvvet ne kadar olur?
[C: (a) 7.2 N, (b) 0.9 N.]



Problem 14.2

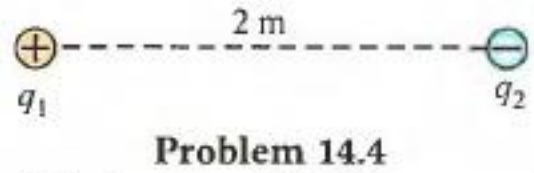
14.2 Şekildeki $q_1 = 5\,\mu C$ ve $q_2 = -4\,\mu C$ yükleri tarafından $q_3 = 3\,\mu C$ yükü üzerine etkiyen toplam kuvveti hesaplayın.
[C: 420 N.]



Problem 14.3

14.3 Şekilde gösterilen $q_1 = +5\,\mu C$ ve $q_2 = -1\,\mu C$ yükleri için, (a) $q_3 = +3\,\mu C$ yükü üzerine etkiyen toplam kuvvetin bileşenlerini hesaplayın, (b) Toplam kuvvetin şiddetini ve yönünü bulun.

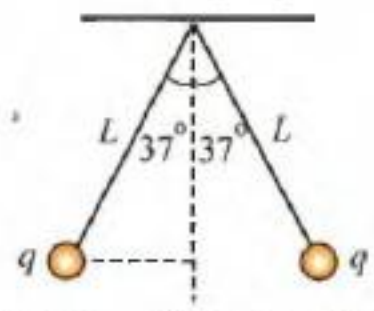
[C: (a) $E_x = 3200$, $E_y = 1300\,N/C$, (b) $E = 3500\,N/C$ ve 22°]



Problem 14.4

14.4 Şekilde gösterilen $q_1 = +9\,mC$ ve $q_2 = -4\,mC$ yükleri arasındaki mesafe 2 m dir. Üçüncü bir q_3 yükü nereye konulmalıdır ki üzerindeki net kuvvet sıfır olsun?

[C: q_2 den 4 m sağ tarafa.]



Problem 14.5

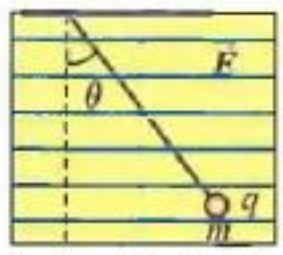
14.5 Şekilde, kütleleri $m = 30\,g$ ve yükleri q olan özdeş iki küçük küre, $L = 1$ m uzunluğunda birer iple tavana asılmışlardır. Denge durumunda iplerin düşeyle yaptığı açı 37° olduğuna göre, kürelerin yükü ne kadardır?

[C: $|q| = 6\,\mu C$.]

14.3 Elektrik Alan

14.6 Uzayda bir noktaya konulan elektrona 3.2×10^{-15} N luk bir kuvvet etkiyor. O noktada elektrik alan şiddeti ne kadardır? (Elektron yükü: $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.)

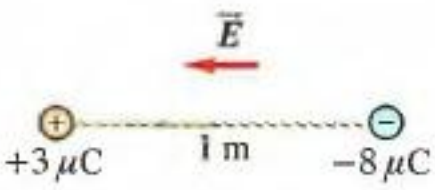
[C: 20 000 N/C.]



Problem 14.7

14.7 Şekilde, yatay yönde düzgün $E = 10\,000\,N/C$ elektrik alan bulunan bir bölgede, kütlesi 3 g ve yükü $4\,\mu C$ olan bir yük iple tavana asılmıştır. İpin düşeyle yaptığı açıyı hesaplayın.

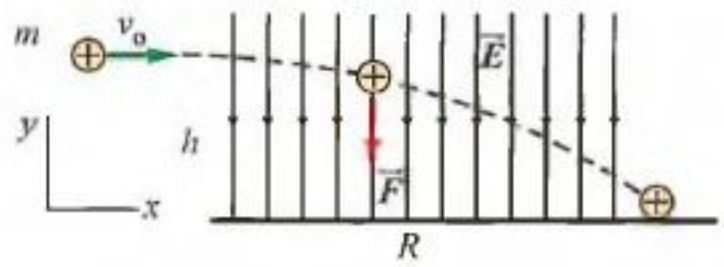
[C: 53°.]



Problem 14.8

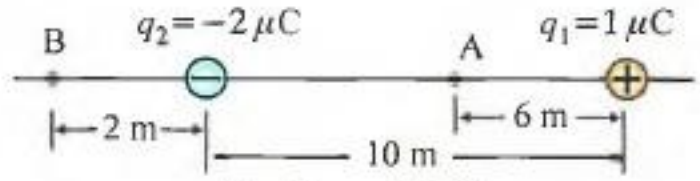
14.8 Şekildeki $q_1 = 3\,\mu C$ ve $q_2 = -8\,\mu C$ yükleri 1 m uzunluğunda bir iple birbirine bağlanmıştır. Bu iki yük $E = 5 \times 10^6\,N/C$ olan bir dış elektrik alana konuluyor ve q_1 yükü bulunduğu yere çivilenip sabitleştiriliyor. İpteki gerilmeyi hesap edin.

[C: $T = 40$ N.)



Problem 14.9

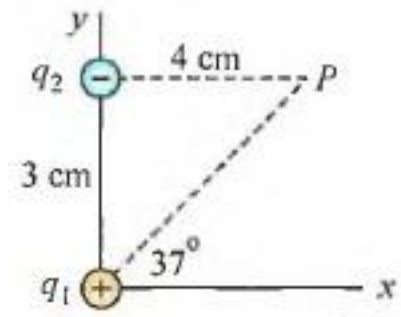
14.9 Bir laboratuvarda düşey yönde sabit $E = 1000\,N/C$ elektrik alanlı bir bölge vardır. Bir proton bu bölgeye yerden $h = 1$ m yukarda ve yatay $v_0 = 10^6$ m/s hızıyla atılıyor. (a) Protonun ivmesi ne kadardır? (b) Protonun yatay menzilini hesaplayın. (Proton için $m = 1.7 \times 10^{-27}$ kg ve $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C alın, yerçekimi kuvvetini ihmal edin.) [C: (a) $9.4 \times 10^{10}\,m/s^2$, (b) $R = 4.6$ m.)



Problem 14.10

14.10 Şekilde gösterilen q_1 ve q_2 yüklerinin A ve B noktalarındaki toplam elektrik alanını hesaplayın.

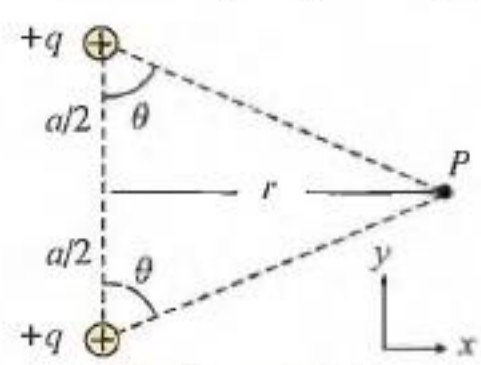
[C: (a) −1380 N/C, (b) +4430 N/C.]



Problem 14.11

14.11 Şekildeki $q_1 = 5\,\mu C$ ve $q_2 = -2\,\mu C$ yüklerinin P noktasındaki toplam elektrik alanın bileşenlerini hesaplayın.

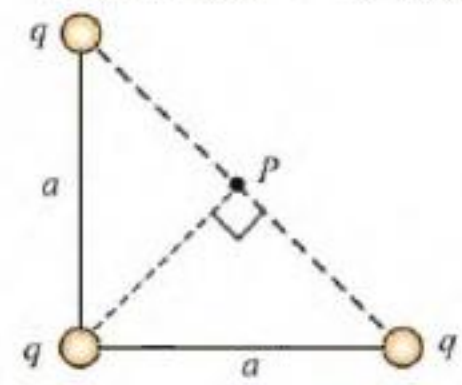
[C: $E_x = 320$, $E_y = 1080\,N/C$.]



Problem 14.12

14.12 Şekilde, aralarında küçük bir a mesafesi bulunun eşit iki $+q$ yükü gösterilmiştir. (a) Yüklerin orta dikmesi üzerinde r uzaklıkta elektrik alan ifadesini bulun. (b) $r \gg a$ olduğunda elektrik alanın limiti ne olur?

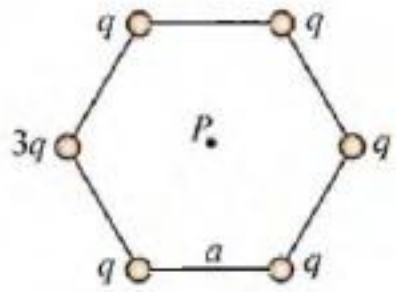
[C: (a) $2kq/(r^2 + a^2/4)$, (b) $2kq/r^2$.]



Problem 14.13

14.13 Şekildeki ikizkenar diküçgenin P noktasında elektrik

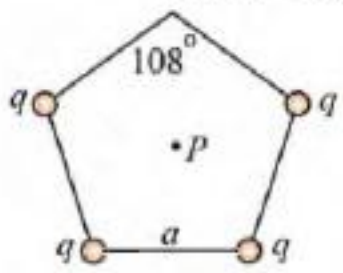
alan ne kadardır? [C: $6kq/a^2$.]



Problem 14.14

14.14 Bir kenarı a uzunlukta olan düzgün altıgenin köşelerindeki yükler şekilde gösterilmiştir. Altıgenin P merkezindeki elektrik alanı hesaplayın.

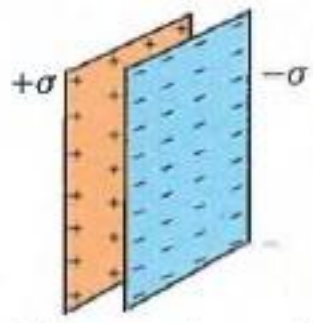
[C: $E = 2kq/a^2$ sağa doğru.]



Problem 14.15

14.15 Şekildeki bir kenarı a uzunlukta olan düzgün beşgenin bir köşesi hariç diğerlerinde eşit q yükü bulunmaktadır. Beşgenin P merkezindeki elektrik alanı hesaplayın. (*Yol gösterme:* Simetriyi kullanın.)

[C: $E = 1.38kq/a^2$ yukarı doğru.]



Problem 14.16

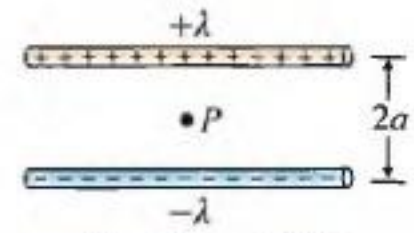
14.16 Şekilde, üzerlerinde $\pm\sigma$ yüzey yük yoğunlukları bulunan iki paralel düzlem arasındaki bölgede toplam elektrik alanı bulun. (*Yol gösterme:* Örnek 14.13 ün sonucunu kullanın.) [C: σ/ε_0.]

14.17 Örnek 14.11 de R yarıçaplı yüklü halkanın ekseni üzerine h uzaklıkta elektrik alan ifadesi,

$$E = \frac{kQh}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

olarak bulunmuştu. $h = 0$ ve $h \to \infty$ için $E = 0$ olduğuna göre, arada bir yerde elektrik alan maksimum olmalıdır. Hangi h uzaklığında elektrik alan maksimum olur? (*Yol gösterme:* Maksimum olan yerde 1. türev sıfır olur.)

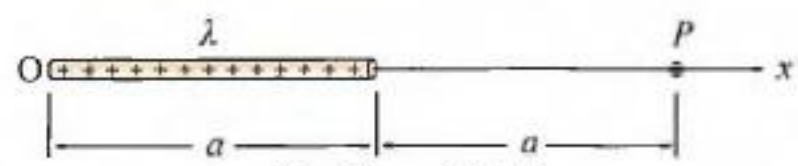
[C: $h = R/\sqrt{2}$.]



Problem 14.18

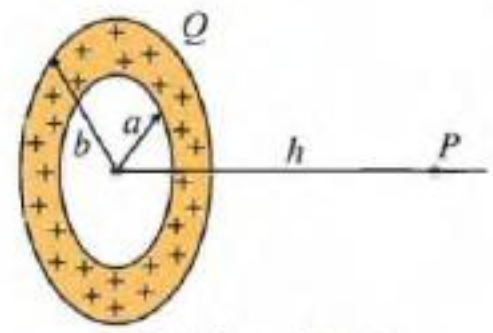
14.18 Şekilde, üzerlerinde $\pm\lambda$ boyca yük yoğunlukları bulunan iki sonsuz tel, birbirlerine $2a$ uzaklıkta paraleldirler. Tam ortadaki P noktasında toplam elektrik alanı bulun. (*Yol gösterme:* Örnek 14.10 un sonucunu kullanın.)

[C: $4k\lambda/a$.]



Problem 14.19

14.19 Şekilde, uzunluğu a olan doğrusal tel üzerinde düzgün λ boyca yük yoğunluğu vardır. Telin uzantısı üzerinde ve bir uçtan a uzaklıkta bir P noktasında elektrik alanı integralle hesaplayın. [C: $E = k\lambda/2a$.]



Problem 14.20

14.20 Şekilde ortası delik olan diskin iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b dir. Toplam Q yükü disk yüzeyine düzgün olarak dağılmıştır. Disk ekseni üzerinde h uzaklıkta elektrik alanı hesaplayın. (*Yol gösterme:* Örnek 14.12 deki yolu izleyin.)

[C: $E = \dfrac{2kQ}{b^2 - a^2}\left[\dfrac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \dfrac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}\right]$.]

15 GAUSS YASASI



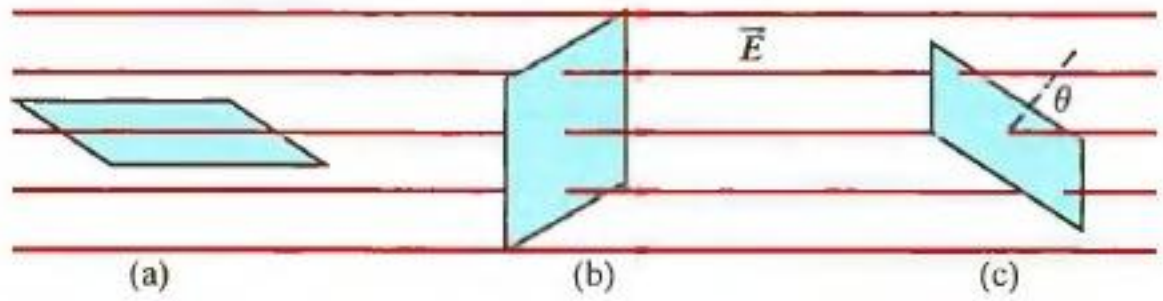
Kuzey ve güney kutup bölgelerinde, *kuzey ışıkları* veya *yeşil şua* diye bilinen bu gökyüzü olayı, Güneş'ten gelen yüklü parçacıkların yüksek atmosferdeki atomlarla çarpışması sonucunda meydana gelir.

Bir önceki bölümde yük dağılımlarının elektrik alanlarım integral yoluyla bulmayı öğrendik. Bu integraller bazen çok karmaşık ve zahmetli olurlar. Oysa, elektrik alan hesaplamakta çok daha pratik ve zarif bir yol daha vardır. Gauss yasası denilen bu yöntem ancak simetrik yük dağılımları için uygulanabilir, ama sonuca çok daha çabuk varır. Biraz soyut görünse de, bu yöntemi öğrenmek matematiksel düşünme yeteneğinizi artıracaktır.

15.1 ELEKTRİK AKISI (Φ)

Herhangi bir vektörün bir yüzeyi kesip geçen miktarına **akı** denir. Şekil 15.1 deki gibi, elektrik alan çizgilerinin yolu üzerine bir A yüzeyi koyalım. Eğer $\vec{E}$ alanı yüzeye paralel ise (a), hiçbir çizgi bu yüzeyi kesip geçmeyecektir. Ayrıca, en fazla alan çizgisi geçmesini istiyorsak, bu yüzeyi alan çizgilerini dik karşılayacak şekilde tutarız (b).

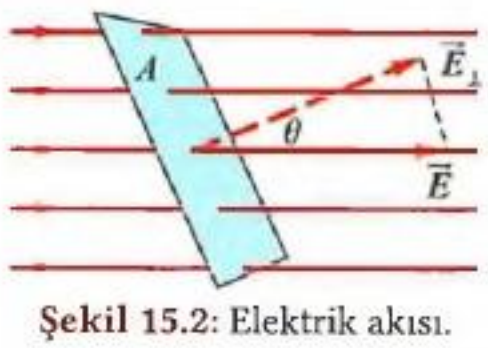
Bu A yüzeyinden geçen alan çizgileri sayısı hem elektrik alan ile, hem yüzölçümle ve hem de açıyla orantılı olacaktır. Buna göre, Φ sembolüyle gösterilen



Şekil 15.1: Elektrik alan çizgilerine, (a) Paralel yüzey, (b) Dik yüzey, (c) Açılı yüzey.

elektrik akısı şöyle tanımlanır:

$$\Phi = E\,A\,\cos\theta = E_\perp\,A \tag{15.1}$$



Şekil 15.2: Elektrik akısı.

Burada θ açısı $\vec{E}$ vektörünün **yüzey normali** ile yaptığı açıdır. Yüzey normali o noktada yüzeye dik doğrultudaki birim vektördür ve $\hat{n}$ ile gösterilir. (Bir vektörün yüzeyle yaptığı açı yüzeyden itibaren ölçülmez, çünkü her doğrultuda farklı çıkar. Oysa, yüzey normali n ile yaptığı açı tek sonuç verir.)

Bu tanımdaki $\cos\theta$ çarpanı, yüzeyi bir yönde geçen vektörün akısı pozitif ise, buna zıt yönde geçen vektörün akısının negatif olacağını gösterir. Genellikle, kapalı yüzeyden dışa doğru olan akı pozitif, içe doğru olan akı negatif alınır.

Yukardaki tanım, sabit $\vec{E}$ alanı için geçerlidir. Değişken elektrik alanların sonlu bir yüzeyden geçen akısı integral yoluyla tanımlanır. Bunun için A yüzeyini sonsuz küçük ΔA_i parçalarına bölüp, her parçada yukardaki akı tanımı kullanılır ve sonuçta bu akıların toplamı integral olur:

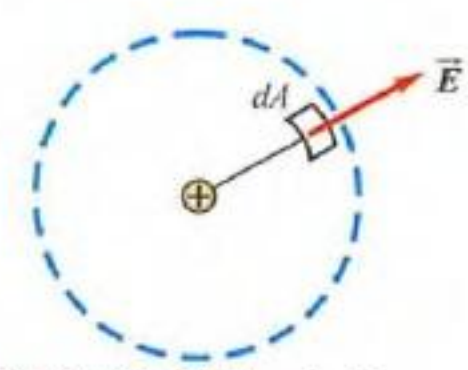
$$\Phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i E_i\,\Delta A_i\,\cos\theta_i = \int_{\text{yüzey}} E\,dA\,\cos\theta$$

Bu integral tüm yüzey üzerinden alınacağı için, genelde 2-katlı integral olur. Eğer, A yüzeyi **kapalı** ise, bunu bildirmek için integral işaretine bir yuvarlak ilave edilir:

$$\Phi = \oint_{\text{yüzey}} E\,dA\,\cos\theta \qquad \text{(elektrik akısı)} \tag{15.2}$$

İntegral içindeki E alanı ve θ açısı genelde değişken oldukları için, integralin dışına çıkamazlar.

15.2 GAUSS YASASI



Şekil 15.3: Noktasal yük çevresinde kapalı bir Gauss yüzeyi.

Gauss yasasının tekniğini anlamak için, orijinde pozitif noktasal bir q yükünü gözönüne alalım. Bu yükten dışarı bir ışık demeti gibi yayılan elektrik alan çizgilerini çizelim. Bu elektrik alan çizgilerinin r yarıçapında çizdiğimiz hayali bir küre yüzeyi üzerindeki toplam akısını hesaplayalım. (Bu hayali yüzeye **Gauss yüzeyi** denir.)

Gauss yüzeyi üzerinde her noktada E alanı aynı değerde ve küre yüzeyine diktir ($\theta = 0$). O halde, integrale gerek kalmadan, toplam akıyı hesaplayabiliriz:

$$\Phi = E\,A\,\cos 0^\circ = E\,A$$

E ve A ifadelerini biliyoruz. Noktasal yükün r uzaklıktaki elektrik alanı için $E = kq/r^2$ ve kürenin yüzölçümü için $A = 4\pi r^2$ değerleri yerine konursa,

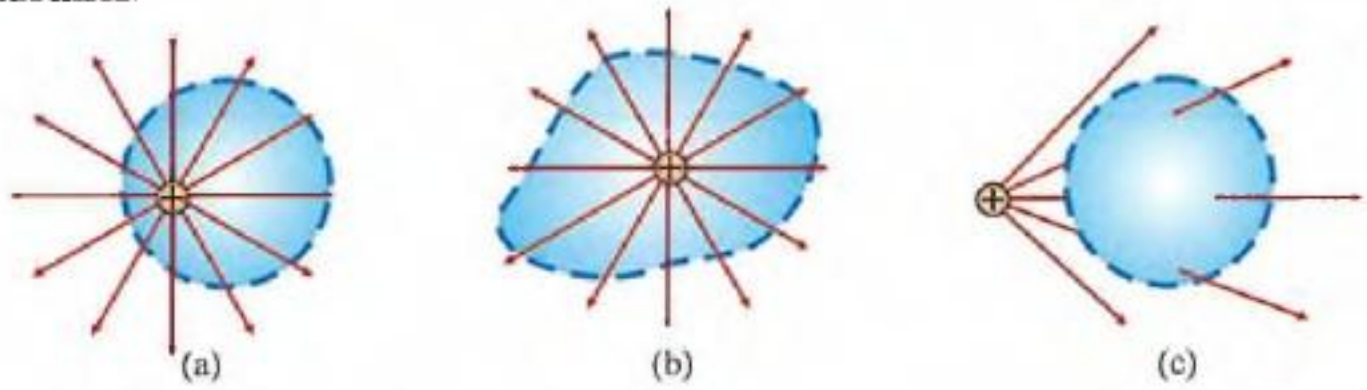
$$\Phi = E\,A = \frac{kq}{\cancel{r^2}}\,4\pi\cancel{r^2}$$

$$E\,A = 4\pi k\,q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Bu son ifadede, k sabiti yerine , boşluğun geçirgenliği ε_0 sabitini kullandık. İkisi arasındaki bağıntının $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ olduğunu daha önce görmüştük.

Bu sonuç çok ilginçtir. Eşitliğin sol tarafında hem elektrik alan ve hem de yüzölçümü r uzaklığına bağlı iken, sağ tarafta r uzaklığına hiç bağlı olmayan, sadece merkezdeki q yüküyle orantılı bir sonuç çıkıyor! (Elbette, bunun nasıl olduğunu görebiliyoruz: E alanı r^2 ile ters orantılı ve A yüzölçümü r^2 ile doğru orantılı oldukları için, bunlar çarpımda birbirlerini götürmekteler.)

Bu sonucun her yüzey ve her yük dağılımı için geçerli olduğuna şöyle ikna olabiliriz:



Şekil 15.4: (a) Yük Gauss yüzeyinin merkezinde değil, (b) Gauss yüzeyi küresel değil, (c) Yük Gauss yüzeyi dışında.

- q yükü kürenin merkezinde olmasaydı, sonuç yine aynı olurdu. Zira, Şekil 15.4-a da görüldüğü gibi, yüzeyi geçen alan çizgileri, bir yerde daha sık, diğer yerde daha seyrek olsa da, sonuçta küreyi geçen çizgi sayısı yine aynı olacaktır.
- q yükü çevresinde küre değil de, herhangi bir kapalı yüzey olsaydı, sonuç yine değişmezdi. Şekil 15.4-b de görüldüğü gibi, küre bu yüzeyden geçen toplam çizgi sayısı da, küre yüzeyini geçen toplama eşit olacaktır.
- q yükü Gauss yüzeyi dışında ise, bu kez durum değişir. Şekil 15.4-c de görüldüğü gibi, q yükünden küre yüzeyine giren her alan çizgisi, mutlaka bir yerden çıkacaktır. Bu durumda, eksi ve artı akıların net toplamı sıfır olur.

$$\Phi = \int E\,dA\,\cos\theta = 0 \qquad \text{(yük Gauss yüzeyi dışında ise)}$$

Bu irdelemenin ışığında, Gauss yasasını ispatsız olarak şöyle ifade edebiliriz:

Gauss Yasası

Kapalı bir yüzey üzerindeki toplam elektrik akısı, sadece yüzey içinde kalan yüklerin cebirsel toplamı ile orantılıdır:

$$\oint_{\text{yüzey}} E\,dA\,\cos\theta = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0} \qquad (15.3)$$

Eşitliğin sağındaki $q_{\text{iç}}$ yükü, Gauss yüzeyi içindeki yüklerin cebirsel toplamıdır.

Gauss yasasının önemli noktalarını vurgulayalım:

- Gauss yasasının bu ifadesine bakarak yine integral alınacağını düşünmeyin. Verilen yükler simetrik bir dağılım arzediyorsa, öyle bir Gauss yüzeyi seçilir ki, bu yüzey üzerinde E alanı heryerde aynı değerde kalsın ve böylece integral dışına alınabilsin. Geriye kalan integral genelde çok basit bir yolla hesaplanabilir.
- Tekrar vurgulayalım: Gauss yüzeyi dışında istenildiği kadar yük olsun, sonuçta sadece yüzey içinde kalan net yük formüle katılır. Formülün solunda

toplam elektrik alan, ama sağ tarafta sadece iç yüklerin yer alması şaşırtıcı gelebilir ama bu doğrudur.

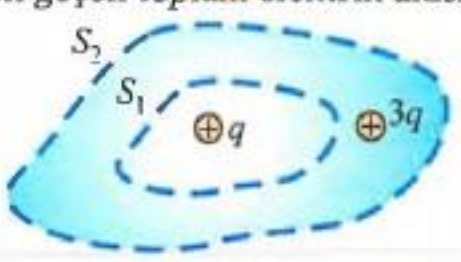
- Gauss yüzeyi seçimi keyfidir, istenilen yüzey seçilebilir. Ama, yasanın geçerli olması için yüzeyin **kapalı** olması şarttır. Aksi takdirde, o açık yerden geçen akı sayılmamış olur.

15.3 GAUSS YASASI UYGULAMALARI

Gauss yasasının gücünü çeşitli yük dağılımlarının elektrik alan hesaplarında görebiliriz. Aşağıdaki örneklerde, sayısal hesaplar yerine, bağıntı çıkarma yoluna gideceğiz. Böylece öğrenci soyutlama yeteneğini de kazanmış olacaktır.

Örnek 15.1

$q = 1\,\mu C$ olmak üzere, şekilde gösterilen S_1 ve S_2 kapalı yüzeyleri içinden geçen toplam elektrik akısını hesaplayın.



Çözüm

Gauss yasasına göre, kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısı sadece yüzeyin içinde kalan yükle orantılıdır:

$$\Phi = \oint_{\text{yüzey}} E\,dA\cos\theta = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

O halde, akıyı bu eşitliğin sağ tarafından, net yükk toplamı olarak hesaplamak yeterlidir. S_1 yüzeyi içinde sadece q yükü vardır:

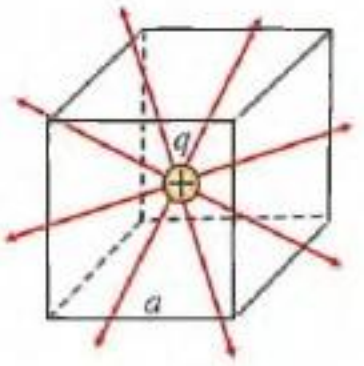
$$\Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{10^{-6}}{8.85\times10^{-12}} = 1.1\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

S_2 yüzeyi içinde her iki yük yer alırlar:

$$\Phi_2 = \frac{q+3q}{\varepsilon_0} = 4.4\times10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Örnek 15.2

Şekilde bir kenarı $a = 1$ m olan kübün merkezinde $q = 3\,\mu C$ yük vardır. Kübün bir yüzünden geçen elektrik akısı ne kadar olur?



Çözüm

Kübün bir yüzünden geçen elektrik alan çizgileri farklı açılarda ve şiddette olduğu için hesaplamak zordur. Oysa, simetriyi gözönüne alırsak problem kolaylaşır. Kübün 6 yüzünden herbiri q yüküne göre eşit konumdadır. O halde, bir yüzden geçen akı miktarı toplam akının 1/6 kesri olacaktır:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_{\text{top}}}{6}$$

Şimdi toplam yüzey kapalı olduğu için, Gauss yasasıyla toplam akıyı bulabiliriz:

$$\Phi_{\text{top}} = \oint_{\text{yüzey}} E\,dA\cos\theta = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Buradan, bir yüzden geçen akı hesaplanır:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_{\text{top}}}{6} = \frac{q_{\text{iç}}}{6\varepsilon_0} = \frac{10^{-6}}{6\times8.85\times10^{-12}}$$

$$\Phi_1 = 1.8\times10^4\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Örnek 15.3

Küresel kabuk. *R yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde toplam Q yükü düzgün olarak dağılmıştır.*

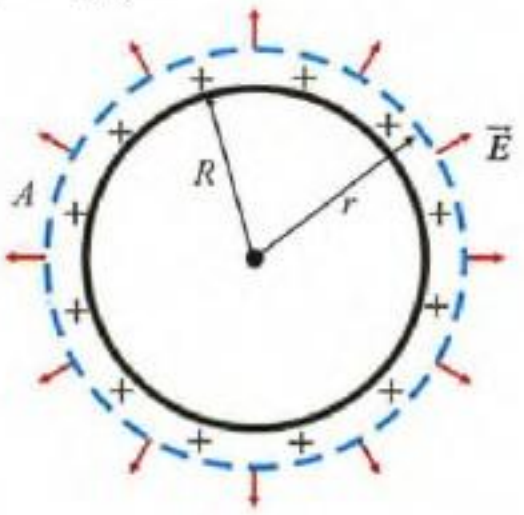
(a) *Küre dışında r uzaklıkta elektrik alanı bulun.*

(b) *Küre içinde r uzaklıkta elektrik alanı bulun.*

Çözüm

(a) Küre dışında ($r > R$), r yarıçaplı hayali bir küresel Gauss yüzeyi (A) çizelim:

Bu A yüzeyi üzerindeki her noktada $\vec{E}$ elektrik alanı, küresel simetri sebebiyle, yüzeye dik olmalıdır. Keza, yüzey üzerindeki her noktada elektrik alan aynı değerde olmalıdır, çünkü yine küresel simetriye göre, küreyi döndürdüğümüzde bir noktadan diğerine geçeriz.



Sonuçta, Gauss yüzeyi üzerinde, heryerde aynı ve yüzeye dik $\vec{E}$ alanı olmalıdır. Gauss yasası için bulduğumuz (15.3) ifadesini yazalım:

$$\oint_{\text{yüzey}} E\,dA\cos\theta = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

İntegral içindeki E alanı yüzey üzerinde sabit olduğundan integral dışına alınabilir. Ayrıca, yüzey dikmesiyle yapılan θ açısı $0°$ olduğundan $\cos 0° = 1$ olur:

$$E\oint_{\text{yüzey}} dA = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Küçük dA yüzey elemanlarının tüm küre yüzeyi üzerinden toplamı, Gauss küresinin toplam A yüzeyi olur:

$$E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

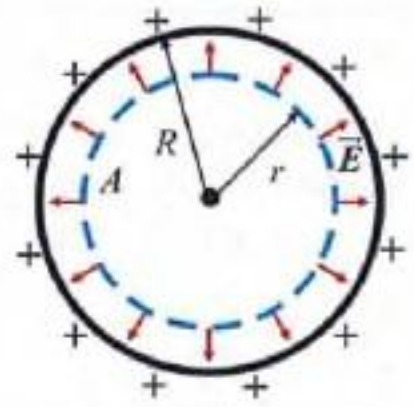
r yarıçaplı kürenin yüzölçümü $A = 4\pi r^2$ dir. Eşitliğin sağ tarafındaki $q_{\text{iç}}$ Gauss yüzeyi içinde kalan yük miktarı olup, Q değerindedir. Bu değerler yerine konur:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Bu ifade E için çözülerek sonuç bulunur:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2} \qquad (r > R \text{ için})$$

(b) Bu kez, küre içinde ($r < R$), r yarıçaplı küresel bir Gauss yüzeyi seçelim ve (a) şıkkındaki düşünce yöntemini uygulayalım:



Eğer bu yüzey üzerinde bir $\vec{E}$ alanı varsa, simetriye göre, yüzeye dik ve yüzeyin her noktasında aynı şiddette olmalıdır. Buna göre, integral yerine EA çarpımı şeklinde Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Şimdi, Gauss yüzeyi içinde kalan $q_{\text{iç}}$ ne kadardır? Tüm yükler, Gauss yüzeyi dışında kaldığı için,

$$q_{\text{iç}} = 0$$
$$E\,A = 0$$

olur. A yüzölçümü sıfırdan farklı olduğundan,

$$E = 0 \qquad (r < R \text{ için})$$

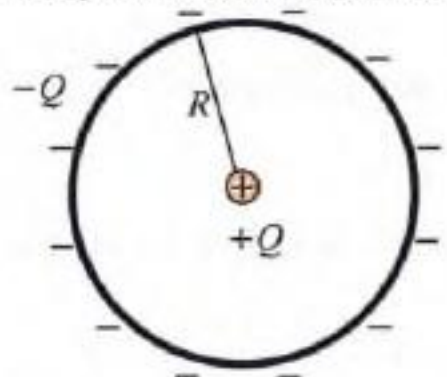
bulunur. Sonucu özetleyelim:

$$E = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2} & (r > R \text{ için}) \\ 0 & (r < R \text{ için}) \end{cases}$$

Bu sonuç daha sonra iletkenler için kullanılacaktır.

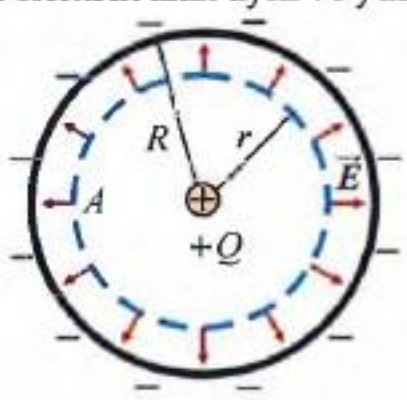
Örnek 15.4

Üzerinde düzgün dağılmış $-Q$ yükü bulunan R yarıçaplı küresel kabuğun merkezine noktasal $+Q$ yükü konulmuştur. Küre içinde ve dışında elektrik alanı bulun.



Çözüm

Küre içinde: $r < R$ olacak şekilde r yarıçaplı küresel bir Gauss yüzeyi çizelim. Simetriden dolayı bu küre yüzeyi üzerinde her noktada elektrik alan aynı ve yüzeye dik olacaktır:



Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Gauss küresi içinde kalan yük sadece noktasal $+Q$ yüküdür, R yarıçaplı küre üzerindeki $-Q$ yükü Gauss yüzeyi dışında olduğu için dikkate alınmaz. O halde,

$$q_{\text{iç}} = +Q$$
$$E\,4\pi r^2 = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

Buradan küre içindeki elektrik alan bulunur:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \qquad (r < R)$$

Küre dışında: $r > R$ yarıçaplı Gauss yüzeyi çizilip, yine simetri dolayısıyla bunun üzerindeki $\vec{E}$ alanının heryerde aynı ve yüzeye dik olduğu tespit edilir. (Yeniden şekil çizmeye gerek yoktur.) Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Bu kez hem noktasal $+Q$ yükü ve hem de R yarıçaplı küre üzerindeki $-Q$ yükü Gauss yüzeyi içinde kalmaktadır. O halde,

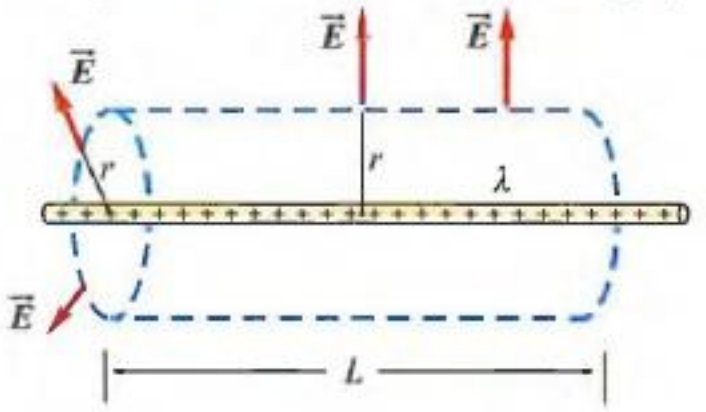
$$q_{\text{iç}} = +Q - Q = 0$$
$$E\,4\pi r^2 = 0$$

olur ve buradan küre dışında elektrik alan bulunur:

$$E = 0 \qquad (r < R)$$

Örnek 15.5

Sonsuz tel. *Üzerinde düzgün λ boyca yük yoğunluğu taşıyan sonsuz doğrusal telin elektrik alanını hesaplayın.*



Çözüm

Bu problemi Örnek 14.10 da integral alarak, oldukça zahmetli bir yolla çözmüştük. Şimdi Gauss yasasının çözümü nasıl kolayca verdiğini görelim.

Gauss yüzeyi olarak, tel çevresinde r yarıçaplı ve L uzunlukta, tel ile aynı eksenli bir silindir seçelim. Bu silindirin yanal yüzeyi üzerinde $\vec{E}$ alanı, simetriden dolayı, heryerde aynı ve yüzeye dik olmalıdır.

Taban yüzeylerinde ise, $\vec{E}$ alanı yüzeye paralel olur, yani yüzeyi kesmez. Bu yüzden, taban yüzeylerde akı sıfırdır ve gözönüne alınmaz. Gauss yasası ifadesini yazalım:

$$E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Burada A yanal yüzey olup, yüzölçümü

$$A = 2\pi r\,L$$

olur. L uzunlukta silindir içinde kalan yük ise,

$$q_{\text{iç}} = \lambda\,L$$

olur. Bu değerler yerine konur:

$$E\,(2\pi r L) = \frac{\lambda\,L}{\varepsilon_0}$$

Sadeleştirme yapılıp elektrik alan bulunur:

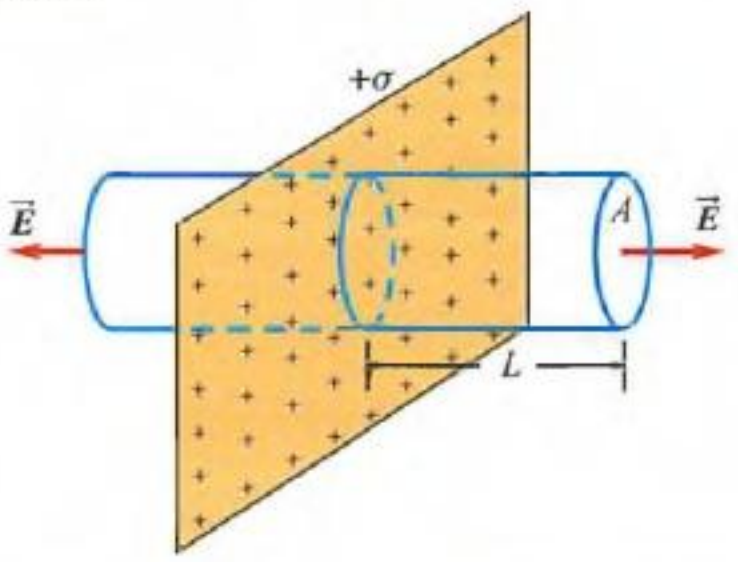
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

Örnek 15.6

Sonsuz düzlem. *Üzerinde düzgün σ yüzey yük yoğunluğu bulunan sonsuz düzlemin elektrik alanını hesaplayın.*

Çözüm

Bu problemi daha önce Örnek 14.13 de integral yoluyla çözmüştük. Şimdi, Gauss yasasıyla nasıl daha kolay çözüldüğünü görelim.



Gauss yüzeyi olarak, sonsuz düzlemin iki tarafına eşit L miktarda uzanan ve taban yüzeyi A olan bir silindir seçelim. Simetriden dolayı heryerde $\vec{E}$ alanı düzleme dik olmalıdır, çünkü belli bir yönde açı yapması simetriye aykırı olurdu. Ayrıca, taban yüzeyi üzerinde heryerde aynı değerde olur, çünkü düzlem sonsuz olduğu için, silindir tabanındaki bir nokta kaydırılarak diğeri üzerine getirilirse yük dağılımı değişmez.

$\vec{E}$ düzleme dik olduğundan silindirin yanal yüzeyine paralel olur. O halde, yanal yüzeyde akı sıfırıdır ve sadece taban yüzeylerindeki akı gözönüne alınır. Her iki tabanda, E dışa doğru olduğundan, akı pozitif olur.

Buna göre, iki taban için Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$E\,A + E\,A = \frac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0}$$

Silindirin içinde kalan yük miktarı, σ yüzey yük yoğunluğu ile bulunur:

$$q_{\text{iç}} = \sigma\,A$$

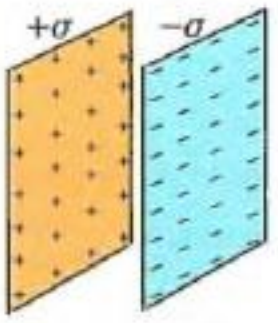
Bu değerler yerine konur ve elektrik alan için çözülür:

$$2\,E\cancel{A} = \frac{\sigma\cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{/Levhadan dışa doğru)}$$

Eğer yüzey yükü negatif olsaydı, $\vec{E}$ levhaya doğru yönelik olurdu.

Örnek 15.7



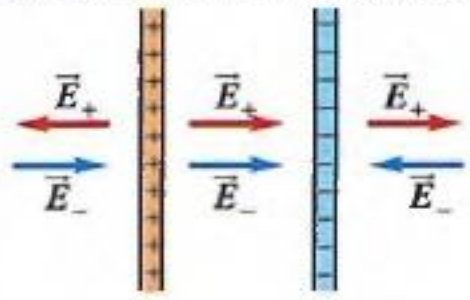
Üzerlerinde $+\sigma$ ve $-\sigma$ yük yoğunlukları bulunan sonsuz iki levha birbirlerine paralel olarak yerleştirilmişlerdir. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

Çözüm

Bir önceki örnekte tek levhanın elektrik alanını bulduktan sonra, iki levhanın elektrik alanı vektörel toplam olarak kolayca bulunur. Artı ve eksi levhaların elektrik alanlarını $\vec{E}_+$ ve E_- ile gösterirsek, her iki levhanın elektrik alan şiddeti,

$$E_{\pm} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

olup, aynı değerdedir. Fakat, artı yüklü levhadan dışa doğru, eksi yüklü levhada dıştan levhaya doğru olduğu için, levhalar arasında ve dışında elektrik alanlar şu yönlerde oluşurlar:



Şekilden görüldüğü gibi, şiddetleri eşit iki vektörün toplamı ve farkı alınır:

$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 & \text{(Levhaların dışında)} \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{(Levhalar arasında)} \end{cases}$$

Eşit ve zıt yüklü paralel iki levha arasında sabit σ/ε_0 elektrik alanı bulunur, levhaların dışına elektrik alan taşmaz. Bu düzenek teknolojide (televizyon, kondansatör...) düzgün elektrik alanlı bir bölge oluşturmakta çok kullanılır .

Örnek 15.8

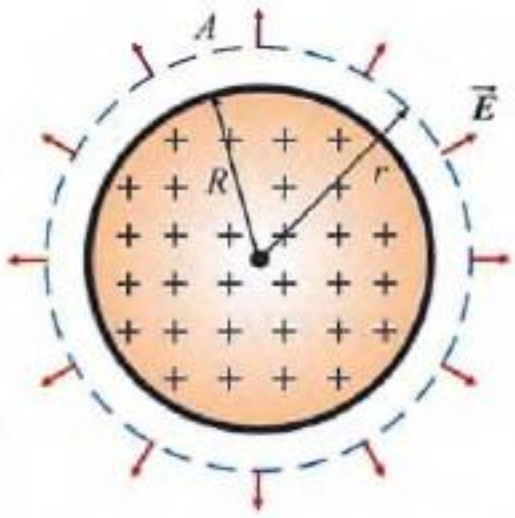
Dolu küre. *R yarıçaplı küre hacmi içinde toplam Q yükü düzgün olarak dağılmıştır. Küre dışında ve içinde elektrik alanı bulun.*

Çözüm

Küre dışında: $r > R$ olacak şekilde, r yarıçaplı küresel bir Gauss yüzeyi alalım. Simetriden dolayı bu küre üzerinde $\vec{E}$ alanı heryerde aynı ve yüzeye dik olur. Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

Gauss yüzeyi içinde kalan yük, toplam Q yükünün tamamıdır:



$$q_{iç} = Q$$

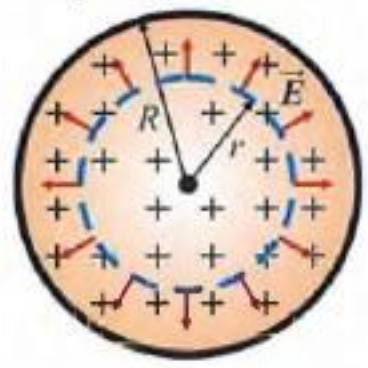
r yarıçaplı kürenin yüzölçümü $4\pi r^2$ dir. Bu ifadeler yerlerine konulup E için çözülür:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2} \qquad (r > R)$$

Bu sonuç, küre dışında elektrik alanın, yükler merkezde toplanmış gibi davrandığını gösterir.

Küre içinde: $r < R$ olacak şekilde, r yarıçaplı küresel bir Gauss yüzeyi alalım. Simetriden dolayı bu küre üzerinde $\vec{E}$ alanı heryerde aynı ve yüzeye dik olur:



Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

Bu kez yüklerin bir kısmı Gauss yüzeyi dışında kalmaktadır ve gözönüne alınmazlar. Gauss yüzeyi içinde kalan yük orantı yoluyla bulunur. R yarıçaplı küre içinde Q yükü varsa, r yarıçaplı küre içinde,

$$q_{iç} = \frac{Q}{4\pi R^3/3}\,\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Qr^3}{R^3}$$

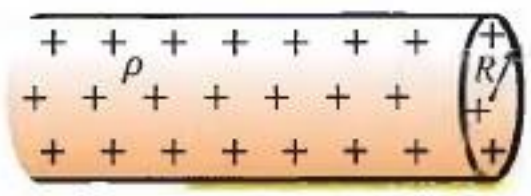
bulunur. Bu ifadeler yerlerine konulup E için çözülür:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{kQ}{R^3}\,r \qquad (r < R)$$

Örnek 15.9

Sonsuz silindir. *Yarıçapı R olan sonsuz uzunlukta bir silindir hacmi içinde düzgün ρ hacim yük yoğunluğu vardır. Silindir dışında ve içinde kalan bölgelerde elektrik alanı bulun.*

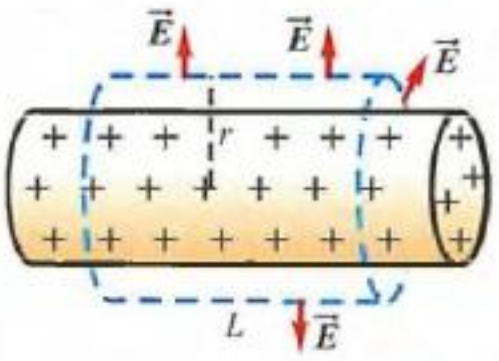


Çözüm

Silindir dışında $(r > R)$ problem, Örnek 15.4 deki sonsuz tel problemiyle aynı sayılır. Gauss yüzeyi olarak L uzunlukta ve r yarıçaplı bir silindir yüzeyi alırız. Gauss yasası ifadesi yazılır:

$$EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

Burada $A = 2\pi r L$ yanal yüzeydir. Silindir içinde kalan yük ise, L uzunlukta ve R yarıçaplı hacim içindeki yüktür:



$$q_{iç} = \rho V = \rho(\pi R^2 L)$$

Bu değerler yerine konur:

$$E(2\pi rL) = \frac{\rho(\pi R^2 L)}{\varepsilon_0}$$

Sadeleştirme yapılıp elektrik alan bulunur:

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad (r > R)$$

Silindir içinde ($r < R$) yine r yarıçaplı silindirik Gauss yüzeyi alınır:

$$EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

Bu kez Gauss yüzeyi dışında bir miktar yük kalır ve gözönüne alınmazlar. L uzunlukta ve r yarıçaplı silindir içinde kalan yük hesaplanır:

$$q_{iç} = \rho V' = \rho(\pi r^2 L)$$

Bu yük ifadesi kullanılıp elektrik alan bulunur:

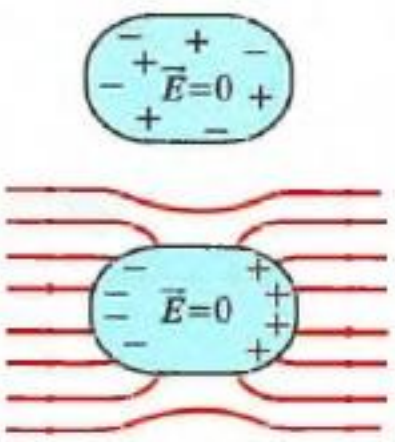
$$E(2\pi rL) = \frac{\rho \pi r^2 L)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad (r < R)$$

15.4 İLETKENLERDE ELEKTRİK ALAN

İletkenlerin yapısında bulunan serbest elektronlar sebebiyle, iletkenlerin içinde ve çevresinde elektrik alan farklı özellikler gösterir. Gauss yasası bu özellikleri anlamamıza yardımcı olur.

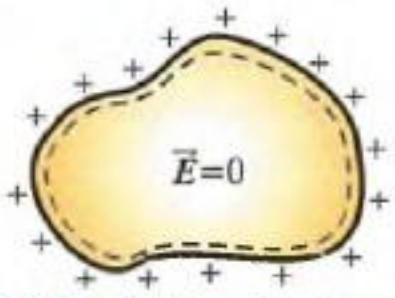
Şimdi bu özellikleri gözden geçirelim:



Şekil 15.5: Bir dış elektrik alana konulan iletkendeki serbest yükler, içerde $\vec{E} = 0$ yapacak şekilde yeniden yerleşirler.

1. **Dengedeki bir iletken içinde heryerde elektrik alan sıfırdır.**
   İletkenlerin atomik yapısını hatırlayalım: Nötr bir bakır parçasında eşit sayıda artı ve eksi yükler bulunur. Bunlardan, artı yüklü olan iyonlar hareketsizdir, fakat eksi yüklü elektronlar serbestçe iletken içinde dolaşabilirler. Şimdi, iletken içinde $\vec{E} \neq o$ olduğunu varsayalım. Bu durumda elektronlar üzerinde $\vec{F} = q\vec{E}$ kuvveti oluşurdu. Böylece serbest elektronlar hareket başlar ve yeni konumlara geçerlerdi. Bu hareket, yeni konumlardaki elektronların oluşturduğu zıt elektrik alanın iletken içinde $\vec{E} = 0$ yapıncaya kadar devam ederdi.
   Bir dış elektrik alan içine konulan iletken, yine kendi içinde $\vec{E} = 0$ olmasını sağlar. Şekil 15.5 de görüldüğü gibi, başlangıçta iletken içinde rasdgele konumlarda olan elektronlar, dış elektrik alan içine konulduğunda, $\vec{F} = q\vec{E}$ kuvvetinin etkisiyle, elektrik alana zıt yönde toplanır ve böylece oluşan zıt elektrik alan, iletken içinde dış elektrik alanı sıfırlar.

2. **Bir iletkene fazladan verilen yük iletkenin yüzeyinde toplanır.**
   Gauss yasasını hatırlayalım:



Şekil 15.6: İletken içinde en geniş Gauss yüzeyi.

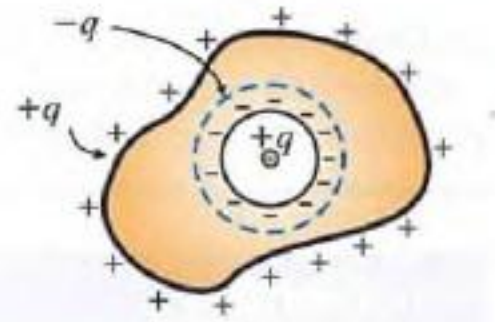
$$\oint_{\text{yüzey}} E\,dA\,\cos\theta = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

İletken içinde daima $\vec{E} = 0$ olduğuna göre, bu eşitliğin sol tarafı sıfır olacaktır. Buna göre, sağ taraftaki iç yük de sıfır olmalıdır:

$$q_{iç} = 0$$

Bu Gauss yüzeyini giderek genişletir ve iletken yüzeyini içten saracak kadar büyütebiliriz. Bu durumda dahi, içerde elektrik alan sıfır olduğundan, $q_{iç} = 0$ olmalıdır. O halde, verilmiş olan fazladan yükün bulunabileceği tek yer iletkenin yüzeyidir.

Peki, iletken içinde bir kovuk bulunuyor olsaydı ve bu kovuğa bir $+q$ yükü konulmuş olsaydı, o zaman nasıl bir denge oluşurdu? İletken bu yükü yüzeye atamayacağı için, yine kendi içinde $\vec{E} = 0$ koşulunu sağlayabilmek için, dış yüzeyden $-q$ kadar bir yükü içteki yüzeyine aktarır. Şekil 15.7 daki bu durumda, iletken içinde seçilen her Gauss yüzeyi için $q_{iç} = 0$ olur.



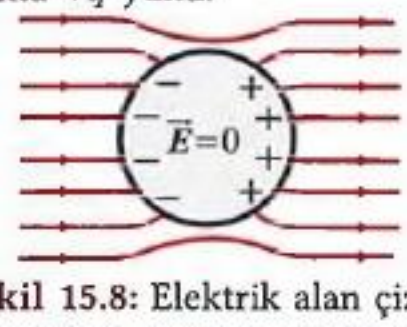
Şekil 15.7: İletken içindeki kovukta $+q$ yükü.

3. **Yüklü bir iletkenin yüzeyi civarında elektrik alan daima yüzeye diktir.**

Eğer elektrik alan iletken yüzeye dik olmasaydı, bunun yüzeye teğet bir bileşeni olurdu. Bu teğet bileşen $\vec{F} = q\vec{E}$ kuvveti uygular ve serbest elektronlar harekete geçerlerdi. Statik denge olduğuna göre, elektronlara etkiyen teğetsel bir elektrik alan bileşeni yok demektir.

Bir dış elektrik alana konulan iletken (Şekil 15.8), elektrik alanın yüzeye dik olabilmesi için kendi yüklerini uygun bir şekilde yerleştirir.

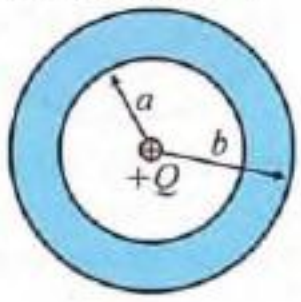
Gauss yasasını iletkenlere uygularken bu özellikleri gözönüne alacağız.



Şekil 15.8: Elektrik alan çizgileri daima iletken yüzeye dik olur.

Örnek 15.10

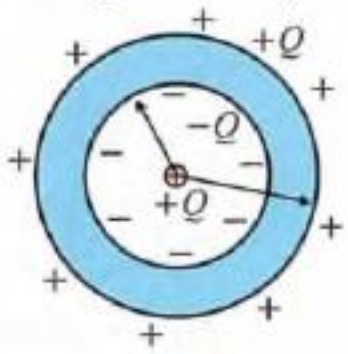
İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan yüksüz bir iletkenin boşluktaki merkezine noktasal bir $+Q$ yükü konulmuştur. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.



Çözüm

Bir iletkenin içinde daima $\vec{E} = 0$ olması gerektiğini öğrenmiştik. Buna göre, merkezdeki noktasal yükün iletken içindeki etkisini sıfırlamak için, kendi serbest elektronlarından $-Q$ miktarını dış yüzeyden iç yüzeye taşır ve şöyle bir dağılım oluşur.

Bu dağılıma göre, her bölgede Gauss yasası uygulanır:



Seçilen küresel Gauss yüzeylerinin alanı $A = 4\pi r^2$ alınıp hesap yapılır:

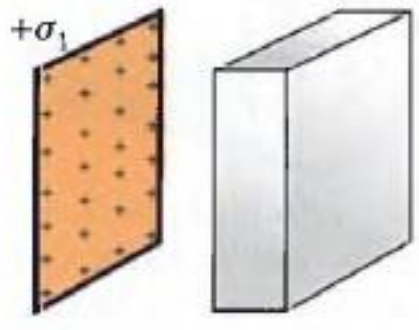
$r < a$ için: $E(4\pi r^2) = \dfrac{+Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{kQ}{r^2}$

$a < r < b$ için: $E(4\pi r^2) = \dfrac{+Q - Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = 0$

$r > b$ için: $E(4\pi r^2) = \dfrac{+Q-Q+Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{kQ}{r^2}$

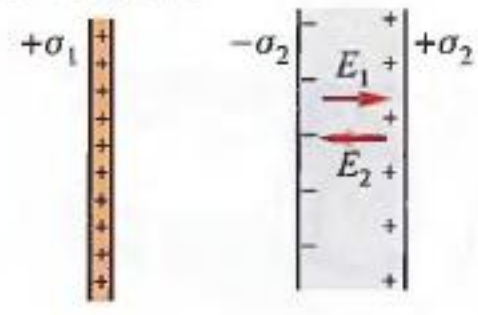
Örnek 15.11

Üzerinde düzgün σ_1 yüzey yük yoğunluğu taşıyan ince sonsuz yalıtkan bir düzlemin karşısına, kalın sonsuz bir iletken levha paralel olarak yerleştirilmiştir. İletken levha yüksüzdür. (a) İletken levhanın yüzlerinde oluşan yük yoğunluklarını bulun. (b) İki levha arasında elektrik alanı hesaplayın.



Çözüm

(a) Yüklü ince levhanın karşısına konulan iletken tabakanın iki yüzünde eşit ve zıt $\pm\sigma_2$ yüzey yük yoğunlukları oluşur. Örnek 15.5 ve 15.6 da, tek levhanın elektrik alanının $\sigma/2\varepsilon_0$, zıt yüklü çift levhanın ise σ/ε_0 olduğunu görmüştük. O halde, σ_2 yük yoğunluğu öyle olmalıdır ki iletken içinde toplam $\vec{E} = 0$ olsun:



İletken içinde bu iki vektörün yönleri dikkate alınarak toplam elektrik alan sıfıra eşitlenir:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Buradan σ_2 yükü bulunur:

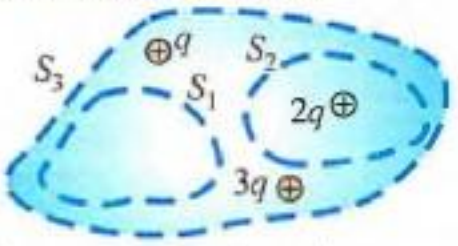
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

(b) Örnek 15.6 da, eşit ve zıt yüklü iki düzlemin dış bölgesinde elektrik alanının sıfır olduğunu gördük. O halde, bu problemde yalıtkan ile iletken arasındaki bölgede sadece yalıtkan düzlemin elektrik alanı bulunur:

$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

Problemler

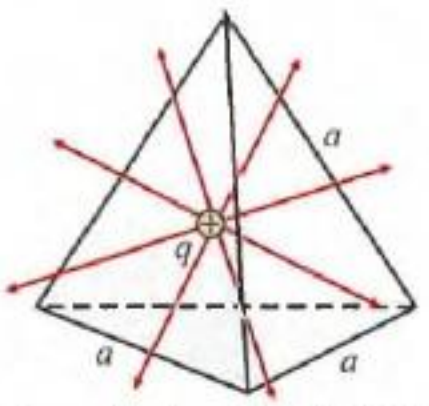
15.3 Gauss Yasası Uygulamaları



Problem 15.1

15.1 Şekilde gösterilen S_1, S_2, S_3 kapalı yüzeylerinden geçen toplam elektrik akılarını hesaplayın.

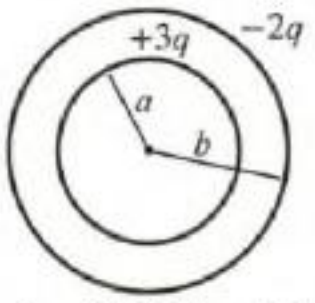
[C: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 2q/\varepsilon_0$, $\Phi_3 = 6q/\varepsilon_0$.]



Problem 15.2

15.2 Şekilde gösterilen düzgün dörtyüzlünün bir kenar uzunluğu a olup, merkezine $+q$ yükü yerleştirilmiştir. Dörtyüzlünün bir yüzünden geçen elektrik akısı ne kadar olur?

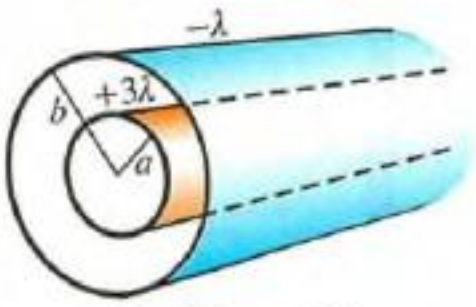
[C: $q/4\varepsilon_0$.]



Problem 15.3

15.3 Şekildeki eş-merkezli iki küresel kabuktan a yarıçaplı olanı üzerinde toplam $3q$ yükü, b yarıçaplı olanı üzerinde $-2q$ yükü düzgün olarak dağılmıştır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

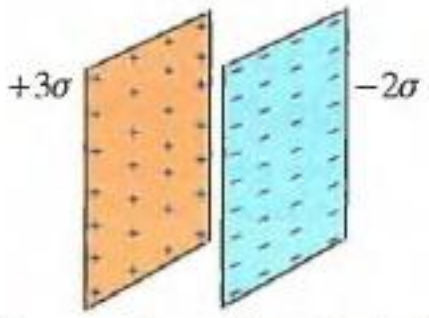
[C: $r<a$ için $E=0$, $a>r>b$ için $3kq/r^2$, $r>b$ için kq/r^2]



Problem 15.4

15.4 Şekildeki eş-eksenli iki sonsuz silindirik kabuktan a yarıçaplı olanı üzerinde toplam 3λ boyca yük yoğunluğu, b yarıçaplı olanı üzerinde $-\lambda$ boyca yük yoğunluğu vardır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

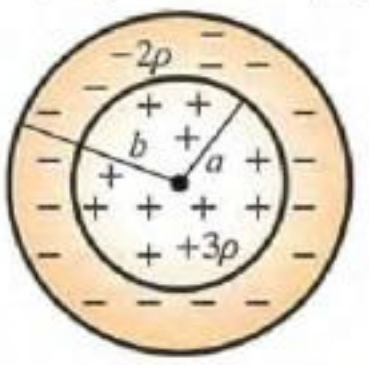
[C: $r<a$ için $E = 0$, $a>r>b$ için $6k\lambda/r$, $r>b$ için $4k\lambda/r$]



Problem 15.5

15.5 Üzerlerinde $+3\sigma$ ve -2σ yük yoğunlukları bulunan sonsuz iki levha birbirlerine paralel olarak yerleştirilmişlerdir. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

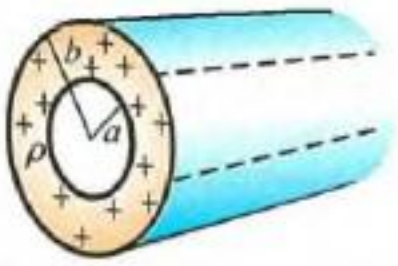
[C: Solda $\sigma/2\varepsilon_0$, ortada $5\sigma/2\varepsilon_0$, sağda $\sigma/2\varepsilon_0$.]



Problem 15.6

15.6 Şekilde a yarıçaplı küre hacmi içinde $+3\rho$ ve b yarıçaplı küre hacmi içinde -2ρ hacim yük yoğunluğu vardır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

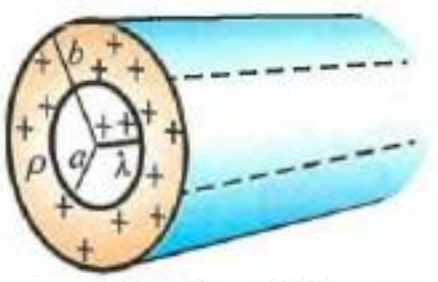
[C: $r < a$ için $E = \rho r/\varepsilon_0$, $a < r < b$ için $5\rho a^3/(3\varepsilon_0 r^2) - 2\rho r/3\varepsilon_0$, $r > b$ için $(5a^3 - 2b^3)\rho/(3\varepsilon_0 r^2)$.]



Problem 15.7

15.7 Şekilde iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan sonsuz silindirik bölge içinde ρ hacim yük yoğunluğu vardır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

[C: $r < a$ için 0, $a < r < b$ için $\rho(r-a)/\varepsilon_0 r$, $r > b$ için $\rho(b-a)/\varepsilon_0 r$.]



Problem 15.8

15.8 Şekilde λ boyca yük yoğunluğu taşıyan sonsuz telin çevresinde, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan silindirik bölgede ρ hacim yük yoğunluğu bulunmaktadır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

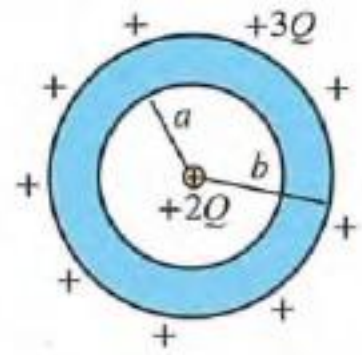
[C: $r<a$ için $2k\lambda/r$, $a<r<b$ için $2k\lambda/r+\rho(r^2-a^2)/(2\varepsilon_0 r)$, $r > b$ için $2k\lambda/r + \rho(b^2 - a^2)/(2\varepsilon_0 r)$.]

15.3 İletkenlerde Elektrik Alan



Problem 15.9

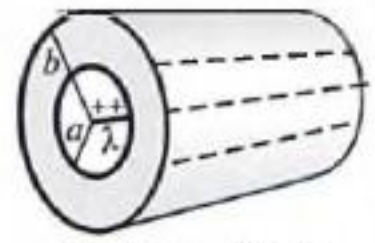
15.9 Düzgün bir $\vec{E}_0$ elektrik alanına dik olarak konulan kalın bir iletken levhanın iki yüzünde oluşan yük yoğunluğu ne kadardır? [C: $\sigma = \pm E_0/\varepsilon_0$.]



Problem 15.10

15.10 İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan bir iletkene $+3Q$ yük verilmiştir. İletkenin içindeki boşluğun merkezine $+2Q$ noktasal yükü konulmuştur. (a) İletkenin iç ve dış yüzeyindeki yük ne kadar olur? (b) Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

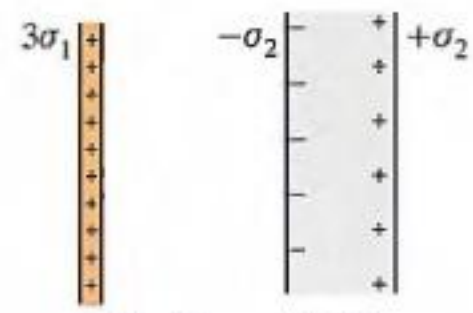
[C: (a) İçte $-2Q$, dışta $+5Q$, (b) $r < a$ için $2kQ/r^2$, $a < r < b$ için 0, $r > b$ için $5kQ/r^2$.]



Problem 15.11

15.11 Şekilde λ boyca yük yoğunluğu taşıyan sonsuz telin çevresinde, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan yüksüz iletken silindirik bölge bulunmaktadır. Her üç bölgede elektrik alanı hesaplayın.

[C: $r < a$ için $2k\lambda/r$, $a < r < b$ için 0, $r > b$ için $2k\lambda/r$.]



Problem 15.12

15.12 Şekilde gösterilen ince düzlem tabakada $3\sigma_1$ yüzey yük yoğunluğu vardır. Buna paralel olarak yüksüz ve kalın bir iletken tabaka konulmuştur. (a) Denge durumunda iletken tabakanın σ_2 yüzey yük yoğunluğu ne kadar olur? (b) Aradaki bölgede elektrik alan ne kadardır?

[C: (a) $\sigma_2 = \pm 3\sigma_1/2$, (b) $3\sigma_1/2\varepsilon_0$.]

16 ELEKTRİK POTANSİYEL



van de Graaff jeneratörü denilen bu metal küre, az bir yükle 1 milyon volt kadar çok yüksek potansiyel elde etmekte kullanılır. Vücudunuz yerden yalıtılmış olarak küreye dokunursanız, elektriklenen saç telleriniz birbirini iterek ayrışır. Niçin metallerin her noktası aynı potansiyelde olur? Elektrik potansiyelinin potansiyel enerjiyle ilişkisi nedir? Bu kavramlar elektriğin doğasını daha iyi anlamamıza yardımcı olacaklardır.

Buraya kadar olan incelememizde Coulomb kuvveti ve elektrik alanla ilgilendik. Bunlar vektörel nicelikler oldukları için bunlarla çalışmak zordur. Şimdi mekanikte geliştirdiğimiz iş ve enerji kavramlarını elektriksel kuvvetlere uyarlama zamanı geldi. Tanımlayacağımız elektrik potansiyel skaler bir nicelik olduğu için, çalışması ve yorumlaması çok daha kolay olacaktır.

16.1 ELEKTRİK POTANSİYEL

Elektrik Potansiyel Enerjisi

Değişken bir kuvvetin yaptığı işi Bölüm 5 de tanımlamıştık:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Elektrik alanın $\vec{E}$ olduğu bir yere konulan q yüküne etkiyen kuvveti de tekrar yazalım:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

O halde, bu q yükünü bir noktadan diğerine götürürken elektriksel kuvvetin yapacağı iş,

$$W = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

olur. Yine Bölüm 5 de gördüğümüz gibi, korunumlu kuvvetlere *karşı* yapılan iş, iki nokta arasındaki potansiyel enerji farkına eşit oluyordu (Denklem 5.12):

$$-\int_1^2 \vec{F}_{\text{kor}}\cdot d\vec{r} = U_2 - U_1 \qquad (16.1)$$

İki yük arasındaki Coulomb kuvvetinin de korunumlu olduğu kolayca görülebilir: Çünkü, Bölüm 5 te kütle çekim kuvveti, $F = GmM_E/r^2$ için bir potansiyel enerji tanımlanabileceğini göstermiştik. Bununla aynı yapıda olan Coulomb kuvveti,

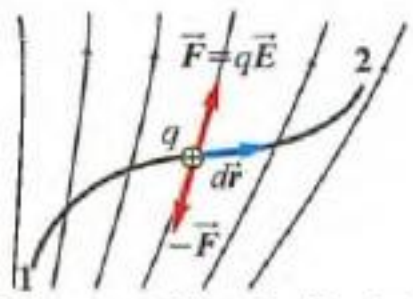
$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

benzer şekilde, r^2 ile ters orantılı olduğu için, yine korunumlu olacaktır.

O halde, elektriksel kuvvet için de bir **elektrik potansiyel enerjisi** yukardaki $\vec{F} = q\vec{E}$ kuvvetine karşı yapılan iş olarak şöyle tanımlanabilir:

$$U_2 - U_1 = -q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(Elektrik potansiyel enerjisi)} \qquad (16.2)$$

Potansiyel enerjiyi Mekanik konularında ayrıntılı olarak gördüğümüz için, üzerinde fazla durmadan, doğrudan potansiyel kavramına geçeceğiz.



Şekil 16.1: Elektrik alanda bir q yüküne etkiyen elektriksel kuvvete karşı yapılan iş.

Elektrik Potansiyel

Yukarda potansiyel enerji için bulduğumuz (16.2) ifadesinde dikkatimizi çeken bir nokta var: Elektrik potansiyel enerjisi hep q yükü ile orantılı olmaktadır. Örneğin, belli bir elektrik alanda 1 coulomb yükün potansiyel enerjisi 5 joule ise, 3 coulomb yükün potansiyel enerjisi bunun 3 katı, yani $3 \times 5 = 15$ joule olacaktır.

O halde, hep q yükünü formülde taşımanın bir yararı yoktur. Birim yükün potansiyel enerjisini bilirsek, her q yükünün oradaki potansiyel enerjisini hemen hesaplarız. İşte, birim yükün potansiyel enerjisine **elektrik potansiyel** adı verilir:

Tanım: Bir q yükü uzayda bir noktada U potansiyel enerjisine sahip ise, o noktada V ile gösterilen **elektrik potansiyel**,

$$\boxed{V = \frac{U}{q} \qquad \text{(elektrik potansiyel)}} \qquad (16.3)$$

olur. Diğer bir deyişle, birim yükün potansiyel enerjisine potansiyel denir. Bu potansiyel, tıpkı elektrik alan gibi, q yükü orada olmasa da vardır.

Bu tanımı tersinden kullanırsak, potansiyeli V olan bir noktaya konulan q yükünün sahip olacağı potansiyel enerji,

$$U = qV \qquad (16.4)$$

olacaktır. O halde, potansiyel enerji farkı için yukarda yazdığımız (16.2) denklemini q ile bölersek, iki nokta arasındaki potansiyel farkı ifadesini bulmuş oluruz:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(Elektrik potansiyel farkı)} \tag{16.5}$$

Daha açık bir deyişle, birim yükü bir yerden diğerine götürürken, elektriksel kuvvetlere karşı yapılan iş, bu iki nokta arasındaki potansiyel farkı olur.

Bu tanıma göre, şu iki basit kuralı hatırlamak yararlı olur:

- *Elektrik alan çizgileri yönünde gidildiğinde potansiyel azalır.*
- *Artı yüklere yaklaşırken potansiyel artar, eksi yüklere yaklaşırken azalır.*

Küçük Δr yerdeğiştirmesi için, küçük ΔV potansiyel farkı, integrale gerek kalmadan şöyle ifade edilir:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \tag{16.6}$$

Teknolojide potansiyel farkı yerine **gerilim** ve **voltaj** terimleri de kullanılır.

Potansiyel Birimi

Yukardaki tanıma göre, potansiyel birimi joule/coulomb (J/C) olup, buna **volt** adı verilir ve V sembolüyle gösterilir:

$$1 \text{ joule/coulomb} = 1 \text{ volt} = 1 \text{ V}$$

Elektrik alan birimi de Volt birimine bağlı olarak yeniden ifade edilebilir. Elektrik alan birimini daha önce (N/C) olarak tanımlamıştık. Fakat, $\Delta V = E\,\Delta r$ bağıntısında birimler karşılaştırılırsa,

$$1\ \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} = 1 \text{ V/m}$$

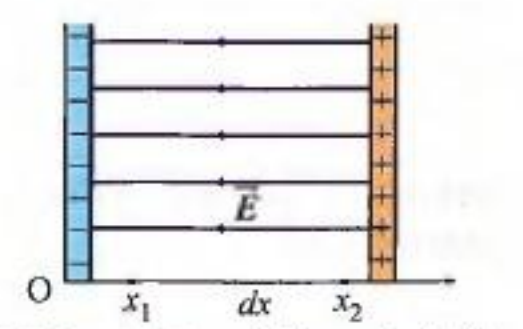
olur. Bu V/m birimi daha pratik olduğu için teknolojide kullanılır.

V elektrik potansiyelinin açık ifadesi $\vec{E}$ alanına bağlıdır. Şimdi bunu örnekler üzerinde görelim:

Sabit Elektrik Alanın Potansiyeli

Bölüm 15 de $\pm\sigma$ yüzey yük yoğunluğu taşıyan iki düzlem levha arasında sabit elektrik alan oluştuğunu görmüştük. Böyle iki levhayı x-ekseni boyunca yerleştirelim. Elektrik alan $-x$ yönünde olsun. (Böyle yerleştirmemizin sebebi, elektrik alana zıt yönde potansiyel artacağı için, bu artışın $+x$ yönünde olmasını istememizdir.) Bu elektrik alanda x_1 konumlu bir yer ile x_2 konumlu yer arasındaki potansiyel farkı Denklem 16.5 ile bulunur. E alanı sabit ve $-x$ yönünde olduğu için,

$$V(x_2) - V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} (-E)\,dx = -E\int_{x_1}^{x_2} dx = E\,(x_2 - x_1)$$



Şekil 16.2: Sabit elektrik alanda potansiyel farkı.

Bu integrali $x_1 = 0$ orijininden $x_2 = x$ noktasına kadar aldığımızı düşünürsek,

$$V(x) - V(0) = Ex$$

olur. Potansiyelin sıfır referans noktası keyfi olarak seçilebilir. $x = 0$ daki negatif levhayı sıfır potansiyelde seçersek, levhalar arasında potansiyelin değişimi şöyle bulunur:

$$V(x) = Ex \qquad \text{(sabit elektrik alanın potansiyeli)} \tag{16.7}$$

Pozitif levha $x = d$ uzaklıkta ise, potansiyeli $V = Ed$ olur.

Örnek 16.1

(a) *2 μC luk bir yük bir elektrik alana konulduğunda, 0.006 J potansiyel enerji kazanıyor. Bu noktanın potansiyeli ne kadardır?*

(b) *Bir proton, potansiyeli 1000 V olan bir yerdeki potansiyel enerjisinin tümünü kinetik enerjiye çevirdiğinde hızı ne kadar olur? (Protonun kütlesi $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg, yükü: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C)*

Çözüm

(a) Potansiyelin U potansiyel enerjisi cinsinden tanımı yazılır:

$$V = \frac{U}{q} = \frac{0.006}{2 \times 10^{-6}} = 3000 \text{ V}$$

(b) Potansiyelin V olduğu yerdeki protonun potansiyel enerjisi eV olur. Bunun tamamı kinetik enerjiye dönüşmüştür:

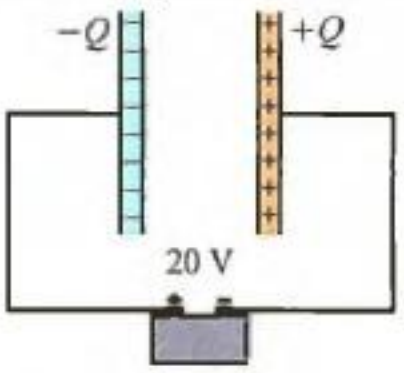
$$\tfrac{1}{2} m_p v^2 = eV \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}}$$

Verilen değerler yerine konup hız hesaplanır:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1000}{1.7 \times 10^{-27}}} = 4.3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Örnek 16.2

Aralarında 5 mm mesafe bulunan iki paralel iletken levha, 20 V luk bir akünün kutuplarına bağlanıyor. (a) Levhalar arasındaki elektrik alan şiddeti ne kadar olur? (b) Bir levhanın yüzölçümü 100 cm² ise, üzerinde ne kadar yük toplanır?



Çözüm

(a) ± yüklü iki paralel levha arasında sabit E alanı oluştuğunu biliyoruz. Ayrıca, sabit elektrik alanda, eksi yüklü levhadan itibaren potansiyelin nasıl değiştiğini (16.7) formülüyle bulmuştuk:

$$V = Ex$$

Artı yüklü levhanın $x = 0.005$ m olan konumunu yerine koyar ve elektrik alanı buluruz:

$$E = \frac{V}{x} = \frac{20}{0.005} = 4\,000 \text{V/m}$$

(b) Levhaların boyutları, aradaki mesafeye göre büyük ise, sonsuz düzlem yük gibi kabul edebiliriz:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Yükü Q ve yüzölçümü A olan bir levhanın yüzey yük yoğunluğu yazılır:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{(Q/A)}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad Q = \varepsilon_0 EA$$

Sayısal veriler yerine konulup bir levhanın yükü bulunur:

$$Q = 8.85 \times 10^{-12} \times 4000 \times 100 \times 10^{-4}$$

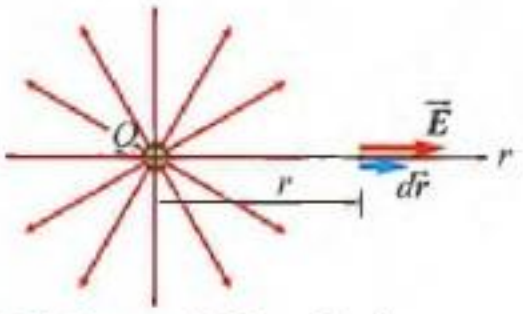
$$Q = 35 \times 10^{-11} \text{ C} = 0.35 \text{ nC}$$

16.2 NOKTASAL YÜK DAĞILIMLARININ POTANSİYELİ

Bir Noktasal Yükün Potansiyeli

Orijindeki pozitif bir Q yükünün elektrik alan ifadesini tekrar yazalım:

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$



Şekil 16.3: Noktasal yükün potansiyel farkı.

Q yükü pozitif olduğu için elektrik alan merkezden dışa doğru olur. Bu elektrik alanda r_1 konumlu bir noktayla r_2 konumlu bir nokta arasındaki potansiyel farkı yine Denklem 16.5 ile hesaplanır. Burada E alanı ile dr artışı aynı yönde olduğundan, skaler çarpım cebirsel $E\,dr$ çarpımı olarak yazılabilir:

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr$$

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{kQ}{r^2}\,dr = -kQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -kQ \left| -\frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2}$$

$$= kQ\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

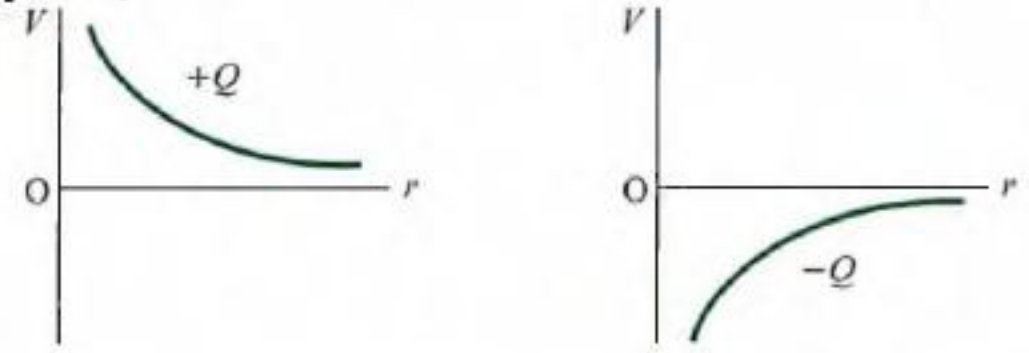
Bu integrali $r_1 = \infty$ dan $r_2 = r$ noktasına kadar aldığımızı düşünürsek,

$$V(r) - V(\infty) = \frac{kQ}{r}$$

olur. Potansiyelin sıfır referans noktası sonsuzda seçilirse, yani $V(\infty) = 0$ alınırsa, noktasal yükün potansiyel ifadesi bulunmuş olur:

$$\boxed{V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad \text{(Noktasal yükün potansiyeli)}} \tag{16.8}$$

Diğer bir deyişle, *bir noktanın potansiyeli, birim yükü sonsuzdan o noktaya getirmek için yapılan iştir.*



Şekil 16.4: + yüke yaklaştıkça potansiyel artar, eksi yüke yaklaştıkça potansiyel azalır.

Bu sonuca göre, + yükün potansiyeli pozitif, – yükün potansiyeli de negatif olur. Pozitif yüke yaklaştıkça potansiyel artar ve negatif yüke yaklaştıkça azalır.

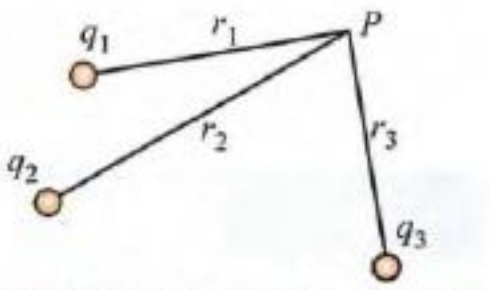
Çok Sayıda Noktasal Yükün Potansiyeli

Çok sayıda noktasal yükün elektrik alanını hesaplarken, yüklerin elektrik alanlarının vektörel olarak toplandığını görmüştük. Benzer şekilde, çok sayıda yükün bir P noktasındaki potansiyeli de, herbir yükün potansiyelinin *cebirsel toplamı* olacaktır.

$q_1, q_2 \ldots q_N$ yüklerinin bir P noktasında oluşturduğu potansiyeli, yukarıda bir noktasal yük için bulduğumuz (16.8) formülünü kullanarak şöyle yazabiliriz:

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \cdots + \frac{kq_N}{r_N} = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \tag{16.9}$$

Burada r_i uzaklıklığı q_i yükünün P noktasına uzaklığıdır.



Şekil 16.5: Çok sayıda noktasal yükün P noktasındaki potansiyeli.

Bir Yük Dağılımının Potansiyel Enerjisi

Şekil 16.6 da görüldüğü gibi, çok sayıda yükün belli konumlarda bulunduğu bir sistem gözönüne alalım. Bu sistemin potansiyel enerjisi ne kadardır? Yani, bu yükleri bu konumlara getirmek için ne kadar iş yapılmıştır?

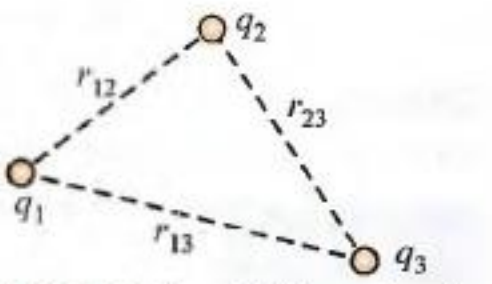
Bu sorunun cevabını adım adım oluşturalım. Önce q_1 yükünü sonsuzdan alıp getirelim. Bunun için bir iş yapmak gerekmez, dolayısıyla potansiyel enerjisi sıfırdır:

$$U_1 = 0$$

Sonra, q_2 yükünü alıp getirdiğimizde, daha önce gelmiş olan q_1 yükünün potansiyelini hissedecektir. Bu potansiyel $V = kq_1/r$ olduğundan, r_{12} uzaklığına konulan q_2 yükünün potansiyel enerjisi $U = qV$ formülünden hesaplanırsa,

$$U_2 = q_2 V_1 = q_2 \frac{kq_1}{r_{12}} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

olup, bu potansiyel enerji (q_1, q_2) yük sisteminin enerjisidir. Bunun q_2 ye ait olduğunu düşünmek yanlış olur, çünkü önce q_2 yükünü, sonra q_1 yükünü getirmiş de olabilirdik.



Şekil 16.6: Üç yükün potansiyel enerjisi.

Şimdi, q_3 yükünü ait olduğu konuma getirelim. Bu yük, daha önce gelmiş olan (q_1, q_2) yüklerinin potansiyelini hissederek gelecektir. Bulunduğu konumdaki potansiyel enerjisi,

$$U_3 = q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}\right) = k\left(\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

Şimdi burada durup, sistemin toplam potansiyel enerjisine bakalım:

$$U_{top} = U_1 + U_2 + U_3 = k\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right) \tag{16.10}$$

Bu sonuç 3 ten fazla yük için kolayca genelleştirilebilir: Herbir yükün diğerlerinin herbiriyle etkileşmesi alınıp toplanır. N sayıda yükün toplam enerjisi şöyle yazılır:

$$U_{top} = k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \tag{16.11}$$

Bu enerji, yükleri sonsuzdan bu konumlara getirmek için yapılan işin potansiyel enerjiye dönüşmüş halidir.

Böylece, enerji korunumu yasası elektrostatik problemlerine de uygulanabilir. Örneğin, noktasal bir q yükünün potansiyel enerjisi $U = qV$ bağıntısıyla potansiyel cinsinden yazılır:

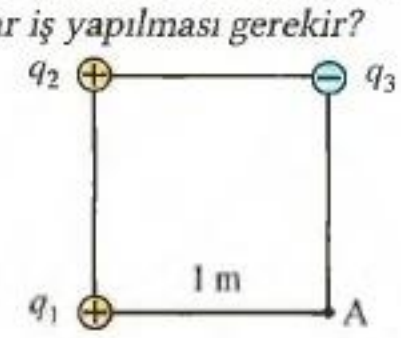
$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 \tag{16.12}$$

Örnek 16.3

$q_1 = 1\,\mu C$, $q_2 = 5\,\mu C$ ve $q_3 = -2\,\mu C$ yükleri, bir kenarı 1 m uzunlukta olan karenin üç köşesine şekildeki gibi konulmuşlardır.

(a) *A noktasındaki potansiyel ne kadar olur?*

(b) *$q_4 = +4\,\mu C$ yükü sonsuzdan A noktasına getirmek için ne kadar iş yapılması gerekir?*



Çözüm

(a) A noktasının potansiyeli, her üç yükün buradaki potansiyellerinin cebirsel toplamıdır:

$$V_A = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3}$$

$$V_A = 9\times10^9\left(\frac{1\times10^{-6}}{1} + \frac{5\times10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{-2\times10^{-6}}{1}\right)$$

$$V_A = 22\,800\ \text{V}.$$

Görüldüğü gibi, potansiyelle çalışmak vektörel elektrik alanlarla çalışmaktan daha kolaydır.

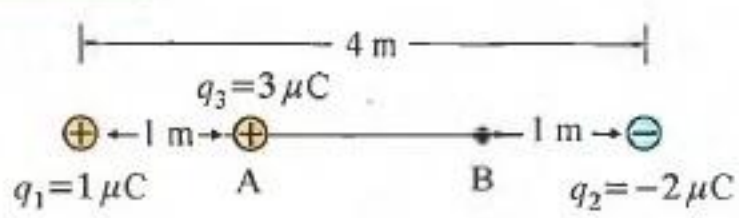
(b) Potansiyel enerjinin diğer bir tanımı da, bir q yükünü sonsuzdan A noktasına getirmek için yapılan iştir. O halde, q_4 yükünün A noktasındaki potansiyel enerjisi, o noktanın potansiyeli cinsinden şöyle yazılır:

$$U_A = q_4\,V_A$$

Değerler yerine konulup hesaplanır:

$$U_A = 4\times10^{-6}\times22800 = 0.09\,\text{J}$$

Örnek 16.4



Şekilde, aralarında 4 m mesafe bulunan $q_1 = 1\,\mu C$ ve $q_2 = -2\,\mu C$ yükleri, bulundukları yerlere tespit edilmişlerdir. Bu iki yük arasında $q_3 = 3\,\mu C$ yükü A noktasından ilk hızsız bırakılıyor. B noktasına vardığında hızı ne olur?

Çözüm

Bir q yükünün potansiyeli V olan bir noktadaki potansiyel enerjisi $U = qV$ dir. Böylece enerji korunumunu A ve B

noktaları için yazarız:

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + q_3V_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + q_3V_B$$

q_3 yükü A noktasından ilk hızsız bırakıldığı için, $v_A = 0$ alıp, v_B için çözeriz:

$$v_B = \sqrt{\frac{2q_3(V_A - V_B)}{m}}$$

Potansiyel farkını ayrı hesaplayalım:

$$V_A = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = 9\times10^9 \times \left(\frac{1\times10^{-6}}{1} - \frac{2\times10^{-6}}{3}\right)$$

$$V_A = 3000\,\text{V}$$

$$V_B = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = 9\times10^9 \times \left(\frac{1\times10^{-6}}{3} - \frac{2\times10^{-6}}{1}\right)$$

$$V_B = -15\,000\,\text{V}$$

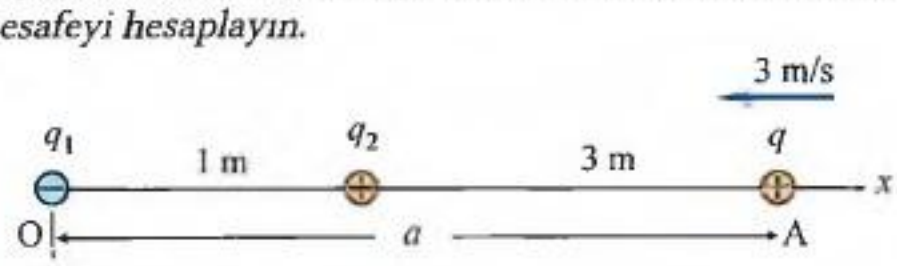
Buradan v_B hızı hesaplanır:

$$v_B = \sqrt{\frac{2\times3\times10^{-6}\,(3000 + 15000)}{0.001}}$$

$$v_B = 10\,\text{m/s}.$$

Örnek 16.5

$q_1 = -5\,\mu$C ve $q_2 = +2\,\mu$C yükleri, aralarında 1 m mesafe bulunacak şekilde sabitlenmişlerdir. Bu yüklerin uzantısı üzerinde ve q_2 den 3 m ötede bir A noktasından, kütlesi 1 g ve yükü $q = 1\,\mu$C olan üçüncü bir yük 3 m/s hızla, q_2 yönünde fırlatılıyor. q yükünün en fazla yaklaşabileceği mesafeyi hesaplayın.



Çözüm

q yükünün en fazla yaklaşabileceği B noktasında hızı sıfır olur: $v_B = 0$. Bu noktanın orijinden uzaklığına b diyelim. A ve B noktaları arasında enerji korunumu yazılır:

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

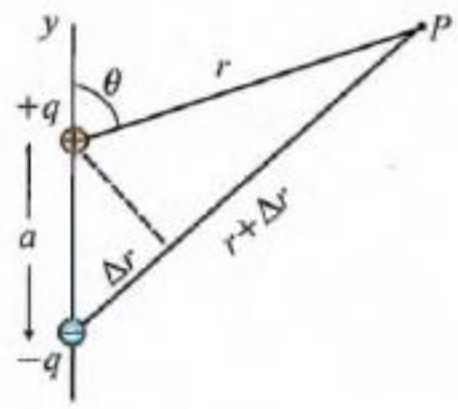
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + kq\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a-1}\right) = 0 + kq\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b-1}\right)$$

Verilen değerler yerine konulup b için çözülürse, sonuç şöyle bulunur:

$$b = 1.7\,\text{m}$$

Örnek 16.6

***Elektrik dipol.** Bir elektrik dipolün potansiyelini uzayın herhangi bir noktasında hesaplayın ve $r \gg a$ için limit değerini bulun.*



Çözüm

Elektrik dipolün elektrik alanını Örnek 14.8 de görmüştük. Şimdi, potansiyelini hesaplayalım.

Şekilde $\pm q$ yükleri y-ekseni boyunca, aralarında a mesafesi olacak şekilde yerleştirilmişlerdir. Bu dipolün $+q$ yükünden r uzaklıkta ve y-ekseniyle θ açısı yapan bir P noktasındaki elektrik potansiyeli hemen yazabiliriz:

$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r + \Delta r} = \frac{kq\,\Delta r}{r(r + \Delta r)}$$

Burada P noktasının $+q$ yüküne uzaklığını r ile, $-q$ yüküne uzaklığını $r + \Delta r$ ile gösterdik. Verilen her P noktası için bu ifade hesaplanarak potansiyel bulunabilir.

$r \gg a$ için yaklaşık olarak şu ifadeleri kullanırız:

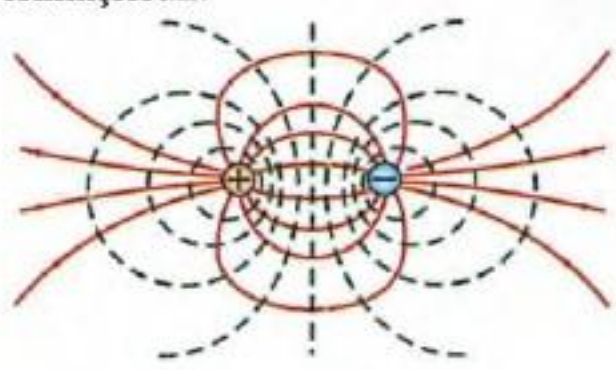
$$\Delta r \approx a\cos\theta$$

$$r(r + \Delta r) \approx r^2$$

Ayrıca, $p = qa$ çarpımı elektrik dipol momenti olarak tanımlanmıştı. Buna göre, dipolden çok uzaklarda potansiyel ifadesi şöyle oluşur:

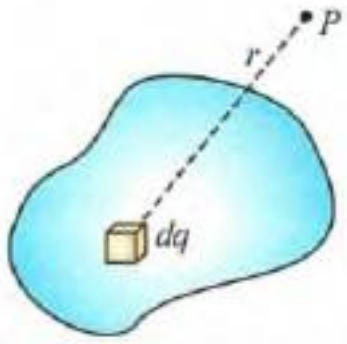
$$V = k\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Elektrik dipolün xy-düzlemindeki eşpotansiyel yüzeyleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Bu potansiyelin önemli özelliği r^2 ile azalıyor olmasıdır. Noktasal yükün potansiyeli r ile azalıyordu, dipol potansiyeli çok daha hızlı azalır. Dipolün elektrik alan çizgileri de, aynı şekil üzerinde, eşpotansiyel yüzeyleri dik kesecek şekilde, artı yükten eksi yüke doğru gösterilmişlerdir.



16.3 SÜREKLİ YÜK DAĞILIMLARININ POTANSİYELİ

Bir hacim, yüzey veya eğri üzerine sürekli dağılmış yükün potansiyeli integral yoluyla hesaplanır. Şekil 16.7 de görüldüğü gibi, yükün dağıldığı bölgede



Şekil 16.7: Küçük bir dq yükünün P noktasındaki potansiyele katkısı.

küçük bir dq yük elemanı gözönüne alırsak, bunun toplam potansiyele yapacağı küçük dV katkısı, noktasal yükün potansiyeli gibi olur:

$$dV = \frac{k\,dq}{r}$$

Tüm yük dağılımının potansiyeli, bu küçük katkıların $dq \to 0$ limitindeki toplamı, yani integrali olur:

$$V = k\int \frac{dq}{r} \qquad \text{(Sürekli dağılmış yükün potansiyeli} \qquad (16.13)$$

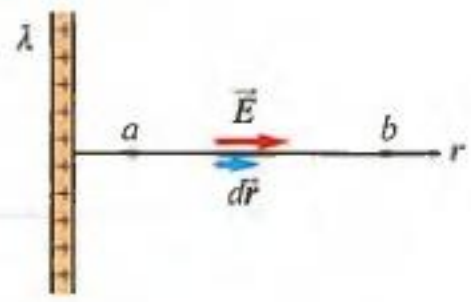
Buradaki dq elemanı, yük yoğunluğu cinsinden, dağılım durumuna bakılarak ifade edilir. Yük hacime, yüzeye veya eğri üzerine dağılmışsa, şu üç ifadeden biri şeklinde ifade edilir:

$$dq = \rho\,dV \qquad dq = \sigma\,dA \qquad dq = \lambda\,dL \qquad (16.14)$$

Ayrıca, potansiyelin $\vec{E}$ alanının integrali olarak tanımı (16.5 denklemi) kullanılarak da hesaplanabileceğini unutmayalım:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (16.15)$$

Örnek 16.7



Yüklü sonsuz tel. *Boyca yük yoğunluğu λ olan sonsuz bir telden a ve b uzaklıkta bulunan iki nokta arasındaki potansiyel farkını bulun.*

Çözüm

Yine elektrik alan bilindiği için, tanımdan gitmek daha kolaydır:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_b^a E\,dr$$

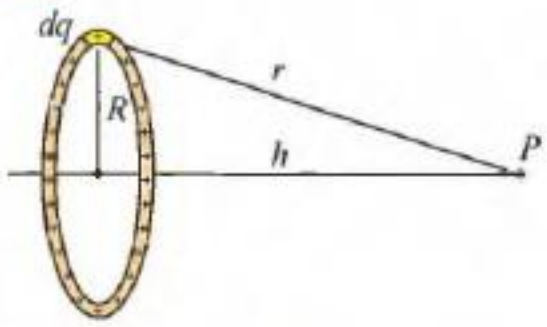
(Son ifadede integralin sınırları yerdeğiştirildi ve $\vec{E}$ ile $d\vec{r}$ nin paralel oluşu kullanıldı.) Sonsuz telin elektrik alanı Gauss yasasıyla Örnek 15.5 de $E = 2k\lambda/r$ olarak bulunmuştu. O sonucu kullanıp integrali alırız:

$$V_b - V_a = \int_b^a \frac{2k\lambda\,dr}{r} = 2k\lambda\Big|\ln r\Big|_b^a = 2k\lambda\,\ln(a/b)$$

Bu formülde $a < b$ olduğu için, aslında logaritma eksi işaretlidir, yani b noktasının potansiyeli daha küçük olur. O halde, a ve b nin yerlerini değiştirirsek pozitif bir ifade elde ederiz:

$$V_a - V_b = 2k\lambda\,\ln(b/a)$$

Örnek 16.8



Yüklü halka. *Üzerinde toplam Q yükü taşıyan R yarıçaplı halkanın merkezinden h uzaklıkta potansiyeli hesaplayın.*

Çözüm

Halka üzerinde küçük bir ds yayma tekabül eden küçük bir dq yükü seçelim. Bunun P noktasındaki potansiyele katkısını yazıp, tüm halka üzerindeki ds katkılarını toplar, yani integralini alırız:

$$V = k\int \frac{dq}{r} = k\int \frac{dq}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

İntegral içindeki payda, halkanın heryerinde aynı olduğu için, dışarı alınabilir:

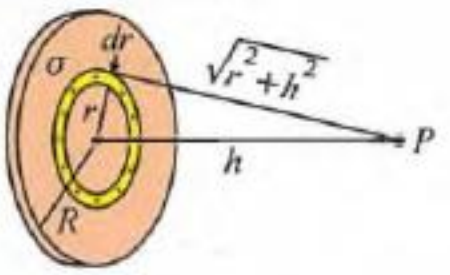
$$V = \frac{k}{\sqrt{R^2 + h^2}}\int dq$$

Kalan integral tüm yüklerin Q toplamı olur:

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Örnek 16.9

Yüklü disk. *Üzerinde sabit σ yüzey yük yoğunluğu bulunan R yarıçaplı diskin ekseni üzerinde h uzaklıktaki P noktasında potansiyeli hesaplayın.*



Çözüm

Disk üzerinde, yarıçapı $[r, r + dr]$ aralığında olan dr kalınlığında ince bir halka gözönüne alalım. Bu halka üzerindeki küçük yük miktarına dq dersek, önceki örneğe göre, bunun P noktasındaki potansiyele katkısı şöyle olur:

$$dV = \frac{k\,dq}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

dq yük miktarını bulmak için, küçük halka yüzölçümünü yüzey yük yoğunluğuyla çarparız:

$$dq = \sigma dA = \sigma\,(2\pi r\,dr)$$

Bu değer yerine konur ve tüm halkaların katkısı integral alınarak bulunur:

$$V = \pi k\sigma \int_0^R \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

Burada $u = r^2 + h^2$ değişkeni tanımlanırsa, $du = 2r\,dr$ olur. Bu u değişkeniyle integral basitleşir:

$$V = \pi k\sigma \int u^{-1/2}\,du = \pi k\sigma \left| 2\sqrt{r^2 + h^2} \right|_0^R$$

Sınır değerleri yerine konur ve sadeleştirilirse, diskin potansiyel ifadesi bulunmuş olur:

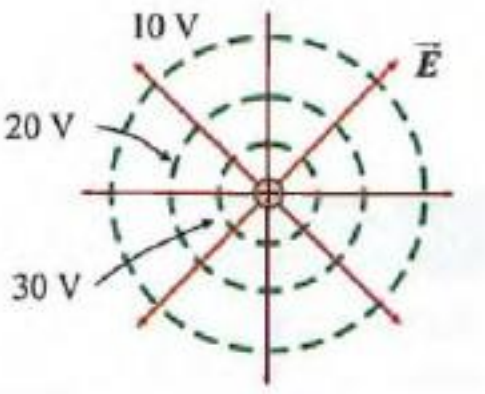
$$V = 2\pi k\sigma \left[\sqrt{h^2 + R^2} - h \right]$$

16.4 İLETKENLER VE EŞPOTANSİYEL YÜZEYLER

Potansiyelin aynı değerde olduğu yüzeylere **eşpotansiyel yüzey** denir. Bu, meteorolojide kullanılan eşsıcaklık eğrileri gibidir. Örnek olarak, orijinde bir q yükünün potansiyel ifadesine bakalım:

$$V = \frac{kq}{r}$$

Şekil 16.8 de görüldüğü gibi, noktasal yükün eşpotansiyel yüzeyleri, q yükünün merkezde bulunduğu küre yüzeyleridir. Keza, doğrusal bir telin eşpotansiyel yüzeyleri, ekseninde yüklü telin bulunduğu silindirik yüzeyler olurlar.



Şekil 16.8: Noktasal yük çevresinde eşpotansiyel yüzeyler küresel olurlar.

Eşpotansiyel yüzeylerin ilginç özellikleri vardır.

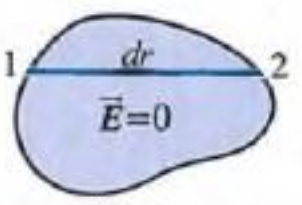
1. **İletken yüzeyleri eşpotansiyel yüzeylerdir.** Bunu göstermek için, potansiyel farkını tanımladığımız 16.5 denklemini yazalım:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

1 ve 2 noktaları iletken yüzeyi üzerinde olsun. Potansiyel farkı gidilen yoldan bağımsız olduğu için, Şekil 16.9 daki gibi, bu iki noktayı iletken içinden birbirine bağlayan yolu seçelim. Fakat, iletken içinde daima $\vec{E} = 0$ olduğunu görmüştük. O halde, bu integralin sağ tarafı sıfır olur:

$$\vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_2 = V_1$$

Diğer bir deyişle, bir q yükünü iletken yüzeyinde bir yerden diğerine götürmek için iş yapılmaz.

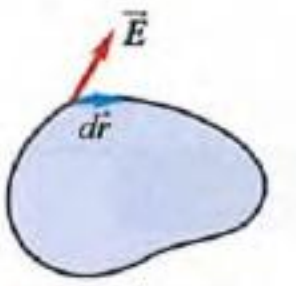


Şekil 16.9: İletken yüzeyinde iki nokta.

2. **Elektrik alan çizgileri daima eşpotansiyel yüzeylere dik olur.** Bunu görmek için, yine tanımı kullanırız. Eşpotansiyel yüzey üzerinde birbirine $d\vec{r}$ kadar çok yakın iki nokta, aynı potansiyelde olacağından, integral elemanı için,

$$V_1 = V_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{r}$$

olur. İletken yüzeyde elektrik alanın dik olacağım daha önce Gauss yasası ile ispat etmiştik.



Şekil 16.10: İletken yüzeyi üzerinde bir $d\vec{r}$ elemanı.

3. **Elektrik alan ile potansiyel arasındaki ilişki.** Potansiyeli V olan bir eşpotansiyel yüzeyden dik doğrultuda (yani, $\vec{E}$ yönünde) küçük bir $d\vec{r}$ adımı atarak, yeni bir eşpotansiyel yüzeye varmış olalım. $d\vec{r}$ adımı çok küçük olduğundan, bu yüzeyin potansiyeli küçük bir artışla $V + dV$ kadar olacaktır. $\vec{E}$ ve $d\vec{r}$ vektörleri aynı yönde olduğundan skaler çarpım doğrudan çarpıma dönüşür. Yukardaki integral tanımı bu küçük $d\vec{r}$ için yazarsak,

$$(V + dV) - V = -E\,dr$$

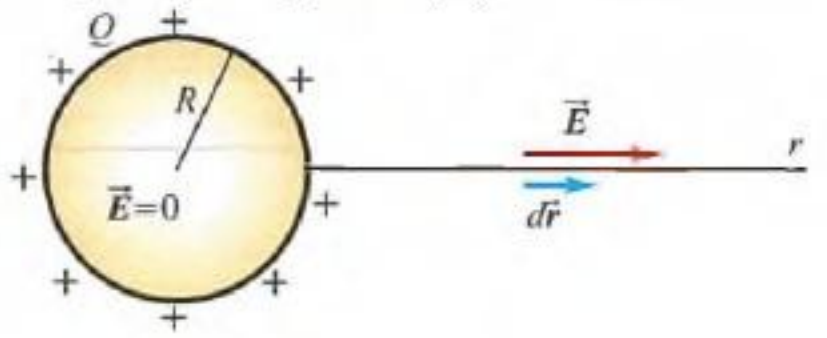
olur. Buradan elektrik alan ile potansiyel arasındaki ilişki çıkar:

$$E = -\frac{dV}{dr} \tag{16.16}$$

Eşpotansiyel yüzeye dik doğrultudaki potansiyel artış oranına **potansiyel gradyanı** denir. Meteorolojide de sıcaklık gradyanından bahsedilir, anlamı yine eşsıcaklık eğrisine dik doğrultuda, birim uzunluk başına sıcaklık artışıdır. O halde, **elektrik alan negatif potansiyel gradyanıdır.** Negatif işaretin anlamı iki türlü yorumlanabilir: Birincisi, elektrik alanı yönünde gidilirken potansiyel azalır. İkincisi, elektrik alan potansiyel gradyanına zıt yöndedir.

Örnek 16.10

İletken küre. *R yarıçaplı ve Q yüklü iletken kürenin dışında ve içinde potansiyeli hesaplayın.*



Çözüm

Bu problemde potansiyeli elektrik alanın integrali olarak hesaplamak daha kolaydır. (16.5) formülü yazılır:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Bu formülde $r_1 = \infty$ alınırsa, $V_1 = 0$ olur ve r noktasının potansiyeli $V_2 = V(r)$ yazılır:

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Eksi işaretten kurtulmak için integrali tersine çevirir, yani r den sonsuza gideriz:

$$V(r) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E\,dr$$

Burada $\vec{E}$ ile $d\vec{r}$ aynı yönde olduğundan, $\vec{E}\cdot d\vec{r} = E\,dr$ alındı.

İletken kürenin dışında ($r > R$), elektrik alan noktasal yükün $E = kQ/r^2$ alanı ile aynıdır:

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{kQ\,dr}{r^2} = \left|-\frac{kQ}{r}\right|_r^\infty$$

$$V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad (r > R)$$

İletken kürenin içinde ($r < R$) bir r noktası için, integrali iki parçada yazalım:

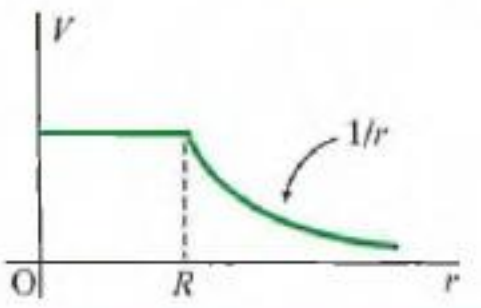
$$V(r) = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^R E\,dr + \int_R^\infty E\,dr$$

İletken içinde daima $E = 0$ olduğundan birinci integral sıfır verir. Diğeri, iletken dışındaki potansiyelin $r = R$ yüzeyinde aldığı değerdir:

$$V(r) = \frac{kQ}{R} \qquad (r < R)$$

İletken içinde potansiyel sabit olup, yüzeydeki değerine eşittir.

Sonuç olarak, iletken kürenin potansiyel grafiğini öğrenelim:



Örnek 16.11



Birbirinden uzakta bulunan iki iletken küreden, yarıçapı 1 m olanı üzerinde $q_1 = 1\,\mu C$ yükü ve yarıçapı 2 m olanı üzerinde $q_2 = 8\,\mu C$ yükü bulunmaktadır. Bu iki küre iletken

bir telle birleştiriliyorlar. Denge durumunda herbirinin yeni yükü ne kadar olur?

Çözüm

İletken küreler telle birleştirildikten sonra komple bir iletken oluştururlar ve dolayısıyla potansiyelleri eşit olur.

Küreler birbirinden uzakta olduğundan, herbirinin yüzeyindeki potansiyel, sadece kendi yükünden kaynaklanır.

Kürelerin yeni yüklerine q_1' ve q_2' diyelim. Bu yeni yükler şu iki şartı sağlamalıdırlar:

Yük korunumu: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = 1 + 8$

$$q_1' + q_2' = 9\,\mu C$$

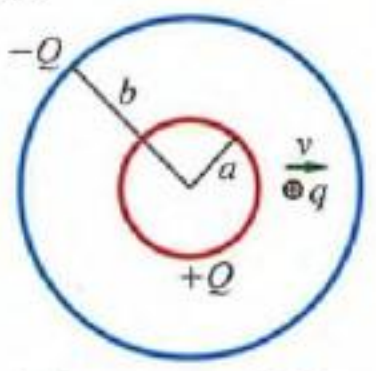
Potansiyellerin eşitliği: $\dfrac{q_1'}{r_1} = \dfrac{q_2'}{r_2} \rightarrow \dfrac{q_1'}{1} = \dfrac{q_2'}{2}$

Bu iki denklem çözülerek yükler bulunur:

$$q_1' = 3\,\mu C\,, \quad q_2' = 6\,\mu C$$

Örnek 16.12

Eş merkezli iki iletken küreden $a = 1$ m yarıçaplı olanı üzerinde $Q = +1\,\mu C$, $b = 2$ m yarıçaplı olanı üzerinde $-Q$ yükü bulunmaktadır.



(a) *İki küre arasındaki potansiyel farkını hesaplayın.*

(b) *Kütlesi 1 g olan $q = 2\,\mu C$ luk noktasal bir yük, artı yüklü küre yakınında ilk hızsız bırakılıyor. Eksi yüklü küreye vardığında hızı ne kadar olur?*

Çözüm

(a) İletken kürenin içinde elektrik alan sıfır, dışında ise noktasal yükün alanı gibi olur. Buna göre, küreler arasındaki potansiyel farkı, içteki $+Q$ yüklü kürenin a ve b uzaklıklarındaki potansiyellerinin farkı olur:

$$V_a - V_b = kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$V_a - V_b = 9 \times 10^{9-6}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 4500\ \text{V}$$

(b) q yükünün potansiyel enerjisi $U = qV$ olarak yazılır:

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

$$v = \sqrt{\frac{2q(V_A - V_B)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^{-6} \times 4500}{0.001}}$$

$$v = 4.2\ \text{m/s}$$

Test

1. 2 C yükü bir noktaya konulduğunda 10 J potansiyel enerji kazanıyorsa, o noktanın potansiyeli ne kadardır?
   (a) 5 V (b) 10 V (c) 20 V (d) 40 V

2. Paralel iki iletken levha arasındaki mesafe 2 m ve potansiyel farkı 10 V ise, elektrik alan ne kadardır?
   (a) 5 V/m (b) 10 V/m (c) 20 V/m (d) 40 V/m

3. Üç iletken küreden A küresinin yarıçapı 1 m ve yükü $1\,\mu C$, B küresinin yarıçapı 2 m ve yükü $3\,\mu C$, C küresinin yarıçapı 3 m ve yükü $5\,\mu C$ dir. Hangi kürenin potansiyeli daha büyük olur?
   (a) A (b) B (c) C (d) Eşit

4. Potansiyelleri eşit olan iki iletken küreden, yarıçapı 1 m olanın üzerinde $4\,\mu C$ yük varsa, yarıçapı 2 m olanı üzerinde ne kadar yük olur?
   (a) $1\,\mu C$ (b) $2\,\mu C$ (c) $4\,\mu C$ (d) $8\,\mu C$

5. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Elektronlar potansiyeli yüksek olan yere gitmek isterler.
   II. Protonlar potansiyeli yüksek olan yere gitmek isterler.
   III. Elektronlar potansiyeli alçak olan yere gitmek isterler.
   IV. Protonlar potansiyeli alçak olan yere gitmek isterler.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) I ve IV

6. $+Q$ ve $-Q$ noktasal yükleri arasında orta noktada hangisi doğrudur?
   (a) $E = 0$ (b) $V = 0$ (c) $E = 2kQ/r^2$ (d) $V = 2kQ/r$

7. Aşağıdakilerden hangileri potansiyel tanımına uygundur?
   I. Birim yükün potansiyel enerjisi.
   II. Birim yükü sonsuzdan o noktaya getirmek için yapılan iş.
   III. Elektrik alanın yükle çarpımı.
   IV. Birim yükün elektrik alanı.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) I ve IV

8. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. İletken içinde potansiyel sıfırdır.
   II. İletken içinde potansiyel sabittir.
   III. İletken içinde potansiyel yüzeydekiyle aynıdır.

IV. İletken içinde potansiyel sonsuzdur.

(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) I ve IV

9. Potansiyelin V olduğu bir yerde bir q yükünün potansiyel enerjisi hangisidir?

(a) V/q (b) qV (c) q^2V (d) $qV/2$

10. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
I. Artı yüke yaklaştıkça potansiyel artar.
II. Eksi yüke yaklaştıkça potansiyel artar.
III. Artı yüke yaklaştıkça potansiyel azalır.
IV. Eksi yüke yaklaştıkça potansiyel azalır.

(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve IV (d) I ve IV

11. +1 C luk bir yük, potansiyelin 50 V olduğu bir noktadan 20 V olan bir noktaya yerdeğiştirdiğinde, kinetik enerjisi ne kadar değişir?

(a) 0 (b) −30 J (c) +30 J (d) +70 J

12. İki yükten oluşan şu sistemler arasında, hangisinin potansiyel enerjisi daha büyüktür?
A: $q_1 = q_2 = 1$ C ve aralarındaki uzaklık 1 m,
B: $q_1 = q_2 = 2$ C ve aralarındaki uzaklık 4 m,
C: $q_1 = q_2 = 3$ C ve aralarındaki uzaklık 3 m,

(a) A (b) B (c) C (d) Aynı

13. Bir bölgede potansiyel sabit ise, elektrik alan ne olur?

(a) 0 (b) Sabit (c) Lineer artar.

14. Bir bölgede elektrik alan sabit ise, potansiyel ne olur?

(a) 0 (b) Sabit (c) Lineer artar.

15. Noktasal yükün potansiyel ifadesi hangisidir?

(a) kq/r^2 (b) kq/r (c) kq^2/r^2 (d) kq^2/r

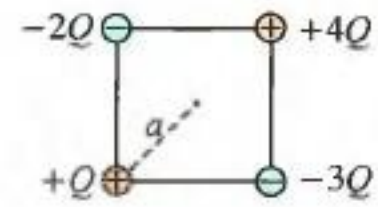
16. Bir iletken kürenin yarıçapı 2 katına, yükü 4 katına çıkarıldığında, potansiyeli kaç katına çıkar?

(a) 2 (b) 4 (c) 1/2 (d) Aynı

17. Eşpotansiyel yüzeyler için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
I. İletkenler eşpotansiyel yüzeylerdir.
II. Yalıtkanlar eşpotansiyel yüzeylerdir.
III. Elektrik alan eşpotansiyel yüzeye diktir.
IV. Elektrik alan eşpotansiyel yüzeye teğettir.

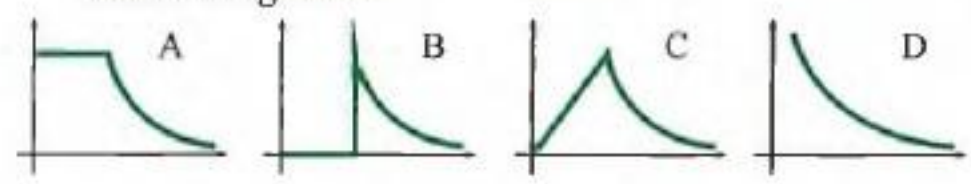
(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve IV (d) I ve IV

18. Şekildeki karenin köşelerinde gösterilen yüklerin, kare merkezi P noktasındaki toplam potansiyeli ne kadardır?



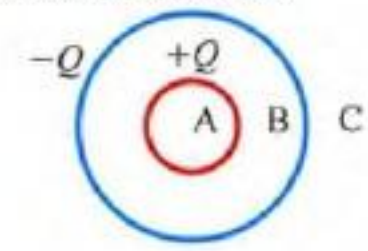
(a) 0 (b) $3kQ/a$ (c) $5kQ/a$ (d) $10kQ/a$

19. Yüklü iletken kürenin potansiyeli aşağıdaki şekildekilerden hangisidir?



(a) A (b) B (c) C (d) D

20. Eşmerkezli ve $\pm Q$ yüklü iki iletken kürenin hangi bölgelerinde potansiyel sabit olur?



(a) A ve C (b) A ve B (c) Sadece A (d) Sadece C

Problemler

16.1 Elektrik Potansiyel

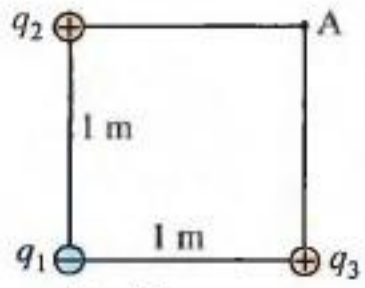
16.1 (a) 3 μC luk bir yük, potansiyeli 500 kV olan bir noktaya konulduğunda potansiyel enerjisi ne kadar olur? (b) Hareketsiz bir elektron, ınetal bir levhaya doğru ivmeleniyor ve 6×10^6 m/s hızla levhaya çarpıyor. Levhanın potansiyeli ne kadardır? (Elektronun kütlesi $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, yükü: $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.) [C: (a) 1.5 J, (b) 102 V.]

16.2 Aralarında 2 mm mesafe bulunan iki paralel iletken levha, 24 V luk bir bataryanın kutuplarına bağlanıyor. (a) Levhalar arasındaki elektrik alan şiddeti ne kadar olur? (b) Levhaların yüzölçümü 100 cm^2 ise, herbir levhada toplanan yük ne kadar olur? [C: (a) 12 kV/m, (b) 1.1 nC.]

16.2 Noktasal Yük Dağılımlarının Potansiyeli

16.3 $q = 5$ nC luk noktasal bir yükten hangi uzaklıkta potansiyel 30 V olur? [C: 1.5 m.]

16.4 Bir noktasal yükten belli bir uzaklıkta potansiyel 100 V ve elektrik alan 80 V/m dir. Yükün miktarını ve bu uzaklığı hesaplayın. [C: $R = 1.25$ m, $q = 140\,\mu$C.]

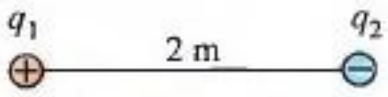


Problem 16.5

16.5 $q_1 = -1\,\mu C$, $q_2 = 2\,\mu C$ ve $q_3 = 3\,\mu C$ olmak üzere, bir kenarı 1 m uzunlukta olan karenin üç köşesine şekildeki yükler konulmuştur. (a) A noktasındaki potansiyel ne kadar olur? (b) $q_4 = +4\,\mu C$ yükü sonsuzdan A noktasına getirmek için ne kadar iş yapılması gerekir?

[C: (a) 39 kV, (b) 0.15 J.]

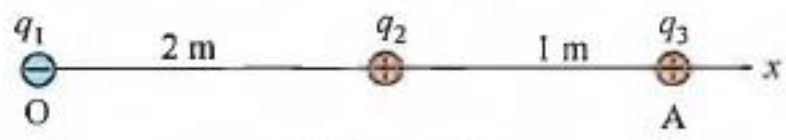
16.6 Yarıçapı 1 m olan bir dairenin çevresine eşit aralıklarla, 6 adet özdeş $2\,\mu C$ yükleri konulmuştur? Bu yükleri sonsuzdan bu konumlara getirmek için yapılan iş ne kadardır? [C: 0.54 J.]



Problem 16.7

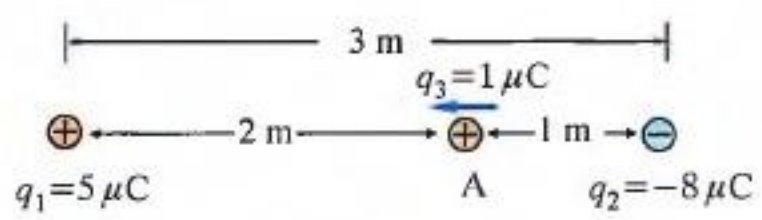
16.7 Şekildeki $q_1 = 4\,\mu C$ ve $q_2 = -1\,\mu C$ yükleri arasındaki mesafe 2 m dir. Potansiyelin sıfır olduğu nokta neresidir? [C: q_1 den 1.6 m sağda.]

16.8 Kütleleri $m_1 = m_2 = 1$ g ve yükleri $q_1 = q_2 = 5\,\mu C$ olan özdeş iki yük, aralarındaki uzaklık 2 m iken serbest bırakılıyorlar. Uzaklık iki katına çıktığında hızları ne kadar olur? [C: 7.5 m/s.]



Problem 16.9

16.9 Şekildeki $q_1 = -1\,\mu C$ ve $q_2 = +2\,\mu C$ yükleri, aralarında 2 m mesafe bulunacak şekilde sabitlenmişlerdir. Bu yüklerin uzantısı üzerinde ve q_2 den 1 m uzakta bir A noktasından, kütlesi 1 g ve yükü $q = 3\,\mu C$ olan üçüncü bir yük ilk hızsız bırakılıyor. Sonsuza vardığında hızı ne kadar olur? [C: 9.5 m/s.]

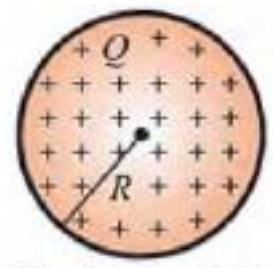


Problem 16.10

16.10 Şekilde, aralarında 3 m mesafe bulunan $q_1 = 5\,\mu C$ ve $q_2 = -8\,\mu C$ yükleri, bulundukları yere tespit edilmişlerdir. Bu iki yük arasında $q_3 = 1\,\mu C$ yükü A noktasından 10 m/s hızla q_1 yönünde fırlatılıyor. q_1 yüküne en fazla ne kadar yaklaşır? [C: 1.1 m.]

16.3 Sürekli Yük Dağılımlarının Potansiyeli

16.11 Yarıçapı 1 mm olan bir yağmur damlasının yüzeyinde potansiyel 400 V tur. (a) Damlanın yükü ne kadardır? (b) Böyle iki damla birleştiğinde, yeni damlanın yüzeyindeki potansiyel ne kadar olur? [C: (a) 4.4×10^{-11} C, (b) 635 V.]



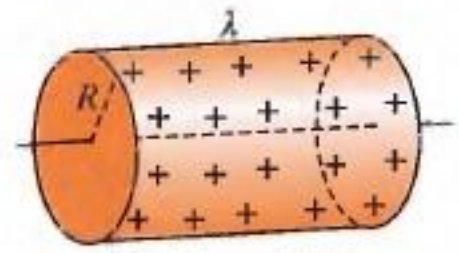
Problem 16.12

16.12 Hacmi içinde toplam Q yükü düzgün dağılmış R yarıçaplı kürenin dışında ve içinde elektrik alan Gauss yasasıyla şöyle bulunmuştu:

$$E = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2} & (r > R) \\ \dfrac{kQ}{R^3} r & (r < R) \end{cases}$$

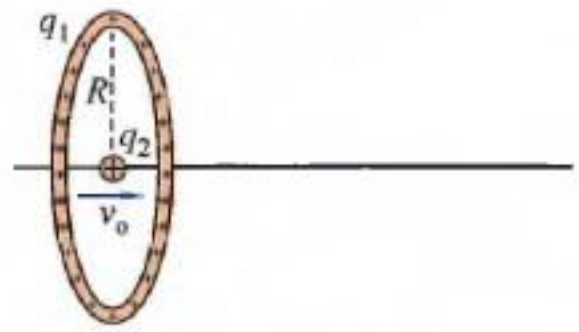
Küre dışında ve içinde potansiyeli hesaplayın.

[C: $r > r$ için kQ/r, $r < R$ için $kQ(3 - r^2/R^2)/(2R)$.]



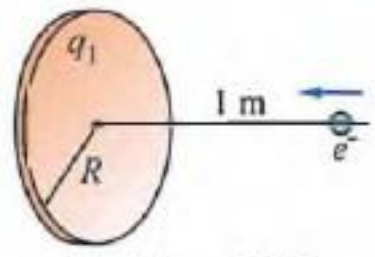
Problem 16.13

16.13 R yarıçaplı sonsuz silindir şeklindeki bir iletken yüzeyinde λ boyca yük yoğunluğu vardır. Küre yüzeyi ($r = R$) ile dışta r uzaklığındaki bir nokta arasında potansiyel farkını hesaplayın. [C: $V_R - V_r = 2k\lambda \ln(r/R)$.]



Problem 16.14

16.14 Üzerinde toplam $q_1 = 1\,\mu C$ yükü taşıyan $R = 1$ m yarıçaplı halkanın merkezinden, $q_2 = 2\,\mu C$ luk noktasal bir yük, halka ekseni boyunca $v_0 = 10$ m/s hızla fırlatılıyor. Sonsuza vardığında hızı ne kadar olur? (*Yol gösterme:* Örnek 16.8 in sonucunu kullanın.) [C: $v_\infty = 12$ m/s.]



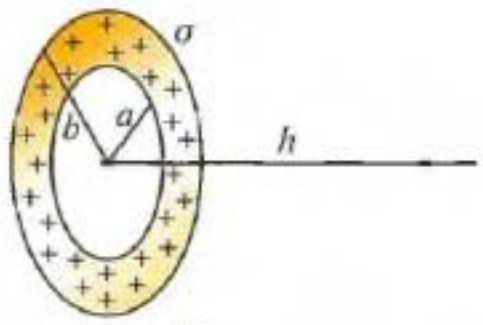
Problem 16.15

16.15 Üzerinde toplam $q_1 = 1\,\mu C$ yükü düzgün dağılmış olan $R = 1$ m yarıçaplı diskin ekseni üzerinde $h = 1$ uzaklıktan bir elektron ilk hızsız bırakılıyor. Diske hangi hızla çarpar? (*Yol gösterme:* Örnek 16.9 un sonucunu kullanın.)

[C: $v = 61\,000$ m/s.]

16.16 Örnek 16.9 da σ yüzey yükü taşıyan r yarıçaplı diskin ekseni üzerinde h uzaklıkta potansiyel ifadesi şöyle bulunmuştu:

$$V = 2\pi k\sigma \left[\sqrt{h^2 + R^2} - h \right]$$



Problem 16.17

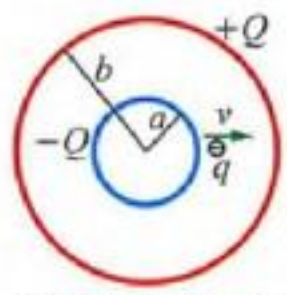
Bu sonucu kullanarak, Şekildeki σ yüzey yükü taşıyan, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan içi boş diskin ekseni üzerinde h uzaklıkta potansiyeli hesaplayın. (*Yol gösterme:* Tekrar integral almaya gerek yoktur. Dolu diskin ortasında $-\sigma$ yüzey yüklü ikinci bir disk bulunduğunu düşünün.)

[C: $V = 2\pi k\sigma\left[\sqrt{b^2+h^2} - \sqrt{a^2+h^2}\right]$.]

16.17 Aynı bir eksen üzerinde ve aralarında $2R$ uzaklığı bulunan R yarıçaplı özdeş iki disk üzerinde $\pm Q$ yükleri bulunmaktadır. Disklerden eşit uzaklıktaki noktada potansiyel ifadesini bulun. [C: $V = 2kQ/R$.]

16.4 İletkenler ve Eşpotansiyel Yüzeyler

16.18 Yarıçapı 3 m olan iletken bir küre 100 V luk potansiyelde tutulmaktadır. Bu küreden hangi uzaklıkta potansiyel 50 V değerine düşer? [C: 1.5 m.]



Problem 16.19

16.19 Eşmerkezli iki iletken küreden $a = 1$ m yarıçaplı olanı üzerinde $-4\,\mu$C, $b = 2$ m yarıçaplı olanı üzerinde $+4\,\mu$C yükü bulunmaktadır. Kütlesi 1 g olan $q = -1\,\mu$C luk noktasal bir yük, eksi yüklü küre yakınında ilk hızsız bırakılıyor. Artı yüklü küreye vardığında hızı ne kadar olur?

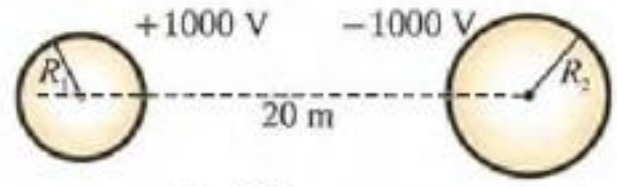
[C: 6 m/s.]



Problem 16.20

16.20 Birbirinden uzakta bulunan özdeş iki iletken kürenin yarıçapları 1 m dir. Bu iki küre birbirine iletken bir telle birleştirilip 90 kV potansiyele çıkarılıyorlar. (a) Herbir küre üzerindeki yük ne kadar olur? (b) Küreler birbirine bağlı iken, ikinci kürenin yarıçapı 2 m ye çıkarılıyor. Kürelerin yeni yükleri ne kadar olur? (c) Kürelerin yeni potansiyeli ne kadardır?

[C: (a) $q_1 = q_2 = 10\,\mu$C, (b) $q_1 = 6.7\,\mu$C, $q_2 = 13.3\,\mu$C, (c) 60 kV.]



Problem 16.21

16.21 Merkezleri arasında $d = 20$ m mesafe bulunan iki iletken küreden, birincisinin yarıçapı $R_1 = 1$ m ve potansiyeli 1000 V, ikincisinin yarıçapı $R_2 = 2$ m ve potansiyeli −1000 V dur. Herbir küre üzerindeki yükü hesaplayın. (*Yol gösterme*: Herbir kürenin toplam potansiyeli, kendisinin ve diğer kürenin d uzaklıktaki potansiyelinin toplamıdır. Küreler birbirinden çok uzakta olduğu için, yüklerin küre yüzeylerinde düzgün dağıldığını varsayın.)

[C: $q_1 = +0.13\,\mu$C, $q_2 = -0.35\,\mu$C.)

17

KONDANSATÖRLER VE DİELEKTRİKLER



New Mexico'daki Sandia Laboratuvarı'nda *Z makinası* çalıştığında, yüzlerce kondansatörden aynı anda boşalan yükler, şimşekler çakarak, 0.1 milisaniye gibi kısa bir zaman için, Dünya'da harcanan elektrik gücünün 80 katını üretirler. Böylece, maddenin çok yüksek sıcaklık ve basınçtaki özellikleri incelenir.

Kondansatörler ne işe yarar? Yalıtkan (dielektrik) maddeler kullanarak özelliklerini nasıl değiştirebiliriz?

Önceki bölümlerde elektriksel kuvvetlerin temel özelliklerini inceledik. Şimdi, elektriğin teknolojik uygulamalarına başlayabiliriz. İlk olarak, yük ve elektrik enerjisi depolamakta kullanılan kondansatör (sığaç, kapasitör) adlı devre elemanını öğreneceğiz. Bugün elektrik teknolojisinde, otomobillerin bujilerinde, radyo ve televizyonlarda, fotoğraf makinası flaşlarında, nanoteknolojide kondansatörler yaygın olarak kullanılmaktadırlar.

Bu bölümde ayrıca, elektrik alan içine konulan maddenin davranışına daha yakından bakacağız. Bu özelliklerin enerji ve yük depolamada kondansatörlerin performansını nasıl değiştirebileceğini göreceğiz.

17.1 SIĞA

Boşlukta veya yalıtkan bir ortamda, eşit ve zıt $\pm Q$ yükleri taşıyan iki iletkenden oluşan sisteme **kondansatör** adı verilir. Kondansatörlerin başlıca işlevi, belli bir potansiyel farkı altında yük depolamaktır. Geometrik şekilleri ne olursa olsun, tüm kondansatörlerin depoladığı $\pm Q$ yükü, uygulanan V potansiyel farkına orantılı olmaktadır:

$$Q = C\,V$$

C orantı katsayısına **sığa** adı verilir. İletken üzerindeki yükün uygulanan potansiyel farkına oranıdır:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} \qquad \text{(sığa)}} \tag{17.1}$$



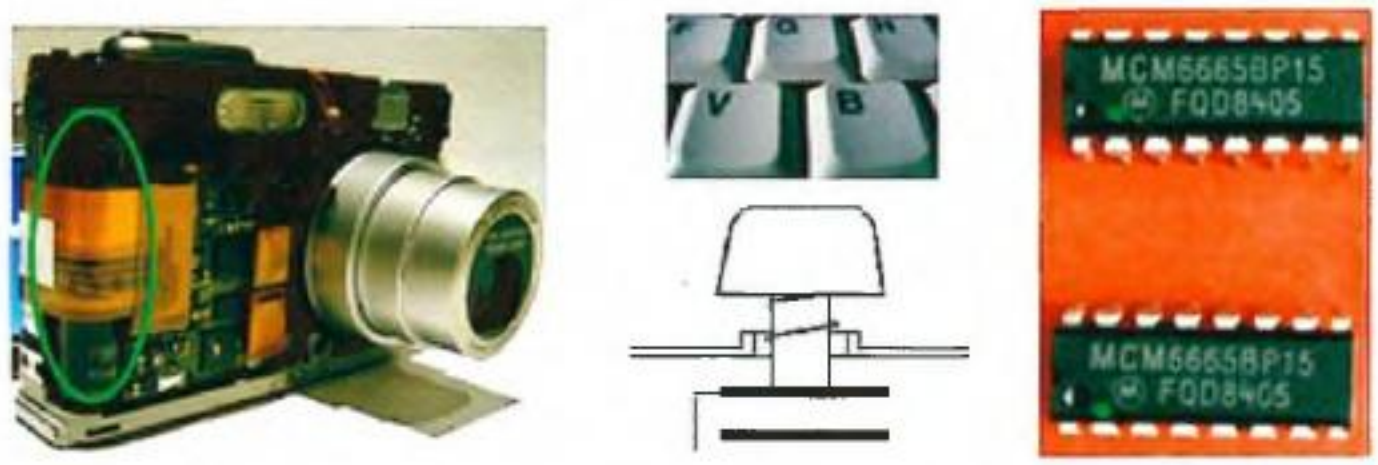
Şekil 17.1: Çeşitli kondansatörler.

(Burada, iki iletken arasındaki potansiyel farkını aslında $(V_2 - V_1)$ veya ΔV olarak göstermek gerekirdi. Fakat, bu bölümde V kullanmak bir karışıklığa yol açmayacaktır.)

Sığa, iletkenlerin geometrik şekline ve aradaki yalıtkan ortamın özelliklerine bağlıdır. Akılda tutmak için şöyle düşünülmelidir: *Sığası büyük olan kondansatör daha çok yük toplar.*

Sığa birimi coulomb/volt (C/V) olup, büyük bilim adamı Michael Faraday'ın anısına **farad** (F) adı verilmiştir. Farad birimi çok büyük olduğu için, pratikte askatları kullanılır:

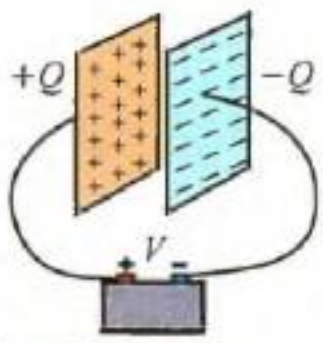
$$1 \text{ nanofarad (nF)} = 10^{-9} \text{ F}$$
$$1 \text{ pikofarad (pF)} = 10^{-12} \text{ F}$$



Şekil 17.2: Teknolojide kondansatörün yeri: Fotoğraf makinası flaşını besleyen kondansatör, klavye tuşları altındaki kondansatör, dinamik hafıza (DRAM).

Düzlem Kondansatör

Birbirine paralel iki düzlem iletken levha gözönüne alalım. Levhaların herbirinin yüzölçümü A ve aralarındaki mesafe d olsun. Bu levhalar V potansiyel farkı üreten bir bataryanın $\pm$ kutuplarına bağlandığında, üzerlerinde eşit ve zıt $\pm Q$ yükleri toplanacaktır.



Şekil 17.3: Bataryaya bağlı düzlem kondansatör.

Levhaların boyutları d mesafesine göre çok büyük ise, bunları yaklaşık olarak sonsuz düzlem gibi kabul edebiliriz. Buna göre, $\pm\sigma$ yüzey yük yoğunluğu taşıyan sonsuz iki düzlem arasındaki elektrik alan daha önce hesaplanmıştı:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \text{sabit}$$

Sabit elektrik alanda d mesafesinde potansiyel farkını da Bölüm 16 da hesaplamıştık:

$$V = V_2 - V_1 = E\,d = \frac{\sigma\,d}{\varepsilon_0}$$

Q yükü taşıyan levhanın yüzölçümü A ise, σ yüzey yük yoğunluğu $\sigma = Q/A$ olur. Buna göre,

$$V = \frac{(Q/A)\,d}{\varepsilon_0}$$

olup, bunu Q cinsinden yazarsak,

$$Q = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\,V$$

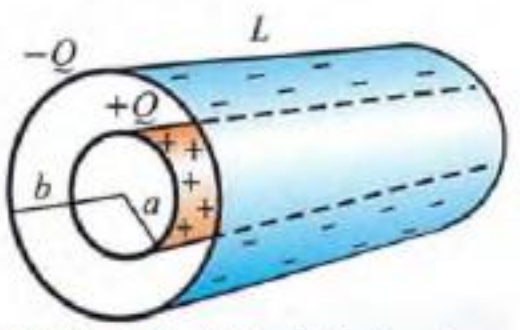
Yukardaki sığa tanımıyla karşılaştırılırsa, düzlem kondansatörün sığası şöyle olur:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \text{(düzlem kondansatörün sığası)} \qquad (17.2)$$

Görüldüğü gibi sığa, iletkenin geometrik boyutlarına ve aradaki yalıtkan boşluğun geçirgenliğine bağlı olmaktadır. Levhaların yüzölçümü arttıkça sığa büyür, aradaki mesafe arttıkça küçülür.

Silindirik Kondansatör

Herbirinin uzunluğu L olan eş-eksenli iki iletken silindiri gözönüne alalım. İçteki silindirin yarıçapı a ve dıştaki silindirin yarıçapı b olsun. Bu silindirler eşit ve zıt $\pm Q$ yükleri taşıdığında, aralarındaki potansiyel farkını hesaplamak istiyoruz.



Şekil 17.4: Silindirik kondansatör.

Silindirlerin L uzunluğu a, b yarıçaplarına kıyasla çok büyük ise, bunları yaklaşık olarak sonsuz silindir olarak düşünebiliriz. Boyca yük yoğunluğu λ olan sonsuz silindirin elektrik alanı Bölüm 13 de Gauss yasası ile hesaplanmıştı:

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

Potansiyel farkını, E alanının eksi işaretli olduğunu gözetmeksizin hesaplayalım:

$$V = V_b - V_a = \int_a^b E\,dr = 2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = 2k\lambda \ln\frac{b}{a}$$

Q yükü taşıyan L uzunluktaki silindirin boyca yük yoğunluğu $\lambda = Q/L$ olur. Ayrıca, $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ alınırsa,

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{b}{a}$$

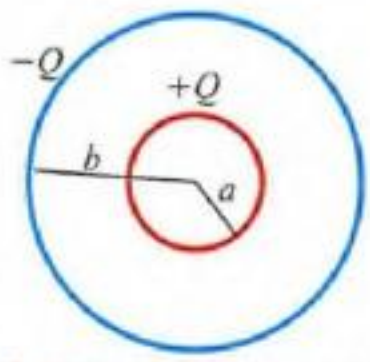
veya,

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}\,V$$

bulunur. Buradan C sığasını teşhis edebiliriz:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)} \qquad \text{(silindirik kondansatörün sığası)} \qquad (17.3)$$

Yine, sığanın sadece iletkenlerin geometrik özelliklerine bağlı olduğunu görüyoruz.



Şekil 17.5: Küresel kondansatör.

Küresel Kondansatör

$a < b$ olmak üzere, yarıçapları a ve b olan eş-merkezli iki iletken küresel kabuk gözönüne alalım. İçteki a yarıçaplı kürenin yükü $+Q$ dıştakininki $-Q$ olsun. Bu iki küre arasındaki V potansiyel farkını hesaplamak üzere tanımı kullanalım:

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b E\,dr$$

İki küre arasındaki bölgede $(a < r < b)$ Gauss yasası uygulayarak elektrik alanı şöyle buluruz:

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

Buna göre, potansiyel farkı,

$$V = -kQ\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -kQ\left|\frac{1}{r}\right|_a^b = -kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{kQ(b-a)}{ab}$$

olur. Bu ifadeyi Q çözer ve k sabitini de ε_0 cinsinden yazarsak,

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}V$$

Bu ifadede V nin önündeki katsayı, küresel kondansatörün C sığası olur:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad \text{(küresel kondansatörün sığası)} \qquad (17.4)$$

Örnek 17.1

Bir düzlem kondansatörün $30\,\text{cm}^2$ *yüzölçümlü levhaları arasındaki mesafe* 4 mm *dir. Bu kondansatör* 5000 V *luk bir voltaja bağlanıyor. (a) Kondansatörün sığasını bulun. (b) Levhalarda toplanan yük ne kadar olur? (c) Levhalar arasındaki elektrik alan ne kadardır?*

Çözüm

(a) Düzlem kondansatörün sığası için bulunan (17.2) formülü kullanılır:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times30\times10^{-4}}{4\times10^{-3}}$$

$$C = 6.6\times10^{-12}\,\text{F} = 6.6\,\text{pikofarad} = 6.6\,\text{pF}$$

(b) Yükü bulmak için sığa tanımı kullanılır:

$$Q = C\,V = 6.6\times10^{-12}\times5000 = 33\times10^{-9} = 33\,\text{nC}$$

(c) Levhalar arasında E sabit olduğundan, potansiyelle ilişkisi $V = Ed$ olur:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{5000}{4} = 1250\,\text{V/m}$$

Örnek 17.2

Bir koaksiyal kablonun içteki iletken silindirinin yarıçapı 2 mm *ve dıştakinin yarıçapı* 4 mm *dir. Bu kablodan, sığası* 1 pF *olan bir silindirik kondansatör yapılmak isteniyor. Kablo uzunluğu ne kadar olmalıdır?*

Çözüm

Silindirik kondansatörün sığası için bulunan (17.3) formülü kullanılır:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

Buradan L uzunluğu çekilir, sayısal veriler yerine konup uzunluk hesaplanır:

$$L = \frac{C\,\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$L = \frac{10^{-12}\times\ln(4/2)}{2\times3.14\times8.85\times10^{-12}} = 0.012\,\text{m} = 1.2\,\text{cm}$$

Örnek 17.3

Sığası $C = 3\,\text{pF}$ *olan bir düzlem kondansatör* 1000 V *luk bir bataryaya bağlanıyor.*

(a) *Ne kadar yük toplanır?*

(b) *Kondansatör yüklü olarak devreden çıkarılıyor ve sonra levhalar arası uzaklık iki katına çıkarılıyor. Yeni sığa ve levhalar arasındaki yeni potansiyel farkı ne kadar olur?*

(c) *Kondansatör bataryaya bağlı olarak, levhalar arası uzaklık iki katına çıkarılıyor. Yeni sığa ve yeni yük ne*

kadar olur?

Çözüm

(a) Sığa formülünden hesaplanır:

$$Q = C\,V = 3 \times 10^{-12} \times 1000 = 3\,\text{nC}$$

(b) Düzlem kondansatörün sığası d mesafesiyle ters orantılı olduğundan, d iki kat artarsa C iki kat azalır. Bataryaya bağlı iken V aynı kalacağından,

$$Q' = C'\,V = \frac{C}{2}\,V = \frac{Q}{2} = 1.5\,\text{nC}$$

(c) Kondansatör devreden Q yüklü olarak çıkarıldığı için, yükü değişmez. Yine C yarıya düştüğü için V potansiyel farkı $Q = CV$ bağıntısından hesaplanır:

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{(C/2)} = 2V = 2 \times 1000 = 2000\,\text{volt}$$

17.2 KONDANSATÖRLERİN BAĞLANMASI

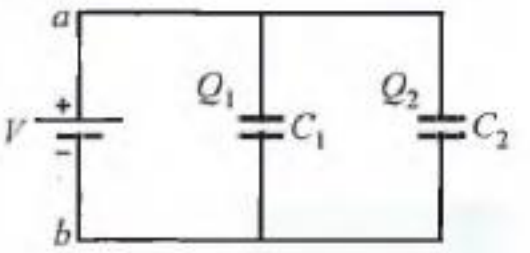
Elektrik devrelerinde kullanılan her devre elemanı standart bir sembolle gösterilir. Devrelerde kondansatörler ⊣⊢ sembolü ile gösterilirler.

Çok sayıda kondansatör bir devrede yer alıyorlarsa, bunların tümünün işlevini tek başına yapan kondansatöre **eşdeğer kondansatör** denir. Eşdeğer kondansatörün nasıl bulunacağı, bağlantıların seri veya paralel oluşuna göre değişir.

Paralel Bağlama

Sığaları C_1 ve C_2 olan iki kondansatör, Şekil 17.6 da görüldüğü gibi potansiyel farkı V olan aynı bir bataryaya bağlanmış olsun. Her kondansatör aynı potansiyel farkını görüyorsa buna **paralel bağlama** denir. Bu durumda, herbirinin gördüğü potansiyel farkı aynı V olup, $Q = CV$ bağıntısıyla herbirinin yükleri hesaplanır:

$$Q_1 = C_1\,V \qquad\qquad Q_2 = C_2\,V$$



Şekil 17.6: Paralel bağlama.

Kondansatörlerin bataryadan çektiği toplam yük $Q = Q_1 + Q_2$ olur.

Şimdi, kondansatörlerin bağlandığı a ve b noktaları arasına öyle bir eşdeğer kondansatör koyalım ki, aynı potansiyel farkı altında aynı toplam yükü toplasın:

$$Q = C_{\text{eş}}\,V$$

Buradaki Q yükü Q_1 ve Q_2 nin toplamı olacağından,

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ C_{\text{eş}}\,V &= C_1\,V + C_2\,V \end{aligned}$$

Taraf tarafa V ile sadeleştirilirse, paralel bağlı kondansatörlerin eşdeğer sığası bulunur:

$$C_{\text{eş}} = C_1 + C_2$$

Bu ispat ikiden çok sayıda kondansatör paralel bağlı olduğunda yine geçerlidir:

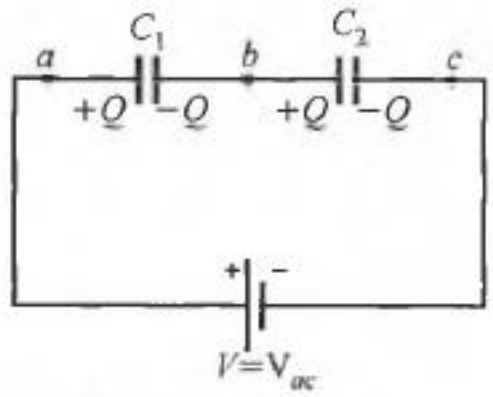
$$\boxed{C_{\text{eş}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \qquad \text{(Paralel bağlama)}} \qquad (17.5)$$

Paralel bağlı kondansatörlerin eşdeğer sığası, herbir sığadan daha büyük olur.

Seri Bağlama

Sığaları C_1 ve C_2 olan yüksüz iki kondansatör bir batarya devresinde peşpeşe, arada başka kola ayrılmadan bağlanmışsa, buna **seri bağlama** denir.

Şekil 17.7 de görüldüğü gibi, C_1 ve C_2 kondansatörlerinin bataryayı gören dış levhaları $+Q$ ve $-Q$ yüklerini çekerler. Aradaki levhalar da, karşılarındaki



Şekil 17.7: Seri bağlama.

yüklü levhanın tesiriyle, bağlı oldukları nötr iletken telin yüklerini ters yönlere çekerek $-Q$ ve $+Q$ yüklerini tamamlarlar.

Seri bağlı kondansatörlerin yükleri eşit ve bataryadan çekilen toplam Q yükü kadardır. Şekildeki a, b, c noktaları arasındaki potansiyel farkları yazılır ve herbir kondansatör için $V = Q/C$ bağıntısı kullanılırsa,

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} = V_1 + V_2$$
$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

ab arasına konulacak olan eşdeğer kondansatör, aynı potansiyel farkı altında aynı yükü toplamalıdır:

$$\frac{Q}{C_{eş}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Bu ifade ikiden çok sayıda kondansatör için de geçerlidir. O halde, seri bağlı kondansatörlerin eşdeğer sığası şöyledir:

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \qquad \text{(Seri bağlama)} \tag{17.6}$$

Seri bağlamada eşdeğer sığa, herbir sığadan daha küçük değerde olur.

Hem seri ve hem de paralel bağlı kondansatörler içeren bir devrede, en içten giderek, yukardaki kurallara göre eşdeğer sığa heesaplanır.

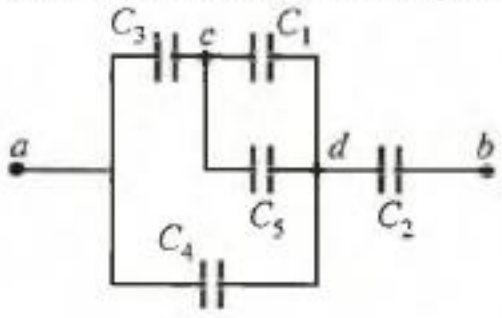
Örnek 17.4

Şekildeki devrede $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$, $C_4 = 4$ *ve* $C_5 = 5\,\mu$F *dir.*

(a) *ab uçları arasında eşdeğer sığayı hesaplayın.*

(b) *ab uçları* 12 V *luk bir potansiyel farkına bağlanıyor. Eşdeğer sığada toplanan yük ne kadar olur?*

(c) C_4 *kondansatörü üzerinde ne kadar yük toplanır?*



Çözüm

(a) Şekle dikkatle bakılarak, paralel veya seri tanımına uyan elemanlar aranır. c ve d noktaları arasındaki C_1 ve C_5 paralel olurlar. Bunların cd arasındaki eşdeğer sığasını C' ile gösterip hesaplarız:

$$C' = C_1 + C_5 = 1 + 5 = 6\,\mu\text{F}$$

Şimdi cd arasında bu C' sığası olduğunu düşünürsek, C_3 bununla seri bağlı olur. Bunların eşdeğer sığasını hesaplarız:

$$C'' = \frac{C_3 C'}{C_3 + C'} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\,\mu\text{C}$$

(*Not:* $1/C$ toplamlarıyla çalışırken, son aşamada ters çevirmeyi unutmak, sık görülen bir hatadır. Bunu önlemek için, seri bağlı hesabı üstte gösterdiğimiz şekilde yapabilirsiniz.) Daha sonra, C_4 bununla paralel bağlı olur. Bunların eşdeğer sığası hesaplanır:

$$C''' = C_4 + C'' = 4 + 2 = 6\,\mu\text{F}$$

Nihayet, C_2 sığası bununla seri bağlı olup, aranan eşdeğer sığa bulunur:

$$C_{eş} = \frac{C_2 C'''}{C_2 + C'''} = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = 1.5\,\mu\text{F}$$

(b) Eşdeğer sığa *ab* uçlarına bağlı olduğundan, potansiyel farkı V_{ab} olur. Buradan Q yükü hesaplanır:

$$Q = C_{eş}\, V_{ab} = 1.4 \times 12 = 18\,\mu\text{C}$$

(c) Kondansatör devrelerini çözerken, $Q = CV$ bağıntısı yanısıra, şu iki ilke kullanılır:

(1) Seri bağlı kondansatörlerin yükleri eşittir.

(2) Paralel bağlı kondansatörlerin voltajları eşittir.

Bu problemi C_4 üzerindeki potansiyel farkından giderek çözeriz. Önce, C_2 üzerindeki yükün, eşdeğer sığa üzerindeki yüke eşit olduğuna dikkat edelim, çünkü bataryanın bir ucu, başka kola ayrılmadan, doğrudan C_2 kondansatörünü görmektedir. O halde, Q_2 doğrudan yazılır:

$$Q_2 = Q = 18\,\mu\text{C}$$

Buradan C_2 üzerindeki potansiyel farkını $Q = CV$ bağıntısından hesaplarız:

$$V_2 = V_{db} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{18}{2} = 9\,\text{V}$$

Bataryayı gören V_{ab} potansiyel farkı iki parçada yazılır:

$$V_{ab} = V_{ad} + V_{db} \rightarrow 12 = V_{ad} + 9$$
$$V_{ad} = 3\,\text{V}$$

Bu potansiyel farkı C_4 ün gördüğü potansiyel farkıdır. Buradan, Q_4 yükü hesaplanır:

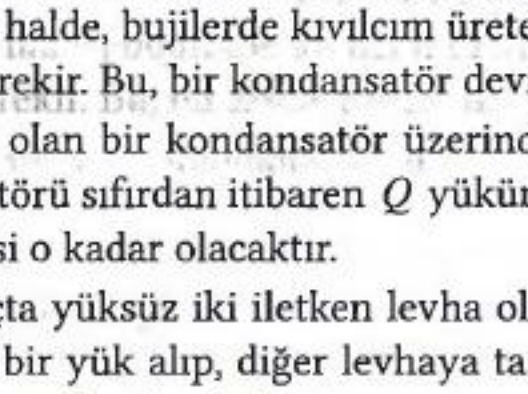
$$Q_4 = C_4 V_4 = Q_4 V_{ad} = 4 \times 3 = 12\,\mu\text{C}$$

Örnek 17.5

Şekildeki devrede $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$ ve $C_4 = 4$ dir.

(a) *Bu devre, S anahtarı açık iken, ab uçları 24 V luk bir bataryaya bağlanıyor. Eşdeğer sığayı ve bataryadan çekilen toplam yükü hesaplayın.*

(b) *Devre yüklü iken bataryadan çıkarılıyor ve sonra S anahtarı kapatılıyor. Eşdeğer sığayı ve herbir koldaki yükü bulun.*



Çözüm

(a) S anahtarı açıkken, C_1, C_4 seri bağlı, yine C_2, C_3 seri bağlı iki kol oluştururlar. Daha sonra bu iki kol birbirine paralel bağhdır. Buna göre, eşdeğer sığa hesaplanır:

$$C_{\text{eş}} = \frac{C_1 C_4}{C_1 + C_4} + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$
$$C_{\text{eş}} = \frac{1 \times 4}{1+4} + \frac{2 \times 3}{2+3} = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 2\,\mu\text{F}$$

Sığa tanımından eşdeğer sığanın yükü hesaplanır:

$$Q = C_{\text{eş}} V = 2 \times 24 = 48\,\mu\text{C}.$$

(b) S anahtarı kapatıldığında bu kez ab arasında bağlama değişir. Bu kez paralel bağlı C_1, C_3 ikilisi ile, yine paralel bağlı C_2, C_4 ikilisi birbirine seri bağlı olur. Buna göre, eşdeğer sığa hesaplanır:

$$C_{\text{eş}} = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{(C_1 + C_3) + (C_2 + C_4)}$$
$$C_{\text{eş}} = \frac{(1+3)(2+4)}{1+2+3+4} = 2.4\,\mu\text{F}$$

Devre bataryadan yüklü olarak çıkarıldığında, toplam Q yükü sabit kalır. Fakat bu kez iki kola farklı dağılmış olur. C_1 ve C_3 kondansatörleri ortak aS noktalarına bağlı oldukları için, herbirinin üzerindeki potansiyel farkı eşit olur:

$$V_{aS} = V_{aS}$$
$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_3}{C_3}$$

Ayrıca, Q_1, Q_3 toplamı, başlangıçtaki yüke eşit olmalıdır:

$$Q_1 + Q_3 = Q = 48\,\mu\text{C}$$

Bu iki denklem arasından Q_1, Q_3 hesaplanır:

$$Q_1 = 12\,\mu\text{C}, \quad Q_3 = 36\,\mu\text{C}$$

C_2, C_4 üzerindeki yükler de aynı düşünce yöntemiyle, Sb potansiyel farkı kullanılarak hesaplanır:

$$Q_2 = 16\,\mu\text{C}, \quad Q_4 = 32\,\mu\text{C}$$

Bir Kondansatörün Enerjisi

Kondansatörler, üzerlerindeki elektrik yükünden dolayı bir enerjiye sahiptirler. Bu enerjiyi çok kısa bir zaman aralığında boşaltarak, yüksek akımlara veya potansiyel farklarına yolaçabilirler. Örneğin, otomobil aküleri 12 Volt potansiyel farkı taşıdığı halde, bujilerde kıvılcım üretebilmek için en az 800–1000 V potansiyel farkı gerekir. Bu, bir kondansatör devresiyle mümkün olur.

Sığası C olan bir kondansatör üzerinde toplam Q yükü bulunuyor olsun. Bu kondansatörü sıfırdan itibaren Q yüküne getirebilmek için ne kadar iş yapılmışsa, enerjisi o kadar olacaktır.

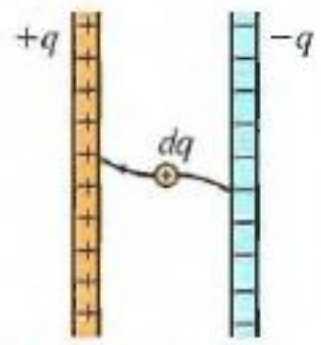
Başlangıçta yüksüz iki iletken levha olsun. Önce, levhalardan birinden dq_1 kadar küçük bir yük alıp, diğer levhaya taşıyalım. Potansiyel farkı henüz oluşmadığından, yapılan iş sıfırdır:

$$dW_1 = 0$$

Bir sonraki dq_2 yükünü götürmek istediğimizde, levhalar arasında dq_1/C kadar bir potansiyel farkı olacağı için, yapılan iş

$$dW_2 = dq_2\, V_1 = dq_2\, \frac{dq_1}{C}$$

Bu işlemi böyle devam ettirip, sonunda Q yüküne erişiriz. Her aşamada yapılan işleri toplayarak, kondansatörün enerjisini hesaplarız.



Şekil 17.8: Bir kondansatörün küçük aşamalarla yüklenmesi.

Herhangi bir aşamada levhalarda birikmiş yük q olsun. Bu aşamada potansiyel farkı $V = q/C$ olacaktır. Şimdi ilave bir dq yükü daha taşımak istediğimizde, yapılması gereken iş,

$$dW = dq\,V = dq\,\frac{q}{C}$$

Başlangıçta sıfır olan yükü son Q değerine getirmek için yapılan iş, yani kondansatörün potansiyel enerjisindeki artış, tüm bu dW işlerinin integrali olur:

$$W = U_Q - U_0 = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{C}\left|\frac{q^2}{2}\right|_0^Q = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Yüksüz kondansatörün enerjisi sıfır potansiyelde seçilir: $U_0 = 0$. Yük için $Q = CV$ bağıntısı da kullanılırsa, bir kondansatörün enerjisi, şöyle yazılabilir:

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \qquad \text{(kondansatörün enerjisi)} \qquad (17.7)$$

Genellikle kondansatör bir batarya veya aküye bağlanarak yüklenir. Akü ve bataryaların özelliği sabit bir V potansiyel farkı sağlamasıdır. Bunu bir sonraki bölümde ele alacağız.

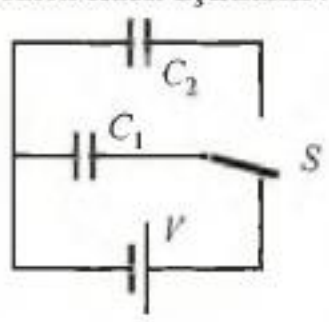
Örnek 17.6

Şekilde sığası $C_1 = 1\,\mu$C olan kondansatör, S anahtarı $V = 12$ V olan batarya yönünde kapatılarak yükleniyor.

(a) *C_1 kondansatörünün yükü ve enerjisi ne kadar olur?*

(b) *Daha sonra S anahtarı $C_2 = 2\,\mu$C kondansatörü yönünde kapatılıyor. İki kondansatörün yükleri ve toplam enerjileri ne kadar olur?*

(c) *Aradaki enerji farkı nasıl açıklanır?*



Çözüm

(a) S anahtarı batarya yönünde kapatıldığında C_2 gözönüne alınmaz. Yük hesaplanır:

$$Q = C_1 V = 1 \times 12 = 12\,\mu\text{C}$$

Enerji (17.7) formüllerinden herhangi biriyle hesaplanır:

$$U = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2} \times 12 \times 10^{-6} \times 12$$

$$U = 72 \times 10^{-6}\,\text{J} = 72\,\mu\text{J}$$

(b) S anahtarı C_2 yönünde kapatıldığında, başlangıçtaki Q yükü C_1 ve C_2 arasında paylaşılır. Bu iki kondansatörün uçları arasındaki potansiyel farklarının eşit olduğu da gözönüne alınırsa,

$$V_1 = V_2 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q = 12\,\mu\text{C}$$

Bu iki denklem arasından, Q_1, Q_2 hesaplanır:

$$Q_1 = 4\,\mu\text{C} \text{ ve } Q_2 = 8\,\mu\text{C}$$

Enerjiler $U = \frac{1}{2}Q^2/C$ formülüyle hesaplanıp toplanır:

$$U' = \tfrac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \tfrac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{4^2}{1} + \frac{8^2}{2}\right) \times 10^{-12+6}$$

$$U' = 24\,\mu\text{J}$$

(c) Bu problemde $U' < U$ olup, sistemin enerjisi sanki kendiliğinden azalmış gibi, yani enerji korunumuna aykırı bir durum varmış gibi görünmektedir.

Bu problem, gerçekte varolmayan ideal bir durumu temsil etmektedir. Genelde, her devrede bağlantı kablolarının belli bir direnci vardır. Bir kondansatör diğerine yük aktardığında mutlaka kablo dirençlerinde enerji kaybolacaktır. Eğer bu kayıplar olmasaydı zaten sistem dengeye gelmezdi, Q yükü bir kondansatörden diğerine gidip gelirdi. Sonuç olarak, aradaki enerji farkı devredeki kablolarda ısıya dönüşmüş olur.

17.3 DİELEKTRİKLER

Buraya kadar olan incelememizde, kondansatörün iki iletken levhası arasında boşluk olduğunu varsaydık. Oysa, teknolojide kullanılan kondansatörlerde

levhalar arası yalıtkan bir maddeyle doldurulmuştur. Bu maddeler arasında kağıt, cam, plastik, yağ ... sayılabilir. Yalıtkan maddeler bir elektrik alan içine konulduğunda, elektrik özelliklerini ortama uyumlu hale getirmeye çalışırlar. Bu özelliklerini vurgulamak için **dielektrik** olarak da adlandırılırlar.

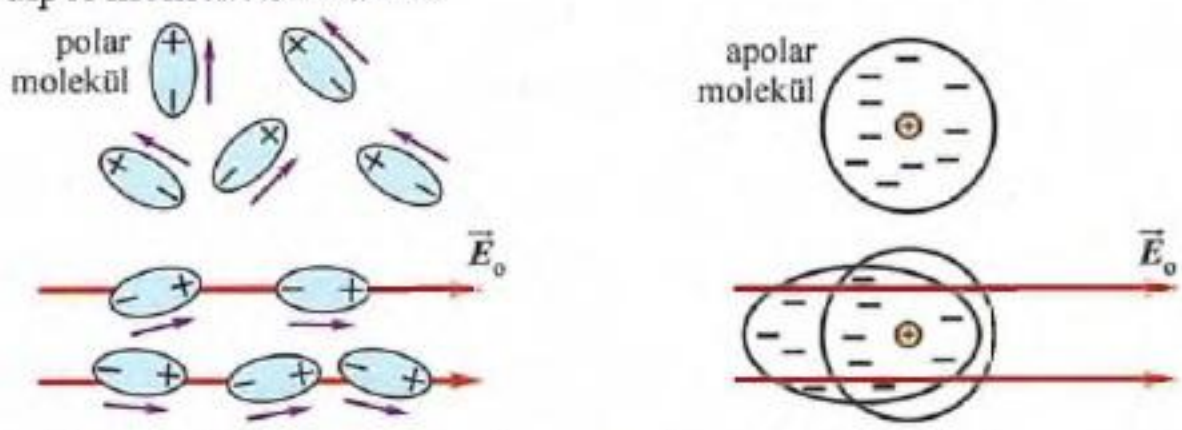
Deneysel gözlemlere göre,

- Kondansatör bataryaya bağlı iken levhalar arasına dielektrik madde konulduğunda, kondansatör daha fazla yük toplamaktadır. Bu gözleme göre, $Q = CV$ bağıntısı gereği, **kondansatörün sığası artmaktadır.**
- Yüklü bir kondansatör devreden çıkartıldıktan sonra, levhalar arasına dielektrik madde konulduğunda, levhalar arasındaki potansiyel farkı azalmaktadır. Bu gözleme göre, örneğin düzlem kondansatörde $V = Ed$ bağıntısı hatırlanırsa, **levhalar arasındaki elektrik alan azalmaktadır.**

Levhalar arasındaki madde, yalıtkan olduğu halde, kondansatörün özelliklerini nasıl değiştirebilmektedir? Bunu anlayabilmek için, dielektrik maddelerin mikroskopik yapısına bakmak gerekir.

Bölüm 13 ten **elektrik dipol** kavramım hatırlayalım: Aralarında a uzaklığı bulunan eşit ve zıt iki yükten $(\pm q)$ oluşan sisteme elektrik dipol dendiğini görmüştük. Bu sistem nötr olduğu halde, uzayda bir elektrik alan oluşturabiliyor ve diğer yüklerle etkileşebiliyordu. Bu sistemin $p = qa$ ile tanımlanan bir elektrik **dipol momenti** vardı.

Bazı moleküllerin yapısında + ve − yüklerin geometrik yeri üst üste çakışmaz ve bir elektrik dipol oluştururlar. Örnek olarak H_2O, NO_2 molekülleri gösterilebilir. Bunlara **polar molekül** denir. Elektrik alan yokluğunda dahi kalıcı bir dipol momentleri vardır.



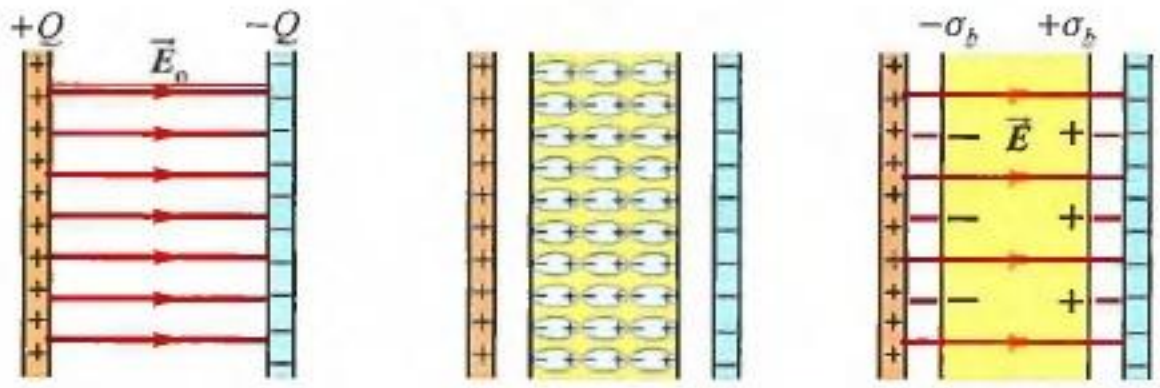
Şekil 17.9: Bir dış elektrik alana konulan polar ve apolar moleküller, alan yönünde dipol momenti kazanırlar.

Diğer bazı moleküllerin normal yapısında + ve − yüklerin geometrik yeri üst üste çakışır, kalıcı bir dipol momentleri yoktur. Fakat, bir dış elektrik alana konulduğunda, + ve − yüklere zıt yönde uygulanan kuvvetlerin etkisiyle, elektronların geometrik yeri değişir ve birer dipol momenti kazanırlar. Bunlara **apolar molekül** denir.

Hangi yapıda olursa olsun, yüklü kondansatörün levhaları arasındaki elektrik alan içine konulan dielektrik moleküller bir tepki gösterirler. Polar moleküller dönerek, apolar moleküller deforme olarak, dipol momentlerini elektrik alan yönünde hizaya getirmeye çalışırlar (Şekil 17.10-b). Elektrik alanı tam karşılayamasalar da, ortamdaki etkisini kısmen azaltırlar. Böylece, levhalara bakan dielektrik yüzeylerde **indüklenmiş yüzey yükleri** oluşur (Şekil 17.10-c).

Başlangıçta dielektrik yokken, levhalar üzerindeki Q yükünün oluşturduğu σ yüzey yük yoğunluğu cinsinden elektrik alanı ifade edersek,

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Şekil 17.10: Kondansatörün levhaları arasına konulan dielektrik maddenin molekülleri, zıt yönde yüzey yükleri oluşturup, madde içinde $\vec{E}$ alanının azalmasına yolaçarlar.

olur. Dielektrik madde konulduğunda zıt yönde indüklenen yüzey yük yoğunluğunu σ_b ile gösterirsek, yeni elektrik alan, $\sigma - \sigma_b$ yüzey yük yoğunluğundan kaynaklanacaktır:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_b}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} \tag{17.8}$$

Eğer dış elektrik alan fazla şiddetli değilse, indüklenen σ_b yüzey yükünün miktarı, ortamda oluşan E elektrik alanıyla orantılı olacaktır. Bu orantı şöyle ifade edilir:

$$\frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} = \chi E \tag{17.9}$$

Buradaki boyutsuz χ katsayısına dielektrik maddenin **elektrik duygunluğu** adı verilir ($\chi > 0$). Bu katsayı cinsinden, 17.8 denklemi şöyle düzenlenir:

$$\begin{aligned} E = E_0 - \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} &= E_0 - \chi E \\ E + \chi E &= E_0 \\ E &= \frac{E_0}{1+\chi} \end{aligned}$$

Bu ifadenin paydası, ortamın **dielektrik sabiti** olarak tanımlanır:

$$K = 1 + \chi \tag{17.10}$$

$$E = \frac{E_0}{K} \tag{17.11}$$

$K > 1$ olduğundan, dielektrik ortamda daima elektrik alan azalır.

Elektrik alanın azalması, $V = Ed$ bağıntısı yoluyla, potansiyel farkını da azaltacaktır. Boşluktaki potansiyel farkını V_0 ile gösterirsek,

$$V = Ed = \frac{E_0}{K} d = \frac{E_0 d}{K}$$

$$V = \frac{V_0}{K} \tag{17.12}$$

Tüm bu bağıntılar, dilektrik ortamda ε_0 geçirgenliğinin değişmesi şeklinde ifade edilebilirler:

$$\varepsilon = K\varepsilon_0 \tag{17.13}$$

Burada ε ortamın **elektrik geçirgenliği** olur. Böylece, dielektrik bulunan kondansatörlerde ε_0 yerine ε alınarak, tüm formüller geçerli olurlar.

Bazı dielektrik sabitleri tabloda verilmiştir:

Bazı yalıtkanların dielektrikler sabitleri ve dielektrik sertlikleri.

	dielektrik sabiti K	dielektrik sertlik E_{max} (10^6 V/m)
Boşluk	1	—
Hava	1.0006	3
Parafin	2.2	10
Kağıt	3.7	15
Cam	5	14
Porselen	6	12



Şekil 17.11: Teknolojide dielektrik madde kullanımı: Koaksiyal kablo, yüksek gerilim hatlarında *fincan* denilen yalıtkan bağlantı, mikrodevre yapımında *gofret* adıyla kullanılan saf silisyum tabakaları.

Dielektrik Sertlik

Dielektrik maddeler üzerine uygulanan elektrik alan şiddeti çok büyük olduğunda, moleküllerin artı ve eksi yükleri zıt yönlerde aşırı kuvvetlere maruz kalır ve koparlar. Böylece iyonlaşan moleküller ortamı iletken hale getirirler ve bir elektrik boşalması gözlenir. Dielektrik içinden geçen yüksek akım, elektron çarpışmalarından dolayı ısıya dönüşür ve madde hasar görür. Teknolojide kullanılan kondansatörler üzerinde, en fazla kaç volta dayanabileceği belirtilir.

Dielektrik ortamın iyonize olmadan dayanabileceği maksimum elektrik alan şiddetine **dielektrik sertlik** denir. Yukardaki tabloda bazı maddelerin dielektrikler sertlikleri verilmiştir.

Tablodan görüldüğü gibi, hava yüksek elektrik alanlara dayanamaz. Kondansatörün levhaları arasına dielektrik malzeme konulmasının yük toplama özelliğini artıracağını daha önce görmüştük. Bunun diğer bir avantajı, kondansatörün tahrip olmadan daha yüksek voltajlarda çalışabilmesini sağlamaktır.



Şekil 17.12: Bir pleksiglas levhada elektrik boşalması sonucunda oluşan çatlaklar.

van de Graaff Jeneratörü

Bir iletken en fazla kaç volt potansiyele kadar yükseltilebilir? İletkenler ve dielektrikler hakkında buraya kadar öğrendiklerimizle, şimdi bu sorunun cevabını verebiliriz. En basit olarak R yarıçaplı iletken bir küresel kabuğu gözönüne alalım. Bu kürenin potansiyeli ve yüzeyindeki elektrik alan ifadelerini hatırlayalım:

$$V = \frac{kQ}{R}, \qquad E = \frac{kQ}{R^2}$$

İlke olarak, Q yükünü artırabildiğimiz ölçüde, iletkenin potansiyeli de sonsuza kadar artacaktır. Fakat, gerçekte bunun bir sınırı vardır. İletkenin potansiyeli ile birlikte, çevresindeki elektrik alan da artar.

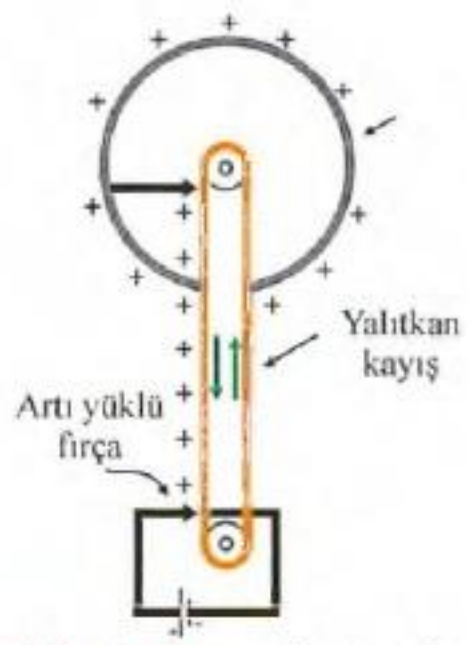
Kürenin içinde bulunduğu havanın dielektrik sertliği $E_{max} = 3 \times 10^6$ V/m dir, yani bu değerden yüksek elektrik alanda hava molekülleri iyonlaşır ve küre üzerinde topladığımız Q yükü toprağa akar. O halde, kürenin taşıyabileceği

maksimum potansiyel şu eşitliği sağlamalıdır:

$$V_{\max} = R\,E_{\max}$$

Örnek olarak, $R = 1$ m yarıçaplı küre için basit bir hesap yapılırsa, taşıyabileceği maksimum yük $Q_{\max} = 1/3$ mC ve bu yükün oluşturduğu maksimum potansiyel $V_{\max} = 3$ milyon volt bulunur.

Şimdi bu küreyi nasıl yükleyeceğimizi düşünelim. Yükleri doğrudan yaklaştırırsak, küre çevresindeki elektrik alan giderek artacağından, karşı koyan kuvvet de artar ve yükleri getirmek giderek zorlaşır. Oysa, iletkenlerin şu özelliği kolaylık sağlar: *Bir iletkenin iç yüzeyine verilen yük, iletkenin dış yüzeyinde toplanır.* Çünkü, iletken içinde elektrik alan sıfır olmak zorundadır.



Şekil 17.13: van de Graaff jeneratörü şeması.

Bu ilkeyi kullanarak çalışan **van de Graaff jeneratörü**nün basit bir şeması yanda gösterilmiştir. Bu düzenekte yalıtkan bir kayış, alt ucundaki makara döndürülerek hareket eder. Alt makara civarında, bir devrenin artı kutbuna bağlanmış olan sivri metal bir fırça, kayışa çok yakın durmaktadır. Bu fırça çevresindeki havayı iyonlaştırarak artı yüklerin bir kısmını kayışa aktarır. Yukarıdaki makara civarındaki ikinci bir metal fırça iletken küreye bağlanmış olduğundan üzerindeki elektrik alan sıfırdır ve kayıştaki yükleri kolayca toplar, sonra da kürenin dış yüzeyine aktarır.

van de Graaf jeneratörü nükleer fizik araştırmalarında yüklü parçacıkları hızlandırmakta ve X-ışını tüplerini çalıştırmakta kullanılır. Ayrıca, fizik laboratuvarlarında ve fuarlarda yüksek voltaj gösterileri yapılır. Ayakkabılarınız yerden yalıtılmışsa, metal küreye elinizi değdirdiğinizde, vücudunuzda oluşan yüksek voltaj sebebiyle saç tellerinizin birbirini iterek dikleşirler. (Bu yüksek potansiyele rağmen van de Graaff jeneratörü tehlikeli bir cihaz değildir. 3 milyon volt için gerekli yükün sadece miliCoulomb mertebesinde olduğu düşünülürse, ayaklarınızdan yere geçebilecek akım çok küçüktür.)

Yıldırım



Şekil 17.14: Yıldırım düşmüş bir ağaç.

Fırtınalı havalarda gökyüzünde çakan bir şimşek ışığı sonrasında büyük bir patlama şeklinde gökgürültüsü sesi duyarız ve biryerlere yıldırım düştüğünü anlarız. Yıldırım, yukarda açıkladığımız dielektrik ortamın (havanın) dayanabileceği maksimum elektrik alan değeri aşıldığında iletken hale gelmesi sonucu oluşan elektrik boşalmasıdır.

Fakat, gökyüzünde bunun nasıl bir mekanizmayla oluştuğu kesin olarak bilinmemektedir. Ayrıca, çeşitli yapıda yıldırımlar olabilmektedir. Ençok görülen yıldırım türünün açıklaması şöyledir:

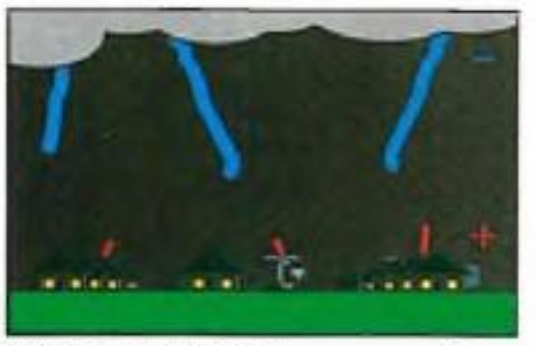
Yeryüzünde buharlaşan su molekülleri havadan hafif olduğu için yükselmeye başlar. Atmosferin daha soğuk olan yukarı katmanlarına ulaştığında küçük su damlaları halinde yoğunlaşmaya başlar. Buna bulut diyoruz. Bulut içindeki bu mikroskopik su ve buz zerreleri, yükselen diğer su buharı molekülleriyle çarpışarak onların elektronlarını koparır ve iyonlaştırır. Böylece bulutun alt yüzeyinde negatif elektronlar, üst yüzeyinde ise pozitif iyonlar birikir.

Sonuçta, bulutların negatif alt yüzeyleri ile yeryüzü arasında bir elektrik alan oluşur. Elektrik alan şiddeti arttıkça, aradaki havanın molekülleri yük boşalmasını sağlayabilmek için iletken bir yol kurmaya başlarlar. Nitekim, yıldırım düşmesinden hemen önce, bulutlardan aşağı ve yeryüzündeki çatılardan yukarı, **mızrak ucu** denilen ve iyonlaşmış hava moleküllerinden oluşan zigzaglı saçaklar uzamaya başlar.

Bu iyonlaşmış hava moleküllerinin oluşturduğu iletken yol tamamlandığında, elektrik boşalması birden gerçekleşir ve çok büyük bir elektron akımı yeryüzüne ulaşır. Akımın ürettiği ısı, çevredeki hava moleküllerinin ısınarak genleşmesine yol açar. Bu genleşme birdenbire olduğundan, patlama etkisi ve şok dalgası yaratır.

Işığın hızı ses hızından fazla olduğu için, önce şimşek ışığı gözlenir, sonra gökgürültüsü sesi gelir. Sesin havadaki hızı 340 m/s olduğundan, şimşek çaktığı andan itibaren geçen saniyeleri sayarsanız, yıldırımın ne kadar uzağa düştüğünü hesaplayabilirsiniz (3 saniyede 1 km).

Yıldırımın yolunu hazırlayan mızrak uçları genellikle yüksek bina ve ağaçlarda oluşur. Bu yüzden, düz arazide korunumsuz bulunmak veya yüksek bir ağacın altına sığınmak tehlikeli olabilir. Yapılabilecek en doğru şey çömelmektir, fakat iletken yolu çoğaltmamak için, elleri yere değdirmeden çömelmek gerekir.



Şekil 17.15: Yıldırımın yolunu hazırlayan mızrak uçları.

Örnek 17.7

Bir düzlem kondansatörün levhaları arasındaki uzaklık 2 mm dir. Levhalar arasında boşluk bulunduğunda sığası $C_0 = 3\,\mu F$ dır.

(a) *Kondansatör $V_0 = 12\,V$ olan bir bataryaya bağlanıyor. Q_0 yükü ve levhaları arasındaki E_0 elektrik alanı ne kadar olur?*

(b) *Kondansatör yüklü olarak devreden çıkarılıyor ve levhalar arasına, dielektrik sabiti $K = 5$ olan cam tabaka konuluyor. Kondansatörün C sığası, Q yükü, V potansiyeli ve E elektrik alanı ne kadar olur?*

(c) *Kondansatör bataryaya bağlı iken, levhalar arasına cam tabaka konuluyor. Kondansatörün C sığası, Q yükü, V potansiyeli ve E elektrik alanı ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Tanımdan Q_0 yükü hesaplanır:

$$Q_0 = C_0 V_0 = 3 \times 12 = 36\,\mu C$$

Sabit elektrik alanda potansiyel farkı $V = Ed$ bağıntısından elektrik alan bulunur:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{12}{0.002} = 6000\,V/m = 6\,kV/m$$

(b) Kondansatör bataryadan yüklü olarak çıkarıldığında, daha sonra yükü değişmez:

$$Q = Q_0 = 36\,\mu C$$

Araya dielektrik konulduğunda, yeni sığayı bulmak için, düzlem kondansatörün (17.2) sığa formülündeki ε_0 çarpanı yerine $K\varepsilon_0$ almak yeterlidir:

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} = K C_0 = 5 \times 3 = 15\,\mu F$$

Bu C sığası ve Q yüküyle V potansiyeli hesaplanır:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{KC_0} = \frac{V_0}{K} = \frac{12}{5} = 2.4\,V$$

Elektrik alan bu V potansiyel farkıyla hesaplanır:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{(V_0/K)}{d} = \frac{E_0}{K} = \frac{6000}{5} = 1.5\,kV/m$$

(c) Kondansatör bataryaya bağlı tutuluyorsa, daha sonra potansiyel farkı değişmez:

$$V = V_0 = 12\,V$$

Yine, araya dielektrik konulduğunda sığadaki değişme aynıdır:

$$C = K C_0 = 15\,\mu F$$

Bu sığa ve potansiyel farkıyla, yük hesaplanır:

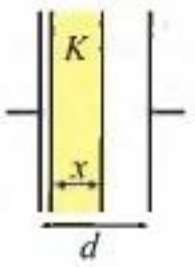
$$Q = CV = (KC_0)\,V_0 = 15 \times 12 = 180\,\mu C$$

Elektrik alan da aynı yolla hesaplanır:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d} = E_0 = 6\,kV/m$$

Görüldüğü gibi, aynı bataryaya bağlı kondansatör dielektrik olduğunda daha fazla yük toplamakta, ama levhalar arasındaki elektrik alan aynı kalmaktadır.

Örnek 17.8



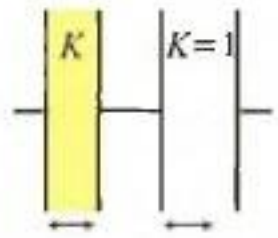
Şekilde, levhalar arası boşken sığası C_0 olan düzlem kondansatörün, levhaları arasındaki d mesafesinin a kısmını dolduracak şekilde, K sabitli bir dielektrik tabaka konuluyor. Yeni sığa ne olur?

Çözüm

Düzlem kondansatörün, dielektrik tabaka konulmadan önceki C_0 sığasını yazalım:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Dielektrik konulduğunda, sistemi seri bağlı iki kondansatör gibi, şu şekilde düşünebiliriz:



Birinci kondansatörün kalınlığı a ve dielektrik sabiti K_1, ikinci kondansatörün kalınlığı $d - a$ ve dielektrik sabiti $K_2 = 1$ yani arasında boşluk vardır.

Buna göre, seri bağlı iki kondansatörün eşdeğer sığa formülü yazılır:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{a}{K\varepsilon_0 A} + \frac{d-a}{\varepsilon_0 A}$$

Bu ifadede C_0 oluştururuz:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{a}{Kd} + \frac{d-a}{d}\right) = \frac{1}{C_0}\,\frac{Kd-(K-1)a}{Kd}$$

Buradan C sığası C_0 ve a, d boyutları cinsinden bulunur:

$$C = \frac{Kd}{Kd-(K-1)a}\,C_0$$

Bu ifadenin doğruluğunu kontrol etmek için, $a = 0$ limitinde $C = C_0$ verdiğini görebiliriz. Keza, $a = d$ limitinde de, doğru olarak $C = KC_0$ verir.

Örnek 17.9

Bir düzlem kondansatörün levhaları arasındaki 4 mm *kalınlıktaki boşluk hava ile doludur.*

(a) *Bu kondansatör en fazla kaç voltluk bir potansiyel farkına bağlanabilir?*

(b) *Kondansatör levhaları arasına porselen tabaka konuluyor. Bu kez en fazla kaç voltluk bir potansiyel farkı uygulanabilir? (Dielektrik setlikler: Hava:* $E_{max} = 3 \times 10^6$ V/m, *porselen:* 12×10^6 V/m*)*

Çözüm

(a) Havanm dielektrik sertliği 3×10^6 V/m demek, elektrik alan şiddeti bu değeri geçerse havanın dielektrik özelliğini kaybedip iletken hale gelmesi demektir. O halde, düzlem kondansatörün levhaları arasındaki maksimum potansiyel farkı, bu E_{max} değeriyle hesaplanır:

$$V = E_{max}\,d = 3 \times 10^6 \times 0.004 = 12\,000\,\text{V} = 12\,\text{kV}$$

(b) Benzer düşünce yöntemi porselen için izlenir:

$$V = E_{max}\,d = 12 \times 10^6 \times 0.004 = 48\,000\,\text{V} = 48\,\text{kV}$$

Örnek 17.10

Dielektrik sabiti 30 *ve dielektrik sertliği* 15×10^6 V/m *olan bir malzemeden öyle bir düzlem kondansatör yapılmak isteniyor ki sığası* 1 pF *olsun ve en fazla* 30 kV *potansiyel farkına bağlanabilsin. Bu kondansatörün levhalarının yüzölçümü ve aralarındaki mesafe ne kadar olmalıdır?*

Çözüm

Kondansatörün dayanacağı potansiyel farkının levhalar arasında oluşturacağı elektrik alan en fazla dielektrik setliğe eşit olmalıdır:

$$V = E_{max}d$$

Buradan d mesafesi hesaplanır:

$$d = \frac{V}{E_{max}} = \frac{30\,000}{15 \times 10^6} = 0.002\,\text{m} = 2\,\text{mm}$$

K dielektrik katsayılı düzlem kondansatörün sığa formülü yazılır:

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$$

Bu ifadeden A yüzölçümü hesaplanır:

$$A = \frac{Cd}{K\varepsilon_0} = \frac{10^{-9} \times 0.002}{30 \times 8.85 \times 10^{-12}}$$

$$A = 0.0075\,\text{m}^2 = 75\,\text{cm}^2$$

Test

1. Sığa birimi hangisidir?
   (a) joule (b) volt (c) faraday (d) farad

2. Bir düzlem kondansatörde levhaların yüzölçümü 2 katına ve levhalar arası mesafe 2 katına çıkarılıyor. Sığa kaç kat artar?
   (a) Aynı (b) 2 (c) 1/2 (d) 4

3. Bir kondansatörün sığası 2 katına, bağlandığı potansiyel farkı da 2 katına çıkarılıyor. Toplanan yük kaç kat artar?
   (a) Aynı (b) 2 (c) 1/2 (d) 4

4. Bir düzlem kondansatör yüklendikten sonra devreden çıkartılıyor ve levhalar arasındaki uzaklık 2 katma çıkarılıyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Yük değişmez.
   II. Potansiyel farkı 2 katına çıkar.
   III. Elektrik alan 2 katına çıkar.
   IV. Sığa 2 katma çıkar.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) I ve IV (d) II ve IV

5. Bir düzlem kondansatör bataryaya bağlı iken, levhalar arasındaki uzaklık 2 katına çıkarılıyor. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Potansiyel farkı değişmez.
   II. Sığa 2 kat azalır.

III. Yük 2 kat azalır.
IV. Elektrik alan değişmez.

(a) I ve II (b) I ve III (c) I ve IV (d) I, II ve III

6. Sığaları $1\,\mu F$ ve $2\,\mu F$ olan iki kondansatör paralel bağlandığında, eşdeğer sığa kaç μF olur?

(a) 1 (b) 3 (c) 2/3 (d) 3/2

7. Sığaları $1\,\mu F$ ve $2\,\mu F$ olan iki kondansatör seri bağlandığında, eşdeğer sığa kaç μF olur?

(a) 1 (b) 3 (c) 2/3 (d) 3/2

8. Bir kondansatörün levhaları arasına $K = 3$ olan dielektrik tabaka konuyor. Sığa kaç katına çıkar?

(a) 1/3 (b) Aynı (c) 3 (d) 9

9. Q yüklü bir kondansatörün levhaları arasına $K = 3$ olan dielektrik tabaka konuyor. V potansiyel farkı kaç katına çıkar?

(a) 1/3 (b) Aynı (c) 3 (d) 9

10. Q yüklü bir kondansatörün levhaları arasına $K = 3$ olan dielektrik tabaka konuyor. Elektrik alan kaç katına çıkar?

(a) 1/3 (b) Aynı (c) 3 (d) 9

11. Q yüklü bir kondansatörün sığası 2 kat artırıldığında, enerjisi kaç katına çıkar?

(a) 1/2 (b) 2 (c) 4 (d) 1/4

12. Q yüklü bir kondansatörün levhaları arasındaki uzaklık 2 kat artırıldığında, enerjisi kaç katına çıkar?

(a) 1/2 (b) 2 (c) 4 (d) 1/4

13. Bir kondansatöre uygulanan V potansiyel farkı 2 katına çıkarıldığında, enerjisi kaç katına çıkar?

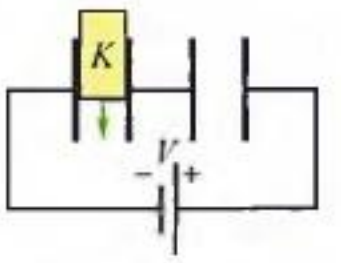
(a) 1/2 (b) 2 (c) 4 (d) 1/4

14. İki özdeş kondansatörden ikincisinin yükü 2 kat fazla, potansiyeli 2 kat azdır. İkinci kondansatörün enerjisi birinciden kaç kat fazla olur?

(a) Aynı (b) 2 (c) 1/2 (d) 4

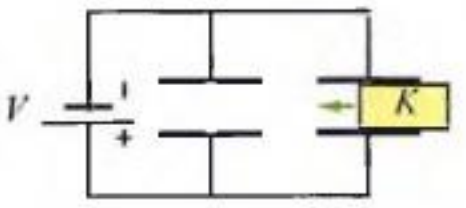
15. Bir kondansatörün sığası 2 katına çıkarılıyorsa, Q/V oranı kaç katına çıkar?

(a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2



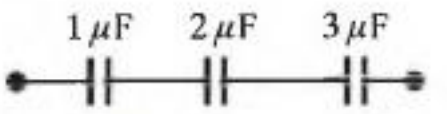
16. Şekildeki kondansatörler devreye bağlı iken dielektrik konuluyor. Bataryadan çekilen toplam yük ne olur?

(a) Artar (b) Azalır (c) Aynı kalır



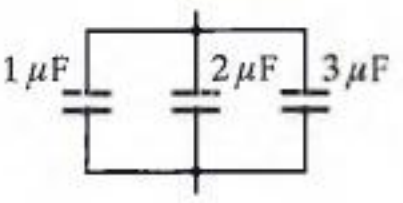
17. Şekildeki kondansatörler devreye bağlı iken dielektrik konuluyor. Bataryadan çekilen toplam yük ne olur?

(a) Artar (b) Azalır (c) Aynı kalır



18. Şekildeki devrenin eşdeğer sığası ne kadardır?

(a) $6\,\mu F$ (b) $6/11\,\mu F$ (c) $1/6\,\mu F$ (d) $4\,\mu F$



19. Şekildeki devrenin eşdeğer sığası ne kadardır?

(a) $6\,\mu F$ (b) $6/11\,\mu F$ (c) $1/6\,\mu F$ (d) $4\,\mu F$

20. Kondansatör levhaları arasına dielektrik konulduğunda, elektrik alanın azalması aşağıdakilerden hangileri ile açıklanabilir?

I. Molekül dipollerinin oluşturduğu zıt elektrik alan.
II. Dielektrik yüzeylerinde indüklenen yüzey yükleri.
III. Moleküllerden kopan elektronlar.
IV. Moleküllerin iyonlaşması.

(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve IV (d) I ve IV

Problemler

17.1 Sığa

17.1 Yüzölçümleri $80\,cm^2$ olan iki iletken levhadan, sığası 5 pF olan bir düzlem kondansatör yapılmak isteniyor. Levhalar arası uzaklık ne kadar olmalıdır? [C: 14 mm.]

17.2 Bir düzlem kondansatörün $40\,cm^2$ yüzölçümlü levhaları arasındaki mesafe 2 mm dir. Bu kondansatör bir bataryaya bağlandığında levhalarda ± 5 nC yük toplanıyor. (a) Kondansatörün sığasını bulun. (b) Levhaların potansiyel farkını bulun. (c) Levhalar arasındaki elektrik alanı bulun.
[C: (a) 18 pF, (b) 280 V, (c) 14 kV/m.]

17.3 Sığası $C = 5$ pF olan bir düzlem kondansatör 2000 V luk bir bataryaya bağlanıyor. (a) Ne kadar yük toplanır? (b) Kondansatör yüklü olarak devreden çıkarılıyor ve sonra levhalar arası uzaklık yarıya düşürülüyor. Yeni sığa ve levhalar arasındaki yeni potansiyel farkı ne kadar olur? (c) Kondansatör bataryaya bağlı iken, levhalar arası uzaklık yarıya düşürülüyor. Yeni sığa ve yeni yük ne kadar olur?
[C: (a) 10 nC, (b) 10 pF, 1000 V, (c) 10 pF, 20 nC.]

17.4 Küresel kondansatörün sığası (17.4) formülüyle bulunmuştu:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

(a) Dış iletkenin yarıçapı sonsuza gittiğinde ($b \to \infty$), sığanın $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ olduğunu gösterin. (b) Dünya'yı bir iletken farzedip, sığasını hesaplayın. (Dünyanın yarıçapı: 6400 km.)
[C: 710 μF.]

17.5 Sığası 10 pF olan küresel bir kondansatör, birinin yarıçapı diğerinin iki katı olan iki iletken küreden oluşmuştur. Her iki kürenin yarıçapını hesaplayın. [C: 4.5 ve 9 cm.]

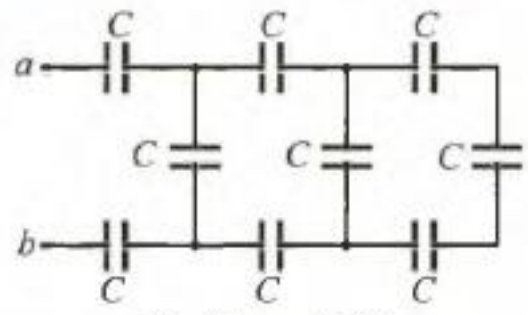
17.6 İçteki iletken silindirin yarıçapı 1 mm ve dıştakinin 3 mm olduğu bir koaksiyal kablodan, sığası 1 nF olan bir silindirik kondansatör yapılmak isteniyor. Kablo uzunluğu ne kadar olmalıdır? [C: 20 m.]

17.2 Kondansatörlerin Bağlanması



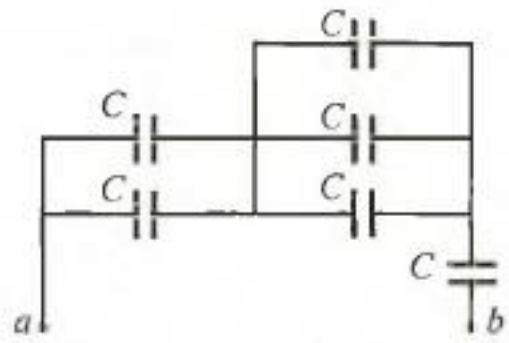
Problem 17.7

17.7 Şekildeki devrede her bir kondansatörün sığası $C = 1\,\mu$F dır. ab arasındaki eşdeğer sığa ne kadar olur?
[C: 2 μF.]



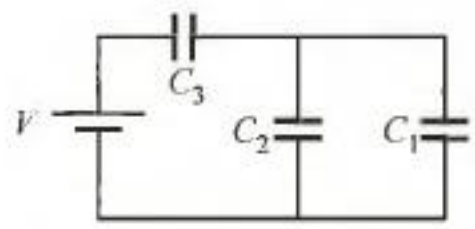
Problem 17.8

17.8 Şekildeki devrede her bir kondansatörün sığası $C = 1\,\mu$F dır. ab arasındaki eşdeğer sığa ne kadar olur?
[C: 15/41 μF.]



Problem 17.9

17.9 Şekildeki devrede her bir kondansatörün sığası $C = 1\,\mu$F dır. ab arasındaki eşdeğer sığa ne kadar olur?
[C: 6/11 μF.]

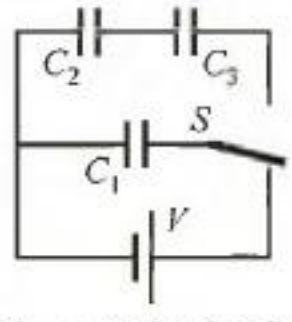


Problem 17.10

17.10 Şekildeki devrede $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3\,\mu$F ve $V = 12$ V dur. (a) Eşdeğer sığayı hesaplayın. (b) Eşdeğer sığanın yükünü bulun. (b) Herbir kondansatör üzerindeki yükü bulun.
[C: (a) 1.5 μF, (b) 18 μC, (c) $q_1 = 6$, $q_2 = 12$, $q_3 = 18\,\mu$C.]

Problem 17.11

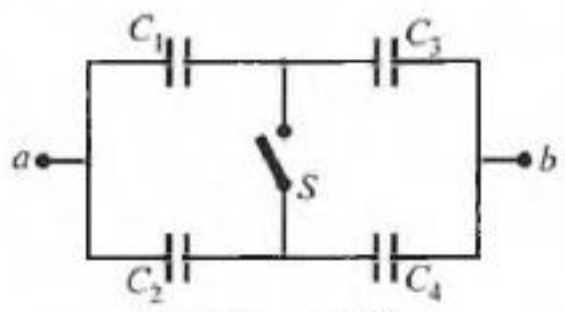
17.11 Şekildeki devrede $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$ ve $C_4 = 4\,\mu$F dir. (a) ab uçları arasında eşdeğer sığayı hesaplayın. (b) ab uçları 12 V luk bir potansiyel farkına bağlanıyor. Eşdeğer sığada toplanan yük ne kadar olur? (c) C_4 kondansatörü üzerinde ne kadar yük toplanır?
[C: (a) 23/3 μF, (b) 92 μC, (c) 48 μC.]



Problem 17.12

17.12 Şekilde sığası $C_1 = 4\,\mu$C olan kondansatör, S anah-

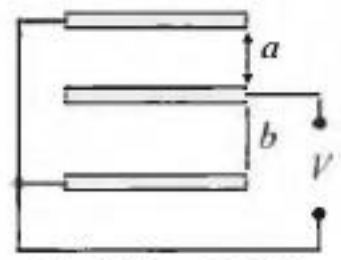
tarı $V = 12\,\text{V}$ olan batarya yönünde kapatılarak yükleniyor. (a) C_1 kondansatörünün yükü ne kadar olur? (b) Daha sonra S anahtarı $C_2 = 3\,\mu\text{C}$ ve $C_3 = 6\,\mu\text{C}$ olan kondansatörlerin yönünde kapatılıyor. Her üç kondansatörün yükleri ne kadar olur? [C: (a) $q_1 = 48\,\mu\text{C}$, (b) $q_1 = 32$, $q_2 = q_3 = 16\,\mu\text{C}$.]



Problem 17.13

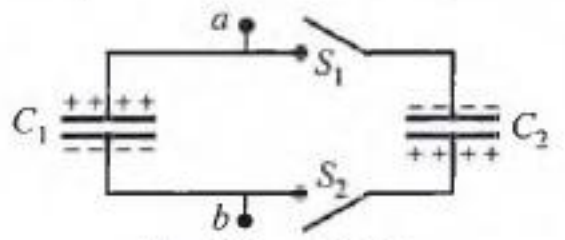
17.13 Şekildeki devrede $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$ ve $C_4 = 4$ dir. (a) Bu devre, S anahtarı açık iken, ab uçları 12 V luk bir bataryaya bağlanıyor. Eşdeğer sığayı ve bataryadan çekilen toplam yükü hesaplayın. (b) Devre yüklü iken bataryadan çıkarılıyor ve sonra S anahtarı kapatılıyor. Eşdeğer sığayı ve herbir koldaki yükü bulun.

[C: (a) $25/12\,\mu\text{F}$ ve $25\,\mu\text{C}$, (b) $2.1\,\mu\text{F}$ ve $q_1 = 8.3$, $q_2 = 16.7$, $q_3 = 10.7$, $q_4 = 14.3\,\mu\text{C}$.]



Problem 17.14

17.14 Şekildeki 3 düzlem levhanın herbirinin yüzölçümü A ve aralarındaki uzaklıklar a ve b dir. Bu levhalar şekilde gösterildiği gibi bir V potansiyel farkına bağlanıyorlar. Eşdeğer sığa ifadesinin $C = \varepsilon_0 A(1/a + 1/b)$ olduğunu gösterin. (*Yol gösterme:* Ortadaki iletken levha, iki kondansatörün ortak levhasıdır. Bu iki kondansatörün paralel mi yoksa seri mi bağlı olduğunu tayin edin.)



Problem 17.15

17.15 $C_1 = 1\,\mu\text{F}$ ve $C_2 = 4\,\mu\text{F}$ sığalı kondansatörler, aynı 20 V luk potansiyel farkı altında yüklendikten sonra, şekildeki gibi ters bağlanıyorlar, yani birinin eksi yüklü levhası diğerinin artı yüklüsüne bağlanıyor. (a) Kondansatörlerin başlangıçtaki yükleri ve toplam enerjileri ne kadardır? (b) Kondansatörlerin son yükleri ve toplam enerjileri ne kadar olur?

[C: (a) $q_1 = 20$, $q_2 = 80\,\mu\text{C}$, 1 mJ, (b) $q_1' = 12$, $q_2 = 48\,\mu\text{C}$, 0.36, mJ.]

17.3 Dielektrikler

17.16 Levhaların yüzölçümü $5\,\text{cm}^2$ ve aralarındaki uzaklık 2 mm olan bir düzlem kondansatörün hacmi parafinle doldurulmuştur. (a) Kondansatörün sığası ne kadar olur? (b) Bu kondansatöre en fazla kaç volt potansiyel farkı altında kullanılabilir? (Parafinin dielektrik sabiti ve sertliği için Sayfa 289 deki tabloyu kullanın.) [C: (a) 4.9 pF, (b) 200 V.]

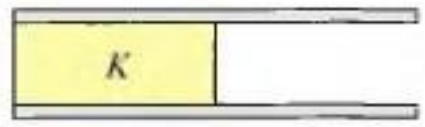
17.17 Bir düzlem kondansatörün levhaları arasındaki uzaklık 3 mm dir. Levhalar arasında boşluk bulunduğunda sığası $C_0 = 5\,\mu\text{F}$ oluyor.

(a) Kondansatör $V_0 = 24\,\text{V}$ olan bir bataryaya bağlanıyor. Q_0 yükü ve levhaları arasındaki E_0 elektrik alanı ne kadar olur?

(b) Kondansatör yüklü olarak devreden çıkarılıyor ve levhalar arasına, dielektrik sabiti $K = 8$ olan bir dielektrik tabaka konuluyor. Kondansatörün C sığası, V potansiyeli ve E elektrik alanı ne kadar olur?

(c) Kondansatör bataryaya bağlı iken, levhalar arasına aynı dielektrik tabaka konuluyor. Kondansatörün Q yükü, V potansiyeli ve E elektrik alanı ne kadar olur?

[C: (a) $120\,\mu\text{C}$ ve 8 kV/m, (b) $40\,\mu\text{F}$, 3 V ve 1 kV/m, (c) $960\,\mu\text{C}$, V ve E değişmez.)



Problem 17.18

17.18 Şekilde levhalar arası boşken sığası C_0 olan düzlem kondansatörün levhaları arasındaki boşluğun bir yarısına K sabitli bir dielektrik tabaka konuluyor. Yeni sığa ne olur?

[C: $C = (1 + K)C_0/2$.]

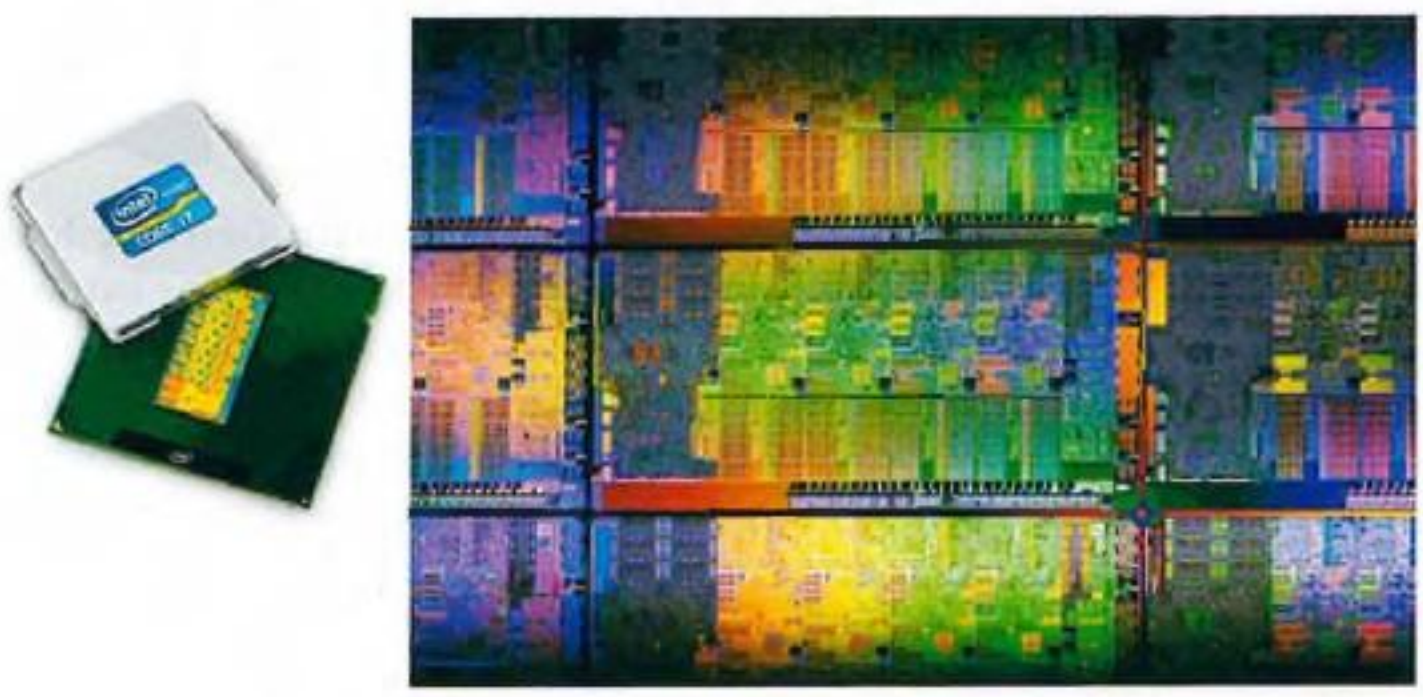
17.19 Bir düzlem kondansatörün levhaları arasındaki 5 mm kalınlıktaki boşluk hava ile doludur. (a) Bu kondansatör en fazla kaç voltluk bir potansiyel farkına bağlanabilir? (b) Kondansatör levhaları arasına kağıt tabaka konuluyor. Bu kez en fazla kaç voltluk bir potansiyel farkı uygulanabilir? (Dielektrik setlikler: Hava: $E_{max} = 3\times10^6\,\text{V/m}$, kağıt: $15\times10^6\,\text{V/m}$)

[C: (a) 15 kV, (b) 75 kV.]

17.20 Dielektrik sabiti 12 ve dielektrik sertliği $5\times10^6\,\text{V/m}$ olan bir malzemeden öyle bir düzlem kondansatör yapılmak isteniyor ki sığası 10 pF olsun ve en fazla 20 kV potansiyel farkına bağlanabilsin. Bu kondansatörün levhalarının yüzölçümü ve aralarındaki mesafe ne kadar olmalıdır?

[C: $3.8\,\text{cm}^2$ ve 4 mm.]

18 AKIM, DİRENÇ VE DEVRELER



İntel Core *i*7 çipi ve altında yatan Sandy Bridge mimarisi. 2011 yılında piyasaya sürülen bu çip içinde 2.6 milyar adet transistör devresi bulunmaktadır.

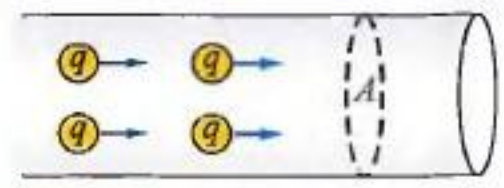
Modern teknoloji ve sanayide elektrik enerjisi kadar verimli ve kullanışlı başka bir enerji türü daha keşfedilememiştir. Elektrik bir yerden diğerine kolayca iletilebilmekte, her türlü mekanda ve çalışma koşullarında kullanılabilmektedir. Enerji ve sinyal üretmekte, makinaları çalıştırmakta ve yönetmekte elektrikten daha uygun bir enerji türü yoktur.

Tüm bu etkinliklerin temelinde elektrik akımı yer almaktadır. Bu bölümden itibaren hareket eden elektrik yüklerinin oluşturduğu akımları ve bu akımların madde içindeki davranışlarını inceleyeceğiz. Statik yüklere kıyasla çok daha zengin ve karmaşık yapıda olan elektriksel etkileri tanıyacağız.

18.1 ELEKTRİK AKIMI

İletken maddenin herhangi bir kesitinden birim zamanda geçen yük miktarına **akım** denir. Daha açık bir tanımla, küçük bir dt zaman aralığında iletken kesitinden belli bir yönde geçen net yük miktarı dq ise, I sembolüyle gösterilen akım,

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(Akım)} \qquad (18.1)$$



Şekil 18.1: Bir kesitten geçen yükler.

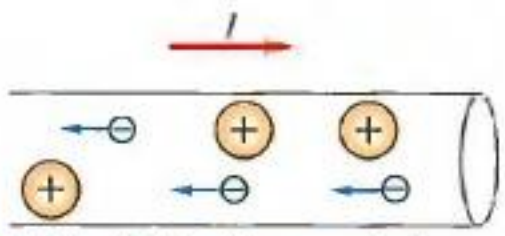
olur. Akım birimi **ampere** olup, kısaca A ile gösterilir:

$$1\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{C/s}$$

Fakat, SI birim sisteminde temel elektrik birimi ampere olduğu için, coulomb cinsinden ifade etmeye gerek yoktur. Tersine, coulomb birimi ampere×saniye olur.

Burada, "belli bir yönde geçen net yük" ifadesine dikkat edelim. Bir iletken içindeki serbest elektronlar sürekli devinim halindedirler. Herhangi bir kesitte gözlendiğinde, bir yönde geçen ortalama yük miktarı diğer yönde geçen ortalama yük miktarına eşittir ve dolayısıyla geçen net yük sıfır olur. Ne zaman ki bu iletken bir potansiyel farkına bağlanır, o zaman belli bir yönde net yük akışı gözlenir.

Akım Yönü



Şekil 18.2: Akımı oluşturan yükler, eksi (−) yüklü elektronlardır, + yüklü iyonlar hareket etmezler.

Maddenin mikroskopik yapısı bilinmeden önce, elektrik akımının yönü, pozitif yüklerin hareket yönü olarak kabul edilmişti. Fakat, daha sonra anlaşıldı ki hareket eden yükler sadece negatif elektronlardır. Pozitif yüklü iyonlar birbirine kuvvetli bağlı ve çok ağır olduklarından, bulundukları yeri terketmez, orada sadece titreşim hareketi yaparlar.

Buna rağmen, akım yönü kabulü değiştirilmedi. Bu kabule göre:

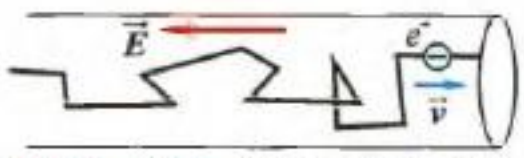
Akım yönü pozitif yüklerin hareket yönünde alınır. Gerçekte katı ortamda, buna zıt yönde hareket eden negatif yüklü elektronlar vardır.

Makroskopik olarak bu bir sorun yaratmaz. Bir düşünün: Sağa doğru +1 C yük gitmesi sağ tarafta yükü 1 C artırır. Ama, sola doğru −1 C yük gitmesi, yine sağ taraftaki yükü 1 C artıracaktır. İkisi de aynı sonucu doğurur. Bu bölümde pekçok ispatı $+q$ yükleri hareket ediyormuş gibi yapacağız, ama vardığımız sonuçlar değişmeyecektir.

Sürüklenme Hızı

İletken bir teldeki akımı, yüklerin tel içindeki hareket hızı cinsinden hesaplayabiliriz. Bir iletken telin iki ucu arasına bir V potansiyel farkı uygulandığında, tel içinde net bir E elektrik alanı oluşacaktır. Elektrik alanda q yüküne uygulanan kuvvet $F = qE$ olduğundan yükler hızlanmaya başlayacaktır.

Burada bir düzeltme yapalım: Elektrostatikte iletken içinde daima $E = 0$ olduğunu söylemiştik. Fakat, burada artık hareketli yükleri incelemeye başladığımız için, elektrostatik koşulları geçerli olmaz, ve elektrik alan sıfırdan farklı olabilir.



Şekil 18.3: Elektronlar iletken içinde hızlanırken iyonlarla çarpışıp enerji kaybederler.

$F = qE$ kuvveti etkisi altındaki yüklerin Newton yasasına göre ivmelenmesi beklenirdi. Fakat, iletken ortamda bu mümkün olmaz. Çünkü, hareketli q yükleri ortamda bulunan iyonlarla çarpışarak enerji kaybeder veya yön değiştirirler. Yeniden hızlanmaya başladıktan sonra tekrar tekrar çarpışır ve yavaşlarlar. Bu durumu, peşpeşe kırmızı ışıklar bulunan bir yolda ilerlemeye çalışan ötomobil gibi düşünebiliriz. Otomobil ivmelenip hızını artırır ama kırmızı ışığa geldiğinde durur ve bekler; yeşil yanınca tekrar ivmelenmeye başlar, bir sonraki kırmızı ışıkta yeniden durmak zorunda kalır.

Böylece elektronlar, iletken içinde ortalama bir hızla yol alırlar. Bu hıza **sürüklenme hızı** denir ve v_d ile gösterilir. Şimdi, sürüklenme hızı ile akım arasındaki ilişkiyi gösterelim.

Bir iletkenin A kesitinden dt zaman aralığında geçen yük miktarına dq diyelim. Bu dt zaman aralığında v_d sürüklenme hızıyla kesiti geçecek olan yükler, tabanı A ve uzunluğu $L = v_d\,dt$ kadar olan bir silindir içindeki yükler olacaktır. İletken ortamda birim hacimdeki serbest yük sayısı $n = N/V$ olsun. Buna göre, adıgeçen silindir içindeki q yükü sayısı dN ise,

$$dN = n \times \text{hacim} = n A v_d\,dt$$

ve kesiti geçen yük miktarı,

$$dq = q\,dN = qnAv_d\,dt$$

olur. Şimdi, akımın tanımını kullanır ve $q = e$ elektron yükünü yerine koyarsak sonuç şöyle bulunur:

$$I = \frac{dq}{dt} = enAv_d \tag{18.2}$$

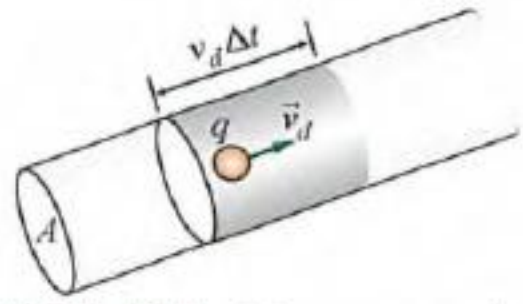
I akımı biliniyorsa, bu ifadeyi v_d hızı için şöyle yazabiliriz:

$$v_d = \frac{I}{enA} \qquad \text{(sürüklenme hızı)} \tag{18.3}$$

Basit bir hesap yaparak sürüklenme hızının mertebesini görelim: Kesiti $1\,\text{mm}^2$ olan bir bakır telden $I = 20\,\text{A}$ akım geçiyor olsun. Bakırda metreküp başına yaklaşık 10^{29} serbest elektron bulunduğu verilmiş olsun. Yük olarak $q = e = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ alınırsa,

$$v_d = \frac{I}{enA} = \frac{20}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{29} \times 10^{-6}} \approx 0.001\ \text{m/s}$$

bulunur. Bu sonuç şaşırtıcı gelebilir. Elektronlar iletken içinde saniyede 1 mm kadar yavaş ilerlemektedirler. Oysa, elektrik düğmesini çevirdiğimiz anda lambanın yandığını gözleriz. Bunun sebebi iletken içinde heryerde serbest elektronların var oluşudur. Düğmeyi çevirdiğimizde, lambaya bitişik olan yükler harekete geçerler, uzun bir yol katetmelerine gerek yoktur.

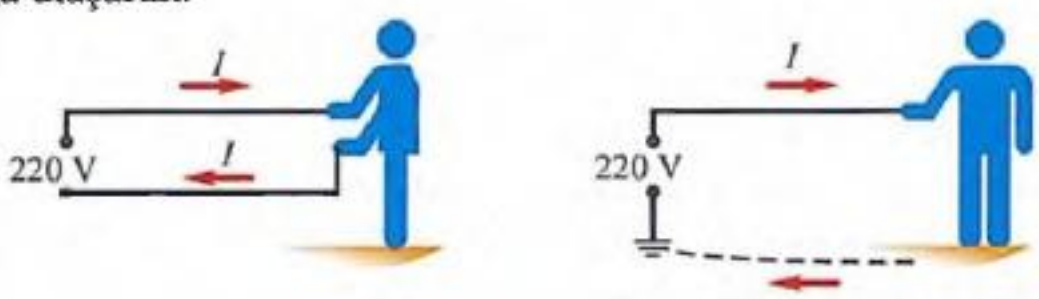


Şekil 18.4: Δt zaman aralığında A kesitinden geçen yükler, uzunluğu $v_d\,\Delta t$ kadar olan bir silindir içinde yer alırlar.

Elektrik Akımının Biyolojik Etkileri

İnsan vücudunun elektrik voltajı ve akımına karşı sınırlı bir direnci vardır. Belli sınırların üstünde akım ve potansiyel farkları sonucunda **elektrik çarpması** denilen şok etkisi olur ve ölümle sonuçlanabilecek ciddi hasarlar meydana gelebilir. Elektrikten korunmak için bilinmesi gereken önemli noktaları burada vurgulayalım:

- Elektrik akımı vücuttan iki türlü geçebilir: Şekil 18.5-a daki gibi, devreyi vücut üzerinden tamamlayarak geçebilir. Veya, (b) deki gibi, vücut üzerinden toprağa ulaşarak.



Şekil 18.5: Vücuttan akım iki türlü geçebilir: (a) Devreyi tamamlayarak, (b) Vücut üzerinden toprağa ulaşarak.

- Elektrik çarpmasında önemli olan voltaj değil akımdır. Çok yüksek voltajla temas etmiş olabilirsiniz, ama bunun sonucunda vücuttan akım geçmiyorsa

zarar vermez. Ama, yüksek voltaj vücudun diğer bir noktasından devreyi tamamlıyorsa (örneğin, iki tel ayrı ellerde tutuluyorsa, veya toprakla iletken bir temas kurulmuşsa) o zaman devre tamamlanır ve akım geçmeye başlar. (Bu yüzden kuşlar çarpılmadan elektrik tellerine konabilirler.)

- 0.3 – 0.5 A doğru akımdan veya 60 miliamper alternatif akımdan yukarısı zararlı olmaktadır.
- Elektrik akımı vücuda iki türlü zarar verebilir:

  Deride ve iç organlarda yanıklar. Akımın geçtiği yol üzerindeki organlarda oluşan ısı enerjisi ve iyonlaşma, dokuları tahrip eder ve ölüme yol açabilir.

  Kalp ve sinir sisteminde bozulma. Vücudumuzun sinir sistemi, 0.1 V kadar küçük voltajla çalışan akson denilen sinir hücrelerinden oluşur. Dışardan gelen bir elektrik akımı bu sistemi bozar ve kaslarda felç oluşmasına sebep olur. Özellikle kalp karıncık kaslarında felç olduğunda, kalp atışı düzensizleşir. Buna **fibrilasyon** denir. Böyle durumda yeterli kan pompalayamayan kalp durabilir.
  Elektrik çarpmasında ölümlerin % 80 si yanıklardan, geri kalanı kalp ve sinir sistemi felcinden oluşur.



Şekil 18.6: Kalp felcinde kullanılan defibrilatör aleti.

- Ohm yasasına göre, geçen akım vücudun elektrik direncine bağlı olacaktır. Bu direnç derinin sıcaklığı veya terli oluşuna göre değişebilir. Kuru bir derinin direnci 5 000 – 10 000 Ω kadardır, ama nemli deride 1 000 Ω değerine kadar düşebilir.
- Bu akım ve direnç limitleri gözönüne alındığında, 10 V kadar düşük voltajlar dahi zararlı olabilmektedir.
- **Korunma.** Elektrik çarpması durumunda 1. kural, voltaj kaynağıyla teması kesmektir. Bunu yaparken kendinizin yalıtılmış olmanıza dikkat etmeniz gerekir.
  Elektrik aletlerinde akım kaçağı olması durumunda, topraklı üçlü fişler kullanmak gerekli korumayı sağlar. Bu fişlerde üç telden biri voltajı taşır, diğer ikisi nötrdürler. Üçüncü tel hem toprağa hem de elektrik aletinin iletken kasasına bağlıdır. Böylece, elektrik kaçağı olduğunda, akım bu üçüncü yoldan toprağa gider.
  Diğer bir koruma yolu, yalıtkan tabanlı (lastik, mantar) ayakkabılar giyerek vücut üzerinden toprağa akım geçmesini önlemektir.

18.2 OHM YASASI VE DİRENÇ

Bir iletkenin birim kesitinden geçen akıma **akım yoğunluğu** denir ve J ile gösterilir. A yüzölçümlü kesitten geçen akım I ise, akım yoğunluğu,

$$J = \frac{I}{A} \qquad \text{(Akım yoğunluğu)} \tag{18.4}$$

olur. Birimi ampere/metre^2 = A/m^2 dir.

Metallerde ve diğer birçok iletken maddede J akım yoğunluğu ile ortamdaki E elektrik alanı arasında lineer bir ilişki vardır. İlk kez Alman bilim adamı Ohm tarafından bulunan bu bağıntı **Ohm yasası** olarak bilinir ve şöyle ifade edilir:

$$E = \rho J \qquad \text{(mikroskopik Ohm yasası)} \tag{18.5}$$

Buradaki ρ orantı katsayısına **özdirenç** adı verilir.

Özdirenç maddenin cinsine ve sıcaklığa bağlıdır. Aşağıdaki tabloda bazı maddelerin özdirençleri verilmiştir:

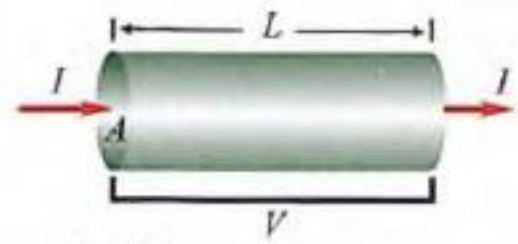
Bazı maddelerin oda sıcaklığında (20 °C) özdirençleri.

Madde	Özdirenç ρ ($\Omega \cdot$ m)	Sıcaklık katsayısı α (1/C°)
Gümüş	1.5×10^{-8}	0.004
Bakır	1.7×10^{-8}	0.004
Altın	2.4×10^{-8}	0.003
Aluminyum	2.8×10^{-8}	0.004
Tungsten	5.3×10^{-8}	0.005
Karbon	3.5×10^{-5}	−0.001

(18.5) denklemi Ohm yasasının mikroskopik ölçekteki ifadesidir. Bunu pratik uygulamalarda kullanabilecek hale getirmek için, iletkenin iki ucu arasında uygulanan V potansiyel farkını kullanırız. Kesiti A ve uzunluğu L olan bir iletken telin içindeki elektrik alan

$$E = \frac{V}{L}$$

olup, akım yoğunluğu için de $J = I/A$ tanımı kullanılırsa, (18.5) yasası şöyle olur:



Şekil 18.7: Ohm yasası.

$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A}$$

$$V = \left(\rho \frac{L}{A}\right) I$$

Buradan Ohm yasasınm makroskopik ifadesi elde edilir:

$$\boxed{V = RI \qquad \text{(makroskopik Ohm yasası)}} \tag{18.6}$$

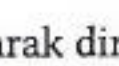
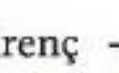
Bu yasadaki R katsayısı **direnç** adını alır:

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad \text{(direnç)} \tag{18.7}$$

Direnç büyüdükçe geçen akım azalır. Bir iletkenin direnci maddenin cinsine, boyutlarına ve sıcaklığa bağlıdır. İletkenin uzunluğu arttıkça direnç artar, kesiti arttıkça direnç azalır.

Direnç birimi ohm olup kısaca Ω (omega) sembolüyle gösterilir:

$$1\ \Omega = 1\ \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Devre elemanı olarak direnç  veya  sembolüyle gösterilir.

Özdirencin Sıcaklıkla Değişimi

İletken maddelerin özdirenci sıcaklıkla artar ve akım geçişini daha da zorlaştırır. Mikroskopik açıdan bakıldığında, sıcaklık arttıkça pozitif iyonların titreşim genlikleri artar ve ortamdaki serbest elektronlarla daha sık çarpışır ve böylece onların sürüklenme hızını azaltırlar. Bu da ortamın direncinin artması demektir.

Deneysel gözlemler özdirencin sıcaklıkla değişiminin şöyle ifade edilebileceğini göstermektedir:

$$\rho = \rho_0 \, [1 + \alpha (T - T_0)] \tag{18.8}$$

Burada ρ_0 değeri, T_0 gibi bir referans sıcaklığında (genellikle 0 °C veya 20 °C) özdirenç değeridir. α katsayısına özdirencin **sıcaklık katsayısı** denir. Bazı maddelerin sıcaklık katsayıları yukardaki tabloda verilmiştir.

R direncinin sıcaklığa bağımı da aynı yapıda olur:

$$R = R_0 \, [1 + \alpha (T - T_0)] \tag{18.9}$$

Örnek 18.1

Kesiti 0.1 mm² *olan bakır telden* 5 Ω *luk bir direnç yapılmak isteniyor.*

(a) *Telin uzunluğu ne kadar olmalıdır?*

(b) *Bu direnç* 116 V *luk bir potansiyel farkına bağlandığında, ne kadar akım geçer?*

(c) *Telin içindeki elektrik alan şiddeti ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Direnci özdirenç cinsinden veren (18.7) formülü kullanılır:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \rightarrow \quad L = \frac{RA}{\rho}$$

Bakırın özdirenci Sayfa 301 deki tablodan alınıp gerekli uzunluk hesaplanır:

$$L = \frac{5 \times 0.1 \times 10^{-6}}{1.7 \times 10^{-8}} = 29 \text{ m}$$

(b) Akım, Ohm yasasının makroskopik ifadesi olan (18.6) formülüyle hesaplanır:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{116}{5} = 23 \text{ A}$$

(c) Tel içinde düzgün bir elektrik alan olduğu varsayılırsa, potansiyel farkı elektrik alan cinsinden yazılır:

$$V = E L \quad \rightarrow \quad E = \frac{V}{L} = \frac{116}{29} = 4 \text{ V/m}$$

Örnek 18.2

Kesiti 2 mm² *olan bir telden* 3 A *akım geçtiğinde tel içinde* 100 V/m *şiddetinde bir elektrik alan oluşmaktadır. Telin özdirenci ne kadardır?*

Çözüm

Ohm yasasının mikroskopik ifadesi olan (18.5) formülü yazılır:

$$E = \rho J$$

Burada $J = I/A$ birim kesitten geçen akımdır. Buradan özdirenç hesaplanır:

$$E = \rho \frac{I}{A} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{EA}{I}$$

Veriler yerine konulup özdirenç hesaplanır:

$$\rho = \frac{100 \times 2 \times 10^{-6}}{3} = 6.7 \times 10^{-5} \, \Omega \cdot \text{m}$$

Örnek 18.3

Bir tungsten telli lambanın 20 °C *deki direnci* 10 Ω *dur.*

(a) 600 °C *de direnci ne kadar olur?*

(b) *Lamba akkor halinde yanarken direnci* 80 Ω *oluyor. Lambanın sıcaklığını tayin edin.*

Çözüm

(a) Direncin sıcaklıkla değişimini veren (18.9) formülü kullanılır:

$$R = R_0 \, [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Tungstenin sıcaklık katsayısı Sayfa 301 deki tablodan alınır:

$$R = 10 \, [1 + 0.005 \times (600 - 20)]$$

$$R = 39 \, \Omega$$

(b) Aynı formül T sıcaklığını bulmakta kullanılır:

$$80 = 10 \, [1 + 0.005 \times (T - 20)]$$

$$T = 1420 \, ^\circ\text{C}$$

18.3 DOĞRU AKIM DEVRELERİ

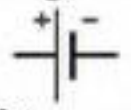
Elektromotor Kuvveti (EMK)

Bir devreden akım geçmesi için iki nokta arasında bir potansiyel farkı olması gerekir. Başka enerji türlerinden (kimyasal, mekanik, manyetik, ışık, vb.) elde edilen bu potansiyel farkına **elektromotor kuvveti** denir. Kısaca **emk** denir ve $\mathcal{E}$ ile gösterilir.



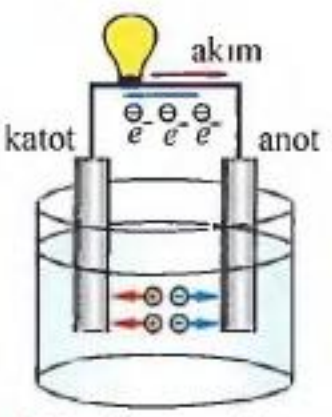
Şekil 18.8: Değişik emk kaynakları: bisiklet dinamosu, kuru pil, güneş pili.

Emk aslında kuvvet falan değil, bir potansiyel farkıdır, ama bu isim tarihsel olarak böyle kalmıştır. Zaten emk potansiyel farkı, onun bir kaynak olduğunu belirtmek amacıyla V değil, $\mathcal{E}$ ile gösterilmiştir.

Devre elemanı olarak emk  sembolüyle gösterilir.

Ençok bilinen emk kaynağı kimyasal enerjiyi elektrik enerjisine çeviren pil, batarya ve akülerdir. Örneğin, bir galvanik pilde elektrolit sıvı içine gömülü farklı iki metal elektrot (çinko ve bakır) arasında bir potansiyel farkı oluşur. (Otomobil akülerinde kurşun ve kurşun oksit elektrotlar kullanılır.)

Hangi türden olursa olsun, metal elektrotlardan biri daha yüksek potansiyelde olur. Bu pozitif uca *katot*, diğer negatif uca *anot* adı verilir. Bu batarya bir devreye bağlandığında akım katottan anoda, yani pozitif uçtan negatife doğru olur. Pilin içinde akım buna ters yönde giderek çevrimi tamamlar. (Daha önce vurguladığımız gibi, aslında elektronlar negatif uçtan pozitife doğru gitmektedirler.)



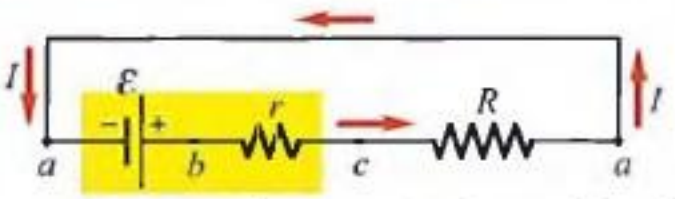
Şekil 18.9: Akım + katottan – anoda doğru kabul edilir, ama aslında elektronlar ters yönde giderler.

Benzer şekilde, güneş pilleri güneş enerjisini doğrudan potansiyel farkına dönüştürürler. Keza, bir jeneratör mekanik enerjiyi elektrik enerjisine dönüştürür.

Bataryanın emk değeri, yani $\mathcal{E}$ potansiyel farkı sabittir, bataryanın boyutlarını artırsanız da değişmez. Emk değeri ancak birkaç bataryayı seri bağlayarak artırılabilir. Örneğin, galvanik pilde emk 1.1 V, 6 hücreli bir otomobil aküsünde 12 V tur.

İç Direnç ve Uç Voltajı

Bir emk kaynağı devreye bağlandığında, dışarda akım (+) uçtan (–) uca doğru akarken, devrenin tamamlanabilmesi için, elektrolit sıvı içinde (–) uçtan (+) uca doğru bir akım olmalıdır. Bu esnada, elektronların sıvı içinde hareketliliği azalacağı için, bataryanın bir iç direnci oluşur. İç direnç r ile gösterilir.



Şekil 18.10: İç direnci r olan bir $\mathcal{E}$ emk kaynağına bağlı R direncinden oluşan basit bir devre.

Şimdi, $\mathcal{E}$ emk kaynağını bir R direncine bağlayarak çok basit bir devre oluşturalım. Devrede R direncine ilaveten bataryanın r iç direnci de olduğunu he-

saba katmak gerekir. Şekil 18.10 da görüldüğü gibi, bu devrede yüksek potansiyelli (+) uçtan (a noktası) başlayan bir I akımı tüm devreyi dolaşacaktır.

Bu devreyi hesaplamak üzere, bataryanın a ile gösterilen (–) ucundan başlayarak, akım yönünde devre boyunca gidelim ve tekrar a noktasına dönelim. Bu yol sonunda potansiyel yine V_a değerine dönmelidir.

a noktasının potansiyeli V_a olsun. b noktasına varmak için emk kaynağının (+) ucu üzerinden geçtiğimiz için, potansiyelimiz yükselir ve b noktasının potansiyeli $+\mathcal{E}$ kadar daha yüksek olur:

$$V_b = V_a + \mathcal{E}$$

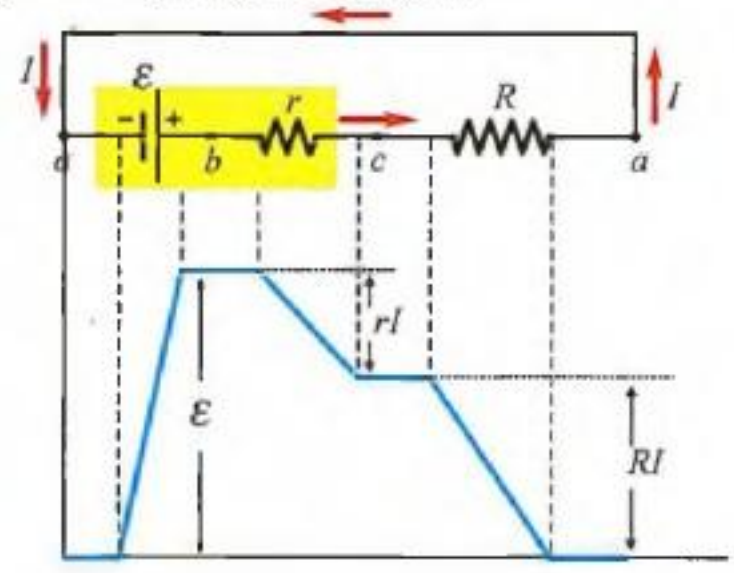
r iç direncine geldiğimizde, Ohm yasasına göre, direnç üzerinden akım yönünde geçerken, potansiyel rI kadar düşecektir. O halde, c noktasının potansiyeli,

$$V_c = V_b - rI = V_a + \mathcal{E} - rI$$

olur. Benzer şekilde, c noktasından itibaren, R direnci üzerinden akım yönünde geçerken, potansiyel RI kadar azalacaktır. O halde, sağdaki a noktasının potansiyeli,

$$V_a = V_c - RI = V_a + \mathcal{E} - rI - RI$$

Böylece a noktasına geri dönmüş oluruz. Şekil 18.11 deki grafikte devre boyunca her noktada potansiyelin değeri gösterilmiştir.



Şekil 18.11: Bir devrede akım, emk ve dirençler üzerinden geçerken oluşan potansiyel farkları.

Sadeleştirme yapılırsa,

$$\mathcal{E} = (R + r)\, I$$

Böylece, iç direnci r olan bir $\mathcal{E}$ emk kaynağının R dirençli bir devrede oluşturduğu I akımını bulmuş oluruz:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Bu devre çalışırken, yani I akımı geçerken, R direnci, bağlı olduğu bataryanın ac uçları arasındaki potansiyel farkını görecektir. Bu potansiyel farkı ise,

$$V_{ac} = \mathcal{E} - rI \qquad \text{(Uç voltajı)} \qquad (18.10)$$

olur. Bu V_{ac} potansiyel farkına bataryanın **uç voltajı** denir. Uç voltajı daima $\mathcal{E}$ değerinden az olur, çünkü r iç direnci üzerindeki potansiyel düşüşünü de hesaba katmak gerekir.

Elektrik Devrelerinde Güç ve Enerji

Elektrik devre elemanları (direnç, kondansatör, motor...) üzerlerinden akım geçtiğinde, elektrik enerjisini ısı, ışık, hareket gibi farklı enerji türlerine dönüştürürler. En genel olarak, herhangi iki nokta arasına bağlanmış olan devre elemanı üzerinden I akımı geçiyorsa, uçları arasında bir V potansiyel farkı var demektir. Potansiyel farkı birim yükün potansiyel enerjindeki değişmeyi, yani yapılan işi gösterir.

Uçları arasında V potansiyel farkı olan bir devre elemanı üzerinden, dt zaman aralığında dq yükü geçiyor olsun. Potansiyel enerjinin tanımına göre, bu yükün potansiyel enerjisindeki değişme $dU = dq\,V$ olacaktır. Diğer bir deyişle, dq yükü bu devre elemanı üzerinden, yüksek potansiyelli bir yerden düşük potansiyelli bir yere geçerken kaybedilen potansiyel enerji, bu devre elemanı üzerinde $dW = dU = dq\,V$ kadar bir iş yapmış olur:

$$dW = dU = V\,dq$$

Birim zamanda yapılan iş gücü verir:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{V\,dq}{dt} = V\frac{dq}{dt}$$

Birim zamanda geçen yük $I = dq/dt$ olacağından, güç ifadesi şöyle olur:

$$P = V\,I \qquad \text{(Güç)} \tag{18.11}$$



Şekil 18.12: Elektrik gücü çok yüksek voltajlarda iletilir.

Bu formül gücün en genel ifadesidir, devrenin herhangi bir elemanı üzerinde, potansiyel farkı V ve geçen akım I olduğunda, orada harcanan gücü verir. Bu ifade direnç, kondansatör, emk, motor ... hepsi için geçerlidir.

Belli bir zaman aralığında harcanan enerjiyi bulmak istersek, güç tanımını dW için yazarız:

$$dW = P\,dt$$

Özel olarak, bir direnç üzerinde harcanan gücün ifadesini bulalım: Ohm yasasına göre $V = R\,I$ olacağından,

$$P = V\,I = R\,I^2 \qquad \text{(Dirençte ısıya dönüşen güç)} \tag{18.12}$$

veya, dt zaman aralığında harcanan enerji,

$$dW = P\,dt = R\,I^2\,dt \tag{18.13}$$

olur. Isıya dönüşen bu enerjinin, akımın karesiyle orantılı olduğuna dikkat edelim.

Örnek 18.4

15 V luk bir bataryaya 7 Ω direnci bağlanmıştır. Bataryanın iç direnci 0.5 Ω dır.

(a) *Devreden geçen akımı bulun.*

(b) *Bataryanın uç voltajını bulun.*

(c) *Dirençlerde harcanan gücü ve bataryanın devreye sağladığı gücü hesaplayın.*

Çözüm

(a) Bataryanın eksi ucundan başlayarak, saat ibreleri yönünde komple bir tur yaptığımızda, herbir devre elemanı üzerindeki voltaj değişimlerini toplarız:

$$+\mathcal{E} - r\,I - R\,I = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{15}{7 + 0.5} = 2\,\text{A}$$

(b) Bataryanın uç voltajı (18.10) formülüyle hesaplanır:

$$V_{ab} = \mathcal{E} - rI = 15 - 0.5 \times 2 = 14\,\text{V}$$

(c) Dirençlerde harcanan güç RI^2 formülüyle hesaplanır:

$$W_R = RI^2 = 7 \times 2^2 = 28\,\text{W} \quad \text{ve} \quad W_r = rI^2 = 0.5 \times 2^2 = 2\,\text{W}$$

Bataryanın sağladığı güç (18.11) formülüyle hesaplanır:

$$W = V\,I = \mathcal{E}\,I = 15 \times 2 = 30\,\text{W}$$

Örnek 18.5

Tungstenden yapılmış olan bir su ısıtıcısının oda sıcaklığında (20 °C) direnci 50 Ω olup, 240 V altında çalışmaktadır.

(a) *Isıtıcı 20 °C daki suyu ısıtmaya başladığında harcadığı güç ne kadardır?*

(b) *Su kaynamaya başladığında harcadığı güç ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Güç formülü $W = VI$ ve Ohm yasası $V = RI$ kullanılırsa, ısıtıcının gücü şöyle yazılabilir:

$$W = R\,I^2 = \frac{V^2}{R}$$

Oda sıcaklığındaki direnç kullanılarak güç hesaplanır:

$$W = \frac{240^2}{50} = 1200\,\text{W} = 1.2\,\text{kW}$$

(b) Suyun kaynama sıcaklığı 100 °C olduğundan, bu sıcaklıktaki direnci hesaplamak gerekir:

$$R = R_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$$

Tungstenin α sıcaklık katsayısı 301 deki tablodan alınır:

$$R = 50\,[1 + 0.005 \times (100 - 20)] = 70\,\Omega$$

Bu dirençte harcanan güç hesaplanır:

$$W = \frac{V^2}{R} = \frac{240^2}{70} = 820\,\text{W} = 0.82\,\text{kW}$$

18.4 DİRENÇLERİN BAĞLANMASI

Çok sayıda direnç bir devreye bağlanmışsa, bunların tümünün işlevini tek başına yapan dirence **eşdeğer direnç** denir. Genelde çok karmaşık bağlantılar ileri devre analizi gerektirir. Burada sadece seri veya paralel bağlanmış dirençlerden oluşan devreleri ele alacağız.

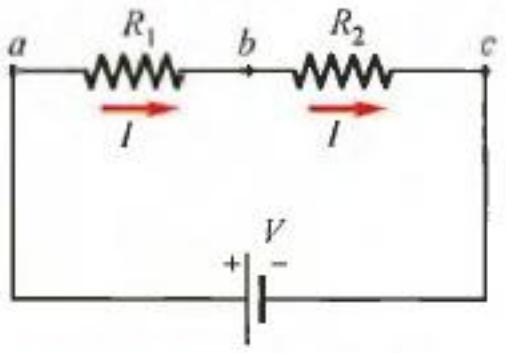
Devre çözümlerinde 2 basit ilke yeterli olmaktadır:

- *Aynı bir koldaki dirençler üzerinden aynı akım geçer.*
- *Aynı iki uca bağlı dirençler aynı potansiyel farkını görürler.*

Seri Bağlama

R_1 ve R_2 dirençleri Şekil 18.13 de görüldüğü gibi bir V potansiyel farkı altında peşpeşe seri olarak bağlanmış olsun. Bu dirençler üzerinden aynı I akımı geçecektir. O halde, potansiyel farkları ve Ohm yasası yazılır:

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$
$$V = R_1 I + R_2 I$$



Şekil 18.13: Seri bağlama.

$R_{eş}$ eşdeğer direnci aynı V potansiyel farkı altında aynı I akımını çekmelidir:

$$V = R_{eş}\,I$$

Son iki ifade karşılaştırılırsa, seri bağlı eşdeğer direnç bulunmuş olur:

$$R_{eş} = R_1 + R_2$$

Bu sonuç ikiden fazla direnç için de geçerlidir:

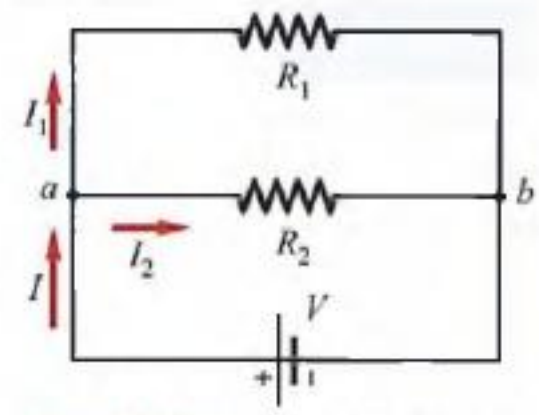
$$R_{eş} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad \text{(Seri bağlama)} \tag{18.14}$$

Paralel Bağlama

R_1 ve R_2 dirençleri Şekil 18.14 de görüldüğü gibi potansiyel farkı V olan aynı bir bataryaya bağlanmış olsun. Bu durumda, her direnç aynı V potansiyel farkını görecek, fakat üzerlerinden geçen akımlar farklı olacaktır. Bu akımlara I_1 ve I_2 dersek,

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V}{R_2}$$

olur. Böylece, bataryadan çekilen toplam akım $I = I_1 + I_2$ olacaktır.



Şekil 18.14: Paralel bağlama.

Aynı uçlar arasına konulan eşdeğer direnç aynı toplam akımı çekmelidir:

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{V}{R_{eş}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

Taraf tarafa V ile sadeleştirilirse, paralel bağlı dirençlerin eşdeğer direnci bulunmuş olur:

$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Bu ispat ikiden çok sayıda direnç paralel bağlı olduğunda yine geçerlidir:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \qquad \text{(Paralel bağlama)}} \qquad (18.15)$$

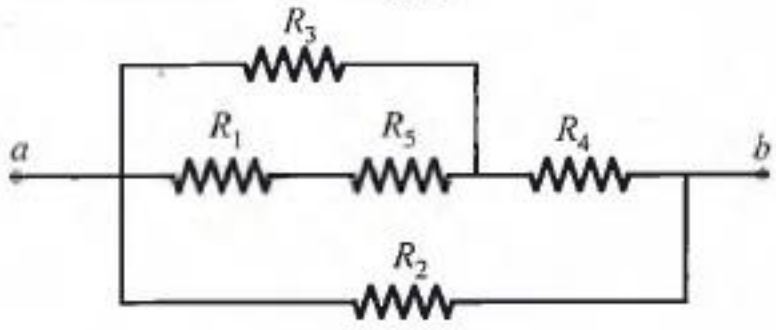
Paralel bağlı durumda eşdeğer direnç, herbir dirençten daha küçük olur.

Örnek 18.6

Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $R_4 = 4$ *ve* $R_5 = 5\,\Omega$ *dır.*

(a) *ab arasındaki eşdeğer direnç ne kadardır?*

(b) *ab uçları* 12 V *luk bir kaynağa bağlandığında,* R_4 *direncinden ne kadar akım geçer?*



Çözüm

(a) Devre problemlerinde bağlantı tellerinin direnci sıfır alınır. Yani, bu telleri uzatıp kısaltabilir, hatta bir noktada birleştirebiliriz. Böylece seri veya paralel bağları görmek kolaylaşır.

Şekildeki devreye en içten bakarsak, R_1 ve R_5 in seri bağlı olduğunu görürüz. Bunların eşdeğer direncini R' ile gösterip hesaplayalım:

$$R' = R_1 + R_5 = 1 + 5 = 6\,\Omega$$

Bu iki direncin yerine tek R' direnci koyarsak, bunun R_3 ile paralel bağlı olduğu görülür. Bu ikisinin eşdeğer direncini hesaplayalım:

$$R'' = \frac{R_3 R'}{R_3 + R'} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\,\Omega$$

Bu R'' direnci R_4 ile seri bağlı olur:

$$R''' = R_4 + R'' = 4 + 2 = 6\,\Omega$$

Son olarak, R''' direnci R_2 ile paralel bağlı olur:

$$R_{eş} = \frac{R_2 R'''}{R_2 + R'''} = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = 1.5\,\Omega$$

(b) Önce, ab uçları bataryaya bağlandığında, eşdeğer direncin çektiği akım hesaplanır:

$$I = \frac{V_{ab}}{R_{eş}} = \frac{12}{1.5} = 8\,\text{A}$$

Bu I akımının b ucundan girdiğini varsayalım. Burada akım, I_2 ve I_4 ile gösterdiğimiz iki kola ayrılacaktır:

$$I = I_2 + I_4 = 8\,\text{A}$$

I_2 akımını hemen Ohm yasasıyla hesaplayabiliriz, çünkü R_2 direnci de $V_{ab} = 12$ V luk potansiyel farkını görmektedir:

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{12}{2} = 6\,\text{A}$$

Buradan I_4 akımı hesaplanır:

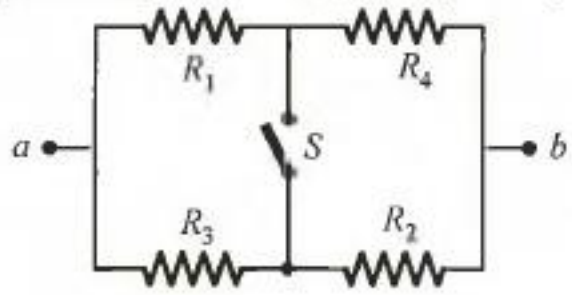
$$I_4 = I - I_2 = 8 - 6 = 2\,\text{A}$$

Örnek 18.7

Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ ve $R_4 = 4$ dir. ab uçları 12 V luk bir kaynağa bağlanıyor.

(a) *S anahtarı açık iken, eşdeğer direnci ve devrede harcanan gücü hesaplayın.*

(b) *S anahtarı kapalı iken, eşdeğer direnci ve devrede harcanan gücü hesaplayın ve (a) şıkkıyla karşılaştırın.*



Çözüm

(a) Anahtar açıkken, (R_1, R_4) ve (R_2, R_3) çiftleri kendi aralarında seri bağlıdırlar. Bunların eşdeğer dirençlerini R' ve R'' ile gösterelim:

$$R' = R_1 + R_4 = 1 + 4 = 5\,\Omega$$
$$R'' = R_2 + R_3 = 2 + 3 = 5\,\Omega$$

Daha sonra, bu R', R'' dirençleri paralel bağlı olurlar:

$$R_{eş} = \frac{R'R''}{R' + R''} = \frac{5 \times 5}{5 + 5} = 2.5\,\Omega$$

Devrede harcanan güç potansiyel farkından hesaplanır:

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R_{eş}} = \frac{12^2}{2.5} = 58\,\text{W}.$$

(b) Anahtar kapalıyken, (R_1, R_3) ve (R_2, R_4) çiftleri kendi aralarında paralel bağlı duruma geçerler. Bunların eşdeğer dirençlerini R' ve R'' ile gösterelim:

$$R' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1 \times 3}{1 + 3} = \frac{3}{4}\,\Omega$$
$$R'' = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3}\,\Omega$$

Daha sonra, bu R', R'' dirençleri seri bağlı olurlar:

$$R_{eş} = R' + R'' = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} = 2.1\,\Omega$$

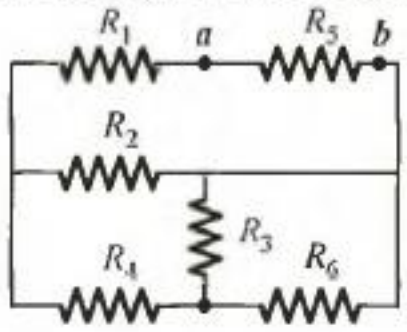
Devrede harcanan güç potansiyel farkından hesaplanır:

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R_{eş}} = \frac{12^2}{2.1} = 69\,\text{W}.$$

Anahtar kapalıyken devrede harcanan güç daha fazladır.

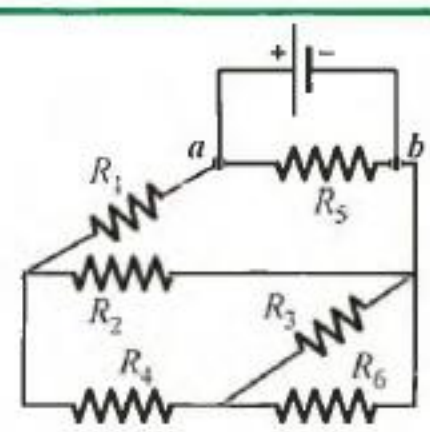
Örnek 18.8

Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, ... ve $R_6 = 6\,\Omega$ dır. ab noktaları arasındaki eşdeğer direnci hesaplayın.



Çözüm

Devre problemlerinde hangi iki nokta arasında eşdeğer direnç isteniyorsa, o iki noktanın bir potansiyel farkına bağlı olduğunu düşünmek kolaylık sağlar. Bağlantı tellerinin boylarını değiştirip bir noktada toplarsak, devre şöyle basitleşir:



Bu şekilden R_3, R_6 dirençlerinin paralel bağlı olduğu kolayca görülür. Bu ikisinin eşdeğer direnci hesaplanır:

$$R' = \frac{R_3 R_6}{R_1 + R_3} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\,\Omega$$

Bu R' direnci R_4 ile seri bağlıdır:

$$R'' = R_4 + R' = 4 + 2 = 6\,\Omega$$

Bu R'' direnci R_2 ile paralel bağlıdır:

$$R''' = \frac{R_2 R''}{R_2 + R''} = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = 1.5\,\Omega$$

Bu R''' direnci R_1 ile seri bağlıdır:

$$R^{iv} = R_1 + R''' = 1 + 1.5 = 2.5\,\Omega$$

Son olarak, bu R^{iv} direnci R_5 ile paralel bağlıdır:

$$R_{eş} = \frac{R_5 R^{iv}}{R_5 + R^{iv}} = \frac{5 \times 2.5}{5 + 2.5} = \frac{5}{3} = 1.7\,\Omega$$

18.5 ELEKTRİK ÖLÇÜ ALETLERİ

Direnç, akım veya emk ölçen elektrik ölçü aletlerinin nasıl bağlanacağını bilmek önemlidir. Akım ölçen alete **ampermetre**, potansiyel farkı ölçen alete **voltmetre** ve emk ölçen alete **potansiyometre** denir.

Tüm bu ölçü aletlerinin ortak özelliği **galvanometre** denilen aynı aleti, farklı şekillerde kullanıyor olmalarıdır. O halde, önce galvanometreyi tanıyalım.

Galvanometre

Bir mıknatısın kutupları arasına konulan bir telden akım geçtiğinde, tel üzerinde manyetik bir kuvvet oluşur. Bölüm 20 de göreceğimiz gibi, tel üzerindeki manyetik kuvvet geçen akım şiddetiyle orantılı olur. Ayrıca, tel bir bobin gibi sarılmışsa bu kez dönme momenti oluşur ve bobin manyetik alanda sapar. Yine, telin burulma miktarı, içinden geçen akımla doğru orantılı olur. Böylece, galvanometrenin burulma açısı bir göstergede ölçülerek akım hesaplanabilir.

Fakat, galvanometreyi oluşturan telin de bir direnci vardır. Bu direnç devrenin bir parçasıdır ve dolayısıyla, devreden geçen akımı değiştirecektir. Bu etkinin küçük olması için, *galvanometrenin iç direncinin çok küçük olması gerekir.*

Galvanometre her türlü elektrik ölçü aletinin temelidir. Galvanometreye eklenen seri veya paralel dirençlerle, diğer nicelikler ölçülebilir.



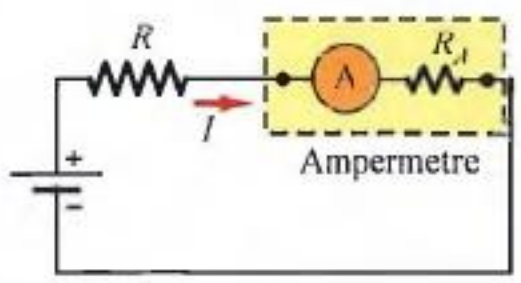
Şekil 18.15: Galvanometre.

Ampermetre

Akım ölçmekte kullanılan ampermetre aslında direnci çok küçük olan bir galvanometredir. Ampermetre, devrenin akım ölçülecek yerinde teli keserek, araya seri olarak bağlanır. Böylece, ölçülecek akımın tamamının ampermetre içinden geçmesi sağlanır. Fakat, bu koldan geçmekte olan akımı etkilememesi için ampermetrenin direnci çok küçük, neredeyse sıfır olmalıdır. Şekil 18.16 daki devrede ampermetreden geçen akım,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_A}$$

olacaktır. Burada ampermetrenin direnci $R_A << R$ olursa, I akımındaki değişme ihmal edilebilir.



Şekil 18.16: Ampermetre seri bağlanır.

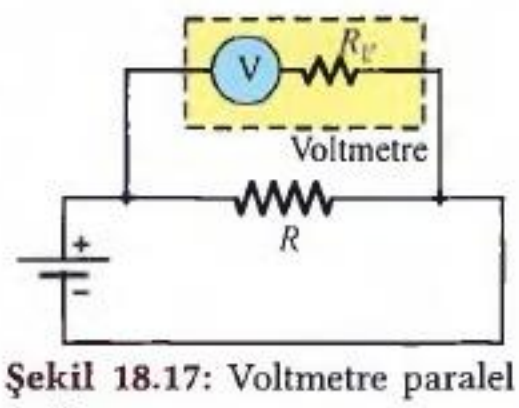
Voltmetre

İki nokta arasındaki potansiyel farkını ölçmekte kullanılan voltmetre aslında direnci çok büyük olan bir galvanometredir. Voltmetre devrenin a, b noktalarına paralel bağlanır, böylece ölçülmek istenen potansiyel farkını görmesi sağlanır.

Şekil 18.17 de görüldüğü gibi, bu kez akımın bir kısmı voltmetre üzerinden geçecek ve R direncinden geçen akım azalacaktır. R direnci üzerindeki potansiyel farkı hesaplanır:

$$V = \frac{RI}{1 + R/R_V}$$

O halde, potansiyel farkının RI değerinden fazla uzaklaşmaması için voltmetrenin R_V direnci çok büyük olmalıdır.



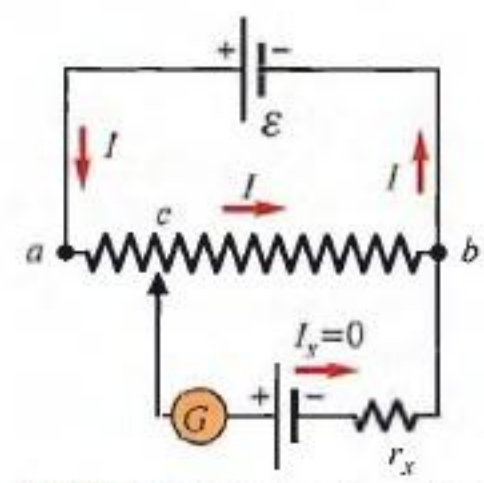
Şekil 18.17: Voltmetre paralel bağlanır.

Potansiyometre

Potansiyometre bir bataryanın emk voltajını ölçmekte kullanılan bir alettir. Daha önce (18.10) formülünde gördüğümüz gibi, devreye bağlanan bir batarya akım vermeye başladığında, uç potansiyeli $V_{ab} = \mathcal{E} - rI$ olup, $\mathcal{E}$ değerinden küçüktür. Bataryanın r iç direncini yokedemiyeceğimize göre, sıfır akımda ölçme yapabilir miyiz?

Bunu, Şekil 18.18 de gösterilen potansiyometre düzeneğiyle yapabiliriz. Şekilde $\mathcal{E}$ değeri bilinen bir batarya ve R direnci görülmektedir. Bu devrenin b ucu ile R direnci üzerinde değişken bir c noktası arasına, $\mathcal{E}_x$ değeri ölçülmek istenen emk kaynağı bağlanır.

c noktası değiştirilerek, öyle bir nokta bulunur ki orada $\mathcal{E}_x$ üzerinden geçen I_x akımı sıfır olur. Bunun mümkün olabilmesi için, $\mathcal{E}_x$ ile $\mathcal{E}$ zıt yönde bağlanmış ve $\mathcal{E} > \mathcal{E}_x$ olmalıdır.



Şekil 18.18: Potansiyometre.



Şekil 18.19: Dijital multimetre.

Bu sıfır durumunda, aynı V_{cb} potansiyel farkını iki kolda hesaplarsak,

$$V_{cb} = R_{cb} I \qquad (R \text{ direncin } R_{bc} \text{ kadarı})$$
$$V_{cb} = \mathcal{E}_x \qquad (\text{çünkü, } I_x = 0)$$

O halde, aranan $\mathcal{E}_x$ değeri $R_{bc} I$ çarpımı kadardır. Devreden geçen akım ve R_{bc} direnci ölçülerek $\mathcal{E}_x$ hesaplanabilir.

Günümüzde, tüm bu özellikleri dijital ortamda birlikte taşıyan **multimetre** veya **avometre** denilen aletlerle, hem akım hem voltaj ve hem de direnç ölçülebilmektedir. Fakat, bunların da temel çalışma ilkesi aynıdır.

Test

1. Bir telin kesitinden 2 saniyede 6 C yük geçiyorsa, akım ne kadar olur?
   (a) 6 A (b) 8 A (c) 3 A (d) 1/3 A

2. Elektrik akımı için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Elektronlar iletken içinde ivmeli hareket yaparlar.
   II. Elektronlar iletken içindeki iyonlarla çarpışıp yavaşlarlar.
   III. Elektronlar çarpışmalardan dolayı ortalama sabit hızla hareket ederler.
   (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III

3. Akım için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Pozitif iyonlar akım yönünde hareket ederler.
   (b) Pozitif iyonlar akıma ters yönde hareket ederler.
   (c) Elektronlar akım yönünde hareket ederler.
   (d) Elektronlar akıma ters yönde hareket ederler.

4. Elektromotor kuvveti (emk) için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Başka bir enerji türünü elektrik enerjisine dönüştürür.
   II. Elektriksel bir kuvvettir.
   III. Devreye sabit akım sağlar.
   IV. Devreye sabit potansiyel farkı sağlar.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) I ve IV (d) II ve III

5. Elektriğin biyolojik etkileri bakımından, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Devrenin vücut üzerinden tamamlanması tehlikelidir.
   II. Akımın vücut üzerinden toprağa ulaşması tehlikelidir.
   III. Voltaj yüksek olsa da, akım geçmiyorsa zarar vermez.
   IV. 10 V dan daha yüksek voltajlar tehlikeli olabilir.
   (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve IV (d) Hepsi

6. Bir telin direnci için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Sıcaklık arttıkça direnç artar.
   II. Sıcaklık arttıkça direnç azalır.
   III. Kesit arttıkça direnç artar.
   IV. Kesit arttıkça direnç azalır.
   (a) I ve III (b) I ve IV (c) II ve III (d) II ve IV

7. Bir telin hem uzunluğu hem de kesiti 2 kat artırılıyor. Direnci kaç kat artar?
   (a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 8

8. Ohm yasası ifadesi hangisidir?
   (a) $V = RI$ (b) $I = VR$ (c) $V = R/I$ (d) $I = R/V$

9. Bir iletkenin direnci için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Özdirençle doğru orantılıdır.
   II. Uzunlukla doğru orantılıdır.
   III. Kesitle doğru orantılıdır.
   IV. Kesitle ters orantılıdır.
   (a) I ve II (b) I, II, IV (c) I ve III (d) II ve IV

10. İç direnci 1 Ω olan 12 V luk bir emk kaynağı bir devreye bağlandığında, aşağıdakilerden hangileri doğru olur?
    I. Devreye sabit 12 V potansiyel farkı sağlar.
    II. Devreye 12 V dan daha az bir potansiyel farkı sağlar.
    III. Devreye sabit akım sağlar.
    (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) Hepsi

11. I akımı geçen bir R direnci üzerinden akım yönünde geçildiğinde,
    (a) Potansiyel RI kadar artar.
    (b) Potansiyel RI kadar azalır.
    (c) Potansiyel sabit kalır.

12. Doğru akım devreleri için aşağıdaki ilkelerden hangi ikisi doğrudur?
I. Aynı bir koldaki dirençler üzerinden aynı akım geçer.
II. Aynı bir koldaki dirençler üzerindeki potansiyel farkı aynıdır.
III. Aynı iki nokta arasına bağlı dirençler üzerinden aynı akım geçer.
IV. Aynı iki nokta arasına bağlı dirençler üzerindeki potansiyel farkı aynıdır.
(a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) I ve IV

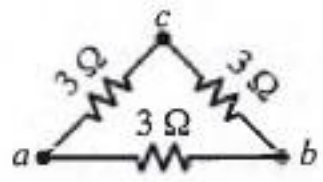
13. 12 V luk bir emk kaynağı bir devreye bağlandığında 3 A akım çekilmektedir. Kaynağın sağladığı güç ne kadar olur?
(a) 4 W (b) 15 W (c) 36 W (d) 108 W

14. Gücü 5 W olan bir ampul 1 dakikada ne kadar enerji harcar?
(a) 5 J (b) 10 J (c) 25 J (d) 300 J

15. Üzerinden 2 A akım geçen 3 Ω luk dirençte harcanan güç ne kadardır?
(a) 5 W (b) 6 W (c) 12 W (d) 18 W

16. Seri bağlı 3 ve 6 Ω luk iki direncin eşdeğer direnci ne kadardır?
(a) 2 Ω (b) 9 Ω (c) 18 Ω (d) 24 Ω

17. Paralel bağlı 3 ve 6 Ω luk iki direncin eşdeğer direnci ne kadardır?
(a) 2 Ω (b) 9 Ω (c) 18 Ω (d) 24 Ω



18. Şekildeki devrenin *ab* arasındaki eşdeğer direnci ne kadardır?
(a) 2 Ω (b) 3 Ω (c) 6 Ω (d) 9 Ω

19. Ampermetre için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
I. Devreye seri bağlanır.
II. Devreye paralel bağlanır.
III. İç direnci çok küçüktür.
IV. İç direnci çok büyüktür.
(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) II ve IV

20. Voltmetre için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
I. Devreye seri bağlanır.
II. Devreye paralel bağlanır.
III. İç direnci çok küçüktür.
IV. İç direnci çok büyüktür.
(a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) II ve IV

Problemler

18.2 Ohm Yasası ve Direnç

(*Problemlerde gerekebilecek özdirençler ve sıcaklık katsayıları için Sayfa 301 deki tabloyu kullanın.*)

18.1 Kesiti 0.2 mm^2 olan alüminyum telden 3 Ω luk bir direnç yapılmak isteniyor. (a) Telin uzunluğu ne kadar olmalıdır? (b) Bu direnç 60 V luk bir potansiyel farkına bağlandığında, ne kadar akım geçer? (c) Telin içindeki elektrik alan şiddeti ne kadar olur?
[C: (a) 21 m, (b) 20 A, (c) 2.8 V/m.]

18.2 Kesiti 1 mm^2 ve boyu 10 m olan tungstenden yapılmış tel 12 V luk bataryaya bağlandığında ne kadar akım geçer?
[C: 23 A.]

18.3 Hacmi 1 cm^3 olan alüminyum külçeden, direnci 2 Ω olan bir tel imal edilmek isteniyor. Telin uzunluğu ve kesit alanı ne kadar olmalıdır? [C: 85 cm ve 1.2 mm^2.]

18.4 Direnci R olan bir tel 4 eşit parçaya kesilip yanyana birleştiriliyor. Yeni telin direnci R cinsinden ne kadar olur?
[C: $R/16$.]

18.5 Kesiti 3 mm^2 olan bir telden 5 A akım geçtiğinde tel içinde 80 V/m şiddetinde bir elektrik alan oluşmaktadır. Telin özdirenci ne kadardır? [C: $4.8 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot m$.]

18.6 Bir tungsten telli lambanın 20 °C deki direnci 7 Ω dır. (a) 500 °C de direnci ne kadar olur? (b) Lamba akkor halinde yanarken direnci 50 Ω oluyor. Lambanın sıcaklığını tayin edin. [C: (a) 24 Ω, (b) 1250 °C.]

18.7 Hangi sıcaklıkta tungstenin özdirenci gümüşünkinden dört kat fazla olur? [C: 300 °C.]

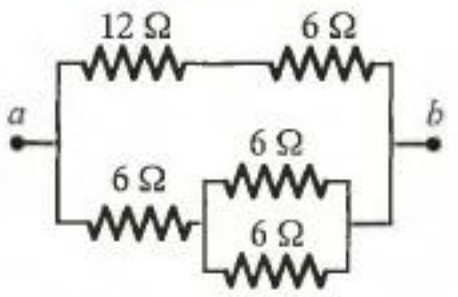
18.3 Doğru Akım Devreleri

18.8 18 V luk bir bataryaya 8 Ω direnci bağlanmıştır. Bataryanın iç direnci 1 Ω dur. (a) Devreden geçen akımı bulun. (b) Bataryanın uç voltajını bulun. (c) Dirençlerde harcanan gücü ve bataryanın devreye sağladığı gücü hesaplayın.
[C: (a) 2 A, (b) 16 V, (c) 32, 4 ve 36 W.]

18.9 Emk değeri 12 V olan bir batarya, bir devreye bağlandığında 5 A akım geçerken, uç voltajı 11 V oluyor. Bataryanın iç direnci ve bağlı direnç ne kadar olurlar?
[C: 0.2 Ω ve 2.2 Ω.]

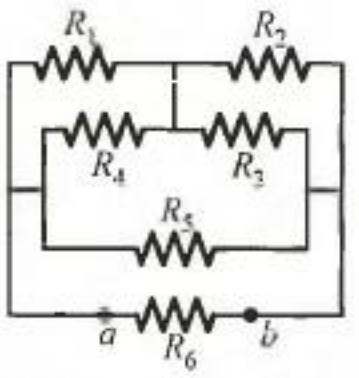
18.10 Tungstenden yapılmış olan bir fırın ısıtıcısının oda sıcaklığında (20 °C) direnci 40 Ω olup, 240 V altında çalışmaktadır. (a) Isıtıcı 20 °C deki yemeği pişirmeye başladığında harcadığı güç ne kadardır? (b) Fırın sıcaklığı 300 °C olduğunda harcadığı güç ne kadar olur?
[C: (a) 1440 W, (b) 600 W.]

18.4 Dirençlerin Bağlanması



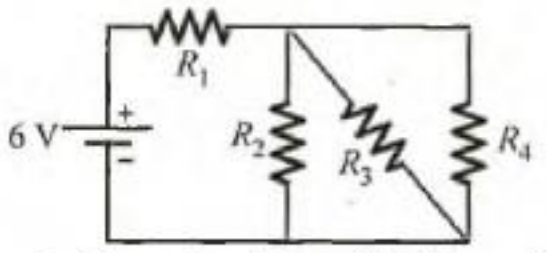
Problem 18.11

18.11 Şekildeki devrenin *ab* uçları arasındaki eşdeğer direnci hesaplayın. [C: 6 Ω.]



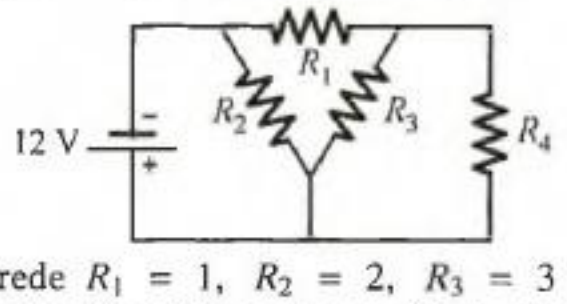
Problem 18.12

18.12 Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\cdots R_6 = 6\,\Omega$ dur. *ab* uçları arasındaki eşdeğer direnci hesaplayın.
[C: 15/13 Ω.]



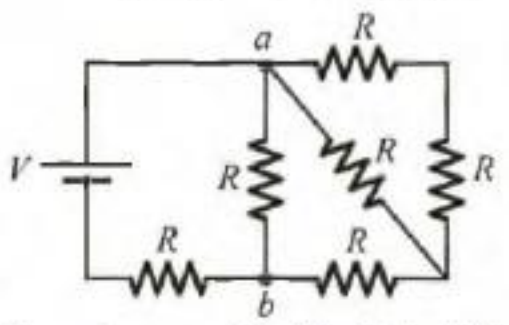
Problem 18.13

18.13 Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ ve $R_4 = 6\,\Omega$ dur. (a) Eşdeğer direnci hesaplayın. (b) Herbir dirençten geçen akımı bulun.
[C: (a) 2 Ω, (b) $I_1 = 3$, $I_2 = 1.5$, $I_3 = 1$, $I_4 = 0.5$ A.]



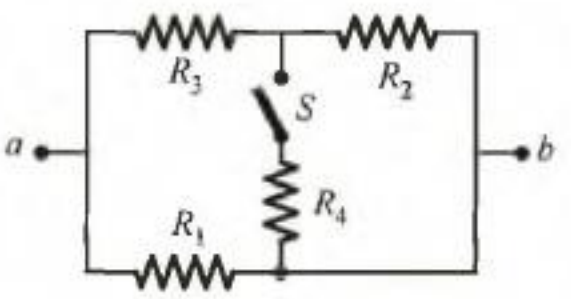
Problem 18.14

18.14 Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ ve $R_4 = 4\,\Omega$ dur. (a) Eşdeğer direnci hesaplayın. (b) R_1 direncinden geçen akımı bulun. [C: (a) 21/16 Ω, (b) $I_1 = 9$ A.]



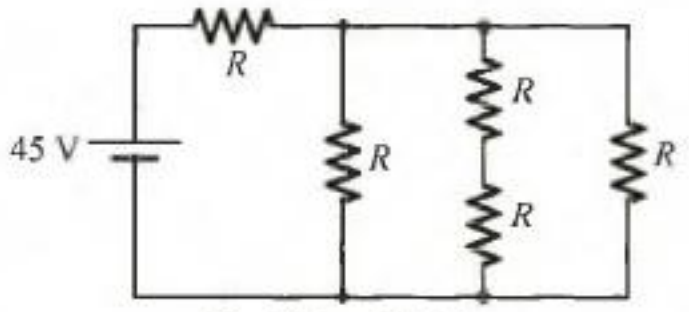
Problem 18.15

18.15 Şekildeki tüm dirençler aynı R değerindedirler. (a) Eşdeğer direnci bulun. (b) $R = 8\,\Omega$ ve $V = 26$ V ise, V_{ab} potansiyel farkını hesaplaym. [C: (a) $13R/8$, (b) 10 V.]



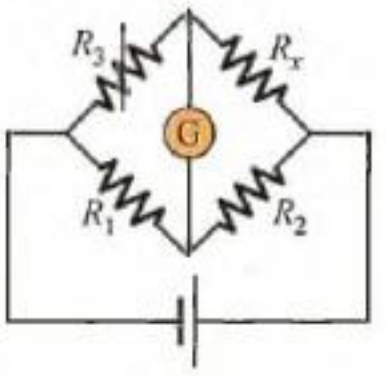
Problem 18.16

18.16 Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ ve $R_4 = 4\,\Omega$ olup, *ab* arasına 6.5 V voltaj uygulanmıştır. (a) *S* anahtarı açıkken bataryadan çekilen akım ne kadardır? (b) Anahtar kapatıldığında bataryadan çekilen akım ne kadar olur? [C: (a) 8 A, (b) 7.8 A.]



Problem 18.17

18.17 Şekildeki devrede herbiri aynı R değerindeki dirençler 45 V luk bir bataryaya bağlandığında, devrede harcanan güç 58 W oluyor. R değerini tayin edin. [C: 25 Ω.]

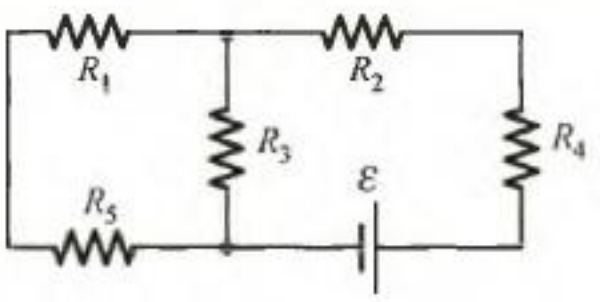


Problem 18.18

18.18 Wheatstone köprüsü. Üstteki şekildeki devre, bilinmeyen bir R_x direncini tayin etmeye yarar. Devre bir bataryaya bağlandıktan sonra, değişken R_3 direncinin değeri değiştirilerek, *ab* arasına bağlanmış olan galvanometreden geçen akımın sıfır olması sağlanır.
Galvanometredeki akım sıfır olduğunda,

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

olduğunu gösterin. (*Yol gösterme:* Galvanometre akımı sıfır olduğunda, hem *a* ve *b* noktaları aynı potansiyelde olurlar, hem de üst koldaki akım alttakine karışmadan devam eder.)

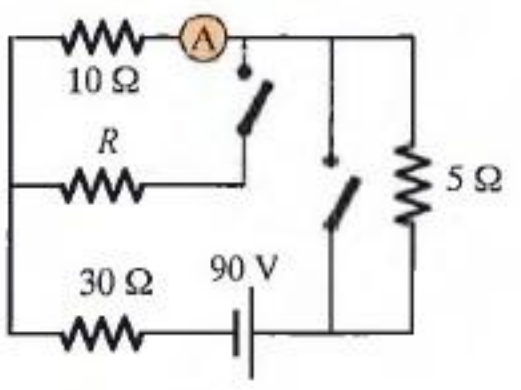


Problem 18.19

18.19 Şekildeki devrede $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $R_4 = 4$ ve $R_5 = 5\,\Omega$ dur. R_1 direnci üzerinden geçen akım 1 A ol-

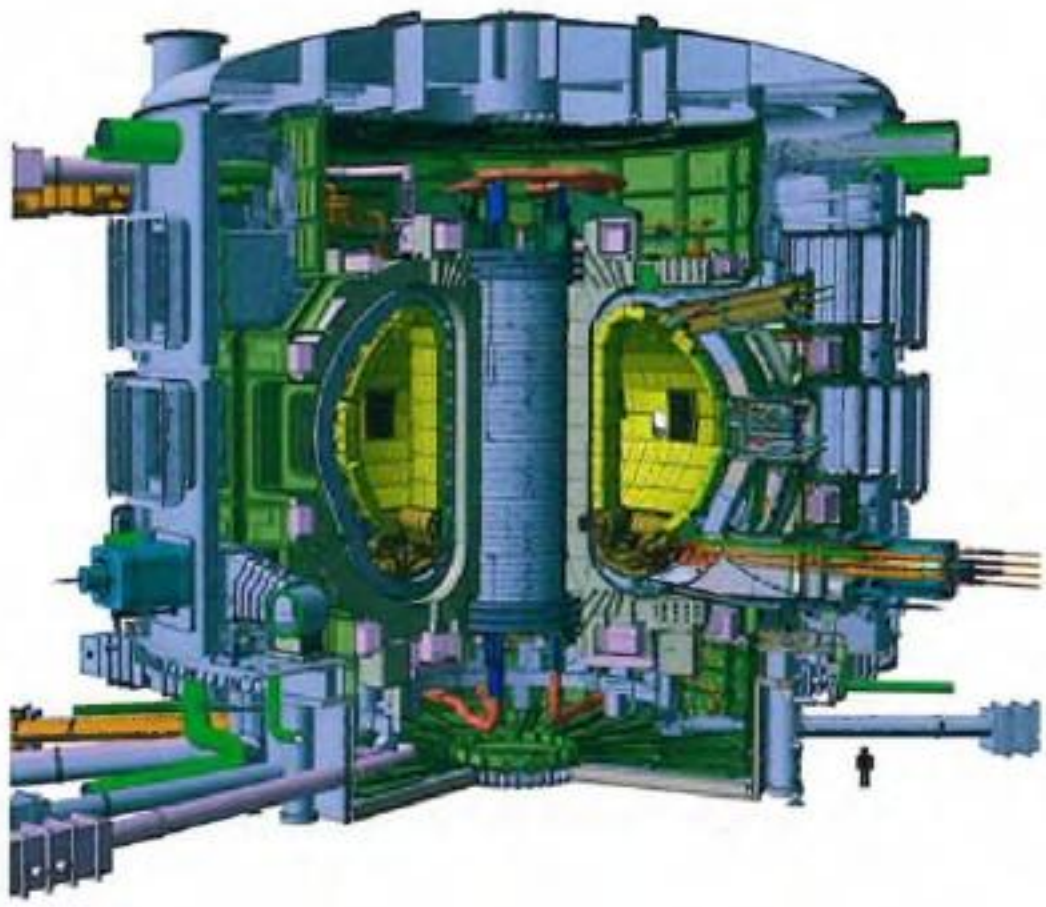
duğuna göre, bataryanın emk değeri $\mathcal{E}$ ne kadardır?
[C: 24 V.]

18.20 Yandaki şekildeki devrede, her iki anahtar birlikte açıkken veya her iki anahtar birlikte kapalı iken, A ampermetresi hep aynı akımı gösteriyor. R direncini bulun. [C: 60 Ω.]



Problem 18.21

19 MANYETİK ALAN



Dünyanın en büyük füzyon reaktörü olarak Fransa'da inşa edilmekte olan İTER *Tokamak* reaktörü 2019 yılında enerji üretmeye başlayacak. (Resmin sağ alt köşesindeki adam ölçeği göstermek için konulmuştur.) *Plazma* denilen ortamda 100 milyon °C sıcaklıktaki yüklü parçacıkları tutabilecek hiçbir kap olmadığı için, çok güçlü bir manyetik alanda (şekildeki sarı renkli toroid (simit) şeklindeki bölgede) havada tutulurlar. Önce, yüklü parçacıkların manyetik alan içinde nasıl hareket ettiğini kavrayabilirsek manyetik alanı daha iyi anlayabiliriz.

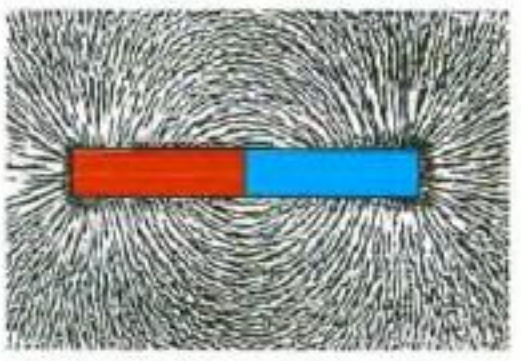
Bir pusulayı hangi yöne çevirirseniz çevirin, mıknatıslı ibresi hep kuzeyi gösterir. Mıknatıslanma etkisi binlerce yıl öncesinden Çin ve Hint uygarlıklarında biliniyordu. Eski Yunan uygarlığında *Magnes* adlı bir çobanın mıknatıslı taşlar bulduğu yöreye Manisa adı verildiği söylenir. Bin yıldır gemiciler yollarını mıknatıslı pusulalarla bulabiliyorlardı.

Manyetizma (mıknatıslanma) ancak 17. yüzyılda anlaşılmaya başlandı. 1600 lü yıllarda İngiliz bilim adamı William Gilbert Dünya'nın dev bir mıknatıs olduğunu, pusulanın kutuplarını böyle çekebildiğini ileri sürdü. 19. yüzyılda Fransız André Ampere ve Danimarkalı Oersted bir mıknatısın akım geçen teli saptırdığını gözlediler. Daha sonra Michael Faraday hareket eden mıknatısların emk ürettiğini keşfetti.

Tüm bu keşifler elektrik ile manyetizma arasında bir ilişki olduğuna işaret ediyorlardı. Nihayet, İngiliz bilim adamı James Clerk Maxwell elektrik ve manyetizmayı aynı bir teoride birleştirdi.

Bu ve sonraki bölümde manyetizmanın özelliklerini ve elektriksel kuvvetlerle olan ilişkisini ele alacağız.

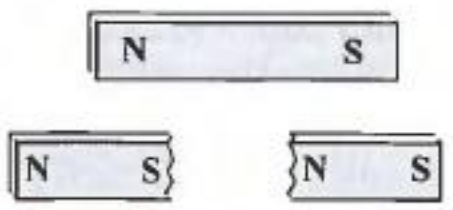
19.1 MANYETİK KUVVET



Şekil 19.1: Bir mıknatıs çevresindeki demir tozlarında gözlenen manyetik alan çizgileri.

Atnalı veya çubuk şeklinde bir mıknatısın çivi veya toplu iğneleri nasıl çektiğini biliriz. Mıknatıs ve toplu iğnenin ikisi de nötr olduğuna göre, bu kuvvet elektriksel yapıda olamaz. Buradan, yeni bir "manyetik kuvvet"in varlığına hükmetmek gerekir. Gerçekten de, mıknatıslar çevresinde bir manyetik alanın varlığını, Şekil 19.1 de görüldüğü gibi, çubuk mıknatısın etrafına serpilmiş demir tozlarının oluşturduğu izlerde görebiliriz.

Elektrikte gördüğümüz Coulomb kuvveti elektrik yüklerinden kaynaklanıyordu. Aynı düşünceyle, manyetik kuvveti doğuran bir "manyetik yük" aradığımızda, bunun mümkün olmadığını görürüz. Kutupları Kuzey-Güney $(N-S)$ olarak adlandırılan bir mıknatısı ortasından ikiye böldüğümüzü düşünelim. Bu durumda her iki parçanın yeniden N-S kutuplu birer mıknatıs oluşturduğu görülür. Bu işlemi defalarca yapıp atomik boyutlara dahi insek, kutuplardan birini tek başına ayıramayız. Her atom küçük bir mıknatıs gibi davranmaktadır. Günümüzde modern fizikte de anlaşılmıştır ki **tek bir manyetik kutup yoktur.**



Şekil 19.2: Mıknatısı bölsek de kutuplarını birbirinden ayıramayız. Yani, doğada manyetik tek-kutup yoktur.

Peki, manyetik kuvveti oluşturan şey nedir? Daha sonra göreceğimiz gibi, manyetizmanın iki kaynağı vardır:

- Akımlar,
- Temel parçacıkların manyetik dipol momentleri.

Bu kavramları bu ve daha sonraki bölümlerde öğreneceğiz.

Elektrik konusunu incelerken şu yolu izlemiştik: Bir yük dağılımı uzayın her noktasında bir $\vec{E}$ elektrik alanı oluşturuyor ve daha sonra bu elektrik alana konulan bir q yükü $\vec{F} = q\vec{E}$ şeklinde elektrik alanla etkileşiyordu.

Aynı yolu manyetik alan için de izleyebiliriz:

- Bir akım uzayın her noktasında $\vec{B}$ ile gösterilen bir manyetik alan oluşturur.
- Bu manyetik alanda hareketli q yüklerine ve akımlara manyetik bir $\vec{F}$ kuvveti etki eder.

Manyetizma konusuna ikinci maddeden başlayacağız. Yani, manyetik alanın nasıl oluştuğunu şimdilik bir kenara bırakıp, önce manyetik alanın uyguladığı kuvveti tanımaya çalışacağız.

Hareketli Bir Yüke Etkiyen Manyetik Kuvvet

Bir mıknatısın kutupları arasına fırlatılan yüklü bir parçacığın yolundan saptığı gözlenir. Manyetik alan içinde $\vec{v}$ hızıyla gitmekte olan bir q yüküne etkiyen manyetik kuvvetin şu özellikleri taşıdığı görülür:

- Kuvvet q yüküyle orantılı olup, $+q$ ve $-q$ yükleri için zıt yönde olur.
- Kuvvet v hızıyla orantılı ve hıza dik yöndedir. Yük hareket etmiyorsa $(v = 0)$ ise kuvvet sıfırdır. Bu özellik manyetik kuvvetin elektrikten farklı olduğunu gösterir.
- Kuvvet B manyetik alan şiddetiyle orantılı ve manyetik alana dik yöndedir.

Tüm bu özellikler, manyetik kuvvetin **vektörel çarpım** şeklinde şöyle ifade edilebileceğini göstermektedir:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Yük üzerindeki manyetik kuvvet)} \tag{19.1}$$

Şimdi, vektörel çarpımın özelliklerini de hatırlayarak $\vec{F}$ kuvvetini tanıyalım:

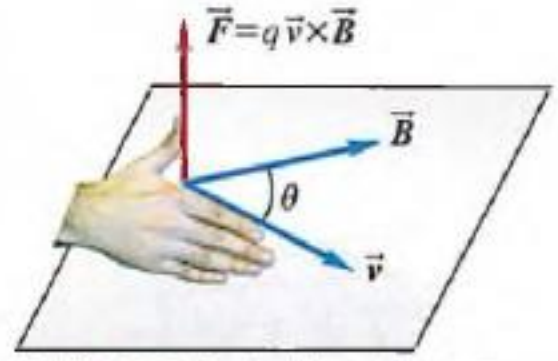
- **Manyetik kuvvetin büyüklüğü.** Bir $\vec{a}\times\vec{b}$ vektörel çarpımının büyüklüğü $ab\sin\theta$ oluyordu. O halde, aralarında θ açısı bulunan $\vec{v}$ hız vektörü ile $\vec{B}$ manyetik alan vektörünün oluşturduğu kuvvetin büyüklüğü,

$$F = qvB\sin\theta$$

olur. Görüldüğü gibi, hız sıfırsa ($v = 0$) veya manyetik alana paralel ise ($\theta = 0°$) kuvvet sıfır olur.

- **Manyetik kuvvetin yönü.** Bir $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ vektörünün yönü hem $\vec{a}$ hem de $\vec{b}$ vektörüne dik doğrultuda oluyordu. Bu doğrultudaki iki yönden hangisi olacağı sağ-el kuralıyla belirleniyordu:
Sağ-el kuralına göre, dört parmak birinci vektör ($\vec{a}$) yönünde, avuç içi ikinci vektör ($\vec{b}$) yönünde uzatıldığında, başparmak $\vec{c}$ yönünü verir.
Benzer şekilde, pozitif bir q yükü için, kuvvetin yönü hem $\vec{v}$ hem de $\vec{B}$ vektörünün oluşturduğu düzleme dik olup, sağ elin dört parmağını $\vec{v}$ yönünde, avuç içini $\vec{B}$ alan vektörü yönünde uzattığımızda, başparmak $\vec{F}$ kuvvetinin yönünü verir.

q yükü eksi (−) işaretli olduğunda, (19.1) formülü $-\vec{F}$ yönünde kuvvet verir. Yani, eksi ve artı yüklere etkiyen manyetik kuvvetler zıt yönlerde olurlar.



Şekil 19.3: Sağ-el kuralına göre manyetik kuvvetin yönü.

Manyetik Alan Birimi

(19.1) kuvvet formülü manyetik alan birimini tayin etmemizi sağlar. Eşitliğin iki tarafındaki birimler karşılaştırılır ve (coulomb/saniye = ampere) olarak yerine konursa, SI sisteminde manyetik alan birimi,

$$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\times\mathrm{m/s}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = 1\ \text{tesla} = 1\ \mathrm{T}$$

olur. Manyetik alan birimine büyük bilim adamı Nikola Tesla (1857–1943) anısına **tesla** (T) adı verilmiştir.

Tesla birimi normal manyetik alanlar için aşırı büyük değerdedir. Diğer bir manyetik alan birimi **gauss** olup,

$$1\ \text{gauss} = 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

olur. Örneğin, Dünyanın manyetik alanı yaklaşık 1 gauss kadardır.

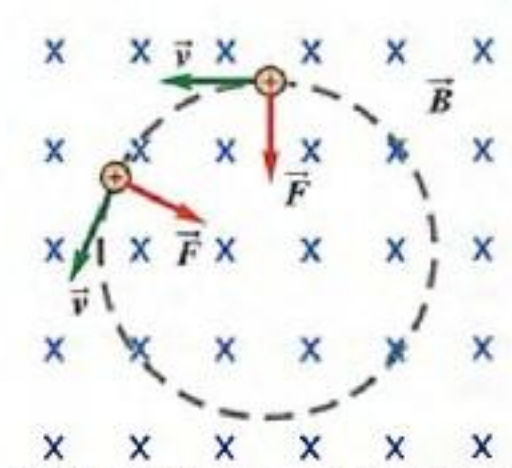
Manyetik Alanda Yüklü Parçacıkların Hareketi

Manyetik kuvvetin $\vec{v}$ hızına dik oluşu, parçacıkların manyetik alan içinde özel bir hareket yapmasına yolaçar. En basit durumda, manyetik alana dik doğrultuda atılan yüklü bir parçacığın hareketini ele alalım.

Şekil 19.4 de $\vec{B}$ manyetik alanının kağıt düzlemi içine doğru olduğu bir ortama dik olarak $\vec{v}$ hızıyla giren $+q$ yüklü bir parçacık gözönüne alalım. $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ formülüne göre, parçacığa etkiyen kuvvet $\vec{v}$ hız vektörüne dik olacaktır.

Kuvvet hıza dik olduğundan, hızın şiddetini değiştiremez, sadece yönünü değiştirebilir. (Diğer bir deyişle, manyetik kuvvet parçacık üzerinde iş yapmaz.) Bu kuvvetin etkisiyle, parçacığın yörüngesinden biraz saptığını düşünelim. Yeni konumda da manyetik kuvvet yine $\vec{v}$ hızına dik olacaktır.

Kuvvetin daima hız vektörüne dik olduğu hareketi biliyoruz. Bu, Kısım 3.3 de gördüğümüz dairesel harekettir. Buradaki dairesel harekette merkezcil kuvveti



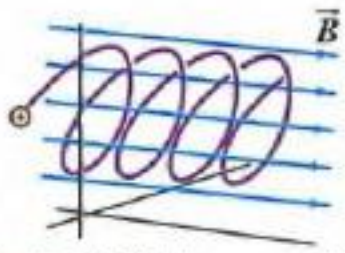
Şekil 19.4: Manyetik kuvvet daima yörüngeye diktir.

sağlayan manyetik kuvvet olur:

$$F_r = qvB = m\frac{v^2}{r}$$

Buradan, dairesel hareketin yarıçapı bulunur:

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{19.2}$$

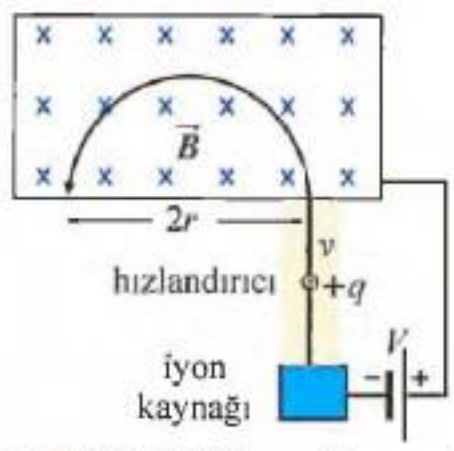


Şekil 19.5: Yüklü parçacığın en genel helezon hareketi.

Bu formülün payında, parçacığın $p = mv$ momentumu olduğuna dikkat edelim. Bilimsel araştırmalarda ve teknolojik uygulamalarda, bilinen bir manyetik alanda, parçacığın dairesel hareketinin yarıçapı ölçülür ve buradan v hızı, q yükü ve m kütlesinden biri tayin edilebilir.

Eğer parçacık manyetik alana tam dik girmiyorsa, hızın manyetik alan yönündeki bileşeni de değişmez. Bu durumda, bir yandan dairesel hareket yaparken, bir yandan da sabit hızla ilerler. Bu, helezon hareketidir.

Bu formülün pekçok uygulaması arasında önemli bir yeri olan **kütle spektrografı** denilen aleti kısaca tanıtalım.

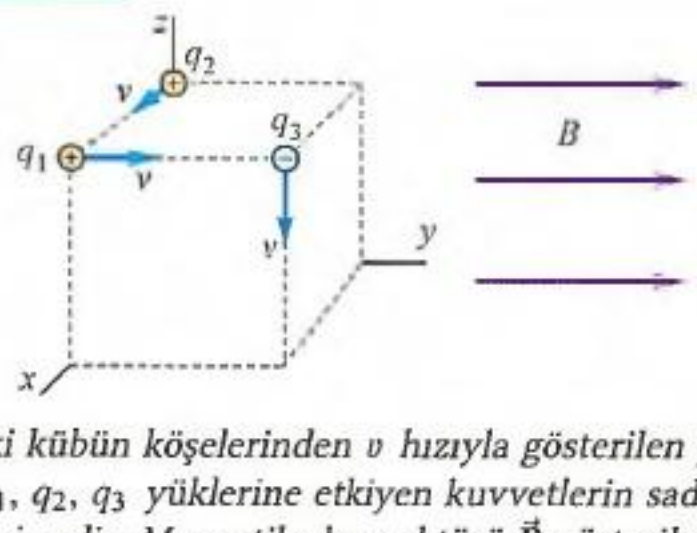


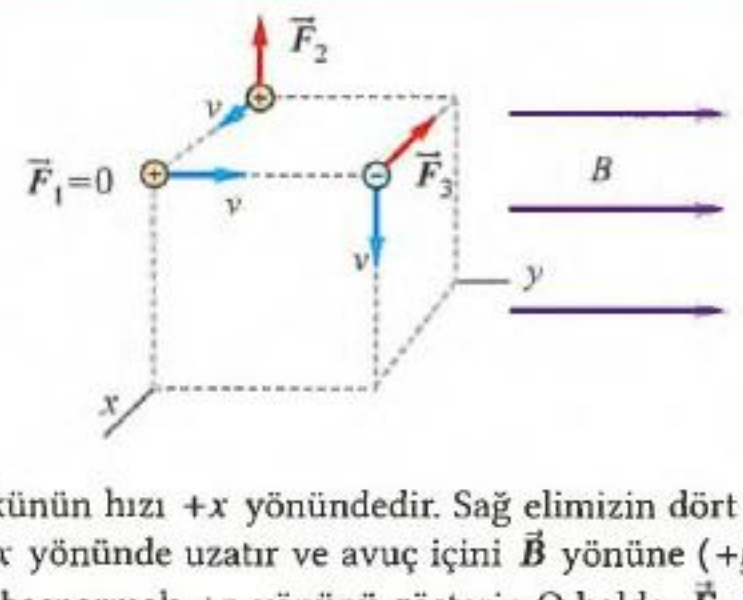
Şekil 19.6: Kütle spektrografı.

Şekil 19.6 da gösterilen bu alette, bir iyon kaynağında üretilen $+q$ yükü, önce bir elektrik alanda V potansiyel farkı altında bilinen bir v hızına çıkarılır. Daha sonra düzgün B manyetik alanına dik olarak giren yük, yarım bir dairesel hareket yaparak çıkar. Çıktığı yerin $2r$ uzaklığı detektörlerle tespit edilir. Bu verilerle, q yükü bilinen parçacığın m kütlesi tayin edilebilir.

Kütle spektrografı ile atomların kütleleri çok hassas bir şekilde tayin edilebilmiş ve izotopların varlığı kanıtlanmıştır. Günümüzde fizik, kimya, biyoloji araştırmaları yanısıra, tıp ve mühendislikte çok kullanılmaktadır.

Örnek 19.1





Şekildeki kübün köşelerinden v hızıyla gösterilen yönlerde atılan q_1, q_2, q_3 yüklerine etkiyen kuvvetlerin sadece yönlerini tayin edin. Manyetik alan vektörü $\vec{B}$ gösterilen $+y$ yönündedir.

Çözüm

Manyetik kuvveti veren (19.1) formülünü kullanırız:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

q_1 yükünün $\vec{v}$ hız vektörü, $\vec{B}$ vektörü gibi, $+y$ ekseni yönünde verilmiştir. Paralel iki vektörün vektörel çarpımı sıfır olur:

$$\vec{F}_1 = 0 \qquad (\vec{v} \parallel \vec{B})$$

q_2 yükünün hızı $+x$ yönündedir. Sağ elimizin dört parmağını $+x$ yönünde uzatır ve avuç içini $\vec{B}$ yönüne $(+y)$ çevirirsek, başparmak $+z$ yönünü gösterir. O halde, $\vec{F}_2$ kuvveti $+z$ yönündedir.

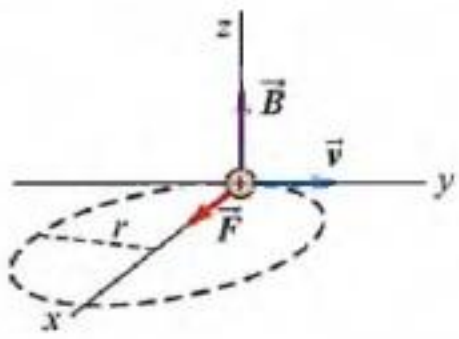
q_3 yükünün eksi işaretli olduğunda dikkat edelim. Yani, sağ-el kuralının vereceği kuvvet yönüne zıt yönde bir kuvvet oluşur. Yine, sağ elimizin dört parmağını $\vec{v}$ $(-z)$ yönünde uzatır ve avuç içini $\vec{B}$ yönüne $(+y)$ çevirirsek, başparmak $+x$ yönünü gösterir. Kuvvet bunun tersi yönde olacaktır. O halde, $\vec{F}_3$ kuvveti $-x$ yönündedir.

Sonuçlar yukardaki şekilde gösterilmiştir:

Örnek 19.2

Manyetik alanın +z ekseni yönünde $B = 0.1\,\mathrm{T}$ şiddetinde olduğu bir bölgede, bir proton +y ekseni boyunca 10^6 m/s hızıyla fırlatılıyor. (Protonun yükü $e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ ve kütlesi $m_p = 1.7\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ dır.)

(a) *Protona etkiyen kuvvetin şiddetini ve yönünü bulun.*
(b) *Protonun çizdiği dairesel yörüngenin yarıçapını hesaplayın.*



Çözüm

(a) Şekilde görülen protona etkiyen kuvvet, $\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ formülüne göre, $+x$ yönünde olur. Kuvvetin şiddeti hesaplanır:

$$F = qvB\sin 90^\circ = evB$$
$$F = 1.6\times10^{-19}\times10^{6}\times0.1 = 1.6\times10^{-14}\,\mathrm{N}$$

(b) Kuvvet daima hıza dik olduğundan, proton xy-düzleminde dairesel bir yörünge çizer. Merkezcil kuvveti sağlayan manyetik kuvvet olduğuna göre,

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$
$$r = \frac{mv}{qB}$$

bulunur. Değerler yerine konulup yarıçap hesaplanır:

$$r = \frac{1.7\times10^{-27}\times10^{6}}{1.6\times10^{-19}\times0.1} = 0.11\,\mathrm{m}$$

19.2 AKIM GEÇEN TELE ETKİYEN MANYETİK KUVVET

Akım geçen bir telde hareketli elektronların arka planında pozitif yükler bulunduğu için, tel her zaman nötr kalır. Bu yüzden akım geçen tel üzerinde elektrik alanda bir kuvvet oluşmaz.

Fakat, akım geçen tel manyetik alan içine konulduğunda durum farklı olur. Pozitif iyonlar hareketsiz oldukları için manyetik kuvvet etkimez, ama hareketli elektronlar üzerinde manyetik kuvvet vardır ve dolayısıyla tel üzerinde net bir manyetik kuvvet oluşur.

Bir I akımı üzerindeki kuvveti q yüküne etkiyen $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ formülünden giderek hesaplayabiliriz. Bu telin bir A kesitinden dt zaman aralığında geçen yük miktarı, akımın $I = dq/dt$ tanımına göre,

$$dq = I\,dt$$

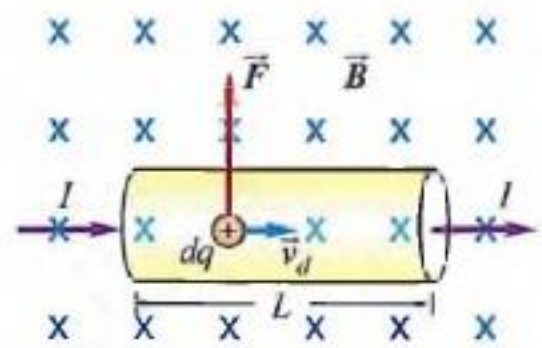
olur. Kısım 15.1 de iletken içinde elektronların ortalama bir v_d sürüklenme hızı ile ilerlediğini görmüştük. dt zaman aralığında bu yükler $L = v_d\,dt$ kadar bir tel uzunluğunu katedeceklerdir. Tüm bu hızlar aynı yönde ve eşit olduğundan, toplam dq yükünün de v_d hızıyla ilerlediğini kabul edebiliriz. Buna, göre, $\vec{B}$ manyetik alanında $\vec{v}_d$ hızma sahip olan toplam dq yüküne etkiyen kuvvet,

$$\vec{F} = dq\left(\vec{v}_d\times\vec{B}\right) = I\,dt\left(\vec{v}_d\times\vec{B}\right)$$

olur. Burada $\vec{L} = \vec{v}_d\,dt$ vektörü, tel üzerinde ve akım yönünde bir uzunluk vektörü olarak tanımlanırsa, L uzunluğunda bir tel parçasına manyetik alanda etkiyen kuvvet ifadesi bulunmuş olur:

$$\boxed{\vec{F} = I\left(\vec{L}\times\vec{B}\right) \qquad \text{(Akım üzerindeki manyetik kuvvet)}} \tag{19.3}$$

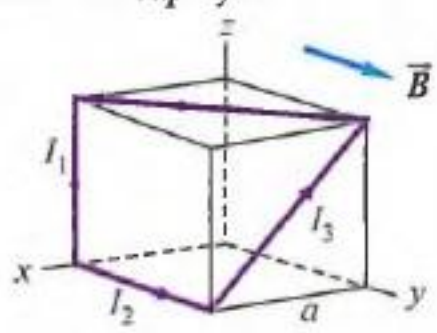
Kuvvetin hem tele hem de manyetik alana dik olduğuna dikkat edelim.



Şekil 19.7: İletken içinde dq yüküne etkiyen kuvvet.

Örnek 19.3

Şekilde bir kenarı a uzunlukta olan kübün kenarları boyunca uzanan tellerdeki akımların şiddeti aynıdır: $I_1 = I_2 = I_3 = I$. $\vec{B}$ manyetik alanı $+y$-yönündedir. I_1, I_2, I_3 akımları üzerindeki kuvvetleri hesaplayın.



Çözüm

Akım geçen tel üzerindeki manyetik kuvvet (19.3) formülüyle hesaplanır:

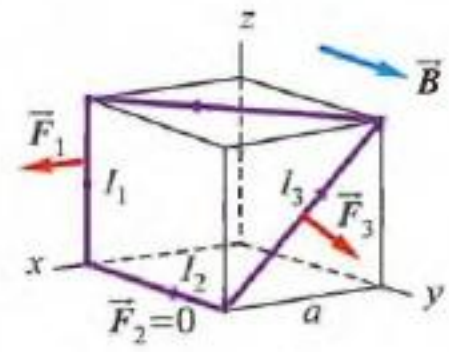
$$\vec{F} = I\left(\vec{L} \times \vec{B}\right)$$

Burada $\vec{L}$ telin uzunluğunda ve akım yönünde bir vektördür. I_1 üzerindeki kuvvet: Şekilde $\vec{L}$ vektörü $-z$ yönünde, $\vec{B}$ vektörü $+y$ yönünde verilmiştir. Sağ-el kuralına göre, $\vec{F}_1$ kuvveti $+x$ yönünde olacaktır. Şiddeti hesaplanır:

$$F_1 = I\,LB \sin 90^\circ = IaB$$

I_2 üzerindeki kuvvet: Bu kez $\vec{L}$ vektörü $\vec{B}$ vektörüne paralel olduğu için, vektörel çarpım sıfırdır:

$$F_2 = 0$$



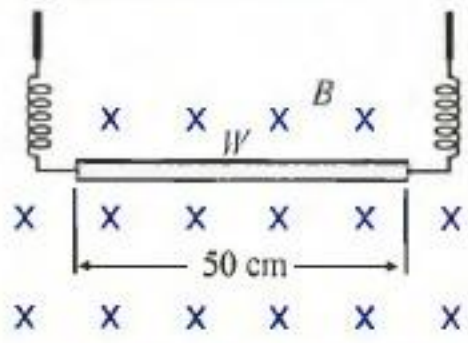
I_3 üzerindeki kuvvet: Şekilde $\vec{B}$ vektörü $+y$ yönünde olduğu için, buna dik olan $\vec{F}_3$ vektörü, xz-düzlemine paralel, yani kübün o yüzü içinde olacaktır. Yine, bu yüz içinde $\vec{L}$ vektörüne dik olan vektör, köşegen doğrultusunda olmalıdır. Sağ-el kuralı kuvvetin yönünü aşağı doğru verir. $L = \sqrt{2}a$ değeri alınıp kuvvetin şiddeti hesaplanır:

$$F_3 = I\,LB \sin 90^\circ = \sqrt{2}IaB$$

Her üç kuvvet şekilde gösterilmiştir.

Örnek 19.4

Ağırlığı $W = 0.3\,\text{N}$ olan 50 cm uzunluğunda iletken bir çubuk, şekildeki gibi iletken yaylarla asılmıştır. Bölgede kağıt içine yönelik ve 0.2 T şiddetinde manyetik alan vardır. Yaylardaki kuvvetin sıfır olması için, bu çubuk üzerinden geçen akımın şiddeti ve yönü ne olmalıdır?



Çözüm

Cismin ağırlığını dengeleyebilmesi için, manyetik kuvvet yukarı yönde olmalıdır. Çubuk ve manyetik alan birbirine dik olduğu için, manyetik kuvvet doğrudan yazılır ve W ağırlığına eşitlenir:

$$F = W \;\rightarrow\; ILB = W$$

Buradan I akımı hesaplanır:

$$I = \frac{W}{LB} = \frac{0.3}{0.5 \times 0.2} = 3\,\text{A}$$

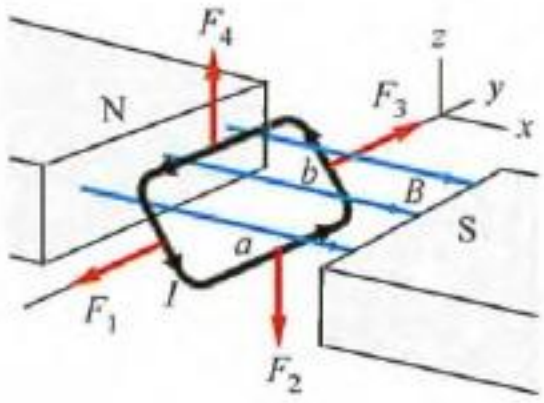
Kuvvetin yönü sağ-el kuralına göre, yukarı doğru çıkabilmesi için, akım soldan sağa doğru olmalıdır.

19.3 BİR ÇERÇEVE ÜZERİNDEKİ MANYETİK TORK – ELEKTRİK MOTORU

Bir mıknatısın kutupları arasına konulan iletken bir dikdörtgen çerçeveye akım verildiğinde, çerçeve dönmeye başlar. Bu, elektrik motorudur ve tarihte en büyük teknolojik gelişmeyi sağlayan alettir. Minicik dişçi matkaplarından dev vinçlere, pilli kol saatlerinden su pompalarına, CD sürücülerinden denizaltı pervanelerine kadar, her yerde elektrik motoru kullanılmaktadır.

Şekil 19.8 de bir B manyetik alanı içine konulmuş bir dikdörtgen çerçeve görülmektedir. Çerçevenin kenar uzunlukları a ve b olup, y-ekseni çevresinde serbestçe dönebilmektedir.

Çerçeve üzerinden I akımı geçtiğinde, herbir kenar üzerinde $\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B})$ kuvveti uygulanacaktır. Bu kuvvetlerin yönleri sağ-el kuralına göre Şekil 19.8 de gösterilmiştir. Büyüklükleri ise,

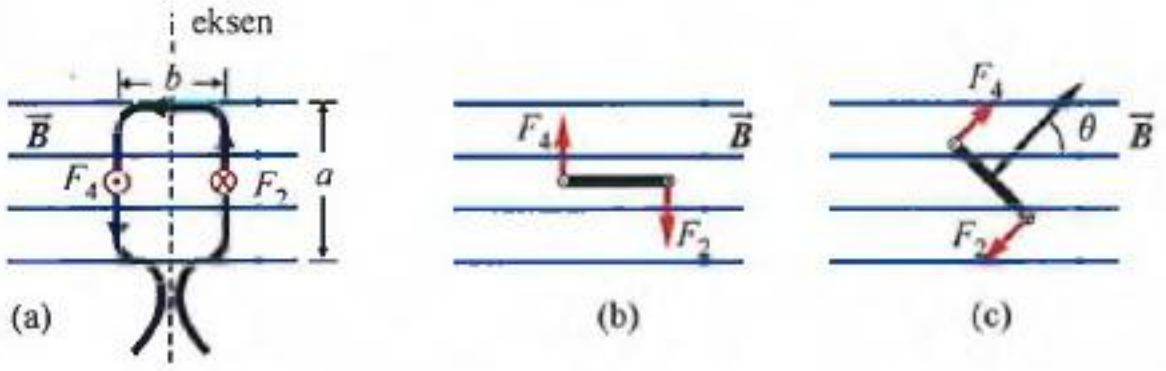


Şekil 19.8: Manyetik alanda bir akım çerçevesi.

$$F_1 = I\,b\,B \qquad (-y \text{ yönünde})$$
$$F_2 = I\,a\,B \qquad (-z \text{ yönünde})$$
$$F_3 = I\,b\,B \qquad (+y \text{ yönünde})$$
$$F_4 = I\,a\,B \qquad (+z \text{ yönünde})$$

olur. Bu kuvvetler karşılıklı olarak eşit ve zıt olduklarından, çerçeve üzerindeki net kuvvet sıfırdır. O halde, çerçeve öteleme hareketi yapamaz.

Fakat, kuvvetlerin toplam torku sıfırdan farklıdır ve bu yüzden dönme hareketi yapabilir. Bu kuvvetlerin dönme ekseni y-ye göre torklarım hesaplayalım.



Şekil 19.9: Değişik açılardan kenarlar üzerindeki kuvvetler: (a) Üstten, (b) önden görünüş. (c) Çerçeve normali $\vec{B}$ ile θ açısı yaparken.

Herhangi bir anda çerçeve düzleminin normaliyle manyetik alan arasındaki açı θ olsun. Buna göre, momentler toplamı şöyle yazılır:

$$\tau = F_1.0 + F_2\,(b/2)\,\sin\theta + F_3.0 + F_4\,(b/2)\,\sin\theta$$
$$\tau = I\,ab\,B\,\sin\theta = I\,A\,B\,\sin\theta \qquad (19.4)$$

Bu ifadede F_1 ve F_3 kuvvetleri eksene paralel oldukları için momentleri sıfır olarak katılmıştır. $A = ab$ çerçevenin yüzölçümüdür.

Burada $I\,A$ çarpımı bir akım çerçevesinin **manyetik dipol momenti** olarak tanımlanır:

$$m = I\,A$$

Daha genel olarak, çerçevede N sarım varsa, dipol momenti şöyle tanımlanır:

$$m = N\,IA \qquad \text{(Manyetik dipol momenti)} \qquad (19.5)$$

Yukardaki tork hesabı, dikdörtgen çerçeve dışındaki geometrik şekiller için de geçerlidir. Sonuçta, manyetik dipol momenti m olan bir akım çerçevesine B manyetik alanında uygulanan tork şöyle bulunur:

$$\tau = mB\,\sin\theta \qquad (19.6)$$



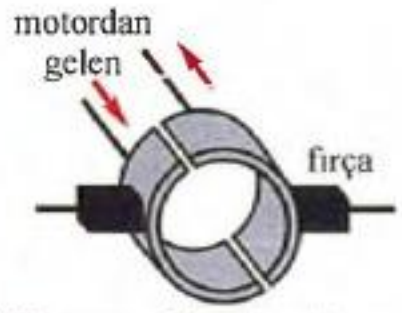
Şekil 19.10: Hibrid otomobillerde benzinli ve elektrik (sağda) iki motor birlikte bulunur. Elektrik motoru kalkışta ve hız değiştiğinde devreye girer.

Elektrik Motoru

Yukarda (19.4) formülüyle verilen tork ifadesi, şekilde gösterilen yönlere göre, pozitif olduğu için, çerçeve saat ibrelerinin tersi yönünde dönmek isteyecektir. Fakat, çerçeve yarım dönüş sonrasında, yani alt kenar üste geldiğinde bu kez F_2, F_4 kuvvetlerinin dönme momentleri negatif olur. Bu durumda, çerçeve geri yönde dönmek isteyecektir.

Bu düzenekte sürekli aynı yönde bir dönüş sağlanamaz. Yarım dönüşte akım yönünü bir şekilde değiştirmek gerekir.

Elektrik motorlarında sürekli dönüşü sağlamanın iki yolu vardır:



Şekil 19.11: Komütatör yarım dönüşte akımı tersine çevirir.

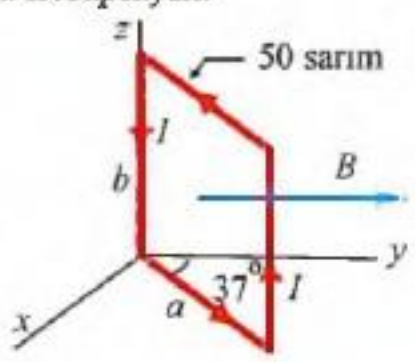
1. Alternatif akım (AC) motorlarında kullanılan akım şiddeti sinüsel bir eğri olarak değişir. Çerçeve yarım dönüş yaptığında akım yönü kendiliğinden tersine döner ve torkun aynı yönde kalması sağlanır.
2. Doğru akım (DC) motorlarında bataryadan hep aynı yönde çıkan akım, çerçeveye ulaşmadan önce, **komütatör** denilen bir düzenekten geçer. Komütatör iki yarım iletken halkadan oluşur ve her yarım dönüşte bataryanın + yüklü kutbuna bağlı olan tarafı değişir. Böylece, çerçevenin her yarım dönüşünde akım yönü değişir, torkun aynı yönde kalması sağlanır.

Örnek 19.5

Şekildeki dikdörtgen çerçeve z-ekseni etrafında dönebilen 50 sarımdan oluşmakta ve herbir sarımdan $I = 3\,\text{A}$ akım geçmektedir. Çerçevenin boyutları $a = 1\,\text{m}$ ve $b = 2\,\text{m}$ dir. $B = 2\,\text{T}$ manyetik alanı y-ekseni yönündedir.

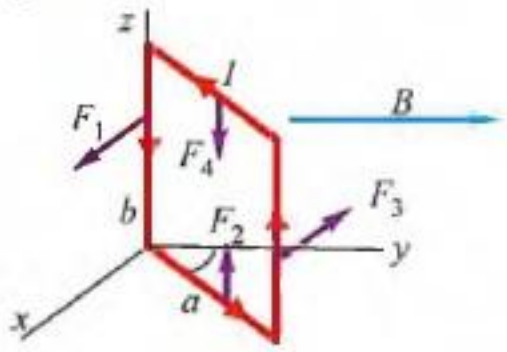
(a) *Her kenara etkiyen kuvvetin torklarını hesaplayarak, çerçeve üzerindeki net torku hesaplayın.*

(b) *Bu kez çerçevenin manyetik dipol momentinden giderek net torku hesaplayın.*



Çözüm

(a) Sağ-el kuralına göre, herbir kenara etkiyen kuvvetler şekildeki gibi oluşur:



Bu kuvvetlerden sadece $\vec{F}_3$ ün z-eksenine göre momenti sıfırdan farklı olur. $\vec{F}_1$ eksen üzerinde olduğundan, $\vec{F}_2$ ve $\vec{F}_4$ eksene paralel olduklarından, dönmeye yolaçmazlar ve torkları sıfır olur.

Geriye kalan $\vec{F}_3$ kuvveti $-x$ yönünde olup, şiddeti (19.3) formülüyle hesaplanır ve N sarım sayısıyla çarpılır:

$$F_3 = NIbB\sin 90^\circ = 50 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 600\,\text{N}$$

F_3 kuvvetinin z-eksenine göre momenti alınırken, moment kolu $a\cos 37^\circ$ kullanılır:

$$\tau = \tau_3 = F_3\, a\, \cos 37^\circ$$

$$\tau = 600 \times 1 \times 0.8 = 480\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Torkun yönü çerçeveyi x-ten y-eksenine doğru döndürecek şekilde olur.

(b) Çerçevenin manyetik dipol momenti (19.5) formülüyle hesaplanır:

$$m = NIA = 50 \times 3 \times (1 \times 2) = 300\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

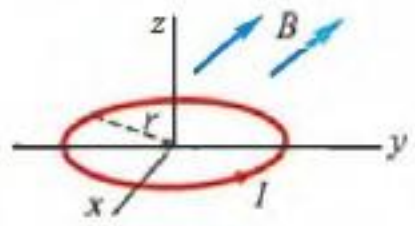
Daha sonra, (19.6) formülünden tork hesaplanır. Burada dikkat edelim: Manyetik alanın yüzey normaliyle yaptığı açı alınmalıdır:

$$\tau = mB\,\sin\theta = 300 \times 2 \times \sin 53^\circ = 480\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Görüldüğü gibi, her iki hesap aynı sonucu verir, ama dipol momentiyle çalışmak daha kolaydır.

Örnek 19.6

xy düzleminde yarıçapı 40 cm olan dairesel bir telden 25 A akım geçmektedir. Bu bölgede xy-düzlemiyle 45° açı yapan 0.3 T şiddetinde düzgün bir manyetik alan vardır. Çemberin manyetik momentini ve döndürmeye çalışan torku hesaplayın.



Çözüm

Çerçevenin manyetik dipol momenti (19.5) formülüyle hesaplanır:

$$m = IA = I\pi r^2 = 25 \times 3.14 \times 0.40^2$$

$$m = 12.6\,\text{A}\cdot\text{m}^2$$

Daha sonra, (19.6) formülünden tork hesaplanır.

$$\tau = mB\,\sin\theta = 12.6 \times 0.3 \times \sin 45^\circ$$

$$\tau = 2.7\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Test

1. SI birim sisteminde manyetik alan birimi hangisidir?
   (a) tesla (b) gauss (c) ampere (d) einstein

2. $+x$ yönündeki manyetik alana $+y$ yönünde hızla atılan + yüklü parçacığa etkiyen kuvvet hangi yöndedir?
   (a) $+x$ (b) $+y$ (c) $+z$ (d) $-z$

3. Şekilde $\vec{v}$ hızı gösterilen $+q$ yükü ve $\vec{B}$ manyetik alanında etkiyen kuvvet hangilerinde doğru gösterilmiştir?



   (a) a ve b (b) b ve c (c) a ve c (d) a ve d

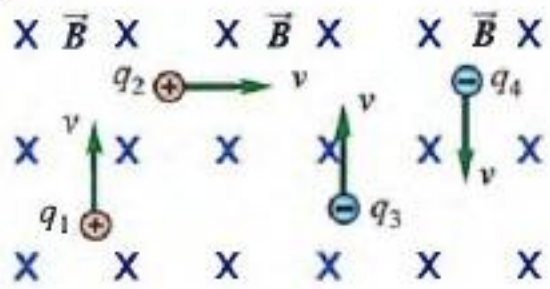
4. Kuzey yönünde atılan artı yüklü bir parçacığa etkiyen manyetik kuvvet doğu yönünde ise, manyetik alan hangi yönde olabilir?
   (a) Yukarı (b) Aşağı (c) Güney (d) Batı

5. Kuzey yönünde 2 T lık manyetik alanda, yukarı yönde 3 m/s hızla atılan 4 C yüklü parçacığa etkiyen kuvvetin şiddeti ve yönü ne olur?
   (a) Batı yönünde 24 N
   (b) Doğu yönünde 24 N
   (c) Batı yönünde 6 N
   (d) Doğu yönünde 6 N

6. Bir yükün hızı 2 kat, ve manyetik alan 2 kat artırılırsa, cisme etkiyen manyetik kuvvet kaç kat artar?
   (a) Artmaz (b) 2 (c) 4 (d) 8

7. Aşağıdaki durumlardan hangilerinde yüke etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur?
   I. Hız manyetik alana dik ise,
   II. Hız manyetik alana paralel ise,
   III. Hız sıfır ise,
   IV. Manyetik alan sabit ise
   (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) II ve IV

8. Şekildeki yüklerden hangisine etkiyen kuvvet sağa yöneliktir?



   (a) q_1 (b) q_2 (c) q_3 (d) q_4

9. Bir $+q$ yüküne etkiyen kuvvet $+y$ yönünde 5 N ise, $-2q$ yüküne etkiyen kuvvet ne olur?
   (a) $+y$ yönünde 10 N
   (b) $*y$ yönünde 10 N
   (c) $+y$ yönünde 2.5 N
   (d) $-y$ yönünde 50 N

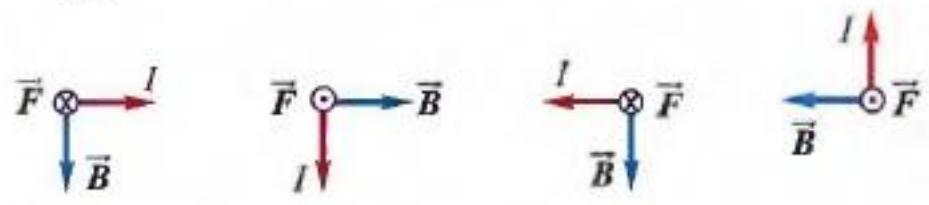
10. $+x$ yönündeki manyetik alanda $+y$ yönündeki akıma etkiyen kuvvet hangi yöndedir?
    (a) $+x$ (b) $+y$ (c) $+z$ (d) $-z$

11. Akım geçen bir telin uzunluğu 2 kat, ve manyetik alan 2 kat artırılırsa, tele etkiyen manyetik kuvvet kaç kat artar?
    (a) Artmaz (b) 2 (c) 4 (d) 8

12. Bir teldeki akım 2 kat, ve manyetik alan 2 kat artırılırsa, tele etkiyen manyetik kuvvet kaç kat artar?
    (a) Artmaz (b) 2 (c) 4 (d) 8

13. Aşağıdaki durumlardan hangilerinde akım geçen bir tel üzerindeki manyetik kuvvet sıfır olur?
    I. Akım manyetik alana dik ise,
    II. Akım manyetik alana paralel ise,
    III. Akım sıfır ise,
    IV. Manyetik alan sabit ise.
    (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) II ve IV

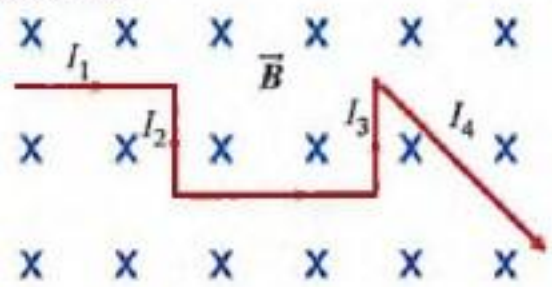
14. Şekilde yönü gösterilen I akımına $\vec{B}$ manyetik alanında etkiyen kuvvet hangilerinde doğru gösterilmiştir?



    (a) a ve b (b) b ve c (c) a, b ve d (d) a ve d

15. Kuzey yönünde 2 T lık manyetik alanda, yukarı yönde 3 A akım taşıyan ve uzunluğu 4 m olan tele etkiyen kuvvetin şiddeti ve yönü ne olur?
    (a) Batı yönünde 24 N
    (b) Doğu yönünde 24 N
    (c) Batı yönünde 6 N
    (d) Doğu yönünde 6 N

16. Şekildeki telin hangi kısmındaki akıma etkiyen kuvvet sağa yöneliktir?



(a) I_1 (b) I_2 (c) I_3 (d) I_4

17. Bir manyetik alanda dairesel hareket yapan yüklü parçacığın yükü 2 kat ve kütlesi 2 kat artırılırsa, dairenin yarıçapı kaç kat artar?

(a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2

18. Hızları aynı olan iki yüklü parçacık, aynı bir manyetik alanda aynı yarıçaplı dairesel yörüngede dönüyorlar. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(a) Parçacıkların yükleri eşittir.
(b) Parçacıkların kütleleri eşittir.
(c) Parçacıkların yük/kütle oranları eşittir.

19. Kesiti $1\,m^2$ olan ve 2 A akım taşıyan çerçeveye 3 T lık manyetik alanda etkiyen maksimum tork ne kadar olur?

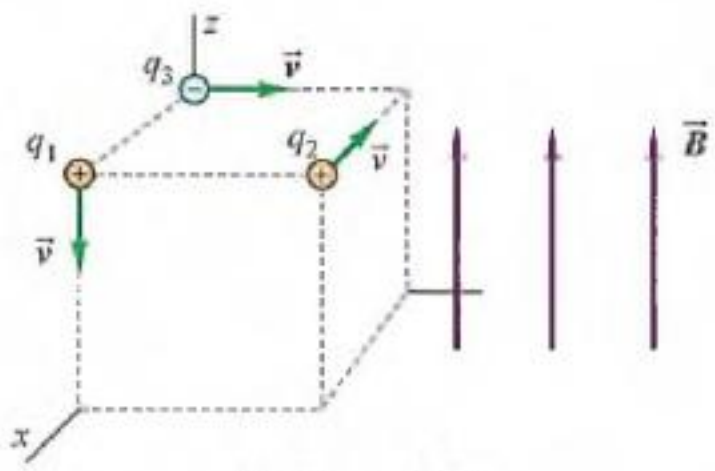
(a) $5\,N\cdot m$ (b) $6\,N\cdot m$ (c) $2\,N\cdot m$ (d) $4\,N\cdot m$

20. Bir akım çerçevesi manyetik alana hangi yönde konulursa, üzerindeki tork sıfır olur?

(a) Manyetik alana paralel
(b) Manyetik alana dik
(c) Asla sıfır olmaz.

Problemler

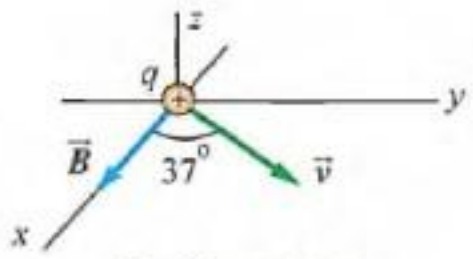
19.1 Yükler Üzerindeki Manyetik Kuvvet



Problem 19.1

19.1 Şekildeki kübün köşelerinden v hızıyla gösterilen yönlerde atılan q_1, q_2, q_3 yüklerine etkiyen kuvvetlerin sadece yönlerini tayin edin. Manyetik alan vektörü $\vec{B}$ gösterilen $+z$ yönündedir.

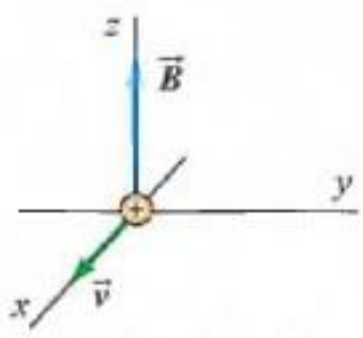
[C: $F_1 = 0$, F_2: $+y$ yönünde, F_3: $-x$ yönünde.]



Problem 19.2

19.2 Şekilde $+x$ yönünde 0.4 T şiddetinde manyetik alanın bulunduğu bir bölgede, $q = 3\,\mu C$ yükü, manyetik alanla 37° açı altında 5×10^6 m/s hızıyla atılıyor. Yüke etkiyen kuvvetin şiddeti ve yönü ne olur? [C: $-z$ yönünde 3.6 N.]

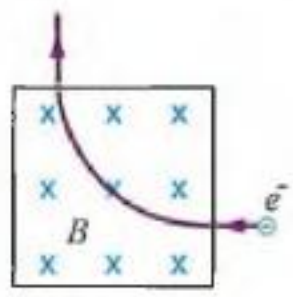
19.3 Hızı 10^6 m/s olan $3\,\mu C$ yükü $B = 0.1$ T olan bir manyetik alana atıldığında, üzerine 0.15 N kuvvet etkiyor. Hızın manyetik alanla yaptığı açı ne kadardır? [C: 30°.]



Problem 19.4

19.4 Manyetik alanın $+z$ ekseni yönünde $B = 0.1$ T şiddetinde olduğu bir bölgede, bir elektron $+x$ ekseni boyunca 2×10^8 m/s hızıyla fırlatılıyor. (Elektronun yükü $-e = -1.6\times10^{-19}$ C ve kütlesi $m_p = 9.1\times10^{-31}$ kg dır.) (a) Elektrona etkiyen kuvvetin şiddetini ve yönünü bulun. (b) Elektronun çizdiği dairesel yörüngenin yarıçapını hesaplayın.

[C: (a) 3.2×10^{-12} N, (b) 0.01 m.]

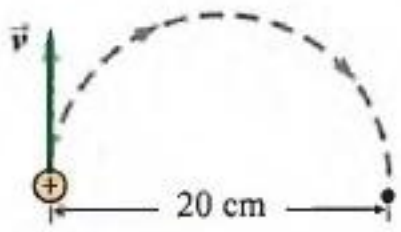


Problem 19.5

19.5 Bir elektron şekilde gösterilen manyetik alan bölgesine 2×10^8 m/s hızla giriyor ve bölgede 1.57 cm yol aldıktan sonra, geliş yönüne dik olarak çıkıyor. Bölgedeki manyetik alan şiddetini hesaplayın. (*Yol gösterme:* Çeyrek çemberin uzunluğundan yarıçapı hesaplayın.) [C: 0.11 T.]

19.6 Durgun bir elektron 200 kV potansiyel farkı altında hızlandırıldıktan sonra, düzgün manyetik alanın $B = 0.1$ T olduğu bir bölgeye, manyetik alana dik olarak giriyor. (a) Elektronun hızı ne kadardır? (b) Manyetik alandaki dairesel yörüngenin yarıçapı ne kadar olur?

[C: (a) 2.7×10^8 m/s, (b) 1.5 cm.]

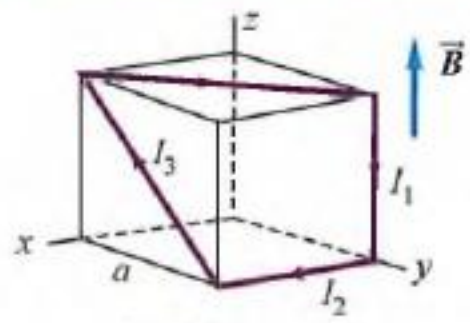


Problem 19.7

19.7 Şekilde gösterilen proton bilinmeyen bir manyetik alan bölgesine 2×10^6 m/s hızıyla fırlatılıyor. Proton yarım daire çizerek 20 cm öteden çıkıyor. Bölgedeki manyetik alan şiddetini ve yönünü hesaplayın.

[C: 0.21 T kağıt dışına doğru.]

19.2 Akımlar Üzerindeki Manyetik Kuvvet

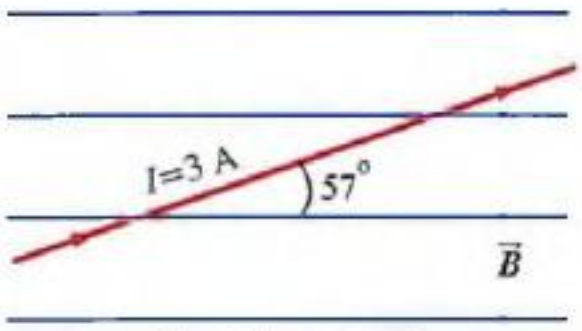


Problem 19.8

19.8 Şekilde bir kenarı a uzunlukta olan kübün kenarları boyunca uzanan tellerdeki akımların şiddeti aynıdır: $I_1 = I_2 = I_3 = I$. $\vec{B}$ manyetik alanı $+z$-yönündedir. I_1, I_2, I_3 akımları üzerindeki kuvvetleri hesaplayın.

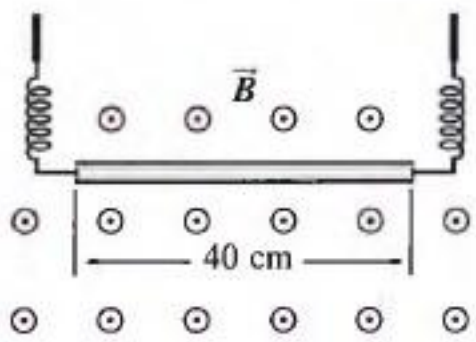
[C: $F_1 = 0$, $F_2 = IaB$: $-y$ yönünde, $F_3 = IaB$: $-x$ yönünde]

19.9 Akım geçen 75 cm uzunluğundaki bir tel, 0.2 T şiddetindeki bir manyetik alana dik doğrultuda konulduğunda üzerine 3 N luk bir kuvvet etkimektedir. Telden geçen akım ne kadardır? [C: 20 A.]



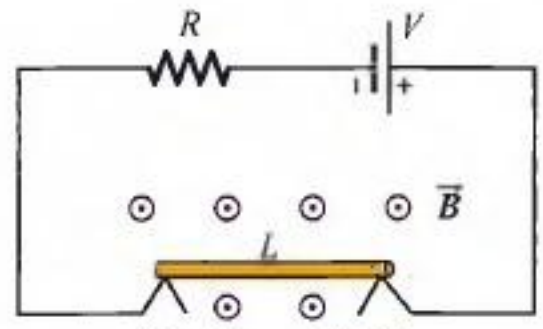
Problem 19.10

19.10 Şekildeki düzlemde 0.5 T manyetik alan bulunan bölgede, alan çizgileriyle 53° açı yapan bir telden 3 A akım geçmektedir. Telin birim uzunluğuna etkiyen kuvveti hesaplayın. [C: 1.2 N.]



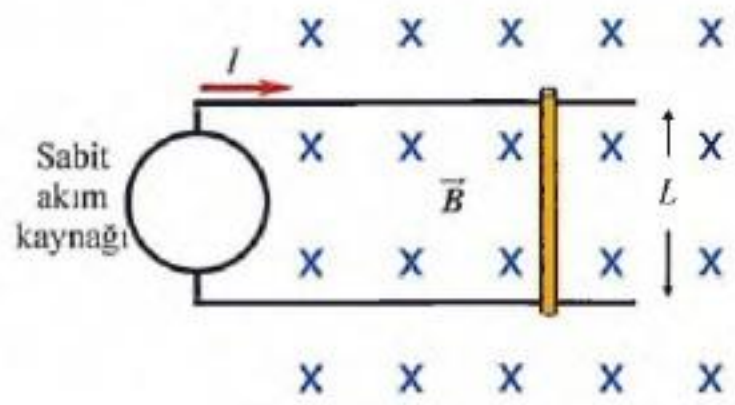
Problem 19.11

19.11 Ağırlığı $W = 0.5$ N olan 40 cm uzunluğunda iletken bir çubuk, şekildeki gibi iletken yaylarla asılmıştır. Bölgede kağıt dışına yönelik ve 0.1 T şiddetinde manyetik alan vardır. Yaylardaki kuvvetin sıfır olması için, bu çubuk üzerinden geçen akımın şiddeti ve yönü ne olmalıdır? [C: 12.5 A sola.]



Problem 19.12

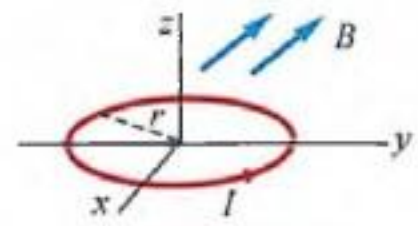
19.12 40 cm uzunluğunda ve 0.5 N ağırlığında bir metal çubuk, şekildeki gibi, devredeki iki destek üzerinde serbestçe durmaktadır. Bölgede kağıt düzleminden dışa doğru 0.3 T şiddetinde manyetik alan vardır. Devre 12 V luk bir bataryaya bağlandığında, çubuğun havaya fırlamaması için R direnci en az ne kadar olmalıdır? [C: 2.9 Ω.]



Problem 19.13

19.13 Şekildeki devreye bir kaynaktan sabit 3 A akım verilmektedir. Kütlesi 100 g ve uzunluğu 50 cm olan bir metal çubuk, sürtünmesiz ab noktaları üzerinde serbestçe durmaktadır. Devre içinde kağıt düzleminden içeri yönde 0.2 T şiddetinde manyetik alan bulunmaktadır. Akım verildiğinde, çubuğun ivmesi ne kadar olur? [C: 3 m/s².]

19.3 Manyetik Tork

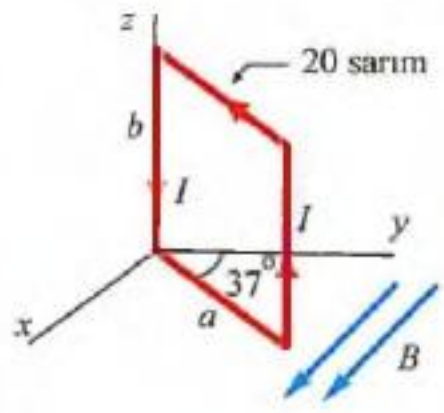


Problem 19.14

19.14 xy-düzleminde yarıçapı 10 cm olan dairesel bir telden 5 A akım geçmektedir. Bu bölgede xy-düzlemiyle 37° açı yapan 0.2 T şiddetinde düzgün bir manyetik alan vardır. Çemberin manyetik momentini ve döndürmeye çalışan torku hesaplayın. [C: $m = 0.16\ \text{A} \cdot \text{m}^2$, $\tau = 0.25\ \text{N} \cdot \text{m}$.]

19.15 Helyum atomunun Bohr modelinde bir elektron çekirdeğin çevresinde 1.8×10^{-11} m yarıçaplı bir yörüngede 6.6 m/s hızla dönmektedir. (a) Elektron bir dönüşü kaç saniyede yapar? (a) Elektronu birim kesitten geçen yük olarak düşünürsek, I akımı ne kadar olur? (c) Elektronun dönme hareketinden kaynaklanan manyetik momenti ne kadar olur?

[C: 3.8×10^{-17} s, (b) 4.2 mA, (c) $9.3 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$.]



Problem 19.16

19.16 Şekildeki dikdörtgen çerçeve z-ekseni etrafında dönebilen 20 sarımdan oluşmakta ve herbir sarımdan $I = 5\,\text{A}$ akım geçmektedir. Çerçevenin boyutları $a = 1\,\text{m}$ ve $b = 2\,\text{m}$ dir. $B = 3\,\text{T}$ manyetik alanı x-ekseni yönündedir. (a) Çerçevenin manyetik dipol momentini hesaplayın, (b) Çerçeveye etkiyen torku hesaplayın. [C: (a) $200\,\text{A}\cdot\text{m}^2$, (b) $360\,\text{N}\cdot\text{m}$.]

20 MANYETİK ALAN KAYNAKLARI



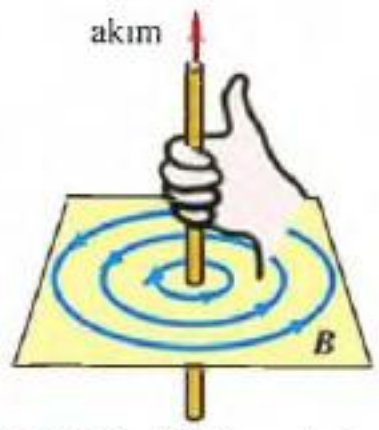
CERN Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi'nde 2000 ton kütleli CMS detektörü yer altındaki yuvasına yerleştiriliyor. Detektörün merkezindeki süperiletken mıknatıs (gri renkli bölge) 4 T şiddetinde manyetik alan üretebilmektedir.

Bölüm 19 da, verilen bir manyetik alanda hareket eden yükleri ve akımları inceledik. Ama bu manyetik alanın nereden kaynaklandığı ile ilgilenmedik. Şimdi, bir manyetik alanın nasıl oluştuğuna bakacağız.

Manyetik alanın kaynağı hareketli yükler ve akımlardır. Herhangi bir akım dağılımının oluşturduğu manyetik alanı Biot-Savart yasasıyla buluruz. Fakat, baştan uyarmakta yarar var: Manyetik alan hesaplarında, 3-boyutlu uzayda düşünebilmek ve vektörler konusunu iyi bilmek gerekir.

Elektrostatikte Gauss yasası ile kestirme yoldan elektrik alanı hesapladığımızı görmüştük. Buna benzer bir yasa manyetik alan için de vardır: Ampere yasasını bu bölümde göreceğiz.

Sonra, maddenin manyetik özelliklerini anlayabilmek için atomlar düzeyine inip bakacağız.



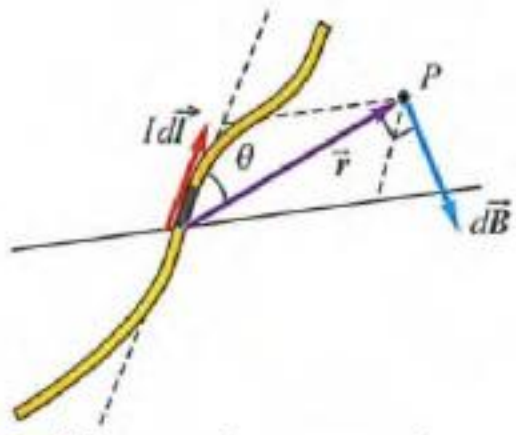
Şekil 20.1: Doğrusal akımın manyetik alanı.

20.1 BİR AKIMIN MANYETİK ALANI. BİOT-SAVART YASASI

En basit durumda, üzerinden I akımı geçen doğrusal bir telin manyetik alanı ele alalım. Yapılan gözlemler şu özellikleri ortaya koymaktadır:

- Manyetik alan çizgileri tele dik bir düzlemde, merkezi tel olan çemberler şeklinde oluşmaktadır.
- Manyetik alanın yönü sağ-el kuralına göre, başparmak akım yönünü gösterirken, dört parmağın kıvrıldığı yöndedir.
- Telden uzaklaştıkça manyetik alan şiddeti r^2 yarıçapıyla ters orantılı olarak azalmaktadır.

Akım geçen tellerin manyetik alanı üzerine titiz deneyler yapan Fransız bilim adamları Jean-Baptiste Biot ve Felix Savart her türlü akım için manyetik alan ifadesini keşfettiler. **Biot-Savart yasası** adıyla bilinen bu formül, telin küçük bir $d\ell$ uzunluğunun manyetik alana katkısını verir:



Şekil 20.2: Akım geçen telin $d\ell$ parçasının $\vec{r}$ konumlu P noktasındaki manyetik alana dB katkısı, bu iki vektörün oluşturduğu düzleme diktir.

Biot-Savart Yasası

I akımı geçen bir telin $d\ell$ uzunlukta bir parçasının r uzaklıktaki bir noktadaki manyetik alana katkısı,

$$dB = k' \frac{I\,d\ell\,\sin\theta}{r^2} \tag{20.1}$$

olur. Burada θ açısı $\vec{r}$ konum vektörünün $d\ell$ doğrultusuyla yaptığı açıdır.

Bu formüldeki k' sabitinin SI sistemindeki değeri şudur:

$$k' = 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A} \tag{20.2}$$

Elektrikte k sabitini boşluğun elektrik geçirgenliği ε_0 cinsinden ifade etmiştik. Benzer şekilde manyetizmada, **boşluğun manyetik geçirgenliği** adında bir μ_0 (mü) sabiti şöyle tanımlanır:

$$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \longrightarrow \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A} \tag{20.3}$$

Biot-Savart yasasının önemli noktalarını vurgulayalım:

- Telin her küçük $d\ell$ parçasının manyetik alanı, $d\ell$ parçası ile r uzaklığının oluşturduğu düzleme dik doğrultudadır.
- Manyetik alanın, olabilecek iki dik doğrultudan hangisi yönünde olacağını sağ-el kuralı verir: Başparmak akım yönünde, dört parmak r yönünde uzatıldığında, avuçiçi $d\vec{B}$ vektörünün yönünü gösterir.
- Manyetik alan, I akım şiddetiyle doğru, r^2 uzaklığının karesiyle ters orantılıdır.
- Manyetik alan, $d\ell$ parçası ile r arasındaki açının sinüsüyle doğru orantılıdır.

Biot-Savart Yasasının Vektörel Çarpım İfadesi

Yukarda verilen Biot-Savart formülündeki $\sin\theta$, $d\ell$ ve r uzunlukları, bu ifadenin aslında bir vektörel çarpım olduğuna işaret etmektedirler. Gerçekten de, $d\ell$ parçasını akım yönünde bir $d\vec{\ell}$ vektörü olarak yazar ve r yönünde birim vektörü de $\hat{\mathbf{r}}$ olarak alırsak, Biot-Savart yasasının vektörel ifadesi şöyle olur:

$$d\vec{B} = k' \frac{I\, d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \text{(Biot-Savart: vektörel ifade)} \qquad (20.4)$$

Bu ifadenin hem büyüklük hem de yön bakımından, (20.1) manyetik alan formülüne eşdeğer olduğu görülebilir.

Tüm Akımın Manyetik Alanı

Her akım küçük $d\ell$ parçalarının toplamından oluşan sonlu bir tel üzerinden geçer. Tüm telin manyetik alanı, yukardaki küçük $d\vec{B}$ vektörlerinin limit toplamı, yani integrali olur:

$$\vec{B} = k' \int \frac{I\, d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (20.5)$$

Bu integral tüm tel üzerinden alınır.

20.2 MANYETİK ALAN HESAPLARI

Bu kısımda, en temel akım dağılımlarının manyetik alanlarını integral yoluyla hesaplayalım.

Sonsuz Doğrusal Akımın Manyetik Alanı

Şekil 20.3 de yukarı yönde seçilen x-ekseni boyunca uzatılmış ve I akımı taşıyan doğrusal bir tel ve bir P noktası gözönüne alalım. Orijini P noktasının tele en yakın a uzaklığında olduğu yerde seçelim. (Tel sonsuz olduğu için bu seçim genelliği bozmaz.)

Tel üzerinde, orijinden x uzaklıkta bir $d\ell$ parçasını dx uzunluğu olarak seçelim. Bu parçanın r uzaklığındaki P noktasındaki manyetik alana katkısı Biot-Savart yasasının (20.1) denklemi ifadesine göre yazılırsa,

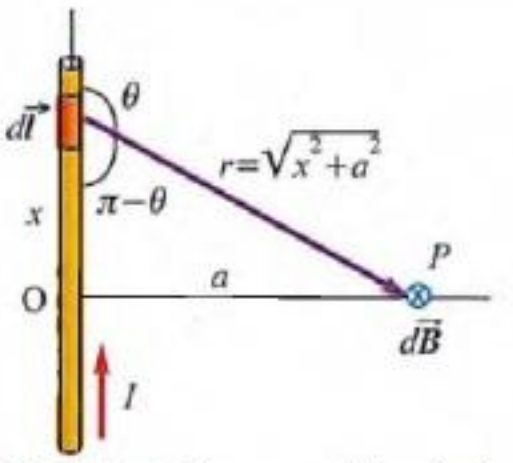
$$dB = k' \frac{I\, dx \sin\theta}{r^2}$$

olur. dB manyetik alanının yönü, sağ-el kuralına göre, kağıt düzlemi içine doğru olacaktır. Tel üzerinde farklı yerlerdeki dx parçalarının bu P noktasındaki katkıları hep kağıt düzlemi içine doğru, yani aynı yönde olacaktır. O halde, bu dB katkılarının cebirsel toplamı doğrudan integralle alınabilir. Telin $(-\infty)$ dan $(+\infty)$ a uzandığını da gözönüne alırsak,

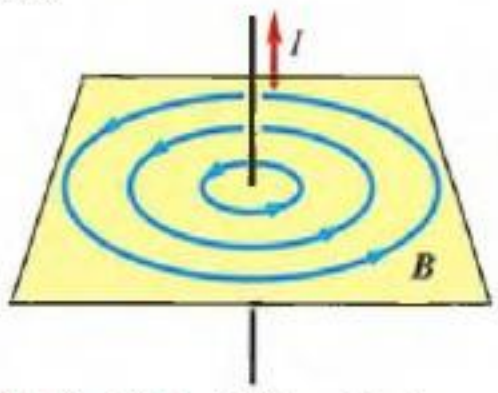
$$B = k'\, I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \sin\theta}{r^2}$$

olur. İntegral içindeki tüm değişkenleri x cinsinden yazalım. Şekilde, θ açısının tümleyeni $(\pi - \theta)$ açısı kullanılırsa,

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}$$
$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



Şekil 20.3: Sonsuz tel üzerinde bir dl parçasının P noktasındaki manyetik alana dB katkısı.



Şekil 20.4: Doğrusal akımın manyetik alanı.

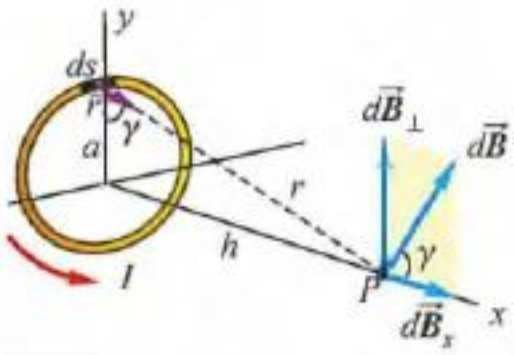
Bu değerler kullanılırsa, integral şu hale gelir:

$$B = k'\,I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,(a/\sqrt{x^2+a^2})}{x^2+a^2} = k'Ia \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}}_{2/a^2}$$

Bu integral $x = a\tan u$ değişken değişimi yapılarak hesaplanabilir. Hesabın ayrıntısına girmeden, sonucun $2/a^2$ olduğunu belirtelim. Buna göre, sonsuz doğrusal akımın manyetik alanı,

$$\boxed{B = \frac{2k'I}{a} \qquad \text{(Doğrusal telin manyetik alanı)}} \tag{20.6}$$

Manyetik alan çizgileri, teli eksen kabul eden çemberler oluştururlar. $\vec{B}$ vektörü bu çemberlere teğet olur.



Şekil 20.5: Çember akım üzerinde ds yay parçasının manyetik alana katkısı dB.

Akım Çemberinin Manyetik Alanı

I akımı geçen a yarıçaplı iletken bir çemberin ekseni üzerindeki noktalarda manyetik alanını bulmak istiyoruz. Yine, Şekil 20.5 de gösterildiği gibi, tel üzerinde küçük bir $d\ell$ parçasını ds yayı olarak seçelim. ds yay parçasını y-ekseni üzerinde ve $+z$ yönünde seçelim. P noktası da x-ekseni üzerinde h uzaklıkta olsun. Bu seçimler, çemberin simetrisinden dolayı genelliği bozmazlar.

Şekilden görüldüğü gibi, ds akım parçasının P noktasındaki dB manyetik alanı, hem ds ve hem de $\hat{\mathbf{r}}$ birim vektörüne dik olacağından, sonuçta xy-düzleminde yer alır. Ayrıca, ds ile $\hat{\mathbf{r}}$ arasındaki açı $\theta = 90°$ olacaktır, çünkü ds ye dik düzlemde yer alan her vektör ds ye dik olur.

Bu dB katkısını Biot-Savart yasasına göre yazarsak,

$$dB = k'\,\frac{I\,ds\,\sin 90°}{r^2} = k'\,I\,\frac{ds}{a^2+h^2}$$

olur. $d\vec{B}$ vektörünü, biri x-yönünde, diğeri buna dik olan iki bileşene ayıralım:

$$dB_x = dB\cos\gamma$$
$$dB_\perp = dB\sin\gamma$$

ds yay parçasını çember çevresinde gezdirerek, herbirinin $d\vec{B}$ katkısını topladığımızda, $dB_\perp$ katkıları P noktası etrafında bir çember çizecek ve simetriden dolayı sıfır katkı verecektir:

$$\int dB_\perp = 0 \qquad \text{(simetriden dolayı)}$$

Bu durumda, sadece x-ekseni yönündeki katkılar x-yönünde bir toplam manyetik alan vereceklerdir:

$$B = \int dB_x = \int dB\cos\gamma$$

Şekilde iki yerde gösterilen γ açıları, kenarları birbirine dik açılar olduğundan, eşit olurlar. Buna göre, $\cos\gamma = a/r = a/\sqrt{h^2+a^2}$ olur ve integral şu hale gelir:

$$B = \int dB\cos\gamma = k'\,I \int \frac{ds}{a^2+h^2}\,\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}$$
$$= \frac{k'Ia}{(h^2+a^2)^{3/2}} \oint ds$$

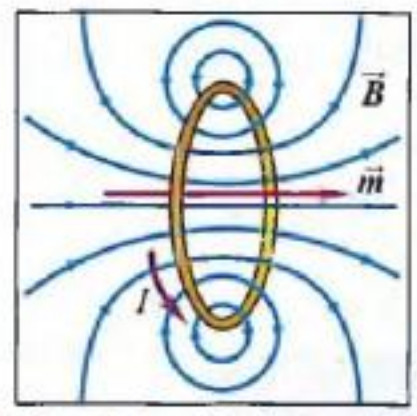
Burada tüm sabitler integralin dışına alınmış ve ds parçalarının çember üzerinde kapalı bir eğri oluşturduğunu belirtmek üzere $\oint$ işareti kullanılmıştır.

Yay parçalarının komple bir çember üzerindeki toplamı çember uzunluğu demektir. O halde, integralin değeri $2\pi a$ alınırsa, sonuç şöyle bulunmuş olur:

$$B = \frac{2\pi k' I a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(Çember ekseni üzerinde manyetik alan)} \qquad (20.7)$$

Çember merkezinde manyetik alan, bu formülde $h = 0$ alınarak bulunur:

$$\boxed{B = \frac{2\pi k' I}{a} \qquad \text{(Çember merkezinde manyetik alan)}} \qquad (20.8)$$



Şekil 20.6: Çember akımın manyetik alan çizgileri ve manyetik dipol momenti.

Şekil 20.6 da çember akımın manyetik alan çizgileri gösterilmiştir. Eksen dışındaki noktalarda alan çizgileri eksene paralel olmaz, kendi üzerine kıvrılır.

Bir Manyetik Dipolun Manyetik Alanı

Kısım 19.3 de, akım geçen bir çerçevenin manyetik dipol momentini şöyle tanımlamıştık (19.5 denklemi):

$$m = I A$$

Burada A, çerçevenin yüzölçümüdür. Yukarda, çember akımın ekseni üzerindeki manyetik alan için bulduğumuz (20.7) formülüne tekrar dönelim:

$$B = \frac{2\pi k' I a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$$

Bu ifadede bir manyetik dipol momenti kolayca oluşturabiliriz. Çemberin yüzölçümü πa^2 olduğundan,

$$B = \frac{2k'(I\pi a^2)}{(h^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2k'm}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$$

Manyetik dipolden çok uzaklarda, yani $\gg a$ olduğunda, manyetik alanın yaklaşık ifadesi şöyle olur:

$$B \approx \frac{2k'm}{h^3} \qquad (h \gg a \text{ için manyetik dipolün alanı}) \qquad (20.9)$$

Bir akım çemberine manyetik dipol gözüyle bakmanın şöyle bir yararı vardır: Bir atomda, çekirdek çevresinde sürekli dönen $-e$ yüklü bir elektron, dairesel bir çerçeve akımı oluşturur ve manyetik dipol momentine sahiptir. Bu bölümde daha sonra göreceğimiz üzere, maddenin mıknatıslık özellikleri, atomları çok küçük birer manyetik dipol gibi kabul ederek açıklanabilir.

Örnek 20.1

Yerin manyetik alanı 5×10^{-5} T *şiddetindedir.* **(a)** 1 A *akım geçen doğrusal telden hangi uzaklıkta manyetik alan şiddeti bu değere eşit olur?* **(b)** 1 m *yarıçaplı çember akımın merkezindeki manyetik alanın bu değere eşit olması için ne kadar akım geçmelidir?*

Çözüm

(a) Doğrusal telin manyetik alanını veren (20.6) formülünü kullanırız:

$$B = \frac{2k'I}{a}$$

Bu ifade yerin manyetik alanına eşitlenip, a uzaklığı bulunur:

$$a = \frac{2k'I}{B} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 1}{5 \times 10^{-5}}$$

$$a = 0.004\,\text{m} = 4\,\text{mm}$$

(b) Çember akımın merkezindeki manyetik alanı veren (20.6) formülünü kullanırız:

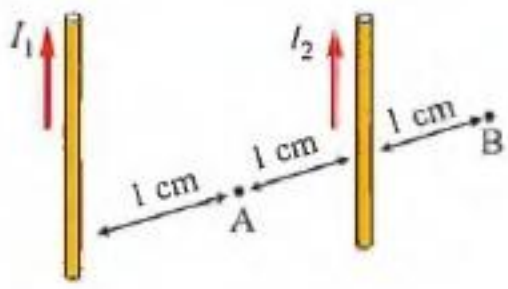
$$B = \frac{2\pi k'I}{a}$$

Yine bu ifade yerin manyetik alanına eşitlenip akım hesaplanır:

$$I = \frac{aB}{2\pi k'I} = \frac{1 \times 5 \times 10^{-5}}{2 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1}$$

$$I = 80\,\text{A}$$

Örnek 20.2



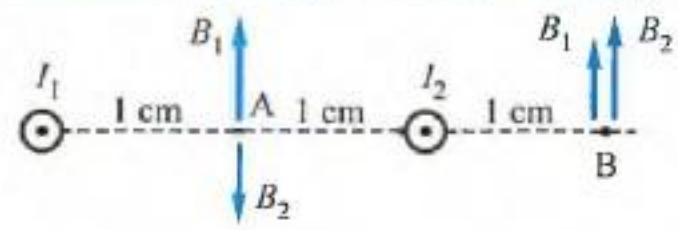
Şekilde paralel $I_1 = 100\,\text{A}$ ve $I_2 = 200\,\text{A}$ akımları arasındaki mesafe 2 cm dir.

(a) *Tellerin orta noktası A daki toplam manyetik alanı hesaplayın.*

(b) *I_2 telinden 1 cm ötedeki B noktasında manyetik alanı hesaplayın.*

Çözüm

(a) Önce, her iki noktada B_1 ve B_2 manyetik alanlarının yönlerini belirleyelim. Sağ-el kuralı uygulanırsa, manyetik alanların kağıdın üstünden görünüşü şöyle olur:



Sonra, herbir akımın manyetik alanı $B = 2k'I/a$ formülüyle hesaplanır:

A noktasında:

$$B_1 = \frac{2k'I_1}{a} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 100}{0.01} = 0.002\,\text{T} = 2\,\text{mT}$$

$$B_2 = \frac{2 \times 10^{-7} \times 200}{0.01} = 0.004\,\text{mT}$$

Zıt iki vektörün A noktasındaki bileşkesi alınır:

$$B_A = B_1 - B_2 = 0.002 - 0.004 = -0.002\,\text{mT}\ \text{(aşağı yönde)}$$

B noktasında:

$$B_1 = \frac{2 \times 10^{-7} \times 100}{0.03} = 0.00067\,\text{T} = 0.67\,\text{mT}$$

$$B_2 = \frac{2 \times 10^{-7} \times 200}{0.01} = 0.002\,\text{T} = 2\,\text{mT}$$

Aynı yönde iki vektörün B noktasındaki bileşkesi alınır:

$$B_B = B_1 + B_2 = 0.67 + 2 = 2.67\,\text{mT}$$

Örnek 20.3

Yarıçapı 1 m olan iletken bir çember üzerinden 1 A akım geçmektedir.

(a) *Çember merkezindeki manyetik alan şiddeti ne kadardır?*

(b) *Eksen üzerinde nerede manyetik alan merkezdeki değerinin yarısına düşer?*

Çözüm

(a) Akım çemberinin merkezindeki manyetik alan (20.8) formülüyle bulunur:

$$B = \frac{2\pi k'I}{a}$$

Sayısal veriler yerine konulup manyetik alan hesaplanır:

$$B = \frac{2 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1}{1} = 6.3 \times 10^{-7}\,\text{T}$$

(b) Burada yeniden manyetik alan değerini hesaplamaya gerek yoktur. Sadece, merkezdeki ve h uzaklıktraki alan ifadelerinin oranını alırız. Akım çemberinin ekseni üzerindeki h noktasmdaki manyetik alan ifadesi (20.7) formülüyle verilmişti:

$$B = \frac{2\pi k'I\,a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$$

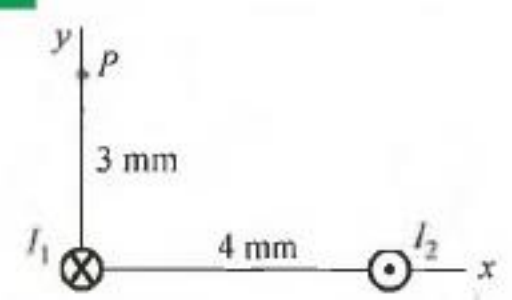
Yukarda yazdığımız çemberin merkezindeki alan ifadesini B_0 ile gösterip, bu iki alanın oranını alalım:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{2\pi k'I\,a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \times \frac{a}{2\pi k'I} = [(h/a)^2 + 1]^{3/2}$$

$B = B_0/2$ ve $a = 1$ değerleri yerine konulup, h için çözülür:

$$[h^2 + 1]^{3/2} = \tfrac{1}{2} \rightarrow h = 0.77\,\text{m}$$

Örnek 20.4



Şekilde kağıt düzlemine dik doğrultudaki doğrusal tellerdeki akımlar $I_1 = 60\,\text{A}$ ve $I_2 = 50\,\text{A}$ dir. P noktasındaki toplam manyetik alanın bileşenlerini hesaplayın.

Çözüm

Önce P noktasındaki B_1 ve B_2 alan şiddetleri (20.6) formü-

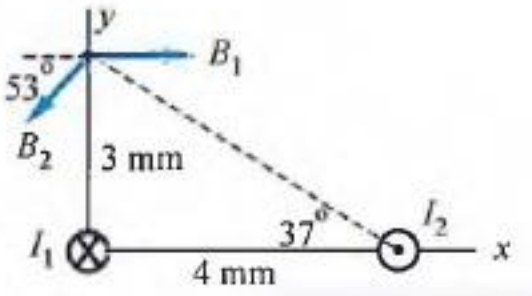
lüyle hesaplanır:

$$B = \frac{2k'I}{a}$$

$$B_1 = \frac{2\times10^{-7}\times60}{0.003} = 0.004\,\text{T} = 4\,\text{mT}$$

$$B_2 = \frac{2\times10^{-7}\times50}{0.005} = 0.002\,\text{T} = 2\,\text{mT}$$

Daha sonra, bu manyetik alan vektörlerinin yönleri sağ-el kuralıyla bulunur. Her iki alan yönü şöyle olur:



Son olarak, bu iki vektörün toplamı, bileşenleri cinsinden bulunur:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$
$$B_x = B_1 - B_2\cos 53° = 4 - 2\times0.6 = 2.8\,\text{mT}$$
$$B_y = -B_2\sin 53° = -2\times0.8 = -1.6\,\text{mT}$$

İstenirse, toplam manyetik alan şiddeti ve yönü bu bileşenlerden hesaplanabilir.

20.3 PARALEL AKIMLAR ARASINDAKİ KUVVET – AMPERE BİRİMİ

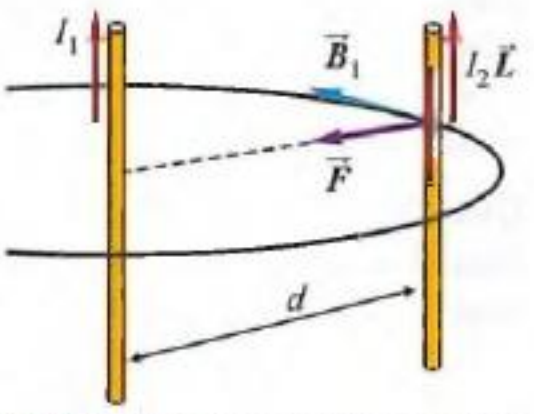
Bölüm 19 da bir manyetik alan içine konulan akıma etkiyen kuvveti hesaplamıştık. Şimdi, akım geçen tellerin nasıl manyetik alan oluşturduğunu artık biliyoruz. O halde, akım geçen iki tel arasındaki nasıl bir etkileşme olacağını anlayabiliriz: Tellerden birinin oluşturduğu manyetik alan, ikinci tele bir kuvvet uygulayacaktır.

Aralarında d uzaklığı bulunan paralel iki doğrusal tel gözönüne alalım. Bu tellerden aynı yönde I_1 ve I_2 akımları geçiyor olsun. I_1 akımının d uzaklığında oluşturduğu manyetik alan (20.6) denklemi ile verilir:

$$B_1 = \frac{2k'I_1}{d}$$

Bu B_1 manyetik alanında, ikinci telin L kadar uzunluğuna etkiyen kuvveti Bölüm 19 da $\vec{F} = I(\vec{L}\times\vec{B})$ olarak görmüştük (19.1 denklemi):

$$\vec{F} = I_2\left(\vec{L}\times\vec{B}_1\right)$$



Şekil 20.7: Paralel iki akımdan birinin manyetik alanı diğerine kuvvet uygular.

Şekil 20.7 de görüldüğü gibi, B_1 manyetik alanı diğer I_2 akımlı tele dik doğrultudadır. Bu durumda, kuvvet de I_2 akımına ve B_1 alanına dik olup, I_1 teline yöneliktir. Yani, iki tel birbirini çeker. Kuvvetin büyüklüğünü hesaplayalım:

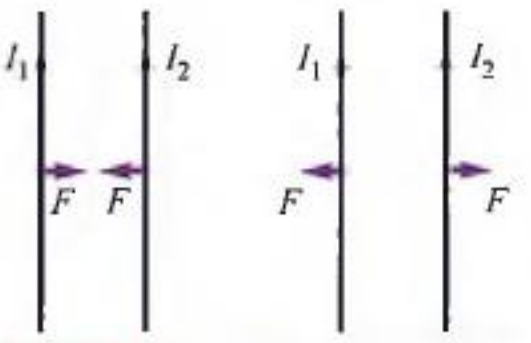
$$F = LI_2B_1\sin 90° = LI_2\frac{2k'I_1}{d} = 2k'L\frac{I_1I_2}{d}$$

Bu hesabı, I_2 akımının manyetik alanında I_1 akımına uygulanan kuvvet için de yapabilirdik. O zaman, Newton'un 3. yasasına uygun olarak, aynı kuvveti eşit ve zıt yönde bulurduk.

Akımlar birbirine zıt yönde (anti-paralel) alınmış olsaydı, tellerin birbirini ittiğini bulurduk. O halde, **paralel akımlar birbirini çeker, anti-paralel akımlar birbirini iterler.**

Her iki durumda, kuvvetin şiddeti şöyle olur:

$$F = \frac{2k'I_1I_2}{d}L \qquad \text{(Paralel akımlar arasındaki kuvvet)} \qquad (20.10)$$

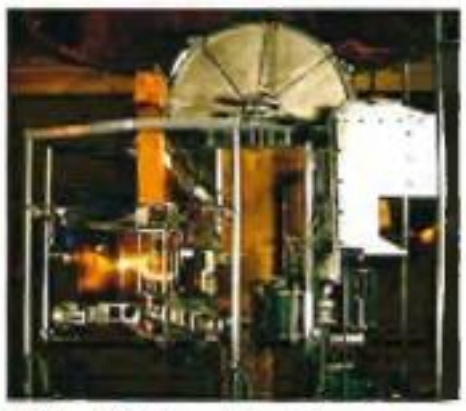


Şekil 20.8: Paralel akımlar birbirini çeker, anti-paralel akımlar birbirini iter.

Ampere Biriminin Tanımı

Yukarda bulduğumuz paralel akımlar arasındaki kuvvet ifadesini, aralarında $d = 1\,\text{m}$ mesafe bulunan $I_1 = I_2 = 1\,\text{A}$ lik eşit akımlar arasında hesaplayalım. Telin birim uzunluğuna etkiyen kuvvet şöyle olur:

$$\frac{F}{L} = \frac{2k' I_1 I_2}{d} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 1 \times 1}{1\,\text{m}} = 2 \times 10^{-7}\,\text{N/m}$$



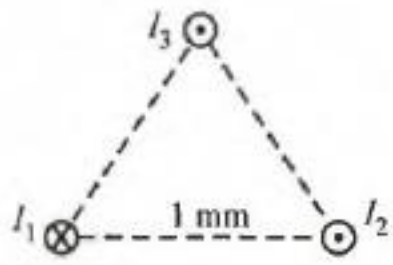
Şekil 20.9: Akımlar arasındaki kuvveti ölçmekte kullanılan Watt terazisi.

Bu formül, SI sisteminin temel birimlerinden olan **ampere** (A) akım biriminin tanımıdır:

Aralarında 1 m mesafe bulunan ve özdeş akımlar taşıyan paralel iki uzun tel arasında, birim uzunluğa etkiyen kuvvet $2 \times 10^{-7}\,\text{N/m}$ olduğunda, tellerden geçen akım 1 ampere (A) olur.

Bu tanım laboratuvarda kurulabilecek en makul ölçüm düzeneği olur: *Watt terazisi* denilen bir aletle akım geçen bir ağırlık, aynı akımla dengede tutulur, böylece, iki teldeki akımın özdeş olması sağlanmış olur.

Örnek 20.5



Şekilde kağıt düzlemine dik doğrusal teller, bir kenarı 1 mm *olan bir eşkenar üçgenin köşelerini oluşturmaktadırlar.* $I_1 = I_2 = I_3 = 100\,\text{A}$ *olduğuna göre,* I_3 *akımlı telin* 1 m *uzunluğuna etkiyen toplam kuvveti hesaplayın.*

Çözüm

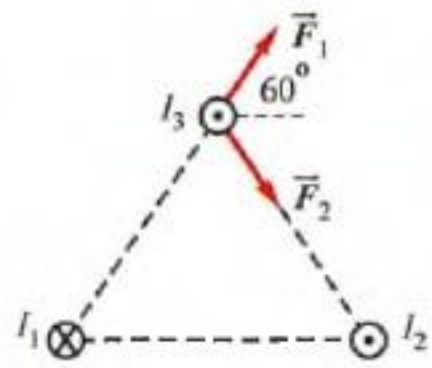
Paralel akımlar arasındaki kuvvet (20.10) formülüyle verilmiştir:

$$F = \frac{2k' I_1 I_2}{d} L$$

I_1 ve I_2 akımları aynı şiddette olduğu için, uyguladıkları kuvvetlerin şiddetleri eşittir:

$$F_1 = F_2 = \frac{2 \times 10^{-7} \times 100^2}{0.001} \times 1 = 2\,\text{N}$$

Bu iki kuvvetin yönlerini bulmak istersek, şu kuralı uygularız: Paralel akımlar birbirini çeker, antiparalel akımlar birbirini iter. Buna göre, I_3 akımı üzerindeki kuvvetlerin yönleri şu şekilde olur:

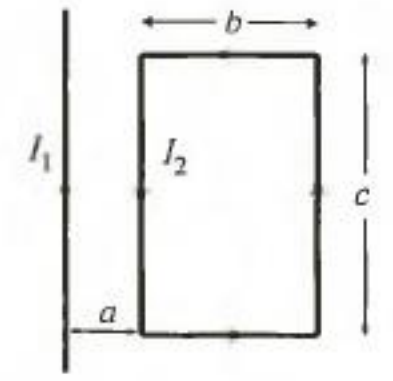


Yatayla eşit açı yapan eşit iki kuvvetin toplamı, açıortay yönünde, yani yatay olur:

$$F = F_{1x} + F_{2x} = 2F \cos 60^\circ$$

$$F = 2\,\text{N}$$

Örnek 20.6



Şekilde, üzerinden $I_1 = 25\,\text{A}$ *lik akım geçen doğrusal tel ile aynı düzlemde bulunan dikdörtgen çerçeveden* $I_2 = 4\,\text{A}$ *lik akım geçmektedir. Çerçevenin yakın kenarının uzaklığı* $a = 1\,\text{cm}$, *eni* $b = 3\,\text{cm}$ *ve boyu* $c = 5\,\text{cm}$ *dir. Çerçeveye etkiyen net kuvveti hesaplayın.*

Çözüm

Burada I_1 akımının oluşturduğu manyetik alanda, çerçeveye etkiyen kuvveti bulacağız. Önce, doğrusal akımın manyetik alanı yazılır:

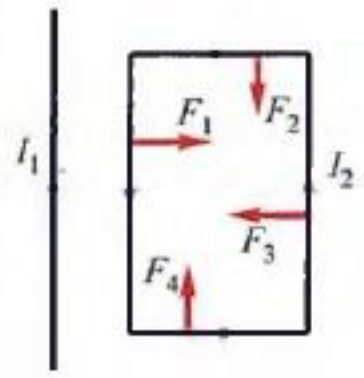
$$B_1 = \frac{2k' I_1}{r}$$

Bu manyetik alan, çerçevenin bulunduğu bölgede kağıt düzleminin içine doğrudur.

Bu manyetik alanda L uzunluktaki I_2 akım parçasına etkiyen kuvvet (19.1) formülüyle bulunuyordu:

$$\vec{F} = I_2 \left(\vec{L} \times \vec{B}_1 \right)$$

Bu vektörel çarpımı sağ-el kuralına göre hesaplarsak, dört kenara etkiyen kuvvetler şekilde gösterilen yönlerde oluşurlar:



F_2 ve F_4 kuvvetleri eşit ve zıt yönde olduğundan, toplam kuvvete katkıda bulunmazlar. O halde, sadece F_1 ve F_3 kuvvetlerini hesaplamak yeterlidir:

$$F_1 = I_2 L B_1 = 2k' I_1 I_2 \frac{c}{a}$$

$$= 2 \times 10^{-7} \times 25 \times 4 \frac{5}{1} = 1 \times 10^{-4}\,\text{N}$$

$$F_3 = 2 \times 10^{-7} \times 25 \times 4 \frac{5}{1+3} = 0.125 \times 10^{-4}\,\text{N}$$

Bu iki kuvvetin farkı, toplam kuvveti sağa doğru verir:

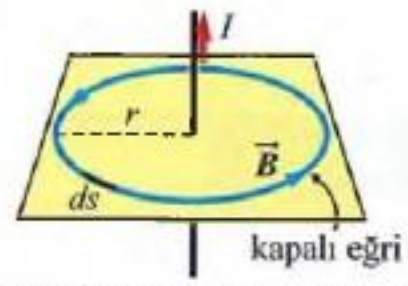
$$F = F_1 - F_3 = 0.875 \times 10^{-4}\,\text{N}$$

20.4 AMPERE YASASI

Biot-Savart yasası ile bir akım dağılımının manyetik alanını bulmak için, integral almamız gerekiyordu. Bu integraller çoğu zaman karmaşık olurlar. Oysa, akım dağılımı simetrik ise, integral almaya gerek kalmadan manyetik alanı bulabiliriz. Bu, Ampere yasası ile mümkündür.

Ampere yasasının özünü anlayabilmek için basit bir durumu gözönüne alalım. Sonsuz doğrusal telin manyetik alanını daha önce hesaplamıştık. I akımı geçen telden r uzaklıkta manyetik alan (20.6) denklemi ile bulunmuştu:

$$B = \frac{2k' I}{r}$$



Şekil 20.10: Doğrusal tel etrafında daire şeklinde kapalı eğri.

Şimdi, manyetik alanın r yarıçaplı çembere teğet olan bileşeninin, çember boyunca integralini alalım. Şekil 20.10 da görüldüğü gibi, her noktadaki B manyetik alanının teğet bileşenini, oradaki küçük ds yay parçası ile çarpıp, çember üzerinden toplayalım. Bu, x-ekseni boyunca alınan bildiğimiz integralden farklıdır. Bir eğri (çember) boyunca alındığı için **eğrisel integral** denir. Sonsuz telin manyetik alanı zaten r yarıçaplı çembere teğet olduğundan, kendisini almak yeterlidir:

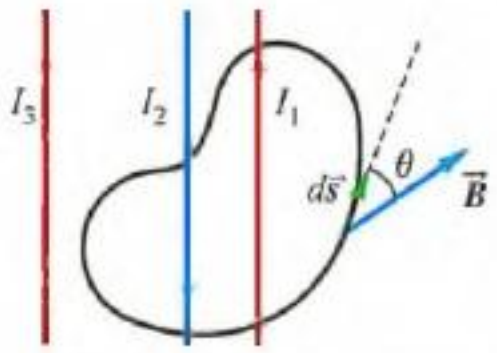
$$\oint B\,ds = B \oint ds$$

B manyetik alanı çember üzerinde heryerde aynı değerde olduğu için, integral dışına aldık. Küçük ds yay parçalarının tam çember üzerinden integrali $2\pi r$ çevre uzunluğu olur. Manyetik alan ifadesini de kullanırsak,

$$\oint B\,ds = B\,2\pi r = \frac{2k' I}{r} 2\pi r = 4\pi k' I = \mu_0 I$$

(Son ifade, $k' = \mu_0/4\pi$ kullanılarak, μ_0 boşluğun manyetik geçirgenliği cinsinden yazıldı.) Sonucun r yarıçapından bağımsız oluşu şaşırtıcıdır. Elbette bu özel durumda, sonsuz telin manyetik alanı r ile ters orantılı olduğu için, bu sonuç ortaya çıktı. Fakat, en genel durumda herhangi bir akım dağılımının herhangi bir eğri üzerinden integralinin aynı sonucu verdiği, ileri düzeyde integral tekniği ile ispatlanabilmektedir.

Eğer bu integral, I akımını dışarda bırakan bir eğri üzerinden alınsaydı, sonuç sıfır olurdu. Bunu ispatsız kabul edersek, Ampere yasası şu şekilde ifade edilir:



Şekil 20.11: Amper yasasına göre, eğri içinde kalan I_1, I_2 akımları alınır. Eğri dışındaki I_3 akımı hesaba katılmaz.

Ampere Yasası

Kapalı bir eğri boyunca manyetik alanın izdüşümünün integrali, bu eğrinin çevrelediği herhangi bir yüzeyi kesen net akım ile orantılıdır:

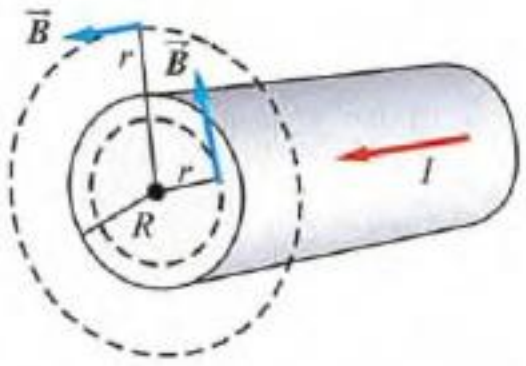
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{iç}} \qquad \text{(Ampere Yasası)} \qquad (20.11)$$

Bu formülde $I_{\text{iç}}$ kapalı eğri içinde kalan net akımı gösterir, yani bir yöndeki akım pozitif ise zıt yöndeki akım negatif olarak katılır. Eğri dışında kalan akımlar hesaba katılmaz. $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ skaler çarpımı, manyetik alanın yol boyunca izdüşümü alınacağını gösterir.

Ampere yasasının uygulamasında bu integrali almaya gerek kalmaz. Problemin simetrisine bakarak, B manyetik alanı integral dışına alınır ve sol tarafın hesaplanması kolaylaşır. Sağ tarafta sadece, akımları toplamak kalır.

Örnek 20.7

R yarıçaplı sonsuz silindir şeklindeki bir iletkenden geçen I akımı, silindir kesitine düzgün olarak dağılmıştır. Silindir dışında ve içinde manyetik alanı bulun.



Çözüm

Amper yasasını uygulayabilmek için daima bir simetri bulmak gerekir. Manyetizmada en temel simetri doğrusal akımın manyetik alanıdır. Doğrusal akımm manyetik alanı, teli merkez kabul eden çemberlere teğet yönde oluşur. Bu simetriyi bozacak bir durum yoksa, buradan başlamak gerekir.

Tel dışında: $r > R$ olacak şekilde hayali bir çember düşünelim. Bu çember üzerindeki bir noktadan baktığımızda, telin her iki yarım kesiti aynı katkıyı verecektir. O halde, manyetik alanı çembere teğet doğrultudan değiştirecek bir sebep yoktur. Yine simetriye göre, çember üzerinde her noktada B değeri aynı olmalıdır.

Amper yasasına göre (20.11 formülü), bu teğetsel manyetik alanın r yarıçaplı çember boyunca integrali, içerde kalan net akıma eşit olmalıdır:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{iç}}$$

B yola paralel olduğundan $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B\,ds$ olur ve sabit olan B değeri integral dışına alınır. Kalan integral çemberin çevre uzunluğu $2\pi r$ olur. Sağ taraftaki akım, silindirden geçen toplam I akımıdır:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \;\rightarrow\; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{2k' I}{r}$$

Bu sonuç, doğrusal akım ifadesiyle aynıdır.

Tel içinde: $r < R$ olacak şekilde, yine hayali bir çember düşünelim. Yine simetriye göre, çember üzerindeki manyetik alan her noktada aynı değerde ve çembere teğet olmalıdır. Ampere yasası yazılır:

$$\oint B\,ds = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{iç}}$$

Bu kez, çember içinde kalan akım daha azdır. Akım R yarıçaplı silindir kesitine düzgün dağılmış olduğundan, r yarıçaplı kısımda kalan miktarı orantı yoluyla bulunur:

$$I_{\text{iç}} = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$$

Bu ifade yerine konur ve B hesaplanır:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{2k' I}{R^2} r$$

Örnek 20.8

***Solenoid.** Sonsuz uzunlukta bir solenoidin içinde ve dışında manyetik alanı hesaplayın.*



Çözüm

İletken bir tel alıp, uzun bir silindirin çevresine helezon şeklinde sardığımızda solenoid elde ederiz. Elektrik konusundan hatırlarsanız, düzlem kondansatör içinde düzgün elektrik alan oluşuyordu. Benzer şekilde, düzgün manyetik alan elde etmek istersek solenoid kullanırız.

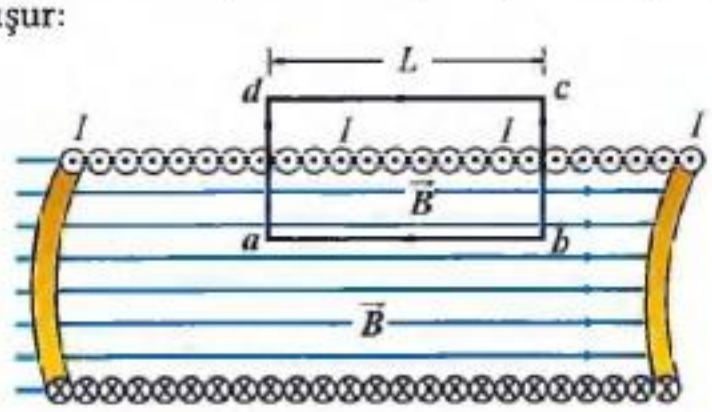
Kısım 20.2 de bir çember akımın manyetik alanını he-

saplamış ve şöyle bir dağılım olduğunu söylemiştik:



Şimdi bu çemberin yanına özdeş ikinci bir çember akımı daha koyduğumuzu düşünelim. Her noktada manyetik alan vektörel olarak toplandığında, iç bölgede alan çizgilerinin giderek eksene daha paralel hale geldiği ve çember dışına biraz daha geç çıktıkları görülür.

İşte, böyle çemberlerden sonsuz tanesi yanyana getirildiğinde oluşan solenoidin manyetik alanı, içerde eksene paralel hale gelir ve dışarda sıfıra yaklaşır. Sonuçta şöyle bir yapı oluşur:



Şimdi, bu varsayımlarla Ampere yasasını uygulayalım. Şekilde görülen dikdörtgen şeklindeki *abcd* yolu boyunca manyetik alanın integralini yazalım:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{iç}$$

Bu dört integralden sadece birincisi sıfırdan farklı olacaktır. Çünkü, 2. ve 4. integrallerde (*bc* ve *da* yolları) $\vec{B}$ vektörü $d\vec{s}$ yoluna diktir ve skaler çarpım sıfır olur. 3. integral tümüyle solenoid dışında olduğundan bu bölgede $B = 0$ varsayılmıştı. 1. integral içinde B değeri aynı olduğundan, integral dışına alınır. *ab* uzunluğunu L ile gösterirsek, sol taraf şöyle olur:

$$B\,L = \mu_0 I_{iç}$$

Şimdi sağ taraftaki $I_{iç}$ değerini hesaplayalım. Solenoidi oluşturan sarımların birim uzunluktaki sayısı n olsun. Buna göre, dikdörtgen yol içinde kalan sarım sayısı nL olur. Herbirinden I akımı geçtiğine göre, içerde kalan akım miktarı nLI olacaktır:

$$B\,L = \mu_0\, nLI$$

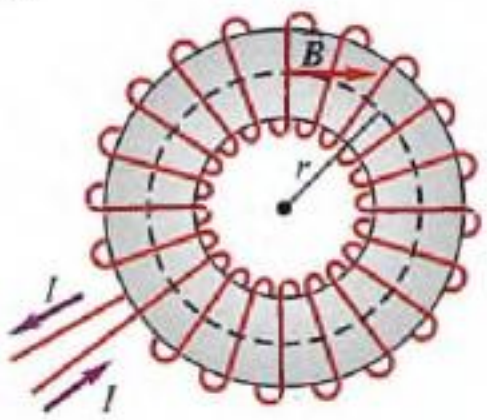
Buradan, solenoid içindeki manyetik alan ifadesi bulunur:

$$B = \mu_0\, nI \qquad \text{(Solenoidin m. alanı)} \qquad (20.12)$$

Sonucun yarıçapa bağlı olmadığına dikkat edelim. Solenoid hacmi içinde heryerde manyetik alan bu sabit değerde olur.

Örnek 20.9

Toroid. *Toroid (simit) şeklinde sarılmış toplam N sarımdan oluşan solenoid içinde, merkezden r uzaklıkta manyetik alanı hesaplayın.*



Çözüm

Toroidi N tane çember akımdan oluşmuş gibi düşünelim. Herbir çemberin eksen üzerinde manyetik alanı eksen yönünde olduğundan, toroidin yapısı bu simetriyi bozmayacak ve içerde manyetik alan eksen yönünde dolanacaktır.

Şimdi, toroid içinde r yarıçaplı hayali bir çember alıp Ampere yasasını uygulayalım:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{iç}$$

Çember yol boyunca $\vec{B}$ yola paralel olduğu için skaler çarpım düz çarpım olur ve B alanı yol boyunca değişmediğinden integral dışına alınır. Ayrıca, sağ taraftaki $I_{iç}$ akımı N tane I akımının toplamıdır:

$$B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

Buradan toroidin manyetik alan ifadesi bulunur:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{2k'NI}{r}$$

Aynı işlemi toroid dışmda bir çember için yapsaydık, orada manyetik alanın sıfır olduğunu bulurduk.

20.5 MADDENİN MANYETİK ÖZELLİKLERİ

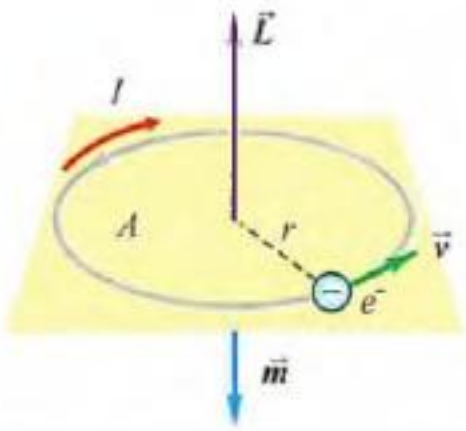
Mıknatıslık özelliği olmayan bir demir çubuğu mıknatıs yapmak mümkündür. Bu, iki türlü yapılabilir: Şekil 20.12-a da görüldüğü gibi, bir demir çiviyi atnalı mıknatısının kutuplarıyla bir süre temas halinde bırakalım. Daha sonra çıkarıp aldığımızda, çivinin de toplu iğneleri çekmeye başladığını, yani kalıcı bir mıknatıslık kazandığını gözleriz.

Keza, bir solenoidin sarımları arasındaki boşluğa, mıknatıslık özelliği olmayan bir demir çiviyi yerleştirip, solenoidden bir süre akım geçirelim (Şekil 20.12-b). Daha sonra bu çivinin de yine mıknatıslık özelliği kazandığı gözlenir.



Şekil 20.12: Bir çiviyi iki yöntemle mıkmatıslarız: (a) Kalıcı bir mıknatısla temas, (b) Solenoidin manyetik alanında bekletiş.

Bu gözlemler bize, maddenin özünde mıknatıslık özelliğinin varolduğunu gösteriyor. Bu mıknatıslığın kaynağı nedir? Niçin demir, nikel gibi bazı maddelerde mıknatıslık özelliği kalıcı olabiliyor? Bu sorulara cevap verebilmek için maddenin atomik yapısına eğilmek gerekir.



Şekil 20.13: Elektronun yörünge hareketinden oluşan akım ve $\vec{m}$ manyetik momenti.

Atomların Manyetik Dipol Momenti

Bir atomun yapısında $(-e)$ yüklü elektronlar, pozitif bir çekirdek etrafında yörüngelerde dönerler.Klasik fizikte elektronun r yarıçaplı dairesel bir yörüngede v hızıyla döndüğünü kabul edilir. Buna göre, elektronun çekirdek çevresinde bir akım oluşturduğunu düşünebiliriz. Gerçekten de akım tanımına göre (bir kesitten birim zamanda geçen yük miktarı), bir dönüş periyodu zaman aralığında e yükü geçmektedir. Elektron v hızıyla dönüyorsa, bu akımın değeri

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}$$

olur. (Modern fizikte bu model tam doğru değildir, çünkü elektronun hızı veya yarıçapı tam olarak ölçülebilen nicelikler değildir. Yine de, bir fikir edinmek için klasik model yararlı olur.)

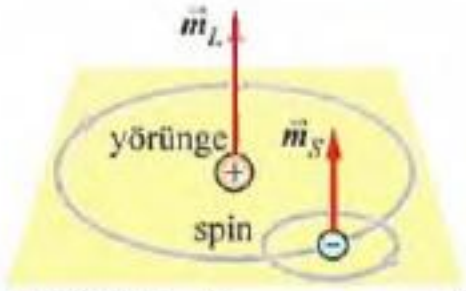
Bu çember akımı daha önce (Kısım 20.2 de) incelemiş ve manyetik alanını hesaplamıştık. Ayrıca, manyetik dipol momenti oluşturduğunu da görmüştük. Burada da elektron için manyetik dipol momenti tanımı yazılırsa,

$$m = I\,A = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\,evr$$

olur. O halde, atomlarda elektronların yörünge hareketinden kaynaklanan bir manyetik dipol momenti vardır.

Bölüm 7 de noktasal cismin açısal momentumunu $L = mvr$ olarak tanımlamıştık. Burada da elektronun kütlesini m_e ile gösterirsek,

$$m_L = \frac{e}{2m_e}L$$



Şekil 20.14: Atomun manyetik momenti, spin ve yörünge katkılarından oluşur.

Böylece, açısal momentumla manyetik dipol momenti arasında bir ilişki olduğunu görüyoruz: Dönen her yüklü parçacığın açısal momentumuna bağlı olarak bir manyetik momenti oluşur.

Elektronların bir de kendi özünde olan ve **spin** denilen bir açısal momenti daha vardır. Spin açısal momentinin klasik bir açıklaması yoktur, ama elektronu kendi ekseni etrafında dönen bir topaca benzeterek düşünebilirsiniz. Böylece, yörünge manyetik momentine ilave olarak, m_s ile gösterilen bir de **spin manyetik momenti** eklemek gerekir:

$$\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_s$$

Sonuç olarak her atom, $\vec{m}$ toplam manyetik dipol momentinden kaynaklanan bir manyetik alan üretir. Bir dış manyetik alana konulduğunda, kendi çevresindeki net manyetik alana katkıda bulunarak onu değiştirir.

Manyetizasyon ($\vec{M}$)

Kısım 19.3 de, akım geçen çerçevenin manyetik dipol momentine, bir dış manyetik alanda etkiyen torku hesaplamıştık (19.6 denklemi):

$$\tau = mB \sin\theta$$

Makroskopik boyutlardaki bir cismin atomları genellikle rasgele yönlerde manyetik momente sahip olurlar ve net, makroskopik bir manyetik moment oluşmaz. Fakat, bu cisim bir $\vec{B}_0$ dış manyetik alanına konulduğunda, atomların manyetik momentlerine etkiyen tork, onları döndürmeye çalışır. Böylece, cismin makroskopik bir manyetik momenti oluşur.

Birim hacımdaki net manyetik momente **manyetizasyon** denir:

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V} \tag{20.13}$$

Bu manyetizasyonun oluşturduğu kendi manyetik alan hesaplandığında $\mu_0\vec{M}$ değerinde olduğu görülür. Burada μ_0 daha önce tanımladığımız, boşluğun manyetik geçirgenliğidir.

O halde, madde ortamı içindeki net manyetik alan şöyle olur:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$$

Manyetik alana katkıları aynı boyuta getirmek üzere, bu ifadeyi şöyle yazalım:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \vec{M}\right)$$

Parantez içindeki birinci terim dış akımların madde içinde manyetik alana katkısıdır, ama mıknatıslanma boyutunda yazılmıştır. Bu terime **manyetik şiddet vektörü** denir ve $\vec{H}$ ile gösterilir:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \tag{20.14}$$

Buna göre, madde içindeki manyetik alan şöyle yazılabilir:

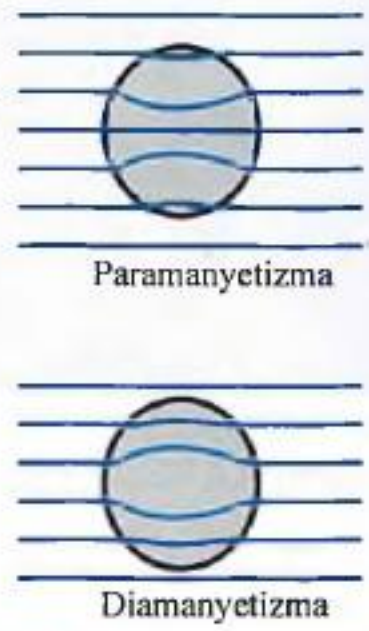
$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \tag{20.15}$$

Eğer ortamda mıknatıslanma yoksa, yani $\vec{M} = 0$ ise, bu ifade boşluktaki $\vec{B}_0$ manyetik alanını verir.

Paramanyetizma ve Diamanyetizma

Bir atomdaki elektronların manyetik momentleri genellikle birbirini sıfırlar ve net manyetik momenti oluşmaz. Fakat, bazı maddelerin (aluminyum, platin, kalsiyum, sodyum...) sıfırdan farklı bir atomik manyetik momenti vardır. Bu tür maddeler bir dış manyetik alan içine konulduğunda oluşan tork, manyetik momenti alan yönünde dönmeye zorlar ve *dış manyetik alanı artırıcı* bir katkı oluşur. Buna **paramanyetizma** denir.

Diğer bazı maddelerde (altın, gümüş, bakır, kurşun...) ise manyetik moment sıfır olduğu halde, bir dış manyetik alana konulduklarında ters bir tepki verirler. Elektronların hareket yörüngesi değişir ve yine bir manyetik moment oluşur.



Şekil 20.15: Paramanyetik ve diamanyetik ortamlarda manyetik alanın değişimi.

Fakat, bu manyetik moment *dış manyetik alanı azaltıcı* bir katkı verir. Buna **diamanyetizma** denir.

Şekil 20.15 de bu iki mıknatıslanma türünde ortamdaki manyetik alan değişimi gösterilmiştir. Paramanyetik madde ortamında manyetik alan daha da artar (yoğun alan çizgileri), diamanyetik ortamda azalır (seyrek alan çizgileri).

Hangi tür olursa olsun, ortamın $\vec{M}$ manyetizasyon vektörü, $\vec{H}$ manyetik şiddet vektörüyle orantılı olur:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Buradaki boyutsuz χ_m sabitine ortamın **manyetik duygunluğu** adı verilir. Paramanyetik ortam için χ_m pozitif, diamanyetik ortam için negatif olur.

Buna göre, $\vec{B}$ manyetik alanı için yukarda bulduğumuz (20.15) denklemini yazarsak,

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \vec{H}$$

olur. Tıpkı elektrik alan için ε_0 yerine ortamda ε tanımladığımız gibi, burada da μ ile gösterilen **ortamın manyetik geçirgenliği** şöyle tanımlanır:

$$\mu = \left(1 + \chi_m\right) \mu_0 \tag{20.16}$$

Ortamın türüne göre,

$$\begin{aligned} &\text{paramanyetik ortamda:} && \mu > \mu_0 \\ &\text{diamanyetik ortamda:} && \mu < \mu_0 \end{aligned}$$

olur. Böylece, ortamın manyetik özelliklerini hesaba katan $\vec{B}$ ifadesi bulunmuş olur:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{20.17}$$

Ferromanyetizma

Paramanyetik ve diamanyetik maddelerin mıknatıslığı ancak bir dış manyetik alan uygulandığında oluşur. Dış manyetik alan kaldırılırsa manyetizasyon yokolur.

Dört metal (demir, nikel, kobalt, gadolinyum) ve bazı oksitlerde ise, dış manyetik alan kaldırıldığında mıknatıslık özelliği kaybolmaz. Bu kalıcı manyetizasyon özelliğine **ferromanyetizma** denir. Kredi kartları, bilgisayar hafızaları, hoparlör, motor çekirdeği, pusula, ... yapısında ferromanyetik malzeme kullanılır.

Ferromanyetik maddelerin mıknatıslığı çok güçlüdür. Paramanyetik maddelere kıyasla 1000 kat daha büyük M manyetizasyon değerlerine çıkabilir.

Ferromagnetizma atomların manyetik momentleri arasındaki etkileşmeden kaynaklanır. Bunun tam bir klasik açıklaması yoktur, doğru açıklama ancak modern fizikte yapılabilir. Burada kısaca bazı kavramları bilgi olarak verelim.

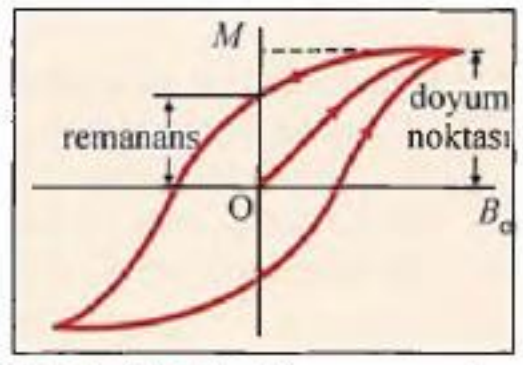


Şekil 20.16: NdFeB kristalinde ferromanyetik domen yapısı.

Ferromanyetik maddelerin mikroskopik yapısına bakıldığında, **domen** denilen ve çok sayıda atomdan oluşmuş küçük bölgelerin varlığı gözlenir (Şekil 20.16). Bu domenler net bir mıknatıslanmaya sahiptirler ama başlangıçta herbiri rasgele yönde olduğundan, net bir mıknatıslanma oluşmaz. Bir dış manyetik alan içine konulduğunda, alan yönündeki domenlerin büyüdüğü, diğer yöndekilerin küçüldüğü gözlenir. Başka bir deyişle, domen duvarları net mıknatıslanmayı artıracak yönde hareket ederler.

Fakat, bu mıknatıslanma **Curie sıcaklığı** denilen belli bir kritik sıcaklık değerine kadar sürer. (Demir için kritik sıcaklık 770 °C dir.) Bu sıcaklığın üzerine çıkıldığında madde, ani bir faz geçişiyle, tekrar paramanyetik özelliğine geri döner.

Ferromanyetik bir maddeyi bir B_0 dış manyetik alanı içine koyduğumuzda, mıknatıslanmadaki değişme çok ilginçtir (Şekil 20.17). B_0 dış alanı arttıkça, M manyetizasyonu da artar (şekildeki ab eğrisi). Bu artış, sonunda bir **doyum manyetizasonu** denilen değere kadar sürer (b noktası). Bu noktada tüm atomların manyetik momentleri dış alana paralel hale gelmiş demektir, daha fazla artış olmaz.



Şekil 20.17: Ferromanyetizmada histerezis eğrisi.

Daha sonra, B_0 azaltılırken, M değeri aynı yolu izleyerek geri dönmez (bc eğrisi). Şekilde görüldüğü gibi, c noktasında $B_0 = 0$ olduğu halde, **remanans** denilen kalıcı bir M_r mıknatıslanma değeri oluşur. Dış manyetik alan ters yöne çevrilirse (cd eğrisi), mıknatıslanma da azalır ve biraz daha geç olarak ters yönde oluşur. Eksi yöndeki dış alanın şiddetini azaltmaya başladığımızda (de eğrisi), bu kez ters yönde bir kalıcı mıknatıslanma oluşur (e noktası). Böylece, gidiş ve gelişi farklı olan kapalı bir eğri gözleriz. Buna **histerezis eğrisi** denir.

Hizterezis eğrisi ferromanyetik maddelerin niçin hafıza çiplerinde kullanıldığını da açıklar. Eğriden görüldüğü üzere, ferromanyetik maddenin manyetizasyon değeri, bir yönde manyetik alan azaltılırsa M_r, diğer yönde azaltılırsa $-M_r$ değerinde olmaktadır. Yani, bir hafızası vardır, sıfır manyetik alana nasıl geldiğini hatırlar.

Dünyanın Manyetik Alanı

Mıknatıstan yapılmış bir pusula iğnesini kuzey kutbuna yönlendiren şey dünyanın manyetik alanıdır. Yapılan ölçümler Dünya'nın ortalama 10^{-4} T değerinde bir manyetik alanı olduğunu göstermektedir. Bu alanın uzayda dağılımına bakıldığında, sanki dev bir mıknatıs dünyanın merkezine yerleştirilmiş gibi davranmaktadır. Fakat, dikkat edelim: bu mıknatısın güney kutbu (S) coğrafi kuzey kutbundadır. Yani, manyetik alan çizgileri dünyanın güney kutbundan çıkıp kuzey kutbunda birleşmektedirler. Ancak böyle olursa pusulanın kuzey kutbunu coğrafi kuzey yönünde çekebilir. Yerin manyetik alanı tam yüzeye paralel değildir, yüzeye dik bir bileşeni daha vardır.



Şekil 20.18: Dünya, N kutbu güneyde olan dev bir mıknatıstır.

Alan çizgilerinin kesiştiği mıknatıs kutupları tam coğrafi kuzey ve güney kutuplarıyla çakışık değildir. Manyetik kutup noktası zaman içinde değişmektedir. Kayalar üzerinde yapılan araştırmalar 1000 yıllık periyotlarla değiştiğini gösteriyor. 2005 yılında yapılan ölçüme göre manyetik kutup, enlemi 82.7° N (kuzey) ve boylamı 114.4° W (batı) olan, Kuzey Kanada'da Ellesmere adası civarında olup, zaman içinde Rusya'ya doğru kaymaktadır.

Manyetik alan Dünya üzerinde de yerel değişimler göstermektedir. Deniz ve hava ulaşımında kullanılmak üzere, her yörenin manyetik haritası çıkarılmıştır. Örneğin, Ankara'da (39° 55' 38" N/32° 51' 51" E) manyetik kutup coğrafi kuzey kutbundan 5° daha doğudadır.



Şekil 20.19: Ankara'da pusulalar coğrafi kuzey kutbunun 5° doğusunu gösterir.

Yerin manyetik alanının nereden kaynaklandığı konusu bilimdeki en büyük muammalardan biridir. Başlangıçta, yerküre merkezindeki demir ve nikel tabakalarından kaynaklandığı düşünülüyordu, ama çok yüksek sıcaklıkta ferromanyetizmanın sıfırlandığını biliyoruz. Bugün, elektrik yüklü erimiş lavların yeraltında oluşturduğu konveksiyon akımlarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Test

1. Manyetik alanın kaynağı aşağıdakilerden hangileridir?
   I. Manyetik yükler.
   II. Akımlar.
   III. Atomların manyetik momentleri.
   (a) Hepsi (b) I ve II (c) I ve III (d) II ve III

2. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Paralel akımlar birbirini iter.
   II. Antiparalel akımlar birbirini çeker.
   III. Paralel akımlar birbirini çeker.
   II. Antiparalel akımlar birbirini iter.
   (a) I ve II (b) III ve IV (c) I ve IV (d) II ve III

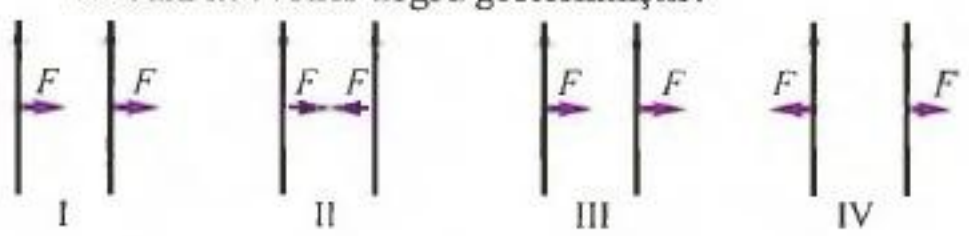
3. Sonsuz bir doğrusal telden geçen akım 2 katına çıkarıldığında manyetik alan kaç kat artar?
   (a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2

4. Akım geçen bir çemberin yarıçapı 2 katına çıkarılıyor. Çember merkezindeki manyetik alan kaç kat artar?
   (a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2

5. Üzerinden 1 A akım geçen doğrusal telden 1 m uzaklıkta manyetik alan ne kadardır?
   (a) 1×10^{-7} T (b) 2×10^{-7} T (c) 3×10^{-7} T (d) 4×10^{-7} T

6. Çember akımın merkezindeki manyetik alan ifadesi hangisidir?
   (a) $k'I/a$ (b) $k'I/a^2$ (c) $2k'I/a$ (d) $2k'I/a^2$

7. Aşağıdaki şekillerden hangilerinde paralel akımlar arasındaki kuvvetler doğru gösterilmiştir?



   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) II ve IV

8. Aralarında 1 m uzaklık bulunan ve herbiri 1 A akım taşıyan paralel iki telden birinin 1 m uzunluğuna etkiyen kuvvet ne kadardır?
   (a) 1×10^{-7} N (b) 2×10^{-7} N (c) 3×10^{-7} N

9. Ampere yasası aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) Kapalı bir eğri boyunca manyetik alanın integrali, eğri içinde kalan akıma eşittir.
   (b) Kapalı bir eğri boyunca manyetik alanın integrali, eğrinin çevrelediği yüzeyi kesen net akıma eşittir.
   (c) Kapalı eğri boyunca manyetik alanın integrali, eğrinin çevrelediği yüzeyi kesen net akımla orantılıdır.

10. Bir solenoidin akımı 2 katına çıkarıldığında manyetik alan kaç kat artar?
    (a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2

11. Bir solenoidin birim uzunluktaki sarım sayısı 2 katına çıkarıldığında manyetik alan kaç kat artar?
    (a) Aynı (b) 2 (c) 4 (d) 1/2

12. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Solenoid içinde manyetik alan sıfırdır.
    (b) Solenoid içinde manyetik alan sabittir.
    (c) Solenoid dışında manyetik alan sabittir.
    (d) Hepsi.

13. Solenoidin manyetik alan ifadesi hangisidir?
    (a) $\frac{1}{2}\mu_0 nI^2$ (b) $\mu_0 nI^2$ (c) $\mu_0 nI$ (d) $\mu_0 n^2 I$

14. Hangisinde düzgün manyetik alan oluşur?
    (a) Doğrusal akım
    (b) Çember akım
    (c) Solenoid
    (d) Toroid

15. Maddenin mıknatıslanma özellikleri açısından aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    (a) Paramanyetik maddeler için: $\mu > \mu_0$
    (b) Diyamanyetik maddeler için: $\mu < \mu_0$
    (c) Ferromanyetik maddeler için: $\mu \gg \mu_0$
    (d) Hepsi

16. Cisimlerin mıknatıslanma özelliği aşağıdakilerden hangilerinden kaynaklanır?
    I. Atomik elektronların yörünge hareketinden.
    II. Elektronların spin özelliğinden.
    III. Mıknatıslı domen bölgelerinin birleşmesinden.
    (a) I (b) I ve II (c) I ve III (d) Hepsi

17. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    I. Paramanyetik madde içinde manyetik alan artar.
    II. Diyamanyetik madde içinde manyetik alan artar.
    III. Paramanyetik madde içinde manyetik alan azalır.
    IV. Diyamanyetik madde içinde manyetik alan azalır.
    (a) I (b) I ve II (c) I ve III (d) I ve IV

18. Ferromanyetizma için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    I. Sıcaklık arttıkça mıknatıslanma artar.
    II. Sıcaklık arttıkça mıknatıslanma azalır.
    III. Belli bir sıcaklığın üstünde mıknatıslanma sıfırlanır.
    (a) I (b) II (c) I ve III (d) II ve III

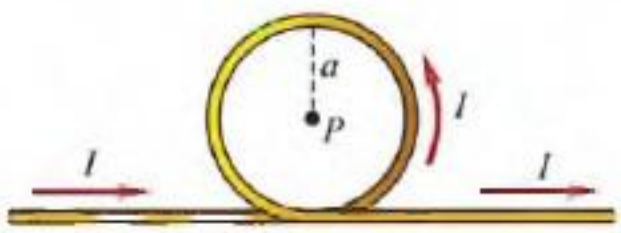
19. Ferromanyetik malzeme bir dış manyetik alan içinde konulduğunda, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Dış manyetik alan yönünde mıknatıslanır.
    (b) Dış manyetik alan arttıkça mıknatıslanma artar.
    (c) Belli bir doyum değerinden sonra mıknatıslanma artmaz.
    (d) Hepsi.

20. Dünyanın mıknatıslığı hakkında aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    I. Coğrafi kuzey kutup manyetik kuzey kutuptur.
    II. Coğrafi kuzey kutup manyetik güney kutuptur.
    III. Manyetik kutupların yeri zaman içinde değişir.
    IV. Manyetik kutupların yeri zaman içinde değişmez.
    (a) I ve III (b) II ve III (c) I ve IV (d) III ve IV

Problemler

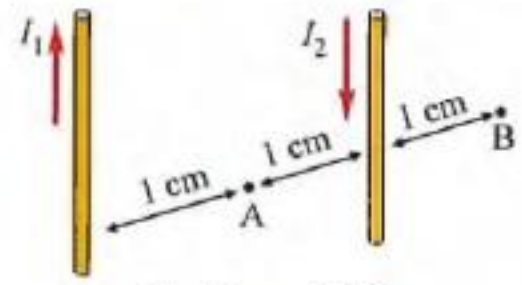
20.2 Manyetik Alan Hesapları

20.1 (a) 10 A akım geçen doğrusal telden 1 cm uzaklıkta manyetik alan şiddeti ne kadardır? (b) 1 cm yarıçaplı çember akımın merkezindeki manyetik alanın 1 mT olması için geçen akım ne kadar olmalıdır? [C: (a) 1 mT, (b) 16 A.]



Problem 20.2

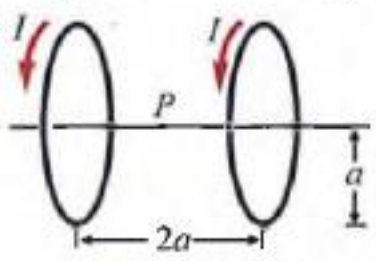
20.2 Şekilde, üzerinden $I = 50\,\text{A}$ akım geçen sonsuz bir telin bir kısmı $a = 1\,\text{cm}$ yarıçaplı çember şeklinde kıvrılmıştır. Çember merkezi olan P noktasında manyetik alanın şiddetini ve yönünü bulun. [C: 4 mT, kağıt dışına doğru.]



Problem 20.3

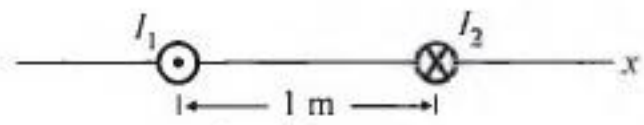
20.3 Şekilde anti-paralel $I_1 = 300\,\text{A}$ ve $I_2 = 50\,\text{A}$ akımları taşıyan iki doğrusal tel arasındaki mesafe 2 cm dir. (a) Tellerin orta noktası A daki toplam manyetik alanı hesaplayın. (b) I_2 telinden 1 cm ötedeki B noktasında manyetik alanı hesaplayın. [C: (a) 7 mT, (b) 1 mT.]

20.4 Yarıçapı 1 m olan iletken bir çember üzerinden 1 A akım geçmektedir. (a) Çember merkezindeki manyetik alan şiddeti ne kadardır? (b) Eksen üzerinde nerede manyetik alan merkezdeki değerinin dörtte birine düşer?
[C: (a) $6.3 \times 10^{-7}\,\text{T}$, (b) $h = \sqrt{7}a = 2.6\,\text{m}$.]



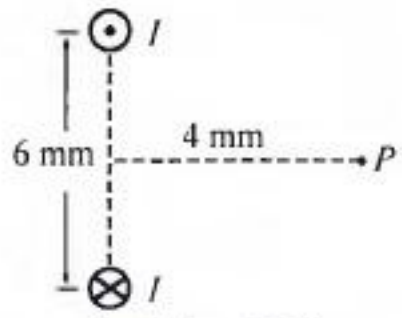
Problem 20.5

20.5 Helmholtz bobini. Yarıçapları $a = 1\,\text{cm}$ ve $I = 100\,\text{A}$ akım taşıyan özdeş iki çember akım, Şekilde görüldüğü gibi eksen üzerinde, aralarında $2a$ mesafe bulunacak şekilde yerleştirilmişlerdir. Çemberler arasındaki orta noktada manyetik alanı hesaplayın. (Bu düzenek küçük bir bölgede düzgün manyetik alan elde etmek için kullanılır.) [C: 4.4 mT.]



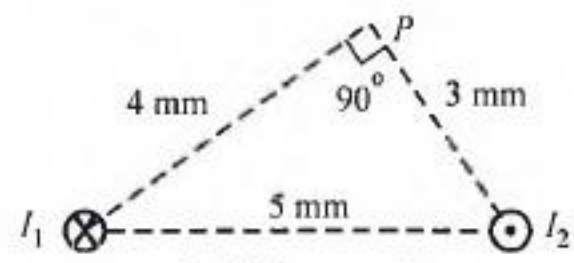
Problem 20.6

20.6 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrultuda olan iki doğrusal teldeki akımlar, sırasıyla $I_1 = 1\,\text{A}$ ve $I_2 = 5\,\text{A}$ olup, aralarındaki mesafe 1 m dir. x-ekseni üzerinde hangi bölgede (sol, orta, sağ) ve nerede toplam manyetik alan sıfır olur? [C: 0.25 m solda.]



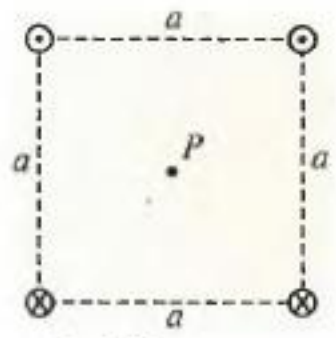
Problem 20.7

20.7 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrultuda ve aralarında 6 mm mesafe bulunan iki doğrusal teldeki akımlar zıt yönde ve eşit olup $I = 100\,\text{A}$ şiddetindedir. Akımların orta dikmesi üzerinde 4 mm uzaktaki P noktasında toplam manyetik alanın şiddeti ve yönünü hesaplayın.
[C: 4.8 mT sağa doğru.]



Problem 20.8

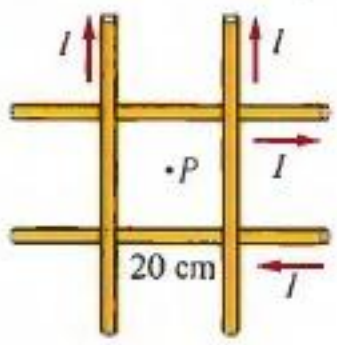
20.8 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrultuda ve aralarında 5 mm mesafe bulunan iki doğrusal teldeki akımlar eşit olup $I = 60\,\text{A}$ şiddetindedir. Akımlarla dik üçgen oluşturan P noktasında toplam manyetik alanın şiddetini hesaplayın.
[C: 5 mT.]



Problem 20.9

20.9 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrultuda ve bir kenarı $a = 1\,\text{mm}$ olan karenin köşelerindeki doğrusal akımlar eşit olup $I = 10\,\text{A}$ şiddetindedir. Karenin merkezi olan P noktasında toplam manyetik alanın şiddetini ve yönünü hesaplayın. (*Yol gösterme:* Önce herbir manyetik alanın yönünü belirlerseniz, problem sanıldığı kadar uzun olmaz.)

[C: 8 mT sağa doğru.]

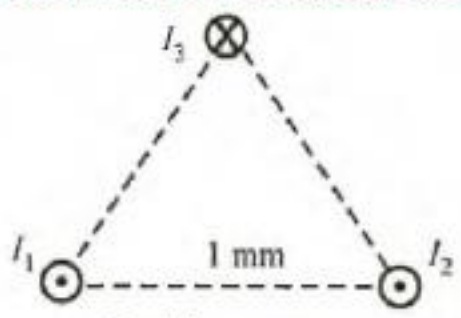


Problem 20.10

20.10 Şekilde dördü de kağıt düzleminde bulunan doğrusal akımlar eşit olup $I = 50\,\text{A}$ şiddetindedir. Kenar uzunluğu 20 cm olan karenin P merkezinde toplam manyetik alanın şiddetini ve yönünü hesaplayın.

[C: 2 mT kağıt içine doğru.]

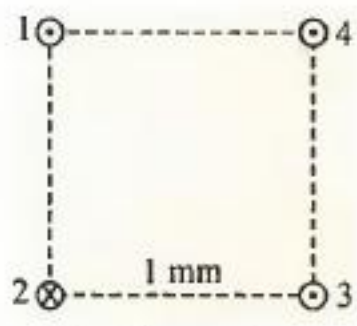
20.3 Paralel Akımlar Arasındaki Kuvvet



Problem 20.11

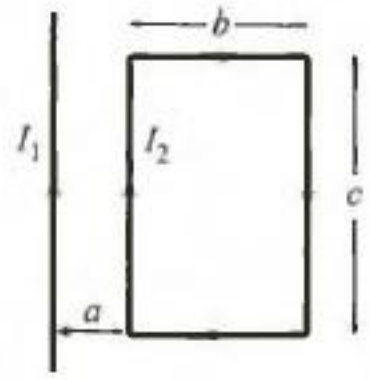
20.11 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrusal teller, bir kenarı 1 mm olan bir eşkenar üçgenin köşelerini oluşturmaktadırlar. $I_1 = I_2 = I_3 = 60\,\text{A}$ olduğuna göre, I_3 akımlı telin 1 m uzunluğuna etkiyen toplam kuvveti ve yönünü hesaplayın.

[C: 1.2 N yukarı yönde.]



Problem 20.12

20.12 Şekilde kağıt düzlemine dik doğrusal teller, bir kenarı 1 mm olan bir karenin köşelerini oluşturmaktadırlar. Her telden geçen akım şiddeti $I = 100\,\text{A}$ olduğuna göre, 4. telin 1 m uzunluğuna etkiyen toplam kuvveti ve yönünü hesaplayın. [C: 0.014 N köşegenden içeri yönde.]



Problem 20.13

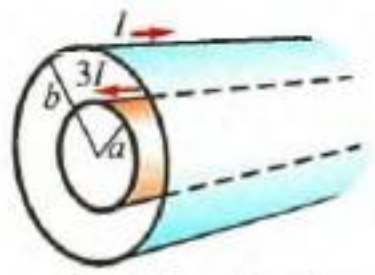
20.13 Şekilde, üzerinden $I_1 = 50\,\text{A}$ lik akım geçen doğrusal tel ile aynı düzlemde bulunan dikdörtgen çerçeveden $I_2 = 10\,\text{A}$ lik akım geçmektedir. Çerçevenin yakın kenarının uzaklığı $a = 1\,\text{cm}$, eni $b = 2\,\text{cm}$ ve boyu $c = 60\,\text{cm}$ dir. Çerçeveye etkiyen net kuvveti ve yönünü hesaplayın.

[C: 0.004 N sola doğru.]

20.4 Ampere Yasası

20.14 Yarıçapı R olan sonsuz silindirik kabuk (boru) yüzeyinden I akımı geçmektedir. Silindir içinde ve dışında, eksenden r uzaklıkta manyetik alanı hesaplayın.

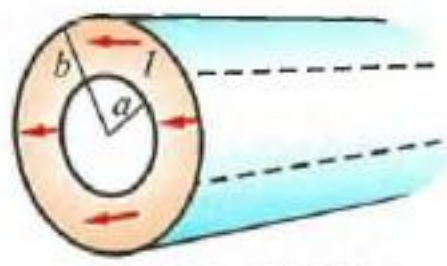
[C: İçerde $B = 0$, dışarda $B = 2k'I/r$.]



Problem 20.15

20.15 Şekildeki eş-eksenli iki sonsuz silindirik kabuktan, a yarıçaplı olanı üzerinden $3I$ akımı, b yarıçaplı olanı üzerinden zıt yönde I akımı geçmektedir. Her üç bölgede manyetik alanı hesaplayın.

[C: $r < a$ için $B = 0$, $a > r > b$ için $B = 6k'I/r$, $r > b$ için $B = 4k'I/r$.]



Problem 20.16

20.16 Şekilde iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan sonsuz silindirik bölge içinde, toplam I akımı düzgün olarak dağılmıştır. Her üç bölgede manyetik alanı hesaplayın.

[C: $r < a$ için 0, $a < r < b$ için $B = 2k'I\dfrac{r^2 - a^2}{(b^2 - a^2)r}$, $r > b$ için $B = 2k'I/r$.]

21

FARADAY YASASI – İNDÜKSİYON



Güneş enerjisiyle çalışan *Helios* uçağı Havai semalarında.
NASA'nın geliştirdiği bu uçağın kanatları üzerine yerleştirilmiş olan güneş pillerinden elde edilen elektrik akımı herbiri 1.5 kilowat (2 HP) gücünde olan 14 adet elektrik motorunu beslemektedir.
Elektrik motorları ve jeneratörlerin çalışmasını düzenleyen fizik yasaları hangileridir? Bu soruların cevabını Faraday yasasında bulacağız.

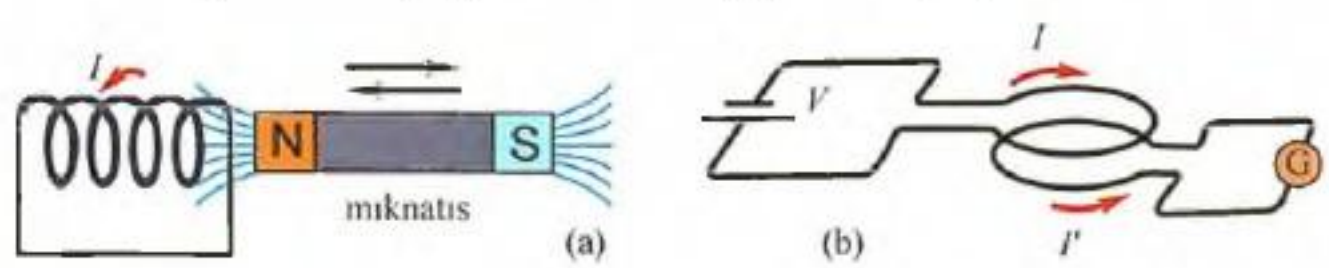
19. yüzyıl ortalarına doğru manyetik alanın elektrik akımlarından kaynaklandığı anlaşılmıştı. Doğal olarak pekçok kişinin aklına "acaba manyetik alan da elektriğe yol açabilir mi?" sorusu geliyordu. Nihayet 1831 yılında İngiliz bilim adamı Michael Faraday (1791–1867) manyetik indüksiyon etkisiyle elektrik akımı üretmeyi başardı. Günümüze kadar teknolojide bundan daha büyük bir devrim yapılmadı. Motorlar, jeneratörler, transformatörler, kablosuz enerji ve sinyal iletimi ... hepsi bu keşfin sonucunda geliştirildiler.

Manyetik indüksiyonun keşfi bilimde bir halkayı da tamamlamış oldu. James Clerk Maxwell tarafından **elektromanyetik teori** adı altında, elektrik ve manyetizmanın birbirini ürettiği ve etkilediği tek bir teori bulunmuş oldu.

21.1 FARADAY YASASI

İletken bir çerçevenin yakınında bir mıknatıs çubuğunu hareket ettirdiğimizde, çerçevede bir akım oluştuğu gözlenir. Mıknatıs ne kadar güçlü olursa olsun, hareket etmediği sürece çerçevede akım oluşmaz. Bu deney bize, çerçeveden geçen manyetik alan çizgilerinde bir *değişme olduğunda* akım geçtiğini gösterir.

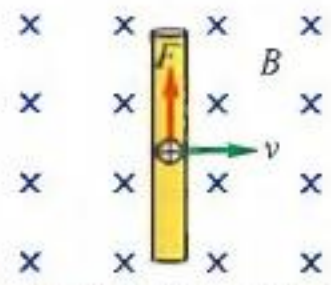
Manyetik alan çizgilerini değiştirmek için mıknatısı hareket ettirmek gerekmez. Şekil 21.1 de gösterilen iki devreden birinde bataryaya bağlı bir çerçeve, diğerinde sadece galvanometreye bağlı diğer bir çerçeve bulunmaktadır. Birinci devredeki anahtar kapatıldığında, ikinci devrede kısa süren bir akım gözlenir. Burada da manyetik alan çizgilerinde bir değişim sözkonusudur.



Şekil 21.1: Akım oluşturmanın iki farklı yolu: (a) Solenoid yakınında bir mıknatıs hareket ettiğinde akım oluşur. (b) Komşu iki devreden birinde akım değiştiğinde diğerinde akım oluşur.

Akım oluşması demek, çerçeve bir bataryaya bağlanmış gibi bir emk oluşuyor demektir. Bu etkiyi anlamak için, Şekil 21.2 de gösterildiği gibi, manyetik alana dik bir düzlemde iletken bir çubuğu sağa doğru $\vec{v}$ hızıyla hareket ettirdiğimizi düşünelim. Manyetik kuvvet ifadesini hatırlayalım:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$



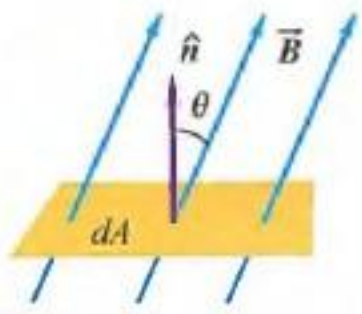
Şekil 21.2: Manyetik alanda hareket eden iletken çubuk.

İletken içindeki serbest bir $+q$ yüküne etkiyen $\vec{F}$ kuvveti, hem manyetik alana ve hem de hıza dik olacağından, iletkenin üst tarafına yönelik olur. Böylece $+q$ yükleri iletkenin üst ucunda toplanacak ve geride eksi yüklü bir uç bırakacaktır. Böylece, iletkenin iki ucu arasında bir potansiyel farkı oluşur.

Faraday Yasası

Akı kavramını elektrikte Gauss yasasını incelerken görmüştük. Burada da manyetik akı, bir A yüzeyini dik kesen manyetik alan çizgileri sayısı olarak şöyle tanımlanır:

$$\Phi = \int_{A\ \text{yüzeyi}} B\,dA\,\cos\theta \qquad \text{(Manyetik akı)} \qquad (21.1)$$



Şekil 21.3: Bir A yüzeyinden geçen manyetik akı.

Burada θ açısı manyetik alan vektörünün yüzey normali $\hat{n}$ ile yaptığı açıdır.

Faraday yasası manyetik akıdaki değişmenin bir emk oluşturduğunu söyler:

Faraday Yasası

İletken çerçeveyle çevrelenmiş bir yüzeyden geçen manyetik akının zamana göre değişimi, bu çerçevede bir indüksiyon elektromotor kuvveti oluşturur:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (21.2)$$

Bu ifadedeki eksi işaretinin anlamını daha sonra Lenz kuralıyla açıklayacağız.

Faraday yasası, manyetik akıdaki değişimi gözönüne alarak her türlü etkiyi kapsamaktadır:

- B manyetik alanı değişebilir.
- Yüzey alanı A değişebilir.
- Yüzeyle manyetik alan arasındaki θ açısı değişebilir.
- Ve yukardakilerin birkaçı birlikte değişebilirler.

Tüm bunlar manyetik akıyı değiştirmekten ibarettir ve aynı etkiyi yaparlar.

Lenz Kuralı

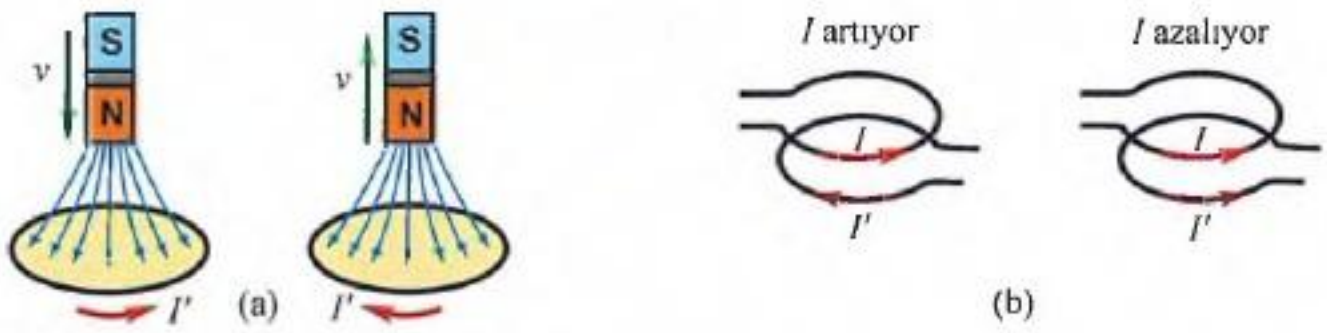
Faraday yasasındaki eksi (−) işareti, denklemde sembolik olarak konulmuştur. Bu işaret bize emk potansiyel farkının veya çerçeveden geçecek olan akımın hangi yönde olacağını bildirir. İndüksiyon emk veya akımın yönü **Lenz Kuralı** ile belirlenir:

Lenz Kuralı

İndüksiyon emk sının oluşturacağı akım, manyetik akıdaki değişime karşı koyacak yönde olur.

Lenz kuralını uygulayabilmek için, önce akım geçen dairesel bir çerçevenin merkezindeki manyetik alanı hatırlayalım. Sağ-el kuralına göre, dört parmak I akımı yönünde kıvrıldığında başparmak B manyetik alan yönünü veriyordu.

Şimdi, Şekil 21.4-a daki mıknatısı gözönüne alalım. Mıknatıs yaklaşırken, çerçeve yüzeyinden geçen manyetik akı artmaktadır. Buna karşı koyacak akım öyle bir yönde oluşmalıdır ki onun B' manyetik alanı ters yönde oluşsun ve böylece artan akıyı azaltabilsin. Sağ-el kuralına göre, bu I' akımı gösterilen yönde olmalıdır. Mıknatıs uzaklaşırken bunun tersi yönde oluşur.

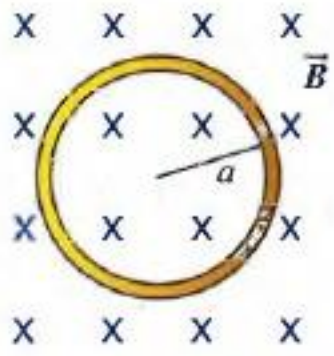


Şekil 21.4: (a) Mıknatıs yaklaşırken manyetik akı artıyor, o halde indüksiyon akımı ters yönde manyetik alan verecek yönde olmalıdır. Uzaklaşırken akım yönü değişir. (b) Üstteki devrede I akımı artarken alttaki devredeki I' akımı ters yönde, azalırken aynı yönde olur.

Yine, Şekil 21.4-b de birbirini etkileyen iki çerçeve gözönüne alalım. Soldaki (ab şeklinde bataryaya bağlı çerçevedeki akım artıyorsa, onun B manyetik alanı gösterilen yönde artacaktır. İkinci çerçevede buna karşı koyacak indüksiyon akımı zıt yönde bir B' manyetik alanı verebilmek için ters yönde bir I' akımı oluşturur. Sağdaki (b) şeklinde akım azaldığı için, bu azalmayı telafi etmek üzere, ikinci çerçevedeki manyetik alan aynı yönde olmalıdır. Böylece, aynı yönde indüksiyon akımı oluşur.

Faraday yasasını ve Lenz kuralının nasıl uygulanacağını örnekler üzerinde görelim.

Örnek 21.1



Şekilde direnci $R = 1\,\Omega$ olan iletken çember, kağıt düzlemi içine yönelik bir B manyetik alanı içinde bulunmaktadır.

(a) *Çemberin yarıçapı $a = 3$ m sabit değerinde iken, manyetik alan $B = 0.1\,t$ (tesla) şeklinde artmaya başlıyor. Çerçevede oluşan indüksiyon akımını ve yönünü tayin edin.*

(b) *Manyetik alan $B = 0.1$ değerinde sabit iken, çemberin yarıçapı $a = 3t$ (metre) şeklinde artmaya başlıyor. $t = 1$ s anındaki akımı ve yönünü bulun.*

Çözüm

Faraday yasasının (21.2) ifadesini yazarız:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Buradaki Φ manyetik akısı (21.1) formülüyle hesaplanır. B sabit ve yüzeye dik olduğundan,

$$\Phi = BA\cos 90^\circ = \pi a^2 B$$

Manyetik alan $B = 0.1t$ şeklinde zamanın fonksiyonu olarak yazılır ve türev alınır:

$$\mathcal{E} = \frac{d[\pi a^2(0.1t)]}{dt} = 0.1\pi a^2$$

Bu emk ile devrede oluşan akım Ohm yasasıyla bulunur:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0.1\pi a^2}{R}$$

$$I = 0.1 \times 3.14 \times 3^2/1 = 2.8\ \text{A}$$

Akımın yönü manyetik alandaki artışa karşı koyacak yönde olmalı, yani kendi B' manyetik alanı kağıt düzlemi dışına doğru olmalıdır. Sağ-el kuralına göre, çerçevedeki akım saat ibrelerinin tersi yönde dolanmalıdır.

(b) Bu kez manyetik akıdaki değişme, A kesitindeki artıştan kaynaklanır:

$$\Phi = BA = B(\pi a^2) = \pi B(3t)^2$$

İndüksiyon emk sı Faraday formülüyle hesaplanır:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{9\pi Bt^2}{t} = 18\pi Bt$$

Bu emk ile, $t = 1$ s anında devrede oluşan akım Ohm yasasıyla bulunur:

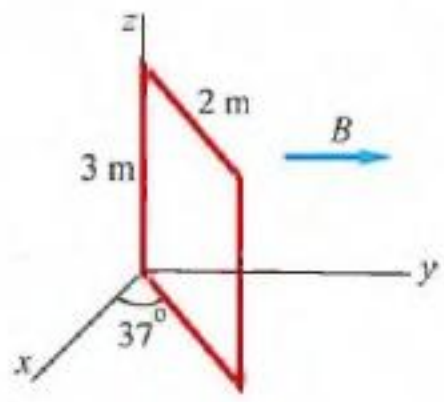
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18\pi Bt}{R}$$

$$I = 18 \times 3.14 \times 0.1 \times 1/1 = 5.7\ \text{A}$$

Yine Lenz kuralına göre akım, saat ibrelerinin tersi yönde olur.

Örnek 21.2

Şekilde boyutları verilen dikdörtgen çerçeve, $+y$ yönündeki $B = 1$ T lık düzgün manyetik alan içinde bulunmaktadır. Çerçeve düzlemi x-ekseniyle 37° açı yapmaktadır. Manyetik alan şiddeti 0.3 s süre içinde sıfıra iniyor. Çerçevede oluşan akımı ve yönünü hesaplayın. Çerçevenin direnci $R = 4\,\Omega$ dır.



Çözüm

Bir A yüzeyinden geçen manyetik akının ifadesi yazılır:

$$\Phi = BA\cos\theta$$

Burada θ, manyetik alanın yüzey normali ile yaptığı açıdır. Şekilden görüldüğü üzere, $\vec{B}$ nin çerçeve düzlemiyle yaptığı açı 53° ve dolayısıyla, yüzeye dik olan normalle yaptığı açı $\theta = 37^\circ$ olur. O halde, başlangıçtaki manyetik akı hesaplanır:

$$\Phi = 1 \times (2 \times 3) \times \cos 37^\circ = 0.48$$

Faraday yasası uygulanır:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{0.48}{0.3} = 1.6\ \text{volt}$$

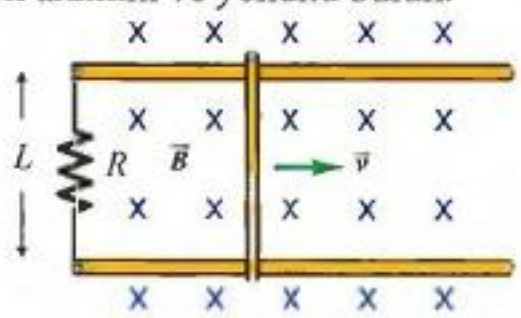
Bu emk nın devrede oluşturduğu akım Ohm yasasıyla bulunur:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1.6}{4} = 0.4\ \text{A}$$

Manyetik akı azaldığı için, Lenz kuralına göre, çerçevede oluşan manyetik alanın yönü, $\vec{B}$ deki azalmayı engelleyici yönde, yani onunla aynı yönde olmalıdır. O halde akım, öndeki kenarda aşağı yönde olur.

Örnek 21.3

Şekildeki dikdörtgen çerçevenin direnci $R = 2\,\Omega$ olup kağıt içine doğru olan $B = 0.2$ T lık manyetik alan içinde bulunmaktadır. Çerçevenin $L = 50$ cm uzunluktaki kenarı sabit $v = 4$ m/s hızıyla sağa doğru çekilmektedir. Çerçevede oluşan indüksiyon akımını ve yönünü bulun.



Çözüm

Bu problemde çerçeveden geçen manyetik akıdaki değişim, çerçeve yüzölçümünün değişmesinden kaynaklanır. Dikdörtgen çerçevenin L uzunluktaki kenarı sabit, diğer kenar uzunluğu $x = vt$ olarak değişmektedir. Manyetik akıyı yazalım:

$$\Phi = BA = BL(vt)$$

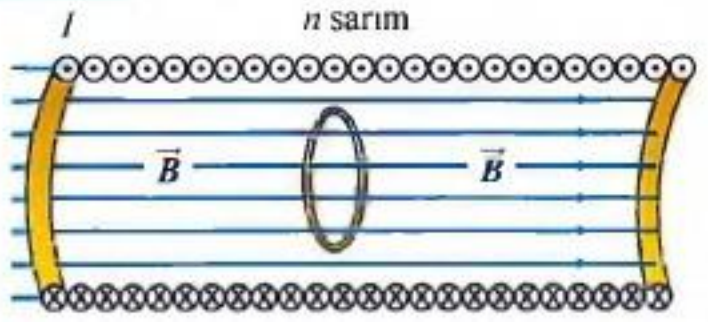
Bu ifadenin t zamanına göre türevi alınır ve bulunan emk değerinden Ohm yasasıyla akım hesaplanır:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R}\frac{d(BLvt)}{dt} = \frac{BLv}{R}$$

$$I = \frac{0.2 \times 0.5 \times 4}{2} = 0.2\ \text{A}$$

Çerçeveden geçen manyetik akı artmaktedır. O halde, oluşan indüksiyon akımının oluşturduğu manyetik alan bunu azaltıcı yönde, yani kağıt düzlemi dışına doğru olmalıdır. Bu yönde manyetik alan veren akım, saat ibreleri tersi yönünde dolanmalıdır.

Örnek 21.4



Şekildeki solenoidin birim uzunluktaki sarım sayısı n = 500 sarım/metre *olup, üzerinden geçen akım* $I = 5\,e^{-t}$ (ampere) *olarak zamanla değişmektedir. Solenoid hacmi içine konulan* a = 50 cm *yarıçaplı iletken bir çemberin direnci* $R = 1\,\Omega$ *dır. Çemberden* $t = 0$ s *anında geçen akımı ve yönünü tayin edin.*

Çözüm

Bölüm 20 de incelediğimiz solenoid hacmi içinde manyetik alan düzgün olarak dağılmış ve (20.12) ifadesiyle verilmişti:

$$B = \mu_0 n I$$

Yarıçapı a olan çember içinden geçen manyetik akı yazılır:

$$\Phi = BA = \mu_0 n I (\pi a^2) = \mu_0 n \pi a^2 I$$

Faraday yasasına göre, akıdaki değişme indüksiyon emk sı olarak bulunur:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

I akımı üstel fonksiyon olarak azalmaktadır. Türevi yine kendisi olur:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5\,e^{-t}\right) = -5\,e^{-t}$$

Bu türevin $t = 0$ s anındaki değeri $I = 5$ A olur (eksi işaretleri gözönüne almıyoruz.) Bu değer yerine konulur ve indüksiyon emk sının çemberde oluşturduğu I' akımı hesaplanır:

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 I(0)}{R}$$

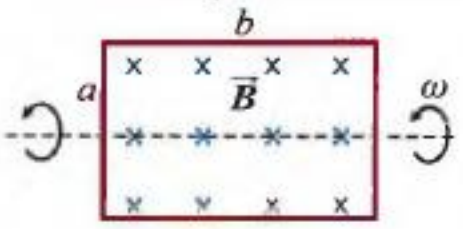
$$I' = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times \pi \times 0.5^2 \times 5}{1}$$

$$I' = 0.0025\ \text{A} = 2.5\ \text{mA}$$

Bu I' akımının yönü, solenoid içindeki manyetik alandaki azalmayı telafi edecek yönde, yani I akımıyla aynı yönde olmalıdır.

Örnek 21.5

Şekilde kağıt düzlemi içine doğru, düzgün $B = 0.1$ T *lık manyetik alan içinde, boyutları* $a = 1$ m *ve* $b = 2$ m *olan dikdörtgen çerçeve, eksen etrafında* $\omega = 3$ rad/s *açısal hızıyla dönmektedir. Direnci* $R = 1\,\Omega$ *olan çerçevede oluşan akımı* t *zamanının bir fonksiyonu olarak hesaplayın.*



Çözüm

Çerçeveden geçen manyetik akı formülü kullanılır:

$$\Phi = BA\cos\theta$$

Burada B ve A sabit, fakat θ açısı, ω açısal hızına bağlı olarak, $\theta = \omega t$ şeklinde değişmektedir. Faraday yasası ile indüksiyon emk ifadesi bulunur:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = BA\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = -\omega BA\sin\omega t$$

Eksi işareti gözönüne almadan, Ohm yasası ile akım bulunur:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega BA}{R}\sin\omega t$$

Sayısal değerler yerine konulur:

$$I = \frac{3 \times 0.1 \times (1 \times 2)}{1}\sin 3t$$

$$I = 0.6\sin 3t$$

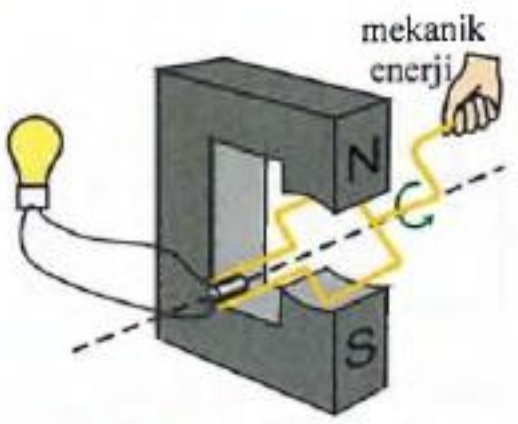
21.2 JENERATÖR VE TRANSFORMATÖRLER

Jeneratör

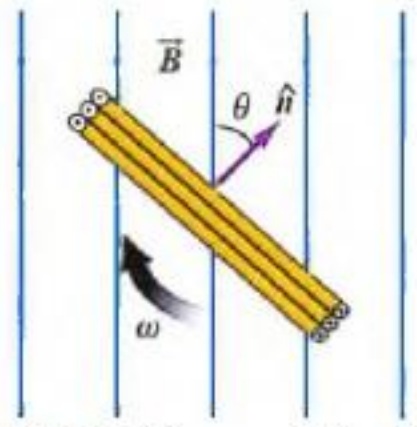
Hareket enerjisini elektrik enerjisine dönüştüren aletlere jeneratör (üreteç, dinamo) denir. Hidroelektrik santrallarda yüksekten düşen suyun enerjisi, termoelektrik ve nükleer santrallarda buhar gücü ile dönen turbinlerde elektrik enerjisine dönüştürülür.

Bölüm 16 da elektrik motorunu incelerken, manyetik alanda akım geçen bir çerçeveye etkiyen dönme momentinin (torkun) nasıl oluştuğunu görmüştük. Jeneratörler motorun tersi görevi yaparlar, yani manyetik alan içinde dönen bir çerçeve içindeki manyetik akı değiştikçe elektrik üretilir.

Şekil 21.5 de basitleştirilmiş bir alternatif akım jeneratörü şeması görülmektedir. Kesiti A olan dikdörtgen çerçeve bir mıknatısın kutupları arasında döndürülmektedir. Mıknatısın B manyetik alanı gösterilen yönde sabittir. Çerçeveden



Şekil 21.5: Basit bir jeneratör şeması.



Şekil 21.6: Çerçeve düzleminin manyetik alanla yaptığı θ açısı.

geçen manyetik akı değişimi sadece dönme hareketine bağlı olarak θ açısının değişmesinden kaynaklanmaktadır. N tane sarım için manyetik akıyı yazalım:

$$\Phi = NBA\cos\theta$$

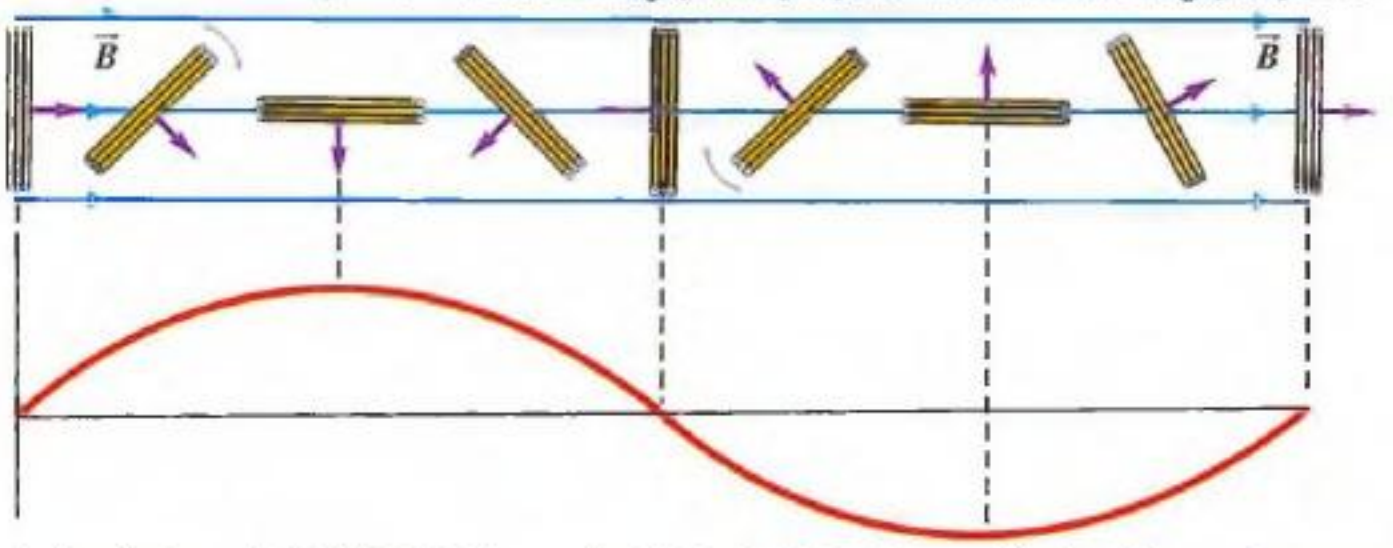
Çerçeve sabit ω açısal hızıyla dönüyorsa, $\theta = \omega t$ olarak zaman içinde artacaktır. Böylece, manyetik akı sinüsel olarak değişir:

$$\Phi = NBA\cos\omega t$$

Faraday yasası uygulanırsa, Φ akısının türevi indüksiyon emk sını verir:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega\sin\omega t \qquad (21.3)$$

Bu akımın zaman içindeki sinüsel değişimi, çerçeve düzleminin değişik yönle-



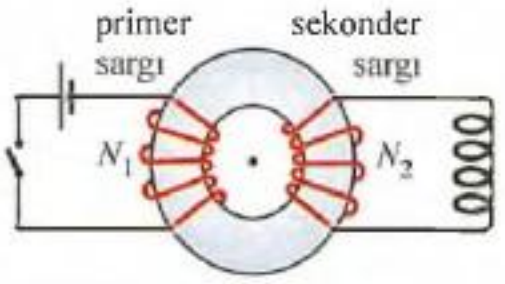
Şekil 21.7: Jeneratörde çerçeve yönüne bağlı olarak, sinüsel akımın aldığı değerler.

rini de göstererek Şekil 21.7 de verilmiştir. Bu bir alternatif akımdır, yani çerçevenin 360° lik bir tam dönüşü sırasında, ilk yarıda pozitif, ikinci yarıda negatif olmak üzere, $\pm NBA\omega$ değerleri arasında gidip gelir.

Alternatif akım, doğrudan üretildiği haliyle devrelere verilebileceği için, enerji iletiminde ve sanayide en kullanışlı akım türüdür. Eğer, bu düzenekten doğru akım elde edilmek istenirse, motorlarda olduğu gibi komütatörler kullanılır.

Transformatör

Her türlü santralda jeneratörlerle üretilen elektriğin kullanılacağı yere kadar iletilmesi gerekir. İletim sırasında ısı kayıplarını en aza indirmek gerekir. İletim hatlarının direnci R ise, ısı kaybı RI^2 şeklinde akımın karesiyle orantılı olacaktır. O halde, olabilecek en düşük akımı kullanarak aynı gücü iletmek gerekir. Bu durumda, $P = VI$ güç ifadesine göre, voltajı artırmak gerekir. Nitekim santrallardan çıkan yüksek gerilim hatlarına 100 000–500 000 volt gibi çok yüksek değerlerde voltaj verilir. Daha sonra, şehirlerde bu voltaj daha da düşürülerek, sonunda evlerde ve sanayide kullanılan 220 volt değerine getirilir. Alternatif akımların diğer bir avantajı da voltajı düşürmesi ve yükseltmesi kolay olmasındadır. Bu işi yapan düzeneğe **transformatör** (halk arasında, trafo) adı verilir.



Şekil 21.8: Bir transformatörde primer ve sekonder sargılar.

Şekil 21.8 de bir transformatör yapısı görülmektedir. Burada ferromanyetik malzemeden yapılmış bir halka (çekirdek) üzerinde iki devre birden yer almaktadır. **Primer** denilen birinci devre N_1 sayıda sarımdan oluşmakta, **sekonder** denilen ikinci devre ise N_2 sarımdan oluşmaktadır.

Birinci devreden geçen akım I_1 olsun. Bu akımın oluşturacağı manyetik alanın çok büyük bir yüzdesi ferromanyetik çekirdek içinde yoğunlaşacak ve neredeyse tamamı diğer taraftaki sekonder devrenin içinden geçecektir. Buna göre, herbir sarım içinden geçen akı heryerde aynı olur:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$$

Şimdi, Faraday yasasına göre, değişen akımın oluşturduğu toplam emk, her iki devre için yazılırsa,

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \qquad \mathcal{E}_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Her t anında $\Phi_1 = \Phi_2$ olduğuna göre, bunların türevleri de her zaman eşit olur. Buradan, her iki devredeki emk arasında şöyle bir bağıntı elde edilir:

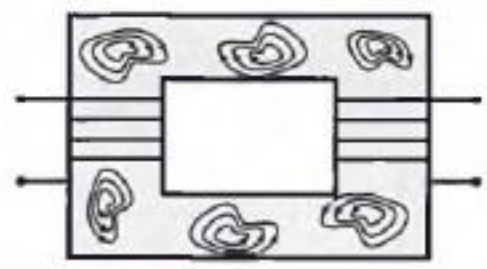
$$\mathcal{E}_2 = \frac{N_2}{N_1}\,\mathcal{E}_1 \tag{21.4}$$



Şekil 21.9: Manyetik akı kayıplarını önlemek için sıkı sarılmış bir transformatör.

Bu formül sargı sayısına bağlı olarak sekonder devrede emk nın nasıl değiştirilebileceğini gösterir. Örneğin, voltajı iki katına çıkarmak istiyorsak $N_2 = 2N_1$, yani ikinci devredeki sarım sayısı iki kat olmalıdır. Keza, voltajı düşürmek için ikinci devredeki sarım sayısı daha az alınır.

Gerçek bir transformatörde enerji kayıpları kaçınılmazdır. Bu yüzden transformatörler çalışırken ısınırlar ve soğutulmaları gerekir. Bu kayıplar birkaç sebepten kaynaklanır. Birincisi, manyetik akı tümüyle ferromanyetik çekirdek içinde yer almazsa sekonder devredeki akı daha az olur. Bunu önlemek için transformatörler çok sıkı, boşluk bırakmadan sarılırlar.



Şekil 21.10: Transformatörün demir çekirdeğinde oluşan girdap akımları.

Enerji kaybının diğer bir sebebi **girdap akımları**dır. Transformatör çalışırken, ferromanyetik demir çekirdek içinde rasgele yönlerde dolaşan akım girdapları oluşur. Bu hareket eden yükler de enerjinin bir kısmını alıp götürürler. Girdap akımlarının etkisini azaltmak ve daha fazla büyümesini engellemek amacıyla, demir çekirdek çok sayıda demir yaprağından deste yapılarak hazırlanır.

Örnek 21.6

Bir jeneratörün dönen bobini, herbirinin kesiti $20\,\text{cm}^2$ *olan* N *sarımdan yapılmış olup,* $0.5\,\text{T}$ *lık manyetik alan içinde* $6000\,\text{dev/dk}$ *açısal hızıyla dönebilmektedirler. Jeneratörün ürettiği maksimum voltajın* $12\,\text{V}$ *olabilmesi için en az kaç sarım gereklidir?*

Çözüm

Jeneratörün ürettiği emk yı bulmak için (21.3) formülünü kullanırız:

$$\mathcal{E} = NBA\omega \sin \omega t$$

Bu sinüsel voltajın maksimum değerinden N sarım sayısı hesaplanır:

$$N = \frac{\mathcal{E}}{BA\omega} = \frac{12}{0.5 \times 0.0020 \times (6000 \times 2\pi/60)}$$

$$N = 19.1$$

Bunu tamsayıya çevirirsek, gerekli sarım sayısı $N = 20$ olur.

Örnek 21.7

Bir transformatörün primer devresinde 200 sarım, sekonder devresinde 50 sarım bulunmaktadır. Transformatöre giren 240 volt ve 20 amperlik akım çıkışta ne olur?

Çözüm

Transformatörde giriş ve çıkış voltajları arasındaki ilişki (21.4) formülüyle bulunur:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{N_2}{N_1}\,\mathcal{E}_1$$

Bu formülden çıkış voltajı hesaplanır:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{50}{200} \times 240 = 60\,\text{V}$$

İdeal bir transformatörde güç kaybı olmadığını düşünürsek, giriş ve çıkıştaki güçler eşittir:

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2$$

Buradan çıkış akımı $I_2 = 80\,\text{A}$ bulunur.

Örnek 21.8

İletim hatlarında güç kaybı. *Bir barajda üretilen* 1 MW (megavat) *güç, yakındaki bir şehre iki farklı şekilde iletiliyor.*

(a) *Bu güç* 5000 V = 5 kV *luk voltajla iletildiğinde, hattın* 1 Ω *dirençli kısmında ısıya dönüşen güç ne kadar olur?*

(b) *Aynı güç, önce bir transformatörle voltajı* 500 000 V = 500 kV *değerine çıkarılıp iletildiğinde, hattın* 1 Ω *dirençli kısmında ısıya dönüşen güç ne kadar olur?*

Çözüm

(a) En genel güç formülü Kısım 18.4 de bulunmuştu:

$$P = V I$$

Ayrıca, R direnci üzerinde ısıya dönüşen güç formülü,

$$P' = R I^2$$

oluyordu. Buna göre, Üretilen P gücü V_1 voltajı altında gönderildiğinde, oluşan akım bulunur:

$$I_1 = \frac{P}{V_1} = \frac{10^6}{5000} = 200\,\text{A}$$

Bu akımla R direnci üzerinde ısıya dönüşen güç hesaplanır:

$$P'_1 = R I_1^2 = 1 \times 200^2 = 40\,000\,\text{W} = 40\,\text{kW}$$

(b) Aynı hesap $V_2 = 5\,\text{MV}$ voltajla tekrar edilir:

$$I_2 = \frac{P}{V_2} = \frac{10^6}{5 \times 10^5} = 2\,\text{A}$$

Bu akımla R direnci üzerinde ısıya dönüşen güç hesaplanır:

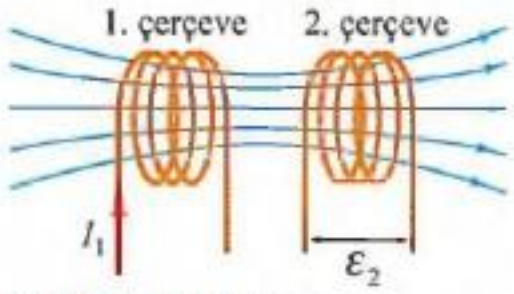
$$P'_2 = R I_2^2 = 1 \times 2^2 = 4\,\text{W}$$

Görüldüğü gibi, yüksek voltajla iletimde güç kaybı daha az olur.

21.3 İNDÜKTANS – MANYETİK ENERJİ

Birbirlerine çok yakın iki akım çerçevesini birlikte gözönüne alalım. Birinci çerçevedeki I_1 akımının oluşturduğu manyetik alanın ikinci çerçevedeki Φ_2 akısını gözönüne alalım. I_1 akımı değiştiğinde Φ_2 akısı da değişecek ve, Faraday yasasına göre ikinci çerçevede $\mathcal{E}_2$ kadar bir emk oluşacaktır:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$$



Şekil 21.11: İki çerçeve arasındaki manyetik akı.

Eğer çerçevelerin geometrik şekilleri ve konumları sabitse, oluşan manyetik akı sadece I_1 akımıyla orantılı olacaktır:

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \qquad \text{(Karşılıklı indüktans)} \qquad (21.5)$$

Bu özelliği, daha önce hesapladığımız çember ve solenoidin manyetik alan ifadelerinden görebiliriz. Bu durumda, ikinci devrede oluşan emk değerini Φ_1 yerine I_1 cinsinden şöyle yazabiliriz:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Burada tüm sabitleri içine topladığımız M_{21} katsayısına karşılıklı indüksiyon katsayısı veya **karşılıklı indüktans** denir. Bu katsayı verilen akım çerçevelerinin geometrik yapısına, sarım sayısına ve ortamın μ geçirgenliğine bağlı olur. (*Önemli not:* Eğer çerçevede N sarım varsa, tüm bu formüllerde Φ yerine $N\Phi$ alınmalıdır.)

Aynı düşünce yöntemini 2. çerçevenin birinciye olan etkisinde yürütebiliriz. İkinci çerçeveden geçen I_2 akımındaki değişmenin birinci çerçevede oluşturacağı $\mathcal{E}_1$ emk değeri,

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

olur. M_{21} ve M_{12} katsayılarının birbirinden farklı olacağı düşünülebilirdi, fakat çerçeveler özdeş olmasa dahi, bu iki katsayının birbirine eşit olduğu ispat

edilebilir. Bu sonucu ispatsız kabul edip, her iki çerçeve için tek bir karşılıklı indüktans tanımlanır:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

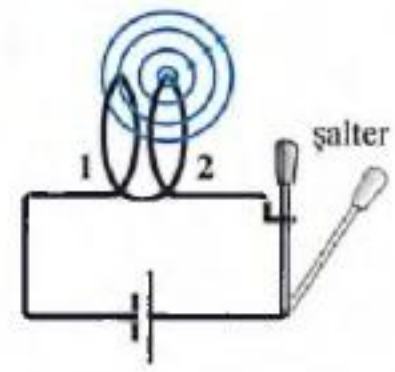
Böylece indüksiyon akısı Φ yerine, doğrudan ölçülebilen akım cinsinden, indüksiyon emk değerleri ifade edilmiş olur:

$$\mathcal{E} = M \frac{dI_1}{dt} \tag{21.6}$$

Özindüktans

Bir binanın elektriğini kesen ana şalteri indirip akımı sıfırladığımızda, iyice dikkat edilirse, şalterin iki ucu arasında bir kıvılcım atlar. 220 voltta kıvılcım atlaması mümkün olmadığı halde, kapatılan bir devrede nasıl 1000 volt kadar bir emk oluşabiliyor? Bunun cevabı yine Faraday yasasında gizlidir. Devre kapanırken, o kısa süre içinde, sanki manyetik akıdaki azalmaya karşı koyan ters yönde bir emk *kendi üzerinde* oluşmaktadır. Bunu özindüksiyon kavramıyla açıklarız.

Şekil 21.12 deki basit devreyi gözönüne alalım. Devrenin bir bölgesinde 2 sarımlı bir çerçeve bulunsun. Şalter kapalıyken geçen akım ve onun oluşturduğu manyetik alan sabittir. Dikkat edilirse 2. sarımın manyetik akısı 1. sarımdan da geçmektedir. Şimdi, şalteri açıp akımı kestiğimizi düşünelim. İkinci sarımın manyetik alanı azalacak ve dolayısıyla, 1. sarımdan geçen manyetik akısı da azalacaktır. Faraday yasasına göre, 1. sarımda bu azalmaya karşı koyacak bir zıt emk oluşur. Her iki sarım da aynı devrenin parçası olduğu için, bu indüksiyon etkisine devrenin öz indüksiyonu olarak bakabiliriz.



Şekil 21.12: Özindüksiyonu anlamak için iki sarımlı devre.

Her akım çerçevesi kendi üzerindeki akımdaki değişmeye karşı koyar. Bunu ters yönde bir indüksiyon emk sı oluşturarak yapar. Bu emk değeri, çerçeveden geçen I akımındaki değişimle orantılı olur. Yine, tüm geometrik faktörler bir araya toplanır ve çerçeveden geçen manyetik akı I akımıyla orantılı yazılırsa,

$$\Phi = L\,I \qquad \text{(Özindüksiyon katsayısı)} \tag{21.7}$$

olur. (Yine, çerçevede N sarım varsa, Φ yerine $N\Phi$ alınmalıdır.)

Böylece, devrede oluşan zıt emk, sadece akımdaki değişimle orantılı olur:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} \tag{21.8}$$

L sabitine özindüksiyon katsayısı veya **özindüktans** denir.

Alternatif akım devrelerinde özindüktansı belli değerde olan sarımlar **bobin** (indüktör) adıyla bir devre elemanı olarak kullanılır ve —ᔓᔓᔓᔓ— sembolüyle gösterilir. Üzerinden I akımı geçen bobinin uçları arasındaki potansiyel farkı,

$$V_{ab} = L \frac{dI}{dt} \tag{21.9}$$

olur. Eğer akım artıyorsa potansiyel farkı akıma zıt yönde, azalıyorsa akımla aynı yönde olur.

Manyetik Enerji

Bölüm 18 de elektrik devrelerinde en genel güç ifadesi şöyle bulunmuştu (18.11 denklemi):

$$P = V I$$

Üzerinden I akımı geçen bir bobinin uçları arasındaki potansiyel farkı için yukarda bulduğumuz ifade kullanılırsa,

$$P = L I \frac{dI}{dt}$$

dt zaman aralığında bu bobin üzerinde yapılan iş, bobinin potansiyel enerjisindeki artış olarak depolanır:

$$dU = dW = P\,dt = L I \frac{dI}{dt} dt$$
$$dU = L I\,dI$$

Akım başlangıçta sıfır değerinden son I değerine ulaştığında, bobinde depolanan manyetik enerji, bu ifadenin integrali olur:

$$U = L \int_0^I I\,dI = \tfrac{1}{2} L I^2 \qquad \text{(Bobinin manyetik enerjisi)} \qquad (21.10)$$

Bu manyetik enerji bobinde depolanır ve daha sonra devreye geri verilebilir.

Örnek 21.9

(a) *Bir solenoidin özindüksiyon katsayısı ifadesini çıkarın.*
(b) *uzunluğu* 20 cm *ve kesiti* 10 cm^2 *olan ve* 500 *sarımdan oluşan bir solenidin özindüksiyon katsayısını hesaplayın.*
(c) *Bu solenoidin üzerinden* 40 A *akım geçerken depolamış olduğu enerjiyi hesaplayın.*

Çözüm

(a) Solenoidin manyetik alan ifadesi Bölüm 20 de bulunmuştu:

$$B = \mu_0 n I$$

Burada n birim uzunluktaki sarım sayısı olup ℓ uzunlukta ve N sarımlı bir solenoid için $n = N/\ell$ olur.

Solenoid kesiti içinde manyetik alan sabit olduğu için, N sarım için manyetik akı hesaplanır:

$$\Phi = NBA = N(\mu_0 NI/\ell)A = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} I$$

Özindüksiyon katsayısı (21.7) formülüyle tanımlanmıştı:

$$\Phi = L I$$

Son iki ifade karşılaştırıldığında, özindüksiyon katsayısı ifadesi bulunur:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

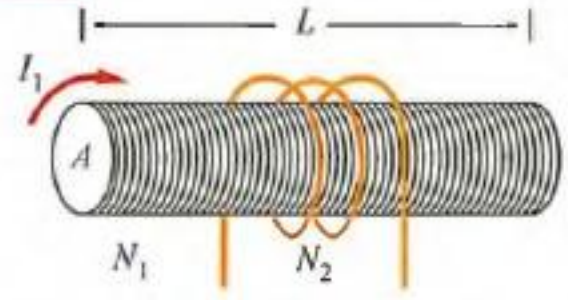
(b) Bulunan L ifadesinde sayısal veriler yerine konur:

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500^2 \times 0.0010}{0.20}$$
$$L = 0.0016\,\text{H} = 1.6\,\text{mH}$$

(c) Bir bobinde depolanan enerji (21.10) formülüyle verilmiştir:

$$U = \tfrac{1}{2} L I^2 = \tfrac{1}{2} \times 0.0016 \times 40^2 = 1.3\,\text{J}$$

Örnek 21.10



Uzunluğu ℓ, *kesiti* A *ve sarım sayısı* N_1 *olan bir solenoidin çevresine iletken bir tel* N_2 *defa sarılmıştır.*
(a) *Solenoid ve çerçevenin karşılıklı indüksiyon katsayısı ifadesini çıkarın.*
(b) $N_1 = 500$, $N_2 = 20$, $\ell = 10\,\text{cm}$, $A = 40\,\text{cm}^2$ *için* M *katsayısını hesaplayın.*

Çözüm

(a) Üzerinden I_1 akımı geçen solenoidin manyetik alanı yazılır:

$$B = \mu_0 n I_1 = \mu_0 (N_1/\ell) I_1$$

Bu manyetik alanın N_2 sarımlı çerçeveden geçen akısı,

$$\Phi_2 = N_2 B A = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} I_1$$

olur. Karşılıklı indüksiyon katsayısı (21.5) formülüyle tanımlanmıştı:

$$\Phi_2 = M I_1$$

Son iki formül karşılaştırılıp M katsayısı bulunur:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell}$$

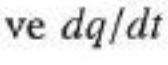
(b) Verilen sayısal değerlerle M hesaplanır:

$$M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 20 \times 0.0040}{0.10}$$

$$M = 0.0005\,\text{H} = 0.5\,\text{mH}$$

21.4 RLC DEVRELERİ

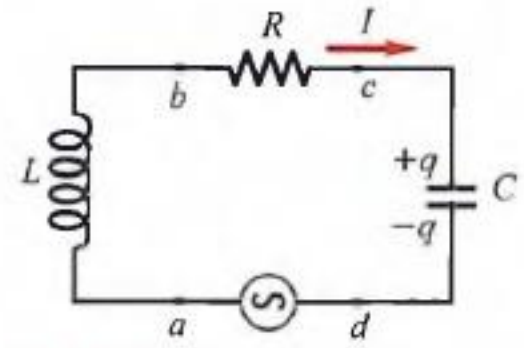
Buraya kadar gördüğümüz devre elemanlarını hatırlayalım:

Direnç:	R		$V_{ab} = R I$
Kondansatör:	C		$V_{ab} = \frac{q}{C}$
Bobin:	L		$V_{ab} = L\frac{dI}{dt}$

Bir doğru akım devresinde L ve C elemanları görev almaz, çünkü kondansatör üzerinden akım geçmez, bobin ise sabit akıma hiç tepki vermez. Fakat, alternatif akım devrelerinde bu elemanların herbiri etkin olur ve üzerlerinden geçen akımla beraber orada bir potansiyel farkı oluştururlar.

Alternatif akım devreleri konusu çok geniş olup, bu derste hakkıyla işlemek mümkün değildir. Burada sadece öğrendiğimiz bilgileri kullanarak bazı sonuçları kısaca özetleyeceğiz.

Şekil 21.13 de bir emk kaynağına seri olarak bağlanmış L, R, C devre elemanları görülmektedir. Bu devreden geçen akımı bulmak istersek, üretecin artı ucundan giderek, herbir eleman üzerindeki potansiyel farklarını toplarız:



Şekil 21.13: Bir RLC devresi.

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt} + R I + \frac{q}{C}$$

Denklemde hem bilinmeyen I akımı hem de q yükü bulunduğu için, bu şekliyle kullanamayız. Denklemin türevi alınır ve $dq/dt = I$ akımı olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{I}$$

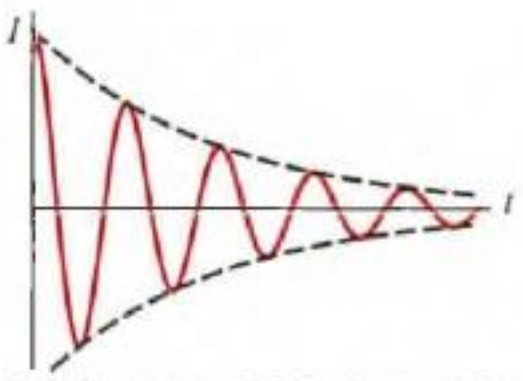
Terimleri yeniden düzenleyelim:

$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \qquad (21.11)$$

Bu ifade, bilinmeyen $I(t)$ akımını veren bir diferansiyel denklemdir. Sağ taraftaki emk fonksiyonu $\mathcal{E}(t)$ verilmişse, bu denklem çözülerek akım bulunur.

Bu denklemi çözmeden önce, çok önemli bir benzerliğe dikkat çekelim: Mekanik konusunda sönümlü ve zorlamalı salınım hareketini incelerken, kütlenin $x(t)$ konumunu veren denklemi hatırlayalım (9.30 denklemi):

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k x = F(t)$$



Şekil 21.14: *RLC* devresinde sönümlü akım.

İki denklem karşılaştırılırsa, mekanikteki m kütlesinin yerini L bobini, b sürtünmesini R direnci ve k yayının yerini $1/C$ kondansatörü almaktadır. Mekanikte bulduğumuz çözümleri de hatırlayalım: Eğer, dış kuvvet yoksa ($F = 0$), sistem sönümlü bir salınım hareketi yapıyordu. Keza, dış kuvvetin ω frekansı değiştirildiğinde **rezonans** olayı gözlenebiliyordu.

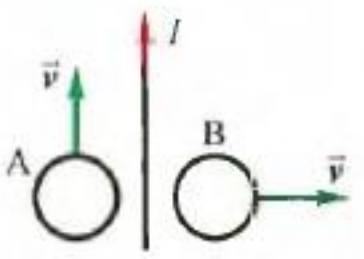
RLC devresinde de, uygulanan $\mathcal{E}(t)$ potansiyel farkına bağlı olarak, sönümlü salınım hareketi (Şekil 21.14) ve rezonans çözümleri bulunur. Bu konu daha ayrıntılı olarak devre analizi derslerinde incelenmektedir.

Test

1. Faraday yasasına göre, bir çerçevede oluşan indüksiyon emk sı,
   (a) Çerçeveden geçen manyetik alanla orantılıdır.
   (b) Çerçeveden geçen manyetik akı ile orantılıdır.
   (c) Çerçeveden geçen manyetik akıdaki değişimle orantılıdır.

2. Lenz kuralına göre, indüksiyon emk sının oluşturduğu akımın yönü,
   (a) Kendisini doğuran akıma zıt yöndedir.
   (b) Kendisini doğuran akımdaki değişime karşı koyacak yöndedir.
   (c) Kendisini doğuran akımla aynı yöndedir.

3. Şekildeki doğrusal telden sabit I akımı geçmektedir. İki iletken çemberden hangisinde indüksiyon emk sı oluşur?



   (a) A (b) B (c) A ve B

4. Bir çerçevede indüksiyon emk sı hangi durumlarda oluşabilir?
   I. Çerçeveden geçen manyetik alan değişiyorsa.
   II. Çerçevenin yüzölçümü değişiyorsa.
   III. Manyetik alan yön değiştiriyorsa.
   IV. Hepsi.
   (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) IV

5. Bir manyetik alanda dönen çerçevede oluşan indüksiyon emk sının maksimum değeri hangilerine bağlıdır?
   I. Manyetik alan şiddetine,
   II. Çerçevenin yüzölçümüne,
   III. Açısal hıza,
   IV. Hepsine.
   (a) I ve II (b) II ve III (c) I ve III (d) IV

6. Bir çerçeveden geçen manyetik akı $\Phi = t^3 + 2t^2$ $(\mathrm{T \cdot m^2})$ şeklinde değişiyor. $t = 1$ s anında oluşan emk kaç volt olur?
   (a) 0 (b) 3 (c) 5 (d) 7

7. Bir jeneratörün bobini daha hızlı dönerse, üretilen emk ne olur?
   (a) Artar (b) Azalır (c) Aynı kalır

8. Bir çerçevede ne zaman indüksiyon emk sı oluşur?
   (a) Sabit akım geçtiğinde.
   (b) Akım maksimum olduğunda.
   (c) Akım zamanla değiştiğinde.

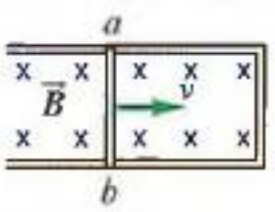
9. Bir solenoidin özindüksiyon katsayısı için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Sarım sayısı ile doğru orantılı,
   II. Kesit yüzölçümü ile doğru orantılı,
   III. Sarım sayısının karesiyle doğru orantılı,
   IV. Uzunluğuyla ters orantılı.
   (a) I ve II (b) II, III ve IV (c) I ve IV

10. Şekildeki doğrusal teldeki akım azaldığında, çember iletkendeki indüksiyon akımı hangi yönde olur?



   (a) Saat ibreleri yönünde
   (b) Saat ibreleri tersi yönünde
   (c) Akım oluşmaz

11. Şekildeki devrenin *ab* kolu sağa doğru giderken oluşan indüksiyon akımı *ab* kolu üzerinde hangi yönde olur?



   (a) Yukarı (b) Aşağı (c) Akım sıfır

12. Bir transformatörde sarım sayıları için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
I. $N_2 > N_1$ ise, sekonder emk daha büyük olur.
II. $N_2 > N_1$ ise, primer emk daha büyük olur.
III. $N_2 > N_1$ ise, sekonder akım daha büyük olur.
IV. $N_2 > N_1$ ise, primer akım daha büyük olur.
(a) I ve III (b) II ve IV (c) I ve IV (d) II ve III

13. Bir transformatörde enerji kayıpları aşağıdakilerin hangilerinden kaynaklanır?
I. Telin direnci.
II. Manyetik akı kaybı.
III. Girdap akımları.
IV. Hepsi.
(a) I ve III (b) II ve III (c) I ve II (d) IV

14. Bir bobinde depolanan manyetik enerji için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
I. Geçen akımla doğru orantılı,
II. Geçen akımın karesiyle doğru orantılı,
III. Özindüksiyon katsayısıyla doğru orantılı,
IV. Hepsi.
(a) I ve III (b) II ve III (c) I ve II (d) IV

15. Bir çerçeveden geçen manyetik akı $6\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2$ değerindeyken, 2 saniye içinde sıfır oluyor. Oluşan indüksiyon emk sı kaç volt olur?
(a) 2 (b) 3 (c) 8 (d) 12

16. Bir solenoidin sarım sayısı iki kat artırıldığında, özindüksiyon katsayısı kaç kat artar?
(a) 2 (b) 4 (c) 1/4 (d) 1/2

17. Bir bobinin özindüksiyon katsayısı 2 kat, geçen akım 3 kat artırılırsa, manyetik enerji kaç kat artar?
(a) 6 (b) 16 (c) 18 (d) 36

18. Bir transformatörün primer sargı sayısı 2 kat, sekonder sargı sayısı 4 kat artırılıyor. Sekonder voltaj kaç kat artar?
(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 1/2

19. Özindüksiyon katsayısı $L = 0.5\,\mathrm{H}$ olan bir bobinden 10 A akım geçtiğinde, depoladığı enerji ne kadar olur?
(a) 2 J (b) 10 J (c) 25 J (d) 50 J

20. Karşılıklı indüksiyon katsayısının ifadesi hangisidir?
(a) $\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell}$ (b) $\dfrac{\mu_0 N_1 A}{N_2 \ell}$ (c) $\dfrac{\mu_0 A}{N_1 N_2 \ell}$

Problemler

21.1 Faraday yasası

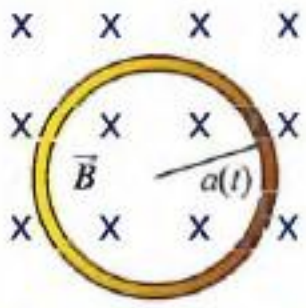
21.1 Bir çerçeveden geçen manyetik akı,

$$\Phi = t^3 + 2t \ (\text{tesla}\cdot\text{m}^2)$$

olarak değişiyor. $t = 1\,\mathrm{s}$ anında çerçevede oluşan indüksiyon emk sını hesaplayın. [C: 5 V.]

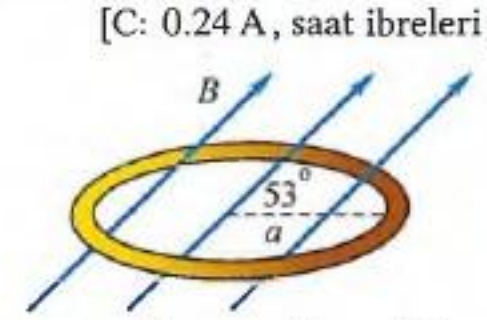
21.2 Kesiti $50\,\mathrm{cm}^2$ olan 200 sarımlı bir bobinden geçen manyetik alanın şiddeti, 2 saniye içinde sıfırdan 0.4 T değerine çıkıyor. Bobinde oluşan ortalama emk ne kadar olur? [C: 0.2 V.]

21.3 100 sarımlı bir bobinin kesiti $40\,\mathrm{cm}^2$ olup, $B = 0.4\,\mathrm{T}$ lık bir manyetik alana dik doğrultuda bulunmaktadır. Bobinin yönü aniden 180° tersine çevriliyor. Bu dönüş 0.1 s sürdüğüne göre, bobinde oluşan ortalama indüksiyon emk sı ne kadar olur? [C: 3.2 V.]



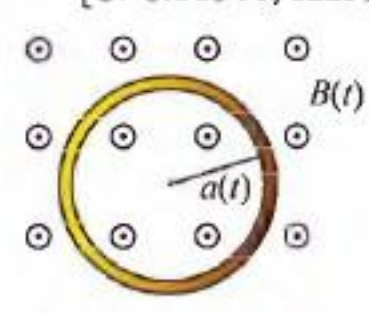
Problem 21.4

21.4 Şekilde direnci $R = 2\,\Omega$ olan iletken çember, kağıt düzlemi içine yönelik $B = 0.2\,\mathrm{T}$ lık manyetik alanı içinde bulunmaktadır. Çemberin yarıçapı $a = 3/t$ (metre) şeklinde azalmaya başlıyor. $t = 2\,\mathrm{s}$ anındaki akımı ve yönünü bulun. [C: 0.24 A, saat ibreleri yönünde.]



Problem 21.5

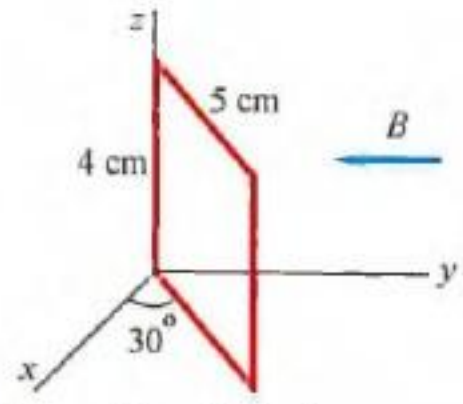
21.5 Şekilde yarıçapı $a = 50\,\mathrm{cm}$ ve direnci $R = 10\,\Omega$ olan iletken çember, $B = 0.2t^5\,\mathrm{T}$ şeklinde değişen bir manyetik alan içindedir. Manyetik alan çember düzlemiyle 53° açı yapmaktadır. $t = 1\,\mathrm{s}$ anında çemberde oluşan akımı ve yönünü bulun. [C: 0.063 A, saat ibreleri yönünde.]



Problem 21.6

21.6 Şekilde kağıt düzleminden dışarı yöndeki manyetik

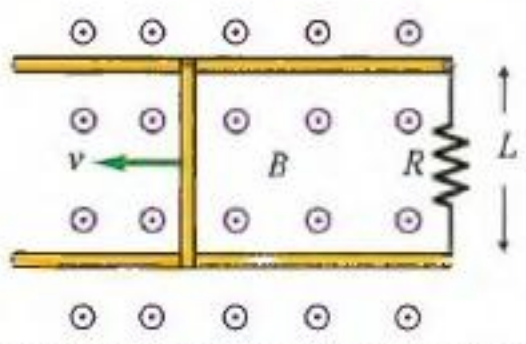
alan içindeki çember iletkenin direnci $R = 10\,\Omega$ dır. Manyetik alan $B(t) = 0.1\,e^{t}$ (tesla) olarak artarken, çemberin yarıçapı da $a(t) = 2e^{-3t}$ (metre) olarak azalıyor. $t = 0$ anında çemberde oluşan indüksiyon akımının şiddeti ve yönünü hesaplayın. [C: 0.2 V, saat ibreleri tersi yönde.)



Problem 21.7

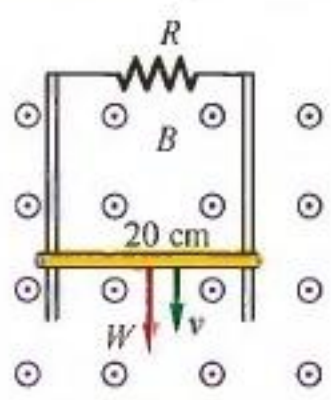
21.7 Şekilde boyutları verilen dikdörtgen çerçeve, $-y$ yönündeki $B = 0.5\,T$ lık düzgün manyetik alan içinde bulunmaktadır. Çerçeve düzlemi x-ekseniyle 30° açı yapmaktadır. Manyetik alan şiddeti 0.1 s süre içinde sıfıra iniyor. Çerçevede oluşan akımı ve yönünü hesaplayın. Çerçevenin direnci $R = 1\,\Omega$ dır. [C: 5 mA, ön kenarda yukarı doğru.)

21.8 Alttaki şekildeki dikdörtgen çerçevenin direnci $R = 10\,\Omega$ olup kağıt dışına doğru olan $B = 0.4\,T$ lık manyetik alan içinde bulunmaktadır. Çerçevenin $L = 40$ cm uzunluktaki kenarı sabit $v = 6$ m/s hızıyla sola doğru çekilmektedir. Çerçevede oluşan indüksiyon akımını ve yönünü bulun.
[C: 0.1 A, saat ibreleri yönünde.]



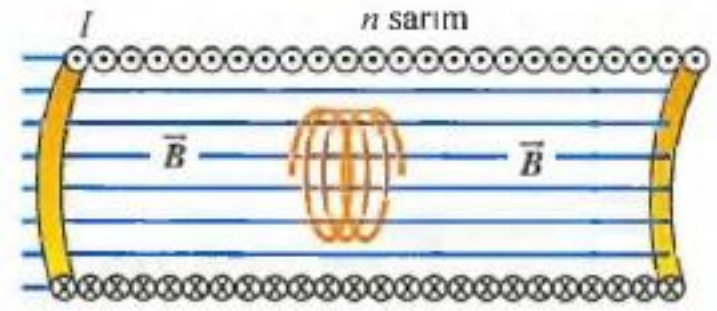
Problem 21.8 ve **Problem 21.9**

21.9 Üstteki şekildeki dikdörtgen çerçevenin hareketli kenarını aynı sabit vv hızında çekebilmek için gerekli kuvvet ne kadardır? (*Yol gösterme:* Akım geçen tele manyetik alanda uygulanan kuvveti karşılamak gerekir.) [C: $F = 0.016$ N.]



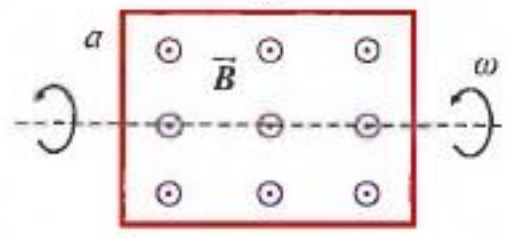
Problem 21.10

21.10 Şekilde kağıt düzlemi dışına doğru $B = 0.5\,T$ lık manyetik alanda düşey düzlemde bulunan bir çerçevenin 20 cm uzunluğundaki hareketli kenarının ağırlığı $W = 0.1$ N dur. Çerçevenin toplam direnci $R = 10\,\Omega$ dir. Serbest düşmeye bırakılan kenarın limit hızı ne olur? (*Yol gösterme:* Akım geçen kenara etkiyen manyetik kuvvet ağırlığa eşit olduğunda, kenar sabit hızla hareket eder.) [C: 10 m/s.]



Problem 21.11

21.11 Şekildeki solenoidin birim uzunluktaki sarım sayısı $n = 800$ sarım/metre olup, üzerinden geçen akım $I_1 = 5/t^2$ (ampere) olarak azalmaktadır. Solenoid hacmi içine konulan $a = 20$ cm yarıçaplı ve 25 sarımlı bir bobinin direnci $R = 1\,\Omega$ dır. Bobinden $t = 1$ s anında geçen akımı ve yönünü tayin edin. [C: 0.032 A, I_1 ile aynı yönde.]



Problem 21.12

21.12 Şekilde kağıt düzlemi dışına doğru, düzgün $B = 0.5\,T$ lık manyetik alan içinde, boyutları $a = 1$ m ve $b = 3$ m olan dikdörtgen çerçeve, eksen etrafında $\omega = 5$ rad/s açısal hızıyla dönmektedir. Direnci $R = 10\,\Omega$ olan çerçevede oluşan akımı t zamanının bir fonksiyonu olarak hesaplayın.
[C: $I = 0.75 \sin 5t$.]

21.2 Jeneratör ve Transformatörler

21.13 Bir jeneratörün dönen bobini, herbirinin kesiti 40 cm^2 olan N sarımdan yapılmış olup, 0.2 T lık manyetik alan içinde 100 rad/s açısal hızıyla dönebilmektedirler. Jeneratörün ürettiği maksimum voltajın 24 V olabilmesi için en az kaç sarım gereklidir? [C: $N = 300$ sarım.]

21.14 Bir transformatörün primer devresinde 100 sarım, sekonder devresinde 40 sarım bulunmaktadır. Transformatöre giren 120 volt ve 10 amperlik akım çıkışta ne olur?
[C: 48 V ve 25 A.]

21.15 Bir transformatörün primer devresine verilen 24 V ve 20 A akımın, sekonder devrede 1 A akım üretmesi isteniyor. N_2/N_1 oranı ve çıkış voltajı ne kadar olur?
[C: $N_2/N_1 = 20$ ve $\mathcal{E}_2 = 480$ V.]

21.16 Bir jeneratörde üretilen 1000W lık güç iki farklı şekilde iletiliyor. (a) 200V luk voltajla iletildiğinde, hattın 1 Ω dirençli kısmında ısıya dönüşen güç ne kadar olur? (b) Aynı güç, önce bir transformatörle voltajı 500V değerine çıkarılıp iletildiğinde, hattın 1 Ω dirençli kısmında ısıya dönüşen güç ne kadar olur? [C: (A) 25 W, (b) 4 W.]

21.İndüktans – Manyetik Enerji

21.17 Aynı eksenli iki solenoitten, birincisindeki akım 0.01 s içinde 5 A den sıfıra inerken, ikinci solenoitte 2000 V emk oluşuyor. Bu sistemin karşılıklı indüksiyon katsayısını tayin edin. [C: $M = 4$ H.]

21.18 Özindüksiyon katsayısı 2 H olan bir bobinden 3 A akım geçmekte ve akım her saniyede 40 A/s olarak artmaktadır. (a) Bobinde depolanan manyetik enerji ne kadardır?

(b) Bobinde indüklenen emk ne kadar olur? [C: (a) 9 J, (b) 80 V.]

21.19 (a) Uzunluğu 50 cm ve kesiti 20 cm^2 olan ve 600 sarımdan oluşan bir solenidin özindüksiyon katsayısını hesaplayın. (b) Bu solenoidin üzerinden 10 A akım geçerken depolamış olduğu enerjiyi hesaplayın. [C: (a) 3.2 mH, (b) 0.16 J.]

21.20 Uzunluğu $\ell = 20\,cm$, kesiti $A = 100\,cm^2$ ve sarım sayısı $N_1 = 800$ olan bir solenoidin çevresine iletken bir tel $N_2 = 50$ defa sarılmıştır. Sistemin karşılıklı indüksiyon katsayısını hesaplayın. [C: $M = 2.5\,mH$.]

22

GEOMETRİK OPTİK



Hubble Uzay Teleskobu ve arka planda Dünya. 11 ton kütleli bu uzay aracmda 2.4 m çaplı bir teleskop bulunmaktadır. 560 km yüksekteki yörüngesi Dünya atmosferinin dışında olduğu için, evrenin en uzağındaki gökcisimlerini çok net görebilmektedir. Hubble teleskobu 2014 yılına kadar görev yapacaktır.

Bu bölümle birlikte fiziğin önemli bir dalı olan Optik konusuna giriş yapmış oluyoruz. İnsanın doğadaki tüm etkinliği görme duyusu ile başlar. Görme duyusu maddelerin ışık denen bir özelliğini kullanır. Etrafımızdaki cisimlerden salman ışık gözümüzde bir görüntü oluşturur. O cisme elimizle dokunmasak da orada olduğunu biliriz.

Bu bölümde önce ışığın yapısını öğreneceğiz. Işığın elekromanyetik bir dalga olduğunun anlaşılması bilim tarihindeki en önemli olaylardan biridir. Bu dalga yapısı anlaşıldıktan sonra pekçok teknik ve optik alet geliştirilebilmiştir.

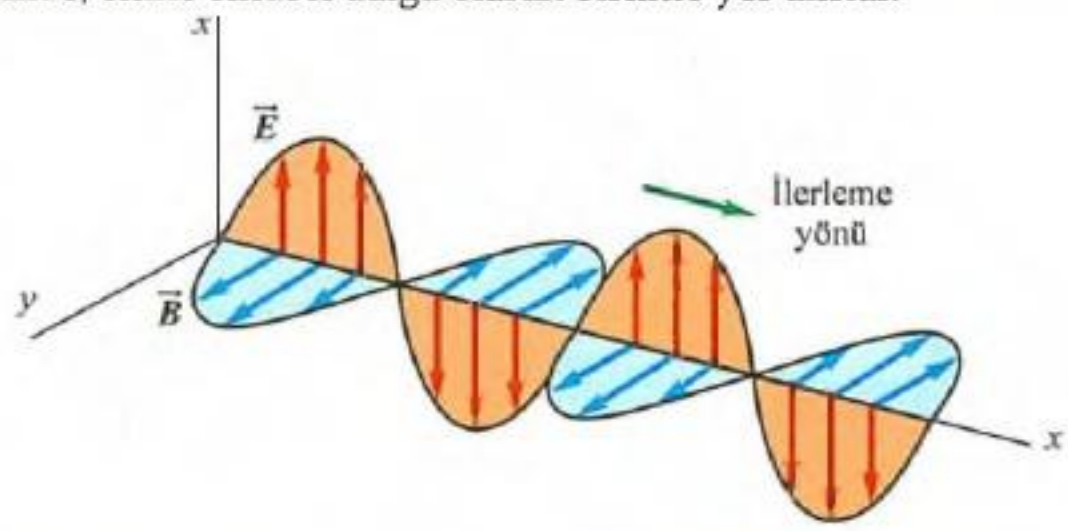
Ayrıca, dalga yapısındaki ışığın, bir ortamdan diğerine geçerken veya yansırken uyduğu yasaları ele alacağız. Günlük hayatta ve teknolojide hayatı kolaylaştıran ayna ve merceklerin nasıl görüntü verdiğini hesaplayabileceğiz.

22.1 IŞIĞIN DALGA KARAKTERİ

Işık nedir sorusuna tarih boyunca farklı cevaplar verilmiştir. Işık teorilerinin macerası çok ilginçtir. 19. yüzyıla kadar Newton'un ileri sürdüğü parçacık modeli kabul görmüştü. Newton, ışık kaynağından çıkan ve gözle görülemeyecek kadar küçük olan parçacıkların gözümüze ulaştığını ileri sürüyor ve bununla ışığın yansıma ve kırılmasını izah edebiliyordu. Aynı yıllarda, Huygens ve Fermat ışığın dalga olabileceğini ileri sürmüşlerse de fazla kabul gömemişlerdi.

Fakat, 19. yüzyıl başlarında, Young ve Fresnel adlı bilim adamları ışığın girişim ve kırınım özelliklerini ortaya koyduğunda dalga modeli ön plana çıktı. Çünkü, girişim ve kırınım özelliği parçacık modeliyle izah edilemez.

Sonra, 1873 yılında James Clerk Maxwell (1831–1879) elektromanyetik teori kitabını yayınlayarak, elektrik ve manyetizmayı bir teoride birleştirdi. İlk kez elektromanyetik dalga kavramını ortaya attı. Maxwell'e göre elektromanyetik dalgada, hem E elektrik alanı ve hem de B manyetik alanı ilerleme yönüne dik birer düzlemde, enine sinüsel dalga olarak birlikte yer alırlar.



Şekil 22.1: Elektromanyetik dalgayı oluşturan E ve B alanları, gidiş yönüne dik birer düzlemde enine sinüsel dalga hareketi yaparlar.

Maxwell elektromanyetik dalgaların boşlukta ilerleme hızı için, boşluğun elektrik ve manyetik geçirgenlikleri cinsinden şöyle bir ifade buldu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

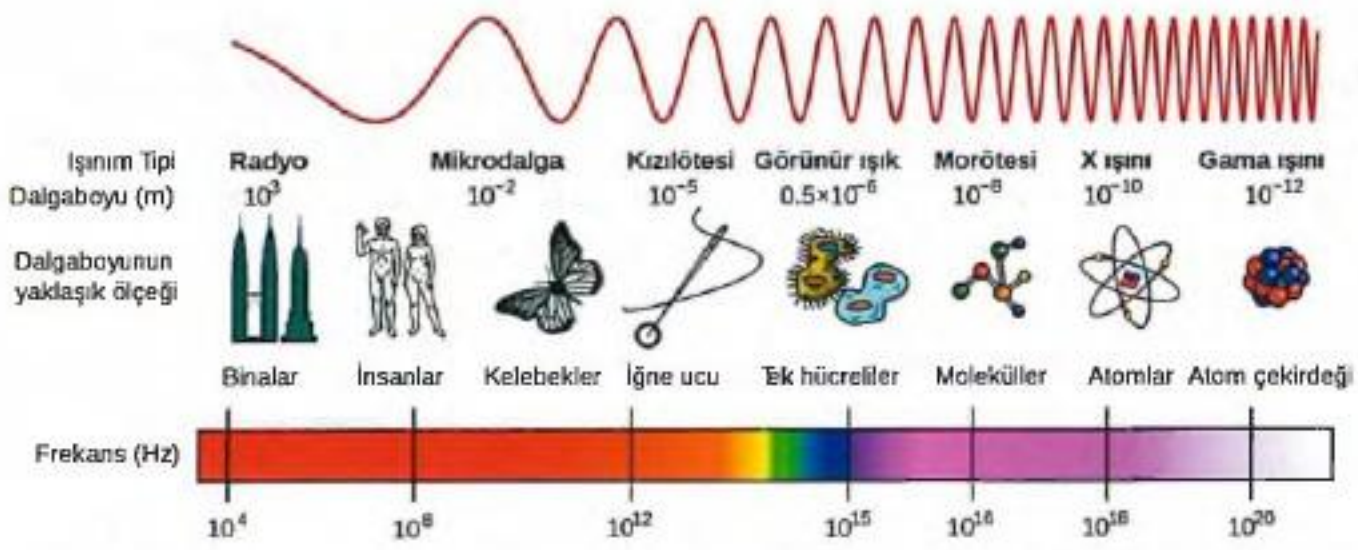
Bu ifade hesaplandığında ışık hızına eşit olduğu görüldü:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Maxwell bu sonucu gördükten sonra, bir adım daha atarak, ışığın da bir elektromanyetik dalga olduğunu ileri sürdü. Onun bu görüşleri kısa süre sonra deneysel olarak ispatlandı. 1887 yılında Heinrich Hertz laboratuvarda elektromanyetik dalga üretmeyi başardı.

Bugün artık radyo dalgalarından mikrodalgaya, kızılötesi ışınlardan X- ve gama ışınlarına kadar tüm elektromanyetik dalgaları biliyoruz. Bu dalgaları spektrum denen bir grafikte frekanslarına göre sıralayarak gösterelim:

- **Radyo dalgaları** dalgaboyu 10 cm den 10 km ye kadar uzanan ve atmosferi kolayca geçebilen dalgalardır. Radyo ve TV yayınlarında kullanılır.
- **Mikrodalgalar** daha kısa boylu olup radar, kablosuz internet, mutfak fırınlarında... vb. kullanılır.
- **Kızılötesi ışınlar** atmosferde çabuk soğrulduğu için kısa mesafeli iletişimde kullanılırlar.



Şekil 22.2: Elektromanyetik dalga spektrumu.

- **Morötesi ışınlar** görünür ışıktan daha enerjili olup, dokuları iyonlaştırıcı etki yapabilir ve güneş yanıklarına yolaçarlar.
- **X-ışınları** da dokular için tehlikeli olup, maddeyi rahatlıkla geçebildikleri için tıpta ve sanayide kullanılırlar.
- **Gama ışınları**, enerjisi en büyük olan elektromanyetik ışımadır. Uzaydan gelir veya nükleer reaksiyonlarda ortaya çıkarlar. Tıpta teşhis ve kanser tedavisinde kullanılırlar.

Elektromanyetik dalgaların bu modeli klasik fiziğin büyük başarısıydı. Fakat, 20. yüzyıl başlarında bazı gözlemler ışığın parçacık modelini yeniden canlandırdı. Bunlar arasında fotoelektrik olay, Compton saçılması gibi yeni etkiler, ışığın dalga gibi değil, bir bilardo topu gibi davrandığını gösteriyordu.

Bu belirsizlik 1926 yılında kuantum teorisi ile çözüldü. Kuantum teorisine göre, sadece ışık değil, tüm parçacıklar dalga-parçacık yapısı denilen çift karaktere sahiptiler. Bazı durumlarda parçacık, bazı durumlarda da dalga yüzlerini gösteriyorlardı.

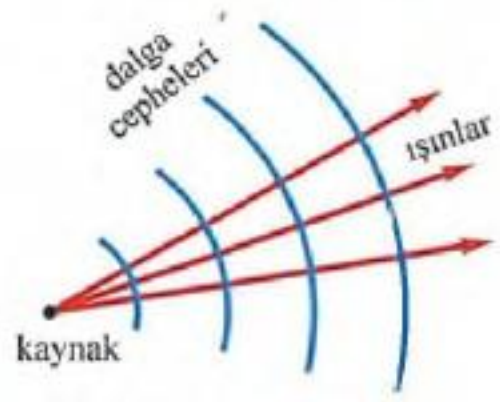
Fakat, eğer ışığın üretilmesi ve soğurulması konularına girilmezse, klasik elektromanyetik dalga modeliyle ışığın diğer tüm davranışları açıklanabilmektedir.

Dalga Cephesi – Işın Modeli

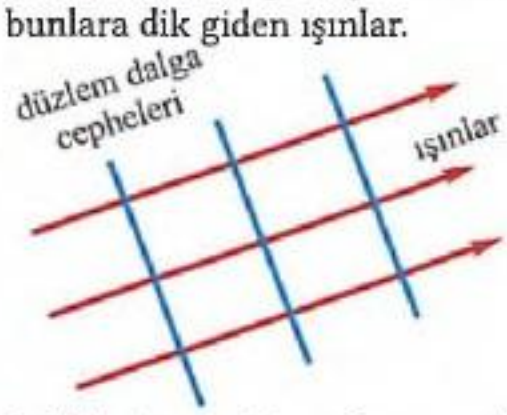
Herhangi bir kaynaktan çıkan ışık, elektromanyetik dalga olarak tüm uzaya yayılır. Bu dalganın aynı fazda ilerleyen noktalarının geometrik yerine **dalga cephesi** denir. Dalga cephesi, boş uzayda ve arada bir engel yoksa, merkezi ışık kaynağında olan bir küre yüzeyi gibi genişler. Böylece, ışığı dalga cephesiyle gözönüne getirebiliriz.

Dalga cephesine dik doğrultuda ve ilerleme yönünde varsayılan sanal çizgilere **ışın** adı verilir. Homojen bir ortamda ışınlar, kaynaktan itibaren çizilen doğrulardır. Homojen olmayan ortamlarda ise, örneğin atmosferden geçerken, ışınlar eğrisel olabilirler. Ama, her durumda dalga cephesine dik olarak ilerlerler. Işın modeli, dalga cephesine kıyasla, ışığı daha kolay algılamamızı sağlar.

Işık kaynağından çok uzakta (Şekil 22.4) küre yarıçapı çok büyük olduğu zaman, dalga cepheleri yerel ölçekte yaklaşık birer düzlem olarak alınabilirler. Kaynağı sonsuzda olan bu dalgaya **düzlem dalga** denir. Buna bağlı olarak, ışınlar da paralel hale gelirler.



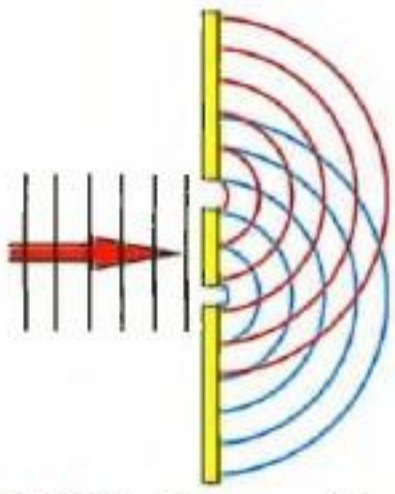
Şekil 22.3: Dalga cepheleri ve bunlara dik giden ışınlar.



Şekil 22.4: Kaynaktan çok uzakta dalga cepheleri düzlem, ışınlar birbirine paralel olurlar.

Huygens–Fresnel İlkesi

Işık bir engelle karşılaştığında nasıl bir yol izler? Huygens ve Fresnel adlı bilim adamları ışığın bir ortamda ilerlemesini şöyle bir ilkeyle açıkladılar:



Şekil 22.5: Huygens–Fresnel ilkesine göre, her engel yeni dalga cepheleri oluşur.

Üzerine bir dalga düşen ortamın her noktası yeni bir dalga kaynağı oluşturur ve buradan çıkan dalga cephesi her yönde simetrik yayılır.

Bitişik iki oda düşünün. İki oda arasındaki duvarda bir delik olsun. Birinci odada konuşulduğunda, ikinci odada ses bu delikten yayılıyormuş gibi olur. Konuşmacı oda içinde yer değiştirse dahi ikinci odada ses dalgası hep aynı noktadan geliyormuş gibi işitilir. Bu, Huygens–Fresnel ilkesine uygundur.

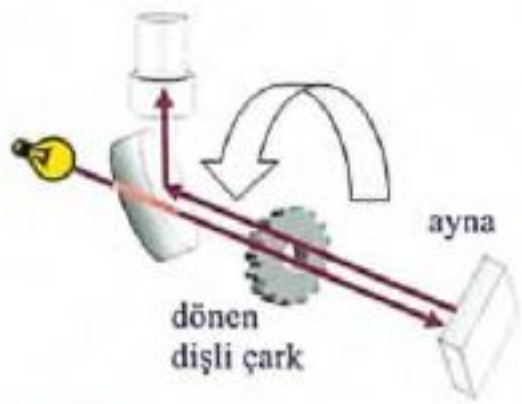
Şekil 22.5 de düzlem dalga bir ekranda iki yarıkla karşılaştığında ne olduğunu görüyoruz. Işık bu yarıklardan itibaren yeni birer küresel dalga cephesi halinde yayılır.

Işık Hızı ve Ortamın Kırılma İndisi

Işığın boşlukta yayılma hızı c ile gösterilen evrensel bir fizik sabitidir:

$$c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Bu kadar yüksek bir hızı ölçmek çok özel teknikler gerektirir. Tarih boyunca ışık hızını ölçmek için pekçok teknik geliştirilmiştir. Ençok bilinen yöntem Fransız bilim adamları Fizeau ve Foucault tarafından geliştirilen alettir.



Şekil 22.6: Fizeau–Foucault aleti.

Fizeau–Foucault aletinde çok uzaktaki bir kaynaktan çıkan ışık dönen bir dişli çarkın dişleri arasından geçmektedir (Şekil 22.6). Bu ışın bir aynadan geri yansıtılıp tekrar çarkın dişleri arasından geçtikten sonra gözlenir. Çarkın dişleri arasından geçen bir ışın geri yansıdığında, çarkın dönme hızı uygun değilse takılır kalır. Dönme hızı değiştirilerek bir ışının hem gidiş ve hem de dönüş sırasında dişler arasından geçmesi sağlanır. Bu gerçekleştiğinde, ayna-dişli arasındaki uzaklık, aynanın dönüş hızı ve diş sayısı cinsinden ışık hızı hesaplanabilir.

Işık bir gaz veya sıvı ortamına geçtiğinde hızı yavaşlar. Bunun sebebini anlamak kolaydır: Işık hızının $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ tanımı hatırlanırsa, her ortamda daima $\varepsilon > \varepsilon_0$ ve $\mu > \mu_0$ olduğu için, ışık hızı daima boşluktaki değerinden daha küçük olacaktır.

Bu yavaşlama miktarı boyutsuz bir katsayı ile ifade edilir. Işığın ortamdaki hızı v, boşluktaki hızı c ile gösterilirse,

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{(Kırılma indisi)} \qquad (22.1)$$

oranına ortamın **kırılma indisi** denir. Kırılma indisi ortamın cinsine ve gelen ışığın dalgaboyuna bağlıdır. Bazı ortamların kırılma indisleri şöyledir:

Bazı ortamların kırılma indisleri.

	n		n
Boşluk	1	Akrilik cam	1.49
Hava	1.0003	Flint camı	1.60
Su	1.3330	Crown camı	1.52
Buz	1.309	Silisyum	3.96

Bir dalganın v hızı, λ dalgaboyu ve f frekansı (veya, T periyodu) arasındaki ilişkiyi hatırlayalım:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \qquad (22.2)$$

Işık dalgası bir ortamdan diğerine geçerken frekansı değişmez. Frekans, dalganın üretildiği kaynakta belirlenen bir niceliktir. (Bir ipi titreştirerek dalga ürettiğimizde, ipin yukarı-aşağı titreşim frekansı dalganın ilerlemesiyle değişmez.) O halde, yukardaki bağıntıyı iki ortam için yazıp, taraf tarafa bölersek,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{22.3}$$

olur, çünkü frekans her ortamda aynıdır. Bu temel bilgiler geometrik optik yasalarını anlamakta yeterli olurlar.

22.2 YANSIMA VE KIRILMA

Kırılma indisi n_1 olan bir ortam ile, kırılma indisi n_2 olan bir ortam arasındaki arakesit yüzeye düşen bir ışık ışını kısmen yansır, kısmen ikinci ortama geçebilir. Önce, yansıma ve kırılma yasalarını verelim:

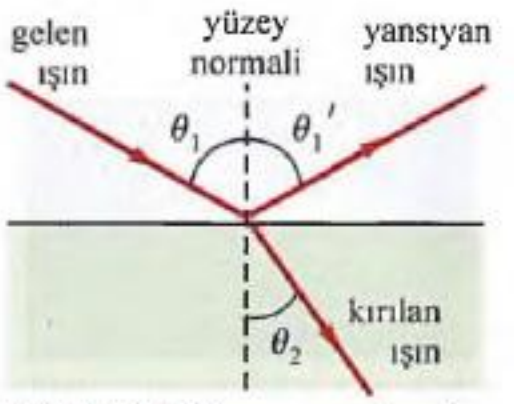
Yansıma ve Kırılma Yasaları

1. **Gelen ışın, yansıyan ışın ve kırılan ışın, hepsi aynı bir düzlem içinde yeralırlar.**
2. **Gelen ışın ve yansıyan ışın yüzey normaliyle eşit açı yaparlar:**

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{22.4}$$

3. **Gelen ışın ve kırılan ışının yüzey normaliyle yaptıkları açılar arasındaki ilişki Snell yasası ile belirlenir:**

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \textbf{(Snell yasası)} \tag{22.5}$$

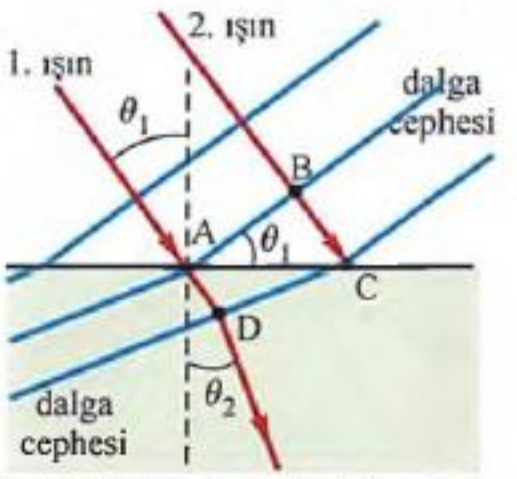


Şekil 22.7: Yansıma ve kırılma

Bu yasaların herbiri dalga cepheleri kullanarak ispat edilebilirler. Burada örnek olarak, kırılma yasasını ispat edelim.

Birinci ortamın yüzey normaliyle θ_1 açısı yaparak gelen iki ışık ışını gözönüne alalım (şekil 22.8). Birinci ışın yüzeye A noktasında eriştiğinde, onunla aynı cephede olan B noktasındaki ikinci ışının daha gidecek BC yolu vardır. Bu ikinci ışın BC yolunu v_1 hızıyla giderken, A noktasındaki ışın da ikinci ortamda v_2 hızıyla ilerleyecektir. Aynı bir Δt zaman aralığında alınan yollar şöyle olur:

$$BC = v_1\,\Delta t \qquad AD = v_2\,\Delta t$$



Şekil 22.8: Ardışık dalga cepheleri ikinci ortamda daha yavaş hızla ilerlerler.

Böylece yeni dalga cephesi DC olur. BC ve AD uzaklıklarını ortak AC kenarı ve açılar cinsinden yazalım:

$$BC = v_1\,\Delta t = AC \sin\theta_1 \qquad AD = v_2\,\Delta t = AC \sin\theta_2$$

ve taraf tarafa bölelim:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

Son olarak, v hızları yerine, $n = c/v$ bağıntısıyla kırılma indislerine geçelim:

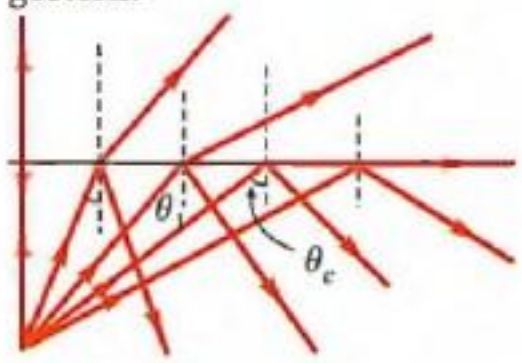
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

Buradan (22.5) formülündeki Snell yasası elde edilmiş olur.

Yansıma ve kırılmanın önemli noktalarını vurgulayalım:



Şekil 22.9: Işık su ortamından çıkarken, kalemi kırılmış gibi gösterir.



Şekil 22.10: Toplam iç yansıma ve kritik açı θ_c.



Şekil 22.11: Fiber optik kablonun bir ucundan giren ışık, toplam iç yansıma ile diğer uca kadar iletilir.



Şekil 22.12: Işığın dağınımı.

- Işınlar yüzeye dik gelirse, yani $\theta_1 = 0$ olursa, $\theta_2 = 0$ olur ve ışınlar hiç kırılmadan ikinci ortama geçerler.
- Eğer ışınlar $n_1 < n_2$ olan (örneğin, hava–su) bir arakesite düşüyorsa, mutlaka ikinci ortama geçer. Bu durumda, $\theta_2 < \theta_1$ olup, kırılan ışın yüzey normaline yaklaşır. Bu durum, suya batırılan bir çubuğun kırılmış gibi görünmesine yolaçar.
- **Toplam iç yansıma.** Işınlar daha yoğun bir ortamdan (örneğin, sudan havaya) çıkmak istediğinde ilginç bir durum ortaya çıkar. Bu durumda, çıkan ışınlar normalden uzaklaşırlar. Fakat, *ışınlar her zaman dışarı çıkamayabilirler.* Bunu görmek için (22.5) denklemini θ_2 için yazalım:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

Yoğun ortamdan çıkarken $n_1/n_2 > 1$ olduğu için, bu denklemin sağ tarafını 1 den büyük yapacak açılarda çözüm olmaz. O halde, çözüm olması için

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \leq 1$$

olmalıdır. Özel olarak, tam sınırda, yani sol tarafı 1 yapan geliş açısına **kritik açı** denir ve θ_c ile gösterilir:

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{(Kritik açı)} \qquad (22.6)$$

Sonuç olarak, yoğun bir ortamdan çıkış ancak $\theta_1 < \theta_c$ açılarında mümkündür. Bu açıdan büyük değerlerde, ışın ortamdan dışarı çıkamaz, tümüyle ortama geri yansır. Bu ilginç olaya *toplam iç yansıma* denir.

Toplam iç yansımanın en önemli uygulaması fiber optik iletimdir. Gerek görünür ışık, gerekse diğer elektromanyetik sinyaller, çok az bir kayıpla fiber optik kablolardan iletilebilir.

Işığın Dağınımı (Dispersiyon)

Beyaz ışık bir prizma üzerine gönderildiğinde, cam ortamdan geçtikten sonra, görünür ışığın tüm renklerine ayrışır. Yandaki şekilde görüldüğü gibi, kırmızıdan mora kadar tüm görünür ışık bileşenleri farklı açılarda kırınırlar. Dalgaboyu daha büyük olan kırmızı ışık daha az, dalgaboyu daha küçük olan mor ışık daha çok kırınır.

Kırılma indisinin her dalgaboyunda farklı olduğunu gösteren bu özelliğe ışığın **dağınımı** (dispersiyon) denir:

$$n = n(\lambda) \qquad \text{(Dağınım)} \qquad (22.7)$$

Kural olarak, *dalgaboyu arttıkça kırılma indisi azalır.*

Kırılma indisinin $n = c/v$ bağıntısıyla ışık hızına bağlı olduğunu hatırlayalım. Işığın boşluktaki c hızı tüm dalgaboylarında aynıdır, fakat madde içine girdiğinde, v hızı her dalgaboyunda farklı olur. Yukardaki şekle göre, dalgaboyu büyük olan (kırmızı) ışığın madde içindeki hızı, mor ışığın hızından daha büyük olur.

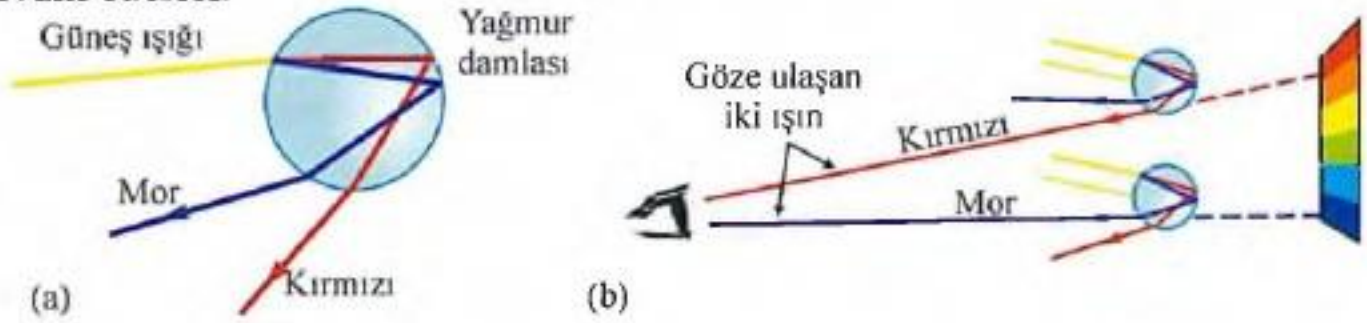
Gökkuşağı

Işığın dağınım özelliği, yukarda incelediğimiz *toplam iç yansıma* etkisiyle birleştiğinde, doğadaki en harika görüntülerden biri oluşur. Yağmurdan hemen sona açan güneşte, havada asılı gibi duran ve tüm renkleri içeren bir **gökkuşağı** gözlenir.



Şekil 22.13: Gökkuşağı.

Gökkuşağının nasıl oluştuğunu bir şekil üzerinde açıklayalım. Şekil 22.14(a) da küresel bir su damlası üzerine düşen güneş ışığının içindeki kırmızı ve mor bileşenlerin gittikleri yolları gözönüne alalım. Dağınım özelliğine göre, damla içinde kırmızı ışık az, mor ışık daha çok kırınacaktır. Bu iki ışın kürenin arka yüzeyine geldiğinde, bazı damlalarda kritik açıdan daha büyük açıda gelen iki ışın, toplam iç yansıma gereğince, damladan çıkamayıp tekrar içeri dönecektir. Birkaç yansıma sonrasında bu iki ışın, nihayet damla ortamından çıkıp yollarına devam ederler.



Şekil 22.14: (a) Küresel bir su damlasının iç yüzeyinde iki kez toplam iç yansıma. (b) Farklı noktalardaki damlalardan yansımaların gözde oluşturduğu gökkuşağı görüntüsü.

Şimdi, böyle iki damladan çıkan kırmızı ve mor ışınların gözümüze ulaştığında nasıl bir etki yaptığını görelim. Şekil 22.14(b) de görüldüğü gibi, farklı konumdaki iki damladan, üsttekinden gelen ışığı kırmızı, alttakinden gelen ışığı mor olarak gözleriz. Bu iki uç konum arasındaki bölgedeki damlalar, görünür ışığın diğer tüm renklerini yansıtacak şekilde sıralanırlar.

Bu özel yansımalar sadece belli bir açı bölgesinde gerçekleşirler. Bunun dışındaki yansımalar gözümüze ulaşmaz. Ayrıca, aynı olayı farklı yönlerde yine aynı açı bölgesinde gözleriz. Sonuçta, kemer şeklinde bir bölgede rengarenk bir görüntü oluşur.

Örnek 22.1

Boşluktaki dalgaboyu 598 nm *olan sodyumun sarı ışığı, kırılma indisi* 1.6 *olan cam ortamına giriyor.* **(a)** *Bu ışığın boşluktaki frekansı ne kadardır?* **(b)** *Cam ortamındaki hızı ne kadar olur?* **(c)** *Cam ortamında dalgaboyu ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Bir dalganın hızı, frekansı ve dalgaboyu arasındaki ilişki (22.2) formülünden bulunur:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Boşlukta ışık hızı c alınarak, frekans hesaplanır:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{598 \times 10^{-9}} = 5 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

(b) Işık başka bir ortama geçtiğinde frekansı aynı kalır, fakat hızı ve dalgaboyu değişir. Kırılma indisini tanımladığımız (22.1) formülü kullanılır:

$$n = \frac{c}{v} \quad \rightarrow \quad v = \frac{c}{n}$$

Buradan, cam ortamındaki ışık hızı hesaplanır:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1.6} = 1.9 \times 10^8\,\text{m/s}$$

(c) Cam ortamındaki dalgaboyu, hız ve frekans cinsinden $\lambda = v/f$ olarak hesaplanabildiği gibi, iki ortamdaki değerlerin oranı alınarak da hesaplanabilir. Orantı yoluyla hesap hatası daha az olur:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{v_1}\lambda_1 = \frac{1.9}{3} \times 598 = 379\,\text{nm}.$$

Örnek 22.2

(a) *Bir ışık ışını, havadan cama (*$n = 1.60$*) normalle* $30°$ *açı altında gönderiliyor. Camdaki kırılma açısı ne kadar olur?* **(b)** *Işın öyle bir açıda gönderiliyor ki, kırılma açısı geliş açısının yarısına eşit oluyor:* $\theta_2 = \theta_1/2$*. Geliş açısı ne kadardır?*

Çözüm

(a) Snell formülü kullanılır ($n_1 = 1$, $n_2 = n$):

$$\sin\theta_1 = n \sin\theta_2$$

Veriler formülde yerine konulup, θ_2 için çözülür:

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_1$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1.6}\times\sin 30 = 0.31$$

Sinüsü bilinen açının kendisi, tablolardan veya hesap makinelerinden bulunur:

$$\theta_2 = 18^\circ.$$

(b) Snell formülünde $\theta_2 = \theta_1/2$ alınır ve θ_1 için çözülür:

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta_1/2$$

Trigonometriden $\sin\theta_1 = 2\sin\theta_1/2\cos\theta_1/2$ yarım açı formülü kullanılır ve sadeleştirme yapılırsa,

$$2\cos\theta_1/2 = n \;\rightarrow\; \cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{n}{2}$$

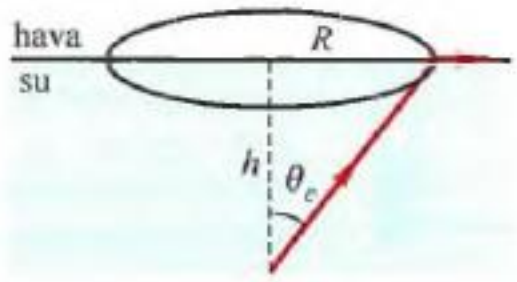
Buradan yarım açının kosinüsü hesaplanır:

$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{1.6}{2} = 0.8 \;\rightarrow\; \frac{\theta_1}{2} = 37^\circ.$$

Buradan $\theta_1 = 74^\circ$ bulunur.

Örnek 22.3

Derinliği 10 m *olan bir havuzun dibindeki lambadan çıkan ışık, su yüzeyinde hangi yarıçapta aydınlık bir daire oluşturur? (Suyun kırılma indisi* 1.33*.)*



Çözüm

Şekilde görüldüğü gibi, suyun içinden gönderilen ışınlardan, sadece θ_c kritik açısına kadar olanlar hava ortamına geçebilir, diğerleri toplam iç yansımaya uğrar. O halde önce kritik açı bulunur.

Burada 1. ortam su ($n_1 = n$) ve 2. ortam hava ($n_2 = 1$) olur. Snell formülünü yazalım:

$$n\sin\theta_1 = \sin\theta_2$$

Havadaki kırılma açısının maksimum değerini $\theta_2 = 90^\circ$ alıp kritik açıyı buluruz:

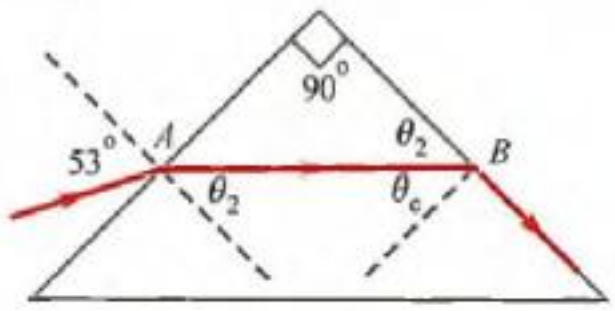
$$n\sin\theta_c = 1\times\sin 90^\circ = 1$$

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.33} = 0.75 \;\rightarrow\; \theta_c = 49^\circ$$

Şekildeki diküçgeni inceleyerek R yarıçapı ifadesini yazarız:

$$R = h\tan\theta_c = 10\times\tan 49^\circ = 10\times 1.15 = 11.5\,\text{m}.$$

Örnek 22.4



Tepe açısı 90° *olan bir cam prizmanın bir yüzündeki A noktasından* 53° *açıyla giren ışın, diğer yüzündeki B noktasından yüzeye paralel çıkıyor. Prizma camının kırılma indisini tayin edin.*

Çözüm

Önce 1. yüzeyde Snell formülünü yazalım:

$$\sin 53^\circ = n\sin\theta_2$$

Burada hem n ve hem de θ_2 bilinmediği için, ikinci bir denkleme daha gerek vardır. Bu amaçla, ikinci yüzeye bakalım. B noktasında ışınlar yüzeye paralel gittiği için, toplam iç yansıma vardır, yani ışınlar yüzeye θ_c kritik açısıyla düşmektedir. Şekildeki çizimden görüldüğü gibi $\theta_c = 90^\circ - \theta_2$ olur. Kritik açı formülünü yazalım:

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n} \;\rightarrow\; n\sin(90^\circ - \theta_2) = n\cos\theta_2 = 1$$

Bu iki denklem taraf tarafa bölünür:

$$\frac{n\sin\theta_2}{n\cos\theta_2} = \frac{\sin 53^\circ}{1} \;\rightarrow\; \tan\theta_2 = \sin 53^\circ = 0.8$$

Buradan $\theta_2 = 39^\circ$ bulunur ve ikinci denklemde yerine konularak n hesaplanır:

$$n = \frac{1}{\cos 39^\circ} = 1.28$$

22.3 YANSIMA İLE GÖRÜNTÜ – AYNALAR

Yansıma İle Görüntü Oluşması

Optik anlamda **cisim**, üzerinden ışınların ıraksayarak çıktıkları nesnedir. Bu bir lamba olabilir, yani ışığı kendi üretir. Diğer cisimler ortamdan aldıkları ışınları tekrar yayınlayabilirler. Bir cisimden ıraksayarak çıkan ışık ışınları iki ortamın arakesit yüzeyine geldiğinde, kısmen yansır kısmen kırılma yoluyla ikinci ortama geçerler. Gerek yansıyan ve gerekse kırılarak geçen ışınların yakınsaklaştığı yerde bir görüntü oluşur. Bu kısımda yansıma yoluyla oluşan görüntülerin özelliklerini inceleyeceğiz.

Yansıma yoluyla görüntü elde etmekte aynalar kullanılır. Aynalar, parlatılmış veya başka bir malzeme ile kaplanarak yansıtıcı özelliği artırılmış yüzeyler

olup, üzerlerine düşen ışığın neredeyse tamamını yansıtırlar. Ençok kullanılan türleri düzlem ve küresel aynalardır.

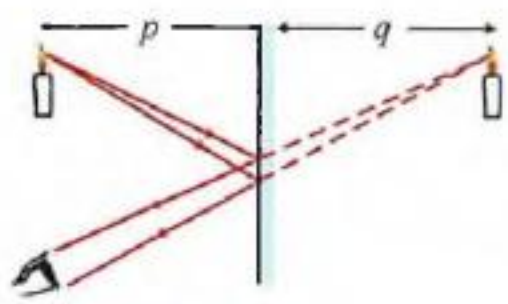
Bir aynaya baktığımızda aynanın arkasında cisim varmış gibi görürüz. Bu bir görüntüdür. Yansımış ışınların kesiştiği veya kesişiyor göründüğü yere **görüntü** denir. Işınlar gerçekten kesişiyorsa **gerçek görüntü**, sadece uzantıları kesişiyorsa **sanal görüntü** olur.

Görüntünün gerçek veya sanal olduğunu tayin etmek için pratik bir yöntem de şudur: Eğer görüntü ve görüntüden ıraksayarak gelen ışınlar aynanın *aynı tarafındaysa* görüntü gerçek, *farklı taraflarındaysa* görüntü sanaldır. Gerçek görüntüyü ayırdetmenin diğer bir yolu, görüntünün bulunduğu yere bir ekran koymaktır. Gerçek görüntü ekran üzerinde gerçekten oluşur. Sanal görüntü ekran üzerinde görünmez.

Düzlem Ayna

En basit ayna türü olan düzlem aynayı gözönüne alalım. Şekil 22.15 de bir cisimden ıraksayarak çıkan iki ışın gösterilmiştir. Bu iki ışın ayna yüzeyine geldiklerinde, 1. yansıma kuralı gereğince, eşit açılarla yansırlar.

Görüntü tanımına göre, bu iki ışın aynanın arkasındaki bir noktada kesişiyor gibi oldukları için, görüntü sanaldır. Düzlem aynada görüntü daima sanal olur. Ayrıca, görüntü cisimle aynı boyda, aynı yönde ve aynaya eşit uzaklıktadır.



Şekil 22.15: Düzlem aynada görüntü sanaldır, çünkü ışınların uzantıları aynanın arkasında kesişirler.

İşaret kuralı: Şekil 22.15 de cismin aynaya olan uzaklığı p ile, görüntünün aynaya olan uzaklığı q ile gösterilmiştir. Bu iki uzaklığın mutlak değeri birbirine eşittir. Fakat, daha sonra göreceğimiz hesaplarda cisim ve görüntü konumları cebirsel sayılar olarak alınırlar.

Optikte yapılan kabule göre, *gerçek cisim ve görüntü konumları pozitif, sanal görüntü ve cisim konumları negatif alınır.*

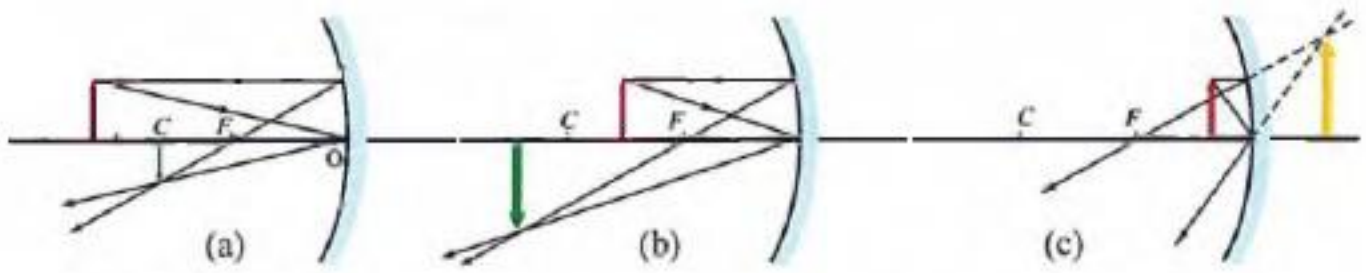
Buna göre, düzlem aynada cisim ve görüntü konumları arasındaki ilişki şöyle yazılmalıdır:

$$q = -p$$

Küresel Çukur Ayna

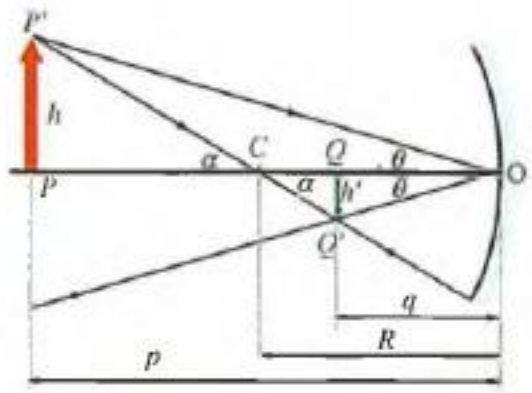
Çukur (içbükey, konkav) aynada ışınlar bir kürenin iç yüzeyinden yansırlar. Yarıçapı R olan bir çukur aynanın merkezini C ile gösterirsek, ayna üzerindeki bir O noktasından C ye uzatılan doğruya **asal eksen** denir: $CO = R$.

Çukur aynada görüntü elde etmek için, cisimden ıraksayarak çıkan en az iki ışın gerekir (Şekil 22.16). Bunlardan birini asal eksene paralel çizersek, yansıyan ışın daima aynanın F odak noktasından geçecektir. Diğer ışını O orta noktasına doğru çizdiğimizde, asal eksenle eşit açı yaparak yansır.



Şekil 22.16: Çukur aynada cisim: (a) Merkezden ötedeyse, görüntü hakiki ve daha küçüktür, (b) Merkezle odak arasındaysa, görüntü gerçek ve daha büyüktür, (c) Odaktan içerdeyse, görüntü sanal olur.

Bu iki ışının kesiştiği yerde gerçek görüntü oluşur. Aksi durumda sanal görüntü, ışınların kesişiyor göründüğü yerde oluşacaktır. Şekil 22.16 de her iki görüntü türünün çizimle nasıl elde edildiği gösterilmiştir.



Şekil 22.17: Çukur aynada koordinatlar.

Görüntü yerini ve boy uzunluğunu bulmak üzere, Şekil 22.17 de gösterilen koordinatları kullanalım. P noktasındaki cismin aynadan itibaren ölçülen konumu p, Q noktasındaki görüntünün konumu q olsun.

Ayrıca, cismin boyunu h ile, görüntünün boyunu da h' ile gösterelim. Burada, boylar için yeni bir kabul yapılır: *Ters görüntünün boyu negatif işaretli alınır.* Buna göre, şekilde gösterilen h' eksi işaretli demektir.

Şekildeki aynı θ açısını gören OPP' ve OQQ' dik üçgenleri benzer olduğundan, kenar oranları eşit yazılabilir:

$$\frac{h}{-h'} = \frac{p}{q} \tag{22.8}$$

Dikkat edilirse, ters olan görüntünün h' boyu eksi işaretli olduğundan, önüne bir eksi işareti daha konularak, pozitif yapılmıştır.

Bu kez aynı α açısını gören CPP' ve CQQ' üçgenlerinin benzerliğini kullanalım. Kenar oranlarını yazarken görüntü boyu için $(-h')$ alacağımızı hatırlarsak,

$$\frac{h}{-h'} = \frac{p-R}{R-q}$$

Son iki bağıntı arasından h/h' elenirse,

$$\frac{p}{q} = \frac{p-R}{R-q}$$

Buradan, q görüntü uzaklığını veren formül çıkar:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \tag{22.9}$$

Özel olarak, sonsuzdan gelen ışınların görüntü verdiği yere **odak noktası** denir ve f ile gösterilir. Odak uzaklığını bulmak için yukardaki formülde $p \to \infty$ alınırsa, $1/p = 0$ olur ve $q = R/2 = f$ bulunur. Odak noktası, ayna ile ayna merkezinin orta noktasıdır.

Sonuç olarak, f odak uzaklığı cinsinden, çukur ayna formülü şöyle olur:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad \text{(Çukur ayna formülü)}} \tag{22.10}$$

$f = R/2$ olduğu hatırlanırsa, her iki formülden biri kullanılabilir.

Bu formülü gerçek görüntü için ispatlamış olduk, fakat sanal görüntünün konumunu da doğru olarak verdiği kolayca anlaşılabilir.

(22.10) denklemi q için çözülürse,

$$q = \frac{pf}{p-f}$$

$p < f$ için, yani cisim odakla ayna arasında olduğunda, sağ taraf negatif olacaktır. Negatif işaretli görüntünün de sanal olacağını biliyoruz. Gerçekten de, Şekil 22.16-c de görüldüğü gibi, cisim odakla ayna arasında olduğunda sanal görüntü elde edilmektedir.

Büyütme oranı

Görüntünün h' olan boyunun, cismin h boyuna oranına *büyütme oranı* denir ve M ile gösterilir. Yukarda kullandığımız (22.8) bağıntısını tekrar yazarsak,

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \qquad \text{(Büyütme oranı)} \qquad (22.11)$$

olur. Bu kabule göre,

$M > 0$ ise görüntü sanal ve cisimle aynı yönde,

$M < 0$ ise görüntü gerçek ve cisme ters yönde olur.

Çukur aynalar ışığı toplamakta veya bir noktadan çıkan ışığı uzağa göndermekte kullanılırlar. Teleskoplarda, lazerlerde ve güneş enerjisinde ışığı odaklamakta kullanılırlar. Öte yandan, otomobil farları ve el fenerlerinde çukur ayna vasıtasıyla bir noktadan çıkan ışık çok uzağa paralel olarak gönderilebilir. Ayrıca, dişçi ve traş aynaları olarak daha büyük sanal görüntü verirler.



Şekil 22.18: Hubble uzay teleskobunda kullanılan çukur ayna.

Örnek 22.5

Bir çukur aynanın odak uzaklığı $f = 30\,\text{cm}$ dir. (a) Aynadan $120\,\text{cm}$ öteye konulan $1\,\text{m}$ büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur ve büyüklüğü ne kadardır? (b) Aynı soruyu $10\,\text{cm}$ öteye konulan $1\,\text{m}$ büyüklüğündeki cisim için cevaplayın.

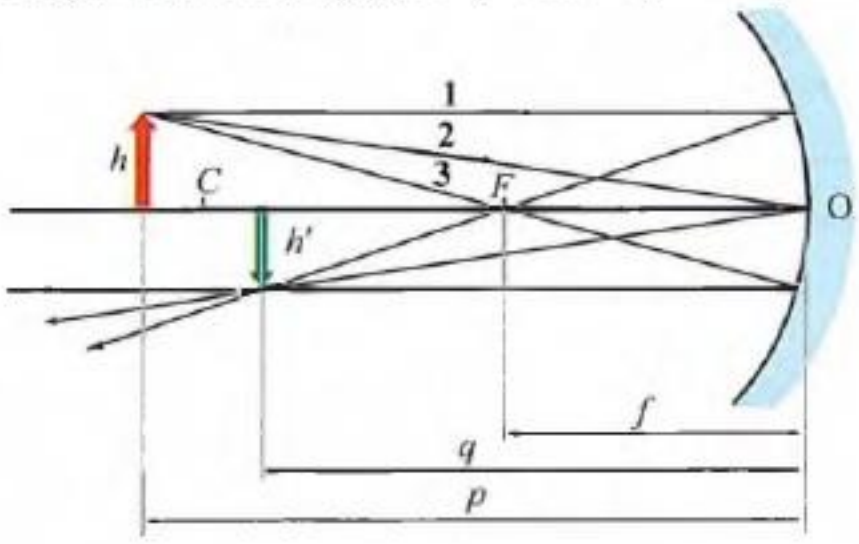
Çözüm

Ayna hesaplarında mutlaka bir grafik çizerek görüntü hakkında fikir sahibi olmak gerekir. Görüntü elde etmek için, bazı özel ışınlar yararlı olur. Aşağıdaki şekilde 3 özel ışın gösterilmiştir:

1. ışın: Sonsuzdan paralel gelen her ışın odaktan yansır.

2. ışın: Aynanın orta noktasına (O) düşen ışın eşit açıyla yansır.

3. ışın: Odaktan (F) geçen ışın eksene paralel yansır.



Bu 3 ışından sadece ikisi yeterli olur, çünkü görüntü iki ışının kesiştiği yerde olacaktır.

(a) Çukur ayna için bulduğumuz (22.10) formülü yazılır:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad q = \frac{pf}{p - f}$$

Ayna çukur ise odak uzaklığı pozitif alınır: $f = 30\,\text{cm}$. Buna göre, $p = 120\,\text{cm}$ ötedeki cismin görüntüsü hesaplanır:

$$q = \frac{120 \times 30}{120 - 30} = 40\,\text{cm}$$

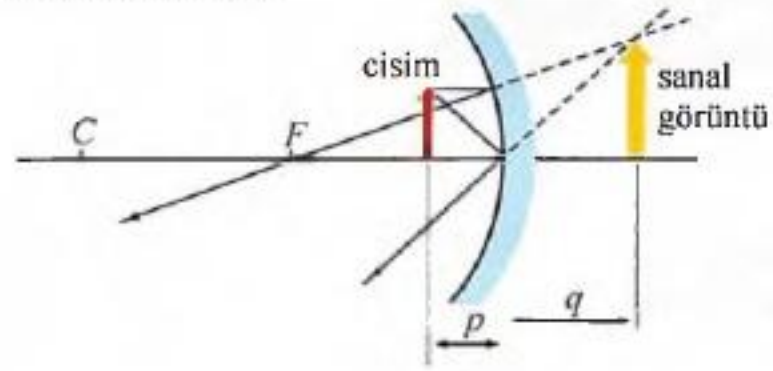
q pozitif olduğundan, görüntü gerçektir.

Görüntü büyüklüğünü bulmak için (22.11) formülü ile tanımladığımız M büyütme oranı kullanılır:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} = -\frac{40}{120} = -\frac{1}{3}$$

Eksi işareti görüntünün ters olduğunu söyler. O halde, ters yönde ve 3 kat küçülmüş gerçek bir görüntü oluşur.

(b) Bu kez cisim odak ile ayna arasına konulmuştur. Biri merkezden, diğeri odaktan geçen iki özel ışın alınırsa, görüntü şu şekilde oluşur:



Yine, aynı formülle görüntü yeri hesaplanır:

$$q = \frac{10 \times 30}{10 - 30} = -15\,\text{cm}$$

q negatif olduğundan, görüntü sanaldır.

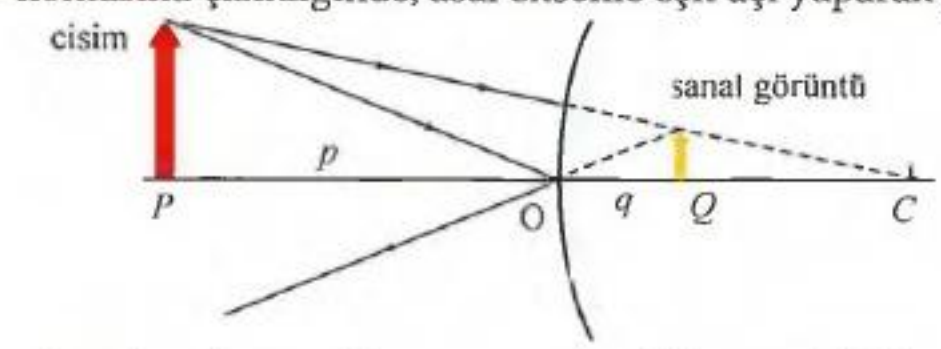
Sonra, büyütme oranı hesaplanır:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} = -\frac{(-15)}{10} = +1.5$$

Artı işareti görüntünün düz, yani cisimle aynı yönde olduğunu söyler. O halde, aynı yönde ve 1.5 kat büyük sanal bir görüntü oluşur.

Tümsek Ayna

Tümsek (dışbükey, konveks) ayna bir kürenin dış yüzeyinden ışınları yansıtır. Tümsek aynada cismin görüntüsünü elde etmek için, yine iki ışın alınır. Şekil 22.19 de görüldüğü gibi, ışınlardan biri kürenin C merkezine yönelik olduğu için, ayna yüzeyine dik gelir ve aynı doğrultuda yansır. Diğer ışın asal eksen üzerindeki O noktasına çizildiğinde, asal eksenle eşit açı yaparak yansıyacaktır.



Şekil 22.19: Tümsek aynada görüntü daima sanal olur.

Başka hangi ışınlar alınırsa alınsın, yansıyan iki ışın asla bir noktada kesişmezler, sadece uzantıları ayna arkasında kesişiyormuş gibi görünürler. O halde, tümsek aynada görüntü daima sanal olur.

Tümsek ayna için ayrıca bir formül geliştirmeye gerek yoktur. Çukur aynada, ayna arkasındaki sanal görüntünün p konumu eksi işaretli alınıyordu. Benzer şekilde, tümsek aynanın merkezi de ayna gerisinde yer aldığı için R yarıçapı, ve dolayısıyla f odak uzaklığı negatif alınırsa, aynı formül yine geçerli olur:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad \text{(Tümsek ayna: } f \text{ negatif)} \qquad (22.12)$$

Tümsek aynalarda görüntünün daima sanal, cisimle aynı yönde ve daha küçük olduğu kolayca ispat edilebilir. Ayna formülü, q için çözülürse,

$$q=\frac{pf}{p-f}$$



Şekil 22.20: Otomobillerde kanat aynası.

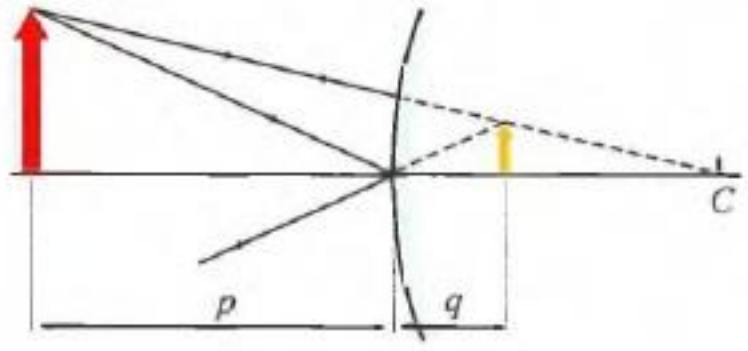
Bu formülde f nin negatif olduğu gözönüne alınırsa, pay daima negatif, payda daima pozitif olur. O halde, q daima negatif, yani görüntü sanal olacaktır. Tümsek aynalarda görüntü cisimden küçük olduğu için, daha geniş bir alanın görüntüsünü sığdırabilirler. Bu özelliğiyle otomobillerde kanat ve dikiz aynalarında, mağazalarda güvenlik amacıyla kullanılırlar.

Örnek 22.6

Bir tümsek aynanın odak uzaklığının büyüklüğü 20 cm *dir. Aynadan* 60 cm *öteye konulan* 1 m *büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur ve büyüklüğü ne kadardır?*

Çözüm

Biri sonsuzdan gelip odaktan yansıyan, diğeri merkeze yönelip kendi üzerinden yansıyan iki özel ışın alınırsa, görüntü şu şekilde oluşur:



Tümsek ayna için bulduğumuz (22.10) formülü yazılır:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \;\rightarrow\; q=\frac{pf}{p-f}$$

Ayna tümsek olduğu için odak uzaklığı *negatif* alınmalıdır: $f=-20\,\text{cm}$. Buna göre, görüntü yeri hesaplanır:

$$q=\frac{60\times(-20)}{60-(-20)}=-\frac{120}{80}=-15\,\text{cm}$$

q negatif olduğundan, görüntü sanaldır.

Sonra, büyütme oranı hesaplanır:

$$M=\frac{h'}{h}=-\frac{q}{p}=-\frac{(-15)}{20}=+\frac{3}{4}$$

Artı işareti görüntünün düz, yani cisimle aynı yönde olduğunu söyler. O halde, aynı yönde ve 3/4 oranında küçülmüş sanal bir görüntü oluşur.

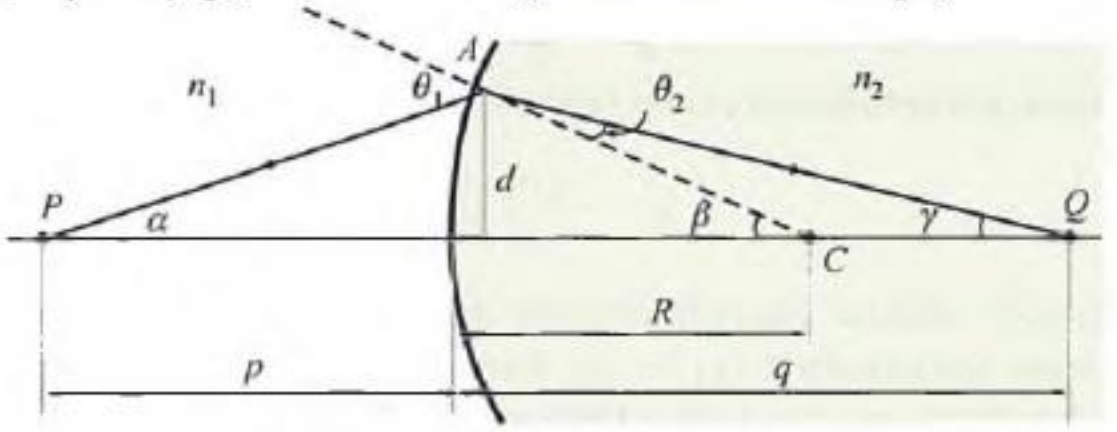
22.4 KIRILMA İLE GÖRÜNTÜ – MERCEKLER

Bir cisimden çıkan ışık ışınları başka bir ortama kırılarak geçtiğinde yine bir noktada kesişip görüntü oluşturabilirler. Camdan yapılmış merceklerde, ışınlar önce cam ortama girerler, burada kırılarak yollarına devam eder ve sonra yine birinci ortama çıkarlar. O halde, burada iki kez kırılma sözkonusudur.

Küresel Bir Yüzeyden Kırılma

Bir merceğin verdiği görüntüyü anlayabilmek için, önce problemin yarısını çözelim, yani önce yarı-sonsuz bir cam ortamındaki görüntüyü ele alalım.

Şekil 22.21 da kırılma indisi n_1 olan bir ortamdan gelen ışınlar R yarıçaplı küresel yüzeye düşüp, kırılma indisi n_2 olan ikinci ortama geçmektedirler.



Şekil 22.21: Küresel yüzeyde koordinatlar.

Bu kez cismi asal eksen üzerinde bir P noktası olarak alalım. Buradan çıkan iki ışından biri asal eksen olsun. Bu ışın yüzeye dik geldiğinden, hiç kırılmadan ikinci ortama geçer. Diğer ışın asal eksenle α açısı yaparak çıkıp, cam yüzeyine A noktasında normalle θ_1 açısı yaparak gelmiş olsun.

Snell yasasına göre bu ışın belli bir θ_2 açısıyla kırılacaktır. Görüntü, bu ışının asal ekseni kestiği Q noktasında oluşur.

Eğer α açısı çok küçük olan bir ışın seçilirse, ışın yüzeye neredeyse dik gelir, yani θ_1, ve dolayısıyla θ_2, çok küçük olurlar. Buna göre Snell yasası, küçük açılar için $\sin\theta \approx \theta$ alındığında, basitleşir:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2$$

Bir üçgende dış açı, komşu olmayan diğer iki iç açının toplamına eşittir. Bu özelliği PAC ve QAC üçgenlerine uygularsak,

$$\theta_1 = \alpha + \beta \qquad \text{ve} \qquad \beta = \theta_2 + \gamma$$

olur. Bu üç bağıntı arasından θ_1 ve θ_2 elenirse,

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \tag{22.13}$$

α, β, γ açıları çok küçük olduğundan, $\tan\theta \approx \theta$ yaklaşık ifadesini kullanarak, bu açıların tanjantlarını Şekil 22.21 dan hesaplayabiliriz. Her üç açıyı gören d dikmesi kullanılırsa,

$$\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{d}{p} \qquad \beta \approx \tan\beta \approx \frac{d}{R} \qquad \gamma \approx \tan\gamma \approx \frac{d}{q}$$

Bu üç açı değeri (22.13) denkleminde yerine konur ve sadeleştirilirse,

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \tag{22.14}$$

Bu formül her türlü n_1, n_2 değerleri için geçerlidir. Ayrıca, bu ispat tümsek bir küre yüzeyi için yapıldı. Ama, çukur bir küre yüzeyi için de geçerli olduğu gösterilebilir. Bunun için, kürenin R yarıçapının işareti şöyle kararlaştırılır. *Küre yüzeyinin C merkezi n_2 ortamı içindeyse R pozitif, dışında kalıyorsa R negatif alınır.* O zaman bu formül çukur yüzeyden kırılma için de geçerli olur.

Bu ifade daha sonra mercek formülünü çıkartmakta kullanılacaktır.

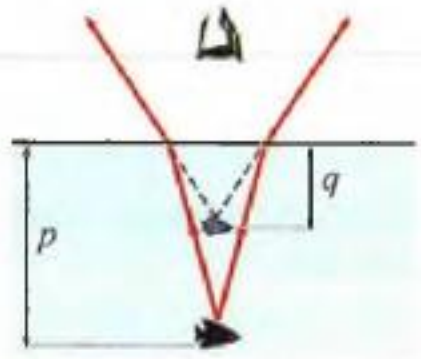
Düzlem Yüzeyde Kırılma

Yukardaki formülü, arakesit yüzeyinin düzlem olduğu özel duruma uygulayalım. Düzlemi yarıçapı sonsuz olan bir küre gibi düşünürsek, (22.14) formülünde $R \to \infty$ alındığında,

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0$$

olur. Buradan, görüntünün konumu bulunur:

$$q = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right) p \tag{22.15}$$



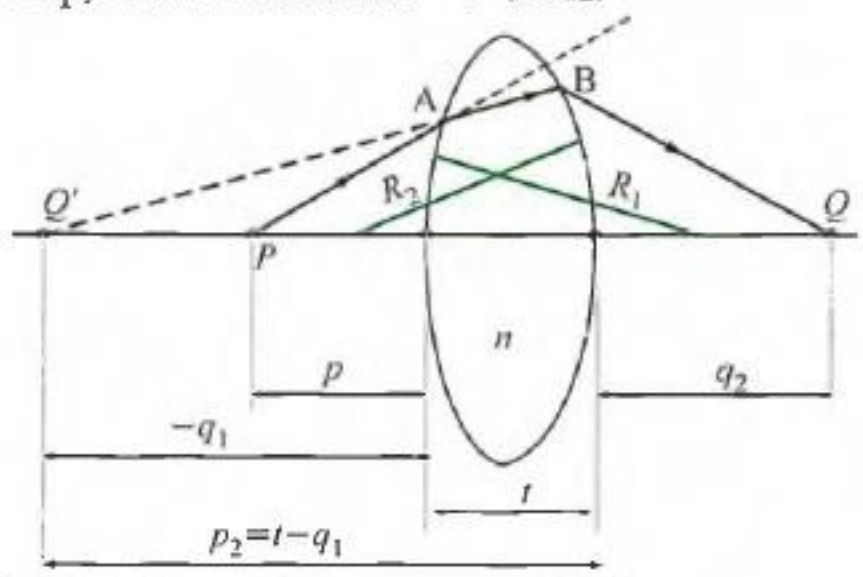
Şekil 22.22: Dışardan bakıldığında, suyun içindeki balık daha yakın görünür.

Bu sonuca göre, düzlem yüzeyde görüntü daima sanal olur. Örneğin, dışardan havuzun içine baktığımızda ($n_1 > n_2$) havuzu daha sığ görürüz. Keza, suyun içinden bakan balık ($n_1 < n_2$) bizi olduğumuzdan daha uzakta görür.

İnce Mercekler

İki yüzeyi de küresel olan cam mercekler, her türlü optik alette ve gözlüklerde kullanılırlar. Bu yüzeylerin tümsek veya çukur oluşuna göre, görüntü gerçek veya sanal olabilir. Yüzeyi tümsek olan merceklere **yakınsak mercek**, çukur olanlara da **ıraksak mercek** denir. Bu adlandırma daha sonra anlaşılacaktır.

Tüm mercekler için geçerli olabilecek bir formül elde etmek için (22.14) formülünü iki kez kullanmak gerekir. Hesapları basite indirgemek için, birinci ortamı hava kabul edip, kırılma indisini $n \approx 1$ alırız.



Şekil 22.23: t kalınlığında mercek için koordinatlar.

Şekil 22.23 de birinci yüzeyinin yarıçapı R_1, ikinci yüzeyinin yarıçapı R_2 olan ve t kalınlığında bir mercek gözönüne alalım. Bu merceğin dışındaki ortamda, bir P noktasındaki cismin merceğe uzaklığı p_1 olsun. Bu cisimden çıkan ışınların içe doğru kırılarak geride oluşturduğu sanal ilk görüntünün (Q') konumu da q_1 olsun (q_1 negatif). Buna göre, (22.14) denklemini hava ($n_1 = 1$) ve cam ($n_2 = n$) arakesitindeki R_1 yarıçaplı yüzeye uygularsak,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1}$$

olur. Bu q_1 sanal görüntüsünde kesişen ışınlar, buradan itibaren yollarına devam edip t uzaklıktaki ikinci yüzeye gelirler. Camın kalınlığı t ise, bu ara görüntü,

ikinci yüzey için $p_2 = t - q_1$ konumunda bir cisim sayılır. (22.14) denklemini bu kez cam ($n_1 = n$) ve hava ($n_2 = 1$) arakesitindeki R_2 yarıçaplı yüzeye uygularız:

$$\frac{n}{t - q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2}$$

Burada dikkat edelim: R_2 yarıçapı içerde olduğundan *negatif* bir sayıdır!

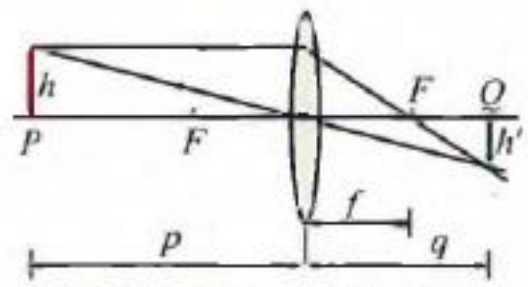
Şimdi, ince mercek varsayımına geçtiğimizde $t \approx 0$ alınır ve bu iki denklem taraf tarafa toplanarak q_1 elenir. Ayrıca, indisleri atıp ilk cisim ($p_1 = p$) ve son görüntü ($q_2 = q$) olarak yeniden adlandırılırsa, sonuç şöyle bulunur:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{(Mercekçi formülü)} \qquad (22.16)$$

Bu sonuç **mercekçi formülü** adıyla bilinir. Bunu daha kullanışlı hale getirmek için, f odak uzaklığı cinsinden yazabiliriz. $p \to \infty$ olduğunda $q = f$ olacağı için, bu değerler yerine konulursa,

$$0 + \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

olup, yakınsak (tümsek) mercek için $R_1 > 0$ ve $R_2 < 0$ alındığından, f pozitif olur. Iraksak (çukur) mercek için $R_1 < 0$ ve $R_2 > 0$ olduğundan f negatif olur. Işınlar her iki yönde de gidebildikleri için, her merceğin iki odak noktası olur.

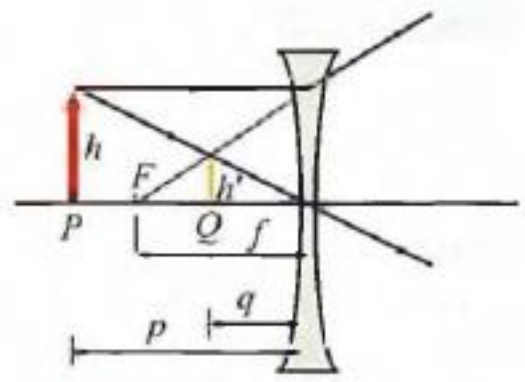


Şekil 22.24: Yakınsak mercek.

Sonuç olarak, hem yakınsak hem de ıraksak mercek için geçerli ince mercek formülü şöyle oluşur:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad \text{(İnce mercek formülü)} \qquad (22.17)$$

Yakınsak mercek için f pozitif, ıraksak mercek için f negatif alınır. q pozitif ise görüntü gerçek, negatif ise sanal olur.



Şekil 22.25: Iraksak mercek.

Büyütme Oranı

Aynalarda olduğu gibi, görüntünün h' boyunun cismin h boyuna oranı büyütme oranı olup, konumlarla ilişkisi şöyledir:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \qquad (22.18)$$

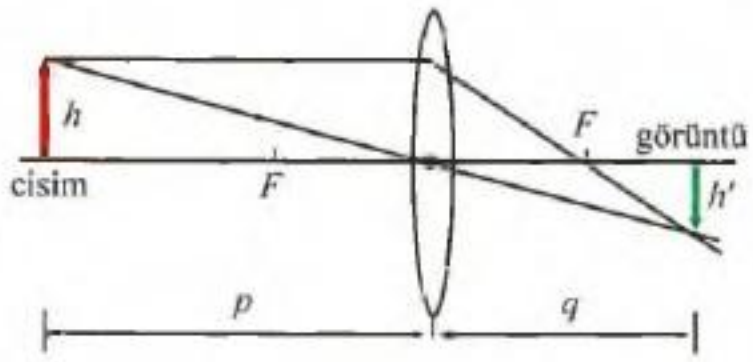
M pozitif ise görüntü cisimle aynı yönde ve sanal, negatif ise görüntü ters yönde ve gerçek demektir.

Örnek 22.7

İnce bir yakınsak merceğin odak uzaklığı $f = 40\,\text{cm}$ *dir. (a) Mercekten* 60 cm *öteye konulan* 1 m *büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur ve büyüklüğü ne kadardır? (b) Aynı soruyu* 30 cm *öteye konulan cisim için cevaplayın.*

Çözüm

(a) Görüntü oluşturmak için, biri sonsuzdan eksene paralel gelip odaktan geçen, diğeri de mercek ortasından kırılmadan geçen iki özel ışın alalım. Buna göre, görüntü şu şekilde oluşur:



Mercekler için bulduğumuz (22.17) formülü yazılır:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad q=\frac{pf}{p-f}$$

Mercek yakınsak olduğundan odak uzaklığı pozitif alınır: $f = 40\,\text{cm}$. Buna göre, $p = 60\,\text{cm}$ ötedeki cismin görüntüsü hesaplanır:

$$q=\frac{60\times 40}{60-40}=120\,\text{cm}$$

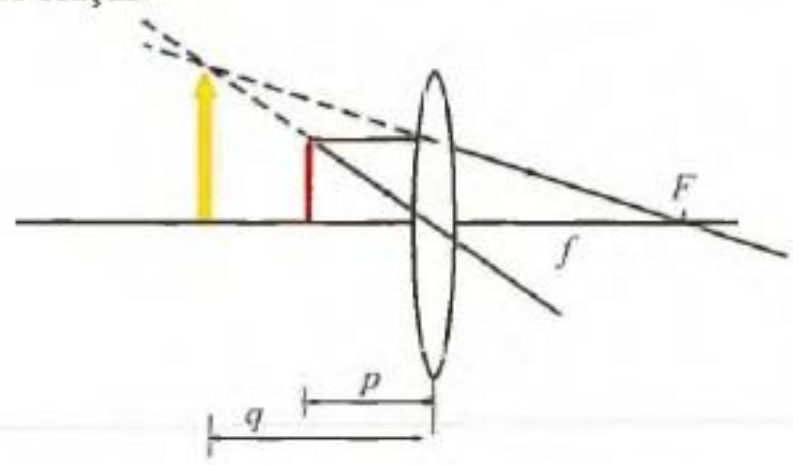
q pozitif olduğundan, görüntü gerçektir.

Görüntü büyüklüğünü bulmak için (22.11) formülü ile tanımladığımız M büyütme oranı kullanılır:

$$M=-\frac{q}{p}=-\frac{120}{60}=-2$$

Eksi işareti görüntünün ters olduğunu söyler. O halde, ters yönde ve 2 kat büyük gerçek bir görüntü oluşur.

(b) Bu kez cisim odak ile mercek arasına konulmuştur. Biri merceğin ortasından kırılmadan geçen, sonsuzdan eksene paralel gelip odaktan geçen iki özel ışın alınırsa, görüntü şu şekilde oluşur:



Yine, aynı formülle görüntü yeri hesaplanır:

$$q=\frac{30\times 40}{30-40}=-120\,\text{cm}$$

q negatif olduğundan, görüntü sanaldır.

Sonra, büyütme oranı hesaplanır:

$$M=-\frac{q}{p}=-\frac{(-120}{30}=+4$$

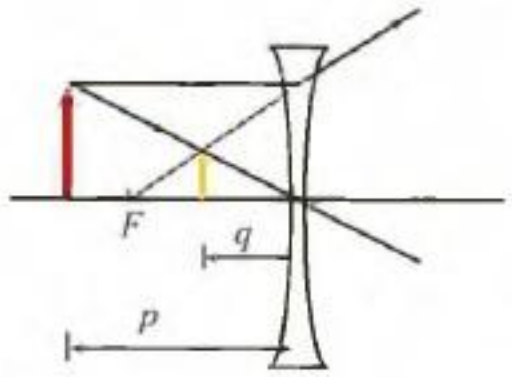
Artı işareti görüntünün düz, yani cisimle aynı yönde olduğunu söyler. O halde, aynı yönde ve 4 kat büyük sanal bir görüntü oluşur.

Örnek 22.8

Iraksak bir merceğin odak uzaklığının büyüklüğü 50 cm *dir. Mercekten* 75 cm *öteye konulan* 1 m *büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur ve büyüklüğü ne kadardır?*

Çözüm

Biri sonsuzdan gelip odaktan yansıyan, diğeri merkeze yönelip kırılmadan geçen iki özel ışın alınırsa, görüntü şu şekilde oluşur:



İnce mercek formülü formülü yazılır:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad q=\frac{pf}{p-f}$$

Mercek ıraksak olduğu için odak uzaklığı *negatif* alınmalıdır: $f = -50\,\text{cm}$. Buna göre, görüntü yeri hesaplanır:

$$q=\frac{75\times(-50)}{75-(-50)}=-\frac{3750}{125}=-30\,\text{cm}$$

q negatif olduğundan, görüntü sanaldır.

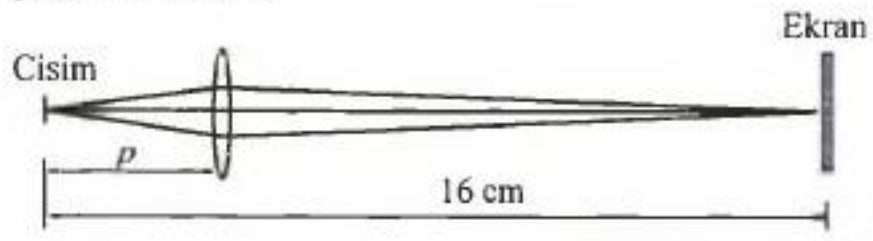
Sonra, büyütme oranı hesaplanır:

$$M=-\frac{q}{p}=-\frac{(-30)}{75}=+\frac{2}{5}=0.4$$

Artı işareti görüntünün düz, yani cisimle aynı yönde olduğunu söyler. O halde, aynı yönde ve 2/5 oranında küçülmüş sanal bir görüntü oluşur.

Örnek 22.9

Bir cisim bir ekrandan 16 cm *öteye konuluyor. Odak uzaklığı* 3 cm *olan yakınsak bir mercekle cismin ekran üzerinde görüntüsü elde edilmek isteniyor. Mercek cisimden ne kadar uzağa konulmalıdır?*



Çözüm

Görüntü ekran üzerine düşeceği için gerçek görüntü olmalıdır (q pozitif). O halde, bilinmeyen p ve q arasındaki birinci ilişki şöyle olur:

$$p+q=16$$

İkinci olarak, bu p, q değerleri, mercek formülünü sağlar:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}=\frac{1}{3}$$

Birinci bağıntıdan $q = 16 - p$ alınarak bu denklemde yerine konulursa, p için bir denklem elde edilir:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{16-p}=\frac{1}{3} \rightarrow p^2-16p+48=0$$

Bu 2. derece denklemin kökleri bulunur ve p den giderek q hesaplanır:

$$p=\begin{cases}4\,\text{cm}\\12\,\text{cm}\end{cases} \rightarrow q=\begin{cases}12\,\text{cm}\\4\,\text{cm}\end{cases}$$

Örnek 22.10

Odak uzaklığı 20 cm *olan yakınsak bir merceğin önüne konulan cismin görüntüsü ters yönde ve 3 kat büyük oluyor. Cismin konumunu bulun.*

Çözüm

Bu problemde 2 bilinmeyen (p,q) için iki denklem kurup çözüme gidilir. Bunlardan birincisi mercek denklemidir:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}=\frac{1}{20}$$

Diğer denklem büyütme oranından bulunur:

$$M=-\frac{q}{p}$$

Görüntü ters yönde olduğundan büyütme oranı negatif alınmalıdır:

$$-3=-\frac{q}{p} \rightarrow q=3p$$

Bu q ifadesi mercek denkleminde yerine konulup p için çözülür:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}=\frac{1}{20} \rightarrow p=\frac{3\times 20}{4}=15\,\text{cm}$$

Görüntünün konumu ise $q=3p=45$ cm olarak bulunur.

22.5 OPTİK ALETLER

Göz

Optik aletlerin en mükemmeli olan insan gözü, çok geniş bir aralıktaki cisimleri görebilir ve renklerini ayırdedebilir. Göz 2.5 cm çaplı bir küre şeklinde olup, *sert tabaka* denilen dış yüzeyinin ön tarafında *kornea* (saydam tabaka) bulunur ve pencere görevi yapar. Korneanın arkasında *ön oda* denilen, içi sıvı dolu bir boşluk bulunur. Daha sonra, *iris* denilen ortası açık bir perdenin ortasında saydam *gözbebeği* bulunur.

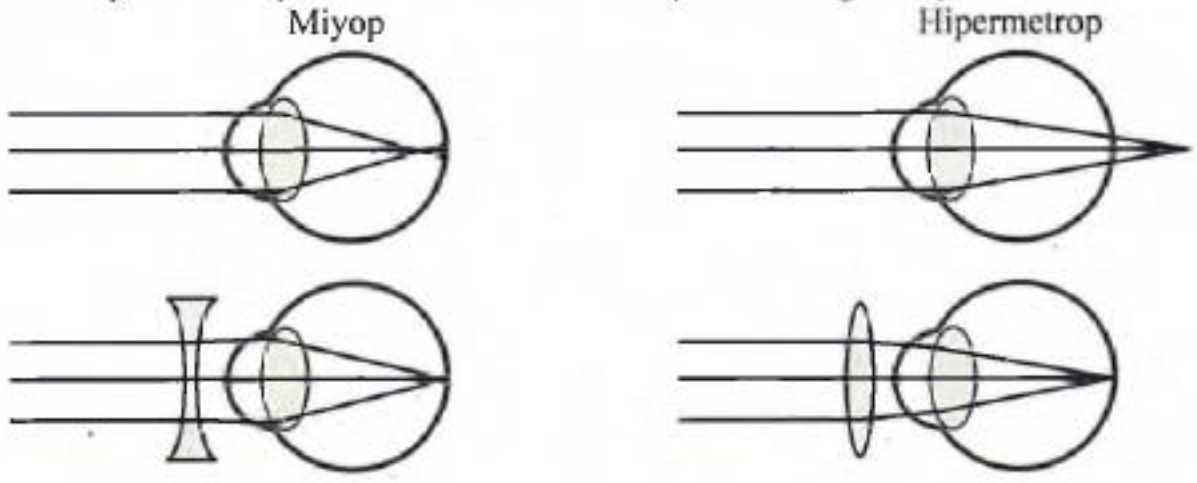
Gözbebeği kasılıp açılarak göze giren ışık miktarını düzenler. Bunun arkasında, kırılma indisi 1.396 kadar olan göz merceği yer alır. Çevresindeki kirpiksi kaslar merceği tutarlar. Daha sonra içi sıvıyla dolu *arka oda* bulunur.

Gözün arka duvarı *retina* (ağ tabaka) olup, çok sayıda sinir uçları (nöronlar) ile kaplıdır. Sinir uçlarının en yoğun olduğu *fovea* (sarı leke) bölgesi net görmeyi sağlar. Biraz ötede, sinir uçlarının toplandığı *optik disk* bölgesi *kör nokta* olur, buraya düşen ışınlar göze iletilmez. Sinir uçlarının bağlı olduğu **görme siniri** aldığı sinyalleri beyne iletir.

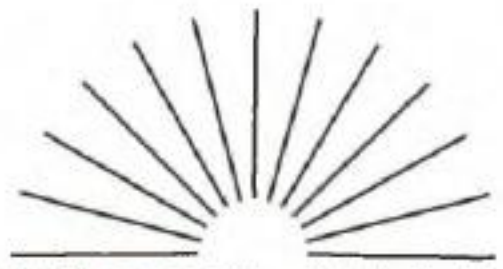
Göz bir cismin görüntüsünü retina üzerinde oluşturarak görmeyi sağlar. Bu amaçla, merceği tutan kaslar gevşeyip kasılarak merceğin odak uzaklığını değiştirir ve ışınların retina üzerinde kesişmesini sağlarlar. Kasların gevşek olduğu durum, gözün sonsuza odaklanmış halidir. Cisim göze yaklaştıkça kaslar giderek daha fazla kasılır, ve sonunda *yakın nokta* denilen belli bir yerden sonra artık net göremez. Yakın nokta yetişkinlerde 25 cm kadardır. Yaşlandıkça kaslar esnekliğini giderek yitirir ve yakın nokta 2-3 metreye kadar gerileyebilir.



Şekil 22.26: Göz yapısı.



Şekil 22.27: Miyop gözde görüntü retinadan önde oluşur, ıraksak mercekle düzeltilir. Hipermetrop gözde görüntü retinanın gerisinde oluşur, yakınsak mercekle düzeltilir.



Şekil 22.28: Tek gözle baktığınızda, bu çizgileri aynı kalınlıkta görmüyorsanız, sizde astigmatizm var demektir.

Kusurlu gözlerde retina üzerinde net görüntü oluşmaz. Görüntü retinadan önde oluşuyorsa **miyop**, retinadan geride oluşuyorsa **hipermetrop** göz kusuru var demektir. Miyoplar için ıraksak mercek, hipermetroplar için yakınsak mercek kullanılarak kusur düzeltilir.

Diğer bir göz kusuru olan **astigmatizm** gözün yatay ve düşey düzlemlerde eğrilik farkından kaynaklanır. Astigmat göz yatay ve dikey çizgileri aynı netlikte görmez.

Diyoptri (D). Bir merceğin görme gücünü ifade eden birimdir ve D ile gösterilir. Diyoptri, metre biriminde ifade edilen f odak uzaklığının tersi olarak tanımlanır:

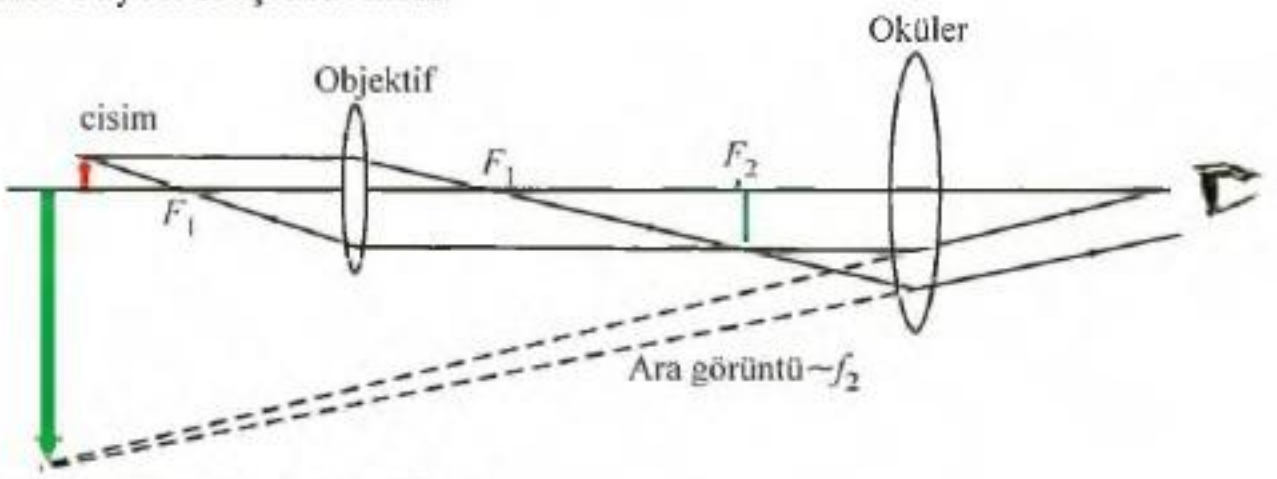
$$D = \frac{1}{f}$$

Örneğin, $D = 3$ olan bir mercek, paralel gelen ışınları $f = 1/D = 1/3\,\text{m} = 33\,\text{cm}$ ye odaklayacaktır.

Mikroskop

Çok küçük cisimleri görebilmek için gözümüze yaklaştırırız. Fakat, gözün yakın noktasından daha öne getiremeyiz, çünkü yakın noktadan sonra göz cisme odaklanamaz. Bu durumda basit bir büyüteç veya daha karmaşık bir mikroskop kullanılır.

Mikroskop en az iki yakınsak mercekten oluşur. Bunlardan **objektif** denileni cisme yakın tarafta olur ve odak uzaklığı $2 - 40\,\text{mm}$ kadardır. Gözle bakılan taraftakine **oküler** denir, odak uzaklığı çok daha küçüktür. Mikroskobun çalışma ilkesi kabaca şöyledir: Küçük cismin daha büyük ve gerçek bir görüntüsünü okülerin odağı yakınında elde edersek, son görüntüyü gözün yakın noktasında ve çok daha büyük oluşturabiliriz.



Şekil 22.29: Mikroskop. Cisim objektif odağının hemen ötesine konur. Ara görüntü oküler odağının hemen berisinde oluşur. Son görüntü sonsuzdadır.

Şekil 22.29 deki mikroskop şemasında cisim objektif odağının hemen önüne yerleştirilir. Böylece, daha büyük ve gerçek bir ara görüntü oluşur. Bu görüntüden ıraksayarak çıkan ışınlar oküler için yeni bir cisim sayılır. O zaman, oküler mesafesi değiştirilerek aradaki bu gerçek görüntünün oküler odağına yakın olması sağlanır.

Büyütme oranı formülünü hatırlayalım: Cismin boyu h ve konumu p, görüntünün boyu h' ve konumu q ile gösterilirse,

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

olur. Önce, objektifteki M_1 büyütmesini hesaplayalım: Cisim objektif odağına yakın konulduğundan $p \approx f_1$ alınabilir. Eksi işaretiyle ilgilenmezsek, objektifin

büyütmesi şöyle olur:

$$M_1 = \frac{q_1}{f_1}$$

Oküler için büyütme oranı hesaplanırken şuna dikkat edilir: Göz için önemli olan açısal büyütmedir. Cismin boyu küçük de olsa, onu yakına getirdiğimizde gördüğü açı büyük olur. Örneğin, gözün yakın noktasındaki bir toplu iğne, uzaktaki direkten daha büyük algılanır. İşte bu yüzden, okülerin verdiği son görüntünün gözün yakın noktasında, yani yaklaşık 25 cm uzakta olması istenir. Buna göre, okülerin büyütmesi ($p_2 = f_2$ ve $q_2 = 25$ cm için):

$$M_2 = \frac{25\,\text{cm}}{f_2}$$

olur. Bu sonuçları birleşirirsek, mikroskobun toplam büyütmesi bu iki büyütmenin çarpımı olur:

$$M = M_1 M_2 = \frac{(25\,\text{cm})\, q_1}{f_1 f_2} \tag{22.19}$$

Görünür ışıkla çalışan mikroskopların büyütmesi sınırlıdır. Çok daha güçlü mikroskoplar elektron demetleri kullanarak yapılır.

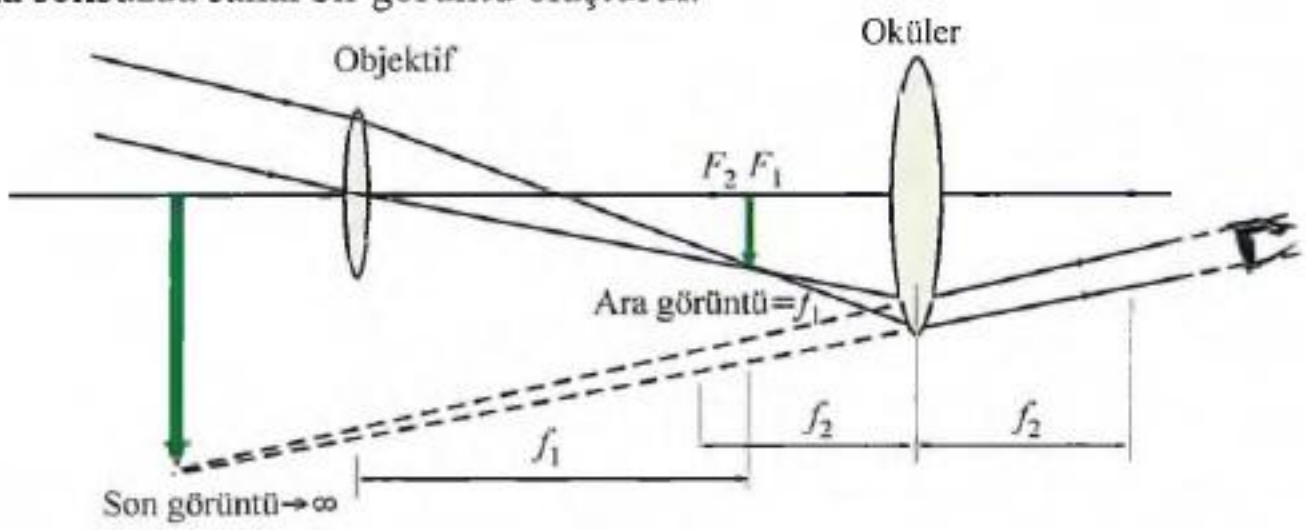


Şekil 22.30: 1879 yapımı bir mikroskop.

Teleskop

Gökcisimlerini ve uzaklardaki diğer cisimleri daha büyük ve ayrıntılı görebilmek için teleskop kullanılır. İki tür teleskop olabilir: Sadece mercek kullanan kırılma teleskopları ve mercek–ayna karışımı yansıma teleskopları.

Teleskobun çalışma ilkesi, sonsuzdaki cismin görüntüsünü yine sonsuzda ama daha büyük olarak vermektir. Yine objektifin verdiği gerçek görüntü okülerde daha da büyütülerek sonsuzda oluşturulur. Şekil 22.31 da gösterilen şemada, sonsuzdan paralel gelen ışınlar objektifin odağında ters ve gerçek görüntü verirler. Okülerin odağı da tam bu noktada olursa, bu ara görüntüden aldığı ışınlarla sonsuzda sanal bir görüntü oluşturur.



Şekil 22.31: Teleskop sonsuzdaki cismin daha büyük görüntüsünü yine sonsuzda verir.

Teleskobun açısal büyütmesi, görüntünün kapsadığı θ açısının çıplak gözle bakılan cismin θ_0 açısına oranı olarak tanımlanır:

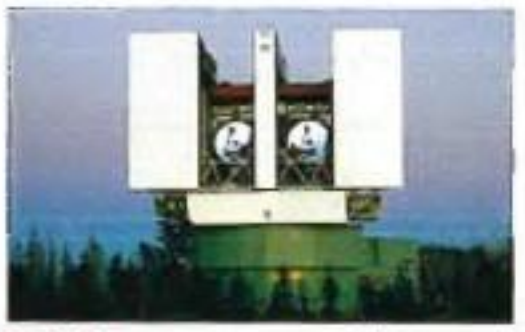
$$M = \frac{\theta}{\theta_0}$$

Şekilde görüldüğü gibi, cismin objektifte kapsadığı θ_0 açısı ara görüntünün objektifte kapsadığı açıya eşit olur. Bunun tanjantı küçük açılar için $\tan\alpha \approx \alpha$ şeklinde yaklaşık alınır. Objektifin odak uzaklığı f_o ile gösterilirse,

$$\theta_0 \approx \tan\theta_0 = \frac{h'}{f_o}$$

olur. Benzer şekilde, son görüntünün gözümüzde kapsadığı θ açısı, ara görüntüden buna paralel çizilen ışının okülerde kapsadığı açıya eşittir. Bunun da tanjantı küçük açılar için yaklaşık alınır. Okülerin odak uzaklığı f_e ile gösterilirse,

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{h'}{f_e}$$



Şekil 22.32: Arizona'daki Mount Graham teleskobu 2×8.4 metre çapıyla dünyanın en büyük yansıtmalı teleskobudur.

Bu iki bağıntıdan, teleskobun açısal büyütme oranı bulunur:

$$M = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{f_o}{f_e} \tag{22.20}$$

Teleskobun büyütme oranı objektifin odak uzaklığıyla orantılı olduğundan, çok büyük mercekler kullanmak gerekir. Fakat, büyük merceklerin yapımı hem pahalı hem de monte edilmesi zor olduğundan, ayna kullanan yansımalı teleskoplar tercih edilir. Keza, astronomide görünür ışık yerine radyo dalgaları, X-ışınları veya gama ışınları teleskopları da kullanılır.

Test

1. Elektromanyetik dalga için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Elektrik alan ilerleme yönüne dik, manyetik alan paraleldir.
   (b) Manyetik alan ilerleme yönüne dik, elektrik alan paraleldir.
   (c) Elektrik ve manyetik alanlar ilerleme yönüne diktir.

2. Elektromanyetik dalgaların şu sıralamalarından hangisi artan frekansa göre düzenlenmiştir?
   (a) Mikrodalga-X ışını-kızılötesi-morötesi
   (b) Kızılötesi-morötesi-X ışını-mikrodalga
   (c) Mikrodalga-kızılötesi-morötesi-X ışını

3. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
   I. Işığın hızı azaldıkça dalgaboyu azalır.
   II. Ortamın kırılma indisi arttıkça ışık hızı azalır.
   III. Ortamın kırılma indisi arttıkça dalgaboyu azalır.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) Hepsi

4. Kırılma indisi $n = 1.5$ olan bir ortamda ışık hızı ne kadardır?
   (a) 1.5×10^8 m/s (b) 2×10^8 m/s (c) 2.5×10^8 m/s

5. Huygens-Fresnel ilkesi aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) Üzerine dalga düşen ortamın her noktası dalgayı olduğu gibi yansıtır.
   (b) Üzerine dalga düşen ortamın her noktası yeni bir dalga kaynağı oluşturur.
   (c) Üzerine dalga düşen ortamın her noktasında geçen ve yansıyan iki dalga oluşur.

6. Snell yasası aşağıdakilerden hangisidir?
   (a) $n_1 \cos\theta_1 = n_2 \cos\theta_2$
   (b) $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
   (c) $n_1/\sin\theta_1 = n_2/\sin\theta_2$

7. Su ortamından havaya gönderilen ışık ışını için hangisi doğrudur?
   (a) Her zaman havaya geçer.
   (b) Kritik bir açıdan büyük açılarda geçer.
   (c) Kritik bir açıdan küçük açılarda geçer.

8. Su ($n = 1.3$) ve cam ($n = 1.5$) arakesitine gelen bir ışın için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   (a) Işınlar her zaman camdan suya geçer.
   (b) Işınlar her zaman sudan cama geçer.
   (c) Işınlar her zaman iki yönde de geçer.

9. Gerçek bir cismin aynadaki görüntüsü hangi durumlarda gerçek olur?
   I. Bir ekran üzerinde gözleniyorsa,
   II. Yansıyan ışınlar bir noktada kesişiyorsa,
   III. Görüntü ters ise.
   (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) Hepsi

10. Bir çukur aynada gerçek cismin görüntüsü ne zaman sanal olur?
    (a) Cisim merkezle odak arasında ise,
    (b) Cisim odakla ayna arasında ise,
    (c) Cisim sonsuzla odak arasında ise.

11. Bir tümsek aynada gerçek cismin görüntüsü ne zaman gerçek olur?
    (a) Cisim merkezle odak arasında ise,
    (b) Cisim odakla ayna arasında ise,
    (c) Hiçbir yerde.

12. Eğrilik yarıçapı 40 cm olan çukur aynanın odak uzaklığı ne kadardır?
    (a) 10 cm (b) 20 cm (c) 40 cm (d) 80 cm

13. Eğrilik yarıçapı 20 cm olan tümsek aynanın odak uzaklığı ne kadardır?
    (a) -20 cm (b) -10 cm (c) 10 cm (d) 40 cm

14. Bir yakınsak mercekte gerçek cismin görüntüsü ne zaman sanal olur?
    (a) Cisim merkezle odak arasında ise,
    (b) Cisim odakla mercek arasında ise,
    (c) Cisim sonsuzla odak arasında ise.

15. Bir ıraksak mercekte gerçek cismin görüntüsü ne zaman gerçek olur?
    (a) Cisim merkezle odak arasında ise,
    (b) Cisim odakla mercek arasında ise,
    (c) Hiçbir yerde.

16. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?
    I. Tümsek aynada görüntü daima sanaldır.
    II. Tümsek aynada görüntü daima düzdür.
    III. Çukur aynada görüntü daima sanaldır.
    IV. Çukur aynada görüntü daima terstir.
    (a) I ve II (b) I ve III (c) II ve III (d) II ve IV

17. Büyütme oranı M için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) $M > 0$ ise, görüntü ters ve gerçektir.
    (b) $M > 0$ ise, görüntü düz ve gerçektir.
    (c) $M > 0$ ise, görüntü ters ve sanaldır.
    (d) $M > 0$ ise, görüntü düz ve sanaldır.

18. Büyütme oranı M için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) $M < 0$ ise, görüntü ters ve gerçektir.
    (b) $M < 0$ ise, görüntü düz ve gerçektir.
    (c) $M < 0$ ise, görüntü ters ve sanaldır.
    (d) $M < 0$ ise, görüntü düz ve sanaldır.

19. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
    (a) Miyop gözde görüntü retinadan önde oluşur.
    (b) Miyop gözde görüntü retinadan geride oluşur.
    (c) Hipermetrop gözde görüntü retinadan önde oluşur.

20. Bir mikroskobun objektifi 5 kat, oküleri 20 kat büyütme sağlıyorsa, mikroskobun büyütme oranı ne kadardır?
    (a) 25 (b) 30 (c) 50 (d) 100

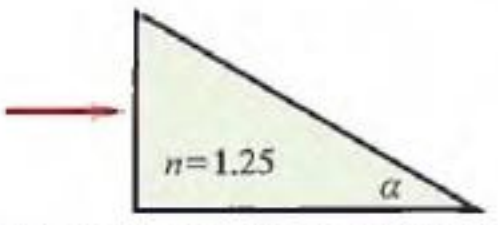
Problemler

22.2 Yansıma ve Kırılma

22.1 Boşluktaki dalgaboyu 600 nm olan ışık, kırılma indisi 1.5 olan cam ortamına giriyor. (a) Bu ışığın boşluktaki frekansı ne kadardır? (b) Cam ortamındaki hızı ne kadar olur? (c) Cam ortamında dalgaboyu ne kadar olur?
[C: (a) 5×10^{14} Hz, (b) 2×10^8 m/s, (d) 400 nm.]

22.2 Sudaki dalgaboyu 500 nm olan belli bir frekanstaki ışığın, camdaki dalgaboyu ne olur? ($n_{su} = 1.33$, $n_{cam} = 1.5$.)
[C: 440 nm.]

22.3 Bir ışık ışını, havadan cama normalle 60° açı altında gönderildiğinde, kırılma açısı 37° oluyor. Camın kırılma indisini tayin edin. [C: 1.45.]

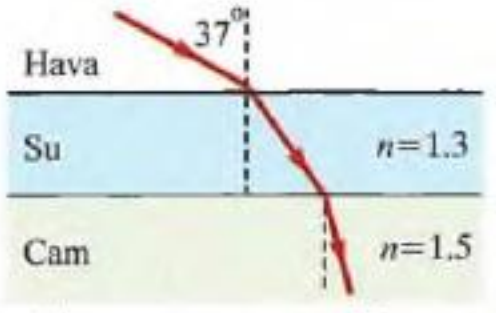


Problem 22.4

22.4 Şekilde saydam plastikten yapılmış ve diküçgen şeklindeki prizmanın bir yüzünden ışın yüzeye dik olarak giriyor. Işının hipotenüsten dışarı çıkamaması için α açısı en az ne kadar olmalıdır? [C: 37°.]

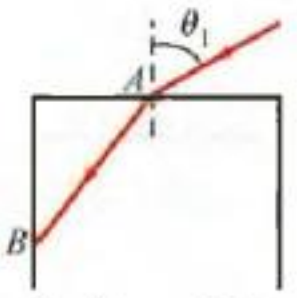
22.5 Derinliği 4 m olan bir gölün dibindeki balık, su yüzeyindeki hangi yarıçaplı bölgeden giren ışınları görebilir? (Suyun kırılma indisi 1.33.) [C: 4.6 m.]

22.6 Alttaki şekilde, yüzeyleri paralel su ve cam tabakaları üst üste konulmuşlardır. Havadan 37° geliş açısıyla suya giren bir ışının cam tabakasındaki kırılma açısı ne kadar olur?
[C: 24°.]



Problem 22.6 ve **Problem 22.7**

22.7 Üstteki şekildeki cam tabakasından yukarı doğru gönderilen ışınlar en fazla hangi açıda su tabakasına geçebilirler? [C: 60°.]



Problem 22.8

22.8 Şekilde kırılma indisi $n = 1.4$ olan cam bloğun üst yüzünden giren ışığın, yan yüzeydeki B noktasından dışarı çıkamaması için, θ_1 geliş açısı en az ne kadar olmalıdır? (*Yol gösterme:* B deki kritik açının A daki kırılma açısıyla ilişkisi nedir?) [C: 78°.]

22.3 Yansıma ile Görüntü - Aynalar

22.9 Bir çukur aynanın odak uzaklığı $f = 30\,\text{cm}$ dir. (a) Aynadan 40 cm öteye konulan 1 m büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur, büyüklüğü ne kadardır ve cinsi nedir? (b) Aynı soruyu 15 cm öteye konulan 1 m büyüklüğündeki cisim için cevaplayın.

[C: (a) $q = 120\,\text{cm}$, gerçek, ters ve 3 kat büyük. (b) $q = -30\,\text{cm}$, sanal, düz ve 2 kat büyük.]

22.10 Bir tümsek aynanın odak uzaklığının büyüklüğü 10 cm dir. Aynadan 40 cm öteye konulan 1 m büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur, büyüklüğü ne kadardır ve cinsi nedir?

[C: $q = -8\,\text{cm}$, sanal, düz ve 5 kat küçük.]

22.11 Bir cisim çukur bir aynanın 25 cm önüne konulduğunda görüntü ters ve 4 kat büyük oluyor. Aynanın odak uzaklığı nedir? [C: $f = 20\,\text{cm}$.]

22.12 Bir cisim odak uzaklığının büyüklüğü 40 cm olan tümsek bir aynanın önüne konulduğunda görüntüsü düz ve 4 kat küçük oluyor. Cismin yeri neresidir?

[C: $p = 120\,\text{cm}$.]

22.13 Bir cisim ile ekran arasındaki uzaklık 90 cm dir. Odak uzaklığı 20 cm olan bir çukur ayna cisimden ne kadar öteye konulmalıdır ki ekranda net bir görüntü elde edilebilsin?

[C: $p = 30\,\text{cm}$ ve 60 cm.]

22.14 Bir tümsek aynanın önüne konulan cismin görüntüsü 15 cm ayna gerisinde, düz ve 4 kat küçük oluyor. Aynanın odak uzaklığı ne kadardır? [C: $f = -20\,\text{cm}$.]

22.4 Kırılma ile Görüntü - Mercekler

22.15 İnce bir yakınsak merceğin odak uzaklığı $f = 30\,\text{cm}$ dir. (a) Mercekten 90 cm öteye konulan 1 m büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur, büyüklüğü ne kadardır ve cinsi nedir? (b) Aynı soruyu 10 cm öteye konulan cisim için cevaplayın.

[C: (a) $q = 45\,\text{cm}$, gerçek, ters ve 3 kat küçük, (b) $q = -15\,\text{cm}$, sanal, düz ve 1.5 kat büyük.]

22.16 Iraksak bir merceğin odak uzaklığının büyüklüğü 20 cm dir. Mercekten 60 cm öteye konulan 1 m büyüklüğünde bir cismin görüntüsü nerede oluşur, büyüklüğü ne kadardır ve cinsi nedir?

[C: $q = -15\,\text{cm}$, sanal, düz ve 4 kat küçük.]

22.17 Bir cisim bir ekrandan 125 cm öteye konuluyor. Odak uzaklığı 20 cm olan yakınsak bir mercekle cismin ekran üzerinde görüntüsü elde edilmek isteniyor. Mercek cisimden ne kadar uzağa konulmalıdır? [C: $p = 25\,\text{cm}$ ve 100 cm.]

22.18 Odak uzaklığı 30 cm olan yakınsak bir merceğin önüne konulan cismin görüntüsü ters yönde ve 2 kat büyük oluyor. Cismin konumunu bulun. [C: $p = 45\,\text{cm}$.]

22.19 Yakınsak bir merceğin önüne konulan cismin görüntüsü 20 cm ötede, ters ve 4 kat büyük oluyor. Merceğin odak uzaklığı ne kadardır? [C: 40 cm.]

22.20 Bir cisim bir ekrandan 45 cm öteye konuluyor. Araya konulan yakınsak bir mercekle ekran üzerinde elde edilen görüntü cisimden 2 kat büyük oluyor. Merceğin odak uzaklığı ne kadardır? [C: $f = 10\,\text{cm}$.]

23

FİZİKSEL OPTİK



Bu tavuskuşunun canlı renkleri aslında tüylerin kendi rengi değildir. Tüylerden yansıyan ışığın *girişim* denilen bir etkisinden kaynaklanır.

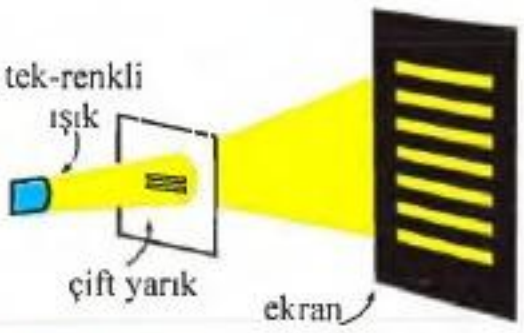
Geometrik optikte ışık bir doğru boyunca yayılan ışın olarak gözönüne alınıyordu. Bu yaklaşım ayna ve merceklerde görüntü elde etmek için yeterli olabilir, ama ışığın diğer pekçok özelliğini açıklayamaz. Bir sabun köpüğüne, bir kompakt disk yüzeyine veya tavus kuşunun tüylerine baktığınızda gökkuşağının tüm renklerini görebilirsiniz. Bu, ışık dalgasının girişim etkilerinden kaynaklanır.

O zaman ışığın dalga yapısına biraz daha eğilmek gerekir. Bir dalgayı parçacıktan ayıran en belirgin iki özelliği girişim (interferans) ve kırınım (difraksiyon) etkileri gösterebilmesidir. Bu etkiler tıpta ve sanayide kullanılan pekçok tekniğin temelini oluştururlar: X-ışınları, ince filmler, holografi ... Bu bölümde ışığın dalga özelliklerini sergilediği girişim ve kırınım etkilerini ele alacağız.

23.1 YOUNG ÇİFT-YARIK DENEYİ

Bölüm 11 de dalgaların girişim etkisi yaptığını görmüştük. İki dalga bir noktaya birlikte geldiklerinde, eğer aynı fazda iseler *yapıcı girişim* oluyor ve genlikleri toplanıyordu. Zıt fazda gelirlerse *yıkıcı girişim* oluyor, yani genlikler birbirini sıfırlıyordu.

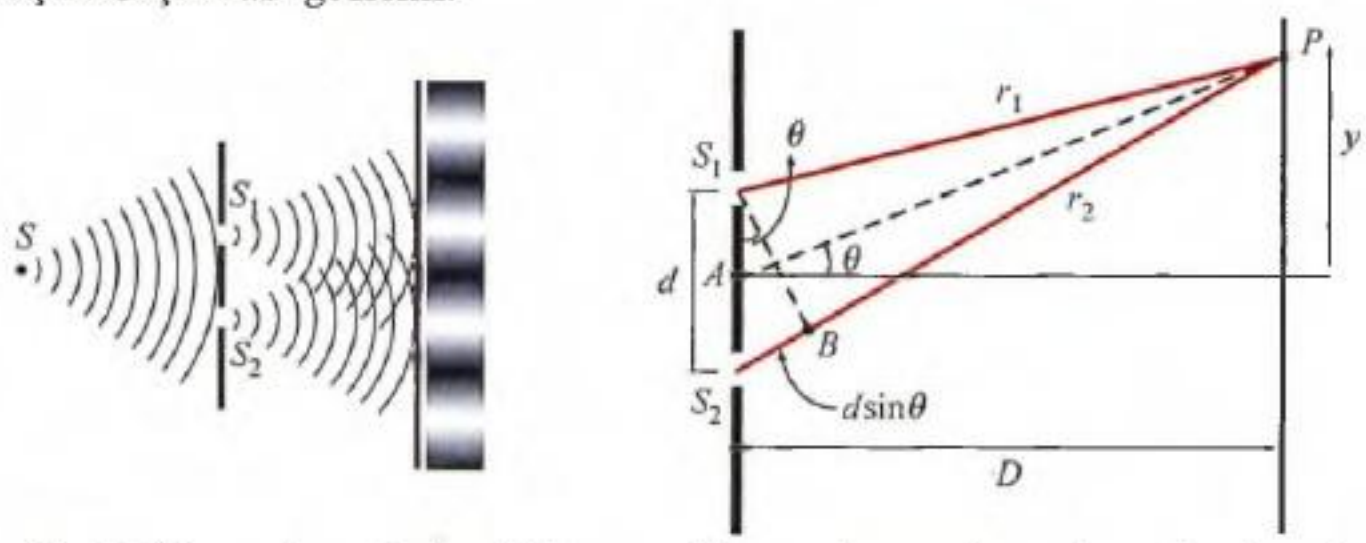
Işık denen elektromanyetik dalgalar da girişim yaparlar. Fakat, ışığın dalga boyu çok küçük ($\sim 10^{-7}$ m) olduğu için, girişim etkisinin gözlenmesi zordur, çok hassas deneyler yapmak gerekir.



Şekil 23.1: Young çift-yarık deney düzeneği.

İlk defa 1801 yılında İngiliz bilim adamı Thomas Young (1773-1829) ışığın girişim yaptığını deneyle gösterdi. **Young çift-yarık deneyi** denilen bu düzenekte, aynı fazda ve özdeş dalgalar yayınlayan iki kaynağa ihtiyaç vardır. Bu amaçla, Şekil 23.1 de görüldüğü gibi, tek-renkli (yani, tek dalgaboylu) bir S ışık kaynağı önüne, üzerinde sadece iki yarıktan ışığın geçebileceği bir perde konulur. Huygens ilkesine göre, ışık bu yarıklara ulaştığında, buradan itibaren S_1, S_2 kaynaklarından çıkan aynı fazda iki dalga gibi davranır.

Bu iki küresel dalga ekran üzerindeki bir noktaya birlikte geldiklerinde, eğer aynı fazda iseler yapıcı girişim yaparlar ve o noktada maksimum aydınlanma olur. Eğer, zıt fazda gelirlerse, yıkıcı girişimle birbirlerini yokederler ve o nokta karanlık kalır. Böylece ekran üzerinde karanlık ve aydınlık çizgilerden oluşan **girişim saçakları** gözlenir.



Şekil 23.2: Young deneyi. (a) Tek kaynaktan gelen dalga S_1, S_2 yarıklarından itibaren, aynı fazda iki dalga olur. (b) Koordinatlar.

Şimdi, Young deneyinde girişim saçaklarının konumlarını hesaplayalım. Şekil 23.2 deki şemada, yarıklar arasındaki uzaklık d ve ekran mesafesi D ile gösterilmiştir. Ekranın O merkezinden itibaren y uzaklıktaki bir P noktasına gelen iki dalganın aldıkları yollar r_1 ve r_2 olsun.

S_1 kaynağından r_2 yoluna bir dikme inelim ve S_1S_2B dik üçgenini oluşturalım. Eğer ekran çok uzaktaysa, yani r_1, r_2 yolları d mesafesine göre çok büyük ise, S_2B kenarı iki yol arasındaki fark olur. S_1S_2B dik üçgeni gözönüne alınırsa,

$$S_2B = d \sin\theta$$

olur. Bu yol farkı bir tam dalgaboyunun tam katlarına eşitse, yani $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots$ değerlerinden herhangi birine eşitse, yapıcı girişim vardır ve P noktası aydınlık olur. O halde, m. aydınlık saçağın θ_m açısı şu bağıntıyı sağlar:

$$d \sin\theta_m = m\lambda \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots) \qquad \text{(Yapıcı girişim: aydınlık)} \quad (23.1)$$

Fakat, yol farkı yarım dalga boyunun tek katlarına eşitse, yani $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2 \ldots$ değerlerinden birine eşitse, yıkıcı girişim vardır ve P noktası karanlık olur:

$$d \sin\theta_m = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm1, \pm2 \ldots) \qquad \text{(Yıkıcı girişim: karanlık)} \quad (23.2)$$

Bu formülü daha kullanışlı hale getirmek için, şekildeki yarıkların orta A noktasından P ye bir doğru çizerek oluşturulan AOP dik üçgenini gözönüne alalım. Bu üçgenin iki kenarı S_1S_2B üçgeninin iki kenarına dik olduğundan, benzer üçgenlerdir ve θ açıları eşit olur. Küçük açılar için, hem sinüs hem tanjant, açının radyan değerine eşit alınabilir:

$$\theta_m \approx \sin\theta_m \approx \tan\theta_m = \frac{y_m}{D} \tag{23.3}$$

Bu açı değeri yukardaki karanlık ve aydınlık bölge ifadelerinde kullanılır. Her iki durumu bir formülde toplayabiliriz:

$$y_m = \begin{cases} m\dfrac{\lambda D}{d} & \text{(maks - aydınlık)} \\ \left(m+\frac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda D}{d} & \text{(min - karanlık)} \end{cases} \qquad (m = 0, \pm1, \pm2\ldots) \tag{23.4}$$

Böylece, ekranın D uzaklığı, yarıklar arası d mesafesi ve kullanılan ışığın λ dalgaboyu bilinirse hangi türden kaçıncı saçağın merkezden hangi y_m uzaklığında olduğu hesaplanabilir. Aslında, bu deney daha çok ışığın dalgaboyunu ölçmekte kullanılır.

Örnek 23.1

514 nm *dalgaboylu yeşil ışık kullanan bir Argon lazeri ile yapılan Young deneyinde yarıklar arası uzaklık* 0.1 mm *olup, ekran* 3 m *öteye konulmuştur.*

(a) *İki aydınlık saçak arasındaki uzaklık ne kadardır?*

(b) *3. aydınlık saçak ile 7. karanlık saçak arasındaki uzaklık ne kadardır?*

Çözüm

(a) Aydınlık saçakların konumları (23.4) formülü ile verilir:

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}$$

Buna göre, ardışık iki saçak arasındaki mesafe bulunur:

$$y_2 - y_1 = \frac{\lambda D}{d}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{514\times10^{-9}\times 3}{0.1\times10^{-3}} = 0.015\,\text{m} = 1.5\,\text{cm}$$

(b) (23.4) formülü 7. karanlık ve 3. aydınlık saçaklar için yazılıp, fark hesaplanır:

$$y_7 - y_3 = (7.5-3)\times\frac{\lambda D}{d} = 4.5\times1.5 = 6.8\,\text{cm}$$

Örnek 23.2

695 nm *dalgaboylu kırmızı ışık kullanan bir yakut lazeri ile yapılan Young deneyinde, yarıklar arası uzaklık* 0.1 mm *dir.*

(a) *Aydınlık saçaklar arasındaki açısal fark ne kadardır?*

(b) *Merkezden itibaren* $\pm10^\circ$ *lik açısal bölge içine kaç tane aydınlık saçak düşer?*

Çözüm

(a) Açısal konumlar için geliştirdiğimiz (23.1) formülü kullanılır:

$$d\sin\theta_m = m\lambda$$

Küçük açılar için $\sin\theta_m \approx \theta_m$ değerini kullanıp, ardışık iki maksimum arasındaki $\Delta\theta$ açısal fark hesaplanır:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

$$\Delta\theta = \frac{695\times10^{-9}}{0.1\times10^{-3}} = 0.007\ \text{radyan}$$

Bu değeri $180/\pi$ ile çarparak açıyı dereceye çeviririz:

$$\Delta\theta = 0.007\times180/\pi = 0.4^\circ$$

(b) İki maksimum arasının kapsadığı açıyı bulduktan sonra, verilen aralıktaki maksimum sayısı hesaplanır:

$$N = 2\times\frac{10}{0.4} = 50$$

Örnek 23.3

Bir Young deneyinde $\lambda_1 = 440$ nm *ve* $\lambda_2 = 695$ nm *dalgaboylu iki ışık üreten kaynak kullanılmaktadır. Yarıklar arası mesafe* 0.1 mm *ve ekran uzaklığı* 5 m *dir. Her iki tür ışığın 6. aydınlık saçakları arasındaki mesafe ne kadar olur?*

Çözüm

Aydınlık saçakların konumlarını veren (23.4) formülü kullanılır:

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}$$

Bu ifade aynı $m = 6$ maksimumunda her iki dalgaboyu için yazılıp, uzaklık farkı hesaplanır:

$$\Delta y_6 = 6(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{D}{d}$$

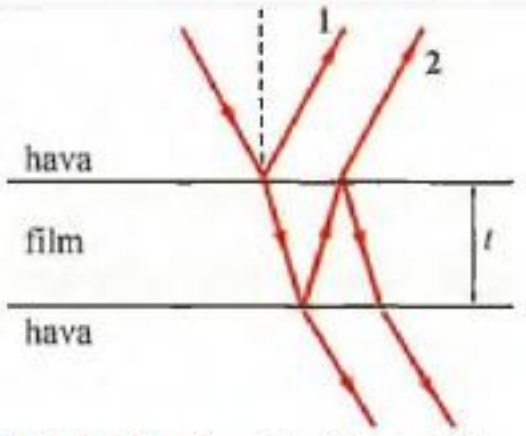
$$\Delta y_6 = 6(695 - 440) \times 10^{-9} \times \frac{5}{0.1 \times 10^{-3}}$$

$$\Delta y_6 = 0.077\,\text{m} = 7.7\,\text{cm}$$

23.2 İNCE FİLMLERDE YANSIMA İLE GİRİŞİM

Sabun köpükleri veya yağmur suyu birikintileri üzerindeki yağ tabakalarında gökkuşağının tüm renklerini görebilirsiniz. Bu etki yansıyan ışığın girişiminden kaynaklanır. İnce bir film tabakasının ön ve arka yüzeylerinden yansıyan ışığın gözümüze girerken yaptığı girişimin bir sonucudur.

Kalınlığı t olan ince bir film tabakası gözönüne alalım. Şekil 23.3 de görüldüğü gibi, bu yüzey üzerine düşen ışığın bir kısmı ön yüzden yansır, diğer kısmı kırılarak ikinci ortama geçer. Film içindeki ışın arka yüzeye geldiğinde bir kısmı tekrar yansır ve ön yüzeye geri döner. İşte, geri dönen bu ışının havaya çıkan kısmı, ilk yansıyan ışınla girişim yapar.

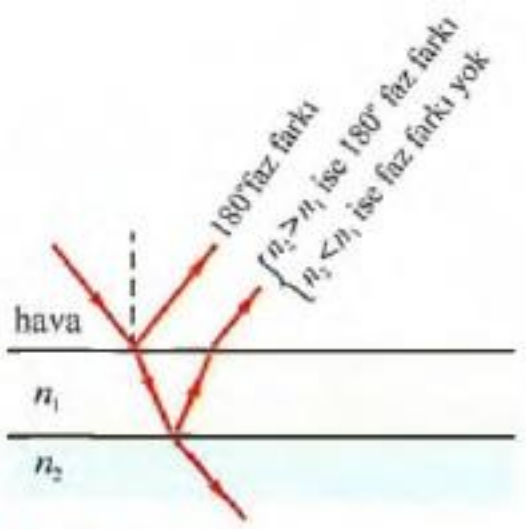


Şekil 23.3: İnce bir film tabakasından yansıyan iki ışık.

Bu girişimi havadan gelip kırılma indisi n olan ince bir film yüzeyine düşen normal, yani dik gelen bir ışık için hesaplayalım.

Hesaba başlamadan önce, çok önemli bir noktayı vurgulayalım: Bölüm 10 da dalgaların yansıma ve geçmesini incelerken, şöyle bir özelliği görmüştük: *Bir dalga az yoğun bir ortamdan, daha yoğun bir ortama geldiğinde, yani $n_1 < n_2$ olduğunda, yansıyan dalga* 180° *faz farkıyla, yani ters dalga olarak yansır.* Bu faz farkı sadece az yoğun bir ortamdan daha yoğun bir ortama gelen dalganın yansıması sırasında gözlenir, tersi durumda gözlenmez.

Bu özelliğe göre, havadan gelip 1. yüzeyden yansıyan 1. ışın mutlaka 180° faz farkıyla yansıyacaktır. Ama, film içine geçen ışın arka yüzeye geldiğinde, iki farklı durum olabilir:



Şekil 23.4: Film tabakası arkadaki ortamdan daha çok veya az yoğun ise, 2. ışının faz farkı değişir.

- **Film tabakası arkadaki ortamdan daha yoğun ise (Şekil 23.4):**
  Bu durumda, bu yüzeyden yansıyan 2. ışında faz farkı oluşmaz, geldiği gibi yansır. O halde, 1. ve 2. ışınlar arasındaki faz farkı 2 sebepten kaynaklanır:
  - 180° lik birinci yansımadan,
  - Film ortamındaki gidiş-geliş sırasında alınan $2t$ yol farkından.

Eğer, sadece yansımadaki 180° faz farkı mevcut olsaydı, girişim yıkıcı olurdu. Fakat, buna film ortamındaki gidiş-gelişten kaynaklanan yol farkı eklenecektir. Işığın havadaki dalgaboyu λ ise, kırılma indisi n olan bir ortamdaki dalga boyu,

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

olur. O halde, film ortamındaki yol farkını bu dalgaboyu ile karşılaştırmalıyız.

Faz farkının iki etkiden kaynaklandığını gözönüne alırsak, şu sonuçlara varırız:

- $2t$ yol farkı λ_n nin buçuklu katlarına eşitse, girişim yapıcı olur ve o dalgaboyundaki ışık maksimum şiddette gözlenir:

$$2t = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \qquad (m = 0, 1, 2\ldots) \qquad \text{(Maksimum)} \qquad (23.5)$$

► $2t$ yol farkı λ_n nin tam katlarına eşitse, girişim yıkıcı olur ve o dalgaboyundaki ışık yokolur, gözlenmez:

$$2t = m\,\lambda_n \qquad (m = 1, 2, 3\ldots) \qquad \text{(Minimum)} \qquad (23.6)$$

Bu formüllerin Young deneyindekilere tamamen ters olduğuna dikkat edelim. Bunun sebebi, iki dalga arasındaki faz farkına, burada bir de yansımadaki 180° faz farkı ekleniyor olmasıdır.

- **Film tabakası arkadaki ortamdan daha az yoğun ise (Şekil 23.4):**
Bu durumda, ön ve arka, her iki yüzeyden yansıyan ışınlarda 180° faz farkı oluşacaktır. Böylece, yüzey etkisinden kaynaklanan faz farkları birbirlerini götürür ve sadece film ortamındaki yol farkından kaynaklanan faz farkı hesaba katılır.
Bu durumda, yukarda yapıcı ve yıkıcı girişim için bulduğumuz (23.5) ve (23.6) formüllerini tersine çevirirz. Yani, *maximum (yapıcı girişim) formülünü minimum (yıkıcı girişim) için kullanırız.*

Bir sabun köpüğünde veya yağ tabakasında çeşitli renklerin gözleniyor olması buradan kaynaklanır. Beyaz ışığı yansıtan ince filmin bir yerinden, örneğin mavi rengin yansıyor olması, diğer tüm renklerin gözümüzde yıkıcı girişim sonucu gözlenmeyişinden kaynaklanır.



Şekil 23.5: İnce bir yağ birikintisinden yansıyan renkler ışığın girişimi sonucudur.

Örnek 23.4

Bir su birikintisi ($n = 1.33$) üzerinde, kırılma indisi 1.5 olan bir yağ tabakası bulunmaktadır. Havadan gelen beyaz ışık içinde 600 nm dalgaboylu sarı ışığın hiç yansımadan geçmesi için, yağ tabakasının kalınlığı en az ne kadar olmalıdır?

Çözüm

Yağ filminin kırılma indisi alttaki sudan büyük olduğundan, sadece 1. yüzeyde 180° faz farkı olacaktır. Ayrıca, yansımadan geçmesi demek yıkıcı girişim demektir. O halde, (23.6) formülü kullanılmalıdır:

$$2t = m\,\lambda_n$$

$m = 1$ için yol farkı tam dalgaboyuna eşit olursa, diğer m değerleri için de tam dalgaboyunun katları olacaktır. Ayrıca, yağ ortamında dalgaboyu $\lambda_m = \lambda/n$ alınır:

$$2t = 1 \times \frac{\lambda}{n} \;\rightarrow\; t = \frac{\lambda}{2n} = \frac{600}{2 \times 1.5} = 200\,\text{nm}$$

Bu kalınlığın tam katlarında sarı ışık yansımayacaktır.

Örnek 23.5

Kırılma indisi 1.5 olan bir pencere camı üzerine, kırılma indisi $n = 1.3$ olan ince bir saydam film sürülmüştür. Yansıyan ışığın mavi görünmesi için (yani, içinde kırmızı olmaması için), film kalınlığı hangi değerin katları olmalıdır? (Kırmızı ışığın dalgaboyunu 700 nm alın.)

Çözüm

Bu kez, film tabakası arkasındaki camın kırılma indisi daha büyük olduğu için, filmin her iki yüzünde de 180° faz farkı oluşacaktır.

Bu durumda, kırmızı ışıkta yıkıcı girişim için (23.5-23.6) formüllerini ters çevirip kullanırız:

$$2t = (m + \tfrac{1}{2})\,\lambda_n \qquad \text{(Minimum)}$$

$m = 0$ ve $\lambda_n = \lambda/n$ alınıp kalınlık hesaplanır:

$$2t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n} \;\rightarrow\; t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{700}{4 \times 1.3} = 135\,\text{nm}$$

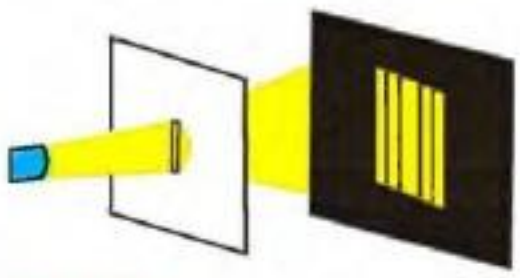
23.3 KIRINIM

Geometrik optikte ışık, doğrusal yayılan ışınlar olarak ele alınıyordu. Eğer bu tam doğru olsaydı, ışığın önüne konulan bir engelin gölgesinin kenarları keskin olurdu. Fakat, gerçekte böyle olmaz. Şekil 23.6 deki bir traş bıçağının gölgesine dikkatli bakılırsa, kenarlarda ikinci, üçüncü ... gölgeler de bulunmaktadır. Bunlara **kırınım saçakları** adı verilir.

Işığın doğrusal yoldan sapmasının yol açtığı etkilerin genel adına **kırınım** (difraksiyon) denir. Daha önce gördüğümüz çift-yarık girişimine ek olarak, tek bir cismin gölgesinde dahi ışığın dalga karakteri gözlenebilmektedir.



Şekil 23.6: Bir traş bıçağının gölgesinde kırınım (Lecture Demonstration Services-Harvard Science Center).



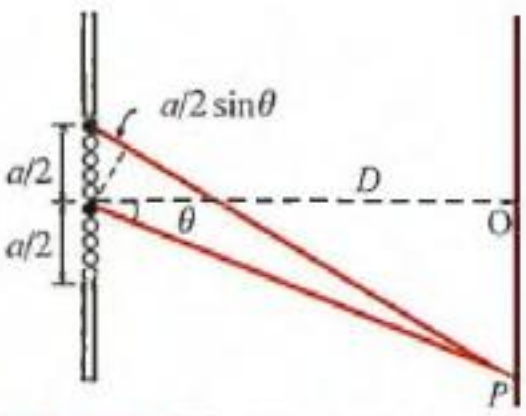
Şekil 23.7: Tek yarıkta kırınım.

Kırınımı en basit düzeyde anlayabilmek için tekyarık kırınım deneyini ele alalım. Şekil 23.7 de gösterilen düzenekte, bir kaynaktan çıkan tek-renkli ışık, üzerinde sadece bir yarık bulunan bir engeli geçtikten sonra arkadaki bir ekran üzerine düşmektedir. Ekranda gözlenen şudur: Merkezde bir yarık görüntüsü oluşmaktadır. Ayrıca, merkezin iki tarafında, karanlık birer bölgenin ötesinde, daha zayıf ikincil, üçüncül ... yarık görüntüleri yer almaktadır.

Bu deneyde kırınım etkisini anlayabilmek için yarık genişliğini dikkate almak gerekir. (Young deneyinde yarıkların genişliği ihmal edilmişti.) Genişliği a olan bir yarıktan çıkan ışınların çok uzaktaki bir ekran üzerinde oluşturduğu kırınım saçaklarını Şekil 23.8 yardımıyla açıklayalım.

Huygens ilkesine göre, üzerine ışık düşen yarığın her noktasından ikincil dalgalar üretilir ve bunlar aynı fazda yayılırlar. Tüm bu dalgalar ekrandaki merkez bölgeye aynı fazda gelecekleri için, merkez bölgenin aydınlık olacağı açıktır.

Merkezin hemen yanındaki 1. karanlık saçağı gözönüne alalım. Bu karanlık saçağa yarığın çeşitli yerlerinden gelen ışınların hepsi, ekran çok uzakta olduğu için, θ açısıyla yola çıkmış olurlar. Yarığın üst yarısındaki her noktayı alt yarısındaki bir noktayla eşleştirelim.



Şekil 23.8: Üst ve alt yarıda eşleşen iki (siyah) nokta.

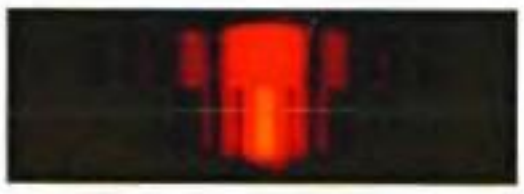
Şekil 23.8 da görüldüğü gibi, en üst noktadan çıkan dalga ile ortanın hemen altından çıkan dalga (şekilde iki siyah yuvarlak), ekrandaki karanlık saçakta yıkıcı girişim yaptıkları için, aralarında $\lambda/2$ kadar faz farkı olmalıdır. Bu iki noktadan sonra, yarığın üst ve alt yarılarında bunları takibeden iki nokta da, yine $\lambda/2$ kadar faz farkına sahip olmalıdırlar. Böylece, eşleşen tüm ikili noktalar arasında yarım dalgaboyu faz farkı olur. Şekilden görüldüğü gibi, eşleşen iki dalga arasındaki yol farkı $(a/2)\sin\theta$ olacağı için, 1. karanlık saçak koşulu şöyle yazılır:

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Bu düşünce yöntemi, yarığı 4 parçaya, 6 parçaya, 8 parçaya... ayrılmış gibi düşünerek tekrarlanabilir. Her defasında, karanlık saçakların $\sin\theta = 2\lambda/a,\ 3\lambda/a\ldots$ vb. değerlerinde oluşacağı gösterilebilir. Sonuç olarak, tek-yarık kırınımında karanlık saçakların konumları şu koşulu sağlar:

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{a} \qquad (m = 1, 2, 3\ldots) \qquad \text{(Karanlık saçak koşulu)} \qquad (23.7)$$

Yine, D uzaklıktaki bir ekranda saçakların merkezden y_m uzaklıklarını bulmak için, küçük açı yaklaşımına geçilir:



Şekil 23.9: Tek-yarıkta kırınım saçakları. Yarık genişliği üstte $20\,\mu$m, altta $40\,\mu$m dir.

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{D}$$

$$y_m = m\frac{\lambda D}{a} \qquad (m = 1, 2, 3\ldots) \qquad \text{(Karanlık saçak konumları)} \qquad (23.8)$$

Benzer düşünce yöntemiyle, aydınlık saçakların konumları belirlenir:

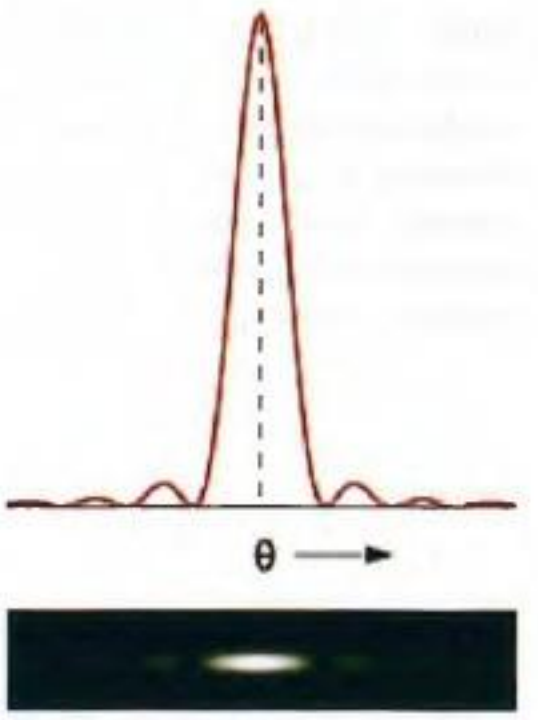
$$y_m = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda D}{a} \qquad (m = 1, 2, 3\ldots) \qquad \text{(Aydınlık saçak konumları)} \qquad (23.9)$$

Kırınımda Işık Şiddeti Dağılımı

Kırınım saçaklarında ışık şiddeti karanlık ve aydınlık bölgeler arasında dereceli olarak değişir. İki dalganın aynı noktadaki bileşke şiddet dağılımı hesabı uzun ve karmaşık olduğu için, burada sonucu ispatsız olarak vereceğiz. $\theta = 0$ merkez noktasındaki ışığın şiddeti I_0 ile gösterilirse, herhangi bir açıdaki ışık şiddetini veren bağıntı şöyle olur:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin\theta/\lambda)}{\pi a \sin\theta/\lambda)} \right]^2 \qquad (23.10)$$

Dikkat edilirse, bu fonksiyon karanlık saçak koşulunu da içermektedir. Bu eğri Şekil 23.10 de gösterilmiştir.



Şekil 23.10: Kırınım saçaklarında ışık şiddeti dağılımı.

Örnek 23.6

Genişliği 0.1 mm *olan bir yarık üzerine* 700 nm *dalgaboylu kırmızı ışık gönderiliyor.* 5 m *ötedeki ekran üzerinde,*

(a) *1. karanlık saçağın konumu ne kadardır?*

(b) *Merkezdeki aydınlık bölgenin genişliği ne kadar olur?*

Çözüm

(a) Karanlık saçak için bulunan (23.8) formülü kullanılır:

$$y_m = m\frac{\lambda D}{a} \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots)$$

$m = 1$ için hesap yapılır:

$$y_1 = \frac{\lambda D}{a} = \frac{700 \times 10^{-9} \times 5}{0.1 \times 10^{-3}} = 0.035\,\text{m} = 35\,\text{mm}.$$

Merkezdeki aydınlık saçak, iki tarafında 1. karanlık saçaklarla sınırlanmıştır. O halde, genişliği (a) şıkkında bulduğumuz değerin 2 katı olur:

$$\Delta y = 2 \times y_1 = 70\,\text{mm}.$$

Örnek 23.7

Bir yarık üzerine $\lambda_1 = 700$ nm *olan kırmızı ışık ile,* $\lambda_2 = 650$ nm *olan yeşil ışık birlikte gönderiliyorlar.* 2 m *ötedeki ekranda kırmızı ışığın 5. karanlık saçağı ile yeşil ışığın 3. aydınlık saçağı arasındaki mesafenin* 2 mm *olduğu gözleniyor. Yarığın genişliğini tayin edin.*

Çözüm

Kırmızı ışık için (23.8) karanlık saçak formülü $m = 5$ alınarak yazılır:

$$y_1(m=5) = 5\frac{\lambda_1 D}{a}$$

Yeşil ışık için (23.9) aydınlık saçak formülü $m = 3$ alınarak yazılır:

$$y_2(m=3) = (3 + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda_2 D}{a}$$

Bu iki konum arasındaki fark 2 mm ye eşitlenip bilinmeyen a için çözülür:

$$y_1(m=5) - y_2(m=3) = 0.002$$

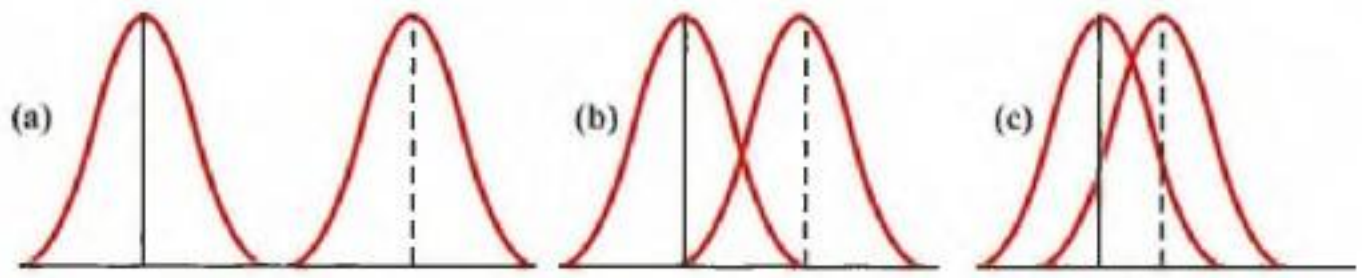
$$a = \frac{(5\lambda_1 - 3.5\lambda_2)\,D}{0.002}$$

$$a = 0.0012\,\text{m} = 1.2\,\text{mm}$$

Ayırma Güçü – Çözünürlük

Mikroskop, teleskop, spektroskop gibi optik aletlerin gözümüzde veya fotoğraf filmi üzerinde oluşturdukları görüntünün net olmasını isteriz. Fakat, alet ne kadar mükemmel imal edilmiş olursa olsun, verebileceği netliğin bir sınırı vardır. Bu netlik sınırına optik aletin **ayırma gücü** veya **çözünürlüğü** denir.

Netlik sınırı ışığın kırınımından kaynaklanır. Birbirine çok yakın duran S_1 ve S_2 gibi iki noktasal ışık kaynağını (örneğin, gökyüzünde komşu iki yıldızı) gözönüne alalım. Bu iki kaynaktan çıkan ışınlar, genişliği a olan bir yarıktan geçip ekrana düşüyor olsunlar. Tek-yarık kırınımı konusunda gördüğümüz gibi, herbirinin ekrandaki görüntüsü merkezi bir maksimumun çevresinde bir dağılım gösterir (Şekil 23.11). Eğer bu iki görüntünün merkezi maksimumları örtüşüyorsa, ayırdedilemez olurlar.



Şekil 23.11: (a) Ayırdedilebilen iki görüntü, (b) Ayırma sınırında iki görüntü, (c) Ayırdedilemeyen iki görüntü. Ayırma sınırında, birinin merkezi maksimumu ile diğerinin 1. minimumunun çakıştığına dikkat edin.

Ayırma gücünün sınırı, Şekil 23.11-b deki gibi, görüntülerden birinin merkezi maksimumu ile, diğer görüntünün birinci minimumunun çakıştığı sınır olarak kabul edilir. Bu sınırdaki minimum θ açısını, tek-yarık kırınımı için bulduğumuz (23.8) formülünden elde edebiliriz. Birinci minimum açısını veren formül şöyleydi:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Küçük açılar için, sinüs yerine açının radyan değeri alınabilir. Buna göre, optik aletin ayırdedebildiği en küçük $\theta_{\min}$ açısı şöyle olur:

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{a} \tag{23.11}$$

Bu formül dikdörtgen bir yarık için geçerlidir. Optik aletlerin daire şeklindeki objektifleri için hesap yapıldığında formül biraz değişik bulunur:

$$\theta_{\min} = 1.22\,\frac{\lambda}{a} \qquad \text{(Daire için)} \tag{23.12}$$

Burada a dairenin çapıdır.

θ_m değeri ne kadar küçükse, aletin ayırma gücü o kadar fazla olur. Bu formüle göre, ayırma gücünü artırmak için ya daha küçük dalgaboylu ışık kullanmalı, yahut da objektifin çapım artırmalıyız.

Örnek 23.8

Bir fotoğraf makinasının çektiği resimde, 100 m *uzakta ve aralarında* 1 cm *mesafe bulunan iki noktayı ayırdedebilmesi isteniyor. Görünür ışık bölgesinin ortalama dalgaboyu* 500 nm *olduğuna göre, makina objektifinin çapı en az ne kadar olmalıdır?*

Çözüm

Daire için bulunan (23.12) formülü kullanılır:

$$\theta_{\min} = 1.22\,\frac{\lambda}{a}$$

Buradaki $\theta_{\min}$ açısı, 10 metre ötedeki 1 cm lik genişliğin kapsadığı açıya eşit olmalıdır:

$$\theta_{\min} = \frac{0.01}{100} = 0.0001 \text{ radyan}$$

Bu değerle dairesel objektifin a çapı hesaplanır:

$$a = 1.22\,\frac{\lambda}{\theta_{\min}} = 1.22 \times \frac{500\times10^{-9}}{0.0001}$$

$$a = 0.006\,\text{m} = 6\,\text{mm}$$

Problemler

23.1 Young Çift-yarık Deneyi

23.1 700 nm dalgaboylu kırmızı ışık kullanan bir yakut lazeri ile yapılan Young deneyinde yarıklar arası uzaklık 0.1 mm olup, ekran 5 m öteye konulmuştur. (a) İki aydınlık saçak arasındaki uzaklık ne kadardır? (b) 3. aydınlık saçak ile 5. karanlık saçak arasındaki uzaklık ne kadardır?

[C: (a) 3.5 mm, (b) 8.8 mm.]

23.2 450 nm dalgaboylu kırmızı ışık kullanan bir He-Cd lazeri ile yapılan Young deneyinde, yarıklar arası uzaklık 0.1 mm dir. (a) Aydınlık saçaklar arasındaki açısal fark ne kadardır? (b) Merkezden itibaren $\pm1°$ lik açısal bölge içine kaç tane aydınlık saçak düşer?

[C: (a) $0.27°$, (b) $7.8 \approx 8$ saçak.]

23.3 Bir Young deneyinde $\lambda_1 = 600$ nm ve $\lambda_2 = 650$ nm

dalgaboylu iki ışık üreten kaynak kullanılmaktadır. Yarıklar arası mesafe 0.1 mm ve ekran uzaklığı 3 m dir. Her iki tür ışığın 5. aydınlık saçakları arasındaki mesafe ne kadar olur? [C: 7.5 mm.]

23.4 700 nm dalgaboylu ışıkla, aydınlık saçaklar arasındaki açı 0.01° olacak şekilde bir Young deneyi tasarlanıyor. İki yarık arası mesafe ne kadar olmalıdır? [C: 4 mm.]

23.5 Bir Young deneyinde aydınlık saçaklar arasındaki açı 2° dir. Bu deney düzeneği, kırılma indisi $n = 1.33$ olan su içine konulduğunda, açı ne kadar olur? (*Yol gösterme:* Su içindeki dalgaboyu ile çalışıp orantı kurun.) [C: 1.5°.]

23.2 İnce Filmlerde Yansıma ile Girişim

23.6 Bir su birikintisi ($n = 1.33$) üzerinde, kırılma indisi 1.4 olan bir yağ tabakası bulunmaktadır. Havadan gelen beyaz ışık içindeki 700 nm dalgaboylu kırmızı ışığın hiç yansıması için, yağ tabakasının kalınlığı en az ne kadar olmalıdır? [C: 250 nm.]

23.7 Kırılma indisi 1.6 olan bir objektif camı üzerine, kırılma indisi $n = 1.3$ olan ince bir saydam film sürülmüştür. Yansıyan ışığın kırmızı görünmesi için (yani, içinde mavi olmaması için), film kalınlığı hangi değerin katları olmalıdır? (Mavi ışığın dalgaboyunu 400 nm alın.) [C: 77 nm.]

23.3 Kırınım

23.8 Genişliği 0.1 mm olan bir yarık üzerine 600 nm dalgaboylu ışık gönderiliyor. 4 m ötedeki ekran üzerinde, (a) Merkezdeki aydınlık bölgenin genişliği ne kadar olur? (b) 7. karanlık saçağın konumu ne kadardır?

[C:(a) 4.8 cm, (b) 17 cm.]

23.9 Bir yarık üzerine, dalgaboyları $\lambda_1 = 500$ nm ve $\lambda_2 = 600$ nm olan iki ışık birlikte gönderiliyorlar. 3 m ötedeki ekranda 1. ışığın 7. aydınlık saçağı ile 2. ışığın 5. karanlık saçağı arasındaki mesafenin 3 mm olduğu gözleniyor. Yarığm genişliğini tayin edin. [C: 2 mm.]

23.10 Bir teleskobun 100 km uzakta ve aralarında 1 cm mesafe bulunan iki noktayı ayırdedebilmesi isteniyor. Görünür ışık bölgesinin ortalama dalgaboyu 500 nm olduğuna göre, teleskobun çapı en az ne kadar olmalıdır? [C: 6.1 m.]

EK A. FİZİK SABİTLERİ

Nicelik	Simgesi	Değeri
Işık hızı	c	$2.997\,92 \times 10^{8}$ m/s
Temel yük birimi	e	$1.602\,19 \times 10^{-19}$ C
Gravitasyon sabiti	G	6.6726×10^{-11} N m^2/kg^2
Avogadro sayısı	N_A	$6.022\,05 \times 10^{23}$
Evrensel gaz sabiti	R	8.31451 J/(mol K) 0.0820578 litre atm/(mol K)
Boşluğun elektrik geçirgenliği	ε_0	$8.854\,187 \times 10^{-12}$ C^2/(N m^2)
Coulomb kuvveti sabiti	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$	$8.987\,551\,78 \times 10^{9}$ N m^2/C^2
Boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
Elektron kütlesi	m_e	$9.109\,390 \times 10^{-31}$ kg
Proton kütlesi	m_p	$1.672\,623 \times 10^{-27}$ kg
Nötron kütlesi	m_n	$1.674\,929 \times 10^{-27}$ kg
Planck sabiti	h	$6.626\,18 \times 10^{-34}$ J s
Bohr yarıçapı	$a_B = \hbar^2/(ke^2m_e)$	$5.291\,773 \times 10^{-11}$ m

EK B. MATEMATİK FORMÜLLERİ

Türev

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

İntegral

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

$$\int f\,g'\,dx = fg - \int g\,f'\,dx$$

$$\int dx = 1$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|$$

Trigonometri

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$$

Kosinüs teoremi: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos A$

Sinüs teoremi: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

C. TRİGONOMETRİK CETVEL

(45° den büyük açılar için cetvel, sağ taraftan ve alttaki başlıklarla kullanılır.)

Derece	Radyan	Sin	Cos	Tan	Cot	⇐	
00	**0.000**	0.000	1.000	0.000	∞	**1.571**	**90**
01	**0.018**	0.018	1.000	0.018	57.290	**1.553**	**89**
02	**0.035**	0.035	0.999	0.035	28.636	**1.536**	**88**
03	**0.052**	0.052	0.999	0.052	19.081	**1.518**	**87**
04	**0.070**	0.070	0.998	0.070	14.301	**1.501**	**86**
05	**0.087**	0.087	0.996	0.088	11.430	**1.484**	**85**
06	**0.105**	0.105	0.995	0.105	9.514	**1.466**	**84**
07	**0.122**	0.122	0.993	0.123	8.144	**1.449**	**83**
08	**0.140**	0.139	0.990	0.141	7.115	**1.431**	**82**
09	**0.157**	0.156	0.988	0.158	6.314	**1.414**	**81**
10	**0.175**	0.174	0.985	0.176	5.671	**1.395**	**80**
11	**0.192**	0.191	0.982	0.194	5.145	**1.379**	**79**
12	**0.209**	0.208	0.978	0.213	4.705	**1.361**	**78**
13	**0.227**	0.225	0.974	0.231	4.332	**1.344**	**77**
14	**0.244**	0.242	0.970	0.249	4.011	**1.327**	**76**
15	**0.262**	0.259	0.966	0.268	3.732	**1.309**	**75**
16	**0.279**	0.276	0.961	0.287	3.487	**1.292**	**74**
17	**0.297**	0.292	0.956	0.306	3.271	**1.274**	**73**
18	**0.314**	0.309	0.951	0.325	3.078	**1.257**	**72**
19	**0.332**	0.326	0.946	0.344	2.904	**1.239**	**71**
20	**0.349**	0.342	0.940	0.364	2.748	**1.222**	**70**
21	**0.367**	0.358	0.934	0.384	2.605	**1.204**	**69**
22	**0.384**	0.375	0.927	0.404	2.475	**1.187**	**68**
23	**0.401**	0.391	0.921	0.425	2.356	**1.169**	**67**
24	**0.419**	0.407	0.914	0.445	2.246	**1.152**	**66**
25	**0.436**	0.423	0.906	0.466	2.145	**1.135**	**65**
26	**0.454**	0.438	0.899	0.488	2.050	**1.117**	**64**
27	**0.471**	0.454	0.891	0.510	1.963	**1.100**	**63**
28	**0.489**	0.470	0.883	0.532	1.881	**1.082**	**62**
29	**0.506**	0.485	0.875	0.554	1.804	**1.065**	**61**
30	**0.524**	0.500	0.866	0.577	1.732	**1.047**	**60**
31	**0.541**	0.515	0.857	0.601	1.664	**1.030**	**59**
32	**0.559**	0.530	0.848	0.625	1.600	**1.012**	**58**
33	**0.576**	0.545	0.839	0.649	1.540	**0.995**	**57**
34	**0.593**	0.559	0.829	0.675	1.483	**0.977**	**56**
35	**0.611**	0.574	0.819	0.700	1.428	**0.960**	**55**
36	**0.628**	0.588	0.809	0.727	1.376	**0.943**	**54**
37	**0.646**	0.602	0.799	0.754	1.327	**0.925**	**53**
38	**0.663**	0.616	0.788	0.781	1.280	**0.908**	**52**
39	**0.681**	0.629	0.777	0.810	1.235	**0.890**	**51**
40	**0.698**	0.643	0.766	0.839	1.192	**0.873**	**50**
41	**0.716**	0.656	0.755	0.869	1.150	**0.855**	**49**
42	**0.733**	0.669	0.743	0.900	1.111	**0.838**	**48**
43	**0.751**	0.682	0.731	0.933	1.072	**0.820**	**47**
44	**0.768**	0.695	0.719	0.966	1.036	**0.803**	**46**
45	**0.785**	0.707	0.707	1.000	1.000	**0.785**	**45**
		Cos	**Sin**	**Cot**	**Tan**	**Radyan**	**Derece**

PERİYODİK CETVEL

57 den başlayan *Lantanidler* ve **90** dan başlayan *Actinidler* ayrı verilmişlerdir.

1 H 1.01 0.00009																	2 He 4.00 0.00018
3 Li 6.94 0.534	4 Be 9.01 1.85											5 B 10.81 2.34	6 C 12.01 2.267	7 N 14.01 0.0013	8 O 16.00 0.0014	9 F 19.00 0.0017	10 Ne 20.18 0.0009
11 Na 22.99 0.971	12 Mg 24.31 1.738											13 Al 26.98 2.698	14 Si 28.09 2.330	15 P 30.97 1.82	16 S 32.06 2.067	17 Cl 35.45 0.0032	18 Ar 39.95 0.0018
19 K 39.10 0.862	20 Ca 40.08 1.54	21 Sc 44.96 2.989	22 Ti 47.90 4.54	23 V 50.94 6.11	24 Cr 52.00 7.15	25 Mn 54.94 7.44	26 Fe 55.85 7.874	27 Co 58.93 8.86	28 Ni 58.70 8.912	29 Cu 63.55 8.96	30 Zn 65.38 7.134	31 Ga 69.72 5.907	32 Ge 72.59 5.323	33 As 74.92 5.776	34 Se 78.96 4.809	35 Br 79.90 3.122	36 Kr 83.80 0.0037
37 Rb 85.47 1.532	38 Sr 87.62 2.64	39 Y 88.91 4.469	40 Zr 91.22 6.506	41 Nb 92.91 8.57	42 Mo 95.94 10.22	43 Tc 98 11.5	44 Ru 101.07 12.37	45 Rh 102.91 12.41	46 Pd 106.04 12.02	47 Ag 107.87 10.501	48 Cd 112.41 8.69	49 In 114.82 7.31	50 Sn 118.69 7.287	51 Sb 121.75 6.685	52 Te 127.60 6.232	52 I 126.90 4.93	54 Xe 131.30 0.0059
55 Cs 132.91 1.873	56 Ba 137.33 3.594	57 La 138.91 6.145	72 Hf 178.49 13.31	73 Ta 180.95 16.654	74 W 183.85 19.25	75 Re 186.21 21.02	76 Os 190.2 22.61	77 Ir 192.22 22.56	78 Pt 195.09 21.46	79 Au 196.97 19.282	80 Hg 200.59 13.534	81 Tl 204.37 11.85	82 Pb 207.2 11.342	83 Bi 208.98 9.807	84 Po 209 9.32	85 At 210 7	86 Rn 222 0.0097
87 Fr 223 1.87	88 Ra 226.03 5.5	89 Ac 227.03 10.07															

58 Ce 140.12 6.77	59 Pr 140.91 6.773	60 Nd 144.24 7.007	61 Pm 145 7.26	62 Sm 150.4 7.52	63 Eu 151.96 5.243	64 Gd 157.25 7.895	65 Tb 158.93 8.229	66 Dy 162.50 8.55	67 Ho 164.93 8.795	68 Er 167.26 9.066	69 Tm 168.93 9.321	70 Yb 173.04 6.965	71 Lu 174.97 9.84
90 Th 232.04 11.72	91 Pa 231.04 15.37	92 U 238.03 18.95	93 Np 237.05 20.45	94 Pu 244 19.84	95 Am 243 13.69	96 Cm 247 13.51	97 Bk 247 14.79	98 Cf 251 15.1	99 Es 252 13.5	100 Fm 257 –	101 Md 258 –	102 No 259 –	103 Lr 260 –

Z atom sayısı ve simgesi
Mol kütlesi (g)
Yoğunluk (g/cm^3)

RESİM HAKLARI / PHOTO CREDITS

Resimlerin kitaptaki numaraları kalın harflerle gösterilmiştir.
Picture numbers are shown below in boldface.

Bölüm 1: Başlık resmi: NASA, **1.1:** US Navy Imagery ve Bureau International des Poids et des Mésures,

Bölüm 2: Başlık resmi: Potiyama, **2.5:** Michael Maggs,

Bölüm 3: Başlık resmi: Ronnie Macdonald,

Bölüm 4: Başlık resmi: European Space Agency (ESA), **4.1:** jon oropeza,

Bölüm 5: Başlık resmi: Coasterman1234, **5.13:** Olliver Mallich,

Bölüm 6: Başlık resmi: Dave Jackson, **6.4:** Alsterdrache, **6.5:** Brady Holt, **6.12:** Erik Forsberg,

Bölüm 7: Başlık resmi: NOAA,

Bölüm 8: Başlık resmi: Fer.filol,

Bölüm 9: Başlık resmi: Dan Pancamo, **9.12:** Leonard G., **9.15:** BrokenSphere,

Bölüm 10: Başlık resmi: captain.orange **10.10:** Lecture Demonstration Services-Harvard Science Center, **10.17:** TaitaFkm,

Bölüm 11: Başlık resmi: Saffron Blaze, **11.1:** Pia von Lützau ve Stefan-XP, **11.7:** fleecetraveler, pGordon ve Aranya Sen, **11.10:** Jose Olgon, **11.11:** Prof. Orhan Kamer (İTÜ), **11.13:** kurtsik, **11.16:** .RGB, **11.19:** WikipedianProlific, Mvapdevila ve neepster, **11.22:** Joao Miranda, **11.23:** Michael Belisle,

Bölüm 12: Başlık resmi: Andries Oudshoorn, **12.2:** Andres Rueda ve makerbot, **12.4:** Markus Schweiss, **12.6:** CrazyD, **12.9:** NASA, **12.11:** Jens Buurgard Nielsen, **12.12:** Linda Hermans Killam (IPAC),

Bölüm 13: Başlık resmi: Christoph Ehlen, **13.15:** Timitrius,

Bölüm 14: Başlık resmi: Mehmet Akif Malatyalı, **14.1:** Didier Desouens, **14.4:** CERN, **14.8:** Peo, **14.9:** ElBibliomata,

Bölüm 15: Başlık resmi: Beverly and Pack,

Bölüm 16: Başlık resmi: Jon 'ShakataGaNai' Davis,

Bölüm 17: Başlık resmi: Courtesy-Sandia National Laboratories, **17.1:** Windell Oskay, **17.2:** Steve Jurvetson, Pilaf ve Arnold Reinhold, **17.11:** CommScope, Jom ve Hellisp, **17.12:** Bert Hickman, **17.14:** 2Tales, **17.15:** Anynobody,

Bölüm 18: Başlık resmi: Intel Corp. **18.6:** Yury Masloboev, **18.8:** Marcela, **18.12:** Simon Koopman, **18.19:** André Karwath,

Bölüm 19: Başlık resmi: ITER, **19.10:** Hatsukari715,

Bölüm 20: Başlık resmi: CERN, **20.9:** Richard Steiner (NIST), **20.16:** Gorchy

Bölüm 21: Başlık resmi: NASA, **21.9:** wdwd,

Bölüm 22: Başlık resmi: NASA, **22.2:** Inductiveload, NASA **22.6:** Brews ohare, **22.9:** Velual, **22.11:** BigRiz, **22.18:** NASA, **22.20:** Michael Spencer, **22.26:** RhCastilos, **22.32:** NASA,

Bölüm 23: Başlık resmi: Doug Hodel, **23.5:** John, **23.6:** Lecture Demonstration Services-Harvard Science Center, **23.9:** Pieter Kuiper, **23.10:** Magnus Manske.

DİZİN

1. Newton yasası, 58
2. Newton yasası, 59
3. Newton yasası, 60

açısal frekans, 144
açısal hız, 115
açısal ivme, 115
açısal kinematik, 114–117
açısal konum, 114
açısal momentum, 128
açısal momentumun korunumu, 128
adezyon kuvveti, 188
adyabatik süreç, 220
ağırlık, 61
akım, 297–300
ampere (akım birimi), 298, 334
Ampere yasası, 336
ampermetre, 309
ani dönme ekseni, 126
anlamlı hane sayısı, 12
apolar molekül, 287
Archimedes kaldırma kuvveti, 186
asal frekans, 169
atış hareketi, 44
  yörünge denklemi, 45
atma dalgası, 162
atom
  manyetik dipol momenti, 338
  kapalı yörünge, 238
  serbest elektron, 238
  yapısı, 237
Avogadro Sayısı, 209
ayırma gücü (çözünürlük), 389
ayna
  büyütme oranı, 371
  çukur, 369
  düzlem, 369
  tümsek, 372

bağıl hız, 50
bağıl hata, 11
bağıl ivme, 50
baraj duvarı, 183
basınç, 180
  geyç, 183
  hidrostatik, 181
  kinetik hesap, 223
basınç birimleri
  atmosfer, 181
  bar, 181
  civa yüksekliği, 181
  milibar, 181
basit harmonik hareket, 143–150
  denklemi, 144–145
  enerji, 149
  faz açısı, 150
  hız, 147
  ivme, 147
basit sarkaç, 151–152
benzin motoru, 227
Bernoulli denklemi, 192
beygir gücü (HP), 82
Biot-Savart yasası, 328
birim vektörler, 17
birimler, 8
boşluğun elektrik geçirgenliği ε_0, 239
boşluğun manyetik geçirgenliği μ_0, 328
boyca genleşme katsayısı, 205
boyuna dalga, 162
boyut, 7
buharlaşma gizli ısısı, 203
büyütme oranı, 371, 375

Carnot çevrimi, 230
coulomb (yük birimi), 237
Coulomb sabiti k, 238
Coulomb yasası, 238
Curie sıcaklığı, 341

çarpışmalar, 98–100
  bir boyutlu, 98
  esnek, 99
  esnek olmayan (plastik), 100
  iki boyutlu, 102
  tam plastik, 100
çevrim, 226
  Carnot, 230
  Dizel, 229
  Otto, 227
çukur ayna, 369–370

dağınım (dispersiyon), 366
dairesel hareket, 47, 70
  merkezcil ivme, 48
dalga cephesi, 363
dalga fonksiyonu, 163
dalga genliği, 164
dalga girişimi, 166
dalga hızı, 162
  elektromanyetik, 163
  ses, 163
  sıvıda, 163
  telde, 162
dalga hareketi, 162–174
  atma, 162
  boyuna dalga, 162
  Doppler olayı, 172–173
  durağan, 168
  enine dalga, 162
  fonksiyonu, 163

genlik, 164
girişim, 166
periyodik, 162
sinüsel, 164
şok dalgası, 173
yansıma ve geçme, 170
yapıcı girişim, 167
yıkıcı girişim, 167
dalgaboyu, 164
dalgaların yansıma ve geçmesi, 170
dalgasayısı, 165
debi, 190
dengenin 1. koşulu, 136
dengenin 2. koşulu, 136
diamanyetizma, 340
dielektrik, 286–289
dielektrik sabiti (K), 288
dielektrik sertlik, 289
direnç, 301
paralel bağlama, 307
seri bağlama, 306
diyoptri D, 378
Dizel çevrimi, 229
doğal frekans, 155
doğru akım devresi, 303–305
enerji, 305
güç, 305
Doppler olayı, 172–173
dönme kinetik enerjisi, 125
durağan dalga, 168
asal frekans, 169
düğüm noktası, 169
harmonikler, 169
karın noktası, 169
normal titreşim kipleri, 169
durum değişkenleri, 200
durum denklemi, 210
Dünyanın manyetik alanı, 341
düzgün dairesel hareket, 47
düzgün doğrusal hareket, 33
düzlem ayna, 369
düzlem dalga, 363
düzlem kondansatör, 280, 281

elektrik akımı, 297–300
biyolojik etkileri, 299
elektrik akısı, 254
elektrik alan, 240–246
alan çizgileri, 242
dipol, 244
iletkenler, 260
noktasal yük, 241
elektrik dipol, 244, 271, 287
elektrik dipol momenti, 287
elektrik dipol potansiyeli, 271
elektrik duygunluk (χ), 288
elektrik geçirgenliği ε_0, 288
elektrik motoru, 321
elektrik potansiyel
dipol, 271
eşpotansiyel yüzey, 273
gradyan, 274
iletkenler, 273
noktasal yük, 269
sabit elektrik alan için, 267
elektrik potansiyel enerjisi, 266
elektrik yük birimi, 237
elektrik yükü, 235–237
elektromanyetik dalga, 162
elektromotor kuvveti (emk), 303
elektron, 237
elektrostatik kuvvet, 238
enerji korunumu yasası, 88
enine dalga, 162
erime gizli ısısı, 203
esneklik potansiyel enerjisi, 86
eşpotansiyel yüzey, 273
evrensel gaz sabiti R, 210
eylemsiz referans sistemleri, 59
eylemsizlik, 59
eylemsizlik momenti, 120, 123

farad (sığa birimi, 280
Faraday yasası, 346
faz açısı, 150
ferromanyetizma, 340
doyum manyetizasonu, 341
histerezis eğrisi, 341
remanans, 341
fiziksel sarkaç, 152–153
frekans, 146

galvanometre, 309
gama ışınları, 363
gauss (manyetik alan birimi), 317
Gauss yasası, 254–256
gazın yaptığı iş, 216
sabit basınçta (izobarik), 216
sabit hacimde, 216
sabit sıcaklıkta (izotermal), 216
genlik, 145
gerilme kuvveti, 66
geyç basıncı, 183
girdap akımları, 351
girdaplı (türbülanslı) akış, 190
girişim, 384–387
ince film, 386
Young deneyi, 384
girişim saçakları, 384
gizli ısı, 203
buharlaşma, 203
erime, 203
gökkuşağı, 367
görüntü, 369
gerçek, 369
sanal, 369
göreli hız, 50
göreli hareket, 49–51
göreli toplama kuralı, 50
göz, 377
astigmat, 378
hipermetrop, 378
miyop, 378
yakın nokta, 377
güç, 81

hareket
atış hareketi, 44
dairesel, 47
dalga, 162
göreli, 49
sabit açısal ivmeli, 115
sabit ivmeli, 32
serbest düşme, 35
yuvarlanma, 126
harmonik hareket
basit, 143–150
basit sarkaç, 151
fiziksel sarkaç, 152
sönümlü, 153
zorlamalı, 155
harmonikler, 169
hata payı, 11
Helmholtz bobini, 343
hız, 29
hız vektörü, 42
hidrostatik basınç, 181, 192
histerezis eğrisi, 341
Hooke yasası, 81
Huygens-Fresnel ilkesi, 364

ısı, 202
ısı iletimi, 207
ışıma, 208
kondüksiyon, 207
konveksiyon, 208
ısı iletkenlik katsayısı, 207
ısı makinası, 226
verim, 226
ısıl genleşme, 205
ışığın dağınımı (dispersiyon, 366
ışık
dağınım (dispersiyon), 366
dalga cephesi, 363
dalga karakteri, 362

düzlem dalga, 363
elektromanyetik dalga, 362
ışın modeli, 363
yansıma ve kırılma yasaları, 365
ışık hızı, 364
ışıma, 208
ışın, 363

iç direnç, 303
iç enerji, 218
ideal gaz, 219, 225
iş, 78–81
adyabatik, 221
değişken kuvvet, 79
gazın yaptığı, 216
skaler çarpım ifadesi, 78
yay kuvveti, 81
iş-enerji teoremi, 83
ideal gaz, 209–210
durum denklemi, 210
iç enerji, 225
kök-ortalama hız, 225
tek-atomlu, 225
özgül ısı, 220
varsayımı, 210
ideal gaz durum denklemi, 210
iletkenler, 237, 260
eşpotansiyel yüzey, 273
impuls, 96
impuls-momentum teoremi, 96
ince mercek formülü, 375
indüklenmiş yüzey yükü, 287
ivme, 30
bağıl, 50
merkezcil, 48
teğetsel, 49
ivme vektörü, 43

jeneratör, 349
joule (iş birimi), 78

kalori (cal), 202
kararlı akış, 190
karşılıklı indüktans, 352
katı cisim, 114
kati cismin hareketi, 121
kılcallık, 188
kırılma indisi, 364
kırınım, 387–390
ışık şiddeti dağılımı, 389
saçaklar, 387
kırınım saçakları, 387
kızılötesi ışınlar, 362
kilogram, 9
kinetik enerji, 83
dönme hareketi, 125
kohezyon kuvveti, 188
komütatör, 322
kondüksiyon, 207
kondansatör, 280–286
düzlem, 280, 281
enerji, 286
küresel, 282
paralel bağlama, 283
seri bağlama, 284
silindirik, 281
konum, 28
konum vektörü, 42
konveksiyon, 208
koordinat sistemi, 15
korunumlu kuvvet, 84
korunumsuz kuvvet, 84
kritik açı, 366
kritik sönüm, 154
kurtulma hızı, 89
kuvvet, 59
kök-ortalama hız, 225
küresel kondansatör, 282
kütle çekim yasası (gravitasyon), 61
kütle merkezi, 103–104
kütle merkezinin hareketi, 106
kütle spektrografı, 318
kütleçekim potansiyel enerjisi, 87

Lenz kuralı, 347

manometre, 182
manyetik şiddet vektörü $\vec{H}$, 339
manyetik alan
çember akım, 331
Dünya, 341
manyetik dipol, 331
solenoid, 336
sonsuz tel, 330
toroid, 337
manyetik dipol, 331
manyetik dipol momenti, 321
manyetik duygunluk χ_m, 340
manyetik geçirgenlik μ, 340
manyetik kuvvet, 316, 319
paralel akımlar, 333
manyetik tork, 320
manyetizasyon, 339
mekanik dalga, 162
menisküs açısı, 188
mercek
büyütme oranı, 375
yakınsak, 374
mercekçi formülü, 375
merkezcil ivme, 48, 70, 117
merkezcil kuvvet, 70
metre, 8
mikrodalga, 362
mikroskop, 378
mol, 209
mol kütlesi M, 209
moment (tork), 118
momentum, 96
momentum korunumu yasası, 98
morötesi ışınlar, 363
mutlak hata, 11

newton (N) kuvvet birimi, 59
Newton yasaları, 57–60
1. yasa, 58
2. yasa, 59
3. yasa, 60
noktasal yükün elektrik alanı, 241
noktasal yükün potansiyeli, 269
normal tepki kuvveti, 62
normal titreşim kipleri, 169

odak noktası, 370
Ohm yasası, 301
ortalama hız, 29
ortalama hız vektörü, 42
ortalama ivme, 30
ortalama ivme vektörü, 43
Otto çevrimi, 227

özdirenç, 301
sıcaklık katsayısı, 302
özgül ısı, 202
ideal gaz, 220
özindüktans, 353

paralel eksenler teoremi, 123
paramanyetizma, 339
Pascal ilkesi, 181
periyodik dalga, 162
periyot, 48, 145
Pitot tübü, 192
polar molekül, 287
potansiyel enerji, 84–87
elektrik, 266
esneklik, 86
kütleçekim, 87
yerçekimi, 86
potansiyel gradyanı, 274
potansiyometre, 309

radyan (açı birimi), 114
radyo dalgaları, 362
rezonans, 155, 356
doğal frekans, 155
RLC devresi, 355
roket hareketi, 106, 107

sağ-el kuralı:, 21
sabit açısal ivmeli hareket, 115
sabit ivmeli hareket, 32
    zamansız hız formülü, 32
sanal görüntü, 369
saniye, 8
serbest düşme, 35
serbest elektron, 238
serbest-cisim diyagramı, 66
ses hızı, 163
sığa, 280
sıcaklık, 200
sıcaklık gradyanı, 207
sıcaklık ölçeği
    celcius (°C), 201
    fahrenheit (°F), 201
    kelvin (K), 201
sıkıştırma oranı, 227
silindirik kondansatör, 281
sinüsel dalga, 164
sinüsel dalga fonksiyonu, 164
skaler çarpım, 19
Snell yasası, 365
solenoid, 336
sönüm katsayısı, 154
sönümlü harmonik hareket, 153
spin, 338
spin manyetik momenti, 338
statik denge, 135–136
    1. koşul, 136
    2. koşul, 136
Stefan-Boltzmann yasası, 208
Stokes yasası, 189
suyun anormal davranışı, 206
suyun üçlü noktası, 201
süreklilik denklemi, 191
sürüklenme hızı, 299
sürtünme katsayısı, 64
sürtünme kuvveti, 63
şok dalgası, 173

tabakalı (laminer) akış, 190
tam salınım, 146
teğetsel ivme, 49, 117
teleskop, 379
termodinamiğin 1. yasası, 218
termodinamiğin 2. yasası, 229
termodinamik denge, 200
termometre
    civalı, 200
    gaz, 200
    termokupl, 201
tesla (manyetik alan birimi), 317
tını, 169
toplam iç yansıma, 366
toplam mekanik enerji, 88
tork (moment), 118
toroid, 337
Torricelli formülü, 193
transformatör, 350
tümsek ayna, 372

uç voltajı, 304
Uluslararası Birim Sistemi (SI), 8
    kilogram, 9
    metre, 8
    saniye, 8

üst-üste binme ilkesi, 166

van de Graaff jeneratörü, 289
van der Waals kuvveti, 187
vektör, 13–23
    bileşenler, 15
    birim vektörler, 17
    skaler çarpım, 19
    toplama, 14
    vektörel çarpım, 21
    vektör toplama
        bileşenlerle, 18
        paralelkenar kuralı, 14
        üçgen kuralı, 14
vektörel çarpım, 21
Venturi tübü, 192
verim, 226
viskozluk, 188
viskozluk katsayısı, 189
volt (potansiyel birimi), 267
voltmetre, 309

watt (güç birimi), 82

X-ışınları, 363

yakın nokta, 377
yakınsak mercek, 374
yalıtkan, 237
yansıma ve kırılma yasaları, 365
yapıcı girişim, 167
yay sabiti, 81
yerçekimi ivmesi, 35
yerçekimi potansiyel enerjisi, 86
yerdeğiştime, 28
yerdeğiştirme vektörü, 42
yıkıcı girişim, 167
yıldırım, 290
yoğunluk, 180
Young çift-yarık deneyi, 384
yörünge denklemi, 45
yuvarlanma hareketi, 126
yük korunumu, 236
yük yoğunluğu, 246
yüzey gerilim, 187
yüzey gerilim katsayısı, 187

zamansız hız formülü, 32
zorlamalı harmonik hareket, 155
rezonans, 155