FEYNMAN FİZİK DERSLERİ



İkinci Baskı

CİLT 2

ELEKTROMANYETİZMA VE MADDE

Yeni Milenyum Basımı

Feynman-
Leighton-
Sands

ALFA | BİLİM

FEYNMAN FİZİK DERSLERİ 2

ELEKTRO-MANYETİZMA VE MADDE

ALFA

Feynman Fizik Dersleri

II. Cilt: Elektromanyetizma ve Madde

RICHARD FEYNMAN

1918'de New York'ta doğan Richard P. Feynman doktorasını 1942'de Princeton'dan aldı. Genç olmasına karşın, İkinci Dünya Savaşı süresince Los Alamos'ta Manhattan Projesinde önemli bir rol oynadı. Daha sonra, Cornell ve California Teknoloji Enstitüsünde ders verdi. 1965'te Sin-Itiro Tomonaga ve Julian Schwinger'le birlikte, kuantum elektrodinamiğindeki çalışmaları nedeniyle Nobel Fizik Ödülünü kazandı.

Dr. Feynman Nobel Ödülünü kazanmasını sağlayan kuantum elektrodinamiği kuramının problemlerini başarıyla çözmesinin yanı sıra, sıvı helyumda üstün akışkanlık olayını açıklayan bir matematiksel kuram da yarattı. Daha sonra Murray Gell-Mann ile birlikte beta bozunumu gibi zayıf etkileşmeler alanında temel çalışmalar yaptı. Sonraki yıllarda Feynman, yüksek enerjili proton çarpışma süreçlerinde kendi parton modelini ileri sürerek, kuark kuramının gelişmesinde önemli bir rol oynadı.

Bu başarıların ötesinde, Dr. Feynman fiziğe yeni temel hesaplama yöntemleri ve gösterimleri getirdi: en önemlisi, her zaman her yerde kullanılan Feynman diyagramlarıydı; söz konusu diyagramlar fiziksel süreçlerin kavramsal hale getirilip hesaplanma yolunu yakın bilim tarihinde diğer her formalizmden daha fazla değiştirmiştir.

Feynman dikkate değer derecede etkin bir eğitimciydi. Sayısız ödülleri arasından, özellikle 1972'de kazandığı Öğretim İçin Oersted Madalyasıyla övünürdü. Özgün olarak 1963'te basılmış olan *Feynman Fizik Dersleri*, *Scientific American*'da bir eleştirmen tarafından "Çetin, fakat besleyici ve lezzet dolu. 25 yıldır, öğretmenler ve başlangıç seviyesindeki öğrenciler için en iyi yol göstericidir," şeklinde betimlenmişti. Bununla birlikte Dr. Feynman meslek dışı kişilerin fizik anlayışlarını artırmaları için *Fizik Yasaları Üzerine* ve *QED: Işık ve Maddenin Acayip Kuramı* kitaplarını yazdı. Çok sayıda ileri yayının sahibiydi; tüm bunlar araştırmacılar ve öğrenciler için klasik kaynaklar ve ders kitapları haline gelmiş durumdadır.

Richard Feynman yapıcı bir halk adamıydı. Challenger komisyonundaki çalışması çok iyi bilinmektedir, özellikle onun o meşhur soğutulmuş O-contalarının kırılganlığı gösterisi, bir bardak buzlu su ve bir C-kıskacından başka hiçbir şey gerektirmeyen o şık deney. Daha az bilinen ise, Dr. Feynman'ın 1960'ta California Devlet Eğitim Programı Komitesine karşı harcadığı çabadır; orada ders kitaplarının bayağılığını protesto etmişti.

Richard Feynman'ın sayısız bilimsel ve eğitimsel başarısının öyküsü, onun insan yanını yeterince anlatamaz. Onun canlı ve çok-yönlü kişiliği tüm çalışmalarında parlar. Bir fizikçi olmasının yanı sıra değişik zamanlarda bir radyo tamircisi, bir kasa açıcı, bir artist, bir dansçı, bongo virtüözü ve hatta Maya hiyerogliflerinin çözücüsüydü. Sürekli olarak yaşadığı dünyayı merak ederdi, örnek gösterilen bir deneyimciydi.

Richard Feynman 15 Şubat 1988'de Los Angeles'ta öldü.

ROBERT LEIGHTON

1919'da Detroit'te doğan Robert B. Leighton katı hal fiziğinde, kozmik ışın fiziğinde, modern parçacık fiziğinin başlangıç anlarında, güneş fiziğinde, gezegen fotoğrafçılığında, milimetre ve milimetre-altı dalga astronomisinde hayatı boyunca çığır açan çalışmalar yapmıştır. Bunun yanı sıra bilimsel araçların yenilikçi tasarımları konusunda yaptığı katkılar herkesçe bilinir. Leighton, *Feynman Fizik Dersleri*'ni geliştiren takıma katılmadan önce yazdığı, oldukça etkili bir kitap olan *Modern Fiziğin İlkeleri*'yle de tanınır.

1950'lerin başlarında Leighton mü-mezonun iki nötrino ve bir elektrona bozunumunun gösterilmesinde önemli bir rol oynamış ve çıkan elektronun enerji tayfının ilk ölçümünü yapmıştı. Acayip parçacıkların ilk keşfinden sonra onların bozunumlarını ilk gözleyen yine oydu ve yeni acayip parçacıkların birçok özelliğini açığa kavuşturmuştu.

Leighton 1950'lerin ortasında Doppler-kayması ve Zeeman-olayı güneş kameralarını tasarlamıştı. Öğrencileriyle birlikte Zeeman kamerasıyla güneşin manyetik alanını mükemmel bir çözünürlükle haritalamış, böylece yerel güneş yüzeyi hızlarında beş-dakikalık bir titreşimin ve "aşırı-tanelenme" örüntüsünün keşfedilmelerine yol açmıştı; bu da yeni bir alanın -güneş sismolojisinin- doğmasını sağlamıştı. Leighton gezegenlerin daha temiz görüntülerini almak için düzenek tasarlayıp inşa etmiş ve bir başka yeni alan daha açmıştı: uyarlamalı optik. 1960'larda başlayan sondalarla uzay araştırmaları çağına kadar gezegenlerin en iyi görüntüleri onunkilerdi.

1960'ların başlarında, Leighton yeni bir ucuz kızılaltı teleskobu geliştirmiş ve gökyüzünün ilk kez 2,2 mikronda haritalamasını üreterek, insan gözüyle görmek için aşırı soğuk olan gökadamızda umulmayacak kadar çok sayıda gökcismini açığa çıkarmıştı. 1960'ın ortalarında Mariner 4, 6 ve 7 Mars görevlerinde Jet Propulsion Laboratory'da (JPL: Tepkiyle İtme Laboratuarı) Görüntü Bilimi Araştırmaları için ekip lideriydi. JPL'nin ilk derin-uzay sayısal televizyon sisteminin geliştirilmesinde önemli bir rol üstlenmiş, görüntü işleme ve iyileştirme yöntemlerinde ilk uğraşılara katkıda bulunmuştur.

1970'lerde Leighton'ın ilgisi, milimetrik-dalga girişim-metride ve milimetre-altı astronomide kullanılabilecek büyük, ucuz çanak antenlerin geliştirilmesine kaymıştı. Bir kez daha, onun dikkate şayan deneysel becerileri bilimde yeni bir alan açmıştı ve bu alan, California'daki Owens Vadisi Radyo Gözlemevinde ve Şili'deki Atacama Büyük Milimetre/Milimetre-altı Dizilim (ALMA) Radyo Teleskobunda güçlü bir şekilde gelişmesini sürdürmektedir.

Robert Leighton 9 Mart 1997'de Pasadena, California'da öldü.

MATTHEW SANDS

1919'da Oxford, Massachusetts'te doğan Matthew Sands 1940'ta Clark Üniversitesinden lisansını ve 1941'de Rice Üniversitesinden lisansüstü derecesini aldı. II. Dünya Savaşı esnasında Los Alamos'ta Manhattan Projesinde elektronik ve aletler konusunda hizmet verdi. Savaştan sonra Sands nükleer silahların daha fazla kullanılmasına karşı lobi faaliyeti yürüten Los Alamos Atom Bilim İnsanları Federasyonunda gönüllü olarak çalıştı. Bu sürede MIT'de Bruno Rossi'nin gözetiminde kozmik ışınları araştırarak doktora derecesini aldı.

Sands 1950'de Caltech tarafından 1,5 GeV'lik elektron sinkrotronunu kurmak ve işletmek üzere işe alındı. Elektron hızlandırıcılarında kuantum etkilerinin önemini, kuramsal ve deneysel olarak, ilk gösteren oydu.

1960'tan 1966'ya kadar Kolej Fiziği Komisyonunda hizmet veren Sands, *Feynman Fizik Dersleri*'ni yaratan Caltech lisans fizik programındaki yenileştirmelere öncülük etti. Bu esnada Başkanın Bilim Danışma Kurulu, Silahların Denetlenmesi ve Silahsızlanma Ajansı ile Savunma Bakanlığında nükleer silahlar ve silahsızlanma danışmanı olarak da çalıştı.

Sands 1963'te Stanford Doğrusal Hızlandırıcısının (SLAC) kuruluşu ve işletilişinde yönetici yardımcısı olmuş, orada ayrıca 3 GeV'lik hızlandırıcı Stanford Pozitron Elektron Asimetrik Halkalarında da (SPEAR) çalışmıştı.

1969'dan 1985'e kadar California Üniversitesi, Santa Cruz'da fizik profesörüydü ve 1969'dan 1972'ye kadar okulun bilimsel rektör yardımcısı görevinde de bulundu. 1972'de Amerikan Fizik Öğretmenleri Derneğinden Üstün Hizmet Ödülü aldı. Emekli profesör olarak, 1994'e kadar parçacık hızlandırıcısı araştırmalarında etkin olmayı sürdürmüştü. 1998'de Amerikan Fizik Derneği Sands'e, "hızlandırıcı fiziğine ve elektron-pozitron ve proton çarpıştırıcılarının geliştirilmesine yaptığı pek çok katkı nedeniyle" Robert R. Wilson Ödülünü layık gördü.

Sands emekliliğinde Santa Cruz'da öğrencileri için bilgisayar ve laboratuar etkinlikleri kurmalarına yardım ederek ilk ve orta öğretim öğretmenlerine, akıl hocalığı yaptı. *Feynman'ın Fizik Tüyoları* adlı problem çözümü kitabının baskıya hazırlanmasını da denetlemiş, ayrıca buna, *Feynman Fizik Dersleri*'nin ortaya çıkarılmasını betimleyen bir anı yazısı da koymuştu.

Matthew Sands 13 Eylül 2014'te Santa Cruz'da öldü.

Çeviri:

Kerem Kaynar

Yayına Hazırlayan:

Doç Dr. Kerem Cankoçak

Editörler Kurulu

Prof. Dr. Durmuş Ali Demir

(İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fizik Bölümü)

Prof. Dr. İsmail Hakkı Duru

(Emeritus Prof., IYTE)

Prof. Dr. Zekeriya Aydın

(Emeritus Prof., Ankara Üniversitesi, Fizik Bölümü)

Prof. Dr. Ömer Faruk Dayı

(İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü)

Prof. Dr. Cenap Özben

(İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü)

Prof. Dr. Erhan Pesen

(Celal Bayar Üniversitesi, Fizik Bölümü)

Prof. Dr. Nuri Ünal

(Akdeniz Üniversitesi, Fizik Bölümü)

Prof. Dr. Ali Ulvi Yılmazer

(Ankara Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü)

Doç. Dr. Altan Çakır

(İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü)

Feynman Fizik Dersleri
II. Cilt: Elektromanyetizma ve Madde
© 2014, ALFA Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.

The Feynmann Lectures On Physics / New Millennium Edition
Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter
© 1964, 2006, 2010 by California Institute of Technology,

Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer
Orijinal İngilizce baskısı Perseus Books Grubu'un tescilli markası Basic Books tarafından yayımlanmıştır.

Kitabın Türkçe yayın hakları Nurcihan Kesim Ajans aracılığıyla Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Tanıtım amacıyla, kaynak göstermek şartıyla yapılacak kısa alıntılar dışında hiçbir yöntemle çoğaltılamaz.

Yayıncı ve Genel Yayın Yönetmeni M. Faruk Bayrak
Genel Müdür Vedat Bayrak
Yayın Yönetmeni Mustafa Küpüşoğlu
Dizi Editörü Kerem Cankoçak
Redaksiyon Mehmet Ata Arslan, Yunus Cankoçak
Kapak Tasarımı Elif Çepikkurt
Sayfa Tasarımı Zeliha Güler, Ümit Yavuz

ISBN 978-605-171-358-8
978-605-171-343-4 (Tk)

1. Basım: Kasım 2016
2. Basım: Temmuz 2018

Baskı ve Cilt
Melisa Matbaacılık
Çiftehavuzlar Yolu Acar Sanayi Sitesi No: 8 Bayrampaşa - İstanbul
Tel: 0(212) 674 97 23 Faks: 0(212) 674 97 29
Sertifika no: 12088

Alfa Basım Yayım Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.
Alemdar Mahallesi Ticarethane Sokak No: 15 34110 Cağaloğlu–İstanbul
Tel: 0(212) 511 53 03 Faks: 0(212) 519 33 00
www.alfakitap.com - info@alfakitap.com
Sertifika no: 10905

FEYNMAN FİZİK DERSLERİ



Feynman-Leighton-Sands

CİLT 2

ELEKTRO-MANYETİZMA VE MADDE

Yeni Milenyum Basımı

ALFA | BİLİM

BÖLÜM 1. ELEKTROMANYETİZMA

1-1 Elektriksel kuvvetler 1-1
1-2 Elektrik ve manyetik alanlar 1-2
1-3 Vektör alanlarının özellikleri 1-3
1-4 Elektromanyetizma yasaları 1-4
1-5 Alanlar nedir? 1-5
1-6 Bilim ve teknolojide elektromanyetizma 1-6

BÖLÜM 2. VEKTÖR ALANLARININ DİFERANSİYEL ANALİZİ

2-1 Fiziği anlamak 2-1
2-2 Skaler ve Vektör alanlar: T ve h 2-2
2-3 Alanların türevleri: gradyan 2-3
2-4 ∇ işlemcisi 2-4
2-5 ∇ işlemleri 2-5
2-6 Isı akışının diferansiyel denklemi 2-6
2-7 Vektör alanların ikinci türevleri 2-7
2-8 Tuzaklar 2-8

BÖLÜM 3. VEKTÖR İNTEGRAL ANALİZİ

3-1 Vektör integraller; $\nabla\psi$'nin çizgi integrali 3-1
3-2 Bir vektör alanının akısı 3-2
3-3 Bir küpten geçen akı; Gauss teoremi . 3-3
3-4 Isı iletimi; yayınım denklemi 3-4
3-5 Bir vektör alanının dolaşımı 3-5
3-6 Bir kare etrafında dolaşım; Stokes teoremi 3-6
3-7 Bükümsüz ve diverjansı olmayan alanlar 3-7
3-8 Özet 3-8

BÖLÜM 4. ELEKTROSTATİK

4-1 Statik 4-1
4-2 Coulomb yasası: üst üste binme 4-2
4-3 Elektrik potansiyeli 4-3
4-4 $E = -\nabla\phi$
4-5 E'nin akısı
4-6 Gauss yasası; E'nin diverjansı
4-7 Küresel bir yükün alanı
4-8 Alan çizgileri; eşpotansiyel yüzeyler

BÖLÜM 5. GAUSS YASASININ UYGULAMASI

5-1 Elektrostatik dediğin Gauss yasası artı... 5-1
5-2 Elektrostatik alanda denge 5-2
5-3 İletkenlerle denge 5-3
5-4 Atomların kararlılığı 5-4
5-5 Çizgisel yükün elektrik alanı 5-5
5-6 Yüklü levha; iki paralel levha arasındaki elektrik alan 5-6
5-7 Küresel bir yük; küresel bir kabuk 5-7
5-8 Noktasal bir yük alanı tam olarak $1/r^2$ midir? 5-8
5-9 Bir iletkenin alanları 5-9
5-10 Bir iletkenin kovuğundaki alan 5-10

BÖLÜM 6. ÇEŞİTLİ KOŞULLARDA ELEKTRİK ALAN

6-1 Elektrostatik potansiyel denklemleri 6-1
6-2 Elektrik dipolü 6-2
6-3 Vektör denklemleri üzerine düşünceler 6-3
6-4 Bir gradyan olarak dipol potansiyeli 6-4
6-5 Rastgele bir dağılım için dipol yakınlaştırması 6-5
6-6 Yüklü iletkenlerin alanları 6-6
6-7 Görüntüler yöntemi 6-7
6-8 İletken bir levhanın yakınındaki noktasal yük 6-8
6-9 İletken bir kürenin yakınındaki noktasal yük 6-9
6-10 Kondansatörler; paralel levhalar 6-10
6-11 Yüksek voltaj çökmesi 6-11
6-12 Alan salımlı mikroskop 6-12

BÖLÜM 7. ÇEŞİTLİ KOŞULLARDA ELEKTRİK ALAN (DEVAMI)

7-1 Elektrostatik alan bulma yöntemleri 7-1
7-2 İki boyutlu alanlar; karmaşık değişkenin fonksiyonları 7-2
7-3 Plazma salınımları 7-3
7-4 Bir elektrolit içerisinde koloidal parçacıklar 7-4
7-5 Bir örgünün elektrostatik alanı 7-5

BÖLÜM 8. ELEKTROSTATİK ENERJİ

8-1 Yüklerin elektrostatik enerjisi. düzgün bir küre 8-1
8-2 Bir kondansatörün enerjisi. Yüklü iletkenler üzerindeki kuvvetler 8-2
8-3 İyonik bir kristalin elektrostatik enerjisi 8-3

8-4 Çekirdeklerin elektrostatik enerjisi ... 8-4
8-5 Elektrostatik alanda enerji ... 8-5
8-6 Bir noktasal yükün enerjisi ... 8-6

BÖLÜM 9. ATMOSFERDEKİ ELEKTRİK

9-1 Atmosferin elektrik potansiyel gradyanı ... 9-1
9-2 Atmosferdeki elektrik akımları ... 9-2
9-3 Atmosferik akımların kaynağı ... 9-3
9-4 Gök gürültülü fırtınalar ... 9-4
9-5 Yük ayrımının mekanizması ... 9-5
9-6 Yıldırım ... 9-6

BÖLÜM 10. DİELEKTRİK

10-1 Dielektrik sabiti ... 10-1
10-2 Kutuplanma vektörü P ... 10-2
10-3 Kutuplanma yükleri ... 10-3
10-4 Dielektrikli elektrostatik denklemleri ... 10-4
10-5 Dielektrikli alanlar ve kuvvetler ... 10-5

BÖLÜM 11. DİELEKTRİĞİN İÇİNDE

11-1 Moleküler dipoller ... 11-1
11-2 Elektronik kutuplanma ... 11-2
11-3 Kutupsal moleküller; yönlendirme kutuplanması ... 11-3
11-4 Dielektriğin kovuklarında elektrik alanlar ... 11-4
11-5 Sıvıların dielektrik sabiti; Clausius-Mossotti denklemi ... 11-5
11-6 Katı dielektrik ... 11-6
11-7 Ferroelektrik; $BaTiO_3$ ... 11-7

BÖLÜM 12. ELEKTROSTATİK BENZERLER

12-1 Benzer denklemler benzer çözümlere sahiptir ... 12-1
12-2 Isı akışı; sonsuz bir levhanın sınırının yakınındaki nokta kaynak ... 12-2
12-3 Gergin zar ... 12-3
12-4 Nötronların yayınımı; homojen bir ortamdaki düzgün küresel kaynak ... 12-4
12-5 Girdapsız akış; bir küre etrafındaki akış ... 12-5
12-6 Aydınlanma; bir düzlemin düzgün ışıklandırılması ... 12-6
12-7 Doğanın "altında yatan birlik" ... 12-7

BÖLÜM 13. MANYETOSTATİK

13-1 Manyetik alan ... 13-1
13-2 Elektrik akımı; yükün korunumu ... 13-2
13-3 Bir akım üzerindeki manyetik kuvvet ... 13-3
13-4 Kararlı akımların manyetik alanı; Ampère yasası ... 13-4
13-5 Bir solenoid ve düz telin manyetik alanı; atomik akımlar ... 13-5
13-6 Elektrik ve manyetik alanların göreliliği ... 13-6
13-7 Akımların ve yüklerin dönüşümü ... 13-7
13-8 Üst üste binme; sağ el kuralı ... 13-8

BÖLÜM 14. ÇEŞİTLİ DURUMLARDA MANYETİK ALAN

14-1 Vektör potansiyeli ... 14-1
14-2 Bilinen akımların vektör potansiyeli ... 14-2
14-3 Düz bir tel ... 14-3
14-4 Uzun bir solenoid ... 14-4
14-5 Küçük bir ilmeğin alanı, manyetik dipol ... 14-5
14-6 Bir akımın vektör potansiyeli ... 14-6
14-7 Biot ve Savart yasası ... 14-7

BÖLÜM 15. VEKTÖR POTANSİYELİ

15-1 Bir akım ilmeği üzerindeki kuvvetler; bir dipolün enerjisi ... 15-1
15-2 Mekanik ve elektriksel enerjiler ... 15-2
15-3 Kararlı akımların enerjisi ... 15-3
15-4 B'ye karşı A ... 15-4
15-5 Vektör potansiyeli ve kuantum mekaniği ... 15-5
15-6 Statik için doğru olan, dinamik için yanlıştır ... 15-6

BÖLÜM 16. İNDÜKLENMİŞ AKIMLAR

16-1 Motorlar ve jeneratörler ... 16-1
16-2 Transformatörler ve indüktanslar ... 16-2
16-3 İndüklenmiş akımlar üzerindeki kuvvetler ... 16-3
16-4 Elektrik teknolojisi ... 16-4

BÖLÜM 17. İNDÜKSİYON YASALARI

17-1 İndüksiyon fiziği ... 17-1
17-2 "Akı kuralı" için istisnalar ... 17-2
17-3 Betatron; bir elektrik alanla indüklenen parçacık ivmelenmesi ... 17-3
17-4 Bir paradoks ... 17-4
17-5 Alternatif akım jeneratörü ... 17-5
17-6 Karşılıklı indüktans ... 17-6
17-7 Öz indüktans ... 17-7
17-8 İndüktans ve manyetik enerji ... 17-8

BÖLÜM 18. MAXWELL DENKLEMLERİ

18-1 Maxwell denklemleri ... 18-1
18-2 Yeni terim nasıl işler? ... 18-2

18-3 Bütün klasik fizik 18-3
18-4 Hareket eden bir alan 18-4
18-5 Işık hızı 18-5
18-6 Maxwell denklemlerini çözmek; potansiyeller ve dalga denklemi 18-6

BÖLÜM 19. EN AZ EYLEM İLKESİ
19-1 Özel bir ders: neredeyse tamamen sözlü 19-1
19-2 Dersten sonra eklenmiş bir not 19-2

BÖLÜM 20. BOŞ UZAYDA MAXWELL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ
20-1 Boş uzayda dalgalar; düzlem dalgaları 20-1
20-2 Üç boyutlu dalgalar 20-2
20-3 Bilimsel hayal gücü 20-3
20-4 Küresel dalgalar 20-4

BÖLÜM 21. MAXWELL DENKLEMLERİNİN AKIMLAR VE YÜKLERLE ÇÖZÜMLERİ
21-1 Işık ve elektromanyetik dalgalar 21-1
21-2 Nokta kaynaktan yayılan küresel dalgalar 21-2
21-3 Maxwell denklemlerinin genel çözümü 21-3
21-4 Salınan bir dipolün alanları 21-4
21-5 Hareket eden bir yükün potansiyelleri; Liénard ve Wiechert'in genel çözümü 21-5
21-6 Sabit hızda ilerleyen yük için potansiyeller; Lorentz denklemi 21-6

BÖLÜM 22. AC DEVRELERİ
22-1 Empedanslar 22-1
22-2 Jeneratörler 22-2
22-3 İdeal elemanlar şebekesi; Kirchhoff yasaları 22-3
22-4 Eşdeğer devreler 22-4
22-5 Enerji 22-5
22-6 Bir merdiven şebeke 22-6
22-7 Filtreler 22-7
22-8 Diğer devre elemanları 22-8

BÖLÜM 23. KOVUK REZONATÖRLERİ
23-1 Gerçek devre elemanları 23-1
23-2 Yüksek frekanslarda bir sığaç 23-2
23-3 Bir rezonans kovuğu 23-3
23-4 Kovuk kipleri 23-4
23-5 Kovuklar ve rezonans devreleri 23-5

BÖLÜM 24. DALGA KILAVUZLARI
24-1 İletim hattı 24-1
24-2 Dikdörtgen dalga kılavuzu 24-2
24-3 Kesme frekansı 24-3
24-4 Kılavuzlu dalgaların hızı 24-4
24-5 Kılavuzlu dalgaları gözlemlemek 24-5
24-6 Dalga kılavuzu tesisatçılığı 24-6
24-7 Dalga kılavuzu kipleri 24-7
24-8 Kılavuzlu dalgalara bir başka bakış 24-8

BÖLÜM 25. GÖRELİ GÖSTERİMDE ELEKTRODİNAMİK
25-1 Dört-vektörler 25-1
25-2 Skaler çarpım 25-2
25-3 Dört boyutlu gradyan 25-3
25-4 Dört boyutlu gösterimde elektrodinamik 25-4
25-5 Hareket eden bir yükün dört-potansiyeli 25-5
25-6 Elektrodinamik denklemlerinin değişmezliği 25-6

BÖLÜM 26. ALANLARIN LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ
26-1 Hareketli bir yükün dört-potansiyeli 26-1
26-2 Sabit hızlı bir noktasal yükün alanları 26-2
26-3 Alanların göreli dönüşümü 26-3
26-4 Göreli gösterimde hareket denklemleri 26-4

BÖLÜM 27. ALAN ENERJİSİ VE ALAN MOMENTUMU
27-1 Yerel korunum 27-1
27-2 Enerji korunumu ve elektromanyetizma 27-2
27-3 Elektromanyetik alanda enerji yoğunluğu ve enerji akışı 27-3
27-4 Alan enerjisinin belirsizliği 27-4
27-5 Enerji akışı örnekleri 27-5
27-6 Alan momentumu 27-6

BÖLÜM 28. ELEKTROMANYETİK KÜTLE
28-1 Bir noktasal yükün alan enerjisi 28-1
28-2 Hareket eden bir yükün alan momentumu 28-2
28-3 Elektromanyetik kütle 28-3
28-4 Elektronun kendi üzerindeki kuvvet 28-4
28-5 Maxwell kuramını değiştirme denemeleri 28-5

28-6 Nükleer kuvvet alanı 28-6

BÖLÜM 29. ELEKTRİK VE MANYETİK ALANLARDA YÜKLERİN HAREKETLERİ

29-1 Düzgün bir elektrik veya manyetik alanda hareket 29-1
29-2 Momentum analizi 29-2
29-3 Elektrostatik mercek 29-3
29-4 Manyetik mercek 29-4
29-5 Elektron mikroskobu 29-5
29-6 Hızlandırıcı kılavuz alanları 29-6
29-7 Değişken gradyan odaklama 29-7
29-8 Birbirine dik elektrik ve manyetik alanlarda hareket 29-8

BÖLÜM 30. KRİSTALLERİN İÇ GEOMETRİSİ

30-1 Kristallerin iç geometrisi 30-1
30-2 Kristallerde kimyasal bağlar 30-2
30-3 Kristallerin büyümesi 30-3
30-4 Kristal örgüler 30-4
30-5 İki boyutta simetriler 30-5
30-6 Üç boyutta simetriler 30-6
30-7 Metallerin mukavemeti 30-7
30-8 Dislokasyonlar ve kristal büyümesi 30-8
30-9 Bragg-Nye kristal modeli 30-9

BÖLÜM 31. TENSÖRLER

31-1 Kutuplanabilirlik tensörü 31-1
31-2 Tensör bileşenlerini dönüştürmek .. 31-2
31-3 Enerji elipsoidi 31-3
31-4 Diğer tensörler; eylemsizlik tensörü 31-4
31-5 Vektörel çarpım 31-5
31-6 Stres tensörü 31-6
31-7 Yüksek dereceli tensörler 31-7
31-8 Elektromanyetik momentumun dört-tensörü 31-8

BÖLÜM 32. YOĞUN MALZEMELERİN KIRILMA İNDİSİ

32-1 Maddenin Kutuplanması 32-1
32-2 Dielektrik içinde Maxwell denklemleri 32-2
32-3 Dielektrik içinde dalgalar 32-3
32-4 Karmaşık kırılma indisi 32-4
32-5 Karışımın indisi 32-5
32-6 Metallerdeki dalgalar 32-6
32-7 Düşük frekanslı ve yüksek frekanslı yakınlaştırmalar; kabuk ve plazma frekansı 32-7

BÖLÜM 33. YÜZEYLERDEN YANSIMA

33-1 Işığın yansıması ve kırılması 33-1
33-2 Yoğun malzemelerde dalgalar 33-2
33-3 Sınır koşulları 33-3
33-4 Yansıtılan ve iletilen dalgalar 33-4
33-5 Metallerden yansıma 33-5
33-6 Toplam iç yansıma 33-6

BÖLÜM 34. MADDENİN MANYETİZMASI

34-1 Diyamanyetizma ve paramanyetizma 34-1
34-2 Manyetik moment ve açısal momentum 34-2
34-3 Atomik mıknatısların presesyonu 34-3
34-4 Diyamanyetizma 34-4
34-5 Larmor kuramı 34-5
34-6 Klasik fizik ne diyamanyetizmayı ne de paramanyetizmayı öngürür 34-6
34-7 Kuantum mekaniğinde açısal momentum 34-7
34-8 Atomların manyetik enerjisi 34-8

BÖLÜM 35. PARAMANYETİZMA VE MANYETİK REZONANS

35-1 Kuantumlanmış manyetik durumlar 35-1
35-2 Stern-Gerlach deneyi 35-2
35-3 Rabi moleküler-demet yöntemi 35-3
35-4 Dökme malzemelerin paramanyetizması 35-4
35-5 Adyabatik mıknatıssızlaştırmayla soğuma 35-5
35-6 Nükleer manyetik rezonans 35-6

BÖLÜM 36. FERROMANYETİZMA

36-1 Mıknatıslanma akımları 36-1
36-2 H alanı 36-2
36-3 Mıknatıslanma eğrisi 36-3
36-4 Demir çekirdek indüktansları 36-4
36-5 Elektromıknatıs 36-5
36-6 Kendiliğinden mıknatıslanma 36-6

BÖLÜM 37. MANYETİK MALZEMELER

37-1 Ferromanyetizmayı anlamak 37-1
37-2 Termodinamik özellikler 37-2
37-3 Histerezis eğrisi 37-3
37-4 Ferromanyetik malzemeler 37-4
37-5 Olağandışı manyetik malzemeler 37-5

BÖLÜM 38. ESNEKLİK

38-1 Hooke yasası 38-1
38-2 Düzgün gerilmeler 38-2
38-3 Burulma çubuğu; kayma dalgaları ... 38-3

38-4 Bükülmüş kiriş 38-4
38-5 Burkulma 38-5

BÖLÜM 39. ESNEK MALZEMELER

39-1 Gerilme tensörü 39-1
39-2 Esneklik tensörü 39-2
39-3 Esnek bir cisimde hareketler 39-3
39-4 Esnek olmayan davranış 39-4
39-5 Esneklik sabitlerini hesaplamak 39-5

BÖLÜM 40. KURU SUYUN AKIŞI

40-1 Hidrostatik 40-1
40-2 Hareket denklemleri 40-2
40-3 Kararlı akış: Bernoulli teoremi 40-3
40-4 Dolaşım 40-4
40-5 Girdap çizgileri 40-5

BÖLÜM 41. ISLAK SUYUN AKIŞI

41-1 Viskozite 41-1
41-2 Viskoz akış 41-2
41-3 Reynolds sayısı 41-3
41-4 Dairesel bir silindir etrafından akış 41-4
41-5 Sıfır viskozite limiti 41-5
41-6 Couette akışı 41-6

BÖLÜM 42. EĞRİ UZAY

42-1 İki boyutlu eğri uzaylar 42-1
42-2 Üç boyutlu uzayda eğrilik 42-2
42-3 Uzayımız eğridir 42-3
42-4 Uzay-zamanda geometri 42-4
42-5 Kütleçekim ve eşdeğerlik ilkesi 42-5
42-6 Kütleçekim alanında saatlerin hızı 42-6
42-7 Uzay-zamanın bükülmesi 42-7
42-8 Eğri uzay-zamanda hareket 42-8
42-9 Einstein'ın kütleçekim kuramı 42-9

DİZİN

İSİM DİZİNİ

SEMBOLLER LİSTESİ

YENİ MİLENYUM BASIMININ ÖNSÖZÜ

Richard Feynman'ın üç ciltlik *Feynman Fizik Dersleri*'nin ortaya çıktığı California Teknoloji Enstitüsündeki fiziğe giriş dersini vermesinden bu yana neredeyse elli yıl geçti. Bu elli yıl boyunca fiziksel dünyayı algılayışımız büyük oranda değişti fakat *Feynman Fizik Dersleri* etkisini kaybetmedi. *Feynman dersleri*, onun eşsiz fizik algısı ve pedagojisi nedeniyle günümüzde hâlâ ilk basıldığı an kadar etkilidir. Dünya çapında hem acemi hem de olgun fizikçiler tarafından çalışılmaktadır; sadece İngilizce 1,5 milyondan fazla kopyası basılmış ve en az bir düzine dile çevrilmiştir. Belki de hiçbir fizik kitabı serisi şu ana dek bu kadar etkili olmamıştır.

Bu *Yeni Milenyum Basımı, Feynman Fizik Dersleri* (*FLP*) için yeni bir çağın başlangıcıdır: elektronik yayıncılığın yirmi birinci yüzyıl çağı. *FLP*, Latex elektronik dizgi dilinde tanımlanmış metin ve denklemleri ve modern çizim yazılımları kullanılarak yeniden çizilen bütün şekillerle birlikte *FLP* formatına çevrilmiştir.

Bu son baskının sonuçları korkutucu *değildir*; neredeyse fizik öğrencileri tarafından yıllarca alışılmış ve sevilen orijinal kırmızı kitaba benzemektedir. Ana farklılıklar, genişletilmiş ve geliştirilmiş bir dizin, bir önceki nüshanın ilk basımından bu yana beş yıldan fazla bir süre içinde okuyucular tarafından bulunan 885 basım hatasının düzeltilmiş hali ve gelecekte okuyucular tarafından bulunabilecek hataları düzeltme kolaylığıdır. Bu konuya aşağıda değineceğiz.

Bu basımın *eKitap* versiyonu ve *Geliştirilmiş Elektronik Versiyonu* elektronik yeniliklerdir. Büyütülmeye çalışıldığında denklemleri, şekilleri ve hatta bazen metnin kendisinin piksellere ayrıldığı 20. yüzyılın teknik kitaplarının çoğu eKitap'larının aksine *Yeni Milenyum Baskısının* Latex taslağı, sayfadaki tüm özelliklerin (fotoğraflar hariç) sınır koyulmaksızın ve şekillerin netliğinin ve tamlığının muhafaza edildiği en yüksek kalite eKitapların yaratılmasına olanak tanımaktadır. Feynman'ın orijinal derslerinden alınmış sınıf tahtası resimleri ve seslerini ve diğer kaynaklarla bağlantılarını içeren *Geliştirilmiş Elektronik Versiyon*, Feynman'ın derslerinden haz almanızı sağlayacak bir yeniliktir.

Feynman Dersleri Anısına

Bu üç cilt eksiksiz pedagojik bir çalışmadır. Ayrıca Feynman'ın 1961-64 yılları arasında, California Teknoloji Enstitüsünde (Caltech) alanlarına bakılmaksızın bütün birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinin ihtiyacı olduğu lisans fizik derslerinin tarihsel bir kaydıdır.

Tıpkı benim gibi, okuyucular da Feynman'ın derslerine katılan öğrencilerin nasıl etkilendiklerini merak edebilir. Bu ciltlere kendi yazdığı önsözünde Feynman bir nebze olumsuz bir bakış açısı sunmaktadır. "Öğrenciler tarafından çok iyi anlaşıldığını sanmıyorum" diye yazmaktadır. Matthew Sands, *Feynman Fizik Tüyoları* isimli Feynman biyografisinde çok daha olumlu bir bakış açısı sunar. Merakım nedeniyle 2005 yılının sonbaharında, Feynman'ın 1961-63 sınıfından (yaklaşık 150 öğrenci arasından) rastgele 17 öğrenciyle –bazıları derste oldukça zorlanan bazıları da uzmanlaşan öğrenciler olmak üzere; fizik ana bilim dalının yanı sıra biyoloji, kimya, mühendislik, jeoloji, matematik ve astronomi öğrencileri– mailleştim ya da konuştum.

Aradan geçen yıllar boyunca hafızaları donuklaşmış olabilirdi, fakat yüzde sekseni Feynman'ın derslerinin üniversite hayatlarının en önemli anları olduğu-

nu belirtti. "Kiliseye gitmeye benziyordu." Dersler "dönüşümsel bir deneyimdi," "ömür boyunca size eşlik eden bir deneyim, muhtemelen Caltech'ten edindiğim en önemli deneyim." "Biyoloji alanındaydım fakat Feynman'ın dersleri lisans öğrenimimdeki en ileri deneyimdi... bununla birlikte itiraf etmeliyim ki ev ödevlerini zamanında yapamıyordum ve güçlükle takip edebiliyordum." "Derste en az ümit veren öğrenciler arasındaydım ve asla bir dersi kaçırmadım... Feynman'ın keşfetmekten duyduğu hazzı hâlâ hissedebiliyorum ve hatırlıyorum... Dersleri... muhtemelen basılan *Dersleri*'nde olmayan duygusal bir etkiye sahipti."

Bununla birlikte birkaç öğrenci iki nedenden dolayı olumsuz hatıralara sahipti: (i) "Derslere katılmanıza rağmen ev ödevi problemlerini nasıl çözeceğinizi öğrenemiyordunuz. Feynman çok becerikliydi; hangi yaklaşımların ve hilelerin uygulanması gerektiğini biliyordu ve birinci sınıf öğrencilerinin sahip olmadığı bir zekâya ve deneyime dayanan sezgilere sahipti." Feynman ve meslektaşları derslerindeki bu kusurun farkındalardı ve *Feynman'ın Fizik Tüyoları* isimli esere dahil edilen bölümlerde bununla ilgili kaynaklar vardı: Feynman tarafından verilmiş üç problem-çözme dersi ve Robert B. Leighton ile Rochus Vogt tarafından toplanan bir dizi problem ve cevapları. (ii) "Bir sonraki derste nelerin tartışılacağının bilinmemesinden kaynaklanan güvensizlik, bir ders kitabının ya da ders kaynaklarıyla bağlantılı herhangi bir referansın olmayışı ve sonuç olarak ileri okumaların yapılamaması... Üniversite binasının içinde dersleri heyecan verici ve anlaşılır buldum fakat dışarıda [detaylarını yeniden kurmaya çalıştığımda] Sanskritçeydi." Bu problem elbette bu üç cilt, *Feynman Fizik Dersleri*'nin basılan versiyonu, sayesinde çözüldü. Bu eserler daha sonra Caltech öğrencilerinin yıllarca çalıştığı ders kitapları haline geldiler ve Feynman'ın en büyük mirası olarak günümüzde yaşatılmaktadır.

Yazım Hatalarının Bir Tarihi

Feynman Fizik Dersleri, Feynman ve Feynman'ın derslerindeki* kara tahta fotoğrafları ve teyp kayıtları üzerinde çalışıp, onları derleyen yardımcı yazarlar Robert B. Leighton ve Matthew Sands tarafından hızlı bir şekilde üretildi (Her iki yardımcı yazar da *Yeni Milenyum Basımın Geliştirilmiş Elektronik Versiyonuna* katkıda bulundular). Feynman, Leighton ve Sands'in yüksek bir hızla çalışmaları nedeniyle ilk baskısında çok sayıda hatanın bulunması kaçınılmazdı. Feynman daha sonraki yıllarda yazım hatalarından oluşan uzun bir liste oluşturdu: Caltech'teki öğrenciler, öğretim üyeleri ve dünya çapındaki okuyucular tarafından bulunan hatalar. 1960'larda ve 1970'lerin ilk yıllarında Feynman yoğun yaşamı arasında I ve II. ciltler için hataların hepsini olmasa bile büyük bir kısmını kontrol etmek ve daha sonraki baskılara bu düzeltmeleri yerleştirmek için zaman ayırdı. Fakat Feynman'ın III. Ciltteki hataların ortadan kaldırılmasına yönelik görev anlayışı asla yeni şeyleri keşfetme heyecanından daha yüksek değildi.† 1988 yılındaki zamansız ölümünden sonra bütün üç cilt için toplanan hatalar Caltech Arşivlerinde toplandı ve unutulmaya yüz tuttu.

2002 yılında Ralph Leighton (Robert Leighton'ın son çocuğu ve Feynman'ın hemşerisi) eski hatalar ve Ralph'ın arkadaşı Micheal Gottlieb tarafından derlenen yeni uzun bir liste konusunda beni bilgilendirdi. Leighton bütün hataları düzeltilmiş *Feynman Dersleri*'nin yeni bir Caltech baskısının ortaya konmasını

---

* Feynman'ın derslerinin ve bu üç cildin tanımlamaları için üç cildin her birindeki Giriş ve Önsöz kısımlarına, ayrıca Matt Sands'in *Feynman'ın Fizik Tüyoları* isimli biyografisine ve David Goodstein ve Gerry Neugebauer tarafından 1989 yılında yazılan *FLP'nin Hatıra Baskısına Özel Giriş* isimli eserine, ayrıca 2005 yılında basılan *Tamamlayıcı Baskısı*'na, bakınız.

† 1975 yılında III. Cildin hatalarını kontrol etmeye başlamıştı fakat bazı şeyler dikkatini dağıttı ve bu görevi asla bitiremedi, bu nedenle düzeltmeleri tamamlayamadı.

ve yanında, onun ve Gottlieb'in hazırlayacağı *Feynman'ın Fizik Tüyoları* isimli yeni bir yardımcı kaynak cildinin basılmasını önerdi.

Feynman benim kahramanımdı ve yakın bir arkadaşımdı. Yeni hata listesini ve önerilen yeni cildin içeriğini gördüğümde Caltech (O, Leighton ve Sands'in *Feynman Dersleri* için bütün hakları ve sorumlulukları devrettiği Feynman'ın uzun süreli akademik evi) adına bu projeyi denetlemeyi hemen kabul ettim. Gottlieb'in bir buçuk yıl süren titiz çalışmasından ve Dr. Micheal Hartl'ın (bütün hataları ve yeni cildi kontrol eden seçkin bir Caltech doktora sonrası öğrencisi) dikkatli incelemelerinden sonra 2005 yılında yaklaşık 200 hatası düzeltildi ve Gottlieb ile Leighton tarafından yazılan *Feynman'ın Fizik Tüyoları* isimli yeni bir cilde sahip *Feynman Fizik Dersleri'nin Tamamlayıcı Baskısı* doğdu.

Bu baskının "Tamamlayıcı" olacağını düşünüyordum. Beklemediğim şey dünya çapındaki okuyucuların –daha ileri hataları tanımlamak için Gottlieb'e başvurmaları ve Gottlieb tarafından oluşturulup kalıcı hale getirilen websitesine, *Feynman Dersleri Websitesi* www.feynmanlectures.info, bu hataları sunmaları– taşıdıkları coşkulu sorumluluk duygusuydu. O zamandan beri geçen 5 yılda 965 yeni hata sunuldu ve Gottlieb, Hartl ile Nate Bode'nin (seçkin bir Caltech fizik lisans öğrencisi) titiz çalışmaları sayesinde düzeltildi. 965 hatanın 80 adedi *Tamamlayıcı Basım*'ın (Ağustos 2006) dördüncü baskısında düzeltildi ve geriye kalan 885'i bu *Yeni Milenyum Basımının* ilk baskısında düzeltildi (I. Ciltte 332, II. Ciltte 263 ve III. Ciltte 200). Hataların detayları için www.feynmanlectures.info adresine bakınız.

Açık ki, *Feynman Fizik Dersleri*'ni hatasız hale getirmek dünya çapındaki işbirliği sayesinde gerçekleşti. Caltech adına 2005 yılından bu yana katkıda bulunan 50 okuyucuya ve sonraki yıllarda katkı koyacak çok sayıda okuyucuya şimdiden teşekkür ederim. Katkı koyan herkesin ismi www.feynmanlectures.info/flp_errata.html adresinde bulunmaktadır.

Neredeyse tüm hatalar üç tiptedir: (i) düz yazıdaki baskı hataları; (ii) denklemlerdeki, tablolardaki ve şekillerdeki baskı hataları ve matematiksel hatalar: işaret hataları, yanlış sayılar (örneğin 5 yerine 4 kullanılması), denklemlerdeki unutulmuş alt indisler, toplam işaretleri, parantezler ve terimler; (iii) bölümlere, tablolara ve şekillere atanan yanlış referanslar. Bu tür hatalar, olgun bir fizikçi için korkunç görünmese de, Feynman'ın birincil dinleyicileri olan öğrenciler için kafa karıştırıcı ve engelleyici olabilir.

Benim sorumluluğumda düzeltilen 1165 hata arasından sadece birkaçının gerçek fiziksel hata olması dikkat çekicidir. Örneğin II. Cildin sayfa 5 ile 9 arasında "... *topraklanmış* kapalı bir iletken içindeki statik olmayan yük dağılımı dışarıda bir alan [elektrik] üretemez," (topraklanmış kelimesi bir önceki baskıda ihmal edilmişti). Bu hata, içlerinde William and Mary Kolejinde bir öğrenci olan ve bir sınavda Feynman'ın hatalı bir pasajına güvenen Beulah Elizabeth Cox'un da bulunduğu çok sayıda okuyucu tarafından Feynman'a bildirilmişti. 1975 yılında Feynman Bayan Cox'a şöyle yazdı[1] "Öğretim görevlisinin, Gauss Yasasını kullanarak gösterdiği gibi, cevabınızın yanlış olması nedeniyle size puan vermemesi doğruydu. Bilimde dikkatli biçimde oluşturulmuş mantığa ve savlara güvenmelisiniz, otoritelere değil. Ayrıca kitabı dikkatli bir şekilde okuyup anlayabilirdiniz. Bir hata yaptım ve bu nedenle kitap hatalıdır. Muhtemelen topraklanmış bir küreyi ya da içinde farklı bölgelerde hareket eden parçacıkların dışarıdaki şeyleri etkilemeyeceği bir şeyi düşünüyordum. Bunu nasıl yaptığıma emin değilim fakat pot kırdım ve sen de bana inanarak pot kırdın."

[1] *Uğrak Yerinden Kabul Edilebilir Mükemmel Salınımlar, Richard P. Feynman'ın Mektupları*, sayfa 288-89, ed. Michelle Feynman (Basic Books, New York 2005).

Yeni Milenyum Basımı Bu Hale Nasıl Geldi?

Kasım 2005 ile Temmuz 2006 arasında *Feynman Dersleri Web sitesine* www.feynmanlectures.info 340 hata sunuldu. Önemli ölçüde bunların büyük bir kısmı tek bir kişiden geliyordu: Dr. Rudolf Pfeiffer, Avusturya, Vienna Üniversitesinden doktora sonrası araştırmacı bir fizikçi. Yayıncı, Addison Wesley, 80 hatayı önceden tespit etmişti fakat masrafı yüzünden daha fazlasının tespit edilmesine ayak diredi: kitaplar 1960'lı yıllara ait sayfaların fotografik görüntüsüyle çalışan bir foto-ofset süreci sayesinde basılmaktaydı. Bir hatayı düzeltmek bütün sayfanın yeniden dizimi anlamına geliyordu ve yeni bir hatanın olmamasını garanti altına almak için her sayfa iki farklı insan tarafından ikişer kez dizgiye giriliyor, daha sonra birkaç insan tarafından karşılaştırılarak düzeltiliyordu; gerçekten yüzlerce hatanın var olduğu bir durumda çok masraflı bir süreç.

Gottlieb, Pfeiffer ve Ralph Leighton bu konuda çok mutsuzdular, bu nedenle bütün hataları düzeltmeyi kolaylaştırmak, ayrıca eKitap üretmek ve *Feynman Fizik Dersleri*'nin geliştirilmiş elektronik versiyonunu geliştirmek için bir plan geliştirdiler. 2007 yılında Caltech'in temsilcisi olmam dolayısıyla bana planlarını açıkladılar. Hevesli fakat temkinliydim. *Geliştirilmiş Elektronik Versiyonu*'nun bir bölümlük gösterimini içeren detayları gördükten sonra, Caltech'in Gottlieb, Pfeiffer ve Leighton'ın planları doğrultusunda işbirliği yapmasını önerdim. Plan Caltech'in Fizik, Matematik ve Astronomi bölüm başkanları – Tom Tombrello, Andrew Lange ve Tom Soifer– tarafından onaylandı ve karışık yasal sözleşme detayları Caltech'in fikir hakları danışmanı Adam Cochran tarafından incelendi. Bu *Yeni Milenyum Basımının* yayımlanmasıyla birlikte plan, karmaşıklığına rağmen başarılı bir şekilde yürürlüğe kondu. Özel olarak:

Pfeiffer ve Gottlieb *FLP*'nin bütün üç cildini Latex formuna dönüştürdüler (*Feynman'ın Fizik Tüyoları* eserine Feynman derslerinden elde edilen 1000'den fazla alıştırmayı dahil etmek için çalıştılar). *FLP* şekilleri, *FLP*'nin Alman çevirmeni Henning Heinze tarafından Alman baskısında kullanılmak üzere, Hindistan'da modern elektronik formda yeniden çizildi. Gottlieb ve Pfeiffer, bu *Yeni Milenyum* İngilizce baskısında Heinze'nin özel olmayan şekillerini kullanmak için, Alman baskısındaki (Oldenbourg tarafından basılan) özel olmayan Latex denklemlerini değiş tokuş etti. Pfeiffer ile Gottlieb, bütün Latex metni ile denklemlerini ve bütün yeniden çizilen şekilleri titiz bir şekilde kontrol ederek düzeltilmesi gereken yerleri düzeltti. Nate Bode ile ben, Caltech adına, metni, denklemleri ve şekilleri kısmen kontrol ettik; hiçbir hata bulamadık. Pfeiffer ile Gottlieb inanılmaz bir biçimde titiz ve hassastılar. Gottlieb ile Pfeiffer, Feynman'ın 1962-64 ders fotoğraflarını sayısallaştırmak için Huntington Kütüphanesinde John Sullivan'ı ve ders kayıtlarını sayısallaştırmak için George Blood Ses Sistemlerini ayarladılar: finansal destek ve teşvik için Caltech profesörü Carver Mead, lojistik destek için Caltech Arşivcisi Shelley Erwin ve hukuki destek için Cochran.

Hukuki meseleler oldukça ciddiydi: 1960'larda Caltech, basım yayım hakkını ve 1990'larda Feynman'ın sesli derslerini ve bir elektronik basımının dağıtım haklarını Addison Wesley'e vermişti. 2000'li yıllarda bu lisansların bir dizi kazancı sayesinde, basım hakları Pearson yayın grubuna devredildi fakat ses ve elektronik versiyon hakları Perseus yayın grubuna devredildi. Cochran, Ike Williams'la birlikte, yayın konularında uzmanlaşmış bir avukat, Perseus'la (Basic Books) bütün hakları birleştirerek devretmek konusunda anlaştı ve böylece bu *Yeni Milenyum Baskısı* doğmuş oldu.

Teşekkürler

Caltech adına bu *Yeni Milenyum Baskısının* oluşmasına yardım eden çok sayıda insana teşekkür ederim. Özel olarak yukarıda adı geçen insanlara teşekkür etmek istiyorum: Ralph Leighton, Michael Gottlieb, Tom Tombrello, Michael Hartl, Rudolf Pfeiffer, Henning Heinze, Adam Cochran, Carver Mead, Nate Bode, Shelley Erwin, Andrew Lange, Tom Soifer, Ike Williams ve hataları ortaya koyan 50 kişiye (listesi www.feynmanlectures.info adresinde mevcut). Ayrıca sürekli desteği ve öğütleri için Michelle Feynman'a (Richard Feynman'ın kız kardeşi), Caltech'ten sahne arkasındaki yardımları ve öğütleri için Alan Rice'a, *FLP'yi* Latex formatına dönüştürmek konusunda Pfeiffer'e yardım eden ve öğütlerde bulunan Calvin Jackson'a ve hataların düzeltilmesi konusunda sundukları katkılar için Micheal Figl, Manfred Smolik ve Andreas Stangl'a ve Perseus/Basic Books ve (daha önceki basımlar için) Addison Wesley personeline teşekkür ederim.

Kip S. Thorne
Teorik Fizik Feynman Profesörü, Emekli
California Teknoloji Enstitüsü

Ekim 2010

TÜRKÇE ÇEVİRİYE ÖNSÖZ:

Feynman Fizik Dersleri Türkiye'de Okutulmuştu!

MEB hesabına lise fizik öğretmeni olmak üzere, 1960'ta Ankara Üniversitesi Fizik Bölümüne girdiğimde, Fen Fakültesinin diğer bölümleri gibi Fizik Bölümünde de içinde klasik mekanik, elektrodinamik, kuantum mekaniği derslerinin bulunmadığı oldukça eskimiş bir müfredat izlenmekteydi. Üçüncü sınıftayken bölümün öğretim kadrosuna, Paris Üniversitesinde devlet bursuyla Matematik lisansı okuyup Ecole Normale Superior'un Telekomünikasyon bölümünden Elektronik Yüksek Mühendisi olarak mezun olan ve ardından De Broglie'den de dersler alarak Teorik Fizik dalında Henri Poincaré Enstitüsünde doktorasını yapıp yurda dönmüş bir genç hoca katılmıştı: Burhan Cahit Ünal. Gelir gelmez Goldstein'ın *Klasik Mekanik* kitabını izlediği bir ders açmış, bir sonraki yıl Mandl'ın *Kuantum Mekaniği* kitabını anlatmıştı bize. Mezun olduğumda bir başka arkadaşım (S.A. Baran) ile birlikte Burhan hocanın asistanı olarak bölüme girmiştik. İşte o 1964-65 öğretim yılında Bölümümüze NATO-TÜBİTAK Burslusu dört öğrencinin kaydolduğunu duymuştuk. Bu öğrenciler mezun olduklarında doğrudan ABD'ye doktoraya gideceklerdi.

Burhan hoca, California Teknoloji Enstitüsü CALTECH'te birinci ve ikinci sınıf fizik derslerinin yeniden düzenlenmesi ihtîyacı nedeniyle 1961-63 yıllarında bizzat Richard Feynman tarafından hazırlanıp konferanslar şeklinde Caltech'in bütün birinci ve ikinci sınıf öğrencilerine sunulan ve büyükçe bir ekiple kitaba dönüştürülen üç ciltlik "*Feynman Fizik Dersleri*" dizisinden haberdardı. Çünkü kendisi 1961 yılında Fulbright bursuyla bir yıl Caltech'te ve bir sonraki yıl da Colorado Üniversitesinde doktora sonrası araştırmacı olarak bulunmuştu. Bir-iki öğrencinin daha katılmasıyla bu dört NATO bursiyerinden (Namık Kemal PAK, İsmail Hakkı DURU, Tarık ÇELİK ve Sinan ÖZKAL) oluşan küçük bir grup meydana getirip, iki asistanıyla birlikte, büyük bir cesaretle Caltech programını gayri-resmi olarak akşamları –Cumartesi, Pazar dahil– bu gruba uygulamıştı. İki asistanı gündüzleri Feynman'ın kitaplarını okuyorlar, kendileri öğrenip akşamları konuları Burhan hocayla birlikte bu küçük grupla tartışıyorlardı. Üçüncü ve dördüncü yıllarda da bu gruba Goldstein'ın *Klasik Mekaniği,* Jackson'ın *Elektrodinamiği* ve Mandl'ın *Kuantum Mekaniği* anlatılmıştı. Bu bilgilerle donatılmış olarak ABD'de çeşitli üniversitelere giden bu öğrenciler doktoralarını büyük başarılarla bitirmişler; TÜBİTAK bilim ödülleri almışlar, TÜBİTAK başkanlığı, TÜBİTAK ve TÜBA yönetimlerinde Türkiye'nin bilim politikalarına büyük katkılarda bulunmuşlardı. Bu sistem daha sonra gelen NATO bursiyerlerine bir süre daha uygulanmıştı. Ama Feynman Programının Caltech'te uygulamadan kaldırılıp, ABD'de Berkeley Fizik programı ve buna benzer programların devreye sokulmasıyla, Ankara Üniversitesi Fizik Bölümündeki bu Feynman Programı resmi müfredata konulamadan kalmıştı. Ankara Üniversitesi Fizik Bölümü bu kez Hacettepe, Karadeniz Teknik Üniversitesi ve başka birkaç üniversiteyi daha yanına alarak, Berkeley Fizik Programını, tüm ders ve laboratuar kitapları ve diğer malzemeleriyle Türkçeye çevirmiş ve resmi ders programlarına bu diziyi koymuştu.

Feynman Fizik Dersleri ABD'de ve dünyada kuşkusuz hiçbir zaman terk edilmemiştir; edilmez de. Feynman evrenin işleyişini en iyi anlamış üç-beş kişiden biriydi; bunu derslerinde en iyi şekilde anlatmaktaydı. O nedenle *Feynman Fizik Dersleri* dizisi, üzerinden elli yıl geçmiş olmasına karşın bütün dünyada fiziğe merakı olan kişilerce okunmaktadır. Yüksek lisans ve doktora öğrencilerinin en fazla başvurduğu kitaplardır. Araştırma yapanların her daim ellerinin altındadır. Sadece İngilizce bir buçuk milyondan fazla kopyası basılmış, en az bir düzine dile çevrilmiştir. Sürekli yeni baskıları çıkmaktadır. 1963'teki ilk baskısından sonra, 1965, 1989, 2006, 2010, 2013'te baskıları yapılmıştır.

Caltech'teki öğrencilerden, dünyadaki öğretim üyeleri ve okuyuculardan, ölünceye kadar Feynman'ın kendisinden ve programı birlikte hazırladığı öğretim üyesi arkadaşlarından pek çok imla ve yazım hataları ile tek tük anlam karışıklığı taşıyan düzeltmeler önerilmiştir. Özellikle bunları toplayan Feynman'ın yakın arkadaşı Profesör Kip Thorne *Yeni Millennium Baskısı*na yazdığı önsözde, dünya çapındaki işbirliğiyle *Feynman Fizik Dersleri*'nin tamamen hatasız hale getirildiğini duyurmaktadır.

Aradan geçen elli yılda fizikte, matematikte, astrofizik ve kozmolojide, optikte ve bilgisayar dünyasında önemli gelişmeler oldu; ama *Feynman Fizik Dersleri*'nde izlenen genel felsefe bunları zaten kapsadığı için, bu şaheser ders notları değerinden hiçbir şey kaybetmedi. *Feynman Fizik Dersleri*, yeni hazırlanan güncel fizik ders kitaplarına üst düzeyde destekleyici malzeme niteliğinde bütün dünyada kullanılmaktadır ve ayrıca genç araştırmacılara ilham kaynağı olmaya devam etmektedir.

İlk hazırlandığı 1960'lı yıllarda Türkiye'de de büyük heyecan yaratan ve üstün yetenekli öğrencilere yıllarca başarıyla uygulanan *Feynman Fizik Dersleri*'nin bu Türkçe çevirisinin fizik topluluğumuzda yeni bir heyecan dalgası yaratacağından kuşkumuz yoktur.

Prof. Zekeriya AYDIN



FEYNMAN'IN ÖNSÖZÜ

Bunlar, geçen yıl ve önceki yıl Caltech'te üniversite birinci ve ikinci sınıf öğrencilerine verdiğim fizik dersleridir. Sınıfta anlattığım bu kısımlar, kuşkusuz, derslerin harfi harfine tamamı değildir; bazıları oldukça fazla, bazılarıysa daha az olmak üzere gözden geçirilip baskıya hazırlanmışlardır. Sınıfta anlatılanlar, asıl dersin ancak bir bölümüdür. 180 öğrencilik tüm grup büyük bir konferans salonunda bu dersleri dinlemek üzere haftada iki kez toplanmakta ve sonra bir asistanın rehberliğinde 15 ila 20 kişilik küçük uygulama gruplarına ayrılmaktaydı. Ayrıca haftada bir kez bir laboratuar uygulaması vardı.

Bu derslerde ulaşmaya çalıştığımız özel amaç, liselerden mezun olup Caltech'e gelmiş olan çok hevesli ve oldukça zeki öğrencilerin ilgisini çekebilmekti. Onlar fiziğin ne kadar ilginç ve heyecan verici olduğuna dair pek çok şey duydular: görelilik kuramı, kuantum mekaniği ve diğer çağdaş düşünceler. Daha önceki iki yıllık dersimizin sonunda, öğrencilerin çoğunun cesareti kırılmış olurdu, çünkü onlara gerçekten de oldukça sınırlı sayıda büyük, yeni ve çağdaş fikirler sunulurdu. Eğik düzlemleri, elektrostatiği ve benzeri rutin şeyleri çalışmak durumunda kalırlar ve iki yıl sonra aptallaşırlardı. Sorun şuydu: onların heveslerini besleyerek çok daha ileri düzeyde ve heyecanlı öğrenciler kazandıracak bir ders yapmayı acaba başarabilir miydik?

Buradaki derslerin hiçbir şekilde bir gözden geçirme dersi olduğu sanılmasın; onlar çok ciddi biçimde hazırlanmıştır. Onları sınıftaki en zeki öğrenciye anlattığımı düşündüm ve bundan emin olmak için de, mümkünse, en zeki öğrencinin bile derslerdeki her şeyi tam olarak kavrayamayacağı şekilde, düşünce ve kavramların ana çizginin dışındaki çeşitli yönlere uygulanması önerilerini de katarak sundum. Yine bu nedenle, denklemlerin ve düşüncelerin fiziğin bünyesine uyduğu her durumu ve –daha çok bilgi edinildiğinde– onların nasıl değişebileceğini göstermek için, tüm beyanları mümkün olduğunca doğru yapmaya özen gösterdim. Böyle öğrenciler için –eğer yeterince akıllılarsa– neyin daha önce söylenenlerden çıkarılması gerektiğini ve neyin yeni bir şey olarak önlerine konulduğunu anlamalarının önemli olduğunu hissettim. Yeni düşünceler ortaya çıktıkça, onları çıkarılabilecek durumdaysalar çıkarmaya; aksi halde bilinen şeyler cinsinden hiçbir temele dayanmayan yeni bir düşünce olduğunu ve kanıtlanabileceğinin beklenmediğini –fakat sadece içeriye eklendiğini– açıklamaya çalıştım.

Bu derslere başlarken, öğrencilerin liseden mezun olduklarında geometrik optik, basit kimya fikirleri ve benzeri şeyler bildiklerini varsaydım. Dersleri belirli bir sırada vermenin herhangi bir nedeni olduğunu da görmedim; şu anlamda ki, bir şeyi ayrıntılı olarak anlatmaya hazır olmadıkça ona değinmek istemem. Pek çok konuya tam olarak tartışmaksızın değinmek gerekiyordu. Daha tam tartışmalara, daha sonra hazırlıklar iyice geliştiği zaman sıra geliyordu. İndüktans ve enerji düzeyi tartışmaları örnek olarak verilebilir; bunlar önce nitel biçimde gündeme getirilir ve daha sonra ayrıntılarıyla geliştirilir.

Daha çalışkan öğrencileri hedeflemekle birlikte, ek tartışmaları ve yan uygulamaları sıkıcı bulan ve derslerdeki malzemenin çoğunu öğrenemeyeceğini düşünen öğrencilere de özen gösterdim. Derslerde, böyle öğrenciler için de, en azından onların alabilecekleri temel ve öz bilgiler olsun istedim. Her şeyi

anlamadılarsa bile umarım sinirlenmemişlerdir. Her şeyi anlamış olduklarını sanmıyorum, yine de işin özünü ve en dolaysız yanlarını anlamışlardır. Kuşkusuz, nelerin esas kuramlar ve merkezi fikirler ve nelerinse çok ileri konular ve uygulamalar olduğunu görmeleri onların zekâsına kalmıştır; belki bunu ancak sonraki yıllarda anlarlar.

Bu dersleri verirken ciddi bir zorluk şu oldu: Dersin veriliş biçimiyle ilgili olarak, öğrencilerden öğretim görevlisine dersin nasıl geçtiğini gösterecek hiçbir tepki gelmedi. Bu gerçekten de önemli bir sorundur ve ben derslerin gerçekten ne kadar iyi geçtiğini anlayamadım. Bütün her şey esasında bir deneydi. Aynı şeyi tekrar yapsaydım, aynı biçimde yapmazdım. Umarım onu tekrar yapmak zorunda kalmam! Yine de sanırım ilk yılda fizikle ilgili her şey oldukça doyurucu şekilde halledildi.

İkinci yıl pek tatmin olmadım. İkinci yılın ilk kısmında elektrik ve manyetizmayı işlerken, gerçekten eşsiz ya da farklı hiçbir anlatım yolu –alışılmışın dışında özel olarak daha heyecan verici bir yol– düşünemedim. Böylece elektrik ve manyetizma derslerinde pek bir şey yaptığımı sanmıyorum. İkinci yılın sonuna doğru, elektrik ve manyetizmadan sonra, esas olarak temel kipler, difüzyon denkleminin çözümleri, titreşen sistemler, dik fonksiyonlar gibi şeylere başlayıp genelde "fiziğin matematiksel yöntemleri" denen ilk aşamaları geliştirerek maddenin özellikleri üzerine biraz daha fazla dersler vermeyi daha başlangıçta kafama koymuştum. Geçmişe bakarak, sanırım ki, bu dersi tekrar verseydim, yine bu özgün düşünceye geri giderdim. Fakat bu dersi tekrar vermem planlanmadığı için, bir kuantum mekaniğine giriş dersi vermeyi denememin iyi bir fikir olabileceği söylendi; bunu III. Ciltte bulacaksınız.

Ana dalı fizik olan öğrencilerin kuantum mekaniği için üçüncü yıllarına kadar beklemeleri gerekir. Öte yandan, bizim derslerimizdeki öğrencilerin çoğu, fiziği, esas ilgi alanları olan diğer dallara temel olsun diye okurlar. Ama kuantum mekaniğini öğrenmenin olağan yolu uzunca zaman istediği için, bu öğrencilerin büyük çoğunluğu bu konuyu neredeyse alamayacak durumdadır. Yine de gerçek kuantum uygulamalarında –özellikle de, elektrik mühendisliği ve kimya gibi daha karmaşık uygulamalarda– diferansiyel denklem yaklaşımının tam mekanizması zaten kullanılmaz. Bu nedenle kuantum mekaniğinin ilkelerini parçalı diferansiyel denklemlerin bilinmesini gerektirmeyecek şekilde anlatmaya çalıştım. Bir fizikçiye bile kuantum mekaniğini böyle ters tarzda sunmak –derslerin kendilerinde görünebilecek çeşitli nedenlerle– sanırım ilginç bir deneyimdir. Bununla birlikte, kuantum mekaniği kısmındaki deneylerin tam başarılı olmadığını zannediyorum; büyük ölçüde bunun nedeni, sonunda yeterli zamanımın olmamasıydı (örneğin enerji bantları ve genliklerin uzaysal bağımlılığı gibi konularla tam anlamıyla uğraşmak için üç ya da dört ders daha yapmam gerekirdi). Üstelik, daha önce bu konuyu bu şekilde hiç sunmamıştım; bu nedenle öğrenciden tepki gelmemesi de özellikle ciddiydi. Şimdi kuantum mekaniğinin daha sonra verilmesi gerektiğine inanıyorum. Belki bu dersi bir gün tekrar verme şansını yakalarım. O zaman onu daha doğru yaparım.

Problemlerin nasıl çözüleceği hakkında derslerin olmayışının nedeni, uygulama saatlerinin var olmasıdır. Gerçi ilk yılda problemlerin nasıl çözüleceğine dair üç ders koymuştum, ama onlar kitaba eklenmedi. Dönen sistemler dersinin ardından mutlaka gelen eylemsiz güdüme ait (roket vb için) bir ders de vardı; ama o ne yazık ki atlandı. Beşinci ve altıncı derslerse, benim şehir dışında olduğum sırada, Matthew Sands tarafından verilmiştir.

Kuşkusuz asıl soru, bu deneyimin ne denli başarılı olduğudur. Öğrencilerle çalışmış olan arkadaşlarımın çoğu bana katılmasalar da, benim kendi görüşüm kötümserdir. Öğrencilere çok özen gösterdiğimi sanmıyorum. Öğrencilerin çoğunluğunun sınavlardaki soruları halletme tarzlarına bakınca, sistemin başarı-

sız kaldığını düşünüyorum. Kuşkusuz, arkadaşlarımın belirttiğine göre, tüm derslerde hemen hemen her şeyi anlayan, konuların işlenişinde çok aktif rol alan ve pek çok konuda müthiş heyecan ve ilgi gösteren bir ya da iki düzine kadar öğrenci vardı. Bunlar şimdi sanırım fizikte birinci-dereceden temel bilgiye sahipler ve benim de zaten ulaşmak istediklerim bunlardı. Ama o zaman, "öğretim gücünün etkinliği pek nadir görülür; ancak şu mutlu yeteneklilere yarar, ki onlara da öğretim neredeyse gereksizdir." (Gibbon)

Yine de hiçbir öğrenciyi tamamıyla arkada bırakmak istemedim. Öğrencilere yararlı olmanın bir yolu, sanırım derslerdeki bazı düşünceleri aydınlatabilecek problem setlerini geliştirmeye daha fazla özen göstermektir. Problemler, dersler de anlatılanları tamamlamak, sergilenen düşünceleri daha gerçekçi, daha tam ve daha akılda kalıcı kılmak için iyi bir fırsattır.

Bununla birlikte, sanıyorum ki bu eğitim problemine, bir öğrenci ile iyi bir öğretmen arasında sadece doğrudan kişisel bir ilişki olduğu zaman –öğrencinin düşünceleri tartıştığı, konuları düşündüğü ve konular hakkında konuştuğu bir ortamın oluşması halinde– en iyi öğretimin yapılabileceğini anlamanın dışında başka hiçbir çözüm yoktur. Derste sadece oturarak ya da sadece verilen problemleri çözerek çok şey öğrenmek olanaksızdır. Fakat bizim modern çağımızda yetiştirilecek o kadar çok öğrencimiz var ki ideal yöntemin yerine konacak bir başka yol bulmaya çalışmamız gerekiyor. Belki benim derslerim buna bir katkı yapabilir. Belki özel öğretmenlerin ve öğrencilerin bulunduğu bazı küçük yerlerde, bu öğrenciler derslerden biraz esin ya da bazı fikirler edinebilirler. Belki de konuları düşünürken eğlenecekler ya da bazı düşünceleri daha fazla geliştirmeye başlayacaklardır.

Haziran 1963

Richard P. Feynman

ÖNSÖZ

Yaklaşık kırk yıl boyunca Richard P. Feynman merakını fiziksel dünyanın gizemli işleyişine yöneltti ve zekâsını onun içindeki düzensizlikten düzen çıkarmak için kullandı. İki yıldır da yeteneğini ve enerjisini birinci sınıf öğrencileri için *Fizik Dersleri*'ne adadı. Onlar için bilgisinin özünü süzdü ve bir fizikçinin evrenini zihinlerinde canlandırmaya çalıştı. Derslerine parlak ve berrak zihnini, benzersiz ve canlı yaklaşımını ve öğrencilerine de bulaşan heyecanını getirirdi. Derslerini izlemek bir zevkti.

İlk yılın dersleri bu kitap setinin ilk cildinin temelini oluşturdu. Bu ikinci ciltte, 1962-1963 akademik yılında ikinci sınıf öğrencilerine verilen derslerin bir kısmının bir tür kaydını yapmayı denedik. İkinci yıl derslerinin kalanı üçüncü cildi oluşturuyor.

İkinci yıl derslerinin üçte ikisi elektrik ve manyetizmanın fiziğinin eksiksiz bir şekilde işlenmesine ayrılmıştı. Derslerin sunumunun iki amaca hizmet etmesi amaçlanmıştı. İlk olarak öğrencilere fiziğin en büyük dönemlerinden birini –Franklin'in el yordamı keşiflerinden başlayıp, Maxwell'in büyük birleştirmesinden geçip, malzemenin özelliklerine dair Lorentz Elektron kuramına ve elektromanyetik öz enerjinin çözülememiş ikilemlerine kadar– eksiksiz bir şekilde aktarmayı umut ettik. İkinci olarak da, vektör analizinin ana hatlarını sunarak öğrencilerin alan kuramlarının matematiğine sağlam bir giriş yapmasını umut ettik. Matematiksel yöntemlerin genel yararlılığını vurgulamak için, bazen fiziğin başka kısımlarından ilgili bölümler elektrik karşılıklarıyla beraber incelendi. Sürekli bir şekilde, matematiğin genelliğinin anlaşılmasını sağlamaya çalıştık. ("Aynı denklemlerin çözümleri aynıdır.") Bu noktayı da dersle beraber verdiğimiz alıştırmalar ve sınavlarla vurgulamaya çalıştık.

İkinci yılın yaklaşık son çeyreği kuantum mekaniğine girişe ayrıldı. Bu ders notları üçüncü cilde kondu.

Feynman Derslerinin bu kaydında, onun ne söylediğini kâğıda dökmekten daha fazlasını yapmaya çalıştık. Derslerin yazılı biçiminin, orijinal derslerin temelini oluşturan fikirleri olabildiğince açık bir şekilde ortaya koymasını sağlamaya çalıştık. Bazı derslerde bunu, orijinal kayıtlara sadece küçük ayarlamalar yaparak başarabildik. Bazıları içinse eldeki malzemenin yoğun bir şekilde gözden geçirilmesi ve yeniden işlenmesi gerekti. Bazen, sunumun açıklığını veya dengesini geliştirebilmek için yeni eklemeler yapma gereği hissettik. Bütün bu süreç boyunca Profesör Feynman'ın sürekli bir şekilde yardım ve öğütlerinden faydalandık.

Dar bir zamanda, 1.000.000'dan fazla sözcüğü anlaşılır bir metne dönüştürmek, yeni bir dersin sunulmasıyla ortaya çıkan zorlu yüklerle –anlatma bölümleri için hazırlanmak, öğrencilerle buluşmak, alıştırmalar ile sınavları hazırlayıp, onları değerlendirmek ve benzeri şeyler– birleşince çok zor bir görev. Birçok insan bunun için çalıştı. Bazı anlarda bildiğimiz Feynman'ın sadık bir görüntüsünü –ya da hafifçe rötuşlanmış bir portresini diyelim– vermeyi başardığımızı düşünüyorum. Başka anlardaysa bu amacımızdan çok uzaklaştık. Başarılarımız bize yardım edenler sayesindedir. Başarısızlıklarımızsa pişmanlığımız.

Birinci cildin önsözünde detaylıca açıkladığımız gibi, bu dersler California Institute of Technology (California Teknoloji Enstitüsü) bünyesindeki Fizik Der-

si Gözden Geçirme Komitesi (Başkan R. B. Leighton, H. V. Neher ve M. Sands) tarafından başlatılmış ve yönetilmiş bir programın sadece bir bölümüdür ve Ford Vakfı tarafından maddi olarak desteklenmiştir. İlaveten, şu sayacağımız insanlar ikinci cildin ders malzemesinin hazırlanmasına çeşitli kısımlarda katkıda bulunmuşlardır: T. K. Caughey, M. L. Clayton, J. B. Curcio, J. B. Hartle, T. W. H. Harvey, M. H. Israel, W. J. Karzas, R. W. Kavanagh, R. B. Leighton, J. Mathews, M. S. Plesset, F. L. Warren, W. Whaling, C. H. Wilts ve B. Zimmerman. Şu isimler de derse kendi çalışmalarıyla dolaylı olarak katkıda bulunmuşlardır: J. Blue, G. F. Chapline, M. J. Clauser, R. Dolen, H. H. Hill ve A. M. Title. Profesör Gerry Neugebauer sorumluluğunun ötesinde bir gayret ve adanmışlıkla bu işe her alanda katkıda bulundu. Fiziğin burada içine dalacağınız öyküsü, Richard P. Feynman'ın olağanüstü kabiliyeti ve çalışkanlığı olmasaydı yazılamazdı.

Matthew Sands
Mart, 1964

1

ELEKTROMANYETİZMA

1-1 Elektriksel kuvvetler

1-1 Elektriksel kuvvetler
1-2 Elektrik ve manyetik alanlar
1-3 Vektör alanlarının özellikleri
1-4 Elektromanyetizma yasaları
1-5 Alanlar nedir?
1-6 Bilim ve teknolojide elektromanyetizma

Gözden geçirme: Cilt 1, 12. Bölüm, *Kuvvetin Karakteristiği*

Aradaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak değişen, kütleçekime benzer ancak ondan *milyar-milyar-milyar-milyar* kere daha kuvvetli bir kuvvet düşünün. Ayrıca bir fark daha var. Pozitif ve negatif olarak adlandırabileceğimiz iki tür "madde" olsun. Benzerler birbirini itsin, zıtlar birbirini çeksin. Bu kuvvet, sadece çekim gücü olan kütleçekime benzemeyecektir. Bu durumda ne olurdu?

Bir araya gelmiş pozitif yükler birbirlerini müthiş bir kuvvetle itip, dört bir yana dağılırlardı. Aynı şekilde, bir araya gelmiş negatif yükler de aynı şekilde davranırdı. Eşit sayıda pozitif ve negatifler bir araya geldiğindeyse, tamamen farklı bir sonuç görürdük. Karşıt parçalar muazzam bir şekilde birbirlerine çekilirlerdi. Sonuç bu müthiş kuvvetlerin, sıkı şekilde oluşmuş pozitif ve negatif karışımları oluşturarak birbirlerini mükemmel bir şekilde dengelemeleri olurdu ve bu tür karışımlar arasında ne çekme ne itme olurdu.

Böyle bir kuvvet vardır: elektrik kuvveti. Bütün maddeler birbirlerini bu kuvvetle iten ve çeken pozitif protonlar ve negatif elektronların karışımından ibarettir. Aralarındaki denge o kadar mükemmeldir ki, bir başka insanla yan yana durduğunuzda hiçbir kuvvet etkisi hissetmezsiniz. Çok az bile olsa bir dengesizlik olsaydı, kesinlikle hissederdiniz. Bir başka insandan bir kol boyu mesafe uzakta dursaydınız ve ikiniz de sadece *yüzde bir* daha fazla elektrona sahip olsaydı o zaman birbirinizi olağanüstü bir kuvvetle iterdiniz. Bu kuvvet ne kadar büyüktür? Empire State Binasını kaldıracak kadar? Hayır! Everest Dağını kaldıracak kadar? Hayır! Kuvvet, dünyamız kadar ağır bir nesneyi kaldırabilecek kadar büyüktür.

Bu tür bir karışımın içinde bu kadar büyük kuvvetler mükemmel bir şekilde dengedeyken, pozitif ve negatif yükleri dengede tutmaya çalışan maddenin neden bu kadar sert ve sağlam olduğunu anlamak zor değildir. Örneğin, Empire State Binası rüzgârda bir santimetreden daha az salınım yapar çünkü elektriksel kuvvetler her bir elektron ve protonu aşağı yukarı olmaları gerektiği yerde tutar. Diğer yandan, maddeye sadece birkaç atom görebileceğimiz kadar yakından bakarsak, baktığımız herhangi bir ufak parça, genelde, eşit sayıda pozitif ve negatif yüke sahip olmayacaktır ve dolayısıyla büyük artık elektriksel kuvvetler görülecektir. Birbirine komşu iki küçük parça, her iki yükten eşit miktarda barındırsa bile hâlâ büyük elektriksel kuvvetler bulunabilir, zira bağımsız yükler arasındaki elektriksel kuvvetler aralarındaki mesafeyle ters orantılıdır. Eğer bir parçanın tek bir negatif yükü o parçanın pozitif yüklerine diğer parçanın negatif yüklerinden daha yakınsa, net bir kuvvet doğabilir. Bu bahsettiğimiz durumda çekim kuvvetleri itme kuvvetlerinden büyüktür ve böylece iki parça arasında, artık yük olmasa bile, net bir çekim olur. Atomları ve molekülleri bir arada tutan kimyasal kuvvetler aslında yük dengesinin mükemmel olmadığı veya mesafelerin çok küçük olduğu bölgelerde etkiyen elektriksel kuvvetlerdir.

Bildiğiniz üzere, atomların çekirdeğinde pozitif protonlar ve dışında elektronlar vardır. Şunu sorabilirsiniz: "Madem elektriksel kuvvet bu kadar olağanüstü, neden protonlar ve elektronlar birbirlerinin üstüne düşmüyorlar? Eğer sıkı bir karışım olma arzuları varsa, neden olduklarından daha sıkı fıkı değiller?" Sorunuzun cevabı, kuantum etkilerinde saklı. Elektronları protonlara daha yakın bir bölgeye sıkıştırmaya çalışırsak, belirsizlik ilkesine göre sıkıştırma arttıkça ortalama kare momentumları da artar. İşte, kuantum mekaniği yasalarının gerektirdiği bu devinim elektriksel çekimin yüklerinin birbirlerine daha fazla yaklaşmasını önler.

Bir başka soru: "Çekirdeği bir arada tutan nedir?" Bir çekirdekte hepsi pozitif yüklü olan birçok proton vardır. Neden birbirlerini itmiyorlar? Şöyle ki, çekirdekte elektriksel kuvvetlere ilave olarak, elektriksel itmeye rağmen protonları bir arada tutabilen, elektriksel kuvvetlerden büyük ve elektriksel olmayan kuvvetler vardır. Bu kuvvetlere nükleer kuvvetler denir. Ancak bu nükleer kuvvetlerin etki ettiği mesafe kısadır. Nükleer kuvvet $1/r^2$ değerinden daha hızlı bir şekilde azalır ve bunun önemli bir sonucu vardır. Eğer bir çekirdekte çok fazla proton varsa, çekirdek çok fazla büyür ve bir bütün olarak kalması güçleşir. Bunun bir örneği 92 protonlu uranyumdur. Nükleer kuvvetler her bir proton (veya nötron) ile en yakın komşusu arasında etki ederken, elektriksel kuvvetler daha uzun mesafelerde etki ederek çekirdekteki protonların birbirlerini ve diğerlerini itmesini sağlar. Çekirdekteki proton sayısı arttıkça elektriksel itme, uranyum örneğinde olduğu gibi, çekirdeğin elektriksel itmeden dolayı neredeyse parçalanmak üzere olduğu hassas bir dengeye kavuşana kadar artar. Böyle bir elektrona hafifçe vurduğunuzda (yavaş bir nötronu üstüne göndererek bunu yapabilirsiniz) her biri pozitif yüklü iki parçaya ayrılır ve bu parçalar elektriksel itme sayesinde birbirlerini iterler. Açığa çıkan enerji atom bombasının enerjisidir. Bu enerjiye genelde "nükleer" enerji denir, fakat aslında açığa çıkan enerji nükleer kuvvetleri yenen elektriksel kuvvetlerin açığa çıkardığı "elektriksel" enerjidir.

Son olarak, (nükleer kuvvet barındırmayan) negatif yüklü elektronu bir arada tutan nedir diye sorabiliriz. Eğer bir elektronun içeriği hep aynı türdense, her bir parça birbirini itmelidir. O zaman, neden elektron parçalanmıyor? Ya da şöyle soralım, elektronun "parça"ları var mıdır? Belki şöyle ifade etmeliyiz, bir elektron sadece bir noktadır ve elektriksel kuvvetler sadece *farklı* noktasal yükler arasında etkilidir ve bu yüzden elektron kendi kendine etki etmez. Belki! Tüm diyebileceğimiz, elektronu bir arada tutanın ne olduğu sorusu, tam bir elektromanyetizma kuramı oluşturma yönündeki uğraşılarımızın karşısına birçok zorluk çıkarmıştır. Soru asla cevaplanamamıştır. İlerleyen bölümlerde bu konuyu tartışarak kendimizi oyalayabiliriz.

Görüldüğü üzere, malzemelerin detaylı yapısını ve dolayısıyla özelliklerini belirleyen şey, elektriksel kuvvetler ile kuantum mekaniksel etkilerin birleşimidir. Bazı malzemeler serttir, bazı malzemeler yumuşak. Bazıları elektriksel olarak "iletken"dir –çünkü elektronları serbestçe dolaşabilir; diğerleri "yalıtkan"dır– çünkü elektronları bağımsız atomlara sıkıca tutunmuştur. Bu özelliklerin nasıl doğduğunu daha sonra düşünsek iyi olur; zira bu, gerçekten karmaşık bir konudur. En iyisi, elektriksel kuvvetleri basit durumlarda inceleyerek işe koyulmak. Elektrik yasalarını ele alarak başlayacağız ki bunun içine, aslında aynı konunun bir bölümü olan, manyetizma da girmektedir.

Elektriksel kuvvetin, aynı kütleçekim kuvveti gibi, yükler arasındaki mesafenin karesiyle ters orantılı olarak azaldığını belirtmiştik. Buna Coulomb yasası denir. Kuvvetler hareket halindeyken bu yasa tam anlamıyla doğru sonuç vermez; elektriksel kuvvetler, karmaşık bir şekilde, yüklerin hareketlerine de bağlıdır. Hareketli yükler arasındaki kuvvetin bir parçasına *manyetik* kuvvet denir. Aslında, elektriksel etkinin bir boyutudur manyetik kuvvet, bu yüzden bu konuya "elektromanyetizma" denir.

Elektromanyetik kuvvetlerle uğraşmayı görece kolaylaştıran önemli bir genel ilke vardır. Deneyler sonucunda gördük ki, tek bir yük üzerine etki eden kuvvet –başka ne kadar yük olduğundan veya nasıl hareket ettiğinden bağımsız olarak– o yükün konumu, hızı ve miktarına bağlıdır. $\boldsymbol{v}$ hızında hareketli q yükü üzerine etki eden $\boldsymbol{F}$ kuvvetini şu şekilde yazabiliriz:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1}$$

Denklemde $\boldsymbol{E}$, yükün bulunduğu konumdaki *elektriksel alanı* ve $\boldsymbol{B}$ de *manyetik alanı* temsil etmektedir. Evrendeki diğer tüm yüklerden kaynaklanan elektriksel kuvvetler sadece bu iki vektör bilinerek özetlenebilir. Alanların değerleri, yükün *nerede* olduğuna bağlıdır ve *zaman*la değişebilirler. Üstelik yükümüzü başka bir yükle değiştirirsek, üzerine etkiyen kuvvet evrendeki diğer yüklerin konumlarını ya da hareketlerini değiştirmediği sürece, yükün miktarıyla doğru

Küçük Yunan harfleri ve büyük harf karşılıkları

α		alfa
β		beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ϵ		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	teta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mü
ν		nü
ξ	Ξ	xi (ksi)
o		omikron
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
υ	Υ	üpsilon
ϕ	Φ	phi
χ		chi (khi)
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

orantılıdır. (Elbette ki, gerçek dünyada, her bir yük etrafındaki diğer yükleri hareket ettirecek kuvvetler meydana getirir ve dolayısıyla bazı durumlarda bu yük değişimiyle birlikte alanlar *değişebilir*.)

I. Ciltte, üzerine etkiyen kuvveti bildiğimiz bir parçacığın hareketini nasıl bulacağımızı öğrenmiştik. Denklem (1.1) hareket denklemiyle birleştirilirse, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\boldsymbol{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.2}$$

Dolayısıyla, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ biliniyorsa, hareketleri hesaplayabiliriz. Şimdi $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'lerin nasıl meydana geldiğini bulmamız gerekir.

Alanların meydana geliş şeklini basite indirgeyen en önemli ilkelerden biri şudur: $\boldsymbol{E}_1$ alanı meydana getirecek hareketli bir grup yük ve $\boldsymbol{E}_2$ alanı meydana getirecek bir başka grup yük olduğunu varsayalım. Eğer bu iki grup yük aynı zamanda aynı yerdeyse (ayrı olduklarındaki konumları ve hareketleri koruyarak) meydana gelen alan iki alanın toplamıdır:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \tag{1.3}$$

Buna alanların *üst üste binme ilkesi* denir ve o, manyetik alanlar için de geçerlidir.

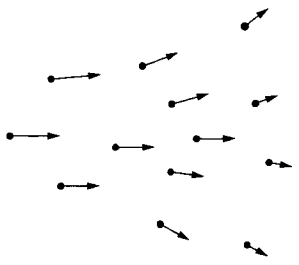
Eğer rastgele bir şekilde hareket eden *tek* bir yük tarafından oluşturulan elektrik ve manyetik alanların yasalarını bilebilirsek, bu ilke sayesinde bütün elektrodinamik yasalarını tamamlayabiliriz. Eğer A yükü üzerine etki eden kuvveti bilmek istiyorsak, her bir B, C, D, vb yükleri tarafından meydana getirilen $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yi hesaplamamız ve daha sonra alanları hesaplamak için bütün diğer yüklerden meydana gelen $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'leri ve sonra A üzerine etki eden kuvveti hesaplamak için de o alanlardan kaynaklanan kuvvetleri toplamamız yeterlidir. Tek bir yük tarafından meydana getirilen alan basit olsaydı, elektrodinamik yasalarını tanımlamanın en temiz yolu kesinlikle bu olurdu. Ne yazık ki gayet karmaşık olan bu yasanın bir tanımını daha önce anlatmıştım (Cilt I, Bölüm 28).

Elektrodinamik yasalarının en basit biçiminin tahmin edebileceğiniz gibi olmadığı ortaya çıktı. Bir yükün diğer bir yük üzerine etki eden kuvvetine ilişkin bir denklem sunmak en basit biçim değildir. Yükler sabit duruyorsa Coulomb kuvvet yasasının basit olduğu doğrudur, fakat yükler hareket ettiğinde aralarındaki ilişki, zamandaki gecikmeler ve ivmelenmenin etkileriyle karmaşıklaşır. Sonuç olarak, elektrodinamik konusunu sadece yükler arasındaki kuvvet yasalarıyla açıklamayı uygun bulmuyorum. Bir başka bakış açısını göz önünde bulundurmak daha uygundur, öyle bir bakış açısı ki elektrodinamik yasaları bu şekilde kolayca ele alınabilir gözükmektedir.

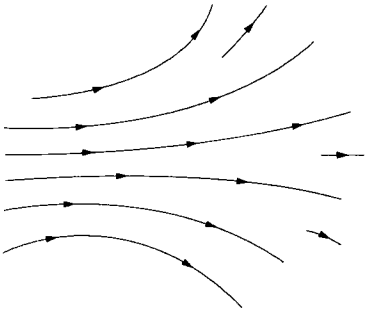
1-2 Elektrik ve manyetik alanlar

Öncelikle, $\boldsymbol{E}$ elektrik ve $\boldsymbol{B}$ manyetik vektörleri hakkındaki düşüncelerimizi, bir şekilde genişletmeliyiz. Onları bir yük tarafından hissedilen kuvvetler temelinde tanımlamıştık. Şimdiyse, bir yük olmadığı halde bir noktada mevcut elektrik ve manyetik alanlar hakkında konuşmak istiyorum. Demek istediğimiz, bir yük üzerinde "etki eden" kuvvetler varsa, o yük ortadan kaldırılsa bile hâlâ orada "bir şeyler" vardır. (x, y, z) noktasında bulunan bir yük t zamanında, üzerinde Denk. (1.1)'le hesaplanabilen $\boldsymbol{F}$ kuvvetini hissediyorsa, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ vektörlerini uzaydaki (x, y, z) noktasıyla ilişkilendiririz. $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ ve $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$'leri, (x, y, z) noktasında ve t zamanında konumlanmış bir yük tarafından hissedilecek yükler olarak tanımlayabiliriz. Buradaki önemli koşul, (x, y, z) noktasına yerleştirdiğimiz yükün o alanların oluşmasına katkıda bulunan diğer yüklerin konumlarını ve hareketlerini bozmamış olmasıdır.

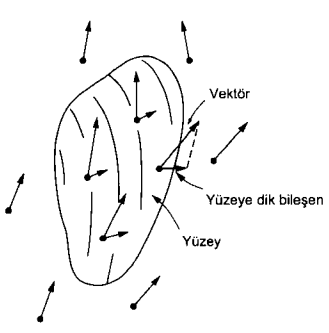
Bu fikirden yola çıkarak, uzaydaki *her* (x, y, z) noktasını zamanla değişebilen $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ vektörleriyle ilişkilendirebiliriz. Böylece elektrik ve manyetik alanlar x, y, z ve t'nin *vektör fonksiyonları* olurlar. Her vektör, bileşenleriyle tanımlandığından dolayı her bir $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ ve $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ alanı x, y, z ve t'nin üç matematiksel fonksiyonunu temsil eder.



Şekil 1-1 Bir vektör alanı, büyüklükleri ve yönleri alanın o noktadaki değerlerini belirten oklar kümesiyle gösterilebilir.



Şekil 1-2 Bir vektör alanı, her bir noktadaki alan vektörünün yönüne teğet ve alan vektörünün şiddetiyle doğru orantılı yoğunlukta çizgiler çizilerek gösterilebilir.



Şekil 1-3 Bir vektör alanının yüzeyden dışa doğru akısı vektörün dik bileşeninin ortalama değerinin yüzey alanıyla çarpımıdır.

$\boldsymbol{E}$ (veya $\boldsymbol{B}$) uzayın her noktasında tanımlanabildiğinden dolayı "alan" olarak adlandırılır. Bir "alan" uzayın değişik noktalarında değişik değerlerde olan herhangi bir fiziksel niceliktir. Sıcaklık bir alan örneğidir, $T(x, y, z)$ olarak yazdığımız skaler bir alandır. Sıcaklık zamanla değişirse, sıcaklık alanı zamana bağımlıdır deriz ve $T(x, y, z, t)$ olarak yazarız. Bir başka örnek, akan bir sıvının "hız alanı"dır. t zamanında uzaydaki her nokta için sıvının hızını $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ olarak yazabiliriz. Bu bir vektör alanıdır.

Elektromanyetik alanlara geri dönelim. Bunlar, her ne kadar yükler tarafından karmaşık denklemlere uyan kurallara göre üretilseler de, şu önemli özelliğe sahiptirler: Alanların *bir noktadaki* değerleri ile *yakındaki bir noktadaki* değerleri arasındaki ilişki oldukça basittir. Eğer bu türden birkaç ilişkiyi birkaç diferansiyel denklem biçiminde ifade edebilirsek, tüm alanı tamamen tanımlayabiliriz. Bu tür denklemler sayesinde elektrodinamik yasaları basitçe kâğıda dökülebilir.

Alanların davranışını zihinde canlandırabilmek için birçok şey türetilmiştir. En doğru olanı aynı zamanda en soyut olanıdır: alanlar basitçe konum ve zamanın matematiksel fonksiyonlarıdır. Bir alanı zihnimizde canlandırmak için birçok noktada, her biri o nokta için alanın şiddetini ve yönünü gösteren, vektörler çizebiliriz. Böyle bir gösterim Şekil 1-1'de gösterilmiştir. Bir adım ileriye giderek, bu vektörlere her yerde teğet olan çizgiler çizebiliriz ve böylece bu çizgileri takip ederek alanın yönünü anlayabiliriz. Böyle yaptığımızda vektörlerin *boylarının* izini kaybederiz, fakat alan zayıfken çizgileri birbirine uzak ve alan güçlüyken birbirine yakın çizerek onun şiddetini izleyebiliriz. Diğer bir deyişle, çizgilere dik birim *yüzey alanından* geçen çizgilerin sayısı *alan şiddeti*yle doğru orantılıdır. Bu elbette sadece yaklaştırımdır ve genellikle alan şiddetine yakın olabilmek için bazen yeni çizgilerin doğmasını gerektirir. Şekil 1-1'in alanı, Şekil 1-2'de alan çizgileriyle gösterilmiştir.

1-3 Vektör alanlarının özellikleri

Bir vektör alanının, elektrik yasalarını "alan" bakış açısıyla tanımlarken kullanacağımız iki önemli matematiksel özelliği vardır. Diyelim ki elimizde bir tür kapalı yüzey var ve içerden dışarı "bir şey" kaçıp kaçmadığını merak ediyoruz; diğer bir deyişle alanın dışarıya akış niteliği var mıdır? Örneğin, bir "hız" alanı için hızın yüzeyde daima dışarı doğru olup olmadığını veya daha genel olarak içeri girenden daha fazla miktarda sıvının (birim zamanda) dışarı akıp akmadığını sorabiliriz. Böyle bir yüzeyde dışarı doğru akan sıvının birim zamandaki net miktarına, "hızın akısı" denir. Bir yüzey elemanının içinden geçip giden akış, hız vektörünün yüzeye dik bileşeninin yüzey alanıyla çarpımına eşittir. Rastgele bir kapalı yüzey için, *dışa doğru net akış* –veya *akı*– hız vektörünün dışa doğru ortalama dik bileşeninin yüzey alanıyla çarpımıdır:

$$\text{Akı} = (\text{ortalama dik bileşen}) \cdot (\text{yüzey alanı}) \tag{1.4}$$

Söz konusu elektrik alansa, dışa akışa benzer bir şeyi matematiksel olarak ifade edebilir ve buna gene akı diyebiliriz. Bu durumda elbette, herhangi bir şeyin akışından bahsetmiyoruz, çünkü elektrik alan herhangi bir şeyin hızı değildir. Buna rağmen, alanın ortalama dik bileşeni olan matematiksel niceliğin yararlı bir anlamı olduğu ortaya çıkar. Denklem (1.4) tarafından tanımlanmış bir *elektrik akısından* bahsedebiliriz. Son olarak, akıyı sadece tamamen kapalı bir yüzeyden geçen değil, herhangi bir sınırlı yüzeyden geçen bir fiziksel nicelik olarak düşünmemiz gerektiğini belirtelim. Daha önce tanımlandığı gibi, böyle (sınırlı) bir yüzeyden geçen akı vektörün ortalama dik bileşeninin yüzey alanıyla çarpımı olarak tanımlanır. Bu tanımlar Şekil 1-3'te görselleştirilmiştir.

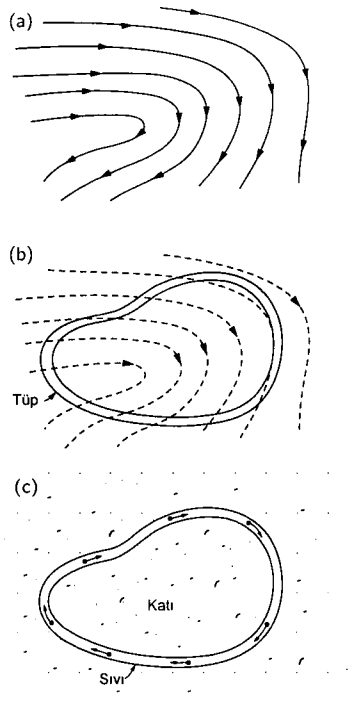
Vektör alanının ikinci bir özelliği daha vardır ve bu özellik yüzeyle değil, çizgiyle ilgilidir. Gene bir sıvının akışını tanımlayan bir hız alanını düşünelim.

Şu ilginç soruyu sorabiliriz kendimize: Sıvı dönmekte midir? Ya da şöyle soralım: bir çember etrafında net bir dönme hareketi mevcut mudur? Şekil 1-4'teki gibi bir tüpün içindeki sıvı dışındaki bölgede bütün sıvının bir anda donduğunu varsayalım. Tüpün dışında sıvının hareketi durur, ancak tüp içindeki sıvı momentumu sayesinde harekete devam edebilir. Şüphesiz, tüp içinde bir yöndeki momentum diğer yöndeki momentumdan fazlaysa olur bu dediğimiz. *Dolaşım* denen bu niteliği, sıvının tüp içindeki hızı ile tüpün çevresinin çarpımı olarak tanımlayabiliriz. Bu fikirleri genişleterek "dolaşım"ı (hareket eden bir şey olmasa bile) herhangi bir vektör alanı için tanımlayabiliriz. Herhangi bir vektör alanı için, *rastgele kapalı bir eğri etrafındaki "dolaşım"*, vektörün ortalama teğet bileşeninin eğrinin çevresiyle çarpımı olarak tanımlanabilir (Şekil 1-5).

$$\text{Dolaşım} = (\text{ortalama teğet bileşen}) \cdot (\text{çevresel mesafe}) \tag{1.5}$$

Hesabı yaptığınızda göreceksiniz ki, bu tanım gerçekten de donmuş tüpün içindeki dolaşım hızına orantılı bir rakam vermektedir.

Sadece bu iki tanım –akı ve dolaşım– sayesinde elektrik ve manyetizma yasalarının tamamını bir defada tanımlayabiliriz. Yasaların önemini hemen kavrayamayabilirsiniz, ancak elektromanyetizma fiziğinin en son hali hakkında size fikir vereceğinden emin olabilirsiniz.



Şekil 1-4 (a) Bir sıvı içindeki hız alanı. (b)'deki gibi rastgele bir kapalı alan oluşturmuş ve her yerinde eşit kesit alanına sahip bir tüp olduğunu hayal edin. Tüp dışındaki sıvı bir anda donsaydı, sıvı bu sanal tüpün içinde (c)'de gösterildiği gibi dolaşırdı.

1-4 Elektromanyetizma yasaları

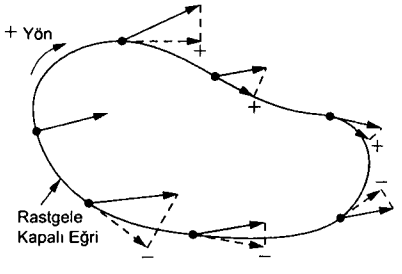
Elektromanyetizmanın ilk yasası elektrik alanının akısını tanımlar:

$$\text{Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen } \boldsymbol{E} \text{ akısı} = \frac{\text{içerideki net yük}}{\epsilon_0} \tag{1.6}$$

Denklemdeki ϵ_0 bir sabittir. (ϵ_0 genelde "epsilon-sıfır" olarak okunur.) Eğer yüzeyde hiç yük yoksa, yüzeyin yakınında bazı yükler olsa bile, $\boldsymbol{E}$'nin *ortalama* - dik bileşeni sıfırdır. Dolayısıyla, yüzeyinde net bir akı yoktur. Bu ifadenin ne kadar güçlü olduğunu ifade etmek için, Denklem (1.6)'nın Coulomb yasasının aynısı olduğunu gösterebiliriz. Bunun için gerekli varsayımsa, tek bir yükten kaynaklanan alanın küresel simetrik olduğudur. Noktasal bir yük için, yükün etrafına bir küre çizelim. Bu durumda ortalama dik bileşen, alanın merkezden çevreye doğru yönlenmesi ve kürenin üzerindeki her noktada aynı büyüklükte olması gerektiğinden dolayı, $\boldsymbol{E}$'nin herhangi bir noktadaki değeridir. Kuralımıza göre, kürenin yüzeyindeki alan ile kürenin alanının çarpımı –dışa doğru olan akı– içerdeki yükle orantılıdır. Eğer kürenin çapını biraz büyütürsek, alan çapın karesiyle orantılı artar. Elektrik alanının ortalama dik değeri ile alanın çarpımı hâlâ içerdeki aynı yüke denk olmak durumundadır, dolayısıyla alan uzaklığın karesiyle orantılı olarak azalmalıdır. İşte size "ters kare yasası".

Uzayda sabit bir eğrimiz olduğunu düşünelim. Bu eğri etrafındaki elektrik alanın dolaşımını ölçtüğümüzde, genelde, sıfır olmadığını görürüz. Gerçi, Coulomb alanı için sıfırdır. Elektrik için ikinci bir yasa vardır ve şöyle der: Kenarı C eğrisi olan herhangi bir (kapalı olmayan) S yüzeyi için:

$$\boldsymbol{E}\text{'nin } C \text{ etrafındaki dolaşımı} = -\frac{d}{dt} \; (\boldsymbol{B}\text{'nin } S \text{ içinde akısı}) \tag{1.7}$$



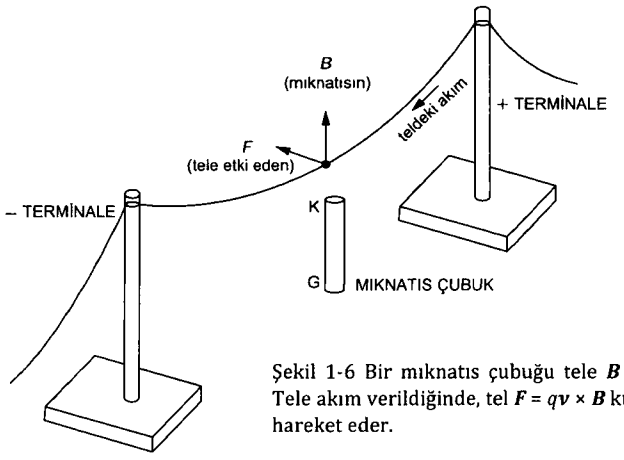
Şekil 1-5 Herhangi bir vektör alanı için, rastgele kapalı bir eğri etrafındaki "dolaşım", vektörün ortalama teğet bileşeninin eğrinin çevresiyle çarpımıdır.

$\boldsymbol{B}$ manyetik alanı için birbirine denk iki denklemi yazarak, elektromanyetik yasalarını tamamlayabiliriz:

$$\text{Herhangi bir kapalı yüzeyden geçen } \boldsymbol{B} \text{ akısı} = 0 \tag{1.8}$$

C eğrisiyle sınırlanmış S yüzeyi için:

$$c^2(\boldsymbol{B}\text{'nin } C \text{ etrafında dolaşımı}) = \frac{d}{dt} \; (S \text{ içinden geçen } \boldsymbol{E} \text{ akısı}) + \frac{S \text{ içinden elektrik akımı}}{\epsilon_0} \tag{1.9}$$



Şekil 1-6 Bir mıknatıs çubuğu tele $\boldsymbol{B}$ alanı vermekte. Tele akım verildiğinde, tel $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvveti sayesinde hareket eder.

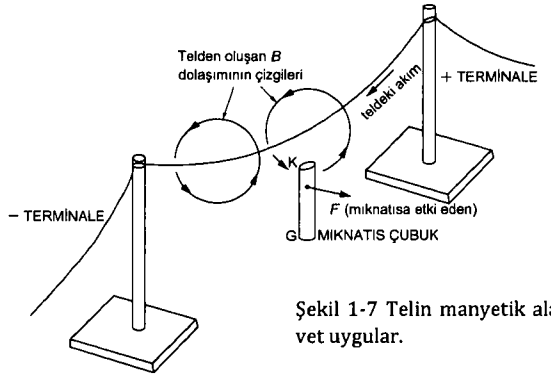
Denklem (1.9)'da yer alan c^2, ışık hızının karesidir. Denklemde yer almasının nedeniyse, manyetizmanın aslında elektriğin göreli bir etkisi olmasından dolayıdır. ϵ_0 sabiti de elektrik akımının birimlerinin uygun bir şekilde ortaya konabilmesi için denklemdedir.

Denklem (1.1), (1.6) ve (1.9) arasındaki denklemlerin tamamı elektrodinamik yasalarıdır.* Hatırlayın, Newton yasalarını yazdığınızda çok basit gözükürler, fakat çok karmaşık sonuçları vardır ve bildiğiniz üzere hepsini öğrenmemiz oldukça vakit aldı. Bu denklemleri yazmaksa o kadar kolay değildir, bu da sonuçlarının çok daha ayrıntılı olduğu ve bizim onları anlamak için çok zaman harcayacağımız anlamına gelir.

Elektrik ile manyetik alanlar arasındaki ilişkiyi niteliksel olarak ortaya koyan bir dizi küçük deney sayesinde elektrodinamiğin bazı yasalarını örnekleyebiliriz. Denklem (1.1)'in ilk kısmını saçınızı tararken deneyimlemiştiniz, dolayısıyla tekrar göstermeye gerek yok. Denklemin ikinci kısmı, Şekil 1-6'daki gibi bir çubuk mıknatıs üzerindeki telden akım geçirilerek gösterilebilir. Akım geçtiği anda tel $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvveti sayesinde hareket edecektir. Bir akım geçtiğinde, telin içindeki yükler $\boldsymbol{v}$ hızıyla hareket eder. Mıknatısın manyetik alanı da onlara kuvvet olarak etki ettiği için, tel yana doğru hareket eder.

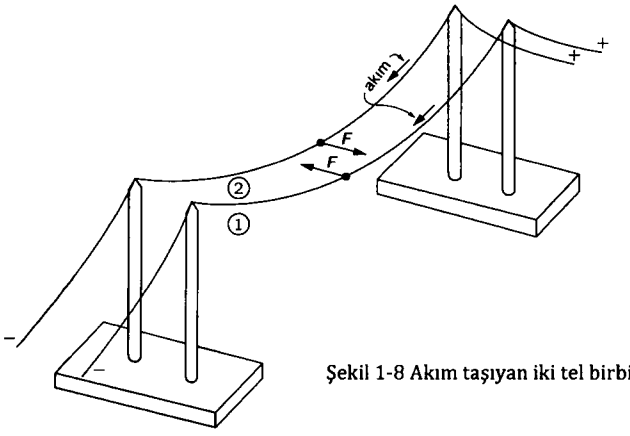
Tel sola doğru itildiğine göre, mıknatısın da sağa doğru bir itme hissetmesi gerekir. (Böyle olmasaydı, bütün bu sistemi bir rokete koyar ve momentumu korunmayan bir itici sistemine sahip olurduk.) Her ne kadar kuvvet, mıknatıs çubuğun hareket ettiğini gözle görülür hale getirecek kadar büyük değilse de, dıştan etkilere karşı daha hassas bir mıknatıs, örneğin bir pusula iğnesi, hareketi görülür hale getirecektir.

Tel mıknatısı nasıl iter? Şöyle ki, teldeki akım kendine özgü bir manyetik alan yaratır ve bu alan da mıknatısa kuvvet uygular. Denklem (1.9)'un son teri-



Şekil 1-7 Telin manyetik alanı mıknatısa kuvvet uygular.

* Sadece dolaşımın *işareti* konusunda uzlaşmak için bazı işaretler eklemeliyiz.



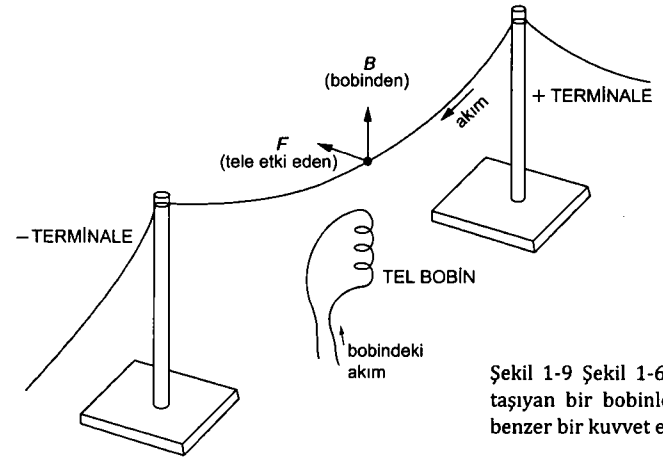
Şekil 1-8 Akım taşıyan iki tel birbirine kuvvet uygulamakta.

mine göre, bir akımın ***B dolaşımı*** olmalıdır. Bu anlattığımız durumda, ***B***'nin çizgileri, Şekil 1-7'deki telin etrafındaki halkalar olarak görünür. İşte, mıknatısa etki eden kuvvetin nedeni bu ***B*** alanıdır.

Denklem (1.9)'a göre, bir telden geçen sabit akımın oluşturduğu ***B*** dolaşımı teli çevreleyen *her* eğri için aynıdır. Telden uzaktaki eğriler için –örneğin çemberler– çap daha büyüktür, dolayısıyla ***B***'nin teğet bileşeni küçülmelidir. Diğer bir deyişle, ***B***'nin telden uzaklaştıkça doğrusal olarak azalması beklenir.

Şimdi, artık bir telden geçen akımın manyetik alan yarattığını ve bir manyetik alan olduğunda, içinden akım geçen tele etki eden bir kuvvet olduğunu biliyoruz. Öyleyse, bir telin içinden akım geçirip manyetik alan üretirsek, o manyetik alan içinden akım geçen bir başka tele kuvvet uygular. Bunu, Şekil 1-8'deki gibi yan yana iki tel kullanarak gösterebiliriz. Akımlar aynı yöndeyken, teller birbirini çeker; fakat akımlar zıt yönlerdeyken birbirlerini iterler.

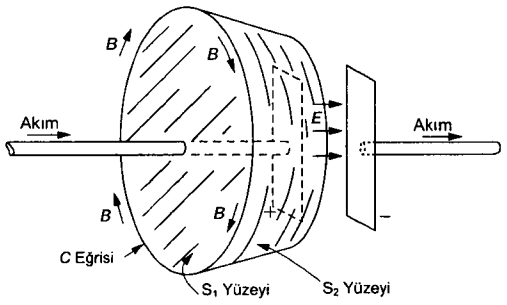
Kısaca özetlemek gerekirse, elektrik akımları, aynı mıknatıslar gibi, manyetik alanlar üretirler. Peki ama bir mıknatıs nedir? Eğer manyetik alanlar hareket halindeki yükler sayesinde meydana geliyorsa, bir parça demirin manyetik alanı da akımlar tarafından oluşturulmuş olamaz mı? Görünüşe göre öyle. Şekil 1-9'da görüldüğü gibi, küçük deneyimizdeki çubuk mıknatısı tel bobinle değiştirelim. Bobinden –ve aynı zamanda üstündeki düz telden– akım geçtiği zaman aynı bir önceki kurulumdaki gibi telin hareket ettiğini görürüz. Bir başka deyişle, bobindeki akım bir mıknatıs gibi davranmaktadır. Sanki bir parça demir içinde sürekli dolaşan bir akım varmış gibi davranmaktadır. Aslında, mıknatısları atomların içindeki sabit akımlar üzerinden anlayabiliriz. Şekil 1-7'deki mıknatısa etki eden kuvvet Denklem (1.1)'in ikinci teriminden gelmektedir.



Şekil 1-9 Şekil 1-6'daki mıknatıs çubuk, akım taşıyan bir bobinle değiştirilmiştir. Tele yine benzer bir kuvvet etki eder.

Akım dediğimiz şey nasıl meydana gelir? Bir ihtimal elektronların atomik yörüngelerdeki hareketi olabilir. Aslında, bazı malzemeler için bu açıklama uygun olsa da, demir için durum bu değildir. Bir elektron, atomun etrafında hareket ettiği gibi aynı zamanda kendi ekseni etrafında da –sanki dünyanın döndüğü gibi– döner ve dolayısıyla demirdeki manyetik alan bu dönüşten kaynaklanır. ("Sanki dünyanın döndüğü gibi" diyoruz çünkü kuantum mekaniğindeki sorular o kadar derindir ki klasik fikirler olan biteni çok iyi açıklayamaz.) Birçok maddede bazı elektronlar bir yönde, diğer elektronlarsa başka yönde dönmekte ve böylece manyetizma sıfırlanmaktadır. Demirdeyse –sonradan üzerinde duracağımız gizemli bir nedenden dolayı– birçok elektron kendi eksenleri boyunca hizalanmış şekilde dönmektedir ve bu da manyetizmanın nedenidir.

Mıknatısların alanları akımlardan olduğu için, mıknatıslarla ilgili olarak Denk. (1.8) veya (1.9)'a yeni bir terim eklememize gerek yoktur. Dönen elektronlardan kaynaklı dolaşan akımlar dahil *tüm* akımları göz önüne aldığımızda yasa doğrulanır. Fark edilmelidir ki, Denk. (1.8)'e göre Denk. (1.6)'nın sağ tarafında görülen elektriksel yüklere denk manyetik "yükler" yoktur. Hiçbiri bulunamamıştır.



Şekil 1-10 B'nin C eğrisi etrafındaki dolaşımı, ya S_1 yüzeyinden geçen akımdan ya da S_2 yüzeyinden geçen E akısının değişim hızındandır.

Denklem (1.9)'un sağ tarafındaki ilk terimin kuramsal keşfi Maxwell tarafından yapılmıştır ve çok önemlidir. Bu terim değişen *elektrik* alanlarının manyetik etkiler yarattığını ifade eder. Aslına bakarsanız, bu terim olmadan denklem anlamsızdır; çünkü o olmadan kapalı halkalı devrelerde akımlar olamazdı. Ancak, şimdiki örnekte göreceğimiz üzere, böyle akımlar vardır. İki düz levhadan oluşmuş bir sığaç (kapasitör) hayal edin. Sığaç, Şekil 1-10'da görüldüğü gibi, bir levhadan diğerine doğru yol alan akımla yüklenmekte olsun. Tellerden birinin etrafında C eğrisi çizip, teli kesecek şekilde içini dolduralım. Şekilde bu S_1 yüzeyiyle gösterilmekte. Denklem (1.9)'a göre, C'nin B etrafındaki dolaşımı (çarpı c^2) teldeki akımdan (bölü ϵ_0) doğmaktadır. Peki, eğriyi bir kaseye benzeyen, sığaç levhalarının arasında bulunan ve sürekli telden uzak duran *farklı* bir S_2 yüzeyiyle doldurursak ne olur? Elbette bu yüzeyden geçen bir akım yoktur. Ancak, şu da bir gerçektir ki, sadece sanal bir yüzeyin yerini değiştirmek de gerçek bir manyetik alanı etkilemez! B dolaşımı daha öncekiyle aynı olmalıdır. Denklem (1.9)'ın sağ tarafındaki ilk terim ile ikinci terim birleşerek, S_1 ve S_2 yüzeyleri için aynı sonucu verir. S_2 yüzeyi için B'nin dolaşımı, sığaç levhaları arasındaki E akısının değişim hızı cinsinden verilebilir. E'nin değişiminin akımla bağlantısı, tam da Denk. (1.9)'un öngördüğü gibidir. Maxwell bunu ilk görendi ve denklemin tam halini de ilk o yazdı.

Şekil 1-6'daki kurulum sayesinde, elektromanyetizmanın diğer yasalarından birini gösterebiliriz. Telin uçlarını pilden sökelim ve bize telde akım olup olmadığını söyleyebilecek bir galvanometreye bağlayalım. Teli mıknatısın manyetik alanın içinden geçecek şekilde yana doğru *ittiğimizde* telden akım geçtiğini gözlemleriz. Bu etki Denk. (1.1)'in sonuçlarından biridir. Teldeki elektronlar $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvvetini hisseder. Elektronların hareketi yana doğrudur, çünkü telle beraber hareket etmektedirler. Mıknatıstan kaynaklanan dik B'li bu v elektronların üstünde tel *boyunca* yönlenmiş bir kuvvet etki etmesine yol açar ve bu da elektronların galvanometreye doğru hareket etmesini sağlar.

Şimdi, teli bırakıp mıknatısı hareket ettirdiğimizi varsayalım. Görelilik bilgimize dayanarak, herhangi bir fark olmaması gerektiğini düşünebiliriz ve gerçekten de galvanometrede benzer bir akım görürüz. Manyetik alan, durağan yükler üstüne etki eden kuvveti nasıl oluşturur? Denklem (1.1)'e göre bir elektrik alan mutlaka olmalıdır. Demek ki, hareket eden mıknatıs bir elektrik alanı oluşturmuş olmalıdır. Bunun niceliksel gösterimi Denk. (1.7)'dir Bu denklem günlük hayattaki birçok olguyu, örneğin elektrik jeneratörleri ve transformatörleri açıklayabilir.

Denklemlerimizin en kayda değer sonucu, Denk. (1.7) ile (1.9)'un birleşiminin elektromanyetik etkilerin uzak mesafelere yayılımının açıklamasını içermesidir. Kabaca şöyle açıklayabiliriz: Diyelim ki bir yerde, bir telden aniden akım geçmesiyle doğan ve gitgide artan bir manyetik akım var. Elektrik alan kendi dolaşımını sağlayacak şekilde arttıkça, Denklem (1.9)'a göre manyetik bir dolaşım ortaya çıkacaktır. *Söz konusu* manyetik alan büyümesiyse yeni bir elektrik alan dolaşımının doğmasına neden olacaktır ve bu böyle sürecektir. İşte, alanlar bu şekilde uzay içinde, kaynaklarında ortaya çıkışları hariç olmak üzere, yükler veya akımlara ihtiyaç duymadan yol alabilirler. Birbirimizi böyle *görürüz*. Bütün bunlar elektromanyetik alanların denklemlerinde mevcuttur.

1-5 Alanlar nedir?

Şimdi, konuya bakış açımızla ilgili birkaç değerlendirme yapalım. İçinizden şunu geçiriyor olabilirsiniz: "Bütün bu akılar ve dolaşımlarla ilgili söylenenler çok soyut. Uzayın her noktasında elektrik alanları var; bir de bu 'yasalar'. İyi de, *gerçekte* olan biten ne? Bütün bunları, örneğin, yükler arasında olup bitenle açıklayamıyor musunuz?" Açıkçası bu, önyargılarınıza bağlıdır. Birçok fizikçi, aralarında hiçbir şey olmayan maddelerin birbirine doğrudan etkisinin kavranılamaz olduğunu iddia etmekteydi. (Zaten düşünülmüş olan bir şey, akla sığmaz bir fikri nasıl bulabilmişlerdi?) Şöyle derlerdi: "Bakın, bildiğimiz kuvvetler sadece bir maddenin diğerine doğrudan etkisi olanlardır. Onu iletecek bir şey olmadığı sürece bir kuvvet olması imkânsızdır. Peki, bir maddenin diğerine "doğrudan etkisi"ni incelersek neyle karşılaşırız? İyice yakından baktığımızda görürüz ki bir parça diğerine tam olarak değmemektedir; çok az ayrıktırlar birbirlerinden ve çok küçük ölçekte etkili elektriksel kuvvetler iş başındadır. Dolayısıyla, doğrudan temasla oluşan sözde etkiyi elektriksel kuvvetler temelinde açıklamamız gerekmektedir. Elektriksel kuvvetin eski usul, kas kuvvetiyle oluşan itme ve çekme şeklinde görüneceğinde ısrar etmek anlamsızdır, zira kasların itme ve çekmeleri de elektriksel kuvvetler olarak yorumlanabilir. En mantıklı soru, elektriksel etkilere bakmanın *en uygun* yolunun ne olduğudur. Bazı insanlar onları birbirlerinden ayrı konumlarda yükler arasındaki etkileşim olarak göstermeyi ve karmaşık bir yasayı kullanmayı tercih ederler. Diğer bazı insanlarsa alan çizgilerini kullanmayı severler. Sürekli alan çizgileri çizerler ve E ile B'lerin çok soyut olduğunu düşünürler. Oysaki alan çizgileri bir alanı tanımlamanın çok kaba bir yoludur ve doğru, nicel yasaları alan çizgileriyle ortaya koymak zordur. Hem ayrıca alan çizgileri fikri elektrodinamiğin en derin ilkesini, üst üste binme ilkesini içermez. Her ne kadar iki farklı grup yük için alan çizgilerinin nasıl göründüğünü biliyor olsak da, bu iki grup bir arada olduğunda alan çizgilerinin şekli hakkında hiçbir fikrimiz yoktur. Oysaki matematiksel olarak, üst üste binme kolaylıkla gösterilebilir; basitçe, iki vektörü toplarsınız. Alan çizgilerinin yalın bir resim sağlama konusunda avantajları olsa da, bazı dezavantajları da yok değildir. Durağan elektriksel yüklerini düşünürken, birbirleriyle doğrudan etkileşimini resmetmenin avantajları büyüktür; fakat hızla hareket eden yüklerle uğraşırken de büyük dezavantajları vardır.

En iyi yöntem, soyut alan fikrini kullanmaktır. Soyut olması bir talihsizliktir, ancak gereklidir de. Elektrik alanını bir tür dişli çarklarının hareketi türünden ya da çizgiler yahut da bir tür malzemedeki gerilmeler temelinde düşünmeye çalışmak, fizikçileri basitçe elektrodinamik hakkında doğru cevapları bulmalarından daha çok yormuştur. İlginçtir ki, ışığın davranışını ortaya koyan doğru denklemler 1839 yılında MacCullagh tarafından ortaya konmuştu. Denk-

lemleri görenler ona şöyle dediler: "Tamam ama bu denklemlerin mekanik özelliklerine uyabilecek gerçek bir malzeme yok ve ışık bir salınım olduğundan *bir şeyin* içinde titreşmelidir. Bu soyut denklemlere inanamayız." Ah, eğer insanlar biraz daha açık fikirli olsalardı, ışığın davranışını doğru şekilde açıklayan denklemlere çok daha önce kavuşurlardı.

Manyetik alan söz konusu olduğunda, şu noktayı da belirtmeliyiz: Diyelim ki bir şekilde manyetik alanı birtakım çizgiler veya dişli çarklarıyla betimlemeyi becerdiniz. Sonra da birbirlerine paralel şekilde ve aynı hızda hareket eden iki yük olduğunda ne olduğunu açıklamaya çalıştınız. Hareket ettikleri için, iki akım gibi davranacaklar ve onlarla ilintili (aynı Şekil 1-8'in tellerindeki akımlarda olduğu gibi) manyetik alan olacaktır. Onlarla beraber hareket eden bir gözlemci her iki yükü de sabit olarak gözlemleyecek ve manyetik bir alan *yok* diyecektir. Yüklerle beraber hareket ettiğinizde "çizgiler" ve "dişli çarkları" gözden kaybolur. Böylece tek yaptığımız *yeni* bir problem yaratmaktır. Dişli çarkları nasıl gözden kaybolmaktadır? Alan çizgileri çizen insanlar da benzer bir sorunla karşı karşıya kalır. Tek sorun alan çizgilerinin yüklerle veya yükler olmadan hareket ettiğini söylemek değildir; belli koordinat çerçevelerinde tamamen yok olabilirler.

Aslında demek istediğimiz, manyetizmanın gerçekte göreli bir etki olduğudur. Az önce üzerinde konuştuğumuz birbirine paralel hareket eden iki yük söz konusu olduğunda, hareketlerine v^2/c^2 terimiyle görelilik düzeltmesi yapmak gerekir. Bu düzeltmeler manyetik kuvvete karşılık gelmelidir. Peki ama (Şekil 1-8)'deki deneyimizdeki teller arasındaki kuvvete ne demeli? Orda, manyetik kuvvet *bütün* kuvvettir. "Göreli düzeltme" gibi durmamaktadır. Ayrıca, teldeki elektronların hızlarını tahmin etmeye çalışırsak (bunu kendiniz yapabilirsiniz), ortalama hızlarının saniyede 0,01 santimetre olduğunu buluruz. Diğer bir deyişle, v^2/c^2 yaklaşık 10^{-25}'tir. Şüphesiz ki göz ardı edilebilir bir "düzeltme". Fakat hayır! Her ne kadar manyetik kuvvet, bu durumda, hareket eden elektronlar arasındaki "normal" elektriksel kuvvetin 10^{-25}'te biriyse de, unutmayın ki "normal" elektriksel kuvvetler mükemmel dengeleme sayesinde –tellerin aynı sayıda elektron ve protona sahip olmalarından dolayı– yok olmuştur. Denge 10^{25}'te birden daha hassastır ve manyetik kuvvet olarak adlandırdığımız göreli terim artık geriye kalan tek terimdir. Baskın terim artık odur.

İşte, elektriksel etkilerin neredeyse mükemmel şekilde birbirlerini sıfırlamaları görelilik etkilerini (manyetizmayı) üzerinde çalışabilir kıldı ve doğru denklemler $-v^2/c^2$ mertebesinde– keşfedilebildi. Gerçi, tüm bunlar olurken fizikçiler ne olup bittiğini *bilmiyorlardı*. Bu yüzden, görelilik keşfedildiğinde elektromanyetik yasalarının değişmesine gerek kalmadı. Zaten –mekanik yasalarının tersine– çoktan v^2/c^2 hassasiyetinde doğruydular.

1-6 Bilim ve teknolojide elektromanyetizma

Bölümü bitirirken, Yunanların gözlemlediği olgular içinde ikisinin garipliğine dikkat çekmek istiyorum: Eğer bir parça kehribarı ovalarsanız, küçük papirüs parçalarını yerden kaldırabilirsiniz ve Magnesia Adasındaki garip kaya parçaları demiri çekiyordu. Elektrik ve manyetizmanın etkilerinin görüldüğü sadece bu iki olgunun o dönem Yunanlarınca bilinmesi müthiş bir şey. Sadece bu olguların görünür olmasının nedeni daha önce bahsettiğimiz, yüklerin müthiş hassas bir şekilde dengelenmesinden ileri gelmektedir. Yunanlardan sonra gelen bilim insanlarıysa yeni bir olgu daha keşfettilerse de, aslında bu sadece kehribar ve/veya mıknatıs taşı etkilerinin bir başka boyutuydu. Artık şunu biliyoruz, kimyasal etkileşim olgusu ve nihayetinde yaşamın kendisi ancak elektromanyetizma temelinde anlaşılabilir.

Elektromanyetizmanın nasıl işlediğini anladıkça, insanların hayal gücünü aşan teknik gelişmeler olmaya başladı: uzun mesafelere telgraf sayesinde sinyal göndermek, bir başkasıyla arada herhangi bir bağlantı olmadan konuşabil-

mek ve dev güç sistemleri işletmek –yüzlerce kilometre uzunluğunda telle bir başka motora bağlanmış devasa bir su değirmeni, on binlerce yerde on binlerce motor endüstrideki ve evlerdeki makineleri çalıştırıyor. İşte bütün bunlar, elektromanyetizma yasaları hakkındaki bilgimiz sayesinde mümkün oldu.

Bugün artık daha hassas etkilerle uğraşıyoruz. Elektriksel kuvvetler çok devasa oldukları gibi, çok çok küçük de olabilirler ve onları kontrol ederek farklı yollarla kullanabiliriz. Yüzlerce kilometre ötemizdeki bir adamın, küçük metal bir çubuktaki elektronları etkilemesi sayesinde onun ne yaptığını görebiliriz. Tek yapmamız gereken, o çubuğu televizyon alıcımız için anten olarak kullanmak.

Uzun vadede –diyelim bundan on bin yıl sonra– insanlık tarihini incelediğimizde, 19. yüzyılın en önemli olayı kesinlikle Maxwell'in elektrodinamik yasalarını keşfetmesi olacaktır. Aynı yüzyılda gerçekleşmiş Amerikan iç savaşı, bu önemli gelişmeyle karşılaştırıldığında çoktan tarihin tozlu sayfalarında yerini almış ve önemini yitirmiş olacaktır.

2

VEKTÖR ALANLARININ DİFERANSİYEL ANALİZİ

2-1 Fiziği anlamak

2-1 Fiziği anlamak
2-2 Skaler ve vektör alanlar: *T* ve *h*
2-3 Alanların türevleri: gradyan
2-4 ∇ İşlemcisi
2-5 ∇ işlemleri
2-6 Isı akışının diferansiyel denklemi
2-7 Vektör alanlarının ikinci türevleri
2-7 Tuzaklar

Bir fizikçi, problemlere değişik açılardan bakabilmek için belirli bir ustalığa sahip olmalıdır. Gerçek fiziksel problemlerin tam bir analizi genelde gayet karmaşıktır ve herhangi bir fiziksel durum sadece diferansiyel denklemini çözerek analiz edilemeyecek kadar karmaşık olabilir. Yine de, bir sistemin davranışı hakkında iyi bir fikir edinebilmek için çözümün farklı koşullar altındaki özellikleri hakkında hissiyat sahibi olmak önemlidir. Bu amaç doğrultusunda alan çizgileri, sığa, direnç ve indüktans gibi kavramlar gayet yararlıdır. Dolayısıyla zamanımızın önemli bir bölümünü onları incelemeye ayıracağız. Bu sayede, farklı elektromanyetik koşullarda ne olması gerektiğine dair hissiyatımız gelişecek. Diğer yandan, alan çizgileri gibi sezgisel modellerin hiçbiri tüm koşullar için yeterli ve hassas değildir. Yasaları ifade etmenin tek bir kesin yolu varsa o da diferansiyel denklemlerdir. Hem temel olmanın avantajına sahiptirler, hem de bildiğimiz kadarıyla hassastırlar. Diferansiyel denklemleri öğrendiyseniz, daima onlara geri dönebilirsiniz. Unutulacak bir şey değildirler.

Farklı koşullarda ne olması gerektiğini anlamanız biraz zaman alacaktır. Oturup denklemleri çözmeniz gerekecektir. Denklemleri her çözdüğünüzde, çözümlerin özellikleri hakkında bir şey öğrenmiş olacaksınız. Çözümleri aklınızda tutabilmek için, onların alan çizgileri ve diğer kavramlar bağlamında ne anlamına geldiklerini çalışmak yararlıdır. Ancak bu şekilde, denklemleri gerçekten "anlayabilirsiniz". Matematik ile fizik arasındaki fark işte budur. Matematikçiler veya matematiksel zekâya sahip insanlar, fizik "çalışırken" çoğu zaman yoldan çıkarlar çünkü fiziğe dair pratik görüşlerini kaybederler. Şöyle dediklerini duyarız: "Bakın, işte bütün bu diferansiyel denklemler –Maxwell denklemleri– elektrodinamiğe dair her şeyi içeriyor. Fizikçiler de her şeyin bu denklemlerde yer aldığını kabul ediyor. Denklemler karmaşık olabilir, fakat sonuçta onlar matematiksel denklemlerdir ve onları iyice kavrarsam o zaman fiziği de iyice anlamış olurum." Keşke öyle olsaydı, ama işler böyle yürümüyor. Fiziği bu şekilde çalışan matematikçilerin –ki onlardan çok vardır– ne fiziğe ne de matematiğe doğru düzgün katkıları olmuştur. Başarısız olmalarının nedeni, gerçek hayattaki fiziksel durumların çok karmaşık olması ve bu yüzden de denklemlere dair anlayışımızın çok daha geniş olması gerektiğindendir.

Gözden geçirme: Bölüm 11, Cilt 1, *Vektörler*

Bir denklemi gerçekten anlamanın –matematiksel anlayıştan ötesine geçmenin– ne olduğu Dirac tarafından açıklanmıştır. Kendisi şunu demiştir: "Bir denklemi ancak, çözümünün özeliklerini onu gerçekte çözmeden anlamanın bir yolunu bulduğum an tam anlamıyla kavramış oluyorum." Diğer bir deyişle, eğer belirli koşullarda ne olması gerektiğini denklemleri çözmeden bilmenin bir yolunu bulduğumuzda denklemleri "kavramış" oluruz. Fiziksel kavrayış matematiksel olmayan, bulanık, muğlak ve kesin olmayan bir şeydir; fakat bir fizikçi için kesinlikle gerekli bir yetenektir.

Böyle bir ders, normalde, fiziksel fikirler sırayla geliştirilerek verilir. Önce basit durumlarla başlanır ve gitgide karmaşık durumlara yol alınır. Bunun için, bir önce öğrendiğiniz şeyleri –belli durumda doğru olan, ancak genelde doğru olmayan şeyleri– sürekli unutmanız gerekir. Örneğin, elektriksel kuvvetin, uzaklığın karesine dayalı olduğu "yasası" *her zaman* geçerli değildir. Bu derslerde tam tersi bir yaklaşım var. Önce yasaların *tam* halini ele alıp, sonra bir

adım geriye gidip daha basit koşullara uygulayarak fiziksel fikirleri gitgide geliştirmek. Tam anlamıyla bunu yapacağız beraber.

Bu yaklaşım, deneylerle bilgi edinip daha sonra konuya dair kavrayışın oluşturulduğu tarihsel yaklaşımın tam anlamıyla tersidir. Son 200 yılda, fizik konuları gayet zeki insanlarca geliştirilmiştir ve sahip olduğumuz bu kısıtlı zamanda onların geliştirdiği her şeyin üzerinden geçmemiz imkânsız. Ne yazık ki bu derslerde o tarihsel, deneysel gelişime dair pek bir şey bulamayacaksınız. Ayrıca, ansiklopedi okuyarak öğrenebileceğiniz şeyleri de dışarda bırakmak zorundayız. Birçok ders kitabında elektrik ve manyetizma üzerinde tarihsel bilgi bulabilirsiniz.

2-2 Skaler ve vektör alanlar: T ve h

Şimdi, öncelikle elektrik ve manyetizmaya soyut, matematiksel bir bakış açısıyla bakacağız. Varmak istediğimiz nokta, 1. Bölümde verdiğimiz yasaların anlamlarını açıklayabilmek. Bunu başarabilmek için öncelikle kullanmak istediğimiz yeni ve özel simgeleri açıklamalıyız. Bunun için gelin elektromanyetizmayı şu an bir kenara kaldıralım ve vektör alanlarının matematiğini inceleyelim. Bu sadece elektromanyetizma için değil, bütün fiziksel olgular için çok önemlidir. Nasıl ki tipik diferansiyel ve integral analizleri fiziğin tüm dalları için önemliyse, vektörlerin diferansiyel analizi de aynı şekilde önemlidir. Şimdi bu konuya eğilelim.

Aşağıda vektörler cebirine dair bazı kurallar listelenmiştir. Bunları zaten bildiğinizi varsayıyorum:

$$A \cdot B = \text{skaler} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.1}$$

$$A \times B = \text{vektör} \tag{2.2}$$

$$(A \times B)_z = A_xB_y - A_yB_x$$

$$(A \times B)_x = A_yB_z - A_zB_y$$

$$(A \times B)_y = A_zB_x - A_xB_z$$

$$A \times A = 0 \tag{2.3}$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \tag{2.4}$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C \tag{2.5}$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \tag{2.6}$$

Ayrıca, kalkülüsten bildiğimiz aşağıdaki eşitlikleri de kullanacağız:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{2.8}$$

İlk Denklem (2.7) elbette sadece Δx, Δy ve Δz sıfıra giderse doğrudur.

Mümkün olan en basit fiziksel alan, skaler bir alandır. Hatırlayın, alan dediğimizde ima ettiğimiz şey uzaydaki konuma bağlı bir niceliktir. *Skaler alan* dediğimizdeyse sadece her noktada tek bir sayıyla –bir skalerle– ifade edilen bir alanı ima etmekteyiz. Elbette, sayı zamanla değişebilir ama şimdilik bunu düşünerek kendimizi gereksiz yere yormaya gerek yok. Belirli bir anda bir alanın nasıl göründüğünü tartışacağız. Skaler alana örnek olması için belli yerlerinin ısıtıldığı, belli yerlerininse soğutulduğu, dolayısıyla sıcaklığının her noktada farklı olduğu katı bir malzeme düşünelim. Sıcaklık, dikey bir koordinat sisteminde ölçülmüş x, y ve z'nin fonksiyonu olacaktır. Sıcaklık skaler bir alandır.

Vektörleri elle yazmak:

Bazıları

$\vec{E}$ veya $\tilde{E}$ veya sadece $\bar{E}$ kullanır.

Diğerleri

$\underset{\sim}{E}$ yazmayı tercih eder

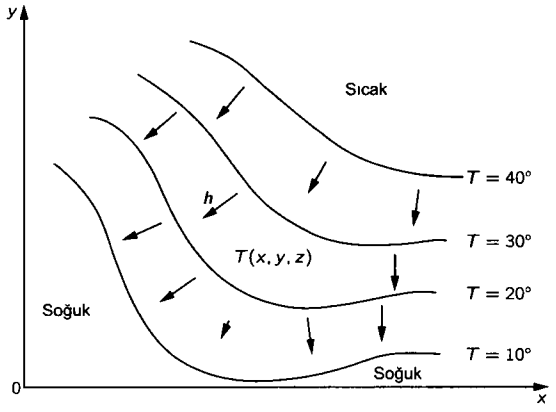
Biz vektörleri aşağıdaki gibi yazacağız:

A B C D E F G
H I J K L M N
O P Q R S T U
V W X Y Z

Küçük harfler daha zordur:

a b c d e f g
h i j k l m n
o p q r s t u
v w x y z

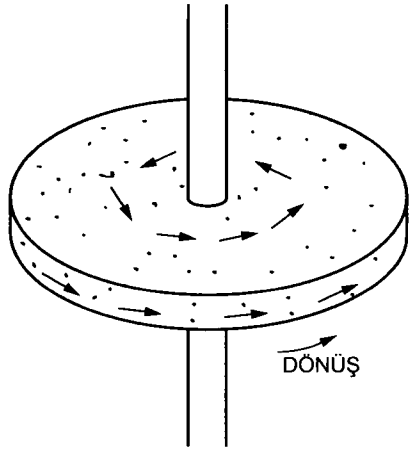
Siz kendiniz de bir yazılış uydurabilirsiniz.



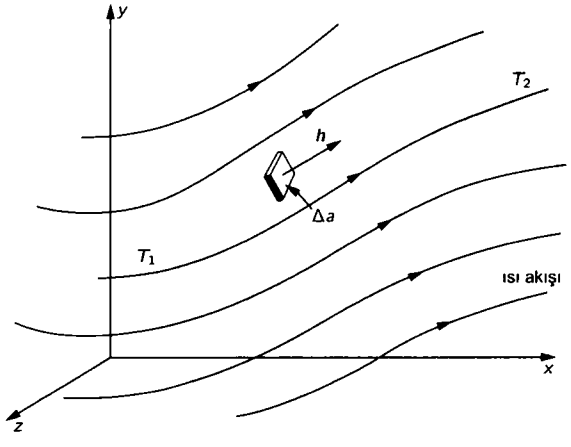
Şekil 2-1 Sıcaklık (T) bir skaler alan örneğidir. Uzaydaki her (x, y, z) noktasına karşılık gelen bir $T(x, y, z)$ sayısı vardır. $T = 20°$ olarak işaretlenmiş yüzeydeki (z = 0'da bir eğri olarak gösterilen) her nokta aynı sıcaklıktadır. Oklar, sıcaklık akış vektörü $\boldsymbol{h}$'ın bir örneğidir.

Skaler alanlarla ilgili bir düşünce şekli de "eş yükselti eğrileri"ni hayal etmektir. Eş yükselti eğrileri, aynı bir haritada aynı yükseklikteki noktaları birbirine bağlayan çizgiler gibi, aynı değere sahip noktaları birbirine bağlar. Bir sıcaklık alanı için eş yükselti eğrilerine "eş-sıcaklıklı" yüzeyler veya eş-sıcaklıklar denir. Şekil 2-1 bir sıcaklık alanını ve T'nin $z = 0$ x ve y'ye nasıl bağlı olduğunu göstermektedir. Birçok eş-sıcaklık eğrileri görebilirsiniz şekilde.

Bunların yanında, vektör alanları da vardır. Fikri çok basittir. Uzaydaki her noktaya bir vektör atanır. Vektör noktadan noktaya değişir. Örneğin, dönen bir kütle düşünün. Kütlenin herhangi bir noktasının hızı, konumunun bir fonksiyonu olan vektördür (Şekil 2-2). İkinci olarak, bir malzeme bloğundaki ısının akışını örnek verebiliriz. Bloğun bir yerindeki sıcaklık yüksek, diğerinde düşükse, sıcak olan noktadan soğuk olan noktaya doğru bir akış olacaktır. Isı bloğun farklı yerlerinde farklı yönlerde akacaktır. Isı akışı, $\boldsymbol{h}$ dediğimiz yönlü bir niceliktir. Isı akış vektörü örnekleri Şekil 2-1'de gösterilmiştir.



Şekil 2-2 Dönen bir nesnedeki atomların hızı bir vektör alan örneğidir.



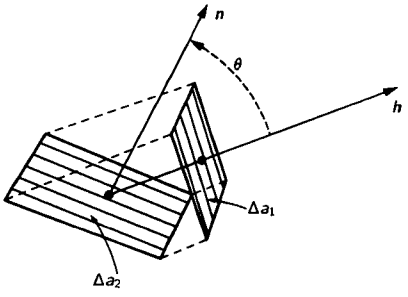
Şekil 2-3 Isı akışı bir vektör alanıdır. $\boldsymbol{h}$ vektörünün yönü akışın yönünü işaret eder. Büyüklüğü akışa dik yöndeki yüzey elemanından birim zamanda geçen enerjinin yüzey elemanının alanına bölümüdür.

Gelin, $\boldsymbol{h}$'ın daha kesin bir tanımını yapalım: Bir noktadaki ısı akış vektörünün büyüklüğü, akışa dik yöndeki sonsuz küçüklükteki yüzey elemanından birim zaman ve alanda geçen termal enerjidir. Vektörün yönü akışın yönünü işaret eder (*Bkz.* Şekil 2-3). Sembollerle ifade edecek olursak: ΔJ birim zamanda Δa yüzey alanından geçen termal enerjiyse, o zaman

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a}\, \boldsymbol{e}_f \tag{2.9}$$

olur. Denklemdeki $\boldsymbol{e}_f$ akış yönündeki bir *birim vektördür.*

Vektör $\boldsymbol{h}$ bir başka şekilde, bileşenleriyle tanımlanabilir. Akışa göre *herhangi* bir açıda bulunan küçük bir yüzeyden ne kadar ısı aktığını düşünelim. Şekil



Şekil 2-4 Δa_2'den geçen ısı akışı ile Δa_1'den geçen ısı akışı aynıdır.

2-4'te Δa_1'e göre eğik ve akışa dik küçük bir yüzey olan Δa_2'yi görmektesiniz. *Birim vektör* $\boldsymbol{n}$, Δa_2 yüzeyinin normalidir. $\boldsymbol{n}$ ile $\boldsymbol{h}$ arasındaki θ açısı yüzeyler arasındaki açıyla aynı açıdır ($\boldsymbol{h}$ vektörü, Δa_1'in normali olduğundan dolayı). Peki, Δa_2'den geçen *birim alana* düşen ısı akışı nedir? Δa_1 ve Δa_2 yüzeylerinden geçen akış aynıdır, sadece alanlar farklıdır. Bunu denklemle şöyle ifade edebiliriz: $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos\theta$. Bu durumda Δa_2'den geçen ısı akışını şöyle yazabiliriz:

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1} \cos\theta = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.10}$$

Bu denklemi şöyle ifade edebiliriz: Birim normali $\boldsymbol{n}$ olan *herhangi* bir yüzey elemanından geçen ısı akışı (birim zaman ve birim alanda) $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}$ terimiyle ifade edilebilir. Benzer şekilde şöyle de diyebilirdik: Isı akışının Δa_2 yüzey elemanına dik bileşeni $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}$ olur. İstersek, bu ifadelerin $\boldsymbol{h}$'ı tanımladığını ifade edebiliriz. Aynı fikirleri diğer vektör alanlarına da uygulayacağız ilerde.

2-3 Alanların türevleri: gradyan

Alanlar zaman içinde değiştikçe, değişimlerini t'ye bağlı türevleri cinsinden ifade edebiliriz. Konumla ilgili değişimleri de benzer şekilde ifade etmek iyi olur, zira aralarındaki ilişkiyle, örneğin bir yerdeki sıcaklık ile diğer bir yerdeki sıcaklık arasındaki ilişkiyle ilgileniyoruz. Sıcaklığın konuma göre türevini nasıl alabiliriz? Sıcaklığın x'e göre mi türevini almalıyız? Yoksa y'ye göre mi? Ya da z'ye göre mi?

İşe yarar fizik yasaları koordinat sisteminin yöneliminden bağımsızdırlar. Dolayısıyla, iki tarafın ya skaler ya da vektörel olduğu biçimde yazılmalıdırlar. Skaler bir alanın, diyelim $\partial T/\partial x$'in türevi nedir? Skaler midir, vektörel midir veya başka bir şey midir? Kolayca çıkarabileceğiniz üzere, ne skalerdir ne de vektöreldir; zira farklı bir x ekseni alırsak, $\partial T/\partial x$ tamamen farklı olur. Dikkatinizi çekerim, üç muhtemel türevimiz var: $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ ve $\partial T/\partial z$. Şimdi, elimizde üç türev var ve biliyoruz ki bir vektör oluşturmak için üç sayıya ihtiyacımız var. Belki de bu türevler bir vektörün bileşenleridir:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \stackrel{?}{=} \text{bir vektör} \tag{2.11}$$

Herhangi üç sayının bir vektör oluşturabileceği bilgisi, elbette ki, genelde doğru değildir. Böyle bir şey olabilmesi için, koordinat sistemini döndürdüğümüz zaman, vektör bileşenlerinin de doğru şekilde dönüşmesi gerekir. Dolayısıyla, bu türevlerin koordinat sistemi döndüğünde nasıl değiştiklerini analiz etmemiz gerekir. Böylece (2.11)'in gerçekten de bir vektör olduğunu ispatlayabiliriz. Koordinat sistemi döndüğünde, türevler de doğru şekilde dönüşecektir.

Bunu değişik şekillerde görebiliriz. Bir yolu, cevabının koordinat sisteminden bağımsız olduğu bir soru sorup cevabı "değişmez" bir şekilde ifade etmeye çalışmaktır. Örneğin, $S = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ olursa ve $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ vektörse, o zaman –1. Cilt, Bölüm 11'de kanıtladığımız üzere– S bir skalerdir. S'nin bir skaler olduğunu koordinat sistemlerindeki değişimlerle değişip değişmediğini araştırmasak da *biliriz. Değişemez,* çünkü S iki vektörün skaler çarpımıdır. Benzer şekilde, eğer elimizde B_1, B_2, B_3 şeklinde üç sayı varsa ve *her* $\boldsymbol{A}$ vektörü için aşağıdaki eşitliği sağlarsak

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \tag{2.12}$$

eşitliğini elde ederiz ve burada B_1, B_2, B_3 sayıları bir $\boldsymbol{B}$ vektörünün B_x, B_y, B_z bileşenleri olur. Burada önemli nokta, S'nin herhangi bir koordinat sistemi için aynı olmasıdır.

Sıra geldi sıcaklık alanı üzerine düşünmeye. Birbirlerinden kısa $\Delta \boldsymbol{R}$ mesafesiyle ayrışmış iki noktayı, P_1 ve P_2, ele alalım. P_1 noktasındaki sıcaklık T_1 ve P_2 noktasındaki sıcaklık T_2'dir. Elbette ki, bu gerçek, fiziksel noktalardaki sıcaklıklar koordinatları ölçmek için hangi ekseni seçtiğimizden bağımsızdır. Özellikle ΔT koordinat sisteminden bağımsız bir sayıdır. O bir skalerdir.

Eğer uygun bir eksen kümesi seçersek, şu eşitlikleri yazabiliriz: $T_1 = T(x, y, z)$ ve $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Bu eşitliklerdeki Δx, Δy, ve Δz, ΔR vektörünün bileşenleridir. (Şekil 2-5). Denklem (2.7)'yi düşünerek şu eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \tag{2.13}$$

Denklem (2.13)'ün sol tarafı bir skalerdir. Sağ tarafıysa, bir vektörün üç bileşenleri ile Δx, Δy, ve Δz terimlerinin çarpımlarının toplamıdır. Buradan yola çıkarak,

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

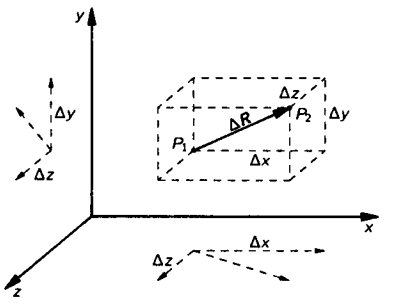
şeklindeki üç sayının da, bir vektörün x-, y- ve z- bileşenleri olduğu sonucuna varabiliriz. Bu yeni vektörü ∇T sembolüyle yazalım. ∇ sembolü (nabla veya del olarak okunabilir) ters dönmüş bir Δ'dir ve bize türev almamız gerektiğini belirtir. İnsanlar ∇T'yi farklı şekillerde okurlar: "del $-T$" veya "T'nin gradyanı" veya "grad T".*

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.14}$$

Bu simgeleri kullanarak Denk. (2.13)'ü daha sade bir şekilde tekrar yazabiliriz:

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta R \tag{2.15}$$

Denklemi kelimelere dökersek, şöyle diyebiliriz: iki nokta arasındaki sıcaklık farkı T gradyanı ile noktalar arasındaki vektörel uzaklığın skaler çarpımıdır. Denklem (2.14)'ün biçimi de ∇T'nin bir vektör olduğuna dair yukarıdaki kanıtımızı desteklemektedir.



Şekil 2-5 Bileşenleri Δx, Δy ve Δz olan ΔR vektörü.

Belki de hâlâ ikna olmadınız? O zaman gelin, farklı bir şekilde ispatlayalım. (Gerçi, dikkatli bakarsanız, aslında aynı kanıtın sadece daha dolambaçlı olduğunu anlayacaksınız.) ∇T'nin bileşenlerinin aynı R'nin bileşenleri gibi dönüştüğünü göstermeye çalışacağız. Eğer dönüşürlerse, biliriz ki ∇T, I. Cilt 11. Bölümdeki vektör tanımımız gereği, gerçekten de bir vektördür. Yeni bir koordinat sistemi, x', y', z', ele alalım ve bu yeni sistem $\partial T/\partial x'$, $\partial T/\partial y'$ ve $\partial T/\partial z'$'yi hesaplayalım. İşleri kolaylaştırmak adına, $z = z'$ diyelim ki z koordinatından kurtulalım. (Daha sonra genel durumu kendiniz kontrol edersiniz.)

Şekil 2-6(a)'daki gibi, xy eksenine göre θ açısı kadar döndürülmüş bir $x'y'$ sistemini ele alalım. Bir (x, y) noktası için, ana sistemdeki koordinatlar:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{2.16}$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \tag{2.17}$$

ya da, x ve y için çözersek:

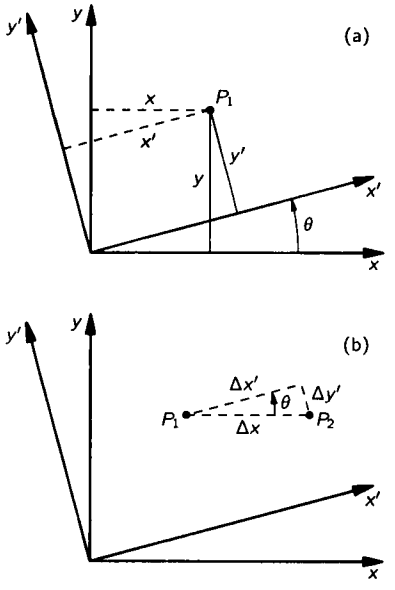
$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \tag{2.18}$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \tag{2.19}$$

olur. Eğer herhangi bir sayı çifti, aynı x ve y gibi dönüşürse, o zaman bir vektörün bileşenleri olduğunu anlarız.

Şimdi gelin, Şekil 2-6 (b)'deki P_1 ile P_2 noktaları arasındaki sıcaklık farkına bakalım. Eğer x ve y noktalarıyla hesaplarsak, Δy sıfır olduğundan dolayı, şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x \tag{2.20}$$



Şekil 2-6 (a) Dönmüş bir koordinat sistemine dönüşüm. (b) x-eksenine paralel ΔR aralığı özel durumu.

* Bizim gösterimimizde, (a, b, c) ifadesi bileşenleri a, b ve c olan bir vektörü ifade eder. Eğer birim vektörler i, j ve k'yı kullanmak isterseniz şöyle yazabilirsiniz:

$$\nabla T = i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}$$

Peki, üslü sistemdeki bir hesaplama bize neyi verirdi? Onu da aşağıdaki gibi yazardık:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta y' \tag{2.21}$$

Şekil 2-6(b)'ye baktığımızda, Δx pozitif olduğunda, $\Delta y'$ negatif olduğu için, şunları elde edebiliriz:

$$\Delta x' = \Delta x \cos\theta \tag{2.22}$$

ve

$$\Delta y' = -\Delta x \sin\theta \tag{2.23}$$

Bunları Denklem (2.21)'e koyduğumuzda da şu eşitlikleri elde ederiz:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta x\sin\theta \tag{2.24}$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta\right)\Delta x \tag{2.25}$$

Denklem 2.25 ile 2.20'yikarşılaştırıncaysa şunu çıkarabiliriz:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta \tag{2.26}$$

Bu denklem şu anlama gelir: nasıl ki Denklem (2.18)'de x, x' ve y''nden elde edilmişse, $\partial T/\partial x$ de $\partial T/\partial x'$ ve $\partial T/\partial y'$'nden elde edilebilir. Dolayısıyla $\partial T/\partial x$ terimi bir vektörün x-bileşenidir. Aynı şekilde $\partial T/\partial y$ ve $\partial T/\partial z$ terimleri de vektörün y ve z bileşenleridir. O nedenle, ∇T bir vektördür; skaler bir T alanından elde edilmiş bir vektör alanıdır.

2-4 ∇ İşlemcisi

Artık olağanüstü şekilde zevkli ve zekice –ve matematiği mükemmel yapan şeylerin özellikleri olan– şeyler yapabiliriz. grad T veya ∇T'nin vektör olması, diferansiyelini aldığımız skaler alandan bağımsızdı. T eğer *herhangi bir skaler alanla* değiştirilmiş olsaydı bile, argümanlarımız hâlâ geçerli olurdu. Dönüşüm denklemleri neyin diferansiyelini aldığımızdan bağımsız olarak aynı olduğundan, T'yi çıkarıp Denk. (2.26)'yı işlemci denklemiyle değiştirebiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'}\sin\theta \tag{2.27}$$

Jeans'in dediği gibi, işlemcileri "bir şeylerin diferansiyelini almaya aç şekilde" bırakalım.

Diferansiyel işlemcilerin kendileri, aynı bir vektörün bileşenleri gibi dönüşmeleri gerektiğinden onlara *"vektör işlemcisi"* diyebiliriz. O halde, şu aşağıdakini de yazabiliriz:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2.28}$$

Bu da elbette şu anlama gelirdi:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.29}$$

Bakın görüyor musunuz, T'den gradyanı ayırmış olduk. Ne kadar harika bir fikir!

Elbette şunu da unutmayın, ∇ bir işlemcidir. Tek başına hiçbir anlam ifade etmez. Eğer ∇ tek başına hiçbir şey ifade etmiyorsa, *onu* bir skalerle –diyelim T– çarparak $T\nabla$ sonucunu elde etmemiz ne anlama gelir? (Bir vektörü daima bir skalerle çarpabilirsiniz.) Hâlâ bir şey ifade etmez. x bileşeni şöyledir:

$$T\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.30}$$

Bu bir sayı değildir, ancak yine de bir işlemcidir. Yine de, vektörler cebirine göre, $T\nabla$ bir vektördür.

Şimdi gelin, ∇'i diğer tarafta bir skalerle çarparak (∇T) sonucunu elde edelim. Bildiğimiz cebirle şöyle yazabiliriz:

$$TA = AT \tag{2.31}$$

ama unutmayalım ki, işlemci cebiri bildiğimiz vektör cebirinden biraz farklıdır. İşlemcilerle işlem yaparken sıralamayı daima doğru tutmamız lazım ki işlemler bir anlam ifade etsin. ∇'in türev gösterimiyle aynı gösterim kurallarına uyduğunu hatırlarsanız zorluk çekmezsiniz. Türevi alınacak neyse, ∇'in sağında olmalıdır. Sıralama çok önemlidir.

Sıralamanın önemini göz önüne aldığımızda, $T\nabla$'in bir işlemci olduğunu fakat ∇T çarpımının da artık (diferansiyel almaya) aç olmadığını anlarız. İşlemci tamamen doymuştur. Gerçekten de, anlamı olan şey fiziksel bir vektördür. T'nin üç boyutta değişim hızını temsil eder. T'nin herhangi bir yöndeki değişim hızı, ∇T'nin o yöndeki bileşenidir (*Bkz.*Denk. (2.15)). Buradan ∇T'in yönünün en büyük bileşene sahip olduğu –diğer bir deyişle, T'nin en hızlı değiştiği– yön olduğu sonucu çıkar. T'nin gradyanı (T'nin) en dik yukarı eğimiyle aynı yöndedir.

2-5 ∇ işlemleri

∇ vektör işlemcisiyle başka cebir işlemleri yapabilir miyiz? Gelin, bir vektörle birleştirmeyi deneyelim. İki vektörü skaler çarpımıyla birleştirebiliriz. Şu sonuçları elde edebiliriz:

$$(\text{bir vektör}) \cdot \nabla \qquad \text{veya} \qquad \nabla \cdot (\text{bir vektör})$$

İlk sonuç bir şey ifade etmez, çünkü hâlâ bir işlemcidir. Nihai anlamı, neyin işlemini yaptığına bağlıdır. İkinci çarpım bir skaler alandır. ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ daima bir skalerdir.)

Gelin, ∇ ile bildiğimiz $\boldsymbol{h}$ gibi bir vektör alanın skaler çarpımını deneyelim. Bileşenleri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \tag{2.32}$$

veya

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \tag{2.33}$$

şekilde yazabiliriz. Toplam, bir koordinat dönüşümü altında değişmezdir. Farklı bir koordinat sistemi seçersek (üslerle gösterilen), aşağıdakini elde ederiz:*

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'} \tag{2.34}$$

Bu, her ne kadar farklı görünse de, Denk. (2.33)'ten çıkacak sayıyla aynı sayıdır. Dolayısıyla, uzaydaki her nokta için,

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{h} = \nabla \cdot \boldsymbol{h} \tag{2.35}$$

yazabiliriz. Çünkü $\nabla \cdot \boldsymbol{h}$ skaler bir alandır ve bir fiziksel niceliği ifade etmelidir. $\nabla \cdot \boldsymbol{h}$'in türevlerinin bileşiminin çok özel olduğunu bilmelisiniz. $\partial h_x/\partial x$ gibi birçok değişik birleşimler olsa da, bunlar ne skalerdir ne de vektör bileşenidir.

Skaler nicelik $\nabla \cdot$ (bir vektör) fizikte oldukça yararlıdır. Ona *"diverjans"* denmiştir. Örneğin:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \text{div}\boldsymbol{h} = \text{"}\boldsymbol{h}\text{'ın diverjansı"} \tag{2.36}$$

∇T için yaptığımız gibi, $\nabla \cdot \boldsymbol{h}$'ye de fiziksel bir anlam yükleyebiliriz. Ama bunu şimdilik erteliyoruz.

---

* $\boldsymbol{h}$ niceliğini uzaydaki konuma bağlı *fiziksel* bir nicelik olarak düşünürüz, üç değişkene dayanan bir matematiksel fonksiyonla sınırlandırmayız. $\boldsymbol{h}$'ın x, y ve z'ye veya x', y', z''ne göre "türevi alındığında" $\boldsymbol{h}$ uygun değişkenlerle ifade edilmelidir.

Öncelikle, ∇ vektör işlemcisiyle başka neler yapabiliriz ona bakalım. Peki vektörel çarpımını yaparsak? Şunu elde ederiz:

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = \text{bir vektör} \tag{2.37}$$

Vektör çarpım kurallarını uygulayarak, bu vektörün bileşenlerini yazabiliriz. (*Bkz.*Denk. (2.2)):

$$(\nabla \times \boldsymbol{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \tag{2.38}$$

Benzer şekilde,

$$(\nabla \times \boldsymbol{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \tag{2.39}$$

ve

$$(\nabla \times h)_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \tag{2.40}$$

elde ederiz.

$\nabla \times \boldsymbol{h}$ kombinasyonuna *"$\boldsymbol{h}$'ın bükümü"*(curl $\boldsymbol{h}$) denir. İsmin nedeni ve kombinasyonun fiziksel anlamı üzerinde daha sonra duracağız.

Özetlersek, elimizde ∇'li üç tür birleşim vardır:

$$\begin{aligned} \nabla T &= \text{grad } T = \text{bir vektör} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{h} &= \text{div } \boldsymbol{h} = \text{bir skaler} \\ \nabla \times \boldsymbol{h} &= \text{curl } \boldsymbol{h} = \text{bir vektör} \end{aligned}$$

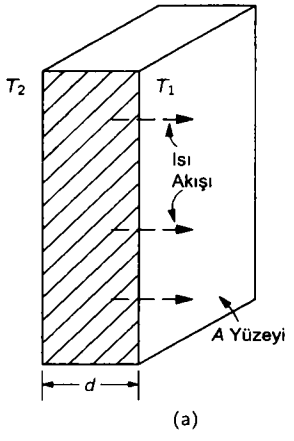
Bu birleşimleri kullanarak, alanların uzaysal değişimlerini düzgün bir şekilde, özel bir eksen grubuna bağımlı olmadan genel bir biçimde yazabiliriz.

Vektör diferansiyel işlemcisi ∇'in kullanımına örnek olarak, birinci bölümde verdiğimiz elektromanyetizma yasalarını içeren bir grup vektör denklemlerini yazabiliriz. Bunlara Maxwell denklemleri denir.

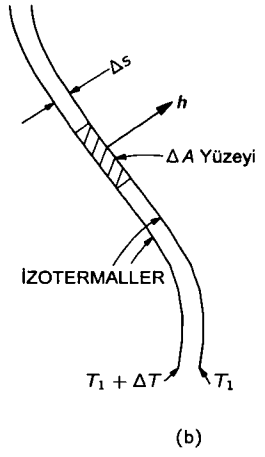
Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned} &(1) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &(2) \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &(3) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &(4) \quad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Denklemlerdeki ρ (rho) "elektrik yük yoğunluğu"dur. "Elektrik akım yoğunluğu" olan j ise saniyede birim yüzey alanından geçen yük hızıdır. Bu dört denklem klasik elektromanyetik alan kuramının tamamını kapsar. İşte bakın, yeni gösterimimiz sayesinde ne kadar zarif ve basit bir biçim elde edebildik.



(a)



(b)

Şekil 2-7 (a) Bir malzemenin içinden ısı akışı. (b) Büyük bir kütledeki eş-sıcaklıklı (izotermal) yüzeye paralel sonsuz küçük bir levha.

2-6 Isı akışının diferansiyel denklemi

Şimdi, bir başka fizik yasasını vektör gösterimiyle ifade edelim. Bu yasa kusursuz değildir, ancak birçok metal ve ısı ileten birçok madde için gayet doğrudur. Kalın levha şeklinde bir malzeme alıp bir yüzünü T_2 sıcaklığına ısıtır, diğer yüzünüyse T_1 sıcaklığına soğutursanız, ısı T_2'den T_1'e akacaktır [Şekil 2-7(a)]. Isı akışı yüzlerin A alanı ve sıcaklık farkıyla doğru orantılıdır. Yüzeyler arasındaki d mesafesiyle de ters orantılıdır. Belirli bir sıcaklık farkı için, malzeme inceldikçe ısı akışı büyür. Eğer birim zamanda levhadan geçen termal enerjiye J dersek, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$J = \kappa(T_2 - T_1)\frac{A}{d} \tag{2.42}$$

Orantı sabiti κ'ya (kappa) *termal iletkenlik* sabiti denir.

Daha karmaşık bir durumda ne olur peki? Örneğin, sıcaklığın içinde kendine özgü şekillerde değişkenlik gösterdiği, garip şekilli bir malzeme parçasında? Bir malzeme parçası alalım elimize ve çok küçük ölçekte Şekil 2-7 (a)'daki gibi bir levhaya baktığımızı hayal edelim. Şekil 2-7(b)'deki gibi, levhanın yüzlerini eş-sıcaklıklı yüzeylere paralel hale getirelim ki Denk. (2.42) bu küçük levha için de geçerli olsun.

Eğer küçük levhamızın yüzeyi ΔA ise, Δs kalınlığındaki levha için birim zamandaki ısı akışı

$$\Delta J = \kappa \nabla T \frac{\Delta A}{\Delta s} \tag{2.43}$$

olur. Yönü ısı akışı olan $\boldsymbol{h}$'ı daha önce $\Delta J/\Delta A$ olarak tanımlamıştık hatırlarsanız. Isı akışı $T_1 + \Delta T$'den T_1'e doğrudur ve böylece aynı Şekil 2-7(b)'deki gibi eş-sıcaklık eğrilerine dik olur. Ayrıca, $\Delta T/\Delta s$ de T'nin konuma bağlı değişim hızıdır. Konum değişimi de eş-sıcaklık eğrilerine dik olduğuna göre, $\Delta T/\Delta s$ en yüksek değişim hızıdır. Dolayısıyla aslında sadece ∇T'nin büyüklüğüdür. ∇T'nin yönü $\boldsymbol{h}$'ın zıddı yönde olduğuna göre, Denk. (2.43)'ü bir vektör denklemi olarak yazabiliriz:

$$\boldsymbol{h} = -\kappa \nabla T \tag{2.44}$$

Denklemdeki "–" işareti zorunludur, çünkü ısı sıcaklıkta "aşağı" doğru akar. Denklem (2.44) hacimli malzemelerdeki ısı iletiminin diferansiyel denklemidir. Görebileceğiniz üzere, düzgün bir vektör denklemidir. Eğer κ sadece bir sayıysa, denklemin her iki tarafı da bir vektördür. Dikdörtgen levhalar için yazdığımız Denklem (2.42)'nin her türlü durum için bir genellemesidir. Denklem (2.42) benzeri tüm temel fiziksel ilişkileri daha zarif vektör gösterimiyle göstermeyi öğrenmeliyiz. Bu gösterimin tek yararı denklemleri daha *basit* göstermesi değildir. Aynı zamanda denklemlerin *fiziksel içeriğini* de herhangi bir koordinat sistemine bağlı olmadan gösterebilmektedir.

2-7 Vektör alanlarının ikinci türevleri

Şu ana kadar sadece birinci türevleri aldık. Ya ikinci türevler? Birçok kombinasyonu olabilir:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \nabla \cdot (\nabla T) \\ &\text{(b)} \quad \nabla \times (\nabla T) \\ &\text{(c)} \quad \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{h}) \\ &\text{(d)} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) \\ &\text{(e)} \quad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Bunların mümkün olan tüm kombinasyonlar olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Gelin ikinciye, (b)'ye bakalım. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ her zaman sıfır olduğundan, aşağıdakiyle aynı biçime sahiptir:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{A}T) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})T = 0$$

Dolayısıyla şunu yazabiliriz:

$$\text{curl (grad } T) = \nabla \times (\nabla T) = 0 \tag{2.46}$$

Bu denklemin bileşenlerine tek tek bakalım:

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla T)]_z &= \nabla_x (\nabla T)_y - \nabla_y (\nabla T)_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Denklem (2.8)'e göre sonuç sıfırdır. Diğer bileşenler için de aynısı geçerlidir. Dolayısıyla herhangi bir sıcaklık dağılımı için –aslında, *herhangi* bir skaler fonksiyon için– $\nabla \times (\nabla T) = 0$ olur.

Şimdi gelin bir başka örneği ele alalım. Bakalım başka bir sıfır bulabilecek miyiz? Bir vektörün, aynı vektörü içeren vektörel çarpım ile skaler çarpımı sıfırdır:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.48}$$

Çünkü $A \times B$, A'ya diktir ve A yönünde bileşeni yoktur. Aynı kombinasyon, Denk. (2.45)'in (d) kısmında da görülür, dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \text{div}(\text{curl } \boldsymbol{h}) = 0 \tag{2.49}$$

Bunun da sıfır olduğunu, bileşenlerinin işlemlerini tamamlayarak göstermek kolaydır.

Şimdi, ispatlarıyla uğraşmayacağımız iki matematik teoremini inceleyeceğiz. İlgi çekici olmalarının yanı sıra, fizikçilerin bilmesinde yarar olan teoremlerdir.

Bir fizik probleminde sıklıkla karşılaştığımız şeylerden biri, bir niceliğin – diyelim ki A vektör alanının– bükümünün daima sıfır olmasıdır. Denklem (2.46)'dan gördüğümüz üzere bir gradyanın bükümü sıfırdır. Bunu hatırlamak, vektörlerin doğası böyle olduğundan kolaydır. O zaman A bir çeşit niceliğin gradyanı diyebiliriz, zira o zaman bükümünün (curl) sıfır olma gerekliliği vardır. Eğer A'nın bükümü sıfırsa o zaman A *daima* bir şeyin gradyanı $-A$'nın "grad ψ (psi)"ye eşit olduğu bir skaler ψ alanı vardır– olduğu ilginç bir teoremdir. Diğer bir deyişle, elimizde şu var:

TEOREM:	Eğer	$\nabla \times A = 0$	
	ise	ψ	
	eşitliğini sağlayan bir	$A = \nabla\psi$	(2.50)

A'nın diverjansının sıfır olması durumunda geçerli benzer bir kuram vardır. Denklem (2.49) sayesinde gördük ki, bir şeyin bükümünün diverjansı daima sıfırdır. Diverjansının sıfır olduğu bir D vektör alanıyla karşılaşırsanız, D'nin bir C vektör alanının bükümü olduğu sonucuna varabilirsiniz.

TEOREM:	Eğer	$\nabla \cdot$	$D = 0$	
	ise		C	
	eşitliğini sağlayan bir	$D =$	$\nabla \times C$	(2.51)

İki ∇ işlemcisinin çeşitli kombinasyonlarına bakarak, ikisinin daima sıfır sonucu verdiğini bulduk. Şimdi *sıfır* olmayanlara bakalım. $\nabla \cdot (\nabla T)$'yi ele alalım. Genelde bu kombinasyon sıfır değildir. Bileşenlerini yazalım:

$$\nabla T = i\nabla_x T + j\nabla_y T + k\nabla_z T$$

O zaman sonucu, genelde, bir sayı olacak şu denklemi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_y(\nabla_y T) + \nabla_z(\nabla_z T) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Bu, skaler bir alandır.

Parantezlere ihtiyacımız olmadığını anlamışsınızdır, yine de kafa karışıklığına yol açmaması için şöyle yazabiliriz:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T \tag{2.53}$$

∇^2 yeni işlemcimiz olup, kendisi skalerdir. Fizikte sıkça görüldüğünden, özel bir adı vardır: *Laplace işlemcisi*.

$$\text{Laplace işlemcisi} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.54}$$

Laplace işlemcisi skaler olduğundan, kendisiyle bir vektör üzerinde işlem yapabiliriz. Bundan kastımız, aynı işlemi her bir bileşen üzerinde dik açılı koordinatlarda tekrarlamaktır:

$$\nabla^2 \boldsymbol{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z)$$

Bir ihtimale daha göz atalım: $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h})$. Hatırlayın, bu aynı zamanda Denk. (2.45)'in (e)'sidir. Şimdi, eğer vektör eşitliği (2.6)'yı kullanırsak bükümün bükümünü şu şekilde yazabiliriz:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2.55}$$

Bu denklemi kullanabilmek için, $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$'yi ∇ işlemcisiyle değiştirmeli ve $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{h}$ eşitliğini kullanmalıyız. Ortaya aşağıdaki sonuç çıkar:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{h}(\nabla \cdot \nabla) \ldots ???$$

Bir dakika, bir dakika! Bir yerde bir hata var. İlk iki terim vektör, tamam (işlemciler iş yapmış), ancak son terim hâlâ bir işlemci. Sorun şurada, terimlerimizin düzenini sağlama konusunda yeterince dikkatli değildik. Eğer Denk. (2.55)'e tekrar bakarsanız, aşağıdaki şekilde de yazılabileceğini fark edeceksiniz:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{2.56}$$

Terimlerin sırası daha iyi oldu. Şimdi (2.56)'da değişimlerimizi yapalım:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{h} \tag{2.57}$$

Terimlerin sırası şimdi düzgün gözüküyor. Aslında, bileşenleri hesaplayarak doğru olduğunu teyit edebilirsiniz. Son terim Laplace işlemcisidir, dolayısıyla denklemi şöyle de yazabiliriz:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2\boldsymbol{h} \tag{2.58}$$

Listemizdeki çift ∇ işlemcilerinin her türlü kombinasyonuyla ilgili bir şeyler söylemiş olduk, (c) $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h})$ hariç. Muhtemelen bir vektör alanıdır, ama hakkında konuşabileceğimiz kadar özel değildir. Arada sırada ortaya çıkabilecek bir vektör alanıdır sadece.

Şimdi, sonuçlarımızı özetleyecek olursak:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{bir skaler alan} \\
&\text{(b)} \quad \nabla \times (\nabla T) = 0 \\
&\text{(c)} \quad \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{h}) = \text{bir vektör alanı} \\
&\text{(d)} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) = 0 \\
&\text{(e)} \quad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2\boldsymbol{h} \\
&\text{(f)} \quad (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{h} = \nabla^2\boldsymbol{h} = \text{bir vektör alanı}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Dikkat edin, yeni bir vektör işlemcisi icat etmeye $(\nabla \times \nabla)$ çalışmadığımızı fark etmiş olabilirsiniz. Neden olduğunu anladınız mı?

2-8 Tuzaklar

Bu bölümde, vektör cebiri hakkında bildiklerimizi ∇ işlemcisinin cebirine uygulamış olduk. Ancak, dikkatli olmalıyız zira yanlış yola sapabiliriz. Her ne kadar bu derslerde karşımıza çıkmayacaklarsa da, dikkatinizi çekeceğim iki tuzak var. İki skaler fonksiyon, ψ ve ϕ (phi) içeren şu ifade için ne diyebilirsiniz?

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi)$$

Şu aşağıdaki ifadeye benzediği için sıfır olmalı diyebilirsiniz:

$$(\boldsymbol{A}a) \times (\boldsymbol{A}b)$$

Yukarıdaki ifade sıfırdır, çünkü iki *eşit* vektörün vektörel çarpımı $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ daima sıfırdır. Fakat örneğimizdeki ∇ işlemcileri eşit değildir. İlki ψ fonksiyon üzerinde, diğeriyse farklı bir fonksiyon olan ϕ üzerinde işlem yapar. Her ne kadar iki-

sini de ∇ simgesiyle göstersek de, farklı işlemciler olarak değerlendirilmelidirler. $\nabla\psi$'ın yönü ψ'a bağlıdır, dolayısıyla $\nabla\phi$'ya paralel olmadığı açıktır:

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi) \neq 0 \text{ (genel olarak)}$$

Şansımıza, bu türden ifadeleri kullanmak zorunda kalmayacağız ilerde. (Herhangi bir skaler alan için $\nabla \times \nabla\psi = 0$ olduğu gerçeği dediğimizden bağımsızdır; çünkü her iki ∇ de aynı fonksiyon üzerinde işlem yapmakta.

İkinci tuzaksa (tekrar ediyorum, yine bu derslerde yer almayacak) şöyledir: Burada bahsettiğimiz kurallar, dikdörtgen koordinatlar kullanmamız durumunda basit ve güzeldirler. Örneğin, eğer elimizde $\nabla^2\boldsymbol{h}$ varsa ve bunun x bileşenini istersek şöyle yazarız:

$$(\nabla^2\boldsymbol{h})_x = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{h}_x = \nabla^2 h_x \tag{2.60}$$

Aynı ifade, eğer $\nabla^2\boldsymbol{h}$'in *radyal* bileşeni sorulsaydı işe *yaramazdı*. $\nabla^2\boldsymbol{h}$'ın radyal bileşeni $\nabla^2\boldsymbol{h}_r$ değildir. Bunun nedeni, vektör cebiriyle uğraştığımız sırada vektörlerin yönlerinin net şekilde tanımlı olmasıdır. Vektör alanlarıyla uğraşırken, yönleri farklı yerlerde farklıdır. Bir vektör alanını, örneğin, kutupsal koordinatlarla tanımlamaya çalıştığımızda görürüz ki "radyal" yön dediğimiz şey her noktada değişkendir. Dolayısıyla, bileşenleri ayrıştırmaya çalıştığımızda birçok sorunla karşılaşabiliriz. Örneğin, *sabit* bir vektör alanı için bile radyal bileşen noktadan noktaya değişir.

Dikdörtgen koordinatlara bağlı kalmak en güvenli ve basit yoldur. Buna dair, sözünü etmeye değer bir istisna vardır: ∇^2, Laplace işlemcisi bir skaler olduğundan, istediğimiz herhangi bir koordinat sistemi içinde (örneğin, kutupsal koordinatlarda) yazabiliriz. Ancak diferansiyel işlemci olduğundan, sadece bileşenlerinin sabit bir yönde –dikdörtgen koordinatlarda– olduğu vektörler üzerinde kullanmalıyız. Dolayısıyla, bileşenleri temelinde vektör diferansiyel denklemleri yazdığımızda bütün vektör alanlarımızı x, y ve z terimleriyle ifade edeceğiz.

3

VEKTÖR İNTEGRAL ANALİZİ

3-1 Vektör integraller; ∇ψ'in çizgi integrali
3-2 Bir vektör alanın akısı
3-3 Bir küpten geçen akı, Gauss teoremi
3-4 Isı iletimi; yayınım denklemi
3-5 Bir vektör alanının dolaşımı
3-6 Bir kare etrafında dolaşım; Stokes teoremi
3-7 Bükümsüz ve diverjansı olmayan alanlar
3-8 Özet

3-1 Vektör integraller; ∇ψ'in çizgi integrali

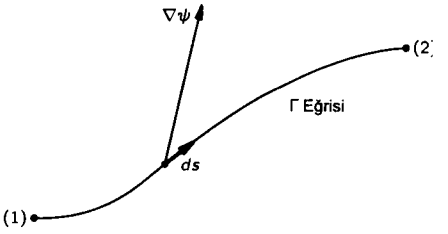
İkinci bölümde gördük ki, alanların türevlerini almanın çeşitli yolları vardır. Bazılarının sonucu vektör alanları; bazılarıysa skaler alanlarıydı. Her ne kadar değişik denklemler geliştirmiş olsak da, ikinci bölümdeki her şey tek bir kuralla özetlenebilir: $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ ve $\partial/\partial z$ işlemcileri, vektör işlemcisi ∇'in üç bileşenidir. Şimdi alanların türevlerinin önemini anlasak iyi olur. Böylece, vektör alan denkleminin ne anlama geldiğini daha iyi anlayabiliriz.

Gradyan işleminin (bir skaler üzerinde ∇) önemini zaten konuştuk. Şimdi, diverjans ve büküm (curl) işlemlerinin anlamlarına sıra geldi. Bu nicelikler en iyi şekilde, belli vektör integralleri ve o tür integrallerle ilişkili denklemlerle yorumlanabilir. Ne yazık ki bu denklemleri vektör cebirinde bazı değişiklikler yaparak elde edemeyiz; yepyeni bir şey olarak öğrenmeniz gerek. Bu denklemlerden biri pratikte yararsız olsa da, diğer ikisi değildir. Onları türetecek ve olası sonuçlarını açıklayacağız. Üzerinde çalışacağımız denklemler gerçekte matematiksel teoremlerdir. Sadece diverjans ve bükümün bağlamı ve anlamını yorumlamada değil, genel fizik kuramları üzerine çalışırken de faydalıdırlar. Parçacık mekaniği için enerjinin korunumu teoremi neyse, alanlar kuramında da bu matematik teoremleri öyledir. Bu tür genel kuramlar fiziğe dair daha derin bir anlayış geliştirebilmemiz için önemlidir. Ancak, göreceksiniz ki, problemleri çözmede –en basit durumlar hariç– çok faydalı değildirler. Yine de canınızı sıkmayın. Ele alacağımız bu üç integral denklemi sayesinde konumuzun başında çözebileceğimiz birçok basit problem vardır. Problemler zorlaştıkça bu basit yöntemlerin kullanılamaz hale geldiklerini göreceğiz.

Önce, gradyanı içeren integral denklemini ele alacağız. Fikir çok basit: Gradyan bir alan niteliğinin değişim hızını temsil ettiğine göre, değişim hızının integralini aldığımızda o niceliğin toplam değişimi elde ederiz. Elimizde bir $\psi(x, y, z)$ skaler alanı olsun. Herhangi (1) ve (2) noktasında, ψ fonksiyonu sırasıyla $\psi(1)$ ve $\psi(2)$ değerlerine sahiptir. [(2)'nin (x_2, y_2, z_2) noktasını ve $\psi(2)$'nin $\psi(x_2, y_2, z_2)$ alanıyla aynı şey demek olduğu bir gösterim kullanmaktayız.] Eğer Γ (gama), Şekil 3-1'de olduğu gibi, (1) ve (2)'yi birleştiren herhangi bir eğriyse, o zaman aşağıdaki eşitlik doğrudur:

TEOREM 1.

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1)\\ \Gamma \text{ boyunca}}}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.1}$$

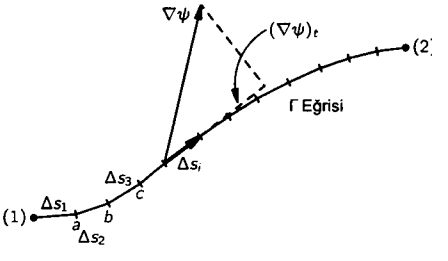


Şekil 3-1 Denklem (3.1)'de kullanılan terimler. $\nabla\psi$ vektörü $d\boldsymbol{s}$ çizgi elemanları boyunca işlem görür.

Yukarıdaki integral, $\nabla\psi$ vektörüyle Γ eğrisinin sonsuz küçüklükteki bir çizgi elemanı olan $d\boldsymbol{s}$ vektörünün skaler çarpımının, (1)'den (2)'ye doğru uzanan Γ eğrisi boyunca (1)'den (2)'ye *çizgi integralidir*.

Öncelikle, çizgi integrali dediğimizde ne anlama geldiğini netleştirmek lazım. $f(x, y, z)$ şeklinde bir skaler fonksiyonu ve Γ eğrisini birleştiren (1) ve (2) noktalarını ele alalım. Eğriyi birçok noktada işaretleyip, noktalar boyunca, Şekil 3-2'deki gibi, düz çizgi parçacıkları şeklinde birleştirelim. Her parçacık Δs_i boyundadır. Buradaki i 1, 2, 3, ... değerlerini alabilir. Çizgi integrali

$$\int_{\substack{(1)\\ \Gamma \text{ boyunca}}}^{(2)} f\,ds$$



Şekil 3-2 Çizgi integral, bir toplamın limitidir.

dediğimizde kastettiğimiz şey, aşağıdaki toplamın limitidir.

$$\sum_i f_i \, \Delta s_i,$$

Buradaki f_i, fonksiyonun i parçasındaki değeridir. Burada limit değer, biz daha fazla parçacık ekledikçe toplamın yaklaştığı değerdir (mantıklı olarak, en büyük $\Delta s_i \to 0$ olacak şekilde).

Teoremimizdeki integral, Denk. (3.1)'de farklı gözükse de aynı şeyi ifade eder. f yerine, bir başka skaler vardır, $\Delta \boldsymbol{s}$ yönündeki $\nabla\psi$'nin bileşeni. Bu teğet bileşen için $(\nabla\psi)_t$ dersek, aşağıdaki eşitlik açıkça görülür. Denklem (3.1)'deki integral, bu tür terimlerin toplamı demektir:

$$(\nabla\psi)_t \, \Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta \boldsymbol{s} \tag{3.2}$$

Şimdi, Denklem (3.1)'in neden doğru olduğuna bakalım. İkinci bölümde, $\nabla\psi$'nin $\Delta \boldsymbol{R}$ doğrultusundaki bileşeninin, $\Delta \boldsymbol{R}$ yönündeki ψ'nin değişim hızı olduğunu göstermiştik. Şekil 3-2'deki (1) noktasından a noktasına uzanan $\Delta \boldsymbol{s}$ çizgi parçacığını ele alalım. Tanımımıza göre

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_1 \tag{3.3}$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca elimizde şu eşitlik vardır:

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_2 \tag{3.4}$$

Denklemlerdeki $(\nabla\psi)_1$; gradyanın $\Delta \boldsymbol{s}_1$'de hesaplandığını, $(\nabla\psi)_2$'de gradyanın $\Delta \boldsymbol{s}_2$'de hesaplandığını gösterir. (3.3) ve (3.4)'ü topladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_2 \tag{3.5}$$

Böyle böyle terimleri eklemeye devam ettiğimizde,

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum_i (\nabla\psi)_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i \tag{3.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Denklemin sol tarafı –(1) ve (2) hep aynı kaldığı sürece– aralıkları nasıl seçtiğimizden bağımsızdır, dolayısıyla sağ tarafın limitini alabiliriz. İşte, Denk. (3.1)'i ispatlamış olduk.

İspatımızdan göreceğiniz üzere eşitlik ne a, b, c... noktalarını nasıl seçtiğimize, ne de (1) ve (2)'yi birleştirmek için Γ eğrişini nasıl seçtiğimize bağlıdır. İspatımız (1)'den (2)'ye doğru *her* bir eğri için geçerlidir.

Gösterime dair bir not: Eğer, kolaylık olsun diye, aşağıdaki şekilde yazsak bile bir karışıklık olmaz:

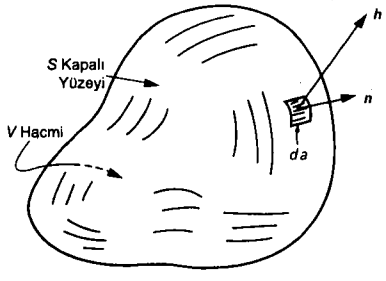
$$(\nabla\psi) \cdot d\boldsymbol{s} = \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.7}$$

Bu gösterimi kullandığımızda, teoremimiz şöyle görünür:

TEOREM 1.

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.8}$$

(1)'den (2)'ye herhangi bir eğri



Şekil 3-3 Kapalı S yüzeyi V hacmini tanımlar. $\boldsymbol{n}$ birim vektörü, da yüzey elemanından dışa doğrudur ve $\boldsymbol{h}$, yüzey elemanındaki ısı akış vektörüdür.

3-2 Bir vektör alanının akısı

Sıradaki integral teoremimizi –diverjans hakkında bir teorem– ele almadan önce, ısı akışı durumunda fiziksel önemi olan bir fikri ele almak istiyorum. Birim zamanda birim alandan geçip giden ısı akışını temsil eden $\boldsymbol{h}$ vektörünü tanımlamıştık hatırlarsanız. Şekil 3-3'teki gibi, bir parça malzeme içinde V hacmini kaplayan S kapalı yüzeyi olduğunu varsayalım. Bu *hacmin* içinden ne kadar ısı aktığını bulmaya çalışalım. Bunu bulmak için *S yüzeyinden* dışarı doğru olan toplam ısı akışını hesaplamalıyız.

Yüzeyin bir biriminin alanına da diyelim. Bu gösterim iki boyutlu bir diferansiyel içindir. Eğer alanımız xy-düzlemindeyse, şunu yazabiliriz:

$$da = dx\,dy$$

Daha sonra hacimlerin integrallerini alacağımızdan, küçük bir küp şeklinde bir diferansiyel hacmi ele almak hesaplamalarımız için iyi olacak. Dolayısıyla dV dediğimiz zaman şu eşitliği kastederiz:

$$dV = dx\,dy\,dz$$

Bazıları, bunun ikinci dereceden bir nicelik olduğunu kendilerine hatırlatmak için, da yerine d^2a yazmayı tercih eder. Aynı insanlar dV yerine de d^3V yazmayı tercih ederler. Bir alanın iki, hacminse üç bileşeni olduğunu unutmayacağınızı varsaydığımdan, ben daha basit bir gösterimi tercih ediyorum.

Yüzey elemanı da'dan akıp geçen ısı akışı, $\boldsymbol{h}$'ın da yüzeyine dik bileşeni çarpı alandır. Daha önceden $\boldsymbol{n}$'i yüzeye dik açıda ve dışa doğru yönlenmiş bir vektör olarak tanımlamıştık. Dolayısıyla, istediğimiz h bileşeni aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$h_n = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.9}$$

O halde, da'dan akıp geçen ısı akışı da

$$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\,da \tag{3.10}$$

olur. Bir yüzeyin tamamından geçen ısı akışını hesaplamak için, yüzeyin tüm elemanlarının katkısını toplamak gerek. Diğer bir deyişle, (3.10)'un tüm yüzey için integralini almak gerekir:

$$S \text{ kapalı yüzeyinden dışa doğru toplam ısı akışı} = \int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\,da \tag{3.11}$$

Bu yüzey integraline aynı zamanda "yüzeyden geçen $\boldsymbol{h}$ akısı" da denir. İlk başta "akı" kelimesi akışla aynı anlama geliyordu, dolayısıyla yüzey integrali anlamı $\boldsymbol{h}$'ın yüzeyden akışı anlamına gelir. Şöyle düşünebiliriz: $\boldsymbol{h}$ ısı akışının "akıntı yoğunluğu"dur ve onun yüzey integrali yüzeyden dışa doğru akan ısının toplamıdır: birim zaman başına termal enerji (Joule/saniye).

Bu fikri, herhangi bir şeyin akışı olmayan vektörlere, örneğin elektrik alanına genelleyebiliriz. Eğer istersek, bir yüzey alanı üzerinden elektrik alanının dik bileşeninin integralini alabiliriz. Herhangi bir şeyin akışı olmadığı halde, bunu "akı" diye adlandırırız:

$$S \text{ yüzeyinden } \boldsymbol{E} \text{ akısı} = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\,da \tag{3.12}$$

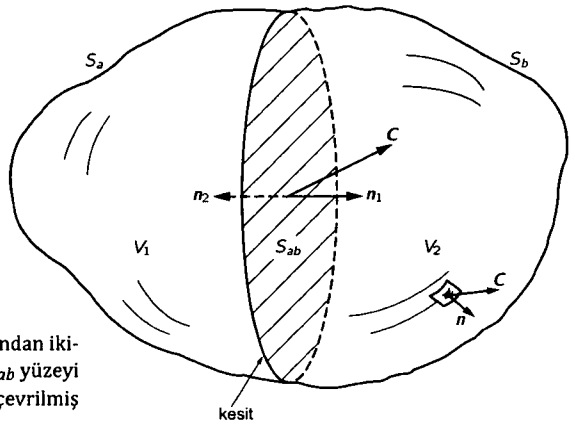
Dolayısıyla "akı" kelimesini bir vektörün "dik bileşeninin yüzey integrali" olarak genelleyebiliriz. Aynı tanımı, şimdi olduğu gibi, yüzey kapalı bir yüzey olmasa bile kullanabiliriz.

Isı akışıyla ilgili özel duruma dönelim ve *ısının korunduğu* bir durumu ele alalım. Örneğin, elimizdeki bir parça malzemeyi önce ısıttığımızı ve sonra daha fazla ısı enerjisinin yaratılmadığını veya soğurulmadığını varsayalım. Kapalı bir yüzeyden dışa doğru net bir ısı akışı varsa, hacmin içindeki ısı miktarı azalmalıdır. Dolayısıyla, ısının korunduğu durumlar için

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\,da = -\frac{dQ}{dt} \tag{3.13}$$

yazabiliriz. Buradaki Q yüzeyin içindeki ısıdır. S'den dışarı ısı akısı, S içindeki toplam Q ısısının zamanla değişiminin eksiyle çarpımına eşittir. Bu yorum ısı akışından bahsettiğimiz ve ısının korunduğunu varsaydığımız için geçerlidir. İçinde ısı üretiliyor olsaydı, hacmin içindeki toplam ısıdan bahsedemezdik.

Şimdi, herhangi bir vektörün akısıyla ilgili ilginç bir gerçeğe bakalım. Dilerseniz ısı akış vektörünü düşünebilirsiniz, ancak diyeceğiniz şey herhangi bir $\boldsymbol{C}$ vektör alanı için de geçerlidir. Bir V hacmini çevreleyen kapalı bir S yüzeyini ele alalım. Şekil 3-4'teki gibi bir kesmeyle hacmi iki parçaya ayıralım. Şimdi elimizde iki kapalı yüzey ve hacim var. V_1 hacmi, ilk S_a yüzeyi ve kesiğin S_{ab} yüzeyinden oluşmuş S_1 yüzeyiyle çevrelenmiştir. V_2 hacmi, ilk S_b yüzeyi ve kesi-



Şekil 3-4 Bir S yüzeyinin içindeki V hacmi S_{ab} yüzeyi tarafından ikiye bölünmüş durumda. Bu durumda elimizde $S_1 = S_a + S_{ab}$ yüzeyi tarafından çevrilmiş V_1 ve $S_2 = S_b + S_{ab}$ yüzey tarafından çevrilmiş V_2 hacimleri olur.

ğin S_{ab} yüzeyinden oluşmuş S_2 yüzeyiyle çevrelenmiştir. Gelelim sorumuza: S_1 yüzeyinden dışa doğru akıyı hesapladığımızı ve ona S_2 yüzeyinden geçen akıyı eklediğimizi varsayalım. Bu toplam, ilk baştaki tüm yüzeyden geçen akıya eşit midir? Cevabı evet, eşittir. Her iki yüzeyin ortak S_{ab} yüzeyinden geçen akılar birbirlerini sıfırlar. V_1 hacminden çıkan $\boldsymbol{C}$ vektör akışı için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$S_1 \text{ yüzeyinden akı} = \int_{S_a} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da + \int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_1\, da \tag{3.14}$$

V_2'den çıkan akı içinse şunu yazabiliriz:

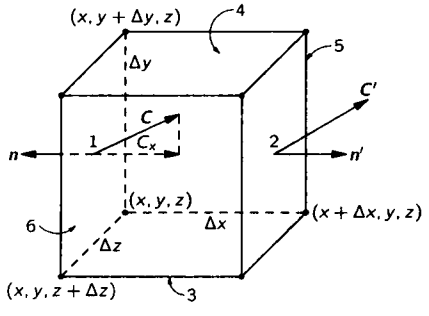
$$S_2 \text{ yüzeyinden akı} = \int_{S_b} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da + \int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_2\, da \tag{3.15}$$

Dikkat ederseniz, S_1 yüzeyinden çıkan S_{ab}'nin normali için $\boldsymbol{n}_1$ ve S_2'ninki için de $\boldsymbol{n}_2$ yazdık. $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ olduğu gayet açıktır, dolayısıyla

$$\int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_1\, da = -\int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_2\, da \tag{3.16}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi, Denklem (3.14) ile (3.15)'i toplarsak, S_1 ve S_2 yüzeylerinden geçen akıların toplamı, beraber ilk $S = S_a + S_b$ yüzeyinden geçen akıyı veren iki integralin toplamıdır.

Böylece, S'nin toplam dış yüzeyinden geçen akının hacmini ikiye böldüğümüzde ortaya çıkan iki parçadan geçen akıların toplamı olduğunu görmüş olduk. Daha fazla parçaya ayırabiliriz elimizdekini, örneğin, V_1'i iki parçaya bölebiliriz. Yine aynı akıl yürütmelerimiz geçerli olacaktır. Elimizdeki ilk hacmi *hangi* biçimde bölersek bölelim, dış yüzeyden dışarı doğru olan akı, diğer bir deyişle ilk integral, bölünmüş bütün parçalardan dışarı doğru akılarm toplamına eşit olmalıdır.



Şekil 3-5 Küçük bir küpten dışa doğru C akısının hesaplanması.

3-3 Bir küpten geçen akı, Gauss teoremi

Şimdi, küçük bir küp* örneğini ele alacak ve içinden geçen akı için ilginç bir denklem geliştireceğiz. Şekil 3-5'teki gibi, kenarları eksenlerle aynı hizada olan bir küpü ele alalım. En yakındaki köşenin koordinatları x, y, z olsun. Δx'e küpün x yönündeki uzunluğu, Δy'ye küpün y yönündeki uzunluğu ve Δz'ye de küpün z yönündeki uzunluğu diyelim. Küp yüzeyinden geçen $\boldsymbol{C}$ vektör alanının akısını bulmak istiyoruz. Bunu yapabilmek için küpün altı yüzünün her birinden geçen akıları toplamamız lazım. Önce, şekilde 1'le işaretlenmiş yüzü ele alalım. Bu yüzde *dışarı doğru* olan akı, $\boldsymbol{C}$'nin x bileşeninin negatifinin tüm yüzeyde integralinin alınmasıyla bulunur:

$$-\int C_x\, dydz$$

* Bu türden bir hesaplama, herhangi bir dikdörtgenler prizmasına uygulanabilir.

Küçük bir küp ele aldığımızdan, bu integrali yaklaşık olarak hesaplamak için ilgili yüzün –(1) numaralı noktayla gösterdiğimiz– merkezindeki C_x ile o yüzün alanını, $\Delta y \Delta z$ çarpabiliriz:

$$1'\text{den geçen akı} = -C_x(1)\Delta y \Delta z$$

Aynı şekilde, 2 numaralı yüz için,

$$2'\text{den geçen akı} = C_x(2)\Delta y \Delta z$$

yazabiliriz. $C_x(1)$ ve $C_x(2)$ birbirlerinden, genelde, biraz farklıdırlar. Eğer Δx yeterince küçükse, şunu yazabiliriz:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x}\ \Delta x$$

Elbette, daha fazla terim vardır, fakat onlar $(\Delta x)^2$ ve daha yüksek mertebelerini içerecektir ve dolayısıyla, sadece küçük Δx'in limitini dikkate alacak olursak, ihmal edilebilirler. Böylelikle, 2 numaralı yüzden geçen akı aşağıdaki gibi olur:

$$2'\text{den geçen akı} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x}\Delta x\right] \Delta y \Delta z$$

1 ve 2 yüzeyleri için akıları toplarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$1 \text{ ve } 2'\text{den geçen akı} = \frac{\partial C_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

Türev 1 numaralı yüzeyin merkezinde, diğer bir deyişle $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$ noktasında alınmalıdır. Ancak, sonsuz küçüklükteki bu küp için ihmal edilebilir bir hata payıyla türevi (x, y, z) noktasında alabiliriz.

Aynı akıl yürütmeyi her bir yüze uyguladığımızda, aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$3 \text{ ve } 4'\text{den geçen akı} = \frac{\partial C_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

ve

$$5 \text{ ve } 6'\text{dan geçen akı} = \frac{\partial C_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

Tüm yüzeylerden geçen akı bütün bunların toplamıdır. Şu şekilde yazabiliriz:

$$\int_{\text{küp}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z$$

Tüm türevlerin toplamı da $\nabla \cdot \boldsymbol{C}$ olur. Ayrıca, küpün hacmini de $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, *sonsuz küçüklükte* bir küp için şu aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\int_{\text{yüzey}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da = (\nabla \cdot \boldsymbol{C})\Delta V \qquad (3.17)$$

Böylece, sonsuz küçüklükteki bir küpün yüzeyinden dışa doğru olan akının, vektörün diverjansı ile küpün hacminin çarpımına eşit olduğunu göstermiş olduk. Artık bir vektörün diverjansının ne *"anlamı"* olduğunu görebiliyoruz. Bir vektörün P noktasındaki diverjansı, *birim hacim* başına P etrafındaki akıdır ($\boldsymbol{C}$'nin dışa doğru "akısı").

$\boldsymbol{C}$'nin diverjansını, her bir sonsuz küçüklükteki hacimden $\boldsymbol{C}$'nin dışarı doğru akısına bağlamayı başardık. Herhangi bir sonlu hacim için bu ispatladığımız gerçeği –bir hacimden geçen akının, her bir parçadan geçen akının toplamına eşit olduğu gerçeğini– kullanabiliriz. Diğer bir deyişle, diverjansın tüm hacim için integralini alabiliriz. Bunu, herhangi bir kapalı yüzeydeki vektörün dik bileşeninin integralinin, aynı zamanda, yüzey tarafından çevrelenmiş hacmin vektörünün diverjansmın integrali olarak da yazılabileceği şeklinde kuramlaştırabiliriz. Bu teorem ismini Gauss'tan almıştır. Herhangi bir S kapalı yüzeyi ve çevrelediği V hacmi için Gauss teoremi şöyledir:

$$\int_S \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{C}\, dV \qquad (3.18)$$

3-4 Isı iletimi; yayınım denklemi

Teoremle aşina olabilmek için, gelin onun kullanıldığı bir örneği inceleyelim. Yine bir metal içindeki ısı akışını ele alalım. Diyelim ki elimizde artık daha fazla ısıtılmayan ve soğumakta olan bir cisim var. Hiç ısı kaynağı yok örneğimizde, dolayısıyla ısı korunmakta. Sorumuz şu: herhangi bir zamanda bir hacmin içerisinde ne kadar ısı vardır? Yüzeyden kaybolan ısı miktarı yüzünden gitgide *azalıyor* olmalı. Eğer seçtiğimiz hacim bir küpse, Denk. (3.17)'den yola çıkarak

$$\text{Dışarı giden ısı} = \int_{\text{küp}} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \nabla \cdot \boldsymbol{h} \Delta V \tag{3.19}$$

yazabiliriz. Bu, küpün içindeki ısının azalma hızına eşit olmalıdır. Birim hacme düşen ısıya q dersek, küpün içindeki ısı $q\Delta V$ olur ve ısının *azalma* hızını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(q\Delta V) = -\frac{\partial q}{\partial t}\Delta V \tag{3.20}$$

(3.19) ile (3.20)'yi bir arada düşünürsek, şu denklemi elde ederiz:

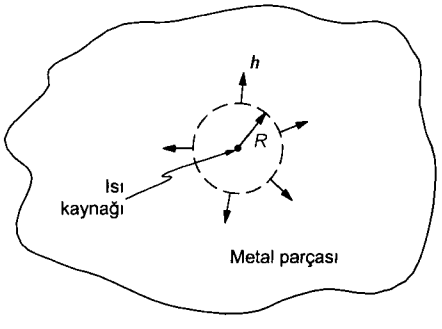
$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{h} \tag{3.21}$$

Bu denklem biçimine özellikle dikkat etmenizi istiyorum, fizikte sıklıkla karşımıza çıkan bir biçimdir bu. Korunum yasasını ifade eder ve bu haliyle ısının korunumu yasasını ifade etmekte. Aynı fiziksel gerçeği daha önce bir başka şekilde, (3.13) denklemiyle ifade etmiştik. Denklem (3.13) bir *integral* biçimindeyken, bu denklem *diferansiyel* biçimindedir.

Denklem (3.13)'ü sonsuz küçüklükteki bir küpe uygulayarak Denklem (3.21)'i elde ettik. Tersi bir yoldan da gidebiliriz. S yüzeyiyle çevrelenmiş büyük bir V hacmi için Gauss yasası der ki:

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{h}\, dV \tag{3.22}$$

Denklem (3.21)'e baktığınızda, sağ tarafın integralinin $-dQ/dt$ olduğunu rahatlıkla görebilirsiniz. Sağ tarafı bu şekilde yazdığımızda elimizde yine Denk. (3.13) kalır.



Şekil 3-6 Noktasal bir ısı kaynağının etrafındaki ısı akışı merkezden çevreye doğrudur.

Şimdi başka bir durumu ele alalım. Elimizde yine bir malzeme yığını olduğunu, fakat bu sefer içinde küçücük bir delik ve bu deliğin içinde ısı üreten kimyasal tepkimeler yer aldığını varsayalım. Bir direncin içindeki tellerin elektrik akımıyla ısıtıldığını da varsayabiliriz. Isının tek bir noktada açığa çıktığını ve W'nin de o noktada saniye başına açığa çıkan enerjiyi temsil ettiğini varsayacağız. Delik dışında kalan kısımda ısının korunduğunu ve ısı üretiminin uzun bir süredir devam ettiğini varsayacağız. Dolayısıyla, sıcaklık artık hiçbir yerde değişmemekte. Sorun şu: Elimizdeki metalin çeşitli yerlerinde ısı vektörü $\boldsymbol{h}$ nasıl görünür? Her bir noktada ne kadar ısı akışı vardır?

Eğer $\boldsymbol{h}$'ın dik bileşeninin integralini, kaynağı çevreleyen kapalı yüzey üzerinden alırsak daima W'yu elde ederiz. Akışın sürekli olduğunu varsaydığımızdan dolayı, nokta kaynakta üretilen bütün ısı yüzeyden dışarı doğru akmalıdır. Öyle bir vektör alanı bulmalıyız ki, herhangi bir yüzey üzerinden integrali alındığında bize daima W'yu vermeli. Böyle bir alanı bir şekilde özel bir yüzeyi ele alarak bulabiliriz aslında. R yarıçaplı bir küre ele alalım, ısı kaynağımızın tam merkezinde olduğu ve ısı akışının merkezden dışa doğru olduğunu varsayalım (Şekil 3-6). Sezgisel olarak $\boldsymbol{h}$'ın, eğer elimizdeki malzeme yeterince büyükse ve kenarlara çok yaklaşmazsak, radyal olması gerektiğini ve küre üzerindeki her noktada aynı değerde olması gerektiğini söyleyebiliriz. Cevabı bulabilmek için matematik yolumuza bir miktar tahmin –genelde "fiziksel içgörü" olarak adlandırılır– eklediğimiz gözünüzden kaçmasın.

$\boldsymbol{h}$ radyal ve küresel simetrikse, $\boldsymbol{h}$'ın dik bileşenin alan üzerinden integralini almak basittir çünkü dik bileşen $\boldsymbol{h}$'ın büyüklüğüdür ve sabittir. Üzerinden in-

tegral aldığımız alansa $4\pi R^2$'dir. Bunlardan yola çıkarak şu denklemi yazabiliriz:

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = h \cdot 4\pi R^2 \tag{3.23}$$

Denklemdeki h, $\boldsymbol{h}$'ın büyüklüğüdür. Bu integralin sonucu W'ya, diğer bir deyişle kaynağında ısının üretilme hızına eşit olmalıdır. Böylece

$$h = \frac{W}{4\pi R^2}$$

veya

$$\boldsymbol{h} = \frac{W}{4\pi R^2}\, \boldsymbol{e}_r \tag{3.24}$$

denklemini elde ederiz. Buradaki $\boldsymbol{e}_r$ radyal yönde birim vektörü temsil eder. Şimdi, denkleme dikkatli bakarsanız, $\boldsymbol{h}$'ın W değeriyle orantılı olduğunu ve kaynakla arasındaki mesafenin karesiyle ters orantılı olduğunu görebilirsiniz.

Elde ettiğimiz denklem noktasal bir ısı kaynağı için doğrudur. Şimdi gelin, ısının korunması şartını sabit tutarak, genel ısı akış denklemlerini çıkarmaya çalışalım. Herhangi bir ısı kaynağının veya ısı soğurucunun dışında kalan yerlerde ne olduğunu araştıracağız.

Isının iletimiyle ilgili denklemi ikinci bölümde çıkarmıştık. Denklem (2.44)'e göre

$$\boldsymbol{h} = -\kappa \nabla T \tag{3.25}$$

yazabiliriz. Lütfen hatırlayın, bu eşitlik sadece yaklaşık bir eşitliktir; fakat metal benzeri malzemeler için gayet iyi sonuçlar verir. Elbette sadece malzemenin ısı üretimi veya soğurumu olmayan bölgeleri için geçerlidir. Yukarıda, ısı korunumu olduğunda geçerli olan Denk. (3.21)'i çıkarmıştık. Onu Denk. (3.25)'le birleştirdiğimizde

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{h} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

ya da

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \tag{3.26}$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki denklemlerde κ'nın sabit olma şartı vardır. q'nun birim hacimdeki ısı miktarı ve $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$'nin de Laplace işlemcisi olduğunu hesaba katarsak

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

yazabiliriz. Şimdi, bir varsayımda daha bulunursak gayet ilginç bir denklem elde edeceğiz. Malzemenin sıcaklığının birim hacimdeki ısıyla orantılı olduğunu, diğer bir deyişle malzemenin belirli bir özgül ısısı olduğunu varsayalım. Bu varsayım geçerli olduğu durumlar için (ki genelde doğrudur da),

$$\Delta q = c_v\, \Delta T$$

ya da

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_v \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.27}$$

eşitliklerini elde ederiz. Isının değişim hızı, sıcaklığın değişim hızıyla orantılıdır. Buradaki orantı sabiti c_v, malzemenin birim *hacmindeki* özgül ısıdır. Denklem (3.27) ile (3.26)'yı birleştirirsek, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T \tag{3.28}$$

T'nin *zamana* bağlı değişiminin, uzaysal bağlılığın ikinci türevi olan T'nin Laplace işlemcisiyle –her noktada– orantılı olduğunu bulmuş olduk. Artık elimizde T sıcaklığı için x, y, z ve t'ye bağlı bir diferansiyel denklem var.

Diferansiyel Denklem (3.28)'e, *yayınım* denklemi denir. Çoğu zaman şu şekilde yazılır:

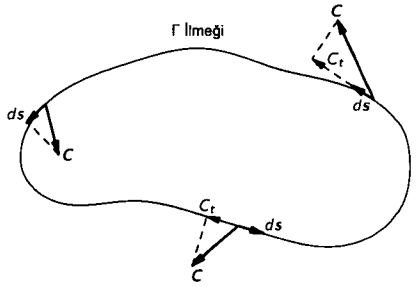
$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \tag{3.29}$$

Denklemdeki D *yayınım* sabitidir ve burada κ/c_v'ye eşittir.

Yayınım denklemi birçok fizik probleminde karşımıza çıkar. Gazların, nötronların yayınımında ve daha birçoklarının yayınımında. Bu olguların bazılarının fiziğini I. Cildin 43. Bölümünde tartışmıştık. Şimdi elimizde yayınımı olabilecek en geniş anlamda tanımlayan bir denklem var. Bir süre sonra, belli özel durumlarda sıcaklığın nasıl değişkenlik gösterdiğini keşfetmek için yayınım denkleminin farklı çözüm yollarına girişeceğiz. Şimdi, vektör alanlarla ilgili diğer kuramlara bakalım.

3-5 Bir vektör alanının dolaşımı

Şimdi bükümü, aynı diverjansı incelediğimiz gibi inceleyelim. Her ne kadar diverjansıyla uğraşacağımız başta belli değildiyse de, Gauss teoremini bir yüzeyin integralini alarak elde etmiştik. Diverjansı elde etmek için yüzeyin integralini almak gerektiğini nasıl bilebilirdik? Sonucun o şekilde olacağı baştan apaçık ortada değildi. Benzeri şekilde bir belirsizlikte, bir vektörle ilgili başka bir şeyi hesaplayıp, bükümle ilişkili olduğunu göstermeye çalışacağız. Bu sefer hesaplayacağımız şey, bir vektör alanının dolaşımıdır. Herhangi bir $\boldsymbol{C}$ vektör alanı için, eğri bir çizgi boyunca onun bileşeninin integralini –tam bir kapalı ilmek oluşacak şekilde– alalım. Bu integrale, vektör alanın ilmek etrafındaki *dolaşımı* denir. Bu bölümde daha önce $\nabla\psi$'nin çizgi integralini ele almıştık: Şimdi aynı şeyi *herhangi* bir $\boldsymbol{C}$ vektör alanı için yapacağız.

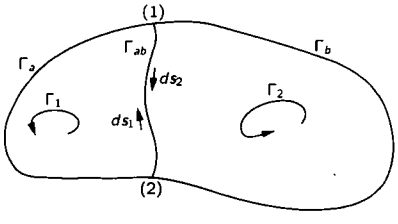


Şekil 3-7 T eğrisi etrafında $\boldsymbol{C}$'nin dolaşımı, $\boldsymbol{C}$'nin teğetsel bileşeni C_t'nin çizgi integralidir.

Γ, uzaydaki herhangi bir kapalı ilmek olsun. Bu tamamen hayalidir elbette. Bir örneğini Şekil 3-7'de görebilirsiniz. $\boldsymbol{C}$'nin teğet bileşeninin ilmek etrafındaki çizgi integrali şu şekilde yazılabilir:

$$\oint_\Gamma C_t\, ds = \oint_\Gamma \boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.30}$$

Dikkat edin, integral eğrinin bütün çevresince alınmıştır. Daha önce yaptığımız gibi bir noktadan diğerine değil. İntegral işaretinin üzerindeki küçük yuvarlak işaret bize integralin bütün çevre üzerinden alınması gerektiğini hatırlatır. Bu integrale Γ eğrisi etrafındaki vektör alanın dolaşımı denir. İsmin orjinali bir sıvının dolaşımından doğmuştur. Ancak isimin kullanımı –aynı "akı" gibi– bir madde "dolaşmadığı" halde herhangi bir alana uyacak şekilde genişletilmiştir.



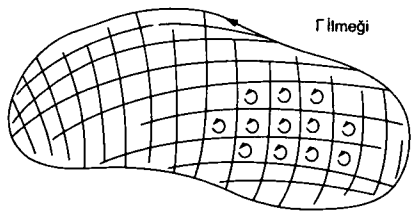
Şekil 3-8 Tüm ilmek etrafındaki dolaşım, iki ilmek etrafındaki dolaşımların toplamıdır. $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ ve $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

Akı için kullandığımız akıl yürütmeyi bunda da kullanarak, bir ilmek etrafındaki dolaşımın iki parça ilmek etrafındaki dolaşımların toplamı olduğunu gösterebiliriz. Şekil 3-7'deki eğriyi, (1) ve (2) numaralı noktaları Şekil 3-8'de görüldüğü gibi birleştirerek iki parça ilmeğe ayıralım. Şimdi elimizde iki ilmek var, Γ_1 ve Γ_2. Γ_1, (1) ve (2) noktalarının solunda kalan Γ_a ve kısa yol olan Γ_{ab}'den oluşur. Γ_2 de benzer şekilde, ilmeğin kalan bölümü ve kısa yoldan ibarettir.

Γ_1 etrafındaki dolaşım Γ_a ve Γ_{ab} boyunca alınan integrallerin toplamıdır. Benzer şekilde, Γ_2 etrafındaki dolaşım da Γ_b ve Γ_{ab} boyunca alınan integrallerin toplamıdır. Γ_2 eğrisi için Γ_{ab} boyunca alınan integralin işareti, Γ_1 için alınan integralin işaretinin tersi olacaktır çünkü gidiş yönü terstir. Çizgi integralleri alırken aynı yön "algısını" korumamız önemlidir.

Daha önce kullandığımız akıl yürütmeyi kullanarak, iki dolaşımın toplamının orijinal Γ eğrisi için çizgi integrali olacağını görebilirsiniz. Γ_{ab}'den gelen değerler birbirini sıfırlayacaktır. Bir parçanın etrafındaki dolaşım ile ikinci parçanın etrafındaki dolaşımın toplamı, dış çizgi boyunca olan dolaşıma eşittir. Bu sürece, ilk ilmeği istediğimiz sayıda küçük ilmeğe bölerek devam edebiliriz. Küçük ilmeklerin dolaşımlarını topladığımızda birbirlerine komşu bölümlerin ortak parçaları birbirlerini sıfırlayacaktır, böylece toplam daima ilk ilmeğin dolaşımına eşit olacaktır.

Şimdi, ilk ilmeğimizin bir yüzeyin sınırı olduğunu varsayalım. Elbette, orijinal ilmeğin sınırlandırdığı sonsuz sayıda yüzey vardır. Önce, Şekil 3-9'daki gibi ilk ilmeğimizi birçok küçük ilmeğe bölelim. Yüzeyin şekli ne olursa olsun, eğer ilmeklerimizi yeterince küçük seçersek her bir küçük ilmeğin aslen düz bir yüzeyi çevrelediğini varsayabiliriz. Ayrıca, küçük ilmeklerimizi öyle bir seçeriz ki her biri neredeyse bir kare olur. Şimdi, büyük Γ ilmeği etrafındaki dolaşımı, bütün küçük kareler etrafındaki dolaşımları toplayarak bulabiliriz.

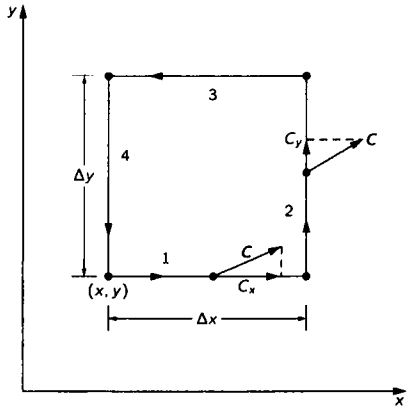


Şekil 3-9 Γ ilmeğiyle sınırlanmış bir yüzey. Yüzey, her biri neredeyse bir kare olan birçok alana bölünmüş. Γ'nın etrafındaki dolaşım, küçük ilmeklerin etrafındaki dolaşımın toplamıdır.

3-6 Bir kare etrafında dolaşım; Stokes teoremi

Her bir karenin etrafındaki dolaşımı nasıl bulabiliriz? Bir başka soruysa, bir kare uzayda nasıl yönlenir? Eğer özel bir yönelimi olsaydı, kolayca hesaplayabilirdik. Örneğin, koordinat düzlemlerinin birinde olsaydı. Koordinat eksenlerinin yönelimiyle bir varsayımda bulunmadığımıza göre eksenlerimizi, küçük karemizin Şekil 3-10'da olduğu gibi xy düzleminde olacağı şekilde ayarlayabiliriz. Eğer sonucumuz vektör gösterimiyle ifade edilirse, düzlem yönelimi ne olursa olsun, onun aynı kalacağını rahatlıkla söyleyebiliriz.

Şimdi C alanının küçük karemiz etrafındaki dolaşımını bulalım. Eğer karemizi C vektörünün karenin herhangi bir kenarı etrafında değişmeyeceği kadar küçük seçersek, çizgi integralini almamız kolaylaşır. (Buradaki varsayımımız karenin küçüldükçe daha iyi olacağıdır. Böylece gerçek anlamıyla sonsuz derecede küçük karelerden konuşabiliriz.) Sol alt köşedeki (x, y) noktasından başlayarak, ok yönünü takip edelim. (1)'le işaretlenmiş ilk kenardaki teğet bileşen $C_x(1)$'dir ve mesafe de Δx'dir. İntegralin ilk bileşeni $C_x(1)\Delta x$'dir. İkinci kenardansa $C_y(2)\Delta y$ gelir. Üçüncü kenar boyunca $-C_x(3)\Delta x$'i ve dördüncü kenar boyunca da $-C_y(4)\Delta y$'i elde ederiz. Eksi işaretlerini ilerlediğimiz yön boyunca teğet bileşeni elde edebilmek için koyduğumuza dikkat edin. Bu durumda, bütün çizgi integralini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:



Şekil 3-10. C'nin küçük bir kare etrafındaki dolaşımının hesaplanması.

$$\oint C \cdot ds = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y \tag{3.31}$$

Şimdi birinci ve üçüncü parçalara bakalım. Birlikte

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x \tag{3.32}$$

olarak ifade edilirler. Yaklaşık değerler almamızdan dolayı farkın sıfır olduğunu düşünebilirsiniz. İlk yaklaştırım için bu doğrudur. Ancak, C_x'in değişim hızını göz önüne alarak daha kesin sonuçlar elde edebiliriz. Böylece aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y}\Delta y \tag{3.33}$$

Bir sonraki yaklaştırımı da eklersek, $(\Delta y)^2$ cinsinden terimler içerir; ancak en nihayetinde limiti $\Delta y \to 0$ şeklinde düşüneceğimizden bu terimler ihmal edilebilir. Denklem (3.33) ile (3.32)'yi birleştirirsek,

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y}\Delta x\Delta y \tag{3.34}$$

sonucunu buluruz. Bu türev, yaklaştırımımıza uygun olarak, (x, y) noktasında alınabilir.

Dolaşımdaki diğer iki terim için benzer şekilde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$C_y(2)\Delta y - C_y(4)\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x}\Delta x\Delta y \tag{3.35}$$

Bu durumda, karemiz etrafındaki dolaşım aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{3.36}$$

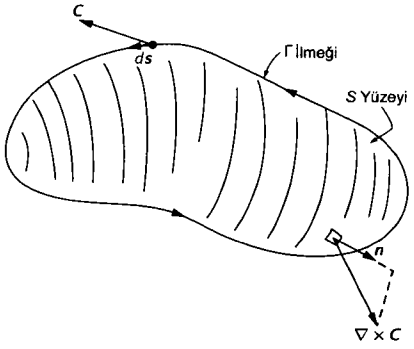
bu ilginçtir, çünkü parantez içindeki iki terim tam da bükümün z bileşenidir. Ayrıca, $\Delta x\Delta y$'nin karemizin alanı olduğuna dikkat edin. Bu durumda dolaşım denklemi (3.36)'yı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$(\nabla \times \boldsymbol{C})_z \Delta a$$

z bileşeni demek, yüzey elemanına *dik* [*normal*] bileşen demektir. Dolayısıyla, diferansiyel bir kare etrafındaki dolaşımı değişmez bir vektör biçiminde yazabiliriz:

$$\oint \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = (\nabla \times \boldsymbol{C})_n \Delta a = (\nabla \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{n} \Delta a \tag{3.37}$$

Sonuç: Herhangi bir $\boldsymbol{C}$ vektörünün sonsuz küçüklükteki bir kare etrafındaki dolaşımı, $\boldsymbol{C}$'nin bükümünün yüzeye normali ile karenin alanının çarpımıdır.



Şekil 3-11 $\boldsymbol{C}$'nin Γ etrafındaki dolaşımı, $\nabla \times \boldsymbol{C}$'nin dik bileşenin yüzey integralidir.

Herhangi bir Γ ilmeği etrafındaki dolaşım artık kolaylıkla bir vektör alanının bükümüyle ilişkilendirilebilir. Şekil 3-11'deki gibi ilmeği herhangi bir uygun S yüzeyiyle dolduralım ve yüzeydeki sonsuz küçüklükteki karelerin dolaşımlarını toplayalım. Toplam bir integral biçiminde yazılabilir. Vardığımız sonuç çok faydalı bir teoremdir ve Bay Stokes'un ardından Stokes teoremi olarak adlandırılmıştır.

STOKES TEOREMİ:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{C})_n da \tag{3.38}$$

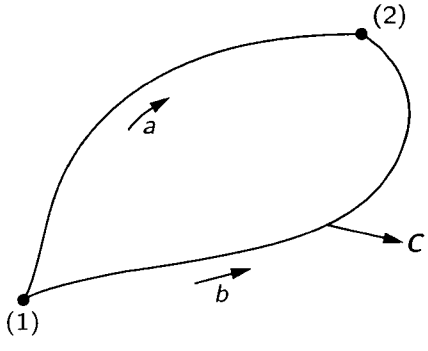
Denklemdeki S, Γ ilmeğiyle sınırlandırılmış herhangi bir yüzeydir.

Artık işaretlerin düzeni hakkında konuşmalıyız. Şekil 3-10'daki z ekseni, "bilindik" –sağ elli– eksenler sisteminde size *doğru* işaret ederdi. Çizgi integralimizi "pozitif" dönüş yönüyle aldığımızda, dolaşımın $\nabla \times \boldsymbol{C}$'nin z bileşenine eşit olduğunu bulduk. Diğer yönden gitseydik, tam tersi bir işaret elde ederdik. Peki şimdi, genel olarak, $\nabla \times \boldsymbol{C}$'nin "normal" bileşeninin pozitif yönü için hangi yönü seçmemiz gerektiğini nereden bileceğiz? "Pozitif" daima, Şekil 3-10'daki gibi, dönüş yönüne bağlı olmalıdır. Şekil 3-11'de genel durum için bu belirtilmiştir.

Bu ilişkiyi hatırlamanın bir yolu "sağ-el kuralıdır". Eğer sağ elinizin parmaklarını Γ ilmeği etrafında parmak uçlarınız $d\boldsymbol{s}$'in pozitif yönünü gösterecek şekilde sararsanız, başparmağınız S yüzeyinin *pozitif* normalini işaret edecektir.

3-7 Bükümsüz ve diverjansı olmayan alanlar

Şimdi gelin, yeni teoremlerin bazı sonuçlarına bakalım. İlk örneğimiz, bükümünün ***her yerde*** sıfır olduğu bir vektör olsun. Stokes teoremi der ki, bu durumda herhangi bir ilmek etrafındaki dolaşım sıfırdır. Bu durumda, Şekil 3-12'deki gibi bir kapalı eğri üzerinde iki nokta, (1) ve (2), seçersek teğet bileşenin (1)'den (2)'ye çizgi integrali takip edilebilecek iki yoldan bağımsızdır. Böylece (1)'den (2)'ye integralin sadece bu noktaların konumuna bağlı olduğu sonucuna varabiliriz, diğer bir deyişle sadece konumun bir fonksiyonudur. Aynı mantığı I. Cildin,14. Bölümünde kullanmış ve herhangi bir niteliğin kapalı ilmeği etrafındaki integral sıfırsa, o zaman integralin iki ucun konum fonksiyonlarının farkı olarak gösterilebileceğini bulmuştuk. Oradan yola çıkarak da potansiyel fikrine ulaşmıştık. Hatta daha ileri giderek, vektör alanının bu potansiyel fonksiyonunun gradyanı olduğunu kanıtlamıştık (*Bkz.* Denklem (14.13) I. Cilt).



Şekil 3-12 Eğer $\nabla \times \boldsymbol{C}$ sıfırsa, kapalı Γ eğrisi etrafındaki dolaşım sıfırdır. (1)'den (2)'ye a'nın çizgi integrali b boyunca alınan çizgi integraliyle aynı olmalıdır.

Buradan çıkan sonuç, bükümü sıfır olan herhangi bir vektör alanın skaler bir fonksiyonun gradyanına eşit olduğudur. Dolayısıyla, eğer $\nabla \times \boldsymbol{C}$ her yerde sıfırsa, $\boldsymbol{C} = \nabla\psi$ eşitliğini sağlayan bir ψ (psi) vardır. Gayet yararlı bir fikir. Dilersek, bu özel tür vektör alanını bir skaler alan cinsinden de tanımlayabiliriz.

Gelin, başka bir şey gösterelim. Elimizde ***herhangi*** bir ϕ skaler alanı olduğunu varsayalım. Eğer gradyanını, $\nabla\phi$, alırsak bu vektörün herhangi bir kapalı

ilmek etrafındaki integrali sıfır olmalıdır. (1)'den (2)'ye çizgi integrali $[\phi(2)-\phi(1)]$ olur. Eğer (1) ve (2) aynı noktalarsa, Denk. (3.8) bize çizgi integralinin sıfır olduğunu söyler:

$$\oint_{\text{ilmek}} \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

Stokes teoremini kullanarak, *herhangi* bir yüzey üzerinde şu sonuca varabiliriz:

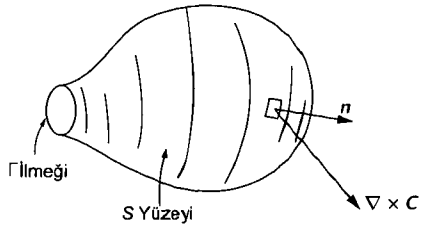
$$\int (\nabla \times (\nabla\phi))_n \, da = 0$$

Ancak integral *herhangi* bir yüzey üzerinde sıfırsa, integrandı da sıfır olmalıdır. Dolayısıyla şu eşitlik her zaman için geçerlidir:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \qquad \text{(her zaman)}$$

Aynı sonucu vektör cebiri kullanarak Bölüm 2-7'de de ispatlamıştık.

Gelin şimdi, Şekil 3-13'te görüldüğü gibi, *küçük* bir Γ ilmeğinin *büyük* bir S yüzeyiyle doldurulduğu özel duruma bakalım. Aslında tam olarak incelemek istediğimiz, ilmeğin bir nokta boyutuna küçüldüğünde, diğer bir deyişle yüzey sınırı ortadan kalktığında ne olduğudur. Bu durumda yüzey kapalı olur. $\boldsymbol{C}$ vektörü her yerde sonluysa, Γ ilmeği etrafındaki çizgi integral de ilmek küçüldükçe sıfıra gitmeli. İntegral, kabaca, sıfıra doğru giden Γ ilmeğinin çevresiyle orantılıdır. Stokes teoremine göre, $(\nabla \times \boldsymbol{C})_n$ ifadesinin yüzey integrali de ayrıca sıfırlanmalıdır. Bir şekilde, yüzeyi kapattıkça daha önce orada olanları sıfırlayan ilaveler yapmaktayız. Dolayısıyla elimizde yeni bir kuram vardır:



Şekil 3-13 Kapalı bir yüzeyin limitine gidildiğinde, $(\nabla \times \boldsymbol{C})_n$'nin yüzey integralinin ortadan kalkması gerektiğini buluruz.

$$\int_{\substack{\text{herhangi bir}\\ \text{kapalı yüzey}}} (\nabla \times \boldsymbol{C})_n \, da = 0 \tag{3.39}$$

Şimdi bu ilginç bir sonuç, çünkü zaten elimizde bir vektör alanının yüzey integraliyle ilgili bir kuram var. Gauss teoremine göre Denk. (3.18), böyle bir yüzey integral vektörün diverjansının hacim integraline eşittir. Gauss teoremi $\nabla\times\boldsymbol{C}$'ye uygulandığında şu sonuç alınır:

$$\int_{\substack{\text{kapalı}\\ \text{yüzey}}} (\nabla \times \boldsymbol{C})_n \, da = \int_{\substack{\text{iç}\\ \text{hacim}}} \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{C}) \, dV \tag{3.40}$$

Dolayısıyla, ikinci integralin sıfır olması gerektiği sonucunu çıkarabiliriz:

$$\int_{\substack{\text{herhangi bir}\\ \text{hacim}}} \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{C}) \, dV = 0 \tag{3.41}$$

Ayrıca bu sonuç herhangi bir $\boldsymbol{C}$ vektör alanı için geçerlidir. Denklem (3.41) *herhangi bir hacim* için geçerli olduğundan, uzaydaki *her noktada* integrand sıfır olmalıdır. Dolayısıyla daima aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{C}) = 0$$

Dikkat ederseniz, bu sonuç Bölüm 2-7'deki vektör cebirinden elde ettiğimiz sonuçla aynıdır. Görüyor musunuz, taşlar nasıl yerine oturuyor.

3-8 Özet

Gelin, şu ana kadar vektör analiziyle ilgili çıkarımlarımızı özetleyelim. Bunlar 2 ve 3. Bölümün dikkat çeken noktalarıdır:

1. $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ ve $\partial/\partial z$ işlemcileri vektör işlemcisi ∇'nin üç bileşenidirler ve bu işlemciye vektör gibi davranılarak vektör cebirinden elde edilen denklemler doğrudur:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

2. Bir skaler alanın iki noktadaki değerlerinin arasındaki fark, aynı skalerin birinci ve ikinci noktalar arasındaki herhangi bir eğri boyunca gradyanının teğet bileşeninin çizgi integraline eşittir.

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1)\\ \text{herhangi bir eğri}}}^{(2)} \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.42}$$

3. Rastgele seçilmiş bir vektörün kapalı bir yüzey üzerinden alınan yüzey integralinin dik bileşeni, vektörün diverjansının yüzeyin sınırladığı hacim üzerinden integraline eşittir.

$$\int_{\substack{\text{kapalı}\\ \text{yüzey}}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n} da = \int_{\substack{\text{içerdeki}\\ \text{hacim}}} \nabla \cdot \boldsymbol{C} dV \tag{3.43}$$

4. Rastgele bir vektörün kapalı bir ilmek çevresindeki teğet bileşeninin çizgi integrali, aynı vektörün bükümünün dik bileşeninin ilmek tarafından sınırlanmış herhangi bir yüzey üzerinden alınmış yüzey integraline eşittir.

$$\int_{\text{sınır}} \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\text{yüzey}} (\nabla \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{n} da \tag{3.44}$$

4

ELEKTROSTATİK

4-1 Statik

Artık elektromanyetizma kuramı üzerine detaylıca çalışmaya başlayabiliriz. Elektromanyetizmanın tamamı Maxwell denklemlerinde yer alır.

4-1 Statik
4-2 Coulomb yasası; üst üste binme
4-3 Elektrik potansiyeli
4-4 $E = -\nabla\phi$
4-5 E'nin akısı
4-6 Gauss yasası; E'nin diverjansı
4-7 Küresel bir yükün alanı
4-8 Alan çizgileri; eşpotansiyel yüzeyler

Maxwell denklemleri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.4}$$

Bu denklemlerle tanımlanan durumlar gayet karmaşık olabilir. Karmaşık olanları ele almadan önce, görece basit olanları ele alıp onlarla nasıl çalışacağımızı öğrenmek doğru olur. En kolayı, hiçbir şeyin zamana bağlı olmadığı *statik* durumdur. Bütün yükler uzayda daimi olarak sabitlenmiştir veya hareket etseler bile bir devre içinde sabit akış içindedirler (ρ ve j zaman içinde sabittir). Bu koşullarda, Maxwell denklemlerinde bulunan ve alanın zaman türevi olan bütün terimler sıfırdır. Bu durumda Maxwell denklemleri şu hale gelir:

Gözden geçirme: I. Cilt, Bölüm 13 ve 14, *İş ve Potansiyel Enerji*

Elektrostatik:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.6}$$

Manyetostatik:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{4.7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.8}$$

$$\epsilon_0 c^2 = \frac{10^7}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9$$

$$[\epsilon_0] = \text{coulomb}^2/\text{newton.metre}^2$$

Dört denklemden oluşan bu küme hakkında ilginç bir şey fark etmiş olabilirsiniz. İki parçaya ayrılabilir bu küme. Elektrik alan $\boldsymbol{E}$ sadece ilk ikisinde, manyetik alan $\boldsymbol{B}$ ise sadece son ikisinde yer alır. İki alan birbirine bağlı değildir. Bunun anlamı, *yükler ve akımlar statik olduğu müddetçe elektrik ve manyetizma birbirlerinden bağımsız olgular* olmasıdır. Bir kondansatörün şarj olması veya bir mıknatısın hareket ettirilmesi durumları dışında olduğu gibi, yükler veya akımlarda bir değişik olmadığı müddetçe $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin birbirine bağımlılığı gözlemlenmez. Sadece hızlı değişiklikler olup, Maxwell denklemlerindeki zaman türevleri anlamlı hale geldiğinde $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ birbirine bağımlı hale gelir.

Eğer statik denklemlerine dikkatlice bakarsanız, elektrostatik ve manyetostatik konularını anlamak için vektör alanların matematiksel özelliklerini kavramakta kullandığımız bakış açısının faydalı olacağını görebilirsiniz. Elektrostatik, *sıfır bükümlü* ve *belirli bir diverjanslı* vektör alanına güzel bir örnektir. Elektromanyetizma kuramını anlatmanın daha geleneksel –hatta bir bakıma, daha tatmin edici– yolu önce elektrostatikle başlamak ve dolayısıyla diverjansı öğrenmektir. Manyetostatik ve bölüm konularını sonra ele alacağız. Son olarak, elektrik ve manyetizmayı birleştireceğiz. En başta vektör analizini etraflıca ele

almıştık. Şimdi onu elektrostatiğin özel durumuna, ilk iki denklemle belirlenen $\boldsymbol{E}$ alanına uygulayacağız.

En basit durumları, diğer bir deyişle bütün yüklerin konumlarının belirli olduğu durumları ele alarak başlayacağız. Elektrostatiği sadece bu seviyede incelemek yetseydi, her şey çok kolay –hatta neredeyse keyfe keder– olurdu. Göreceksiniz, her şey Coulomb yasası ve biraz birleştirmeyle elde edilebilir. Ancak, birçok gerçek elektrostatik probleminde yüklerin başlangıçta nerede olduğunu *bilmeyiz*. Tek bildiğimiz, konumlarını maddenin özelliklerine bağlı olacak şekilde dağıttıklarıdır. Yüklerin konumları $\boldsymbol{E}$ alanına, $\boldsymbol{E}$ alanı da yüklerin konumlarına bağlıdır. Bu durumda işler karmaşıklaşır. Örneğin, yüklü bir cisim bir iletken veya yalıtkanın yakınına getirildiğinde, içlerindeki elektronlar ve protonlar hareket edecektir. Denklem (4.5)'teki yük yoğunluğu ρ'nun, daha önce bahsettiğimiz yükten dolayı bunda bir katkısı olabilir; ancak yalıtkan içinde hareket eden parçalardan gelen başka yükler olacaktır. Bütün bu yükleri dikkate almalıyız. Bu yüzden çok ince ve ilginç problemlerle karşılaşabiliriz. Dolayısıyla, her ne kadar bu bölüm elektrostatik üzerine olsa da konunun güzel ve incelikli bölümlerine girmeyeceğiz. Sadece bütün yüklerin konumlarının bilindiğini varsaydığımız durumları ele alacağız. Doğal olarak, diğerlerini ele almadan önce bu durumla uğraşmanız gerekiyor.

4-2 Coulomb yasası; üst üste binme

Mantıklı olan, başlamak için (4.5) ve (4.6) denklemlerini ele almamızdır. Esasen, başka bir yerden başlayıp sonra bu denklemlere dönmemiz daha kolay olacak. Daha önce bahsettiğimiz bir yasayla, Coulomb yasasıyla başlayacağız. Coulomb yasasına göre durağan iki yük arasında yüklerin çarpımıyla orantılı ve aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı bir kuvvet vardır. Kuvvet iki yük arasında bir düz çizgi boyuncadır.

Coulomb yasası:

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_{12} = -\boldsymbol{F}_2 \tag{4.9}$$

Denklemde $\boldsymbol{F}_1$, q_1 üzerindeki kuvvet, $\boldsymbol{e}_{12}$, q_1'den q_2'ye doğru birim vektör ve r_{12} de q_1 ile q_2 arasındaki mesafedir. q_2 üzerindeki $\boldsymbol{F}_2$ kuvveti, $\boldsymbol{F}_1$'e ters yönde ve eşittir.

Tarihsel nedenlerden dolayı, orantı sabiti $1/4\pi\epsilon_0$ şeklinde yazılır. Kullandığımız ölçü biriminde –metrik– ışık hızının karesinin 10^{-7} katı olarak tanımlanmıştır. Işığın hızı saniyede yaklaşık 3×10^8 metre olduğuna göre, sabit 9×10^9 ve birimi de Newton·metre^2 bölü Coulomb^2 veya volt·metre bölü Coulomb olur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7}\,c^2 \qquad \text{(tanım gereği)}\\ &= 9{,}0\times10^9 \quad \text{(deney sonucu)}\\ \text{Birim:}\quad &\text{Newton}\cdot\text{metre}^2/\text{Coulomb}^2\\ \text{veya}\quad &\text{Volt}\cdot\text{metre/Coulomb}\end{aligned} \tag{4.10}$$

İkiden fazla yük olduğunda –işler gerçekten ilginçleştiğinde– Coulomb yasasını doğanın bir başka gerçeğiyle desteklemeliyiz: herhangi bir yük üzerine etki eden kuvvet, diğer bütün yüklerden gelen Coulomb kuvvetlerinin vektörel toplamıdır. Buna "üst üste binme ilkesi" denir. Bütün elektrostatik bundan ibarettir. Coulomb yasası ve üst üste binme ilkesini birleştirdiğimizde, geriye keşfedilecek bir şey kalmaz. Elektrostatik denklemleri (4.5) ve (4.6) ne eksik ne de fazladır.

Coulomb yasasını uygularken, elektrik alan fikrini de göz önünde bulundurmak faydalıdır. $\boldsymbol{E}(1)$ alanını (diğer tüm yüklerden dolayı) q_1 *birim yükü* üzerine

etki eden kuvvet olarak tanımlayalım. Denklem (4.9)'u q_1'e bölersek, q_1 dışındaki bir yük için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_2}{r_{12}^2}\,\boldsymbol{e}_{12} \tag{4.11}$$

Ayrıca, $\boldsymbol{E}(1)$'in, q_1 orda olmasa bile, –diğer tüm yüklerin aynı konumda kaldığını varsayarak– (1) noktası hakkında bir fikir verdiğini düşünebiliriz. Şöyle diyebiliriz: $\boldsymbol{E}(1)$, (1) noktasındaki elektrik alandır.

Elektrik alan $\boldsymbol{E}$, bir vektördür; dolayısıyla Denk. (4.11) gereği her bir bileşen için bir denklem yazabiliriz. x bileşeni için yazarsak, denklem:

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \tag{4.12}$$

olur. Diğer bileşenler için de benzer denklemler yazabiliriz.

Halihazırda birçok yük varsa, (1) noktasındaki $\boldsymbol{E}$ alanı bütün yüklerden gelen katkıların toplamıdır. Toplamın her bir terimi (4.11) veya (4.12) gibi görünecektir. j numaralı yükün büyüklüğü q_j, q_j'den (1) noktasına olan mesafe de r_{1j} olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_j}{r_{1j}^2}\,\boldsymbol{e}_{1j} \tag{4.13}$$

Böylelikle elbette şunu yazabiliriz:

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}} \tag{4.14}$$

Çoğu durumda yüklerin elektronlar ve protonlarla dolu paketler halinde bulunduğunu düşünmek yerine, onların bir yayılım veya "dağılım" halinde bulunduğunu düşünmek yeğdir. Çok küçük ölçekte ne olup bittiğiyle ilgilenmiyorsak, böyle düşünmek sorun değildir. Yük dağılımını "yük yoğunluğu", $\rho(x, y, z)$, olarak tanımlayabiliriz. Küçük bir ΔV_2 hacmi içinde (2) noktasında bulunan yük miktarına Δq_2 dersek, bu durumda ρ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Delta q_2 = \rho(2)\Delta V_2 \tag{4.15}$$

Coulomb yasasını bu tanım dahilinde kullanmak için, (4.13) ve (4.14) denklemlerinin toplamını, yüklerin bulunduğu tüm hacimlerin integralleriyle değiştirmeliyiz. Bu durumda denklem

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{tüm hacim}} \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}dV_2}{r_{12}^2} \tag{4.16}$$

şeklinde olur. Bazılarıysa aşağıdakini yazmayı tercih eder:

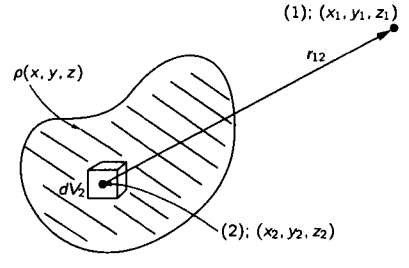
$$\boldsymbol{e}_{12} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}$$

Burada $\boldsymbol{r}_{12}$, Şekil 4-1'de gösterildiği gibi, (2)'den (1)'e yerdeğiştirme vektörüdür. Bu durumda $\boldsymbol{E}$ için integral şu şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{tüm hacim}} \frac{\rho(2)\boldsymbol{r}_{12}dV_2}{r_{12}^3} \tag{4.17}$$

Bu integrallerle bir şey hesaplamamız gerektiğinde, onları detaylı şekilde yazmamız gerekir. Denklem (4.16) veya (4.17)'nin x bileşeni için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{tüm hacim}} \frac{(x_1 - x_2)\,\rho(x_2, y_2, z_2)dx_2dy_2dz_2}{4\pi\epsilon_0[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \tag{4.18}$$



Şekil 4-1 Yük dağılımından gelen, (1) noktasındaki $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı dağılım üzerinden integral alarak hesaplanır. (1) noktası da dağılımın içinde olabilir.

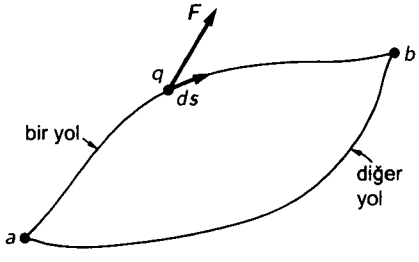
Bu denklemi çok kullanmayacağız. Sadece, konumlarını bildiğimiz tüm yükler için bütün elektrostatik problemlerini çözdüğümüzü vurgulamak için buraya yazdım. Yükler bilindiğinde, alanlar nedir? *Cevap:* Bu integrali al. İtiraz edecek bir şey yok; sadece üç boyutta karmaşık integral almak gerek. Tam da bir bilgisayara göre bir iş.

İntegrallerimiz sayesinde bir yük tabakasından, bir çizgisel yükten, bir kere yüzeyi üzerindeki yükten veya herhangi bir tanımlı dağılımdan kaynaklanan alanları hesaplayabiliriz. Şunu anlamalısınız ki, alan çizgilerini çizmeye, potansiyeller hakkında konuşmaya veya diverjansları hesaplamaya devam ettiğimiz sürece cevap zaten halihazırda buradadır. İntegrali hakkıyla almak yerine, sadece akıllıca tahminlerde bulunarak integral almak bazen daha kolaydır. Ancak, akıllıca tahminde bulunmak, birçok garip şeyi öğrenmeyi gerektirir. Pratikte, akıllı olmayı bir kenara bırakıp integrali doğrudan almak daha kolay olabilir. Biz yine de akıllı olmayı tercih edeceğiz. Şimdi gelin, elektrik alanın başka özelliklerini tartışalım.

4-3 Elektrik Potansiyeli

İlk başta, bir yükü bir noktadan diğer bir noktaya taşıyarak yapılan işle ilgili elektrik potansiyeli kavramını ele alalım. Bir miktar yük dağılımı mevcuttur, bu da elektrik alan üretir. Sorumuz şu, küçük bir yükü bir yerden diğerine taşımak ne kadar iş gerektirir? Bir yükü bir yol boyunca elektrik kuvvetlerine *karşı* taşıyarak yapılan iş, hareket yönündeki elektriksel kuvvetin o yol boyunca alınan integralin *eksi* işaretlisidir. Eğer bir yükü a noktasından b noktasına taşırsak, yapılan iş aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$W = -\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$



Şekil 4-2 Bir yükü a noktasından b noktasına taşırken yapılan iş, $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$'in yol boyunca alınan integralinin negatifidir.

Denklemdeki $\boldsymbol{F}$ yük *üzerinde* her bir noktada etkiyen elektriksel kuvvet ve $d\boldsymbol{s}$ o yol boyunca diferansiyel vektör yerdeğişimidir (*Bkz.* Şekil 4-2).

Kendi amaçlarımız için, *bir birim yük* taşımak için yapılan işi göz önüne almak daha uygundur. Bu durumda yük üzerine etki eden kuvvet, sayısal olarak elektrik alana eşit olur. Eğer elektriksel kuvvetlere karşı yapılan işe W(birim) dersek, şunu yazabiliriz:

$$W(\text{birim}) = -\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{4.19}$$

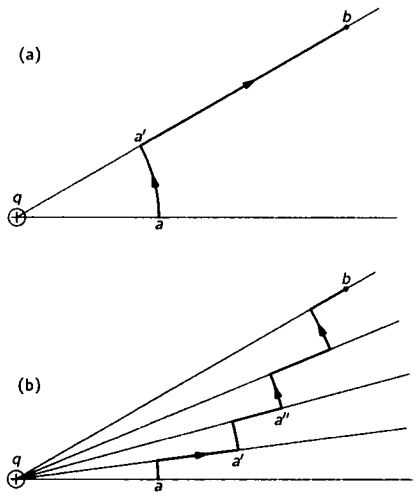
Şimdi, genelde, bu türden bir integralden elde ettiğimiz sonuç hangi yolu seçtiğimize bağlıdır. Ancak, denklem 4.19'un integrali a'dan b'ye olan yola bağımlı olsaydı, o zaman elektrik alandan iş çıkarmak için yükü b noktasına bir yol boyunca taşıyıp sonra a noktasına başka bir yol boyunca taşıyabilirdik. b noktasına W'nun daha küçük olduğu bir yol boyunca gidebilir ve diğer yoldan *geri* dönerdik, böylece koyduğumuzdan daha fazla iş *çıkarırdık*.

İlkesel olarak, bir alandan enerji elde etmek konusunda imkânsız diye bir şey yoktur. Hatta, mümkün olduğu yerde alanlarla karşılaşacağız. Öyle bir düzenek düşünün ki, bir yükü hareket ettirdiğinizde "düzeneğin" diğer kısımlarına etki eden kuvvetler meydana gelsin. Eğer "düzenek" kuvvete karşı hareket ederse enerji kaybeder, böylece dünyadaki toplam enerji korunur. *Elektrostatik* söz konusu olduğundaysa, böyle bir "düzenek" yoktur. Alanın kaynaklarına zıt etki eden kuvvetlerin ne olduğunu biliyoruz. Onlar, alanı meydana getiren yükler üzerinde etki eden Coulomb kuvvetleridir. Eğer diğer yükler konumlarında sabitse –bunu sadece *elektrostatik* için varsayarız– bu zıt kuvvetler onlar üzerinde hiçbir iş yapamaz. Onlardan enerji elde etmenin –elbette, enerjinin korunumu yasasının elektrostatik durumlar için de çalıştığını varsayarak– hiçbir yolu yoktur. Onun işleyeceğini biliyorum, ama şimdilik sadece Coulomb kuvvet yasasına uyması gerektiğini gösterelim.

Önce, alanda tek bir q yükünü ele aldığımızda ne olduğuna bakalım. a noktası q yüküne r_a mesafesinde olsun, b noktası da r_b mesafesinde. Önce, üzerinde en kolay hesap yapabileceğimiz yolla başlayalım. Şimdi, adına "test" yükü

diyeceğimiz ve büyüklüğünü bir birim olarak seçeceğimiz bir yükü a'dan b'ye taşıyalım. Test yükümüzü önce Şekil 4-3'ün (a) bölümünde gösterildiği gibi çember yayı üzerinde, dolayısıyla bir yarıçap boyunca, taşıyalım. Bu belirli yol boyunca yapılan işi hesaplamak çocuk oyuncağıdır (yoksa neden başta bunu seçelim, değil mi?). Birincisi, a noktası ile a' arasında yapılan bir iş yoktur. Coulomb yasasına göre alan radyaldır, dolayısıyla hareket yönüne dik açılardadır. İkincisi, a''den b'ye olan yol üzerinde alan, hareket yönündedir ve $1/r^2$ katsayısıyla değeri değişir. Dolayısıyla, a noktasından b noktasına bir test yükü taşırken yapılan işi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{a'}^{b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right) \tag{4.20}$$



Şekil 4-3 a noktasından b noktasına bir test yükü taşırken, yapılan iş herhangi bir yol üzerinde aynıdır.

Şimdi gelin, bir başka kolay yol seçelim. Örneğin, Şekil 4-3'ün (b) bölümünde gösterilen yolu. Önce bir süre bir çember yayı üzerinde gidiyor, daha sonra bir süre yarıçap üzerinde, sonra yine yay, yine yarıçap derken böyle devam ediyor. Çembersel yaylar üzerinde hiçbir iş yapılmamaktadır. Radyal bölümler üzerinde hareket ettiğimizde, sadece $1/r^2$'nin integralini almalıyız. İlk radyal parçada, r_a'dan $r_{a'}$'ne integral alınır, daha sonrakinde $r_{a'}$'den $r_{a''}$'ne ve bu böyle devam eder. Bütün bu integrallerin toplamı r_a'dan r_b'ye alınan tek bir integralin değerine eşittir. İlk denediğimiz yolun ardından aldığımız sonuç ile bu yol üzerinden aldığımız sonuç bire bir aynıdır. Apaçık görülmektedir ki, rastgele sayıda parçalardan oluşan *herhangi* bir yol için alınan sonuç da aynı olacaktır.

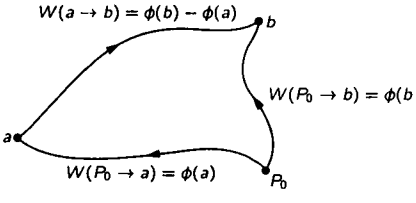
Peki, bu zikzaklı yollar yerine düz yollarda durum nasıldır? Aynı sonucu mu elde ederiz? Bunu I. Cilt, 13. Bölümde tartışmıştık hatırlarsanız. Oradaki argümanları kullanarak, a noktasından b noktasına bir yük taşıyarak yapılan işin yoldan bağımsız olduğu sonucuna varabiliriz.

$$\left.\begin{matrix} W\text{ (birim)} \\ a \to b \end{matrix}\right\} = -\int_{\substack{a \\ \text{herhangi} \\ \text{bir yol}}}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$

Yapılan iş sadece başlangıç ve bitiş noktalarına bağlı olduğundan, iki sayının farkı olarak temsil edilebilir. Bir P_0 referans noktası seçelim ve her zaman P_0 *üzerinden* geçen bir yol üzerinden integrali aldığımızı düşünelim. Bunu şu şekilde görebiliriz: P_0'dan a noktasına giderken alana karşı yapılan işe $\phi(a)$ diyelim ve $\phi(b)$ de P_0'dan b noktasına giderken yapılan iş olsun (Şekil 4-4). a'dan P_0'ya giderken yapılan iş (b'ye giderken) $\phi(a)$'nın eksisidir. Böylece aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \phi(b) - \phi(a) \tag{4.21}$$

Sadece ϕ fonksiyonunun iki noktadaki farkı daima işin içinde olduğundan, P_0 noktasının yerini belirtmek zorunda değiliz. Bununla birlikte, bir referans noktası seçtiğimizde, uzaydaki *herhangi* bir nokta için bir ϕ sayısı belirlenir ve ϕ *skaler bir alan* olur. ϕ, x, y, z'nin bir fonksiyonudur. Bu skaler fonksiyona bir noktadaki *elektrostatik potansiyel* denir.



Şekil 4-4 a noktasından b noktasına giden herhangi bir yol üzerinde yapılan iş, herhangi bir P_0 noktasından a'ya giden yolda yapılan iş ile aynı noktadan b'ye giden yolda yapılan işin toplamının negatifidir.

Elektrostatik Potansiyel:

$$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{4.22}$$

Kolaylık olması için, referans noktasını sonsuzda alacağız genelde. Sonra, ilk noktadaki tek bir yük için, Denk. (4.20)'yi kullanarak herhangi bir (x, y, z) noktası için ϕ potansiyelini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{4.23}$$

Çeşitli yüklerden kaynaklanan elektrik alan, tüm yüklerin elektrik alanlarının toplamı olarak yazılabilir. Potansiyeli hesaplamak için integral aldığımızda, elimizde bir integraller toplamı olur. Her bir integral, yüklerden kaynakla-

nan potansiyelin negatifidir. Böylece, birçok yükten kaynaklanan ϕ potansiyelinin bağımsız yüklerden kaynaklanan potansiyellerin toplamı olduğu sonucuna varabiliriz. Potansiyeller için bir üst üste binme ilkesi vardır. Bir grup yükten ve yüklerin dağılımından kaynaklanan elektrik alanı bulmak için kullandığımız argümanları kullanarak, (1) olarak isimlendirdiğimiz bir noktadaki ϕ potansiyelini hesaplamak için tüm denklemleri elde edebiliriz:

$$\phi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}} \tag{4.24}$$

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{tüm hacim}} \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}} \tag{4.25}$$

ϕ potansiyelinin fiziksel bir önemi olduğunu hatırlayın: o, bir birim yükün bir referans noktasından belirli bir noktaya getirilmesi durumunda sahip olacağı potansiyel enerjidir.

4-4 $E = -\nabla\phi$

Kim takar ϕ'yi? Yükler üzerindeki kuvvetler elektrik alan, E, tarafmdan kaynaklanır. Olay şu ki; E, ϕ'den kolayca elde edilebilir. Çok basittir, türev almak kadar kolay. Elimizde iki nokta olsun, biri x noktasında ve diğeri $(x + \Delta x)$ noktasında, ama her ikisi de aynı y ve z koordinatlarında. Birim bir yükü bir noktadan diğerine taşıyarak ne kadar iş yapıldığını bulalım. Yolumuz x noktasından $(x + \Delta x)$ noktasına olan düz çizgidir. Yapılan iş iki noktadaki potansiyelin farkıdır:

$$\Delta W = \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x$$

Alana karşı yapılan iş ise şu şekilde yazılır:

$$\Delta W = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -E_x\,\Delta x$$

Böylece aşağıdakini yazabiliriz:

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{4.26}$$

Benzer şekilde, $E_y = -\partial\phi/\partial y$, $E_z = -\partial\phi/\partial z$ veya vektör analizi gösterimiyle özetleyecek olursak:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{4.27}$$

Bu denklem, Denk. (4.22)'nin diferansiyel biçimidir. Belirtilen yüklerle ilgili herhangi bir problem (4.24) veya (4.25)'in potansiyelini hesaplayarak ve (4.27)'yi kullanarak çözülebilir. Denklem (4.27) vektör cebirinden bulduğumuz şu sonuçla uyuşur: herhangi bir ϕ alanı için

$$\int_a^b \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{s} = \phi(b) - \phi(a) \tag{4.28}$$

yazabiliriz.

Denklem (4.25)'e göre, ϕ skaler potansiyeli üç boyutlu bir integralle, aynı $\boldsymbol{E}$ için yaptığımız gibi hesaplanır. $\boldsymbol{E}$'yi hesaplamak yerine ϕ'yi hesaplamamızın bir avantajı var mıdır? Evet, vardır. ϕ için tek bir integral varken, $\boldsymbol{E}$ için üç integral vardır çünkü o bir vektördür. Daha da önemlisi, $1/r$'nin integralini almak x/r^3'ün integralini almaktan daha kolaydır. Birçok durumda ortaya çıkmıştır ki elektrik alanı bulmak için, ϕ'yi hesaplamak ve daha sonra gradyanını almak $\boldsymbol{E}$ için üç integral almaktan daha kolaydır. İki hesap da aynıdır, bu şekilde hesaplamak sadece pratik açıdan daha kolaydır.

Ayrıca, ϕ potansiyelinin fiziksel anlamda daha derin bir önemi vardır. ϕ Denk. (4.22)'den hesaplandığında, Coulomb yasasının $\boldsymbol{E}$'sinin $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\phi$ denklemiyle hesaplandığını göstermiştik. Ancak $\boldsymbol{E}$ skaler alanın gradyanına eşitse, vektör cebiri bilgimizle biliyoruz ki $\boldsymbol{E}$'nin bükümü olmamalıdır.

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.29}$$

Bir dakika, bu bizim elektrostatik temel denklemlerinden ikincisi olan Denk. (4.6) değil mi? Böylece, ϕ Denk. (4.22) sayesinde hesaplandığında, $\boldsymbol{E} = -\text{grad}\phi$ denkleminden Coulomb yasasının $\boldsymbol{E}$'sinin hesaplanabildiğini göstermiş olduk. Şu ana kadar her şey yolunda.

Potansiyeli tanımlamadan önce $\nabla \times \boldsymbol{E}$ çarpımının sıfır olduğunu ispatlamıştık. Kapalı bir yol üzerinde yapılan işin de sıfır olduğunu göstermiştik. Böylece, *herhangi* bir yol için

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

olur. Hatırlayın, 3. Bölümde herhangi bir benzer alan için $\nabla \times \boldsymbol{E}$ çarpımı her yerde sıfır olmalıdır. Elektrostatikteki elektrik alan, bükümsüz alanlara bir örnektir.

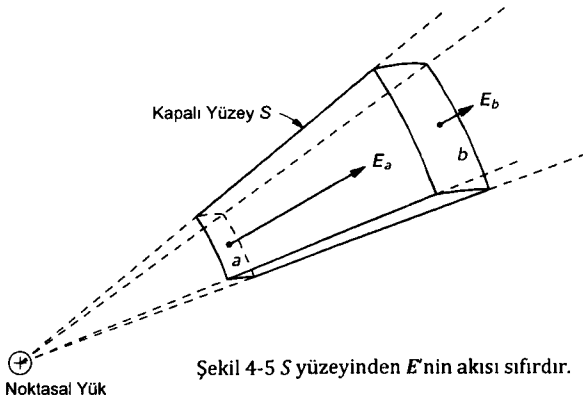
Dilerseniz, $\nabla \times \boldsymbol{E}$ çarpımının sıfır olduğunu bir başka şekilde göstererek – noktasal bir yük için $\nabla \times \boldsymbol{E}$ çarpımının bileşenlerini, Denk. (4.11)'de gösterildiği gibi, hesaplayarak– vektör cebiri bilginizi sınayabilirsiniz. Eğer sıfır elde ederseniz, üst üste binme ilkesi der ki herhangi bir yük dağılımının alanı için de sıfır elde edersiniz.

Burada önemli bir gerçeğin altını çizmeliyiz. Herhangi bir *radyal* kuvvet için, yapılan iş yoldan bağımsızdır ve bir potansiyel vardır. Üzerinde düşünürseniz, iş integralinin yoldan bağımsız olduğunu göstermek için yukarıdaki argümanlarımız tek bir yükten kaynaklanan kuvvetin radyal ve küresel simetrik olmasına dayandığını görürsünüz. Bu, mesafeye olan bağlılığın $1/r^2$'ye bağlı olduğu gerçeğine dayanmamaktadır. Bir potansiyelin varlığı ve $\boldsymbol{E}$'nin bükümünün sıfır olduğu gerçeği sadece elektrostatik kuvvetlerin *yönü* ve *simetrisinden* kaynaklanır. Bu yüzden, Denk. (4.28) –veya (4.29)– elektrik yasalarının sadece bir parçasını içerebilir.

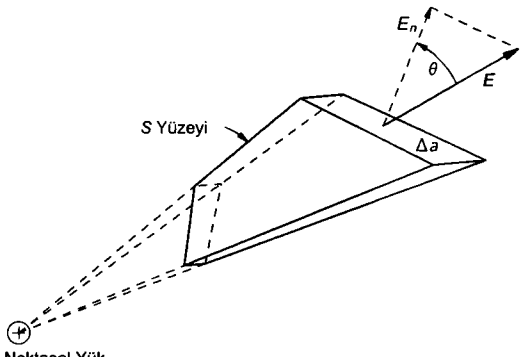
4-5 $\boldsymbol{E}$'nin akısı

Şimdi, özellikle ve doğrudan bir şekilde kuvvet yasasının ters kareyle orantılı olduğu gerçeğine dayanan bir alan denklemi çıkaracağız. Alanın mesafenin karesiyle ters orantılı değişkenlik gösterdiği gerçeği birçok kişi için "gayet doğal"dır, zira "her şey bu şekilde yayılır". Bir ışık kaynağını, örneğin bir feneri düşünün. Bu ışık kaynağından yayılan ve başlangıç noktası ışık kaynağıyla aynı olan bir koninin yüzeyinden geçen ışık miktarı, yüzeyin başlangıç noktasına olan uzaklığından bağımsızdır. Böyle olması, ışık enerjisinin korunumu gereğidir. Birim alan başına ışık –yoğunluk– konik yüzeyin alanıyla ters orantılı olmalıdır. Diğer bir deyişle, kaynağa olan uzaklığın karesiyle. Elbette, elektrik alanın uzaklığın karesinin tersiyle orantılı olması aynı nedendendir. Ancak burada "aynı neden" diye bir şey yoktur. Hiç kimse elektrik alanın, ışık gibi korunması gereken bir şeyin akışını ölçtüğünü iddia edemez. Elimizde küçük "bilye"ler olduğunu ve bu bilyelerin bir kaynaktan dışa doğru uçtuğunu hayal edelim. Elimizde bu bilyelerin yön ve hızını –akımını– elektrik alan vektörünün temsil ettiği bir elektrik alan modeli olsaydı ve modelimiz bilyelerin sayısının korunumunu şart koşsaydı, o zaman hiçbirinin kaybolmaması gerektiği apaçık ortadadır. Bu durumda ters kare yasasının gerekli olduğunu "görebiliriz". Diğer yandan, bu fiziksel fikri ifade edebilmek için matematiksel bir yol da olması gerekir. Elektrik alan saçılan bilyeler gibi *ise*, o halde uzaklığın karesiyle ters orantılı değiştiğini anlarız ve bu olanı –tamamen matematiksel– bir denklemle ifade edebiliriz. Elektrik alanın bilyelerden *oluştuğunu* söylemediğimiz ve bu modeli, bize elektrik alanla ilgili doğru matematiği bulmamız için yardımcı olarak kullandığımızı unutmadığımız sürece böyle düşünmekte herhangi bir sakınca yoktur.

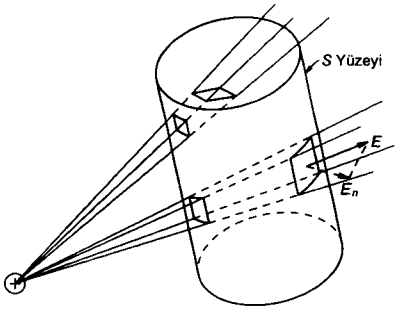
Elektrik alanın gerçekten de korunan bir şeylerin akışı olduğunu varsayalım. Her yerde korunduğunu düşünelim; yüklerin olduğu yerlerin haricinde (bir yerden başlaması lazım sonuçta!) O akan şey her neyse, bir yükten uzaya doğru aktığını varsayalım. $\boldsymbol{E}$ böyle bir akışın vektörüyse (tıpkı $\boldsymbol{h}$'ın ısı akışı için olduğu gibi), nokta kaynağın yakınında $1/r^2$'ye bağlı olurdu. Şimdi bu modeli kullanarak ters kare yasası, basitçe "ters kare" demeden", daha derin ve soyut şekilde ifade etmeye çalışalım. (Bu kadar basit bir yasayı neden doğrudan ifade etmekten kaçındığımızı merak edebilirsiniz ve aynı şeyi gizlice başka bir şekilde ifade etmek isteyebilirsiniz. Sabredin! Bunun faydalı olacağını göreceksiniz.)



Şekil 4-5 S yüzeyinden E'nin akısı sıfırdır.



Şekil 4-6 S yüzeyinden E'nin akısı sıfırdır.



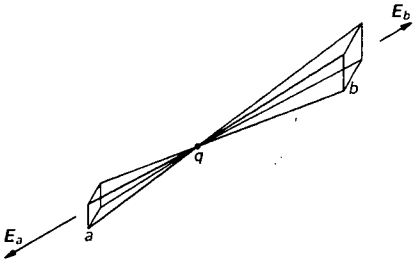
Şekil 4-7 Herhangi bir hacim, sonsuz küçüklükteki tepesi kesilmiş koniklerden meydana gelmiş gibi düşünülebilir. Her bir konik parçanın bir ucundan çıkan E akısı, diğer uçtaki akıya eşit ve ters yöndedir. Dolayısıyla S yüzeyinden geçen toplam akı sıfırdır.

Soru şu: noktasal bir yükün yakınındaki kapalı bir yüzeyden dışarı çıkan E "akışı" nedir? Soruyu cevaplamaya Şekil 4-5'te görüldüğü gibi kolay bir yüzeyle başlayalım. Eğer E bir akışa benziyorsa, şekildeki kutudan dışarıya olan net akış sıfır olmalıdır. Eğer yüzeyin içinden geçen "akış"tan anladığımız şey E'nin dik bileşeninin yüzey integraliyse –E'nin akısı– bu sonucu elde ederiz. Radyal yüzeylerde dik bileşen sıfırdır. Küresel yüzeylerde dik bileşen E_n, E'nin büyüklüğüdür; daha küçük yüzeyler için daha küçük ve daha büyük yüzeyler için daha büyük. E'nin büyüklüğü $1/r^2$ terimiyle azalır, fakat yüzey alanı r^2 değeriyle orantılı olduğundan sonuç r'den bağımsızdır. E'nin a yüzüne akısı, b yüzeyinden dışarı olan akı tarafından yok edilir. S'den dışarı doğru toplam akış sıfırdır:

$$\int_S E_n \, da = 0 \tag{4.30}$$

Şimdi bu iki yüzeyin, integrali değiştirmeden, radyal çizgi üzerinde eğilebildiğini gösterelim. Her ne kadar bu genelde doğru olsa da, kendi amaçlarımız için sadece sondaki yüzeyler, kaynağa göre küçük bir açı, hatta sonsuz derecede küçük bir açı oluşturacak kadar küçük olmaları durumunda doğru olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şekil 4-6'da "yanları" radyal ancak "uçları" eğilmiş bir S yüzeyi görülmektedir. Şekildeki uç yüzeylere takılmayın, onların gerçekten küçük olduğunu hayal edin. E alanı yüzeye yeterince eşit dağılmış olur böylece ve bizde tam ortadaki değerini kullanabiliriz. Yüzeyi θ açısıyla eğdimizde, alan $1/\cos\theta$ kadar artmış olur. Fakat E_n, E'nin yüzeye dik bileşeni, $\cos\theta$ çarpanıyla azalır. $E_n \Delta a$ çarpımının sonucu değişmez. Tüm S yüzeyinden dışarı akı hâlâ sıfırdır.

Şimdi, bu şekilde *herhangi* bir S yüzeyinin çevrelediği bir hacimden dışarı doğru olan akının sıfır olması gerektiğini anlamak basittir. Herhangi bir şekil, aynı Şekil 4-6'da olduğu gibi, birçok parçadan oluşmuş gibi düşünülebilir. Bütün yüzey birbirlerine zıt yönlerde uç yüzeylere bölünebilir ve bu tür çift yüzeylerden geçen akılar birbirlerini sıfırlayacağından dolayı yüzeyden geçen akı sıfır olacaktır. Bu dediklerimizin görsel halini Şekil 4-7'de görebilirsiniz. Artık elimizde, noktasal yükün sıfır olduğu bir alandaki *herhangi* bir S yüzeyi için E'den geçen toplam akının sıfır olduğuna dair bir sonuç var.



Şekil 4-8 Eğer bir yük yüzeyin içindeyse, dışa doğru olan akı sıfır değildir.

Fakat, dikkat edin. Kanıtımız sadece S yüzeyi yükü *çevrelemediğinde* geçerli. Ya noktasal yük yüzeyimizin *içinde* olsa ne olurdu? Yine yüzeyimizi yükten geçen radyal çizgiler sayesinde eşleşen alan çiftlerine bölebilirdik, aynı Şekil 4-8'de görüldüğü gibi. İki yüzeyden geçen akılar yine eşittir –aynı bir önceki akıl yürütmemizdeki gibi– ancak şimdi *aynı* işarete sahiptirler. Bir yükü *çevreleyen* yüzeyden dışarı olan akı sıfır *değildir*. Acaba nedir? Ufak bir numarayla bulabiliriz cevabı. Şekil 4-9'da görüldüğü gibi, bir S' yüzeyiyle yükümüzü çevreleyerek onu "kaldırdığımızı" varsayalım. S ile S' *arasındaki* yüzeylerde hiç yük olmadığına dikkatinizi çekerim. Yukarıdaki akıl yürütmemize göre, bu hacimden (S''den geçen dahil) dışarı giden toplam akı sıfırdır. Aynı akıl yürütme bize, S' hacminin *içine* doğru olan akı ile S'den dışarı olan akının eşit olduğunu da söyler.

S' için dilediğimiz bir şekli seçebiliriz, öyleyse Şekil 4-10'da görüldüğü gibi yük merkezli bir küre çizebiliriz. Sonra da kolayca içinden geçen akıyı hesaplayabiliriz. Eğer küçük küremizin çapı r ise, her zaman yüzeyin normali doğrultusundaki E'nin küre yüzeyinin her noktasında değeri aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

S''den geçen toplam akıyı hesaplamak için, yüzey alanı ve E'nin dik bileşenini çarpmamız gerekir:

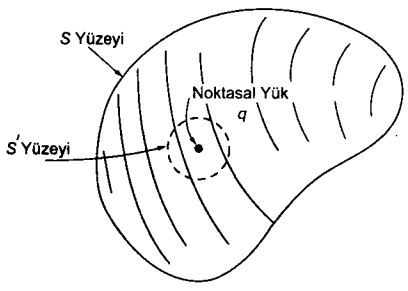
$$S' \text{ yüzeyinden geçen akı} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{4.31}$$

Dikkat edin, bulduğumuz değer kürenin çapından bağımsız! S''ten geçen akının da q/ϵ_0 olduğunu biliyoruz ve o da, q yükü S''in içinde yer aldığı sürece, S''in şeklinden bağımsız bir değerdir.

Şimdi, vardığımız sonuçları şu şekilde özetleyebiliriz:

$$\int_{\text{herhangi bir } S \text{ yüzeyi}} E_n\,da = \begin{cases} 0; & q\ S'\text{nin dışındayken} \\ \dfrac{q}{\epsilon_0}; & q\ S'\text{nin içindeyken} \end{cases} \tag{4.32}$$

Şimdi gelin, "bilye" benzetmemizi tekrar ele alalım ve bakalım mantıklı geliyor mu? Teoremimize göre bir yüzeyden dışarı doğru olan net bilye akışı, eğer yüzey bilyeyi fırlatan tabancayı tamamen çevrelemiyorsa sıfırdır. Eğer tabancanın yüzey tarafından çevrelendiyse, yüzeyin şekli önemsizdir, geçip giden bilye sayısı –tabancanın bilye fırlatma sıklığı– aynıdır. Bilye sayısı korunuyorsa, bütün bunlar mantıklıdır. Peki bu model bize Denk (4.32)'den farklı bir şey söylüyor mu? Kimse bu bilyelerin Denk. (4.32)'yi meydana getirmelerinden başka bir işe yaramalarını sağlayamadı. Daha ilerisinde hep hatalara yol açtı benzetmemiz. İşte bu yüzden bugün elektromanyetik alanı tamamen soyut bir şekilde ifade etmeyi tercih ediyoruz.



Şekil 4-9 S yüzeyinden geçen akı, S' yüzeyinden geçen akıya eşittir.

4-6 Gauss yasası: E'nin diverjansı

Denklem (4.32)'yi sadece tek bir noktasal yük için kanıtladık. Şimdi elimizde iki yük olduğunu varsayalım. Bir noktada q_1 yükü ve diğer bir noktada q_2 yükü. Problem daha zor görünüyor artık. Akı için dik bileşeninin integralini aldığımız elektrik alan her iki yükten de kaynaklanır. Dolayısıyla E_1, q_1'den kaynaklanan elektrik alan ve E_2 de q_2'den kaynaklanan elektrik alansa, toplam elektrik alan $E = E_1 + E_2$ olur. Herhangi bir S kapalı yüzeyinden geçen akı da bu durumda şu şekilde ifade edilir:

$$\int_S (E_{1n} + E_{2n})\,da = \int_S E_{1n}\,da + \int_S E_{2n}\,da \tag{4.33}$$

İki yükten kaynaklanan akı, tek tek yüklerden kaynaklanan akıların toplamıdır. Her iki yük de S'in dışındaysa, S içinden geçip giden akı sıfırdır. Eğer q_1, S'in içinde fakat q_2 dışındaysa, ilk integral q_1/ϵ_0 sonucunu verirken ikinci integralin sonucu sıfırdır. Yüzey her iki yükü de çevreliyorsa, her biri de katkıda bulunacak ve akı $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$ olacaktır. Genel kural, kapalı bir yüzeyden dışarı doğru olan akı *içerdeki* toplam yükün ϵ_0'ye bölünmesiyle bulunur.

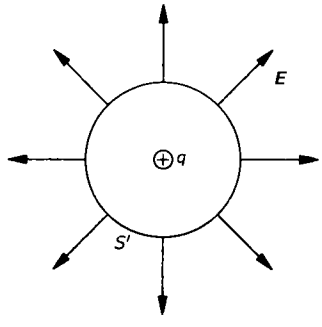
Bu sonuç elektrostatik alanın genel bir yasasıdır ve Gauss yasası denir.

Gauss yasası:

$$\int_{\substack{\text{herhangi bir} \\ S \text{ kapalı yüzeyi}}} E_n\,da = \frac{\text{içerdeki yüklerin toplamı}}{\epsilon_0} \tag{4.34}$$

veya

$$\int_{\substack{\text{herhangi bir} \\ S \text{ kapalı yüzeyi}}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \frac{Q_{\text{iç}}}{\epsilon_0} \tag{4.35}$$



Şekil 4-10 Bir q yükünü içeren küresel yüzeyden dışarı doğru olan akı, q/ϵ_0 olarak ifade edilir.

Denklem (4.35)'teki $Q_{\text{iç}}$'i de aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$Q_{\text{iç}} = \sum_{S \text{ içinde}} q_i \tag{4.36}$$

Eğer yüklerin konumunu yük yoğunluğu ρ şeklinde ifade edecek olursak, sonsuz küçüklükteki her bir dV hacminin "noktasal" bir ρdV yükü içerdiğini söyleyebiliriz. Bu durumda tüm yüklerin toplamı aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$Q_{\text{iç}} = \int_{\substack{S \text{ içindeki} \\ \text{hacim}}} \rho dV \tag{4.37}$$

Dikkat ederseniz, Gauss yasası Coulomb yasasındaki mertebenin tam olarak iki olmasından çıkmakta. $1/r^3$ alanı veya n'nin ikiden büyük olduğu herhangi bir $1/r^n$ alanı bize Gauss yasasını vermezdi. Diğer bir deyişle Gauss yasası aslında iki yük arasındaki Coulomb kuvvetler yasasının bir başka biçimde ifade edilmesidir. Yükler arasındaki kuvvetlerin radyal olmasına dair kuralı hesaba kattığımız sürece bu ikisi birbirine eşittir.

Şimdi gelin Gauss yasasını türevler cinsinden yazalım. Bunu yapabilmek için Gauss yasasını sonsuz küçük kübik yüzeylere uygulamamız lazım. Bölüm 3'te, $\boldsymbol{E}$'nin böyle bir küpten dışarı doğru olan akısının $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ çarpı küpün dV hacmi olduğunu göstermiştik. dV içindeki yük, ρ'nin tanımından dolayı ρdV'ye eşittir. Böylece Gauss yasası bize

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

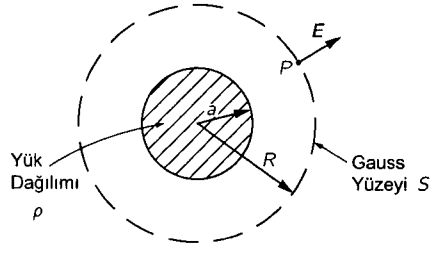
veya

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4.38}$$

eşitliklerini verir. Gauss yasasının diferansiyel biçimi, temel elektrostatik alan denklemlerinin ilki olan Denk. (4.5)'tir. Böylelikle elektrostatiğin iki denkleminin, Denk. (4.5) ve (4.6), Coulomb kuvvet yasasına eşit olduğunu göstermiş olduk. Şimdi Gauss yasasının kullanımına dair bir örneğe geçelim. Merak etmeyin, daha sonra birçok örnek üzerinde duracağız.

4-7 Küresel bir yükün alanı

Kütleçekim kuramını çalışırken karşılaştığımız zor problemlerden biri, katı bir küre cismin yüzeyindeki çekim kuvveti ile o cismin tüm kütlesi merkezde yoğunlaşmış haline ait kütleçekim kuvvetinin aynı olduğunu ispatlamaktı. Teoreminin doğru olup olmadığından emin olamadığı için, Newton yıllarca kütleçekim kuramını meydana çıkarmamıştı. I. Cilt, 13. Bölümde potansiyelin integralini alarak ve daha sonra gradyanı kullanıp kütleçekim kuvvetini bularak teoremi ispatlamıştık. Şimdi çok daha basit bir şekilde teoremi ispatlayabiliriz. Yalnız bu sefer denk bir teoremi düzgün dağılmış bir küresel yük için ispatlayacağız. (Kütleçekim yasaları ile elektrostatik yasaları aynı olduğu için, aynı ispat kütleçekim alanı için de yapılabilir.)



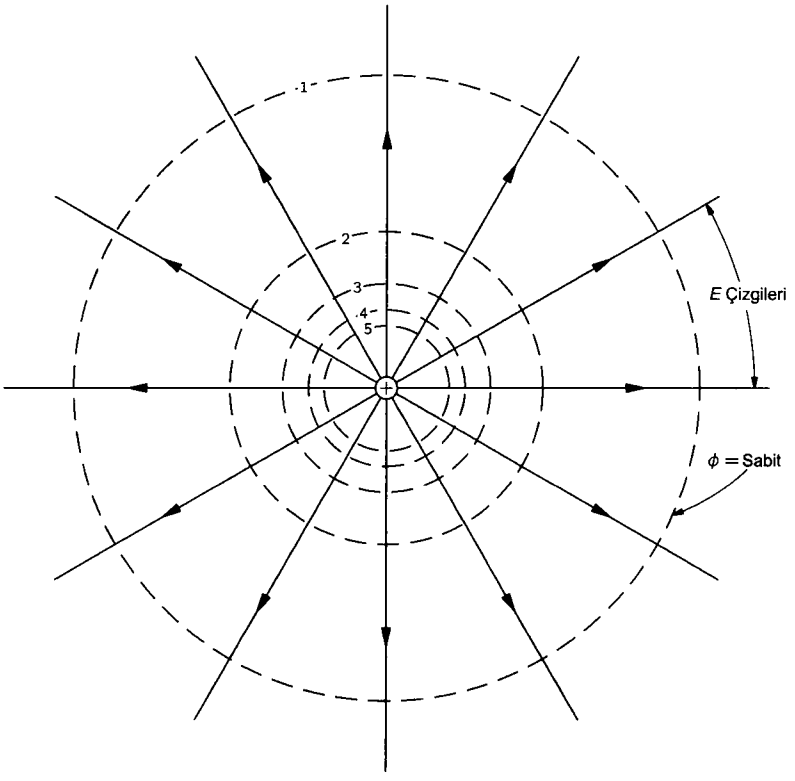
Şekil 4-11 Gauss yasasını kullanarak düzgün dağılmış küresel yükün alanını bulabiliriz.

Kendimize şunu soralım: Düzgün dağılmış yüklerle dolu bir kürenin dışındaki bir P noktasındaki $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı nedir? Herhangi bir "özel" yön olmadığından dolayı, $\boldsymbol{E}$'nin kürenin yüzeyinden dışarı her yöne doğru yayıldığını varsayabiliriz. Küresel ve yüklü küremizle aynı merkezli, hayali ve P noktasından geçen bir yüzeyi ele alalım (Şekil 4-11). Bu yüzey için, dışa doğru olan akıyı aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2$$

Gauss yasasına göre bu akı kürenin içindeki toplam Q yüküne (bölü ϵ_0) eşittir:

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Şekil 4-12 Pozitif bir noktasal yük için alan çizgileri ve eşpotansiyel yüzeyler.

veya

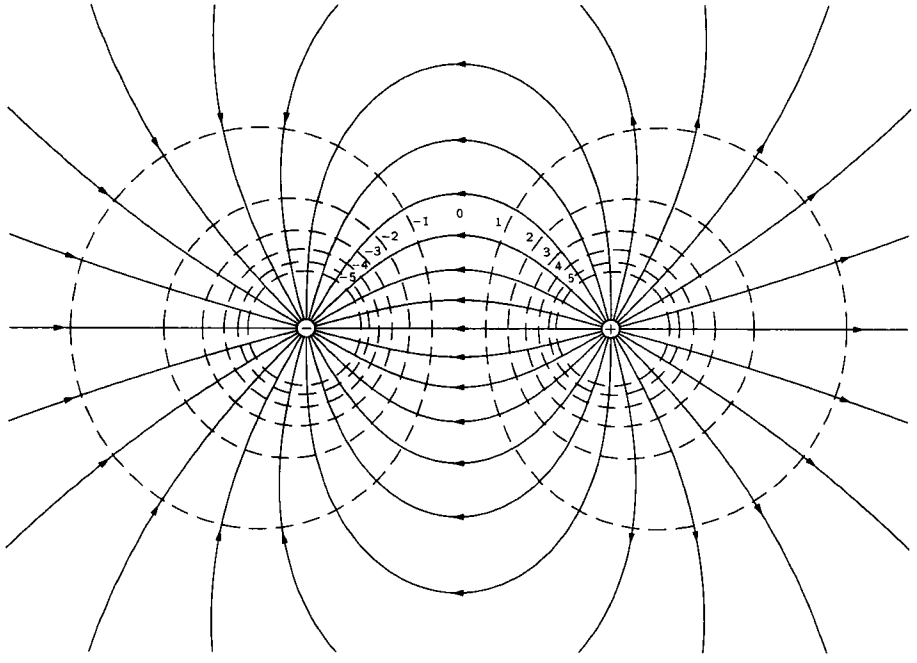
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} \tag{4.39}$$

Bu da, noktasal bir Q yükü için yazacağımız denklemin aynısıdır. Newton'ın problemini, integral almaktan daha kolay bir şekilde çözdük. Elbette bu biraz yanıltıcı bir kolaylıktır. Gauss yasasını kavrayabilmek için o kadar vakit harcadınız ve elbette "o zaman ne vakit kazandık ki?" diyebilirsiniz. Teoremi daha sık kullandıkça emeğinizin karşılığını alacaksınız. Bu sadece bir verimlilik meselesi.

4-8 Alan çizgileri; eşpotansiyel yüzeyler

Şimdi artık elektrostatik alanın geometrik bir tanımını yapabiliriz. Akının içerdeki yüke orantılı olduğunu ifade eden ve elektrik alanın potansiyelin gradyanı olduğunu ifade eden iki elektrostatik yasası aynı zamanda geometrik olarak da gösterilebilir.

Önce bir noktasal yükle başlayalım. Şekil 4-12'deki gibi alan yönünde –alana daima teğet olan– çizgiler çizelim. Bunlara *alan* çizgileri denir. Çizgiler her yerde elektrik vektörünün yönünü gösterir. Vektörün büyüklüğünü de göstermek lazım elbette. Çizgilerin "yoğunluğu"nun elektrik alanın gücünü gösterdiğine dair bir kural koyabiliriz. Çizgilerin yoğunluğundan kastımız, çizgilere dik bir yüzey boyunca birim alana düşen çizgi sayısıdır. Bu iki kuralı kullanarak elektrik alanın bir resmini çekebiliriz. Noktasal bir yük için, çizgilerin yoğunluğu $1/r^2$ çarpanıyla azalmalıdır. Çizgilere dik küresel bir yüzeyin r yarıçapındaki alanı r^2 çarpanıyla arttığına göre, yükün dışındaki *her* yerde çizgi *sayısını* aynı tutarsak, *yoğunluk* alanın büyüklüğüyle orantılı olur. Çizgi sayısını aynı tutabilmek için çizgilerin *sürekli* olması şarttır, yükten itibaren bir başladı mı durmamalıdır. Gauss yasasına göre, alan çizgileri sadece artı yüklerde başlamalı ve eksi yüklerde durmalıdır. q yükünden *çıkan* çizgi sayısı q/ϵ_0'ye eşit olmalıdır.



Şekil 4-13 Eşit ve zıt iki yük için alan çizgileri ve eş potansiyeller.

Şimdi benzeri bir resmi ϕ potansiyeli için de çizebiliriz. Potansiyeli göstermenin en kolay yolu, ϕ'nin sabit olduğu yüzeyler çizmektir. Bunlara *"eşpotansiyel"* yüzeyler denir: aynı potansiyele sahip yüzeyler. Peki, bu eşpotansiyel yüzeyler ile alan çizgileri arasındaki geometrik ilişki nedir? Elektrik alan, potansiyelin gradyanıdır. Gradyan potansiyelin en hızlı değiştiği yöndedir ve dolayısıyla eşpotansiyel yüzeye diktir. Eğer $\boldsymbol{E}$ yüzeye dik *olmasaydı*, yüzey *içinde* bir bileşeni olurdu. O zaman da potansiyel yüzey içinde değişiyor olurdu, fakat o zaman da eşpotansiyel olmazdı. Dolayısıyla eşpotansiyel yüzeyler her yerde elektrik alan çizgilerine dik açıda olmalıdır.

Tek başına bir noktasal yük için, eşpotansiyel yüzeyler yük merkezli kürelerdir. Bu kürelerin kesişimini, yükten geçen bir levhayla, Şekil 4-12'de göstermiştik.

İkinci bir örnek olarak, biri artı biri eksi iki eşit yükün yakınındaki alanı ele alalım. Alanı hesaplamak kolaydır. Alan, her iki yükten kaynaklanan alanların üst üste binmesidir. Öyleyse Şekil 4-2 gibi iki resmi alır ve üst üste koyarız. İmkânsız! Öyle yaparsak birbirini kesen alan çizgileriyle karşılaşırdık ve bu mümkün olamaz çünkü $\boldsymbol{E}$'nin aynı noktada *iki* farklı yönü olamaz. Alan-çizgi resminin dezavantajını artık görmüşsünüzdür. Yeni çizgilerin nasıl yerleşeceğini geometrik akıl yürütmeyle basitçe analiz etmek imkânsızdır. İki farklı resimden, birleşik resmi elde edemeyiz. Elektrik alanlara dair o basit ve derin üst üste binme ilkesinin alan-çizgi resmiyle ifade edilmesi basit değildir.

Alan-çizgi gösteriminin yine de kullanım yerleri vardır ve bu yüzden bir çift eşit (ve zıt) yük için yine de resim çizmek isteyebiliriz. Denklem (4.13)'ten alanları ve (4.24)'ten potansiyelleri hesaplayarak alan çizgilerini ve eşpotansiyelleri çizebiliriz. Şekil 4-13 bunlar esas alınarak çizilmiştir. Ancak önce problemi matematiksel olarak çözmek zorundaydık!

Birimlere Dair

Nicelik	*Birim*
F	Newton
Q	Coulomb
L	Metre
W	Joule
$\rho \sim Q/L^3$	Coulomb/metre^3
$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q^2$	Newton·metre^2/Coulomb^2
$E \sim F/Q$	Newton/Coulomb
$\phi \sim W/Q$	Joule/Coulomb = Volt
$E \sim \phi/L$	Volt/metre
$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	Volt·metre/Coulomb

5

GAUSS YASASININ UYGULAMASI

5-1 Elektrostatik dediğin Gauss yasası artı...
5-2 Elektrostatik alanda denge
5-3 İletkenlerle denge
5-4 Atomların kararlılığı
5-5 Çizgisel yükün elektrik alanı
5-6 Yüklü levha; iki paralel levha arasındaki elektrik alan
5-7 Küresel yük; küresel bir kabuk
5-8 Noktasal yük alanı tam olarak $1/r^2$ midir?
5-9 Bir iletkenin alanları
5-10 Bir iletkenin kovuğundaki alan

5-1 Elektrostatik dediğin Gauss yasası artı...

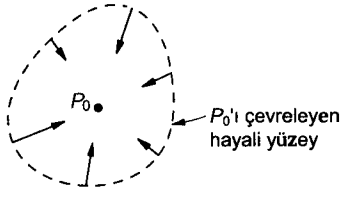
Elektrostatiğin iki yasası vardır: Bir hacimden geçen elektrik alanının akısı, hacmin içindeki yükle orantılıdır. (Gauss yasası) ve elektrik alanın dolaşımı sıfırdır; eş deyişle E bir gradyandır. Bu iki yasadan, elektrostatiğin bütün öngörülerini çıkarabilirsiniz. Ancak, bunları matematiksel olarak ifade etmek bir şey; onları basit ve biraz da pratik şekilde kullanmak başka bir şeydir. Bu bölümde, Gauss yasasını doğrudan kullanarak bir dizi hesaplama yapacağız. Teoremleri ispatlayıp, özellikle iletkenlerdeki etkiler gibi bazı olguları Gauss yasası ile kolaylıkla anlaşılabilecek şekilde açıklayacağız. Gauss yasası tek başına bir problemin çözümünü vermez çünkü uyulacak bir yasa daha vardır. Bu yüzden bazı problemlerin çözümünde Gauss yasasını kullanırken, yanında bir başka şey daha eklememiz gerekir. Örneğin, simetri argümanlarını kullanarak bir alanın nasıl gözüktüğünü kafamızda canlandırmaya çalışacağız. Ya da özellikle, alanın potansiyelin gradyanı olduğu fikrini kullanacağız.

5-2 Elektrostatik alanda denge

Önce şu sorunun üzerinde düşünelim: Noktasal bir yük, diğer yüklerin elektrik alanında ne zaman mekanik olarak kararlı bir dengede olabilir? Gözünüzde canlandırmak için, yatay düzlemde eşkenar bir üçgenin üç köşesinde eksi yükler olduğunu düşünün. Bu üçgenin merkezine yerleştirilmiş artı bir yük orada durabilir mi? İşimizi basitleştirmek için, her ne kadar sonucu değiştirmeyecek olsa da, kütleçekimi göz ardı edeceğiz. Artı yük üzerindeki kuvvet sıfırdır, ama denge hali kararlı mıdır? Hafifçe oynatsak bile, tekrar eski denge haline döner mi? Cevap, hayırdır.

Diğer bir yükün tam üstü hariç, *herhangi* bir elektrostatik alanda kararlı bir denge noktası *yoktur*. Birincisi, bir P_0 noktasında bir yükün dengede olabilmesi için alan sıfır olmalıdır. İkincisi, eğer dengenin kararlı olmasını istiyorsak, yükü P_0 noktasından *herhangi* bir yönde uzaklaştırdığımızda yerdeğiştirmeye zıt bir düzeltici kuvvet olmalıdır. Yakındaki *bütün* noktalardaki elektrik alan P_0 noktasına doğru yönlenmiş olmalıdır. Kolayca görebileceğiniz gibi, eğer P_0 noktasında bir yük yoksa bu durum Gauss yasasına aykırıdır.

Şekil 5-1'de görüldüğü gibi P_0'yu çevreleyen hayali bir yüzeyi ele alalım. Etrafındaki elektrik alan P_0'ya doğruysa, dik bileşenin yüzey integrali sıfır olamaz. Şekilde görülen durumda yüzeyden geçen akı eksi bir sayı olmalıdır. Ama Gauss yasası herhangi bir yüzeyden geçen elektrik alan akısının içerdeki toplam yükle orantılı olması gerektiğini söyler. Eğer P_0'da bir yük yoksa, hayal ettiğimiz alan Gauss yasasını ihlal eder. Boş uzayda, hiç eksi yükün olmadığı bir noktada, artı bir yükü dengede tutmak imkânsızdır. Artı bir yük ancak düzgün dağılmış bir negatif yük kümesinin ortasında olursa dengede *kalabilir*. Bu durumda elbette eksi yük dağılımı elektriksel yükler dışında kuvvetler tarafından bir arada tutulmalıdır.



Şekil 5-1 Eğer P_0 kararlı bir denge halinde duran artı bir yükün konumu olsaydı, etrafındaki bütün elektrik alan ona doğru olurdu.

Bu sonucu, tek bir noktasal yük için elde ettik. Aynı sonucu daha karmaşık şekilde dizilmiş, birbirlerine göre konumları sabit yükler için de elde edebilir miyiz acaba? Örneğin, çubuklarla. Bir çubuk üzerine sabitlenmiş iki eşit yükü ele alalım. Bu tür bir düzenleme de bir elektrostatik alan da dengede olabilir mi? Cevap yine aynıdır, hayır. Çubuk üzerindeki *toplam* yük her yöndeki yerdeğiştirmeleri telafi edemez.

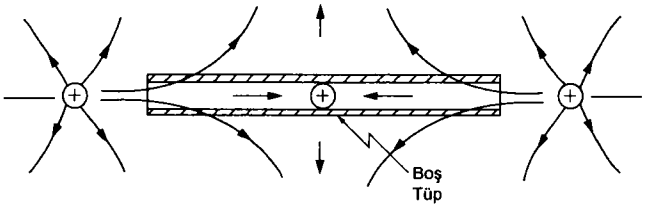
F herhangi bir konumda çubuk üzerindeki toplam yük olsun. Bu durumda F bir vektör alanıdır. Yukarıdaki akıl yürütmeyi kullanarak, kararlı bir denge halindeyken F'in diverjansı eksi bir sayı olmalıdır. Ancak çubuk üzerindeki toplam kuvvet ilk yük çarpı yük noktasındaki alan artı ikinci yük çarpı ikinci yükün noktasındaki alandır:

$$F = q_1E_1 + q_2E_2 \tag{5.1}$$

F'nin diverjansı da şu şekilde yazılır:

$$\nabla \cdot F = q_1(\nabla \cdot E_1) + q_2(\nabla \cdot E_2)$$

Eğer q_1 ve q_2 yüklerinin ikisi de boş uzaydaysa, hem $\nabla \cdot E_1$ hem de $\nabla \cdot E_2$ sıfırdır ve $\nabla \cdot F$ de sıfır olur. Denge için eksi olması gerektiğini hatırlatırım. Bu akıl yürütmeye göre, hiçbir yük kombinasyonunun boş uzaydaki elektrostatik alanda kararlı bir denge halinde olması mümkün değildir.



Şekil 5-2 Eğer mekanik engeller varsa bir yük dengede kalabilir.

Dikkat edin, eğer mekanik engeller varsa bir yükün dengede kalması mümkündür. Örneğin, içi boş bir tüp düşünelim. Yükümüz ileri geri serbestçe hareket edebilsin, ancak yanlara gidemesin. Çizgileri tüpten içeri doğru uzanan ama tam ortada yanlara doğru dışa giden bir elektrik alan tasarlamak kolaydır Şekil 5-2'de görüldüğü gibi tüpün iki ucuna birer artı yük yerleştiririz bunun için. Artık, E'nin diverjansı sıfır olsa da bir denge noktası vardır. Elbette, duvarlardan kaynaklanan o "elektriksel olmayan" kuvvetler olmasa yükümüz dengede olmazdı.

5-3 İletkenlerle denge

Konumu sabit yüklerden oluşan bir sistemin alanında kararlı bir nokta yoktur. Peki, yüklü iletkenlerden oluşan bir sistemde? Yüklü iletkenlerden oluşmuş bir sistem, noktasal bir yükün kararlı bir dengede olabileceği bir nokta içeren alan yaratabilir mi? İletkenin üzerindeki noktalar haricinde elbette. İletkenlerin içindeki yüklerin serbestçe dolaşabilmesi onların bir özelliğidir. Bir noktasal yükü hafifçe oynattığımızda, iletkenlerin üzerindeki diğer yükler noktasal yükün bu değişimini telafi edebilecek şekilde hareket edebilir mi? Cevap hâlâ hayırdır. Az önceki ispatımız bunu göstermez. Bu tür bir durum için ispat daha zordur, bu yüzden sadece gidiş yolunu göstereceğim.

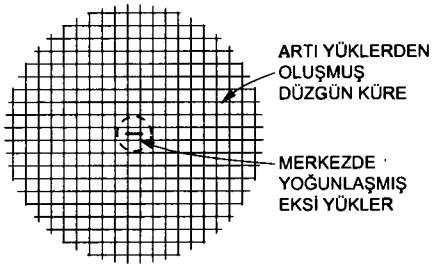
Öncelikle şunu bilin, yükler kendilerini iletken üzerinde, ancak hareketleri toplam potansiyel enerjilerini azaltabilirse yeniden konumlandırabilirler. Bir miktar enerji de iletken içindeki hareketleri esnasında ısı enerjisi olarak kaybolacaktır. Daha önceden gösterdiğimiz bir başka şey de, bir alanı meydana getiren yükler *sabitse*, alandaki herhangi bir P_0 sıfır noktası çevresinde öyle bir yön vardır ki P_0 noktasından bu yöne doğru noktasal yükü uzaklaştırdığımızda sistemin enerjisi (kuvvet P_0'dan *uzak* olduğu için) *azalır*. İletkendeki yükleri farklı şekilde düzenlemek sadece potansiyel enerjilerini daha da düşürecektir, dolayısıyla (sanal iş ilkesi gereği) yüklerin hareketleri o yöndeki kuvveti sadece daha da *artıracaktır*, tersine çeviremeyecektir.

Çıkarımlarımız bir yükün elektriksel kuvvetlerle dengelenemeyeceği anlamına gelmez. Uygun cihazlarla etraftaki yüklerin boyutlarını veya konumlarını kontrol edebilirseniz bu mümkündür. Kütleçekim alanında bir noktada duran bir çubuğun dengesiz olduğu malumunuzdur, ama bu onu parmak ucunda dengede tutamayacağınız anlamına gelmez. Benzer şekilde, elektrik alanlar *değişkense* bir yükü de bir noktada tutabilirsiniz. Ama bunu, pasif –*statik*– bir sistemle yapamazsınız.

5-4 Atomların kararlılığı

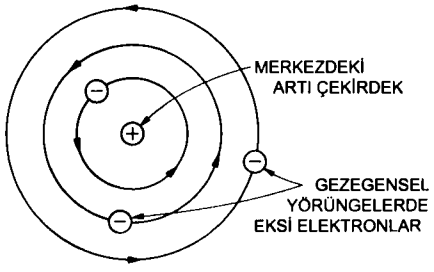
Madem yükler bir noktada sabit tutulamıyor, bu durumda maddenin de elektrostatik yasalarına tabi statik *noktasal* yüklerden (elektronlar ve protonlar) meydana geldiğini düşünmek mümkün olmaz. Öyle bir statik yapı imkânsızdır; kesinlikle yıkılır.

Bir zamanlar atomun bir küre gibi olduğu, artı yüklerin bu küre içinde aynı bir üzümlü kekteki üzümler gibi düzgün bir şekilde dağıldığı ve eksi yüklerin de aynı Şekil 5-3'teki gibi merkezde yoğunlaştığı iddia edilmişti. Bu ilk atom modeli Thomson tarafından dile getirilmişti; ancak Rutherford, Geiger ve Marsden deneyinden yola çıkarak, asıl artı yüklerin çekirdek dediği bir yapıda çok yoğun şekilde bulunduğu sonucuna vardı. Böylece Thomson'ın statik atom modeli tedavülden kalktı. Daha sonra Rutherford ve Bohr Şekil 4-5'teki gibi elektronların belli yörüngelerde dolaştığını ve dengenin dinamik olabileceğini öne sürdüler. Bu modele göre elektronların çekirdeğe doğru düşmesini yörüngesel hareketleri engeller. Halihazırda, bu resimdeki en az bir hatayı biliyoruz. Dairesel hareketten dolayı elektronlar ivmelenmek zorundadır ve dolayısıyla da enerji yayarlar. Yayılan enerji yüzünden yörüngede kalmak için ihtiyaç duydukları kinetik enerji azalır ve çekirdeğe doğru düşerlerdi. Yine dengesiz!



Şekil 5-3 Bir atomun Thomson modeli.

Artık atomların kararlılığını kuantum mekaniği yasalarıyla açıklıyoruz. Elektrostatik kuvvetler elektronu mümkün olduğunca çekirdeğe yakın bir noktaya çekmeye çalışırlar, fakat belirsizlik ilkesi gereği elektronlar atomda belli bir hacimde dağılmış şekilde bulunmalıdırlar. İçinde bulundukları hacim ne kadar ufak olursa, momentumlarının belirsizliği o kadar artar. Bu da –elektriksel çekimden kaçabilmeleri için– çok yüksek bir enerjiye sahip olmalarını gerektirir. Bu durumda net sonuç Thomson modelinden pek farkı olmayan bir elektriksel dengedir. Farkı, *negatif* yükün (elektronun kütlesi protonunkinden çok daha az olduğu için) yayılmış olmasıdır.

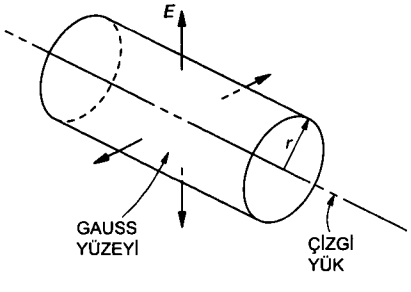


Şekil 5-4 Bir atomun Rutherford-Bohr modeli.

5-5 Çizgisel yükün elektrik alanı

Küresel, silindirik veya düzlemsel simetri içeren bazı elektrostatik alan problemlerini çözmek için Gauss yasası kullanılabilir. Bu bölümün geri kalanında Gauss yasasını böyle birkaç problemi çözmek için kullanacağız. Bu problemleri kolayca çözmek insana bu yöntemin çok güçlü olduğu ve her probleme uygulanabileceği fikrini verebilir; ne yazık ki bu yanlıştır. Bir süre sonra çözülebilecek problem kalmayacaktır. Endişelenmeyin, sonraki bölümlerde elektrostatik alanları keşfetmek için daha güçlü yöntemler geliştireceğiz.

İlk örneğimiz, silindirik bir simetriye sahip sistem. Elimizde çok uzun ve düzgün yük dağılımına sahip bir çubuk olsun. Düzgün yük dağılımından kastımız, elektrik yüklerinin uzun bir düz çizgi üzerinde, birim uzunluk başına λ yük dağılımıyla dağılmış olmasıdır. Amacımız da elektrik alanı hesaplamak. Çizginin her parçasının elektrik alana katkısını toplayarak problemi çözebiliriz elbette. Ama biz bu şekilde değil, Gauss yasasını ve biraz da tahmin kullanarak çözeceğiz problemi. Öncelikle, elektrik alanın çizgiden dışarı radyal olarak yayıldığını varsayacağız. Simetri dolayısıyla, bir tarafta yüklerden kaynaklanan herhangi bir bileşen diğer tarafta eşit bir eksenel bileşenle karşılanmalıdır. Bu sadece radyal bir alanla mümkündür. Ayrıca, çizgiden eşit uzaklıktaki her noktada alanın büyüklüğünün aynı olması da akla yatkın ve barizdir. İspat etmesi kolay olmayabilir, ancak eğer uzay simetrikse bu doğrudur, biz de zaten simetrik olduğuna inanıyoruz.



Şekil 5-5 Bir çizgi yükle eş eksenli silindirik Gauss yüzeyi.

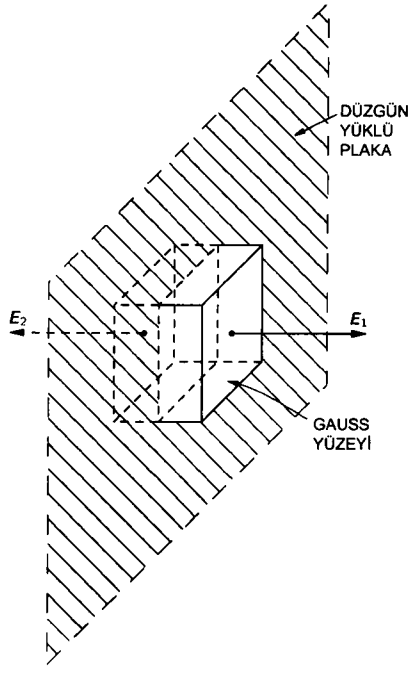
Gauss yasasını uygulamak için, Şekil 5-5'te görüldüğü gibi, çizgi yükle eş eksenli ve silindir şeklinde *hayali* bir yüzeyi ele alalım. Gauss yasasına göre, yüzeyden geçen E'nin toplam akısı içerdeki yükün ϵ_0'ya bölünmesiyle hesaplanır. Alanı yüzeye göre dik olarak varsaydığımızdan, dik bileşen alanın büyüklüğüdür. Gelin ona E diyelim. Silindirin yarıçapına r ve uzunluğuna da kolaylık olsun diye bir birim diyelim. Silindirik yüzeyden geçen akı E çarpı yüzey alanı, diğer bir deyişle $2\pi r$'dir. İki uç yüzeyden geçen akı sıfırdır, çünkü elektrik alan

onlara teğettir. Yüzeyimizin altındaki toplam yükse λ, çünkü hatırlarsanız çizginin uzunluğunu bir birim almıştır. Bu durumda Gauss yasasına göre,

$$E \cdot 2\pi r = \lambda/\epsilon_0$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{5.2}$$

olur. Gördüğünüz gibi çizgisel bir yükün elektrik alanı, çizgiden uzaklıkla ters orantılıdır.



Şekil 5-6 Düzgün yüklenmiş bir levha yakınındaki elektrik alan, Gauss yasasını hayali bir kutuya uygulayarak bulunabilir.

5-6 Yüklü levha; iki paralel levha arasındaki elektrik alan

Şimdiki problemimiz, düzgün yüklenmiş bir levhanın alanını hesaplamak. Levhanın uzamsal olarak sonsuz olduğunu ve birim alan başına yükün σ olduğunu varsayalım. Bir varsayımda daha bulunacağız. Simetriden dolayı alanın yönünün her yerde yüzeye dik olduğunu düşünüyoruz ve *dünyadaki diğer yüklerden kaynaklanan başka alan yoksa*, alanlar büyüklük açısından her iki yüzde de eşit olmalıdır. Bu seferki Gauss yüzeyimiz, Şekil 5-6'da görüldüğü gibi, levhayı kesip geçen dikdörtgen bir kutudur. Levhaya paralel iki yüzün alanı eşittir. Bu alana A diyelim. Alan bu iki yüzeye dik ve diğer dört yüzeye paraleldir. Toplam akı E çarpı birinci yüzün alanı artı E çarpı diğer zıt yüzün alanıdır. Diğer dört yüzden herhangi bir katkı gelmez akıya. Kutunun içindeki toplam yük σA. Bu akıyı içerdeki yüke eşitlediğimizde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Bunu kullanarak, şu basit ama önemli sonucu elde ederiz:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{5.3}$$

Hatırladınız mı? Aynı sonucu daha önceki bir bölümde, tüm yüzey üzerinden integral alarak bulmuştuk. Gauss yasası bize sonucu, bu durum için, daha hızlı verdi. Ama bu, bir önceki yöntem gibi, her duruma uygulanabileceği anlamına gelmez.

Bu sonucun *sadece* levha üzerindeki yüklerden kaynaklanan alan için olduğunu özellikle vurgulamak isterim. Eğer etrafta başka yükler varsa, levha etrafındaki elektrik alan Denk. (5.3)'ün sonucu ile diğer yüklerden kaynaklanan alanın toplamı olur. Bu durumda Gauss yasasına göre aşağıdaki sonuç çıkar:

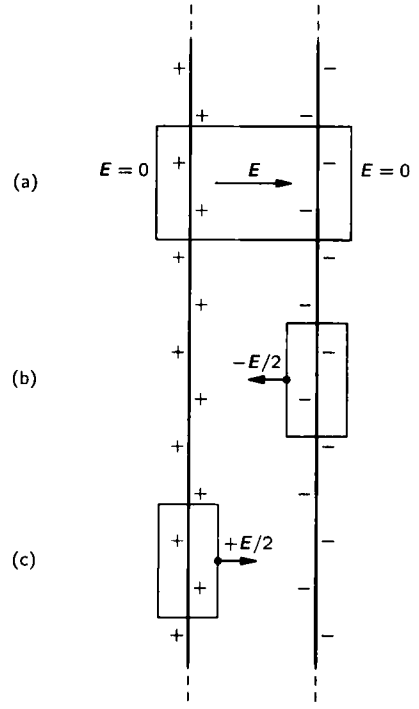
$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{5.4}$$

Denklemdeki E_1 ve E_2, levhanın her iki yüzünden dışarı doğru olan alanlardır.

Eğer dışardaki dünyanın simetrik olduğunu varsayarsak, eşit ve zıt yük yoğunluklarına ($+\sigma$, $-\sigma$) sahip iki paralel levha problemini çözmek kolaydır. Her bir levha için hesaplanan çözümü üst üste bindirerek veya her iki levhayı kesip geçen bir kutu düşünerek, iki levha *dışındaki* alanın sıfır olduğu kolaylıkla görülür (Şek. 5-7a). Şekil 5-7'nin (b) ve (c) kısımlarına bakarsanız, iki levha arasındaki alanın tek bir levhadan kaynaklanan alanın iki katı olduğunu görürsünüz. Böylece şu sonuçlara varırız:

$$E \text{ (levhalar arasındaki)} = \sigma/\epsilon_0 \tag{5.5}$$

$$E \text{ (dışarıda)} = 0 \tag{5.6}$$



Şekil 5-7 İki yüklü levha arasındaki alan σ/ϵ_0 olarak bulunur.

5-7 Küresel yük; küresel bir kabuk

Daha önce, 4. Bölümde, Gauss yasasını kullanarak düzgün yüklenmiş küresel bir bölgenin dışındaki alanı hesaplamıştık. Aynı yöntemi kullanarak kürenin *içindeki* noktalardaki alanı da hesaplayabiliriz. Sözgelimi, bir atom çekirdeğinin içindeki alanı yaklaşık olarak hesaplamak için. Her ne kadar çekirdek-

teki protonlar birbirlerini itse de, yeğin nükleer kuvvetler sayesinde çekirdek içinde düzgünce yayılmışlardır.

Yarıçapı R olan ve düzgün yük yoğunluğuna sahip bir küremiz olsun. Birim hacim başına yük de ρ olsun. Yine, simetriyi temel aldığımız akıl yürütmeyi kullanarak alanın radyal olduğunu ve merkezden eş uzaktaki noktalar için büyüklüğünün olduğunu varsayarız. Merkezden r uzaklıktaki alanı bulmak için, Şekil 5-8'de görüldüğü gibi r yarıçapında ($r < R$) bir küre varsayalım. Bu durumda yüzeyden geçen toplam akı şu olur:

$$4\pi r^2 E$$

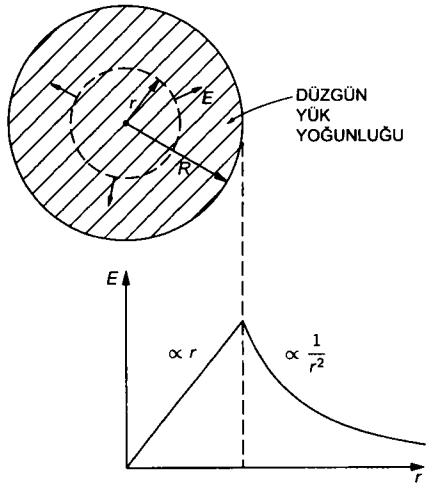
Gauss yüzeyimizin içindeki yük hacim çarpı ρ olur:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Gauss yasasını kullanarak, alanın büyüklüğünü aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \qquad (r < R) \tag{5.7}$$

Dikkat ederseniz, bu denklem $r = R$ olduğunda doğru bir sonuç verir. Diğer bir deyişle, elektrik alan yarıçapla *orantılıdır* ve dışa doğru radyal yöndedir.



Şekil 5-8 Düzgün yük yoğunluğuna sahip bir kürenin içindeki alanı bulmak için Gauss yasası kullanılabilir.

Düzgün yüklü küre için kullandığımız akıl yürütmeyi, ince bir küresel yük kabuğu için de kullanabiliriz. Alanın her yerde radyal olduğunu ve küresel simetrik olduğunu varsaydığınızda, Gauss yasasını kullanarak, kabuk dışındaki alanın noktasal bir yükle aynı olduğunu ve kabuğun içindeki her noktada alanın sıfır olduğunu kolaylıkla görebilirsiniz. Kabuğun içindeki bir Gauss yüzeyi yük içermez.

5-8 Noktasal bir yükün alanı tam olarak $1/r^2$ midir?

Kabuğun içindeki alanın *nasıl* sıfır olduğunu irdeledikçe, neden Gauss yasasının Coulomb kuvvetinin tam olarak mesafenin karesine dayandığı için doğru olduğunu daha iyi anlayacağız. Düzgün dağılmış yük dağılımına sahip küresel bir kabuğun içindeki bir P noktasını ele alalım. Tepe noktası P olan ve küre yüzeyine doğru uzanan bir koni hayal edin. Koninin yüzeyde kestiği alan, Şekil 5-9'da görüldüğü gibi, Δa_1 olsun. Aynı tepe noktasına sahip, ancak zıt yönde bir başka koni de yüzeyde Δa_2 alanını kessin. Eğer bu yüzeylerin tepe noktasına olan uzaklıkları r_1 ve r_2 ise, alanların oranı

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

olur. Bu sonucu, küre içindeki herhangi bir P noktası için geometri kullanarak gösterebilirsiniz.

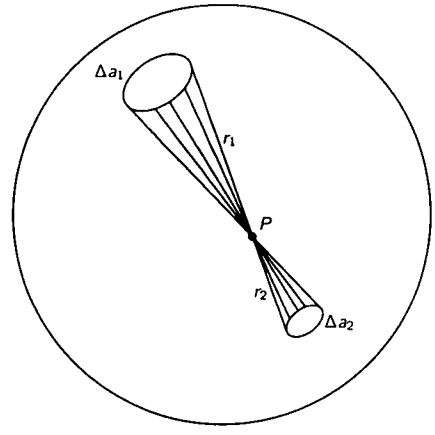
Eğer kürenin yüzeyi düzgün şekilde yüklüyse, alanlardaki Δq yükü alanlarla orantılıdır, dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}$$

Coulomb yasasına göre P noktasında üretilen alanların büyüklükleri bu iki yüzey parçasıyla orantılıdır:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Delta q_2/r_2^2}{\Delta q_1/r_1^2} = 1$$

Gördüğünüz gibi, alanlar birbirini götürüyor. Bütün yüzeyi bu şekilde eşleşmiş yüzeylerle tarayabileceğimiz için, P noktasındaki toplam alan sıfırdır. Ancak, Coulomb yasasında r'nin üssü tam iki olmasaydı bu sonucu elde edemezdik.

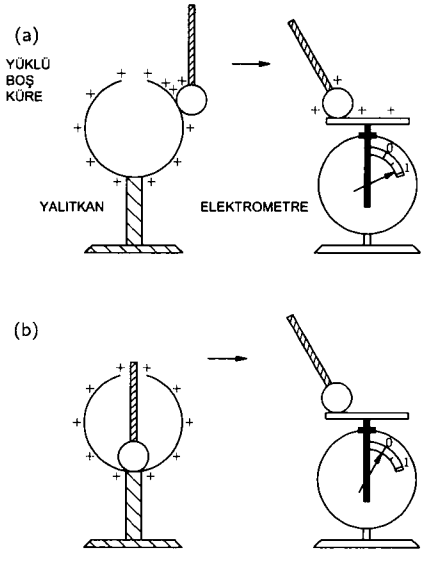


Şekil 5-9 Küresel bir kabuk yükünün içindeki herhangi bir P noktasında alan sıfırdır.

Gauss yasası, Coulomb'un ters kare yasasına dayanır. Eğer kuvvet yasası tam olarak ters kare olmasaydı, düzgün yüklenmiş bir kürenin içindeki elektrik alan sıfır olamazdı. Örneğin, kuvvet daha hızlı değişseydi, diyelim r'nin küpüyle, yüzeyin iç noktaya daha yakın olan kısmı uzak olan kısmından çok daha büyük bir alan meydana getirirdi. Bu da artı bir yüzey yükü için radyal olarak içe

doğru bir alan demektir. Buradan yola çıkarak ters kare yasasının tam olarak doğru olup olmadığını zarif bir şekilde ispatlayabiliriz. Tek yapmamız gereken, düzgün yüklenmiş küresel bir kabuğun içindeki alanın tam olarak sıfır olup olmadığını netleştirmek.

Şansımıza, bunu anlamanın bir yolu var. Fiziksel bir niteliği çok yüksek hassasiyette ölçmek genelde zordur. Yüzde bir hassasiyete ulaşmak çok zor değildir, ama diyelim ki Coulomb yasasını milyarda bir hassasiyetle ölçmek istiyoruz. Nasıl başarırız bunu? Elimizdeki tekniklerle, iki yük arasındaki *kuvveti* bu kadar hassas ölçmek mümkün değildir. Ama yüklü bir kürenin içindeki elektrik alanların belli bir değerden *küçük* olduğunu gösterebilirsek hem Gauss yasasının yüksek derecede hassas bir ölçümünü yapmış oluruz, hem de Coulomb yasasının ters kareye bağlı olduğunu ortaya koymuş oluruz. Aslında yaptığımız şey, kuvvet yasasıyla ideal bir ters kareyi *karşılaştırmaktır*. Bu şekilde birbirine eşit veya yaklaşık eşit, karşılaştırmalar genelde en hassas fiziksel ölçümlerin temelidir.



Şekil 5-10 Kapalı bir iletken kabuğun içinde elektrik alan sıfırdır.

Yüklü bir kürenin içindeki alanı nasıl gözlemleyebiliriz? Bunu yapmanın bir yolu, bir nesneyi iletken kürenin içine dokundurarak onu yüklemeye çalışmaktır. Nasıl yani dediğinizi duyar gibiyim. Çok basit. Metal bir topu yüklü bir nesnenin dışına dokundurduktan sonra elektrometreye dokundurduğumuzda, elektrometre yüklenir ve iğnesi hareket eder (Şekil 5-10a). Küremiz yüklenir, çünkü yüklü kürenin dışındaki elektrik alanlar yüklerin küremize geçmesine yol açmıştır. Aynı deneyi kürenin *içine* dokundurarak yaparsak, elektrometrenin iğnesinin hareket etmediğini görürüz. Böylece basit ve etkili bir şekilde içerdeki alanın dışardaki alanın oldukça düşük yüzdesi olduğunu ve Gauss yasasının en azından yaklaşık olarak doğru olduğunu göstermiş oluruz.

Bunu, diğer bir deyişle iletken bir kabuğun içindeki alanın sıfır olduğunu ilk fark eden Benjamin Franklin olmuştu. Sonuç ona biraz garip gelmişti. Gözlemini bilim insanı arkadaşı Joseph Priestley'e ilettiğinde, Priestley ona bunun ters kare yasasından doğmuş olabileceğini söyledi. Ne de olsa küresel bir madde kabuğunun içerde hiçbir kütleçekim alanı yaratmadığı biliniyordu. Ama Coulomb, kuvvet yasasının ters kareye dayandığını 18 yıl sonra ölçmüştü, Gauss yasasıysa çok daha sonra fizik dünyasına girmiştir.

Gauss yasasını kontrol etmek için yapılan deneylerde, yeterince büyük bir kürenin içine bir elektrometre koyup, elektrometrenin iğnesinin oynayıp oynamadığına bakılır. Her zaman sıfır sonucu elde edilir. Kürenin geometrisi ve elektrometrenin hassasiyetini bilirsek, gözlemlenecek en küçük alanı hesaplamak mümkündür. Ondan sonra da, üssün ikiden sapma oranı için bir üst limit belirleyebiliriz. Bunu da, elektrostatik kuvvetin $r^{-2+\epsilon}$ terimine bağlı olduğunu ifade edip, ϵ için bir üst limit koyarak yaparız. Bu yöntemi kullanarak, Maxwell ϵ'nin 1/10.000'den küçük olduğunu belirlemişti. Deney defalarca tekrarlandı ve 1936 yılında Plimpton ve Lawton tarafından geliştirildi. Sonuçta Coulomb yasasındaki üssün sadece milyarda bir oynadığı görüldü.

Aklınızdaki soruyu duyar gibiyim: Coulomb yasasının değişik koşullarda ne kadar hassas olduğunu biliyor muyuz? Az önce tarif ettiğimiz deneyler, alanın mesafeye olan bağlılığını santimetreler cinsinden ölçmektedir. Peki, bir atomun içindeki inanılmaz küçük mesafelerde? Örneğin, elektronun aynı ters kare yasasıyla çekirdeğe çekildiğine inandığımız hidrojen atomunda? Tamam, elektronun davranışlarının mekanik kısmı için kuantum mekaniğini kullanmalıyız; ama kuvvet bildiğimiz elektrostatik kuvvettir. Problemi tanımlayabilmek için, elektronun potansiyel enerjisi çekirdeğe olan mesafesinin bir fonksiyonu olarak bilinmeli ve Coulomb yasası mesafenin üssüyle ters orantılı bir potansiyel vermektedir. Çok kısa mesafeler için üssü ne kadar hassas bilebiliriz? 1947 senesinde Lamb ve Retherford tarafından hidrojenin enerji seviyelerinin göreceli konumları üzerine yapılan çok dikkatli ölçümler sayesinde, üssün atomik ölçekte de, bir Angström mesafesinde (10^{-8} cm) yine milyarda bir oynadığını biliyoruz.

Lamb-Retherford deneyinin hassas sonucu, yine bir fiziksel "kaza" sayesinde mümkün oldu. Hidrojen atomunun iki seviyesinin aynı enerjiye sahip olması *ancak* potansiyel tam olarak $1/r$ değeriyle değişirse mümkündür. Bir seviyeden di-

ğerine geçerken soğurulan veya yayılan fotonların ω frekansını, enerji farkı için $\Delta E = \hbar\omega$ kullanarak, hesaplayarak enerjiler arasında çok az bir *fark* bulundu. Hesaplamalar gösterdi ki, eğer kuvvet yasasındaki $1/r^2$'nin üssü 2'den bir milyarda birden daha çok oynasaydı o zaman ΔE olduğundan çok daha farklı olurdu.

Aynı durum, daha da kısa mesafelerde de geçerli midir? Nükleer fizik deneylerinde yapılan ölçümler gösterdi ki, 10^{-13} cm gibi tipik nükleer mesafelerde bile elektrostatik kuvvetler vardır ve yine ters kare yasasına uymaktadırlar. Daha sonraki bölümlerden birinde bazı ispatlara bakacağız. Bildiğimiz kadarıyla Coulomb yasası, en azından bir ölçüde, 10^{-13} santimetre gibi mesafelerde bile hâlâ etkindir.

Peki 10^{-14} santimetrede? Bu mesafede araştırma yapabilmek için protonları yüksek enerjili elektronlarla bombalamak ve nasıl saçıldıklarını gözlemlemek gerekir. Bugüne kadar elde ettiğimiz sonuçlar, yasanın bu mesafelerde geçerli olmadığını ortaya koymuştur. Görünen o ki, elektriksel kuvvet 10^{-14} santimetreden kısa mesafelerde 10 kat daha zayıf. Bunu iki şekilde açıklayabiliriz. Birincisi Coulomb yasasının o kadar mesafelerde çalışmaması; diğeriyse nesnelerimizin, diğer bir deyişle elektron ve protonların, noktasal yükler olmamasıdır. Belki de ya elektron ya da proton ya da her ikisi de bir çeşit yayılmadır. Birçok fizikçi proton yükünü yayılmış olarak düşünmeyi tercih eder. Protonların mezonlarla güçlü bir şekilde etkileştiğini biliyoruz. Bu da protonun, zaman zaman, etrafında bir π^+ mezon bulunan bir nötron gibi var olduğu anlamına gelir. Böyle bir düzenleme, protonun –ortalamada– pozitif yüklü küçük bir küre olarak davranmasını sağlar. Küresel bir yükten kaynaklanan alanın da merkezine kadar $1/r^2$ terimiyle değişmediğini biliyoruz. Büyük ihtimal proton yükü yayılmıştır, ancak pionlara ilişkin kuram hâlâ eksiktir dolayısıyla Coulomb yasasının çok küçük mesafelerde etkin olmaması da bir ihtimaldir. Konu hâlâ tartışmaya açık.

Bir soru daha: Ters kare yasası bir metre ve ayrıca 10^{-10} metre gibi mesafelerde geçerli; fakat $1/4\pi\epsilon_0$ katsayısı da aynı mıdır? Cevap, evet. En azından milyonda 15 hassaslığında.

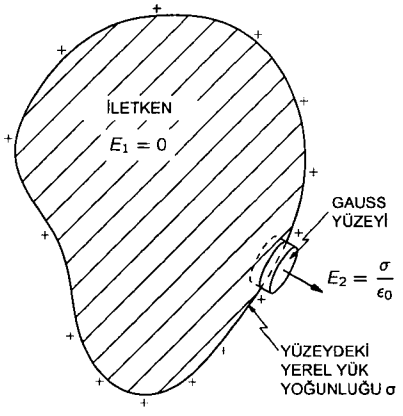
Şimdi, Gauss yasasının denklemle doğrulanması konusunu konuşurken ucundan değindiğimiz önemli bir meseleye geri dönelim. Muhtemelen aklınızda şu soru dönüp duruyordu. Nasıl oldu da Maxwell veya Plimpton ile Lawton yaptıkları deneylerde, ellerindeki iletken küre ancak mükemmel bir küre olsaydı ulaşabilecekleri hassasiyete ulaşabildiler? Milyarda bir hassasiyet gerçekten ciddi bir başarıdır ve bu hassasiyeti sağlayabilecek bir küreyi gerçekten yapıp yapamadıklarını sorabilirsiniz. Gerçek bir kürede az da olsa pürüzler vardır. Pürüzler varsa, o pürüzlerin içinde elektrik alan olmaz mı? Bu kadar mükemmel bir kürenin gerekli olmadığını göstermek istiyorum. Aslında, kapalı iletken *herhangi* bir şeklin içinde hiç alan olmadığını göstermek mümkündür. Diğer bir deyişle, deneyler $1/r^2$'ye bağlıydı ama şeklin küre olmasıyla hiçbir ilgileri yoktu. Elbette şu var, Coulomb yasasının yanlış olduğunu varsayarak, bir küre içindeki alanların *ne olabileceğini* hesaplamak daha kolaydır. Şimdi bu anlattıklarımızı açalım biraz, ama önce elektriksel iletkenlerin bazı özelliklerini bilmemiz lazım.

5-9 Bir iletkenin alanları

Elektriksel iletken içinde birçok "serbest" elektron bulunan bir katı cisimdir. Elektronlar malzemenin *içinde* serbestçe dolaşabilirler, ama yüzeyi terk edemezler. Bir metal içinde o kadar çok serbest elektron vardır ki, herhangi bir elektrik alan çok sayıda elektronu hareketlendirebilir. Ya dış enerji kaynaklarıyla elektronların akımı aynı şekilde devam ettirilmelidir ya da elektronlar, ilk baştaki alanı üreten kaynakları boşaltırken durmaya başlar. "Elektrostatik" durumlarda, sürekli akım kaynaklarını hesaba katmayız (onları ilerde manyetostatik çalışırken değerlendireceğiz), dolayısıyla elektronlar, iletken içindeki elektron alan sıfır olacak şekilde konumlarını ayarlayana kadar hareket ederler. Bu dediğimiz genelde göz açıp kapayıncaya kadar, saniyenin küçük bir bölümünde meydana gelir. Eğer yine de elektrik alan kalsaydı, kalan o elektrik alan elektronların hareket etmesine yol açardı. Elektrostatik açısından tek çözüm alanın içerdeki her yerde sıfır olmasıdır.

Şimdi gelin, yüklü bir iletken nesnenin *iç kısmını* ele alalım. "İç kısmından" kastımız, *metalin* kendisidir. Metal iletken olduğundan, iç kısmındaki alan sıfır olmalıdır ve dolayısıyla ϕ potansiyelin gradyanı da sıfırdır. Bu demek oluyor ki, ϕ bir noktadan diğerine değişkenlik göstermez. Her iletken bir eşpotansiyel-*bölgedir* ve yüzeyi de eşpotansiyel yüzeydir. İletken bir malzemenin her yerinde elektrik alan sıfır olduğundan, $\boldsymbol{E}$'nin diverjansı sıfırdır ve Gauss yasası gereği iletkenin *iç kısmındaki* yük yoğunluğu sıfır olmalıdır.

Eğer iletken içinde hiç yük yoksa, nasıl yükleyebiliriz onu? Bir iletkeni "yüklemek" derken neyi kastediyoruz? Yükler nerededir? Cevap, yüklerin iletkenin yüzeyinde bulunduğudur. Yüzeyde, onları iletkeni terk etmekten alıkoyan büyük kuvvetlerin olduğu yerde. Elektronlar tam anlamıyla "serbest" değildirler. Katı hal fiziği çalıştığımız zaman, herhangi bir iletkenin fazla yükünün yüzeyden sadece bir iki atomik levha kadar uzakta olduğunu göreceğiz. Ama şimdilik, bir iletkene herhangi bir yük konulduğunda, iletken hepsini yüzeyde biriktirecektir. İletkenin iç kısmında yük yoktur.



Şekil 5-11 Bir iletkenin yüzeyinin hemen dışındaki elektrik alan, yüzeydeki yerel yük yoğunluğuyla orantılıdır.

Bir şeyi daha belirtmekte fayda var, bir iletkenin yüzeyinin *hemen dışındaki* elektrik alan yüzeye dik olmalıdır. Teğet bileşeni olamaz. Neden? Çünkü eğer teğet bileşeni olsaydı o zaman elektronlar yüzey *boyunca* hareket ederdi. Bunu durduracak bir hareket yoktur. Bir başka deyişle, elektrik alan çizgileri eşpotansiyel yüzeylere göre daima dik açıdadırlar.

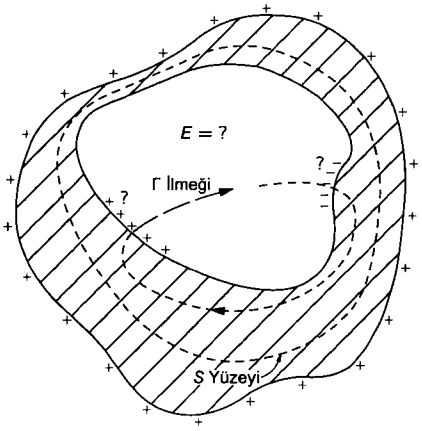
Ayrıca, Gauss yasasını kullanarak, bir iletkenin yüzeyinin hemen dışındaki alanın şiddetini yüzeydeki yerel yük yoğunluğuna bağlayabiliriz. Bir Gauss yüzeyi için küçük bir silindirik kutu düşünelim. Şekil 5-11'de görüldüğü gibi, yarısı içerde yarısı da yüzeyin dışında olsun. $\boldsymbol{E}$ akısının toplamına, sadece kutunun iletken dışında kalan kenarından katkı vardır. Bu durumda iletkenin yüzeyinin hemen dışındaki alan için şunu yazabiliriz:

İletkenin dışında:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{5.8}$$

Burada σ yüzeydeki *yerel* yük yoğunluğudur.

Peki, neden bir iletken üzerindeki levha yükü, *sadece* yüklü bir levhadan farklı alan üretir? Bir başka deyişle neden (5.8), (5.3)'ün iki katıdır. Bunun nedeni, kolaylıkla görebileceğiniz üzere, iletken için etrafta "başka"yük yoktur *dememiş* olmamızdır. İletkenin içinde $\boldsymbol{E} = 0$ diyebilmemiz için başka yükler olmalıdır. Yüzeydeki bir P noktasının hemen yakınındaki yüklerin oluşturduğu elektrik alan, hem yüzeyin içinde hem de dışında, $E_{\text{yerel}} = \sigma_{\text{yerel}}/2\epsilon_0$ olur. İletkendeki geriye kalan bütün yükler P noktasında, E_{yerel} elektrik alanına büyüklük olarak eşit bir elektrik alan üretmek için "bir araya" gelirler. İçerdeki toplam elektrik alan sıfırlanır ve dışardaki alan da $2E_{\text{yerel}} = \sigma/\epsilon_0$ olur.



Şekil 5-12 Herhangi bir şekildeki iletken içindeki boş kovuktaki alan nedir?

5-10 Bir iletkenin kovuğundaki alan

Sıra içi oyuk bir iletkende. *Metalde* elektrik alan yoktur, peki ya *kovukta*? Şimdi, eğer bir kovuk *boşsa, kovuğun veya iletkenin şekli ne olursa olsun*, içinde hiç alan olmadığını göstereceğiz. Şekil 5-12'deki resim bunun bir örneğidir. Aynı şekildeki S gibi, bütün kovuğu çevreleyen ve iletken malzemenin içinde kalan bir Gauss yüzeyi düşünün. S'nin her yerinde alan sıfırdır, dolayısıyla S içinden geçip giden bir akı yoktur ve S içindeki *toplam* yük sıfırdır. Küresel bir kabuk için, simetriden yola çıkarak, içerde *hiç* yük olamayacağını öne sürebilirsiniz. Ancak diyebileceğimiz, iletkenin iç yüzeyinde genel olarak, eşit sayıda artı ve eksi yük olduğudur. Şekil 5-12'de belirtildiği gibi, bir kısımda artı yüzey yükü ve diğer kısmında eksi yüzey yükü *olabilirdi*. Böyle bir şeyi Gauss yasasıyla çürütemezsiniz.

Elbette, gerçekte olan iç yüzeyde bulunan eşit ve birbirine zıt yüklerin hareket ederek birbirleriyle karşılaşması ve birbirlerini sıfırlamasıdır. $\boldsymbol{E}$'nin dolaşımının her zaman sıfır olması gerektiğine dair elektrostatik yasasını kullanarak

birbirlerini tamamen sıfırlamaları gerektiğini gösterebiliriz. İç yüzeyin bazı bölümlerinde yük olduğunu varsayalım. Şu ana kadar öğrendiklerimizden biliyoruz ki, bir başka yerde eşit sayıda zıt yük olmalıdır. Ayrıca, $\boldsymbol{E}$'nin çizgileri artı yüklerden başlayıp eksi yüklerde bitmelidir. Zira kovukta hiç yük olmayan bir durumu incelemekteyiz. Şimdi, bir artı yükten eksi yüke uzanan bir kuvvet çizgisi boyunca kovuğu kesen ve başlangıç noktasına iletken üzerinden dönen bir Γ ilmeği düşünün (Şekil 5-12). Böyle bir kuvvet çizgisi boyunca alınan integral sıfır olmaz. Metal boyunca alınan integralse, $\boldsymbol{E} = 0$ olduğundan, sıfırdır. Dolayısıyla şöyle bir ifadeyle karşılaşırız:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \neq 0???$$

Bir elektrostatik alandaki herhangi bir kapalı ilmek boyunca alınan $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integrali daima sıfırdır. Dolayısıyla boş bir kovukta alan veya yüzeyin içinde yük olamaz.

Yaptığımız önemli bir tanımlamayı atlamamışsınızdır umarım. Daima "*boş* bir kovuk içinde" dedik. Eğer kovuk içerisinde belli konumlara bazı yükler *yerleştirilirse* –bir iletkenin üzerine veya esas iletkenden yalıtılmış küçük bir iletken üzerine– o zaman kovukta alan *olabilir*. Çelişkiyi yakaladınız mı? Bu durumda zaten o "boş" bir kovuk olmaz.

Bir kovuk bir iletkenle tamamen çevrilirse, *dışardaki* yüklerin hiçbir dağılımının kovuk içerisinde alan üretemeyeceğini göstermiş olduk. Bu da, elektriksel bir ekipmanı metal içinde muhafaza ederek onu nasıl koruyucu bir "kalkan"a aldığımızı açıklıyor. Aynı akıl yürütmeleri kullanarak, kapalı ve topraklanmış bir iletkenin *içindeki* hiçbir yük dağılımının da *dışarıda* alan oluşturamayacağını söyleyebiliriz. Koruyucu kalkan iki yönlü de işe yarar! Elektrostatikte –fakat değişken alanlarda değil– kapalı ve topraklanmış bir kabuğun içi ve dışındaki alanlar birbirinden tamamen bağımsızdır.

Artık, Coulomb yasasını nasıl bu kadar hassas şekilde sınayabildiğimizi biliyorsunuz. Zira, içi boş kabuğun şeklinin bir önemi yoktur. Küresel olmasına gerek yok, kare de olabilir. Eğer Gauss yasası tam doğruysa, içindeki alan daima sıfırdır. Artık milyon-Voltluk bir Van de Graaff jeneratörünün yüksek voltaj küresinin içinde çarpılmaktan endişe duymayarak oturmanın neden güvenli olduğunu biliyorsunuz: Gauss yasası!

6

ÇEŞİTLİ KOŞULLARDA ELEKTRİK ALAN

6-1 Elektrostatik potansiyel denklemleri

Bu bölümde elektrik alanının farklı koşullardaki davranışını inceleyeceğiz. Hem elektrik alanının nasıl işlediğine dair tecrübemiz artacak, hem de bu alanı bulmak için gerekli bazı matematiksel yöntemleri öğreneceğiz.

Öncelikle, tüm matematiksel problemi iki denklemle, elektrostatik için Maxwell denklemleriyle, ifade ederek başlayalım:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{6.2}$$

Aslında, ikisini birleştirebiliriz de. İkinci denklemden biliyoruz ki, alanı bir skalerin gradyanı olarak ifade edebiliriz (*bkz.* Bölüm 3-7):

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{6.3}$$

Dilersek, herhangi bir elektrik alanını, ϕ potansiyeli cinsinden ifade edebiliriz. ϕ'nin uyması gereken diferansiyel denklemi, Denk. (6.3)'ü Denk. (6.1)'in içine sokarak elde edebiliriz:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.4}$$

ϕ'nin gradyanının diverjansı, ϕ üzerinde ∇^2'nin işlem yapmasına eşittir:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{6.5}$$

Dolayısıyla Denk. (6.4)'ü şu şekilde yazabiliriz:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.6}$$

∇^2'ye Laplace işlemcisi denir ve Denk. (6.6) Poisson denklemidir. Bütün elektrostatik, matematiksel bir bakış açısıyla, Denk. (6.6)'nın çözümleri üzerine çalışmaktan ibarettir. Denklem (6.6) sayesinde ϕ'yi elde ettiğimizde, $\boldsymbol{E}$'yi Denk. (6.3) sayesinde bulabiliriz.

İnceleyeceğimiz özel problemler serisinden ilki ρ'nin x, y, z'nin fonksiyonu olarak verildiği problemdir. Bu halde problem nerdeyse sıradanlaşır, zira Denk. (6.6)'nın genel durum için çözümünü bilmekteyiz. Eğer ρ her noktada biliniyorsa, (1) noktasındaki potansiyelin şu olduğunu göstermiştik:

$$\phi(1) = \int \frac{\rho(2)dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \tag{6.7}$$

Denklemdeki $\rho(2)$ yük yoğunluğu, dV_2 (2) noktasındaki hacim elemanı ve r_{12} de (1) ile (2) noktaları arasındaki uzaklıktır. *Diferansiyel* Denklem (6.6)'nın çözümü, bir hacim üzerinden *integral almaya* indirgenmiştir. Denklem (6.7)'ye özellikle dikkat edin lütfen, çünkü fizikteki birçok durum bu tür denklemlere yol açar:

$$\nabla^2 \text{ (bir şeyler)} = \text{(başka şeyler)}$$

Denklem (6.7) bu türden problemlerin herhangi biri için çözümün prototipidir.

Tüm yüklerin konumları bilindiğinde elektrostatik alan problemlerinin çözümü çok basittir. Gelin birkaç örnekle bunun nasıl olduğuna bakalım.

6-1 Elektrostatik potansiyel denklemleri
6-2 Elektrik dipolü
6-3 Vektör denklemleri üzerine düşünceler
6-4 Bir gradyan olarak dipol potansiyeli
6-5 Rastgele bir dağılım için dipol yakınlaştırması
6-6 Yüklü iletkenlerin alanları
6-7 Görüntüler yöntemi
6-8 İletken bir levhanın yakınındaki noktasal yük
6-9 İletken bir kürenin yakınındaki noktasal yük
6-10 Kondansatörler; paralel levhalar
6-11 Yüksek voltaj çökmesi
6-12 Alan salımlı mikroskop

Gözden geçirme: Cilt 1, Bölüm 23, *Rezonans*

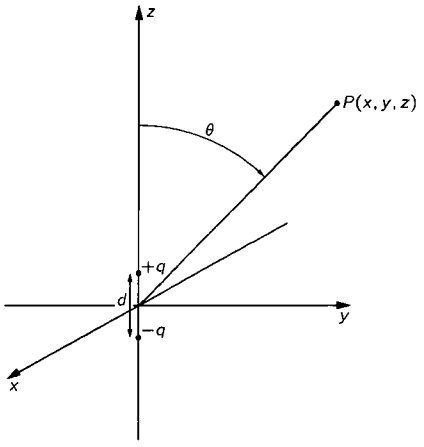
6-2 Elektrik dipolü

Öncelikle, birbirinden d uzaklığında iki noktasal yükü ele alalım. Biri $+q$, diğeri $-q$. Şekil 6-1'de görüldüğü gibi z ekseni bu yükleri birleştiren doğru boyunca olsun ve sıfır noktamız da tam ikisinin arası olsun. Denklem (4.24)'ü kullanarak, her iki yükten kaynaklanan potansiyeli aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{[z-(d/2)]^2+x^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z+(d/2)]^2+x^2+y^2}}\right] \tag{6.8}$$

Elektrik alan için denklem yazmayacağız, elimizde potansiyel olduktan sonra kolaylıkla hesaplayabiliriz. Böylece, iki yük problemini çözmüş olduk.

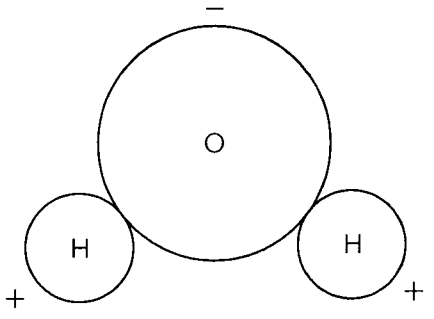
İki yükün birbirine çok yakın olduğu önemli bir özel durum vardır. Bu durumda yüklere olan uzaklığı, yüklerin aralarındaki mesafeden fazla olan noktalardaki alanlarla ilgileneceğiz. Bu türden yakın yük çiftlerine *dipol* denir. Dipoller çok yaygındır.



Şekil 6-1 Bir dipol: Birbirinden d uzaklığında iki yük, $+q$ ve $-q$.

Bir "dipol" anteni, antene çok yakın olan alanı irdelemezsek, birbirlerinden çok kısa bir mesafeyle ayrılmış iki yüke benzetilebilir. Genelde, *hareket eden* yükleri olan antenlerle ilgileniriz. O durumda statik denklemleri tam olarak uygulanamaz, ama bazen yeterli yaklaşık sonuç sağlayabilirler.

En önemlileri, belki de, atomik dipollerdir. Bir malzemede elektrik alan varsa, elektronlar ve protonlar zıt kuvvetlere maruz kalırlar ve birbirlerinden ayrılırlar. Hatırlarsanız, bir iletkende bazı elektronlar yüzeye ilerler ve bu sayede elektrik alan sıfır olur. Bir yalıtkandaysa elektronlar fazla uzağa gidemezler; çekirdeğin çekimiyle geri çekilirler. Yine de, bir miktar kayarlar. Diğer bir deyişle, her ne kadar bir atom veya bir molekül dış bir elektrik alan içinde nötr kalsa da, artı ve eksi yükleri birbirlerinden çok az ayrılır ve mikroskobik bir dipol olurlar. Bilindik boyutlu nesnelerin yakınındaki atomik dipollerin alanlarıyla ilgileniyorsak, bu yük çiftlerinin aralarındaki mesafeye kıyasla çok büyük uzaklıklarla ilgileniyoruz demektir.



Şekil 6-2 Su molekülü, H_2O. Hidrojen atomları elektron bulutunun küçük bir kısmını, oksijense daha büyük bir kısmını kaplar.

Bazı moleküllerde, molekülün şeklinden dolayı, dıştaki alanların yokluğunda bile yükler birbirlerinden ayrıdır. Bir su molekülünde örneğin, oksijen atomunun üzerinde net bir negatif yük ve her bir hidrojen atomunun üzerinde net bir artı yük vardır ve Şekil 6-2'de görüldüğü üzere simetrik değildirler. Her ne kadar toplam molekülün yükü sıfır olsa da, bir tarafta daha fazla eksi yük ve diğer bir tarafta daha fazla artı yük vardır. Elbette bu düzenleme iki noktasal yük gibi basit değildir, fakat uzaktan bakıldığından sistem bir dipol gibi davranır. Daha sonra göreceğimiz üzere, uzak mesafelerde alan, çok ince detaylara karşı hassas değildir.

Küçük bir d mesafesiyle birbirlerinden ayrılmış iki zıt yükün alanına bakalım. Eğer d sıfıra inerse, yükler üst üste gelir, potansiyeller birbirini sıfırlar ve ortada alan falan kalmaz. Ancak tam olarak üst üste değillerse, Denk. (6.8)'i bir kuvvet serisiyle (binom açılımını kullanıp) açılarak, potansiyelin değerini yaklaşık olarak hesaplayabiliriz. Terimleri sadece d'nin birinci basamağa kadar terimlerini alarak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd$$

Ayrıca şunu yazmak da bu durumda uygundur:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

O zaman

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{[z-(d/2)]^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1-(zd/r^2)]}} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}$$

olur. $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$ için yine binom açılımı yaparak ve d'nin iki veya daha yüksek basamaktan terimlerini almayarak,

$$\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{zd}{r^2}\right)$$

ifadesini elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{\sqrt{[z-(d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{zd}{r^2}\right)$$

olur ve bu ikisinin farkı bize potansiyeli verir:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{z}{r^3}\,qd \tag{6.9}$$

Potansiyel, ve dolayısıyla alan, qd'yle, diğer bir deyişle yük ve mesafenin çarpımıyla orantılıdır. Bu çarpıma, iki yükün *dipol momenti* denir ve p işaretiyle (momentumla karıştırmayın) gösterilir:

$$p = qd \tag{6.10}$$

θ, dipol ekseni ile (x, y, z) noktasının yarıçap vektörü arasındaki açıyken (*bkz.* Şekil 6-1), $z/r = \cos\theta$ olduğundan, Denk. (6.9) ayrıca aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{6.11}$$

Bir dipolün *potansiyeli* eksene göre belli bir yönde $1/r^2$ bir noktasal yükün potansiyeliyse $1/r$ kadar azalır. Bu durumda dipolün $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı $1/r^3$ kadar azalır.

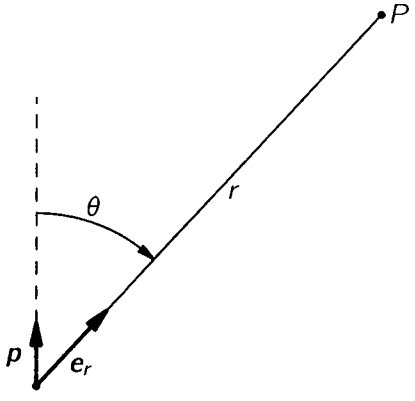
Eğer $\boldsymbol{p}$'yi büyüklüğü p olan ve yönü $-q$'dan $+q$'ya dipolün ekseniyle aynı olan bir vektör olarak tanımlarsak, denklemi bir vektör biçimine sokabiliriz:

$$p\cos\theta = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r \tag{6.12}$$

Denklemdeki $\boldsymbol{e}_r$ birim radyal vektördür (Şek. 6-3). (x, y, z) noktasını $\boldsymbol{r}$ cinsinden de ifade edebiliriz.

Dipol potansiyeli:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.13}$$



Şekil 6-3 Bir dipol için vektör gösterimi.

Bu denklem, eğer $\boldsymbol{r}$ dipolden ilgilendiğimiz noktaya olan vektörü temsil ediyorsa, herhangi bir dipol için geçerlidir.

Eğer dipolün elektrik alanını hesaplamak istersek, bunu ϕ'nin gradyanını alarak yapabiliriz. Örneğin, alanın z bileşeni $-\partial\phi/\partial z$'dir. z ekseni boyunca uzanan bir dipol için Denk. (6.9)'u kullanabiliriz:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

veya

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \tag{6.14}$$

x ve y bileşenleriyse aşağıdaki gibi yazılır:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3zx}{r^5} \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3zy}{r^5}$$

Bu ikisi birleştirilerek z eksenine *dik*, $E_\perp$'nin enine bileşeni diyeceğimiz bir bileşen elde edebiliriz:

$$E_\perp = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3z}{r^5}\,\sqrt{x^2 + y^2}$$

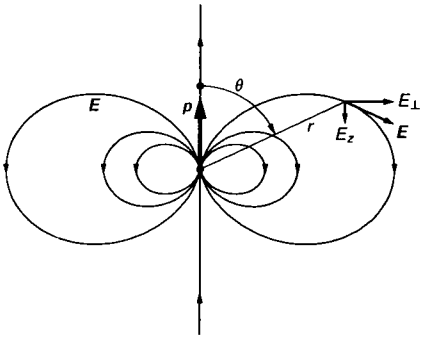
veya

$$E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\cos\theta\,\sin\theta}{r^3} \tag{6.15}$$

Enine bileşen $E_\perp$, xy düzlemindedir ve dipolün *ekseninden* dışarıya doğrudur. Bu durumda toplam alan elbette aşağıdaki gibi olur:

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_\perp^2}$$

Dipol alanı, dipole olan mesafenin küpüyle ters orantılı olarak değişir. Eksende, $\theta = 0$ olduğunda, $\theta = 90°$ olduğuna göre, iki kat daha şiddetlidir. Bu her iki özel açıda da, elektrik alanının sadece z bileşeni vardır, fakat her iki yerde de birbirine zıttır (Şek. 6-4).



Şekil 6-4 Bir dipolün elektrik alanı.

6-3 Vektör denklemleri üzerine düşünceler

Burada durup, vektör analizi üzerine genel bir yorum yapmam gerek. Temel ispatlar zarif denklemlerle genel bir biçimde ifade edilebilir, fakat çeşitli hesaplamalarda ve analizlerde eksenleri işimize yarayacak şekilde seçmek iyi bir fikirdir. Dikkat ettiyseniz, bir dipolün potansiyelini hesaplarken z eksenini herhangi bir açıda değil, dipolün yönünde seçtik. Böylece hesaplamamız kolaylaştı, ama sonra denklemleri tekrar vektör biçiminde yazdık ki herhangi bir koordinat sistemine bağlı kalmasınlar. Ondan sonra dilediğimiz bir koordinat sistemini seçmekte, aradaki bağın genel olduğunu bilerek, özgürüz. Probleminiz için temiz bir koordinat sistemi seçebiliyorken, gidip karmaşık bir açıda, rastgele bir koordinat sistemiyle uğraşmanın anlamı yok. Elbette sonucun en sonunda vektör denklemiyle ifade edilebilmesi şartıyla. Öyleyse mutlaka, vektör denklemlerinin herhangi bir koordinat sisteminde bağımsız olmasının avantajını kullanın.

Diğer yandan, bir vektörün diverjansını hesaplamaya çalışıyorsanız, sadece $\nabla \cdot E$'ye bakıp, bu nedir diye meraklanmak yerine onun şu şekilde de açılabileceğini hatırlayın:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Elektrik alanın x, y ve z bileşenlerini hesaplayıp, türevlerini aldınız mı diverjansı hesaplamış olacaksınız. Sanki her şeyi vektör işlemcileriyle yapılması gerekiyormuşçasına, bileşenleri yazmak sanki kabalıkmış –biraz hile karışmış gibi– hissi gelebilir. Çoğu zaman da hiç avantajı yoktur. Özel bir çeşit problemle ilk karşılaştığımızda, bileşenleri yazmak ne olup bittiğini anlamak için çok faydalıdır. Sayıları denklemlere koymanın kaba bir tarafı yoktur, hele ki havalı işaretler yerine türevler koymanın hiç yoktur. Aslında, böyle yapmak çok da kurnazcadır. Eğer profesyonel bir dergide makale yayınlatacaksanız her şeyi vektör biçiminde yazmak elbette hem daha profesyonel gözükür, hem de daha kolay anlaşılır. Kâğıt tasarrufu da cabası.

6-4 Bir gradyan olarak dipol potansiyeli

Şimdi size dipol denklemi (6.3) hakkında eğlenceli bir şey göstermek istiyorum. Potansiyeli şu şekilde de yazabiliriz:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, p \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{6.16}$$

Eğer $1/r$'in gradyanını hesaplarsanız, şunu elde edersiniz:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r}{r^3} = -\frac{e_r}{r^2}$$

ve Denk. (6.16), Denk. (6.13)'le aynıdır.

Bunu nasıl düşünebildik? Çok basit, bir noktasal yükün *alanına* dair denklemde e_r/r^2'nin olduğunu biliyoruz, bir de alanın $1/r$'ye bağlı *potansiyelin* gradyanı olduğunu.

Dipol potansiyelini Denk. (6.16) biçiminde yazabilmemizin *fiziksel* bir nedeni vardır. Başlangıç noktasında bir q noktasal yükü olduğunu varsayalım. (x, y, z) koordinatlarındaki P noktasındaki potansiyeli şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\phi_0 = \frac{q}{r}$$

(Bu akıl yürütmeyi kullanırken, $1/4\pi\epsilon_0$'ı bir kenarda tutalım. En sonda kullanırız.) Şimdi, $+q$ yükünü Δz kadar yukarı kaldırırsak, P noktasındaki potansiyel $\Delta\phi_+$ kadar değişir. $\Delta\phi_+$'nın değeri nedir? Yükü aynı konumda *bırakıp*, P noktasını aynı Δz miktarı kadar *aşağı* indirseydik, potansiyelin değişim miktarı kadar olurdu:

$$\Delta\phi_+ = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\Delta z$$

Denklemdeki Δz $d/2$'ye eşittir. Dolayısıyla, $\phi_0 = q/r$ eşitliğini kullanarak, noktasal yükten kaynaklanan potansiyeli bulabiliriz:

$$\phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)\frac{d}{2} \tag{6.17}$$

Aynı akıl yürütmeyi negatif yükten kaynaklanan potansiyel için kullanarak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-q}{r}\right)\frac{d}{2} \tag{6.18}$$

Toplam potansiyel, (6.17) ve (6.18)'in toplamıdır:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)d \tag{6.19}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)qd$$

Dipolün diğer yönelimleri için, artı yükün yerdeğiştirmesini $\Delta\boldsymbol{r}_+$ vektörüyle ifade edebiliriz. Böylece, Denk. (6.17)'yi şu şekilde yazabiliriz:

$$\Delta\phi_+ = -\nabla\phi_0 \cdot \Delta\boldsymbol{r}_+$$

$\Delta\boldsymbol{r}_+$ daha sonra $\boldsymbol{d}/2$'yle değiştirilecektir. Daha önceki gibi çıkarımı sonlandırdığımızda, Denk. (6.19) şu biçime dönüşür:

$$\phi = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot q\boldsymbol{d}$$

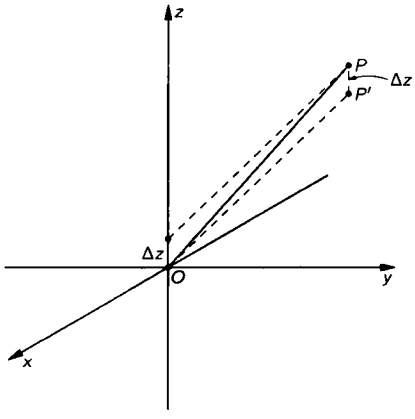
$q\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}$ eşitliğini kullanırsak ve daha sonra $1/4\pi\epsilon_0$ terimiyle çarparsak, Denk. (6.16)'yı elde ederiz. Bir başka şekilde bakarsak, dipol potansiyeli Denk. (6.13)'ün aşağıdaki şekilde de yazılabildiğini görürüz:

$$\phi = -\boldsymbol{p}\cdot\nabla\Phi_0 \tag{6.20}$$

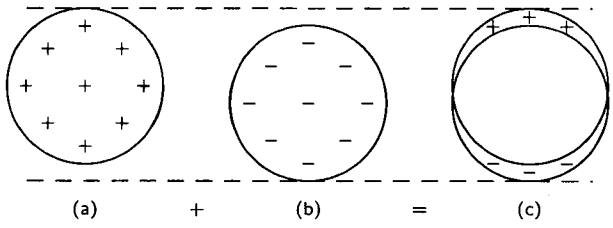
Bu denklemde $\Phi_0 = 1/4\pi\epsilon_0 r$, *birim* noktasal yükün potansiyelidir.

Bilinen bir yük dağılımının potansiyelini integral alarak bulabiliriz, bazen de zaman kazanmak için kurnazca bir yola başvurabiliriz. Örneğin, üst üste binme ilkesini kullanarak. Elimizde, potansiyelleri bilinen iki dağılımın toplamı olarak gösterilebilecek bir yük dağılımı varsa, değerini bilmek istediğimiz potansiyel için bilinen iki potansiyeli toplamak yeterlidir. Buna bir örnek Denk. (6.20)'dir, şimdi bir başka örneğini görelim.

Elimizde yüzey dağılımı kutup açısının kosinüsüyle değişen bir küresel yüzey olsun. Bu dağılımın integralini almak çok karmaşıktır. Böyle bir dağılımı üst üste binme ilkesiyle analiz edebiliriz. İçindeki hacimde *düzgün* dağılmış pozitif yük bulunan bir küre, bir de tam benzeri ama eksi yükle dolu bir başka



Şekil 6-5 Başlangıç noktasının üzerindeki Δz noktasındaki bir noktasal yükün P noktasındaki potansiyeli, başlangıç noktasındaki aynı yükten kaynaklanan P' (P'nin Δz aşağısında) potansiyeliyle aynıdır.



Şekil 6-6 İki adet düzgün yük dağılımlı küre, küçük bir yerdeğiştirmeyle üst üste bindirildiklerinde düzgün olmayan bir yüzey yükünün dağılımını verirler.

küre düşünün. Bu ikisinin birleşimi yüksüz bir küredir. Şekil 6-6'da görüldüğü gibi, artı yüklü küreyi bir miktar yukarı doğru çekersek, küre yine yüksüz kalır ama bir tarafı artı yüklü diğer tarafıysa eksi yüklü olur. Eğer iki küre arasındaki mesafe görece olarak küçükse, net yük yüzey yüküne (küresel bir yüzeyde) eşit olur ve yüzey yük yoğunluğu da kutup açısının kosinüsüyle orantılıdır.

Şimdi, bu dağılımın potansiyelini hesaplamak istersek, integral almamıza gerek yok. Biliyoruz ki, her iki yüklü küreden –kürenin dışındaki noktalar için– kaynaklanan potansiyel ile noktasal bir yükten kaynaklanan potansiyel aynıdır. Birbirlerinden biraz ayrı bu küreler aslında iki noktasal yüktür; potansiyel de bildiğimiz dipol potansiyelidir.

Bu yöntemle, yarıçapı a ve yüzey yük yoğunluğu

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

olan bir kürenin üzerindeki yük yoğunluğunun, kürenin hemen dışında yarattığı alanın, momenti

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}$$

olan bir dipolünki olduğunu gösterebilirsiniz. Ayrıca, küre içindeki alanın

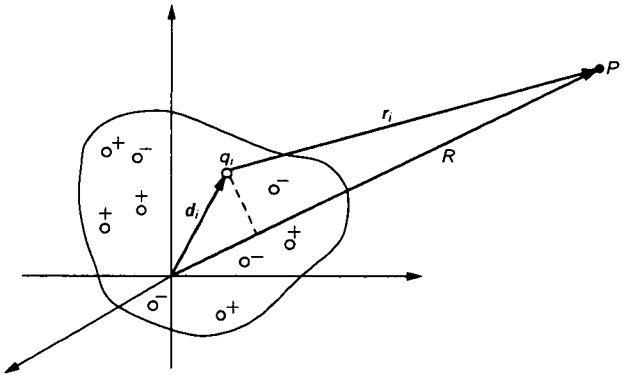
$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

değerinde sabit olduğu da gösterilebilir. Eğer θ artı z'yle olan açıysa, kürenin içindeki elektrik alan *eksi z* yönündedir. Bu verdiğimiz örnek göründüğü kadar gerçeklikten uzak değildir, dielektrik kuramını çalışırken tekrar kendisiyle karşılaşacağız.

6-5 Rastgele bir dağılım için dipol yakınlaştırması

Dipol alanı önemli ve ilginç bir durumda daha karşımıza çıkar. Elimizde karmaşık yük dağılımı olan bir nesne –örneğin Şekil 6-2'deki gibi bir su molekülü– olsun ve sadece uzaktaki alanlarla ilgilendiğimizi düşünelim. Nesnenin boyutuna kıyasla uzak mesafelerdeki alanı ifade etmek için göreceli olarak basit bir yol olduğunu göstermeye çalışacağım.

Nesnemizi, Şekil 6-7'de görüldüğü gibi, sınırlı bir alanda birikmiş q_i noktasal yükleri olarak düşünebiliriz. İstersek daha sonra q_i'yi ρdV terimiyle değiştirebiliriz. Her bir q_i yükünün, yüklerin ortasında bir yerdeki başlangıç noktasın-



Şekil 6-7 Bir yük kümesinden uzaktaki P noktasındaki alanı hesaplamak.

dan d_i uzaklığında olduğunu varsayalım. Başlangıç noktasına göre R (en büyük d_i'den daha büyüktür) mesafesinde olan P noktasındaki potansiyel nedir? Bütün yük kümesinden kaynaklanan toplam potansiyeli aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{6.21}$$

Denklemdeki r_i ($\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}_i$ vektörünün büyüklüğü) P noktasının q_i yüküne olan uzaklığıdır. Eğer yüklerden P noktasına olan mesafe çok büyükse, her bir r_i yaklaşık R olarak ele alınabilir. Her bir terim q_i/R olur ve $1/R$'yi, toplamın önüne bir çarpan olarak alabiliriz. Böylece şu basit sonucu elde ederiz:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{6.22}$$

Denklemdeki Q nesnemizin toplam yüküdür. Böylece herhangi bir yük kümesinden yeterince uzaktaki noktalarda, küme bir noktasal yük gibi davranır. Şu ana kadarki akıl yürütmelerimizden dolayı, sonuç sizi şaşırtmamalı.

Peki ya eşit sayıda artı ve eksi yük varsa? O zaman nesnemizin toplam yükü olan Q sıfırdır. Bu, olağandışı bir durum değildir, hatta, bildiğimiz kadarıyla, nesneler genelde nötrdür. Su molekülü nötrdür, ancak yükleri tek bir noktada değildir. Dolayısıyla, eğer çok yaklaşabilirsek, nötr bir nesnedeki rastgele yük dağılımının etkilerini görebiliriz. Denklem (6.21) hâlâ kesin sonuç verir, fakat artık $r_i = R$ eşitliğini kullanamayız. r_i için daha doğru bir ifadeye ihtiyacımız var. Şekil 6-7'de görüldüğü üzere, eğer P noktası yeterince uzaktaysa r_i'nin R'den farkı $\boldsymbol{d}$'nin $\boldsymbol{R}$'ye projeksiyonuna çok yakın olacaktır. (P'nin şekilde gözüktüğünden çok daha uzakta olduğunu hayal etmelisiniz.) Diğer bir deyişle, eğer $\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{R}$ yönünde birim vektörse r_i için yaklaşık

$$r_i \approx R - d_i \cdot \boldsymbol{e}_R \tag{6.23}$$

olur. Bizim asıl istediğimiz $1/r_i$, $d_i \ll R$ olduğundan, $1/r_i$'yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_R}{R}\right) \tag{6.24}$$

Bunu (6.21)'e koyarsak, potansiyeli buluruz:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2} + \cdots\right) \tag{6.25}$$

Sondaki üç nokta, d_i/R'de ihmal edilen daha yüksek mertebeleri göstermektedir. Bunlar ve daha önce elde ettiklerimiz, $1/r_i$, $1/R$, d_i/R üssü olarak giden Taylor açılımıdır.

Denklem (6.25)'teki ilk terimi daha önce elde etmiştik, eğer nesne nötrse kaldırabiliriz. İkinci terim $1/R^2$'ye dayanır, aynı dipolde olduğu gibi. Aslında, aşağıdaki denklemi yük dağılımının bir özelliği olarak *tanımlarsak*

$$\boldsymbol{p} = \sum_i q_i \boldsymbol{d}_i \tag{6.26}$$

(6.25)'in ikinci terimi, bu durumda, aşağıdaki gibi *tam bir dipol potansiyeli* olur:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{6.27}$$

$\boldsymbol{p}$ niceliğine, dağılımın dipole momenti denir. Bu, daha önceki tanımımızın genelleştirilmiş bir ifadesidir ve iki noktasal yükle ilgili özel duruma indirgenebilir.

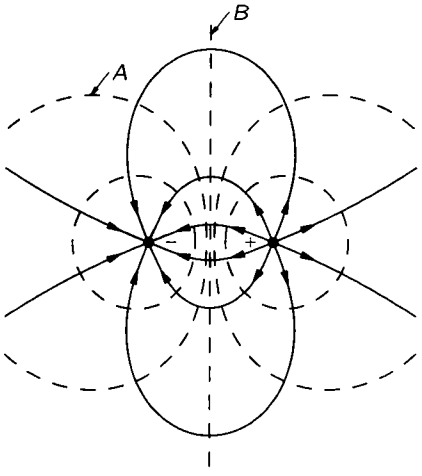
Vardığımız sonuç, toplamda nötr olan *herhangi* bir kütle dağılımından yeterince uzaktayken potansiyelin dipol potansiyeli olduğudur. $1/R^2$ değeriyle aza-

lır ve $\cos\theta$ terimiyle değişir. Büyüklüğü de, yük dağılımının dipol momentine bağlıdır. Dipol alanlarının önemli olmasının nedenlerinden biri, bu tür noktasal yük çiftlerinin çok nadir olmasıdır.

Sözgelimi su molekülünün, gayet büyük bir dipol momenti vardır. Bu momentten kaynaklanan elektrik alanlar, suyla ilgili bazı önemli özelliklerin nedenidir. Birçok molekül için, örneğin CO_2, dipol momenti molekülün simetrisi yüzünden kaybolur. Böyle moleküller için daha hassas açılım yapıp, potansiyel denkleminde $1/R^3$'le azalan ve adına dört kutuplu potansiyel denen bir terimi elde etmeliyiz. Bu tür durumları daha sonra tartışacağız.

6-6 Yüklü iletkenlerin alanları

Baştan yük dağılımı bilinen durumları gösteren örnekleri bitirmiş olduk böylece. Gördüğünüz üzere, bize pek sıkıntı yaratmayan ve biraz integral içeren problemdi. Şimdi yepyeni bir problem çeşidine yelken açıyoruz, yüklü iletkenlerin yakınındaki alanlar problemine.



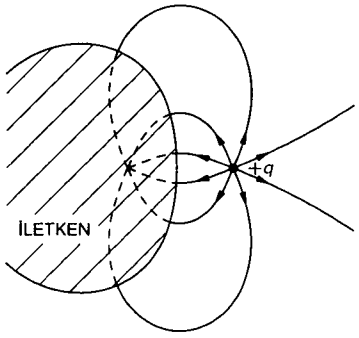
Şekil 6-8 İki noktasal yük için alan çizgileri ve eşpotansiyeller.

Elimizde, içinde toplam Q yükü olan bir iletken olsun. Yüklerin tam olarak nerelerde olduğunu söyleyemeyiz. Yüzeyde bir şekilde yayılmıştırlar. Yüklerin yüzeyde ne şekilde dağıldıklarını nasıl bilebiliriz? Yüzeyin potansiyeli sabit olacak şekilde dağılmış olmaları lazım. Yüzey eşpotansiyel olmasaydı, iletken içinde elektrik alanı olurdu ve yükler de elektrik alan sıfırlanana kadar hareket ederdi. Bu türden genel bir problemi çözmek için bir yük dağılımı tahmin eder ve potansiyelini hesaplarız. Potansiyel, yüzeyin her yerinde sabit çıkarsa, problem çözülmüş olur. Yüzey eşpotansiyel değilse, potansiyel dağılımını yanlış tahmin etmişiz demektir. Sil baştan ve daha iyi bir tahminle başlamamız gerekir. Akıllıca tahminler yapmazsak, bu döngü sonsuza kadar sürebilir.

Dağılımı nasıl tahmin edeceğimiz, matematiksel olarak zordur. Doğanın yeterince zamanı olduğu için, yükler dengeye kavuşana kadar birbirlerini iter ve çekerler. Gelgelelim, bizim o kadar zamanımız olmadığından, her denemeyi yapmamız o kadar vakit alır ki sıkıntıdan ölürüz. Rastgele bir iletkenler ve yükler grubuyla, problem gayet karmaşık hale gelebilir ve çok ayrıntılı sayısal yöntemler kullanmadan çözülemez. Bu tür sayısal hesaplar bugünlerde bilgisayarlarla kolayca yapılabiliyor.

Diğer yandan, bilgisayarlara başvurmadan daha doğrudan yöntemlerle çözmemizin güzel olacağı bir sürü pratik durum vardır. Şansımıza, cevabını doğadan birtakım numaralarla elde edebileceğimiz problemler vardır. İlk numaramız, yüklerin halihazırda belli konumlarının bilindiği durumlarla ilgili elde ettiğimiz çözümleri kullanmayı içerir.

6-7 Görüntüler yöntemi



Şekil 6-9 İletkenin dışında, Şekil 6-8'in eşpotansiyel A yüzeyi gibi şekillenmiş alanı.

Daha önceden iki noktasal yükün alanıyla ilgili problemi çözmüştük. Şekil 6-8'de, 4. Bölümde yaptığımız hesaplamalardan elde ettiğimiz eşpotansiyel yüzeylerin alan çizgileri görünmektedir. A'yla işaretlenmiş eşpotansiyel yüzeyini ele alalım. Bu yüzeye sığacak ince bir metal levhayı şekillendirdiğimizi varsayalım. Tam yüzeye uyacak şekilde yerleştirir ve potansiyelini uygun değere ayarlarsak, kimse onun orda olduğunu anlayamaz çünkü hiçbir şey değişmemiş olacaktır.

Buraya dikkat! Aslında *yepyeni* bir problem çözdük az önce. Elimizde, belirli bir potansiyeli olan eğri bir iletkenin yüzeyinin noktasal bir yükün yakınına yerleştirildiği bir durum var. Eşpotansiyele yerleştirdiğimiz metal levha kendi üstüne kapanabiliyorsa (veya, pratikte, yeterince uzağa uzanabiliyorsa) aynı Bölüm 5-10'da tarif etiğimiz durum oluşur. Hani kapalı bir iletken kabuğun içinde ve dışında olmak üzere iki bölgeyi incelediğimiz. Hatırlarsanız, iki bölge-

deki alanların birbirinden gayet bağımsız olduğunu keşfetmiştik. Dolayısıyla, eğri iletkenimizin içinde ne olduğundan bağımsız olarak dışında aynı alanları elde ederiz. Hatta içini tamamen iletken malzemeyle doldurabiliriz. Böylece Şekil 6-9'daki düzenlemeler için alanları bulmuş olduk. İletkenin hemen dışı için alan aynı iki noktasal yükünki gibidir. İletkenin içinde, sıfırdır. Ayrıca, iletkenin hemen dışındaki elektrik alan –olması gerektiği gibi– yüzeye normaldir.

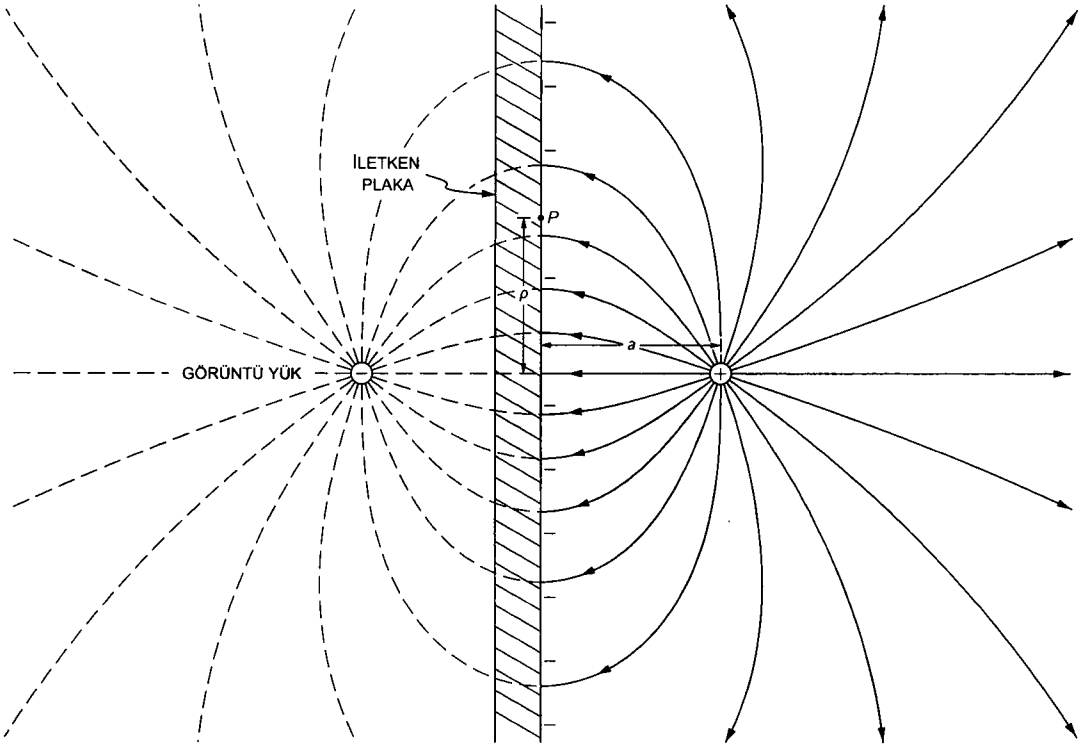
Dolayısıyla, Şekil 6-9'daki alanları, uygun bir noktadaki q ve bir görüntü $-q$ noktasal yükten kaynaklanan alanı hesaplayarak bulabiliriz. İletken yüzeyin arasında olduğunu "hayal ettiğimiz" noktasal yüküne *görüntü yük* denir.

Kitaplara baktığınızda, hiperbolik şekilli ve diğer karmaşık şekilli şeylere benzeyen iletkenler için türetilmiş uzun çözümler listesi bulabilirsiniz ve bu acayip şekiller için kimler nasıl çözüm üretebildi diye düşünebilirsiniz. Çok basit, tersten giderek çözülmüşlerdir! Birisi yüklerle ilgili basit bir problemi çözdü önce, sonra aynı kişi eşpotansiyel yüzeyin yeni bir şekille karşısına çıktığını gördü ve ilgili şeklin dışındaki alanın belli bir şekilde tanımlanabileceğine dair bir makale yazdı.

6-8 İletken bir levhanın yakınındaki noktasal yük

Bu yöntemin en basit uygulaması için, Şekil 6-8'deki B eş potansiyel yüzeyini kullanalım. Böylece, iletken bir levhanın önündeki yük problemini çözebiliriz. Şekildeki resmin sol tarafını silelim. Alan çizgileri için çözümümüz Şekil 6-10'da gösterilmektedir. Dikkatinizi çekerim, iki yükün tam ortasında olduğundan dolayı düzlemin potansiyeli sıfırdır. Topraklanmış, iletken bir levhanın yakınındaki artı yük problemini çözmüş olduk.

Toplam alanı çözmüş olduk, peki ama onu meydana getiren *gerçek* yükler? Artı noktasal yükümüze ilaveten iletken levha üzerinde, indüklenmiş eksi yükler vardır, uzak mesafelerden artı yükler tarafından çekilmiş. Teknik nedenlerden veya sadece merak ettiğimizden, eksi yüklerin levha üzerinde nasıl dağıldı-



Şekil 6-10 Görüntü yük yöntemiyle bulunmuş, iletken bir levha yüzeyinin yakınındaki yükün alanı.

ğını bilmek istiyoruz diyelim. Gauss yasası sayesinde Bölüm 5-9'da vardığımız sonucu kullanarak yüzey yük yoğunluğunu bulabilirisiniz. Bir iletkenin hemen dışındaki elektrik alanın dik bileşeni, σ yüzey yük yoğunluğunun ϵ_0 terimine bölünmesine eşittir. Yüzeydeki herhangi bir noktanın yük yoğunluğunu, elektrik alanının dik bileşeninden geriye doğru giderek elde edebiliriz. Her yerdeki alanı bildiğimizden, onu da bilmiş oluyoruz.

Artı yükün iletken üzerindeki izdüşümü olan noktadan (Şek. 6-10) ρ mesafesinde bir noktayı ele alalım. Bu noktadaki elektrik alanı yüzeye dik ve ona doğrudur. *Artı* yükten kaynaklanan alanın yüzeye dik bileşenini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$E_{n+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{aq}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{6.28}$$

Buna, negatif görüntü yükten kaynaklanan elektrik alanını da eklemeliyiz. Bunu yaptığımızda dik bileşen iki katına çıkar ve diğer hepsi sıfırlanır, dolayısıyla yüzeydeki herhangi bir noktadaki σ yük yoğunluğunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{6.29}$$

Yaptığımızı kontrol etmenin ilginç bir yolu, σ terimini tüm yüzey üzerinden integralini almaktır. Bunu yaparsak, toplam indüklenmiş yükün $-q$ olduğunu buluruz ki bu da olması gerekendir.

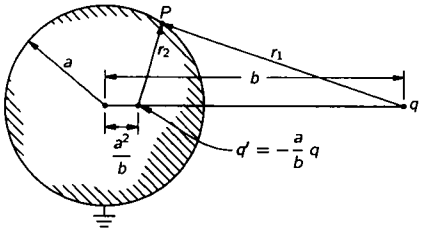
Bir soru daha: noktasal yük üzerinde etkiyen bir kuvvet var mıdır? Evet, çünkü levhadaki indüklenmiş eksi yüzey yükünden dolayı bir çekim vardır. Denklem (6.29) sayesinde yüzeydeki yükleri bildiğimize göre, artı yükümüz üzerindeki kuvveti bir integral alarak hesaplayabiliriz. Artı yük üzerinde etkiyen kuvvetin, levha yerine eksi görüntü yükle aynı *olacağını da* biliyoruz, çünkü her iki durumda da etraftaki alanlar aynıdır. Noktasal yük levhaya doğru, büyüklüğü aşağıda hesaplanan kuvveti hisseder:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q^2}{(2a)^2} \tag{6.30}$$

Böylece tüm eksi yükler üzerinden integral alma yönteminden çok daha kolay bir şekilde kuvveti bulmuş olduk.

6-9 İletken bir kürenin yakınındaki noktasal yük

Düzlem dışında hangi yüzeylerin basit bir çözümü olabilir? Sıradaki basit şeklimiz bir küre. Şekil 6-11'de görüldüğü gibi, yakınında q noktasal yükü olan topraklanmış iletken bir kürenin etrafındaki alanları bulalım. Öncelikle, içinde eşpotansiyel yüzey olarak küre olan basit bir fiziksel durum aramalıyız. Daha önceden insanların çözdükleri problemlere bakarsak, bazılarının, *eşit olmayan* iki noktasal yükün alanının küre olan bir eşpotansiyele sahip olduğunu fark ettiklerini görürüz. İşte! Görüntü bir yük için yer –ve doğru miktarda yük– seçersek, belki, eşpotansiyelin bizim küremizin içine sığmasını sağlayabiliriz. Gerçekten de, şimdi tarif edeceğimiz şekilde yapılabileceğini göreceksiniz.



Şekil 6-11 q noktasal yükü topraklanmış iletken küre üzerinde yük indükler. Kürenin alanları şekildeki q' görüntü yükünden kaynaklanan alanlardır.

a yarıçaplı ve merkezi q yükünden b uzaklığında olan bir kürenin eşpotansiyel yüzeyini bulmak istediğimizi düşünelim. Yükten kürenin merkezin olan bir çizgi üzerinde, merkezden a^2/b uzaklığında ve yükü $q' = -q(a/b)$ olan bir görüntü yük yerleştirelim. Küre sıfır potansiyelinde olacaktır.

Bunun matematiksel açıklaması, bir kürenin, yüzeydeki noktaların aralarındaki uzaklıklarının sabit olduğu bütün noktaların kümesi olmasıdır. Şekil 6-11'e göre, P noktasında q ve q''nden kaynaklanan potansiyel aşağıdaki eşitliğe orantılıdır:

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}$$

Dolayısıyla

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \quad \text{veya} \quad \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}$$

eşitliğini sağlayan tüm noktalarda potansiyel sıfır olacaktır. Eğer q''nü merkezden a^2/b uzaklığına yerleştirirsek, r_2/r_1 oranı sabit a/b değeri olacaktır. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik sağlandığında, küre eşpotansiyel olur. Potansiyeli aslında sıfırdır:

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b} \tag{6.31}$$

Ya peki potansiyeli sıfır olmayan kürelerde durum nasıldır? Bu ancak toplam yükü q' olursa mümkün olur. Topraklanmışsa, indüklenen yükler tam ona eşit olmak zorundadır. Peki ya yalıtılmışsa ve içine yük koymamışsak? Ya da içinde toplam Q yükünün olduğunu biliyorsak? Ya da bilinen potansiyeli sıfıra *eşit* değilse? Bütün bu sorular kolayca cevaplanabilir. Her zaman kürenin merkezine q'' noktasal yükü yerleştirebiliriz. Üst üste binme sayesinde küre hâlâ eşpotansiyeldir; sadece potansiyelin büyüklüğü değişmiştir.

Elimizde, her şeyden yalıtılmış ve başlangıçta yüksüz iletken bir küre varsa ve onu artı q noktasal yükünün yakınına getirirsek, kürenin toplam yükü yine sıfır kalacaktır. Çözümü bulmak için, daha önce yaptığımız gibi, bir q' görüntü yükü kullanırız; fakat bu sefer kürenin merkezine bir q'' yükü ekleyerek. Yükler arasındaki ilişki

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}\, q \tag{6.32}$$

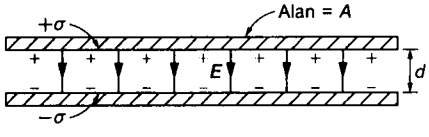
şeklinde olur. Kürenin dışında bulunan her yerde alanlar; q, q' ve q'' alanlarının üst üste bindirilmesiyle bulunur. Problem çözülmüştür.

q noktasal yükü ile küre arasında bir çekim kuvveti olacağı aşikârdır. Nötr küre üzerinde yük olmasa da, kuvvet sıfır değildir. Peki, çekim nereden kaynaklanmaktadır? Artı bir yükü iletken bir küreye yaklaştırdığınızda, artı yük, kürenin içinde kendine yakın olan eksi yükleri çeker ve artı yükleri daha uzak tarafta bırakır. Eksi yüklerden kaynaklanan çekim, artı yüklerden kaynaklanan itmeden büyük olduğu için net bir çekim kuvveti doğar. Çekim kuvvetinin büyüklüğünü, alan içinde q' ve q'' tarafından q üzerine etkiyen kuvveti hesaplayarak bulabiliriz. Toplam kuvvet, q ve $b = -(a^2/b)$ mesafesindeki $q' = -(a/b)q$ yükü arasındaki çekim kuvveti ile q ve b mesafesindeki $q'' = +(a/b)q$ yükü arasındaki itki kuvvetinin toplamıdır.

Çocukken, iki karşılıklı ayna arasında durup, aynaların birbirlerinin içindeki görüntüsünden hoşlanan arkadaşlar şimdiki problemle daha ilgili olabilirler. Elimizde biri $+Q$ yüklü, diğeri $-Q$ yüklü birbirine denk iki küre olsun ve bunları karşı karşıya getirelim. Aralarındaki kuvvet nedir? Problemi, sonsuz sayıdaki görüntü yüklerle çözebiliriz. Önce her bir küreyi merkezinde bir yükle düşünürüz. O yüklerin diğer kürede bir görüntü yükü olacaktır. Görüntü yüklerin diğer kürede görüntüsü olacaktır vs. Çözüm, karşılıklı aynalarda göründüğü gibidir.

6-10 Kondansatörler; paralel levhalar

Şimdi, iletkenleri içeren yeni bir tür problemi ele alacağız. Birbirine paralel ve genişliklerine göre kısa bir mesafeyle birbirlerinden ayrılmış iki büyük metal levha düşünün. Levhalarda eşit sayıda ve zıt yükler olsun. Her bir levhadaki yükler, diğer levhadaki yüklerle etkileşecek ve levhaların iç yüzeylerinde düzgün şekilde dağılacaklardır. Şekil 6-12'deki gibi, levhaların $+\sigma$ ve $-\sigma$ yüzey yük yoğunlukları olacaktır. 5. Bölümden hatırlayacağınız gibi, levhalar arasındaki elektrik alan σ/ϵ_0 ve levhalar dışındaki elektrik alan sıfırdır. Levhaların, birbirlerinden farklı, ϕ_1 ve ϕ_2 potansiyelleri olacaktır. Kolaylık olsun diye aralarındaki farka V diyelim ya da daha bilinen ismiyle "voltaj":



Şekil 6-12 Paralel levhalı bir kondansatör.

$$\phi_1 - \phi_2 = V$$

(Bazıları potansiyel için V simgesini kullanırlar, biz ϕ simgesini kullanmayı tercih ettik.)

Potansiyel farkı V, küçük bir yükü bir levhadan diğerine taşımak için birim yük başına yapılan iştir. $\pm Q$ her bir levhadaki toplam yük, A levhaların alanı ve d aralarındaki uzaklıksa, potansiyel farkını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, d = \frac{d}{\epsilon_0 A}\, Q \tag{6.33}$$

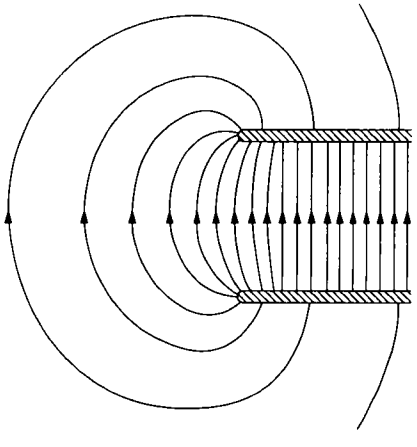
Voltajın yükle orantılı olduğunu görüyorsunuz. V ile Q arasındaki bu orantı, eşit olan ve birinde artı diğerinde eksi yükler bulunan herhangi iki iletken arasında her zaman vardır. Aralarındaki potansiyel farkı, diğer bir deyişle voltaj, yüke orantılı olacaktır. Elbette, etrafta başka yükler yoksa.

Bu orantısallık neden var? Üst üste ilkesinden dolayı sadece. Yük kümelerinden birisi için çözümü bildiğimizi ve iki çözümü üst üste bindirdiğimizi varsayalım. Yükler, alanlar ve birim yükü taşımak için yapılan iş iki katına çıkar. Dolayısıyla, herhangi iki nokta arasındaki potansiyel farkı yüklerle orantılıdır. İki iletken arasındaki potansiyel farkı özellikle üzerlerindeki yükle orantılıdır. Birileri daha önce orantısallığın denklemini kendilerince yazmıştı. C bir sabitken,

$$Q = CV$$

olur. Bu orantı sabitine *kapasite* ve bu türden iki levhalı sistemlere *kondansatör* dediler.* Bizim paralel levhalı kondansatörümüz için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ (paralel levhalar)} \tag{6.34}$$



Şekil 6-13 Paralel levhaların kenarındaki elektrik alanı.

Bu denklem, varsaydığımız gibi levhalar arasındaki alan tam olarak düzgün dağılmadığı için kesin değildir. Toplam yük, varsaydığımız gibi σA değildir, kenarlardaki etkiler için bir düzeltme vardır. Şekil 6-13'e bakarsanız, alanın kenarlarda hemen kaybolmadığını görürsünüz. Hesapları doğru yapabilmek için, alanı daha kesin hesaplamamız ve kenarlarda alana ne olduğunu bulmamız lazım. Bu gayet karmaşık bir matematik problemidir, fakat şimdi bahsetmeyeceğimiz tekniklerle çözülebilir. Hesaplamaları sonucunda, yük yoğunluğunun levhaların kenarlarına yakın yerlerde arttığı görülmüştür. Bu da demek oluyor ki, levhaların kapasitesi hesapladığımızdan biraz daha yüksektir.

Şu ana kadar iki iletkenin kapasitesini konuştuk. Tek bir nesnenin kapasitesinden de bahsedebiliriz. Örneğin, a yarıçaplı bir kürenin kapasitesi $4\pi\epsilon_0 a$ olur. Bunu hesaplamak için, diğer terminalin sonsuz yarıçaplı bir küre ve eğer üzerinde $+Q$ yükü varsa hayali kürede de $-Q$ yükü olduğunu varsayarız. Üzerinde durmayacağız ama üç veya daha fazla iletkenin kapasitesini de hesaplayabiliriz.

Çok yüksek kapasiteli bir kondansatör yapmaya çalıştığımızı varsayalım. Büyük bir kapasite elde etmek için büyük alanlı levhalar alıp, birbirlerinden çok az ayırabiliriz. Alüminyum folyo levhaların arasına yağlı kâğıt koyup, rulo haline getirebiliriz. (Eğer bu ruloyu bir plastik içine koyup, sıkıca kapatırsak elimizde tipik bir radyo tipi kondansatör olur.) Bu neye yarar? Yükleri depolamaya. Bir kürede yük depolamaya kalksak örneğin, biz onu yükledikçe potansiyeli hızla artar. Potansiyel o kadar yükselebilir ki, havaya kıvılcımlar saçılarak yükler küreden uzaklaşırlar. Böyle bir yükü, kapasitesi yüksek bir kondansatöre koyarsak, kondansatördeki voltaj artışı çok küçük olacaktır.

Elektronik devrelerle ilgili birçok uygulamada, potansiyeli çok değiştirmeden yüksek miktarda yük alabilen veya dağıtabilen bir şey olması yararlıdır. Bir kondansatör (veya "sığa") işte bu işe yarar. Elektronik cihazlar ve bilgisayarlarda, yükteki bir değişime karşı olarak belli bir voltaj değişimini elde et-

* Bazıları "kapasite" ve "kondansatör" yerine "sığa (kapasitans)" ve "sığaç (kapasitör)" kelimelerini önermiştir. Biz daha eski terminolojiyi kullanmaya karar verdik, çünkü –ders kitaplarında olmasa bile– hâlâ fizik laboratuvarlarında bunlar daha yaygın olarak kullanılmakta.

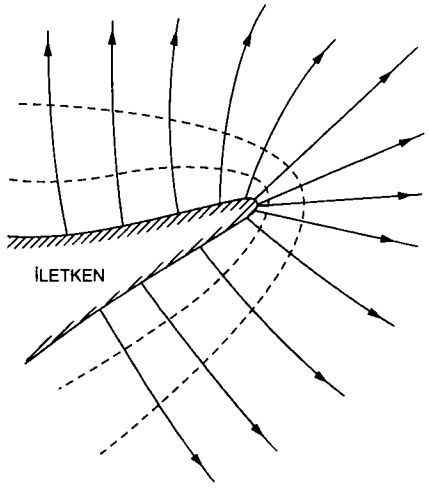
mek için kondansatörlerin kullanıldığı uygulamalar yaygındır. Benzer bir uygulamayı I. Cilt, 23. Bölümde, rezonans devrelerin özelliklerini anlatırken göstermiştik.

C'nin tanımından, biriminin Coulomb/Volt olduğunu görmek kolaydır. Bu birime aynı zamanda *farad* denir. Denklem (6.34)'e baktığımızda, ϵ_0 birimlerini, en sık kullanılan birim olan farad/metre olarak ifade edebiliriz. Kondansatörlerin tipik boyutta olanları bir mikro-mikrofaraddan (1 pikofarad) milifaradlara kadar olabilir. Birkaç pikofaradlık küçük kondansatörler yüksek frekansla ayarlı devrelerde ve yüzlerce, hatta binlerce mikrofaradlık kondansatörler de güç kaynağı filtrelerinde bulunur. Alanları bir santimetre kare olan ve aralarındaki uzaklık bir milimetre olan iki levhadan oluşan bir kondansatörün kapasitesi, kabaca, bir mikro-mikrofarad olacaktır.

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ farad/metre}$$

6-11 Yüksek voltaj çökmesi

Şimdi, kondansatörlerin etrafındaki alanların bazı özelliklerini niteliksel olarak çalışabiliriz. Şekil 6-14'te görünen gibi, küre olmayan, fakat çok sivri bir ucu veya noktası olan bir iletkeni yüklediğimizde, ucun etrafındaki alan diğer yerlere göre çok yüksektir. Bunun nedeni, yüklerin iletken yüzeyinde mümkün olduğunca dağılmaya çalışmaları ve o sivri noktanın ucunun yüzeyden olabildiğince uzak olmasıdır. Levha üzerindeki bazı yükler o uca kadar itilirler. Uçtaki görece ***küçük*** miktardaki yük hâlâ büyük bir yüzey *yoğunluğu* sağlayabilir. Yüksek yük yoğunluğu demek, dışarda yüksek alan demektir.



Şekil 6-14 Bir kondansatördeki sivri bir ucun etrafındaki elektrik alan çok yüksektir.

Kondansatörlerdeki sivri noktalardaki alanın diğer yerlerden yüksek olduğunu kavrayabilmek için, Şekil 6-15'te görüldüğü gibi, birbirlerine telle bağlanmış bir büyük ve bir küçük küre düşünün. Bu, Şekil 6-14'teki kondansatörün bir nevi idealleşmiş biçimidir. Telin dışardaki alanlara etkisi çok azdır, onun esas görevi küreleri aynı potansiyelde tutmaktır. Şimdi, soru şu: Hangi kürenin yüzeydeki alanı en fazladır? Eğer soldaki kürenin yarıçapı a ve yükü Q ise, potansiyeli

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$

olur? (Bir kürenin varlığı, diğerindeki yük dağılımını etkiler elbette, bu yüzden yükler küresel olarak tam simetrik olmazlar. Biz alanların değerinin yaklaşık tahminiyle ilgilendiğimizde, küresel bir yükün potansiyelini kullanabiliriz.) Çapı b olan küçük küre q yükü taşıyorsa potansiyelini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{b}$$

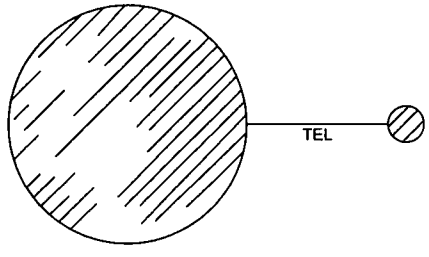
Ama $\phi_1 = \phi_2$ olduğuna göre

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}$$

yazılabilir. Bunun yanı sıra, yüzeydeki alan (*Bkz.* Denk. 5.8) yüzey yük yoğunluğuyla orantılıdır, bu da toplam yükün yarıçapın karesine bölümüdür:

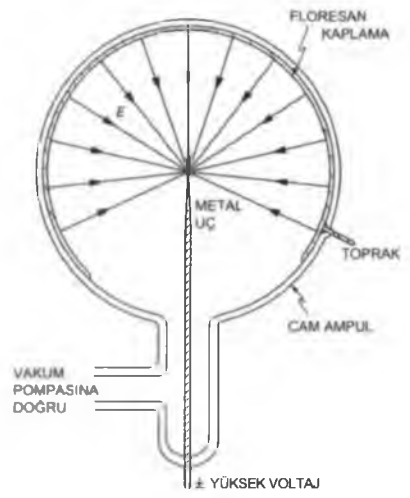
$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a} \tag{6.35}$$

Dolayısıyla, küçük kürenin yüzeyindeki alan daha büyüktür. Alanlar, yarıçaplarla ters orantılıdır.



Şekil 6-15 Sivri uçlu bir nesnenin alanı, aynı potansiyelde iki küreyle gösterilebilir.

Bu sonuç teknik olarak önemlidir, çünkü elektrik alan çok büyük olduğunda havada ilginç etkiler görürüz. Havadaki serbest bir yük (elektron veya iyon) yeterince büyük bir alan tarafından hızlandırıldığında, o elektron hızlanıp havadaki başka bir atoma çarparak ondan elektron koparabilir. Böylece, zincirleme şekilde, daha fazla iyon açığa çıkar. Bunların hareketleri bir deşarj veya kıvılcım çıkartır. Bir nesneyi yüksek bir potansiyele çıkarmak ama havada kıvılcımlar görmek istemiyorsanız, yüzeyin çok yüksek elektrik alan meydana getiremeyecek kadar düzgün olduğundan emin olun.



Şekil 6-16 Alan salımlı mikroskop.

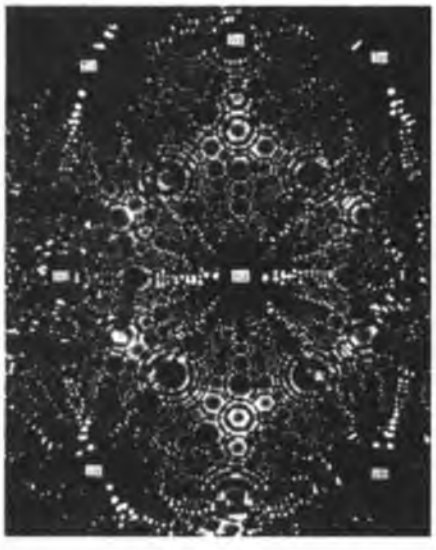
6-12 Alan salımlı mikroskop

Yüklü bir iletkenin üzerindeki sivri bir çıkıntıyı çevreleyen çok yüksek elektrik alanın kullanıldığı ilginç bir uygulama vardır. *Alan salımlı mikroskop*, sivri bir metal noktanın ürettiği yüksek alanlar sayesinde çalışır.* Ucunun çapı yaklaşık 1000 Angström olan çok ince bir iğne içi boşaltılmış cam bir kürenin merkezine yerleştirilir (Şekil 6-16). Kürenin iç yüzeyi iletken ince bir floresan metalle kaplanmıştır ve floresan kaplama ile iğne arasına çok yüksek bir potansiyel farkı uygulanır.

Önce, iğne floresan kaplamaya göre eksi yüklü olduğunda ne olduğunu inceleyelim. Alan çizgileri iğnenin sivri ucunda yoğunlaşır. Elektrik alan 40 milyon Volt'a kadar çıkabilir. Bu kadar yoğun alanlarda, elektronlar iğnenin yüzeyine doğru çekilir ve iğne ile floresan kaplama arasındaki potansiyel farkına doğru ivmelenirler. Elektronlar iğnenin ucuna vardıklarında ışık yayılımına yol açarlar, aynı tüplü televizyonlarda olduğu gibi.

Floresan yüzeydeki belli bir noktaya gelen elektronlar, radyal alan çizgisinin diğer ucundan çıkıp gelenlerdir; çünkü uçtan yüzeye doğru elektronlar alan çizgilerini takip ederek hareket ederler. Bu da, yüzey üzerinde iğnenin ucunun bir nevi yansımasını görmemizi sağlar. Daha da doğrusu, iğnenin yüzeyinin *yayılımının*, metal uçtan elektronların ne kadar kolay kopabildiğinin resmini görürüz. Çözünürlüğümüz yeterince yüksek olsaydı, iğnenin ucundaki bağımsız atomların yerlerini bile görebilirdik. Bu çözünürlüğü elektronlarla elde edememizin iki nedeni vardır. Birincisi, elektron dalgalarının kuantum mekaniksel kırınımı görüntüyü bulanıklaştırır. İkincisi, metal içindeki elektronların iç hareketlerinden dolayı, iğneden çıktıklarında başlangıçta yana doğru küçük bir hızları vardır ve hız vektörlerinin bu rastgele enine bileşeni görüntünün yayılmasına yol açar. Bu iki etkinin bileşimi, çözünürlüğü yaklaşık 25 Å değeriyle sınırlar.

Kutupsallığı tersine çevirir ve ampulümüzün içine az miktarda helyum gazı basarsak, çok daha yüksek çözünürlükler elde edebiliriz. Helyum atomu iğnenin ucuyla çarpıştığında, yoğun elektrik alan helyum atomundan bir elektron koparır ve atomu artı yüklü yapar. Helyum iyonu elektrik alan çizgisi boyunca floresan ekrana doğru ivmelenmeye başlar. Helyum iyonu elektrondan çok daha ağır olduğundan, kuantum mekaniksel dalga boyları çok daha küçüktür. Sıcaklık da çok yüksek değilse, ısıl hızların etkisi de elektronunkinden azdır. Görüntünün daha az yayılması bize iğnenin ucunun çok daha keskin bir görüntüsünü sunar. Pozitif alan salımlı mikroskoplarla 2.000.000 kata kadar büyütme sağlanabildi. Bu, elimizdeki en iyi elektron mikroskobuyla elde edebildiğimiz büyütmenin on katından fazladır.



Şekil 6-17 Alan salımlı mikroskopla elde edilmiş bir görüntü [Erwin W. Müller, Fizik araştırma görevlisi, Pennsylvania State Üniversitesinin izniyle].

Şekil 6-17, bir tungsten iğnesi kullanarak oluşturulan alan iyon mikroskobuyla elde edilmiş sonuçlara örnektir. Tungsten atomunun merkezi, helyum atomunu, tungsten atomlarının arasındaki boşluklardan biraz daha farklı bir oranda iyonize eder. Floresan ekrandaki noktaların şekli, tungsten uçtaki *bağımsız atomların* nasıl dizildiğini gösterir. Noktaların neden halkalar şeklinde gözüktüğünü anlayabilmek için gözünüzün önüne içinde dikdörtgen şekilde dizilmiş topların olduğu büyük bir kutuyu getirin. Toplar, metaldeki atomları simgeler. Kutuyu öyle bir keselim ki, içinin dairesel bir kesiti ortaya çıksın. İşte, o kesitte atomik yapının halka yapısını göreceksiniz. İnsanlık, ilk defa atomları alan iyon mikroskobuyla görebilmiştir. Bu çok olağanüstü bir gelişmedir, hele ki cihazın basitliğini düşünürseniz.

* Bkz. E.W. Müller: "Alan İyon Mikroskobu", *Advances in Electronics and Electron Physics* [*Elektronik ve Elektron Fiziğinde İlerlemeler*], **13**, 83-179 (1960). Academic Press, New York.

7

ÇEŞİTLİ KOŞULLARDA ELEKTRİK ALAN (DEVAMI)

7-1 Elektrostatik alan bulma yöntemleri
7-2 İki boyutlu alanlar; karmaşık değişkenin fonksiyonları
7-3 Plazma salınımları
7-4 Bir elektrolit içerisinde koloidal parçacıklar
7-5 Bir örgünün elektrostatik alanı

7-1 Elektrostatik alan bulma yöntemleri

Bu bölüm, elektrik alanının çeşitli özel durumlardaki özelliklerini incelememizin devamıdır. Önce, iletkenlerle ilgili problemleri çözmek için daha ayrıntılı yöntemler tanımlayacağız. Bu ileri seviye yöntemlerde hemen ustalaşmanızı beklemiyoruz. Daha ileri seviye derslerde öğreneceğiniz teknikleri kullanarak çözebileceğiniz problemlerle ilgili bir fikriniz olması ilginç olabilir. Yük dağılımının ne sabit olduğu, ne de iletkenle taşındığı, fiziğin başka yasalarıyla düzenlendiği iki örneği ele alacağız. Altıncı bölümde bulduğumuz üzere, yüklerin dağılımı belirli olduğunda, elektrostatik alan problemi temelde basittir. Bir integral almayı gerektirir sadece. İletkenler olaya girdiğindeyse, karmaşıklık artar çünkü iletkenlerdeki yük dağılımını baştan bilemeyiz. Yükler, iletken eşpotansiyel olana dek, yüzeyde dağılmalı. Bu tür problemlerin çözümü ne doğrudandır ne de basit.

Bu tür problemlerin dolaylı çözümünde daha önce, belli bir yük ağılımı için eşpotansiyeller bulmuş ve onları iletken bir yüzeyle değiştirmiştik. Bu sayede, iletkenler için küreler, düzlemler ve benzeri şekillerde özel çözümler ürettik. 6. Bölümde anlattığımız şekillerin kullanımı, dolaylı yoldan çözümlere bir örnektir. Bir diğerini, bu bölümde tarif edeceğiz.

Elimizdeki problem, dolaylı yöntemle çözebileceğimiz bir problem değilse, doğrudan çözmeye mecbur kalırız. Doğrudan yöntemin matematiksel problemi, Laplace denkleminin, ϕ belli sınırlarda –iletkenlerin yüzeylerinde– uygun bir sabit olması koşuluyla çözümüdür:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{7.1}$$

Bir diferansiyel alan denkleminin çözümü belli *sınır koşullara* bağlıysa, bu türden problemlere *sınır değer* problemleri denir. Bu tür problemler, hatırı sayılır ölçüde matematiksel çalışmaların konusu olmuştur. Karışık şekilli iletkenler söz konusu olduğunda, genel bir analitik yöntem yoktur. Her iki uçtan kapalı, yüklü bir metal silindire –bildiğiniz bira kutusu– dair bir problem bile gayet uğraştırıcı matematiksel zorluklar çıkarır. Sayısal yöntemler kullanarak, böyle bir problemi sadece yaklaşık olarak çözebiliriz. Çözüme dair genel yöntemler *sadece* sayısaldır.

Denklem (7.1)'in doğrudan çözülebileceği birkaç problem vardır. Dönel elipsoid bir şekle sahip bir yüklü iletken problemi, bilindik özel fonksiyonlarla kesin olarak çözülebilir. İnce bir disk için çözümü, elipsoidi sonsuz basık hale çevirerek elde edebiliriz. Benzer şekilde, bir iğne için çözümü de elipsoidi sonsuz oval hale çevirerek elde edebiliriz. Burada bir şeyin altını çizmek gerek, doğrudan yöntemlerin genel uygulanabilirliği sadece sayısal yöntemlerdir.

Sınır değer problemleri, fiziksel bir benzerliğin ölçümleriyle de çözülebilir. Laplace denklemi birçok farklı fiziksel olayda karşımıza çıkar: kararlı hal ısı akışında, dönmesiz sıvı akışında ve esnek bir zarın dönmesinde. Çözmek istediğimiz elektrik problemine benzer bir fiziksel modeli kurmak, sıklıkla mümkündür. Model üzerindeki uygun benzerliğin niceliğini ölçerek, elimizdeki proble-

min çözümü elde edilebilir. Benzetme tekniğine örnek olarak, elektrostatikteki iki boyutlu problemleri çözmek için elektrolitik tank kullanımı gösterilebilir. Böyle bir benzetmenin işe yaramasının nedeni, düzgün iletken bir ortamdaki potansiyel için yazılan diferansiyel denklemin boşluk için yazılanla aynı olmasından dolayıdır.

Bir yöndeki fiziksel alan değişimlerinin sıfır olduğu veya diğer iki yöndeki değişimlerle karşılaştırıldığında ihmal edilebileceği birçok fiziksel durum vardır. Böyle problemlere iki boyutlu denir, çünkü alan sadece iki koordinattadır. Yüklü uzun bir teli z boyunca yerleştirdiğimizi düşünelim. Telden çok uzak olmayan noktalardaki elektrik alan x ve y'ye dayanır, z'ye dayanmaz. Dolayısıyla, problem iki boyutludur. İki boyutlu bir problemde $\partial\phi/\partial z = 0$ olduğundan, serbest uzayda ϕ için aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{7.2}$$

İki boyutlu çözüm görece basit olduğundan dolayı, analitik olarak kendisini çözebileceğimiz birçok durum vardır. Hatta, şimdi göstereceğimiz üzere, karmaşık bir değişkenin fonksiyonlarının matematiğinden doğan bir kurama dayanan, çok güçlü ve dolaylı matematiksel bir teknik vardır.

7-2 İki boyutlu alanlar; karmaşık değişkenin fonksiyonları

Karmaşık değişken (ζ) şu şekilde tanımlanabilir:

$$\zeta = x + iy$$

(ζ değişkenini z koordinatıyla karıştırmayın. Alanların z'ye bağlı olmadığını varsayıp şimdi göstereceğimiz çözümden çıkardık.) x ve y üzerindeki her nokta bir karmaşık ζ sayısına denk gelir. ζ'yi tek bir (karmaşık) değişken olarak kullanabilir ve bilindik matematiksel fonksiyonları $F(\zeta)$ onunla yazabiliriz. Örneğin,

$$F(\zeta) = \zeta^2$$

veya

$$F(\zeta) = 1/\zeta^3$$

veya

$$F(\zeta) = \zeta \ln \zeta$$

şeklinde sürer gider.

Herhangi bir $F(\zeta)$'inde, $\zeta = x + iy$ eşitliğini kullanarak gerçek ve sanal parçaları olan bir x ve y fonksiyonu elde edebiliriz. Örneğin:

$$\zeta^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \tag{7.3}$$

Herhangi bir $F(\zeta)$'i, her biri x ve y'nin fonksiyonu olan gerçek ve sanal parçaların toplamı olarak yazılabilir:

$$F(\zeta) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{7.4}$$

Burada $U(x, y)$ ve $V(x, y)$ gerçel fonksiyonlardır. Böylece, herhangi bir $F(\zeta)$ karmaşık fonksiyonundan, iki yeni $U(x, y)$ ve $V(x, y)$ fonksiyonları elde edilebilir. Örneğin, $F(\zeta) = \zeta^2$ bize aşağıdaki iki fonksiyonu verir:

$$U(x, y) = x^2 - y^2 \tag{7.5}$$

ve

$$V(x, y) = 2xy \tag{7.6}$$

Öylesine olağanüstü ve hoş bir matematiksel teoreme vardık ki, ispatını matematikle ilgili derslerinize bırakıyoruz. Nitekim, matematiğin tüm gizemlerini

burada açığa çıkarırsak, çok sıkıcı bir konuya dönüşür. Teoremse şudur, herhangi bir "sıradan fonksiyon" (bunu matematikçiler daha güzel tarif eder) için, U ve V fonksiyonları *otomatik olarak* aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{7.8}$$

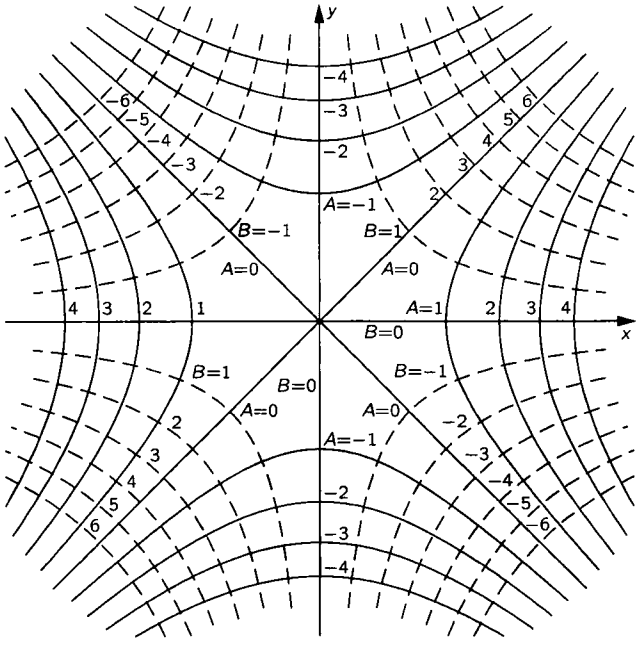
Buradan çıkan sonuç, U ve V fonksiyonlarının Laplace denklemini sağladığıdır:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{7.10}$$

Bu denklemler, apaçık bir şekilde, (7.5) ve (7.6)'nın fonksiyonları için doğrudur.

Dolayısıyla, sıradan bir fonksiyonla başlayarak, her ikisi de iki boyutta Laplace denkleminin çözümü olan $U(x, y)$ ve $V(x, y)$ fonksiyonlarını elde edebiliriz. Her bir fonksiyon, muhtemel bir elektrostatik potansiyeli temsil eder. Seçeceğimiz *herhangi* bir $F(\zeta)$ fonksiyonu, *bir* elektrik alan problemini temsil etmelidir. Hatta *iki* problemi temsil etmelidir, çünkü U ve V'nin *her biri* farklı çözümleri temsil eder. Fonksiyonlar yaratarak, dilediğimiz kadar çözüme ulaşabiliriz. Yapmamız gereken, hangi *problemin* hangi çözüme uyduğunu bulmaktır. Kulağımızı tersten gösteriyor gibi gözükebilir, ama akla uygun bir yaklaşımdır.

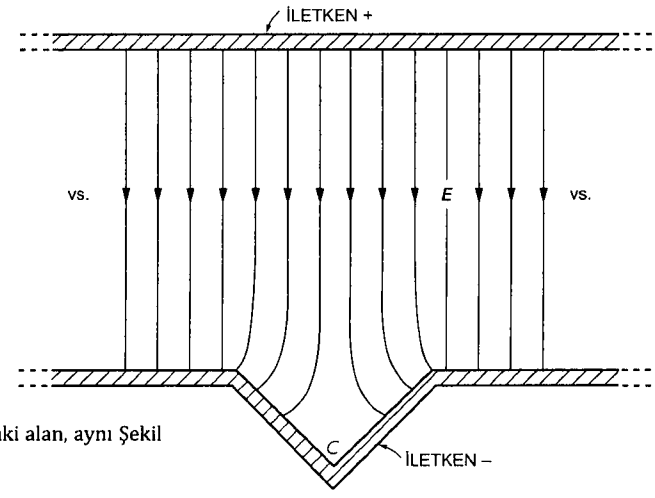


Şekil 7-1 İki boyutlu bir elektrostatik alandaki eşpotansiyelleri temsil eden, birbirlerine dik eğrilerin iki kümesi.

Örnek olarak, gelin $F(\zeta) = \zeta^2$ fonksiyonunun bize nasıl bir fiziksel durum verdiğine bakalım. Fonksiyondan, (7.5) ve (7.6)'nın iki potansiyel fonksiyonunu elde ederiz. U fonksiyonunun hangi probleme ait olduğunu bulmak için, fonksiyonu, bir sabit olan $U = A$ eşitliğini kullanarak eşpotansiyel yüzeyler için çözeriz:

$$x^2 - y^2 = A$$

Bu dikdörtgen bir hiperbolün denklemidir. A'nın çeşitli değerleri için, Şekil 7-1'de görülen hiperbolleri elde ederiz. $A = 0$ olduğundaysa, tam sıfır noktasından çaprazlama geçen düz çizgileri elde ederiz.

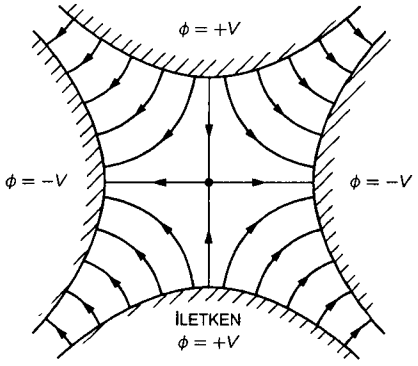


Şekil 7-2 C noktası yakınındaki alan, aynı Şekil 7-1'deki gibidir.

Bu tür eşpotansiyeller kümesi, bir iletkenin dik açılı köşesindeki alana karşılık gelir. Farklı potansiyelleri olan, Şekil 7-2'deki gibi iki elektrotumuz varsa, C'yle işaretlenmiş köşenin yakınındaki alan, aynı Şekil 7-1'deki başlangıç noktasının üstündeki alan gibi gözükecektir. Gördüğünüz düz çizgiler eşpotansiyellerdir. Dik açıyla bükülen çizgiler de $\boldsymbol{E}$'nin çizgileridir. Nasıl ki sivri uçlarda elektrik alan yüksek olma eğilimindeyse, bu tür çöküntü ve boşluklarda da *düşük* olma eğilimindedir.

Bulduğumuz çözüm, aynı zamanda, dik açılı bir köşenin yakınındaki hiperbol şeklindeki bir elektroda veya uygun potansiyellerdeki iki hiperbole uygundur. Şekil 7-1'deki alanın ilginç bir özelliği olduğunu fark etmiş olabilirsiniz. Elektrik alanın x bileşeni, $\boldsymbol{E}_x$, şu denklemle hesaplanır:

$$\boldsymbol{E}_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x$$



Şekil 7-3 Dört kutuplu bir lensteki alan.

Elektrik alan, eksene olan mesafeyle orantılıdır. Bu gerçek, parçacık demetlerini odaklamaya yarayan cihazlar (dört kutuplu lens denilen) yapmaya yarar (*Bkz.* Bölüm 29-7). Elde edilmek istenilen alan, Şekil 7-2'de görüldüğü gibi, hiperbol şekilli elektrodlarla elde edilir. Şekil 7-3'teki elektrik alan çizgilerini elde etmek için, Şekil 7-1'deki, V = sabit eşitliğini sağlayan kırık çizgi eğrileri kümesini kullandık. Bir de cabası var! V = sabit eşitliğini sağlayan eğriler, (7.7) ve (7.8) denklemlerinden dolayı, U = sabit eşitliğini sağlayan eğrilere diktir. Bir $F(\zeta)$ fonksiyonunu seçtiğimizde, hem eşpotansiyelleri, hem de alan çizgilerini U ve V'den çıkarabiliriz. Hatırlarsanız, hangi eğri kümesine eşpotansiyel dediğimize bağlı olarak, bu iki problemden birini çözmüştük.

İkinci bir örnek olarak, aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$F(\zeta) = \sqrt{\zeta} \tag{7.11}$$

Ayrıca

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

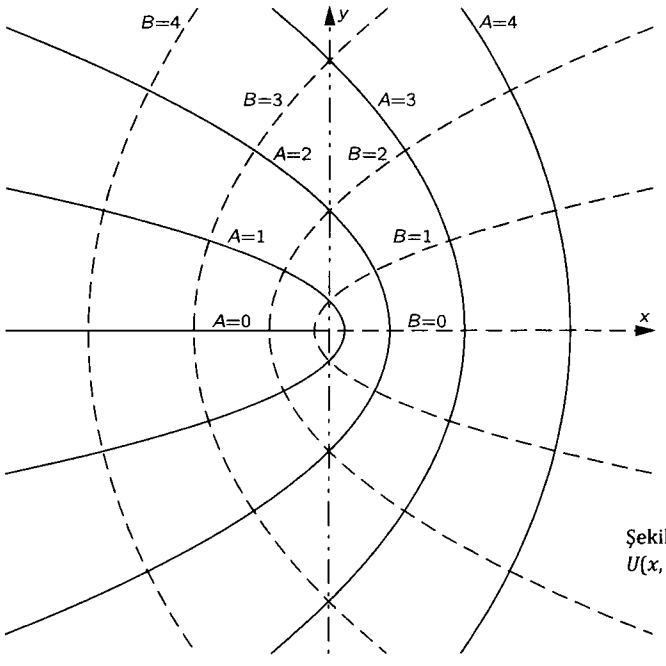
ve

$$\tan\theta = y/x,$$

terimlerini içeren $\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta}$, eşitliğini yazarsak, o zaman

$$F(\zeta) = \rho^{1/2}\, e^{i\theta/2}$$

$$= \rho^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$



Şekil 7-4 Denklem (7.12)'den hesaplanmış, sabit $U(x, y)$ ve $V(x, y)$'nin eğrileri.

olur. Bundan yola çıkarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F(\zeta) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2}\right]^{1/2} \tag{7.12}$$

Denklem (7.12)'deki U ve V'yi kullanarak elde ettiğimiz $U(x, y)=A$ ve $V(x, y)=B$'nin eğrileri Şekil 7-4'te gösterilmiştir. Yine, bu alanları kullanarak tanımlayabileceğimiz birçok muhtemel durum vardır. Bunların en ilginçlerinden biri, ince bir levhanın kenarının yakınındaki alandır. $B = 0$ çizgisi $-y$'nin sağına doğru– yüklü ince bir levhayı gösteriyorsa, yakınındaki alan çizgileri de A'nın çeşitli değerlerine karşılık gelen eğrilerdir. Fiziksel durum Şekil 7-5'te gösterilmiştir.

Daha ileri örnekler, dikdörtgen bir köşenin *dışındaki* alanı veren

$$F(\zeta) = \zeta^{2/3} \tag{7.13}$$

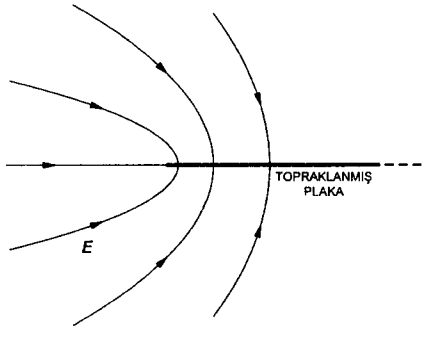
eşitliği, yüklü bir telin alanını veren

$$F(\zeta) = \ln \zeta \tag{7.14}$$

eşitliği ve bir elektrik dipolün, örneğin birbirlerine çok yakın ve zıt yüklü iki telin, iki boyutlu benzerinin alanını veren aşağıdaki eşitliktir:

$$F(\zeta) = 1/\zeta \tag{7.15}$$

Bu konunun üzerinde daha fazla durmayacağız. Karmaşık değişken tekniğinin kuvvetli, ama iki boyutlu problemlerle sınırlı ve dolaylı bir yöntem olduğunun altını tekrar çizmek isterim.



Şekil 7-5 Topraklanmış ince bir levhanın kenarının yakınındaki elektrik alan.

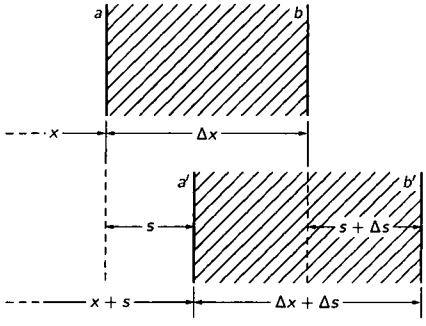
7-3 Plazma salınımları

Şimdi, alanın ne sadece sabit yüklerden, ne de sadece iletken yüzeylerdeki yüklerden kaynaklandığı durumlardan ziyade ikisinin birleşiminden kaynaklanan bazı fiziksel durumları ele alacağız. Diğer bir deyişle, alan, aynı anda iki denklem kümesiyle ifade edilebilir: (1) Yük dağılımına bağlı elektrik alanlarla ilgili elektrostatik denklemler ve (2) alanın varlığında, yüklerin hareketleri veya konumlarını belirleyen fiziğin bir başka bölümüyle ilgili bir denklem.

İlk üzerinde duracağımız, yüklerin hareketinin Newton yasalarıyla belirlendiği dinamik bir örnektir. Bu türden bir örnek plazmada bulunabilir. Plazma,

uzayda belli bir bölgeye yayılmış ve serbest elektronlar ve iyonlardan oluşmuş iyonize bir gazdır. Atmosferin üst katmanlarından biri olan iyonosfer bu türden bir plazmadır. Güneşten atmosfere ulaşan morötesi ışınlar havadaki elektronlara çarparak serbest elektronlar ve iyonlar açığa çıkarır. Böyle bir plazmada artı iyonlar elektronlardan çok daha ağırdır, dolayısıyla, elektronların hareketine kıyasla, iyonik hareketi ihmal edebiliriz.

n_0, dengeli ve tedirgenmemiş bir halde bulunan elektronların yoğunluğu olsun. Moleküllerin ayrı ayrı iyonize olduğunu varsayarsak, plazma (tedirgenmemişken) elektriksel olarak nötr olduğundan, bu yoğunluk aynı zamanda pozitif iyonların yoğunluğudur. Bir şekilde elektronların dengeli halden uzaklaştığını ve bu durumda ne olacağını düşünelim. Bir bölgedeki elektronların yoğunluğu artmışsa, birbirlerini iter ve denge haline geri dönmeye çalışırlar. Elektronlar ilk baştaki konumlarına dönmeye çalışırken kinetik enerji kazanırlar ve dengeli bir hale kavuşacaklarına, hedeflerini ıskalarlar. Bu şekilde bir ileri bir geri salınırlar. Bu durum, dengeleyici kuvvetin gaz basıncı olduğu ses dalgalarındaki salınıma benzer. Plazma salınımında dengeleyici kuvvet elektronların elektrik kuvvetidir.



Şekil 7-6 Bir plazma dalgasında hareket. *a* levhasındaki elektronlar *a′* levhasına, *b*'dekiler de *b′*'ne hareket eder.

Tartışmayı basit tutmak için, elektronların sadece tek eksende, diyelim x, hareket ettiği durumla ilgileneceğiz. Başlangıçta x noktasında bulunan elektronların, t zamanında, denge konumlarından $s(x, t)$ kadar uzaklaştığını varsayalım. Elektronlar yerdeğiştirdiğinden, yoğunlukları da değişir. Yoğunluktaki değişimi kolayca hesaplayabiliriz. Şekil 7-6'ya göre, a ve b düzlemlerindeki elektronlar a' ve b' levhalarına geçmiştir. a ile b arasında bulunan elektronların sayısı $n_0\Delta x$ terimiyle orantılıdır. *Aynı* sayıda elektron şimdi genişliği $\Delta x + \Delta s$ olan uzaydadır. Yoğunluk değişimini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$n = \frac{n_0\Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s/\Delta x)} \tag{7.16}$$

Yoğunluktaki değişim küçükse, $(1 + \epsilon)^{-1}$ için binom açılımını kullanarak aşağıdakini yazabiliriz:

$$n = n_0\left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right) \tag{7.17}$$

Artı iyonların, sahip oldukları yüksek eylemsizlikten dolayı, çok hareket etmediklerini ve yoğunluklarının n_0 kaldığını varsayıyoruz. Her bir elektron $-q_e$ yükü taşır, dolayısıyla herhangi bir noktadaki ortalama yük yoğunluğu,

$$\rho = -(n - n_0)q_e$$

veya $\Delta s/\Delta x$ diferansiyel biçiminde yazarak,

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx} \tag{7.18}$$

olur.

Yük yoğunluğu ile elektrik alanının ilişkisi Maxwell denklemlerinde görülebilir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.19}$$

Problem eğer gerçekten tek boyutluysa ve elektronların yerdeğiştirmesinden kaynaklananların haricinde başka alan yoksa, elektrik alan $\boldsymbol{E}$ sadece $\boldsymbol{E_x}$ bileşenine sahip olur. Denklem (7.19) ile Denk. (7.18)'i birleştirince aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0}\frac{\partial s}{\partial x} \tag{7.20}$$

Bu denklemin integralini aldığımızdaysa

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K \tag{7.21}$$

eşitliğini elde ederiz. $s = 0$ değerinde $E_x = 0$ olduğundan, integral sabiti K sıfırdır.

Bir elektrona yeni konumunda etki eden kuvvet, dengeleyici kuvvettir ve elektronun yerdeğiştirmesi s'ye orantılıdır:

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s \tag{7.22}$$

Bu, elektronların harmonik salınım yapmasına yol açar. Yerdeğiştirmiş bir elektronun hareket denklemiyse aşağıdaki gibidir:

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s \tag{7.23}$$

Böylece s'nin harmonik olarak değiştiğini bulduk. Zaman değişimi $\cos \omega_p t$ olur veya I. Ciltteki üslü gösterimi kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$e^{i\omega_p t} \tag{7.24}$$

Salınımın frekansı, ω_p, Denk. (7.23)'ten elde edilir:

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \tag{7.25}$$

Buna *plazma frekansı* denir ve plazmanın özelliği olan bir sayıdır.

Elektron yükleriyle uğraşırken, birçok kişi cevaplarını e^2 cinsinden yazmayı tercih eder. e^2 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2{,}3068 \times 10^{-28} \text{ Newton·metre}^2 \tag{7.26}$$

Bu gösterimi kullandığımızda, Denk. (7.25), birçok ders kitabında görebileceğiniz aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \tag{7.27}$$

Bir plazma tedirgendiğinde, elektronların denge noktaları etrafında ω_p doğal frekansıyla serbest salınım yaptığını göstermiş olduk. ω_p, elektronların yoğunluğunun kareköküyle orantılıdır. Plazma elektronları bir rezonans sistemi gibi davranırlar, aynı I. Cilt, 23. Bölümde tanımladıklarımız gibi.

Plazmanın doğal rezonansının bazı ilginç etkileri vardır. Örneğin, bir radyo dalgasını iyonosferden geçirmeye çalıştığımızda, sadece frekansı plazma frekansından yüksekse başarabileceğimizi görürüz. Yoksa, sinyal geri yansıtılır. Dolayısıyla, uzaydaki bir uyduyla haberleşebilmek için mutlaka yüksek frekanslar kullanmalıyız. Diğer yandan, eğer ufkun ötesinde bir radyo istasyonuyla haberleşebilmek istiyorsak plazma frekansından daha küçük frekanslar kullanmalıyız ki sinyal dünyaya geri yansıtılsın.

Plazma salınımlarına dair bir başka örnekse metallerin içinde gözlemlenir. Bir metalde, artı iyonlardan oluşan bir plazma ve serbest elektronlar vardır. Yoğunluk n_0 ve ω_p çok yüksektir. Buna rağmen, elektron salınımlarını gözlemlemek olasıdır. Kuantum mekaniğine göre, doğal frekansı ω_p olan bir harmonik salınıcının $\hbar\omega_p$ artışıyla birbirlerinden ayrılan enerji seviyeleri vardır. Diğer bir deyişle bir alüminyum folyoya elektronlarla ateş etsek ve diğer taraftaki elektron enerjilerini dikkatlice ölçsek, harmonik salınımlardan dolayı elektronların bazen $\hbar\omega_p$ kadar enerji kaybetmesini bekleriz. Bu, gerçekten de olur. 1936 yılında yapılan bir deneyde, enerjileri birkaç yüz ile birkaç bin elektron-Volt arasında değişen elektronlar ince bir metal folyodan geçerken enerjilerini bıraktılar. Deneyin sonuçları, Bohm ve Pines* 1953 yılında gözlemleri metaldeki plazma salınımlarının kuantum uyarımıyla açıklanana kadar anlaşılamamıştı.

---

* Güncel bir çalışma ve kaynakça için *bkz.* C.J. Powell ve J. B. Swann, *Phys. Rev.* 115, 869 (1959).

7-4 Bir elektrolit içerisinde koloidal parçacıklar

Şimdi, yüklerin konumlarının, bir kısmı aynı yüklerden kaynaklanan potansiyelle belirlendiği bir olguyu inceleyeceğiz. Açığa çıkan etkiler, kolloidlerin davranışını önemli ölçüde etkiler. Bir kolloid, su içinde askıda duran küçük yüklü parçacıklardan oluşur. Mikroskobik boyutta olsalar da, atomik bir bakış açısıyla gayet büyüktürler. Koloidal parçacıklar yüklü olmasaydı, büyük öbekler halinde toplaşmaya çalışırlardı. Yüklerinden dolayı birbirlerini iterler ve askıda kalmaya devam ederler.

Suda çözünmüş biraz tuz da varsa, pozitif ve negatif iyonlara ayrışır. Bu türden bir iyon çözeltisine elektrolit denir. Eksi iyonlar (artı yüklü olduklarını varsayarsak) kolloid parçacıklara doğru çekilirler ve artı iyonlar da itilirler. Şimdi, bu tür bir koloidal parçacığı çevreleyen iyonların nasıl dağıldığını inceleyeceğiz.

Konuya basit yaklaşmak adına, yine sadece tek boyut için çözeceğiz. Koloidal parçacığımızı, atomik ölçülerde, çok büyük yarıçaplı bir küre olarak düşünürsek, yüzeyinin bir kısmına düzlemmiş gibi alabiliriz. Yeni bir olguyu anlamaya çalıştığımızda, en iyisi onu çok basitleştirerek modellemek; modeli iyice kavrayınca da, daha kesin hesaplamalara geçmektir.

İyonların dağılımının, $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ elektrostatik yasası gereği $\rho(x)$ yük yoğunluğuna ve ϕ elektrik potansiyeline yol açtığını düşünelim. Tek boyuttaki alanlar için yük yoğunluğu ve potansiyelin arasındaki ilişki aşağıdaki denklem olur:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.28}$$

Böyle bir $\phi(x)$ potansiyeli olduğunu varsayarsak, iyonlar kendilerini nasıl dağıtırdı. Bunu istatistiksel mekanik ilkeleriyle bulabiliriz. O zaman problemimiz, istatistiksel mekanikten doğan ve Denk. (7.28)'deki yük yoğunluğuna yol açan ϕ'yi bulmak olur.

İstatistiksel mekaniğe göre (I. Cilt, Bölüm 40), bir kuvvet alanında ısıl dengede bulunan parçacıklar öyle bir yayılmıştır ki, parçacıkların x konumundaki n yoğunluğu aşağıdaki denklemle hesaplanabilir:

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT} \tag{7.29}$$

Denklemdeki $U(x)$ potansiyel enerji, k Boltzmann sabiti ve T de mutlak sıcaklıktır.

Varsayımımız, iyonların ya artı ya da eksi tek bir yük taşıdıklarıdır. Koloidal bir parçacığın yüzeyinden x uzaklıktaki bir pozitif iyonun aşağıdaki eşitliği sağlayan $q_e\phi(x)$ potansiyel enerjisi vardır:

$$U(x) = q_e\phi(x)$$

Bu durumda, artı iyonların yoğunluğu

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e\phi(x)/kT}$$

olur. Benzer şekilde, eksi iyonların yoğunluğu

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e\phi(x)/kT}$$

olarak ifade edilir. Toplam yük yoğunluğu da

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-$$

veya

$$\rho = q_e n_0 \left(e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}\right) \tag{7.30}$$

olur. Bunu Denk. (7.28)'le birleştirirsek, potansiyel ϕ değerinin aşağıdaki denklemi sağlaması gerektiğini buluruz:

$$\frac{d^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0}\left(e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}\right) \tag{7.31}$$

Bu denklemin çözümü zaten genelde bilinir [her iki tarafı $2(d\phi/dx)$ terimiyle çarpın ve x'e göre integralini alın]; fakat problemi tutabildiğimiz kadar basit tutmak için burada sadece T sıcaklığının yüksek olduğu veya potansiyellerin küçük olduğu durumu ele alacağız. ϕ'nin küçük olduğu durum seyreltik çözeltidir. Bu tür durumlar için üs küçüktür ve şunu yazabiliriz:

$$e^{\pm q_e\phi/kT} = 1 \pm \frac{q_e\phi}{kT} \tag{7.32}$$

Böylece, Denk. (7.31) bize

$$\frac{d^2\phi}{\partial x^2} = + \frac{2n_0q_e^2}{\epsilon_0 kT}\phi(x) \tag{7.33}$$

denklemini verir. Dikkat ederseniz, bu sefer sağ taraftaki işaret artı. ϕ için çözümler salınımlı değil, üsseldir.

Denklem (7.33)'ün genel çözümü bize aşağıdaki sonucu verir:

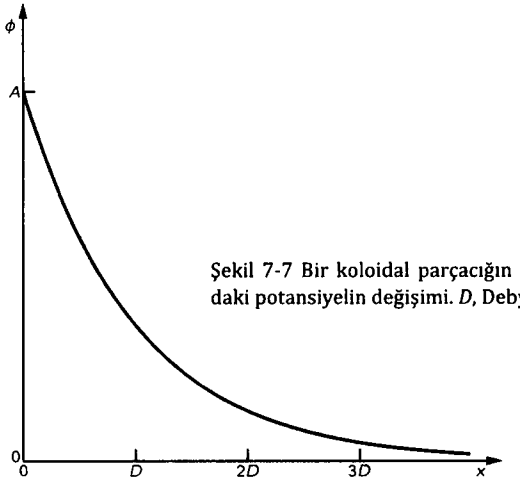
$$\phi = Ae^{-x/D} + Be^{+x/D} \tag{7.34}$$

ve

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2n_0q_e^2} \tag{7.35}$$

A ve B sabitleri problemin koşullarına göre belirlenir. Bizim durumumuzda B sıfır olmalıdır; yoksa potansiyel büyük x için sonsuza giderdi. Böylece A'nın, $x=0$ noktasında, koloidal parçacığın yüzeyindeki potansiyel olduğu aşağıdaki çözümü elde ederiz:

$$\phi = Ae^{-x/D} \tag{7.36}$$



Şekil 7-7 Bir koloidal parçacığın yüzeyinin yakınındaki potansiyelin değişimi. D, Debye uzunluğudur.

Şekil 7-7'deki grafikte görüldüğü gibi, mesafe D kadar arttığında potansiyel 1/e kadar azalır. D sayısı *Debye uzunluğudur* ve bir elektrolitteki büyük bir yüklü parçacığı çevreleyen iyon kılıfının kalınlığının ölçüsüdür. Denklem (7.35)'e göre, kılıf, artan iyon yoğunluğuyla n_0 veya düşen sıcaklıkla incelir.

Koloidal parçacık üzerindeki σ yüzey yük yoğunluğunu biliyorsak, Denk. (7.36)'daki A sabitini kolayca elde edebiliriz:

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{7.37}$$

Ama $\boldsymbol{E}$ aynı zamanda ϕ potansiyelinin gradyanıdır:

$$E_x(0) = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_0 = +\frac{A}{D} \tag{7.38}$$

Böylece aşağıdakini elde ederiz:

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0} \tag{7.39}$$

Bu sonucu Denk. (7.36)'ya koyarsak, koloidal bir parçacığın potansiyelinin (x=0 alarak) aşağıdaki olduğunu buluruz:

$$\phi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0} \tag{7.40}$$

Dikkat ederseniz bu potansiyel, yüzey yük yoğunluğu σ ve levhalar arasındaki mesafe D olan bir kondansatörün potansiyel farkıyla aynıdır.

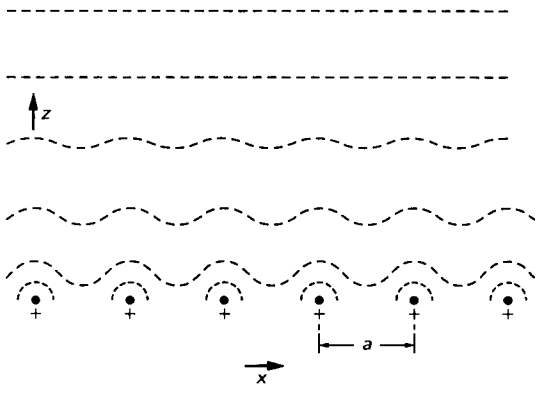
Koloidal parçacıkların elektriksel itkiyle birbirlerinden ayrıldıklarını söylemiştik. Ama şimdi gördük ki, bir parçacığın yüzeyinden biraz uzaktaki alan, etrafındaki iyon kılıfı yüzünden azalır. Kılıf yeterince inceyse, parçacıkların birbirine çarpma şansı yüksektir. Çarpıştıkça birbirlerine yapışacak ve koloidallar topaklaşıp sıvının dibine çökecektirler.

Bir başka ilginç örnek, tuz çözeltisinin protein molekülleri üzerine etkisidir. Protein molekülü aminoasitlerden oluşmuş uzun, karmaşık ve esnek bir zincirdir. Üzerinde çeşitli yükler vardır ve bazen zincir üzerine dağılmış şekilde net bir eksi yük olur. Eksi yüklerin birbirlerini karşılıklı itmelerinden dolayı, protein zinciri gergin halde durur. Ayrıca, çözeltide başka benzer zincir moleküller varsa, aynı itki etkilerinden dolayı onlar da birbirlerinden ayrı duracaktır. Böylece, bir sıvı içerisinde askıda duran zincir moleküller elde edebiliriz. Bu sıvıya tuz eklediğimiz zaman, süspansiyonun özelliklerini değiştiririz. Çözeltiye tuz ekledikçe Debye mesafesi kısalır, zincir moleküller birbirine yaklaşır ve hatta birbirlerine dolanabilirler. Çözeltiye yeterince tuz eklenirse, zincir moleküller çözeltiden ayrışacaktır. Bu şekilde, elektriksel kuvvetler sayesinde anlaşılabilecek birçok kimyasal etki vardır.

7-5 Bir örgünün elektrostatik alanı

Son örneğimiz, elektrik alanlarının bir başka ilginç özelliğidir. Bu özellik, elektrik cihazlarının tasarımında, vakum tüplerinin yapımında ve başka birçok amaç için kullanılır. Bu, elektrik alanın yüklü tellerden oluşan bir örgü yakınındaki özelliğidir. Problemi mümkün olduğunca basit tutmak için, bir düzlem üzerinde birbirine paralel tellerden oluşan bir diziliş düşünelim.

Eğer alana tellerin düzleminin uzağından bakarsak, yükler düzleme düzgün dağılmışçasına sabit bir elektrik alanı görürüz. Örgüye yaklaştığımızdaysa alan düzgünlükten sapar. Potansiyelde anlamlı değişimler görmek için örgüye ne kadar yaklaşmamız gerek acaba? Şekil 7-8'de, örgüden çeşitli uzaklıktaki mesafelerdeki eşpotansiyeller kabaca çizilmiştir. Örgüye yaklaştıkça, değişimler büyür. Örgüye paralel gittiğimizdeyse, alanın periyodik bir şekilde dalgalandığını gözlemleriz.



Şekil 7-8 Yüklü tellerden oluşan düzgün bir örgünün üzerindeki eşpotansiyel yüzeyler.

Daha önceden (I. Cilt, Bölüm 50), herhangi bir periyodik niceliğin sinüs dalgalarının toplamı olarak gösterilebileceğini (Fourier teoremi) görmüştük. Bakalım alan denklemlerimizi karşılayacak uygun bir harmonik fonksiyon bulabilecek miyiz?

Teller xy düzleminde uzanıyor ve y eksenine paralelse, a'nın teller arasında boşluk olduğu ve n'in de harmonik sayı olduğu aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\phi(x, z) = F_n(z)\cos\frac{2\pi n x}{a} \tag{7.41}$$

Tellerin yeterince uzun olduğunu varsaydığımızdan, y'ye bağlı bir değişim beklemiyoruz. Tam bir çözüm $n = 1, 2, 3, \ldots$ cinsinden toplamla bulunur.

Bu geçerli bir potansiyelse, tellerin üzerindeki (yük olmayan) bölge için Laplace denklemini sağlamalıdır:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Denklem (7.41)'deki ϕ için bu denklemi kullanırsak aşağıdaki denklemi buluruz:

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z)\cos\frac{2\pi n x}{a} + \frac{d^2F_n}{dz^2}\cos\frac{2\pi n x}{a} \quad 0 \tag{7.42}$$

Ya da $F_n(z)$'nin aşağıdaki eşitliği sağlaması gerekir:

$$\frac{d^2F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n \tag{7.43}$$

Dolayısıyla,

$$F_n = A_n e^{-z/z_0} \tag{7.44}$$

terimini içeren

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n} \tag{7.45}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece, n harmoniğinin alanının bir Fourier bileşeni varsa, o bileşenin $z_0 = a/2\pi n$ mesafesiyle üssel olarak azalacağını bulmuş olduk. İlk harmonik için ($n = 1$), z bir örgü mesafesi a kadar arttığında, büyüklük $e^{-2\pi}$ çarpanıyla azalır (büyük bir azalmadır bu). Örgüden uzaklaştıkça, diğer harmonikler daha da hızlı azalır. Örgüden sadece birkaç a mesafesinde durduğumuzda, alanın neredeyse düzgün olduğunu, salınımların çok küçük olduğunu görürüz. Elbette, yeterince büyük z için düzgün alanı sağlayan daima "sıfır harmonik" bir alan olur:

$$\phi_0 = -E_0 z$$

Tam bir çözüm için, bu terimi, (7.41) gibi terimler ve (7.44)'ten gelen F_n'le toplayabiliriz. A_n gibi katsayılar, toplamın diferansiyeli alındığında, örgü tellerin yük yoğunluğu λ'yı verecek elektrik alanı sağlayacak şekilde ayarlanabilir.

Bu geliştirdiğimiz yöntemle, bir örgü yardımıyla elektrostatik kalkanlamanın nasıl bir metal levha kadar iyi işe yaradığını açıklayabiliriz. Örgüyü oluşturan tellerin arasındaki mesafenin birkaç katı kadar bir mesafe haricinde, kapalı bir örgü içerisindeki alanlar sıfırdır. Bakır bir levhadan daha ucuz ve hafif bir bakır örgü, dışardan gelen bozucu alanlara karşı hassas elektrik cihazları kalkanlamak için kullanılabilir.

8

ELEKTROSTATİK ENERJİ

8-1 Yüklerin elektrostatik enerjisi. Düzgün bir küre

8-1 Yüklerin elektrostatik enerjisi. Düzgün bir küre
8-2 Bir kondansatörün enerjisi. Yüklü iletkenler üzerindeki kuvvetler
8-3 İyonik bir kristalin elektrostatik enerjisi
8-4 Çekirdeklerin elektrostatik enerjisi
8-5 Elektrostatik alanda enerji
8-6 Bir noktasal yükün enerjisi

Mekanik konusundaki en ilginç ve yararlı keşiflerden biri enerjinin korunumu yasasıdır. Mekanik bir sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini ifade edebilmek bize, sistemin iki durumunun arasındaki ilişkiyi, aralarında ne olup bittiğine bakmadan, anlamamızı sağladı. Şimdi sıra elektrostatik sistemlerin enerjisini incelemekte. Enerjinin korunumu yasası, elektrik konusunda da ilginç şeyler keşfetmemize yardımcı olacak.

Elektrostatikte, enerji etkileşimi yasası çok basittir; aslında çoktan üzerinden geçtik bile. Aralarında r_{12} mesafesi bulunan iki yükümüz olsun, q_1 ve q_2. Sistemde bir miktar enerji vardır, zira yükleri bir araya getirmek için iş yapılmıştır. İki yükü çok büyük bir mesafeden bir araya getirmek için yapılan işi daha önce hesaplamıştık hatırlarsanız:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \tag{8.1}$$

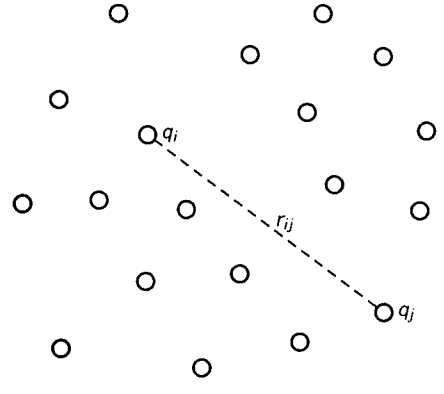
Gözden geçirme: Cilt 1, 4. Bölüm, *Enerjinin Korunumu;* Cilt 1, 13 ve 14. Bölüm, *İş ve Potansiyel Enerji*

Üst üste binme ilkesinden de biliyoruz ki, birden çok yük varsa, yüklerden herhangi biri üzerindeki toplam kuvvet diğer yüklerden kaynaklanan kuvvetlerin toplamıdır. Buradan ortaya çıkıyor ki, bir grup yükten oluşan bir sistemin toplam enerjisi, yüklerin birbirleriyle olan etkileşimlerinden doğan terimlerin toplamıdır. Eğer q_i ve q_j bu yüklerden herhangi ikisiyse ve aralarındaki mesafe Şekil 8-1'deki gibi r_{ij} ise, bu yük çiftinin enerjisi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \tag{8.2}$$

Toplam elektrostatik enerji U, mümkün olan tüm yük çiftlerinin enerjilerinin toplamıdır:

$$U = \sum_{\text{tüm çiftler}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \tag{8.3}$$



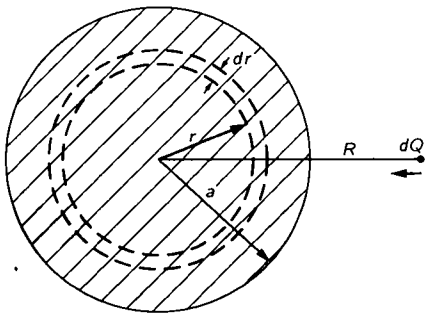
Şekil 8-1 Bir parçacıklar sisteminin elektrostatik enerjisi, her bir parçacık çiftinin elektrostatik enerjisinin toplamıdır.

ρ yük yoğunluğuyla tanımlanan bir yük dağılımımız varsa, Denk. (8.3)'ün toplamını bir integralle değiştirmeliyiz.

Bu enerjinin iki yönüyle ilgileneceğiz. Biri, enerjinin elektrostatik problemlere *uygulanması*, diğeriyse enerjinin farklı şekillerde *değerlendirilmesidir*. Bazen, yapılan işi özel bir durum için hesaplamak Denk. (8.3)'teki toplamı hesaplamaktan veya karşılık gelen integrali almaktan daha kolaydır. Örnek olarak, düzgün yük yoğunluğuna sahip bir grup yükü bir küre şeklinde bir araya getirmek istediğimizi düşünelim. Enerji, yükleri sonsuzdan getirmek için yapılan işe eşittir.

Şekildeki kürenin sonsuz derecede incelikte küresel katmanlardan oluştuğunu varsayalım. Her bir katmanı koyarken, küçük bir miktar yükü alır ve r'den $r+dr$ mesafesine ince bir katmana taşırız. a yarıçapına ulaşana kadar bu işlemi devam ettiririz (Şekil 8-2). Q_r, küre r yarıçapına geldiğinde kürenin sahip olduğu yükse, bir dQ yükünü taşımak için yapılan işi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{8.4}$$



Şekil 8-2 Düzgün bir yük küresinin enerjisini hesaplamak için, birçok küresel kabuktan oluştuğunu varsayabiliriz.

Küre içindeki yük yoğunluğu ρ ise Q_r yükü,

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

olarak ve dQ yükü de

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda Denk. (8.4)

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0} \tag{8.5}$$

haline gelir. Küreyi oluşturmak için gereken toplam enerji, dU'nun r = 0'dan $r=a$'ya integrali olan aşağıdaki denklemdir:

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \tag{8.6}$$

Sonucu, yükün toplam Q yükü cinsinden ifade etmek istersek,

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{8.7}$$

yazabiliriz.

Enerji, toplam yükün karesiyle orantılı ve yarıçapıyla ters orantılıdır. Denklem (8.7)'yi, $(1/r_{ij})$'nin küredeki tüm nokta çiftleri için ortalamasının $6/5a$ olması şeklinde de yorumlayabiliriz.

8-2 Bir kondansatörün enerjisi. Yüklü iletkenler üzerindeki kuvvetler

Şimdi, bir kondansatörü yüklemek için gerekli enerjiyi ele alacağız Bir Q yükü, kondansatörün iletkenlerinden birinden alınıp diğerine konulduysa, aralarındaki potansiyel farkını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz. C kondansatörün kapasitesidir:

$$V = \frac{Q}{C} \tag{8.8}$$

Kondansatörü yüklerken ne kadar iş yapılır? Küre için konuşacak olursak, kondansatörün, bir yükü bir levhadan diğerine küçük dQ artışlarıyla taşınarak yüklendiğini hayal ederiz. dQ yükünü taşımak için yapılan işi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$dU = VdQ$$

Denklem (8.8)'den V'yi bu denkleme sokarsak,

$$dU = \frac{QdQ}{C}$$

ifadesine ulaşırız. Sıfır yükten son Q yüküne integral alırsak,

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{8.9}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu enerjiyi, aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \tag{8.10}$$

İletken bir kürenin (sonsuza göre) kapasitesinin

$$C_{\text{küre}} = 4\pi\epsilon_0 a$$

olduğunu hatırladığımızda, yüklü bir kürenin enerjisini Denk. (8.9)'dan çıkarabiliriz:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{8.11}$$

Bu, aynı zamanda, Q toplam yüküne sahip ince bir *küresel kabuğun* enerjisidir elbette ve *düzgün yüklü* bir kürenin enerjisinin (Denklem 8.7) enerjisinin 5/6'sıdır.

Artık elektrostatik enerjiye dair uygulamaları ele almaya başlayabiliriz. Şu soruları bir düşünün: Bir kondansatörün levhaları arasındaki kuvvet nedir? Ya da, zıt bir yükün yakınındaki, yüklü bir iletkenin eksenine göre tork nedir? Bu tür soruları, kolayca, bir kondansatörün elektrostatik enerjisine dair Denk. (8.9)'la beraber sanal iş ilkesini kullanarak cevaplayabiliriz. (I. Cilt, 4, 13 ve 14. Bölüm).

Şimdi gelin, bu yöntemi paralel levhalı bir kondansatörün levhaları arasındaki kuvveti hesaplamak için kullanalım. Levhalar arasındaki uzaklığın küçük bir Δz miktarıyla artırıldığını varsayarsak, levhaları hareket ettirerek dışarıdan yapılan işi, F levhalar arasındaki kuvvet olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Delta W = F\,\Delta z \tag{8.12}$$

Denklem (8.9)'a göre, kondansatörün baştaki enerjisi,

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

şeklindeydi. Yükün değişmesine izin vermezsek, enerjideki değişimi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q^2\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right) \tag{8.13}$$

Denklem (8.12) ile (8.13)'ü eşitlediğimizdeyse,

$$F\,\Delta z = \frac{Q^2}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right) \tag{8.14}$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu, aynı zamanda, aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz:

$$F\,\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2}\,\Delta C \tag{8.15}$$

Kuvvet elbette levhalardaki yükler arasındaki etkileşimden kaynaklanmaktadır; ancak nasıl dağıldıklarını düşünmek zorunda değiliz. İhtiyacımız olan her şey C kapasitesi sayesinde hallolmuştur.

Buradan yola çıkarak, bu fikrin herhangi bir şekle sahip iletkenlere ve kuvvet bileşenlerine uygulanabileceğini kolaylıkla görebilirsiniz. Denklem (8.14)'teki F'i, bulmak istediğimiz bileşenle ve Δz'yi de ilgili yöndeki küçük yerdeğiştirmeyle değiştiririz. Ya da bir elektrot milimiz varsa ve τ torkunu bilmek istiyorsak, sanal işi,

$$\Delta W = \tau\Delta\theta$$

olarak ifade edebiliriz. Denklemdeki $\Delta\theta$ küçük açısal yerdeğiştirmesidir. $\Delta(1/C)$, elbette ki $\Delta\theta$'ya denk gelen $1/C$'deki değişim olmalıdır. Böylece, Şekil 8-3'teki gibi değişken bir kondansatördeki hareket eden levhalar arasındaki torku bulmuş oluruz.

Paralel levhalı kondansatöre geri dönelim. Kapasiteyi hesaplamak için 6. Bölümde elde ettiğimiz denklemi kullanabiliriz:

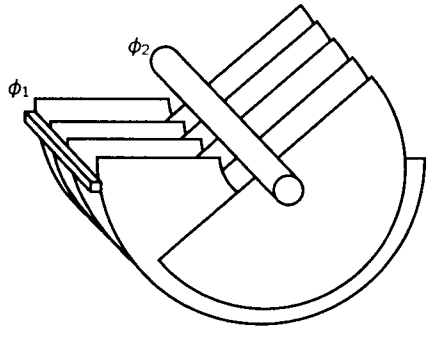
$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A} \tag{8.16}$$

Burada A her bir levhanın alanıdır. Aralarındaki mesafeyi Δz kadar artırdığımızda

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}$$

eşitliğini elde ederiz. Denklem (8.14)'ü kullanarak, levhalar arasındaki kuvveti şu şekilde ifade edebiliriz:

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \tag{8.17}$$



Şekil 8-3 Değişken bir sığadaki tork nedir?

Gelin, yukarıdaki denkleme biraz daha yakından bakalım ve kuvvetin nasıl doğduğunu anlayabilecek miyiz görelim:

$$Q = \sigma A$$

Denklem (8.17)'yi, aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

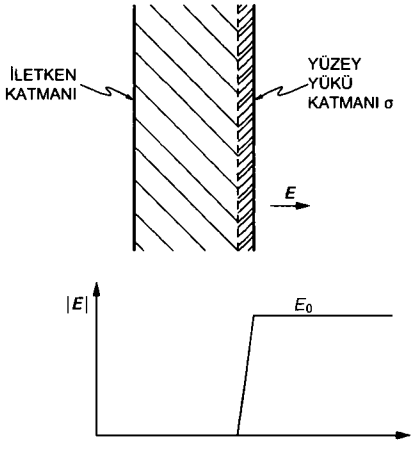
Levhalar arasındaki elektrik alan

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

olduğundan, aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$F = \frac{1}{2} QE_0 \tag{8.18}$$

Bir levha üzerine etkiyen kuvvetin, levhadaki Q yükü ile yüke etkiyen alanın çarpımı olduğunu herkes tahmin edebilir. Şaşırtıcı şekilde, denklemde bir de 1/2 çarpanı var. Bunun nedeni E_0'nun yüklere etki eden alan olmaması. Levha yüzeyindeki yükün, Şekil 8-4'teki gibi ince bir katmanı kapladığını düşünürsek, alan, katmanın iç taraftaki sınırında sıfır değerinden levhanın dışında E_0 değerine kadar değişecektir. Yüzeydeki yüklere etkiyen ortalama alan $E_0/2$ olur. Bu yüzden Denk. (8.18)'de 1/2 çarpanı vardır.



Şekil 8-4 Bir iletkenin yüzeyindeki yük, yük katmanı boyunca, sıfırdan $E_0 = \sigma/\epsilon_0$'ya değişkenlik gösterir.

Dikkat ederseniz, sanal işi hesaplarken kondansatör üzerindeki yükün sabit olduğunu varsaydık. Diğer bir deyişle, başka nesnelere elektriksel olarak bağlı olmadığı için üzerindeki toplam yükün değişmediğini varsaydık.

Kondansatörün potansiyel farkının, biz yerdeğiştirme yaptıkça, sabit kaldığını varsayalım. O zaman aşağıdaki eşitliği temel alırdık:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Böylece, Denk. (8.15) yerine, o denklemdeki kuvvetin büyüklüğüne eşit (çünkü $V = Q/C$) ama zıt işaretli bir kuvvet veren aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F\,\Delta z = \frac{1}{2} V^2\,\Delta C$$

Elbette, kondansatör levhaları arasındaki kuvvetin işareti yükleyici kaynaktan onu ayırdığımızda tersine dönmez. Ayrıca, zıt yüklere sahip levhaların birbirlerini çekmesi gerektiğini de biliyoruz. Sanal iş ilkesini ikinci durumda yanlış uyguladık, yükleyici kaynak üzerinde yapılan sanal işi göz önüne almadık. Kapasite değiştikçe potansiyeli V'de sabit tutmak için, yükleyici kaynak tarafından $V\,\Delta C$ kadar yük sağlanmalıdır. Bu yük V potansiyelinde sağlandığından, elektriksel sistem tarafından potansiyeli sabit tutmak için yapılan iş $V^2\,\Delta C$. Mekanik iş $F\,\Delta z$ *artı* bu elektriksel iş $V^2\,\Delta C$, kondansatörün toplam enerjisi $\frac{1}{2}V^2\,\Delta C$'deki değişimi karşılar. Dolayısıyla $F\,\Delta z$, önceden olduğu gibi, $-\frac{1}{2}V^2\,\Delta C$'ye eşittir.

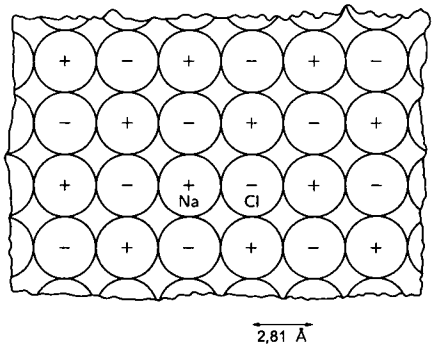
8-3 İyonik bir kristalin elektrostatik enerjisi

Şimdi, atom fiziğindeki elektrostatik enerji kavramının bir uygulamasını ele alacağız. Atomlar arasındaki kuvveti kolayca ölçemeyiz, ama sıklıkla bir atomik düzenleme ile bir başkası arasındaki enerji farklarıyla ilgileniriz. Örneğin, kimyasal bir değişimin enerjisiyle. Atomik kuvvetler temelde elektriksel olduğundan, kimyasal enerjiler aslında büyük oranda elektrostatik enerjilerdir.

İyonik bir örgünün elektrostatik enerjisini ele alalım. NaCl gibi bir iyonik kristal, katı küreler olarak düşünülebilecek artı ve eksi yüklerden oluşur. Birbirlerine dokunmaya başlayana kadar elektriksel olarak birbirlerini çekerler; daha da yakınlaştırmaya çalıştığımızdaysa, çok süratli bir şekilde itici bir güç doğar.

İlk yaklaşık modelimiz için, tuz kristalini, atomlarını temsil eden katı kürelerden oluştuğunu hayal edelim. Örgünün yapısı X-ışınım kırınımıyla belirlen-

miştir. Tuz, kübik bir örgüdür. Üç boyutlu bir dama tahtası gibi. Şekil 8-5 bir kesit görüntüsüdür. İyonlar arasındaki mesafe 2,81 Å'dür (= 2,81 × 10^{-8} cm).



Şekil 8-5 Bir tuz kristalinin atomik ölçüde kesiti. Na ve Cl iyonlarının dama tahtası gibi dizilimi, şekilde gösterilene dik olan diğer iki kesitte de aynıdır (*Bkz.* I. Cilt, Şekil 1-7).

Sistem resmettiğimiz gibiyse, kontrolünü şu soruyu cevaplayarak yapabiliriz: İyonları birbirinden ayırmak için ne kadar enerji gerekir? Diğer bir deyişle, kristal yapıyı tamamen iyonlarına ayırmak için ne kadar enerji gerekir? NaCl molekülünü iyonlarına ayırmak için gereken toplam enerji, deneysel olarak, molekül başına 7,92 elektron-Volt olarak bulunmuştur. Aşağıdaki dönüşümü

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ Joule},$$

ve bir mol içindeki moleküllerin sayısı olan Avogadro sayısını

$$N_0 = 6{,}02 \times 10^{23}$$

kullanarak ayrıştırma enerjisi aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$W = 7{,}64 \times 10^5 \text{ Joule/mol}$$

Kimyacılar, enerji için kilokalori birimini kullanmayı tercih ederler. Bir kilokalori 4190 Joule'dür. Dolayısıyla, 1 eV/molekül 23 kilokalori/mol olur. Böylece, NaCl molekülünün ayrışma enerjisi

$$W = 183 \text{ kilokalori/mol}$$

olur.

Kristali parçalamak için gereken işi hesaplayarak, teorik olarak bu kimyasal enerjiyi bulabilir miydik? Teoremimize göre, bu iş bütün iyon çiftlerinin potansiyel enerjisinin toplamıdır. Bu toplamı hesaplamanın en kolay yolu, bir iyon seçmek ve onun diğer iyonlarla olan potansiyel enerjisini hesaplamaktır. Bu bize, iyon başına enerjinin *iki katını* verecektir, çünkü enerji yük *çiftlerine* aittir. Tek bir iyona ait enerjiyi hesaplamak için, toplamı ikiye bölmeliyiz. Bizim gerçekten istediğimiz *molekül başına enerji*dir. Her bir molekül iki iyon içerir, dolayısıyla toplam bize doğrudan molekül başına enerjiyi verir.

Bir iyonun yakın komşularıyla olan enerjisi e^2/a'dır. Burada $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ ve a da iyonların merkezleri arasındaki uzaklıktır. (Tek değerlikli iyonları ele alıyoruz.) Bize, büyüklüğün doğru sırasını verecek olan bu enerji 5,12 eV'dir. Yine de, ihtiyacımız olan terimlerin sonsuz toplamına hâlâ yaklaşmadık.

Düz bir hat boyunca dizilmiş iyonlara ait terimleri toplayarak işe koyulalım. Şekil 8-5'te Na'yla işaretlenmiş iyonun bizim özel iyonumuz olduğunu düşünerek, onunla beraber aynı yatay çizgide olan iyonları ele alacağız. Hemen yakınında, her biri a mesafesinde ve eksi yüklü iki Cl iyonu bulunmakta. $2a$ mesafesinde artı yüklü iki iyon bulunmakta ve bu böyle sürüp gitmekte. Bu toplamın enerjisine U_1 dersek, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{e^2}{a}\left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \mp \cdots\right) \\ &= -\frac{2e^2}{a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots\right) \end{aligned} \tag{8.19}$$

Bu dizi yavaşça yakınsadığından sayısal olarak değerlendirmek zordur; ancak ln 2'ye eşit olduğu bilinir. Dolayısıyla

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1{,}386\ \frac{e^2}{a} \tag{8.20}$$

olur.

Şimdi, buna bitişik bir başka iyon hattını ele alalım. En yakındaki eksidir ve a mesafesindedir. Daha sonra $\sqrt{2}a$ mesafesinde iki adet artı iyon vardır. Bir sonraki hattından $\sqrt{5}a$ mesafesinde, bir sonraki $\sqrt{10}a$ mesafesinde ve bu böyle ilerler gider. Şu ana kadar bu iyon hattı için aşağıdaki seriyi elde ettik:

$$\frac{e^2}{a}\left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \mp \cdots\right) \tag{8.21}$$

Bu şekilde *dört* hat vardır: yukarıda, aşağıda, önde ve arkada. Bu hatlara en yakın olan hatlar da köşegenler üzerindedir ve bu böyle sürer gider.

Bütün bu hatlar üzerinde sabırla çalışır ve toplamlarını alırsanız, son toplamın

$$U = -1{,}747\,\frac{e^2}{a}$$

olduğunu bulursunuz. Bu sonuç, ilk hat için Denk. (8.20)'de elde ettiğimizden daha yüksektir. e^2/a = 5,12 eV kullanarak,

$$U = -8{,}94 \text{ eV}$$

sonucunu elde ederiz. Bulduğumuz sonuç, deneysel olarak gözlemlenmiş enerjiden %10 fazladır. Bu da, bütün örgünün bir arada elektriksel Coulomb kuvvetleriyle tutulduğuna dair fikrimizin temelde doğru olduğunu göstermektedir. Ne muhteşem, değil mi? İlk defa, makroskopik, çok küçük bir nesnenin bir özelliğini, atom fiziği bilgimizle elde etmeyi başardık. Daha sonra çok daha fazlasını yapacağız. Fiziğin, maddenin davranışını atomların davranışlarını düzenleyen yasalarla açıklamaya çalışan dalına *katı hal fiziği* denir.

Peki ya hesaplamamızdaki hata? Neden deney sonuçlarıyla bire bir örtüşmedi? Bunun nedeni iyonlar arasındaki yakın mesafelerdeki itme kuvvetidir. Böyle bir itme mekanizmasının detaylarını analiz etmeye henüz hazır değiliz, ama büyük ölçekli ölçümler yaparak özelliklerine dair fikir edinebiliriz. Bütün bir kristalin *sıkıştırılabilirliğini* ölçerek, iyonlar arasındaki itme enerjisine ve böylece enerjiye olan katkılarına dair niceliksel bir fikir elde etmek mümkündür. Bu sayede, itme etkisinin elektrostatik çekimin 1/9,4'ü olduğu bulunmuştur ve elbette zıt işaretlidir. Saf elektrostatik enerjiden gelen katkıyı çıkarırsak, molekül başına ayrışma enerjisini 7,99 eV olarak buluruz. Gözlemlediğimiz sonuca çok yakındır, ama bire bir örtüşmemektedir. Hesaba katmadığımız bir şey daha var: kristal titreşimlerin kinetik enerjisini hesaba katmadık. Bu etki için de düzeltme yaparsak, deneylerle bire bir örtüşen sonuç buluruz. Demek ki fikrimiz doğruymuş; NaCl gibi bir kristalin enerjisine en büyük katkı elektrostatikten gelmektedir.

8-4 Çekirdeklerin elektrostatik enerjisi

Şimdi, atom fiziğindeki bir başka elektrostatik enerji örneğini, atom çekirdeğinin elektrik enerjisini inceleyeceğiz. Bunu yapmadan önce, proton ve nötronları çekirdekte bir arada tutan ana kuvvetlerin (nükleer kuvvetler denilen) bazı özelliklerini tartışacağız. Çekirdeklere –ve onları meydana getiren protonlar ve nötronlara– dair keşiflerin ilk zamanlarında, bir proton ile başka bir proton arasındaki kuvvetin, elektriksel olmayan kuvvetli parçasının basit bir yasası olduğu, elektriğin ters kare yasası gibi, düşünülüyordu. Bu kuvvetin yasasını ve ona karşılık gelen proton ile nötron ve nötron ile nötron arasındaki kuvvetlerin de yasasını belirlediğinizde, çekirdeklerdeki parçacıkların davranışını kuramsal olarak açıklayabilmeliydiniz. Bu yüzden protonların saçılımını çalışan büyük bir program başlatıldı. Amaç, aralarındaki kuvvete dair yasayı keşfetmekti. Otuz yıl uğraşıdan sonra, ortaya hiç de basit bir şey çıkmadı. Bir proton ile diğer bir proton arasındaki kuvvete dair hatırı sayılır bilgi sahibi olmuştuk, fakat kuvvetin olabildiğince karmaşık olduğu ortaya çıkmıştı.

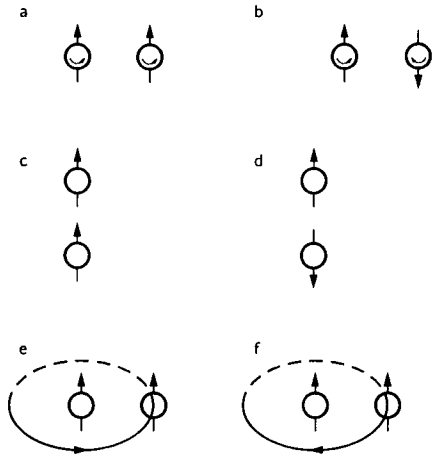
"Olabildiğince karmaşık" derken kastettiğimiz şey, kuvvetin bağlı olabileceği her şeye bağlı olduğuydu.

Öncelikle, kuvvet, protonlar arasındaki uzaklığa bağlı basit bir fonksiyon değildir. Uzak mesafelerde bir çekim vardır, fakat yakın mesafelerde bu çekim yerini itkiye bırakır. Mesafeye olan bağlılık karmaşık bir fonksiyondur ve hâlâ tam olarak bilinemez.

İkinci olarak, kuvvet, protonların spinlerinin yönelimine bağlıdır. Protonların bir spini vardır ve etkileşimde bulunan herhangi iki proton aynı veya zıt yönde açısal momentumlarla dönüyor olabilir. Kuvvet, Şekil 8-6'nın (a) ve (b) bölümlerinde görüldüğü gibi spinler aynı yöndeyken farklı, zıt yöndeyken farklıdır. Aralarındaki fark gayet büyüktür, ihmal edilebilecek kadar küçük değildir.

Üçüncüsü, kuvvet, Şekil 8-6'nın (c) ve (d) bölümlerinde görüldüğü gibi protonların ayrılması spinlerine paralel olduğunda farklı, (a) ve (b)'de görüldüğü gibi spinlerine *dik* yönde olduğunda farklıdır.

Dördüncü olarak, kuvvet, aynı manyetizmadaki gibi, protonların hızına bağlıdır. Hatta manyetizmadakinden daha kuvvetli bir şekilde bağlıdır. Hıza bağlı kuvvet göreli bir etki de değildir; ışık hızından çok daha küçük hızlarda bile kuvvetlidir. Daha da ötesi, kuvvetin bu parçası hızın büyüklüğünden başka şeylere bağlıdır. Örneğin, bir proton diğer bir protonun yakınında hareket ederken, kuvvet, Şekil 8-6(e)'de görüldüğü gibi yörüngesel hareket spinin dönmesiyle aynı yöndeyse farklı, (f)'de görüldüğü gibi zıt yöndeyse farklıdır. Buna, kuvvetin "spin yörünge" parçası denir.

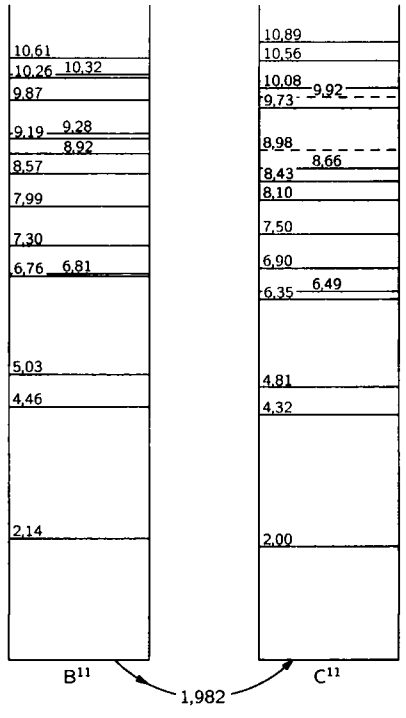


Şekil 8-6 İki proton arasındaki kuvvet, mümkün olan her parametreye bağlıdır.

Bir proton ile nötron ve bir nötron ile nötron arasındaki kuvvetler de eşit derecede karmaşıktır. Günümüzde hâlâ bu kuvvetlerin arkasındaki mekanizmayı bilmiyoruz, bir başka değişle onları basit şekilde kavrayamıyoruz.

Yine de, çekirdek kuvvetlerinin olabileceklerinden *daha basit* oldukları önemli bir hal vardır. Şöyle ki, iki nötron arasındaki *nükleer* kuvvet [çekirdek kuvveti], bir proton ile nötron arasındaki ve iki proton arasındaki kuvvete eşittir! Diğer bir deyişle, herhangi bir nükleer durumda bir proton ile nötronu değiştirsek (veya tersi), *nükleer etkileşimler* değişmez. Bu denkliğin "temel nedeni" bilinmez, fakat yeğin etkileşimde bulunan başka parçacıklara dair etkileşim yasalarına da uygulanacak önemli bir ilkedir. π mezonlar veya "acayip" parçacıklar gibi.

Bu gerçek, benzer çekirdeklerdeki enerji seviyelerinin konumlarıyla gayet güzel şekilde gösterilebilir. B^{11} (boron on bir) gibi bir çekirdeği ele alalım. Boron on bir, beş proton ve altı nötrondan oluşur. Çekirdekte bu on bir parçacık birbirleriyle karmaşık bir şekilde dans ederek etkileşirler. Bütün olası etkileşimler arasında birisi, olabilecek en düşük enerjiye sahiptir. Bu, çekirdeğin normal halidir ve *taban durumu* olarak bilinir. Çekirdek bir şekilde uyarıldığında (örneğin, yüksek enerjili bir proton veya benzeri bir parçacıkla çarpıştığında) birçok farklı hale geçebilir. Bunlara *uyarılmış haller* denir, her birinin enerjisi taban durumunun enerjisinden yüksektir. Van de Graff jeneratörüyle (Caltech'in Kellogg ve Sloan Laboratuvarlarındaki gibi) devam eden nükleer fizik araştırmalarında, bu uyarılmış hallerin enerjileri ve diğer özellikleri deneylerle belirlenir. Şekil 8-7'nin sol tarafındaki tek boyutlu çizelgede, B^{11}'in bilinen en düşük on beş uyarılmış hallerinin enerjileri gösterilmektedir. En alttaki yatay çizgi taban durumunu temsil eder. İlk uyarılmış halin enerjisi taban durumun enerjisinden 2,14 MeV yüksektir, ikincisininki 4,46 MeV yüksektir ve bu böyle devam eder. Nükleer fizik üzerine yapılan çalışmalar bu gayet karmaşık enerji seviyelerinin açıklamasını bulmaya çalışsa da, şu ana kadar nükleer enerji seviyelerine dair genel bir kuram ortada yoktur.



Şekil 8-7 B^{11} ve C^{11}'in enerji seviyeleri (MeV cinsinden). C^{11}'in taban durumunun enerjisi B^{11}'inkinden 1,982 MeV yüksektir.

B^{11}'deki nötronlardan birini bir protonla değiştirirsek, bir karbon izotopu olan C^{11}'in çekirdeğini elde ederiz. C^{11}'e ait en düşük 16 düzeyin enerjileri de ölçülmüştür, Şekil 8-7'nin sağ tarafında görebilirsiniz. Kesintili çizgiler, deneylerle elde ettiğimiz bilginin kuşkulu olduğu seviyeleri işaret etmektedir.

Şekil 8-7'ye dikkatlice bakarsanız, iki çekirdeğin enerji seviyelerinin biçimleri arasındaki dikkat çekici benzerliği göreceksiniz. İlk uyarılmış haller, taban durumların yaklaşık 2 MeV üzerindedir. İkinci uyarılmış hal ile birinci arasında 2,3 MeV kadar büyük bir fark vardır, üçüncü seviye ile ikinci arasındaysa

sadece 0,5 MeV vardır. Dört ve beşinci seviyelere de büyük bir sıçrama vardır; beş ve altıncı seviyeler arasındaki farksa sadece 0,1 MeV'dir. Bu böyle devam eder gider. Yaklaşık onuncu seviyede, karşılıklılık kaybolur gibidir, fakat eğer seviyeleri onları tanımlayan özellikleriyle etiketlersek yine görülebilir. Örneğin, açısal momentumları ve fazladan enerji kaybetmek için ne yaptıkları gibi.

B^{11} ve C^{11}'in enerji seviyelerindeki dikkat çekici benzerlik, elbette sadece tesadüf değildir. Fiziksel bir yasanın ipucu olmalı. Bu benzerliğin bize gösterdiği, bir çekirdekteki en karmaşık durumda bile, bir nötronu protonla değiştirmek çok çok az bir değişiklik meydana getirir. Buradan, nötron-nötron ve proton-proton kuvvetlerinin neredeyse benzer olması gerektiği sonucunu çıkarabiliriz. İşte şimdi, beş proton ve altı nötronlu nükleer konfigürasyonlar ile beş proton ve altı nötronlu konfigürasyonların aynı olduğunu anlayabiliriz.

Dikkat ederseniz, bu iki çekirdeğin özellikleri bize nötron-proton kuvveti hakkında bir şey söylemiyor. Her iki çekirdekte de eşit sayıda nötron-proton bileşimi var. Başka iki çekirdeği incelersek, örneğin altı proton ve sekiz nötrona sahip C^{14} ile yedişer proton ve nötrona sahip N^{14}'ü, enerji seviyeleri arasında benzer karşılıklılıkları buluruz. Buradan, proton-proton, nötron-nötron ve proton-nötron kuvvetlerinin bütün durumlarda benzer olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Nükleer kuvvetlere dair yasalarda beklenmedik bir ilke vardır. Her bir nükleer parçacık çifti arasındaki kuvvet karmaşık olsa bile, bu üç muhtemel çift arasındaki kuvvet aynıdır.

Yine de bazı küçük farklar vardır. Seviyeler tam olarak birbirine karşılık gelmez; ayrıca, C^{11}'in taban durumunun mutlak enerjisi (kütlesi) B^{11}'inkinden 1,982 MeV yüksektir. Bütün diğer seviyeler aynı mutlak enerji miktarı kadar yüksektir. Dolayısıyla, kuvvetler tam olarak birbirine eşit değildir. Bunu zaten biliyoruz; iki proton arasında *elektriksel* kuvvet varken, nötronlar arasında öyle bir kuvvet yoktur. B^{11}ile C^{11} arasındaki farkları, protonların elektriksel etkileşimlerinin farklı olduğu gerçeğiyle açıklayabilir miyiz? Seviyeler arasındaki küçük farkların da belki? Nükleer kuvvetler elektriksel kuvvetlerden çok daha büyük olduğu için, elektriksel etkilerin enerji seviyeleri üzerinde çok küçük bir etkisi olurdu.

Bu fikri kontrol etmek veya bu fikrin sonuçlarını araştırmak için, önce iki çekirdeğin taban durum enerjileri arasındaki farkı ele alalım. Modelimizi basit tutmak adına, her bir çekirdeğin r yarıçapında Z sayıda protona sahip olduğunu varsayalım. Çekirdeği, düzgün yük dağılımına sahip bir küre olarak düşünürsek, elektrostatik enerjisini Denk. (8.7) yardımıyla hesaplayabiliriz.

$$U = \frac{3}{5}\frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{8.22}$$

Denklemdeki q_e, protonun temel yüküdür. Z B^{11} için beş ve C^{11} için altı olduğundan, elektrostatik enerjileri farklı olur.

Bu kadar az sayıda protonla, Denk. (8.22) tam olarak doğru değildir. Onlar küre içinde düzgün dağılmış noktalar olarak düşünüp, her bir proton çifti arasındaki elektriksel enerjiyi hesaplarsak, Denk. (8.22)'deki Z^2 teriminin $Z(Z-1)$ terimiyle değiştirilmesi gerektiğini buluruz. Böylece enerji şu şekilde yazılır:

$$U = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{r} \tag{8.23}$$

r nükleer yarıçapını bilirsek, Denk. (8.23)'ü kullanarak B^{11} ile C^{11} arasındaki elektrostatik enerji farkını hesaplayabiliriz. Gelin biz tersten gidelim, ama başlangıçtaki enerji farkının tamamen elektrostatik olduğunu varsayıp, gözlemlenen enerji farkını kullanarak yarıçapı hesaplayalım.

Bu çok da doğru değildir. B^{11} ve C^{11}'in temel durumları arasındaki 1,982 MeV değerindeki fark aynı zamanda parçacıkların serbest enerjilerini de $-mc^2$ enerjisini– içermektedir. B^{11}'den C^{11}'e giderken bir nötronu bir proton ve daha

az kütleye sahip elektronla değiştiririz. Enerji farkının bir kısmı, nötron ve proton ile elektronun serbest enerjilerinin farkından gelmektedir ve 0,784 MeV'dir. Dolayısıyla elektrostatik enerjiden kaynaklanan fark 1,982 MeV'den fazladır:

$$1{,}982 \text{ MeV} + 0{,}784 \text{ MeV} = 2{,}766 \text{ MeV}$$

Bu enerjiyi, B^{11} veya C^{11}'in yarıçapı için Denk. (8.23)'e koyarsak aşağıdaki sonucu buluruz:

$$r = 3{,}12 \times 10^{-13} \text{ cm} \tag{8.24}$$

Bu sayının bir anlamı var mıdır? Bunu öğrenmek için, çekirdeklerin yarıçapını bulmak için kullanılan başka yöntemlerle karşılaştırmalıyız. Hızlı parçacıkları nasıl saçtığına bakarak bir çekirdeğin yarıçapını ölçebiliriz örneğin. Bu türden ölçümler göstermiştir ki, bütün çekirdeklerdeki madde *yoğunluğu* neredeyse aynıdır. Diğer bir deyişle, hacimleri içerdikleri parçacıklarla orantılıdır. A bir çekirdekteki protonlar ve nötronların toplamıysa (kütlesiyle çok yakın orantılı bir sayı), yarıçapını aşağıdaki denklemle hesaplayabiliriz:

$$r = A^{1/3} r_0 \tag{8.25}$$

Bu denklemde r_0 değeri aşağıda gösterilmiştir:

$$r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13} \text{ cm} \tag{8.26}$$

Bu ölçümlerden B^{11} (veya C^{11}) çekirdeğinin yaklaşık değerinin aşağıdaki gibi olmasını bekleriz:

$$r = (11)^{1/3} (1{,}2 \times 10^{-13}) \text{ cm} = 2{,}7 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

Bu sonucu (8.24)'le karşılaştırırsak, B^{11} ile C^{11} arasındaki enerji farklarının elektrostatikten kaynaklandığına dair varsayımımızın gayet doğru olduğunu görebilirsiniz. Aradaki fark sadece %15 kadardır ve bu da ilk nükleer hesaplamamız için hiç de fena bir sonuç değildir.

Aradaki farkı açıklayabiliriz. Günümüzde, çekirdeklere dair anlayışımıza göre eşit sayıda nükleer parçacıklar –B^{11} örneğinde beş proton ve beş nötron– bir çeşit *öz* meydana getirirler. Bu öze parçacık eklendikçe, parçacık öze girmektense, yeni bir küresel çekirdek meydana getirmek için özün etrafında dolanır. Böyle olduğu için, ilave proton için farklı bir elektrostatik enerji kabul etmeliydik. C^{11} ve B^{11}'in fazla enerjisini tam olarak aşağıdaki gibi hesaplamalıyız:

$$\frac{Z_B q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Bu da, özün dışına bir proton eklemek için gerekli enerjiye eşittir. Çıkan sayı Denk. (8.23)'ün sonucunun 5/6'sıdır, dolayısıyla yarıçap için yeni sonuç (8.24)'ün sonucunun 5/6'sıdır. Bu da doğrudan ölçerek elde ettiğimize çok daha yakın bir sonuçtur.

Denklem sonucu ile deney sonucunun uyuşmasından iki sonuç çıkarabiliriz. Birincisi, elektrik yasalarının çok küçük, 10^{-13} cm boyutlarında bile çalışmasıdır. Diğeriyse, proton ile proton, nötron ile nötron ve proton ile nötron arasındaki kuvvetlerin elektriksel olmayan kısımlarının tamamen eşit olduğudur. Bu, dikkate değer bir rastlantıdır.

8-5 Elektrostatik alanda enerji

Şimdi, elektrostatik enerjiyi hesaplamak için diğer yöntemleri ele alalım. Hepsi temel denklem olan, her bir yük çiftinin, diğer yük çiftleri üzerinde, karşılıklı enerjilerinin toplamı olan Denk. (8.3)'ten elde edilebilir. Her zamanki gibi, her bir dV hacminin ρdV yük elemanını barındırdığını düşünelim. O zaman, Denk. (8.3)'ü,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\substack{\text{bütün} \\ \text{hacimde}}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2 \tag{8.27}$$

şeklinde yazabiliriz. Dikkat ettiniz mi? $\frac{1}{2}$ çarpanı var. Bunun nedeni dV_1 ve dV_2 üzerinden aldığımız çifte integrallerde tüm yük çiftlerini iki kere saymış olmamızdır. Her bir çifti bir kere sayabileceğimiz şekilde bir integral yazmanın uygun bir yolu yoktur. Dikkat ederseniz, (8.27)'de dV_2 üzerinden alınan integral (1)'deki potansiyeldir:

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \phi(1)$$

Böylece, Denk. (8.27)

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1)\phi(1)\, dV_1$$

olarak yazılabilir. Ya da artık (2) noktası gözükmediğinden, basitçe aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\phi\, dV \tag{8.28}$$

Bu denklemin ne anlama geldiğini şu şekilde ifade edebiliriz. $\rho\, dV$ yükünün potansiyel enerjisi, yükle, aynı noktadaki potansiyelin çarpımına eşittir. Toplam enerji $\phi\rho\, dV$ üzerinden alınan integrale eşit olur böylece. Yine $\frac{1}{2}$ çarpanı vardır ama. Hâlâ o çarpanı kullanmak zorundayız çünkü enerjileri iki kere sayıyoruz. İki yükün karşılıklı enerjisi, birinci yük ile diğerinden kaynaklanan potansiyelin çarpımıdır. Bir başka şekilde, ikinci yük ile diğerinden kaynaklanan potansiyelin çarpımı olarak da yazılabilir. Bundan dolayı, iki yük için,

$$U = q_1\phi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

ya da

$$U = q_2\phi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

yazabiliriz. Ayrıca aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$U = \frac{1}{2}[q_1\phi(1) + q_2\phi(2)] \tag{8.29}$$

(8.28)'deki integral, (8.29)'da parantez içindeki terimlerin toplamına eşittir. İşte, bu yüzden $\frac{1}{2}$ çarpanına ihtiyacımız vardır.

Şimdi, ilginç bir soru soralım: Elektrostatik enerji nerededir? İçinizden biri "kime ne?" diyebilir. Böyle bir sorunun anlamı nedir? Birbirleriyle etkileşen yükler varsa, bileşimin belli bir enerjisi vardır. Enerjinin yüklerden birinde, her ikisinde ya da ikisinin arasında bir yerde olduğunu söylememiz gerekiyor mu? Bu sorular, toplam enerjinin korunduğunu bildiğimizden dolayı sadece, anlamsız gelebilir. Enerjinin *bir yerlerde* olduğu fikrine ihtiyacımız yoktur.

Yine de, diyelim ki, enerjinin bir yerlerde bulunması fikri, aynı ısı enerjisinde olduğu gibi, *mantıklı* geldi. Bu durumda, enerjinin korunması ilkesini eğer belli bir hacimdeki enerji değişirse, değişimi hacme giren ve çıkan enerjiyi kullanarak açıklayabileceğimiz şekilde genişletebiliriz. Enerjinin korunumuna dair daha önceki ifademizin, bir yerde bir miktar enerji kaybolursa ve başka bir yerde, aradaki boşlukta özel bir şey olmadan, açığa çıkarsa hâlâ geçerli olduğunu bilin. Dolayısıyla, enerjinin korunumu ilkesini genişletmekten bahsedebiliriz. Bu genişlemiş ilkeye, enerjinin *yerel* korunumu adını verebiliriz. Buna göre, belirli bir hacimdeki enerji sadece o hacme giren ve ondan çıkan enerji miktarıyla değişir. Enerjinin bir bölgede böyle korunması gerçekten de mümkündür. Öyleyse, toplam enerjinin korunumu ifadesinden çok daha ayrıntılı bir yasamız olurdu. Gerçekten de doğada, *enerji yerel olarak korunur.* Enerjinin nerede olduğuna ve bir yerden diğerine nasıl gittiğine dair denklemler yazabiliriz.

Enerjinin nerede olduğunu söyleyebilmemizin neden zorunlu olduğuna dair *fiziksel* bir neden de vardır. Kütleçekim kuramına göre, bütün kütleler bir kütleçekim kaynağıdır. $E = mc^2$ sayesinde, kütle ile enerjinin eşit olduğunu da biliyoruz. Dolayısıyla, tüm enerji bir kütleçekim kuvveti kaynağıdır. Enerjinin yerini bilemezsek, kütlenin de yerini bilemeyiz. Kütleçekim alanın kaynaklarının nerelerde olduğunu söyleyemezdik. Kütleçekim kuramı eksik kalırdı.

Kendimizi elektrostatikle sınırlarsak, enerjinin nerede olduğunu bilmemizin imkânı yoktur. Elektrodinamiğin eksiksiz Maxwell denklemleri bize çok daha fazla bilgi sağlar. (Yine de bu durumda, tam doğru konuşacak olursak, cevap tek değildir.) Bu yüzden, bu soruyu daha ilerleyen bir bölümde tartışacağız. Şimdiyse sadece elektrostatiğe özgü bir durum için sonucu vereceğiz size. Enerji uzayda, elektrik alan neredeyse oradadır. Bu akla uygundur, çünkü yüklerin ivmelendiğinde elektrik alan meydana getirdiğini biliyoruz. Işık veya radyo dalgaları bir noktadan diğerine hareket ettiğinde enerji de taşırlar diyebiliriz. İyi de, dalgalarda hiç yük yoktur ki. Bu yüzden, enerjiyi elektromanyetik alanın olduğu yerde tespit etmek isteriz, alanın geldiği yüklerin olduğu yerde değil. Bu yüzden enerjiyi yükler cinsinden değil de, meydana getirdikleri alanlar cinsinden ifade etmeliyiz. Hatta, Denk. (8.28)'in *sayısal* olarak aşağıdaki denkleme eşit olduğunu gösterebiliriz:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,dV \tag{8.30}$$

Bu denklemi, bir elektrik alan mevcut olduğunda, *yoğunluğu* (birim hacimdeki enerji)

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \tag{8.31}$$

olan bir enerjinin de var olduğu şeklinde yorumlayabiliriz. Bu fikir, Şekil 8-8'de resmedilmiştir.

Denklem (8.30)'un elektrostatik yasalarıyla uyumlu olduğunu gösterebilmek için, 6. Bölümde elde ettiğimiz ρ ile ϕ arasındaki ilişkiyi Denk. (8.28)'e koyalım:

$$\rho = -\epsilon_0\nabla^2\phi$$

Böyle aşağıdakini elde ederiz:

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2}\int \phi\nabla^2\phi\,dV \tag{8.32}$$

Terimleri açarsak,

$$\begin{aligned}\phi\nabla^2\phi &= \phi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \qquad (8.33)\\ &= \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi)\end{aligned}$$

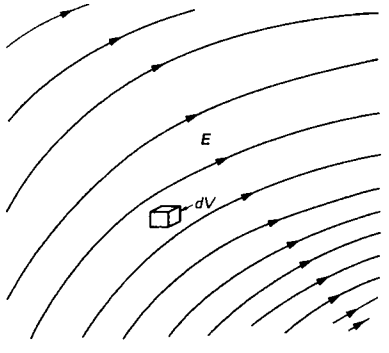
eşitliklerini elde ederiz. Bu durumda, enerji integralimiz de aşağıdaki gibi olur:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi)dV - \frac{\epsilon_0}{2}\int\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)dV$$

Gauss teoremini kullanarak, ikinci integrali yüzey integraline çevirebiliriz:

$$\int_{\text{hacim}}\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)dV = \int_{\text{yüzey}}(\phi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}da \tag{8.34}$$

Yüzey integralini, tüm yüklerin sonlu bir mesafede olduğu, eşdeyişle yüzeyin sonsuza gittiği varsayımıyla (böylece hacim integralleri, tüm uzay üzerinden alınan integraller olur) hesaplayacağız. Bu şekilde ilerlemenin en kolay yo-



Şekil 8-8 Elektrik alandaki her bir $dV = dx\,dy\,dz$ birim hacmi $(\epsilon_0/2)E^2\,dV$ enerjisi içerir.

lu, merkezi sıfır noktası olan ve çok büyük bir R yarıçapına sahip bir küresel yüzeyi ele almaktır. Bütün yüklerden uzak olduğumuz zaman, ϕ'nin $1/R$ ve $\nabla\phi$'nin de $1/R^2$ değiştiğini biliyoruz. (Her ikisi de, dağılımdaki net yük sıfırsa, R değeriyle daha bile hızlı azalacaktır.) Büyük küremizin yüzey alanı R^2 değeriyle büyüdüğünden, yüzey integralinin, kürenin yarıçapı arttıkça azaldığını görebilirsiniz: $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$ integralimize bütün uzayı $(R \longrightarrow \infty)$ dahil edersek, yüzey integrali sıfıra gider ve aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{bütün}\\ \text{uzay}}} (\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{bütün}\\ \text{uzay}}} E \cdot E \, dV \tag{8.35}$$

Gördüğünüz gibi, herhangi bir yük dağılımının enerjisini, alanda bulunan bir enerji yoğunluğu üzerinden alınan integralle ifade edebiliriz.

8-6 Bir noktasal yükün enerjisi

Yeni denklemimiz (8.35)'e göre, tek bir q noktasal yükü bile bir miktar elektrostatik enerjiye sahiptir. Bu durumda, elektrik alanı,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece, yükten r uzaklığındaki enerji yoğunluğu

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

olur. Elimizde dr kalınlığında ve $4\pi r^2$ alanında küresel bir kabuk olsun. Toplam enerjiyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty} \tag{8.36}$$

$r = \infty$'daki limit bir zorluk çıkarmaz; ama bir noktasal yük için $r = 0$ değerine kadar integral almamız lazım ki bu da sonsuz bir integral verir bize. Her ne kadar, sadece noktasal yükler *arasında* enerji olduğu fikriyle başlamış olsak da, Denk. (8.35)'e göre, bir noktasal yükün alanında sonsuz miktarda enerji vardır. Noktasal yükler kümesi için bulduğumuz ilk denklemde (Denklem 8.3), bir yükün kendisiyle olan etkileşimini hesaba katmamıştık. Denklem (8.27)'de sürekli bir yük dağılımını ele aldığımızda, her bir *sonsuz küçüklükteki* yükün diğer sonsuz küçüklükteki yüklerle enerji etkileşimini hesaba katmıştık. Aynısını Denk. (8.35)'te de yapmıştık, böylece onu bir *sonlu* noktasal yüke uyguladığımızda, o yükü sonsuz küçüklükteki parçalardan bir araya getirme enerjisini de hesaba katmış oluyoruz. Dikkat ederseniz, (8.11)'i yüklü bir kürenin enerjisini elde etmek için kullanır ve yarıçapın sıfıra gittiğini hesaba katarsak, Denk. (8.36)'daki sonucu elde edeceğimizi görürsünüz.

Enerjiyi alanda bir yerde bulma fikri, noktasal yüklerin var olduğu varsayımımızla çelişmektedir. Bu zor durumdan kurtulmanın bir yolu, elektronlar gibi temel parçacıkların aslında nokta değil de, çok küçük yük dağılımları olduğunu söylemek olabilir. Bunun yerine, çok kısa mesafelerde veya enerjinin yerel korunumu fikri söz konusu olduğunda, elektrik kuramımızda bir şeylerin yanlış olduğunu da söyleyebiliriz. Her iki bakış açısında da zorluklar vardır. Bu zorlukları aşamadık, bugün hâlâ mevcutturlar. Bir süre sonra, ilave bazı fikirleri, örneğin elektromanyetik alanda momentum gibi, konuştuğumuzda doğayı kavrayışımıza dair temel zorlukların tam bir listesini çıkarmış olacağız.

9

ATMOSFERDEKİ ELEKTRİK

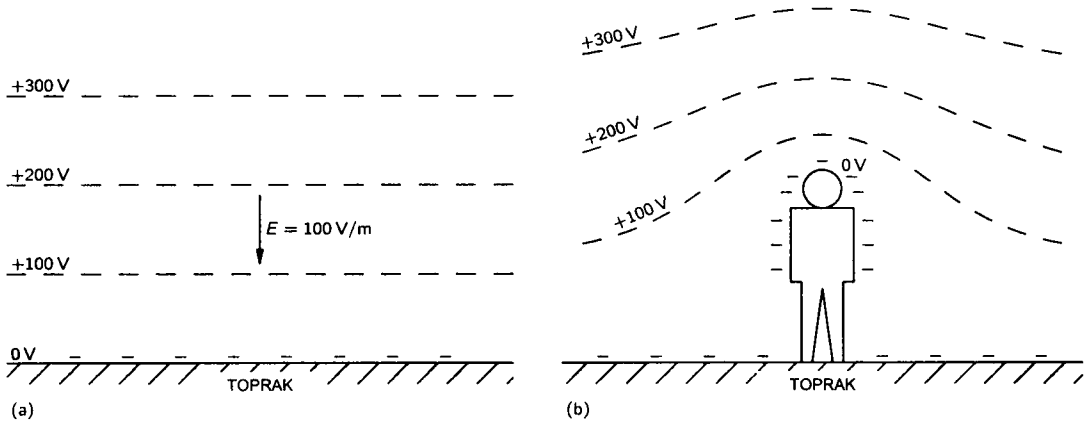
9-1 Atmosferin elektrik potansiyel gradyanı

9-1 Atmosferin elektrik potansiyel gradyanı
9-2 Atmosferdeki elektrik akımları
9-3 Atmosferik akımların kaynağı
9-4 Gök gürültülü fırtınalar
9-5 Yük ayrımının mekanizması
9-6 Yıldırım

Sıradan bir günde, düz bir ovada veya denizdeyken, yukarıya doğru çıkmaya başladığınızda elektrik potansiyel her bir metrede 100 Volt kadar artar. Diğer bir deyişle, havada düşey yönde 100 Volt/m E elektrik alanı vardır. Alanın işareti, dünya yüzeyindeki bir eksi yüke karşılık gelir. Bu ne demektir? Şöyle düşünün, dışardayken burnunuzun ucundaki potansiyel, ayağınızdan 200 Volt daha fazladır. Şunları sorabilirsiniz: "Peki o zaman neden havada, aralarında birer metre olan iki elektrot kullanıp bu 100 Volt'u elektrik lambalarını yakmak için kullanmıyoruz?" "Ayaklarım ile burnum arasında *gerçekten* 200 Volt potansiyel farkı varsa, neden sokağa çıktığımda çarpılmıyorum?"

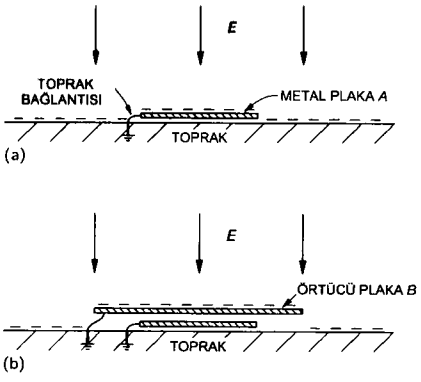
Önce ikinci soruyu cevaplayalım. Vücudunuz görece iyi bir iletkendir. Toprakla temas haldeyseniz, siz ve toprak bir eşpotansiyel yüzey olursunuz. Normalde eşpotansiyeller, Şekil 9-1(a)'da olduğu gibi, yüzeye paraleldir; ama siz ordayken eşpotansiyeller bozulur ve alan Şekil 9-1(b)'deki gibi gözükür. Böylece, burnunuz ile ayaklarınız arasında neredeyse sıfır potansiyel farkı kalır. Topraktan başınıza doğru gelen bazı yükler alanı değiştirir. Bazıları havadaki iyonlar sayesinde boşalabilir, fakat hava çok kötü bir iletken olduğundan bu akım çok zayıftır.

Kaynak: Chalmers, J. Alan, *Atmospheric Electricity*, Pergamon Press, London (1957).

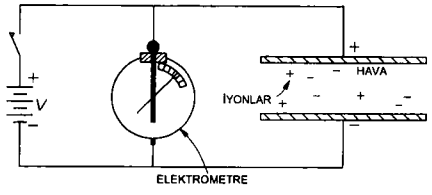


Şekil 9-1 (a) Toprağın üzerindeki potansiyel dağılımı. (b) Açık, düz bir yüzeyde duran adamın yakınındaki potansiyel dağılımı.

Bulunduğu yere bir şey yerleştirdiğimizde değişen bir alanı nasıl ölçebiliriz? Bunun birçok yolu vardır. Bir yol, yalıtılmış bir iletkeni toprağın biraz üzerine yerleştirmek ve havayla aynı potansiyele gelene kadar orada bırakmaktır. Yeterince uzun bırakırsak, havanın o çok küçük iletkenliği, o seviyede aynı potansiyele gelene kadar yüklerin iletkenden (veya iletkene) sızmasına yol açar. Daha sonra bu iletkeni toprak seviyesine indirir ve bu işlem esnasındaki potansiyel değişimini ölçeriz. Daha hızlı bir yolsa, iletken olarak çok küçük bir deliği olan su dolu bir kovayı kullanmaktır. Su delikten sızdıkça, fazla yükleri de beraberinde taşır ve kova havayla aynı potansiyele gelir. (Yükler, bildiğiniz üzere, yüzeyde bulunur ve damlalar düştükçe "yüzey parçaları" da parçalanır.) Kovanın potansiyelini bir elektrometreyle ölçebiliriz.



Şekil 9-2 (a) Topraklanmış metal levha, toprakla aynı yüzey yüküne sahiptir. (b) Levhanın, bir iletkenle örtülürse, hiç yüzey yükü olmaz.



Şekil 9-3 İyonların hareketinden dolayı oluşan hava iletkenliğini ölçmek.

Potansiyel *gradyanı* doğrudan ölçmenin bir başka yolu daha vardır. Bir elektrik alanı varsa, toprağın bir yüzey yükü vardır ($\sigma = \epsilon_0 E$). Yere düz metal bir levha koyar ve topraklarsak, üzerinde eksi yükler görülür (Şekil 9-2a). Bu levha, bir başka topraklanmış iletken *B* levhasıyla örtülürse, yükler o levhada görülür ve ilk *A* levhasında yük kalmaz. Örttükçe, *A* levhasından toprağa akan yükleri ölçersek (topraklama teli üzerindeki bir galvanometre sayesinde), üzerindeki yüzey yük yoğunluğunu ve dolayısıyla da elektrik alanı bulabiliriz.

Atmosferdeki elektrik alanı nasıl ölçebildiğimizi ortaya koyduğumuza göre, onu tanımlamaya devam edebiliriz. Öncelikle, ölçümler göstermiştir ki yükseklere çıktıkça alan var olmaya devam etmekte ama zayıflamaktadır. Yaklaşık 50 kilometrede alan çok küçüktür, dolayısıyla potansiyel değişiminin (*E*'nin integrali) çoğu düşük irtifalarda meydana gelir. Yer yüzeyinden atmosferin tepesine kadar olan toplam potansiyel farkı 400.000 Volt'tur.

9-2 Atmosferdeki elektrik akımları

Potansiyel gradyanına ilaveten ölçebileceğimiz bir başka şeyse, atmosferdeki akımdır. Akım yoğunluğu küçüktür, yeryüzüne paralel her bir metre kareden yaklaşık 10 mikromikroamper akım geçer. Havanın mükemmel bir yalıtkan olmadığı bellidir ve iletkenliğinden dolayı havadan yere doğru –az önce bahsettiğimiz elektrik alandan dolayı– küçük bir akım geçer.

Atmosfer neden iletkendir? Atmosferin orasında burasında, hava moleküllerinin arasında bir iyon vardır mutlaka. Fazladan bir elektron almış veya kaybetmiş bir oksijen molekülü örnek verilebilir. Bu iyonlar tek molekül olarak kalmazlar. Elektrik alanlarından dolayı etraflarında birkaç başka molekül toplarlar. Her bir iyon küçük bir öbek oluşturur ve diğer benzer öbeklerle beraber alan içinde sürüklenir. Yavaşça yukarı veya aşağı sürüklenirler ve gözlemlenen akımı meydana getirirler. *İyonlar* nereden gelir peki? İlk başta onların dünyanın radyoaktivitesinden kaynaklandığı düşünülmüştü. Radyoaktif maddelerden yayılan ışınımın, hava moleküllerini iyonize ederek havayı iletken hale getirdiği bilinen bir şeydi. Atomik çekirdeklerden yayılan β ışınları o kadar hızlı hareket ederler ki, atomlardan elektron koparırlar ve geride iyon bırakırlar. Bu da, elbette, yükseklere çıktıkça daha az iyonlaşmış molekülle karşılaşmamız gerektiği anlamına gelir; çünkü radyoaktivite topraktaki radyum, uranyum, potasyum vb gibi elementlerde bulunur.

Bu kuramı sınamak için, bazı fizikçiler havaya balonlar gönderdiler (1912 yılında, Hess) ve tam tersi bir durumla karşılaştılar. Birim hacimdeki iyonlaşma yükseklikle beraber *artmıştı*. (Deney cihazı aynı Şekil 9-3'teki gibiydi. İki levha *V* potansiyeline ulaşana kadar düzenli şekilde yüklenmişlerdi. Havanın iletkenliğinden dolayı, levhalar yavaşça boşaldı ve bu boşalma hızı elektrometreyle ölçüldü.) Bu olabilecek en gizemli sonuçtu. Atmosferik elektriğe dair yapılan deneyler tarihindeki en dramatik buluştu. O kadar dramatikti ki, yepyeni bir alanın doğmasına yol açtı: kozmik ışınlar. İyonlaşma dünyanın dışındaki bir şeyden kaynaklanmaktaydı belli ki ve onu araştırmak kozmik ışınların keşfine yol açtı. Kozmik ışınlar konusuna şimdi girmeyeceğiz, sadece iyonların kaynağı olduklarını bilmeniz yeterli. Her ne kadar iyonlar sürekli dağıtılsa da, atmosfer dışından gelen kozmik ışın parçacıkları sayesinde sürekli yenileri yaratılır.

Tam doğru olmak için, moleküllerden oluşan iyonlar dışında başka türlü iyonlar olduğunu da belirtmeliyiz. Havada bulunan çok küçük boyuttaki toz parçacıkları da yüklenir. Bunlara zaman zaman "çekirdekler" denir. Denizde bir dalga kırıldığında örneğin, havaya su zerrecikleri karışır. Bu damlalardan biri buharlaştığında, havada sonsuz küçüklükte bir NaCl kristali asılı kalır. Bu minik kristaller daha sonra havadan yük kapıp, iyon olabilirler. Bunlara "büyük iyonlar" denir.

Kozmik ışınlarla oluşan küçük iyonlar, en hareketli olanlardır. Çok küçük olduklarından dolayı havada hızla ilerlerler. Hızları, 100 Volt/metrelik bir alan-

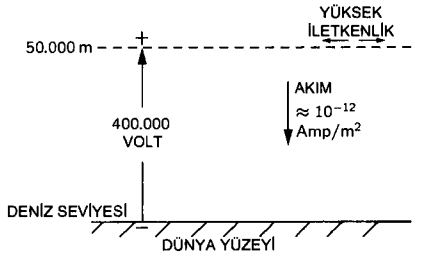
da yaklaşık 1 cm/sn veya 1 Volt/cm'dir. Daha büyük ve ağır iyonlar çok daha yavaş ilerlerler. Eğer havada yeterince "çekirdek" varsa, küçük iyonlardan yük toplayabilirler. "Büyük iyonlar" yavaş ilerlediğinden dolayı, toplam iletkenlik azalır. Havanın iletkenliği, bu yüzden, gayet değişkendir çünkü içindeki "toz" miktarına duyarlıdır. Kara üzerindeki toz miktarı, rüzgârla kalkanlar veya insanlığın havaya saldıkları yüzünden, deniz üzerindekinden daha fazladır. Bu yüzden bir günden bir güne, bir andan diğer bir ana, bir yerden bir başka yere dünya yüzeyindeki iletkenliğin yüksek derecede dalgalanması şaşırtıcı değildir. Dünya yüzünde bir yerde ölçülen voltaj gradyanı da çok değişkenlik gösterir Bunun nedeni farklı yerlerde de olsa, yüksek mesafelerden o yerlere yaklaşık aynı akımın düşmesidir. Yeryüzü yakınındaki değişken iletkenlik yüzünden de voltaj gradyanı değişkenlik gösterir.

İyonların sürüklenmesinden dolayı oluşan havanın iletkenliği de yükseklikle beraber hızla artar. Bunun iki nedeni vardır. Birincisi, yükseklikle beraber kozmik ışınların artmasıdır. İkincisi de, yükseklik arttıkça havanın yoğunluğunun azalması ve iyonların ortalama serbest yolunun artması ve böylece elektrik alanda bir şeye çarpışmadan daha uzak mesafelere gidebilmeleridir. Böylece yükseldikçe iletkenliğin de hızla yükselmesine neden olurlar.

Her ne kadar havadaki elektrik akımı yoğunluğu metre kare başına sadece birkaç mikroamper olsa da, unutmayın ki dünya yüzeyinde çok fazla metre kare vardır. Dünyanın yüzeyine herhangi bir zamanda ulaşan toplam elektrik akımı neredeyse 1800 Amper civarında sabittir. Bu akım elbette "artıdır", dünyaya artı yükler taşır. Elimizde 400.000 Volt'luk bir voltaj kaynağı ve 1800 Amper akım var: 700 megawattlık bir güç!

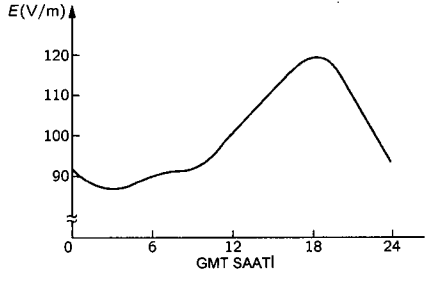
Yukarıdan aşağıya bu kadar büyük bir akım geliyorken, topraktaki eksi yük bir an önce boşaltılmalıdır. Aslında, bütün dünyayı boşaltmak sadece yarım saat sürer. Oysa atmosferik elektrik alan keşfedildiğinden bu yana yarım saatten çok çok daha fazla zaman geçti. Nasıl devam edebiliyor? Voltajı ne sağlıyor? Voltaj dünya ile ne arasındadır? Cevaplanması gereken çok soru var.

Dünya eksi, havadaki potansiyel ise artıdır. Yeterince yükseğe çıkarsanız, iletkenlik o kadar büyüktür ki yatayda voltaj değişimi mümkün değildir. Hava, konuştuğumuz zaman ölçeklerinde, bir iletken olur. Bu, yaklaşık 50 kilometre yükseklikte olur. Bu yükseklik, güneşten kaynaklı fotoelektrik etkiyle çok sayıda iyonun meydana geldiği "iyonosfer" yüksekliği değildir. Yine de, atmosferik elektrik üzerine şu anki tartışmalarımız için havanın yaklaşık 50 kilometrede yeterince iletken olduğunu düşünebiliriz. Böylece o yükseklikte akımları aşağıya gönderen mükemmel bir iletken yüzey hayal edebiliriz. Bu durum Şekil 9-4'te resmedilmiştir. Buradaki problem şudur: Artı yükü orada nasıl tutuluyor? Geri nasıl basılıyor? Dünyaya iniyorsa, bir şekilde geri basılmalıdır. Bu, bir zaman için, atmosferik elektriğin en büyük bilmecelerinden biriydi.



Şekil 9-4 Açık bir atmosferdeki tipik elektrik koşulları.

Elde ettiğimiz her bir parça bilgi bize bir ipucu verir veya en azından onun hakkında bize bir şey söyler. Alın size ilginç bir olgu: Deniz üzerindeki akımı (ki potansiyel gradyandan daha dengelidir) ölçersek ve düzensizliklerden kurtulacak şekilde dikkatlice ortalamasını alırsak, hâlâ bir günlük değişim olduğunu keşfederiz. Okyanuslar üzerinde yapılan birçok ölçümün zamanla değişimi kabaca Şekil 9-5'te görüldüğü gibidir. Akım yaklaşık ±%15 değişir ve Londra'da saat 19:00 olduğunda en yüksek değerine ulaşır. İşin ilginç tarafı, akımı *nerede* ölçerseniz ölçün –Atlantik'te, Pasifik'te veya Ege Denizinde– Londra'da saatler akşam yediyi gösterdiğinde akım en yüksek değerine ulaşır. Tüm dünyada akım saat 19:00'da en yüksek değerine ulaşır, sabaha karşı dörtteyse en düşük değerine. Diğer bir deyişle, akım dünyanın mutlak zamanına bağlıdır, gözlem yapılan yerin yerel saatine *değil*. Bir bakıma, bu çok da gizil bir şey değildir. Yukarıdan aşağı voltaj farkının yerel değişimini önlediği için, en yukarıda yatay olarak yüksek iletkenlik olduğuna dair fikrimizi desteklemektedir. Olası potansiyel değişimleri dünya çapında olmalıdır, ki zaten öyledirler. Şimdi bildiğimiz, "yüksek" yüzeydeki voltajın, dünyanın mutlak zamanıyla beraber %15 oranında düştüğü ve yükseldiğidir.



Şekil 9-5 Açık bir günde, okyanuslar üzerindeki atmosferik potansiyel gradyanın ortalama günlük değişimi. Saat Greenwich zamanına göredir.

9-3 Atmosferik akımların kaynağı

Artık, dünyayı sürekli eksi yükte tutmak için, yukarıdan dünyanın yüzeyine akan büyük eksi akımların kaynağını konuşmalıyız. Bunu sağlayan bataryalar nerededir? "Batarya"yı Şekil 9-6'da görebilirsiniz. O, gök gürültülü fırtına ve şimşektir. İlk başta bu yıldırımların, üzerinde durduğumuz potansiyeli boşalttığını düşünebilirsiniz. Oysa öyle değildir. Yıldırımlar dünyaya *eksi* yükler taşır. On yıldırım çarpmasının dokuzunda, yıldırımlar dünyaya çok büyük miktarda eksi yük taşımış olur. Dünyayı ortalama 1800 Amperle yükleyenler yıldırımlardır. Daha sonra bu 1800 Amper de belli hava bölgelerinde boşaltılır.

Her gün dünyamızda yaklaşık 40.000 gök gürültülü fırtına meydana gelir. Onları yukarıdaki katmana elektrik göndererek voltaj farkını koruyan bataryalar olarak düşünebiliriz. İnsanlar, dünya çağında herhangi bir zamanda dünyaya ne kadar yıldırım düştüğünü tahmin etmeye çalıştılar yıllarca. Söylemeye gerek yok belki ama tahminleri iyi kötü, voltaj farkı ölçümleriyle uyuştu: Gök gürültülü fırtına hareketliliği Londra'da saat akşam yedi olduğunda en yüksekti. Bununla birlikte, fırtınaları tahmin etmek çok güçtür ve sadece değişikliğin gerçekleşmiş olması gerektiği bilindikten *sonra* yapılabildi. Bu tür tahminlerde bulunmak güçtür, çünkü denizlerde ve dünyanın birçok yerindeki fırtınaların sayısını tam olarak bilebilecek kadar gözlem yapamıyoruz. Bunu "doğru yaptığını" düşünen insanların elde ettikleri sonuçlara göre, Londra'da saat 19:00 olduğunda, dünyamıza saniyede 100 yıldırım düşmektedir.

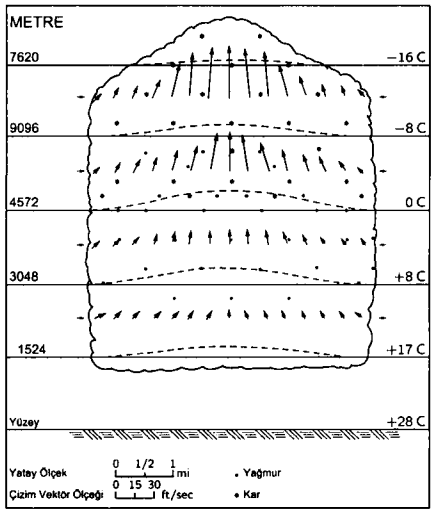


Şekil 9-6 Atmosferik elektrik alanı üreten mekanizma [Fotoğraf William K. Widmayer].

Bu bataryaların nasıl çalıştığını anlamak için, fırtınalara daha yakından bakmalıyız. Bir fırtınanın içerisinde neler olup biter? Bildiğimiz kadarıyla tarif etmeye çalışacağız. Kolaylıkla çözebileceğimiz, idealize edilmiş iletken kürelerle uğraşmak yerine, bu muhteşem doğa olayının içine girdikçe ne kadar az şey bildiğimizi göreceksiniz. Yine de oldukça heyecanlıdır. Bir fırtınanın ortasında kalan biri ya çok eğlenmiş ya da korkudan sararıp solmuştur. Bu ikisi olmamışsa da, bir çeşit duygu hissetmiştir kesin. Doğada bir şey hissettiğimiz yer, karmaşıklık ve gizem içeren bir yerdir genellikle. Hakkında pek bir şey bilmediğimiz için, bir fırtınanın nasıl işlediğini tam olarak açıklayamayacağız. Yine de, ne olup bittiğini biraz tarif etmeye çalışalım.

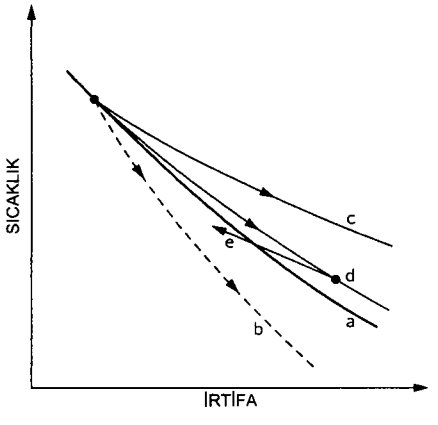
9-4 Gök gürültülü fırtınalar

İlk aşamada, sıradan bir fırtına birbirlerinden neredeyse bağımsız ama birbirlerine yeterince yakın, bir miktar "hücre"den meydana gelir. Bu yüzden en iyisi hücreleri tek tek incelemektir. "Hücre"den kastımız, yatay yöndeki sınırlı bir alanda bütün temel süreçlerin meydana geldiği bölgedir. Genelde yan yana birçok hücre olur ve her birinde aynı şey olur, sadece belki zamanlamaları farklıdır. Şekil 9-7'de, bir fırtınanın başlangıç safhasında bir hücrenin nasıl gözüktüğünü idealize edilmiş bir şekilde göstermektedir. Havada belli bir bölgede, daha sonra tanımlayacağımız koşullar altında, yukarı doğru gitgide hızlanarak yükselen bir hava akımı vardır. Tabandaki sıcak ve nemli hava yükseldikçe soğur ve içindeki su buharı yoğuşur. Şekildeki küçük yıldızlar karı ve noktalar da yağmuru gösterir. Yukarı doğru olan akımlar kuvvetli ve damlacıklar küçük olduğundan, bu aşamada kar ve yağmur yere düşmez. Bu daha başlangıçtır, henüz ortada gerçek bir fırtına yoktur. Sıcak hava yükselirken, yanlardan içeriye doğru bir hava akımı olur. Bu, yıllarca ihmal edilmiş önemli bir noktadır. Dolayısıyla, yukarı doğru yükselen sadece tabandaki hava değil, aynı zamanda yanlardan giren havadır.

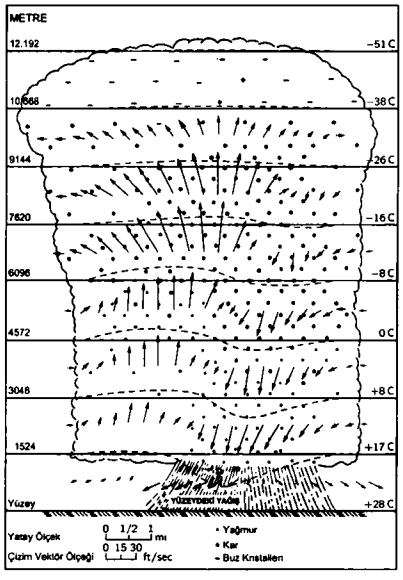


Şekil 9-7 Gelişiminin erken safhasında bir fırtına hücresi [Kaynak: ABD Ticaret Bakanlığı Meteoroloji Bürosu Raporu, Haziran 1949].

Hava neden böyle yükselir? Bildiğiniz gibi, yukarı doğru çıktıkça hava soğur. *Yer* güneş tarafından ısıtılır. Atmosferin üst tabakalarındaki su buharı sayesinde, ısının gökyüzüne tekrar ışınımı meydana gelir. Bu yüzden, yükseklerde hava soğuktur, çok soğuk. Alçaklardaysa sıcaktır. Aklınızdan şu geçebilir: "O zaman çok basit bunu açıklamak. Sıcak hava soğuk havadan daha hafiftir, bu yüzden birleşimleri mekanik olarak dengesizdir ve sıcak hava yükselir." Elbette, farklı yüksekliklerde sıcaklık farklıdır ve hava *termodinamik* olarak dengesizdir. Çok ama çok, sonsuz derecede uzun bir süre kendi haline kalsa, hava her yerde aynı sıcaklığa gelirdi. Elbette böyle bir şey olamaz, gündüz güneş daima ışımaktadır. Problem bu yüzden termodinamik denge problemi değil, *mekanik* denge problemidir. Şekil 9-8'deki gibi, hava sıcaklığının yerden yüksekliğe göre grafiğini çizdiğimizi düşünelim. Normal şartlarda, bir eğri boyunca, aynı (a)'yla işaretlenmiş çizgide olduğu gibi azalma görürüz. Yükseklik arttıkça, sıcaklık azalır. Atmosfer nasıl dengede olabilir? Neden aşağıdaki sıcak hava doğrudan yukardaki soğuk havanın içine doğru yükselmez? Cevabı şöyle verebiliriz: Hava yukarı çıktıkça, basıncı düşer ve belli bir hacim havanın yükseldiğini düşünürsek, adyabatik olarak genişler. (Burada ele aldığımız büyük boyutlardan dolayı ısı giriş çıkışı olmaz, ısı akışı için yeterli vakit yoktur). Bu yüzden, yükselen hava soğur. Bu tür bir adyabatik süreç, Şekil 9-8'deki (b) eğrisinde görüldüğü türden bir sıcaklık-yükseklik ilişkisi doğurur. Aşağıdan yükselen hava, içine girdiği çevreden *daha soğuk* olur. Bu yüzden aşağıdaki sıcak havanın yükselmesi için bir neden yoktur. Yükselseydi, yükseldiği yerdeki havadan daha düşük bir sıcaklığa soğur, ondan daha ağır olur ve yine aşağı inerdi. Nemi düşük, açık, güzel bir günde atmosferdeki sıcaklık belli bir oranda düşer ve bu oran (b) eğrisiyle gösterilen "en yüksek dengeli gradyan"dan daha düşüktür. Hava, mekanik bir dengededir.



Şekil 9-8 Atmosferik sıcaklık (a) Durağan atmosfer (b) Kuru havanın adyabatik soğuması (c) Nemli havanın adyabatik soğuması (d) Çevredeki havayla karışmış nemli hava.



Şekil 9-9 Olgunlaşmış bir fırtına hücresi [ABD Ticaret Bakanlığı Meteoroloji Bürosu Raporu, Haziran 1949].

İçinde bolca su buharı olan bir hava kütlesi yükselmeye başlarsa, adyabatik soğuması daha farklı olacaktır. Genişleyip soğudukça, içindeki su buharı yoğuşacak ve yoğuşan su ısı açığa çıkaracaktır. İşte bu yüzden, nemli hava kuru hava kadar çabuk soğumaz. Ortalamadan daha nemli bir hava kütlesi yükselmeye başlarsa, eğrisi Şekil 9-8'deki (c) gibi olacaktır. Bir şekilde soğur; ama aynı seviyede bulunduğu etrafındaki havadan yine de daha sıcak olur. Sıcak nemli bir hava kütlesi bir şekilde yükselmeye başlarsa, her zaman çevresindeki havadan daha hafif ve sıcak olacaktır ve muazzam yüksekliklere çıkana kadar yükselmeye devam edecektir. İşte, bir fırtına hücresindeki havanın yükselmesini sağlayan mekanizma budur.

Yıllar boyunca, fırtına hücresi basitçe bu şekilde açıklandı. Sonradan yapılan ölçümler gösterdi ki, farklı yüksekliklerdeki sıcaklıklar (c) eğrisinin öngördüğü sıcaklıklar kadar yüksek değildi. Bunun nedeni, nemli hava "köpüğünün" yükseldikçe dışardan kendisine hava girmesi ve bu yüzden soğumasıdır. Sıcaklık-yükseklik eğrisi, (c) eğrisinden çok (a) eğrisine yakın duran (d) eğrisi gibidir.

Bu bahsettiğimiz ısı yayımı ilerledikçe, fırtına hücresinin kesiti Şekil 9-9'daki gibi gözükür. Buna "olgunlaşmış" fırtına denir. Yukarı doğru, 10.000 ila 15.000 metreye kadar, çok hızlı bir yükselme vardır bu aşamada. Bazen daha da yükseğe. Bulut kümeleri, yoğuşmalarıyla beraber, yukarı doğru yaklaşık saatte 60 kilometre hızla tırmanmaya başlarlar. Su buharı yükseldikçe ve yoğuştukça ortaya küçük damlacıklar çıkar ve sıcaklıkları hızla sıfırın altındaki derecelere iner. Donmaları gerekir, ama hemen donmazlar, "aşırı soğutulurlar". Kristalleşme sürecini başlatacak "çekirdekler" yoksa, su ve başka sıvılar kristalleşmeden önce donma noktalarının altına kadar soğuyabilirler. Ancak, bir miktar madde mevcutsa, ince bir NaCl kristali gibi, su bir buz parçasına dönüşecek şekilde donacaktır. Öyle bir denge kurulur ki, su damlaları buharlaşır ve buz kristalleri büyür. Böylece, suyun hızla ortadan kaybolduğu ve buzun oluştuğu belli bir an gelir. Ayrıca, su damlaları ve buz çarpışabilir. Çarpışmalar sonucu, süper soğumuş su buz kristallerine yapışır ve hızla kristalleşir. Özetle, bulutun genişlemesi esnasında belli bir noktada buz parçacıklarının sayısının hızla arttığı bir an vardır.

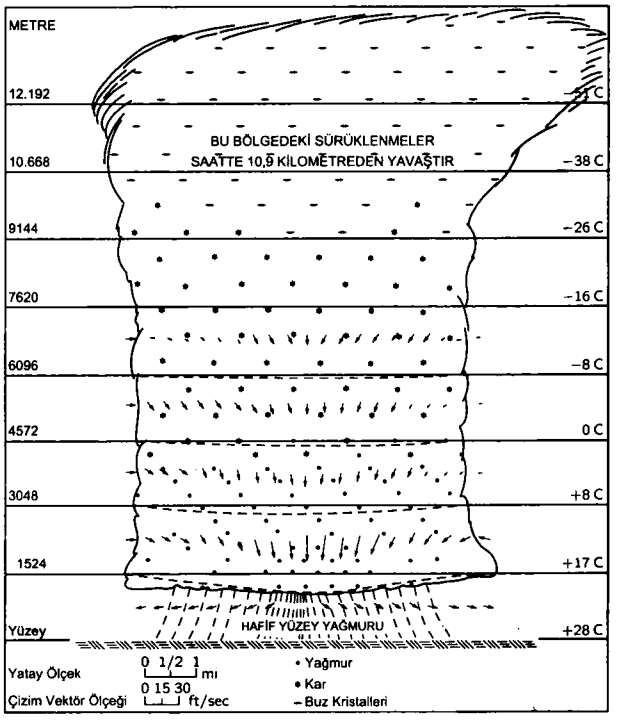
Buz parçacıkları yeterince ağırlaştığında, yükselen hava içinde düşmeye başlarlar. Yükselen havanın onları kaldıramayacağı kadar ağırlaşmışlardır. Aşağı doğru inerlerken, bir miktar havayı da yanlarında sürüklerler ve aşağı doğru bir akım başlatırlar. İşin ilginç tarafı, aşağı doğru akım başladığında kendi kendini sürdürebilir hale geçer. Hava kendini aşağı sürüklemektedir artık!

Dikkat ettiyseniz, bulutun içindeki asıl sıcaklık dağılımını gösteren Şekil 9-8'deki (d) eğrisi, nemli havadaki dağılımı gösteren (c) eğrisi kadar dik değildir. Diğer bir deyişle eğer nemli hava aşağı inerse, sıcaklığı (c) eğrisinin eğimine uygun olarak düşecek ve yeterince aşağı inerse sıcaklığı çevre sıcaklığının *altına* inecektir. Bu da, şekildeki (e) eğrisiyle gösterilir. Bu olduğu anda, çevreden daha yoğun haldedir ve hızla düşmeye devam eder. Şunu diyebilirsiniz: "Öyleyse, bu devridaim o zaman? Önce havanın yükselmesini anlattınız, en tepeye çıktığı zaman da aşağı doğru inmesi gerektiğini anlatıyorsunuz." Ama, bu devridaim değildir. Durum dengesiz olduğunda ve sıcak havanın yükselmesi gerektiğinde, bir şeylerin o sıcak havanın yerini doldurması gerektiği açıktır. Aşağı doğru inen soğuk havanın, sıcak havanın yerini dolduracağı gerçeği açıksa da, bu aşağı inen hava ilk baştaki hava *değildir*. Sürüklenmesi olmayan bir bulutun önce yükselmesi sonra aşağı inmesine dair ilk akıl yürütmelerde çözülmesi gereken bir bulmaca vardır. Aşağı doğru sürüklenmeyi sağlayabilmek için yağmura ihtiyaç vardı. Bu, inanması zor bir fikirdir. İlk baştaki havanın önemli bir miktarının yükselen havayla karıştığını fark ettiğiniz an, termodinamiğe dayalı akıl yürütmeyle, ilk başta yükseklerde bulunan soğuk havanın da aşağı inebileceğini görebilirsiniz. Bu, Şekil 9-9'da gösterilen aktif fırtınanın resminin açıklamasıdır.

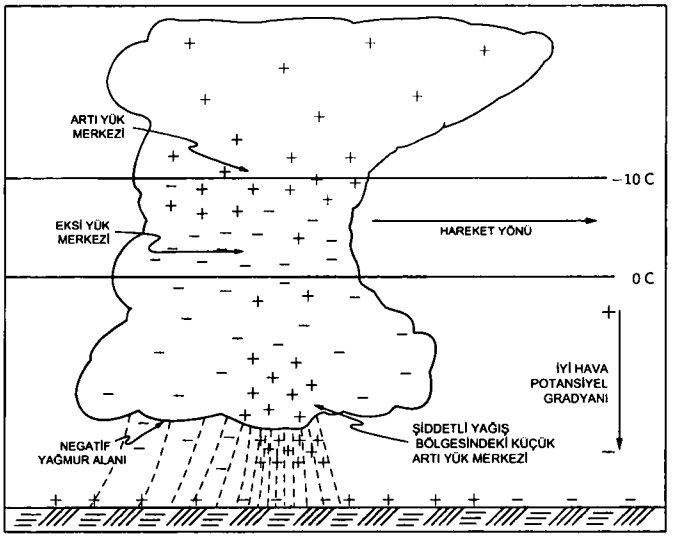
Hava aşağı indikçe, yağmur fırtınanın tabanından dışarı çıkmaya başlar. İlaveten, görece soğuk hava dünyanın yüzeyine çarpınca yayılmaya başlar.

Yağmur yağmadan önce yaklaşan fırtınayı uyaran o serin rüzgârın nedeni budur işte. Fırtınanın içinde hızlı ve düzensiz rüzgârlar, bulutun içinde muazzam bir türbülans vardır. Temelde yukarı ve aşağı doğru hava sürüklenmesidir bu. Geneldeyse, gayet karmaşık bir süreç.

Yağmur başladığı an aynı zamanda aşağı doğru sürüklenmenin başladığı andır ve tam da o anda elektriksel olayların başladığını gözlemleyebiliriz. Yıldırımı tamamlamadan önceyse, fırtına hücresine, yarım ya da bir saat sonra ne olduğuna bakarak hikâyemizi sonlandırabiliriz. Hücre Şekil 9-10'daki gibi gözükür. Yukarı yönlü hava akımı durmuştur, çünkü artık onu sürdürülebilir kılacak sıcak hava yoktur. Aşağı doğru sürüklenme bir süre devam eder, son su damlaları düşer ve –her ne kadar havada hâlâ küçük buz kristalleri varsa da– ortalık gitgide sakinleşir ve sessizleşir. Bu kadar yüksek irtifada rüzgârlar çok farklı yönlerde olduğundan dolayı, bulutun tepesi örs şeklini alır. Hücre artık ömrünün sonuna gelmiştir.



Şekil 9-10 Bir fırtına hücresinin son safhası [ABD Ticaret Bakanlığı Meteoroloji Bürosu Raporu, Haziran 1949].



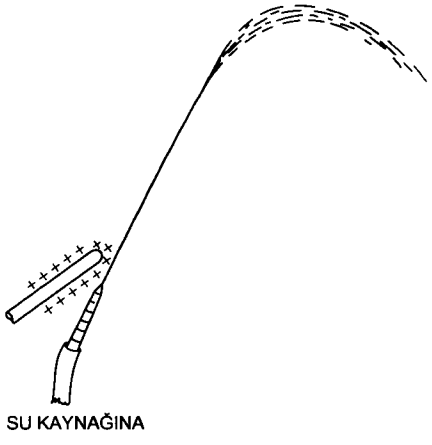
Şekil 9-11 Olgun bir fırtına hücresindeki elektriksel yüklerin dağılımı [ABD Ticaret Bakanlığı Meteoroloji Bürosu Raporu, Haziran 1949].

9-5 Yük ayrımının mekanizması

Şimdi, sıra geldi amaçlarımıza uygun en önemli konuya: elektriksel yüklerin gelişimi. Çeşitli deneylerden elde ettiğimiz verilere göre ki bu deneylerin bazıları çok cesur pilotların fırtınaların içinden uçakla geçmesiydi; bir fırtına hücresindeki yük dağılımı Şekil 9-11'deki gibidir. Fırtınanın tepesinde artı yük vardır ve altında da eksi yük. Alttaki küçük bir bölgede artı yükler de vardır ve bu birçok kişinin endişelenmesine yol açmıştır. Kimse neden orada artı yüklü bir bölge bulunduğunu ve ne kadar önemli olduğunu bilmemektedir. Aşağıya inen pozitif yağmurun ikincil etkisi midir yoksa bütün mekanizmanın en gerekli parçalarından biri midir, kimse bilmiyor. Olmasaydı, her şey daha kolay olurdu. Pozitif yükler, sıcaklığın yaklaşık –20°C olduğu 6-7 kilometre yüksekliktedir. Eksi yüklerse 3-4 kilometre yüksekliktedirler ve sıcaklıklar sıfır ile –10°C arasında değişir.

Bulutun tabanındaki yükler, bulut ile toprak arasında 20, 30 ve hatta 100 milyon Volt potansiyel fark yaratabilecek kadar çokturlar. Temiz bir havada "gökyüzü" ile toprak arasındaki 0,4 milyon Volt farkla karşılaştırırsanız gerçekten büyük farklardır bunlar. Bu büyük voltajlar havayı parçalar ve devasa ark boşalımları yaratırlar. Yağış başladığında, fırtınanın tabanındaki eksi yükler yeryüzüne çarpan yıldırımlarla taşınırlar.

Şimdi yıldırımların özelliklerine detaylı bakalım. Öncelikle şunu belirtelim, çok büyük voltaj farkları mevcuttur ve bu yüzden hava parçalanır. Bulutun bir parçası ile başka bir parçası arasında, iki bulut arasında veya bir bulut ile toprak arasında yıldırım çarpmaları olabilir. Tipik olarak, gözlemlediğiniz yıldırım düşmelerinde 20 veya 30 Coulomb yük vardır yere indirilen. Buna dair bir soru şu olur: Bir bulut, yıldırım düşmesiyle taşınabilecek 20 ila 30 Coulomb yükü ne kadar zamanda üretebilir? Bunu cevaplayabilmek için, buluttan uzakta, bulutun dipol momentinin meydana getirdiği elektrik alanı ölçmek gerek. Bu tür ölçümler sırasında, yıldırım düştüğü anda alanda ani bir düşüş ve daha sonra, yıldırımdan yıldırıma değişse de, yaklaşık 5 saniye civarında bir zaman sabitiyle üssel olarak ilk değere bir dönüş gözlemlenir. Diğer bir deyişle, bir fırtınanın her yıldırım düşmesinden sonra tekrar yüklenmesi yaklaşık 5 saniye sürer. Bu, her beş saniyede bir yıldırım düşeceği anlamına gelmez, zira geometri değişmiştir. Yıldırım düşmeleri neredeyse düzensiz gerçekleşir, ancak buradaki önemli nokta sadece beş saniyede ilk baştaki durumun tekrar yaratılabileceğidir. Dolayısıyla, fırtınanın yıldırım üretici makinesinde yaklaşık 4 Amperlik akım vardır. Bu demektir ki, bir fırtınanın nasıl elektrik ürettiğini açıklamaya dair herhangi bir modelde bolca elektrik olmalıdır. Bahsettiğimiz cihaz büyük ve çabuk hareket eden bir cihazdır.



Şekil 9-12 Çıkış noktasının yakınında elektrik alan olan bir su jeti.

Daha fazla ilerlemeden önce çok ilgisiz ancak gayet ilginç bir şeyi inceleyelim. İlginç, çünkü su damlalarının yakınında bulunan elektrik alanının etkilerini göstermekte. İlgisiz olduğunu söyleyebiliriz, zira bir insanın laboratuvarda bir su akışının yardımıyla elektrik alanın su damlaları üzerindeki güçlü etkisini gösterebileceği bir deneyle ilgisi vardır. Bir fırtınadaysa su akışı yoktur; yoğuşan buz ve su damlalarında oluşan bir bulut vardır. Dolayısıyla fırtınanın mekanizmasına dair soru, şimdi tarif edeceğimiz küçük deneyde göreceklerinizle ilgisizdir. Bir çeşmeye bağlı küçük bir hortum ucunu alıp, Şekil 9-2'de görüldüğü gibi dik bir açıyla tuttuğunuzu düşünün. Su, hortum ucundan düzgün bir akışla çıkacak ancak bir süre sonra damlacıklardan oluşan bir spreye dönüşecektir. Şimdi, uçtan çıkan akışın yakınına bir elektrik alan getirirseniz (örneğin, yüklü bir çubuk tutarak) akışın biçimi değişecektir. Zayıf bir elektrik alanla, akışın az sayıda büyük damlacıklara parçalandığını görürsünüz. Daha büyük bir elektrik alan getirirseniz, daha öncekine göre daha küçük ve fazla sayıda damlacık gözlemlersiniz.* Zayıf bir alan olduğunda, akışın damlalara dönüşmesi zordur. Akım büyüdükçe, akışın damlalara dönüşme eğiliminde artış vardır.

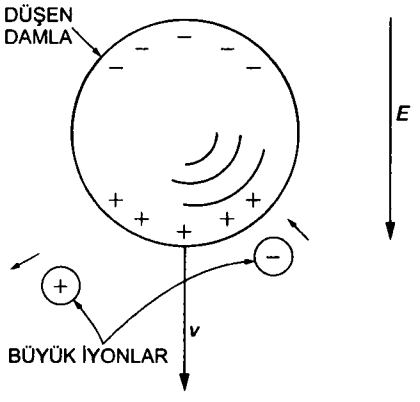
Bu etkilerin açıklamasını şu şekilde yapabiliriz. Hortum ucunun yakınına zayıf bir elektrik alan yerleştirdiğimizde, akışın bir tarafı hafifçe artı yüklü, diğer tarafı da hafifçe eksi yüklü olur. Diğer bir deyişle, akış kırıldığında bir taraftaki damlalar artı yüklü, diğer yandakiler eksi yüklü olabilir. Birbirlerini çekerler ve eskisine göre daha fazla birleşme eğilimi gösterirler. Diğer yandan, alan kuvvetliyse her bir damlada daha fazla yük olur ve yükün *kendisinin* damlaları, kendi itme kuvvetleriyle, parçalamaya eğilimi olur. Her bir damla birçok küçük damlacığa bölünür. Her bir damlacığın kendi yükü vardır ve böylece birbirlerini iterek etrafa yayılırlar. Alan büyüdükçe, akış daha önce damlacıklara bölünür. Burada göstermek istediğimiz şey, belirli şartlarda elektrik alanların

* Damlacıkların boyutunu ölçmenin pratik bir yolu, onların büyük, ince bir metal levha üzerine düşmelerini sağlamaktır. Damlacıkların boyutu arttıkça, çıkan ses de artar.

damlalar üzerinde dikkate alınacak etkilerinin olduğudur. Bir fırtınanın içinde ne olup bittiğine dair kesin bir anlayışımız yoktur ve şu tarif ettiğimiz deneyle de ilgisizdir. Bunu, ortaya çıkabilecek karmaşıklıkları takdir edebilmeniz için dersimize dahil ettik. Aslında kimsenin bulutlara dair bu fikir temelli bir kuramı yoktur.

Bir fırtınadaki yüklerin ayrılmasına dair iki kuramı burada ele alacağız. Bütün kuramlarda havada farklı yükler ve çökelti üzerinde de biraz yük olması fikri vardır. Daha sonra bu çöken parçacıkların –su ya da buz– hava içindeki hareketiyle elektrik yükler ayrılmış olur. Tek soru şudur: Damlaların yüklenmesi nasıl başlar? Eski kuramlardan biri "dağılan damla" kuramıdır. Birisi, bir rüzgâr akımında bir damla ikiye dağıldığında, suda artı ve havada eksi yük olduğunu keşfetti. Bu "dağılan damla" kuramının birçok dezavantajı vardır. Bunlardan en ciddi olanı *işaretin* hatalı oluşudur. Diğeri, yıldırım ihtiva eden birçok sıcaklık bölgesine sahip fırtınalarda, çökme etkileri yüksek irtifalarda buz olarak gözükür, su *olarak* değil.

Az önce dediğimizden yola çıkarak, bir damlanın alt tarafı ile üst tarafı arasında bir şekilde farklı yükler olduğunu hayal edebilir ve yüksek hızlı hava akımında damlaların farklı boyutlarda –havanın hareketinden dolayı önde büyük, arkada küçük– olabileceğine dair bir neden görebilirsek, işte o zaman elimizde bir kuram olur (bilinen herhangi bir kuramdan farklı). Böyle bir durumda küçük damlalar, havanın direncinden dolayı, büyük damlalar kadar hızlı düşmezdi ve böylece bir yük ayrımı elde edebilirdik. Görüyorsunuz ya, bu tür ihtimalleri kafadan uydurmak mümkündür.



Şekil 9-13 Bir fırtına bulutundaki yük ayrımına dair C. T. R. Wilson'ın kuramı.

Dağılan damla kuramına göre birçok yönden daha tatmin edici ve zekice kuramlardan biri de C. T. R Wilson'ındır. Her ne kadar buzla açıklanabilse de, biz kuramı Wilson gibi su damlalarıyla açıklayacağız. Diyelim ki, 100 Volt/metrelik bir elektrik alanın içinde, eksi yüklü toprağa doğru düşen bir su damlası olsun. Suyun, uyarılmış bir dipol momenti vardır. Şekil 9-13'te çizildiği gibi, damlanın alt tarafı artı ve üst tarafı eksi yüklüdür. Havada ayrıca, daha önceden belirttiğimiz, "çekirdekler", yavaş hareket eden büyük iyonlar mevcuttur. (Hızlı iyonların burada önemli bir etkisi yoktur.) Damlamızın yere doğru düşerken büyük bir iyona doğru yaklaştığını varsayalım. İyon artıysa, alt tarafı artı yüklü olan damlamız tarafından itilir. Diğer bir deyişle, damlaya yapışmaz. İyon, damlamızın üstünden yaklaşsaydı, eksi yüklü üs tarafa doğru çekilebilirdi. Damlamız hava içinde düştüğünden dolayı, kendisine göre yukarı yönde bir hava sürüklenmesi vardır ve bu sürüklenme, hava içerisinde yeterince yavaşlarsa, iyonları sürükler. Dolayısıyla artı iyonlar damlanın üstüne de yapışmazlar. Görüyorsunuz, bu sadece yavaş hareket eden iyonlar için geçerlidir. Bu tür artı iyonlar düşen bir damlanın ne altına ne de üstüne yapışır. Diğer yandan, yavaş hareket eden, büyük ve *eksi* iyonlar damlamız tarafından çekilecek ve yakalanacaklardır. Damla eksi yük edinecek ve böylece –yükün işareti bütün dünyanın ilk potansiyel farkıyla belirlendiğinden– doğru işareti elde etmiş olacağız. Damlalar, bulutun tabanına eksi yük taşır. Geride kalan artı yüklerse, yukarı doğru olan çeşitli hava akımlarıyla bulutun tepesine taşınır. Kuram güzel gözükmekte, en azından bize doğru işareti sağlıyor. Ayrıca, sıvı damlalara da bağlıdır. Bir dielektrik içinde kutuplanmayı öğrendiğimizde göreceksiniz ki, buz parçaları da aynı şeyi yapabilir. Onlar da bir elektrik alanındayken, farklı uçlarda artı ve eksi yükler barındırabilirler.

Yine de bu kuramla ilgili bazı sorunlar yok değildir. Öncelikle, bir fırtınadaki toplam yük çok fazladır. Kısa bir süre sonra, bütün büyük iyonlar bitmiş olur. Wilson ve diğerleri büyük iyonlar sağlayabilecek başka ilave kaynaklar önermek zorunda kaldılar. Yük ayrımı başladığında çok büyük elektrik alanlar meydana gelir ve bu büyük alanlarda havanın iyonize olabileceği bölgeler ola-

bilir. Çok fazla yüklenmiş bir nokta veya bir damla gibi küçük bir nesne varsa, elektrik alanı yeterince yoğunlaştırabilir ve bu da "saçaklı boşalıma" yol açar. Yeterince şiddetli bir elektrik alanın varlığında –diyelim ki artı olsun– elektronlar alana düşecek ve çarpışmalar arasında hız kazanacaklardır. O kadar hızlanırlar ki, her bir atoma çarptıklarında o atomdan bir eksi yük koparıp, arkalarında artı yükler bırakacaklardır. Bu yeni elektronlar da hızlarını ve daha fazla elektronla çarpışırlar. Çığ gibi bir tepkimedir bu ve hızla iyon birikimine yol açar. Artı yükler ilk konumlarında bırakılmışlardır, dolayısıyla net etki o noktadaki artı yükü nokta etrafındaki bir alana dağıtmaktır. Sonra, elbette, yeterince şiddetli bir alan kalmadığında bu süreç durur. Bu, saçaklı boşalımın özelliğidir. Küçük bir saçaklı boşalım başlatacak kadar buluttaki elektrik alanlarının güçlenmesi mümkündür. Başka mekanizmalar da, bir kez başladığında süreç, yüksek miktarda iyonlaşma meydana getirebilir. Kimse tam olarak nasıl işlediğini bilmiyor bu sürecin. Dolayısıyla, yıldırımın tam olarak nasıl oluşmaya başladığı tam olarak anlaşılmış değil. Yıldırımların gök gürültülü sağanaktan geldiğini biliyoruz. (Elbette, gök gürültüsünün de yıldırım sayesinde açığa çıkan termal enerjiden kaynaklandığını da biliyoruz.)

En azından, bir miktar da olsa, atmosferik elektriğin kaynağını anlayabiliyoruz. Bir fırtınadaki hava akımları, iyonlar ve buz parçacıkları üzerindeki su damlalarından dolayı, artı ve eksi yükler ayrılır. Artı yükler bulutun tepesine doğru taşınır (*Bkz.* Şekil 9-11) ve eksi yükler de yıldırım çarpmalarıyla toprağa iletilir. Artı yükler bulutun tepesini terk eder ve daha iletken olan üst hava katmanlarına girer ve Dünyamız etrafında yayılır. Bu katmanlardaki artı yükler, temiz havalı bölgelerde, dünyaya doğru havadaki iyonlarla yavaşça taşınır. Bu iyonlar kozmik ışınlar, deniz veya insanların aktiviteleriyle oluşur. Atmosferimiz sürekli çalışan bir elektriksel makinedir.



Şekil 9-14 "Boys" kamerasıyla çekilmiş bir yıldırım fotoğrafı (Kaynak: Schonland, Malan ve Collens, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 152 (1935).

9-6 Yıldırım

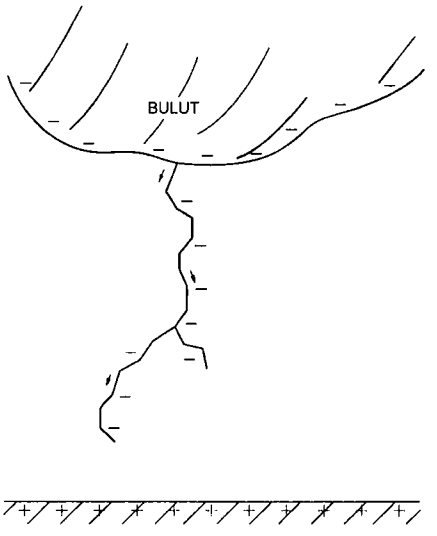
Bir yıldırım çarpmasında ne olduğuna dair ilk kanıt, elle tutulan ve perdesi açıkken ileri geri hareket ettirilen bir kameranın çektiği fotoğraflardan elde edilmiştir. Elbette, kamera yıldırım düşmesinin beklendiği yere doğru tutulmuştu. İlk elde edilen fotoğraflar açıkça göstermişti ki, yıldırım çarpmaları aynı yol üzerinde birden çok boşalmadan ibaretti. Daha sonradan "Boys" kamerası geliştirilmiştir. Bu kameranın, hızla dönen bir disk üzerinde birbirlerine göre 180^0 açıyla monte edilmiş *iki* lensi vardı. Her bir lens tarafından elde edilen görüntü film üzerinde farklı yerlere düşer. Böylece, resim zamana yayılmıştır. Diğer bir deyişle, yıldırım kendini tekrar ederse örneğin, yan yana iki görüntü oluşur. Her iki lensin oluşturduğu görüntüleri karşılaştırarak, şimşek çakmaların zamanlamasına dair detayları anlamak mümkündür. Şekil 9-14'te "Boys" kamerasıyla çekilen bir fotoğrafı görebilirsiniz.

Şimdi yıldırımı tanımlayacağız. Tekrar etmem gerek, hâlâ nasıl işlediğini bilmiyoruz. Nasıl *göründüğüne* dair niceliksel bir tarif vereceğiz, ama *neden* böyle gözüktüğünün detaylarına girmeyeceğiz. Düz bir vadi üzerinde, tabanı eksi yüklü olan bir bulutu ele alacağız sadece. Altındaki toprağa göre potansiyeli çok daha eksidir, dolayısıyla eksi elektronlar toprağa doğru ivmelenir. Her şey "öncü adımlar" denilen ve yıldırımın kendisi kadar parlak olmayan şeyle başlar. Çekilen fotoğraflara baktığımızda, başlangıçta buluttan çıkan ve hızla –ışık hızının altıda biri hızda– toprağa ilerleyen küçük parlak bir nokta görürüz. Önce 50 metre gider ve durur. Yaklaşık 50 mikrosaniye kadar durur ve sonra bir adım atar. Yine durur ve bir başka adım atar. Bu böyle devam eder gider. Aynı Şekil 9-15'te görüldüğü gibi, toprağa adımlar halinde ilerler. Öncüde buluttan gelen eksi yükler vardır, görünen bütün sütun eksi yükle doludur. Ayrıca, öncüyü oluşturan hızlı hareket eden yüklerde dolayı hava da iyonize olur ve

böylece havanın kendisi de yol boyunca bir iletken olur. Öncü toprağa değdiği an, topraktan buluta uzanan ve öncünün yolunu takip eden bir iletken "tel" vardır artık elimizde. Artık sonunda, buluttaki eksi yük için birkaçış yolu vardır. Bu yolu ilk fark edenler, bulutun tabanındaki eksi yüklerdir. Geride kalan artı yükler öncü sütunun tepesinden eksi yükleri kendilerine çekerler, sonra onlar da sırası gelince kaçarlar. Bulutun bir bölümündeki bütün eksi yükler sütun boyunca hızla ve enerjik bir şekilde yol alırlar. Gördüğünüz şimşek çakmaları aslında topraktan *yukarı* doğrudur, Şekil 9-16'da gösterildiği gibi. Esasen, en parlak olan ana şimşek çakmasına *dönüş* darbesi denir. Gördüğünüz parlak ışığı ve gök gürültüsünü meydana getiren hızlı hava genleşmesine yol açan ısıyı üreten de odur.

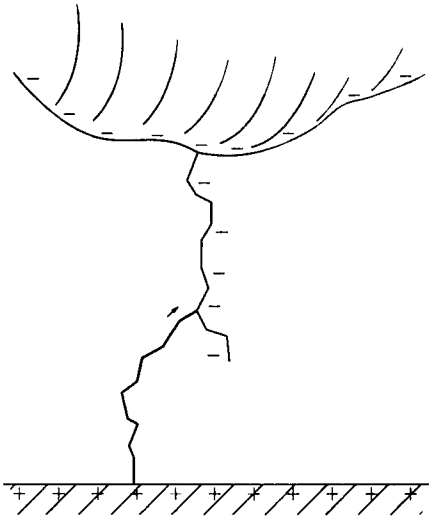
Bir yıldırım çarpmasındaki en yüksek akım yaklaşık 10.000 Amperdir ve aşağı doğru yaklaşık 20 Coulomb taşır.

Daha bitmedi. Bir süre sonra, yaklaşık saniyenin yüzde biri kadar zaman geçtiğinde ve dönüş darbesi yok olduğunda, bir başka öncü aşağı doğru iner. Bu sefer duruşlar yoktur. Buna "cirit boşalımı" denir ve tepeden aşağı bir kerede iner. Eski rotayı aynen takip eder, çünkü eski rotadan kalma artıklar onu en rahat rota haline getirmiştir. Toprağa ulaştığı an, aynı yoldan geri bir dönüş darbesi daha gerçekleşir. Aslında, yıldırım tekrar tekrar çarpar durur. Bazen sadece bir iki kere çarpar, bazen beş on kere, fakat daima hızlı şekilde arka arkaya çarpar. Bir keresinde 42 kere arka arkaya çarptığı kaydedilmiştir.



Şekil 9-15 "Öncü adımlar"ın oluşumu.

Bazen işler karmaşıklaşır. Örneğin, Şekil 9-15'te görüldüğü gibi, duruşlarından birinden sonra öncü hem toprağa doğru hem de bir başka yöne doğru iki dal çıkarabilir. Ne olacağı, dallardan birinin diğerinden önce toprağa varıp varamayacağına bağlıdır. Bu olursa, (toprağa boşalan eksi yükün) parlak dönüş darbesi, geri *yukarı* doğru toprağa değen dal üzerinden gider ve dallanma noktasını geçerken diğer daldan *aşağı* doğru giden parlak bir darbe görülür. Neden? Çünkü eksi yük boşalmaktadır ve yıldırımı ışıklı hale getiren de bu boşalmadır. Yük bir yandan yukarı doğru hareket ederken, bu ikinci dal üzerinde de arka arkaya ve gitgide daha uzun boşalımlar yapar. Ancak, bu fazladan dallardan biri ilk öncü dalla beraber aynı anda toprağa değerse, ikinci darbenin *cirit* öncüsünün ikinci dal üzerinden gitmesi mümkündür. Bu durumda ilk parlak çakmayı bir yerde, ikincisini başka yerde görebilirsiniz. İlk fikrimizin farklı bir halidir bu.


Şekil 9-16 Yıldırımın dönüş darbesi, öncü tarafından meydana getirilmiş yolu takip eder.

Ayrıca, tanımımız toprağa çok yakın bölge için çok basitleştirilmiştir. Öncü adımlar toprağa birkaç yüz metre yaklaştığında, topraktan ona doğru bir boşalım olduğuna dair kanıtımız vardır. Tahminen, saçaklı bir boşalım gerçekleşmesi için yeterince büyümüştür (elektrik) alan. Etrafta keskin bir nesne, örneğin tepesinde bir nokta olan bina varsa, öncü aşağı doğru yaklaştıkça alanların çok büyük olması dolayısıyla o keskin noktadan bir boşalım başlar ve öncüye doğru yükselir. Yıldırım bu tür bir noktaya çarpmaya eğilimlidir.

Yüksekteki nesnelere yıldırım çarpacağı uzun zamandır bilinen bir gerçektir. Kserkses'in danışmanı Artabanus'un, efendisi Yunanlara saldırırken verdiği bir öğüt şöyledir: "Tanrı'nın nasıl da her zaman büyük hayvanları, küstahça konuşmalarının acısını çekmeden yıldırımıyla cezalandırdığını görüyor musun? Böylece daha küçük olanlar onu kızdırmaz. Aynı şekilde, yıldırımlar da hep en yüksekteki evlere ve uzun ağaçlara düşer." Mantığını da şöyle açıklamıştır: "Kendisini yüceltenleri dize getirmeyi sever."

Şimdi, yıldırımların neden uzun ağaçlara düştüğünün gerçek nedenini bildiğinize göre, kendinizi 2400 yıl önce krallara askeri danışmanlık veren Artanabus'a göre daha yetkin hissediyor musunuz? Kendinizi yüceltmeyin. Bunu daha az şiirsel de yapabilirsiniz.

10
DİELEKTRİK

10-1 Dielektrik sabiti
10-2 Kutuplanma vektörü *P*
10-3 Kutuplanma yükleri
10-4 Dielektrikli elektrostatik denklemleri
10-5 Dielektrikli alanlar ve kuvvetler

10-1 Dielektrik sabiti

Şimdi, maddenin elektrik alan etkisi altındayken gözlemlenen olağandışı özelliklerinden bir başkasını tartışacağız. Daha önceki bölümlerden birinde *iletkenlerin* davranışını ele almıştık. Hani, bir elektrik alan varlığında yüklerin serbestçe hareket edip belli noktalara yığıldığı ve iletkenin içinde hiç alan kalmadığı. Şimdi *yalıtkanları* inceleyeceğiz, diğer bir deyişle elektriği iletmeyen maddeleri. İlk başta böyle bir şeyin olmayacağını düşünebilirsiniz. Ancak Faraday paralel levhalı bir sığa ve basit bir elektroskop kullanarak bunun doğru olmadığını keşfetmişti. Deneyleri göstermiştir ki, bir sığaçın sığası, levhalar arasına bir yalıtkan konulduğunda *artmaktadır*. Levhalar arasındaki boşluğu bir yalıtkanla tamamen doldurursanız, sığa, sadece yalıtkan maddenin doğasına bağlı bir κ faktörüyle artmaktadır. Yalıtkan maddeler dielektrikler olarak da adlandırılırlar. κ faktörü dielektriğin bir özelliğidir ve *dielektrik sabiti* olarak bilinir. Boşluğun dielektrik sabitiyse, elbette temel birimdir.

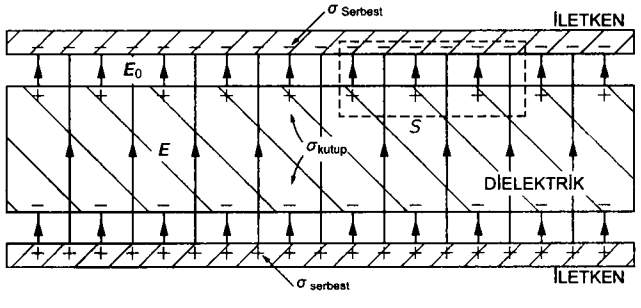
Şimdi çözmemiz gereken problem, yalıtkanlar gerçekten yalıtkansa ve elektriği iletmiyorlarsa neden elektriksel etki görüldüğüdür. Deneyden elde ettiğimiz, sığanın arttığı gerçeğiyle işe başlayacağız ve ne olup bittiğini anlamlandırmaya çalışacağız. İletkenlerinin yüzeyinde bir miktar yük olan paralel levhalı bir sığaçı ele alalım. Üst levhada eksi yük ve alt levhada artı yük olsun. Levhalar arasındaki uzaklık d ve her bir levhanın alanı A olsun. Daha önceden gösterdiğimiz üzere, sığa aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{10.1}$$

ve sığaçtaki yük ve voltaj birbirlerine şu şekilde bağlıdır:

$$Q = CV \tag{10.2}$$

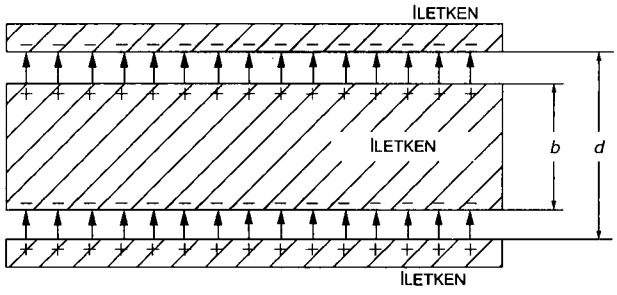
Şimdi, deneylerde gördük ki levhalar arasında cam veya benzeri bir yalıtkan malzeme koyduğumuzda sığa artmakta. Dolayısıyla aynı yük için voltaj, elbette, düşmekte. Voltaj farkı, sığaç boyunca elektrik alanın integrali olduğuna göre, dolayısıyla, levhalardaki yük aynı kalsa bile sığaç içindeki elektrik alanın azaldığı sonucuna varabiliriz.



Şekil 10-1 Dielektrik içeren bir paralel levha sığaçı. E çizgileri gösterilmektedir.

Bu nasıl olabilir? Gauss yasasına göre elektrik alan akısı, çevrelenen yükle doğrudan bağlantılıdır. Şekil 10-1'de kesik çizgilerle gösterilen S Gauss yüzeyini ele alalım. Elektrik alan dielektrik olduğunda azaldığından, yüzey içindeki net yükün malzeme olmadığı haldekinden daha düşük olması gerektiğini çıkarı-

rız. Bunun tek bir olası sonucu vardır ve bu da dielektrik yüzeyinde artı yükler olması gerektiğidir. Alan azalmasına rağmen sıfırlanmadığından, artı yükün iletken yüzeyindeki eksi yükten küçük olmasını bekleriz. Diğer bir deyişle bu olguyu, bir elektrik alana dielektrik bir malzeme yerleştirildiğinde, bir şekilde bir yüzeyde artı, diğerinde eksi yük indüklendiğini anlayabildiğimizde açıklayabiliriz.



Şekil 10-2 Paralel levhalı bir kondansatörün boşluğuna iletken bir levha koyarsak, indüklenen yükler iletkendeki alanı sıfırlar.

Bunun bir iletken için olmasını bekleriz. Örneğin, Şekil 10-2'deki gibi elimizde levhaları arasında d boşluğu olan bir sığaç olsun ve levhalar arasına kalınlığı b olan bir nötr iletken yerleştirelim. Elektrik alan üst yüzeye artı yük alt yüzeye eksi yük indükler, böylece iletkenin içinde alan kalmaz. Boşluğun geri kalanındaki elektrik alan iletken olmadığı haldekiyle aynıdır, çünkü yüzey yük yoğunluğunun ϵ_0'ya bölümüdür. Ancak, voltajı (potansiyel farkını) hesaplamak için üzerinden integral alacağımız mesafe kısalmıştır. Voltaj aşağıdaki şekilde hesaplanır:

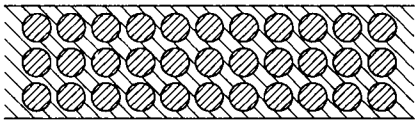
$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - b)$$

Sığa için yazılacak sonuç denklem aynı Denk. (10.1) gibidir, d yerine $(d - b)$ yazılır:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d[1 - (b/d)]} \tag{10.3}$$

Sığa, iletken tarafından kaplanan hacmin oranına (b/d) dayanan bir faktörle artar.

Bu bize dielektrikle ilgili ne olup bittiğine dair bariz bir model sunar. Malzemenin içinde bir sürü küçük iletken levhalar vardır. Bu modeldeki problem, levhalara dik yönde, belirli bir ekseninin olmasıdır. Birçok dielektrikte böyle bir eksen yoktur. Ancak, bütün yalıtkan malzemelerin birbirinden yalıtkanla ayrılmış küçük iletken küreler içerdiğini varsayarsak bu zorluğu aşmış oluruz. Bu, Şekil 10-3'te gösterilmiştir. Dielektrik sabiti olgusu, her bir küre üzerine indüklenecek yüklerin etkisiyle açıklanabilir. Bu, Faraday'ın gözlemlediği olguyu açıklamak üzere geliştirilmiş ilk dielektrik modellerinden biridir. Daha da özel olarak, malzemenin her bir atomunun mükemmel bir iletken olduğu fakat diğerlerinden yalıtıldığı varsayılmıştı. Dielektrik sabiti κ iletken küreler tarafından kaplanan boşluğun oranına bağlı olurdu bu durumda. Ancak, günümüzde kullanılan model bu değildir.

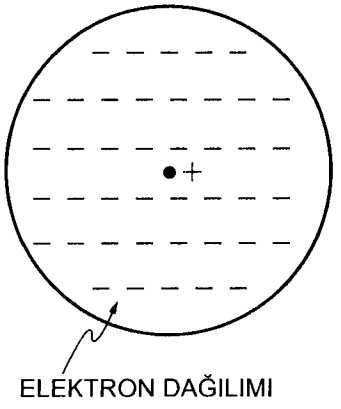


Şekil 10-3 Bir dielektrik modeli: İdeal bir yalıtkan içine gömülü küçük iletken küreler.

10-2 Kutuplanma vektörü P

Yukarıdaki analizimizi sürdürdüğümüzde, mükemmel iletkenlik ve yalıtkanlık bölgeleri fikrimizin çok da gerekli olmadığını görürüz. Her bir küçük küre, dış elektrik alan tarafından indüklendiğinde bir dipol gibi davranır. Dielektrik meselesini anlamamız için gerekli olan tek şey, malzemenin içinde indüklenmiş birçok küçük dipol olduğunu bilmemizdir. Küçük iletken küreler olduğu için mi dipoller indüklenmiştir, yoksa bir başka neden mi vardır sorusuysa konumuzun dışındadır.

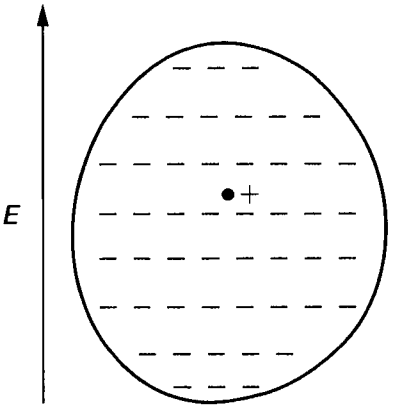
Bir atom iletken küre değilse, bir alan neden onda dipol momenti indüklesin? Bu konuyu bir sonraki bölümde, dielektrik malzemelerin iç yapısını konuşurken inceleyeceğiz. Yine de burada bir örnekle, olası mekanizmayı ortaya koymaya çalışacağız. Bir atomun çekirdekte artı yükü vardır, çevresindeyse eksi elektronlar. Bir elektrik alanda, çekirdek bir yöne, elektronlarsa bir başka yöne doğru çekilecektir. Elektronların dalga yapısı veya yörüngeleri (ya da kuantum mekaniğinde hangi görsel kullanılıyorsa) Şekil 10-4'te görüldüğü gibi, bir dereceye kadar bozulacaktır. Eksi yükün kütle merkezi yerdeğiştirecek ve çekirdeğin artı yüküyle daha fazla üst üste gelmeyecektir. Bu türden yük dağılımlarını daha önce tartışmıştık. Belli bir mesafeden baktığımızda, bu türden bir nötr yapı ilk bakışta küçük bir dipolü andırır.



Eğer alan çok büyük değilse, indüklenen dipol momenti miktarının alanla orantılı olması fikri akla yatkındır. Dolayısıyla, küçük bir alan yüklerin yerini çok az değiştirirken, daha büyük bir alansa, çok büyük bir yerdeğiştirme olmadığı müddetçe –ve alanla orantılı olarak– onları daha uzağa itecektir. Bu bölümün geri kalanında, dipol momentinin alana orantılı olduğu varsayılacaktır.

Şimdi, her bir atomda q yüklerinin δ uzaklığıyla ayrıldığını varsayacağız. Bu durumda $q\delta$ atom başına dipol momenti olur (δ sembolünü kullandık zira d'yi daha önce levha arasındaki mesafe için kullanmıştık). Birim hacimde N sayıda atom varsa, *birim hacim başına dipol momenti* $Nq\delta$ olur. Bu, birim hacim başına dipol momenti $\boldsymbol{P}$ vektörüyle temsil edilir. Söylemeye gerek yok herhalde, yönü bağımsız dipol momentlerinin, diğer bir deyişle δ yük dağılımının yerdeğiştirmesinin yönüyle aynı yöndedir:

$$\boldsymbol{P} = Nq\delta \tag{10.4}$$



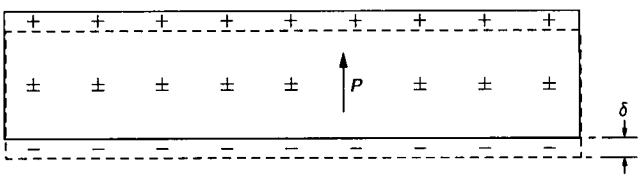
Şekil 10-4 Elektrik alandaki bir atomun, çekirdeğe göre kendine özgü bir elektron dağılımı vardır.

Genelde, $\boldsymbol{P}$ dielektrik içinde her yerde farklılık gösterecektir. Yine de, malzeme içinde herhangi bir noktada, $\boldsymbol{E}$ elektrik alan $\boldsymbol{P}$'yle orantılıdır. Elektronların ne kadar rahat yerdeğiştirdiğine bağlı olan orantı sabiti, malzeme içindeki atomların çeşitlerine bağlı olacaktır.

Orantı sabitinin nasıl davranacağını aslen neyin belirlediğini, çok büyük alanlar için ne kadar sabit kalabildiği ve değişik malzemelerin içinde ne olup bittiğini bir başka zaman tartışacağız. Şu an için, elektrik alanla orantılı indüklenen bir dipol momentini meydana getiren bir mekanizma olduğunu varsayacağız.

10-3 Kutuplanma yükleri

Gelin şimdi, bu modelin bize dielektrikli bir kondansatöre dair kuram için ne sağladığına bakalım. Öncelikle, birim hacimde belli bir dipol momente sahip bir levha malzeme ele alalım. Bunun tarafından üretilmiş herhangi bir ortalama yük yoğunluğu var mıdır? Eğer $\boldsymbol{P}$ düzgün değilse, hayır. Ters yönlere dağılmış artı ve eksi yükler aynı ortalama yoğunluğa sahipse, yerdeğiştirmiş olmalarından dolayı hacim içinde net bir yük meydana gelmez. Diğer yandan, $\boldsymbol{P}$ bir yerde büyük bir başka yerde daha küçük olsaydı, bu durumda ondan uzakta bir bölgede daha fazla yük birikimi meydana gelirdi. İşte o zaman hacimsel bir yük yoğunluğu oluşurdu. Paralel levhalı kondansatör için, $\boldsymbol{P}$'nin düzgün olduğunu varsayarız. Böylece sadece yüzeyde ne olup bittiğine bakabiliriz. Eksi yükler, yani elektronlar, bir yüzeyden δ mesafesi kadar dışarı çıkarken, bir diğer yüzeye doğru yaklaşmışlar ve arkalarında δ uzaklığında artı yük bırakmışlardır. Şekil 10-5'te gösterildiği gibi, bu durumda elimizde bir yüzey yük yoğunluğu olur. Buna yüzey *kutuplanma yükü* denir.



Şekil 10-5 Düzgün bir alandaki dielektrik levha. Artı yükler, eksi yüklere göre δ kadar yerdeğiştirmiştir.

Bu yük şöyle hesaplanabilir: Eğer A levhanın alanıysa, yüzeyde beliren elektronlar A ve N'nin, diğer bir deyişle birim hacim başına elektron sayısının ve δ yerdeğiştirmesinin çarpımıdır. Bu durumda δ'nin yüzeye dik olduğunu varsayıyoruz. Toplam yükse, elektronik q_e yüküyle çarpılarak bulunur. Yüzeye indüklenmiş kutuplanma yükünün yüzey yoğunluğunu bulmak içinse, A'ya böleriz. Yüzey yük yoğunluğunun büyüklüğü

$$\sigma_{\text{kutup}} = Nq_e\delta$$

olur. Bu, kutuplanma vektörü P'nin büyüklüğü P'ye eşittir:

$$\sigma_{\text{kutup}} = P \tag{10.5}$$

Yükün yüzey yoğunluğu, malzeme içindeki kutuplanmaya eşittir. Elbette, yüzey yükü bir yanda artı, diğer yandaysa eksidir.

Şimdi, levhamızın paralel levhalı sığaçımızın dielektriği olduğunu varsayalım. Sığacın *levhalarının* da yüzey yükü vardır. Buna σ_{serbest} denir; çünkü yükler, iletken içinde "serbestçe" hareket edebilir. Bu, elbette, sığaç yüklendiğinde koyduğumuz yüktür. σ_{kutup}'un, σ_{serbest} sayesinde olduğunu vurgulayalım. Eğer σ_{serbest} sığaçı boşaltarak ortadan kaldırılırsa, σ_{kutup} da yok olur. Bu, boşaltım teli üzerinde olmaz, malzemeye geri dönüşüyle olur. Diğer bir deyişle, malzeme içindeki kutuplanmanın hafiflemesiyle gerçekleşir.

Şimdi, Şekil 10-1'deki S Gauss yüzeyine Gauss yasasını uygulayabiliriz. Dielektrik içindeki E elektrik alanı, *toplam* yüzey yük yoğunluğunun ϵ_0'a bölümüdür. σ_{kutup} ve σ_{serbest}'in zıt işaretlere sahip olduğu açıktır:

$$E = \frac{\sigma_{\text{serbest}} - \sigma_{\text{kutup}}}{\epsilon_0} \tag{10.6}$$

Dielektrik yüzeyi ile metal levha arasındaki E_0 alanının, E alanından büyük olduğuna dikkat edin. Tek başına σ_{serbest}'e eşittir. Bizim burada ilgilendiğimizde dielektrik içindeki alandır ki, eğer dielektrik tüm boşluğu kapladıysa, neredeyse bütün hacim üzerindeki alana eşittir. Denklem (10.5)'i kullanarak şunu yazabiliriz:

$$E = \frac{\sigma_{\text{serbest}} - P}{\epsilon_0} \tag{10.7}$$

Bu denklem, P'nin ne olduğunu bilmediğimiz sürece elektrik alanın ne olduğunu söylemez. Halbuki burada, P'nin sadece E'ye bağlı olduğunu –aslında orantılı olduğunu– varsaymaktayız. Bu orantısallık genelde şu şekilde yazılır:

$$P = \chi\epsilon_0 E \tag{10.8}$$

χ sabitine (Yunanca "khi") dielektriğin *elektrik alınganlığı* denir.

Bu durumda Denk. (10.7) aşağıdakine dönüşür:

$$E = \frac{\sigma_{\text{serbest}}}{\epsilon_0}\frac{1}{(1+\chi)} \tag{10.9}$$

Bu da bize alan tarafından alanı azaltan $1/(1 + \chi)$ çarpanını verir.

Levhalar arasındaki voltaj elektrik alanının integralindir. Alan düzgün olduğundan, integral E ile levhalar arasındaki mesafe d'nin çarpımıdır. Bunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{serbest}}d}{\epsilon_0(1+\chi)}$$

Sığaçtaki toplam yük $\sigma_{\text{serbest}}A$'dır, böylece Denk. (10.2) tarafından tanımlanan sığa da şu şekilde yazılabilir:

$$C = \frac{\epsilon_0 A(1+\chi)}{d} = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} \tag{10.10}$$

Gözlemlenen olguları açıklamış olduk. Paralel levhalı bir sığaç dielektrikle doldurulduğunda, sığa

$$\kappa = 1 + \chi \tag{10.11}$$

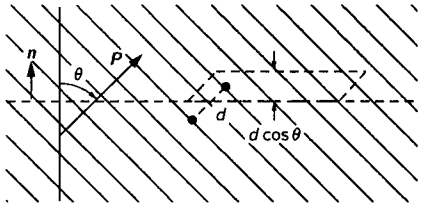
çarpanıyla artar ki bu da malzemenin bir özelliğidir. Elbette ki açıklamamız atomik kutuplanmanın nasıl meydana geldiğini açıklamadığımız sürece eksik kalacaktır. Onu da daha sonra yazacağız.

Şimdi gelin, daha karmaşık bir şeyi ele alalım. $\boldsymbol{P}$ kutuplanmasının her yerde aynı olmadığı bir durumu. Daha önce bahsettiğimiz üzere kutuplanma sabit değilse, hacim içinde bir yük yoğunluğu bulmayı bekleriz; çünkü küçük bir hacmin bir tarafından çıkan yükten daha fazlası o hacmin diğer tarafından içeri girebilir. Küçük bir hacimden ne kadar yük çıktığını veya o hacme ne kadar yük girdiğini nasıl bulabiliriz?

Önce, malzeme kutuplandığında, herhangi bir hayali yüzey boyunca ne kadar yükün hareket ettiğini hesaplayalım. Kutuplanma yüzeye *dik* ise, bir yüzey boyunca hareket eden yük miktarı P ile yüzey alanın çarpımıdır. Kutuplanma yüzeye *teğet* ise, yüzey boyunca yük hareket etmez elbette.

Daha önce kullandığımız akıl yürütmeleri kullanarak, herhangi bir yüzey boyunca hareket eden yükün $\boldsymbol{P}$'nin yüzeye *dik bileşeniyle* orantılı olduğunu görmek kolaydır. Şekil 10-6 ile Şekil 10-5'i karşılaştırın. Denklem (10.5)'in, genel durumlar için, aşağıdaki şekilde yazılması gerektiğini göreceksiniz

$$\sigma_{\text{kutup}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} \tag{10.12}$$

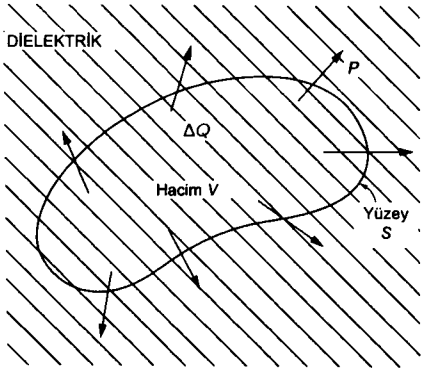


Şekil 10-6 Bir dielektrik içindeki hayali bir yüzey boyunca hareket ettirilen yük, $\boldsymbol{P}$'nin yüzeye dik bileşeniyle orantılıdır.

Bir dielektrik *içindeki* hayali bir yüzeyi düşünüyorsak, Denk. (10.12) yüzey boyunca hareket ettirilen yükü verir fakat net bir yüzey yükünü vermez; çünkü yüzeyin her iki tarafına dielektrik tarafından eşit ve zıt katkılar vardır.

Bununla birlikte, yüklerin yerdeğiştirmesi *hacimsel* yük yoğunluğuyla sonuçlanabilir. Kutuplanma sonucunda herhangi bir V hacminden *dışarı* çıkan toplam yük, $\boldsymbol{P}$'nin dışa doğru dik bileşeninin, hacmi çevreleyen S yüzeyi üzerinden alınan integraline eşittir. (*Bkz.* Şekil 10-7). Eşit miktarda, zıt işaretli yük geride bırakılır. V hacmi içerisindeki net yükü ΔQ_{kutup} değeriyle belirterek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta Q_{\text{kutup}} = -\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\, da \tag{10.13}$$



Şekil 10-7 Düzgün olmayan bir $\boldsymbol{P}$ kutuplanması, dielektrik içinde net yüke neden olabilir.

ΔQ_{kutup} terimini aynı zamanda ρ_{kutup} yoğunluğunda hacimsel yük dağılımıyla da ilişkilendirebiliriz:

$$\Delta Q_{\text{kutup}} = \int_V \rho_{\text{kutup}}\, dV \tag{10.14}$$

İki denklemi birleştirerek,

$$\int_V \rho_{\text{kutup}}\, dV = -\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\, da \tag{10.15}$$

yazabiliriz. Böylece, kutuplanmış malzemelerden gelen yük yoğunluğunu $\boldsymbol{P}$ kutuplanma vektörüyle ilişkilendiren, bir çeşit Gauss teoremi elde etmiş olduk. Paralel levhalı sığaçtaki dielektrik veya yüzey kutuplanma yükü için elde ettiğimiz sonuçla uyuşmaktadır. Şekil 10-1'deki Gauss yüzeyi ile Denk. (10.15)'i kullanırsak, yüzey integrali $P\,\Delta A$ verir ve içerdeki yük de $\sigma_{\text{kutup}}\,\Delta A$ olur. Böylece yeniden $\sigma_{\text{kutup}} = P$ eşitliğini elde etmiş olduk.

Aynı, elektrostatik için Gauss yasasında yaptığımız gibi, Gauss'un matematiksel teoremini kullanarak, Denk. (10.15)'i diferansiyel bir biçme sokabiliriz:

$$\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{P}\, dV$$

Böylece,

$$\rho_{\text{kutup}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{10.16}$$

eşitliğini elde ederiz. Kutuplanma düzgün değilse, diverjansı bize malzeme içinde beliren net yük yoğunluğunu verir. Bunun tam bir *gerçek* yük yoğunluğu olduğunun altını çizmek lazım. "Kutuplanma yükü" dememizin nedeni, oraya nasıl geldiğini kendimize hatırlatmak içindir.

10-4 Dielektrikli elektrostatik denklemleri

Şimdi gelin, yukardaki sonucu elektrostatik kuramıyla birleştirelim. Temel denklemimiz şudur:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10.17}$$

Denklemdeki ρ *bütün* elektrik yüklerinin yoğunluğudur. Kutuplanma yüklerinin izini sürmek kolay olmadığından, ρ'yi iki parçaya ayırmak işimize yarar. Düzgün olmayan kutuplanmalardan kaynaklanan yüklere ρ_{kutup}, diğerlerine ρ_{serbest} diyeceğiz yine. Genelde ρ_{serbest} iletkenlere veya uzayda bilinen yerlere eklediğimiz yüktür. Bu durumda Denk. (10.17) aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{serbest}} + \rho_{\text{kutup}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{serbest}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

ya da

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \tag{10.18}$$

Elbette ki, $\boldsymbol{E}$'nin bükümü için aynı denklemi kullanacağız:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.19}$$

Denklem (10.8)'den $\boldsymbol{P}$'yi alırsak, daha basit bir denklem elde ederiz:

$$\nabla \cdot [(1 + \chi)\boldsymbol{E}] = \nabla \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \tag{10.20}$$

Bunlar, dielektrik varlığındaki elektrostatik denklemleridir. Yeni bir şey söylememektedirler elbette, ancak ρ_{serbest}'in bilindiği ve $\boldsymbol{P}$ kutuplanmasının $\boldsymbol{E}$'yle orantılı olduğu durumlardaki hesaplamalar için daha uygun bir biçimdedirler.

Dikkat ederseniz, dielektrik "sabiti" κ'yı diverjanstan çıkarmadık; çünkü her yerde aynı olmayabilir. Her yerde aynı değere sahipse, dışarda tutulabilir ve denklemler de sadece elektrostatiğin ρ_{serbest} bölü κ'sı olur. Bu sunduğumuz biçimiyle, denklemler alanda farklı yerlerde farklı dielektriğin olabileceği genel duruma uygulanabilir. Bu durumda denklemleri çözmek gayet zor olabilir.

Burada belirtmemiz gereken bir tarihsel önem durumu vardır. Elektriğin keşfedildiği ilk zamanlarda, kutuplanma mekanizması bilinmemekteydi ve ρ_{kutup}'un varlığı ciddiye alınmazdı. ρ_{serbest} yükü bütün yük yoğunluğu olarak sayılırdı. Maxwell denklemlerini daha basit biçimde yazabilmek için, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{P}$ doğrusal bileşimine eşit yeni bir $\boldsymbol{D}$ vektörü tanımlanmıştı:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{10.21}$$

Bunun sonucunda, (10.18) ve (10.19) numaralı denklemler çok daha basit bir biçimde yazılmıştı:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{serbest}} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.22}$$

Bir kimse bunları çözebilir mi? Evet, ancak $\boldsymbol{D}$ ile $\boldsymbol{E}$ arasındaki ilişkiyi tanımlayan üçüncü bir denklem verilirse. Denklem (10.8) geçerli olduğunda, bu denklem şudur:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\boldsymbol{E} = \kappa\epsilon_0\boldsymbol{E} \tag{10.23}$$

Bu denklem genelde şu şekilde yazılmıştır:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{10.24}$$

Burada ϵ, malzemelerin dielektrik özelliğini tanımlayan bir başka sabittir ve "geçirgenlik" olarak adlandırılır. (Artık neden denklemlerimizde ϵ_0 olduğunu anlamışsınızdır, o "boş uzayın geçirgenliği"dir.) Doğal olarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 = (1 + \chi)\epsilon_0 \tag{10.25}$$

Bugün bu meselelere farklı bir bakış açısıyla yaklaşıyoruz. Şöyle ki, boşlukta daha basit denklemlerimiz var ve kaynağı ne olursa olsun bütün yükleri her durumda gösterebiliyorsak, denklemlerimiz daima doğru diyebiliyoruz. Kolaylık olsun diye yüklerin bir kısmını ayırırsak ya da ne olup bittiğini ayrıntılı şekilde ele almak istemiyorsak, o zaman, dilersek, denklemlerimizi uygun herhangi bir başka biçimde yazabiliriz.

Bir noktanın daha altını çizmemiz lazım. $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ gibi bir eşitlik, maddenin bir özelliğini tanımlamaya yönelik bir çabadır. Ancak, madde çok karışıktır ve bu tür bir denklem aslında doğru olmayabilir. Örneğin, $\boldsymbol{E}$ çok büyürse, o zaman $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$'yle orantılı olmaz. Orantısallık bazı cisimlerde görece küçük alanlarda bile kırılabilir. Ayrıca orantı "sabiti", $\boldsymbol{E}$'nin zamanla ne kadar hızlı değiştiğine de bağlı olabilir. Dolayısıyla, bu türden bir denklem bir yaklaştırımdır. Aynı Hooke yasası gibi. Derin ve temel bir yasa olamaz. Diğer yandan, $\boldsymbol{E}$ için temel yasalarımız olan (10.17) ve (10.19) numaralı denklemler elektrostatiğe dair en derin ve bütünlüklü anlayışımızı temsil ederler.

10-5 Dielektrikli alanlar ve kuvvetler

Şimdi, dielektriğin var olduğu durumlardaki elektrostatik için genel teoremleri kanıtlayacağız. Paralel levhalı sığaçın sığasının, dielektrikle doldurulduğunda arttığını daha önce görmüştük. Şimdi, iki iletkenin yakınındaki bütün alanın düzgün doğrusal bir dielektrikle doldurulduğunda, bunun *herhangi* bir sığaç şekli için doğru olduğunu kanıtlayacağız. Dielektrik olmadığında, çözülmesi gereken denklemler şunlardır:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_0 = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \qquad \text{ve} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E}_0 = 0$$

Dielektrik mevcut olduğundaysa, bu denklemlerden ilki değişir. Bu durumda elimizde aşağıdaki denklemler olur:

$$\nabla \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \qquad \text{ve} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.26}$$

κ'nın her yerde aynı kabul ettiğimize göre, son iki denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\nabla \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \qquad \text{ve} \qquad \nabla \times (\kappa \boldsymbol{E}) = 0 \tag{10.27}$$

Dolayısıyla elimizde $\kappa \boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{E}_0$ için aynı denklemler var, çözümü de $\kappa \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$'dır. Diğer bir deyişle, alan her yerde, dielektrik olmadığı duruma göre, $1/\kappa$ çarpanı kadar küçüktür. Her iki durumda da, sığaçın elektrotlarındaki yük aynı alındığından, Denk. (10.2)'ye göre sığa, her yerde düzgün dielektrik olduğunda, κ faktörüyle artar.

Şimdi gelin, dielektrik içinde iki yüklü iletken arasındaki *kuvvetin* ne olduğu sorusunu soralım. Her yerde homojen sıvı olan bir dielektriği ele alalım. Kuvveti hesaplamanın bir yolunun, enerjinin uygun bir mesafe üzerinden türevini almak olduğunu görmüştük. Eğer iletkenler eşit ve zıt yüklere sahipse, enerji $U = Q^2/2C$ olur. Denklemdeki C sığalarıdır. Sanal iş ilkesini kullanarak, kuvvetin herhangi bir bileşeni o yöndeki türevle bulunabilir. Örnek olarak

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right) \tag{10.28}$$

Dielektrik sığası κ çarpanıyla artırdığından dolayı, tüm kuvvetler aynı oranda *azalacaktır*.

Bir noktanın altını çizmemiz lazım. Bu dediklerimiz ancak dielektrik sıvı olduğunda geçerlidir. Katı bir dielektrik içindeki iletkenlerin herhangi bir hareketi dielektriğin mekanik stres koşullarını değiştirir ve dolayısıyla elektriksel

özelliklerini de başkalaştırır. Aynı zamanda dielektrik içinde bir miktar mekanik enerji değişimine de yol açar. İletkenleri bir sıvının içinde hareket ettirmek sıvıyı değiştirmez. Sıvı yeni bir yere taşınır ama elektriksel özellikleri aynı kalır.

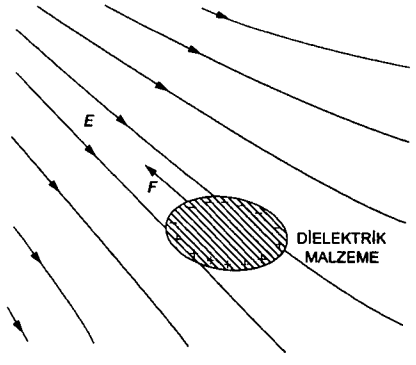
Elektrik üzerine yazılmış birçok eski kitap, iki yük arasındaki kuvveti gösteren şu "temel" yasayla başlar:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2} \tag{10.29}$$

Böyle bir bakış açısı baştan aşağı yetersizdir. Öncelikle, genel olarak doğru değildir. Ancak sıvıyla dolu bir dünyada geçerlidir. Sonra, κ'nın sabit olduğu gerçeğine dayanmaktadır ki bu birçok gerçek malzeme için sadece yaklaşık olarak doğrudur. Doğrusu, *boşluk* içindeki yüklere dair Coulomb yasasıyla başlamaktır ki, o her zaman (sabit yükler için) doğrudur.

Peki, bir katının içinde ne olur? Bu, henüz çözülmemiş çok zor bir problemdir; çünkü bir anlamda, belirsizdir. Dielektrik bir katı içine yük yerleştirirseniz, birçok basınç ve gerilme de olduğunu da bilmelisiniz. Katı bir cismi sıkıştırmak için gerekli mekanik enerjiyi ve katı malzemenin kendisinden kaynaklanan mekanik kuvvetleri dahil etmeden, sanal işi hesaplayamazsınız. Katı malzemenin doğası gereği, mekanik kuvvetler ile elektriksel kuvvetler arasında kesin bir ayrım yapmak da, genel olarak, zordur. Talihliyiz ki, kimse bu sorunun cevabına gerçekten ihtiyaç duymuyor. Bazen bir katının içinde ne kadar gerilme olduğunu bilmek isteyebilir biri ve bunun cevabı verilebilir. Ancak cevabı elde etmek, sıvılar için elimizdeki basit sonuçtan çok daha karmaşıktır.

Dielektrik kuramına dair şaşırtıcı derecede karmaşık bir problem de şudur: Yüklü nesneler neden küçük dielektrik parçaları çeker? Herkes küçükken şu deneyi yapmıştır. Kuru bir günde saçınızı taradığınızda, kullandığınız tarak küçük kâğıt parçalarını kendine çeker. Çok detaylıca düşünmezseniz, tarağın bir yükü olduğunu ve kâğıt parçalarının da zıt yükü olduğunu ve birbirlerini çektiğini düşünebilirsiniz. İyi de, kâğıt başta elektriksel olarak nötrdü. Net bir yükü olmamasına rağmen, yine de tarağa doğru çekilir. Bazen de tarağa doğru uçtuğu ve tarağa dokunur dokunmaz bir anda itildiği de görülür. Bunun nedeni, kolayca tahmin edeceğiniz üzere, kâğıdın tarağa dokunur dokunmaz bir miktar eksi yük kapması ve sona aynı yüklerin birbirini itmesidir. Güzel, ama bu ilk sorumuzu cevaplamıyor. Kâğıt neden tarağa doğru çekilmişti en başta?

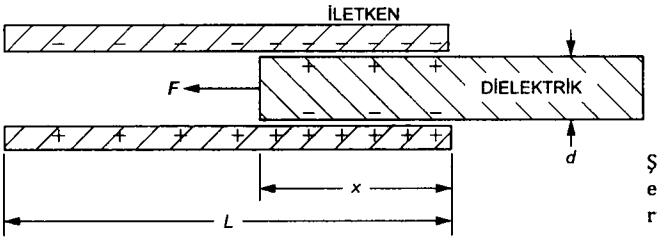


Şekil 10-8 Düzgün olmayan bir alandaki dielektrik nesne, alanın daha yüksek olduğu bölgelere doğru bir kuvvet hisseder.

Cevap, bir dielektrik malzemenin elektrik alana yerleştirildiğinde kutuplanmasıyla bağlantılı olmalı. Her iki yüke ait, tarak tarafından itilen ve çekilen, kutuplanma yükleri vardır. Tarağa yakın elektrik alan, uzaktaki alandan daha kuvvetli olduğundan dolayı net bir çekim vardır. Tarak sonsuz bir levha değildir, yükü yerelleşmiştir. Nötr bir kâğıt parçası, bir sığaçı paralel levhaları arasına yerleştirildiğinde, levhaların birine doğru çekilmeyecektir. Alanın değişmesi, çekim mekanizmasının gerekli bir parçasıdır.

Şekil 10-8'de gösterildiği gibi, bir dielektrik nesne daima zayıf alandan daha kuvvetli bir alana doğru çekilir. Hatta küçük nesneler için kuvvetin elektrik alanın ***karesinin*** gradyanıyla orantılı olduğu ispatlanabilir. Neden alanın karesine bağlıdır peki? Bunun nedeni, indüklenmiş kutuplanma yüklerinin alanlarla orantılı olması ve belirli yükler için kuvvetlerin de alanla orantılı olmasıdır. Bununla birlikte, az önce belirttiğimiz üzere, *net* bir kuvvet, alanın karesi noktadan noktaya değişirse mümkündür. Dolayısıyla kuvvet, alanın karesinin gradyanıyla orantılıdır. Orantı katsayısını etkileyen şeylerden biri nesnenin dielektrik sabitidir ve nesnenin boyu ile şekline de bağlıdır.

Dielektrik bir malzeme üzerine etki eden kuvvetin çok hassas şekilde hesaplanabileceği, konuyla ilgili bir problem vardır. Şekil 10-9'da görüldüğü gibi, bir dielektrik levhanın kısmi olarak içine sokulduğu bir paralel levhalı sığaçı ele alalım. Levhayı içeri doğru iten bir kuvvet vardır. Kuvveti detaylıca incelemek oldukça karmaşık bir süreçtir. Dielektrik malzemenin ve levhaların kenarlarına yakın alandaki düzensizlikleri incelemek gerekir. Detaylara bakmayıp, sadece enerjinin korunumu ilkesini kullanırsak, kuvveti kolayca hesaplayabiliriz. Daha önceden elde ettiğimiz bir denklemi kullanarak kuvveti hesaplayabiliriz.



Şekil 10-9 Paralel levhalı bir sığaçm içindeki dielektrik bir levhaya etki eden kuvvet, enerjinin korunumu ilkesi kullanılarak hesaplanabilir.

Denklem (10.28) aşağıdakine denktir:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x} \tag{10.30}$$

Tek yapmamız gereken, sığanın dielektrik levhanın konumuyla nasıl değiştiğini bulmaktır.

Levhaların toplam uzunluğu L, genişlikleri W, aralarındaki mesafe ve dolayısıyla dielektrik malzemenin kalınlığı d ve dielektrik malzemenin içeri girdiği mesafe de x olsun. Sığa, levhalar üzerindeki toplam serbest yükün, levhalar arasındaki voltaja oranıdır. Yukarda gördüğünüz üzere, belirli bir V voltajı için serbest yükün yüzey yük yoğunluğu $\kappa\epsilon_0 V/d$. Buradan, levhalar üzerindeki toplam yükü hesaplayabiliriz:

$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 V}{d} xW + \frac{\epsilon_0 V}{d}(L - x)W$$

Buradan da sığayı elde ederiz:

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d}(\kappa x + L - x) \tag{10.31}$$

Denklem (10.30) da bize aşağıdaki eşitliği verir:

$$F_x = \frac{V^2}{2}\frac{\epsilon_0 W}{d}(\kappa - 1) \tag{10.32}$$

Şimdi, bu denklem, böyle koşullar altındaki kuvveti bilmeniz gerekmiyorsa pek de faydalı değildir. Burada yapmak istediğimiz, enerji kuramının dielektrik malzemeler üzerine etki eden kuvvetleri hesaplarken karşılaşılabilecek inanılmaz karmaşıklıklardan kaçınmak için kullanılabileceğini göstermekti.

Şu ana kadar dielektrik kuramına dair ilgimiz elektriksel olguyla sınırlıydı. Malzemenin elektrik alanla orantılı bir kutuplanması olduğu gerçeğini de baştan kabul ettik. Belki de, böyle bir orantısallığın neden olduğu fiziğin daha çok ilgisini hak etmekte. Dielektrik sabitlerinin kaynağını atomik bir bakış açısıyla anladığımızda, dielektrik sabitlerinin değişken koşullar altında elektriksel ölçümlerini yaparak atomik veya moleküler yapı hakkında detaylı bilgi edinebiliriz. Bu durumu bir sonraki bölümde ele alacağız.

11
DİELEKTRİĞİN İÇİNDE

11-1 Moleküler dipoller
11-2 Elektronik kutuplanma
11-3 Kutupsal moleküller; yönlendirme kutuplanması
11-4 Dielektriğin kovuklarında elektrik alanlar
11-5 Sıvıların dielektrik sabiti; Clausius-Mossotti denklemi
11-6 Katı dielektrik
11-7 Ferroelektrik; $BaTiO_3$

11-1 Moleküler dipoller

Bu bölümde, bazı maddelerin neden dielektrik olduğunu tartışacağız. Son bölümde, dielektrikli elektriksel sistemlerin özelliklerini anlamanın yolunun, bir dielektriğe elektrik alan uygulandığında o alanın atomlara dipol momenti indüklediğini anlamaktan geçtiğini söylemiştik. Bir E elektrik alan birim hacme ortalama bir P dipol momenti indüklüyorsa, o zaman κ, dielektrik sabiti, aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} \tag{11.1}$$

Bu denklemin nasıl uygulanacağını zaten tartışmıştık. Şimdi, bir malzeme içinde elektrik alan varken kutuplanmanın nasıl oluştuğuna dair mekanizmayı tartışmalıyız. Olabilecek en basit açıklamayla başlayalım. Gazların kutuplanması. Yine de, gazların bile karmaşıklıkları bulunur: iki tür gaz vardır. Oksijen gibi, her bir molekülünde simetrik atom çiftleri olan bazı gazların moleküllerinin doğal dipol momenti yoktur. Su buharı gibi moleküllerinse (su buharı moleküllerinde hidrojen ve oksijen atomlarının asimetrik bir yerleşimi nedeniyle) kalıcı bir dipol momenti vardır. Altıncı bölümde belirttiğimiz gibi, su buharı molekülünde hidrojen atomları üzerinde ortalama bir artı yük ve oksijen atomları üzerindeyse ortalama bir eksi yük vardır. Artı ve eksi yüklerin ağırlık merkezleri çakışmadığından, molekülün toplam yük dağılımının bir dipol momenti vardır. Böyle bir moleküle kutupsal molekül denir. Oksijende, molekülün simetrisinden dolayı, artı ve eksi yüklerin ağırlık merkezleri aynıdır ve dolayısıyla oksijen kutupsal olmayan bir moleküldür. Yine de, bir elektrik alana yerleştirildiğinde dipol olur. Bu iki tip molekül Şekil 11-1'de resmedilmiştir.

Gözden geçirme: I. Cilt, Bölüm 31, *Kırılma İndisinin Kaynağı*
I. Cilt, Bölüm 40, İstatistiksel Mekanik İlkeleri

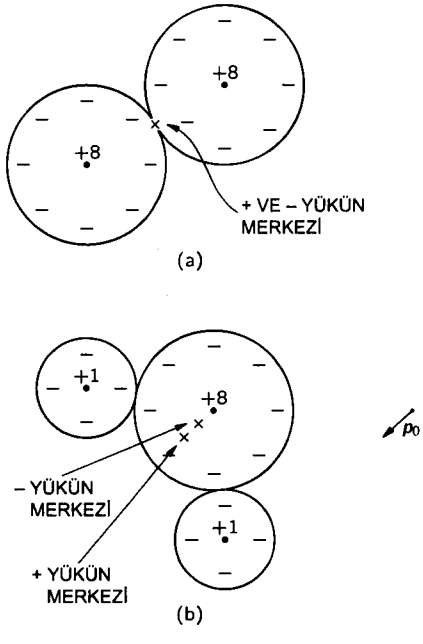
11-2 Elektronik kutuplanma

Öncelikle kutupsal olmayan moleküllerin kutuplanmasını tartışacağız. Başlangıç olarak tek atomlu bir gazı (örneğin, helyum) ele alalım. Böyle bir gaz atomu bir elektrik alana yerleştirildiğinde, elektronlar bir yana, çekirdekse onun tersine çekilir. Bu durum Şekil 10-4'te gösterilmiştir. Her ne kadar atomlar deneysel olarak uygulayacağımız elektriksel kuvvetlere karşı çok sağlam dursalar da, yüklerin merkezlerinde çok küçük bir yerdeğişimi vardır ve bu da bir dipol momenti indükler. Küçük alanlarda yerdeğiştirme, dolayısıyla da dipol momenti, elektrik alanla orantılıdır. Bu türden bir indüklenmiş dipol momenti yaratan elektron dağılımı yerdeğiştirmesine *elektronik kutuplanma* denir.

I. Cilt, 31. Bölümde, kırılma indisi kuramını ele alırken, elektrik alanın bir atom üzerindeki etkisini konuşmuştuk. Bir an şöyle durup düşünürseniz, yapmamız gerekenin aynı şey olduğunu fark edeceksiniz. Şimdiki fark, zamanla değişkenlik göstermeyen alanlarla uğraşacak olmamız. Kırılma indisi üzerine uğraşırken zamanla değişen alanlarla uğraşıyorduk, hatırlarsanız.

I. Cilt 31. Bölümde, bir atomu salınım yapan bir elektrik alana yerleştirdiğimizde, elektronlarının yük merkezinin aşağıdaki denkleme uyduğunu varsaymıştık:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E \tag{11.2}$$



Şekil 11-1 (a) Sıfır dipol momentine sahip bir oksijen molekülü. (b) Su molekülünün kalıcı bir p_0 dipol momenti vardır.

Denklemdeki ilk terim elektronun kütlesiyle ivmesinin çarpımıdır. İkinci terimse dengeleyici kuvvettir. Denklemin sağ tarafıysa dışardaki elektrik alandan kaynaklanan kuvvettir. Elektrik alan ω frekansıyla değişiyorsa, Denk. (11.2) aşağıdaki şekilde çözülür:

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{11.3}$$

Burada $\omega = \omega_0$ olduğunda rezonans meydana gelir. Bu denklemi daha önce bulduğumuzda, ω_0'ın ışığın soğurulduğu (atoma bağlı olarak, optik bölgede veya morötesi bölgede) frekans olduğunu söylemiştik. Şu anki amacımız içinse sadece sabit alanlarla diğer bir deyişle $\omega = 0$ olduğu durumlarla ilgilenmekteyiz. Dolayısıyla, Denk. (11.2)'deki ivmelenme terimini göz ardı edebilir ve böylece yerdeğiştirmeyi bulabiliriz:

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2} \tag{11.4}$$

Buradan da görürüz ki, tek bir atomun p dipol momenti şudur:

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2} \tag{11.5}$$

Bu kuramda, dipol momenti p gerçekten de elektrik alanla orantılıdır:

$$p = \alpha \epsilon_0 E \tag{11.6}$$

(Buradaki ϵ_0 yine tarihsel nedenlerden dolayı konmuştur.) α sabitine atomun kutuplanabilirliği denir ve L^3 boyutlarına sahiptir. Bu kutuplanabilirlik, elektrik alanla bir atomda ne kadar kolay moment indüklenebileceğini gösterir. Denklem (11.5) ve (11.6)'yı karşılaştırdığımızda, bizim basit kuramımız aşağıdaki denkliği öngörür:

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2} \tag{11.7}$$

Birim hacimde N sayıda atom varsa, P kutuplanması –birim hacim başına dipol momenti– şu denklemle bulunur:

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha\epsilon_0\boldsymbol{E} \tag{11.8}$$

Denklem (11.1) ve (11.8)'i birleştirirsek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N\alpha \tag{11.9}$$

ya da Denk. (11.7)'yi kullanarak

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2} \tag{11.10}$$

buluruz. Denklem (11.10) sayesinde, değişik gazların dielektrik sabiti κ'nın gazın yoğunluğuna ve optik soğurumunun frekansı ω_0'ya bağlı olduğunu öngörebiliriz.

Elbette, denklemimiz çok kaba bir yaklaştırımdır, çünkü Denk. (11.2)'de kuantum mekaniğinin karmaşıklıklarını göz ardı eden bir model kullandık. Örneğin, bir atomun sadece bir rezonans frekansı olabileceğini varsaydık. Gerçekteyse, atomun birçok salınım frekansı vardır. Atomların α kutuplanabilirliğini düzgünce hesaplayabilmek için bütün kuantum mekaniği kuramını kullanmamız lazım; ancak yukarda kullandığımız klasik fikirler de bize makul bir yaklaşık sonuç verir.

Bakalım herhangi bir maddenin dielektrik sabiti için doğru büyüklük derecesini elde edebilecek miyiz? Hidrojeni ele alalım. I. Cilt 38. Bölümde, bir hidrojen atomunu iyonize etmek için gerekli enerjinin yaklaşık olarak şu olması gerektiğini öngörmüştük:

$$E \approx \frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^2} \tag{11.11}$$

ω_0 doğal frekansını belirlemek için, bu enerjiyi $\hbar\omega_0$'ya, frekansı ω_0 olan bir atomik salımcının enerjisine eşitleyebiliriz. Bu durumda

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^3}$$

sonucu çıkar. Şimdi, ω_0'nun bu değerini Denk. (11.7)'de kullanırsak, elektronik kutuplanabilirlik için aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$\alpha \approx 16\pi\left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right]^3 \tag{11.12}$$

$(\hbar^2/me^2)$ niceliği, bir Bohr atomunun taban durumunda yörünge yarıçapıdır ve 0,528 Angström eşittir. Standart basınç ve sıcaklıktaki bir gazda (1 atmosfer basınç, 0°C) $2{,}69 \times 10^{19}$ sayıda atom vardır. Bunu Denk. (11.9)'a koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\kappa = 1 + (2{,}69 \times 10^{19})\ 16\pi(0{,}528 \times 10^{-8})^3 = 1{,}00020 \tag{11.13}$$

Hidrojen gazının dielektrik sabitiyse

$$\kappa_{\text{ölç}} = 1{,}00026$$

olarak ölçülmüştür. Görüyorsunuz, kuramımız yaklaşık olarak doğrudur. Daha iyisini bekleyemeyiz zira ölçümler, doğal olarak, tekil atomlar üzerinde değil diatomik moleküllere sahip normal hidrojen gazıyla yapılmıştır. Bir moleküldeki atomların kutuplanmasının, bağımsız atomlarınkiyle aynı olmaması bizi şaşırtmamalı. Gelgelelim, bu moleküler etki o kadar da büyük değildir. Hidrojen atomlarının α değerinin kuantum mekaniksel hesaplaması bize Denk. (11.12)'nin sonucundan %12 büyük bir sonuç verir (16π 18π'ye değiştirilmiştir) ve dolayısıyla dielektrik sabiti için gözlemlediğimize yakın bir değer öngörür. Her durumda, dielektriğe dair modelimizin gayet iyi olduğu açıktır.

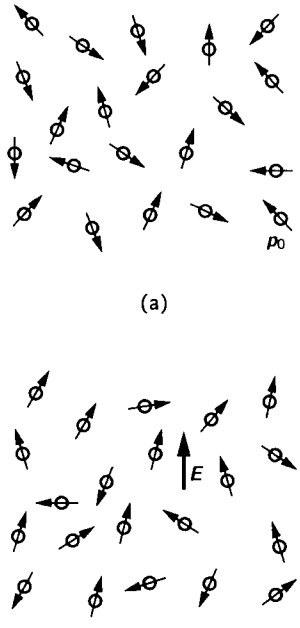
Kuramımızı sınamanın bir diğer yolu da Denk. (11.7)'yi, daha yüksek uyarılma frekansları olan atomlar üzerinde denemektir. Örneğin, helyumdan bir elektron koparmak için yaklaşık 24,6 elektron Volt gerekir. Hidrojeni iyonize etmek içinse 13,6 elektron Volt gerekir. Dolayısıyla, helyum için soğurma frekansı ω_0'nun hidrojeninkinin yaklaşık iki katı büyük ve α'nın da yaklaşık bir çeyrek kadar büyük olmasını bekleriz. Denklem (11.3)'ü kullanarak dielektrik sabitini hesaplarız:

$$\kappa_{\text{helyum}} \approx 1{,}000050$$

Deneysel sonuçsa aşağıdaki gibidir:

$$\kappa_{\text{helyum}} = 1{,}000068$$

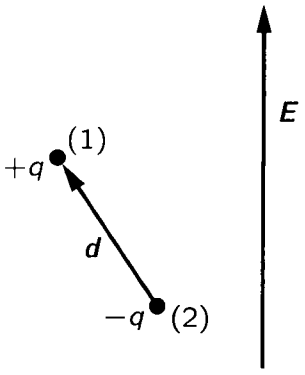
Görüyorsunuz işte, kaba tahminlerimiz doğru yola giriyor. Kutupsal olmayan gazın dielektrik sabitini, yalnızca niteliksel olarak olsa da, anlamış olduk. Sadece niteliksel diyorum, çünkü atomik elektronların hareketlerine dair doğru bir atomik kuram kullanmış değiliz henüz.



Şekil 11-2 (a) Kutupsal moleküllerden oluşmuş bir gaz içinde, bağımsız hareketler rastgele yönelimlidir. Küçük bir hacimdeki ortalama moment sıfırdır. (b) Bir elektrik alan varlığında, moleküllerin bir miktar ortalama hizalanması vardır.

11-3 Kutupsal moleküller; yönlendirme kutuplanması

Şimdi, kalıcı bir p_0 dipol momenti taşıyan bir molekülü –su molekülü gibi– ele alacağız. Elektrik alan olmadığında, bağımsız dipoller farklı yönleri işaret ederler, dolayısıyla birim hacim başına net moment sıfırdır. Bir elektrik alan uygulandığındaysa iki şey olur: Önce, elektronlar üzerindeki kuvvetlerden dolayı indüklenen fazladan bir dipol momenti oluşur. Bu, kutupsal olmayan molekül için bulduğumuzla aynı elektronik kutuplanabilirliği verir bize. Çok hassas hesaplama için bu etki elbette hesaba katılmalıdır, fakat şimdilik biz bunu göz ardı edeceğiz. Her zaman için sonradan ekleyebiliriz. Sonra, elektrik alan, birim hacim başına net bir moment meydana getirecek şekilde bağımsız dipollerle hizalanma eğilimi gösterir. Bir gaz içindeki bütün dipoller hizalanabilseydi, çok



Şekil 11-3 $\boldsymbol{E}$ alanında $\boldsymbol{p}_0$ dipolünün enerjisi $-\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}$.

büyük bir kutuplanma olurdu. Böyle bir şey olmaz. Olağan sıcaklıklar ve elektrik alanlarda, moleküllerin kendi ısıl hareketleri esnasındaki çarpışmaları onları hizalanmaktan alıkoyar. Yine de bir miktar net hizalanma ve dolayısıyla biraz kutuplanma olur (*Bkz.* Şekil 11-2). Bu kutuplanma, I. Cilt 40. Bölümde gösterdiğimiz istatistiksel mekanik yöntemleriyle hesaplanabilir.

Bu yöntemi kullanmak için, bir elektrik alandaki dipolün enerjisini bilmeliyiz. Şekil 11-3'teki gibi, bir elektrik alandaki p_0 dipol momentini ele alalım. Artı yükün enerjisi $q\phi(1)$ ve eksi yükünki de $-q\phi(2)$. Dolayısıyla dipolün enerjisi

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\boldsymbol{d} \cdot \nabla\phi$$

veya

$$U = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -p_0 E\cos\theta \tag{11.14}$$

olur. Denklemdeki θ, p_0 ile E arasındaki açıdır. Tahmin edeceğiniz üzere, dipoller alanla aynı yönde hizalandığında enerji daha düşüktür.

Şimdi, istatistiksel mekanik yöntemlerini kullanarak ne kadar hizalanma olduğunu bulalım. Bir ısıl denge halinde, U potansiyel enerjisine sahip moleküllerin göreli sayısı

$$e^{-U/kT} \tag{11.15}$$

terimiyle orantılıdır. $U(x, y, z)$, konuma bağlı potansiyel enerji fonksiyonudur. Aynı akıl yürütmeyle gittiğimizde, potansiyel enerji için Denk. (11.4)'ü *açı*ya bağlı bir fonksiyon olarak kullandığımızda görürüz ki θ açısında *birim katı açı başına* molekül sayısı $e^{-U/kT}$ terimiyle orantılıdır.

θ açısında birim katı açı başına düşen molekül sayısına $n(\theta)$ dersek, şunu elde ederiz:

$$n(\theta) = n_0\, e^{+p_0 E\cos\theta/kT} \tag{11.16}$$

Normal sıcaklıklar ve alanlar için üsteki terim küçüktür, dolayısıyla bu terimin seri açılımını yaparak aşağıdaki sonuca yakınsayabiliriz:

$$n(\theta) = n_0\left(1 + \frac{p_0 E\cos\theta}{kT}\right) \tag{11.17}$$

Tüm açılar üzerinden (11.17)'nin integralini alırsak n_0'ı bulabiliriz. Cevap tam N olmalıdır: birim hacimdeki toplam molekül sayısı. Tüm açılar üzerinden $\cos\theta$'nın ortalama değeri sıfırdır, dolayısıyla integral de n_0 çarpı toplam katı açı 4π'dir. Böylece şunu elde ederiz:

$$n_0 = \frac{N}{4\pi} \tag{11.18}$$

Denklem (11.17)'ye göre, alan boyunca hizalanan molekül sayısı ($\cos\theta = 1$), alana zıt yönde hizalanan molekül sayısından ($\cos\theta = -1$) fazladır. Dolayısıyla içinde birçok molekül olan küçük bir hacimde, birim hacim başına net bir dipol momenti olacaktır: bir P kutuplanması. P'yi hesaplamak için, birim hacimdeki bütün moleküler momentlerin vektör toplamına ihtiyacımız var. Sonucun E'yle aynı yönde olacağını bildiğimizden, o yöndeki bileşenleri toplamamız yeterlidir (E'ye dik açıdaki bileşenlerin toplamı sıfırdır):

$$P = \sum_{\substack{\text{birim}\\ \text{hacim}}} p_0 \cos\theta_i$$

Toplamı, açısal dağılım üzerinden integral alarak bulabiliriz. θ katı açı $2\pi \sin\theta\, d\theta$, dolayısıyla

$$P = \int_0^{\pi} n(\theta) p_0 \cos\theta\, 2\pi \sin\theta\, d\theta \tag{11.19}$$

olur. Denklem (11.17)'den $n(\theta)$'yı koyarsak şunu yazabiliriz:

$$P = -\frac{N}{2}\int_1^{-1}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}\cos\theta\right) p_0 \cos\theta\, d(\cos\theta)$$

Bu integrali aldığımızda da,

$$P = \frac{Np_0^2 E}{3kT} \tag{11.20}$$

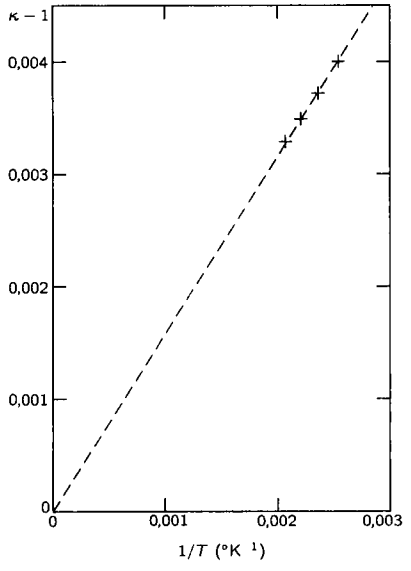
denklemini elde etmiş oluruz. Kutuplanma E alanıyla orantılıdır, dolayısıyla normal dielektrik davranışı gözlemlenir. Ayrıca, bekleneceği üzere, kutuplanma sıcaklıkla ters orantılıdır; zira sıcaklık arttıkça çarpışmalarda daha fazla hizasızlık gözlemlenir. Bu $1/T$ bağlılığına Curie yasası denir. p_0 kalıcı momentinin karesinin denklemde gözükmesinin nedeniyse şudur: Belirli bir elektrik alanda hizalayıcı kuvvet p_0'a bağlıdır ve hizalanmayla meydana gelen ortalama moment de yine p_0'la orantılıdır. Ortalama indüklenmiş moment p_0^2'ye orantılıdır.

Şimdi yapmamız gereken, Denk. (11.20)'nin deney sonuçlarıyla uyuşup uyuşmadığına bakmaktır. Su buharını ele alalım. p_0'nun ne olduğunu bilmediğimizden, P'yi doğrudan hesaplayamayız. Denklem (11.20) $\kappa - 1$ değerinin sıcaklıkla ters orantılı olduğunu öngörür ve biz de bunu kontrol etmeliyiz.

Denklem (11.20)'den şunu elde ederiz:

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{Np_0^2}{3\epsilon_0 kT} \tag{11.21}$$

Buradan da anlaşılıyor ki $\kappa - 1$, N yoğunluğuyla doğru orantılı ve mutlak sıcaklıkla ters orantılıdır. Birim hacimdeki molekül sayısı sabit kalacak şekilde, dielektrik sabiti çok farklı basınç ve sıcaklıklarda ölçülmüştür.* [Dikkatinizi çekerim, ölçümler sabit basınçta yapılsaydı, birim hacim başına molekül sayısı artan sıcaklıkla beraber doğrusal olarak azalırdı ve $\kappa - 1$ de T^{-1} yerine T^{-2} olarak değişirdi]. Şekil 11-4'de $\kappa - 1$ için deney sonuçlarını $1/T$'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir. Denklem (11.21)'in öngördüğü bağlılık gayet açıkça görülebiliyor.



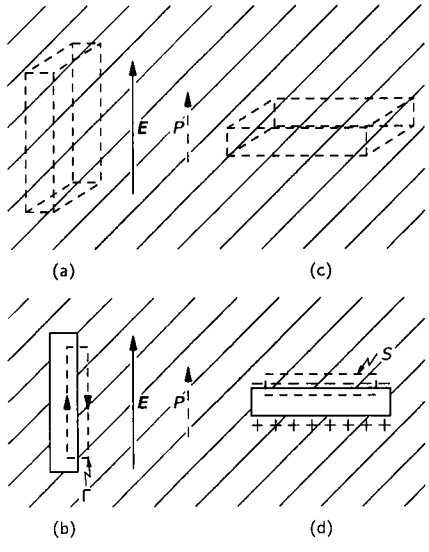
Şekil 11-4 Su buharının değişik sıcaklıklarda dielektrik sabitinin deneysel ölçümleri.

Kutupsal moleküllerin dielektrik sabitinin bir başka özelliği de, uygulanan alanın frekansına bağlı olarak değişmesidir. Moleküllerin eylemsizlik momentinden dolayı, ağır moleküllerin alanla aynı yöne dönmesi belli bir süre alır. Yüksek mikrodalga bölgesinde veya daha yükseğinde frekanslar uygularsak, dielektrik sabitine kutuplanma katkısı gitgide azalır çünkü moleküller geride kalırlar. Buna zıt olarak, elektronik kutuplanma, elektronların eylemsizliğinin küçük olmasından dolayı, optik frekanslara kadar aynı kalır.

11-4 Dielektriğin kovuklarında elektrik alanlar

Şimdi ilginç ve karmaşık bir probleme odaklanacağız. Yoğun malzemelerde dielektrik sabiti problemine. Diyelim ki elimizde sıvı helyum, argon veya benzeri bir başka kutupsal olmayan malzeme olsun. Yine de elektronik kutuplanma bekleriz. Yoğun bir malzemedeyse P büyük olabilir, dolayısıyla tek bir atom üzerindeki alan, atomun yakınındaki atomların kutuplanmasından etkilenecektir. Sorulması gereken soru, tek bir atom üzerine hangi elektrik alanının etki yaptığıdır.

Sıvının bir kondansatörün levhaları arasına konduğunu düşünelim. Levhalar yüklenirse, sıvı içerisinde bir elektrik alan yaratırlar. Tek tek atomlarda da yükler vardır, dolayısıyla toplam E alanı bütün etkilerin toplamıdır. Atomların içinde, özellikle çekirdeğin yakınında, çok büyüktür ve atomlar arasındaysa görece küçüktür. Levhalar arasındaki potansiyel fark toplam alanın çizgi integralidir. İnce detayları dikkate almazsak, *ortalama* bir E elektrik alanının var olduğunu düşünebiliriz. (Son bölümde kullandığımız alan budur: V/d.) Bu alanı, birçok atom içeren bir uzay üzerinde ortalama olarak düşünmeliyiz.



Şekil 11-5 Bir dielektriğin içine oyulmuş yarıktaki alan, yarığın şekline ve yönelimine bağlıdır.

"Ortalama" bir atomun, "ortalama" bir yerde bu ortalama alanının etkisini hissedeceğini düşünebilirsiniz. Bu o kadar kolay değildir. Kolay olmadığını, bir dielektrik içinde farklı şekilli delikler olduğunu hayal ettiğimizde ne olduğunu

* Sänger, Steiger ve Gächter, *Helvetica Physica Acta* 5, 200 (1932).

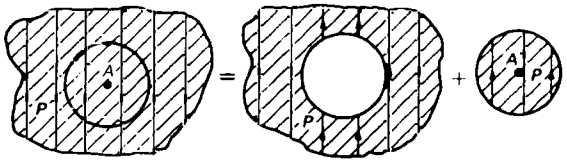
ele alarak gösterebiliriz. Şekil 11-5 (a)'da görüldüğü gibi, kutuplanmış bir dielektrik içinde, alana paralel bir yarık oyduğumuzu düşünelim. $\nabla \times E = 0$ olduğunu bildiğimizden, (b)'de görünen ilmeğin (Γ) etrafındaki E'nin çizgi integrali sıfır olmalıdır. Yarığın içindeki alan, dışardan gelen alanın katkısını sıfırlayacak şekilde katkıda bulunmalıdır. Dolayısıyla, uzun ince bir yarığın merkezindeki E_0 alanı E, dielektrik içinde bulunan ortalama elektrik alana eşittir.

Şimdi, Şekil 11-5 (c)'de görüldüğü gibi, uzun kenarlarının E'ye dik olduğu bir yarığı ele alalım. Bu durumda yarıktaki E_0 alanı E'ye eşit değildir, çünkü kutuplanma yükleri yüzeyler üzerindedir. Şekil 11-5 (d)'deki S yüzeyine Gauss yasasını uygularsak, *yarığın içindeki* E_0 alanının şu şekilde hesaplanabileceğini buluruz:

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0} \tag{11.22}$$

Denklemdeki E dielektrik içindeki elektrik alandır. (Gauss yüzeyinde yüzey kutuplanma yükü vardır ve $\sigma_{\text{kutup}} = P$ olur.) Bölüm 10'da $\epsilon_0 E + P$'nin sıkça D olarak adlandırıldığını belirtmiştik, dolayısıyla $\epsilon_0 E_0 = D_0$, dielektrik içinde, D'ye eşittir.

Fizik tarihinin başlarında, her bir niceliğin doğrudan deneyle tanımlanmasının çok önemli olduğunun düşünüldüğü yıllarda, insanlar E ve D'nin ne anlama geldiğini atomlar arasında debelenmeden tanımlayabileceklerini keşfettiklerinde çok mutlu olmuşlardı. Ortalama alan E, sayısal olarak, alana paralel kesilmiş bir yarıkta ölçülen E_0 alanına eşitti. D alanı da, alana dik yönde kesilmiş yarıktaki E_0'yu bularak hesaplanabilirdi. Gerçi kimse bunları bu şekilde ölçmüyordu, bu sadece felsefi şeylerden biriydi.



Şekil 11-6 Bir dielektrik içindeki herhangi bir A noktasındaki alan, küresel bir deliğin alanı ile küresel bir tıpanın alanlarının toplamı olarak ele düşünülebilir.

Yapısal olarak çok karmaşık olmayan birçok sıvıda, bir atom, genelde, başka atomlarla çevrelenmiştir ve bu *küresel bir deliğe* iyi bir yaklaştırımdır. O zaman şunu sorabiliriz: "Bir küresel delik içindeki alan nedir?" Bunu cevaplayabilmek için şunu anlamalıyız ki, düzgün kutuplanmış bir malzemede küresel bir delik oyduğumuzda, aslında kutuplanmış bir küreyi kesip çıkarmış oluruz. (Deliği kesip çıkarmadan önce kutuplanmanın "sabitlendiğini" hayal etmeliyiz.) Üst üste binme ilkesi gereği, küre kesip çıkarılmadan önce dielektrik içindeki alanlar kürenin dışındaki tüm yüklerden gelen alanlar ile kutuplanmış küre içindeki yüklerden kaynaklanan alanların toplamıdır. Diğer bir deyişle, düzgün dielektrik içindeki alana E dersek,

$$E = E_{\text{delik}} + E_{\text{tıpa}} \tag{11.23}$$

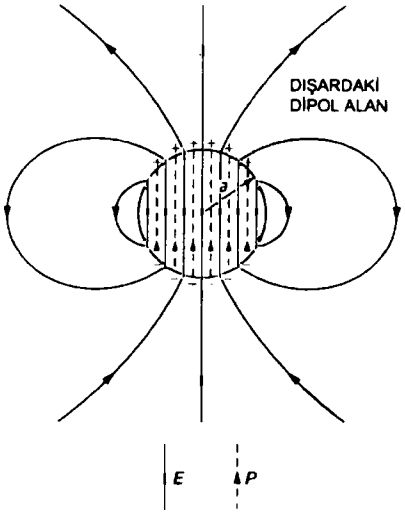
eşitliğini yazabiliriz. Denklemdeki E_{delik}, delik içindeki alan ve $E_{\text{tıpa}}$ da düzgün kutuplanmış bir kürenin içindeki alandır (*Bkz.* Şekil 11-6). Düzgün kutuplanmış bir küreden kaynaklanan alanlar Şekil 11-7'de gösterilmiştir. Kürenin içindeki elektrik alan düzgündür ve değeri de şöyle hesaplanır:

$$E_{\text{tıpa}} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \tag{11.24}$$

Denklem (11.23)'ü kullanarak da, şunu elde ederiz:

$$E_{\text{delik}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \tag{11.25}$$

Küresel bir kovuktaki alan, ortalama alandan $P/3\epsilon_0$ kadar büyüktür. (Alana paralel yarık ile alana dik yarığın 1/3'ü kadarlık bir yolda küresel deliğin alanı vardır.)



Şekil 11-7 Düzgün kutuplanmış bir kürenin elektrik alanı.

11-5 Sıvıların dielektrik sabiti; Clausius-Mossotti denklemi

Tek bir atomu kutuplayacak, bir sıvı içindeki alanın E'den ziyade E_{delik} gibi olması beklenir. Denklem (11.25)'teki E_{delik}'i Denk. (11.16)'daki kutuplayıcı alan yerine koyarsak, Denk. (11.8) aşağıdaki hale gelir:

$$P = N\alpha\epsilon_0\left(E + \frac{P}{3\epsilon_0}\right) \tag{11.26}$$

ya da

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}\epsilon_0 E \tag{11.27}$$

$\kappa - 1$'in $P/\epsilon_0 E$ olduğunu hatırladığımızda, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\kappa - 1 = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \tag{11.28}$$

Bu da bize bir sıvının dielektrik sabitini α, atomik kutuplanabilirlik, cinsinden verir. Buna *Clausius-Mossotti* denklemi denir.

$N\alpha$ çok küçük olduğunda, örneğin bir gaz için (çünkü yoğunluk N çok küçüktür), $N\alpha/3$ terimi 1'le karşılaştırıldığında ihmal edilebilir. Böylece eski sonucumuz olan Denk. (11.9)'u elde ederiz:

$$\kappa - 1 = N\alpha \tag{11.29}$$

Gelin, Denk. (11.28)'i deneysel sonuçlarla karşılaştıralım. κ'nın ölçümünü kullanarak, α değerini Denk. (11.29)'dan bulabileceğimiz gazlara bakmak önceliklidir. Örneğin, sıfır derecede karbon-disülfid için dielektrik sabiti 1,0029'dur, dolayısıyla $N\alpha$'da 0,0029'dur. Gazın yoğunluğu kolayca hesaplanabilir ve sıvının yoğunluğu da el kitaplarında bulunabilir. 20°C'de sıvı CS_2'nin yoğunluğu, sıfır derecedeki gazından 381 kat daha fazladır. Bunun anlamı, N'nin sıvıda, gazda olduğundan 381 kat daha fazla olmasıdır. Karbon sülfidin temel atomik kutuplanabilirliğinin sıvı hale geldiğinde çok değişmediğini varsayarsak, sıvı içinde $N\alpha$ 381 çarpı 0,0029 dolayısıyla 1,11'dir. Dikkat ederseniz $N\alpha/3$ terimi nerdeyse 0,4'e eşittir, dolayısıyla gayet önemlidir. Bu rakamları kullanarak, dielektrik sabitini 2,76 olarak buluruz ki bu da gözlemlenen 2,64'e çok yakın bir sonuçtur.

Tablo 11-1'de çeşitli malzemelere ait deneysel veriyi (*Handbook of Chemistry and Physics*'ten alınmıştır) Denk. (11.28)'le hesaplanmış dielektrik sabitleriyle beraber görebilirsiniz. Argon ile oksijen için deney ve denklem sonuçları, CS_2 için olduğundan daha iyidir ve karbon tetraklorid için çok da iyi değildir. Tamamına bakıldığında, sonuçlar ortaya koyuyor ki Denk. (11.28) gayet iyi sonuçlar vermektedir.

Tablo 11-1
Gazın dielektrik sabitinden hesaplanan sıvılardaki dielektrik sabiti.

	Gaz			Sıvı				
Madde	κ (deney)	$N\alpha$	Yoğunluk	Yoğunluk	Oran[1]	$N\alpha$	κ (öngörü)	κ (deney)
CS_2	1,0029	0,0029	0,00339	1,293	381	1,11	2,76	2,64
O_2	1,000523	0,000523	0,00143	1,19	832	0,435	1,509	1,507
CCl_4	1,0030	0,0030	0,00489	1,59	325	0,977	2,45	2,24
Ar	1,000545	0,000545	0,00178	1,44	810	0,441	1,517	1,54

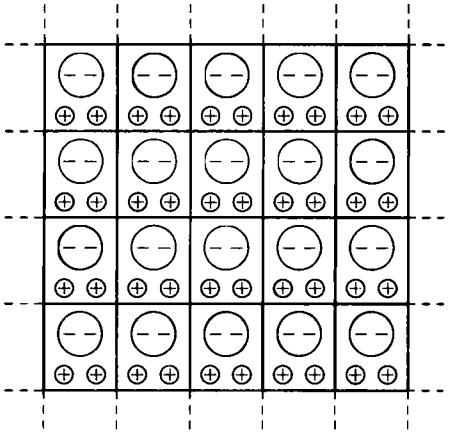
[1] Oran= sıvı yoğunluğu / gaz yoğunluğu

Denklem (11.28)'i elde etme yöntemimiz sadece sıvılardaki *elektronik* kutuplanma için geçerlidir. H_2O gibi kutupsal bir molekül için geçerli değildir. Su için aynı hesaplamaları yaptığımızda, $N\alpha$ için 13,2 buluruz. Bu da, gözlemlenen κ değeri 80'ken, sıvı için dielektrik sabitinin *eksi* olduğu anlamına gelir. Problem,

kalıcı dipollerin doğru işlenmesiyle ilgili olmalıdır ve Onsager bunu çözmenin doğru yolunu göstermiştir. Bunu ele alacak vaktimiz yok şu anda, ancak ilginiz varsa, bu, Kittel'in kitabı *Katı Hal Fiziğine Giriş*'te [*Introduction to Solid State Physics*] incelenmiştir.

11-6 Katı Dielektrik

Şimdi, sıra geldi katılara. Katılar hakkındaki ilk ilginç gerçek, içlerinde –elektrik alan uygulanmadan bile– kalıcı bir kutuplanma olabileceğidir. Örnek olarak mum gibi bir malzemeyi verebiliriz. Mum, kalıcı dipol momentine sahip uzun moleküller içerir. Bir miktar mumu eritir ve sıvı haldeyken üzerine, dipol momentlerini hizalayacak şekilde, elektrik alan uygularsanız, katılaştığında da aynı şekilde kalırlar. Katılaşan malzeme, elektrik alan kalksa bile, kalıcı kutuplanmaya sahip olacaktır. Bu tür katı malzemeye *elektret* denir.



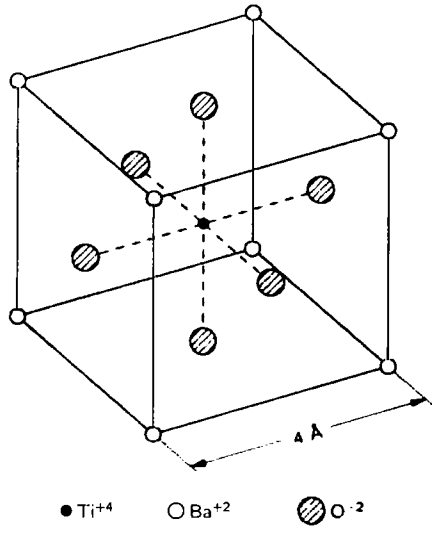
Şekil 11-8 Kompleks bir kristal örgü yapısal olarak sabit bir ***P*** kutuplanmasına sahip olabilir.

Bir elektret, yüzeyde kalıcı kutuplanma yüklerine sahiptir. Mıknatısın elektriksel benzeridir. Benzeridir ama aynı şekilde faydalı değildir; çünkü havadaki serbest yükler yüzeylerine doğru çekilir ve en sonunda kutuplanma yüklerini sıfırlar. Elektret "boşalmıştır" ve görülebilir dış alan yoktur.

Bazı kristal yapılarda, kalıcı iç kutuplanma ***P*** bulunur. Bu tür kristallerde, her bir örgü hücresinin, Şekil 11-8'de görüldüğü gibi, özdeş bir kalıcı dipol momenti vardır. Bütün dipolleri, elektrik alan uygulanmasa bile, aynı yönü işaret eder. Birçok karmaşık kristalin bu tür kutuplanması vardır. Normalde fark etmiyoruz bunu; çünkü, bunlar aynı elektretler için olduğu gibi, dış alanlarda boşalmıştır.

Bununla birlikte, bir kristalin bu iç dipol momentleri değiştirilirse, dış alanlar ortaya çıkar; çünkü başıboş yüklerin toplanıp, kutuplanma yüklerini sıfırlayacak zamanları yoktur. Dielektrik bir iletken içindeyse, elektrotlar üzerine serbest yükler indüklenir. Örneğin, bir dielektrik ısıtıldığında, ısıl genişlemeden dolayı momentler değişebilir. Bu etkiye *piroelektriklik* denir. Benzer şekilde, bir kristaldeki gerilmeleri değiştirirsek –örneğin, bükerek– moment gene bir miktar değişebilir ve *piezoelektriklik* denilen ufak bir elektriksel etki görülebilir.

Kalıcı momente sahip olmayan kristaller için, dielektrik sabitine dair, atomların elektronik kutuplanabilirliğini içeren bir kuram geliştirebiliriz. Aynı şey sıvılar için de geçerlidir. Bazı kristallerin içinde döndürülebilir dipoller vardır ve dipollerin dönmesi κ'ya katkıda bulunacaktır. NaCl gibi iyonik kristallerde ayrıca *iyonik kutuplanabilirlik* vardır. Kristal, bir dama tahtası gibi, artı ve eksi yüklerden oluşur ve bir elektrik alan içinde artı yükler bir yöne ve eksi yükler diğer yöne çekilirler. Artı ve eksi yüklere ait net bir göreli hareket, dolayısıyla da bir hacmin kutuplanması vardır. Tuz kristallerinin sertliğine ilişkin bilgimizden faydalanarak, iyonik kutuplanabilirliğin büyüklüğünü tahmin edebiliriz; ancak bu konuya burada girmeyeceğiz.



Şekil 11-9 Bir $BaTiO_3$ birim hücresi. Atomlar uzayın önemli bir kısmını doldurur. Anlaşılır olması için, sadece merkezlerinin konumları gösterilmekte.

11-7 Ferroelektrik; $BaTiO_3$

Şimdiyse özel bir tür kristali ele alacağız. Bu kristal, rastgele olarak, kendi içinde kalıcı momente sahiptir. Bu durum o kadar sınırdadır ki, sıcaklığı bir miktar bile artırdığımızda kalıcı momentleri tamamen kaybolur. Diğer yandan, momentlerinin değişik yönlere döndürülebileceği, neredeyse kübik kristallerse, bir elektrik alan uyguladığımızda momentte büyük bir değişim tespit edebiliriz. Bütün momentler ters döner ve büyük bir etki gözlemlenir. Bu türden kalıcı momente sahip malzemelere, benzeri ferromanyetik etkiler ilk demirde keşfedildiğinden sonra *ferroelektrik* denmiştir.

Özel bir tür ferroelektrik malzeme üzerinden ferroelektriğin nasıl işlediğini anlatabiliriz. Ferroelektrik özelliğinin ortaya çıkabileceği birçok yol vardır; ancak biz gizemli birini, baryum-titanatı ($BaTiO_3$) ele alacağız. Bu malzemenin kristal örgüsünün temel hücresi Şekil 11-9'da gösterilmiştir. Belli bir derece-

nin, özellikle 118°C'nin üzerine çıkıldığında baryum-titanat olağanüstü bir dielektrik sabitine sahip sıradan bir dielektrik olur. Bu sıcaklığın altındaysa, aniden kalıcı bir momente sahip olur.

Katı bir malzemenin kutuplanmasını çalışırken, önce her bir birim hücredeki yerel alanların ne olduğunu bulmalıyız. Kutuplanmanın kendisinden gelen alanları, aynı sıvı için yaptığımız gibi, hesaba katmalıyız. Kristalse, homojen bir sıvı değildir; dolayısıyla bir küresel delik içinde bulduğumuz ifadeyi yerel alan için kullanamayız. Bir kristal için bunu çözebilirseniz göreceksiniz ki, Denk. (11.24)'teki 1/3 çarpanı biraz farklı ancak 1/3'ten çok da uzak değildir. Basit bir kübik kristal için tam olarak 1/3'tür. Bu yüzden, $BaTiO_3$ için başlangıç olarak bu çarpanı 1/3 olarak alacağız.

Şimdi, Denk. (11.28)'i yazdığımız sırada, $N\alpha$ 3'ten büyük olsaydı ne olurdu diye merak etmiş olabilirsiniz. Sanki κ eksi olurmuş gibi gözükebilir. Bu doğru olamaz. Gelin, belirli bir kristal içinde α'yı kademeli olarak artırdığımızda ne olduğuna bakalım. α büyüdükçe, kutuplanma da büyür ve bu da yerel alanı büyütür. Büyük alansa her bir atomu daha fazla kutuplandıracaktır, böylece yerel alanlar daha da büyüyecektir. Atomların "katkısı" yeterliyse, bu süreç aynen devam eder. Her bir atomun kutuplanmasının alanla orantılı arttığını varsayarsak, kutuplanmanın sınırsızca artmasını sağlayan bir koşul vardır. Bu "kontrolsüz" durum, $N\alpha = 3$ olduğunda gerçekleşir. Kutuplanma sonsuz olmaz elbette, çünkü indüklenmiş moment ile elektrik alan arasındaki orantısallık yüksek alanlarda kırılır ve bu da denklemlerimizi geçersiz kılar. Burada olan, örgünün yüksek, kendiliğinden oluşan bir iç kutuplanmayla "kilitlenmesidir".

$BaTiO_3$ örneğinde, elektronik kutuplanmaya ilaveten, büyük bir de iyonik kutuplanma vardır. Bunun nedeninin kübik örgü içinde çok az hareket edebilen titanyum iyonları olduğu düşünülmektedir. Örgü büyük hareketlere direnir, dolayısıyla titanyum birazcık hareket ettiğinde sıkışıp kalır ve durur. Kristal hücrenin artık kalıcı bir dipol momenti vardır.

Ulaşabildiğimiz bütün sıcaklıklarda, bu birçok kristal için rastlanan bir durumdur. Baryum titanatı ilginç kılan şey, $N\alpha$'nın çok az bile artırıldığında baryum titanatın gevşemesidir. N –ısıl genişlemeden dolayı– sıcaklıkla beraber arttığından, $N\alpha$'yı sıcaklıkla beraber değiştirebiliriz. Kritik sıcaklığın altındayken daha henüz gevşememiştir, dolayısıyla –bir dış alan uygulayarak– kutuplanmayı kaydırmak ve farklı bir yönde kilitlemek mümkündür.

Gelin, ne olup bittiğine dair daha detaylı bir analiz yapalım. $N\alpha$'nın tam olarak 3 olduğu kritik sıcaklığa T_C diyelim. Sıcaklık arttıkça, örgünün genişlemesinden dolayı, N bir miktar aşağı gider. Genişleme küçük olduğundan kritik sıcaklık yakınındayken aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_C) \tag{11.30}$$

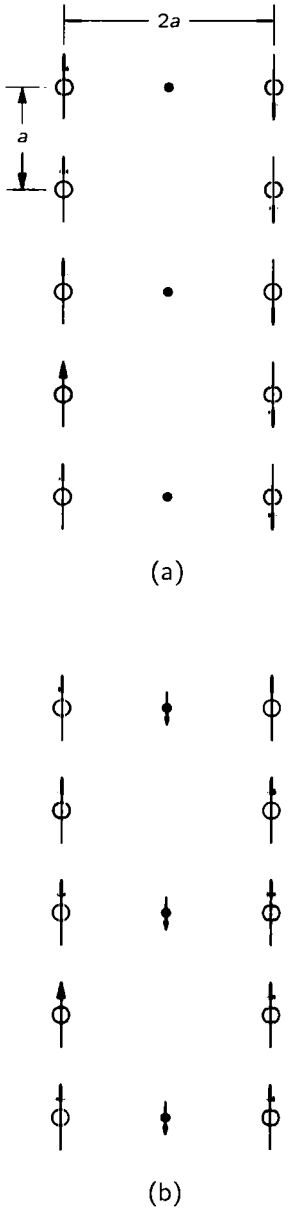
Denklemdeki β küçük bir sabittir, ısıl genişleme katsayısıyla aynı büyüklük mertebesinde ya da yaklaşık santigrat derece başına 10^{-5} ile 10^{-6} arasında. Şimdi, bu ilişkiyi Denk. (11.28)'e yerleştirirsek,

$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_C)}{\beta(T - T_C)/3}$$

denklemini elde ederiz. $\beta(T - T_C)$ çarpımının bire göre küçük olduğunu varsaydığımızdan, yukarıdaki denklemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\kappa - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_C)} \tag{11.31}$$

Bu ilişki, elbette, yalnız $T > T_C$ için geçerlidir. Kritik sıcaklığın birazcık üstünde κ olağanüstü büyüktür. $N\alpha$ 3'e çok yakın olduğundan dolayı, muazzam bir büyütme etkisi vardır ve dielektrik sabiti 50.000 hatta 100.000'e kadar çıkabilir. Ayrıca, sıcaklığa karşı da çok hassastır. Sıcaklık arttıkça, dielektrik sabiti



Şekil 11-10 Ferroelektrik modelleri (a) ters ferroelektrik ve (b) normal ferroelektrik.

sıcaklıkla ters orantılı olarak azalır. Ancak, $\kappa - 1$'in *mutlak* sıcaklıkla ters orantılı olduğu dipollü gazlar haricinde, ferroelektrik için dielektrik sabiti mutlak sıcaklık ile kritik sıcaklık arasındaki farkla ters orantılı değişir. Buna Curie–Weiss yasası denir.

Sıcaklığı, kritik sıcaklık noktasına doğru indirdiğimizde ne olur? Şekil 11-9'daki gibi birim hücrelerden oluşan bir örgü hayal ettiğimizde, dik çizgiler boyunca iyon zincirlerini görmek mümkündür. Bunlardan biri, birbirini izleyen oksijen ve titanyum iyonlarından oluşur. Baryum veya oksijen iyonlarından oluşan başka çizgiler de vardır, ancak bu çizgiler boyunca görülen boşluk çok daha büyüktür. Şekil 11-10 (a)'daki gibi iyon çizgileri dizisi hayal edelim. Ana zincir dediğimiz zincir boyunca, iyonlar arsındaki ayrım a'dır ve bu da örgü sabitinin *yarısıdır*. Benzer zincirler arasındaki yatay uzaklıksa $2a$'dır. Aralarında daha az yoğun zincirler de vardır, ancak onları şimdilik göz ardı edeceğiz. Analizi kolaylaştırmak için, ana zincir boyunca bütün iyonların benzer olduğunu varsayacağız. (Bu ciddi bir basitleştirme değildir, çünkü önemli bütün etkileri gene de gözlemleyebileceğiz. Bu, kuramsal fiziğe ait numaralardan biridir. İlk başta üzerinde çalışması daha kolay olduğu için basit bir problemi ele alır, sonra işlerin nasıl yürüdüğünü anladığımızda elediğimiz bütün karmaşıklıkları ekleriz.)

Şimdi bizim modelimizde ne olacağına bakalım. Her bir atomun dipol momentinin p olduğunu varsayalım ve zincirdeki atomlardan birinin alanını hesaplayalım. Diğer her bir atomdan gelen alanların toplamını bulmalıyız. Önce tek bir dik zincirdeki dipollerden kaynaklanan alanı hesaplayacağız. Diğer zincirleriyse sonra konuşacağız. Bir dipolden r uzaklığında ve dipol ekseniyle ayını yöndeki alan için:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2p}{r^3} \tag{11.32}$$

Belirli bir atom için, aşağısında ve yukarısında eşit mesafedeki dipoller aynı yönlü alanları verirler, dolayısıyla bütün zincir için şunu elde ederiz:

$$E_{\text{zincir}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2}{a^3}\cdot\left(2+\frac{2}{8}+\frac{2}{27}+\frac{2}{64}+\cdots\right) = \frac{p}{\epsilon_0}\,\frac{0{,}383}{a^3} \tag{11.33}$$

Modelimiz tam bir kübik kristal gibi olmuş olsaydı –her bir komşu özdeş çizginin a uzaklığında olması durumunda– 0,383 sayısının 1/3'e dönüşeceğini göstermek zor değildir. Diğer bir deyişle, komşu çizgiler a mesafesinde olsaydı, toplamımıza sadece –0,050 birim kadar katkıda bulunabilirler. Ancak, diğer ana çizgi $2a$ uzaklıktadır ve 7. Bölümden hatırlayacağınız üzere, periyodik bir yapıdan kaynaklanan alan mesafeyle beraber üssel olarak azalır. Dolayısıyla bu çizgiler –0,050'den de az katkıda bulunurlar ve böylece diğer bütün zincirleri ihmal edebiliriz.

Şimdi, yukarıda bahsettiğimiz kontrolsüz sürecin işlemesi için hangi α kutuplanabilirlik değerinin olması gerektiğini bulalım. Zincirdeki her bir atomun indüklenmiş p momentinin, Denk. (11.6)'daki gibi, alanla orantılı olduğunu varsayalım. E_{zincir} sayesinde, Denk. (11.32)'yi kullanarak, atom üzerindeki kutuplayıcı alanı bulabiliriz. Elimizde iki denklem var:

$$p = \alpha\,\epsilon_0 E_{\text{zincir}}$$

ve

$$E_{\text{zincir}} = \frac{0{,}383}{a^3}\,\frac{p}{\epsilon_0}$$

İki de çözüm vardır. E_{zincir} ve p'nin her ikisinin birden sıfır olduğu ya da

$$\alpha = \frac{a^3}{0{,}383}$$

ile E_{zincir} ve p'nin her ikisinin de sonlu olduğu. Dolayısıyla α eğer $a^3/0{,}383$ kadar büyükse, kendi alanı tarafından sürdürülebilmiş kalıcı bir kutuplanma yer-

leşir. Baryum titanat için bu kritik eşitliğe tam Tc sıcaklığında erişilmelidir. (Dikkatinizi çekerim; küçük alanlar için α değeri kritik değerden büyük olsaydı, büyük alanlarda azalırdı ve denge halinde de bulduğumuz eşitlik geçerli olurdu.)

$BaTiO_3$ için, a aralığı 2×10^{-8} santimdir; dolayısıyla $\alpha = 21{,}8 \times 10^{-24}$ olmasını bekleriz. Bunu, tekil atomların bilinen kutuplanabilirlikleriyle karşılaştırabiliriz. Oksijen için $\alpha = 30{,}2 \times 10^{-24}$; demek ki doğru yoldayız! Titanyum içinse, $\alpha = 2{,}4 \times 10^{-24}$; çok küçük bir rakam. Modelimizden yararlanmak için ortalamayı alsak iyi olur. (Birbirini takip eden atomlar için gene zincir üzerinden çalışabilirdik; ancak sonuç aynı olurdu.) Dolayısıyla α (ortalama) = $16{,}3 \times 10^{-24}$'tür. Bu da bize kalıcı bir kutuplanma verecek kadar büyük değildir.

Bir dakika, bu daha başlangıç! Şu ana kadar sadece elektronik kutuplanabilirlikleri topladık. Ayrıca, titanyum iyonunun hareketinden dolayı bir miktar iyonik kutuplanma da vardır. Tek ihtiyacımız $9{,}2 \times 10^{-24}$ cm^3'lük bir iyonik kutuplanabilirlik. (Birbirini takip eden atomları kullanarak hassas hesaplamalar gösterdi ki, aslında $11{,}9 \times 10^{-24}$ cm^3 gerekmektedir.) $BaTiO_3$'ün özelliklerini anlamak için, böyle bir iyonik kutuplanabilirliğin olduğunu varsaymamız gerek.

Neden baryum titanat içindeki titanyum iyonunun böyle bir iyonik kutuplanabilirliği olması gerektiği bilinmiyor. Daha da ötesi, neden, daha düşük sıcaklıkta, küp köşegeni ve yüzey köşegeni boyunca eşit seviyede kutuplandığı da çok açık değil. Şekil 11-9'daki kürelerin gerçek boyutlarını bulabilsek ve titanyumun kendisine komşu atomlardan oluşmuş kutu içinde bir miktar serbest olup olmadığını sorabilseydiniz –öyle olmasını dilersiniz, böylece kolaylıkla kaydırılabilir– bulduğunuz cevap beklentinizin tam tersi olurdu. Gayet sıkı şekilde sığmaktadır. *Baryum* atomları birazcık gevşektir, ancak onların hareket edenler olmasını sağlasanız bile, bu işe yaramaz. Görüyorsunuz ya, konu tam anlamıyla açık değildir. Anlamaya çalıştığımız gizemlerle doludur.

Şekil 11-10 (a)'daki basit modelimize dönersek görürüz ki, bir zincirden kaynaklanan alan yanındaki zinciri *ters* yönde kutuplanma eğilimindedir. Bu da, her ne kadar her bir zincir kilitlense de, birim hacim başına hiç net kalıcı moment olmayacağı anlamına gelir! (Her ne kadar hiç dış elektrik etkisi olmasa da, gözlemlenebilir belli termodinamik etkiler hâlâ vardır.) Bu tür sistemler vardır ve ters ferroelektrik denir. Açıkladığımız şey aslında bir ters ferroelektriktir. Baryum titanat ise aslında, Şekil 11-10 (b)'deki gibi bir yapıdadır. Oksijen-titanyum zincirlerinin tamamı aynı yönde kutuplanmıştır; çünkü aralarında orta derece atom zincirleri vardır. Her ne kadar bu zincirlerdeki atomlar çok kutuplanabilir (veya yoğun) değilseler de, yine de bir şekilde, oksijen-titanyum zincirlerine ters koşut olarak, kutuplanırlar. Bir sonraki oksijen-titanyum zincirinde ortaya çıkan küçük alanlar ilkine paralel şekilde başlatacaktır. Diğer bir deyişle, $BaTiO_3$ gerçekten ferroelektriktir ve bunun nedeni de aradaki atomlardır. Şunu merak edebilirsiniz: "Ya peki, iki O-Ti zinciri arasındaki doğrudan etkiye ne oldu?" Hatırlayın, direk etki aradaki mesafeyle üssel olarak azalır. *Kuvvetli* dipoller zincirinin $2a$'daki etkisi, zayıf dipoller zincirinin a'daki etkisinden daha az olabilir.

Böylece, gazların, sıvıların ve katıların dielektrik sabitlerine dair günümüzdeki kavrayışımıza dair bildiklerimizin sonuna gelmiş olduk.

12
ELEKTROSTATİK BENZERLER

12-1 Benzer denklemler benzer çözümlere sahiptir
12-2 Isı akışı; sonsuz bir levhanın sınırının yakınındaki nokta kaynak
12-3 Gergin zar
12-4 Nötronların yayınımı; homojen bir ortamdaki düzgün küresel kaynak
12-5 Girdapsız akış; bir küre etrafındaki akış
12-6 Aydınlanma; bir düzlemin düzgün ışıklandırılması
12-7 Doğanın "altında yatan birlik"

12-1 Benzer denklemler benzer çözümlere sahiptir

Bilimin ilerleyişinin başından beri fiziksel dünya hakkında edindiğimiz bilgi miktarı muazzamdır ve bir insanın bu kadar bilginin makul bir miktarını bile öğrenebilmesi imkânsızdır. Bir fizikçi içinse dar bir alanda uzman olmaktansa, fiziksel dünyaya dair genişçe bilgi edinmek gayet mümkündür. Bunun üç nedeni vardır: Birincisi, her çeşit olguya uyarlanabilir büyük ilkeler. Enerjinin ve açısal momentumun korunumu gibi ilkeler. Bu tür ilkelerin detaylıca anlaşılması bir anda kavrayışınızı üst düzeye çıkarabilir. İkincisi, birçok karmaşık olgunun, örneğin sıkıştırma altında katıların davranışı gibi, temelde elektriksel ve kuantum mekaniksel kuvvetlere dayanır. Elektrik ve kuantum mekaniğinin temel yasalarını anladığınızda, karmaşık durumlarda gerçekleşen birçok olguyu anlamanız olasılığı biraz da olsa vardır. Son olarak, dikkat çekici bir benzerlik: *Birçok fiziksel durum için yazılmış denklemler, bire bir aynı görünüşe sahiptir.* Elbette semboller farklı olabilir –harfler farklı konulmuş olabilir– ancak denklemlerin matematiksel biçimi aynıdır. Bu demek oluyor ki, bir konuyu çalıştığımızda, bir başka konunun denklemlerinin çözümüyle ilgili bilgiye sahip olabiliriz.

Böylece elektrostatik konusunu bitirmiş olduk ve yakında manyetizma ile elektrodinamik konularını çalışacağız. İleriye gitmeden önce, elektrostatik denklemlerini çalışırken bir yandan da birçok farklı konuyu öğrendiğinizi göstermek istiyorum. Elektrostatik denklemlerin fizikte birçok alanda karşımıza çıktığını göreceksiniz. Çözümlerin doğrudan çevirisinin yapılması sayesinde (aynı matematiksel denklemler, elbette, aynı sonuçları vermelidir), başka alanlardaki problemlerin de aynı kolaylıkla –veya zorlukla– çözülebildiğini göreceksiniz.

Elektrostatik denklemleri şunlardır:

$$\nabla \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \tag{12.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{12.2}$$

(Dielektrikli elektrostatik denklemlerini kullanıyoruz ki, en genel çözüme ulaşalım.) Aynı fizik denklemleri, bir başka matematiksel şekilde de ifade edilebilir.

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{12.3}$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla\phi) = -\frac{\rho_{\text{serbest}}}{\epsilon_0} \tag{12.4}$$

Burada belirtmek istediğimiz, aynı biçimdeki matematiksel denklemlere sahip birçok fizik problemi vardır. Gradyanının bir skaler fonksiyon (κ) ile çarpımının diverjansının, bir başka skaler fonksiyona ($-\rho_{\text{serbest}}/\epsilon_0$) eşit olduğu bir ($\phi$) potansiyeli vardır.

Elektrostatik hakkında bildiğimiz her şey bir başka konuyla ilişkilendirilebilir. *Tersi de* mümkündür. (Elbette iki yönlü çalışır. Diğer konunun bilinen belirli özellikleri varsa, bilgimizi karşılık gelen elektrostatik problemine uygulayabiliriz.) Şimdi, bu biçimde denklemler üreten, değişik konulardan bir dizi örneği ele alacağız.

12-2 Isı akışı; sonsuz bir levhanın sınırının yakınındaki nokta kaynak

Daha önce, Bölüm 3-4'te bir örneği incelemiştik: ısı akışı. Farklı malzemelerden oluşmuş, homojen olmayan bir malzeme bloğu düşünün. Böyle bir bloğun içindeki sıcaklık, noktadan noktaya değişkenlik gösterir. Bu sıcaklık farklılıklarının bir sonucu olarak, ısı akışı meydana gelir ve $\boldsymbol{h}$ vektörüyle temsil edilir. Bu, akışa dik bir birim alandan, birim zamanda akıp geçen ısı enerjisinin miktarının temsilidir. $\boldsymbol{h}$'ın diverjansı, ısının bir bölgeden çıkışının birim hacimdeki hızını temsil eder:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \text{birim hacim başına dışarı ısı akış hızı}$$

(Elbette, denklemi, malzeme içindeki ısı enerjisinin değişiminin, yüzeyden geçen akı olduğunu belirten integral biçiminde de –aynı elektrostatikte Gauss yasasında yaptığımız gibi– yazabilirdik. Denklemlerin diferansiyel ve integral biçimlerini birbirilerine çevirmekle uğraşmayacağız, çünkü elektrostatiktekiyle aynı şekilde geçerlidirler.)

Çeşitli yerlerde ısının nasıl meydana getirildiği veya soğurulduğu, takdir edersiniz ki, probleme bağlıdır. Örneğin, malzememizin içinde bir ısı kaynağı olsun (belki bir radyoaktif kaynak veya elektrik akımıyla ısıtılan bir direnç). Bu kaynak tarafından saniyede birim hacim başına üretilen ısı enerjisine s diyelim. Hacimdeki diğer iç enerjilere ısı enerjisi kaybı (veya kazancı) da mümkündür. Birim hacim başına iç enerjiye u dersek, $-du/dt$ de bir ısı enerjisi "kaynağı" olacaktır. Bu durumda aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = s - \frac{du}{dt} \tag{12.5}$$

Zamana bağlı bu denklemin bütününün üzerinde şimdi durmayacağız, zira elektrostatikle benzerlik kurmaya çalışıyoruz ve elektrostatikte hiçbir şey zamana bağlı değildir. Sadece, sabit kaynakların kararlı bir denge hali oluşturduğu *kararlı ısı akışı* problemlerini ele alacağız. Bu durumlarda şu eşitliği yazabiliriz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = s \tag{12.6}$$

Şüphesiz, ısının farklı yerlerde nasıl aktığını tanımlayan bir başka denkleme daha ihtiyacımız var. Birçok malzemede ısı akışı, sıcaklığın konumlar arasındaki gradyenti ile yaklaşık olarak orantılıdır: Sıcaklık farkı arttıkça, ısı akımı da artar. Gördüğümüz gibi, ısı akımı *vektörü* sıcaklık gradyanıyla orantılıdır. Malzemenin bir özelliği olan orantı sabiti K *termal iletkenlik* sabiti olarak adlandırılır:

$$\boldsymbol{h} = -K\nabla T \tag{12.7}$$

Malzemenin özellikleri yer yer değişiyorsa, o zaman $K = K(x, y, z)$, konumun bir fonksiyonudur. [Denklem (12.7), ısı enerjisinin korunumunu ifade eden (12.5) kadar temel bir denklem değildir. Denk. (12.5) cismin özel bir özelliğine dayalıdır.] Denklem (12.7)'yi, Denk. (12.6)'ya yerleştirirsek, Denk. (12.4)'le bire bir aynı biçime sahip şu denklemi elde ederiz:

$$\nabla \cdot (K\nabla T) = -s \tag{12.8}$$

Kararlı ısı akış problemleri ve elektrostatik problemleri aynıdır. Isı akış vektörü $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{E}$'ye denktir ve T sıcaklığı da ϕ'e denk gelir. Nokta bir ısı kaynağının $1/r$ olarak değişkenlik gösteren bir ısı alanı ve $1/r^2$ değeriyle değişkenlik gösteren bir ısı akışı meydana getirdiğini biliyoruz. Bu, aynı elektrostatikteki, bir noktasal yük kaynağının $1/r$'yle değişkenlik gösteren bir potansiyel ve $1/r^2$'yle değişkenlik gösteren bir elektrik alan meydana getirdiğini söylemekle aynı şeydir. Genel olarak, ısı problemlerini aynı elektrostatik problemlerini çözdüğümüz kolaylıkta çözebiliriz.

Basit bir örneği ele alalım. Elimizde T_1 sıcaklığında, a yarıçapında bir silindir olsun. T_1 sıcaklığı, silindirin içindeki ısı üretimiyle sağlanmaktadır. (Silindirin içinde akım taşıyan bir tel veya buhar olan bir boru olabilir.) Silindir, K

iletkenliğine sahip, yalıtkan bir kılıfla kaplanmıştır. Yalıtkanın dış yarıçapı b ve dış sıcaklık da T_2 (Şekil 12-1a) olsun. Telden veya borudan ne kadar hızda ısı kaybolduğunu bulmaya çalışacağız. L uzunluğundaki bir borudan kaybolan toplam ısıya G diyelim. Bulmaya çalıştığımız da budur.

Bu problemi nasıl çözebiliriz? Elimizde diferansiyel denklemler var, bunlar elektrostatiktekilerle aynı olduğundan, aslında matematiksel problemi çözmüş bulunmaktayız. Benzerlik problemi, ϕ_1 potansiyelinde, a yarıçapında ve ϕ_2 potansiyelinde, b yarıçapındaki bir iletkenden eş merkezli bir dielektrik malzemeyle ayrılmış iletkenin problemidir. Isı akışı h, elektrik alan E'ye denk geldiğinden, bulmak istediğimiz G niceliği birim uzunlukta elektrik alan akısına (diğer bir deyişle, ϵ_0 sabitine bölünmüş birim uzunluktaki elektrik yüküne) denk gelir. Gauss yasasını kullanarak elektrostatik problemini çözdük. Aynı mantığı ısı akışı problemine de uygulayalım.

Durumun simetrisinden, h'ın sadece merkezden uzaklığa bağlı olduğunu biliyoruz. Borumuzu L uzunluğunda ve r yarıçapında bir Gauss silindiriyle kaplayalım. Gauss yasasından biliyoruz ki, h ısı akışının yüzey alanı $2\pi rL$ çarpımı içinde üretilen toplam ısıya eşit olmalıdır. Buna da biz G diyoruz:

$$2\pi rLh = G \qquad \text{ya da} \qquad h = \frac{G}{2\pi rL} \tag{12.9}$$

Isı akışı, sıcaklık gradyanıyla orantılıdır:

$$h = -K\nabla T$$

Bu durumdaysa, h'ın radyal bileşeni

$$h = -K\frac{dT}{dr}$$

olur. Bu, (12.9) ile beraber bize aşağıdaki eşitliği verir:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi KLr} \tag{12.10}$$

$r = a$'dan, $r = b$'ye integralini aldığımızda, şunu elde ederiz:

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi KL}\ln\frac{b}{a} \tag{12.11}$$

G için çözdüğümüzdeyse

$$G = \frac{2\pi KL(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)} \tag{12.12}$$

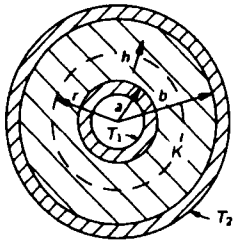
sonucunu elde ederiz. Bu sonuç, silindirik bir kondansatörün üzerindeki yüke bire bir eşittir:

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L(\phi_1 - \phi_2)}{\ln(b/a)}$$

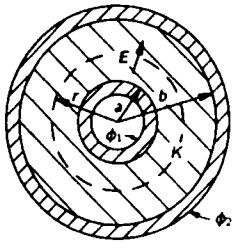
Problemler aynı, dolayısıyla çözümleri de aynıdır. Elektrostatiğe dair bilgimiz sayesinde, yalıtılmış bir borudan kaybolan ısıyı da bilmiş oluyoruz.

Isı akışına dair bir başka örneği ele alalım. Toprağın biraz altında veya büyük bir metal bloğun yüzeyinin yakınındaki nokta bir ısı kaynağının yakınındaki ısı akışını bilmek istediğimizi düşünelim. Yerelleşmiş ısı kaynağı toprak altında patlatılmış ve ardında yoğun bir ısı kaynağı bırakmış atom bombası veya bir demir bloğu içindeki küçük bir radyoaktif kaynak olabilir. İhtimaller çok fazladır.

Termal iletkenliği K olan, düzgün bir sonsuz malzeme bloğunun yüzeyinin a kadar altında ve G gücündeki nokta ısı kaynağı problemini ele alacağız. Malze-



(a)

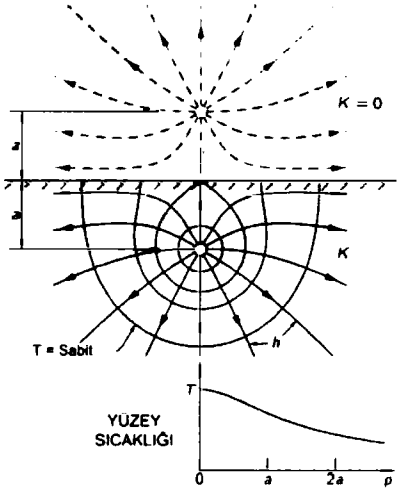


(b)

Şekil 12-1 (a) Silindirik bir geometride ısı akışı. (b) İlgili elektriksel problem.

menin dışındaki havanın termal iletkenliğini de görmezden geleceğiz. Blok yüzeyindeki sıcaklık dağılımını belirlemek istiyoruz. Tam ısı kaynağının üstü ve blok yüzeyinin değişik yerleri ne kadar sıcaktır?

Nasıl çözebiliriz bu problemi? Bir düzlem sınırının iki yanında bulunan ve κ dielektrik katsayılarına sahip iki malzemeye ait elektrostatik problemine benziyor. İşte! Belki de, bir iletken ile dielektrik arasındaki sınırın yakınındaki noktasal yükün veya onun gibi bir şeyin benzeridir. Yüzeyin yakınındaki durum nedir görelim. Bloktan dışarı ısı akışı olmadığım varsaydığımız için, h'ın yüzeydeki dik bileşeni sıfırdır. Şunu sormalıyız: Hangi elektrostatik probleminde, elektrik alan E'nin (h'ın benzeridir) dik bileşeni yüzeyde *sıfırdır*. Hiçbirinde!



Şekil 12-2 İyi bir ısıl iletkenin yüzeyinin a mesafesi kadar altındaki nokta ısı kaynağı yakınındaki eş-sıcaklık eğrileri ve ısı akışı.

Bu, dikkat etmemiz gereken şeylerden biridir. Fiziksel nedenlerden dolayı, herhangi bir konudaki matematiksel koşulların çeşitlerinde kısıtlamalar olabilir. Örneğin, dielektrik sabiti sıfır olan bir malzeme yoktur. Oysaki, boşluğun termal iletkenliği sıfırdır. Dolayısıyla, mükemmel ısıl yalıtkan için bir elektrostatik benzerliği yoktur. Yine de, aynı yöntemleri kullanabiliriz. Dielektrik sabiti *sıfır* olsaydı ne olurdu diye *hayal* edebiliriz. (Elbette, gerçek hiçbir durumda dielektrik sabiti asla sıfır değildir. Ancak, çok *yüksek* dielektrik sabitine sahip bir malzememiz olsaydı, havanın dielektrik sabitini görmezden gelebilirdik.)

Yüzeye *hiç* dik bileşeni olmayan bir elektrik alanını nasıl bulabiliriz? Dikkat edersiniz, elimizdeki problem, levha bir iletken yakınındaki noktasal yük probleminin zıddıdır. O durumda yüzeye *dik* alan olmasını istemiştik, çünkü iletkenin potansiyeli her yerde aynıydı. Aynı fikri yine kullanabiliriz. Alanın yüzeydeki dik bileşenini otomatik olarak sıfırlayacak bir "görüntü yükü" olduğunu düşünelim. Çözüm Şekil 12-2'de gösterilmiştir. Yüzeyin a kadar üstüne yerleştirilmiş, *aynı işarete* ve büyüklüğe sahip bir görüntü yükü yüzeydeki alanın daima yatay olmasını sağlar. İki kaynağın dik bileşenleri birbirlerini sıfırlar.

Dolayısıyla ısı akışı problemimiz çözülmüştür. İki özdeş yükten kaynaklanan potansiyele doğrudan benzetmeyle, sıcaklık her yerde aynıdır. Sonsuz bir ortamdaki, tek bir G nokta kaynaktan r uzaklıktaki T sıcaklığı şu şekilde yazılabilir:

$$T = \frac{G}{4\pi K r} \tag{12.13}$$

(Bu, elbette, $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R$ benzeridir.) Nokta bir kaynak için, görüntü kaynağıyla beraber, sıcaklık aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T = \frac{G}{4\pi K r_1} + \frac{G}{4\pi K r_2} \tag{12.14}$$

Bu denklem bize blok içinde her yerdeki sıcaklığı verir. Şekil 12-2'de birçok eş-sıcaklıklı yüzey gösterilmiştir. $\boldsymbol{h} = -K\nabla T$ elde edilebilecek $\boldsymbol{h}$ çizgileri de gösterilmiştir.

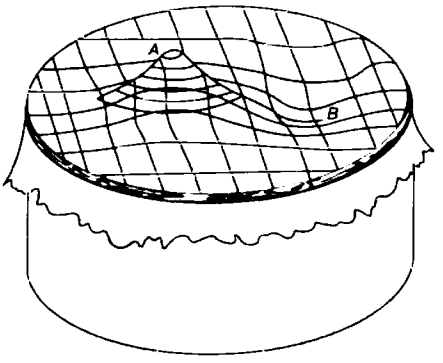
İlk başta yüzeydeki sıcaklık dağılımını sormuştuk. Eksenden ρ uzaklıkta, yüzeydeki bir nokta için, $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ eşitliği vardır, dolayısıyla şunu yazabiliriz:

$$T\,(\text{yüzey}) = \frac{1}{4\pi K}\,\frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \tag{12.15}$$

Şekilde, bu fonksiyon da gösterilmiştir Sıcaklık, doğal olarak, kaynağın yakınında, uzakta olduğundan daha fazladır. Bu, jeofizikçilerin çözmesi gereken bir problemdir. Şimdi gördük ki, elektrik için zaten benzer bir şeyi çözmüşüz.

12-3 Gergin zar

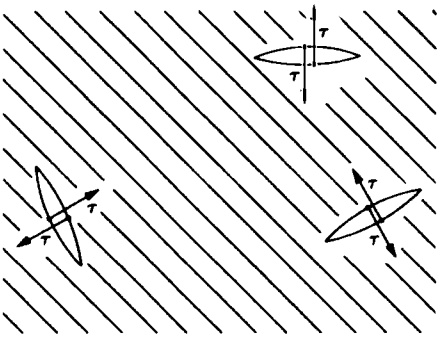
Şimdi gelin tamamen farklı, ancak yine aynı denklemleri üreten bir fiziksel durumu ele alalım. Geniş yatay bir düzlem üzerine (bir davul yüzeyi, örneğin) gerilmiş ince lastik bir levhayı –bir zarı– ele alalım. Zarın bir noktada aşağı, diğer bir noktadaysa yukarı itildiğini varsayalım. Yüzeyin şeklini tarif edebilir miyiz? Zardaki sapmalar çok büyük olmadığı zaman problemin nasıl çözülebildiğini göstereceğiz.



Şekil 12-3 Silindir bir yüzey üzerine (örneğin, bir davul) gerilmiş ince lastik levha. Levha *A*'da yukarı doğru, *B*'de aşağıya doğru itiliyorsa, yüzeyin şekli nedir?

Yüzeyde kuvvetler vardır, çünkü yüzeyin kendisi gerilmiştir Herhangi bir yerde küçük bir kesik atsaydık, kestiğimiz yer ayrılmaya (*Bkz.* Şekil 12-4) başlardı. Bu, levha üstünde *yüzey gerilmesi* olduğunu gösterir. Gerilmiş bir sicimdeki bir boyutlu gerilmeye benzerdir bu. Yüzey gerilmesi τ'nin büyüklüğünü, kesiğin iki tarafını Şekil 12-4'te gösterildiği gibi tutacak *birim uzunluk* başına kuvvet olarak tanımlayabiliriz.

Şimdi, zarın dikey kesitine baktığımızı varsayalım. Şekil 12-5'tekine benzer bir eğri gibi gözükecektir. u, zarın dik konumuna göre yerdeğişimi ve x ile y de yatay düzlemdeki koordinatlar olsun. (Kesit, x-eksenine paralel olarak gösterilmiştir.)



Şekil 12-4 Gergin lastik bir levhadaki τ yüzey gerilmesi, bir çizgi boyunca birim uzunluk başına kuvvettir.

Δx uzunluğunda ve Δy genişliğinde küçük bir parça yüzey düşünün. Her bir kenardaki yüzey gerilmesinden kaynaklanan kuvvetler olacaktır bu parça üzerinde. Şeklin 1 numaralı kenarı boyunca uzanan kuvvet yüzeye teğet –yataya göre θ_1 açısında– olan $\tau_1 \Delta y$ olacaktır. 2 numaralı yüzeyindeki kuvvet θ_2 açısındaki $\tau_2 \Delta y$ olacaktır. (Parçanın diğer iki kenarı üzerinde de benzer kuvvetler etkir, ancak onları şimdilik unutacağız.) 1 ve 2 numaralı kenarlardan, parça üzerine etkiyen *yukarı* kuvveti şu şekilde yazabiliriz:

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin\theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin\theta_1$$

Dikkatimizi zardaki küçük bükülmelerle, *küçük eğimlere* sınırlayacağız. Bu durumda $\sin\theta$ ile $\tan\theta$ değiştirebilir ve onu da $\partial u/\partial x$ şeklinde yazabilir. Böylelikle kuvvet

$$\Delta F = \left[\tau_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \tau_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1\right]\Delta y$$

olur. Köşeli parantezler içindeki nicelik (küçük Δx için) şu şekilde de yazılabilir:

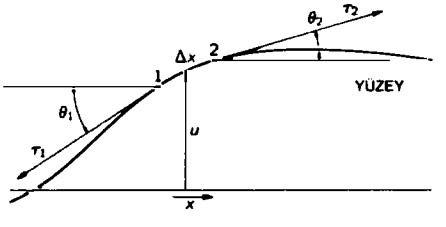
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

Bu durumda kuvveti şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y$$

Diğer iki kenardaki kuvvetlerden de ΔF'e katkı olacaktır. Böylece toplam kuvveti şu şekilde yazabiliriz:

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta x \Delta y \qquad (12.16)$$



Şekil 12-5 Eğilmiş bir levhanın kesiti.

Zardaki bükülmeler dış kuvvetlerden kaynaklıdır. *Dış kuvvetlerden kaynaklı*, levhadaki *birim alan başına yukarı kuvvete* (bir nevi "basınç") f diyelim. Zar dengede olduğunda (*statik* durum), bu kuvvet, az önce Denk. (12.16) sayesinde bulduğumuz iç kuvvete denk olmalıdır:

$$f = -\frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}$$

Bu durumda Denk. (12.16)'yı şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u) \qquad (12.17)$$

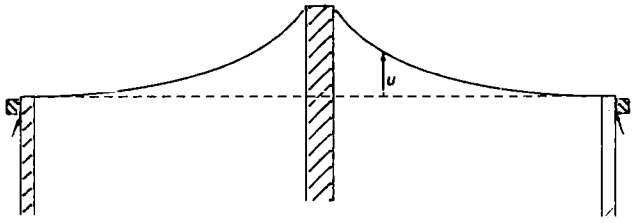
Denklemdeki ∇, iki boyutlu gradyan işlemcisidir ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$). Böylece $u(x, y)$'yi uygulanan $f(x, y)$ kuvvetlerine ve $\tau(x, y)$ yüzey gerilmesine bağlayan diferansiyel

denklemi elde ettik. Yüzey gerilmesi, genel olarak, levha üzerinde bir yerden diğerine değişkenlik gösterebilir. (Üç boyutlu esnek bir gövdedeki bükülmeler de benzer denklemlere bağlıdır, ancak biz iki boyutlulara bağlı kalacağız.) Bizim şimdi üzerinde durduğumuz durum, τ gerilmesinin levha boyunca sabit olduğu durumdur. Böylece Denk. (12.17) için şunu yazabiliriz:

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau} \tag{12.18}$$

Elektrostatiktekiyle aynı bir başka denklem daha bulduk! Sadece bu sefer, iki boyutla sınırlıyız. u yerdeğiştirmesi ϕ'ye ve f/τ de ρ/ϵ_0 terimine denktir. Yüklü levhalar veya uzun paralel teller veya yüklü silindirler için yaptığımız bütün çalışmalar, gerilmiş zara doğrudan uygulanabilir.

Zarın bazı noktalarında zarı belirli bir *yüksekliğe* getirdiğimizi, belirli yerlerde u değerini sabitlediğimizi düşünelim. Bu, elektriksel bir durumda, karşı gelen yerlerde belirli bir *potansiyel* olmasının benzeridir. Bu benzerliği devam ettirerek, elektrostatikte karşı gelen silindirik bir iletkenin kesit yüzeyini kullanarak zarı belli bir noktada yukarı itip, artı bir "potansiyel" elde edebiliriz örneğin. Zarı yuvarlak bir çubukla yukarı doğru itersek, yüzeyin şekli Şekil 12-6'da görüldüğü gibi olacaktır. u yüksekliği, yüklü silindirik bir çubuktaki ϕ elektrostatik potansiyeliyle aynıdır; $\ln(1/r)$ olarak azalır. (E elektrik alanına denk gelen *eğim*, $1/r$ olarak düşer.)



Şekil 12-6 Yukarı doğru silindirik bir çubukla itilmiş lastik levhanın kesiti. $u(x, y)$ fonksiyonu, çok uzun yüklü bir çubuk yakınındaki $\phi(x, y)$ elektrik potansiyeliyle aynıdır.

Gergin lastik levha, birçok karmaşık *elektriksel* problemin deneysel olarak çözülmesinde kullanılmıştır. Benzerlik tersten kurulmuştur! Çeşitli çubuklar yardımıyla yüzey, bir grup elektrotun potansiyeline denk gelecek yüksekliklere itilmiştir. Yükseklik ölçümleri, elektriksel durum için elektriksel potansiyeli verir. Benzerlik daha da ileri taşınmıştır. Zar üzerine küçük toplar yerleştirildiğinde, hareketleri karşıt gelen elektrik alandaki elektronların hareketine yaklaşık olarak denktir. Diğer bir deyişle, "elektronları" yörüngeleri üzerinde hareket ederken *izleyebilirsiniz*. Bu yöntemle birçok fotoçoğaltıcı tüpün karmaşık geometrisi tasarlanabilmiştir. (Örneğin pırıltı sayaçları için kullanılanlarda ve Cadillac'lardaki far hüzmelerini kontrol etmekte kullanılanda.) Yöntem hâlâ kullanılmakta, fakat hassasiyeti sınırlıdır. En hassas sonucu elde etmek için, gelişmiş bilgisayarlarla sayısal yöntemleri kullanıp alanları belirlemek daha iyi olur.

12-4 Nötronların yayınımı; homojen bir ortamdaki düzgün küresel kaynak

Şimdi, aynı türden denklemleri üreten bir başka örneği ele alalım. Bu sefer işimiz yayınımla. I. Cilt, 43. Bölümde tek bir gaz içindeki iyonların ve bir gaz içinden bir başka gazın yayınımını ele almıştık. Gelin bu sefer farklı bir örneği, grafit gibi bir malzeme içinde nötronların yayınımını ele alalım. Karbonun saf bir biçimi olan grafiti seçtik, çünkü karbon yavaş nötronları soğurmaz. Grafit içinde nötronlar serbestçe dolanabilir. Bir çekirdek tarafından saptırılmadan önce, santimetreler boyunca düz bir çizgi üzerinde hareket ederler. Saptırıldıklarında yeni bir yöne hareket ederler. Elimizde yeterince büyük –kenarları metrelerce uzun– bir blok varsa, başlangıçta bir yerdeki nötronlar başka yerlere yayılacaklardır. Ortalama davranışlarının bir tanımını, diğer bir deyişle *ortalama akışlarını* bulmak istiyoruz.

(x, y, z) noktasında ΔV hacmindeki nötronların sayısı $N(x, y, z)\Delta V$ olsun. Hareket ettiklerinden dolayı, bazı nötronlar ΔV'yi terk ederken, bazıları da ΔV'ye girer. Bir bölgede komşu bir bölgedekinden daha fazla nötron varsa, birinci bölgeden ikinciye giden nötron sayısı dönenlerden fazla olacaktır. Dolayısıyla, net bir akış vardır. I. Cilt 43. Bölümdeki akıl yürütmeyi kullanarak, akışı akış vektörü J'yle tanımlarız. x bileşeni J_x, x yönüne dik birim alandan birim zamanda geçen *net* nötron sayısıdır. Şunu bulmuştuk:

$$J_x = -D\frac{\partial N}{\partial x} \tag{12.19}$$

Yayınım sabiti D, ortalama hız v cinsinden verilmiştir ve saçılmalar arasındaki ortalama serbest yol da

$$D = \frac{1}{3}lv$$

şeklinde yazılır. J için vektör denklemi de şu şekilde yazılır:

$$J = -D\nabla N \tag{12.20}$$

Herhangi bir da yüzey elemanından geçen nötronların akış hızı $J \cdot n da$ olur. (Her zamanki gibi, n birim normaldir.) Bu durumda, *birim hacimden dışarı* net akış (her zamanki Gauss akıl yürütmesini kullanarak) $\nabla \cdot J\,dV$'dir. ΔV İçinde nötron meydana getirilmiyorsa, bu akış sonunda ΔV içindeki nötron sayısı azalır. Hacim içinde, birim hacimde ve birim zamanda S miktarında nötron meydana getiren bir kaynak varsa, bu durumda ΔV'den dışarı net akış $(S - \partial N/\partial t)\Delta V$ olur. Bu durumda

$$\nabla \cdot J = S - \frac{\partial N}{\partial t} \tag{12.21}$$

yazabiliriz. (12.21) ile (12.20)'yi birleştirirsek, *nötron yayınım denklemini* elde ederiz:

$$\nabla \cdot (-D\nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t} \tag{12.22}$$

$\partial N/\partial t = 0$ eşitliğini sağlayan statik durumda, Denk. (12.4)'ü tekrar elde ederiz. Elektrostatiğe dair bilgimizi kullanarak, nötronların yayınımıyla ilgili problemleri çözebiliriz. O halde gelin birini çözelim. (Şunu merak edebilirsiniz: Elektrostatikteki bütün problemleri hallettiysek, neden bir adet daha çözüyoruz? Bu sefer daha *hızlı* çözebiliriz, çünkü elektrostatik problemlerini *tamamladık*.)

Elimizde, Şekil 12-7'deki gibi, bir a yarıçapındaki küresel bir bölge boyunca düzenli şekilde nötronların –örneğin, uranyum fizyonuyla– üretildiği bir malzeme bloğu olduğunu varsayalım. Bulmak istediğimiz şudur: nötronların her yerdeki yoğunluğu nedir? Üretildikleri bölgede nötron yoğunluğu ne kadar eşit dağılımlıdır? Merkezdeki nötron yoğunluğunun, kaynak bölgesinin yüzeyindeki nötron yoğunluğuna oranı nedir? Cevapları bulmak kolaydır. Kaynak yoğunluğu S_0, yük yoğunluğu ρ'nin yerine geçer, dolayısıyla problemimiz düzgün yük yoğunluğuna sahip bir küre problemiyle aynıdır. N'i bulmak, ϕ potansiyelini bulmakla aynıdır. Düzgün yüklü bir kürenin içindeki ve dışındaki alanları zaten çoktan hesaplamıştık; potansiyeli elde etmek için integrallerini alabiliriz. Dışında, potansiyel $Q/4\pi\epsilon_0 r$. Toplam Q yükü de $4\pi a^3\rho/3$. Dolayısıyla

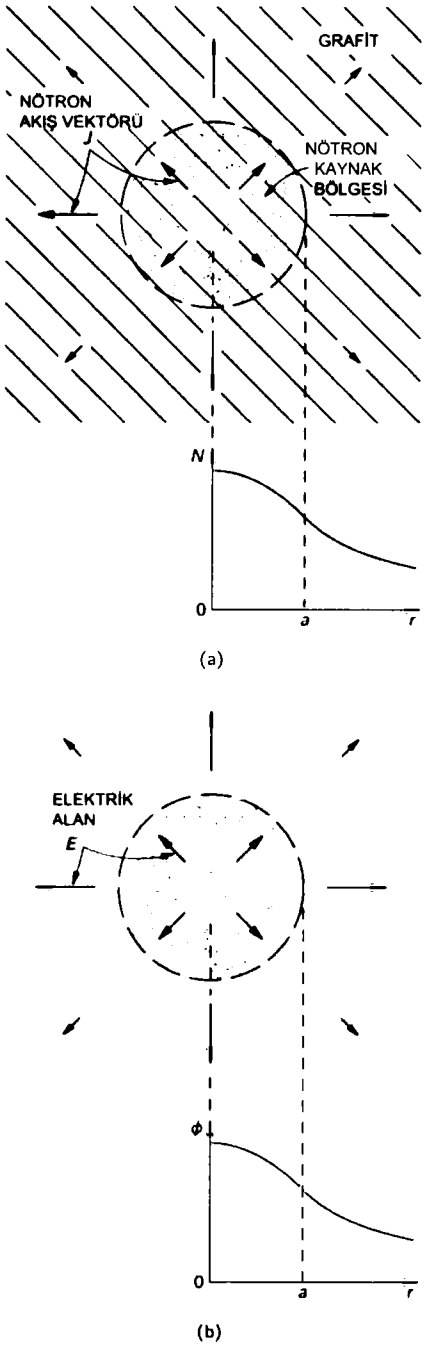
$$\phi_{\text{dış}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} \tag{12.23}$$

olur. İçerdeki noktalar için, alan sadece r yarıçaplı kürenin içindeki $Q(r)$ yükündendir. $Q(r) = 4\pi r^3\rho/3$ ve

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \tag{12.24}$$

sonucunu buluruz. Alan, r'yle doğrusal olarak artar. ϕ'yi elde etmek için E'nin integralini aldığımızda, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\phi_{\text{iç}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{bir sabit}$$



Şekil 12-7 (a) Büyük bir grafit bloğun içinde, a yarıçapındaki bir kürenin içinde nötronlar bütün hacme eşit dağılacak şekilde meydana gelip, dışa doğru yayınırlar. N nötron yoğunluğu r'nin, kaynağın merkezinden olan uzaklığın, bir fonksiyonudur. (b) Buna benzeşen elektrostatik durum: Düzgün bir küresel yük; N, ϕ'ye ve J de E'ye denk gelir.

a yarıçapında $\phi_{\text{içerde}}$, $\phi_{\text{dışarda}}$ değeriyle aynı olmalıdır, dolayısıyla sabit de $\rho a^2/2\epsilon_0$ olmalıdır. (Kaynaktan uzak mesafelerde ϕ'nin sıfır olduğunu varsayıyoruz. Bu da N'in nötronlar için sıfır olmasına denktir.)

$$\phi_{\text{iç}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \tag{12.25}$$

Böylece, nötron yoğunluğunu hemen hesaplayabiliriz. Cevap

$$N_{\text{dışarda}} = \frac{Sa^3}{3Dr} \tag{12.26}$$

ve

$$N_{\text{içerde}} = \frac{S}{3D}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \tag{12.27}$$

olur. Şekil 12-7'de N, r'nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir.

O halde, merkezdeki yoğunluğun kenardaki yoğunluğa oranı nedir? Merkezde ($r = 0$), $3a^2/2$ değeriyle orantılıdır. Kenarda ($r = a$) $2a^2/2$ değeriyle orantılıdır, dolayısıyla birbirlerine oranları 3/2'dir. Düzgün bir kaynak, düzgün bir nötron yoğunluğuna yol açmaz. Gördüğünüz üzere, elektrostatik bilgimiz bize nükleer reaktör fiziği için güzel bir temel sağlar.

Yayınımın büyük rol oynadığı birçok fiziksel durum vardır. Bir sıvı içindeki iyonların veya bir yarı iletken içindeki elektronların hareketi aynı denklemle ifade edilir. Tekrar tekrar aynı denklemlerle karşılaşırız.

12-5 Girdapsız akış; bir küre etrafındaki akış

Şimdi inceleyeceğimiz örnek çok da iyi bir örnek değildir; çünkü kullanacağımız denklemler konunun bütün hatlarını değil sadece yapay, idealize edilmiş bir durumu temsil eder. *Su akışı* problemini ele alacağız. Gerilmiş levha durumunda, denklemlerimiz sadece *küçük bükülmeler* durumu için bir yakınlaştırmaydı. Su akışını ele alırken bu tür bir yakınlaştırma yapmayacağız. Gerçek suya hiçbir şekilde uygulanmayan kısıtlamalar yapmalıyız. Sadece, *sıkıştırılamaz, viskoz olmayan ve serbest akan* bir sıvının kararlı akışını ele alacağız. Daha sonra bu akışı, hız $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ denklemini, $\boldsymbol{r}$ konumunun bir fonksiyonu olarak göstereceğiz. Hareket kararlıysa (elektrostatik benzeri olan tek durum budur), $\boldsymbol{v}$ zamandan bağımsızdır. Sıvının yoğunluğu ρ ise, $\rho\boldsymbol{v}$ birim alandan birim zamanda geçen kütle miktarıdır. Maddenin korunumu gereği, $\rho\boldsymbol{v}$'nin diverjansı, genelde, birim hacimdeki malzemenin kütlesinin zamanla değişim hızıdır. Kütlenin yaratılmadığını veya yok edilmediğini varsayacağız. Kütlenin korunumu gereği $\nabla \cdot \rho\boldsymbol{v} = 0$'dır. (Aslında genelde $-\partial\rho/\partial t$'ye eşit olmalıdır, ancak bizim sıvımız sıkıştırılamaz olduğundan ρ değişemez.) ρ her yerde aynı olduğundan denklemden çıkarabiliriz. Böylece denklemimiz aşağıdaki gibi olur:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Güzel! Yine elektrostatiğe geldik (hiç yük olmadan). Tıpkı $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ gibi. Öyle değil! Elektrostatik, basitçe $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ demek *değildir*. O, bir çift denklemdir. Tek başına bir denklem bize yeterince şey anlatmaz; ilave bir denkleme ihtiyacımız vardır. Elektrostatikle eşleştirmek için, $\boldsymbol{v}$'nin *bükümünün* sıfır olmasına da ihtiyacımız vardır. Gerçek sıvılar içinse bu, genelde doğru değildir. Birçok sıvı bir şekilde dolaşım oluşturacaktır. Bu yüzden, akışkanın hiç dolaşımının olmadığı durumla sınırlıyız bu sefer. Bu tür akış, çoğu zaman, *girdapsız* olarak adlandırılır. Bununla birlikte, bütün varsayımlarımızı yaparsak, elektrostatiğe benzer bir sıvı akışı *hayal edebiliriz*. Öncelikle

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{12.28}$$

ve

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{12.29}$$

eşitliklerini kabul ederiz.

Tekrarlamak gerek, birçok durumda sıvı akışları bu denklemleri sağlamaz ama yine de birkaçı bu denkleme uyar. Bunlar, yüzey gerilmesini, sıkıştırılabilirliği ve viskoziteyi göz ardı ettiğimiz ve akışın girdapsız olduğunu varsaydığımız durumlardır. Bu varsayımlar gerçek su söz konusu olduğunda, o kadar az durumda geçerlidir ki matematikçi John von Neumann bu iki denklemi, (12.28) ve (12.29), çalışan insanlar için "kuru su" üzerine çalışıyorlar demiştir! (40 ve 41. Bölümde sıvı akış problemini daha detaylı ele alacağız.)

$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ olduğundan, "kuru su"yun hızı bir potansiyelin gradyanı olarak yazılabilir:

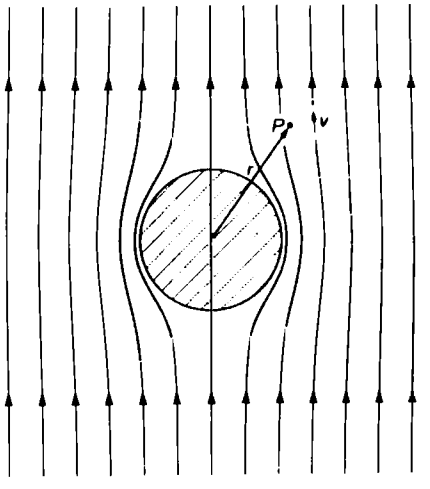
$$\boldsymbol{v} = -\nabla\psi \tag{12.30}$$

ψ'nin fiziksel anlamı nedir? Çok faydalı bir anlamı yoktur. Hızı, bir potansiyelin gradyanı olarak yazabilmemizin nedeni akışı girdapsız kabul etmemizdir. Elektrostatikle benzerlik kuracak olursak, *ψ hız potansiyelidir*; fakat potansiyel enerjiyle ϕ gibi ilişkili değildir. $\boldsymbol{v}$'nin diverjansı sıfır olduğundan, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0 \tag{12.31}$$

Hız potansiyeli ψ, boş hacimdeki elektrostatik potansiyelle ($\rho = 0$) aynı diferansiyel denkleme uyar.

Gelin, girdapsız akışa dair bir problem seçelim ve şu ana kadar öğrendiğimiz yöntemlerle çözüp çözemeyeceğimizi görelim. Bir sıvı içinde düşmekte olan, küre şeklinde bir top problemini ele alalım. Çok yavaş hareket ediyorsa, göz ardı ettiğimiz viskoz kuvvetler önem kazanır. Çok hızlı hareket ediyorsa, arkasında küçük girdaplar (türbülans) oluşur. Top ne hızlı ne de yavaş hareket ediyorsa, suyun akışı iyi kötü bizim varsayımlarımıza uyacaktır ve biz de suyun hareketini basit denklemlerle tanımlayabiliriz.



Şekil 12-8 Bir küre etrafındaki girdapsız sıvı akışının hız alanı.

Uygun olan, kürenin içinde *sabit* bir referans çerçevesinde ne olup bittiğini tanımlamaktır. Bu çerçeve içinde şu soruyu sorarız: Toptan uzak mesafelerdeki akış düzgünken, yerinde duran bir kürenin etrafından su nasıl akıp gider? Kürenin yakınındaki akış, Şekil 12-8'de gösterilen çizgiler şeklinde olacaktır. $\boldsymbol{v}$'ye paralel bu çizgiler, bir elektrik alanı çizgilerine denk gelir. Hız alanı için niceliksel bir tanım elde etmek istiyoruz. Örneğin, herhangi bir P noktasındaki hız için bir ifade.

Hızı, ψ'nin gradyanı sayesinde bulabiliriz. Öyleyse önce potansiyeli bulmamız lazım. Denklem (12.31)'i her yerde sağlayan ve şu iki kısıtlamaya uyan bir potansiyel lazım bize: (1) Topun yüzeyinin içindeki küresel bölgede akış olmayacak ve (2) uzak mesafelerdeki akış sabit olacak. Birinci koşulu sağlamak için $\boldsymbol{v}$'nin kürenin yüzeyine dik bileşeni sıfır olmalıdır. Diğer bir deyişle $r = a$ olduğunda, $\partial\psi/\partial r$ sıfır olmalıdır. İkinci koşulu sağlamak için $r \gg a$ olan tüm noktalarda $\partial\psi/\partial z = v_0$ olmalıdır. Açıkça konuşmak gerekirse, elimizdeki probleme tam uyan bir elektrostatik vakası yoktur. Bu, gerçekten de, dielektrik sabiti sıfır olan bir küreyi düzgün bir elektrik alan içine koymaya benzer. Daha önce, dielektrik sabiti κ olan ve düzgün bir elektrik alanda bulunan küre problemini çözmüş olsaydık, $\kappa = 0$ der ve problemin çözümünü hemen bulurduk.

Evet, daha önce bu özel elektrostatik problemi çalışmadık; hadi gelin şimdi çalışalım. (Doğrudan bir şekilde, $\boldsymbol{v}$ ve ψ kullanarak akışkan problemi üzerine çalışabilirdik; ancak alışkanlıklarımızı terk etmeyerek $\boldsymbol{E}$ ve ϕ'yi kullanacağız.)

Şimdi, problem şudur: $\nabla^2\phi = 0$ eşitliğini sağlayan öyle bir çözüm bulun ki, $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ sabitken, büyük r için, $r = a$ olduğunda $\boldsymbol{E}_0$ ve $\boldsymbol{E}$'nin radyal bileşeni sıfır olsun:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \tag{12.32}$$

Problemimiz yeni bir tür sınır durumu içermekte: Yüzeyde ϕ'nin sabit olduğu değil, $\partial\phi/\partial r$'nin sabit olduğu. Bu, biraz farklı bir durum. Cevabı hemen elde etmek kolay değildir. Öncelikle, küre olmadan ϕ'nin değeri $-E_0z$ olurdu. Bu du-

rumda E, z yönünde olurdu ve büyüklüğü, her yerde, sabit E_0 olurdu. Daha önce, içinde düzgün bir kutuplanma olan dielektrik küre problemini analiz etmiş ve böyle bir küre içindeki alanın da düzgün olduğunu ve dışardaki elektrik alanın da, merkezde bulunan bir nokta dipolün alanıyla aynı olduğunu bulmuştuk. Bir dipolün potansiyeli $pz/4\pi\epsilon_0 r^3$'tür. Bu yüzden,

$$\phi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{12.33}$$

eşitliğini varsayabiliriz. Dipolün elektrik alanı $1/r^3$ değeriyle orantılı düştüğünden, uzak mesafelerde elimizde sadece E_0 alanı vardır. Tahminimiz, yukarıda bahsettiğimiz 2 numaralı koşulu sağlayacaktır. İyi de, dipol şiddeti p'yi ne alacağız? Bunu bulmak için, ϕ için olan diğer koşulu, Denk. (12.32)'yi kullanabiliriz. ϕ'nin r'ye göre diferansiyelini almalı; ancak elbette bunu sabit bir θ açısında yapmalıyız. Bu yüzden, ϕ'yi, z ve r cinsinden değil de, r ve θ cinsinden ifade etmemiz daha uygun olur. $z = r\cos\theta$ olduğundan, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\phi = -E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{12.34}$$

E'nin radyal bileşeniyse

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = +E_0\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \tag{12.35}$$

olur. Bu, $r = a$'da, her θ açısı için, sıfır olmalıdır. Bu, ancak aşağıdaki eşitlik sağlanırsa doğrudur:

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \tag{12.36}$$

Dikkat edin, Denk. (12.35)'teki her iki terim de θ açısına aynı şekilde bağlı olmasaydı, bütün açılar için $r = a$'da (12.35)'i sıfır yapacak bir p seçmek mümkün olmazdı. İşe yaraması, Denk. (12.33)'ü yazarken akıllıca bir tahminde bulunduğumuz anlamına geliyor. Elbette, tahmini yaptığımızda ileriye de bakıyorduk. Öyle bir terimimiz olmalıydı ki, (a) $\nabla^2\phi = 0$ eşitliğini sağlasın (herhangi bir gerçek alan bunu sağlardı), (b) $\cos\theta$'ya bağlı olsun ve (c) büyük r uzaklığında sıfıra düşsün. Bu üç koşulu ancak dipol alanı sağlar.

Denklem (12.36)'yı kullanarak, potansiyelimizi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\phi = -E_0\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \tag{12.37}$$

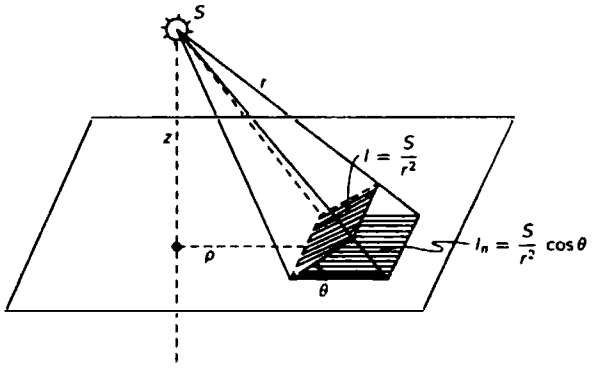
Sıvı akış probleminin çözümü de, basitçe aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\psi = -v_0\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \tag{12.38}$$

Bu potansiyelden, kolayca v'yi bulabilirsiniz. Bu konu üzerinde daha fazla durmayacağız.

12-6 Aydınlanma; bir düzlemin düzgün ışıklandırılması

Bu bölümde, olasılıkların ne kadar çeşitli olduğunu gösterebilmek için, çok daha değişik bir fiziksel problemi ele alacağız. Bu sefer, elektrostatikte bulduğumuz cinsten *integrale* giden bir şey yapacağız. (Bize belirli bir integral veren bir matematiksel problem varsa ve bu integral bir diğer problem için almış olduğumuz integralse, o integralin özellikleriyle ilgili bir şeyler biliyoruzdur.) Örneğimizi aydınlatma mühendisliğinden seçtik. Düz bir yüzeyin a kadar üzerinde bir ışık kaynağı olduğunu varsayalım. Yüzeye düşen aydınlanma (ışık şiddeti) nedir? Dolayısıyla soruyu açacak olursak, yüzeydeki birim alana, birim zamanda düşen ışıma enerjisi nedir (*Bkz.* Şekil 12-9)? Kaynağın küresel simetrik olduğunu ve böylece ışığın her yönde eşit şekilde yayıldığını varsayalım. Bu durumda, bir ışık akışına *dik derecelerde* bulunan birim alandan geçen



Şekil 12-9 Bir yüzeyin aydınlanması (ışık şiddeti) I_n, yüzeyin birim alanına birim zamanda ulaşan ışıma enerjisidir.

ışıma enerjisi uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak azalır. Akışla aynı yöndeki ışık yoğunluğunun, elektrostatikteki bir nokta kaynaktan yayılan elektrik alan denklemiyle aynı denklemle hesaplanabileceği açıktır. Işık ışınları, düzlemle θ açısı yapmış bir yüzeye dik geliyorsa, I_n yüzeydeki *birim alan başına* düşen enerji, $\cos\theta$ değeriyle orantılıdır, zira aynı miktar enerji yüzeydeki $1/\cos\theta$ kadar büyük bir alana düşmektedir. Işık kaynağımızın gücüne S dersek, o halde I_n, yüzeye düşen aydınlanma (ışık şiddeti) şu şekilde ifade edilebilir:

$$I_n = \frac{S}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n} \tag{12.39}$$

Denklemdeki $\boldsymbol{e}_r$ kaynağın birim vektörü ve $\boldsymbol{n}$ de yüzeye dik olan birim vektördür. I_n, alan şiddeti $4\pi\epsilon_0 S$ olan bir noktasal yükten kaynaklanan elektrik alanının dik bileşenine denk gelmektedir. Bunu bildiğimizde, herhangi bir ışık kaynağı konfigürasyonu için cevabı, denk gelen elektrostatik problemi çözerek bulabildiğimizi görürüz. Düzlemde, yük dağılımından kaynaklanan elektrik alanının dikey bileşenini de, ışık kaynakları için kullandığımız yolla hesaplayabiliriz.*

Sıradaki örneğimizde, bir masanın üst yüzeyinin çok düzgün bir şekilde aydınlatıldığı özel, deneysel bir durumu ele alacağız. Boyları boyunca düzgün şekilde ışınım yapan, uzun tüp floresan lambalarımız olsun. Bu lambaları masadan z kadar yüksekte olan tavana birbirlerine paralel olacak şekilde asarak masamızı aydınlatabiliriz. Masadaki aydınlanmanın, diyelim ki binde bir hassasiyetle, düzgün olabilmesi için tüpler arasındaki b açıklığı en çok ne kadar olmalıdır? *Cevap:* (1) Her birinin arasında b kadar açıklık olan, düzgün yüklenmiş tellerden kaynaklanan elektrik alanı hesaplayın. (2) Bulduğunuz elektrik alanın dikey bileşenini hesaplayın. (3) Elektrik alandaki dalgalanmaları binde birden az tutacak b açıklığını hesaplayın.

7. Bölümde gördüğünüz üzere, yüklü tellerden oluşan bir örgünün elektrik alanı bir dizi terimin toplamı alınarak bulunabilir. Her bir terimin, bir b/n periyodunda alanın sinüzoidal değişimini verdiğini ve n'nin bir tamsayı olduğunu hatırlayın. Bu terimlerden herhangi birinin büyüklüğü Denk. (7.44)'le hesaplanabilir.

$$F_n = A_n\, e^{-2\pi n z/b}$$

Bu örgüye çok yakın olmayan noktalardaki alanı bulmak istediğimiz müddetçe, sadece $n = 1$ durumunu ele alabiliriz. Tam bir çözüm için, A_n'nin katsayılarını belirlememiz gerekir ki biz bunu hâlâ yapmadık. Sadece A_1'e ihtiyaç duyduğumuz için büyüklüğünün, ortalama alanın büyüklüğüyle yaklaşık aynı olduğunu varsayabiliriz. Böylece üssel çarpan bize doğrudan doğruya değişimlerin *göreli* büyüklüğünü verir. Bu çarpanın 10^{-3} olmasını istersek, b'nin $0{,}91z$ olması ge-

* *Yoğunlukları* daima doğrusal olarak toplanan *bağımsız* kaynaklardan bahsettiğimizden dolayı, benzeşen elektrik yükleri daima aynı işarete sahip olacaktır. Ayrıca benzeştirmemiz sadece opak (ışık geçirmez) yüzeylere düşen ışık enerjisine uygulanabilir; dolayısıyla integralimizde sadece yüzey üzerine ışık veren kaynaklar olmalı (ve elbette yüzeyin altında olan ışık kaynakları göz ardı edilmeli)!

rektiğini buluruz. Floresanlar arasındaki mesafeyi, tavana olan mesafenin dörtte üçü kadar yaparsak, üssel çarpan 1/4000 olur ve güvenlik faktörümüz de 4'tür. Böylece aydınlatmanın (ışık şiddetinin) binde bir hassasiyetle sabit olacağından emin olabiliriz. (Kesin hesaplar göstermiştir ki, A_1 ortalama alanının gerçekte iki katıdır: $b \approx 0{,}83z$) Böyle düzgün bir aydınlatma için tüpler arasındaki mesafenin bu kadar büyük olması şaşırtıcıdır.

12-7 Doğanın "altında yatan birlik"

Bu bölümde göstermeye çalıştığımız şey, elektrostatik konusunu öğrenirken aynı zamanda fizikteki birçok farklı konuyu da nasıl ele alacağınızı görmenizdi. Bunu dikkate alırsanız, fiziğin neredeyse tamamını birkaç yılda öğrenebilmeniz mümkündür.

Böyle bir konunun sonunda aklınızda şu sorunun belirmesi doğaldır: *Değişik olgulara ait denklemler nasıl bu kadar benzer olabiliyor?* Şu şekilde yanıtlayabiliriz: "Bu, doğanın altında yatan birliktir". İyi de, bu ne anlama geliyor? Böyle bir ifade ne anlama *gelebilir?* Basitçe, farklı olgular için denklemlerin benzer olduğu anlamına gelir. Elbette bu durumda, bir açıklama getirmiş olmadık. "Altında yatan birlik" her şeyin aynı özden oluştuğunu ve dolayısıyla aynı denklemlerle ifade edilebildiği anlamına gelebilir. Elektrostatik potansiyel, nötronların yayınımı, ısı akışı vs. Bunların hepsi aslında aynı özden mi gelir? Elektrostatik potansiyelin gerçekten de *fiziksel* olarak sıcaklığa veya parçacıkların yoğunluğuna özdeş olduğunu hayal edebilir miyiz? ϕ'nin, parçacıkların termal enerjisiyle *aynı şey olmadığı* kesindir. Bir zarın yerdeğişimi de kesinlikle sıcaklık gibi *değildir.* O zaman neden bir "altında yatan birlik" var?

Çeşitli konuların fiziğine daha yakından bakınca görürüz ki, denklemler aslında çok da özdeş değil. Nötron yayınımına dair bulduğumuz denklem, ancak ortalama serbest yola göre büyük mesafelere baktığımızda iyi bir yaklaştırımdır. Daha yakından baktığımızda, bağımsız nötronların ortalıkta serbestçe dolaştığını görürüz. Takdir edersiniz ki, bağımsız bir nötronun hareketi, bir diferansiyel denklemi çözerek elde ettiğimiz düzgün değişimden tamamen farklıdır. Diferansiyel denklem bir yaklaştırımdır; çünkü nötronların *uzayda* düzgün şekilde dağıldığını varsayarız.

İpucumuz bu olabilir mi? Bütün olguların ortak noktası *uzay*, fiziğin esas çerçevesi, olabilir mi? Uzaydaki şeyler makul derecede düzgün olduğu sürece, önemli olan şeyler niceliklerin uzaydaki konumlarıyla beraber değişim hızları olacaktır. Bu yüzden hep gradyanlı bir denklem elde ediyoruz. Türevler gradyan veya diverjansı biçiminde *olmalıdır.* Fizik yasaları *yönden bağımsız* olduğu için, vektör biçiminde ifade edilebiliyor olmalıdır. Elektrostatik denklemleri, niceliklerin yalnız uzamsal türevlerini içeren en basit vektör denklemleridir. Herhangi bir başka *basit* problem –veya karmaşık bir problemin basitleştirilmiş hali– elektrostatiğe benzemelidir. Bütün problemlerimizin ortak noktası *uzay*da olması ve karmaşık bir olguyu basit bir diferansiyel denklemle taklit etmemiş olmamız.

Bu da bizi farklı bir soruya yönlendirir. Aynı ifade, *elektrostatik* denklemler için de geçerli midir? Onlar da aslında çok daha karmaşık, mikroskobik bir dünyanın düzgünleştirilmiş benzetmeleri midir? Gerçek dünya sadece *çok* küçük mesafelerde görülebilen küçük X-onlardan oluşuyor olabilir mi? Ölçümlerimizi yaptığımız ölçeklerin büyüklüğü yüzünden o X-onları göremiyor ve bu yüzden diferansiyel denklemler elde ediyor olabilir miyiz?

Elektrodinamiğe dair elimizdeki en bütünsel ve güncel kuramın gerçekten de kısa mesafelerde karşılaştığı zorluklar vardır. Dolayısıyla ilkesel olarak, bu denklemler bir başka şeylerin düzeltilmiş biçimleri olabilir. 10^{-14} santimetreye kadar doğru gözükmekle beraber, bu kadar küçük bir mesafede aniden yanlış

olmaya başlıyorlar. Diğer bir deyişle gerçekten de, altta yatan henüz keşfedilmemiş bir "mekanizma" olabilir ve altta yatan karmaşıklığın detayları, düzgün gözüken denklemlerde gizli olabilir. Aynı, nötronların" düzgün" yayınımında olduğu gibi. Ancak şimdiye kadar kimse bunu gösterebilen başarılı bir kuram ortaya koyamadı.

Şimdi belki garip gelecek ama, (anlamadığımız nedenlerden dolayı) görelilik ve kuantum mekaniğinin birleşimi, Denk. (12.4)'ten temelde daha farklı ve aynı zamanda bir tür çelişkiye yol açmayan bir denklemin bulunmasını *engelliyor* gibi gözükmekte. Basit bir deney uyuşmazlığı değil, bir *iç çelişki*den bahsediyoruz. Örnek veriyorum, tüm olası görünümlerin olasılıklarının toplamının birliğe eşit olmayacağı öngörüsü veya bazen enerjilerin karmaşık sayılar olarak çıkabileceği veya benzeri bir ahmaklık. Şu ana kadar kimse, elektrik için, $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ eşitliğinin altta yatan bir mekanizmanın düzgünleştirilmiş bir yaklaştırım olduğunu gösteren ve nihayetinde bir nevi saçmalığa dönüşen bir kuram geliştirmedi. Yine de eklemeliyiz, $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ varsayımının, ne kadar küçük olsa da her türlü mesafe için geçerli olduğu varsayımı zaten kendine ait saçmalıklara (bir elektronun elektriksel enerjisinin sonsuz olması) yol açtığı doğrudur. Bu saçmalıklardan kurtulmanın bir yolunu henüz bilen yok.

13
MANYETOSTATİK

13-1 Manyetik alan
13-2 Elektrik akımı; yükün korunumu
13-3 Bir akım üzerindeki manyetik kuvvet
13-4 Kararlı akımların manyetik alanı; Ampère yasası
13-5 Bir soienoid ve düz telin manyetik alanı; atomik akımlar
13-6 Elektrik ve manyetik alanların göreliliği
13-7 Akımların ve yüklerin dönüşümü
13-8 Üst üste binme; sağ el kuralı

13-1 Manyetik Alan

Bir elektrik yükü üzerindeki kuvvet, sadece onun nerede olduğuna değil, aynı zamanda ne kadar hızlı hareket ettiğine bağlıdır. Uzaydaki her bir nokta, herhangi bir yük üzerindeki kuvveti belirleyen iki vektör niceliğiyle karakterize edilir. Birincisi, *elektrik kuvvettir* ve yükün hareketinden bağımsız bir kuvvet bileşeni verir. Onu $\boldsymbol{E}$ elektrik alanıyla tanımlarız. İkincisi, *manyetik kuvvet* denilen ilave bir kuvvet bileşeni vardır ve yükün hızına bağlıdır. Bu manyetik kuvvetin garip bir yönsel özelliği vardır. Uzaydaki herhangi bir noktada, kuvvetin *yönü* ve *büyüklüğü* parçacığın hareketinin yönüne bağlıdır. Her bir anda kuvvet, hız vektörüne daima diktir; ayrıca, herhangi bir noktada kuvvet uzaydaki *sabit* bir yöne daima dik açılardadır (*Bkz.* Şekil 13-1) ve son olarak kuvvetin büyüklüğü, hızın bu belirli yöne dik açılardaki *bileşeniyle* orantılıdır. Hem hızla orantısallığı, hem de uzaydaki belirli bir yönü tanımlayan manyetik alan vektörü $\boldsymbol{B}$'yi tanımlayarak bütün bu davranışları açıklamak ve manyetik kuvveti $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ olarak yazmak mümkündür. O halde, bir yük üzerindeki toplam elektromanyetik kuvvet şu şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{13.1}$$

Buna, *Lorentz kuvveti* denir.

Manyetik kuvveti göstermek kolaydır. Bir çubuk mıknatısı katot ışını tüpünün yakınına getirim. Elektron demetinin sapması, mıknatısın varlığının, aynı I. Cilt, 12. Bölümde tarif etiğimiz gibi, elektronların hareket yönünün enine kuvvetler doğurduğunu göstermekte.

Gözden geçirme: I. Cilt, Bölüm 15, *Özel Görelilik Kuramı*

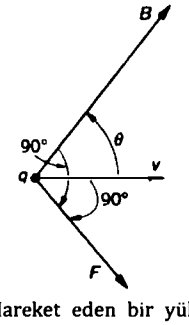
Manyetik alan $\boldsymbol{B}$'nin birimi bir Newton·saniye bölü Coulomb·metredir. Aynı birim ayrıca bir Volt·saniye bölü metre^2 olur. Buna *metre kare başına bir Weber* denir.

13-2 Elektrik akımı; yükün korunumu

Öncelikle, elektrik akımı taşıyan teller üzerindeki manyetik alanı nasıl kavrayabileceğimizi ele alalım. Bunu yapmak için, akım yoğunluğunun ne anlama geldiğini tanımlamalıyız. Elektrik akımları, net bir sürüklenme veya akışla hareket halindeki elektronlar veya yüklerdir. Yük akışını, akışa dik açılarda bir yüzey elemanından birim zamanda ve birim yüzeyden geçen yük miktarı olarak veren bir vektörle (aynı ısı akışı durumunda yaptığımız gibi) temsil edebiliriz. Buna *yük yoğunluğu* denir ve $\boldsymbol{j}$ vektörüyle temsil edilir. Vektörün yönü yüklerin hareketi boyuncadır. Malzemenin içindeki bir yerde küçük bir ΔS alanını ele alırsak, bu alandan birim zamanda akıp geçen yük miktarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

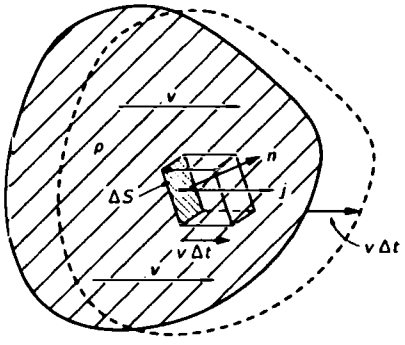
$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\Delta S \tag{13.2}$$

Denklemdeki $\boldsymbol{n}$, ΔS'e dik birim vektördür.

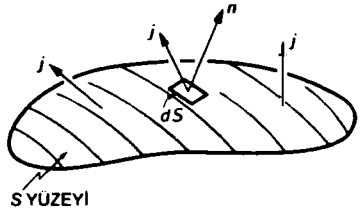


Şekil 13-1 Hareket eden bir yük üzerindeki kuvvetin hıza bağlı bileşeni, $\boldsymbol{B}$ yönünde ve $\boldsymbol{v}$'ye dik açılardadır. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$'ye dik açılardaki $\boldsymbol{v}$ bileşeniyle, $v \sin\theta$ değeriyle orantılıdır.

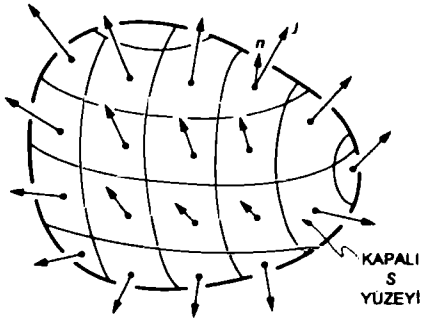
Akım yoğunluğu, yüklerin ortalama akış hızıyla ilişkilidir. Ortalama hareketleri $\boldsymbol{v}$ hızıyla sürüklenme olan bir yük dağılımı olsun elimizde. Bu dağılım ΔS yüzey elemanından geçtikçe, Δt zamanında yüzey elemanından geçen Δq yükü, Şekil 13-2'de gösterilen, tabanı ΔS ve yüksekliği $v\Delta t$ olan paralel yüzlünün içindeki yük miktarına eşittir. Paralel yüzlünün hacmi, ΔS'in $\boldsymbol{v}$ çarpı $v\Delta t$'ye dik



Şekil 13-2 ρ yoğunluğundaki bir yük dağılımı v hızıyla hareket ediyorsa, ΔS'den birim zamanda geçen yük miktarı $\rho v \cdot n\Delta S$'tir.



Şekil 13-3 S yüzeyinden geçen I akımı $\int j \cdot ndS$'dir.



Şekil 13-4 $j \cdot n$'nin kapalı bir yüzey üzerinden alınan integrali, içerdeki toplam Q yükünün değişim hızının eksi işaretlisidir.

açılardaki projeksiyonudur. Daha sonra bunu yük yoğunluğu ρ'yle çarptığınızda Δq'yu elde edersiniz:

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t$$

Bu durumda, birim zamandaki yük $\rho v \cdot n\Delta S$ olur ve buradan da aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$j = \rho v \tag{13.3}$$

Yük dağılımı bağımsız yüklerden, diyelim ki her biri q yükünde ve v ortalama hızında hareket eden elektronlardan oluşuyorsa, bu durumda akım yoğunluğunu

$$j = Nqv \tag{13.4}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklemdeki N birim hacimdeki yük sayısıdır.

Herhangi bir S yüzeyinden birim zamanda geçen toplam yüke *elektrik akımı* (I) denir. Akışın dik bileşeninin, yüzeyin tüm elemanları üzerinden alınan integraline eşittir.

$$I = \int_S j \cdot n dS \tag{13.5}$$

(*Bkz.* Şekil 13-3.)

Kapalı bir S yüzeyinden dışarı olan I akımı, yüklerin, S tarafından çevrelenmiş V hacmini terk etme hızıdır. Temel fizik yasalarından biri, *elektrik yükünün* yok edilemez olduğudur. Yok edilemez veya yaratılamaz. Elektrik yükleri bir yerden bir yere taşınabilir, ancak asla yoktan var olmazlar. Dolayısıyla, *yük korunur*. Kapalı bir yüzeyden dışarı doğru net bir akış varsa, içerdeki yük miktarı akışa denk miktarda azalmalıdır (Şekil 13-4). Dolayısıyla, yük korunumu yasasını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_{\substack{\text{herhangi bir}\\ \text{kapalı yüzey}}} j \cdot n dS = -\frac{d}{dt}(Q_{\text{içerde}}) \tag{13.6}$$

İçerdeki yük, yük yoğunluğunun hacim integrali şeklinde de yazılabilir:

$$Q_{\text{içerde}} = \int_{\substack{S \text{ hacminin}\\ \text{içinde } V}} \rho dV \tag{13.7}$$

Denklem (13.6)'yı küçük bir ΔV hacmine uygularsak, sol taraftaki integralin $\nabla \cdot j \Delta V$ olduğunu biliriz. İçerdeki yük $\rho \Delta V$'dir, dolayısıyla yük korunumunu

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{13.8}$$

olarak yazabiliriz. (Bir kez daha Gauss matematiği!)

13-3 Bir akım üzerindeki manyetik kuvvet

Artık, manyetik bir alanda bulunan ve akım taşıyan bir tel üzerindeki kuvveti bulmaya hazırız. Akım, tel boyunca v hızıyla hareket eden yüklü parçacıklardan oluşmaktadır. Her bir yük enine bir kuvvet hisseder (Şekil 13-5 a):

$$F = qv \times B$$

Birim hacimde böyle N kadar yük varsa, teldeki küçük bir ΔV hacmindeki miktar $N\Delta V$'dir. ΔV üzerindeki toplam manyetik kuvvet ΔF, bağımsız yükler üzerindeki kuvvetlerin toplamıdır:

$$\Delta F = (N \Delta V)(qv \times B)$$

Nqv sadece j olduğundan,

$$\Delta F = j \times B \Delta V \tag{13.9}$$

birim hacim başına kuvvet $j \times B$'dir.

Kesit alanı A olan bir tel boyunca düzgün akım varsa, taban alanı A ve boyu ΔL olan bir silindiri hacim elemanı olarak ele alabiliriz. Bu durumda

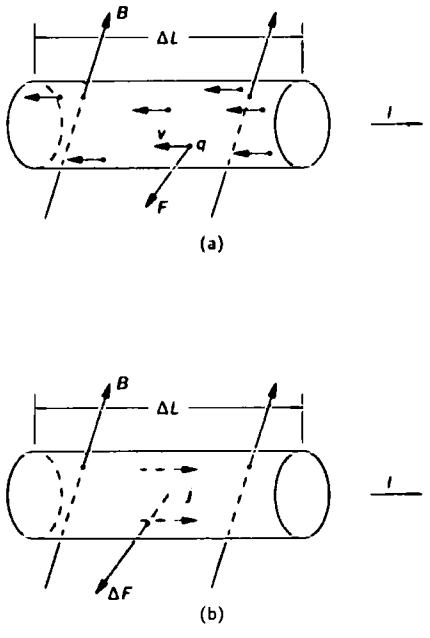
$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} A \Delta L \tag{13.10}$$

olur. Artık, jA'ya tel içindeki I akım vektörü diyebiliriz. Büyüklüğü teldeki elektrik akımıdır ve yönü tel boyuncadır. Dolayısıyla

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\, \Delta L \tag{13.11}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bir teldeki birim uzunluk boyunca kuvvet $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$'dir.

Bu denklem bize, içindeki yüklerin hareketinden dolayı, bir tel üzerindeki manyetik kuvvetin sadece toplam akıma bağlı olduğunu, her bir parçacık tarafından taşınan toplam yüke ve hatta işaretine bile bağlı olmadığı sonucunu gösterir.



Şekil 13-5 Akım taşıyan bir tel üzerindeki manyetik kuvvet, hareket eden bağımsız yükler üzerindeki kuvvetlerin toplamıdır.

13-4 Kararlı akımların manyetik alanı; Ampère yasası

Ortamda, örneğin bir mıknatıs tarafından üretilmiş bir manyetik alan varsa, bunun tele etki eden bir kuvvet yarattığını biliyoruz. Her etkiye karşı bir tepki vardır ilkesinden yola çıkarsak, telden geçen bir akım olduğunda manyetik alanın kaynağı üzerine, yani bu durumda mıknatısa, etki eden bir kuvvet olmasını bekleriz.* Gerçekten de böyle kuvvetler vardır. Akım taşıyan bir telin yakınındaki pusula iğnesinin hareket etmesi buna en güzel örneklerden biridir. Mıknatısların başka mıknatıslar üzerine kuvvet etki ettiğini de biliyoruz. Bu da bize, bir telde akım olduğunda telin kendisinin bir manyetik alan yarattığını gösterir. Bu durumda, hareket eden yüklerin manyetik alan *ürettiğini* söyleyebiliriz. Şimdi amacımız, bu tür manyetik alanların nasıl yaratıldığını belirleyen yasaları keşfetmek. Sormamız gereken soru şu: Belirli bir akım, nasıl bir manyetik alan doğurur? Bu sorunun cevabı Ampère tarafından dile getirilmiş harika bir akıl yürütme ve üç önemli deneyle ortaya konmuştur. Bu ilginç tarihi gelişmeyi es geçeceğiz ve sadece, Maxwell'in denklemlerini birçok deneyin doğruladığını söylemekle yetineceğiz. Başlangıç noktamız onlardır. Bu denklemlerdeki zaman türevi içeren terimleri dışarda bırakırsak, *manyetostatik* denklemlerini elde ederiz.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{13.12}$$

ve

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{13.13}$$

Bu denklemler sadece, bütün elektrik yük yoğunlukları sabit ve tüm akımlar kararlıyken, böylece elektrik ve manyetik alanlar zamanla değişmezken, diğer bir deyişle, bütün alanlar "durgunken" geçerlidir.

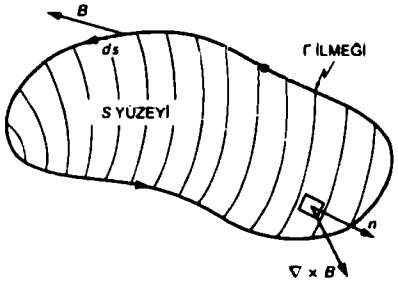
Dikkatinizi çekerim, durgun bir manyetik durumun olduğunu düşünmek biraz tehlikelidir; çünkü bir manyetik alan elde etmek için akım olmalıdır ve akımlar sadece hareket eden yüklerden kaynaklanır. Dolayısıyla, "manyetostatik" bir yaklaştırımdır. Sadece, *çok fazla sayıda* yükün hareket halinde olduğu ve böylece *kararlı* bir yük akımına yakınsayabildiğimiz özel bir tür dinamik durumu ifade eder. Ancak bu durumda, zamanla değişmeyen bir $\boldsymbol{j}$ yük yoğunluğundan bahsedebiliriz. Tüm alanların kararlı olduğunu varsayarsak, bütün Maxwell denklemlerinden, $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ ve $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ terimlerini dışarda bırakabiliriz ve böylece yukarıdaki (13.12) ve (13.13) denklemlerini elde ederiz. Ayrıca, dikkat ederseniz, herhangi bir vektörün bükümünün diverjansı sıfır olması gerektiğinden, $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ olması Denk. (13.13) için bir gerekliliktir. Bu, Denk. (13.8) gereği, sadece $\partial \rho/\partial t$ sıfırsa doğrudur. Bu da $\boldsymbol{E}$ zamanla değişmiyorsa olur, böylelikle bütün varsayımlarımızın tutarlı olduğu görülür.

$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ olması gerekliliğinin anlamı, sadece kendi üzerlerine kapanan yollarda akan yüklerimiz olabileceğidir. Örneğin, kapalı ilmekler oluşturan teller

* Daha sonra göreceğiz, ancak bu tür varsayımlar elektromanyetik kuvvetler için genel olarak doğru değildir.

(devreler) içinde akıyor olabilirler. Yüklerin akmaya devam etmesi için devrelerde jeneratörler veya piller olabilir. Olamayacak şey, boşalan ve yüklenen kondansatörlerdir. (Daha sonra, kuramı dinamik alanları da içerecek şekilde genişleteceğiz elbette, ancak şimdilik kararlı akımlara dair bu basit durumu inceleyeceğiz.)

Şimdi gelin, Denk. (13.12) ve (13.13)'e bakalım ve ne anlama geldiklerini çözmeye çalışalım. İlki, B'nin diverjansının sıfır olduğunu söyler. $\nabla \cdot E = -\rho/\epsilon_0$ eşitliğini öngören, elektrostatikteki benzer denklemle karşılaştırırsak, bir elektrik yükünün hiçbir manyetik benzeri olmadığı sonucuna varabiliriz. B çizgilerini ortaya çıkarabilecek *manyetik yük* yoktur. O halde nereden gelmekte bunlar? B vektör alanının "çizgileri" cinsinden düşünürsek, asla başlamazlar ve asla durmazlar. Manyetik alanlar, akımların varlığında "ortaya çıkar"; akım yoğunluğuyla orantılı bir *bükümleri* vardır. Nerede bir akım varsa, akımların etrafında ilmek ören manyetik alan çizgileri vardır. B çizgileri ne bir yerde başladıklarından ne de bir yerde bittiklerinden, sıklıkla kendi üzerlerine kapanacaklar ve kapalı ilmekler oluşturacaklardır. Çizgilerin basit kapalı ilmekler oluşturmadığı karmaşık durumlar da olabilir. Ancak, ne yaparlarsa yapsınlar, asla noktalardan çıkıp ıraksamazlar. $\nabla \cdot B = 0$ eşitliğini sağlayan hiçbir manyetik yük şu ana kadar keşfedilmemiştir. Bu kadarı sadece manyetostatik için değil, *her zaman için* –hatta dinamik alanlar için de– doğrudur.



Şekil 13-6 B'nin teğet bileşeninin çizgi integrali, $\nabla \times B$'nin dik bileşeninin yüzey integraline eşittir.

B alanı ile akımlar arasındaki ilişki Denk. (13.13) içinde yer alır. Burada, $\nabla \times E = 0$ eşitliğinin olduğu elektrostatikten oldukça farklı yeni bir durumla karşı karşıyayız. O eşitliğin anlamı, E'nin herhangi bir kapalı yol üzerinden alınan çizgi integralinin sıfır olduğu anlamına geliyordu:

$$\oint_{\text{ilmek}} E \cdot ds = 0$$

Bu sonucu, herhangi bir vektör alanının herhangi bir kapalı yol etrafındaki integralinin o vektörün bükümünün dik bileşeninin (dış yüzeyi kapalı bir ilmek olan herhangi bir yüzey üzerinden alınmış) yüzey integraline eşit olduğunu ortaya koyan Stokes teoreminden elde etmiştik. Aynı teoremi manyetik alan vektörüne uygular ve Şekil 13-6'da görünen sembolleri kullanırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\oint_\Gamma B \cdot ds = \int_S (\nabla \times B) \cdot n dS \qquad (13.14)$$

Denklem (13.13)'ten B'nin bükümünü alırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\oint_\Gamma B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S j \cdot n dS \qquad (13.15)$$

Denklem (13.5)'e göre, S üzerinden alınan integral S yüzeyinden geçen toplam I akımına eşittir. Kararlı akımlar için S yüzeyinden geçen akım S'in şeklinden bağımsız olduğundan dolayı, Γ ilmeğiyle çevrelendiği sürece, bahsettiğimiz şey "Γ ilmeğinden geçen akım"dır. Böylece elimizde genel bir yasa var artık: B'nin herhangi bir kapalı eğri etrafındaki dolaşımı, ilmekten geçen I akımının $\epsilon_0 c^2$'ye bölümüdür:

$$\oint_\Gamma B \cdot ds = \frac{I_{\Gamma\text{'den geçen}}}{\epsilon_0 c^2} \qquad (13.16)$$

Bu yasaya *Ampère yasası* denir ve elektrostatikte Gauss yasası ne demekse, manyetostatikte de Ampère yasası o demektir. Ampère yasası B'yi akımlardan belirlemez. Ek olarak, genelde, $\nabla \cdot B = 0$ eşitliğini de kullanmalıyız. Bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere, basit simetrilere sahip özel koşullardaki alanı bulmak için kullanılabilir.

13-5 Bir solenoid ve düz telin manyetik alanı; atomik akımlar

Ampère yasasını, bir telin etrafındaki manyetik alanı bularak gösterebiliriz. Önce şunu soralım: Silindirik bir kesite sahip uzun bir telin dışındaki alan nedir? Apaçık ortada olmayan, yine de doğru olan bir şeyi varsayacağız önce:

$\boldsymbol{B}$'nin alan çizgileri, tel etrafında kapalı daireler şeklindedir. Bu varsayımı yaptığımızda, Ampère yasası, Denk. (13.6) sayesinde bize alanın ne kadar şiddetli olduğunu söyler. Problem simetrik olduğundan, $\boldsymbol{B}$ telle eş merkezli çemberin üzerindeki her noktada aynı büyüklüğe sahiptir (*Bkz.* Şekil 13-7). $\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$'in çizgi integralini kolaylıkla alabiliriz; $\boldsymbol{B}$'nin büyüklüğü çarpı çevredir. r çemberin yarıçapıysa, o halde

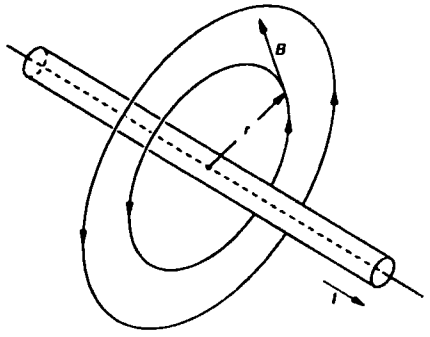
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = B \cdot 2\pi r$$

olur. İlmekten geçen akım sadece teldeki I akımıdır:

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

veya

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r} \tag{13.17}$$



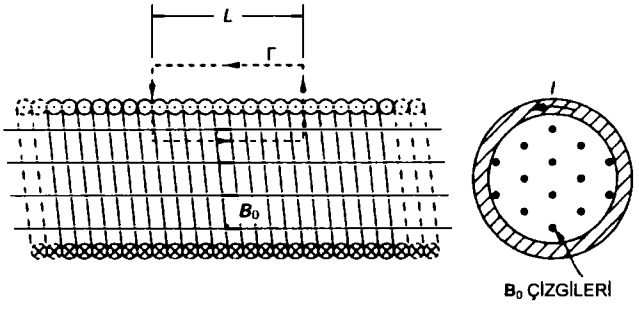
Şekil 13-7 I akımını taşıyan uzun bir telin dışındaki manyetik alan.

Manyetik alanın büyüklüğü, telin ekseninden olan uzaklık r'yle ters orantılı olarak düşer. İstersek, Denk. (13.17)'yi vektör biçiminde yazabiliriz. $\boldsymbol{B}$'nin her zaman $\boldsymbol{I}$ ve $\boldsymbol{r}$'ye dik olduğunu hatırladığımızda,

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{e}_r}{r} \tag{13.18}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ çarpanını ayırdık, çünkü çok sık görünüyor. Denklem (13.7), akımın birimini, diğer bir deyişle Amperi, *tanımlamak* için kullanıldığından bu değerin tam olarak 10^{-7} olduğunu hatırlamak önemlidir. Bir Amperlik bir akımdan bir metre uzaklıktaki manyetik alan 2×10^{-7} Weber bölü metre karedir.

Bir akım manyetik alan ürettiğinden dolayı, akım taşıyan yakındaki bir tele de kuvvet uygular. 1. Bölümde iki akım taşıyan tel arasındaki kuvvetlerden bahsetmiştik. Teller paralelse, her biri diğerinin $\boldsymbol{B}$ alanına dik açıdadır ve bu yüzden teller ya birbirlerine doğru ya da birbirlerinden uzağa itilmelidir. Akımlar aynı yönde olduğunda teller birbirini çeker; akımlar ters yöndeyse, akımlar birbirini iter.



Şekil 13-8 Uzun bir solenoidin manyetik alanı.

Alanla ilgili biraz daha bilgimiz olduğunda, Ampère yasasıyla analiz edilebilecek bir başka örneği ele alalım. Şekil 13-8'de kesitleri gösterildiği şekilde, sıkı bir sarmal şekilde sarılmış uzun bir bobinimiz olsun. Böyle bir bobine *solenoid* denir. Deneysel gözlemler gösteriyor ki, çapına göre çok uzun bir solenoidde dışardaki alan içerdeki alana göre çok küçüktür. Bu gerçeği ve Ampère yasasını kullanarak, içerdeki alanın büyüklüğünü hesaplayabiliriz.

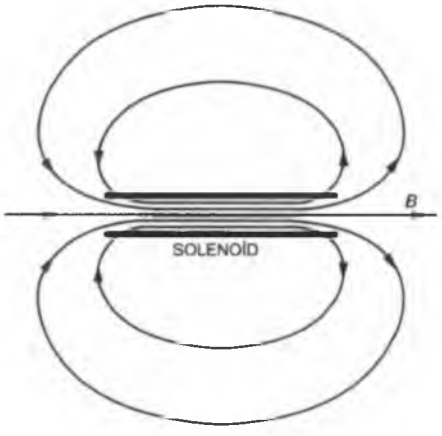
Alan içerde *kaldığından* (ve diverjansı da sıfır olduğundan), çizgileri eksenle paralel olmalıdır. Aynı, Şekil 13-8'de gösterildiği gibi. Bu durumda, şekilde gösterilen dikdörtgen Γ "eğrisi"yle Ampère yasasını kullanabiliriz. Bu ilmek, alanın B_0 olduğu yerde solenoid içinde L mesafesinde dolanır, daha sonra alana dik açılarda gider ve alanın göz ardı edilebilir olduğu dışarısı boyunca geri döner. Bu eğri için $\boldsymbol{B}$'nin çizgi integrali B_0L'dir ve Γ içinden geçen toplam akım

çarpı $1/\epsilon_0 c^2$ olmalıdır. Solenoidin L mesafesi boyunca N dolanım varsa, akım NI olur. Bu durumda

$$B_0 L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}$$

eşitliğini elde ederiz. Solenoidin *birim uzunluğu* boyunca sarım sayısına n dersek ($n = N/L$), aşağıdaki sonuca varırız:

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2} \tag{13.19}$$



Şekil 13-9 Solenoidin dışındaki manyetik alan.

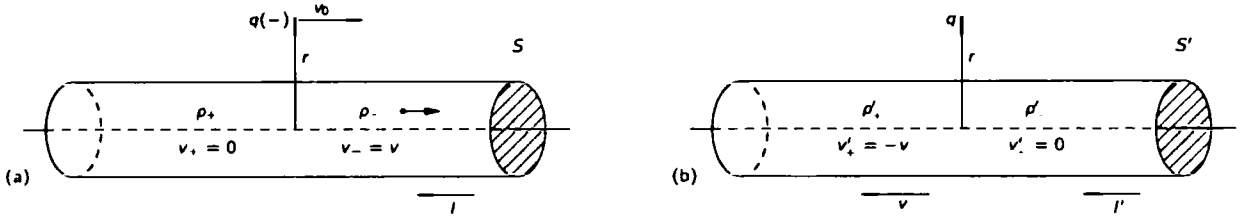
Peki, solenoidin sonuna gelindiğinde $\boldsymbol{B}$ çizgilerine ne olur? Muhtemelen, Şekil 13-9'da gösterildiği gibi, bir uçtan çıkıp diğer uçtan solenoide girerler. Bu tür bir alan çubuk bir mıknatısın dışında gözlemlenen alandır. Zaten bir mıknatıs nedir ki? Denklemlerimize göre, $\boldsymbol{B}$ alanı akımların varlığından kaynaklanır. Sıradan demir çubukların da (batarya veya jeneratör olmadan) manyetik alan üretebildiğini biliyoruz. Bu durumda, Denk. (13.12) veya (13.13)'ün sağ tarafında "manyetik demirin yoğunluğu"nu veya benzeri bir niceliği temsil eden bazı terimler olmasını bekleyebilirsiniz. Öyle bir terim yoktur ama. Kurama göre, demirin manyetik etkileri halihazırda $\boldsymbol{j}$ terimiyle gösterilen iç akımlardan kaynaklanmaktadır.

Temeline indiğinizde, madde çok karmaşıktır. Dielektriği kavramaya çalışırken bunu görmüştük. Şimdiki konudan sapmamak için, demir gibi manyetik malzemelerin iç işleyişlerinin detaylarına daha sonra değineceğiz. Şu an için bilmeniz gereken, bütün manyetizmanın akımlardan kaynaklandığı ve kalıcı bir mıknatısta kalıcı iç akımlar olduğu. Demiri ele alırsak, bu akımlar kendi eksenleri etrafında dönen elektronlardan gelir. Her elektronun, zayıf bir akıma karşılık gelen bir spini vardır. Bir elektron elbette çok fazla bir manyetik alan meydana getiremez, ancak unutmayın ki bir parça maddede bile milyarlarca ve milyarlarca elektron vardır. Normalde bu elektronların dönüşü her yöne olabilir, dolayısıyla net bir etki yoktur. Burada mucizevi olan, demir gibi bazı maddelerde bir kısım elektronun aynı yönde dönmeleridir. Demir için, her bir atomun iki elektronu bu işbirliğinde bulunur. Çubuk bir mıknatısta, aynı yönde dönen çok sayıda elektron vardır ve böylece net etkiler, ilerde göreceğimiz üzere, çubuk yüzeyi boyunca dolaşan bir akımdır. (Bu, dielektrikte bulduğumuza gayet benzerdir. Hani, düzgün kutuplanmış bir dielektriğin, yüzeyindeki yüklerin dağılımına özdeş olmasına.)

13-6 Elektrik ve manyetik alanların göreliliği

Bir yük üzerindeki manyetik kuvvetin o yükün hızıyla orantılı olduğunu söylediğimizde, içinizden şunları geçirmiş olabilirsiniz?: "Ne hızı? Hangi referans çerçevesinde?" Bu bölümün başında verdiğimiz $\boldsymbol{B}$ tanımına göre bu vektörün, yüklerin hızını tanımlamak için seçeceğimiz referans çerçevesine bağlı olacağı açıktır. Atladığımız şey, manyetik alanı tanımlarken uygun çerçevenin ne olduğuydu.

Herhangi bir eylemsizlik referans çerçevesinin işe yaradığı ortaya çıkmıştır. Daha sonra göreceğiz, manyetizma ve elektrik birbirlerinden bağımsız şeyler değildir. Daima, ikisi birden tam *bir* elektromanyetik alan olarak ele alınmalıdır. Her ne kadar, statik durum için Maxwell denklemleri elektrik ve manyetizma için iki ayrı çifte bölünmüşse de, doğada, görelilik ilkesinden dolayı bu iki olgu arasında gayet yakın bir ilişki vardır. Tarihsel olarak, görelilik ilkeleri Maxwell denklemlerinden sonra keşfedilmiştir. Einstein'ın ünlü görelilik ilkesini keşfetmesi, elektrik ve manyetizma üzerine çalışmalar sayesinde gerçekleşmiştir. Şimdi gelin, şu ana kadar görelilik hakkında öğrendiklerimizin, elektromanyetizmaya uygulanabiliyorsa, manyetik kuvvetler hakkında bize ne diyeceklerine bakalım.



Şekil 13-10 Akım taşıyan bir tel ile q yüküne sahip bir parçacık arasındaki etkileşimin iki çerçevede gösterimi. (a) S çerçevesinde tel, (b) S' çerçevesinde yük hareketsizdir.

Şekil 13-10'daki gibi, akım taşıyan bir tele paralel şekilde v_0 hızıyla hareket eden bir eksi yük olduğunda ne olduğunu bulmaya çalışalım. Ne olup bittiğini iki ayrı referans çerçevesinde anlamaya çalışacağız. Çerçevelerden biri, şeklin (a) kısmında gösterildiği gibi, tele göre sabit ve diğeri de, (b) kısmında gösterildiği gibi, parçacığa göre sabittir. İlk çerçeveye S ve ikincisine de S' diyelim.

S çerçevesinde parçacık üzerinde manyetik bir kuvvet olduğu açıktır. Kuvvet tele doğrudur: yük serbestçe hareket ediyor olsaydı onun tele doğru gittiğini görürdük. S' çerçevesindeyse parçacık üzerinde manyetik bir kuvvet etki edemez, çünkü hızı sıfırdır. Dolayısıyla, olduğu yerde kalır diyebilir miyiz? İki sistemdeki olayları birbirinden farklı mı görürdük? Görelilik ilkesine göre, S' çerçevesinde de parçacığın tele doğru yaklaştığını görmeliyiz. Gelin bunun neden olduğunu anlamaya çalışalım.

Akım taşıyan bir tele dair atomik tarifimize tekrar bakalım. Bakır gibi sıradan bir iletkende elektrik akımları, iletim elektronları denilen eksi elektronların hareketinden kaynaklanır. Artı nükleer yükler ve geri kalan elektronlar malzemenin içinde sabittir. İletim elektronlarının yük yoğunluğuna ρ_- ve S içindeki hızlarına v diyelim. S çerçevesindeki durağan haldeki yüklerin yoğunluğu ρ_+'dır. Yüksüz bir teli ele aldığımız için de yoğunluk ρ_-'ye eşit olmalıdır. Dolayısıyla telin dışında bir elektrik alan yoktur ve hareket eden parçacığa etki eden kuvvet sadece şudur:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}$$

Telin ekseninden r uzaklığındaki manyetik alanı bulmak için kullandığımız Denk. (13.18)'de bulduğumuz sonucu kullanırsak, parçacık üzerine etki eden kuvvetin tele doğru olduğunu ve büyüklüğünün de aşağıdaki gibi olduğunu çıkarırız:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iqv_0}{r}$$

Denklem (13.3) ve (13.5)'i kullanarak, I akımını $\rho_- vA$ şeklinde yazabiliriz. A telin kesit alanıdır. Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\,\rho_- A v v_0}{r} \tag{13.20}$$

Rastgele seçilmiş v ve v_0 hızları için genel durumu ele almaya devam edebiliriz; ancak bu, iletim elektronlarının hızının v ile parçacığın v_0 hızının aynı olduğu özel durumu ele almakla eşdeğerdir. $v_0 = v$ eşitliğini yazdığımızda, Denk. (13.20) şuna dönüşür:

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2} \tag{13.21}$$

Şimdi S' çerçevesinde, diğer bir deyişle parçacığın durağan ve telin de v hızıyla (şekilde sola doğru) hareket ettiği durumda ne olduğuna bakalım. Telle beraber hareket eden artı yükler, parçacık üzerinde bir $\boldsymbol{B}'$ manyetik alanı yaratacaktır. Parçacık hareketsiz olduğundan, üzerine etkiyen *manyetik* bir kuvvet yoktur. Parçacık üzerine etki eden bir kuvvet varsa, elektrik alandan dolayı olmalıdır. Hareket eden tel, elektrik bir alan yaratmış olmalıdır. Bu da ancak

yüklü göründüğünde mümkündür. Dolayısıyla akım taşıyan, yüksüz bir tel hareket ettiğinde yüklü görünür.

Buna daha detaylı bakmalıyız. S çerçevesinde bildiklerimizden yola çıkarak, S' çerçevesindeki telde bulunan yük yoğunluğunu hesaplamaya çalışmalıyız. Başta, bunların aynı olduğunu düşünebilirsiniz ancak biliyoruz ki (*Bkz.* I. Cilt, Bölüm 15) S ile S' arasında uzunluklar değişir; dolayısıyla hacimler de değişir. *Yük yoğunlukları, yükler tarafından kaplanan hacme bağlı olduğundan, yoğunluklar da değişecektir.*

S' çerçevesindeki yük yoğunluklarını hesaplamadan önce, yükler hareket ettiğinde, bir grup elektronun elektrik *yüküne* ne olduğunu bilmemiz lazım. Bir parçacığın görünür kütlesinin $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ olarak değiştiğini biliyoruz. Yükü de aynı şekilde değişir mi peki? Hayır! *Yükler* daima *aynıdır*, hareket etseler de etmeseler de. Öteki türlü olsaydı, toplam yükün korunduğunu gözleyemezdik.

Elimizde, başta yüksüz, bir iletken malzeme olduğunu varsayalım. Şimdi onu ısıtalım. Elektronların kütlesi protonunkilerden farklı olduğu için, elektronların ve protonların hızları farklı oranlarda değişecektir. Bir parçacığın yükü, onu taşıyan parçacığın hızına bağlıysa, ısıttığımız malzemedeki elektron ve proton yükleri artık dengede olmayacaktır. Bu durumda, bir malzeme ısıtıldığında, yüklenmiş olurdu. Daha önce gördüğümüz üzere, bir malzemedeki bütün elektronların yükündeki küçük bir değişim bile muazzam elektrik alanların oluşumuna yol açar. Bugüne kadar böyle bir etki gözlemlenmemiştir.

Bir başka dikkat edilmesi gereken nokta da, elektronların ortalama hızının malzemenin kimyasal bileşimine bağlı olduğudur. Bir elektron üzerindeki yük hızla değişseydi, bir malzemedeki net yük kimyasal bir tepkime sırasında değişirdi. Hesaplamalarımız göstermiştir ki, yükün hıza ufak da olsa bir bağlılığı olsaydı, en basit kimyasal tepkimelerde bile muazzam alanlar ortaya çıkardı. Böyle bir etki de bugüne kadar gözlemlenmemiştir. Böylece, tek bir parçacığın elektrik yükünün onun hareket durumundan bağımsız olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

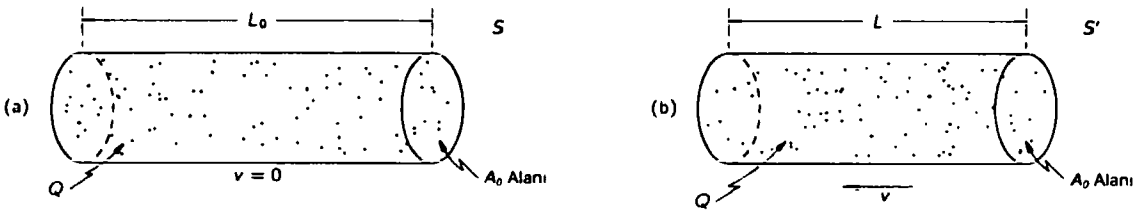
Dolayısıyla, bir parçacık üzerindeki q yükü değişmez bir skaler niceliktir: referans çerçevesinden bağımsızdır. Bu da, herhangi bir çerçevede, elektron dağılımının yük yoğunluğunun birim hacimdeki elektronların sayısıyla orantılı olduğu anlamına gelir. Tek dert etmemiz gereken, hacmin, boyutların görelilikle büzülmesinden dolayı değişimidir.

Şimdi bu elde ettiklerimizi hareket eden tele uygulayalım. Telin uzunluğuna L_0 ve içindeki *sabit* yüklerin yük yoğunluğuna da ρ_0 dersek, toplam yük $Q=\rho_0 L_0 A_0$ olur. Aynı yükler, v hızıyla hareket eden bir başka çerçeve içinde gözlemlenirse, aşağıdaki denklemle hesaplanmış daha *kısa* bir uzunluğa, ancak aynı A_0 alanına (harekete göre enlemesine boyutlar değişmediğinden) sahip bir malzeme içinde gözlemlenmiş olurlar (*Bkz.* Şekil 13-11):

$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{13.22}$$

Hareket eden çerçeve içindeki yüklerin yoğunluğuna ρ dersek, toplam Q yükü $\rho L A_0$ olur. Bu, aynı zamanda, $\rho_0 L_0 A_0$'ya eşit olmalıdır, çünkü farklı sistemlerdeki yük aynıdır. $\rho L = \rho_0 L_0$ veya Denk. (13.22)'den

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{13.23}$$



Şekil 13-11 Durağan, yüklü parçacıkların yük yoğunluğu ρ_0 ise, aynı yükler, v hızıyla hareket eden bir çerçeve içinde $\rho = \rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ yoğunluğuna sahip olacaktır.

elde ederiz. Hareket halindeki yük dağılımının yük yoğunluğu, bir parçacığın göreli kütlesinin değişimiyle aynı şekilde değişir.

Şimdi bu genel sonucu, telimizdeki artı yük yoğunluğu ρ_+ için kullanalım. Bu yükler, S çerçevesinde durağandır. Telin v hızıyla hareket ettiği S' çerçevesindeyse, artı yük yoğunluğu aşağıdaki gibi olur:

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.24}$$

Eksi yükler S' çerçevesinde durağandırlar. Bu yüzden bu çerçevede "durağan yoğunluk" ρ_0'ya sahiptirler. Denklem (13.23)'te $\rho_0 = \rho'_-$ eşitliği vardır, çünkü *tel* durağanken, eksi yükler v hızına sahipken, ρ_- yoğunluğuna sahiptirler. Böylece, iletim elektronları için,

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.25}$$

veya

$$\rho'_- = \rho_-\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{13.26}$$

eşitliklerini elde ederiz. Şimdi, neden S' çerçevesinde elektrik alanlar olduğunu biliyoruz. Çünkü bu çerçevede telin aşağıdaki denklemle verilen net bir ρ' yük yoğunluğu vardır:

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-$$

Denklem (13.24) ve (13.26)'yı kullanarak da, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_-\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Durağan tel nötr olduğundan, $\rho_- = -\rho_+$ eşitliği vardır. Böylece aşağıdaki sonucu buluruz:

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.27}$$

Hareket eden telimiz artı yüklüdür ve dışardaki durağan parçacık üzerinde E' elektrik alanı üretir. Daha önce, düzgün yüklü bir silindire dair elektrostatik problemi çözmüştük. Silindirin ekseninden r uzaklıktaki elektrik alan

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.28}$$

olur. Eksi yüklü parçacık üzerine etki eden kuvvet tele doğrudur. Elimizde en azından, her iki çerçevede de aynı yönde olan bir kuvvet var. S' çerçevesindeki elektrik kuvveti, S çerçevesindeki manyetik kuvvetle aynı yöndedir.

S' çerçevesindeki kuvvetin büyüklüğünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{\rho_+ A}{r}\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.29}$$

F' için bu sonucu, Denk. (13.21)'den F için elde ettiğimiz sonuçla karşılaştırırsak, kuvvetlerin büyüklüklerinin her iki çerçevede de neredeyse benzer olduğunu görürüz. Aslında, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.30}$$

Dolayısıyla, ele aldığımız düşük hızlarda her iki kuvvet birbirine eşittir. Manyetizma ve elektrik için, en azından düşük hızlarda, aynı şeyin iki farklı görünüşü olduğunu söyleyebiliriz.

Daha da güzeli, bir sistemden diğerine geçtiğimizde, *kuvvetlerin* de dönüştüğünü göz önüne alırsak, aynı şeyin iki farklı görünüşünün hız için aynı *fiziksel* sonucu verdiğini görürüz.

Bunu anlamak için şöyle bir soru sorabiliriz: Üzerine bir süre etkiyen kuvvetten sonra, parçacığın enine momentumu ne olacaktır? I. Cilt, 16. Bölümden biliyoruz ki, bir parçacığın enine momentumu S ve S' çerçevelerinde aynı olmalıdır. Enine eksene y dersek, karşılaştırmak istediğimiz Δp_y ve $\Delta p'_y$'dir. Hareketin, göreleliğe göre düzeltilmiş denklemi $F = dp/dt$'yi kullandığımızda, Δt zaman kadar sonra parçacığın S sisteminde Δp_y kadar bir enine momentumu olmasını bekleriz:

$$\Delta p_y = F\,\Delta t \tag{13.31}$$

S' sistemindeyse enine momentumu

$$\Delta p'_y = F'\,\Delta t' \tag{13.32}$$

olacaktır. Elbette, karşılıklı Δt ve $\Delta t'$ zamanları için Δp_y ve $\Delta p'_y$'nü karşılaştırmalıyız. I. Cilt, 15. Bölümde gördük ki, *hareket halindeki* parçacıklar için zaman aralıkları, parçacığın durağan haline göre daha uzun (yavaş) görünmekte. Başlangıçta parçacığımız S' çerçevesinde durağan olduğundan, küçük Δt için,

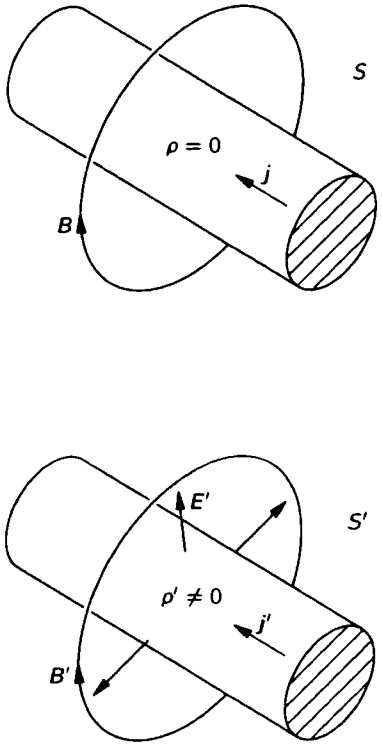
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.33}$$

yazabiliriz. Her şey Denk. (13.31) ve (13.32)'den açıklığa kavuşur:

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F'\,\Delta t'}{F\,\Delta t}$$

Bu yukarıdaki de, Denk. (13.30) ve (13.33)'ü birleştirdiğimizde 1 olur.

Böylece, tele göre durağan bir koordinat sisteminde veya parçacığa göre durağan bir sistemde bir tel boyunca hareket eden parçacığın hareketini analiz ettiğimizde aynı sonuca vardığımızı görmüş olduk. İlkinde kuvvet yalnızca "manyetik"ti, ikincisindeyse yalnızca "elektriksel". Her iki sistem de Şekil 13-12'de gösterilmiştir. Her ne kadar ikinci çerçevede hâlâ bir B' manyetik alanı olsa da, durağan parçacık üzerinde bir kuvvet meydana getirmez.



Şekil 13-12 S çerçevesinde yük yoğunluğu sıfırdır ve akım yoğunluğu da j'dir. Sadece manyetik alan vardır. S' çerçevesinde, ρ' yük yoğunluğu ve farklı bir akım yoğunluğu olan j' vardır. Manyetik alan B' farklıdır ve E' elektrik alanı vardır.

Başka bir koordinat sistemi seçmiş olsaydık, E ve B alanlarının farklı bir karışımıyla karşılaşırdık. Elektrik ve manyetik kuvvetler, *aynı* fiziksel olgunun parçalarıdır: parçacıkların elektromanyetik etkileşimleri. Bu etkileşimin elektrik ve manyetik parçalara ayrımı, tanım için seçilen referans çerçevesine dayanır. Elektromanyetizmanın tam bir tanımıysa değişmezdir: elektrik ve manyetizma, ikisi beraber, Einstein'ın görelilik kuramıyla tutarlılık içindedir.

Seçtiğimiz referans çerçevesine göre elektrik ve manyetik alanlar farklı karışımlarda gözüktüğünden, E ve B'ye nasıl baktığımız konusunda dikkatli olmalıyız. Örneğin, E ve B'nin "çizgilerini" düşündüğümüzde, onlara çok bir gerçeklik atfetmemeliyiz. Bir başka koordinat sisteminde gözlemlemeye çalıştığımızda çizgiler gözden kaybolabilir. Örneğin, S' çerçevesinde elektrik alan çizgileri vardır ve onlar için "S çerçevesinde, yanımızdan v hızıyla geçip giderler" *diyemeyiz*. S çerçevesinde hiç elektrik alanı yoktur! Bu yüzden, şu diyeceğimiz anlamsızlaşır: Bir mıknatısı hareket ettirdiğimde, mıknatıs alanı da alır götürür, o zaman B çizgileri de hareket etmiştir. "Hareket eden çizginin hızı" fikrinin anlamlandırmamız mümkün değildir. Alanlar, uzaydaki bir noktada ne olup bittiğini bizim tarif etme biçimimizdir. E ve B bize, hareket eden bir parçacığın üzerine etki eden kuvvetleri anlatır. "*Hareket eden* bir manyetik alandan dolayı bir parçacığa etki eden kuvvet nedir?" sorusu kesin bir şey ifade etmez. Kuvvet, E ve B'nin yükteki değerleriyle belirlenir ve Denk. (13.1), E veya B'nin *kaynağı* hareket halinde diye değişmez. Hareketin değiştirdiği, E ve B'nin değerleridir. Matematiksel tanımımız alanları *bir eylemsizlik çerçevesine göre* x, y, z ve t'nin fonksiyonu olarak tanımlar.

Daha sonra "boşlukta hareket eden, elektrik ve manyetik alanların *dalgası*"ndan bahsedeceğiz, buna verilebilecek bir örnek ışık dalgasıdır. Bu, *dalgayı*

sanki bir tel üzerinde hareket ediyormuş gibi ifade etmektir. Burada demek istediğimiz, *telin* bir kısmının dalgayla aynı yönde ilerlediği değildir. Demek istediğimiz, telin *yerdeğişiminin* önce bir yerde sonra bir başka yerde bulunur gibi gözüktüğüdür. Benzer şekilde, bir elektromanyetik dalgada, *dalga* hareket eder; fakat alanların büyüklüğü *değişir*. Dolayısıyla gelecekte ben veya bir başkası "hareket eden" bir alandan bahsederse, bazı koşullar altında değişen bir alanı tanımlamaya çalıştığımızı düşünmelisiniz.

13-7 Akımların ve yüklerin dönüşümü

Yukarıda, parçacık ve tel içindeki iletim elektronları için aynı v hızını alarak yaptığımız basitleştirme sizi biraz düşündürmüş olabilir. Geriye dönüp, analizimizi iki farklı hız için tekrar edebiliriz; ancak yük ve akım yoğunluklarının bir dörtlü vektörün bileşenleri olduğunu (*Bkz.* I. Cilt, 17. Bölüm) işaret etmek daha kolay.

Durağan bir çerçevedeki yüklerin yoğunluğu ρ_0 ise, içinde $\boldsymbol{v}$ hızıyla hareket ettikleri bir çerçevedeki yoğunlukları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

O çerçevedeki akım yoğunluğu da aşağıdaki gibi olur:

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} = \frac{\rho_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13.34}$$

$\boldsymbol{v}$ hızıyla hareket eden bir parçacığın U enerjisi ve $\boldsymbol{p}$ momentumunun aşağıdaki denklemlerle hesaplanabildiğini şimdi biliyoruz:

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Denklemlerdeki m_0 durağan kütledir. U ve $\boldsymbol{p}$'nin göreceli bir dörtlü vektör oluşturduğunu da biliyoruz. ρ ve $\boldsymbol{j}$, aynı U ve $\boldsymbol{p}$ gibi, $\boldsymbol{v}$ hızına dayandığından, ρ ve $\boldsymbol{j}$'nin de göreceli bir dörtlü vektörün bileşenleri olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bu özellik, herhangi bir hızda hareket eden bir telin alanının genel analizi için önemlidir. Böyle bir analize, iletim elektronlarının hızından farklı bir $\boldsymbol{v}_0$ hızıyla hareket eden bir parçacık problemini çözmek istersek ihtiyaç duyarız.

ρ ve j'yi, x yönünde u hızıyla hareket eden bir koordinat sistemi için dönüştürmek istersek, aynı t ve (x, y, z) gibi dönüştüklerini bildiğimiz için (*Bkz.* I. Cilt, 15. Bölüm) aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
y' &= y, & j'_y &= j_y, \\
z' &= z, & j'_z &= j_z, \\
t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \rho' &= \frac{\rho - u j_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}
\end{aligned} \tag{13.35}$$

Bu denklemler sayesinde, farklı çerçevelerdeki akımları ve yükleri birbirleriyle ilişkilendirebiliriz. Herhangi bir çerçevedeki akımları ve yükleri ele alıp, o çerçevedeki elektromanyetik problemi Maxwell denklemleriyle çözebiliriz. *Parçacıkların hareketine dair* edindiğimiz sonuç, seçtiğimiz çerçeveden bağımsız olarak aynı olacaktır. Elektromanyetik alanların göreli dönüşümlerine daha sonra değineceğiz.

13-8 Üst üste binme; sağ el kuralı

Bu bölümü, manyetostatik konusuna dair iki ilave nokta üzerinde durarak bitireceğiz. Birincisi, manyetik alanlar için temel denklemleriniz $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{j}$'de doğrusaldır:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/c^2\epsilon_0$$

Bunun anlamı, üst üste binme ilkesinin manyetik alanlar için de geçerli olduğudur. İki farklı kararlı akım tarafından üretilen alan, her bir akım tarafından üretilmiş bağımsız alanların toplamıdır. İkinci noktamız, daha önce karşılaştığımız sağ el kurallarıyla (bir akım tarafından üretilen manyetik alan için olan gibi) ilgilidir. Demir bir mıknatısın mıknatıslanmasının da malzeme içindeki elektronların spiniyle anlaşılabileceğini görmüştük. Bir elektronun spininden kaynaklanan manyetik alanın yönü, aynı sağ el kuralıyla, spin ekseniyle ilgilidir. $\boldsymbol{B}$ –ister büküm, ister çarpım ürünü içersin– "el" kuralıyla belirlendiğinden, *eksenel* vektör olarak bilinir. Yönleri herhangi bir sağ el, sol el kuralına veya bir referansa dayanmayan vektörlere *kutupsal* vektörler denir. Örneğin yerdeğiştirme, hız, kuvvet ve $\boldsymbol{E}$ kutupsal vektörlerdir.

Elektromanyetizmada *fiziksel olarak gözlemlenebilir* niceliklerse, ne sağ ellidir ne de sol ellidir. Elektromanyetik etkileşimler, yansıma altında (*Bkz.* I. Cilt, 52. Bölüm) simetriktirler. İki akım kümesi arasındaki manyetik kuvvetleri her hesapladığımızda, sonuç bir el kuralındaki değişime göre değişmezdir. Denklemlerimiz, sağ el kuralından bağımsız olarak, paralel akımların birbirini çektiğini ve ters yöndeki akımların birbirini ittiğini gösterir. Çekim veya itme kutupsal vektördür. Bunun nedeni, bir etkileşimi tanımlarken sağ el kuralını iki kere kullanmamızdandır. Bir kere akımlardan kaynaklanan $\boldsymbol{B}$'yi bulmak için, sonra da $\boldsymbol{B}$'nin ikinci akım üzerine etki ettirdiği kuvveti bulmak için. Sağ el kuralını iki kere kullanmak, sol el kuralını iki kere kullanmak gibidir. Bütün terimlerimizi sol elli sistem için uyarlayacak olsak, bütün $\boldsymbol{B}$ alanları tersine dönerdi; fakat bütün kuvvetler –veya daha da ilgili olarak, nesnelerin gözlemlenen ivmelenmeleri– aynı kalırdı.

Her ne kadar son zamanlarda fizikçiler, sürpriz şekilde, *bütün* fizik yasalarının küçük yansımalar için değişmez olmadığını keşfettilerse de, elektromanyetizma yasaları bu temel simetriye sahiptir.

14

ÇEŞİTLİ DURUMLARDA MANYETİK ALAN

14-1 Vektör potansiyeli

14-1 Vektör potansiyeli
14-2 Bilinen akımların vektör potansiyeli
14-3 Düz bir tel
14-4 Uzun bir solenoid
14-5 Küçük bir ilmeğin alanı, manyetik dipol
14-6 Bir akımın vektör potansiyeli
14-7 Biot ve Savart yasası

Bu bölümde, kararlı akımlarla ilişkili manyetik akımlar üzerine –manyetostatik konusu– tartışmamıza devam edeceğiz. Manyetik alan ile elektrik akımlarının ilişkisi şu temel denklemlerle ortaya konmuştur:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14.1}$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{14.2}$$

Şimdi gelin bu denklemleri matematiksel olarak *genel* bir yolla çözelim; herhangi bir özel simetriye veya sezgisel bir tahmine ihtiyaç duymadan. Elektrostatikte, tüm elektriksel yüklerin konumları bilindiğinde alanı bulmanın düz bir prosedürü olduğunu bulmuştuk: Bütün yükler üzerinden, aynı Denk. (4.25)'teki gibi, integral alarak ϕ skaler potansiyelini elde edebilirsiniz. Elektrik alanı hesaplamak istediğinizde, ϕ'nin türevlerini kullanırsınız. Şimdiyse, tüm hareket eden yüklerin yük yoğunluğu j'yi bildiğimizde $\boldsymbol{B}$ manyetik alanını bulmanın yolunu göstereceğiz.

Elektrostatik üzerine çalışırken gördük ki, $\boldsymbol{E}$'nin bükümü her zaman sıfır olduğundan, $\boldsymbol{E}$'yi ϕ skaler alanının gradyanı olarak göstermek mümkündür. $\boldsymbol{B}$'nin bükümü her zaman sıfır *olmadığından*, onu genel olarak bir gradyan olarak göstermek mümkün değildir. Bununla birlikte, $\boldsymbol{B}$'nin *diverjansı* daima sıfırdır ve bu da $\boldsymbol{B}$'yi her zaman bir başka vektör alanının *bükümü* olarak gösterebileceğimiz anlamına gelir. Bölüm 2-8'de gördüğümüz üzere, bir bükümün diverjansı daima sıfırdır. Dolayısıyla, $\boldsymbol{B}$ ile $\boldsymbol{A}$ diye adlandıracağımız bir alanı her zaman ilişkilendirebiliriz:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.3}$$

Bileşenlerine ayıracak olursak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= (\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \tag{14.4}$$

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ eşitliğini yazmak, aşağıdaki eşitlik gereği, Denk. (14.1)'i de sağlar:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

$\boldsymbol{A}$ alanına *vektör potansiyeli* denir.

Hatırlarsanız, skaler potansiyeli ϕ bu tanımla tam olarak nitelendirilememişti. Bir problem için ϕ bulduysak, bir sabit eklenmesiyle aynı derecede iyi bir başka ϕ' potansiyeli her zaman bulabiliriz ve

$$\phi' = \phi + C$$

yazabiliriz. Gradyan ∇C sıfır olduğundan, yeni ϕ' potansiyeli aynı elektrik alanları verir. ϕ ve ϕ' aynı fiziği temsil ederler.

Benzer şekilde, aynı manyetik alanları veren farklı $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyelleri de elde edebiliriz. $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$'nın diferansiyelini alarak bulunduğundan $\boldsymbol{A}$'ya bir sabit eklemek fiziksel olarak bir şey değiştirmez. $\boldsymbol{A}$ için daha fazla tolerans bile vardır. $\boldsymbol{A}$'ya, bir skaler alanın gradyanı olan herhangi bir alanı ekleyebilir ve fizi-

ğin yine değişmediğini görebiliriz. Bunu gösterelim şimdi: Diyelim ki elimizde, gerçek bir durum için doğru şekilde $\boldsymbol{B}$ manyetik alanını veren bir $\boldsymbol{A}$ olsun ve hangi başka koşullarda yeni bir $\boldsymbol{A}'$ vektör potansiyelinin, Denk. (14.3)'e konduğunda, *aynı* $\boldsymbol{B}$ alanını verdiğini soralım. $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{A}'$ aynı büküme sahip olmalıdırlar:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Dolayısıyla

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' - \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) = 0$$

olur. Bir vektörün bükümü sıfırsa, bir skaler alanın gradyanı olmalıdır. Bu skaler alana ψ dersek, $\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} = \nabla\psi$ eşitliğini elde ederiz. Bu da, $\boldsymbol{A}$ bir problem için uygun bir vektör potansiyeliyse, herhangi bir ψ için şu eşitliği yazabileceğimiz anlamına gelir:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi \tag{14.5}$$

Bu $\boldsymbol{A}'$, eşdeğer uygunlukta bir vektör potansiyelidir ve bir $\boldsymbol{B}$ alanına yol açar.

Çoğu zaman, $\boldsymbol{A}$'dan bir miktar "serbestlik" alıp, yerine başka bir koşul koymak uygun olur. Tıpkı, uzak mesafelerde ϕ potansiyelini sıfır yapmayı uygun bulduğumuz gibi. Örneğin, $\boldsymbol{A}$'nın diverjansının ne olması gerektiğini rastgele seçerek $\boldsymbol{A}$'yı sınırlandırabiliriz. Bunu her zaman, $\boldsymbol{B}$'yi etkilemeden yapabiliriz. Bunun nedeni, her ne kadar aynı büküme sahip olup, aynı $\boldsymbol{B}$'yi verseler de; $\boldsymbol{A}'$ ve $\boldsymbol{A}$'nın aynı diverjansa sahip olmaları gerekmediğindendir. Aslında, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla^2\psi$ eşitliği vardır ve uygun bir şekilde ψ değeri seçerek, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}'$ terimiyle istediğimiz şey yapabiliriz.

$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ için ne seçmeliyiz? Seçimimiz elimizdeki probleme uygun olmalı ve en büyük matematiksel uygunluğu elde etmeliyiz. *Manyetostatik* için, şu basit seçimi yapacağız:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{14.6}$$

(Daha sonra elektrodinamik konusuna eğildiğimizde, seçimimizi değiştireceğiz.) $\boldsymbol{A}$'ya dair tam tanımımız,* şu an için $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ve $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$'dır.

Vektör potansiyeliyle ilgili deneyim kazanmak için, öncelikle düzgün bir $\boldsymbol{B}_0$ manyetik alanı için ne olduğuna bakalım. z eksenimizi $\boldsymbol{B}_0$ yönünde seçersek, şunları elde ederiz:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0 \end{aligned} \tag{14.7}$$

Bu denklemlerin bir olası çözümü şudur:

$$A_y = xB_0 \qquad A_x = 0 \qquad A_z = 0$$

Ya da buna denk olarak aşağıdakini yazabiliriz:

$$A_x = -yB_0 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$

Bir başka çözüm de, bu ikisinin doğrusal bileşimidir:

$$A_x = -\tfrac{1}{2}yB_0 \qquad A_y = \tfrac{1}{2}xB_0 \qquad A_z = 0 \tag{14.8}$$

Açıkça görülüyor ki, herhangi bir $\boldsymbol{B}$ alanı için, vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$ tekil değildir; birçok olasılık vardır.

---

* Tanımımız hâlâ $\boldsymbol{A}$'yı özgün şekilde belirlememekte. *Özgün* bir tarif için $\boldsymbol{A}$'nın bazı sınır durumlarda veya uzak mesafelerde nasıl davrandığı hakkında da bir şeyler dememiz gerekir. Örneğin, uzak mesafelerde sıfıra inen bir alan seçmek bazen uygundur.

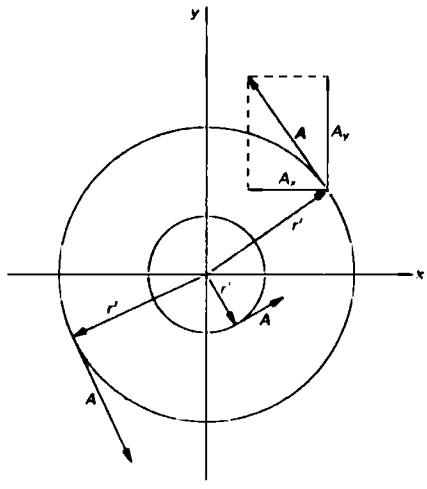
Üçüncü çözüm, Denk. (14.8), birçok ilginç özelliğe sahiptir. x bileşeni $-y$'yle ve y bileşeni de $+x$'le orantılı olduğundan, $\boldsymbol{A}$, z ekseninden gelen $\boldsymbol{r}'$ vektörüne dik açılarda olmalıdır. Vektör ismindeki "üs", bize vektör yerdeğişiminin başlangıçtan olmadığım hatırlatmak içindir. Ayrıca, $\boldsymbol{A}$'nın büyüklüğü $\sqrt{x^2+y^2}$'yle ve dolayısıyla r' değeriyle orantılıdır. Bu durumda, $\boldsymbol{A}$ (bizim düzgün alanımız için), basitçe şu şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{A} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{r}' \tag{14.9}$$

Vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$, $B_0 r'/2$ büyüklüğüne sahiptir ve z ekseni etrafında Şekil 14-1'de görüldüğü gibi döner. Örneğin, $\boldsymbol{B}$ alanı bir solenoidin içindeki eksenel alansa, vektör potansiyeli aynı solenoidin akımları gibi dolaşır.

Düzgün bir alan için vektör potansiyeli başka bir şekilde de elde edilebilir. Herhangi bir Γ kapalı ilmeğindeki $\boldsymbol{A}$ dolaşımı, Stokes teoremi (Denklem 3.38) ve $\nabla \times \boldsymbol{A}$ yüzey integraliyle ilişkilendirilebilir:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma \text{ içinde}} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot n\,da \tag{14.10}$$



Şekil 14-1 z yönündeki bir $\boldsymbol{B}$ manyetik alanı, z-ekseni etrafında dönen ve büyüklüğü $A = Br'/2$ (r' z-eksenine olan uzaklıktır) olan bir $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyeline denk gelir.

Sağdaki integral ilmek içinden geçen $\boldsymbol{B}$ akısına eşittir:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\Gamma \text{ içinde}} \boldsymbol{B} \cdot n\,da \tag{14.11}$$

Diğer bir deyişle, *herhangi* bir ilmek etrafındaki $\boldsymbol{A}$ dolaşımı ilmek içinden geçen $\boldsymbol{B}$ akısına eşittir. Düzgün $\boldsymbol{B}$ alanına dik bir düzlemde, yarıçapı r' olan çembersel bir ilmeği ele alırsak, akı

$$\pi r'^2 B$$

ifadesine eşit olur. Eğer başlangıç noktamızı simetri ekseni üzerinde seçersek, $\boldsymbol{A}$'yı sadece r''nün fonksiyonu olacak şekilde çevresel düşünebiliriz. Bu durumda dolaşım aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B$$

Dolayısıyla, önceki gibi aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\boldsymbol{A} = \frac{Br'}{2}$$

Az önce verdiğimiz örnekte, vektör potansiyelini manyetik alandan yola çıkarak hesapladık ki normalde bunun tersi yapılır. Karmaşık problemlerde önce vektör potansiyelini çözüp, daha sonra ondan manyetik alanı belirlemek genelde daha kolaydır. Şimdi bunun nasıl yapıldığını göstereceğiz.

14-2 Bilinen akımların vektör potansiyeli

$\boldsymbol{B}$ akımlarca belirlendiği gibi, $\boldsymbol{A}$ da akımlarca belirlenir. $\boldsymbol{A}$'yı akımlar cinsinden bulmak istiyoruz. Temel denklemimiz (14.2)'yle başlayalım:

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$$

Bu da, elbette,

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{14.12}$$

anlamına gelir. Bu, yukarıdaki denklem manyeto statik için ne anlama geliyorsa, aşağıdaki denklem de elektrostatik için aynı anlama gelir:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{14.13}$$

Vektör potansiyeli için yazdığımız Denk. (14.12), ϕ için, Denk. (2.58)'deki vektör özdeşliğini kullanarak $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$'yı yeniden yazarsak daha da çok vektör potansiyeline benzemektedir:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{14.14}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ olmasını seçtiğimiz için (şimdi nedenini anlayacaksınız), Denk. (14.12) aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{14.15}$$

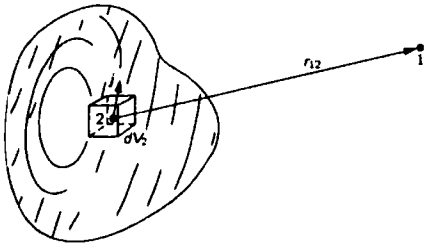
Bu vektör denklemi, elbette aşağıdaki üç denklem demektir:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2} \qquad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2} \qquad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2} \tag{14.16}$$

Bu üç denklem de *matematiksel* olarak aşağıdaki eşitliğe denktir:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{14.17}$$

Potansiyelleri, ρ bilindiğinde çözmek için öğrendiğimiz her şey, j bilindiğinde A'nın her bir bileşenini çözmek için kullanılabilir.



Şekil 14-2 1 noktasındaki A vektör potansiyeli, 2'deki her noktada jdV akım elemanları üzerinden alınan integralle belirlenir.

4. Bölümde görmüştük ki, elektrostatik Denk. (4.17) için genel bir çözüm aşağıdaki gibidir:

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}$$

Dolayısıyla, A_x için genel bir çözüm de,

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2)dV_2}{r_{12}} \tag{14.18}$$

olur. Elbette, A_y ve A_z için de aynısı geçerlidir. (Şekil 14-2 size r_{12} ve dV_2 için gösterimlerimizi hatırlatır.) Bu üç çözümü vektör biçiminde birleştirebiliriz:

$$\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\boldsymbol{j}(2)dV_2}{r_{12}} \tag{14.19}$$

(Dilerseniz, bileşenlerin doğrudan diferansiyelini alarak, $\boldsymbol{A}$ için bu integralin $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ olduğu müddetçe $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ koşunu sağladığını doğrulayabilirsiniz. Bu, daha önce gördüğümüz üzere, kararlı akımlar için doğru olmalıdır.)

Böylece, kararlı akımların manyetik alanı için genel bir yöntem geliştirmiş olduk. İlkemiz şu: j akım yoğunluğundan kaynaklanan vektör potansiyelinin x bileşeni, j_x/c^2'ye eşit ρ yük yoğunluğundan kaynaklanan ϕ elektrik potansiyeline eşittir. Aynı ilke, y ve z bileşenleri için de geçerlidir. (Bu ilke sadece sabit yönlerde işe yarar. Örneğin, $\boldsymbol{A}$'nın "radyal bileşen" $\boldsymbol{j}$'nin "radyal" bileşeniyle aynı şekilde çıkmaz.) Dolayısıyla, j vektör akım yoğunluğundan, Denk. (14.19)'u kullanarak $\boldsymbol{A}$'yı bulabiliriz. Şöyle ki, $\boldsymbol{A}$'nın her bir bileşenini $\rho_1 = j_x/c^2$, $\rho_2 = j_y/c^2$ ve $\rho_3 = j_z/c^2$ yük dağılımları için üç hayali elektrostatik problemi kullanarak bulabiliriz. Daha sonra, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ değerini elde etmek için, $\boldsymbol{A}$'nın çeşitli türevlerini alarak $\boldsymbol{B}$'yi elde ederiz. Elektrostatikten biraz daha karışıktır, ancak mantık aynıdır. Şimdi, bu kuramı birkaç özel durum için vektör potansiyelini çözerek gösterelim.

14-3 Düz bir tel

İlk örneğimiz için, yine düz bir telin alanını bulacağız. a yarıçaplı, I kararlı akımı taşıyan uzun, düz bir telimiz olsun. Elektrostatikteki, bir iletken üzerindeki yük dağılımının aksine, bir teldeki kararlı akım telin kesiti boyunca düzgün şekilde dağılmıştır. Koordinatlarımızı Şekil 14-3'teki gibi seçersek, akım yoğunluk vektörü $\boldsymbol{j}$'nin sadece z bileşeni vardır ve büyüklüğü de tel içinde

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \tag{14.20}$$

ve tel dışında sıfırdır.

Hem j_x, hem de j_y sıfır olduğundan, şu aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$A_x = 0, \qquad A_y = 0$$

A_z değerini hesaplamak için, düzgün yük yoğunluğu $\rho = j_z/c^2$'ye sahip bir telin elektrostatik potansiyeli ϕ'yi bulmak için kullandığımız çözümü kullanabiliriz. Sonsuz yüklü bir silindirin dışındaki noktalar için, elektrostatik potansiyel, $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve λ, $\pi a^2 \rho$ birim uzunluğu boyuna düşen yükken, aşağıdaki şekilde hesaplanır:

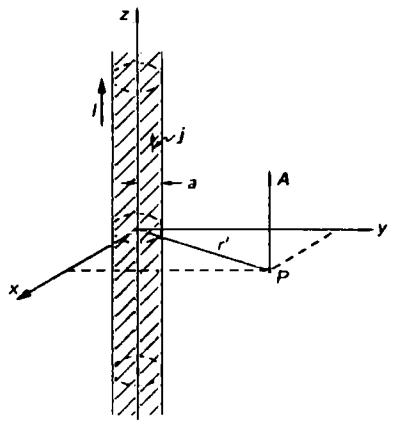
$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r'$$

Dolayısıyla, A_z, düzgün akım taşıyan uzun bir telin dışındaki noktalar için

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'$$

olmalıdır. $\pi a^2 j_z = I$ olduğundan, şunu da yazabiliriz:

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r' \qquad (14.21)$$



Şekil 14-3 Düzgün j akım yoğunluğuna sahip, z-ekseni boyunca uzanan uzun, silindirik bir tel.

Şimdi, Denk. (14.4)'ü kullanarak B'yi bulabiliriz. Altı türev içinde, sadece ikisi sıfır değildir. Böylece aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2} \qquad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2} \qquad (14.23)$$

$$B_z = 0$$

Daha önce elde ettiğimiz sonucu bulmuş olduk: B tel etrafında daire çizer ve büyüklüğü de aşağıdaki gibidir:

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'} \qquad (14.24)$$

14-4 Uzun bir solenoid

Şimdi, yüzeyindeki birim uzunlukta çevresel nI akımı bulunan sonsuz uzun bir solenoidi ele alalım yine. (Telin birim uzunluğunda, I akımı taşıyan n adet sarım olduğunu varsıyor ve sarımdan kaynaklanan hafif aralıkları ihmal ediyoruz.)

Nasıl ki daha önce bir "yüzey yük yoğunluğu" σ tanımladıysak, burada da bir "yüzey akım yoğunluğu" J tanımlayacağız. Yüzey akım yoğunluğu, solenoidin yüzeyindeki birim uzunluk başına düşen akıma (zaten o da, doğal olarak, ortalama j ile ince sarımın kalınlığının çarpımıdır) eşittir. J'nin büyüklüğü, burada, nI'dır. Bu yüzey akımının (*Bkz.* Şekil 14-4) bileşenleri

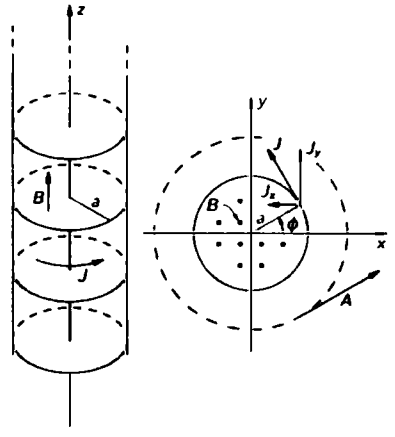
$$J_x = -J \sin\phi, \qquad J_y = J \cos\phi, \qquad J_z = 0$$

olur. Şimdi, böyle bir dağılım için A'yı hesaplamalıyız.

Öncelikle, solenoidin dışındaki noktalar için A_x'i hesaplayalım. Sonuç, yüzey yük yoğunluğuna sahip bir silindirin dışındaki elektrostatik potansiyelle aynıdır:

$$\sigma = \sigma_0 \sin\phi$$

Burada $\sigma_0 = -J/c^2$'dir. Böyle bir yük yoğunluğu için çözüm bulmamıştık; ancak benzer bir şey yapmıştık. Bu yük dağılımı, biri artı ve biri eksi yüklü, eksenleri y yönüne doğru hafif yerdeğiştirmiş iki *katı* yüklü silindire eşittir. Bu tür silindir çiftlerinin potansiyeli, tek bir düzgün yüklü silindirin potansiyelinin y'ye



Şekil 14-4 J yüzey akım yoğunluğuna sahip uzun bir solenoid.

göre türeviyle orantılıdır. Orantı sabitini oturup hesaplayabiliriz, ancak şimdilik pas geçelim.

Yüklü bir silindirin potansiyeli ln r' ile orantılıdır. Bu durumda, bir çiftin potansiyeli aşağıdaki gibi olur:

$$\phi \propto \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}$$

Ayrıca aşağıdaki eşitliğin de doğru olduğunu biliyoruz:

$$A_x = -K\frac{y}{r'^2} \tag{14.25}$$

Buradaki K bir sabittir. Aynı akıl yürütmeyle,

$$A_y = K\frac{x}{r'^2} \tag{14.26}$$

eşitliğini de buluruz. Her ne kadar daha önce, bir solenoidin dışında hiç *manyetik* alan olmadığını söylediysek de, şimdi gördük ki z-ekseni etrafında dolaşan bir $\boldsymbol{A}$ alanı vardır. Aynı, Şekil 14-4'te görüldüğü gibi. Sorulması gereken soru şudur: Bükümü sıfır mıdır?

B_x ve B_y'nin sıfır olduğu açıktır. Bir de

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{x}{r'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-K\frac{y}{r'^2}\right)$$

$$= K\left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4}\right) = 0$$

Diğer bir deyişle, çok uzun bir solenoidin dışındaki manyetik alan gerçekten de sıfırdır. Vektör potansiyeliyse sıfır değildir.

Bildiğimiz bir şeyle karşılaştırarak, sonucumuzu teyit edebiliriz: Solenoid etrafındaki vektör potansiyelinin dolaşımı, bobin içindeki $\boldsymbol{B}$'nin akısına eşit olmalıdır (Denklem 14.11). Dolaşım $A \cdot 2\pi r'$ veya, $A = K/r'$ olduğundan $2\pi K'$dir. Dikkat ederseniz, r' değeriyle bir ilgisi yoktur dolaşımın. Bu, aynı dışarda bir $\boldsymbol{B}$ bulunmaması durumunda olması gerektiği gibidir; çünkü akı solenoidin *içindeki* $\boldsymbol{B}$'nin büyüklüğü çarpı πa^2'dir. Yarıçapı $r' > a$ koşulunu sağlayan bütün çemberler için de aynıdır. Son bölümde, içerdeki alanın $nI/\epsilon_0 c^2$ olduğunu bulmuştuk, dolayısıyla K sabitini

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}$$

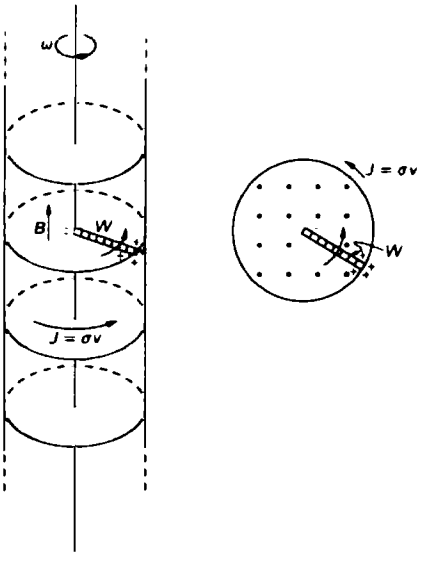
veya

$$K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}$$

olarak belirleyebiliriz. Dolayısıyla, *dışarıdaki* vektör potansiyelinin büyüklüğü

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}\frac{1}{r'} \tag{14.27}$$

olur ve daima $\boldsymbol{r}'$ vektörüne diktir.



Şekil 14-5 Dönen yüklü bir silindir içinde manyetik alan yaratır. Silindirle beraber dönen kısa, radyal bir telin uçlarında yükler indüklenir.

Telle sarılmış sarmal bobinleri ele aldık; ancak aynı alanları, yüzeyinde elektrostatik yük olan uzun bir silindiri döndürseydik de elde ederdik. Yüzey yükü σ ve yarıçapı a olan silindirik ince bir kabuğumuz varsa elimizde, silindiri döndürerek $J = \sigma v$ yüzey akımı elde ederiz. Denklemdeki $v = a\omega$ yüzey yükünün hızıdır. Bu durumda, silindirin içinde $B = \sigma a\omega/\epsilon_0 c^2$ değerinde bir manyetik alan doğar.

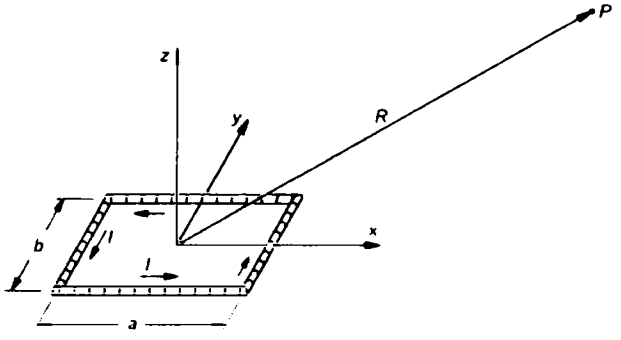
Şimdi şu ilginç soruyu sorabiliriz. Silindirin eksenine dik, eksenden yüzeye doğru uzanan ve silindirle beraber dönen kısa bir parça W teli olduğunu varsayalım, Şekil 14-5'te görüldüğü gibi. Bu tel manyetik bir alanda hareket etmektedir, böylece $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvvetlerinden dolayı uçları yüklenir (sonunda, $\boldsymbol{E}$ alanından kaynaklanan yükler, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvvetine eşit olana dek). Silindirin yükü artıysa, telin eksendeki ucunun yükü eksi olacaktır. Telin ucundaki yükü ölçerek, sistemin dönüş hızını da ölçmüş oluruz. Bir "açısal hız ölçer" yapmış olduk!

Şunu merak ediyor musunuz: "Kendimi dönen silindirin referans çerçevesine yerleştirirsem ne olur? Bu durumda sadece yüklü, durağan bir silindir vardır ve elektrostatik denklemlerine göre içerde elektrik alan olmaz; dolayısıyla yükleri merkeze iten bir kuvvet de olmaz. Bir yerde bir hata olmalı." Aslında hiçbir hata yoktur. "Dönmenin göreliliği" diye bir şey yoktur. Dönen bir sistem eylemsizlik çerçevesi *değildir* ve fizik yasaları farklıdır. Elektromanyetizma denklemlerini sadece eylemsizlik koordinat sistemlerinde kullanmaya dikkat etmeliyiz.

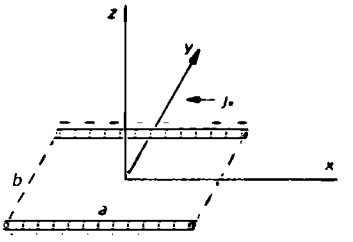
Dünyamızın mutlak dönmesini böyle bir yüklü silindirle ölçebilmek ne hoş olurdu; ancak elimizdeki en hassas cihazlarla bile ölçülemeyecek kadar küçük bir etkidir bu ne yazık ki.

14-5 Küçük bir ilmeğin alanı, manyetik dipol

Gelin, küçük bir akım ilmeğinin manyetik alanını bulmak için vektör–potansiyel yöntemini kullanalım. Her zamanki gibi, "küçük" derken ilmeğin boyuna oranla çok uzak mesafelerle ilgilendiğimizi belirtmekteyiz. Göreceğiniz üzere herhangi bir küçük ilmek bir "manyetik dipol"dür.



Şekil 14-6 I akımı geçen bir dikdörtgen tel ilmek. P'deki manyetik alan nedir? ($R \gg a$ ve $R \gg b$.)



Şekil 14-7 Şek. 14-6'daki akım ilmeğinin j_x dağılımı.

Önce dikdörtgen bir ilmeği ele alıp, koordinatlarımızı Şekil 14-6'daki gibi seçelim. z yönünde akım olmadığından dolayı, A_z sıfırdır. x yönünde, a boyunun iki yanında yükler vardır. Birinci bacakta, akım yoğunluğu (ve akım) düzgündür. Dolayısıyla A_x için çözüm, aynı iki yüklü çubuktan kaynaklanan elektrostatik potansiyel için bulduğumuz çözümle (*Bkz.* Şekil 14-7) aynıdır. Çubukların yükleri zıt olduğundan, uzak mesafelerdeki elektrik potansiyeli bildiğimiz dipol potansiyelidir (Bölüm 6-5). Şekil 14-6'daki P noktasındaki potansiyel,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{14.28}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki denklemdeki $\boldsymbol{p}$, yük dağılımının dipol momentidir. Dipol momenti, bu durumda, bir çubuktaki toplam yükle aralarındaki uzaklığın çarpımıdır:

$$p = \lambda ab \tag{14.29}$$

Dipol momenti y yönünü işaret ettiğinden, $\boldsymbol{R}$ ile $\boldsymbol{p}$ arasındaki açının kosinüsü $-y/R$'dir. y, P'nin koordinatıdır. Böylece aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

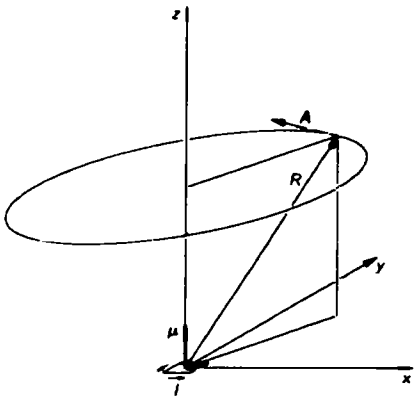
$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda ab}{R^2}\,\frac{y}{R}$$

λ terimini I/c^2 değeriyle değiştirirsek, A_x'i elde ederiz:

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y}{R^3} \tag{14.30}$$

Aynı akıl yürütmeyle, A_y'de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{x}{R^3} \tag{14.31}$$



Şekil 14-8 (xy düzleminde) başlangıç noktasındaki küçük akım ilmeğinin vektör potansiyeli; bir manyetik dipol alanı.

Yine A_y x değeriyle ve A_x de $-y$ değeriyle orantılıdır, bu yüzden vektör potansiyeli (uzak mesafelerde) Şekil 14-8'te görüldüğü gibi z ekseni etrafında, aynı ilmekteki I akımı gibi, çember çizerek gider.

A'mn büyüklüğü, akım çarpı ilmek alanı Iab değeriyle orantılıdır. Bu çarpıma, ilmeğin *manyetik dipol momenti* veya daha sıkça "manyetik moment" denir ve μ'yla gösterilir:

$$\mu = Iab \tag{14.32}$$

Herhangi bir şekle (çember, üçgen vs) küçük bir düzlem ilmeğin vektör potansiyeli, Iab'yi aşağıdaki eşitlikle değiştirdiğimiz zaman Denk. (14.30) ve Denk. (14.31)'lé de hesaplanabilir:

$$\mu = I \cdot (\text{ilmeğin alanı}) \tag{14.33}$$

Bunu ispatlamanın keyfini size bırakıyorum.

$\boldsymbol{\mu}$ vektörünün yönünü ilmek düzlemine dik olacak şekilde tanılarsak, denklemimizi, sağ el kuralıyla artı yönde olacak şekilde, vektör biçimine sokabiliriz (Şekil 14-8). Böylece aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{14.34}$$

Daha $\boldsymbol{B}$'yi bulmadık. Denklem (14.33) ve (14.34)'ü, Denk. (14.4)'le beraber kullanarak

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{x}{R^3} = \cdots \frac{3xz}{R^5} \tag{14.35}$$

ve

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cdots\frac{y}{R^3}\right) = \cdots\frac{3yz}{R^5} \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cdots\frac{x}{R^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cdots\frac{y}{R^3}\right) \\ &= -\cdots\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5}\right) \end{aligned} \tag{14.36}$$

eşitliklerini elde ederiz. ($\cdots \mu/4\pi\epsilon_0 c^2$ demektir.)

$\boldsymbol{B}$ alanının bileşenleri tıpkı z ekseni boyunca uzanan bir dipolün $\boldsymbol{E}$ alanı gibi davranır (*Bkz.* Denklem (6.14) ve (6.15); ayrıca Şekil 6-4). Bu yüzden ilmeğe manyetik dipol deriz. Manyetik alan için kullanıldığında, "dipol" kelimesi biraz yanıltıcı olabilir; çünkü elektrik yüklerine denk gelen *hiç* manyetik "kutup" yoktur. Manyetik "dipol alanı" iki "yük" tarafından değil, bir akım ilmeği tarafından oluşturulur.

Ne tuhaftır ki, $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ ve $\nabla\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ gibi tamamen farklı yasalarla yola çıktığımız halde aynı türden bir alan sonucuna vardık. Neden böyle oldu? Nedeni, dipol alanlarının sadece, bütün yüklerden ve akımlardan çok uzakta görünmesidir. Dolayısıyla ilgili uzayın genelinde $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin denklemleri özdeştirler: Her ikisinin de diverjansı ve bükümü sıfırdır. Dolayısıyla aynı çözümleri verirler. Bununla birlikte, yapılarını dipol momentlerle özetlediğimiz *kaynaklar* birbirlerinden fiziksel olarak çok farklıdırlar. Biri, dolanan bir akımdır; diğeriyse karşılık gelen alanın ilmek düzleminin alt ve üstünde yer alan bir çift yüktür.

14-6 Bir akımın vektör potansiyeli

Çoğu zaman, bütün sistemin boyutlarıyla karşılaştırıldığında çapı çok küçük olan tellerdeki akımlarca üretilmiş manyetik alanlar ilgimizi çeker. Bu tür durumlarda, manyetik alan için denklemleri basitleştirebiliriz. İnce bir tek için, hacim elemanımızı aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$dV = Sds$$

Burada S telin kesit alanı ve ds tel boyunca uzunluk elemanıdır. Aslında, ds vektörü j ile Şekil 14-9'ta gösterildiği gibi aynı yönde olduğundan (ayrıca, herhangi bir kesit alan için j'nin sabit olduğunu varsayabiliriz), şu vektör denklemi yazabiliriz:

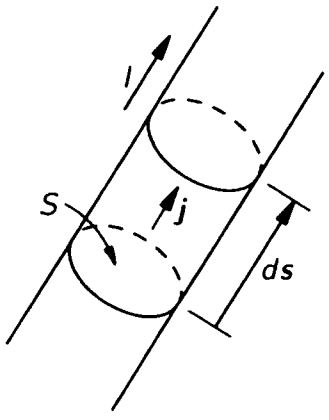
$$j\,dV = jS\,ds \tag{14.37}$$

Teldeki I akımı dediğimiz şey jS'dir, böylece vektör potansiyeli için integralimiz (14.19) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{I\,ds_2}{r_{12}} \tag{14.38}$$

(*Bkz.* Şekil 14-10). (I'nın devre boyunca aynı olduğunu varsaydık. Farklı akımlara sahip farklı kollar varsa, her bir kol için uygun I değerini kullanmalıyız.)

Yine, alanları Denk. (14.38)'den ya doğrudan integral alarak ya da karşılık gelen elektrostatik problemleri çözerek bulabiliriz.



Şekil 14-9 İnce bir tel için, $j\,dV$ ile $I\,ds$ aynıdır.

14-7 Biot ve Savart yasası

Elektrostatik üzerine çalışırken, bilinen bir yük dağılımının elektrik dağılımının doğrudan bir integral sayesinde, Denk. (4.16), elde edilebileceğini keşfetmiştik:

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}dV_2}{r_{12}^2}$$

Daha önce gördüğümüz gibi, bu integrali almak –aslında, her bir bileşen için bir olmak üzere, toplamda üç adet vardır– potansiyel için integral alıp sonra gradyanını almaktan daha uzun sürer.

Manyetik alanla akımları ilişkilendiren benzer bir integral vardır. $\boldsymbol{A}$ için zaten elimizde bir integral, Denk. (14.19) vardır; $\boldsymbol{B}$ için de, her iki tarafında bükümünü alarak, bir integral elde edebiliriz:

$$\boldsymbol{B}(1) = \nabla \times \boldsymbol{A}(1) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{j(2)dV_2}{r_{12}}\right] \tag{14.39}$$

Şimdi dikkatli olmalıyız. Büküm işlemcisi demek, $\boldsymbol{A}(1)$'in türevlerini almak demektir; diğer bir deyişle sadece (x_1, y_1, z_1) koordinatlarında işlem yapabiliriz. $\nabla \times$ işlemcisini, sadece 1 alt simgesi olan değişkenler üzerinde işlediğini aklımızda tutarak, integral işaretinin içine alabiliriz. 1 alt simgesi sadece aşağıdaki denklemde görülür:

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \tag{14.40}$$

$\boldsymbol{B}$'nin x bileşeni için elimizde şu eşitlikler var:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right] dV_2 \tag{14.41}$$

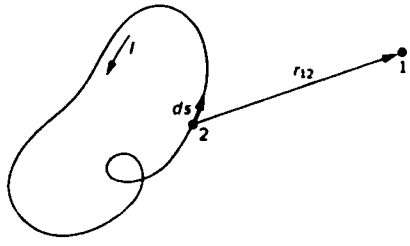
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3}\right] dV_2$$

Köşeli parantezler içindeki nicelik aşağıdaki eşitliğin x bileşeninin eksisidir:

$$\frac{j \times r_{12}}{r_{12}^3} = \frac{j \times e_{12}}{r_{12}^2}$$

Karşılık gelen sonuçlar diğer bileşenler için de bulunduğunda,

$$\boldsymbol{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{j(2) \times \boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 \tag{14.42}$$



Şekil 14-10 Bir telin manyetik alanı, devre etrafında integral alarak elde edilebilir.

sonucunu elde ederiz. İntegral bize $\boldsymbol{B}$'yi bilinen akımlar cinsinden verir. Geometrisi de aynı Şekil 14-2'deki gibidir.

Akım sadece küçük tellerden oluşan devrelerdeyse, son bölümdeki gibi, $j\,dV$ yerine $I\,\boldsymbol{ds}$ koyarak tel boyunca integrali alabiliriz. $\boldsymbol{ds}$ tel boyunun bir elemanıdır. Daha sonra, Şekil 14-10'daki sembolleri kullanarak

$$\boldsymbol{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{I\boldsymbol{e}_{12} \times d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}^2} \tag{14.43}$$

ifadesini yazabiliriz (eksi işareti görünmekte, çünkü vektörel çarpım sırasını tersine çevirdik). $\boldsymbol{B}$ için yazılmış bu denkleme, keşfedenlerin anısına, *Biot-Savart yasası* denir. Yasa bize, akım taşıyan tellerden kaynaklanan manyetik alanı doğrudan bir şekilde elde etmenin denklemini verir.

Şunu merak edebilirsiniz: "$\boldsymbol{B}$'yi doğrudan bir şekilde vektör integraliyle bulabiliyorsak, vektör potansiyelinin ne avantajı var? Hem sonra, $\boldsymbol{A}$ da üç integral içerir!" Vektörel çarpımdan dolayı, $\boldsymbol{B}$ için integraller genelde, Denk. (14.41)'de görüldüğü gibi, daha karmaşıktır. Ayrıca, $\boldsymbol{A}$ için integraller elektrostatik integrallerine benzediğinden, zaten onları biliyor olabiliriz. Son olarak, daha gelişmiş kuramsal konularda (görelilikte, mekanik yasaların gelişmiş denklemlerinde, daha sonra tartışacağımız en az eylem ilkesinde ve kuantum mekaniğinde) vektör potansiyeli önemli bir rol oynar.

15
VEKTÖR POTANSİYELİ

15-1 Bir akım ilmeği üzerindeki kuvvetler; bir dipolün enerjisi

15-1 Bir akım ilmeği üzerindeki kuvvetler; bir dipolün enerjisi
15-2 Mekanik ve elektriksel enerjiler
15-3 Kararlı akımların enerjisi
15-4 B'ye karşı A
15-5 Vektör potansiyeli ve kuantum mekaniği
15-6 Statik için doğru olan, dinamik için yanlıştır

Son bölümde, küçük bir dikdörtgen akım ilmeği tarafından meydana getirilen manyetik alan üzerinde çalıştık. Manyetik alanın, I akım ve A ilmeğin alanıyken, dipol momenti

$$\mu = IA \tag{15.1}$$

olan bir dipol alanı olduğunu bulmuştuk. Momentin yönü ilmeğin düzlemine normaldir, dolayısıyla şunu yazabiliriz:

$$\boldsymbol{\mu} = IA\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$, A alanına dik birimdir.

Bir akım ilmeği –veya manyetik dipol– manyetik alanlar meydana getirmenin yanı sıra, diğer akımların manyetik alanındayken üzerine etkiyen kuvvetler de hisseder. Öncelikle, düzgün bir manyetik alandaki dikdörtgen ilmek üzerine etkiyen kuvvetleri inceleyeceğiz. z ekseni alanın yönü olsun. İlmeğin düzlemi de, xy düzlemiyle Şekil 15-1'de görüldüğü gibi θ açısı yaparak y ekseninden geçsin. Bu durumda, ilmeğin –düzleme dik olan– manyetik momenti ile manyetik alanı arasındaki açı θ'dır.

İlmeğin zıt taraflarındaki akımlar birbirlerine zıt olduğundan, kuvvetler de zıttır; dolayısıyla ilmek üzerine (alan düzgün olduğunda) etki eden net bir kuvvet yoktur. Bununla birlikte, şekilde 1 ve 2 olarak işaretlenen kenara etki eden kuvvetler sayesinde, ilmeği y ekseni etrafında döndürmeye çalışan bir tork vardır. Bu F_1 ve F_2 kuvvetlerinin büyüklüğü şöyledir:

$$F_1 = F_2 = IBb$$

Moment kollarıysa,

$$a\sin\theta$$

olarak yazılır. Dolayısıyla, tork

$$\tau = Iab\,B\sin\theta$$

veya ilmeğin manyetik momenti Iab olduğundan

$$\tau = \mu B\sin\theta$$

olur. Torku, vektör gösterimiyle de yazabiliriz:

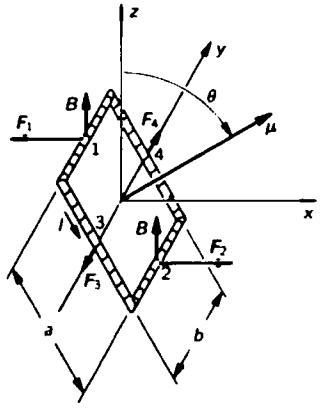
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \tag{15.2}$$

Her ne kadar, torkun özel bir durum için Denk. (15.2)'yle hesaplanabildiğini gösterdiysek de, sonuç herhangi bir şekle sahip bütün küçük ilmekler için geçerlidir. Bir elektrik alandaki elektrik dipolün torku için de benzer bir ilişki vardır:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

Şimdi artık, üzerinde durduğumuz ilmeğin mekanik enerjisini bulmaya çalışabiliriz. Bir tork olduğundan dolayı, enerji de yönelime dayalıdır. Sanal iş ilkesine göre tork, enerjinin açıyla birlikte değişim hızıdır. Dolayısıyla

$$dU = \tau\,d\theta$$



Şekil 15-1 Düzgün (z yönünde) bir B alanında, I akımı taşıyan dikdörtgen bir ilmek. İlmek üzerindeki tork $\tau = \mu \times B$'dir. Manyetik momentse $\mu = Iab$'dir.

yazabiliriz. $\tau = \mu B \sin\theta$ der ve integrali alırsak, enerji için şu aşağıdaki eşitlik geçerli olur:

$$U = -\mu B \cos\theta + \text{bir sabit} \tag{15.3}$$

(İşaret eksi, çünkü tork, momenti alanla hizaya getirmeye çalışmaktadır. Enerji, $\boldsymbol{\mu}$ ve $\boldsymbol{B}$ paralel olduğunda en düşük değerdedir.)

Daha sonra üzerinde duracağımız nedenlerden dolayı, bu enerji akım ilmeğinin toplam enerjisi *değildir*. (Bir kere, ilmekte akımı sağlamak için gerekli enerjiyi hesaba katmadık.) Dolayısıyla bu enerjiye, toplam enerjinin bir kısmı olduğunu bize hatırlatması için, U_{mekanik} diyeceğiz:

$$U_{\text{mekanik}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{15.4}$$

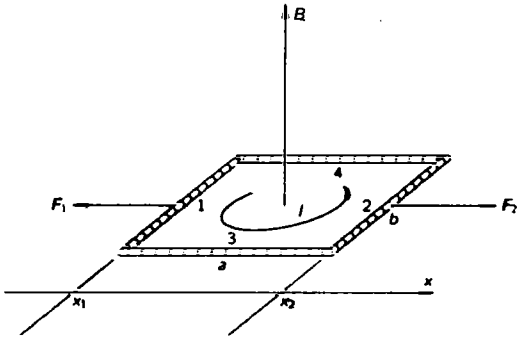
Bu, yine bir elektrik dipol sonucuna karşılık gelir:

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} \tag{15.5}$$

Denklem (15.5)'teki elektrostatik enerji U doğru enerjidir; fakat (15.4)'teki U_{mekanik} gerçek enerji değildir. Yine de, sanal iş ilkesiyle kuvvetleri hesaplamakta, ilmekteki akımın –ya da en azından μ'nun– sabit olduğunu varsayarak *kullanılabilir.*

Elimizdeki dikdörtgen ilmek için, U_{mekanik}'in aynı zamanda, ilmeği alana getirmek için yapılan mekanik işe eşit olduğunu gösterebiliriz. İlmek üzerindeki toplam kuvvet sadece düzgün bir alanda sıfırdır; düzgün olmayan bir alanda akım ilmeği üzerine etki eden net kuvvetler *vardır*. İlmeği içinde alan olan bir bölgeye taşırken alanın düzgün olmadığı bölgelerden geçmiş olmalıyız ki bir iş yapılmış. Hesabı basitleştirmek için, ilmeğin alana momenti alan boyunca yönlenmiş şekilde getirildiğini varsayalım (yerine konduktan sonra, son konumuna getirmek için döndürülebilir).

İlmeği x-yönünde –daha güçlü bir alana doğru– hareket ettirmek istediğimizi ve ilmeğin Şekil 15-2'deki gibi yönlendiğini düşünelim. Alanın sıfır olduğu bir yerden başlar ve ilmek alana girdikçe "kuvvet çarpı zaman"ın integralini alırız.



Şekil 15-2 x-eksenine dik açıda $\boldsymbol{B}$ alanın içinden x-ekseni boyunca taşınan bir ilmek.

Önce gelin, her bir kenar için yapılan işi ayrı ayrı hesaplayalım ve sonra (integrali almadan önce kuvvetleri toplamaktansa) toplam alalım. 3 ve 4 numaralı kenarlardaki kuvvetler hareket yönüne dik olduklarından üzerlerine yapılan bir iş yoktur. 2 numaralı kenar üzerindeki kuvvet $IbB(x)$ x-yönündedir ve manyetik kuvvetlere karşı yapılan işi hesaplamak için alanın sıfır olduğu bir x noktasından, diyelim ki $x = -\infty$'dan, şimdiki konumu x_2'ye integralini almalıyız:

$$W_2 = -\int_{-\infty}^{x_2} F_2\, dx = -Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x)\, dx \tag{15.6}$$

Benzer şekilde, 1 numaralı kenardaki kuvvetlere karşı yapılan iş

$$W_1 = -\int_{-\infty}^{x_1} F_1\, dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x)\, dx \tag{15.7}$$

olur. Her bir integrali hesaplayabilmek için, $B(x)$'in x'e nasıl bağlı olduğunu bilmemiz lazım. Dikkat edin 1 numaralı kenar 2 numaralı kenarın hemen arkasından gelmekte, dolayısıyla onun integrali 2 numaralı kenarda yapılan işin çoğunu da içermeli. Aslında, (15.6) ve (15.7)'nin toplamı aşağıdaki denkleme eşittir:

$$W = -Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x)\, dx \tag{15.8}$$

Eğer bulunduğumuz bölgede her iki kenarda da B neredeyse aynıysa, integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz. B ilmeğin merkezindeki alandır:

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x)dx = (x_2 - x_1)B = aB$$

Sisteme konan toplam mekanik enerji de aşağıdaki gibidir:

$$U_{\text{mekanik}} = W = -IabB = -\mu B \tag{15.9}$$

Bulduğumuz sonuç, Denk. (15.4) için aldığımız enerjiye eşittir.

İşi bulmak için integral almadan önce de ilmek üzerindeki kuvvetleri toplamış olsaydık da aynı sonucu bulurduk. 1 numaralı kenardaki alana B_1 ve iki numaradakine B_2 dersek, x yönündeki toplam kuvvet

$$F_x = Ib(B_2 - B_1)$$

olur. İlmek yeterince "küçükse", diğer bir deyişle B_2 ve B_1 birbirlerinden çok farklı değilse,

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x}\Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x}a$$

yazabiliriz. Dolayısıyla kuvvet de

$$F_x = Iab\frac{\partial B}{\partial x} \tag{15.10}$$

olur. *Dış kuvvetler* tarafından ilmek üzerinde yapılan toplam iş de,

$$-\int_{-\infty}^{x} F_x\, dx = -Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = -IabB$$

olarak yazılabilir. Diğer bir deyişle değeri, yine, sadece $-\mu B$'dir. Ancak şimdi

$$F_x\Delta x = -\Delta U_{\text{mekanik}} = -\Delta(-\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{15.11}$$

sonucunu elde ederiz. Denkleminden beklediğimiz gibi, küçük bir akım ilmeği üzerindeki *kuvvetin*, neden manyetik alanın türeviyle orantılı olduğunu anlayabiliriz. O halde varacağımız sonuç, her ne kadar $U_{\text{mekanik}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ sistemin tüm enerjisini içermese de –uydurma bir tür enerjidir–, kararlı akım ilmekleri üzerindeki kuvvetleri hesaplamak için sanal iş ilkesiyle beraber kullanılabilir.

15-2 Mekanik ve elektriksel enerjiler

Şimdi göstermek istediğimiz şey, bir önceki bölümde tartıştığımız U_{mekanik}'in neden kararlı akımlarla ilişkili doğru enerji olmadığıdır. Doğrudur; ilmek içindeki akım (ve *diğer* tüm akımlar) değişmediği *sürece*, sanal iş ilkesi sayesinde kuvvetleri hesaplamak için enerji gibi kullanabileceğini belirtmiştik. Şimdi gelin, bunun nasıl işe yaradığını görelim.

Şekil 15-2'deki ilmeğin $+x$ yönünde ilerlediğini ve $\boldsymbol{B}$ yönünde z eksenini aldığını düşünelim. 2 numaralı kenardaki iletim elektronları tel boyunca, y yönünde bir kuvvet hissedecektir. Akışlarından dolayı –elektrik akım– hareketlerinin kuvvetle aynı yönde bir bileşeni vardır. Dolayısıyla her bir elektron kendi üzerinde $F_y v_y$ hızında iş yaptırmış olur. v_y, tel boyu elektron hızının bileşenidir. Elektronlar üzerinde yapılan bu işe *elektriksel* iş denir. İlmek düzgün bir alanda ilerliyorsa, toplam elektriksel iş sıfırdır; çünkü ilmeğin bazı bölümleri üzerinde artı iş ve bazı bölümleri üzerinde tam eşit değerde eksi iş yapılmıştır.

Düzgün olmayan bir alanda ilerliyorsa ilmek, bu doğru değildir. Elektronlar üzerinde yapılan net bir iş miktarı *olacaktır*. Genel olarak, bu iş elektronların akışını değiştirme eğilimindedir; ancak eğer akım sabitse, akımı kararlı tutan pil veya diğer bir kaynak tarafından enerji soğurulmalı veya sisteme verilmelidir. Denklem (15.9)'la U_{mekanik} değerini hesaplarken bu enerjiyi hesaba katmamıştık; çünkü hesaplamalarımız sadece tel üzerindeki mekanik kuvvetleri içermekteydi.

Şunu düşünebilirsiniz: "İyi de, elektronlar üzerindeki kuvvet telin ne kadar *hızlı* hareket ettiğine bağlıydı. Belki de teli yavaşça hareket ettirirsek, bu elektriksel enerji ihmal edilebilir." Doğru, elektriksel enerjinin ortaya çıkma *hızı*, telin hızıyla orantılıdır; ancak ortaya çıkan *toplam* enerji aynı zamanda bu hızın geçtiği *zaman*la da orantılıdır. Dolayısıyla toplam elektriksel enerji hız çarpı zamanla, diğer bir deyişle hareket ettiği mesafeyle orantılıdır. Alan içindeki belirli bir mesafe için aynı miktarda iş yapılmış olur.

I akımı taşıyan, kendine ve B manyetik alanına dik yönde v_{tel} hızıyla hareket eden birim uzunlukta bir tel parçasını ele alalım. Akım yüzünden elektronların tel boyunca $v_{\text{sürüklenme}}$ miktarında bir sürüklenme hızları olacaktır. Her bir elektron üzerindeki manyetik kuvvetin sürüklenme yönündeki bileşeni $q_e v_{\text{tel}} B$'dir. Dolayısıyla, elektriksel işin yapılma hızı $Fv_{\text{sürüklenme}} = (q_e v_{\text{tel}} B)\, v_{\text{sürüklenme}}$ olur. Telin birim uzunluğunda N sayıda sürüklenen elektron varsa, toplam elektriksel işin yapılma hızı

$$\frac{dU_{\text{elektrik}}}{dt} = N q_e v_{\text{tel}} B v_{\text{sürüklenme}}$$

olur. Ama I teldeki akımken, $Nq_e v_{\text{sürüklenme}} = I$ olur ve böylece

$$\frac{dU_{\text{elektrik}}}{dt} = I v_{\text{tel}} B$$

eşitliğini buluruz. Akım sabit tutulduğundan, iletim elektronları üzerindeki kuvvet onları ivmelendirmez. Elektriksel enerji elektronlara değil, akımı sabit tutmaya gitmektedir.

Dikkat edin, tel üzerindeki kuvvet IB'dir; dolayısıyla IBv_{tel} aynı zamanda tel üzerinde yapılan *mekanik işin* hızıdır; diğer bir deyişle $dU_{\text{mekanik}}/dt = IBv_{\text{tel}}$. Sonuç olarak, tel üzerine yapılan mekanik iş akım kaynağı üzerinde yapılan elektriksel işe eşittir. Bu nedenle, ilmeğin enerjisi *bir sabittir!*

Bu rastlantı değildir; halihazırda bildiğimiz bir yasanın sonucudur. Her bir yük üzerindeki toplam kuvvet

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

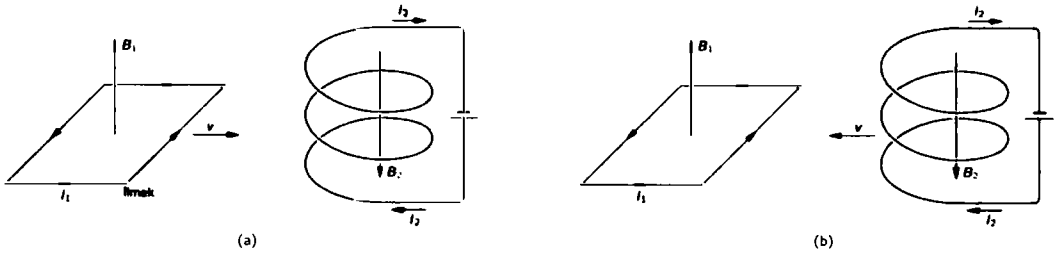
olduğundan, işin yapılma hızı da aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})] \tag{15.12}$$

Hiç elektrik alan yoksa, elimizde sadece ikinci terim vardır ki o da daima sıfırdır. Daha sonra göreceğimiz üzere, *değişen* manyetik alanlar elektrik alan meydana getirirler; dolayısıyla akıl yürütmemiz sadece kararlı manyetik alanlarda hareket eden tellere uygulanabilir.

O halde sanal iş ilkesi nasıl doğru cevabı verebiliyor bize? Bunun nedeni, *hâlâ* dünyanın *toplam* enerjisini hesaba katmamamızdan dolayıdır. Başlangıçtaki manyetik alanı *meydana getiren* akımların enerjisini hesaba katmadık.

Şekil 15-3 (a)'da çizildiği gibi, I_1 akımına sahip ilmeğimizi bobindeki I_2 akımıyla oluşmuş $\boldsymbol{B}_1$ manyetik alanına sürüklediğimiz eksiksiz bir sistemi düşünelim. İlmekteki I_1 akımı da şimdi bobinde bir $\boldsymbol{B}_2$ manyetik alanı meydana getirecektir. Eğer ilmek hareket ediyorsa, $\boldsymbol{B}_2$ alanı da değişir. Bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere, değişen bir manyetik alan bir $\boldsymbol{E}$-alanı meydana getirir ve bu $\boldsymbol{E}$ alanı bobindeki yükler üzerinde iş yapar. Toplam enerji hesabımıza bu enerji de mutlaka dahil edilmelidir.



Şekil 15-3 Bir manyetik alandaki küçük bir ilmeğin enerjisini bulmak.

Bu yeni enerji terimini öğrenmek için gelecek bölümü bekleyeceğiz; ancak şimdi göstereceğimiz yolla görelilik ilkesini kullandığımızda onun ne olduğunu görebiliriz. İlmeğimizi sabit bir bobine doğru ilerletirken, elektriksel enerjinin mekanik işe eşit ve zıt olduğunu biliyoruz:

$$U_{\text{mekanik}} + U_{\text{elektrik}}\,(\text{ilmek}) = 0$$

Şimdi başka bir bakış açısından baktığımızı düşünelim. İlmek sabit, bobin de ona doğru hareket ediyor olsun. Bu durumda bobin, ilmek tarafından meydana getirilen alanda doğru hareket eder. Aynı akıl yürütmeyi kullanarak şunu yazabiliriz:

$$U_{\text{mekanik}} + U_{\text{elektrik}}\,(\text{bobin}) = 0$$

Mekanik enerji iki durumda da aynıdır; çünkü iki devre arasındaki kuvvetten kaynaklanmaktadır.

İki denklemi topladığımızda şunu elde ederiz:

$$2U_{\text{mekanik}} + U_{\text{elektrik}}\,(\text{ilmek}) + U_{\text{elektrik}}\,(\text{bobin}) = 0$$

Tüm sistemin toplam enerjisi de, elbette iki elektriksel enerji ve *bir kere* hesaba katılan mekanik enerjidir:

$$U_{\text{toplam}} = U_{\text{elektrik}}\,(\text{ilmek}) + U_{\text{elektrik}}\,(\text{bobin}) + U_{\text{mekanik}} = -U_{\text{mekanik}} \qquad (15.13)$$

Dünyanın toplam enerjisi gerçekten de U_{mekanik}'in *eksisidir*. Bir manyetik dipolün gerçek enerjisini bulmak istersek, şunu yazmalıyız:

$$U_{\text{toplam}} = +\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$$

Sadece bütün akımların sabit olduğu durumda enerjinin bir kısmını, U_{mekanik}'i (her zaman gerçek enerjinin eksisidir) mekanik kuvvetleri bulmak için kullanabiliriz. Daha genel bir problemdeyse, tüm enerjileri dahil etmeye dikkat etmeliyiz.

Benzer bir durumu elektrostatikte görmüştük. Bir sığaçın toplam enerjisinin $Q^2/2C$ olduğunu göstermiştik. Sığaçın levhaları arasındaki kuvveti bulmak için sanal iş ilkesini kullandığımızda, enerjideki değişim $Q^2/2$ çarpı $1/C$'nin değişimidir:

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\,\frac{\Delta C}{C^2} \qquad (15.14)$$

Şimdi, hareket eden ve aralarındaki voltajın sabit tutulduğu iki iletkende yapılan işi hesaplamaya çalışalım. Eğer yapay bir şey yaparsak, daha sonra sanal iş ilkesini kullanarak kuvvete dair doğru cevapları bulabiliriz. $Q = CV$ olduğundan, gerçek enerji $\frac{1}{2}CV^2$'dir. Ancak $-\frac{1}{2}CV^{2\prime}$'ye eşit yapay enerji tanımlarsak, bu durumda sanal iş ilkesi, V voltajının sabit tutulmasını sağladığımız sürece, mekanik işi yapay enerjiye eşitleyerek kuvvetleri elde etmek için kullanılabilir.

$$\Delta U_{\text{mekanik}} = \Delta\left(-\frac{CV^2}{2}\right) = -\frac{V^2}{2}\Delta C \qquad (15.15)$$

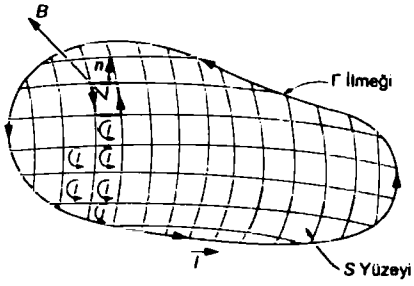
Bu da Denk. (15.14)'le aynıdır. Voltajı sabit tutmak için elektriksel sistem tarafından yapılan işi ihmal etsek bile, aynı doğru sonucu elde ettik. Yine, bu elektriksel enerji mekanik enerjinin iki katıdır ve zıt işarettedir.

Bu yüzden yapay olarak da hesaplasak, diğer bir deyişle potansiyel kaynağının voltajları sabit tutmak için yaptığı işi ihmal etsek, yine doğru cevabı elde ederiz. Aynı manyetostatikteki duruma benzer şekilde.

15-3 Kararlı akımların enerjisi

Bildiğimiz $U_{\text{toplam}} = -U_{\text{mekanik}}$ eşitliğini kullanarak, manyetik alanlardaki kararlı akımların doğru enerjisini bulabiliriz. Küçük bir akım ilmeğinin doğru enerjisiyle başlayalım. U_{toplam}'a sadece U dersek, şunu yazabiliriz:

$$U = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{15.16}$$



Şekil 15-4 Bir manyetik alandaki büyük bir ilmeğin enerjisi, daha küçük ilmeklerin enerjilerinin toplamı olarak düşünülebilir.

Her ne kadar bu enerjiyi dikdörtgen bir ilmek düzlemi için hesapladıysak da, herhangi bir ilmek şeklinin düzlemi için de geçerlidir.

Herhangi bir şekildeki devrenin enerjisini, onun küçük akım ilmeklerinden oluştuğunu varsayarak hesaplayabiliriz. Şekil 15-4'teki Γ ilmeğinin şeklinde bir tel olsun elimizde. Bu eğriyi S yüzeyiyle dolduralım ve yüzey üzerinde, her biri bir düzlem sayılabilecek birçok küçük ilmeği işaretleyelim. *Her bir* küçük ilmek etrafında I akımının dolaştığını düşünürsek, Γ içindeki tüm çizgilerdeki akımlar birbirlerini sıfırlayacağından net sonuç Γ etrafındaki akımla aynı olur. Fiziksel olarak, küçük akımlardan oluşan sistem ile orijinal devre arasında bir fark yoktur. Enerji de, küçük ilmeklerin enerjilerinin toplamıyla aynı olmalıdır.

Her bir küçük ilmeğin alanı Δa ise, enerjisi $I\Delta a B_n$ olur. B_n, Δa'ya dik bileşendir. Bu durumda toplam enerji

$$U = \sum I B_n \, \Delta a$$

olur. Sonsuz ilmeklerin limitine gidersek, toplam, integrale dönüşür ve

$$U = I \int B_n \, da = I \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \, da \tag{15.17}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\boldsymbol{n}$ terimi, da'ya dik birimdir.

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ eşitliğini yazarsak, Stokes teoremini kullanarak yüzey integralini bir çizgi integraline bağlayabiliriz.

$$I \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} \, da = I \oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.18}$$

Burada $d\boldsymbol{s}$, Γ boyu çizgi elemanıdır. Böylece herhangi bir şekildeki devre için enerji şöyle yazılabilir:

$$U = I \oint_{\text{devre}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.19}$$

Üstteki ifadede bulunan $\boldsymbol{A}$, teldeki $\boldsymbol{B}$ alanını meydana getiren (teldeki I akımı hariç) akımların vektör potansiyelini ifade eder.

Dolayısıyla artık, herhangi bir kararlı akım dağılımını akış çizgilerine paralel ince tellerden meydana geliyor gibi düşünebiliriz. Her bir devre çifti için enerjiyi, integralin bir devre etrafında diğer bir devrenin $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyelini kullanarak alındığı Denk. (15.9)'la hesaplayabiliriz. Toplam enerjiyi bulmak için de bütün çiftlerin enerjilerini toplamalıyız. Çiftler yerine, ince teller üzerinden toplam alırsak, o zaman enerjiyi iki kere saymış oluruz (benzeri bir etkiyi elektrostatikte de görmüştük). O halde toplam enerji aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$U = \tfrac{1}{2} \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \, dV \tag{15.20}$$

Bu denklem, elektrostatik enerji için bulduğumuz sonuca karşılık gelir:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi\, dV \tag{15.21}$$

$\boldsymbol{A}$'yı, manyetostatikteki akımlar için potansiyelin bir çeşidi olarak düşünmek istersek olabilir. Ne yazık ki bu fikir çok faydalı değildir; çünkü sadece statik alanlar için doğrudur. Aslında, ne (15.20) ne de (15.21) zamanla değişen alanlar için doğru enerjiyi verir.

15-4 $\boldsymbol{B}$'ye karşı $\boldsymbol{A}$

Bu bölümde şu sorular üzerinde duracağız: Vektör potansiyeli, –elektrostatikteki skaler potansiyeli gibi– sadece hesaplamalarda faydalı bir araç mıdır yoksa "gerçek" bir alan mıdır? Hareket eden bir parçacığa kuvvet etki etmesinden sorumlu olduğu için, manyetik alan "gerçek" bir alan değil midir ki? Önce, "gerçek alan" tamlamasının çok da anlamlı olmadığını belirtmeliyiz. Bir kere, manyetik alanı çok da "gerçek" hissetmiyorsunuz zaten; çünkü bütün o alan fikri tamamen soyut bir şey. Elinizi içine koyup, manyetik alanı hissedemezsiniz. Daha da ötesi, manyetik alanın değeri de çok belirli değildir. Uygun bir hareketli koordinat sistemi seçerek örneğin, belirli bir noktadaki manyetik alanın yok olmasını sağlayabilirsiniz.

"Gerçek" bir alanla ifade etmek istediğimiz şey şudur: Gerçek bir alan, uzaktan etki fikrinden kaçınma için kullandığımız matematiksel bir fonksiyondur. P konumunda yüklü bir parçacık varsa, P'den biraz uzakta konumlanmış bütün diğer yüklerden etkilenir. Bu etkileşimi tanımlamanın bir yolu, diğer yüklerin, P'nin çevresinde bir "koşul" –neyse artık o– yarattığıdır. Manyetik ve elektrik alanlar sayesinde koşulu bilirsek, parçacığın davranışını –koşulların nasıl oluştuğuna herhangi bir referans vermeden– tam anlamıyla belirleyebiliriz.

Diğer bir deyişle, diğer yükler bir şekilde değiştirilse ve ancak P konumunda, elektrik ve manyetik alanlarca belirlenmiş koşullar aynı kalsa, parçacığın hareketi de aynı kalır. O halde "gerçek" bir alan, *bir noktada* ne olup bittiğini sadece *o noktadaki* sayılara bağlı olacak şekilde belirlediğimiz bir sayı kümesidir. Diğer yerlerde ne olup bittiğini bilmemize gerek yok. Vektör potansiyelin "gerçek" bir alan olup olmadığını tartışacağımız bağlam budur.

Vektör potansiyelinin tek olmadığı gerçeği, diğer bir deyişle parçacıklar üzerinde etki eden kuvvetler değişmeksizin, herhangi bir skalerin gradyanını ekleyerek değiştirilebilmesi gerçeği kafanızı kurcalayabilir. Gelgelelim, şu anda konuştuğumuz anlamda gerçekliğe dair soruyla bunun hiçbir ilgisi yoktur. Örneğin, manyetik alan bir anlamda ($\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{A}$ gibi) görelilik değişimiyle değiştirilebilir. Alan böyle *değiştirilebilirse*, ne olup bittiğine dair bir ilgimiz yoktur. Gerçekten bir fark yaratmaz; vektör potansiyeli manyetik alanları tanımlamak için "gerçek" bir alan mıdır yoksa sadece faydalı bir matematiksel araç mıdır sorusuyla bunun hiçbir ilgisi yoktur.

Vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$'nın kullanışlılığı üzerine de biraz konuşmalıyız. Gördük ki, nasıl ϕ elektrik alanları bulmak için kullanılabiliyorsa, vektör potansiyeli de bilinen akımların manyetik alanlarını hesaplamak için kullanılabilir. Elektrostatikte gördük ki, ϕ aşağıdaki skaler integralle hesaplanır:

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)}{r_{12}}\, dV_2 \tag{15.22}$$

Bu ϕ'den, $\boldsymbol{E}$'nin üç bileşenini üç diferansiyel işlemciyle elde edebiliriz. Bu şekilde hesaplamak, üç integrali de vektör denklemi içinde ele almaktan daha kolaydır:

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\, dV_2 \tag{15.23}$$

Birincisi, ortada üç integral var; ikincisi, her bir integral, genelde, bir şekilde daha zordur.

Manyetostatikler için avantajlar daha da az belirgindir. $\boldsymbol{A}$ için integral zaten bir vektör integralidir:

$$\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2)\,dV_2}{r_{12}} \tag{15.24}$$

Elbette, bu da üç integraldir. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$'yi elde etmek için $\boldsymbol{A}$'nın bükümünü aldığımızda elimizde almamız ve eşleştirmemiz gereken altı türev olur. Bunun, elimizdeki birçok problemde $\boldsymbol{B}$'yi doğrudan aşağıdaki denklemden hesaplamaktan daha kolay olup olmadığı çok bariz değildir:

$$\boldsymbol{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2)\times\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2 \tag{15.25}$$

Basit problemler için vektör potansiyelini kullanmak, şimdi bahsedeceğimiz nedenden dolayı genelde daha zordur. Diyelim ki, bir noktada sadece $\boldsymbol{B}$ manyetik alanıyla ilgileniyoruz ve problemin biraz hoş bir simetrisi var. Örneğin, bir halka akımının ekseni üzerindeki bir noktadaki alan gibi. Simetri sayesinde, $\boldsymbol{B}$'yi Denk. (15.25)'in integralini alarak hesaplayabiliriz. Önce $\boldsymbol{A}$'yı bulmamız gerekseydi, $\boldsymbol{B}$'yi $\boldsymbol{A}$'nın *türevlerinden* hesaplamak zorunda kalırdık. Bu yüzden de ilgilendiğimiz noktanın *etrafındaki* bütün noktalardaki $\boldsymbol{A}$'yı bilmeliyiz. Bu noktaların çoğu da simetri ekseninin dışındadır; dolayısıyla $\boldsymbol{A}$'nın integrali de karmaşıklaşır. Halka probleminde örneğin, eliptik integraller kullanmak zorunda kalırız. Bu tür problemlerde, $\boldsymbol{A}$'nın çok da faydalı olmadığı açıktır. Birçok karmaşık problemde $\boldsymbol{A}$'yla çalışmanın daha kolay olduğu doğrudur; ancak bu tekniğin kolaylığının size bir başka vektör alanı hakkında bir şeyler öğrendiğinizi iddia etmek de zordur.

$\boldsymbol{A}$'yı öne sürdük; çünkü fiziksel olarak bir önemi *vardır*. Son bölümde gördüğümüz üzere, sadece akımların enerjilerine değil, fakat aynı zamanda yukarıda bahsettiğimiz anlamda "gerçek" bir fiziksel alandır. Klasik mekanikte, bir parçacık üzerindeki kuvveti

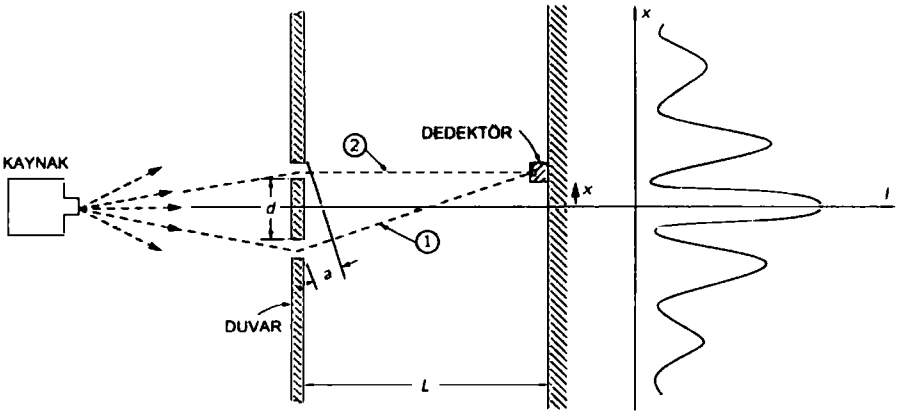
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{15.26}$$

olarak yazabiliriz. Böylece, kuvvetleri bilirsek hareket hakkındaki her şeyi de bilebiliriz. $\boldsymbol{B} = 0$ olduğu herhangi bir bölgede, $\boldsymbol{A}$'nın görülür bir etkisi yoktur. Bu, bir solenoidin dışında olduğu gibi $\boldsymbol{A}$ sıfır olmasa bile geçerlidir. Bu yüzden uzun süre $\boldsymbol{A}$'nın "gerçek" bir alan olmadığına inanıldı. Sonrada, kuantum mekaniğindeki bazı olgular sayesinde $\boldsymbol{A}$'nın aslında, tanımladığımız anlamda, "gerçek" bir alan olduğu ortaya çıktı. Bir sonraki bölümde bunun nasıl işlediğini göstereceğiz.

15-5 Vektör potansiyeli ve kuantum mekaniği

Klasik mekanikten kuantum mekaniğine geçtiğimizde, hangi kavramların önemli olduğu konusunda birçok değişiklik olur. Bunların bazılarını I. Ciltte tartışmıştık. Özellikle kuvvet kavramı önemini kaybederken, enerji ve momentum kavramlarının önemi doruğa ulaşır. Hatırlarsanız, parçacık hareketleri yerine, uzay ve zamanda değişkenlik gösteren olasılık genlikleriyle uğraşılır. Bu genliklerde dalga boylarına bağlı momentumlar ve enerjilere bağlı frekanslar vardır. Bu yüzden, dalga fonksiyonlarının evrelerini belirleyen momentumlar ve enerjiler kuantum mekaniğindeki önemli niceliklerdir. Kuvvetlerden ziyade, dalgaların dalga boylarını değiştiren etkileşimlerle ilgileniriz. Kuvvet fikri, en ufak şekilde varsa bile, ikincil olur. İnsanlar nükleer kuvvetlerden bahsederken örneğin, iki nükleonun etkileşiminden kaynaklanan enerjileri çalıştıklarını ifade etmiş olurlar. Aralarındaki kuvveti değil. Hiçbir kimse kuvvetin neye benzediğini bulmak için enerjinin türevini almaz. Bu bölümde, vektör ve skaler potansiyellerinin kuantum mekaniğine nasıl girdiğini tarif edeceğiz. Momentum ve enerji kuantum mekaniğinin özünde oldukları için, elektromanyetik etkileri kuantum tanımlarına bağlamak için en doğrudan yolu $\boldsymbol{A}$ ve ϕ sağlar.

Önce, kuantum mekaniğinin nasıl işlediğini gözden geçirmeliyiz. I. Cilt, Bölüm 37'de değindiğimiz, elektronların iki yarık tarafından kırınıma uğradığı de-



Şekil 15-5 Elektronlarla bir girişim deneyi (ayrıca *Bkz.* I. Cilt, Bölüm 37).

neyi ele alacağız. Aynı düzenek Şekil 15-5'te tekrar gösterilmiştir. Her biri yaklaşık aynı enerjiye sahip elektronlar kaynaktan çıkar ve iki dar yarığın olduğu duvara doğru hareket ederler. Duvarın arkasında, hareket eden bir dedektöre sahip "durdurucu" vardır. Dedektör, elektronların durdurucu üzerinde simetri ekseninden x kadar uzaklıktaki küçük bir bölgeye varış hızını ölçer. Bu hıza I diyelim. Hız, kaynaktan çıkan her bir elektronun durdurucudaki bölgeye ulaşma ihtimaliyle orantılıdır. Bu olasılığın, şekilde gösterildiği gibi, karmaşık gibi duran bir dağılımı vardır. Bu dağılım, her bir yarıktan gelen birer adet genliğin girişimidir. Bu iki genliğin girişimi evre farklarına bağlıdır. Diğer bir deyişle, genlikler $C_1e^{i\Phi_1}$ ve $C_2e^{i\Phi_2}$ ise, evre farkı $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ girişim desenini belirler [*Bkz.* I. Cilt, Denklem 29.12). Ekran ile yarıklar arasındaki mesafe L ise ve iki yarıktan geçen elektronların yolları arasındaki uzaklık a ise, o halde iki dalganın evre farkı şöyledir:

$$\delta = \frac{a}{\lambda\!\!\!^{-}} \tag{15.27}$$

Her zamanki gibi $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$ eşitliği vardır. λ, olasılık genliğinin uzaydaki değişiminin dalga boyudur. Basitlik adına, x için sadece L'den küçük değerleri alacağız ki böylece

$$a = \frac{x}{L}d$$

diyebilelim ve

$$\delta = \frac{x}{L}\frac{d}{\lambda\!\!\!^{-}} \tag{15.28}$$

yazabilelim. x sıfırken, δ de sıfırdır. Dalgalar aynı evrededir ve olasılık en yüksek değerdedir. δ, π olduğunda, dalgalar evre dışındadır, birbirlerini sönümlendirecek şekilde girişim yaparlar ve olasılık en düşük değerdedir. Böylece elektron yoğunluğu için dalga fonksiyonunu elde ederiz.

Şimdi, kuantum mekaniğinin, kuvvet yasası $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$'yi değiştiren yasasından bahsedeceğiz. Bu yasa, bir elektromanyetik alandaki kuantum mekaniksel parçacıkların davranışını belirler. Olanlar genliklerle belirlendiğinden, yasa bize manyetik etkilerin genlikleri nasıl etkilediğini söylemeli. Bir parçacığın ivmelenmesiyle artık ilgilenmiyoruz. Yasa şöyledir: Herhangi bir yörüngenin olasılık genliğinin evresi, manyetik alanın varlığında değişir. Bu değişimin miktarı, tüm yörünge boyunca vektör potansiyelin integralinin yükle çarpımının Planck sabitine bölümüdür:

$$\text{Fazdaki manyetik değişim} = \frac{q}{\hbar}\int_{\text{yörünge}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.29}$$

Hiç manyetik alan olmasaydı, belirli bir varış evresi olurdu. Herhangi bir yerde bir manyetik alan varsa, varan dalganın evresi Denk. (15.29)'daki integral kadar artar.

Şimdiki tartışmamızda kullanmayacak olsak da, bir elektrostatik alanın etkisinin, skaler ϕ potansiyelinin *zaman* integralinin eksiyle çarpımıyla belirlenen bir evre değişimi meydana getirmek olduğunu belirtelim:

$$\text{Fazdaki elektrik değişimi} = -\frac{q}{\hbar}\int \phi dt$$

Bu ifadelerin doğruluğu sadece statik alanlar için geçerli değildir. Beraber, statik veya dinamik *herhangi* bir elektromanyetik alan için doğru sonucu verirler. Bu, $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ eşitliğinin yerine geçen yasadır. Bununla birlikte, şimdi statik bir manyetik alanı ele almak istiyoruz.

Çift yarık deneyinde bir manyetik alan olduğunu varsayalım. Sorduğumuz şey, yolları iki yarıktan geçen iki dalganın ekrandaki evresidir. Girişimleri, olasılığın nerede en yüksek değere ulaştığını belirleyecektir. Φ_1'e (1) numaralı yörüngedeki dalganın evresi diyelim. $\Phi_1(B = 0)$ manyetik alan olmadığındaki evreyse, o zaman alanın varlığında evre

$$\Phi_1 = \Phi_1(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.30}$$

olur. Benzer şekilde, (2) numaralı yörüngenin evresi için

$$\Phi_2 = \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.31}$$

yazabiliriz. Dalgaların dedektördeki girişimi evre farkına dayanır:

$$\delta = \Phi_1(B = 0) - \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} - \frac{q}{\hbar}\int_{(2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.32}$$

Alan olmadığındaki evre farkına $\delta(B = 0)$ diyeceğiz. Denklem (15.28)'le hesapladığımız evre farkıdır bu. Ayrıca, dikkat ederseniz iki integralin (1) boyunca giden ve (2) boyunca geri dönen tek bir *integral* olarak yazılabildiğini görürsünüz. Buna (1-2) kapalı yolu diyelim. Böylece şunu elde ederiz:

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\oint_{(1\text{-}2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.33}$$

Bu denklem bize elektronun hareketinin manyetik alan varlığında nasıl değiştiğini söyler. Onun sayesinde, durdurucu üzerinde maksimum ve minimum yoğunluklar için yeni konumlar bulabiliriz.

Buna geçmeden önce, ilginç ve önemli bir noktaya değinmek istiyorum. Hatırlarsanız, vektör potansiyelinin bir miktar rastgeleliği vardır. Bir gradyanın bükümü sıfır olduğundan, aralarındaki fark bir $\nabla\psi$ skaler fonksiyonunun gradyanı olan iki farklı $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{A}'$ vektör potansiyel fonksiyonları aynı manyetik alanı temsil eder. Dolayısıyla, aynı klasik kuvvet $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ sonucunu verirler. Kuantum mekaniğinde etkiler vektör potansiyeline bağlıysa, birçok olası $\boldsymbol{A}$-fonksiyonundan *hangisi* doğrudur?

Cevap, $\boldsymbol{A}'$daki aynı rastgeleliğin kuantum mekaniğinde de var olduğudur. Denklem (15.33)'te $\boldsymbol{A}'$yı $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$ değeriyle değiştirirsek, $\boldsymbol{A}$ üzerindeki integral şuna dönüşür:

$$\oint_{(1\text{-}2)} \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{(1\text{-}2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \oint_{(1\text{-}2)} \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{s}$$

$\nabla\psi$'nin integrali *kapalı* (1-2) yolu etrafındadır; ancak, Stokes teoremi gereği, kapalı bir yolun gradyanının teğet bileşeninin integrali daima sıfırdır. Dolayısıyla, hem $\boldsymbol{A}$, hem $\boldsymbol{A}'$ aynı evre farklarını ve aynı kuantum mekaniksel girişim etkilerini verir. Hem klasik kuramda, hem de kuantum kuramında önemli olan $\boldsymbol{A}$'nın bükümüdür. Doğru büküme sahip herhangi bir $\boldsymbol{A}$ fonksiyonunun seçimi doğru fiziği verir.

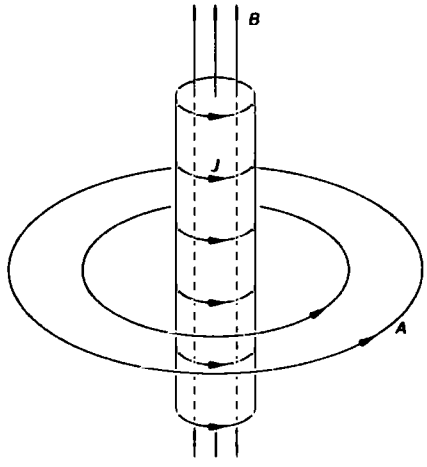
Bölüm 14-1'in sonuçlarını kullandığımızda da aynı sonuca varırız. O bölümde, $\boldsymbol{A}$'nın kapalı bir yol etrafındaki çizgi integralinin, yoldan geçen $\boldsymbol{B}$'nin akısı olduğunu bulmuştuk. Bu örnekteki akı, (1) ile (2) yolları arasındakidir. İstersek, Denk. (15.33)'ü

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar}[\boldsymbol{B}\text{'nin (1) ile (2) arasındaki akısı}] \qquad (15.34)$$

şeklinde yazabiliriz. Her zamanki gibi, $\boldsymbol{B}$'nin akısı derken demek istediğimiz, $\boldsymbol{B}$'nin dik bileşeninin yüzey integralidir. Sonuç sadece $\boldsymbol{B}$'ye ve dolayısıyla sadece $\boldsymbol{A}$'nın bükümüne bağlıdır.

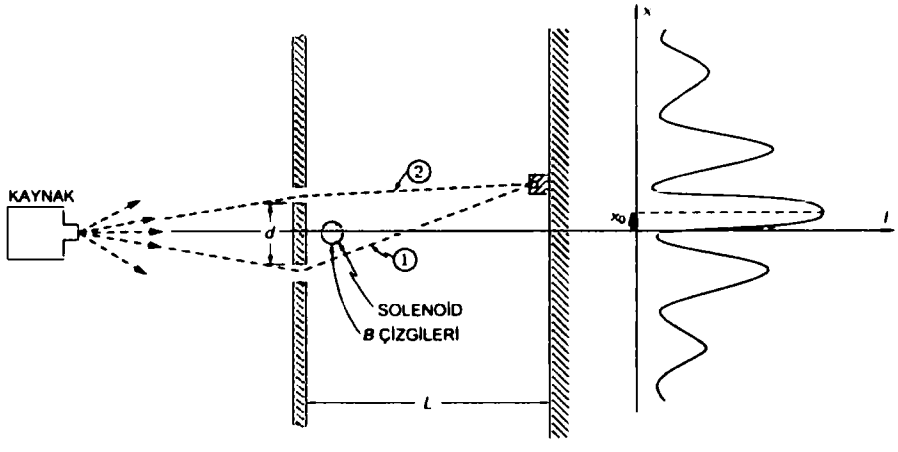
Şimdi sonucu hem $\boldsymbol{B}$, hem de $\boldsymbol{A}$ cinsinden yazabildiğimize göre, $\boldsymbol{B}$'nin "gerçek" bir alan olduğunu ve $\boldsymbol{A}$'nın hâlâ yapay bir tasarım olduğunu düşünmek isteyebilirsiniz. "Gerçek" alan tanımını öne sürmemiz, "gerçek" bir alanın bir parçacığa uzaktan etki edemeyeceği fikrine dayanmaktaydı. Halbuki $\boldsymbol{B}$'nin, parçacık bulunabilecek herhangi bir yerde sıfır –ya da isteğe göre küçük– olduğu ve böylece onlar üzerinde *doğrudan* etkimediği bir örnek verebiliriz.

Elektrik akımı taşıyan uzun bir solenoidin içinde $\boldsymbol{B}$ alanı olduğunu ancak, Şekil 15-6'daki gibi dışarda bolca $\boldsymbol{A}$ dolaşımı varken, dışında alan olmadığını hatırlayın. Denklem (15.33)'e göre, elektronların sadece solenoidin *dışında* –sadece $\boldsymbol{A}$'nın olduğu yerde– olduğu bir durumda hareket üzerinde yine bir etki olacaktır. Klasik anlamda, bu imkânsızdır. Klasik anlamda, kuvvet sadece $\boldsymbol{B}$'ye dayanır. Solenoidin akım taşıdığını öğrenmek için, parçacık içinden geçmelidir. Kuantum mekaniksel olaraksa, solenoid içinde manyetik alan olduğunu anlamak için –yanına hiç yaklaşmadan– *etrafından* geçmeniz yeterlidir.



Şekil 15-6 Uzun bir solenoidin manyetik alanı ve vektör potansiyeli.

Çapı küçük, çok uzun bir solenoidi, Şekil 15-7'deki gibi, iki yarık arasında duvarın hemen arkasına yerleştirdiğimizi düşünelim. Solenoidin çapı, iki yarık arasındaki d uzaklığında çok daha küçüktür. Bu koşullarda, elektronların yarıktaki kırınımı, elektronların solenoide yaklaşıp yaklaşmayacağına dair kayda değer bir olasılık vermez. Girişim deneyimize etkisi ne olacaktır?



Şekil 15-7 Bir manyetik alan, elektronların bulunma olasılığının küçük olduğu bölgelerde bile elektronların hareketini etkileyebilir.

Durumu solenoid içinden akım geçerken ve geçmezken karşılaştıralım. Akım yoksa, ne $\boldsymbol{A}$ ne de $\boldsymbol{B}$ vardır ve durdurucuda başlangıçtakiyle aynı elektron yoğunluğu dağılımını görürüz. Solenoid içinde akım olduğunda, içinde bir $\boldsymbol{B}$ manyetik alanı ve sonra dışında bir $\boldsymbol{A}$ alanı olur. Solenoidin dışındaki $\boldsymbol{A}$'nın dolaşımıyla orantılı olarak evre farkında bir kayma meydana gelir. Dolayısıyla, maksimum ve minimum dağılımı yeni bir konuma kayar. Aslında, herhangi bir yol çifti için $\boldsymbol{B}$'nin içerde akısı sıfır olduğundan, $\boldsymbol{A}$'nın dolaşımı da sıfırdır. Her bir varış noktasında aynı evre değişimi gerçekleşir. Bu da bütün dağılımın x yö-

nünde sabit bir miktarla (diyelim ki x_0) kaymasına denk gelir ki o da çok basit şekilde hesaplanabilir. Maksimum yoğunluk, iki dalga arasındaki evre farkı sıfır olduğunda oluşur. δ için Denk. (15.33) veya (15.34)'ü, x için de Denk. (15.28)'i kullanarak

$$x_0 = -\frac{L}{d}\lambda\frac{q}{\hbar}\oint_{(1\text{-}2)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{15.35}$$

veya

$$x_0 = -\frac{L}{d}\lambda\frac{q}{\hbar}[\text{(1) ile (2) arasındaki } \boldsymbol{B}\text{'nin akısı}] \tag{15.36}$$

eşitliklerini elde ederiz. Solenoidi yerleştirdiğimizde, dağılım Şekil 15-7'deki gibi görünmelidir.* En azından kuantum mekaniğinin öngördüğü budur.

Yakın zamanda bu deney hassas şekilde yapılmıştır. Gerçekten çok zor bir deneydir. Elektronların dalga boyu çok küçük olduğundan, girişimi gözlemleyebilmek için cihaz çok küçük bir ölçekte olmalıdır. Yarıklar birbirlerine çok yakın olmalıdır ve bu da çok küçük bir solenoide ihtiyaç duyduğumuz anlamına gelir. Belli bazı koşullarda, demir kristalleri çok uzun ve mikroskobik derecede ince filamanlar şeklinde geliştiğini biliyoruz. Bu demir filamanlar manyetize edildiklerinde, ince bir solenoid gibi davranırlar ve dışında, uçları hariç, alan bulunmaz. Elektron girişim deneyi, iki yarık arasında böyle bir solenoidle yapıldı ve elektronların girişim deseninde öngörülen değişim gözlemlendi.

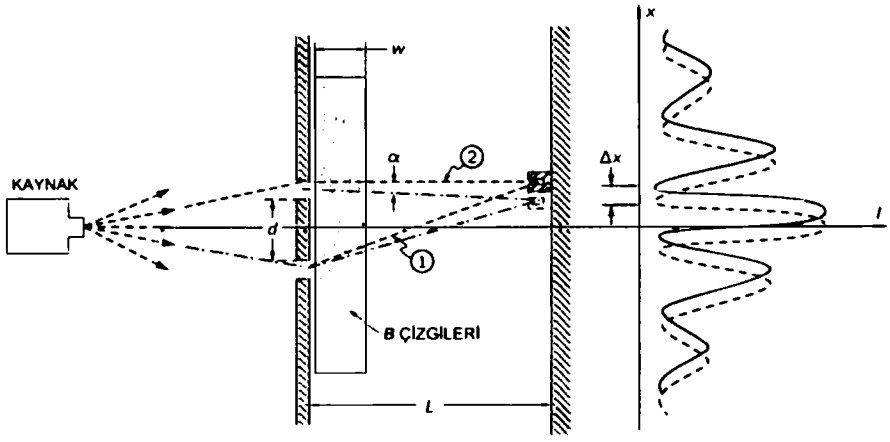
O halde bizim bağlamımızda, $\boldsymbol{A}$ alanı "gerçektir". Şunu diyebilirsiniz: "İyi de, bir manyetik alan *vardı.*" Evet vardı; ama ilk baştaki fikrimizi hatırlarsanız bir alanın "gerçek" olması demek, hareketi elde etmek için parçacığın *konumunda* tanımlanması gereken alan olması demektir. Solenoidin içindeki $\boldsymbol{B}$ alanı belli bir mesafede etki eder. Etkisini belli bir mesafedeki eylem olarak tanımlamak istemezsek, vektör potansiyelini kullanmalıyız.

Bu konunun ilginç bir tarihçesi vardır. Bahsettiğimiz kuram kuantum mekaniğinin başlangıcı 1926 yılından beri biliniyordu. Kuantum mekaniğinin dalga denkleminde (Schrödinger denklemi olarak bilinir) vektör potansiyelinin bulunduğu daha ilk yazıldığı gün apaçık ortadaydı. Manyetik alanla kolay bir şekilde değiştirilemeyeceği, ardı ardına yapılan deneylerle görüldü. Bu aynı zamanda, alan olmayan bir bölgede hareket eden ve yine de etkilenen elektronlar örneğimizden de açıkça görülüyordu. Klasik mekanikte $\boldsymbol{A}$'nın doğrudan bir önemi olmadığından ve bir gradyan eklemesiyle değiştirilebildiğinden dolayı insanlar ısrarla vektör potansiyelinin doğrudan bir fiziksel önemi olmadığını, kuantum mekaniğinde bile sadece manyetik ve elektron alanların "doğru" olduğunu söylediler. Geriye dönüp bakınca, 1956 yılına, Bohm ve Aharonov ilk defa önerene ve bütün soruyu açıkça ortaya koyana kadar bu deneyin tartışılmamış olması garip gelir. Bütün zaman boyunca çıkarım apaçık ortadaydı; ancak kimsenin dikkatini çekmemişti. Dolayısıyla konu masaya konduğunda birçok kişi şaşkınlık içerisindeydi. Bu yüzden birileri, her ne kadar kuantum mekaniğine tartışmasız bir cevap verdiyse de, bunun gerçekten doğru olup olmadığını anlamak için deneyi yapmaya değer buldular. Böyle bir şeyin otuz sene boyunca ortada olup, neyin önemli olup neyin önemli olmadığına dair belli önyargılar yüzünden ihmal edilmesi ilgi çekicidir.

Şimdi analizimizi biraz derinleştirelim. Kuantum mekaniksel ile klasik denklemin arasındaki bağlantıyı gösterelim. Bunun amacı, şeylere yeterince büyük bir ölçekte baktığımızda neden parçacıklar üzerinde $q\boldsymbol{v}\times$ ile $\boldsymbol{A}$'nın bükümünün çarpımı kadar bir kuvvet etki edermiş gibi göründüğünü göstermektir. Kuantum mekaniğinden klasik mekaniği elde etmek için dış koşulların, örneğin alanların, gözle görülür derecede değiştiği mesafelere göre çok küçük dalga boylarının olduğu durumları ele almalıyız. Genel bir kanıt yapmayacağız nasıl

---

* $\boldsymbol{B}$ alanı eğer şeklin düzleminden çıkarsa, tanımladığımız şekliyle akı artıdır ve x_0'da, elektronlar için q eksi olduğundan artıdır.



Şekil 15-8 Şerit bir manyetik alandan dolayı girişim deseninin kayması.

işlediğini göstermek için basit bir örnek üzerinde duracağız. Yeniden aynı yarık deneyini ele alacağız. Bu sefer bütün yarıklar arasındaki o çok küçük bölgede bulunan değil, Şekil 15-8'de görüldüğü gibi yarıkların ötesinde bir alana uzanan bir manyetik alan hayal edeceğiz. L değeriyle karşılaştırıldığında küçük kalan, w kalınlığındaki dar bir şerit içinde düzgün bir manyetik alan düşünelim. Bu ideal durumu, durdurucuyu istediğimiz kadar uzağa koyarak, kolaylıkla ayarlayabiliriz. Evredeki kaymayı hesaplamak için, A'nın hem (1) hem de (2) yolu boyunca integrallerini almalıyız. Daha önce gördüğümüz üzere, sadece yollar arasındaki B'nin akısı kadar bir fark vardır aralarında. Bizim yakınlaştırmamıza göre akı Bwd'dir. Bu durumda iki yol arasındaki evre farkı şu olur:

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} Bwd \tag{15.37}$$

Bizim yakınlaştırmamıza göre, evre farkının açıdan bağımsız olduğunu not edelim. Böylece yeniden gözlemlenen etki bütün girişim deseninin Δx kadar yukarı kayması olacaktır. Denklem (15.35)'i kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta x = -\frac{L\lambda}{d}\Delta\delta = -\frac{L\lambda}{d}[\delta - \delta(B = 0)]$$

Denklem (15.37) için $\delta - \delta(B = 0)$ terimini kullanarak da,

$$\Delta x = -L\lambda\frac{q}{\hbar}Bw \tag{15.38}$$

denklemini elde ederiz. Böyle bir kayma, tüm yörüngeleri küçük bir α açısı kadar saptırmaya (*Bkz.* Şekil 15-8) eşittir. α değeri de aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = -\frac{\lambda}{\hbar} qBw \tag{15.39}$$

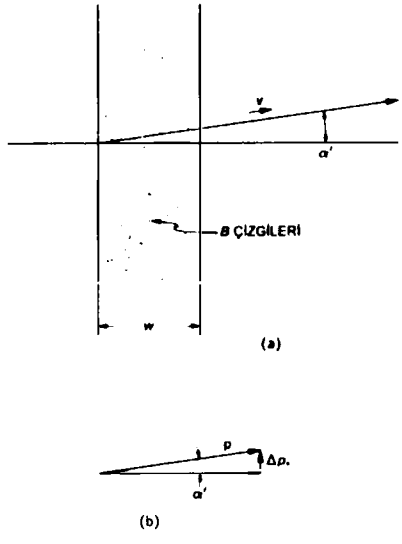
Klasik mekaniğe göre, şerit bir manyetik alanın bütün yörüngeleri, Şekil 15-9 (a)'da görüldüğü gibi küçük bir açıyla, α' diyelim, saptırmasını bekleriz. Elektronlar manyetik alandan geçerken, w/v kadar süren, enine bir $qv \times B$ kuvveti hissederler. Enine momentumlarındaki değişim bu etkiye eşittir:

$$\Delta p_x = -qwB \tag{15.40}$$

Şekil 15-9 (b)'de görülen açısal sapma, bu enine momentumun toplam p momentuma oranına eşittir. Böylece aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = -\frac{qwB}{p} \tag{15.41}$$

Aynı niceliği kuantum mekaniksel olarak hesaplayan Denk. (15.39)'un sonucu ile bu sonucu karşılaştırabiliriz. Ancak, klasik mekanik ile kuantum mekaniği arasındaki bağlantı şudur: p momentumuna sahip bir parçacık, $\lambda = \hbar/p$ dalga



Şekil 15-9 Şerit bir manyetik alandan geçen parçacığın sapması.

boyuyla değişen bir kuantum genliğine denk gelir. Bu eşitliğe göre α ve α' özdeştirler; klasik ve kuantum hesaplamaları aynı sonucu verirler.

Analizden, kuantum mekaniğinde görülen vektör potansiyelinin nasıl oluyor da sadece türevlerine dayanan bir klasik kuvvet meydana getirdiğini görebiliyoruz. Kuantum mekaniğinde önemli olan yakın yollar arasındaki girişimdir. Her zaman elde edilen sonuç, etkilerin $\boldsymbol{A}$'nın noktadan noktaya nasıl *değiştiğine* ve dolayısıyla değerine değil $\boldsymbol{A}$'nın türevlerine dayandığıdır. Yine de görünen o ki vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$ (kendisiyle beraber olan skaler potansiyeli ϕ'yle) fiziğin en doğrudan tanımını vermekte. Kuantum mekaniğinin derinlerine daldıkça, bu daha da açıkça anlaşılmaktadır. Kuantum elektrodinamiğinin genel kuramında, Maxwell denklemlerinin yerini alan genel denklemler kümesinde vektör ve skaler potansiyelleri temel nicelikler olur: Fizik yasalarının çağdaş ifadelerinden $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$ yavaşça silinmekte ve yerlerini $\boldsymbol{A}$ ile ϕ almakta.

15-6 Statik için doğru olan, dinamik için yanlıştır

Statik alanlar konusunu keşfimizin sonuna geldik artık. Daha bu bölümde, alanlar zamanla değiştiğinde ne olur sorusunu sormaya çok yaklaştık. Manyetik enerji konusunu işlerken, görelilik fikrine sığınarak bundan kaçınabilmiştik. Öyleyken bile, enerji problemini ele alışımız biraz yapay ve hatta biraz gizemliydi; çünkü hareketli bobinlerin (zamanla) değişen alanlar meydana getirdiği gerçeğini göz ardı etmiştik. Artık zamanla değişen alanlarla, diğer bir deyişle elektrodinamik konusuyla ilgilenmenin zamanı geldi. Bunu gelecek bölümde işleyeceğiz. Fakat şimdiden bazı noktaların altını çizmek istiyorum.

Her ne kadar bu bölüme, elektromanyetizmaya dair eksiksiz ve doğru denklemlerin sunulmasına başladıysak da; dikkatimizi hemen bazı eksik parçalara çevirdik. Çünkü böylesi daha kolaydı. Önce, daha basit olan statik alanlar kuramıyla başlayıp, daha sonra dinamik alanları da içeren daha karmaşık kurama geçmekte büyük avantaj vardır. Bir anda öğrenilmesi gereken daha az yeni malzeme ve daha zorlu bir konuya geçmeden önce akıl kaslarınızı geliştirmek için yeterli zaman vardır.

Resmin tamamını görmeden bu şekilde ilerlemenin tehlikesi de vardır ancak. Öğrenilen eksik doğrular kökleşebilir ve doğrunun tamamı gibi algılanabilir. Neyin her zaman doğru ve neyin bazen doğru olduğu birbirine karışabilir. Bu yüzden, şu ana kadar üzerinden geçtiğimiz önemli denklemlerin bir özetini Tablo 15-1'de sunduk. Tabloyu, statik durumu için doğru ama dinamik için yanlış olanlar ve her zaman doğru olanlar olarak ikiye ayırdık. Bu özet, kısmen, nereye doğru yol aldığımızı göstermekte; zira burada ispatsız olarak değinmek zorunda kaldığımız dinamik konusunu ilerde detaylarıyla işleyeceğiz.

Tablo hakkında bazı şeyleri vurgulamakta fayda var. Öncelikle, başlangıçta ele aldığımız denklemler *doğru* denklemlerdir. Elektromanyetik kuvvet (sıklıkla *Lorentz Kuvveti* olarak adlandırılır) $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ *doğrudur*. Aslında Coulomb yasası yanlıştır, daha doğrusu sadece statik durumda kullanılmalıdır. $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ için yazılmış dört adet Maxwell denklemi de ayrıca doğrudur. Statik için ele aldığımız yanlıştır, zira zaman türevli bütün terimleri görmezden geldik.

Gauss yasası $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ yerinde kalır; ancak $\boldsymbol{E}$'nin bükümü genel olarak sıfır *değildir*. Dolayısıyla $\boldsymbol{E}$ her zaman bir skalerin gradyanına –elektrostatik potansiyel– eşitlenemez. İlerde göreceğiniz üzere, skaler potansiyeli, elektrik alanın tam bir tanımını yapmak için vektör potansiyelleriyle kullanılması gereken ve zamanla değişen bir niceliktir. Bu yeni skaler potansiyeli belirleyen denklemler de ayrıca yenidir.

$\boldsymbol{E}$'nin iletkenlerde sıfır olduğu fikrini de bir kenara bırakmalıyız. Alanlar değişirken, iletkenlerdeki yüklerin kendilerini yeniden düzenleyerek alanı sıfır yapacak zamanları genelde yoktur. Harekete geçerler; ancak asla dengeye ulaşmazlar. Genel ifademiz sadece şu olabilir: iletkenlerdeki elektrik alanlar akımları

Tablo 15-1

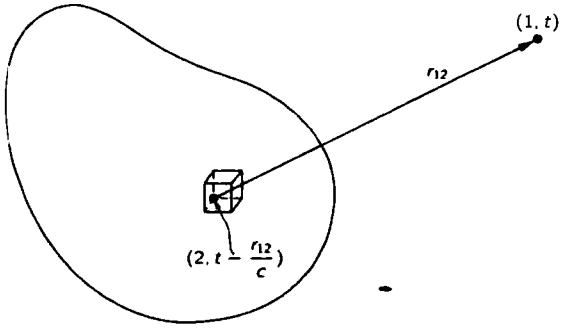
GENELDE YANLIŞ (sadece statik için doğru)	HER ZAMAN DOĞRU
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ (Coulomb yasası)	$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ (Lorentz kuvveti) $\rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Gauss yasası)
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ $\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2$ İletkenler için, $\boldsymbol{E} = 0$, $\phi =$ sabit. $Q = CV$	$\rightarrow \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Faraday yasası) $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ Bir iletkende $\boldsymbol{E}$, akımları meydana getirir.
$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$ (Ampère yasası) $\boldsymbol{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2) \times \boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2$	$\rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (Manyetik yük yoktur) $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ $\rightarrow c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Poisson denklemi) ve $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}$ $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$	$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ve $\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}$ ile $c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$
$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)}{r_{12}}\,dV_2$ $\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2)}{r_{12}}\,dV_2$	$\phi(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2,t')}{r_{12}}\,dV_2$ ve $\boldsymbol{A}(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2,t')}{r_{12}}\,dV_2$ ile $t' = t - \frac{r_{12}}{c}$
$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi\,dV + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}\,dV$	$U = \int\left(\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}\right)dV$

($\rightarrow$)'le işaretlenmiş denklemler, Maxwell denklemleridir.

meydana getirir. Diğer bir deyişle bir iletken, değişen alanlarda, eşpotansiyel değildir. Buradan yola çıkarak, sığa fikrinin de çok hassas olmadığı görülebilir.

Hiç manyetik yük olmadığına göre, $\boldsymbol{B}$'nin yükü *daima* sıfırdır. Dolayısıyla, $\boldsymbol{B}$ daima $\nabla \times \boldsymbol{A}$'ya eşitlenebilir (her şey değişmez!). $\boldsymbol{B}$ ise sadece akımlardan meydana gelmez; $\nabla \times \boldsymbol{B}$; yeni bir terim olan $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ ile akım yoğunluğunun *toplamına* orantılıdır. Bunun anlamı, $\boldsymbol{A}$'nın akımlarla yeni bir denklemle ilişkilenmesidir. Ayrıca ϕ'yle de ilişkilidir. Kendi rahatlığımız için $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ seçme özgürlüğümüzü kullanırsak, $\boldsymbol{A}$ ve ϕ için denklemleri daha basit ve zarif bir biçime getirebiliriz $c^2\,\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\partial\phi/\partial t$ koşulunu ortaya koyduğumuzda, $\boldsymbol{A}$ ve ϕ için diferansiyel denklemler tablodaki gibidir.

$\boldsymbol{A}$ ve ϕ için potansiyeller hâlâ akımlar ve yükler üzerinden alınan integrallerle bulunabilir; ancak bu integraller statik için olanlarla *aynı* değildir. Ne harikadır ki, doğru integraller statiktekiler gibidir. Ufak ve fiziksel olarak çekici bir değişiklik yapmamız gerek sadece. Diyelim ki Şekil 15-10'daki (1) noktasındaki potansiyelleri bulmak için integralleri alırken, (2) noktasında $t' = t - r_{12}/c$ *kadar önce bir zamandaki* j ve ρ değerlerini kullanmalıyız. Tahmin edeceğiniz üzere (1) noktasından (1)'e etkiler c hızında ilerler. Bu küçük değişiklik sayesinde, değişen akımlar ve yüklerin alanlarını çözebilirsiniz. Bir kere $\boldsymbol{A}$ ve ϕ'yi elde ettiniz mi, $\nabla \times \boldsymbol{A}$'dan $\boldsymbol{B}$'yi ve $-\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$'den de $\boldsymbol{E}$'yi elde edersiniz.



Şekil 15-10 (1) noktasında ve t zamanındaki potansiyeller, $t - r_{12}/c$ kadar önce bir zamandaki akımlar ve yükleri kullanarak (2) noktasındaki kaynaktaki her bir bileşenin katkıları toplanarak bulunur.

Son olarak bazı sonuçların –örneğin, elektrik alandaki enerji yoğunluğunun $\epsilon_0 E^2/2$ olması gibi– hem elektrodinamikte hem de statikte doğru olduğunu göreceksiniz. Yanılıp da, bütün bunların "doğal" olduğunu düşünmeyin. Statik durumdan çıkartılmış herhangi bir denklemin geçerliliği dinamik durum için de tekrar ortaya konmalıdır. Buna karşıt bir örnek, elektrostatik enerjinin $\rho\phi$'nin hacim integrali cinsinden ifade edilmesidir. Bu sonuç *sadece* statik için doğrudur.

Bütün bu konular yakın zamanda detaylı şekilde inceleyeceğiz; ancak bu özeti aklınıza yerleştirmek faydalıdır. Böylece neyi unutabileceğinizi ve neyin her zaman doğru olduğunu hatırlamanız gerektiğini bilirsiniz.

16
İNDÜKLENMİŞ AKIMLAR

16-1 Motorlar ve jeneratörler

16-1 Motorlar ve jeneratörler
16-2 Transformatörler ve indüktanslar
16-3 İndüklenmiş akımlar üzerindeki kuvvetler
16-4 Elektrik teknolojisi

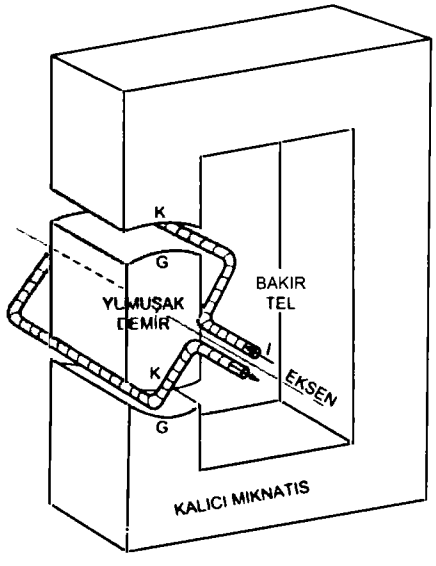
1820 yılında, elektrik ile manyetizma arasında yakın bir ilişki olduğunun keşfedilmesi herkesi heyecanlandırmıştı. O zamana kadar her iki konu da birbirinden bağımsız olarak ele alınıyordu. İlk olarak, tellerdeki akımların manyetik alan meydana getirdiği ve daha sonra, aynı yıl içinde, manyetik bir alan içinde akım taşıyan teller üzerinde etkiyen kuvvetler olduğu keşfedildi.

Mekanik bir kuvvet söz konusu olduğunda insanları heyecanlandıran şey, bunun bir motoru çalıştırmak için kullanılıp kullanılmayacağıdır. Keşiften hemen sonra, insanlar akım taşıyan tellerdeki kuvvetleri kullanarak elektrik motorları tasarlamaya başlamıştı. Elektromanyetik motor ilkesi Şekil 16-1'de kabaca gösterilmekte. Kalıcı bir mıknatıs, iki yarık içinde manyetik alan meydana getirmek için kullanılır. Yarıkların birer tarafında kuzey ve güney kutupları yer alır. Dikdörtgen bir bakır bobin, birer kenarı yarıkların içinde olacak şekilde yerleştirilir. Bobinden akım geçtiğinde, iki yarığın içinde farklı yönlerde akmaya başlar. Bu da zıt kuvvetler meydana getirir ve böylece şekilde gösterilen eksen etrafında, bobin üzerinde bir tork oluşur. Bobin, dönebileceği şekilde bir mile bağlanabilirse; iş yapmasını sağlamak üzere dişlilere veya makaralara bağlanabilir.

Aynı fikri kullanarak, elektriksel ölçümler için hassas bir cihaz yapılabilir. Zaten, kuvvet yasası keşfedildiği gibi elektriksel ölçümlerin hassasiyeti de oldukça artmıştır. Öncelikle, böyle bir motorun torku, belirli bir akım için büyütülebilir. Akımı bir kere değil, defalarca çevirmeniz gerekir bunun için. Bobini de, çok az torkla dönebilecek şekilde yerleştirirsiniz. Bunun için mili çok hassas mücevher rulmanlarla destekleyebilir veya bobini çok ince bir tel veya kuartz bir telle asabilirsiniz. Böylece, çok küçük bir akım bile bobini döndürebilir ve küçük açılar için de dönme miktarı akımla orantılı olur. Dönmeyi ölçmek için bobine bir ibre yapıştırabilir veya en hassas cihazlar için bobine küçük bir ayna bağlar ve görüntü ölçeğinin sapmasına bakarız. Bu tür cihazlara galvanometre denir. Voltmetreler ve ampermetreler de aynı ilkeyle çalışırlar.

Aynı fikirleri daha büyük ölçeğe taşıyarak, mekanik güç elde etmek için büyük motorlar yapabiliriz. Mile yerleştirilmiş temas noktaları sayesinde, bobinin her yarım turunda bağlantılar ters çevrilerek bobinin kendi çevresinde dönüp durması sağlanabilir. Bu durumda tork, daima aynı yöndedir. Küçük DC motorları bu şekilde yapılır. Daha büyük, AC veya DC, motorlarsa, genelde, kalıcı mıknatısı elektrikle beslenen bir elektromıknatısla değiştirerek yapılır.

Elektrik akımlarının manyetik alanlar yarattığının anlaşılmasıyla, insanlar mıknatısların da, bir şekilde, elektrik alanlar yarattığını düşündüler. Bunun için birçok deney yapıldı. Örneğin, iki tel birbirine paralel şekilde yerleştirildi ve birinden akım geçirilerek diğerinde de akım gözlenmeye çalışıldı. Manyetik alanın bir şekilde elektronları ikinci tel boyunca sürükleyeceği ve "benzerler benzerleri hareket ettirmeyi tercih eder" gibi bir yasayı doğrulayacağı düşünülüyordu. Olabilecek en yüksek akım değeri ve en hassas galvanometrelerle deneyler yapıldı, sonuçlar olumsuzdu. Tellere yakın büyük mıknatıslar da gözlemlenebilir bir etki meydana getirmiyordu. Sonunda, 1840 yılında, Faraday gözden kaçan esas özelliği keşfetti: Elektrik etkilerinin ancak bir şeyler *değişirse* ortaya çıktığını. Tellerden birinde *değişken* bir akım varsa, diğerinde bir akım indüklenir. Ya da, bir mıknatıs bir elektrik devresine doğru *yaklaştırılırsa*, bir akım meydana gelir. Akımlar *indüklenir* deriz. Bu, Faraday tarafından keşfedilen indükleme etkisi-



Şekil 16-1 Basit bir elektromanyetik motor gösterimi.

dir. Böylece Faraday sıkıcı statik alanlar konusunu, olağanüstü olaylarla dolu ve heyecan verici dinamik konusuna dönüştürmüş oldu. Bu bölümde bu olayların bazılarının niceliksel tanımını ele alacağız. Göreceğimiz üzere, tüm detaylarını niceliksel olarak analiz etmenin zor olduğu karmaşık durumlara saplanabiliriz hızla. Dert etmeyin, bu bölümdeki esas amaç sizleri öncelikle bu olaylarla tanıştırmaktır. Detaylı analizlerini daha sonra yaparız.

Faraday'ın zamanında bilinmese de, manyetik indüklemenin halihazırda bildiğimiz bir özelliğini kolaylıkla anlayabilirsiniz. Manyetik alanda hareket eden bir parçacığın hızıyla orantılı $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvvetinden gelir bu özellik. Elimizde, Şekil 16-2'de görüldüğü gibi, bir mıknatısın yakınında bulunan bir tel olsun. Telin uçlarını da bir galvanometreye bağlayalım. Teli mıknatısın ucuna doğru hareket ettirdiğimizde, galvanometrenin ibresi hareket eder.

Mıknatıs diklemesine bir manyetik alan meydana getirir ve teli de bu alana doğru ittiğimizde, teldeki elektronlar *yana doğru* bir kuvvet hisseder. Bu kuvvet, alana ve harekete dik açılardadır. Kuvvet, tel boyunca elektronları iter. Peki, kuvvetten uzaktaki galvanometre neden tepki gösterir? Bunun nedeni, manyetik kuvvetin etki ettiği elektronlar hareket etmeye çalıştığında, elektriksel itkiyle teldeki elektronları biraz ileri itmesidir. İtilen elektronlar başka elektronları iterler ve bu böyle domino taşlarının birbirine çarpması gibi, uzun bir mesafe boyunca devam eder. Ne kadar olağanüstü bir şey.

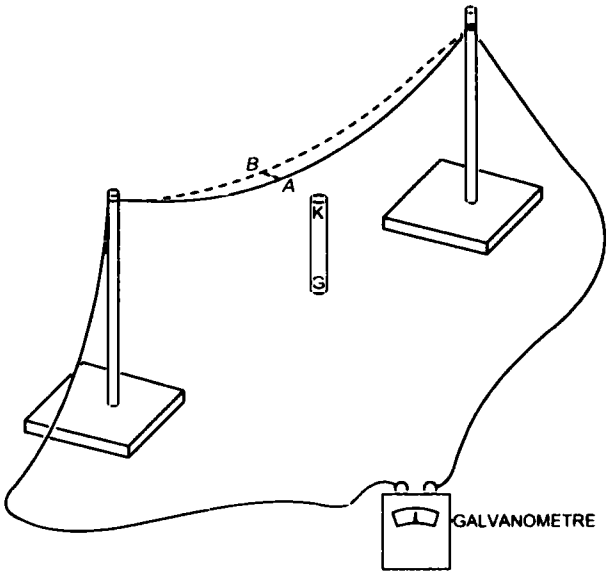
Galvanometrenin mucitleri Gauss ve Weber için bu o kadar inanılmazdı ki, teldeki kuvvetlerin nereye kadar uzandığını merak ettiler. Bulundukları şehri boydan boya kateden bir tel astılar. Bir ucunda bulunan Gauss telleri bir bataryaya (bataryalar, jeneratörlerden önce biliniyordu) bağladı ve Weber de galvanometrenin ibresinin oynadığını gözlemledi. Uzak mesafelere sinyal göndermenin bir yolunu bulmuşlardı. Telgraf devrinin başlangıcıydı bu! Bunun elbette doğrudan indüksiyonla bir ilgisi yoktur. Tellerin akımları taşıma şekliyle, akımların indüksiyonla hareket ettirilip ettirilmediğiyle ilgilidir.

Şimdi, Şekil 16-2'deki düzenekte bu sefer teli sabit tuttuğumuzu ve mıknatısı hareket ettirdiğimizi düşünelim. Yine galvanometrede bir hareket görürüz. Faraday'ın keşfettiği gibi, telin altında mıknatısı hareket ettirmek ile telin üstünde mıknatısı hareket ettirmenin etkisi aynıdır. Gelgelelim, mıknatıs hareket ettirildiğinde teldeki elektronlar üzerinde $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvveti artık gözlemlenmez. Faraday'ın bulduğu, bu yeni etkiydi. Bugün bunu, görelilik fikriyle anlamayı umuyoruz.

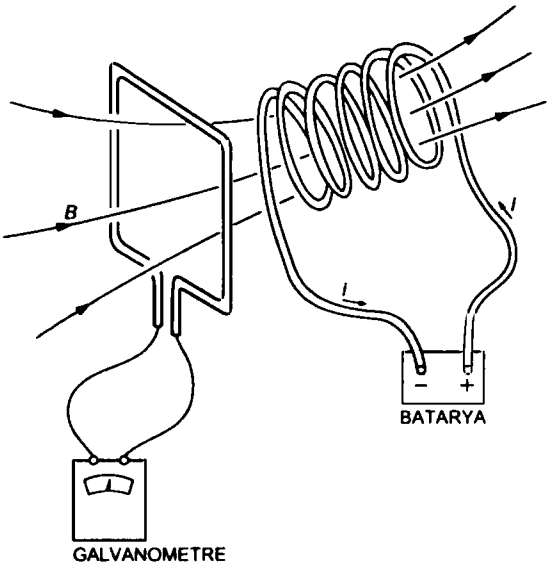
Bir mıknatısın manyetik alanının iç akımlarından kaynaklandığını zaten biliyoruz. Bu yüzden, aynı etkiyi, mıknatıs yerine Şekil 16-2'de görüldüğü gibi içinden akım geçen bir bobin koyduğumuzda da gözlemlemeyi bekleyebiliriz. Teli bobinin yakınından geçirdiğimizde galvanometreden geçen bir akım olur. Aynı etkiyi bobini telin yanından geçirdiğimizde de gözlemleriz. Şimdi daha heyecanlı bir şeye hazır olun: Bobinin manyetik alanını, onu hareket *ettirmeden*, *akımını değiştirerek* değiştirirsek yine galvanometrenin ibresinin oynadığını görürüz. Örneğin, Şekil 16-3'te görüldüğü gibi, bobinin yakınından bir ilmek tel varsa ve her ikisini de sabit tutup akımı kesersek, galvanometreden bir akım darbesi görürüz. Bobine yine akım verdiğimizde, galvanometrenin ibresi diğer yöne hareket eder.

Ne zaman ki Şekil 16-2 veya Şekil 16-3'teki gibi bir düzenlemede bulunan galvanometrede akım olsa, teldeki elektronları, tel boyunca bir yönde iten net bir etki vardır. Değişik yerlerde, farklı yönde etkiler olabilir; ancak bir yöndeki etki diğerinden daha fazladır. Kayda değer şey, bütün devre boyunca bütünleşmiş itme etkisidir. Bu itme etkisine, devredeki *elektromotor kuvveti* (kısaltması *emk*) denir. Daha detaylı olarak *emk*, devrenin tamamında yol üzerinden integrali alınan teldeki birim yük başına düşen teğet kuvvet olarak tanımlanır. Faraday, bir telde emk'nın üç farklı şekilde meydana getirilebileceğini keşfetti: teli hareket ettirerek, tel yakınında bir mıknatıs hareket ettirerek veya yakındaki bir teldeki akımı değiştirerek.

Şekil 16-1'deki basit makineyi yeniden ele alalım. Ancak şimdi, onu döndürmek için telden akım geçirmek yerine, gelin ilmeği elle veya bir kasnak yardımıyla çevirelim. Bobin dönerken, telleri manyetik alan içinde hareket ediyor olur ve bobinin devresi içinde emk gözlemleriz. Motor, jeneratör olur.



Şekil 16-2 Galvanometrede gözlemlendiği üzere, bir teli manyetik alan içinde sürüklemek akım meydana getirir.



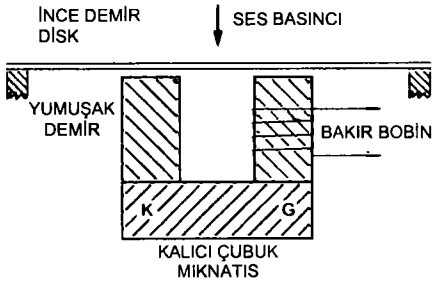
ŞEKİL 16-3 Akım taşıyan bir bobin, hareket ettirildiğinde veya üzerindeki akım değiştirildiğinde diğer bobin üzerinde akım meydana gelmesini sağlar.

Jeneratörün bobininde, hareketinden dolayı indüklenmiş emk vardır. Faraday, emk'nın miktarını veren basit bir kural keşfetmiştir. (Şimdilik sadece bu kuralı ifade edecek ve detaylı incelemesini sonraya bırakacağız). Kural şudur: İlmek içinden geçen manyetik akı (bu akı, ilmeğin alanı üzerinden integrali alınan B'nin dik bileşenidir) zamanla değiştiğinde, emk akının değişim hızına eşittir. Buna "akı kuralı" denir. Şekil 16-1'deki bobin döndürüldüğünde, içinden geçen akı değişir. Başlangıçta akı bir yönde ilerler; daha sonra bobin 180° çevrildiğinde aynı akı bu sefer diğer yöne gider. Bobini sürekli şekilde döndürürsek, akı önce artı değerdedir, sonra eksi, sonra artı, sonra eksi ve bu böyle devam eder. Akının değişim hızı da değişmeli ayrıca. Böylece, bobinin içinde dalgalı bir emk meydana gelir. Bobinin iki ucunu kontak bilezikleriyle dışardaki tellere bağlarsak, bir alternatif akım jeneratörü elde ederiz.

Ya da, bir miktar kontak bileziği yardımıyla her bir yarım dönüşten sonra bobin uçları ile dışardaki teller arasındaki bağlantı tersine çevrilebilir. Böylece, emk tersine döndüğünde bağlantılar da dönmüş olur. Daha sonra, bu emk darbeleri, akımları dış devre boyunca daima aynı yönde iter. Buna da doğru akım jeneratörü denir.

Şekil 16-1'de görülen makine bir motor da olabilir, bir jeneratör de. Motorlar ile jeneratörler arasındaki bu karşılıklılığı iki adet özdeş, bobinleri iki bakır telle bağlı, kalıcı mıknatıs tipli, doğru akım "motor"u kullanarak gösterebiliriz. Birinin milini mekanik olarak çevirdiğimizde, o jeneratör olur ve diğerini bir motormuş gibi tahrik eder. İkincisinin milini mekanik olarak döndürürseniz, o jeneratör olur ve diğerini motormuş gibi tahrik eder. Yeni bir tür benzerliğe dair ilginç bir örnekle karşı karşıyayız: motor ve jeneratör benzerdirler. Niceliksel benzerlikse, aslında, tam anlamıyla tesadüfi değildir. Nedeni, enerjinin korunumu yasasıdır.

Emk üretebilecek veya emk'lara tepki gösterebilecek bir başka cihaz örneği ise, standart bir telefonun alıcı kısmıdır: "kulaklığı". Bell'in ilk orjinal telefonu bu türde, birbirlerine iki uzun telle bağlanmış en iki "kulaklık" tan oluşmaktaydı. Temel çalışma ilkesi Şekil 16-4'te gösterilmiştir. Kalıcı bir mıknatıs, yumuşak demirden iki "çatal"da ve ses basıncıyla hareket ettirilen ince bir diyaframda bir manyetik alan meydana getirir. Diyafram hareket ettiğinde, çatallardaki manyetik alanın miktarı değişir. Böylece, çatallardan birinin etrafındaki tel bobinin içindeki akı, ses dalgası diyaframa çarptığında, değişmiş olur. Diğer bir



Şekil 16-4 Bir telefon ileticisi veya alıcısı.

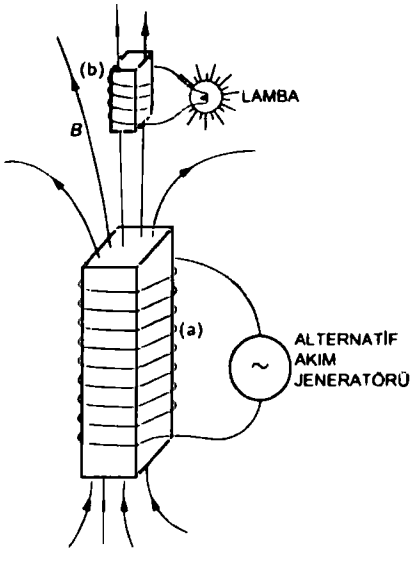
deyişle, bobinde bir emk meydana gelir. Bobinin uçları bir devreye bağlıysa, sesi elektriksel olarak temsil eden bir akım meydana gelir.

Şekil 16-4'te görülen bobinin uçları iki tel yardımıyla benzer bir cihaza bağlanırsa, ikinci bobinde değişken bir akım meydana gelir. Bu akımlar değişken bir manyetik alan ve demir diyafram üzerinde değişken bir çekim meydana getirirler. Diyafram titreşir ve ilk diyaframı titreştiren türden ses dalgaları meydana getirir. Birazcık demir ve bakır sayesinde insan sesini teller üzerinden aktarmayı başardık!

(Modern telefonların, aynı yukarıda tarif edildiği gibi bir alıcısı vardır; ancak daha güçlü bir iletim almak için gelişmiş bir icat kullanırlar. Bu "karbon tozlu mikrofon"dur ve ses basıncı kullanarak bir bataryadan elektrik akımı elde eder.)

16-2 Transformatörler ve indüktanslar

Faraday'ın keşiflerinin en ilginç özelliklerinden biri, hareket eden bir bobinde –manyetik kuvvet $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ cinsinden anlayabileceğimiz– emk olması değil; bir bobindeki değişen akımın diğer bir bobinde emk meydana getirmesidir. İşin daha da ilginci, diğer bobindeki emk miktarı aynı "akı kuralı", diğer bir deyişle emk'nın bobinden geçen manyetik akının değişim hızına eşit olması kuralı sayesinde hesaplanır. Elimizde, Şekil 16-5'te görüldüğü gibi, her biri farklı demir levhalar (bunlar daha şiddetli manyetik alanlar meydana getirmeye yardımcı olur) etrafında sarmalanmış iki bobin olsun. Bobinlerden birini –bobin (a)– bir alternatif akım jeneratörüne bağlayalım. Sürekli değişen akım, sürekli değişken bir manyetik alan meydana getirir. Bu değişken akım ikinci bobinde –bobin (b)– dalgalı bir emk meydana getirir. Bu emk, örneğin, bir elektrik lambasını yakmak için yeterli güç üretebilir.



Şekil 16-5 Demir levha etrafına sarılmış iki bobin, doğrudan bir bağlantı olmadan bir jeneratörün bir lambayı yakmasını sağlayabilir.

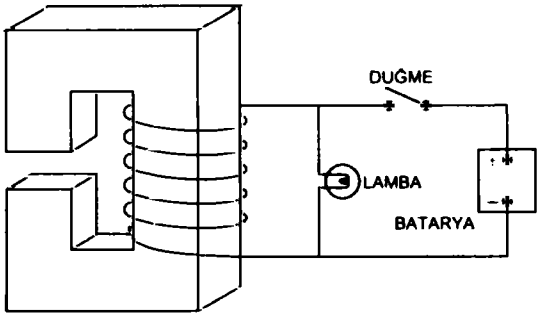
Elbette, (b) bobinindeki emk'nın dalgalanma frekansı orijinal jeneratörün frekansıyla aynıdır. (b) bobinindeki akım ise, (a) bobininkinden daha büyük veya daha küçük olabilir. (b) bobinindeki akım üzerine indüklenen emk'ya ve devrenin geri kalanının indüktansı ve direncine bağlıdır. Örneğin, küçük bir akı değişiminden dolayı emk jeneratörünkinden az olabilir. (b) bobinindeki emk'yı jeneratörünkinden daha büyük de yapabiliriz. Bunun için (b) bobinini daha fazla sarımlı yapmamız yeterlidir; zira belirli bir manyetik alan için bu durumda bobinden geçen akı daha büyüktür. (Ya da, başka türlü açıklamayı tercih ederseniz şu da olur: emk her sarımda aynıdır ve toplam emk her bir sarımın emk'sının toplamı olduğundan bir dizi içinde ne kadar sarım varsa o kadar büyük emk elde edilir.)

Böyle iki bobin kombinasyonuna transformatör denir ve manyetik alanları yönlendirmek için demir levhalarla düzenleme yapılır. Bir emk'yı ("voltaj" olarak da adlandırılır) bir diğerine "dönüştürebilir".

Tek bir bobinde indüksiyon etkileri de vardır ayrıca. Örneğin, Şekil 16-5'teki düzenekte sadece (b) bobini içinden geçen değil, aynı zamanda (a) bobininden de geçen dalgalı bir akı vardır. (a) bobinindeki değişken akım bobin içinde dalgalı bir manyetik alan yaratır ve bu alanın akısı da sürekli değişir. Böylece (a) bobininde *kendiliğinden indüklenen* bir emk oluşur. Bir manyetik alan meydana getiren herhangi bir akımın üzerinde bir emk vardır. Bu etkiye *öz indüktans* denir.

Emk'nın akı değişim hızına eşit olduğunu ifade eden "akı kuralı"nı belirttiğimizde, emk'nın yönünü belirtmemiştik. Emk'nın ne yöne doğru gittiğini belirleyen basit bir kural vardır; buna Lenz kuralı denir: emk, herhangi bir akı değişimine karşı koymaya çalışır. Dolayısıyla, daima indüklenen emk'nın yönü, kendisiyle aynı yönde olan akımın ürettiği $\boldsymbol{B}$ akısının, emk'yı meydana getiren $\boldsymbol{B}$ akımına karşı geleceği şekilde olurdu. Lenz kuralı, Şekil 16-1'deki veya Şekil 16-3'teki transformatör sarımının emk yönünü bulmak için kullanılabilir.

Tek bir bobinde (veya herhangi bir telde) değişen bir akım varsa, devrede "zıt" bir emk vardır. Bu emk, manyetik alandaki değişime ve dolayısıyla akımdaki değişime karşı gelecek yönde, Şekil 16-5'teki (a) bobininde akan yükler üzerinde etki eder. Akımı sabit tutmaya çalışır. Akım arttıkça akıma karşı gelir



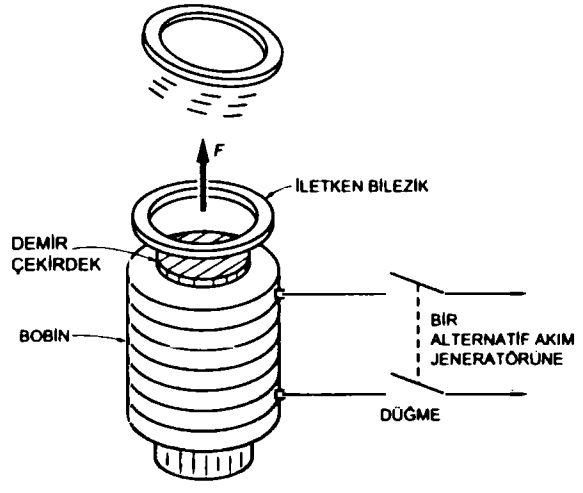
ŞEKİL 16-6 Bir elektromıknatıs için devre bağlantıları. Lamba, düğme açık konumdayken akımın geçmesini ve böylece fazla *emk* oluşmasını önler.

ve akım azaldıkça da akımla aynı yönde olur. Öz indüktanstaki bir akımın "eylemsizliği" vardır; çünkü indükleme etkileri akımı sabit tutmaya çalışır. Aynı, mekanik eylemsizliğin bir nesnenin hızını sabit tutmaya çalışması gibi.

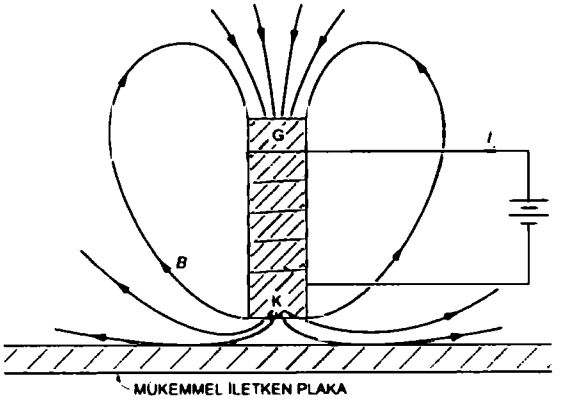
Herhangi bir elektromıknatısın büyük bir öz indüktansı olabilir. Şekil 16-6'daki gibi, büyük bir elektromıknatısın bobinine bir batarya bağlayalım ve şiddetli bir manyetik alan meydana getirelim. (Akım, bataryanın voltajı ve bobindeki telin direnciyle belirlenen kararlı bir değere ulaşır.) Bataryayı, düğmeyi açarak sistemden ayıralım. Devreyi gerçekten açmış olsaydık, akım hızla sıfıra inerdi ve bunu yaparken muazzam bir emk meydana getirirdi. Çoğu durumda emk, düğmenin uçları arasında bir kıvılcım atlatacak kadar büyüktür. Bu yüksek voltaj bobinin yalıtımına veya eğer düğmeyi kontrol eden sizseniz, size zarar verebilir. Bu nedenlerden dolayı elektromıknatıslar genelde Şekil 16-6'da görülen devreye bağlanırlar. Düğme açıldığında akım hızla düşmez; kararlı kalır ve bobinin öz indüktansından kaynaklanan emk tarafından lambanın üzerinden akar.

16-3 İndüklenmiş akımlar üzerindeki kuvvetler

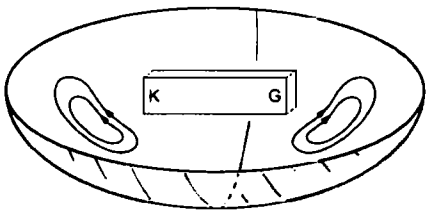
Şekil 16-7'de gösterilen cihazla Lenz kuralının etkileyici gösterimine muhtemelen şahit olmuşsunuzdur. Cihaz bir elektromıknatıstır, aynı Şekil 16-5'teki (a) bobini gibi. Mıknatısın bir ucuna alüminyum bir bilezik yerleştirilir. Düğmeyi kapatarak bobini bir alternatif akım jeneratörüne bağladığımızda, bilezik havaya fırlar. Kuvvet elbette, bilezikte indüklenmiş akımlardan gelir. Bileziğin havaya uçması, içindeki akımların bilezik içinden geçen alanın değişimine karşı geldiğini gösterir. Mıknatıs tepe noktasında bir kuzey kutbu varken, bilezikteki indüklenmiş akım aşağı doğru işaret eden bir kuzey kutbu meydana getirir. Bilezik ve bobin, aynı kutupları karşı karşıya gelmiş iki mıknatıs gibi birbirlerini iterler. Bileziğe ince bir radyal kesik atılırsa kuvvet yok olur, bu da onun bilezikteki akımlardan meydana geldiğinin kanıtıdır.



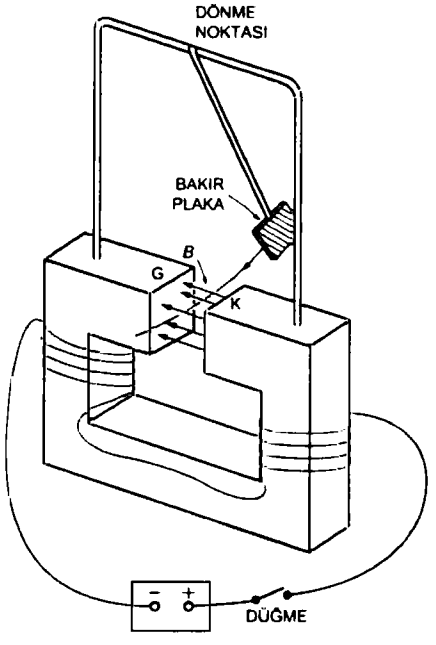
Şekil 16-7 Değişken bir akıma sahip elektromıknatıs, iletken bir bileziği güçlü bir şekilde itiyor.



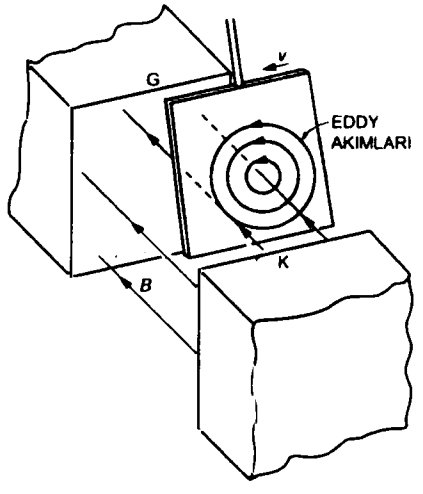
Şekil 16-8 Mükemmel iletken bir levhanın yakınında bir elektromıknatıs.



Şekil 16-9 Süper iletken bir kase üzerinde, eddy akımları sayesinde havada asılı duran bir çubuk mıknatıs.



Şekil 16-10 Sarkacın frenlenmesi eddy akımlarına bağlı kuvvetleri gösterir.



ŞEKİL 16-11 Bakır sarkaçtaki eddy akımları.

Şekil 16-7'deki elektromıknatısın ucuna bilezik yerine alüminyum veya bakır bir disk yerleştirirsek, o da itilir. İndüklenmiş akımlar disk malzemesi içinde dolaşır ve yine bir itme etkisi yaratır.

Benzeri şekilde ilginç bir etki, mükemmel iletken bir levha parçasıyla da gözlemlenir. Bir "mükemmel iletken"de akıma karşı herhangi bir direnç yoktur. İçinde akım meydana geldiğinde, sonsuza kadar akıp durabilir. Hatta, en küçük bir emk bile rastgele büyük bir akım meydana getirebilir. Bu da, gerçekte, hiç emk olmayacağı anlamına gelir. Böyle bir levhadan manyetik akı geçirmeye çalıştığınızda, zıt $\boldsymbol{B}$ alanları meydana getiren akımlar ortaya çıkar. Hepsinin sonsuz derecede küçük emk'ları vardır, bunun sonucunda da hiç akı girmez.

Elimizde mükemmel iletken bir levha olsun ve yakınına elektromıknatıs yerleştirelim. Mıknatıstaki akımı açtığımızda, levhada eddy akımları denilen akımlar meydana gelir, böylece hiç manyetik akı girmez. Alan çizgileri Şekil 16-8'deki gibi görünür. Aynı şey, elbette, mükemmel bir iletkenin yakınına bir çubuk mıknatıs getirirsek de olur. Eddy akımları zıt (karşı gelen) akımlar meydana getirdiğinden, iletken mıknatısları iter. Bu sayede Şekil 16-9'daki gibi, bir tabak şeklindeki mükemmel iletken üzerinde bir çubuk mıknatısı havada tutmak mümkündür. Mıknatıs, mükemmel iletkendeki eddy akımları tarafından indüklenen itme etkisiyle havada asılı kalır. Normal sıcaklıklarda mükemmel iletken yoktur; ancak bazı malzemeler yeterince düşük sıcaklıklarda mükemmel bir iletken haline gelir. Örneğin, kalay –269,35°C derecede mükemmel bir iletken olur. Bu tür iletkenlere süper iletken denir.

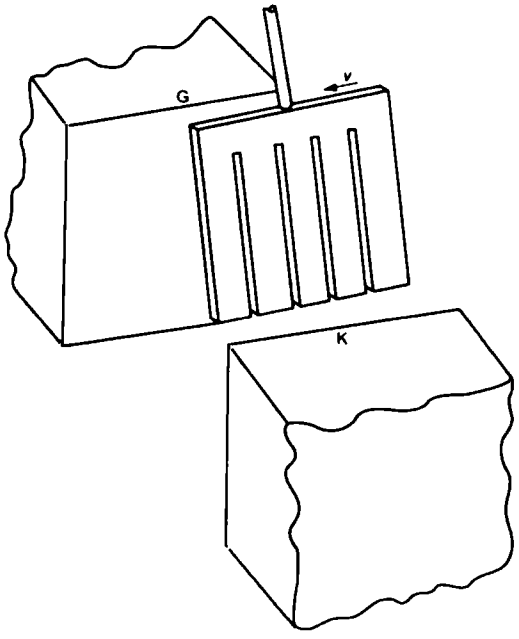
Şekil 16-8'deki iletken yeterince mükemmel değilse, eddy akımlarına karşı bir miktar direnç gözlemlenir. Akımlar yavaşça söner ve mıknatıs da yavaşça iner. Mükemmel olmayan bir iletkendeki eddy akımlarının sürekliliği için emk gereklidir ve emk için de sürekli değişen bir akı gerekir. Manyetik alanın akısı kademeli bir şekilde iletkenin içine işler.

Normal bir iletkende sadece, eddy akımlarından meydana gelen itme kuvvetleri değil; fakat enine kuvvetler de olabilir. Örneğin, bir mıknatısı iletken bir yüzeyden yanlamasına geçirirsek, eddy akımları bir sürüklenme kuvveti doğurur. Bunun nedeni, indüklenen akımların akının konumunun değişimine karşı gelmesidir. Bu tür kuvvetler hızla orantılıdır ve bir nevi viskoz kuvvettirler.

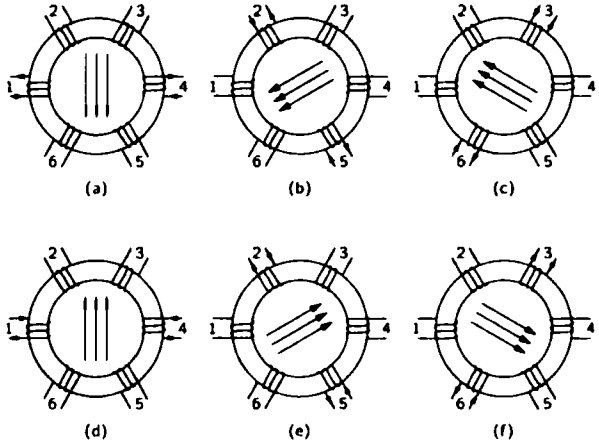
Bu etkileri Şekil 16-10'daki cihazda gözlemleyebiliriz. Kare bir bakır levhayı bir mile asarak bir sarkaç meydana getirelim. Sarkaç, bir elektromıknatısın kutupları arasında salınıp dursun. Mıknatısa akım verildiğinde, sarkacın hareketi aniden durur. Metal levha mıknatıs boşluğuna girdiği an, levha üzerinde indüklenen akım levhadaki akı değişimine karşı gelir. Levha mükemmel bir iletken olsaydı, akımlar o kadar büyük olurdu ki levhayı dışarı doğru iterlerdi. Bakır bir levha içinde bir miktar direnç vardır, diğer bir deyişle akımlar başta, levha alana girmeye başladığında, onu neredeyse tamamen durmaya zorlar. Daha sonra akımlar sönmeye başladıkça, levha manyetik alanda hareketsiz kalır.

Bakır sarkaçtaki eddy akımlarının doğası Şekil 16-11'de gösterilmiştir. Akımların geometrisi ve gücü levhanın şekline çok duyarlıdır. Eğer, örneğin, levha yerine Şekil 16-12'deki gibi üzerinde birçok yarık bulunan bir cisim yerleştirilirse, eddy akımlarının etkisi ciddi şekilde azalır. Sarkaç, manyetik alanın içinden çok küçük bir engelleyici kuvvet hissederek geçip gider. Bunun nedeni, bakırın her bir bölümündeki akımları sürdüren daha az akı olmasıdır. Bu sayede her bir ilmeğin direncinin etkileri daha büyüktür. Akımlar daha ufak ve sürüklenme de daha azdır. Kuvvetin viskoz özelliği, bakır levha Şekil 16-10'daki mıknatısın kutupları arasında konulduktan sonra serbest bırakıldığında daha iyi anlaşılır. Düşmez, aşağı doğru yavaşça batar. Eddy kuvvetleri harekete karşı kuvvetli bir direnç gösterirler. Aynı, bir balın içindeki viskoz sürüklenme gibi.

Bir mıknatısın yakınından iletken geçirmek yerine, iletkeni manyetik alan içinde döndürmeye çalışırsak, aynı etkilerden dolayı direnç gösteren bir tork gözlemleriz. Alternatif olarak, bir mıknatısı iletken bir levha veya halka etrafında döndürürsek, halka sürüklenir; halka içindeki akımlar halkayı mıknatısla beraber döndürmeye çalışan bir tork yaratmıştır çünkü.

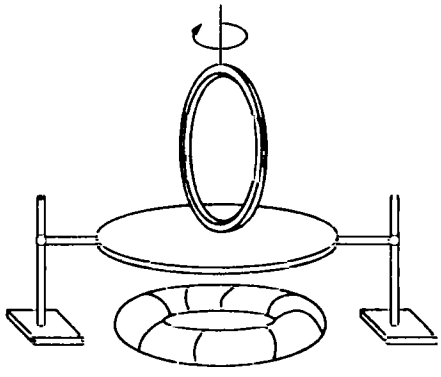


Şekil 16-12 Levhaya açılan yarıklarla, eddy akımı etkileri gözle görülür derecede azaltılır.



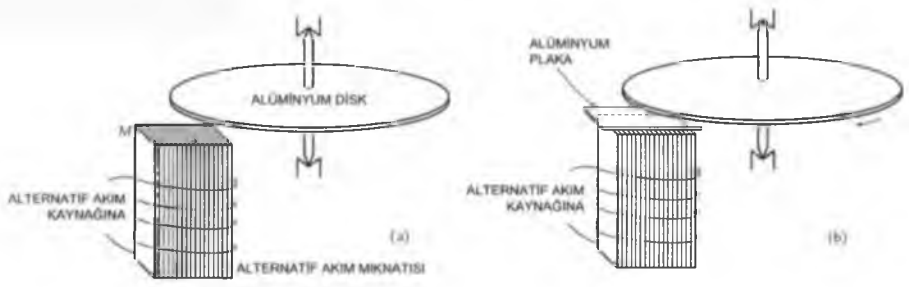
Şekil 16-13 Dönen bir manyetik alan yaratmak.

Dönen mıknatısınki gibi bir manyetik alan, bobinlerin Şekil 16-13'te gösterildiği gibi düzenlenmesiyle meydana getirilebilir. Simit şeklinde bir demir parçası alıp, etrafına altı bobin saralım. Şeklin (a) bölümündeki gibi, (1) ve (4) üzerinden akım ilettiğimizde, şekilde görülen yönde bir manyetik alan meydana gelir. Akımı (2) ve (5) üzerinden geçirirsek, manyetik alanın yönü şeklin (b) bölümündeki gibi değişir. Sürece devam ederek, şekildeki gibi bir alan serisi elde ederiz. Bu süreci sürekli bir şekilde yapmayı başarabilirsek, "dönen" bir mıknatıs alan elde ederiz. Akım dizisini elde edebilmek için bobinler üç evreli [üç fazlı] bir güç hattına bağlayabiliriz. "Üç evreli güç" Şekil 16-1'deki ilkeyi kullanarak bir jeneratör yardımıyla yaratılabilir. Tek fark, bu sefer aynı mil üzerinde *üç* ilmek birbirine simetrik, diğer bir deyişle aralarında 120^0 olacak şekilde bağlanmıştır. Bobinler bir birim gibi döndürüldüklerinde, emk önce birinde en tepe değere ulaşır, sonra diğerinde, sonra diğerinde ve bu böyle düzenli bir dizi şeklinde devam eder. Üç evreli gücün birçok avantajı vardır. Bunlardan biri, dönen bir manyetik alan yaratabilmektir. Böyle bir dönen alanın meydana getirdiği torkun, bir iletken üzerindeki etkisi, Şekil 16-14'te gibi simidimizin hemen üzerindeki bir yalıtkan masanın üzerinde bir metal halkayı tutarak gösterilebilir. Dönen alan, halkanın dik bir eksen etrafında dönmesine neden olur. Burada gördüğünüz temel elemanlar, büyük, ticari bir üç evreli indüksiyon motorunda gördüklerinizle aynıdır.



Şekil 16-14 Şekil 16-13'ün dönen alanı iletken bir halka üzerinde tork uygulamak için kullanılabilir.

Farklı bir indüksiyon motoru biçimi Şekil 16-15'te gösterilmiştir. Bu düzenleme pratik, yüksek verimli bir motor için uygun olmasa da temel ilkeyi anlatmak için yeterlidir. Solenoidal bir bobinle sarmalanmış kat kat demir levhalardan oluşmuş *M* elektro-mıknatısı, bir jeneratör sayesinde alternatif akımla güçlendirilir. Mıknatıs, alüminyum disk içinden geçen değişken bir *B* akısı yaratır. Şeklin (a) bölümündeki gibi, elimizde sadece bu iki parça varsa, elimizde bir motor yoktur. Diskte eddy akımları vardır, fakat bunlar simetriktir ve tork oluşmaz. (İndüklenen akımlardan dolayı disk bir miktar ısınır.) Şimdi, mıknatıs kutbunun yarısını alüminyum bir levhayla kapattığımızı düşünelim, şeklin (b) kısmındaki gibi. Disk dönmeye başlar ve artık bir motorumuz vardır. Bu işlem, *iki* eddy akımı etkisine dayanır. Birincisi, alüminyum levhadaki eddy akımları içinden geçen akıya karşı gelirler; böylece levhanın üzerindeki manyetik alan,



Şekil 16-15 Gölge kutuplu indüksiyon motorunun basit bir örneği.

kaplanmamış yarım kutup boyunca alanı geciktirir. Bu "gölgelenmiş kutup" denilen etkinin yarattığı alan "gölgeli bölgede", "gölgesiz" alandaki kadar değişkenlik gösterir. Aralarında sabit bir zaman miktarı kadar gecikme vardır. Tüm etki, sanki bu mıknatısın yarısı genişliğinde bir mıknatıs sürekli gölgesiz bölgeden gölgeli bölgeye hareket ettiriliyormuş gibidir. Böylece, değişen alanlar diskteki eddy akımlarıyla etkileşerek bir tork meydana getiriler.

16-4 Elektrik teknolojisi

Faraday, manyetik akı değişiminin emk meydana getirdiğine dair olağanüstü keşfini açıkladığında; kendisine (yeni bir doğa yasası keşfeden herkese sorulduğu gibi) sorulan ilk soru şu oldu: "Bunun faydası ne?" Tek bulduğu, bir mıknatıs yakınında bir tel hareket ettirdiğinde küçük bir akım meydana gelmesi ilginçliğiydi. Bunun nasıl bir "faydası" olabilirdi ki? Cevabı şu oldu: "Yeni doğan bir bebeğin faydası nedir?"

Şimdiyse bu keşfin yol açtığı olağanüstü sayıdaki uygulamaları düşünün. Burada tanımladığımız şeyler sadece oyuncak değil, birçok durumda pratikte var olan bir makinenin çalışma ilkesini açıklamak için kullanılan seçilmiş örneklerdir. Örneğin, dönen alan içindeki dönen halka bir indüksiyon motorudur. Bu hali ve gerçekteki bir indüksiyon motoru arasında bazı farklar vardır elbette. Halkanın torku çok küçüktür, elinizle bile durdurabilirsiniz. İyi bir motor için, bileşenler daha yakın bir araya getirilmelidir; havada "ziyan olan" çok fazla manyetik alan olmamalıdır. Alanı konsantre etmek için demir kullanılır. Demirin bunu nasıl yaptığını henüz tartışmadık; fakat bilin ki demir, bir manyetik alanı bakır bobinlerin tek başlarına yapabileceklerinden on binlerce kat daha şiddetli hale getirebilir. Demir parçaları arasında boşluklar ufak bırakılır; bunu yapabilmek için bir miktar demir dönen halkaya eklenebilir bile. Her şey en büyük kuvvetleri ve verimliliği –elektriksel gücün mekanik güce çevrimi– elde etmek için düzenlenir; ta ki "halka" elle tutulamaz hale gelene kadar.

Demir parçaları arasındaki boşlukların kapatılması ve aletin en verimli şekilde çalıştırılmasına *mühendislik* denir. Her ne kadar kuvvetlerin nasıl ortaya çıktığına dair yeni temel ilkeler yoksa da, tasarım problemleri üzerinde ciddi şekilde çalışma gerektiren bir disiplindir mühendislik. Temel ilkelerden, pratik ve ekonomik bir tasarıma giden uzun bir yol vardır. Olağanüstü bir mühendislik tasarımı sayesinde Boulder barajı ve beraberindekileri meydana getirebildik.

Nedir Boulder Barajı? Basitçe, kocaman bir nehir bir beton duvarla tutulmaktadır. Ama ne duvar, görmelisiniz! Hassas şekilde hesaplanmış, öyle mükemmel bir eğri şekli vardır ki mümkün olan en az betonla o koca nehri tutar. Tabanına doğru sanatçıların sevdiği, mühendislerinse değerini bildiği şekilde kalınlaşır. Mühendisler değerini bildiği şekilde diyorum, çünkü onlar kalınlaşmanın suyun derinliğiyle artan basınçtan dolayı gerekli olduğunu bilirler. Elektrikten uzaklaşıyoruz ama, gelin şimdi ona odaklanalım.

Daha sonra su kocaman bir boruya yönlendirilir. Kendi içinde gayet güzel bir mühendislik başarısı. Su, bir "su çarkına" –devasa bir türbine– yönlendirilir ve bu sayede çarklar dönmeye başlar. (Bir başka mühendislik özelliği.) Fakat çarkla-

rı neden döndürmeli? Çarklar, her biri bükülmüş ve birbirinin içine geçmiş oldukça çapraşık bir bakır ve demir yığınına bağlıdır. İki parçayla; biri dönen ve biri dönmeyen. Hepsi birkaç malzemenin karmaşık şekilde karışımıdır. Çoğunlukla bakır ve demir; ama aynı zamanda yalıtım maksatlı biraz kâğıt ve şellak. Tırrrrum, trrrrum, trak tiki tak! Devinip duran devasa bir şey. Bir jeneratör. Bakır ve demir yığınının bir yerlerinden, birkaç özel bakır parçası ayrılır. Baraj, türbin, demir, bakır, hepsi oraya birkaç bakır çubukta özel bir şey, bir elektro motor kuvveti yaratmak için bir araya gelir. Daha sonra bu bakır çubuklar bir transformatörün demir kısmının etrafında defalarca döner durur; işleri budur.

O demir parçasının etrafında bir başka bakır kablo sarılıdır ve jeneratöre doğrudan şekilde bir bağlantısı yoktur. Jeneratörün bakır çubukları bu kablonun yakınından geçerken etkilenirler ve emk'larını edinirler. Transformatör, jeneratörün verimli çalışması için gerekli düşük voltajı alır ve elektrik enerjisinin uzak mesafelere uzun kablolar sayesinde taşınabilmesi için gerekli yüksek voltajlara çıkarır.

Bütün bu olup biten olağanüstü derecede verimli olmalıdır. Atık veya kayıp olamaz. Neden? Zira söz konusu olan koca bir şehrin enerji ihtiyacıdır. Çok küçük bir kısmı, yüzde bir ila ikisi bile kaybolsa, arta kalan enerjiyi düşünün. Sadece yüzde biri transformatörde kalsa, o enerjiyi bir yerden çıkarmamız gerekir. Isıya dönüşürse, bütün her şeyi eritebilir. Elbette bir miktar verimsizlik vardır ve transformatör ısınır; ama bir radyatör içinden yağ geçirerek transformatörü kolayca soğutabiliriz.

Boulder Barajından birkaç düzine bakır çubuk çıkar. Uzun, uzun, çok uzun, bileğiniz kadar kalın ve her yöne yüzlerce kilometre uzanan çubuklardır bunlar. Bu bakır çubuklarda o koca nehrin gücü taşınır. Sonra o çubuklar daha fazla çubuk yapmak için bölünürler ... sonra daha fazla transformatöre ... bazen de, akımı bir başka biçimde yeniden yaratan daha büyük jeneratörlere... bazen endüstri dişlilerini döndüren devasa motorlara ... daha fazla transformatöre ... daha çok bölünme ve dağılma ... ta ki nehir koca şehre enerji şeklinde yayılana dek. Motorları döndürür, ısıtır, ışık yayar ve cihazları çalıştırır. 960 kilometre ötedeki soğuk sudan sıcak ışıklar çıkarma mucizesi. Hepsi, özel şekilde düzenlenmiş bakır ve demir parçaları sayesinde. Demir haddelemek için kullanılan büyük motorlar veya dişçinizin matkabının küçük motorları. Binlerce küçük çark, Boulder Barajında dönen büyük çarktan beslenir. Büyük çarkı durdurduğunuzda, bütün çarklar durur ve ışıklar söner. Her şey birbirine bağlıdır.

Durun, dahası da var. Koca nehrin olağanüstü gücünü, hani birkaç damlası dişçinizin matkabını döndüren, alıp şehre dağıtan aynı olgu bu sefer müthiş hassas cihazların bulunduğu binaya gelir ... inanılmaz derecede küçük akımları tespit etmek için ... seslerin, müziğin ve resimlerin iletimi için ... bilgisayarlar için ... olağanüstü hassaslıkta otomatik makineler için.

Bütün bunlar bakır ve demirin dikkatli şekilde bir araya getirilmesiyle mümkündür. Verimli manyetik alanlar ... bir santimetrenin altıda biri kadar toleranslarla fırıl fırıl dönen, 2 metre çapında dönen demirler ... optimum verimlilik için bakırın hassas oranları ... barajın eğrisi gibi, hepsi bir amaca hizmet eden garip şekiller.

Gelecekte, bir arkeolog Boulder Barajını meydana çıkardığında, o eğrilerin güzelliğini takdir edeceğini tahmin edebiliriz. Ya da, uzak gelecekteki medeniyetlerden bazı kaşifler jeneratörlere ve transformatörlere bakıp, şunu diyebilir: "Yahu şuna bakın, her bir demir parçasının ne kadar harika verimlilikte bir şekli var. Her bir bakır parçası için ne kadar düşünülmüştür kim bilir!"

Bu, mühendisliğin ve elektrik teknolojisinin tasarımının gücüdür. Doğada hiçbir yerde var olmayan bir şey, jeneratörün içinde yaratılmıştır. Başka yerlerde indüksiyon kuvvetleri olduğu doğrudur. Bunlardan bazıları güneşin ve yıldızların etrafındadır ve oralarda elektromanyetik indüksiyon etkilerini görebiliriz. Ayrıca belki (kesin olmasa da) dünyanın manyetik alanı da, dünyanın içindeki dolaşan akımlarla çalışan benzer bir elektrik jeneratör tarafından beslenmekte.

Elektrik jeneratörleri tasarlamanın artık ilgi çekici bir konu olmadığını düşünebilirsiniz. Tasarlayacak ne var ki sonuçta, hepsi yapılmış. Bir dükkândan neredeyse mükemmel jeneratörler ve motorlar alabilirsiniz. Doğru bile olsa bu, bir problemi neredeyse mükemmel bir şekilde çözme maharetimizi takdir etmeliyiz. Yine de çözülmemiş problemler vardır. Jeneratörler ve transformatörler problem olmaya devam ediyorlar. Muhtemelen, düşük sıcaklıklar ve süper iletkenler alanı yakında elektrik dağıtım konusuna uygulanacaklar. Problemdeki bu yeni radikal faktörlerden dolayı, yeni optimum tasarımlar geliştirmek zorunda kalacağız. Geleceğin güç şebekeleri bugünkünden farklı olabilir.

Gördüğünüz gibi, indüksiyon yasalarını çalışırken sonsuz sayıda uygulama ve problemle uğraşabilirsiniz. Elektrik makinelerinin tasarımını çalışmak bile bir ömürlük iştir. O yönde daha ileri gidemeyiz; ancak, indüksiyon yasalarını keşfettiğimizde kuramımızın, olağanüstü bir pratik gelişmeye yol açtığını da göz ardı etmemeliyiz. Yine de en iyisi, konuyu özel uygulamalar nezdinde detaylı çalışmak isteyen mühendislere ve uygulamalı bilim insanlarına bırakmalı. Fizik işin temelini atar. Ne olursa olsun, sadece uyan temel ilkeleri. (Henüz temelimiz bitmedi; çünkü demir ve bakırın özelliklerini detaylıca çalışmalıyız. Daha sonra göreceğimiz üzere, fiziğin bu konuda daha söyleyecekleri var!)

Faraday'ın keşifleri modern elektrik teknolojisi devrini başlattı. Kullanışsız bebek, harika bir çocuk oldu ve kendisiyle gurur duyan babasının hayal bile edemeyeceği şekilde dünyanın gidişatını değiştirdi.

17
İNDÜKSİYON YASALARI

17-1 İndüksiyon fiziği
17-2 "Akı kuralı" için istisnalar
17-3 Betatron; bir elektrik alanla indüklenen parçacık ivmelenmesi
17-4 Bir paradoks
17-5 Alternatif akım jeneratörü
17-6 Karşılıklı indüktans
17-7 Öz indüktans
17-8 İndüktans ve manyetik enerji

17-1 İndüksiyon fiziği

Son bölümde, indüksiyon etkilerini gayet karmaşık ve ilginç olduğunu ortaya koyan birçok olguyu ele aldık. Şimdi, bu etkileri ortaya çıkaran temel ilkeleri tartışma zamanı. Daha önce, bir iletkendeki emk'yı ilmek boyunca yükler üzerindeki birikmiş yük üzerine etki eden kuvvetlerin ilmek boyunca toplamı olarak tanımlamıştık. Daha da özel tanım yapacak olursak, birim yüke etki eden kuvvetin teğet bileşeninin devre etrafında tel boyunca integralidir. Dolayısıyla bu nicelik, tek bir yükün devreyi bir kez dolaşması için yapılması gereken toplam işe eşittir.

"Akı kuralı"nı da vermiştik daha önce. Buna göre, emk, iletken bir devreden geçen manyetik akının değişim hızına eşittir. Gelin, bunun neden olabileceğini anlayıp anlayamayacağımızı görelim. Öncelikle, bir iletkenin kararlı bir alanda hareket etmesinden dolayı akının değiştiği durumu ele alalım.

Şekil 17-1'de boyutları kolaylıkla değiştirilebilecek basit bir tel kapalı ilmek var. Bu ilmeğin iki parçası vardır: (a) sabit bir U şeklinde parça ve (b) U'nun iki ayağı boyunca kayarak hareket edebilen bir çubuk. Tam bir devre her zaman mevcuttur, ancak alanı değişkendir. İlmeği U'nun düzlemi alana dik olacak şekilde düzgün bir manyetik alana yerleştirelim. Kurala göre, çubuk hareket ettirildiğinde ilmek içinden geçen akının değişim hızıyla orantılı bir emk ilmekte görülmeli. Bu emk, ilmekte bir akıma yol açar. Telde, akımları küçük tutacak kadar direnç olduğunu varsayacağız. Böylece akımdan kaynaklanan manyetik alanı ihmal edebiliriz.

İlmekten geçen akı wLB'dir. Dolayısıyla "akı kuralı"na göre emf $-\mathcal{E}$ olarak yazacağız– şudur:

$$\mathcal{E} = wB\frac{dL}{dt} = wBv$$

Burada v, dik çubuğun gidiş hızıdır.

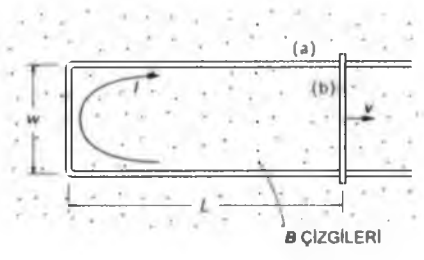
Şimdi, hareket eden çubuktaki yükler üzerinde etki eden manyetik $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvvetlerinden yola çıkarak bu sonucu anlayabilmeliyiz. Yükler, tele teğet ve birim yük başına vB'ye eşit bir kuvvet hisseder. Bu kuvvet w boyu boyunca sabit ve başka her yerde sıfırdır. Dolayısıyla integral şu olur:

$$\mathcal{E} = wvB$$

Bu da, akının değişim hızından elde ettiğimiz sonuçla aynıdır.

Bu akıl yürütmeyi manyetik alanın sabit ve tellerin hareket ettiği herhangi bir duruma uygulayabiliriz. Sabit bir manyetik alanda, devreleri hareket edebilen herhangi bir devre için emk'nın, devrenin şeklinden bağımsız olarak, akının zaman türevi olduğunu ispatlanabilir.

Diğer yandan, ilmek sabit kalır ve manyetik alan değişirse ne olur? Bu sorunun cevabını aynı akıl yürütmeyle veremeyiz. Faraday'ın deneysel olarak keşfettiğine "akı kuralı", akı hangi nedenle değişirse değişsin doğrudur. Elektrik yükleri üzerindeki kuvvet tamamen genel anlamda $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ denklemiyle bulunur. "Manyetik alanların değişiminden dolayı yeni özel kuvvetler" yoktur. Hareketsiz bir teldeki durağan yükler üzerindeki kuvvetler $\boldsymbol{E}$ teriminden gelir. Faraday'ın gözlemleri, elektrik ve manyetik alan arasındaki yeni bir ilişkiyi ortaya koymuştu: Manyetik alanın zamanla değiştiği bir bölgede, elektrik alanlar meydana gelir. Tel boyu elektronları sürükleyen işte bu elektrik alandır ve aynı



Şekil 17-1 Bir devrenin alanı değiştirilerek akı değiştirilirse, ilmek üzerinde akı indüklenir.

zamanda değişen bir manyetik akı varken, hareketsiz bir devrede emk görülmesinin nedenidir.

Değişen bir manyetik alanla ilişkili elektrik alan yasasını şöyle ifade ederiz:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{17.1}$$

Buna Faraday yasası denir. İlk olarak Faraday tarafından keşfedilse de, diferansiyel biçimde yazan Maxwell'dir. Gelin, bu denklemin devreler için "akı kuralını" nasıl öngördüğünü görelim.

Stokes teoremini kullanarak, bu yasayı integral biçiminde yazabiliriz:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n} da = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} da \tag{17.2}$$

Her zamanki gibi Γ herhangi bir kapalı eğri ve S de onu çevreleyen yüzeydir. Burada şunu hatırlayın, Γ uzayda sabit bir *matematiksel* eğridir ve S de sabit bir yüzeydir. Bu durumda zaman türevini integralin dışına çıkarabilir ve böylece şunu elde ederiz:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} da$$

$$= -\frac{d}{dt}(S \text{ içinden geçen akı}) \tag{17.3}$$

Bu ilişkiyi, bir iletkenin *sabit* devresini takip eden Γ eğrisine uyguladığımızda, "akı kuralı"nı elde ederiz yine. Soldaki integral emk'dır ve sağdaki de devreyle bağlantılı akının değişim hızının eksisidir. Denk. (17.1)'i sabit bir devreye uygulamak "akı kuralı"na denktir.

Dolayısıyla "akı kuralı" –bir devredeki emk'nın, devreden geçen manyetik akının değişim hızına eşit olması– alanın değişiminden kaynaklanan akı değişimi veya devrenin bir manyetik alan içinde hareket etmesi durumunda (veya her ikisiyle birden) geçerlidir. Kural, bu iki farklı durumu –"devre hareket eder" veya "alan değişir"– birbirinden ayırmaz. Fakat biz, kuralı açıklarken her iki durum için iki birbirinden farklı yasa kullandık. "Devre hareket eder" için $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ ve "alan değişir" için de $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ geçerlidir.

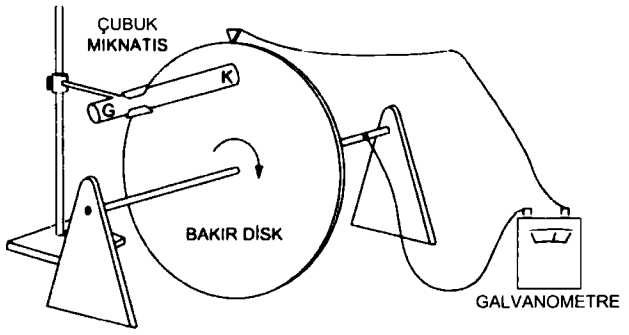
Fizikte başka hiçbir yerde, bu kadar basit ve doğru bir genel ilkenin anlaşılması için *iki farklı olgu* cinsinden analiz gerekmemektedir. Bu kadar güzel bir genellemenin kökü genelde, altta yatan derin bir ilkededir. Yine de, bu durumda bu kadar derin bir sezgi görünmemektedir. "Kuralı", iki birbirinden farklı olgunun birleştirilmiş etkileri olarak anlamalıyız.

"Akı kuralına" şu şekilde bakmalıyız. Genelde birim yük üzerine etki eden kuvvet $\boldsymbol{F}/q = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$'dir. Hareket eden tellerde, ikinci terimden kaynaklanan kuvvet vardır. Ayrıca eğer bir yerde değişen bir manyetik alan varsa, bir $\boldsymbol{E}$ alanı oluşur. Birbirinden bağımsız etkilerdir, ancak telin ilmeği etrafındaki emk daima içinden geçen manyetik akının değişim hızına eşittir.

17-2 "Akı kuralı" için istisnalar

Şimdi, biraz Faraday'dan dolayı, emk indükleyen iki etki arasındaki ayrımı aklımızdan çıkarmamamızın önemini gösteren bazı örnekler vereceğiz. Örneklerimiz, "akı kuralı"nm uygulanamadığı durumları içermektedir. Ya ortada hiç tel olmayacak ya da indüklenmiş akımlarca alınan *yol* iletkenin genişletilmiş bir hacmi içinde hareket edecek.

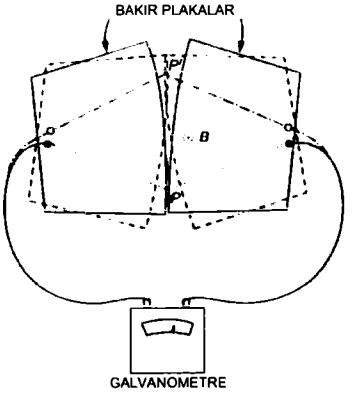
Önce önemli bir noktayı dile getirelim: Emk'nın $\boldsymbol{E}$ alanından kaynaklanan kısmı, telin fiziksel varlığına bağlı değildir; $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kısmı da aynı şekilde. $\boldsymbol{E}$ alanı boş uzayda var olabilir ve uzaydaki sabit bir çizgi etrafındaki çizgi integrali, o çizgiden geçen $\boldsymbol{B}$ akısının değişim hızıdır. (Dikkat ederseniz bu, durağan yükler tarafından meydana getirilmiş $\boldsymbol{E}$ alanı gibi değildir. Zira o durumda, $\boldsymbol{E}$'nin kapalı bir ilmek etrafındaki çizgi integrali daima sıfırdır.)



Şekil 17-2 Disk döndüğünde, $v \times B$'den kaynaklanan bir emk vardır; fakat bağlantılı akıda bir değişim görülmez.

Şimdi, devre içinden geçen akıda bir değişim olmadığı halde emk'da gözlemlenen bir durumu tarif edeceğiz. Şekil 17-2'de sabit bir eksen etrafında, bir manyetik alan içinde döndürülebilen bakır bir disk bulunur. Mil üzerinde ve diskin dış yüzeyine dokunan bir yerde temas noktaları vardır. Devre, galvanometreyle tamamlanır. Disk döndükçe, akımların uzayda olduğu yer anlamındaki "devre" hep aynıdır. "Devre"den geçen akı sabit olsa da, galvanometrenin ibresinin oynamasından anlaşılacağı üzere, emk meydana gelmiştir. İşte, hareket eden bir diskteki $v \times B$ kuvvetinin, akı değişimine bağlanamayacak, emk meydana getirmesinin açık bir örneği.

Karşıt bir örnek olarak, devre içinden (yeniden, akımların uzayda olduğu yer anlamında) geçen akının değiştiği ancak emk bulunmayan biraz olağandışı bir durumu ele alalım. Şekil 17-3'teki gibi, hafif eğimli kenarları bulunan iki metal levha düşünün. Levhalar yüzeylerine dik, düzgün bir manyetik alan içerisindedir. Her bir levha, bir galvanometrenin uçlarından birine bağlanmıştır. Levhalar P noktasında birbirine temas eder ve böylece devre tamamlanır. Levhalar küçük bir açıyla sallandığında, temas noktası P' noktası olur. Levhalardan geçen "devre"nin şekildeki noktalı çizgi boyunca tamamlandığını hayal edersek, devreden geçen manyetik akı, levhalar ileri geri sallandıkça, büyük bir oranda değişir. Buna rağmen, salınımı çok küçük hareketlerle yapıp, $v \times B$ değerini küçük tutabiliriz. Bu durumda emk yok gibi bir şeydir. "Akı kuralı" bu durumda işlememektedir. Kural, *malzemesinin* aynı kaldığı devrelere uygulanmalı. Devrenin malzemesi değiştiği zaman, temel yasalara geri dönmeliyiz. *Doğru* fizik, her zaman şu iki temel yasayla verilir:



Şekil 17-3 Levhalar düzgün bir manyetik alanda sallandığında, emk meydana gelmeden, akı bağında büyük bir değişim olabilir.

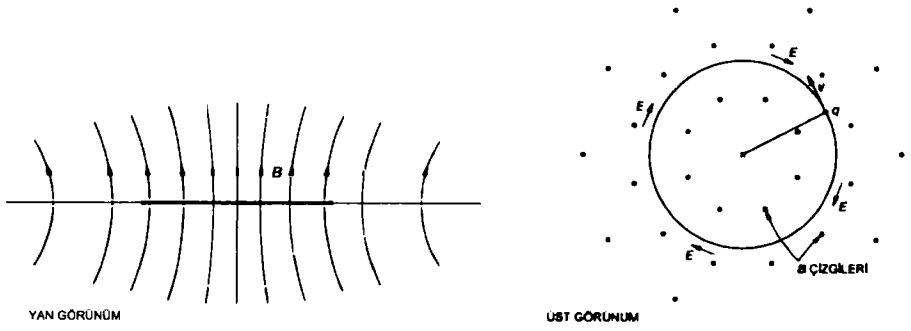
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

17-3 Betatron; bir elektrik alanla indüklenen parçacık ivmelenmesi

Manyetik alan değişimiyle meydana gelen elektromanyetik kuvvetin, iletkenler olmadan da var olabileceğini belirtmiştik. Diğer bir deyişle, teller olmadan da manyetik indüksiyon olabilir. Uzaydaki rastgele bir matematiksel eğri etrafında elektromotor kuvvet düşünebiliriz; E'nin eğri etrafındaki integralinin teğet bileşenidir. Faraday yasasına göre bu çizgi integral, kapalı eğri içinden geçen manyetik akının değişim hızının etkisidir (Denklem 17.3).

Böyle indüklenmiş bir elektrik alanın etkisine örnek olarak, değişen bir manyetik alanda bir elektronun hareketini ele alalım. Şekil 17-4'teki gibi, bulunduğu düzlemde hep dik yönü işaret eden bir manyetik alanı düşünelim. Manyetik alan bir elektromıknatıs tarafından meydana getirilmekte; ama biz detaylarla uğraşmayacağız. Örneğimiz için, manyetik alanın eksenel olarak simetrik olduğunu, dolayısıyla manyetik alanın şiddetinin sadece eksenine olan uzaklığa bağlı olduğunu düşüneceğiz. Manyetik alan ayrıca, zamanla da değiş-



Şekil 17-4 Eksenel olarak simetrik ve artan manyetik alanda ivmelenen bir elektron.

mektedir. Bir elektronun bu manyetik alan içerisinde, alanın ekseni merkezli, sabit yarıçaplı bir daire üzerinde yol aldığını düşünelim (daha sonra bu hareketin nasıl elde edilebileceğini göstereceğiz). Değişen manyetik alandan kaynaklı, elektronun yörüngesine teğet bir E elektrik alanı meydana gelir ve bu da elektronu daire boyunca sürükler. Simetriden dolayı, bu elektrik alanın değeri çember boyunca her yerde aynıdır. Elektronun yörüngesinin yarıçapı r ise, E'nin yörünge etrafındaki çizgi integrali, çember içinden geçen manyetik akının değişim hızının eksisidir. E'nin çizgi integrali de, çemberin çevresiyle ($2\pi r$) büyüklüğünün çarpımıdır. Manyetik akı, genelde, integralle hesaplanmalıdır. Şu an için, çember içindeki ortalama manyetik alana B_{ort} diyelim. O halde akı, ortalama manyetik alan çarpı çember alanıdır:

$$2\pi r E = \frac{d}{dt}(B_{\text{ort}} \cdot \pi r^2)$$

r'yi sabit varsaydığımızdan, E ortalama alanın zamana göre türevidir:

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB_{\text{ort}}}{dt} \tag{17.4}$$

Elektron üzerinde qE elektrik kuvveti etki eder ve elektron bu kuvvet sayesinde ivmelenir. Göreli olarak doğru hareket denklemine göre momentumun değişim hızının kuvvetle orantılı olduğunu hatırladığımızda, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$qE = \frac{dp}{dt} \tag{17.5}$$

Hayal ettiğimiz dairesel yörünge için, elektrona etki eden elektrik kuvveti daima elektronun hareket yönündedir. Dolayısıyla elektronun toplam momentumu Denk. (17.5)'le verilen oranda artar. Denklem (17.5) ve (17.4)'ü birleştirdiğimizde, ortalama manyetik alan ile momentumun değişim hızını ilişkilendirebiliriz:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2}\frac{dB_{\text{ort}}}{dt} \tag{17.6}$$

t'ye göre integralini aldığımızda, elektronun momentumunu bulmuş oluruz:

$$p = p_0 + \frac{qr}{2}\Delta B_{\text{ort}} \tag{17.7}$$

Denklemdeki p_0, elektronların başlangıçtaki momentumudur ve ΔB_{ort}'de B_{ort}'nin takip eden değişimidir. Bir *Betatron*'un –elektronları yüksek enerjilere ivmelendiren bir makine– işleyişi bu fikre dayanır.

Bir betatronun işleyişini detaylı olarak görmek için, elektronun hareketinin nasıl çember etrafında sınırlandırabildiğini inceleyelim. I. Cilt, 11. Bölümde buna ilişkin ilkeyi tartışmıştık. Elektronun yörüngesinde bir B manyetik alanı ayarlarsak, enine bir $qv \times B$ kuvveti doğar. Uygun şekilde seçilen bir B sayesinde, bu kuvvet elektronu belli bir yörünge etrafında dönmesini sağlayabilir. Be-

tatron'da, bu enine kuvvet elektronu sabit yarıçaplı bir çembersel yörüngede döndürüp durur. Göreli hareket denklemini kullanarak, bu sefer kuvvetin enine bileşeni için, yörüngedeki manyetik alanın ne olduğunu bulabiliriz. Betatron'da (*Bkz.* Şekil 17-4) B daima v'ye dik açılardadır. Dolayısıyla enine kuvvet qvB çarpımıyla hesaplanır. Bu yüzden kuvvet, momentumun enine bileşeni p_t'nin değişim hızına eşittir:

$$qvB = \frac{dp_t}{dt} \tag{17.8}$$

Parçacık bir *çember* üzerinde ilerlerken, enine momentumunun değişim hızı, toplam momentumunun büyüklüğü ile açısal dönüş hızı ω çarpımına eşittir (I. Cilt, 11. Bölümdeki fikirleri kullanarak):

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p \tag{17.9}$$

Hareket dairesel olduğundan, aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{17.10}$$

Manyetik kuvveti ivmelenmenin enine bileşenine eşitlediğimizde şunu elde ederiz:

$$qvB_{\text{yörünge}} = p\,\frac{v}{r} \tag{17.11}$$

$B_{\text{yörünge}}$ r yarıçapındaki alandır.

Betatron çalıştıkça, elektronun momentumu, Denk. (17.7) uyarınca, B_{ort} değeriyle orantılı olarak büyür. Elektron düzgün bir çember üzerinde hareket etmeye devam edecekse, elektronun momentumu Denk. (17.11) geçerliliğini sürdürmelidir. $B_{\text{yörünge}}$ değeri, p momentumuyla orantılı şekilde artmalıdır. Denklem (17.11) ve p'yi belirleyen Denk. (17.7)'yi karşılaştırırsak, r yarıçaplı yörüngenin *içindeki* ortalama manyetik alan B_{ort} ve yörüngedeki manyetik alan $B_{\text{yörünge}}$ arasındaki şu ilişkiyi görürüz:

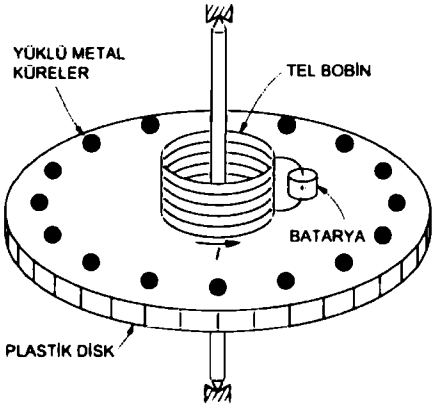
$$\Delta B_{\text{ort}} = 2\Delta B_{\text{yörünge}} \tag{17.12}$$

Betatronun doğru şekilde çalışması, yörüngenin içindeki ortalama manyetik alanın yörüngedeki manyetik alanın iki katı kadar artmasını gerektirir. Bu koşullarda, indüklenen elektrik alanla parçacığın enerjisi artırıldığında, yörüngedeki manyetik alan tam olarak parçacığın çember üzerinde hareket etmesini sağlayacak oranda artar.

Betatron, elektronları on milyonlarca, hatta yüz milyonlarca Volt enerjiye çıkarmak için kullanılır. Yine de, birçok nedenden ötürü elektronları birkaç yüz milyon Volt enerjiden daha fazla ivmelendirmek pratik değildir. Bu nedenlerden biri, yörünge içindeki manyetik alanın ortalama değerini gerekli yükseklikte elde etmenin pratikteki güçlüğüdür. Bir diğeri de, Denk. (17.6)'nın yüksek enerjilerde doğruluğunu kaybetmesidir; çünkü parçacığın elektromanyetik enerjisinin ışımasından kaynaklanan enerji kaybını içermez (I. Cilt, 36. Bölümde tartıştığımız sinkrotron ışınımı). Bu nedenlerden dolayı, elektronların en yüksek enerjilere –milyarlarca elektron Volt– ivmelendirilmesi farklı bit tür makineyle sağlanır: Bir *sinkrotronla.*

17-4 Bir paradoks

Şimdi, bariz bir paradoksu size göstermek istiyorum. Bir paradoks, bir yolla analiz edildiğinde bir sonuç, başka bir yolla analiz edildiğindeyse bambaşka bir sonuç veren bir durumdur. Gerçekte ne olması gerektiğine dair bir ikilemle kala kalırız paradokslar karşısında. Elbette, fizikte hiç gerçek paradoks yoktur; çünkü tek bir doğru cevap vardır. En azından biz, doğanın sadece bir yönde (ve elbette bu da *doğru yöndür*, doğal olarak) davrandığını varsayıyoruz. Dolayı-



Şekil 17-5 I akımı kesildiğinde, disk dönmeye devam eder mi?

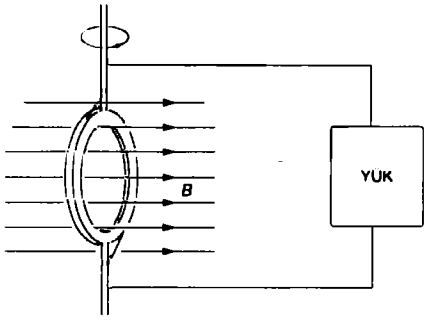
sıyla fizikte paradoksun anlamı, anlayışımızda bir karmaşıklık olmasıdır. Aşağıda paradoksumuzu anlatıyoruz.

Şekil 17-5'te görüldüğü gibi bir cihaz kurduğumuzu düşünelim. Bir mile bağlı ince, çember şeklinde bir disk düşünelim. Mil, rahatça dönmesine izin verecek mükemmel rulmanlarla desteklidir. Disk üzerinde, dönme ekseniyle eş merkezli kısa bir solenoid biçiminde tel bobin bulunur. Küçük bir batarya bu solenoide I akımı sağlar, batarya da disk üzerindedir. Diskin kenarının yakınında ve çevresi üzerinde düzgün şekilde hizalanmış olarak, birbirlerinden ve solenoidden diskin plastik malzemesiyle yalıtılmış küçük metal küreler bulunur. Her bir iletken küçük küre, aynı Q elektrostatik yüküyle yüklenmiştir. Her şey durağandır ve disk de hareketsiz durur. Bir şekilde önceden ayarlayarak ya da kazayla solenoiddeki akımın, dışarıdan bir müdahale olmaksızın, kesintiye uğradığını düşünelim. Akım devam ettiği müddetçe, solenoidin içinden geçen ve diskin eksenine iyi kötü paralel bir manyetik akı vardır. Akım kesildiğinde, bu akı da sıfırlanmalıdır. Bu yüzden, eksen merkezli daireler etrafında dolaşacak, indüklenmiş bir elektrik alan meydana gelir. Kenardaki yüklü küreler, diskin çevresine teğet bir elektrik alan hissederler. Bu elektriksel kuvvet bütün yükler için aynı şekildedir ve böylece disk üzerinde net bir tork meydana gelir. Diğer bir deyişle, solenoiddeki akım ortadan kaybolduğunda, diskin dönmeye başlamasını bekleriz. Diskin eylemsizlik momentini, solenoiddeki akımı ve küçük küreler üzerindeki yükleri bilirsek, meydana gelen açısal hızı hesaplayabiliriz.

Farklı bir şekilde de akıl yürütebilirdik. Açısal momentumun korunumu ilkesini kullanarak, disk ve üzerindekilerin tamamının açısal momentumunun sıfır olduğunu ve dolayısıyla bütün düzeneğin açısal momentumunun sıfır kalması gerektiğini söyleyebilirdik. Akım durduğunda dönüş gözlemlememeliyiz. Hangi akıl yürütme doğru sonucu verir? Disk döner mi, dönmez mi? Bunun üzerinde düşünmeyi size bırakıyorum.

Doğru cevabın düzeneğe esas olmayan herhangi bir özelliğe, örneğin bataryanın asimetrik konumuna, bağlı olmadığı konusunda uyarmalıyım sizi. Aslında, şu ideal durumu hayal edebilirsiniz: Solenoid, içinden akım geçen süper iletken bir telden yapılmış olsun. Disk durağan haldeyken, solenoidin sıcaklığını yavaşça artıralım. Telin sıcaklığı, süper iletkenlik ile normal iletkenlik arasındaki geçiş sıcaklığına geldiğinde, solenoidin akımı telin direncinden dolayı sıfıra düşer. Akı da, dolayısıyla, sıfıra düşer ve eksen etrafında bir elektrik alan meydana gelir. Çözümün kolay veya hileli olmadığı konusunda da sizi uyarmalıyım. Problemi çözdüğünüzde, elektromanyetizmanın önemli bir ilkesini keşfetmiş olacaksınız.

17-5 Alternatif akım jeneratörü



Şekil 17-6 Düzgün bir manyetik alanda dönen bobin; alternatif akım jeneratörünün temel fikri.

Bu bölümün kalanında, 17-1'deki ilkeleri uygulayarak 16. Bölümde tartıştığımız bir olguyu inceleyeceğiz. Önce, alternatif akım jeneratörüne daha yakından bakacağız. Böyle bir jeneratör temelde, düzgün bir manyetik alan içinde dönen bir tel bobinden oluşur. Aynı sonucu, bir önceki bölümde tarif ettiğimiz şekilde yönü değişen bir manyetik alandaki sabit bir bobinle de elde edebiliriz. Biz sadece önceki durumu ele alacağız. Çaplarının biri boyunca bulunan eksen etrafında döndürülebilecek, çembersel bir bobin olsun. Dönme eksenine dik bir düzgün manyetik alan içine bu bobini, Şekil 17-6'daki gibi, yerleştirelim. Bobinin iki ucunun sürgülü kontaklarla dışarıya bağlandığını varsayalım.

Bobinin dönmesinden dolayı, içinden geçen manyetik akı değişecektir. Bu yüzden bobin devresinde bir emk meydana gelir. Bobinin alanı S ve bobine dik

düzlem ile manyetik alan arasındaki açı θ olsun.* Bu durumda bobinin içinden geçen akı

$$BS\cos\theta \tag{17.13}$$

olur. Bobin sabit ω açısal hızıyla dönüyorsa, θ açısı zamanla $\theta = \omega t$ eşitliğine göre değişir.

Bobinin her bir dönüşünün, akının değişim hızına eşit bir emk'sı olacaktır. Bobinde N adet sarım varsa, toplam emk N kat büyük olacaktır:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d}{dt}(BS\cos\omega t) = NBS\omega\sin\omega t \tag{17.14}$$

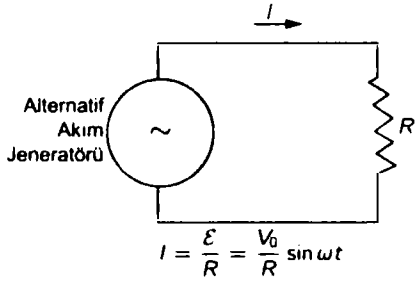
Telleri jeneratörden alıp, dönen bobinin yakınında manyetik alanın sıfır olduğu veya en azından zamanla değişmediği bir noktaya getirelim. Bu bölgede E'nin bükümü sıfırdır ve böylece bir elektrik potansiyeli belirleyebiliriz. Jeneratörden bir akım çekilmiyorsa, iki tel arasındaki V potansiyel farkı dönen bobindeki emk'ya eşit olacaktır:

$$V = NBS\omega\sin\omega t = V_0\sin\omega t$$

Teller arasındaki potansiyel fark $\sin\omega t$ olarak değişir. Bu türden değişen potansiyel farkına alternatif gerilim denir.

Teller arasında bir elektrik alan olduğundan dolayı, elektriksel olarak yüklü olmalıdırlar. Jeneratörün emk'sından dolayı tele fazladan yük itilir. Ta ki, tellerin elektrik alanı bu indüksiyon kuvvetine karşı koyacak kadar şiddetlenene dek. Jeneratörün dışından baktığımızda, bu iki tel sanki V potansiyel farkına ulaşana kadar elektrostatik olarak yüklenmiş ve alternatif bir potansiyel farkı yaratacak şekilde yükleri zamanla değişiyormuş gibi görünürler. Elektrostatik durumdan kaynaklanan bir başka farklılık daha vardır. Jeneratörü üzerinden akım geçebilen bir devreye bağladığımızda, emk'nın tellerin boşalmasına izin vermediğini ve telleri aynı potansiyel farkta tutabilmek için, üzerlerinden akım çekildikçe onları yüklediğini görürüz. Jeneratörü, toplam direnci R olan bir devreye bağladığımızda devreden geçen akım jeneratörün emk'sıyla orantılı ve R'yle ters orantılı olacaktır. Emk'nın zamanla değişimi sinüs eğrisi biçiminde olduğundan, akım da aynı şekilde değişir. Alternatif akımı şu şekilde ifade edebiliriz:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$



Şekil 17-7 Alternatif akım jeneratörlü bir devre ve bir direnç.

Böyle bir devrenin şematik çizimi Şekil 17-7'de gösterilmiştir.

Jeneratörün ne kadar enerji sağladığının emk tarafından belirlenmesine de bakalım. F yük üzerindeki kuvvet ve v hızıyken, teldeki her bir yük $F \cdot v$ hızında bir enerji alır. Teldeki birim boyda hareket eden yüklerin sayısına n diyelim. Bu durumda, telin herhangi bir ds parçasına iletilen güç

$$F \cdot vn\, ds$$

olur. Bir tel için, v daima ds boyuncadır. Dolayısıyla gücü aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz:

$$nvF \cdot ds$$

Bütün devreye iletilen güç, bu ifadenin bütün ilmek etrafındaki integralidir:

$$\text{Güç} = \oint nvF \cdot ds \tag{17.15}$$

I akımının qnv olduğunu ve emk'nın devre etrafında F/q'nun integrali olduğunu hatırlarsak; aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\text{Jeneratörün gücü} = \mathcal{E}I \tag{17.16}$$

* Vektör potansiyelini belirtmek için A harfini kullandığımızdan, yüzey alanı için S'yi tercih ettik.

Jeneratörün bobininde bir akım olduğunda, üzerine etkiyen mekanik kuvvetler de meydana gelir. Bir bobin üzerindeki torkun manyetik momentine, manyetik alan şiddeti B'ye ve aralarındaki sinüs açısına bağlı olduğunu biliyoruz. Manyetik moment, bobindeki akım çarpı alanıdır. Bu yüzden tork da,

$$\tau = NISB \sin\theta \tag{17.17}$$

olur. Bobinin dönmeye devam etmesini sağlayacak mekanik iş hızı, ω açısal hızı çarpı torktur:

$$\frac{dW}{dt} = \omega\tau = \omega\, NISB \sin\theta \tag{17.18}$$

Bu denklemi Denk. (7.14)'le karşılaştırırsak, bobini manyetik kuvvetlere karşı çevirmek için yapılan mekanik işin hızı, $\mathcal{E}I$'ya eşittir. Diğer bir deyişle, jeneratörün emk'sı tarafından sağlanan elektrik enerjisinin hızı. Jeneratörde kullanılan tüm mekanik enerji, devrede elektrik enerjisi olarak görünür.

İndüklenen emk'dan kaynaklı kuvvetler ve akımlara bir başka örnek olarak, gelin Bölüm 17-1'de tanımlanmış ve Şekil 17-1'de gösterilmiş düzenekte ne olup bittiğine bakalım. Paralel tellerin düzlemine dik, düzgün bir manyetik alanda, iki paralel tel ve kayan bir çubuktan ibaret bir düzenek vardı; hatırlayın. Şeklin solundaki U'nun "tabanı"nın yüksek dirençli tellerden, iki yan telin de bakır gibi iyi bir iletkenden yapıldığını varsayalım. Böylece, çubuğumuzu hareket ettirdikçe devre direncinin değişimini düşünmemiz gerekmez. Önceki gibi, devredeki emk,

$$\mathcal{E} = vBw \tag{17.19}$$

olur. Devredeki akım emk'sıyla orantılı ve devredeki dirençle ters orantılıdır:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBw}{R} \tag{17.20}$$

Bu akım yüzünden, çubuk üzerine boyuyla, üzerindeki akımla ve manyetik alanına orantılı bir manyetik kuvvet etki eder. Aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F = BIw \tag{17.21}$$

Denklem (17.20)'den I'yı çekersek, kuvvet için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F = \frac{B^2w^2}{R}v \tag{17.22}$$

Gördüğünüz üzere, kuvvet çubuğun hızıyla orantılıdır. Kuvvetin yönü, kolayca görebileceğiniz üzere hızın tersi yönündedir. Viskozite kuvvetine benzer, böyle bir "hız orantılı" kuvvet manyetik bir alanda iletkenleri hareket ettirerek indüklenmiş akım oluşturulduğunda meydana gelir. Son bölümde örneğini verdiğimiz eddy akımları da, her ne kadar bu tür durumlar analiz etmesi güç, karmaşık bir akım dağılımı verse de, iletkenler üzerinde iletkenin hızıyla orantılı kuvvetler oluşturur.

Çoğu zaman mekanik sistemleri tasarlarken, hızla orantılı sönümlendirme kuvvetlerini dahil etmek işe yarar bir şeydir. Eddy akımı kuvvetleri, bu tür bir hıza bağlı kuvvet elde etmenin en uygun yollarından biridir. Bu tür bir kuvvetin uygulamasının örneği geleneksel ev tipi güç ölçerde (sayaçta) bulunur. Güç ölçer içinde, kalıcı bir mıknatısın kutupları arasında dönen ince bir alüminyum disk vardır. Bu diski süren elektrik motorunun torku evde harcanan güçle orantılıdır. Diskteki eddy akımı kuvvetlerinden dolayı, hızla orantılı bir direnç kuvveti vardır. Denge halindeyken, hız, harcanan elektrik miktarıyla orantılıdır. Bu dönen

diske bir sayaç bağlarsanız, diskin dönüş sayısının kaydını tutabilirsiniz. Bu da toplam harcanan elektriğin bir belirtecidir: saatte harcanan watt miktarı.

Denklem (17.22)'den yola çıkarak, indüklenmiş akımlardan –herhangi bir eddy akımı kuvvetinden– kaynaklanan kuvvetin dirençle ters orantılı olduğunu söyleyebiliriz. Malzemenin iletkenliği daha iyi oldukça, kuvvet de büyür. Elbette bunun nedeni, direnç düştükçe bir emk'nın daha fazla akım meydana getirmesi ve daha kuvvetli akımların da daha büyük mekanik kuvvetlere yol açmasıdır.

Çıkarttığımız denklemler, mekanik enerjinin nasıl elektrik enerjisine dönüştüğünü de göstermekte. Önceden olduğu gibi, devrenin direncine verilen elektriksel enerji $\mathcal{E}I$ çarpımıdır. İletken çubuğu hareket ettirmek için gereken işin hızı da, çubuktaki kuvvet ile hızın çarpımıdır. Kuvvet için Denk. (17.21)'i kullanırsak, yapılan işin hızı aşağıdaki gibidir:

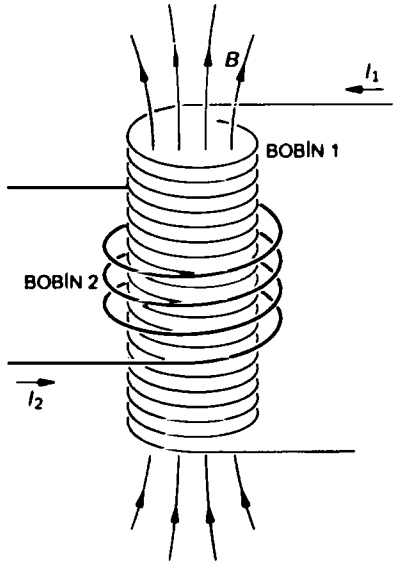
$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2B^2w^2}{R}$$

Gördüğünüz gibi, bu gerçekten de, Denk. (17.19) ve (17.20)'den elde edeceğimiz $\mathcal{E}I$ çarpımına eşittir. Yine, mekanik iş elektrik enerjisi olarak gözükmektedir.

17-6 Karşılıklı indüktans

Şimdi ele alacağımız durumda sabit tel bobinler ve bu sefer değişen manyetik alanlar vardır. Manyetik alanlar sayesinde akım meydana getirilmesini anlatırken, sadece kararlı akımları ele almıştık. Akımlar yavaşça değiştirildiğinde, her bir andaki manyetik alan neredeyse kararlı akımın manyetik alanına eşit olacaktır. Bu bölümdeki tartışmamızda, bu dediğimizi doğru kılacak şekilde akımların yeterince yavaş değiştiğini varsayacağız.

Şekil 17-8'de, bir transformatörün temel çalışma ilkelerini ortaya koyan iki bobinli bir düzenlemeyi görebilirsiniz. Birinci bobin, uzun bir solenoid şeklinde sarılmış bir telden oluşur. Bu bobinin etrafında –ve ondan yalıtılmış halde– birkaç sarım telden oluşan iki numaralı bobin bulunur. Birinci bobinden bir akım geçirdiğimizde, içinde bir manyetik alan oluşacağını biliyoruz. Aynı manyetik alan ikinci bobinin içinden de geçer. Birinci bobindeki akım değiştikçe, manyetik akı da değişir ve böylece iki numaralı bobinde indüklenmiş bir emk meydana gelir. Şimdi bu indüklenmiş emk'yı hesaplayacağız.



Şekil 17-8 1 numaralı bobindeki akım, 2 numaralı bobin içinde bir manyetik alan yaratır.

Bölüm 13-5'te gördüğümüz üzere, uzun bir solenoidin içindeki manyetik alan düzgündür ve şu büyüklüğe sahiptir:

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{N_1 I_1}{l} \tag{17.23}$$

Denklemdeki N_1 birinci bobindeki sarım sayısı, I_1 içinden geçen akım ve l de boyudur. Bir numaralı bobinin kesit alanı S olsun; bu durumda B'nin akısı çarpı büyüklüğü olur. İki numaralı bobinde N_2 adet sarmal varsa, bu akı bobini N_2 kere dolaşır. Dolayısıyla, iki numaralı bobindeki emk şu şekilde hesaplanır:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S\frac{dB}{dt} \tag{17.24}$$

Denklem (17.23)'teki, zamanla değişen tek nicelik I_1'dir. Dolayısıyla emk aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l}\frac{dI_1}{dt} \tag{17.25}$$

Gördüğünüz gibi iki numaralı bobindeki emk, bir numaralı bobindeki akımın değişim hızıyla orantılıdır. Temelde, iki bobinin geometrik faktörü olan orantı sabitine *karşılıklı indüktans* denir ve $\mathfrak{M}_{21}$ şeklinde belirtilir. Bu durumda Denk. (17.25) şu şekilde tekrar yazılır:

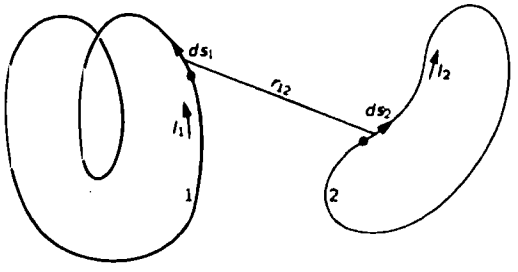
$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{17.26}$$

Şimdi, iki numaralı bobinden akım geçirdiğimizi ve bir numaralı bobindeki emk'yı hesaplamaya çalıştığımızı düşünelim. Her yerde I_2'ye orantılı manyetik alanı hesaplamamız gerek. Bir numaralı bobinden geçen akı bağıntısı bobinin geometrisine bağlı, fakat I_2 akımıyla orantılıdır. Dolayısıyla, bir numaralı bobindeki emk yine dI_2/dt değeriyle orantılı olurdu. O halde şunu yazabiliriz:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{17.27}$$

$\mathfrak{M}_{12}$ değerinin hesaplanması, $\mathfrak{M}_{21}$ değerinin hesaplanmasından daha zordur. Hesaplamayı şimdi yapmayacağız; çünkü daha sonra bu bölümde $\mathfrak{M}_{12}$'nin $\mathfrak{M}_{21}$'e eşit olması gerekliliğini göstereceğiz.

Herhangi bir bobin için alan akımla orantılı olduğundan, aynı sonucu herhangi iki tel bobin için de bulabiliriz. Denklem (17.26) ve (17.27) aynı biçimde kalır; sadece $\mathfrak{M}_{21}$ ve $\mathfrak{M}_{12}$ değerleri farklıdır. Onların değerleri bobinlerin şekillerine ve birbirlerine göre konumlarına bağlıdır.



Şekil 17-9 Herhangi iki bobinin karşılıklı indüktansı $\mathfrak{M}$, $ds_1 \cdot ds_2/r_{12}$'nin integraliyle orantılıdır.

Rastgele iki bobin arasındaki karşılıklı indüktansı hesaplayalım. Şekil 17-9'da gösterilenler gibi örneğin. Bir numaralı bobin için genel emk ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}\int_{(1)} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}d\boldsymbol{a}$$

Burada $\boldsymbol{B}$ manyetik alandır ve integral de bir numaralı devre tarafından çevrelenen yüzey üzerinden alınır. Bölüm 14-1'de gördüğümüz üzere, $\boldsymbol{B}$'nin böyle bir yüzey integrali vektör potansiyelin çizgi integraliyle ilişkilendirilebilir. $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyeli ve $d\boldsymbol{s}_1$ bir numaralı devrenin parçasıyken,

$$\int_{(1)} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}da = \oint_{(1)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}_1$$

yazabiliriz. Çizgi integrali bir numaralı devre etrafından alınmalıdır. Böylece, bir numaralı bobindeki emk aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}\oint_{(1)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}_1 \tag{17.28}$$

Şimdi gelin, bir numaralı devredeki vektör potansiyelinin iki numaralı devredeki akımlardan kaynaklandığını varsayalım. O halde, iki numaralı devrenin etrafındaki çizgi integrali şeklinde yazabiliriz:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\oint_{(2)} \frac{I_2 d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}} \tag{17.29}$$

Denklemdeki I_2 iki numaralı devredeki akım ve r_{12} de devre parçası $d\boldsymbol{s}_2$'nin, bir numaralı devre üzerinde vektör potansiyelini değerlendirdiğimiz noktaya mesafesidir (*Bkz.* Şekil 17-9). Denklem (17.28) ve (17.29)'u birleştirdiğimizde, bir numaralı devredeki emk'yı çift çizgi integral olarak yazabiliriz:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{d}{dt}\oint_{(1)}\oint_{(2)} \frac{I_2 d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}}\cdot d\boldsymbol{s}_1$$

Bu denklemde integraller durağan devrelere göre alınır. Tek değişken nicelik,

integralin değişkenlerine bağlı olmayan I_2 akımıdır. Dolayısıyla onu integralin dışına alabiliriz. Böylece emk aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Denklemdeki $\mathfrak{M}_{12}$ katsayısı da

$$\mathfrak{M}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\oint_{(1)}\oint_{(2)}\frac{d\mathbf{s}_2\cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}} \qquad (17.30)$$

olarak ifade edilir. Bu integralden de anlıyoruz ki, $\mathfrak{M}_{12}$ sadece devre geometrisine bağlıdır. İki devre arasındaki bir tür ortalama ayrılığa bağlıdır. Ortalama, iki bobinin paralel kısımlarını ağırlıklı alarak hesaplanır. Denklemimiz, herhangi bir şekle sahip iki devrenin karşılıklı indüktansını hesaplamakta kullanılabilir. Ayrıca, $\mathfrak{M}_{12}$ için integralin $\mathfrak{M}_{21}$ için aynı olduğunu gösterir. Dolayısıyla, her iki katsayının benzer olduğunu göstermiş olduk. İki bobinli bir sistem için, $\mathfrak{M}_{12}$ ve $\mathfrak{M}_{21}$ katsayıları alt indisleri olmadan sadece $\mathfrak{M}$ olarak gösterilir ve basitçe *karşılıklı indüktans* denir:

$$\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}$$

17-7 Öz indüktans

Şekil 17-8 ve 17-9'daki iki bobinde indüklenmiş elektromotor kuvvetlerini tartışırken, sadece bir bobinde veya diğerinde akım olduğu durumu konuştuk. Her iki bobinde de aynı anda akım varsa, herhangi bir bobinden geçen manyetik akı, üst üste binme yasası manyetik alanlar için geçerli olduğundan dolayı, ayrı ayrı bulunan iki akının toplamıdır. Bu yüzden bir bobindeki emk sadece diğer bobindeki akım değişimiyle değil, ayrıca kendi akım değişimiyle de orantılıdır. Dolayısıyla, ikinci bobindeki toplam emk aşağıdaki şekilde yazılmalıdır:*

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21}\frac{dI_1}{dt} + \mathfrak{M}_{22}\frac{dI_2}{dt} \qquad (17.31)$$

Benzer şekilde, 1 numaralı bobindeki emk sadece iki numaralı bobindeki akım değişimine değil, aynı zamanda kendi içindeki akım değişimine bağlıdır:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\frac{dI_2}{dt} + \mathfrak{M}_{11}\frac{dI_1}{dt} \qquad (17.32)$$

$\mathfrak{M}_{22}$ ve $\mathfrak{M}_{11}$ katsayıları daima eksi sayılardır. $\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$, iki bobinin *öz indüktanslarıysa*, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\mathfrak{M}_{11} = -\mathcal{L}_1, \qquad \mathfrak{M}_{22} = -\mathcal{L}_2 \qquad (17.33)$$

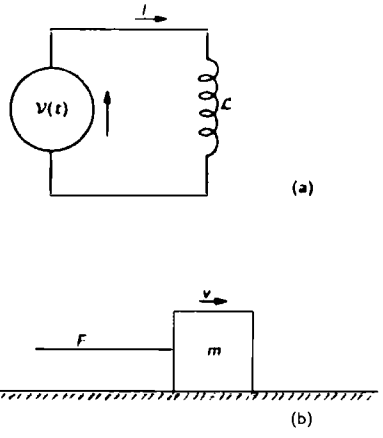
Elbette öz indüktans tek bir bobin olduğunda da var olur. Tek başına herhangi bir bobinin öz indüktansı $\mathcal{L}$'dir. Emk, içinden geçen akımın değişim hızıyla orantılı olacaktır. Tek bir bobin için, emk ve akım aynı yöndeyse, değerlerini artı kabul etmek olağandır. Buna göre, tek bir bobin için emk aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}\frac{dI}{dt} \qquad (17.34)$$

Buradaki eksi işareti emk'nın akımdaki değişime karşı geldiğini ifade eder. Buna genelde "zıt emk" denir.

Herhangi bir bobinde akım değişimine karşı gelen bir öz indüktans olduğundan dolayı, içindeki akımın bir tür eylemsizliği vardır. Bobindeki akımın bu eylemsizliğinin üstesinden gelmek için, Şekil 17-10 (a)'da göründüğü gibi, bobini dış bir voltaj kaynağına, örneğin bir batarya veya jeneratöre, bağlamak gere-

* (17.31) ve (17.32) denklemlerindeki $\mathfrak{M}_{12}$ ve $\mathfrak{M}_{21}$'in işaretleri, her iki bobin için bir artı akım hissi için yapılan rastgele seçimlere dayanır.



Şekil 17-10 (a) Voltaj kaynaklı ve indüktanslı bir devre. (b) Benzeri bir mekanik sistem.

kir. Böyle bir devrede, I akımı ile $\mathcal{V}$ voltajı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\frac{dI}{dt} \qquad (17.35)$$

Dikkat ederseniz bu denklem, tek boyuttaki bir parçacık için Newton'ın hareket yasasıyla aynı biçime sahiptir. Böylece, "benzer denklemlerin benzer çözümleri vardır" ilkesiyle çalışabiliriz. Dışardan uygulanan $\mathcal{V}$ voltajını F kuvvetine ve bobindeki I akımını da parçacığın v hızına eşlersek, bobinin indüktansı $\mathcal{L}$ parçacığın kütlesi m'e eşit olur* [*Bkz.* Şekil 17-10 (b)]. Birbirlerine karşılık gelen nicelikler için lütfen aşağıdaki tabloyu inceleyin:

Parçacık	*Bobin*
F (kuvvet)	$\mathcal{V}$ (potansiyel farkı)
v (hız)	I (akım)
x (yerdeğiştirme)	q (yük)
$F = m\frac{dv}{dt}$	$\mathcal{V} = \mathcal{L}\frac{dI}{dt}$
mv (momentum)	$\mathcal{L}I$
$\frac{1}{2}mv^2$ (kinetik enerji)	$\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ (manyetik enerji)

17-8 İndüktans ve manyetik enerji

Önceki bölümde kullandığımız benzerliği devam ettirdiğimizde, değişim hızı uygulanan kuvvet olan mekanik momentuma ($p = mv$) karşılık gelecek şekilde, değişim hızı $\mathcal{V}$ olan ve $\mathcal{L}I$'ya eşit bir benzer nicelik olmasını bekleriz. $\mathcal{L}I$ için devredeki gerçek momentum demeye elbette hakkımız yok; zaten değil de. Bütün devre öylece duruyor ve momentumu bu yüzden sıfır olabilir. $\mathcal{L}I$'nın momentum mv'ye eşit olması, karşılık gelen denklemleri sağlamak anlamındadır. Aynı şekilde, kinetik enerji $\frac{1}{2}mv^2$'ye benzer $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ niceliği vardır; fakat bir sürprizle. Bu $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ aynı zamanda elektriksel durumda da enerji demektir. Bunun nedeni indüktans üzerinde iş yapmanın hızı $\mathcal{V}I$ ve mekanik sistemde ona karşılık gelen niceliğin de Fv olmasıdır. Dolayısıyla, enerji söz konusu olduğunda nicelikler sadece matematiksel olarak değil, aynı zamanda fiziksel olarak da benzeşirler.

Bunu şimdi daha detaylı olarak inceleyelim. Denklem (17.16)'da gördüğümüz üzere, indüklenen akımlarca yapılan elektriksel işin hızı, akım ve elektromotor kuvvetin çarpımıdır:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I$$

Denklem (17.34)'teki akım cinsinden $\mathcal{E}$'yi açarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{L}I\frac{dI}{dt} \qquad (17.36)$$

Denklemin integralini alırsak, akım oluşurken öz indüktansta oluşan emk'nın üstesinden gelmek için dış kaynaktan gelmesi gerekli enerjiyi (ki o da depolanan enerjiye (U) eşit olmalıdır) hesaplarız:†

$$-W = U = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2 \qquad (17.37)$$

Dolayısıyla, bir indüktansta depolanan enerji $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$'dir.

Aynı akıl yürütmeyi, Şekil 17-7 ya da Şekil 17-9'da görünen türden bobin çiftlerine uygularsak, sistemin toplam elektrik enerjisinin aşağıdaki denklemle verildiğini buluruz:

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2 I_2^2 + \mathfrak{M}I_1 I_2 \qquad (17.38)$$

---

* Yeri gelmişken, bu, mekanik ve elektriksel nicelikler arasında karşılıklılık kurmanın *tek yolu değildir.*

† Bobinin direncindeki akımdan kaynaklanan ısı için kaybolan enerjiyi ihmal ediyoruz. Bu tür enerji kayıpları kaynaktan ilave enerji gerektirir; fakat indüktansa giren enerjinin miktarını etkilemez.

Nasıl? Eğer her iki bobin için $I = 0$'la başlarsak, önce birinci bobindeki I_1 akımını, $I_2 = 0$ olacak şekilde açabiliriz. Yapılan iş $\frac{1}{2}\mathcal{L}_1 I_1^2$'dir. I_2 akımını açtığımızdaysa, sadece iki numaralı devredeki emk'ya karşı $\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 I_2^2$ işi değil, aynı zamanda, bir numaralı devredeki emk'nın $[\mathfrak{M}(dI_2/dt)]$'nin integrali olan $\mathfrak{M} I_1 I_2$ çarpı şimdi sabit olan I_1 akımı kadar ilave iş yapmış oluruz.

Diyelim ki şimdi, I_1 ve I_2 akımları taşıyan herhangi iki bobin arasındaki kuvveti bulmak istiyoruz. Denklem (17.38)'in enerjisindeki değişimi alarak, sanal iş ilkesini kullanabileceğimizi düşünebiliriz. Elbette, bobinlerin göreli konumlarını değiştirdiğimizde tek değişen niceliğin karşılıklı indüktans $\mathfrak{M}$ olduğunu hatırlamalıyız. Daha sonra sanal iş denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$-F\,\Delta x = \Delta U = I_1 I_2\,\Delta\mathfrak{M} \quad \text{(yanlış)}$$

Ancak bu denklem hatalıdır; çünkü, daha önceden gördüğümüz üzere, sadece iki bobinin enerjilerindeki değişimi hesaba katar, I_1 ve I_2 akımlarını sabit değerde tutan kaynakların enerjisini değil. Şimdi biliyoruz ki, bu kaynaklar, bobinler hareket ettikçe içlerinde indüklenen emk'lara karşı da enerji sağlamalıdır. Sanal iş ilkesini doğru kullanmak istiyorsak, bu enerjileri de hesaba katmalıyız. Bununla birlikte, daha önce gördük ki kestirmeden gidebilir ve sanal iş ilkesini, toplam enerjinin U_{mekanik} dediğimiz "mekanik" enerjinin eksi değerlisi olduğunu aklımızda tutarak kullanabiliriz. Böylece, kuvvet için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$-F\,\Delta x = \Delta U_{\text{mekanik}} = -\Delta U \tag{17.39}$$

Böylece, iki bobin arasındaki kuvvet aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$F\,\Delta x = I_1 I_2\,\Delta\mathfrak{M}$$

İki bobinli bir sistemin enerjisini ortaya koyan Denk. (17.38), iki bobinin öz indüktansları $\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$ ile karşılıklı indüktansları $\mathfrak{M}$ arasında ilginç bir eşitsizlik bulunduğunu göstermek için kullanılabilir. Her iki bobinin enerjilerinin artı değerli olması gerektiği açıktır. Bobinlerde sıfır akım varken başlar ve belli bir değere kadar akımları yükseltirsek, sisteme enerji yüklemiş oluruz. Böyle olmasaydı, akımlar anlık olarak yükselir ve dünyanın geri kalanına enerji verirlerdi. Olacak şey değil! Şimdi enerji denklemimiz (17.38)'i aşağıdaki biçimde de yazılabilir:

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1\left(I_1 + \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}_1} I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_1}\right) I_2^2 \tag{17.40}$$

Bu sadece cebirsel bir dönüşümdür. Bu nicelik, I_1 ve I_2'nin her değeri için her zaman artı işaretli olmalıdır. Özellikle, I_2 aşağıdaki özel değere sahip olduğunda:

$$I_2 = -\frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{M}} I_1 \tag{17.41}$$

I_2 için bu akım değeriyle, Denk. (17.40)'ın ilk terimi sıfır olur. Enerji artı değerde olacaksa, (17.40)'ın son terimi sıfırdan büyük olmalıdır. Koşulumuz aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 > \mathfrak{M}^2$$

Böylece, herhangi iki bobinin karşılıklı indüktansı $\mathfrak{M}$'nin büyüklüğünün iki öz indüktansın geometrik ortalamasına eşit veya daha az olması gerektiğini kanıtlamış olduk. ($\mathfrak{M}$'nin kendisi, I_1 ve I_2 akımlarının işaret seçimine bağlı olarak, artı veya eksi değer alabilir.)

$$|\mathfrak{M}| < \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} \tag{17.42}$$

$\mathfrak{M}$ ile öz indüktanslar arasındaki ilişki genelde şu şekilde yazılır:

$$\mathfrak{M} = k\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} \tag{17.43}$$

Burada, k sabitine bağlaşım sabiti denir. Bir bobinden kaynaklanan akı diğer bobini bağlıyorsa, bağlaşım katsayısı bire yakındır. Bobinler "sıkıca bağlaşmış" deriz. Bobinler birbirlerinden uzak veya karşılıklı akı bağı çok küçük olacak şekilde yerleştirilmişlerse, bağlaşım katsayısı sıfıra yakındır ve karşılıklı indüktans çok küçüktür.

İki bobinin karşılıklı indüktansını hesaplamak için, iki devrenin çevresindeki çift çizgi integral olan Denk. (17.30)'u vermiştik. Aynı denklemi kullanarak, tek bir bobinin öz indüktansını, aynı bobin etrafında her iki integrali alarak bulabileceğinizi düşünebilirsiniz. Öyle olmayacaktır; çünkü paydadaki r_{12}, iki çizgi parçası $d\boldsymbol{s}_1$ ve $d\boldsymbol{s}_2$ bobin üzerinde aynı noktadayken sıfıra gidecektir. Bunun nedeni, bu denklemin, sadece iki devrenin tellerinin kesit alanlarının devreler arasındaki uzaklığa göre küçük olduğu durumda geçerli bir yaklaştırım olmasıdır. Bu durumda, bu yaklaştırım tek bir bobin için kullanılamaz. Hatta aslında, tek bir bobinin indüktansı, tel çapı küçüldükçe logaritmik olarak sonsuza gider.

Bu yüzden, tek bir bobinin öz indüktansını hesaplamak için başka bir yola başvurmalıyız. Teller içindeki akımların dağılımını hesaba katmak gereklidir; çünkü telin boyutu önemli bir parametredir. Sormamız gereken soru "devre"nin indüktansının ne olduğu değil; iletkenlerin *dağılımının* indüktansının ne olduğudur. Bu indüktansı bulmak için en kolay yol belki de, manyetik enerjiyi kullanmaktır. Daha önce Bölüm 15-3'te, durağan akımların dağılımının manyetik enerjisi için şu ifadeyi bulmuştuk:

$$U = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}dV \tag{17.44}$$

Akım yoğunluğu $\boldsymbol{j}$'nin dağılımını bilirsek, vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$'yı ve daha sonra Denk. (17.44)'ün integralini alarak da enerjiyi hesaplayabiliriz. Bu enerji, öz indüktansın manyetik enerjisine, $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$, eşittir. İkisini birbirine eşitlediğimizde, indüktans için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2}\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}dV \tag{17.45}$$

İndüktansın sadece devrenin geometrisine bağlı olması gerekir, devredeki I akımına değil. Denklem (17.45) bize tam böyle bir sonuç verir; çünkü denklemdeki integral, akımın karesiyle orantılıdır. Akım bir kere $\boldsymbol{j}$ içinden ve bir kere de vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$ içinde gözükür. İntegralin I^2'ye bölümü devrenin geometrisine bağlıdır, I akımına değil.

Bir akım dağılımının enerjisini veren Denk. (17.44), hesaplamada kolaylık olması için çok farklı bir biçime de sokulabilir. Daha sonra göreceğimiz üzere, bu biçim önemlidir; çünkü o genel bir geçerliğe sahiptir. Enerji denklemi (17.44)'te, hem $\boldsymbol{A}$ hem de $\boldsymbol{j}$ vektörü $\boldsymbol{B}$'yle ilişkilendirilebilir; böylece enerjiyi manyetik alan cinsinden ifade etmeyi umabiliriz. Aynı, elektrostatik enerjiyi elektrik alanla ilişkilendirdiğimiz gibi. Önce $\boldsymbol{j}$ yerine $\epsilon_0c^2\nabla\times\boldsymbol{B}$ koyalım. $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ eşitliğini $\boldsymbol{B}$ cinsinden $\boldsymbol{A}$ elde etmek için kullanamayacağımızdan, $\boldsymbol{A}$'yı kolaylıkla değiştiremeyiz. Ancak, şunu yazabiliriz:

$$U = \frac{\epsilon_0c^2}{2}\int (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}dV \tag{17.46}$$

İlginç olan şey, bu integrali –birtakım kısıtlamalarla– aşağıdaki gibi yazabilmemizdir:

$$U = \frac{\epsilon_0c^2}{2}\int \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})dV \tag{17.47}$$

Bunu anlamak için, tipik bir terimi detaylıca yazalım. Denklem (17.46)'nın integralinde bulunan $(\nabla\times\boldsymbol{B})_zA_z$ terimini ele alalım. Bileşenleri açarak yazdığımızda,

$$\int\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)A_z\,dx\,dy\,dz$$

ifadesini elde ederiz. (Elbette, aynı türden iki integral daha vardır.) Şimdi, ilk terimin x'e göre integralini alalım:

$$\int\frac{\partial B_y}{\partial x}A_z dx = B_yA_z-\int B_y\frac{\partial A_z}{\partial x}\,dx$$

Ayrıca, sisteminizin –kaynaklar ve alanların– sonlu olduğunu düşünün; öyle ki uzak mesafelere gittikçe bütün alanlar sıfıra düşsün. Daha sona bütün hacim üzerinden integrali alındığında, B_yA_z teriminin limitlerdeki değerini hesapladığımızda sıfır buluruz. Sadece $B_y(\partial A_z/\partial x)$ terimini bırakacaktık, o da zaten $B_y(\nabla\times A)_y$ teriminin ve dolayısıyla $\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$'nın bir parçasıdır. Diğer beş terimi de ele alınca göreceksiniz ki, Denk. (17.47) gerçekten de Denk. (17.46)'ya denktir.

Artık $(\nabla\times\boldsymbol{A})$'yı $\boldsymbol{B}$'yle değiştirip, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$U=\frac{\epsilon_0c^2}{2}\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}dV \tag{17.48}$$

Böylece, manyetostatik bir durumun enerjisini sadece manyetik alan cinsinden ifade etmiş olduk. İfade, elektrostatik enerji için bulduğumuz denkleme çok benzemektedir:

$$U=\frac{\epsilon_0}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}dV \tag{17.49}$$

Bu iki enerji denklemini vurgulamamızın nedenlerinden biri, bazen onları kullanmanın daha uygun olmasıdır. Daha da önemlisi, dinamik alanlar ($\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin zamanla değiştiği alanlar) için (17.48) ve (17.49) doğru olmakla beraber, elektrik ve manyetik enerjiler için verdiğimiz diğer denklemler doğru değildir. Onlar sadece statik alanlar için geçerlidir.

Tek bir bobinin manyetik alanı ($\boldsymbol{B}$) bilinirse, enerji ifadesi (17.48)'i $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$'ye eşitleyerek öz indüktansı bulabiliriz. Gelin, uzun bir solenoidin öz indüktansını bu şekilde hesaplayalım. Daha önceden bildiğimiz üzere, bir solenoidin içindeki manyetik alan $\boldsymbol{B}$ düzgündür ve dışarda sıfırdır. İçerdeki alanın büyüklüğü $B=nI/\epsilon_0c^2$'dir. n birim uzunluktaki sarım sayısı ve I da akımdır. Bobinin yarıçapı r ve uzunluğu L ise (L değerini büyük alalım, böylece sondaki etkileri ihmal edebiliriz. $L\gg r$), içerdeki hacim πr^2L'dir. Dolayısıyla manyetik alan da

$$U=\frac{\epsilon_0c^2}{2}B^2\cdot(\text{Hacim})=\frac{n^2I^2}{2\epsilon_0c^2}\pi r^2L$$

olur. Bu da $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$'ye eşittir. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu buluruz:

$$\mathcal{L}=\frac{\pi r^2n^2}{\epsilon_0c^2}L \tag{17.50}$$

18

MAXWELL DENKLEMLERİ

18-1 Maxwell denklemleri
18-2 Yeni terim nasıl işler?
18-3 Bütün klasik fizik
18-4 Hareket eden bir alan
18-5 Işığın hızı
18-6 Maxwell denklemlerini çözmek; potansiyeller ve dalga denklemi

18-1 Maxwell denklemleri

Bu bölümde, 1. Bölümde başlangıç noktası olarak ele aldığımız dört Maxwell denklemine geri döneceğiz. Şu ana kadar Maxwell denklemlerini parça parça çalıştık. Son bir parça daha eklemenin ve hepsini bir araya getirmenin zamanı geldi. Böylece, zamanla herhangi bir şekilde değişen elektromanyetik alanlara dair doğru ve eksiksiz bir çalışmamız olmuş olacak. Bu bölümde belirteceğimiz bir şey daha önceden söylediklerimizle çelişirse, bu bölümdekini doğru ve önceden söyleneni yanlış kabul edebilirsiniz. Daha önceden söylediklerimiz özel durumlar için, örneğin durağan akımlar veya sabit yükler gibi geçerliydi. Her ne kadar denklemleri yazarken kısıtlamaları dile getirdiysek de, bunları unutmak ve yanlış denklemleri genel olarak doğru zannetmek çok kolaydır. Artık tam gerçeği hiç kısıtlama olmadan (veya neredeyse hiç) öğrenmeye hazırsınız.

Bütün Maxwell denklemleri Tablo 18-1'de hem matematiksel sembollerle, hem de kelimelerle yazılmıştır. Kelimelerin denklemlere denk olmasına artık alışmış olmalı ve birini diğerine karşılıklı çevirebiliyor olmalısınız.

$\boldsymbol{E}$'nin diverjansının yük yoğunluğu bölü ϵ_0 olduğunu ifade eden ilk denklem genelde doğrudur. Hem statik, hem dinamik alanlarda Gauss yasası daima geçerlidir. $\boldsymbol{E}$'nin herhangi bir kapalı yüzeyden geçen akısı, içerdeki yükle orantılıdır. Üçüncü denklem manyetik alanlar için genel bir yasadır. Hiç manyetik yük olmadığından dolayı, $\boldsymbol{B}$'nin herhangi bir kapalı yüzeyden geçen akısı daima sıfırdır. İkinci denklem, $\boldsymbol{E}$'nin bükümünün $-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ olduğu, Faraday yasasıdır ve son iki bölümde bunun üzerinde durduk. O da genel olarak doğrudur. Sondaki denklemse yenidir. Daha önce, durağan akımlar için doğru olduğu kısmını görmüştük. O durumda $\boldsymbol{B}$'nin bükümünün $\boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ olduğunu söylemiştik; fakat Maxwell tarafından keşfedilen doğru genel denklemde yeni bir parça vardır.

Maxwell sahneye çıkana kadar, elektrik ve manyetizmanın bilinen yasaları 3. Bölümden 17. Bölüme kadar çalıştıklarımızdı. Durağan akımların manyetik alanı için bilinen tek denklem şuydu:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{18.1}$$

Maxwell bilinen yasaları ele alarak ve onları, aynı burada bizim yaptığımız gibi, diferansiyel denklemler olarak ifade ederek işe başladı. (Her ne kadar ∇ simgesi henüz keşfedilmediyse de, bugün büküm ve diverjansı dediğimiz, türevlerin bileşimlerinin önemi ilk Maxwell sayesinde ortaya çıktı.) Maxwell daha sona Denk. (18.1)'de bir gariplik olduğunu fark etti. Denklemin diverjansını alınca, sol taraf sıfır oluyordu; çünkü bir bükümün diverjansı daima sıfırdır. Dolayısıyla bu denklem $\boldsymbol{j}$'nin diverjansının da ayrıca sıfır olmasını gerektirir. $\boldsymbol{j}$'nin diverjansı sıfırsa, bu durumda akımın herhangi bir kapalı yüzeyden geçen toplam akısı da ayrıca sıfır olmalıdır.

Bir akımın kapalı bir yüzeyden akısı, yüzeyin içindeki yükün azalmasıdır. Bu kesinlikle, sıfır olamaz; çünkü yüklerin bir yerden bir başka yere taşınabileceğini biliyoruz. Aslında, Denk. (18.2) bizim için neredeyse $\boldsymbol{j}$'nin tanımı olmuştur.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{18.2}$$

Bu denklem, elektrik yükünün korunduğunu ifade eden temel yasasıdır. Herhangi bir yük akışı bir kaynaktan gelmelidir. Maxwell bu zorluğu anladı ve Denk. (18-1)'in

Maxwell Denklemleri

I. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Kapalı yüzeyden geçen $\boldsymbol{E}$ akısı) = (içerdeki yük) $/\epsilon_0$

II. $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ ($\boldsymbol{E}$ 'nin bir ilmek etrafındaki çizgi integrali) $= -\dfrac{d}{dt}$ (ilmek içinden geçen $\boldsymbol{B}$ akısı)

III. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (Kapalı bir yüzeyden geçen $\boldsymbol{B}$ akısı) = 0

IV. $c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ c^2 ($\boldsymbol{B}$ 'nin bir ilmek etrafındaki integrali) = (ilmekten geçen akım)$/\epsilon_0$ $+ \dfrac{d}{dt}$ (ilmek içinden geçen $\boldsymbol{E}$ akısı)

Yük korunumu

$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (Akımın kapalı yüzeyden geçen akısı) $= -\dfrac{d}{dt}$ (içerdeki yük)

Kuvvet yasası

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$

Hareket yasası

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{p} = \dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (Einstein'ın düzelttiği haliyle, Newton yasası)

Kütleçekim

$\boldsymbol{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

sağ kısmına $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ terimini ekleyerek bunun üstesinden gelinebileceğini belirtti. Daha sonra da Tablo 18-1'deki dördüncü denklemi elde etti:

$$\text{IV.} \qquad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Maxwell'in devrinde soyut alanlar cinsinden düşünmek henüz yaygın hale gelmemişti. Maxwell fikirlerini, boşluğun esnek bir katı gibi düşünüldüğü modelle ele almaya çalıştı. Bu yeni denklemin anlamını da mekanik model terimleriyle açıklamaya çalıştı. Kuramına karşı başta direnç vardı; birincisi modelden dolayı ve ikincisi de hiç deneysel bir gösterim olmamasından dolayı. Bugün biliyoruz ki önemli olan denklemlerdir, onları elde etmek için kullandığımız model değil. Sorgulamamız gereken şey sadece denklemlerin doğru olup olmadığıdır. Cevap deneylerdedir ve Maxwell denklemlerini doğrulamak için sayısız deney yapılmıştır. Kurmak için çıktığı iskeleyi söktüğümüzde, Maxwell'in gösterişli binasının kendi başına ayakta durduğunu görürüz. Elektrik ve manyetizmaya dair tüm yasaları bir araya getiren Maxwell, eksiksiz ve güzel bir kuram oluşturmuştur.

Şimdi, Maxwell'in karşılaştığı zorluğu aşmak için eklediği o fazladan terimin gerçekten de gerekli olduğunu gösterelim. Denkleminin (Tablo 18-1'de dördüncü denklem) diverjansını aldığımızda, sağ tarafın diverjansı sıfıra eşit olmalıdır:

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{18.3}$$

İkinci terimde, türevlerin koordinatlara ve zamana göre sırası tersine çevrilebilir; böylece denklemi aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{18.4}$$

Ancak, Maxwell'in denklemlerinden birincisi E'nin diverjansının ρ/ϵ_0 olması gerektiğini söyler. Bu eşitliği Denk. (18.4)'e yerleştirirsek, Denk. (18.2)'yi elde ederiz ve onun da doğru olduğunu zaten biliyoruz. Tersten gidip, Maxwell denklemlerini doğru kabul edersek –nitekim kabul ederiz; çünkü henüz hiçbir deneyde onlarla çelişen bir sonuç bulunamadı– yükün daima korunduğu sonucuna ulaşırız.

Fizik yasalarının şu soruya verebilecek bir cevabı yoktur: "Bir noktada bir yük aniden belirirse ne olur? Hangi elektromanyetik etkiler meydana gelir?" Buna cevap verilemez; çünkü denklemlerimiz böyle bir şeyin olamayacağını söylemekte. Olacak *olsaydı*, yeni yasalara gereksinimimiz olurdu; ancak bu yeni yasaların ne olacağını bilemeyiz. Yük korunumunun olmadığı bir dünyanın nasıl işlediğini gözlemleme şansımız olamadı. Denklemlerimize göre, bir yere bir noktayı aniden yerleştirdiyseniz, onu bir yerden taşımışsınız demektir. Bu durumda ne olacağını bilebiliriz.

E'nin bükümüne dair denkleme yeni bir terim eklediğimizde, yepyeni bir olgular kümesinin tanımlandığını anladık. Maxwell'in $\nabla \times B$ için olan denkleme yaptığı küçük eklemenin birçok şeyi etkileyen sonuçları olduğunu göreceğiz.

18-2 Yeni terim nasıl işler?

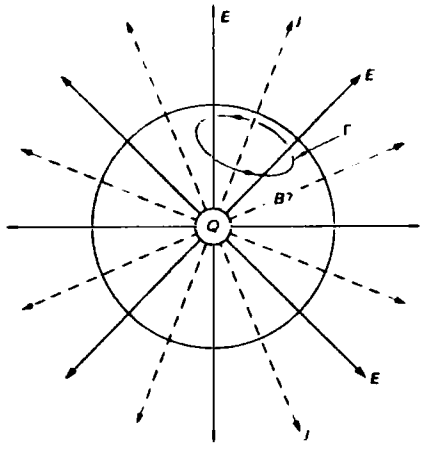
İlk örnek olarak, küresel simetrik, radyal bir akım dağılımında ne olduğunu ele alalım. Küçük bir küremiz ve içinde radyoaktif malzeme olsun. Bu radyoaktif malzeme dışarıya yüklü parçacıklar saçmaktadır. (Ya da merkezine küçük bir delik açılmış bir jöle bloğu düşünebiliriz. Deliğe bir deri altı şırıngasıyla yük bastığımızı ve yükün de dışarı doğru sızdığını düşünelim.) Her iki durumda da, dışarıya doğru radyal olarak yayılan bir akımla karşılaşırdık. Her yönde aynı büyüklüğe sahip olduğunu varsayacağız.

Herhangi bir r yarıçapı içindeki toplam yüke $Q(r)$ diyelim. Aynı yarıçaptaki radyal akım yoğunluğu $j(r)$ ise, Q'nun, Denk. (18.2)'ye göre,

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r) \tag{18.5}$$

oranında azalması gerekir.

Şimdi bu durumda akımlarca meydana getirilen manyetik alanla ilgili konuşalım. Şekil 18-1'deki gibi, yarıçapı r olan bir küre üzerine bir Γ ilmeği çizdiğimizi düşünelim. Bu ilmekten geçen bir akım vardır; dolayısıyla gösterilen yönde dolaşan bir manyetik alan olmasını bekleriz.



Şekil 18-1 Küresel simetrik bir akımın manyetik alanı nedir?

Şimdiden zor bir durumda kaldık. B'nin küre üzerinde nasıl belli bir yönü olabilir ki? Bir başka Γ seçimi yaparsak, gösterilenin tam tersinde bir yön görebiliriz. O zaman, akımlar etrafında B'nin nasıl bir dolaşımı *olabilir ki?*

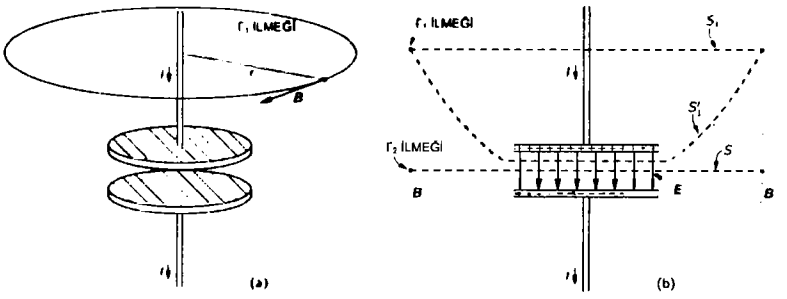
Bizi kurtaran Maxwell'in denklemidir. B'nin dolaşımı sadece Γ içinden geçen toplam *akıma* değil, aynı zamanda içinden geçen *elektrik akısının* zamanla değişimine eşittir. Bu iki parça birbirini sıfırlıyor olmalı. Gelin, bu doğru muymuş bakalım?

r yarıçapındaki elektrik alan, yük varsaydığımız şekilde simetrik dağıldığı sürece, $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ olmalıdır. Radyaldır ve değişim hızı da şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{18.6}$$

Bunu Denk. (18.5)'le karşılaştırdığımızda şu eşitliği buluruz:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0} \tag{18.7}$$



Şekil 18-2 Yüklenen bir sığaçın yakınındaki manyetik alan.

Maxwell denklemlerinin dördüncüsünde iki kaynak terimi birbirini sıfırlar ve $\boldsymbol{B}$'nin bükümü daima sıfırdır. Örneğimizde hiç manyetik alan yoktur.

İkinci örnek olarak, paralel levhalı bir kondansatörü yüklemek için kullanılan bir telin manyetik alanını ele alalım. Levhalardaki Q yükü zamanla değişiyorsa (çok hızlı değil ama), tellerdeki akım dQ/dt'ye eşittir. Bu akımın teli çevreleyen bir manyetik alan üretmesini bekleriz. Elbette, levhaya yakın akım dik bir manyetik alan üretmelidir. Akımın gittiği yere bağlı olamaz.

Şekil 18-2 (a)'daki gibi, r yarıçapında bir çember olan Γ_1 ilmeğini ele alalım. Manyetik alanın çizgi integrali I akımının $\epsilon_0 c^2$'ye bölümüne eşit olmalı. Bu durumda şunu yazabiliriz:

$$2\pi rB = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \tag{18.8}$$

Bu, durağan bir akım için geçerlidir. Maxwell'in eklemesiyle de ayrıca doğrudur; çünkü S yüzeyini çemberin içinde diye düşünürsek, üzerinde hiç elektrik alan olmaz (telin çok iyi bir iletken olduğunu varsayarsak). $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$'nin yüzey integrali sıfırdır.

Şimdi, Γ eğrisini aşağı doğru yavaşça hareket ettirdiğimizi düşünelim. Kondansatörün levhalarıyla eşit düzleme gelene kadar hep aynı sonucu elde ederiz. Daha sonra I akımı sıfıra iner. Manyetik alan ortadan kaybolur mu peki? Öyle olsa çok garip olurdu. Gelin, Maxwell denklemi, düzlemi kondansatör levhaları arasından geçen r yarıçapında bir çember olan Γ_2 eğrisi için ne diyor ona bakalım [Şekil 18-2 (b)]. $\boldsymbol{B}$'nin Γ_2 etrafındaki çizgi integrali $2\pi rB$'dir. Bu, S_2 çembersel yüzeyinden geçen $\boldsymbol{E}$ akısının zamanla türevine eşit olmalıdır. Gauss yasasından biliyoruz ki, $\boldsymbol{E}$'nin bu akısı kondansatör levhalarından birindeki Q yükü çarpı $1/\epsilon_0$'dur:

$$c^2 2\pi rB = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right) \tag{18.9}$$

Bu gayet uygundur. Denklem (18.8)'de bulduğumuzla aynı sonuçtur. Değişen elektrik alan üzerinden integral aldığımızda bulduğumuz manyetik alan ile teldeki akım üzerinden integral alarak bulduğumuz manyetik alan aynıdır. Bu, elbette Maxwell denkleminin dediği bir şeydir. Bunun her zaman böyle olacağını, aynı argümanları Şekil 18-2 (b)'deki aynı Γ_1 çemberiyle çevrilen S_1 ve S_1' yüzeylerine uygulayarak kolaylıkla görebiliriz. S_1 yüzeyinden geçen I akımı vardır; ancak elektrik akısı yoktur. S_1' içinden akım geçmez, ancak I/ϵ_0 hızında değişen bir elektrik akısı geçer. Dördüncü denklemi hangi yüzeyle kullanırsak kullanalım, aynı $\boldsymbol{B}$'yi elde ederiz.

Maxwell'in yeni terimi üzerinden şu ana kadar konuştuklarımızdan, çok da bir şey eklemediğini, denklemleri beklentilerimize uygun hale getirmek için denklemleri düzelttiği izlenimini edinebilirsiniz. Dördüncü denklemi *tek başına* değerlendirirsek bu doğrudur, yeni bir şey ortaya çıkmamıştır. Buradaki önemli kelimeler "tek başına" kelimeleridir. Denklem dörtte Maxwell'in yaptığı küçük

değişiklik, diğer denklemlerle *birleştirildiğinde* yeni ve önemli sonuçlar doğurur. Bunları ele almadan önce, Tablo 18-1 hakkında daha fazla konuşmalıyız.

18-3 Bütün klasik fizik

Tablo 18-1, 1905 yılına kadar bilinen bütün temel *klasik* fiziği içerir. Hepsi orada, bir tabloda. Bu denklemlerle, klasik fiziğin bütün alanlarını anlayabiliriz.

Önce Maxwell denklemleriyle başlar. Hem genişletilmiş, hem de kısa matematiksel biçimde. Sonra parantezler içinde bile yazılmış yük korunumunu görürüz, çünkü Maxwell denklemleri tam olarak elimizde olduğu an, onlardan yola çıkarak yük korunumu yasasını elde edebiliriz. Diğer bir deyişle, tablo aslında biraz fazla bilgi bile içerir. Sonra kuvvet yasasını ekledik; tüm elektrik ve manyetik alanlara sahip olmak, yüklere ne yaptıklarını bilmediğimiz sürece pek bir işe yaramaz. E ve B'yi bilirsek, q yüklü ve v hızıyla ilerleyen bir nesne üzerindeki kuvveti hesaplayabiliriz. Son olarak, kuvveti hesaplamamış olsak bile, kuvvet bir şeyi ittiği zaman ne olduğunu bilmediğimiz sürece bize bir şey ifade etmez. Kuvvetin momentumdaki değişim hızına eşit olduğunu ifade eden hareket yasasına ihtiyacımız vardır. (Hatırladınız mı? Hani 1. Bölümde işlemiştik.) Momentumu $p = m_0 v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ olarak yazarak görelilik etkilerini bile hesaba katarız.

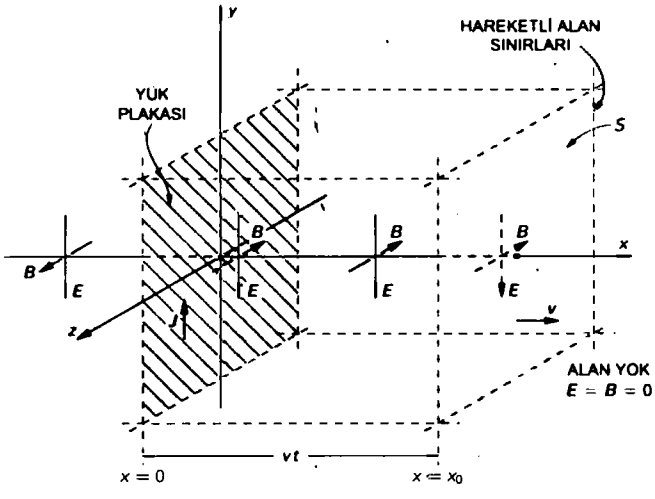
Eksiksiz olmasını istiyorsak, bir yasa daha –Newton kütleçekim yasası– eklemeliyiz. En sonda da onu ekledik zaten.

Böylece tek bir küçük tabloda bütün temel klasik fizik yasalarını topladık. Hatta onları kelimelerle ifade edebileceğimiz ve biraz da fazlalık içerebilecek yer bile kaldı. Bu büyük bir an. Müthiş bir zirveye tırmandık. K-2'nin zirvesindeyiz şu an. Everest'imiz olan kuantüm mekaniğine çıkmaya da neredeyse hazırız. Dağın bir yüzünden tırmandık ve zirveye ulaştık, şimdi diğer yüzden aşağı inebiliriz.

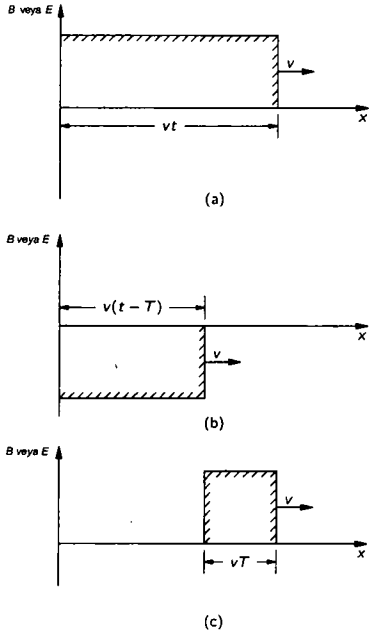
Esas olarak denklemleri nasıl anlayabileceğimizi öğrenmeye çalıştık. Şimdi her şeyi bir araya getirdiğimize göre, denklemlerin ne anlama geldiğini –görmediğimiz ne yeni şeyler söylediklerini– çalışacağız. Bu noktaya gelmek için çok çalıştık. Çok çabaladık; şimdi başarımızın tüm sonuçlarını görürken, manzara eşliğinde yokuş aşağı rahatça ineceğiz.

18-4 Hareket eden bir alan

Sıra geldi yeni sonuçlara. Bu sonuçlar, bütün Maxwell denklemlerini bir araya getirdiğimizde ortaya çıkarlar. Öncelikle, özellikle kolay olmasını seçtiğimiz bir durumda ne olduğuna bakalım. Tüm niceliklerin tek bir koordinatta değiştiğini varsayarak, tek boyutlu bir problemi ele alacağız. İlgili durum Şekil 18-3'te gösterilmiştir. yz düzlemine yerleştirilmiş yüklü bir levha var. Levha önde durağandır; daha sonra bir anda y yönünde u hızına çıkarılır ve bu yönde sabit hızla devam eder. Böyle bir "sonsuz" ivmelenmeden dolayı kafanız karışa-



Şekil 18-3 Sonsuz bir yüklü levha kendine paralel olacak şekilde aniden hareket ettirilir. Levhadan dışarı, sabit bir hızda manyetik ve elektrik alanlar yayılır.



Şekil 18-4 (a) B'nin (veya E'nin), yük levhası harekete geçirildikten t zamanı kadar sonra, x'in bir fonkisyonu olarak büyüklüğü. (b) Eksi y yönünde $t = T$ zamanında hareketli bir yüklü levha için alanlar (c), (a) ve (b)'nin toplamı.

bilir; ancak çok da önemli değildir aslında. u hızına çok hızlı bir şekilde çıkarıldığını hayal edin. Böylece aniden elimizde bir yüzey akımı J olur (J, z yönünde birim genişlikteki akımdır). Problemi basit tutmak için yz düzleminde, üst üste bindirilmiş, aynı büyüklükte zıt işarette bir yüklü levha olduğunu düşünelim. Böylece hiç elektrostatik etki görülmez. Ayrıca her ne kadar şekilde olup biteni sonlu bir bölgede gösteriyor olsak da, levhanın $\pm y$ ve $\pm z$ yönlerinde sonsuza uzandığını düşünelim. Diğer bir deyişle, akımın olmadığı ve sonradan aniden belirmiş bir düzgün yük levhasının olduğu bir durumla karşı karşıyayız? Ne olur bu durumda?

Bildiğimiz gibi, artı y yönünde, akım taşıyan bir levha olduğunda $x > 0$ için eksi z yönünde ve $x < 0$ için de tersi yönde bir manyetik alan meydana getirilir. B'nin büyüklüğünü, manyetik alanın çizgi integralinin akım bölü $\epsilon_0 c^2$'ye eşit olduğundan yola çıkarak hesaplayabiliriz. $B = J/2\epsilon_0 c^2$ eşitliğini elde ederdik (w genişliğindeki bir şeritteki bir I akımı Jw ve B'nin çizgi integrali de $2Bw$ olduğundan dolayı).

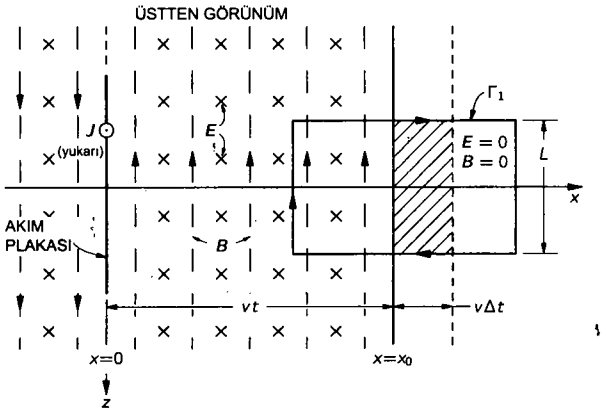
Bu bize –küçük x değeri için– levhanın yakınındaki alanı verir. Bizse sonsuz bir levha hayal ettiğimizden, aynı argümanın daha uzaktaki x değerleri için de manyetik alanı vermesini bekleriz. Bu da, akımı açtığımız an manyetik alanın her yerde sıfırdan sonlu bir değere çıktığını görmek demektir. Bir dakika! Manyetik alan aniden değişirse, muazzam elektriksel etkiler meydana getirir. (*Herhangi* bir şekilde değiştiğinde, elektriksel etikler meydana gelir.) Yüklü levhayı hareket ettirdiğimizden dolayı, değişen bir manyetik alan meydana getiririz ve bu yüzden de elektrik alanlar meydana gelir. Elektrik alanlar yaratılıyorsa, sıfırdan başlamalı ve bir değere kavuşmalıdırlar. Manyetik alanın meydana getirilmesine, J akımıyla beraber $\partial E/\partial t$ de bir miktar katkı da bulunacaktır. Dolayısıyla, çeşitli denklemler birbirinin içine geçmiş durumda ve bütün alanlar için bir kere de bunu çözmeye çalışacağız.

Sadece Maxwell denklemlerine baktığımızda, çözüme nasıl kavuşacağımız açıkça ortada değildir. Bu yüzden önce size cevabı vereceğim ve sonra da cevabın gerçekten de denklemleri sağladığını doğrulayacağız beraber. Cevap şudur: Hesaplamış olduğumuz B alanı, aslında (küçük x değeri için) akım levhasının hemen yakınında ortaya çıkmıştır. Böyle olmalı; çünkü levha etrafında küçük bir ilmek yaparsak, herhangi bir elektrik akısının içinden geçip gidebileceği bir boşluk yoktur. Ancak, –büyük x değeri için– uzaktaki B alanı ilk başta sıfırdır. Kısaca, akımı açtığımızda hemen yakınındaki manyetik alan sabit bir B değerine kavuşur; daha sonra bu B de kaynak bölgesinden yayılmaya başlar. Belli bir zaman sonra, bir x değerine kadar olan her yerde düzgün manyetik alan vardır. Sonrasındaysa sıfırdır. Simetriden dolayı, hem artı hem eksi x yönlerinde yayılır.

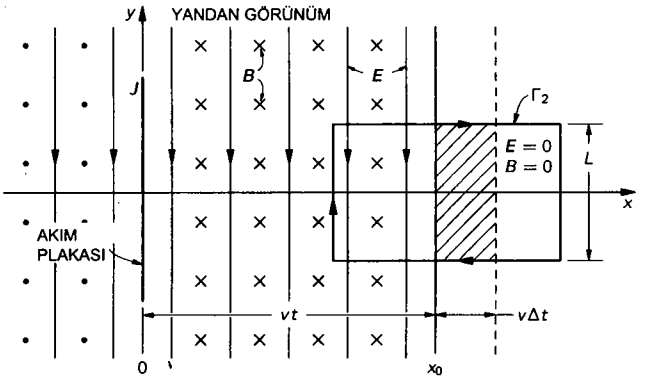
E alanı aynı şeyi yapar. $t = 0$ zamanından (akımı açtığımız an) önce alan her yerde sıfırdır. t zamanından sonra, $x = vt$ mesafesinde hem E hem de B düzgündür. Sonrasında da sıfırdırlar. Alanlar aynı bir gelgit dalgası gibi ilerlerler, ön yüzleri düzgün bir hızdadır ve sonradan bulduğumuza göre c'dir bu hız. Biz şimdilik bu hıza v diyelim. E veya B'nin büyüklüğünü, t zamanında görünmeleriyle beraber, x'e göre gösteren grafik Şekil 18-4 (a)'da gösterilmiştir. Şekil 18-3'e tekrar bakarsak, t zamanında $x = \pm vt$ arasındaki bölge alanlarla "doldurulmuştur"; fakat henüz ötesine geçememişlerdir. Tekrar vurgulayalım, akım levhasının ve dolayısıyla E ve B'nin y ve z yönlerinde sonsuza uzandığını varsayıyoruz. (Sonsuz bir levha çizemeyiz, dolayısıyla sadece sonlu bir alanda ne olup bittiğini gösterdik.)

Şimdi, olan biteni niceliksel olarak analiz edelim. Bunu yapmak için iki kesit görünüme bakmamız lazım. Şekil 18-5'te gösterildiği gibi, y ekseni boyunca aşağı doğru üstten bakış ve Şekil 18-6'da gösterildiği gibi z ekseni boyunca geriye doğru yandan görünüm. Yandan görünümle başlayalım. Yüklü levhanın yukarı doğru hareket ettiğini görürüz; manyetik alan $+x$ için sayfanın içine doğru ve $-x$ için de sayfanın dışına doğru işaret eder. Elektrik alan da her yerde, $x = \pm vt$'ye kadar, aşağı doğrudur.

Gelin, bu alanlar Maxwell denklemleriyle uyumlu mu diye bakalım. Önce, çizgi integral hesaplamak için kullandığımız ilmeklerden birini çizelim; örneğin Şekil 18-6'daki dikdörtgen Γ_2 gibi. Dikkat ederseniz, dikdörtgeni kenarlarından



Şekil 18-5 Şekil 18-3'ün üstten görünümü.



Şekil 18-6 Şekil 18-3'ün yandan görünümü.

biri alanların olduğu bölgededir, ancak diğeri daha alanların ulaşmadığı bir bölgededir. İlmek içinden geçen bir miktar manyetik akı vardır. Eğer akı değişiyorsa, etrafında bir emk görülmelidir. Dalganın cephesi hareket halindeyse, değişen bir manyetik akı vardır; çünkü $\boldsymbol{B}$'nin içinde bulunduğu alan v hızıyla giderek büyümektedir. Γ_2 içindeki akı, B çarpı Γ_2'nin manyetik alana sahip alan parçasıdır. $\boldsymbol{B}$'nin büyüklüğü sabit olduğundan, akının değişim hızı büyüklük çarpı alanın değişim hızıdır. Alanın değişim hızını hesaplamak kolaydır. Γ_2 dikdörtgeninin genişliği L ise, $\boldsymbol{B}$'nin içinde bulunduğu alan Δt zamanında $Lv\ \Delta t$ olarak değişir (*Bkz.* Şekil 18-6). Bu durumda akının değişim hızı BLv'dir. Faraday yasasına göre bu, $\boldsymbol{E}$'nin Γ_2 etrafındaki çizgi integralinin, ki bu da EL'dir, eksisine eşittir. Elimizdeki denklem:

$$E = vB \tag{18.10}$$

Dolayısıyla E'nin B'ye hızı v ise, varsaydığımız alanlar Faraday yasasıyla uyumludur.

Tek denklem bu değildir elbet; $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yi birbirine bağlayan bir başka denklem daha vardır.

$$c^2\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{18.11}$$

Bu denklemi kullanabilmek için, Şekil 18-5'teki üstten görünüme bakalım. Bildiğiniz üzere bu denklem bize B'nin akım levhası yakınındaki değerini verir. Ayrıca, levhanın içinde fakat dalga yüzünün arkasında çizilmiş herhangi bir ilmek için, $\boldsymbol{B}$'nin herhangi bir bükümü veya herhangi bir $\boldsymbol{j}$ veya değişen $\boldsymbol{E}$ yoktur; dolayısıyla bu denklem her yerde doğrudur. Şimdi gelin, Şekil 18-5'teki gibi dalga yüzüyle kesişen Γ_1 eğrisi için ne olduğuna bakalım. Burada hiç akım yoktur; dolayısıyla Denk. (18.11)'i integral biçiminde tekrar yazabiliriz;

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_1 \text{ içinde}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\,da \tag{18.12}$$

$\boldsymbol{B}$'nin çizgi integrali, B çarpı L'dir. $\boldsymbol{E}$'nin akısının değişim hızı sadece ilerleyen dalga yüzünden kaynaklıdır. $\boldsymbol{E}$'nin sıfır olmadığı Γ_1 içindeki alan vL hızında artmaktadır. Bu yüzden Denk. (18.2)'nin sağ tarafı vLE'dir. O denklem şuna dönüşür:

$$c^2B = Ev \tag{18.13}$$

Elimizde yüzün arkasında bulunan, hem birbirlerine, hem de dalga yüzünün ilerlediği yöne dik açılarda, sabit $\boldsymbol{B}$ ve sabit $\boldsymbol{E}$ için bir çözüm vardır. Maxwell denklemleri E'nin B'ye oranını belirler. Denklem (18.10) ve (18.13)'ten, şunları yazabiliriz:

$$E = vB \qquad \text{ve} \qquad E = \frac{c^2}{v}B$$

Bir dakika! E/B oranına dair *iki farklı* koşul bulmuş olduk. Tanımladığımız bu alan gerçekten var olabilir mi? Elbette her iki denklemin de doğru olduğu tek

bir v hızı vardır, $v = c$. Dalga yüzü c hızıyla ilerlemelidir. Bir akımdan kaynaklanan elektriksel etkinin belli bir sabit c hızıyla ilerlediği bir örnek var elimizde.

Şimdi de yüklü levhanın hareketini, akımın olduğu kısa bir T zamanı sonra aniden durdurduğumuzu varsayalım. Ne olacağını üst üste binme ilkesiyle görebiliriz. Elimizde, sıfır olan bir akım vardı ve sonra aniden akım açılmıştı. Bu durum için çözümü biliyoruz. Şimdi bir başka alanlar kümesi ekleyeceğiz. Bir başka yüklü levhayı alıp, ilk akım başladıktan T zaman kadar sonra ters yönde, aynı hızla aniden hareket ettirelim. Başta ikisinin toplam akımı sıfırdır, sonra T kadar zaman için akım vardır, sonra yine yok olur; çünkü iki akım birbirini sıfırlamıştır. Elimizde bir kare akım "sinyali" vardır.

Yeni eksi akım artı olanla, T zamanı kadar gecikmeli olarak, aynı alanları üretir. Sadece, bütün işaretleri tersinedir. Yine bir dalga yüzü c hızıyla hareket eder. Şekil 18-4 (b)'de gösterildiği gibi, t zamanında $x = \pm c(t - T)$ noktasına varmış olur. Diğer bir deyişle, Şekil 18-4 (a) ve (b)'de olduğu gibi c hızıyla hareket eden iki "blok" alanımız vardır. İkisinin birleşimi aynı şeklin (c) kısmında gösterilmiştir. $x > ct$ için alanlar sıfırdır. $x = c(t - T)$ ile $x = ct$ arasında (yukarıda bulduğumuz değerlerle) sabittirler ve $x < c(t - T)$ için yine sıfırdırlar.

Kısaca, akım levhasından çıkmış küçük bir cT kalınlığında bir blok alan vardı elimizde ve uzayda kendi başına hareket etmektedir. Alanlar "havalanmıştır"; uzayda serbestçe ilerlemektedirler ve kaynakla bir bağları kalmamıştır. Tırtıl, güzel bir kelebeğe dönüşmüştür!

Bu elektrik ve manyetik alanlar demeti kendi kendilerini sürdürürler? Cevap: Faraday yasası $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$ ve Maxwell'in yeni terimi $c^2\nabla \times B = \partial E/\partial t$'nin birleşmiş etkileri sayesinde. Kendilerini sürdürmeye yardım edemezler. Diyelim ki manyetik alan aniden ortadan kaybolsun. Bunun sonucunda değişen bir manyetik alan olurdu ve bu da bir elektrik alan yaratırdı. Bu elektrik alan uzaklaşmaya çalışırsa, değişen elektrik alan tekrar bir manyetik alan yaratırdı. Bu karşılıklı devridaimle –bir alandan diğerine karşılıklı geçişler– sonsuza kadar devam etmeliler. Ortadan yok olmaları imkânsızdır.* Bir nevi dans ederek –önce biri diğerini, sonra o öncekini meydana getirerek– uzayda ilerlerler.

18-5 Işık hızı

Elimizde, kaynağını terk edip dışarıya doğru ışık hızı c'yle ilerleyen bir dalga var. Önce bir başka ana dönelim. Tarihe baktığınızda, Maxwell denklemlerindeki c katsayısının aynı zamanda ışık hızı olduğu bilinmiyordu. O sadece denklemlerdeki bir katsayıydı. Biz baştan ona c dedik, çünkü ne olacağını biliyorduk. Denklemlerde başka bir katsayı kullanıp, sonra da o katsayının yerine c koymanın mantıklı olmadığını düşündük. Elektrik ve manyetizma açısından sa, elektrostatik ve manyetostatik denklemlerinde görünen iki sabitle, ϵ_0 ve c^2 değeriyle başlayalım:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{18.14}$$

ve

$$\nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0 c^2} \tag{18.15}$$

Birim yük için *rastgele* bir tanımı ele alırsak, Denk. (18.14) için gerekli ϵ_0 sabitini deneysel olarak belirleyebiliriz: Örneğin Coluomb yasasını kullanarak, iki durağan birim yük arasındaki kuvveti ölçerek. Denklem (18.15)'te görünen $\epsilon_0 c^2$

---

* Gerçi, tam da böyle değildir. Yüklerin olduğu bir bölgeye vardıklarında "sönümlenebilirler". Bundan kastımız, başka yerde meydana getirilmiş bazı alanlar bu alanlarla üst üste binerler ve yıkıcı girişimle birbirlerini "sıfırlayabilirler" (*bkz.* I Cilt, Bölüm 31)

sabitini de deneysel olarak belirlemeliyiz. Bunu da, örneğin, iki birim akım arasındaki kuvveti ölçerek yapabiliriz. (Bir birim akım, saniyedeki bir birim yük anlamına gelir.) Bu iki deneysel sabitin oranı c^2'dir. Yalnızca bir başka "elektromanyetik sabit."

Dikkat ederseniz, birim yükümüz için ne seçersek seçelim bu c^2 sabiti aynıdır. Yük "birim"imize iki kat daha fazla –örneğin iki kat daha fazla proton yükü– "yük" koyarsak, ϵ_0 dörtte bir azalır. Bu "birim" yüklerden ikisini iki telden geçirdiğimizde, her bir telde saniye başına iki kat fazla "yük" bulunur; iki tel arasındaki kuvvet dört kat artar. $\epsilon_0 c^2$ sabiti dörtte bir azaltılmalıdır. $\epsilon_0 c^2/\epsilon_0$ sabitiyse değişmez.

Dolayısıyla sadece akımlar ve yüklerle yapılan deneylerle bulduğumuz c^2 sayısı, elektromanyetik etkilerin ilerleme hızının karesi çıkmıştır. Statik ölçümlerden –iki birim yük ve iki birim akım arasındaki kuvvetleri ölçerek– c'nin $3{,}00 \times 10^8$ metre/saniye olduğunu bulduk. Maxwell denklemleriyle yaptığı ilk hesaplamaların sonucunda, elektrik ve manyetik alanlar dalgasının bu hızla ilerlemesi gerektiğini ortaya koydu. Maxwell, bunun aynı zamanda gizemli bir şekilde ışık hızına da eşit olduğu rastlantısına da işaret etmiş ve "Işığın, elektrik ve manyetik olguların nedeni olan ortamın birbirlerine dik olan salınımları olduğu çıkarımını göz ardı edemeyiz" demiştir.

Maxwell, fizikteki en önemli birleştirmelerden birini başarmıştır. Ondan önce ışık ve elektrik ile manyetizma vardı. Son ikili Faraday, Oersted ve Ampère'in deneyleriyle birleştirilmiştir. Sonra ansızın, ışık artık "başka türlü bir şey" değildi; sadece elektrik ve manyetizmanın yeni bir biçimiydi: Uzayda kendi başlarına ilerleyen küçük elektrik ve manyetik alanlar biçimi.

Bu özel çözümün, *herhangi* bir elektromanyetik dalga için doğru olan bazı özelliklerine dikkatinizi çekmek isterim: Manyetik alan, dalga yüzünün hareketinin yönüne diktir; elektrik alan da aynı şekilde dalga yüzünün yönüne diktir ve $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$ vektörleri birbirlerine diktir. Daha da ötesi, elektrik alan E'nin büyüklüğü manyetik alan B'nin büyüklüğü çarpı c'dir. Bu üç gerçek, diğer bir deyişle iki alanın da ilerleme yönüne dik olması, $\boldsymbol{B}$'nin $\boldsymbol{E}$'ye dik olması ve $\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}$ eşitliği, genelde herhangi bir elektromanyetik dalga için doğrudur. Bizim özellikle incelediğimiz durum, elektromanyetik dalgaların bu üç özelliğini de gösterdi size.

18-6 Maxwell denklemlerini çözmek; potansiyeller ve dalga denklemi

Şimdi matematiksel bir şeyler yapmak ve Maxwell denklemlerini daha basit biçimde yazmaya çalışalım. Başta onları karmaşıklaştırdığımızı düşünebilirsiniz; ancak biraz sabırlı olursanız, aniden basitleştiklerini göreceksiniz. Şu ana kadar her bir Maxwell denklemiyle iyice içli dışlı olduysanız da, bir araya getirilmesi gereken çok parça var. Biz de bunu başarmak istiyoruz.

Denklemlerin en basiti olan $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$'la başlayalım. Denklemin anlamının, $\boldsymbol{B}$'nin bir şeyin bükümü olduğunu biliyoruz:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{18.16}$$

yazdığımızda Maxwell denklemlerinden birini çözmüş oluruz. (Tesadüfen, ψ skaler bir alanken, $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$ eşitliğini sağlayan bir $\boldsymbol{A}'$ vektörü de işimize yarardı; çünkü $\nabla\psi$'nin bükümü sıfırdır ve $\boldsymbol{B}$ hâlâ aynıdır. Bundan daha önce bahsetmiştik.)

Herhangi bir akım veya yük içermediğinden dolayı, sıradaki Faraday yasamız $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$'dir. $\boldsymbol{B}$'yi $\nabla \times \boldsymbol{A}$ şeklinde yazar ve t'ye göre türevini alırsak, Faraday yasasını şu şekilde yazabiliriz:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

İlk olarak ister zamana, istersek konuma göre türev alabileceğimizden, bu denklemi şu şekilde de yazabiliriz:

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{18.17}$$

Gördüğünüz üzere $\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/\partial t$, bükümünün sıfır olduğu bir vektördür. Dolayısıyla bir şeyin gradyanıdır. Elektrostatik üzerinde çalışırken $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ eşitliği elimizdeydi ve $\boldsymbol{E}$'nin bir şeyin gradyanı olduğuna karar vermiştik. $-\phi$'nin gradyanı olması gerektiğini bulmuştuk (eksi işareti kolaylık içindir). Aynı şeyi $\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/\partial t$ için yaparsak; şunu yazarız:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \tag{18.18}$$

ϕ simgesini tekrar kullandık; çünkü elektrostatikte zamanla bir şey değişmediğinden ve $\partial \boldsymbol{A}/\partial t$ kaybolacağından; $\boldsymbol{E}$ bizim eski $-\nabla\phi$'miz olacak. Böylece Faraday denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{18.19}$$

Şimdiden iki Maxwell denklemini çözmüş olduk. Bulgularımıza göre $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ elektromanyetik alanlarını tanımlamak için dört potansiyel fonksiyona ihtiyacımız var: bir ϕ skaler potansiyeli ve üç fonksiyon olan $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyeli.

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$'nin ve $\boldsymbol{B}$'nin bir kısmını belirliyorsa, $\boldsymbol{A}$ yerine $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$ koyarsak ne olur? Özel bir tedbir almadıysak, $\boldsymbol{E}$ genelde değişir. Yine de, $\boldsymbol{A}$ ve ϕ'yi *beraber* aşağıdaki kurallar uyarınca değiştirirsek, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ alanları etkilenmeden –fiziği değiştirmeden– $\boldsymbol{A}$'nın değişmesini sağlayabiliriz:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{18.20}$$

Bu durumda Denk. (18.19)'dan elde edilen ne $\boldsymbol{B}$ ne de $\boldsymbol{E}$ değişmiş olur.

Daha önce $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ eşitliğini, statik denklemlerini daha basitleştirmek için seçmiştik. Bunu şimdi tekrarlamayacağız; farklı bir seçim yapacağız. Bu seçimi dile getirmeden önceyse biraz bekleteceğiz sizi çünkü sonra bu seçimin *neden* yapıldığı netleşecek.

Şimdi bize ρ ve $\boldsymbol{j}$ kaynakları ile potansiyeller arasındaki ilişkiyi verecek, kalan iki Maxwell denklemine bakalım. $\boldsymbol{A}$ ile ϕ'yi akımlar ve yüklerden yola çıkarak belirlediğimizde, Denk. (18.16) ve (18.19)'u kullanarak $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yi elde edebiliriz. Böylece Maxwell denklemlerinin yeni bir biçimini elde etmiş oluruz.

Denklem (18.19)'u $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ eşitliğine sokarak başlar ve

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

denklemini elde ederiz. Bunu, aynı zamanda aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{18.21}$$

Bu, ϕ ve $\boldsymbol{A}$'yı kaynaklarla ilişkilendiren bir denklemdir.

Son denklemimiz, en karmaşığıdır. Dördüncü Maxwell denklemini aşağıdaki şekilde yeniden yazarak başlar:

$$c^2\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$$

Sonra $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{E}$'yi, (18.16) ve (18.19)'u kullanarak potansiyeller cinsinden yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$c^2\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$$

$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ eşitliğini kullanarak, ilk terimi tekrar yazarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-c^2\nabla^2\boldsymbol{A} + c^2\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{18.22}$$

O kadar da basit değil!

Şansımıza, $\boldsymbol{A}$'nın diverjansını rastgele seçme özgürlüğümüzü şimdi kullanabiliriz. Seçimimizi $\boldsymbol{A}$ ve ϕ'nin denklemlerini aynı biçimde, ama ayrılmış halde çıkaracak şekilde kullanacağız. Bunu yapmak için aşağıdaki eşitliği kullanalım:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{18.23}$$

Bunu yaptığımızda, Denk. (18.22)'deki orta terimler $\boldsymbol{A}$ ile ϕ ortadan kalkar ve denklem çok daha basit hale gelir:

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{18.24}$$

ϕ için kullandığımız Denklem (18.21) de basit bir hal alır:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{18.25}$$

Ne güzel denklemler kümesi! Güzeller; çünkü güzelce ayrışmışlardır. Yük yoğunluğuyla ϕ; akımla A gider. Daha da ötesi, sol taraf biraz komik gözükse de $\partial^2/\partial t^2$'li bir Laplace işlemcisini açtığımızda şununla karşılaşırız:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{18.26}$$

x, y, z ve t'te hoş bir simetrisi vardır. $-1/c^2$ terimi gereklidir; zira uzay ve zaman *farklıdırlar*; farklı birimleri vardır.

Maxwell denklemlerinden ϕ ve A potansiyellerine dair, ϕ, A_x, A_y ve A_z fonksiyonları için aynı matematiksel biçimde yeni bir tür denklem elde ettik. Bu denklemleri nasıl çözeceğimizi öğrendiğimiz zaman, $\nabla \times A$ ve $-\nabla\phi - \partial A/\partial t$'den $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{E}$'yi elde edebiliriz. Maxwell denklemlerine bire bir eşit bir başka biçimde elektromanyetik yasalar var elimizde ve çoğu durumda bunları kullanması daha kolaydır.

Aslında daha önce Denk. (18.26)'ya benzer bir denklemi çözmüştük. I. Cilt, 47. Bölümde ses üzerinde çalışırken, şu biçimde bir denklem elde etmiştik:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

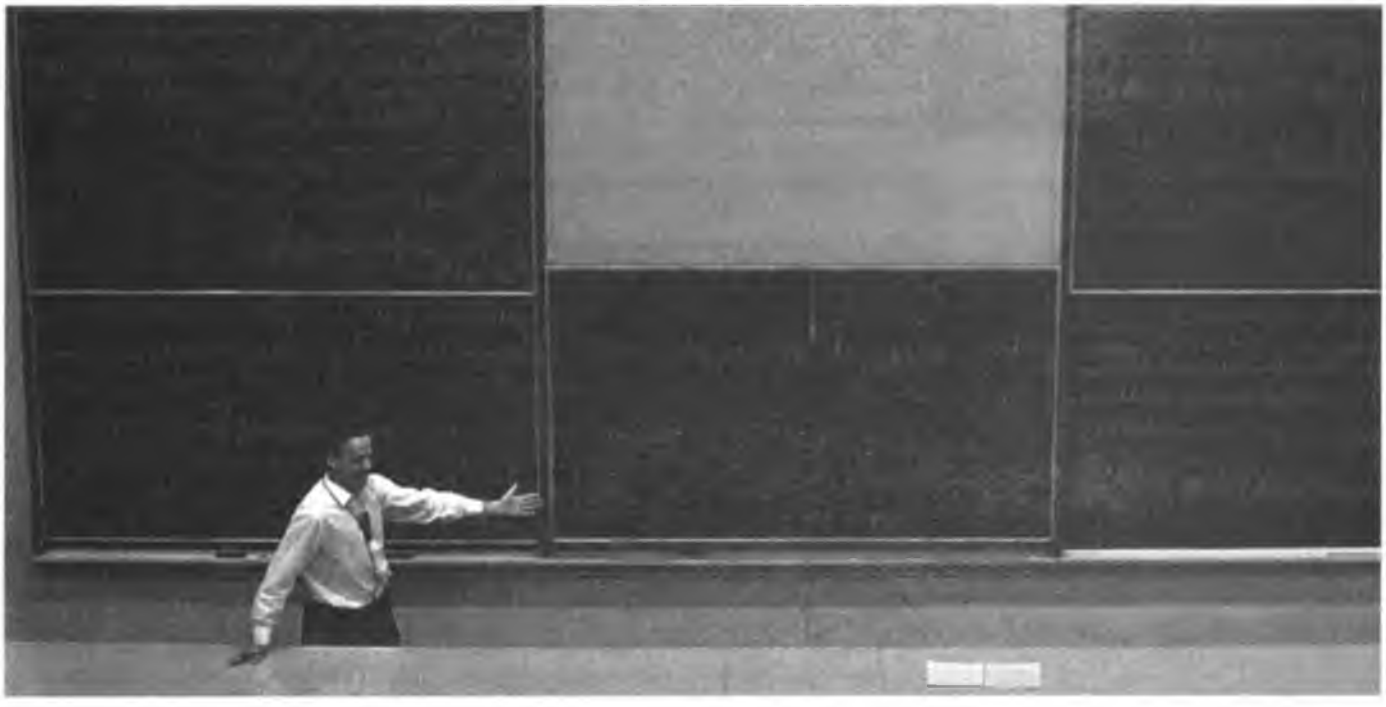
ve bunun dalgaların x yönünde c hızıyla ilerlemesini tanımladığını görmüştük. Dolayısıyla artık akım ve yük olmayan bölgelerde, bu denklemlerin çözümü $\boldsymbol{A}$ ve ϕ'nin sıfır olması *değildir* (gerçi o da olası bir çözümdür). Bazı çözümlerde $\boldsymbol{A}$ ve ϕ'nin zamanla değiştiği bir cevap kümesi vardır; fakat daima c hızında ilerlerler. Alanlar, bölümün başında verdiğimiz örnekteki gibi boş uzayda serbestçe ilerlerler.

Maxwell'in dördüncü denkleme eklediği yeni terim sayesinde, alan denklemlerini $\boldsymbol{A}$ ve ϕ cinsinden basitçe ve elektromanyetik dalgaların varlığını da görünür kılan bir şekilde yazabildik. Pratik nedenlerden dolayı, hâlâ orijinal denklemleri $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ cinsinden kullanmak kullanışlıdır. Ama onlar tırmandığımız dağın öte yüzünde kaldılar. Şimdi her şey daha farklı gözükecek; yeni ve olağanüstü manzaralara hazırız.

---

* $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$'yı seçmeye "ayarı seçmek" denir. $\nabla\psi$ ekleyerek $\boldsymbol{A}$'yı değiştirmeye "ayar dönüşümü" denir. Denklem (18.23) de "Lorentz ayarı" olarak bilinir.

19
EN AZ EYLEM İLKESİ



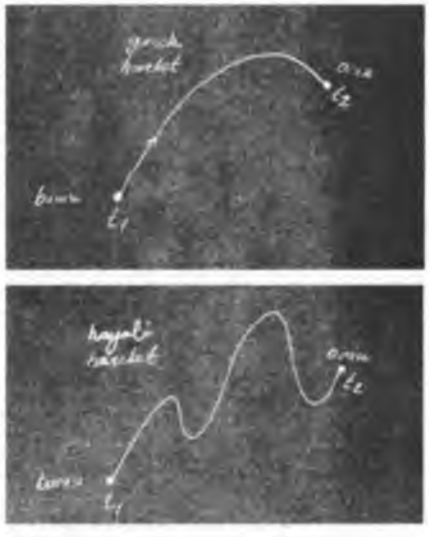
19-1 Özel bir ders; neredeyse tamamen sözlü*

"Ben lisedeyken, fizik öğretmenim –adı Bay Bader'di– bir gün fizik dersinden sonra beni yanına çağırdı ve şöyle dedi: "Sıkılmış görünüyorsun; sana ilginç bir şey anlatmak istiyorum." Daha sonra bana anlattığı şeyi kesinlikle büyüleyici bulmuştum ve o zamandan beri de hâlâ büyüleyici buluyorum. Ne zaman bu konuyla karşılaşsam, üzerinde çalışırım. Hatta, bu dersi hazırlamaya başladığımda kendimi onun üzerinde daha fazla analiz yaparken buldum. Dersi hazırlamak yerine, yeni bir problemle uğraşmaya başladım. Bu konu, en az eylem ilkesidir.

"Bay Bader bana şunu anlattı: Elinde, bir yerden harekete başlayıp serbest hareketle bir başka yere giden bir parçacık (örneğin, bir kütleçekim alanında) olsun. Parçacığı fırlattın, havaya gitti ve aşağı inmeye başladı. İlk noktadan son noktaya belli bir zamanda gider. Şimdi, farklı bir şekilde hareket ettir. Buradan oraya parçacığın şekildeki gibi hareket ettiğini düşün; ama hareket süresi aynı kalsın. Parçacığın yol üzerindeki her anında kinetik enerjisini hesaplar, potansiyel enerjiyi çıkarır ve tüm yol boyu zamana göre integralini alırsan göreceksin ki, elde edeceğin sayı gerçek hareket için olandan daha *büyüktür*.

"Diğer bir deyişle, Newton yasaları $F = ma$ biçiminde değil de, şöyle ifade edilebilir: Bir noktadan diğerine hareket eden bir parçacığın yolu için, ortalama kinetik enerjiden ortalama potansiyel enerji çıkarıldığında bulunan değer olabildiğince küçüktür.

19-1 Özel bir ders; neredeyse tamamen sözlü
19-2 Dersten sonra eklenmiş bir not



* Sonraki bölümler bu özel derste işlenenlere dayanmayacak. Bu bölüm tamamen "eğlencelik"tir.



"Bunun ne anlama geldiğini daha iyi bir şekilde ifade etmeye çalışayım. Kütleçekim alanında olduğunu düşünelim parçacığın. Bu durumda parçacığın yolu $x(t)$ olur (şimdilik sadece bir boyutu ele alalım: yolumuz sadece yukarı ve aşağıdır; yanlara doğru değil). x yerden yüksekliktir. Bu durumda kinetik enerji $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ ve potansiyel enerji de mgx olarak ifade edilir. Şimdi yol boyunca her an için kinetik enerjiden potansiyel enerjiyi çıkarıp, ilk andan son ana kadar zamana göre integralini alacağı. t_1 zamanında belli bir yükseklikte başladığımızı ve son an olan t_2'de bir başka yerde olduğumuzu varsayalım.

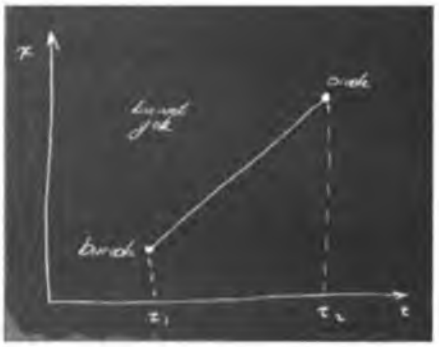
"Bu durumda integral aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mgx\right]dt$$

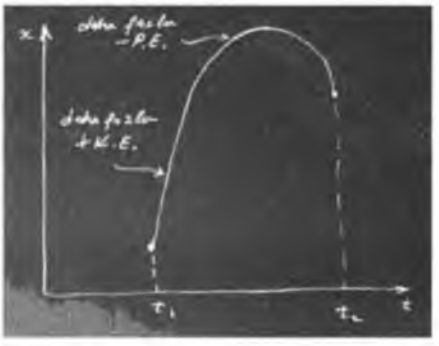


Gerçek hareket bir tür eğridir –zamana karşı grafiğini çizersek bir paraboldür– ve integrali alındığında belli bir değer verir. Ya da, Şekil 19-4'teki gibi önce çok yükseğe çıkan ve sonra aşağı yukarı tuhaf şekilde yol alan bir başka hareket de *hayal edebiliriz*. Böyle bir yol için ya da istediğimiz herhangi bir başka yol için, kinetik enerjiden potansiyel enerjiyi çıkarabilir ve integralini alabiliriz. İşin mucizevi tarafı, gerçek yolun integrali en küçük olan yol olmasıdır.

"Gel, bunu deneyelim. Öncelikle, hiç potansiyel enerjisi olmayan serbest bir parçacığı ele alalım. Kurala göre, belli bir zamanda bir yerden bir yere giderken kinetik enerji integrali en azdır; sabit bir hızda gitmelidir. (Bunun –sabit hızda gitmenin– doğru cevap olduğunu biliyoruz.) Neden peki? Çünkü eğer parçacık farklı bir şekilde hareket etseydi, hızlar bazen ortalamadan yüksek, bazen de ortalamadan düşük olurdu. Ortalama hız her durum için aynıdır; çünkü "buradan" "oraya" belli bir zamanda gitmelidir.



"Örnek olarak evden yola çıkıp, belirli bir zamanda okula varmaya çalıştığını düşünelim. Bunu çeşitli yollarla yapabilirsin. Başta deli gibi ivmelenebilir ve sona doğru frenleyerek yavaşlayabilirsin veya sabit bir hızda gidebilirsin; ya da bir süre geri geri gider, sonra ileri gidersin vs. Ortalama hız, her koşulda, gittiğin toplam mesafe bölü zaman olmalıdır. Sabit hızla gitmezsen; bazen çok hızlı ve bazen de çok yavaş gidersin. Ortalama etrafında değişkenlik gösteren bir şeyin *karesinin* ortalaması daima ortalamanın karesinden büyüktür. Diğer bir deyişle, sabit hızda gitmektense hızınızı sürekli değiştirirseniz, kinetik enerji integrali daima daha büyük olur. Hızınız sabit olduğunda (hiç kuvvet olmadığında) integral minimumda olur. Doğru yol şekilde gösterilmiştir.



"Şimdi, kütleçekim alanında yukarı fırlatılan bir nesne önce hızlı yükselir ve sonra yavaşlar. Bunun nedeni potansiyel enerjinin varlığıdır ve ortalamada kinetik ve potansiyel enerji arasında en küçük *farka* sahip olmalıyız. Uzayda yukarı doğru çıktıkça potansiyel enerji arttığından, yüksek potansiyel enerjinin olduğu yere olabildiğince çabuk çıkabilirsek o zaman küçük bir *fark* elde ederiz. Daha sonra kinetik enerjiden potansiyeli çıkarabilir ve daha düşük bir ortalama elde edebiliriz. Diğer bir deyişle, yukarı doğru çıkan ve potansiyel enerjiden bolca eksi alan bir yolu takip etmek daha iyidir.

"Diğer yandan, çok hızlı veya çok uzağa gidemezsin; çünkü çok fazla kinetik enerjin olur. Verilen belirli sürede çok fazla yukarı çıkıp ve sonra aşağı inebilmek için çok hızlı yükselmelisin. Dolayısıyla, çok fazla da yukarı çıkmak istemezsin; ama mümkün olabildiğince de yukarı çıkmak istersin. Çözüm, mümkün olan en az miktar ilave kinetik enerjiyle mümkün olan en yüksek potansiyel enerji değerini elde etmektir, kinetik eksi potansiyel farkını olabildiğince küçültmek.

"Öğretmenimin bana bütün anlattığı bu kadardı. Çok iyi bir öğretmendi ve ne zaman konuşmayı kesmesi gerektiğini de biliyordu. Ancak ben ne zaman konuşmayı kesmem gerektiğini bilmiyorum. Aslında bunu burada ilginç bir not olarak bırakmaktansa, size yaşamın karmaşıklıklarını kanıtlayarak sizleri korkutacak ve bezdireceğim. Şimdi ele alacağımız matematik problemi yeni bir türdür ve çok zordur. Adına *eylem* (*S*) diyeceğimiz yeni bir niceliğimiz var. Eylem, kinetik enerji eksi potansiyel enerjinin zaman üzerinden integralidir.

$$\text{Eylem} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{KE} - \text{PE})dt$$

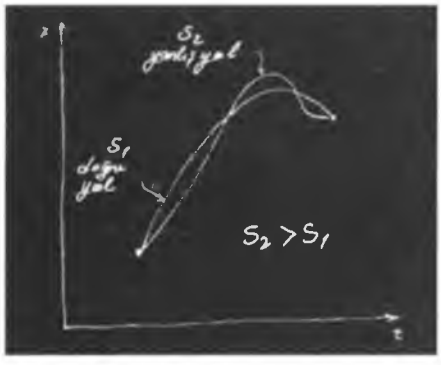
Hatırlarsanız hem PE, hem de KE zamana bağlı fonksiyonlardır. Bu eylem için olası her yolda farklı bir değer elde edersiniz. Matematiksel problemimiz, hangi eğri için o değerin en az olduğunu bulmaktır.

"Şunu diyebilirsiniz: Ah, bu sadece tepe değerleri bulmaya dair bir analiz problemi. Eylemi hesaplar ve minimumu bulmak için türevini alırsınız."

"Ama dikkat edin. Normalde sadece bir değişkenin fonksiyonu vardır elimizde ve fonksiyonun en az veya en çok olduğu yer için *değişkenin* değerini bulmamız gerekir. Örneğin, bir çubuğu ortasından ısıtalım ve ısı çember içinde yayılsın. Çubuğun her noktası için bir sıcaklık değeri vardır ve sıcaklığın en yüksek olduğu noktayı bulmalıyız. Ama şimdi elimizde *uzaydaki her yol için* bir değer var –bu çok farklı bir şey– ve bu değerin en düşük olduğu *uzaydaki yolu* bulmak istiyoruz. Bu, matematiğin tamamen farklı bir dalıdır. Bildiğimiz cebir değildir. Buna, değişkenler analizi denir.

"Bu tür matematikte birçok problem vardır. Örneğin, çemberin genel tanımı sabit bir noktaya belirli biz uzaklıktaki noktalar kümesidir. Çemberi tanımlanmanın bir başka yoluysa şudur: Bir çember, *belirli bir çevre uzunluğunda* en büyük alanı kaplayan eğridir. Belirli bir çevre değeri için çember dışındaki eğriler daha küçük bir alan kaplar. Dolayısıyla, belirli bir çevre değeri için en büyük alanı kaplayan eğriyi bulun dediğimizde, elimizdeki problem değişkenler analizidir. Alışık olduğumuzdan farklı bir tür analiz.

"Nesnenin yolunun hesaplamasını yapalım. Bunun için bir adet doğru yol ve çizeceğimiz herhangi bir başka eğrinin yanlış yol olduğunu hayal ederiz. Yanlış yol için eylemi hesapladığımızda bulacağımız değer, doğru yol için hesapladığımız değerden büyük olmalıdır.



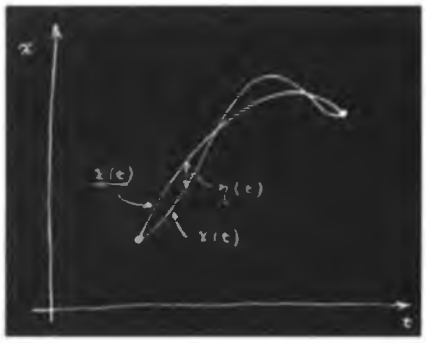
"Problem: Doğru yolu bulmak. Nerededir peki? Bunu bulmanın bir yolu milyonlarca ve milyonlarca olası yolun eylemini hesaplamak ve en düşük değerlisini bulmak. En düşüğünü bulduğunuzda, o doğru yoldur."

"Bu da bir ihtimal elbette. Ama bence biz bundan daha iyi şekilde çözebiliriz. Minimum değerine sahi bir nicelik varsa elimizde –örneğin, sıcaklık gibi sıradan bir fonksiyonda– o minimumun özelliklerinden biri de eğer minimumdan *birinci* derecede uzaklaşırsak, fonksiyonun minimum değerden sapması sadece *ikinci* derecedendir. Eğrideki herhangi bir yerde kısa bir mesafe katedersek, fonksiyonun değeri de birinci dereceden değişir. Ancak minimumda küçük bir hareket, birinci yaklaşım, herhangi bir fark yaratmaz.



"Doğru yolu hesaplamak için bunu kullanacağız işte. Elimizde doğru bir yol varsa, ondan birazcık daha farklı bir eğri, ilk yaklaşımda, eyleme dair bir fark yaratmayacaktır. Gerçekten bir minimum varsa, fark ikinci yaklaşımda görülecektir.

"Bunu kanıtlamak kolaydır. Eğrinin belli bir şekilde saptırdığımda birinci dereceden bir değişiklik olursa, eylemde de sapmayla *orantılı* bir değişim gözlemlenir. Değişimin eylemi daha büyük yaptığı varsayılabilir; başka türlü minimumuz olmaz. Ama eğer değişim sapmayla *orantılı* ise, sapmanın işaretini değiştirmek eylemi azaltır. Eylemi bir yolla artırabilir, diğer bir yolla azaltabiliriz. Minimum olmasının tek yolu, *ilk* yaklaşımın herhangi bir değişiklik meydana getirmemesi, değişikliklerin doğru yoldan sapmaların karesiyle orantılı olmasıdır.



"Şu şekilde çözebiliriz: $\underline{x}(t)$'ye doğru yol diyelim; bulmaya çalıştığımız yol. Doğru yoldan $\eta(t)$ diyeceğimiz (t'nin etası) küçük bir farkla ayrılan bir başka deneme yoluna da $x(t)$ diyelim.

$x(t)$ yolu için hesapladığımız eyleme S, $\underline{x}(t)$ için hesapladığımız yola da $\underline{S}$ dersek, $\underline{S}$ ile S arasındaki fark, küçük η'in birinci dereceden yaklaşımı için sıfır olmalıdır. İkinci derecede fark olabilir; ancak ilk derecede fark sıfır olmalıdır.

"Ve bu herhangi bir η için doğru olmalıdır. Aslında pek değil. Yollar eğer aynı noktada başlayıp, aynı noktada bitmiyorsa o zaman bu yöntemin bir anlamı yoktur. Her yol t_1 zamanında belli bir noktada başlar ve t_2 zamanında belli bir noktada sonlanır ve bu noktalar ile zamanlar sabittir. Diğer bir deyişle, η'deki değişimler her iki uçta da sıfır olmalıdır. $\eta(t_1) = 0$ ve $\eta(t_2) = 0$. Bu koşulu da ortaya koyarak, matematiksel problemimizi tanımlamış olduk.

"Hiç analiz bilmiyorsanız bile, sıradan bir $f(x)$ fonksiyonunun minimumunu bulmak için de aynı türden bir şey yapabilirsiniz. $f(x)$ fonksiyonunda, x'e küçük bir h ekler ve birinci derecede, h'de yapılan düzeltmenin minimumdayken sıfır olmasını öne sürersiniz. x yerine $x + h$ koyar ve h'da birinci dereceden genişletirsiniz fonksiyonu... Aynı bizim η'le yapacağımız gibi.

"$V(x)$ potansiyel enerjiyken, eylem denkleminde $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ değişimini yaptığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$S = \int \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x)\right] dt$$

dx/dt türevi, elbette, $\underline{x}(t)$'nin türevi artı $\eta(t)$'nin türevidir. Dolayısıyla, eylemi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right)^2 - V(\underline{x} + \eta)\right] dt$$

"Şimdi bunu daha detaylı yazmalı. Karesi alınmış terim için şunu elde ederim:

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$

"Ama bir dakika. Birinci dereceden ötesiyle ilgilenmediğime göre, η^2 ve daha yüksek mertebeleri içeren bütün terimleri alıp, üstüne "İki ve daha yüksek dereceler" yazdığımız bir kutuya koyabilirim. Bu terimden sadece ikinci dereceyi elde ederim, fakat başka bir şeyden daha fazlası gelecek. Böylece, kinetik enerji kısmını şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2 + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} + (\text{iki ve daha yüksek dereceler})$$

Şimdi, $\underline{x} + \eta$'de V potansiyeline ihtiyacımız var. η'in küçük olduğunu varsayarsam, $V(x)$'i Taylor serisi şeklinde yazabilirim. Yaklaşık $V(\underline{x})$'tir. Sıradaki yaklaşımda (türevlerin doğasından dolayı) düzeltme η çarpı V'nin x'e göre değişim hızıdır:

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2}V''(\underline{x}) + \cdots$$

Yazmadan tasarruf etmek için V''nü V'nin x'e göre türevi olarak yazdım. η^2 terimi ve ötesindekiler "iki ve daha yüksek dereceler" kutusuna girdikleri için onlarla ilgilenmemiz gerekmez. Hepsini bir araya getirerek şunu yazabiliriz:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2 - V(\underline{x}) + m\frac{d\underline{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right.$$

$$\left. - \eta V'(\underline{x}) + (\text{iki ve daha yüksek dereceler})\right] dt$$

Buna dikkatli bakarsanız, ilk iki terimin, $\underline{x}$ doğru yoluyla hesaplamış olacağım $\underline{S}$ eylemine denk geldiğini görebilirsiniz. Dikkatimi vermek istediğim şey S'deki değişimdir: doğru yol için $\underline{S}$ ile S arasındaki fark. Bu farka δS diyelim, diğer bir deyişle S'deki değişim. "İki ve daha yüksek dereceler"i dışarda bırakırsak, δS şu şekilde bulunur:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt$$

"Şimdiki problem şudur: Burada belli bir integral var. $\underline{x}$'in ne olduğunu henüz bilmiyorum; ancak η *ne olursa olsun*, integralinin sıfır olması gerektiğini biliyorum. Bunun olmasının tek yolunun η ile çarpılan şeyin sıfır olması gerektiğini düşünebilirsiniz. Ya peki $d\eta/dt$'li ilk terime ne demeli? Eğer η herhangi bir şey olabiliyorsa, türevi de herhangi bir şey olabilir ve böylece $d\eta/dt$'nin de sıfır olması gerektiğini düşünebilirsiniz. Bu çok da doğru değildir. Doğru değildir; çünkü η ve türevi arasında bir ilişki vardır. Birbirlerinden tamamen bağımsız değildirler; çünkü $\eta(t)$ hem t_1 ve hem t_2'de sıfır olmalıdır.

"Değişkenler analizinde bütün problemleri çözmenin yolu her zaman aynı genel ilkeyi kullanmaktan geçer. Değiştirmek istediğiniz şeyde bir kaydırma yaparsınız (aynı bizim η eklememiz gibi); birinci dereceden terimlere bakarsınız; *daha* sonra elinizdekileri öyle bir biçimde düzenlersiniz ki, başka hiçbir türev olmadan ($d\eta/dt$ olmaz) hep "bir takım şeyler çarpı kaydırma değeri (η)" cinsinden integral elde edersiniz. Bunun değerini birazdan anlayacaksınız. (Bazı durumlar için bunun nasıl yapılacağını size hesaplama yapmadan söyleyebilen denklemler vardır; ancak ilgileneceğimiz kadar genel denklemler değildir. En iyisi bu şekilde hesaplamak.)

"$d\eta/dt$ terimini η içerecek şekilde nasıl düzenleyebilirim? Bunu, kısmi integral alarak yapabilirim. Değişkenler analizinin tüm olayı, S'in değişimini yazmak ve daha sonra η'in türevlerinin kaybolacağı şekilde parçalarının integralini almaktır. Türevlerin yok olduğu her problemde hep bu şekilde yaklaşılır.

"Kısmi integral almaya dair genel ilkeyi hatırlarsınız. Elinizde t'ye göre integrali alınan, $d\eta/dt$ değeriyle çarpılmış bir f fonksiyonu varsa; ηf'in türevini şu şekilde yazarsınız:

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}$$

İntegralini almak istediğimiz terim son terimdir:

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt$$

"δS için denklemimizde, f fonksiyonu m çarpı $d\underline{x}/dt$'dir; böylece δS için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\delta S = m \frac{d\underline{x}}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m \frac{d\underline{x}}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \eta(t) dt$$

İlk terim t_1 ve t_2 limitlerinde değerlendirilmelidir. Daha sonra kısmi integralin geri kalanının integralini almalıyım. Son terim değişmez.

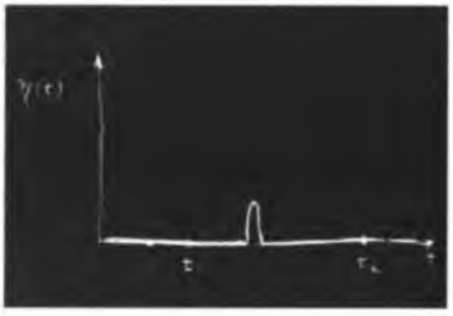
"Şimdi, her zaman olan bir şeyi göreceksiniz: İntegrali alınan kısım ortadan kaybolur. (Aslında, integrali alınan kısım ortadan kaybolmazsa; ilkeyi yeniden düzenleyerek, ilave koşullarla ortadan kaybolmasını sağlarsınız) η'in, yolun her iki ucunda sıfır olması gerektiğini söylemiştik; çünkü bu ilkeye göre değişen eğri seçilmiş noktalarda başlıyor ve bitiyorsa, eylem bir minimumdur. Koşullarımız $\eta(t_1) = 0$ ve $\eta(t_2) = 0$'dır. Dolayısıyla, integrali alınan terim sıfırdır. Diğer terimleri de toplar ve şunu elde ederiz:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt$$

S'deki değişim artık istediğimiz gibidir. Köşeli parantezlerin içindeki şey, diyelim F, $\eta(t)$ değeriyle çarpılmış ve t_1'den t_2'ye integrali alınmıştır.

O bir şeyin integraline artık sahibiz ya da diğer zamanlar $\eta(t)$ daima sıfırdır:

$$\int F(t)\eta(t)dt = 0$$



Elimde t'ye bağlı bir fonksiyon var; $\eta(t)$'yle çarpıp, bir uçtan diğerine integralini alıyorum. η'in değeri ne olursa olsun, sıfır elde ederim. Bu da $F(t)$ fonksiyonunun sıfır olduğu anlamına gelir. Bu barizdir; ancak yine de size bir tür kanıt sunacağım.

"Öyle bir $\eta(t)$ seçelim ki, tek bir özel t değeri haricinde hep sıfır olsun. Bu özel t değerine yaklaşana kadar sıfır olarak kalır,

sonra anlık olarak yukarı sıçrayarak bir sinyal verir ve hemen tekrar aşağı iner. Bu η ve herhangi bir F fonksiyonunun çarpımının integralini aldığımızda, sıfırdan başka herhangi bir değerle karşılaşacağımız yer $\eta(t)$'nin yukarı sıçradığı yerdir ve böylece oradaki F ve sıçrama (sinyal) üzerinden alınan integralin çarpımı kadar bir değer elde edersiniz. Sadece sıçrama üzerinden alınan integral sıfır değildir; ancak F'le çarpıldığında öyle olmalıdır. Dolayısıyla, sıçramanın olduğu yerde F fonksiyonu sıfır olmalıdır. Sıçramayı istediğim yere koyduğuma göre, F de her yerde sıfır olmalıdır.

"Herhangi bir η değeri integralimiz sıfırsa, η katsayısı da sıfır olmalıdır. Aşağıdaki karmaşık diferansiyel denklemi sağlayan yol için, eylemin integrali minimum olacaktır.

$$\left[-m\frac{d^2x}{dt^2} - V'(x)\right] = 0$$

Aslında o kadar da karmaşık değildir; daha önce gördünüz bunu. Bildiğiniz $F = ma$. İlk terim kütle çarpı ivmelenmedir ve ikincisi de potansiyel enerjinin türevidir ki o da bildiğiniz kuvvettir.

"Diğer bir deyişle, en azından korunumlu bir sistem için en az eylem ilkesi doğru cevabı vermekte. Newton yasasına uyan yol, minimum eyleme sahiptir.

"Bir not: *minimum* olduğunu ispatlamadım; belki de bir maksimumdur. Aslında, minimum olması da gerçekten gerekmez. Optikte tartıştığımız "en az zaman ilkesi" için bulduğumuz şeye gayet benzerdir bu. Orada da başta "en az zaman" demiştik. Sonradan ortaya çıkmıştı ki, *en az* zaman olmadığı durumlar da vardır. Temel ilke, optik yoldan herhangi *birinci derecede değişim* için, zamanda değişimin sıfır olmasıdır. Aynı hikâye. "En az" derken kastettiğimiz şey, S'in değerindeki birinci derece değişikliğin, yolu değiştirdiğinizde, sıfır olmasıdır. "Minimum" olma gerekliliği yoktur.

"Şimdi, bazı genellemeler üzerine konuşalım. İlk başta, bu şeyi üç boyutlu yapabilirim. x yerine, t cinsinden x, y ve z fonksiyonlarım olurdu bu durumda ve eylem de daha karmaşıklaşırdı. Üç boyutlu hareket için, kinetik enerjinin tamamını kullanmalısınız ($m/2$) çarpı tüm hızın karesi:

$$\mathrm{KE} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

Ayrıca, potansiyel enerji x, y ve z'nin fonksiyonudur. Peki, yol için ne demeli? Yol uzaydaki bir eğridir; kolay çizilemez belki ama fikir aynıdır. Ya peki η için ne demeli? η'in üç bileşeni olabilir. Yolları x, y veya z'de kaydırabilirdiniz ya da her üç yönde de aynı anda kaydırabilirsiniz. Dolayısıyla η bir vektördür. Bu işleri çok da karmaşıklaştırmaz gerçi. Sadece *birinci derece* değişim sıfır olacağından, hesaplamayı arka arkaya üç kaydırmada yapabiliriz. η'i sadece x yönünde kaydırabilir ve katsayının sıfır olması gerektiğini söyleriz. Elde var bir denklem. Daha sonra y yönünde kaydırır ve bir denklem daha elde ederiz. Daha sonra z yönünde kaydırır ve bir denklem daha elde ederiz. Sırayı siz istediğiniz

gibi belirleyebilirsiniz. Her neyse, sonuçta elimizde üç denklem var. Elbette Newton yasası da aslında üç boyutta üç denklemdir; her bir bileşen için bir adet. Bence bunun işe yarayacağını şimdiden görmeye başladınız, ama bunun üç boyut için de işe yarayacağını gösterme zevkini size bırakıyorum. Yeri gelmişken, kutupsal veya bir başkası fark etmez, istediğiniz koordinat sistemini kullanabilir ve Newton yasalarının o sisteme uygun olup olmadığını, η kaymasının yarıçap, açı vs cinsinden olduğunda neler olduğunu görerek karar verebilirsiniz.

"Yöntem, benzer şekilde, herhangi bir sayıda parçacık için genellenebilir. Diyelim ki elinizde, aralarında kuvvet bulunan, iki parçacık olsun. Aralarındaki kuvvetten dolayı karşılıklı bir potansiyel enerji vardır. Bu durumda her iki parçacığın kinetik enerjisini toplar ve karşılıklı etkileşimin potansiyel enerjisini alırsınız. Peki neyi değiştirirsiniz? *Her iki* parçacığın da yollarını. Dolayısıyla, üç yönde ilerleyen iki parçacık için toplam altı denklem vardır. Birinci parçacığın konumunu x yönünde, y yönünde ve z yönünde değiştirebilirsiniz; aynılarını ikinci parçacık için de yapabilirsiniz. Dolayısıyla, toplamda altı denkleminiz olur. Bu da olması gerekendir. Üzerine etkiyen kuvvetler cinsinden birinci parçacığın ivmelenmesini belirleyen üç denklem vardır, yine iki için de aynı şekilde. Bu şekilde hareket ederek, herhangi bir sayıda parçacık için Newton yasalarını üç boyut için de yazabilirsiniz.

"Newton yasası deyip duruyorum, aslında tam olarak doğru değildir bu; çünkü Newton yasası sürtünme gibi korunmayan kuvvetleri içerir. Newton ma çarpımının herhangi bir F kuvvetine eşit olduğunu söylemiştir. En az eylem ilkesiyse sadece, tüm kuvvetlerin bir potansiyel fonksiyonundan elde edilebildiği *korunan* sistemlerde çalışır. Halbuki mikroskobik seviyede –fiziğin en derin seviyesinde– korunumlu olmayan kuvvetler olmadığını biliyorsunuz. Sürtünme gibi korunumlu olmayan kuvvetler, mikroskobik seviyedeki karmaşıklıkları ihmal ettiğimiz için ortaya çıkar; analiz edilecek çok parçacık vardır. Ancak, *temel* yasalar en az eylem ilkesi biçimine sokulabilir.

"Daha da genelleştireyim. Parçacığın göreli hareket ettiği durumda ne olduğunu soralım kendimize. $F = ma$ göreli olmayan durumlarda doğrudur sadece; göreli hareket için doğru denklemi çıkarmadık. Soru şu: Göreli duruma karşılık gelen bir en az eylem ilkesi var mıdır? Vardır. Görelilik durumundaki denklem şudur:

$$S = -m_0c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\phi(x, y, z, t) - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(x, y, z, t)]dt$$

Eylem integralinin ilk parçası, durağan kütle m_0 çarpı c^2 çarpı hızın bir fonksiyonunun integrali $\sqrt{1 - v^2/c^2}$'dir. Elimizde sadece potansiyel enerji yerine, skaler potansiyel ϕ ve $\boldsymbol{v}$ çarpı vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$ üzerinden alınmış bir integral vardır. Elbette, o halde sadece elektromanyetik kuvvetleri hesaba katmaktayız. Bütün elektrik ve manyetik alanlar ϕ ve $\boldsymbol{A}$ cinsinden verilmiştir. Bu eylem fonksiyonu, bir elektromanyetik alandaki tek bir parçacığa dair göreli hareketin eksiksiz bir kuramını verir.

"Elbette, nereye $\boldsymbol{v}$ yazarsam, v_x yerine dx/dt ve diğer bileşenler için de benzeri ifadeler yazmanı gerektiğini anlamaktasınız; ayrıca, basitçe x, y, z yazdığım yerler için de yol boyundaki noktalar için t zamanında $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ koymanız gerektiğinizi de. $\boldsymbol{v}$'ler için bu değişimleri yaptıktan sonra göreli bir parçacık için eylem denklemini elde edebilirsiniz. Bu eylem denkleminin, görelilik için doğru hareket denklemleri verdiğini göstermeyi sizin maharetinize bırakıyorum. Naçizane bir öneri, önce $\boldsymbol{A}$'sız halde, yani hiç manyetik alan olmadığı halde yapın. Daha sonra hareket denkleminin bileşenlerini, $dp/dt = -q\nabla\phi$ elde edersiniz. Denklemdekinin de $p = m_0v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ olduğunu hatırlayın.

"İşin içine vektör potansiyelini soktuğumuzda daha da zor hale gelir. Değişimler daha da karmaşıklaşır. Fakat sonunda, kuvvet terimi $q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$'ye eşit olduğu ortaya çıkar. Olması gerektiği gibi. Bununla uğraşmayı da size bırakıyorum.

"Genel durum için, örneğin görelilik denklemi, integrali alınan eylem denkleminin artık kinetik enerji eksi potansiyel enerji biçiminde olmadığını vurgula-

mak isterim. Bu, sadece göreli olmayan yaklaşım için doğrudur. Örneğin, $m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ terimi bizim kinetik enerji dediğimiz şey değildir. Herhangi bir özel durum için ne eylemi olması gerektiği sorusu, deneme yanılma yöntemiyle belirlenir. Hareket yasalarını ilk başta belirlerken karşılaştığımız problemle aynıdır. Bildiğiniz denklemlerle biraz oynamalı ve onları en az eylem ilkesi biçimine sokup sokamayacağınızı görmelisiniz.

"Terminoloji üzerine bir başka hususu daha belirtmeli. S eylemini elde etmek için zaman üzerinden integrali alınan fonksiyona *Lagrange*, $\mathcal{L}$, denklemi denir ve parçacıkların sadece konumları ile hızlarının bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, en az eylem ilkesi şu şekilde de yazılabilir:

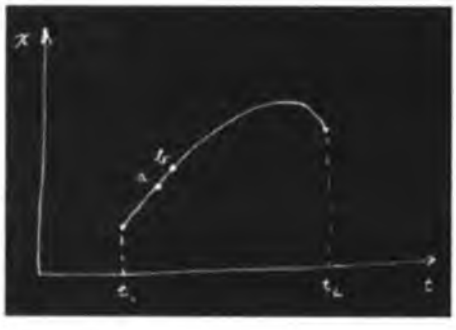
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, v_i)dt$$

Denklemdeki x_i ve v_i, konumlar ve hızların tüm bileşenleridir. Birinin "Lagrange" hakkında konuştuğunu duyarsanız; S'i bulmak için kullanılan fonksiyon hakkında konuştuklarını anlarsınız. Bir elektromanyetik alandaki göreli hareket için Lagrange denklemi:

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

"Ayrıca belirtmeliyim ki, titiz ve hassas insanlar S'ye "eylem" demezler. O, "Hamilton'ın ilk ilkesel fonksiyonudur". Ben ona "eylem" diyorum. Ayrıca, artık daha fazla insan eylem kelimesini kullanıyor. Görüyorsunuz ya, o kadar da faydalı olmayan bir başka şey tarihsel olarak eylem diye isimlendirilmişti; ancak bana göre tanımını değiştirmek daha akla uygun. Böylece şimdi siz de yeni fonksiyona eylem diyeceksiniz ve bir bakmışsınız çok yakında herkes bu basit ismi kullanmaya başlamış.

"Şimdi de bu konu üzerinde, en az zaman ilkesi üzerinde konuştuklarıma benzer şeyler söylemek istiyorum. Bir yerden diğerine alınan belirli bir integralin minimum olduğunu belirten yasayla –ki bu bize bütün yol hakkında bir fikir verir– yol boyunca hareket ettiğiniz sürece ivmelendiren bir kuvvet olduğuna dair bir yasa arasında çok fark vardır. İkincisi size yol boyunca nasıl ilerlediğinizi ifade eder ve diğeri de bütün yol için önemli bir ifadedir. Işık söz konusu olduğunda, bu ikisinin bağlantısı üzerinde durmuştuk. Şimdi, bu türden bir en az eylem ilkesi olduğunda diferansiyel yasaların olmasının neden doğru olduğunu açıklayacağım. Nedeni şudur: Uzay ve zamanda asıl yolu düşünün. Daha önceki gibi sadece bir boyutu ele alalım, böylece x'in grafiğini t'nin fonksiyonu olarak çizebiliriz. Doğru yol boyunca, S bir minimumdur. Diyelim ki elimizde bir doğru yol olsun ve uzay zamanda bir a noktasından ve yakındaki bir b noktasından geçiyor.



t_1'den t_2'ye bütün integral bir minimumsa, a'dan b'ye olan küçük yol boyunca integral de minimumdur. a'dan b'ye olan kısmında biraz daha fazla olması mümkün değildir. Aksi halde, yolun o kısmıyla biraz oynar ve bütün integrali biraz azaltabilirdiniz.

"Diğer bir deyişle, yolun her parçası da minimum olmalıdır ve bu, parçanın uzunluğundan bağımsız şekilde daima doğrudur. Dolayısıyla bütün yolun minimum olması ilkesi, yolun sonsuz küçüklükteki bir bölümünün de minimum eyleme sahip olacak şekilde bir eğri olduğu şeklinde de ifade edilebilir. Şimdi yolun yeterince küçük bir bölümünü –birbirine çok yakın a ve b noktaları arasında– ele alırsak, önemli olan potansiyelin bir noktadan diğer noktaya nasıl değiştiği değildir; çünkü o küçük yol boyunca aslında neredeyse aynı yerde durmaktasınız. Düşünmeniz gereken tek şey, potansiyeldeki birinci dereceden değişimdir. Cevap sadece potansiyelin türevine dayanır, her yerdeki potansiyele değil. Dolayısıyla tüm yolun toplamdaki özelliğine dair ifade, yolun küçük bir

bölümünde ne olup bittiğine dair bir ifadeye –diferansiyel bir ifadeye– dönüşür. Bu diferansiyel ifade sadece potansiyelin türevlerini, bir noktadaki kuvveti içerir. İşte bu, diferansiyel yasa ile toplamı ifade eden yasa arasındaki bağlantı budur.

"Işık söz konusu olduğunda şu soruyu tartışmıştık: Parçacık doğru yolu nasıl bulur? Diferansiyel bakış açısıyla bunu anlamak kolaydır. Her an ivmelenir ve ne yapacağını sadece o anda bilebilir. Parçacığın minimum eyleme sahip olacak yola karar vereceğini söylemek, etki ve tepkiye dair bütün içgüdülerimizin bozulmasına yol açar. Ne yani, parçacık olası bütün yolları "koklayarak" mı en az eyleme sahip olacağı yolu seçmekte? Fotonların önüne engeller koyup, olası tüm yolları sınamalarını engellediğimizde, nereye gideceklerini kestiremediklerini gördük ve kırınım olgusunu keşfettik.

"Aynı şey mekanikte de geçerli midir? Parçacık sadece "doğru yola girmekle" kalmaz; fakat bütün olası yolları da arar mı? İşler böyle yürüyorsa, onun da aramasını engellersek kırınıma benzer bir olgu gözlemler miyiz? Mucizevi bir şekilde, evet tam da böyle olur. Kuantum mekaniği yasaları bunu öngörür. Aslında, en az eylem ilkemiz eksik ifade edilmiştir. Bir parçacık en az eylem yolunu seçmeden önce, aynı, ışığın en kısa zamanı seçmesine benzer bir şekilde, yakınındaki olası bütün yolları koklar ve en az eyleme sahip olanı seçer. Işığın en kısa zamanı nasıl seçtiğini hatırlayın: Farklı bir sürede geçilen bir yoldan gittiyse, farklı bir evrede hedefine varır. Bir noktadaki toplam genlik de, ışığın geçebileceği tüm olası yolların genliklerinin toplamıdır. Birbirinden çok farklı evreler veren bütün yolların toplamı bir şeye varmaz. Evreler birbirlerine neredeyse benzer bir grup yol bulursanız, bütün yollardan gelen o küçük katkılar toplanır ve varıştaki toplam genlik makul olur. Önemli olan yol da, yakınındaki birçok yolla aynı evreye sahip yoldur.

"Kuantum mekaniği için de aynı şey geçerlidir. Eksiksiz kuantum mekaniği (elektron spinini ihmal ederek ve göreli olmayan durum için) şu şekilde işler: t_1 zamanında 1 noktasından yola çıkan bir parçacığın, t_2 zamanında 2 noktasına varması olasılığı, olasılık genliğinin karesine eşittir. Toplam genlik, her bir olası yola –her bir varış yolu– ait genliklerin toplamıdır. Olası her bir $x(t)$ için –her bir sanal yol için– genlik hesaplamalıyız. Daha sonra da bunları toplarız. Her bir yol için genliği nasıl hesaplarız? Eylem integralimiz bize, tek bir yol için genliğin ne olması gerektiğini söyler. Genlik, S o yol için eylemken, bir sabit ile $e^{iS/\hbar}$ çarpımıdır. Diğer bir deyişle, bir genliğin evresini karmaşık sayıyla gösterirsek, evre açısı $S/\hbar$ olur. S eylemi enerji çarpı zamanın boyutlarına sahiptir ve Planck sabiti $\hbar$ da aynı boyutlara sahiptir. Kuantum mekaniğinin ne zaman önemli olduğunu belirleyen de işte bu sabittir.

"Bütün yollar için S'in $\hbar$ sabitine göre çok büyük olduğunu varsayalım. Bir yol belirli bir genlik sağlar. Yakındaki bir yoldaysa evre çok farklıdır; çünkü devasa bir S için –$\hbar$ çok küçük olduğundan– S'deki küçük bir değişim bile tamamen farklı bir evre demektir. Eş deyişle yakındaki yollar, toplam alındığında, birbirlerinin etkilerini yok ederler. Tek bir bölge dışında. Bu da, bir yol ve yakınındaki yollar ilk yaklaşımda aynı evrede olduğunda gerçekleşir. (Daha kesin konuşacak olursak, $\hbar$ içinde aynı eylemden bahsediyoruz.) Sadece o yollar önemlidir. Dolayısıyla, Planck sabiti $\hbar$ sıfıra giderken, doğru kuantum mekanik yasaları şu şekilde özetlenebilir: "Bütün o olasılık genlerini falan unutun. Parçacık, ilk yaklaşımda S'in değişmediği özel yolda ilerler". Bu, en az eylem ilkesi ve kuantum mekaniği arasındaki ilişkidir. Kuantum mekaniğinin bu şekilde ifade edilebileceğini ilk defa bu dersin başında bahsettiğim aynı öğretmenin, Bader'in, bir öğrencisi tarafından keşfedilmiştir. [Kuantum mekaniği başta, genlik için bir diferansiyel Denklem (Schrödinger) ve birtakım matris matematiğiyle (Heisenberg) ifade edilmiştir.]

"Şimdi fizikteki diğer minimum ilkeler hakkında konuşma vakti. Buna benzer birçok ilginç ilke vardır. Hepsini burada listelemeye çalışmayacağım, ama birinin üzerinde duracağım. Daha sonra, hoş bir minimum ilkeye sahip bir fiziksel olguya geldiğimizde o önemli ilkeyi anlatacağım. Şimdiyse, elektrostatiği bir alan için diferansiyel denklemle değil, belirli bir integralin maksimum veya minimum olup olmamasıyla tanımlayabileceğimizi göstereceğim. Önce, yük yoğunluğunun her yerde bilindiği ve uzaydaki her yerde ϕ potansiyelini bulmak istediğimiz problemi ele alalım. Cevabın şu olması gerektiğini zaten biliyorsunuz:

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$$

Bunu bir başka şekilde ifade etmenin yolu da şudur: U^* aşağıdaki eşitlikle ifade edilirken

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)^2 dV - \int \rho\phi dV$$

ifadesinde U^*'ın integralini alın. Bu, tüm uzay üzerinden alınması gereken bir hacim integraldir. Bu, doğru potansiyel dağılımı $\phi(x, y, z)$ için bir minimumdur.

"Elektrostatik hakkındaki bu iki ifadenin eşit olduğunu gösterebiliriz. Herhangi bir ϕ fonksiyonunu ele alalım. Göstermek istediğimiz şey, ϕ için doğru $\underline{\phi}$ potansiyelini ve küçük bir f sapmasını seçtiğimizde, birinci derecede U^*'daki değişimin sıfır olduğudur. Dolayısıyla, ϕ için

$$\phi = \underline{\phi} + f$$

yazabiliriz. Aradığımız şey $\underline{\phi}$'dir aslında. Onda yaptığımız değişiklik sayesinde, U^*'daki değişimin birinci derecede sıfır olmasını sağlayacak değerini bulmaya çalışıyoruz. U^*'m ilk kısmı için şu eşitliğe ihtiyacımız var:

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\underline{\phi})^2 + 2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2$$

Değişkenlik gösterecek tek birinci dereceden terimse aşağıdakidir:

$$2\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f$$

U^* niceliğinin ikinci teriminde integrali alınansa

$$\rho\phi = \rho\underline{\phi} + \rho f$$

olur. Bu eşitlikteki değişken kısımsa ρf'dir. Yani, sadece değişken kısımları tutarsak, şu integrale ihtiyacımız vardır:

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0\nabla\underline{\phi}\cdot\nabla f - \rho f)dV$$

"Şimdi, eski genel kurala uyarsak, bütün f türevlerinden kurtulmamız lazım. Gelin, bu türevlerin ne olduğuna bakalım. x'e, y'ye ve z'ye göre integralini almamız gereken skaler çarpımı

$$\frac{\partial\underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

olur. Şimdi işin hilesini göstereyim: $\partial f/\partial x$'ten kurtulmak için, parçaların x'e göre integralini alın. Böylece türev $\underline{\phi}$'nin üstüne taşınır. t'ye göre türevlerden kurtulmak için kullandığımız genel yöntemin aynısıdır bu. Aşağıdaki eşitliği kullanalım:

$$\int \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}dx = f\frac{\partial\underline{\phi}}{\partial x} - \int f\frac{\partial^2\underline{\phi}}{\partial x^2}dx$$

f sonsuzda sıfır olması gerektiğinden, integrali alınan terim sıfırdır. (Bu da η değerini t_1 ve t_2'de sıfır almayı gerektirir. Dolayısıyla ilkemizi daha doğru ifade etmeli: U^*, doğru ϕ için, sonsuzda aynı değerlere sahip herhangi bir $\phi(x, y, z)$'den daha azdır.) Aynı şeyi y ve z için de yapalım. Böylece ΔU^* için

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0\nabla^2\underline{\phi} - \rho)f dV$$

yazabiliriz. Bu değişimin herhangi bir f değer için sıfır olabilmesi için, her ne olursa olsun f katsayısı mutlaka sıfır olmalıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\nabla^2\underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0$$

Eski denklemimizi elde ettik. Dolayısıyla, "minimum" önermemiz doğruymuş.

"Önermemizi, cebir işlemlerimizi biraz farklı şekilde yaparak genelleştirebiliriz. Geriye dönelim ve bileşenleri almadan parçaların kısmi integralini alalım. Aşağıdaki eşitlikle işe başlayabiliriz:

$$\nabla \cdot (f\nabla\underline{\phi}) = \nabla f \cdot \nabla\underline{\phi} + f\nabla^2\underline{\phi}$$

Sol tarafın diferansiyelini alırsam, sağ tarafa eşit olduğunu ispatlayabilirim. Bu denklemi kısmi integral almak için kullanabiliriz. ΔU^* integralinde, $\nabla\underline{\phi} \cdot \nabla f$ yerine, hacim üzerinden integrali alınan $\nabla \cdot (f\nabla\underline{\phi}) - f\nabla^2\underline{\phi}$ terimini koyalım. Hacim üzerinden integrali alınan diverjans terimi, bir yüzey integraliyle yerdeğiştirilebilir.

$$\int \nabla \cdot (f\nabla\underline{\phi})dV = \int f\nabla\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{n}\, da$$

Tüm uzay üzerinden integral aldığımıza göre, integralini aldığımız yüzey sonsuzdadır. Orada, f sıfırdır ve böylece daha öncekiyle aynı cevabı elde ederiz.

"Ancak şimdi, tüm yüklerin nerede olduğunu *bilmediğimiz* bir problemi nasıl çözebileceğimizi biliyoruz. Elimizde, üzerindeki yüklerin bir şekilde dağıldığı iletkenler oldun. Bütün iletkenlerin potansiyelleri sabitse, yine minimum ilkesini kullanabiliriz. U^* için integrali sadece iletkenlerin dışındaki uzayda alırız. O zaman, $\underline{\phi}$'yi iletken üzerinde değiştirmeyeceğimizden, f bütün yüzeylerde sıfır olur ve yüzey integral de hâlâ sıfırdır:

$$\int f\nabla\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{n}\, da$$

Kalan hacim integral de sadece iletkenler arasında boşluklarda alınır:

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0\nabla^2\underline{\phi} - \rho)f\, dV$$

Elbette, yeniden Poisson denklemini elde ederiz:

$$\nabla^2\underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0$$

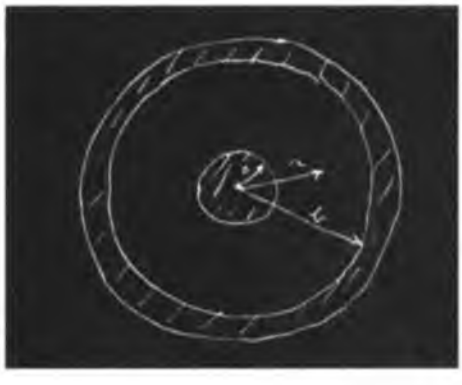
Böylece en baştaki U^* integralimizin de, sabit potansiyellere sahip iletkenlerin dışında değerlendirilirse, minimum olduğunu göstermiş olduk. (Diğer bir deyişle, (x, y, z) iletken yüzeyinde bir noktayken herhangi bir $\phi(x, y, z)$ değeri iletkenlerin belirtilen potansiyeline eşit olmalıdır.)

"Bütün yüklerin sadece iletkenler üzerinde olduğu ilginç bir durum vardır. Bu durumda

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)^2 dV$$

olur. Minimum ilkemize göre, potansiyelleri belli iletkenler olduğu durumda, aralarındaki potansiyel kendini U^* en az olacak şekilde ayarlar. Nedir bu integral? $\nabla\phi$ terimi elektrik alandır, dolayısıyla bu integral elektrostatik enerjidir. Gerçek alan, potansiyelin gradyanından gelenlerin tamamının arasından en düşük toplam enerjiye sahip olandır.

"Bu sonucu kullanarak, bu şeylerin gerçekten ne kadar pratik olduğunu size göstermek istiyorum. Şekildeki gibi, silindirik kondansatör şeklinde iki iletkenimiz olsun.



İçerdeki iletkenin potansiyeli V ve dışardakinin potansiyeli de sıfırdır. İçerdeki iletkenin yarıçapı a ve dışardakinin de b olsun. Şimdi, ikisinin arasında *herhangi* bir potansiyel dağılımı varsayabiliriz. Doğru $\underline{\phi}$ potansiyelini kullanırsak ve $\epsilon_0/2\int(\nabla\underline{\phi})^2 dV$ (değerini hesaplarsak, sistemin enerjisi $\frac{1}{2}CV^2$'yi bulabilmeliyiz.

Böylece C değerini ilkemizi kullanarak hesaplayabiliriz. Ancak eğer yanlış potansiyel dağılımı kullanırsak ve bu yöntemle C sığasını hesaplamaya çalışırsak çok büyük bir değer elde ederiz çünkü V belirlenmiştir. Tam olarak doğru ϕ değeri varsayılmazsa, doğru değerinden daha büyük bir C değeri elde ederiz. Eğer ϕ için varsaydığım değer doğru değere yaklaşıksa, C değerine de yakın bir değer elde etmiş oluruz; çünkü C'deki hata payı ϕ'deki hata payının ikinci üssüdür.

"Diyelim ki, silindirik kondansatörün sığasını bilmiyorum. Bu ilkeyi kullanarak bulabilirim. En düşük C değerini bulana kadar potansiyel fonksiyonu ϕ'yi tahmin ederim. Örnek olarak, sabit bir alana karşılık gelen bir potansiyel seçtiğimizi düşünelim. (Elbette, alanın gerçekten sabit olmadığını biliyorsunuz. $1/r$'yle değişkenlik gösterir.) Sabit alan demek, potansiyelin uzaklıkla doğrusal değişmesi demektir. İki iletkendeki koşullara uyması için, ϕ potansiyeli

$$\phi = V\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right)$$

olmalıdır. $r = a$ olduğunda bu fonksiyonun değeri V, $r = b$ olduğundaysa sıfırdır ve ikisinin arasında da $-V/(b-a)$ sabit eğimine sahiptir. Diğer bir deyişle U^* integralini bulmak için, bu gradyanın karesini $\epsilon_0/2$ değeriyle çarpıp bütün hacim üzerinden integralini almalısınız. Gelin bunu, birim uzunluğa sahip bir silindir için yapalım. r yarıçapındaki hacim elemanı $2\pi r\,dr$ olur. İntegrali alınca, sığa için ilk denemede aşağıdaki eşitliği bulursunuz:

$$\frac{1}{2}CV^2 \text{ (ilk deneme)} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2}\,2\pi r\,dr$$

İntegral kolaydır, şöyle çıkar:

$$\pi V^2\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$

Böylece elimizde sığa için doğru olmayan ama yaklaşık değer veren bir denklem vardır:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Doğal olarak, doğru cevap olan $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ eşitliğinden farklıdır; ama çok da kötü değildir. Gelin, çeşitli b/a değerleri için doğru cevapla karşılaştırmasını yapalım.

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{doğru}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C \text{ (ilk yakınlaştırma)}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,500
4	0,721	0,833
10	0,434	0,612
100	0,217	0,51
1,5	2,4662	2,50
1,1	10,492059	10,500000

Tablo 19-1'deki sonuçları ben hesapladım. b/a 2 kadar büyük bir değer alsa da –doğrusal değişen alana göre alanda çok büyük bir değişim verir bu değer– yine de gayet güzel bir yakınlaşma elde ettim. Cevap, elbette biraz yüksektir; beklendiği gibi. Büyük bir silindirin içinde ince bir tel varsa, işler daha da kötüye gider. Bu durumda alandaki değişimler çok büyüktür ve onu bir sabitle göstermeye çalışmak pek de iyi bir fikir değildir. $b/a = 100$ değeriyle, iki kat hatayla karşılaşırız. Küçük b/a değerleri için değerler daha düzgündür. Karşıt uçtan bakarsak, iletkenler birbirlerinden çok uzak değilse $b/a = 1{,}1$ olsun. O zaman sabit alan kullanmak iyi bir yaklaşma sağlar ve doğru C değerine yüzde on hassasiyetle elde ederiz.

"Şimdi de bu hesaplamayı nasıl geliştirebileceğimizi anlatmak istiyorum. (Elbette, silindir için doğru cevabı *biliyorsunuz* ancak başka bazı şekiller için

de yöntem aynı olup, doğru cevabı bilemiyor olabilirsiniz.) Bir sonraki adım, bilinmeyen doğru ϕ değeri için daya iyi bir yakınlaştırma denemektir. Örneğin, üssel bir ϕ artı bir sabit denemesi yapabiliriz. İyi de, doğru ϕ değerini bilmediğiniz sürece daha iyi bir yakınlaştırma yaptığınızı nasıl bilebilirsiniz? Cevap: C değerini hesaplarsınız. En düşük C değeri doğruya en yakın olandır. Gelin bunu deneyelim. Potansiyel doğrusal değil de, r'nin karesiyle değişsin, dolayısıyla elektrik alan sabit değil de doğrusal olsun. $r = b$ için $\phi = 0$ ve $r = a$ için $\phi = V$ eşitliğini sağlayan en *genel* ikinci dereceden denklem şudur:

$$\phi = V\left[1 + \alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right) - (1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right]$$

Denklemdeki α herhangi bir sabit sayıdır. Bu denklem biraz daha karmaşıktır. Potansiyelde, doğrusal bir terimle beraber ikinci dereceden bir terim de içermektedir. Ondan alanı elde etmek kolaydır, şöyle ki:

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha)\frac{(r-a)V}{(b-a)^2}$$

Şimdi bunun karesini alıp, hacim üzerinden integralini almalı. Fakat bu durumda α değeri ne olmalı? ϕ için bir parabol alabiliriz; ama ne parabolü? Ben şöyle yapıyorum: Sığayı *rastgele* bir α değeriyle hesaplıyorum ve aşağıdaki denklemi elde ediyorum:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1\right) + \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{3}\right]$$

Biraz karmaşık gözüküyor; ama alanın karesinin integralinden gelmekte. Artık α değerini seçebilirim. Doğru değerin hesaplayacağım herhangi bir değerin aşağısında olacağını biliyorum: α için ne seçersem bana büyük değerde bir cevap verecek. α değeriyle oynamaya devam eder ve elde edebileceğim en düşük değere ulaşırsam; o en düşük değer, doğruya diğer bütün değerlerden daha yakın olur. Diğer bir deyişle şimdi yapacağım şey, C için en küçük değeri verecek α değerini seçmektir. Analiz hesaplarıyla, minimum C değerini $\alpha = -2b/(b + a)$ için elde ederim. Bu değeri denkleme koyunca da, en düşük sığa değeri için aşağıdaki eşitliği bulurum:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}$$

"Çeşitli b/a değerleri için bu denklemle C değerlerini hesapladım. Bulduğum değerlere C (ikinci dereceden) adını verdim. Tablo 19-2 C (ikinci dereceden) değerleri ile doğru C değerlerini karşılaştırmakta.

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{doğru}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C \text{ (ikinci dereceden)}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,444
4	0,721	0,733
10	0,434	0,475
100	0,217	0,346
1,5	2,4662	2,4667
1,1	10,492059	10,492065

"Örneğin, yarıçapların oranı ikiye birken, ben 1,444 buldum. Bu, doğru cevap olan 1,4423'e çok iyi bir yaklaşmadır. Daha büyük b/a değerleri için bile, sonuçlar iyi görünmekte. b/a ona birken bile sonuç iyi gözüküyor; sadece yüzde on farklı. Oran yüzde bire çıktığındaysa, işler karışmaya başlıyor. 0,217 yerine, 0,346 buldum C için. Diğer yandan, yarıçapların oranı 1,5 olduğunda, cevap mükemmeldir. b/a oranı 1,1 olduğunda, cevap 10,492065; doğru cevapsa 10,492059'dur. Neredeyse bire bir doğru cevabı elde etmişim.

"Bu örnekleri vermemin birinci nedeni minimum eylem ilkesinin ve genel olarak minimum ilkelerinin kuramsal değerini göstermek ve ikincisi de pratik

faydalarını göstermekti; zaten cevabını bildiğimiz bir sığa değerini hesaplamak için değil. Herhangi bir başka şekil için, α gibi bilinmeyen bazı parametrelerle yaklaşık bir alan tahmin edebilir ve ayarlamalar yaparak minimumu elde edebilirsiniz. Zorlu problemler için harika sayısal sonuçlar elde edeceğinizden emin olabilirsiniz.

19-2 Dersten sonra eklenmiş bir not

"Derste zamanım kalmadığı için bahsedemediğim bir şeyleri eklemek isterim. (Anlatacaklarımı hep, olan zamanımdan fazla tutacak şekilde hazırlamış oluyorum sanki.) Daha önce belirttiğim gibi, bu ders üzerine çalışırken bir problemle ilgilenmeye başladım. Size bu problemin ne olduğunu anlatmak istiyorum. Bahsedebildiğim minimum ilkeleri arasında, birçoğunun elektrodinamik ve mekanikteki en az eylem ilkelerinden ortaya çıktığını fark ettim. Ama, onlardan ortaya çıkmayanlar da var. Örneğin, akımlar, Ohm yasasına uyan bir malzeme içinden geçmeye zorlanırsa, akımlar kendilerini, malzemede en az ısı ortaya çıkacak şekilde dağıtmakta o malzemenin içinde. Ayrıca, (eğer malzeme eş-sıcaklıklıysa) enerjinin yaratılma hızı da minimumdadır. Şimdi bu ilke, klasik kurama göre, akım taşıyan bir metalin içindeki elektronların hızını belirlemekte de kullanılabilir. Hızların dağılımı tam anlamıyla bir denge dağılımı değildir [Bölüm 40, Cilt 1, Denklem (40.6)]. Çünkü yanlamasına sürüklenmektedirler. Yeni dağılımı bulmak için, dağılımın, saniye başına çarpışmalardan meydana gelen entropinin olabildiğince düşük olduğu akımın dağılımı olduğu ilkesi kullanılabilir. Bununla birlikte, elektronların davranışının doğru tanımı kuantum mekaniği tarafından verilmelidir. Soru şu: En düşük entropi yaratımı ilkesi, aynı durum kuantum mekaniksel olarak tanımlandığında da doğru mudur? Henüz cevabı bulamadım.

"Cevap akademik olarak ilginçtir elbette. Bu tür ilkeler hayranlık uyandırıcıdır ve ne kadar genel olabildiklerini bulmak için çalışmaya değer. Ben de pratik bir bakış açısıyla bilmek *istiyorum*. Bazı meslektaşlarımla birlikte, NaCl gibi bir iyonik kristal içinden geçen bir elektronun hissettiği elektrik direncini kuantum mekaniğiyle yaklaşık olarak hesapladığımız bir makale yayımladım. [Feynman, Hellwarth, Iddings, and Platzman, "Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal," *Phys. Rev.* 127, 1004 (1962).] Bir minimum ilkesi olsaydı, sonuçları daha hassas hale getirmek için kullanabilirdik. Aynı, elektrik alana dair bilgimizin çok az olmasına rağmen minimum ilkesi sayesinde bir kondansatörün sığasını hassas şekilde hesaplayabilmemiz gibi.

20

BOŞ UZAYDA MAXWELL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

20-1 Boş uzayda dalgalar; düzlem dalgaları
20-2 Üç boyutlu dalgalar
20-3 Bilimsel hayal gücü
20-4 Küresel dalgalar

20-1 Boş uzayda dalgalar; düzlem dalgaları

Bölüm 18'de Maxwell denklemlerini eksiksiz şekilde elde etmiştik. Elektrik ve manyetik alanlara dair bilinmesi gereken her şey bu dört denklemin içindedir:

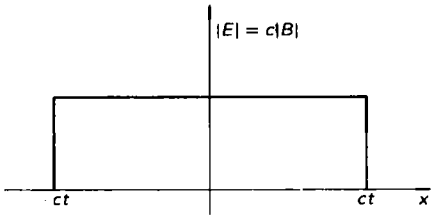
$$\text{I. } \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{II. } \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\text{III. } \nabla \cdot B = 0 \qquad \text{IV. } c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{20.1}$$

Bütün bu denklemleri birleştirdiğimizde, çarpıcı bir olgu doğar: hareketli yüklerce meydana getirilmiş alanlar kaynakları terk ettikten sonra uzay boşluğunda tek başlarına hareket edebilirler. Sonsuz bir akım levhasının aniden açıldığı özel bir örneği ele almıştık. Akım belli bir t süresi kadar açık dolduğunda, kaynaktan ct kadar uzaklıkta mesafeye uzanan düzgün elektrik ve manyetik alanlar oluşur. Akım levhasının yz düzleminde olduğunu ve artı y yönüne giden bir J yüzey akım yoğunluğuna sahip olduğunu düşünelim. Elektrik alanın sadece bir y ve manyetik alanın da sadece bir z bileşeni olacaktır. Alan bileşenleri, ct'den küçük x değerleri için

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c} \tag{20.2}$$

eşitliğiyle verilir. Daha büyük x değerleri için alanlar sıfırdır. Elbette $-x$ yönünde, aynı mesafede, akım levhasından uzanan benzer alanlar da vardır. Şekil 20-1'de t zamanında alanların büyüklüğünü x'in bir fonksiyonu olarak gösterdik. Zaman geçtikçe, ct mesafesindeki "dalga yüzü" dışarı doğru x yönünde c hızıyla ilerler.

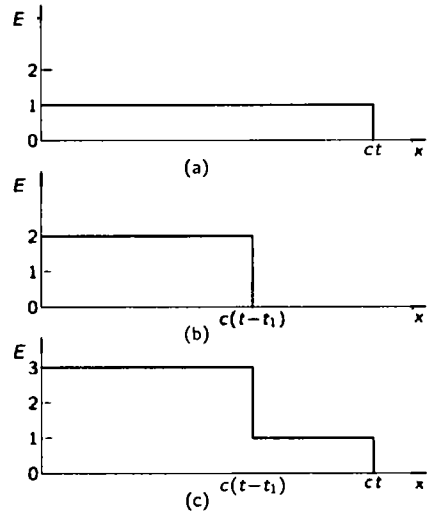
Gözden geçirme: Bölüm 47, Cilt 1, *Dalga Denklemi*
Bölüm 28, Cilt 1, *Elektromanyetik Işınım*



Şekil 20-1 Elektrik ve manyetik alanın, akım levhası açıldıktan sonra t zamanında, x'in fonksiyonu olarak gösterilmesi.

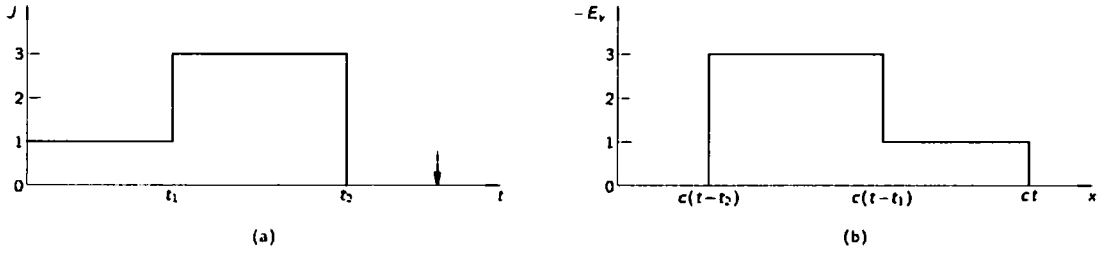
Şimdi sıradaki bir dizi olayı ele alalım. Birim şiddetteki bir akımı belli bir süre açık tutalım, sonra aniden şiddeti üç birime çıkarıp, bir süre bu değerde sabit tutalım. Alanlar bu durumda nasıl gözükür? Nasıl gözükeceklerini şu şekilde anlayabiliriz. Önce, $t = 0$ zamanında açılmış ve sonsuza kadar sabit bırakılmış birim şiddette bir akım düşünelim. Artı x için alanlar Şekil 20-2'nin (a) bölümünde verilmiştir. Sonra, t_1 zamanında iki birimlik kararlı bir akım açtığımızda ne olduğunu soralım.

Bu durumda alanlar öncekine göre iki kat büyük olacak, ancak Şekil 20-2 (b)'de gösterildiği gibi x yönünde sadece $c(t - t_1)$ mesafesinde uzanacaktır. Bu iki çözümü üst üste binme ilkesiyle topladığımızda, iki kaynağın toplamının sıfırdan t_1'e kadar geçen zamanda bir birim akım ve t_1'den sonra da üç birim akım olduğunu buluruz. t zamanında alanların x'e göre değişimi Şekil 20-2 (c)'de gösterilmiştir.



Şekil 20-2 Akım levhasının elektrik alanı. (a) $t = 0$ zamanında açılmış bir birim akım. (b) $t = t_1$ zamanında açılmış iki birim akım; (c), (a) ve (b)'nin üst üste bindirilmesi.

Şimdi daha karmaşık bir problemi ele alalım. Önce bir birim açılan, sonra üç birime çıkarılan ve daha sonra da sıfıra düşürülen bir akımı ele alalım. Böyle bir akım için alanlar nedir? Sonucu aynı şekilde bulabiliriz. Üç ayrı problemin çözümlerini toplayarak. Önce, bir birim şiddetteki akım için alanları buluruz. Sonra, iki birim akım tarafından meydana getirilen akımları buluruz. Son olarak, *eksi* üç birim akım için alanlar için çözüm yazarız. Bu üç çözümü birleştirdiğimizde, $t = 0$ zamanından t_1 zamanına kadar bir birim, sonra t_2 zamanına kadar üç birim ve daha sonra da kapatıldığında sıfırlanan bir akım görürüz.



Şekil 20-3 Eğer akım kaynağı şiddeti (a)'da gösterildiği gibi değişirse, o halde, okla gösterilen t zamanında elektrik alanının x'e göre fonksiyonu (b)'de gösterilmiştir.

Şekil 20-3 (a)'da akım zamana göre bir fonksiyon olarak gösterilmiştir. Elektrik alan için bu üç çözümü topladığımızda, belli bir t zamanında x'e göre değişimini Şekil 20-3 (b)'deki gibi buluruz. Alan, akımı tam anlamıyla temsil etmektedir. Uzaydaki alan dağılımı, zamanla akım değişiminin güzel bir grafiğidir; sadece tersten çizilmiştir. Zaman geçtikçe bütün resim dışa doğru c hızına ilerler; diğer bir deyişle alanın artı x yönünde ilerleyen küçük bir imgesi vardır ve geçmişteki tüm akım değişimlerinin tarihçesini içeren detaylı bir hafızası vardır. Eğer kilometrelerce uzakta dursaydık, elektrik veya manyetik alanın değişiminden, kaynaktaki akımın tam olarak nasıl değiştiğini çıkarabilirdik.

Dikkat ederseniz, kaynaktaki hareketlilik durduktan ve bütün akımlar ile yükler sıfırlandıktan sonra bile, alan uzayda ilerlemeye devam etmektedir. Herhangi bir yük veya akımdan bağımsız şekilde var olan elektrik ve manyetik alanlar dağılımını elde ettik. Bu, Maxwell denklemlerinin eksiksiz halinden gelen yeni etkidir. İstersek, belirli bir yer ve zamandaki elektrik alanın kaynaktaki *aynı* andaki akımla değil ama $t - x/c$ kadar *erken* bir zamandaki akımla orantılı olduğunu yazarak, bu yaptığımız analizin tam bir matematiksel temsilini ortaya koyabiliriz:

$$E_y(t) = -\frac{J(t - x/c)}{2\epsilon_0 c} \tag{20.3}$$

İster inanın ister inanmayın, aynı denklemi farklı bir bakış açısından da elde etmiştik; I. Ciltte kırılma indisi kuramıyla uğraştığımızda. O zaman, bir elektromanyetik dalganın elektrik alanı ile dipolleri harekete geçirilen bir dielektrik levhanın içinde bulunan, salınan dipollerden oluşmuş bir ince katman tarafından oluşturulan alanları anlamaya çalışmıştık. Problem, hem başlangıçtaki dalganın, hem de salınan dipollerden kaynaklanan dalgaların birleşmiş alanlarını hesaplamaktı. Maxwell denklemleri elimizde yokken, hareketli yüklerden kaynaklanan alanları nasıl hesaplamış olabilirdik? O zaman, ivmelenen noktasal yüklerde uzak mesafelerde meydana gelen ışınım alanlarına dair bir denklemi (türev olmadan) başlangıç noktası olarak ele almıştık. I. Cilt, 31. Bölüme bakarsanız, oradaki Denk. (31.9)'la az önce yazdığımız Denk. (20.3)'ün aynı olduğunu görürüz. Daha önceki çıkarımımız sadece kaynaktan uzak mesafeler için geçerliyse de, aynı sonucun kaynağın yakınında bile doğru olduğunu gördük artık.

Şimdi boş uzayda, kaynaklarından (akımlardan ve yüklerden) çok uzaktaki elektrik ve manyetik alanların davranışına genel bir bakış açısı getirmek istiyorum. Kaynaklara çok yakınken –öyle yakındır ki kaynak ile alan, kaynaktan alana iletim sırasındaki gecikme süresince kaynakta pek bir değişiklik olmaz– alanlarda, aynı elektrostatik veya manyetostatik durumlarında olduğu gibi, pek bir değişiklik olmaz. Eğer kaynaktan, gecikmeler önem kazanacak kadar uzaklaşırsak alanların doğası bulduğumuz çözümlerdekinden çok daha farklı olur. Bir anlamda, kaynaktan uzaklaştıkça kendi karakterlerini oturtmaya başlar alanlar. Bu yüzden tartışmamıza, hiç yük veya akım olmayan bir bölgedeki alanların davranışını inceleyerek başlayabiliriz.

Örneğin, şunu soralım: Hem ρ, hem de j'nin sıfır olduğu bölgelerde ne tür alanlar olabilir? Maxwell denklemlerinin, skaler ve vektör potansiyeller için diferansiyel denklemler cinsinden ifade edilebileceğini Bölüm 18'de görmüştük:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{20.4}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{20.5}$$

Eğer ρ ve j sıfırsa, bu denklemler çok daha basit bir hale dönüşürler:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{20.6}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{20.7}$$

Böylece, boş uzayda skaler potansiyeli ϕ'nin ve vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$'nın her bir bileşeninin aynı matematiksel denklemi sağladığını görmüş olduk. ψ (psi); ϕ, A_x, A_y, A_z niceliklerinden herhangi birini temsil etsin diyelim; bu durumda genel çözümlerini bulmak istediğimiz denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{20.8}$$

Bu denkleme, üç boyutlu dalga denklemi denir. Üç boyutlu diyoruz, çünkü ψ fonksiyonu genelde x, y ve z'ye bağlı olabilir ve bu üç koordinattaki değişiklikler bizi ilgilendirir. Bunu, Laplace işlemcisinin üç terimini açıkça yaparak daha anlaşılır hale getirebiliriz:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{20.9}$$

Elektrik alanları $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$'de, boş uzayda dalga fonksiyonunu sağlarlar. Örneğin, $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ olduğundan, Denk. (20.7)'nin bükümünü alarak $\boldsymbol{B}$ için bir diferansiyel denklem elde edebiliriz. Laplace bir skaler işlemci olduğundan dolayı, Laplace ve büküm işlemlerinin sırası yerdeğiştirebilir:

$$\nabla \times (\nabla^2\boldsymbol{A}) = \nabla^2(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla^2\boldsymbol{B}$$

Benzer şekilde, büküm ve $\partial/\partial t$ işlemlerinin sırası da yerdeğiştirebilir:

$$\nabla \times \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

Bu sonuçları kullanarak, $\boldsymbol{B}$ için aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$\nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{20.10}$$

Görüyorsunuz; $\boldsymbol{B}$ manyetik alanının her bir bileşeni üç boyutlu dalga denklemini sağlar. Benzer şekilde $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ eşitliğini kullandığımızda, elektrik alan $\boldsymbol{E}$'nin de boş uzayda üç boyutlu dalga denklemini sağladığı sonucuna varırız:

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{20.11}$$

Bütün elektromanyetik alanlarımız aynı dalga denklemini, Denk. (20.8)'i sağlamakta. Bu durumda şunu sorabiliriz: Bu denklemin en genel çözümü nedir? Bu zor soruyu hemen cevaplamaktansa, öncelikle, y ve z'de hiçbir şeyin değişmediği çözümlere dair genel olarak ne denilebileceğine bakacağız. (Her zaman için, önce basit durumu ele alın ki böylece ne olacağını görebilin ve daha sonra daha karmaşık durumlara ilerleyebilin.) Alanların büyüklüklerinin sadece x'e dayandığını varsayalım; alanların y ve z koordinatlarında hiç *değişimi* olmasın. Şüphesiz yine düzlem dalgalarını ele alıyoruz. Önceki bölümdekine

benzer sonuçlarla karşılaşmayı beklemeliyiz. Aslına bakarsanız, tam olarak da aynı cevapları bulacağız. O zaman da şunu sorabilirsiniz: "Neden tekrar yapıyoruz bunu?" Bunu tekrar yapmak önemlidir; çünkü birincisi bulduğumuz dalgaların düzlem dalgaları için en genel çözümler olduğunu göstermedik ve ikincisi de sadece çok özel bir akım kaynağından meydana gelen alanları bulmuş olmamızdır. Şunu soralım kendimize: Boş uzayda olabilecek en genel türden bir dereceli dalga ne olabilir? Bunu o özel kaynakta ne olduğuna bakarak bulamayız; daha genel bir durum için çalışmalıyız. Bu sefer ayrıca, integral biçimindeki denklemlerle değil diferansiyel denklemlerle çalışacağız. Her ne kadar aynı denklemleri elde edeceksek de, hangi yoldan giderseniz gidin bir fark olmayacağını görmek için her iki yöntemi de kullanmak iyi bir pratik yöntemidir. Bu tür durumları her türlü şekilde ele alabilmeyi bilmelisiniz; çünkü zor bir problemle karşılaştığınızda göreceksiniz ki çözüm yollarından sadece biri işe yarayacak.

Herhangi bir elektromanyetik nicelik için dalga denkleminin çözümünü doğrudan ele alabiliriz. Bunun yerine en başta, boş uzaydaki Maxwell denklemleriyle başlamak istiyoruz; böylece elektromanyetik dalgalarla olan yakın ilişkilerini görebilirsiniz. Yükler ve akımları sıfırlayarak, Denk. (20.1)'le başlayalım:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ &\text{II.} && \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{III.} && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ &\text{IV.} && c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{20.12}$$

İlk denklemi bileşenlerine ayıralım:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{20.13}$$

y ve z'de değişim olmadığını varsaydığımızdan, son iki terim sıfırdır. Bu durumda denklemimiz aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{20.14}$$

Çözüm, elektrik alanın x yönündeki bileşeni E_x'in, uzayda sabit olduğunu gösterir. Eğer Denk. (20.12)'de dördüncü denkleme bakarsanız, E_x'in zaman içinde de, y ve z'de bir $\boldsymbol{B}$ değişimi olmadığını varsayarsak, sabit olduğunu görürsünüz. Bu tür bir alan, uzak bir mesafedeki yüklü kondansatör levhalarından kaynaklanan kararlı bir DC alanı olabilir. Böyle sıradan, statik bir alanla şimdi ilgilenmeyelim; ilgimizi dinamik olarak değişen alanlara yöneltelim. *Dinamik* alanlar için $E_x = 0$'dır.

Böylece herhangi bir yönde ilerleyen düzlem dalgaları için, *elektrik alanın ilerleme yönüne göre dik açılarda olması gerektiği* sonucunu elde etmiş olduk. Elbette, x koordinatında hâlâ karmaşık bir şekilde değişkenlik gösterebilir.

Yanlamasına $\boldsymbol{E}$ alanı daima iki bileşene ayrılabilir; örneğin y bileşeni ve z bileşeni. O halde gelin, elektrik alanın sadece bir yanlamasına bileşeni olduğu bir durumu ele alalım. Öncelikle, daima y yönünde olan ve hiç z bileşeni olmayan bir elektrik alan düşünelim. Bu problemi çözdüğümüz zaman, elektrik alanın daima z yönünde olduğu durumu da çözebileceğimiz apaçık ortadadır. Genel çözüm de, bu iki alanın üst üste bindirmesi olarak ifade edilebilir.

Görüyorsunuz ya, denklemler nasıl kolaylaştı. Elektrik alanın sıfır olmayan tek bileşeni E_y'dir ve tüm türevler de $-x$'e göre olanlar hariç– sıfırdır. Böylece, Maxwell denklemlerinin gerisi gayet basitleşir.

Gelin, Maxwell denklemlerinin ikincisinde sıradaki denkleme bakalım [Denk. (20.12)'deki II. denklem]. $\boldsymbol{E}$'nin bükümünün tüm bileşenlerini yazdığımızda, şunu elde ederiz:

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

y ve z'ye göre türevler sıfır olduğundan dolayı, $\nabla \times \boldsymbol{E}$'nin x bileşeni de sıfırdır. y bileşeni de ayrıca sıfırdır. y bileşenindeki ilk terim z'ye göre türev sıfır olduğundan ve ikinci terim de E_z sıfır olduğundan sıfırdır. $\boldsymbol{E}$'nin bükümünün bileşenlerinden sıfır olmayanı, $\partial E_y/\partial x$'e eşit olan z bileşenidir. Eğer $\nabla \times \boldsymbol{E}$'nin üç bileşenini, $-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$'nin karşılık gelen bileşenlerine eşitlersek, şunları elde ederiz:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \tag{20.15}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{20.16}$$

Manyetik alanın x bileşeni ve y bileşenlerinin her ikisinin de zamana göre türevleri sıfır olduğundan, bu bileşenler sabit alanlardır ve daha önceden bulduğumuz manyetostatik çözümlere denk gelirler. Birileri, dalgaların ilerlediği yerin yakınına kalıcı mıknatıslar bırakmış olabilir. Bu sabit alanları görmezden geleceğiz ve B_x ile B_y bileşenlerini sıfıra eşitleyeceğiz.

Başka bir nedenden dolayı da $\boldsymbol{B}$'nin x bileşeninin sıfır olması gerektiği sonucuna varabilirdik. $\boldsymbol{B}$'nin diverjansı, üçüncü Maxwell denkleminden dolayı sıfır olduğundan, elektrik alan için yukarıda kullandığımız akıl yürütmeyi kullanarak manyetik alanın boylamasına bileşeninin x'de bir değişimi olmayacağı sonucuna varırdık. Dalga çözümlerimizde bu düzgün alanları göz ardı ettiğimizden dolayı, B_x değerini sıfıra eşitlerdik. Düzlem elektromanyetik dalgalarında, $\boldsymbol{B}$ alanı ve aynı zamanda $\boldsymbol{E}$ alanı da ilerleme yönüne göre dik açılarda yönlenmelidirler.

Denklem (20.16) bize, bir elektrik alan sadece y bileşenine sahipse, manyetik alanın sadece z bileşenine sahip olabileceği önermesini ortaya koyar. Dolayısıyla $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ birbirlerine *dik açılardadır*. Ele aldığımız özel dalgada olan da tam budur.

Artık, boş uzay için Maxwell denklemlerinin sonuncusunu [Denk. (20.12)'deki IV. Denklem] kullanmaya hazırız. Bileşenleri yazalım:

$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_x = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_y = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{20.17}$$

$$c^2(\nabla \times \boldsymbol{B})_z = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$\boldsymbol{B}$'nin bileşenlerinin altı türevinden, sadece $\partial B_z/\partial x$ terimi sıfıra eşit değildir. Bu durumda yukarıdaki üç denklem, aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{20.18}$$

Tüm bu yaptıklarımızın sonucunu şöyle ifade edebiliriz: Elektrik ve manyetik alanların bileşenlerinin sadece birer adedi sıfır değildir ve bu bileşenler Denk. (20.16) ve Denk. (20.18)'i sağlamalıdır. Birinci denklemin x'e göre ve ikincinin de t'ye göre türevini alırsak, iki denklemi bir denklemde birleştirebiliriz.

Her iki denklemin sol tarafları bu durumda (c^2 çarpanı hariç) aynı olacaktır. Böylece, E_y'nin

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{20.19}$$

denklemini sağladığını bulmuş olduk. Aynı diferansiyel denklemi daha önce, sesin ilerlemesini çalışırken de görmüştük. Bu, tek boyutlu dalgalar için dalga denklemidir.

Dikkat ederseniz çıkarım sürecimiz sırasında Denk. (20.11)'in içerdiğinden fazla bir şey bulduk. Maxwell denklemleri bize elektromanyetik dalgalarının sadece dalga ilerleme yönüne dik açılarda bileşenleri olduğu ilave bilgisini verdi.

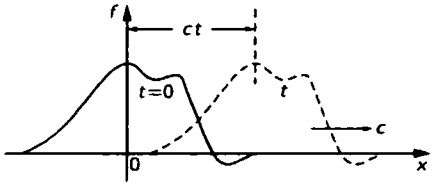
Gelin, tek boyutlu dalga denkleminin çözümleri hakkında bildiklerimizi gözden geçirelim. Herhangi bir ψ niceliği tek boyutlu dalga denklemini sağlıyorsa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{20.20}$$

yazılabilir. Bu durumda olası bir çözüm aşağıdaki biçimde, tek bir $(x - ct)$ değişkeninin fonksiyonu olan bir $\psi(x, t)$ fonksiyonudur:

$$\psi(x, t) = f(x - ct) \tag{20.21}$$

$f(x - ct)$ fonksiyonu, x'te, artı x yönünde, c hızında ilerleyen "sabit" bir şekli gösterir (*Bkz.* Şekil 20-4). f fonksiyonu, genliği sıfırken maksimum değerdeyse; $t = 0$ için maksimum ψ değeri $x = 0$'da görülür. Belli bir zaman sonra, diyelim ki $t = 10$ kadar bir süre sonra ψ, $x = 10c$'de maksimum değer alacaktır. Zaman geçtikçe, maksimum değer artı x yönünde c hızında ilerler.



Şekil 20-4 $f(x - ct)$ fonksiyonu artı x yönünde c hızıyla ilerleyen sabit bir "şekil"dir.

Tek boyutlu dalga denkleminin çözümünün, $(t - x/c)$'nin bir fonksiyonu olduğunu söylemek bazen daha pratiktir. Bununla birlikte, aslında bu da aynı şeyi söylemektedir; çünkü $(t - x/c)$'nin herhangi bir fonksiyonu aynı zamanda $(x-ct)$'nin bir fonksiyonudur:

$$F(t - x/c) = F\left(-\frac{x - ct}{c}\right) = f(x - ct)$$

Gelin, $f(x - ct)$ fonksiyonunun gerçekten de dalga denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Tek bir değişkenin –$(x - ct)$ değişkeni– fonksiyonu olduğundan dolayı, f'''nün f'nin değişkene göre türevini temsil ettiğini ve f''''nün de f'nin ikinci türevini temsil ettiğini yazabiliriz. Denklem (20.21)'in x'e göre türevini aldığımızda, $(x - ct)$'nin x'e göre türevi bir olduğundan aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct)$$

ψ'nin x'e göre ikinci türevi de

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct) \tag{20.22}$$

olur. ψ'nin t'ye göre türevlerini aldığımızda da, aşağıdaki denklemleri buluruz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x - ct)\,(-c) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct) \end{aligned} \tag{20.23}$$

Gördüğünüz üzere ψ gerçekten de tek boyutlu dalga denklemini sağlamakta.

Şunu merak edebilirsiniz: "Dalga fonksiyonu elimdeyse, çözümün $f(x - ct)$ olduğunu nasıl bilirim? Bu tersine yöntemden hoşlanmadım. Çözüme giden ileri bir yöntem yok mu?" İleri yöntemlerinden biri, sonucu bilmektir. Çözümün ne olması gerektiğini bildiğimizden dolayı, ileriye dönük bir matematiksel fikir

"uydurmak" mümkündür; ama bu kadar basit bir denklem söz konusu olduğunda oyunlar oynamaya gerek yok. Yakında öyle bir alışacaksınız ki, Denk. (20.20)'yi gördüğünüz anda $\psi = f(x - xt)$ fonksiyonunu çözüm olarak göreceksiniz. (Tıpkı, $x^2\,dx$'in integralini gördüğünüzde cevabın $x^3/3$ olduğunu bilmeniz gibi.)

Aslında biraz daha fazlasını görmelisiniz. Sadece $(x - ct)$'nin herhangi bir fonksiyonu değil, aynı zamanda $(x + ct)$'nin de herhangi bir fonksiyonu çözüme eşittir. Dalga denklemi sadece c^2 içerdiğinden dolayı, c'nin işaretini değiştirmek bir farklılık yaratmaz. Aslında, tek boyutlu dalga denkleminin en genel çözümü, biri $(x - ct)$'nin diğeri de $(x + ct)$'nin olan iki fonksiyonun toplamıdır:

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{20.24}$$

İlk terim artı x yönünde hareket eden bir dalgayı, ikinci terim de eksi x yönünde hareket eden rastgele bir dalgayı temsil eder. Genel çözüm, aynı anda var olan bu türden iki dalganın üst üste bindirilmesiyle bulunur.

Şimdi üzerinde düşünmeniz için size eğlenceli bir soru. Aşağıdaki gibi bir ψ fonksiyonunu ele alalım:

$$\psi = \cos kx \cos kct$$

Bu Denklem $(x - ct)$'nin veya $(x + ct)$'nin bir fonksiyonu biçiminde değildir. Yine de, bu fonksiyonun dalga denkleminin bir çözümü olduğunu, fonksiyonu Denk. (20.20)'ye doğrudan yerleştirerek kolaylıkla gösterebilirsiniz. Bu durumda, genel çözümün Denk. (20.24) biçiminde olduğunu nasıl söyleyebiliriz?

Dalga denkleminin çözümüyle ilgili sonuçlarımızı elektrik alanın y bileşeni E_y'ye uyguladığımızda, E_y'nin x'le rastgele bir şekilde değiştiği sonucuna varırız. Yine de her zaman için alanlar iki şeklin toplamı olarak ele alınabilir. Bir dalga uzayda bir yönde, elektrik alana dik bir manyetik alanla, c hızıyla ilerlerken, bir diğer dalga da zıt yönde aynı hızda ilerler. Bu tür dalgalar bildiğimiz elektromanyetik dalgalara karşılık gelir: ışık, radyo dalgaları, kızılaltı ışınım, morötesi ışınım, X-ışınları vesaire. I. Ciltte detaylı bir şekilde ışığın ışınımını tartışmıştık. Orada öğrendiğimiz her şey herhangi bir elektromanyetik dalgaya uygulanabildiğinden, bu dalgaların davranışlarının detaylarına burada girmeye gerek görmüyoruz.

Belki burada, elektromanyetik dalgaların kutuplanmasına dair soru üzerinde birkaç yorumda bulunmalı. Çözümümüzü yazarken, elektrik alanın sadece y bileşeni olduğu özel durumu ele aldık. Elektrik alanın sadece z bileşeni olduğu, artı veya eksi x yönünde ilerleyen dalgalar için de bir başka çözüm olduğu aşikârdır. Maxwell denklemleri doğrusal olduğundan, x yönünde ilerkeyen tek boyutlu dalgalar için genel çözüm E_y ve E_z dalgalarının toplamıdır. Genel çözüm aşağıdaki denklemlerle özetlenmiştir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= (0, E_y, E_z)\\
E_y &= f(x - ct) + g(x + ct)\\
E_z &= F(x - ct) + G(x + ct)\\
\boldsymbol{B} &= (0, B_y, B_z)\\
cB_z &= f(x - ct) - g(x + ct)\\
cB_y &= -F(x - ct) + G(x + ct)
\end{aligned} \tag{20.25}$$

Bu tür elektromanyetik dalgalarının, yönü sabit olmayan fakat yz düzleminde rastgele bir şekillde dönen bir $\boldsymbol{E}$ vektörü vardır. Her noktada manyetik alan daima elektrik alana ve ilerleme yönüne diktir.

Bir yönde, diyelim ki x yönü, sadece dalgalar ilerliyorsa; elektrik ve manyetik alanların birbirlerine göre yönelimini gösteren basit bir kural vardır. Kurala

göre, $E \times B$ vektörel çarpımı –ki elbette bu da hem E'ye, hem de B'ye dik açılarda bir vektördür– dalganın ilerlediği yönü işaret eder. E eğer B'ye doğru sağ elli bir vidayla döndürülürse, vida dalga hızının yönünü işaret eder. (Daha sonra, $E \times B$ vektörünün özel bir fiziksel önemi olduğunu göreceğiz: O, bir elektromanyetik alandaki enerjinin akışını tanımlayan bir vektördür.)

20-2 Üç boyutlu dalgalar

Şimdiki konumuz üç boyutlu dalgalar. E vektörünün dalga denklemini sağladığını zaten gördük. Aynı sonuca doğrudan Maxwell denklemlerindene varmak mümkündür. Aşağıdaki denklemle başlayalım:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ve her iki tarafın bükümünü alalım:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) \tag{20.26}$$

Herhangi bir vektörün bükümünün bükümünün, biri diverjans ve diğeri de Laplace içeren iki terimin toplamı olarak yazılabildiğini hatırlayın:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

Öte yandan, boş uzayda E'nin diverjansı sıfırdır; geriye sadece Laplace terimi kalır. Ayrıca, boş uzaydaki Maxwell denklemlerinin [Denklem (20.12)] dördüncüsünden biliyoruz ki, $c^2 \nabla \times B$'nin zamana göre türevi, E'nin t'ye göre ikinci türevidir:

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Bu durumda Denk. (20.26), şu üç boyutlu dalga denklemine dönüşür:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Bileşenlerine ayırıp, güzelliğini ortaya koyarsak da aşağıdaki hale dönüşür:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{20.27}$$

Genel dalga çözümünü nasıl buluruz peki? Üç boyutlu dalga denkleminin tüm çözümleri, şu ana kadar bulduğumuz tek boyutlu çözümlerin üst üste bindirmesi olarak gösterilebilir. Alanın y veya z'ye bağlı olmadığını varsayıp, x yönünde ilerleyen dalgaların denklemlerini elde etmiştik. x ve z'ye bağlı olmayıp, y yönünde ilerleyen dalgalar için de çözümler olduğu açıktır. Elbette bir de, x ve y'ye bağlı olmayıp, z yönünde ilerleyen dalgalar için çözümler vardır. Genel olarak ifade edecek olursak, denklemlerimizi vektör biçiminde yazdığımızdan dolayı üç boyutlu dalga denklemi, düzlem dalgalarının ilerlediği herhangi bir yönde çözümü olabilir. Denklemler doğrusal olduğundan, aynı anda farklı yönlerde hareket eden istediğimiz kadar düzlem dalgasını ele alabiliriz. Böylece üç boyutlu dalga denkleminin en genel çözümü, her yönde hareket eden bütün düzlem dalgalarının üst üste binmesi olur.

Bulunduğunuz dersliğin içindeki uzayda bulunan elektrik ve manyetik alanların nasıl göründüğünü hayal etmeye çalışın. Her şeyden önce, dünyanın içindeki akımlardan kaynaklanan kararlı bir manyetik alan vardır: dünyanın kararlı manyetik alanı. Etrafınızdaki insanların oturup kalkarken veya paltolarını kolçaklara sürterken yarattıkları elektrik yüklerinden kaynaklanan neredeyse - statik, düzensiz bazı elektrik alanlar olabilir belki. Elektrik tellerinin içinde salınan akımlardan kaynaklanan manyetik alanlar vardır; bunlar Boulder Bara-

jındaki jeneratörle senkronize halde saniyede 60 çevrimle değişirler. Daha ilginç olanlarsa, çok yüksek frekanslarda değişkenlik gösteren elektrik ve manyetik alanlardır. Örneğin, pencereden gelen ışık önce tabana ve sonra duvardan duvara doğru yansırken, saniyede yaklaşık 300.000 kilometre hızla ilerleyen elektrik ve manyetik alanların kıpırtıları vardır. Bir de odadaki insanların sıcak alınlarından, soğuk kara tahtaya doğru hareket eden kızılaltı dalgalar vardır. Daha morötesi ışığı, X-ışınlarını ve odadan geçip giden radyo dalgalarını ilave etmedik.

Oda boyunca uçan elektromanyetik dalgalar bir caz orkestrasının müziğini taşımakta. Dünyanın bir başka köşesindeki olayların görüntülerini taşıyan, bir dizi vuruşla dalga boyları değiştirilen dalgalar var. Bu dalgaların gerçekliğini görmek için, onları ses ve görüntüye çeviren elektronik cihazların düğmesini çevirmek yeterlidir.

En küçük kıpırtıları bile analiz edecek şekilde detaya inersek; çok büyük uzaklıklardan odaya gelmiş küçük elektromanyetik dalgaları keşfederiz. Dalga boylarının arası otuz santimetre olan bir elektrik alanın ufak salınımlarını görürüz. Bu, Venüs'ü henüz geçmiş olan Mariner II uzay aracından dünyaya iletilmiş elektrik alandır. Gezegenler hakkında edindiği bilgilerin (dünyamızdan uzay aracına giden elektromanyetik dalgalarla edinilmiş bilgiler) özetlerini bize sinyallerle göndermiştir.

Elektrik ve manyetik alanın çok küçük kıpırtıları, evrenin en uzak köşelerindeki, milyarlarca ışık yılı uzaktaki galaksilerden kaynaklanan dalgalardır. Bunu, bulunduğunuz oda kadar büyük antenler inşa ederek keşfettik. Bu tür radyo dalgaları, en büyük optik teleskopların bile göremeyeceği kadar uzak bölgelerde tespit edilmiştir. Optik teleskoplar bile aslında basitçe elektromanyetik dalga toplayıcılarıdır. Yıldız dediklerimiz aslında sadece dünyamıza ulaşan elektrik ve manyetik alanların karmaşık salınmalarını dikkatlice çalışarak, onlardan şu ana kadar elde edebildiğimiz tek fiziksel gerçekliğin çıkarımlardır.

Daha da fazlası var elbette: Kilometrelerce ötede çakmış bir şimşekten kaynaklanan alanlar, odamıza giren yüklü kozmik ışın parçacıklarının alanları ve daha niceleri. Etrafınızdaki uzayda bulunan elektrik alan ne kadar karmaşık, görüyor musunuz? Yine de, daima üç boyutlu dalga denklemini sağlamakta.

20-3 Bilimsel hayal gücü

Size elektrik ve manyetik alanları hayal etmenizi istediğimi düşünün. Ne yaparsınız? Nasıl yapacağınızı biliyor musunuz? Elektrik ve manyetik alanı nasıl hayal *ederim*? Gerçekten ne *görürüm*? Bilimsel hayal gücü için gerekenler nelerdir? Bir odada görünmez melekleri hayal etmekle aynı şey midir? Hayır, aynı şey değildir. Elektromanyetik alanları anlamak, görünmez melekleri anlamaktan çok daha yüksek derecede bir hayal gücü gerektirir. Neden? Çünkü görünmez melekleri anlaşılabilir kılmak için tek yapmam gereken özelliklerini *bir miktar* değiştirmektir. Onları birazcık görünür kılarım ve böylece kanatlarının, vücutlarının ve halelerinin şekillerini görebilirim. Görülebilir bir melek hayal etmeyi başardığımda, soyutlama görece kolaydır. Neredeyse görünmez derecede melekleri alır ve onları tamamen görünmez hayal edersiniz. Bu durumda şunu diyebilirsiniz: "Profesör, bana elektromanyetik dalgaların yaklaşık bir tanımını verin ki, belki tanım biraz yanlış da olsa, ben de onları aynı neredeyse görünmez melekleri görebildiğim gibi görebileyim. Sonra da gerekli soyutlama derecesine gelene kadar resmi değiştiririm."

Üzgünüm, sizin için bunu yapamam. Nasıl yapılabileceğini bilmiyorum. Elektromanyetik alana dair herhangi bir anlamda doğru bir resim yok kafamda. Elektromanyetik alanı uzun süredir biliyorum. 25 yıl önce sizin bulunduğunuz sıralardaydım ve 25 yıldır bu kıpırdaşan dalgalar üzerine düşünüyorum. Uzay-

da yol alan manyetik alandan bahsetmeye başladığımda, E ve B alanlarını konuşuyor oluyorum ve kollarımı sallamaya başlıyorum. Siz de benim onları görebildiğimi düşünüyorsunuz. Size ne gördüğümü söyleyeyim. Muğlak, gölgeli birtakım çizgiler var hayalimde. Kiminin üzerinde E ve B yazılmış, bazı yerlerde oklar var. Çok yakından baktığımda oklar kayboluveriyor. Uzayda yol alan alanlardan bahsettiğimde, nesneleri tanımlamakta kullandığım sembollerle o nesneleri karıştırmaya başlıyorum. Gerçek dalgalara uzaktan biraz benzeyen bir resim bile çizemiyorum. Dalgaları görmekte zorlanıyorsanız, merak etmeyin; yalnız değilsiniz.

Şu an uğraştığımız bilim, hayal gücümüzü son derece zorlamakta. Gerekli hayal gücü derecesi, çok eskiden üzerinde uğraştığımız fikirler için gerekli hayal gücünden çok daha uç noktadadır. Çağdaş fikirleri hayal etmek çok daha zordur. Yardımcı araçlarımız da vardır elbette. Matematiksel denklemler, kurallar ve bir sürü de resim. Şimdi farkına varıyorum; uzayda elektromanyetik alandan bahsettiğim zaman, çizilen bütün diyagramların üst üste bindiği bir resmi görüyorum. Hareket eden küçük alan çizgisi demetleri görmüyorum; zira eğer ben farklı bir hızda hareket edersem çizgilerin kaybolacağından korkuyorum. Her zaman da elektrik ve manyetik alanları görmüyorum; çünkü bazen de, kıpırdaşan şeyler arasında belki de onlar daha önemli olduğundan, vektör potansiyeli ve skaler potansiyeli kullanarak kafamda resim çizmiş olmam gerektiğini düşünüyorum.

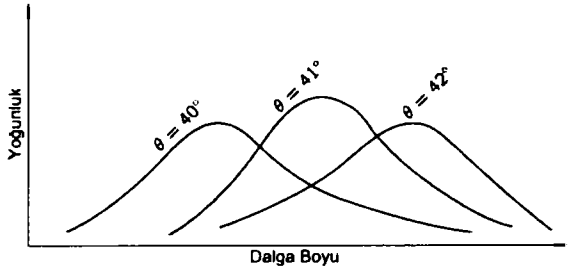
Belki de en iyisi matematiksel bakış açısı kullanmak diyebilirsiniz. Peki, matematiksel bakış açısı nedir? Matematiksel bakış açısına göre, uzaydaki her noktada bir elektrik alan vektörü ve bir de manyetik alan vektörü vardır. Dolayısıyla, her noktayla ilişkili altı sayı vardır. Uzaydaki her noktada altı sayı düşünebiliyor musunuz? Çok zor. Her noktayla ilişkili *bir* sayı bile düşünebiliyor musunuz? Ben düşünemiyorum! Böyle bir şeyi, uzaydaki her noktanın sıcaklığı olarak hayal edebiliyorum. Bu, anlaşılabilir geliyor. Konumdan konuma değişen bir sıcaklık ve soğukluk vardır. Ama dürüstçe konuşmak gerekirse, her noktada bir *sayı* olması fikrini ben anlamıyorum.

Belki de şu soruyu sormalıyız: Elektrik alanı sıcaklığa benzer bir şeyle, örneğin bir parça peltenin yerdeğiştirmesiyle, gösterebilir miyiz? Tüm dünyanın pelteyle dolu olduğunu hayal edin. Alanlar da peltenin içindeki bazı bozulmalar olsun. Örneğin, peltenin gelmesi veya bükülmesi gibi. Bu durumda alanı görselleştirebiliriz. Ne olduğunu "gördüğümüz"de de, soyutlama yaparak pelteyi uzaklaştırabiliriz resimden. Yıllar boyunca insanlar bunu yapmaya çalıştılar. Maxwell, Ampère, Faraday ve diğerleri elektromanyetizmayı bu şekilde anlamaya çalıştılar. (Bazen de soyut pelteye "esir" adını verdiler.) Sonradan ortaya çıktı ki elektromanyetik alanı hayal etmeye çalışmak ilerlemeye engeldi. Ne yazık ki soyutlamalarla sınırlanmış durumdayız. Alanı tespit etmek için cihazlara ve alanı tanımlamak için de matematiksel sembollere mecburuz. Yine de, bir anlamda alanlar gerçektir; çünkü matematiksel denklemlerle oynamayı bitirdiğimizde –görselleştirmeye çalışsak da çalışmasak da– cihazlarımızın Mariner II'den sinyalleri tespit etmesini veya milyarlar yıl ötedeki galaksiler hakkında keşiflerde bulunmalarını ve daha nicesini sağlayabiliriz.

Bilimdeki hayal gücü konusu çoğu zaman diğer disiplinlerdeki insanlar tarafından yanlış anlaşılır. "Bak, bir halde bir arada bulunan insanlara dair bir resim. Şimdi ne olacağını hayal ediyorsun?" derler. Biz de, "bilmem, hayal edemiyorum" deriz. Bu yüzden de zayıf bir hayal gücüne sahip olduğumuzu düşünebilirler. Bilimde hayal etmeye *izinli olduğumuz şeyler*, diğer bildiğimiz her şeyle *uyumlu olmalıdır*. Diğer bir deyişle, üzerinde konuştuğumuz elektrik alanlar ve dalgalar kafamıza estiği gibi şekillendirdiğimiz birtakım mutlu düşünceler değildir. Bildiğimiz fizik yasalarıyla uyumlu fikirler olmalıdırlar. Emin olduğumuz doğa yasalarına aykırı şeyleri hayal etmek için kendimize izin veremeyiz. Bizim hayal etme şeklimiz biraz sıkıntılı bir süreçtir. Daha önce hiç

görülmedik, hiç duyulmadık bir şeyi hayal etmek zorunda kaldığımızda bile, fikirlerimiz doğanın gerçekte nasıl olduğuna dair bilgimizdeki koşullarla sınırlanmıştır. Hem daha önce görülmedik, hem de önceden bildiğimiz her şeyle tutarlı bir şey yaratmaya çalışmak inanılmaz derecede zordur.

Hazır bu konu üzerinde duruyorken, *göremediğimiz* bir *güzelliği* hayal edebilmemizin mümkün olup olamayacağını tartışmak istiyorum. Bu, ilginç bir sorudur. Bir gökkuşağına baktığımızda gözümüze olağanüstü gözükür. Herkes iç çeker ve şöyle der: "Aaaah, bir gökkuşağı". (Bakın ne kadar bilimselim, görüyor musunuz? Bir şeyin güzel olup olmadığını, elimde onu tanımlayacak bir deneysel yöntem olmadığı sürece söylemeye çekiniyorum.) Peki görme engelli olsaydık, gökkuşağını nasıl tanımlardık? Sodyum-kloridin kızılaltı yansıma katsayısını ölçerken ya da göremediğimiz bir galaksiden gelen dalgaların frekansı hakkında konuşurken bir şey *görmüyoruz.* Bir diyagram, bir grafik çizeriz bunlar için. Gökkuşağını ele alalım. Onun anlamak için çizeceğimiz grafik, gökyüzünde her yönde spektrofotometreyle ölçülen dalga boyu ile ışınımın yoğunluğunun karşılaştırmasını gösteren bir grafik olurdu. Genel olarak, bu tür ölçümler bize düze yakın bir eğri verir. Sonra bir gün biri ölçüm yaparken, belli hava koşullarında ve gökyüzünde belli açılarda, dalga boyunun bir fonksiyonu olarak yoğunluk dağılımının bir garip olduğunu fark eder. Grafikte bir tepeyle karşılaşmıştır. Cihazın açısı çok az oynatıldığında, tepenin maksimum noktası bir dalga boyundan diğerine kayar. Sonra bir gün, görme engellilerin fizik dergisi "Belirli hava koşullarında ışınım yoğunluğunun açıya bağlı fonksiyonu" adlı bir teknik makale yayınlar. Böyle bir makalede Şekil 20-5'teki gibi bir grafik görürsünüz. Yazar, grafik için düştüğü notta büyük açılarda, büyük dalga boylarında daha fazla ışınım olduğunu, küçük açılarda ise maksimum ışınımın daha küçük dalga boylarında görüldüğünü belirtmiştir. (Bizim bakış açımızdan, ışığın 40^0 derecede ağırlıklı yeşil olduğunu ve 42 derecede de ağırlıklı kırmızı olduğunu söyleyebiliriz.)



Şekil 20-5 Belirli meteorolojik koşullarda, üç farklı açı için, dalga boyunun fonksiyonu olarak elektromanyetik dalgaların yoğunluğu (açı, güneşe karşı yönden ölçülmüştür).

Şekil 20-5'teki grafiği güzel buluyor musunuz? Bir gökkuşağına baktığımızda kavradığımız kadarından daha fazla detay içermekte; çünkü gözlerimiz detayları bir dağılım şeklinde göremez. Buna rağmen, bakan gözler gökkuşağını güzel bulur. Gökkuşağına doğrudan baktığımızda gördüğümüz güzelliği dağılım eğrilerinde de görebilecek hayal gücüne sahip miyiz? Açıkçası, bilmiyorum.

Elimizde sodyum klorid kristalinin yansıma katsayısını, kızılaltı dalga boyunun ve açının bir fonksiyonu olarak gösteren bir grafik olsun. Gözlerim kızılaltını görebilseydi, bu grafik gözlerimin göreceği şeyi temsil ederdi. Belki şöyle olurdu: "Metalik kırmızı" bir yüzeyden yansıyanlarla karışmış, biraz ışıldayan, parlak "yeşil". Bu çok güzel bir şeydir; ama bir cihazla ölçülmüş NaCI yansıma katsayısının grafiğine bakıp da,, ikisinin aynı güzelliğe sahip olduğunu söyleyip söyleyemeyeceğimi bilemiyorum.

Diğer yandan, ölçüm sonuçlarında bir güzellik göremesek de, genel fizik yasalarını tanımlayan denklemlerde belli bir güzellik *görebildiğimizi* iddia edebiliriz. Dalga denklemi (20.9)'da örneğin, x, y, z ve t'nin görünme düzeninde hoş bir şeyler vardır. x, y, z ve t'nin görünümündeki bu hoş simetri akla, dört boyutla ilgili daha da güzel bir şey olduğu, uzayın dört boyutlu bir simetriye sahip olabileceği ve buradan yola çıkarak özel görelilik kuramına dair gelişmelerin analiz edilebileceği ihtimalini getirir. Denklemlerle ilişkili, daha fazla göreceğimiz entelektüel güzellik vardır.

20-4 Küresel dalgalar

Düzlem dalgalarına denk gelen dalga denklemi çözümleri olduğunu ve herhangi bir elektromanyetik dalganın birçok düzlem dalgasının üst üste bindirilmesi olarak tanımlanabileceğini gördük. Bununla birlikte, belirli özel durumlarda dalga alanını farklı bir matematiksel biçimde göstermek daha uygundur. Şimdi küresel dalgalar kuramını tartışma vakti. Küresel dalgalar, belli bir merkezden dışa doğru yayılan küresel yüzeylerdir. Bir göle bir taş attığımızda, ortaya çıkan dalgacıklar yüzeyde çembersel dalgalar olarak yayılır. Bunlar iki boyutlu dalgalardır. Küresel dalga da buna benzer bir şeydir, farkı üç boyutta yayılmasıdır.

Küresel dalgaları tanımlamaya başlamadan önce biraz matematikle donanalım. Elimizde, sadece belirli bir başlangıç noktasından r radyal mesafesine bağlı bir fonksiyon olsun. Bir başka deyişle, küresel simetrik bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyona $\psi(r)$ diyelim. r başlangıç noktasına olan radyal mesafedir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hangi $\psi(r)$ fonksiyonlarının dalga denklemini sağladığını bulabilmek için, ψ'nin Laplace'ına dair bir ifadeye ihtiyacımız var. Dolayısıyla, ψ'nin x, y ve z'ye göre ikinci dereceden türevlerinin toplamını bulmalıyız. $\psi'(r)$ gösterimini ψ'nin r'ye göre türevini ve $\psi''(r)$ gösterimini de ψ'nin r'ye göre ikinci dereceden türevini ifade etmek için kullanacağız.

Öncelikle, x'e göre türevleri bulalım. İlk türev,

$$\frac{\partial\psi(r)}{\partial x} = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$$

olur. ψ'nin x'e göre ikinci türevi de aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \psi''\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \psi'\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

Aşağıdaki eşitliklerden yola çıkarak, r'nin x'e göre kısmi türevlerini alabiliriz:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$$

Böylece, ψ'nin x'e göre ikinci türevi

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\psi' \tag{20.28}$$

olur. Benzer şekilde, diğer türevler de aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)\psi' \tag{20.29}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)\psi' \tag{20.30}$$

Laplace, bu üç türevin toplamıdır. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ eşitliğini kullanarak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\nabla^2\psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r}\psi'(r) \tag{20.31}$$

Bu denklemi aşağıdaki şekilde yazmak sıklıkla daha uygundur:

$$\nabla^2\psi(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) \tag{20.32}$$

Denklem (20.32)'deki diferansiyeli alırsanız, sağ tarafın Denk. (20.31)'e eşit olduğunu göreceksiniz.

Küresel dalgalar olarak yayılabilen küresel simetrik alanları ele alacaksak, alan niceliğimiz hem r'nin hem de t'nin bir fonksiyonu olmalıdır. O zaman,

hangi $\psi(r, t)$ fonksiyonlarının, üç boyutlu dalga denkleminin çözümü olduğunu sorduğumuzu düşünelim:

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0 \tag{20.33}$$

$\psi(r, t)$ sadece r boyunca uzamsal koordinatlara bağlı olduğundan, denklemi yukarda bulduğumuz Laplace denklemi (20.32) için kullanabiliriz. Daha da doğru olmak için, ψ aynı zaman da t'nin de bir fonksiyonu olduğundan, türevleri r'ye göre kısmi türevler olarak yazmalıyız. Bu durumda dalga denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0$$

Şimdi, düzlem dalgası probleminden daha karmaşık gözüken bu denklemi çözmeliyiz. Ancak dikkat ederseniz, bu denklemi r'yle çarparsak, aşağıdaki ifadeyi elde ettiğimizi görürsünüz:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0 \tag{20.34}$$

Bu denklem, $r\psi$ fonksiyonunun, r değişkeninde tek boyutlu dalga denklemini sağladığını ortaya koyar. Daha önce sıklıkla belirttiğimiz, aynı denklemlerin aynı çözümlere sahip olması gerektiğine dair genel ilkeyi kullandığımızda, $r\psi$ sadece $(r - ct)$'nin fonksiyonu olduğunda Denk. (20.34)'ün çözümü olabildiğini görürüz. Diğer bir deyişle, küresel dalgaların şu biçimde olması gerektiğini biliyoruz:

$$r\psi(r, t) = f(r - ct)$$

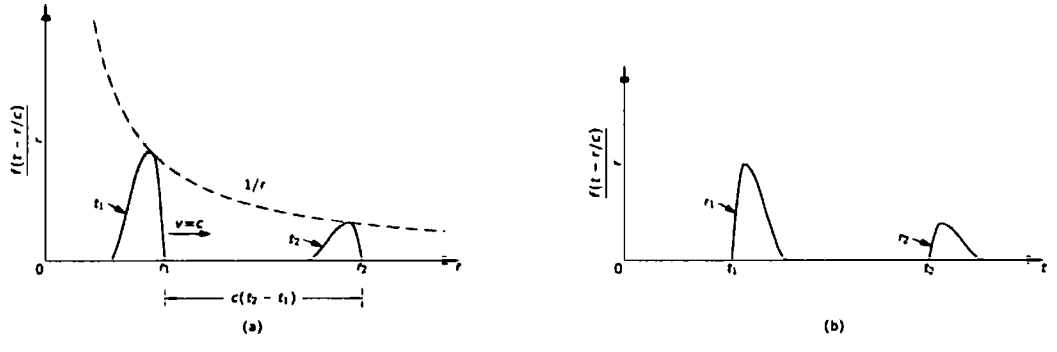
Ya da daha önce gördüğümüz üzere, $r\psi$'nin aşağıdaki biçimde de olabileceğini söyleyebiliriz:

$$r\psi = f(t - r/c)$$

Bu ifadeyi r'ye böldüğümüzde, alan niceliği ψ'nin (ne ise artık o)

$$\psi = \frac{f(t - r/c)}{r} \tag{20.35}$$

olarak ifade edilebildiğini görürüz. Böyle bir fonksiyon, kaynağında dışarı doğru c hızında hareket eden genel bir küresel dalgayı temsil eder. Paydadaki r'yi bir an için görmezden gelirsek, belirli bir zamanda başlangıca olan uzaklığın bir fonksiyonu olarak dalga genliğinin, dışarıya doğru c hızında hareket eden belirli bir şekli vardır. Paydadaki r faktörüyse, dalga genliğinin, dalga ilerledikçe, $1/r$'yle orantılı olarak azaldığını söyler. Bir başka deyişle, dalga ilerledikçe genliğinin sabit kaldığı düzlem dalgalarının tersine, küresel dalganın genliği Şekil 20-6'da görüldüğü gibi düzenli bir şekilde azalır. Bu etkiyi, basit bir fizikse akıl yürütmeyle anlamak kolaydır.



Şekil 20-6 Küresel bir dalga $\psi = f(t + r/c)/r$. (a) $t = t_1$ İçin r'nin bir fonksiyonu olarak ψ ve t_2 zamanında aynı dalga. (b) $r = r_1$ için t'nin bir fonksiyonu olarak ψ ve aynı dalganın r_2'deki görüntüsü.

Bir dalganın enerji yoğunluğunun, dalga genliğinin karesine bağlı olduğunu biliyoruz. Dalga yayıldıkça, enerjisi de katedilen radyal mesafenin karesiyle orantılı daha büyük alanlara yayılır. Toplam enerji korunduğuna göre, enerji yoğunluğu $1/r^2$ ve dalga genliği de $1/r$'yle orantılı olarak azalır. Dolayısıyla, Denk. (20.35) küresel bir dalganın "akla yatkın" biçimidir.

Tek boyutlu dalga denkleminin ikinci olası çözümünü göz ardı etmiştik:

$$r\psi = g(t + r/c)$$

ya da

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}$$

Bu aynı zamanda küresel bir dalgayı temsil eder; ancak bu dalga r'dan kaynağa doğru *içeri* hareket eden bir dalgadır.

Şimdi özel bir varsayımda bulunacağız. Herhangi bir ispatta bulunmadan, bir kaynaktan çıkan dalgaların sadece *dışarı* doğru giden dalgalar olduğunu düşünelim. Dalgaların, yüklerin hareketlerinden kaynaklandığını bildiğimize göre dalgaların yüklerden dışarı doğru gittiğini düşünmek isteriz. Yükler hareket geçmeden önce, sonsuzdan gelen küresel bir dalganın tam da yükler hareketlenmeye başladığında onların konumuna vardığını düşünmek garip olurdu. Olasılığı olan bir çözümdür aslında; ama tecrübelerimize göre yükler ivmelendiğinde, dalgalar yüklerden dışarı doğru hareket ederler. Maxwell denklemlerine göre her iki durum da olası olsa da, tecrübemize dayanarak *ilave* bir olgu daha ekleyecek ve sadece dışarı doğru giden dalganın "fiziksel olarak anlamlı" olduğunu söyleyeceğiz. Bununla birlikte, bu ilave varsayımımızın ilginç bir sonucunu da not etmeliyiz: Maxwell denklemlerinde görünen zamana göre simetriyi kaldırmış olduk. $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ için orjinal denklemler ve onlardan çıkarttığımız dalga denklemlerinin, t'nin işaretini değiştirsek bile aynı kalma özelliği vardır. Bu denklemler, bir yönde giden bir dalgaya karşılık gelen her çözüm için, tersi yönde hareket eden bir dalgaya ait ve eşit bir çözüm var olduğunu gösterirler. Sadece dışarıya doğru giden küresel dalgaları ele alacağımıza dair ifademiz önemli bir ilave varsayımdır. (Bu ilave varsayımın göz ardı edildiği elektrodinamiğin özel bir formülasyonu dikkatlice çalışılmıştır. İlginç bir şekilde, birçok koşulda, fiziksel olarak saçma sonuçlara *varılmadığı* görülmüştür; fakat gene de bu fikirleri tartışmak bizi yolumuzdan çok saptırır. Onlarla ilgili Bölüm 28'de biraz daha konuşacağız.)

Bir başka önemli noktayı daha belirtmeli. Dışarı doğru ilerleyen bir dalga için çözümümüz olan Denk. (20.35)'te, ψ fonksiyonu başlangıçta sonsuzdur. Bu, bir miktar gariptir. Dalga çözümümüzün her yerde düzgün olmasını isteriz. Elde ettiğimiz çözüm, başlangıçta bir miktar kaynak olduğu fiziksel durumu temsil etmeli. Diğer bir deyişle, farkında olmadan bir hata yaptık. Serbest dalga denklemi (20.33)'ü *her yerde* çözmedik. Denklem (20.33)'ü, başlangıç haricinde, her yerde sağ taraf sıfır olacak şekilde çözdük. Hatamız buraya sızdı; çünkü türevimizdeki adımların bazıları $r = 0$ olduğunda "geçerli" değildir.

Şimdi, bir elektrostatik probleminde benzer bir hatayı yapmanın ne kadar kolay olduğunu gösterelim. Boş uzaydaki bir elektrostatik potansiyeline ait bir denklemin, $\nabla^2\phi = 0$, çözümünü bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Laplace sıfıra eşittir; çünkü hiçbir yerde yük olmadığını varsayıyoruz. Ya peki bu denklem için küresel simetrik bir çözüm, diğer bir deyişle sadece r'ye dayanan bir ϕ fonksiyonu elde edebilir miyiz? Denklem (20.32)'yi Laplace için kullanırsak,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu denklemi r'yle çarparsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0$$

Bir kere r'ye göre integralini alırsak, $r\phi$'nin ilk türevinin sabit olduğunu bulu-

ruz. Buna a diyelim:

$$\frac{d}{dr}(r\phi) = a$$

Bir daha integralini aldığımızda, $r\phi$ için şu aşağıdaki eşitliği bulluruz. b, integralin sabitidir:

$$r\phi = ar + b$$

Böylece, şu ϕ'nin elektrostatik potansiyel için boş uzaydaki çözüm olduğunu bulmuş olduk:

$$\phi = a + \frac{b}{r}$$

Bir şeyler açıkça yanlış. Hiç elektrik yükü olmayan bölgede elektrostatik potansiyel için çözümü biliyoruz: potansiyel her yerde bir sabittir. Bu, çözümdeki ilk terime karşılık gelir. Elimizde ikinci bir terim daha var ama ve o da potansiyele, kaynaktan uzaklıkla ters orantılı bir şekilde değişen bir katkı olduğunu ifade eder. Her ne kadar potansiyeli boş uzayda çözdüğümüzü zannettiysek de, çözümümüz aynı zamanda başlangıçtaki nokta kaynak için alanı da veriyor. Şimdi olan ile dalga denklemini küresel simetrik bir çözüm için çözdüğümüzde olan arasındaki benzerliği görüyor musunuz? Başlangıçta gerçekten hiç yük veya akım olmasaydı, küresel olarak dışarıya giden dalgalar olmazdı. Küresel dalgalar, elbette, başlangıçtaki kaynaklarca meydana getirilmiş olmalı. Bir sonraki bölümde, dışarıya doğru giden elektromanyetik dalgalar ve onları meydana getiren akımlar ile voltajlar arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

21

MAXWELL DENKLEMLERİNİN AKIMLAR VE YÜKLERLE ÇÖZÜMLERİ

21-1 Işık ve elektromanyetik dalgalar

21-1 Işık ve elektromanyetik dalgalar
21-2 Nokta kaynaktan yayılan küresel dalgalar
21-3 Maxwell denklemlerinin genel çözümü
21-4 Salınan bir dipolün alanları
21-5 Hareket eden bir yükün potansiyelleri; Liénard ve Wiechert'in genel çözümü
21-6 Sabit hızda ilerleyen yük için potansiyeller; Lorentz denklemi

Son bölümde, Maxwell denklemlerinin çözümlerinde elektrik ve manyetizma dalgalarını içerdiğini gördük. Bu dalgalar, dalga boyuna bağlı olarak, radyo, ışık, X-ışınları veya benzeri olgulara karşılık gelirler. I. Ciltte ışık konusunu ayrıntılı şekilde çalıştık. Bu bölümde iki konuyu birbirine bağlamak istiyoruz. Maxwell denklemlerinin, daha önce ışık üzerine çalışmamızın temelini oluşturabileceğini göstermek istiyoruz.

Işık konusunu çalışırken, rastgele bir yolda ilerleyen bir yük tarafından meydana getirilen elektrik ve manyetik alanlar için denklemleri yazmıştık:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{e}_{r'}\right] \tag{21.1}$$

ve

$$c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}$$

[*Bkz.* I. Cilt, Denk. (28.3) ve (28.4). Aşağıda açıkladığım gibi, buradaki işaretler eski işaretlerin eksisidir.]

Bir yük rastgele hareket ediyorsa, bir noktada *şimdi* bulacağımız elektrik alan parçacığın daha önceki bir andaki konumuna ve hareketine bağlıdır. O an, c hızıyla hareket eden ışığın yükten alan noktasına olan r' mesafesini katetmesi için gereken zaman kadar öncedir. Diğer bir deyişle, t zamanında (1) noktasındaki elektrik alanını bulmak istiyorsak, yükün (2′) konumunu ve $(t - r'/c)$ zamanındaki hareketini hesaplamalıyız. r', yükün $(t - r'/c)$ zamanındaki (2′) konumundan (1) noktasına olan mesafedir. Üssü koymamızın nedeni, r''nün, parçacığın t zamanındaki konumu olan (2)'den alan noktası olan (1)'e olan uzaklık olmaması, (2′) noktasından (1) noktasına olan sözde "rötarlı mesafe" olmasını hatırlatmak istememizden dolayıdır. (*Bkz.* Şekil 21-1). Dikkat ederseniz, bu sefer birim vektör $\boldsymbol{e}_{r'}$'nin yönü için farklı bir gösterim kullanıyoruz. I. Cildin 28. ve 34. Bölümlerinde $\boldsymbol{r}'$yi (ve elbette $\boldsymbol{e}_{r'}$'yi) kaynağa *doğru* işaret ederken göstermek uygundu. Şimdiyse, $\boldsymbol{r}'$nin (2) noktasındaki yükten alan noktası (1)'e *doğru* yönlendiği Coulomb yasasını takip ediyoruz. Aradaki tek fark elbette, yeni $\boldsymbol{r}'$nin (ve $\boldsymbol{e}_{r'}$'nin) eskilerin eksi işaretlisi olmasıdır.

Gözden geçirme: I. Cilt, Bölüm 28, *Elektromanyetik Işınım*
I. Cilt, Bölüm 31, *Kırılma İndisi*
I. Cilt, Bölüm 34, *Işınımda Göreli Etkiler*

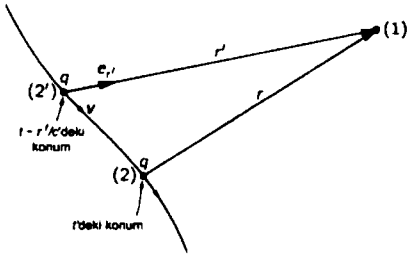
Bir yükün v hızı daima c'den çok azsa ve yükten çok uzaktaki noktaları ele alıyorsak, Denklem (21.1)'in sadece son terimi önemlidir ve alanlar şu şekilde yazılabilir:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'}\begin{bmatrix}\text{Yükün } (t - r'/c) \text{ noktasında,} \\ r'\text{'ne dik açılardaki ivmelenmesi}\end{bmatrix} \tag{21.1′}$$

ve

$$c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}$$

Gelin, Denk. (21.1)'in ne demek istediğine daha detaylı bakalım. $\boldsymbol{e}_{r'}$ vektörü, (1) noktasından (2′) gecikmeli konumuna doğru yönlenmiş birim vektördür. O halde ilk terim, gecikmeli konumdaki yükün Coulomb alanıdır. Buna "gecikmeli Coulomb alanı" diyebiliriz. Elektrik alan uzaklığın karesiyle ters orantılıdır ve yükün gecikmeli konumundan uzağa doğru ($\boldsymbol{e}_{r'}$ yönünde) yönlenmiştir.



Şekil 21-1 t zamanında (1)'deki alanlar, $(t - r'/c)$ zamanında q yükünün bulunduğu (2′) konumuna bağlıdır.

Bu sadece ilk terimdir. Diğer terimler bize, elektrik yasalarının tüm alanların statik olanlarla aynı olduğunu *söylemediğini;* sadece gecikmeli olduğunu (bu da bazen insanların söylemeyi sevdiği şeydir) söylediğini anlatır. "Gecikmeli Coulomb alanı"na iki terim daha eklemeliyiz. İkinci terim gecikmeli Coulomb alanına, r'/c değeriyle çarpılmış gecikmeli Coulomb alanının *değişim hızı* kadar bir "düzeltme" olduğunu anlatır. Bu terim bir nevi, ilk terimdeki gecikmeyi *telafi* etmeye meyillidir. İlk *iki* terim "gecikmeli Coulomb alanı"nı hesaplamak ve daha sonra r'/c kadar bir çarpanla onu geleceğe, *tam olarak t zamanına*, taşımak içindir. Bu taşıma doğrusaldır, sanki "gecikmeli Coulomb alanı (2') noktasındaki yük için hesaplanan hızda değişmeye devam edecekmişçesine varsaymışız gibi. Alan yavaşça değişiyorsa, gecikmenin etkisi düzeltme terimi sayesinde tamamen ortadan kalkar ve iki terimin birleşimi bize "anlık Coulomb alanı" olan elektrik alanı verir. Diğer bir deyişle, (2) noktasındaki yükün Coulomb alanını çok yaklaşık bir değerle verir.

Denklem (21.1)'deki son ve üçüncü terimimiz, $\boldsymbol{e}_{r'}$ birim vektörünün ikinci türevidir. Işık kavramını çalışırken, yükten çok uzak mesafelerde ilk iki terimin uzaklığın karesiyle ters orantılı değiştiği ve uzak mesafeler için son terime göre çok zayıf oldukları gerçeğini görmüştük. Böylece sadece son terime odaklanmış ve onun, yükün ivmelenmesinin gözlem hattına göre dik açılardaki bileşeniyle (yine, uzak mesafeler için) orantılı olduğunu göstermiştik. (Ayrıca, I. Ciltteki çoğu tartışmamızda yüklerin göreli olmayan hareketlerini ele almıştık. Görelilik etkilerini sadece bir bölümde, 34. Bölümde, ele almıştık.)

Şimdi bu iki şeyi birbirine bağlamaya çalışalım. Elimizde Maxwell denklemleri ve noktasal yük için Denk. (21.1) var. Birbirlerine eşdeğer olup olmadıklarını sormalıyız kesinlikle. Denklem (21.1)'i Maxwell denklemlerinden elde edebilirsek, ışık ile elektromanyetizma arasındaki ilişkiyi gerçekten anlayabiliriz. Bu bağlantıyı kurmak, bu bölümün ana amacıdır.

Sonradan ortaya çıktı ki, bunu başaramayacağız. Matematiksel detaylar o kadar karmaşıklaştı ki, o korkunç detayların içinde boğulup kaldık. Merak etmeyin, o kadar yaklaşacağız ki bağlantının nasıl yapılabileceğini kolayca görebileceksiniz. Kayıp parçalar sadece matematiksel detaylarda olacak. Bazılarınız bu bölümdeki matematiği çok karmaşık bulabilir ve akıl yürütmeyi yakından takip etmek istemeyebilirsiniz. Yine de, daha önce öğrendikleriniz ile şimdi öğrendikleriniz arasında bağlantı kurmanın veya en azından bu bağlantının nasıl yapılabileceğini belirtmenin önemli olduğunu düşünüyoruz. Daha önceki bölümlere bakarsanız, başlangıç noktası olarak ele aldığımız ifadenin yeni bir "varsayım" mı yoksa "temel bir yasa" mı olduğunu veya diğer bazı yasalardan çıkarılıp çıkarılamayacağını dikkatlice açıkladık. Bu yüzden, ışık ve Maxwell denklemleri arasında bağlantı kurmak da bizim yükümlülüğümüz. Belli yerlerde zorlaşabilir; ama ne yapacaksınız? Hayat bu, başka yolu yok.

21-2 Nokta kaynaktan yayılan küresel dalgalar

Bölüm 18'de gördük ki, Maxwell denklemleri

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{21.2}$$

ve

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{21.3}$$

eşitlikleri sayesinde çözülebilir. Bu durumda ϕ ile $\boldsymbol{A}$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{21.4}$$

ve

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2} \tag{21.5}$$

denklemlerinin çözümleri olmalıdır ve aynı zamanda şu aşağıdaki koşulu da sağlamalıdır:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{21.6}$$

Şimdi, Denk. (21.4) ve (21.5)'in çözümlerini bulalım. Bunu yapmak için, aşağıdaki denklemin çözümü olan ψ'yi bulmalıyız:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -s \tag{21.7}$$

Bu denklemdeki s kaynaktır ve değeri bilinmektedir. Denklem (21.4) için elbette s, ρ/ϵ_0'ya ve ψ de ϕ'ye eşittir veya ψ eğer A_x ise, s $j_x/\epsilon_0 c^2$'dir vs. Biz ise Denk. (21.7)'yi, ψ ve s'nin fiziksel olarak ne olduklarından bağımsız olarak matematiksel bir problem olarak ele almak istiyoruz.

ρ ve $\boldsymbol{j}$'nin sıfır olduğu yerlerde –bizim "boş" uzay dediğimiz yerlerde– ϕ ve $\boldsymbol{A}$ potansiyelleri ile $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ alanlarının hepsi, matematiksel biçimi aşağıda görünen, kaynağı olmayan üç boyutlu dalga denklemini sağlar:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{21.8}$$

Bölüm 20'de gördüğümüz üzere, bu denklemin çözümleri çok çeşitli dalgaları temsil edebilir: x yönündeki düzlem dalgaları, $\psi = f(t - x/c)$; y veya z yönündeki düzlem dalgaları veya herhangi bir yöndekileri; ya da şu aşağıdaki biçimdeki küresel dalgalar:

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} \tag{21.9}$$

(Çözümler başka şekillerde de yazılabilir; örneğin bir eksenden yayılan silindirik dalgalar gibi.)

Bir başka düştüğümüz not da, Denk. (21.9)'un fiziksel olarak boş uzaydaki bir dalgayı temsil etmediği. Dışa doğru yayılan bir dalganın olabilmesi için, başlangıç noktasında yükler olmalıdır. Diğer bir deyişle Denk. (21.9), $r = 0$ hariç her yerde Denk. (21.8)'in çözümüdür. 0 noktasındaysa, bazı kaynakları da içeren Denk. (21.7)'nin çözümüdür. Bakalım nasıl oluyormuş. Denklem (21.7)'deki ne tür bir s kaynağı, Denk. (21.9) gibi bir dalgaya yol açardı?

Denklem (21.9)'un küresel dalgasını ele alalım ve çok küçük r değeri için ne olduğuna bakalım. Bu durumda $f(t - r/c)$ fonksiyonundaki $-r/c$ gecikmesi, f düzgün bir fonksiyon olduğu sürece ihmal edilebilir ve ψ de şu olur:

$$\psi = \frac{f(t)}{r} \qquad (r \to 0) \tag{21.10}$$

ψ, başlangıçta bulunan ve zamanla değişen bir yük için Coulomb alanı gibidir. Başlangıca çok yakın bir bölgede, yoğunluğu ρ olan bir yük yığınımız olsun. Bu durumda $Q = \int \rho dV$ olduğunda

$$\phi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r}$$

eşitliğini buluruz. Böyle bir ϕ'nin aşağıdaki denklemi sağladığını biliyoruz:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Aynı matematiksel akıl yürütmeyi takip ederek, Denk. (21.10)'daki ψ'nin de aşağıdaki denklemi sağladığını söyleyebiliriz:

$$\nabla^2\psi = -s \qquad (r \to 0) \tag{21.11}$$

s ile f arasındaki ilişkiyi şöyle ifade edebiliriz:

$$f = \frac{S}{4\pi}$$

Yukarıdaki eşitlikteki S de

$$S = \int s dV$$

olarak ifade edilebilir. Aralarındaki tek fark, genel durumda s ve dolayısıyla S, zamana bağlı bir fonksiyon olabilir.

Buradaki önemini belirtmemiz gereken şey, ψ eğer Denk. (21.11)'i küçük r değeri için sağlıyorsa o zaman (21.7)'yi de sağlıyordur. Başlangıca yaklaştıkça, ψ'nin $1/r$'ye bağımlılığı uzay türevlerinin çok büyümesine yol açar. Buna rağmen, zaman türevleri değerlerini korur. [Onlar sadece $f(t)$'nin zaman türevleridir]. Dolayısıyla r sıfıra yaklaştıkça, Denk. (21.7)'deki $\partial^2\psi/\partial t^2$ terimi $\nabla^2\psi$'ye göre ihmal edilebilir ve Denk. (21.7), Denk. (21.11)'e eşit olur.

Özetleyecek olursak, Denk. (21.7)'nin kaynak fonksiyonu $s(t)$ başlangıçta yerelleşirse ve toplam şiddeti de

$$S(t) = \int s(t)dV \tag{21.12}$$

olursa, Denk. (21.7)'nin çözümünü de aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{S(t - r/c)}{r} \tag{21.13}$$

Denklem (21.7)'deki $\partial^2\psi/\partial t^2$ teriminin tek etkisi, Coulomb benzeri potansiyeldeki $(t - r/c)$ gecikmesini ortaya koymaktır.

21-3 Maxwell denklemlerinin genel çözümü

"Nokta" bir kaynak için Denk. (21.7)'nin çözümünü bulduk. Sıradaki soru şu: Yayılmış bir kaynak için çözüm nedir? Bu kolaydır; herhangi bir $s(x, y, z, t)$ kaynağını birçok "nokta" kaynağın toplamı olarak düşünebiliriz. Her biri bir dV hacim elemanıdır ve şiddetleri de $s(x, y, z, t)\,dV$'dir. Denklem (21.7) doğrusal olduğundan, sonuçta bulacağımız alan bütün bu kaynak elemanlarından kaynaklanan alanların üst üste binmesiyle oluşmuştur.

Önceki bölümde elde ettiğimiz sonuçlardan [Denklem 21.13], (x_2, y_2, z_2) –kısaca (2)– noktasındaki sdV kaynak elemanından kaynaklanan, (x_1, y_1, z_1) noktasındaki –kısaca (1)– t zamanındaki $d\psi$ alanının aşağıdaki denklemle elde edilebileceğini biliyoruz. r_{12} (2)'den (1)'e olan mesafedir:

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - r_{12}/c)dV_2}{4\pi r_{12}}$$

Bütün kaynakların parçalarından gelen katkıları toplarsak ve $s \neq 0$ olan bütün bölgeler üzerinden integralini aldığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}}\,dV_2 \tag{21.14}$$

Bunun anlamı, t zamanında (1) noktasındaki alanın, $(t - r_{12}/c)$ zamanında (2)'deki kaynak elemanlarından çıkan küresel dalgaların toplamı olmasıdır. Bu, herhangi bir kaynak kümesi için dalga denkleminin çözümüdür.

Maxwell denklemleri için genel çözümü nasıl elde edeceğimizi artık görüyoruz. ψ için ϕ skaler potansiyeli dersek, kaynak fonksiyonu s, ρ/ϵ_0 olur. Bir alternatif de, s'yi $j/\epsilon_0 c^2$ değeriyle değiştirerek, ψ'nin vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$'nın üç bileşeninden herhangi birini temsil etmesini sağlamak. Böylece, yük yoğunluğu $\rho(x, y, z, t)$'yi ve yük yoğunluğu $j(x, y, z, t)$'yi her yerde bilirsek; Denk. (21.4) ve (21.5)'in çözümlerini hemen yazabiliriz. O çözümler

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\,dV_2 \tag{21.15}$$

ve

$$\boldsymbol{A}(1, t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}\,dV_2 \tag{21.16}$$

eşitliklerini verir. $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ alanları, Denk. (21.2) ve (21.3)'ü kullanıp, potansiyellerin türevini alarak bulunabilir. [Tesadüf eseri, Denk. (21.15) ve (21.16)'dan elde edilen ϕ ve $\boldsymbol{A}$'nın da (21.6) eşitliğini sağladığını doğrulamak mümkündür.]

Maxwell denklemlerini çözmüş olduk. Herhangi bir koşuldaki akımlar ve yükler bilinirse, potansiyelleri doğrudan bu integrallerden bulabilir ve daha sonra türevlerini alarak alanları bulabiliriz. Böylece, Maxwell kuramını bitirmiş olduk. Şimdi artık ışık kuramına da dönebilir ve bağlantıyı kurabiliriz; çünkü tek ihtiyacımız olan hareketli bir yükten kaynaklanan elektrik alanı bulmaktır. Tüm yapmamız gereken, bir hareketli yükü ele almak, bu integrallerden potansiyelleri hesaplamak ve daha sonra türevlerini alarak $-\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$'den $\boldsymbol{E}$'yi bulmak. Denklem (21.1)'i elde etmeliyiz. Çok iş gibi gözüküyor; ama ilke budur.

İşte buyurun, elektromanyetizma evreninin merkezi: elektrik ve manyetizmanın ve ışığın eksiksiz kuramı; hareketli yüklerden kaynaklanan alanların eksiksiz tanımı ve daha fazlası. Hepsi buradadır. İşte size Maxwell'in kurduğu yapı, tüm gücü ve güzelliğiyle. Fizikteki en büyük başarılardan biridir bu. Önemini size hatırlatmak için, hepsini tekrar bir araya getirdik.

Maxwell denklemleri:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Çözümleri:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\phi(1,t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\, dV_2$$

$$\boldsymbol{A}(1,t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}\, dV_2$$

21-4 Salınan bir dipolün alanları

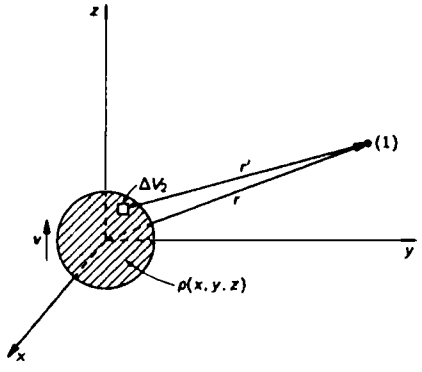
Hareketli bir noktasal yükün elektrik alanı için Denk. (21.1)'i türetme sözümüzü hâlâ tutamadık. Elimizdeki sonuçlarla bile, bunu türetmesi göreceli olarak karmaşık bir şeydir. Bu derslerin I. Cildi haricinde bir yerde Denk. (21.1)'le karşılaşmadık.* Türetmenin kolay olduğunu görebilirsiniz. (Hareket eden bir yükün alanları özdeş başka biçimlerde yazılmıştır elbette.) Burada kendimizi, birkaç örnekle Denk. (21.15) ve (21.16)'nın Denk. (21.1)'le aynı sonuçları verdiğini göstermekle sınırlayacağız. İlk olarak Denk. (21.1)'in, yüklü parçacığın göreli olmayan hareketi durumunda doğru alanları verdiğini göstereceğiz. (Sadece bu özel örnek bile, ışık hakkında konuştuklarımızın yüzde doksanını ve hatta daha fazlasını kapsayacak.)

Küçük bir bölgede, bir yönde ilerleyen bir yük "kabarcığını" ele alalım ve amacımız da ondan uzaktaki alanları bulmak olsun. Bir başka şekilde ifade edecek olursak, yukarı aşağı çok kısa hareket eden bir noktasal yükten herhangi bir uzaklıktaki alanı bulacağız. Işık genelde atomlar gibi yüksüz nesnelerden yayıldığı için, kıpırdaşan q yükümüzün, durağan haldeki eşit ve zıt bir yükün yakınında olduğunu düşüneceğiz. Yüklerin merkezleri arasındaki mesafe d ise,

* Bu denklem ilk defa 1902 yılında Oliver Heaviside tarafından yayımlanmıştır. 1950'de ondan bağımsız bir şekilde R. P. Feynman tarafından keşfedilmiş ve sinkroton ışınımı hakkında düşünmenin güzel bir yolu olarak derslerde sunulmuştur.

yüklerin dipol momenti $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ olur ki bunu da zamana bağlı bir fonksiyon olarak değerlendireceğiz. Yüklere çok yakın bölgelerdeki alanlara bakarsak, gecikmeden dolayı endişelenmemize gerek yoktur; elektrik alan daha önce elektrostatik dipol için, anlık dipol momenti $p(t)$'yi kullanarak elbet, hesapladığımız alanla aynı olacaktır. Açığa gitmemiz durumundaysa, alanda $1/r$'yle azalan ve yükün bakış açısına göre dik ivmelenmesine bağlı bir terim bulmalıyız.

Denklem (21.6)'yı kullanarak, vektör potansiyeli $\boldsymbol{A}$'yı hesaplayarak işe koyulalım. Hareket halindeki yükümüzün, yük yoğunluğu $\rho(x, y, z)$ olan ve v hızıyla ilerleyen bir kabarcığın içinde olduğunu düşünelim. Bu durumda yük yoğunluğu $j(x, y, z)$ $v\rho(x, y, z)$'ye eşit olacaktır. Koordinat sistemimizi, z ekseni v yönünde olacak şekilde seçersek, problemimizin geometrisi Şekil 21-2'de gösterildiği gibidir. Aşağıdaki integrali istiyoruz:



Şekil 21-2 (1) noktasındaki potansiyel, yük yoğunluğu ρ üzerinden alınan integrallerle bulunur.

$$\int \frac{j(2,\, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2 \tag{21.17}$$

Yük kabarcığımızın boyutu r_{12}'ye göre gerçekten çok küçükse, paydadaki r_{12} terimini r'ye, kabarcığın merkezine olan uzaklığa, eşitleyebilir ve r'yi integralin dışına alabiliriz. Sonra da paydaki r_{12}'yi de r'ye eşitleyeceğiz; her ne kadar bu tam anlamıyla doğru olmasa da. Doğru değil diyorum; çünkü kabarcığın tepesindeki j değerini, tabanı için kullandığımız j değerinden daha farklı bir zamanda almalıyız. $j(t - r_{12}/c)$ için de $r_{12} = r$ eşitliğini kullandığımızda, bütün kabarcığın yük yoğunluğunu aynı $(t - r/c)$ zamanında almış oluyoruz. Bu yakınlaştırma, ancak yükün v hızı c'den çok küçükse işe yarar. Diğer bir deyişle, göreli olmayan bir hesaplama yapıyoruz. j yerine ρv koyduğumuzda, (21.7) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\frac{1}{r}\int v\rho(2,\, t - r/c)dV_2$$

Tüm yük aynı hıza sahip olduğundan, bu integral v/r çarpı toplam q yüküdür. qv ise sadece $\partial p/\partial t$'dir: dipol momentin değişim hızı. O da, elbette, gecikmeli $(t–r/c)$ zamanında değerlendirilmelidir. Onu, $\dot{p}\,(t - r/c)$ şeklinde yazacağız. Böylece vektör potansiyeli için şunu elde ederiz:

$$\boldsymbol{A}(1,\, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\dot{p}(t - r/c)}{r} \tag{21.18}$$

Bu sonuca göre değişken bir dipoldeki akım, kaynak şiddeti $\dot{p}/\epsilon_0 c^2$ olan ve küresel dalgalar biçiminde olan bir vektör potansiyeli meydana getirir.

Artık, $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$'dan manyetik alanı elde edebiliriz. $\dot{p}$ tamamen z yönünde olduğundan, $\boldsymbol{A}$'nın sadece z bileşeni vardır. Bükümde sadece iki adet sıfır olmayan türev vardır. Dolayısıyla, $B_x = \partial A_z/\partial y$ ve $B_y = -\partial A_z/\partial x$ olur. Gelin önce B_x'e bakalım:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\dot{p}(t - r/c)}{r} \tag{21.19}$$

Diferansiyeli uygulayabilmek için, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ eşitliğini hatırlamalıyız. Böylece

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\dot{p}(t - r/c)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\dot{p}(t - r/c) \tag{21.20}$$

olur. $\partial r/\partial y = y/r$ eşitliğini de hatırladığımızda, ilk terim

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y\dot{p}(t - r/c)}{r^3} \tag{21.21}$$

ifadesini verir. Bu da, aynı bir statik dipolün potansiyeli gibi $1/r^2$ değeriyle orantılı olarak düşer. (Çünkü, belirli bir yönde y/r sabittir.)

Denklem (21.20)'deki ikinci terim bize yeni etkiler sunar. Diferansiyeli uyguladığımızda aşağıdaki terimi elde ederiz:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y}{cr^2}\,\ddot{p}(t - r/c) \tag{21.22}$$

Burada $\ddot{p}$, elbette, p'nin t'ye göre ikinci dereceden türevidir. Payın diferansiyelini almaktan gelen bu terim ışınımdan sorumludur. Birincisi, sadece $1/r$'yle orantılı azalan bir alanı tanımlamakta. İkincisi, yükün *ivmelenmesine* bağlıdır. Işığın ışınımını tanımlayan Denk. (21.1')gibi bir sonucu nasıl elde edeceğimizi görmeye başlamış olmanız lazım.

Bu ışınım teriminin ortaya nasıl çıktığını biraz daha detaylı inceleyelim. Çok önemli ve ilginç bir sonuçtur. $1/r$'ye bağlı olduğu için, paydaki gecikme terimi hariç, Coulomb potansiyeline benzeyen (21.18)'le başlayalım. Neden peki sadece, alanları elde etmek için uzay koordinatlarına göre diferansiyelini aldığımızda $1/r^2$'ye bağlı ve karşılık gelen zaman gecikmelerine sahip bir alan elde edemiyoruz?

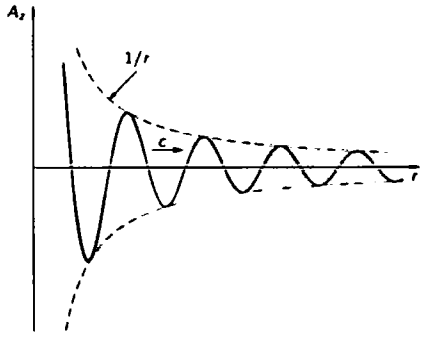
Neden olduğunu şu şekilde anlayabiliriz: Dipolümüzün, sinüs eğrisi şeklinde aşağı yukarı salındığını düşünelim. Bu durumda

$$p = p_z = p_0 \sin \omega t$$

ve

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega (t - r/c)}{r}$$

denklemlerini elde ederdik. A_z'nin r'ye göre fonksiyonunu grafiğe dökecek olursak, Şekil 21-3'te gösterilen eğriyi elde ederiz. Tepe genliği $1/r$'yle orantılı azalır; buna ilaveten $1/r$ eğrisiye sınırlanmış bir salınım vardır uzayda. Uzamsal türevleri aldığımızda, eğrinin *eğimiyle* orantılı olduklarını görürüz. Şekilde gördüğünüz üzere $1/r$ eğrisinin eğiminden daha dik eğimler vardır. Açıkça ortadır ki, belirli bir frekanstaki tepe eğimleri, $1/r$'yle değişkenlik gösteren dalga genliğiyle orantılıdır. Bu da, ışınım terimindeki azalma oranını açıklar.



Şekil 21-3 Salınan bir dipolden kaynaklanan küresel dalga için t zamanında r'nin fonksiyonu olan A'nın z bileşeni.

Hepsi böyle olur; çünkü kaynaktaki *zamanla* değişimler, dalgalar dışarı doğru ilerledikçe *uzaydaki* değişimlere çevrilir ve manyetik alanlar potansiyelin *konumsal* türevlerine bağlıdır.

Geriye dönelim ve manyetik alan için hesaplamamızı bitirelim. B_x için (21.21) ve (21.22) terimlerimiz vardır, dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[-\frac{y\dot{p}(t - r/c)}{r^3} - \frac{y\ddot{p}(t - r/c)}{cr^2}\right]$$

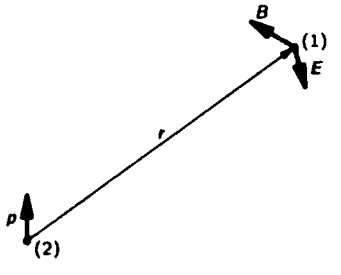
Aynı matematikle,

$$B_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{x\dot{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{x\ddot{p}(t - r/c)}{cr^2}\right]$$

eşitliğini şunu elde ederiz. Bunların hepsini güzel bir vektör denkleminde birleştirebiliriz:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\boldsymbol{p}} + (r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t - r/c} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (21.23)$$

Şimdi denkleme bakalım. Öncelikle, r çok büyük bir değer alırsa sadece $\ddot{p}$ terimi sayılır. B'nin yönü $\ddot{p} \times r$ değeriyle verilir ve Şekil 21-4'te gösterildiği gibi r yarıçapına ve ayrıca ivmelenmeye dik açılardadır. Her şey doğru çıkıyor; bu aynı zamanda Denk. (21.1')'le elde ettiğimiz sonuçtur.



Şekil 21-4 Salınan bir dipolün E ve B ışınım alanlar.

Şimdi alışık olmadığımız bir şeye daha da yakına girdiğimizde ne olduğuna bakalım. Bölüm 14-7'de bir akım elemanının manyetik alanı için Biot ve Savart yasasını çalışmıştık. Bir jdV akım elemanının manyetik alana aşağıdaki miktarda katkıda bulunduğunu bulmuştuk.

$$d\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV \qquad (21.24)$$

Gördüğünüz üzere, bu denklem, $\dot{p}$'nin akım olduğunu hatırlarsak, Denk. (21.23)'ün ilk terimine çok benziyor. Aralarında bir fark vardır. Denklem (21.23)'te akım $(t - r/c)$ zamanında hesaplanırdı ki bu Denk. (21.24)'te gözükme-

mekte. Bununla birlikte, aslında Denk. (21.24) küçük r değerleri için hâlâ işe yarar; çünkü Denk. (21.23)'ün *ikinci* terimi ilk terimdeki gecikme etkisini sıfırlama eğilimindedir. İkisi *beraber*, r küçükken, Denk. (21.24)'e çok yakın bir sonuç verirler.

Bunu şöyle de görebiliriz: r küçük olduğunda, $(t - r/c)$ terimi t'den çok farklı değildir; diğer bir deyişle Denk. (21.23)'ün köşeli parantezini Taylor serisiyle açabiliriz. İlk terim için

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c) = \dot{\boldsymbol{p}}(t) - \frac{r}{c}\ddot{\boldsymbol{p}}(t) + \text{vs} \ldots$$

ve r/c'de aynı dereceye

$$-\frac{r}{c}\ddot{\boldsymbol{p}}(t - r/c) = \frac{r}{c}\ddot{\boldsymbol{p}}(t) + \text{vs} \ldots$$

Toplamlarını aldığımızda, $\ddot{\boldsymbol{p}}$'deki iki terim birbirini sıfırlar ve *gecikmesiz* $\dot{\boldsymbol{p}}$ (daha doğrusu $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$) akımıyla baş başa kalırız. $(r/c)^2$ ve üstü [örneğin $\frac{1}{2}(r/c)^2\,\dddot{\boldsymbol{p}}$] dereceden terimler de vardır; fakat yeterince küçük r değeri için bunlar çok küçüktür ve böylece $\dot{\boldsymbol{p}}$ değeri r/c zamanında önemli ölçüde değişmez.

Dolayısıyla, Denklem (21.23) alanları aynı anlık kuram gibi verir. Hatta, gecikmeli anlık kuramdan çok daha yakın şekilde belirler; gecikmenin birinci dereceden etkileri ikinci terimle ortadan kaldırılır. Statik denklemler gayet doğrudur; tahmin edebileceğinizden bile daha doğru. Bu telafi, elbette, sadece yakındaki noktalarda işe yarar. Uzaktaki noktalar için düzeltme çok kötüleşir; çünkü zaman gecikmeleri çok büyük bir etki meydana getirir ve ışınımın önemli $1/r$ terimini elde ederiz.

Daha hâlâ, elektrik alanını hesaplamalı ve Denklem (21.1)'le aynı olduğunu göstermeliyiz. Uzak mesafeler için cevabın doğru olacağını görebiliriz. Kaynaklardan uzakta, ilerleyen bir dalganın olduğu yerde $\boldsymbol{E}$ alanı $\boldsymbol{B}$'ye (ve ayrıca $\boldsymbol{r}$'ye), Şekil 21-4'teki gibi diktir ve $cB = E$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla, $\boldsymbol{E}$ alanı $\dot{\boldsymbol{p}}$'nin ivmelenmesiyle orantılır; Denk. (21.1)'in öngördüğü gibi.

Tüm mesafelerde elektrik alanı elde etmek için, elektrostatik potansiyeli bulmamız gerekir. Denklem (21.8)'i elde etmek için, $\boldsymbol{A}$ için akım integralini hesaplarken, gecikme terimlerindeki r'nin ufak değişimini göz ardı ederek bir yakınlaştırmada bulunmuştuk. Bu, elektrostatik potansiyel için işe yaramaz; çünkü o zaman, bir sabit olan yük yoğunluğunun integrali ile $1/r$'nin çarpımını elde etmiş oluruz. Yakınlaştırma çok kabadır. Bir üst dereceye gitmeliyiz. Daha yüksek dereceden bu hesaplamaya doğrudan dahil olmak yerine, başka bir şey yapabiliriz. Daha önceden bulduğumuz vektör potansiyelini kullanarak, Denk. (21.6)'yla skaler potansiyeli belirleyebiliriz. Bu durumda, $\boldsymbol{A}$'nın diverjansı, A_x ve A_y sıfır olduğundan, sadece $\partial A_z/\partial z$'dir. Yukarıda $\boldsymbol{B}$'yi bulmak için yaptığımız şekilde diferansiyeli alırsak

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\dot{p}(t - r/c)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\dot{p}(t - r/c)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[-\frac{z\dot{p}(t - r/c)}{r^3} - \frac{z\ddot{p}(t - r/c)}{cr^2}\right]$$

ya da, vektör gösterimiyle

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{[\dot{\boldsymbol{p}} + (r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t - r/c} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$$

eşitliklerini elde ederiz. Denklem (21.6)'yı kullanarak, ϕ için şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{[\dot{\boldsymbol{p}} + (r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t - r/c} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$$

t'ye göre integrali almak, sadece her bir $\boldsymbol{p}$'den bir noktayı kaldırır:

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{[\boldsymbol{p} + (r/c)\dot{\boldsymbol{p}}]_{t - r/c} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (21.25)$$

(İntegral sabiti, var olabilecek üst üste binmiş bir statik alana denk gelir. Ele aldığımız salınan dipol için, statik alan yoktur.)

Artık aşağıdaki denklem sayesinde elektrik alan E'yi bulabiliriz:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Adımlar sıkıcı ama $p(t - r/c)$ ve onun zaman türevlerinin, r/c gecikmesiyle, x, y ve z'ye bağlı olduğunu hatırladığınız müddetçe] dolambaçsız olduğundan, doğrudan sonucu yazacağız:

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(p^* \cdot r)r}{r^2} - p^* + \frac{1}{c^2}(\ddot{p}(t - r/c) \times r) \times r\right] \qquad (21.26)$$

ve

$$p^* = p(t - r/c) + \frac{r}{c}\dot{p}(t - r/c) \qquad (21.27)$$

Karmaşık gözükse de, sonuç kolaylıkla yorumlanabilir. p^* geciktirilmiş ve sonra gecikme için "düzeltilmiş" dipol momentidir; diğer bir deyişle p^*'lı son iki terim, r küçük olduğunda statik dipol alanını verir. [*Bkz.* Bölüm 6, Denk. (6.14)] r büyük olduğunda, $\ddot{p}$'deki terim hâkim olur ve elektrik alan, r'ye dik açılardaki yüklerin ivmelenmesiyle orantılı olur. Aslında elektrik alan, r'ye dik bir düzlemde $\ddot{p}$'nin izdüşümü boyunca yönlenmiştir.

Bu sonuç, Denk. (21.1)'i kullanarak elde ettiğimiz sonuçla uyumludur. Denklem (21.1) daha geneldir elbette; herhangi bir hareket için geçerlidir. Denklem (21.6) ise sadece, kaynak üzerinden r/c gecikmesini sabit alabileceğimiz küçük hareketler için geçerlidir. Her halükarda, ışığa dair önceki tartışmamızın tamamı için (I. Cilt 34. Bölümde tartıştığımız bazı konuları dışarda tutarsak) destekleyici unsurları, hepsi Denk. (21.26)'nın son teriminde saklı olduğundan, vermiş olduk. Şimdi, hızlı hareket eden (I. Cilt, 34. Bölümdeki görelilik etkilerine yol açan) yükler için alanları nasıl elde edebileceğimizi tartışacağız.

21-5 Hareket eden bir yükün potansiyelleri; Liénard ve Wiechert'in genel çözümü

Son bölümde, A için integral alırken sadece düşük hızları hesaba katarak bir basitleştirme yapmıştık. Ancak böyle yaptığımızda önemli bir noktayı kaçırdık ki bu kolaylıkla yanlış yapabileceğimiz bir noktadır. Dolayısıyla şimdi, herhangi bir şekilde –hatta göreli bir hızda– hareket eden bir noktasal yük için potansiyellerin hesabını yapacağız. Sonucu elde ettiğimizde, elektrik yüklerinin elektromanyetizmasını eksiksiz şekilde elde etmiş olacağız. Daha sonra Denk. (21.1) bile türevler alarak elde edilebilir. Hikâyemiz nihayete varacak. O yüzden, bizimle kalın.

Herhangi bir şekilde hareket eden bir *noktasal yükün*, örneğin bir elektronun, (x_1, y_1, z_1) noktasında meydana getirdiği $\phi(1)$ skaler potansiyelini hesaplamaya çalışalım. Bir "nokta" yükten kastettiğimiz şey, çok küçük ve $\rho(x, y, z)$ yük yoğunluğuna sahip bir yük küresidir. ϕ değerini Denk. (21.15)'le hesaplayabiliriz:

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2 \qquad (21.28)$$

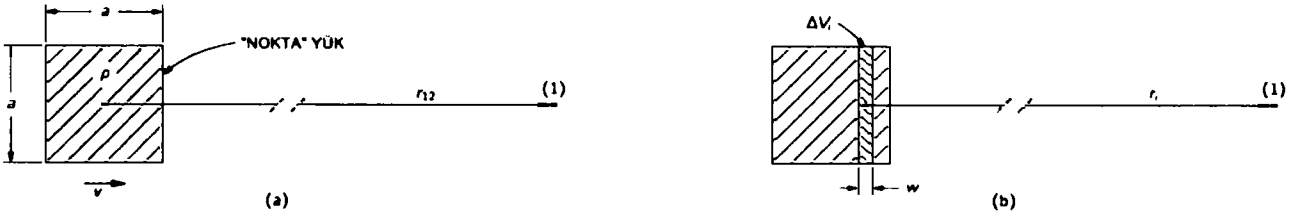
İlk bakışta cevap olarak, ρ'nin böyle bir "nokta" yük üzerinden integralinin toplam q yüküne eşit olduğunu söyleyebilirsiniz:

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'_{12}} \qquad \text{(yanlış)}$$

r'_{12} değeriyle geciktirilmiş $(t - r_{12}/c)$ zamanında (2) noktasından (1) noktasına yarıçap vektörünü kastederiz. Bu yanlıştır.

Doğru cevap şudur:

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'_{12}} \cdot \frac{1}{1 - v_r/c} \qquad (21.29)$$



Şekil 21-5 (a) (1) noktasına doğru v hızıyla ilerleyen –küçük bir kübik yük dağılımı olarak düşünülen– bir "nokta" yük. (b) Potansiyelleri hesaplamak için kullanılan hacim elemanı ΔV_i.

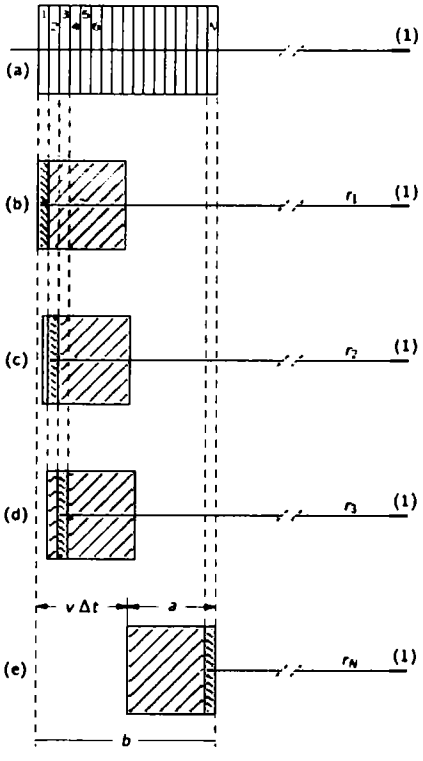
Burada $v_{r'}$, yükün hızının $\mathbf{r}'_{12}$'ye paralel, (1) noktasına doğru bileşenidir. Şimdi bunun neden böyle olduğunu göstereceğiz. Akıl yürütmemizi takibi kolaylaştırmak için, hesaplamamızı, Şekil 21-5 (a)'da görüldüğü gibi (1) noktasına doğru v hızıyla ilerleyen küçük bir yük küpü biçimindeki "nokta" yük için yapacağız. Küpün bir kenarının uzunluğu a olsun a, yükün merkezinden (1) noktasına olan r_{12} mesafesinden çok çok daha küçüktür.

Denklem (21.28)'in integralini alabilmek için temel ilkelere geri döneceğiz ve onu aşağıdaki toplam şeklinde yazacağız:

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} \tag{21.30}$$

Toplamdaki r_i, (1) noktasından i nci hacim elemanı ΔV_i'ye olan mesafe ve ρ_i de $t_i = t - r_i/c$ zamanında ΔV_i'deki yük yoğunluğudur. Her zaman için $r_i \gg a$ olduğundan, ΔV_i'yi, Şekil 21-5 (b)'de gösterildiği gibi, $\mathbf{r}_{12}$'ye dik dikdörtgen dilimler şeklinde alabiliriz.

a'dan çok daha küçük bir w kalınlığında ΔV_i hacim elemanlarımız olduğunu düşünelim. Bağımsız elemanlar Şekil 21-6 (a)'daki gibi gözükecektir ve oradaki eleman sayısı yükleri hayli hayli kapsar. Ama yükü *göstermedik* ve bunun için de iyi bir nedenimiz var. Nereye çizelim onu? Her bir ΔV_i hacim elemanı için, $t_i = (t - r_i/c)$ zamanındaki ρ'yi kullanmalıyız; ancak yük *hareket ettiğinden, her bir ΔV_i elemanı için farklı bir yerdedir*!



Şekil 21-6 Hareket eden bir yük için $\rho(t - r'/c)dV'$nin integralini almak.

Şekil 21-6 (a)'da "1"le işaretlenmiş hacim elemanını seçtiğimizi düşünelim. $t_1 = (t - r_1/c)$ zamanında yükün "arka" kenarı, Şekil 21-6 (b)'deki gibi, ΔV_1'i kaplamaktadır. $\rho_2 \Delta V_2$'yi hesaplayacağımız zaman, yükün biraz daha *sonraki* $t_2 = (t - r_2/c)$ zamanındaki konumunu kullanmalıyız. Bu sırada yük Şekil 21-6 (c)'deki konumundadır. Bu şekilde ΔV_3, ΔV_4 diye devam ederek hepsini bulur ve böylece toplamı hesaplayabiliriz.

Her bir ΔV_i'nin kalınlığı w olduğundan, hacimleri wa^2'dir. Bu durumda, yük dağılımı üzerindeki her bir hacim elemanı $wa^2\,\rho$ kadar yük içerir. ρ, küp içindeki yük yoğunluğudur ve düzgün olarak ele alacağız. Yükten (1) noktasına olan mesafe büyük olduğunda, paydalardaki bütün r_i'leri ortalama bir değere, diyelim ki yük merkezi r''nün gecikmiş konumuna, eşitleyerek ihmal edilebilir bir hata yapabiliriz. Bu durumda, toplam (21.30)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\rho w a^2}{r'}$$

olarak yazılır. Burada ΔV_N, Şekil 21-6 (e)'de gösterildiği gibi, yük dağılımlarıyla örtüşen son ΔV_i hacim elemanıdır. Toplam da o zaman açıkça

$$N\frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'}\left(\frac{Nw}{a}\right)$$

olur. ρa^3 toplam q yüküdür ve Nw ise Şekil 21-6'da gösterilen b uzunluğudur. Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{21.31}$$

b nedir? Yük küpünün, yükün $t_1 = (t - r_1/c)$ ile $t_N = (t - r_N/c)$ zamanları arasında katettiği mesafe kadar *artırılmış* boyudur:

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c$$

Yükün hızı v olduğundan, katedilen mesafe $v\Delta t = vb/c$ olur. b uzunluğuysa, bu mesafe ve a'nın toplamıdır:

$$b = a + \frac{v}{c} b$$

b için çözersek,

$$b = \frac{a}{1 - (v/c)}$$

eşitliğini elde ederiz. Şüphesiz v dediğimizde, $t' = (t - r'/c)$ geciktirilmiş zamandaki hızı kastetmekteyiz. Bunu $[1 - (v/c)]_{gec}$ olarak gösterebiliriz. Potansiyel için Denk. (21.31) de aşağıdaki biçimi alır:

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{[1 - (v/c)]_{gec}}$$

Bu sonuç Denk. (21.29)'daki iddiamızla uyuşmaktadır. "İntegral yükün üzerinden geçtikçe" yük de hareket ettiği için, bir doğrulama terimi de vardır. Yük, (1) noktasına doğru ilerledikçe integrale olan katkısı b/a oranında artırılır. Dolayısıyla doğru integral q/r' ile b/a'nın çarpımıdır: $1/[1 - (v/c)]_{gec}$.

Yükün hızı gözlem noktası (1)'e doğru yönlenmemişse, asıl önemli olanın hızının (1) noktasına doğru yönlenmiş *bileşeni* olduğunu anlayabilirsiniz. Bu hız bileşenine v_r diyelim, düzeltme çarpanı $1/[1 - (v_r/c)]_{gec}$ olur. Ayrıca, şu ana kadar yaptığımız analiz *herhangi* bir şekildeki yük dağılımı için de aynı şekilde geçerlidir. İlla küp olmak zorunda değildir. Son olarak, q yükünün "boyutu" son sonuçta bulunmaz. Yükü ne kadar küçültürsek küçültelim, hatta nokta bile yapsak, aynı sonuç geçerlidir. Herhangi bir hızda ilerleyen bir noktasal yükünün skaler potansiyeli için genel anlamda şunu yazabiliriz:

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'[1 - v_r/c]_{gec}} \tag{21.32}$$

Bu denklem çoğunlukla şu aşağıdaki özdeş biçimde yazılır:

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0[r - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}/c)]_{gec}} \tag{21.33}$$

r, ϕ'nin hesaplandığı yerde yükten (1) noktasına olan vektörüdür ve köşeli parantez içindeki tüm nicelikler gecikmeli $t' = (t - r'/c)$ zamanındaki değerleriyle değerlendirilmelidirler.

Aynı şey, Denk. (21.16)'yı kullanarak nokta bir yük için $\boldsymbol{A}$'yı hesapladığımızda da olur. Yük yoğunluğu $\rho\boldsymbol{v}$'dir ve ρ üzerinden integral ϕ için bulduğumuzla aynıdır. Vektör potansiyeli de

$$\boldsymbol{A}(1, t) = \frac{q\boldsymbol{v}_{gec}}{4\pi\epsilon_0 c^2[r - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}/c)]_{gec}} \tag{21.34}$$

olur. Nokta bir yük için potansiyeller bu biçimde ilk defa Liénard ve Wiechert tarafından bulunmuştur ve *Liénard-Wiechert potansiyelleri* olarak adlandırılırlar.

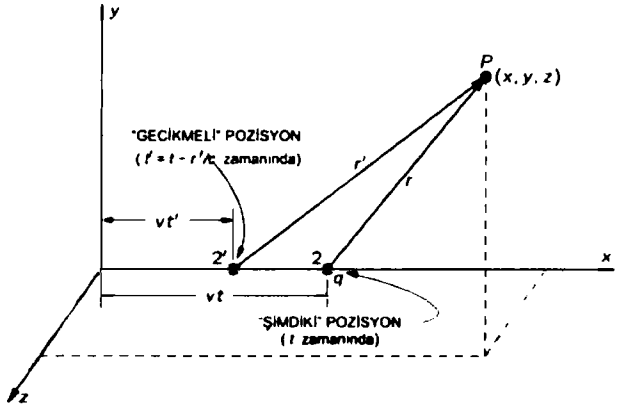
Bütün bu döngüyü Denk. (21.1)'e dönerek kapatmak için tek yapmamız gereken, bu potansiyellerden ($\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ eşitliklerini kullanarak) $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yi hesaplamaktır. Bundan sonrası sadece aritmetiktir. Burada detaylarına girmeyeceğiz, zira gayet fazla aritmetik içermekte. Belki de siz, Denk. (21.1)'in Liénard-Wiechert potansiyellerine eşit olduğuna dair bize güvenirsiniz.*

---

* Bol miktarda kâğıt ve de zamanınız varsa, bunu siz de çıkarmayı deneyebilirsiniz. Bu durumda size iki önerimiz olacak: Birincisi, r' t''nün bir fonksiyonu olduğundan türevlerinin karmaşık olduğunu unutmayın. İkincisi, Denk. (21.1)'i *türetmeye* çalışmayın; ama içindeki bütün türevleri alın ve 21.33 ile 21.34 potansiyellerinden elde ettiğiniz çıkardığınız $\boldsymbol{E}$'yle elde ettiğinizle karşılaştırın.

21-6 Sabit hızda ilerleyen yük için potansiyeller; Lorentz denklemi

Şimdi, düz bir çizgi üzerinde, düzgün bir hızla ilerleyen yükten kaynaklanan alanları bulmak üzere, Liénard-Wiechert potansiyellerini özel bir durum için kullanalım. Daha sonra tekrar görelilik ilkesini kullanarak hesaplayacağız. Bir yükün eylemsizlik çerçevesinde durduğumuzda potansiyellerin ne olduğunu biliyoruz. Yük hareket ederken, bir sistemden diğerine görelilik dönüşümü yaparak ne olup bittiğini görebiliriz. Göreliliğin kaynağı elektrik ve manyetizma kuramındaydı. Lorentz elektrik ve manyetizma üzerine denklemleri çalışırken, Lorentz dönüşümü denklemlerini (I. Cilt, Bölüm 35) keşfetmişti. Bütün bunların nereden geldiğini anlamanız için, Maxwell denklemlerinin Lorentz dönüşümlerine yol açtığını göstermek istiyoruz. Hareketli bir yük için Maxwell denklemlerinin potansiyelleri de ortaya çıkardığını son bölümde göstermiştik. Dolayısıyla bu potansiyelleri kullandığımızda, Maxwell kuramını kullanmış oluruz.



Şekil 21-7 x ekseni boyunca düzgün hızda ilerleyen bir yükün P noktasıdaki potansiyelini bulmak.

x ekseni boyunca v hızıyla ilerleyen bir yükü ele alalım. Şekil 21-7'de gösterildiği gibi, $P(x, y, z)$ noktasındaki potansiyelleri bulmak istiyoruz. Yükün başlangıçta olduğu an $t = 0$ ise, t anında yük $x = vt$ noktasındayken, $y = z = 0$'dır. Bizim bilmek istediğimizse, onun gecikmeli zamandaki konumudur:

$$t' = t - \frac{r'}{c} \tag{21.35}$$

r', yükten P noktasına *gecikmeli zamandaki* mesafedir. Daha önceki t' zamanında yük $x = vt'$ noktasındaydı. Diğer bir deyişle, r' için

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} \tag{21.36}$$

yazabiliriz. r' veya t' değerlerini hesaplayabilmek için bu denklemle Denk. (21.35)'i birleştirmeliyiz. Önce Denk. (21.35)'i r' için çözerek r''nü eler ve daha sonra Denk. (21.36)'ya yerleştiririz. Daha sonra her iki tarafın karesini aldığımızda, t' için ikinci dereceden denklem elde etmiş oluruz:

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2$$

Karesi alınmış binomları açar ve t' için benzer terimler bir araya topladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$$

t' için çözdüğümüzde de şunu elde ederiz:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)} \tag{21.37}$$

r' değerini elde etmek için, t' için yazılmış bu ifadeyi aşağıdaki eşitliğe yerleştirmeliyiz:

$$r' = c(t - t')$$

Şimdi, Denk. (21.33)'ten ϕ'yi bulmaya hazırız. v sabit olduğundan,

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (v \cdot r'/c)} \tag{21.38}$$

eşitliğini yazabiliriz. v'nin r' yönündeki bileşeni $v \times (x - vt')/r'$'dür, diğer bir deyişle $v \cdot r'$ sadece $v \times (x - vt')$'dür ve tüm payda da

$$c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c\left|t - \frac{vx}{c^2} - (1 - \frac{v^2}{c^2})t'\right|$$

denklemine eşit olur. Denklem (21.37)'den $(1 - v^2/c^2)t'$ için eşitliği kullanırsak, ϕ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}$$

Bu denklemi şu aşağıdaki şekilde yazarsak, daha anlaşılır olur:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 + (y^2 + z^2)\right]^{1/2}} \tag{21.39}$$

Vektör potansiyeli A aynı ifadenin v/c^2 değeriyle çarpılmış halidir:

$$A = \frac{v}{c^2}\phi$$

Denklem (21.39)'da, Lorentz dönüşümünün başlangıcını açıkça görebilirsiniz. Yük eğer başlangıçta kendi eylemsizlik çerçevesinde olsaydı, potansiyeli aşağıdaki gibi olurdu:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$$

Onu hareketli bir koordinat sisteminde gözlüyoruz, öyleyse koordinatlar şu şekilde dönüşmeli:

$$x \to \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y \to y$$
$$z \to z$$

İşte bu Lorentz dönüşümüdür ve Lorentz nasıl keşfettiyse biz de aynı şekilde keşfetmiş olduk.

Peki ya Denk. (21.39)'un önünde gözüken $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanı nedir? Ayrıca, parçacığın eylemsizlik çerçevesinde her yerde sıfırken A vektör potansiyeli nasıl ortaya çıkıyor? Yakında, A ve ϕ'nin beraber, aynı parçacığın toplam enerjisi U ile momentumu p'nin meydana getirdiği gibi, bir dört vektör meydana getirdiğini göstereceğiz. Denklem (21.39)'daki fazladan $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanı, bir dört vektörün bileşenlerini dönüştürdüğümüzde de daima görünen çarpanla aynıdır. Tıpkı, yük yoğunluğu ρ'nin $\rho/\sqrt{1 - v^2/c^2}$'ye dönüşümünde olduğu gibi. Aslında, Denk. (21.4) ve (21.5)'ten açıkça görülmektedir ki, A ve ϕ bir dört vektörün bileşenleridir; çünkü Bölüm 13'te zaten j ve ρ'nin bir dört vektör bileşenleri olduğunu göstermiştik.

Daha sonra elektrodinamiğin göreliliğinde daha fazla detaya gireceğiz. Burada sadece, Maxwell denklemlerinin nasıl doğal bir şekilde Lorentz dönüşümüne yol açtığını göstermek istedik. Böylece Einstein göreliliği için elektrik ve manyetizma yasalarının zaten doğru olduğunu bulduğunuzda şaşırmazsınız. Onları, Newton mekanik yasaları için yapmak zorunda kaldığımız gibi "düzeltmeye çalışmayacağız".

22
AC DEVRELERİ

22-1 Empedanslar

22-1 Empedanslar
22-2 Jeneratörler
22-3 İdeal elemanlar şebekesi; Kirchhoff yasaları
22-4 Eşdeğer devreler
22-5 Enerji
22-6 Bir merdiven şebeke
22-7 Filtreler
22-8 Diğer devre elemanları

Bu dersteki çabamızın çoğu, eksiksiz Maxwell denklemlerini elde etmeye yönelikti. Son iki bölümde bu denklemlerin sonuçlarını tartıştık. Gördük ki, denklemler daha önceden çalıştığımız bütün statik olguları ve aynı zaman da I. Ciltte biraz detayına girdiğimiz elektromanyetik ve ışık olgularını da kapsamaktadır. Maxwell denklemleri akımlar ve yüklere yakın veya çok uzak alanları hesaplamanıza bağlı olarak, her iki olguyu da gösterir. Arada kalan bölge için söylenecek pek ilginç bir şey yoktur; orada özel bir olgu gözükmez.

Bununla birlikte, elektromanyetizma içinde hâlâ çalışmak istediğimiz birçok konu vardır. Görelilik ve Maxwell denklemleri hakkındaki soruyu, diğer bir deyişle Maxwell denklemlerine hareketli koordinat sistemlerine göre baktığımızda ne olduğu sorusunu tartışmak istiyoruz. Bir de, elektromanyetik sistemlerde enerji korunumuna dair soru vardır. Üstüne, malzemelerin elektromanyetik özelliklerine dair geniş konu da ortadadır. Şu ana kadar, dielektriklerin özelliklerini çalıştığımız zaman hariç, elektromanyetik alanları boş uzayda ele aldık. Her ne kadar I. Ciltte ışık konusunun biraz detayına girdiysek de, alan denklemlerinin bakış açısından tekrar ele almak istediğimiz birkaç şey vardır.

Gözden geçirme: I. Cilt, Bölüm 22, *Cebir*
I. Cilt, Bölüm 23, *Rezonans*
I. Cilt, Bölüm 25 *Doğrusal Sistemler ve Tekrar*

Bilhassa kırılma indisi konusunu, özellikle yoğun malzemeler için tekrar ele almak istiyoruz. Son olarak, uzaydaki sınırlı bir bölgede kısıtlı kalmış dalgalarla ilgili olgular vardır. Ses dalgalarını çalışırken bu tür bir probleme kısaca değinmiştik. Maxwell denklemleri, elektrik ve manyetik alanların içinde kısıtlı kalmış dalgaları gösteren çözümleri de doğurur. Önemli teknik uygulamaları olan bu konuyu gelecek bölümlerde ele alacağız. O konuya varabilmek için, düşük frekanslarda elektrik devrelerinin özelliklerini inceleyerek yola koyulacağız. Daha sonra, Maxwell denklemlerinin neredeyse statik yaklaşımlarının uygulanabilir olduğu durumlar ile yüksek frekanslı etkilerin baskın olduğu durumlar arasında bir karşılaştırma yapabileceğiz.

Böylece son birkaç bölümdeki yüce ve gizemli zirvelerden düze inip, görece olarak düşük seviye bir konu olan elektrik devrelerine vardık. Yine de, böyle sıradan bir konunun bile, detaylarına inildiğinde büyük karmaşıklıklar içerebildiğini göreceğiz.

I. Cildin, 23 ve 25. Bölümünde elektrik devrelerinin özelliklerinin bir kısmına değinmiştik. Şimdi o kısımdaki bilgilerin bir kısmını, bu sefer daha detaylı şekilde, tekrar ele alacağız. Yine sadece doğrusal sistemlerle ve sinüzoidal olarak değişen voltajlar ve akımlarla uğraşacağız. Bütün voltaj ve akımları, I. Cilt, 23. Bölümde tanımladığımız üssel gösterimi kullanarak yazabiliriz. Dolayısıyla, zamanla değişen $V(t)$ voltajı şu şekilde yazılır:

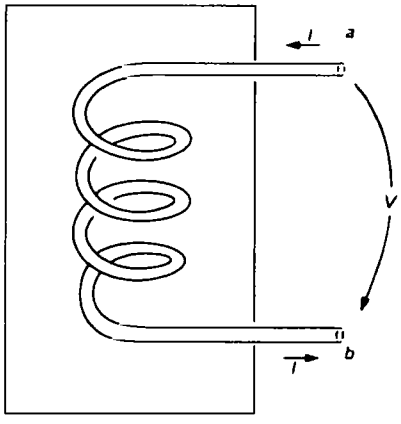
$$V(t) = \hat{V}e^{i\omega t} \tag{22.1}$$

Denklemdeki $\hat{V}$, t'den bağımsız bir karmaşık sayıyı ifade eder. Elbette ki, zamanla değişen gerçek $V(t)$ voltajı denklemin sağ tarafındaki karmaşık fonksiyonun *gerçel kısmıdır.*

Benzer şekilde, zamanla değişen diğer tüm nicelikleri aynı ω frekansında sinüzoidal olarak değişecek şekilde ele alınmalıdır. Böylece, şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} I &= \hat{I}\ e^{i\omega t} \quad \text{(akım)} \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}}\ e^{i\omega t} \quad \text{(emk)} \\ E &= \hat{E}\ e^{i\omega t} \quad \text{(elektrik alan)} \end{aligned} \tag{22.2}$$

Çoğu zaman denklemlerimizi, zamanla değişimlerin (22.2)'de verildiği gibi olduğunu aklımızda tutarak, ($\hat{V}$, $\hat{I}$, $\hat{\mathcal{E}}$, ... cinsinden yazmak yerine) V, I, $\mathcal{E}$,... cinsinden yazacağız.



Şekil 22-1 Bir indüktans.

Devrelere dair önceki tartışmamızda, indüktanslar, sığalar ve dirençler gibi şeylerle aşina olduğunuzu varsaymıştık. Bu idealize edilmiş devre elemanlarının ne anlama geldiğine, gelin, yakından bakalım. İndüktansla başlayalım.

Bir indüktans, Şekil 22-1'de gösterildiği gibi, tellerin birçok sarımla bobin haline getirilmesi ve iki ucunun bobinden bir miktar uzaktaki uçlara uzatılmasıyla oluşturulur. Bobindeki akımlardan kaynaklanan manyetik alanın, yeğin bir şekilde tüm uzaya yayılmadığını ve devrenin diğer parçalarıyla etkileşmediğini varsaymak istiyoruz. Bunu, genelde, bobini bir lokma şekline getirerek veya bobini uygun bir demir çekirdek etrafında sarıp manyetik alanı hapsederek ve Şekil 22-1'de gösterildiği gibi bobini uygun bir metal kutuya koyarak ayarlayabiliriz. Her durumda, *a* ve *b* uçlarının yakınındaki dış bölgede ihmal edilebilir bir manyetik alan olduğunu varsayabiliriz. Ayrıca, bobin telindeki elektrik direncinin de ihmal edilebilir olduğunu varsayacağız. Son olarak, elektrik alanlar oluşurken tel yüzeyinde oluşan elektrik yükü miktarını da ihmal edebileceğimizi varsayacağız.

Bütün bunlar sonucunda "ideal" indüktansı elde ederiz. (Daha sonra geriye dönecek ve gerçek bir indüktansta ne olduğuna bakacağız.) İdeal bir indüktans için, uçlar arasındaki voltajın $L(dI/dt)$ olduğunu söyleyebiliriz. Gelin, neden böyle olduğunu görelim. İndüktans içinden akım geçerken, bobinin içinde akımla orantılı bir manyetik alan meydana gelir. Akım zamanla değişirse, manyetik alan da ayrıca değişir. Genel olarak, $\boldsymbol{E}$'nin bükümü $-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$'ye eşittir; ya da bir başka şekilde ifade edecek olursak, $\boldsymbol{E}$'nin kapalı bir yol etrafındaki çizgi integrali, ilmek içinden geçen $\boldsymbol{B}$ akısının değişim hızının eksisine eşittir. Şu yolu ele alalım: *a* ucundan başlayın ve (daima telin içinde kalarak) bobin boyunca *b* ucunda doğru ilerleyin. Daha sonra *b* ucundan *a* ucuna, indüktansın dışındaki uzayda bulunan havadan geçerek gidin. $\boldsymbol{E}$'nin bu kapalı yol etrafındaki çizgi integrali, bu iki yol parçasının toplamı olarak yazılabilir:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \underbrace{\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\substack{\text{bobin}\\ \text{boyunca}}} + \underbrace{\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\text{dışarıdan}} \tag{22.3}$$

Daha önce gördüğümüz üzere, mükemmel bir iletken içinde elektrik alan olamaz. (En küçük alanla bile sonsuz akımlar meydana getirirdi.) Dolayısıyla, bobin boyunca *a*'dan *b*'ye integral sıfırdır. $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integraline bütün katkı indüktans dışındaki, *b* ucundan *a* ucuna olan yoldan gelir. "Kutu"nun dışındaki uzayda hiç manyetik alan olmadığı varsaydığımızdan, integralin bu parçası seçilen yoldan bağımsızdır ve iki ucun potansiyellerini tanımlayabiliriz. İki potansiyel arasındaki fark voltaj farkı veya basitçe V'dir. Dolayısıyla şunu elde etmiş oluruz:

$$V = -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$$

Bütün çizgi integral, daha önceden elektromotor kuvveti dediğimiz $\mathcal{E}$'dir ve elbette bobinin içindeki manyetik akının değişim hızına eşittir. Daha önceden, bu emk'nın akımın değişim hızının eksisine eşit olduğunu görmüştük. Dolayı-

sıyla, L bobinin indüktansıyken, şunu yazabiliriz:

$$V = -\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}$$

$dI/dt = i\omega I$ olduğundan, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$V = i\omega LI \tag{22.4}$$

İdeal indüktansı tarif etme şeklimiz, diğer ideal devre elemanlarına da –genelde "toplu" elemanlar denir bunlara– genel yaklaşımı tarif eder. Elemanın özellikleri, tamamen uçlardaki voltajlar ve akımlar cinsinden tarif edilir. Uygun yakınlaştırmalarda bulunarak, nesne içinde görülen alanlardaki büyük karmaşıklıkları ihmal etmek mümkündür. İçerde olan biten ile dışarda olan biten arasında bir ayrım yapılmıştır.

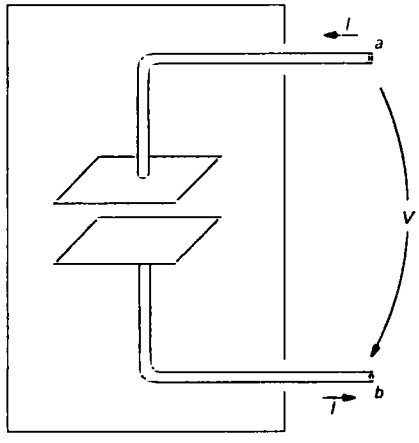
Tüm devre elemanları için Denk. (22.4) gibi, içinde voltajın, genelde karmaşık bir sayı olan oranı sabitiyle, akıma orantılı olduğu bir ilişki bulacağız. Karmaşık orantı katsayısına *empedans* denir ve genelde z'yle gösterilir (z koordinatıyla karıştırmayasanız). Genel olarak, ω frekansının bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, herhangi bir toplu eleman için aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z \tag{22.5}$$

İndüktans için de,

$$z \text{ (indüktans)} = z_L = i\omega L \tag{22.6}$$

geçerlidir. Şimdi, aynı bakış açısıyla sığaça bakalım.* Bir sığaç, bir çift iletken levhadan oluşur ve levhalardan çıkan iki tel uygun uçlara uzatılmıştır. Levhalar herhangi bir şekilde olabilir ve çoğu zaman bir miktar dielektrik malzemeyle birbirlerinden ayrılmıştır. Böyle bir durumu şematik olarak Şekil 22-2'de gösterdik. Yeniden, birçok basitleştirici varsayımlarda bulunacağız. Levhaların ve tellerin mükemmel iletkenler olduğunu varsayarız. Ayrıca, levhalar arasındaki yalıtımın mükemmel olduğunu ve böylece bir levhadan diğerine yük geçmeyeceğini varsayarız. Sonra, iki iletkenin birbirine çok yakın ama diğerlerinden uzak olduğunu ve böylece bir levhadan çıkan alan çizgilerinin diğerine vardığını varsayarız. Elbette bir de iki levhada eşit ve zıt yükler olduğunu ve levhaların üzerindeki yüklerin besleme kablolarının yüzeyindeki yüklerden çok daha büyük olduğu varsayımı var. Son olarak, sığaça yakın hiç manyetik alan olmadığını varsayarız.



Şekil 22-2 Bir sığaç (ya da kondansatör).

a ucundan başlayan, telin içinden geçip sığaç levhasının tepesine giden, levhalar arasındaki boşluğu atlayarak alt levhaya geçen, oradan tel boyunca b ucuna giden ve sığaçın dışından a ucuna geri dönen kapalı ilmek etrafında, $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integralini ele aldığımızı düşünelim. Manyetik alan olmadığından dolayı, bu kapalı yol etrafında $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integrali sıfırdır. İntegrali üç parçaya ayırabiliriz:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \underbrace{\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\substack{\text{teller}\\ \text{boyunca}}} = \underbrace{\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\substack{\text{levhalar}\\ \text{arasında}}} + \underbrace{\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\text{dışarda}} \tag{22.7}$$

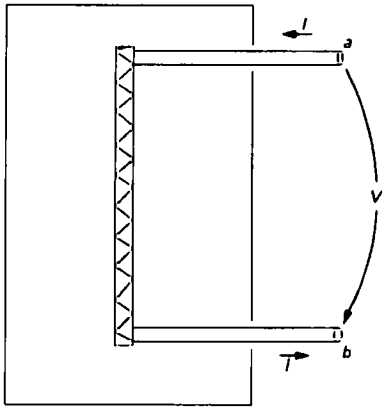
Teller boyunca integral sıfırdır; çünkü mükemmel iletkenlerin içinde elektrik alan yoktur. Sığaçın dışında b'den a'ya integral de uçlar arasındaki potansiyel farkının eksisine eşittir. İki levhanın da, bir şekilde, dünyanın geri kalanından

---

* Bazı insanlar, *nesnelere* "indüktör" ve "sığaç (kapasitör)"; *özelliklerine* de "indüktans" ve "sığa (kapasitans)" dememiz gerektiğini söyler. Bizse laboratuarda duyacağınız kelimeleri kullanmayı tercih ediyoruz. Yine de birçok insan hem fiziksel bobin için hem de onun indüktansı L için "indüktans" demektedir. "Sığaç" kelimesi kabul görmüş gibidir. Yine de sık sık "kondansatör" kelimesinin kullanıldığını duyacaksınız ve birçok insan da hâlâ "sığa" demeyi tercih ediyor.

yalıtıldığını varsaydığımızdan, iki levha üzerindeki toplam yük sıfır olmalıdır. Üst levhada Q yükü varsa, alt levhada eşit ve zıt $-Q$ yükü olmalıdır. Daha önceden gördüğümüz üzere, iki iletken eşit ve zıt yüklere (artı ve eksi) sahipse, levhalar arasındaki potansiyel farkı Q/C'ye eşittir. C, iki iletkenin sığasıdır. Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$V = \frac{Q}{C}$$



Şekil 22-3 Bir direnç.

Sığaça a ucundan giren (ve b ucundan çıkan) I elektrik akımı dQ/dt'ye, levhalardaki elektrik yükünün değişim hızına eşittir. Denklem (22.7)'den, a ve b terminalleri arasındaki potansiyel farkı levhalar arasındaki potansiyel farkına eşittir. dV/dt'yi $i\omega V$ şeklinde yazarsak, bir sığaç için voltaj akım ilişkisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$i\omega V = \frac{I}{C}$$

ya da

$$V = \frac{I}{i\omega C} \tag{22.8}$$

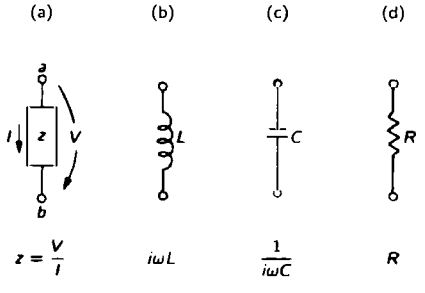
Bu durumda, sığaçın empedansı

$$z\ (\text{sığaç}) = z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{22.9}$$

olur.

Ele almak istediğimiz üçüncü elemansa bir dirençtir. Daha henüz gerçek malzemelerin elektriksel özelliklerine değinmediğimiz için, gerçek bir iletkenin içinde ne olup bittiğini konuşmaya hazır değiliz. Elektrik alanların gerçek malzemelerin içinde var olabileceği gerçeğini, bu elektrik alanların bir elektrik yükü akışı –bir akım– sağlayabileceğini ve bu akımın da iletkenin bir ucundan diğerine elektrik alanın integraline orantılı olduğunu kabul etmek zorundayız. Bu sayede, Şekil 22-3'teki gibi ideal bir direnç hayal edebiliriz. a ve b uçlarından çıkıp, dirençli bir çubuğun iki ucuna giden ve mükemmel iletkenler olarak varsaydığımız iki teldir. Her zamanki akıl yürütmemizi kullanarak, a ile b arasındaki potansiyel farkın dış elektrik alanın çizgi integraline eşit olduğunu ve elektrik alanın da dirençli malzemeden yapılmış çubuktan geçen elektrik alanın çizgi integraline eşit olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, dirençten geçen I akımının uçlar arasındaki V voltajıyla orantılı olduğunu çıkarabiliriz.

$$I = \frac{V}{R}$$



ŞEKİL 22-4 İdeal toplu devre elemanları (pasif).

Yukarıdaki denklemdeki R'ye direnç denir. Daha sonra, gerçek iletken malzemeler için akım ile voltaj arasındaki ilişkinin neredeyse doğrusal olduğunu göreceğiz. Ayrıca, bu yaklaşık orantısallığın, frekans çok yüksek olmadığı sürece, voltaj ve akımın değişim frekansından bağımsız olmasının beklendiğini de göreceğiz. Bu yüzden, alternatif akımlar için direnç içinden geçen voltaj akımla aynı evrededir. Bu da, empedansın gerçel bir sayı olduğu anlamına gelir:

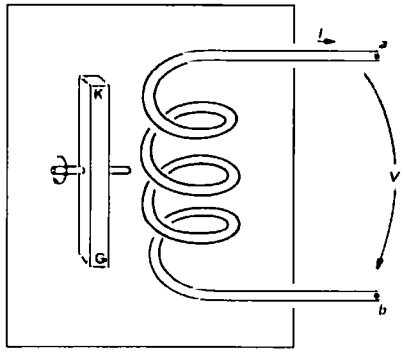
$$z\ (\text{direnç}) = z_R = R \tag{22.10}$$

Toplu devre elemanları –indüktör, sığaç ve direnç– için elde ettiğimiz sonuçlar Şekil 22-4'te özetlenmiştir. Bu şekil ve daha önceki şekillerde, voltajı bir uçtan diğerine yönlenmiş bir okla belirttik. Voltaj "pozitif" ise –a ucunun potansiyeli b ucunun potansiyelinden *fazlaysa*– ok, pozitif "voltaj düşmesi" yönünü belirtir.

Her ne kadar alternatif akımlardan konuşuyor olsak da, ω frekansı sıfıra giderken limit alarak, kararlı akımlara sahip devrelere dair özel durumu da dahil edebiliriz. Sıfır frekans için –DC için– indüktansın empedansı sıfıra gider; kısa devre oluşur. DC için, kondansatörün empedansı sonsuza gider; açık devre hali-

ne gelir. Direncin empedansı frekanstan bağımsız olduğundan, DC için devre analizi yaparken elimizde kalan tek eleman odur.

Şu ana kadar tanımladığımız devre elemanlarında akım ve voltaj birbirleriyle orantılıdır. Biri sıfırsa, diğeri de sıfırdır. Bunları şu şekilde düşünürüz: Uygulanan bir voltaj akımdan "sorumludur" ya da bir akım uçlar arasında voltaja "yol açar"; bir anlamda elemanlar, "uygulanan" dış koşullara "cevap" verirler. Bu nedenden dolayı, bu elemanlara *pasif elemanlar* denir. Bundan dolayı da, bir devredeki voltajların veya salınan akımların *kaynağı* olan aktif elemanlarla, örneğin bir sonraki bölümün konusu olan jeneratörlerle karşılaştırılabilirler.



Şekil 22-5 Sabit bir bobin ve dönen bir manyetik alandan oluşan bir jeneratör.

22-2 Jeneratörler

Şimdi, *aktif* bir devre elemanı hakkında, bir devredeki voltajların ve akımların kaynağı olan ve adına *jeneratör* denilen eleman hakkında konuşalım.

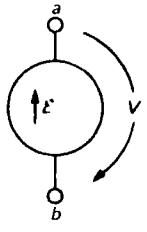
İndüktansa benzer ama çok az sarımı olan ve böylece içindeki akımın manyetik alanını ihmal edebileceğimiz bir bobinimiz olduğunu varsayalım. Bu bobin, Şekil 22-5'te gösterildiği gibi dönen bir mıknatıs sayesinde meydana getirilebilecek bir manyetik alanın içinde olsun. (Daha önce, böyle bir dönen manyetik alanın, uygun bir alternatif akımlı bobinler kümesiyle de meydana getirilebileceğini görmüştük.) Yine birçok basitleştirici varsayımda bulunmalıyız. Yapacağımız bütün varsayımlar, indüktans için yaptıklarımızla aynıdır. Özel olarak, değişken manyetik alanın bobinin yakınındaki belirli bir bölgeyle sınırlandırıldığını ve jeneratörün dışında, uçların arasındaki boşlukta bulunmadığını varsayacağız.

İndüktans için yaptığımız analizi takip edersek, $\boldsymbol{E}$'nin, a ucunda başlayan, bobinin içinden geçip b ucuna giden ve iki uç arasındaki boşluktan başlangıç noktasına dönen tam kapalı ilmek etrafındaki çizgi integralini ele alırız. Yeniden, uçlar arasındaki potansiyel farkının, $\boldsymbol{E}$'nin ilmek etrafındaki toplam çizgi integrali olduğu sonucuna varırız:

$$V = -\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Bu çizgi integral devredeki emk'ya eşittir, dolayısıyla jeneratörün uçları arasındaki V potansiyel farkı da ayrıca bobininiçinden geçen manyetik akının değişim hızına eşittir:

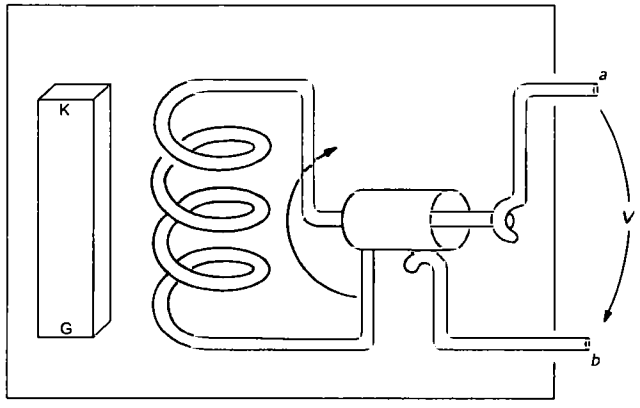
$$V = -\mathcal{E} = \frac{d}{dt}(\text{akı}) \qquad (22.11)$$



Şekil 22-6 İdeal bir jeneratörün sembolü.

İdeal bir jeneratör için, bobini bağlayan manyetik alanın dış koşullarca –dönen bir manyetik alanın açısal hızı gibi– belirlendiğini ve jeneratör içinden geçen akımlardan herhangi bir şekilde etkilenmediğini varsayarız. Dolayısıyla bir jeneratör –ya da en azından ele aldığımız *ideal* jeneratör– bir empedans değildir. Uçları arasındaki potansiyel farkı, rastgele belirlenmiş bir elektromotor kuvvet $\mathcal{E}(t)$ sembolüyle belirlenir. Böyle bir ideal jeneratör Şekil 22-6'daki sembolle temsil edilir. Küçük ok, emk'nın, artı olduğunda, yönünü gösterir. Şekil 22-6'da gösterilen jeneratördeki bir pozitif emk, $V = \mathcal{E}$ Volt akı meydana getirir ve a ucundaki potansiyel b ucundakinden yüksektir.

Şu ana kadar tarif ettiğimiz jeneratörden, uçlarının ötesinde olan biten anlamında ayırt edilemez ama içinde tamamen farklı bir jeneratör yapmanın bir başka yolu vardır. Şekil 22-7'deki gibi, *sabit* bir manyetik alanda döndürülen bir tel bobinimiz olsun. Şekildeki çubuk mıknatıs bir manyetik alan olduğunu belirtmek içindir. Herhangi bir başka kararlı manyetik alan kaynağıyla, örneğin kararlı bir akım taşıyan ilave bir bobin, değiştirilebilir elbette. Şekilde gösterildiği gibi, dönen bobinden çıkan bağlantılar dış dünyaya kayan kontaklarla veya "kayar bilezik"lerle bağlanmıştır. Yine ilgilendiğimiz şey, a ile b uçları ara-



Şekil 22-7 Sabit bir manyetik alanda dönen bobinden oluşan bir jeneratör.

sındaki potansiyel farktır ve elbette a ucundan b ucuna jeneratörün dışından giden elektrik alanın integralidir.

Şekil 22-7'deki sistemde değişen manyetik alanlar yoktur; dolayısıyla başta jeneratör uçlarında nasıl voltaj oluşabileceğini başta merak edebilirsiniz. Aslında, jeneratörün içinde hiçbir yerde elektrik alan yoktur. Yine, içerideki tellerin mükemmel iletken malzemeden yapıldığını varsayıyoruz. Defalarca söylediğimiz gibi, mükemmel bir iletkenin içindeki elektrik alan sıfıra eşittir. Fakat bu doğru değildir. İletken bir manyetik alan içinde ilerlerken doğru değildir. Doğru ifade, mükemmel bir iletkenin içindeki herhangi bir yüke etki eden toplam *kuvvetin* sıfır olduğudur. Öteki türlü olsaydı, serbest yüklerin sonsuz bir akışı olurdu. Dolayısıyla, her zaman doğru olan şey, elektrik alan $\boldsymbol{E}$ ve iletkenin hızı ile $\boldsymbol{B}$ manyetik alanının vektörel çarpımının –ki bu çarpım da birim yük üzerindeki toplam kuvvettir– toplamının iletken içinde sıfır olmasıdır:

$$\boldsymbol{F}/\text{birim yük} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \text{ (mükemmel bir iletkende)} \qquad (22.12)$$

Burada $\boldsymbol{v}$, iletkenin hızıdır. Mükemmel bir iletkenin içinde elektrik alan bulunmadığına dair önceki ifademiz, iletkenin hızı $\boldsymbol{v}$ sıfır olduğu sürece doğrudur; aksi halde doğru ifade Denk. (22.12)'dir.

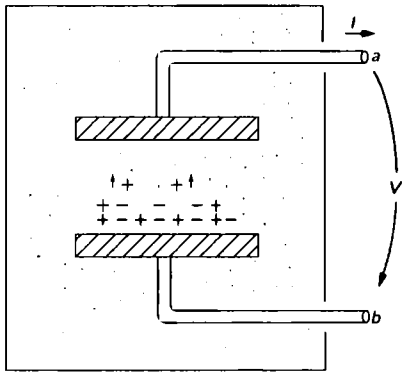
Şekil 22-7'deki jeneratörümüze dönecek olursak, a ucundan b ucuna jeneratörün iletken yolu üzerindeki elektrik alan $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integrali, aynı yoldaki $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$'nin çizgi integraline eşit olmalıdır:

$$\int_{a\ \text{iletkenin içinde}}^{b} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{a\ \text{iletkenin içinde}}^{b} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} \qquad (22.13)$$

Bununla birlikte, $\boldsymbol{E}$'nin, b'den a'ya jeneratörün dışında olan yol dahil, kapalı bir ilmek etrafındaki çizgi integralinin sıfır olması gerektiği hâlâ doğrudur; çünkü değişen manyetik alan yoktur. Dolayısıyla Denk. (22.13)'ün ilk integrali de ayrıca V'ye, iki uç arasındaki voltaja, eşittir. Sonunda anlaşıldı ki, Denk. (22.13)'ün sağ tarafındaki integral bobin içinden geçen akı bağının değişim hızıdır ve dolayısıyla –akı kuralı gereği– bobinin içindeki emk'ya eşittir. Dolayısıyla yine, Denk. (22.11)'le uyumlu olacak şekilde, uçlar arasındaki potansiyel farkının devredeki elektromotiv kuvvete eşit olduğunu elde ettik. İster, sabit bir bobinin yakınında ve içindeki manyetik alanın değiştiği bir jeneratör isterse de sabit bir manyetik alanın içinde bobinin hareketli olduğu bir jeneratör olsun, jeneratörün dış özellikleri aynıdır. Uçlar arasında bir V voltaj farkı vardır ve bu fark devrenin içindeki akımdan bağımsız, ama jeneratörün içindeki rastgele belirlenmiş koşullara bağımlıdır.

Jeneratörlerin çalışma ilkesini Maxwell denklemleriyle açıklamaya çalışırken, sıradan kimyasal hücreleri de, örneğin bir el fenerinin pilini de, ele alabiliriz. O da, her ne kadar sadece DC devrelerde gözükse de, bir jeneratördür, voltaj

kaynağıdır. En basit türden bir hücre Şekil 22-8'de gösterilmiştir. Bir kimyasal çözeltiye batırılmış iki levha düşünün. Çözeltinin içinde artı ve eksi iyonlar olduğunu varsayalım. Ayrıca, iyonlardan birinin, diyelim ki eksi olanın, karşıt kutuplulukta olandan çok daha ağır olduğunu ve böylece çözelti içindeki yayınımının çok daha yavaş olduğunu da varsayarız. Bir de, çözeltinin yoğunluğunun bir şekilde bir noktadan diğerine değişecek şekilde ayarlandığını varsayarız. Böylece, aşağıdaki levhaya yakın her iki işaretteki iyonların sayısı, yukardaki levhanın yakınındaki iyon yoğunluğundan daha fazla olur. Hızlı hareket edebildiklerinden dolayı, artı iyonlar düşük konsantrasyonlu bölgeye daha hızlı gideceklerdir. Böylece, üstteki levhaya varan artı yük sayısı biraz daha fazla olacaktır. Üstteki levha artı yüklü ve alttaki de eksi yüklü olur.



Şekil 22-8 Kimyasal bir hücre.

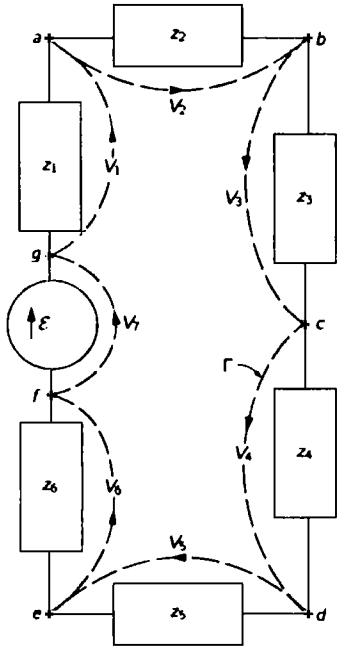
Üstteki levhaya daha fazla yük aktıkça bu levhanın potansiyeli, levhalar arasındaki elektrik alanın iyonlar üzerinde meydana getirdiği kuvvetler fazladan hareketliliklerini telafi edecek seviyeye gelene kadar yükselir; hücrenin iki levhası arasında hızla bir potansiyel farkı oluşur ki bu da iç yapısının bir özelliğidir.

İdeal sığaç için kullandığımız akıl yürütmeyi tekrar kullandığımızda, *a* ve *b* uçları arasındaki potansiyel farkının, iyonların netyayınımı kalmayana dek iki levha arasındaki elektrik alanın çizgi integraline eşit olduğunu görürüz. Bir sığaç ile böyle bir kimyasal hücre arasında elbette temel bir fark vardır. Kimyasal hücrede akım, emk'da herhangi bir değişiklik olmadan ve elbette hücredeki tüm kimyasallar kullanılıp bitirilmeden, uçlardan kesintisizce çekilebilir. Gerçek bir hücrede, hücreden çekilen akım arttıkça uçlar arasındaki potansiyel farkın azaldığı görülmüştür. Bununla birlikte, yaptığımız soyutlamalara sadık kalarak, uçlar arasındaki voltajın akımdan bağımsız olduğu ideal bir hücre düşünebiliriz. Bu durumda gerçek hücre de, bir dirence seri bağlı ideal bir hücre olarak düşünülebilir.

22-3 İdeal elemanlar şebekesi; Kirchhoff yasaları

Son bölümde gördüğümüz üzere, ideal bir devre elemanını, elemanın dışında olup bitenle tanımlamak gayet kolaydır. Akım ve voltaj birbirleriyle doğrusal olarak bağlantılıdır. Elemanın içinde olup bitense gayet karmaşıktır ve Maxwell denklemleriyle kesin bir tanımını vermek çok zordur. İçinde yüzlerce direnç, kapasite ve indüktörden oluşan bir radyonun içindeki elektrik ve manyetik alanların doğru bir tanımını yapmaya çalıştığınızı hayal edin. Maxwell denklemlerini kullanarak böyle bir şeyi analiz etmeye çalışmak imkânsız bir iş olurdu. Bölüm 22-2'de tarif ettiğimiz birçok yakınlaştırmayı kullanarak ve gerçek devre elemanlarının temel özelliklerini idealleştirme yoluyla özetleyerek, bir elektrik devresini görece doğrudan bir şekilde analiz etmek mümkündür. Şimdi, bunun nasıl yapıldığını göstereceğiz.

Şekil 22-9'da gösterildiği gibi, bir jeneratörden ve birçok empedansın birbirlerine bağlanmasından oluşan bir devremiz olduğunu düşünelim. Yakınlaştırmalarımıza göre, bağımsız devre elemanlarının dışında kalan bölgede manyetik alan yoktur. Dolayısıyla, $\boldsymbol{E}$'nin bu elemanların içinden geçmeyen herhangi bir eğri etrafındaki çizgi integrali de sıfırdır. Şekil 22-9'daki devre etrafında dolaşan ve kesikli çizgiyle gösterilen Γ eğrisini ele alalım. $\boldsymbol{E}$'nin bu eğri etrafındaki çizgi integrali birçok parçadan oluşur. Çizgi integralin her bir parçası, bir devre elemanın bir ucundan diğerinedir. Bu çizgi integraline, devre elemanı boyunca voltaj düşüşü denir. Bu durumda, bütün çizgi integrali devredeki bütün elemanların voltaj düşüşlerinin toplamına eşittir.



Şekil 22-9 Herhangi bir kapalı yol etrafındaki voltaj düşüşlerinin toplamı sıfırdır.

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \sum V_n$$

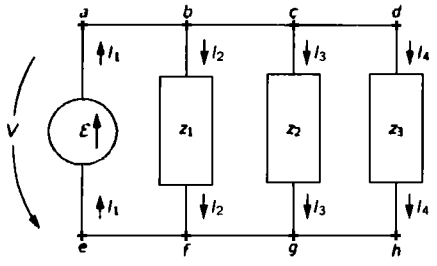
Çizgi integrali sıfır olduğundan, bir devrenin tam bir ilmeği etrafındaki bütün

potansiyel farkların toplamı da sıfıra eşit olur:

$$\sum_{\substack{\text{herhangi bir}\\ \text{ilmek etrafında}}} V_n = 0 \qquad (22.14)$$

Bu sonuç, manyetik alanların olmadığı bir bölgede, $\boldsymbol{E}$'nin herhangi bir kapalı ilmek etrafındaki çizgi integralinin sıfır olması, Maxwell denklemlerinin birinin sonucudur.

Şekil 22-10'da gösterildiği gibi bir devreyi ele alalım. a, b, c ve d uçlarını bağlayan yatay çizgi, bütün bu uçların birbirine bağlı olduğunu ya da dirençleri ihmal edilebilir tellerle birleştirildiğini göstermek içindir. Nasıl olduğu fark etmez, yatay çizginin anlamı a, b, c ve d uçlarının hepsinin aynı potansiyelde ve benzer şekilde e, f, g ve h uçlarının da ortak bir potansiyelde olduğu anlamına gelir. Bu yüzden, her bir dört eleman boyunca V voltaj düşüşü aynıdır.



Şekil 22-10 Herhangi bir düğüme giren akımların toplamı sıfırdır.

Yaptığımız idealleştirmelerden biri de, empedansların uçlarında biriken elektrik yüklerinin ihmal edilebilir olduğuydu. Biraz daha ileri gidip, bir varsayımda daha bulunacağız ve uçları birleştiren tellerdeki elektrik yüklerinin de ihmal edilebilir olduğunu söyleyeceğiz. Dolayısıyla, yükün korunumu yasasına göre bir devre elemanından çıkan bir yük hemen bir başka devre elemanına girmelidir. Bir başka deyişle, herhangi bir bağlantı noktasına giren akımların cebirsel toplamının sıfır olması gerekir. Bağlantıdan kastımız, elbette, birbirlerine bağlantılı a, b, c ve d gibi uçlarda oluşmuş herhangi bir kümedir. Bağlantılı uçlardan oluşan bir kümeye genellikle "düğüm" denir. Şekil 22-10'daki devre için, yük korunumuna göre aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

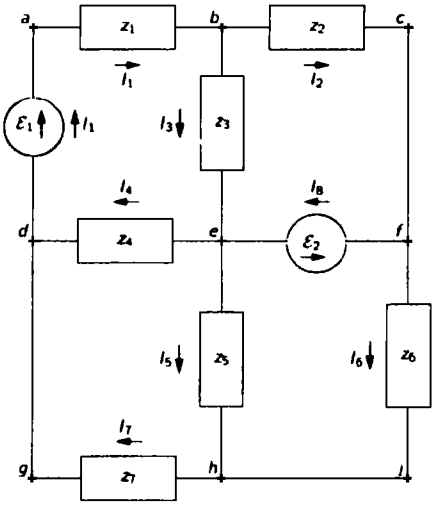
$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0 \qquad (22.15)$$

e, f, g ve h uçlarından oluşan düğüme giren akımların toplamı da sıfır olmalıdır:

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \qquad (22.16)$$

Bu, elbette, Denk. (22.15)'le aynı şeydir. İki denklem birbirinden bağımsız değildir. Genel kural, *herhangi bir düğüme giren akımların toplamının sıfır olmasıdır*:

$$\sum_{\substack{\text{herhangi bir}\\ \text{düğüme}}} I_n = 0 \qquad (22.17)$$



Şekil 22-11 Bir devrenin Kirchhoff yasalarıyla analiz edilmesi.

Daha önceki çıkarımımıza göre, kapalı bir ilmek etrafındaki voltaj düşüşlerinin toplamının sıfır olması, karmaşık bir devredeki herhangi bir ilmek için de geçerli olmalıdır. Herhangi bir düğüme giren akımların toplamının sıfır olması çıkarımımız da, aynı şekilde herhangi bir düğüm için geçerli olmalıdır. Bu iki denklem, *Kirchhoff yasaları* olarak bilinirler. Bu iki yasa sayesinde, herhangi bir şebekedeki akımlar ve voltajları çözmek mümkündür.

Şekil 22-11'deki gibi daha karmaşık bir devreyi ele alalım. Bu devredeki akımlar ve voltajları nasıl buluruz? Onları, şu anlatacağımız dosdoğru yolla bulabiliriz. Devrede görünen dört adet iç ilmekten her birini ayrı ayrı ele alalım. (Örneğin, bir ilmek a ucundan b ucuna, e ucuna, d ucuna gider ve sonra a ucuna geri döner.) Her bir ilmek için Kirchhoff yasalarının ilkini –her bir ilmek etrafındaki voltajların toplamının sıfır olmasını– yazalım. Akım *yönünü* takip edecek olursak voltaj düşüşünü artı ve akıma *ters* yönde gidersek de eksi almamız gerektiğini ve bir jeneratör boyunca voltaj düşümünün, o yöndeki emk'nın *eksisi* olduğunu unutmayın. Dolayısıyla, a ucunda başlayıp yine aynı uçta biten küçük ilmek için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0$$

Kalan ilmeklere de aynı yasayı uygulayarak, aynı türden üç denklem daha elde ederiz.

Şimdi, devredeki her bir düğüm için akım denklemini yazmalıyız. Örneğin, b ucundaki düğüme giren akımları toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0$$

Benzer şekilde, *e* ucundaki düğümde şu akım denklemini elde ederiz:

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0$$

Şekilde devre için böyle beş adet denklem vardır. Anlaşılan o ki, bu denklemlerin herhangi biri kalan dördünden türetilebilir; dolayısıyla sadece dört adet bağımsız denklem vardır. Böylece elimizde sekiz adet bağımsız, doğrusal denklem var artık: dört voltaj denklemi ve dört akım denklemi. Bu sekiz denklemle, sekiz bilinmeyen akımı çözebiliriz. Akımları bildiğimizde, devre artık çözülmüştür. Herhangi bir devre elemanı boyunca voltaj düşüşü, elemandan geçen akım çarpı empedansıdır (ya da, voltaj kaynakları söz konusu olduğunda zaten düşüş bilinir).

Akım denklemlerini yazarken gördük ki, diğerlerinden bağımsız olmayan bir denklem elde ediyoruz. Çok fazla voltaj denklemi yazmak da mümkündür. Örneğin, Şekil 22-1'deki devre için her ne kadar dört küçük ilmekle ilgilendiysek de, voltaj denklemi yazabileceğimiz daha birçok ilmek vardır. Örneğin, *abcfeda* yolunda da bir ilmek vardır. *abcfehgda* yolunda da bir başka ilmek vardır. Gördüğünüz üzere, olası birçok ilmek vardır. Karmaşık devreleri analiz ederken, çok fazla sayıda denklem elde etmek mümkündür. En az sayıda denklem elde etmemize yardımcı olacak yasaları vardır; ancak biraz düşünerek de en basit biçimde ve doğru sayıda denklemleri nasıl elde edebileceğinizi görebilirsiniz. Hem bir iki fazladan denklem yazmak da çok zarar vermez. Yanlış cevaplara yol açmazlar; sadece biraz gereksiz cebir hesabı yapmamıza yol açarlar.

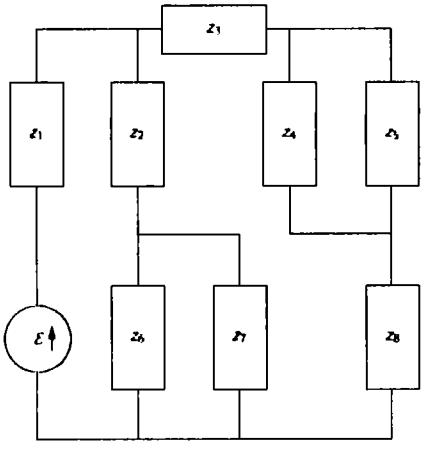
İki empedansın birbirilerine seri bağlanmaları halinde, aşağıdaki denklemle verilen tek bir empedansa, z_S, eşit olduklarını I. Cilt, 25. Bölümde göstermiştik:

$$z_S = z_1 + z_2 \tag{22.18}$$

Ayrıca, iki empedansın birbirilerine paralel bağlanmaları halinde, aşağıdaki denklemle verilen tek bir empedansa, z_p, eşit olduklarını da göstermiştik:

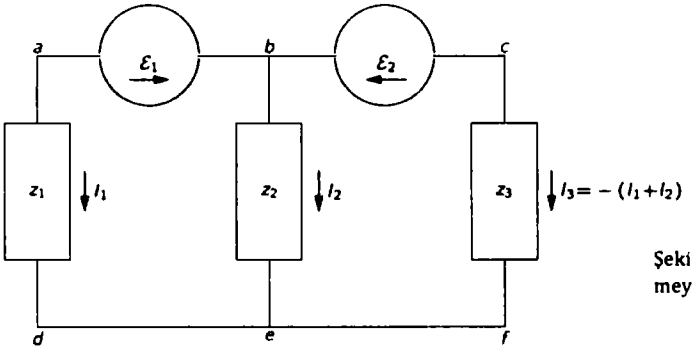
$$z_p = \frac{1}{(1/z_1) + (1/z_2)} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \tag{22.19}$$

Geriye dönüp bakarsanız, bu kuralları türetirken Kirchhoff yasalarını kullandığımızı göreceksiniz. Karmaşık devreleri, seri ve paralel bağlı empedanslar için denklemlerin tekrarlanarak kullanılmasıyla analiz etmek mümkündür. Örneğin, Şekil 22-12'nin devresi bu şekilde analiz edilebilir. Önce, z_4 ile z_5'in ve z_6 ile z_7'nin empedanslarını paralel eşdeğerleriyle değiştirebiliriz. Daha sonra z_2'nin empedansı, z_6 ve z_7'nin paralel eşdeğerlerine seri bağlama kuralına göre bağlanabilir. Bu şekilde devam ederek, bütün devre tek bir Z empedansıyla seri bağlı bir jeneratör haline getirilebilir. O halde, jeneratörden geçen akım sadece $\mathcal{E}/Z$ olur. Daha sonra geriye dönük çalışarak, her bir empedanstaki akımları çözebiliriz.



Şekil 22-12 Seri ve paralel bağlantılar yoluyla analiz edilebilecek bir devre.

Tüm bunların yanında, bu yöntemle analiz edilemeyecek gayet basit devreler de vardır. Şekil 22-13'teki devre bunlardan biridir. Bu devreyi analiz edebil-



Şekil 22-13 Seri ve paralel bağlamalarla analiz edilemeyecek bir devre.

mek için, Kirchhoff yasalarını kullanarak akım ve voltaj denklemlerini yazmalıyız. Gelin, bunu yapalım. Tek bir akım denklemi vardır:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Böylece hemen

$$I_3 = -(I_1 + I_2)$$

yazabiliriz. Sonucu kullanarak hemen voltaj denklemlerini yazmaya girişirsek, bir miktar cebir hesabından kurtarabiliriz kendimizi. Bu devre için iki bağımsız voltaj denklemi vardır. Bunlar,

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0$$

ve

$$\mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0$$

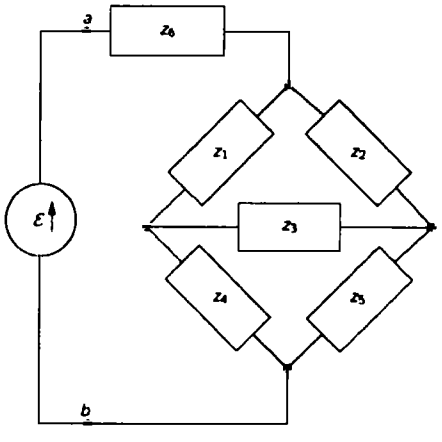
eşitlikleridir. İki denklemimiz ve iki bilinmeyen akımımız var. Bu denklemleri I_1 ve I_2 için çözersek,

$$I_1 = \frac{z_2\mathcal{E}_2 - (z_2 + z_3)\mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3} \tag{22.20}$$

ve

$$I_2 = \frac{z_1\mathcal{E}_2 + z_3\mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3} \tag{22.21}$$

denklemlerini elde ederiz. Üçüncü akım, bu ikisinin toplamından elde edilir.



Şekil 22-14 Bir köprü devresi.

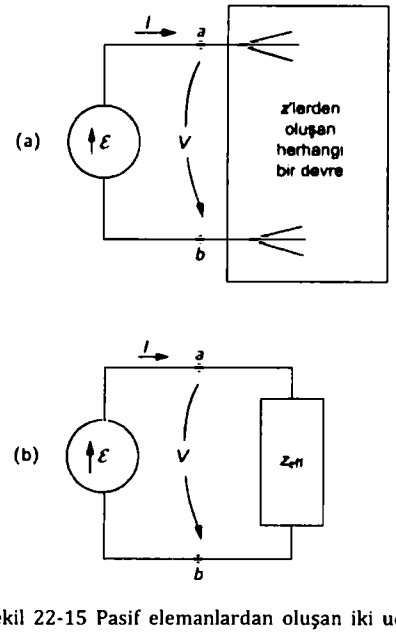
Seri ve paralel empedans yasalarını kullanarak analiz edilemeyecek bir başka devre örneği Şekil 22-14'te gösterilmiştir. Bu tür bir devreye "köprü" denir. Empedansları ölçmek için kullanılan birçok cihazda bulunur. Böyle bir devreye sahip bir kişi, genelde sadece tek bir soruyla ilgilenir: z_3 empedansından geçen akımın sıfır olması için, çeşitli empedanslar birbirlerine nasıl bağlı olmalıdır? Bu koşulları bulmayı size bırakıyoruz.

22-4 Eşdeğer devreler

Empedansların karmaşık bir şekilde bağlandığı bir devreye, Şekil 22-15 (a)'da gösterildiği gibi, bir $\mathcal{E}$ jeneratörü bağladığımızı varsayalım. Kirchhoff yasalarından elde ettiğimiz tüm denklemler doğrusaldır; onları I akımını bulmak için jeneratöre bağlı olarak çözdüğümüzde $\mathcal{E}$'ye orantılı bir I elde ederiz. z_{et} bir karmaşık sayı, devrenin bütün elemanlarının cebirsel fonksiyonu olmak üzere,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{z_{et}}$$

yazabiliriz. (Devre, gösterilenden başka jeneratör içermiyorsa, $\mathcal{E}$'den bağımsız ilave bir terim yoktur.) Dikkat ederseniz, bu denklem aynı, Şekil 22-15 (b) için yazacağımız denklemdir. Sadece a ve b uçlarının *sol tarafında* olan bitenle ilgilendiğimiz sürece, Şekil 22-15'in iki devresi birbirine *eşdeğerdir*. Dolayısıyla, pasif elemanlardan oluşan ***herhangi*** bir iki uçlu şebekenin, devrenin geri kalanındaki akımları ve voltajları değiştirmeden tek bir z_{et} empedansıyla değiştirebileceği genel ifadesini yazabiliriz. Bu ifade, elbette, Kirchhoff yasalarından – ve nihayetinde Maxwell denklemlerinin doğrusallığından– ne çıktığına dair bir nottur.



Şekil 22-15 Pasif elemanlardan oluşan iki uçlu bir şebeke, etkili bir empedansa eşdeğerdir.

Bu fikir, empedansların yanında jeneratörler de içeren devrelerde kullanılabilir. Böyle bir devreye, Şekil 22-16 (a)'da gösterilen empedanslardan biri olan z_n "bakış açısından" baktığımızı düşünelim. Denklemi bütün devre için çözseydik, a ile b uçları arasındaki V_n voltajının, I'nın bir doğrusal fonksiyonu olduğunu bulurduk. A ve B değerleri jeneratörlere bağlı ve devredeki impedanslar uçların solundayken şunu yazabiliriz:

$$V_n = A - BI_n \tag{22.22}$$

Örneğin, Şekil 22-13'teki devre için $V_1 = I_1 z_1$ eşitliğini buluruz. Bu, Denk.

(22.20)'yi tekrar düzenleyerek aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2 + z_3}\right)\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1 \qquad (22.23)$$

Böylece eksiksiz çözümü, bu denklemle, z_1 empedansı için olan denklemle birleştirerek bulabiliriz. Şöyle ki, $V_1 = I_1 z_1$ ya da genel durum için, Denk. (22.22)'yle birleştirerek

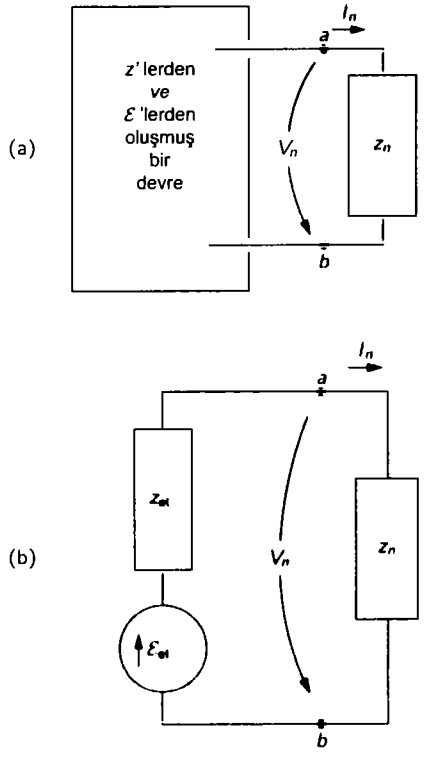
$$V_n = I_n z_n$$

elde ederiz.

Şimdi, Şekil 22-15 (b)'deki gibi, z_n'nin bir jeneratör ve akımdan oluşan basit bir seri devreye bağlandığını düşünürsek; Denk. (22.22)'ye karşılık gelen denklem

$$V_n = \mathcal{E}_{et} - I_n z_{et}$$

olur. Bu denklem, $\mathcal{E}_{et} = A$ ve $z_{et} = B$ eşitliklerini kurduğumuz sürece Denk. (22.22)'ye eşdeğerdir. Dolayısıyla, sadece *a* ve *b* uçlarının *sağında* ne olup bittiğiyle ilgilenirsek, Şekil 22-16'daki devre, bir empedans ile seri bağlı bir jeneratörden oluşan eşdeğer bir birleşimle değiştirilebilir.



Şekil 22-16 Herhangi bir iki uçlu şebeke, bir empedansla seri bağlı bir jeneratörle değiştirilebilir.

22-5 Enerji

Bir indüktansta I akımı oluşabilmesi için, $U = \frac{1}{2} LI^2$ kadar bir enerjinin dış devre tarafından sağlanması gerektiğini daha önce görmüştük. Akım sıfıra geri düştüğünde, bu enerji devreye geri beslenir. İdeal bir indüktansta enerji kayıp mekanizması yoktur. Bir indüktans içinden geçip giden bir alternatif akım olduğunda, enerji ileri geri indüktansı ile devre arasında gider gelir; fakat ortalama devreye enerjinin beslenme hızı sıfırdır. İndüktans için *kayıpsız* devre deriz; hiç elektrik enerjisi yitmez; "kaybolmaz".

Benzer şekilde, bir kondansatörün enerjisi $U = \frac{1}{2} CV^2$ de, kondansatör boşaldığında dış devreye geri döner. Bir kondansatör AC devresindeyken, enerji içinden akıp geçer; fakat her bir döngüdeki net enerji akışı sıfırdır. İdeal bir kondansatör de, kayıpsız elemandır.

Emk'nın bir enerji kaynağı olduğunu biliyoruz. Bir I akımı emk yönünde aktığında, dış devreye $dU/dt = \mathcal{E}I$ hızında bir enerji beslemesi olur. Akım emk'ya *karşı* yönde –devredeki diğer jeneratörler tarafından– sürülürse, emk $\mathcal{E}I$ hızında enerji soğurur. I eksi olduğundan, dU/dt de aynı zamanda eksi olacaktır.

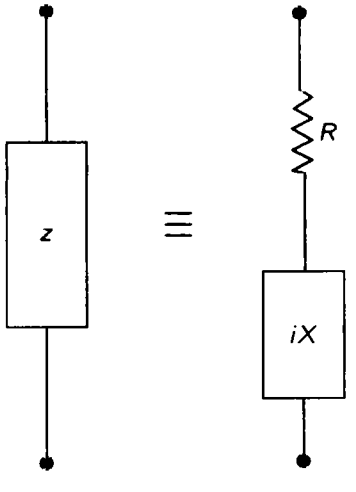
Bir jeneratör bir R direncine bağlanırsa, dirençten geçen akım $I = \mathcal{E}/R$ olur. Jeneratörden $\mathcal{E}I$ hızında beslenen enerji, direnç tarafından soğurulur. Bu enerji dirençte ısınmaya neden olur ve devrenin elektrik enerjisinde kayba neden olur. Elektrik enerjisi dirençte *kaybolur* diyebiliriz. Dirençte enerjinin kaybolma hızı $dU/dt = RI^2$'dir.

Bir AC devresinde, dirençte enerjinin ortalama kaybolma hızı, bir döngü üzerinden RI^2'nin ortalamasıdır. $I = \hat{I}e^{i\omega t}$ olduğundan –bununla gerçekten demek istediğimiz, I'nın cos ωt değeriyle değişmesidir– bir döngü üzerinden I^2'nin ortalaması, tepe akım $|\hat{I}|$ ve cos^2 ωt'nin ortalaması 1/2 olduğundan, $|\hat{I}|^2/2$'dir.

Peki, ya bir jeneratör rastgele bir z empedansına bağlandığında meydana gelen enerji kaybı nedir? ("Kayıp" derken kastettiğimiz şey, elbette elektrik enerjinin termal enerjiye dönüşümüdür.) Herhangi bir z impedansı, gerçel ve sanal parçalarının toplamı olarak yazılabilir. Diğer bir deyişle, R ve X gerçel sayılarken,

$$z = R + iX \qquad (22.24)$$

olur. Eşdeğer devreler bakış açısıyla yaklaştığımızda, herhangi bir empedansın, adına *reaktans* denilen saf bir sanal empedans ile seri bağlı bir dirençten oluştuğunu söyleyebiliriz. Bu, Şekil 22-17'de gösterilmiştir.



Şekil 22-17 Herhangi bir empedans, saf bir direnç ve saf bir reaktansın seri bağlanmasına eşdeğerdir.

Daha önceden, sadece L ve C içeren bir devrenin empedansının tamamen sanal bir sayısı olduğunu görmüştük. Ortalamada L ve C'lerin hiçbirine enerji

kaybı olmadığından, sadece L ve C'lerden oluşan saf bir reaktansın enerji kaybı olmaz. Bunun, bir reaktans için genelde de doğru olduğunu görebiliriz.

$\mathcal{E}$ emk'lı bir jeneratör, Şekil 22-17'de gözüken z empedansına bağlanırsa, emk jeneratörden gelen I akımına aşağıdaki şekilde bağlı olmalıdır:

$$\mathcal{E} = I(R + iX) \tag{22.25}$$

Enerjinin sağlandığı ortalama hızı bulmak için, $\mathcal{E}I$ çarpımının ortalamasını bulmalıyız. Şimdi dikkatli olmalıyız. Bu tür çarpımlarla uğraşırken, gerçel nicelikler olan $\mathcal{E}(t)$ ve $I(t)$'yle çalışmalıyız. (Karmaşık fonksiyonların gerçel kısımları, elimizde sadece *doğrusal* denklemler varken fiziksel nicelikleri temsil eder. Şimdiyse *çarpımlarla* ilgiliyiz, onların da doğrusal olmadığından eminiz.)

t başlangıcını öyle bir seçelim ki, $\hat{I}$ genliği gerçel sayı olsun. Buna I_0 diyelim; bu durumda gerçel zaman değişimi I aşağıdaki denklemle verilir:

$$I = I_0 \cos \omega t$$

Denklem (22.25)'in emk'sı aşağıdaki ifadenin gerçel kısmıdır:

$$I_0 e^{i\omega t} = (R + iX)$$

ya da

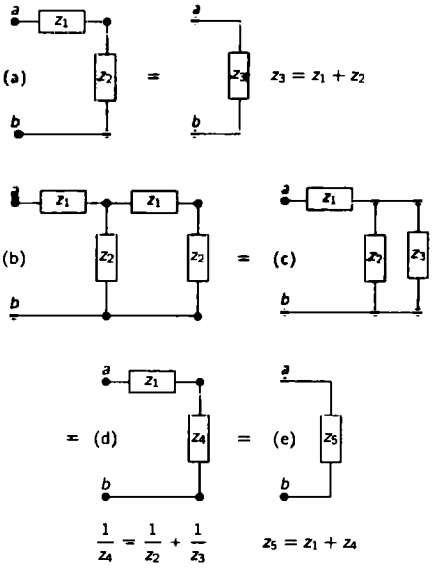
$$\mathcal{E} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t \tag{22.26}$$

Denklem 22.26'daki iki terim, Şekil 22-7'deki R ve X boyunca voltaj düşüşlerini temsil eder. Direnç boyunca voltaj düşüşü akımla aynı evrededir; tamamıyla reaktif kısım boyunca voltaj düşüşüyse akımla evre *dışıdır*.

Jeneratörden kaybolan enerjinin *ortalama* hızı $\langle P \rangle_{\text{ort}}$, $\mathcal{E}I$ çarpımının bir döngü üzerinden integralinin T periyoduna bölümüdür. Bir başka deyişle:

$$\langle P \rangle_{\text{ort}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}I\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t\,dt$$

İlk integral $\frac{1}{2}I_0^2R$'dir ve ikinci integral de sıfırdır. Dolayısıyla, bir empedanstaki $z = R + iX$ enerji düşüşü z'nin sadece gerçel kısmına dayanır ve $I_0^2R/2$'dir. Bu da, daha önce bir direnç için bulduğumuz enerji kaybına dair sonuçla uyumludur. Reaktif kısımda hiç enerji kaybı yoktur.

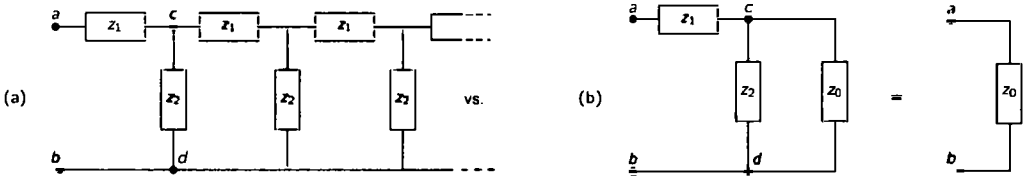


Şekil 22-18 Bir merdivenin etkili empedansı.

22-6 Bir merdiven şebeke

Şimdi, seri ve paralel birleşimler cinsinden analiz edilebilecek ilginç bir devreyi ele almak istiyoruz. Şekil 22-18 (a)'daki devreyle başladığımızı düşünelim. Bir bakışta, a ucundan b ucuna empedansın basitçe $z_1 + z_2$ olduğunu görebiliriz. Şimdi biraz daha zor bir devreyi, Şekil 22-18 (b)'dekini ele alalım. Bu devreyi Kirchhoff yasalarıyla analiz edebiliriz; ancak seri ve paralel birleşimlerle çözmek de kolaydır. Sağ taraftaki iki empedansı, şeklin (c) kısmında olduğu gibi tek bir empedansla, $z_3 = z_1 + z_2$, değiştirebiliriz. Daha sonra, z_2 ve z_3 empedansları, şeklin (d) kısmında göründüğü gibi, eşdeğer, paralel z_4 empedansıyla değiştirilebilir. Son olarak, z_1 ve z_4 empedansları da, şekilin (e) kısmında olduğu gibi tek bir z_5 empedansına eşdeğerdir.

Şimdi, hayret uyandırıcı bir soru sorabiliriz: Şekil 22-18 (b)'deki şebekeye, Şekil 22-19 (a)'daki kesikli çizgilerle gösterildiği gibi, *sonsuza* kadar bölüm eklemeye devam edersek ne olur? Böyle bir sonsuz şebekenin çözümünü bulabilir



Şekil 22-19 Sonsuz bir merdivenin etkili empedansı.

miyiz? Bu, pek de zor değildir. Öncelikle, böyle bir sonsuz şebekenin "ön" ucuna bir bölüm daha eklemek şebekeyi değiştirmez. Sonsuz bir şebekeye bir bölüm daha eklediğimizde, şebeke yine sonsuzdur. Sonsuz şebekenin a ile b uçları arasındaki empedensa z_0 diyelim; bu durumda c ve d uçlarının sağında kalan her şeyin empedansı da z_0 olur. Dolayısıyla, ön uçla ilgilendiğimiz sürece, bu şebekeyi Şekil 22-19 (b)'deki gibi gösterebiliriz. z_2 ile z_0'ın paralel birleşimini oluşturup, daha sonra z_1'le seri bağlantıyı yaparsak; devrenin empedansını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$z = z_1 + \frac{1}{(1/z_2) + (1/z_0)} \qquad \text{ya da} \qquad z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}$$

Bu empedans aynı zamanda z_0'a da eşittir, böylece

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}$$

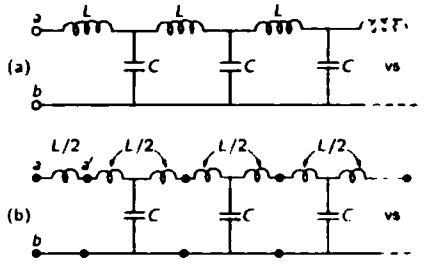
denklemini elde ederiz. z_0 için çözersek,

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{(z_1^2/4) + z_1 z_2} \tag{22.27}$$

eşitliğini buluruz. Böylece, tekrarlanan seriler ve paralel empedanslardan oluşmuş sonsuz bir merdivenin empedansını bulmuş olduk. z_0 empedansına, böyle sonsuz bir şebekenin *karakteristik empedansı* denir.

Şimdi gelin, Şekil 22-20 (a)'da gösterildiği gibi, seri elemanının bir indüktans (L) ve paralel devre elemanında bir sığa (C) olduğu özel bir örneği ele alalım. Bu durumda, sonsuz şebekenin empedansını bulmak için $z_1 = i\omega L$ ve $z_2 = 1/i\omega C$ eşitliklerini kullanırız. Dikkat ederseniz, Denk. (22.27)'deki ilk terim, $z_1/2$, ilk elemanın empedansının yarısıdır. Dolayısıyla, sonsuz şebekemizi Şekil 22-20 (b)'deki gibi çizersek daha doğal ya da en azından daha basit gözükür. a' ucundan sonsuz şebekemize baktığımızda, aşağıdaki karakteristik empedansı görürüz:

$$z_0 = \sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} \tag{22.28}$$



Şekil 22-20 İki eşdeğer şekilde çizilmiş bir L-C merdiveni.

Şimdi, ω frekansına bağlı olarak iki ilginç durumla karşı karşıyayız. ω^2 $4/LC$'den azsa, kökteki ikinci terim ilkinden küçük olur ve bu da z_0 empedansını gerçel bir sayı yapar. Diğer yandan, ω^2 $4/LC$'den büyükse, z_0 empedansı aşağıdaki şekilde yazabileceğimiz saf bir sanal sayı olur:

$$z_0 = i\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)}$$

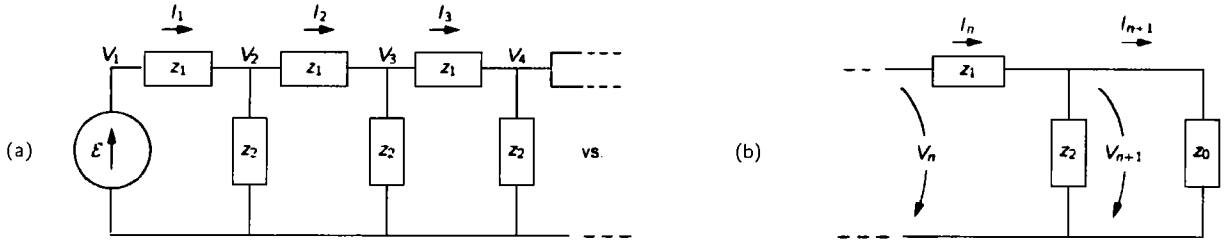
Daha önceden belirttiğimiz gibi, indüktanslar ve sığalar gibi sadece sanal empedanslar içeren bir devrenin empedansı tamamen sanaldır. Bu durumda, şu an üzerinde çalıştığımız –sadece L ve C'ler içeren– devre için, empedans $\sqrt{4/LC}$'den küçük frekanslar için nasıl direnç olabilir? Daha yüksek frekanslar için, empedans tamamen sanaldır ve daha önceki ifademizle de uyumludur. Daha düşük frekanslar için empedans tamamen dirençtir ve dolayısıyla enerji soğuracaktır. Peki sadece indüktanslar ve sığalardan oluştuysa, devre nasıl sürekli, tıpkı bir direnç gibi, enerji soğurabilir? *Cevap*: Sonsuz sayıda indüktans ve sığa olduğundan dolayı, devreye bir kaynak bağlandığında ilk indüktans ve sığaya enerji sağlar, sonra ikincisine, sonra üçüncüsüne ve böylece sürer gider. Bu türden bir devrede enerji sürekli jeneratörden sabit bir hızda soğurulur ve sürekli bir şekilde şebekeye akarak, ilerdeki indüktans ve sığalarda saklanan enerjiyi tedarik eder.

Bu fikir, devrede olup bitene dair ilginç bir noktayı öne sürer. Ön yüze bir kaynak bağlarsak, kaynağın etkileri şebeke içinden sonsuza doğru yayılacaktır. Hat boyunca dalgaların ilerlemesi tıpkı kaynağından enerji soğuran bir antenin ışınım yayması gibidir. Dolayısıyla, böyle bir ilerlemeyi empedans gerçel olduğunda bekleriz ki o da ω $\sqrt{4/LC}$'den küçükse olur. ω $\sqrt{4/LC}$'den büyük olduğunda empedans tamamen sanal olur ve bu tür bir ilerleme görmeyi beklemeyiz.

22-7 Filtreler

Geçen bölümde gördük ki, Şekil 22-20'deki sonsuz merdiven şebekesi, *kesme* frekansı ω_0 denilen belli bir kritik frekans değerinin ($\sqrt{4/LC}$) altında sürülürse; sürekli enerji soğurur. Bu etkinin, hat boyunca sürekli bir enerji nakli cinsinden anlaşılabileceğini ileri sürmüştük. Diğer yandan yüksek frekanslarda, $w > \omega_0$ için, sürekli bir enerji soğurumu yoktur. Bu durumda belki de akımların hat boyunca çok ileri "sızamayacağını" beklemeliyiz. Gelin, bu varsayımlar doğru mu kontrol edelim.

Merdiven şebekemizin ön yüzünün bir AC jeneratörüne bağlandığını ve merdivenin 754. bölümünde voltajın nasıl göründüğünü sorduğumuzu düşünelim. Şebeke sonsuz olduğundan, bir bölümden diğerine voltaja olan şey daima aynıdır. Gelin, herhangi bir bölümden, örneğin n'ninci, bir diğerine gidildiğinde ne olduğuna bakalım sadece. Şekil 22-21 (a)'da gösterildiği gibi akımları (I_n) ve voltajları (V_n) tanımlayacağız.



Şekil 22-21 Bir merdivenin ilerleme faktörünün bulunması.

Her zaman için merdivenin n'inci bölümünden sonrasını, karakteristik empedansı z_0'la değiştirebileceğimizi bildiğimizden; V_{n+1} Voltajını V_n voltajından elde edebiliriz. Öncelikle, herhangi bir V_n değerinin, z_0'nun karşısında olduğundan, $I_n z_0$ çarpımına eşit olmasına dikkat ederiz. Ayrıca, V_n ile V_{n+1} arasındaki fark da sadece $I_n z_1$'dir:

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}$$

Böylece şu oranı elde ederiz:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}$$

Bu orana, merdivenin bir bölümü için *ilerleme faktörü* diyebiliriz. Ona, α diyeceğiz. Elbette, bütün bölümler için aynıdır:

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0} \tag{22.29}$$

bu durumda n'inci bölümden sonraki voltaj da

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E} \tag{22.30}$$

olur. Şimdi artık 754 bölüm sonraki voltajı bulabilirsiniz. α'nın 754. üssü çarpı $\mathcal{E}$'dir.

Şekil 22-20 (a)'daki L-C merdiveni için α'nın nasıl olduğunu gördüğümüzü varsayalım. Denklem (22.27)'den z_0'yu ve $z_1 = i\omega L$ eşitliğini kullanarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)} \tag{22.31}$$

Eğer giriş frekansı, $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ olarak ifade edilen kesme frekansının altındaysa, kök gerçel bir sayıdır ve payda ile paydadaki karmaşık sayıların büyüklükleri birbirlerine eşittir. Dolayısıyla, α'nın büyüklüğü birdir ve şunu yazabiliriz:

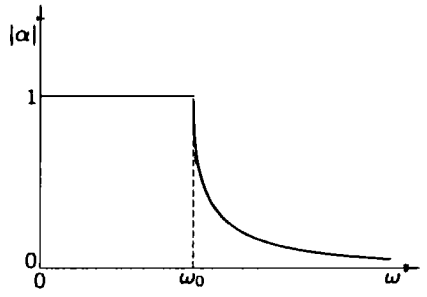
$$\alpha = e^{i\delta}$$

Bunun anlamı, voltajın büyüklüğünün her bölümde aynı olduğu ve sadece evresinin değiştiğidir. Evre değişimi δ aslında eksi bir sayıdır ve şebeke içinde ilerleyen voltajın "gecikmesini" temsil eder.

Kesme frekansı ω_0'nun üzerindeki frekanslar için, Denk. (22.31)'de pay ve paydadan i'yi elemek ve aşağıdaki şekilde tekrar yazmak daha iyidir:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)} \qquad (22.32)$$

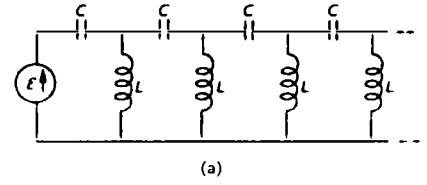
İlerleme çarpanı α şimdi *gerçel* bir sayıdır ve *birden küçüktür*. Bunun anlamı, herhangi bir bölümdeki voltajın bir önceki bölümdeki voltajdan α çarpanı kadar az olmasıdır. ω_0 üzerindeki herhangi bir frekans için, şebeke boyunca ilerlerken voltaj hızla düşer. α'nın mutlak değerinin, frekansa bağlı bir fonksiyon olarak nasıl görüneceği Şekil 22-22'de gösterilmiştir.



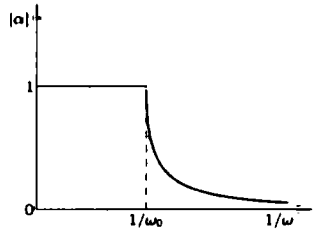
Şekil 22-22 Bir *L-C* merdiveninin bir bölümünün ilerleme çarpanı.

α'nın ω_0'nun üstündeki ve altındaki davranış biçimi, bizim daha önceden ortaya koyduğumuz, şebekenin $\omega < \omega_0$ için enerji ilettiği ve $\omega > \omega_0$ için engellediği yorumumuzla uyumludur. Şebekenin düşük frekansları "geçirdiğini" ve yüksek frekansları "filtrelediğini" söyleyebiliriz. Özelliklerinin değişimi frekansla belirlenecek şekilde tasarlanmış herhangi bir şebekeye "filtre" denir. Bizim analiz ettiğimiz "alçak geçişli" bir filtredir.

Gerçek olamayacağı apaçık ortada sonsuz bir şebeke üzerinde neden bu kadar durduğumuzu merak ediyor olabilirsiniz. Bunun nedeni, sonlu bir şebekeyi karakteristik z_0 empedansına eşit olacak şekilde bitirecek olursak, aynı özellikleri gözlemleyebileceğimizdendir. Pratikte, karakteristik empedansı basit birkaç elemanla –R'ler, L'ler ve C'ler gibi– *tamamen aynı* şekilde meydana getirmek mümkün değildir. Yine de, belli bir frekans aralığında iyi yakınlaştırmalarla bunu yapmak mümkündür. Bu şekilde, özellikleri sonsuz şebekeyle neredeyse bire bir aynı olan sonlu bir filtre şebekesi yapabilirsiniz. Örneğin, *L-C* merdiveni eğer saf $R = \sqrt{L/C}$ direnciyle sonlandırılırsa, tıpkı tanımladığımız gibi davranır.



(a)



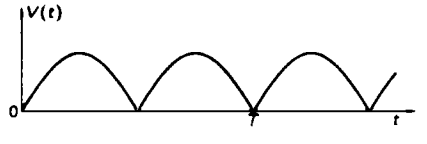
(b)

Şekil 22-23 (a) Bir yüksek geçiş filtresi. (b) İlerleme çarpanının $1/\omega$'ya bağlı fonksiyonu.

Merdivenimizi Şekil 22-23 (a)'dakine benzer hale getirmek için L'lerin ve C'lerin konumlarını değiştirirsek, yüksek frekansları ileten ve düşük frekansları reddeden bir filtremiz olabilir. Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçları kullanarak bu şebekede ne olup bittiğini anlamak kolaydır. Dikkat ederseniz, L yerine C koyduğumuzda veya tam tersini yaptığımızda; her bir $i\omega$'yu da $1/i\omega$'ya çeviriyoruz. Daha önce ω'da ne olduysa, şimdi $1/\omega$'da olacaktır. Şekil 22-22'yi kullanarak ve eksendeki etiketi $1/\omega$ olarak değiştirip α'nın frekansla nasıl değişeceğini, Şekil 22-23 (b)'de yaptığımız gibi, görebiliriz.

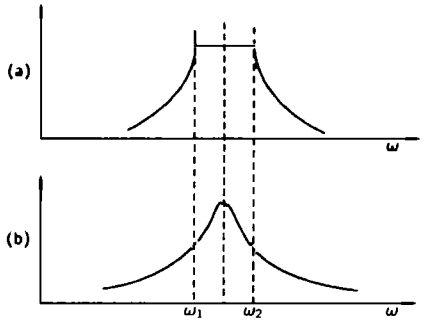
Bahsettiğimiz düşük geçiş ve yüksek geçiş filtrelerinin çok çeşitli teknik uygulamaları mevcuttur. Bir *L-C* düşük geçiş filtresi sıklıkla, bir DC güç kaynağında "düzleştirici" olarak kullanılır. Bir AC kaynağından, DC gücü üretmek istersek; akımın tek yönde akmasını sağlayan bir redresör kullanırız. Redresörden, Şekil 22-24'teki $V(t)$ fonksiyonu gibi gözüken bir dizi sinyal görürüz. Kötü bir DC akımıdır, çünkü sürekli yukarı aşağı yalpalamaktadır. Daha temiz, sanki bir bataryadan çıkmış gibi DC elde etmek istediğimizi düşünelim. Redresörile yük arasına düşük geçişli bir filtre koyarak bunun gerçekleşmesine yakınlaşabiliriz.

I. Cilt, 50. Bölümden biliyoruz ki, Şekil 22-24'ün zaman fonksiyonu, sabit bir voltaj, artı bir sinüs dalgası, artı daha yüksek frekanslı bir sinüs dalgası, artı daha bile yüksek bir sinüs dalgasının vs –bir Fourier serisi sayesinde– üst üste binmesi olarak gösterilebilir. Filtremiz doğrusalsa (varsaydığımız gibi L'ler ve C'ler akımlar veya voltajlarla değişmiyorsa) bu durumda filtreden çıkan, girdideki her bir bileşenin çıktılarının üst üste binmeleridir. Filtremizin kesme frekansı ω_0'yu, $V(t)$ fonksiyonunun en düşük frekansının hayli altında kalacak şekilde ayarlarsak, DC akımı ($\omega = 0$ olur) düzgünce iletilir; ancak ilk harmoniğin genliği çok yüksek oranda azalacaktır. Daha yüksek harmoniklerin genlikleri daha da fazla azalacaktır. Dolayısıyla, ne kadar filtre parçası koyabileceğimize bağlı olarak çıktıyı istediğimiz kadar düzleyebiliriz.

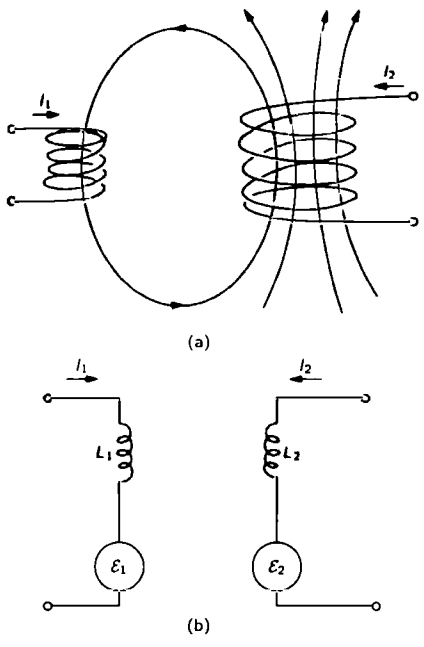


Şekil 22-24 Tam dalgalı bir redresörün çıkış voltajı.

Düşük frekansları reddetmek istersek de, yüksek geçişli bir filtre kullanırız. Örneğin, bir fonograf amplifikatöründe yüksek geçişli bir filtre müziğin kulak-



Şekil 22-25 (a) Bir bant geçiş filtresi. (b) Basit bir rezonans filtresi.



Şekil 22-26 Karşılıklı indüktansın eşdeğer devresi.

larınıza gelmesini sağlarken; pikabın motorundan gelen pes sesli gürültüyü tutar.

Belli bir ω_1 frekansının altındaki ve bir başka ω_2 (ω_1'den büyük) frekansının üstündeki frekansları reddeden, ancak ikisinin arasındaki frekansların geçmesine izin veren bir "bant geçiş" filtresi yapmak da mümkündür. Bunu basitçe, bir yüksek geçiş ve düşük geçiş filtresini bir arada kullanarak yapabilirsiniz; ancak bu tür filtreler genelde içindeki z_1 ve z_2 empedanslarının daha karmaşık –her biri L'ler ve C'lerin birleşimidir– olduğu bir merdivenle yapılır. Bu tür bir bant geçiş filtresinin ilerleme sabiti Şekil 22-25 (a)'daki gibi olabilir. Sadece belli bir aralıktaki frekansları, örneğin yüksek frekanslı bir telefon kablosundaki ses kanallarının her birini veya bir radyo iletiminin modüle edilmiş dalgasını ayırmak için kullanılabilir.

I. Cilt, 25. Bölümde gördüğümüz üzere, böyle bir filtreleme, sıradan bir rezonans eğrisinin seçiciliğini kullanarak da yapılabilir. Karşılaştırma için Şekil 22-25 (b)'de böyle bir eğriyi gösterdik. Ancak, bazı amaçlar için rezonans filtresi bir bant geçiş filtresi kadar iyi değildir. I. Cilt, 48. Bölümden hatırlayın, ω_C frekansına sahip bir taşıyıcı ω_S "sinyal" frekansıyla modüle edildiğinde, toplam sinyal sadece taşıyıcı frekansını değil, ayrıca iki yan bant frekanslarını da, $\omega_C + \omega_S$ ve $\omega_C - \omega_S$, taşır. Rezonans filtresi sayesinde bu yan bantlar daima daraltılır; ancak daraltma arttıkça, şekilden de görebileceğiniz üzere, sinyal frekansı da artar. Diğer bir deyişle, zayıf bir "frekans tepkisi" vardır. Tiz notalar geçemez. Filtreleme, $\omega_2 - \omega_1$ genişliği, en yüksek sinyal frekansının iki katı olacak şekilde tasarlanmış bir bant geçiş filtresiyle yapılırsa, tepki frekansı istenen sinyaller için "düz" olacaktır.

Merdiven filtresi hakkında bir noktaya daha değinmek istiyoruz: Şekil 22-29'deki L-C merdiveni, bir iletim hattının yaklaşık gösterimidir. Elimize, bir iletkene paralel giden uzun bir iletken –bir kablo içinde bir tel veya toprağın hemen üzerinde bir tel gibi– iki iletken arasında bir miktar sığa ve aralarındaki manyetik alandan dolayı bir miktar da indüktans oluşur. Kablonun küçük $\Delta\ell$ uzunluğunda parçalara bölündüğünü düşünelim. Her bir parça, L-C merdiveninin, seri bağlı bir ΔL indüktansı ve paralel ΔC sığası olan bir bölümüne benzeyecektir. Böylece sonuçlarımızı merdiven filtresi için kullanabiliriz. $\Delta\ell$ sıfıra giderken limit alırsak, iletim hattının iyi bir tanımını elde etmiş oluruz. $\Delta\ell$ küçültüldükçe, hem ΔL hem de ΔC azalır; ancak aynı oranda azaldıklarından $\Delta L/\Delta C$ oranı sabit kalır. Dolayısıyla, ΔL ve ΔC sıfıra giderken Denk. (22.28)'in limitini alırsak, karakteristik empedans z_0'ın büyüklüğü $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$ olan saf bir direnç olduğunu buluruz. $\Delta L/\Delta C$ oranını L_0/C_0 olarak da yazabiliriz. L_0 ve C_0, hattın birim uzunluğunun indüktans ve sığalarıdır. Dolayısıyla şunu elde ederiz:

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{22.33}$$

Dikkat ederseniz, ΔL ve ΔC sıfıra gittikçe, kesme frekansı $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ sonsuza gider. İdeal bir iletim hattı için kesme frekansı yoktur.

22-8 Diğer devre elemanları

Şu ana kadar sadece ideal devre empedanslarını –indüktans, sığa ve direnç– ve ideal voltaj jeneratörünü tanımladık. Şimdi diğer elemanların, örneğin karşılıklı indüktansların, transistörlerin veya vakum lambalarının, aynı temel elemanlar kullanılarak tanımlanabileceğini göstereceğiz. Şekil 22-26 (a)'da gösterildiği gibi elimizde iki bobin ve amacımıza uygun olarak da bobinlerden birinden diğerine akı bağı olsun. Bu durumda iki bobinin karşılıklı M indüktansı olacaktır. Bobinlerden birinde akım değişkenlik gösterdiğinde, diğerinde voltaj

meydana gelir. Eşdeğer devrelerimizde böyle bir etkiyi hesaba katabilir miyiz? Şu bahsedeceğimiz şekilde, evet katabiliriz. Birbirleriyle etkileşen iki bobinde indüklenen emk'ların, iki ayrı parçanın toplamı olarak yazılabileceğini görmüştük:

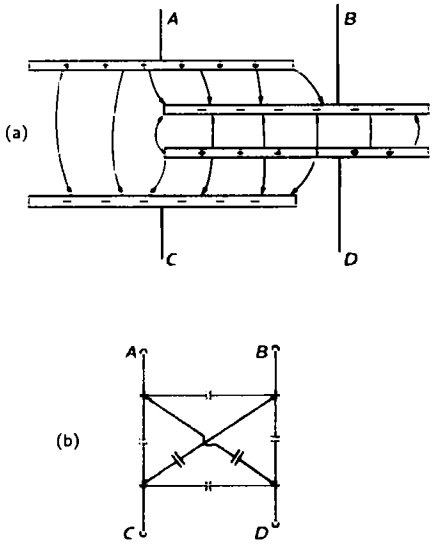
$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}$$
$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} \qquad (22.34)$$

İlk terim, bobinin öz indüktansından ve ikinci terim de diğer bobinle olan karşılıklı indüktanstan gelir. İkinci terimin işareti, bir bobinden diğerine olan akının yoluna göre, artı veya eksi olabilir. İdeal indüktansı tanımlamak için kullandığımız yakınlaştırmaları kullanarak, her bir bobinin uçları arasındaki potansiyel farkının bobindeki elektromotor kuvvetine eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda, (22.34)'teki iki denklemin, her iki devredeki elektromotor kuvvetinin karşıt devredeki akıma aşağıdaki eşitliklerle bağlı olması koşulunun sağlanması şartıyla, Şekil 22-26 (b)'deki devreden elde edebileceklerimizle aynı olduğunu söyleyebiliriz.

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2 \qquad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1 \qquad (22.35)$$

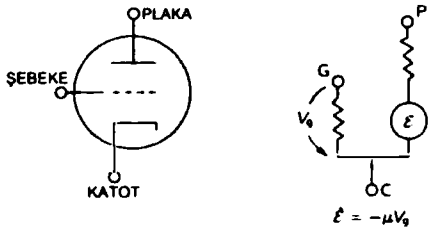
Bu durumda, öz indüktansın etkisini normal bir şekilde gösterebilir; ancak karşılıklı indüktansın etkisini yardımcı bir ideal voltaj jeneratörüyle değiştirebiliriz. Buna ilaveten, bu emk'yı devrenin bir başka parçasındaki akıma bağlayan denklemi de elde etmeliyiz elbette. Bu denklem doğrusal olduğu sürece, devre denklemlerine daha fazla doğrusal denklem eklemiş olduk ve daha önceden özdeş devrelere dair çıkarımlarımız hâlâ doğrudur.

Karşılıklı indüktanslara ilaveten, karşılıklı sığalar da olabilir. Şu ana kadar kondansatörlerden bahsederken daima, sadece iki uç olduğunu düşünmüştük. Oysaki birçok durumda, örneğin bir vakum lambasında, birbirine yakın birçok elektrot olabilir. Bu elektrotlardan herhangi birine elektrik yükü yerleştirirsek, meydana gelen elektrik alan diğer her bir elektrot üzerinde yükler indükleyecek ve dolayısıyla potansiyellerini etkileyecektir. Örnek olarak, Şekil 22-27 (a)'da gösterilen dört levhalı düzenlemeyi ele alalım. Bu dört levha dış devrelere *A*, *B*, *C* ve *D* telleriyle bağlanmış olsun. Sadece elektrostatik etkileri göz önünde bulundurduğumuz sürece, böyle bir düzenlemenin eşdeğer devresi aynı şeklin (b) kısmında gösterilmiştir. Herhangi bir elektrotun diğer her bir elektrotla elektrostatik etkileşimi, iki elektron arasındaki sığaya özdeştir.



Şekil 22-27 Karşılıklı sığaların eşdeğer devresi.

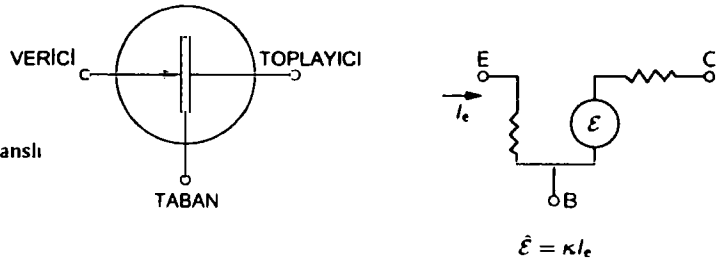
Son olarak, bir AC devresindeki transistörler ve radyo tüpleri gibi karmaşık cihazların nasıl gösterebileceğimizi ele alalım. En başta şunu belirtmeliyiz ki, bu tür cihazların işletilmesi esnasında, akımlar ile voltajlar arasındaki ilişki hiç doğrusal değildir. Denklemlerin doğrusallığına dayanarak söylediğimiz şeyler, elbette, bu tür durumlar için geçerli değildir. Diğer yandan, birçok uygulamadaki çalışma özellikleri, transistörler ve tüpleri doğrusal cihazlar olarak kabul etmemize izin verecek kadar doğrusaldırlar. Bununla demek istediğimiz, alternatif akımların, örneğin bir vakum lambasının levhasındakilerin, diğer elektronlarda görülen voltajlarla, örneğin şebeke voltajı ve levha voltajı, doğrusal olarak orantılı olduğudur. Bu tür doğrusal ilişkiler sayesinde, cihazı eşdeğer bir devreyle gösterebiliriz.



Şekil 22-28 Bir vakum triyodunun düşük frekanslı eşdeğeri.

Karşılıklı indüktans durumunda olduğu gibi, cihazın bir kısmındaki akımlar ve voltajların diğer bir kısımdaki akımlar ve voltajlara olan etkisini tanımlayan yardımcı bir voltaj jeneratörü gösterimimiz için zorunludur. Örneğin, bir triyodun levha devresi, kaynak şiddeti şebeke voltajıyla orantılı ideal bir voltaj jeneratörüne seri bağlanmış bir dirençle gösterilebilir. Eşdeğer devre Şekil 22-28'de gösterilmiştir.* Benzer şekilde, bir transistörün toplayıcı devresi de kaynak şiddeti salımlayıcıdan transistörün tabanına gelen akımla orantılı bir ideal voltaj

* Gösterilen eşdeğer devre sadece düşük frekanslar için doğrudur. Yüksek frekanslar için eşdeğer devre çok karmaşıklaşır ve "parazit" diye isimlendirilen sığa ve indüktanslar içerir.



Şekil 22-29 Bir transistörün düşük frekanslı eşdeğeri.

jeneratörüne seri bağlanmış bir dirençle gösterilebilir. Bu durumda, eşdeğer devre Şekil 22-29'daki gibidir. Çalışmayı tarif eden denklemler doğrusal olduğu sürece, tüpler ve transistörler için bu tür gösterimleri kullanabiliriz. Sonra, daha karmaşık bir şebekeye dahil edildiklerinde, elemanların rastgele bağlanmalarının eşdeğer gösterimleri hakkındaki genel çıkarımlarımız hâlâ geçerliliğini korur.

Sadece empedanslar içeren devreler ile transistör ve radyo tüpü devreleri arasında bahsetmeye değer bir fark vardır: etkili empedans z_{et}'in gerçel kısmı eksi olabilir. Hatırlarsanız, z'nin gerçel kısmı enerji kaybını gösterir. Oysaki, transistörlerin ve tüplerin önemli özelliği devreye elektrik *sağlamalarıdır*. (Elbette, durduk yere enerji "yaratmazlar"; güç kaynaklarının DC devrelerinden enerji alıp, onu AC enerjisine çevirirler.) Dolayısıyla, eksi dirençli bir devre elde etmek mümkündür. Böyle bir devrenin özelliği, devreyi, gerçel kısmı artı olan bir empedansa bağladığınızda, örneğin artı bir dirence ve iki gerçel kısmın toplamını sıfır olacak şekilde her şeyi ayarladığınızda, birleşik devrede hiç yayılma olmamasıdır. Enerji kaybı yoksa, herhangi bir alternatif voltaj bir kere başladığında sonsuza kadar devam eder. Bu, dilediğiniz frekansta alternatif voltaj sağlayan bir kaynak olarak kullanılabilecek bir salınıcının veya bir sinyal jeneratörünün arkasındaki temel fikirdir.

23

KOVUK REZONATÖRLERİ

23-1 Gerçek devre elemanları
23-2 Yüksek frekanslarda bir sığaç
23-3 Bir rezonans kovuğu
23-4 Kovuk kipleri
23-5 Kovuklar ve rezonans devreleri

Gözden geçirme: Cilt 1, Bölüm 23, *Rezonans*
Cilt 1, Bölüm 49, *Kipler*

23-1 Gerçek devre elemanları

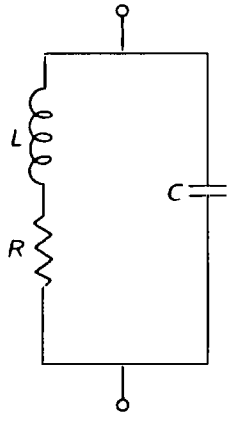
Herhangi bir çift uçtan bakıldığında, ideal empedanslardan ve jeneratörlerden oluşan bir devre, herhangi bir frekansta, bir z empedansıyla seri bağlı bir $\mathcal{E}$ jeneratörüne özdeştir. Bu böyledir, çünkü uçlar arasına bir V voltajı yerleştirir ve I akımını bulmak için bütün denklemleri çözersek, akım ile voltaj arasında doğrusal bir ilişki bulunmalıdır. Bütün denklemler doğrusal olduğundan, I sonucu da V'ye doğrusal olarak bağlı olmalıdır. En genel doğrusal ifadeyi aşağıdaki denklemdeki gibi yazabiliriz:

$$I = \frac{1}{z}(V - \mathcal{E}) \tag{23.1}$$

Genel olarak, hem z hem de $\mathcal{E}$, ω frekansına karmaşık bir şekilde de olsa bağlı olabilirler. Bununla birlikte, eğer iki ucun arkasında sadece $z(\omega)$ empedansıyla seri bağlı şekilde $\mathcal{E}(\omega)$ jeneratörü bulunsaydı, Denk. (23.1)'i elde ederdik.

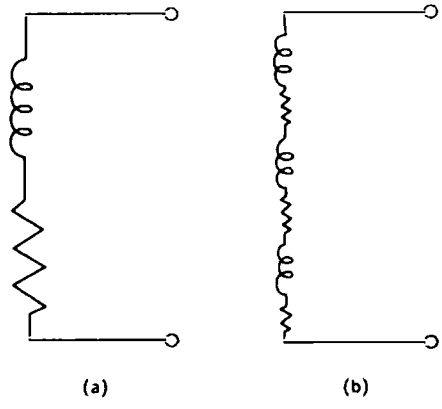
Tam tersi türden bir soru: Sadece iki uçlu bir elektromanyetik cihazımız varsa ve $\mathcal{E}$ ile z'yi freakansın fonksiyonları olarak belirlemek için I ile V arasındaki bağlantıyı *ölçersek*; z iç empedansına eşdeğer ideal elemanlar birleşimizi bulabilir miyiz? Bunun cevabı şöyledir: herhangi bir mantıklı –fiziksel olarak anlamlı– $z(\omega)$ fonksiyonu için, sonlu sayıda bir ideal elemanlar kümesi içeren bir devre yardımıyla durumu istediğiniz kadar yüksek hassasiyette *yakınlaştırabilirsiniz*. Şimdilik genel problemi ele almak istemiyoruz; ama sadece birkaç durum için fiziksel fikirlerden ne bekleyebileceğimize bakmak istiyoruz.

Gerçek bir direnci düşündüğümüz zaman, içinden geçen akımın bir manyetik alan yaratacağını biliyoruz. Dolayısıyla herhangi bir gerçek direnç aynı zamanda bir miktar indüktansa sahip olmalıdır. Ayrıca, bir rezistör boyunca potansiyel fark olduğunda, gerekli elektrik alanlarını üretmek üzere direncin uçlarında yükler olmalıdır. Voltaj değiştikçe, yükler de orantılı olarak değişecek ve böylece rezistör ayrıca bir miktar sığaya sahip olacaktır. *Gerçek* bir direncin Şekil 23-1'de gösterilen eşdeğer bir devresi olmasını bekleriz. İyi tasarlanmış bir dirençte, "parazit" olarak adlandırılan L ve C elemanları küçüktür; öyle ki istenilen frekanslar için ωL, R'den çok daha küçük ve $1/\omega C$ de R'den çok büyüktür. Dolayısıyla, ihmal edilebilirler. Ancak, frekans arttıkça, sonunda önem kazanacaklardır ve direnç de bir rezonans devresi gibi gözükmeye başlayacaktır.



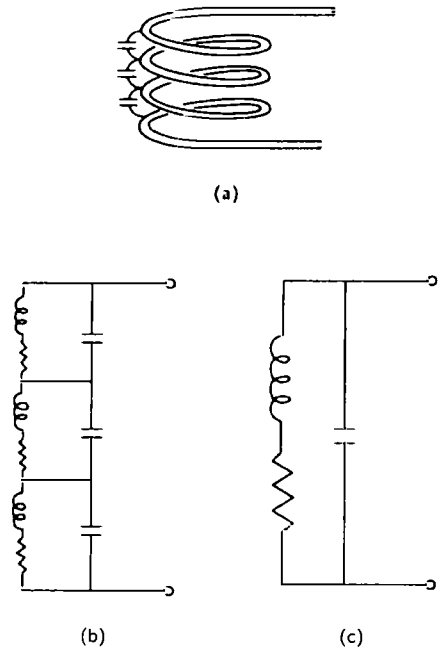
Şekil 23-1 Bir direncin eşdeğer devresi.

Gerçek bir indüktans, empedansı $i\omega L$ olan bir ideal indüktansa da eşit değildir. Gerçek bir tel bobinde bir miktar direnç vardır; dolayısıyla düşük frekanslarda bobin, Şekil 23-2 (a)'da gösterilen, bir miktar dirençle beraber seri bağlı bir indüktansa eşdeğerdir. Şimdi aklınızdan şu ifade geçiyor: Direnç ve indüktans *beraber*, gerçek bir bobinin içindeler; direnç tüm tele yayılmış durumda, indüktansla karışmıştır. Belki de daha çok Şekil 23-2 (b)'dekine benzeyen, birçok R ve L içeren bir devre kullanmalıyız. Ancak, böyle bir devrenin toplam empedansı $\sum R + \sum i\omega L$'dir, o da (a)'daki daha basit diyagrama eşittir.



Şekil 23-2 Düşük frekanslardaki gerçek bir indüktansın eşdeğer devresi.

Gerçek bir bobindeki frekansı artırdıkça, bir indüktansla beraber bir direnci kullandığımız yakınlaştırma çok da işe yaramaz artık. Voltajların meydana gelmesi için tellerde birikmesi gereken yükler önem kazanacaktır. Şekil 23-3 (a)'da çizildiği gibi, sanki bobinin her sarımı boyunca küçük kondansatörler varmış gibi düşünebiliriz. Böylece, gerçek bobini Şekil 23-3 (b)'deki devreyle benzeştirebiliriz. Düşük frekansla da bu devre, şeklin (c) kısmındaki daha basit devreyle gayet iyi taklit edilebilir (ki o da yine, bir direncin yüksek frekanslı modeli için



Şekil 23-3 Yüksek frekanslardaki gerçek bir indüktansın eşdeğer devresi.

bulduğumuz rezonans devresiyle aynıdır). Bununla birlikte, daha yüksek frekanslar için Şekil 23-3 (b)'deki daha karmaşık devre daha iyidir. Aslında, fiziksel bir indüktansın gerçek empedansını ne kadar hassas göstermek isterseniz, onun yapay modelinde o kadar çok ideal eleman kullanmak zorunda kalırsınız.

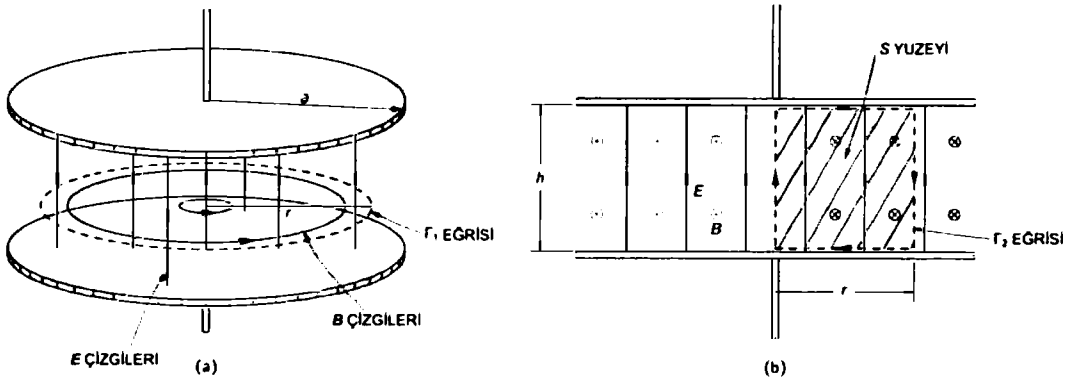
Gelin, gerçek bir bobinde ne olup bittiğine daha yakından bakalım. Bir indüktansın empedansı ωL'yle belirlenir, düşük frekanslarda sıfır olur; "kısa devre" olmuştur: bütün gördüğümüz telin direncidir. Frekansı artırdıkça, ωL hızlıca R'den çok daha büyük olur ve bobin ideal bir indüktans gibi gözükür. Bununla birlikte, frekansı daha da artırdıkça sığalar önem kazanır. Empedansları $1/\omega C$'yle orantılıdır; ω küçük olunca büyürler. Yeterince küçük frekanslarda bir kondansatör "açık devre"dir ve bir başka şeyler paralel olduğunda akım çekmez. Yüksek frekanslardaysa, akım indüktansların içinden geçmektense, sarımlar arasındaki sığalara akmayı tercih eder. Dolayısıyla akım bobin içinde döne döne ilerleyip, emk'yla karşılaşmaktansa, bir sarımdan diğerine atlamayı tercih eder. Diğer bir deyişle, her ne kadar akımın sarım boyunca ilerlemesini *istediysek de*, o daha kolay yolu –en düşük empedans yolunu– seçecektir.

Bu konu geniş ilgiye mazhar olsaydı, bu etkiye "Yüksek frekans engeli" veya benzer bir ad konurdu. Aynı şey bütün konularda karşımıza çıkar. Aerodinamikte, düşük hızlarda gitmesi için tasarlanmış bir şeyi sesten hızlı gitmesi için zorlarsanız olmaz. Bu, orada bir yerde büyük bir "engel" olduğu anlamına gelmez; sadece nesnenizi tekrar tasarlamalısınız. Dolayısıyla, "indüktans" olarak tasarladığımız bu bobin çok yüksek frekanslarda iyi bir indüktans olmayacaktır. Yüksek frekanslar için, daha yeni bir tasarıma ihtiyacımız var.

23-2 Yüksek frekanslarda bir sığaç

Şimdi, bir sığaçın –geometrik olarak ideal bir sığaçın– frekans yükseldikçe gözlemlenen davranışını inceleyebilir ve böylece özelliklerinin geçişlerini görebiliriz. (Bir indüktans yerine sığaç kullanmayı tercih ederiz; çünkü bir çift levhanın geometrisi bir bobinin geometrisinden çok daha az karmaşıktır.) Şekil 23-4 (a)'daki gibi, bir çift telle dış bir jeneratöre bağlanmış, paralel iki dairesel levhadan oluşmuş sığaçı ele alalım. Sığaçı DC'yle yüklersek, bir levhada artı yük ve diğerinde de eksi yük olur ve iki levha arasında düzgün bir elektrik alan meydana gelir.

Şimdi, DC yerine levhaları düşük frekanslı AC'yle beslediğimizi düşünelim. (Neyin "düşük" ve neyin "yüksek" olduğunu daha sonra bulacağız.) Sığaçı düşük frekanslı bir jeneratöre bağlayalım. Voltaj dalgalandıkça, üstteki levhadan artı yük alınır ve eksi yük konur. Bu olurken, elektrik alan ortadan kalkar



Şekil 23-4 Bir sığaçın levhaları arasındaki elektrik ve manyetik alanlar.

ve sonra zıt yönde tekrar meydana çıkar. Elektrik alan, Şekil 23-4(b)'de gösterildiği gibi, hesaba katmayacağımız bazı kenar etkileri haricinde her an için düzgündür. Elektrik alanın büyüklüğünü, E_0 bir sabitken, aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz:

$$E = E_0\, e^{i\omega t} \tag{23.2}$$

Peki frekans yükseldikçe, bu eşitlik doğru kalmaya devam edecek mi? Hayır, çünkü elektrik alan yukarı aşağı yön değiştirdikçe, Şekil 23-4 (a)'da gösterildiği gibi Γ_1 gibi herhangi bir ilmek içinden geçen bir elektrik alan akısı oluşur. Bildiğiniz gibi, değişen bir elektrik alan bir manyetik alan meydana getirir. Maxwell denklemlerinden biri der ki, bu örnekte olduğu gibi değişkenlik gösteren bir elektrik alan olduğunda, manyetik alan ait bir çizgi integral olmalıdır. Manyetik alanın kapalı bir çember etrafındaki integralinin c^2'yle çarpımı, çemberin alanı içinden geçen elektrik akısının değişim hızına eşittir (eğer hiç akım yoksa):

$$c^2 \oint_\Gamma B \cdot ds = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma \text{ içinde}} E \cdot n\, da \tag{23.3}$$

Öyleyse, ne kadar manyetik alan var? Bunu cevaplaması çok da zor değildir. r yarıçapında bir çember olan Γ_1 ilmeğini ele alalım. Manyetik alanın şekilde görüldüğü gibi dolandığını simetriden görebiliriz. Bu durumda B'nin çizgi integrali $2\pi rB$ olur. Elektrik alan düzgün olduğundan dolayı, elektrik alanın akısı, basitçe E ile çemberin alanının, πr^2, çarpımıdır:

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2 \tag{23.4}$$

Değişip duran alanımız için, E'nin zamana göre türevi $i\omega\, E_0\, e^{i\omega t}$ olur. Sığaçın manyetik alanı aşağıdaki denklemdir:

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0\, e^{i\omega t} \tag{23.5}$$

Diğer bir deyişle, manyetik alan da ayrıca salınır ve şiddeti r'yle orantılıdır.

Bunun etkisi nedir? Değişken bir manyetik alan olduğunda, indüklenmiş elektrik alanlar meydana gelir ve sığaç biraz indüktans gibi davranmaya başlar. Frekans yükseldikçe, manyetik alan, E ve dolayısıyla ω'nun değişim hızıyla orantılı olarak, daha da şiddetlenir. Sığaçın empedansı artık basit bir şekilde $1/i\omega C$ değildir.

Frekansı yükseltmeye devam edip, ne olup bittiğini dikkatlice analiz edelim. Elimizde, ileri geri çalkalanan bir manyetik alan var. İyi de o zaman, daha önce varsaydığımız gibi, elektrik alan düzgün olamaz. Değişken bir manyetik alan varlığında, Faraday yasası gereği, elektrik alanın bir çizgi integrali olmalıdır. Yüksek frekanslarda olduğu gibi, hissedilebilir bir manyetik alan varsa, elektrik alan merkezden bütün uzaklıklarda aynı olamaz. Elektrik alan r'ye bağlı olarak değişkenlik göstermeli ki, elektrik alanın çizgi integrali, manyetik alanın değişen akısına eşitlenebilsin.

Bakalım, doğru elektrik alanı bulabilecek miyiz? Düşük frekanslar için olduğunu varsaydığımız düzgün alana "düzeltme" uygulayarak yapabiliriz. Düzgün alana E_1 diyelim, değeri yine $E_0\, e^{i\omega t}$ olur ve doğru elektrik alan da, E_2 değişen manyetik alan için düzeltmeyken, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$E = E_1 + E_2$$

Herhangi bir ω için, merkezde düzeltme olmasın diye, kondansatörün merkezindeki alanı $E_0\, e^{i\omega t}$ şeklinde yazarız (böylece E_0'yu tanımlamış oluruz); $r = 0$ olduğunda, $E_2 = 0$ olur.

E_2'yi bulmak için, Faraday yasasının integral biçimini kullanabiliriz:

$$\oint_\Gamma E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \quad (B\text{'nin akısı})$$

Şekil 23-4 (b)'de gösterildiği gibi, eksen boyunca yukarı çıkan, üst levhada r radyal mesafesi kadar dışa açılan, sonra dik olarak aşağıdaki levhaya inen ve eksene geri dönen Γ_2 eğrisi boyunca alırsak, integraller basittir. E_1'in bu eğri etrafındaki çizgi integrali, elbette ki, sıfırdır; dolayısıyla sadece E_2'nin katkısı olabilir ve onun da integrali, h levhalar arasındaki uzaklıkken, $-E_2(r) \cdot h$ olur. (Yukarı doğru işaret ediyorsa, E artıdır.) Bu, B'nin akısının değişim hızının etkisidir. B'yi de, Şekil 23-4 (b)'deki Γ_2 içindeki gölgeli S alanı üzerinden integral alarak bulmalıyız. dr genişliğinde dik bir şerit içinden geçen akı $B(r)hdr$'dir. Dolayısıyla toplam akı da

$$h \int B(r)\, dr$$

olur. Akının $-\partial/\partial t$'sini E_2'nin çizgi integraline eşitlersek de, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E_2(r) = \frac{d}{dt} \int B(r)\, dr \tag{23.6}$$

Dikkat ederseniz, h'lar birbirlerini iptal etmiştir; alanlar levhaların birbirlerinin arasındaki boşluğa bağlı değildir.

$B(r)$ için Denk. (23.5)'i kullandığımızda, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

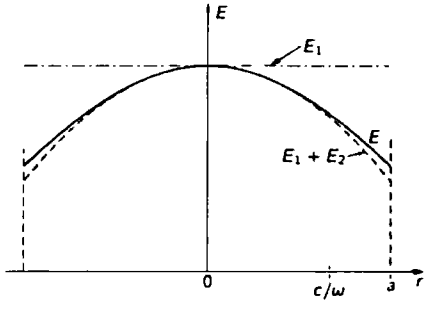
$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0\, e^{i\omega t}$$

Zaman türevi $i\omega$ çarpanını devreden çıkarır, böylece elimizde aşağıdaki ifade kalır:

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0\, e^{i\omega t} \tag{23.7}$$

Beklediğimiz gibi, indüklenen alan elektrik alanı *azaltma* eğilimindedir. Bu durumda, düzeltilen alan $E = E_1 + E_2$ için aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t} \tag{23.8}$$



Şekil 23-5 Yüksek frekansta, sığaç levhaları arasındaki elektrik alan (kenar etkileri ihmal edilmiştir).

Sığaçtaki elektrik alan artık düzgün değildir. Şekil 23-5'teki kesikli çizgiyle gösterildiği gibi parabolik bir şekli vardır. Görüyorsunuz ya, basit sığaçımız birazcık karmaşıklaşıyor.

Şimdi, bulduğumuz sonuçları kullanarak yüksek frekanslarda sığaçın impedansını hesaplayabiliriz. Elektrik alanı bildiğimizden, levhalardaki yükleri hesaplayabilir ve sığaçtan geçen akımın nasıl ω frekansına bağlı olduğunu bulabiliriz; ancak şimdilik bu problemle ilgilenmiyoruz. İlgilendiğimiz şey, frekans yükseldikçe ne olup bittiğini görmektir; hatta daha da yüksek frekanslarda ne olduğunu görmek. Zaten işimiz bitmemiş miydi? Hayır, çünkü elektrik alanı düzelttiğimiz için, hesapladığımız manyetik alan artık doğru değildir. Denklem (23.5)'in manyetik alanı yaklaşık olarak doğrudur, ancak sadece birinci dereceden bir yakınlaştırmadır. O yüzden ona B_1 diyelim. O halde, Denk. (23.5)'i tekrar aşağıdaki ifade gibi yazmalıyız:

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0\, e^{i\omega t} \tag{23.9}$$

Hatırlarsanız, bu alan E_1'in değişimiyle meydana gelmiştir. Şimdi doğru alan, toplam elektrik alan $E_1 + E_2$ taradından meydana getirilendir. Manyetik alanı $B = B_1 + B_2$ şeklinde yazarsak, ikinci terim E_2 tarafından meydana getirilen ilave alandır. B_2'yi bulmak için, B_1'i bulurken kullandığımız fikirleri kullanabiliriz; B_2'nin Γ_1 eğrisi etrafındaki çizgi integrali, Γ_1 içinden geçen E_2'nin akısının değişim hızına eşittir. Denklem (23.4)'ün, B ile B_2'nin ve E ile E_2'nin yerdeğiştirdiği bir halini elde ederiz:

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt} (\Gamma_1\text{'den geçen } E_2 \text{ akısı})$$

E_2 yarıçapla değiştiğinden dolayı, akısını elde etmek için Γ_1 içindeki çember yüzey üzerinden integral almalıyız. Alan elemanı için $2\pi r dr$ yazarsak, integral aşağıdaki ifade olur:

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r \, dr$$

$B_2(r)$ için de aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r \, dr \tag{23.10}$$

Denklem (23.7)'den $E_2(r)$'yi kullanarak, r^3dr'nin integraline ihtiyacımız vardır. O da elbette $r^4/4$'dür. Manyetik alan için düzeltmemizin son hali de aşağıdaki ifade olur:

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 \, e^{i\omega t} \tag{23.11}$$

Yine de işimiz bitmedi. B manyetik alanı, ilk düşündüğümüzle aynı değilse, E_2'yi yanlış hesaplamışız demektir. E'ye ilave düzeltme yapmamız lazım ve bu düzeltme B_2 manyetik alanından gelir. Elektrik alana yapılacak bu düzeltmeye E_3 diyelim. E_3, B_2 manyetik alanına, E_2'nin B_1'e bağlı olduğu gibi bağlıdır. Sadece alt simgeleri değiştirerek, Denk. (23.6)'yı tekrar kullanabiliriz:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) \, dr \tag{23.12}$$

B_2 için elde ettiğimiz sonuç olan Denk. (23.11)'i kullanarak, elektrik alan için yeni düzeltmeyi aşağıdaki ifade gibi yazabiliriz:

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 \, e^{i\omega t} \tag{23.13}$$

İki defa düzeltilmiş elektrik alanımızı $E = E_1 + E_2 + E_3$ şeklinde yazarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E = E_0 \, e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^4\right] \tag{23.14}$$

Elektrik alanın yarıçapla değişimi, artık Şekil 23-5'te çizdiğimiz gibi basit bir parabol değildir; fakat büyük yarıçaplarda ($E_1 + E_2$) eğrisinin biraz üzerinde uzanmaktadır.

Daha henüz bitirmedik. Yeni elektrik alan manyetik alan için bir düzeltme gerektirir, sonra yeni manyetik alan bu sefer elektrik alan için yeni düzeltme gerektirir ve bu böyle karşılıklı döngü şeklinde devam eder durur. Ancak, ihtiyacımız olan bütün denklemler elimizdedir. B ve E'nin alt simgelerindeki 2 yerine 3 koyarak, B_3 için Denk. (23.10)'u kullanabiliriz.

Elektrik alana yeni düzeltme aşağıdaki ifadedir:

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0 \, e^{i\omega t}$$

Böylece, bu dereceye kadar toplam elektrik alanı aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz. Sayısal katsayıları öyle bir yazdık ki, serinin nasıl devam edeceği apaçık ortadadır:

$$E = E_0 \, e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 \pm \cdots\right] \tag{23.15}$$

Son sonucumuz, herhangi bir frekans için sığaçın levhaları arasındaki elektrik alanın, sadece $\omega r/c$ değişkenini içeren sonsuz dizi çarpı $E_0 e^{i\omega t}$'yle belirlendiğidir. Dilersek, $J_0(x)$ dediğimiz özel bir fonksiyonu, Denk. (23.15)'teki köşeli parantezler içinde gözüken sonsuz dizi için tanımlayabiliriz:

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \pm \cdots \tag{23.16}$$

Böylece çözümümüzü $x = \omega r/c$'yle birlikte, $E_0 e^{i\omega t}$ çarpı bu fonksiyon olarak yazabiliriz:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \tag{23.17}$$

J_0 için özel fonksiyon dememizin nedeni, bir silindirdeki salınımlarla, doğal olarak, ilk defa bizim çalışmadığımızdandır. Bu fonksiyon daha önceden ortaya çıkmıştır ve genellikle J_0 olarak isimlendirilmiştir. Silindirik simetriye sahip dalgalar hakkında bir problemi çözerken daima karşımıza çıkar. Düz bir çizgideki dalgalar için kosinüs fonksiyonu neyse, silindirik dalgalar için de J_0 fonksiyonu odur. Diğer bir deyişle, uzun zaman önce keşfedilmiş önemli bir fonksiyondur. Daha sonradan, Bessel isminde bir matematikçi ona ismini verdi. Altsimgenin sıfır olmasının nedeni, Bessel'in bu fonksiyonlardan birçok farklı çeşit elde etmiş olması ve bunun onlardan sadece biri olmasıdır.

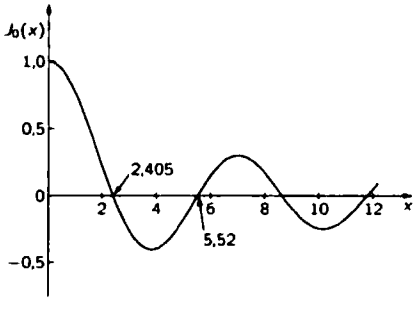
Bessel'in diğer fonksiyonlarındaki $-J_1$, J_2 ve diğerleri– şiddet değişkenliği, silindir ekseninin etrafındaki açıya bağlı olan silindir dalgalarıyla ilgilidir.

Çembersel sığaçımızın levhaları arasındaki elektrik alanın, Denk. (23.17)'de tamamen düzeltilmiş hali Şekil 23-5'deki kesintisiz çizgiyle gösterilmiştir. Çok yüksek olmayan frekanslarda, ikinci yakınlaştırmamız yeterince iyiydi. Üçüncü yakınlaştırmamız daha da iyiydi. Hatta o kadar iyiydi ki, çizseydik eğer kesintisiz eğriyle arasında bir fark göremezdiniz. Sıradaki bölümde göreceksiniz ki, büyük yarıçaplar veya yüksek frekanslar hakkında doğru bir tanımlama için tam seriyi elde etmemiz gereklidir.

23-3 Bir rezonans kovuğu

Şimdi çözümünüzün, daha da yüksek frekanslara çıkıldıkça sığaçımızın levhaları arasındaki elektrik alan için ne verdiğini görelim. ω büyüdükçe, $x = \omega r/c$ parametresi de büyür ve x'in, J_0 serisindeki ilk birkaç terimi çok hızlı şekilde büyür. Bu da, Şekil 23-5'te çizdiğimiz parabolün, yüksek frekanslarda çok dik şekilde aşağı doğru eğildiğini gösterir. Aslında, bütün alanı bir anda sıfıra indiren yüksek bir frekans vardır. Belki de c/ω, a'nın yaklaşık yarısıyken. Gelin, gerçekten J_0'nun sıfırı geçip eksi değer alıp almadığını görelim. $x = 2$ diyerek başlayalım:

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0{,}22$$



Şekil 23-6 Bessel fonksiyonu $J_0(x)$.

Bu fonksiyon hâlâ sıfır değildir, daha yüksek bir x değeri deneyelim. Örneğin, $x = 2{,}5$ olsun. Rakamları yerleştirdiğimizde, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$J_0(2{,}5) = 1 - 1{,}56 + 0{,}61 - 0{,}11 = -0{,}06$$

J_0 fonksiyonu daha $x = 2{,}5$ değerine geldiğimizde çoktan sıfır değerini geçti. $x = 2$ ve $x = 2{,}5$ için sonuçları karşılaştırdığımızda, J_0'nun sıfırdan geçtiği nokta sanki 2,5 ile 2 arasındaki mesafenin beşte birindedir. Sıfır değerine, x yaklaşık 2,4'e eşit olduğunda vardığını tahmin edelim. Bakalım bu x değeri bize ne veriyor:

$$J_0(2{,}4) = 1 - 1{,}44 + 0{,}52 - 0{,}08 = -0{,}00$$

Sıfır değerini, virgülden sonra iki basamağa kadar hassas elde etmiş dolduk. Hesaplamamızı daha da hassas hale getirirsek (ya da J_0 bilinen bir fonksiyon olduğundan, gidip bir kitapta değerlerine baksak), sıfır değerini $x = 2{,}405$ için elde edebileceğimizi buluruz. Biz bunu elle hesapladık, çünkü sizin de bu tür şeyleri bir kitaba bakmadan hesaplayabileceğinizi görmenizi istedik.

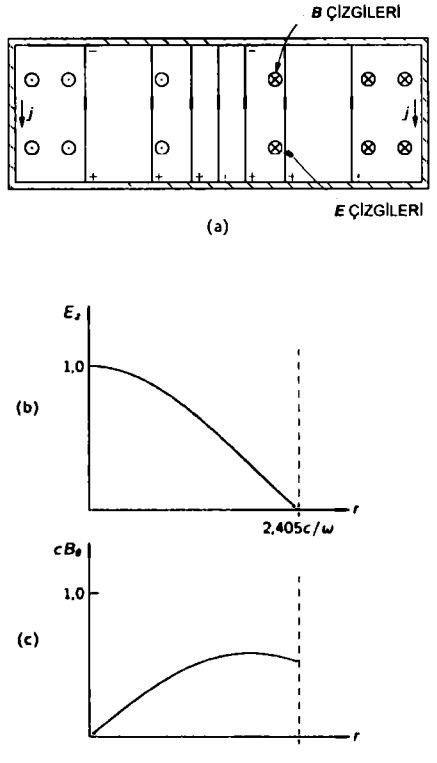
J_0 fonksiyonuna kitaptan bakıyorsak, büyük x değerleri için nasıl değiştiğini görmek ilgi çekicidir. Şekil 23-6'daki grafik gibi gözükür. x arttıkça $J_0(x)$ de artı ile eksi değerler arasında azalan bir salınım genliğiyle salınır.

Şu ilginç sonucu elde ettik: Yeterince yüksek frekansa çıkarsak, kondansatörümüzün merkezindeki elektrik alan tek yönlü olacaktır ve kenardaki elektrik alan zıt yönde olacaktır. Örneğin, sığaçın dış kenarındaki $x = \omega r/c$ değeri 4 ola-

cak şekilde yüksek bir ω değeri seçtiğimizi düşünelim. Bu durumda, sığaçın kenarı, Şekil 23-6'daki yatay eksenindeki $x = 4$'e karşılık gelir. Bunun anlamı, sığaçın $\omega = 4c/a$ frekansında çalıştırıldığıdır. Levhaların kenarında, bekleyeceğimiz yönün zıddında gayet yüksek büyüklüğe sahip bir elektrik bulunur. Bu, yüksek frekanslarda bir sığaça olabilecek en korkunç şeydir. Çok yüksek frekanslara çıkarsak, sığaçın merkezinden dışına doğru gittikçe elektrik alanın yönü ileri geri doğru salınır. Sığaçın, yüksek frekanslar için ideal bir sığa gibi gözükmemesi şaşırtıcı değildir. Hatta bir sığaça mı yoksa bir indüktansa mı daha çok benzediğini merak etmeye başlayabilirsiniz. Bu noktada, sığaçın kenarında olan bazı karmaşık etkileri ihmal ettiğimizi vurgulamalıyız. Örneğin, kenarlardan dışarı bir dalga ışınımı olacaktır; bu yüzden alanlar hesapladıklarımızdan daha karmaşık olacaktır, ancak şimdilik bu etkileri düşünmeyeceğiz.

Sığaç için eşdeğer bir devre bulmaya çalışabiliriz; ancak belki de en iyisi sığanın düşük frekanslı alanlar için tasarlandığını ve yüksek frekanslarda tatmin edici olmadığını kabullenmektir. Böyle bir cihazın yüksek frekanslardaki çalışmasını ele almak istiyorsak, devreler için yaptığımız Maxwell denklemlerine yaklaşımları bir kenara bırakmalıyız ve alanları uzayda tarif eden denklemler kümesine geri dönmeliyiz. İdealize edilmiş devre elemanlarıyla uğraşmaktansa, gerçek iletkenleri oldukları gibi, aralarındaki boşluklardaki alanları da hesaba katıp, ele almalı. Örneğin, yüksek frekanslarda bir rezonans devresi istiyorsak; onu bir bobin ile paralel levhalı sığaç kullanarak tasarlamaya çalışmayacağız.

Ele aldığımız paralel levhalı sığaçın, aynı zamanda bir indüktansın bazı özelliklerine sahip olduğunu daha önceden belirtmiştik. Elektrik alan sayesinde levhalarda yükler ve manyetik alanlar sayesinde de zıt emk'lar vardır. Halihazırda bir rezonans devremiz olmuş olabilir mi? Evet, gerçekten de vardır. Diskin içinde, belli bir yarıçapta elektrik alanın sıfıra düştüğü bir frekansı seçtiğimizi düşünelim. Dolayısıyla, seçtiğimiz $\omega a/c$ değeri 2,405'ten büyüktür. Levhalarla eşeksenli bir çemberin her yerinde elektrik alan sıfır olacaktır. Şimdi ince metal bir levhadan, sığaçın levhaları arasına sığacak genişlikte bir şerit kestiğimizi düşünelim. Daha sonra onu, elektrik alanın sıfır olduğu yarıçapta etrafı dolaşacak şekilde bir silindir şekline soktuğumuzu düşünelim. Burada elektrik alan olmadığından, iletken silindiri koyduğumuzda içinden akım geçmez ve elektrik ile manyetik alanlarda bir değişiklik olmaz. Hiçbir şeyi değiştirmeden, sığaç boyunca bir kısa devre yerleştirmeyi başardık. Bir başka elde ettiğimiz şey de, içinde elektrik ve manyetik alanlar olan ama dışarıdaki dünyayla hiçbir bağlantısı olamayan silindirik bir teneke. Tenekemizin dışındaki ve aynı zamanda sığaçın uçlarındaki kenarları kesip atsak bile, içerdeki alanlar değişmez. Elimizde kalan, Şekil 23-7 (a)'da gösterildiği gibi, içinde manyetik ve elektrik alanlar bulunan kapalı bir tenekedir. Elektrik alanlar, ileri geri ω frekansıyla salınır ve unutmayın, frekans tenekenin çapına bağlıdır. Şekil 23-7 (b)'deki grafikte gösterildiği gibi, E alanının salınımının genliği, tenekenin eksenine olan uzaklıkla değişir. Bu eğri, sıfır dereceden Bessel fonksiyonunun ilk kavisidir. Ayrıca, eksen etrafında daireler çizerek giden bir manyetik alan vardır ve elektrik alanla 90° evre dışı olarak salınır.



Şekil 23-7 Kapalı silindirik bir teneke içerisindeki elektrik ve manyetik alanlar.

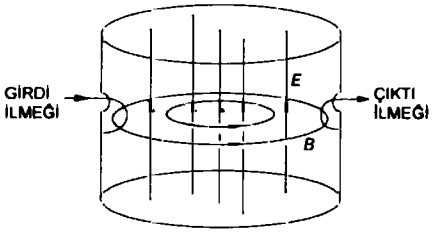
Ayrıca, Şekil 23-7 (c)'de gösterildiği gibi, manyetik alan için de bir dizi yazabilir ve grafiğe dökebiliriz.

Dış bağlantı olmadan, bir tenekenin içinde nasıl elektrik ve manyetik alanlar olabilir? Bunun nedeni, elektrik ve manyetik alanların birbirlerini idame edebilmeleridir. Değişen E, bir B yaratır ve değişen B de bir E yaratır. Her şey Maxwell denklemlerine uygundur. Manyetik alanın indükleyici bir özelliği vardır ve elektrik alanın da sığasal özelliği vardır; ikisi beraber bir nevi rezonans

devresi meydana getirirler. Dikkat ederseniz, tanımladığımız koşullar sadece tenekenin yarıçapı $2{,}405c/\omega$ ise geçerlidir. Belli bir yarıçaptaki teneke için, salınım yapan elektrik ve manyetik alanlar birbirlerini –aynı tarif ettiğimiz gibi– sadece belli bir frekansta idame edebilirler. Diğer bir deyişle, r yarıçapındaki bir teneke aşağıdaki frekansta *rezonanstadır*:

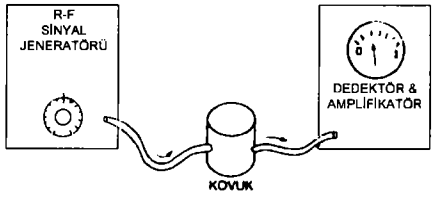
$$\omega_0 = 2{,}405\,\frac{c}{r} \tag{23.18}$$

Teneke tamamen kapalı bile olsa, alanların salınım yapmaya devam edeceğini söylemiştik. Aslında, bu tam anlamıyla doğru değildir. Bunun mümkün olması için, tenekenin duvarlarının mükemmel iletkenler olması gerekir. Gerçek bir teneke içinse, malzemenin direnci yüzünden, tenekenin duvarlarının içinde salınım yapan akımlar enerji kaybeder. Alanların salınımları zamanla sonlanacaktır. Şekil 23-7'den, kovuk içinde elektrik ve manyetik alanlarla ilişkili güçlü akımlar olmalıdır. Tenekenin alt ve üst levhalarında dikey elektrik alan aniden durduğu için, orda (alanın) büyük bir diverjansı vardır; dolayısıyla Şekil 23-7 (a)'da gösterildiği gibi tenekenin iç yüzeylerinde artı ve eksi elektrik yükleri olmalıdır. Elektrik alan tersine döndüğünde, yükler de aynı zamanda tersine dönmeli; böylece tenekenin alt ve üst levhaları arasında bir alternatif akım meydana gelmeli. Bu yükler, tenekenin iç duvarlarında şekilde gösterildiği gibi akar. Manyetik alana ne olacağını ele alarak, tenekenin kenarlarının içinde akımlar olması gerektiğini görebiliriz. Şekil 23-7 (c)'nin grafiği bize, tenekenin kenarında manyetik alanın bir anda düştüğünü söyler. Manyetik alanda bu tür bir değişme, ancak yüzeyde bir akım varsa olur. İşte bu akım, tenekenin alt ve üst levhalarındaki dalgalı elektrik yüklerini yaratır.



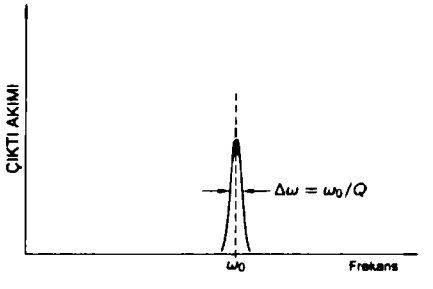
Şekil 23-8 Bir rezonans kovuğundan içeri ve dışarı bağlantı.

Tenekenin dik kenarlarındaki akımlara dair keşfimizi merak ediyor olabilirsiniz. Peki, elektrik alanın sıfır olduğu bir bölgeye bu dik kenarları koyduğumuzda hiçbir şeyin değişmeyeceğine dair önceden söylediğimiz ifadeye ne olacak? Ancak hatırlayın, tenekenin kenarlarını ilk yerleştirdiğimiz esnada, alt ve üst levhalar onlardan ileri uzanıyordu, tenekenin dışında da ayrıca manyetik alanlar vardır. Sığaç levhalarının parçalarını kenarlardan öteye attığımızda sadece, dikey duvarların içinde net akımlar meydana gelebildi.



Şekil 23-9 Kovuk rezonansını gözlemlemek için yapılmış düzenek.

Her ne kadar enerji kayıpları yüzünden tamamen kapalı teneke içindeki elektrik ve manyetik alanlar yavaşça kaybolup gidecekse de, teneke üstünde küçük bir delik açıp, kayıpları telafi etmek için küçük miktarda elektrik enerjisi koyarak bunu engelleyebiliriz. Küçük bir tel alır, tenekenin kenarındaki delikten içeri sokar, içteki duvara küçük bir ilmek yapacak şekilde, Şekil 23-8'de gösterildiği gibi, bağlarız. Şimdi bu teli yüksek frekanslı bir alternatif akım kaynağına bağlarsak, bu akım kovuktaki elektrik ve manyetik alanlara enerji sağlayacak ve salınımların devam etmesini sağlayacaktır. Bu elbette, tahrik kaynağının frekansı tenekenin rezonans frekansına eşit olursa olur. Kaynak farklı bir frekanstaysa, elektrik ve manyetik alanlar rezonansa girmeyecek ve tenekedeki alanlar çok zayıf olacaktır.



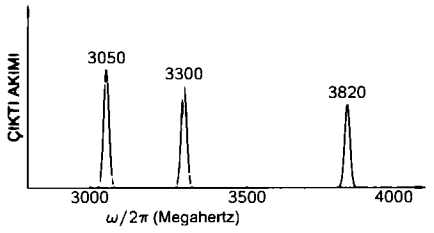
Şekil 23-10 Bir rezonans kovuğunun frekans tepki eğrisi.

Rezonans davranışı, Şekil 23-8'de çizildiği gibi, tenekede küçük bir delik daha açıp, bir başka bağlaşım ilmeğine bağlanarak da görülebilir. Bu ilmekten geçen, değişen manyetik alan ilmekte bir elektromotor kuvveti indükleyecektir. Bu ilmeği dışarda bir ölçüm devresine bağlarsak, akımlar kovuğun içindeki alanların şiddetiyle orantılı olacaktır. Şimdi, kovuğumuzun iç ilmeğini bir RF sinyal jeneratörüne, Şekil 23-9'daki gibi, bağladığımızı düşünelim. Sinyal jeneratöründe frekansı jeneratörün önündeki bir düğmeyle değiştirilebilen bir alternatif akım kaynağı vardır. Eğer şimdi, çıktı akımını sinyal jeneratörünün bir fonksiyonu olarak ölçersek, Şekil 23-10'da gösterildiği gibi bir eğri buluruz. Çıktı akımı, kovuğun rezonans frekansı olan ω_0 frekansının yakınındakiler hariç, çok küçüktür. Rezonans eğrisi, I. Cilt, Bölüm 23'te tarif ettiğimize çok ben-

zerdir. Bununla birlikte, rezonansın genişliği indüktanslar ve sığaçlardan yapılmış rezonans devrelerinde gördüğümüzden çok daha dardır. Diğer bir deyişle, kovuğun Q'su çok yüksektir. Kovuğun duvarları gümüş gibi çok iyi iletkenliğe sahip bir malzemeden yapılmışsa, Q değeri 100.000'e kadar çıkabilir.

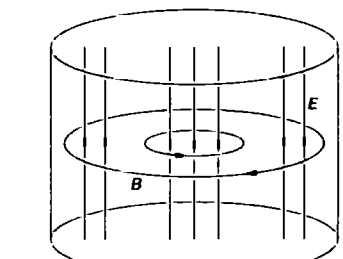
23-4 Kovuk kipleri

Şimdi, kuramımızı sınamak için gerçek bir teneke kutuyla ölçümler yapalım. Çapı 7,5 santimetre ve yüksekliği de yaklaşık 6,5 santimetre olan silindirik bir teneke kutuyu ele alalım. Teneke, Şekil 23-8'deki gibi bir girdi ve çıktı ilmeğine sahiptir. Bu teneke için beklenen rezonans frekansını Denk. (23.18)'e göre hesapladığımızda, $f_0 = \omega_0/2\pi = 3010$ megahertz elde ederiz. Sinyal jeneratörümüzün frekansını 3000 megahertze ayarlar ve rezonansı bulana kadar hafifçe oynadığımızda, en yüksek çıktı akımının 3050 megahertzde oluştuğunu görürüz ki bu da, bire bir eşit olmasa da, öngörülen rezonans frekansına çok yakındır. Bu farklılığı açıklayan birçok neden vardır. Belki de bağlaşım ilmeklerini yerleştirmek için açtığımız deliklerden dolayı rezonans frekansı değişmiştir. Belki de sinyal jeneratörünün frekans kalibrasyonunda bir miktar hata vardır ya da belki kovuk çapı ölçümümüz yeterince hassas değildir. Yine de, sonuç yeterince yakındır.

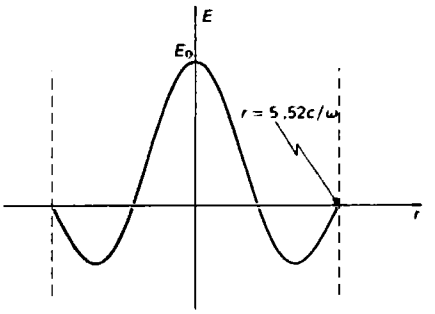


Şekil 23-11 Bir silindirik kovuğun gözlemlenen rezonans frekansları.

Sinyal jeneratörümüzün frekansını 3000 megahertzden öteye gidecek şekilde ayarladığımızda, çok daha önemli bir şey olur. Bunu yaptığımızda, Şekil 23-11'de görülen sonuçları elde ederiz. 3000 megahertz civarında beklediğimiz rezonansa ilaveten, 3300 megahertz ve 3820 megahertz yakınında da rezonanslar vardır. Bu fazladan rezonanslar ne anlama gelir? Şekil 23-6 bize bir ipucu vermekte. Her ne kadar Bessel fonksiyonunun ilk sıfırının tenekenin kenarında gerçekleştiğini varsaymış olsak da, Şekil 23 12'de görüldüğü gibi tenekenin merkezinden kenara doğru gittikçe tam bir elektrik alan salınımı olacak şekilde Bessel fonksiyonunun ikinci sıfırı da tenekenin kenarında olabilir. Bu, salınan alanlar için mümkün bir kiptir. Tenekenin böyle bir kipte rezonansını beklemeliyiz. Ancak dikkat edin, Bessel fonksiyonunun ikinci sıfırı $x = 5{,}52$'de, ilk sıfırı gözlemlediğimiz değerin neredeyse iki katında görülmekte. Dolayısıyla bu kipin rezonans frekansı 6000 megahertzden büyük olmalıdır. Orada bulacağımızdan kuşkumuz yok, ancak bu yine de 3300 megahertzdeki rezonansı açıklayamamakta.



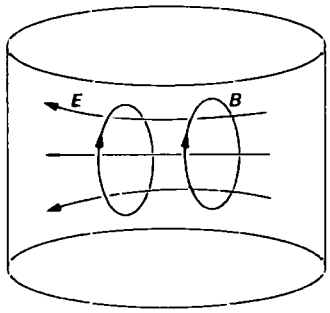
(a)



(b)

Şekil 23-12 Bir yüksek frekans kipi.

Rezonans kovuğuna dair analizimizdeki sıkıntı, elektrik ve manyetik alanların geometrik düzenlemelerinin sadece olası birini ele almış olmamızdır: Elektrik alanın dik ve manyetik alanın da yatay çizgilerde. Ancak, başka alanlar da mümkündür. Gerekli olan şartlar sadece, alanların Maxwell denklemlerini tenekenin içinde sağlaması ve elektrik alanlar duvarın dik açı yapmasıdır. Bizim ele aldığımız tenekede üst ve alt kısımlar düzdü, eğer alt ve üst kısım eğri olsaydı her şey farklı olurdu. Eğer düşünürseniz, teneke neresi üstü neresi altı ve neresi kenarları nasıl bilebilir ki? Aslında, Şekil 23-13'de görüldüğü gibi, tenekenin içindeki elektrik alanlardan birinin tenekenin çapı boyunca ilerlediği bir durumu göstermek mümkündür.

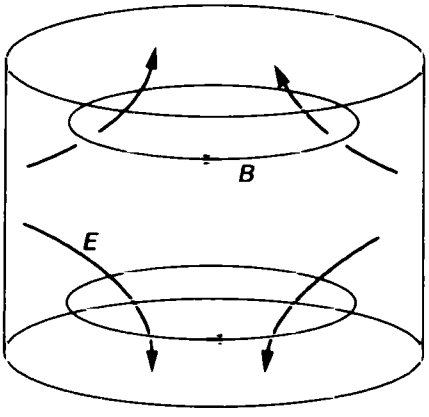


Şekil 23-13 Silindirik kovuğun enine kipi.

Bu kipin doğal frekansının, ele aldığımız ilk kipin doğal frekansından neden farklı olmadığını anlamak çok zor değildir. Silindirik kovuk yerine, kenarları 7,5 santimetre olan bir küp kovuk seçtiğimizi düşünelim. Bu kovuğun, hepsi ayrı frekanslarda, üç kipi olacağı aşikârdır. Yukarı aşağı gidip gelen elektrik alanlı kipin frekansı, elektrik alanın sağa ve sola yönlendiği kipin frekansıyla aynı olur. Şimdi küpü bir silindire çevirirsek, bu frekansları bir şekilde değiştirmiş oluruz. Kovuğun boyutlarını iyi kötü aynı tuttuğumuz sürece, frekansların çok da değişmesini beklemeyiz. Dolayısıyla Şekil 23-13'ün frekansı Şekil 23-8'deki kipin frekansından çok farklı olmamalıdır. Şekil 23-13'teki kipin doğal frekan-

sının detaylı bir hesaplamasını yapabilirdik; ancak bunu şimdi yapmayacağız. Hesaplamalar yapıldığında bulunmuştur ki, varsaydığımız boyutlarda rezonans frekansı, gözlemlenen rezonans frekansı 3300 megahertze çok yakındır.

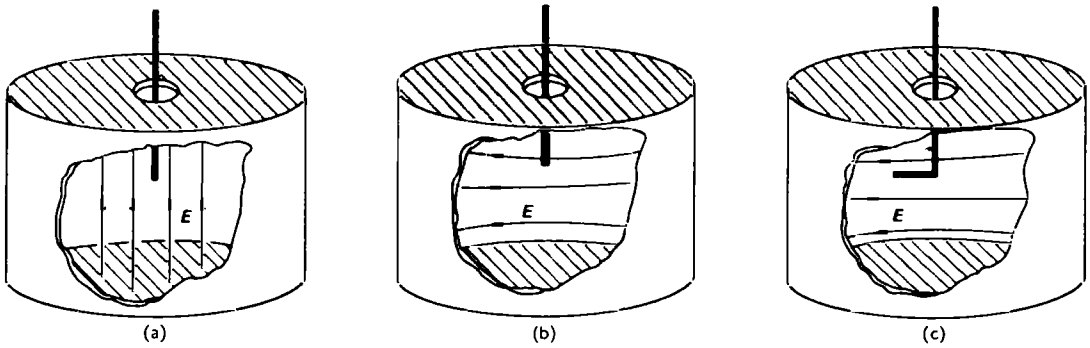
Benzer hesaplamaları yaparak, 3800 megahertz civarında bulduğumuz bir başka rezonans frekansında bir başka kip daha olabileceğini göstermek mümkündür. Bu kip için elektrik ve manyetik alanlar Şekil 23-14'te gösterilmiştir. Elektrik alan kovuk boyunca tüm yolu gitmez. Gösterildiği gibi kenarlardan uçlara gider.



Şekil 23-14 Bir başka silindirik kovuk kipi.

Artık inanacağınız üzere, frekansı artırdıkça daha da fazla rezonans bulmayı beklemeliyiz. Her biri, elektrik ve manyetik alanların birtakım karmaşık düzenlemesine karşılık gelen rezonans frekansı olan birçok farklı kip vardır. Bu alan düzenlemelerini her birine bir rezonans *kipi* denir. Her bir kipin rezonans frekansı kovuk içindeki elektrik ve manyetik alanlar için Maxwell denklemlerini çözerek bulunabilir.

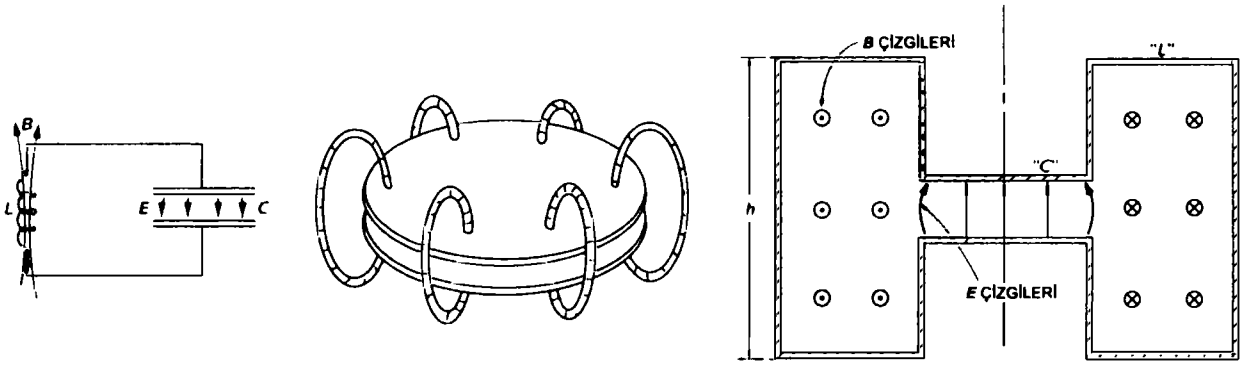
Belirli bir frekansta rezonanstan yola çıkarak, söz konusu kipi bulabilir miyiz? Bunun yapmanın bir yolu, küçük bir delikten içeri kısa bir tel sokmaktır. Elektrik alan, Şekil 23-15 (a)'daki gibi tel boyundaysa, telde göreceli olarak büyük ve alanların enerjisini boşaltan akımlar gözlemlenir; bu da rezonansın bastırılmasına yol açar. Elektrik alan Şekil 23-15 (b)'deki gibiyse, telin etkisi çok daha küçük olacaktır. Şekil 23-15 (c)'deki gibi telin ucunu bükerek, bu kipteki alanın ne yöne işaret ettiğini bulabiliriz. Daha sonra teli döndürdükçe, telin ucu $\boldsymbol{E}$'ye paralel olduğunda büyük bir etki ve $\boldsymbol{E}$'ye dik açıda olduğunda küçük bir etki gözlemlenir.



Şekil 23-15 Kovuk içine sokulan kısa, metal bir tel, $\boldsymbol{E}$'ye paralel olduğunda rezonansı, $\boldsymbol{E}$'ye dik açılarda olduğundan daha fazla tedirgenecektir.

23-5 Kovuklar ve rezonans devreleri

Her ne kadar, şu ana kadar tarif ettiğimiz rezonans kovuğu, bir indüktans ve sığaçtan oluşan sıradan bir rezonans devresinden çok farklı olsa da, iki rezonans sistemi birbirleriyle yakından ilişkilidir. Aynı ailenin üyesidirler. Elektromanyetik rezonatörlerin iki uç noktadaki durumudurlar ve bu ikisinin arasında bulunan durumlar vardır. Şekil 23-16 (a)'da gösterildiği gibi, indüktansla paralel bağlanmış bir sığaçtan oluşmuş rezonans devresini ele alalım. Bu devre, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ frekansında rezonans üretecektir. Devrenin rezonans frekansını yükseltmek istersek, bunu L indüktansını düşürerek yapabiliriz. Bir yolu, bobinin sargı sayısını azalmaktır. Fakat, bu yönde ancak bu kadar ilerleyebiliriz. Son sarıma sıra geldiğinde, kondansatörün üst ve alt levhalarını birleştiren tel kalacaktır elimizde. Sığayı küçülterek de rezonans frekansını artırabiliriz ya da birçok indüktansı paralel bağlayarak da indüktansı düşürebiliriz. Birbirine paralel iki adet tek sarımlı indüktans, her bir sarımın yarısı kadar indüktansa sahip olacaktır. Dolayısıyla indüktansımız tek bir sarıma düşürüldüğünde, üst levhadan alt levhaya tek tek başka ilmekler ekleyerek rezonans frekansını artırmaya devam edebiliriz. Örneğin, Şekil 23-16 (b) bu şekilde altı "tek sarımlı indük-



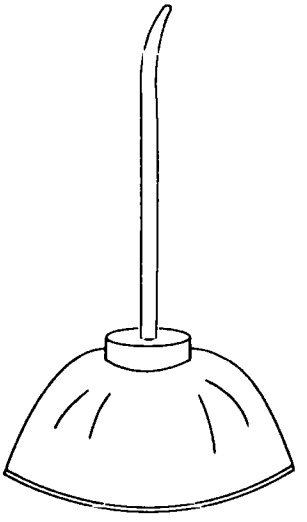
Şekil 23-16 Yükselen rezonans frekanslı rezonatörler.

tanslarla" birbirine bağlanmış kondansatör levhalarını göstermektedir. Bu şekilde tel parçaları eklemeye devam edersek, silindirik olarak simetrik bir nesnenin çizimi olan, şeklin (c) kısmındaki tamamen kapalı rezonans sisteme geçiş yapabiliriz. İndüktansımız, kondansatör levhalarının kenarlarına bağlanmış silindirik bir boş tenekedir. Elektrik ve manyetik alanlar şekilde gösterildiği gibidir. Böyle bir nesne elbette ki bir rezonans kovuğudur. Buna "yüklü" kovuk denir. Bu tür bir şekli hâlâ bir *L-C* devresi gibi düşünebiliriz. Elektrik alanın en çok bulunduğu bölge sığa bölgesi ve manyetik alanın en çok bulunduğu bölge de indüktans bölgesidir.

Şekil 23-16 (c)'deki rezonatörün frekansını daha da yükseltmek isterseniz, *L* indüktansını gitgide düşürmeniz gerekir. Bunu yapmak için, indüktans bölümünün geometrik boyutlarını azaltmak gerek. Örneğin, çizimdeki *h* boyutunu küçülterek. *h* küçüldükçe, rezonans frekansı büyüyecektir. Elbette sonunda *h* yüksekliğinin kondansatör levhaları arasındaki kovuğa eşit olduğu bir ana varırız. Bu durumda elimizde silindirik bir teneke vardır; rezonans devremiz Şekil 23-7'deki kovuk rezonatörü olmuştur.

Şekil 23-16'daki ilk *L-C* rezonans devremizdeki elektrik ve manyetik alanların birbirlerinden gayet ayrık olduklarını fark etmişsinizdir. Rezonans devremizi daha yüksek frekanslar için değiştirdikçe, manyetik alan elektrik alana, her ikisi de kovuk rezonatörünün içinde birbirine karışana kadar, gitgide yaklaşmıştır.

Her ne kadar bu bölümde bahsettiğimiz kovuk rezonatörleri silindirik tenekeler olduysa da, silindirik şeklin özel bir sihri yoktur. Herhangi bir şekildeki teneke, elektrik ve manyetik alan salınımlarının çeşitli olası kiplerine karşılık gelen frekansa sahip olabilir. Örneğin, Şekil 23-17'de gösterilen "kovuk", her ne kadar hesaplamak çok zor olsa da, kendine has rezonans frekansları kümesine sahip olacaktır.



Şekil 23-17 Bir başka rezonans kovuğu.

24
DALGA KILAVUZLARI

24-1 İletim hattı
24-2 Dikdörtgen dalga kılavuzu
24-3 Kesme frekansı
24-4 Kılavuzlu dalgaların hızı
24-5 Kılavuzlu dalgaları gözlemlemek
24-6 Dalga kılavuzu tesisatçılığı
24-7 Dalga kılavuzu kipleri
24-8 Kılavuzlu dalgalara bir başka bakış

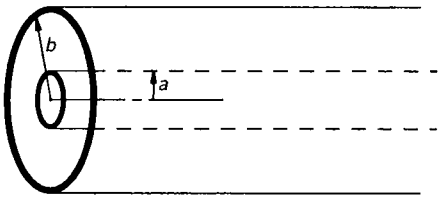
24-1 İletim hattı

Son bölümde, yüksek frekanslarda çalıştırıldıklarında toplu devre elemanlarına ne olduğunu incelemiştik. Sonuç olarak, bir rezonans devresinin içinde rezonans üreten alanlar olan bir kovukla yerdeğiştirebileceğini gördük. Bir başka ilgi çekici problem de, bir nesnenin diğerine, elektromanyetik enerji aktarmak üzere bağlanmasıdır. Düşük frekanslı devrelerde bağlantı tellerle yapılabilir; ancak bu yöntem yüksek frekanslarda çok iyi çalışmaz; çünkü devreler etraflarına enerji yayarlar ve bu enerjinin nereye gideceğini kontrol etmek zordur. Alanlar devrelerin etrafında yayılı durur; akımlar ve voltajlar teller tarafından iyi "kılavuz" edilmezler. Bu bölümde, nesnelerin birbirlerine yüksek frekanslarda nasıl bağlanabileceğine bakacağız. En azından, konumuzu anlatmanın bir yolu bu.

Diğer bir yolu da, boş uzayda dalgaların davranışını inceleyip durumumuzu söylemek. Şimdi, salınım yapan alanların bir veya daha çok boyutta kısıtlı kaldıklarında ne olduğunu görmenin zamanı. Alanların sadece iki boyutta hapsedildiği ve üçüncü boyutta serbest bırakıldıklarında ne olduğuna dair ilginç bir olgu keşfedeceğiz. Dalgalar halinde ilerlerler. Bunlar "kılavuzlu dalgalar"dır ve bu bölümün konusu onlardır.

Önce, *iletim hattının* genel kuramını çalışarak başlayalım. Yol boyu gördüğünüz, kuleden kuleye yol alan sıradan bir iletim hattı gücünün bir kısmını ışınımla yayar; ancak güç frekansları (50-60 çevrim/sn) o kadar düşüktür ki bu kayıp ciddiye alınacak miktarda değildir. Işınımı, telin etrafını metal bir boruyla sararak engelleyebiliriz; ancak bu yöntem, kullanılan akım ve voltajlardan dolayı çok büyük, ağır ve pahalı bir boru gerektirdiğinden pratik olmazdı. Bu yüzden basit "açık hatlar" kullanılır.

Daha yüksek frekanslarda –diyelim ki birkaç kilohertz– ışınım ciddiyet kazanabilir. Bununla birlikte bu durumun ciddiyeti, aynı kısa mesafe telefon bağlantılarındaki gibi, "burgulu çift" iletim hatları kullanılarak azaltılabilir. Daha yüksek frekanslardaysa, ya güç kayıplarından ya da istenmedik şekilde başka devrelerde enerji ortaya çıktığından dolayı bu ışınım artık kabul edilemez hale gelir. Birkaç kilohertzden başlayıp, birkaç yüz megahertze kadar olan frekans aralıklarında, elektromanyetik sinyaller ve güç, içinde bir tel olan silindirik "dış iletken" veya kalkan"dan oluşmuş eşeksenli hatlarla taşınır. Her ne kadar şimdi göstereceğimiz çözüm, herhangi bir şekle sahip iki paralel iletkenden oluşan bir iletim hattı için olsa da, onu bir eşeksenli hatta referans göstererek geliştireceğiz.



Şekil 24-1 Eşeksenli bir iletim hattı.

Şekil 24-1'deki gösterildiği gibi, en basit eşeksenli hattı ele alalım. Böyle bir hattın merkez iletkeni içi boş, ince bir silindirdir ve dış iletkeni de iç iletkenle aynı eksende bir başka ince silindirdir. Önce düşük frekanslardaki davranışını yaklaşık olarak tahmin etmeye çalışarak işe koyulalım. Bu tür iki iletkenin birim uzunlukları boyunca belirli bir miktar indüktansları veya sığaları olduğunu belirterek, düşük frekansta davranışlarının bir kısmını daha önceden açıklamıştık. Aslında, herhangi bir iletim hattının düşük frekansta davranışını, onun birim uzunluktaki indüktansı L_0'yu ve sığası C_0'yu ortaya koyarak tanımlayabiliriz. Daha sonra hattı, Bölüm 22-6'da konuştuğumuz L-C filtresinin sınırlandırıcı durumu olarak ele alıp, analiz edebiliriz. Δx hattın birim uzunluğuyken, küçük seri elemanlar $L_0\Delta x$'ler ve küçük paralel sığaçlar $C_0\Delta x$'ler sayesinde, hattı taklit eden bir filtre oluşturabiliriz. Sonsuz filtre için elde ettiğimiz sonuçları

kullandığımızda, hat boyunca elektrik sinyallerinin ilerleyeceğini görürüz. Bununla birlikte, bu yaklaşımı kullanmak yerine, şimdi diferansiyel denklem bakış açısıyla bakmayı tercih ediyoruz.

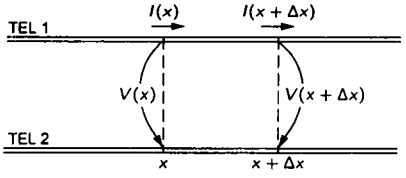
Hattın başladığı noktadan x ve $x + \Delta x$ mesafelerde, birbirine komşu iki noktada ne olup bittiğini gördüğümüzü varsayalım. İki iletken arasındaki voltaj farkına $V(x)$ ve "sıcak" iletken boyunca geçen akıma da $I(x)$ diyelim (*Bkz.* Şekil 24-2). Hattaki akım değişkenlik gösteriyorsa, indüktanstan dolayı oluşan, hattın üzerindeki x noktasından $x + \Delta x$ noktasına kadar olan küçük bölümdeki voltaj düşüşünü aşağıdaki denklemle ifade edebiliriz:

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}$$

$\Delta x \to 0$'a giderken limitini aldığımızda, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \tag{24.1}$$

Değişen akım, voltajın bir gradyanını verir.



Şekil 24-2 Bir iletim hattının akımları ve voltajları.

Yeniden şeklimize istinaden, x noktasındaki voltaj değişiyorsa, o bölgedeki sığaya bir miktar yük besleniyor olmalıdır. x ile $x + \Delta x$ arasındaki küçük hat parçasını ele alırsak, üzerindeki yük $q = C_0 \Delta x V$'dir. Bu yükün zamanla değişim hızı da $C_0 \Delta x\, dV/dt$'dir; ancak yük değişimi sadece elemana giren $I(x)$ akımı çıkan $I(x + \Delta x)$ akımından farklıysa mümkündür. Akım farkına ΔI dersek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dV}{dt}$$

$\Delta x \to 0$'a giderken limitini aldığımızda, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \tag{24.2}$$

Dolayısıyla, yükün korunumuna göre akımın gradyanı, voltajın zamanla değişim hızıyla orantılıdır.

(24.1) ve (24.2) denklemleri, bir iletim hattının temel denklemleridir. Eğer dilersek, iletkenlerdeki direnç veya iletkenler arasındaki yalıtkandan sızan yükün etkilerini içerecek şekilde düzenleyebiliriz; ancak şimdilik sadece bu basit örnek üzerinde duracağız.

İletim hatlarına ait bu iki denklemi, birinin t'ye göre ve diğerinin de x'e göre türevini alıp, V veya I'yı eleyerek birleştirebiliriz. Bu durumda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{24.3}$$

ifadesini ya da aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{24.4}$$

Bir kere daha karşımıza x'e bağlı dalga denklemi çıktı. Düzgün bir iletim hattı için, voltaj (ve akım) hat boyunca dalga olarak ilerler. Hat boyu voltaj ya $V(x, t) = f(x - vt)$ veya $V(x, t) = g(x + vt)$ şeklinde ya da her ikisinin toplamı olmalıdır. Peki, v hızı nedir? $\partial^2/\partial t^2$ teriminin katsayısının $1/v^2$ olduğunu bildiğimizden, aşağıdaki denklemi çıkartabiliriz:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{24.5}$$

Bir hattaki *her bir dalga için* voltajın, o dalganın akımıyla orantılı olduğunu ve orantı sabitinin de karakteristik empedans z_0 olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz. Artı x yönünde ilerleyen bir dalga için voltaj ile akıma V_+ ve I_+ dediğinizde, aşağıdaki denklemi elde etmelisiniz:

$$V_+ = z_0 I_+ \tag{24.6}$$

Benzer şekilde, eksi x yönünde giden bir dalga için de aşağıdaki denklemi elde etmelisiniz:

$$V_- = z_0 I_-$$

Filtre denklemlerimizden bulduğumuz üzere, karakteristik empedans aşağıdaki denklemle hesaplanır:

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{24.7}$$

ve dolayısıyla saf dirençtir.

İlerleme hızı v'yi ve bir iletim hattının karakteristik empedansı z_0'yu bulmak için, birim uzunluk boyunca indüktans ve sığayı bilmeliyiz. Eşeksenli bir kablo için bunları hesaplamak kolaydır, gelin şimdi bu hesabı yapalım. İndüktans için Bölüm 17-8'deki akıl yürütmemizi kullanarak, $\frac{1}{2}LI^2$'yi, $\epsilon_0 c^2 B^2/2$'nin hacim üzerinden integralini aldığımız manyetik enerjiye eşitleyelim. Merkez iletkenin I akımı taşıdığını varsayarsak ve r eksene olan uzaklıksa, $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ olduğunu biliriz. dr kalınlığında ve l uzunluğunda bir silindirik kabuğu hacim elemanı olarak düşünürsek, manyetik enerjiyi aşağıda olduğu gibi yazabiliriz:

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 l 2\pi r dr$$

Denklemdeki a ve b, sırayla iç ve dış iletkenlerin yarıçaplarıdır. İntegrali aldığımızda, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$U = \frac{I^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a} \tag{24.8}$$

Enerjiyi $\frac{1}{2}LI^2$'ye eşitlediğimizde, aşağıdaki denklemi buluruz:

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a} \tag{24.9}$$

Olması gerektiği gibi, hattın l boyuyla orantılıdır; dolayısıyla L_0 birim uzunluğunda indüktansta aşağıdaki denklem yazılır:

$$L_0 = \frac{\ln (b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \tag{24.10}$$

Silindirik bir kondansatördeki yükü nasıl hesaplayacağımızı (*Bkz.* Bölüm 12-2) çalışmıştık. Şimdi potansiyel farkı yüke bölersek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln (b/a)}$$

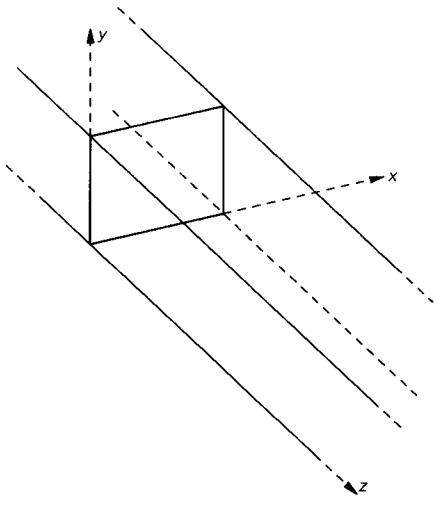
Birim uzunluktaki sığa C_0, C/l'dir. Bu sonucu Denk. (24.10)'la birleştirirsek, L_0C_0 çarpımının $1/c^2$'ye eşit olduğunu görürüz. Dolayısıyla, $v = 1/\sqrt{L_0C_0}$ hızı da c'ye eşittir. Bu da, dalganın hat boyunca ışık hızıyla ilerlediği anlamına gelir. Burada belirtmeliyiz ki, bu sonuç şu varsayımlarımıza dayanır: (a) iletkenler arasındaki kovukta ne dielektrik ne de manyetik malzeme vardır ve (b) akımlar hep iletkenlerin yüzeylerindedir (mükemmel iletkenlerde olduğu gibi). Daha sonra göreceğimiz gibi, yüksek frekanslardaki iyi iletkenlerde akımlar kendilerini, aynı mükemmel bir iletkendeki gibi, yüzeye dağıtırlar. Dolayısıyla bu varsayımımız geçerlidir.

(a) ve (b) varsayımlarımız doğru olduğu sürece, *herhangi* bir paralel iletken çifti için L_0C_0 çarpımının $1/c^2$'ye eşit olması ilginçtir. Hatta eliptik bir dış iletkenin içinde herhangi bir yerdeki altıgen bir iletken için bile bu böyledir. Enine kesit alanı sabit olduğu ve aradaki kovukta malzeme olmadığı sürece dalgalar ışık hızında ilerler.

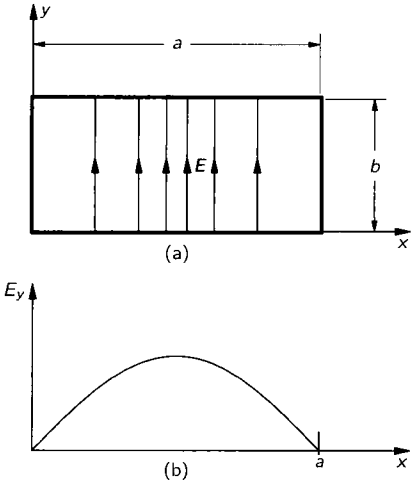
Karakteristik empedans için böyle bir genel ifade kullanılamaz. Eşeksenli bir hat için karakteristik empedans aşağıdaki denklemdir:

$$z_0 = \frac{\ln (b/a)}{2\pi\epsilon_0 c} \tag{24.11}$$

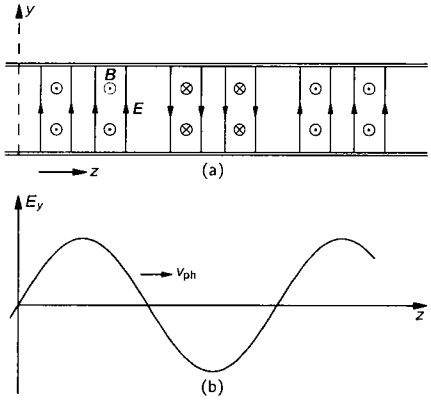
$1/\epsilon_0 c$ çarpanı bir direncin boyutlarına sahiptir ve 120π ohm'a eşittir. $\ln (b/a)$ geometrik çarpanı boyutlara sadece logaritmik olarak dayanır, dolayısıyla eşeksenli bir hat için –ve birçok hat için de– karakteristik empedansın tipik değerleri 50 ohmdan birkaç yüz ohma kadar değişir.



Şekil 24-3 Dikdörtgen bir dalga kılavuzu için seçilmiş koordinatlar.



Şekil 24-4 Bir z değeri için dalga kılavuzundaki elektrik alan.



Şekil 24-5 Bir dalga kılavuzundaki alanın z bağımlılığı.

24-2 Dikdörtgen dalga kılavuzu

Şimdi üzerinde durmak istediğimiz şey, ilk bakışta çok çarpıcı bir olgu olarak göze çarpar: eşeksenli hattan merkez iletkeni kaldırsak bile, yine de elektromanyetik güç taşıyabilir. Diğer bir deyişle yeterince yüksek frekanslarda boş bir tüp, içi tellerle dolu olan bir tüple aynı işi görebilir. Bir kondansatör ve indüktanstan oluşan rezonans devresinin yüksek frekanslarda sadece bir teneke kutuyla yerdeğiştirebilmesiyle ilgilidir bu olgu.

Her ne kadar, bir iletim hattını dağıtılmış bir indüktans ve sığa cinsinden düşündüğünüzde bu dikkate değer bir şey gibi gözükse de; elektromanyetik dalgaların içi boş bir metal boru içinde ilerleyebildiğini zaten biliyoruz. Boru düzse, bir dürbün gibi içinden dışarıya *bakabiliriz*. Dolayısıyla, elektromanyetik dalgalar boru içinden geçebilmektedir. Ancak düşük frekans dalgalarının da (güç veya telefon) tek bir metal boru içinde iletilemediğini biliyoruz. Demek ki, elektromanyetik dalgalar bir tüp içinden eğer dalga boyları yeterince kısaysa geçebilirler. Bu yüzden şimdi, belirli bir ölçüdeki boru içinden geçebilen en uzun dalga boyuyla (veya en düşük frekansla) sınırlı durumu ele alacağız. Boru dalgaları taşımak için kullanıldığından, adına *dalga kılavuzu* denir.

Analiz etmesi en kolay o olduğu için, dikdörtgen bir boruyla başlayacağız. Önce matematiksel olarak ele alacağız ve daha sonra da geri dönüp, probleme çok daha temel bir yolla bakacağız. Daha temel yaklaşım, dikdörtgen bir kılavuza kolayca uygulanabilir. Herhangi bir şekle sahip genel bir kılavuz için temel olgular aynıdır, dolayısıyla matematiksel yaklaşım temelde daha sağlamdır.

Bu durumda problemimiz, bir dikdörtgen boru içinde ne tür dalgaların var olabileceğini bulmaktır. Önce gelin, uygun koordinatları seçelim. Şekil 24-3'te gösterildiği gibi, borunun uzunluğu boyunca z eksenini ve paralel kenarlarına da x ve y eksenlerini yerleştirelim.

Bir boru içinde ilerleyen ışık dalgalarının enine bir elektrik alanı olduğunu biliyoruz; dolayısıyla önce $\boldsymbol{E}$'nin z'ye dik olduğu çözümleri bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Örneğin, sadece y bileşenli, E_y, olanı. Kılavuz boyunca bu elektrik alanın bir miktar değişimi olacaktır. Aslında, y eksenine paralel kenarlarda sıfır olmalıdır; çünkü bir iletkendeki akımlar ve yükler kendilerini daima bir iletken yüzeyinde elektrik alanın teğet bileşeni olmayacak şekilde ayarlarlar. Dolayısıyla E_y, Şekil 24-4'te görüldüğü gibi x ile bir kemer şeklinde değişkenlik gösterecektir. Bir kovuk için bulduğumuz Bessel fonksiyonudur belki? Hayır, çünkü Bessel fonksiyonu silindirik geometrilerle ilgilidir. Dikdörtgen bir geometri için, dalgalar basit harmonik fonksiyonlardır; dolayısıyla sin $k_x x$ gibi bir şeyi denemeliyiz.

Kılavuz boyu ilerleyen dalgaları elde etmek istediğimizden, alanın, Şekil 24-5'teki gibi, z boyunca ilerlerken artı ve eksi değerler arasında değişkenlik göstermesini bekleriz. Bu salınımlar kılavuz boyunca bir v hızıyla ilerlerler. Belli bir ω frekansında salınımlar varsa, dalganın z'yle, $\cos(\omega t - k_z z)$'yle veya daha uygun bir matematiksel biçimde, örneğin $e^{i(\omega t - k_z z)}$'yle değişkenlik göstereceğini tahmin ederiz. Bu z bağımlılığı $v = \omega/k_z$ hızında ilerleyen bir dalgayı temsil eder (*Bkz.* I. Cilt, 29. Bölüm).

Dolayısıyla, kılavuz içindeki dalganın aşağıdaki matematiksel biçime sahip olacağını tahmin edebiliriz:

$$E_y = E_0\, e^{i(\omega t - k_z z)} \sin k_x x \tag{24.12}$$

Gelin, bu tahminimiz doğru alan denklemlerini sağlıyor mu diye bakalım. Öncelikle, elektrik alanın iletkenlerde teğet bileşenleri olmamalı. Alanımız bu gerekliliği karşılamakta; üst ve alt kenarlara diktir ve kenarlarda da sıfırdır. Ha, elbette bunun için k_x değerini öyle bir seçmeliyiz ki, sin $k_x x$'in bir yarım çevrimi kılavuzun genişliğine tam otursun. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır:

$$k_x a = \pi \tag{24.13}$$

Başka olasılıklar da vardır. Örneğin $k_x a = 2\pi$, 3π, ..., gibi veya genel olarak, n bir tamsayıyken

$$k_x a = n\pi \tag{24.14}$$

gibi. Bunlar, alanın birçok karmaşık düzenlemesini temsil eder; ancak şimdilik biz en basitini, a kılavuzun içindeki genişlikken, $k_x = \pi/a$ eşitliğini kullanalım.

Sonra, kılavuzun içindeki boş uzayda yük olmadığından, E'nin diverjansı orada sıfır olmalıdır. Bizim E'nin sadece y bileşeni vardır ve y'yle değişkenlik göstermez; dolayısıyla $\nabla \cdot E = 0$ eşitliğini elde ederiz.

Son olarak elektrik alanımız, kılavuzun içindeki bol uzayda Maxwell denklemlerinin geri kalanlarıyla uyumlu olmalıdır. Bu, dalga denklemini sağlaması gerektiğini söylemekle aynı şeydir:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad (24.15)$$

Bakalım tahminimiz, Denk. (24.12), işe yarayacak mı? E_y'nin x'e göre ikinci türevi $-k_x^2 E_y$'dir. y'ye göre ikinci türevi, hiçbir şey y'ye bağımlı olmadığından sıfırdır. z'ye göre ikinci türevi $-k_z^2 E_y$ ve t'ye göre ikinci türevi de $-\omega^2 E_y$'dir. Denklem (24.15)'e göre

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

E_y her yerde sıfır olmadığı sürece (ki bu hiç ilginç değildir), bu denklem aşağıdaki eşitlik sağlandığı sürece doğrudur:

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad (24.16)$$

k_x'i zaten düzeltmiştik; dolayısıyla bu denklem bize varsaydığımız dalgaların, Denk. (24.16)'yı sağlayacak şekilde k_z'nin ω frekansına bağlı olması halinde var olabileceğini söyler. Diğer bir deyişle,

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)} \qquad (24.17)$$

eşitliği doğruysa, tarif ettiğimiz dalgalar z yönünde, bu k_z değeriyle ilerlemektedir.

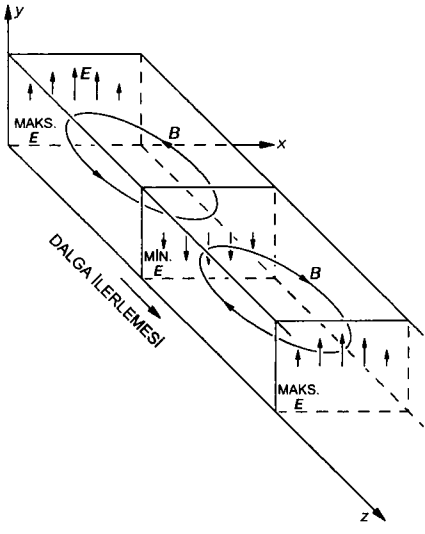
Denklem (24.17)'den elde ettiğimiz dalga sayısı k_z bize, belirli bir ω frekansı için dalga boğumlarının kılavuz boyunca ilerleme hızını verir. Evre hızı aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$v = \frac{\omega}{k_z} \qquad (24.18)$$

Hatırlarsanız, hareket eden bir dalganın λ dalga boyu $\lambda = 2\pi v/\omega$ eşitliğiyle hesaplanır. Diğer bir deyişle, λ_g z yönündeki salınımların dalga boyuysa –"kılavuz dalga boyu"– k_z de $2\pi/\lambda_g$'ye eşittir. Kılavuzdaki dalga boyu, aynı frekanstaki elektromanyetik dalgaların boş uzay dalga boyundan elbette farklıdır. $2\pi c/\omega$'ya eşit olan boş uzay dalga boyuna λ_0 dersek, Denk. (24.17)'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} \qquad (24.19)$$

Elektrik alanların yanı sıra, dalgayla beraber hareket eden manyetik alanlar da vardır; ancak onlar için matematiksel bir ifade çıkarmaya çalışmayacağız. $c^2\nabla \times B = \partial E/\partial t$ olduğundan, B çizgileri $\partial E/\partial t$'nin en büyük olduğu bölgelerde, E'nin minimum ve maksimumunun tam orta yerinde dönüp duracaktır. B ilmekleri, Şekil 24-6'da gösterildiği gibi E'nin tepe ve alçak noktaları arasında ve xz düzlemine paraleldirler.



Şekil 24-6 Bir dalga kılavuzu içindeki manyetik alan.

24-3 Kesme frekansı

Denklem (24.16)'yı k_z için çözerken, aslında iki kök olmalıdır: biri artı ve biri eksi. Aşağıdaki şekilde yazmalıyız:

$$k_z = \pm\sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)} \qquad (24.20)$$

İki işaret basitçe, kılavuz içinde ($-z$ yönünde) eksi bir evre hızıyla ilerleyen dalgalar olabileceği gibi, artı yönde ilerleyen dalgalar olabileceği anlamına gelir. Doğal olarak, dalgalar herhangi bir yönde ilerleyebilmelidir. Her iki dalga tipi de aynı anda var olabileceğinden, durağan dalga çözümleri olasıdır.

k_z için yazdığımız denkleme göre, frekans yükseldikçe k_z de yükselir ve dolayısıyla daha küçük dalga boylarında, büyük ω limitine gelene kadar, k ω/c'ye eşit olur ki bu da boş uzayda dalgalar için beklediğimiz değerdir. Borunun içinden "gördüğümüz" ışık hâlâ c hızında hareket etmektedir. Ancak düşük frekanslara doğru indiğimizde, garip bir şeyle karşılaşırız. Önce dalga boyu gitgide büyür; ancak ω çok küçük bir değer alırsa, Denk. (24.20)'deki karekökün içindeki nicelik aniden eksi olur. Bu, ω değeri $\pi c/a$'dan küçük olduğunda ya da λ_0 $2a$'dan büyük olduğunda gerçekleşir. Diğer bir deyişle, belli bir kritik frekans değeri $\omega_c = \pi c/a$'nın altına inildiğinde, dalga sayısı k_z (ve ayrıca λ_g) sanal olurlar ve elimizde bir çözüm kalmaz. Ya da kalır mı acaba? Kim, k_z'nin gerçek bir sayı olması gerektiğini söyledi ki? Ya sanal olarak doğduysa? Alan denklemlerimiz yine de sağlanır. Belki de, sanal bir k_z de bir dalgayı temsil eder.

ω'nun ω_c'den küçük olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$k_z = \pm ik' \tag{24.21}$$

k' pozitif gerçek bir sayıdır.

$$k = \sqrt{(\pi^2/a^2) - (\omega^2/c^2)} \tag{24.22}$$

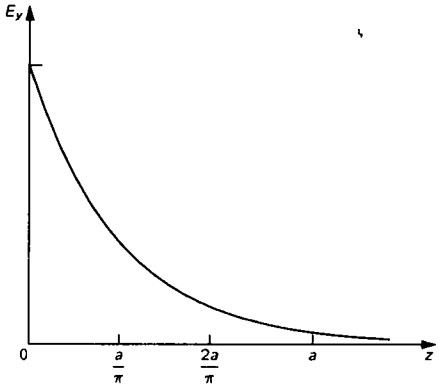
Şimdi E_y için Denk. (24.12)'ye geri dönecek olursak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E_y = E_0\, e^{i(\omega t \mp ik'z)} \sin k_x x \tag{24.23}$$

Bunu da aşağıdaki denklem olarak yazabiliriz:

$$E_y = E_0\, e^{\pm k'z}\, e^{i\omega t} \sin k_x x \tag{24.24}$$

Bu ifadeye göre, E alanı zamanla $e^{i\omega t}$'yle salınır, ancak z ile $e^{\pm k'z}$ şeklinde değişkenlik gösterir. Gerçek bir üssel şeklinde, z'yle düzgün bir şekilde azalır veya artar. Biz çıkarımımızda dalgaları başlatan kaynaklarla ilgilenmemiştik; fakat elbette kılavuzun içinde bir yerde bir kaynak olmalıdır. k' teriminin işareti, dalgaların kaynağından uzaklaştıkça alanların azalmasına yol açıyor olmalı.



Şekil 24-7 $\omega \ll \omega c$ için E_y'nin z'yle değişimi.

$\omega_c = \pi c/a$'nın altındaki frekanslar için, dalgalar kılavuz boyunca *ilerlemez*; salınım yapan alanlar kılavuza sadece $1/k'$ derecesinden bir mesafeyle girerler. Bu yüzden, ω_c frekansına kılavuzun "kesme frekansı" denir. Denklem (24.22)'ye baktığımızda, ω_c'nin birazcık altındaki frekanslar için, k' sayısı küçük bir değer alır ve alanlar kılavuz boyunca uzak mesafelere ilerleyebilirler. Ancak ω ω_c'den çok ufaksa, k' üssel katsayısı π/a'ya eşit olur ve alan, Şekil 24-7'de gösterildiği gibi, çok hızlı bir şekilde söner. Alan, a/π mesafesinde $1/e$'yle ya da kılavuz genişliğinin üçte biri kadar mesafede azalır. Alanlar, kaynaktan çok az uzağa gidebilir.

Kılavuzlu dalgalara dair analizimin ilginç bir özeliğini vurgulamak isteriz: sanal dalga sayısı k_z'nin ortaya çıkışı. Fizikte, normal şartlarda, bir denklemi çözdüğünüzde ve sanal bir sayı elde ettiğinizde, bunun fiziksel bir anlamı yoktur. Bununla birlikte, *dalgalar* için, sanal bir dalganın anlamı *vardır*. Dalga denklemi yine sağlanır; sadece çözüm bize, ilerleyen dalgalar yerine, üssel olarak azalan dalgalar verir. Dolayısıyla, belli bir frekansta k'nın sanal olduğu herhangi bir dalga probleminde, dalganın biçiminin değiştiği anlamına gelir: Sinüs dalgası bir üssele dönüşür.

24-4 Kılavuzlu dalgaların hızı

Yukarıda kullandığımız dalga hızı, dalganın bir boğumunun hızı olan evre hızıdır ve frekansın bir fonksiyonudur. Denklem (24.17) ve (24.18)'i birleştirir-

sek, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$v_{\text{evre}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}} \tag{24.25}$$

Kesme frekansının üstündeki –yürüyen dalgaların olduğu– frekanslar için ω_c/ω birden küçüktür, v_{evre} gerçektir ve ışık hızından ***büyüktür***. I. Cilt, 48. Bölümde gördüğümüz üzere, evre hızlarının ışıktan hızlı olması mümkündür; çünkü hareket eden sadece dalganın boğumudur, enerji veya bilgi değil. *Sinyallerin* ne kadar hızlı hareket edebileceğini bilmek için, bir veya biraz farklı frekanslara sahip daha çok dalganın meydana getirdiği tek frekanslı bir dalganın girişiminin meydana getirdiği kiplemelerin veya atımların hızını hesaplamak zorundayız (*Bkz.* I. Cilt, 48. Bölüm). Bu tür dalgalar grubunun zarf hızına grup hızı dedik; ω/k değil fakat $d\omega/dk$'dır.

$$v_{\text{grup}} = \frac{d\omega}{dk} \tag{24.26}$$

Denklem (24.17)'nin ω'ye göre türevini alıp, $d\omega/dk$'yı elde etmek için tersine çevirirsek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$v_{\text{grup}} = c\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2} \tag{24.27}$$

Bu hız, ışık hızından küçüktür.

v_{evre} ve v_{grup}'un geometrik ortalaması c, yani ışık hızıdır:

$$v_{\text{evre}}v_{\text{grup}} = c^2 \tag{24.28}$$

Bu ilginçtir, benzeri bir ilişkiyi kuantum mekaniğinde görmüştük. Herhangi – hatta göreli– bir hıza sahip parçacık için, p momentumu ile U enerjisi arasındaki ilişki aşağıdaki denklem olarak yazılır:

$$U = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{24.29}$$

Kuantum mekaniğinde enerji $\hbar\omega$'dur ve momentum da $\hbar/\lambda$'dır ve o da $\hbar k$'ya eşittir; diğer bir deyişle Denklem (24.29)'u aşağıdaki şekilde:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \tag{24.30}$$

ya da şöyle:

$$k = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (m^2c^2/\hbar^2)} \tag{24.31}$$

yazabiliriz ki bu da Denklem (24.17')ye çok benzer... İlginç!

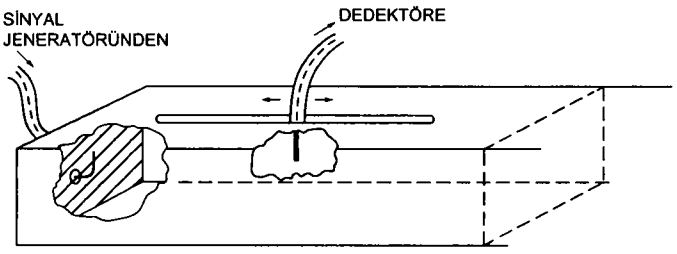
Dalgaların grup hızı aynı zamanda enerjinin kılavuz boyunca iletim hızıdır. Kılavuz boyu enerji akışını bulmak istiyorsak, enerji yoğunluğu çarpı grup hızından elde edebiliriz. Elektrik alanın ortalama karekökü E_0 ise, elektrik enerjinin ortalama yoğunluğu $\epsilon_0E_0^2/2$ olur. Manyetik alanla ilişkili ayrıca bir miktar enerji vardır. Bunu burada ispat etmeyeceğiz, ancak herhangi bir oyuk veya kılavuzda manyetik ve elektrik enerjileri eşittir, yani toplam elektromanyetik enerji yoğunluğu $\epsilon_0E_0^2$ olur.Bu durumda kılavuzda iletilen dU/dt gücü için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0E_0^2abv_{\text{grup}} \tag{24.32}$$

(Daha sonra bir başkasını, enerji akışını elde etmenin daha genel yolunu göreceğiz.)

24-5 Kılavuzlu dalgaları gözlemlemek

Enerji bir dalga kılavuzuna bir çeşit "anten" yardımıyla bağlaşım yapar. Örneğin, küçük bir dik tel veya "çıkıntı" iş görür. Kılavuzlanmış dalgaların varlığı, küçük bir ilmek veya bir tel parçası olan alıcı bir "anten" yardımıyla elektromanyetik enerjinin bir kısmını toplayarak gözlemlenebilir. Şekil 24-8'de kılavuz üzerindeki kesitler sayesinde bir sürücü çıkıntı ve algılayıcı "sonda" görmektesiniz. Eşeksenli bir kablo sayesinde sürücü çıkıntıyı bir sinyal jeneratörüne ve benzer şekilde bir kabloyla algılayıcı sondayı da bir dedektöre bağlayabiliriz.



Şekil 24-8 Sürücü bir çıkıntı ve bir algılayıcı sondalı dalga kılavuzu.

Algılayıcı sondayı genelde, Şekil 24-8'de görüldüğü gibi, kılavuz üzerindeki ince uzun bir yarıktan sokmak uygundur. Böylece sondayı kılavuz boyunca farklı konumlarda alanları örneklemek için ileri geri hareket ettirebiliriz.

Sinyal jeneratörünün frekansı ω kesme frekansı ω_c'den büyük olacak şekilde ayarlandıysa, sürücü çıkıntıdan kılavuza doğru yayılan dalgalar gözlemlenir. Kılavuz sonsuz uzunluktaysa, bunlar yayılan yegâne dalgalar olacaktır. Kılavuzun sonsuz uzunlukta olması, dikkatlice tasarlanmış bir soğurucu sayesinde en uzaktaki uçtan hiç geri dalga yansımayacak şekilde kılavuzu sonlandırarak ayarlanabilir. Daha sonra algılayıcı, dedektör algılayıcının yakınındaki alanların zaman ortalamasını ölçtüğünden, kılavuz boyundaki konumundan bağımsız olarak bir sinyal alır; çıktısı da iletilen güçle orantılı olacaktır.

Kılavuzun dip ucunu yansıyacak bir dalga üretecek şekilde sonlandırırsak – uç bir önek olarak, metal bir levhayla kapatırsak– ileri giden ilk dalganın yanı sıra bir de yansımış dalga gözlemlenir. Bu iki dalga girişim yapar ve I. Cilt, 49. Bölümde gördüğümüz, bir ip üzerinde duran dalgalara benzer bir duran dalga meydana getirir. Daha sonra, algılayıcı sonda hat boyunca ilerletildiğinde dedektör ibresi düzenli olarak yükselecek ve düşecektir. Dedektör ibresinin bu hareketleri, duran dalganın her bir döngüsünde alanların maksimumunu ve her bir düğümde de minimumunu gösterir. İki ardışık düğüm (veya iki döngü) arasındaki mesafe $\lambda_g/2$'dir. Bu bize, kılavuz dalga boyunu ölçmenin kullanışlı bir yolunu sunar. Frekansı şimdi ω_c'ye yakınlaştırırsak, düğümler arasındaki mesafe artar ve bu da Denklem (24.19) tarafından öngörüldüğü şekilde kılavuz dalga boyunun arttığını gösterir.

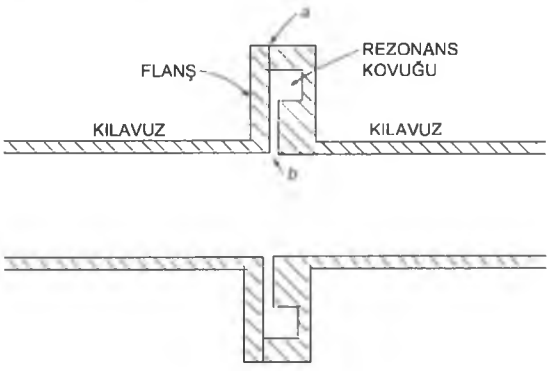
Şimdi de sinyal jeneratörünün ω_c frekansının biraz altında bir frekansa ayarlandığını düşünelim. Bu durumda dedektör çıktısı, algılayıcı sonda kılavuz boyunca hareket ettirilirken düşecektir. Frekans daha da düşüğe ayarlanırsa, alan şiddeti Şekil 24-7'yi takip ederek hızla düşer ve dalgaların ilerlemediğini gösterir.

24-6 Dalga kılavuzu tesisatçılığı

Dalga kılavuzlarının önemli bir pratik kullanımı yüksek frekanslı gücün, örneğin yüksek frekanslı salınıcının bağlaşmasında veya bir radar setinin çıktı yükselticisinin bir antene bağlanmasında aktarımıdır. Aslında antenin kendisi genelde, kılavuz boyunca gelen dalgaları yaymak için, ucu bir "boynuz" olacak şekilde genişletilmiş bir dalga kılavuzuyla beslenen parabolik bir yansıtıcıdan oluşur. Her ne kadar yüksek frekanslar bir eşeksenli kabloyla iletebilse de, büyük miktarlarda gücü iletmek için bir dalga kılavuzu daha iyidir. Birincisi, bir hat boyunca iletebilecek en fazla güç, iletkenler arasındaki yalıtımın (katı veya gaz) kesilmesiyle sınırlıdır. Belirli bir miktar güç için, bir kılavuz içindeki alan şiddetleri genelde eşeksenli kablodakinden daha düşüktür; böylece kesilime uğramadan daha büyük güçler iletilebilir. İkincisi, eşeksenli bir kablodaki güç kayıpları, genelde, dalga kılavuzundakinden daha büyüktür. Eşeksenli bir kabloda merkez iletkeni desteklemek için bir yalıtım malzemesi olmalıdır ve bu malzemede –özellikle yüksek frekanslarda– enerji kaybı vardır. Ayrıca, merkez iletkendeki akım yoğunlukları çok yüksektir ve kayıplar da akım yoğunluğunun *karesiyle* orantılı olduğundan, kılavuzun duvarlarındaki daha düşük akımlar daha az enerji kaybına yol açar. Kayıpları en azda tutmak için, kılavuzun iç yüzeyleri sıklıkla, yüksek iletkenliğe sahip bir malzemeyle, örneğin gümüş, kaplanır.



Şekil 24-9 Flanşlarla bağlanmış bir dalga kılavuzunun bölümleri.



Şekil 24-10 Bir dalga kılavuzunun iki bölümü arasındaki düşük kayıplı bağlantı.

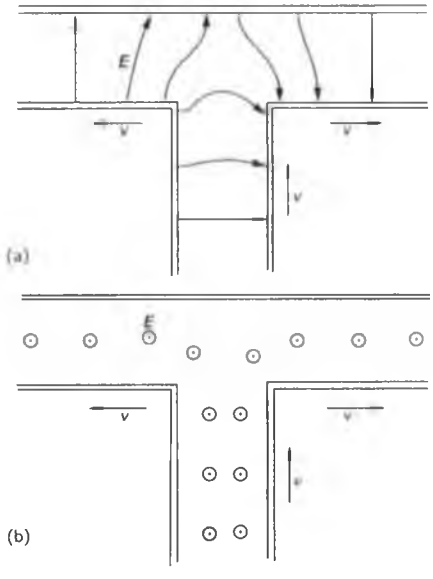
Bir "devreyi" dalga kılavuzuyla bağlama problemi, karşılık gelen düşük frekanslardaki devre probleminden oldukça farklıdır ve genelde mikrodalga "tesisatçılığı" olarak adlandırılır. Bu amaç doğrultusunda birçok özel araç geliştirilmiştir. Örneğin, dalga kılavuzunun iki bölümü birbirlerine genelde, Şekil 24-9'da görüldüğü gibi, flanşlarla bağlanır. Ancak, bu tür bağlantılar ciddi enerji kayıplarıma yol açabilir; çünkü yüzey akımları göreceli olarak yüksek dirence sahip olabilecek ek yerinden geçmelidir. Bu tür kayıpları engellemenin bir yolu flanşları Şekil 24-10'un enine kesitinde gösterildiği gibi yapmaktır. Kılavuzun bitişik bölümleri arasında küçük bir boşluk bırakılır ve flanşların birinin yüzünde, Şekil 23-16 (c)'de gösterilen küçük kovuk tipinde bir oyuk açılır. Boyutları, bu kovuk kullanılan frekansta rezonansta olacak şekilde seçilir. Bu rezonans kovuğu akımlara karşı yüksek bir "empedansı" temsil eder; dolayısıyla metal birleşim yerlerinden (Şekil 24-10'daki *a*) göreceli olarak küçük akımlar akar. Yüksek kılavuz akımları, enerjinin yayılımının az olduğu kovuğun (Şekildeki *b*) "sığasını" basitçe yükler ve boşaltırlar.



Şekil 24-11 Bir "T" dalga kılavuzu. ("T" kullanılmıyorken temiz durması için flanşların plastik uç kapakları vardır.)

Yansıyan dalgalara yol açmayacak şekilde bir dalga kılavuzunu sonlandırmak istediğinizi varsayalım. Bu durumda kılavuzun sonuna, kılavuzun sonsuz uzunluğunu taklit edecek bir şey koymalısınız. Bir iletim hattındaki karakteristik empedansa benzer şekilde, kılavuz için bir "sonlandırma"ya, varan dalgaları yansıtmadan soğuracak bir şeye ihtiyacınız vardır. Böylece kılavuz sanki sonsuza kadar gidiyormuş gibi davranacaktır. Bu tür sonlandırmalar, dalga enerjisini soğurarak neredeyse hiç yansıyan dalga oluşturmayacak şekilde dikkatlice tasarlanmış direnç malzemesi takozlarını kılavuzun içine yerleştirerek yapılır.

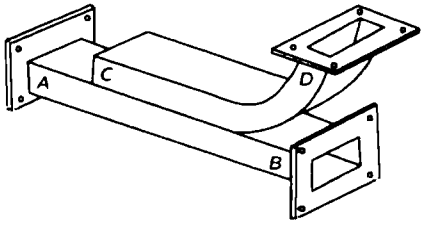
Üç şeyi –örneğin, bir kaynağı iki farklı antene– bağlamak isterseniz, Şekil 24-11'de gösterildiği gibi bir "T" kullanabilirsiniz. "T"'nin orta bölmesine beslenen güç ikiye ayrılacak ve iki kol boyunca dağılacaktır (ve ayrıca yansıyan dalgalar da olabilir). Şekil 24-12'deki çizimlerden, besleme bölümünün sonuna geldiklerinde alanların yayıldığını ve iki kol boyunca ilerleyen dalgalar başlatan elektrik alanlar meydana getirdiğini niteliksel olarak görebilirsiniz. Kılavuzdaki elektrik alanların "T"'nin "üst"üne paralel veya dik olup olmadığına bağlı olarak, kavşaktaki alanlar kabaca Şekil 24-12'deki (a) ve (b) kısımlarındaki gibi gözükür.



Şekil 24-12 İki olası alan yönelimi için bir "T" dalga kılavuzundaki elektrik alanlar.

Son olarak, "tek yönlü bağlayıcı" olarak adlandırılan ve bir dizi dalga kılavuzunu karmaşık şekilde bağladıktan sonra ne olduğunu anlayabilmek için faydalı bir cihazı tanıtmak isteriz. Kılavuzun belirli bir bölümünde, güçlü bir yansıyan dalga olup olmadığını merak ettiğinizden dolayı örneğin, dalgaların ne yönde gittiğini bilmek istediğinizi varsayalım. Tek yönlü bağlayıcı, eğer bir yönde giden dalga var ve fakat diğer yönde giden hiç dalga yoksa, kılavuzun gücünün küçük bir kısmını çeker alır. Bağlayıcının çıkışını bir dedektöre bağlayarak, kılavuzdaki "tek yönlü" gücü ölçebilirsiniz.

Şekil 24-13, bir tek yönlü bağlayıcı çizimidir. *AB* dalga kılavuzunun bir parçasının bir yüzü boyunca, *CD* dalga kılavuzunun bir başka parçası lehimlenmiştir. *CD* kılavuzuna dışa doğru eğim verilmiştir ki bağlantı flanşları için yer açılsın. Kılavuzlar birbirine lehimlenmeden önce her bir kılavuzda (birbirlerine denk gelecek şekilde) delikler delinmiştir, böylece *AB* ana kılavuzundaki alanların bir kısmı *CD* ikinci kılavuzuna bağlanabilir. Her bir delik, ikinci kılavuzda dalga üreten bir küçük anten gibi davranır. Tek bir delik olsaydı, dalgalar her iki yönde de gönderilirdi ve ana kılavuzda dalga ne yönde giderse gitsin fark etmezdi. Ancak, kılavuz dalga boyunun dörtte biri kadar mesafeyle birbirinden ayrılmış *iki* delik olduğunda birbirleriyle 90° evre dışı iki kaynak oluştururlar. I. Cilt, 29. Bölümde birbirlerinden $\lambda/4$ kadar uzaklıkta ve 90° evre dışı iki antenden kaynaklanan dalgaların girişimini ele aldığımızı hatırlıyor musunuz? Dalgaların bir yönde toplandığını ve diğer yönde birbirlerinden çıkarıldığını bulmuştuk. Aynı şey burada da olacak. *CD* kılavuzunda meydana getirilen dalga, *AB* kılavuzundaki dalgayla aynı yönde ilerleyecek.

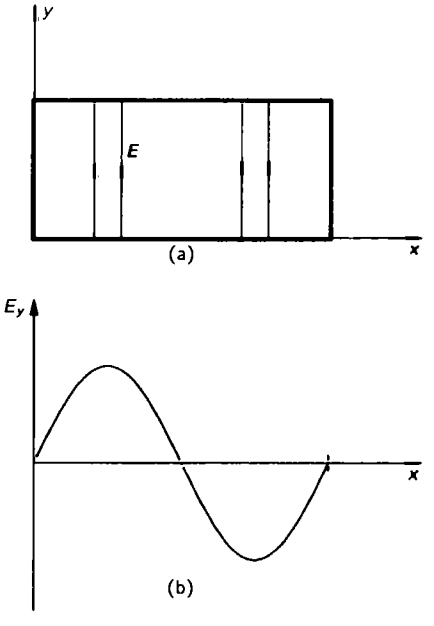


Şekil 24-13 Bir tek yönlü bağlayıcı.

Ana kılavuzdaki dalga *A*'dan *B*'ye doğru ilerliyorsa, ikinci kılavuzun *D* çıkışında bir dalga gözlemlenir. Ana kılavuzdaki dalga *B*'den *A*'ya doğru ilerliyorsa, ikinci kılavuzun *C* çıkışında bir dalga gözlemlenir. Bu sonda bir adet sonlandırıcı vardır, böylece dalga sönümlenir ve bağlayıcının çıkışında dalga gözlemlenmez.

24-7 Dalga kılavuzu kipleri

Analiz etmeyi seçtiğimiz dalga, alan denklemlerinin özel bir çözümüdür. Daha birçok çeşidi vardır. Her bir çözüme dalga kılavuzu "kipi" denir. Örneğin, alanımızın x bağımlılığı bir sinüs dalgası döngüsünün yarısı kadardı sadece. Tam döngü için de aynı derecede güzel bir çözüm vardır; bu durumda E_y'nin x'le değişimi Şekil 24-14'te gösterilmiştir. Bu tür bir kip için k_x iki kat büyüktür, dolayısıyla kesme frekansı da daha yüksektir. Ayrıca, çalıştığımız dalgadaki E'nin sadece y bileşeni vardı, ancak daha karmaşık elektrik alanlarsa sahip başka kipler de vardır. Elektrik alanın sadece x ve y bileşenleri varsa –böylece toplam elektrik alan z yönüne daima dik açılardadır; bu kipe "enlemesine elektrik" (ya da TE) kipi denir. Bu tür kiplerin manyetik alanının daima bir z bileşeni olur. Sonradan ortaya çıktı ki, E'nin z yönünde (ilerleme yönünde) bir bileşeni varsa, o zaman manyetik alanın daima enine bileşenleri olur. Bu yüzden böyle alanlara enine manyetik (TM) kipler denir. Dikdörtgen bir kılavuz için, bütün diğer kipler tarif ettiğimiz basit TE kipinden daha yüksek kesme frekansına sahiptir. Bu yüzden, bu en düşük kipin kesme frekansının biraz üstünde fakat diğer kiplerin kesme frekanslarının altında bir kılavuz kullanarak sadece bir kipin ilerlemesini sağlamak mümkün ve hatta olağandır. Diğer türlü, davranış çok karmaşık ve kontrol etmesi zor hale gelir.



Şekil 24-14 E_y'nin x'le bir başka olası değişimi.

24-8 Kılavuzlu dalgalara bir başka bakış

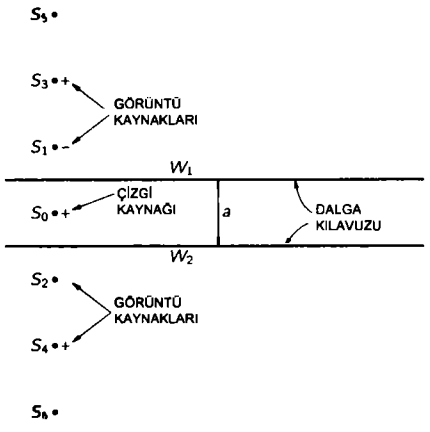
Şimdi size, bir dalga kılavuzunun neden kesme frekansı ω_c altındaki frekanslarda alanları hızla söndürdüğünü anlamanız için bir başka yol göstermek istiyoruz. Böylece, düşük ve yüksek frekanslar arasında davranışın neden bu kadar sert bir şekilde değiştiğine dair daha "fiziksel" bir fikriniz olacak. Bunu dikdörtgen kılavuz için, alanları kılavuzun duvarlarındaki yansımalar –veya görüntüler– şeklinde düşünerek yapabiliriz. Ancak bu yaklaşım sadece dikdörtgen kılavuzlar için işe yarar; bu yüzden, ilkede her şekilde kılavuz için işe yarayan matematiksel analizle işe başladık.

Tarif ettiğimiz kip için dik boyutun (y'de) herhangi bir etkisi yoktu, bu yüzden kılavuzun üst ve altını ihmal edebilir ve kılavuzun dik yönde sonsuza uzandığını varsayabiliriz. Kılavuzu, aralarında a kadar mesafe olan iki dik levha şeklinde düşünebiliriz.

Alanların kaynağı, kılavuzun ortasına yerleştirilmiş ve ω frekansında salınan bir akım taşıyan dik bir tel olsun. Kılavuzun duvarları olmasaydı, böyle bir tel silindirik dalgalar yayardı.

Kılavuz duvarlarının mükemmel iletkenler olduğunu düşünelim. Bu durumda, aynı elektrostatikteki gibi, yüzey koşulları, telin alanına bir veya daha fazla uygun sanal tellerin alanını eklersek doğru olur. Görüntü fikri elektrostatik için faydalı olduğu gibi, gecikmeleri hesaba dahil ettiğimiz sürece elbette, elektrodinamik için de faydalı olur. Bunun doğru olduğunu, bir ışık kaynağının görüntüsünü meydana getiren bir aynayı sıkça gördüğümüz için biliyoruz ve ayna, optik frekanslardaki elektromanyetik dalgalar için "mükemmel" bir iletkendir.

Şimdi, Şekil 24-15'teki gibi yatay bir kesit alalım. W_1 ve W_2 kılavuz duvarları ve S_0 da kaynak telidir. Teldeki akımın yönünü artı alalım. Eğer sadece bir duvar, örneğin W_1, olsaydı S_1'le işaretlenmiş konuma (ters kutuplu) bir görüntü kaynağı yerleştirerek onu kaldırabilirdik. Ancak her iki duvar da yerinde olduğundan, S_0'ın da W_2 duvarında bir görüntüsü olur. Bu görüntüye S_2 diyelim. Bu kaynağın da W_1 duvarında bir görüntüsü olur, ona da S_3 diyelim. Şimdi, hem S_1 hem de S_3'ün W_2 duvarında S_4 ve S_6 konumlarında görüntüleri olur ve bu böyle devam eder gider. Tam ortalarında kaynak olan iki düzlem iletkenimiz için alanlar, birbirlerinden a mesafesiyle ayrılmış sonsuz sayıda çizgi kaynaktan üretilmiş alanlarla aynıdır. (Aslında, iki paralel aynanın tam ortasına bir tel yerleştirdiğinizde *gördüğünüz* şeyle aynı şeydir.) Duvarlarda alanların sıfır olabilmesi için, görüntülerdeki akımların kutupluluğu bir görüntüden diğerine değişmelidir. Diğer bir deyişle, 180° evre dışı salınırlar. Bu durumda dalga kılavuzu, bu tür sonsuz çizgi kaynaklar kümesinin alanlarının üst üste binmiş halidir.



Şekil 24-15 W_1 ile W_2 iletken düzlem duvarları arasındaki S_0 çizgi kaynağı. Duvarlar, sonsuz bir dizi görüntü kaynağıyla değiştirilebilirler.

Kaynaklara yakınsak, alanın statik alanlara benzediğini biliriz. Bölüm 7-5'te çizgi kaynaklardan oluşan bir ağın statik alanını ele almış ve ağdan uzaklaştıkça üssel olarak azalan terimler haricinde, yüklü bir levhanın alanıyla aynı olduğunu bulmuştuk. Burada ortalama kaynak şiddeti sıfırdır; çünkü işaret bir kaynaktan diğerine değişmektedir. Meydana gelen alanlar, mesafeyle üssel olarak azalmalıdır. Kaynağa yakınken, esas olarak en yakın kaynağın alanını görürüz; uzak mesafelerde birçok kaynak alana katkıda bulunur ve ortalama etkileri sıfırdır. Dolayısıyla şimdi, neden dalga kılavuzunun kesme frekansının altındayken üssel olarak azalan bir alan meydana getirdiğini görüyoruz. Statik yaklaşım, özellikle düşük frekanslarda iyidir ve alanların mesafeyle hızla azalmasını öngörür.

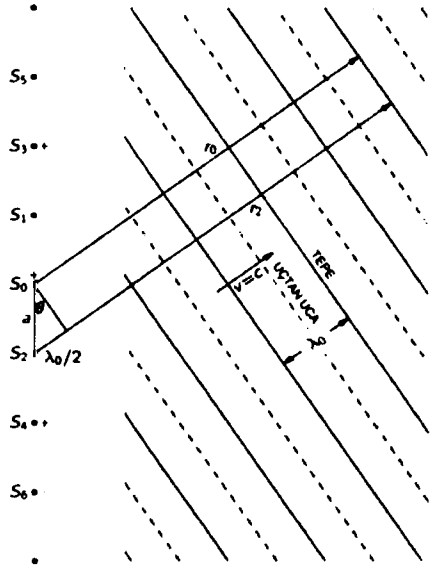
Şimdi tam tersi bir soruyla karşı karşıyayız: Dalgalar neden ilerler ki? İşte bu gizemli kısımdır! Bunun nedeni, yüksek frekanslarda alanların gecikmesinin evreye ilave değişiklikler getirmesi ve bu değişikliklerin evre dışı kaynakların alanlarının, birbirlerini sıfırlamak yerine, üst üste binmesini sağlayabilmesidir. Aslında, sadece bu problem için I. Cilt, 29. Bölümde bir antenler sistemi veya bir optik ızgaradan meydana gelen ağları incelemiştik. O zaman, birçok radyo antenini uygun şekilde ayarlarsak, bir yönde güçlü bir sinyali olan ama başka yönde hiç sinyal vermeyen bir girişim şekli meydana getirilebileceğini görmüştük.

Şekil 24-15'e geri döndüğümüzü ve uzak mesafedeki görüntü kaynaklar dizisinden gelen alanlara baktığımızı düşünelim. Alanlar sadece, frekansa dayalı belli yönlerde –bütün kaynaklardan gelen alanların aynı evrede toplandığı yönlerde– şiddetli olacaktır. Kaynaklardan oldukça uzak mesafelerde, alan bu bahsettiğimiz özel yönlerde düzlem dalgaları olarak ilerler. Böyle bir dalgayı Şekil 24-16'da çizdik. Düz çizgiler dalga tepelerini ve kesik çizgiler de çukurları temsil etmektedir. Dalga yönü, iki komşu kaynağın gecikmeleri ile dalga çukuru arasındaki farkın, salınım periyodunun yarısına eşit olduğu yön olacaktır. Diğer bir deyişle, şekildeki r_2 ile r_0 arasındaki fark, boş uzaydaki dalga boyunun yarısına eşittir:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}$$

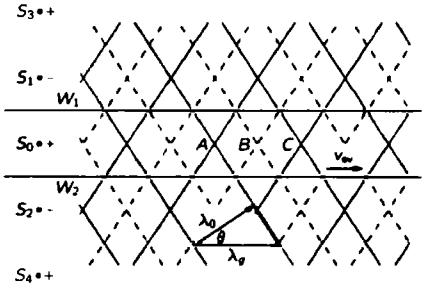
θ açısı da aşağıdaki gibi bulunur:

$$\sin\theta = \frac{\lambda_0}{2a} \qquad (24.33)$$



Şekil 24-16 Bir dizi çizgi kaynaktan yayılan eş evreli dalgalar kümesi.

Elbette, kaynaklar ağına göre simetrik bir açıda aşağı doğru hareket eden bir başka dalgalar kümesi daha vardır. Tüm dalga kılavuzu ağı (kaynağa çok



Şekil 24-17 Dalga kılavuzu alanı, iki set düzlem dalgasının üst üste binmesi olarak görülebilir.

yakın değilken) bu iki dalga kümesinin, Şekil 24-17'deki gibi, üst üste binmesidir. Gerçek alanlar da aynı bunlar gibidirler, elbette sadece dalga kılavuzunun iki duvarı arasındayken.

A ve *C* gibi noktalarda, iki dalga deseninin tepeleri üst üste gelir ve alan maksimum değeri alır; *B* gibi noktalardaysa her iki dalga da tepe eksi değerdedir ve alan da minimum (en büyük negatif) değeri alır. Zaman geçtikçe, kılavuzdaki alan kılavuz boyunca λ_g, *A* ve *C* arasındaki uzaklık, dalga boyuyla ilerliyor gibi gözükür. O uzaklık ile θ arasındaki ilişki aşağıdaki denklemdir:

$$\cos\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \tag{24.34}$$

θ için Denklem (24.33)'ü kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz ki bu da Denklem (24.19)'da bulduğumuzla aynıdır:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}} \tag{24.35}$$

Şimdi neden sadece kesme frekansı ω_0'nun üstünde dalga ilerlemesi olduğunu anlıyoruz. Boş uzay dalga boyu $2a$'dan büyükse, Şekil 24-16'da gösterilen dalgaların ortaya çıkabileceği bir açı yoktur. Gerekli yapıcı girişim sadece λ_0, $2a$'nın altına düştüğüde veya ω $\omega_0 = \pi c/a$ değerinin üstüne çıktığında ortaya çıkar.

Frekans yeterince yüksekse, alanların ortaya çıkabileceği iki veya daha fazla yön olasıdır. Bizim durumumuzda bu, $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$ koşulu sağlanırsa olur. Ancak genelde, bu aynı zamanda $\lambda_0 < a$ koşulunda da olabilir. Bu ilave dalgalar, bahsettiğimiz daha yüksek kılavuz kiplerine karşılık gelir.

Analimiz, neden kılavuzlu dalgaların evre hızının c'den büyük olduğunu ve neden bu hızın ω'ya eşit olduğunu da ortaya koymuştur. ω değiştikçe, Şekil 24-16'nın serbest dalgalarının açısı ve bu yüzden kılavuz boyunca hız da değişir.

Her ne kadar, kılavuzlu dalgayı sonsuz bir görüntü kaynaklar dizisinin alanlarının üst üste binmesi olarak tarif ettiysek de iki küme boş uzay dalgasının iki mükemmel ayna arasında sürekli ileri geri yansıdığını –yansımanın, evrenin tersine dönmesi olduğunu hatırlayarak– hayal ederek de ulaşabileceğimizi görebilirsiniz. Bu iki yansıyan dalgalar kümesi, Denklem (24.33)'teki θ açısıyla gitmedikleri sürece birbirlerini söndürürlerdi. Görüyorsunuz, aynı şeye bakmanın birçok yolu var.

25

GÖRELİ GÖSTERİMDE ELEKTRODİNAMİK

25-1 Dört-vektörler
25-2 Skaler çarpım
25-3 Dört boyutlu gradyan
25-4 Dört boyutlu gösterimde elektrodinamik
25-5 Hareket eden bir yükün dört-potansiyeli
25-6 Elektrodinamik denklemlerinin değişmezliği

25-1 Dört-vektörler

Şimdi özel görelilik kuramının elektrodinamiğe uygulanmasını tartışalım. I. Ciltte, 15 ile 17. Bölüm arasında özel görelilik kuramını çalıştığımızdan dolayı, burada sadece temel fikirleri hızlıca gözden geçireceğiz.

Deneysel olarak bulunduğu üzere, düzgün bir hızda ilerlersek fizik kanunları değişmez. Dışarısına bakmadığınız veya dışardaki dünyaya dair bir gözlemde bulunmadığınız sürece, düzgün hızda ve düz bir çizgide ilerleyen bir uzay gemisinin içinde olup olmadığınızı söyleyemezsiniz. Kayda geçirdiğimiz herhangi bir doğru fizik yasası, doğanın bu gerçeğini mutlaka içerecek şekilde ayarlanmalıdır.

Elimizde S ve S' diye adlandıracağımız iki koordinat sistemi olsun. S', S''e göre v hızıyla x yönünde ilerlerken, bu iki koordinat sisteminin uzay ve zamanı arasındaki ilişki *Lorentz dönüşümüyle* bulunur:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad y' = y$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad z' = z \tag{25.1}$$

Bu bölümde: $c = 1$

Fizik yasaları öyle olmalıdır ki, Lorentz dönüşümünden sonra bile yasaların yeni biçimi, tıpkı eski biçimleri gibi gözükmelidir. Bu aynı, fizik yasalarının koordinat sisteminin *yönelimine* dayanmama ilkesi gibidir. I. Cilt, 11. Bölümde, fiziğin dönmelere göre değişmezliğini matematiksel olarak ifade etmenin yolunun, denklemlerimizi *vektörler* şeklinde yazmak olduğunu görmüştük.

Gözden Geçirme; Cilt I: Bölüm 15, *Özel Görelilik Kuramı,*
Bölüm 49, *Göreli Enerji ve Momentum*
Bölüm 17, *Uzay-Zaman*
Cilt II: Bölüm 13, *Manyetostatik*

Örneğin, aşağıdaki gibi iki vektörümüz varsa

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

ve bunların

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + B_yB_y + B_zB_z$$

şeklindeki birleşiminin, döndürülmüş bir koordinat sisteminde değişmediğini bulmuştuk. Diğer bir deyişle biliyoruz ki, bir denklemin iki tarafında $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ gibi bir skaler çarpım varsa, denklem bütün döndürülmüş koordinat sistemlerinde bire bir aynı biçime sahip olacaktır. Ayrıca, bir skaler fonksiyona uygulandığında, aynı bir vektör gibi dönüşen üç nicelik ortaya çıkaran (*Bkz.* 2. Bölüm) aşağıdaki işlemciyi keşfetmiştik:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Bu işlemciyle birlikte gradyanı ve diğer vektörlerle birleşim halinde diverjansı ve Laplace'ı tanımladık. Son olarak, iki vektörün bileşenlerinin çiftler halinde belli çarpımlarının toplamını aldığımızda, yeni bir vektör gibi davranan üç yeni nicelik elde edebileceğimizi keşfetmiştik. Vektörel çarpımı ∇ işlemcimizle kullanarak, bir vektörün bükümünü tanımlamıştık.

Vektör analizinde yaptıklarımıza atıfta bulunacağımızdan, geçmişte kullandığımız üç boyuttaki önemli vektör işlemlerinin bir özetini Tablo 25-1'de gösterdik. Burada amaç, fizik denklemlerinin her iki tarafını da döndürme işlemlerinin sonucunda aynı şekilde dönüşmelerini sağlayacak şekilde yazabilmektir. Bir taraf vektörse, diğer taraf da vektör olmalıdır ve böylece koordinat sistemimizi döndürürsek her iki taraf da aynı şekilde değişebilir. Benzer şekilde, bir

taraf skalerse, diğer taraf da skaler olmalıdır ki böylece koordinatları döndürdüğümüzde iki taraf da değişmez ve bu böyle devam eder.

Özel görelilik durumunda, uzay ve zaman ayrılmaz biçimde birbirleriyle iç içe geçmişlerdir ve benzetmelerimizi dört boyu için yapmalıyız. Denklemlerimizin sadece döndürmeler için değil, fakat *herhangi* bir eylemsizlik çerçevesinde de aynı kalmasını isteriz. Bu da, denklemlerimizin Lorentz dönüşüm denklemleri (25.1) altında da değişmez olması gerektiği anlamına gelir. Bu bölümün amacı bunun nasıl yapılabileceğini size göstermektir. Ancak başlamadan önce, işimizi kolaylaştıracak (ve bir miktar kafa karışıklığını engelleyecek) bir şey yapmak istiyoruz. Zaman ve uzunluk birimlerimizi öyle bir seçeceğiz ki, ışık hızı c,1'e eşit olsun. Bunu, zaman birimimizi *ışığın bir metre gitmek için geçirdiği süreye* (yaklaşık 3×10^{-9} sn) eşitlemek olarak düşünebilirsiniz. Bu zaman birimine "bir metre" bile diyebiliriz. Bu birimi kullandığımızda, denklemlerimiz uzay-zaman simetrisini daha açık şekilde gösterecektir. Ayrıca, görelilik denklemlerimizde bütün c'ler ortadan kalkacaktır. (Bu sizi rahatsız ediyorsa, herhangi bir denklemde her bir t yerine ct koyabilir veya genel olarak, denklemlerin boyutlarının doğru olmasını sağlayacak şekilde nereye gerekiyorsa c koyabilirsiniz.) Bu altyapıyla artık başlamaya hazırız. Programımız, üç boyut için vektörlerle yaptığımız her şeyi uzay-zamanın dört boyutunda da yapmak. Gerçekten çok basit bir oyun bu; sadece benzetmeyle çalışacağız. Gerçek karmaşıklıklar, semboller (üç boyut için vektör sembolünü zaten kullandık) ve işaretlerdeki küçük bir değişikliktir.

Tablo 25-1
Vektör analizinin üç boyutta önemli nicelikleri ve işlemcileri

Bir vektörün tanımı	$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Skaler çarpım	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
Diferansiyel vektör işlemcisi	∇
Gradyan	$\nabla\phi$
Diverjans	$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$
Laplace	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
Vektörel çarpı	$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
Büküm (curl)	$\nabla \times \boldsymbol{A}$

Öncelikle, üç boyuttaki vektörlere benzeterek bir *dört-vektörü*, hareketli bir koordinat sistemine geçtiğimizde t, x, y ve z olarak dönüşen a_t, a_x, a_y ve a_z nicelikler kümesi olarak tanımlayalım. Dört-vektör için insanların kullandığı birçok farklı gösterim vardır; biz (a_t, a_x, a_y, a_z) sayılar kümesini gösteren a_μ sembolünü kullanacağız. Diğer bir deyişle, μ alt simgesi t, x, y, z "değerlerini" alabilir. Bazen de, üç uzay bileşenini bir üç vektörle göstermek elverişli olacaktır. Şu ifade gibi: $a_\mu = (a_t, \boldsymbol{a})$.

Daha önce, bir parçacığın enerjisi ve momentumundan oluşan (I. Cilt, 17. Bölüm) bir adet dört-vektörle karşılaşmıştık. Yeni gösterimimizde aşağıdaki denklemi yazalım:

$$p_\mu = (E, \boldsymbol{p}) \tag{25.2}$$

Bu gösterim, p_μ dört-vektörünün bir parçacığın E enerjisi ve $\boldsymbol{p}$ üç vektörünün bileşenlerinden meydana geldiği anlamına gelir.

Sanki bu oyun çok basit gibi gözükmekte. Fizikteki her bir üç-vektör için tek yapmamız gereken, kalan bileşenin ne olduğunu bulmak ve böylece bir dört-vektör elde etmek. Bunun böyle olmadığını görmek için, aşağıdaki bileşenlere sahip hız vektörünü ele alalım:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Soru: Zaman bileşeni nedir? İçgüdü doğru cevabı vermelidir. Dört-vektörler, t, x, y, z gibi olduğundan, zaman bileşeninin aşağıdaki denklem olduğunu tahmin ederiz:

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1$$

Bu yanlıştır. Nedeniyse, paydadaki her bir t'nin Lorentz dönüşümü yaptığımızda değişmez değer olmamasıdır. Paylar sayesinde dört-vektör yapma şansımız var; ancak paydadaki dt işleri bozuyor. O hem simetrik ve hem de iki farklı sistemde aynı değil.

Sonradan bulundu ki yazdığımız dört "hız" bileşeni, onları $\sqrt{1-v^2}$'ye bölersek bir dört-vektörün bileşenleri olurlar. Bunun doğru olduğunu göstermek için aşağıdaki momentum dört-vektörüyle başlar:

$$p_\mu = (E, \boldsymbol{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{25.3}$$

ve *dört boyutta* değişmez bir skaler olan m_0'ya bölersek aşağıdaki denklemi elde ederiz ki bu da yine bir dört-vektör olmalıdır.

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{25.4}$$

(*Değişmez bir skalere* bölmek, dönüşüm özelliklerini değiştirmez) dolayısıyla *"hız dört-vektörü"* u_μ'yü aşağıda olduğu gibi *tanımlayabiliriz:*

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \tag{25.5}$$

Dört-hız yararlı bir niceliktir; örneğin aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$p_\mu = m_0 u_\mu \tag{25.6}$$

Bu, göreliliğe göre doğru, tipik bir denklemin biçimidir; her iki taraf da bir dört-vektördür. (Sağ taraf bir değişmez nicelikle dört-vektörün çarpımıdır ve yine bir dört-vektördür.)

25-2 Skaler çarpım

Koordinat sistemlerini döndürdüğümüzde, bir noktanın başlangıca olan uzaklığı değişmez. Bunun matematiksel ifadesi, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$'nin değişmez olmasıdır. Bir başka deyişle, bir döndürmeden sonra $r'^2 = r^2$ eşitliği sağlanır ya da:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Soru: Lorentz dönüşümünde bir başka benzer değişmez nicelik var mıdır? Vardır. Denklem (25.1)'den aşağıdaki eşitliği görebilirsiniz:

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$$

Bu, özel olarak x yönüne dayanması haricinde gayet hoştur. y^2 ve z^2'yi çıkararak, bunu düzeltebiliriz. Böylece nicelik, herhangi bir Lorentz dönüşümü *artı* bir dönmeden sonra bile değişmeyecektir. Dolayısıyla dört boyut için, üç boyutta r^2'ye benzer olan nicelik aşağıdaki gibidir:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Bu, her bir çevrimin sabit hızda *ve* dönmelerde dönüşümü anlamına gelen "eksiksiz Lorentz grubu" altında bulunan bir değişmezdir.

Bu değişmez, sadece Denk. (25.1)'in dönüşüm kurallarına –artı dönmelere– bağlı cebirsel bir konu olduğundan, herhangi bir dört-vektör için doğrudur (tanım gereği hepsi aynı şekilde dönüşür). Dolayısıyla, bir a_μ dört-vektörü için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2$$

Bu niceliğe, a_μ dört-vektörünün "uzunluğunun" karesi diyeceğiz. (Bazen insanlar bütün terimlerin işaretlerini değiştirir ve uzunluğa $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ derler; bu yüzden dikkatli olun.)

Elimizde *iki* vektör, a_μ ve b_μ varsa, karşılık gelen bileşenleri de aynı şekilde dönüşür; dolayısıyla

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

birleşimi de değişmez (skaler) bir niceliktir. (Aslında bunu I. Cilt, 17. Bölümde zaten kanıtlamıştık.) Açıkça ortadadır ki, bu ifade vektörlerin skaler çarpımına çok benzerdir. Hatta biz buna, iki dört-vektörün *skaler çarpımı* veya skaler *çarpımı* diyeceğiz. $a_\mu \cdot b_\mu$ şeklinde yazmak mantıklı gibi görünüyor; böylece bir skaler çarpımı gibi gözükür. Ancak ne yazık ki bu şekilde olmaz; genelde noktasız haliyle yazılır. Biz de bu şekilde kullanacak ve skaler çarpımı basitçe $a_\mu \cdot b_\mu$

şeklinde yazacağız. Dolayısıyla, *tanım gereği:*

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z \tag{25.7}$$

olur. Birbirine özdeş iki alt simgeyi bir arada gördüğünüzde (arada sırada ν veya başka bir harfi μ yerine kullanmak zorunda kalacağız) bilin ki, uzay bileşenlerinin çarpımları için *eksi işaretini akılda tutarak*, dört çarpım yapıp, toplama yapacaksınız. Bu şekilde gösterimle, skaler bir çarpımın Lorentz dönüşümü altında değişmezliği aşağıdaki denklem gibi yazılabilir:

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu$$

Denklem (25.7)'deki son üç terim üç boyuttaki skaler çarpımları olduğundan, sıkça aşağıdaki eşitlik gibi yazmak daha uygundur:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Yukarıda tanımladığımız dört boyutlu uzunluğun da $a_\mu a_\mu$ şeklinde yazılabileceği barizdir:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \tag{25.8}$$

Bazen de bu ifadeyi a_μ^2 şeklinde yazmak uygun olacaktır:

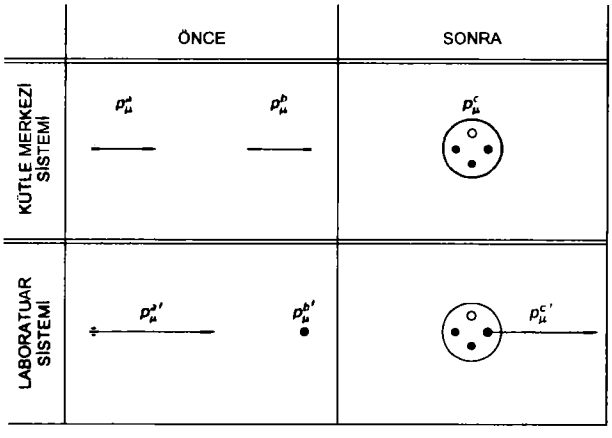
$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu$$

Şimdi size dört-vektör skaler çarpımlarının ne kadar yararlı olduğuna dair bir örnek göstereceğiz. Karşı-protonla ($\bar{\text{P}}$) büyük hızlandırıcılarda, aşağıdaki tepkimeyle büyük miktarlarda üretilirler:

$$\text{P} + \text{P} \rightarrow \text{P} + \text{P} + \text{P} + \bar{\text{P}}$$

Diğer bir deyişle, enerjik bir proton durağan bir protonla çarpışır (örneğin, bir demet içine yerleştirilmiş bir hidrojen hedefinde) ve uyarıcı protonun yeterli enerjisi varsa; başlangıçtaki iki protona ilaveten bir proton/karşı-proton çifti yaratılabilir.* Soru şu ifadedir: Bu tepkimenin enerjik olarak mümkün olması için uyarıcı protona ne kadar enerji verilmelidir?

Cevap almanın en kolay yolu, tepkimenin kütle merkezi (CM) sisteminde (*Bkz.* Şekil 25-1) nasıl göründüğünü düşünmektir. Uyarıcı protona a ve dört-momentumuna da p_μ^a diyelim. Benzer şekilde, hedef protona b ve onun dört-momentumuna da p_μ^b diyelim. Uyarıcı protonun enerjisi tepkimeyi *ancak* başlata-



Şekil 25-1 P + P → 3P + P tepkimesinin laboratuvarda ve CM sistemlerinde gözlemlenmesi. Uyarıcı protonun enerjisi tepkimeyi başlatmaya yetecek kadardır ancak. Protonlar dolu çemberlerle, karşı-protonlar da boş çemberlerle gösterilmekte.

* Şu soruyu sorabilirsiniz: neden açıkça daha az enerji gerektirdiği belli aşağıdaki denklemi:

$$\text{P} + \text{P} \rightarrow \text{P} + \text{P} + \bar{\text{P}}$$

veya hatta aşağıdaki denklemi

$$\text{P} + \text{P} \rightarrow \text{P} + \bar{\text{P}}$$

denklemleri ele almıyoruz? Çünkü baryonların korunumu adlı bir ilkeye göre "proton sayısı eksi karşı-proton sayısı" niceliği değişemez. Bu nicelik, tepkimemizin sol tarafında 2'dir. Dolayısıyla sağ tarafta bir karşı-proton istiyorsak, üç protonumuz (veya başka baryonlarımız) olmalıdır.

cak kadarsa, son durum –tepkimeden sonraki durum– CM sisteminde üç proton ve bir karşı-protondan oluşan, durağan bir topak içerecektir. Uyarıcı enerji biraz daha fazla olsaydı, son hal parçacıklarının bir miktar kinetik enerjisi olurdu ve bu yüzden etrafa dağılırlardı; uyarıcı enerji biraz daha düşük olsaydı, dört parçacık yapmaya yetecek enerji olmazdı.

Son haldeki bütün damlanın toplam dört-momentumuna p_μ^c dersek, enerji ve momentumun korunumu yasalarından dolayı aşağıdaki denklemi

$$\boldsymbol{p}^a + \boldsymbol{p}^b = \boldsymbol{p}^c$$

ve aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$E^a + E^b = E^c$$

Bu iki denklemi birleştirerek, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c \tag{25.9}$$

Buradaki önemli şey, bunun dört-vektörler arasında bulunan bir denklem olması ve dolayısıyla herhangi bir eylemsizlik çerçevesinde doğru olmasıdır. Bu gerçeği kullanarak hesaplamalarımızı basitleştirebiliriz. Denklem (25.9)'un her bir kenarının "uzunluğunu" alarak başlayalım. Elbette ki onlar da ayrıca eşittir. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)\,(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^c\, p_\mu^c \tag{25.10}$$

$p_\mu^c\, p_\mu^c$ değişmez olduğundan, herhangi bir koordinat sisteminde değerlendirebiliriz. CM sisteminde, p_μ^c'nin zaman bileşeni dört protonun durağan enerjisidir ve $4M$ olarak adlandırılır. Uzay kısmı $\boldsymbol{p}$ de sıfırdı; dolayısıyla $p_\mu^c = (4M, \boldsymbol{0})$ olur. Bir karşı-protonun durağan kütlesinin, bir protonun durağan kütlesine eşit olduğu gerçeğini kullandık ve bu ortak kütleye M adı verdik.

Dolayısıyla Denk. (25.10) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$p_\mu^a\, p_\mu^a + 2p_\mu^a\, p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2 \tag{25.11}$$

Şimdi, herhangi bir parçacığın momentum dört vektörünün "uzunluğu" parçacığın kütlesinin karesi olduğundan $p_\mu^a\, p_\mu^a$ ve $p_\mu^b\, p_\mu^b$ kolaydır.

$$p_\mu p_\mu = E^2 - p^2 = M^2$$

Bu, doğrudan hesaplamayla veya daha zekice bir şekilde *durağan* bir parçacık için $p_\mu = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{0})$ olduğu işaret edilerek gösterilebilir, dolayısıyla $p_\mu p_\mu = M^2$'dir. Bu değişmez olduğundan, *herhangi* bir çerçevede M^2'ye eşittir. Bu sonuçları Denk. (25.11)'de kullanarak, aşağıdaki denklemi

$$2p_\mu^a\, p_\mu^b = 14M^2$$

veya aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$p_\mu^a\, p_\mu^b = 7M^2 \tag{25.12}$$

Şimdi ayrıca $p_\mu^a\, p_\mu^b = p_\mu^{a'}\, p_\mu^{b'}$ eşitliğini de laboratuvar sisteminde değerlendirebiliriz. $p_\mu^{b'} = (M, \boldsymbol{0})$ olduğunda, dört-vektör $p_\mu^{a'}$, durağan bir protonu tanımladığından, $(E^{a'}, \boldsymbol{p}^{a'})$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla, $p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ de aynı zamanda $ME^{a'}$'ne eşit olmalı ve skaler çarpımın bir değişmez olduğunu bildiğimizden dolayı, bu aynı zamanda sayısal olarak Denk. (25.12)'de bulduğumuzla aynı olmalıdır. Dolayısıyla, peşinde olduğumuz

$$E^{a'} = 7M$$

sonucunu elde etmiş olduk. Başlangıçtaki protonun *toplam* enerjisi en az $7M$ (M = 938 MeV olduğundan yaklaşık 6,6 GeV) ya da durağan M kütlesini çıkarırsak, *kinetik enerji* en az $6M$ olmalıdır (yaklaşık 5,6 GeV). Berkeley'deki Bevatron Hızlandırıcısı, karşı-protonlar üretebilmek için protonlara 6,2 GeV kinetik enerji verecek şekilde tasarlanmıştır.

Skaler çarpımlar değişmez olduğundan, hesaplamaları daima ilgi çekicidir. Ya peki, dört-vektör u_μ u_μ'nun "uzunluğu"?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1$$

Dolayısıyla, u_μ *birim dört-vektördür.*

25-3 Dört boyutlu gradyan

Şimdi üzerinde durmamız gereken şey, bir gradyanın dört boyutlu benzeridir. Hatırlarsanız (I. Cilt, 14. Bölüm) üç diferansiyel işlemcisi $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ tıpkı bir üç-vektör gibi dönüşürler ve gradyan olarak adlandırılırlar. Aynı düzen dört boyut için de geçerli olmalı; diğer bir deyişle dört boyutlu gradyanın $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ olduğunu tahmin edebiliriz. *Bu yanlıştır.*

Hatayı görmek için, sadece x ve t'ye bağlı bir ϕ skaler fonksiyonunu ele alalım. ϕ'deki değişim, x'i sabit tutarken t'de Δt kadar küçük bir değişiklik yaparsak, aşağıdaki denklemdir:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t \tag{25.13}$$

Diğer yandan, hareketli bir gözlemci için:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\Delta t'$$

yazabiliriz. Denklem (25.1)'i kullanarak, $\Delta x'$ ve $\Delta t'$ terimlerini Δt cinsinden ifade edebiliriz. x'i sabit tuttuğumuzu hatırlayıp, $\Delta x = 0$ deriz ve böylece aşağıdaki denklemi yazarız:

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t; \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}$$

Böylece,

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}$$

olur. Bu sonucu Denk. (25.13)'le karşılaştırınca, aşağıdaki denkleme ulaşırız:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right) \tag{25.14}$$

Benzer bir hesaplama aşağıdaki denklemi verir:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'} - v\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right) \tag{25.15}$$

Şimdi artık gradyanın gayet garip olduğunu görebiliriz. x' ve t' cinsinden x ve t için [Denklem (25.1)'in çözümünden elde edilmiş] denklemler aşağıdakilerdir:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}$$

Bir dört-vektör bu yolla *dönüşmelidir*. Ancak (25.14) ve (25.15) denklemlerindeki birkaç işaret yanlıştır!

Yanlış olan $(\partial/\partial t, \nabla)$ yerine, ∇_μ diyeceğimiz *dört boyutlu gradyan* işlemcisini aşağıdaki denklem olarak *tanımlamalıyız*:

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{25.16}$$

Bu tanımla, yukarıda karşılaştığımız işaret zorlukları yok olur ve ∇_μ bir dört-vektör nasıl davranması gerekirse öyle davranır. (O eksi işaretlerin olması gayet gariptir; ancak dünyanın işleyişi bu şekildedir.) Elbette, ∇_μ "bir dört-vektör gibi davranır" derken demek istenilen, bir skalerin dört-gradyanının bir dört-vektör olduğudur. ϕ gerçek bir değişmez skaler alansa (Lorentz değişmezi), o halde $\nabla_\mu\phi$ bir dört-vektör alanıdır.

Artık elimizde vektörler, gradyanlar ve skaler çarpımları olduğuna göre, sıradaki şey üç boyutlu vektör analizinin diverjansına benzer bir değişmez bul-

maktır. Açıkça bu benzerlik, b_μ bileşenleri uzay ve zamanın fonksiyonları olan bir dört-vektör alanıyken, $\nabla_\mu b_\mu$ biçimindedir. Dört-vektör $b_\mu = (b_t, b)$'nin *diverjansını* ∇_μ ve b_μ'nin skaler çarpımı olarak *tanımlarız*:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu b_\mu &= \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z \\ &= \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot b \end{aligned} \tag{25.17}$$

Burada $\nabla \cdot b$, üç vektör b'nin sıradan üç-diverjansıdır. İşaretlere dikkat etmelisiniz. Eksi işaretlerinin bazıları skaler çarpımın tanımından, Denk.(25.7), gelir; diğerleri, Denk. (25.16)'da olduğu gibi, ∇_μ'nün uzay bileşenleri $-\partial/\partial x$, vs olduğundan gereklidir. (25.17) tarafından tanımlanan diverjansı bir değişmezdir ve Lorentz dönüşümüyle birbirlerinden ayrılan tüm koordinat sistemlerinde aynı cevabı verir.

Dört-diverjansın göründüğü bir fiziksel örneği inceleyelim. Hareket eden bir tel etrafındaki problemleri çözmek için onu kullanabiliriz. Elektrik yük yoğunluğu ρ ve akım yoğunluğu j'nin bir dört-vektör $j_\mu = (\rho, j)$ oluşturduğunu daha önce (Bölüm 13-7) görmüştük. Yüklenmemiş bir tel j_x akımı taşıyorsa, o halde (x boyunca) v hızıyla ilerleyen bir çerçeve içinde telin yük ve akım yoğunlukları [Denklem (25.1) Lorentz dönüşümünden elde edilen] şöyle olacaktır:

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}} \qquad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}$$

Bunlar Bölüm 13'te bulduklarımızla aynıdır. Böylece bu kaynakları, alanları bulmak için *hareketli sistemin* Maxwell denklemlerinde kullanabiliriz. Bölüm 13-2'de gördüğümüz yük korunumu yasası da, dört-vektör gösteriminde basit bir hal alır. j_μ'nun dört diverjansını ele alalım:

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j \tag{25.18}$$

Yük korunumu yasasına göre, birim hacim başına dışarıya giden akım, yük yoğunluğunun artış hızının eksisine eşit olmalıdır. Diğer bir deyişle,

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

olur. Bu sonucu Denk. (25.18)'e koyduğumuzda, yük korunumu yasası aşağıdaki basit hale dönüşür:

$$\nabla_\mu j_\mu = 0 \tag{25.19}$$

$\nabla_\mu j_\mu$ değişmez bir skaler olduğundan, bir çerçevede sıfırsa diğer bütün çerçevelerde sıfırdır. Böylece, bir koordinat sisteminde yük korunuyorsa, düzgün hızda hareket eden bütün koordinat sistemlerinde de korunduğu sonucunu elde etmiş olduk.

Son örneğimiz için, gradyan işlemcisi ∇_μ'nun kendisiyle skaler çarpımını ele almak istiyoruz. Bu tür bir çarpım, üç boyutta, Laplace'ı verir:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dört boyutta ne elde ederiz? Bu kolaydır. Skaler çarpımlar ve gradyanlar için kurallarımızı kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\mu &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\end{aligned}$$

Üç boyutlu Laplace'ın benzeri olan bu işlemciye *D'Alembert* denir ve özel bir gösterimi vardır:

$$\Box^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{25.20}$$

Tanımı gereği değişmez bir skaler işlemcidir; bir dört-vektör alanında, yeni bir dört-vektör alanı meydana getirir. (Bazı insanlar D'Alembert'i Denk. (25.20)'nin eksi işaretlisi olarak tanımlarlar; dolayısıyla söz konusu literatürü okurken dikkatli olmanız gerekir.)

Böylece, Tablo 25-1'de listelenen üç boyutlu niceliklerin çoğunun dört boyutlu eşdeğerlerini bulmuş olduk. (Şimdilik elimizde vektörel çarpım ve büküm işleminin eşdeğerleri yok; bir sonraki bölümde onları elde edeceğiz.) Bütün önemli tanımları ve sonuçları bir araya koymamızın size onların nasıl işlediğini göstermesi için önemli olacağını düşündük ve Tablo 25-2'de bir özet hazırladık.

Tablo 25-2
Vektör analizinin üç ve dört boyutta önemli nicelikleri

	Üç Boyutta	Dört Boyutta
Vektor	$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y. A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \boldsymbol{a})$
Skaler çarpım	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	$a_\mu b_\mu = a_tb_t - a_xb_x - a_yb_y - a_zb_z = a_tb_t - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
Vektör işlemcisi	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z) = (\partial/\partial t, -\nabla)$
Gradyan	$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$	$\nabla_\mu\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\nabla\varphi\right)$
Diverjans	$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{a}$
Laplace ve D'Alembert	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$	$\nabla_\mu\nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2$

25-4 Dört boyutlu gösterimde elektrodinamik

D'Alembert işlemcisiyle zaten, bu ismi anmadan, Bölüm 18-6'da karşılaşmıştık. Orada bulduğumuz, potansiyeller için diferansiyel denklemler yeni gösterimlerle yazılabilir:

$$\Box^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \Box^2\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} \tag{25.21}$$

Denklem (25.21)'deki iki denklemin sağ tarafındaki dört nicelik, ρ, j_x, j_y, j_z'nin, bütün çerçevelerde aynı birim yük kullanılırsa tüm koordinat sistemlerinde aynı olan evrensel bir sabit ϵ_0'ya bölümüdür. Dolayısıyla ρ/ϵ_0, j_x/ϵ_0, j_y/ϵ_0, j_z/ϵ_0 nicelikleri de ayrıca dört-vektör olarak dönüşürler. Onları j_μ/ϵ_0 şeklinde yazabiliriz. Koordinat sistemi değiştiğinde D'Alembert değişmez, dolayısıyla ϕ, A_x, A_y, A_z nicelikleri de dört-vektör *gibi dönüşmelidirler*. Bu da onların bir dört-vektör bileşeni oldukları anlamına *gelir*. Kısaca,

$$A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$$

bir dört-vektördür. Skaler ve vektör potansiyelleri olarak adlandırdığımız şeyler aslında aynı fiziksel şeyin farklı yönleridir. Birbirlerine aittirler. Birlikte tutulduklarında, dünyanın göreli değişmezliği apaçık ortadadır. A_μ niceliğine *dört-potansiyel* deriz.

Dört-vektör gösterimiyle, Denk. (25.21) basitçe aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\Box^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0} \tag{25.22}$$

Bu denklemin fiziği tıpkı Maxwell denklemlerininki gibidir. Ancak onları böyle zarif bir biçimde tekrar yazabilmenin verdiği bir zevk vardır. Denklemin estetiği de anlamlıdır: Lorentz dönüşümü altında elektrodinamiğin değişmezliğini doğrudan gösterir.

Denklem (25.21)'in, ancak $\nabla_\mu A_\mu = 0$ eşitliğini ortaya koyan aşağıdaki ayar koşulunu zorunlu tutarsak Maxwell denklemlerinden çıkarılabileceğini hatırlayın.

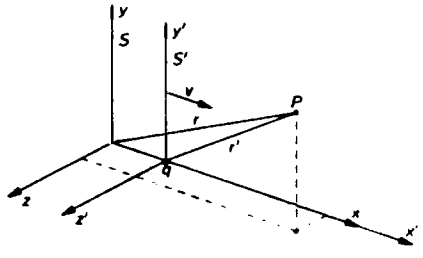
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{25.23}$$

Ayar koşulu, dört-vektör A_μ'nün diverjansının sıfır olduğunu söyler. Bu koşula *Lorentz koşulu* denir. Çok elverişlidir çünkü değişmez bir koşuldur ve dolayısıyla Maxwell denklemleri bütün çerçevelerde Denk. (25.22) biçiminde kalır.

25-5 Hareket eden bir yükün dört-potansiyeli

Her ne kadar dediklerimiz içinde ima edilmiş olsa da, gelin hareketli bir sistemde durağan bir sistemdeki ϕ ve $\boldsymbol{A}$ cinsinden ϕ ve $\boldsymbol{A}$'yı veren dönüşüm yasalarını yazalım. $A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ bir dört-vektör olduğundan, denklemler aynı Denk. (25.1) gibi gözükmelidir. Ancak, t yerine ϕ ve x yerine $\boldsymbol{A}$ konur. Böylece,

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-v^2}} & A'_x &= A_y \\ A'_x &= \frac{A_x - v\phi}{\sqrt{1-v^2}} & A'_z &= A_z \end{aligned} \tag{25.24}$$



Şekil 25-2 S' çerçevesi, S'e göre (x yönünde) v hızıyla ilerlemekte. S''nün başlangıcındaki durağan bir yük, S'te $x = vt$ noktasındadır. P potansiyelleri herhangi bir çerçevede hesaplanabilir.

Bu denklem seti, üslü koordinat sisteminin, üssüz koordinat sistemine göre ölçüldüğünde, x yönünde v hızıyla ilerlediğini kabul eder.

Dört potansiyel fikrinin kullanışlılığına dair bir örneği ele alalım. x ekseni boyunca v hızıyla ilerleyen q yükünün vektör ve skaler potansiyelleri nedir? Yükle beraber ilerleyen bir koordinat sisteminde problemi çözmek, yük bu sistemde duruyor olduğundan, kolaydır. Diyelim ki, Şekil 25-2'de gösterildiği gibi, yük S' çerçevesinin başlangıç noktasında olsun. Bu durumda, r' hareketli sistemde q'dan alan noktasına olan uzaklıksa, hareketli sistemdeki skaler potansiyel aşağıdaki eşitlik olur:

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \tag{25.25}$$

$\boldsymbol{A}'$ vektör potansiyeli elbette sıfırdır.

Şimdi, durağan koordinatlarda ölçülmüş potansiyeller ϕ ve $\boldsymbol{A}$ dosdoğru bulunabilir. Denk. (25.24)'e ters bağıntılar aşağıdaki denklemlerdir:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}} & A_y &= A'_y \\ A_x &= \frac{A'_x + v\phi'}{\sqrt{1-v^2}} & A_z &= A'_z \end{aligned} \tag{25.26}$$

Denklem (25.25)'le verilen ϕ''nü ve $\boldsymbol{A}' = 0$ eşitliğini kullanarak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{aligned}$$

Bu bize, S çerçevesinde göreceğimiz ϕ skaler potansiyelini verir; ancak ne yazık ki S' koordinatları cinsinden ifade edilmiştir. Denklem (25.1)'i kullanarak, t', x', y', z' yerine t, x, y, z koyarak bunu değiştirebiliriz. Böylece, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}} \tag{25.27}$$

$\boldsymbol{A}$ bileşenleri için de aynı yolu takip ederek, aşağıdaki denklemi gösterebilirsiniz:

$$\boldsymbol{A} = v\boldsymbol{\phi} \tag{25.28}$$

Bunlar, 21. Bölümde farklı bir yöntemle elde ettiğimiz denklemlerin aynısıdır.

25-6 Elektrodinamik denklemlerinin değişmezliği

ϕ ve $\boldsymbol{A}$ potansiyellerinin bir arada, A_μ denilen bir dört-vektör biçimini aldığını ve dalga denklemlerinin $-A_\mu$ vektörünü j_μ cinsinden ifade eden tam denklemler– Denk. (25.22)'deki gibi yazılabildiğini bulduk. Bu denklem ve yük korunumu denklemi, Denk. (25.19), beraber biz elektromanyetik alanın temel yasasını verir:

$$\Box^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu \qquad\qquad \nabla_\mu j_\mu = 0 \tag{25.29}$$

İşte bu kadar, sayfanın küçük bir boşluğunda bütün Maxwell denklemleri –güzel ve basit bir şekilde– bir arada. Güzel ve basit olduklarını görmek dışında, bu denklemleri bu şekilde yazmaktan bir şey öğrendik mi? İlk önce şu soruyu soralım, çeşitli bileşenlerle her şeyi açıkça yazdığımız halinden farklı mıdır bu hali? Akımlar ve yükler cinsinden potansiyeller için yazdığımız dalga denklemlerinden çıkaramayacağımız bir şeyi bu denklemden çıkarabilir miyiz? Cevap, kesinlikle hayırdır. Tek yaptığımız, bazı şeylerin isimlerini –yeni bir gösterim kullanarak– değiştirmekten ibarettir. Türevleri ifade etmek için kare bir sembol kullandık, ancak bunun anlamı hâlâ t'ye göre ikinci türev, eksi x'e göre ikinci türev, eksi y'ye göre ikinci türev, eksi z'ye göre ikinci türevdir. Dört denklemimizdeki μ de, her bir $\mu = t, x, y, z$ için bir adet olduğu anlamına gelir. O zaman denklemlerin bu basit biçimde yazılabilmeleri gerçeğinin önemi nedir? Bir şeyleri doğrudan çıkarım yapabilmek açısından bakarsak, bir anlama gelmez. Ama belki de denklemlerin basitliği, doğanın da aynı zamanda belli bir basitliğe sahip olduğu anlamına gelebilir.

Size henüz yeni keşfettiğimiz ilginç bir şeyi söyleyelim. *Bütün fizik yasaları tek bir denkleme sığdırılabilir.* O denklem de şudur:

$$\mathrm{U} = 0 \tag{25.30}$$

Ne kadar basit bir denklem! Elbette, bu sembolün ne anlamına geldiğini bilmek gereklidir. U, durumun "dünya dışılığı" diyeceğimiz bir fiziksel niceliktir ve onun için bir denklemimiz de vardır. Şimdi, dünya dışılığın nasıl hesaplanacağını gösterelim. Bilinen bütün fizik yasalarını alıp, onları özel bir biçimde yazalım. Örneğin, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ mekanik yasasını ele alalım ve onu $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0$ şeklinde yazalım. Daha sonra $(\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a})$ için –elbette, sıfır olmalıdır– mekaniğin "uyumsuzluğu" diyelim. Daha sonra bu uyumsuzluğun *karesini* alalım ve ona U_1 diyelim. Buna, "mekanik etkilerin dünya dışılığı" da diyebiliriz. Diğer bir deyişle, aşağıdaki denklemi yazarsınız:

$$\mathrm{U}_1 = (\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a})^2 \tag{25.31}$$

Sonra yeni bir fizik yasası, örneğin $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ yazalım ve aşağıdaki denklemi tanımlayalım:

$$\mathrm{U}_2 = \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right)^2$$

Buna da "elektriğin Gauss dünya dışılığı" diyebiliriz. Bu şekilde devam ederek U_3, U_4 ve böylece devam ederek bütün fizik yasaları için birini yazabiliriz.

Son olarak bütün olgulara karşılık gelen U_i dünya dışılıklarının toplamını alıp, *toplam* bir U dünya dışılığı hesaplarız: $\mathrm{U} = \sum \mathrm{U}_i$. O halde, büyük "doğa yasası" aşağıda olduğu gibi yazılabilir:

$$\boxed{\mathrm{U} = 0} \tag{25.32}$$

Bu "yasa", bütün bağımsız uyumsuzlukların karelerinin toplamının sıfır olması anlamına gelir ve birçok karenin toplamının sıfır olmasının tek yolu da her birinin sıfır olmasıdır.

Dolayısıyla, Denk. (25.32)'deki "olağanüstü basit" yasa, ilk başta yazdığınız denklemler dizisinin tamamına eşittir. Yasa, ilk başta yazdığınız denklemler dizisinin tamamına eşittir. Bu yüzden açıkça ortadadır ki, sembollerin tanımlarındaki karmaşıklığı gizleyen basit bir gösterim gerçek basitlik değildir. *Sadece bir hiledir.* Denklem (25.32)'de görünen –sadece birçok denklemin içinde gizlenmesi gerçeğinden gelen– güzellik bir hileden öte bir şey değildir. İçindekileri açığa çıkardığınızda, geçmişte olduğunuz yere geri dönersiniz.

Bununla birlikte, Denk. (25.9) biçiminde yazılan elektromanyetizma yasalarının basitliğinden daha ötesi *vardır.* Daha fazla anlamı vardır, tıpkı vektör analizi kuramının göründüğünden daha fazla anlam ifade etmesi gibi. Elektromanyetik denklemlerin, Lorentz dönüşümlerinin dört boyutlu geometrisi *için tasarlanmış* çok özel gösterimiyle de–bir başka deyişle, dört-uzayda bir vektör denklemi olarak– yazılabilmesi, denklemlerin Lorentz dönüşümleri altında da değişmez olduğu anlamına gelir. Maxwell denklemleri o dönüşümler altında da değişmez olduğundan, böyle olağanüstü bir biçimde yazılabilir.

Elektrodinamik denklemlerinin, olağanüstü zarif Denk. (25.29) biçiminde yazılabilmesi tesadüf değildir. Görelilik kuramı, Maxwell denklemlerinin öngördüğü bütün olguların tüm eylemsizlik sistemlerinde aynı olduğunun *deneysel olarak bulunması* sayesinde geliştirilebilmiştir. Maxwell denklemlerinin dönüşüm özelliklerini çalışarak, Lorentz kendi dönüşümünün bütün denklemleri değişmez halde bıraktığını keşfetti.

Bununla birlikte, bu denklemleri bu şekilde yazmamızın bir başka nedeni daha var. *Bütün* fizik yasalarının Lorentz dönüşümü altında değişmez olduğu – Einstein böyle olacağını tahmin ettikten sonra– keşfedilmişti. Bu, görelilik ilkesidir. Dolayısıyla, yeni kuramlar geliştirmeye çalışırken sadece görelilik ilkesiyle uyumlu denklemleri yazmamız gerektir.

Maxwell denklemlerinin bu özel gösterimde bu kadar basit olması mucize değildir; çünkü gösterim denklemleri akılda tutarak geliştirilmişti. Fiziksel olarak ilginç olan şeyse, *her bir* fizik yasasının –mezon dalgalarının ilerlemesi veya beta bozunumu sırasında nötronların davranışı vs– aynı dönüşü altında aynı değişmezliğe sahip olmasıdır. Dolayısıyla, bir uzay gemisi içinde düzgün hızla ilerlerken tüm doğa yasaları birlikte öyle bir dönüşür ki, hiç yeni olgu ortaya çıkamaz. Görelilik ilkesi bir doğa gerçeği olduğundan dolayı, dünyamıza ait denklemler dört boyutlu vektörler gösteriminde basit gözükür.

26

ALANLARIN LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

26-1 Hareketli bir yükün dört-potansiyeli

Son bölümde gördük ki, $A_\mu = (\phi, A)$ potansiyeli bir dört-vektördür. Zaman bileşeni skaler potansiyeli ϕ ve üç uzay bileşeni de vektör potansiyeli A'dır. Düz bir hat üzerinde düzgün bir hızla hareket eden parçacığın potansiyellerini de Lorentz dönüşümünü kullanarak elde etmiştik. (Onları Bölüm 21'de bir başka yöntemle zaten bulmuştuk.) t zamanında konumu $(vt, 0, 0)$ olan bir noktasal yük için, (x, y, z) noktasındaki potansiyeller aşağıdaki denklemler gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{q}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}\\ A_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{qv}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}\\ A_y &= A_z = 0\end{aligned} \tag{26.1}$$

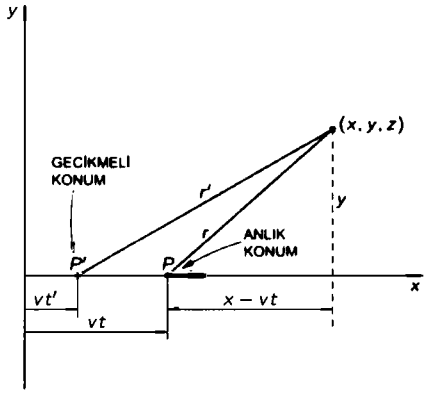
(26.1) denklemleri, "anlık" konumu (t *zamanındaki* konumu) $x = vt$ olan bir yük için t zamanında, x, y ve z'de potansiyelleri verir. Dikkat ederseniz, denklemler hareket eden yükün *şimdiki konumu P'den* ölçülmüş $(x - vt)$, y ve z cinsinden yazılmıştır. Bildiğimiz gerçek etki c hızında ilerler, dolayısıyla önemli olan gecikmeli P' noktasındaki yükün davranışıdır.* P' noktası $x = vt'$ konumundadır ($t' = t - r'/c$ gecikmeli zamandır). Ancak, yükün düz bir hat üzerinde düzgün hızda ilerlediğini söylemiştik; dolayısıyla doğal olarak P' noktasındaki davranış ile şimdiki konumu birbirleriyle doğrudan ilişkilidir. Aslında potansiyellerin sadece konuma ve gecikmeli andaki hıza bağlı olduğu varsayımını eklediğimizde, (26.1) denklemlerinde, *herhangi* bir şekilde hareket eden bir yük için potansiyellerin *eksiksiz* denklemini elde edebiliriz. Nasıl işlediğini gösterelim. Şekil 26-2'deki yol üzerinde ilerleyen bir yükümüz olsun ve onun (x, y, z) noktalarındaki potansiyellerini bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Öncelikle, o noktadaki gecikmeli P' pozisyonunu ve v' hızını bulmamız lazım. Daha sonra yükün bu hızla, gecikme zamanı süresince, diğer bir deyişle $(t' - t)$ süresi boyunca, ilerlediğini ve sonra, "öngörülen konum" diye adlandırdığımız sanal bir $P_{\text{öngörü}}$ noktasına v' hızıyla vardığını düşünelim. (Elbette, böyle olmaz; t zamanında gerçek konumu P'dir.) (x, y, z) konumundaki potansiyeller, (26.1) denklemlerinin $P_{\text{öngörü}}$ konumundaki sanal yük için vereceği potansiyellerdir. Demek istediğimiz, potansiyeller yükün *gecikmeli* zamanda ne yaptığından bağımsız olduğundan dolayı, yük sabit hızla ilerlese de, t' zamanından sonra hızını değiştirse de potansiyeller aynı olacaktır. Bu potansiyeller, t zamanında (x, y, z) nokasındaki potansiyellerdir.

Herhangi bir şekilde hareket eden bir yükün potansiyellerine dair denklemleri elde ettiğimizde, bütün elektrodinamiği elde ettiğimizi de biliyorsunuz. Herhangi bir yük dağılımı için potansiyelleri üst üste binme sayesinde hesaplayabiliriz. Dolayısıyla, elektrodinamiğe dair tüm olguları ya Maxwell denklemlerini yazarak ya da şimdi belirteceğimiz noktaları izleyerek özetleyebiliriz. (Issız

26-1 Hareketli bir yükün dört-potansiyeli
26-2 Sabit hızlı bir noktasal yükün alanları
26-3 Alanların göreli dönüşümü
26-4 Göreli gösterimde hareket denklemleri

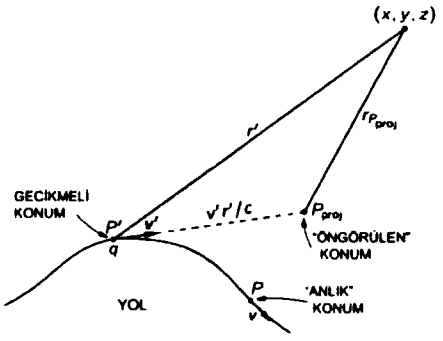
Bu bölümde: $c = 1$

Gözden Geçirme: Cilt 2, Bölüm 20, *Boş Uzayda Maxwell Denklemlerinin Çözümü*



Şekil 26-1 x ekseni boyunca sabit v hızıyla ilerleyen q yükünden dolayı (x, y, z) noktasında oluşan alanları bulmak. (x, y, z) noktasındaki "şimdiki" alan, "anlık" P konumu cinsinden ifade edilebildiği gibi, "gecikmeli" P' ($t' = t - r'/c$ anında) konumu cinsinden de ifade edilebilir.

* Burada, *gecikmeli* konumları ve zamanları belirtmek için kullandığımız üslerle, bir önceki bölümde Lorentz dönüşümlü çerçeve için kullandığımız üsleri karıştırmayınız.



Şekil 26-2 Rastgele bir yol üzerinde ilerleyen bir yük. t zamanında (x, y, z) konumundaki potansiyeller, $t' - r'/c$ gecikmeli zamanındaki P' konumu ve v' hızıyla belirlenir. Uygun bir şekilde, "öngörülen" konuma göre koordinatlar cinsinden ifade edilirler. (t'deki gerçek konum P'dir.)

bir adaya düşerseniz bu belirteceklerimizi hatırlayın. Onlardan yola çıkarak her şey yeniden inşa edilebilir. Elbette, Lorentz dönüşümünü de bilmelisiniz. *Onu* ne ıssız adada ne de başka yerde unutmalısınız.)

Birincisi, A_μ bir dört-vektördür. İkincisi, bir durağan yük için Coulomb potansiyeli $q/4\pi\epsilon_0 r'$dir. Üçüncüsü, herhangi bir şekilde hareket eden bir yük tarafından meydana getirilen potansiyeller sadece gecikmeli zamandaki hıza ve konuma dayanır. Bu üç gerçekle, her şeyi çıkarabiliriz. A_μ'nün bir dört-vektör olduğundan yola çıkarak, Coulomb potansiyelini dönüştürür ve sabit hız için potansiyelleri elde ederiz. Daha sonra, potansiyellerin sadece gecikmeli zamandaki hıza dayandığı ifadesine göre, öngörülen konumu kullanarak onları bulabiliriz. Bir şeyleri yapmanın özellikle yararlı bir yolu olmasa da, fizik yasalarının birçok farklı şekle sokulabileceğini göstermek açısından faydalıdır.

Bazen, dikkatsiz insanlar, elektrodinamiğin tamamının sadece Coulomb yasası ve Lorentz dönüşümünden elde edilebileceğini savunurlar. Bu, elbette tamamen yanlıştır. Öncelikle, beraber bir dört-vektör oluşturabilecek bir skaler potansiyeli ve bir vektör potansiyeli olduğunu varsaymalıyız. Bu bize, potansiyellerin nasıl dönüştüğünü gösterir. Peki, o zaman, neden sadece gecikmeli zamandaki şeyleri dikkate alıyoruz? Daha da önemlisi, neden potansiyeller sadece konuma ve hıza dayanıyor da, örneğin ivmelenmeye dayanmıyor? E ve B *alanları* ivmelenmeye *dayanır*. Onlara ilişkin akıl yürütmeye çalışırken, onların sadece gecikmeli zamandaki konum ve hıza dayandığını söylersiniz. Ancak bu durumda, ivmelenen bir yükten oluşan alanlar ile öngörülen konumdaki bir yükten kaynaklanan alanlar aynı olurdu ki bu yanlıştır. *Alanlar* sadece yol boyu konum ve hıza değil, fakat ayrıca ivmelenmeye de dayanır. Diğer bir deyişle, her şeyin Lorentz dönüşümünden çıkarılabileceğini söyleyen ifadede, birçok üstü kapalı varsayım gizlidir. (Çok miktarda şeyin az sayıda varsayımlardan çıkarılabileceğini gören bir ifade gördüğünüzde, çoğu zaman bunun yanlış olduğunu keşfedeceksiniz. Yeterince dikkatli düşündüğünüzde, apaçık ortada olmayan birçok üstü kapalı varsayımla karşılaşırsınız.)

26-2 Sabit hızlı bir noktasal yükün alanları

Sabit hızla ilerleyen bir noktasal yükten kaynaklanan potansiyelleri elde ettiğimize göre, alanları –pratik nedenlerden dolayı– bulmalıyız. Düzgün şekilde hareket eden parçacıkların bulunduğu birçok durum vardır. Örneğin, bir bulut hücresinin içinden geçen kozmik ışınlar veya hatta bir teldeki yavaş hareket eden elektronlar gibi. Gelin o zaman, ivmelenme olmadığını varsayarak, alanların herhangi bir hızda –hatta ışık hızına yakın hızlar içinde– nasıl göründüklerini bulalım. Bu ilginç bir sorudur.

Alanları, potansiyellerden yola çıkarak bilindik kurallarla elde ederiz.

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Öncelikle, E_z için:

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

Ancak A_z sıfırdır, dolayısıyla (26.1) denklemlerindeki ϕ'nin türevini alarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \tag{26.2}$$

Aynı şekilde, E_y için de:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \tag{26.3}$$

x bileşeni biraz daha iş gerektirir. ϕ'nin türevi daha karmaşıktır ve A_x de sıfır değildir. Öncelikle,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{26.4}$$

denkleminde t'ye göre A_x'in türevini alarak aşağıdaki denklemi buluruz:

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{26.5}$$

Son olarak, toplamı aldığımızda:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{26.6}$$

olur. E'nin fiziğine birazdan geleceğiz; önce B'yi bulalım. z bileşeni için,

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

A_y sıfır olduğundan, almamız gereken tek bir türev vardır. Bununla birlikte, dikkat ederseniz A_x sadece $v\phi$'dir ve $v\phi$'nin $\partial/\partial y$'si sadece $-vE_y$'dir. Dolayısıyla,

$$B_z = vE_y \tag{26.7}$$

Benzer şekilde,

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +v\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

ve

$$B_y = -vE_z \tag{26.8}$$

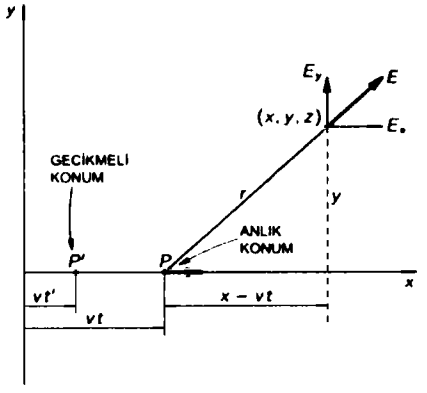
son olarak, A_y ve A_z'nin ikisi birden sıfır olduğundan B_x sıfırdır. Böylece, manyetik alanı basitçe aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \tag{26.9}$$

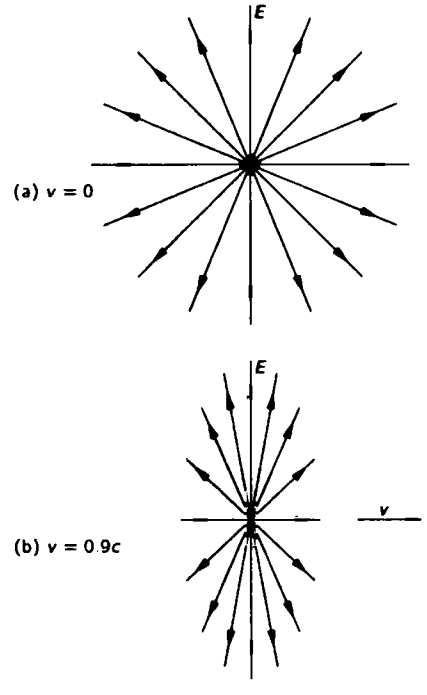
Şimdi gelin, alanların nasıl göründüğüne bakalım. Konumun anlık konumu yakınındaki çeşitli konumlardaki alanın bir resmini çizmeye çalışacağız. Yükün etkisinin, bir anlamda, gecikmeli pozisyonundan geldiği doğrudur; ancak hareketi tam olarak tanımlandığından, gecikmeli konumu da anlık konumu cinsinden ifade edilebilir. Düzgün hızlar için, alanları şimdiki konumla ilişkilendirmek daha güzeldir; çünkü (x, y, z)'deki alan bileşenler sadece $(x - vt)$, y ve z'ye, yani anlık konum (x, y, z)'den r kadar yerdeğiştirme vektörünün bileşenlerine dayanır (*Bkz.* Şekil 26-3).

Koordinat sisteminde $z = 0$ için bir noktayı ele alalım. Bu durumda E'nin sadece x ve y bileşenleri vardır. (26.3) ve (26.6) denklemlerinden, bu bileşenlerin oranının, yerdeğiştirmenin x ve y bileşenlerinin oranına eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bunun anlamı, E'nin, Şekil 26-3'te görüldüğü gibi, r'yle *aynı yönde* olduğudur. E_z aynı zamanda z'yle orantılı olduğundan, bu sonuç her üç boyut için doğrudur. Kısacası, elektrik alan yükten dışa doğru radyaldır ve alan çizgileri doğrudan yükten dışarı doğru yayılır, tıpkı durağan bir yükte olduğu gibi. Elbette alan durağan yüktekiyle, bütün $(1 - v^2)$ çarpanlarından dolayı, aynı değildir. Ancak çok ilginç bir şey gösterebiliriz. Aradaki fark, x'in $\sqrt{1-v^2}$ terimiyle sıkıştırılmış olduğu özel bir koordinat sisteminde Coulomb alanını çizince elde edeceğinize eşittir. Bunu yaparsanız, alan çizgileri, Şekil 26-4'te gösterildiği gibi, yükün ilerisine ve gerisine doğru yayılacak ve yanlarda da sıkışacaktır.

Bilindik şekilde, E'in şiddetini alan çizgilerinin yoğunluğuyla ilişkilendirirsek; yanlarda daha şiddetli bir alan ve yükün ileri ve gerisinde daha zayıf bir alan görürüz. Bu, denklemlerin söylediğiyle aynıdır. Öncelikle, alanın hareket



Şekil 26-3 Sabit hızda ilerleyen bir yük için, elektrik alan yükün "anlık" konumundan radyal olarak dışarı doğru işaret eder.



Şekil 26-4 $v = 0{,}9c$ sabit hızıyla ilerleyen bir yükün elektrik alanının; (b), durağan bir yükün elektrik alanı ile (a) karşılaştırılması.

yönüne dik açılarda, $(x - vt) = 0$ için şiddetine bakarsak, yükten uzaklık $\sqrt{y^2 + z^2}$'dir. Burada toplam alan şiddeti $\sqrt{E_y^2 + E_z^2}$'dir:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1 - v^2}} \frac{1}{y^2 + z^2} \tag{26.10}$$

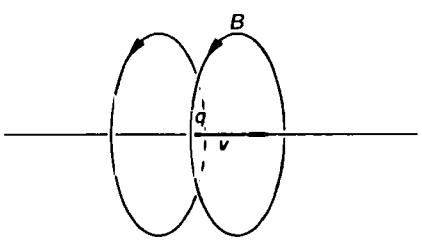
Alan, uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Tıpkı Coulomb alanı gibi, ancak, daima birden büyük olan, $1/\sqrt{1 - v^2}$ çarpanıyla artırılmış şekilde. Dolayısıyla, hareket eden bir yükün *yanlarındaki* elektrik alan, Coulomb yasasıyla bulacağınızdan daha şiddetlidir. Aslında, yanlara doğru yönlenmiş alan Coulomb potansiyelinden, parçacığın enerjisinin durağan kütlesine bölümü kadar bir oranda daha büyüktür.

Yükün ilerisinde (ve gerisinde), y ve z sıfırdır ve böylece,

$$E = E_x = \frac{q(1 - v^2)}{4\pi\epsilon_0(x - vt)^2} \tag{26.11}$$

olur. Alan yine uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak değişmekte, ancak artık, alan çizgilerinin resmine uygun olarak, $(1 - v^2)$ çarpanıyla *küçültülmüştür*. v/c küçükse, v^2/c^2 daha da küçüktür ve dolayısıyla $(1 - v^2)$ terimlerinin etkisi çok küçüktür. Dolayısıyla, Coulomb yasasına geri döndük. Ancak parçacık ışık hızına çok yakın bir hızda hareket ediyorsa, ileri yöndeki alan çok fazla küçülür ve yanlara doğru alan da çok fazla büyür.

Bir yükün elektrik alanı için sonuçlarımızı şu şekilde ifade edebiliriz: Bir kâğıt üzerine, durağan bir yükün elektrik alanlarını çizdiğinizi ve daha sonra resmi v hızıyla hareket ettirdiğinizi düşünün. Bu durumda resim elbette Lorentz büzüşmesiyle sıkışacaktır, diğer bir deyişle kâğıttaki karbon parçacıkları oldukları yerden farklı yerde gözükeceklerdir. Buradaki harika şey, kâğıt hareket ettikçe göreceğiniz resmin hâlâ noktasal yükün alan çizgilerini temsil etmesidir. Büzüşme onları, doğru çizgi yoğunluklarını gösterecek şekilde, kenarlarda yakınlaştırır ve yükün ilerisinde ve gerisinde dışa doğru yayar. Daha önce alan çizgilerinin gerçek olmadığını ve sadece alanı temsil etmenin bir yolu olduğunun altını çizmiştik. Yine de, bu şekilde neredeyse gerçek gibi gözükmektedirler. Bu özel durum için, alan çizgilerinin gerçekten uzayda bir yerde olduğunu düşünme hatasını yapar ve onları dönüştürürseniz, gerçek alanı elde edersiniz. Bununla birlikte, bu, alan çizgilerini gerçek kılmaz. Onların gerçek olmadığını kendinize hatırlatmak için, bir yük ve bir mıknatısla meydana getirilen elektrik alanın elektrik alan çizgilerini düşünün. Mıknatıs hareket ettiğinde, yeni elektrik alan çizgileri oluşur ve o güzel resim yok olur. Dolayısıyla, büzüşen resim fikri genelde işlemez. Yine de, hızlı hareket eden bir yükün alanlarını hatırlamak için pratik bir yoldur.



Şekil 26-5 Hareket eden bir yükün yakınındaki manyetik alan $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$'dir [Şekil 26-4'le karşılaştırın].

Manyetik alan [Denk. (26.9)'dan] $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$'dir. Radyal bir $\boldsymbol{E}$ alanına girmiş $\boldsymbol{E}$ alanını ele aldığınızda, Şekil 26-5'te gösterildiği gibi, hareket çizgisi etrafında daireler çizen bir $\boldsymbol{B}$ elde edersiniz. c'leri yerine koyarsanız, düşük hızlı yükler için elde ettiğimiz sonuçla aynı olduğunu görürsünüz. c'lerin nereye gitmesi gerektiğini görmenin iyi bir yolu, kuvvet yasasına başvurmaktır.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Gördüğünüz üzere hız çarpı manyetik alan, bir elektrik alanla aynı boyutlara sahiptir. Dolayısıyla, Denk. (26.9)'un sağ tarafı $1/c^2$ çarpanını içermelidir.

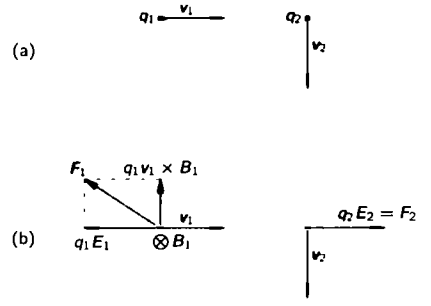
$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c^2} \tag{26.12}$$

Yavaş hareket eden bir yük için ($v \ll c$), $\boldsymbol{E}$ için Coulomb alanını alabiliriz; bu durumda,

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{26.13}$$

olur. Bu denklem, Bölüm 14-7'de bir akımın manyetik alanı için bulduğumuz denklemlere tam olarak karşılık gelmektedir.

Bu arada, düşünmeniz için ilginç bir şeye dikkatinizi çekmek istiyoruz. (Daha sonra bunu tartışmak için geri döneceğiz.) Birbirlerinin yolunu kesebilecek, ancak çarpışmayacak şekilde, hızları birbirine dik açılarda iki proton düşünün. Herhangi bir anda, birbirlerine göre konumları Şekil 26-6 (a)'daki gibi olacaktır. q_2'den dolayı, q_1 üzerindeki yüke veya tam tersine bakalım. q_2 üzerinde, q_1 hareket çizgisi üzerine bir manyetik alan meydana getirmediğinden dolayı, sadece q_1'den kaynaklı elektrik kuvveti vardır. q_1 üzerindeyse, yine elektrik kuvveti, ancak ilave olarak, q_2 tarafından meydana getirilen bir $\boldsymbol{B}$ alanında ilerlediğinden dolayı, bir de manyetik kuvvet vardır. Kuvvetler Şekil 26-6 (b)'de gösterilmiştir. q_1 ve q_2 üzerindeki elektrik yükler eşit ve zıt yöndedir. Bununla birlikte q_1 üzerinde enine bir (manyetik) kuvvet vardır; ancak q_2 *üzerinde enine bir kuvvet yoktur.* Bu etkiye karşı eşit bir tepki yok mudur? Bu sorunun cevabını düşünmeyi size bırakıyoruz.



Şekil 26-6 Hareket eden iki yük arasındaki kuvvetler her zaman eşit ve zıt değildir. "Etki"ye karşı eşit bir "tepki" yok gibi görünmektedir.

26-3 Alanların göreli dönüşümü

Son bölümde, dönüştürülen potansiyellerin elektrik ve manyetik alanlarını hesapladık. Alanlar elbette, potansiyellerin fiziksel anlamı ve gerçekliğine dair daha önceden sunduğumuz fikirlere rağmen önemlidir. Alanlar da gerçektir. "Durağan" bir sistemdeki alanları halihazırda biliyorsanız, hareket eden bir sistemdeki alanları hesaplamanın bir yolunu bilmek, birçok amaç için kullanışlı olur. ϕ ve $\boldsymbol{A}$ için dönüşüm yasalarımız var, çünkü A_μ bir dört-vektördür. Şimdi de $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin dönüşüm yasalarını bilmek istiyoruz. Bir çerçevedeki $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$, çerçevenin yanından geçip giden bir başka çerçevede nasıl gözükür? Bu dönüşüm kullanışlıdır. Her zaman potansiyeller üzerinden gidebiliriz, ancak bazen alanları doğrudan dönüştürebilmek yararlıdır. Şimdi bunun nasıl olduğunu görelim.

Alanların dönüşüm yasalarını nasıl bulabiliriz? ϕ ve $\boldsymbol{A}$ için dönüşüm yasalarını ve alanların ϕ ve $\boldsymbol{A}$ cinsinden nasıl belirlendiğini biliyoruz. $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{E}$ için dönüşümü bulmak kolay olmalı. (Her bir vektör için, onu dört-vektör yapacak bir şey olduğunu düşünebilirsiniz. Diğer bir deyişle $\boldsymbol{E}$ için, dördüncü bileşen olarak kullanacağımız bir şey olmalı. Aynı zamanda $\boldsymbol{B}$ için de. Ancak bu böyle değildir. Beklediğinizden çok daha farklıdır durum.) Başlamak için, sadece bir $\boldsymbol{B}$ manyetik alanını ele alalım. Elbette o $\nabla \times \boldsymbol{A}$'dır. Vektör potansiyelinin x, y ve z bileşenleri yanında bir de t bileşeni olması gerektiğini biliyoruz. ∇ gibi türevler için, x, y, z kısımları dışında bir de t'ye göre türev olması gerektiğini de biliyoruz. O halde gelin, "y" yerine "t", veya "z" yerine "t" ya da benzeri bir değişim yaptığımızda ne olduğunu görelim.

Öncelikle, bileşenlerini yazdığımızda $\nabla \times \boldsymbol{A}$'nın terimlerinin biçimine dikkat edin.

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{26.14}$$

x bileşeni, y ve z bileşenlerini içeren bir çift terime eşittir. Bu türevler ve bileşenler bileşimine bir "zy şeyi" dediğimizi düşünüp, onu F_{zy}'yle kısaltalım. Aşağıdaki denkliği demek istiyoruz:

$$F_{zy} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{26.15}$$

Benzer şekilde, B_y de benzer bir "şey"e eşittir, ancak bu sefer bir "xz şeyi"dir. Ve elbette B_z de, "yx şeyi"ne karşılık gelir. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$B_x = F_{zy}, \qquad B_y = F_{xz}, \qquad B_z = F_{yx} \tag{26.16}$$

Şimdi de, "t" tipi şeyler, örneğin F_{xt} ve F_{tz} gibi, uydurmaya çalışsak ne olur acaba (sonuçta doğa x, y, z ve t'de hoş ve simetrik olmalı)? Örneğin, F_{tz} nedir? Elbette aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

$A_t = \phi$ eşitliğini hatırlarsanız, aynı zamanda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

Bunu daha önce görmüştünüz. E'nin z bileşenidir bu. Aslında, –bir yanlış işaretle– neredeyse. Ancak, dört boyutlu gradyanda t türevinin x, y ve z'den eksi işaretle geldiğini unuttuk. Dolayısıyla F_{tz}'nin daha tutarlı uzantısını, yani aşağıdaki eşitliği almalıydık:

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{26.17}$$

Bu, tam olarak $-E_z$'ye eşittir. F_{tx} ve F_{ty} için de deneyerek, aşağıdaki üç eşitliği elde ederiz.

$$F_{tx} = -E_x \qquad F_{ty} = -E_y \qquad F_{tz} = -E_z \tag{26.18}$$

Her iki alt simge de t olursa ne olur? Ya da, her ikisi de x olursa ne olur? Bize, sıfırdan başka bir şey vermeyen aşağıdaki denklemi

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t}$$

ve aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

Bu F şeylerinden altısı elimizdedir. Alt simgeleri tersine çevirerek, altı adet daha elde edebiliriz ancak

$$F_{xy} = -F_{yx}$$

ve benzeri eşitliklerden dolayı bize yeni bir şey vermezler. Dolayısıyla, çiftler halindeki dört alt simgenin on altı olası birleşiminde, sadece altı farklı fiziksel nesne elde etmiş oluruz *ve onlar B ve E'nin bileşenleridir.*

F'yi genel şekilde ifade etmek için μ ve ν genel alt simgelerini kullanacağız. μ ve ν –bizim dört-vektör gösterimimizde t, x, y ve z anlamına gelen– 0, 1, 2 veya 3 olabilirler. Ayrıca, $F_{\mu\nu}$'yi, $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ ve $A_\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$ eşitliklerini hatırlayıp, aşağıdaki gibi

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \tag{26.19}$$

tanımlarsak, her şey bizim dört-vektör gösterimimizle uyumlu olur.

Tablo 26-1
$F_{\mu\nu}$ bileşenleri

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z$	$F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x$	$F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y$	$F_{zt} = E_z$

Doğada birbirleriyle bütün oluşturan –aynı şeyin farklı yönleri olan– altı nicelik bulmuş olduk. Işık hızına ilişkin bir kaygımızın olmadığı, yavaş hareket eden dünyamızda farklı vektörler olarak ele aldığımız elektrik ve manyetik alanlar, dört-uzayda vektör değildirler. Yeni bir "şey"in parçalarıdırlar. Fiziksel "alan" dediğimiz şey aslında, altı bileşenli $F_{\mu\nu}$ nesnesidir. Görelilik için ona bu şekilde bakmalıyız. $F_{\mu\nu}$ için sonuçlarımızı Tablo 26-1'de özetledik.

Gördüğünüz üzere, burada yaptığımız şey vektörel çarpımı genelleştirmektir. Büküm işlemiyle başladık ve *iki* vektörün dönüşüm özellikleri ile bükümün dönüşüm özellikleri aynı olduğundan bildiğimiz üç boyutlu A vektörü ve gradyan işlemcisi de vektör gibi davranır. Şimdi, üç boyuttaki sıradan bir vektörel çarpıma bakalım. Örneğin, bir parçacığın açısal momentumuna. Bir nesne bir düzlemde ilerlerken, $(xv_y - yv_x)$ niceliği önemlidir. Üç boyutta hareket için, açısal momentum dediğimiz, böyle üç önemli nicelik vardır:

$$L_{xy} = m(xv_y - yv_x) \qquad L_{yz} = m(yv_z - zv_y) \qquad L_{zx} = m(zv_x - xv_z)$$

Belki de şimdiden unuttunuz, ancak I. Cilt, 20. Bölümde bu üç niceliğin bir vektörün bileşenleriyle ifade edilebileceğini keşfetmiştik. Bunun için, sağ el göste-

rimiyle yapay bir kural geliştirmiştik. Şanslıydık. Şanslıydık çünkü L_{ij} (i ve j, x, y veya z'ye eşitken) simetrik olmayan bir nesneydi:

$$L_{ij} = -L_{ji}, \qquad L_{ii} = 0$$

Olası dokuz nicelikte, sadece üç adet bağımsız sayı vardır. Tesadüfe bakın ki, koordinat sistemlerini değiştirdiğinizde sadece bu üç nesne, bir vektörün bileşenlerinin dönüştüğü şekilde dönüşmektedir.

Aynı şey sayesinde, bir yüzey elemanını da bir vektör olarak gösterebiliriz. Bir yüzey elemanının iki parçası vardır –dx ve dy– diyelim ve yüzeye dik da vektörüyle bunları temsil edebiliriz. Ancak bunu dört boyutta yapamayız. $dxdy$'ye "normal" nedir? z boyunca mıdır yoksa t boyunca mıdır?

Kısacası, şansımıza, üç boyutta L_{ij} gibi iki vektörün birleşimini aldığınızda, onu yine bir başka vektör şeklinde yazabiliyoruz çünkü bir vektörün bileşenleri şeklinde dönüşebilecek sadece üç terim vardır. Ancak dört boyutta bu açıkça imkânsızdır; çünkü altı bağımsız terim vardır ve altı şeyi dört şeyle gösteremezsiniz.

Üç boyutta bile, vektör şeklinde gösterilemeyecek vektör birleşimleri elde etmek mümkündür. $\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$ ve $\boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$ şeklinde iki vektörü ele alalım ve bileşenlerinin çeşitli birleşimlerini yazalım. a_xb_x, a_xb_y, vs. Dokuz olası nicelik vardır:

$$\begin{array}{lll} a_xb_x, & a_xb_y, & a_xb_z \\ a_yb_x, & a_yb_y, & a_yb_z \\ a_zb_x, & a_zb_y, & a_zb_z \end{array}$$

Bu niceliklere T_{ij} diyebiliriz.

Böylece, dönmüş bir (z ekseni etrafında dönmüş olsun) koordinat sistemine gittiğimizde $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ bileşenleri değişir. Örneğin yeni sistemde, a_x aşağıdaki eşitlikle

$$a'_x = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta$$

ve b_y de aşağıdaki eşitlikle değiştirilir:

$$b'_y = b_y \cos\theta - b_x \sin\theta$$

Diğer bileşenler de aynı bu şekilde değiştirilir. T_{ij} niceliğinin dokuz bileşeni de değişir elbette. Örneğin, $T_{xy} = a_xb_y$ aşağıdaki

$$T'_{xy} = a_xb_y(\cos^2\theta) - a_xb_x(\cos\theta\sin\theta) + a_yb_y(\sin\theta\cos\theta) - a_yb_x(\sin^2\theta)$$

veya şu aşağıdaki ifadeyle değiştirilir:

$$T'_{xy} = T_{xy}\cos^2\theta - T_{xx}\cos\theta\sin\theta + T_{yy}\sin\theta\cos\theta - T_{yx}\sin^2\theta$$

T'_{ij}'nin her bir bileşeni, T_{ij} bileşenlerinin doğrusal birleşimidir.

Böylece sadece, vektör gibi dönüşen üç bileşeni olan $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ gibi bir "vektör çarpımının" mümkün olduğunu değil, aynı zamanda, nasıl işlediklerini anlayabileceğimiz karmaşık bir kurallar kümesiyle dönmenin altında dönüşen, *dokuz* bileşenli iki T_{ij} vektörünün yeni bir çeşit "çarpımını" yapabileceğimizi de keşfetmiş olduk. Böyle bir nesneyi tanımlayan, bir yerine iki indis vardır ve adına *tensör* denir. "İkinci derece" bir tensördür. Üç vektörle bu oyunu oynayıp, üçüncü derece bir tensör, ya da dört vektörle dördüncü dereceden bir tensör elde edebilirsiniz ve bu böyle gider. Birinci dereceden bir tensör, bir vektördür.

Elektromanyetik niceliğimiz $F_{\mu\nu}$ de ikinci dereceden bir tensördür, çünkü iki indisi vardır. Ama dört boyutta bir tensördür. Birazdan üzerinde duracağımız özel bir şekilde –vektörlerin çarpımının dönüşme şeklidir– dönüşür. İndislerinin yerini değiştirdiğinizde, $F_{\mu\nu}$ işaret değiştirir. Bu özel bir durumdur. O, ters *simetrik bir tensördür.* Böylece şunu diyebiliriz: Elektrik ve manyetik alanların her ikisi de, dört boyutta ikinci dereceden bir simetrik olmayan tensörün parçasıdır.

Uzun bir yoldan geldiniz buraya. Hızın ne olduğunu tanımladığımız zamanı hatırlıyor musunuz? Şimdiyse "dört boyutta ikinci dereceden bir simetrik olmayan tensör" hakkında konuşuyoruz.

Şimdi, $F_{\mu\nu}$'nin dönüşüm yasasını bulmalıyız. Bulması çok zor değildir, sadece biraz zahmetlidir. Çok zihin gücü gerektirmeyecek, ama iş için aynı şeyi söyleyemeyiz. İstediğimiz şey, $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$'nün Lorentz dönüşümüdür. ∇_μ bir vektörün özel durumu olduğundan, $G_{\mu\nu}$ diyeceğimiz genel simetrik olmayan vektör birleşimiyle çalışacağız:

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu \tag{26.20}$$

(Amaçlarımız doğrultusunda, a_μ en sonda ∇_μ'yla ve b_μ da A_μ potansiyeliyle değiştirilecektir.) a_μ ve b_μ bileşenler Lorentz denklemleriyle aşağıdaki gibi dönüşürler:

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} & b'_t &= \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \\ a'_x &= \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} & b'_x &= \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \\ a'_y &= a_y & b'_y &= b_y \\ a'_z &= a_z & b'_z &= a_z \end{aligned} \tag{26.21}$$

Şimdi $G_{\mu\nu}$'nin bileşenlerini dönüştürelim. Önce G_{tx}:

$$\begin{aligned} G'_{tx} &= a'_t b'_x - a'_x b'_t \\ &= \left(\frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}}\right) - \left(\frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}}\right) \\ &= a_t b_x - a_x b_t \end{aligned}$$

Ancak bu sadece G_{tx}'tir; dolayısıyla aşağıdaki basit sonucu elde ederiz:

$$G'_{tx} = G_{tx}$$

Birini daha yapalım:

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}$$

Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Elbette, aynı şekilde:

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Gerisinin nasıl geleceği bellidir. Gelin, altı terimi bir tablo haline getirelim. Ancak şimdi, onları $F_{\mu\nu}$ için de yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx} & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{ty}}{\sqrt{1-v^2}} \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}} & F'_{yz} &= F_{yz} \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}} & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - vF_{zt}}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \tag{26.22}$$

Elbette, hâlâ $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ ve $F'_{\mu\mu} = 0$ eşitlikleri de elimizdedir.

Böylece elektrik ve manyetik alanların dönüşümünü elde ettik. Şimdi tek yapmamız gereken, $F_{\mu\nu}$ terimlerinin E ve B cinsinden neye karşılık geldiklerini Tablo 26-1'e bakarak öğrenmektir. Sadece bir yerdeğiştirme meselesi. Böylece sıradan sembollerle nasıl göründüğünü gördüğümüze göre, alan bileşenlerinin dönüşümünü Tablo 26-2'de tekrar yazdık.

Tablo 26-2
Elektrik ve manyetik alanların Lorentz dönüşümü (Not: $c = 1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \dfrac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \dfrac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \dfrac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \dfrac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

Tablo 26-2'deki denklemler bize, E ve B'nin bir eylemsizlik çerçevesinden diğerine nasıl değiştiğini anlatıyor. Bir sistemdeki E ve B'yi biliyorsak, v hızıyla hareket eden bir diğerinde ne olduklarını bulabiliriz.

v, x yönünde olduğundan, v'li terimlerin hepsinin $v \times E$ ve $v \times B$ vektörel çarpımlarının bileşenleri olduğunu fark ederseniz, bu denklemleri daha basit bir biçimde yazabilirsiniz. Dönüşümleri, Tablo 26-3'te gösterildiği gibi tekrar yazabilirsiniz.

Tablo 26-3
Alan dönüşümleri için alternatif bir biçim (Not: $c = 1$)

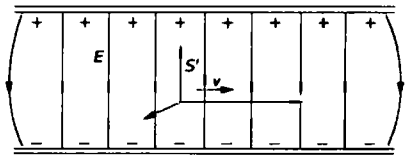
$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \dfrac{(E + v \times B)_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \dfrac{(B - v \times E)_y}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \dfrac{(E + v \times B)_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \dfrac{(B - v \times E)_z}{\sqrt{1-v^2}}$

Şimdi artık hangi bileşenin nereye gittiğini hatırlamak kolaydır. Aslında x boyunca alan bileşenlerini "paralel" bileşenler $E_\parallel$ ve $B_\parallel$ olarak (S ve S''nün göreli hızına paralel olduklarından dolayı) ve toplam enlemesine bileşenleri de $-y$ ve z bileşenlerinin vektör toplamlarını– "dik" $E_\perp$ ve $B_\perp$ bileşenleri olarak tanımlarsak, dönüşüm daha da basitçe yazılabilir. Böylece, Tablo 26-4'teki denklemleri elde ederiz. (c'leri de geri koyduk, böylece geriye dönük başvurduğumuzda daha kullanışlı olur.)

Tablo 26-4
***E* ve *B*'nin bir başka Lorentz dönüşüm biçimi**

$E'_\parallel = E_\parallel$	$B'_\parallel = B_\parallel$
$E'_\perp = \dfrac{(E + v \times B)_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$B'_\perp = \dfrac{\left(B - \dfrac{v \times E}{c^2}\right)_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Alan dönüşümleri sayesinde, daha önce çözdüğümüz bazı problemleri –örneğin, hareket eden bir noktasal yükün alanlarını– farklı bir yoldan çözebiliriz. Daha önce alanları, potansiyellerin türevini alarak hesaplamıştık. Ancak şimdi bunu, Coulomb alanını dönüştürerek yapabiliriz. S çerçevesinde hareketsiz bir noktasal yük varsa, sadece basit bir radyal E alanı vardır. S' çerçevesi, S'in ya-



Şekil 26-7 Statik bir elektrik alanın içinden geçen S' koordinat çerçevesi.

nından $v = -u$ hızıyla geçerse, S' çerçevesinde u hızıyla hareket eden bir noktasal yük görürüz. Tablo 26-3 ve 26-4'teki dönüşümlerin, Bölüm 26-2'de elde ettiklerimizle aynı elektrik ve manyetik alanlar verdiğini göstermeyi size bırakıyoruz.

Tablo 26-2'deki dönüşüm, sabit yüklerden oluşan *herhangi* bir sistemin yanından geçerken ne gördüğümüze dair ilginç ve basit bir cevap sunar bize. Örneğin, Şekil 26-7'de gösterildiği gibi, bir kondansatörün levhaları arasından geçerken S' *çerçevemizdeki* alanları bilmek istediğimizi düşünelim. (Elbette, yüklü bir kondansatörün *bizim* yanımızdan geçtiğini söylemekle aynı şeydir bu.) Ne görürüz? Bu durumda dönüşüm kolaydır, çünkü başlangıç sistemindeki $\boldsymbol{B}$ alanı sıfırdır. Öncelikle, hareketimizin $\boldsymbol{E}$'ye dik olduğunu varsayalım; bu durumda $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ alanını görürüz ve o hâlâ tamamen enlemesinedir. İlaveten, $\boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}'/c^2$ manyetik alanını görürüz. ($\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\boldsymbol{B}'$ için olan denklemimizde gözükmez, çünkü $\boldsymbol{E}$ yerine $\boldsymbol{E}'$ cinsinden yazdık onu; ancak bu aynı şeydir.) Dolayısıyla statik bir elektrik alana dik olarak hareket ederken, enlemesine bir $\boldsymbol{B}$ görürüz. Hareketimiz $\boldsymbol{E}$'ye dik değilse, $\boldsymbol{E}$'yi $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ ve $\boldsymbol{E}_{\perp}$ parçalarına ayırırız. Paralel kısım değişmemiştir, $\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}$, ve dik bileşen de tıpkı tarif edileni yapar.

Tersi bir durumu ele alalım ve tamamen statik bir *manyetik* alan içinden geçtiğimizi düşünelim. Bu sefer, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}'$ ifadesine eşit bir $\boldsymbol{E}'$ *elektrik* alanı görürüz ve manyetik alan da (enlemesine olduğunu varsayarsak) $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanıyla değişmiştir. v, c'den çok küçük olduğu sürece, manyetik alandaki değişimi ihmal edebiliriz ve asıl etki elektrik alanın görünmesidir. Bu etkiye bir örnek olarak, bir zamanın meşhur problemi olan bir uçağın hızını belirlemeyi ele alalım. Yerden yansımaları kullanarak radarla hava hızını bulabildiğimiz için artık meşhur değildir; ancak uzun yıllar boyunca bir uçağın hızını kötü havada bulmak çok zordu. Yeri göremezdiniz ve neresi yukarı, neresi aşağı bilemezdiniz ve daha birçok problemle karşılaştırdınız. Yine de, dünyaya göre ne hızda ilerlediğinizi bilmek önemliydi. Dünyayı görmeden bunu nasıl yapabilirsiniz? Dönüşüm denklemlerini bilen birçok kişi, uçağın dünyanın manyetik alanında ilerlediği fikriyle çıkageldi. Manyetik alanı iyi kötü bildiğimiz bir yerde bir uçağın uçtuğunu düşünelim. Manyetik alanın dik olduğu basit durumu ele alalım. Manyetik alanın içinden yatay $\boldsymbol{v}$ hızıyla geçiyorsanız, o zaman denkleme göre örneğin, hareket çizgisine dik bir $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ elektrik alanı görmeliyiz. Yalıtılmış bir teli uçak boyunca uzatırsak, bu elektrik alan telin uçlarında yük indükleyecektir. Bu, yeni bir şey değildir. Yerden bakan bir gözlemciye göre, bir alan içinden telle geçmekteyiz ve $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvveti telin uçlarına yüklerin hareket etmesini sağlamaktadır. Dönüşüm denklemleri de aynı şeyi farklı yoldan ifade ederler. (Bir şeyi birden fazla yolla ifade edebiliyor olmamız, yollardan birinin diğerinden iyi olduğu anlamına gelmez. O kadar çok yöntem ve araçla donanıyoruz ki, aynı sonucu 65 farklı yolla elde edebiliriz!)

Diğer bir deyişle, v'yi ölçmek için tek yapmamız gereken telin uçları arasındaki voltajı ölçmektir. Voltmetreyle bunu yapamayız, çünkü aynı alanlar voltmetrenin tellerini de etkiler; ancak bu tür alanları ölçmenin yolları vardır. 9. Bölümde atmosferik elektriği tartışırken, bunlardan bazılarından bahsetmiştik. Dolayısıyla, uçağın hızını ölçmek mümkündür.

Bununla birlikte, bu önemli problem bu şekilde çözülmemiştir. Bunun nedeni, meydana gelen elektrik alanın metre başına mili-Volt'lar mertebesinde olmasıdır. Bu tür alanları ölçmek mümkündür, ancak sıkıntı şudur ki, bu alanlar, ne yazık ki, diğer elektrik alanlardan farklı değildir. Manyetik alanın içinde hareket ederken üretilen alan, havada bir başka nedenle hâlihazırda var olan diğer alanlardan, örneğin havadaki elektrostatik yüklerden veya bulutlarda olan, ayırt edilemez. 9. Bölümde, dünya yüzeyinin üstünde tipik olarak, metre başına 100 Volt şiddetinde elektrik alanlar olduğunu belirtmiştik. Ancak bunlar gayet düzensizdir. Dolayısıyla uçak havada yol alırken, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$'yle meydana gelen ufak alanlara kıyasla devasa boyutta atmosferik elektrik alanların değişimlerini görür ve pratik nedenlerden dolayı, bir uçağın hızını dünyanın manyetik alanından geçişiyle ölçmek imkânsızdır.

26-4 Göreli gösterimde hareket denklemleri*

Bulduğumuz zaman alanların ne yaptığını bilmediğimiz sürece, Maxwell denklemlerini kullanarak elektrik ve manyetik alanları bulmak çok da faydalı değildir. Alanların, yükler üzerindeki kuvvetleri bulmak için gerekli olduğunu ve o kuvvetlerin de yükün hareketini belirlediğini hatırlayın. Dolayısıyla, elbette, elektrodinamik kuramının bir parçası da kuvvetler ve yüklerin hareketleri arasındaki ilişkidir.

E ve B alanlarındaki tek bir yük için kuvvet aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F = q(E + v \times B) \tag{26.23}$$

Düşük hızlar için bu kuvvet, kütle çarpı ivmelenmeye eşittir; ancak herhangi bir hız için doğru yasa, kuvvetin dp/dt'ye eşit olduğudur. $p = m_0 v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ eşitliğini kullanarak, hareket denkleminin göreli olarak doğrusunu aşağıdaki denklem gibi yazabiliriz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = F = q(E + v \times B) \tag{26.24}$$

Şimdi bu denklemi, görelilik bakış açısıyla inceleyelim. Maxwell denklemlerini göreli biçime soktuğumuza göre, hareket denklemlerinin göreli biçimde nasıl gözükeceğini görmek ilginç olurdu. Bakalım, denklemi dört-vektör gösterimiyle tekrar yazabilecek miyiz?

Momentumun, zaman bileşeni $m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ enerjisi olan bir p_μ dört-vektörünün parçası olduğunu biliyoruz. Bu durumda, Denk. (26.24)'ün sol tarafını dp_μ/dt'yle değiştirmeyi düşünebiliriz. Bu durumda tek ihtiyacımız, F için bir dördüncü bileşen bulmaktır. Bu dördüncü bileşen enerjinin değişim hızına veya iş yapma hızı $F \cdot v$'ye eşit olmalıdır. Böylece Denk. (26.24)'ün sağ tarafını ($F \cdot v$, F_x, F_y, F_z) şeklinde bir dört-vektör gibi yazabiliriz. Ancak bu, onu bir dört-vektör yapmaz.

Bir dört-vektörün *zaman* türevi artık dört-vektör değildir; çünkü d/dt, t'nin ölçülebilmesi için özel bir çerçeve seçimi gerektirir. Bu derdi, v'yi bir dört-vektöre dönüştürmeye çalışırken çekmiştik. İlk tahminimiz, zaman bileşeninin $cdt/dt = c$ olabileceğiydi. Ancak,

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (c, v) \tag{26.25}$$

nicelikleri bir dört-vektörün bileşenleri *değildirler*. Dört-vektöre dönüştürülebilmeleri için her bir bileşenin $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ faktörüyle çarpılması gerektiğini bulduk. "Dört-hız" u_μ, dört-vektördür;

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{26.26}$$

Demek ki türevleri bir dört-vektör yapmak istiyorsak, d/dt'yi $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 'yle çarpmalıyız.

Bu durumda ikinci tahminimiz aşağıdakinin de bir dört-vektör olması gerektiğidir:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}(p_\mu) \tag{26.27}$$

Ancak, v nedir? O, parçacığın hızıdır. Koordinat sisteminin değil! Bu durumda

$$f_\mu = \left(\frac{F \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{26.28}$$

şeklinde ifade edilen f_μ niceliği, bir kuvvetin dört boyutuna uzantıdır. Ona "dört-kuvvet" diyebiliriz. Gerçekten de bir dört-vektördür ve uzay bileşenleri F'in değil ama $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$'nin bileşenleridir.

Soru: neden f_μ bir dört-vektördür? $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanına dair biraz anlayı-

* Bu bölümde c'leri geri yerlerine koyacağız.

şımız olsa iyi olurdu. Şu ana kadar iki kez karşımıza çıktığına göre, d/dt'nin aynı çarpanla düzeltilebileceğinin nedenini anlamanın vaktidir artık. Cevap şu ifade gibidir: herhangi bir x fonksiyonunun zamana göre türevini aldığımızda, Δx artışını, t değişkeninde küçük Δt aralığında hesaplıyoruz. Ancak bir başka çerçevede, Δt aralığı hem t', hem de x''nde bir değişime karşılık gelebilir. Dolayısıyla, sadece t''nü değiştirirsek, x'teki değişim farklı olacaktır. Türevimiz için, *uzay-zamandaki* "aralığın" ölçüsü olan bir değişken bulmalıyız. Böyle bir değişken, bütün koordinat sistemlerinde aynı olacaktır. Bir parçacık dört-uzayda "hareket ettiği" zaman, Δt, Δx, Δy, Δz değişimleri meydana gelir. Bunlardan bir değişmez aralık çıkarabilir miyiz? Bunlar $x_\mu = (ct, x, y, z)$ dört-vektörünün bileşenleridir; dolayısıyla aşağıdaki gibi bir Δs niceliği –bu dört boyutlu bir skaler çarpımdır– tanımladığımızda, dört boyutlu aralığı ölçmek için iyi bir dört-skaler elde etmiş oluruz.

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2}\Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2}(c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2) \tag{26.29}$$

Δs –veya limiti ds– sayesinde, $s = \int ds$ şeklinde bir parametre tanımlayabiliriz. s'e göre türev, d/ds de hoş bir dört boyutlu işlemdir; çünkü Lorentz dönüşümüne göre değişmezdir.

Hareket eden bir parçacık için ds ve dt'yi ilişkilendirmek kolaydır. Hareket eden bir parçacık için aşağıdaki ifadeyi

$$dx = v_x dt \qquad dy = v_y dt \qquad dz = v_z dt \tag{26.30}$$

ve aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{26.31}$$

Böylece,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \frac{d}{dt}$$

işlemcisi, *değişmez bir işlemcidir*. Herhangi bir dört-vektör üzerinde onunla işlem yaparsak, bir başka dört-vektör elde ederiz. Örneğin, (ct, x, y, z) üzerinde işlem yaparsak, dört-hız u_μ'yü elde ederiz:

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu$$

Şimdi, neden $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanının neden her şeyi düzelttiğini anlamış olduk.

Değişmez s değişkeni yararlı bir fiziksel niceliktir. Ona, bir parçacığın yolundaki "uygun zaman" denir; çünkü ds her zaman, herhangi bir anda parçacıkla beraber ilerleyen bir çerçevenin zaman aralığıdır. (Böylece, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ve $\Delta s = \Delta t$) ilerleme hızı ivmelenmeye dayanmayan bir "saat" hayal ederseniz, parçacıkla beraber taşınan böyle bir saat s zamanını gösterirdi.

Şimdi geriye gidip, Newton yasasını (Einstein'ın düzelttiği haliyle) aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu \tag{26.32}$$

f_μ, Denk. (26.28)'le bulunabilir. Ayrıca, p_μ momentumu da, $x_\mu = (ct, x, y, z)$ koordinatları parçacığın yolunu gösterirken, aşağıdaki eşitlik gibi yazılabilir:

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds} \tag{26.33}$$

Son olarak, dört boyutlu gösterim bize hareket denklemlerinin, $F = ma$'yı hatırlatan aşağıdaki basit biçimini verir:

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \tag{26.34}$$

Denklem (26.34)'ün $F = ma$'yla aynı *olmadığını* fark etmeniz önemlidir; çünkü dört-vektör denklemi (26.34), yüksek hızlar için Newton yasasından farklı olan

görelilik mekaniğini içerir. *Anlamlarını hiç değiştirmeden* –sadece bir gösterim değişikliğiyle– göreli biçimde denklemleri tekrar yazabildiğimiz Maxwell denklemleri durumuna benzemez bu.

Şimdi Denk. (26.24)'e dönelim ve eşitliğin sağ tarafını dört-vektör gösterimiyle nasıl yazabileceğimize bakalım. Üç bileşen $-\sqrt{1-v^2/c^2}$'ye bölündüklerinde– f_μ'nün bileşenleridir, dolayısıyla:

$$f_x = \frac{q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\left|\frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{v_yB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{v_zB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right| \tag{26.35}$$

olur. Şimdi bütün nicelikleri göreli gösterimlerine yerleştirmeliyiz. Öncelikle $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ve $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ve $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$'nin, dört-hız u_μ'nün t, y ve z bileşenleri olduğunu belirtelim. $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin bileşenleri de, $F_{\mu\nu}$ alanlarının ikinci dereceden tensörünün bileşenleridir. Tablo 26-1'den, E_x, B_z ve B_y'ye karşılık gelen $F_{\mu\nu}$ bileşenlerine baktığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz*:

$$f_x = q(u_tF_{xt} - u_yF_{xy} - u_zF_{xz})$$

Bu eşitlikteki her terimin bir x alt simgesi var; bu, x bileşeni bulduğumuz için mantıklıdır. Sonra diğerleri çiftler halinde $-xx$ teriminin kayıp olması haricinde– belirir: tt, yy, zz. Biz de denkleme onu sokar ve aşağıdaki denklemi yazarız:

$$f_x = q(u_tF_{xt} - u_xF_{xx} - u_yF_{xy} - u_zF_{xz}) \tag{26.36}$$

$F_{\mu\nu}$ ters simetrik olduğundan bir şeyi değiştirmedik ve F_{xx} sıfırdır. xx terimini koymak istememizin nedeni, Denk. (26.36)'yı aşağıdaki gibi yazabilmek içindir:

$$f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu} \tag{26.37}$$

Bir alt simge *iki* kere gözükürse (aynı burada ν'nün gözüktüğü gibi), *işaretler için aynı gösterimi kullanarak*, aynı skaler çarpımdaki gibi terimler toplanır diye bir kural geliştirirsek, bu denklem, Denk. (26.36)'nın aynısıdır.

(26.27)'nin $\mu = y$ veya $\mu = z$ için de aynı şekilde geçerli olduğuna kolaylıkla inanabilirsiniz, ama peki $\mu = t$? Gelin, eğlencesine, ne çıkacağına bakalım:

$$f_t = q(u_tF_{tt} - u_xF_{tx} - u_yF_{ty} - u_zF_{tz})$$

Şimdi, E ve B'ler cinsinden yazmalı:

$$f_t = q\left(0+\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}E_x+\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}E_y+\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}E_z\right) \tag{26.38}$$

veya

$$f_t = \frac{q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ancak, Denk. (26.28)'den, f_t'nin aşağıdaki eşitlik olması gerektiğini biliyoruz:

$$\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Bu, $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}$ sıfır olduğundan, Denk. (26.38)'le aynı şeydir. Dolayısıyla, her şey yerli yerine oturdu.

Özetlersek, hareket denklemimiz aşağıdaki zarif şekilde yazılabilir:

$$m_0\frac{d^2x_\mu}{ds^2} = f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu} \tag{26.39}$$

Her ne kadar denklemlerin bu şekilde yazılabildiğini görmek hoş olsa da, bu biçimde yazım pek yararlı değildir. Parçacık hareketlerini başlangıçtaki denklemlerimiz (26.24)'le çözmek daha elverişlidir ve biz de öyle yapacağız.

---

* Tablo 26-1'de c'leri geri koyduğumuzda, E'nin bileşenlerine karşılık gelen tüm $F_{\mu\nu}$ bileşenleri $1/c$ çarpılmıştır.

27

ALAN ENERJİSİ VE ALAN MOMENTUMU

27-1 Yerel korunum
27-2 Enerji korunumu ve elektromanyetizma
27-3 Elektromanyetik alanda enerji yoğunluğu ve enerji akışı
27-4 Alan enerjisinin belirsizliği
27-5 Enerji akışı örnekleri
27-6 Alan momentumu

27-1 Yerel korunum

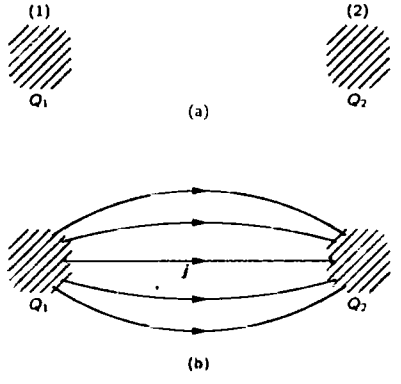
Maddenin enerjisinin korunmadığı apaçık ortadadır. Bir nesne ışık yaydığında, enerji kaybeder. Bununla birlikte, kaybolan enerji bir başka biçimde tanımlanabilir. Örneğin, ışık olarak. Dolayısıyla enerjinin korunumu kuramı, ışıkla ilişkili veya genel olarak elektromanyetik alanla ilişkili enerji göz önüne alınmazsa eksik kalır. Şimdi enerjinin korunumu yasası ve ayrıca alanların momentumuna el atacağız. Elbette, biri olmadan diğerini ele alamayız; zira görelilik kuramına göre onlar aynı dört-vektörün farklı yönleridir.

I. Cildin başlarında, enerjinin korunumunu tartışmıştık. O zaman sadece, dünyadaki toplam enerjinin sabit olduğunu söylemiştik. Şimdi enerjinin korunumu yasası fikrini önemli bir şekilde genişletmek istiyoruz. Enerjinin *nasıl* korunduğunun *detayını* veren bir şekilde. Yeni yasaya göre, bir bölgeden enerji çıkışı oluyorsa, bunun nedeni o bölgenin sınırlarından dışarıya doğru *akmasıdır*. Böyle bir sınırlaması olmayan enerji korunumu yasasından bir parça daha kuvvetli bir yasadır.

Bu ifadenin ne anlama geldiğini görmek için, yükün korunumu yasasının nasıl işlediğine bakalım. Yük korunumu yasasını tanımlarken bir j akım yoğunluğu ve ρ yük yoğunluğundan bahsetmiş ve bir yerde yük azaldığı zaman, o yerden uzağa yük akışı olması gerektiğini söylemiştik. Buna, yükün korunumu denir. Yük korunumu yasasının matematiksel biçimi aşağıdaki eşitliktir:

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{27.1}$$

Bu yasaya göre, dünyadaki toplam yük her zaman sabittir. Asla net bir yük kazancı veya kaybı yoktur. Yine de, dünyadaki toplam yük başka bir şekilde de sabit olabilir. (1) noktası yakınında bir Q_1 yükü olduğunu, uzaktaki bir (2) noktası yakınındaysa hiç yük olmadığını varsayalım (Şekil 27-1). Şimdi, zaman geçtikçe, Q_1 yükünün yavaşça azaldığını ve *eşzamanlı olarak* (2) noktası yakınında bir Q_2 yükünün ortaya çıktığını ve bu iki yükün toplamının her an sabit olduğunu düşünelim. Bir başka deyişle, herhangi bir anda Q_1'in kaybettiği yük miktarı Q_2'ye eklenir. Bu durumda, dünyadaki toplam yük miktarı korunmuş olur. Bu, "dünya çapında" bir korunumdur; ancak "yerel" diyebileceğimiz bir korunum değildir. Çünkü yükün (1) noktasından (2) noktasına gidebilmesi için bu iki nokta arasındaki uzayda herhangi bir yerde görünmesi gerekmedi. Yerel olarak yük tamamen "kaybolmuştur".



Şekil 27-1 Yük korunumunun iki yolu: (a) $Q_1 + Q_2$ sabittir; (b) $dQ_1/dt = -\int j \cdot n da = -dQ_2/dt$.

Bu tür bir "dünya çapında" korunum yasasını görelilik kuramına göre açıklamak zordur. Birbirinden uzak noktalarda "Eşzamanlı anlar", farklı sistemlerde aynı şekilde olmayan bir kavramdır. Bir sistemde eşzamanlı olan iki olay, geçip giden bir başka sistem için eşzamanlı değildir. Tanımlandığı şekliyle bir "dünya çapında" korunum için, Q_1'den kaybolan yükün Q_2'de eşzamanlı olarak belirmesi gerekir. Yoksa, yükün korunmadığı bazı anlar olacaktır. Yük korunumu yasasını "yerel" bir korunum yasası haline getirmeden onu göreli olarak değişmez yapmanın bir yolu yok gibi görünmektedir. İşin aslı, Lorentz göreli değişmezliği gereksinimi, olası doğa yasalarını şaşırtıcı yollarla engeller gibi gözükmekte. Örneğin, çağdaş kuantum alan kuramında, insanlar kuramı "yerel olmayan" bir etkileşime –*buradaki* bir şey, *oradaki* bir şey üzerinde doğrudan et-

kisi olması– izin vererek değiştirmeye çalıştılar; ancak bu fikir görelilik ilkesiyle çelişti.

"Yerel korunum" bir başka fikir daha içerir. Ona göre bir yük bir yerden bir yere, ancak aralarındaki uzayda olan biten bir şey varsa gidebilir. Yasayı tarif etmek için sadece yük yoğunluğu ρ'ye değil; ancak aynı zamanda bir başka niceliğe daha, adına j diyeceğimiz, bir yüzey boyunca yük akışının hızını veren vektöre ihtiyacımız vardır. Bu durumda akış, Denk. (27.1)'le verilen yoğunluğun değişim hızıyla da ilişkilidir. Bu, daha uçta bir tür korunum yasasıdır. Bu yasa, yükün özel bir şekilde, "yerel olarak" korunduğunu ifade eder.

Daha sonra ortaya çıktı ki, enerji korunumu *yerel* bir süreçtir. Uzayın bir bölgesinde sadece enerji yoğunluğu değil, aynı zamanda yüzeyden geçen enerji akışının hızını temsil eden bir vektör vardır. Örneğin, bir ışık kaynağı ışıdığında yüzeyden dışarı giden ışık enerjisini bulabiliriz. Işık kaynağını çevreleyen bir matematiksel yüzey hayal edersek, yüzeyin içinden kaybolan enerji yüzeyin içinden dışarı akıp giden enerjiye eşittir.

27-2 Enerji korunumu ve elektromanyetizma

Şimdi, elektromanyetizma için enerji korunumu yasasını niceliksel bir şekilde yazalım. Bunu yapmak için, uzaydaki bir hacim elemanında ne kadar enerji olduğunu ve enerji akışının hızını tanımlamamız lazım. Öncelikle sadece elektromanyetik alan enerjisini ele aldığımızı düşünelim. Alandaki *enerji yoğunluğunu* (uzaydaki birim hacimdeki enerji miktarını) u ve alanın *enerji akısını* da (akışa dik birim alan boyunca birim zamanda akan enerjiyi) $\boldsymbol{S}$ vektörü temsil etsin. Bu durumda, yük korunumuna, Denk. (27.1), tam bir şekilde benzeterek alandaki "yerel" enerji korunumu yasasını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{S} \tag{27.2}$$

Elbette, yasa genelde doğru değildir. Alan enerjisi korunmaz. Karanlık bir odaya girdiğinizi ve ışığı yaktığınızı düşünelim. Birden oda ışıkla dolar, her ne kadar daha önce yoksa da, artık alanda enerji vardır. Denklem (27.2) eksiksiz bir korunum yasası değildir; çünkü *tek başına alan enerjisi* korunmamakta, sadece dünyadaki toplam enerji –ayrıca maddenin de enerjisi vardır– korunmaktadır. Alan üzerinde madde tarafından yapılan bir iş veya madde üzerinde alan tarafından yapılan bir iş varsa alan enerjisi değişecektir.

Üzerinde durduğumuz hacim içinde madde varsa, ne kadar enerjisi olduğunu biliriz: Her bir parçacığın enerjisi $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ kadardır. Maddenin toplam enerjisi, bütün parçacık enerjilerinin toplamıdır ve bir yüzeyden bu enerjinin akışı, yüzeyden geçen her bir parçacığın taşıdığı enerjinin toplamıdır. Şimdi sadece elektromanyetik alanın enerjisi hakkında konuşmak istiyoruz. Dolayısıyla, belirli bir hacimdeki toplam *alan* enerjisinin *ya* hacimden dışarı akan alan enerjisinden dolayı *ya da* alanın maddeye enerji kaybından (veya enerji kazancından, o da eksi bir kayıptır) dolayı olduğunu belirten bir denklem yazmalıyız. V hacminin içindeki alan enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir ve azalma hızı bu integralin zamana göre türevinin eksisidir:

$$\int_V u\, dV$$

V hacminden dışarı akan alan enerjisi, $\boldsymbol{S}$'nin dik bileşeninin V'yi çevreleyen $\sum$ üzerinden alınan integralidir:

$$\int_\Sigma \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} da$$

Böylece, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$-\frac{d}{dt}\int_V u\, dV = \int_\Sigma \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} da + (V \text{ içinde madde üzerinde yapılan iş}) \tag{27.3}$$

Daha önce, alanın her birim hacimdeki madde üzerinde $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}$ hızında iş yaptığını görmüştük. [Bir parçacığa etki eden kuvvet $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$'dir ve iş yapma hızı da $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$'dir. Birim hacimde N adet parçacık varsa, birim hacimde iş yapma hızı $Nq\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$'dir ve $Nq\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$ eşitliği söz konusudur.] Dolayısıyla $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}$ niceliği alan tarafından birim hacimde ve zamanda kaybedilen enerjiye eşit olmalıdır. Bu durumda Denk. (27.3) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$-\frac{d}{dt}\int_V u\,dV = \int_\Sigma \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}\,da + \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}\,dV \tag{27.4}$$

Bu, alan için enerji korunum yasasıdır. İkinci terimi bir hacim integraline dönüştürebilirsek, Denk. (27.2) gibi bunu da diferansiyel bir denkleme çevirebiliriz. Bunu yapmak, Gauss teoremi sayesinde kolaydır. $\boldsymbol{S}$'in dik bileşeninin yüzey integrali, diverjansının içerdeki hacim üzerinden integralidir. Denk. (27.3), ilk terimin zaman türevini integralin içine aldığımız aşağıdaki eşitliğe denktir:

$$-\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{S}\,dV + \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}\,dV$$

Bu denklem herhangi bir hacim için doğru olduğundan, integralleri kaldırabilir ve elektromanyetik alanlar için enerji denklemini elde edebiliriz:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \tag{27.5}$$

u ve $\boldsymbol{S}$'in ne olduğunu bilmediğimiz sürece, bu denklem pek işimize yaramaz. Belki de onların $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ cinsinden ne olduklarını size söylemeliyiz; zira tek istediğimiz sonuçtur. Bunun yerine size $\boldsymbol{S}$ ve u'yu elde etmek için 1884 yılında Poyntig tarafından kullanılan fikri göstermek istiyoruz ki böylece siz de onların nerden geldiklerini bilin. (Bununla birlikte, bu çıkarımı ilerisi için öğrenmek zorunda değilsiniz.)

27-3 Elektromanyetik alanda enerji yoğunluğu ve enerji akışı

Fikrin temeli, sadece $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ alanlarına dayanan bir $\boldsymbol{S}$ akısı ve u alan enerji yoğunluğu olduğunu düşünmektir. (Örneğin, en azından elektrostatik için enerji yoğunluğunun $\frac{1}{2}\epsilon_0\,\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$ şeklinde yazılabildiğini biliyoruz.) Elbette u ve $\boldsymbol{S}$ potansiyellere veya bir başka şeye dayanabilir, ancak gelin ne çıkartabileceğimize bakalım. $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}$ niceliğini iki terimin toplamı olacak şekilde yeniden yazmayı deneyebiliriz. Bu terimlerden biri bir niceliğin zaman türevidir ve diğeri de ikinci bir niceliğin diverjansıdır. Bu durumda (uygun işaretlerle) ilk nicelik u ve ikinci nicelik de $\boldsymbol{S}$ olurdu. Her iki nicelik de alanlar cinsinden yazılmalıdır; eşitliğimizi aşağıdaki gibi yazmak isteriz:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{S} \tag{27.6}$$

Sol taraf sadece alanlar cinsinden ifade edilmelidir. Bunu nasıl yapabiliriz? Elbette, Maxwell denklemlerini kullanarak. Maxwell denkleminden $\boldsymbol{B}$'nin bükümü için

$$\boldsymbol{j} = \epsilon_0 c^2\,\nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

olur. Bu ifadeyi (27.6)'ya yerleştirdiğimizde sadece $\boldsymbol{E}$'ler ve $\boldsymbol{B}$'leri elde ederiz:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \epsilon_0 c^2\,\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{27.7}$$

Şimdiden işimizin bir kısmını bitirdik. Son terim $-(\partial/\partial t)(\frac{1}{2}\epsilon_0\,\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})$'dir; bir zaman türevidir. Dolayısıyla $\frac{1}{2}\epsilon_0\,\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$ en azından u'nun bir kısmıdır. Elektrostatikte bulduğumuzla aynı şeydir. Şimdi tek yapmamız gereken, diğer terimi bir şeyin diverjansına çevirmektir.

Dikkat ederseniz, Denk. (27.7)'nin sağ tarafındaki ilk terim aşağıdakiyle aynıdır:

$$(\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{E} \tag{27.8}$$

ve, vektör cebirinden bildiğiniz üzere, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ ifadesi, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$'yle aynıdır; dolayısıyla terimimiz aşağıdakiyle aynıdır ve istediğimiz gibi, "bir şeyin" diverjansını elde etmiş olduk.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) \tag{27.9}$$

Ancak bu yanlıştır! Daha önceden ∇ işlemcisinin bir vektör "gibi" olduğunu; ancak "tam olarak" aynı olmadığı konusunda uyarıda bulunmuştuk. Tamamen aynı olmamasının nedeni, analizden gelen ilave bir *kural* olmasıdır: bir türev işlemcisi bir çarpımdan önceyse, sağındaki her şey üzerinde etkilidir. Denklem (27.7)'de ∇ sadece $\boldsymbol{B}$ üzerinde işlem yapar, $\boldsymbol{E}$ üzerinde değil. Ancak (27.9) biçiminde, normal kurala göre ∇ hem $\boldsymbol{B}$ hem de $\boldsymbol{E}$ üzerinde işlem yapar. Dolayısıyla aynı şey *değildir*. Aslında, $\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E})$'nin bileşenleri üzerinde çalışırsak, $\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$ *artı* bazı diğer terimlere eşit olduğunu görebiliriz. Tıpkı, cebirde bir çarpımın türevini aldığımızda olduğu gibi. Örneğin:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

$\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E})$'nin tüm bileşenleri üzerinde çalışmak yerine, bu tür problemlerde çok faydalı olacak bir numarayı size gösterelim. Herhangi bir sıkıntıya girmeden, ∇ işlemcili ifadeler üzerinde vektör cebirinin bütün kurallarını kullanabileceğiniz bir numaradır bu. Şöyle ki, türev işlemcisinin ne üzerinde çalıştığını gösteren analiz gösterimi kuralını –en azından bir süre için– kenara koymaktır. Normalde, terimler sırası *iki* ayrı amaç için kullanılır. Birincisi analiz içindir: $f(d/dx)g$ ile $g(d/dx)f$ aynı şey değildir ve diğeri de vektörler içindir: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$'dan farklıdır. Eğer istersek, bir an için analiz kuralını bir kenara koyabiliriz. Türevin sağdaki her şey üzerinde işlem yaptığını söylemek yerine, terimlerin yazıldığı sıraya bağlı olmadığını söyleyen *yeni* bir kural uydururuz. Böylece terimlerin sırasını kafamızı yormadan değiştirebiliriz.

İşte yeni kuralımız: *Sıranın* bir anlamı yoktur; diferansiyel işlemcisinin ne üzerinde işlem yapacağını bir alt simgeyle gösteririz. D işlemcisinin $\partial/\partial x$'i simgelediğini düşünelim. Bu durumda D_f, sadece f değişken niceliğinin türevinin alındığı anlamına gelir. Böylece:

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

olur. Ancak $D_f fg$ varsa elimizde, o da aşağıdaki anlama gelir:

$$D_f fg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g$$

Ancak dikkat ederseniz, yeni kurala göre $f D_f g$ de aynı anlama gelmektedir. Aynı şeyi herhangi bir şekilde yazabiliriz:

$$D_f fg = g D_f f = f D_f g = fg D_f$$

Gördüğünüz üzere, D_f her şeyin *ardına* gelebilir. (Bu kadar yararlı bir gösterimin hiçbir matematik veya fizik kitabında gösterilmemiş olması şaşırtıcıdır.)

Şunu merak ediyor olabilirsiniz: Ya ben fg'nin türevini yazmak istiyorsam? *Her iki* terimin de *türevini* istiyorum. Bu kolaydır, söyleyin yeter. $D_f(fg) + D_g(fg)$ şeklinde yazarsınız. Bu tam olarak $g(\partial f/\partial x) + f(\partial g/\partial x)$ anlamına gelir ya da eski gösterimle $\partial(fg)/\partial x$.

Göreceksiniz ki, $\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E})$ için yeni bir ifade üzerine çalışmak çok kolay olacak. Önce yeni gösterimi kullanarak aşağıdaki denklemi yazalım:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) = \nabla_B \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) + \nabla_E \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) \tag{27.10}$$

Bunu yazdığımız gibi, artık terimler sırasını düz tutmak zorunda değiliz. ∇_E işlemcisinin sadece $\boldsymbol{E}$ üzerinde ve ∇_B işlemcisinin de sadece $\boldsymbol{B}$ üzerinde işlem

yaptığını biliyoruz. Bu koşullarda, ∇ işlemcisini sanki sıradan bir vektörmüş gibi kullanabiliriz. (İşimiz bittiğinde, elbette herkesin kullandığı "standart" gösterime geri dönmeliyiz.) Dolayısıyla şimdi, noktalar ve çarpıları yerdeğiştirmek ve terimlerle ilgili diğer düzenlemelerde bulunmak gibi çeşitli şeyler yapabiliriz. Örneğin, Denk. (27.10)'un ortadaki terimi $\boldsymbol{E} \cdot \nabla_B \times \boldsymbol{B}$ şeklinde yazılabilir. ($\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ eşitliğini hatırlayın.) Ve son terim $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} \times \nabla_E$'yle aynıdır. Garip gözükmekle beraber, her şey yolundadır. Şimdi her zamanki kurala geri dönmek istersek, ∇ işlemcisinin sadece "kendi" değişkeni üzerinde işlem yapmasını sağlamalıyız. İlki zaten öyledir, dolayısıyla alt simgeyi olduğu gibi bırakabiliriz. İkincisiyse, ∇ işlemcisini $\boldsymbol{E}$'nin önüne koymak için biraz düzenleme gerektiriyor. Bunu, vektörel çarpımı tersine çevirip, işaretini değiştirerek yapabiliriz:

$$\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{E} \times \nabla_E) = -\boldsymbol{B} \cdot (\nabla_E \times \boldsymbol{E})$$

Artık bildiğimiz düzendedir, dolayısıyla her zaman gösterime dönebiliriz. Denklem (27.10) aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) \qquad (27.11)$$

(Bu özel durumda bileşenleri kullanmak daha süratli bir yol olurdu, ancak bu matematiksel numarayı göstermek için zaman ayırmaya değdi. Muhtemelen bunu başka bir yerde göremeyeceksiniz ve türev içeren terimlerin sırasıyla ilgili kuraldan vektör cebirini çözmek için faydalıdır.)

Şimdi, enerji korunumu tartışmamıza geri dönelim ve yeni sonucumuzu, Denk. (27.11) kullanarak Denk. (27.7)'nin $\nabla \times \boldsymbol{B}$ terimini dönüştürelim. O enerji denklemi aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) + \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\tfrac{1}{2}\epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}\right) \qquad (27.12)$$

Gördüğünüz üzere, neredeyse sonuna geldik. u yerine kullanacağımız, t'ye göre türev olan bir teriminiz ve S'i temsil edecek güzel bir diverjans terimimiz var. Ne yazık ki ortadaki terim, ne bir diverjans ne de t'ye göre türev olduğundan, ortada kaldı. Aslında neredeyse başardık, ama tam olarak değil. Maxwell denklemlerine tekrar bakınca, $\nabla \times \boldsymbol{E}$'nin $-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$'ye eşit olduğunu görürüz ki bu da ortada kalan terimi saf bir zaman türevine dönüştürebileceğimiz anlamına gelir:

$$\boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B} \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}}{2}\right)$$

Artık istediğimizi tam anlamıyla elde ettik. Enerji denklemimiz tam anlamıyla Denk. (27.6) gibidir.

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \nabla \cdot (\epsilon_0 c^2 \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}\right) \qquad (27.13)$$

Aşağıdaki

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} \qquad (27.14)$$

ve aşağıdaki *tanımı* yapabiliriz:

$$\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \qquad (27.15)$$

(Vektörel çarpımları tersine çevirdiğimizde, işaretler doğru hale gelir.)

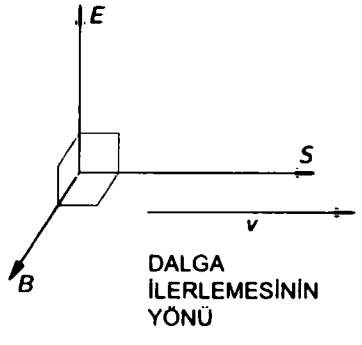
Programımız başarılı oldu. Biçimleri, statikte *alanlar cinsinden enerji üzerinde çalışırken* bulduklarımıza benzer bir "elektrik" enerji yoğunluğu ve bir "manyetik enerji yoğunluğunun toplamına eşit bir enerji yoğunluğu ifadesi elde etmiş olduk. Ayrıca, elektromanyetik alanın enerji akış vektörü için de bir denklem bulduk. Bu yeni vektör, $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$, keşfeden kişinin ardından "Poynting vektörü" olarak adlandırılır. Uzayda dolaşan alan enerjisinin hızını belirtir. Bir saniyede küçük bir da alanından akan enerji, $\boldsymbol{n}\, da$'ya dik birim vektörken, $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} da$'dır. ($u$ ve $\boldsymbol{S}$ içi denklemleri elde ettiğimize göre, dilerseniz çıkarımları unutabilirsiniz.)

27-4 Alan enerjisinin belirsizliği

Poynting denklemlerinin [Denk. (27.14) ve (27.15)] bazı özel uygulamalarına geçmeden önce, onları gerçekten "kanıtlamadığımızı" belirtmeliyiz. Tek yaptığımız, *muhtemel* bir "u" ve *muhtemel* bir "$\boldsymbol{S}$" bulmaktı. Terimlere biraz daha oynamadan "u" ve "$\boldsymbol{S}$" için başka denklemler bulamayacağımızı nasıl bilebiliriz? Yeni $\boldsymbol{S}$ ve yeni u değişik olabilirdi, ama yine de Denk. (27.6)'yı sağlardı. Bu mümkündür. Yapılabilir; ancak bulunan biçimleri daima alanın çeşitli *türevlerini* içerir (ve daima ikinci dereceden terimlerle, örneğin ikinci türev ya da birinci türevin karesi gibi). Aslında u ve $\boldsymbol{S}$ için sonsuz sayıda olasılık vardır ve şu ana kadar kimse hangisinin doğru olduğunu gösterecek deneysel bir yol düşünmedi. İnsanlar hep en basitinin muhtemelen en doğrusu olduğunu düşündü; ancak elektromanyetik alan enerjisi uzayındaki gerçek yerin ne olduğunu kesin olarak bilmediğimizi söylemeliyiz. Bu yüzden biz de kolay yolu seçeceğiz ve alan enerjisinin Denk. (27.14)'le bulunduğunu söyleyeceğiz. Bu durumda akış vektörü $\boldsymbol{S}$ de Denk. (27.15)'le bulunmalıdır.

Görünüşe göre, alan enerjisinin konumundaki belirsizliği çözmenin özel bir yolunun olmaması ilginçtir. Bazen bu problemin, kütleçekim kuramını kullanarak çözülebileceği söz konusu şu argüman üzerinden iddia edilir: Kütleçekim kuramında, bütün enerji kütleçekim kuvvetinin kaynağıdır. Dolayısıyla elektriğin enerji yoğunluğu, kütleçekim kuvvetinin yönünü bilmek istiyorsak, doğru şekilde konumlandırılmalıdır. Oysaki şimdiye dek kimse, elektromanyetik alanların kütleçekimsel etkisinin tam konumunu tespit etmeye yönelik böyle hassas bir deney gerçekleştirmedi. Elektromanyetik alanların tek başlarına kütleçekim kuvvetinin kaynağı olabileceği fikri, vazgeçmesi zor bir fikirdir. Aslında, güneşin yakınından geçen ışığın yolundan saptığı gözlemlenmiştir. Güneşin, ışığı kendine doğru çektiğini söyleyebiliriz. Işığın da eşit şekilde güneşi kendine çekmesine izin vermek istemiyor musunuz? Her neyse, herkes elektromanyetik enerjinin konumu ve akışı için bulduğumuz basit ifadeleri kabul etmiştir. Ve her ne kadar bazen onlardan elde ettiğimiz sonuçlar garip çıktıysa da, şu ana kadar kimse onlarda hata –deneyle uyuşmazlık– bulamadı. Diğer bir deyişle biz de dünyanın geri kalanına uyacağız. Hem ayrıca, bu ifadelerin muhtemelen tam olarak doğru olduklarına inanıyoruz.

Enerji denklemi hakkında son bir not düşmeliyiz. Her şeyden önce, alandaki birim hacim başına enerjiyi bulmak basittir: Elektrostatik enerjiyi E^2 cinsinden ve manyetik enerjiyi de B^2 cinsinden yazarsak, elektrostatik enerji artı manyetik enerjiye eşittir. Statik problemleriyle uğraşırken, enerji için *muhtemel* ifadeler olabilecek böyle iki ifade bulmuştuk. Elektrostatik alanda enerji için birçok başka denklem de bulduk, örneğin, elektrostatik durumda $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$'nin integraline *eşit* olan $\rho\phi$ gibi. Ancak, bir elektrodinamik alanda eşitlik yanlış çıktı ve hangisinin doğru olduğunu seçmeye gelince ortada bariz bir seçenek yoktu. Şimdi artık hangisinin doğru olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde, manyetik enerji için de genel olarak doğru bir denklem bulduk. *Dinamik* alanların enerji yoğunluğu için doğru denklem, Denk. (27.14)'tür



Şekil 27-2 Bir ışık dalgası için $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{S}$ vektörleri.

27-5 Enerji akışı örnekleri

Enerji akış vektörü $\boldsymbol{S}$ için denklemimiz pek yenidir. Özel durumlarda nasıl işlediğini ve ayrıca daha önce bildiklerimizle uyumlu olup olmadığını görelim bakalım. Ele alacağımız ilk örnek ışıktır. Bir ışık dalgası, birbirlerine ve dalganın ilerleme yönüne dik açılarda (*Bkz.* Şekil 27-2) bir $\boldsymbol{E}$ ve bir $\boldsymbol{B}$ vektöründen oluşur. Elektromanyetik bir dalgada, $\boldsymbol{B}$'nin büyüklüğü $\boldsymbol{E}$'nin büyüklüğü çarpı $1/c$'dir ve birbirlerine göre dik açıda olduklarından aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$|\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}| = \frac{E^2}{c}$$

Dolayısıyla, ışık için, birim alanda saniyede enerji akışı da aşağıdaki eşitlik olur:

$$S = \epsilon_0 c E^2 \qquad (27.16)$$

$E = E_0 \cos \omega(t - x/c)$ eşitliğinin olduğu bir ışık dalgasında, alan başına enerji akışının ortalama hızı $\langle S \rangle_{ort}$ –ışığın "şiddeti"– elektrik alanın karesinin ortalama değeri çarpı $\epsilon_0 c$'dir:

$$\text{Şiddet} = \langle S \rangle_{ort} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{ort} \tag{27.17}$$

İster inanın, ister inanmayın; I. Cildin, 31-5 Bölümünde ışık üzerine çalışırken bu sonucu zaten elde etmiştik. Elimizde bir ışık demeti varken, uzayda, Denk. (27.14)'le bulunan bir enerji yoğunluğu vardır. Bir ışık dalgası için $cB = E$ eşitliğini kullanarak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \epsilon_0 E^2$$

Ancak E uzayda değişkenlik gösterir; dolayısıyla ortalama enerji yoğunluğu aşağıdaki ifadedir:

$$\langle u \rangle_{ort} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{ort} \tag{27.18}$$

Dalga c hızıyla ilerlediğine göre, saniyede bir metre kareden geçen enerjinin c çarpı bir metreküpte bulunan enerji miktarı olduğunu düşünebiliriz. Böylece, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\langle S \rangle_{ort} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{ort}$$

ve bu doğrudur; aynı Denk. (27.17) gibidir.

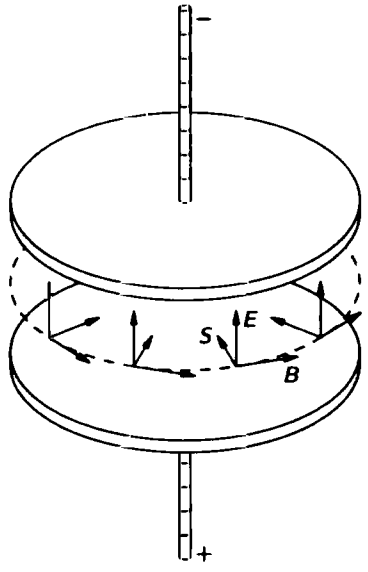
Şimdi bir başka örneği ele alalım. Bu örnek gayet ilginçtir. Yavaşça yüklediğimiz bir sığaçtaki enerji akışına bakacağız. (Hem sığaçın bir rezonans kovuğu gibi gözükmesini sağlayacak kadar yüksek frekanslar, hem de DC olmasını istemiyoruz.) Şekil 27-3'teki gibi, paralel levhalı dairesel bir sığaçımız olsun. İçinde, zamanla değişen, neredeyse düzgün bir elektrik alan vardır. Herhangi bir anda içindeki toplam elektromanyetik enerji u çarpı hacimdir. Levhaların yarıçapı a ve aralarındaki mesafe h ise, levhalar arasındaki toplam enerji aşağıdaki eşitliktir:

$$U = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) (\pi a^2 h) \tag{27.19}$$

Bu enerji, E değiştiğinde değişir. Sığaç yüklenirken, levhalar arasındaki hacim:

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 h E \dot{E} \tag{27.20}$$

hızında enerji alır. Dolayısıyla bu hacme bir yerden enerji akışı olmalı. Elbette ki bunun, yükleyen tellerden geldiğini biliyor olmalısınız; hiç de değil! Levhaların arasındaki uzaya o yönünden giremez, çünkü E levhalara diktir. $E \times B$ levhalara *paralel* olmalıdır.



Şekil 27-3 Yüklenen bir sığaçın yakınında, Poynting vektör S'in yönü eksenden içeri doğrudur.

Sığaç yüklenirken, eksen etrafında daireler çizen bir manyetik alan olduğunu hatırlarsınız elbette. Bölüm 23'te tartışmıştık. Maxwell denklemlerinin sonuncusunu kullanarak, sığaçın kenarındaki manyetik alanın aşağıdaki ifadeyle

$$2\pi a^2 c\, B = \dot{E} \cdot \pi a^2$$

veya aşağıdaki ifadeyle hesaplandığını bulmuştuk:

$$B = \frac{a}{2c^2} \dot{E}$$

Yönü Şekil 27-3'te gösterildiği gibidir. Diğer bir deyişle, şekilde görüldüğü gibi, $E \times B$'yle orantılı kenarlardan gelen bir enerji akışı vardır. Enerji tellerden değil, sığaçın etrafındaki uzaydan gelmektedir.

Gelin, levhaların kenarlarının arasındaki toplam yüzeyden geçen toplam akışın, içerdeki enerjinin değişim hızına eşit olup olmadığını kontrol edelim.

Öyle olsa iyi olur; Denk. (27.15)'i ispatlamak için çok zahmet çektik. Yüzeyin alanı $2\pi ah$ ve $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2\, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}'$dir.

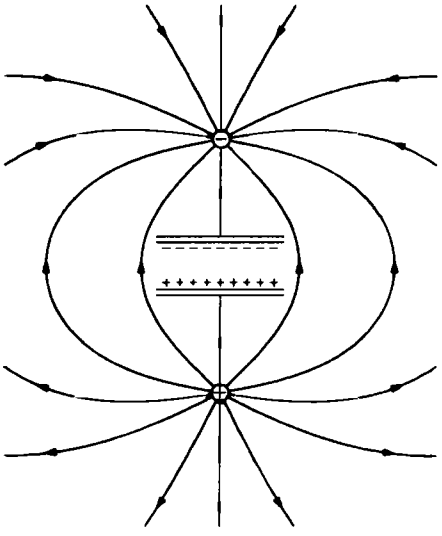
$$\epsilon_0 c^2 E\left(\frac{a}{2c^2}\dot{E}\right)$$

Böylece, toplam enerji akısı aşağıdaki ifade olur:

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E\dot{E}$$

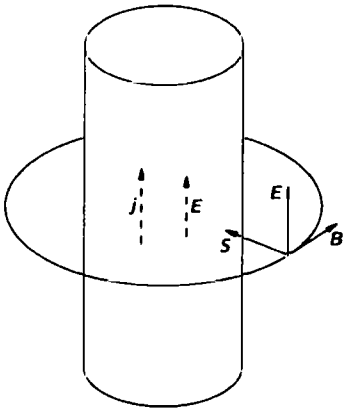
Bu, Denk. (27.20)'yi sağlar. Ancak bize tuhaf bir şey de anlatır: Bir sığaçı yüklediğimiz sırada, enerji tellerden değil; kovuğun kenarlarından içeri girmektedir. Kuramın dediği budur!

Bu nasıl olabilir? Bu, kolay bir soru *değildir*; ancak üzerinde düşünmenin bir yolu vardır. Sığaçın uzağında, üzerinde ve aşağısında bazı yükler olduğunu düşünelim. Bu yükler uzakta olduğu zaman, zayıf ama sığaçı sarmalayan bir alan vardır (*Bkz.* Şekil 27-4). Daha sonra, yükler birbirlerine yaklaştıkça, sığaçın yakınında alan gitgide güçlenir. Dolayısıyla, alan enerjisi sığaça doğru ilerler ve levhaların arasına girer.



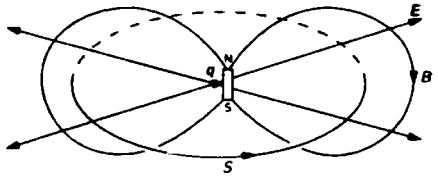
Şekil 27-4 Uzak bir mesafeden iki adet yükü yaklaştırarak yüklenen bir sığaçın dışındaki alanlar.

Bir başka örnek olarak, akım taşıyan bir direnç telinin içinde ne olup bittiğini sorabiliriz. Telin direnci olduğundan, tel boyunca akımı süren bir elektrik alan vardır. Tel boyunca bir potansiyel düşüşü olduğundan dolayı, telin hemen dışında ve yüzeye paralel bir elektrik alan da vardır (*Bkz.* Şekil 27-5). Bunlara ilâveten, akımdan dolayı telin etrafını daireler çizen bir manyetik alan da vardır. $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ dik açılardadır; dolayısıyla, şekilde gösterildiği gibi, içeri doğru yönlenmiş bir Poynting vektörü vardır. Tele her yönden bir enerji akışı vardır. Elbette bu akış, ısı akışı biçiminde telde kaybedilen enerjiye eşittir. Diğer bir deyişle bizim "çılgın" kuramımız elektronların, dışardaki alandan tele akan enerji yüzünden ısı üretmek için enerji kaybettiklerini söylemekte. Sezgimiz ise bize, elektronların enerjilerini tel boyunca itilmelerinden aldıklarını söyler, bu yüzden enerji tel boyunca aşağı (veya yukarı) akmalıdır. Ancak kuram elektronların gerçekten, uzaktaki yüklerden kaynaklanan elektrik alanla itildiğini ve elektronların da enerjilerini bu alanlardan ısı üretmek için aldıklarını söyler. Enerji, bir şekilde, uzaktaki yüklerden geniş bir alana ve daha sonra da telin içine akmaktadır.



Şekil 27-5 Akım taşıyan bir telin yakınındaki Poynting vektörü $\boldsymbol{S}$.

Son olarak, bu kuramın gerçekten çılgınca olduğuna sizi ikna etmek için bir örnek daha göstereceğiz: Bir elektrik yükü ve bir mıknatısın birbirlerinin yakınında *durağan* şekilde durdukları bir örnek. Şekil 27-6'da gösterildiği gibi, bir çubuk mıknatısın merkezinin yakınında duran bir noktasal yükü ele alalım. Her şey durağandır, dolayısıyla enerji zamanla değişmemektedir. Ayrıca, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ de oldukça statiktirler. Ancak Poynting vektörü, sıfır olmayan bir $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ olduğundan dolayı, bir enerji akışı olması gerektiğini söyler. Eğer enerji akışına bakarsanız, etrafta dönüp durduğunu görürsünüz. Herhangi bir yerde enerjide değişim yoktur. Bir hacme akan her şey, yine hacimden dışarı akmaktadır. Sıkıştırılamaz bir suyun akıp durması gibi. Dolayısıyla bu sözde statik durumda bir enerji dolaşımı vardır. Ne kadar saçma!



Şekil 27-6 Kapalı döngülerde dolaşan, bir yük ve bir mıknatısın oluşturduğu Poynting vektörü.

Aslında, "statik" bir mıknatısın dolaşım yapan kalıcı bir akım olduğunu hatırlarsanız, o kadar da kafa karıştırıcı değildir bu. Bütün sezgilerinizi gözden geçirmeniz gerektiğine inanabilirsiniz ve dolayısıyla üzerinde çalışacağınız çok şey vardır. Ancak buna gerek yok gibidir.

Arada sırada, bir teldeki enerjinin tel boyunca değil de, dışardan tele aktığını unutursanız çok da büyük sorun olacağını düşünmeyin. Enerjinin hangi yolu seçtiğini fark etmek, enerji korunumu fikrini kullanırken, nadiren değerlidir. Bir mıknatısın ve bir yükün etrafındaki enerji dolaşımı, birçok durumda, önem-

siz gibi görünmektedir. Hayati bir detay değildir, ancak günlük sezgilerimizin çok yanlış olduğu da açıkça ortadadır.

27-6 Alan momentumu

Şimdi, elektromanyetik alandaki *momentum* hakkında konuşalım. Alanın enerjisi olduğu gibi, birim hacim başına belli bir momentumu olacaktır. Bu momentum yoğunluğuna g diyelim. Momentumun çeşitli olası yönleri vardır, dolayısıyla g bir vektör olmalıdır. Her bir bileşeni tek tek ele alalım. Önce, x bileşeni. Momentumun her bir bileşeni korunduğundan, aşağıdaki eşitlik gibi bir yasa yazabiliriz:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\text{maddenin}\\ \text{momentumu}\end{pmatrix}_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + \begin{pmatrix}\text{momentum}\\ \text{çıkışı}\end{pmatrix}_x$$

Sol taraf kolaydır. Maddenin momentumunun değişim hızı, üzerine etkiyen kuvvettir. Bir parçacık için bu $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$'dir; bir yük dağılımı için birim hacimdeki kuvvetse $(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})$'dir. "Momentum çıkışı" terimiyse biraz gariptir. Bir vektörün diverjansı olamaz çünkü skaler değildir; sanki bir vektörün x bileşeni gibidir. Neyse, şöyle bir şey olmalı:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

çünkü x momentumu herhangi üç yönden birinde akıyor olabilir. a, b ve c ne olursa olsun, her durumda, birleşim x momentumun çıkışına eşit olmalıdır.

Şimdi yapmamız gereken, $\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$'yi $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ cinsinden –Maxwell denklemlerini kullanarak ρ ve $\boldsymbol{j}$'yi kaldırarak– yazmak ve daha sonra terimlerin sırasını değiştirip, yerdeğiştirmeler yaparak aşağıdaki biçimi elde etmektir:

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

Daha sonra, terimleri tanımlayarak, g_x, a, b ve c için ifadeleri elde ederiz. Bu çok zahmetli bir iştir ve burada bunu yapmayacağız. Onun yerine, sadece g, momentum yoğunluğu, için bir ifade bulacağız. Bunu da farklı bir yoldan yapacağız.

Mekanikte şu önemli teorem vardır: Herhangi bir koşulda enerji akışı varsa (alan enerjisi veya başka bir tür enerji), birim zamanda birim alandan geçen enerji akışı, $1/c^2$'yle çarpıldığında, uzayda birim hacimdeki momentuma eşittir. Elektrodinamik özel durumundaysa bu teorem, g'nin Poynting vektörü çarpı $1/c^2$ olduğu sonucunu verir:

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} \tag{27.21}$$

Poynting vektörü sadece enerji akışını değil, c^2'ye bölerseniz momentum yoğunluğunu da verir. Aynı sonucu, önerdiğimiz diğer analizle de elde ederdik; ancak bu daha genel sonucu fark etmek daha ilginçtir. Şimdi, genel teoremin doğru olduğuna sizi ikna etmek için size bir dizi ilginç örnek ve akıl yürütme sunacağız.

İlk örneğimiz: Bir kutu içinde bir sürü parçacık olsun –metreküp başına N diyelim– ve bunlar bir v hızıyla hareket ediyor olsun. v'ye dik bir sanal düzlem yüzeyi düşünelim. Bu yüzeyin birim alanından saniyede geçen enerji akışı, yüzeyden saniyede geçen parçacık sayısı Nv çarpı her birinin taşıdığı enerjiye eşittir. Her bir parçacığın enerjisi $m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$'dir. Diğer bir deyişle, saniyedeki enerji akışı aşağıdaki ifadedir:

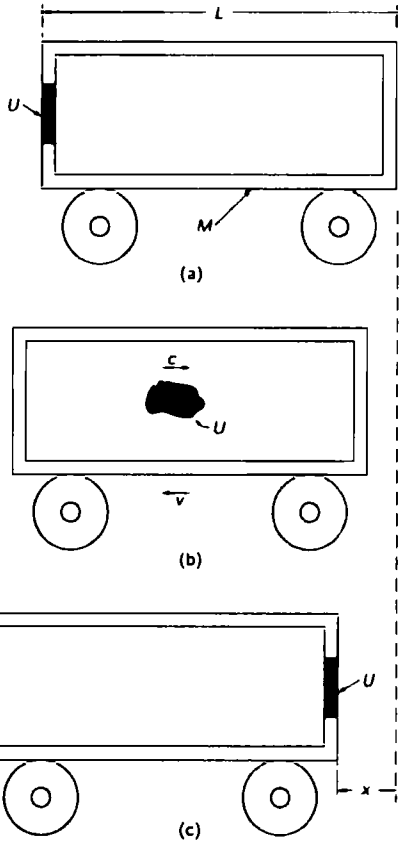
$$Nv = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Her bir parçacığın momentumu $m_0v/\sqrt{1-v^2/c^2}$'dir, dolayısıyla momentum *yoğunluğu* da aşağıdaki ifade olur:

$$N = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Bu da, teoremin dediği gibi, enerji akışı çarpı $1/c^2$'dir. Diğer bir deyişle teorem bir grup parçacık için doğrudur.

Teorem ışık için de doğrudur. I. Ciltte ışığı çalışırken, bir ışık demetinden enerji soğurulduğunda, belli bir miktar momentumun da soğutucuya aktarıldığını görmüştük. Hatta I. Cilt, 34. Bölümde gösterdiğimiz üzere momentum, soğurulan enerji çarpı $1/c$'dir [I. Cilt Denk. (34.24)]. Saniyede birim alana varan enerjiye U_0 dersek, saniyede birim alana varan momentum da U_0/c olur. Momentum c hızında hareket etmektedir, soğurucunun önündeki *yoğunluğu* U_0/c^2 olmalıdır. Dolayısıyla, teorem yine doğrudur.



Şekil 27-7 c hızıyla hareket eden U enerjisi, U/c momentumu taşır.

Son olarak, Einstein'ın aynı şeyi tekrar gösterdiği akıl yürütmesini sunacağız. Büyük bir M kütlesine sahip, (sürtünmesiz olduklarını varsaydığımız) raylar üzerinde bir tren vagonunu ele alalım. Bir ucunda, diğer uca doğru orada durulacak şekilde birtakım parçacıklar veya ışık (veya herhangi bir şey, ne olduğu fark etmez) gönderen bir cihaz olsun. Şekil 27-7 (a)'da gösterildiği gibi, bir uçta önce bir miktar U enerjisi vardır ve bu enerji daha sonra, Şekil 27-7 (c)'de gösterildiği gibi, diğer uçtadır. U enerjisi, vagonun boyu L kadar yerdeğiştirmiştir. U enerjisinin şimdi kütlesi U/c^2'dir, araba sabitse arabanın kütle merkezi yerdeğiştirmiştir. Einstein, bir nesnenin kütle merkezinin bu şekilde sadece içinde bir şeylerle oynayarak değiştirilebileceği fikrinden hoşlanmadı; bu yüzden kütle merkezinin içerde bir şeyler yaparak değiştirilmesinin imkânsız olduğunu varsaydı. Eğer durum böyleyse, bir uçtan diğer uca U enerjisini taşıdığımızda araba, şeklin (c) kısmında gösterildiği gibi, bir x mesafesi kadar geriye gitmiş olmalıydı. Aslında, arabanın toplam kütlesi çarpı x'in, hareket ettirilen enerjinin kütlesi U/c^2 çarpı L'ye (U/c^2'nin M'den çok küçük olduğunu varsayarsak) eşit olduğunu görebilirsiniz:

$$Mx = \frac{U}{c^2} L \tag{27.22}$$

Şimdi, enerjinin bir ışık parlamasıyla taşındığı özel durumu ele alalım. (Akıl yürütme parçacıklarla da yapılabilirdi; ancak biz ışık problemiyle ilgilenen Einstein'ın ayak izlerini takip edeceğiz.) Arabanın hareket etmesini sağlayan nedir? Einstein şu şekilde akıl yürüttü: Işık yayıldığı zaman bir geri tepme olmalıdır, bu bilinmeyen geri tepmenin momentumuna p diyelim. Bu momentum arabanın geriye doğru hareketini sağlamıştır. Arabanın geri tepme hızı v, bu momentumun arabanın kütlesine bölümüdür:

$$v = \frac{p}{M}$$

Işık enerjisi U diğer uca ulaşana kadar, araba bu hızda hareket eder. Daha sonra, uca çarptığında momentumunu arabaya geri verir ve arabayı durdurur. x küçükse, o zaman arabanın hareket ettiği süre yaklaşık L/c'dir; dolayısıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$x = vt = v\frac{L}{c} = \frac{p}{M}\frac{L}{c}$$

Bu x'i Denk. (27.22)'ye koyarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

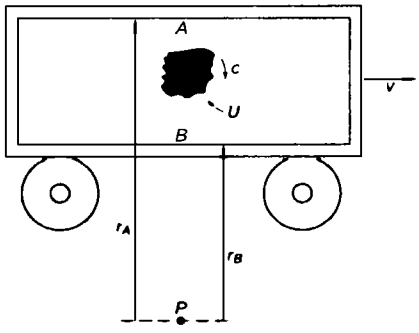
$$p = \frac{U}{c}$$

Yine, ışık için enerji ile momentum arasındaki ilişkiyi elde etmiş olduk. Momentum yoğunluğu $g = p/c$'yi elde etmek için c'ye bölerse, bir kere daha aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$g = \frac{U}{c^2} \tag{27.23}$$

Şunu merak edebilirsiniz: Kütle merkezi teorimi neden bu kadar önemlidir? Belki de *o* yanlıştır. Belki de, ancak o zaman açısal momentumun korunumu ya-

sası da elimizden gider. Vagonumuzun bir yol üstünde bir v hızıyla ilerlediğini ve Şekil 27-8'de görüldüğü gibi arabanın *altından üstüne* doğru –A noktasından B noktasına– ışık enerjisi gönderdiğimizi düşünelim. Şimdi P noktası yakınında sistemin açısal momentumuna bakalım. U enerjisi A noktasını terk etmeden önce $m = U/c^2$ kütlesine ve v hızına sahiptir, dolayısıyla açısal momentumu mvr_A'dır. B noktasına vardığında kütlesi aynıdır ve vagonun *doğrusal* momentumu değişmediyse hızı da hâlâ v olmalıdır. Bu durumda P yakınında açısal momentumu mvr_B'dir. Işık yayıldığı anda doğru miktarda geri tepme momentumu vagona verildiği *sürece* –ışık U/c momentumunu taşıdığı sürece– açısal momentum değişir. Görelilik kuramında kütle merkezi teoremi ve açısal momentumun korunumunun birbirleriyle yakından ilişkili olduğu sonradan ortaya çıktı. Dolayısıyla teoremimiz yanlışsa, açısal momentumun korunumu da ortadan kalkar. Her neyse, teoremimizin genel bir yasa olduğu ortaya kondu sonradan ve konu elektrodinamik olduğunda, alandaki momentumu elde etmek için de kullanabiliriz.



Şekil 27-8 P yakınında açısal momentum korunacaksa, U enerjisi U/c momentumunu taşımalı.

Elektromanyetik alanda iki momentum örneği daha vereceğiz. Bölüm 26-2'de, iki yüklü parçacık ortogonal bir yörüngede ilerlerken etki ve tepki yasasının çöktüğünden bahsetmiştik. İki parçacık üzerindeki kuvvetler dengelenmediğinden, etki ve tepki eşit olmamaktadır; dolayısıyla maddenin net momentumu değişiyor olmalıdır. Momentum korunmamaktadır. Ancak böyle bir durumda, alandaki momentum da değişmektedir. Poynting vektörüyle belirlenen açısal momentumu hesaplarsanız, sabit olmadığını görürsünüz. Bununla birlikte, parçacıkların momentumlarındaki değişim alan momentumundaki değişimle dengelenir, böylece parçacıklar ve alanın toplam momentumu korunmuş olur.

Son örneğimiz, Şekil 27-6'daki gibi bir mıknatıs ve yükü içeren durumdur. Enerjinin daireler çizerek aktığını bulmak hoşumuza gitmemişti; ancak şimdi, enerji akışı ve momentumun orantılı olduğunu bildiğimizden, uzayda dolaşım yapan bir momentum olduğunu da ayrıca biliyoruz demektir. Ancak, *dolaşım* yapan bir momentum, *açısal* momentum olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, alanda *açısal* momentum vardır. Bölüm 17-4'te bahsettiğimiz, bir solenoid ve bir diskteki bazı yükleri içeren çelişkiyi hatırlıyor musunuz? Akım kesildiğinde, bütün disk dönmeye başlayacak gibi görünüyordu. Yapboz şuydu: Açısal momentum nereden gelmişti? Bunun cevabı, bir manyetik alanınız ve bir miktar yükünüz varsa alanda açısal momentumunuz da var olacaktır. Alan meydana gelirken oraya konmuş olmalı. Alan kapatıldığında, açısal momentum geri verilir. Böylece diskimiz dönmeye *başlar*. Bu mistik, dolaşım yapan enerji akışı, başta garip göründüyse de, mutlaka gereklidir. Gerçekten de bir momentum akışı vardır. Bütün dünyadaki açısal momentumun korunumunu sağlamak için geçerlidir.

28

ELEKTROMANYETİK KÜTLE

28-1 Bir noktasal yükün alan enerjisi
28-2 Hareket eden bir yükün alan momentumu
28-3 Elektromanyetik kütle
28-4 Elektronun kendi üzerindeki kuvvet
28-5 Maxwell kuramını değiştirme denemeleri
28-6 Nükleer kuvvet alanı

28-1 Bir noktasal yükün alan enerjisi

Maxwell denklemleri ve göreliliği bir araya getirerek, elektromanyetizma kuramı üzerindeki ana çalışmamızı bitirmiş olduk. Elbette atladığımız bazı detaylar vardır ve ilerde üzerinde duracağımız önemli bir detay da elektromanyetik alanların maddeyle etkileşimidir. Ancak bir süre durup, birçok olguyu açıklayabilen bu muhteşem yapının nasıl çuvalladığını size göstermek istiyoruz. Şu ana kadar fizik derslerini takip ettiyseniz, daima bir tür sıkıntıyla karşılaştığımızı fark etmişsinizdir. Şimdi ciddi bir sıkıntıdan bahsetmek istiyoruz: klasik elektromanyetik kuramın çöküşünü. Kuantum mekaniksel etkilerden dolayı bütün klasik fizik kuramlarını bir çöküşün beklediğini tahmin edebilirsiniz. Klasik mekanik matematiksel olarak tutarlı bir kuramdır; ancak deneyimlerimizle uyuşmaz. Yine de, klasik elektromanyetizma kuramının kendi başına yetersiz bir kuram olması ilginçtir. Maxwell kuramının fikirlerinde kuantum mekaniğiyle doğrudan ilgili olmayan ve onunla çözülemeyen bazı sorunlar vardır. "Belki de bu sorunlarla ilgili canımızı sıkmanın bir yararı yoktur. Kuantum mekaniği elektrodinamik yasalarını değiştireceğinden, düzeltmeden sonraki sorunlarla ilgilenmeliyiz" diyebilirsiniz. Ancak, elektromanyetizma kuantum mekaniğine katıldığında, sorunlar aynen kalmakta. Dolayısıyla, bu sorunlarla şimdi ilgilenmek gerek. Ayrıca, bunların tarihsel önemi de vardır. Daha da ötesi, kuramla bu kadar ilerleyerek her şeyi görmek –sıkıntıları dahil– size bir başarma duygusu da verecektir.

Bahsettiğimiz sıkıntı, bir elektron veya yüklü bir parçacığa uygulandığında elektromanyetik momentum ve enerji kavramlarıyla ilişkilidir. Basit yüklü parçacıklar ve elektromanyetik alanlar kavramları bir şekilde birbirleriyle tutarsızdır. Sıkıntıyı tarif etmek için, enerji ve momentum kavramlarımızla ilgili bazı alıştırmalar yapmaya başlayalım.

Önce, yüklü bir parçacığın enerjisini hesaplayalım. Tüm q yükünün a yarıçaplı bir kürenin yüzeyine düzgünce yayıldığı basit bir elektron modelini ele alalım. Noktasal yük özel durumu için a'yı sıfır alabiliriz. Şimdi, elektromanyetik alandaki enerjiyi hesaplayalım. Yük durağan haldeyse, manyetik alan yoktur ve birim hacimdeki enerji elektrik alanın karesiyle orantılıdır. Elektrik alanın büyüklüğü $q/4\pi\epsilon_0 r^2$'dir ve enerji yoğunluğu da aşağıdaki ifadedir:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

Toplam enerjiyi elde etmek için, bu yoğunluğun tüm uzay üzerinden integralini almalıyız. $4\pi r^2\, dr$ hacim elemanını kullanarak, toplam enerji diyeceğimiz U_{elek} aşağıdaki ifade olur:

$$U_{\text{elek}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\, dr$$

Bunun integralini almak kolaydır. Alt limit a ve üst limit de ∞'dur, dolayısıyla

$$U_{\text{elek}} = \frac{1}{2}\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{a} \qquad (28.1)$$

q için elektronik yük q_e'yi ve $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ için de e^2 sembolünü kullanırsak, aşağıdaki eşitliğe dönüştürebiliriz:

$$U_{\text{elek}} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a} \tag{28.2}$$

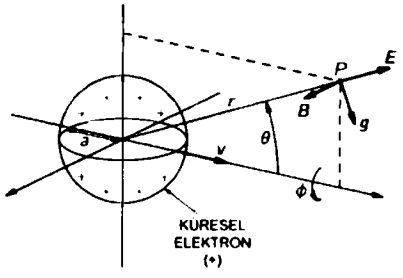
Noktasal yük için a'yı sıfır alana kadar her şey yolundadır. Alanın enerjisi, merkeze olan mesafenin dördüncü kuvvetiyle ters orantılı olarak azaldığından, hacim integrali sonsuzdur. Nokta bir yükü çevreleyen alanda sonsuz miktarda enerji vardır.

Sonsuz enerjinin nesi yanlış? Enerji açığa çıkamıyorsa, ama sonsuza kadar da orda kalmalıysa da, sonsuz enerjiyle ilgili gerçek bir sıkıntı var mıdır? Elbette, sonsuz bir nicelik can sıkabilir; ancak önemli olan şey *gözlemlenebilir* fiziksel etki olup olmadığıdır. Bu soruyu cevaplamak için, enerjiden başka bir şeye odaklanmalıyız. Yükü *hareket* ettirdiğimizde enerjinin *nasıl değiştiğini* sorduğumuzu düşünelim. Bu durumda *değişiklikler* sonsuzsa, başımız derde girecektir.

28-2 Hareket eden bir yükün alan momentumu

Uzayda düzgün bir hızda ilerleyen ve bir an için hızının ışık hızına göre düşük olduğunu varsaydığımız bir elektronu ele alalım. Elektromanyetik alandaki momentumdan dolayı, hareket eden elektrona ait –yüklenmeden önce elektronun kütlesi olmasa bile– bir momentum vardır. Alan momentumunun yükün $\boldsymbol{v}$ hızıyla aynı yönde olduğunu ve küçük hızlar için v'yle orantılı olduğunu söyleyebiliriz. Yük merkezinden r uzaklıkta ve hareket çizgisine göre θ açısında bir P noktası için (*Bkz.* Şekil 28-1) elektrik alan radyaldir ve daha önce gördüğümüz üzere manyetik alan da $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}/c^2$'dir. Momentum yoğunluğu da, Denk. (27.21)'den aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$



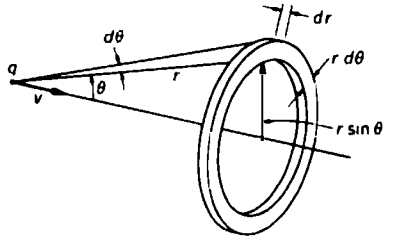
Şekil 28-1 Artı bir elektron için momentum yoğunluğu $\boldsymbol{g}$ ve $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$ alanları. Eksi bir elektron için $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$ tersine döner ama $\boldsymbol{g}$ dönmez.

Şekilde görüldüğü gibi, doğrudan hareket çizgisine yönlenmiştir ve büyüklüğü de aşağıdaki eşitliktir:

$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin\theta$$

Alanlar hareket çizgisi etrafında simetriktirler, dolayısıyla hacim üzerinden integralini aldığımızda enlemesine bileşenlerin toplamı sıfır olur ve sonuç momentum $\boldsymbol{v}$'ye paralel olur. Tüm uzay üzerinden integralini almamız gereken, g'nin bu yöndeki bileşeni $g\sin\theta$'dır. Hacim elemanımız Şekil 28-2'de gösterildiği gibi düzlemi $\boldsymbol{v}$'ye dik bir halka şeklindedir. Hacmi $2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$. Bu durumda toplam momentum da aşağıdaki denklem olur:

$$p = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2\theta\, 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$$



Şekil 28-2 Alan momentumunu hesaplamak için kullanılan hacim elemanı $2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$.

E ($v \ll c$ için) θ'dan bağımsız olduğundan, hemen θ üzerinden integrali alabiliriz.

$$\int \sin^3\theta\, d\theta = -\int (1 - \cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$$

θ'nın limitleri 0 ve π'dir, dolayısıyla θ integrali sadece bir 4/3 çarpanı verir ve

$$p = \frac{8\pi}{3}\frac{\epsilon_0 v}{c^2}\int E^2 r^2\, dr$$

integrali ($v \ll c$ için), bizim enerjiyi bulmak için aldığımız integralidir. $q^2/16\pi^2\epsilon_0^2 a$'dır ve

$$p = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{v}{ac^2}$$

veya

$$p = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}v \tag{28.3}$$

sonucunu buluruz. Alandaki momentum –elektromanyetik momentum– v'yle orantılıdır. Kütlesi v'nin katsayısına eşit bir parçacık için beklediğimiz de budur. Dolayısıyla bu katsayıya *elektromanyetik kütle*, m_{elek}, diyebilir ve şöyle yazabiliriz:

$$m_{elek} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2} \tag{28.4}$$

28-3 Elektromanyetik kütle

Kütle nereden gelir? Mekanik yasalarını çalışırken, her nesnenin kütle dediğimiz bir "şey" taşıdığını varsaymıştık. Bunun bir anlamı da, hızıyla orantılı bir "momentum" taşıdığıydı. Şimdi de, yüklü bir parçacığın hızıyla orantılı momentum taşıdığını öğrendik. Aslında, kütle sadece bir elektrodinamik etkisi olabilir. Kütlenin kökeni şu ana kadar açıklanamamıştır. Daha önce anlaşılamamış bir şeyi anlayabilmek için, elektrodinamik kuramıyla elimizde büyük bir fırsat vardır. Sadece elektromanyetik etkilerden bir anda ortaya –ya da daha ziyade, Maxwell ve Poynting sayesinde– çıktı ki, herhangi bir yüklü parçacık, hızıyla orantılı bir momentuma sahiptir.

Biraz ihtiyatlı olalım ve bir an için iki tür kütle olduğunu düşünelim. Diğer bir deyişle, bir nesnenin toplam momentumunun mekanik momentumu ile elektromanyetik momentumunun toplamı olabileceğini düşünelim. Mekanik momentum, "mekanik" kütle m_{mek} çarpı v'dir. Ne kadar momentumu olduğunu veya bir yörüngede nasıl salındığını gözlemleyerek, bir parçacığın kütlesini ölçtüğümüz deneylerde aslında toplam kütleyi ölçmekteyiz. Genel olarak, momentumun toplam kütle ($m_{mek} + m_{elek}$) çarpı hız olduğunu ifade ederiz. Dolayısıyla gözlemlenen kütle iki parçadan (veya diğer alanları da eklersek daha fazla parçadan) oluşur: mekanik bir parça artı elektromanyetik bir parça. Elektromanyetik bir parça olduğunu kesin olarak biliyoruz ve onun için denklemimiz de var. Heyecan verici bir olasılık da, mekanik parçanın hiç olmayabileceği ve bütün kütlenin elektromanyetik olabileceğidir.

Bakalım, mekanik kütle olmasaydı, elektronun sahip olması gereken boyutu ne olurdu. Bunu Denk. (28.4)'ten çıkan elektromanyetik kütleyi, elektronun gözlemlenen kütlesi m_e'ye eşitleyerek bulabiliriz. Aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$a = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m_e c^2} \tag{28.5}$$

Aşağıdaki niceliğe

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{28.6}$$

"klasik elektron yarıçapı" denir. Sayısal değeri $2{,}82 \times 10^{-13}$ cm'dir: bir atomun çapının yüz binde biri.

Neden a yerine r_0'ya elektron yarıçapı denir? Çünkü aynı hesaplamayı başka varsayımsal yük dağılımlarıyla da yapabilirdik. Yük, kürenin hacmi boyunca düzgün dağılmış olabilir ya da tüylü toplar gibi yayılmış da olabilir. Varsayımımıza göre, 2/3 çarpanı bir başka çarpanla değişir. Örneğin, bir küre hacminde düzgün dağılmış yük için 2/3 yerine 4/5 çarpanı gelir. Hangi dağılımın doğru olduğunu tartışmak yerine, r_0 yarıçapını "nominal" yarıçap olarak kabul etmeye karar verdik. Farklı kuramlar kendi katsayılarını getirebilirler.

Biz şimdi kütlenin elektromanyetik kuramını irdelemeye devam edelim. Hesaplamamız $v \ll c$ içindi. Daha yüksek hızlara çıkarsak ne olur? İlk denemeler kafa karışıklığına yol açtıysa da, Lorentz yüklü kürenin yüksek hızlarda bir elipsoid şekline büzüşeceğini ve alanların da 26. Bölümde göreli durum için çıkardığımız (26.6) ve (26.7) denklemlerine uygun olarak değişeceğini fark etti. Bu durumda, p için integralleri alırsanız, herhangi bir v hızı için momentumun $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ çarpanıyla değiştiğini görürsünüz.

$$p = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{28.7}$$

Diğer bir deyişle elektromanyetik kütle, hız ile $\sqrt{1-v^2/c^2}$ çarpanının tersiyle büyür. Bu, görelilik kuramından önce yapılmış bir keşiftir.

İlk başta önerilen deneyler, bir parçacığın gözlemlenen kütlesindeki hızla beraber değişimleri, kütlenin ne kadarının mekanik ve ne kadarının elektriksel olduğunu görmek için ölçmeye yönelikti. O zamanki inanışa göre, elektriksel kısım hızla beraber *değişirken,* mekanik kısım *değişmeyecekti.* Deneyler yapılırken, kuramcılar da boş durmuyordu. Kısa süre sonra, kütlenin kaynağı ne olursa olsun *hepsinin* $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ şeklinde değişkenlik göstermesini gerektiğini söyleyen görelilik kuramı geliştirildi. Denklem (28.7), kütlenin hıza bağlı olduğuna dair kuramın başlangıcıydı.

Şimdi, Denk. (28.2)'yi elde etmemizi sağlayan, alandaki enerji hesaplamamıza geri dönelim. Görelilik kuramına göre, U enerjisi U/c^2 kütlesine sahip olacaktır. Daha sonra Denk. (28.2), elektronun alanının aşağıdaki kütleye sahip olması gerektiğini söyler:

$$m'_{\text{elek}} = \frac{U_{\text{elek}}}{c^2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{ac^2} \tag{28.9}$$

Bu kütle, Denk. (28.4)'le bulduğumuz elektromanyetik kütle m_{elek}'le aynı değildir. Aslında, Denk. (28.2) ve (28.4)'ü birleştirirsek, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$U_{\text{elek}} = \frac{3}{4}\,m_{\text{elek}}c^2$$

Bu denklem, görelilikten önce keşfedilmişti ve Einstein ile diğerleri daima $U = mc^2$ eşitliğinin olması gerektiğini keşfettiklerinde büyük bir karmaşıklık ortaya çıktı.

28-4 Elektronun kendi üzerindeki kuvveti

Elektromanyetik kütle için yazdığımız iki denklem arasındaki uyuşmazlık özellikle rahatsız edicidir; çünkü dikkatli bir şekilde, elektrodinamik kuramının görelilik ilkesiyle uyumlu olduğunu göstermiştik. Yine de görelilik kuramına göre, momentum enerji çarpı v/c^2'ye eşit olmalıdır. Dolayısıyla bir bakıma başımız dertte, bir yerde bir hata yapmış olmalıyız. Hesaplarımızda aritmetik bir hata yapmadık, ancak bir şeyi atlamış olmalıyız.

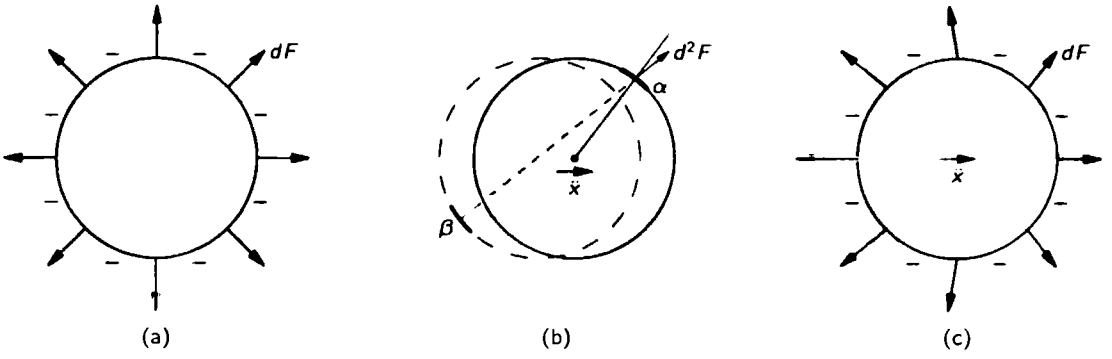
Enerji ve momentum için denklemlerimizi çıkartırken, korunum yasalarını göz önüne aldık. *Bütün* kuvvetlerin ve başka "elektriksel olmayan" mekanizmalardan taşınan herhangi bir iş ve momentumun da hesaba katıldığını varsaydık. Elimizde küresel bir yük varsa, bütün elektriksel kuvvetler iticidir ve elektron da dağılma eğilimindedir. Sistemde dengelenmemiş kuvvetler olduğundan, enerji ve momentumla ilgili yasalarda her türlü hatayı yapabiliriz. Yükler küreye bir çeşit lastik bantla –yüklerin uçup gitmesini engelleyecek şekilde– *tutturulmalıdır.* İlk defa Poincaré, bu lastik bantların –veya artık elektronu ne bir arada tutuyorsa– enerji ve momentum hesaplamalarına dahil edilmesi gerektiğine işaret etti. Bu nedenden dolayı, ilave elektriksel olmayan kuvvetler "Poincaré stresleri" olarak zarif bir şekilde adlandırılmışlardır. İlave kuvvetler hesaplamalara dahil edilirse, iki yolla elde edilen kütleler de (detaylı varsayımlara dayanacak şekilde) değişir. Ve sonuçlar görelilikle uyumludur; örneğin momentum hesaplamasından çıkan kütleyle, enerji hesaplamasından çıkan sonuç aynıdır. Ancak, ikisi de *iki* katkı içerir: bir elektromanyetik kütle ve Poincaré streslerinden gelen katkı. Bu ikisi toplandığında, tutarlı bir kuram elde ederiz.

Dolayısıyla, kütleyi sadece elektromanyetik olacak şekilde elde etmek imkânsızdır. Elimizde sadece elektrodinamik varsa, bu geçerli bir kuram değildir. Başka şeyler de eklemelisiniz. Bunlara ne derseniz deyin –"lastik bantlar" ya da "Poincaré stresleri" veya başka bir şey–, doğada bu tür bir kuramı tutarlı yapacak başka kuvvetler olmalıdır.

Açıkça, elektronun içine kuvvetleri koyduğumuz an, fikrin bütün güzelliği silinmeye başlar. İşler karmaşıklaşır. Şu soruları sorasınız gelir: Stresler ne ka-

dar şiddetlidir? Elektron nasıl sallanır? Salınım yapar mı? Bütün iç özellikleri nelerdir? Böyle gider bu. Elektronun bazı karmaşık iç özellikleri olması muhtemeldir. Elektrona dair bir kuram oluştursaydık, görünürde gözlenmemiş bazı garip özellikler, örneğin salınım kipleri, öngörürdü. "Görünürde" diyoruz, çünkü doğada bir anlam ifade etmeyen birçok şey gözlemliyoruz. Bugün anlamadığımız şeylerden biri (örneğin, müon) ilerde belki Poincaré streslerinin salınımı olarak açıklanabilir. Çok da olası gözükmüyor, ancak kimse tam emin değildir. Temel parçacıklar hakkında anlamadığımız hâlâ birçok şey vardır. Her neyse, bu kuramın işaret ettiği karmaşık yapı istenmeyen bir şeydir ve bütün kütleyi elektromanyetizma terimleriyle açıklamaya çalışmak –en azından bizim tarif ettiğimiz şekliyle– bizi çıkmaz bir sokağa sürükledi.

Neden alandaki momentum hızla orantılı olduğunda elimizde bir kütle olduğunu söylediğimiz hakkında biraz daha düşünelim. Basit! Kütle; momentum ile hız arasındaki katsayıdır. Ancak kütleye bir başka şekilde de bakabiliriz: bir parçacığın, onu ivmelendirebilmek için üzerine bir kuvvet uygulamak zorundaysanız kütlesi vardır. O halde, kuvvetlerin nereden geldiğine biraz daha yakından bakmak anlayışımıza yardımcı olabilir. Bir kuvvet olması gerektiğini nereden biliyoruz? Alanlar için momentumun korunumu yasasını kanıtladık da ondan. Elimizde yüklü bir parçacık varsa ve onu bir süre itersek, elektromanyetik alanda bir miktar momentum olacaktır. Momentum bir şekilde alana dökülmüş olmalı. Dolayısıyla ilerleyebilmesi için elektronu iten bir kuvvet –mekanik eylemsizliği için gerekli kuvvete ilave bir kuvvet, elektromanyetik etkileşiminden dolayı bir kuvvet– olmalıdır. Ve "itici" üzerinde de karşı bir kuvvet olmalıdır. Peki, o kuvvet nereden geliyor?



Şekil 28-3 İvmelenen bir elektron üzerindeki öz kuvvet, gecikmeden dolayı sıfır değildir. (dF'le ifade etmek istediğimiz, da yüzey elemanı üzerindeki kuvvet; d^2F'le ifade etmek istediğimiz de da_β yüzey elemanındaki yükten dolayı da_α yüzey elemanı üzerinde etkiyen kuvvettir.)

Şu şekilde resmedebiliriz. Elektronu yüklü bir küre gibi düşünelim. Durağanken, her bir parça yük bir diğer parçayı elektriksel olarak iter; ancak çiftler halinde bütün kuvvetler dengede olduğundan *net* bir kuvvet yoktur [*Bkz.* Şekil 28-3 (a)]. Ancak, elektronlar ivmelenirken kuvvetler daha fazla dengede kalamaz; çünkü elektromanyetik etkilerin bir parçadan diğerine gitmesi zaman alır. Örneğin, Şekil 28-3 (b)'deki α parçası üzerinde, karşı taraftaki β parçasından etki eden kuvvet, şekilde gösterildiği gibi, β'nın daha erken zamandaki bir konumuna bağlıdır. Kuvvetin hem büyüklüğü, hem de yönü yükün hareketine bağlıdır. Yük ivmeleniyorsa, elektronun çeşitli kısımlarındaki kuvvetler Şekil 28-3 (c)'deki gibi gösterilebilir. Bütün bu kuvvetler toplandığında, birbirlerini sıfırlamazlar. İlk bakışta, düzgün bir hız için bile, gecikme sanki dengelenmemiş bir kuvvete yol açar gibi gözükse de, düzgün hızda birbirlerini sıfırlarlar. İvmelenme sırasında elektronun değişik parçaları arasındaki kuvvetlere bakacak olursak, etki ve tepki tam olarak eşit değildir ve elektron *kendi üzerine* ivmelenmeyi engelleyecek şekilde bir kuvvet uygular. Kendi önyüklemesiyle kendi kendini durdurmaya çalışmaktadır.

Bu öz tepki kuvvetini hesaplamak olası ancak zordur; gelgelelim biz burada bu kadar detaylı bir hesaplamanın içine girmek istemiyoruz. Tek boyutta, örneğin x, görece kolay özel bir durum için sonucu doğrudan yazacağız. Böylece, öz kuvvet bir seri içinde yazılabilir. Serinin ilk terimi ivmelenmeye, $\ddot{x}$, dayanır, sonraki terim $\dddot{x}$'le orantılıdır ve bu böyle devam eder* α ve γ 1 derecesinden sayısal katsayılarken, sonuç aşağıdaki eşitliktir:

$$F = \alpha\frac{e^2}{ac^2}\ddot{x} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x} + \gamma\frac{e^2a}{c^4}\ddot{\ddot{x}} + \cdots \tag{28.9}$$

$\ddot{x}$ teriminin α katsayısı, varsayılan yük dağılımına bağlıdır. Yük küre üzerinde düzgün dağılmışsa, bu durumda $\alpha = 2/3$'tür. Diğer bir deyişle, ivmeyle orantılı ve elektronun yarıçapı a'yla ters orantılı değişen ve m_{elek} için Denk. (28.4)'le elde ettiğimiz değerle uyuşan bir terim vardır. Yük dağılımı farklı seçilirse, α da değişir ve Denk. (28.4)'teki 2/3 çarpanı da aynı şekilde değişmek zorunda kalır. $\ddot{x}$'deki terimin a yarıçapından ve varsayılan yük dağılımından *bağımsız olduğu varsayılır; katsayısı* daima 2/3'tür. Bir sonraki terim a yarıçapıyla orantılıdır ve γ katsayısı yük dağılımına dayanır. Dikkat ederseniz, elektron yarıçapı a'nın sıfıra gitmesine izin verirsek, son terim (ve bütün daha yüksek terimler) sıfır olur, ikinci terim sabit kalır; ancak ilk terim –elektromanyetik kütle– sonsuza gider. Sonsuzluğun ortaya çıkmasının nedeninin, elektronun bir parçasının diğeri üzerinde kuvvet uygulaması olduğunu görebiliriz. Belki de, "nokta" bir elektronun kendi üzerinde kuvvet uygulaması olasılığı gibi saçma bir şeye izin verdik.

28-5 Maxwell kuramını değiştirme denemeleri

Şimdi, Maxwell'in elektrodinamik kuramını, elektronu basit bir noktasal yük olarak ele alma fikrini sürdürebileceğimiz şekilde nasıl değiştirebileceğimizi tartışmak istiyoruz. Birçok deneme yapılmıştır ve hatta bazı kuramlarda, elektron kütlesinin tamamen elektromanyetik olacağı şekilde değişiklikler yapılabildi. Ancak bütün bu kuramlar tarih olmuştur. Yine de önerilen bazı olasılıkları tartışmak –insan aklının çabalarını görmek için– ilginçtir.

Elektrik kuramına, bir yük ile diğer yükün arasındaki etkileşim hakkında konuşarak başlamıştık. Daha sonra bu etkileşen yükler hakkında bir kuram oluşturduk ve alan kuramına ulaştık. Ona o kadar inancımız var ki, bir elektronun bir parçasının diğeri üzerindeki kuvveti onunla bulmaya çalışıyoruz. Belki de bütün sorun elektronların kendi üzerlerine etki etmemesidir; belki de arı elektronların etkileşiminden yola çıkıp bir elektronun kendisiyle etkileşebileceğine dair çok ileriye gitmiş bir kestirimde bulunuyoruz. Dolayısıyla, bir elektronun kendisi üzerinde etki edebileceğine dair önerilen bazı kuramları bir kenara bırakacağız. Böylece artık öz etki yüzünden sonsuzluktan kurtuluruz. Ayrıca artık, parçacıkla ilişkili elektromanyetik kütle de yoktur. Bütün kütle artık tamamen mekaniktir; ancak bu sefer kuramda yeni sorunlar vardır.

Burada hemen belirtmeliyiz ki, bu tür kuramlar elektromanyetik alan fikrine dair bir düzeltme gerektirir. Başlangıçta, bir parçacık üzerinde herhangi bir noktadaki kuvvetin sadece iki nicelikle –$\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yle– belirlendiğini söylemiştik. "Öz kuvvet" kavramını ortadan kaldırırsak, bu artık doğru değildir; çünkü belli bir yerde bir elektron varsa, kuvvet toplam $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'yle değil, *diğer* yüklerden dolayı olan parçalarla hesaplanır. Dolayısıyla, $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin ne kadarının üzerindeki kuvveti hesapladığınız yükten ve ne kadarının diğer yüklerden olduğunun hesabını tutmamız lazım. Bu, kuramı daha da karmaşık hale getirmekle birlikte, sonsuzluğun getirdiği sorundan bizi kurtarmaktadır.

Dolayısıyla, *eğer istersek*, bir elektronun kendi üzerine etkimesi diye bir şey olmadığını söyleyebilir ve Denk. (28.9)'daki bütün kuvvetler kümesini bir kenara atabiliriz. Ancak bu durumda kurunun yanında yaş da yanar! Çünkü, Denk. (28.9)'daki ikinci terim, $\dddot{x}$ terimi, gereklidir. O kuvvet çok belirli bir şey yapmak-

* Şu gösterimi kullanmaktayız: $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\dddot{x} = d^3x/dt^3$, vs.

tadır. Onu sonra atarsanız, başınız yine derde girer. Bir yükü ivmelendirdiğimizde, elektromanyetik dalgalar yayınlar ve dolayısıyla enerji kaybeder. Dolayısıyla, bir yükü ivmelendirmek için, aynı kütleye sahip yüksüz bir nesneden daha çok kuvvete ihtiyacımız vardır yoksa yük korunmamış olur. İvmelenen yük üzerinde yaptığımız işin hızı, ışınımla kaybedilen enerjinin hızına eşit olmalıdır. Bu etki üzerinde daha önce konuşmuştuk, ona ışınım direnci denir. Yine de şu soruyu cevaplamamız gerek: İlave kuvvet nereden gelmektedir? Büyük bir anten ışınım yaptığında kuvvetler, anten akımının bir parçasının diğer bir parçası üzerindeki etkisinden gelir. Uzaya ışınım yayınlayan tek bir ivmelenen elektron için, kuvvetin kaynaklanabileceği tek bir yer var gibi gözükmektedir: elektronun bir parçasının diğer bir parçası üzerindeki etkisi.

Daha önce, I. Cilt, 32. Bölümde, salınım yapan bir yükün

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2(\ddot{x})^2}{c^3} \tag{28.10}$$

hızında enerji yaydığını bulmuştuk. Bakalım, Denk. (28.9)'daki elektronun kendi kendini durdurmaya çalıştığı önyükleme kuvvetine karşı elektron *üzerinde* yapmamız gereken işin hızını bulabilecek miyiz. Yapılan işin hızı kuvvet çarpı hızdır, ya da $F\dot{x}$:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha\frac{e^2}{ac^2}\ddot{x}\,\dot{x} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}\,\dot{x} + \cdots \tag{28.11}$$

İlk terim $d\dot{x}^2/dt$'yle orantılıdır ve dolayısıyla elektromanyetik kütleyle ilişkili $\frac{1}{2}mv^2$ kinetik enerjisinin değişim hızına karşılık gelir. İkinci terim, Denk. (28.10)'daki ışınım gücüne karşılık gelmelidir. Ancak farklıdır. Farklılık, Denk. (28.11)'deki terimin genelde doğru ancak Denk. (28.10)'un sadece *salınım yapan* bir yük için doğru olmasından ileri gelir. Yükün hareketi periyodikse, ikisinin birbirine denk olduğunu gösterebiliriz. Bunu yapmak için, Denk. (28.11)'deki ikinci terimi, aritmetik bir dönüşümle, aşağıdaki ifade gibi yeniden yazarız:

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d}{dt}(\dot{x}\,\ddot{x}) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{x})^2$$

Elektronun hareketi periyodikse, $\dot{x}\ddot{x}$ niceliği periyodik olarak aynı değere döner, dolayısıyla zaman teriminin *ortalamasını* alırsak sıfır elde ederiz. İkinci terimse daima artıdır (çünkü bir karedir), dolayısıyla ortalaması da aynı zamanda artıdır. Bu terim bize yapılan net işi verir ve Denk. (28.10)'a eşittir.

Durdurucu önyükleme kuvvetinin $\dddot{x}$ terimi, ışıma yapan sistemlerde enerji korunumuna sahip olmak için gereklidir ve bir kenara atamayız. Aslında, Lorentz'in büyük başarılarından biri böyle bir kuvvetin varlığını ve elektronun kendi üzerindeki etkisinden geldiğini göstermesiydi. Elektronun kendi üzerinde etki ettiği fikrini ve $\dddot{x}$ terimine *ihtiyaç* duyduğumuzu kabullenmeliyiz. Sorun, Denk. (28.9)'da bulunan ve bütün sıkıntıyı yaratan ilk terimi elde etmeden onu nasıl elde edeceğimizdir. Nasıl olacağını bilmiyoruz. Gördüğünüz üzere klasik elektron kuramı kendi kendini köşeye sıkıştırmıştır.

Bunu düzeltmek için yasalarda değişiklik yapmak üzere birçok girişimde bulunulmuştur. Born ve Infeld tarafından önerilen değişiklik, Maxwell denklemlerini doğrusal olmayacakları karmaşık bir şekilde değiştirmekti. Böylece elektromanyetik enerji ve momentum sonlu çıkabilirdi. Ancak önerdikleri yasalar şu ana kadar gözlenmemiş olguları öngörmektedir. Kuramlarıyla ilgili daha sonra değineceğimiz bir sorun da, şu ana kadar yaşadığımız sıkıntıları aşmak için yaptığımız bütün girişimlerle ortak bir sorundur.

Dirac, şu garip olasılığı önerdi: Bir elektronun, Denk. (28.9)'daki birinci terim üzerinden değil de, *ikinci* terim üzerinden kendine etki ettiğini düşünelim. Daha sonra, birinden kurtulup diğerini tutmayı düşündü. Bakın, dedi, Maxwell denklemleri için sadece *gecikmiş* dalga çözümlerini aldığımızda özel bir varsayımda bulunmuştuk. Onların yerine, *ilerlemiş* dalgaları ele alırsak, daha farklı bir şeyler elde ederiz. Bu durumda, öz kuvvet için aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$F = \alpha\frac{e^2}{ac^2}\ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x} + \gamma\frac{e^2a}{c^4}\ddddot{x} + \cdots \tag{28.12}$$

Bu denklem, dizinin ikinci ve bazı daha yüksek terimleri hariç tıpkı Denk. (28.9)'a benzer. [Gecikmiş dalgalardan ilerlemiş dalgalara geçmek, sadece gecikmenin *işaretini* değiştirmektir. Bu da kolayca görüleceği üzere, t'nin işaretini her yerde değiştirmeye denk gelir.] Dolayısıyla, Dirac'a göre, yeni bir kural getirelim ve bir elektronun kendi üzerinde, kendi meydana getirdiği ilerlemiş ve gecikmiş alanların *farkının* yarısı kadar etki ettiğini söyleyelim. Denklem (28.9) ve (28.12)'nin farkının ikiye bölünmüş hali aşağıdaki ifadedir:

$$F = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{x} + \text{yüksek dereceli terimler}$$

Diğer bütün yüksek dereceli terimlerde, a yarıçapı paydaki bir artı üs gibi görünmektedir. Dolayısıyla, bir noktasal yükün limitine gittiğimizde, sadece bir terim –ihtiyacımız olanı– elde ederiz. Bu sayede, Dirac ışınım direnci kuvvetini, diğer eylemsizlik kuvvetleri olmadan, elde etmiş oldu. Elektromanyetik kütle yoktur ve klasik kuram –öz kuvvet hakkında gelişigüzel bir varsayım pahasına– kurtarılmıştır.

Dirac'ın ilave varsayımının gelişigüzelliği, daha da garip bir kuram öne süren Wheeler ve Feynman tarafından, en azından belli bir dereceye kadar kaldırılmıştır. Wheeler ve Feynman, noktasal yüklerin *sadece* diğer yüklerle etkileşime girdiğini, ancak bu etkileşimin yarısının ilerlemiş ve yarısının da gecikmeli dalgalardan geldiğini iddia ettiler. Sonradan ortaya çıktı ki, birçok durumda, sürpriz şekilde, ilerlemiş dalgaları herhangi bir etkisi görülmez; ancak ışınım tepki kuvvetini meydana getirme etkileri vardır. Işınım direnci, elektronun kendi üzerinde etki etmesinden *değil*, ancak şu sıra dışı etkiden gelmektedir. Bir elektron t zamanında ivmelendirildiğinde, dünyadaki diğer bütün yükleri *sonraki* bir $t' = t + r/c$ (r diğer yüke olan uzaklıktır) zamanında, *gecikmeli* dalgalar yüzünden sarsar. Ancak daha sonra bu yükler o elektrona, t' eksi r/c'ye yani sadece t''ye eşit olan t'' zamanında varan kendi *ilerlemiş* dalgalarıyla tepki gösterirler. (Kendi gecikmeli dalgalarıyla da tepki gösterirler elbet, ancak bu, dik "yansıyan" dalgalara denk gelir.) İlerlemiş ve gecikmeli dalgaların birleşimi, salınım yapan bir yükün, ivmelendirildiği anda, kendi ışıdığı dalgaları "soğuracak" diğer bütün yüklerden bir kuvvet hissedeceği anlamına gelir. Görüyorsunuz ya, bir elektron kuramı elde etmek için insanlar ne kadar büyük sorunlarla uğraşmışlar.

Şimdi de bir başka tür kuramı, insanların çaresiz kaldıklarında nelerle uğraştıklarını göstermek için, tarif edeceğiz. Bu, elektrodinamik yasaları için Bopp tarafından önerilen bir başka değişikliktir. Dikkat ettiyseniz, elektromanyetizma denklemlerini değiştirmeye karar verdiğinizde, istediğiniz yerden başlayabiliyorsunuz. Bir elektron için kuvvet yasasını değiştirebilir veya (anlattığımız örneklerdeki gibi) Maxwell denklemlerini değiştirebilir veya herhangi başka bir yerde değişiklik yapabilirsiniz. Bir olasılık da, potansiyelleri akımlar ve yükler cinsinden veren denklemleri değiştirmektir. Denklemlerden biri, bir noktadaki potansiyelin, daha önceki bir zamanda her bir diğer noktadaki yük yoğunluğu (veya yük) tarafından verildiğini ortaya koymuştu. Potansiyeller için dört-vektör gösterimimizi kullanarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$A_\mu(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{j_\mu(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}\,dV_2 \tag{28.13}$$

Bopp'ın olağanüstü şekilde basit fikri şu ifadedir: Belki de sıkıntı, integraldeki $1/r$ çarpanındadır. Bir noktadaki potansiyelin, diğer bir başka noktadaki yük yoğunluğuna bağlı olduğunu ve bu bağlılığın da iki nokta arasındaki mesafeye bağlı *bir* fonksiyon –$f(r_{12})$ diyelim– olduğunu varsayalım. Bu durumda (1) noktasındaki toplam potansiyel, j_μ çarpı bu fonksiyonun bütün uzay üzerinden alınan integraline eşit olur:

$$A_\mu(1, t) = \int j_\mu(2, t - r_{12}/c)\, f(r_{12})\, dV_2$$

İşte bu kadar. Ne bir diferansiyel denklem, ne de başka bir şey. Aslında, bir şey daha var: Sonucun aynı zamanda göreli olarak değişmez olmasını isteriz. Dola-

yısıyla "uzaklık" olarak, uzay-zamanda iki nokta arasındaki değişmez "uzaklığı" kullanmamız gerek. Bu uzaklığın (işareti fark etmez) karesi aşağıdaki eşitliktir:

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2$$
$$= c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \qquad (28.14)$$

Diğer bir deyişle, göreli olarak değişmez bir kuram için s_{12}'nin büyüklüğünün bir fonksiyonunu veya benzeri şey olan s_{12}^2'nin bir fonksiyonunu kullanmalıyız. Bu durumda Bopp'm kuramı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A_\mu(1, t_1) = \int j_\mu(2, t_2)\, F(s_{12}^2)\, dV_2 dt_2 \qquad (28.15)$$

(İntegral de elbette dört boyutlu hacim $dt_2 dx_2 dy_2 dz_2$ üzerinden alınmalıdır.)

Şimdi artık geriye tek kalan, F için uygun bir fonksiyon seçmektir. F için tek bir varsayımımız vardır, o da genliği sıfıra yakın olduğu yerler haricinde çok ufak olmasıdır. Böylece, F grafiği Şekil 28-4'teki eğri gibi gözükür. Merkezi $s^2 = 0$'da olan ve yaklaşık olarak a^2 kadar bir genişliğe sahip sonlu bir alanı olan dar, sivri bir tepedir. Kabaca, (1) noktasındaki potansiyeli hesapladığımızda sadece (2) noktasındakilerin, $s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2$ eşitliği sıfırın $\pm a^2$ kadar yakınında olduğu sürece hissedilebilir bir etki yaratabileceğini söyleyebiliriz. Bunu, F'in sadece

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2 \qquad (28.16)$$

Eşitliği için önemli olduğunu söyleyerek belirtebiliriz. Eğer istersenız daha matematiksel hale getirebilirsiniz, ancak fikir budur.

Şimdi varsayalım ki, gerçek hayattaki motorlar, jeneratörler ve benzerlerinin boyutlarına göre a çok küçük olsun (normal problemler için $r_{12} \gg a$). Bu durumda Denk. (28.16) yüklerin Denklem (28.15)'teki integrale katkısının sadece $t_1 - t_2$ kadar küçük bir aralık için gerçekleştiğini söyler.

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} = r_{12}\sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}$$

$a^2/r_{12}^2 \ll 1$ olduğundan, karekökü $1 \pm a^2/2r_{12}^2$'ye yakınlaştırabiliriz:

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c}\left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2}\right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}$$

Bunun önemi nedir? Bu sonuca göre, A_μ integrali içinde t_2'nin önemli olduğu *zamanlar* sadece, potansiyeli istediğimiz t_1 zamanından $-r_{12} \gg a$ olduğu müddetçe ihmal edilebilir bir düzeltmeyle– r_{12}/c kadar bir gecikmeyle ayrılan zamanlardır. Bir başka deyişle, Bopp kuramı Maxwell kuramına –herhangi bir yükten çok uzak olduğumuz sürece– gecikmeli dalga etkileri anlamında yakınlaşmaktadır.

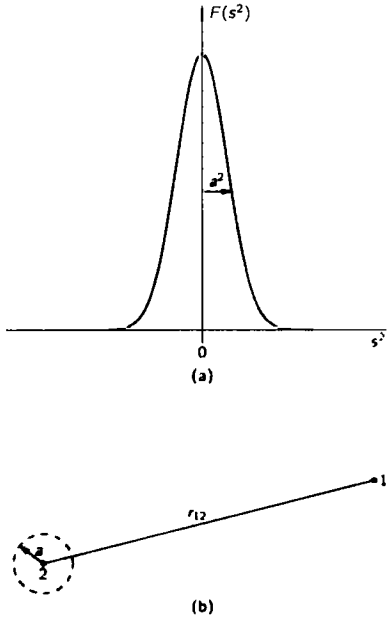
Aslında, yaklaşık olarak, Denk. (28.15)'in integralinin ne sonuç vereceğini görebiliriz. İlkinin t_2 üzerinden $-r_{12}$'yi sabit tutarak–, $-\infty$'dan $+\infty$'a integralini alırsak, o zaman $s^2{}_{12}$ de aynı zamanda $-\infty$'dan $+\infty$'a gidecektir. İntegral, $t_1 - r_{12}/c$'de merkezli ve küçük bir $\Delta t_2 = 2 \times a^2/2r_{12}c$ genişliğindeki aralıkta bulunan t_2'lerden gelecektir. $F(s^2)$ fonksiyonunun $s^2 = 0$'da K değerini aldığını düşünelim; bu durumda t_2 üzerinden integral bize yaklaşık $Kj_\mu \Delta t_2$'yi veya aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\frac{Ka^2}{c}\frac{j_\mu}{r_{12}}$$

Elbette, j_μ'nin $t_2 = t_1 - r_{12}/c$'deki değerini almalıyız, böylece Denk. (28.15) aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$A_\mu(1, t_1) = \frac{Ka^2}{c}\int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2$$

$K = 1/4\pi\epsilon_0 ca^2$ dersek, Maxwell denklemlerinin –otomatik olarak $1/r$ bağlılığıyla– gecikmeli potansiyel çözümünü elde etmiş oluruz. Bütün bunların hepsi, uzay-zamanda bir noktadaki potansiyelin uzay-zamandaki diğer bütün nokta-



Şekil 28-4 Bopp'ın yerel olmayan kuramında kullanılan $F(s^2)$ fonksiyonu.

ların akım yoğunluğuna –iki nokta arasındaki dört boyutlu mesafenin dar bir fonksiyonu olan çarpanla– bağlı olduğunu öne süren basit bir önermeden çıktı. Bu kuram da yine, elektron için sonlu bir elektromanyetik kütle öngörmekte. Ayrıca enerji ve kütle de görelilik kuramına uygun olarak doğru şekilde ilişkilenmiştir. Öyle olmalıdır, çünkü kuram en baştan göreli olarak değişmezdir ve her şey de yolunda gözükmekte.

Bununla birlikte, bu ve diğer tarif ettiğimiz bütün kuramlara yapılan bir temel itiraz vardır. Bildiğimiz bütün parçacıklar kuantum mekaniği yasalarına uyarlar ve dolayısıyla elektrodinamiğin kuantum mekaniksel düzeltmesi yapılmalıdır. Işık, foton gibi davranır. Yüzde yüz Maxwell kuramındaki gibi değildir. Dolayısıyla elektrodinamik kuram değiştirilmelidir. Klasik kuramı düzeltmeye çalışmanın, kuantum elektrodinamiğinde sorunların yok olacağı veya bir başka şekilde düzeltilebileceği ihtimalinden dolayı, boşa harcanan iş zamanı olduğunu daha önceden belirtmiştik. Ancak sorunlar kuantum elektrodinamiğinde kaybolmadı. İşte bu yüzden birçok insan klasik sorunları düzeltmek için çok çaba harcadı. Klasik kuramdaki sorunları *düzeltebilir* ve *daha sonra* kuantum düzeltmelerini uygularlarsa, her şeyin düzeleceğini umut ettiler. Kuantum mekaniği düzeltmeleri uygulandıktan sonra bile, Maxwell kuramında sorunlar devam etmektedir.

Kuantum etkileri bazı değişiklikler yapmıştır –kütle denklemi düzeltilmiş ve Planck sabiti $\hbar$ ortaya çıkmıştır– ancak integrali bir şekilde kesmediğiniz sürece – klasik integralleri $r = a$'da durdurmamız gibi– sonuç hâlâ sonsuz çıkmaktadır. Cevaplar da integralleri nasıl durdurduğunuza bağlıdır. Size burada sorunların aslında temelde aynı olduğunu, ne yazık ki, gösteremeyeceğiz; çünkü kuantum mekaniğine çok az, kuantum elektrodinamiğine ise daha bile az girdik. Dolayısıyla, bir nokta elektron için Maxwell elektrodinamiğinin kuantize edilmiş kuramının sonsuz kütle sonucu verdiğini söylediğimizde bize güvenmeniz gerek.

Şu ana kadar kimse, düzeltilmiş kuramların *herhangi* biriyle, *istikrarlı* bir kuantum kuramı ortaya koyamamıştır. Dirac'ın ilerlemiş ve gecikmeli dalgalar içeren kuramı veya Wheeler ile Feynman'ınkiler asla tatmin edici bir kuantum kuramına dönüşememiştir. Bopp kuramı da, aynı şekilde, tatmin edici bir kuantum kuramı haline gelememiştir. Dolayısıyla bugün bu problemin bilinen bir çözümü yoktur. Bir elektron veya herhangi bir noktasal yükün öz enerjisi için sonsuzluk sonucu vermeyen, tutarlı –kuantum mekaniğini de içeren– bir kuramı nasıl oluşturabileceğimizi bilmiyoruz. Aynı zamanda, nokta olmayan bir yükü tanımlayan tatmin edici bir kuram da yoktur. Bu çözülememiş bir problemdir.

Hemen kalem kâğıda gömülüp, bir elektronun kendi üzerindeki etkisinin tamamen kaldırıldığı ve böylece elektromanyetik kütlenin artık bir anlam ifade etmediği bir kuram oluşturmak ve daha sonra onun temelinde bir kuantum kuramı oluşturmak istiyorsanız, başınızın kesin bir şekilde derde gireceğini söyleyebiliriz. Elektromanyetik eylemsizliğin varlığına –bazı yüklü parçacıkların kütlesinin bir kısmının elektromanyetik olduğuna– dair kesin deneysel kanıt vardır.

Eski kitaplarda, kütlenin ne kadarının mekanik ve ne kadarının elektromanyetik olduğunu söyleyebilmemiz için doğanın bize –biri yüklü diğeri nötr, bunun dışında tamamen birbirinin aynı– iki parçacık sunmayacağı söylenir. Sonradan ortaya çıktı ki, meğer doğa bize bu tür nesneler sunacak kadar *cömert miş*. Böylece, yüklü olanın gözlemlenen kütlesiyle, nötr olanın gözlemlenen kütlesini karşılaştırarak elektromanyetik kütlenin olup olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin, nötronlar ve protonlar bu parçacıklara örnektirler. Kaynağını bilmediğimiz kocaman kuvvetlerle –nükleer kuvvetlerle– etkileşirler. Ancak, daha önce belirttiğimiz gibi, nükleer kuvvetlerin dikkate değer bir özellikleri vardır. Nükleer kuvvetlerle ilgili olduğu müddetçe, proton ve nötron aynı şeydir. Nötron ile nötron, proton ile proton ve proton ile nötron arasındaki *nükleer* kuvvetler birbirinin aynıdır. Sadece küçük elektromanyetik kuvvetler farklıdır. Elektriksel olarak proton ve nötron, gündüz ile gece gibidir. Bizim istediğimiz de tam bu-

dur. Yeğin etkileşimler açısından baktığınızda birbirinin aynı ama elektriksel olarak birbirinden farklı iki parçacık. Ve kütleleri arasında da ufak bir fark vardır. Proton ile nötron arasındaki kütle farkı –MeV biriminde durağan enerjileri mc^2 arasındaki fark olarak– yaklaşık 1,3 MeV'dir, bu da elektronun kütlesinin yaklaşık 2,6 katıdır. Bu durumda klasik kuram, klasik elektron yarıçapının üçte biriyle, yarısı kadar, ya da 10^{-13} cm bir yarıçap öngörür. Elbette, aslında gerçekte kullanmamız gereken kuantum kuramıdır ancak bakın şu tesadüfe ki bütün sabitler –2π'ler ve $\hbar$'lar vs– tam da klasik kuramla yaklaşık aynı yarıçapı verecek şekilde ortaya çıkmıştır. Tek sıkıntı, *işaretin* yanlış olmasıdır! Nötron protondan *daha ağırdır*.

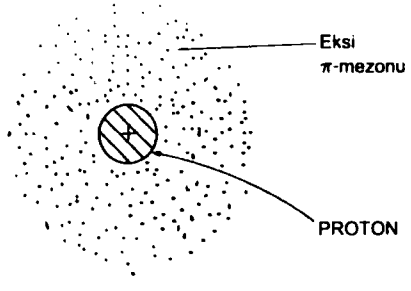
Tablo 28-1
Parçacık Kütleleri

Parçacık	Yük (elektronik)	Kütle (MeV)	Δm[1] (MeV)
n (nötron)	0	939,5	
p (proton)	+1	938,2	–1,3
π (π-mezon)	0	135,0	
	±1	139,6	+4,6
K (K-mezon)	0	497,8	
	±1	493,9	–3,9
Σ (sigma)	0	1191,5	
	+1	1189,4	–2,1
	–1	1196,0	+4,5

[1] Δm = (yüklü kütle) – (nötr kütle)

Doğa bize, elektrik yükleri haricinde birbirlerinin tıpkı aynı gibi görünen başka parçacık çiftleri de –veya üçlüleri– vermiştir. Protonlar ve nötronlarla, nükleer kuvvetlerin sözde "yeğin" etkileşimleri sayesinde etkileşirler. Bu tür etkileşimlerde, belli bir türe ait parçacıklar –örneğin π mezonları– elektrik yükleri *hariç* tıpkı olması gerektiği gibi davranırlar. Tablo 28-1'de bu türden parçacıkların, ölçülen kütleleriyle beraber, bir listesi verilmiştir. Artı veya eksi yüklü π mezon parçacıklarının kütlesi 139,6 MeV'dir, ancak nötr π mezonu 4,6 MeV daha hafiftir. Bu kütle farkının elektromanyetik olduğuna inanıyoruz; 3 ile 4 × 10^{-14} cm çapında bir parçacık yarıçapına karşılık gelir. Tabloyu incelerseniz, diğer parçacıklardaki kütle farklarının da yaklaşık aynı genel boyutta olduğunu görürsünüz.

Artık parçacıkların boyutu başka yöntemlerle, örneğin yüksek enerjili çarpışmalarda sahip oldukları görülen çaplar sayesinde, ölçülebilir. Diğer bir deyişle alan enerjisi integrallerimizi bu diğer yöntemlerle elde ettiğimiz aynı yarıçapta durdurursak, elektromanyetik kütle genel olarak elektromanyetik kuramla uyum içinde gözükmektedir. Bu yüzden farkların elektromanyetik kütleli temsil ettiğine inanıyoruz.



Şekil 28-5 Bir nötron, bazen, bir eksi π mezonu ile sarılmış bir proton gibi var olabilir.

Tablodaki kütle farklarının farklı işaretlerde olmasından dolayı endişelendiğinizden eminiz. Yüklü olanların neden nötr olanlardan ağır olduklarını görmek kolaydır. Ya peki proton ve nötron gibi, ölçülen kütlenin diğer yönde çıktığı çiftlere ne demeli? Sonradan ortaya çıktı ki bu parçacıklar karmaşıktır ve elektromanyetik kütle hesaplaması bu parçacıklar için daha detaylı olmalıdır. Örneğin, her ne kadar nötronun *net* yükü yoksa da kendi içinde bir yük dağılımı *vardır*. Sıfır olan sadece *net* yüktür. Aslına bakarsanız, nötronun Şekil 28-5'te görüldüğü gibi içinde eksi bir π mezon bulunan bir "bulut"la sarmalanmış bir proton gibi göründüğüne –en azından bazen– inanıyoruz. Her ne kadar nötron, toplam yükü sıfır olduğu için, "nötr" ise de, yine elektromanyetik enerjiler (örneğin, bir manyetik momenti vardır) vardır ve dolayısıyla iç yapısına dair detaylı bir kuram elde etmeden elektromanyetik kütle farkının işaretini bilmek kolay değildir.

Şu noktaların altını çizmek istiyoruz: (1) Elektromanyetik kuram, bir elektromanyetik kütlenin varlığını öngörür ancak bu sırada çuvallar da çünkü –aynısı kuantum düzeltmeler için de geçerlidir– tutarlı bir kuram meydana getiremez; (2) elektromanyetik kütlenin varlığına dair deneysel kanıt vardır; (3) bütün bu kütleler, bir elektronun kütlesiyle yaklaşık aynıdır. Dolayısıyla Lorentz'in başlangıçtaki fikrine geri döndük. Belki de elektronun bütün kütlesi yalnızca elektromanyetiktir, belki bütün 0,511 MeV elektrodinamik yüzündendir. Öyle midir, değil midir? Elimizde bir kuram olmadığından, bir şey diyemeyiz.

Bir bilgiyi daha burada vermemiz gerek ve bu en can sıkıcı olandır. Dünyada adına *müon* –ya da μ-mezon– denilen ve şu ana kadar elektrondan, kütlesi haricinde, hiçbir şekilde farklı olmayan bir parçacık vardır. Her yönüyle bir elektron gibi davranır: nötronlarla ve elektromanyetik alanla etkileşir ve hiç nükleer kuvveti yoktur. Elektrondan farklı –en azından sadece daha yüksek olan kütlesinin (elektronun kütlesinin 206,77 katı) sonucu olarak anlaşılamayacak– hiçbir şey yapmaz. Dolayısıyla, elektronun kütlesine dair tam bir açıklama elde ettiğimiz gün, müonun kütlesini nereden elde ettiği bilmecesini kucağımızda bulacağız. Neden? Çünkü elektron ne yapıyorsa müon da aynısını yapar; kütle de aynı şekilde ortaya çıkmalı. Bazıları müon ve elektronun aynı parçacık olduğuna ve kütleye dair nihai kuramda kütle denkleminin iki köklü –her bir parçacık için biri– ikinci dereceden bir denklem olduğu fikrine inanmakta. Bazıları da sonsuz sayıda köke sahip aşkın bir denklem olacağını öne sürerler ve serideki henüz keşfedilmemiş diğer parçacıkların kütlelerini tahmin etmekle uğraşırlar.

28-6 Nükleer kuvvet alanı

Nükleer parçacıkların kütlelerinin elektromanyetik olmayan kısmı hakkında bazı ilave notlar belirtmek istiyoruz. Bu diğer büyük kısım nereden gelmektedir? Elektrodinamik gibi kendi alan kuramlarına –örneğin nükleer kuvvetler– sahip başka kuvvetler de vardır; bununla birlikte güncel kuramların doğru olup olmadığını kimse bilmiyor. Bu kuramlar ayrıca, nükleer parçacıklara, elektromanyetik kütleye benzer, "π-mezon alan kütlesi" diyeceğimiz, bir kütle terimi kazandıran bir alan enerjisi öngörür. Kuvvetler büyük olduğu için çok büyük olduğu varsayılır ve ağır parçacıkların kütlesinin muhtemel kaynağıdır. Ancak mezon alan kuramları hâlâ daha olgunlaşmamış bir safhadadırlar. Elektromanyetizma gibi gelişkin kuramlarla bile, elektronun kütlesini açıklamak için daha yolun çok başındayız. Mezon kuramlarıyla, yoldan çıkıyoruz.

Burada biraz durup, elektrodinamikle ilginç bağlantısından dolayı, mezonlar kuramının ana hatlarını belirtelim. Elektrodinamikte alan, aşağıdaki denklemi sağlayan bir dört-potansiyel cinsinden ifade edilebilir:

$$\Box^2 A_\mu = \text{kaynaklar}$$

Alanın parçalarının, kaynaklardan ayrı var olabilecek şekilde dışarı yayılabildiklerini görmüştük. Bunlar ışık fotonlarıdır ve kaynak içermeyen bir diferansiyel denklemle ifade edilirler.

$$\Box^2 A_\mu = 0$$

İnsanlar, nükleer kuvvetlerin alanının da kendine ait "fotonları" olması gerektiğini –muhtemelen π mezonları olurdu bunlar– ve onların da benzer bir diferansiyel denklemle ifade edilmesi gerektiğini öne sürdüler. (İnsan beyninin yetersizliğinden dolayı tamamen yeni bir şey düşünemiyoruz; bu yüzden bildiklerimizle benzerlik kurarak fikirlerimizi belirtiyoruz.) Bu durumda mezon denklemi, ϕ farklı bir dört-vektör veya belki de skalerken, aşağıdaki eşitlik olabilirdi:

$$\Box^2\phi = 0$$

Sonradan pionların kutupluluğu olmadığı ortaya çıktı, dolayısıyla ϕ skaler ol-

malıdır. Basit $\Box^2\phi = 0$ denklemiyle, mezon alanı, tıpkı elektrik alan gibi, kaynağa olan uzaklık r olduğunda, $1/r^2$'yle orantılı değişkenlik gösterir. Ancak nükleer kuvvetlerin çok daha kısa etki mesafeleri olduğunu bildiğimizden, bu basit denklem işe yaramayacaktır. Göreli değişmezliği bozmadan değişiklik yapabileceğimiz bir yol vardır: D'Alembert'a ϕ çarpı bir sabit ekleyebilir veya ondan çıkarabiliriz. Böylece Yukawa, nükleer kuvvet alanının serbest kuantalarının, μ^2 sabitken –değişmez bir skalerken– aşağıdaki denkleme uyabileceğini öne sürdü:

$$-\Box^2\phi - \mu^2\phi = 0 \tag{28.17}$$

($\Box^2$ dört boyutta skaler bir diferansiyel işlemci olduğundan, herhangi bir skaler daha eklediğimizde değişmezliği devam eder.)

Gelin, zamanda değişkenlik görülmezken Denk. (28.17) nükleer kuvvet için ne vermekte ona bakalım:

$$\nabla^2\phi - \mu^2\phi = 0$$

Denkleminin bir nokta kaynak etrafında, buna başlangıç diyelim, küresel simetrik bir çözümünü istiyoruz. ϕ sadece r'ye bağlıysa

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \mu^2\phi = 0$$

ifadesini veya aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \mu^2(r\phi)$$

$(r\phi)$ değişkenini bağlı değişkenimiz olarak düşünürsek, bu denklem daha önce birçok kere gördüğümüz bir denklem haline gelir ve çözümü de aşağıdaki eşitliktir:

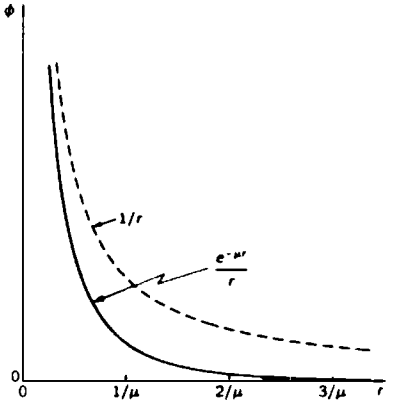
$$r\phi = Ke^{\pm\mu r}$$

Açıkça görülüyor ki, büyük r değeri için ϕ sonsuz olamaz, dolayısıyla üsteki + işareti silinir. Çözüm de aşağıdaki eşitlik olur:

$$\phi = K\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{28.18}$$

Bu fonksiyona *Yukawa potansiyeli* denir. Çekici bir kuvvet için K, büyüklüğü kuvvetlerin deneysel olarak gözlemlenmiş şiddetine uyması için ayarlanması gereken eksi bir sayıdır.

Nükleer kuvvetlerin Yukawa potansiyeli üssel çarpan sayesinde $1/r$'den çok daha hızlı azalır. Şekil 28-6'da gösterildiği gibi potansiyel –ve dolayısıyla da kuvvet– $1/\mu$'nün ötesindeki mesafeler için $1/r$'den çok daha hızlı sıfıra iner. Nükleer kuvvetlerin "menzili" elektrostatik kuvvetlerin "menzilinden" çok daha kısadır. Deneysel olarak, nükleer kuvvetlerin 10^{-13} santimetreden öteye gitmediği bulunmuştur: $\mu \approx 10^{15}\ m^{-1}$.



Şekil 28-6 Yukawa potansiyeli $e^{-\mu r}/r$ ve Coulomb potansiyeli $1/r$'nin karşılaştırılması.

Son olarak, Denk. (28.17)'nin serbest dalga çözümüne bakalım. Eğer,

$$\phi = \phi_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

eşitliğini Denk. (28.17)'ye yerleştirirsek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0$$

I. Cilt, 34. Bölümde yaptığımız gibi, frekansı enerjiye ve dalga sayısını da momentumla ilişkilendirirsek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 - \mu^2\hbar^2$$

Bu denklem bize Yukawa "fotonunun" $\mu\hbar/c$'ye eşit bir kütlesi olduğunu söyler. μ için, nükleer kuvvetlerin gözlemlenen menzilini veren 10^{15} m^{-1} tahmini değerini

kullanırsak, kütle 3×10^{25} g, ya da 170 MeV olarak hesaplanır ki bu da π-mezonunun gözlemlenen kütlesine yaklaşık olarak eşittir. Elektrodinamikle benzerlik kurarak, π-mezonunun, nükleer kuvvet alanının "fotonu" olduğunu söyleyebiliriz. Ancak şimdi elektrodinamik fikirlerini gerçekten geçerli olamayabilecekleri bölgelere itmiş olduk. Elektrodinamiği aşıp, nükleer kuvvetler problemine daldık.

29

ELEKTRİK VE MANYETİK ALANLARDA YÜKLERİN HAREKETLERİ

29-1 Düzgün bir elektrik veya manyetik alanda hareket
29-2 Momentum analizi
29-3 Elektrostatik mercek
29-4 Manyetik mercek
29-5 Elektron mikroskobu
29-6 Hızlandırıcı kılavuz alanları
29-7 Değişken gradyan odaklama
29-8 Birbirine dik elektrik ve manyetik alanlarda hareket

29-1 Düzgün bir elektrik veya manyetik alanda hareket

Şimdi yüklerin hareketlerini değişik koşullarda –çoğunlukla niceliksel bir şekilde– tanımlayalım. Yüklerin alanlarda hareket etmesi sırasında gözlemlenen birçok ilginç olgu çok karmaşık durumlarda, birçok yük birbirleriyle etkileşirken, gerçekleşir. Örneğin, bir elektromanyetik dalga bir malzemenin içinden veya bir plazmanın içinden geçip giderken, milyarlarca ve milyarlarca yük hem dalgayla hem de birbirleriyle etkileşir. Bu tür problemlere daha sonra geleceğiz, şimdilik sadece *belirli* bir alandaki tek bir yükün hareketlerine dair çok daha basit problemle başlamak istiyoruz. Böylece diğer bütün yükleri –elbette varsayacağımız alanları meydana getiren ve bir yerlerde bulunan akımlar ve yükler hariç– göz ardı edebiliriz.

Öncelikle düzgün bir elektrik alandaki bir parçacığın hareketini ele almalıyız. Düşük hızlarda, hareket çok da ilginç değildir. Alanın yönünde düzgün bir ivmelenmedir sadece. Ancak parçacık göreli hale gelecek kadar enerji toplarsa, bu durumda hareket çok daha karmaşık hale gelir. Öyle bir durum için çözümü bulma zevkini size bırakacağız.

Şimdi, sıfır elektrik alanlı düzgün bir manyetik alandaki hareketi ele alalım. Bu problemi daha önceden çözmüştük. Bir çözüm, parçacığın bir daire etrafında dönmesiydi. $qv \times B$ manyetik kuvveti harekete daima dik açılardadır, dolayısıyla dp/dt daima p'ye diktir ve büyüklüğü, R çemberin yarıçapıyken, vp/R'dir:

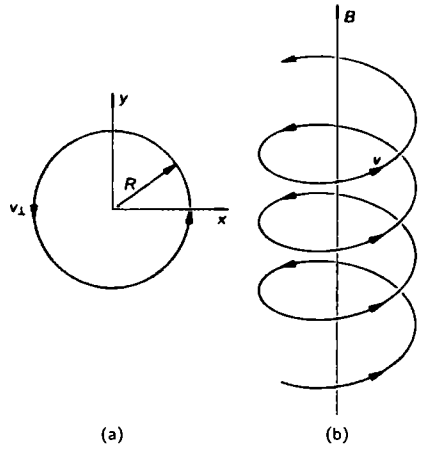
Gözden Geçirme: Cilt 1, Bölüm 30, *Kırınım*

$$F = qvB = \frac{vp}{R}$$

Bu durumda dairesel yörüngenin yarıçapı da aşağıdaki ifade olur:

$$R = \frac{p}{qB} \tag{29.1}$$

Bu sadece bir olasılıktır. Parçacığın alan yönü boyunca bir hareket bileşeni varsa, alanla aynı yönde manyetik kuvvetin bileşeni olamayacağından, o hareket sabittir. Düzgün bir manyetik alandaki bir parçacığın hareketi, B'ye paralel sabit bir hız ve B'ye dik açılarda dairesel bir harekettir. Yol, Şekil 29-1'de görüldüğü gibi silindirik bir sarmaldır. Sarmalın yarıçapı, p yerine, alana dik açılardaki momentum bileşeni $p_\perp$ koyarsak, Denk.(29.1)'le bulunabilir.

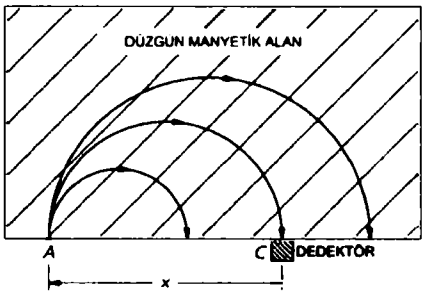


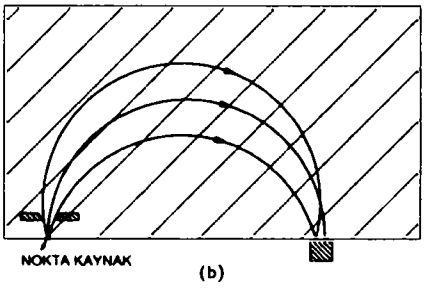
Şekil 29-1 Düzgün bir manyetik alanda bir parçacığın hareketi.

29-2 Momentum analizi

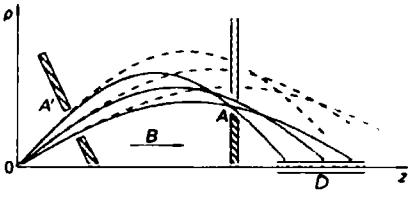
Düzgün bir manyetik alan sıklıkla, yüksek enerjili parçacıklar için "momentum analizörü" veya "momentum spektrometresi" yapmak için kullanılır. Manyetik alan çizim düzlemine dikken, Şekil 29-2 (a)'daki A noktasından düzgün bir manyetik alana parçacıklar fırlatıldığını düşünelim. Her bir parçacık, yarıçapı parçacığın momentumuyla orantılı bir çember yörüngeye girecektir. Bütün parçacıklar alanın kenarına dik şekilde girerlerse, alanı momentumları p'ye orantılı bir x (A'ya olan) uzaklığında terk ederler. Bir C noktasına yerleştirilmiş bir sayaç, momentumları $p = qBx/2$ momentumu yakınında bir Δp aralığında olan parçacıkları tespit eder.

Parçacıkları saymadan önce, onların 180° gitmesi gerekli değildir; ancak "180° spektrometresi" denilen cihazın kendine has bir özelliği vardır. Bütün parçacıkların alan kenarına dik açıda girmesi gerekli değildir. Şekil 29-2 (b) üç

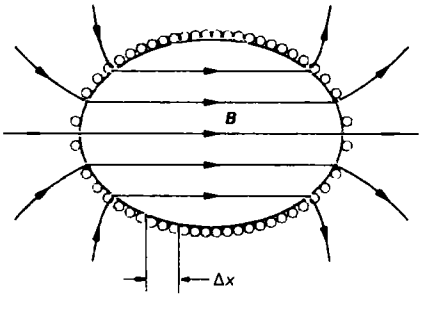




Şekil 29-2 180° odaklamalı bir düzgün alan momentum spektrometresi: (a) farklı momentumlar; (b) farklı açılar. (Manyetik alanın yönü, şeklin düzlemine diktir.)



Şekil 29-3 Bir eksenel alan spektrometresi.



Şekil 29-4 Her bir Δx eksen aralığında eşit akımla bulunan elipsoid bir bobin, içinde düzgün bir manyetik alan yaratır.

parçacığın aldığı yolu gösterir. Hepsinin momentumu *aynıdır* ancak alana farklı açılarda girmektedirler. Yolları birbirinden değişik olmasına rağmen hepsi C noktasına çok yakın bir yerden alanı terk ederler. Burada bir "odak" olduğunu söyleriz. Böyle bir odaklama özelliği sayesinde –her ne kadar şekilde gösterildiği gibi biraz sınırlama varsa da– A'da daha büyük açılar kabul görebilir. Daha büyük açıların kabul görmesi demek genelde, belirli bir zamanda daha fazla parçacığın sayılabilmesi ve böylece de belirli bir ölçüm için daha az zaman harcanması demektir.

Manyetik alanı değiştirerek veya x boyunca sayacı hareket ettirerek veya x boyunca daha fazla menzili kaplayacak şekilde daha fazla sayaç yerleştirerek, gelen demetteki momentumların "tayfı" ölçülebilir. ["momentum tayfı" $f(p)$'yle demek istediğimiz, p ve $(p + dp)$ aralığında bir momentumu olan parçacıkların sayısının $f(p)dp$ olmasıdır.] Bu tür ölçümlere örnek olarak, çeşitli çekirdeklerin β bozunumlarının enerjilerinin dağılımını belirlemek gösterilebilir.

Birçok farklı çeşit momentum spektrometresi vardır, ancak biz sadece birisini daha, özellikle büyük bir kabul açısı olan bir spektrometre çeşidini ele alacağız. Şekil 29-1'de görüldüğü gibi, düzgün bir alandaki sarmal yörüngelere dayanır. z ekseni alanın yönü boyunca olan, silindirik bir koordinat sistemini $-\rho$, θ, $z-$ ele alalım. Bir parçacık başlangıç noktasından z eksenine göre bir α açısıyla yayılırsa, denklemi

$$\rho = a \sin kz, \qquad \theta = bz$$

olan bir spiral boyunca hareket edecektir. a, b ve k, kolaylıkla p, α ve manyetik alan B cinsinden ifade edebileceğiniz parametrelerdir. Belirli bir momentum için, çok fazla başlangıç açılarıyla, eksene olan ρ uzaklığını z'nin bir fonksiyonu grafiğe dökersek Şekil 29-3'e düz çizgilerle gösterilen eğrileri elde ederiz. (Unutmayın ki, bu sadece sarmal bir yolun bir tür projeksiyonudur.) Eksen ile başlangıç yönü arasındaki açı büyüdükçe ρ'nin tepe değeri de büyür, ancak boylamasına hız düşer ve dolayısıyla değişik açılar için yollar A noktası yakınında bir nevi "odağa" gelme eğilimindedir. Eğer dar bir A açıklığı koyarsak, baştaki açılara sahip parçacıklar yine bu aralıktan geçer ve eksene düşerek D'deki uzun dedektör sayesinde sayılabilirler.

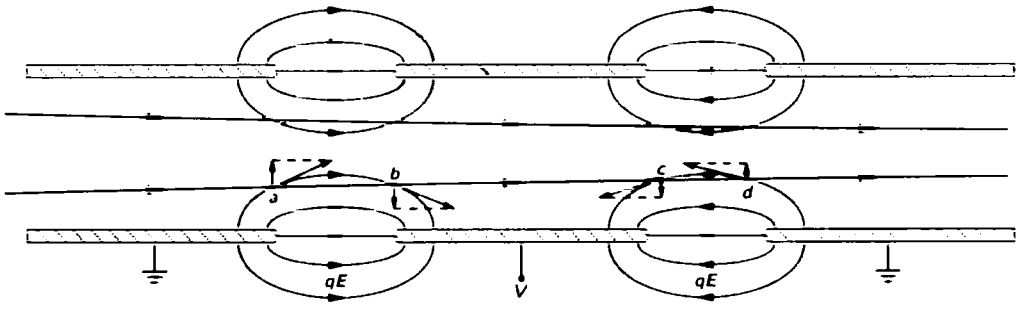
Başlangıçtaki kaynağı aynı açılarla ama daha yüksek momentumla terk eden parçacıklar, kırık çizgilerle gösterilen yolları takip ederler ve A açıklığından geçemezler. Dolayısıyla, cihaz dar bir aralıktaki momentumları geçirir. İlk spektrometreye göre bunun avantajı, A açıklığı –ve A' açıklığının– bir halka olabilmesi ve böylece kaynağı gayet büyük bir katı açıda terk eden parçacıkların da kabul edilebilmesidir. Kaynaktan çıkan parçacıkların önemli bir bölümü kullanılmış olur ve bu, çok hassas ölçümler yaparken veya çok zayıf kaynaklarla çalışırken önemli bir avantajdır.

Şüphesiz avantajın da bir bedeli vardır. Büyük hacimde bir düzgün manyetik alan gerekir ve bu genelde sadece düşük enerjili parçacıklar için pratiktir. Hatırlarsanız, düzgün bir alan elde etmenin yolu, bir küre üzerine, açının sinüsüyle orantılı bir yüzey akım yoğunluğu olan bir bobini sarmaktır. Aynı şeyin dönel bir elipsoid için de doğru olduğu gösterilebilir. Bu yüzden bu tür spektrometreler sıklıkla, ahşap (veya alüminyum) bir çerçeve etrafına eliptik bir bobin sararak yapılır. Tek gereken, Şekil 29-4'te gösterildiği gibi, her bir Δx eksen mesafesi aralığındaki akımın aynı olmasıdır.

29-3 Elektrostatik mercek

Parçacık odaklamanın birçok uygulaması vardır. Örneğin, bir televizyon tüpünde katodu terk eden elektronlar ekrana düzgün bir nokta yaratabilmek için odaklanırlar. Böyle bir durumda aynı enerjiye sahip ancak farklı açılardaki elektronları toplamak ve onları küçük bir noktada bir araya getirmek gerekir. Problem tıpkı ışığı bir mercekle odaklamak gibidir ve parçacıklar için aynı işi yapan cihazlara da yine mercek denir.

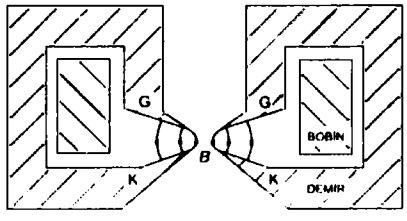
Bir elektron merceği örneği Şekil 29-5'te gösterilmiştir. Çalışma şekli, birbirine bitişik iki elektrot arasındaki elektrik alana dayanır. Çalışma şeklini sol



Şekil 29-5 Elektronik bir mercek. Burada gösterilen alan çizgileri "kuvvet çizgileri"dir, dolayısıyla qE'nin çizgileridir.

taraftan giren paralel bir demete ne olduğunu ele alarak anlayabiliriz. Elektronlar *a* bölgesine vardıklarında, yana doğru bir bileşeni olan bir kuvvet hissederler ve onları eksene doğru iten bir darbe alırlar. *b* alanında da eşit ve ters bir darbe alacaklarını düşünebilirsiniz ancak bu böyle olmaz. Elektronlar *b*'ye vardıklarında enerji kazanmışlardır ve dolayısıyla *b* bölgesinde *daha az zaman geçirirler*. Kuvvetler aynıdır, ancak zaman daha kısa olduğundan darbe daha azdır. *a* ve *b* bölgelerinden geçerken, net bir eksenel darbe vardır ve elektronlar ortak bir noktaya doğru yönelirler. Yüksek voltajlı bölgeyi terk ederken, parçacıklar eksene doğru bir kere daha itilirler. *c* bölgesinde kuvvet dışa ve *d* bölgesinde içeri doğrudur ancak parçacıklar sonraki bölgede daha fazla kaldıkları için yine net bir darbe vardır. Eksenden çok uzak olan mesafelerde, mercekten geçerken toplam darbe eksene olan uzaklıkla orantılıdır (neden olduğunu anlıyor musunuz?) ve bu tam da mercek tipi odaklama için gereken koşuldur.

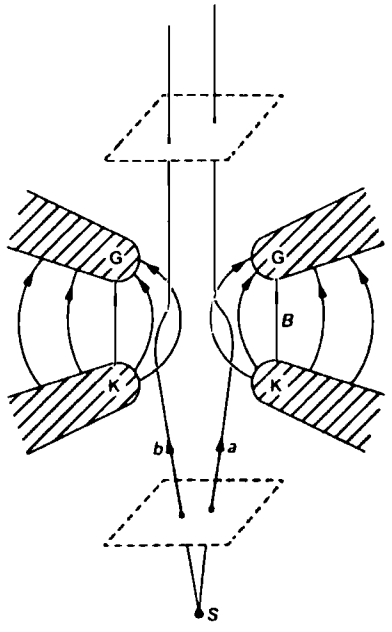
Aynı akıl yürütmeyi kullanarak, ortadaki elektrotun diğer ikisine göre artı veya eksi potansiyele sahip olup olmamasına göre odaklama olup olmayacağını gösterebilirsiniz. Bu tür elektrostatik mercekler katot ışını tüplerinde ve bazı elektron mikroskoplarında kullanılır.



Şekil 29-6 Manyetik bir mercek.

29-4 Manyetik Mercek

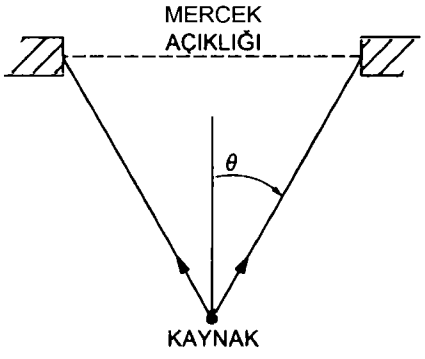
Elektron mikroskoplarında sıklıkla bulunan bir başka tür mercek de, Şekil 29-6'da şematiği gösterilen manyetik mercektir. Silindirik olarak simetrik bir elektromıknatıs, çok keskin dairesel kutup uçları sayesinde, küçük bir bölgede kuvvetli, düzgün olmayan bir alan meydana getirir. Bölgeden dik olarak geçen elektronlar odaklanır. Mekanizmayı, Şekil 29-7'deki büyütülmüş kutup ucu bölgesine bakarak anlayabilirsiniz. Eksene göre aynı açıyla *S* kaynağını terk eden iki elektronu, *a* ve *b* elektronlarını ele alalım. *a* elektronu alanın başlangıcına yaklaştıkça, alanın yatay bileşeni sayesinde *sizden uzağa doğru* saptırılır. Bu durumda enine bir hıza sahip olur ve böylece şiddetli dikey alandan geçerken eksene doğru bir darbe alır. Alanı terk ederken, enine hızı manyetik kuvvetçe ortadan kaldırılır, böylece net etki eksene doğru bir darbe artı eksen etrafında bir "dönmedir". *b* parçacığı üzerindeki bütün kuvvetler zıttır, bu yüzden o da eksene doğru saptırılır. Şekilde ayrı elektronlar paralel yollara getirilmiştir. Eylem, tıpkı odak noktasında bir nesne olan mercek gibidir. Benzer bir mercek yukarı yönde kullanılarak, elektronları tek bir noktaya odaklayabilir ve *S* kaynağının bir görüntüsünü oluşturabilir.



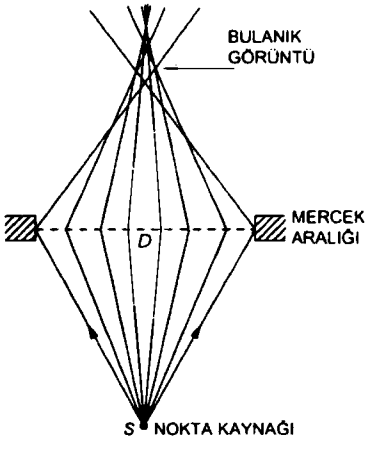
Şekil 29-7 Manyetik mercekte elektronun hareketi.

29-5 Elektron mikroskobu

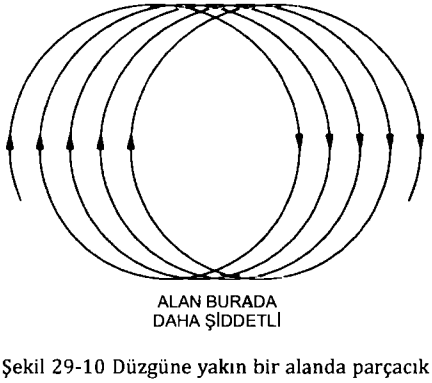
Elektron mikroskoplarının, optik mikroskoplarla görülemeyecek kadar küçük nesneleri "gördüğünü" bilirsiniz. I. Cilt, 30. Bölümde herhangi bir optik sistemde mercek açıklığındaki kırınımdan dolayı görülen temel sınırlamaları tar-



Şekil 29-8 Bir mikroskobun çözünürlüğü, kaynaktan yayılan açıyla sınırlıdır.



Şekil 29-9 Bir merceğin küresel sapması.



Şekil 29-10 Düzgüne yakın bir alanda parçacık hareketi.

tışmıştık. Bir mercek açıklığı, kaynakta 2θ açısına denk geliyorsa (*Bkz.* Şekil 29-8), kaynaktaki iki komşu nokta, λ ışığın dalga boyuyken

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

değerinden daha yakınsalar, birbirlerinden ayırt edilemezler. En iyi optik mikroskopla, θ kuramsal limit 90°'ye yaklaşır: δ yaklaşık olarak λ'ya ya da yaklaşık 5000 Angström eşittir.

Aynı sınırlama elektron mikroskobu için de geçerlidir, ancak –50 kiloVolt elektronlar için– dalga boyu yaklaşık 0,05 Angströmdür. Yaklaşık 30° bir mercek açıklığı kullanılırsa, aralarındaki mesafe bir Angströmün beşte biri olan nesneleri görebiliriz. Moleküllerdeki atomların arasındaki mesafe tipik olarak 1 veya 2 Angström olduğundan, moleküllerin fotoğraflarını çekebiliriz. Biyoloji daha kolaydır; DNA yapısının fotoğrafını çekebiliyoruz. Aynı şeyi burada yapabilseydik ne kadar muhteşem bir şey olurdu! Günümüzde moleküler biyolojide araştırma konularının çoğu, karmaşık organik moleküllerin şekillerini ortaya koymaktır. Bir görebilseydik hele onları!

Ne yazık ki, bir elektron mikroskobunda şu ana kadar elde ettiğimiz en iyi çözünürlük yaklaşık 20 Angströmdür. Bunun nedeni, şu ana kadar kimsenin geniş aralıklı bir mercek tasarlamamış olmasıdır. Tüm lenslerde "küresel sapma" vardır, eksene göre büyük açılardan gelen ışınlar, Şekil 29-9'da gösterildiği gibi eksene yakın açılarda gelen ışınlardan farklı bir odak noktasına sahiptir. Özel teknikler sayesinde, ihmal edilebilir küresel sapmaya sahip optik mikroskop lensler yapılabilir, ancak şu ana kadar kimse küresel sapması olmayan bir elektron merceği yapmayı başaramadı.

Aslında, şimdi tarif ettiğimiz tür elektrostatik ve manyetik lenslerin indirgenemez bir miktarda küresel sapmaya sahip olduğu gösterilebilir. Bu sapma –kırınımla birlikte– elektron mikroskoplarının çözünürlüğünü şimdiki değerleriyle sınırlamaktadır.

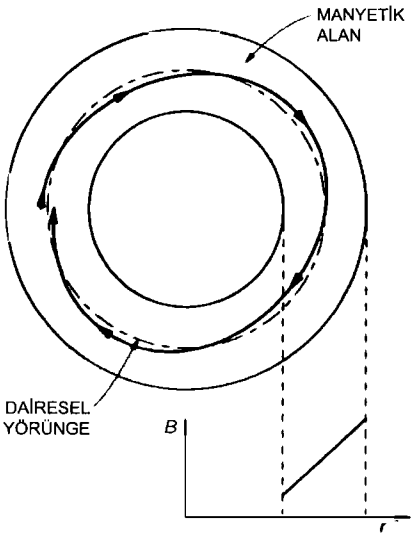
Bahsettiğimiz sınırlama, eksenel olarak simetrik olmayan veya zaman içinde sabit kalmayan elektrik ve manyetik alanlar için bulunmaz. Belki de bir gün, birileri basit elektron merceğinin doğal sapmasının üstesinden gelecek yeni bir tür elektron merceği geliştirir. Böylece atomları doğrudan fotoğraflamayı başarabileceğiz. Belki de bir gün, kimyasal bileşikleri bir çözeltinin rengine bakarak değil de, atomların konumlarına bakarak analiz edebileceğiz.

29-6 Hızlandırıcı kılavuz alanları

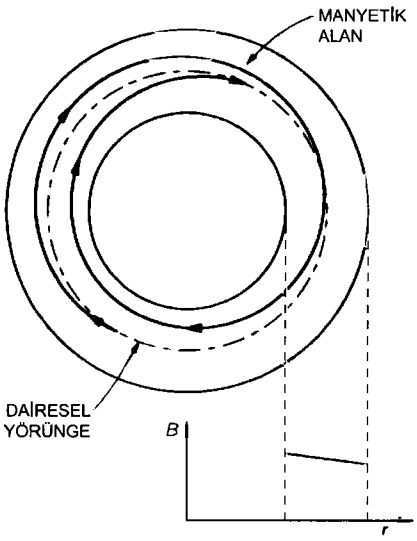
Manyetik alanlar ayrıca, yüksek enerji parçacık hızlandırıcılarında özel parçacık yolları meydana getirmek için de kullanılır. Siklotron ve sinkrotron gibi makineler sürekli, şiddetli bir elektrik alandan parçacıkları geçirerek onları yüksek enerji seviyelerine getirirler. Parçacıklar, bir manyetik alan sayesinde dairesel yörüngelerde tutulurlar.

Düzgün bir manyetik alanda bir parçacığın dairesel yörüngede hareket ettiğini görmüştük. Ancak bu sadece mükemmel bir düzgün alan için geçerlidir. Geniş bir alanda neredeyse düzgün, ancak bir bölgede diğerinden daha şiddetli bir B alanı hayal edin. p momentumuna sahip bir parçacığı bu alana koyarsak, yarıçapı $R = p/qB$ olan neredeyse dairesel bir yörüngede hareket edecektir. Alanın şiddetli olduğu bölgede, eğrinin yarıçapı biraz daha küçüktür. Yörünge kapalı bir çember değildir, ancak Şekil 29-10'daki gibi alan içinden" "yürür" gider. Eğer dilersek, alandaki küçük "hatanın" parçacığı yeni bir yola gönderen fazladan bir açısal itme sağladığını düşünebiliriz. Parçacıklar hızlandırıcıda milyonlarca dönüş gerçekleştireceklerse, yolları tasarlanan yörüngeye yakın tutmak için bir tür "radyal odaklama" gereklidir.

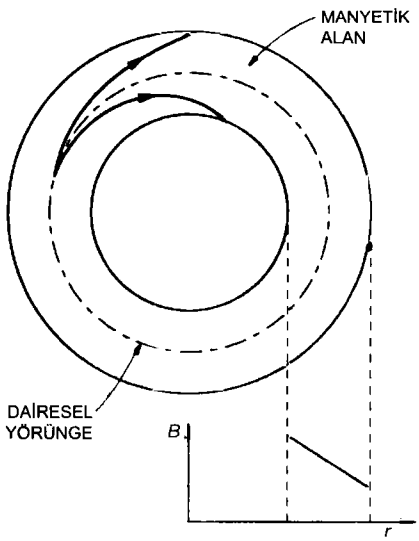
Düzgün alanla ilgili bir başka sıkıntı da, parçacıkların bir düzlemde kalmamasıdır. Çok küçük bir açıyla yola çıkarlarsa –veya alandaki küçük bir hatadan dolayı küçük bir açı verilirlerse– sarmal bir yola girerler ve kendilerini mıknatıs kutbunda, tavanda veya vakum tankının tabanında bulurlar. Bu tür dikey sapmaları engellemek için bir ayarlama yapılmalı; alan, radyal odaklama kadar "dikey odaklama" da sağlamalıdır.



Şekil 29-11 Büyük bir artı eğimi olan manyetik alanda parçacığın radyal hareketi.



Şekil 29-12 Küçük bir eksi eğimi olan manyetik alanda parçacığın radyal hareketi.



Şekil 29-13 Küçük bir eksi eğimi olan manyetik alanda parçacığın radyal hareketi.

Radyal odaklamanın, tasarlanan yolun merkezinden uzaklaştıkça artan bir manyetik alan sağlayarak yapılabileceği düşünülebilir. Böylece, bir parçacık geniş bir yarıçapa doğru giderse, daha şiddetli bir manyetik alana girecek ve böylece doğru yarıçapa geri gönderilecektir. Çok küçük bir yarıçapa doğru giderse, eğilmesi daha az olacaktır ve böylece gene tasarlanan yarıçapa geri dönecektir. Parçacık, ideal çembere göre bir açıyla yola çıkarılırsa, Şekil 29-11'deki gibi ideal daire yörüngesi etrafında salınım yapacaktır. Radyal odaklama, parçacıkları dairesel yolun yakınında tutar.

Aslında, *zıt* alan eğimiyle bile bir miktar radyal odaklama mevcuttur. Bu, yolun eğriliğinin yarıçapı, parçacığın alan merkezine olan uzaklığından daha hızlı artmazsa mümkündür. Parçacık yörüngeleri Şekil 29-12'de görüldüğü gibidir. Ancak alanın gradyanı çok büyükse, yörüngeler tasarım yarıçapına dönmez ve Şekil 29-13'teki gibi içeri veya dışarı sarmallar çizerler.

Alanın eğimini genelde "göreli gradyan" veya *alan indisi*, n, cinsinden tanımlarız:

$$n = \frac{dB/B}{dr/r} \tag{29.2}$$

Bir kılavuz alan, göreli gradyanı –1'den büyükse radyal odaklama sağlar.

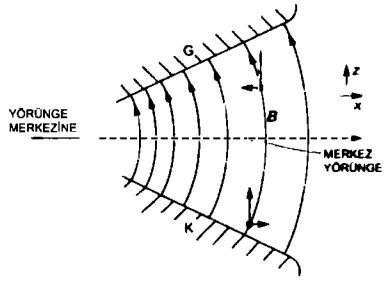
Bir radyal alan gradyanı ayrıca, parçacıklar üzerinde *dik* kuvvetler meydana getirir. Yörünge merkezine yakınken şiddetli ve dışardayken daha zayıf bir alanımız olduğunu düşünelim. Mıknatısın, yörüngeye dik açılarda, dik kesiti Şekil 29-14'teki gibi gösterilebilir. (Protonlar için yörüngeler sayfadan dışarı doğrudur.) Alan sol tarafta daha şiddetli ve sağ tarafta daha zayıfsa, manyetik alanın çizgileri şekildeki gibi eğilmelidir. Boş uzayda $\boldsymbol{B}$'nin dolaşımının sıfır olduğunu belirten yasayı kullanarak bunun böyle olması gerektiğini görebiliriz. Koordinatları şekilde gösterildiği gibi alırsak, o halde,

$$(\nabla \times \boldsymbol{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

veya

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \tag{29.3}$$

olur. $\partial B_z/\partial x$'in eksi olduğunu varsaydığımızdan, eşit bir eksi $\partial B_x/\partial z$ olmalıdır. Yörüngenin "nominal" düzlemi $B_x = 0$ eşitliğinin sağlandığı bir simetri düzlemiyse, o halde B_x'in radyal bileşeni düzlemin üstünde eksi ve altında artı olacaktır. Çizgiler şekildeki gibi eğilmelidir.



Şekil 29-14 Yörüngelere dik bir kesitte görülen dik bir kılavuz alan.

Böyle bir alanın dik odaklama özellikleri olur. Bir protonun, merkez yörüngenin üstünde ve iyi kötü ona paralel bir şekilde hareket ettiğini düşünün. B'nin yatay bileşeni protona, aşağı doğru bir kuvvet uygulayacaktır. Proton merkez yörüngenin altındaysa, kuvvet tersine çevrilir. Dolayısıyla merkez yörüngeye doğru, etkili bir "düzeltici kuvvet" vardır. Akıl yürütmemize göre artan yarıçapla beraber *dikey* alan azalıyorsa, dikey odaklama olacaktır; ancak alan gradyanı artıysa "dikey odaksızlık" olacaktır. Dolayısıyla dikey odaklama için, alan indisi n sıfırdan küçük olmalıdır. Yukarıda da radyal odaklama için n değerinin -1'den büyük olması gerektiğini bulmuştuk. İki koşulu bir araya getirerek, parçacıkların dengeli yörüngelerde tutulabilmesi için aşağıdaki koşulu yazabiliriz:

$$-1 < n < 0$$

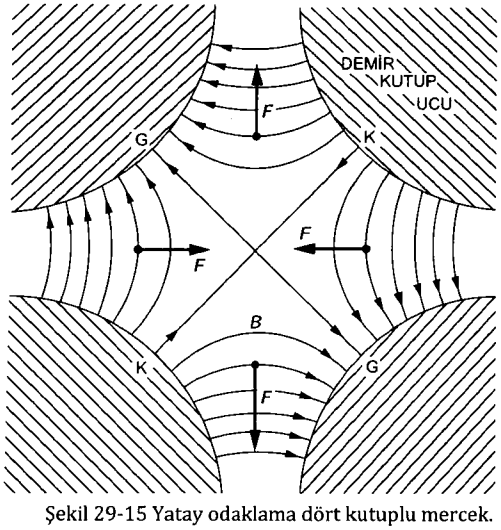
Siklotronlarda sıfıra çok yakın değerler kullanılır; betatron ve sinkrotronlarda ise tipik olarak $n = -0{,}6$ değeri kullanılır.

29-7 Değişken gradyan odaklama

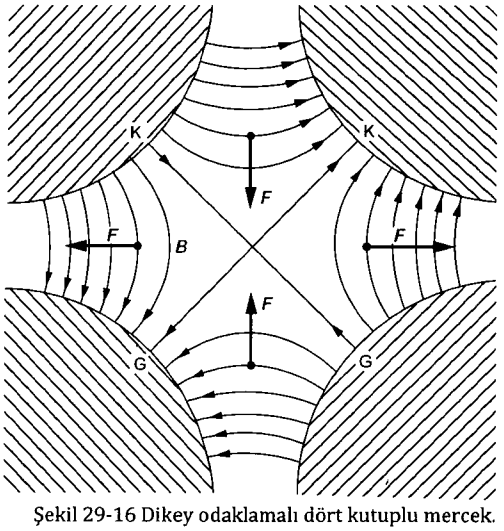
Böyle küçük n değerleri biraz "zayıf" bir odaklama sağlar. Daha büyük bir artı gradyan sayesinde ($n \gg 1$) daha etkili radyal odaklama sağlanabilir, ancak bu sefer de dikey kuvvetler büyük bir şekilde odaksızlığa yol açar. Benzer şekilde, büyük eksi eğimler ($n \ll -1$) daha büyük dikey kuvvetlere yol açar ancak bu sefer de radyal odaksızlığa neden olur. Bununla birlikte, yaklaşık 10 sene önce odaklama ile odaksızlık arasında değişen bir kuvvetin, *net* bir odaklama kuvvetine sahip olabileceği gösterilmiştir.

Değişken gradyan odaklamanın nasıl işlediğini açıklamak için, öncelikle, aynı çalışma ilkesine sahip, dört kutuplu odaklama merceğini tarif edeceğiz. Şekil 29-14'teki alana, yörüngede alan sıfır olacak şekilde şiddeti ayarlanmış düzgün bir eksi manyetik alan eklendiğini hayal edin. Yüksüz noktada küçük yerdeğiştirmeler için alan, Şekil 29-15'te gösterildiği gibidir. Böyle bir dört kutuplu mıknatısa "dört kutuplu mercek" denir. Merkeze soldan veya sağdan giren artı bir parçacık, merkeze doğru geri itilir. Parçacık yukarıdan veya aşağıdan girerse, merkezden *dışarı* doğru itilir. Bu, yatay odaklamalı bir mercektir. Yatay gradyan –tüm kutuplulukları tersine çevirerek– tersine çevrilirse bütün kuvvetlerin işaretleri de tersine çevrilir ve Şekil 29-16'daki gibi bir dikey odaklama merceği elde ederiz. Bu tür mercekler için alan şiddeti –ve dolayısıyla odaklama kuvvetleri– merceğin merkezine olan uzaklıkla doğrusal olarak artar.

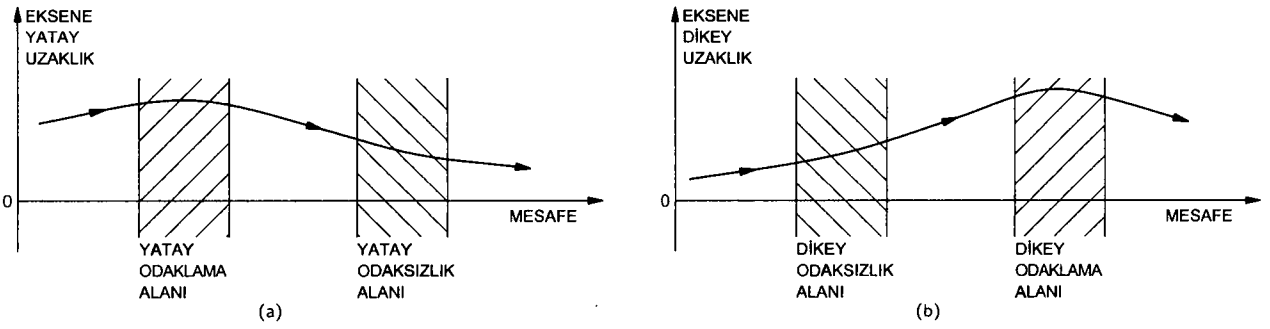
Şimdi, art arda yerleştirilmiş bu tür iki merceği ele alalım. Bir parçacık, Şekil 29-17 (a)'daki gibi, eksene göre yatay bir uzaklıktan girerse ilk mercek onu



Şekil 29-15 Yatay odaklama dört kutuplu mercek.



Şekil 29-16 Dikey odaklamalı dört kutuplu mercek.



Şekil 29-17 Bir çift dört kutuplu mercekle yatay ve dikey odaklama.

eksene doğru saptırır. İkinci merceğe vardığında eksene daha yakındır, dolayısıyla dışa doğru olan kuvvet ve dışa doğru sapma daha azdır. Eksene doğru net bir eğme vardır; *ortalama* etki yatay odaklamadır. Diğer yandan, eksene göre dik yönde giren bir parçacık için yol Şekil 29-17 (b)'deki gibi olacaktır. Parçacık önce eksenden *uzağa* saptırılır, ancak daha sonra ikince merceğe daha büyük bir yerdeğiştirmeyle girer ve bu yüzden daha büyük bir kuvvet hisseder. Bunun sonucu olarak da eksene doğru eğilir. Yine net etki odaklamadır. Dolayısıyla, tıpkı bir optik lens gibi, bir çift dört kutuplu mercek yatay ve dikey hareket için bağımsız olarak işler. Tıpkı, ışık demetlerini kontrol etmek için optik mercekleri kullandığımız gibi.

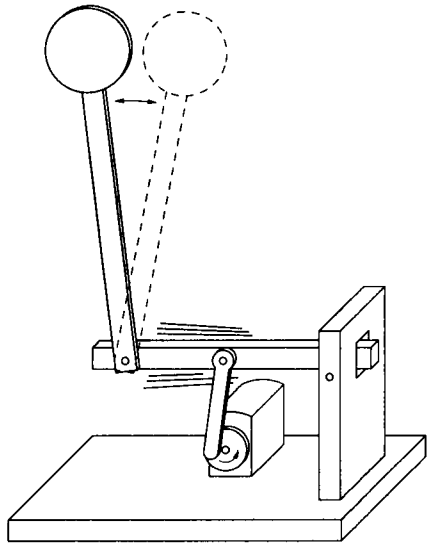
Değişken gradyanlı bir sistemin *her zaman* odaklama meydana getirmediğini belirtmemiz gerek. Gradyanlar (parçacık momentumuna veya mercekler arasındaki boşluğa göre) çok büyükse, net etki odaksızlık olabilir. Şekil 29-17'deki iki mercek arasındaki boşluk üç veya dört kat artırıldığında bunun nasıl olabileceğini görebilirsiniz. .

Sinkrotron kılavuz mıknatısına geri dönelim. Üstü üste bindirilmiş düzgün alanlı, değişken sıralı "artı" ve "eksi" merceklerden oluştuğunu görebiliriz. Düzgün alan, ortalamada, parçacıkları yatay bir çemberde (dikey harekete bir etki olmadan) döndürmeye ve değişken mercekler de yoldan çıkmaya meyilli parçacıkları daima (ortalamada) merkez yörüngeye doğru itmeye yarar.

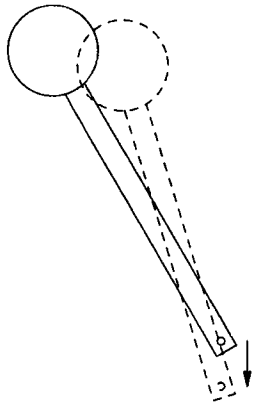
Bir "Odaklayıcı" kuvvet ile "Odaksızlık" kuvveti arasında değişen bir kuvvetin nasıl net bir "odaklayıcı" etkisi olabileceğini gösteren hoş bir mekanik benzetme vardır. Bir ucunda ağırlık olan ve motorla hareket ettirilen bir şaft sayesinde hızlı bir şekilde yukarı aşağı hareket ettirilen bir mille tutturulmuş *som* bir çubuk düşünün. Böyle bir sarkacın *iki* denge konumu vardır. Normal, aşağı sarkan konumunun yanı sıra, sarkaç aynı zamanda "şakulü" milin *üstünde* "yukarı doğru" konumda da dengededir. Böyle bir sarkaç Şekil 29-18'de çizilmiştir.

Şimdi sunacağımız akıl yürütmeyle, dikey mil hareketinin değişken odaklama kuvvetine eşit olduğunu görebilirsiniz. Pivot aşağıya doğru hızlandırılırken, Şekil 29-19'da gösterildiği gibi "şakul" içeri doğru hareket etme meyillindedir. Mil yukarı doğru hızlandırıldığında, belki tersine döner. "Şakulü" eksene doğru düzelten kuvvet değişkenlik gösterir, ancak net etki eksene doğru bir kuvvettir. Dolayısıyla sarkaç nötr bir konum etrafında geri ve ileri salınacaktır ki bu da normal bir sarkacın işleyişinin tersidir.

Elbette, bir sarkacı baş aşağı tutmanın çok daha kolay bir yolu vardır ve o da onu parmağınız üzerinde *dengelemektir! Aynı parmak* üzerinde *iki bağımsız* çubuğu dengelemeye çalışın bir de! Ya da gözleriniz kapalıyken bir çubuğu dengeleyin. Dengeleme işlemi, hatalı giden şeyleri düzeltmeyi içerir. Ve bu, birçok şey birden yanlış gidiyorsa, genelde imkânsızdır. Bir sinkrotronda dolaşıp duran milyarlarca parçacık vardır ve her biri farklı bir "hatayla" başlamış olabilir. Bahsettiğimiz tür odaklama hepsi için işe yarar.



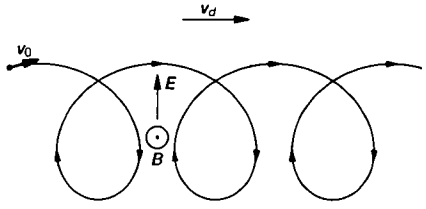
Şekil 29-18 Salınım yapan bir mile bağlı sarkaç, şakülü milin üstündeyken de dengeli bir konuma sahip olabilir.



Şekil 29-19 Milin aşağı doğru hızlanması, sarkacın düşey yönde hareketine neden olur.

29-8 Birbirine dik elektrik ve manyetik alanlarda hareket

Şu ana kadar ya sadece elektrik alanda ya da sadece manyetik alanda bulunan parçacıklar hakkında konuştuk. Aynı anda iki tür alan birden olduğunda gözlemlenen bazı ilginç etkiler vardır. Birbirlerine dik açıda düzgün bir $\boldsymbol{B}$ manyetik alanı ile $\boldsymbol{E}$ manyetik alanı olsun. $\boldsymbol{B}$'ye dik olarak hareketlerine başlayan parçacıklar Şekil 29-20'deki gibi bir eğride hareket ederler. (Şekildeki bir *düzlem* eğrisidir, sarmal *değildir*!) Bu hareketi niceliksel olarak anlayabiliriz. Parçacık (artı olduğunu varsayalım) $\boldsymbol{E}$ yönünde ilerlediğinde hız kazanır ve böylece manyetik alan tarafından daha az eğilir. $\boldsymbol{E}$ alanına zıt yönde gittiğinde hız kaybeder ve manyetik alan tarafından daha fazla eğilir. Net etki, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ yönünde ortalama bir "sapmadır".



Şekil 29-20 Birbirine dik elektrik ve manyetik alanlarda bir parçacığın yolu.

Aslında, bu hareketin düzgün bir dairesel hareketle, $v_d = E/B$ hızında düzgün bir yanlamasına hareketin üst üste bindirilmesi olduğunu gösterebiliriz. Şekil 20-20'deki yol bir sikloiddir. Sağa doğru sabit bir hızda ilerleyen bir gözlemci düşünün. Onun çerçevesinde bizim manyetik alanımız yeni bir manyetik alan *artı aşağı yönde* bir elektrik ala dönüşmüştür. Uygun bir hızda, toplam elektrik alanı sıfır olacaktır ve elektronu çember çizerek giderken görecektir. Dolayısıyla *bizim* gördüğünüz hareket çembersel bir hareket artı $v_d = E/B$ sapma hızında bir ötelemedir. Elektronların birbirine dik elektrik ve manyetik alanlardaki hareketi, *manyetron* tüplerinin, mikrodalga enerjisi yaratmak için kullanılan salınıcıların temelidir.

Elektrik ve manyetik alanlardaki parçacık hareketlerine dair daha birçok ilginç örnek vardır. Örneğin, Van Allen kuşaklarında sıkışıp kalmış protonların ve elektronların yörüngeleri gibi. Ancak onlarla ilgilenmek için ne yazık ki yeterli vaktimiz yok.

30
KRİSTALLERİN İÇ GEOMETRİSİ

30-1 Kristallerin iç geometrisi
30-2 Kristallerde kimyasal bağlar
30-3 Kristallerin büyümesi
30-4 Kristal örgüler
30-5 İki boyutta simetriler
30-6 Üç boyutta simetriler
30-7 Metallerin mukavemeti
30-8 Dislokasyonlar ve kristal büyümesi
30-9 Bragg-Nye kristal modeli

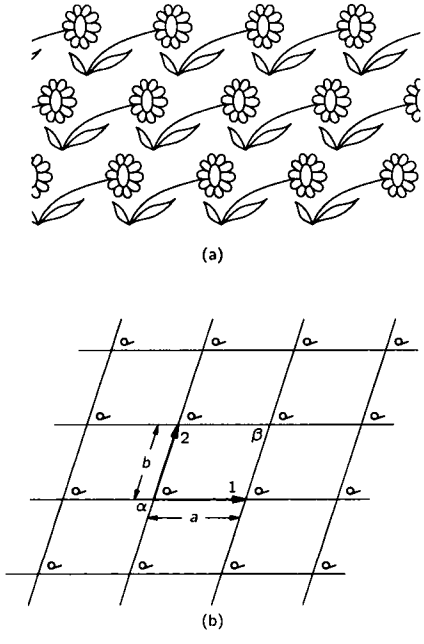
30-1 Kristallerin iç geometrisi

Elektrik ve manyetizmanın temel yasalarını çalışmayı bitirdik ve şimdi maddenin elektromanyetik özelliklerini çalışacağız. İşe katıları –kristalleri– tanımlayarak başlayacağız. Maddenin atomları hareket etmedikçe, birbirlerine yapışırlar ve mümkün olabilecek en düşük enerjiye sahip olacak şekilde kendilerini dizerler. Belli bir yerdeki atomlar düşük enerjiye sahip bir örüntü bulurlarsa, başka bir yerdeki atomlar da muhtemelen aynı örüntüyü gerçekleştireceklerdir. Bu nedenlerden dolayı, katı malzemede atomların tekrarlayan bir örgüsü vardır.

Diğer bir deyişle, bir kristaldeki koşullar şöyledir: Bir kristaldeki belli bir atomun çevresinde belli bir örüntü vardır ve aynı tür atoma başka bir yerde bakarsanız tıpatıp aynı örüntü görürsünüz. Daha da uzakta bir atoma bakarsanız, yine tıpatıp aynı koşulları bulacaksınız. Örgü sürekli bir şekilde –ve elbette üç boyutta– kendini tekrarlamaktadır.

Kaynak: C. Kittel, *Katı Hal Fiziğine Giriş* [*Introduction to Solid State Physics*], John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. Baskı, 1956

Alanı istediğiniz kadar büyük yapabilmek için, aynı tasarım elemanını sürekli bir şekilde tekrarlamanız gereken bir duvar kâğıdı –ya da bir kumaş veya düzlemsel bir alanda bir geometrik tasarım– tasarlama problemini ele alalım. Bu, bir kristal için üç boyutlu çözümü olan problemin iki boyutlu benzeridir. Örneğin, Şekil 30-1 (a) tipik bir duvar kâğıdı tasarımını göstermektedir. Tek bir eleman, sonsuza kadar gidebilecek bir örgü içinde tekrarlanmaktadır. Bu duvar kâğıdı tasarımının geometrik özellikleri, çiçeğin geometrisi veya sanatsal önemiyle ilgilenmeden sadece tekrarlanan özelliklerini göz önüne alarak, Şekil 30-1 (b)'de gösterilmiştir. Bir noktadan hareket etmeye başlarsanız, tıpatıp benzer bir noktayı 1 oku yönünde a mesafesi kadar ilerleyerek bulabilirsiniz. Diğer ok yönünde b mesafesi kadar ilerlerseniz de yine tıpatıp benzer bir noktayla karşılaşırsınız. Elbette birçok başka yön de vardır. Örneğin, α noktasından β noktasına ilerleyebilir ve tıpatıp aynı bir konuma ulaşabilirsiniz; ancak böyle bir adım, 1 yönünde bir adımı takip eden 2 yönünde bir adımın birleşimidir. Örgünün temel özelliklerinden biri, özdeş konumlar arasındaki en kısa iki adımla ifade edilebilir. "Özdeş" konumlardan kastımız, birinde durup etrafınıza baktığınızda gördüğünüz şeyle, diğerinde durup etrafta gördüğünüz şey bire bir aynıdır. Bu, bir kristalin temel özelliğidir. Tek fark, bir kristal iki boyutlu değil üç boyutlu bir örüntüdür ve doğal olarak çiçekler yerine örgünün her bir elemanı atomların bir tür örgü içinde –belki altı hidrojen atomu ve iki karbon atomu– bir çeşit örüntüdür. Bir kristal içindeki atomların örüntünün X-ışını kırınımıyla deneysel olarak bulunabileceğini belirtmiştik. Bu yöntemden daha önce kısaca bahsetmiştik ve birçok basit kristal ve bazı karmaşık olanları için atomların hassas örüntülerinin çalışıldığını belirtmek dışında ilave bir şey söylemeyeceğiz.



Şekil 30-1 İki boyutta kendini tekrarlayan örüntü.

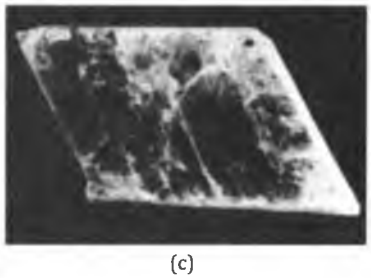
Bir kristalin iç örüntüsü çeşitli şekillerde olabilir. Birincisi, atomların belli yönlerdeki bağlanması diğer yönlerdekilerden genelde daha kuvvetlidir. Bunun anlamı, kristalin belirli düzlemlerde diğer düzlemlere göre daha kolay kırılabilmesidir. Bunlara kristallerin *yarılma* düzlemleri denir. Bir kristali bıçak ağzıyla açmaya çalıştığınızda genelde bu düzlem boyunca yarılır. İkincisi, kristalin oluşma biçiminden dolayı içyapısı genelde yüzeyde belirir. Bir çözeltiden bir kristalin çökeltildiğini düşünün. Çözelti içinde etrafta yüzen atomlar vardır ve en düşük enerjili konumu bulana kadar durmazlar. (Sanki bir duvar kâğıdının, sürüklenen çiçeklerden birisinin bir yere yapışıp kalması ve sonra diğerlerinin



(a)

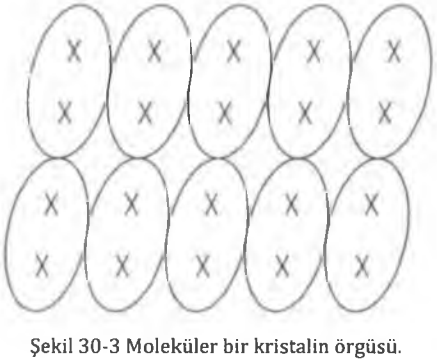


(b)



(c)

Şekil 30-2 Doğal kristaller: (a) Kuvars (b) sodyum klorür (c) mika.



Şekil 30-3 Moleküler bir kristalin örgüsü.

bunun üstüne gelmesi ve nihayetinde bir örüntünün yavaş yavaş oluşması gibidir.) Bazı yönlerdeki büyüme hızının diğer yönlerdekinden farklı olacağını ve böylece bir tür geometrik şekle bürüneceğini takdir edersiniz. Bu tür etkilerden dolayı, birçok kristalin dış yüzeyi atomların iç diziliminin özelliklerini gösterir.

Örneğin, Şekil 30-2 (a) iç örüntüsü altıgen olan tipik bir kuvars kristalinin şeklini gösterir. Böyle bir kristale yakından bakarsanız, dış yüzeyinin tam bir altıgen olmadığını çünkü kenarlarının hiç de birbirlerine eşit olmadığını görebilirsiniz. Hatta aslında, sıklıkla eşit değildir kenarlar. Ancak bir bakıma çok da iyi bir altıgendir: yüzler arasındaki *açılar* tam olarak 120° dir. Açıkça, herhangi bir yüzün boyutu tesadüfi bir büyümedir; ancak *açılar* iç geometrinin bir temsilidir. Dolayısıyla, karşılıklı yüzeyler arasındaki açılar hep aynı olsa da, her bir kuvars kristalinin şekli farklıdır.

Bir sodyum klorür kristalinin iç geometrisi dış şekliyle de anlaşılabilir. Şekil 30-2 (b) tipik bir tuz taneciğini göstermekte. Yine, kristal mükemmel bir küp değildir, ama yüzleri birbirlerine göre *tam olarak* dik açılardadır.

Daha karmaşık bir kristal, Şekil 30-2 (c)'de gösterilen mikadır. Yüksek oranda eş yönsüz bir kristaldir. Bunu, mika bir levhayı tek bir yönde (şekilde yatay olarak) koparmaya çalıştığınızda çok zorlanırken, diğer yönde (dikey olarak) koparmanızın çok kolay olduğunu görerek anlayabilirsiniz. Çok sert ama ince levhalar elde etmek için sıklıkla mika kullanılır. Mika ve kuvars, silis içeren doğal minerallere örnektirler. Silis içeren üçüncü bir mineral örneği de asbesttir. Asbestin ilginç özelliği, iki yönde çok kolay koparılabilirken üçüncü bir yönde kolayca koparılamamasıdır. Çok kuvvetli, *doğrusal* liflerden yapılmış gibi görünmektedir.

30-2 Kristallerde kimyasal bağlar

Kristallerin mekanik özellikleri, atomları arasındaki kimyasal bağların türüne bağlıdır. Mikanın değişik yönlerdeki çok farklı mukavemeti, değişik yönlerdeki atomlar arası bağların türlerine bağlıdır. Kimya dersinizde değişik tür kimyasal bağları öğrendiğinize eminim. Birincisi, sodyum klorür örneğiyle tartıştığımız iyonik bağlardır. Kabaca söyleyecek olursak, sodyum atomları bir elektron kaybedip artı iyon olur ve klor atomları da bir elektron kazanarak eksi iyon olurlar. Artı ve eksi iyonlar üç boyutlu bir satranç tahtasında dizilirler ve birbirlerine elektriksel kuvvetlerle bağlanırlar.

Elektronların atomlar arasında paylaşıldığı kovalent bağ daha yaygın ve genelde daha kuvvetlidir. Örneğin bir elmasta karbon atomlarının dört bir yönde en yakın komşularıyla kovalent bağları vardır, bu yüzden de kristal gerçekten çok serttir. Bir kuvars kristalinde silisyum ve oksijen arasında da kovalent bağ vardır; ancak bu durumda bağ sadece kısmi kovalenttir. Bunun nedeni elektronların tam anlamıyla paylaşılamaması; bu yüzden atomların kısmen yüklü olması ve kristalin de bir şekilde iyonik olmasıdır. Doğa, onu basitleştirmeye çalıştığımız kadar basit değildir. Kovalent ve iyonik bağlar arasında, birçok muhtemel kademe vardır.

Bir şeker kristalinin de başka tür bir bağı vardır. İçinde, atomların kovalent bağlarla sıkı sıkıya birbirlerine bağlandığı büyük moleküller vardır, böylece molekülün sert bir yapısı vardır. Ancak kuvvetli bağlar tamamen doyduğundan, bağımsız, ayrı moleküller arasında sadece, göreceli olarak zayıf çekim kuvvetleri vardır. Bu tür *moleküler* kristallerde, moleküller kendi bağımsız, doğru ifadeyle, kimliklerini korurlar ve bu yüzden iç düzenleme Şekil 30-3'te gösterildiği gibi olmayabilir. Moleküller birbirlerine kuvvetli şekilde bağlanmadıklarından, kristalleri kırmak kolaydır. Kuvvetli kovalent bağlarını bozmadan kırılamayan, tek bir dev molekül olan elmas gibi bir şeyden çok farklıdırlar. Parafin, moleküler kristalin bir başka örneğidir.

Moleküler kristalin uç bir örneği, katı argon gibi bir maddede meydana gelir. Atomlar arasında çok zayıf bir çekim vardır. Her bir atom, tamamıyla doy-

muş tek atomlu bir moleküldür. Ancak çok düşük sıcaklıklarda ısıl hareket çok ufaktır, dolayısıyla atomlar arası küçük kuvvetler atomların, sıkıca istiflenmiş küreler gibi düzenli bir örüntüye kavuşmasını sağlayabilir.

Metaller ise tamamen farklı bir madde sınıfı meydana getirirler. Bağları tamamen farklı türdendir. Bir metalde bağ kurma birbirlerine komşu atomlar arasında değil, bütün bir kristale ait bir özelliktir. Değerlik elektronları bir atoma veya bir çift atomla değil, kristalin her tarafında paylaşılır. Her bir atom, bir elektronlar havuzuna elektron verir ve atomik artı iyonlar eksi elektronlar denizinde bulunur. Elektron denizi iyonları bir tür yapıştırıcı gibi bir arada tutar.

Metallerde, herhangi özel bir yönde özel bağlar olmadığından, bağlarında kuvvetli bir yönlülük yoktur. Yine de kristallerdir, çünkü atomik iyonlar belli bir dizilişteyken toplam enerji en düşük seviyededir. Bununla beraber, tercih edilen örüntünün enerjisi genelde diğer muhtemel örüntülerin enerjisinden daha düşük değildir. Birçok metalin atomları, olabildiğince sıkı istiflenmiş küçük küreler gibidir.

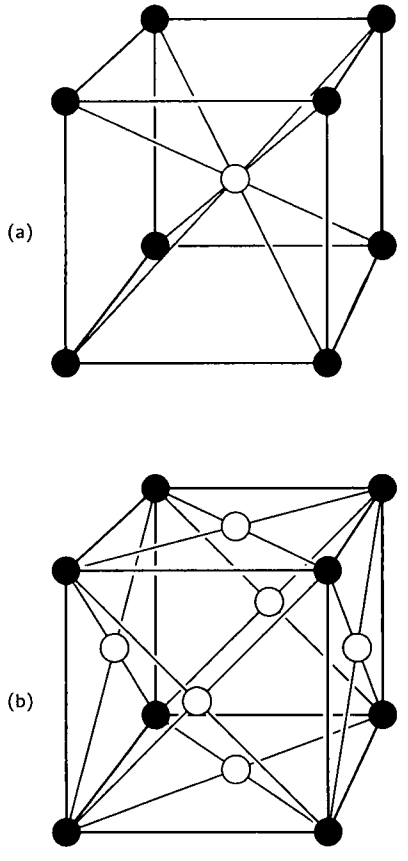
30-3 Kristallerin büyümesi

Dünyadaki kristallerin doğal oluşumunu hayal etmeye çalışın. Dünya yüzeyi, her türden atomu içeren koca bir kazan aşure gibidir. Volkanik hareketlerle, rüzgârla ve suyla sürekli karıştırılırlar. Sürekli bir hareket ve karıştırılma vardır. Yine de bir şekilde silisyum atomları birbirlerini ve oksijen atomlarını bularak silis yaparlar. Atomlar, kristali meydana getirmek için tek tek eklenirler. Karışım, ayrışır. Ve yakında başka bir yerde, sodyum ve klor atomları birbirlerini bularak tuz kristalini oluştururlar.

Nasıl oluyor da, bir kristal oluşmaya başladığında sadece bir tür atomun katılmasına izin veriyor? Bunun nedeni, bütün sistemin olabilecek en düşük enerji seviyesi için çalışmasıdır. Büyüyen bir kristal yeni bir atomu, sadece enerjisini en düşük seviyeye getirecekse kabul eder. İyi de kristal, belli bir noktadaki bir silisyum –veya bir oksijen– atomunun en düşük enerji seviyesine varacağını nasıl *bilebiliyor*? Deneme ve yanılma yöntemiyle. Sıvıda, atomlar sürekli döngü hareketindedir. Her bir atom, komşularına saniyede yaklaşık 10^{13} kere çarpar. Atom, büyüyen bir kristalin tam doğru noktasına çarptığında, enerji düşükse, tekrar geri zıplama olasılığı bir şekilde çok düşüktür. Milyonlarca yıl boyunca, saniyede 10^{13} kere çarpışmayla denemeler yaparak, atomlar en düşük enerjiyi buldukları yeri bulur ve orda birikmeye başlarlar. En sonunda da büyük kristaller haline gelirler.

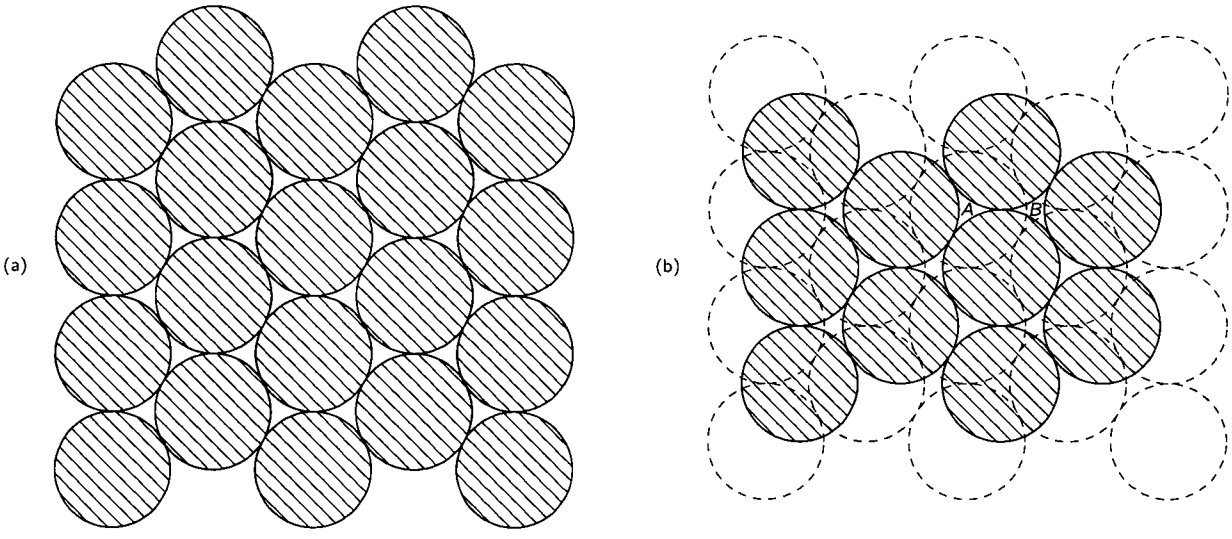
30-4 Kristal örgüler

Bir kristaldeki atomların örüntüsü –kristal *örgü*– birçok farklı geometrik biçimde olabilir. Biz burada, birçok metalin ve asal gazların katı hallerinin özelliği olan en basit örgüleri tanımlayacağız. Bunlar, iki biçimde olabilen küp örgülerdir: Şekil 30-4 (a)'da gösterilen kütle merkezli küp ve 30-4 (b)'de gösterilen yüzey merkezli küp. Çizimler, elbette, örgünün tek bir yüzünü göstermekte. Aynı küpün üç boyutta sürekli tekrarlandığı örüntüyü hayal etmeniz gerekmekte. Ayrıca, çizimi daha açık hale getirebilmek için atomların sadece "merkezleri" gösterilmiştir. Gerçek bir kristalde, atomlar birbirlerine değen küreler gibidirler. Çizimlerdeki siyah ve beyaz küreler, genel olarak, farklı tür atomları da veya aynı türü de temsil ediyor olabilirler. Örneğin, düşük sıcaklıklarda demirin kütle merkezli kübik bir örgü yapısı varken, yüksek sıcaklıklarda yüzey merkezli kübik bir örgü yapısı vardır. İki kristal biçiminin fiziksel özellikleri birbirlerinden çok farklıdır.



Şekil 30-4 Kübik kristallerin birim hücreleri: (a) kütle merkezli (b) yüzey merkezli.

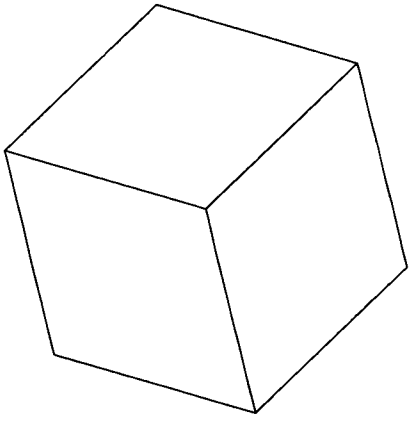
Bu tür biçimler nasıl meydana gelir? Küresel atomları mümkün olduğunca sıkı şekilde istiflemeye çalıştığınızı düşünün. Bunu yapmaya başlamanın bir yolu, Şekil 30-5 (a)'daki gibi "altıgen sıkı istifli diziliş"te bir katman yaratmaktır. Daha sonra, Şekil 30-5 (b)'de gösterildiği şekilde, aynı birincisi gibi ama ya-



Şekil 30-5 Altıgen sıkı istifli bir örgü yaratmak.

taya uzanmış ikinci bir katman yerleştirirsiniz. Sonra üçüncü bir katman daha yerleştirirsiniz. Ancak dikkat edin! *Üçüncü* katmanı yerleştirmenin *iki* farklı yolu vardır. Şekil 30-5 (b)'deki *A* noktasına bir atom yerleştirerek üçüncü katmana başlarsanız, üçüncü katmandaki her bir atom en alt katmandaki bir atomun tam üstüne denk gelir. Diğer yandan, üçüncü katmana *B* konumuna bir atom yerleştirerek başlarsanız, üçüncü katmandaki atomlar, en alt katmandaki üç atomun oluşturduğu üçgenin tam ortasına merkezleneceklerdir. Herhangi bir başka noktadan başlamak *A* veya *B*'den başlamaya denktir, dolayısıyla üçüncü katmanı yerleştirmenin sadece iki yolu vardır.

Üçüncü katmanın *B* noktasında bir atomu varsa, kristal örgü –belli bir açıdan görülen– yüzey merkezli bir küp olacaktır. Altıgenlerle başlayıp, küpler oluşturmamız komiktir. Ancak dikkat ederseniz, bir küpe köşesinden bakarsanız altıgen bir çerçevesi vardır. Örneğin, Şekil 30-6 düzlemsel bir altıgen de olabilir veya perspektifle çizilmiş bir küp de!



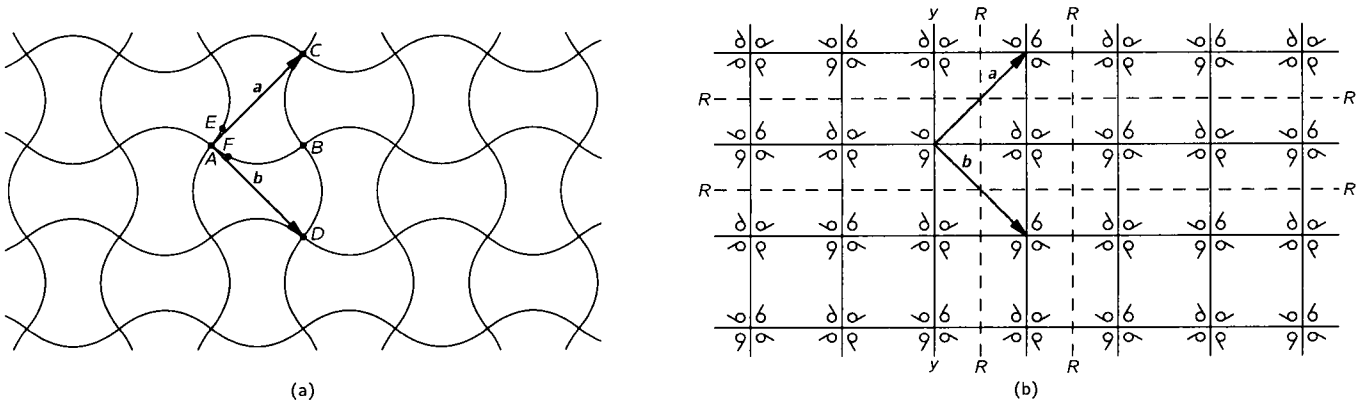
Şekil 30-6 Bu bir altıgen mi yoksa köşesinden baktığımız bir küp mü?

Şekil 30-5 (b)'ye *A* noktasında bir atomla başlayarak bir katman eklenirse, kübik bir yapı oluşmaz ve örgünün sadece altıgen bir simetrisi vardır. Bahsettiğimiz bu iki olasılığın da eşit derecede sıkı istifli olduğu açıkça ortadadır.

Bazı metaller –örneğin, bakır ve gümüş– ilk alternatifi, yüzey merkezli küpü, seçerler. Diğerleri, örneğin berilyum ve magnezyum, başka alternatifleri seçer ve altıgen kristaller oluştururlar. Hangi kristal örgünün oluşacağı sadece küçük kürelerin istiflenmesiyle belirlenemez, başka etmenler de dahil olmalıdır. Özellikle, atomlar arası kuvvetlerin kalan açısal bağlılığına bağlıdır (veya metaller söz konusu olduğunda, elektron havuzunun enerjisine). Bütün bunları kimya derslerinizde öğreneceksiniz.

30-5 İki boyutta simetriler

Şimdi de kristallerin bazı özelliklerini, kendi iç simetrilerinin görüş açısından tartışmak istiyoruz. Kristalin ana özelliği, bir atomda başlayıp sonra bir örgü ötede karşılık gelen bir atoma gittiğinizde, bire bir aynı tür bir çevreye varmanızdır. Bu, temel önermedir. Ancak bir atom olsaydınız, sizi aynı çevreye götürebilecek başka bir tür –başka bir muhtemel "simetri"– değişiklik olurdu. Şekil 30-7 (a) bir başka muhtemel "duvar kâğıdı tipi" tasarımı göstermekte (muhtemelen hiç görmediğiniz birisi). *A* ve *B* noktaları için çevreleri karşılaştırdığımızı düşünelim. İlk başta aynı olduklarını düşünebilirsiniz ancak çok da değildirler. *C* ve *D* noktaları *A* noktasına özdeştir, ancak *B*'nin çevresinin *A*'nınkine benzemesi için etrafındakilerin tersine, aynı bir ayna yansımasındaki gibi, çevrilmesi gerekir.



Şekil 30-7 Yüksek simetrili bir örüntü.

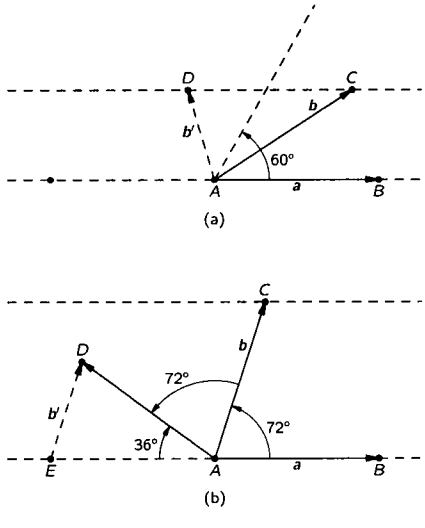
Örüntüde başka tür "özdeş" noktalar da vardır. Örneğin E ve F noktaları, birinin diğerine göre 90° döndürülmüş olması dışında, "aynı" çevrelere sahiptir. Örüntü gayet özeldir. A gibi bir nokta etrafında 90° –veya onun katlarında– bir döndürme aynı örüntüyü tekrar verir. Bu tür bir yapıya sahip bir kristalin dışında kare köşeler vardır, ancak içindeki yapı basit bir küpten daha karmaşıktır.

Bazı özel örnekleri tarif ettiğimize göre, bir kristalin sahip olabileceği muhtemel bütün simetrileri bulmaya çalışalım. Öncelikle, bir düzlemde ne olup bittiğini ele alalım. Bir *düzlem* örgü, örgünün bir noktasından *en yakın* iki özdeş noktaya giden sözde *ilkel* iki vektörle tanımlanabilir. 1 ve 2 Şekil 30-1'deki örgünün ilkel vektörleridir. Şekil 30-7 (a)'nın vektörleri $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ de, oradaki dizilimin ilkel vektörleridir. Elbette, istersek $\boldsymbol{a}$'yı $-\boldsymbol{a}$'yla ve $\boldsymbol{b}$'yi de $-\boldsymbol{b}$'yle değiştirebilirz. $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ büyüklük olarak birbirlerine eşit ve dik açılarda olduklarından, 90° bir döndürme $\boldsymbol{a}$'yı $\boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{b}$'yi de $-\boldsymbol{a}$ yapar ve aynı örgüyü yine verir.

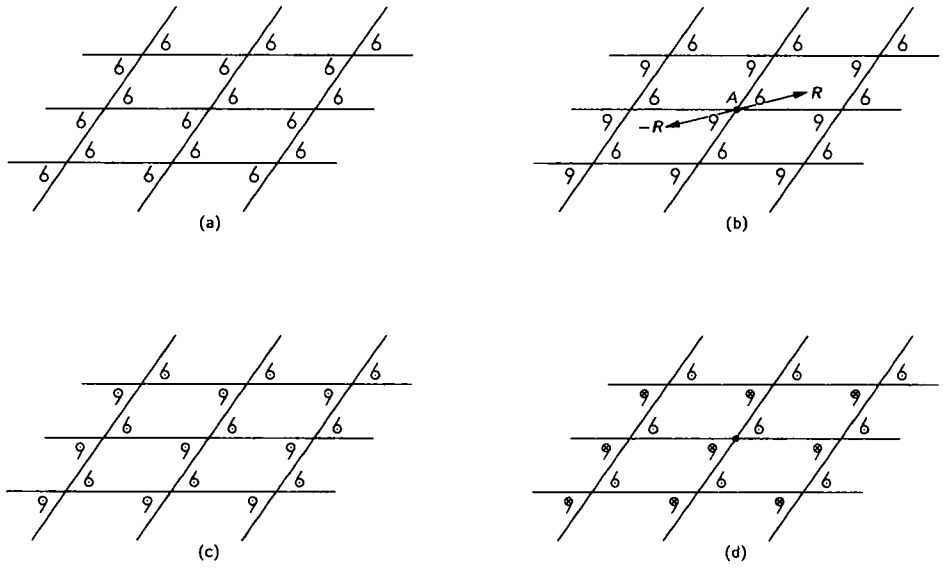
"Dört yüzlü" simetrisi olan örgüler olduğunu görüyoruz. Ve daha önce de, bir altıgen temelli ve altı yüzlü bir simetriye sahip olabilecek sıkı istifli örüntüden bahsetmiştik. Şekil 30-5 (a)'daki daireler dizilimini, herhangi bir dairenin merkezi etrafında 60° döndürülürse aynı örüntü elde edilir.

Başka ne tür döndürme simetrileri vardır? Örneğin beş katlı veya sekiz katlı bir dönme simetrisi elde edebilir miyiz? Bunların imkânsız olduğunu görmek kolaydır. *Dörtten fazla kenarı olan tek simetri, altı kenarlı bir simetridir.* Öncelikle, altı katlı simetriden fazlasının imkânsız olduğunu gösterelim. Şekil 30-8 (a)'da gösterildiği gibi, aralarındaki açı 60°'den küçük iki ilkel vektörlü bir örgüyü ele alalım. B ve C noktalarının A noktasına özdeş ve $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$'nin de A'nın özdeş komşularına olan *en kısa* iki vektör olduğunu varsayalım. Bu açıkça yanlıştır, çünkü B ile C arasındaki mesafe A'dan herhangi birine olandan kısadır. D'nin yakınında A'ya özdeş ve B veya C'den yakın bir nokta olmalıdır. $\boldsymbol{b}$'nü ilkel vektör olarak seçmeliydik. Dolayısıyla iki ilkel vektör arasındaki açı 60° veya daha büyük olmalıdır. Sekizgen simetri imkânsızdır.

Peki, beş katlı simetri? İlkel vektörler $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$'nin uzunluklarının eşit olduğunu ve aralarında, Şekil 30-8(b)'deki gibi, $2\pi/5 = 72°$ olduğunu varsayarsak, o zaman C ile arasında 72° olan özdeş bir D noktası olmalıdır. Ancak E'den D'ye $\boldsymbol{b}'$ vektörü $\boldsymbol{b}$'den azdır, dolayısıyla $\boldsymbol{b}$ bir ilkel vektör değildir. Beş katlı simetri olamaz. Bizi bu tür sıkıntılara sokmayan olasılıklar $\theta = 60°$, 90° veya 120°'dir. Sıfır veya 180° imkânsızdır. Sonucumuzu ifade etmenin bir yolu da, dizilimin tam bir dönüşte, yarım dönüşte, üçte bir dönüşte, dörtte bir dönüşte ve altıda bir dönüşte değişmeden kaldığını söylemektir. Ve bunlar, bir düzlem için mümkün, toplam 5 dönme simetrisidir. $\theta = 2\pi/n$ dersek, "n katlı" simetriden konuşuyor



Şekil 30-8 (a) Altı katlıdan fazla dönme simetrileri imkânsızdır. (b) Beş katlı dönme simetrisi imkânsızdır.



Şekil 30-9 Evirme altında simetri. (b) örüntüsü $\boldsymbol{R} \rightarrow -\boldsymbol{R}$ ise değişmez, ancak (a) örüntüsü değişir. Üç boyutta (d) örüntüsü evirme altında simetriktir, ancak (c) örüntüsü değildir.

oluruz. n'in 4 veya 6 olduğu bir dizilimin, n'in 1 veya 2 olduğu bir örüntüye göre "daha yüksek simetrisi" olduğunu söyleyebiliriz.

Şekil 30-7 (a)'ya dönersek, dizilimin dört katlı bir dönme simetrisi olduğunu görürüz. Şekil 30-7 (b)'de (a) kısmıyla aynı simetri özelliklerine sahip bir başka tasarım çizdik. Küçük, virgül gibi şekiller, her bir karenin içinde tasarımın simetrisini belirleyen asimetrik nesnelerdir. Dikkat ederseniz virgüller birbirlerini izleyen karelerde tersine çevrilmiştir, böylece birim hücre küçük karelerin birinden daha büyüktür. Virgüller olmasaydı bile, dizilimin yine dört katlı bir simetrisi olurdu ancak birim hücre daha küçük olurdu. Şekil 30-7'deki örüntülerin başka simetri özellikleri de vardır. Örneğin, kesikli R-R çizgilerinin herhangi birine ait bir yansıma yine aynı örüntüyü meydana getirir.

Şekil 30-7'deki örüntüler bir tür simetriye daha sahiptir. Örüntü Y-Y hattından yansıtılır *ve* sağa (veya sola) doğru bir kare kaydırılırsa, başlangıçtaki örüntüye geri döneriz. Y-Y hattına "kayma" hattı denir.

Bunlar, iki boyutta mümkün bütün simetrilerdir. *İki boyutta* 180° dönmeye eşit, ancak üç boyutta gayet farklı, bir uzamsal simetri işlemi daha vardır. Bu *evirmedir*. Evirmeden kastımız, bir başlangıç noktasından [örneğin, Şekil 30-9 (b)'deki A noktası] R yerdeğiştirme vektöründeki herhangi bir noktanın $-R$'ye taşınmasıdır.

Şekil 30-9'daki (a) örüntüsünün evirilmesi yeni bir örüntü oluşturur, ancak (b) örüntüsünün evirilmesiyse aynı örüntüyü tekrar oluşturur. İki boyutlu bir örüntü için (şekilde görebileceğiniz üzere) (b) örüntüsünün A noktasından evirilmesi aynı nokta etrafında 180° döndürmeye eşittir. Şekil 30-9 (b)'deki örüntüyü, küçük 6'lar ve 9'ların her birinin döndürmeye eşittir. Şekil 30-9 (b)'deki örüntüyü, küçük 6'lar ve 9'ların her birinin *sayfadan dışarı doğru* "oku" olduğunu hayal ederek, üç boyutlu yaptığımızı düşünelim. Üç boyutta bir evirilmeden sonra bütün oklar tersine döner, örüntü tekrar *oluşturulamaz*. Okların başlarını ve kuyruklarını noktalar ve çarpılarla belirtirsek, Şekil 30-9 (c)'deki gibi, evirme altında simetrik *olmayan üç boyutlu* bir örüntü yapabiliriz. Ya da (d)'de gösterildiği gibi, o tür bir simetrisi *olan* bir örüntü de meydana getirebiliriz. Üç boyutlu bir evirmeyi, döndürmelerin birleşimiyle taklit etmenin mümkün *olmadığına* dikkat edin.

Bir örüntünün –veya örgünün– "simetrisini" tarif ettiğimiz simetri işlemleriyle nitelendirdiğimizde, iki boyut için 17 ayrı örüntü olduğu ortaya çıkar. Şe-

kil 30-1'de mümkün olan en düşük simetriye sahip bir örüntüyü ve Şekil 30-7'de de yüksek bir simetriyi çizdik. Diğer 17 mümkün örüntüleri keşfetme zevkini size bırakıyoruz.

17 muhtemel örüntünün sadece birkaçıyla duvar kâğıdı yapılması ilginçtir. Hep üç veya dört temel örüntüyü görmekteyiz. Bu, tasarımcıların hayal güçlerinin eksikliğinden midir yoksa birçok örüntünün göze aslında hoş gelmemesinden midir?

30-6 Üç boyutta simetriler

Şu ana kadar sadece iki boyutta örüntülerden konuştuk. Aslında gerçekten ilgilendiğimiz, üç boyutta atomların örüntüleridir. Öncelikle, üç boyutlu bir kristalin *üç* ilkel vektörü olacağı açıktır. Üç boyutta mümkün simetri işlemi sayısını hesapladığımızda, 230 farklı olası simetri olduğunu buluruz! Bu 230 tip, Şekil 30-10'da çizildiği gibi, yedi farklı sınıfta gruplanabilir. En az simetriye sahip örgüye *üç eksenli* denir. Birim hücresi paralel yüzlüdür. İlkel vektörleri farklı uzunluktadır ve aralarındaki hiçbir iki açı birbirine eşit değildir. Dönme veya yansıma simetrisi ihtimali yoktur. Yine de iki muhtemel simetri vardır. Birim hücresi bir tepe noktası etrafında bir evirme işlemiyle değişebilir veya değişemez. (Üç boyutta evirme işleminden kastımız, uzamsal yerdeğiştirmeleri $\boldsymbol{R}$'nin $-\boldsymbol{R}$'yle yerdeğiştirmesidir. Diğer bir deyişle, (x, y, z), $(-x, -y, -z)$'ye gider.) Dolayısıyla üç eksenli örgü için, ilkel vektörler arasında özel bir ilişki olmadığı sürece, iki olası simetri vardır. Örneğin, bütün vektörler eşitse ve eşit açılarla birbirlerinden ayrılmışlarsa, şekilde gösterilen *üç eksenli* örgüyü elde ederiz. Bu şeklin ilave bir simetrisi olabilir; uzun diyagonal etrafında dönerse değişmeden aynı kalabilir.

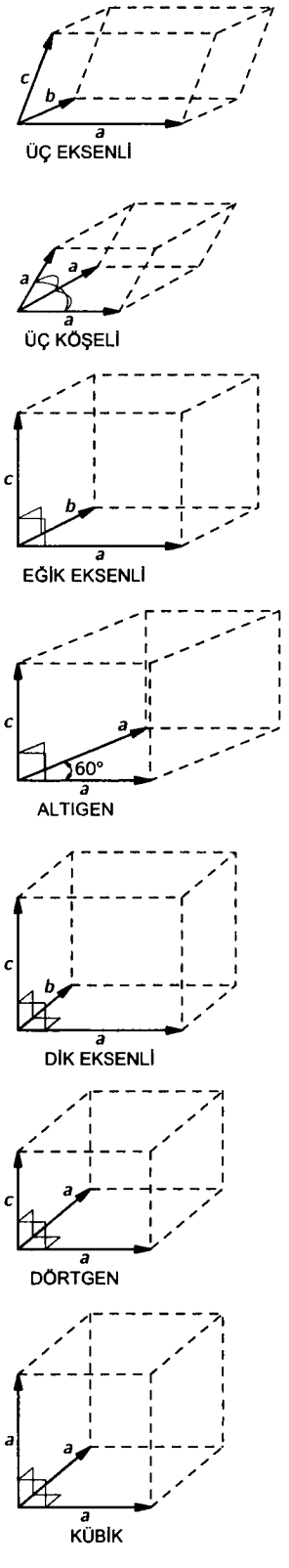
İlkel vektörlerden biri, örneğin $\boldsymbol{c}$, diğer ikisine dik açılardaysa, *eğik eksenli* bir birim hücre elde ederiz. Yeni bir simetri, $\boldsymbol{c}$ etrafında 180° bir dönmeyle mümkündür: *Altıgen hücre, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ vektörlerinin eşit ve aralarındaki açının* 60° olduğu özel bir durumda. Dolayısıyla, $\boldsymbol{c}$ vektörü etrafında 60°, 120° veya 180° bir dönme (belli iç simetriler için) aynı örgüyü verir.

Üç ilkel vektör de birbirlerine göre dik açılarda fakat farklı uzunluktalarsa, *dik eksenli* hücreyi elde ederiz. Şekil, her üç eksen etrafında 180° dönme için simetriktir. Daha yüksek dereceli simetriler, iki eşit ilkel vektöre ve tamamen dik açılara sahip *dörtgen* hücre için mümkündür. Son olarak, aralarındaki en simetrik olan *kübik* hücre vardır.

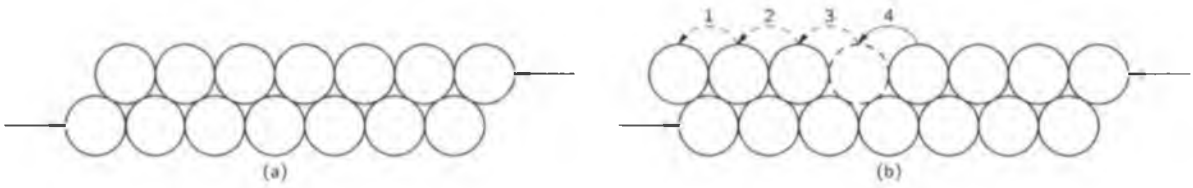
Simetriler üzerinde bu kadar durmamızın nedeni, kristallerin iç simetrilerinin, kristalin büyük ölçekli fiziksel özelliklerinde –bazen üstü kapalı bir şekilde– görünmesinden dolayıdır. Örneğin, genelde bir kristalin tensör elektrik kutuplanabilirliği vardır. Eğer tensörü kutuplanmanın elipsoidi cinsinden tanımlarsak, kristal simetrilerin bazılarının aynı zamanda elipsoidte de görülmesini beklememiz gerek. Örneğin, kübik bir kristaller, üç düşey yönün herhangi birinin etrafında 90° dönmeye göre simetriktir. Böyle bir özelliğe sahip tek elipsoidin küre olduğu açıktır. *Kübik bir kristal, eş yönlü bir dielektrik olmalıdır.*

Diğer yandan, dörtgen bir kristalin dört katlı bir dönme simetrisi vardır. Elipsoidinin asal eksenlerinin ikisi eşit ve üçüncüsü de kristal eksenine paralel olmalıdır. Benzer şekilde, dik eksenli bir kristalin üç dikey eksen etrafında iki katlı dönme simetrisi olduğundan, eksenleri kutuplanma elipsoidinin eksenleriyle çakışmalıdır. Benzer bir şekilde, eğik eksenli bir kristal eksenlerinden *biri* elipsoidin asal eksenlerinden *birine* paralel olmalıdır ancak diğer eksenler hakkında bir şey söyleyemeyiz. Üç eksenli kristalin dönme simetrisi olmadığından, elipsoidin herhangi bir yönelime sahip olabilir.

Gördüğünüz gibi, olası simetriler ve onları olası fiziksel tensörlere bağlamayı bir oyun haline getirebiliriz. Biz sadece kutuplanma tensörünü göz önüne aldık, ancak diğerleri –örneğin, esneklik tensörü– işin içine girince işler karmaşıklaşır. Matematiğin bu tür nesnelerle uğraşan dalına "grup kuramı" denir, ancak genelde sağduyuyla ne istediğinizi çıkartabilirsiniz.



Şekil 30-10 Kristal örgülerin yedi sınıfı.



Şekil 30-11 Kristal düzlemlerin kayması.

30-7 Metallerin mukavemeti

Metallerin basit bir kübik kristal yapısı olduğundan bahsetmiştik. Şimdi –yapılarına bağlı– mekanik özelliklerini tartışalım. Metaller, genel konuşursak, çok "yumuşaktırlar"; çünkü bir kristal tabakasını diğerinin üzerinden kaydırmak kolaydır. Şöyle düşünebilirsiniz: "Bu çok saçma, metaller gayet kuvvetlidir." Pek değil, bir metalin *tek bir kristalinin* biçim kolaylıkla bozulabilir.

Bir kristalin, Şekil 30-11 (a)'da gösterildiği gibi, kayma kuvvetine maruz kalan iki tabakasına baktığımızı düşünelim. İlk başta, kuvvet tabakayı yeterince zorlayacak kadar büyük hale gelip, onu sola doğru bir çentik kadar hareket ettirene kadar bütün tabakanın kuvvete direndiğini düşünebilirsiniz. Bir düzlem boyunca kayma olsa da, bu şekilde olmaz. (Öyle olsaydı, metalin olduğundan çok daha mukavemetli olduğun hesaplayabilirdiniz.) Aslında olan şey, her bir atomun tek tek hareket etmesidir. Şekil 30-11 (b)'de gösterildiği gibi önce soldaki bir atom zıplamasını yapar, sonra diğeri ve sonra diğeri ve bu böyle devam eder. Aslında olan, iki atom arasındaki boş hacmin sağa doğru hızlı bir şekilde gitmesidir ve bunun da net sonucu bütün ikinci tabakanın bir atomik boşluk üzerinden hareket etmesidir. Kayma bu şekilde gerçekleşir, zira bir kerede bir atomu kaldırmak, bütün bir sırayı bir kerede kaldırıp hareket ettirmekten daha az enerji gerektirir. Kuvvet bu süreci başlatmaya yeterli olduğunda, gerisi çorap söküğü gibi hızla gelir.

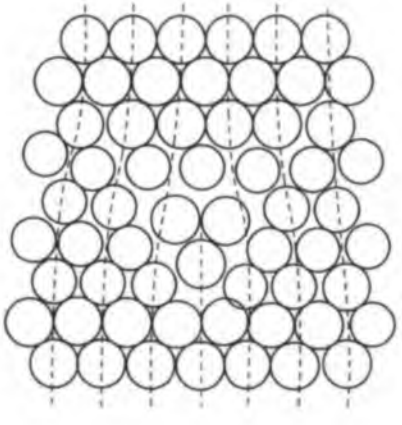


Şekil 30-12 Küçük bir bakır kristalinin gerildikten sonra fotoğrafı. [ABD Çelik Araştırma Merkezi, Monroeville, Pa, Kıdemli bilim insanı, S. S. Brenner'ın izniyle.]

Sonradan ortaya çıktı ki, gerçek bir kristalde kayma bir düzlemde tekrarlanan şekilde gerçekleşir, daha sonra durur ve bir başka düzlemde devam eder. Neden başlayıp, neden durduğunun detayları gizemlidir. Hatta aslında, arka arkaya gelen kayma bölgeleri arası epeyce eşit aralıklı olması çok ilginçtir. Şekil 30-12 gerilmiş ince bir bakır kristalin fotoğrafıdır. Kaymanın gerçekleştiği çeşitli düzlemleri görebilirsiniz.

İçinde büyük kristaller olan kalay bir teli alır ve kulağınızın yanında tutarken gererseniz, bağımsız kristal düzlemlerin ani kaymasını apaçık gözlemleyebilirsiniz. Düzlemler yeni konumlarına geçerken, birbiri ardına "tikleri" duyabilirsiniz.

Bir sırada "kayıp" bir atom olması problemi, Şekil 30-11'de görüldüğünden bir parça daha zordur. Birden fazla tabaka olduğu zaman, durum Şekil 30-13'te gösterildiği gibi olmalıdır. Bir kristaldeki bu tür kusura "*dislokasyon*" denir. Bu tür dislokasyonların ya kristal oluşurken var olduğu ya da yüzeydeki bir çatlak veya çentik tarafından oluşturulduğu varsayılır. Bir kere meydana geldiler mi, kristal içinde göreceli olarak serbestçe dolaşabilirler. Büyük bozulmalar, bu tür birçok dislokasyonun hareket etmesi soncu meydana gelir.

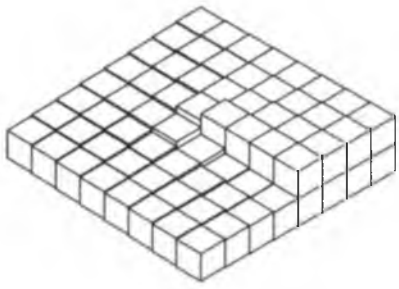


Şekil 30-13 Bir kristalde dislokasyon.

Kristalin geri kalanı mükemmel bir örgüye sahip olduğu sürece, dislokasyonlar serbestçe –çok az ilave enerjiyle– hareket edebilirler. Ancak, kristaldeki bir başka tür kusurla karşılaştıklarında "takılıp kalabilirler". Kusuru geçmek çok fazla enerji gerektirirse, yerlerinde kalırlar. İşte bu mekanizma, *kusurlu* metal kristallere mukavemetlerini kazandırır. Saf demir kristalleri gayet yumuşaktır, saflığı bozan bir miktar atom, dislokasyonların hareketini engellemeye yetecek miktarda kusur meydana getirebilir. Bildiğiniz üzere, esasında demir olan çelik gayet serttir. Çeliği meydana getirmek için, eriyik demir içinde bir miktar karbon çözdürülür. Eriyip çok hızlı soğursa, karbon küçük tanecikler şeklinde çökelir ve örgü içinde mikroskobik birçok bozulma meydana getirir. Dislokasyonlar artık hareket edemez ve metal gayet serttir.

Saf bakır çok yumuşaktır, ancak "işlemle sertleştirilebilir". Bu ya onu çekiçle döverek ya da ileri geri bükerek yapılır. Bu durumda birbirlerinin yoluna çıkarak karşılıklı hareketlerini engelleyen birçok yeni dislokasyon meydana gelir.

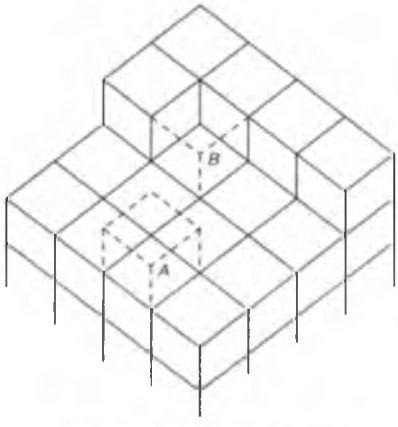
"Tam yumuşak" bir bakır çubuğun alınıp, bir bilek etrafında büküldüğünde bilezik hale geldiğini görmüşsünüzdür belki. Süreç esnasında bakır sertleştirilmiştir ve eski haline kolaylıkla getirilemez. İşlemle sertleştirilmiş bir metali yumuşatmak için, yüksek sıcaklıkta tavlamak gerekir. Atomların termal hareketi dislokasyonların "ütüler" ve yine büyük kristaller oluşmasını sağlar. Şu ana kadar sadece *kayma* dislokasyonunu tanımladık. Başka birçok türü daha vardır; bunlardan biri de Şekil 30-14'te gösterilen *sarmal* dislokasyondur. Bu tür dislokasyonlar kristal büyümesinde büyük öneme sahiptir.



Şekil 30-14 Bir sarmal dislokasyon. [Charles Kittel, *Katı Hal Fiziğine Giriş* [*Introduction to Solid State Physics*], John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. Baskı, 1956.]

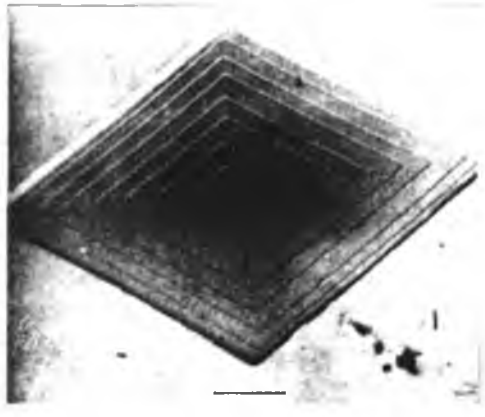
30-8 Dislokasyonlar ve kristal büyümesi

Kristallerin nasıl olup da büyüyebildikleri, uzun bir süre çözülememiş büyük bilmecelerden biri olarak kaldır. Her bir atomun, tekrar tekrar deneyerek, kristalde yer almanın iyi olup olmayacağına nasıl karar verdiğini anlatmıştık. Ancak, bir yüzeye konan bir atom aşağıdan sadece bir veya iki bağla bağlıdır ve üç tarafında atomlar olacak şekilde bir köşeye yerleştirilmiş olsaydı sahip olacağı enerjiyle aynı enerjiye sahip değildir. Şekil 30-15'te görüldüğü gibi, bir kristalin büyümesini üst üste konan bloklarla hayal ettiğimizi varsayalım. *A* noktasına yeni bir blok koyarsak, en nihayetinde elde edeceği altı komşusundan sadece birine sahip olacaktır. Birçok eksik bağ yüzünden, enerjisi çok da düşük değildir. Hâlihazırda bağlarının yarı kotasına sahip olduğu *B* konumu daha avantajlıdır. Kristaller gerçekten de *B* gibi yerlere yeni atomlar ekleyerek büyürler.



Şekil 30-15 Kristal büyümesi.

Peki, o hat dolduğunda ne olur? Yeni bir hatta başlamak için bir atom, sadece iki kenarından bağlanacak şekilde kristalin üzerine gelmelidir ki bu da çok mümkün değildir. Öyle olsaydı bile, tabaka bittiğinde ne olurdu? Yeni bir tabaka nasıl oluşmaya başlardı? Buna bir cevap, kristalin bir dislokasyonda, örneğin Şekil 30-14'te gösterilen sarmal dislokasyon etrafında, büyümeyi tercih etmesidir. Bloklar bu kristale eklendikçe, uygun üç bağın olabileceği bir yer daima vardır. Dolayısıyla kristal, içinde bir dislokasyonla büyümeyi tercih eder. Bu tür bir sarmal desen büyüme Şekil 30-16'da gösterilmiştir. Fotoğraftaki, tek bir parafin kristalidir.



Şekil 30-16 Bir sarmal dislokasyon etrafında büyümüş bir parafin kristali. [Charles Kittel, *Katı Hal Fiziğine Giriş* [*Introduction to Solid State Physics*], John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1956.]

30-9 Bragg-Nye kristal modeli

Elbette ki, bir kristal içindeki her atomun ne yaptığını göremeyiz. Ayrıca, şimdiye fark etmişsinizdir, niceliksel olarak ele alamayacağımız birçok karmaşık olgu vardır. Sir Lawrence Bragg ve J. F. Nye, gerçek bir metalin içinde gerçekleştiğine inanılan birçok olguyu çarpıcı bir şekilde gösteren bir metalik kristal modeli yapmak için bir şema tasarladılar. Sonraki sayfalara, yöntemlerini anlatan ve elde ettikleri bazı sonuçları gösteren orijinal makaleyi okuyabilirsiniz. (Makale, yazarların ve Royal Society'nin izniyle *Proceedings of the Royal Society of London*, Cilt 190, s. 474-481'den tekrar basılmıştır.)

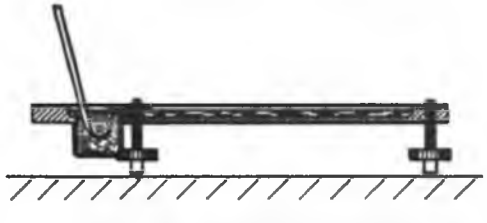
Bir kristal yapının dinamik modeli

SIR LAWRENCE BRAGG, F.R.S. VE J. J. NYE
Cavendish Laboratuvarı, Cambridge Üniversitesi
(*Teslim alınma tarihi* 9 *Ocak* 1947 –
Okunma tarihi 19 *Haziran* 1947)
[Levhalar 8'den 21'e]

Bir metalin kristal yapısı, bir sabun çözeltisinin yüzeyinde yüzen, çapı bir milimetre veya daha küçük köpüklerin birleşimiyle temsil edilir. Köpükler yüzeyin hemen altında, bir pipetten sabit hava basıncıyla üflenir ve ölçü olarak dikkat çekici şekilde aynıdırlar. Birbirlerine ya yüzeyde tek bir tabaka halinde ya da üç boyutlu bir kütle içinde yüzey gerilmesiyle tutunurlar. Bu topluluk yüz binlerce kabarcıktan oluşur ve en az bir saat boyunca devam edebilir. Birleşimler metallerde öngörülen yapıları gösterir ve göz lemlenen gren sınırları, dislokasyonlar ve kaymalar, yeniden kristallenmeler, tavlanma ve "yabancı" atomlardan kaynaklı gerilmeler gibi diğer çeşit hatalardan oluşan etkileri benzetir.

1. KÖPÜK MODELİ

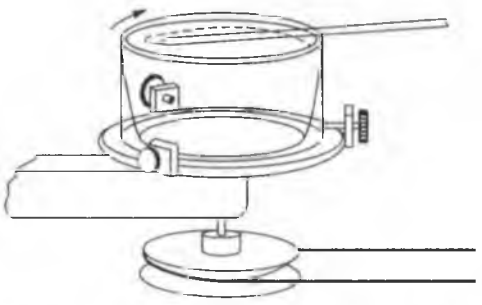
Çeşitli zamanlarda kristal yapı modelleri, atomların yüzen veya asılı küçük mıknatıslarla veya birbirlerine kılcal hareket kuvvetleriyle tutunan ve su yüzeyinde yüzen çembersel disklerle tanımlanmıştır. Bu modellerin belirli dezavantajları vardır; örneğin birbirleriyle temas halinde olan yüzen nesneler örneğinde, sürtünme kuvvetleri nesnelerin serbest göreli hareketine engel olur. Daha ciddi bir dezavantajsa, gerçek bir kristaldeki şartlara yakınlaşabilmek için çok fazla sayıda bileşene ihtiyaç olduğu halde, bileşen sayılarının sınırlı olmasıdır. Bu makale atomların 0,1 mm'den 2,0 mm'ye kadar köpüklerle gösterildiği bir modelin davranışını ortaya koymaktadır. Bu küçük köpükler bir saat veya daha fazla uzun süren deneyler için uygundur. Birbirlerinin yanından sürtünmesiz bir şekilde geçip gidebilirler ve çok büyük miktarda üretilebilirler. Bu makaledeki bazı resimler 100.000 veya daha fazla köpük içeren birleşimlerden alınmıştır. Model en yakın şekilde bir metal yapının davranışını temsil etmektedir, çünkü köpüklerin her biri aynı çeşittir ve birbirlerine, metaldeki serbest elektronların bağlayıcı kuvvetini temsil eden genel kılcal hareketle bağlıdırlar. Modelin kısa bir tanımı Journal of Scientific Instruments (Bragg 1942b) dergisinde verilmiştir.



Şekil 1. Köpük yığını üreten cihaz.

2. OLUŞTURMA YÖNTEMİ

Köpükler bir sabun çözeltisinin yüzeyinin hemen altından, ince bir ağızdan üflenir. En iyi sonucu Royal Institution'dan [Kraliyet Enstitüsü] Bay Green'in bize verdiği çözelti denklemiyle elde ettik. 15,2 cc oleik asit (saf yeniden damıtılmış) 50 cc damıtılmış su içerisinde iyice karıştırılmıştır. Daha sonra bu 73 cc %10 trietanolamin çözeltisiyle karıştırılmış ve karışım 200 cc'ye tamamlanmıştır. Buna daha sonra 164 cc saf gliserin eklenmiştir. Daha sonra çözelti bir süre bekletilmiş ve saf sıvı alttan çekilmiştir. Bazı deneylerde, viskoziteyi düşürmek için, bu sıvı suyla üç kes seyreltilmiştir. Püskürtme memesi yüzeyin yaklaşık 5 mm altındadır. İki Winchester imbiği sayesinde 50 ila 200 cm suya eşit sabit hava basıncı sağlanmıştır. Normalde köpükler dikkat çekici bir şekilde benzer ölçülerdedir. Bazen düzensiz bir şekilde ortaya çıkabilirler, bu püskürtmede veya basınçta değişiklik yaparak düzeltilebilir. İstenmeyen köpükler yüzey üzerinde küçük bir alev gezdirerek yok edilebilir. Şekil 1'de cihaz gösterilmektedir. Kapın



Şekil 3. Küçük ölçüde köpükler oluşturan cihaz.

tabanını karartmanın yapı detaylarını, örneğin dislokasyonlar ve gren sınırlar gibi, görmek için daha avantajlı olduğunu keşfettik.

Şekil 2'de 8 numaralı levhada köpüklerden oluşmuş iki boyutlu bir kristal ya da bir yığının bir parçası gözükmektedir. Düzenliliği şekle belli bir açıdan bakılarak değerlendirilebilir. Köpüklerin ölçüsü açıklıkla değişmekte, ancak basınçla veya yüzeyin altındaki memenin derinliğiyle herhangi bir işaretlenmiş dereceye kadar değişmiyor gibi gözükmekte. Basıncı artırmanın esas etkisi köpüklerin oluşma hızını artırmak. Örnek verecek olursak, 100 cm basınçlı, 49 μ çapında kalın duvarlı bir püskürtme 1,2 mm çapında köpükler oluşturdu. 180 cm basınçlı ve 27 μ çapında ince duvarlı bir püskürtmeyse 0,6 mm çapında köpükler oluşturdu. Davranışları ölçüleriyle değişkenlik gösterdiğinden, 2,0 ile 1,0 mm arasında bir çapa sahip köpüklere "büyük", 0,8 ile 0,6 mm arasında bir çapa sahip köpüklere "orta" ve 0,3 ile 0,1 mm arasında bir çapa sahip köpüklere "küçük" demek uygundur.

Püskürtmenin boyutunu küçülterek, 0,6 mm'den küçük çaplı köpükler oluşturmanın bu cihazla mümkün olmadığını keşfettik. Çok küçük köpüklerle deney yapmak istediğimiz için, sabun çözeltisini dönen bir kapın içine yerleştirmek ve akım çizgisine mümkün olduğunca paralel, ince bir püskürtme sağlamaktan medet umduk. Köpükler biçimlenir biçimlenmez uzaklaştırıldı ve sabit koşullarda epey düzgün şekilde çıktılar. Saniyede bin adet veya daha fazla hızda ortaya çıktılar ve bu hız tiz sesli bir nota ortaya çıkardı. Kap döndükçe sabun çözeltisi kapın çevresinde dik bir duvar boyunca artmakta ancak kapın dönmesi durunca köpükleri geriye taşımakta. Şekil 3'te gösterilen bu cihaz sayesinde, köpük çağı 0,12 mm'ye kadar indirilebilir. Örneğin, ince duvarlı bir püskürtmede 38 μ çapında bir açıklıktan 190 cm su basıncı ve 180 cm/sn su hızıyla 0,14 mm çapında köpükler oluşturulabildi. Bu durumda 9,5 cm çapında bir kap kullanıldı ve dönme hızı da 6 devir/saniyeydi. Şekil 4'te 8 numaralı levhada bu 'küçük' köpüklerin büyütülmüş bir resmini ve ne kadar düzenli olduklarını görebilirsiniz. Örüntü sabit bir kapla döndürülmüşçesine mükemmel değildir, belli bir yönde bakıldığında sıralar biraz düzensizdir.

Bu iki boyutlu kristaller metallerdeki yapıların nasıl olması gerektiğini gösterir ve gözlemlenen gren sınırları, dislokasyonlar ve kaymalar, yeniden kristallenmeler, tavlanma ve "yabancı" atomlardan kaynaklı gerilmeler gibi diğer çeşit hatalardan oluşan etkileri benzetir.

3. GREN SINIRLARI

5a, 5b ve 5c şekilleri 9 ve 10 numaralı levhalara aittir ve sırasıyla 1,87, 0,76 ve 0,30 mm çapındaki köpükler için tipik gren sınırlarını göstermektedir. Köpüklerin düzensiz bir şekilde dağıldığı sınırdaki örselenmiş alanın genişliği genelde köpüklerin ölçüsü küçüldükçe büyür. Bir çok bitişik grenin parçalarını gösteren şekil 5a'da iki gren arasındaki sınırdaki köpükler bir kristal düzenlemeye veya diğerine yapışmış durumda. Şekil 5c'de iki gren arasında bir 'Beilby katmanı' işaretlenmiştir.

Çok kristalli yığınların fotoğraflarına, örneğin 9 ve 10 numaralı levhaları gösteren 5a'dan 5c'ye ve 14'ten 16'ya kadar olan levhalı gösteren 12a'dan 12e'ye şekillere yandan bakıldığında birbirinden ayrı grenler açıkça görülebilir. Uygun ışıklandırmayla yüzen köpükler yığınına yandan bakıldığında, cilalanmış ve dağlanmış bir metale dikkat çekici bir benzerlik görülebilir.

Çok kristalli bir yığında sıklıkla bazı "saf olmayan atomlar" veya ortalamadan daha büyük veya küçük köpükler bulunabilir ve böyle bir durumda bunların çoğunluğu gren sınırlarında konumlanmıştır. Düzensiz köpüklerin gren sınırlarına doğru yol aldığını söylemek yanlış olur. Sadece komşuların karşılıklı düzenlenmesinin mümkün olup, köpüklerin yapı boyunca yayılmasının mümkün olmaması modelin bir hatasıdır. Öyle görünüyor ki, bir kristal büyümesiyle beraber sınırlar, bir diğer kristalin pahasına, düzensiz atomlardan geçip gidene kadar kendilerini tekrar ayarlama eğilimindedir.

4. DİSLOKASYONLAR

Tek bir kristal veya çok kristalli bir yığın sıkıştırıldığında, uzatıldığında veya bir şekilde biçimi bozulduğunda, gerilmeye maruz bırakılan metallerin davranışına çok yakın bir davranış sergiler. Belli bir limite kadar model esnek aralıktadır. O noktadan sonra, üç adet eşit eğimli, sıkı bir şekilde yığılmış sıralar boyu kayma eğilimi gösterir. Kayma bir sıradaki köpüklerin yan sıradaki köpükler üzerinden aradaki mesafeye eşit miktarda hareket etmesiyle gerçekleşir. Bu sürecin meydana gelmesini izlemek çok ilginçtir. Hareket tüm sıra boyunca eşzamanlı değildir ancak kayma hattında bir tarafında diğer taraftakilere göre bir fazla köpük olan sırada bir 'dislokasyon'un ortaya çıkmasıyla başlar. Bu dislokasyon daha sonra kristalin bir tarafından diğerine doğru kayma hattı boyunca ilerlemeye başlar ve 'atomlar arası' bir mesafe kadar kaymayla sonlanır. Orowan, Polanyi ve Taylor metal yapılardaki plastik kaymayı meydana getirmek için gerekli küçük kuvvetleri açıklamak için bu sürece başvurmuşlardır. Kristallerin plastik bozunumunun mekanizmasını açıklamak için Taylor'ın ortaya koyduğu kuram (1934) bu tür dislokasyonların karşılıklı hareket ve dengesini dikkate alır. Köpükler metalde olup bitmesi beklenenlerin çok benzer bir resmini ortaya koyarlar. Bazen dislokasyonlar çok yavaş ilerler, bir kristali geçmeleri saniyeler sürer. Homojen bir biçimde gerilmemiş kristallerde sabit dislokasyonlar da görülmektedir. Kısa siyah çizgiler olarak görünürler ve 12*a*'dan 12*e*'ye kadar olan şekillerde 14'ten 16'ya kadar numaralı levhalarda görülebilirler. Çok kristalli bir yığın sıkıştırıldığmda, bu karanlık çizgiler kristaller boyunca her yönde kırışıyor gibi gözükürler.

10 ve 11 numaralı levhalara ait 6*a*, 6*b* ve 6*c* şekillerinde dislokasyon örneklerini görebilirsiniz. Şekil 6*a*'da köpüklerin çapı 1,9 mm'dir, dislokasyon yereldir ve yaklaşık altı köpük boyunca uzanmaktadır. Şekil 6*b*'de (çap 0,76 mm) 12 köpük boyunca uzanmaktadır ve Şekil 6*c*'de (çap 0,30 mm) etkisi yaklaşık 50 köpük boyunca izlenebilmektedir. Küçük köpüklerin sertliği daha uzun dislokasyonlara yol açmaktadır. Çeşitli köpük kütleleri üzerinden yapılan çalışmaysa, her bir ölçü için standart uzunlukta bir dislokasyon olmadığını göstermiştir. Uzunluk kristalin içindeki gerilmesinin doğasına bağlıdır. Eksenleri arasında 30° (olabilecek en büyük açı) bulunan iki kristal arasındaki sınır, birbirini takip eden sıralardaki bir dizi dislokasyon olarak ele alınabilir ve bu durumda dislokasyonlar çok kısadır. Komşu kristaller arasındaki açı azaldıkça, dislokasyonlar daha geniş aralıklarda gerçekleşir ve aynı zamanda gitgide, ta ki 6*a*, 6*b* ve 6*c* numaralı şekillerdeki gibi mükemmel bir yapının içinde tek tek dislokasyonlar elde edilene kadar, büyür.

Şekil 7'deki 11 numaralı levha üç paralel dislokasyonu göstermekte. Onlara (Taylor'dan yola çıkarak) artı ve eksi dersek, solda sağa artı, eksi ve artı olurlar. Sıralar boyunca yatay bir şekilde bakıldığında, son ikisinin arasındaki şeritte fazladan üç köpük olduğu görülebilir. Şekil 8'deki 12 numaralı levhada sıklıkla görünen bir etki olan, bir gren sınırından çıkan bir dislokasyon görülmekte.

Şekil 9, 12 numaralı levhada iki köpüğün birinin yerine geçtiği bir yeri görülmekte. Bu, dislokasyonların sıkıştırıcı taraflarının birbirine baktığı, birbirine komşu sıralardaki artı ve eksi dislokasyonlar için sınırlayıcı bir durum olarak ele alınır. Tersi bir durum dislokasyonların buluştuğu noktada bir köpüğün ortadan yok olmasına ve yapıda bir delik oluşmasına yol açardı.

5. DİĞER HATA ÇEŞİTLERİ

Şekil 10, 12 numaralı levhada birbirine paralel yönelimli iki kristal arasındaki dar şerit görülmekte. Köpüklerin sıkı sıkıya bir arada olmadığı bir dizi hata çizgisi şeridi kesmektedir. İşte böyle yerlerde yeniden kristallenme beklenebilir. Sınırlar birbirine yaklaşır ve şerit mükemmel bir kristalin daha geniş alanına doğru çekilir.

Şekil 11*a* ve 11*g*'deki 13 ve 14 numaralı levhalar, yerel köpük eksikliği olan yerlerde sıklıkla görülen düzenlemelerdir. Genel görüşte bir dislokasyon karanlık bir şerit gibi gözükse de, bu yapılar kendilerini üçgenler veya *V* harfi şeklinde gösterirler. Tipik bir *V* yapısı şekil 11*a*'da görülmektedir. Model bozulup, iki dislokasyon birbiriyle 60° oluşturacak şekilde kesiştiklerinde bir *V* yapısı oluşur. Dislokasyonlar kendi yolları boyunca hareket etmeye devam ederlerse yapı bozulur. Şekil 11*b*'deki küçük üçgenin içinde de bir dislokasyon gözükmekte. Dislokasyonun nedeni, hatanın altındaki sıralarda bu alttaki sıralardan bir adet fazla köpük bulunmasındandır. Kristalin bir tarafını hafifçe uyararak az miktarda bir "termal hareket" başlatılırsa, bu tür hatalı yerler kaybolur ve mükemmel bir yapı oluşturulmuş olur.

Kristallerin bazı yerlerinde bir köpüğün kayıp olduğu boş bir hacim vardır ve genel bakışta bu siyah bir nokta olarak kendini gösterir. Şekil 11*g*'de örneklerini görebilirsiniz. Böyle bir boşluk yerel bir yeniden düzenlemeyle kapanamaz, çünkü deliği doldurmak bir başka deliğin ortaya çıkmasına yol açar. Bu tür delikler kristal "soğuk işlendiğinde" ortaya çıkar ve kaybolur. Modeldeki bu yapılar gerçek metal yapılarda da benzer yerel hatalar olabileceğini ortaya koymaktadır. Yakınlardaki enerji engellerini azaltarak düzenlilik/düzensizlik değişiminde veya yayınım gibi süreçlerde rol alabilirler ve eşözdekli değişim sırasında kristallenmede çekirdek olarak davranabilirler.

6. YENİDEN KRİSTALLENME VE TAVLANMA

14'ten 16'ya kadar olan levhaları gösteren 12*a*'dan 12*e*'ye kadar olan şekillerde, art arda zamanlarda aynı köpük yığınlar görülmektedir. Çözeltinin yüzeyini kaplayan bir yığın cam bir tarakla güçlü bir biçimde karıştırılmış ve daha sonra kendi kendini ayarlamaya bırakılmıştır. Şekil 12*a*, karıştırma durduktan bir saniye sonraki durumu göstermektedir. Yığın bir sürü küçük "kristalcik" ortaya çıkacak şekilde parçalanmıştır. Birçok dislokasyon ve başka hataların gösterdiği üzere bunlar homojen olmayan bir gerilmenin yüksek halindedir. Bir sonraki fotoğraf (Şekil 12b) aynı yığının 32 saniye sonraki halini göstermektedir. Küçük grenler daha büyük grenleri oluşturacak şekilde birleşmiştir ve süreç boyunca gerilmesinin önemli bir kısmı kaybolmuştur. Yeniden kristallenmeyi fotoğraf serisi boyunca takip edebilirsiniz. Son üç fotoğraf yığının ilk karıştırmadan sonra, 2, 14 ve 25 dakika sonraki görünüşlerini göstermektedir. Yeniden düzenlenmeyi daha uzun bir süre boyunca takip etmek mümkün değildir zira uzun süre durdukça içlerindeki havanın yayınımla dışarı kaçması yüzünden köpükler küçülme eğilimindedir ve ayrıca çok incelirler ve patlama ihtimalleri artar. Bu süreç boyunca modele başka karıştırma uygulanmamıştır. Daha da yavaş bir yeniden düzenlenme süreci devam etmektedir. Bu süreçte köpüklerin yığının bir kısmındaki hareketi gerilmeye yol açar ve bu da komşu kısımda yeniden düzenlenmeyi harekete geçirir ve böylece süreç devam eder.

Bu fotoğraf serisinde bir dizi ilginç nokta göze çarpmaktadır. *AA*, *BB*, *CC* koordinatlarıyla gösterilen noktalardaki üç küçük noktaya bakın. *A*, biçim değiştirse de, seri boyunca görülmekte. *B* 14 dakika sonunda var olsa bile, 25 dakika sonunda ortadan kaybolmakta ve ardında gren içinde iç gerilmesini işaretleyen dört dislokasyon bırakmaktadır. *C* greni küçülmekte ve en sonunda Şekil 12*d*'de ortadan kaybolup ardında bir delik ve Şekil 12*e*'de ortadan kaybolan bir *V* bırakmakta. Aynı zamanda Şekil 12*d*'de *DD* koordinatındaki muğlak sınır Şekil 12*e*'de belirli hale gelmiştir. 12*b*'den 12*e*'ye kadar olan şekillerde *EE* yakınındaki gren sınırının düzleşmesine de dikkat edin. Çeşitli uzunluklarda dislokasyonlar yapının hafif bir bükülmesi ve belirli bir sınır arasındaki tüm aşamaları işaretlemektedir. Köpüklerin olmadığı delikler siyah noktalar halinde görülmektedir. Bu deliklerin bazıları dislokasyonların hareketleri sayesinde oluşur veya doldurulur, ancak bazıları bir köpüğün patladığı bir yeri göstermektedir. Birçok *V* örneği ve diğer bazı üçgenler görülebilir. Diğer bazı ilginç noktalar da bu fotoğraf serisi üzerinde çalışılarak çıkartılabilir.

17 numaralı levhayı gösteren 13*a*, 13*b* ve 13*c*, karıştırma sürecinden 1 saniye, 4 saniye ve 4 dakika sonra yığının bir kısmını göstermektedir ve daha mükemmel bir düzenlemeye doğru iki ardışık safhayı göstermelerinden dolayı ilgi çekicidirler. Sayfa boyunca belli bir yönde bakıldığında değişiklikler gayet güzel görünmektedir. Şekil 13*a*'da düzenleme bozulmaktadır. Şekil 13*b*'de köpükler kendilerini sıralar halinde gruplamıştır ancak bu sırala-

rın eğrisi yüksek derecede bir iç gerilmeyi işaret etmektedir. Şekil 13*c*'de bu gerilme *A*-*A*'da yeni bir sınır oluşumuyla azaltılmıştır. Bu gerilmiş kristalin enerjisinin kristaller arası sınırın enerjisinden daha fazla gibi gözükmektedir. Aşağıda değinilen sinematograf filmi üretildiğinde çekilen Şekil 13 fotoğrafları için Messrs Kodak'a teşekkür borçluyuz.

7. SAFSIZLIK ATOMUNUN ETKİSİ

Şekil 14'teki 18 numaralı levha yanlış ölçüde bir köpüğün geniş alana yayılmış etkisini göstermektedir. Bu şekil, 8 numaralı levhaya ait 2 ve 4 numaralı şekillerdeki mükemmel yığınlarla karşılaştırıldığında, biri normalde büyük ve ikisi normalden küçük üç köpüğün sıraların düzenliliğini tüm şekil boyunca bozduğu görülebilir. Yukarıda da belirtildiği gibi, yanlış ölçüdeki köpükler genelde, düzensiz ölçüde deliklere sığabildikleri gren sınırlarında bulunur.

8. İKİ BOYUTLU MODELİN MEKANİK ÖZELLİKLERİ

İki boyutlu mükemmel bir yığının mekanik özellikleri yukarıda değindiğimiz makalede tarif edilmiştir (Bragg 1942b). Yığın, sabun çözeltisinin içinde yatay olarak batırılmış iki paralel yayın arasındadır. Yayların adımları köpük sıraları arasındaki boşluğa sığacak şekilde ayarlanmıştır ve onlar daha sonra bu köpüklere sımsıkı yapışırlar. Bir yay bir mikrometre vidasıyla kendisine paralel olarak çevrilebilir ve diğeri iki ince dikey cam iplikle desteklenmektedir. Kayma gerilmesi cam ipliklerin ne kadar döndüğünü ölçerek hesaplanabilir. Bir kayma gerilmesine maruz kaldığında yığın, esneklik sınırına ulaşana kadar Hooke yasasına uyar. Daha sonra bir köpüğün genişliğine eşit miktarda bir orta sıra boyunca kayar. Yığının bir tarafı diğer kenara kadar olan genişliği geçen köpük miktarına eşit sayıda köpük tarafından kesildiğinde esneklik limitine yaklaşılmış olunur. Bu özellik bir metalin esneklik limitini hesaplamada (Bragg 1942a) kullandığımız, soğuk işlenmiş bir metaldeki her bir kristalin, sadece içindeki gerilmenin enerjinin kaymayla salındığı değere eşit olduğunda eğildiği temel varsayımını destekler.

M. M. Nicolson tarafından köpükler arasındaki kuvvetlere dair bir hesaplama yapılmıştır ve yakında yayınlanacaktır. İki ilginç noktaya değinmektedir. Merkezler arasındaki uzaklıkla potansiyel enerjinin değişi eğrisi atomlar için çizilen eğriye çok benzemektedir. Serbest bir köpük çağından biraz daha az bir uzaklık için minimum değeri vardır ve daha küçük uzaklıklarda hızla yükselir. Daha da ötesi, 0,1 mm çapındaki köpükler için yükselme çok keskindir ancak 1 mm çapındaki köpükler için bu yükselme çok daha azdır ve dolayıyla modelin ortaya koyduğu, küçük köpüklerin büyük köpüklerden daha esnemez olduğuna dair izlenimi onaylamaktadır.

9. ÜÇ BOYUTLU BİRLEŞİMLER

Köpüklerin yüzey üzerinde birçok katmanda birikmesine izin verilirse, olabilecek en sıkı istiflemeye sahip düzenlemelerden biri olan, üç boyutlu "kristallerden" oluşan bir kütle meydana getirirler. 18 numaralı levhaya ait 15 numaralı şekilde böyle bir kütlenin eğimli görünümünü görülmektedir; cilalanmış dağlanmış bir metal yüzeye olan benzerliği dikkat çekicidir. 20 numaralı levhaya ait 16 numaralı şekilde böyle bir kütle normal şekilde görülmektedir. Yapının belli parçaları kesinlikle en sıkı kübik istiftedir, dış yüzeyse (111) veya (100) yüzüdür. 19 numaralı levhaya ait Şekil 17*a* bir (111) yüzünü göstermektedir. Üstteki her bir köpüğün üzerinde durduğu üç köpüğün ana hatları açıkça görülebilir ve bu köpüklerin diğer katmanı çok zayıf bir şekilde seçilebilmektedir ve (111) düzlemlerinin istifinin iyi bilinen kübik diziye sahip olduğunu gösterir. 19 numaralı levhaya ait Şekil 17*b* her bir köpüğün diğer dört köpük üzerinde durduğu bir (100) yüzünü göstermektedir. Küp eksenleri elbette ki yüzey katmanının sıkı istiflenmiş sıralarına göre 45° açıyla eğilmiştir. 19 numaralı levhaya ait Şekil 17*c* küp yapısında (111) yüzü boyunca bir ikiz göstermektedir. En üstteki yüzeyler (111) ve (100)'dür ve birbirleriyle aralarında, şekilde açıkça gözükmese de, küçük bir açı vardır ve eğimli bir şekilde bakılırsa görülür. 19 numaralı levhaya ait Şekil 17*d* sık istiflenmiş yüzeylerin kübik ve altıgen dizisini göstermektedir; ancak bu noktada birleşimin derinliğinin iki katmandan daha fazla olup olmadığı kesin olmadığı için sol el tarafının gerçek bir altıgen sıkı istiflenmiş yapıyı gösterip göstermediğini söylemek zordur. Birçok ikiz ve kristaller arası sınır örnekleri 20 numaralı levhaya ait Şekil 16'da görülebilir.

21 numaralı levhaya ait Şekil 18 bir bükme gerilmesine maruz kalan üç boyutlu bir yapıdaki çeşitli dislokasyonları göstermektedir.

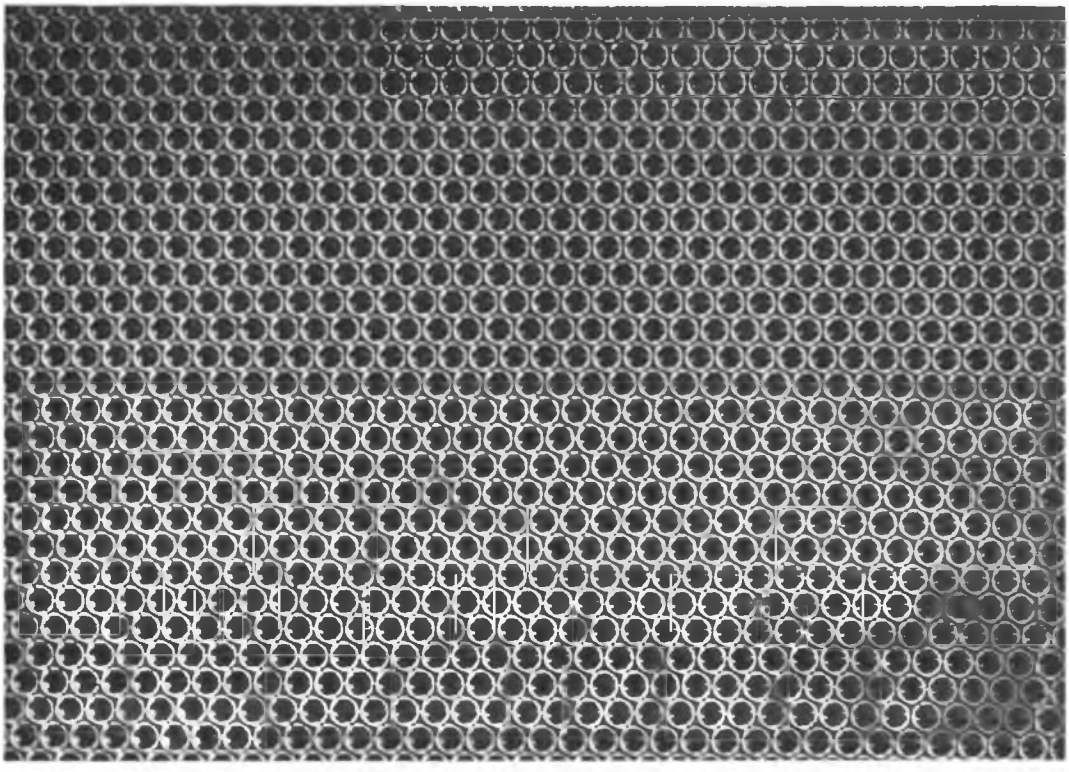
10. MODELİN GÖSTERİMİ

Messrs Kodak'la yapılan işbirliği sayesinde, tek veya çoklu kristal yığınları kesildiğinde, sıkıştırıldığında veya uzatıldığında gren sınırları ve dislokasyonların hareketlerini gösteren bir 16 mm sinematografik film kayda alınmıştır. Daha da ötesi sabun çözeltisi düz bir taban sabit cam bir kap içine yerleştirildiğinde, geçirilen ışıkla birlikte model büyük bir ölçeğe yansıtılabilmektedir. Köpükleri meydana getirmek için belli bir derinlik gerektiğinden, projeksiyonun yüzeyin hemen altında ve kapın tabanında duran cam bir blok içinden yapılması uygundur.

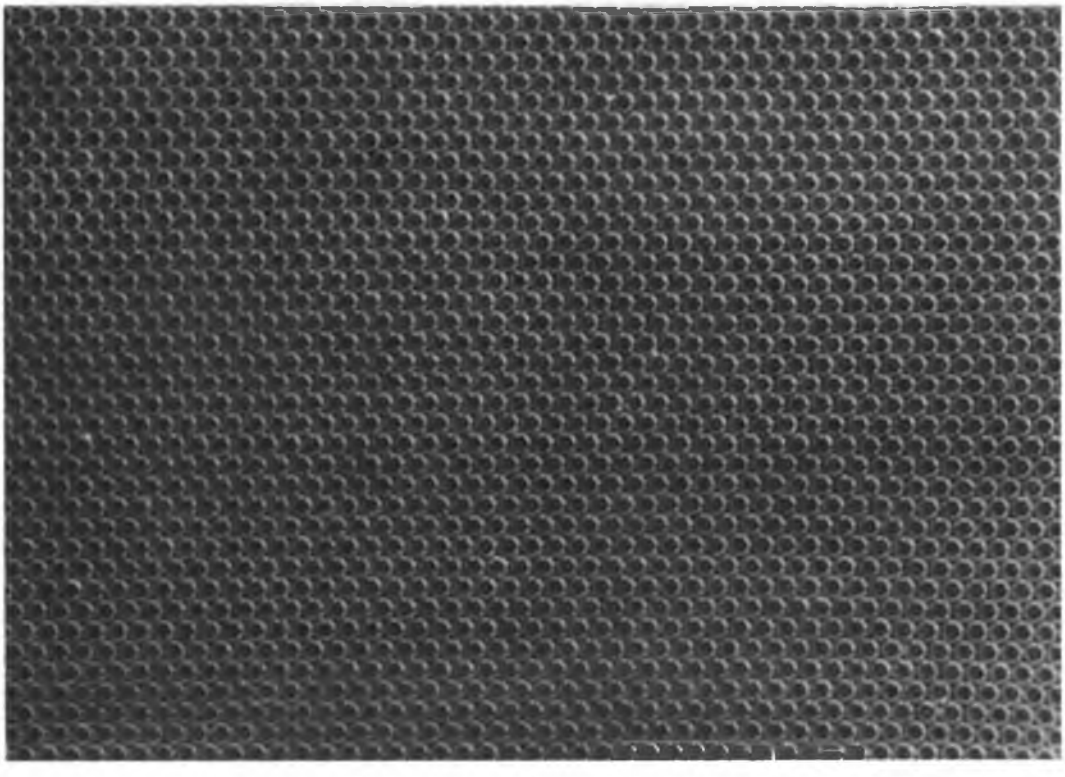
Sonuç olarak, Cambridge King's College'dan Bay C. E. Harold'a köpükleri meydana getirmek için kullandığımız pipetlerin bazılarını ürettiği için teşekkürlerimizi sunmak isteriz.

KAYNAKÇA

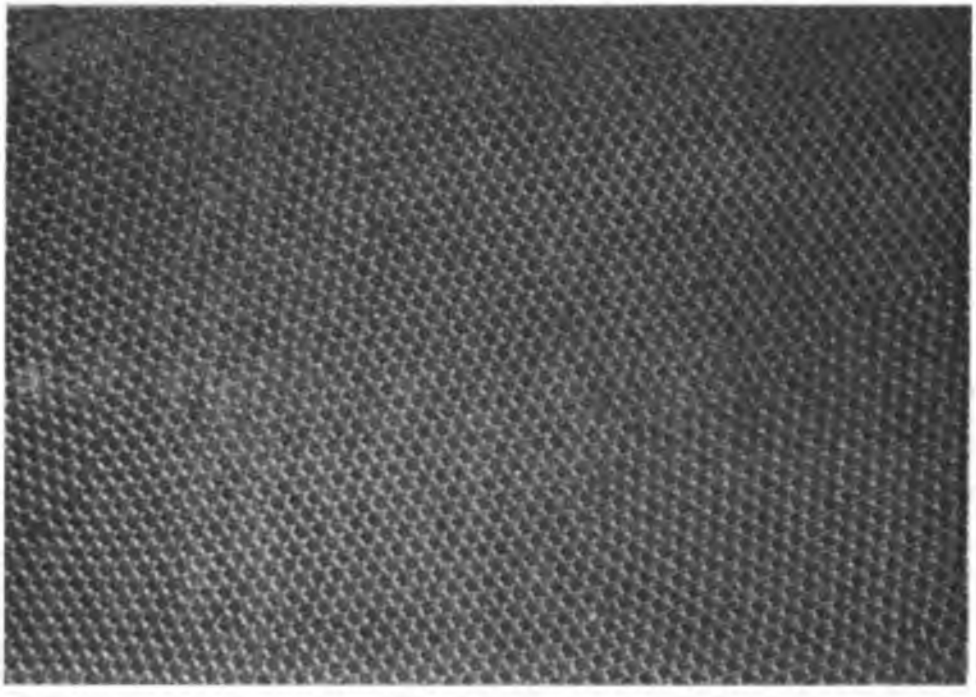
Bragg, W. L. 1942*a* *Nature*, **149**, 511.
Bragg, W. L. 1942*b* *J. Sci. Instrum.*, **19**, 148.
Taylor, G. I. 1934 *Proc. Roy. Soc. A*, **145**, 362.



ŞEKİL 2. Köpüklerden oluşan mükemmel kristal yığın. Çap 1,41 mm.



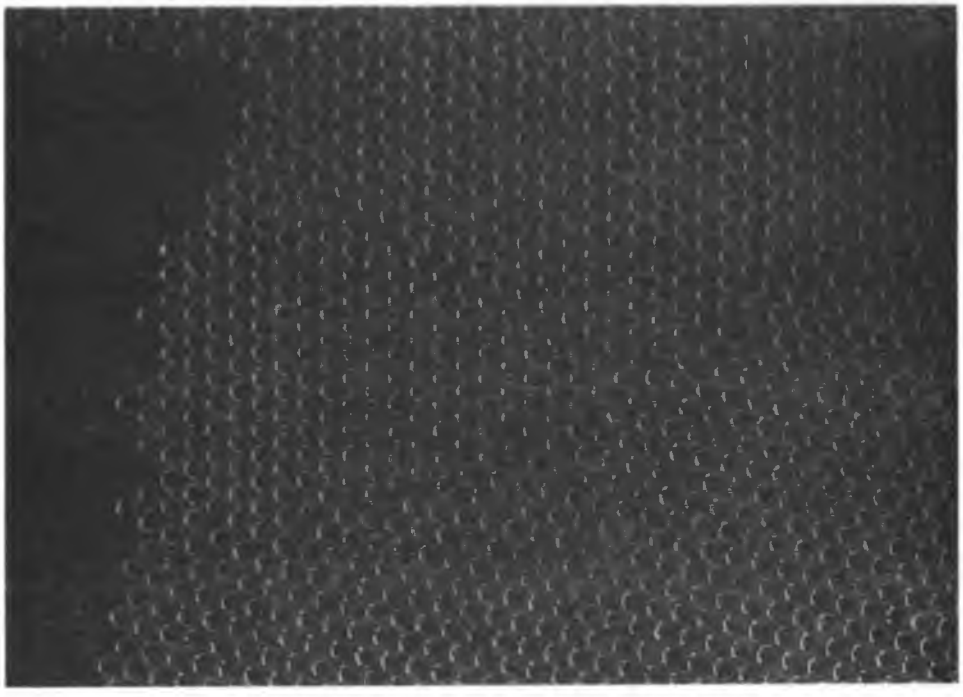
ŞEKİL 4. Köpüklerden oluşan mükemmel kristal yığın. Çap 0,3 mm.



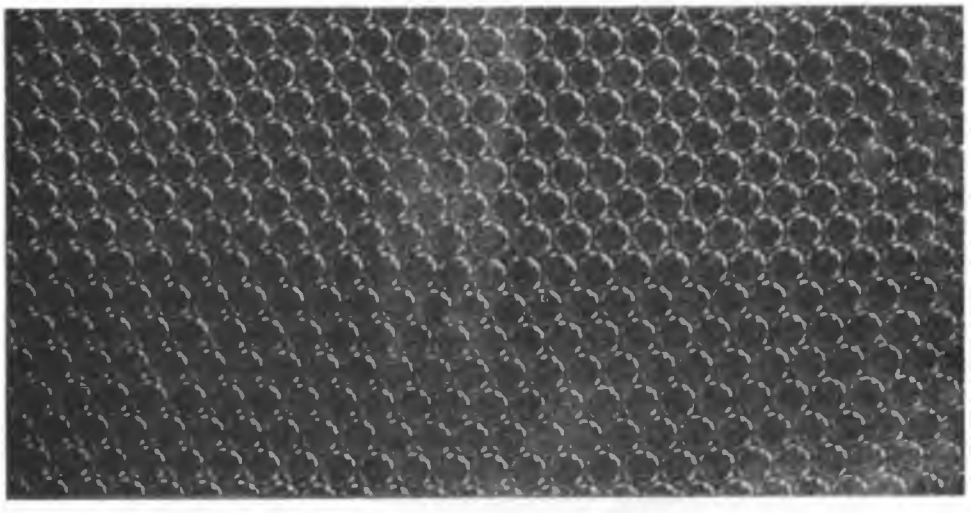
ŞEKİL 5*a*. Çap 1,87 mm.



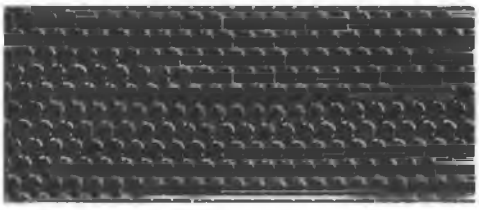
ŞEKİL 5*b*. Çap 0,76 mm.



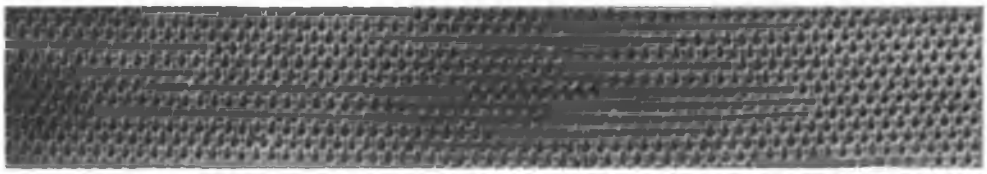
ŞEKİL 5*c*. Bir gren sınırı. Çap 0,30 mm.



ŞEKİL 6*a*. Bir dislokasyon. Çap 1,9 mm.



ŞEKİL 6*b*. Çap 0,76 mm.



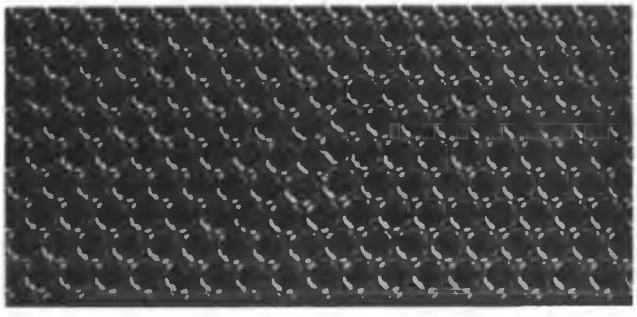
ŞEKİL 6*c*. Çap 0,30 mm.



ŞEKİL 7. Paralel dislokasyonlar. Çap 0,76 mm.



ŞEKİL 8. Bir gren sınırından çıkan dislokasyon. Çap 0,30 mm.



ŞEKİL 9. Bitişik sıralarda dislokasyonlar. Çap 1,9 mm.



ŞEKİL 10. Paralel yönelimli iki alan arasında hata çizgileri dizisi. Çap 0,30 mm.



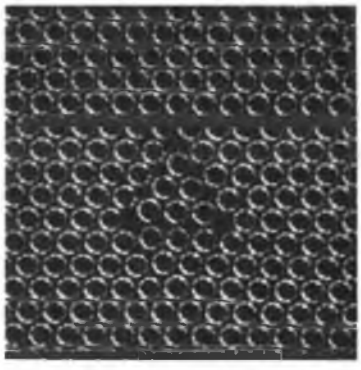
Çap 0,68 mm

a



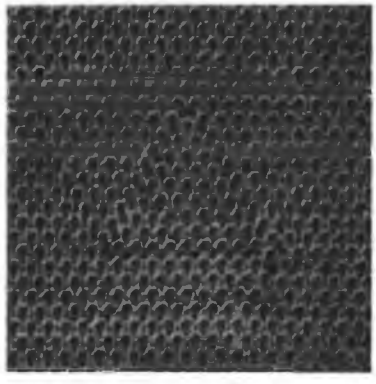
Çap 0,68 mm

b



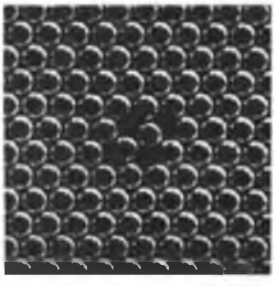
Çap 0,6 mm

c



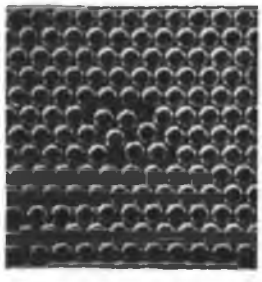
Çap 0,30 mm

d



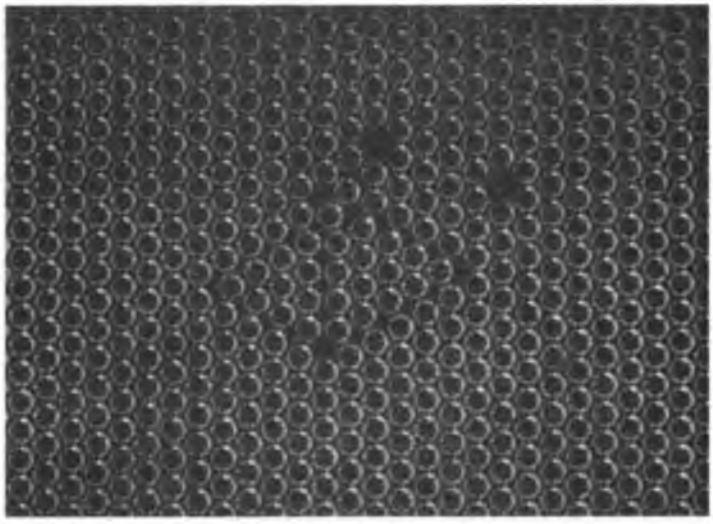
Çap 0,6 mm

e



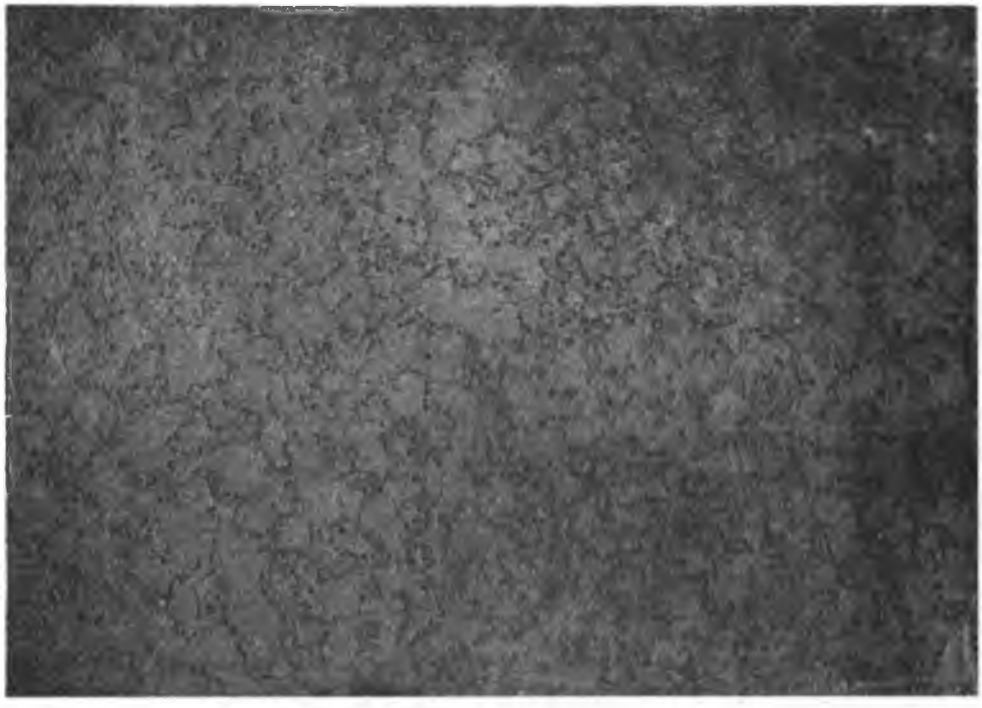
Çap 0,6 mm

f

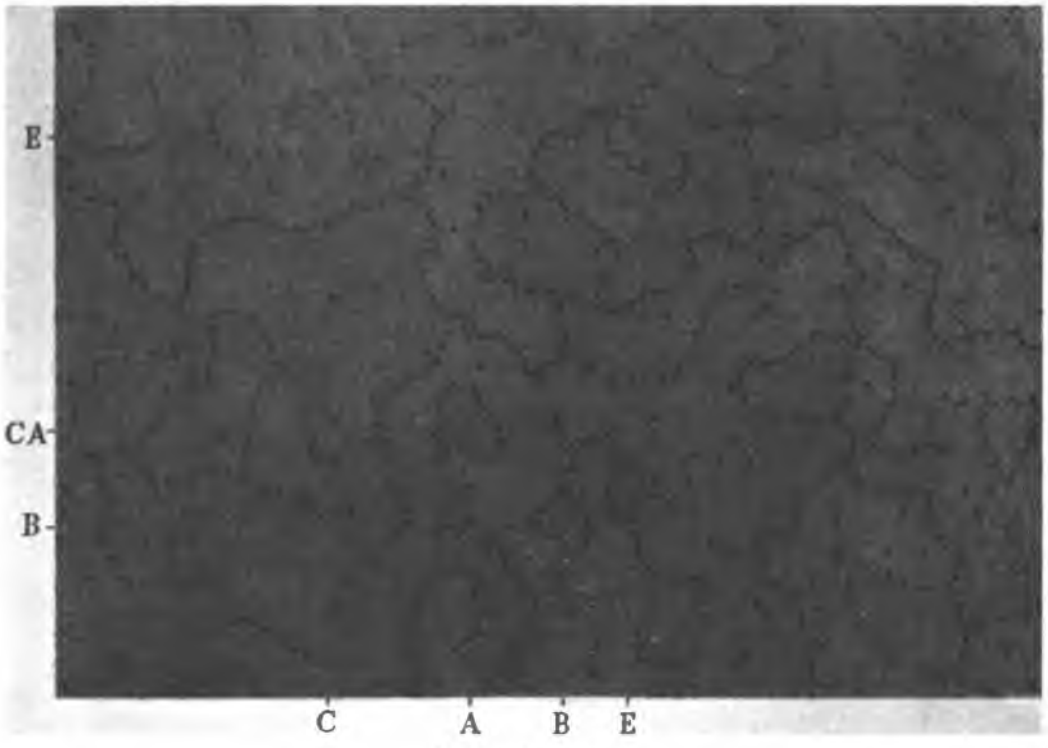


g

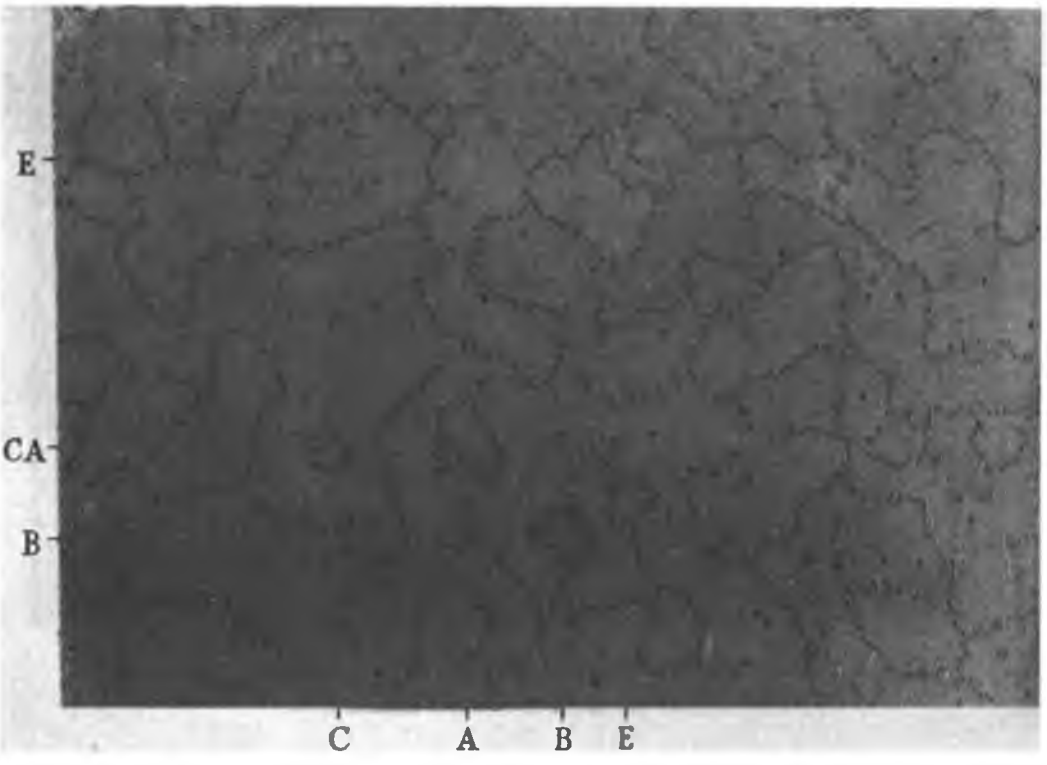
ŞEKİL 11. Hata çeşitleri. Çap 0,68 mm



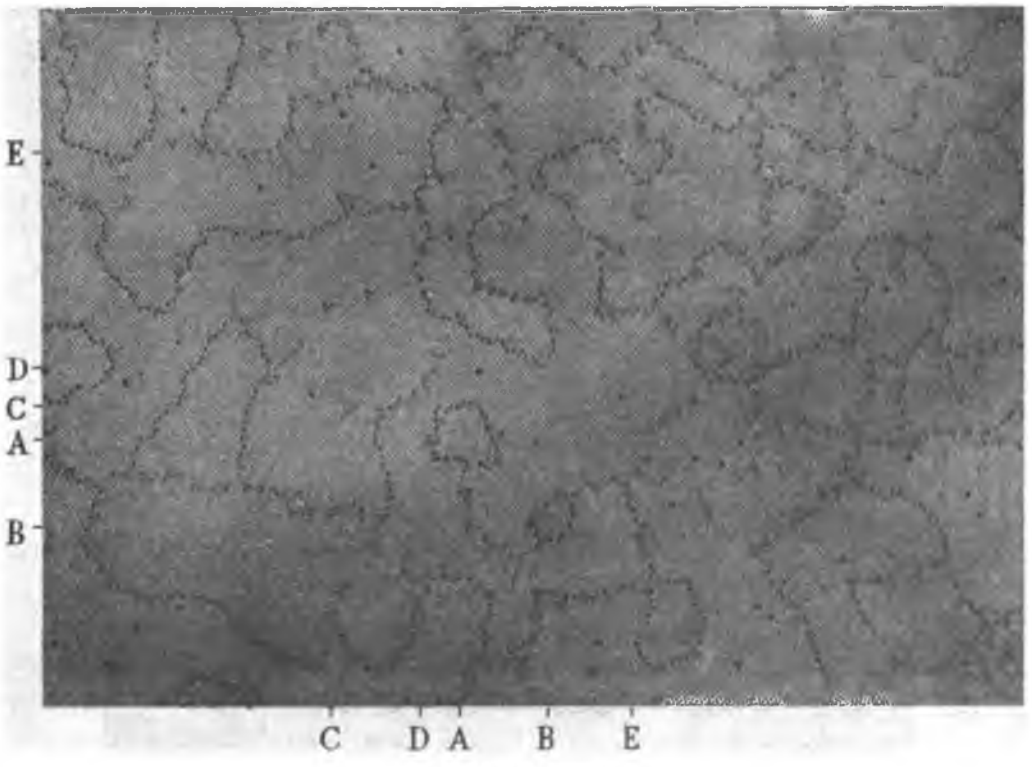
a. Karıştırdıktan hemen sonra



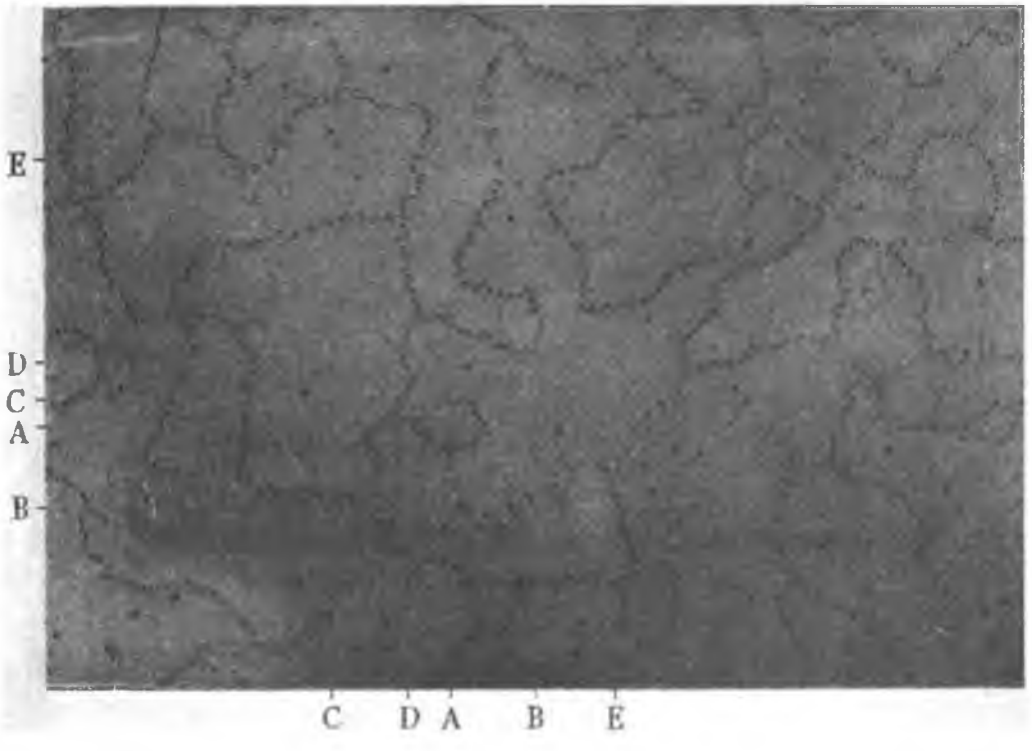
b. 33 saniye sonra



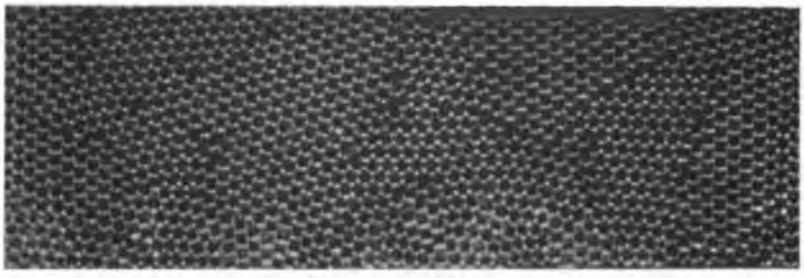
c. 2 dakika sonra



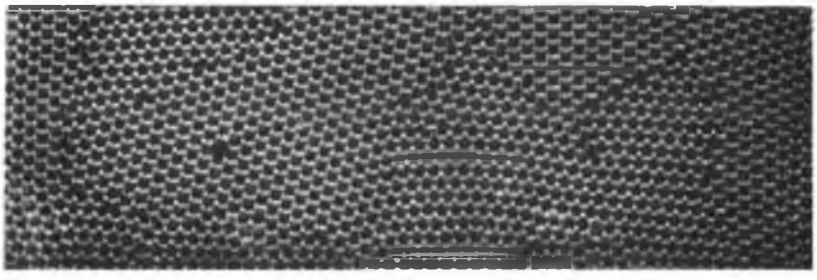
d. 14 dakika sonra



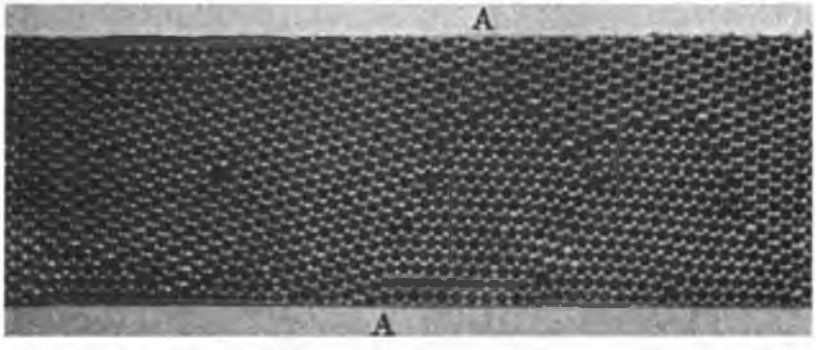
e. 25 dakika sonra



a. 1 saniye sonra

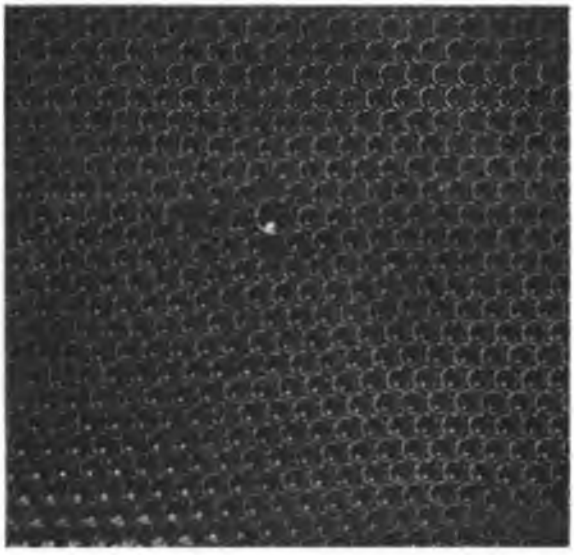


b. 4 saniye sonra



c. 4 dakika sonra

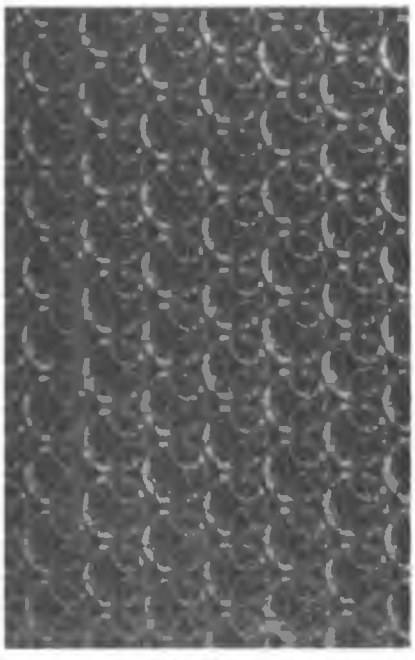
ŞEKİL 13. Yeniden kristallenmenin iki safhası. Çap 1,64 mm.



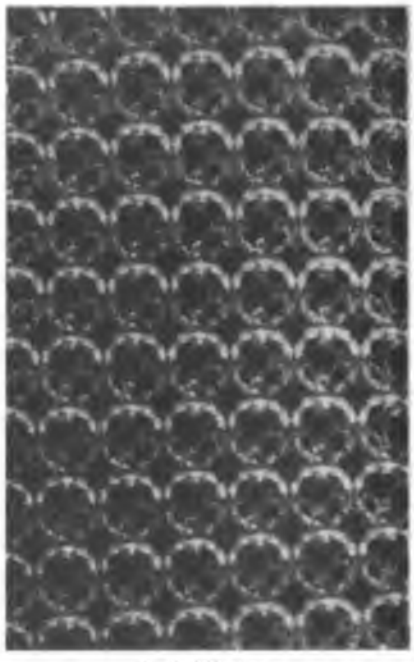
ŞEKİL 14. Safsızlık atomlarının etkisi. Düzgün köpüklerin çapı yaklaşık 1,3 mm'dir.



ŞEKİL 15. Üç boyutlu yığının eğimli görünümü



a. (111) yüzü



b. (100) yüzü

Yüz merkezli küp yapı.



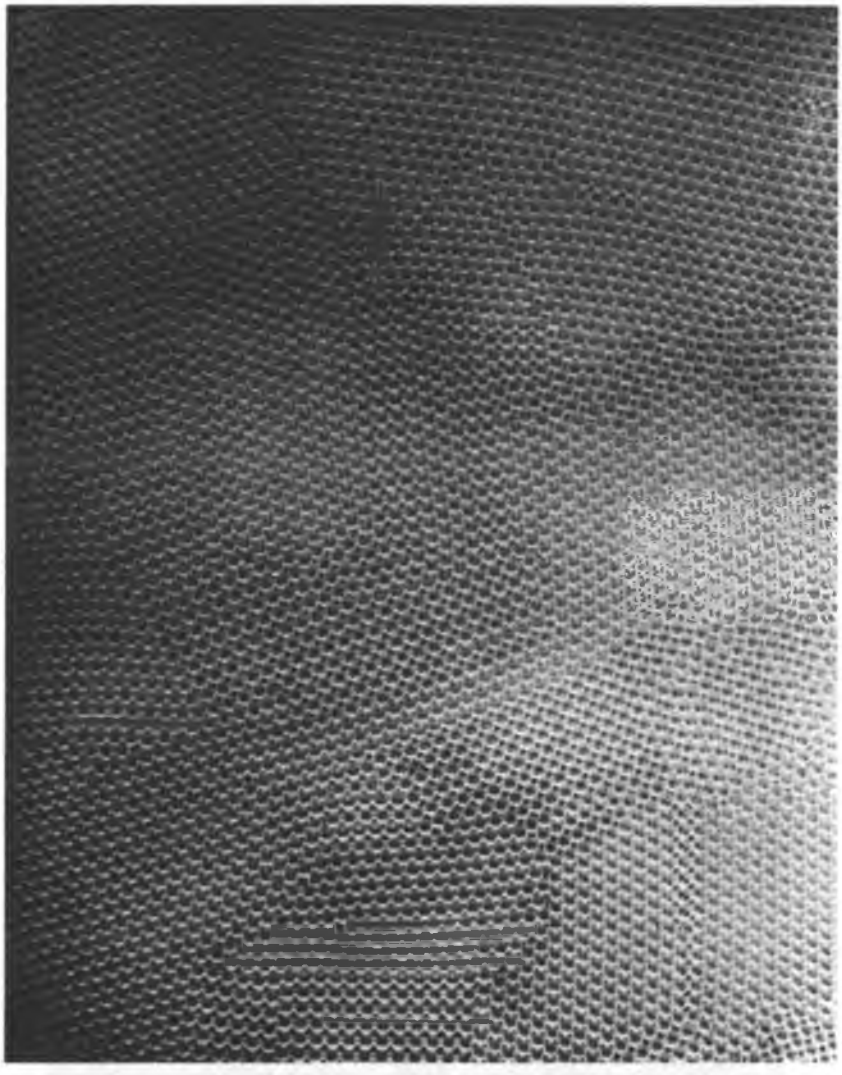
c. (111) boyunca ikiz, kübik yapı



d. Altıgen sıkı istife muhtemel bir örnek.

Çap 0,70 mm.

ŞEKİL 17



ŞEKİL 16. Normal bir bakış açısıyla görülen üç boyutlu yığın. Çap 0,70 mm.



ŞEKİL 18. Üç boyutlu yapıda dislokasyonlar. Çap 0,70 mm.

31
TENSÖRLER

31-1 Kutuplanabilirlik tensörü

31-1 Kutuplanabilirlik tensörü
31-2 Tensör bileşenlerini dönüştürmek
31-3 Enerji elipsoidi
31-4 Diğer tensörler; eylemsizlik tensörü
31-5 Vektörel çarpım
31-6 Stres tensörü
31-7 Yüksek dereceli tensörler
31-8 Elektromanyetik momentumun dört-tensörü

Fizikçiler, herhangi bir olgunun en basit örneğini ele alıp, ona "fizik" demeyi ve daha karmaşık örnekleri başka alanların ilgisine –örneğin uygulamalı matematik, elektrik mühendisliği, kimya veya kristalografi– bırakmayı alışkanlık haline getirmişlerdir. Katı hal fiziğinin bile sadece yarısı fiziktir, çünkü çoğu zaman özel maddelerle uğraşır durur. Dolayısıyla bu derslerde birçok ilginç şeyi dışarda bırakacağız. Örneğin kristallerin –veya birçok maddenin– önemli özelliklerinden biri, elektriksel kutuplanabilirliklerinin farklı yönlerde farklı olmasıdır. Herhangi bir yönde bir alan uyguladığınızda, atomik yükler bir miktar kayar ve bir dipol momenti üretir, ancak momentin büyüklüğü çokça alanın yönüne bağlıdır. Bu elbette gayet karmaşık bir durumdur. Ancak fizikte biz genelde, hayatı kolaylaştırmak adına, kutuplanabilirliğin her yönde aynı olduğu özel durum hakkında konuşarak işe başlarız. Diğer durumları bir başka alanın ilgisine bırakırız. Dolayısıyla sonraki işlerimiz için, bu bölümde konuşacağımız şeylere ihtiyaç duymayacağız.

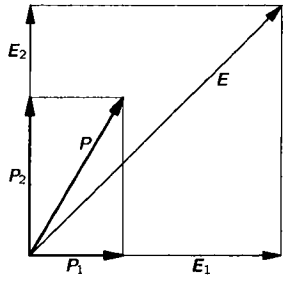
Tensörlerin matematiği, malzemelerin yönlü özelliklerini tanımlamak için gayet faydalıdır. Birçoğunuz fizikçi olmayacağınız, ancak birçok şeyin yönlere bağlı olduğu gerçek dünyaya atılacağınız için, er ya da geç tensörlere ihtiyaç duyacaksınız. Hiçbir şeyi eksik bırakmamak için, çok detaylarına giremeyecek olsak da, tensörleri tanımlayacağız. Fiziğe dair çalışmamızın tam olduğu hissini tatmak istiyoruz. Örneğin elektrodinamiğe dair her şeyi –bir elektrik ve manyetizma dersinin, hatta lisansüstü seviyesinde bir dersin kapsayacağı kadar– kapsadık. Mekaniğe dair çalışmamız tamamlanmadı, çünkü mekaniği sizin matematik bilgisi seviyeniz çok gelişkin değilken işledik ve en az eylem ilkesi veya Lagrange veya Hamilton denklemleri ve benzerleri gibi mekaniği daha zarif şekilde tanımlayan konulara giremedik. Bununla birlikte, özel görelilik dışında, mekaniğe dair tüm yasaları işledik. Elektrik ve manyetizmayı da tam işledik, birçok diğer konuyu da neredeyse tamamen işledik. Kuantum mekaniğiniyse, doğal olarak, ileriye bıraktık. Ancak yine de bir tensörün ne olduğunu bilmelisiniz.

Gözden Geçirme: Cilt 1, Bölüm 11, *Vektörler*
Cilt 1, Bölüm 20, *Uzaysal Dönme*

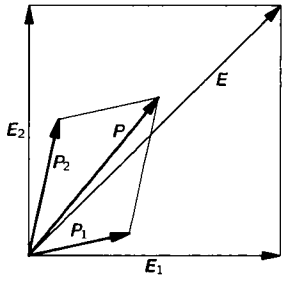
30. Bölümde kristal yapıya sahip maddelerinin özelliklerinin farklı yönlerde farklı olduklarının altını çizmiştik. Onlara *eş yönsüz* denir. Uygulanan elektrik alanın yönüyle indüklenen dipol momentinin değişimi buna bir örnektir ve biz tensör örneği için bunu kullanacağız. Belirli bir elektrik alan yönü için, birim hacimdeki indüklenen dipol momentini $\boldsymbol{P}$'nin uygulanan $\boldsymbol{E}$ alanının şiddetiyle orantılı olduğunu söyleyelim. ($\boldsymbol{E}$ çok büyük değilse, birçok malzeme için uygun bir yaklaştırmadır bu.) Orantı sabitine α diyelim.* Şimdi ele alacağımız maddelerde α uygulanan alanın yönüne bağlıdır. Örneğin, bir şeye baktığınızda onu çift görmenizi sağlayan kalsit gibi kristallerde.

Belirli bir kristal için x yönündeki $\boldsymbol{E}_1$ elektrik alanının, x yönünde $\boldsymbol{P}_1$ kutuplanması meydana getirdiğini bulmuş olalım. Daha sonra y yönünde, $\boldsymbol{E}_1$'le *aynı şiddette* $\boldsymbol{E}_2$ elektrik alanının y yönünde $\boldsymbol{P}_2$ kutuplanması meydana getirdiğini buluruz. 45° açıyla bir elektrik alan yerleştirdiğimizde ne olur? Sonuç x ve y boyunca iki alanın üst üste binmesidir, dolayısıyla $\boldsymbol{P}$ kutuplanma vektörü, Şekil

* Onuncu bölümde bilindik kuralı uygulamış, $P = \epsilon_0 \chi E$ eşitliğini yazmış ve χ'ye ("khi") "duyarlılık" demiştik. Burada tek bir harf kullanmak daha uygun olacak, dolayısıyla $\epsilon_0\chi$ yerine α kullanıyoruz. Eş yönlü dielektrikler için, κ dielektrik sabitiyken (*Bkz.* Bölüm 10-4), $\alpha=(\kappa-1)\epsilon_0$ eşitliğini yazabiliriz.



(a)



(b)

Şekil 31-1 Eş yönsüz bir kristal içinde kutuplanmaların vektör toplamı.

31-1 (a)'da görüldüğü gibi, $\boldsymbol{P}_1$ ve $\boldsymbol{P}_2$ vektörlerinin toplamı olacaktır. Kutuplanma artık elektrik alanla aynı yönde değildir. Bunun nasıl meydana gelmiş olabileceğini görebilirsiniz. Yukarı ve aşağı kolaylıkla hareket edebilen ancak yanlara hareket edemeyen yükler olabilir. 45° açıyla bir kuvvet uygulandığında, yükler yana hareket etmek yerine yukarı hareket ederler. Yerdeğiştirmeler dış kuvvetle aynı yönde değildir, çünkü asimetrik iç esneklik kuvvetleri devrededir.

Elbette ki 45° özel bir açı değildir. Bir kristalde indüklenen kutuplanmanın yönünün elektrik alan yönüyle aynı *olmaması genelde* doğrudur. Yukarıdaki örneğimizde x ve y eksenleri için "şanslı" seçimler yapmış olduk. $\boldsymbol{P}$, hem x hem de y yönlerinde $\boldsymbol{E}$ boyuncaydı. Kristal, koordinat eksenlerine göre döndürülseydi, y yönündeki $\boldsymbol{E}_2$ elektrik alanı hem x, hem de y bileşenine sahip bir $\boldsymbol{P}$ kutuplanması meydana getirirdi. Benzer şekilde, x yönündeki bir elektrik alan da hem x bileşeni, hem de y bileşeni olan bir kutuplanma meydana getirirdi. Bu durumda kutuplanmalar, Şekil 31-1 (a)'daki gibi değil, (b)'deki gibi olurdu. İşler karışmakta. Ancak herhangi bir $\boldsymbol{E}$ alanı için $\boldsymbol{P}$'nin *büyüklüğü* hâlâ $\boldsymbol{E}$'nin büyüklüğüyle orantılıdır.

Şimdi, bir kristalin koordinat eksenlerine göre rastgele bir yönelimine dair genel durumu ele alalım. x yönündeki bir elektrik alan x, y ve z bileşenleri olan bir $\boldsymbol{P}$ kutuplanması meydana getirecektir. Aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x \qquad P_y = \alpha_{yx}E_x \qquad P_z = \alpha_{zx}E_x \tag{31.1}$$

Burada dediğimiz şey, bir elektrik alan x yönündeyse, kutuplanma da aynı yönde olmak zorunda değildir, ama her biri E_x'le orantılı bir x, bir y ve bir z bileşenine sahip olmalıdır. Orantı sabitlerine sırayla α_{xx}, α_{yx} ve α_{zx} diyelim. (İlk harf bize $\boldsymbol{P}$'nin hangi bileşeni olduğunu ve ikincisi de elektrik alanın yönünü söyler.)

Benzer şekilde, y yönünde bir alan için

$$P_x = \alpha_{xy}E_y \qquad P_y = \alpha_{yy}E_y \qquad P_z = \alpha_{zy}E_y \tag{31.2}$$

ve z yönünde bir alan için de

$$P_x = \alpha_{xz}E_z \qquad P_y = \alpha_{yz}E_z \qquad P_z = \alpha_{zz}E_z \tag{31.3}$$

yazabiliriz. Kutuplanmanın alanlarla doğru orantılı olduğunu belirttiğimize göre, hem x, hem de y bileşenine sahip bir E elektrik alanı varsa, $\boldsymbol{P}$'nin x bileşeni Denk. (31.1) ve (31.2)'den çıkan iki P_x'in toplamı olacaktır. $\boldsymbol{E}$'nin x, y ve z boyunca bileşenleri varsa, $\boldsymbol{P}$'nin bileşenleri Denk. (31.1), (31.2) ve (31.3)'ten gelen üç bileşenin toplamı olacaktır. Bir diğer deyişle, $\boldsymbol{P}$ için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ P_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ P_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \tag{31.4}$$

Bu durumda bir kristalin dielektrik davranışı dokuz nicelikle belirlenir (α_{xx}, α_{xy}, α_{xz}, α_{yx}, ...) ve bunları α_{ij} sembolüyle gösterebiliriz. (i ve j alt simgeleri, olası her üç x, y ve z harflerinden birini temsil eder.) Herhangi bir $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı E_x, E_y ve E_z bileşenlerine ayrılabilir. Onlar ve α_{ij}'yi kullanarak, P_x, P_y ve P_z'yi bulabiliriz ve bu üçü bize toplam $\boldsymbol{P}$ kutuplanmasını verir. Dokuz α_{ij} katsayısı kümesine bir *tensör* denir. Bu özel durum için de, *kutuplanma tensörü* denir. Nasıl ki üç sayı, (E_x, E_y, E_z), "E vektörünü oluşturur" diyorsak, dokuz sayı da (α_{xx}, α_{xy}, ...) "α_{ij} tensörünü oluşturur" diyebiliriz.

31-2 Tensör bileşenlerini dönüştürmek

Farklı bir x', y' ve z' koordinat sistemine geçtiğimizde, vektörün $E_{x'}$, $E_{y'}$ ve $E_{z'}$ bileşenlerinin –aynı zamanda P'nin *bileşenlerinin de*– çok farklı olacağını bilirsiniz. Dolayısıyla bütün α_{ij} bileşenleri farklı koordinat kümeleri için farklı olacaktır. Aslında, α'ların nasıl değişmesi gerektiğini E ve P'nin bileşenlerini uygun bir şekilde değiştirerek görebilirsiniz. Bileşenleri değiştirmelisiniz çünkü yeni koordinat sisteminde *aynı fiziksel* elektrik alanı tanımlarsak aynı kutuplanmayı elde ederiz. Herhangi bir yeni koordinat sistemi için, $P_{x'}$, P_x, P_y ve P_z'nin doğrusal birleşimidir:

$$P_{x'} = aP_x + bP_y + cP_z$$

ve aynı şey diğer bileşenler için de geçerlidir. P_x, P_y ve P_z bileşenlerini Denk. (31.4)'ü kullanarak E'ler cinsinden ifade ederseniz, aşağıdaki eşitlikleri elde edersiniz:

$$\begin{aligned} P_{x'} = {} & a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) \\ & + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z) \\ & + c(\alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z) \end{aligned}$$

Daha sonra E_x, E_y ve E_z'yi de $E_{x'}$, $E_{y'}$ ve $E_{z'}$ cinsinden yazarsınız; örneğin, a', b', c', a, b ve c'yle bağıntılı ama onlara eşit değilken,

$$E_x = a'E_{x'} + b'E_{y'} + c'E_{z'}$$

olur. Böylece $E_{x'}$, $E_{y'}$ ve $E_{z'}$ bileşenleri cinsinden $P_{x'}$'nü, yeni α_{ij}'yi elde ettiniz. Biraz uğraştırıcı ama doğrudan bir yöntem.

Eksenleri değiştirmekten konuşurken, kristalin *uzayda* olduğu yerde durduğunu varsayarız. Kristal de eksenlerle *birlikte* dönseydi, α'lar değişmezdi. Tersi şekilde, kristalin yönelimi eksenlere göre değiştirilseydi, yeni bir α'lar kümesi elde ederdik. Kristalin *herhangi* bir yönelimi için biliniyorlarsa, belirttiğimiz dönüşüm yöntemiyle diğer herhangi bir yönelim için de bulunabilirler. Diğer bir deyişle, bir kristalin dielektrik özelliği *tamamen* kutuplanma tensörü α_{ij}'nin rastgele seçilmiş bir eksenler kümesine göre bileşenleriyle tanımlanır. Bir vektör hızını, $v = (v_x, v_y, v_z)$, bir parçacıkla ilişkilendirebildiğimiz ve koordinat eksenlerimizi değiştirirsek üç bileşenin de belirli bir şekilde değişeceğini bildiğimiz gibi, bir kristalle de, koordinat sistemi değiştiğinde dokuz bileşeni de belirli bir şekilde değişen kutuplanma tensörü α_{ij}'yi ilişkilendirebiliriz.

Denklem (31.4)'le ifade edilen, P ile E arasındaki ilişki daha basit olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \tag{31.5}$$

Burada i, x, y veya z'yi gösterir ve toplam da $j = x$, y ve z için alınır. Tensörlerle uğraşırken birçok özel gösterim icat edilmiştir, ancak her biri sadece sınırlı bir problemler sınıfı için uygundur. Ortak bir kural Denk. (31.5)'teki toplam işaretini ($\sum$) dahil etmemektir. Eğer dahil ederseniz, aynı alt simge iki kere göründüğünde (burada j), o indis üzerinden toplam alınması gerektiği anlaşılmalıdır. Tensörleri kısa bir süre kullanacağımız için, özel bir gösterim veya kural kullanmayacağız.

31-3 Enerji elipsoidi

Şimdi, tensörlerle biraz deneyim kazanalım. Şu ilginç soruyu sorduğumuzu düşünelim: Bir kristali kutuplamak için (Birim hacim başına $\epsilon_0 E^2/2$ olduğunu bildiğimiz elektrik alandaki enerjiye ilaveten) ne kadar enerji gerekir? Bir an için, yerdeğiştiren atomik yükleri düşünün. Yükü dx mesafesi kadar hareket ettirmek için yapılan iş $qE_x dx$'tir ve birim hacim başına N yük varsa, yapılan iş $qE_x\, Ndx$ olur. $qNdx$, birim hacim başına dipol momentindeki dP_x değişimidir. Dolayısıyla, *birim hacim başına* gerekli enerji aşağıdaki ifadedir:

$$E_x\, dP_x$$

Alanın üç bileşeni için işleri birleştirirsek, birim hacim başına iş aşağıdaki ifade olur:

$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{P}$'nin büyüklüğü $\boldsymbol{E}$'yle orantılı olduğundan, kutuplanmayı 0'dan $\boldsymbol{P}$'ye getirmek için birim hacimde yapılan iş $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{P}$'nin integralidir. Bu işe u_p* dersek, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$u_p = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{P} = \tfrac{1}{2} \sum_i E_i P_i \tag{31.6}$$

Şimdi $\boldsymbol{P}$'yi, Denk. (31.5)'i kullanarak $\boldsymbol{E}$ cinsinden ifade edebilir ve aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$u_p = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} E_i E_j \tag{31.7}$$

Enerji yoğunluğu u_p eksenlerin seçiminden bağımsız bir sayıdır, dolayısıyla skalerdir. Bir tensör bir indis üzerinden (bir vektörle) toplandığında yeni bir vektör meydana getirme özelliğine sahiptir ve *her iki* indis üzerinden toplandığında (*iki* vektörle) bir skaler verir.

Tensör α_{ij} gerçekte "ikinci dereceden tensör" olarak adlandırılır, çünkü iki indisi vardır. Bir vektör –*bir* indisli– birinci dereceden bir tensördür ve bir skaler de –hiç indisi olmayan– sıfır dereceden bir tensördür. Dolayısıyla elektrik alanı $\boldsymbol{E}$ birinci dereceden bir tensör ve enerji yoğunluğu u_p sıfırıncı dereceden bir tensör olarak belirtilir. İkinci dereceden yüksek tensörler oluşturmak için, üç veya daha fazla indis kullanmak mümkündür.

Kutuplanma tensörünün alt simgeleri üç olası değer aralığındadır –onlar üç boyutta tensörlerdir. Matematikçiler dört, beş veya daha fazla boyutlarda tensörlerle ilgilenirler. Elektromanyetik alanın göreli tanımını yaparken (26. Bölüm) dört boyutlu $F_{\mu\nu}$ tensörünü kullanmıştık.

Kutuplanma tensörü α_{ij}'nin *simetrik* olmak gibi ilginç bir özelliği vardır: $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ ve diğer bütün çift indisleri için de bu böyledir. (Bu gerçek bir kristalin *fiziksel* özelliğidir ve bütün tensörler için mutlaka geçerli olmak zorunda değildir.) Şu döngüde kristalin enerjisindeki değişimi hesaplayarak bunun doğru olduğunu kendinize kanıtlayabilirsiniz: (1) x yönünde bir alan yaratın; (2) y yönünde bir alan yaratın; (3) x yönündeki alanı *kapatın*; (4) y alanını kapatın. Kristal şimdi başladığı yere geri dönmüştür ve kutuplanma üzerinde yapılan net iş sıfıra geri dönmelidir. Ancak bunun doğru olabilmesi için α_{xy} mutlaka α_{yx}'e eşit olmalıdır. Aynı akıl yürütmeyi α_{xz} vb için de yürütebilirsiniz. Dolayısıyla, kutuplanma tensörü simetriktir.

Bunun bir anlamı da kutuplanma tensörünün, kristali çeşitli yönlerde kutuplamak için gerekli enerjiyi ölçerek hesaplanabileceğidir. Sadece x ve y bileşenleri olan bir $\boldsymbol{E}$ alanı uyguladığımızı düşünelim; böylece Denk. (31.7)'ye göre:

$$u_p = \tfrac{1}{2}\,[\alpha_{xx}E_x^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx})\, E_xE_y + \alpha_{yy}E_y^2] \tag{31.8}$$

Tek başına E_x'le, α_{xx}'i belirleyebiliriz; tek başına E_y'yle, α_{yy}'yi belirleyebiliriz; hem E_x hem de E_y'yle, $(\alpha_{xy} + \alpha_{yx})$'li terimden dolayı ilave bir enerji kazanırız. α_{xy} ve α_{yx} birbirine eşit olduğundan, bu terim $2\alpha_{xy}$'dir ve enerjiyle ilişkilendirilebilir.

Enerji denklemi (31.8)'in hoş bir geometrik yorumu vardır. Hangi E_x ve E_y alanlarının belirli bir $-u_0$ diyelim– enerji yoğunluğuna karşılık geldiğini soralım kendimize. Yanıt, aşağıdaki denklemin matematiksel çözümüdür:

$$\alpha_{xx}E_x^2 + 2\alpha_{xy}\, E_xE_y + \alpha_{yy}E_y^2 = 2u_0$$

Bu ikinci dereceden bir denklemdir, diğer bir deyişle bu denklemin çözümleri, E_x ve E_y, Şekil 31-2'deki elips üzerindeki bütün noktalardır. (Parabol veya hiperbol yerine bir elips olmalıdır, çünkü herhangi bir alan için enerji daima artı

---

* Kutuplanma *üretmek* için elektrik alan tarafından yapılan iş ile kalıcı bir dipol momenti $\boldsymbol{p}_0$'nun potansiyel enerjisi – $\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}$ birbirine karıştırılmamalıdır.

ve sonludur.) E_x ve E_y bileşenlerine sahip $\boldsymbol{E}$ vektörü, başlangıç noktasından elipse doğru çizilebilir. Böyle bir "enerji elipsi" kutuplanma tensörünü "görselleştirmenin" güzel bir yoludur.

Şimdi üç bileşeni de içerecek şekilde genelleştirirsek, birim enerji yoğunluğu vermesi gereken, *herhangi* bir yöndeki $\boldsymbol{E}$ elektrik vektörü, Şekil 31-3'te gösterildiği gibi, bir elipsoidin yüzeyinde bir noktayı verir. Sabit enerjili bu elipsoidin şekli, tensör kutuplanabilirliğini tanımlar.

Bir elipsoid üç "asal ekseninin" yönleri ve bu eksenler boyunca elipsin çapları verilerek kolayca tanımlanabilir. "Asal eksenler" en kısa ve en uzun çapların yönleri ve bu ikisine dik açılardaki yöndür. Şekil 31-3'teki a, b ve c eksenleriyle gösterilirler. Bu eksenlere göre, elipsoid aşağıdaki basit denkleme sahiptir:

$$\alpha_{aa}E_a^2 + \alpha_{bb}E_b^2 + \alpha_{cc}E_c^2 = 2u_0$$

Dolayısıyla bu eksenlere göre, dielektrik tensörünün sıfır olmayan üç bileşeni vardır: α_{aa}, α_{bb} ve α_{cc}. Bu demek oluyor ki, bir kristal ne kadar karmaşık olursa olsun, kutuplanma tensörünün sadece üç bileşeni olacak şekilde bir eksenler kümesi (kristal eksenleri olması şart değil) seçebiliriz. Böyle bir eksenler kümesiyle, Denk. (31.4) aşağıdaki şekle dönüşür:

$$P_a = \alpha_{aa}E_a, \qquad P_b = \alpha_{bb}E_b, \qquad P_c = \alpha_{cc}E_c \tag{31.9}$$

Asal eksenlerden herhangi biri boyunca bulunan bir elektrik alanı, aynı eksen boyunca bir kutuplanma meydana getirir ancak elbette üç eksen için katsayılar farklı olabilir.

Sıklıkla bir tensör, köşeli parantezler içinde dokuz katsayısının da bir tablo halinde sunulmasıyla tanımlanır:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \tag{31.10}$$

a, b ve c asal eksenleri için sadece diyagonal terimleri sıfır değildir; bu durumda "tensör diyagonaldir" deriz. Bu durumda tam tensör aşağıdaki ifadedir:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{pmatrix} \tag{31.11}$$

Önemli olan nokta, herhangi bir kutuplanma tensörünün (aslında, herhangi bir boyut sayısında, ikinci dereceden *simetrik herhangi* bir tensörün) uygun koordinat eksenleri seçilerek bu biçime sokulabilmesidir.

Diyagonal biçimdeki kutuplanma tensörünün üç elemanı da birbirine eşitse, diğer bir deyişle

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha \tag{31.12}$$

ise, enerji elipsoidi bir küre olur ve kutuplanabilirlik her yönde aynıdır. Malzeme eş yönlüdür. Tensör gösteriminde

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij} \tag{31.13}$$

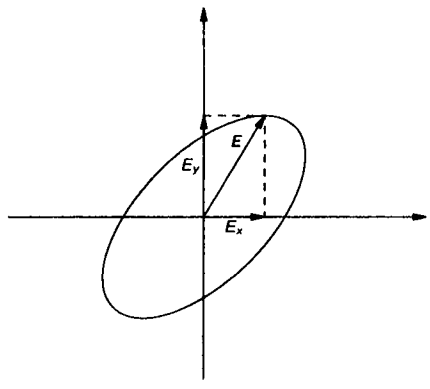
olur. δ_{ij} *birim tensördür.*

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31.14}$$

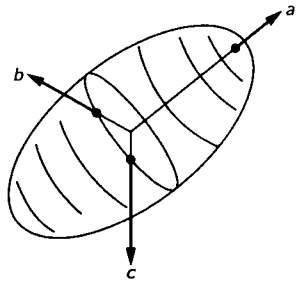
Bu da, elbette, aşağıdaki anlama gelir:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{eğer} \quad i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{eğer} \quad i \neq j \end{aligned} \tag{31.15}$$

δ_{ij} tensörüne sıklıkla "Kronecker deltası" denir. Tensör (31.14)'ün, koordinat sistemini herhangi bir dikdörtgensel sisteme de çevirseniz tıpatıp aynı biçimde



Şekil 31-2 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y)$ vektörünün, sabit bir kutuplanma enerjisi veren gezegeni.



Şekil 31-3 Kutuplanma tensörünün enerji elipsoidi.

olduğunu ispatlamak sizin için eğlenceli olabilir. Denklem (31.13)'ün kutuplanma tensörü aşağıdaki eşitliği verir:

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i$$

Bu da eş yönlü dielektrikler için eksi bulduğumuz sonuçla aynıdır:

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}$$

Kutuplanma elipsoidinin şekli ve yönelimi bazen, kristalin simetri özellikleriyle ilişkilendirilebilir. 30. Bölümde üç boyutlu bir örgünün 230 farklı olası iç simetrisi olabileceğini ve birim hücrelerinin şekline göre uygun şekilde yedi sınıfa gruplanabileceklerini belirtmiştik. Kutuplanabilirlik elipsoidi kristalin iç geometri simetrilerini paylaşmalıdır. Örneğin, üç eksenli bir kristalin düşük bir simetrisi vardır. Kutuplanabilirlik elipsoidinin eksenleri birbirlerine eşit olmayacaktır ve yönelimi, genel olarak, kristal eksenleriyle aynı olmayacaktır. Diğer yandan, eğik eksenli bir kristal, bir ekseni etrafında 180° döndürülse bile özellikleri değişmez. Dolayısıyla kutuplanma tensörü böyle bir dönmeden sonra aynı kalmalıdır. Buradan, kutuplanabilirlik elipsoidinin 180° dönmeden sonra kendine dönmesi gerektiği sonucu çıkıyor. Bu sadece elipsoid eksenlerinden biri kristalin simetri ekseniyle aynı yöndeyse olur. Öbür türlü, elipsoidin boyutları ve yöneliminde bir sınırlama yoktur.

Dik eksenli bir kristal içinse, elipsoidin eksenleri kristal eksenlerine karşılık gelmelidir; çünkü üç eksenin herhangi biri etrafında 180° dönme aynı örgüyü tekrarlar. Dörtgen bir kristali ele alırsak, elips aynı simetriye sahip olmalıdır. Dolayısıyla iki eşit çapı olmalıdır. Son olarak, kübik bir kristal için elipsoidin her üç çapı da eşit olmalıdır. Böylece bir küre olur ve kristalin kutuplanabilirliği her yönde aynıdır.

Bir kristalin bütün olası simetrilerine ait bütün olası tensör türlerini çözmeye çalışmak büyük bir oyundur. Bu oyuna "grup-kuramı" analizi denir. Kutuplanabilirlik tensörü gibi basit bir durum için, ilişkilerin ne olması gerektiğini görmek görece kolaydır.

31-4 Diğer tensörler; eylemsizlik tensörü

Fizikte karşımıza birçok yerde tensör örnekleri çıkar. Örneğin, bir metalde veya bir iletkende, akım yoğunluğu $\boldsymbol{j}$ yaklaşık olarak elektrik alan $\boldsymbol{E}$'ye orantılıdır; orantı sabitine σ iletkenliği denir:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Kristaller içinse, $\boldsymbol{j}$ ile $\boldsymbol{E}$ arasındaki ilişki daha karmaşıktır; iletkenlik her yönde aynı değildir. İletkenlik bir tensördür ve aşağıdaki ifadeyi yazarız:

$$j_i = \sum \sigma_{ij} E_j$$

Bir başka fiziksel tensör örneğiyse eylemsizlik momentidir. I. Cilt, 18. Bölümde, sabit bir eksen etrafında dönen katı bir nesnenin ω açısal hızıyla orantılı bir L açısal momentumu olduğunu görmüştük ve bu orantısallık çarpanına I, eylemsizlik momenti demiştik:

$$L = I\omega$$

Rastgele şekilli bir nesne için, eylemsizlik momenti dönme eksenine göre yönelimine bağlıdır. Örneğin, dikdörtgen bir blok üç dik ekseni etrafında farklı momentlere sahiptir. $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızı da, $\boldsymbol{L}$ açısal momentumu da vektördür. Simetri eksenlerinin biri etrafındaki dönmeler için, paraleldirler. Ancak eylemsizlik momenti üç asal eksen için farklıysa, bu durumda genel olarak $\boldsymbol{\omega}$ ve $\boldsymbol{L}$ aynı yön-

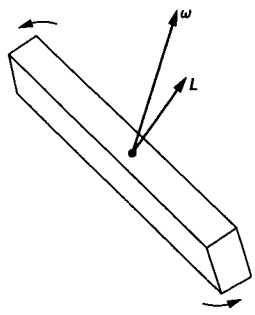
de değildirler (*Bkz.* Şekil 31-4). $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{P}$ arasındaki ilişkiye benzer bir ilişkileri vardır. Genel olarak, aşağıdaki eşitlikleri yazmalıyız:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{31.16}$$

I_{ij} şeklindeki dokuz katsayıya eylemsizlik tensörü denir. Kutuplanmaya benzerlik kurarak, herhangi bir açısal momentum için kinetik enerji ω_x, ω_y ve ω_z bileşenleriyle ikinci dereceden bir denklem biçiminde olmalıdır:

$$\mathrm{KE} = \tfrac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \tag{31.17}$$

Enerjiyi, eylemsizliğin elipsoidini tanımlamak için kullanabiliriz. Ayrıca, enerji fikirleri tensörün simetrik olduğunu ($I_{ij} = I_{ji}$) göstermek için kullanılabilir.



Şekil 31-4 Katı bir nesnenin açısal momentumu $\boldsymbol{L}$, genelde, $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızına paralel değildir.

Katı bir cismin eylemsizlik tensörü, nesnenin şekli biliniyorsa çıkarılabilir. Tek yapmamız gereken, cisimdeki bütün parçacıkların toplam kinetik enerjilerini yazmaktır. m kütlesinde ve v hızında bir parçacığın kinetik enerjisi $\frac{1}{2}mv^2$'dir ve toplam kinetik enerji cisimdeki bütün parçacıklar için aşağıdaki toplamı uygulayarak bulunur:

$$\sum \tfrac{1}{2}mv^2$$

Her bir parçacığın hızı $\boldsymbol{v}$, katı cismin açısal hızı $\boldsymbol{\omega}$'ya bağlıdır. Cismin, durağan olduğunu varsaydığımız kendi kütle merkezi etrafında döndüğünü varsayalım $\boldsymbol{r}$ parçacığın kütle merkezine olan yerdeğiştirmeyse, parçacığın $\boldsymbol{v}$ hızı $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$'yle verilir. Dolayısıyla toplam kinetik enerji de aşağıdaki eşitlik olur:

$$\mathrm{KE} = \sum \tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 \tag{31.18}$$

Şimdi yapmamız gereken, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ çarpımını ω_x, ω_y, ω_z ve x, y, z cinsinden yazmak ve sonucu Denk. (31.17)'yle karşılaştırmak. I_{ij}'yı terimleri tanımlayarak buluruz. Aritmetik hesabı yaparak, aşağıdaki denklemleri yazarız:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_x^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_y^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_z^2 \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= +\omega_y^2 z^2 - 2\omega_y\omega_z zy + \omega_z^2 y^2 \\ &\quad +\omega_z^2 x^2 - 2\omega_z\omega_x xz + \omega_x^2 z^2 \\ &\quad +\omega_x^2 y^2 - 2\omega_x\omega_y yx + \omega_y^2 x^2 \end{aligned}$$

Bu denklemi $m/2$'yle çarpıp, bütün parçacıklar üzerinden toplamını alıp ve Denklem (31.17)'yle karşılaştırırsak, örneğin, I_{xx}'in aşağıdaki denklemle bulunduğunu görürüz:

$$I_{xx} = \sum m(y^2 + z^2)$$

Bu daha önce, bir cismin x ekseni etrafında eylemsizlik momenti için bulduğumuz (I. Cilt, 19. Bölüm) denklemdir. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğundan, bu terimi aşağıdaki denklem gibi de yazabiliriz:

$$I_{xx} = \sum m(r^2 - x^2)$$

Diğer bütün terimleri de benzer şekilde çıkarıp, eylemsizlik tensörünü aşağıdaki ifadeyle yazabiliriz:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum m(r^2 - x^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(r^2 - y^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(r^2 - z^2) \end{pmatrix} \tag{31.19}$$

İsterseniz, bu "tensör gösterimi" şeklinde de yazılabilir:

$$I_{ij} = \sum m(r^2\delta_{ij} - r_i r_j) \tag{31.20}$$

r_i parçacığın konum vektörünün (x, y, z) bileşenleridir ve $\sum$ da parçacıklar üzerinden toplam alınması anlamına gelir. Bu durumda eylemsizlik momenti, terimleri cismin özellikleri olan ikinci dereceden bir tensördür ve ω'yu L'ye aşağıdaki ifade gibi ilişkilendirir:

$$L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \tag{31.21}$$

Herhangi bir şekle sahip bir cisim için bir eylemsizlik elipsoidi ve dolayısıyla üç asal ekseni de bulabiliriz. Bu eksenlere göre, tensör diyagonal olur, böylece herhangi bir nesne için daima, açısal hızın ve açısal momentumun paralel olduğu üç dikey eksen vardır. Bunlara, asal eylemsizlik eksenleri denir.

31-5 Vektörel çarpım

İkinci dereceden tensörleri I. Cilt, 20. Bölümden beri kullandığımızı burada belirtmeliyiz. Hatırlarsanız, "bir düzlemdeki torku", örneğin τ_{xy}'yi aşağıdaki ifade gibi tanımlamıştık:

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x$$

Üç boyuta genelleyerek aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\tau_{ij} = r_i F_j - r_j F_i \tag{31.22}$$

τ_{ij} niceliği, ikinci dereceden bir tensördür. Bunu görmenin bir yolu, τ_{ij}'yi bir vektörle, örneğin $\boldsymbol{e}$ birim vektörüyle, aşağıdaki ifadeye göre birleştirmektir:

$$\sum_j \tau_{ij}\,e_j$$

Bu nicelik bir *vektörse*, bu durumda τ_{ij} bir tensör gibi dönüşmelidir. Bu bizim tensör tanımımızdır. τ_{ij}'yi değiştirirsek, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}\sum_j \tau_{ij}\,e_j &= \sum_j r_i F_j\,e_j - \sum_j r_j\,e_j F_i \\ &= r_i(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\,F_i\end{aligned}$$

Skaler çarpımları skaler olduklarından, sağdaki iki terim vektördürler ve farkları da öyledir. Dolayısıyla τ_{ij} bir tensördür.

Ancak τ_{ij} özel bir tür tensördür; ters *simetriktir*:

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji}$$

Dolayısıyla sadece üç adet sıfır olmayan terimi vardır, τ_{xy}, τ_{yz} ve τ_{zx}. I. Cilt 20. Bölümde, bu üç terimin bir vektörün üç bileşeni gibi neredeyse "rastlantısal olarak" dönüşebileceğini gösterebilmiştik ki aşağıdaki eşitliği *tanımlayabilelim:*

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$$

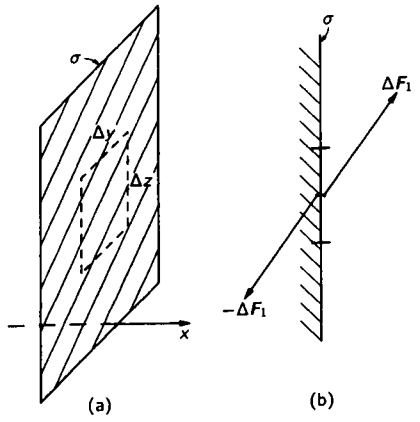
"Rastlantısal olarak" diyoruz, çünkü sadece üç boyutta olur. Örneğin dört boyutta, ters simetrik ikinci dereceden bir tensör *altı adede* kadar sıfır olmayan terimi vardır ve elbette ki *dört* bileşenli bir vektörle değiştirilemez.

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ eksenel vektörünün tensör olması gibi, iki kutupsal vektörün vektörel çarpımı da daima tensördür. Aynı fikirler geçerlidir. Bununla birlikte, rastlantısal olarak, aynı zamanda vektörlerle de (aslında sözde vektörler) temsil edilebilirler, böylece matematik bizim için kolaylaşmıştır.

Matematiksel olarak, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ herhangi iki vektörse, dokuz $a_i b_j$ niceliği bir tensör oluşturur. (Gerçi fiziksel olarak yararlı herhangi bir amacı olmayabilir.) Dolayısıyla, konum vektörü $\boldsymbol{r}$ için, $r_i r_j$ bir tensördür ve δ_{ij} de bir tensör olduğundan, Denk. (31.20)'nin sağ tarafının da bir tensör olması gerektiğini görürüz. Benzer şekilde, Denk. (31.22) de, sağ tarafındaki iki terim tensör olduğundan, bir tensördür.

31-6 Stres tensörü

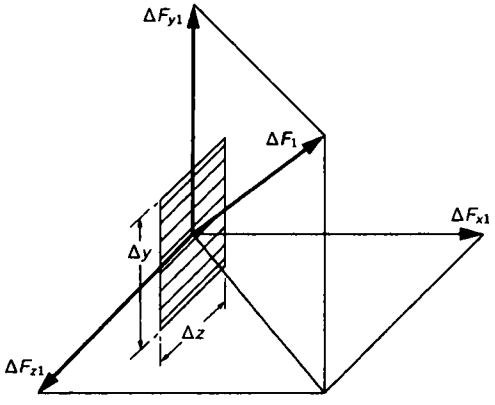
Şu ana kadar tarif ettiğimiz simetrik tensörler, bir vektörü diğer bir vektöre ilişkilendiren katsayılar olarak çıktılar karşımıza. Şimdi fiziksel olarak farklı bir öneme sahip bir tensöre bakacağız, *stres* tensörüne. Üzerine etkiyen çeşitli kuvvetler olan katı bir nesneyi ele alalım. İçinde değişik "gerilmeler" olduğunu söyleriz ve bundan kastımız malzemenin birbirine komşu parçaları arasında iç kuvvetler olmasıdır. Bölüm 12-3'te iki boyutlu bir durum olan gerilmiş bir diyaframın üzerindeki yüzey gerilmesini ele alırken bu tür stresler hakkında biraz konuşmuştuk. Şimdi de üç boyutlu bir cismin malzemesi içindeki iç kuvvetlerin, bir tensör cinsinden tanımlanabileceğini göreceğiz.



Şekil 31-5 σ düzleminin dolundaki malzeme, düzlemin sağındaki malzemenin $\Delta y\Delta z$ alanında $\Delta \boldsymbol{F}_1$ kuvveti uygulamaktadır.

Esnek bir malzemeden oluşmuş –örneğin bir jöle parçası– bir cismi ele alalım. Boydan boya kesersek, kesiğin her bir tarafındaki malzeme iç kuvvetlerce yerdeğiştirir. Kesik yapılmadan önce, cismin iki parçası arasında malzemeyi bir arada tutan kuvvetler olmalıydı; dolayısıyla stresi bu kuvvetler cinsinden tanımlayabiliriz. x eksenine dik sanal bir düzleme –Şekil 31-5'teki σ düzlemi gibi– baktığımızı ve bu düzlemdeki küçük $\Delta y\Delta z$ alanındaki kuvveti bulmaya çalıştığımızı düşünelim. Alanın sol tarafındaki malzeme, şeklin (b) kısmında gösterildiği gibi, sağdaki malzemeye $\Delta \boldsymbol{F}_1$ kuvveti uygular. Elbette, soldaki yüzeye de eşit bir tepki kuvveti $-\Delta \boldsymbol{F}_1$ vardır. Alan yeterince küçükse, $\Delta \boldsymbol{F}_1$'in $\Delta y\Delta z$'yle orantılı olmasını bekleriz.

Bir tür strese zaten aşinasınız. Bu stres, statik bir sıvıdaki basınçtır. Orda kuvvet basınç çarpı alana eşittir ve yüzey elemanına dik açılardadır. Katılar için –ayrıca hareket halindeki viskoz sıvılar için– kuvvetin yüzeye dik olması gerekmez. Basınçlara (artı veya eksi) ilave olarak *kayma* kuvvetleri de vardır. ("Kayma" kuvvetinden kastımız, kuvvetin bir yüzey üzerindeki *teğet* bileşenleridir.) Kuvvetin üç bileşeni de hesaba katılmalıdır. Ayrıca dikkat edin, düzlemde kesiğimizi bir başka yönelimle yaparsak, kuvvetler farklılaşır. İç stresin eksiksiz bir tanımı tensör gerektirir.



Şekil 31-6 x eksenine dik $\Delta y\Delta z$ alan elemanı üzerindeki $\Delta \boldsymbol{F}_1$ kuvveti üç bileşene ayrılır: ΔF_{x1}, ΔF_{y1} ve ΔF_{z1}.

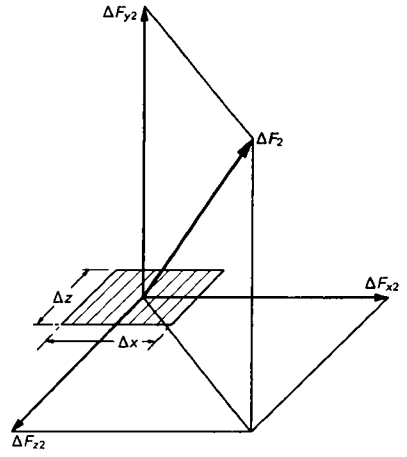
Stres tensörünü şu ifade gibi tanımlayabiliriz: Önce, x eksenine dik bir kesik hayal eder ve kesik boyuna $\Delta \boldsymbol{F}_1$ kuvvetini, Şekil 31-6'daki gibi, bileşenlerine ayırırız. Diğer bir deyişle, ΔF_{x1}, ΔF_{y1} ve ΔF_{z1}'e. Bu kuvvetlerin $\Delta y\Delta z$ alanına oranına S_{xx}, S_{yx} ve S_{zx} deriz. Örneğin:

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{x1}}{\Delta y \Delta z}$$

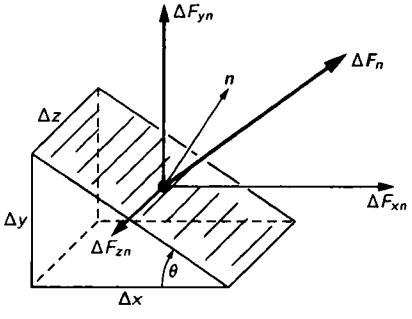
İlk indis y kuvvet bileşeninin yönünü gösterir ve ikinci indis x de alana normaldir. Dilerseniz, $\Delta y\Delta z$ alanını, x'e dik bir alan elemanı anlamına gelecek şekilde Δa_x olarak yazabilirsiniz. Bu durumda:

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{x1}}{\Delta a_x}$$

olur. Sonra, y eksenine dik sanal bir kesik düşünürüz. Küçük bir $\Delta x\Delta z$ alanı



Şekil 31-7 y eksenin dik bir alan elemanı üzerindeki kuvvet üç dikdörtgensel bileşene ayrılır.



Şekil 31-8 Birim normali $\boldsymbol{n}$ olan N yüzeyi üzerindeki $\boldsymbol{F_n}$ kuvveti bileşenlerine ayrılmıştır.

üzerinde bir $\Delta \boldsymbol{F_2}$ kuvveti olur. Gene bu kuvveti, Şekil 31-7'de görüldüğü gibi, üç bileşenine ayırırız ve stresin üç bileşenini, S_{xy}, S_{yy} ve S_{zy} üç yönde kuvvet bölü alan olarak tanımlarız. Son olarak z eksenine dik bir kesik hayal eder ve S_{xz}, S_{yz} ve S_{zz} bileşenlerini tanımlarız. Böylece elimizde dokuz sayı olur:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \tag{31.23}$$

Bu dokuz sayının iç stres halini tamamen tanımlamaya yettiğini ve S_{ij}'nin gerçekten de bir tensör olduğunu göstermek istiyoruz. Herhangi bir açı boyunca yönelmiş bir yüzey üzerindeki bir kuvveti bilmek istediğimizi düşünelim. S_{ij}'yle onu bulabilir miyiz? Evet, şu ifade gibi: Yeni yüzeyde bir N yüzü olan ve diğer yüzleri koordinat eksenlerine paralel küçük katı bir şekil düşünelim. N yüzü z eksenine paralel olsaydı, elimizde Şekil 31-8'de gösterildiği gibi üçgensel bir parça olurdu. (Bu bir parça özel bir durumdur, ancak genel yöntemi yeterince iyi anlatır.) Şekil 31-8'deki küçük katı üçgen üzerindeki stres kuvvetleri dengededir (en azından sonsuz küçüklükteki boyutların limitinde), dolayısıyla üzerindeki toplam kuvvet sıfır olmalıdır. Koordinat eksenlerine paralel yüzlerdeki kuvvetleri doğrudan S_{ij}'den biliyoruz. Vektör toplamları N yüzündeki kuvvete eşit olmalıdır, böylece bu kuvveti S_{ij} cinsinden ifade edebiliriz.

Küçük üçgen yüzeyi üzerindeki *yüzey* kuvvetlerinin dengede olduğu varsayımımız, olabilecek diğer *cisim* kuvvetlerini, örneğin kütleçekim veya koordinat sistemimiz bir eylemsizlik çerçevesi değilse, sözde kuvvetleri ihmal eder. Ancak dikkat edin, o tür cisim kuvvetleri küçük üçgenin *hacmiyle* ve dolayısıyla $\Delta x \Delta y \Delta z$'yle orantılıyken, yüzey kuvvetleri $\Delta x \Delta y$, $\Delta y \Delta z$, vb alanlarla orantılıdır. Dolayısıyla küçük kamanın ölçeğini yeterince küçük alırsak, cisim kuvvetleri yüzey kuvvetlerine göre daima ihmal edilebilir.

Şimdi küçük kamamız üzerindeki kuvvetleri toplayalım. Önce x bileşenini ele alalım, her biri bir yüzeyden gelen beş parçanın toplamıdır. Ancak Δz yeterince küçükse, (z eksenine dik) üçgen yüzeyler üzerindeki kuvvetler eşit ve zıt olacaktır, dolayısıyla onları unutabiliriz. Kuvvetin taban üçgeni üzerindeki x bileşeni aşağıdaki ifadedir:

$$\Delta F_{x2} = S_{xy} \Delta x \Delta z$$

Kuvvetin dikey üçgen üzerindeki x bileşeniyse aşağıdaki ifadedir:

$$\Delta F_{x1} = S_{xx} \Delta y \Delta z$$

Bu ikisi, N yüzü üzerinde *dışarı* doğru kuvvetin x bileşenine eşit olmalıdır. N yüzüne dik birim vektörüne $\boldsymbol{n}$ ve üzerindeki kuvvete $\boldsymbol{F_n}$ diyelim. Bu durumda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\Delta F_{xn} = S_{xx} \Delta y \Delta z + S_{xy} \Delta x \Delta z$$

Bu düzlem boyunca stresin x bileşeni S_{xn}, ΔF_{xn}'in alana, yani $\Delta z\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$'ye bölümüne eşittir, ya da:

$$S_{xn} = S_{xx} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + S_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$\Delta x/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, Şekil 31-8'de gösterildiği gibi, y ekseni ile $\boldsymbol{n}$ arasındaki θ açısının kosinüsüdür. Dolayısıyla, $\boldsymbol{n}$'in y bileşeni n_y şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\Delta y/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ de $\sin\theta = n_x$'dir. Aşağıdaki aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$S_{xn} = S_{xx} n_x + S_{xy} n_y$$

Bunu herhangi bir yüzey elemanı için genelleştirirsek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$S_{xn} = S_{xx} n_x + S_{xy} n_y + S_{xz} n_z$$

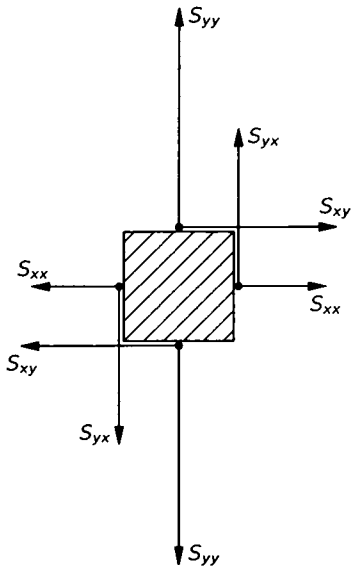
ya da, genel olarak:

$$S_{in} = \sum_j S_{ij} n_j \tag{31.24}$$

Herhangi bir yüzey elemanı üstündeki kuvveti S_{ij} cinsinden *bulabilir*, böylece malzemenin iç stres halini eksiksiz tarif edebiliriz.

Denklem (31.24)'e göre, S_{ij} tensörü S_n stresini n birim vektörüne, α_{ij}'nin F'yi E'ye ilişkilendirdiği gibi, ilişkilendirir. n ve S_n vektör olduklarından, S_{ij} bileşenleri koordinat eksenlerindeki değişimlerle tensör gibi dönüşmelidir. Dolayısıyla S_{ij} gerçekten de bir tensördür.

Küçük küp üzerindeki kuvvetlere bakarak, S_{ij}'nin *simetrik* bir tensör olduğunu gösterebiliriz. Yüzleri bizim koordinat eksenlerimize paralel olarak yönlenmiş küçük bir küp alalım ve Şekil 31-9'da gösterildiği gibi kesitine bakalım. Küpün bir kenarına bir birim dersek, x ve y eksenlerine dik yüzler üzerindeki kuvvetlerin x ve y bileşenleri şekildeki gibi olabilir. Küp küçükse, küpün bir kenarından karşıt diğer kenarına stresler pek değişmez, bu yüzden kuvvet bileşenleri, gösterildiği gibi eşit ve zıttırlar. Küp üzerinde tork olmamalıdır yoksa dönmeye başlardı. Merkez etrafındaki toplam tork $(S_{yx} - S_{xy})$(çarpı küpün birim kenarıdır) ve toplamı sıfır olduğundan $S_{yx} S_{xy}$'ye eşittir ve stres tensörü simetriktir.



Şekil 31-9 Küçük bir birim küpün dört yüzü üzerindeki x ve y kuvvetleri.

S_{ij} simetrik bir tensör olduğundan, üç asal ekseni olan bir elipsoid şeklinde tanımlanabilir. Bu eksenlere dik yüzeyler için stresler özellikle basittir. Yüzeylere dik itme veya çekmelere karşılık gelirler. Bu yüzeyler boyunca kayma kuvveti yoktur. *Herhangi* bir stres için, kayma bileşenlerinin sıfır olacağı şekilde eksenlerimizi seçebiliriz. Elipsoid bir küreyse, *herhangi* bir yönde sadece dik kuvvetler vardır. Bu hidrostatik bir basınca (artı veya eksi) karşılık gelir. Dolayısıyla hidrostatik bir basınç için, tensör diyagonaldir ve üç bileşen de birbirine eşittir; hatta aslında tam olarak p basıncına eşittirler. Aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$S_{ij} = p\delta_{ij} \tag{31.25}$$

Stres tensörü –ve ayrıca elipsoidi– bir malzeme bloğu içinde genel olarak noktadan noktaya değişecektir. Bütün bloğu tanımlayabilmek için S_{ij}'nin her bir bileşeninin değerini konumun bir fonksiyonu olarak tanımlamalıyız. Dolayısıyla stres tensörü bir *alandır*. Uzaydaki her bir noktaya bir sayı veren, örneğin $T(x, y, z)$ sıcaklık alanı gibi, *skaler alanları* ve her bir nokta için üç sayı veren $E(x, y, z)$ gibi *vektör* alanlarını görmüştük. Şimdi de uzaydaki her bir noktaya dokuz sayı veren –ya da simetrik tensör S_{ij} için sadece altı sayı veren– *tensör alanını* gördük. Gelişigüzel bozulmuş bir katının içindeki iç kuvvetlerin tam bir tanımı için x, y, z'nin altı fonksiyonu gerekir.

31-7 Yüksek dereceli tensörler

Stres tensörü S_{ij} maddenin iç kuvvetlerini tanımlar. Materyal esnekse, iç bozulmayı bir başka tensör, T_{ij}, cinsinden tanımlamak uygundur. T_{ij} tensörüne *gerilme* tensörü denir. Metal çubuk gibi basit bir nesne için, uzunluktaki değişim ΔL'nin kuvvetle yaklaşık olarak orantılı olduğunu bilirseniz, Hooke yasasına uyuyor diyebiliriz.

$$\Delta L = \gamma F$$

Rastgele bozulmalara sahip esnek bir katı cisim için, T_{ij} gerilmesi S_{ij} stresine bir dizi doğrusal denklemle bağlıdır:

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl} \tag{31.26}$$

Ayrıca, bir yayın (veya çubuğun) potansiyel enerjisinin de aşağıdaki ifade olduğunu biliyoruz:

$$\tfrac{1}{2} F \Delta L = \tfrac{1}{2} \gamma F^2$$

Katı bir cisimdeki esneklik enerjisi *yoğunluğu* için genel denklem de aşağıdaki ifadedir:

$$U_{\text{esnek}} = \sum_{ijkl} \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl} \tag{31.27}$$

Bir kristalin esneklik özelliklerinin eksiksiz tanımı γ_{ijkl} katsayıları cinsinden verilmelidir. Bu bizi yeni bir tür canavarın karşısına çıkarır. *Dördüncü* dereceden bir tensördür bu. Her bir indis x, y veya z değerlerinden herhangi birisini alabildiğinden, $3^4 = 81$ katsayı vardır. Ancak aslında gerçekte 21 *farklı* sayı vardır. Öncelikle, S_{ij} simetrik olduğundan sadece altı farklı değeri vardır ve Denk. (31.27) için sadece 36 *farklı* katsayı gerekir. Gelgelelim, S_{ij} ve S_{kl}, enerjiyi değiştirmeden, yerdeğiştirebilirler: ij ve kl'yi karşılıklı değiştirsek γ_{ijkl} simetrik olmalıdır. Bu, farklı katsayıların sayısını 21'e indirir. Dolayısıyla en düşük olası simetriye sahip bir kristalin esneklik özelliklerini tanımlamak için 21 esneklik sabiti gerekir! Bu sayı elbette, daha yüksek dereceli simetriye sahip kristaller için düşürülür. Örneğin, kübik bir kristalin sadece üç ve eş yönlü bir maddenin de sadece iki esneklik sabiti vardır.

Sonuncunun doğru olduğu şu ifadede görülebilir. γ_{ijkl}'nin bileşenleri nasıl eksenlerin yönlerinden, bir malzeme eş yönlüyse olmaları gerektiği gibi, bağımsız olabilirler? *Cevap:* Ancak δ_{ij} tensörü cinsinden ifade edilebilirlerse bağımsız olabilirler. Gerekli simetriye sahip iki olası ifade vardır: $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ve $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$. Dolayısıyla γ_{ijkl} onların doğrusal bir birleşimi olmalıdır. Bu bakımdan, eş yönlü malzemeler için

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij}\delta_{kl}) + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

ve malzemenin esneklik özelliklerini tanımlamak için iki katsayı, a ve b gerekir. Kübik kristalin sadece üç sabite ihtiyaç duyduğunu keşfetme zevkini size bırakıyoruz.

Son bir örnek olarak, üçüncü dereceden bir tensörü ele alalım ve piezoelektrik etkisini gösterelim. Bir kristal stres altında, stresle orantılı bir elektrik alan meydana getirir ve dolayısıyla aşağıdaki genel yasayı yazabiliriz:

$$E_i = \sum_{j,k} P_{ijk} S_{jk}$$

Denklemdeki E_i elektrik alan ve P_{ijk} da piezoelektrik katsayıları veya piezoelektrik tensörüdür. Kristalin bir evirme merkezi ($x, y, z \to -x, -y, -z$ altında değişmez) varsa, bütün piezoelektrik katsayılarının sıfır olduğunu gösterebilir misiniz?

31-8 Elektromanyetik momentumun dört-tensörü

Şu ana kadar bu bölümde ele aldığımız bütün tensörler uzayda üç boyutla ilişkilidir; uzamsal dönmeler altında belli bir dönüşüm özelliğine sahiptirler 26. Bölümde göreli uzay-zamanın dört boyutunda bir tensör –elektromanyetik alan tensörü $F_{\mu\nu}$– kullanmıştık. Böyle bir dört-tensörün bileşenleri, üzerinde durduğumuz özel bir yolla, koordinatların Lorentz dönüşümü altında dönüşür. (Her ne kadar biz öyle yapmadıysak da, Lorentz dönüşümünü, Minkowski uzayı denen dört boyutlu bir "uzayda" "dönme" olarak ele alabilirdik. Bu durumda, burada yaptığımızla benzerlik daha açık olurdu.)

Son örneğimiz için, görelilik kuramının dört boyutunda (t, x, y, z) bir başka tensörü ele alacağız. Stres tensörünü yazdığımızda, S_{ij}'yi birim alan üstünde bir kuvvetin bir bileşeni olarak tanımlamıştır. Bir kuvvet aynı zamanda momentumun zamanla değişim hızına eşittir. Dolayısıyla "S_{xy}, y'ye dik birim alan üstündeki kuvvetin x bileşenidir" demek yerine, "S_{xy}, y'ye dik birim alan içinden geçen momentumun x bileşeninin akış hızıdır" diyebiliriz. Diğer bir deyişle, S_{ij}'nin her bir terimi, j yönüne dik birim alan içinden geçen momentumun i bileşeninin akımını temsil eder. Bunlar saf uzay bileşenleridir, ama dört boyutta (μ ve $\nu = t, x, y, z$) S_{tx}, S_{yt}, S_{tt} vb ilave bileşenler içeren "daha büyük" bir $S_{\mu\nu}$ tensörünün parçalarıdır.

Uzay bileşenlerinin momentum akışını temsil ettiğini biliyoruz. Bir başka tür "akışı" –elektrik yükünün akışını– çalışarak, bunu nasıl zaman boyutuna uzatabileceğimize dair bir ipucu elde edebiliriz. Yük gibi bir *skaler* nicelik için, akış hızı (akışa dik birim alanda) bir uzay *vektörüdür*: akım yoğunluğu vektörü $\boldsymbol{j}$. Bu akış vektörünün zaman bileşeninin, akan şeyin yoğunluğu olduğunu görmüştük. Örneğin, $\boldsymbol{j}$ zaman bileşeniyle, yük yoğunluğu ($j_t = \rho$), birleştirilerek bir dört-vektör $j_\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ yapılabileceğini görmüştük. Diğer bir deyişle, j_μ'daki μ t, x, y, z değerlerini aldığında, skaler yükün "yoğunluğu, x yönündeki akış hızı, y'deki akış hızı, z'deki akış hızı" anlamına gelir.

Skaler bir niceliğin akışının zaman bileşeni hakkındaki ifademizle benzerlik kurarak, momentumun x bileşeninin akışını tanımlayan S_{xx}, S_{xy} ve S_{xz}'yle beraber, akan şeyin yoğunluğu olan S_{xt} zaman bileşeni olmasını bekleriz. Dolayısıyla S_{xt}, x momentumunun yoğunluğu olmalıdır. Tensörümüzü yatay olarak t bileşeni içerecek şekilde uzatabiliriz. Elimizde aşağıdaki ifadeler var:

$$\begin{aligned} S_{xt} &= x\text{–momentumunun yoğunluğu} \\ S_{xx} &= x\text{–momentumunun } x\text{–akışı} \\ S_{xy} &= x\text{–momentumunun } y\text{–akışı} \\ S_{xz} &= x\text{–momentumunun } z\text{–akışı} \end{aligned}$$

Benzer şekilde, momentumun y bileşeni için akışın üç bileşenine sahibiz (S_{yx}, S_{yy}, S_{yz}) ve bunlara aşağıdaki dördüncü terimi eklemeliyiz:

$$S_{yt} = y\text{–momentumunun yoğunluğu}$$

ve elbette, S_{zx}, S_{zy}, S_{zz}'ye de aşağıdaki terimi eklemeliyiz:

$$S_{zt} = z\text{–momentumunun yoğunluğu}$$

Dört boyutta, momentumun bir de t bileşeni vardır ve bu enerjidir. Dolayısıyla S_{ij} tensörü S_{tx}, S_{ty}, S_{tz}'yle dikey olarak uzatılmalıdır. S_{tx}, S_{ty}, S_{tz}'nin tanımları şöyle yapılır:

$$\begin{aligned} S_{tx} &= \text{enerjinin } x\text{–akışı} \\ S_{ty} &= \text{enerjinin } y\text{–akışı} \\ S_{tz} &= \text{enerjinin } z\text{–akışı} \end{aligned} \tag{31.28}$$

Diğer bir deyişle S_{tx}, x eksenine dik yüzey içinden birim zamanda ve birim alanda enerji akışıdır ve diğerleri için bu böyle tekrar eder. Son olarak, tensörümüzü tamamlamak için, *enerjinin yoğunluğuna*, S_{tt}'ye ihtiyacımız vardır. Üç boyuttaki S_{ij} stres tensörümüzü, dört boyutlu *stres-enerji tensörü* $S_{\mu\nu}$'ye uzatmış olduk. μ indisi t, x, y ve z değerlerini alabilir. Bunlar sırasıyla "yoğunluk," "x yönünde birim alanda akış,", "y yönünde birim alanda akış" ve z yönünde birim alanda akış" anlamına gelir. Benzer şekilde ν indisi t, x, y ve z değerlerini alarak bize *neyin* aktığını belirtir. Bunlar sırasıyla "enerji", "x yönünde momentum", "y yönünde momentum" ve "z yönünde momentum"dur.

Bir örnek olarak, tensörü bir madde içinde değil, boş uzayın içinde elektromanyetik alan bulunan bölgesinde inceleyeceğiz. Enerji akışının Poynting vektörü $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\boldsymbol{S}$'nin x, y ve z bileşenleri, göreli bir bakış açısıyla, dört boyutlu stres-enerji tensörünün S_{tx}, S_{ty} ve S_{tz} bileşenleridir. S_{ij} tensörünün simetrisi zaman bileşenleri için de geçerlidir, dolayısıyla dört boyutlu $S_{\mu\nu}$ tensörü simetrikir.

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \tag{31.29}$$

Diğer bir deyişle x, y ve z *momentumunun yoğunlukları* S_{xt}, S_{yt}, S_{zt} bileşenleri aynı zamanda *enerji akışı* Poynting vektörü $\boldsymbol{S}$'in x, y ve z bileşenlerine eşittir. Bunu daha önceki bir bölümde farklı bir akıl yürütmeyle göstermiştik.

Elektromanyetik stres tensörü $S_{\mu\nu}$'nin kalan bileşenleri $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$ elektrik ve manyetik alanları cinsinden ifade edilebilir. Diğer bir deyişle, stresi veya daha açık bir şekilde ifade edecek olursak, elektromanyetik alanda momentumun akışını kabul etmeliyiz. Bunu 27. Bölümde Denk. (27.21)'le bağlantılı olarak tartışmış ancak detaylara girmemiştik.

Dört boyutta tensörlerdeki maharetini sınamak isteyenler, alanlar cinsinden yazılmış aşağıdaki $S_{\mu\nu}$ denklemine göz atabilirler:

$$S_{\mu\nu} = -\epsilon_0\Big(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha}\,F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha,\beta} F_{\beta\alpha}\,F_{\beta\alpha}\Big)$$

α, β üzerindeki toplamlar (görelilikte olduğu gibi) t, x, y ve z üzerindedir, ancak $\sum$ toplam işareti ve δ için yeni özel bir anlam kullanıyoruz. Toplamlarda x, y, z terimleri *çıkarılmak* içindir ve $\mu \neq \nu$ ($c = 1$) için $\delta_{\mu\nu} = 0$ ve $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$ olduğunda $\delta_{tt} = +1$ eşitliği sağlanır. Bunun, enerji yoğunluğu $S_{tt} = (\epsilon_0/2)(E^2 + B^2)$ ve Poynting vektörü $\epsilon_0\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$'yi verdiğini doğrulayabilir misiniz? $\boldsymbol{B} = 0$ olan bir elektrostatik alanda, stresin asal eksenlerinin elektrik alanla aynı yönde olduğunu, alanla aynı yönde bir $(\epsilon_0/2)E^2$ *gerilmesi* olduğunu ve alan yönüne dik yönlerde eşit bir *basınç* olduğunu gösterebilir misiniz?

32

YOĞUN MALZEMELERİN KIRILMA İNDİSİ

32-1 Maddenin kutuplanması
32-2 Dielektrik içinde Maxwell denklemleri
32-3 Dielektrik içinde dalgalar
32-4 Karmaşık kırılma indisi
32-5 Karışımın indisi
32-6 Metallerdeki dalgalar
32-7 Düşük frekanslı ve yüksek frekanslı yakınlaştırmalar; kabuk ve plazma frekansı

32-1 Maddenin kutuplanması

Şimdi, ışığın yoğun malzemeler tarafından kırılması –ve ayrıca ışığın soğurulmasını– tartışacağız. I. Cilt, 31. Bölümde kırılma indisi kuramını tartışmış, ancak o zamanki matematiksel yeteneklerimizin kısıtlılığından dolayı kendimizi düşük yoğunluklu malzemelerin, örneğin gazların, indislerini bulmakla sınırlamıştık. Bununla birlikte, indisi meydana getiren fiziksel ilkeler açıkça ortaya konmuştu. Işık dalgasının elektrik alanı gaz moleküllerini kutuplayarak, salınım yapan dipol momentleri meydana getirir. Salınım yapan yüklerin ivmeleri, yeni alan dalgaları yayınlar. Bu yeni alan, eski alanla karşılaştığında, başlangıçtaki dalganın evre kaymasına denk yeni bir alan meydana getirir. Bu evre kayması malzemenin kalınlığına bağlı olduğundan, etki, malzemenin içinde farklı bir evre hızına sahip olmaya eşittir. Konuyu daha önce incelediğimizde, yeni dalga salınan dipollerdeki alanları değiştirirken meydana gelen bu etkilerden kaynaklanan karmaşıklıkları ihmal etmiştik. Atomlardaki yükler üzerindeki kuvvetlerin *gelen* dalgadan kaynaklandığını varsaymıştık, oysaki salınımları sadece gelen dalgadan değil fakat ayrıca diğer bütün atomların yayılan dalgalarından da kaynaklanır. O zaman bu etkiyi dahil etmek bizim için zor olacağından, sadece bu etkilerin önemli olmadığı seyreltilmiş gazlar üzerinde çalıştık.

Gözden Geçirme: Bkz. Tablo 32-1

Şimdiyse bu tür bir problemi ele almanın diferansiyel denklemler kullanarak ne kadar kolay olduğunu göreceğiz. Bu yöntem indisin fiziksel kaynağını (orijinal dalgalarla girişim yapan yeniden yayılmış dalgalardan geldiğini) saklar, ancak yoğun malzemeler için kuramı çok daha basit hale getirir. Bu bölümde, önceki bölümlerde yaptığımız işlerden birçok parçayı birleştireceğiz. Pratikte ihtiyacımız olan her şeyle donandık, göreceli olarak çok az yeni fikri konuşacağız. İhtiyacımız olan fikirlerin bir listesini Tablo 32-1'de sunduk. Hem kullanacağımız denklemleri, hem de nerede bulunabileceklerini tabloda görebilirsiniz. Birçok durumda, fiziksel fikirleri tekrar sunmak için vakit harcamayıp doğrudan denklemleri kullanacağız.

Tablo 32-1
Bu bölümdeki çalışmamız, daha önceki bölümlerde işlediğimiz aşağıdaki konulara dayanacaktır

Konu	Kaynak	Denklem
Sönümlü salınımlar	I. Cilt, Bölüm 23	$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F$
Gazların indisi	I. Cilt, Bölüm 31	$\bar{n} = 1 + \frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ $n = n' - in''$
Devinimlilik	I. Cilt, Bölüm 41	$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = F$
Elektriksel iletkenlik	I. Cilt, Bölüm 43	$\mu = \frac{\tau}{m};\ \sigma = \frac{Nq_e^2\tau}{m}$
Kutuplanabilirlik	II. Cilt, Bölüm 10	$\rho_{\text{kutup}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$
Dielektriğin içinde	II. Cilt, Bölüm 11	$\boldsymbol{E}_{\text{yerel}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P}$

Bir gaz için kırılma indisinin mekanizmasını hatırlayarak başlayalım. Birim hacimde N adet parçacık olduğunu ve her bir parçacığın bir harmonik salınıcı gibi davrandığını varsayalım. Elektronun, uzanımıyla orantılı bir kuvvetle (sanki atoma bir yayla bağlıymış gibi) bağlı olduğu bir atom veya molekül modelini kullanacağız. Bunun doğru bir *klasik* atom modeli olduğunun altını çizmiştik, ancak daha sonra göstereceğiz ki doğru kuantum mekanik kuramı (basit durumlarda) bu modele eşit sonuçlar verir. Daha önceki ele alışımızda, atomik salınıcılardaki sönümleyici kuvvet olasılığını dahil etmemiştik; ancak şimdi edeceğiz. Böyle bir kuvvet harekete dirence karşılık gelir, diğer bir deyişle elektronun hızıyla orantılı bir kuvvet. Bu durumda hareket denklemi, x $\boldsymbol{E}$ yönüne paralel uzanımken, aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$F = q_e E = m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) \tag{32.1}$$

(Düzeltici kuvveti her yönde aynı olan *eş yönlü* bir salınıcı varsayıyoruz. Ayrıca şimdilik, doğrusal kutuplanmış bir dalgayı ele alıyoruz ki $\boldsymbol{E}$ yön değiştirmesin.) Atom üzerinde etki eden elektrik alan zamanla sinüs dalgası şeklinde değişiyorsa, aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t} \tag{32.2}$$

Bu durumda uzanım da aynı frekansla salınım yapacaktır.

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

eşitliğini yazabiliriz. $\dot{x} = i\omega x$ ve $\ddot{x} = -\omega^2 x$ değişikliklerini yaparsak, x'i $\boldsymbol{E}$ cinsinden çözebiliriz:

$$x = \frac{q_e/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}\boldsymbol{E} \tag{32.3}$$

Uzanımı bildiğimizden, $\ddot{x}$ ivmelenmesini hesaplayabilir ve indisi meydana getiren ışınan dalgayı bulabiliriz. Bu, I. Cilt, 31. Bölümde indisi hesaplama yöntemimizdi.

Şimdiyse, farklı bir yaklaşımla çözeceğiz problemi. Bir atomun indüklenmiş dipol momenti p q_e x şeklinde veya Denk. (32.3)'ü kullanarak aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$\boldsymbol{p} = \frac{q_e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}\boldsymbol{E} \tag{32.4}$$

$\boldsymbol{p}$ değeri $\boldsymbol{E}$'yle orantılı olduğundan, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega)\boldsymbol{E} \tag{32.5}$$

Buradaki α, *atomik kutuplanabilirliktir.** Bu tanımdan yola çıkarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\alpha = \frac{q_e^2/m\epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{32.6}$$

Atomlardaki elektronların hareketi için kuantum mekaniği çözümü şimdi bahsedeceğimiz düzeltmeler dışında benzer bir cevabı verir. Atomların birçok doğal frekansı ve her bir frekansın kendine ait enerji kaybı katsayısı γ vardır. Ayrıca, her bir kipin, etkin "şiddeti" farklıdır ve bunu her bir frekansın kutuplanabilirliğini, 1 derecesinde bir sayı olmasını beklediğimiz bir şiddet faktörü f'yle çarparak gösterebiliriz. Her bir salınım kipi için ω_0, γ ve f parametrelerini, ω_{0k}, γ_k ve f_k'yle gösterip ve çeşitli kipler üzerinde toplam alarak, Denk. (32.6)'yı aşağıdaki ifade gibi değiştirebiliriz:

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m}\sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2} \tag{32.7}$$

---

* Bu bölüm boyunca, I. Cilt, 31. Bölümdeki sembolleri ve *atomik* kutuplanabilirlik için de α sembolünü kullanacağız. Son bölümde α *hacim* kutuplanabilirliğini göstermek için $-P$'nin E'ye oranı– kullanılmıştı. *Bu* bölümün gösteriminde $P = N\alpha\epsilon_0 E$ (*Bkz.* Denk. 32.8).

Malzemenin birim hacmindeki atom sayısına N dersek, P kutuplanması $Np = \epsilon_0 N\alpha E$ olur ve E'yle orantılıdır:

$$P = \epsilon_0 N\alpha(\omega)E \tag{32.8}$$

Diğer bir deyişle, bir malzeme üzerinde etkili sinüs dalgası şeklinde bir elektrik alan varken, birim hacimde elektrik alanla frekansa bağlı bir orantı sabiti α'yla orantılı, indüklenmiş bir dipol momenti vardır. Yüksek frekanslarda α küçüktür, fazla bir tepki yoktur. Bununla birlikte, düşük frekanslarda kuvvetli bir tepki olabilir. Ayrıca, orantı sabiti karmaşık bir sayıdır, kutuplanma elektrik alanı tam olarak takip etmez ancak bir yere kadar fazda kayabilir. Her durumda, birim hacimde, elektrik alanın şiddetiyle orantılı bir büyüklüğe sahip bir kutuplanma vardır.

32-2 Dielektrik içinde Maxwell denklemleri

Maddede kutuplanmanın varlığı, malzeme içindeki akımlar ve kutuplanma yükleri olduğu anlamına ve alanları bulmak için bunların Maxwell denklemlerine yerleştirilmesi anlamına gelir. Şimdi, boşluk içinde olduğu gibi, akımlar ve yüklerin sıfır olmadığı ancak dolaylı olarak kutuplanma vektörüyle verilen durum için Maxwell denklemlerini çözeceğiz. İlk adımımız, P'yi tanımlarken göz önüne aldığımız küçük hacim üzerinden ortalaması alınmış yük yoğunluğu ρ ve akım yoğunluğu j'yi bulmak olacak. Böylece ihtiyacımız olan ρ ve j, kutuplanmadan elde edilebilir.

10. Bölümde P kutuplanma vektörünün konumdan konuma değiştiğini görmüştük. Aşağıdaki denklemle hesaplanan bir yük yoğunluğu vardır:

$$\rho_{\text{kutup}} = -\nabla \cdot P \tag{32.9}$$

O zaman statik alanlarla ilgileniyorduk, ancak aynı denklem zamanla değişen alanlar için de geçerlidir. Ancak, P zamanla değiştiğinde hareket halinde yükler vardır, bu da kutuplanma *akımına* yol açar. Salınım yapan yüklerin her biri kendi yükü q_e çarpı hızı v kadar bir katkıda bulunur. Birim hacimde N adet böyle yük varsa, yük yoğunluğu j aşağıdaki ifade olur:

$$j = Nq_e v$$

$v = dx/dt$ olduğunu bildiğimize göre, bu durumda $j = Nq_e(dx/dt)$ olur ki o da dP/dt'dir. Dolayısıyla, değişken kutuplanmadan kaynaklanan akım yoğunluğu aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$j_{\text{kutup}} = \frac{\partial P}{\partial t} \tag{32.10}$$

Artık problemimiz basit ve açıktır. Denklem (32.9) ve (32.10)'u kullanarak, P cinsinden yük yoğunluğu ve akım yoğunluğuyla Maxwell denklemlerini yazabiliriz. (Malzeme içinde başka akım ve yük olmadığını varsayıyoruz. Daha sonra P'yi, Denk. (32.8)'le E'ye bağlarız ve denklemi –dalga çözümleri arayarak– E ve B için çözeriz.)

Bunu yapmadan önce, ufak bir tarih notu aktarmak istiyoruz. Maxwell denklemlerini başta, şu anda kullandığımız biçimlerinden farklı bir biçimde yazmıştı. Yıllardır denklemler farklı bir biçimde yazıldığı –ve hâlâ birçok insan tarafından yazıldığı için– farkı açıklayacağız. Başlangıçta, dielektrik sabitinin mekanizması tam olarak anlaşılamamış ve değeri bilinememişti. Atomların doğası veya malzemenin kutuplanması anlaşılamamıştı. Dolayısıyla insanlar, yük yoğunluğu ρ'ye $\nabla \cdot P$'den katkı olduğunu anlamadılar. Sadece atomlara bağlı (tellerde akan veya yüzeylerde koparılanlar gibi) yükleri düşünüyorlardı.

Bugün ρ, bağlı atomik yüklerden gelen de dahil, *toplam* yük yoğunluğunu temsil etmektedir. Ona ρ_{kutup} dersek, aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\rho = \rho_{\text{kutup}} + \rho_{\text{diğer}}$$

$\rho_{\text{diğer}}$ Maxwell'in göz önüne aldığı yük yoğunluğudur ve bağımsız atomlara bağlı olmayanları gösterir. Bu durumda aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{kutup}} + \rho_{\text{diğer}}}{\epsilon_0}$$

Denklem (32.9)'dan ρ_{kutup}'u çekersek aşağıdaki ifadeyi:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{diğer}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

veya aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\text{diğer}} \tag{32.11}$$

$\nabla \times \boldsymbol{B}$ için Maxwell denklemlerindeki akım yoğunluğuna da bağlı atomik akımlardan katkılar vardır. Böylece aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{kutup}} + \boldsymbol{j}_{\text{diğer}}$$

ve böylece Maxwell denklemi aşağıdaki ifade gibi olur:

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}_{\text{diğer}}}{\epsilon_0} + \frac{\boldsymbol{j}_{\text{kutup}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{32.12}$$

Denklem (32.10)'u kullanarak da, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}_{\text{diğer}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \tag{32.13}$$

Şimdi yeni bir $\boldsymbol{D}$ vektörünü aşağıdaki ifade gibi *tanımlayacak* olursak

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{32.14}$$

alan denklemleri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{diğer}} \tag{32.15}$$

ve

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}_{\text{diğer}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{32.16}$$

olurdu. Bunlar, Maxwell'in dielektrik için kullandığı biçimlerdir. Diğer kalan iki denklemi de,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

ve aşağıdaki ifadedir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Bunlar bizim kullandıklarımızla aynıdır.

Maxwell ve konu üzerinde ilk çalışanlar manyetik malzemelerle de problem yaşıyorlardı. Atomik manyetizmadan sorumlu dolaşım akımını da bilmedikleri için, bir parçası kayıp bir akım yoğunluğunu kullanmışlardır. Denklem (32.16) yerine aşağıdaki denklemi yazdılar:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}' + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{32.17}$$

$\boldsymbol{H}$, $\epsilon_0 c^2 \boldsymbol{B}$'den farklıdır, çünkü atomik akımların etkilerini içerir (bu durumda $\boldsymbol{j}'$ akımlardan geriye kalanları temsil eder). Maxwell *dört* alan vektörüne sahipti; $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ ile $\boldsymbol{H}$. $\boldsymbol{D}$ ve $\boldsymbol{H}$, malzemenin içinde olup bitene dikkat etmemenin gizli yollarıydı. Bu şekilde yazılmış denklemleri birçok yerde bulabilirsiniz.

Denklemleri çözmek için, $\boldsymbol{D}$ ve $\boldsymbol{H}$'ı diğer alanlara bağlamak gereklidir ve bu yüzden insanlar şöyle eşitlikler yazardı.

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{32.18}$$

Ancak bu denklemler sadece bazı malzemeler için yaklaşık olarak doğrudur ve o malzemeler için bile alanların zaman içinde hızla değişmemesi gerekir. (Sinüs dalgası şeklinde değişen alanlar için, ϵ ve μ'yü frekansın karmaşık fonksiyonları olarak yazarak denklemleri bu şekilde *yazabiliriz*, ancak rastgele bir şekilde zamanla değişen alanlar için bu geçerli değildir.) Diğer bir deyişle denklemlerin çözümlerinde her türlü hile vardır. Şimdi onları anladığımıza göre, denklemleri temel nicelikler cinsinden yazmanın doğru olduğunu düşünüyoruz ve öyle de yaptık.

32-3 Dielektrik içinde dalgalar

Şimdi, atomlardaki bağlı yükler dışında hiç ilave yük olmayan bir dielektrik malzeme içinde ne tür elektromanyetik dalgaların olabileceğini bulalım. Bunun için $\rho = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{j} = \partial \boldsymbol{P}/\partial t$ eşitliklerini alırız. Bu durumda Maxwell denklemleri aşağıdaki denklemlere dönüşür:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \qquad &&\text{(b)}\quad c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} + \boldsymbol{E}\right) \\ &\text{(c)}\quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad &&\text{(d)}\quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned} \tag{32.19}$$

Bu denklemleri daha önce çözdüğümüz gibi çözebiliriz. Denklem (32.19c)'nin bükümünü alarak başlayalım:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B}$$

Daha sonra, aşağıdaki vektör özdeşliğini kullanır:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

ve $\nabla \times \boldsymbol{B}$ için Denk. (32.19b)'yi kullanırsak; aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ için Denk. (32.19a)'yı kullanırsak da,

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{32.20}$$

ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla şimdi, dalga denklemi yerine $\boldsymbol{E}$'nin D'Alembert işlemcisinin $\boldsymbol{P}$ kutuplanması içeren iki terime eşit olduğunu görüyoruz.

Bununla birlikte $\boldsymbol{E}$ alanı $\boldsymbol{P}$'ye bağlı olduğundan, Denk. (32.20) yine de dalga çözümlerine sahip olabilir. Biz kendimizi *eş yönlü* dielektriklerle sınırlandıracağız, böylece $\boldsymbol{P}$ daima $\boldsymbol{E}$'nin yönünde olacaktır. z yönünde giden bir dalga için bir çözüm bulmaya çalışalım. Elektrik alan $e^{i(\omega t - kz)}$'yle değişkenlik gösterebilir. Aynı zamanda, dalganın x yönünde kutuplandığını varsayacağız; elektrik alanın sadece x bileşeni vardır. Aşağıdaki ifade gibi yazabiliriz:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \tag{32.21}$$

$(z - vt)$'nin herhangi bir fonksiyonunun, v hızıyla ilerleyen bir dalgayı temsil ettiğini biliyoruz. Denklem (32.21)'in üssü şu şekilde yazılabilir:

$$-ik\left(z - \frac{\omega}{k} t\right)$$

böylece, Denk. (32.21) evre hızı

$$v_{\text{evre}} = \omega/k$$

olan bir dalgayı temsil eder. Kırılma indisi n'yi (*Bkz.* I. Cilt, 31. Bölüm),

$$v_{\text{evre}} = \frac{c}{n}$$

eşitliğini yazarak tanımlayabiliriz.

Bu durumda Denklem (32.21) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$E_x = E_0\, e^{i\omega(t-nz/c)}$$

Dolayısıyla n değerini, Denk. (32.21)'in doğru alan denklemlerini sağlayabilmesi için gereken k değerini bulup sonra

$$n = \frac{kc}{\omega} \tag{32.22}$$

eşitliğini kullanarak bulabiliriz. Eş yönlü bir malzemede, kutuplanmanın sadece bir x bileşeni vardır. Bu yüzden $\boldsymbol{P}$'nin x koordinatında bir değişimi yoktur, böylece $\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$ diyebilir ve Denk. (32.20)'nin sağ tarafından kurtulabiliriz. Ayrıca, doğrusal bir dielektrik varsaydığımızdan P_x, $e^{i\omega t}$'yle değişkenlik gösterir ve $\partial^2 P_x/\partial t^2 = -\omega^2 P_x$ olur. Denklem (32.20)'deki Laplace $\partial^2 E_x/\partial z^2 = -k^2 E_x$ şeklinde dönüşür, böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x \tag{32.23}$$

$\boldsymbol{E}$ sinüs dalgası şeklinde değiştiğinden, bir an için $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{E}$'nin, Denk. (32.8)'deki gibi, orantılı olduğunu varsayalım. (Bu varsayımı tartışmak için daha sonra geri döneceğiz). Aşağıdaki denklemi yazalım:

$$P_x = \epsilon_0 N\alpha\, E_x$$

Böylece, E_x Denklem (32.23)'ten eksilir ve aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + N\alpha) \tag{32.24}$$

k dalga sayısı Denk. (32.24)'ten çıkan Denk. (32.219 gibi bir dalganın alan denklemlerini sağladığını daha önce görmüştük. Denklem (32.22)'yi kullanarak, n indisi aşağıdaki denklemle bulunur:

$$n^2 = 1 + N\alpha \tag{32.25}$$

Bu denklem ile I. Cilt, 31. Bölümde bir gazın indisi kuramımızda bulduğumuzu karşılaştıralım. Orada Denk. (31.19)'u, yani aşağıdaki denklemi elde etmiştik:

$$n = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} \tag{32.26}$$

Denklem (32.6)'dan α'yı çekersek, Denk. (32.25) bize aşağıdaki denklemi verir:

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \tag{32.27}$$

Birincisi, yeni bir $i\gamma\omega$ terimi var çünkü salınıcıların enerji kaybını da ekledik. İkincisi, sol tarafta n^2 yerine n ve ilave bir 1/2 çarpanı vardır. Ancak dikkat edin, N yeterince küçükse n (bir gaz için olduğu üzere) bire yakın olur, böylece Denk. (32.27)'ye göre n^2, bir artı küçük bir sayıdır: $n^2 = 1 + \epsilon$. Daha sonra $n = \sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$ ve iki ifade böylece özdeştir. Dolayısıyla yeni yöntem bir gaz için daha önceden bulduğumuz sonucu verir.

Şimdi, Denk. (32.27)'nin yoğun malzemeler için de kırılma indisini vermesi gerektiğini düşünebilirsiniz. Ancak, birçok nedenden dolayı düzeltilmeye ihtiyacı vardır. Öncelikle, denklemin çıkarımı esnasında her bir atom üzerindeki kutuplayıcı alanın E_x alanı olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımımız doğru *değildir*, çünkü yoğun malzemelerde komşu atomlardan kaynaklanan, E_x'le karşılaştırılabilecek alan da vardır. Dielektriklerde statik alanları çalışırken benzer bir problemi ele almıştık (*Bkz.* Bölüm 11). Hatırlarsanız tek bir atomdaki alanı, atomun, onu çevreleyen dielektrik içinde küresel bir delikte bulunduğunu düşünerek bulmuştuk. Böyle bir delikteki, *yerel* dediğimiz alan, ortalama E alanı

üzerinden $P/3\epsilon_0$ miktarıyla artırılmıştır. (Hatırlarsanız, bu sonuç –kübik kristal özel durumu da dahil– sadece eş yönlü malzemeler için doğrudur.)

Aynı fikirler bir dalgadaki elektrik alan için de, dalganın dalga boyu atomlar arasındaki uzaklıktan çok daha büyük olduğu sürece geçerlidir. Sadece bu tür durumlarla kendimizi sınırlarsak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$E_{\text{yerel}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \tag{32.28}$$

Bu yerel alan, Denk. (32.3)'te E yerine kullanılması gerekendir, yani Denk. (32.8) aşağıdaki ifade gibi yeniden yazılmalıdır:

$$P = \epsilon_0 N\alpha E_{\text{yerel}} \tag{32.29}$$

Denklem (32.28)'den E_{yerel}'i çekerek, aşağıdaki ifadeyi

$$P = \epsilon_0 N\alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0}\right)$$

veya aşağıdaki ifadeyi:

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E \tag{32.30}$$

elde ederiz. Diğer bir deyişle, yoğun malzemeler için P hâlâ (Sinüzoidal alanlar için) E'yle orantılıdır. Bununla birlikte, orantı sabiti $\epsilon_0 N\alpha$ değildir, $\epsilon_0 N\alpha/[1 - (N\alpha/3)]$ olmalıdır. Dolayısıyla Denk. (32.25)'i aşağıdaki ifade gibi düzeltmeliyiz:

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \tag{32.31}$$

Bu denklemi şöyle yazarsak daha uygun olur:

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} N\alpha \tag{32.32}$$

Bu Clausius-Mossotti denklemi olarak bilinir.

Yoğun malzemelerde bir başka karmaşıklık daha vardır. Komşu atomlar birbirlerine çok yakın olduğundan, aralarında kuvvetli etkileşimler vardır. Dolayısıyla, iç salınım kipleri değişmiştir. Atomik salınımların doğal frekansları etkileşimlerle yayılır ve sıklıkla kuvvetli şekilde sönümlenirler. Direnç katsayısı çok büyük bir değerdedir. Böylece katının ω_0'ları ve γ'leri, serbest atomlarınkinden çok farklı olacaktır. Bu sınırlamalarla α'yı, en azından yaklaşık olarak, Denk. (32.7)'yle temsil edebiliriz. Bu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2} \tag{32.33}$$

Son bir karmaşıklık daha var. Yoğun malzeme birçok bileşenin karışımıysa, her bir bileşen kutuplanmaya katkıda bulunur. Toplam α değeri, karışımdaki her bir bileşenin [düzenli kristallerdeki yerel alan yakınlaştırmasının –ferroelektriği analiz ederken tartıştığımız etkilerden dolayı– doğru olmaması hariç] katkılarının toplamıdır. Her bir bileşenin birim hacimdeki atom sayısına N_j dersek, Denk. (32.32)'yi aşağıdaki eşitlikle değiştirmeliyiz:

$$3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = \sum_j N_j \alpha_j \tag{32.34}$$

Yukarıdaki denklemde bulunan her bir α_j Denk. (32.7)'yle bulunabilir. Denklem (32.34) kırılma indisi kuramımızı tamamlayan denklemdir. $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ niceliği frekansın karmaşık bir fonksiyonu olan atomik kutuplanabilirlik fonksiyonuyla $\alpha(\omega)$ belirlenir. Yoğun cisimlerde $\alpha(\omega)$ fonksiyonunun hassas hesaplaması (f_k, γ_k ve ω_{0k}'nın bulunması) kuantum mekaniğine dair zor bir problemdir. Sadece birkaç basit madde için temel ilkeler kullanılarak halledilebilmiştir.

32-4 Karmaşık kırılma indisi

Şimdi, Denk. (32.33)'ün sonuçlarına bakalım. Öncelikle, α bir karmaşıktır, dolayısıyla n indisi karmaşık bir sayı olur. Bu ne anlama gelir? n'i bir gerçek ve bir sanal parçanın toplamı olarak yazalım:

$$n = n_R - in_I \tag{32.35}$$

n_R ve n_I, ω'nun gerçek fonksiyonlarıdır. in_I'yi bir eksi işaretiyle yazarız, böylece bütün optik malzemelerde n_I artı değerli bir nicelik olur. (Sıradan inaktif malzemelerde –lazerler gibi ışık kaynakları olmayanlarda– γ bir artı sayıdır ve bu yüzden n'nin sanal kısmı eksi olur.) Denklem (32.21)'deki düzlem dalgamız n cinsinden

$$E_X = E_0\, e^{i\omega(t-nz/c)}$$

şeklinde yazılır. n'i Denk. (32.35)'teki gibi yazarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

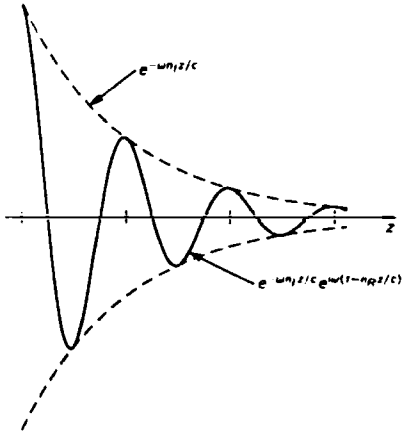
$$E_X = E_0\, e^{-\omega n_I z/c}\, e^{i\omega(t-n_R z/c)} \tag{32.36}$$

$e^{i\omega(t-n_R z/c)}$ terimi $c/\,n_R$ hızıyla ilerleyen bir dalgayı, dolayısıyla n_R kırılma indisi olarak düşündüğümüz şeyi temsil eder. Ancak bu dalganın *genliği*

$$E_0\, e^{-\omega n_I z/c}$$

olup, z'yle üssel olarak azalır. Elektrik alanın herhangi bir andaki şiddeti z'nin bir fonksiyonu olarak, $n_I \approx n_R/2\pi$ için, Şekil 32-1'de gösterilmiştir. İndisin sanal kısmı dalganın, atomik salınıcılardaki enerji kayıplarından dolayı sönmesini temsil eder. Dalganın *yoğunluğu* genliğinin karesiyle orantılıdır:

$$\text{Yoğunluk} \propto e^{-2\omega n_I z/c}$$



Şekil 32-1 $n_I \approx n_R/2\pi$ ise, bir t anında E_X'in grafiği.

Bu, sıklıkla aşağıdaki ifade gibi yazılır:

$$\text{Yoğunluk} \propto e^{-\beta z}$$

$\beta = 2\omega n_I/c$ *soğurum katsayısıdır*. Dolayısıyla Denk. (32.33)'te sadece malzemelerin kırılma indisi kuramı değil, aynı zamanda onların ışık soğurum kuramı da vardır.

Geçirgen olarak kabul ettiğimiz malzemeler için, –uzunluk ölçülerine sahip– $c/\omega n_I$ niceliği malzemenin kalınlığına kıyasla gayet büyüktür.

32-5 Karışımın indisi

Kırılma indisi kuramının, deneyle kontrol edebileceğimiz bir öngörüsü daha vardır. İki malzemenin kullanıldığı bir karışım düşünelim. Karışımın indisi, iki indisin ortalaması olarak değil fakat Denk. (32.34)'teki gibi iki kutuplanabilirliğin toplamı cinsinden bulunur. Şekerli suyun indisini bulmak istersek, toplam kutuplanabilirlik şekerin kutuplanabilirliği artı suyun kutuplanabilirliğidir. Elbette her biri, kendi türünün moleküllerinin birim hacimdeki sayısı olan N'i kullanarak hesaplanmalıdır. Diğer bir deyişle, bir karışımda, kutuplanabilirliği α_1 olan N_1 molekül su ve kutuplanabilirliği α_2 olan N_2 molekül sukroz ($C_{12}H_{22}O_{11}$) varsa, aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right) = N_1\,\alpha_1 + N_2\,\alpha_2 \tag{32.37}$$

Su içinde çeşitli oranlarda sukroz karışımının indislerini ölçerek, kuramımızı deneyle sınayabiliriz. Ancak, burada birçok varsayımda bulunmaktayız. Denklemimiz, sukrozun suyla karıştığında kimyasal bir etki meydana gelmedi-

Tablo 32-2
Sukroz karışımlarının kırılma indisleri ve Denk. (32.37)'nin öngörüleriyle karşılaştırılması

Veriler el kitabından alınmıştır.

A	B	C	D	E	F	G	H	J
Sukrozun ağırlıkça oranı	Yoğunluk (gr/cm³)	20°C'de n	Litre başına sukroz[d] molü, N_2/N_0	Litre başına Su[e] molü, N_1/N_0	$3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$	$N_1\alpha_1$	$N_2\alpha_2$	$N_0\alpha_2$ (g/litre)
0[a]	0,9982	1,333	0	55,5	0,617	0,617	0	—
0,30	1,1270	1,3811	0,970	43,8	0,698	0,487	0,211	0,213
0,50	1,2296	1,4200	1,798	34,15	0,759	0,379	0,380	0,211
0,85	1,4454	1,5033	3,59	12,02	0,886	0,1335	0,752	0,210
1,00[b]	1,588	1,5577[c]	4,64	0	0,960	0	0,960	0,207

[a]saf su [b]şeker kristalleri [c]ortalama (metne bakınız)
[d]sukrozun moleküler ağırlığı = 342 [e]suyun moleküler ağırlığı = 18

ğini ve bağımsız atomik salınıcılardaki bozulmaların çeşitli karışımlarda çok farklı olmadığını varsaymakta.

Şekerli su karışımını seçtik, çünkü *Handbook of Chemistry and Physics* kitabında kırılma indislerine dair güzel bir ölçümler tablosu bulunmakta ve şeker bir karışıma iyonize etmeden veya kimyasal hal değiştirmeden giren moleküler bir kristaldir.

Tablo 32-2'nin ilk üç sütununda el kitabından alınan veriyi sunduk. A kolonunda sukrozun ağırlıkça oranı, B kolonunda ölçülen yoğunluk (gr/cm³) ve C kolonunda dalga boyu 589,3 milimikron olan ışığın ölçülmüş kırılma indisleri vardır. Saf şeker için, şeker kristallerinin ölçülmüş indislerini aldık. Kristaller eş yüzlü değildir, dolayısıyla ölçülen indisler değişik yönlerde farklı değerler alır. El kitabında üç değer vardır:

$$n_1 = 1{,}5376 \qquad n_2 = 1{,}5651 \qquad n_3 = 1{,}5705$$

Biz ortalamayı aldık.

Şimdi her bir karışım oranı için n değerini hesaplamaya çalışabiliriz, ancak α_1 ve α_2 için hangi değerleri seçmemiz gerektiğini bilmiyoruz. Kuramı şu şekilde sınayalım: Tüm karışım oranlarında suyun kutuplanabilirliğinin (α_1) aynı olduğunu varsayacak ve sukrozun kutuplanabilirliğini hesaplamak için deneyle bulunan n değerlerini kullanacak ve Denk. (32.37)'den α_2'yi kullanacağız. Kuram doğruysa, tüm karışımlar için aynı α_2 değerini bulmalıyız.

Öncelikle N_1 ve N_2'yi bilmeliyiz: Onları Avogadro sayısı, N_0, cinsinden ifade edebiliriz. Birim hacmimiz bir litre olsun (1000 cm³). Bu durumda N_i/N_0 litre başına ağırlığın gram moleküler ağırlığa bölümüdür. Litre başına ağırlık da yoğunluk (litre başına gram elde etmek için 1000'le çarpılarak) çarpı suyun veya şekerin kesirli ağırlığıdır. Bu yolla, N_2/N_0 ve N_1/N_0 değerlerini tablodaki D ve E sütunlarındaki gibi elde ederiz.

F sütununda, C sütunundaki deneysel n değerlerini kullanarak $3(n^2 - 1)/(n^2+2)$'yi hesapladık. Saf su için bu 0,617'dir ki tam olarak $N_1\alpha_1$'e eşittir. Böylece G sütununun gerisini, her satır için G/E oranı 0,617:55,5, olacağından kolaylıkla doldurabiliriz. G sütunundan F sütununu çıkararak, sukrozun $N_2\alpha_2$ değerini elde ederiz ve bu değerler de H sütununda gösterilmiştir. Bu girdileri D sütunundaki N_2/N_0 değerlerine bölersek, J sütununundaki $N_0\alpha_2$ değerini elde ederiz.

Kuramımıza göre $N_0\alpha_2$'nin tüm değerleri aynı olmalıdır. Tam olarak eşit olmasalar da, gayet yakın değerlerdir. Fikirlerimizin neredeyse doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Daha da ötesi, şeker molekülünün kutuplanabilirliğinin çevresindekilerle ilgisi olmadığını bulduk. Kristalken de, bir çözeltinin içindeyken de kutuplanabilirliğin aynıdır.

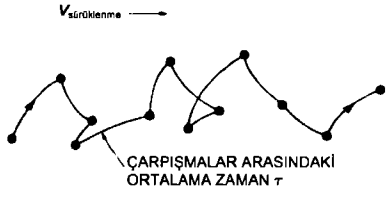
32-6 Metallerdeki dalgalar

Bu bölümde katı malzemeler için geliştirdiğimiz kuram, iyi iletkenlere de, örneğin metallere, çok az değişiklikle uygulanabilir. Metallerde bazı elektronları bir atoma bağlayan bağlayıcı bir kuvvet yoktur. Bu "serbest" elektronlar iletkenliğin nedenidir. Başka bağlı elektronlar vardır ve yukardaki kuram onlara doğrudan uygulanabilir. Ancak onların etkileri, iletim elektronlarının etkileri tarafından bastırılır. Şimdi sadece serbest elektronların etkilerini ele alacağız.

Bir elektron üzerinde düzeltici kuvvet yoksa –ancak hareketine bir miktar direnç varsa– hareket denklemi Denk. (32.1)'den farklıdır çünkü $\omega_0^2 x$ terimi yoktur. Dolayısıyla yapmamız gereken, geriye kalan çıkarımlarımızda $\omega_0^2 = 0$ değerini kullanmaktır. Bir dielektrikte ortalama alan ile yerel alan arasında ayrım yapmamızın nedeni bir yalıtkanda her bir dipolün konumunun sabit olması ve böylece diğerlerinin konumuyla belirli bir ilişkide olmasıydı. Ancak bir metalde iletim elektronları her yere hareket ettikleri için, üzerlerindeki *ortalama alan*, $\boldsymbol{E}$ ortalama alanıdır. Dolayısıyla Denk. (32.28)'i kullanarak Denk. (32.8)'de yaptığımız düzeltme iletim elektronları için *yapılmamalıdır*. Bu nedenle metaller için kırılma indisi denklemi, ω_0 değerinin sıfıra eşitlenmesi haricinde, Denk. (32.27) gibi gözükmelidir:

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega} \tag{32.38}$$

Bu, iletim elektronlarından gelen tek katkıdır ve metaller için ana terim olduğunu varsayacağız.



Şekil 32-2 Serbest bir elektronun hareketi.

Şimdi γ için hangi değeri kullanacağımızı ve bu değeri nasıl bulacağımızı biliyoruz, çünkü metalin iletkenliğiyle ilişkilidir. I. Cilt, 43. Bölümde bir metalin iletkenliğinin nasıl kristal içinden serbest elektronların yayılmasından geldiğini tartışmıştık. Elektronlar bir saçılmadan diğerine kırık bir yol üzerinde gider ve saçılmalar arasında, ortalama elektrik alandan dolayı hızlanmaları haricinde, serbestçe (Şekil 32-2'de gösterildiği gibi) hareket ederler. I. Cilt, 43. Bölümde ortalama sürüklenme hızının, ivmelenme çarpı çarpışmalar arasındaki ortalama hız olan τ olduğunu bulmuştuk. İvmelenme $q_e\boldsymbol{E}/m$'dir, dolayısıyla:

$$v_{\text{sürüklenme}} = \frac{q_e \boldsymbol{E}}{m}\tau \tag{32.39}$$

olur. Bu denklem $\boldsymbol{E}$'nin sabit olduğunu varsaydığından, $v_{\text{sürüklenme}}$ sabit bir hızdı. Ortalama bir ivmelenme olmadığından, sürüklenme kuvveti uygulanan kuvvete eşittir. γ'yi, γmv'nin sürüklenme kuvveti olduğunu [*Bkz.* Denk. (32.1)] belirterek tanımlamıştık. Sürüklenme kuvveti $q_e\boldsymbol{E}$'dir, böylece aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \tag{32.40}$$

Her ne kadar τ'yi kolaylıkla ölçemesek de, metalin iletkenliğini ölçerek onu belirleyebiliriz. Deneysel olarak bulunmuştur ki, bir metaldeki $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı (eş yönlü malzemeler için) $\boldsymbol{E}$'yle orantılı $\boldsymbol{j}$ yoğunluğuna sahip bir akım meydana getirir:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

σ orantı sabitine iletkenlik denir. Bu,

$$j = N\, q_e\, v_{\text{sürüklenme}}$$

dersek, tam da Denk. (32.39)'dan beklediğimiz şeydir. Bu durumda:

$$\sigma = \frac{Nq_e^2}{m}\tau \tag{32.41}$$

Diğer bir deyişle τ –ve dolayısıyla γ– gözlemlenen elektriksel iletkenlikle ilişkilendirilebilir. Denklem (32.40) ve (32.41)'i kullanarak, indis için denklemi-

miz (32.38)'i aşağıdaki ifade gibi yazabiliriz:

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega\,(1 + i\omega\tau)} \tag{32.42}$$

Bu denklemde τ aşağıdaki ifadedir:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Nq_e^2} \tag{32.43}$$

Bu, metallerin kırılma indisi için elverişli bir denklemdir.

32-7 Düşük frekanslı ve yüksek frekanslı yakınlaştırmalar; kabuk ve plazma frekansı

Metallerin kırılma indisi için elde ettiğimiz sonuç, Denk. (32.42) değişik frekanslarda dalga ilerlemesi için çok farklı özellikler öngörmekte. Öncelikle *düşük* frekanslarda ne olduğuna bakalım. ω yeterince küçükse, Denk. (32.42)'yi aşağıdaki ifade gibi yakınlaştırabiliriz:

$$n^2 = -i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \tag{32.44}$$

Şimdi, karesini alarak kontrol edebileceğiniz üzere,*

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

dolayısıyla düşük frekanslar için

$$n = \sqrt{\sigma/2\epsilon_0\omega}(1 - i) \tag{32.45}$$

n'in gerçel ve sanal parçaları aynı büyüklüğe sahiptir. n'in bu kadar büyük bir sanal kısmı olduğunda, dalga metal içinde hızla sönümlenir. Denklem (32.36)'ya istinaden, z yönünde giden bir dalga fonksiyonunun genliği

$$\exp\left[-\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0c^2}z\right] \tag{32.46}$$

şeklinde azalır. Bunu gelin aşağıdaki ifade gibi yazalım:

$$e^{-z/\delta} \tag{32.47}$$

δ, dalga genliğinin e^{-1} = 1/2,72 katıyla –ya da yaklaşık üçte biri kadar– azaldığı mesafedir. Böyle bir dalganın genliği, z'nin bir fonksiyonu olarak Şekil 32-3'te gösterilmiştir. Elektromanyetik dalgalar metale sadece bu derinlikte işleyebildiği için, δ *kabuk derinliğidir. Aşağıdaki* ifade gibi hesaplanır:

$$\delta = \sqrt{2\epsilon_0c^2/\sigma\omega} \tag{32.48}$$

Peki, "düşük" frekanslardan kastımız nedir? Denklem (32.42)'ye bakarak onun, sadece hem $\omega\tau$, hem de $\omega\epsilon_0/\sigma$ birden çok küçükse Denk. (32.44)'le yakınlaştırılabileceğini görürüz. Diğer bir deyişle, düşük frekanslı yakınlaştırmamız için koşullar aşağıdaki ifade

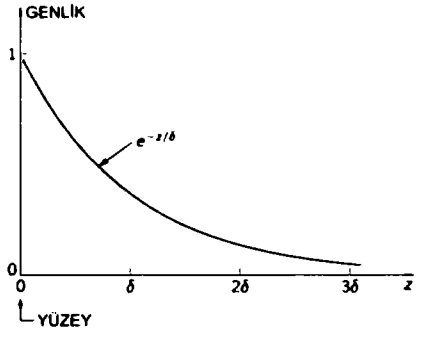
$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

ve aşağıdaki ifadedir:

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{32.49}$$

Bakalım, bakır gibi tipik bir metal için bunlar hangi frekanslara karşılık gelmekte. Denklem (32.43)'ü kullanarak τ değerini ve ölçülen iletkenliği kullanarak da σ/ϵ_0 değerini hesaplayalım. Aşağıdaki bilgileri de bir el kitabından aldık:

$\sigma = 5{,}76 \times 10^7$ (ohm·metre)$^{-1}$
atomik ağırlık = 63,5 gram,
yoğunluk = 8,9 gram·cm^{-3}
Avogadro sayısı = $6{,}02 \times 10^{23}$ (gram atomik ağırlık)$^{-1}$



Şekil 32-3 Enlemesine bir elektromanyetik dalganın genliğinin, metale işleme derinliğine göre fonksiyonu.

* Ya da $-i = e^{-i\pi/2}$; $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos\,\pi/4 - i\,\sin\,\pi/4$ yazabilirsiniz, hepsi aynı sonucu verir.

Bir atom başına bir serbest elektron olduğunu varsayarsak, bu durumda bir metreküpteki elektron sayısı

$$N = 8{,}5 \times 10^{28}\ \text{metre}^{-3}$$

olur. Daha sonra

$$q_e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{coulomb}$$
$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{farad}\cdot\text{metre}^{-1}$$
$$m = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

değerlerini kullanarak, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$\tau = 2{,}4 \times 10^{-14}\ \text{sn},$$
$$\frac{1}{\tau} = 4{,}1 \times 10^{13}\ \text{sn}^{-1}$$
$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6{,}5 \times 10^{18}\ \text{sn}^{-1}$$

Dolayısıyla yaklaşık saniyede 10^{12} döngüden az frekanslar için, bakır tarif ettiğimiz "düşük frekans" davranışına sahip olacaktır. (Boş uzay dalga boyu 0,3 milimetreden uzun dalgalar için. Bunlar *çok* kısa radyo dalgalarıdır!)

Bu dalgalar için, bakırdaki kabuk derinliği:

$$\delta = \sqrt{\frac{0{,}028\text{m}^2 \cdot \text{sn}^{-1}}{\omega}}$$

10.000 megaçevrim bölü saniyelik mikrodalgalar için (3 santimlik dalgalar):

$$\delta = 6{,}7 \times 10^{-5}\ \text{cm}$$

Dalga çok küçük bir derinliğe işlemektedir.

Bu sayede, kovukları (veya dalga klavuzlarını) çalışırken neden metalin içindeki veya kovuğun dışındaki alanlarla değil de sadece kovuk içindeki dalgalarla ilgilendiğimizi anlayabilirsiniz. Ayrıca neden bir kovuktaki kayıpların da ince bir gümüş veya altın kaplamayla azaltıldığını da anlayabilirsiniz. Kayıplar sadece akımdan gelmektedir ve sadece kabuk derinliğine eşit ince bir tabakada hissedilebilirler.

Bakır gibi bir metalin yüksek frekanslarda indisine baktığımızı düşünelim. Çok yüksek frekanslar için $\omega\tau$ birden çok büyüktür ve Denk. (32.42) aşağıdaki ifade gibi yakınlaştırılabilir:

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} \tag{32.50}$$

Yüksek frekanslı dalgalar için metalin indisi gerçek ve birden küçük olur! Bu enerji kaybı katsayısı γ, çok büyük ω için yapılabildiği gibi, ihmal edilirse, Denk. (32.38)'den de açıkça görülebilir. Denklem (32.38) aşağıdaki ifadeyi verir:

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \tag{32.51}$$

Bu da, elbette, Denk. (32.50)'yle aynıdır. Daha önce (Bölüm 7-3) $Nq_e^2/m\epsilon_0$ niceliğini görmüş ve plazma frekansının karesi demiştik:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m}$$

Dolayısıyla, Denk. (32.50) veya (32.51)'i aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

Plazma frekansı bir tür "kritik" frekanstır.

$\omega < \omega_p$ için bir metalin indisinin sanal bir kısmı vardır ve dalgalar sönümlenir; ancak $\omega \gg \omega_p$ için indis gerçektir ve metal geçirgen olur. Zaten biliyorsunuz, metaller X-ışınları için makul seviyede geçirgendir. Ancak bazı metaller

morötesinde bile geçirgendir. Tablo 32-3'te birçok metal için deneylerle belirlenmiş, geçirgen olmaya başladıkları dalga boylarını listeledik. İkinci sütunda hesaplanmış kritik dalga boyu $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ vardır. Deneysel dalga boyunun çok iyi tanımlanmadığını düşünürseniz, kuramın verilere uyması gayet iyidir.

Plazma frekansı ω_p'nin metallerde elektromanyetik dalgaların ilerlemesiyle bir ilgisi olup olmadığını merak edebilirsiniz. Plazma frekansı, serbest elektronların *yoğunluk* salınımlarının doğal frekansı olarak Bölüm 7'de gözükmüştü. (Bir yığın elektron elektrik kuvvetleriyle birbirlerini iterler ve elektronların ataleti yoğunluk salınımına yol açar.) Dolayısıyla *boyuna* plazma dalgaları ω_p frekansında rezonanstadır. Ancak şimdi *enine* elektromanyetik dalgalardan konuşuyoruz ve enine dalgaların ω_p frekansı altında soğurulduğunu bulduk. (İlginç ama tesadüfi *olmayan* bir rastlantıdır.)

Her ne kadar metallerde dalga ilerlemesinden konuştuysak da, fizikteki olguların evrenselliğini şu ana kadar anlamış olmalısınız. Dolayısıyla, serbest elektronların bir metalde olması veya dünyanın iyonosferinde bir plazmada olmaları veya bir yıldızın atmosferinde olmaları fark etmez. İyonosferdeki radyo dalgalarının ilerlemesini anlamak için aynı ifadeleri kullanabiliriz. Elbette N ve τ için uygun değerleri kullanarak. Şimdi, neden uzun radyo dalgalarının iyonosfer tarafından soğurulur veya yansıtılırken, kısa dalgaların geçip gittiğini anlayabilirsiniz. (Kısa dalgalar uydularla iletişim kurmak için kullanılmalıdır.)

Metallerdeki dalga ilerlemesi için yüksek ve düşük frekans uçlardan bahsettik. Aradaki frekanslar için Denk. (32.42) kullanılmalıdır. Genel olarak, indisin gerçek ve sanal kısımları olacaktır. Dalga metalin içine girdikçe sönümlenecektir. Çok ince katmanlar için, metaller optik frekanslarda bile her nasılsa geçirgendir. Çok yüksek sıcaklıktaki fırınların etrafında çalışan işçilerin kullandığı gözlükler çok ince bir katman altını cam üzerinde buharlaştırarak yapılır. Görünür ışık –yeşil renkle boyanmışçasına– kolayca camdan geçer, ancak kızılaltı soğurulur.

Son olarak, buradaki denklemlerin birçoğunun 10. Bölümdeki dielektrik sabiti κ için kullandıklarımıza benzediği gözünüze çarpmış olmalı. Dielektrik sabiti κ bir malzemenin sabit alandaki $\omega = 0$ için, tepkisini ölçer. n ve κ'nın tanımına dikkatli bakarsanız, κ'nın $\omega \to 0$ için n^2'nin limiti olduğunu görürsünüz. Bu bölümdeki denklemlerde ω yerine 0 ve n^2 yerine κ koyarsanız, 11. Bölümdeki dielektrik sabiti kuramı denklemlerini elde edersiniz.

Tablo 32-3
Metalin geçirgen olduğu en yüksek dalga boyları*

Metal	λ (deneysel)	$\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$
Li	1550 Å	1550 Å
Na	2100	2090
K	3150	2870
Rb	3400	3220

* Kaynak: C. Kittel, *Katı Hal Fiziğine Giriş* [*Introduction to Solid State Physics*], John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. baskı, 1956, s. 266

33

YÜZEYLERDEN YANSIMA

33-1 Işığın yansıması ve kırılması

33-1 Işığın yansıması ve kırılması
33-2 Yoğun malzemelerde dalgalar
33-3 Sınır koşulları
33-4 Yansıtılan ve iletilen dalgalar
33-5 Metallerden yansıma
33-6 Toplam iç yansıma

Bu bölümün konusu ışığın –ya da genel olarak elektromanyetik dalgaların– yüzeylerde yansıması ve kırılmasıdır. I. Cilt, 26. ve 33. Bölümlerde kırılma ve yansıma yasalarını zaten konuşmuştuk. Orada bulduklarımızı şöyle özetleyebiliriz:

1. Yansıma açısı gelme açısına eşittir. Şekil 33-1'de tanımlanan açılarla

$$\theta_r = \theta_i \tag{33.1}$$

2. $n \sin \theta$ çarpımı gelen ve iletilen dalgalar için aynıdır (Snell yasası).

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \tag{33.2}$$

Gözden Geçirme: Cilt 1, Bölüm 33, *Kutuplanma*

3. Yansıyan ışığın yoğunluğu gelme açısına ve kutuplanmanın yönüne bağlıdır. Gelme yüzeyine dik $\boldsymbol{E}$ için, yansıma katsayısı $R_\perp$ aşağıdaki ifadedir:

$$R_\perp = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{33.3}$$

Gelme düzlemine paralel $\boldsymbol{E}$ için, yansıma katsayısı $R_\parallel$ aşağıdaki ifadedir:

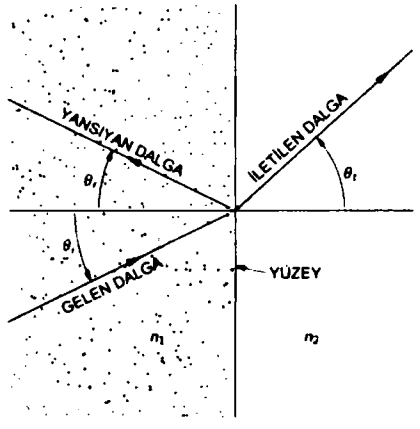
$$R_\parallel = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{33.4}$$

4. Dik geliş açısı için (elbette herhangi bir kutuplanma için):

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \tag{33.5}$$

(Daha önce, gelme açısı için i ve yansıma açısı için r sembollerini kullanmıştık. Hem "kırılma" hem de "yansıma" açılarının ikisi için de r kullanamayacağımızdan, gelme açısı için "$\theta_i =$", yansıma açısı için "$\theta_r =$" ve iletim açısı için de "$\theta_t =$" kullanacağız.)

Daha önceki tartışmamız, bu konuda bir insanın inebileceği en derin seviyeye kadardı, ancak, şimdi hepsini baştan farklı bir yolla ele alacağız. Neden? Bir nedeni, daha önce indislerin gerçel olduğunu (malzemelerde soğurum yoktur) varsaymıştık. Bir başka nedeniyse, yüzeylerde dalgalara ne olduğunu Maxwell denklemlerinin bakış açısından nasıl ele alacağınızı bilmeniz gerektiğindendir. Daha önce elde ettiğimiz cevaplarla aynı cevapları elde edeceğiz, ancak bu sefer zekice fikirlerle değil dalga probleminin doğrudan bir çözümüyle.

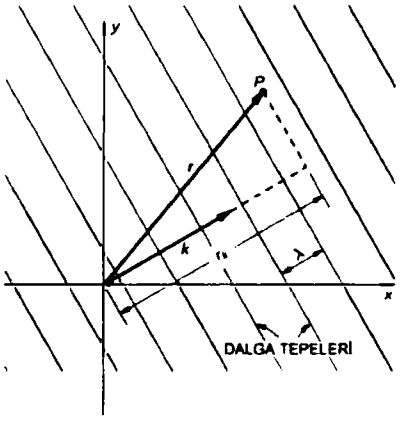


Şekil 33-1 Bir yüzeye gelen dalganın yansıması ve kırılması. (Dalga yönleri, dalga tepelerine normaldir.)

Yüzey yansımasının genliğinin, kırılma indisinin tersine, *malzemenin* bir özelliği olmadığının altını çizmek istiyoruz. Bu bir "yüzey özelliğidir", hassas bir şekilde yüzeyin nasıl yapıldığına bağlıdır. n_1 ve n_2 indislerine sahip iki malzeme arasında yüzeydeki ince bir kir tabakası yansımayı değiştirecektir. (Burada birçok girişim olasılığı mümkündür –yağ tabakalarındaki renkler gibi. Uygun bir kalınlık, belirli bir frekans için yansıma genliğini sıfıra bile indirebilir ki kaplamalı mercekler böyle yapılır.) Elde edeceğimiz denklemler, ancak indis değişimi aniyse –bir dalga boyuna kıyasla çok kısa bir mesafede– geçerlidir. Işık için dalga boyu 5000 Å'dür, diğer bir deyişle "pürüzsüz" bir yüzeyle demek istediğimiz şey koşulların sadece birkaç atom (ya da birkaç Angström) mesafesinde değişmesidir. Denklemlerimiz ışık için ancak çok iyi derecede cilalanmış

yüzeylerde işe yarayacaktır. Genel olarak, indis birçok dalga boyu mesafede kademeli olarak değişiyorsa, çok az bir yansıma vardır.

33-2 Yoğun malzemelerde dalgalar



Şekil 33-2 $\boldsymbol{k}$ yönünde ilerleyen bir dalga için, herhangi bir P noktasındaki evre $(\omega\tau - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ olur.

Öncelikle, I. Cilt, 34. Bölümde bir sinüs düzlem dalgasını tanımlamak için kullandığımız elverişli yöntemi hatırlatalım. Bir dalganın herhangi bir alan *bileşeni* (biz örnek olarak E'yi kullanacağız) aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{33.6}$$

Burada E, t zamanında $\boldsymbol{r}$ (başlangıca olan uzanım) noktasındaki genliği ifade eder. $\boldsymbol{k}$ vektörü dalganın ilerlediği yönü işaret eder ve büyüklüğü $|\boldsymbol{k}| = k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısıdır. Dalganın evre hızı $v_{\text{evre}} = \omega/k$ olup, n indisine sahip bir malzemedeki ışık dalgası için $v_{\text{evre}} = c/n$ böylelikle:

$$k = \frac{\omega n}{c} \tag{33.7}$$

$\boldsymbol{k}$'nın z yönünde olduğunu varsayalım; bu durumda $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$, sıklıkla kullandığımız gibi, sadece kz'dir. Herhangi bir başka yöndeki $\boldsymbol{k}$ için, z'yi r_k'yla, $\boldsymbol{k}$ yönünde başlangıca göre uzamla, değiştirmeliyiz. Dolayısıyla kz'yi, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ olan, kr_k'yla değiştirmeliyiz (*Bkz.* Şekil 33-2). Bu bakımdan Denk. (33.6) herhangi bir yönde bir dalgayı ifade etmek için elverişli bir denklemdir.

Elbette aşağıdaki eşitliği de hatırlamalıyız. k_x, k_y ve k_z, $\boldsymbol{k}$'nın üç eksendeki bileşenleridir.

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Aslında bir kere daha (ω, k_x, k_y, k_z)'nin bir dört-vektör ve (t, x, y, z)'yle skaler çarpımının değişmez olduğunu belirtmiş olduk. Dolayısıyla bir dalganın evresi bir değişmezdir ve Denk. (33.6) aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$E = E_0\, e^{ik_\mu x_\mu}$$

Ancak şimdilik bu kadar süslü ifadelere ihtiyacımız yok.

Sinüs eğrisi biçiminde bir E için, Denk. (33.6)'ya göre, $\partial E/\partial t$ ile $i\omega E$ aynı şeydir ve $\partial E/\partial x$ de $-ik_x E$'dir ve bu diğer bileşenler için böylece devam eder. Diferansiyel denklemlerle çalışırken neden Denk. (33.6)'daki biçimi kullanmanın kullanışlı olduğunu görebilirsiniz. Çarpımlar türevlerin yerini almıştır. Bir başka yararlı nokta daha: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ işlemcisi de şu iç çarpımla yerdeğiştirir: $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$. Bu üç çarpan $\boldsymbol{k}$ vektörünün bileşenleri gibi dönüştüğünden, ∇ işlemcisi $-i\boldsymbol{k}$ çarpımıyla değiştirilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\to i\omega \\ \nabla &\to -i\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{33.8}$$

Bu, herhangi bir ∇ işlemi için –ister bir gradyan, ister bir diverjansı veya ister se bir büküm olsun– geçerlidir. Örneğin $\nabla \times \boldsymbol{E}$'nin $\boldsymbol{z}$ bileşeni aşağıdaki ifadedir:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Hem E_y, hem de $E_x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$yle değişiyorsa, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz ki bu da göreceğiniz üzere $-i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$'nin $\boldsymbol{z}$ bileşenidir.

$$-ik_x E_y + ik_y E_x$$

Böylece çok faydalı genel bir ilke öğrenmiş olduk. Bu boyutta bir dalga şeklinde değişen bir vektörün gradyanını almak isterseniz, türevleri hızlıca ve düşünmeden, ∇ işlemcisinin $-i\boldsymbol{k}$ çarpımına eşit olduğunu hatırlayarak alabilirsiniz.

Örneğin, Faraday denklemi

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

bir dalga için aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$-i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = -i\omega \boldsymbol{B}$$

Bu da bize aşağıdaki eşitliği verir:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}}{\omega} \tag{32.9}$$

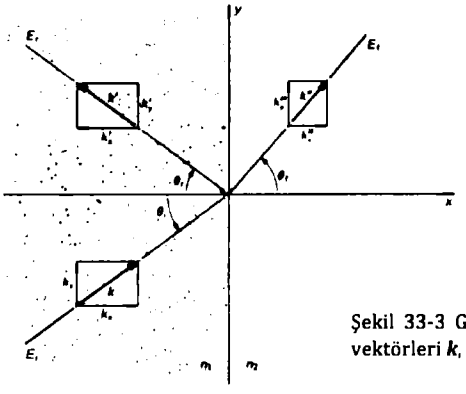
Bu eşitlik bize boş uzaydaki dalgalar için bulduğumuz bir sonuca, yani bir dalgada $\boldsymbol{B}$'nin dalga yönüne ve $\boldsymbol{E}$'ye dik açılarda olduğu sonucuna karşılık gelir. (Boş uzayda $\omega/k = c$) Denklem (33.9)'un işaretini, $\boldsymbol{k}$'nın Poynting vektörü $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ yönünde olduğu gerçeğinden çıkarabilirsiniz.

Aynı kuralı diğer Maxwell denklemleri için de kullanırsanız, son bölümdeki sonuçları ve özellikle aşağıdaki ifadeyi elde edersiniz:

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \tag{32.10}$$

Ancak bunu zaten bildiğimizde, tekrar çıkarmakla uğraşmayacağız.

Eğer kendinize eğlence arıyorsanız, 1890 yılında doktora öğrencilerinin karşılaştığı en büyük sınav olan şu korkutucu problemi çözmeyi deneyebilirsiniz: $\boldsymbol{P}$ kutuplanmasının $\boldsymbol{E}$ elektrik alanına bir kutuplanabilirlik tensörüyle bağlı olduğu durumdaki *eş yönsüz* bir kristaldeki düzlem dalgaları için Maxwell denklemlerini çözün. Elbette, ilişkilerin en basit hali alması için eksenlerinizi tensörün asal eksenleri boyunca seçmelisiniz (bu durumda $P_x = \alpha_a E_x$, $P_y = \alpha_b E_y$ ve $P_z = \alpha_c E_z$ olur) ancak dalgaların rastgele bir yön ve kutuplanmaya sahip olmasına izin vermelisiniz. Ayrıca $\boldsymbol{E}$ ile $\boldsymbol{B}$ arasındaki ilişkileri ve $\boldsymbol{k}$'nın yönle ve dalga kutuplanmasıyla nasıl değiştiğini de bulabilmelisiniz. Böylece eş yönsüz bir kristalin optiğini anlamış olacaksınız. Çift kırılmalı, iki kutuplanabilirliğinin eşit olduğu ($\alpha_b = \alpha_c$) basit bir malzemeyi, örneğin kalsiti, ele alarak başlamak ve böyle bir kristale bir şeye baktığınızda neden çift gördüğünüzü anlamaya çalışmak en iyisidir. Bunu başardığınızda, en zor probleme, üç α'nın da ayrı olduğu probleme geçiş yapabilirsiniz. Böylece 1890 yılındaki bir doktora öğrencisiyle aynı seviyede olup olmadığınızı görebilirsiniz. Ancak biz, bu bölümde sadece eş yönlü maddeleri ele alacağız.



Şekil 33-3 Gelen, yansıyan ve iletilen dalgalar için ilerleme vektörleri $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ ve $\boldsymbol{k}''$.

İki farklı malzeme –örneğin, hava ile cam veya su ile yağ– arasındaki sınıra bir düzlem dalga vardığında iletilen bir dalga ve yansıyan bir dalga olduğunu deneyimlerimizden biliyoruz. Bundan daha fazlasının olmadığını varsayıp, ne sonuçlar çıkartabileceğimize bakalım. Şekil 33-3'teki gibi, eksenlerimizi *yz* düzlemi yüzeyde ve *xy* düzlemi de gelen dalganın yüzeylerine dik olacak şekilde seçelim.

Gelen dalganın elektrik vektörü aşağıdaki eşitlik gibi yazılabilir:

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_0\, e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{33.11}$$

$\boldsymbol{k}$ vektörü z eksenine dik olduğundan

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y \tag{33.12}$$

yansıyan dalgayı, frekansı ω', dalga sayısı $\boldsymbol{k}'$ ve genliği de $\boldsymbol{E}'_0$ olacak şekilde, aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}'_0\, e^{i(\omega' t - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r})} \tag{33.13}$$

(Frekansın aynı ve $\boldsymbol{k}'$'nün büyüklüğünün de gelen dalga söz konusu olduğunda aynı olduğunu biliyoruz, ancak bunu varsaymayacağız bile. Matematiksel işlemlerin bunu ortaya çıkarmasını bekleyeceğiz.) Son olarak, iletilen dalga için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}''_0\, e^{i(\omega'' t - \boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r})} \tag{33.14}$$

Maxwell denklemlerinin Denk. (33.9)'u verdiğini biliyoruz, dolayısıyla her bir denklem için aşağıdaki eşitlikler elimizdedir:

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_i}{\omega} \qquad \boldsymbol{B}_r = \frac{\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_r}{\omega'} \qquad \boldsymbol{B}_t = \frac{\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_t}{\omega''} \tag{33.15}$$

Ayrıca iki ortamın indislerine n_1 ve n_1 dersek, Denk. (33.10)'dan aşağıdaki ifadeyi çıkarabiliriz:

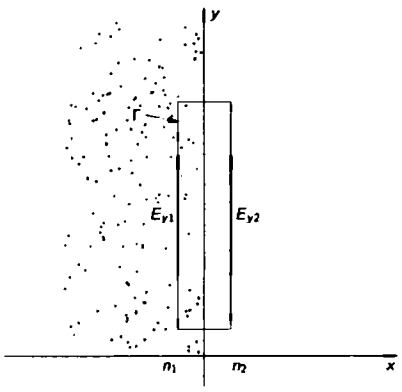
$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} \tag{33.16}$$

Yansıyan dalga aynı ortamda olduğundan, o halde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2} \tag{33.17}$$

İletilen dalga içinse aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2} \tag{33.18}$$



Şekil 33-4 $E_{y2} = E_{y1}$ sınır koşulu $\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$'dan elde edilir.

33-3 Sınır koşulları

Şu ana kadar tek yaptığımız üç dalgayı tanımlamak oldu. Şimdiki problemimizse, yansıyan ve iletilen dalgaların parametrelerini gelen dalganın parametreleri cinsinden bulmaktır. Bunu nasıl yapabiliriz? Tanımladığımız üç dalga düzgün bir malzeme içinde Maxwell denklemlerini sağlar, ancak Maxwell denklemleri aynı zamanda iki farklı malzeme arasındaki *sınırda da* sağlanmalıdır. Dolayısıyla şimdi *tam da* sınırda ne olduğuna bakmalıyız. Maxwell denklemlerinin, üç dalganın da belli bir şekilde birbirine geçmesi gerektirdiğini göreceğiz.

Ne demek istediğimize bir örnek olması için elektrik alan $\boldsymbol{E}$'nin y bileşeni sınırın her iki tarafında *aynı* olmalıdır. Bu, şimdi göstereceğimiz üzere, Faraday yasası gereğidir.

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{33.19}$$

Şekil 33-4'te gösterilen, iki sınır arasındaki küçük dikdörtgen bir Γ ilmeğini ele alalım. Denklem (33.19)'a göre $\boldsymbol{E}$'nin Γ etrafındaki çizgi integrali ilmek içinden geçen $\boldsymbol{B}$ akısının değişim hızına eşittir:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B}\cdot n\,da$$

İlmeğin sonsuz küçüklükteki bir alanı kapsayacak şekilde çok dar olduğunu düşünelim. $\boldsymbol{B}$ sonluysa (sınırda sonsuz olması için bir neden yoktur!), alandan geçen akı sıfırdır. Dolayısıyla $\boldsymbol{E}$'nin çizgi integrali sıfır olmalıdır. E_{y1} ve E_{y2} sı-

nırın iki tarafındaki alanın bileşenleriyse ve dikdörtgenin boyu l ise, daha önce dediğimiz gibi aşağıdaki ifadeyi

$$E_{y1}l - E_{y2}l = 0$$

veya aşağıdaki ifadeyi:

$$E_{y1} - E_{y2} \tag{33.20}$$

elde ederiz. Maxwell denklemlerinin sonuçlarını sınırda bulmaya çalışma işlemine "sınır koşullarını belirlemek" denir. Normalde bu, Şekil 33-4'teki Γ gibi küçük dikdörtgenler üzerinden akıl yürüterek, bulabildiğimiz kadar Denk. (33.20) gibi denklem bulmaya çalışarak veya sınır içinde küçük Gauss yüzeyleri kullanılarak yapılır. Her ne kadar bu ilerlemenin iyi bir yolu olsa da, bir sınırla uğraşma probleminin her bir fiziksel problem için farklı olduğu izlenimini vermektedir.

Örneğin, bir sınır içinden ısı akışı probleminde iki taraftaki sıcaklıklar birbiriyle nasıl ilişkilidir? Bir taraftan sınıra *doğru* ısı akışının, diğer taraftan *dışarı* doğru ısı akışına eşit olması gerektiği şeklinde fikir yürütebilirsiniz. Bu tür fiziksel akıl yürütmeler kullanmak genelde mümkün ve çok da faydalıdır. Ancak bazen bir problemle uğraşırken elinizde sadece bazı denklemler vardır ve hangi fiziksel akıl yürütmeleri kullanmanız gerektiğini hemen göremeyebilirsiniz. Her ne kadar şimdi sadece, fiziksel akıl yürütmeler *yapabildiğimiz* elektromanyetik problemiyle ilgileniyorsak da, size herhangi bir problem için kullanabileceğiniz bir yöntemi, doğrudan diferansiyel denklemleri kullanarak, sınırda ne olup bittiğini bulmanın *genel* bir yolunu göstermek istiyoruz.

Dielektrik için Maxwell denklemlerini yazarak işe başlayalım. Bu sefer bütün bileşenleri açıkça yazacağız:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \tag{33.21}$$

$$\epsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{33.22a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{33.22b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{33.22c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{33.23}$$

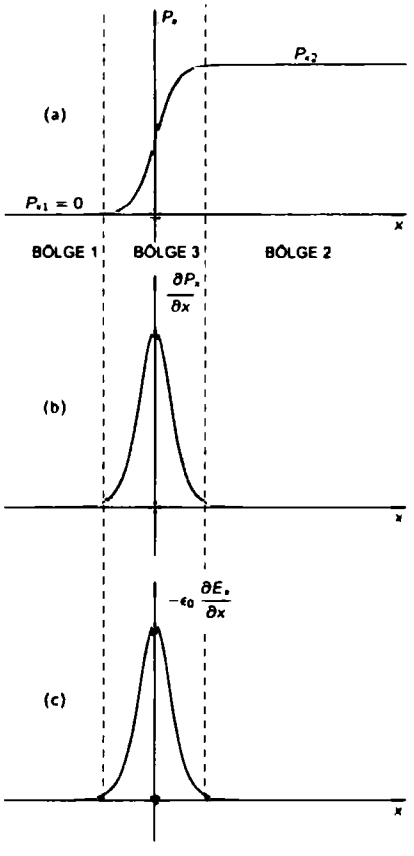
$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{33.24a}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{33.24b}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{33.24c}$$



Şekil 33-5 1 ve 2 numaralı bölgelerdeki iki farklı malzeme arasındaki 3 numaralı geçiş bölgesinde alanlar.

Bu denklemler (sınırın soluna doğru) 1 numaralı bölgede ve (sınırın sağına doğru) 2 numaralı bölgede doğru olmalıdır. 1 ve 2 numaralı bölgeler için çözümleri zaten yazmıştık. Son olarak 3 numaralı bölge diyeceğimiz *sınırda da* denklemler sağlanmalıdır. Her ne kadar sınırı net bir şekilde süreksiz olarak düşünsek de, gerçekte öyle değildir. Fiziksel özellikler çok hızlı değişir ancak sonsuz bir hız değildir bu. Her durumda, 1 ile 2 arasındaki kısa ve 3 diyeceğimiz bölgede çok hızlı ancak *sürekli* bir indis geçişi olduğunu düşünebiliriz. Ayrıca, P_x veya E_y vb herhangi bir alan niceliği 3 numaralı bölgede benzer bir geçiş yapacaktır. Bu bölgede, diferansiyel denklemler sağlanmalıdır ve bu bölgedeki diferansiyel denklemleri takip ederek ihtiyaç duyulan "sınır koşullarına" varabiliriz.

Örneğin, boşluk (1 numaralı bölge) ile çam (2 numaralı bölge) arasında bir sınır olduğunu varsayalım. Boşluk içinde kutuplanacak bir şey yoktur, dolayısıyla $\boldsymbol{P}_1 = 0$ diyebiliriz. Camda bir miktar $\boldsymbol{P}_2$ kutuplanması olduğunu varsayabiliriz. Cam ile boşluk arasında akıcı, fakat hızlı bir geçiş vardır. $\boldsymbol{P}$'nin herhangi bir bileşenine, örneğin P_x'e, baktığımızda, Şekil 33-5 (a)'daki gibi değişebilir. Denklem (33.21)'i ele alalım. Denklem, $\boldsymbol{P}$'nin bileşenlerinin x, y ve z'ye göre türevlerini içerir. y ve z türevleri çok ilginç değildir; o yönlerde kayda değer bir şey olmaz. Ancak P_x'in x türevi, P_x'in muazzam eğimi yüzünden 3 numaralı bölgede çok büyük değerlere ulaşır. $\partial P_x/\partial x$ türevi sınırda, Şekil 33-5 (b)'de gösterildiği gibi, keskin bir şekilde yükselir. Sınırı daha da ince bir katmana sığdırabilirsek, yükselme daha da fazla olur. Sınır ilgilendiğimiz dalgalar için gerçekten keskinse, 3 numaralı bölgede $\partial P_x/\partial x$'in büyüklüğü çok daha fazla, sınırın uzağındaki dalganın $\boldsymbol{P}$'sindeki değişimden gelebilecek katkılardan da fazla olur. Dolayısıyla sınırdan kaynaklanan değişimler haricindekileri ihmal edebiliriz.

Sağ tarafında bir anda ortaya çıkan büyük bir yükselme varsa, Denk. (33.21) nasıl sağlanabilir? Sadece, diğer tarafta da eşit büyüklükte bir yükselme varsa bu mümkündür. Sol taraftaki bir şeyler de büyük olmalı. Tek aday $\partial E_x/\partial x$'dir, çünkü y ve z'yle olan değişimler sadece, az önce belirttiğimiz dalgadaki küçük etkilerdir. Dolayısıyla $-\epsilon_0(\partial E_x/\partial x)$ Şekil 33-5(c)'deki gibi yazılmalıdır. $\partial P_x/\partial x$'in bir kopyası olarak. Aşağıdaki denklemi elde etmiş oluruz:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}$$

Bu denklemin 3 numaralı bölge boyunca x'e göre integralini alırsak, aşağıdaki sonuca varırız:

$$\epsilon_0(E_{x2} - E_{x1}) = -(P_{x2} - P_{x1}) \tag{33.25}$$

Diğer bir deyişle, 1 numaralı bölgeden 2 numaralı bölgeye geçerken $\epsilon_0 E_x$'teki zıplama, $-P_x$'deki sıçramaya eşit olmalıdır. $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ niceliğinin 1 ve 2 numaralı bölgelerde eşit değerler aldığını söyleyen Denklem (33.25)'i aşağıdaki ifade gibi yeniden yazabiliriz:

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{x1} \tag{33.26}$$

İnsanlar şöyle der: $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ niceliği sınır boyunca *süreklidir*. Böylece sınır koşullarından birini elde etmiş olduk.

1 numaralı bölge boşluk olduğundan dolayı $\boldsymbol{P}_1$'in sıfır olduğu durumu ele aldıysak da, aynı fikrin iki bölgedeki herhangi iki malzeme için de doğru olduğu açıktır. Dolayısıyla Denk. (33.26) genelde doğrudur.

Şimdi geride kalan Maxwell denklemlerini ele alalım ve her birinin ne söylediğini görelim. Denklem (33.22a)'yı ele alalım. x türevleri yoktur, dolayısıyla bize bir şey anlatmaz. (Alanların *kendilerinin* sınırda özellikle büyük hale gelmediğini hatırlayın. Sadece x'e göre türevler denkleme egemen olacak kadar büyük olabilirler.) Şimdi Denk. (33.22b)'yi ele alalım. İşte bir x türevi! Sol tarafta $\partial E_z/\partial x$ var. Bunun büyük bir türev olduğunu varsayalım. Ancak bir dakika durun! Sağ tarafta ona karşılık gelen bir şey yok; dolayısıyla E_z, 1 numaralı bölge-

den 2 numaralı bölgeye geçerken bir sıçramaya sahip *olamaz*. [Eğer sıçrasaydı, Denklem (33.22b)'nin sol tarafında bir yükselme olurdu, ancak sağ tarafında hiç olmazdı ve denklem de yanlış olurdu.] Artık yeni bir koşulumuz var:

$$E_{z2} = E_{z1} \tag{33.27}$$

Aynı akıl yürütmeyle, Denk. (33.22c) de aşağıdaki eşitliği verir:

$$E_{y2} = E_{y1} \tag{33.28}$$

Bu son sonuç, çizgi integrali fikriyle Denk. (33.20)'de elde ettiğimizin aynısıdır.

Sırada Denk. (33.23) var. Yükselmeye sahip olabilecek tek terim $\partial B_x/\partial x$'tir. Ancak sağ tarafta ona karşılık gelen bir şey yoktur, böylece aşağıdaki sonuca varırız:

$$B_{x2} = B_{x1} \tag{33.29}$$

Şimdi sahne Maxwell denklemlerinin sonuncusunda! Denklem (33.24a) bize bir şey vermez, çünkü x türevi yoktur. Denklem (33.24b)'nin bir adet vardır, $-c^2\,\partial B_z/\partial x$, fakat yine ona karşılık gelecek bir şey yoktur. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$B_{z2} = B_{z1} \tag{33.30}$$

Son denklem çok benzerdir ve aşağıdaki ifadeyi verir:

$$B_{y2} = B_{y1} \tag{33.31}$$

Son üç denklem bize $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_1$ eşitliğini verir. Ancak, bunun sadece sınırın her iki tarafındaki malzemelerin manyetik olmadığı durumda –ya da malzemelerin manyetik etkilerini ihmal edebildiğimiz durumlarda– doğru olduğunun altını çizmek istiyoruz. (Malzemelerin manyetik özelliklerine ilerleyen bölümlerde değineceğiz.)

Böylece 1 ve 2 numaralı bölgeler arasında altı ilişki elde etmiş olduk. Bunların hepsini Tablo 33-1'de bir araya getirdik. Şimdi bunları kullanarak iki bölgedeki dalgaları eşleyebiliriz. Ancak bu kullandığımız fikrin, diferansiyel denklemlere sahip olduğunuz ve özellik değişiklikleri gerçekleşen iki bölge arasındaki keskin bir sınırı geçen bir çözüm istediğiniz *herhangi* bir fiziksel durum için uygun olduğunu belirtmek istiyoruz. Şu anda amaçladıklarımız için, aynı denklemleri sınırda akılar ve dolaşımlar hakkındaki fikirleri kullanarak da kolaylıkla elde edebilirdik. (Bu şekilde de sonuç elde edip edemeyeceğinizi deneyebilirsiniz.) Ancak şimdi, tıkanıp kaldığınızda veya sınırda olup bitenin fiziğine dair aklınıza bir fikir gelmediğinde kullanabileceğiniz bir yöntem var elinizde. Tek yapmanız gereken denklemleri çözmek.

Tablo 33-1
Bir dielektriğin yüzeyindeki sınır koşulları

$$(\epsilon_0 \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{P}_1)_x = (\epsilon_0 \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{P}_2)_x$$
$$(\boldsymbol{E}_1)_y = (\boldsymbol{E}_2)_y$$
$$(\boldsymbol{E}_1)_z = (\boldsymbol{E}_2)_z$$
$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$$

(Yüzey yz düzlemindedir)

33-4 Yansıtılan ve iletilen dalgalar

Şimdi, Bölüm 33-2'de yazdığımız dalgalar için sınır koşullarını uygulamaya hazırız. Aşağıdaki eşitlikleri yazmıştık:

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \tag{33.32}$$

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_0' e^{i(\omega' t - k_x' x - k_y' y)} \tag{33.33}$$

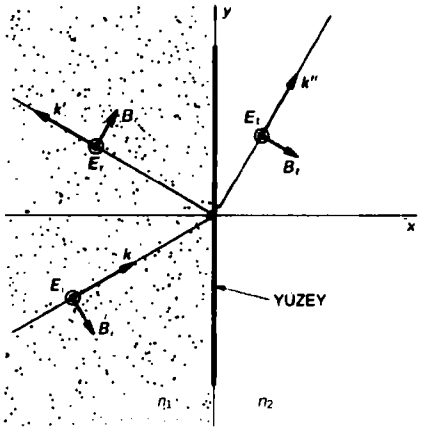
$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_0'' e^{i(\omega'' t - k_x'' x - k_y'' y)} \tag{33.34}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_i}{\omega} \tag{33.35}$$

$$\boldsymbol{B}_r = \frac{\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}_r}{\omega'} \tag{33.36}$$

$$\boldsymbol{B}_t = \frac{\boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}_t}{\omega''} \tag{33.37}$$

Bir ilave bilgi daha: Her bir dalga için, $\boldsymbol{E}$ ilerleme vektörü $\boldsymbol{k}$'ya diktir.



Şekil 33-6 Gelen dalganın E alanı gelme düzlemine dik olduğunda, yansıyan ve iletilen dalgaların kutuplanması.

Sonuçlar, gelen dalganın E vektörünün ("kutuplanma) yönüne bağlı olacaktır. E vektörünün "gelme düzlemine" (xy düzlemine) *paralel* olduğu durumla, E vektörünün gelme düzlemine *dik* olduğu durumları ayrı ayrı ele alırsak analizimizi çok basitleştirmiş oluruz. Diğer bir tür kutuplanmaya sahip dalga, bu iki tür dalganın doğrusal birleşimidir. Diğer bir deyişle, yansıtılan ve iletilen yoğunluklar farklı kutuplanmalar için farklıdır ve iki basit durumu ele alıp onları ayrı ayrı çözmek en basitidir.

Gelme düzlemine göre dik olarak kutuplanmış bir gelen dalga için analizimizi yapacak ve diğeri için de sonucu doğrudan vereceğiz. En basit olanı ele alarak biraz hile yapmış oluyoruz, ama ilke ikisi için de aynıdır. Dolayısıyla E_i'nin sadece z bileşeni olduğunu düşüneceğiz ve diğer bütün E vektörleri aynı yönde olduğundan vektör işaretlerini bir kenara bırakabiliriz.

Her iki malzeme de eş yönlü olduğu sürece, malzemedeki yüklerin indüklenen salınımları da z yönünde olacaktır; iletilen ve yayılan dalgaların E alanlarının sadece z bileşenleri olacaktır. Dolayısıyla bütün dalgalar için, E_x, E_y, P_x ve P_y sıfırdır. Dalgaların E ve B vektörleri Şekil 33-6'da çizildiği gibidir. (Burada, her şeyi denklemlerden çıkarma planımızda kolaya kaçıyoruz. Bu sonucu sınır koşullarından da elde edebilirdik, ancak fiziksel akıl yürütme sayesinde birçok aritmetik işleminden kendimizi kurtarmış olduk. Boş vaktiniz olduğunda, aynı sonucu denklemlerle elde edip edemeyeceğinizi görün. Dediğimizin denklemlerle uyuştuğu apaçık ortadadır; sadece *başka* olasılıkların olduğunu göstermedik.)

Artık Denk. (33.26)'dan (33.31)'e kadar sınır koşullarımız E ile B'nin 1 ve 2 bölgelerindeki ilişkisini verir. 2 numaralı bölge için sadece iletilen dalga vardır ancak 1 numaralı bölgede *iki* dalga vardır. Hangisini kullanmalı? 1 numaralı bölgedeki alanlar, elbette ki gelen ve yansıyan dalgaların alanlarının üst üste binmesiyle bulunur. (Her biri Maxwell denklemlerini sapladığından, toplamları da sağlar.) Dolayısıyla sınır koşulları kullandığımızda aşağıdaki eşitlikleri –ve elbette B'ler için de– kullanmalıyız:

$$E_1 = E_i + E_r, \qquad E_2 = E_t$$

Ele aldığımız kutuplanma için, Denk. (33.26) ve (33.28) bize yeni bir bilgi vermez; sadece Denk. (33.27) yararlıdır. $x = 0$ için *sınırda* aşağıdaki eşitliği ortaya koyar:

$$E_i + E_r = E_t$$

Böylece *bütün t'ler* ve *bütün y'ler* için doğru olması gereken aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E_0\, e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0\, e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0\, e^{i(\omega'' t - k''_y y)} \tag{33.38}$$

Öncelikle $y = 0$ koşuluna baktığımıza düşünelim. Böylece

$$E_0\, e^{i\omega t} + E'_0\, e^{i\omega' t} = E''_0\, e^{i\omega'' t}$$

buluruz. Bu denkleme göre, salınım yapan iki terim üçüncü bir salınıma eşittir. Bu, ancak salınımlar aynı frekanstaysa olabilir. (Farklı frekanslarda üç –veya bir başka sayıda– böyle terimin toplamının her zaman sıfır olması imkânsızdır.) Dolayısıyla:

$$\omega'' = \omega' = \omega \tag{33.39}$$

olur. Hep bildiğimiz gibi, yansıyan ve iletilen dalgaların frekansları ile gelen dalganın frekansı aynıdır.

En başta bunu söyleyerek kendimizi bir miktar sıkıntıdan kurtarabilirdik, ancak size bunun denklemlerle de elde edilebileceğini göstermek istedik. Gerçek bir problemle uğraştığınız zaman, bildiğiniz her şeyi en başta kullanıp kendinizi bir sürü sıkıntıdan kurtarabilirsiniz.

Tanım gereği, k'nın *büyüklüğü* $k^2 = n^2\omega^2/c^2$ eşitliğiyle belirlenir, ayrıca aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2} \tag{33.40}$$

Şimdi, $t = 0$ için Denk. (33.38)'e bakalım. Az önce kullandığımız akıl yürütmeyi, y için denklemin sağlanması gerektiği şeklinde düzelterek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$k''_y = k'_y = k_y \tag{33.41}$$

Denklem (33.40)'tan $k'^2 = k^2$ eşitliğini çeker ve aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$k'^2_x + k'^2_y = k^2_x + k^2_y$$

Bunu Denk. (33.41)'le birleştirirsek, aşağıdaki ifadeyi

$$k'^2_x = k^2_x$$

veya $k'_x = \pm k_x$ eşitliğini elde ederiz. Artı işaret anlamsızdır. *Yansıyan* bir dalga değil de, bir başka *gelen* dalgayı verir ve en başta problemi sadece bir gelen dalga için çözeceğimizi belirtmiştik. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$k'_x = -k_x \tag{33.42}$$

(33.41) ve (33.42) denklemleri bize, beklediğimiz gibi, gelme açısı ile yansıma açısının eşit olduğunu söyler (*Bkz.* Şekil 33-3). Yansıyan dalga için:

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_y y)} \tag{33.43}$$

İletilen dalga için elimizde

$$k''_y = k_y$$

ve

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k^2}{n_1^2} \tag{33.44}$$

eşitlikleri vardır, dolayısıyla bunları çözerek k''_x'nü bulabiliriz. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$k''^2_x = k''^2 - k''^2_y = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k^2_y \tag{33.45}$$

n_1 ve n_2'nin bir an için gerçel sayılar olduğunu (indislerin sanal kısımlarının çok küçük olduğunu) düşünelim. Bu durumda bütün k'lar ayrıca gerçel sayılardır ve Şekil 33-3'ten aşağıdaki eşitlikleri çıkarabiliriz:

$$\frac{k_y}{k} = \sin\theta_i, \qquad \frac{k''_y}{k''} = \sin\theta_t \tag{33.46}$$

Denklem (33.44)'ten de aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$n_2 \sin\theta_t = n_1 \sin\theta_i \tag{33.47}$$

Bu denklem kırılma için Snell yasasıdır. Gene, zaten bildiğimiz bir şeyi bulmuş olduk. İndisler gerçek değilse, dalga numaraları karmaşıktır ve Denk. (33.45)'i kullanmalıyız. [Yine de Denk. (33.46)'yı kullanarak θ_i ve θ_t açılarını *tanımlayabilirdik* ve Snell yasası, Denk. (33.47), genelde doğru olurdu. Ancak o zaman "açılar" da karmaşık sayılar olur, dolayısıyla açı olarak basit geometrik şekilde yorumlanamazlar. Bu durumda dalgaların davranışlarını karmaşık k_x ve k''_x değerleriyle tanımlamak en iyisidir.]

Şu ana kadar yeni bir şey bulmadık. Sadece karmaşık matematiksel işlemlerle aynı bariz cevapları elde etmenin zevkini tattık. Artık, henüz bilmediğimiz, dalgaların genliklerini bulmaya hazırız. ω ve k'lar için sonuçlarımızı kullanarak, Denk. (33.38)'deki üssel çarpanları silebilir ve aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$E_0 + E'_0 = E''_0 \tag{33.48}$$

Hem E'_0, hem de E''_0 bilinmediğinden, bir ilişkiye daha ihtiyacımız var. Sınır koşullarından birini kullanmalıyız. E_x ve E_y için denklemler faydasızdır, zira bütün E'lerin sadece z bileşeni vardır. Dolayısıyla B üzerindeki koşulları kullanmalıyız. Denklem (33.29)'u deneyelim:

$$B_{x2} = B_{x1}$$

Denklem (33.35)'ten (33.37)'ye aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$B_{xi} = \frac{k_y E_i}{\omega} \qquad B_{xr} = \frac{k'_y E_r}{\omega'} \qquad B_{xt} = \frac{k''_y E_t}{\omega''}$$

$\omega'' = \omega' = \omega$ ve $k''_y = k'_y = k_y$ eşitliklerini hatırlarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$E_0 + E'_0 = E''_0$$

Bu, bildiğimiz Denk. (33.48)! Zaten bildiğimiz bir şeyi çıkarmakla vakit kaybettik.

Denklem (33.30)'u, $B_{z2} = B_{z1}$, deneyebilirdik ama B'nin z bileşeni yoktur! Böylece geriye bir tek denklem kalıyor: Denklem (33.31), $B_{y2} = B_{y1}$. Bu üç dalga için aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$B_{yi} = -\frac{k_x E_i}{\omega} \qquad B_{yr} = -\frac{k'_x E_r}{\omega'} \qquad B_{yt} = -\frac{k''_x E_t}{\omega''} \tag{33.49}$$

$x = 0$ için (sınırda), E_i, E_r ve E_t yerine dalga ifadesi koyarsak sınır koşulu aşağıdaki ifade olur:

$$\frac{k_x}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + \frac{k'_x}{\omega'} E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = \frac{k''_x}{\omega''} E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}$$

Yine tüm ω'lar ve k_y'ler eşittir, dolayısıyla aşağıdaki ifade gibi basitleştirebiliriz:

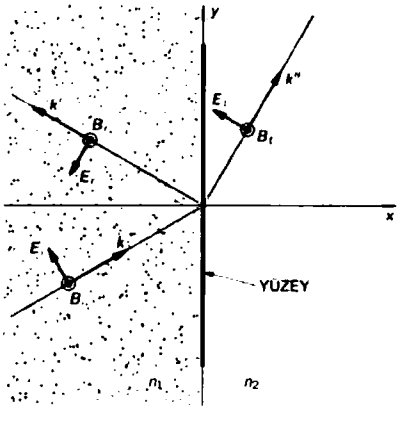
$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0 \tag{33.50}$$

Bu bize E'ler için Denk. (33.48)'den farklı bir denklem vermekte. İkisini birden kullanarak, E'_0 ve E''_0'nü bulabiliriz. $k'_x = -k_x$ eşitliğini hatırlarsak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0 \tag{33.51}$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0 \tag{33.52}$$

Bunlarla Denk. (33.45)'i veya k''_x için Denk. (33.46)'yı kullanarak, bilmek istediğimiz şeyi elde ederiz. Bu sonucun çıkarımlarını bir sonraki bölümde tartışacağız.



Şekil 33-7 Gelen dalganın E alanı gelme düzlemine paralel olduğunda dalgaların kutuplanması.

E vektörü gelme düzlemine *paralel* olacak şekilde kutuplanmış bir dalgayla başlarsak, Şekil 33-7'de gösterildiği gibi E'nin hem x, hem de y bileşenleri olacaktır. Cebir işlemleri biraz daha karmaşık ancak dosdoğrudur. (İş yükünü, hepsi z yönünde olan *manyetik* alanlar cinsinden şeyleri ifade ederek hafifletebiliriz.) Böylece aşağıdaki ifadeyi

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k''_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0| \tag{33.53}$$

ve aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$|E''_0| = \frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0| \tag{33.54}$$

Bakalım sonuçlarımız, daha önce elde ettiklerimizle uyuşuyor mu? Yansıyan dalganın yoğunluğunun, gelen dalganın yoğunluğuna oranını I. Cilt, 33. Bölümde Denk. (33.3)'le bulmuştuk. Ancak o zaman sadece *gerçek* indisleri göz önüne alıyorduk. Gerçek indisler (ve k'lar için) aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$k_x = k \cos\theta_i = \frac{\omega n_1}{c} \cos\theta_i$$

$$k''_x = k'' \cos\theta_t = \frac{\omega n_2}{c} \cos\theta_t$$

Denklem (33.51)'e bunları koyduğumuzda, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \tag{33.55}$$

Bu sonuç Denk. (33.3)'e benzememektedir. Ancak Snell yasasını kullanarak n'lerden kurtulursak benzeyecektir. $n_2 = n_1 \sin\theta_i/\sin\theta_t$ der ve pay ile paydayı $\sin\theta_t$'yle çarparsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{\cos\theta_i \sin\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_t}{\cos\theta_i \sin\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_t}$$

Pay ve payda, $-(\theta_i - \theta_t)$ ve $(\theta_i + \theta_t)$'nin sinüsleridir. Aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\frac{E_0'}{E_0} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{33.56}$$

E_0' ve E_0 aynı malzeme içinde olduklarından, yoğunlukları elektrik alanların kareleriyle orantılıdır ve önceden elde ettiğimiz sonuçla aynı sonucu elde ederiz. Benzer şekilde Denk. (33.53) de Denk. (33.4)'le aynıdır.

Dik gelen dalgalar için $\theta_i = 0$ ve $\theta_t = 0$ eşitliklerini yazabiliriz. Denklem (33.56) 0/0 sonucunu verir ki bu bizim için pek yararlı değildir. Ancak, Denk. (33.55)'e geri dönüp aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{33.57}$$

Bu sonuç doğal olarak, dik gelme açısı için özel bir "gelme düzlemi" olmadığından, "her" kutuplanma için geçerlidir.

33-5 Metallerden yansıma

Şimdi bu sonuçları kullanarak, ilginç bir olgu olan metallerden yansımayı anlayabiliriz. Neden metaller parlaktır? Geçen bölümde, belli frekanslar için metallerin kırılma indisinin büyük bir sanal kısmı olduğunu gördük. Gelin, $n = -in_I$ indisine sahip bir metalin üzerine havadan ($n = 1$'le) ışık geldiğinde yansıyan yoğunluk için ne sonuç elde edeceğimizi görelim. Bu durumda Denklem (33.55) (dik gelme açısı için) bize aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 + in_I}{1 - in_I}$$

Yansıyan dalganın yoğunluğu için, E_0' ve E_0'nun mutlak değerlerinin karesini bulmamız gerekir:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_0'|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1 + in_I|^2}{|1 - in_I|^2} \tag{33.58}$$

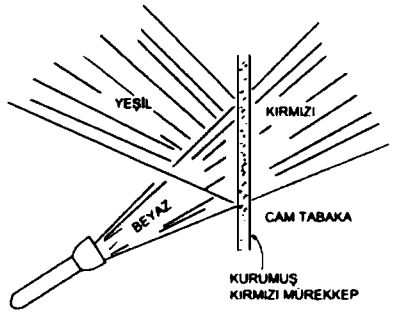
veya

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1 \tag{33.59}$$

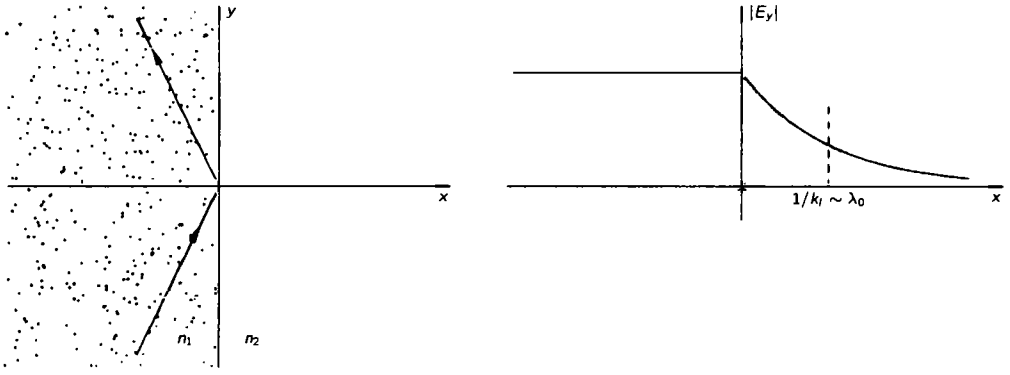
İndisi saf bir sanal sayı olan bir malzeme için, yüzde 100 yansıma vardır!

Metaller yüzde 100 yansıtmaz, fakat çoğu görünür ışığı iyi bir şekilde yansıtır. Bir başka deyişle, indislerinin sanal kısmı çok büyüktür. Ancak daha önce, büyük bir sanal kısmın kuvvetli bir soğurma anlamına geldiğini görmüştük. Dolayısıyla şu genel yasayı ifade edebiliriz: Herhangi bir malzeme, herhangi bir frekansta *çok* iyi bir soğurucuysa, dalgalar yüzeyden büyük oranda yansıtılır ve çok azı içeri soğurulur. Bu etkiyi kuvvetli boyalarda görebilirsiniz. En kuvvetli boyaların saf kristallerinin "metalik" bir parlaklığı vardır. Mor mürekkep barındıran bir şişenin kapağındaki kurumuş boyanın altın bir metalik yansıma yaptığını görmüşsünüzdür veya kurumuş bir kırmızı mürekkep bazen yeşilimsi bir metalik yansıma gösterir. Kırmızı mürekkep *iletilen* ışıktaki yeşilleri soğurur, mürekkep yeterince yoğunsa yeşil ışık frekansları için kuvvetli bir yüzey *yansıması* meydana getirir.

Bu etkiyi, cam bir levhayı kırmızı mürekkeple boyayıp sonra kurumaya bırakarak gözlemleyebilirsiniz. Levhanın arkasından beyaz bir ışık demeti yönlendirirseniz, iletilen bir kırmızı ışık demeti ve yansıyan bir yeşil ışık demeti gözlemlersiniz.



Şekil 33-8 ω frekansında bir ışığı kuvvetli şekilde soğuran bir malzeme, aynı zamanda o frekanstaki bir ışığı yansıtır.



Şekil 33-9 Toplam iç yansıma.

33-6 Toplam iç yansıma

Işık, 1'den büyük bir n gerçek indisine sahip cam gibi bir malzemeden geçip, sözgelimi hava gibi, n_2 indisi 1'e eşit bir ortama geçerse, Snell yasasına göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\sin \theta_t = n \sin \theta_i$$

İletilen dalganın açısı θ_t, gelme açısı θ_i "kritik açı" θ_C'ye eşit olduğunda 90° olur. Kritik açı θ_C aşağıdaki denklemle bulunur:

$$n \sin \theta_C = 1 \tag{33.60}$$

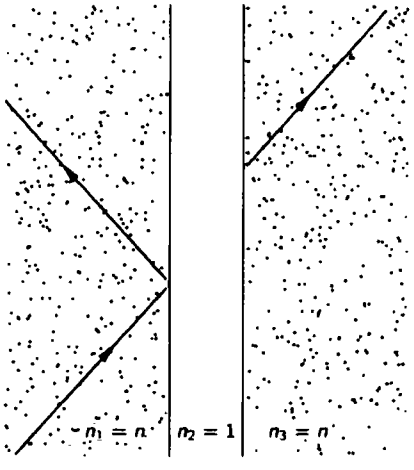
θ_i kritik açıdan daha büyük olursa ne olur? Toplam iç yansıma olduğunu bilirsiniz. Peki, bu nasıl olur?

İletilen dalga için dalga sayısı k_x'''nü veren Denk. (33.45)'e geri dönelim. Aşağıdaki eşitliği yazardık:

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2$$

$k_y = k \sin \theta_i$ ve $k = \omega n/c$ eşitliklerini bildiğimize göre, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$k_x''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - n^2 \sin^2 \theta_i)$$



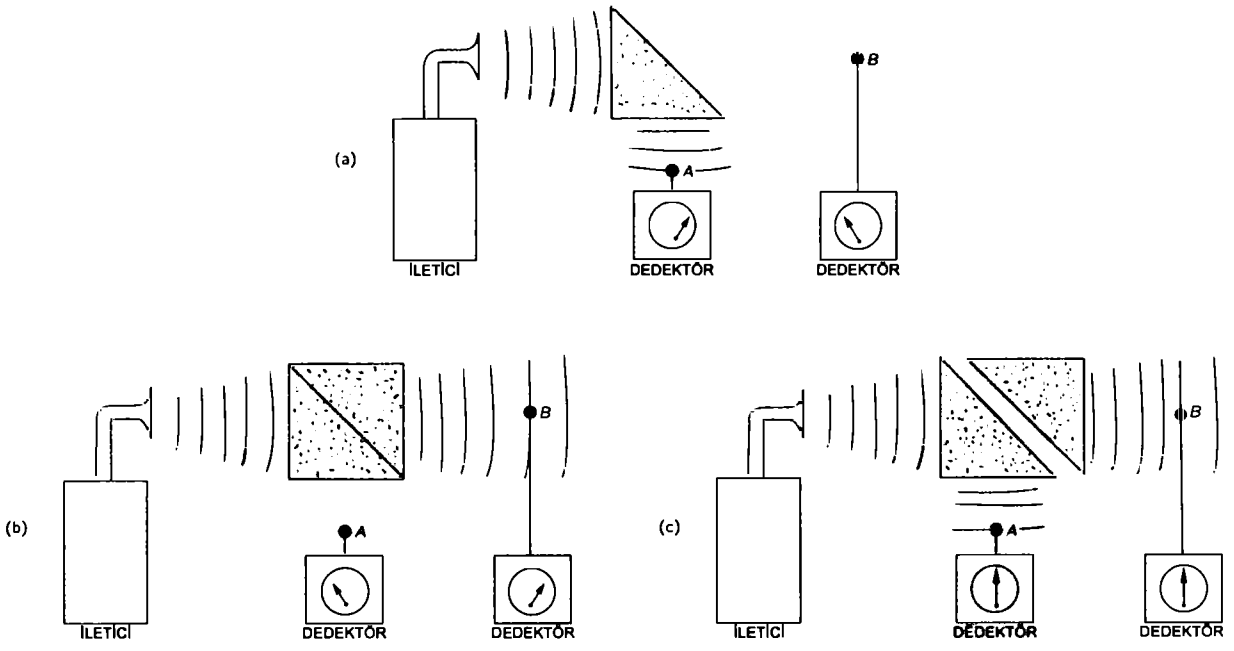
Şekil 33-10 Küçük bir boşluk varsa, iç yansıma "toplam" değildir. Boşluğun ötesine iletilen bir dalga vardır.

$n \sin \theta_i$ birden büyükse, $k_x''^2$ *eksidir* ve k_x'' saf bir sanal sayıdır. Örneğin $\pm ik_I$ gibi. Artık bunun ne anlama geldiğini biliyorsunuz! "İletilen" dalga (Denk. 33.34) aşağıdaki biçime sahip olacaktır:

$$E_t = E_0'' e^{\pm k_I x} e^{i(\omega t - k_y y)}$$

Dalga genliği, artan x'ler birlikte üssel olarak ya büyür ya da küçülür. Bizim burada istediğimizin eksi işaret olduğu bellidir. Bu durumda sınırın sağında dalganın *genliği* Şekil 33-9'daki gibi olacaktır. Dikkat ederseniz k_I ω/c'dir. O da $1/\lambda_0$ derecesindedir, diğer bir deyişle ışığın boş uzaydaki dalga boyunun tersi. Işık bir cam-hava yüzeyinden tamamen yansıtıldığında, havada alanlar vardır ancak yüzeyden öteye sadece ışığın dalga boyu mertebesi kadar bir uzaklığa erişirler.

Şu soruyu şimdi nasıl cevaplayabileceğimizi görüyoruz: Camdaki bir ışık dalgası yüzeye yeterince büyük bir açıyla gelirse, yansıtılır; bir başka cam parçası daha yüzeye getirilirse (böylece etkideki "yüzey" ortadan kaldırılırsa) ışık geçirilir. Bu tam olarak ne zaman olur? Tam yansımadan hiç yansımamaya geçişin sürekli olması gerektiği kesindir! Hava boşluğu, havadaki dalganın üssel kuyruğunun ikinci cam parçasında hissedilebilir bir şiddete sahip olmasını sağlayacak kadar küçük olursa, elektronlar sallanır ve Şekil 33-10'da görüldüğü gibi yeni bir dalga yaratılır. Bir kısım ışık iletilecektir. (Çözümümüzün eksik ol-



Şekil 33-11 İçerden yansıtılan dalgaların ilerlemesinin gösterimi.

duğu açıktır; bütün denklemleri iki cam arasındaki ince hava tabakası için tekrar çözmeliyiz.)

Hava boşluğu çok küçükse (ışığın dalga boyu mertebesinde, 10^{-5} cm gibi) bu iletim etkisi gündelik ışıkla gözlemlenebilir, ancak en kolay şekilde üç santimetrelik dalgalarla gösterilebilir. Bu durumda üssel azalan dalga santimetrelerce uzanabilir. Etkiyi gösteren bir mikrodalga cihazı Şekil 33-11'de gösterilmiştir. Üç santimetrelik bir ileticiden dalgalar 45° açıyla bir parafin prizmaya yöneltilmiştir. Bu frekanslarda parafinin kırılma indisi 1,50'dir ve dolayısıyla kritik açı da 41,5° olur. Dolayısıyla dalga 45° açılı yüzden tamamen yansıtılır ve *A* dedektörü tarafından, Şekil 33-11(a)'daki gibi yakalanır. İkinci bir parafin prizması birinciyle şeklin (b) kısmında olduğu gibi temasta olacak şekilde yerleştirilirse dalga geçer gider ve *B* dedektörü tarafından yakalanır. İki prizma arasında şeklin (c) kısmındaki gibi birkaç santimetrelik bir boşluk bırakılırsa, hem iletilen hem yansıyan dalgalar gözlemlenir. Şekil 33-11(a)'daki prizmanın 45° yüzünün dışındaki elektrik alan *B* dedektörünü yüzeye birkaç santimetre yaklaştırılarak da gösterilebilir.

34

MADDENİN MANYETİZMASI

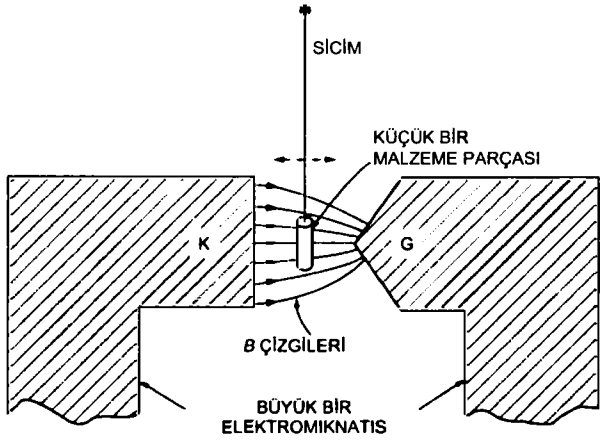
34-1 Diyamanyetizma ve paramanyetizma

Bu bölümde malzemelerin manyetik özellikleri hakkında konuşacağız. Malzemelerin içinde en çarpıcı manyetik özelliğe sahip olanı demirdir. Benzer manyetik özellikler nikel, kobalt ve –yeterince düşük sıcaklıklarda (16°C altı)– gadolinyumun yanı sıra özel birkaç alaşım tarafından da paylaşılır. *Ferromanyetizma* olarak adlandırılan bu tür bir manyetizma, yeterince dikkat çekicidir ve özel bir bölümde tartışacağımız gibi oldukça karmaşıktır. Bununla birlikte bütün sıradan maddeler her ne kadar küçük olsa da –ferromanyetik malzemelerdeki etkilerden bin ila milyon kat daha az– bazı manyetik özellikler gösterebilir. Burada sıradan manyetizmayı yani ferromanyetizmadan farklı manyetik özellikleri anlatacağız.

34-1 Diyamanyetizma ve paramanyetizma
34-2 Manyetik moment ve açısal momentum
34-3 Atomik mıknatısların presesyonu
34-4 Diyamanyetizma
34-5 Larmor teoremi
34-6 Klasik fizik ne diyamanyetizmayı ne de paramanyetizmayı öngörür
34-7 Kuantum mekaniğinde açısal momentum
34-8 Atomların manyetik enerjisi

Bu küçük manyetizma iki türdür. Bazı malzemeler manyetik alanlara doğru *çekilirler*; diğerleri *itilirler*. Dielektrik malzemelerin daima çekildiği elektrik etkileri dışında, maddedeki manyetik etkilerin iki işareti vardır. Bu iki işaret Şekil 34-1'de resmedildiği gibi bir kutbu düz bir parça ve diğer kutbu sivri bir parça olan kuvvetli bir elektromıknatıs yardımıyla kolayca gösterilebilir. Manyetik alan, sivri kutup ucuna yakın olan noktada düz kutba kıyasla daha büyüktür. Küçük bir malzeme parçası uzun bir ipe bağlanıp kutuplar arasına asılırsa, genelde üzerine etki eden küçük bir kuvvet ortaya çıkar. Bu ufak kuvvet, asılan malzemenin ufak bir yerdeğiştirmesi sayesinde gözlenebilir. Birkaç ferromanyetik malzeme kutup yönüne doğru çok güçlü bir şekilde çekilir. Bazıları çok zayıf bir şekilde çekilirler; bazıları ise zayıf bir şekilde itilir.

Gözden geçirme; II. Cilt, Bölüm 15-1, "Bir akım ilmeğindeki kuvvetler; Bir çift kutbun enerjisi."



Şekil 34-1 Küçük bir bizmut silindiri sivri kutup tarafından hafifçe itilir; alüminyum parçası ise çekilir.

Etki, en kolay yüksek-alanlı bölgeden *itilen* küçük bir bizmut parçasıyla görülebilir. Bu şekilde itilen maddeler *diyamanyetik olarak* adlandırılır. Bizmut en güçlü diyamanyetik maddelerden biridir fakat bu etki oldukça zayıftır. Diyamanyetizma her zaman çok zayıftır. Eğer kutuplar arasına bir alüminyum parçası asılırsa küçük bir kuvvet ortaya çıkar; fakat bu kuvvet kutba doğrudur. Alüminyum gibi maddeler *paramanyetik* olarak adlandırılır. (Bunun gibi bir deneyde mıknatıs açılıp kapandığında eddy-akımı kuvvetleri meydana gelir ve bunlar güçlü bir itki yaratır. Bu nedenle, nesneler asıldıktan sonra net yerdeğiştirmeyi görmek için dikkatli olunmalıdır.)

Şimdi kısaca bu iki etkiyi oluşturan mekanizmayı tanımlayalım. İlk olarak, çoğu maddedeki atomlar kalıcı bir manyetik momente sahip değildir ya da diğer bir deyişle, atomun net momenti sıfır olacak şekilde her bir atomun manyetik momenti birbirini yok edici etkiye sahiptir. Elektron spinleri ve yörünge hareketleri birbirini dengeler; bu nedenle herhangi bir atomun bir manyetik momenti yoktur. Bu koşullar altında manyetik alanı devreye soktuğunuzda, atom içinde indüksiyon nedeniyle akım üretilir. Lenz yasasına göre bu akımlar alanla ters yöndedir. Bu nedenle atomların indüklenmiş manyetik momentleri manyetik alana *zıt* yöndedir. Bu mekanizma diyamanyetizma olarak bilinir.

Bazı maddelerin atomlarıysa kalıcı manyetik momente sahiptir; yani elektron spinleri ve yörüngeleri, sıfır olmayan net bir akıma sahiptir. Bu nedenle (her zaman var olan) diyamanyetik etkinin yanında, atomların manyetik momentlerinin hizalanma olasılığı da vardır. Bu durumda momentler alanla hizalanmaya çalışır (bir dielektriğin kalıcı dipollerinin elektrik alanla hizalanması gibi) ve indüklenen manyetizma manyetik alanı büyütme eğilimindedir. Bu maddeler paramanyetiktir. Paramanyetizma genelde oldukça zayıftır çünkü hizalayıcı kuvvetler, düzeni bozmaya çalışan termal kuvvetlerden kaynaklanan kuvvetlerle kıyaslandığında oldukça zayıftır. Paramanyetizma ayrıca sıcaklığa da duyarlıdır. (Metaldeki iletkenlikten sorumlu olan elektronların spinlerinden kaynaklanan paramanyetizma, istisnadır. Bu olguyu burada tartışmayacağız.) Sıradan paramanyetizma için, sıcaklık düştükçe etki güçlenir. Çarpışmaların bozucu etkisinin azaldığı düşük sıcaklıklarda hizalanma artar. Diğer yandan diyamanyetizma az ya da çok sıcaklıktan bağımsızdır. Manyetik momentin olduğu herhangi bir maddede, diyamanyetik etkinin yanında paramanyetik etki de bulunur fakat genelde paramanyetik etki baskındır.

II. Cildin 11. Bölümünde bütün elektrik dipollerinin kendi ortak elektrik alanları nedeniyle hizalandığı *ferroelektrik* malzemeleri tanımlamıştık. Benzer şekilde bütün atomik momentlerin hizalandığı ferroelektrikliğin manyetik benzetimini hayal edebiliriz. Eğer bunun nasıl olacağını hesaplamak isterseniz, manyetik kuvvetler elektrik kuvvetlerden daha küçük olduğu için, termal hareketlerin bir derece Kelvin sıcaklığının birkaç onda biri kadar düşük sıcaklıklarda bile hizalanmayı bozduğunu göreceksiniz. Bu nedenle oda sıcaklığında mıknatısların kalıcı bir hizalanmaya sahip olması imkânsızdır.

Diğer yandan, bu durum tam olarak demirde meydana gelen şeydir. Demirin farklı atomlarının manyetik momentleri arasında, doğrudan manyetik etkileşimlerden daha büyük, etkin bir kuvvet vardır. Bu, sadece kuantum mekaniğiyle açıklanabilecek, doğrudan olmayan bir etkidir. Doğrudan manyetik etkileşimlerden on bin kat daha güçlüdür ve ferromanyetik malzemelerdeki momentlerin hizalanmasından sorumludur. Bir sonraki bölümde bu özel etkileşimi tartışacağız.

Size diyamanyetizma ve paramanyetizmanın niteliksel bir açıklamasını vermeye çalıştık; ama şunu da eklemeliyiz ki, malzemelerin manyetik etkilerini klasik fiziği kullanarak açıklamanın herhangi bir yolu yoktur. Bunun gibi manyetik etkiler *tamamen kuantum mekaniksel etkilerdir*. Bununla birlikte bazı sözde klasik fikirler geliştirip, ne olup bittiğini o şekilde anlamaya çalışmak mümkündür. Bazı klasik fikirler geliştirebilir ve malzemelerin davranışını tahmin edebilirsiniz; fakat bu argümanlar herhangi bir anlamda "kabul görmüş" değildir çünkü bu manyetik etkilerin her biri tam olarak kuantum mekaniksel olaylardır. Diğer yandan plazma ya da çok sayıda serbest elektronun bulunduğu ve elektronların klasik mekanik yasalara uyduğu bazı durumlar da vardır. Bu koşullar altında klasik manyetizmanın bazı teoremleri uygulanabilir. Ayrıca bazı klasik fikirler tarihsel açıdan da önemlidir. İnsanlar başlangıçta manyetik malzemelerin davranışlarını ve anlamını klasik fikirleri kullanarak anlamaya

çalıştılar. Son olarak, daha önce gösterdiğimiz gibi, klasik mekanik ne olacağına dair bazı yararlı tahminlerde bulunabilir; aslında en doğru yolun önce kuantum mekaniği öğrenmek ve daha sonra kuantum mekaniği açısından manyetizmayı anlamaktır.

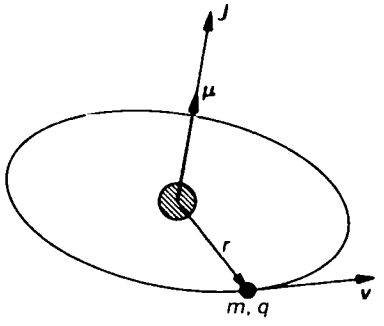
Diğer yandan, diyamanyetizma gibi basit olguları öğrenmek için kuantum mekaniğinin öğrenilmesini beklemeyiz. Olan şeylerin yarısını açıklayabildiği konusunda klasik mekaniğe güvenmek durumundayız; bununla birlikte bu argümanların gerçekte doğru olmadığını da anlamalıyız. Bu nedenle, farklı şeyleri ispatladıklarından dolayı kafanızı karıştıracak bir dizi klasik manyetizma teoremi geliştireceğiz. Son teorem hariç, hepsi yanlış çıkacaktır. Daha da ötesi, hepsi fiziksel dünyayı, kuantum mekaniğine değinmeden, yanlış şekilde tanımlayacaktır.

34-2 Manyetik moment ve açısal momentum

Klasik mekaniğin kanıtlamak istediğimiz ilk teoremi şudur: Bir elektron dairesel bir yörüngede hareket ediyorsa (örneğin merkezcil bir kuvvetin etkisi altında çekirdeğin etrafında dönmek gibi) manyetik moment ile açısal momentum arasında belirli bir oran vardır. $\boldsymbol{J}$ elektronun açısal momentumu ve $\boldsymbol{\mu}$ da manyetik momenti olsun. Açısal momentumun büyüklüğü elektronun kütlesi çarpı hız çarpı yörüngenin yarıçapıdır (*bkz.* Şekil 34-2). Yörünge düzlemine dik bir doğrultuya sahiptir.

$$J = mvr \tag{34.1}$$

(Bu elbette göreli olmayan bir denklemdir fakat atomlar için iyi bir yaklaşıklıktır; çünkü v/c genelde $e^2/\hbar c \approx 1/137$ mertebesinde veya yüzde biri kadardır.)



Şekil 34-2 Herhangi bir dairesel yörüngede μ manyetik momenti $q/2m$ çarpı J açısal momentumuna eşittir.

Benzer yörüngenin manyetik momenti akım çarpı alandır (*bkz.* Cilt II, Bölüm 14-5). Akım, yörüngenin herhangi bir noktasından birim zamanda geçen yüktür yani q yükü çarpı dönme frekansıdır. Frekans, hız bölü yörüngenin çevresi olduğundan

$$I = q\,\frac{v}{2\pi r}$$

olarak yazılır. Alan πr^2 olduğundan, manyetik moment

$$\mu = \frac{qvr}{2} \tag{34.2}$$

olarak ifade edilir. O da ayrıca yörünge düzlemine diktir. Bu nedenle J ve μ aynı yöndedir;

$$\mu = \frac{q}{2m}\,J \text{ (yörünge)} \tag{34.3}$$

Oran ne hıza ne de yarıçapa bağlıdır. Dairesel yörüngede hareket eden herhangi bir parçacık için manyetik moment, $q/2m$ çarpı açısal momentumdur. Bir elektronun yükü negatiftir; bu yükü q_e olarak adlandırırsak; elektron için şunu yazabiliriz:

$$\mu = -\frac{q_e}{2m}\,J \text{ (elektron yörüngesi)} \tag{34.4}$$

Bu klasik olarak beklediğimiz şeydir ve gariptir ki kuantum mekaniği için de doğrudur. Bununla birlikte eğer klasik fiziği takip ederseniz yanlış cevaplar verdiği diğer durumları görebilirsiniz ve hangi şeylerin yanlış hangi şeylerin doğru olduğunu görmek oldukça eğlenceli bir oyundur. Kuantum mekaniğinde *genel olarak* nelerin doğru olduğunu da verelim. İlk olarak (34.4) denklemi *yörünge hareketi* için doğrudur, fakat var olan tek manyetizma bu değildir. Elektron aynı zamanda kendi ekseni etrafında bir spin dönmesine sahiptir (dünyanın kendi ekseni etrafında dönmesi gibi) ve bunun sonucunda hem açısal momentuma hem de manyetik momente sahiptir. Fakat tamamen kuantum mekaniksel etkilerden dolayı –klasik bir açıklama yoktur– elektron spini için μ ile J arasındaki oran, elektronun yörüngesel hareketi için aynı oranın iki katıdır;

$$\mu = -\frac{q_e}{m}J \text{ (elektron spini)} \tag{34.5}$$

Genel konuşmak gerekirse, herhangi bir atomda, toplam bir açısal momentum ve toplam bir manyetik moment oluşturan birçok elektron vardır ve spin ile yörünge rotasyonlarının bazı kombinasyonları bir açısal momentum ile bir manyetik moment oluşturur. Bunun böyle olması için hiçbir klasik neden olmamasına rağmen, (yalıtılmış bir atom için) manyetik momentin yönünün açısal momentumun yönüne ters olması kuantum mekaniğinde *daima doğrudur*. Bu ikisinin oranı ne $-q_e/m$ ne de $-q_e/2m$'dir fakat bunların arasında bir değer alır; çünkü spin ve yörünge katkılarının bir karışımı vardır.

$$\mu = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J \tag{34.6}$$

Buradaki g çarpanı, atomun durumuna has bir özelliktir. Saf yörünge momenti için 1 ya da saf spin momenti için 2 ya da bir atom gibi daha karmaşık sistemler için başka bir değerdedir. Elbette, bu denklem çok fazla şey söylemez. Manyetik momentin açısal momentuma *paralel* olduğunu; fakat herhangi bir büyüklüğe sahip olabileceğini söyler. Denklem (34.6)'nın biçimi uygundur, g –"Lande g-faktörü" olarak adlandırılır– büyüklüğü bir mertebesinde olan boyutsuz bir sabittir. Kuantum mekaniğinin görevlerinden biri de herhangi bir atomik durum için g-faktörünü tahmin etmektir.

Ayrıca çekirdekte ne olduğuyla da ilgilenebiliriz. Çekirdekte bir yörünge etrafında dolanan proton ve nötronlar vardır ve bunlar aynı zamanda, elektron gibi, bir iç spine sahiptir. Yine, manyetik moment açısal momente paraleldir. İkisinin arasındaki oranın büyüklük mertebesi, bir çember etrafında dolanan bir *proton* için beklediğimiz değerdir ve Denk. (34.3)'teki verilen *m protonun* kütlesine eşittir. Bu nedenle

$$\mu = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)J \tag{34.7}$$

yazılabilir. Burada m_p protonun kütlesidir ve g *–nükleer g-faktörü* olarak adlandırılan– her bir çekirdek için ayrı belirlenmesi gereken bir sayıdır.

Çekirdek için bir diğer önemli farklılık protonun spin manyetik momentinin elektronda olduğu gibi g-faktörü 2 *değildir*. Proton için $g = 2 \cdot (2{,}79)$'dur. Nötron da spin manyetik momentine sahiptir ve manyetik momentinin açısal momentumuna oranı $2\cdot(-1{,}91)$ değerindedir. Diğer bir deyişle nötron manyetik anlamda tam olarak "yüksüz" değildir. Küçük bir mıknatıs gibidir ve *negatif* yüklü dönen bir parçacığın sahip olacağı türden bir manyetik momente sahiptir.

34-3 Atomik mıknatısların presesyonu

Açısal momentumla orantılı manyetik momente sahip olmanın sonuçlarından birisi manyetik alana konulan atomik bir mıknatısın *yalpalamasıdır*. İlkin klasik olarak düşünelim. Düzgün bir manyetik alanda serbestçe salınan bir $\boldsymbol{\mu}$ manyetik momentimiz olsun. $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$'ye eşit bir $\boldsymbol{\tau}$ torku hisseder ve bu tork manyetik momenti alan yönünde yönlendirmeye çalışır. Fakat atomik mıknatıs bir jiroskoptur; $\boldsymbol{J}$ açısal momentumuna sahiptir. Bu nedenle, manyetik alandan kaynaklanan tork mıknatısın alan yönünde yönelmesine neden olmaz. Bunun yerine mıknatıs *yalpalar*, tıpkı I. Cildin 20. Bölümünde jiroskobu analiz ederken gördüğümüz gibi. Açısal momentum –ve onunla birlikte manyetik moment– manyetik alana paralel bir eksende yalpalar. Presesyon hızını ilk cildin 20. Bölümünde kullandığımız yöntemle bulabiliriz.

Küçük bir Δt zaman aralığında açısal momentumun J'den J' değerine, Şekil 34-3'te gösterildiği gibi, $\boldsymbol{B}$ manyetik alanının yönüne göre her zaman aynı θ açısında kalarak değiştiğini varsayalım. Presesyonun açısal hızını ω_p olarak adlandırırsak, presesyonun Δt zaman aralığındaki açısı $\omega_p\,\Delta t$ olur. Şeklin geometrisinden Δt zaman aralığında açısal mometumun değişimini

$$\Delta J = (J\sin\theta)(\omega_p\,\Delta t)$$

olarak yazabiliriz.

Bu nedenle açısal momentumun değişim hızı

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \sin\theta \tag{34.8}$$

ve karşılık gelen tork

$$\tau = \mu B \sin\theta \tag{34.9}$$

presesyonun açısal hızıysa

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B \tag{34.10}$$

olur. Denklem (34.6)'dan μ / J ifadesini çekersek atomik bir sistem için

$$\omega_p = g \frac{q_e B}{2m} \tag{34.11}$$

presesyon frekansını B'yle orantılı buluruz. Bir atom için (ya da elektron)

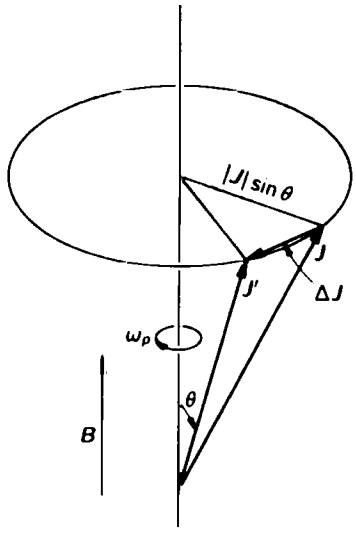
$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1{,}4 \text{ MegaHertz/Gauss})\, gB \tag{34.12}$$

olduğunu ve bir çekirdek için

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0{,}76 \text{ KiloHertz/Gauss})\, gB \tag{34.13}$$

değerlerini hatırlamamız yararlı olacaktır. (Atom ve çekirdek için kullandığımız denklemler her iki durumda da farklı g değerleri kullanıldığı için farklıdır.)

Klasik kurama göre elektron yörüngeleri ve spinleri bir manyetik alanda yalpalar. Bu kuantum mekaniğinde de doğru mudur? Kesinlikle doğrudur fakat "presesyonun" anlamı farklıdır. Kuantum mekaniğinde klasik anlamıyla bir açısal momentumun *yönünden* bahsedilemez; bununla birlikte; "presesyon" olarak adlandırdığımız olguyla bir benzerlik kurabiliriz. Kuantum mekaniksel bakış açısından bu konuyu sonra tartışacağız.



Şekil 34-3 Açısal momentumu J olan ve bir B manyetik alanında ω_p açısal hızıyla yalpalayan μ manyetik momentine sahip bir parçacık.

34-4 Diyamanyetizma

Şimdi klasik bakış açısından diyamanyetizmayı inceleyelim. Birkaç şekilde incelenebilir, fakat biz güzel bir yolu takip edeceğiz. Atomun yakınlarında yavaşça bir manyetik alanı devreye soktuğumuzu düşünelim. Manyetik alan değiştikçe manyetik indüksiyon nedeniyle bir *elektrik* alan üretilir. Faraday yasasından E'nin herhangi bir kapalı yol etrafındaki çizgi integrali, yol boyunca manyetik akının değişim hızına eşittir. Şekil 34-4'te gösterildiği gibi, yarıçapı r olan ve atomun merkeziyle eşmerkezli bir Γ yolunu ele alalım. Bu yol etrafındaki elektrik alanının ortalama teğetsel bileşeni

$$E 2\pi r = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2)$$

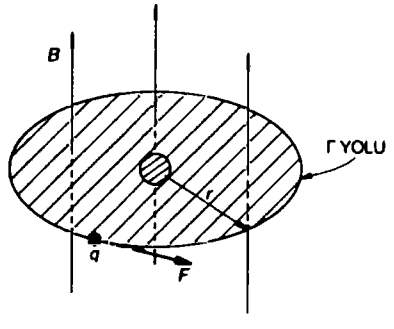
olur ve şiddeti

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

olarak hesaplanır.

Atomdaki bir elektrona etki eden indüklenmiş elektrik alan, dJ/dt açısal momentumunun değişim hızına eşit bir $-q_e E r$ torku meydana getirir;

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2}\frac{dB}{dt} \tag{34.14}$$



Şekil 34-4 Bir atomdaki elektronlara etki eden indüklenmiş elektrik kuvvetleri.

Sıfır alandan zamana göre integral aldığımızda, alanın uygulanmaya başlamasından kaynaklanan açısal momentumda meydana gelen değişim

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2} B \tag{34.15}$$

olarak yazılır. Bu, alan uygulanmaya başlandığında elektronlara verilen döndürmeden kaynaklanan fazladan açısal momentumdur.

Eklenen bu açısal momentum ek bir manyetik moment yaratır, çünkü yörüngesel bir harekettir ve $-q_e/2m$ çarpı açısal momentuma eşittir. İndüklenen diyamanyetik momentse şudur:

$$\Delta\mu = -\frac{q_e}{2m}\Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m} B \tag{34.16}$$

Eksi işareti (Lorentz yasasını uyguladığınızda göreceğiniz gibi) eklenen momentumun manyetik alana zıt olduğu anlamına gelir.

(34.16) denklemini biraz farklı bir şekilde yazabiliriz. r^2, B'ye paralel bir eksenden atoma kadar olan yarıçaptır; bu nedenle eğer B z-ekseni yönündeyse, $x^2 + y^2$ değerini alır. Eğer küresel simetrik atomları ele alırsak $x^2 + y^2$'nin ortalaması (bütün yönlerde atomların doğal eksenleri üzerinden alınan ortalama), atomun merkezinden radyal uzaklığın karesinin ortalamasının 2/3 katıdır. Bu nedenle genelde (34.16) denklemi

$$\Delta\mu = -\frac{q_e^2}{6m}\langle r^2\rangle_{\text{ort}} B \tag{34.17}$$

şeklinde ifade edilir.

Herhangi bir durumda B manyetik alanıyla orantılı ve ona zıt indüklenmiş bir atomik moment buluruz. Söz konusu etkiye diyamanyetizma denir. Bu, düzgün olmayan bir manyetik alandaki bir bizmut parçasının üzerine etki eden küçük kuvvetten sorumlu manyetik etkidir. (Alandaki indüklenmiş momentlerin enerjisini hesaplayarak bu kuvveti bulabilirsiniz ve madde yüksek alanlı bir bölgeye girerken ya da çıkarken enerjisinin nasıl değiştiğini görebilirsiniz.)

Ana problemimiz hâlâ ortada; yarıçapın kare ortalaması $\langle r^2\rangle_{\text{ort}}$ nedir? Klasik mekaniğin bir cevabı yoktur. Geriye dönüp kuantum mekaniğiyle işe başlamalıyız. Atomda elektronun tam olarak nerede olduğunu söyleyemeyiz; sadece bir yerde olma olasılığından bahsederiz. Eğer olasılık dağılımı için $\langle r^2\rangle_{\text{ort}}$ terimini merkezden olan uzaklığın karesinin ortalaması olarak yorumlarsak, kuantum mekaniği tarafından verilen diyamanyetik moment Denklem (34.17)'le aynı olur. Bu denklemde verilen elbette tek bir elektron için momenttir. Toplam moment, atomdaki tüm elektronların momentlerinin toplamıdır. Sürpriz olan şey, klasik fikirlerle kuantum fikirlerinin aynı sonuçları vermesidir, bununla birlikte, göreceğimiz gibi, (34.17) denklemini ortaya koyan klasik fikir aslında klasik mekanikte geçerli değildir.

Benzer diyamanyetik etki bir atom kalıcı diyamanyetik momente sahip olduğunda da meydana gelir. O zaman sistem manyetik alanda yalpalayacaktır. Bütün atom yalpaladıkça küçük ek bir açısal hız kazanır ve bu ufak dönüş manyetik momente ufak bir düzeltme getiren küçük bir akım yaratır. Bu, diyamanyetik etkinin farklı bir gösterilme şeklidir. Fakat paramanyetizma hakkında konuşurken bu konuda çok fazla endişe duymamıza gerek olmayacak. Eğer diyamanyetik etki ilk kez hesaplanırsa, burada yaptığımız gibi, yalpalamadan kaynaklanan ek küçük bir akımdan endişe duymamıza gerek kalmaz. Zaten diyamanyetik terimde bu katkı eklenmiştir.

34-5 Larmor teoremi

Şu ana kadar elde ettiğimiz bilgilerle şimdiden bazı sonuçlara varabiliriz. Birincisi, klasik kuramda moment μ, her atom için özel bir orantı sabiti çarpı J'yle orantılıydı. Elektronların spinleri yoktu ve orantı sabiti daima $-q_e/2m$ değerindeydi; dolayısıyla (34.6) denkleminde $g = 1$ olarak almalıyız. μ/J oranı

elektronların iç hareketinden bağımsızdı. Bu nedenle, klasik kurama göre, bütün elektron sistemleri aynı açısal hızla yalpalar (Bu, kuantum mekaniğinde doğru *değildir*). Bu sonuç birazdan kanıtlayacağımız klasik mekanikteki bir teoremle ilişkilidir. Merkezi bir nokta etrafında bir çekim kuvvetiyle bir arada duran çok sayıda elektronumuz olsun; aynı, elektronların çekirdek tarafından çekilmesi gibi. Elektronlar ayrıca birbirleriyle de etkileşir ve genelde karmaşık hareketlere sahiptir. Manyetik alan olmadığı durumda hareketi çözdüğümüzü düşünelim ve zayıf bir manyetik alanda hareketin ne olacağını hesaplamaya çalışalım. Teorem, zayıf bir manyetik alandaki hareketin, alanın olmadığı durumdaki çözüme her zaman, $\omega_L = q_e B/2m$ açısal hızında ek bir dönme hareketi vereceğini söyler (Bu eğer $g = 1$ olursa ω_p değeriyle aynıdır). Elbette, olası çok sayıda hareket vardır. Manyetik alanın olmadığı her harekete karşılık gelen bir hareket vardır ve bu, başlangıçtaki hareket artı dönme hareketinden oluşur. Bu Larmor teoremi olarak adlandırılır ve ω_L, *Larmor frekansıdır.*

Teoremin nasıl kanıtlanacağını göstereceğiz fakat şimdi detayları tartışalım. İlk olarak merkezcil kuvvet alanındaki bir elektronu ele alalım. Bu kuvvet merkeze doğru yönelen $F(r)$ kuvvetidir. Eğer manyetik alanı devreye sokarsak ek bir $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kuvveti ortaya çıkar; bu nedenle toplam kuvvet

$$\boldsymbol{F}(r) + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{34.18}$$

olur. Şimdi $\boldsymbol{B}$'ye paralel ve kuvveti merkezinden geçen bir eksen etrafında ω açısal hızıyla dönen bir koordinat sistemi içinden bakalım. Bu artık eylemsiz bir sistem değildir bu nedenle uygun sözde kuvvetleri koyacağız; I. Cildin 19. Bölümünde haklarında konuştuğumuz merkezkaç ve Coriolis kuvvetlerini. ω açısal hızıyla dönen bir çerçevede ayrıca hızın radyal, v_r, bileşeniyle orantılı *teğetsel* bir kuvvet

$$F_t = -2m\omega v_r \tag{34.19}$$

ve radyal bir kuvvet

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t \tag{34.20}$$

ortaya çıkar; burada v_t, dönen çerçevede ölçülen hızın teğetsel bileşenidir (Dönen ve eylemsiz çerçeveler için radyal bileşen v_r aynıdır).

Şimdi yeterince küçük açısal hızlar için ($\omega r \ll v_t$) (34.20) denklemindeki ilk (merkezkaç) terimi ikinci terime kıyasla (Coriolis) ihmal edebiliriz. O zaman (34.19) ve (34.20) denklemleri

$$\boldsymbol{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{34.21}$$

olarak yazılabilir. Eğer dönmeyi ve manyetik alanı birleştirirsek (34.21) denklemindeki kuvveti (34.18) denklemine ekleriz. Toplam kuvvet

$$\boldsymbol{F}(r) + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} \tag{34.22}$$

olarak bulunur. Son terimi elde etmek için vektörel çarpımın sırasını ve dolayısıyla (34.21) denkleminin işaretini değiştirdik. Sonucumuza bakacak olursak

$$2m\boldsymbol{\omega} = -q\boldsymbol{B}$$

eşitliğinde sağ taraftaki iki terim birbirini sadeleştirir ve hareketli çerçevedeki tek kuvvet $\boldsymbol{F}(r)$'dir. Elbette, elektronun dönen gözlem çerçevesinde hareketi, manyetik alan olmadığı zamanki hareketidir. Bir elektron için Larmor teoremini kanıtlamış olduk. Kanıt, ω'nin küçük olduğunu varsaydığı için, teorem aynı zamanda zayıf alanlar için de doğrudur. Sizden bekleyebileceğimiz tek geliştirme, çok sayıda elektronun aynı merkezi alanda olduğu ve birbirleriyle etkileştiği durumu ele alıp aynı teoremi kanıtlamanızdır. Bu nedenle atom ne kadar karmaşık olursa olsun eğer bir merkezi alan varsa kuram doğrudur. Fakat bu klasik mekaniğin sonudur çünkü hareketin yalpalama hareketi durumunda bu doğru değildir. (34.11) denkleminin presesyon frekansı ω_p sadece ω_L'ye eşittir; elbette $g = 1$ olması şartıyla.

34-6 Klasik fizik ne diyamanyetizmayı ne de paramanyetizmayı öngörür

Şimdi klasik mekaniğe göre ne diyamanyetizmanın ne de paramanyetizmanın olabileceğini göstereceğiz. Kulağa delice gelebilir; ilk olarak paramanyetizmayı, diyamanyetizmayı, yalpalayan yörüngeleri ve benzeri şeyleri kanıtladık şimdi de hepsinin yanlış olduğunu kanıtlayacağız. Evet! Eğer klasik mekaniği yeterince uzun takip edersek manyetik etkilerin olamayacağını görürüz; *hepsi birbirlerini sıfırlar.* Eğer belirli bir bölgede klasik fikirlerle yola çıkarsak ve yeterince ileri gitmezsek, istediğiniz cevabı elde edebilirsiniz. Fakat tek doğru kanıt bir manyetik etkinin olmadığı yönünde olacaktır.

Klasik mekaniğin sonuçlarından biri şudur: eğer içinde elektronlardan, protonlardan ve her ne içeriyorsa bir gaza sahip bir sisteminiz varsa ve bunu bir kutu içerisinde tutuyorsanız, kutunun içinde hiçbir şey değişmeyecektir ve böylece manyetik etki olmayacaktır. Kendisini bir arada tutan bir yıldız gibi yalıtılmış bir sisteminiz varsa manyetik etkiye sahip olma ihtimali vardır ve manyetik alan altında yıldız dönmeye başlayabilir. Fakat bu koşullar altında dönmeyen bir malzeme parçasına sahipseniz bir manyetik etkiden bahsedemezsiniz. Burada kastettiğimiz şudur: Belirli bir sıcaklıkta sadece bir termal denge durumu bulunduğunu varsayarız. Kuram o zaman, eğer bir manyetik alanı devreye sokarsanız ve sistemin termal dengeye gelmesini beklerseniz, paramanyetizmanın ya da diyamanyetizmanın olamayacağını söyler; indüklenen manyetik moment yoktur. Kanıt: İstatistiksel mekaniğe göre bir sistemin herhangi bir hareket durumunda bulunma olasılığı $e^{-U/kT}$ ifadesiyle orantılıdır, burada U hareket enerjisidir. Peki hareketin enerjisi ne anlama gelir? Sabit bir manyetik alanda hareket eden bir parçacık için enerji, var olan potansiyel enerji artı $mv^2/2$'dir ve ek bir manyetik alan yoktur. [Elektromanyetik alandan doğan kuvvetlerin $q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ olduğunu ve manyetik alan tarafından etkilenmeyen iş hızının $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$, $q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$'ye eşit olduğunu biliyorsunuz.] Bu nedenle manyetik alan olsun ya da olmasın bir sistemin enerjisi her zaman kinetik ve potansiyel enerjinin toplamıyla verilir. Herhangi bir hareket sadece enerjiye bağlı olduğu için – yani hız ve konuma– manyetik alanın olması ya da olmaması önemli değildir. Bu nedenle *termal* denge için manyetik alanın bir etkisi yoktur. Eğer bir kutu içinde bir sisteme sahipseniz ve ikinci bir kutuda manyetik alanın etkisinde bir sisteminiz varsa, birinci kutuda herhangi bir noktada belli bir hıza rastlama olasılığınız ikinci kutuyla aynıdır. Birinci kutu bir ortalama dönen akıma sahip değilse (sabit duvarlarla dengedeyse), ortalama manyetik moment yoktur. İkinci kutudaki hareketlerin hepsi aynıysa ortalama bir manyetik moment yoktur. Bu nedenle eğer sıcaklık sabitse ve alan açıldıktan sonra termal dengeye yeniden ulaşılmışsa, alan tarafından indüklenen bir manyetik alan olamaz; klasik mekaniğe göre. Manyetizmayla ilgili tatmin edici cevapları sadece kuantum mekaniğinden elde edebiliriz.

Ne yazık ki, kuantum mekaniğini tam olarak anladığınızı düşünmüyoruz; bu nedenle konuyu tartışmak oldukça zordur. Diğer yandan ilk olarak bütün kuralları öğrenerek ve daha sonra farklı durumlara uygulayarak her zaman bir şeylerin öğrenilemeyeceğini de biliyoruz. Bu derste üzerine çalıştığımız neredeyse bütün konular farklı bir şekilde incelenmiştir. Elektrik konusunda, Maxwell denklemleriyle "bir noktada buluştuğumuzu" ve bir sonuç çıkarttığımızı belirtmiştik. Bu bir yöntemdir. Fakat şimdi, kuantum denklemlerini yazıp bütün sonuçları elde ederek yeni "bir noktada buluştuğumuzu" söylemeyeceğiz. Sadece nereden geldiklerini öğrenmeden önce bazı kuantum mekaniği yasalarından bahsettik. Şimdi devam ediyoruz.

34-7 Kuantum mekaniğinde açısal momentum

Manyetik moment ile açısal momentum arasındaki ilişkiyi görmüş olduk. Keyifliydi. Peki manyetik moment ve açısal momentumun kuantum mekaniğindeki anlamı nedir? Kuantum mekaniğinde manyetik moment gibi şeyleri tanımlamanın en iyi yolu, tam olarak ne anlama geldiklerini anlamak için, enerji gibi

nicelikler cinsinden açıklamaktır. Şimdi manyetik momenti enerji cinsinden açıklamak kolaydır çünkü bir manyetik alandaki momentin enerjisi klasik kuramda $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$'dir. Bu nedenle kuantum mekaniğindeki yeni tanımımız şudur: Eğer manyetik alandaki bir sistemin enerjisini hesaplarsanız ve alanın büyüklüğüyle (küçük alanlar için) orantılı olarak bulursanız, katsayıyı alan yönündeki manyetik momentin bileşeni olarak adlandırırız. (Şimdilik tam olarak ne anlama geldiğini bilmek zorunda değiliz; sadece sıradan manyetik moment hakkında konuşuyoruz.)

Şimdi kuantum mekaniğinde açısal momentum fikrini tartışmak istiyoruz ya da açısal momentumun kuantum mekaniğinde ne anlama geldiğini. Yeni yasaları öğrendikçe her bir kelimenin aslında tam olarak aynı şeyi açıklamadığını görüyoruz. "Açısal momentumun ne olduğunu biliyorum. Torkla değişen bir şeydir" diyebilirsiniz. Peki tork nedir? Kuantum mekaniğinde eski nicelikleri yeniden tanımlamamız gerekir. Yani "kuantaçısal momentum" ya da benzer bir isim vermemiz daha uygun olabilirdi çünkü açısal momentum kuantum mekaniğinde tanımlandığı gibidir. Fakat kuantum mekaniğinde eski açısal momentum fikrine yakın bir tanım bulursak, sistem yeterince büyük olduğunda, yeni bir kelime icat etmek doğru olmayacaktır. Bunu açısal momentum olarak adlandırabiliriz. Bu anlayışla tanımlayacağımız söz konusu şey açısal momentum olacaktır. Büyük sistemler için klasik mekanikte açısal momentum olarak tanıdığımız şeye benzeyecektir.

İlk olarak boş uzaydaki bir atom gibi, açısal momentumun korunduğu bir sistemi ele alalım. Bunun gibi bir sistem (dünyanın kendi ekseni etrafında dönmesi gibi), seçeceğimiz herhangi bir eksen etrafında dönebilirdi. Ve herhangi bir spin durumu için, hepsinin aynı enerjili ve her bir durumun açısal momentumun ekseninin yönüne bağlı olduğu çok sayıda "farklı" durum olabilir. Bu nedenle klasik kuramda verilen bir açısal momentum için aynı enerjili sonsuz sayıda olası durum vardır.

Bununla birlikte kuantum mekaniğinde birkaç farklı durum meydana gelebilir. Birincisi, böyle bir sistemin *var olabileceği* durum sayısı sınırlandırılmıştır; sadece sonlu sayıda durum olabilir. Eğer sistem küçükse sonlu sayı oldukça küçüktür ve eğer sistem büyükse sonlu sayı gittikçe büyür. İkincisi açısal momentum yönünün verilmesiyle bir "durum" *tanımlanamaz* fakat sadece açısal momentumun belirli bir yöndeki bileşeninin verilmesiyle tanımlanabilir; örneğin z-yönü. Klasik olarak toplam açısal momentumu J olan bir nesne z-bileşeni için $+J$'den $-J$'ye herhangi bir değer alabilir. Fakat kuantum mekaniksel olarak açısal momentumun z-bileşeni sadece belirli kesikli değerler alabilir. Belirli bir enerjili herhangi bir sistem –atom ya da çekirdek gibi– karakteristik bir j sayısına sahiptir ve açısal momentumun z-bileşeni sadece aşağıdaki değerleri alabilir;

$$\begin{aligned} &j\hbar \\ &(j-1)\hbar \\ &(j-2)\hbar \\ &\vdots \\ &-(j-2)\hbar \\ &-(j-1)\hbar \\ &-j\hbar \end{aligned} \qquad (34.23)$$

En büyük z-bileşeni $j\hbar$'tır; ondan bir küçük olan $\hbar$ birimi kadar azdır ve bu şekilde azala azala $-j\hbar$ değerine kadar iner. j "sistemin spin"idir (bazıları "toplam açısal momentum kuantum sayısı" olarak adlandırır; fakat biz "spin" olarak adlandıracağız).

Söylediklerimizin sadece "özel" z–ekseni için doğru olduğu konusunda endişe duyuyor olabilirsiniz fakat bu böyle değildir. Spini j olan bir sistem için herhangi bir eksen boyunca açısal momentum bileşeni sadece (34.23)'teki değerleri

alabilir. Oldukça gizemli olmasına rağmen şimdilik bunu kabul etmenizi istiyoruz. Bu konuya daha sonra değineceğiz. En azından z-bileşenin eksi bir sayıdan artı bir sayıya gittiğini ve z-ekseninin artı yönünün neresi olduğu konusunda şimdilik bir seçim yapmak zorunda olmadığımızı hayal edin. (Elbette, eğer $+j$'den farklı eksi bir sayıya gittiğini söyleseydik bu çok daha gizemli olurdu çünkü z-eksenini farklı bir yönü işaret ederek tanımlayamazdık.)

Şimdi eğer açısal momentumun z-bileşeni $+j$'den $-j$'ye tamsayılarla gitmek zorundaysa j de tamsayı olmalıdır. Hayır! Hiç de değil; iki j bir tamsayı eder. $+j$ ile $-j$ arasındaki fark sadece tamsayıdır. Bu nedenle $2j$'nin tek ya da çift sayı olmasına göre j spini ya tamsayıdır ya da yarım tamsayıdır. Örneğin spini $j = 3/2$ olan lityumunkine benzer bir çekirdek alalım. z-ekseni etrafındaki açısal momentumu $\hbar$ biriminde

$$+3/2$$
$$+1/2$$
$$-1/2$$
$$-3/2$$

olur. Eğer çekirdek boş uzaydaysa ve dış bir alan yoksa hepsi aynı enerjiye sahip dört olası durum vardır. Eğer spini iki olan bir sisteme sahipsek o zaman açısal momentumun z-bileşeni $\hbar$ biriminde

$$2$$
$$1$$
$$0$$
$$-1$$
$$-2$$

olur. Eğer kaç durum olduğunu sayarsanız $(2j + 1)$ olasılık olduğunu görürsünüz. Diğer bir deyişle eğer bana enerjiyi ve j spinini söylerseniz, ben de tam olarak $(2j+1)$ durum olduğunu ve her bir enerjinin de açısal momentumun z-bileşeninin farklı olası değerlerine karşılık geldiğini söylerim.

Bir gerçeği daha eklemek istiyorum. Eğer bilinen j değerli atomdan rastgele birisini seçip açısal momentumun z-bileşenini ölçerseniz, her biri eşit şansa sahip olası değerlerden birini bulabilirsiniz. Aslında tüm durumlar tek bir durumdur ve biri diğeri kadar olasıdır. Her biri dünyada aynı "ağırlığa" sahiptir. (Özel bir örneği ayırmak için özel bir şey yapılmadığını varsayıyoruz.) Tesadüfi bir şekilde bu gerçekliğin klasik olarak bir karşılığı vardır. Eğer klasik olarak benzer soruyu sorarsınız; "Her biri aynı toplam açısal momentuma sahip rastgele sistemler alırsak, özel bir açısal momentumun z-bileşenini bulma olasılığı ne olur?" Cevap şu olur: Maksimumdan minimuma bütün değerler eşit olasılığa sahiptir. (Bunu kolayca görebilirsiniz.) Klasik sonuç, kuantum mekaniğindeki $(2j+ 1)$ olası durumla aynıdır.

Şimdiye dek ele aldıklarımızın ardından, bir diğer ilginç ve sürpriz sonuç daha elde edebiliriz. Klasik hesaplamaların nihai sonucunda ortaya çıkan nicelik, $\boldsymbol{J}$ açısal momentumunun büyüklüğünün *karesidir*; diğer bir deyişle $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}$'dir. Görünen o ki, klasik kuralları kullanarak ve basit bir kuralı takip ederek doğru kuantum mekaniksel denklemi tahmin etmek olasıdır: $J^2 = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}$ ile $j(j + 1)\hbar^2$ terimini yerdeğiştirmek. Bu kural genel olarak kullanılır ve genelde de doğru sonucu verir fakat her zaman değil. Bu kuralın neden doğru olduğunu göstermek istiyoruz.

$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}$ skaler çarpımı

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

olarak yazılır. Skaler olduğu için spinin herhangi bir yönü için aynıdır. Rastgele herhangi bir atomik sistemi seçtiğimizi ve J_x^2, J_y^2, J_z^2 ölçümleri yaptığımızı düşünelim, ortalama değer her biri için aynıdır. (Herhangi bir yön için özel bir ay-

rım yoktur.) Bu nedenle $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$'nin ortalaması herhangi bir bileşenin ortalamasının üç katına eşittir:

$$\langle \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}\rangle_{\text{ort}} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}}$$

Fakat $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ bütün yönlerde aynı olduğu için ortalama değeri elbette onun sabit değeridir:

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}} \tag{34.24}$$

Eğer kuantum mekaniği içinde benzer denklemi kullanacağımızı varsayarsak kolayca $\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}}$ değerini bulabiliriz. Sadece J_z^2'nin olası $(2j+1)$ değerlerinin toplamını alacağız ve toplam sayıya böleceğiz:

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}} = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \cdots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1}\hbar^2 \tag{34.25}$$

Spini 3/2 olan bir sistem için

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}} = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4}\hbar^2 = \frac{5}{4}\hbar^2$$

elde ederiz ve

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{ort}} = 3\frac{5}{4}\hbar^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\hbar^2$$

sonucuna ulaşırız. (34.25) denklemini çıkarmayı size bırakıyoruz ve (34.24) denklemini kullanarak genel sonucu elde ediyoruz:

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = j(j+1)\hbar^2 \tag{34.26}$$

Klasik olarak düşünmemize rağmen $\boldsymbol{J}$'nin z-bileşeninin en büyük olası değeri $\boldsymbol{J}$'nin büyüklüğüdür –yani $\sqrt{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}}$– ve kuantum mekaniksel olarak J_z'nin maksimum değeri bundan biraz küçüktür çünkü $j\hbar$ her zaman $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ değerinden küçüktür. Açısal momentum asla "tam olarak z-yönünde" olmaz.

34-8 Atomların manyetik enerjileri

Şimdi yeniden manyetik moment hakkında konuşalım. Kuantum mekaniğinde atomik sistemlerin manyetik momentinin (34.6) denklemi sayesinde açısal momentum cinsinden yazılabildiğini söylemiştik:

$$\boldsymbol{\mu} = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\boldsymbol{J} \tag{34.27}$$

Burada q_e ve m elektronun yükü ve kütlesidir.

Dış bir manyetik alana konulan atomik bir mıknatıs, alan yönündeki manyetik momentinin bileşenine bağlı olan ek bir manyetik enerjiye sahiptir.

$$U_{\text{manyetik}} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \tag{34.28}$$

olduğunu biliyoruz. $\boldsymbol{B}$'nin yönünü z-ekseninde seçersek

$$U_{\text{manyetik}} = -\mu_z B \tag{34.29}$$

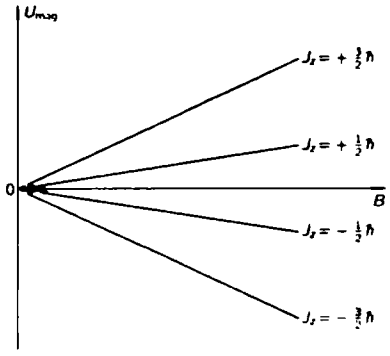
buluruz ve (34.27) denklemini kullanarak

$$U_{\text{manyetik}} = g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J_z B$$

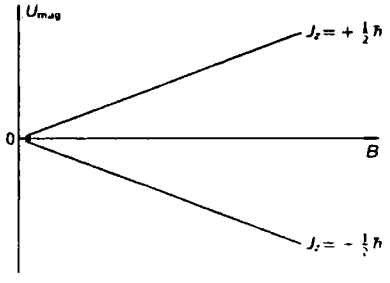
elde ederiz.

Kuantum mekaniği J_z'nin her zaman belirli değerler alacağını söyler; $j\hbar$, $(j-1)\hbar$, ..., $-j\hbar$. Bu nedenle atomik bir sistemin manyetik enerjisi gelişigüzel değildir; sadece belirli değerler alabilir. Örneğin maksimum değeri şudur:

$$g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\hbar j B$$



Şekil 34-5 Bir ***B*** manyetik alanındaki spin 3/2 sisteminin olası manyetik enerjileri.



Şekil 34-6 Bir ***B*** manyetik alanındaki bir elektronun olası iki enerji durumu.

$q_e\hbar/2m$ niceliği genelde "Bohr Magnetonu" olarak adlandırılır ve μ_B olarak yazılır:

$$\mu_B = \frac{q_e\hbar}{2m}$$

Manyetik enerjinin olası değerleri aşağıdaki gibidir:

$$U_{\text{manyetik}} = g\mu_B B \frac{J_z}{\hbar}$$

Burada $J_z/\hbar$, olası j, $(j-1)$, $(j-2)$, ..., $(-j+1)$, $-j$ değerlerini alır.

Diğer bir deyişle bir atomik sistemin enerjisi manyetik alana konulduğunda alanla orantılı bir şekilde değişir ve J_z'yle orantılıdır. Bir sistemin atomik enerjisi manyetik alan tarafından "$2j + 1$ düzeye ayrılır." Örneğin manyetik alan yokken U_0 enerjili ve $j = 3/2$ olan bir atom bir manyetik alana konulduğunda dört olası değer alır. Bu enerjiler, Şekil 34-5'te gösterildiği gibi bir enerji düzey diyagramıyla gösterilebilir. Bir ***B*** manyetik alanındaki herhangi bir atom dört olası enerjiden sadece birine sahiptir. Bu, bir manyetik alandaki bir atomik sistemin davranışını tanımlayan kuantum mekaniksel bir açıklamadır.

En basit atomik sistem bir elektrondur. Bir elektronun spini 1/2'dir bu nedenle iki olası durum vardır: $J_z = \hbar/2$ ve $J_z = -\hbar/2$. Durgun (yörünge hareketi olmayan) bir elektron için spin manyetik momenti $g = 2$ değerine sahiptir bu nedenle manyetik enerji $\pm\mu_B B$ değerlerini alabilir. Bir manyetik alandaki olası enerjiler Şekil 34-6'da gösterilmiştir. Açıkça konuşmak gerekirse elektron ya spin "yukarı" (alan boyunca) ya da spin "aşağı" (alana zıt) olabilir.

Büyük spinli sistemler için daha fazla durum vardır. J_z değerine bağlı olarak spinin "yukarı" ya da "aşağı" ya da arasındaki bir açıda "dikildiğini" söyleyebiliriz.

Kuantum mekaniksel bu sonuçları bir sonraki bölümde maddelerin manyetik özelliklerini tartışmak için kullanacağız.

35

PARAMANYETİZMA VE MANYETİK REZONANS

35-1 Kuantumlanmış manyetik durumlar

35-1 Kuantumlanmış manyetik durumlar
35-2 Stern-Gerlach deneyi
35-3 Rabi moleküler-demet yöntemi
35-4 Hacimli malzemelerin paramanyetizması
35-5 Adyabatik mıknatıssızlaştırmayla soğuma
35-6 Nükleer manyetik rezonans

Son bölümde, bir şeyin açısal momentumunun kuantum mekaniğine göre nasıl gelişigüzel bir yöne sahip olamayacağını; fakat eksen boyunca bileşeninin sadece kesikli değerler alabileceğini tanımladık. Bu şoke edici ve özel bir gerçektir. Belki de, aklınızın bu tür konuları kavrayacak kadar ilerlemeden, bu tür kavramları kabullenmeye hazır olana kadar böyle işlerle uğraşmamamız gerektiğini düşünebilirsiniz. Aslında anlayışınız bunun gibi konuları hemen kabullenebilecek şekilde ilerlemeyecek. Bu konuyu anlaşılabilir hale getirebilecek, kendi içinde zarif ve gelişmiş olmayan betimleyici bir yol yoktur, çünkü bu yol(lar) aslında açıklamaya çalıştığınız şeyden çok daha karmaşıktır. Maddenin küçük ölçeklerdeki davranışı –çoğu kez gösterdiğimiz gibi– alışkın olduğunuz herhangi bir şeyden oldukça farklıdır ve gerçekten çok ilginçtir. Klasik fizikle ilerlerken, küçük ölçeklerdeki şeylerin davranışıyla gitgide daha fazla aşina olmaya çalışmak, başta derinlemesine bir anlama çabasından daha iyi bir fikirdir. Bu konular çok yavaş anlaşılır. Elbette birileri kuantum mekaniksel bir durumda nelerin meydana geldiğini daha iyi bir şekilde anlayabilir –anlamak demek o anlamdaysa elbette– fakat asla kuantum mekaniksel kuralların "doğal" olduğunu rahatça söyleyemez. Elbette *öyledirler* fakat sıradan, günlük tecrübelerimize göre doğal değildirler. Açısal momentum hakkındaki bu kuralı ele almamızdaki amaç, hakkında konuştuğumuz diğer şeylerden oldukça farklıdır. "Açıklamaya" çalışmayacağız fakat en azından ne olup bittiğini *söyleyeceğiz*. Manyetizmanın klasik tanımının –ve açısal momentum ve manyetik momentlerin– doğru olmadığına değinmeden maddelerin manyetik özelliklerini incelemek dürüst bir yaklaşım olmazdı.

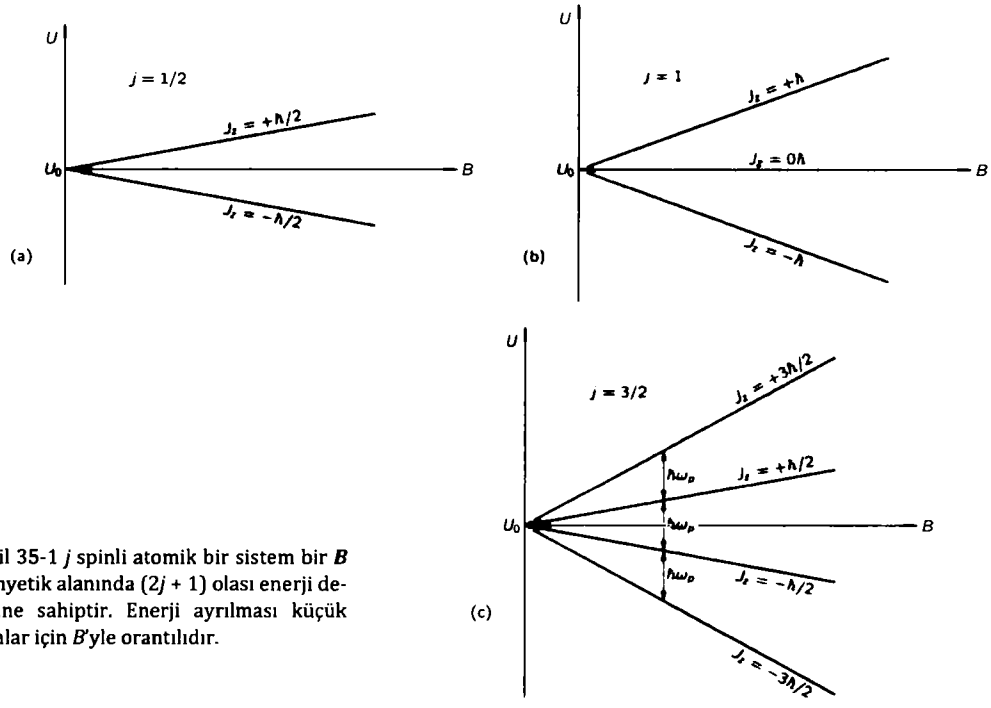
Gözden geçirme: II. Cilt, 11. Bölüm *Dielektiriğin İçinde*

Kuantum mekaniği hakkında en şoke edici ve rahatsız edici gerçeklerden biri, herhangi bir eksen boyunca açısal momentumu alırsanız, her zaman bir tamsayı ya da kesirli sayı çarpı $\hbar$ bulmanızdır. Hangi ekseni alırsanız alın bu sonuç değişmeyecektir. Bu anlaşılması zor gerçekliği –herhangi bir ekseni almanız ve bileşeni için benzer sonuçlar bulmanız– bir sonraki bölüme bırakacağız ve bu açık paradoksun tam olarak çözülebildiğini göreceğiz.

Şimdilik sadece her atomik sistem için, sistemin spini olarak adlandıracağımız bir j sayısı ve herhangi bir eksen boyunca açısal momentum bileşeninin her zaman $+j\hbar$ ile $-j\hbar$ arasındaki değerlerden birisini alacağını kabul edeceğiz;

$$J_z = \text{bunlardan biri} \left\{ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{array} \right\} \cdot \hbar \tag{35.1}$$

Ayrıca her basit atomik sistemin açısal momentumla aynı yönde bir manyetik momente sahip olduğunu belirtelim. Bu sadece atomlar ve çekirdekler için değil aynı zamanda temel parçacıklar için de doğrudur. Her temel parçacık kendi karakteristik j değerine ve manyetik momentine sahiptir. (Bazı parçacıklar için her ikisi de sıfırdır.) Bu ifadede "manyetik momentten" kastettiğimiz şey, bir manyetik alandaki sistemin enerjisinin, örneğin z-yönündeki,



Şekil 35-1 j spinli atomik bir sistem bir B manyetik alanında $(2j + 1)$ olası enerji değerine sahiptir. Enerji ayrılması küçük alanlar için B'yle orantılıdır.

küçük manyetik alanlar için $-\mu_z B$ şeklinde yazılabilmesidir. Alanın büyük olmaması koşulu vardır, aksi takdirde sistemin iç hareketi bozulabilir ve enerji, alan açılmadan önceki manyetik momenti ölçemezdi. Fakat alan yeterince zayıfsa enerjiyi

$$\Delta U = -\mu_z B \tag{35.2}$$

miktarında değiştirir. J_z (35.1) denklemindeki değerlerden birine sahip olması koşuluyla, denklemdeki μ_z şu şekilde yazılır:

$$\mu_z = g\left(\frac{q}{2m}\right)J_z \tag{35.3}$$

Şimdi spini $j = \frac{3}{2}$ olan bir sistemi ele alalım. Manyetik alan olmaksızın sistem, J_z'nin farklı değerlerine karşılık gelen ve hepsi aynı enerjiye sahip dört farklı olası duruma sahip olur. Fakat alanı açtığımız anda bu durumları farklı enerji düzeylerine ayıran ek bir etkileşim enerjisi ortaya çıkar. Bu düzeylerin enerjisi B'yle orantılı enerjilerin yardımıyla tanımlanır yani J_z'nin $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ değerleri çarpı $\hbar$'tır. $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 spinli atomik sistemler için enerji düzeylerinin yarılması Şekil 35-1'de gösterilmiştir. (Elektronların herhangi bir düzeni için, manyetik moment her zaman açısal momentumun zıt yönündedir.)

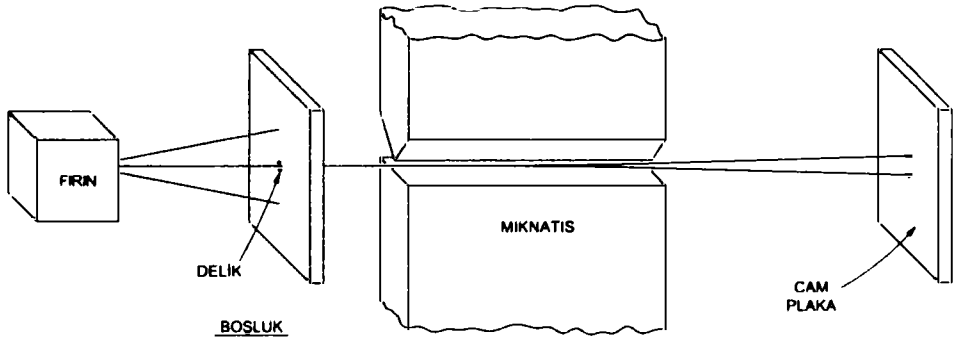
Enerji düzeylerinin "kütle merkezi" diyagramlarının manyetik alanın varlığında ve yokluğunda aynı olduklarını belirtelim. Bir düzeyden diğerine olan aralık her zaman manyetik alanın varlığındaki bir parçacığınkiyle aynıdır. Bir B manyetik alanı için enerji aralıklarını, ω_p'yi tanımlayan şekilde $\hbar\omega_p$ olarak ifade ederek ve (35.2) ile (35.3) denklemini kullanarak

$$\hbar\omega_p = g\ \frac{q}{2m}\ \hbar B$$

ya da

$$\omega_p = g\ \frac{q}{2m}\ B \tag{35.4}$$

olarak yazacağız. $g(q/2m)$ niceliği manyetik momentin açısal momentuma oranıdır ve parçacığın özelliğidir. (35.4) denklemi, 34. Bölümde elde ettiğimiz, açısal momentumu J ve manyetik momenti μ olan manyetik alandaki bir jiroskobun presesyonunun açısal hızını tanımlayan denklemle aynıdır.



Şekil 35-2 Stern-Gerlach deney düzeneği.

35-2 Stern-Gerlach deneyi

Açısal momentumun kuantumlanmış olduğu gerçeği, tarihsel olarak üzerine konuşacağımız oldukça ilginç bilimsel gerçeklerden birisidir. Kuramsal olarak beklense de, keşfedilmesi şok etkisi yaratmıştı İlk kez 1922 yılında Stern ve Gerlach tarafından gerçekleştirilen bir deneyde gözlenmiştir. Dilerseniz, Stern-Gerlach deneyini açısal momentumun kuantumlanmış olduğu gerçeği için doğrudan bir kanıt olarak düşünebilirsiniz. Stern-Gerlach bağımsız gümüş atomlarının manyetik momentlerini ölçmek için bir deney tasarlamıştır. Gümüş atom demeti sıcak bir fırında gümüşün buharlaştırılmasıyla üretilir ve bir kısmı küçük deliklere yönlendirilir. Bu demet özel bir mıknatısın kutupları arasına yönlendirilir, tıpkı Şekil 35-2'de gösterildiği gibi. Fikir şudur: eğer gümüş atomları μ manyetik momentine sahipse, B manyetik alandaki enerjileri, $-\mu_z B$ olur. Burada z, manyetik alanın yönüdür. Klasik kuramda μ_z, manyetik moment çarpı moment ile manyetik alan arasındaki açının kosinüsüne eşittir yani alanda

$$\Delta U = -\mu B \cos\theta \tag{35.5}$$

kadarlık ek bir enerji bulunur.

Elbette atomlar fırından çıktıklarında manyetik momentleri her olası yönde olabilir ve bu nedenle θ'nın tüm değerlerini alabilirler. Şimdi eğer manyetik alan z yönünde çok hızlı değişirse –eğer büyük bir alan gradyanı varsa– o zaman manyetik enerji konumla da değişecektir ve manyetik moment üzerinde yönü $\cos\theta$ değerinin pozitif ya da negatif olmasına bağlı bir kuvvet oluşacaktır. Atomlar, manyetik enerjinin türeviyle orantılı bir kuvvet tarafından aşağı ya da yukarı doğru çekilirler; sanal iş yasasından

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos\theta \frac{\partial B}{\partial z} \tag{35.6}$$

elde edilir.

Stern ve Gerlach, manyetik alanın çok hızlı değişmesi için mıknatısın uçlarını sivriltmiştir. Gümüş atom demeti bu keskin uçlara doğru yönlendirilmiştir; böylece atomlar homojen olmayan bir manyetik alanda dikey bir kuvvet hissederler. Manyetik momenti yatay olarak yönlenmiş bir gümüş atomu, üzerinde bir kuvvet hissetmez ve mıknatısı düz bir şekilde geçer. Manyetik momenti tam dikey olan bir atom, mıknatısın keskin ucu boyunca yukarı doğru itilir. Manyetik momenti aşağı doğru yönlendirilmiş bir atom aşağı doğru bir itme hisseder. Bu nedenle mıknatısı geçtikçe atomlar manyetik momentlerinin dikey bileşenle-

rine göre yayılırlar. Klasik kuramda bütün açılar mümkündür yani cam bir levhanın her yerinde toplanabilirler bu nedenle gümüş atomlarının dikey bir çizgi boyunca yayılmaları beklenir. Çizginin yüksekliği manyetik momentin büyüklüğüyle orantılıdır. Klasik kuramın eksikliği, Stern ve Gerlach tam olarak nelerin meydana geldiğini gördüğünde açıklığa kavuşturulmuştur. Cam levha üzerinde iki farklı benek buldular. Gümüş atomları iki farklı demet oluşturmuşlardı.

Spinleri rastgele yönelimli olduğu düşünülen bu atom demetlerinin iki farklı parçaya ayrılması oldukça gizemliydi. Nasıl oluyor da manyetik moment, manyetik alan yönündeki belirli bileşenlerin izinli olduğunu biliyordu? Bu durum, açısal momentum kuantumlanması keşfinin başlangıcıydı ve size teorik bir açıklama vermek yerine tıpkı günümüz fizikçilerinin deneyler yapıldıktan sonra sonuçları kabul etmeleri gibi, bu deneyin sonucunu incelemeyi sürdüreceğiz. Bir manyetik alandaki atomların enerjisinin bir dizi kesikli değerler alması *deneysel bir gerçektir*. Bu değerlerin her biri için enerji alanın büyüklüğüyle orantılıdır. Bu nedenle alanın değiştiği bölgelerde sanal iş ilkesi bize atomlar üzerindeki olası manyetik momentin bir dizi kesikli değer alabileceğini söyler; kuvvet her bir durum için farklıdır bu nedenle atom demetleri küçük ayrı demetlere bölünür. Demetlerin sapmalarının ölçülmesinden manyetik momentin büyüklüğü bulunabilir.

35-3 Rabi moleküler demet yöntemi

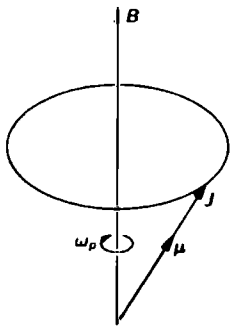
Şimdi I. I. Rabi ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen daha ileri bir manyetik moment ölçüm düzeneğini tanımlayacağız. Stern-Gerlach deneyinde atomların sapması çok küçüktür ve bu nedenle manyetik momentin ölçülmesi hassas değildir. Rabi'nin tekniği manyetik momentlerin ölçülmesinde müthiş bir hassaslık sağlar. Yöntem, bir manyetik alandaki atomların başlangıçtaki enerjilerinin bir dizi sonlu enerji düzeyine ayrılması gerçeğine dayanır. Manyetik alandaki bir atomun enerjisinin sadece belirli ayrık enerjilere sahip olması, atomların *genelde* sadece belirli ayrık enerjilere sahip olmasından daha şaşırtıcı değildir. Neden benzer şey bir manyetik alandaki atomlar için de doğru olmasın? Doğrudur. Fakat, bunu *yönlendirilmiş manyetik moment* fikriyle bağlama girişimleri kuantum mekaniğinde bazı garip çıkarımlara götürür.

Bir atom ΔU miktarında farklı enerjilere sahip iki düzeye sahipse, ω kuantum frekansında bir ışık yayınlayarak daha üst enerji seviyesinden daha alt enerji seviyesine geçebilir:

$$\hbar\omega = \Delta U \tag{35.7}$$

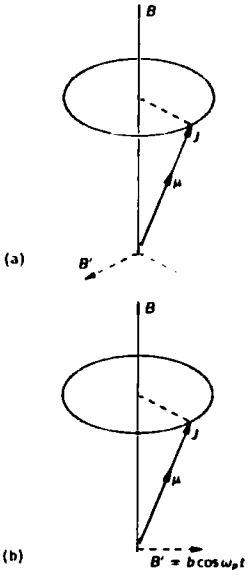
Benzer şeyler manyetik alandaki atomlar için de geçerlidir. Ancak o zaman enerji farklılığı ışığın frekansına karşılık gelemeyecek kadar küçük olur; yani mikrodalga ya da radyo frekansı gibi. Bir atomun daha alt bir enerji düzeyinden daha üst bir enerji düzeyine geçişi ayrıca bir ışığın soğrulmasıyla ya da manyetik alandaki atomların varlığında bir mikrodalga enerjisinin soğrulmasıyla gerçekleşebilir. Bu nedenle manyetik alanda bir atomumuz varsa, ek uygun frekanslı bir elektromanyetik alanın uygulanmasıyla bir durumdan diğerine geçişi sağlayabiliriz. Diğer bir deyişle büyük bir manyetik alanda bir atomumuz varsa ve zayıf bir elektromanyetik alanla bu alana "hafifçe dokunursak", bir durumdan diğerine geçişin belirli bir olasılığı olur; ancak frekansın (35.7) denklemindeki ω değerine yakın olması gerekir. Manyetik alandaki bir atom için bu frekans daha önce adlandırdığımız ω_p frekansıyla aynıdır ve (35.4) denklemindeki manyetik alan cinsinden verilir. Eğer atoma yanlış frekansla hafifçe dokunursak, bir geçişin meydana gelme şansı azalır. Bu nedenle bir geçişin meydana gelmesi için ω_p civarında keskin bir *rezonans* olmalıdır. Bilinen bir B manyetik alanındaki rezonansın frekansını ölçerek $g(q/2m)$ niceliği ve g-faktörü yüksek bir hassasiyetle ölçülebilir.

Benzer bir sonucun klasik bir bakış açısından da elde edilebilmesi oldukça ilginçtir. Klasik resme göre dış bir manyetik alana μ manyetik momenti ve J açısal momentumu olan küçük bir jiroskop yerleştirdiğimizde (*bkz.* Şekil 35-3) jiroskop manyetik alana paralel bir eksen etrafında yalpalar. Şu soruyu soralım: Alana göre klasik jiroskobun açısını nasıl değiştirebiliriz; yani z-eksenine göre? Manyetik alan *yatay eksen* etrafında bir tork üretir. Bunun gibi bir tork mıknatısı alanla hizalamaya çalışır fakat sadece presesyona yol açar. Eğer z-eksenine göre jiroskobun açısını değiştirmek istersek, z-eksenine göre bir tork uygulamamız gerekir. Eğer presesyonla aynı yönde bir tork uygularsak jiroskobun açısı, z-yönünde daha küçük bir J bileşeni verecek şekilde değişir. Şekil 35-3'te J ile z-ekseni arasındaki açı artmaktadır. Eğer presesyonu engellemek istersek J düşey yönde hareket etmelidir.



Şekil 35-3 "μ" manyetik momenti ve "J" açısal momentine sahip atomun klasik presesyonu.

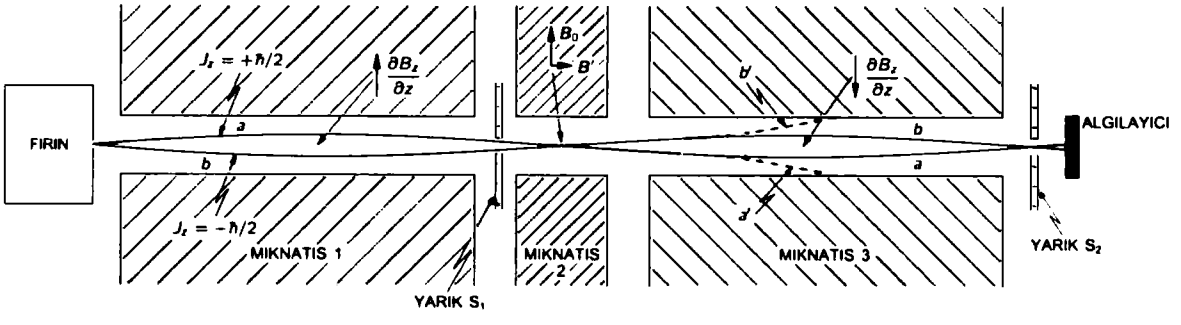
Düzgün bir manyetik alanda yalpalayan bir atom için istediğimiz türden torku nasıl uygularız? Cevap şudur: kenardan zayıf bir manyetik alan uygulayarak. İlk olarak manyetik alanın yönü, Şekil 35-4(a)'da B' manyetik alanıyla gösterildiği gibi, her zaman momentle dik açıda olması için manyetik momentin presesyonuyla aynı yönde olmalıdır. Buna benzer bir alan işe yarar fakat *değişen* bir yatay alan yaklaşık olarak onun kadar iyidir. Eğer x-yönünde (artı ya da eksi) ve ω_p frekansında salınan yatay küçük bir B' manyetik alanımız varsa her yarım döngüde manyetik momente uygulanan tork ters çevrilir böylece neredeyse dönen bir manyetik alan kadar büyük bir etki elde edilir. Klasik olarak o zaman manyetik momentin z-yönündeki bileşeninin değişmesini bekleriz; şüphesiz tam olarak ω_p frekansında çok zayıf bir şekilde salınan bir manyetik alanımız varsa. Elbette μ_z klasik olarak sürekli bir şekilde değişebilir fakat kuantum mekaniğinde manyetik momentin z-bileşeninin değişimi sürekli değildir. Aniden bir değerden diğerine atlayabilir. Klasik olarak nelerin meydana geldiğini ve aslında kuantum mekaniğinde meydana gelen olaylarla nasıl ilişkili olduklarına dair bazı ipuçları vermek için, klasik ve kuantum mekaniğinin sonuçlarını karşılaştırdık. Beklenen rezonans frekansının her iki durumda da aynı olması ilginç bir tesadüftür.



Şekil 35-4 Bir atomik mıknatısın presesyon açısı (a)'da gösterildiği gibi her zaman μ'ye dik açılarda yatay manyetik alan ya da (b)'de gösterildiği gibi salınan bir manyetik alan uygulanarak değiştirilebilir.

Ek bir bilgi: Kuantum mekaniği hakkında söylediğimiz şeylerden neden $2\omega_p$ frekansında da geçişlerin olmaması gerektiğine dair açık bir neden yoktur. Ne klasik durumda bu konuyla benzerlik kuracağımız bir durum ne de kuantum mekaniğinde bu konuyla benzerlik kuracağımız bir durum vardır; en azından tanımladığımız geçişleri tanımlayan özel yöntemler dışında. Salınan yatay manyetik alanla, bir defada iki adım atlayarak $2\omega_p$ frekansının elde edilme olasılığı sıfırdır. Yukarı ya da aşağı geçişler tam olarak ω_p frekansında gerçekleşir.

Şimdi manyetik momentlerin ölçülmesi için kullanılan Rabi yöntemini anlatmaya hazırız. Burada sadece spini 1/2 olan parçacıkları kullanacağız. Düzenek Şekil 35-5'te gösterilmiştir. Üç mıknatıs arasındaki çizgiden geçecek yüksüz atomları içeren bir fırın vardır. 1. mıknatıs Şekil 35-2'de gösterilene benzemek-



Şekil 35-5 Rabi-moleküler demet düzeneği.

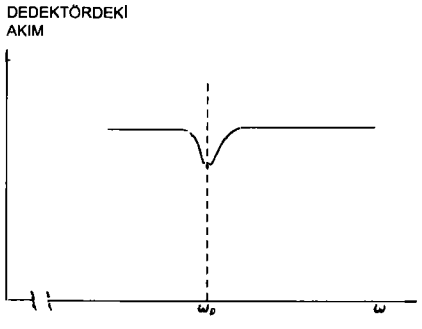
tedir ve büyük bir alan gradyanına sahiptir; örneğin $\partial B_z/\partial z$ pozitiftir. Eğer atomlar büyük bir manyetik momente sahip olursa, $J_z = +\hbar/2$ koşuluyla aşağı doğru ve $J_z = -\hbar/2$ koşuluyla yukarı doğru saptırılırlar (çünkü elektronlar için $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{J}$'yle zıttır). Bununla birlikte sadece S_1 yarığından geçen elektronları dikkate alırsak, gösterildiği gibi iki yörüngeye sahip oluruz. $J_z = +\hbar/2$ olan atomlar yarıktan geçmek için a eğrisi boyunca hareket etmelidir ve $J_z = -\hbar/2$ olan atomlar b eğrisini takip etmelidirler. Diğer yolları kullanan atomlar yarıklardan geçemezler.

2. mıknatıs düzgün bir alana sahiptir. Bu bölgede atomlara etki eden bir kuvvet yoktur; bu nedenle düz bir şekilde yollarına devam ederek 3. mıknatısa girerler. 3. mıknatıs tıpkı 1. mıknatıs gibidir fakat alanlar ters dönmüştür ve bu nedenle $\partial B_z/\partial z$ pozitif işaretlidirler. 1. mıknatısta aşağı doğru bir itme hisseden $J_z = +\hbar/2$ olan atomlar ("spin yukarı") 3. mıknatısta *yukarı doğru* bir itme hissederler; a eğrisi boyunca hareket ederek S_2 yarığından dedektöre ulaşırlar. $J_z = -\hbar/2$ ("spin aşağı") olan atomlar 1. ve 3. mıknatıslarda zıt kuvvetler hissederler ve b eğrisi boyunca hareket ederek S_2 yarığından dedektöre ulaşırlar.

Dedektör atomların ölçülmesi için değişik şekillerde imal edilebilir. Örneğin, sodyum gibi alkali metal atomları için dedektör duyarlı bir akım ölçere bağlanan sıcak ince bir tungsten tel olabilir. Kablolardan sodyum atomları geçtiğinde Na^+ iyonlarına ayrılır. Akım kablodan geçen sodyum atomlarının sayısına bağlıdır.

2. mıknatısın boşluğunda küçük yatay bir $\boldsymbol{B}'$ manyetik alan üreten bir dizi bobin vardır. Bobinler ω frekansında salınan bir akımla sürülür. Bu nedenle 2. mıknatısın kutupları arasında büyük, sabit, dikey bir $\boldsymbol{B}_0$ alanı ve zayıf, salınan ve yatay $\boldsymbol{B}'$ alanı bulunur.

Şimdi ω frekansıyla salınan alanın frekansını ω_p frekansına eşitleyelim; yani $\boldsymbol{B}$ alanındaki atomların "presesyon frekansı"na. Değişen alan bazı atomların bir J_z'den diğerine geçmelerine neden olur. Spini başlangıçta "yukarı" olan bir atom ($J_z = +\hbar/2$), "aşağı" duruma ($J_z = -\hbar/2$) geçebilir. Şimdi bu atomun manyetik momentinin yönü tersine çevrilmiştir bu nedenle 3. mıknatısta *aşağı* doğru bir kuvvet hisseder ve Şekil 35-5'te gösterildiği gibi a' yörüngesi boyunca hareket eder. Artık S_2 yarığından geçerek dedektöre ulaşamayacaktır. Benzer şekilde spinleri başlangıçta aşağı olan atomlar ($J_z = -\hbar/2$) 2. mıknatıs boyunca hareket ettikçe ($J_z = +\hbar/2$) spin yukarı durumuna geçerler. b' yörüngesi boyunca hareket edecekleri için dedektöre ulaşamazlar.



Şekil 35-6 $\omega = \omega_p$ olduğunda demet içindeki atomların akımı azalır.

Eğer salınan $\boldsymbol{B}'$ alanı ω_p'den farklı bir frekansa sahip olursa spinde herhangi bir değişim meydana gelmez ve atomlar kendi yollarını kullanmaya devam ederek dedektöre ulaşır. Bu nedenle $\boldsymbol{B}_0$ alanındaki atomların ω_p "presesyon frekansı," dedektöre ulaşan atomların akımında bir azalma gözleninceye dek, $\boldsymbol{B}'$ alanının ω frekansının değişitirilmesi sayesinde bulunabilir. ω ile ω_p "rezonansa girdiğinde" akım azalır. ω frekansının bir fonksiyonu olarak dedektördeki akımın grafiği Şekil 35-6'da gösterildiği gibidir. ω_p frekansının bilinmesi sayesinde ayrıca atomların g-faktörü de elde edilebilir.

Bunun gibi bir atomik-demet ya da genel ifadesiyle "moleküler" demet rezonans deneyleri atomik nesnelerin manyetik özelliklerini ölçmenin güzel ve etkili bir yoludur. ω_p rezonans frekansı büyük bir hassasiyetle, aslında g-faktörünü bulmak için ölçtüğümüz $\boldsymbol{B}_0$ manyetik alanından daha yüksek bir hassasiyetle belirlenebilir.

35-4 Hacimli malzemelerin paramanyetizması

Şimdi hacimli malzemelerin paramanyetik özelliklerini tanımlayacağız. Örneğin bakır sülfata benzer bir kristalde olduğu gibi kalıcı manyetik momente sahip atomlardan oluşan maddemiz olsun. Kristalde, iç kabuk elektronlarının net bir açısal momentuma ve net bir manyetik momente sahip olduğu bakır iyonları bulunmaktadır. Bu nedenle bakır iyonları kalıcı manyetik momente sa-

hip nesnelerdir. Hangi atomların manyetik momente sahip olup, hangilerinin sahip olmadığı hakkında bir şey söylemek isterim. *Tek* sayıda elektrona sahip sodyum gibi herhangi bir atom manyetik momente sahiptir. Sodyum tam dolu olmayan kabuğunda bir elektrona sahiptir. Bu elektron atoma net bir spin ve manyetik moment verir. Bununla birlikte bileşikler oluştuğunda dış kabuktaki ek elektronlar zıt spinlere sahip diğer elektronlarla etkileşerek birbirlerinin etkisini yok ederler ve böylece değerlik elektronlarının bütün açısal ve manyetik momenti yok olur. Genelde bu durum neden moleküllerin manyetik momente sahip olmadıklarını açıklar. Elbette sodyum atomlarından oluşan gazda bu tür bir olay yoktur.* Ayrıca kimyada adlandırıldığı gibi "serbest radikallere" sahipseniz –değerlik elektronlarının tek sayıda olduğu bir yapı– bağlar tam olarak kurulamaz ve net bir açısal momentum ortaya çıkar.

Çoğu hacimli malzemede, eğer iç elektron kabuklarının dolu olmadığı atomlar varsa, net bir manyetik moment vardır. O zaman net bir açısal momentum ve manyetik momentten söz edebiliriz. Bunun gibi atomlar periyodik tablonun "geçiş elementleri" bölgesinde yer alır; örneğin krom, manganez, demir, nikel, kobalt, paladyum ve titanyum bu çeşit elementlerdir. Ayrıca nadir toprak elementlerinin hepsi dolu olmayan iç kabuklara ve kalıcı manyetik momentlere sahiptirler. Sıvı oksijen gibi manyetik momente sahip olan garip çiftler de vardır fakat bunun sebebini açıklamayı kimya bölümlerine bırakıyoruz.

Kalıcı manyetik momente sahip, örneğin gaz, sıvı ya da kristal gibi, tamamen atomlar ya da moleküllerle dolu bir kutumuz olduğunu düşünelim. Şimdi dış bir manyetik alan uyguladığımızda neler olacağına bakalım. Manyetik alanın olmadığı durumda atomlar termal hareketleri nedeniyle birbirleriyle çarpışırlar ve momentleri bütün yönlerde olabilir. Fakat manyetik alanın olduğu durumda küçük mıknatıslar gibi alan yönünde hizalanmaya çalışırlar; o zaman alan boyunca daha fazla moment ortaya çıkar. Malzeme "manyetize olmuştur."

Birim hacimdeki tüm atomik manyetik momentlerin vektör toplamı anlamına gelen bir malzemenin birim hacimdeki net manyetik momentine *mıknatıslanma* ($\boldsymbol{M}$) diyoruz. Örneğin birim hacimde N atom varsa ve bunların *ortalama* manyetik momenti $\langle\boldsymbol{\mu}\rangle_{\text{ort}}$ ise $\boldsymbol{M}$, N çarpı ortalama manyetik moment şeklinde ifade edilir:

$$\boldsymbol{M} = N\langle\boldsymbol{\mu}\rangle_{\text{ort}} \tag{35.8}$$

$\boldsymbol{M}$'in tanımı Cilt II, 10. Bölümdeki $\boldsymbol{P}$ elektrik kutuplanmasıyla ilişkilidir.

Paramanyetizmanın klasik kuramı, Cilt II, 11. Bölümde gösterdiğimiz dielektrik sabiti kuramıyla benzerdir. Her bir atomun her zaman aynı büyüklükte fakat herhangi bir yönde bir $\boldsymbol{\mu}$ manyetik momenti olduğunu varsayar. Bir $\boldsymbol{B}$ alanında manyetik enerji $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu B\cos\theta$ olarak ifade edilir burada θ, alan ve moment arasındaki açıdır. İstatistiksel mekanikte herhangi bir açıda bulunmanın göreli olasılığı $e^{-\text{enerji}/kT}$ olarak verilir bu nedenle neredeyse sıfır olan açılar π civarındaki açılardan daha çok bulunurlar. Bölüm 11-3'te yaptığımız gibi ilerlersek, küçük manyetik alanlar için $\boldsymbol{M}$ ile $\boldsymbol{B}$ paraleldir ve aşağıdaki büyüklüğe sahiptir:

$$M = \frac{N\mu^2 B}{3kT} \tag{35.9}$$

[*Bkz.* Denklem (11.20)]. Bu yaklaşık denklem sadece $\mu B/kT$ 1'den çok küçükse doğrudur.

İndüklenmiş mıknatıslanmanın –birim hacimdeki manyetik moment– manyetik alanla orantılı olduğunu buluruz. Bu paramanyetizma olgusudur. Bu etkinin düşük sıcaklıklarda büyük, yüksek sıcaklıklarda daha küçük olduğunu göreceksiniz. Bir maddeyi manyetik alana koyduğumuzda, küçük alanlar söz konusu olduğunda, alanla orantılı bir manyetik moment meydana gelir. M'in B'ye oranı (küçük alanlar için) manyetik *duygunluk* olarak adlandırılır.

Şimdi paramanyetizma konusuna kuantum mekaniği bakış açısından bakalım. İlk olarak spin 1/2 atom durumunu ele alalım. Manyetik alanın yokluğunda

* Bazı Na_2 molekülleri olmasına rağmen, sıradan Na buharı çoğunlukla tek atomludur.

atomların belirli bir enerjileri vardır fakat manyetik alanın varlığında, her biri J_z'nin bir değerine karşılık gelen iki durum vardır. $J_z = +\hbar/2$ için enerji manyetik alanla

$$\Delta U_1 = +g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot B \tag{35.10}$$

miktarında değişir. (ΔU enerji kayması bir atom için pozitiftir çünkü elektron yükü negatiftir.) $J_z = -\hbar/2$ için enerji manyetik alanla

$$\Delta U_2 = -g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot B \tag{35.11}$$

miktarında değişir. Sadeleştirmek için

$$\mu_0 = g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2} \tag{35.12}$$

diyelim. Bu durumda

$$\Delta U = \pm\mu_0 B \tag{35 .13}$$

yazabiliriz. μ_0'ın anlamı açıktır; $-\mu_0$, yukarı spin durumundaki manyetik momentin z-bileşenidir ve $+\mu_0$ spin-aşağı durumundaki manyetik momentin z-bileşenidir.

İstatistiksel mekanik bir atomun herhangi bir durumda bulunma olasılığının

$$e^{-(\text{Durum enerjisi})/kT}$$

ile orantılı olduğunu söyler. Manyetik alanın olmadığı durumda iki durumun enerjisi aynıdır; bu nedenle manyetik alanda bir denge varsa, olasılık

$$e^{-\Delta U/kT} \tag{35.14}$$

ile orantılıdır. Birim hacimdeki spin yukarı atom sayısı

$$N_{\text{yukarı}} = ae^{-\mu_0 B/kT} \tag{35.15}$$

ve spin aşağı durum sayısı

$$N_{\text{aşağı}} = ae^{+\mu_0 B/kT} \tag{35.16}$$

ile orantılıdır. *a katsayısı* birim hacimdeki toplam atom sayısı

$$N_{\text{yukarı}} + N_{\text{aşağı}} = N \tag{35.17}$$

ifadesiyle tanımlanabilir. Böylece

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}} \tag{35.18}$$

elde ederiz. İlgilendiğimiz şey z-ekseni boyunca *ortalama manyetik momenttir*. Spin yukarı atomları $-\mu_0$ momentine katkıda bulunurlar ve spin aşağı atomları da $+\mu_0$ momentine katkıda bulunurlar; bu nedenle ortalama moment

$$\langle\mu\rangle_{\text{ort}} = \frac{N_{\text{yukarı}}(-\mu_0) + N_{\text{aşağı}}(+\mu_0)}{N} \tag{35.19}$$

şeklindedir.

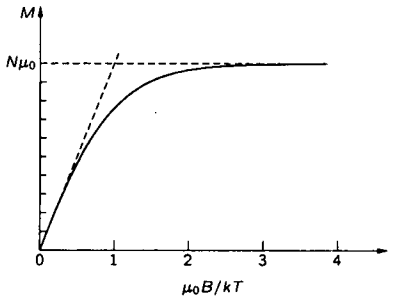
Birim hacimdeki M manyetik momenti $N\langle\mu\rangle_{\text{ort}}$ olarak ifade edilir. (35.15), (35.16) ve (35.17) denklemlerini kullanarak

$$M = N\mu_0\frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}} \tag{35.20}$$

yazabiliriz. Bu $j = 1/2$ olan atomlar için M'in kuantum mekaniksel denklemidir. Tesadüfi bir şekilde bu denklem hiperbolik tanjant fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir:

$$M = N\mu_0 \tanh\frac{\mu_0 B}{kT} \tag{35.21}$$

M'in B'nin bir fonksiyonu olarak çizilmiş grafiği Şekil 35-7'de verilmiştir. B çok büyürse hiperbolik fonksiyon 1'e yaklaşır ve $N\mu_0$ limit değerine yaklaşır. Bu nedenle büyük alanlarda mıknatıslanma *doyuma ulaşır*. Bunun neden olduğunu görebiliriz; yeterince büyük alanlarda momentlerin hepsi aynı hizadadır. Diğer bir deyişle hepsi spin aşağı durumdadır ve her bir atom μ_0 momentine katkı koyar.



Şekil 35-7 Manyetik alan şiddeti B olan paramanyetik mıknatıslanmanın değişimi.

Çoğu normal durumda –tipik momentler için, örneğin oda sıcaklıkları ya da normal alanlar için (10.000 Gauss gibi)– $\mu_0 B/kT$ oranı yaklaşık 0,002'dir. Doyumu görmek için çok düşük sıcaklıklara gidilmesi gerekir. Normal sıcaklıklar için genelde tanh x, x'le yerdeğiştirir ve

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT} \tag{35.22}$$

yazılır.

Klasik kuramda gördüğümüz gibi M, B'yle orantıldır. Aslında denklem neredeyse aynıdır sadece 1/3 faktörü yoktur. Fakat hâlâ (35.9) klasik denkleminde, ortaya çıkan μ ile kuantum mekaniğinde ortaya çıkan μ_0 terimini ilişkilendirmemiz gerekir.

Klasik denklemde manyetik moment vektörünün karesi, $\mu^2 = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}$ ya da

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g\frac{q_e}{2m}\right)^2 \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} \tag{35.23}$$

olarak tanımlanır. Son bölümde $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}$ çarpımını $j(j+1)\hbar^2$ ifadesiyle yerdeğiştirerek klasik hesaplamalarda da doğru sonuca ulaşabileceğinizi belirtmiştik. $j = 1/2$ durumunda

$$j(j+1)\hbar^2 = \tfrac{3}{4}\hbar^2$$

(35.23) denkleminde $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}$ için bunu yerine yazarsak

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g\frac{q_e}{2m}\right)^2 \frac{3\hbar^2}{4}$$

elde ederiz ya da (35.12) denkleminden hareketle μ_0 cinsinden

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = 3\mu_0^2$$

yazabiliriz. Bunu (35.9) klasik denklemindeki μ^2 yerine yazarsak doğru (35.22) kuantum denklemini elde ederiz.

Paramanyetizmanın kuantum kuramı kolayca herhangi bir spin j durumuna genişletilebilir. Düşük-alan mıknatıslanması

$$M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT} \tag{35.24}$$

olarak tanımlanır; burada

$$\mu_B = \frac{q_e\hbar}{2m} \tag{35.25}$$

biçimindedir ve bu, manyetik moment boyutunda bir katsayı kombinasyonudur. Çoğu atom kabaca bu boyutta momentlere sahiptir ve *Bohr Magnetonu* olarak adlandırılır. Elektronun spin manyetik momenti neredeyse bir Bohr magnetonuna eşittir.

35-5 Adyabatik mıknatıssızlaştırmayla soğuma

Paramanyetizmanın çok ilginç ve özel bir uygulaması vardır. Çok düşük sıcaklıklarda, atomik mıknatısları büyük bir alanda hizalamak mümkündür. O zaman *adyabatik mıknatıssızlaştırma* olarak adlandırılan bir yöntemle çok düşük sıcaklıklara inmek mümkündür. Paramanyetik bir tuzu alalım (örneğin praseodmiyum-amonyum-nitrat gibi nadir-toprak atomları içeren bir madde) ve büyük bir manyetik alan altında sıvı helyum kullanarak mutlak sıfırın bir ya da

iki derece üstüne kadar soğutalım. O zaman $\mu B/kT$ faktörü 1'den büyük olur; daha çok 2 ya da 3 gibi. Hizalanmış spinlerin çoğu ve mıknatıslanma neredeyse doyuma ulaşır. Şimdi kolaylık olsun diye, tüm atomların hizalanması için alan büyük ve sıcaklık çok düşük olsun. Daha sonra tuzu termal olarak izole edin (yani sıvı helyumu ortadan kaldırdığınızı ve geriye iyi bir boşluk kaldığını düşünün) ve manyetik alanı kapatın. Tuzun sıcaklığı düşecektir.

Eğer alan *aniden* kapatılsaydı, kristal örgüdeki atomların titreme ve sallanması kademeli olarak tüm spinlerin hizasını bozacaktı. Bazıları aşağı bazıları yukarı durumda olacaktı. Fakat eğer alan yoksa (ve çok küçük bir hataya neden olan atomik mıknatıslar arasındaki etkileşimi göz ardı edersek), atomik mıknatısları döndürecek bir enerji olmayacaktır. Herhangi bir enerji değişimi ve sıcaklık değişimi olmadan spinleri rastgele hale getirebilirler.

Bununla birlikte atomik mıknatıslar termal hareketleri nedeniyle ters dönerlerken hâlâ biraz manyetik alan olduğunu düşünün. O zaman alana zıt bazı atomik mıknatısları hizalamak için enerji gerekecektir; *alana karşı iş yapmalıdırlar*. Bu durum termal hareketlerden enerji alarak sıcaklığı düşürür. Bu nedenle eğer manyetik alan çok hızlı kaldırılmazsa, tuzun sıcaklığı düşecektir; mıknatıssızlaştırma yöntemiyle soğutulur. Kuantum mekaniksel bakış açısından, alan kuvvetli olduğu zaman atomlar en düşük enerjili durumdadır, çünkü, yukarı durumlarda gerçekleşen herhangi bir olayın olma ihtimali imkânsız bir şekilde büyür. Fakat alan azaldıkça termal dalgalanmaların bir atomu daha üst duruma gönderme ihtimali artacaktır. Bunlar olduğunda atom $\Delta U = \mu_0 B$ enerjisini soğurur. Eğer alan yavaşça kapatılırsa manyetik geçişler kristalin termal titreşimlerinden enerji alır ve onu soğutur. Bu şekilde birkaç derece mutlak sıcaklıklardan bir derecenin binde biri sıcaklıklara kadar soğutmak mümkündür.

Bundan daha soğuk bir şeyler elde edilebilir mi? Doğa bir yol sunuyor gibi görünmektedir. Atomik çekirdeklerinde manyetik momentleri olduğunu önceden belirtmiştik. Paramanyetizma için kullandığımız denklemler, çekirdeğin momentinin kabaca *bin kat daha küçük olduğu* durumlar hariç, çekirdekler için de geçerlidir. [$q\hbar/2m_p$ mertebesindedirler ve m_p protonun kütlesi olduğu için elektron ve protonun kütle oranları kadar küçüktürler.] Bunun gibi bir manyetik momentle, 2°K sıcaklıklarında bile, $\mu B/kT$ faktörü sadece binde bir mertebesindedir. Eğer sıcaklığı derecenin birkaç binde birine soğutmak için paramanyetik mıknatıssızlaştırma yöntemini kullanırsak, $\mu B/kT$ yaklaşık 1 olur; bu düşük sıcaklıklarda nükleer momentler doyuma ulaşır. Bu iyi bir şanstır çünkü o zaman sıfır sıcaklığına ulaşmak için *nükleer* manyetizmanın adyabatik mıknatıssızlaştırmasını kullanabiliriz. Bunu, manyetik soğutmanın iki aşamasını kullanarak yapabiliriz. İlk olarak bir derecenin birkaç binde birine ulaşmak için paramanyetik iyonların adyabatik mıknatıssızlaştırmasını kullanabiliriz. Daha sonra büyük bir nükleer manyetizmaya sahip bazı malzemeleri soğutmak için soğuk paramanyetik tuz kullanabiliriz. Son olarak malzemeden manyetik alanı kaldırdığımızda sıcaklığın mutlak sıfırın *bir milyonda birine kadar* soğutabiliriz; eğer her şeyi dikkatlice yaptıysak elbette.

35-6 Nükleer manyetik rezonans

Atomik paramanyetizmanın çok küçük olduğunu ve nükleer manyetizmanın bin kat düşük olduğunu söyledik. Nükleer manyetizmayı "nükleer manyetik rezonans" ilkesiyle görmek mümkündür. Net manyetik momentlerinin sıfır olması için bütün elektron spinlerinin dengelendiği su gibi bir maddeyi ele alalım. Hidrojen çekirdeğinin nükleer manyetik momenti nedeniyle molekül çok küçük bir manyetik momente sahiptir. Küçük bir su örneğini B manyetik alanına koyduğumuzu düşünelim. Hidrojenin protonları spin 1/2 olduğu için iki olası enerji

durumuna sahip olurlar. Eğer su termal dengedeyse daha düşük enerji durumunda biraz daha fazla proton bulunacaktır ve bunların manyetik momentleri alana paralel olacaktır. Birim hacimde küçük net bir manyetik moment vardır. Protonun momenti atom momentinin sadece binde biri olduğu için μ^2 değeriyle değişen mıknatıslanma –Denk. (35.22)'yi kullanarak– tipik atomik manyetizmanın sadece milyonda biri kadardır. (Bu durum atomik manyetizmaya sahip olmayan bir malzemeyi seçmemizin nedenidir.) Eğer bununla çalışırsak, spin yukarı ve aşağı proton sayısı arasındaki fark 10^8'de 1 kadardır bu nedenle etki oldukça küçüktür! Bununla birlikte şimdi bahsedeceğimiz yöntemle gözlenebilir.

Küçük, yatay salınan bir manyetik alan üreten bir bobinle su numunesini çevrelediğimizi düşünelim. Eğer bu alan ω_p frekansıyla salınıyorsa iki enerji durumu arasında bir geçiş indükler; tıpkı 35-3 Bölümündeki Rabi deneyinde tanımladığımız gibi. Bir proton daha üst bir enerji düzeyinden daha alt bir enerji düzeyine geçtiğinde, görmüş olduğumuz gibi, $\hbar\omega_p$'ye eşit $2\mu_z B$ enerjisini yayınlar. Eğer daha alt düzeyden daha üst duruma geçilirse bobinden $\hbar\omega_p$ enerjisini *soğurur*. Daha alt durumda daha üst durumdan biraz daha fazla proton olduğu için bobinden net bir enerji *soğrulması* gerçekleşir. Etki çok küçük olsa da ufak enerji soğrulması duyarlı elektronik yükselticilerin yardımıyla gözlenebilir.

Tıpkı Rabi moleküler-demet deneyinde olduğu gibi enerji soğrulması sadece

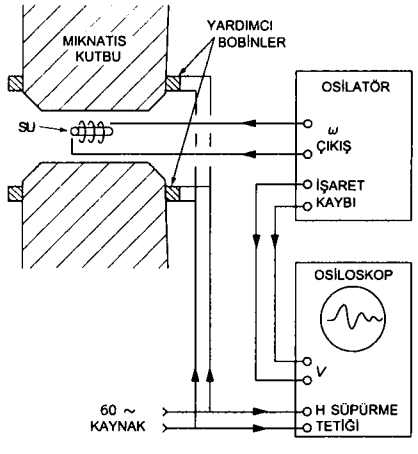
$$\omega = \omega_p = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)B$$

frekansında salman alanın varlığında olur. Rezonans durumunu aramak için genelde ω frekasını sabitleyip B alanını değiştirmek daha uygundur. Enerji soğrulması

$$B = \frac{2m_p}{gqe}\ \omega$$

olduğunda gerçekleşir.

Tipik bir nükleer manyetik rezonans düzeneği Şekil 35-8'de gösterilmiştir. Yüksek frekanslı bir salınıcı, büyük bir elektromıknatısın kutupları arasına konulan küçük bir bobini çalıştırır. Kutbun uçları etrafındaki iki küçük yardımcı bobin, manyetik alanın ortalama değeri civarında çok küçük miktarda "salınması" için, 60-hertz akımla çalışır. Bir örnek olarak mıknatısın ana akımının 5000 Gauss'luk bir manyetik alan vermek için kurulduğunu ve yardımcı bobinlerin bu değer etrafında ± 1 Gauss'luk bir değişim ürettiğini düşünelim. Eğer salınıcı saniyede 21,2 milyon titreşim üretirse, alan 5000 Gauss olduğunda, her zaman proton rezonansında olacaktır. [Denklem (34.13), proton için $g = 5{,}58$.]



Şekil 35-8 Bir manyetik rezonans düzeneği.

Salınıcı devresi, salınıcıdan soğrulan güçteki herhangi bir değişimle orantılı ek bir çıkış sinyali verecek şekilde tasarlanmıştır. Bu sinyal, bir osiloskobun dikey sapma yükseltecini besler. Osiloskobun yatay salınımı alan-salınım frekansının her bir çevriminde üretilir. (Genelde yatay sapma titreşen alanla orantılı şekilde gerçekleşir.)

Su numunesi, yüksek frekanslı bobine yerleştirilmeden önce, salınıcıdan alınan gücün bir değeri vardır (manyetik alanla değişmez). Bir kap su bobine konduğunda osiloskopta şekilde gösterildiği gibi bir sinyal üretilir. Protonların ters çevrilmesi sayesinde soğrulan gücün bir resmini görmektesiniz.

Pratikte ana mıknatısı 5000 Gauss'a ayarlamak zordur. Yapılacak şey, osiloskopta rezonans sinyali ortaya çıkıncaya dek ana mıknatıs akımını kontrol etmektir. Bu, bir manyetik alan şiddetinin en hassas ölçüm yoludur. Elbette *birileri* proton g-faktörünü belirlemek için manyetik alanı ve frekansı hassas bir şekilde ölçülmüştür. Fakat şimdi "proton rezonans manyetometre" olarak kullanılabilen bir proton rezonans düzeneğiyle bu yapılabilir.

Sinyalin şekli hakkında bir şeyler söylemek istiyoruz. Eğer manyetik alan çok yavaş bir şekilde salınsaydı, normal bir rezonans eğrisi görmeyi beklerdik. Enerji soğrulması, ω_p tam olarak salınım frekansında olduğunda, bir maksimum olur. Yakın frekanslarda soğrulma olabilir çünkü bütün protonlar aynı alan içinde değildirler. Farklı alanlar, biraz farklı resonans frekansları demektir.

Rezonans frekansında hiç sinyal görülüp görülmeyeceğini merak edebilirsiniz. Böylece suyun ilk konulma anı dışında sinyalin görülmemesi için yüksek frekanslı alanın iki düzeyin popülasyonunu eşitlemesini bekleyemez miyiz? Tam olarak değil, iki popülasyonu eşitlemeye çalışmamıza rağmen, termal hareketler T sıcaklığı için uygun oranları korurlar. Eğer rezonanstaysak, çekirdek tarafından soğrulan güç, termal hareketler nedeniyle kaybolan güçtür. Bununla birlikte proton manyetik momenti ile atomik hareketler arasında görece ufak "termal temaslar" vardır. Protonlar elektron dağılımının merkezinde izole edilir. Bu nedenle saf suda rezonans sinyali görülemeyecek kadar küçüktür. Soğrulmayı artırmak için, "termal teması" artırmak önemlidir. Bu genellikle suya az miktarda demir oksit eklenmesiyle yapılır. Demir atomları küçük mıknatıslar gibidir; termal dansları nedeniyle titreşirler ve protondaki manyetik alanlarda ufak salınımlar oluşur. Bu değişen alanlar proton mıknatıslarıyla "çiftlenir" ve termal dengeye ulaşma eğilimindedirler. Bu bağlantı nedeniyle daha yüksek enerji durumundaki protonlar enerjilerini kaybederler böylece salınıcıdan enerji soğururlar.

Pratikte nükleer rezonans düzeneğinin çıkış sinyali normal bir rezonans eğrisine benzemez. Genelde salınımlardan daha karmaşıktır; tıpkı şekilde gösterildiği gibi. Açıklama kuantum mekaniği cinsinden yapılabilir fakat bunun gibi deneylerde yalpalayan klasik moment fikri her zaman doğru cevabı verir. Klasik olarak rezonans durumunda çok sayıda nükleer moment eş zamanlı olarak yalpalamaya başlar. Bu nedenle, birlikte yalpalarlar. Hepsi birlikte dönen bu nükleer momentler, salınıcı bobininde ω_p frekansında bir emk üretir. Fakat manyetik alan zamanla büyüdüğü için presesyon frekansı da büyür ve indüklenen gerilim sonunda salınım frekansından daha büyük hale gelir. Bu nedenle proton frekansı ile salınıcı frekansı arasında "vuru notası" görürüz. Proton frekanslarının hepsi aynı olmadığı için (farklı protonlar farklı alanlara sahiptir) ve sudaki demir oksit dağılımı da farklı olduğu için, serbestçe yalpalayan momentler sonunda evre dışı olur ve vuru sinyali kaybolur.

Bu tür manyetik rezonans durumları madde hakkında yeni şeyler keşfetmek için kullanılan yöntemlerdir; özellikle kimya ve nükleer fizikte. Çekirdeğin manyetik momentinin sayısal değerleri madde yapısı hakkında bir şeyler söyler. Kimyada çoğu şey, rezonansın şekli ve yapısından öğrenilir. Yakın çekirdekler tarafından üretilen manyetik alanlar nedeniyle, bir nükleer rezonansın tam konumu, herhangi bir çekirdeğin kendisini içinde bulduğu çevreye bağlı olarak kayar. Bu kaymaların ölçülmesi, hangi atomların hangi atomların yakınında olduğunun belirlenmesine ve molekül yapısının detaylı bir açıklamasına yardım eder. Eşit önemde bir başka şeyse, serbest radikallerin elektron spin rezonansıdır. Denge halinde büyük ölçüde bulunmasa da, bunun gibi radikaller genelde kimyasal reaksiyonların ara durumlarıdır. Bir elektron spin rezonans ölçümü serbest radikallerin varlığı için önemli bir testtir ve kimyasal reaksiyonların anlaşılmasında önemli bir rol oynar.

36

FERROMANYETİZMA

36-1 Mıknatıslanma akımları

36-1 Mıknatıslanma akımları
36-2 *H* alanı
36-3 Mıknatıslanma eğrisi
36-4 Demir çekirdek indüktansları
36-5 Elektromıknatıs
36-6 Kendiliğinden mıknatıslanma

Bu bölümde manyetik momentlerin net etkisinin paramanyetizma veya diyamanyetizasyon durumunda olduğundan çok daha büyük olduğu bazı malzemeleri ele alacağız. Bu olguya *ferromanyetizma* denir. Paramanyetik ve diyamanyetik malzemelerde indüklenmiş manyetik momentler genelde o kadar zayıftır ki, manyetik momentler tarafından meydana getirilen ilave alanları ciddiye almamız gerekmez. Ancak *ferromanyetik* malzemelerde, uygulanan manyetik alanlarla indüklenen manyetik momentler çok büyüktür ve alanların kendileri üzerinde büyük etkileri vardır. Aslında, indüklenmiş momentler o kadar kuvvetlidir ki, birçok kere, gözlemlenen alanların meydana gelmesinde baskın etken onlardır. Dolayısıyla uğraşacağımız şeylerden biri de, indüklenen büyük manyetik momentlerin matematiksel kuramıdır. Şüphesiz bu, teknik bir problemdir. Gerçek problemse, neden manyetik momentlerin bu kadar kuvvetli olduğudur. Hepsi nasıl işler? Bu soruya birazdan eğileceğiz.

Gözden Geçirme: Bölüm 10, *Dielektrik*
Bölüm 17. *İndüksiyon Yasaları*

Ferromanyetik malzemelerin manyetik alanlarını bulmak, dielektrik varlığında elektrostatik alanı bulma sorusuna benzer. Hatırlarsanız, bir dielektriğin iç özelliklerini öncelikle, $\boldsymbol{P}$ vektör alanı, birim hacimde dipol momenti cinsinden tanımlamıştık. Daha sonra bu kutuplanmanın etkilerinin $\boldsymbol{P}$'nin diverjansıyla bulunan ρ_{kutup} yük yoğunluğuna eşit olduğunu bulmuştuk:

$$\rho_{\text{kutup}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{36.1}$$

Herhangi bir durumdaki toplam yük, bu kutuplanma yükü ile yoğunluğunu $\rho_{\text{diğer}}$ olarak ifade edeceğimiz diğer bütün yüklerin toplamı olarak yazılabilir* Bu durumda $\boldsymbol{E}$'nin diverjansı ile yük yoğunluğunu ilişkilendiren Maxwell yasası

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{kutup}} + \rho_{\text{diğer}}}{\epsilon_0}$$

eşitliği veya aşağıdaki ifade gibi yazılabilir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{diğer}}}{\epsilon_0}$$

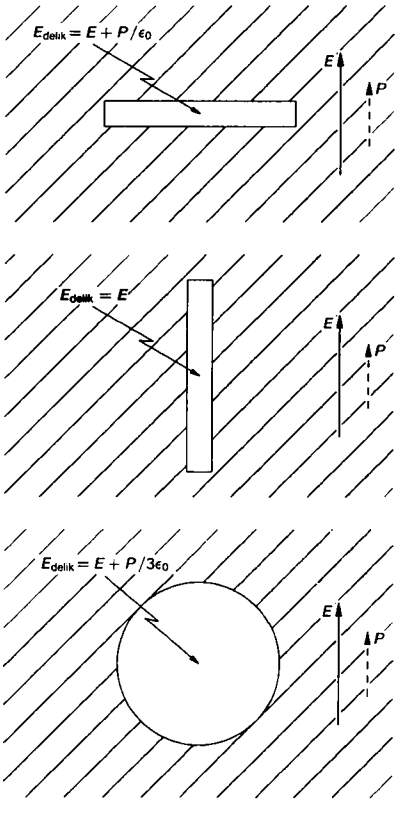
Daha sonra yükün kutuplanma kısmını çekebilir ve denklemin diğer tarafına koyarak yeni bir yasa elde edebiliriz.

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\text{diğer}} \tag{36.2}$$

Yeni yasaya göre, $(\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})$ niceliğinin diverjansı diğer yüklerin yoğunluğuna eşittir.

Denklem (36.2)'deki gibi $\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{P}$'yi bir araya getirmek şüphesiz aralarında bir ilişki biliyorsak yararlıdır. İndüklenmiş elektrik dipol momentini alanla ilişkilendiren kuramın göreceli olarak karmaşık olduğunu ve sadece belli basit durumlarda (bu basit durumlarda bile bir yakınlaştırma olarak) kullanılabileceğini görmüştük. Yakınlaştırma fikirlerimizden birini size hatırlatmak istiyoruz. Bir dielektriğin içindeki bir atomun indüklenmiş dipol momentini bulmak için, o atoma etki eden elektrik alanı bilmek gereklidir. Bir atom üzerindeki alanın, atomu bir kenara (komşu bütün atomların dipol momentlerini aynı tutarak) ayırsaydık oluşacak küçük deliğin merkezindekiyle aynı olacağı şeklinde bir

* Eğer tüm "diğer" yükler iletkenler üzerinde olsaydı, $\rho_{\text{diğer}}$ Bölüm 10'daki ρ_{serbest} ile aynı olurdu.



Şekil 36-1 Bir dielektrikteki kovuğun içinde bulunan elektrik alan, söz konusu kovuğun şekline bağlıdır.

tahmin yapmıştık ki birçok durumda fena değildir bu tahminimiz. Ayrıca hatırlayın, kutuplanmış bir dielektrikteki deliğin içindeki elektrik alan deliğin şekline dayanır. Kutuplanmaya dik, ince, disk şeklinde bir delikteki elektrik alan aşağıdaki denklemle bulunur:

$$\boldsymbol{E}_{\text{delik}} = \boldsymbol{E}_{\text{dielektrik}} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

Bu eşitliği Gauss yasasını kullanarak göstermiştik. Diğer yandan, kutuplanmaya paralel iğne şeklinde bir yarık için, $-\boldsymbol{E}$'nin bükümünün sıfır olduğu gerçeğini kullanarak– yarığın içindeki ve dışındaki elektrik alanların aynı olduğunu göstermiştik. Son olarak, küresel bir delik için elektrik alanının diskin alanı ile yarığın alanı arasındaki mesafenin üçte birinde olduğunu göstermiştik:

$$\boldsymbol{E}_{\text{delik}} = \boldsymbol{E}_{\text{dielektrik}} + \frac{1}{3}\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \text{ (küresel delik)} \tag{36.3}$$

Kutuplanmış bir dielektrik içindeki bir atoma ne olduğunu düşünürken kullandığımız alan buydu.

Manyetizma için bütün bunların benzerini tartışmak durumundayız. Bunu yapmanın basit ve kısa bir yolu, birim hacimdeki manyetik moment $\boldsymbol{M}$'in tıpkı birim hacimdeki elektrik dipol momenti $\boldsymbol{P}$ gibi olduğunu ve dolayısıyla $\boldsymbol{M}$'in diverjansının eksisinin "manyetik yük yoğunluğu" ρ_m'e –artık her neyse o– eşit olduğunu belirtmektir. Ufak bir sorun var ki, fiziksel dünyada "manyetik yük" diye bir şey yoktur. $\boldsymbol{B}$'nin diverjansının daima sıfır olduğunu biliyoruz. Ancak bu bizi yapay bir *benzerlik* kurmaktan ve aşağıdaki eşitliği yazmaktan alıkoymaz:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{M} = -\rho_m \tag{36.4}$$

Burada şu ifadenin tekrar altını çizmeliyiz ki, ρ_m tamamen matematiksel bir kavramdır. Böylece elektrostatikle eksiksiz bir benzerlik kurabilir ve elektrostatikteki eski denklemlerimizi kullanabiliriz. İnsanlar sıklıkla böyle şeyler yaptılar. Hatta tarihsel olarak insanlar benzetme kurmanın doğru olduğuna inandılar. ρ_m niceliğinin "manyetik kutuplar"ın yoğunluğunu temsil ettiğine inandılar. Halbuki bugünlerde malzemelerin manyetizasyonunun atomların içinden dolaşan –ya dönen elektronlardan ya da atomdaki elektronların hareketinden– akımlar olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla fiziksel bir bakış açısından kavramları birtakım efsanevi "manyetik kutuplar"ın yoğunluğu cinsinden değil de, gerçekçi bir şekilde atomik akımlar cinsinden tanımlamak daha güzeldir. Tesadüfi bir şekilde bu akımlara bazen "Amper akımları" denir; çünkü ilk olarak Ampère, maddenin manyetizmasının dolaşan atomik akımlardan gelebileceğini söylemişti.

Mıknatıslanmış bir maddedeki gerçek mikroskobik akım yoğunluğuysa, elbette çok karmaşıktır. Değeri atomda nereden baktığınıza bağlıdır. Bazı yerlerde büyük, bazı yerlerde küçüktür; atomun bir yerinde bir yöne ve bir başka yerinde bir başka yöne (tıpkı bir dielektriğin içinde elektrik alanının muazzam şekilde değişmesi gibi) gider. Ancak birçok pratik problemde sadece maddenin dışındaki alanlarla veya maddenin içindeki *ortalama* elektrik alanla ilgileniyoruz. Ortalamadan kastımız, birçok atom üzerinden ortalama alınmasıdır. Ancak bu tür *makroskopik* problemler için maddenin manyetik durumunu $\boldsymbol{M}$ cinsinden, eş deyişle birim hacimdeki ortalama dipol momenti cinsinden tanımlamak uygundur. Şimdi göstermek istediğimizse, mıknatıslanmış bir maddedeki atomik akımların $\boldsymbol{M}$'le ilişkili büyük ölçekli akımların oluşmasına yol açabileceğidir.

Bu durumda yapacağımız şey manyetik alanların gerçek kaynağı olan akım yoğunluğu $\boldsymbol{j}$'yi birçok parçaya ayırmaktır: bir parça atomik mıknatısın dolaşan akımlarını açıklamak ve diğer parçalarda ne tür diğer akımlar olabileceğini tanımlamak için. Akımları da üç parçaya ayırmak çoğunlukla uygundur. 32. Bölümde iletkenlerde serbestçe akan akımlar ile dielektrikteki bağlı yüklerin ileri geri hareketlerinden kaynaklanan akımlar arasında bir ayrım yapmıştık. Bölüm 32-2'de şu ifadeyi yazmıştık: $\boldsymbol{j}_{\text{kutup}}$ dielektrikteki bağlı yüklerin hareketlerinden kaynaklanan akımları ve $\boldsymbol{j}_{\text{diğer}}$ de diğer bütün akımları kapsar.

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{kutup}} + \boldsymbol{j}_{\text{diğer}}$$

Şimdi daha ileriye gideceğiz. $j_{\text{diğer}}$'i mıknatıslanmış malzemelerdeki ortalama akımları tanımlayan bir j_{man} ve j_{ilet} diyeceğimiz ve geri kalan akımları tanımlayan bir ilave parçaya böleceğiz. Son terim genelde iletkenlerdeki akımlara işaret eder ancak diğer akımları da örneğin boş uzayda serbestçe hareket eden yüklerden kaynaklanan akımları da içerebilir. Dolayısıyla toplam yük yoğunluğunu aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz:

$$j = j_{\text{kutup}} + j_{\text{man}} + j_{\text{ilet}} \tag{36.5}$$

B'nin bükümü için Maxwell denklemine giren toplam akım budur:

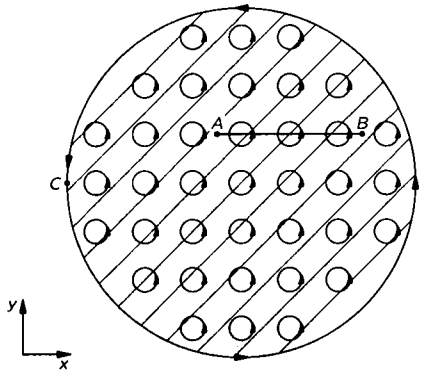
$$c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} \tag{36.6}$$

Şimdi j_{man} akımını manyetizasyon vektörü M'le ilişkilendirmemiz lazım. Nereye varacağımızı görmeniz için, sonucun ne olacağını yazıyoruz.

$$j_{\text{man}} = \nabla \times M \tag{36.7}$$

Bir manyetik malzemenin her yerindeki manyetizasyon vektörü M'i biliyorsak, dolaşım akım yoğunluğu M'in bükümüyle bulunur. Bakalım neden bunun böyle olduğunu anlayabilecek miyiz?

Öncelikle, eksenine paralel düzgün bir mıknatıslanmaya sahip silindirik bir çubuğu ele alalım. Fiziksel olarak, böyle düzgün bir mıknatıslanmanın gerçek anlamı, malzemenin içinde her yerdeki atomik dolaşım akımlarının düzgün bir yoğunluğa sahip olmasıdır. Malzemenin enine kesitinde gerçek akıların nasıl görüneceğini düşünmeye çalışalım. Akımların Şekil 36-2'deki gösterilenler gibi olmasını bekleriz. Her bir atomik akım küçük bir daire etrafında ve bütün akımlar da aynı yönde dolaşır. Böyle bir şeyin etkili akımı nedir? Çubuğun birçok yerinde bir etki yoktur zira her bir akımın yanında ona zıt yönde bir başka akım vardır. Şekil 36-2'de $\overline{AB}$ çizgisiyle gösterilen, küçük ancak yine de tek bir atoma göre büyük bir alan hayal edersek, böyle bir akım içinden geçen net akım sıfırdır. Malzemenin içinde hiçbir yerde net bir akım yoktur. Malzemenin yüzeyindeyse zıt yönde giden komşu akımlarca sıfırlanmamış atomik akımlar olduğuna dikkatinizi çekeriz. Yüzeyde, çubuğun etrafında her zaman aynı yönde giden net bir akım vardır. Şimdi, neden daha önceden düzgün şekilde mıknatıslanmış bir çubuğun elektrik akımı taşıyan uzun bir solenoide eşit olduğunu anlamışsınızdır.



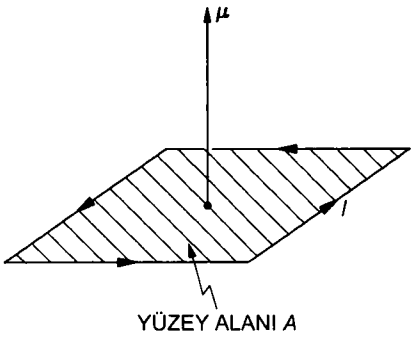
Şekil 36-2 Dolaşan atomik akımların, z yönünde mıknatıslanmış demir bir çubuğun kesitinde görüldüğü şekliyle şematik diyagramı.

Bu görüş Denk. (36.7)'ye nasıl uyar? Öncelikle, malzemenin içinde mıknatıslanma M sabittir ve dolayısıyla türevleri de sıfırdır. Bu bizim geometrik resmimizle uyumludur. Ancak yüzeyde M gerçekten sabit değildir. Kenara kadar sabittir ve sonra aniden sıfıra düşer. Dolayısıyla Denk. (36.7)'ye göre yüzeyde, yüksek bir akım yoğunluğuna yol açan muazzam gradyanlar vardır. Şekil 36-2'de C noktası yakınında ne olup bittiğine baktığımızı düşünelim. x ve y yönlerini şekildeki gibi alırsak, mıknatıslanma M, z yönündedir. Denklem (36.7)'yi bileşenlerine ayırırsak

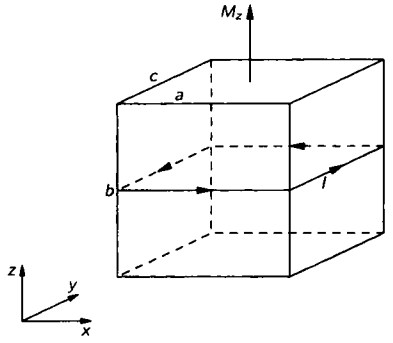
$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial y} &= (j_{\text{man}})_x \\ -\frac{\partial M_z}{\partial x} &= (j_{\text{man}})_y \end{aligned} \tag{36.8}$$

ifadesini elde ederiz. C noktasında, $\partial M_z/\partial y$'nin türevi sıfırdır ancak $\partial M_z/\partial x$ büyük ve artıdır. Denklem (36.7)'ye göre eksi y yönünde büyük bir akım yoğunluğu vardır. Bu, çubuk etrafında dolaşan bir yüzey akımına dair resmimizle uyumludur.

Şimdi daha zor bir durum için, mıknatıslanmanın malzeme içinde bir noktadan diğerine değiştiği durumdaki akım yoğunluğunu bulalım. İki komşu bölgedeki mıknatıslanma farklıysa, dolaşan akımların birbirini sıfırlamayacağı ve



Şekil 36-3 Bir akım ilmeğinin dipol momenti μ IA'dır.



Şekil 36-4 Mıknatıslanmış küçük bir blok, bir yüzey dolaşım akımına eşittir.

malzemenin hacminde net bir akım olacağını niteliksel olarak görmek kolaydır. Niceliksel olarak çalışmak istediğimiz etki budur.

Öncelikle, Bölüm 14-5'te elde ettiğimiz ve I dolaşım akımının, akım ilmeğinin alanı A'yken (*Bkz.* Şekil 36-3) aşağıdaki denklemle belirlenen bir μ manyetik momenti olduğunu belirten sonucu hatırlayalım:

$$\mu = IA \tag{36.9}$$

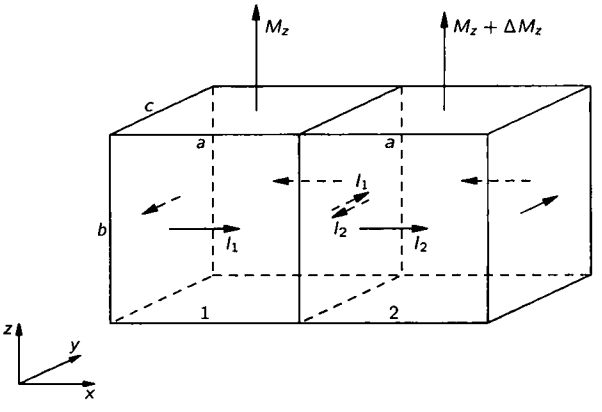
Şimdi, Şekil 36-4'te gösterildiği gibi, mıknatıslanmış bir malzeme içindeki küçük dikdörtgen bloğu ele alalım. Bloğu o kadar küçük varsayarız ki içindeki mıknatıslanma düzgün olur. Bu bloğun z yönünde M_z mıknatıslanması varsa, net etki, gösterildiği gibi, dikey yüzler etrafında dolaşan yüzey akımıyla aynı olur. Bu akımların büyüklüğünü Denk. (36.9) sayesinde bulabiliriz. Bloğun toplam manyetik momenti, mıknatıslanma çarpı hacme eşittir:

$$\mu = M_z(abc)$$

İlmeğin alanının ac olduğunu hatırlayarak, bu denklemden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$I = M_z b$$

Diğer bir deyişle, dikey yüzeylerde (dikine) uzunluk başına akım M_z'ye eşittir.



Şekil 36-5. İki komşu bloğun mıknatıslanması aynı değilse, aralarında net bir yüzey akımı vardır.

Şekil 36-5'te görüldüğü gibi birbirine komşu iki küçük bloğu ele alalım. 2 numaralı blok 1 numaralı bloktan azcık ayrı olduğu için, biraz farklı bir mıknatıslanma dikey bileşenine sahip olacaktır. Buna $M_z + \Delta M_z$ diyelim. İki blok arasındaki yüzeyde toplam akıma iki katkı vardır. 1 numaralı blok artı y yönünde akan bir I_1 akımı ve 2 numaralı blok da eksi y yönünde akan bir I_2 yüzey akımı meydana getirir. Artı y yönündeki toplam yüzey akımı aşağıdaki toplamdır:

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z)b \\ &= -\Delta M_z b \end{aligned}$$

ΔM_z'yi, M_z'nin x yönünde türevi çarpı 1 numaralı bloktan 2 numaralı bloğa olan mesafeyle, yani a'yla, çarpım olarak yazabiliriz:

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} a$$

Bu durumda iki blok arasında akan akım aşağıdaki ifade olur:

$$I = -\frac{\partial M_z}{\partial x} ab$$

I akımını bir ortalama hacim akım yoğunluğu j'ye bağlamak için, I akımının belirli bir yüzey kesit alanına yayıldığını anlamamız gerek. Malzemenin bütün hacminin böyle küçük bloklarla doldurulduğunu düşünürsek, (x eksenine dik)

böyle bir yan yüz her bir blokla ilişkilendirilebilir.* Dolayısıyla I akımıyla ilişkilendirilebilecek alanın, ön yüzlerden birinin alanı (ab) olduğunu görürüz. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}$$

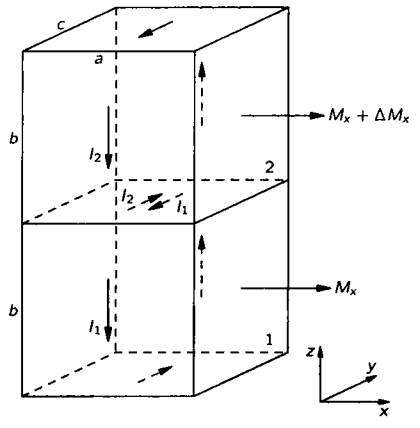
En azından $\boldsymbol{M}$'in bükümünün başlangıcını elde ettik.

j_y'de, z'deki mıknatıslanmanın x bileşenindeki değişiminden gelen bir başka terim olmalı. j'ye bu katkı, Şekil 36-6'da gösterildiği gibi birbirinin üzerine istiflenmiş iki küçük bloğun arasındaki yüzeyden gelir. Az önce bahsettiğimiz akıl yürütmeleri kullanarak, bu yüzeyin j_y'ye katkısının $\partial M_x/\partial z$ kadar olacağını gösterebilirsiniz. Akımın y bileşenine katkıda bulunabilen tek yüzeyler bunlardır. Böylece y yönündeki toplam akım yoğunluğunu aşağıdaki ifade gibi elde ederiz:

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Küpün geri kalan yüzlerindeki akımları hesaplayarak –ya da z yönü seçimimizin tamamen rastgele olduğu gerçeğini kullanarak– vektör akım yoğunluğunun aşağıdaki denklemle bulunabileceği sonucuna varabiliriz:

$$\boldsymbol{j} = \nabla \times \boldsymbol{M}$$



Şekil 36-6 Biri diğerinin üzerinde iki blok, j_y'ye katkıda bulunabilir.

Diğer bir deyişle maddedeki manyetik durumu birim hacimdeki ortalama manyetik moment, $\boldsymbol{M}$, cinsinden ifade etmeyi seçersek, atomik akımların Denk. (36.7)'yle bulunabilen maddedeki ortalama akım yoğunluğuna eşit olduğunu buluruz. Malzeme ayrıca bir dielektrikse, ilavaten bir kutuplanma akımı $j_{\text{kutup}} = \partial \boldsymbol{P}/\partial t$ olabilir. Ve malzeme ayrıca bir iletkense, bir iletim akımı da, j_{ilet}, olabilir. Toplam akımı aşağıdaki eşitlik gibi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{j} = j_{\text{ilet}} + \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{36.10}$$

36-2 H alanı

Şimdi Denk. (36.10)'da yazıldığı şekliyle akımı Maxwell denklemlerine yerleştirelim. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(j_{\text{ilet}} + \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{M}$ terimini sol tarafa taşıyabiliriz:

$$c^2 \nabla \times \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}\right) = \frac{j_{\text{ilet}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right) \tag{36.11}$$

32. Bölümde belirttiğimiz gibi, birçok insan $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}/\epsilon_0)$'yu yeni bir vektör alanı $\boldsymbol{D}/\epsilon_0$ olarak yazmayı seviyor. Benzer şekilde, $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}/\epsilon_0 c^2)$'yi tek bir vektör alanı olarak yazmak kullanışlıdır. *Biz* yeni bir $\boldsymbol{H}$ vektör alanını aşağıdaki ifade gibi tanımlamayı seçiyoruz:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2} \tag{36.12}$$

Böylece Denk. (36.11) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \boldsymbol{H} = j_{\text{ilet}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{36.13}$$

Basit gözüküyor, ancak bütün karmaşıklığı $\boldsymbol{D}$ ve $\boldsymbol{H}$ harflerinde gizli.

---

* Veya tercih ederseniz, her bir yüzdeki I akımı iki kenardaki bloklarla 50-50 paylaştırılmalı.

Şimdi sizi uyarmamız gerek: mks birimlerini seçen birçok insan $\boldsymbol{H}$ için farklı bir tanımı kabul etmiştir. *Onların* alanına $\boldsymbol{H}'$ dersek (elbette, onlar üs olmadan sadece $\boldsymbol{H}$ demekte), aşağıdaki ifade gibi tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{H}' = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{36.14}$$

(Ayrıca $\epsilon_0 c^2$'yi de yeni bir sayı gibi $1/\mu_0$ şeklinde yazarlar ve böylece takip etmeleri gereken bir sabitleri daha olur.) Bu tanımla, Denk. (36.13) daha da basit gözükür:

$$\nabla \times \boldsymbol{H}' = j_{\text{ilet}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{36.15}$$

$\boldsymbol{H}'$'nün bu tanımıyla ilgili iki zorluk vardır. Birincisi, mks birimlerini kullanmayan insanların tanımlarıyla uyuşmamakta ve ikincisi, bu $\boldsymbol{H}'$ ve $\boldsymbol{B}$'nin farklı birimlerde olmasını mecbur kılıyor. $\boldsymbol{H}'$ gibi $\boldsymbol{M}$'le aynı birime sahip olmasındansa, $\boldsymbol{H}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin aynı birimlere sahip olmasının daha kullanışlı olduğunu düşünüyoruz. Ancak mühendis olacak ve transformatörlerin, mıknatısların ve benzer şeylerin tasarımında çalışacaksanız dikkatli olmanız gerekir. $\boldsymbol{H}$ için bizim kullandığımız Denklem (36.12)'nin tanımını değil de, (36.14)'ün tanımını kullanan ve $\boldsymbol{B}$ ile $\boldsymbol{H}$'ı bizim ilişkilendirdiğimiz şekilde ilişkilendiren birçok başka kitap bulacaksınız. Hangi gösterimi kullandıklarına dikkat etmelisiniz.

Hangi birimleri kullandıklarını söylemenin bir yolu vardır. Hatırlarsanız, mks sisteminde $\boldsymbol{B}$ –ve dolayısıyla *bizim* $\boldsymbol{H}$– sadece bir birimle ölçülür: 10.000 Gauss'a eşit bir Weber bölü metre kareyle. Mks sisteminde, bir manyetik momentin (bir akım çarpı alan) bir birimi vardır: bir Amper-metre^2. Bu durumda, mıknatıslanma $\boldsymbol{M}$'in birimi şu ifade olur: bir Amper bölü metre. $\boldsymbol{H}'$ için birimler $\boldsymbol{M}$'inkiyle aynıdır. ∇ teriminin birimi mesafe biriminin tersi olduğundan, bunun aynı zamanda Denk. (36.15)'le uyuştuğunu görebilirsiniz. Elektromıknatıslarla çalışanların, bir bobindeki tel sarım sayısını düşünerek $\boldsymbol{H}$ birimine ($\boldsymbol{H}'$ tanımıyla) "bir metre *sarımına* bir Amper" deme alışkanlıkları vardır. Ancak bir "sarım" aslında birimsiz bir sayıdır, dolayısıyla kafa karışıklığına yol açmamalı. Bizim $\boldsymbol{H}$'ımız $\boldsymbol{H}'/\epsilon_0 c^2$'ye eşit olduğundan, mks sistemini kullanıyorsanız $\boldsymbol{H}$ (Weber/metre kare) $\boldsymbol{H}'$ (Amper bölü metre) çarpı $4\pi \times 10^{-7}$'ye eşittir. Belki de daha uygunu $\boldsymbol{H}$'ın (Gauss) = 0,0126 $\boldsymbol{H}'$ (Amper/metre) olduğunu hatırlamaktır.

Ürkütücü bir şey daha var. *Bizim* $\boldsymbol{H}$ tanımımızı kullanan birçok insan $\boldsymbol{H}$ ve $\boldsymbol{B}$ birimleri için *farklı* isimler kullanmakta. Aynı ölçülere sahip olsalar da, $\boldsymbol{B}$ birimine bir *Gauss* ve $\boldsymbol{H}$ birimine de bir *Oersted* (Gauss ve Oersted'in ardından elbette) denir. Dolayısıyla birçok kitapta $\boldsymbol{B}$'nin Gauss ve $\boldsymbol{H}$'ın Oersted birimleriyle çizilmiş grafiklerini göreceksiniz. Aslında aynı birimdirler, mks biriminin 10^{-4}'te biri. Manyetik birimlerle ilgili bu kafa karışıklığını Tablo 36-1'de özetledik.

Tablo 36-1
Manyetik niceliklerin birimleri

$[B]$ = Weber/metre^2 = 10^4 Gauss
$[H]$ = Weber/metre^2 = 10^4 Gauss veya 10^4 Oersted
$[M]$ = Amper/metre
$[H']$ = Amper/metre

Kullanışlı değişimler

B (Gauss) = 10^4 B (Weber/metre^2)
H (Gauss) = H (Oersted)
= 0,0126 H' (Amper/metre)

36-3 Mıknatıslanma eğrisi

Şimdi, manyetik alan sabit olduğundan veya alanlar çok yavaşça değiştiği için j_{ilet}'e göre $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$'yi ihmal edebileceğimiz basit durumlara bakacağız. Bu durumda alanlar aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{36.16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j_{\text{ilet}}/\epsilon_0 c^2 \tag{36.17}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}/\epsilon_0 c^2 \tag{36.18}$$

Şekil 36-7(a)'da görüldüğü gibi, bakır bir bobin teliyle sarılmış bir torusu (simit) ele alalım. Telden bir I akımı geçmektedir. Manyetik alan nedir? Manyetik alan esas olarak demir içindedir. Orada, Şekil 36-7(b)'de görüldüğü gibi $\boldsymbol{B}$'nin çizgileri çember çizecektir. $\boldsymbol{B}$'nın akısı sürekli olduğundan, diverjansı sıfırdır ve böylece Denk. (36.16) sağlanır. Sonra, Denk. (36.17)'yi Şekil 36-7(b)'de

görülen kapalı Γ ilmeğinin etrafında integralini alarak bir başka biçimde yazabiliriz. Stoke teoreminden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\int_S j_{\text{ilet}}\cdot \boldsymbol{n}\, da \qquad (36.19)$$

j'nin integrali Γ ilmeği tarafından çevrilmiş herhangi bir S yüzeyi üzerinden alınmalıdır. Bu yüzey, her bir sargıda bir geçilmelidir. Her bir sarım integrale I akımı katkısında bulunur ve N sarım varsa integral NI olur. Problemimizin simetrisine göre B, Γ ilmeği etrafında her zaman aynıdır. Mıknatıslanmanın ve dolayısıyla H alanının Γ boyunca sabit olduğunu varsayarsak, Denk. (36.19) aşağıdaki biçime gelir:

$$Hl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}$$

l, Γ eğrisi boyunca uzunluktur:

$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{NI}{l} \qquad (36.20)$$

Bu tür durumlarda mıknatıslama akımı H'la doğrudan orantılı olduğundan, H bazen *mıknatıslama alanı* olarak da adlandırılır.

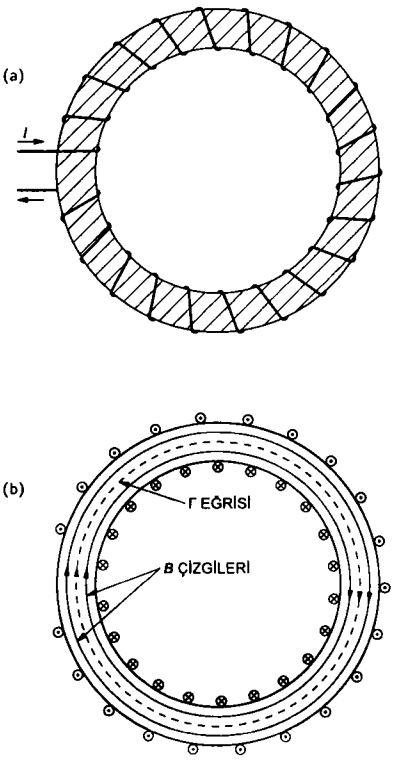
Şimdi tek ihtiyacımız olan H'ı B'yle ilişkilendiren bir denklemdir. Ancak böyle bir denklem yoktur! Elbette elimizde Denk. (36.18) vardır ancak demir gibi ferromanyetik bir malzeme için M ile B arasında doğrudan bir ilişki olmadığından işimize yaramaz. M mıknatıslanması demirin bütün geçmişine dayanır, sadece B'nin o anda ne olduğuna değil.

Ancak her şey bitmiş değil. Belli basit durumlar için çözümler geliştirebiliriz. Mıknatıslanmamış bir demiri ele alalım –örneğin, yüksek sıcaklıklarda tavlanmış demiri– bu durumda torusun basit geometrisinde bütün demir aynı manyetik geçmişe sahip olacaktır. Bu durumda, deneysel ölçümlerden yola çıkarak M hakkında –ve dolayısıyla B ile H arasındaki ilişki hakkında– bir şeyler söyleyebiliriz. Denklem (36.20)'yi kullanarak torustaki H alanı, sabit çarpı sarmaldaki I akımı olarak bulunur. Daha sonra B alanı, bobindeki (veya şekilde gösterilen mıknatıslayıcı bobin etrafında sarılmış ilave bobindeki) emk'nın zaman üzerinden integrali alınarak bulunabilir. Bu emk B'nin akısının değişim hızına eşittir: emk'nın zamanla integrali B çarpı torusun kesit yüzey alanına eşittir.

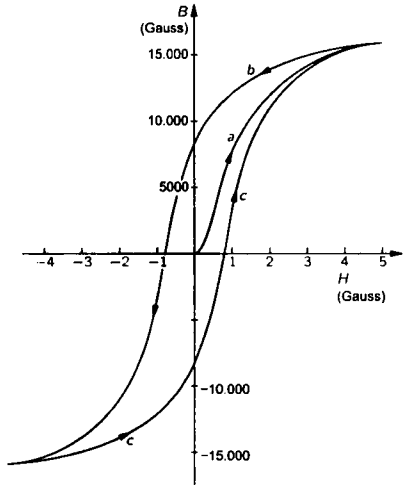
Şekil 36-8, yumuşak bir demir torusta gözlemlenen B ile H arasındaki ilişkiyi göstermekte. Akım ilk açıldığında B, a eğrisi boyunca H'yle beraber artar. B ve H'deki farklı ölçeklere dikkatinizi çekerim. Başlangıçta büyük bir B meydana getirmek için görece küçük bir H gerektirir. Neden B demirde havadakinden çok daha büyüktür. Çünkü demirdeki büyük yüzey akımına eşit büyük bir M mıknatıslanması vardır. B alanı bu akımın ve sarmaldaki iletim akımının toplamından gelir. Neden M'in bu kadar büyük olduğunu daha sonra tartışacağız.

Yüksek H değerleri için, mıknatıslanma eğrisi düzelir. Demirin doyduğunu söyleriz. Şeklimizdeki ölçeklerle, eğri yatay gibi gözükmektedir. Aslında hafifçe yükselmeye devam etmektedir. Büyük alanlar için B, H'la birim bir eğriyle orantılıdır. M daha fazla artmaz. Yeri gelmişken, torus manyetik olmayan bir malzemeden yapılmış olsaydı, M sıfır olurdu ve B de bütün alanlar için H'ye eşit olurdu.

İlk dikkatimizi çeken, Şekil 36-8'deki *–mıknatıslanma* eğrisi olarak bilinen– a eğrisinin son derece doğrusal olmadığıdır. Ancak durum bundan kötüdür. Doyuma ulaştıktan sonra, bobindeki akımı H'ı sıfıra getirecek şekilde yükseltirsek, B manyetik alanı b eğrisi boyunca düşer. H sıfıra ulaştığında, hâlâ bir miktar B vardır. Mıknatıslayıcı akım olmasa bile, demirde manyetik alan vardır. Kalıcı olarak mıknatıslanmıştır. Şimdi bobinde *eksi* akım açarsak, B-H eğrisi b boyunca, demir eksi yönde doyuma ulaşana kadar devam eder. Akımı tekrar sıfıra getirirsek, c eğrisi boyunca devam eder. Akımı büyük artı ve eksi değerleri



Şekil 36-7 (a) Yalıtılmış bobin teliyle sarılmış demir bir torus. (b) Alan çizgilerini gösteren torus kesiti.



Şekil 36-8 Yumuşak demir için tipik mıknatıslanma ve histerezis eğrisi.

arasında değiştirirsek, B-H eğrisi b ve c eğrilerine çok yakın şekilde ileri ve geri gider. H'ı rastgele bir şekilde değiştirirsek, genelde b ve c eğrileri arasında bulunan daha karmaşık eğriler elde ederiz. Alanların tekrarlı salınımıyla meydana getirilen döngüye, demirin *histerezis* döngüsü denir.

B'nin herhangi bir andaki değeri sadece H'ın o andaki değerine değil, bütün geçmişine bağlı olduğu için $B = f(H)$ gibi fonksiyonel bir ilişki yazamayacağımızı görüyoruz. Doğal olarak, farklı cisimler için mıknatıslanma ve histerezis eğrileri farklı olacaktır. Eğrilerin şekli malzemenin kimyasal birleşimine, hazırlanması ve sonrasındaki fiziksel işlemlerin detaylarına bağlıdır. Bu karmaşıklıklar için fiziksel açıklamaları daha sonra tartışacağız.

36-4 Demir çekirdek indüktansları

Manyetik malzemelerdeki en önemli uygulamalardan biri elektrik devrelerindedir. Örneğin, transformatörlerde, elektrik motorlarında vb gibi. Bunun bir nedeni demirle manyetik alanların nereye gidebileceğini kontrol edebilmemiz ve belirli bir elektrik akımı için daha büyük alanlar elde edebilmemizdir. Örneğin, tipik bir "toroidal" indüktans Şekil 36-7'dekine benzemektedir. Belirli bir indüktans için, eşdeğer bir "hava çekirdeği" indüktansa göre hacim olarak daha küçük yapılabilir ve daha az bakır kullanılabilir. Belirli bir indüktans için sarmaldaki direnç çok daha küçüktür böylece –özellikle düşük frekanslarda– indüktans "ideale" yakındır. Bir indüktansm nasıl çalıştığını anlamak niceliksel olarak kolaydır. I sarmaldaki akımsa, bu durumda içerde meydana gelen H alanı –Denk. (36.20)'yle ortaya konduğu gibi– I'yla orantılıdır. Uçlar arasında $\mathcal{V}$ voltajı B manyetik alanına bağlıdır. Sarmaldaki direnci ihmal edersk, $\mathcal{V}$ voltajı $\partial B/\partial t$'yle orantılıdır. Bu yüzden, $\mathcal{V}$'nin dI/dt'ye oranı olan $\mathcal{L}$ indüktansı demirdeki B ile H arasındaki ilişkiyi içerir. B, H'dan çok daha büyük olduğu için, indüktans için büyük bir çarpan elde ederiz. Fiziksel olarak olan şey, normalde küçük bir manyetik alan meydana getirecek bobindeki küçük bir akımın demirdeki küçük "köle" mıknatısların sıralanmasını ve sarmaldaki dış akımdan çok daha büyük bir "manyetik" akım meydana getirmesidir. Sanki bobin içinde halihazırda olandan daha büyük bir akım vardır. Akımı tersine çevirdiğimizde bütün küçük mıknatıslar tersine döner –tüm iç akımlar da aynı şekilde– ve demir olmadan elde edeceğimizden çok daha fazla bir indüklenmiş emk elde ederiz. İndüktansı, Şekil 17-8'de tarif edildiği gibi enerji üzerinden hesaplayabiliriz. Akım kaynağından beslenen enerjinin hızı $I\mathcal{V}$'dir. $\mathcal{V}$ voltajı çekirdeğin alanı A çarpı N çarpı dB/dt'dir. Denklem (36.20)'den, $I = (\epsilon_0 c^2 l/N)H$. Dolayısıyla aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{V}I = (\epsilon_0 c^2 lA)H\frac{dB}{dt}$$

Zaman üzerinden integralini alırsak da aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

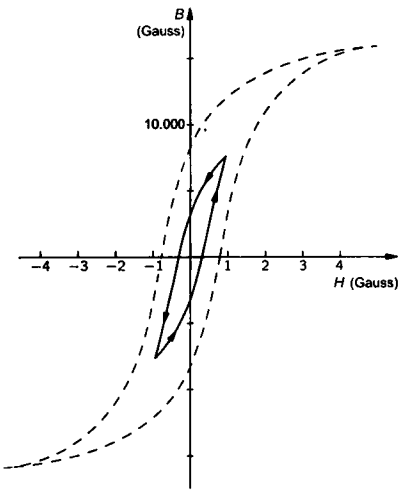
$$U = (\epsilon_0 c^2 lA)\int H\,dB \tag{36.21}$$

lA'mn torusun hacmi olduğuna dikkat edin. Böylece manyetik mir malzemedeki enerji yoğunluğu "u = U/hacim"in aşağıdaki eşitlikle bulunabileceğini görmüş olduk:

$$u = \epsilon_0 c^2 \int H\,dB \tag{36.22}$$

Burada ilginç bir özellik dahil olmuştur. Alternatif akımları kullanırken, demir bir histerezis ilmeğinin etrafında tahrik edilmiştir. B, H'ın tek değerli bir fonksiyonu olmadığından, bir tam çevrim etrafında $\int H\,dB$'nin integrali sıfıra eşit *değildir*. Histerezis eğrisinin içindeki çevrili alandır. Dolayısıyla, tahrik kaynağı her bir döngüde net bir enerji sağlar. Histerezis ilmeğinin içindeki alanla orantılı bir enerjidir bu. Ve bu enerji "kaybolur". Elektromanyetik, olup bitenden dolayı kaybolur, demirde ısı olarak ortaya çıkar. Buna *histerezis kaybı*

denir. Bu tür enerji kayıplarını küçük tutmak için, histerezis ilmeği mümkün olduğunca dar tutulur. İlmeğin alanını azaltmanın bir yolu, her bir döngüde ulaşılan maksimum alanı azaltmaktır. Daha küçük maksimum alanlarda, Şekil 36-9'daki gibi bir histerezis eğrisi elde ederiz. Ayrıca, çok dar bir ilmek elde etmek için özel malzemeler tasarlanır. *Transformatör demiri* denilen malzeme –çok az silisyum katkılı demir alaşımlar– bu özellik için geliştirilmiştir.



Şekil 36-9 Doyuma ulaşmayan bir histerezis ilmeği.

Küçük bir histerezis ilmeği üzerinden indüktans geçirildiğinde, B ile H arasındaki ilişki doğrusal bir denklemle yakınlaştırılabilir. Genelde şöyle yazılır:

$$B = \mu H \tag{36.23}$$

μ sabiti, daha önce kullandığımız manyetik moment *değildir*. Ona demirin *geçirgenliği* denir. (Ayrıca bazen *"göreli geçirgenlik"* de denir.) Sıradan demirlerin geçirgenliği tipik olarak birkaç bindir. "Süper alaşım" denilen bazı özel alaşımların milyona kadar çıkan geçirgenlikleri olabilir.

Denklem (36.21)'deki $B = \mu H$ yakınlaştırmasını kullanırsak, toroidal indüktanstaki enerjiyi aşağıdaki ifade gibi yazabiliriz:

$$U = (\epsilon_0 c^2 lA)\mu \int H\, dH = (\epsilon_0 c^2 lA)\frac{\mu H^2}{2} \tag{36.24}$$

Böylece enerji yoğunluğu yaklaşık olarak aşağıdaki eşitlik olur:

$$u \approx \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\mu H^2$$

Artık Denk. (36.24)'ün enerjisini bir indüktansın $\mathcal{L}I^2/2$ enerjisine eşitleyip, $\mathcal{L}$ için çözebiliriz:

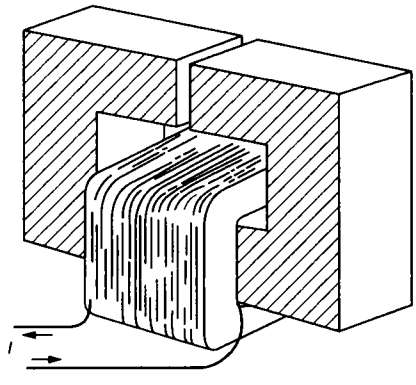
$$\mathcal{L} = (\epsilon_0 c^2 lA)\mu\left(\frac{H}{I}\right)^2$$

Denklem (36.20)'den H/I'yı çekersek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu N^2 A}{\epsilon_0 c^2 l} \tag{36.25}$$

İndüktans μ'yla orantılıdır. Ses amplifikatörleri gibi şeyler için indüktans istiyorsanız, B-H ilişkisinin mümkün olduğunca doğrusal olduğu bir histerezis ilmeği üzerinde onları çalıştırmanız gerekir. (1. Cilt 50. Bölümde, doğrusal olmayan sistemlerde harmoniklerin meydana getirilmesini konuşmuştuk.) Bu tür amaçlar için, Denk. (36.23) yararlı bir yakınlaştırmadır. Diğer bir yandan, harmonik yaratmak *istiyorsanız*, özellikle yüksek oranda doğrusal olmayan şekilde çalıştırılan bir indüktans kullanabilirsiniz. Bu durumda bütün B-H eğrilerini kullanmak ve ne olup bittiğini grafik veya sayısal yöntemlerle analiz etmek zorundasınız.

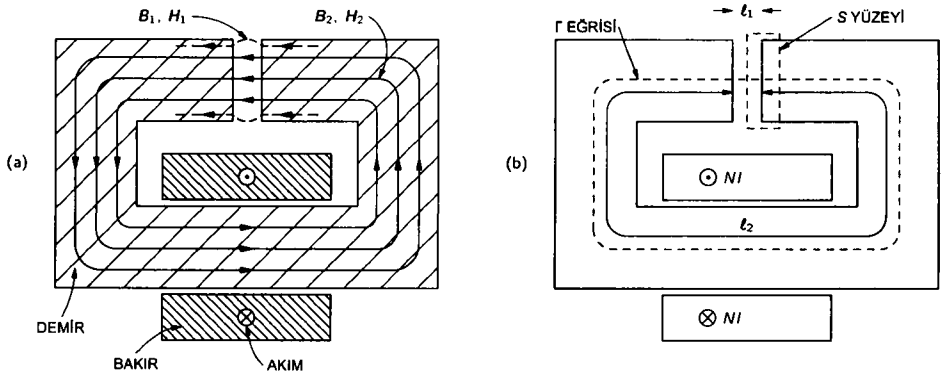
Bir "transformatör" sıklıkla iki bobini, manyetik bir malzemeden yapılmış aynı torusa –veya *çekirdeğe*– koyarak yapılır. Bu durumda "birincil" sarmaldaki değişken akım çekirdeğin içindeki manyetik alanı değiştirerek "ikincil" sarmalda bir emk indükler. İki sarmalın *her bir sarımından* geçen akı aynı olacağından, iki sarmaldaki emk'lar her birindeki sarım sayısıyla orantılıdır. Birincile uygulanan bir voltaj, ikincilde farklı bir voltaja yol açar. Manyetik alandaki gereken değişikliği üretmek için çekirdeğin etrafında belirli bir *net* akı gerektiğinden, iki sarmaldaki akımların *cebirsel* toplamı sabit ve gerekli "mıknatıslama" akımına eşit olacaktır. İkinciden çekilen akım artarsa, birincideki akım da aynı oranda artmalıdır. Voltajlar için olduğu kadar, akımların da bir "dönüşümü" vardır.



Şekil 36-10 Bir elektromıknatıs.

36-5 Elektromıknatıs

Şimdi biraz daha karmaşık, pratik bir durumu ele alalım. Şekil 36-10'daki gibi standart şekilli bir elektromıknatısımız olsun. "C şeklinde" demir bir çatal ve bu çatalın etrafında çok sayıda tel sarımı olan bir bobin vardır. Açıklıktaki B manyetik alanı nedir?



Şekil 36-11 Bir elektromıknatısın kesit alanı.

Kovuğun kalınlığı diğer boyutlarla karşılaştırıldığında küçükse, ilk yakınlaştırma olarak $\boldsymbol{B}$'nin çizgilerinin, torus örneğinde olduğu gibi, ilmeğin içinden dönerek geçeceğini varsayabiliriz. Şekil 36-11(a)'dakine benzeyeceklerdir. Kovuğun içinde, bir şekilde yayılma eğilimindedirler ama açıklık çok darsa etki küçük olacaktır. $\boldsymbol{B}$'nin, çatalın herhangi bir kesitinden geçen akısının sabit olduğunu varsaymak iyi bir tahmin olabilir. Çatalın düzgün bir A kesit alanı varsa – ve köşelerdeki ya da kovuklardaki kenar etkilerini ihmal edersek– $\boldsymbol{B}$'nin çatal etrafında düzgün olduğunu söyleyebiliriz.

$\boldsymbol{B}$'nin açıklıktaki değeri de aynıdır. Bu, Denk. (36.16)'dan çıkar. Şekil 36-11 (b)'deki gibi, bir yüzü boşluğa bakan ve diğer yüzü demirde olan S kapalı yüzeyini düşünün. $\boldsymbol{B}$'nin bu yüzeyden dışarı toplam akısı sıfır olmalıdır. Açıklıktaki alana B_1 ve demirdeki alana B_2 dersek, yakınlaştırmamıza göre aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$B_1A - B_2A = 0$$

Böylelikle $B_1 = B_2$ ifadesi ortaya çıkar.

Şimdi H'ye bakalım. Denklem (36.19)'u kullanarak, Şekil 36-11(b)'deki Γ eğrisinin etrafında çizgi integrali alırız. Önceden olduğu gibi, sağ taraftaki integral sarım sayısı çarpı akım yani NI'dır. Şimdiyse, H demirde ve havada farklı olacaktır. Demirdeki alana H_2 der ve çatal etrafındaki yol uzunluğuna da l_2 dersek, eğrinin bu kısmı integrale H_2l_2 kadar bir katkıda bulunacaktır. Açıklıktaki alana H_1 ve açıklığın kalınlığına l_1 dersek, açıklıktan gelen katkı H_1l_1 olur. Böylece aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

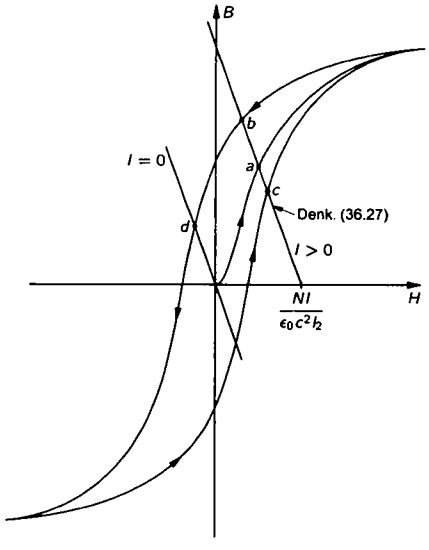
$$H_1l_1 + H_2l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0c^2} \tag{36.26}$$

Şimdi bir başka şey daha biliyoruz: hava boşluğunda mıknatıslanma ihmal edilebilir, böylece $B_1 = H_1$ eşitliğini yazabiliriz. $B_1 = B_2$ olduğundan, Denk. (36.26) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$B_2l_1 + H_2l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0c^2} \tag{36.27}$$

Hâlâ iki bilinmeyenimiz var. B_2 ve H_2'yi bulmak için bir başka ilişkiye daha, demirdeki H'yi B'yle ilişkilendiren bir ilişkiye ihtiyaç duyarız.

$B_2 = \mu H_2$ yakınlaştırmasını yapabilirsek, denklemi cebirsel olarak çözebiliriz. Ancak gelin, demirdeki mıknatıslanma eğrisinin Şekil 36-8'deki gibi olduğu genel durumu ele alalım. İstediğimiz şey Denk. (36.27)'yle bu fonksiyonel ilişkinin aynı anda çözümüdür. Bunu, Şekil 36-12'deki gibi, Denk. (36.27)'nin grafiğini, mıknatıslama eğrisi grafiğinin üzerine çizerek bulabiliriz. Çözüm iki eğrinin kesiştiği yerdedir.



Şekil 36-12 Bir elektromıknatıs içinde alanın çözümü.

Belirli bir I akımı için (36.27) fonksiyonu Şekil 36-12'de $I > 0$'la işaretlenmiş düz çizgidir. Çizgi H eksenini ($B_2 = 0$) $H_2 = NI/\epsilon_0c^2l_2$'de keser ve eğimi de $-l_2/l_1$'dir. Değişik akımlar çizgiyi yatay olarak kaydırır. Şekil 36-12'ye baktığımız-

da, belirli bir akım için, oraya nasıl geldiğinize bağlı olarak birçok farklı çözüm olduğunu görürüz. Mıknatısı yeni yaptıysanız ve akımı I'ya çıkardıysanız, B_2 alanı (aynı zamanda B_1'dir) a noktasındaki değere sahip olur. Akımı daha yüksek bir değere çıkarıp, sonra I'ya indiyseniz, alan b noktasındaki değerdir. Ya da, mıknatısta eksi bir akım yaratıp sonra I'ya *çıktıysanız*, alan c noktasındaki değerdir. Açıklıktaki alan, geçmişte yaptıklarınıza bağlıdır.

Mıknatıstaki akım sıfır olduğunda, B_2 ve Denk. (36.27)'deki H_2 arasındaki ilişki $I = 0$'la işaretlenen çizgiyle gösterilir. Birçok olası çözüm vardır. Önce demiri doyurduysanız, mıknatısta, d noktasıyla verilen önemli miktarda artık alan olabilir. Bobini çıkardığınızda, kalıcı bir mıknatısınız olur. İyi bir kalıcı mıknatıs için, *geniş* bir histerezis ilmeğine sahip malzemeye sahip olmanız gerektiği açıktır. Alnico V gibi özel alaşımların çok geniş ilmekleri vardır.

36-6 Kendiliğinden mıknatıslanma

Şimdi de neden ferromanyetik malzemelerde küçük bir manyetik alanın büyük bir mıknatıslanma meydana getirdiği sorusunu ele alacağız. Demir ve nikel gibi ferromanyetik malzemelerin mıknatıslanması, atomun iç kabuğundaki elektronların manyetik momentlerinden gelir. Her bir elektronun $q/2m$ çarpı kendi g-çarpanı çarpı J açısal momentumu kadar bir μ manyetik momenti vardır. Net bir yörünge hareketi olmayan tek bir elektron için $g = 2$'dir ve J'nin herhangi bir yöndeki –örneğin z yönündeki– bileşeni $\pm\hbar/2$'dir. Dolayısıyla μ'nun z eksenindeki bileşeni de aşağıdaki ifadedir:

$$\mu_z = \frac{q\hbar}{2m} = 0{,}928 \times 10^{-23}\ \text{amp} \cdot \text{m}^2 \qquad (36.28)$$

Bir demir atomunda, ferromanyetizmaya katkıda bulunan iki elektron vardır, dolayısıyla işleri basitleştirmek için, demir gibi ferromanyetik ancak iç kabuğunda sadece bir elektronu olan nikeli ele alacağız. (Akıl yürütmemizi demire genişletmek kolaydır.)

Bir B dış alanının varlığında, atomik mıknatıslar alanla hizalanma eğilimindedir ancak paramanyetik malzemeler için bahsettiğimiz termal hareketlerden dolayı hizadan çıkarılırlar. Son bölümde, atomik mıknatısları hizalamaya çalışan manyetik alanlar ile onların düzenini bozmaya çalışan termal hareketler arasındaki denge yüzünden birim hacimdeki ortalama manyetik alanın aşağıdaki şekilde hesaplanabileceğini bulmuştuk:

$$M = N\mu \tanh\frac{\hbar B_a}{kT} \qquad (36.29)$$

B_a atom üzerine etkiyen alan ve kT de Boltzmann enerjisidir. Paramanyetizma kuramında, yakındaki atomlardan gelen alanı göz ardı ederek B_a yerine sadece B kullanmıştık. Ferromanyetik durumdaysa bir karmaşıklık vardır. Bir atom üzerine etkiyen B_a için demirdeki ortalama alanı kullanmamalıyız. Bunun yerine, dielektrikte yaptığımızı yapıp her bir atom için etkiyen *yerel* alanı bulmalıyız. Tam bir çözüm için, söz konusu atom üzerine etkiyen kristal örgüdeki diğer atomlardan gelen bütün katkıları toplamalıyız. Ancak dielektrikte yaptığımız gibi, atom üzerindeki alanın küçük küresel bir delikte bulacağımız alanla aynı olduğu –yakındaki atomların momentlerinin deliğin varlığından etkilenmeyeceğini varsayarak– yakınlaştırmasını yaparız.

11. Bölümde ortaya koyduğumuz fikirleri takip ederek, aşağıdaki eşitliği yazabileceğimizi düşünürüz:

$$B_{\text{delik}} = B + \frac{1}{3}\frac{M}{\epsilon_0 c^2} \qquad \text{(yanlış!)}$$

Ancak bu doğru değildir. Gelgelelim, bu bölümde ferromanyetizma için yazdığımız denklemler ile 11. Bölümdeki denklemlerin dikkatli bir karşılaştırmasını

yaparak 11. Bölümdeki sonuçları kullanabiliriz. Gelin, birbirlerine karşılık gelen denklemleri yazalım. İletim akımlarının veya yüklerinin olmadığı bölgeler için aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$\begin{array}{ll} \text{Elektrostatik} & \text{Statik ferromanyetizma} \\ \nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}+\dfrac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right)=0 & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0 & \nabla\times\left(\boldsymbol{B}-\dfrac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2}\right)=0 \end{array} \tag{36.30}$$

Bu iki set denklem, eğer *tamamen matematiksel* karşılıklıları yazarsak, birbirlerine benzer kabul edilebilirler.

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2} \qquad \boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\to\boldsymbol{B}$$

Bu, aşağıdaki benzerliği kurmakla aynıdır:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{P}\to\boldsymbol{M}/c^2 \tag{36.31}$$

Diğer bir deyişle, ferromanyetizma denklemlerini aşağıdaki ifade gibi yazarsak

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\left(\boldsymbol{H}+\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2}\right)=0 \\ &\nabla\times\boldsymbol{H}=0, \end{aligned} \tag{36.32}$$

tıpkı elektrostatik denklemleri *gibi gözükürler*.

Bu tamamen cebirsel karşılıklılık geçmişte kafa karışıklığına yol açmıştı. İnsanlar $\boldsymbol{H}$'ın "manyetik alan" olduğunu düşündü. Ancak gördüğümüz üzere, $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{E}$ fiziksel olarak temel alanlardır ve $\boldsymbol{H}$ ise türetilmiş bir fikirdir. Diğer bir deyişle her ne kadar *denklemler* arasında benzerlik olsa da, *fizikleri* benzer değildir. Yine de bu bizim aynı denklemlerin benzer çözümleri olması gerektiği ilkesini kullanmamızı engellemez.

Şekil 36-1'de özetlediğimiz, dielektrikte çeşitli şekillerdeki deliklerin içindeki elektrik alanlara dair sonuçlarımızı, karşılık gelen deliklerin içindeki $\boldsymbol{H}$ alanını bulmak için kullanabiliriz. $\boldsymbol{H}$'ı bilirsek, $\boldsymbol{B}$'yi belirleyebiliriz. Örneğin (Bölüm 36-1'de özetlediğimiz sonuçları kullanarak) $\boldsymbol{M}$'e paralel iğne ucu şeklindeki bir delikteki $\boldsymbol{H}$ alanı, malzemedeki $\boldsymbol{H}$'yle aynıdır:

$$\boldsymbol{H}_{\text{delik}}=\boldsymbol{H}_{\text{malzeme}}$$

Ancak delikteki $\boldsymbol{M}$ sıfır olduğundan, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\boldsymbol{B}_{\text{delik}}=\boldsymbol{B}_{\text{malzeme}}-\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2} \tag{36.33}$$

Diğer yandan, $\boldsymbol{M}$'e dik disk şeklinde bir delik için aşağıdaki denklemimiz vardır:

$$\boldsymbol{E}_{\text{delik}}=\boldsymbol{E}_{\text{dielektrik}}+\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

O da aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\boldsymbol{H}_{\text{delik}}=\boldsymbol{H}_{\text{malzeme}}+\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2}$$

Ya da, $\boldsymbol{B}$ cinsinden:

$$\boldsymbol{B}_{\text{delik}}=\boldsymbol{B}_{\text{malzeme}} \tag{36.34}$$

Son olarak küresel bir delik için, Denk. (36.3)'le benzerlik kurarak aşağıdaki ifadeyi

$$\boldsymbol{H}_{\text{delik}}=\boldsymbol{H}_{\text{malzeme}}+\frac{\boldsymbol{M}}{3\epsilon_0c^2}$$

veya aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\boldsymbol{B}_{\text{delik}}=\boldsymbol{B}_{\text{malzeme}}-\frac{2}{3}\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2} \tag{36.35}$$

Bu sonuç $\boldsymbol{E}$ için elde ettiğimizden gayet farklıdır.

Maxwell denklemlerini doğrudan kullanarak bu sonuçları daha fiziksel bir yolla elde etmek elbette mümkündür. Örneğin, Denklem (36.34) $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ eşitliğinden çıkar. (Yarısı malzemenin içinde ve yarısı dışarda bir Gauss yüzeyi kullanırsınız.) Benzer şekilde, deliğin içine girip malzeme içinden dönen bir eğri boyunca çizgi integrali kullanarak da Denk. (36.33)'ü elde edebilirsiniz. Fiziksel olarak, $\nabla \times \boldsymbol{M}$'le belirlenen yüzey akımları yüzünden delikteki alan küçülmüştür. Denklem (36.35)'in ayrıca, küresel kovuğun sınırındaki yüzey akımlarının etkilerini göz önünde bulundurak da çıkarılabileceğini gösterme zevkini size bırakıyoruz.

Denklem (36.29)'dan denge mıknatıslanmasını bulurken, en uygun yolun $\boldsymbol{H}$'yi kullanmak olduğu ortaya çıktı; böylece aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\boldsymbol{B}_a = \boldsymbol{H} + \lambda \frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2} \tag{36.36}$$

Küresel delik yakınlaştırmasında $\lambda = \frac{1}{3}$ alırdık, ancak göreceğiniz üzere ilerde bir başka değer kullanmak isteyeceğiz o yüzden bunu ayarlanabilir bir parametre olarak tutacağız. Ayrıca, vektör yönlerini dert etmemek için bütün alanları aynı yönde kabul edeceğiz. Eğer Denk. (36.36)'yı Denk. (36.29)'a yerleştirirsek, M mıknatıslanmasını H mıknatıslayıcı alanıyla ilişkilendiren bir denklemimiz olur:

$$M = N\mu \tanh\left(\mu \frac{H + \lambda \mathrm{M}/\epsilon_0 c^2}{kT}\right)$$

Ancak bu açıkça çözülemeyecek bir denklem olduğundan, grafik olarak çözeceğiz.

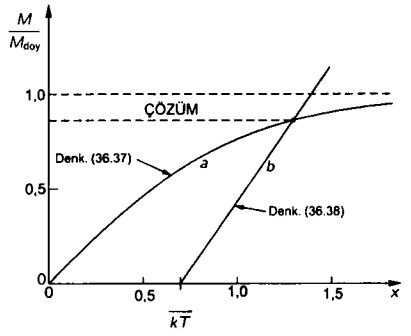
Denklem (36.29)'u aşağıdaki ifade gibi yazarak problemi daha genel bir hale koyalım:

$$\frac{M}{M_{\text{doyma}}} = \tanh x \tag{36.37}$$

M_{doyma} mıknatıslanmanın ($N\mu$) doyma değerini ve x de $\mu B_a/kT$'yi simgeler. x üzerindeki M/M_{doyma} bağlılığı, Şekil 36-13'teki a eğrisiyle gösterilmiştir. Ayrıca, B_a için Denk. (36.36)'yı kullanarak, x'in M'nin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki ifade gibi yazabiliriz:

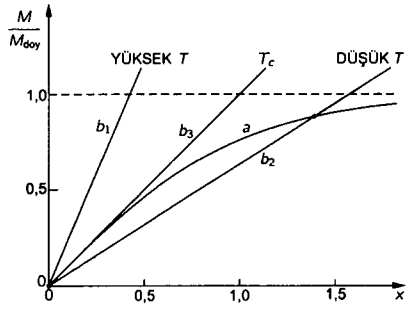
$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left(\frac{\mu\lambda\, M_{\text{doyma}}}{\epsilon_0 c^2 kT}\right)\frac{\mathrm{M}}{M_{\text{doyma}}} \tag{36.38}$$

Herhangi bir H değeri için bu, M/M_{doyma} ile x arasında bir düz çizgi bağlantısıdır. x'i $x = \mu H/kT$ noktasında keser ve eğim de $\epsilon_0 c^2 kT/\mu\lambda M_{\text{doyma}}$'dır. H değerleri için Şekil 36-13'te b'yle işaretlenmiş bir çizgiyi çizebiliriz. a ve b eğrilerinin kesişimi bize M/M_{doyma} oranını verir. Problemi çözmüş olduk.



Şekil 36-13 Denklem (36.37) ve (36.38)'in grafiksel bir çözümü.

Çeşitli koşullarda çözümlerin nasıl olacağına bakalım. $H = 0$ durumuyla başlayalım. Şekil 36-14'teki b_1 ve b_2 çizgileriyle gösterilen iki olası durum vardır. Denklem (36.38)'e göre çizginin eğimi mutlak T sıcaklığıyla orantılıdır. Dolayısıyla *yüksek sıcaklıklarda* b_1 gibi bir çizgi elde ederiz. Çözüm M/M_{doyma}=0'dır. H mıknatıslayıcı alanı sıfır olduğunda, mıknatıslama da ayrıca sıfırdır. Ancak *düşük sıcaklıklarda* b_2 gibi bir çizgi elde ederiz ve M/M_{doyma} için *iki* çözüm vardır. Biri $M/M_{\text{doyma}} = 0$ için ve diğeri de M/M_{doyma} bire yakın olduğu durum için. Sonradan ortaya çıktı ki –çözümlerdeki küçük değişmeleri göz önüne alarak görebileceğiniz üzere– sadece daha üstteki çözüm dengelidir.



Şekil 36-14 $H = 0$ olduğunda mıknatıslanmayı bulmak.

Öyleyse buna göre, bir manyetik malzeme düşük sıcaklıklarda kendini *kendiliğinden* mıknatıslamalıdır. Kısacası, termal hareketler yeterince küçük olduğunda, atomik mıknatıslar arasındaki bağlaşım hepsinin birbirine paralel olarak dizilmesini sağlar.

Yüksek sıcaklıklardan aşağı doğru inersek, Curie sıcaklığı T_C dediğimiz kritik bir sıcaklık vardır. Bu sıcaklıkta ferromanyetik davranış aniden yerleşir. Bu sıcaklık, Şekil 36-14'teki a eğrisine teğet ve dolayısıyla eğimi 1 olan b_3 çizgisine karşılık gelir. Curie sıcaklığı şöyle hesaplanır:

$$\frac{\epsilon_0 c^2 kT_C}{\mu\lambda\, M_{\text{doyum}}} = 1 \tag{36.39}$$

Eğer dilersek, Denk. (36.38)'i daha basit şekilde T_C cinsinden yazabiliriz:

$$x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_C}{T}\left(\frac{\mathrm{M}}{M_{\text{doyum}}}\right) \tag{36.40}$$

Şimdi küçük H mıknatıslayıcı alanları olduğunda ne olduğuna bakalım. Şekil 36-14'ten düz çizgilerimizi biraz sağa kaydırırsak ne olacağını görebiliriz. Düşük sıcaklık durumunda, kesişim noktası ***a*** eğrisinin düşük eğimli kısmına doğru kayar ve M göreceli olarak az değişir. Yüksek sıcaklık durumundaysa, kesişim noktası ***a*** eğrisinin dik kısmına doğru kayar ve M göreceli olarak çok hızlı değişir. Aslında, ***a*** eğrisinin bu kısmını birim eğimli düz bir çizgiye yakınlaştırabilir ve aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\frac{M}{M_{\text{doyum}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_C}{T}\left(\frac{\mathrm{M}}{M_{\text{doyum}}}\right)$$

Şimdi M/M_{doyum} için çözebiliriz:

$$\frac{M}{M_{\text{doyum}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_C)} \tag{36.41}$$

Paramanyetizma için elde ettiğimize benzer bir yasa elde etmiş olduk. Paramanyetizma için elimizde aşağıdaki eşitlik vardı:

$$\frac{M}{M_{\text{doyum}}} = \frac{\mu B}{kT} \tag{36.42}$$

Buradaki bir farklılık, atomik mıknatısların etkileşiminden doğan bazı etkileri içeren H cinsinden mıknatıslanmayı elde etmiş olmamızdır. Ancak asıl farklılık, mıknatıslanmanın tek başına mutlak sıcaklık T'yle değil de, T ile T_C arasındaki *farkla* ters orantılı olmasıdır. Yakın atomlar arasındaki etkileşimleri ihmal ettiğimizde $\lambda = 0$ diyebiliriz ki bu da Denk. (36.39)'a göre $T_C = 0$ eşitliğini almakla aynı anlama gelir. Böylece sonuçlar 35. Bölümde elde ettiklerimizle aynıdır.

Kuramsal elde ettiğimiz sonuçları, nikel için elde edilmiş deneysel sonuçlarla karşılaştırabiliriz. Nikelin ferromanyetik davranışının, sıcaklığı 631° K'nin üzerine çıkarıldığında aniden kaybolduğu deneysel olarak gözlemlenmiştir. Bu sonucu Denk. (36.39)'dan hesapladığımız T_C değeriyle karşılaştırabiliriz. $M_{\text{doyum}} = \mu N$ eşitliğini kullanarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$T_C = \lambda \frac{N\mu^2}{k\epsilon_0 c^2}$$

Nikelin yoğunluğu ve atomik ağırlığından, aşağıdaki eşitliği hesaplarız:

$$N = 9{,}1 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Denklem (36.28)'den μ'yu çekip, $\lambda = \frac{1}{3}$ dersek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$T_C = 0{,}24°\mathrm{K}$$

Arada yaklaşık 2600 kat bir fark var! Ferromanyetizma kuramımız tamamen çöktü.

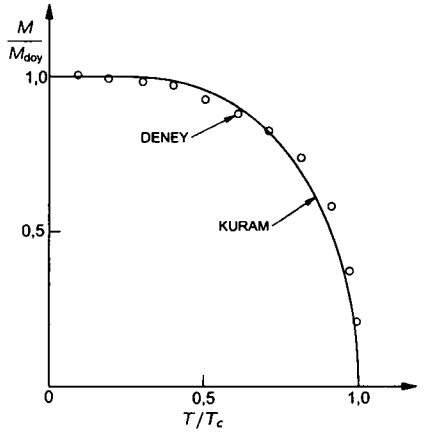
Kuramımızı, Weiss'ın dediği gibi λ değerinin bir bölü üç değil de, (2600) × $\frac{1}{3}$ –ya da yaklaşık 900– olduğunu söyleyerek "onarmaya" çalışabiliriz. Sonradan ortaya çıktı ki, demir gibi diğer ferromanyetik malzemeler için benzer değerler vardır. Bunun ne anlama geldiğini görmek için Denk. (36.36)'ya geri dönelim. Büyük λ değerinin, atomdaki yerel alan B_a'nın düşündüğümüzden çok çok daha büyük olduğu anlamına geldiğini görürüz. Hatta $H = B - M/\epsilon_0 c^2$ eşitliğini yazarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1)M}{\epsilon_0 c^2}$$

Başlangıçtaki fikrimize göre, $\lambda = \frac{1}{3}$ olduğunda, yerel mıknatıslanma M, B_a alanını $-\frac{2}{3}\,M/\epsilon_0 c^2$ kadar *azaltır*. Küresel delik modelimiz çok iyi değildiyse bile, yine

de *bir miktar* azalma beklerdik. Bunun yerine, ferromanyetizma olgusunu açıklamak için alanın mıknatıslanmasının yerel alanı büyük bir çarpanla, bin veya daha fazla kat, *büyüyeceğini* hayal etmek zorundayız. Bir atomda bu kadar korkunç büyüklükte alanlar ya da doğru işaretli alanlar meydana getirebilecek akla yatkın bir yol yok gibi gözükmektedir! Ferromanyetizmaya dair "manyetik" kuramımızın büyük bir hata olduğu açıkça ortadadır. Bu durumda, ferromanyetizmanın birbirine komşu atomlardaki dönen elektronlar arasındaki bir tür *manyetik olmayan* etkileşimle ilgili olduğu sonucuna varabiliriz. Bu etkileşim birbirine yakın bütün spinlerin tek bir yönde olmalarını sağlayacak kuvvetli bir eğilim meydana getirmelidir. Daha sonra bunun kuantum mekaniği ve Pauli dışarlama ilkesiyle ilgisi olduğunu göreceğiz.

Son olarak düşük sıcaklıklarda, $T < T_C$ için, ne olduğunu bakalım. Bu durumda $H = 0$ olduğunda bile, Şekil 36-14'ün a ve b_2 eğrilerinin kesişimiyle belirtilen anlık bir mıknatıslanma olduğunu görürüz. Çeşitli sıcaklık dereceleri için $-b_2$ çizgisinin eğrisini değiştirerek– M değerlerini hesaplarsak Şekil 36-15'teki kuramsal eğriyi elde ederiz. Bu eğri atomik momentlerini tek bir elektrondan kaynaklanan bütün ferromanyetik malzemeler için aynı olmalıdır. Diğer malzemeler için eğriler çok az daha farklıdır.



Şekil 36-15 Nikel için sıcaklığa bağlı bir anlık mıknatıslanma fonksiyonu.

T mutlak sıfıra doğru giderken, M, M_{doyum}'a doğru gider. Sıcaklık artırıldıkça mıknatıslanma düşer ve Curie sıcaklığında sıfıra iner. Şekil 35-15'teki noktalar nikel için deneysel gözlemlerdir. Kuramsal eğriyle gayet uyum içindedirler. Temel işleyişi anlamasak da, kuramın genel özellikleri doğru gibi gözükmektedir.

Son olarak, ferromanyetizmayı anlama çabamızda rahatsız edici bir çelişki daha vardır. Belli bir sıcaklığın üstünde malzemenin H'la orantılı M mıknatıslanmasına sahip bir paramanyetik malzeme gibi davranması gerektiğini ve bu sıcaklığın altında anında mıknatıslanması gerektiğini bulduk. Ancak demir için mıknatıslanma eğrisini çıkardığımızda buna uymadığını gördük. Biz onu "mıknatıslayıktan" sonra kalıcı olarak mıknatıslandı. Burada tartıştığımız fikirlere göre kendi kendini mıknatıslamalıydı! Yanlış olan ne? Sonradan ortaya çıktı ki, demir veya nikelin *yeterince küçük bir kristaline* baktığınızda gerçekten de tamamen mıknatıslanmıştır! Ancak büyük demir parçalarında hâlâ çok sayıda küçük bölgeler veya "alanlar" farklı yönde mıknatıslanmış haldedir ve bu yüzden de *ortalama* mıknatıslanma sıfır gözükmektedir. Her bir küçük alanda demirin kendi içinde M_{doyum}'a yaklaşık olarak eşit bir M mıknatıslanması vardır. Bu alan yapısının sonucu olarak malzemenin üzerinde durduğumuz mikroskobik özellikleri makroskopik özelliklerinden çok daha farklıdır. Bir sonraki dersimizde dökme manyetik malzemelerin pratik davranışlarını işleyeceğiz.

37

MANYETİK MALZEMELER

37-1 Ferromanyetizmayı anlamak

37-1 Ferromanyetizmayı anlamak
37-2 Termodinamik özellikler
37-3 Histerezis eğrisi
37-4 Ferromanyetik malzemeler
37-5 Olağan dışı manyetik malzemeler

Bu bölümde ferromanyetik malzemelerin ve diğer garip manyetik malzemelerin davranış ve garipliklerini tartışacağız. Manyetik malzemeleri çalışmaya geçmeden önce, son bölümde öğrendiğimiz mıknatısların genel kuramı hakkında bazı şeylerin hızlıca üzerinden geçeceğiz.

Öncelikle malzemenin içinde manyetizmadan sorumlu atomik akımları düşünelim ve sonra onları hacim akım yoğunluğu $j_{man} = \nabla \times M$ cinsinden ifade edelim. Bunun *gerçek* akımları temsil etmediğinin altını çizmek istiyoruz. Mıknatıslanma düzgün olduğunda akımlar tam olarak *gerçekten* birbirlerini sıfırlamazlar, diğer bir deyişle bir atomdaki bir elektronun dönen akımları ve bir diğer atomun dönen akımları birbirlerini sıfırlayacak şekilde üst üste binmez. Tek bir atomda bile manyetizmanın dağılımı düzgün *değildir*. Örneğin, bir demir atomunda manyetizma yaklaşık olarak küresel bir kabuk içinde, ne çekirdeğe yakın ne de ondan uzak olacak şekilde dağılmıştır. Dolayısıyla malzemede manyetizma detaylarında çok karmaşık bir şeydir. Çok düzensizdir. Bununla birlikte bu karmaşıklığı görmezden gelmek ve bu olguyu ortalama bir bakış açısından tartışmak zorundayız. Bu durumda, bir atoma göre yeterince büyük, sonlu bir alan üzerinden, $M = 0$ olduğunda, iç bölgedeki *ortalama* akım sıfırdır. Dolayısıyla, birim hacimde mıknatıslanmadan ve j_{man} ve diğerleriyle şu seviyede demek istediğimiz, tek bir atom tarafından kaplanan hacme oranla büyük bölgelerde ortalama olmalarıdır.

Kaynaklar: Bozorth, R. M., "Magnetism," *Encyclopaedia Britannica*, 14. Cilt, 1957, s. 636–667.
Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. basım, 1956.

Son bölümde bir ferromanyetik malzemenin şu ilginç özelliğe sahip olduğunu keşfetmiştik: belli bir sıcaklığın üzerinde şiddetli bir şekilde manyetik değildir, ancak bu sıcaklığın altında manyetik olur. Bu gerçek kolayca gösterilebilir. Oda sıcaklığında bir parça nikel bir mıknatıs tarafından çekilir. Ancak eğer bir gaz aleviyle onu Curie sıcaklığının üzerine ısıtırsak manyetik özelliği kaybolur ve mıknatıs tarafından –mıknatısın çok yakınına getirilse bile– çekilmez. Mıknatısın yakınında soğumaya bıraktığımızda, sıcaklığı kritik sıcaklığın altına düştüğü an mıknatıs tarafından çekilir!

Bizim kullanacağımız genel ferromanyetizma kuramı mıknatıslanmadan elektron spininin sorumlu olduğunu öngörür. Elektronun bir yarım spini vardır ve bir Bohr magnetonu manyetik momenti $\mu = \mu_B = q_e\hbar/2m$ taşır. Elektron spini "yukarı" veya "aşağı" işaret edebilir. Elektronun eksi yükü olduğundan dolayı, spini "yukarı" olduğunda *eksi* bir momenti vardır ve spini "aşağı" olduğunda da *artı* bir momenti vardır. Her zamanki gösterimimizle, elektronun $\boldsymbol{\mu}$ momenti spininin tersidir. Bir $\boldsymbol{B}$ alanında, bir manyetik dipolün yönelim enerjisinin $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ olduğunu bulmuştuk, ancak spinli elektronların enerjisi komşu spin dizilimlerine de bağlıdır. Demirde, yakındaki bir atomun momenti "yukarı"ysa, bir sonraki atomun momentinin de "yukarı" olma ihtimali çok büyüktür. Demir, kobalt ve nikeli bu kadar kuvvetli bir şekilde manyetik yapan da budur, bütün momentler paralel olmak ister. Tartışmamız gereken ilk soru bunun *neden* olduğudur.

Kuantum mekaniğinin doğmasından hemen sonra, birbirlerine komşu elektronların spinlerini birbirlerine *zıt* olacak şekilde hizalamaya çalışan ve çok kuvvetli bir *anlaşılır* kuvvet –manyetik veya başka bir tür gerçek kuvvet değil, ancak anlaşılır bir kuvvet– fark edilmişti. Bu kuvvetler kimyasal değerlik kuvvetleriyle yakından ilişkilidir. Kuantum mekaniğinde iki elektronun aynı durumu kaplayamayacağını belirten bir ilke, eş deyişle *dışarlama ilkesi* vardır. Di-

ğer bir deyişle iki elektronun konum ve spin yönleri söz konusu olduğunda aynı koşullarda olamazlar.* Örneğin, eğer aynı noktadalarsa spinleri mutlaka birbirlerine zıt olmalıdır. Dolayısıyla, atomlar arasında elektronların birleşmek istediği (aynı bir kimyasal bağdaki gibi) bir bölge varsa ve biz zaten orda bulunan bir elektronun üzerine bir elektron daha koymak istersek, bunu yapmanın tek yolu ikinci elektronun spini ilk elektronun spinin yönüne zıt olmalıdır. Elektronlar birbirinden uzak durmadığı sürece, iki elektronun spinlerinin birbirine paralel olması yasaya aykırıdır. Birbirine yakın, paralel spinli elektronların enerjileri birbirine zıt spinlere sahip bir çift elektronun enerjisinden çok daha fazladır; net etki sanki bir kuvvetin spini tersine döndürmeye çalışmasıdır. Bazen bu spin döndüren kuvvete *değiştirme kuvveti* denir, ancak bu onu daha da gizemli yapar. Güzel bir terim değildir. Sadece dışarlama ilkesinden dolayı elektronlar spinlerini birbirlerine zıt yapma eğilimdedirler. Aslında birçok maddede manyetizma *olmayışının* açıklaması da budur. Atomların dışın kabuklarındaki serbest elektronların spinlerinin birbirlerini zıt yönlerde dengelemeye doğru müthiş bir eğilimleri vardır. Problem, neden demir gibi malzemelerin beklediğimizin tam tersi şekilde davrandığıdır.

Beklenen hizalanma etkisini, enerji denklemine uygun bir terim ekleyerek ve birbirlerine komşu olan elektron mıknatıslarının ortalama M mıknatıslanması olduğu durumda bir elektronun komşu bölgedeki atomların ortalama mıknatıslanmasıyla aynı yönde olmasına dair kuvvetli bir eğilimi olduğunu söyleyerek özetledik. Bu yüzden iki olası spin yönelimi için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:†

$$\begin{aligned} \text{Spin "yukarı" enerjisi} &= +\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right) \\ \text{Spin "aşağı" enerjisi} &= -\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right) \end{aligned} \tag{37.1}$$

Kuantum mekaniğinin müthiş bir spin yönlendirici kuvvet –her ne kadar, açıkça, yanlış işaretli olsa da– ortaya koyduğu bilindiğinde, ferromanyetizmanın kökeninin bu kuvvette olabileceği öne sürüldü. Demirin karmaşıklıkları ve yüksek sayıda elektronun dahil olmasından dolayı etkileşim enerjisinin işaretinin bir şekilde diğer türlü çıkması bekleniyordu. Bunun düşünüldüğü zamandan –kuantum mekaniğinin ilk anlaşılmaya başlandığı yaklaşık yıl olan 1927'den– bu yana birçok insan λ için kuramsal bir öngörü elde etmek için çeşitli tahminlerde bulundu ve yarı hesaplamalar yaptı. Demirdeki iki elektron spini arasındaki en güncel hesaplamalar –iki komşu atomun elektronları arasındaki etkileşimin doğrudan olduğunu varsayarsak– hâlâ *yanlış* işaret çıkarmaktadır. Bunun günümüzdeki açıklaması bundan durumun karmaşıklığının bir şekilde sorumlu olmasıdır. Daha karmaşık bir durumla hesaplama yapan birilerinin doğru cevabı elde edeceğini umalım!

Manyetizmayı meydana getiren kabuğun içindeki elektronlardan birinin yukarı spininin, dış taraftaki iletim elektronlarının karşı spine sahip olmasına yol açtığına inanılır. İletim elektronları "manyetik" elektronlarla aynı bölgeye geldiğinden bunun olmasını bekleyebilirsiniz. Hareket ettiklerinden dolayı, bir sonraki atoma göre baş aşağı olma yönünde bir tutumları vardır; bir "manyetik" elektron iletim elektronlarını zıt olmaya zorlar ve iletim elektronu da bir sonraki "manyetik" elektronu *ona* zıt olmaya zorlar. Çifte etkileşim, iki "manyetik" elektronu hızlandırmaya çalışan etkileşime eşittir. Diğer bir deyişle, paralel spinler yapma eğilimi, bir yere kadar her ikisine de zıt olan bir aracının sonucudur. Bu mekanizma iletim elektronlarının tamamen "baş aşağı" olmasını gerektirmez. "Manyetik" tekleri diğer şekilde yükleyecek kadar aşağı olma eğiliminde olmaları yeter. Bu tür şeyleri hesaplayanların ferromanyetizmadan so-

---

* *Bkz.* 3. Cilt, 4. Bölüm (Bölüm 4-7).

† Son bölümdeki işimizle uyumlu olması için bu denklemleri B yerine $H = B - M/\epsilon_0 c^2$ ifadesiyle yazarız. $\lambda' = \lambda - 1$'ken, $U = \pm\mu B_a = \pm\mu(B + \lambda' M/\epsilon_0 c^2)$ yazmayı tercih edebilirsiniz. Aynı şeydir.

rumlu tuttuğu mekanizma işte budur. Ancak bugüne kadar kimsenin bir malzemenin periyodik tablodaki numarasının 26 olduğundan yola çıkarak λ'nın büyüklüğü hesaplayamadığının altını çizelim. Kısacası, tam olarak ne olup bittiğini anlamış değiliz.

Şimdi kuramı incelemeye devam edelim ve daha sonra onu oluşturduğumuz şekilde bulunan belli bir hatayı tartışmak üzere daha sonra geri dönelim. Belli bir elektronun manyetik momenti "yukarı"ysa, enerji hem dış alandan, hem de spinlerin birbirine paralel olma eğiliminden gelir. Spinler paralel olduğunda enerji daha düşük olduğundan bu etkinin bazen "etkili iç alan"dan doğduğu düşünülür. Ancak hatırlarsanız o gerçek bir *manyetik* kuvvetten dolayı *değildir*. Çok daha karmaşık bir etkileşimdir. Herhangi bir durum için, (37.1) numaralı denklemler bir "manyetik" elektronun iki spin durumunun enerjileri için geçerli denklemleridir. T sıcaklığında, bu iki durumun göreli olasılığı $e^{-\text{enerji}/kT}$'dir ve $x = \mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)/kT$ olduğunda $e^{\pm x}$ şeklinde yazabiliriz. Böylece manyetik momentin ortalama değerini hesapladığımızda (son bölümde olduğu gibi) aşağıdaki eşitlik olduğunu buluruz:

$$M = N\mu \tanh x \tag{37.2}$$

Şimdi de malzemenin iç enerjisini hesaplayalım. Bir elektronun enerjisi manyetik momentiyle orantılı olduğundan, ortalama enerjinin ve ortalama momentinin hesaplamaları aynıdır. Yalnızca Denk. (37.2)'de μ yerine $-\mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)$ olan $-\mu B$ yazarız. Bu durumda ortalama enerji aşağıdaki denklemle hesaplanabilir:

$$\langle U \rangle_{\text{ort}} = -N\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right)\tanh x$$

Bu tam da doğru değildir. $\lambda M/\epsilon_0 c^2$ terimi olası bütün atom *çiftlerinin etkileşimlerini temsil eder ve her bir çifti* sadece *bir kere* saymayı unutmamalıyız. (Durağan alandaki bir elektronun ve sonra da ikinci bir elektronun enerjisini ele aldığımızda, ilk enerjinin parçasını bir kere daha saymış olduk.) Dolayısıyla, *karşılıklı etkileşim terimini* ikiye bölmeliyiz. Böylece enerji denklemimiz aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

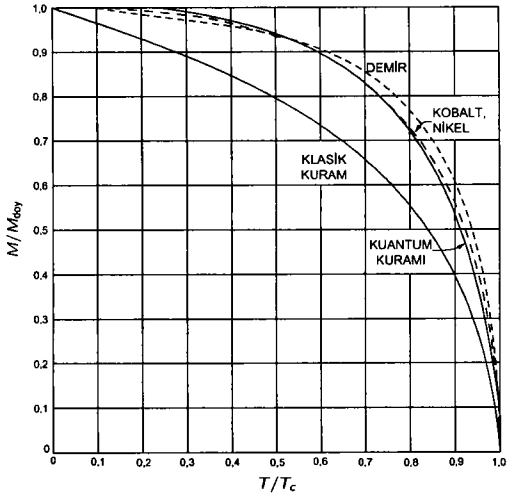
$$\langle U \rangle_{\text{ort}} = -N\mu\left(H + \frac{\lambda M}{2\epsilon_0 c^2}\right)\tanh x \tag{37.3}$$

Son bölümde ilginç bir şey keşfetmiştik. Dış bir mıknatıslayıcı alan olmasa bile, belli bir derecenin altında malzemenin kendisi denklemler için manyetik momentin *sıfır olmadığı* bir çözüm bulabilmektedir. Denklem (37.2)'de $H = 0$ dediğimizde, aşağıdaki eşitliği bulmuştuk:

$$\frac{M}{M_{\text{doyum}}} = \tanh\left(\frac{T_c}{T}\frac{M}{M_{\text{doyum}}}\right) \tag{37.4}$$

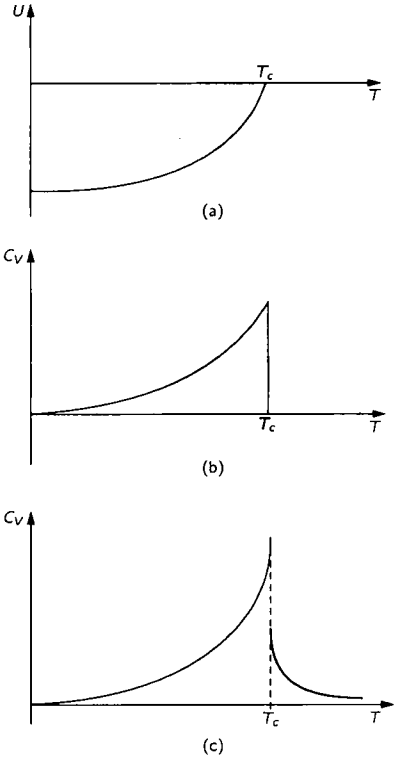
Bu eşitlikte $M_{\text{doyum}} = N\mu$ ve $T_C = \mu\lambda\, M_{\text{doyum}}/k\epsilon_0 c^2$'dir. Bu denklemi (grafiksel olarak veya başka şekilde) çözdüğümüzde T/T_C'nin bir fonksiyonu olarak M/M_{doyum} oranının Şekil 37-1'de "kuantum kuramı" olarak etiketlenmiş eğri gibi olduğunu buluruz. "Kobalt, nikel" olarak etiketlenmiş eğri bu elementlerin kristalleri için deneysel sonuçları göstermektedir. Kuram ve deney birbirleriyle yeterince iyi bir uyum içindedir. Şekil aynı zamanda, hesaplamanın atomik mıknatısların uzayda her olası yönelime sahip olabileceği varsayımıyla yapıldığı klasik kuramın da sonucunu göstermektedir. Göreceğiniz üzere bu varsayımın öngörüsü deneysel sonuçlara yaklaşmamaktadır bile.

Kuantum kuramı bile yüksek ve düşük sıcaklıklarda gözlemlenen davranıştan sapar. Sapmaların nedeni kuramda çok özensiz bir yakınlaştırma yapmış olmamızdır: Bir atomun enerjisinin, komşu atomların *ortalama* mıknatıslanmasına bağlı olduğunu varsaydık. Diğer bir deyişle, bir atomun yakınındaki her bir "yukarı" spinli atom için kuantum mekaniksel hizalanma etkisinden dolayı bir enerji katkısı olacaktır. Ancak kaç adet "yukarı" işaret eden vardır. Ortalamada bu M mıknatıslanmasıyla ölçülür, ancak sadece *ortalamada*. Bir yerdeki



Şekil 37-1 Sıcaklığın bir fonksiyonu olarak ferromanyetik kristallerin kendiliğinden mıknatıslanması $H = 0$. [*Encyclopedia Britannica*'nın izniyle.]

bir atom *bütün* komşularını "yukarı" spinli bulabilir. Bu durumda enerjisi ortalamadan büyük olacaktır. Bir başkası bazılarını yukarı ve bazılarını aşağı spinli, belki de ortalamaları sıfır olacak şekilde, bulabilir ve bu terimden hiç *enerji* gelmez vb. Yapmamız gereken daha karmaşık bir tür ortalama kullanmaktır; çünkü farklı yerlerdeki atomlar farklı çevrelere sahip olabilir ve yukarı ile aşağı sayıların her biri için farklı olabilir. Ortalama etkiye maruz kalmış tek bir atomu ele almaktansa, her birini olduğu durumda ele almalı, enerjisini hesaplamalı ve *ortalama enerjiyi* bulmalıyız. İyi de bir bölgede ne kadar "yukarı" ve "aşağı" olduğunu nasıl bulabiliriz ki? Bu elbette tam olarak hesaplamaya çalıştığımız şeydir –"aşağı" ve "yukarı" sayısı–, dolayısıyla birçok karşılıklı ilişkinden meydana gelmiş çok karmaşık, hâlâ çözülememiş bir problemle karşı karşıyayız. Yıllar boyu var olmuş heyecanlandırıcı ve ilgi çekici bir problemdir ve fiziğin en büyük isimlerinin bazıları bunun üzerine makaleler yazmıştır ancak onlar bile tamamen çözebilmiş değildir.



Şekil 37-2 Bir ferromanyetik kristalin birim hacimdeki enerjisi ve özgül ısısı.

Daha sonra ortaya çıktı ki, neredeyse bütün atomik mıknatısların "yukarı" olduğu ve sadece birkaçının "aşağı" olduğu düşük sıcaklıklarda bu problemi çözmesi kolaydır ve Curie sıcaklığı T_C'nin çok üstündeki sıcaklıklarda bu dağılım neredeyse rastlantısaldır ve çözmesi yine kolaydır. Basit, idealize edilmiş bir durumdan hafifçe ayrılmış durumları hesaplamak genelde kolaydır, düşük sıcaklıktaki basit kuramdan neden ayrılıklar olduğu yeterince anlaşılmıştır. Ayrıca fiziksel olarak da, istatistiksel nedenlerden dolayı, mıknatıslanmanın yüksek sıcaklıklarda sapmasının *gerektiği* anlaşılmıştır. Ancak Curie noktası etrafındaki davranış asla tam olarak anlaşılamamıştır. Daha önce çözülememiş bir problemi ele almak isterseniz, bu ilginç bir problemdir.

37-2 Termodinamik özellikler

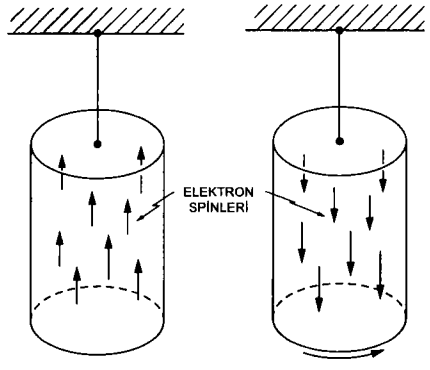
Son bölümde ferromanyetik malzemelerin termodinamik özelliklerini hesaplamak için gerekli altyapıyı ortaya koymuştuk. Bunlar, doğal olarak, kristalin Denk. (37.3)'le ortaya konan, çeşitli spinlerin etkileşimlerini içeren iç enerjisiyle ilişkilidir. Curie noktasının altındaki kendiliğinden mıknatıslanmanın enerjisi için Denk. (37.3)'te $H = 0$ diyebilir ve $\tanh x = M/M_{\text{doyum}}$ eşitliğini alarak M^2'yle orantılı ortalama enerjiyi buluruz:

$$\langle U\rangle_{\text{ort}} = -\frac{N\mu\lambda M^2}{2\epsilon_0 c^2 M_{\text{doyum}}} \tag{37.5}$$

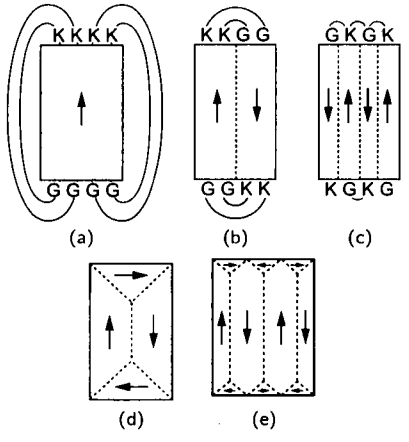
Sıcaklığın bir fonksiyonu olan manyetizmaya bağlı enerjinin grafiğini çizersek, Şekil 37-2(a)'da çizildiği gibi, Şekil 37-1'deki eğrinin karesinin eksisi olan bir eğri elde ederiz. Böyle bir malzemenin *özgül ısısını* ölçecek olsaydık, Şekil 37-2(a)'nın türevi olan bir eğri elde ederdik. Bu, Şekil 37-2(b)'de gösterilmiştir. Ar-

tan sıcaklıkla beraber yavaşça yükselir, ancak $T = T_C$ sıcaklığında aniden sıfıra düşer. Keskin düşüş manyetik enerjinin eğimindeki değişimden dolayıdır ve tam da Curie noktasında meydana gelir. Dolayısıyla hiçbir manyetik ölçüm yapmadan, demir ve nikelin içinde ne olup bittiğini bu termodinamik özelliği ölçerek keşfedebiliriz. Ancak hem deney hem de (dalgalanmaların ilave edildiği) geliştirilmiş kuram bu basit eğrinin yanlış olduğunu ve doğru durumun gerçekte çok daha karmaşık olduğunu öne sürer. Tepede eğri daha yükseğe çıkar ve sıfıra biraz yavaşça düşer. Sıcaklık spinleri *ortalamada* rastgeleleştirecek kadar yüksek olsa bile, belli bir miktar kutuplanmaya sahip bölgeler vardır ve bu bölgelerdeki spinlerin hâlâ bir miktar fazla etkileşim enerjisi vardır. Bu enerji sıcaklıktaki artışla beraber işler daha da rastgele hale geldikçe yavaşça biter. Dolayısıyla gerçek eğri Şekil 37-2(c)'deki gibi gözükür. Kuramsal fiziğin bugün aşmaya çalıştığı zorluklardan biri de Curie geçişi yakınındaki özgül ısının niteliğiyle ilgili kesin bir kuramsal tanım bulmaktır. Henüz çözülememiş ilgi çekici bir problem. Doğal olarak bu problem aynı bölgedeki mıknatıslanma eğrisinin şekliyle yakından ilişkilidir.

Şimdi de, termodinamiğe ilişkin açıklamalardan farklı olarak manyetizmaya dair açıklamamızla ilgili bir şeyin *doğru* olduğunu gösteren bazı deneyleri anlatmak istiyoruz. Yeterince düşük sıcaklıklarda bir malzeme doyuma ulaşacak şekilde mıknatıslandığında M'nin değeri M_{doyum}'a neredeyse eşittir. Neredeyse bütün spinler, manyetik momentleriyle beraber, paraleldir. Bunu bir deneyle kontrol edebiliriz. Bir çubuk mıknatısı ince bir iplikle astığımızı ve bir bobinle etrafını sardığımızı düşünelim. Böylece mıknatısa dokunmadan veya üzerinde bir tork uygulamadan manyetik alanı tersine çevirebiliriz. Bu çok zor bir deneydir, zira manyetik kuvvetler o kadar büyüktür ki herhangi bir düzensizlik, orantısızlık veya demirdeki herhangi bir kusur rastgele torklar meydana getirecektir. Bununla birlikte, rastgele torklar en aza indirilecek şekilde dikkatlice gerçekleştirilmiştir. Çubuğu çevreleyen bobinden kaynaklanan manyetik alan sayesinde, bütün atomik mıknatısları bir kerede döndürürüz. Bunu yaptığımızda ayrıca bütün spinlerin açısal momentumlarını "yukarı"dan "aşağı"ya çevirmiş oluruz (*bkz.* Şekil 37-2). Spinler tersine döndüğünde açısal momentum korunacaksa, çubuğun geri kalanının açısal momentumunda tersine bir değişim olmalıdır. Bütün mıknatıs dönmeye başlayacaktır. Deneyi yaptığımızda mıknatısın bir miktar döndüğü gözlemlenmiştir. Bütün mıknatısa uygulanan toplam açısal momentumu hesaplayabiliriz ve bu basitçe N çarpı $\hbar$'dır: her bir spinin açısal momentumundaki değişim. Bu şekilde ölçülen, açısal momentumun manyetik momente oranı hesapladığımızın yaklaşık yüzde 10'una karşılık gelir. Aslında hesaplamalarımız atomik mıknatısların tamamen elektron spininden kaynaklandığını ancak, ilaveten, birçok malzemede bir miktar yörüngesel hareket olduğunu da varsaymaktadır. Yörüngesel hareket örgüden tamamen bağımsız değildir ve manyetizmaya etkisi yüzdesel olarak çok düşük bir miktardır. Aslına bakarsanız, $M_{\text{doyum}} = N\mu$ eşitliğini kullanarak, demirin yoğunluğunu 7,9 ve dönen elektronun μ momentini alarak hesaplanabilecek doymuş manyetik alan 20.000 Gauss'tur. Ancak deneye göre bu değer yaklaşık 21.500 Gauss'tur. Bu, analizimizi kurarken dikkate almadığımız, yörüngesel momentlerin katkılarından dolayı meydana gelen ve yüzde 5 veya 10 büyüklüğünde tipik bir hatadır. Dolayısıyla jiromanyetik ölçümlerde görülen küçük bir farklılık gayet anlaşılabilirdir.



Şekil 37-3 Demir bir çubuğun mıknatıslanması tersine çevrildiğinde, çubuğa bir miktar açısal momentum verilmiş olur.



Şekil 37-4 Demirin tek bir kristalinde bölgelerin oluşumu. [Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. basım, 1956.]

37-3 Histerezis eğrisi

Kuramsal analizimizden, bir ferromanyetik malzemenin belli bir sıcaklığın altında, bütün manyetizma aynı yönde olacak şekilde, kendiliğinden mıknatıslanması gerektiği sonucuna vardık. Ancak bunun sıradan bir parça *mıknatıslanmamış* demir için doğru olmadığını biliyoruz. Neden demir mıknatıslanmamıştır. Bunu Şekil 37-4'ün yardımıyla açıklayabiliriz. Demirin Şekil 37-4(a)'da gösterildiği gibi tek bir büyük kristal şeklinde olduğunu ve tek bir yönde kendiliğinden mıknatıslandığını varsayalım. Bu durumda çok fazla enerjiye sahip,

kayda değer dış bir manyetik alan olurdu. Şekil 37-5(b)'de gösterildiği gibi çubuğun bir tarafını "yukarı" ve diğer tarafını da "aşağı" mıknatıslarsak o alan enerjisini azaltabiliriz. Bu durumda elbette demirin dışındaki alanlar hacminin çok az dışına, orada daha az enerji olacak şekilde, uzanırdı.

Fakat, bir dakika durun! İki bölge arasındaki katmandan aşağı spinli elektronlara komşu yukarı spinli elektronlar vardır. Ancak ferromanyetizma, elektronların birbirine zıt olmak yerine *paralel* oldukları durumda enerjinin *azaldığı* malzemelerde meydana çıkar. Bu yüzden Şekil 37-4(b)'deki noktalı çizgi boyunca bir miktar fazla enerji yükledik. Bu enerjiye bazen *duvar enerjisi* denir. Mıknatıslanması tek bir yönde olan bir bölgeye *alan* denir. İki alan arasındaki, karşı kenarlarda atomların farklı yönlerde döndüğü ara yüzeyde –"duvar"– duvarın birim alanı başına bir enerji vardır. Sanki iki yan yana atom birbirine tam zıt olarak dönüyormuş gibi açıkladık ancak ortaya çıktı ki doğa geçişi daha kademeli olacak şekilde ayarlamalar yapmaktadır. Ancak bu noktada bu detaylarla ilgilenmemize gerek yok.

Bu durumda karşımıza çıkan soru şu olur: Duvar yapmak ne zaman daha iyidir veya kötüdür? Cevap alanların *ölçüsüne* dayanır. Bütün her şeyi iki katına çıkaracak şekilde ölçeklendirdiğimizi düşünelim. Belirli bir manyetik alan şiddetiyle dolu dışardaki hacim *sekiz* kat ve manyetik alanın içindeki hacimle orantılı enerji de aynı zamanda sekiz kat daha büyük olurdu. Ancak duvar enerjisini veren, iki alan arasındaki *yüzey* alanı ancak *dört* kat daha büyük olurdu. Dolayısıyla bir demir parçası yeterince büyükse, onu birçok alana bölmeye değer. Bu yüzden çok ince kristallerin sadece tek bir alanı olabilir. Bir milimetrenin yaklaşık yüzde birinden daha büyük herhangi büyük bir nesnenin en az bir alan duvarı vardır ve sıradan, "santimetre ölçeğinde" bir nesne, şekilde görüldüğü gibi, birçok alana bölünür. Alanlara bölme işlemi *bir fazladan duvar koymak için gereken enerji kristalin dışındaki manyetik alandaki enerji düşüşü kadar büyük oluncaya dek* sürer.

Aslında doğa enerjiyi düşürmenin bir başka yolunu keşfetmiştir: Şekil 37-4(d)'deki gibi küçük üçgen bir bölge *yanlamasına* mıknatıslanırsa, alanın dışarı uzanmasına gerek kalmaz.* Bu durumda Şekil 37-4(d)'deki düzenlemeyle, *hiç* dış alan olmadığını fakat bunun yerine sadece biraz daha alan duvarı olduğunu görürüz.

Ancak bu yeni bir problem doğurmaktadır. Demirin tek bir kristalinin mıknatıslandığında uzunluğunun mıknatıslanma yönünde değiştiği ortaya çıktı. Dolayısıyla, diyelim ki "yukarı" bir mıknatıslanmaya sahip "ideal" bir küp bu yüzden artık ideal bir küp olamaz. "Dikey" boyut "yatay" boyuttan farklı olacaktır. Bu etkiye *mıknatıssal büzülme* denir. Bu tür geometrik değişiklilerden dolayı Şekil 37-4(d)'nin küçük üçgen parçaları mevcut hacme, deyim yerindeyse, "sığmaz". Kristal bir yönde çok uzamış ve diğer bir yönde çok kısalmıştır. Elbette gerçekte *sığar*, ancak sadece sıkıştırılarak ve bu da mekanik gerilmeler meydana getirir. Dolayısıyla bu düzenleme de *ayrıca* ilave enerji açığa çıkartır. Bütün bu çeşitli enerjilerin dengesi, alanların mıknatıslanmamış bir demir parçasında kendilerini karmaşık bir şekilde son olarak nasıl düzenleyeceklerini belirler.

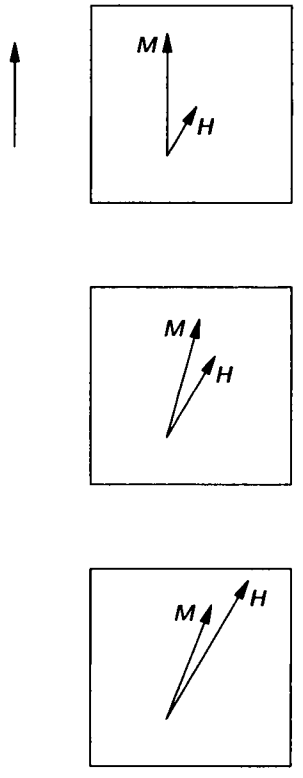
Peki ilave bir manyetik alan ortaya koyarsak ne olur? Basit bir durumu ele almak için, Şekil 37-4(d)'de gösterilen alanları ele alalım. Yukarı yönde dış bir manyetik alan uygularsak, kristal ne şekilde mıknatıslanır? Öncelikle, orta alan duvarı *yanlara* (sağa doğru) *hareket edebilir* ve enerjisini düşürebilir. Hareket etmesi sayesinde "yukarı" olan bölge "aşağı" olan bölgeden daha büyük hale gelir. Alanla hizalanmış daha fazla temel mıknatıslar vardır ve bu daha düşük enerjiye yol açar. Dolayısıyla zayıf alanlarda bir parça demir için –mıknatıslanmanın hemen başlangıcında– alan duvarları hareket etmeye ve alana zıt olacak

---

* "Yukarı" veya "aşağı" olması gereken spinlerin aynı zamanda nasıl "yanlamasına" olabileceğini merak ediyor olabilirsiniz! Bu güzel bir sorudur ancak şimdi onunla ilgilenmeyeceğiz. Basitçe klasik bakış açısını kabul edecek ve atomik mıknatısları yanlamasına kutuplanabilen klasik dipoller olarak düşüneceğiz. Kuantum mekaniği, bir şeylerin nasıl aynı anda hem "yukarı ve aşağı" ve hem de "sol ve sağ" olarak kutuplanabileceğini anlamak için kayda değer bir uzmanlık gerektirmektedir.

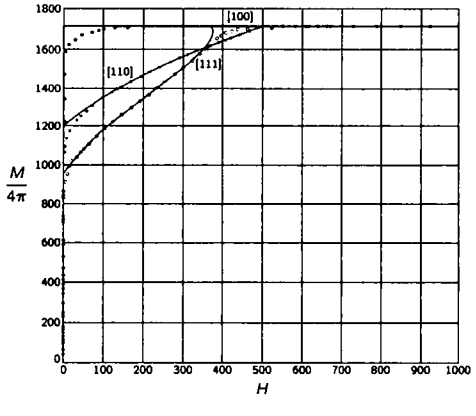
şekilde mıknatıslanmış bölgelere doğru girmeye başlar. Alan artmaya devam ettikçe, bütün bir kristal kademeli olarak, dış alan sayesinde hizalı kalan tek bir büyük alan olmaya doğru ilerler. Şiddetli bir alanda kristal, *sadece* uygulanan alandaki enerjisi azaldığından *dolayı* tek bir yönde olmayı "sever". Artık sadece önemli olan kristalin kendi dış alanı değildir.

Ya peki geometri bu kadar basit değilse? Kristalin eksenleri ve kendiliğinden mıknatıslanması bir yöndeyse, ancak biz bir *başka yönde* –örneğin, 45°– manyetik alan uygularsak ne olur? Alanların kendilerini mıknatıslanmalarının manyetik alana paralel olacak şekilde dönüştürebileceklerini ve daha sonra, önceden olduğu gibi, hep beraber tek bir alan olacak şekilde birleşeceklerini düşünebiliriz. Ancak bu demir için kolay değildir, *çünkü bir kristali mıknatıslamak için gereken enerji kristal ekseniyle göreli mıknatıslama yönüne bağlıdır.* Demiri kristal eksenlerine paralel yönde mıknatıslamak görece kolaydır, ancak bir başka yönde mıknatıslamak –örneğin eksenlerden biriyle 45° açıyla– *daha fazla* enerji gerektirir. Dolayısıyla böyle bir yönde manyetik alan uyguladığımızda ilk olan şey, uygulanan alana *yakın*, tercih edilen yönlerden biri boyunca yönlenmiş alanların, mıknatıslanma tamamen bu yönlerden biri boyunca olana dek büyümesidir. Daha sonra *daha şiddetli alanlarla* mıknatıslanma, Şekil 37-5'te çizildiği gibi, kademeli olarak alana paralel hale getirilir.



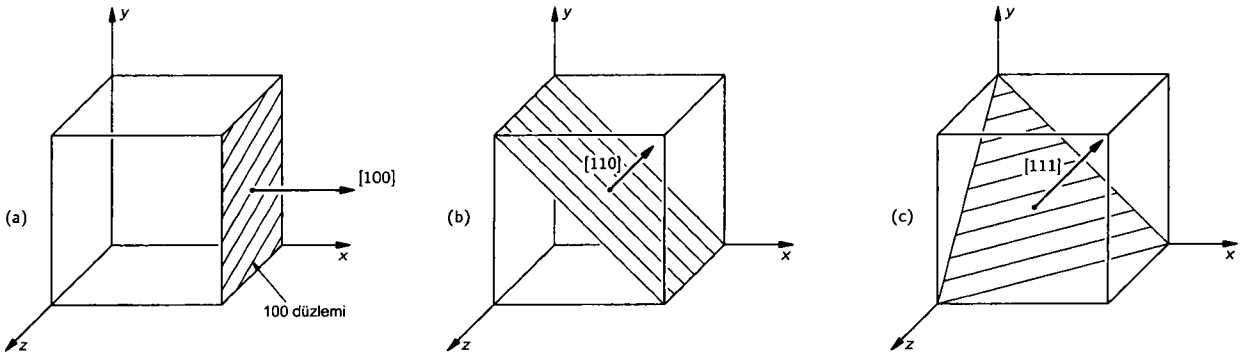
Şekil 37-5 Kristal eksenine göre açılı bir ***H*** mıknatıslayıcı alanı, mıknatıslanmanın yönünü kademeli olarak, büyüklüğü değiştirmeden, değiştirecektir.

Şekil 37-6'da demirin tek bir kristalinin mıknatıslanma eğrilerinin bazı gözlemleri gösterilmektedir. Bunları anlamak için öncelikle bir kristaldeki yönleri tarif etmek için kullanılan gösterim hakkında bir şeyler açıklamalıyız. Bir kristalin yüzeyini, atomlardan oluşmuş bir düzlem olan bir yüz oluşturacak şekilde kesmek için birçok yol vardır. Bir meyve bahçesinin veya bir üzüm bağının yanından geçen herkes bunu bilir aslında. Bir yöne bakarsanız sıra halinde ağaçları görürsünüz, bir başka yöne baktığınızda bir başka ağaç sırası görürsünüz ve bu böyle devam eder. Benzer şekilde bir kristal birçok atom içeren belirli düzlem gruplarına sahiptir ve düzlemler şu önemli özelliğe sahiptir (işleri kolaylaştırmak için kübik bir kristal ele alıyoruz): Düzlemlerin üç koordinat eksenyle kesiştiği yerlere baktığımızda, başlangıca olan üç mesafenin *terslerinin* basit tamsayılar oranında olduğunu görürüz. Bu üç tamsayı düzlemlerin tanımıdır. Örneğin, Şekil 37-7(a)'da *yz* düzlemine paralel bir düzlem gösterilmektedir. Buna [100] düzlemi denir; *y* ve *z* eksenleriyle kesişimlerinin terslerinin ikisi de sıfırdır. Bu tür bir düzleme dik bir yöne (kübik bir kristalde) aynı sayılar kümesi verilir. [100] indisi *x* yönünde birim bir bileşeni olan ama *y* ve *z* yönlerinde bileşeni olmayan bir vektör anlamına geldiğinden bu fikri bir kübik kristalde anlamak kolaydır. [110] yönü, Şekil 37-7(b)'deki gibi, *x* ve *y* eksenlerine göre 45° açıdadır ve [111] yönü, Şekil 37-7(c)'deki gibi, küpün köşegeni yönündedir.



Şekil 37-6 Kristal eksenlerine göre farklı ***H*** yönleri için ***H***'ye paralel ***M***. [F. Bitter, *Introduction to Ferromagnetism*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937.]

Şekil 37-6'ya dönersek, demirin tek bir kristali için çeşitli yönlerde mıknatıslanma eğrilerini görürüz. Öncelikle, çok zayıf –bu ölçekte göremeyeceğimiz kadar zayıf– alanlar için mıknatıslanma çok hızlı bir şekilde çok büyük değerlere kavuşmaktadır. Alan [100] yönündeyse –diğer bir deyişle hoş, basit mıknatıslanma yönlerinden biri yönündeyse– eğri yüksek bir değere çıkar, bir miktar eğ-



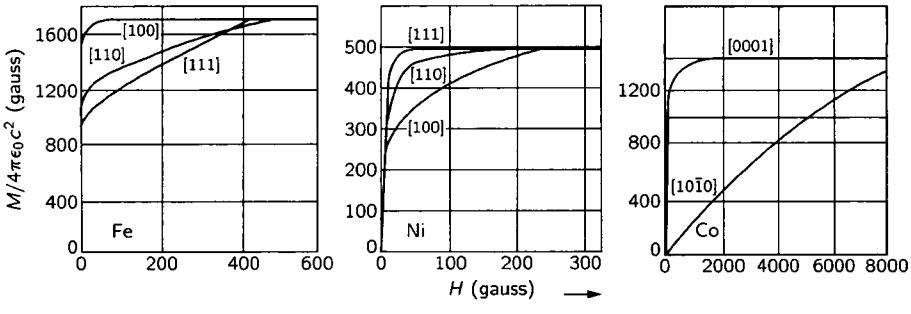
Şekil 37-7 Kristal düzlemlerin etiketlenme şekli.

rilir ve daha sonra doyuma ulaşır. Burada olan şey, halihazırda orada olan alanların kolayca kaldırılmış olmasıdır. Alan duvarlarını harekete geçirmek ve bütün "yanlış yönde" alanları silip süpürmek için sadece küçük bir alan gerekir. Demirin tek kristalleri son derece (manyetik anlamda), sıradan çok kristalli demirden çok daha fazla geçirgendir. Mükemmel bir kristal son derece kolay bir şekilde mıknatıslanır. Neden eğrilmiştir ki? Neden doğrudan doyuma ulaşmaz? Emin değiliz. Belki bir gün bunu siz çalışırsınız? Yüksek alanlar için neden düz olduğunu anlayabiliyoruz. Bütün cisim tek bir alan olduğunda, ilave manyetik alan daha fazla mıknatıslama yapamaz. Bütün elektronlar hizalanmış şekilde, zaten M_{doyum}'dadır.

Şimdi aynı şeyi –kristal eksenlerine 45° açıda– [110] yönü için yapmayı denediğimizde ne olur? Alanı bir miktar açtığımızda, alanlar büyüdükçe mıknatıslanma da fırlar. Alanı bir miktar daha artırdığımızda doyuma ulaşmak için çok fazla alana ihtiyaç olduğunu fark ederiz, çünkü şimdi mıknatıslanma "kolay" bir yönden *sapmaktadır*. Bu açıklama doğruysa, [110] eğrisinin dikey eksene döndüğü nokta doyum değerinin $1/\sqrt{2}$'sinde olmalıdır. Sonradan ortaya çıktı ki gerçekten de bu değer $1/\sqrt{2}$'ye çok yakındır. Benzer şekilde, küp köşegeni yönünde olan [111] yönünde eğrinin, beklediğimiz gibi, doyumun yaklaşık $1/\sqrt{3}$'e döndüğünü görürüz.

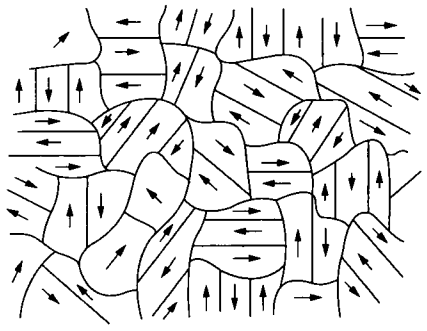
Aynı durumu Şekil 37-8 iki farklı malzeme (kobalt ve nikel) için göstermektedir. Nikel demirden farklıdır. Nikelde [111] yönünün en kolay mıknatıslanma yönü olduğu ortaya çıkmıştır. Kobalt kristali altıgen biçimindedir ve insanlar bu durum için terimlendirmeyi altüst etmişlerdir. Altıgenin tabanında üç eksen ve bunlara dik bir eksen istedikleri için dört indis kullandılar. [0001] yönü altıgenin ekseninin yönüdür ve [1010] eksene diktir. Gördüğünüz üzere, farklı metallerin kristalleri farklı şekilde davranırlar.

Şimdi, sıradan bir demir parçası gibi çok kristalli bir malzemeyi ele alalım. Bu tür malzemelerin içinde kristal eksenleri farklı yönlere bakan birçok küçük kristal vardır. *Bunlar alanlarla aynı şey değildir.* Hatırlarsanız alanlar *tek bir kristalin* parçasıydı, ancak bir demir parçasında, Şekil 37-9'da gösterildiği gibi,



Şekil 37-8 Kobalt, Nikel ve demirin tek kristalleri için mıknatıslanma eğrileri. [Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. baskı, 1956.]

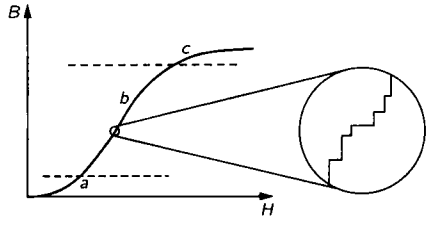
eksenleri farklı yönlerde birçok *farklı kristal* vardır. Genelde bu kristallerin her birinin içinde ayrıca bazı alanlar olur. Çok kristalli bir malzemenin bir parçasına *küçük* bir manyetik alan uygularsak alan duvarları hareket etmeye başlar ve kolay mıknatıslanma yönüne sahip alanlar gitgide büyümeye başlar. Alan küçük kaldığı sürece bu büyüme tersine çevrilebilir. Alanı kapattığımızda, mıknatıslanma sıfıra dönecektir. Mıknatıslanma eğrisinin bu kısmı Şekil 37-10'da *a*'yla işaretlenmiştir.



Şekil 37-9 Mıknatıslanmamış ferromanyetik bir malzemenin mikroskobik yapısı. Her bir kristal greninin kolay bir mıknatıslanma yönü vardır ve (genelde) bu yön paralel kendiliğinden mıknatıslanan alanlara ayrılırlar.

Gösterilen mıknatıslanma eğrisindeki *b* bölgesiyle gösterilen daha büyük alanlar için işler karmaşık hale gelir. Malzemenin her bir küçük kristalinde gerilmeler ve kaymalar vardır. Safsızlıklar, kir ve kusurlar vardır. Bir alan duvarı ile bir kaymış bölge veya bir gren sınırı veya bir safsızlık arasında etkileşim enerjisi vardır. Dolayısıyla duvar birine ulaştığında kalakalır; orada belli bir alana yapışır. Ancak daha sonra alan biraz artırıldığında duvar aniden geçer gider. Diğer bir deyişle alan duvarının hareketi mükemmel bir kristaldeki gibi akıcı değildir. Arada sırada takılır ve sarsılarak ilerler. Mikroskobik ölçekte mıknatıslanmaya bakacak olsaydık, Şekil 37-10'da daireyle büyütülmüş şeyi görürdük.

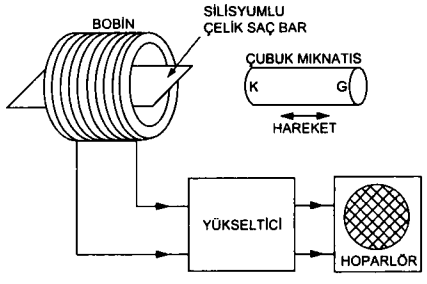
Mıknatıslanmadaki bu sarsılmalar enerji kaybına yol açabilir. Bir sınır bir engeli aştığında, alan engelsiz hareket için gerekli olan değerin zaten üstünde olduğundan hemen diğerine doğru yönelir. Hızlı hareket, kristal içinde eddy akımları meydana getiren hızlı değişen manyetik alanlar olduğu anlamına gelir. Bu akımlar metali ısıtırken enerji kaybeder. İkinci bir etki de, bir alan aniden değiştiğinde kristalin bir parçasının manyetik büzülmeyle ölçülerini değiştirmesidir. Alanın her bir ani kayması enerji taşıyan küçük bir ses dalgası oluşturur. Bu tür etkilerden dolayı, mıknatıslanma eğrisinin ikinci kısmı *tersine çevrilemez* ve *enerji kaybı meydana gelir*. Bu histerezis etkisinin kaynağıdır çünkü bir sınır duvarını ileri hareket ettirmek –çıt– ve sonra geri hareket ettirmek –çıt– farklı bir sonuç doğurur. "Engelli" sürtünme gibidir ve enerji alır.



Şekil 37-10 Çok kristalli demir içim mıknatıslanma eğrisi.

En sonunda, yeterince yüksek alanlar için, tüm alan duvarlarını hareket ettirdiğimiz ve her bir kristali en iyi yönde mıknatıslandığımızda, en kolay mıknatıslanma yönleri bizim dış manyetik alanımızın yönünde olmayan bazı kristaller hâlâ vardır. O manyetik momentlerin yönünü çevirmek için çok fazla ilave alan gerekir. Dolayısıyla yüksek alanlar için –şekilde *c*'yle işaretlenmiş bölge– mıknatıslanma yavaş ancak akıcı şekilde artar. Mıknatıslanma doyma değerine keskin bir şekilde gelmez, çünkü eğrinin son kısmında atomik mıknatıslar kuvvetli alanda *dönmektedirler*. Şekil 37-10'da gösterilen gibi sıradan çok kristalli malzemelerin mıknatıslanma eğrisinin neden başta bir miktar ve *tersinebilir* şekilde yükselip, daha sonra tersinemez şekilde yükseldiğini ve yavaşça eğrildiğini bu şekilde anlamış oldunuz. Elbette, bu üç bölge arasında keskin geçiş noktaları yoktur. Birbirlerine akıcı şekilde karışırlar.

Mıknatıslanma eğrisinin orta kısmındaki mıknatıslanma sürecinin neden engelli –alan duvarlarının kaydıkça sarsılmalarının ve kopmalarının– olduğunu göstermek zor değildir. Tek ihtiyacınız olan, Şekil 37-11'deki gibi, bir yükselticiye ve hoparlöre bağlı binlerce sarımı olan bir bobindir. Bobinin merkezine (transformatörlerde kullanılan cinsten) birkaç silisyumlu çelik saç yerleştirir ve bir çubuk mıknatısı yavaşça yaklaştırırsanız, mıknatıslanmadaki ani değişiklikler bobindeki emk'da ani itkiler yaratır ve bunları hoparlörde açıkça tıkırtı şeklinde duyabilirsiniz. Mıknatısı demire daha da yaklaştırdıkça sanki bir kavanoz kumu sallamışsınız da kum taneleri birbirine çarpıyormuşçasına, daha fazla tıkırtı duyarsınız. Alan artıkça alan duvarları zıplıyor, kırılıyor ve titriyor. Bu olguya *Barkhausen etkisi* denir.



Şekil 37-11 Çelik saçın mıknatıslanmasındaki ani değişiklikler hoparlörde tıkırtı olarak duyulur.

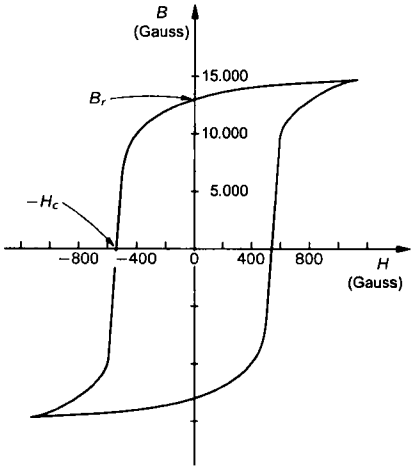
Mıknatısı demir levhalara daha da yaklaştırdığınızda ses gitgide artar ancak mıknatıs çok yaklaştığındaysa göreceli olarak çok az ses duyulur. Neden? Çünkü neredeyse bütün alan duvarları ilerleyebilecekleri kadar ilerlemiştir. Herhangi bir daha büyük alan sadece her bir alandaki mıknatıslanmayı *döndürür* ve bu da akıcı bir süreçtir.

Histerezis ilmeğinin aşağı koluna geri gelmek için mıknatısı geri çekerseniz, bütün alanlar düşük enerjili hallerine geri dönmeye çalışırlar ve bu sefer de geri dönüşteki sarsılmaların sesini duyarsınız. Ayrıca mıknatısı belirli bir yerde tutar ve azcık ileri ve geri hareket ettirirseniz, göreceli olarak çok az ses vardır. Bu, tıpkı bir kavanoz dolusu kumu eğmek gibidir. Kum taneleri bir yere dolduklarında, küçük hareketler onları rahatsız etmez. Demirde, manyetik alandaki küçük değişiklikler sınırları "tümsekler" üzerinden hareket ettirecek kadar yeterli değildir.

37-4 Ferromanyetik malzemeler

Şimdi teknik alanda bulunan değişik tür manyetik malzemeler hakkında konuşmak ve farklı amaçlar için manyetik malzemeler tasarlamak sırasında karşılaşılan bazı problemleri ele almak istiyoruz. Öncelikle, sıklıkla duyulan "demirin manyetik özellikleri" yanlış bir isimlendirmedir. Böyle bir şey yoktur. "Demir" iyi tanımlanmış bir malzeme değildir. Demirin özellikleri, içindeki safsızlıkların miktarı ve demirin *nasıl* biçimlendirildiğine ciddi derecede bağlıdır. Manyetik özellikler alan duvarlarının ne kadar rahat hareket ettiğine bağlıdır ve bu *kaba* bir özelliktir, bağımsız atomların bir özelliği değildir. Dolayısıyla pratikte ferromanyetizma gerçekte bir demir *atomunun* özelliği değildir. *Belli bir biçimdeki katı demirin* özelliğidir. Örneğin, demir iki farklı kristal biçiminde olabilir. Sıkça karşılaşılan biçim hacim merkezli küp örgüdür, ancak yüzey merkezli küp örgü de olabilir. Ancak ikincisi sadece 1100 santigrat derece üzerinde kararlıdır. Elbette bu sıcaklıkta hacim merkezli küp yapı çoktan Curie noktasını geçmiştir. Bununla birlikte demiri nikel ve kromla alaşımlayarak (bir olası karışım yüzde 18 krom ve yüzde 8 nikeldir) paslanmaz çelik elde edebiliriz. Paslanmaz çelik her ne kadar esasında demir olsa da, düşük sıcaklıklarda bile yüzey merkezli örgü yapısını korur. Kristal yapısı farklı olduğundan, tamamen farklı manyetik özelliklere sahiptir. Birçok paslanmaz çelik türü belli bir dereceye kadar manyetik değilse de, bazıları bir miktar manyetiktir. Bu alaşımın birleşimine bağlı bir özelliktir. Böyle bir karışım manyetik olsa bile, sıradan demir gibi –her ne kadar çoğunlukla demir içerse de– *ferromanyetik* değildir.

Şimdi, özel manyetik özellikleri için geliştirilmiş bazı özel malzemeleri tanımlayalım. Öncelikle, *kalıcı* bir mıknatıs yapmak istersek, son derece *geniş* bir histerezis ilmeğine sahip bir malzeme kullanmalıyız ki akımı kapadığımızda ve mıknatıslayıcı alanı sıfırladığımızda, mıknatıslanma büyük kalsın. Bu tür malzemelerde alan sınırları mümkün olduğunca oldukları yerde "sabit" durmalıdır. Böyle bir malzeme dikkat çekici "Alnico V" alaşımıdır (% 51 Fe, % 8 Al, % 14 Ni, %24 Co, %3 Cu). (Bu alaşımın karmaşık birleşimi, iyi mıknatıslar yapmak için gerekli detaylı çabanın bir göstergesidir. Beş farklı şeyi birbiriyle karıştırmak ve en ideal maddeyi bulana kadar onları test etmek müthiş bir sabır işidir!) Alnico katılaştığında, bir sürü ince gren ve çok yüksek iç gerilmeler meydana getiren bir "ikinci evre" vardır. Bu malzemede alan sınırları çok zor hareket eder. Çok hassas bir birleşiminin olmasının yanı sıra Alnico, kristallerin mıknatıslanmanın olacağı yönde uzun grenler şeklinde görüneceği şekilde "işlenir". Böylece mıknatıslanma doğal bir şekilde bu yönlerde hizalanma eğiliminde olur ve eş yönsüz etkilerden uzak tutulur. Daha da ötesi, malzeme üretim esnasında soğutulurken dış bir manyetik alana maruz bırakılır, böylece grenler doğru kristal yönelimiyle büyür. Alnico V'nin histerezis ilmeği Şekil 37-12'de gösterilmektedir. Son bölümde Şekil 36-8'de gösterdiğimiz, yumuşak demir için olan histerezis eğrisinden 700 kat daha geniş olduğunu görebilirsiniz.



Şekil 37-12 Alnico V için histerezis eğrisi.

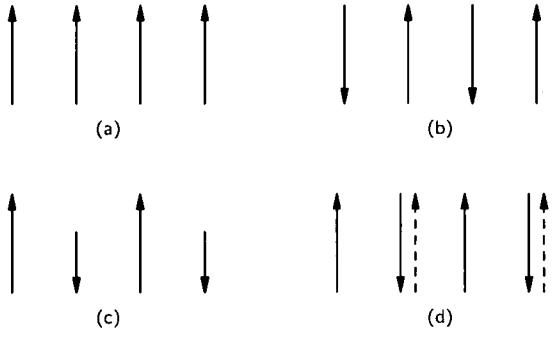
Şimdi de farklı bir malzemeyi ele alalım. Transformatörler ve motorlar meydana getirmek için manyetik olarak "yumuşak" –manyetizmanın kolayca değişe-

bildiği, böylece uygulanan küçük bir alan sayesinde bile büyük ölçüde mıknatıslanma sonuçları elde edebildiğimiz– bir malzeme isteriz. Bunu ayarlamak için, alan duvarlarının rahatça hareket edebileceği şekilde çok az safsızlık ve kaymaya sahip, saf ve iyi tavlanmış bir malzemeye ihtiyacımız var. Eş yönsüzlüğü de ufak yapabilirsek hoş olur. Böylece alana göre yanlış açıda duran bir malzeme greni bile kolaylıkla mıknatıslanabilir. Demirin [100] ve nikelin de [111] yönünde mıknatıslanmayı tercih ettiğini söylemiştik. Dolayısıyla demir ve nikeli çeşitli oranlarda karıştırırsak, *herhangi* bir yönü tercih etmeyen –[100] ve [111] yönleri birbirlerine eşit olur– bir alaşım elde edebiliriz. Bu karışım yüzde 70 nikel ve yüzde 30 demirdir. İlaveten –muhtemelen rastlantısal olarak veya yönsüzlük ile mıknatıssal büzülüm arasındaki fiziksel ilişkiden dolayı– nikel ve demirin *mıknatıssal büzülmesinin* birbirlerine zıt işaretleri olduğu ortaya çıktı. İki metalin alaşımında, bu özellik yaklaşık yüzde 80 nikel varken sıfırdan geçmektedir. Dolayısıyla yüzde 70 ila 80 bir nikel oranıyla çok "yumuşak" manyetik malzemeler –kolaylıkla mıknatıslanabilen alaşımlar– elde ederiz. Bunlara *mıknatıs alaşımları* denir. Mıknatıs alaşımları (düşük sinyallerde) yüksek kaliteli transformatörler oluşturmak için faydalıdır ancak kalıcı mıknatıslar yapmak için iyi değildirler. Mıknatıs alaşımları çok dikkatlice yapılmalıdır. Bir mıknatıs alaşımı parçasının manyetik özellikleri, esneklik sınırının ötesinde gerilme uygulanırsa önemli ölçüde değişir. Bükülmemelidir. Mıknatıs geçirgenliği mekanik bozunumlarla meydana gelen kaymalar vb yüzünden azalır. Alan sınırları artık kolaylıkla hareket ettirilemez. Ancak yüksek sıcaklıklarda tavlayarak yüksek mıknatıs geçirgenliğine tekrar kavuşturulabilir.

Çeşitli manyetik malzemeleri tanımlayabilmek için bazı sayıları kullanmak sıklıkla uygundur. İki yararlı sayı, Şekil 37-12'de belirtildiği gibi, histerezis ilmeğinin B ve H eksenleriyle kesişimleridir. Bu kesişimlere *artık manyetik alan* B_r ve *zorlayıcı kuvvet* H_C denir. Birkaç manyetik malzeme için bu sayıları Tablo 37-1'de listeledik.

Tablo 37-1
Bazı ferromanyetik malzemelerin özellikleri

Malzeme	B_r Artık Manyetik Alan (Gauss)	H_C Zorlayıcı Kuvvet (Gauss)
Süper alaşım	(≈ 5000)	0,004
Silisyumlu çelik (transformatör)	12.000	0,05
Armco demiri	4.000	0,6
Alnico V	13.000	550



Şekil 37-13 Çeşitli malzemelerde elektron spinlerinin göreli yönelimi: (a) ferromanyetik (b) karşı ferromanyetik (c) ferrit (d) itriyum demir alaşımı (kırık çizgiler, yörüngesel hareket dahil, toplam açısal momentumun yönünü gösterir).

37-5 Olağandışı manyetik malzemeler

Şimdi bazı ilginç manyetik malzemeleri ele alalım. Periyodik tabloda iç elektron kabukları eksik olan ve dolayısıyla atomik manyetik momentlere sahip birçok element vardır. Örneğin, ferromanyetik elementler demir, nikel ve kobaltın hemen sağında krom ve manganezi görürsünüz. *Onlar* neden ferromanyetik değildir? Cevap, bu elementler için Denk. (37.1)'de λ teriminin *zıt işarete* sahip olmasıdır. Örneğin krom örgüsünde krom atomlarının spinleri, Şekil 37-13(b)'de görüldüğü gibi, *atomdan atoma* değişir. Dolayısıyla kendi bakış açısından krom "manyetiktir", ancak teknik olarak ilginç değildir çünkü hiç *dış* manyetik etki yoktur. Bu durumda krom, spinlerin değişiminin kuantum mekaniksel etkilerden geldiği malzemelere bir örnektir. Böyle bir malzemeye *karşı ferromanyetik* denir. Karşı ferromanyetik malzemelerdeki hizalanma ayrıca sıcaklığa bağlıdır. Kritik bir sıcaklığın altında spinler sıralı bir dizilişle hizalanırlar ancak malzemenin kritik sıcaklığında –yine Curie sıcaklığı olarak adlandırılır– spinler aniden rastgele şekilde değişir. İçerde ani bir geçiş olur. Bu geçiş özgül sıcaklık eğrisinde görülebilir. Ayrıca bazı özel "manyetik" etkilerde de kendini gösterir.

Örneğin, bir krom kristalinden nötronlar saçılarak değişen spinlerin varlığı doğrulanabilir. Nötronun kendisinin bir spini (ve bir manyetik momenti) olduğundan, spininin saçıcının spinine paralel veya zıt olmasına bağlı olarak farklı bir saçılım genliği vardır. Dolayısıyla, bir kristalin içindeki spinlerin rastgele dağılımı yerine sıralı bir şekilde dizilimi olduğunda farklı bir girişim deseni elde ederiz.

Kuantum mekaniksel etkilerin elektron spinlerini değiştirdiği ancak yine de *ferromanyetik* olan –kristalin net bir kalıcı mıknatıslanmasının olduğu– bir başka tür madde daha vardır. Bu tür malzemelerin arkasındaki fikir Şekil 37-14'te gösterilmiştir. Şekil, bir magnezyum alüminyum oksidi olan bir *spinelin* kristal yapısını göstermektedir ve –görüldüğü gibi– manyetik *değildir*. Oksitte iki çeşit metal atomu vardır: magnezyum ve alüminyum. Magnezyum ve alüminyumu demir ve çinko veya çinko ve manganez gibi iki manyetik elementle değiştirirsek –diğer bir deyişle manyetik olmayan atomların yerine *manyetik* atomlar koyarsak– ilginç bir şeyle karşılaşırız. Bir tür metal atomuna *a* ve diğer tür metal atomuna *b* diyelim; bu durumda şimdi belirteceğimiz kuvvetler birleşimleri hesaba katılmalıdır. *a*-*b* arasında –kuantum mekaniği (demir, nikel ve kobalt gibi gizemli kristaller hariç) her zaman zıt işaret çıkardığından– *a* atomlarını ve *b* atomlarını zıt spinlere zorlayan bir etkileşim vardır. Sonra, *a*'ları zıt yapmaya çalışan bir doğrudan *a*-*a* etkileşimi ve ayrıca *b*'leri zıt yapmaya çalışan bir *b*-*b* etkileşimi vardır. Elbette her şeyin her şeye karşı olduğu –*a b*'ye zıt, *a a*'ya zıt ve *b b*'ye zıt– bir durum olamaz. Muhtemelen *a*'lar arasındaki uzaklıklar ve oksijenin varlığından dolayı (gerçi neden olduğunu bilmiyoruz) *a*-*b* etkileşiminin *a*-*a* veya *b*-*b* etkileşiminden daha güçlü olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumda doğanın bulduğu çözüm, bütün *a*'ları *birbirlerine paralel* ve bütün *b*'leri de *birbirlerine paralel* yapmak ancak iki sistemi birbirine *zıt* tutmaktır. Bu, daha kuvvetli *a*-*b* etkileşiminden dolayı en düşük enerjili sistemi meydana getirir. Sonuç: bütün *a*'lar yukarı spinli ve bütün *b*'ler aşağı spinli –veya elbette tam tersi– olur. Ancak *a* tip atomu ve *b* tip atomun *manyetik momentleri birbirlerine eşit değilse*, Şekil 37-13(c)'deki durumla karşılaşırız ve malzemede net bir mıknatıslanma olabilir. Bu durumda –bir miktar zayıf olsa da– malzeme ferromanyetik olacaktır. Bu tür malzemelere *ferrit* denir. Bariz nedenlerden dolayı demir kadar yüksek doygunluk mıknatıslılıkları yoktur, dolayısıyla sadece daha küçük alanlarda faydalıdırlar. Ancak önemli bir farklılıkları vardır, onlar yalıtkandır. Ferritler, *ferromanyetik yalıtkandırlar*. Yüksek frekanslı alanlarda çok ufak eddy akımlarına sahiptirler ve dolayısıyla örneğin mikrodalga sistemlerinde kullanılabilirler. Mikrodalga alanları bu tür bir yalıtkan malzemenin içine girebilirler, ancak demir gibi bir iletkendeyse eddy akımları yüzünden içeri giremezler.

Henüz yeni keşfedilmiş yeni bir manyetik malzemeler sınıfı vardır: ortosilikatlar ailesinin üyeleri olan *lal taşları*. Örgünün iki tür metalik atom barındırdığı kristallerdir bunlar ve yine bu iki tür atomu istersek değiştirebiliriz. İlgimizi çekebilecek birçok bileşikten birisi tamamen ferromanyetiktir. Lal taşı yapısında itriyum ile demir vardır ve ferromanyetik olma nedeni ilgi çekicidir. Yine burada kuantum mekaniği komşu spinleri zıt yapmaktadır; demirin elektron spinlerinin bir yönde ve itriyumun elektron spinlerinin bir yönde olduğu bir sistem mevcuttur. Ancak itriyum atomu karmaşıktır. Nadir bir toprak elementidir ve elektonlarının *yörüngesel* hareketinden manyetik momentine büyük bir katkı vardır. İtriyum için yörüngesel hareketin katkısı spininkinin *zıddıdır* ve ayrıca daha büyüktür. Dolayısıyla her ne kadar kuantum mekaniği, dışarlama ilkesi yoluyla, itriyumun *spinlerinin* demirinkilere zıt yapsa da, yörüngesel etkiden dolayı –Şekil 37-13(d)'de çizildiği gibi– itriyum atomunun *toplam* manyetik momentini demire *paralel* yapar. Dolayısıyla da bileşik düzgün bir ferromıknatıstır.

Bir başka ilginç ferromanyetizma bazı nadir toprak elementlerinde meydana gelir. Spinlerin kendine özgü düzenlemeleriyle ilgilidir. Malzeme bütün spinlerin paralel olduğu anlamda ferromanyetik veya her bir atomun zıt olduğu anlamda karşı ferromanyetik değildir. Bu kristallerde *bir katmandaki* tüm

spinler paraleldir ve katmanın düzleminde bulunurlar. Diğer katmanda bütün spinler yine birbirine paraleldir ancak farklı bir yönü işaret etmektedirler. Bunun sonucu olarak yerel mıknatıslama vektörü bir spiral biçiminde değişkenlik gösterir. Ardışık katmanların manyetik momentleri, katmanlara dik bir çizgi boyunca ilerledikçe döner. Böyle bir spirale alan uygulandığında ne olduğunu – o atomik mıknatıslarda olan bütün bükülmeler ve dönmeleri– incelemeye çalışmak ilginç olabilir. (Bazı insanlar kendilerini bu şeylerin kuramıyla eğlendirmekten *hoşlanır*!) Sadece "düz" spiral durumlar değil, ardışık katmanların manyetik momentlerinin yönlerinin bir spiral bileşen ve bir yönde düzgün bir ferromanyetik bileşen çıkaracak şekilde koni çizdiği durumlar da vardır.

Malzemelerin, buradaki çabalarımızdan daha üst seviyede üzerinde çalışılan manyetik özellikleri bütün fizikçileri büyülemiştir. İlk başta bir şeyleri hep daha iyi yapmaya çalışan –daha iyi ve daha ilginç manyetik malzemeler tasarlamayı severler– pratik insanlar vardır. Ferritler gibi şeylerin veya onların uygulamalarının keşfi, bir şeyleri hep yeni bir şekilde yapmayı seven insanları hemen sevindirir. Bunun yanında, doğanın birkaç basit yasayla meydana getirdiği korkunç karanlıktan büyülenen insanlar vardır. Tek bir ve aynı genel fikirden yola çıkarak, doğa demirin ferromanyetizması ve alanlarını, kromun karşı ferromanyetizmasını, ferritlerin ve lal taşlarının manyetizmasını ve nadir toprak elementlerinin spiral yapısını ve daha fazlasını ortaya çıkarır. Bu özel maddeler içinde olup biten ilginç şeyleri deneysel olarak keşfetmek büyüleyicidir. Sonra, kuramsal fizikçilere ferromanyetizma bir dizi ilginç, çözülememiş ve güzel zorluklar sunar. Zorluklardan biri, neden böyle bir şeyin olduğudur. Dışardan gelen olası karmaşıkları ihmal etsek bile, şu ana kadar problemi tam anlamıyla kavrayabilmiş değiliz. Bu kadar ilginç nedeni de çok basitçe ifade edilebilir bir problem olmasıdır: Düzgün bir örgüde, birbirleriyle herhangi bir yasayla etkileştikleri bilinen elektron spinleri ne yaparlar? Basitçe ifade edilse de, tam bir analizi yıllardır yapılamamıştır.

Son olarak, ferromanyetik veya paramanyetik malzemelerde ve nükleer manyetizmada, tüm bu dönen atomik mıknatıslar konusu ileri seviye fizik öğrencileri için büyüleyici bir şey olmuştur. Spinler sistemi dış manyetik alanlar yardımıyla itilip çekilebilir, dolayısıyla rezonanslarla, gevşetme etkileriyle, spin yankılarıyla ve daha başka etkileriyle birçok farklı numara gerçekleştirilebilir. Birçok karmaşık termodinamik sisteminin prototipi olarak kullanılabilir. Ancak paramanyetik malzemelerde durum çoğu zaman gayet basittir ve insanlar hem onunla deneyler yapmaktan hem de onu kuramsal olarak açıklamaktan zevk almışlardır.

Artık elektrik ve manyetizma üzerine çalışmalarımızın sonuna geldik. İlk bölümde, Yunanların kehribar ve mıknatıs taşının garip davranışları üzerine gözlemlerinden bu yana atılan adımları konuştuk. Ancak uzun ve karmaşık tartışmamızda *neden bir parça kehribarı sürttüğümüzde onu yüklediğimizi* ya da *neden bir mıknatıs taşının mıknatıslandığını* açıklamadık. "Aslında, yalnızca doğru işareti elde etmedik." Hayır, durum bundan kötüdür. Doğru işareti elde etmiş olsaydık bile, sorumuz hâlâ cevaplanmamış olurdu: Neden topraktaki mıknatıs taşı mıknatıslanmıştır? Elbette, dünyanın manyetik alanı vardır ancak *dünyanın alanı nereden gelmektedir?* Kimse gerçekten bilmemektedir, sadece bazı iyi tahminler vardır. Görüyorsunuz ya, fizikte bir sürü hile vardır. Kehribar ve mıknatıs taşı olgularıyla başladık ve ikisini de doğru dürüst anlayamadan sona geldik. Ancak bütün bu süreç boyunca müthiş miktarda heyecan verici ve işe yarar bilgi *öğrendik*!

38
ESNEKLİK

38-1 Hooke yasası

38-1 Hooke yasası
38-2 Düzgün gerilmeler
38-3 Burulma çubuğu; kayma dalgaları
38-4 Bükülmüş kiriş
38-5 Burkulma

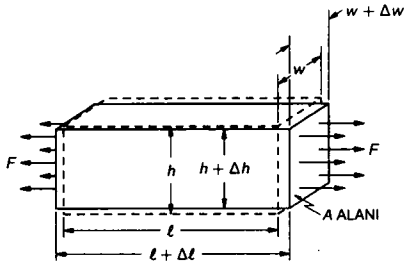
Esneklik yasası, şekil değiştirmeleri meydana getiren kuvvetler ortadan kaldırıldığında ölçü ve şekilleri ilk hallerine dönen maddelerin davranışlarıyla ilgilidir. Esneklik özelliğini bir yere kadar bütün katı cisimlerde bulabiliriz. Konuyu derinlemesine işleyecek kadar vaktimiz olsaydı, birçok şeye bakmak isterdik: malzemelerin davranışı, genel esneklik yasaları, genel esneklik kuramı, esneklik özelliklerini belirleyen atomik düzenek ile son olarak plastik akış ve kırılma meydana getirecek kadar kuvvetler büyüdüğünde esneklik yasalarının sınırları. Bütün bu konuları detaylıca incelemek sahibi olduğumuz süreden çok daha fazla vakit alacağından bazı şeyleri bir kenara koymak zorundayız. Örneğin, plastisiteyi veya esneklik yasalarının limitlerini tartışmayacağız. (Metallerdeki kaymaları tartışırken bu konulara kısaca değinmiştik.) Ayrıca, esnekliğin iç işleyişlerini de tartışmayacağız; dolayısıyla daha önceki bölümlerdeki gibi konuyu işleyişimiz eksiksiz olmayacak. Buradaki amacımız sizi, kirişlerin bükülmesi esnasında karşılaşılan pratik problemlerle ilgili bazı yöntemlere aşina kılmaktır.

Bir parça malzemeyi ittiğinizde "eğilir"; malzeme bozulmuştur. Kuvvet yeterince küçükse, malzemenin çeşitli noktalarındaki göreceli yerdeğiştirmeler kuvvetle orantılıdır. Bu tür davranışa *esneklik* denir. Burada yalnız esnekliği ele alacağız. Öncelikle esnekliğin temel yasalarını yazacak ve sonra farklı koşullara uygulayacağız.

Şekil 38-1'de gösterildiği gibi elimizde l boyunda, w genişliğinde ve h yüksekliğinde dikdörtgen bir malzeme kütüğü olsun. Uçlardan F kuvvetiyle çekersek, boy Δl miktarıyla artar. Her durumda uzunluktaki değişimin başlangıçtaki uzunluğun küçük bir bölümü olduğunu varsayacağız. Aslına bakarsanız, tahta ve çelik gibi malzemeler eğer başlangıçtaki boylarının sadece yüzde birkaçı kadar uzatılırlarsa kırılırlar. Birçok malzeme için deneyler göstermiştir ki küçük uzanımlar için kuvvet ile uzanım orantılıdır:

$$F \propto \Delta l \tag{38.1}$$

Bu ilişkiye *Hooke yasası* denir.



Şekil 38-1 Düzgün gerilme altında bir çubuğun uzaması.

Çubuğun Δl kadar uzaması aynı zamanda çubuğun boyuna da bağlıdır. Bunu şu akıl yürütmeyle anlayabiliriz. İki benzer cismi uçlarından birbirlerine yapıştırdığımızda her bir cisme aynı kuvvetler etkir; her biri Δl kadar uzar. Dolayısıyla $2l$ uzunluğundaki bir cismin uzaması aynı kesit yüzeyine sahip, ancak l uzunluğundaki bir cisme göre iki kat olacaktır. Daha malzemeye özgü ve herhangi bir şekle daha az bağımlı bir sayı elde etmek için $\Delta l/l$ oranıyla çalışmayı tercih ederiz. Bu oran kuvvetle orantılı ancak l'den bağımsızdır:

$$F \propto \frac{\Delta l}{l} \tag{38.2}$$

F kuvveti de ayrıca cismin alanına bağlıdır. İki cismi yan yana koyduğumuzu düşünelim. Belli bir Δl uzaması için her bir cisim üzerinde F kuvveti ya da iki cismin birleşiminde iki katı kuvvet görürdük. Belli bir uzama miktarı için kuvvet cismin A kesit alanıyla orantılı olmalıdır. Orantı katsayısının cismin boyutlarından bağımsız olduğu bir yasa elde etmek amacıyla, dikdörtgen bir ci-

sim için Hooke yasasını aşağıdaki şekilde yazarız:

$$F = YA\frac{\Delta l}{l} \tag{38.3}$$

Y sabiti sadece malzemenin doğasına bağlı bir özelliktir; buna *Young modülü* denir. (Genelde Young modülüne E dendiğini göreceksiniz. E'yi elektrik alanları, enerji ve emk'lar için kullandık, dolayısıyla farklı bir harf kullanmayı tercih ediyoruz.)

Birim alana etkiyen kuvvete stres denir ve birim boydaki uzamaya da –*oransal* uzama– *gerilme* denir. Dolayısıyla Denk. (38.3) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

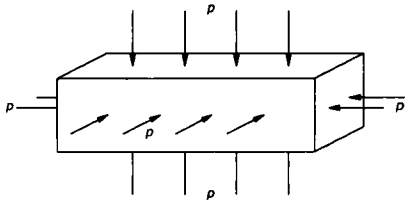
$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l} \tag{38.4}$$

Stres = (Young modülü) × (gerilme)

Hooke yasasının bir çıkarımı daha vardır: Bir cismi bir yönde *uzattığınızda,* uzamaya dik açılarda *büzüşür.* Genişlikteki büzüşme w genişliğiyle ve ayrıca $\Delta l/l$ terimiyle orantılıdır. Yanlamasına büzüşme hem genişlik hem de uzunluk için aynı orandadır ve genelde aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta l}{l} \tag{38.5}$$

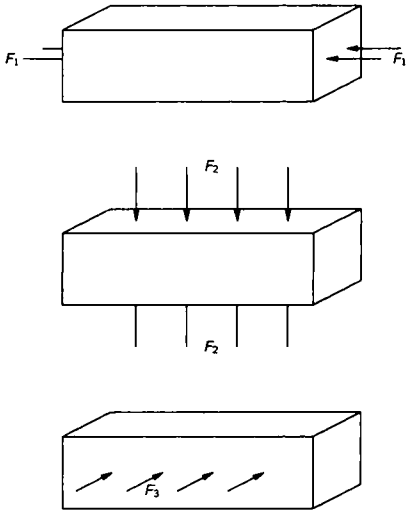
σ sabiti malzemenin bir başka özelliğidir ve *Poisson* olarak bilinir. İşaret olarak daima artıdır ve 1/2'den küçük bir sayıdır. (σ teriminin daima artı olması "akla yatkındır", ancak böyle *olması* gerektiği çok da açık değildir.)



Şekil 38-2 Düzgün bir hidrostatik basınç altında bir çubuk.

Y ve σ sabitleri *homojen eş yönlü* (kristal yapılı olmayan) bir malzemenin esneklik özelliklerini bütünüyle tanımlar. Kristal yapılı malzemelerde uzamalar ve büzülmeler farklı yönlerde olabilir, dolayısıyla çok daha fazla esneklik sabitleri olabilir. Tartışmamızı şimdilik sadece, özellikleri Y ve σ terimleriyle tanımlanabilen homojen eş yönlü malzemelerle sınırlayacağız. Her zaman olduğu gibi bir şeyleri tanımlamanın birçok yolu vardır. Bazıları malzemelerin esneklik özelliklerini farklı sabitlerle tanımlamaktan hoşlanır. Her zaman iki sabit yeterlidir ve σ ile Y terimleriyle ilişkilendirilebilirler.

İhtiyacımız olan son genel yasa üst üste binme ilkesidir. Denklem (38.4) ve (38.5) kuvvetler ve yerdeğiştirmelerde doğrusal olduklarından, üst üste binme işleyecektir. Bir grup kuvvet ve yerdeğiştirmeniz varsa ve bunlara yeni bir grup kuvvet ekleyerek ilave yerdeğiştirmeler elde ederseniz, sonuçtaki yerdeğiştirmeler iki grup kuvvetin birbirinden bağımsız halde etkimeleriyle elde edeceklerinizin toplamıdır.



Şekil 38-3 Hidrostatik basınç üç uzamsal sıkıştırmanın üst üste binmesidir.

Artık bütün genel ilkeleri –üst üste binme ilkesi ve (38.4) ile (38.5) denklemini– elde etmiş olduk ve esneklik için tüm gerekenler de bunlardır. Ancak bu, Newton yasalarını elde ettiğinizde mekanik için gerekenin sadece onlar olduğunu söylemek gibidir. Ya da Maxwell yasalarıyla bütün elektriği kavradığınızı söylemek gibidir. Elbette bu ilkelerle eliniz kuvvetlidir çünkü şimdiki matematiksel yeteneğinizle gayet derine inebilirsiniz. Ancak biz birkaç özel uygulama üzerinde duracağız.

38-2 Düzgün gerilmeler

İlk örneğimizde, düzgün bir hidrostatik basınç altında bir dikdörtgen cisme ne olduğunu bulalım. Bir cismi bir basınç tankında suya batıralım. Bu durumda cismin her bir yüzünde içeri doğru, alanla orantılı bir kuvvet etki eder (*Bkz.* Şekil 38-2). Hidrostatik basınç düzgün olduğundan, cismin her bir yüzündeki *stres* (birim alan başına kuvvet) aynı olacaktır. Önce boydaki değişimi bulacağız. Cismin boyundaki değişim, Şekil 38-3'te gösterilen üç bağımsız problemde meydana gelen değişimlerin toplamı olarak düşünülebilir.

1. *Problem.* Bir cismin iki ucunu p basıncıyla itersek, sıkıştırma gerilmesi p/Y'dir ve eksidir,

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}$$

2. *Problem.* Bir cismin iki kenarını p basıncıyla itersek, sıkıştırma gerilmesi yine p/Y'dir, ancak şimdi boylamasına gerilmeyi bulmak istiyoruz. Bunu yanlamasına gerilmesi $-\sigma$ terimiyle çarparak elde edebiliriz. Yanlamasına gerilme aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y}$$

ya da

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma\frac{p}{Y}$$

3. *Problem.* Cisme yukarıdan bastırırsak, sıkıştırma gerilmesi yine p/Y'dir ve karşılık gelen yanlamasına gerilme yine $-\sigma p/Y$'dir. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma\frac{p}{Y}$$

Bu üç problemin sonuçlarını birleştirirsek $-\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$ eşitliğini hesaplarsak– aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \tag{38.6}$$

Problem elbette üç yönde simetriktir. Buradan da şu aşağıdaki sonuç çıkar:

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \tag{38.7}$$

Hidrostatik basınç altında *hacimdeki* değişim de ilgi çekicidir. $V = lwh$ olduğundan, küçük yerdeğiştirmeler için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}$$

Denklem (38.6) ve (39.7)'yi kullanarak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \tag{38.8}$$

İnsanlar $\Delta V/V$ oranına *hacim gerilmesi* demekten hoşlanırlar ve aşağıdaki eşitliği yazarlar:

$$p = -K\frac{\Delta V}{V}$$

Hacim stresi p hacim gerilmesiyle orantılıdır, Hooke yasası yine karşımıza çıktı. K katsayısına *hacim modülü* denir; diğer katsayılarla aşağıdaki şekilde bağlantılıdır:

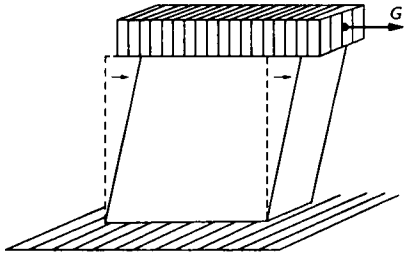
$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)} \tag{38.9}$$

K teriminin pratik bir faydası olduğu için birçok ders kitabı Y ve σ yerine Y ve K kullanmayı tercih eder. σ isterseniz, her zaman Denk. (38.9)'u kullanabilirsiniz. Aynı denklemden Poisson oranı σ'nın yarıdan az olması gerektiğini görebiliriz. Öyle olmasaydı hacim modülü K eksi olurdu ve artan basınç altında malzeme uzardı. Bu da bize herhangi bir eski cisimden –cismin kararsız bir denge olduğu anlamına gelirdi– mekanik enerji elde etmemize izin verirdi. Uzamaya başladığında enerji salarak kendi kendine uzamaya devam ederdi.

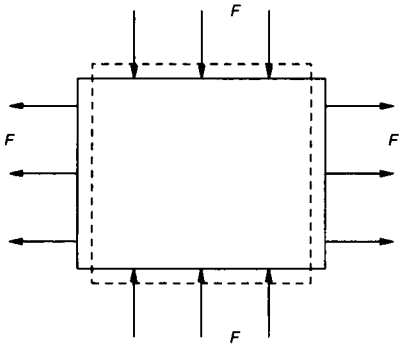
Şimdi bir şey üzerine "kayma" gerilmesi uyguladığınızda ne olduğunu ele alalım. Kayma gerilmesi dediğimizde ifade etmek istediğimiz Şekil 38-4'teki gibi bir tür bükülmedir. Öncelikle gelin, Şekil 38-5'te gösterilen kuvvetlere maruz kalmış bir *küpteki* gerilmelere bakalım. Yine bu problemi ikiye bölebiliriz: dikey itmeler ve yatay çekmeler. Küp yüzü alanına A dersek, yatay boydaki değişim için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y}\frac{F}{A} + \sigma\frac{1}{Y}\frac{F}{A} = \frac{1+\sigma}{Y}\frac{F}{A} \tag{38.10}$$

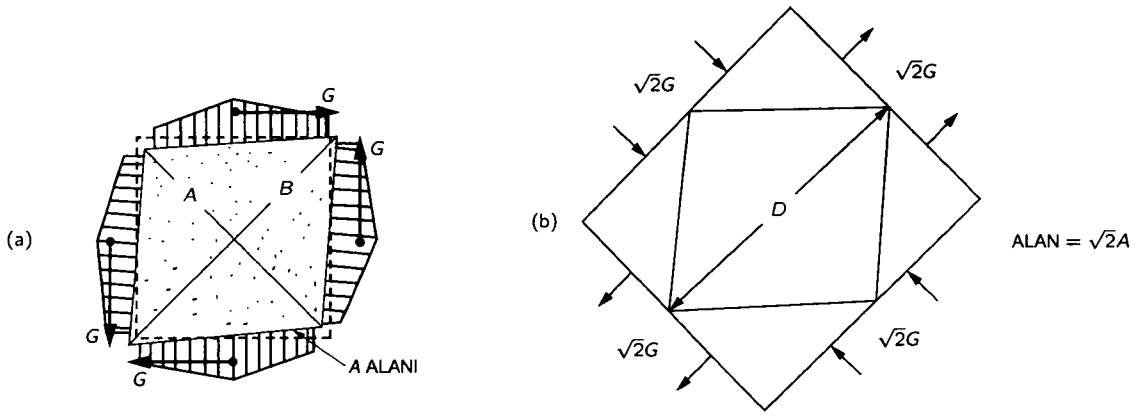
Dikey uzunluktaki değişimse bunun eksisidir.



Şekil 38-4 Düzgün bir kaymaya maruz kalmış bir küp.



Şekil 38-5 Üstünde ve altında sıkıştırma kuvvetleri ve her iki tarafında eşit germe kuvvetleri olan bir küp.

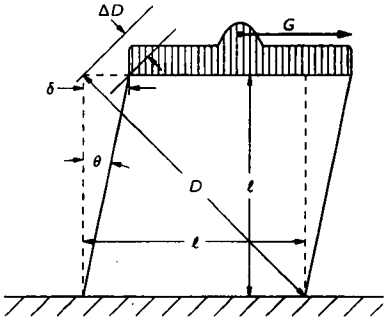


Şekil 38-6 (a)'daki iki çift kayma kuvveti (b)'deki sıkıştırma ve uzatma kuvvetleriyle aynı stresi meydana getirir.

Aynı küpü ele aldığımızı ve Şekil 38-6(a)'daki kayma kuvvetlerini uyguladığımızı düşünelim. Net tork olmayacak ve küp dengede olacaksa bütün kuvvetlerin eşit olması gerektiğini dikkate alın. (Cisim dengede olduğundan, Şekil 38-4'te benzer kuvvetler olmalıdır. Cismi masaya sabitleyen "yapışkan"la sağlanırlar.) Bu durumda küp için saf bir kayma halinde olduğu söylenir. Ancak dikkat ederseniz, küpü 45°'lik bir düzlemle –şekilde A köşegeni boyunca örneğin– kesersek, düzlem boyunca etkiyen toplam kuvvet düzleme *diktir ve* $\sqrt{2}G$'ye eşittir. Kuvvetin etki ettiği alan $\sqrt{2}A$'dır; dolayısıyla yüzeye dik çekme stresi G/A'dır. Benzer şekilde diğer bir yönde 45°'lik bir düzlemi –şekildeki B köşegeni– incelersek bu düzleme dik, $-G/A$ değerinde bir sıkıştırma stresi olduğunu görürüz. Buradan, "saf kayma"daki *stresin* birbirlerine eşit ve dik açıda ve küpün başlangıçtaki yüzeylerine 45° eğimli germe ve sıkıştırma streslerinin birleşimine eşit olduğunu görebilirsiniz. İç stresler ve gerilmeler daha büyük bir cisimde, Şekil 38-6(b)'deki kuvvetlerle bulacaklarımızla aynıdır. Bu zaten daha önce çözdüğümüz bir problemdir. Köşegenin uzunluğundaki değişim Denk. (38.10) sayesinde bulunabilir,

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1+\sigma}{Y}\frac{G}{A} \tag{38.11}$$

(Bir köşegen kısaltılmış, diğeri uzatılmıştır.)



Şekil 38-7 θ kayma gerilmesi $2\Delta D/D$'dir.

Çoğu zaman kayma gerilmesini küpün büküldüğü açıyla –Şekil 38-7'deki θ açısıyla– ifade etmek kullanışlıdır. Şeklin geometrisinden üst kenarın yatay kayması δ'nin $\sqrt{2}\Delta D$'ye eşit olduğunu görebilirsiniz. Dolayısıyla:

$$\theta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2\frac{\Delta D}{D} \tag{38.12}$$

Kayma gerilmesi g bir yüzdeki teğet kuvvetin alana bölümü olarak ($g = G/A$) tanımlanır. (38.11) ve (38.12) denklemlerini kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\theta = 2\frac{1+\sigma}{Y}g$$

Ya da, bunu "stres = sabit çarpı gerilme," şeklinde yazarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

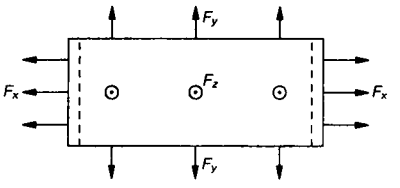
$$g = \mu\theta \tag{38.13}$$

Orantı katsayısı μ *kayma modülü* (veya bazen sabitlik katsayısı) olarak adlandırılır. Y ve σ cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \tag{38.14}$$

Yeri gelmişken, kayma gerilmesi artı olmalıdır. Aksi takdirde kendi kendini kesen bir cisimden iş elde edebilirsiniz. Denklem (38.14)'e göre σ –1'den büyük olmalıdır. Bu durumda σ değerinin –1 ile $+\frac{1}{2}$ arasında olması gerektiğini anlarız. Pratikte, daima sıfırdan büyüktür.

Malzeme içindeki streslerin düzgün olduğu duruma son bir örnek olarak, uzatıldığı esnada enine büzüşme olmayacak şekilde *sınırlandırılan* bir cismi ele alalım. (Teknik olarak, yanların genişlemişini önlerken sıkıştırmak daha kolaydır; ancak problem aynıdır.) Ne olur? Bilmediğimiz ancak hesaplamamız gereken enine kuvvetler kalınlığın değişmesini engeller. Daha önceden biraz farklı bir matematikle çözdüğümüz benzer bir problemdir bu. Şekil 38-8'deki gibi üç kenar üzerinde etki eden kuvvetleri düşünelim. Boyutlardaki değişimleri hesaplar ve genişlik ile yüksekliği sabit tutacak enine kuvvetleri seçeriz. Bilindik akıl yürütmeleri takip ederek, üç gerilme için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:



Şekil 38-8 Enine büzüşmesiz uzama.

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y}\frac{F_x}{A_x} - \frac{\sigma}{Y}\frac{F_y}{A_y} - \frac{\sigma}{Y}\frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_x}{A_x} - \sigma\left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right], \tag{38.15}$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_y}{A_y} - \sigma\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right], \tag{38.16}$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_z}{A_z} - \sigma\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y}\right)\right]. \tag{38.17}$$

Δl_y ve Δl_z sıfır olması gerektiğinden, (38.16) ve (38.17) denklemleri F_y ve F_z'yi F_x'e bağlayan iki denklem verir. Birlikte çözdüğümüzde, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{F_x}{A_x} \tag{38.18}$$

Bu ifadeyi Denk. (38.15)'e koyarsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{Y}\left(\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x} \tag{38.19}$$

Sıklıkla bunun tersine çevrilmiş şeklini göreceksiniz. σ terimindeki kareyi de açarsak, aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz:

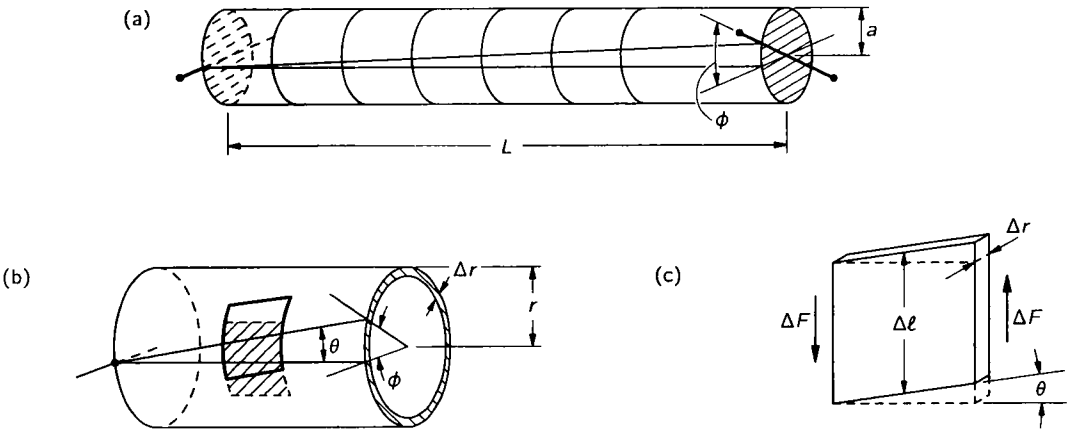
$$\frac{F}{A} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}Y\frac{\Delta l}{l} \tag{38.20}$$

Kenarları sınırlandırdığımızda, Young modülü σ'nin karmaşık bir fonksiyonuyla çarpılır. Denklem (38.19)'dan kolaylıkla görebileceğimiz üzere, Y'nin önündeki çarpan daima 1'den büyüktür. Kenarlar tutulduğunda cismi daha fazla uzatmak daha zordur, bu aynı zamanda kenarları tutulduğunda daha *dirençli* olduğu anlamına gelir.

38-3 Burulma çubuğu; kayma dalgaları

Şimdi dikkatimizi farklı parçalarına farklı miktarlarda stres uygulandığından dolayı çözmesi daha karmaşık olan bir örneğe yöneltelim. Bir makinenin tahrik mili veya hassas bir cihazın içinde bulunan kuvars lifi olabilecek burulmuş bir çubuğu ele alalım. Burulum sarkacıyla ilgili deneylerden muhtemelen bildiğiniz üzere, burulmuş bir çubuktaki *torkaçıya* orantılıdır. Orantı sabiti açık bir şekilde çubuğun boyu, çapı ve malzemenin özelliklerine bağlıdır. Soru: Ne şekilde? Artık bu soruyu cevaplayabilecek konumdayız, biraz geometri hesabı yapacağız o kadar.

Şekil 38-9(a) L boyunda, a yarıçapında ve bir ucu diğerine göre ϕ açısıyla burulmuş silindirik bir çubuğu göstermektedir. Gerilmeleri halihazırda bildiklerimizle ilişkilendirmek istersek, çubuğu birçok silindirik kabuktan yapılmış gibi düşünebilir ve her bir kabuğa ne olduğunu ayrı ayrı çalışabiliriz. Şekil 38-9(b)'de gösterilen (a'dan küçük) r yarıçapında ve Δr kalınlığında kısa ince silin-



Şekil 38-9 (a) Burulan bir silindirik çubuk. (b) Burulan silindirik bir kabuk. (c) Kabuğun her bir küçük parçası kayma altındadır.

dirle başlayalım. Bu silindirin başlangıçta küçük bir kare olan parçasına baktığımızda, bir paralel kenar şeklini aldığını görürüz. Silindirin her bir benzer parçası kayma altındadır ve kayma açısı θ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\theta = \frac{r\phi}{L}$$

Dolayısıyla [Denk. (38.13)'ten] malzemedeki g kayma gerilmesi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$g = \mu\theta = \mu\frac{r\phi}{L} \tag{38.21}$$

Kayma stresi, karenin ucundaki teğet ΔF kuvvetinin uçtaki $\Delta l\,\Delta r$ alanına bölünmesidir [*Bkz.* Şekil 38-9(c)]:

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta l\,\Delta r}$$

Böyle bir karenin ucundaki ΔF kuvveti çemberin ekseni etrafında aşağıdaki şekilde hesaplanan bir $\Delta\tau$ torku sağlar.

$$\Delta\tau = \tau\,\Delta F = rg\,\Delta l\Delta r \tag{38.22}$$

Toplam tork τ, silindirin toplam çevresi etrafındaki benzeri torkların toplamıdır. Δl'lerin $2\pi r$'ye ulaşacağı kadar yeterli parçayı toplarsak, *içi boş bir tüp* için toplam torku aşağıdaki denklemle hesaplayabiliriz:

$$rg(2\pi r)\,\Delta r \tag{38.23}$$

Ya da (38.21)'i kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\tau = 2\pi\mu\frac{r^3\Delta r\phi}{L} \tag{38.24}$$

Buradan, boş bir tüpün dönme sertliği τ/ϕ'nin yarıçapı r'nin küpü ile Δr kalınlığıyla orantılı ve L boyuyla ters orantılı olduğunu anlarız.

Şimdi katı bir çubuğu, her biri aynı ϕ açısıyla burulmuş, birçok eş merkezli tüplerden (her ne kadar iç *stresler* her bir tüp için ayrı olsa da) meydana gelmiş gibi düşünebiliriz. Toplam tork, her bir kabuğu döndürmek için gerekli torkların toplamıdır. *Katı* bir çubuk için, integral çubuğun yarıçapı $r = 0$'dan $r = a$'ya giderken, toplam torku aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

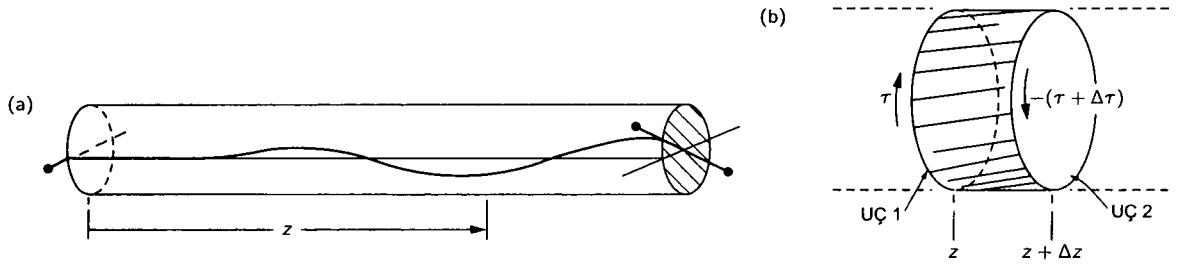
$$\tau = 2\pi\mu\frac{\phi}{L}\int r^3\,dr$$

İntegralini aldığımızda, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\tau = \mu\frac{\pi a^4}{2L}\phi \tag{38.25}$$

Burulan bir çubuk için, tork açı ve çapın *dördüncü kuvvetiyle* orantılıdır. İki kat kalın bir çubuk, burulma için on altı kat daha serttir.

Burulma konusunu bırakmadan önce, az önce öğrendiğimizi ilginç bir probleme uygulayalım: burulum dalgaları. Uzun bir çubuk alır ve bir ucundan aniden burkarsanız bir burulum dalgası çubuk boyunca, Şekil 38-10(a)'daki gibi ilerler. Bu, sabit bir burkmadan biraz daha heyecan vericidir; bakalım ne olup bittiğini anlayabilecek miyiz?



Şekil 38-10 (a) Bir çubuktaki burulum dalgası. (b) Çubuğun bir hacim elemanı.

z çubuk boyunca bir noktaya olan uzaklık olsun. Statik bir burulum için tork, çubuk boyunca her yerde aynıdır ve toplam burulum açısı bölü toplam uzunlukla, ϕ/L, orantılıdır. Malzeme için önemli olan yerel burulum gerilmesidir ki bu da, tahmin edeceğiniz üzere, $\partial\phi/\partial z$'dir. Çubuk boyunca burulum düzgün olmadığında, Denk. (38.25)'i aşağıdaki eşitlikle değiştirmeliyiz.

$$\tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{38.26}$$

Şimdi de Şekil 38-10(b)'de büyütülmüş olarak gösterilen Δz boyundaki elemana ne olduğuna bakalım. Çubuğun küçük parçasının 1 numaralı ucunda bir $\tau(z)$ torku ve 2 numaralı ucunda da farklı bir $\tau(z + \Delta z)$ torku vardır. Δz yeterince küçükse, Taylor açılımını kullanarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\tau(z + \Delta z) = \tau(z) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)\Delta z \tag{38.27}$$

z ile $z + \Delta z$ arasındaki küçük çubuk parçası *üzerinde* etkiyen net $\Delta\tau$ torku açıkça $\tau(z)$ ile $\tau(z + \Delta z)$ arasındaki fark ya da $\Delta\tau = (\partial\tau/\partial z)\Delta z$'dir. Denklem (38.26)'nın türevini alarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\Delta\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z \tag{38.28}$$

Bu net torkun etkisi küçük çubuk parçasına bir açısal ivme vermektir. ρ malzemenin yoğunluğuyken dilimin kütlesi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\Delta M = (\pi a^2 \Delta z)\rho$$

1. Cilt, 19. Bölümde bir silindirin eylemsizlik momentinin $mr^2/2$ olduğunu çıkarmıştık. Parçamızın eylemsizlik momentine ΔI dersek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \tag{38.29}$$

Newton yasasına göre tork eylemsizlik momenti çarpı açısal ivmelenmeye eşittir, ya da:

$$\Delta\tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{38.30}$$

Hepsini bir araya getirdiğimizde

$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

eşitliğini ya da aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{38.31}$$

Bunun tek boyutlu dalga denklemi olduğunu fark etmişsinizdir. Burulum dalgalarının çubuk boyunca

$$C_{\text{kayma}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{38.32}$$

hızıyla ilerlediğini bulmuş olduk. Çubuk *daha yoğun* oldukça –aynı sertlik için– dalgalar *daha yavaş* ve çubuk *daha sert* oldukça dalgalar daha hızlı ilerler. Hız çubuğun çapına bağlı *değildir*.

Burulum dalgaları *kayma dalgalarının* özel bir örneğidir. Genel olarak, kayma dalgaları gerilmelerin malzemenin herhangi bir parçasının *hacmini* değiştirmediği dalgalardır. Burulum dalgalarında böyle kayma dalgalarının özel bir dağılımı –bir çember üzerinde dağılmışlardır– vardır. Ancak kayma dalgalarının herhangi bir düzenlemesi için dalgalar aynı hızla –Denk. (38.32)'de verilen– ilerleyeceklerdir. Örneğin sismologlar bu tür kayma dalgalarını dünyanın içinde ilerlerken bulurlar.

Katı bir malzemenin içindeki esnek dünyada farklı bir tür dalga bulabiliriz. Bir şeyi ittiğinizde "boyuna" –aynı zamanda "sıkıştırma" dalgası olarak da bilinir– dalgalar başlatmış olursunuz. Bunlar tıpkı havadaki veya sudaki ses dalgaları gibidir; yerdeğiştirmeler dalga ilerleme yönüyle aynıdır. (Esnek bir cismin yüzeylerinde "Rayleigh dalgaları" veya "Love dalgaları" denilen başka tür dalgalar da bulunabilir. İçlerinde, gerilmeler ne tam olarak boyuna ne de tam olarak eninedir. Onlar üzerinde çalışmaya vaktimiz olmayacak.)

Hazır dalgalar konusunu işliyorken, dünya gibi *büyük* katı bir cisim içindeki saf sıkıştırma dalgalarının hızı nedir? "Büyük" diyoruz çünkü kalın bir cismin içindeki ses hızı ince bir çubuk içindekinden farklıdır. "Kalın" bir cisimle ifade etmek istediğimiz, enine boyutların sesin dalga boyundan çok daha büyük olduğudur. Böylece cismi ittiğimizde yanlara genişleyemez; sadece bir boyutta sıkışabilir. Şanslıyız ki, sınırlı bir esnek malzemenin sıkıştırılmasına dair özel durumu daha önce işlemiştik. 1. Cilt, 47. Bölümünde bir gaz içindeki ses dalgalarının hızını da çalışmıştık. Aynı akıl yürütmeleri takip ederek, katı bir cisimdeki ses hızının sınırlı durum için, Y' "boyuna modülü" olduğunda, $\sqrt{Y'/\rho}$ ya da basınç bölü boydaki göreli değişim olduğunu görürsünüz. Bu tam da Denk. (38.20)'de elde ettiğimiz F/A'nın $\Delta l/l$'ye oranıdır. Dolayısıyla boyuna dalgaların hızı aşağıdaki denklemle bulunabilir:

$$C_{\text{boy}}^2 = \frac{Y'}{\rho} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\frac{Y}{\rho} \tag{38.33}$$

σ, sıfır ile 1/2 arasında olduğu müddetçe kayma modülü μ, Young modülü Y'den küçüktür ve ayrıca Y', Y'den büyüktür. Bunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\mu < Y < Y'$$

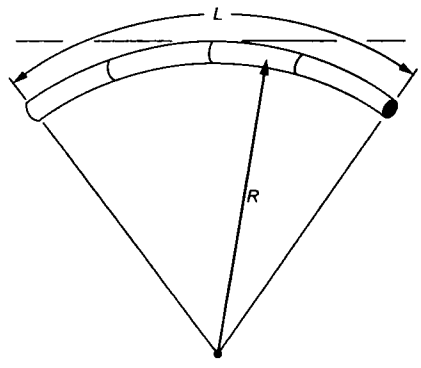
Bunun anlamı, boyuna dalgaların kayma dalgalardan daha hızlı ilerlediğidir. Bir cismin esneklik sabitlerini ölçmenin en hassas yollarından biri malzemenin yoğunluğunu ve iki tür dalganın hızlarını ölçmektir. Bu bilgi sayesinde hem Y hem de σ terimlerini elde edebiliriz. Yeri gelmişken, sismologlar bir deprem sonrası iki tür dalganın –tek bir istasyondaki sinyallerden bile– varış zamanları arasındaki farkı ölçerek depreme olan uzaklığı saptayabilirler.

38-4 Bükülmüş kiriş

Şimdi bir başka pratik durumu, bir çubuğun veya kirişin *bükülmesini* ele alalım. Rastgele bir enine kesite sahip bir çubuğu büktüğümüzde hangi kuvvetlerle karşılaşırız? Öncelikle çubuğu dairesel bir kesite sahip gibi düşünerek ça-

lışacağız ancak varacağımız sonuç herhangi bir şekil için de geçerli olacaktır. Bununla birlikte zaman kazanmak için biraz kestirme yollara gireceğiz, böylece çıkaracağımız kuram sadece yaklaşık olacaktır. Sonuçlarımız sadece bükülmenin yarıçapı kirişin kalınlığından çok daha büyük olduğunda doğru olacaktır.

Düz bir çubuğu iki ucundan tuttuğunuzu ve Şekil 38-11'deki gibi bir eğri olacak şekilde büktüğünüzü düşünün. Çubuğun içinde ne olur? Eğrilmişse, eğrinin içindeki malzemenin sıkıştırılmış ve dışındaki malzeme gerilmiştir. Çubuğun eksenine paralel, ne gerilmiş ne sıkışmış bir miktar yüzey vardır. Bu yüzeye *nötr* yüzey denir. Bu yüzeyin kesitin *ortasına* yakın bir yerde olması beklenir. Burada yapmayacağız ancak basit kirişlerin küçük bükülmeleri için nötr yüzeyin, kesitin "kütle merkezi"nden geçtiği gösterilebilir. Bu sadece "saf" bükme için, kirişi aynı anda hem germiyor hem de sıkıştırmıyorsanız, geçerlidir.



Şekil 38-11 Bükülmüş bir kiriş.

Saf bükmede, çubuğun enine ince bir kesiti Şekil 38-12(a)'daki gibi eğrilmiştir. Nötr yüzeyin altındaki malzemede tarafsız yüzeye *olan mesafeyle orantılı* bir sıkıştırma gerilmesi vardır. Yukardaki malzeme de gerilmiştir ve o da tarafsız yüzeye olan uzaklıkla orantılıdır. Dolayısıyla boyuna *gerilme* Δl, y yüksekliğiyle orantılıdır. Orantı sabiti de l bölü çubuğun eğilme yarıçapıdır (*Bkz.* Şekil 38-12):

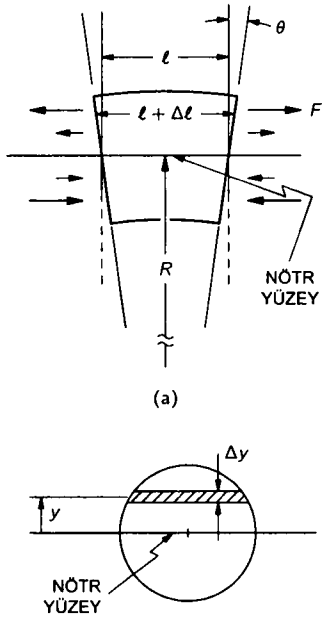
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}$$

Dolayısıyla, y'deki küçük bir şeritteki kuvvet bölü birim alan da –stres– nötr yüzeye olan uzaklıkla orantılıdır.

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y\frac{y}{R} \qquad (38.34)$$

Şimdi gelin, böyle bir gerilmeyi meydana getirebilecek *kuvvetlere* bakalım. Şekil 38-12'deki küçük parça üzerine etki eden kuvvetler şekilde gösterilmiştir. Herhangi bir enine kesiti düşünürsek, kesit boyunca etki eden kuvvetlerin biri nötr yüzeyin üzerindeki ve diğeri de altındakidir. "Bükme momenti" meydana getirecek şekilde –demek istediğimiz nötr çizgi etrafındaki torktur– çifttirler. Toplam momenti hesaplamak için Şekil 38-12'deki parçanın yüzlerinden biri için nötr yüzeye olan uzaklık çarpı kuvvetin integralini alabiliriz:

$$\mathfrak{M} = \int_{\substack{\text{kesit}\\ \text{alan}}} y\,dF \qquad (38.35)$$



Şekil 38-12 (a) Bükülmüş bir kirişin küçük bir parçası. (b) Kirişin kesiti.

Denklem (38.34)'ten, $dF = Yy/RdA$ eşitliğini çeker ve böylece aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\mathfrak{M} = \frac{Y}{R}\int y^2\,dA$$

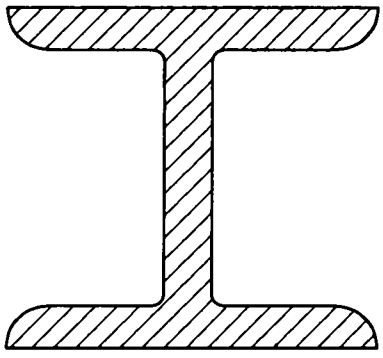
y^2dA'nın integraline, "kütle merkezi"nden geçen yatay eksen boyunca geometrik kesit alanının "eylemsizlik momenti" diyebiliriz;* ona I diyeceğiz:

$$\mathfrak{M} = \frac{YI}{R} \qquad (38.36)$$

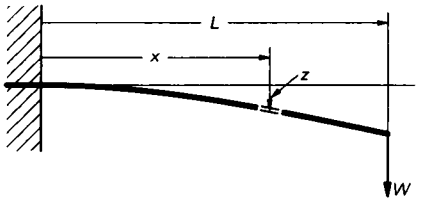
$$I = \int y^2\,dA \qquad (38.37)$$

Denklem (38.36) bize bükme momenti $\mathfrak{M}$ ile kirişin $1/R$ eğriliği arasındaki ilişkiyi verir. Kirişin "sertliği" Y ve I eylemsizlik momentiyle orantılıdır. Diğer bir deyişle, belirli bir miktar malzemeyle, örneğin alüminyumla, mümkün olan en sert kirişi elde etmek isterseniz, büyük bir eylemsizlik momenti elde etmek için mümkün olduğu kadar çok malzemeyi nötr yüzeyden uzağa koymalısınız. Bunu çok da uç noktalara taşıyamazsınız; çünkü bu sefer de varsaydığımız gibi eğrilmeyecektir. Bükülür veya burkulur ve yeniden zayıflar. Şimdi neden yapı-

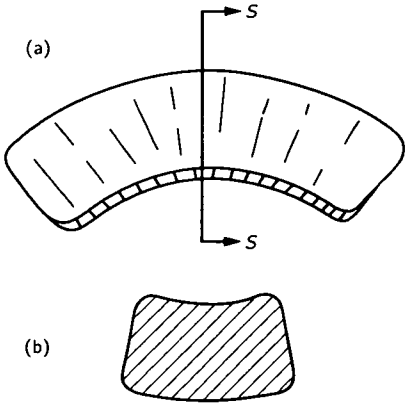
* Elbette o aslında, birim alanda birim kütleye sahip bir kesitin eylemsizlik momentidir.



Şekil 38-13 Bir "I" kirişi.



Şekil 38-14 Bir ucunda ağırlık asılı destekli kiriş.



Şekil 38-15 (a) Bükülmüş bir silgi. (b) Kesit yüzey.

sal kirişlerin –Şekil 38-13'te gösterildiği gibi– I veya bir H şeklinde olduğunu anlamışsınızdır.

Kiriş denklemimiz (38.6)'nın kullanımına bir örnek olması için, Şekil 38-14'te gösterildiği gibi serbest ucuna bir W kuvveti etki eden destekli kirişin eğilmesini hesaplatalım. ("Destekli"den kastımız, kirişin konum *ve* eğiminin tek bir uçta –bir duvara tutturulmuştur– sabitlenmiş olacak şekilde desteklenmesidir.) Kirişin şekli nedir? Sabitlenmiş olan uca x uzaklığındaki eğilmeye z diyelim; bilmek istediğimiz şey $z(x)$'tir. Bunu sadece küçük eğilmeler için hesaplayacağız. Ayrıca kirişin kesit alanına göre uzun olduğunu varsayacağız. Şimdi, matematik derslerinizden bildiğiniz üzere herhangi bir $z(x)$ eğrisinin $1/R$ eğriliği aşağıdaki denklemle hesaplanır:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z/dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \tag{38.38}$$

Biz sadece ufak eğimlerle –genelde mühendislik yapılarındaki durum budur– ilgilendiğimizden $(dz/dx)^2$ terimini 1'e göre ihmal eder ve aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z}{dx^2} \tag{38.39}$$

Ayrıca $\mathfrak{M}$ bükme momentini de bilmeliyiz. Herhangi bir kesitin nötr ekseni etrafındaki torka eşit olduğundan, x'in bir fonksiyonudur. Kirişin ağırlığını ihmal edelim ve sadece kirişin sonundaki aşağı yöndeki W kuvvetini dikkate alalım. (Dilerseniz kiriş ağırlığını da dahil edebilirsiniz.) Bu durumda x'teki bükme momenti aşağıdaki şekilde ifade edilebilir; çünkü W ağırlığı tarafından x noktasına uygulanan (kirişin x'te desteklemesi gereken) tork,

$$\mathfrak{M}(x) = W(L - x)$$

olur. Aşağıdaki

$$W(L - x) = \frac{YI}{R} = YI\frac{d^2z}{dx^2}$$

veya aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{W}{YI}(L - x) \tag{38.40}$$

Bu ifadenin, herhangi bir hileye başvurmadan, $z(0) = 0$ ve dz/dx'in $x = 0$'da sıfır olduğu varsayımlarımızı kullanarak integralini alabilir ve aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$z = \frac{W}{YI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{38.41}$$

Ucun yerdeğiştirmesiyse aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$z(L) = \frac{W}{YI}\frac{L^3}{3} \tag{38.42}$$

Bir kirişin ucunun yerdeğiştirmesi, uzunluğun küpüyle orantılı olarak artar.

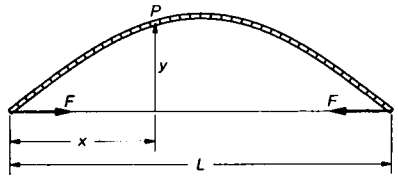
Yaklaşık kiriş kuramımızı oluştururken, kiriş eğildiğinde kirişin kesitinin değişmediğini varsaydık. Kirişin kalınlığı eğilme yarıçapına göre küçük olduğunda kesit değişimleri çok azdır ve sonucumuz uygundur. Ancak genelde bu etki ihmal edilemez. Bunu, lastik bir silgiyi elinizde bükerek kolayca görebilirsiniz. Kesit alanı başta dikdörtgense, büküldüğünde alt tarafın bel verdiğini görebilirsiniz (*Bkz.* Şekil 38-15). Bunun olma nedeni, alt tarafı sıkıştırdığımızda malzemenin –Poisson oranıyla açıklandığı gibi– yanlara doğru genişlemesidir. Lastiği eğmesi veya germesi kolaydır, ancak o –silgiyi büktüğünüzde gördüğünüz gibi– *hacmini* değiştirmenin zor olduğu bir sıvı gibidir. Sıkıştırılamaz bir malzeme için Poisson oranı tam olarak 1/2 olacaktır ki lastik için de buna yaklaşıktır.

38-5 Burkulma

Şimdi kiriş kuramımızı kirişlerin, kolonların veya çubukların "burkulması" için kullanalım. Şekil 38-16'da gösterilen, normalde düz duracakken iki ucundan bastıran birbirine zıt kuvvetler yüzünden eğik bir şekilde duran çubuğu ele alalım. Çubuğun şeklini ve uçlardaki *kuvvetlerin büyüklüklerini* hesaplamak istiyoruz.

Çubuğun uçlar arasındaki düz çizgiden sapmasına, x bir uca olan uzaklıkken, $y(x)$ diyelim. P noktasındaki $\mathfrak{M}$ bükme momenti F kuvveti çarpı dikey uzaklık y olan moment kolunun çarpımıdır:

$$\mathfrak{M}(x) = Fy \tag{38.43}$$



Şekil 38-16 Burkulmuş bir kiriş.

Kiriş denklemi (38.36)'yı kullanarak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{YI}{R} = Fy \tag{38.44}$$

Küçük eğilmeler için $1/R = -d^2y/dx^2$ eşitliğini kullanabiliriz (eksi işareti eğrilmenin aşağı doğru olmasındandır). Bir sinüs dalgasının türev denklemi olan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{YI}y \tag{38.45}$$

Diğer bir deyişle *küçük* eğilmeler için, eğilmiş bir kirişin eğrisi bir sinüs eğrisidir. Sinüs dalgasının "dalga boyu" λ, uçlar arasındaki L uzaklığının iki katıdır. Bükme küçükse, bu (dalga boyu) tam olarak bükülmemiş çubuğun uzunluğunun iki katıdır. Dolayısıyla eğri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y = K \sin \pi x/L$$

İkinci türevini aldığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2}y$$

Bunu Denk. (38.45)'le karşılaştırdığımızda, kuvvetin aşağıdaki eşitlikle hesaplanabildiğini görürüz.

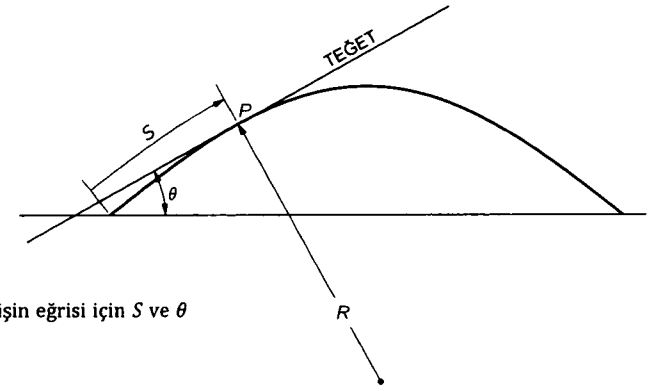
$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2} \tag{38.46}$$

Küçük bükmeler için kuvvet *bükme uzanımı y'den bağımsızdır!*

Fiziksel olarak şimdi ifade edeceklerimizi elde etmiş olduk. Kuvvet Denk. (38.46)'daki F teriminden küçükse, bükülme olmaz. Ancak bu kuvvetten çok az daha bile *büyükse* –sıklıkla "Euler kuvveti" denilen kritik kuvvet π^2YI/L^2'den büyük kuvvetler için– kiriş aniden büyük miktarda eğilecek ve "burkulacaktır". Bir binanın ikinci katındaki yük, taşıyıcı kolonlar için "Euler kuvveti"ni geçerse bina çöker. Burkulma kuvvetinin önemli olduğu bir yer de uzaya gönderilen roketlerdir. Bir yanda, roket fırlatma rampası üzerinde kendi ağırlığını taşımalı ve ivmelenme sırasındaki streslere dayanmalı, diğer yandaysa kargo ve yakıt kapasitesini mümkün olduğunca fazlalaştırabilmek için yapının ağırlığı hafif tutulmalıdır.

Aslında bir kiriş, üzerindeki kuvvet Euler kuvvetini aşsa bile çökmeyebilir. Uzanımlar büyüdükçe, Denk. (38.18)'de ihmal ettiğimiz $1/R$ terimleri yüzünden kuvvet bulduğumuzdan daha büyük olur. Bir kirişi fazlaca bükecek kuvvetleri bulmak için R ile y arasındaki yaklaşık ilişkiyi kullanmadan önce kullandığımız kesin Denklem (38.44)'e geri dönmemiz lazım. Denklem (38.44)'ün gayet basit bir geometrik özelliği vardır.* Çıkarması biraz karmaşık olmakla birlikte, gayet ilginçtir. Eğriyi x ve y cinsinden ifade etmektense, iki yeni değişken kulla-

* Tesadüf eseri aynı denklem başka fiziksel durumlarda da –örneğin, paralel levhalar arasında bulunan bir sıvının yüzey eğriliğinde– bulunur ve aynı geometrik çözüm kullanılabilir.



Şekil 38-17 Bükülmüş bir kirişin eğrisi için S ve θ koordinatları.

nabiliriz: Eğri boyunca uzaklık S ve eğriye teğetin eğimi θ. *Bkz.* Şekil 38-17. Eğilme, uzaklıkla beraber açının değişme hızıdır:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}$$

Dolayısıyla Denk. (38.44)'ü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

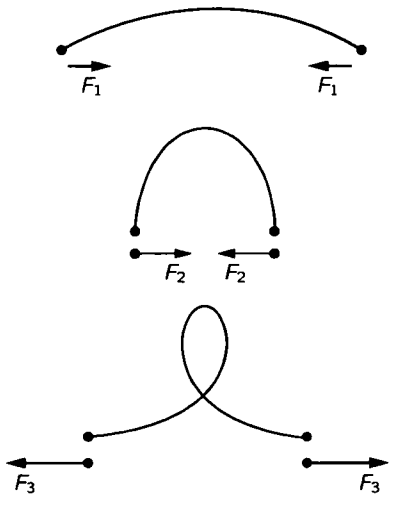
$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{YI}y$$

Bu eşitliğin S'e göre türevini alır ve dy/dS terimini $\sin\theta$ terimiyle değiştirirsek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI}\sin\theta \qquad (38.47)$$

[θ yeterince küçükse, Denk. (38.45)'e geri döneriz. Her şey yolunda.]

Denklem (38.47)'nin bir sarkacın geniş genlikli salınımları için –elbette F/YI terimini bir başka sabitle değiştirerek– elde ettiğimiz denklemle aynı olduğunu bilmek belki hoşunuza gider. Birinci Cilt, 9. Bölümde böyle bir denklem için nasıl sayısal hesaplamayla sonuç elde edebileceğimizi öğrenmiştik.* Elde edeceğiniz cevaplar "esneklik eğrisi" olarak bilinen çarpıcı bazı eğrilerdir. Şekil 38-18 farklı F/YI değerleri için üç eğriyi göstermektedir.



Şekil 38-18 Bükülmüş bir çubuğun eğrileri.

* Sonuçlar ayrıca, başkalarının çoktan hesapladığı, "Jacobi eliptik fonksiyonları" denilen fonksiyonlar cinsinden de ifade edilebilir.

39

ESNEK MALZEMELER

39-1 Gerilme tensörü
39-2 Esneklik tensörü
39-3 Esnek bir cisimde hareketler
39-4 Esnek olmayan davranış
39-5 Esneklik sabitlerini hesaplamak

39-1 Gerilme tensörü

Son bölümde belirli esnek nesnelerin bükülmeleri hakkında konuştuk. Bu bölümde bir esnek malzemenin içinde *genelde* ne olduğuna bakacağız. Karmaşık bir şekilde bükülmüş ve ezilmiş büyük bir jöle topağının içindeki stres ve gerilme koşullarını tanımlayabilmek istiyoruz. Bunu yapmak için, esnek bir cisim içindeki her noktadaki *yerel gerilmeyi* tarif edebiliyor olmamız gerekecek. Bunu, her bir nokta için –simetrik bir tensörün bileşenleri olan– altı rakam tanımlayarak yapabiliriz. Daha önce (Bölüm 31) stres tensörü hakkında konuşmuştuk; şimdi de gerilme tensörüne ihtiyacımız var.

Başlangıçta gerilmemiş bir malzemeyle başladığımızı ve malzeme içindeki bir "toz" zerresinin malzeme gerildiğinde hareket ettiğini izlediğimizi düşünelim. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ koordinatlarındaki P noktasındaki bir zerre, Şekil 39-1'de gösterildiği gibi $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ koordinatlarındaki P' noktasına ilerler. P'den P' noktasına olan vektör yerdeğiştirmelerine $\boldsymbol{u}$ diyelim. Bu durumda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \tag{39.1}$$

$\boldsymbol{u}$ yerdeğiştirmesi, elbette, hangi P noktasında başladığımıza bağlıdır; dolayısıyla $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}$'nin –veya tercihen (x, y, z)'nin– bir vektör fonksiyonudur.

Kaynak: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. baskı, 1956.

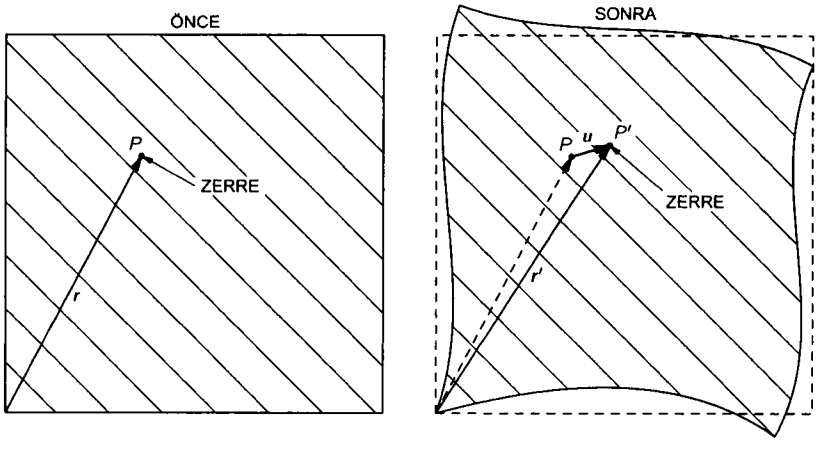
Öncelikle gerilmenin malzemede sabit olduğu –*homojen gerilme* dediğimiz– basit durumu ele alalım. Elimizde bir yığın malzeme olsun ve bunu düzgün bir şekilde uzattığımızı düşünelim. Yaptığımız şey bir yönde –diyelim ki Şekil 39-2'de görüldüğü gibi x yönünde– düzgün olarak boyutlarını değiştirmektir. x'teki bir zerrenin hareketi u_x, x'le orantılıdır. Hatta,

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$$

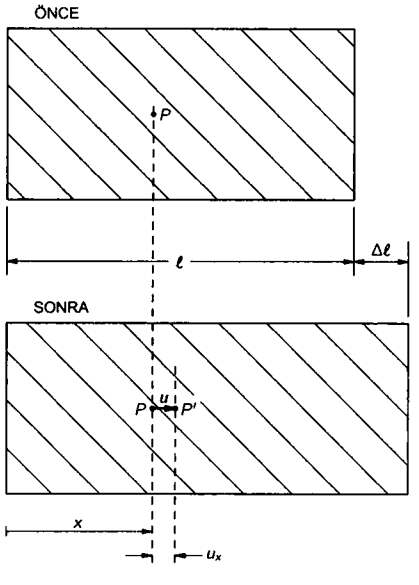
u_x'i aşağıdaki şekilde yazacağız:

$$u_x = e_{xx}\, x$$

Orantı sabiti e_{xx}, elbette, $\Delta l/l$ terimiyle aynı şeydir. (Neden çift alt simge kullandığımızı birazdan anlayacaksınız.)



Şekil 39-1 Gerilmemiş bir yığın içindeki malzemenin P noktasındaki bir zerresi, yığına gerilme uygulandığında P' noktasına hareket eder.



Şekil 39-2 Homojen uzatma tipi gerilme.

Gerilme düzgün değilse u_x ile x arasındaki ilişki malzeme içinde bir yerden diğerine değişkenlik gösterecektir. Genel durum için, e_{xx}'i bir tür yerel $\Delta l/l$ terimiyle tanımlarız. Şöyle ki,

$$e_{xx} = \partial u_x/\partial x \tag{39.2}$$

Şimdi x, y ve z'nin bir fonksiyonu olan bu sayı jöle yığını içindeki x yönündeki uzatmanın miktarını vermektedir. Elbette y ve z yönlerinde de uzatmalar olabilir. Onları sayılarla tanımlarız.

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{39.3}$$

Kayma tipi gerilmeleri de tanımlayabiliyor olmamız lazım. Başlangıçta bozulmamış jöle yığını içinde sınırlarını çizdiğimiz küçük bir küp hayal edelim. Jölenin şekli değiştirildiğinde küp, Şekil 39-3'te gösterildiği gibi, bir paralel kenar haline gelebilir.* Bu tür gerilmede, her bir parçacığın x yönündeki hareketi onun y koordinatıyla orantılıdır:

$$u_x = \frac{\theta}{2} y \tag{39.4}$$

Ayrıca, x'le orantılı y yönünde bir hareket de vardır:

$$u_y = \frac{\theta}{2} x \tag{39.5}$$

Dolayısıyla kayma tipi bir gerilmeyi aşağıdaki ifadelerle tanımlayabiliriz:

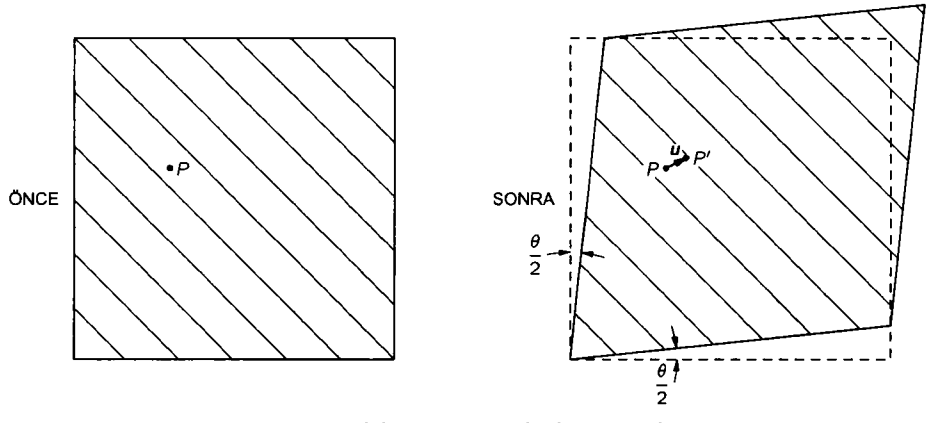
$$u_x = e_{xy}\, y \qquad u_y = e_{yx}\, x$$

e_{xy} ile e_{yx} arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}$$

Gerilmeler homojen olmadığında, genelleştirilmiş kayma gerilmelerinin e_{xy} ve e_{yx} niceliklerini aşağıdaki şekilde yazarak tanımlanabileceğini düşünebilirsiniz:

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{39.6}$$

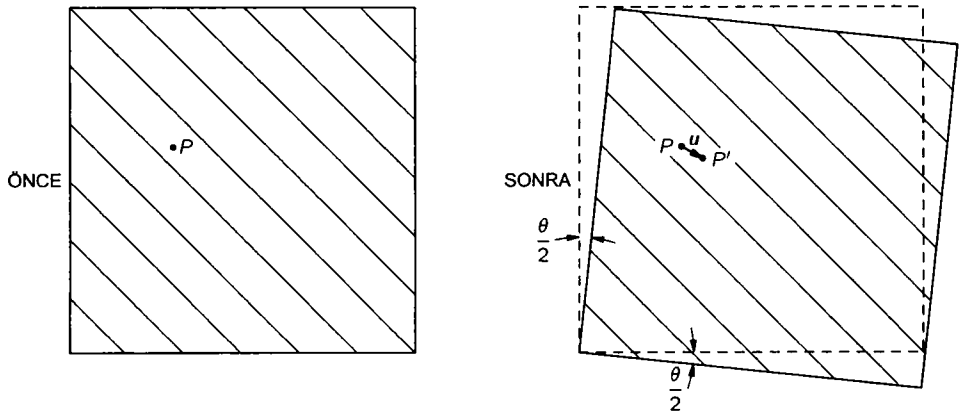


Şekil 39-3 Homojen bir kayma gerilmesi.

Ancak bir zorluk vardır. u_x ve u_y yerdeğiştirmelerinin aşağıdaki eşitliklerle tanımlandığını düşünelim.

$$u_x = \frac{\theta}{2} y \qquad u_y = -\frac{\theta}{2} x$$

* Şimdilik toplam kayma açısı θ'yı iki eşit parçaya bölmeyi ve gerilmesini x ile y'ye göre simetrik tutmayı tercih ediyoruz.



Şekil 39-4 Homojen bir dönme. Gerilme yoktur.

Tıpkı Denk. (39.4) ve (39.5) gibidirler, ancak u_y'nin işareti tersine çevrilmiştir. Bu yerdeğiştirmelerle jöledeki küçük küp, Şekil 39-4'te gösterildiği gibi, $\theta/2$ açısıyla kayar. Gerilme hiç yoktur, sadece uzayda bir dönme vardır. Malzemede de herhangi bir bozulma yoktur; bütün atomların *göreli* konumları hiç değişmemiştir. Tanımlarımızı öyle bir şekilde yapmalıyız ki, saf dönmeler kayma gerilmesi tanımlarımızda yer almasın. Buradaki kilit nokta, $\partial u_y/\partial x$ ve $\partial u_x/\partial y$ eşit olduğunda, gerilme olmamasıdır; dolayısıyla aşağıdaki ifadeyi yazarak işleri düzeltebiliriz:

$$e_{xy} = e_{yx} = \tfrac{1}{2}\,(\partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y)$$

Saf bir dönme için her ikisi de sıfırdır, ancak saf bir kayma için, dilediğimiz gibi, e_{xy} ile e_{yx}'in eşit olduğunu görebiliriz.

En genel –kaymanın yanı sıra uzatma ve sıkıştırma da içerebilen– bozulmada gerilme halini aşağıdaki dokuz sayıyla *tanımlayabiliriz.*

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ &\vdots \\ e_{xy} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{39.7}$$

Bunlar bir gerilme tensörünün terimleridir. *Simetrik bir tensör* olduğundan – tanımlarımıza göre her zaman için $e_{xy} = e_{yx}$ eşitliği vardır– aslında sadece altı farklı sayı vardır. Hatırlarsanız (*bkz.* Bölüm 31) bir tensörün genel özelliği terimlerinin iki vektörün çarpımları gibi dönüşebilmesidir. ($\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ vektörse, $C_{ij} = A_iB_j$ bir tensördür.) e_{ij}'nin her bir terimi $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ vektörünün ve bir vektör gibi dönüştüğünü bildiğimiz $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ işlemcisinin bileşenlerinin bir çarpımıdır (ya da benzer çarpımların toplamıdır). x_1, x_2 ve x_3; x, y ve z'yi ve u_1, u_2 ve u_3 de u_x, u_y ve u_z'yi temsil etsin; bu durumda gerilme tensörünün genel terimi e_{ij} aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j) \tag{39.8}$$

i ve j 1, 2 veya 3 olabilir.

Homojen –hem uzatma hem de kayma içerebilen– bir gerilmede bütün e_{ij} terimleri sabittir ve bu durumda aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$u_x = e_{xx}\,x + e_{xy}\,y + e_{xz}\,z \tag{39.9}$$

(Başlangıç noktanız x, y, z koordinatlarımızı $\boldsymbol{u}$ vektörünün sıfır olduğu yerde seçtik.) Bu durumda gerilme tensörü e_{ij} iki vektör arasındaki ilişkiyi verir: koordinat vektörü $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ve yerdeğiştirme vektörü $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Gerilmeler homojen olmadığında, jölenin herhangi bir parçası da bir şekilde bükülebilir; yerel bir dönme olacaktır. Bütün bozulmalar küçükse, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij})\Delta x_j \tag{39.10}$$

ω_{ij} dönmeyi tanımlayan bir ters *simetrik* tensördür ve aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(\partial u_j/\partial x_i - \partial u_i/\partial x_j) \tag{39.11}$$

Ancak dönmeler üzerinde daha fazla durmayacağız, sadece simetrik e_{ij} tensörüyle tanımlanan gerilmelerle ilgileneceğiz.

39-2 Esneklik tensörü

Gerilmeleri tanımladığımıza göre, onları iç kuvvetlerle –malzeme içindeki streslerle– ilişkilendirebiliriz. Malzemenin her bir küçük parçası için Hooke yasasının geçerli olduğunu varsayar ve stresleri gerilmelerle orantılı olacak şekilde yazarız. Bölüm 31'de S_{ij} stres tensörünü j eksenine dik birim alan boyunca etki eden kuvvetin i'yinci bileşeni olarak tarif etmiştik. Hooke yasasına göre S_{ij} tensörünün her bir bileşeni ile gerilme bileşenlerinin *her biri* arasında doğrusal ilişki vardır. S ve e'nin dokuz bileşeni olduğundan, malzemenin esneklik özelliklerini tanımlayan $9 \times 9 = 81$ olası katsayı vardır. Malzemenin kendisi homojense, onlar sabittir. Bu katsayıları C_{ijkl} şeklinde yazar ve aşağıdaki eşitlikle tanımlarız:

$$S_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\, e_{kl} \tag{39.12}$$

i, j, k ve l alt simgelerinin her biri 1, 2 veya 3 değerlerini alırlar. C_{ijkl} katsayıları bir tensörü diğeriyle ilişkilendirdiğinden, onlar da bir tensör oluştururlar. *Dördüncü dereceden* bir tensör. Buna *esneklik tensörü* diyebiliriz.

Bütün C'lerin bilindiğini ve garip bir şekildeki bir nesne üzerine karmaşık bir kuvvet etki ettirdiğinizi düşünün. Her türlü bozulma olacaktır ve nesne bükülmüş bir şekle bürünecektir. Yerdeğiştirmeler nedir? Bunun karmaşık bir problem olduğu ortadadır. Gerilmeleri bilirseniz Denk. (39.12) sayesinde stresleri –ya da tam tersini– bulabilirsiniz. Ancak herhangi bir noktadaki stresler ve gerilmeler malzemenin gerisinde ne olup bittiğine bağlıdır.

Problemi çözmenin en kolay yolu enerjiyi düşünmektir. x yerdeğiştirmesiyle orantılı bir F kuvveti olduğunda ($F = kx$) bir x yerdeğiştirmesi için gereken iş miktarı $kx^2/2$'dir. Benzer şekilde, bozulan malzemenin *her bir birim hacmine* giden w işi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$w = \tfrac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl}\, e_{ij}\, e_{kl} \tag{39.13}$$

Cismi bozmak için yapılan toplam W işi, toplam hacim üzerinden w teriminin integrali alınarak hesaplanabilir:

$$W = \int \tfrac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl}\, e_{ij}\, e_{kl}\, dV \tag{39.14}$$

Bu, malzemenin iç streslerinde bulunan potansiyel enerjidir. Bir cisim dengede olduğunda bu iç enerji *minimumda* olmalıdır. Dolayısıyla bir cisimdeki gerilmeleri bulma problemi, W değerini minimum yapacak, cisim boyunca u yerdeğiştirmeleri kümesini bularak çözülebilir. Bölüm 19'da bu tür minimum problemlerini çözmekte kullanılacak değişimlerin analizine dair bazı genel fikirler vermiştik. Bu probleme daha detaylı girmeyeceğiz.

Şimdi esas olarak ilgilendiğimiz şey, esneklik tensörünün genel özellikleri hakkında neler diyebileceğimizdir. Öncelikle, C_{ijkl}'de gerçekten 81 *farklı* terim *olmadığı* açıktır. Her birinde sadece altışar farklı terim bulunan S_{ij} ve e_{ij} simetrik tensörler olduklarından, C_{ijkl}'de en fazla 36 farklı terim olabilir. Bununla birlike genelde bundan çok daha azı vardır.

Kübik kristal özel durumunu ele alalım. İçinde, w enerji yoğunluğu aşağıdaki şekilde başlar:

$$w = \tfrac{1}{2}\{C_{xxxx}e_{xx}^2 + C_{xxxy}e_{xx}e_{xy} + C_{xxxz}e_{xx}e_{xz} + C_{xxyx}e_{xx}e_{xy} + C_{xxyy}e_{xx}e_{yy} \ldots \text{vb} \ldots + C_{yyyy}e_{yy}^2 + \ldots \text{vb} \ldots \text{vb} \ldots\} \quad (39.15)$$

Tam tamına 81 terim! Kübik bir kristalin belli simetrileri vardır. Örneklerden biri, kristalin 90° döndürülmesiyle aynı fiziksel özelliklere sahip olmasıdır. x yönündeki uzatma ile y yönündeki uzatmanın sertliği aynıdır. Dolayısıyla Denk. (39.15)'teki x ve y koordinat yönleri tanımımızı değiştirsek de enerji değişmez. Kübik bir kristal için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} \quad (39.16)$$

Sonra, C_{xxxy} gibi terimlerin sıfır olması gerektiklerini gösterebiliriz. Kübik bir kristal, eksenlerinin herhangi birine dik herhangi bir düzlemden *yansıma* altında yine simetriktir. y yerine $-y$ koyarsak, bir şey değişmez. Ancak y yerine $-y$ koyduğunuzda e_{xy}, $-e_{xy}$'ye dönüşür. Daha önce $+y$ yönünde olan yerdeğiştirme artık $-y$ yönündedir. Enerji değişmeyecekse, yansıtma yaptığımız zaman C_{xxxy}, $-C_{xxxy}$ olmalıdır. Ancak yansıtılan bir kristal öncekiyle aynıdır, dolayısıyla C_{xxxy} ile $-C_{xxxy}$ aynı olmalıdır. Bu ancak her ikisi sıfırsa olabilir.

"Ancak aynı akıl yürütme $C_{yyyy} = 0$ eşitliğini de verir!" diyebilirsiniz. Hayır, çünkü *dört* y vardır. İşaret her bir y için değişir ve dört eksi bir artı yapar. *İki* veya *dört* y varsa, terim sıfır olmak zorunda değildir. Dolayısıyla kübik bir kristal için C'nin herhangi bir sıfır olmayan terimi sadece *çift sayıda* benzer alt simgelere sahip olacaktır. (y için kullandığımız fikirler elbette x ve z için de geçerlidir.) Böylece C_{xxyy}, C_{xyxy}, C_{xyyx} vb terimler elde edebiliriz. Ancak daha önce gösterdiğimiz üzere, bütün x'leri y'lerle veya *tam tersi* z'leri x'lerle değiştirirsek –kübik bir kristal için– aynı sayıyı elde etmeliyiz. Bu da *sadece üç farklı* sıfır olmayan olasılık olduğu anlamına gelir:

$$\begin{aligned} &C_{xxxx} \ (= C_{yyyy} = C_{zzzz}), \\ &C_{xxyy} \ (= C_{yyxx} = C_{xxzz}, \text{ vb}), \\ &C_{xyxy} \ (= C_{yxyx} = C_{xzxz}, \text{ vb}), \end{aligned} \quad (39.17)$$

O halde, kübik bir kristal için, enerji yoğunluğu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$w = \tfrac{1}{2}\{ C_{xxxx}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2C_{xxyy}(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + 4C_{xyxy}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)\} \quad (39.18)$$

Eş yönlü –kristal olmayan– bir malzeme için simetri hâlâ daha yüksektir. C'ler *herhangi* bir koordinat seçimi için aynı olmalıdır. Böylece C'ler arasında bir başka ilişki daha olduğu ortaya çıkar, şöyle ki:

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + 2C_{xyxy} \quad (39.19)$$

Bunun böyle olduğunu şu genel akıl yürütmeyle görebiliriz. Stres tensörü S_{ij}, e_{ij} tensörüyle koordinat yönlerine bağlı olmayacak şekilde –sadece *skaler* niceliklerle– ilişkili olmalıdır. "Kolay bu" diyebilirsiniz. "e_{ij}'den S_{ij} elde etmenin tek yolu bir skaler sabitle çarpımdır. Bildiğimiz Hooke yasası. S_{ij} = (sabit)e_{ij} olmalıdır." Ancak bu pek doğru değildir; e_{ij} tensörüyle doğrudan ilişkili, bir skalerle çarpılmış bir S_{ij} *birim tensörü* de olabilir. Yapabileceğiniz, e'lerde doğrusal olan tek değişmez $\sum e_{ii}$'dir. (Bir skaler olan $x^2 + y^2 + z^2$ gibi dönüşür.) Dolayısıyla –eş yönlü malzemeler için– S_{ij} tensörü ile e_{ij} tensörünü ilişkilendiren en genel denklem biçimi aşağıdaki ifadedir:

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\left(\sum_k e_{kk}\right)\delta_{ij} \quad (39.20)$$

(İlk sabit genelde *iki* çarpı μ şeklinde yazılır; böylece μ katsayısı son bölümde

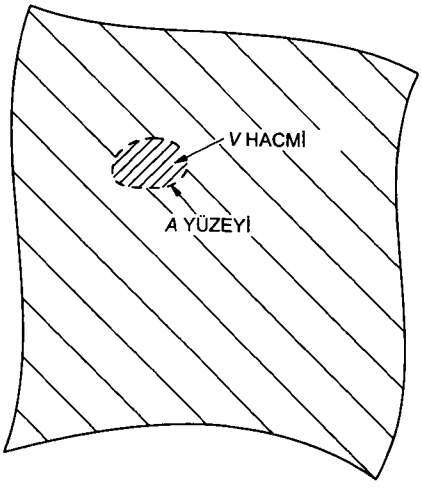
tanımladığımız kayma modülüne eşit olur.) μ ve λ katsayılarına Lamé esneklik katsayıları denir. Denklem (39.20) ile (39.12)'yi karşılaştırdığımızda, aşağıdaki eşitlikleri görürüz:

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda \\ C_{xyxy} &= \mu \\ C_{xxxx} &= 2\mu + \lambda \end{aligned} \tag{39.21}$$

Böylece Denk. (39.19)'un gerçekten de doğru olduğunu kanıtlamış olduk. Son bölümde belirttiğimiz gibi, eşyüzlü bir malzemenin esneklik özelliklerinin bütünüyle iki sabitle ortaya konabildiğini de gördünüz.

C'ler, daha önce kullandığımız esneklik sabitlerinin herhangi ikisi cinsinden –örneğin, Young modülü Y ve Poisson oranı σ cinsinden– yazılabilir. Aşağıdaki eşitlikleri göstermeyi size bırakıyoruz:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right) \\ C_{xxyy} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right) \\ C_{xyxy} &= \frac{Y}{2(1+\sigma)} \end{aligned} \tag{39.22}$$



Şekil 39-5 A yüzeyiyle çevrelenmiş bir V hacim elemanı.

39-3 Esnek bir cisimde hareketler

Dengede bir esnek cisim için iç streslerin kendilerini enerji minimum olacak şekilde ayarladıklarını belirtmiştik. Şimdi de iç kuvvetlerin dengede *olmadığı* durumda ne olduğuna bakalım. Bir A yüzeyi içinde bir parça malzeme olduğunu düşünelim. *Bkz.* Şekil 39-5. Parça dengedeyse, üzerine etki eden toplam F kuvveti sıfır olmalıdır. Bu kuvveti iki parçadan oluşuyor gibi düşünebiliriz. Bunlardan biri, parçadaki madde üzerinde belli bir mesafeden etki ederek *birim hacim başına* kuvvet $f_{\text{dış}}$ meydana getiren kütleçekim gibi "dış" kuvvetlerdir. Toplam dış kuvvet $F_{\text{dış}}$, $f_{\text{dış}}$'ı parçanın hacmi üzerinden alınan integralidir:

$$F_{\text{dış}} = \int f_{\text{dış}}\, dV \tag{39.23}$$

Denge durumunda, bu kuvvet parçanın yakınındaki malzemeden A yüzeyi üzerinde etki eden toplam $F_{\text{iç}}$kuvvetiyle dengelenir. Parça dengede *değilse* –hareket ediyorsa– iç ve dış kuvvetlerin toplamı kütle çarpı ivmelenmeye eşittir. ρ malzemenin yoğunluğu ve $\ddot{r}$ ivmelenmesiyken, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$F_{\text{dış}} + F_{\text{iç}} = \int \rho\ddot{r}\, dV \tag{39.24}$$

Artık Denk. (39.23) ve (39.24)'ü aşağıdaki eşitliği yazarak birleştirebiliriz.

$$F_{\text{iç}} = \int_V (-f_{\text{dış}} + \rho\ddot{r})dV \tag{39.25}$$

Aşağıdaki eşitliği tanımlayarak yazımımızı basitleştirebiliriz.

$$F = -f_{\text{dış}} + \rho\ddot{r} \tag{39.26}$$

Bu durumda Denk. (39.25) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F_{\text{iç}} = \int_V f\, dV \tag{39.27}$$

$F_{\text{iç}}$ dediğimiz kuvvet malzemenin içindeki streslerle ilişkilidir. Stres tensörü S_{ij} (Bölüm 31) birim normali n olan bir yüzey elemanı, da boyunca dF kuvvetinin x bileşeninin aşağıdaki eşitlikle verilebileceği şekilde tanımlanmıştı.

$$dF_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z)da \tag{39.28}$$

Bizim küçük parçamız üzerindeki $\boldsymbol{F}_{\text{iç}}$ kuvvetinin x bileşeni bu durumda yüzey üzerinden dF_x'in integralidir. Bunu Denk. (39.27)'nin x bileşeni yerine koyarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_A (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z)da = \int_v f_x \, dV \tag{39.29}$$

Elimizde bir hacim integraliyle ilişkili bir yüzey integrali var ve bu bize elektrikte öğrendiğimiz bir şeyi hatırlatıyor. Denklem (39.29)'un sol tarafındaki her bir S'in ilk alt simgesi x'i görmezden gelirseniz, tıpkı bir "$\boldsymbol{S}$" $\cdot$ $\boldsymbol{n}$ –bir vektörün dik bileşeninin– niceliğinin yüzey üzerinden alınan integraline benzemektedir. Bu, hacimden dışarı "$\boldsymbol{S}$" akısı olurdu. Ve bunu Gauss yasasını kullanarak "$\boldsymbol{S}$"in diverjansının hacim integrali olarak yazabiliriz. Aslında, x alt simgesi olsa da olmasa da bu doğrudur. Parçaların integralini alarak elde edebileceğiniz bir matematiksel teoremdir. Diğer bir deyişle, Denk. (39.29)'u aşağıdaki şekilde değiştirebiliriz:

$$\int_v \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z}\right) dV = \int_v f_x \, dV \tag{39.30}$$

Artık hacim integrallerini bırakabilir ve $\boldsymbol{f}$'in genel bileşeni için türev eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \tag{39.31}$$

Bu ifade bize, birim hacimde kuvvetin S_{ij} stres tensörüyle nasıl ilişkili olduğunu söyler.

Bir katının içindeki hareketlere dair kuram şimdi bahsedeceğimiz şekilde işler. $\boldsymbol{u}$ vektörüyle belirlenen başlangıçtaki yerdeğiştirmeleri bilerek başlarsak, e_{ij} gerilmelerini çıkarabiliriz. Denklem (39.12)'yi kullanarak, gerilmelerden stresleri elde edebiliriz. Streslerden, Denk. (39.31)'deki $\boldsymbol{f}$ kuvvet yoğunluğunu elde ederiz. $\boldsymbol{f}$'yi bildiğimizde, Denk. (39.26)'dan malzemenin $\ddot{\boldsymbol{r}}$ ivmelenmesini elde ederiz ki bu da bize yerdeğiştirmelerin nasıl değiştiğini söyler. Hepsini bir araya getirdiğimizde, esnek bir katı için hareket denklemini elde ederiz. Biz sadece eşyüzlü malzeme için çıkan sonuçları yazacağız. Eğer S_{ij} için Denk. (39.20)'i kullanır ve e_{ij}'yi, $\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ şeklinde yazarsanız, aşağıdaki vektör eşitliğini elde edersiniz:

$$\boldsymbol{f} = (\lambda + \mu)\, \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{39.32}$$

Aslında $\boldsymbol{f}$ ve $\boldsymbol{u}$ vektörlerini ilişkilendiren denklemin bu biçimde *olması* gerektiğini görebilirsiniz. Kuvvet, $\boldsymbol{u}$ yerdeğiştirmelerinin ikinci türevine dayanmalıdır. $\boldsymbol{u}$'nun hangi ikinci türevleri vektördürler? Birisi $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$'dur; bu gerçek bir vektördür. İkincisiyse $\nabla^2\boldsymbol{u}$'dur. Dolayısıyla en genel biçim aşağıdaki şekilde yazılabilir ki bu da sabitlerin farklı bir tanımının olduğu Denk. (39.32)'dir.

$$\boldsymbol{f} = a\, \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + b\nabla^2\boldsymbol{u}$$

Neden, bir vektör olan $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}$'yu kullanarak üçüncü bir terim elde etmediğimizi merak edebilirsiniz. Hatırlarsanız $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}$ ve $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla^2\boldsymbol{u}$ aynı şeydir, dolayısıyla elimizdeki bu iki terimin doğrusal birleşimidir. Eklediğimizde yeni bir şey elde etmeyiz. Bir kere daha eşyüzlü malzemenin sadece iki esneklik sabiti olduğunu kanıtlamış olduk.

Malzemenin hareket denklemi için Denk. (39.32)'yi $\rho\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2$'ye –kütleçekim gibi cisim kuvvetlerini şimdilik ihmal ederek– eşitleyebilir ve aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\, \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{39.33}$$

Bu denklem, ilave bir karmaşıklaştırıcı terim haricinde, elektromanyetizmada elde ettiğimiz dalga denklemine benzemektedir. Esneklik özellikleri her yerde aynı olan malzemeler için genel çözümlerin şimdi bahsedeceğimiz şekilde göründüğünü fark edebilirsiniz. Herhangi bir vektör alanının iki vektörün toplamı olarak yazılabildiğini hatırlayın: biri diverjansı sıfır olan ve diğeri de bükümü

sıfır olan. Diğer bir deyişle, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \tag{39.34}$$

Yukarıdaki ifade için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{u}_2 = 0 \tag{39.35}$$

Denklem (39.33)'te $\boldsymbol{u}$ yerine $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ koyarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\rho\partial^2/\partial t^2\,[\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2] = (\lambda + \mu)\,\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2) + \mu\,\nabla^2(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \tag{39.36}$$

Bu denklemin diverjansını alarak $\boldsymbol{u}_1$vektörünü ortadan kaldırabiliriz:

$$\rho\partial^2/\partial t^2(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2) = (\lambda + \mu)\,\nabla^2(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2) + \mu\,\nabla \cdot \nabla^2(\boldsymbol{u}_2)$$

(∇^2) ve ($\nabla\,\cdot$) işlemcileri değiştirilebilir olduklarından, diverjansı çarpanlarına ayırarak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$\nabla \cdot \{\rho\partial^2\boldsymbol{u}_2/\partial t^2 - (\lambda + 2\mu)\,\nabla^2\boldsymbol{u}_2\} = 0 \tag{39.37}$$

$\nabla \times \boldsymbol{u}_2$ tanım gereği sıfır olduğundan, { } parantezinin bükümü de ayrıca sıfırdır; dolayısıyla parantezin kendisi aynı şekilde sıfırdır ve böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\rho\partial^2\boldsymbol{u}_2/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)\,\nabla^2\boldsymbol{u}_2 \tag{39.38}$$

Bu, $C_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ hızında ilerleyen dalgalar için vektör dalga denklemidir. $\boldsymbol{u}_2$ vektörünün bükümü sıfır olduğundan dolayı bu dalgayla ilişkili bir kayma yoktur. Bu dalga, son bölümde tartıştığımız sıkıştırma –ses tipi– dalgasıdır ve hızı da C_{boy} için bulduğumuzla aynıdır.

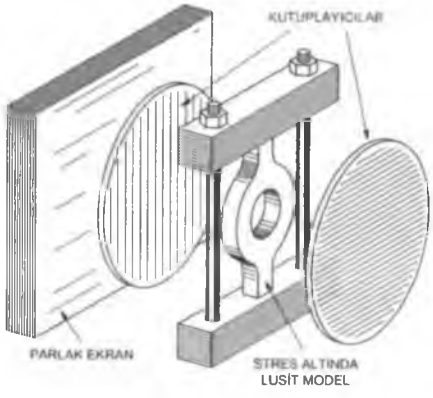
Benzer şekilde – Denk. (39.36)'nın bükümünü alarak– $\boldsymbol{u}_1$ vektörünün aşağıdaki denklemi sağladığını gösterebiliriz:

$$\rho\partial^2\boldsymbol{u}_1/\partial t^2 = \mu\,\nabla^2\boldsymbol{u}_1 \tag{39.39}$$

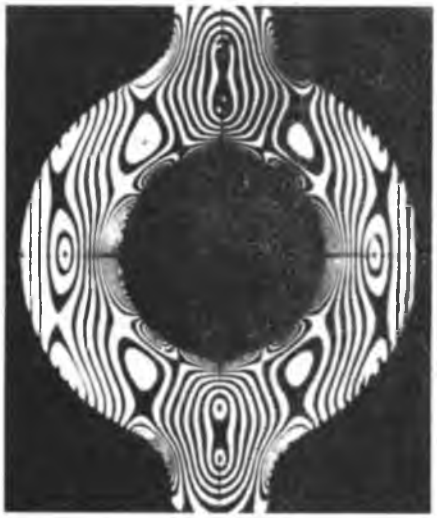
Bu yine $C_1 = \sqrt{\mu/\rho}$ hızıyla ilerleyen dalgalar için vektör dalga denklemidir. $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1$ sıfır olduğundan, $\boldsymbol{u}_1$ yoğunlukta bir değişiklik meydana getirmez. $\boldsymbol{u}_1$ vektörü son bölümde gördüğümüz enine veya kayma tipi dalgadır ve $C_1 = C_{\text{kayma}}$'dir.

Eş yönlü bir malzemedeki statik stresleri bilmek isteseydik, büyük cismimizdeki yüzeylere etkiyen kuvvetlerle ilişkili özel şartlar altında $\boldsymbol{f}$'i sıfıra –ya da $\rho\boldsymbol{g}$ gibi kütleçekimden kaynaklanan statik cisim kuvvetlerine– eşitleyerek Denk. (39.32)'yi çözerdik. Bunu yapmak, karşılık gelen elektromanyetizma problemlerini çözmekten daha zordur. Zira öncelikle denklemlerle başa çıkmak zordur ve ikincisi ilgimizi çekecek esnek cisimlerin şekilleri çok daha karmaşıktır. Elektromanyetizmada Maxwell denklemlerini silindirler, küreler vb görece basit geometrik şekiller için çözeriz; çünkü bunlar elektrik cihazları için elverişli şekillerdir. Esneklikle ilgili problemlerdeyse, analiz etmek isteyeceğimiz şekiller gayet karmaşık olabilir. Bir vinç kancası, bir otomobilin krank mili veya bir gaz türbininin döner mili gibi. Bu tür problemler bazen sayısal yöntemlerle, daha önce belirttiğimiz minimum enerji ilkesini kullanarak, yaklaşık olarak çözülebilir. Bir başka yolsa nesnenin bir modelini kullanmak ve kutuplanmış ışık kullanarak iç gerilmeleri ölçmektir.

Bunu şu şekilde yapabiliriz: Eşyüzlü geçirgen bir malzemeye –örneğin, lusit gibi bir plastik– strese uygulandığında, çift kırılmalı olur. İçinden kutuplanmış ışık geçirdiğinizde kutuplanma düzlemi strese bağlı bir miktarda dönecektir: dönmeyi ölçerek, stresi de ölçebilirsiniz. Şekil 39-6'da böyle bir kurulumun nasıl olduğu görülmektedir. Şekil 39-7 karmaşık bir şeklin fotoesnek modelinin stres altındaki fotoğrafıdır.



Şekil 39-6 Kutuplanmış ışıkla iç stresleri ölçmek.

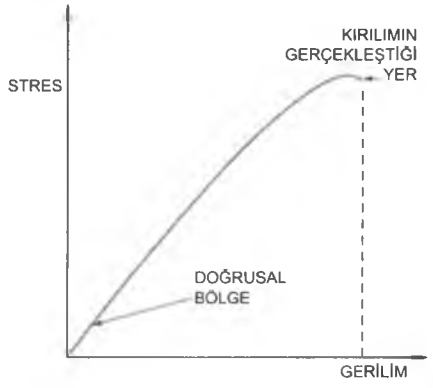


Şekil 39-7 Birbirine çapraz kutuplayıcılar arasından görüldüğü şekliyle stres altında bir plastik model. [F. W. Sears, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Co., Mass., 1949.]

39-4 Esnek olmayan davranış

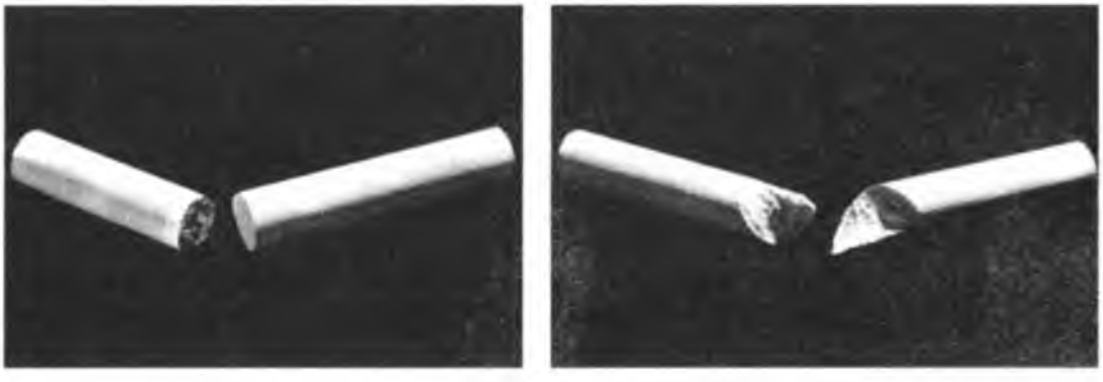
Şu ana kadar söylediğimiz her şeyde stresin gerilmeyle orantılı olduğunu varsaydık, ancak bu doğru ***değildir***. Şekil 39-8 sünen bir malzeme için tipik stres-gerilme eğrisini göstermektedir. Küçük gerilmeler için, stres ile gerilme bir-

birleriyle orantılıdır. Ancak bir yerden sonra stres ile gerilme arasındaki ilişki doğrusal bir çizgiden sapmaya başlar. "Kırılgan" diyebileceğimiz birçok malzeme eğrinin eğilmeye başladığı noktanın çok az üstündeki gerilmelerle kırılır. Genel olarak, stres-gerilme ilişkisinde bazı başka karmaşıklıklar vardır. Örneğin, bir nesneye gerilme uyguladığınızda stresler başta yüksektir ancak zamanla azalır. Ayrıca çok yüksek stres değerlerine çıktığınız, ancak hâlâ "kırılma" noktasına yaklaşmadığınızda, gerilmeyi azalttığınızda stres farklı bir eğri üzerinden azalacaktır. Küçük bir (manyetik malzemeler için *B* ile *H* arasında gördüğümüz gibi) histerezis etkisi vardır.



Şekil 39-8 Büyük gerilmeler için tipik bir stres-gerilme eğrisi.

Bir malzemenin kırılacağı stres malzemeden malzemeye değişir. Kimi malzemeler en yüksek *çekme* stresi belli bir değere ulaştığında kırılır. Diğer bazı malzemelerse en yüksek *kayma* stresi belli bir değere ulaştığında kırılır. Tebeşir, çekmeye karşı kayma yönünden dayanıksız olan bir malzeme örneğidir. Bir karatahta tebeşirini uçlarından kendinize doğru çektiğinizde tebeşir, Şekil 39-9 (a)'da görüldüğü gibi, uygulanan strese dik yönde kırılacaktır. Uygulanan kuvvete dik yönde kırılır çünkü kolayca birbirlerinden ayrılabilen, istiflenmiş bir grup parçacıktır sadece. Malzemeyi kaydırmak çok çok daha zordur, çünkü parçacıklar birbirlerinin yollarını keserler. Burkulan bir çubuğun her tarafında kayma olduğunu hatırlarsınız. Ayrıca kaymanın, çekme ve sıkıştırmanın 45° açıyla birleşimi olduğunu da göstermiştir. Bu nedenlerden dolayı bir tebeşir parçasını *burktuğunuzda* eksene göre 45° açıyla başlayan karmaşık bir düzlem boyunca kırılır. Bu şekilde kırılmış bir tebeşir parçasının fotoğrafı Şekil 39-9(b)'de gösterilmiştir. Tebeşir en yüksek çekmenin olduğu yerde kırılmıştır.



Şekil 39-9 (a) Uçlardan çekilerek kırılmış bir tebeşir parçası. (b) Burkularak kırılmış bir parça.

Diğer malzemeler garip ve karmaşık davranışlar gösterirler. Malzemenin karmaşıklığı arttıkça, davranışı da daha ilginç hale gelir. Bir parça streç film alıp top haline getirir ve masanın üstüne atarsanız yavaşça açılır ve başlangıçtaki düz haline geri döner. İlk bakışta, başlangıçtaki biçimine dönmesini engelleyenin atalet olduğunu düşünebiliriz. Ancak basit bir hesaplamayla ataletin bu etkiyi yaratamayacak denli küçük ölçüde olduğunu görebiliriz. İki önemli etki iş başında gibi görünmektedir: Malzemenin içindeki "bir şey" başlangıçtaki şekli "hatırlamaktadır" ve ona geri dönmeye "çalışmaktadır"; ancak bir başka şey de yeni şekli "tercih etmekte" ve eski şekle geri dönmeye "direnmektedir".

Streç filmdeki işleyişi tarif etmeye çalışmayacağız, ancak şimdi anlatacağımız model sayesinde böyle bir etkinin nereden geldiğine dair bir fikir edinebilirsiniz. Uzun, eğilebilir ancak güçlü liflerin içi viskoz [ağdalı] bir sıvıyla dolu hücrelerle karıştırıldığını düşünün. Ayrıca bir hücreden diğerine dar yollar olduğunu ve sıvının bir hücreden diğerine sızabildiğini düşünün. Böyle bir malzemeyi buruşturduğumuzda uzun lifleri bozup, bir yerdeki hücrelerden sıvının dışarı çıkmasını ve uzayan hücrelere doğru sızmasını sağlarız. Bıraktığımızda

uzun lifler başlangıçtaki şekillerine dönmeye çalışırlar. Bunu yapabilmek için sıvıyı başlangıçtaki yerine döndürmeleri gerekir ancak bu da viskoziteden [ağdalılık] dolayı göreceli olarak yavaş olacaktır. Filmi buruştururken uyguladığımız kuvvetler lifler tarafından uygulanan kuvvetlerden çok daha fazladır. Çok çabuk buruştursak bile, ilk haline dönüşü yavaş olacaktır. Büyük sert moleküller ve streç filmdeki daha küçük, hareket edebilenlerin birleşimi bu davranışın sorumlusudur. Bu fikir, malzemenin ısıtıldığı zaman soğuk haline göre başlangıçtaki şekline daha hızlı dönmesini de açıklayabilmektedir. Sıcaklık daha küçük moleküllerin hareketliliğini (viskoziteyi düşürmektedir) artırır.

Her ne kadar Hooke yasasının nasıl işlemez hale geldiğini tartışsak da, asıl dikkat çekici şey Hooke yasasının büyük gerilmeler için işlemez hale geldiği değil de neden genelde onun doğru olduğudur. Bir malzemedeki gerilme enerjisine bakarak bunun neden olabileceğine dair fikir edinebiliriz. Stresin gerilmeyle orantılı olduğunu söylemek, gerilme enerjisinin gerilmenin karesiyle değiştiğini söylemekle aynı şeydir. Elimizde bir çubuk olduğunu ve onu küçük bir θ açısıyla burktuğumuzu düşünelim. Hooke yasası geçerliyse, gerilme enerjisi θ'nın karesiyle orantılı olmalıdır. Enerjinin açıya bağlı bir fonksiyon olduğunu varsaydığımızı düşünelim, sıfır açısında Taylor açılımı olarak yazabiliriz.

$$U(\theta) = U(0) + U'(0)\theta + \tfrac{1}{2}U''(0)\theta^2 + \tfrac{1}{6}U'''(0)\theta^3 + \cdots \tag{39.40}$$

τ torku U'nun açıya göre türevidir; bu durumda aşağıdaki ifadeyi çıkartabiliriz:

$$\tau(\theta) = U'(0) + U''(0)\theta + \tfrac{1}{2}U'''(0)\theta^2 + \cdots \tag{39.41}$$

Denge konumuna göre açılarımızı ölçersek, ilk terim sıfırdır. Bu durumda ilk artık terim θ açısıyla orantılıdır ve yeterince küçük açılar için θ^2 terimi baskın olacaktır. [Aslında malzemeler içlerinde yeterince simetriktir ki $\tau(\theta) = -\tau(-\theta)$ eşitliği sağlanır. θ^2 terimi sıfır olur ve doğrusallıktan sapmalar doğrudan θ^3 teriminden gelir. Ancak bunun sıkıştırmalar ve çekmeler için doğru olmasını gerektirecek bir şey yoktur.] Açıklamadığımız şey, malzemelerin neden daha yüksek dereceli terimler önem kazandıktan sonra kırıldığıdır.

39-5 Esneklik sabitlerini hesaplamak

Esneklik üzerindeki son konumuzda size, malzemeyi meydana getiren atomlara dair bir miktar bilgiyle başlayarak nasıl malzemenin esneklik özelliklerini hesaplayabileceğimizi göstereceğiz. Tek örneğimiz, sodyum klorik gibi bir iyonik kübik kristal olacak. Bir kristale gerilme uygulandığında, hacmi veya şekli değişir. Bu tür değişimler kristalin potansiyel enerjisinde artışa yol açar. Gerilme enerjisindeki değişimi hesaplamak için her bir atomun nereye gittiğini hesaplamalıyız. Karmaşık kristallerde atomlar kendilerini örgü içerisinde, toplam enerjiyi mümkün olduğunca düşük tutacak şekilde düzenlerler. Bu da gerilme enerjisinin hesaplanmasını zorlaştırır. Basit kübik bir kristaldeyse, ne olup bittiğini görmek kolaydır. Kristalin içindeki bozulmalar kristalin sınırlarının dışındaki bozulmalara geometrik olarak benzer olacaktır.

Kübik bir kristaldeki esneklik sabitlerini şimdi bahsedeceğimiz şekilde hesaplayabiliriz. Öncelikle kristalin içindeki her bir atom çifti için bir kuvvet yasası varsayarız. Daha sonra denge şekli bozulduğunda kristalin iç enerjisindeki değişimi hesaplarız. Bu bize bütün gerilmelerde ikinci dereceden olan, enerji ile gerilmeler arasındaki ilişkiyi verir. Bu şekilde hesaplanan enerjiyi Denk. (39.13)'le karşılaştırarak, her bir terimin katsayısını C_{ijkl} esneklik sabitleriyle karşılaştırabiliriz.

Örneğimiz için basit bir kuvvet yasası varsayacağız: komşu atomlar arasındaki kuvvet merkezi, iki atom arasındaki hat üzerinde etki eden bir kuvvettir. İyonik kristallerdeki kuvvetlerin, esas olarak Coulomb kuvvetleri olduklarından, bunun gibi olmalarını bekleriz. (Kovalent bağların kuvvetleri, yakındaki

bir atoma yanlamasına itki uygulayabildiklerinden dolayı genelde daha karmaşıktır. Biz bu karmaşıklığı ele almayacağız.) Ayrıca sadece bir atom ile en yakın ve bir sonraki en yakın komşular arasındaki kuvvetleri hesaba dahil edeceğiz. Diğer bir deyişle, bir sonraki en yakın komşuların ötesindeki bütün kuvvetleri ihmal eden iyi bir yakınlaştırma yapacağız. xy düzlemi için hesaba katacağımız kuvvetler Şekil 39-10(a)'da gösterilmiştir. yz ve zx düzlemlerinde karşılık gelen kuvvetler de ayrıca hesaba katılmalıdır.

Sadece küçük gerilmeler için geçerli esneklik katsayılarıyla ilgilendiğimiz ve dolayısıyla enerjide sadece gerilmelerle ikinci dereceden değişen terimleri istediğimizden, her bir atom çifti arasındaki kuvvetin yerdeğiştirmelerle doğrusal olarak değiştiğini düşünebiliriz. Daha sonra her bir atom çiftinin, Şekil 39-10(b)'de görüldüğü gibi doğrusal bir yayla bağlı olduğunu düşünebiliriz. Bir sodyum ile klor atomu arasındaki bütün yaylar aynı yay sabitine, diyelim ki k_1, sahip olmalıdır. İki sodyum ile iki klor atomu arasındaki yayların sabitleri farklı olabilirdi ancak biz çalışmamızı basitleştirmek için onları da eşit alacak ve yay sabitine k_2 diyeceğiz. (Hesaplamaların nasıl olduğunu gördükten sonra geri dönüp, sabitleri farklılaştırabiliriz.)

Kristalin, e_{ij} gerilme tensörüyle tanımlanan homojen bir gerilmeyle bozulduğunu düşünelim. Genelde x, y ve z içeren bileşenleri olur ancak biz şimdi görselleştirmeyi kolaylaştırmak için e_{xx}, e_{xy} ve e_{yy} üç bileşenini içeren bir gerilmeyi dikkate alacağız. Bir atomu başlangıç noktamız olarak seçersek, diğer her atomun yerdeğiştirmesi Denk. (39.9) gibi denklemlerle verilir:

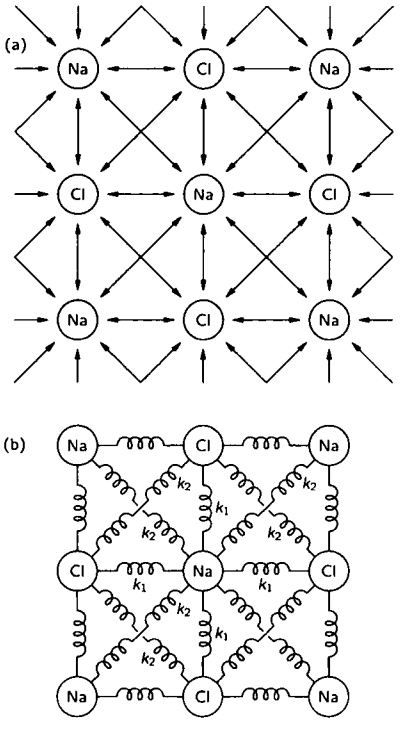
$$u_x = e_{xx}\,x + e_{xy}\,y$$
$$u_y = e_{xy}\,x + e_{yy}\,y \qquad (39.42)$$

$x = y = 0$ noktasındaki atoma "1 numaralı atom" dediğimizi düşünelim ve xy düzlemindeki komşularını da Şekil 39-11'de gösterildiği şekilde numaralandıralım. Örgü sabitine a dersek, x ile y yerdeğiştirmeleri (u_x ve u_y) için Tablo 39-1'i oluşturabiliriz.

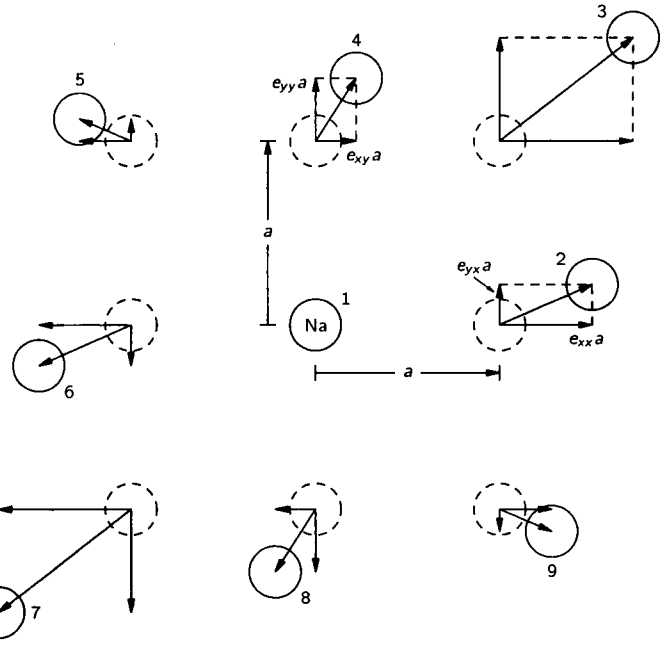
Şimdi yaylarda saklı ve her bir yayın uzanımının karesi çarpı $k/2$ eşitliğiyle verilen enerjiyi hesaplayabiliriz. Örneğin, 1 ve 2 numaralı atomlar arasındaki yatay yaydaki enerji aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\frac{k_1(e_{xx}a)^2}{2} \qquad (39.43)$$

2 numaralı atomun y yönünde yerdeğiştirmesi, 1 ve 2 numaralı atomlar arasındaki yayın uzunluğunu değiştirmez. Ancak, köşegen bir yaydaki, 3 numaralı atoma doğru olan gibi, gerilme enerjisini hesaplamak için uzunluktaki hem ya-



Şekil 39-10 (a) Atomlar arasında hesaba kattığımız kuvvetler. (b) Atomların birbirlerine yaylarla bağlandığı bir model.



Şekil 39-11 1 numaralı atomun en yakın ve bir sonraki en yakın komşuları (büyütülmüş).

Tablo 39-1

Atom	Konum x, y	u_x	u_y	k
1	0,0	0	0	–
2	$a, 0$	$e_{xx}a$	$e_{yx}a$	k_1
3	a, a	$(e_{xx} + e_{xy})a$	$(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
4	$0, a$	$e_{xy}a$	$e_{yy}a$	k_1
5	$-a, a$	$(-e_{xx} + e_{xy})a$	$(-e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
6	$-a, 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	$-a, -a$	$-(e_{xx} + e_{xy})a$	$-(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
8	$0, -a$	$-e_{xy}a$	$-e_{yy}a$	k_1
9	$a, -a$	$(e_{xx} - e_{xy})a$	$(e_{yx} - e_{yy})a$	k_2

tay hem de dikey yerdeğiştirmeleri hesaplamamız gerekir. Başlangıçtaki kübe göre ufak yerdeğiştirmeler için, 3 numaralı atoma olan uzaklıkla ilgili değişikliği u_x ve u_y'nin köşegen yönündeki bileşenlerinin toplamı olarak yazabilirsiniz:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y)$$

Tablodan u_x ve u_y değerlerini seçerek, enerjiyi hesaplayabiliriz.

$$\frac{k_2}{2}\left(\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4}(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 \tag{39.44}$$

xy düzlemindeki bütün yayların toplam enerjisi için, (39.43) ve (39.44) gibi sekiz terimin toplamına ihtiyacımız var. Bu enerjiye U_0 diyerek, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{a^2}{2}\Big\{ & k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2}(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2}(e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2}(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2}(e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \Big\} \end{aligned} \tag{39.45}$$

1 numaralı atoma bağlı bütün yayların toplam enerjisini hesaplamak için, Denk. (39.45)'teki enerjiye bir ilave yapmalıyız. Gerilmenin sadece x ve y bileşenlerine sahip olsak da, xy düzlemi dışındaki bir sonraki en yakın komşularla ilişkili başka enerjiler hâlâ vardır. Bu ilave enerji aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$k_2(e_{xx}^2 a^2 + e_{yy}^2 a^2) \tag{39.46}$$

Esneklik sabitleri ile w enerji yoğunluğu arasındaki ilişki Denk. (39.13)'tür. Bizim hesapladığımız enerji tek bir atomla ilişkilidir, daha doğrusu bir atomun enerjisinin iki katıdır; zira her bir yayın enerjisi bağladığı her iki atomla da ilişkilidir. Birim hacimde $1/a^3$ atom olduğundan, w ile U_0 arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$w = \frac{U_0}{2a^3}$$

C_{ijkl} esneklik sabitlerini bulmak için yapmamız gereken tek şey Denklem (39.45)'te karesi alınan terimleri – Denk. (39.46)'daki terimleri ekleyerek– açmak ve e_{ij} e_{kl}'nin katsayılarını Denk. (39.13)'te karşılık gelen katsayıyla karşılaştırmaktır. Örneğin, e_{xx}^2 ve e_{yy}^2'deki terimleri toplayarak, aşağıdaki çarpanı elde ederiz:

$$(k_1 + 2k_2)a^2$$

böylece

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}$$

olur. Kalan terimler için biraz karmaşıklık vardır. $e_{xx}e_{yy}$ gibi iki terimin çarpımını $e_{yy}e_{xx}$'ten ayırt edemediğimiz için, enerjideki bu tür terimlerin katsayısı Denklem (39.13)'teki iki terimin toplamına eşittir. Denklem (39.45)'teki $e_{xx}e_{yy}$'nin katsayısı $2k_2$'dir, dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$(C_{xxyy} + C_{yyxx}) = \frac{2k_2}{a}$$

Ancak kristalimizdeki simetriden dolayı $C_{xxyy} = C_{yyxx}$ eşitliği vardır, dolayısıyla eşitlik aşağıdaki şekle dönüşür:

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{k_2}{a}$$

Benzer bir süreçle aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$C_{xyxy} = C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}$$

Son olarak, x veya y alt simgesini sadece bir kere içeren herhangi bir terimin – daha önce simetriye dair fikirlerden çıkardığımız üzere– sıfır olduğunu fark edeceksiniz. Sonuçlarımızı özetlersek aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a} \\ C_{xyxy} &= C_{yxyx} = \frac{k_2}{a} \\ C_{xxyy} &= C_{yyxx} = C_{xyyx} = C_{yxxy} = \frac{k_2}{a} \\ C_{xxxy} &= C_{xyyy} = \text{vb} = 0 \end{aligned} \tag{39.47}$$

Böylece k_1 ve k_2 sabitlerinde görünen atomik özellikler ile esneklik sabitlerini ilişkilendirmiş olduk. Bizin özel durumumuzda $C_{xyxy} = C_{xxyy}$ eşitliği vardır. Kuvvetler her bir çift atomu bağlayan hat üzerinde etki ettiği sürece –atomlar arasındaki kuvvetler yaylar gibi olduğu ve destekli bir kirişteki gibi enine kısımları olmadığı sürece (kovalent bağlarda vardır bu parça)– ne kadar kuvvet terimini hesaba katarsanız katın, bu terimlerin –hesaplamaların gidişatından da belki görebileceğiniz üzere– bir kübik kristal için daima eşit olduğu ortaya çıktı.

Bu sonucu esneklik sabitlerinin deneysel sonuçlarıyla kontrol edebiliriz. Tablo 39-2'den birçok kübik kristalin üç esneklik sabiti için gözlemlenen değerleri listelenmiştir.* Dikkat ederseniz, genel olarak, C_{xxyy} ve C_{xyxy} eşit değildir. Bunun nedeni, sodyum ve potasyum gibi metallerde atomlar arası kuvvetlerin varsaydığımız gibi atomları birleştiren hat üzerinde etki etmemesidir. Elmas da bu yasaya uymaz çünkü elmas içindeki kuvvetler kovalent kuvvetlerdir ve bazı yönlü özellikleri –bağlar birbirine beşgen açıda olmayı tercih ederler– vardır. Lityum florid, sodyum klor vb iyonik kristaller modelde varsaydığımız neredeyse tüm özelliklere sahiptir ve tabloda göreceğiniz üzere C_{xxyy} ve C_{xyxy} sabitleri neredeyse eşittir. Gümüş klorürün neden $C_{xxyy} = C_{xyxy}$ koşulunu sağlamadığı açık değildir.

Tablo 39-2
10^{12} dynes/cm^2 'de kübik kristallerin esneklik modülü

	C_{xxxx}	C_{xxyy}	C_{xyxy}
Na	0,055	0,042	0,040
K	0,046	0,037	0,026
Fe	2,37	1,41	1,16
Elmas	10,76	1,25	5,76
Al	1,08	0,62	0,28
Lif	1,19	0,54	0,53
NaCl	0,486	0,127	0,128
KCl	0,40	0,062	0,062
NaBr	0,33	0,13	0,13
KI	0,27	0,043	0,042
AgCl	0,60	0,36	0,062

* C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2. baskı., 1956, s. 93.

* Literatürde sıklıkla farklı bir gösterimin kullanıldığını göreceksiniz. Örneğin insanlar genelde $C_{xxxx} = C_{11}$, $C_{xxyy} = C_{12}$ ve $C_{xyxy} = C_{44}$ yazarlar.

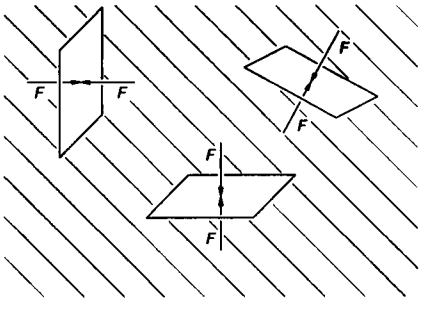
40
KURU SUYUN AKIŞI

40-1 Hidrostatik
40-2 Hareket denklemleri
40-3 Kararlı akış: Bernoulli teoremi
40-4 Dolaşım
40-5 Girdap çizgileri

40-1 Hidrostatik

Akışkanların, özellikle suyun, akışı konusu herkesi etkilemiştir. Çocukluğumuzda küvette veya yoldaki çamur birikintilerinde oynadığını herkes hatırlar. Yaşlandıkça nehirleri, şelaleleri ve girdapları izleriz ve katılara nazaran neredeyse canlı gibi duran bu konudan büyüleniriz. Akışkanların davranışı –bu ve bundan sonraki bölümün konusudur– birçok yönden beklenmedik şekildedir ve ilginçtir. Sokakta akıp giden bir suyun önüne çer çöple küçük bir baraj kurmaya çalışan çocuğun çabaları ve suyun damın etrafından kendi yolunu bularak akıp gitmesine şaşırması, bizlerin yıllardır sıvıların nasıl aktığını anlamaya çalışmamıza benzerdir. Nasıl aktıklarını belirleyen denklemleri ve yasaları elde ederek –kendi anlayışımızla– suyun önüne baraj kurmaya çalıştık. Bu çabalarımızı bu bölümde tanımlayacağız. Bir sonraki bölümde suyun nasıl kendine özgü bir şekilde barajı parçaladığını ve onu anlamaya çalışma çabalarımızdan kurtulduğunu anlatacağız.

Suyun temel özelliklerinin sizler tarafından bilindiğini varsaymaktayız. Bir akışkanı katıdan ayıran temel özellik, bir sıvı kayma stresini herhangi bir süre boyunca *barındıramaz*. Bir sıvıya kayma uygulandığında, kayma altında hareket edecektir. Bal gibi daha kalın sıvılar hava veya su gibi akışkanlardan daha zor hareket eder. Bir akışkanın ne kadar kolaylıkla aktığının ölçüsü viskozitesidir. Bu bölümde viskozite etkilerinin göz ardı edilebildiği durumları ele alacağız. Viskozitenin etkilerini bir sonraki bölümde ele alacağız.



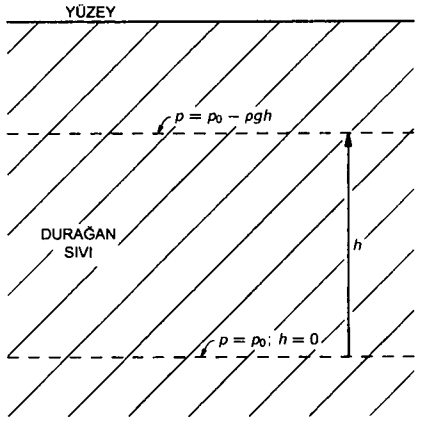
Şekil 40-1 Durağan bir akışkanda herhangi bir yüzey boyunca kuvvet bölü birim alan yüzeye diktir ve yüzeyin tüm yönelimleri için aynıdır.

Hidrostatik, durağan sıvıların kuramı, konusuyla başlayacağız. Sıvılar durağanken hiç kayma kuvveti (viskoz sıvılar için bile) yoktur. Böylece hidrostatik yasası, akışkanın içinde streslerin daima herhangi bir yüzeye dik olmasıdır. Birim alana etkiyen dik kuvvete *basınç* denir. Durağan bir sıvıda kayma olmadığı gerçeğinden yola çıkarak basınç stresinin her yönde aynı olduğunu çıkarabiliriz (Şekil 40-1). Bir akışkandaki herhangi bir düzlem üzerinde hiç kayma yoksa basıncın her yönde aynı olması gerektiğini kanıtlama zevkini size bırakıyoruz.

Bir sıvıdaki basınç yer yer değişkenlik gösterebilir. Örneğin, dünyanın yüzeyinde durağan bir akışkanda basınç, akışkanın ağırlığından dolayı, yükseklikle değişecektir. Akışkanın yoğunluğu ρ sabit ve rastgele seçilmiş bir sıfır seviyesindeki basınç p_0 (Şekil 40-2) kabul edilirse, bu durumda bu noktadan h kadar yükseklikteki bir basınç $p = p_0 - \rho gh$ denklemiyle hesaplanır. Denklemdeki g birim kütle başına kütleçekim kuvvetidir. Dolayısıyla

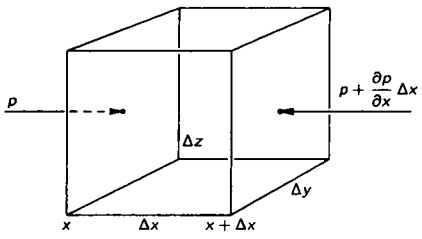
$$p + \rho gh$$

toplamı durağan bir akışkanda sabittir. Bu ilişki sizin için tanıdıktır, ancak bu özel durumun daha genel bir sonucunu şimdi çıkartacağız.



Şekil 40-2 Durağan bir sıvıdaki basınç.

Küçük bir küp dolusu suyu ele alırsak, üzerindeki basınca bağlı net kuvvet nedir? Herhangi bir yerdeki basınç. Her yönde aynı olduğundan, birim hacimde, ancak basınç bir noktadan diğerine değişirse net bir kuvvet olabilir. Basıncın x yönünde değişkenlik gösterdiğini –ve koordinat önlerini küp kenarlarına paralel aldığımızı– düşünelim. x ekseninde bulunan yüzdeki basınç $p\Delta y\Delta z$ (Şekil 40-3) kuvvetini ve $x + \Delta x$ yüzündeki basınç da $-[p + (\partial p/\partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z$ kuvvetini meydana getirir. Böylece $-(\partial p/\partial x)\Delta x\Delta y\Delta z$ kuvveti ortaya çıkar. Küpün kalan yüz çiftlerini ele aldığımızda, birim hacim başına basınç kuvvetinin $-\nabla p$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz. İlave başka kuvvetler –kütleçekim gibi– varsa, dengeye ulaşmak için basınç onları dengelemelidir.



Şekil 40-3 Bir küp üzerindeki net basınç kuvveti $-\nabla p$ bölü birim hacimdir.

Bu tür bir ilave kuvvetin, kütleçekim söz konusu olduğunda olabileceği gibi, potansiyel enerji şeklinde tanımlanabileceği bir durumu ele alalım. Birim kütle başına potansiyel hacme ϕ diyeceğiz. (Örneğin kütleçekim için ϕ gz olarak yazılabilir.) Birim kütle başına kuvvet potansiyel cinsinden $-\nabla\phi$ olarak ifade edilebilir ve akışkanın yoğunluğu ρ ise, birim hacim başına kuvvet $-\rho\nabla\phi$ olarak ifade edilebilir. Denge için birim hacim başına bu kuvvet artı birim hacim başına basınç kuvveti sıfır olmalıdır:

$$-\nabla p - \rho\nabla\phi = 0 \qquad (40.1)$$

Denklem (40.1) hidrostatik denklemidir. *Genelde hiçbir çözümü yoktur.* Yoğunluk uzayda rastgele bir şekilde değişiyorsa, kuvvetler dengelenemez ve akışkan da durağan bir denge halinde olamaz. Konveksiyon akımları başlar. Bu sonucu, basınç teriminin saf bir gradyan olmasından, ancak ρ değişkeni için diğer terimin olmamasından dolayı denklemden çıkarabilirsiniz. Sadece ρ bir sabit olduğunda potansiyel terimi saf bir gradyan olur. Bu durumda denklemin çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p + \rho\phi = \text{sabit}$$

Hidrostatik dengesinden çıkan bir diğer olasılık, ρ'nin sadece p'nin bir fonksiyonu olmasıdır. Bununla birlikte, hidrostatik konusunu bir kenara bırakacağız çünkü akışkanların hareketli olduğu durum kadar ilgi çekici değildir.

40-2 Hareket denklemleri

Öncelikle akışkan hareketlerini tamamen soyut, kuramsal bir şekilde inceleyeceğiz ve daha sonra bazı özel örnekleri ele alacağız. Bir akışkanın hareketini tarif edebilmek için, her noktadaki özelliklerini belirlememiz gerekir. Örneğin, farklı yerlerde su (akışkana "su" diyeceğiz) farklı *hızlarda* hareket eder. Akışın özelliklerini tanımlamak için her bir noktada ve zamanda hızın üç bileşenini belirlemeliyiz. Hızı belirleyen denklemleri bulabilirsek, hızın her zaman nasıl hareket ettiğini bilebiliriz. Ancak hız, bir akışkanda bir noktadan diğerine değişen tek özellik değildir. Az önce *basıncın* da bir noktadan diğerine değişimini tartışmıştık. Başka birçok değişken daha vardır. Bir noktadan diğerine *yoğunluk* değişimi de olabilir. İlaveten, akışkan iletken olabilir ve $\boldsymbol{j}$ yoğunluğu yön ve büyüklük olarak bir noktadan diğerine değişen bir elektrik *akımı* taşıyabilir. Bir noktadan diğerine değişen bir *sıcaklık* veya bir *manyetik alan* vb olabilir. Dolayısıyla durumu bütünüyle açıklayabilecek alan sayısı problemin ne kadar karmaşık olduğuna bağlıdır. Akışkanın davranışını belirlemede akımlar ve manyetizma baskın bir rol oynadığında ilginç olgular gözlemlenir. Bu konuya *manyetohidrodinamik* denir ve halihazırda manyetohidrodinamiğe büyük ilgi gösterilmektedir. Ancak biz bu daha karmaşık konuları ele almayacağız çünkü daha az karmaşık seviyede zaten ilginç olgular vardır ve en temel seviye bile yeterince karmaşıktır.

Şimdi ele alacağımız durumda ne manyetik alan ne de iletkenlik vardır ve sıcaklık için de endişelenmeyeceğiz çünkü basınç ve yoğunluğun sıcaklığı herhangi bir noktada özel bir şekilde belirlediğini varsayacağız. Aslına bakarsanız yoğunluğun da sabit olduğunu varsayarsak –akışkanın esasta sıkıştırılamaz olduğunu düşüneceğiz– çalışmamızın karmaşıklığını azaltabiliriz. Bir başka şekilde ifade edecek olursak basınçtaki değişimlerin, değişimler sonucu meydana gelecek yoğunluk sonucunu ihmal edilebilir kılacak kadar küçük olduğunu varsayacağız. Bu böyle olmazsa, burada konuşacağımız olgulara ilave olgular gözlemleriz, örneğin ses veya şok dalgalarının yayılması gibi. Ses ve şok dalgalarının yayılmasını bir nebze konuşmuştuk, dolayısıyla ρ yoğunluğunun sabit olduğu yakınlaştırmasını yaparak hidrodinamik konusunu bu diğer olgulardan yalıtacağız. ρ sabiti yakınlaştırmasının ne zaman iyi olduğunu belirlemek kolaydır. Akışın hızları, akışkanın içindeki ses dalgasının hızından çok daha dü-

şükse, yoğunluktaki değişimleri ciddiye almamıza gerek yoktur. Anlama çabalarımız esnasında suyun kaçışı sabit yoğunluk yakınlaştırmasıyla ilişkili değildir. Kaçışa izin veren karmaşıklıkları bir sonraki bölümde tartışacağız.

Akışkanların genel kuramına, akışkan için basıncı yoğunluğa bağlayan bir *hal denklemiyle* başlanmalıdır. Bizim yakınlaştırmamızda bu hal denklemi basitçe şöyle yazılabilir:

$$\rho = \text{sabit}$$

Bu değişkenlerimize ait ilk ilişkidir. Diğer ilişki maddenin korunumunu ifade eder; madde bir noktadan akarak uzaklaşıyorsa, kalan miktarda bir azalma olmalıdır. Akışkan hızına $\boldsymbol{v}$ dersek, yüzeyin birim alanı içinden birim zamanda akan kütle $\rho\boldsymbol{v}$ vektörünün yüzeye dik bileşenidir. Elektrikte benzer bir ilişki vardır. Elektrikten biliyoruz ki, böyle bir niceliğin diverjansı birim zamanda yoğunluğun azalma hızını verir. Aynı şekilde,

$$\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{40.2}$$

denklemi bir akışkan için kütlenin korunumunu ifade eder. Hidrodinamik için *sürekliliğin denklemidir.* Sıkıştırılamaz akışkan yakınlaştırmamızda ρ bir sabittir ve süreklilik denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{40.3}$$

Akışkan hızı $\boldsymbol{v}$ –aynı $\boldsymbol{B}$ manyetik alanı gibi– sıfır diverjansa sahiptir. (Hidrodinamik denklemleri elektrodinamik denklemlerine çok benzer; bu yüzden önce elektrodinamik üzerine çalıştık. Bazılarıysa bunun tersini savunur; başlangıçta hidrodinamik çalışılırsa daha sonra elektriği anlamak kolaylaşacaktır. Ancak elektrodinamik aslında hidrodinamikten çok daha kolaydır.)

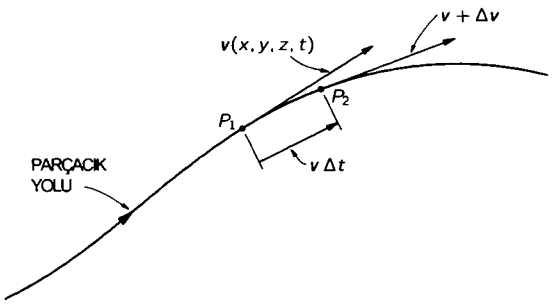
Şimdiki denklemimizi, hızın kuvvetler yüzünden nasıl değiştiğini ifade eden Newton yasasından elde edeceğiz. Bir akışkanın bir hacim elemanının kütlesi çarpı ivmelenmesi, elemana etki eden kuvvete eşit olmalıdır. Birim hacimde bir eleman seçer ve birim hacimdeki kuvveti $\boldsymbol{f}$ şeklinde yazarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\rho \times (\text{ivmelenme}) = \boldsymbol{f}$$

Kuvvet yoğunluğunu üç terimin toplamı olarak yazacağız. Daha önce birim hacimdeki basınç kuvvetini, $-\nabla p$, ele almıştık. Bir de belli bir mesafede etki eden "dış" kuvvetler –kütleçekim veya elektrik gibi– vardır. Birim kütle başına potansiyeli, ϕ, olan korunumlu kuvvetler olduğunda kuvvet yoğunluğu $-\rho\nabla\phi$ olur. (Dış kuvvetler korunumlu değilse, birim hacim başına dış kuvvet için $\boldsymbol{f}_{\text{dış}}$ yazmamız gerekir.) Ayrıca, *akan* bir akışkanda kayma stresi olabileceği gerçeğinden dolayı birim hacimde etkiyen bir başka "iç" kuvvet daha vardır. Buna viskoz kuvvet denir ve $\boldsymbol{f}_{\text{visk}}$ şeklinde yazacağız. Hareket denklemimizi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\rho \times (\text{ivmelenme}) = -\nabla p - \rho\nabla\phi + \boldsymbol{f}_{\text{visk}} \tag{40.4}$$

Bu bölümde sıvının viskoziteyi önemsiz kılacak kadar "ince" olduğunu varsayacağımızdan $\boldsymbol{f}_{\text{visk}}$ terimini çıkartacağız. Viskozite terimini dışarda bırakınca, gerçek su yerine ideal bir şeyi tanımlayan bir yakınlaştırma kullanacağız. John von Neumann, viskoz terimlerin olduğu durumda olup biten ile olmadığı durumda olup biten arasındaki muazzam farkın ve aynı zamanda 1900'lü yıllara kadar hidrodinamiğin gelişme zamanında ilginin çoğunun, gerçek akışkanlarla bir ilgisi olmayan bu yakınlaştırmayla ilgili hoş *matematiksel* denklemleri çözmek olduğunun farkındaydı. Bu tür analizler yapan kuramcıları "kuru su" üzerine çalışmakla nitelendirdi. Bu tür analizler akışkanın *esas* bir özelliğini göz ardı etmektedir. Hesaplamalarımızdan bu özelliği çıkardığımız için bu bölüme "Kuru Suyun Akışı" adını verdik. *Gerçek* su üzerine konuşmayı bir sonraki bölüme bırakıyoruz.



Şekil 40-4 Bir akışkan parçacığının ivmelenmesi.

f_{visk} vektörünü dışarda bıraktığımızda, Denk. (40.4) ivmelenmeye dair bir ifade haricinde ihtiyacımız olan her şeye sahiptir. Bir akışkan parçacığının ivmelenmesine dair denklemin, $\boldsymbol{v}$ akışkan parçacığının akışkanın bir yerindeki hızıyken ivmelenmesinin $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ olması gerektiği bariz gibi göründüğünden, çok basit olacağını düşünebilirsiniz. *Değildir* ve bunun ince bir nedeni vardır. $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ türevi $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ hızının uzayda *sabit* bir noktada değişme hızıdır. Bizim ihtiyacımız olan akışkanın *belli bir parçacığı* için hızın ne kadar hızlı değiştiğidir. Bir damla suyu, onu izleyebilmek için, boyadığımızı düşünelim. Küçük bir Δt zaman aralığında bu damla farklı bir konuma ilerleyecektir. Damla Şekil 40-4'te çizildiği gibi bir yol üzerinde ilerliyorsa, Δt süresince P_1 noktasından P_2 noktasına gidebilir. Aslında, x yönünde $v_x\,\Delta t$ kadar, y yönünde $v_y\,\Delta t$ kadar ve z yönünde $v_z\,\Delta t$ kadar ilerleyecektir. t zamanında (x, y, z) konumundaki bir akışkan parçacığının hızı $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ ise, *aynı* parçacığın $t + \Delta t$ zamanındaki hızı

$$\Delta x = v_x\,\Delta t \qquad \Delta y = v_y\,\Delta t \qquad \text{ve} \qquad \Delta z = v_z\,\Delta t$$

iken $\boldsymbol{v}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$ şeklinde ifade edilebilir. Kısmi türevler tanımımıza göre –Denk. (2.7)'yi hatırlayın– birinci dereceden elimizde aşağıdaki ifade vardır:

$$\boldsymbol{v}(x + v_x\,\Delta t, y + v_y\,\Delta t, z + v_z\,\Delta t, t + \Delta t)$$
$$= \boldsymbol{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\,v_x\,\Delta t + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\,v_y\,\Delta t + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\,v_z\,\Delta t + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\,\Delta t$$

İvmelenme $\Delta \boldsymbol{v}/\Delta t$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$$

Bunu sembolik olarak $-\nabla$ işlemcisine bir vektör gibi davranarak– aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \tag{40.5}$$

$\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$ olduğu, *belirli bir noktadaki* hızın değişmediği durumda bile ivmelenme olabilir. Örneğin, sabit hızda bir çember şeklinde akan suyun belirli bir noktasındaki hız değişmese de, su ivmelenmektedir. Elbette bunun nedeni, çember üzerinde başlangıçta belli bir noktada olan bir su damlacığının bir süre sonra farklı bir yöne sahip olmasıdır; merkeze doğru bir ivmelenme vardır.

Kuramımızın geri kalanı sadece matematikseldir. Yapmamız gereken ivmelenme denklemi (49.5)'i Denk. (40.4)'e koyarak elde ettiğimiz hareket denkleminin çözümlerini bulmaktır. Viskozite dışarıda bırakıldığında, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi \tag{40.6}$$

Vektör analizinden gelen aşağıdaki özdeşliği kullanarak bu denklemi yeniden düzenleyebiliriz:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = (\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}\,\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

Şimdi, $\boldsymbol{v}$ vektörünün bükümü olarak yeni bir *vektör alanı* Ω tanımlarsak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{40.7}$$

Vektör özdeşliği aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \Omega \times \boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}\,\nabla v^2$$

ve hareket denklemimiz (40.6) aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \Omega \times \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi \tag{40.8}$$

Denklem (40.6) ile (40.8)'in birbirine eşit olduğunu, denklemin iki tarafındaki bileşenlerinin eşit olduğunu kontrol ederek –ve Denk. (40.7)'yi kullanarak– doğrulayabilirsiniz.

Ω vektör alanına *vortisite* (*girdaplılık*) denir. Vortisite her yerde sıfırsa, akışın *dönmesiz* olduğunu söyleriz. Bölüm 3-5'te bir vektör alanının *dolaşımı* olarak adlandırılan bir şeyi zaten tanımlamıştık. Bir akışkanın içindeki herhangi bir kapalı ilmek etrafında dolaşım, belirli bir zamanda o ilmek etrafında akışkan hızının çizgi integralidir:

$$(\text{Dolaşım}) = \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Bu durumda sonsuz küçüklükteki bir ilmek için *birim alan başına* dolaşımı –Stokes teoremini kullanarak– $\nabla \times \boldsymbol{v}$ olarak yazabiliriz. Diğer bir deyişle vortisite Ω birim alan etrafındaki (Ω yönüne dik) dolaşımdır. Buradan çıkan bir başka sonuç da, sıvı içinde herhangi bir yere küçük bir kir parçası –sonsuz küçüklükteki bir nokta *değil*– bırakırsanız, $\Omega/2$ açısal hızıyla dönecektir. Bunu kanıtlayıp kanıtlamayacağınıza bakın. Bir pikap üzerindeki bir kova su için, Ω suyun yerel açısal hızının iki katma eşittir.

Sadece hız alanıyla ilgileniyorsanız, denklemlerimizden basıncı çıkartabiliriz. Denklem (40.8)'in her iki tarafının, ρ değerinin sabit ve herhangi bir gradyanın bükümünün sıfır olduğunu hatırlayarak, bükümünü alır ve Denk. (40.3)'ü kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \boldsymbol{v}) = 0 \tag{40.9}$$

Bu denklem,

$$\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{40.10}$$

ve

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{40.11}$$

denklemleriyle beraber $\boldsymbol{v}$ hız alanını tamamen tanımlar. Matematiksel olarak konuşacak olursak, herhangi bir zamanda Ω'yı bildiğimizde, bu durumda hız vektörünün bükümünü ve diverjansımn sıfır olduğunu biliriz, bu fiziksel durum için tek belirlememiz gereken şey her yerde $\boldsymbol{v}$'nin değeridir. (Tıpkı manyetizmada $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ve $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ eşitliklerini elde ettiğimiz durum gibi.) Dolayısıyla Ω'dan yola çıkarak $\boldsymbol{v}$'yi, tıpkı $\boldsymbol{j}$'den yola çıkarak $\boldsymbol{B}$'yi belirleyebildiğimiz gibi belirleyebiliriz. Böylece $\boldsymbol{v}$ vektörünü bilirsek, Denk. (40.9) bize Ω'nın değişim hızını verir ki ondan da bir sonraki an için yeni Ω'yı elde edebiliriz. Denklem (40.10)'u kullanarak yeni $\boldsymbol{v}$'yi buluruz ve bu böyle sürer gider. Akışı hesaplamak için bütün işlemlerin bu denklemlerde olduğunu artık görebilirsiniz. Yine de bu işlemler bize sadece hız alanını verir; basınç hakkındaki bütün bilgileri kaybettik.

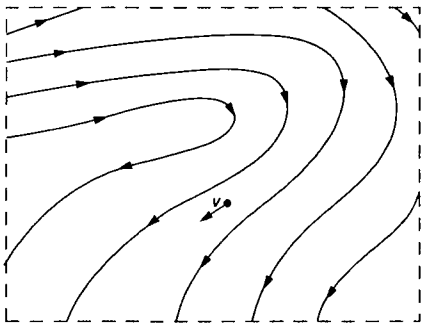
Denklemimizin özel bir sonucuna dikkat çekmek isteriz. Her t zamanında her yerde $\Omega = 0$ ise, $\partial\Omega/\partial t$ de ayrıca kaybolur, böylece Ω $t + \Delta t$ zamanında her yerde hâlâ sıfırdır. Denklem için bir çözümümüz vardır; akış kalıcı olarak dönmesizdir. Akış sıfır dönmeyle başladıysa, her zaman sıfır dönmeye sahip olur. Bu durumda çözülmesi gereken denklemler aşağıdakilerdir:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

Tıpkı serbest uzaydaki elektrostatik veya manyetostatik için olan denklemler gibidir. Bazı özel problemlere bakmak için bunlara daha sonra geri döneceğiz.

40-3 Kararlı akış: Bernoulli teoremi

Şimdi, kendimizi akışın "kararlı" olduğu durumlarla sınırlayarak Denk. (40.8)'e dönelim. Kararlı akışla demek istediğimiz, akışkanın içindeki herhangi bir yerdeki akışın hiçbir zaman değişmemesidir. Herhangi bir noktadaki akışkan tıpkı aynı şekilde davranan yeni bir akışkanla değişir sürekli. Hızın resmi daima aynı gözükür, $\boldsymbol{v}$ durağan bir vektör alanıdır. Manyetostatikte çizdiğimiz "alan çizgileri" gibi, şimdi de Şekil 40-5'te gösterildiği gibi akışkan hızına her zaman teğet çizgiler çekebiliriz. Bu çizgilere *akış çizgileri* denir. Kararlı akış için açıkça görüldüğü üzere akışkan parçacıklarının gerçekte izledikleri yollardır. (Kararsız akışta akış çizgileri örüntüsü zamanla değişir ve herhangi bir andaki akış çizgisi örüntüsü akışkan parçasının yolunu temsil etmez.)



Şekil 40-5 Kararlı bir akışkan akışında akış çizgileri.

Kararlı bir akış, hiçbir şey olmuyor anlamına gelmez. Akışkandaki atomlar hareket etmekte ve hızları değişmektedir. Kararlı akışın sadece $\partial \boldsymbol{v}/\partial t=0$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda hareket denkleminin içinde $\boldsymbol{v}$'nin skaler çarpımını koyarsak, $\boldsymbol{v}\cdot(\Omega\times\boldsymbol{v})$ terimi çıkar ve elimizde aşağıdaki ifade kalır:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left\{\frac{p}{\rho}+\phi+\frac{1}{2}v^2\right\}=0 \tag{40.12}$$

Bu denkleme göre, *akışkan hızının yönündeki küçük bir yerdeğiştirme için* parantezlerin içindeki nicelik değişmez. Kararlı bir akışta bütün yerdeğiştirmeler akış çizgileri boyuncadır, dolayısıyla Denk. (40.12)'ye göre *bir akış çizgisi boyunca bütün noktalar için* aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\phi=\text{sabit (akış çizgisi)} \tag{40.13}$$

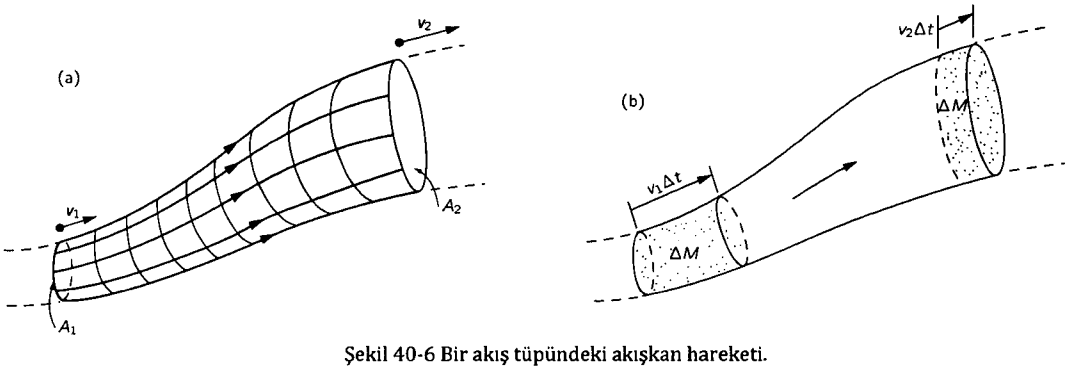
Bu *Bernoulli* teoremidir. Farklı akış çizgileri için genelde sabit farklı olabilir; tek bildiğimiz Denk. (40.13)'ün sol tarafının *belirli bir akış çizgisi* boyunca aynı olduğudur. Bu arada, $\Omega=0$ eşitliğini sağlayan *dönmesiz* bir akış için, hareket denklemi (40.8) bize aşağıdaki ilişkiyi verir:

$$\nabla\left\{\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\phi\right\}=0$$

böylece

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\phi=\text{sabit (her yerde)} \tag{40.14}$$

olur. Bu tıpkı Denk. (40.13) gibidir, *şimdi* sabitin *akışkanın içinde her yer de aynı değere* sahip olması *dışında.*



Şekil 40-6 Bir akış tüpündeki akışkan hareketi.

Bernoulli teoremi aslında enerjinin korunumu ifadesinden öte bir şey değildir. Bu tür bir korunum teoremi bize bir akış hakkında, detaylı denklemler çözmemiz gerekmeden, birçok bilgi verir. Bernoulli teoremi o kadar önemli ve basittir ki, az önce kullandığımız hesaplamalardan farklı bir yolla nasıl çıkarılabileceğini size göstermek istiyoruz. Birbirine bitişik, Şekil 40-6'da çizildiği gibi bir akış tüpü oluşturan bir akış çizgileri demeti düşünün. Tüpün duvarları akış çizgilerinden oluştuğu için, duvardan hiç akışkan akmaz. Akış tüpünün bir

ucundaki alana A_1, oradaki akışkan hızına v_1, akışkan yoğunluğuna ρ_1 ve potansiyel enerjiye ϕ_1 diyelim. Tüpün diğer ucundaki karşılık gelen niceliklere A_2, v_2, ρ_2 ve ϕ_2 diyelim. Kısa bir Δt zaman aralığından sonra A_1'deki akışkan $v_1\Delta t$ kadar bir mesafe katetmiş ve A_2'deki sıvı da $v_2\Delta t$ kadar bir mesafe katetmiş olacaktır [Şekil 40-6(b)]. *Kütle* korunumu gereği A_1'den içeri giren kütle miktarı A_2'den dışarı çıkan kütle miktarına eşit olmalıdır. Bu iki uçtaki kütleler aynı olmalıdır:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{40.15}$$

Bu denkleme göre ρ sabitse hız, akış tüpünün alanıyla ters orantılı olarak değişir.

Şimdi de akışkan basıncı tarafından yapılan işi hesaplayalım. A_1'den giren akışkan üzerinden yapılan iş $p_1 A_1 v_1 \Delta t$ ve A_2'de bırakılan iş de $p_2 A_2 v_2 \Delta t$ olur. A_1 ile A_2 arasında akışkan üzerinde yapılan iş o halde

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$

olur ki, bu iş de A_1'den A_2'ye giden akışkanın ΔM kütlesinin enerjisindeki artışı karşılamalıdır. Diğer bir deyişle, E_1 A_1'deki akışkanın birim kütlesindeki enerji ve E_2 de A_2'deki birim kütledeki enerjiyken aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \Delta M (E_2 - E_1) \tag{40.16}$$

Bu durumda birim kütledeki akışkanın enerjisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E = \tfrac{1}{2} v^2 + \phi + U$$

Yukarıdaki denklemdeki $\frac{1}{2}v^2$ birim kütledeki kinetik enerji, ϕ birim kütledeki potansiyel enerji ve U akışkanın birim kütlesindeki iç enerjiyi temsil eden ilave bir terimdir. İç enerji, örneğin, sıkıştırılabilir bir akışkandaki ısı enerjisine ya da kimyasal enerjiye denk gelebilir. Bütün bu nicelikler noktadan noktaya değişebilir. Denklem (40.16)'da enerjiler için bu biçimi kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \phi_1 - U_1$$

Ancak $\Delta M = \rho A v \Delta t$ eşitliğini bildiğimiz için, aşağıdaki eşitliği elde ederiz ki bu da iç enerji için ilave bir terim içeren Bernoulli sonucudur:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2 \tag{40.17}$$

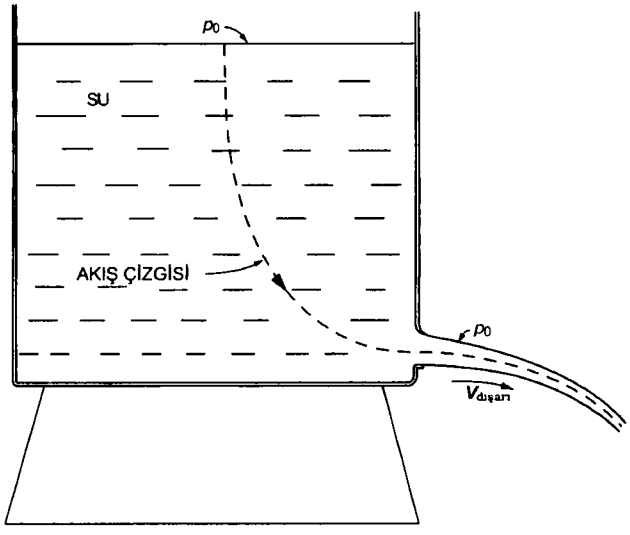
Akışkan sıkıştırılamaz bir akışkansa, her iki taraftaki iç enerji terimi aynıdır ve yine Denklem (40.14)'ün herhangi bir akış çizgisi boyunca doğru olduğunu elde etmiş oluruz.

Şimdi de Bernoulli integralinin bize akışın tanımını verdiği bazı basit örnekleri ele alalım. Şekil 40-7'de çizildiği gibi, bir tankın tabanına yakın bir delikten dışarı su aktığını düşünelim. Delikteki $v_{\text{dışarı}}$ hızının tankın tepesine yakın bölgedeki akış hızından çok daha büyük olduğu bir durumu ele alacağız; diğer bir deyişle tankın çapının sıvı seviyesindeki düşüşün ihmal edebileceğimiz kadar büyük olduğunu hayal edeceğiz. (Dilersek daha hassas bir hesaplama yapabilirdik.) Tankın tepesindeki basınç p_0'dır, atmosferik basınç ve delikten akışın kenarlarındaki basınç da p_0'dır. Şimdi şekildeki gibi bir akış çizgisi için Bernoulli denklemini yazalım. Tankın tepesinde v değerini ve aynı zamanda kütleçekim potansiyeli ϕ değerini sıfır alalım. $v_{\text{dışarı}}$ hızında ve $\phi = -gh$ olduğunda, aşağıdaki eşitlik:

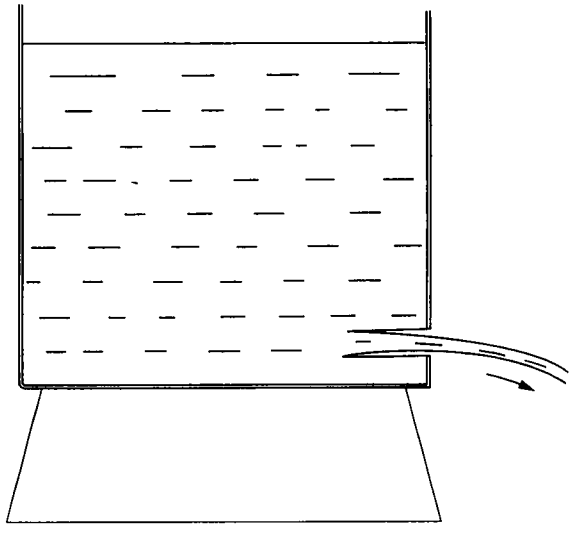
$$p_0 = p_0 + \tfrac{1}{2} \rho v_{\text{dışarı}}^2 - \rho g h$$

veya aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

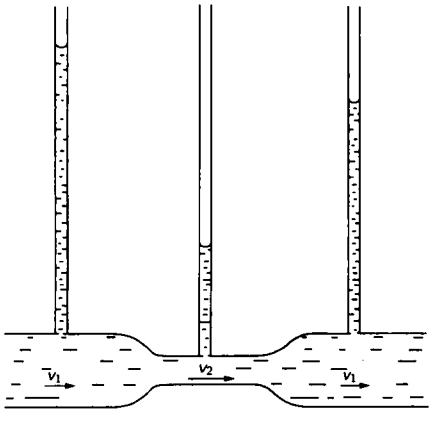
$$v_{\text{dışarı}} = \sqrt{2gh} \tag{40.18}$$



Şekil 40-7 Bir tanktan akış.



Şekil 40-8 Yeniden girişli bir çıkış tüpüyle, akış açıklığın alanının yarısına kadar büzüşür.



Şekil 40-9 Basınç, hızın en yüksek olduğu yerde en düşüktür.

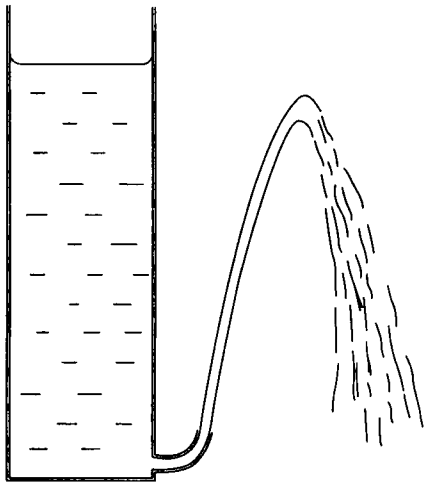
Bu hız tam da, bir şey *h* yüksekliğinden düşerken elde edeceğimiz hıza eşittir. Çıkıştaki su tepedeki suyun potansiyel enerjisine eşit bir kinetik enerji kazandığından, bu sonuç çok da şaşırtıcı değildir. Ancak, tanktan dışarı akışkanın akma hızını, bu hız çarpı deliğin alanı işlemini yaparak elde edebileceğiniz fikrine kapılmayın. Delikten dışarı su püskürdükçe, akışkanın hızları birbirlerine hiç paralel değildir ancak akışın merkezine doğru içeri bakan bileşenleri vardır. Püskürme içeri doğru yakınsamaktadır. Püskürtme bir süre yol aldıktan sonra büzüşme durur ve hızlar birbirine paralel hale gelir. Böylece toplam akış, hız çarpı *o noktadaki* alandır. Hatta keskin kenarlara sahip yuvarlak bir delikten dışarı akış varsa, püskürtme deliğin yüzde 62'sine kadar büzülür. Çıkışın küçülmüş etkili alanı, çıkış tüplerinin farklı şekilleri için değişkenlik gösterir ve deneysel büzülmeler *dışa akış katsayıları* tabloları olarak bulunabilir.

Çıkış tüpü Şekil 40-8'de gösterildiği gibi yeniden girişliyse, dışa akış katsayısının tam olarak %50 olduğunu çok güzel bir yolla göstermek mümkündür. Enerji korunumunu hızı elde etmek için kullandık, ancak dikkate almamız gereken bir de momentum korunumu vardır. Çıkış püskürtmesindeki dışarı doğru bir momentum akışı olduğundan, çıkış tüpünün kesiti üzerine uygulanan bir kuvvet olmalıdır. Bu kuvvet nereden gelir? Kuvvet duvarlardaki basınçtan gelmelidir. Dışa akış deliği küçük ve duvarlardan uzak olduğu sürece, tankın duvarlarına yakın akışkan hızı çok küçük olacaktır. Dolayısıyla her bir yüzündeki basınç –Denklem (40.14)'ten dolayı– bir akışkandaki statik basınçla neredeyse aynı olacaktır. Bu durumda tankın kenarında bulunan herhangi bir noktadaki statik basınç, çıkış tüpünün karşısındaki duvarda bulunan noktalardakiler *haricinde*, karşı duvardaki noktada eşit bir basınçla karşılanmalıdır. Bu basınç sayesinde püskürtmeyle dışarı akan momentumu hesaplarsak, dışa akış katsayısının 1/2 olduğu görülebilir. Ancak bu yöntemi Şekil 40-7'de görünen çıkış deliği gibi bir delik için kullanamayız, çünkü çıkış alanına yakın duvar boyunca hız artışı hesaplayamayacağımız bir basınç düşüşüne neden olur.

Gelin bir başka örneği, Şekil 40-9'da gösterildiği gibi kesit alanı değişen ve bir ucundan diğer ucuna su akan yatay bir boruyu ele alalım. Enerjinin korunumu, Bernoulli denklemi, hızın daha yüksek olduğu daralmış alanda basıncın daha düşük olduğunu söyler. Akışı bozmayacak şekilde, akış tüpündeki küçük deliklere içi su dolu küçük dikey su kolonları bağlayıp çeşitli kesit alanlarda basıncı ölçerek bu etkiyi kolayca gösterebiliriz. Basınç, bu dikey kolonlardaki suyun yüksekliğiyle ölçülür. Daralmış bölgede basınç diğer bölgelere göre daha

azdır. Daralmış bölgenin ötesindeki alan daralmadan önce sahip olduğu değere kavuşursa, basınç yine yükselir. Bernoulli denklemine göre daralmadan sonraki basınç ile daralmadan önceki basınç aynı olmalıdır, ancak aslında fark edilebilir ölçüde azdır. Öngörümüzün yanlış olmasının nedeni, tüp boyunca basınç düşüşüne yol açan sürtünmeye ilişkin, viskoz kuvvetleri ihmal etmemizdir. Bu basınç düşüşüne rağmen, basınç (artan hızdan dolayı) daralmanın olduğu yerde –Bernoulli tarafından öngörüldüğü gibi– her iki taraftakinden kesinlikle daha düşüktür. Daha dar tüpten geçen su miktarının aynı olması için v_2 hızı kesinlikle v_1 hızından fazla olmalıdır. Dolayısıyla daha geniş kısımdan daha dar kısıma akarken su hızlanır. Bu ivmelenmeye yol açan kuvvet basınçtaki düşüşten gelir.

Sonuçlarımızı basit bir şekilde gösterebiliriz. Şekil 40-10'daki gibi, üzerinde yukarı doğru su püskürten bir çıkış tüpü bulunan bir tankımız olduğunu düşünelim. Dışarı akış hızı tam olarak $\sqrt{2gh}$ ise, boşalan su tanktaki su seviyesiyle eşit bir seviyeye gelecek şekilde yükselmeli. Deneyi yaparsanız, bir miktar alçak kaldığını görebilirsiniz. Çıkarımımız kabaca doğrudur, ancak enerji korunum yasasına dahil etmediğimiz viskoz sürtünme yine enerji kaybına yol açmıştır.



Şekil 40-10 v hızının $\sqrt{2gh}$'a eşit olmadığının kanıtı.

Hiç iki parça kâğıdı birbirine yakın tutup, üfleyerek onları birbirinden uzaklaştırmaya çalıştınız mı? Deneyin! *Birbirlerine yapışırlar.* Elbette bunun nedeni kâğıtlar arasındaki daralan bölgeden havanın dışarıdaki bölgeye göre daha yüksek hızla geçmesidir. Kâğıtlar arasındaki basınç atmosferik basınçtan *daha düşüktür*, dolayısıyla ayrılmak yerine bir araya gelirler.

40-4 Dolaşım

Son bölümün başında, dolaşımı olmayan sıkıştırılamaz bir akışkanımız varsa, akışın aşağıdaki iki denklemi sağladığını gördük:

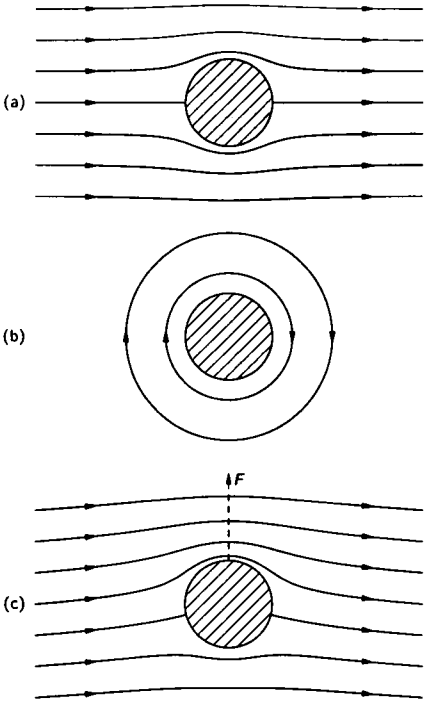
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{40.19}$$

Bunlar, boş uzaydaki elektrostatik veya manyetostatik denklemleriyle aynıdır. Yük olmadığında elektrik alanında diverjansı sıfırdır ve elektrostatik alanın bükümü her zaman sıfırdır. Dolayısıyla Denk. (40.19), elektrostatikteki $\boldsymbol{E}$ veya manyetostatikteki $\boldsymbol{B}$ için olan denklemlerle aynı çözümlere sahiptir. Doğrusunu isterseniz, bir küre etrafından akan akışkan problemini, Bölüm 12-5'te bir elektrostatik benzerliğiyle çözmüştük. Elektrostatik benzeri, düzgün bir elektrik alan artı bir dipol alanıdır. Dipol alanı öyle ayarlanmıştır ki, kürenin yüzeyine dik olan akış hızı sıfırdır. Bir silindirin etrafından geçen akış problemi benzer şekilde, uygun bir çizgi dipolüyle düzgün bir akış alanı kullanılarak çözülebilir. Bu çözüm akışkan hızının uzak mesafelerde –hem büyüklük hem de yön olarak– sabit olduğu durum için geçerlidir. Çözüm Şekil 40-11(a)'da çizilmiştir.

Bir silindir etrafından geçen akışta, koşullar akışkanın uzak mesafelerde silindir etrafında çember çizerek hareket etmesini sağladığı durum için bir başka çözüm daha vardır. Bu durumda akış, Şekil 40-11(b)'deki gibi her yerde daireseldir. Her ne kadar *akışkanda* denklem hâlâ sıfırsa da, böyle bir akışın çember etrafında dolaşımı vardır. Büküm olmadan nasıl dolaşım olabilir? Silindir etrafında dolaşım vardır çünkü $\nabla \times \boldsymbol{v}$'nin silindiri *çevreleyen* herhangi bir ilmek etrafındaki çizgi integrali sıfır değildir. Aynı zamanda, $\boldsymbol{v}$'nin, silindiri *içermeyen* herhangi bir kapalı yol etrafındaki çizgi integrali sıfırdır. Bir tel etrafındaki manyetik alanı bulduğumuzda da aynı şeyi görmüştük. Her ne kadar teli çevreleyen bir yol üzerindeki $\boldsymbol{B}$'nin çizgi integrali ortadan kaybolmadıysa da, telin dışında $\boldsymbol{B}$'nin bükümü sıfırdı. Bir silindir etrafındaki dönmesiz akıştaki hız alanı, bir telin etrafındaki manyetik alanla tam olarak aynı şeydir. Merkezi, silindirin merkeziyle aynı olan çembersel bir yol için hızın çizgi integrali aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = 2\pi r v$$

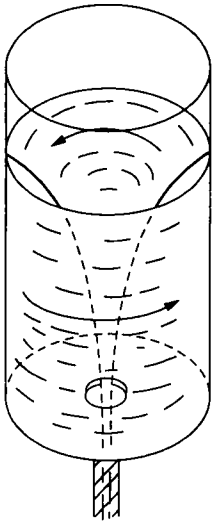
Dönmesiz akış için integral r'den bağımsız olmalıdır. Sabit değere C diyelim; v



Şekil 40-11 (a) Bir silindir etrafından geçen ideal akışkan akışı. (b) Bir silindir etrafında dolaşım. (c) (a) ve (b)'nin üst üste binmesi.

teğet hız ve r de eksene olan uzaklıksa, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$v = \frac{C}{2\pi r} \tag{40.20}$$



Şekil 40-12 Dolaşımlı su bir tanktan boşalırken.

Bir delik etrafında dolaşan akışkana dair hoş bir gösterim vardır. Tabanında tıpayla kapatılmış bir delik olan, şeffaf bir silindir tank alın. İçini suyla doldurun, bir çubukla biraz dairesel olarak döndürün ve tıpayı çekin. Şekil 40-12'de görünen hoş etkiyi elde edeceksiniz. (Benzer şeyi lavaboda defalarca görmüşsünüzdür!) Başlangıçta bir miktar ω koysanız da, viskozite yüzünden hızla kaybolur ve akış –her ne kadar delik etrafında bir miktar dolaşım kalsa da– dönmesiz olur.

Kuram sayesinde, suyun iç yüzeyinin şeklini hesaplayabiliriz. Bir su parçacığı içeri doğru hareket ettikçe hızlanır. Denklem (40.20)'ye göre teğet hız $1/r$'yle orantılı değişir. Açısal momentumun korunumundan gelir bu, hani buz patencilerinin kollarını içeri doğru çekmesini gerektiren. Radyal hız da aynı şekilde $1/r$'yle orantılı değişir. Teğet hareketi ihmal edersek, bir deliğe doğru ve radyal olarak içeri doğru su hareket eder; $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ eşitliğinden radyal hızın da $1/r$'yle orantılı olduğu anlaşılır. Böylece toplam hız da $1/r$'yle orantılı değişir ve su Arşimet burguları boyunca ilerler. Hava su yüzeyinin tamamı atmosferik basınçtadır, –Denk. (40.14)'ten– aşağıdaki özelliğe sahip olmalıdır:

$$gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{sabit}$$

Ancak v $1/r$'yle orantılıdır, dolayısıyla yüzeyin şekli aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$(z - z_0) = \frac{k}{r^2}$$

Genelde doğru olmayan ancak sıkıştırılamaz, dönmesiz akış için doğru olan ilginç bir nokta, iki çözümümüz varsa bu ikisinin toplamının da ayrıca bir çözüm olduğudur. Bu doğrudur, çünkü (40.19)'daki denklemler doğrusaldır. Hidrodinamiğe ait bütün denklemler, (40.9), (40.10) ve (40.11) doğrusal değildir ve bu büyük bir fark yaratır. Ancak silindir etrafındaki dönmesiz akış için Şekil 40-11(a)'daki akışla Şekil 40-11(b)'deki akışı üst üste bindirebiliriz ve Şekil 40-11(c)'deki yeni akış örüntüsünü elde ederiz. Bu akış özel ilgi gerektirir. Silindirin yukarısındaki akış hızı, aşağısındaki akış hızından daha fazladır. Dolayısıyla *yukarıdaki* basınç aşağıdakinden *düşüktür*. Diğer bir deyişle bir silindir etrafında bir dolaşım *ve* net bir yatay akışın bileşimi durumunda silindir üzerinde –*kaldırma kuvveti* denilen– net bir *dikey kuvvet* vardır. Elbette, dolaşım yoksa "kuru" su kuramımıza göre cisim üzerinde etki eden net bir kuvvet yoktur.

40-5 Girdap çizgileri

Vortisite olabileceği zaman, sıkıştırılamaz bir akışkanın akışı için genel denklemleri zaten yazmıştık. Aşağıda onları tekrar yazdık:

$$\text{I.} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$
$$\text{II.} \quad \Omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$$
$$\text{III.} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \boldsymbol{v}) = 0$$

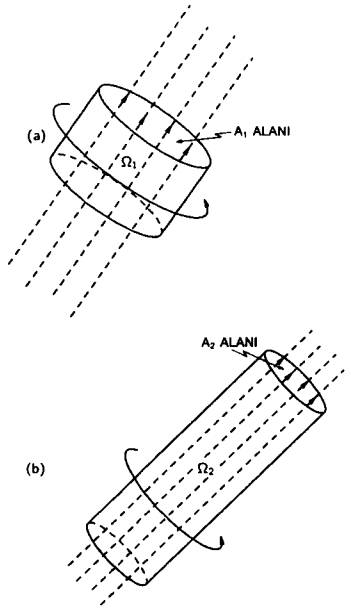
Bu denklemlerin fiziksel içeriği üç teorem cinsinden Helmholtz tarafından sözcüklerle ifade edilmiştir. Öncelikle, akışkan içinde akış çizgileri yerine *girdap* çizgileri çizdiğimizi düşünün. Girdap çizgileriyle demek istediğimiz Ω'yla aynı yönde ve herhangi bir bölgede Ω'nın büyüklüğüyle orantılı bir yoğunluğu olan alan çizgileridir. II numaralı denkleme göre Ω'nın diverjansı *her zaman* sıfırdır (Bir bükümün diverjansının her zaman sıfır olduğunu –Bölüm 3-7– hatırlayın). Dolayısıyla girdap çizgileri $\boldsymbol{B}$ çizgileri gibidir. Asla başlamaz veya durmazlar ve kapalı ilmekler içinde hareket etmeye eğilimlidirler. Helmholtz III numaralı

denklemi şu ifadeyle tanımlamıştır: girdap çizgileri *akışkanla beraber hareket eder.* Dolayısıyla akışkan parçacıklarını bazı girdap çizgileri boyunca işaretleseydiniz –örneğin mürekkeple onları renklendirerek–, akışkan hareket edip parçacıkları beraberinde götürdükçe, her zaman yeni girdap çizgilerinin konumlarını işaretlerler. Sıvının atomları nasıl hareket ederse etsin, girdap çizgileri onlarla beraber hareket eder. Yasaları tanımlamanın bir yolu da budur.

Bu aynı zamanda problemleri çözmek için bir yöntem de ortaya koyar. Başlangıçtaki akış örüntüsü –diyelim ki her yerde v olsun– verildiğinde, Ω'yı hesaplayabilirsiniz. v'den yola çıkarak girdap çizgilerinin $-v$ hızıyla hareket ederler– bir süre sonra nerede olabileceğini söyleyebilirsiniz. Yeni Ω'yla I ve II numaralı denklemleri kullanarak yeni v'yi bulabilirsiniz. (Bu tıpkı, akımlar bilindiğinde B'yi bulma problemi gibidir.) Herhangi bir anda akış örüntüsünü bilirsek, ilkesel olarak sonraki tüm zamanlar için onu hesaplayabiliriz. Viskoz olmayan akış için genel çözüm elimizdedir.

Helmholtz'un ifadesinin –ve dolayısıyla III'ün– en azından kısmen anlaşılabileceğini göstermek istiyoruz. Aslında bütün ifade açısal momentumun korunumunun akışkana uygulanmasıdır. Şekil 40-13 (a)'daki gibi ekseni girdap çizgilerine paralel bir sıvı silindiri düşünelim. Bir zaman sonra *aynı* sıvı parçası bir başka yerde olacaktır. Genelde farklı bir çapta silindir hacmini kaplayacak ve bir başka yerde olacaktır. Şekil 40-13(b)'deki gibi farklı bir yönelimi de olabilir. Ancak çap Şekil 40-3'teki gibi arttıysa, hacmi sabit tutmak için uzunluğu da artmış olur. (Çünkü akışkanın sıkıştırılamaz olduğunu varsayıyoruz.) Ayrıca girdap çizgileri de malzemeye yapışık olduğundan, kesit alanı azaldıkça onların da yoğunluğu artar. A alanı ve Ω vortisitesinin çarpımı, Helmholtz'a göre, sabit kalacağından aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1 \tag{40.21}$$

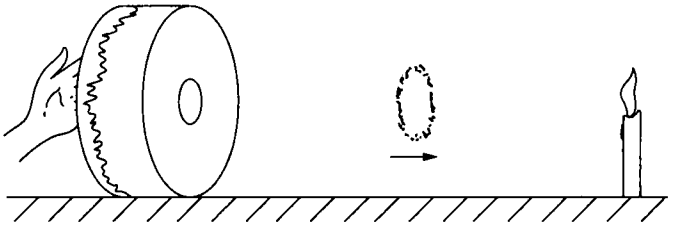


Şekil 40-13 (a) t zamanında bir grup girdap çizgileri; (b) daha sonaki bir t' zamanında aynı çizgiler.

Sıfır viskoziteden dolayı silindirik hacim (ya da *herhangi* bir hacim) üzerindeki bütün kuvvetlerin yüzeye dik olacağına dikkat edin. Basınç kuvvetleri hacmin bir yerden diğerine gitmesine ya da şekil değiştirmesine neden olabilir; ancak *teğet* kuvvetler olmadığından *içerdeki malzemenin açısal momentumun* büyüklüğü değişemez. Küçük silindirdeki sıvının açısal momentumu, eylemsizlik momenti I çarpı Ω vortisitesiyle orantılı olan sıvının hızıdır. Bir silindir için, eylemsizlik momenti mr^2'yle orantılıdır. Dolayısıyla, açısal momentumun korunumundan yola çıkarak, aşağıdaki sonuca varabiliriz:

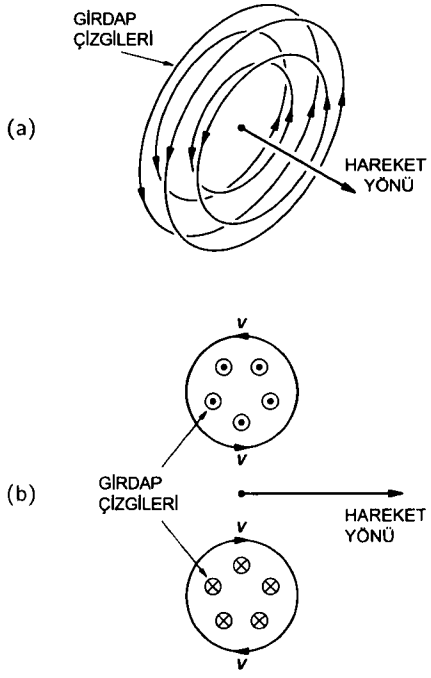
$$(M_1 R_1^2)\Omega_1 = (M_2 R_2^2)\Omega_2$$

Ancak kütle aynı, $M_1 = M_2$ ve alanlar R^2'yle orantılıdır, dolayısıyla sadece Denk. (40.21)'i elde ederiz. Helmholtz'un III'e eşit olan ifadesi sadece, viskozite olmadığında akışkanın bir elemanının açısal momentumunun değişemeyeceği gerçeğinin soncudur.



Şekil 40-14 Hareket eden bir girdap halkası yapmak.

Şekil 40-14'teki basit cihazla hareket eden girdabı hoş bir şekilde gösterebiliriz. Silindirik bir "kutu"nun açık ucu üzerine kalın bir lastik tabaka gererek yapılmış, altmış santim çapında ve altmış santim uzunluğunda bir "davul"dur. 7,5 santim çapındaki bir delik haricinde "taban" kapalıdır. Elinizle lastik diyagrama sert bir şekilde vurursanız, delikten dışarı bir girdap halkası iletilir. Gir-



Şekil 40-15 Hareket eden bir girdap halkası (bir duman halkası). (a) Girdap çizgileri. (b) Halkanın kesit alanı.

dap görünmez olsa da orada olduğunu 3-4 metre ötedeki bir mumu söndürmesinden anlayabilirsiniz. Etkideki gecikmeden dolayı "bir şey"in sonlu bir hızda hareket ettiğini anlayabilirsiniz. Kutunun içine önce bir miktar duman üfleyerek daha iyi gözleyebilirsiniz bu olguyu. Bu durumda girdabı hoş bir yuvarlak "duman halkası" olarak görürsünüz.

Duman halkası, Şekil 40-15(a)'da görüldüğü gibi, simit şeklinde bir girdap çizgileri demetidir. $\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$ olduğundan bu girdap çizgileri ayrıca, şeklin (b) kısmında gösterildiği gibi, $\boldsymbol{v}$'nin bir dolaşımını temsil ederler. Halkanın ileri doğru hareketini şöyle anlayabiliriz: Halkanın *tabanı* etrafındaki dolaşım hızı halkanın tepesine doğru uzanır ve orada ileri doğru hareket eder. Ω'nın çizgileri akışkanla beraber hareket ettiğinden dolayı, onlar da ayrıca $\boldsymbol{v}$ hızıyla hareket eder. (Elbette, halkanın tepesi etrafındaki $\boldsymbol{v}$'nin dolaşımı tabandaki girdap çizgilerinin ileri hareketinden sorumludur.)

Şimdi burada önemli bir zorluktan bahsetmeliyiz. Denklem (40.9)'a göre başlangıçta Ω sıfırsa, her zaman sıfır olacaktır. Bu sonuç "kuru" su kuramının büyük bir başarısızlığıdır, çünkü Ω bir kere sıfırsa *her zaman* sıfır olduğu anlamına gelir. Herhangi bir koşul altında vortisite *üretmek* imkânsızdır. Yine de davulla yaptığımız basit gösterimde başlangıçta durağan olan havayla bir girdap halkası meydana getirebildik. (Biz ona vurmadan önce kutunun içinde her yerde $\boldsymbol{v} = 0$, $\Omega = 0$ olduğu kesindir.) Ayrıca herkes bir gölde bir kürek yardımıyla bir miktar vortisite başlatabildiğini bilir. Bir akışkanın davranışını tam olarak anlayabilmek için "ıslak" su kuramına başvurmamız gerektiği açıktır.

Yanlış olan bir diğer kuru su kuram özelliği de, bir katının yüzeyi ile onun arasındaki sınırdaki akışa dair yaptığımız üst üste bindirmedir. Şekil 40-11'deki gibi, bir silindirin çevresinden geçen akış üzerinde durduğumuzda akışkanın katının yüzeyi üzerinden akıp geçmesine izin verdik. Kuramımıza göre, katı bir yüzeydeki hız nasıl başladığına bağlı olarak herhangi bir değer alabilir ve akışkan ile katı arasında bir "sürtünme"yi hesaba katmadık. Ancak deneysel bir gerçektir ki, bir akışkanın hızı katı bir nesnenin yüzeyinde daima sıfıra iner. Dolayısıyla, dolaşımlı veya dolaşımsız, silindir için çözümümüz –vortisite meydana getirmeye dair sonucumuz gibi– yanlıştır. Bir sonraki bölümde daha doğru kuramları size anlatacağız.

41

ISLAK SUYUN AKIŞI

41-1 Viskozite
41-2 Viskoz akış
41-3 Reynolds Sayısı
41-4 Dairesel bir silindir etrafından akış
41-5 Sıfır viskozite limiti
41-6 Couette akışı

41-1 Viskozite

Son bölümde suyun akışını, viskozite [ağdalılık] olgusunu göz ardı ederek tartıştık. Şimdi akışkanların akışı olgusunu viskozite etkilerini *dahil ederek* tartışacağız. Akışkanların *gerçek davranışına* bakmak istiyoruz. Çeşitli farklı koşullar altında akışkanların gerçek davranışını niceliksel olarak tanımlayacağız ki böylece konuya dair anlayışınız gelişsin. Bazı karmaşık denklemler görecek ve bazı karmaşık şeyler göreceksiniz, ancak bunları öğrenmenizi amaçlamıyoruz. Bu, bir anlamda, dünyanın nasıl işlediğine dair bir fikir verecek "kültürel" bir bölümdür. Öğrenmeye dair tek bir kalem vardır ve o da birazdan geleceğimiz viskozitenin basit tanımıdır. Gerisi sadece sizin eğlenmeniz içindir.

Son bölümde hareket yasalarının aşağıdaki eşitlikte olduğunu bulmuştuk:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi + \frac{f_{\text{visk}}}{\rho} \tag{41.1}$$

"Kuru" su yakınlaştırmamızda son terimi dışarda bırakarak viskoz etkileri ihmal etmiştik. Ayrıca akışkanın sıkıştırılamaz olduğunu göz önüne alarak bazen ilave bir yakınlaştırmada bulunmuş ve böylece aşağıdaki ilave denklemi elde etmiştik:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

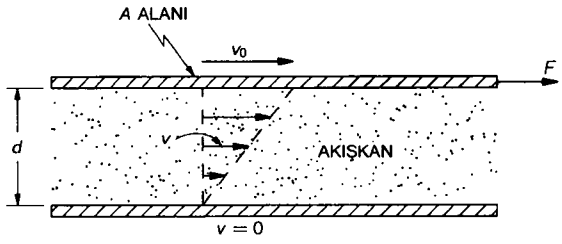
Bu son yakınlaştırma –özellikle akış hızları ses hızından çok daha yavaş olduğunda– çoğu zaman gayet iyidir. Ancak gerçek akışkanlarda viskozite denilen iç sürtünmeyi asla ihmal edemeyiz; olan birçok ilginç şey bir şekilde ondan dolayıdır. Örneğin, dolaşımın "kuru" suda asla değişmediğini gördük. Başlangıçta dolaşım yoksa asla olmayacaktır. Ancak akışkanlarda dolaşım her gün rastlanılan bir şeydir. Kuramımızı düzeltmeliyiz.

Önemli bir deneysel gerçekle başlayacağız. Bir silindir çevresinde veya etrafında "kuru" suyun –"potansiyel akış" denilen– akışını çalıştığımızda suyun yüzeye teğet bir hızı olmasına izin vermemiz için bir neden yoktu. Sadece dik bileşeni sıfır olmalıydı. Sıvı ile katı arasında bir kayma kuvveti olma olasılığını dikkate almadık. Apaçık ortada olmasa da, deneysel olarak kontrol edilen bazı koşullarda *bir katının yüzeyinde bir sıvının hızı tam olarak sıfırdır*. Mutlaka vantilatör pervanelerinin kanatlarındaki tozu fark etmişsinizdir. Dönerek havayı karıştırsa da, durduğunda toz hâlâ oradadır. Aynı etkiyi bir rüzgâr tünelinin devasa pervanelerinde de görebilirsiniz. Neden toz havayla uçuşmuyor? Pervane kanadı hava içinde çok yüksek hızda ilerlese de, tam yüzeyde havanın kanada göre hızı sıfıra inmektedir. Dolayısıyla en küçük toz parçası bile kalkmaz.* Kuramımızı, bütün sıradan akışkanlarda katı bir yüzeye bitişik moleküllerin (yüzeye göre) sıfır hıza sahip olacağı şeklindeki deneysel gerçekle uyumlu olacak şekilde düzeltmeliyiz.†

---

* Bir masanın üstünden *büyük* toz parçalarını üfürerek *uzaklaştırabilir*, ancak en küçük olanları *uzaklaştıramazsınız*. Büyük olanlar rüzgâra kapılırlar.

† Bunun doğru olmadığı koşulları hayal edebilirsiniz: cam kuramsal olarak bir "sıvı"dır, ancak çelik bir yüzey boyunca kaydırılabilir. Dolayısıyla iddiamız bir yerde çökmeli.

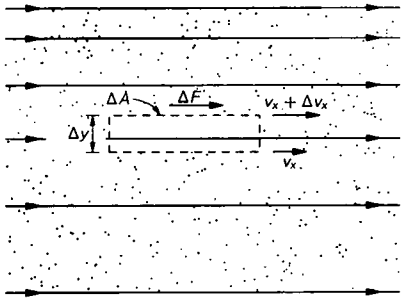


Şekil 41-1 İki paralel levha arasında viskoz sürüklenme.

Daha önce bir sıvıyı, üzerine –ne kadar küçük olursa olsun– bir kayma stresi uyguladığınızda kırıldığı şeklinde nitelemiştik. Statik durumlarda kayma stresleri yoktur. Ancak dengeye kavuşmadan önce –itmeye devam ettiğiniz müddetçe– kayma kuvvetleri olabilir. *Viskozite* hareket eden bir sıvıdaki bu kayma kuvvetlerini tanımlar. Akışkanın hareketi sırasında kayma kuvvetlerini ölçmek için, şimdi bahsedeceğimiz türden bir deney yapılabilir. Şekil 41-1'de görüldüğü gibi aralarında su olan iki katı levha düşünün. Birini diğerine göre yavaş v_0 hızıyla ilerletirken diğerini sabit tutalım. Üstteki levhanın hareket etmesi için gereken kuvveti ölçtüğünüzde onun, d levhalar arasındaki uzaklıkken, levhaların alanı ve v_0/d'yle orantılı olduğunu göreceksiniz. Dolayısıyla kayma stresi F/A v_0/d'yle orantılıdır:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}$$

η orantı sabitine *viskozite katsayısı* denir.



Şekil 41-2 Viskoz bir akışkandaki kayma stresleri.

Daha karmaşık bir durumla karşı karşıya kaldığımızda, Şekil 41-2'deki gibi su içinde yüzleri akışa paralel, küçük, dikdörtgen bir hücreyi düşünebiliriz her zaman. Bu hücre boyunca kayma gerilmesi aşağıdaki eşitlikle bulunabilir.

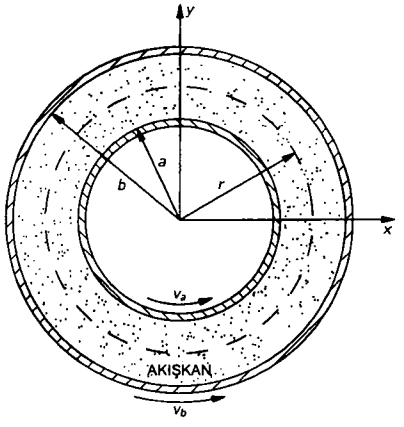
$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{41.2}$$

$\partial v_x/\partial y$ Bölüm 39'da tanımladığımız kayma gerilmesinin *değişim hızıdır*, bir sıvı için kayma stresi kayma gerilmesinin *değişim hızıyla* orantılıdır.

Genel durum için aşağıdaki ifadeyi yazarız:

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tag{41.3}$$

Akışkanın düzgün bir dönmesi varsa, $\partial v_x/\partial y$ $\partial v_y/\partial x$ teriminin eksisidir ve S_{xy} – düzgün dönen bir akışkanda stres olmayacağından– sıfırdır. (Benzeri bir şeyi Bölüm 39'da e_{xy} terimini açıklarken yapmıştık.) Elbette S_{yz} ve S_{zx} için karşılık gelen ifadeler vardır.



Şekil 41-3 Farklı açısal hızlarda dönen iki eş merkezli silindir arasındaki akışkanın akışı.

Bu fikirlerin uygulamasına bir örnek olarak, iki eş eksenli silindir arasındaki bir akışkanın hareketini ele alalım. İçtekinin yarıçapı a ve çevresel hızı v_a ve dıştakinin yarıçapı b ve hızı da v_b olsun (*Bkz.* Şekil 41-3). Silindirler arasındaki hız dağılımını merak edebiliriz. Bu soruyu cevaplamak için, akışkanın içinde eksenden r uzaklığındaki viskoz kayma için bir denklem bulmalıyız. Problemin simetrisinden dolayı akışın daima teğet olduğunu ve büyüklüğünün sadece r'ye dayandığını, $v = v(r)$, varsayabiliriz. Su içinde r yarıçapında bir zerreye baktığımızda, koordinatlarının zamana göre fonksiyonu, $\omega = v/r$ olduğunda, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$x = r \cos \omega t \qquad y = r \sin \omega t$$

Bu durumda hızın x ve y bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$v_x = -r\omega \sin \omega t = -\omega y \qquad \text{ve} \qquad v_y = r\omega \cos \omega t = \omega x \tag{41.4}$$

Denklem (41.2)'den, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$S_{xy} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega) - \frac{\partial}{\partial y}(y\omega) \right] = \eta \left[x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \tag{41.5}$$

$y = 0$'da bir nokta için, $\partial\omega/\partial y = 0$'dır ve $x\partial\omega/\partial x$ $r d\omega/dr$ terimiyle aynıdır. Dolayısıyla o noktada

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr} \tag{41.6}$$

eşitliğini yazabiliriz. (S'nin $\partial\omega/dr$ terimine bağlı olması mantıklıdır; ω'da r'yle bir değişiklik yoksa sıvı düzgün dönmededir ve stres yoktur.)

Şimdi hesapladığımız stres silindirin etrafında her yerde aynı olan teğet kaymadır. *Silindirik bir yüzey boyunca* r yarıçapında etki eden *torku* kayma stresini, moment kolu r ve $2\pi rl$ (l silindirin boyudur) alanıyla çarparak hesaplayabiliriz. Aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\tau = 2\pi r^2 l\,(S_{xy})_{y=0} = 2\pi\eta l r^3 \frac{d\omega}{dr} \tag{41.7}$$

Suyun akışı kararlı olduğundan –açısal ivmelenme yoktur– r ile $r + dr$ arasındaki silindirik su kabuğu üzerindeki net tork sıfır olmalıdır. Dolayısıyla τ'nin, r'den bağımsız olması için, r'deki tork $r + dr$'deki eşit ve zıt bir torkla dengelenmelidir. Diğer bir deyişle, $r^3 d\omega/dr$ bir sabite, diyelim A, eşittir ve böylece aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3} \tag{41.8}$$

İntegralini aldığımızda, ω teriminin r terimiyle aşağıdaki şekilde değiştiğini buluruz:

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B \tag{41.9}$$

A ve B sabitleri $r = a$'da $\omega = \omega_a$ ve $r = b$'de $\omega = \omega_b$ koşullarını sağlayacak şekilde belirlenir. Böylece aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a) \\ B &= \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2} \end{aligned} \tag{41.10}$$

Böylece ω'nun r'nin bir fonksiyonu olduğunu bildiğimizden $v = \omega r$ eşitliğini elde ederiz.

Torku hesaplamak istersek, Denk. (41.7) ve (41.8)'i kullanarak aşağıdaki eşitlikle

$$\tau = 2\pi\eta l A$$

veya aşağıdaki eşitlikle hesaplayabiliriz.

$$\tau = \frac{4\pi\eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2}(\omega_b - \omega_a) \tag{41.11}$$

Tork iki silindirin göreli açısal hızlarına orantılıdır. Viskozite katsayılarını ölçen standart bir cihaz bu şekilde yapılır. Silindirlerden biri –dışardaki olsun– miller üzerindedir, ancak üzerindeki torku ölçen bir yaylı teraziyle sabit tutulmaktadır. İçteki silindirse sabit bir açısal hızla döndürülür. Böylece viskozite katsayısı Denk. (41.11)'den elde edilebilir.

Tanımından, η için birimin Newton·sn/m^2 olduğunu görebilirsiniz. Su için 20°C'de,

$$\eta = 10^{-3}\ \text{newton·sn/m}^2$$

olur. Çoğu zaman, η'in ρ yoğunluğuna bölümü olan *özgül viskoziteyi* kullanmak daha uygundur. Böylece hava ve su için değerler karşılaştırılabilir:

$$\begin{aligned} &\text{20°C'de su,} && \eta/\rho = 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{sn} \\ &\text{20°C'de hava,} && \eta/\rho = 15 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{sn} \end{aligned} \tag{41.12}$$

Viskoziteler son derece sıkı bir şekilde sıcaklığa bağlıdırlar. Örneğin, donma noktasının hemen üstünde su için η/ρ 20°C'de olduğundan 1,8 kat daha büyüktür.

41-2 Viskoz akış

Şimdi viskoz akışın genel kuramına –en azından bildiğimiz en genel biçimine– bakalım. Kayma stresi bileşenlerinin, çeşitli hız bileşenlerinin $\partial v_x/\partial y$ veya $\partial v_y/\partial x$ gibi uzaysal türevleriyle orantılı olduğunu zaten biliyoruz. Bununla birlikte *sıkıştırılabilir* akışkana dair genel durumda streste, hızın diğer türevlerine bağlı bir başka terim vardır. Genel ifade aşağıdaki şekildedir:

$$S_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \eta'\delta_{ij}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{41.13}$$

İfadedeki x_i dikdörtgen koordinatlar x, y veya z'den herhangi biri ve v_i de hızın dikdörtgen koordinatlarından herhangi biridir. (δ_{ij} sembolü Kronecker deltasıdır ve $i = j$ olduğunda 1 ve $i \neq j$ olduğunda 0'dır.) İlave terim, stres tensörü S_{ii} köşegen elemanlarına $\eta'\,\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ ilave eder. Sıvı sıkıştırılamazsa $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$'dır ve bu ilave terim görülmez. Dolayısıyla sıkıştırma sırasındaki iç kuvvetlerle bir ilgisi olmalıdır. Diğer bir deyişle tıpkı homojen esnek bir katıyı tanımlamak için iki sabit gerektiği gibi, sıvıyı tanımlamak için de iki sabit gerekir. η katsayısı daha önce karşılaştığımız "sıradan" viskozite katsayısıdır. Buna ayrıca *viskozitenin ilk katsayısı* ya da "kayma viskozite katsayısı" ve yeni η' katsayısına da *ikinci viskozite katsayısı* denir.

Şimdi, gerçek bir akışkanın hareket denklemini elde etmek için Denk. (41.1)'e yerleştirmemiz gereken birim hacimdeki viskoz kuvveti, f_{visk}, hesaplayalım. Akışkanın küçük bir kübik elemanındaki kuvvet, bütün altı yüzündeki kuvvetlerin sonucudur. İkişer ikişer ele alırsak, streslerin türevlerine bağlı farkları ve böylece hızın ikinci türevlerini elde ederiz. Bu hoştur, çünkü yine vektör denklemine geri götürecektir bizi. Birim hacimdeki viskoz kuvvetin x_i dikdörtgen koordinatı yönündeki bileşeni aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}(f_{\text{visk}})_i &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta'\nabla \cdot \boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{41.14}$$

Viskozite katsayılarının konumla değişimi genelde önemli değildir ve ihmal edilebilir. Böylece birim hacimdeki viskoz kuvvet sadece hızın ikinci türevlerini içerir. Bölüm 39'da bir vektör denkleminde ikinci türevlerin olabileceği en genel biçimin Laplace işlemi $\nabla \cdot \nabla\boldsymbol{v} = \nabla^2\boldsymbol{v}$ içinde bir terimin ve diverjansın gradyanı ($\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$)içindeki bir terimin toplamı olduğunu görmüştük. Denklem (41.14) η ve $(\eta + \eta')$ katsayılarının toplamıyla tam da öyledir. Aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$f_{\text{visk}} = \eta\nabla^2\boldsymbol{v} + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{41.15}$$

Sıkıştırılmazlık durumunda $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$'dır ve birim hacimdeki viskoz kuvvet $\eta\nabla^2\boldsymbol{v}$ olur. Birçok insan bunu kullanır; ancak bir akışkan içinde sesin soğurulmasını hesaplamak isterseniz ikinci terime ihtiyacınız vardır.

Artık gerçek bir akışkan için hareket denklemimizi tamamlayabiliriz. Denklem (41.1)'e Denk. (41.15)'i yerleştirirsek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right\} = -\nabla p - \rho\nabla\phi + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$

Karmaşıktır, ancak doğanın işleyişi de öyledir.

Daha önce yaptığımız gibi girdaplılığı, $\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$, ilave ettiğimizde denklemimizi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2\right\} = -\nabla p - \rho\nabla\phi + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} \\ + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{41.16}$$

Yine, etkiyen tek cisim kuvvetlerinin kütleçekim gibi korunumlu kuvvetler olduğunu varsaymaktayız. Yeni terimin ne anlama geldiğini görmek için sıkıştırılamaz akışkan durumunu ele alalım. Denklem (41.16)'nın bükümünü alırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega \tag{41.17}$$

Sağdaki yeni terim haricinde, bu tıpkı Denk. (40.9) gibidir. Sağ taraf sıfır olduğunda, girdaplılığın akışkanla kaldığını söyleyen Helmholtz teoremini elde etmiştik. Şimdiyse elimizde, doğrudan fiziksel sonuçları olan ve sıfır olmayan gayet karmaşık bir sağ taraf var. Şimdilik $\nabla \times (\Omega \times v)$ terimini ihmal edersek, elimizde bir *difüzyon* (*yayınım*) *denklemi* vardır. Yeni terimin anlamı Ω girdaplılığın akışkan içinde *yayıldığıdır*. Girdaplılıkta büyük bir gradyan varsa, komşu akışkana doğru yayılacaktır.

İşte bu terim duman halkasının yayıldıkça kalınlaşmasına yol açar. Ayrıca bir duman bulutu içine "temiz" bir girdap (son bölümde tarif ettiğimiz cihazla yapılan "dumansız" halka) gönderirseniz de ortaya çıkar. Buluttan çıktığında bir miktar duman toplamış olacaktır ve içi boş bir duman halkası kabuğu görürsünüz. Ω'nın bir miktarı, girdapla beraber ileri doğru hareketini korurken, dumanın içine doğru yayılır.

41-3 Reynolds sayısı

Şimdi de, yeni viskozite teriminin sonucu olarak akışkan akışının karakterini değiştiren özelliklerini tanımlayacağız. İki probleme detaylıca bakacağız. Bunlardan biri bir silindir etrafındaki akıştır. Daha önce bu akışı viskoz olmayan akış kuramını kullanarak hesaplamaya çalışmıştık. Günümüzde viskoz denklemlerin sadece birkaç özel durum için çözülebildiği ortaya çıktı. Dolayısıyla şimdi size anlatacaklarımızın bazıları –deneysel modelin Denk. (41.17)'yi sağladığını varsayarak– deneysel ölçümlere dayanmaktadır.

Matematiksel problem şudur: D çapında uzun bir silindirin etrafından geçen sıkıştırılamaz viskoz bir akışkan için çözüm aramaktayız. Akış, uzak mesafelerde hızın sabit bir hız, V diyelim (x eksenine paralel) ve silindirin yüzeyindeki hızın da sıfır olması koşuluyla Denk. (41.17) ve

$$\Omega = \nabla \times v \tag{41.18}$$

eşitliğiyle belirlenir. Dolayısıyla,

$$v_x = v_y = v_z = 0 \tag{41.19}$$

için aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}$$

Böylece matematiksel problemi tamamen belirlemiş oluruz.

Denklemlere bakarsanız, problem için dört farklı parametre olduğunu görürsünüz: η, ρ, D ve V. Farklı V'ler, farklı D'ler vb için bir dizi durum belirtmemiz gerekeceğini düşünebilirsiniz. Ancak durum bu değildir. Bütün farklı, olası çözümler *bir parametrenin* farklı değerlerine karşılık gelir. Viskoz akış için söyleyebileceğimiz en önemli genel şey budur. Bunun neden böyle olduğunu görmek için viskozite ve yoğunluğun sadece *özgül* viskozitede, η/ρ oranında göründüğüne dikkatinizi çekeriz. Bu, bağımsız parametrelerin sayısını üçe indirir. Şimdi de bütün mesafeleri sadece silindirin çapı D cinsinden ölçtüğümüzü varsayalım. Dolayısıyla, x, y, z terimlerini yeni x', y' ve z' değişkenleriyle aşağıdaki şekilde yazarız:

$$x = x'D, \qquad y = y'D, \qquad z = z'D$$

Böylece D, Denk. (41.19)'dan kalkar. Aynı şekilde, $v = v'V$ eşitliğini yazarak bütün hızları V cinsinden ölçersek, V'den kurtuluruz ve v' de uzak mesafeler için

sadece 1'e eşit olur. Boy ve hız birimlerimizi sabitlediğimizden, yeni zaman birimimizi D/V olarak yazabiliriz. Bu yüzden aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$t = t'\,\frac{D}{V} \tag{41.20}$$

Yeni değişkenlerimizle, Denk. (41.18)'deki türevler $\partial/\partial x$ yerine $(1/D)\partial/\partial x'$ olur ve bu böyle sürer. Böylece, Denk. (41.18) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{V}{D}\,\nabla' \times \boldsymbol{v}' = \frac{V}{D}\,\Omega' \tag{41.21}$$

Böylece ana denklemimiz (41.17) şu eşitliği verir:

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t'} + \nabla' \times (\Omega' \times \boldsymbol{v}') = \frac{\eta}{\rho V D}\,\nabla'^2\Omega'$$

Bütün sabitler, geleneği sürdürerek $1/\mathcal{R}$ şeklinde yazdığımız tek bir çarpana sıkıştırılabilir:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho}{\eta} VD \tag{41.22}$$

Bütün denklemlerimizin yeni birimlerle yazılmaları gerektiğini unutmazsak, üsleri silebiliriz. Böylece akış için denklemlerimiz

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\mathcal{R}}\,\nabla^2\Omega \tag{41.23}$$

ve

$$\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$$

olur. Bu denklemlerin ön koşulları da

$$\boldsymbol{v} = 0$$

için

$$x^2 + y^2 = 1/4 \tag{41.24}$$

ve

$$v_x = 1 \qquad v_y = v_z = 0$$

için

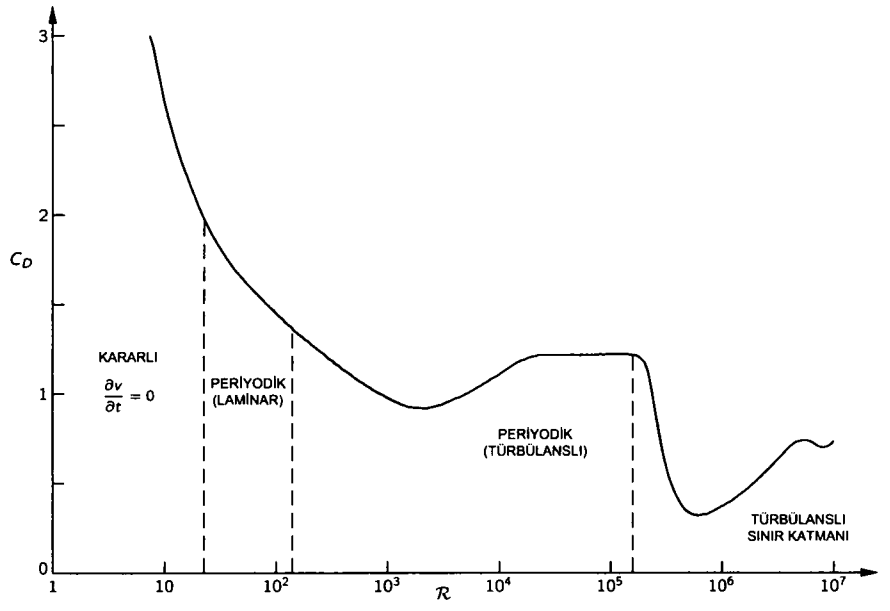
$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1$$

olarak ifade edilebilir.

Bunun fiziksel olarak ne anlama geldiği çok ilginçtir. Örneğin, D_1 çağındaki bir silindir ve V_1 hızı için akış problemini çözdüğümüzde ve farklı bir akışkan ile farklı bir D_2 çapı için akışı hesaplamak istediğimizde, akış Reynolds sayısını veren V_2 hızı için aynı olacaktır. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitlikle bunu ifade edebiliriz:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2 \tag{41.25}$$

Aynı Reynolds sayısına sahip iki durumda, akışlar, uygun ölçekli x', y', z' ve t' cinsinden, aynı "görünecektir". Bu önemli bir önermedir çünkü bir uçak kanadının etrafından geçen akışın davranışını belirlemek için bir uçak yapmak ve üzerinde deney yapmak zorunda değiliz. Bunun yerine bir modelini yapar ve aynı Reynolds sayısını verecek hızı kullanarak ölçümleri yapabiliriz. Bu ilke sayesinde "rüzgâr tüneli" sonuçlarını küçük ölçekli uçaklara veya model tekneler üzerindeki "model havuzu" sonuçlarını tam ölçekli nesnelere uygulayabiliriz. Ancak unutmayın, bunu sadece akışkanın sıkıştırılabilirliğinin ihmal edilebildiği durumlarda yapabiliriz. Öteki türlü devreye yeni bir nicelik girer: ses hızı. Farklı durumlar birbirine sadece V'nin ses hızına oranı da ayrıca eşit olduğunda karşılık gelebilir. Bu orana *Mach sayısı* denir. Diğer bir deyişle, ses hızına yakın veya üstündeki akışlarda iki farklı durum sadece, *hem Mach sayısı* hem de *Reynolds* sayısı eşit olduğunda birbirlerine eşit olur.



Şekil 41-4 Dairesel bir silindir için Reynolds sayısının bir fonksiyonu olarak sürüklenme katsayısı C_D.

41-4 Dairesel bir silindir etrafında akış

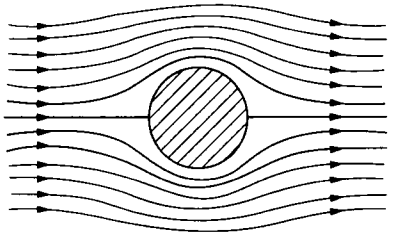
Silindir üzerinden düşük hızlı (neredeyse sıkıştırılamaz) akış problemine geri dönelim. Gerçek bir akışkanın niceliksel bir tanımını vereceğiz. Bu tür bir akış hakkında bilmek isteyeceğimiz birçok şey vardır. Örneğin, silindir üzerindeki sürüklenme kuvveti nedir? Bir silindir üzerindeki sürüklenme kuvveti Şekil 41-4'te $\mathcal{R}$'nin bir fonksiyonu olarak çizilmiştir. Diğer her şey sabitken, $\mathcal{R}$ hava hızı V'yle orantılıdır. Aslında çizilen şey *sürüklenme katsayısı* denilen, boyutsuz bir sayı olan ve D çap, l silindirin boyu ve ρ de sıvının yoğunluyken, kuvvetin $\frac{1}{2}\rho V^2 Dl$'ye bölümü olan C_D'dir:

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 Dl}$$

Sürüklenme katsayısı, akış içinde gayet karmaşık bir şeyler olduğuna dair bir ipucu vererek gayet karmaşık bir şekilde değişir. Şimdi, Reynold sayısı için farklı aralıklarda akışın doğasını tanımlayacağız. Önce, Reynolds sayısı küçükken akış gayet kararlıdır yani hız her yerde sabittir ve akış silindirin etrafından geçer gider. Akış çizgilerinin esas dağılımıysa, potansiyel akıştaki gibi değildir. Biraz farklı bir denklemin çözümleridir. Hız çok düşük olduğunda ya da eşdeğeri olarak viskozite akışkanı bal kıvamına getirecek kadar yüksekse, bu durumda atalet terimleri ihmal edilebilir ve akış aşağıdaki denklemle ifade edilebilir:

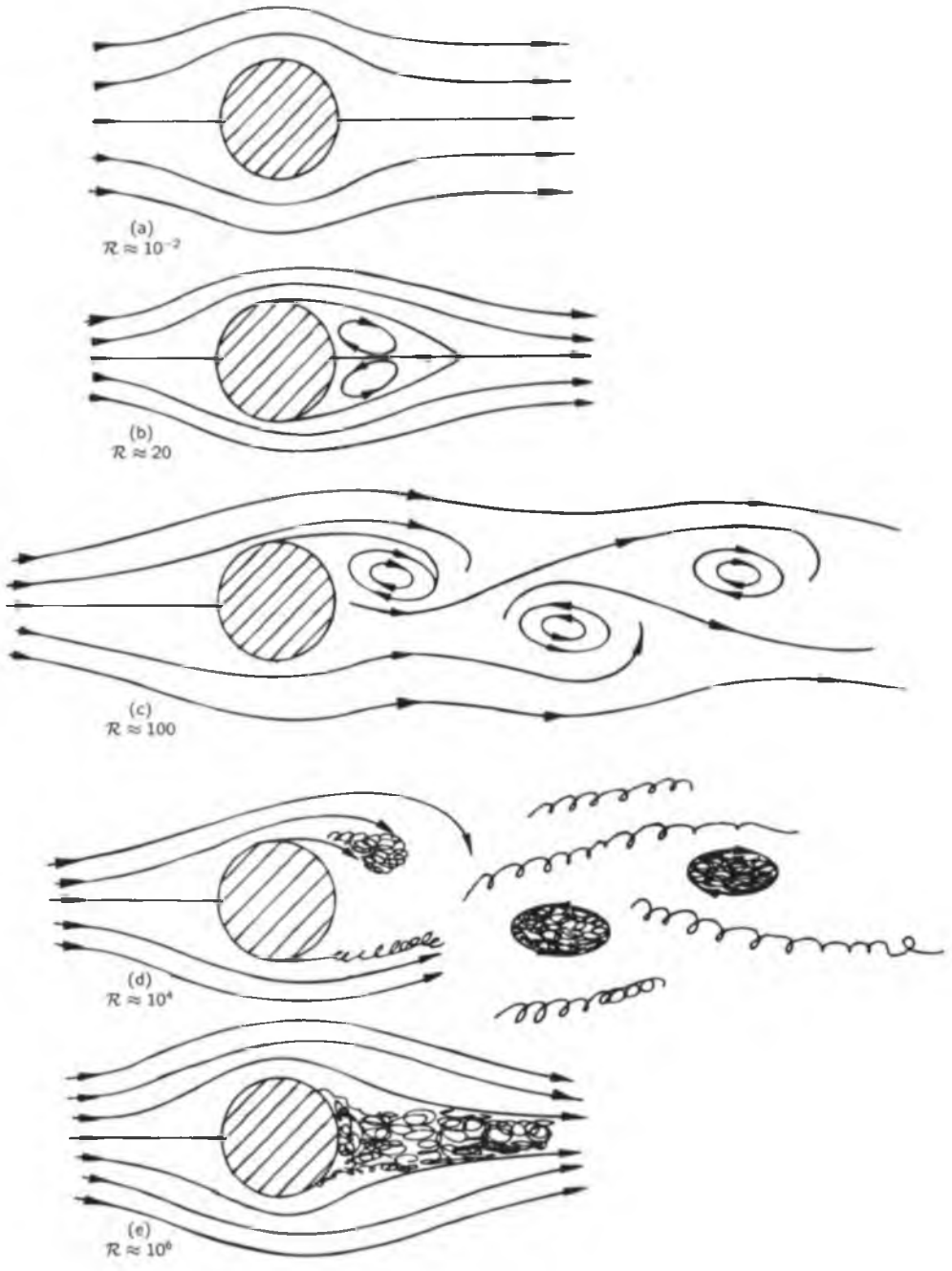
$$\nabla^2 \Omega = 0$$

Bu denklem ilk olarak Stokes tarafından çözülmüştür. Stokes, aynı problemi ayrıca küre için de çözmüştür. Düşük Reynolds sayısını sağlayan koşullar altında ilerleyen küçük bir küreniz varsa, onu sürüklemek için gerekli kuvvet, a kürenin yarıçapı ve V de hızıyken, $6\pi\eta aV$'dir. Bu çok yararlı bir denklemdir; çünkü bize belirli bir kuvvetin etki ettiği küçük kir parçacıklarının (ya da küre olarak yakınlaştırılabilecek diğer parçacıkların) akışkan içinde nasıl hareket ettiğini anlatır. Örneğin, bir santrifüjde, bir çökeltide veya bir yayılmada. $\mathcal{R}$'nin 1'den küçük olduğu düşük Reynolds sayısı bölgesinde *silindir* etrafındaki v çizgileri Şekil 41-5'te gösterilmiştir.



Şekil 41-5 Dairesel bir silindir etrafında viskoz (düşük hızlar) akış.

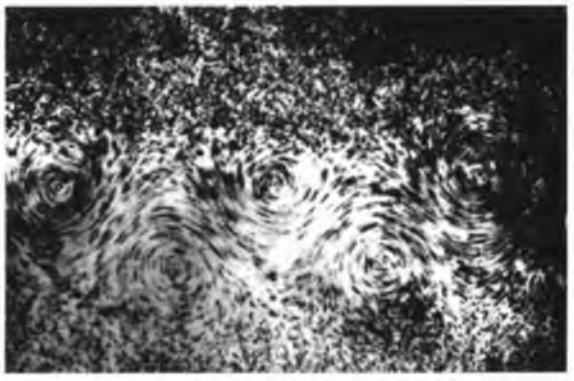
Şimdi akışkanın hızını, Reynolds sayısını 1'den büyük olacak hale getirirsek akışın değiştiğini görürüz. Kürenin arkasında, Şekil 41-6(b)'de görüldüğü gibi



Şekil 41-6 Çeşitli Reynolds sayıları için bir silindirin etrafından akış.

bir dolaşım vardır. En küçük Reynolds sayısındayken bile orada bir dolaşım olup olmadığı ya da işlerin belli bir Reynolds sayısında aniden değişip değişmediği hâlâ muammadır. Dolaşımın sürekli bir şekilde büyüdüğü düşünülürdü. Ancak şimdi bir anda ortaya çıktığı düşünülmekte ve dolaşımın $\mathcal{R}$'yle arttığı kesindir. Her durumda, $\mathcal{R}$ değeri için 10'dan 30'a kadar olan bölgede farklı bir akış özelliği vardır. Silindir ardında bir çift girdap vardır.

Akış zamanla, 40 veya benzeri bir sayıya yaklaştığımızda bozulur. Bir anda hareketin niteliğinde tam bir değişiklik olur. Olan şey, girdaplardan birinin parçalanacak kadar uzaması ve akışkanların beraber ilerlemeye başlamasıdır. Daha sonra akışkan, silindirin arkasında bükülür ve yeni bir girdap meydana getirir. Girdaplar sırayla her bir tarafta sökülür, dolayısıyla akışın anlık bir görüntüsü kabaca Şekil 41-6(c)'de çizildiği gibidir. Girdaplar akımına "Kármán



Şekil 41-7 Bir silindirin arkasındaki akıştaki "girdap yolu"na ait Ludwig Prandtl'ın çektiği fotoğraf.

girdap yolu" denir. Daima $\mathcal{R} > 40$ olduğu zaman görünürler. Böyle bir akışın fotoğrafı Şekil 41-7'de gösterilmiştir.

Şekil 41-6(c) ve 41-6(b) veya 41-6(a)'daki iki akış arasındaki fark düzende nerdeyse tam bir farktır. Şekil 41-6(a) veya (b)'de hız sabitken, Şekil 41-6(c)'de hız herhangi bir noktada zamanla değişir. Şekil 41-4'te kesikli çizgiyle belirttiğimiz $\mathcal{R} = 40$'ın üzerinde hiç kararlı bir çözüm yoktur. Bu yüksek Reynolds sayıları için akış *düzenli*, döngüsel bir şekilde değişkenlik gösterir.

Bu girdapların nasıl meydana geldiğine dair fiziksel bir fikir edinebiliriz. Bir silindirin yüzeyinde akışkan hızının sıfır olması gerektiğini ve yüzeyden uzakta hızla arttığını biliyoruz. Girdap, akışkan hızındaki bu büyük yerel değişimle yaratılır. Ana akım hızı düşük olduğunda, girdap için yaratıldığı yer olan katı yüzeyin yakınındaki ince alanından daha büyük bir girdap alanına yayılmak için yeterli zaman vardır. Bu fiziksel betimleme, ana akım hızı veya $\mathcal{R}$ arttıkça akışın doğasında meydana gelecek bir sonraki değişikliğe bizi hazırlayabilir.

Hız gitgide arttıkça, girdabın daha büyük bir akışkan bölgesine yayılmak için zamanı azalır. Birkaç yüz Reynolds sayısına ulaştığımızda, girdap Şekil 41-6(d)'de görüldüğü gibi ince bir şeridi doldurmaya başlar. Bu katmanda akış kaotik ve düzensizdir. Bu bölgeye *sınır tabakası* denir $\mathcal{R}$ arttıkça bu düzensiz akış bölgesi gitgide daha uzağa yayılır. Türbülanslı bölgede hızlar çok düzensiz ve "sesli"dir; ayrıca akış artık iki boyutlu değildir. Her üç boyutta da burkulur ve döner. Hâlâ, türbülans hareketinin üzerine bindirilmiş düzenli değişken bir hareket vardır.

Reynolds sayısı daha da arttıkça, türbülanslı bölge akış çizgilerinin silindiri terk ettiği – $\mathcal{R} = 10^5$ değerinin üzerindeki akışlarda– bir noktaya ulaşır. Akış Şekil 41-6(e)'de gösterildiği gibidir ve "türbülanslı sınır tabakası"yla karşılaşırız. Ayrıca sürüklenme kuvvetinde de büyük bir değişiklik vardır; Şekil 41-4'te gösterildiği gibi büyük bir çarpanla düşer. Bu hız bölgesinde, sürüklenme kuvveti artan hızla beraber aslında *azalır*. Periyodikliğe dair çok az kanıt vardır.

Daha da büyük Reynolds sayılarında ne olur? Hızı daha da artırdığımızda, anafor yine büyür ve sürüklenme artar. $\mathcal{R} = 10^7$'ye kadar çıkan son deneyler anaforda yeni bir periyodikliğin meydana geldiğini göstermekte. Bu ya bütün anaforun büyük bir hareketle ileri geri salınmasından ya da düzensiz sesli bir hareketle beraber yeni bir tür girdabın oluşmasından dolayıdır. Detaylar henüz tamamen açık değildir ve hâlâ üzerinde deneyler yapılmaktadır.

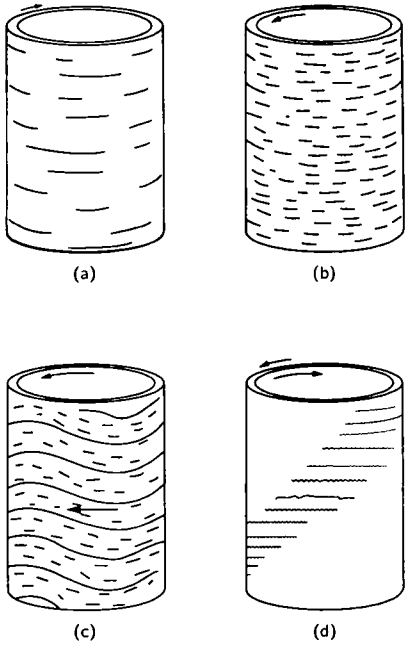
41-5 Sıfır viskozite limiti

Şu ana kadar tanımladığımız akışların hiçbirinin, bir önceki bölümde bulduğumuz potansiyel akış çözümü gibi olmadığını belirtmek isteriz. Bu, ilk bakışta çok şaşırtıcıdır. Sonuçta $\mathcal{R}$, $1/\eta$ değeriyle orantılıdır. Dolayısıyla η değerinin sıfıra gitmesi $\mathcal{R}$'nin sonsuza gitmesine eşittir. Denklem (41.23)'teki büyük $\mathcal{R}$ değerinin limitini alırsak, sağ taraftan kurtulur ve son bölümdeki denklemleri

elde ederiz. Yine de, $\mathcal{R} = 10^7$ değerine sahip yüksek türbülanslı bir akışın "kuru" su denklemlerinden hesaplanan düzgün akışa yaklaştığına inanmakta güçlük çekebilirsiniz. $\mathcal{R}$ sonsuza yaklaştıkça Denk. (41.23) tarafından belirlenen akım, $\eta = 0$ eşitliğini kabulüyle başlayarak elde ettiğimiz akımdan tamamıyla farklı bir çözüm sunabilir? Cevap çok ilginçtir. Dikkat ederseniz Denk. (41.23)'ün sağ tarafında $1/\mathcal{R}$ çarpı *ikinci dereceden bir türev* vardır. Denklemdeki herhangi bir türevden daha yüksek dereceli bir türevdir. Her ne kadar $1/\mathcal{R}$ katsayısı küçükse de, yüzey yakınındaki uzayda Ω'nın süratli değişimleri vardır. Bu süratli-değişimler küçük katsayıyı telafi eder ve bu sayede çarpım artan $\mathcal{R}$ değeriyle *sıfıra gitmez*. $\nabla^2\Omega$'nın katsayısı sıfıra gittikçe çözümler sınırlayıcı duruma yaklaşmazlar.

"İnce taneli türbülans nedir ve kendisini nasıl sürdürür? Silindirin kenarında bir yerde meydana gelen girdaplılık ardalanda nasıl bu kadar çok gürültü çıkartabiliyor?" diye merak edebilirsiniz. Cevap yine ilginçtir. Girdaplılık kendi kendini büyütme eğilimindedir. Kayıp yaratan girdaplılık yayılımını bir an için unutursak, akış yasaları (daha önce gördüğümüz gibi) girdap çizgilerinin akışla beraber $\boldsymbol{v}$ hızında taşındığını söyler. $\boldsymbol{v}$'nin karmaşık akış örüntüsüyle bozulan ve burkulan Ω çizgilerini hayal edebiliriz. Bu, çizgileri bir araya getirir ve hepsini birbirine karıştırır. Daha önce basit olan çizgiler düğümlenecek ve birbirlerine doğru çekileceklerdir. Birlikte daha uzun ve daha sıkı olacaklardır. Girdaplılığın şiddeti ve düzensizlikleri –artılar ve eksiler– genelde artacaktır. Dolayısıyla üç boyutta girdaplılığın büyüklüğü akışkan kıvrıldıkça artacaktır.

"Bu durumda potansiyel akışı ne zaman tatmin edici bir kuram olur?" diye sorabilirsiniz. İlk başta, türbülanslı bölgenin dışında, girdaplılığın yayılımla girmediği yerde tatmin edicidir. Özel aerodinamik cisimler sayesinde türbülanslı bölgeyi mümkün olduğunca küçük tutabiliriz. Dikkatlice tasarlanan uçak kanatlarının etrafındaki akış neredeyse tamamen gerçek potansiyel akıştır.

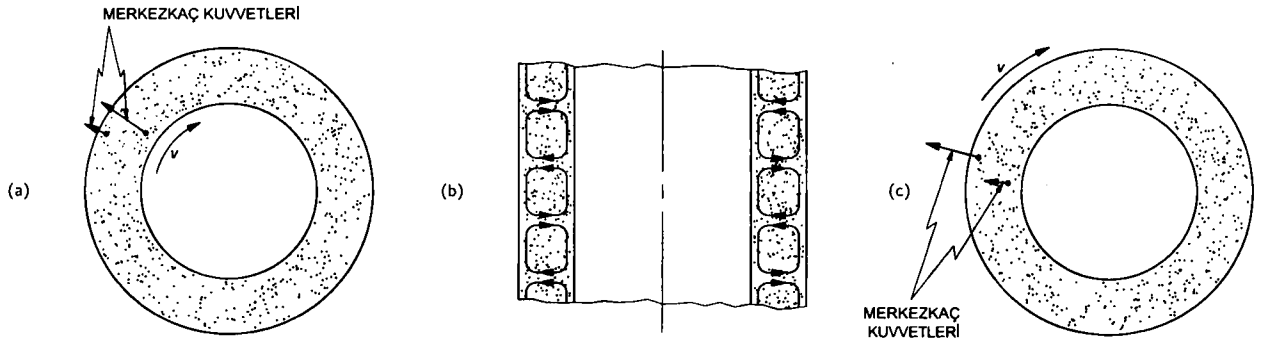


Şekil 41-8 İki şeffaf dönen silindir arasındaki sıvı akış örüntüleri.

41-6 Couette akışı

Bir silindirin etrafındaki karmaşık ve değişken akışın niteliğinin özel olmadığını ancak genelde birçok akış olasılığı gerçekleştiğini göstermek mümkündür. Bölüm 41-1'de iki silindir arasındaki viskoz akış için bir çözüm geliştirmiştik ve sonuçları gerçekte olan bitenle karşılaştırabiliriz. Aralarındaki boşlukta yağ olan iki eş eksenli silindir alır ve yağda asılı kalacak şekilde ince alüminyum tozu dökersek akışı görmek kolaylaşır. Dıştaki silindiri yavaşça döndürürsek beklenmedik bir şey olmaz; *bkz.* Şekil 41-8(a). Alternatif olarak, içteki silindiri yavaşça döndürürsen çok çarpıcı bir şey olmaz. Ancak, içerdeki silindiri daha yüksek hızda döndürürsek bir sürprizle karşılaşırız. Akışkan, Şekil 41-8(b)'de gösterildiği gibi yatay şeritlere ayrılır. İçerdeki silindir durağanken, dışardaki silindir benzer bir hızda döndüğündeyse böyle bir etkiyle karşılaşmayız. İçteki silindiri döndürmek ile dıştakini döndürmek arasında nasıl bir fark olabilir ki? Sonuçta Bölüm 41-1'de çıkardığımız akış örüntüsü sadece $\omega_b - \omega_a$ terimine dayanır. Cevabı Şekil 41-9'da gösterilen kesitlere bakarak anlayabiliriz. Akışkanın iç katmanları dıştakilerden daha hızlı hareket ettiğinde, dışarı doğru hareket etme eğilimindedirler. Merkezkaç kuvveti onları yerinde tutan basınçtan daha fazladır. Bütün bir katman düzgün olarak dışarı ilerleyemez çünkü önlerinde dış katmanlar vardır. Şekil 41-9(b)'de gösterildiği gibi hücrelere bölünmeli ve dolaşmalıdır. Tabanında sıcak hava bulunan bir odadaki konveksiyon akımları gibi. İçteki silindir durağanken ve dıştaki silindir yüksek bir hıza sahipken merkezkaç kuvvetleri her şeyi dengede tutan *–bkz.* Şekil 41-9(c) (tavanda sıcak hava bulunan bir odadaki gibi)– bir basınç gradyanı meydana getirir.

Şimdi de içerdeki silindiri hızlandıralım. Önce şeritlerin sayısı artar. Aniden şeritlerin, Şekil 41-8(c)'deki gibi, dalgalı hale geldiğini görürsünüz ve dalgalar silindirin etrafında hareket eder. Bu dalgaların hızı kolaylıkla ölçülebilir. Yüksek dönme hızları için iç silindirin hızının 1/3'üne yaklaşırlar. Ve kimse bunun



Şekil 41-9 Akışın neden şeritlere ayrıldığı.

neden olduğunu bilmez. İşte bir zorluk. 1/3 gibi basit bir sayı ve açıklaması yok. Aslında bütün bu dalga oluşumunun işleyişi çok da anlaşılamamıştır; yine de kararlı laminer akıştır.

Şimdi de dıştaki silindiri –ancak zıt yönde– döndürmeye başlarsak, akış örüntüsü parçalanmaya başlar. Şekil 41-8(d)'de çizildiği gibi dalgalı bölgeler ile sakin bölgeler birbirlerini takip etmeye ve bir spiral örüntü ortaya çıkarmaya başlarlar. Ancak bu "sakin" bölgelerde akış aslında gayet düzensizdir. Hatta tamamen türbülanslıdır. Dalgalı bölgeler de düzensiz türbülanslı akış belirtileri göstermeye başlarlar. Silindirler daha da hızlı döndürülürse, bütün akış kaotik bir şekilde türbülanslı hale gelir.

Bu basit deneyde birbirinden farklı akış bölgeleri gözlemledik ve hepsi de basit denklemimizdeki tek bir parametre $\mathcal{R}$'nin çeşitli değerlerinde saklıdır. Dönen silindir sayesinde bir silindir etrafında gerçekleşen akışla ilgili birçok etkiyi görebiliriz: Öncelikle kararlı bir akış vardır; sonra zamanla düzenli, akıcı bir şekilde değişen bir akış belirir ve son olarak akış tamamen düzensiz olur. Bütün bu etkileri sakin bir havada bir sigaradan yükselen dumanda görebilirsiniz. Önce çok düzgün kararlı bir duman sütunu yükselir, sonra bir dizi burkulmalarla duman parçalanmaya başlar ve sonunda düzensiz bir duman bulutu gözlemlenir.

Bütün bunlardan çıkarılacak esas ders, (41.23)'teki basit denklemler kümesinde çok büyük miktarda davranış çeşitliliğinin saklı olduğudur. Bütün çözümler aynı denklemler içindir, sadece $\mathcal{R}$ değerleri farklıdır. Denklemlerde eksik terim olduğunu düşünmemiz için neden yoktur. Tek karşılaştığımız zorluk, çok küçük Reynolds sayıları –tamamen viskoz akış durumu– için onları analiz edebilecek matematiksel yeterliliğimizin olmamasıdır. Bir denklem yazmış olmamız akışkanların akışından büyüyü, gizemi veya onun şaşırtıcılığını ortadan kaldırmaz.

Tek bir parametreli basit bir denklem sayesinde bu kadar değişkenlik mümkünse, daha karmaşık denklemlerle ne kadar daha fazlası mümkündür kim bilir! Belki de sarmal nebulaları ve yoğuşan, dönen ve patlayan yıldızları ve galaksileri tanımlayan temel denklem, neredeyse saf hidrojen gazının hidrodinamik davranışını açıklayan basit bir denklemdir. Fiziğe dair yersiz korkuları olan bazı insanlar sıklıkla hayat için bir denklem yazılamayacağını söylerler. Belki de yazabiliriz. Aslında aşağıdaki kuantum mekanik denklemini yazdığımızda o denkleme yeterince yakınlaşmış olabiliriz:

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Olguların karmaşıklıklarının onları tanımlayan denklemlerin basitliğinden kolayca ve çarpıcı bir şekilde çıkabileceğini az önce gördük. Basit denklemlerinin kapsamından habersiz olduklarından insanlar, sadece denklemlerin işe yaramayacağını ve Tanrı'dan başka hiçbir şeyin dünyanın karmaşıklıklarını açıklayamayacağı sonucuna vardılar.

Su akışı için denklemleri yazdık. Deneyle, sonucu tartışmak için kullanacağımız bir dizi kavram ve yakınlaştırma –girdap yolları, türbülans burgaçları, sınır tabakaları– bulduk. Daha az benzer ve henüz deneyini yapamayacağımız bir durumda elimizde benzer denklemler olduğunda, denklemleri ilkel, aksak ve karışık bir şekilde çözmeye çalışarak ne tür yeni niceliksel özelliklerin çıkabileceğini veya denklemlerin sonucunda ne tür yeni niceliksel biçimler oluşabileceğini belirlemeye çalışırız. Örneğin, hidrojen gazından oluşan bir top olan güneş için denklemler lekeleri, yüzeyinde "prinç tanesi" yapısı, gaz bulutları, haleleri olmayan bir yıldızı tanımlamaktadır. Bütün bunlar gerçekten denklemlerin içindedir, sadece onları nasıl çıkaracağımızı bulamadık.

Diğer gezegenlerde yaşam bulunamayınca hayal kırıklığına uğrayacak insanlar vardır. Ben öyle değilim. Ben her seferinde, gezegenler arası keşifler sayesinde ortaya çıkacak ve bu kadar basit ilkelerle açıklanabilecek olguların sonsuz çeşitliliği ve ilginçliğini hatırlamak, sevinmek ve şaşırmak istiyorum. Bilim öngörme yeteneğiyle sınanır. Dünyayı hiç ziyaret etmemiş olmasaydınız gök gürültülü fırtınaları, volkanları, okyanus dalgalarını, Kuzey ışıklarını ve renk cümbüşü gün batımını tahmin edebilir miydiniz? Her biri ölü o gezegenlerde –her biri aynı toz bulutundan doğmuş ve tamamen aynı fizik yasalarına uyan o sekiz on kürede– neler olup bittiğini öğrenmek bizim için faydalı bir ders olacaktır.

İnsan zekâsının bir sonraki büyük uyanış dönemi, denklemlerin niceliksel içeriğini anlamaya dair bir yöntem geliştirebilir. Bugün o aşamada değiliz. Bugün, su akış denklemlerinin iki dönen silindir arasında kedi merdiveni şeklinde görünen türbülanslı yapıyı içerdiğini göremiyoruz. Bugün Schrödinger'in denkleminin kurbağaları, müzisyenleri veya ahlakı içerip içermediğini göremiyoruz. Denklemin ötesinde Tanrı benzeri bir şeye ihtiyaç duyup duyamayacağımızı söyleyemiyoruz. Bu yüzden her iki taraf da fikirlerini güçlü bir şekilde savunabilir.

42
EĞRİ UZAY

42-1 İki boyutlu eğri uzaylar

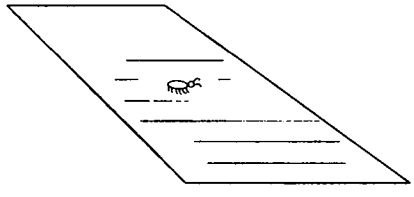
42-1 İki boyutlu eğri uzaylar
42-2 Üç boyutlu uzayda eğrilik
42-3 Uzayımız eğridir
42-4 Uzay-zamanda geometri
42-5 Kütleçekim ve eşdeğerlik ilkesi
42-6 Kütleçekim alanında saatlerin hızı
42-7 Uzay-zamanın bükülmesi
42-8 Eğri uzay-zamanda hareket
42-9 Einstein'ın kütleçekim kuramı

Newton'a göre her şey, her şeyi aralarındaki mesafenin karesiyle ters orantılı bir kuvvetle çeker ve nesneler bu kuvvetlere onlarla orantılı ivmelenmelerle tepki gösterirler. Bunlar Newton'ın evrensel kütleçekim ve hareket yasalarıdır. Bildiğiniz üzere topların, gezegenlerin, uyduların, galaksilerin ve daha nicelerinin hareketini belirlerler.

Einstein'ın kütleçekim yasasına dair farklı bir yorumu vardır. Ona göre uzay ve zaman –beraber uzay-zaman şekilde anılmalıdır– ağır kütlelerin yakınında *eğrilir*. Bu eğri uzay-zamanda nesnelerin "düz çizgiler" üzerinde gitmeye çalışmaları da onların hareketini belirler. Bu karmaşık –çok karmaşık– bir fikirdir. Bu bölümde açıklamak istediğimiz fikir de budur.

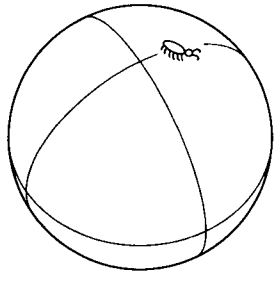
Konumuzun üç kısmı vardır. Biri kütleçekimin etkilerini içerir. Diğeri daha önceden üzerinde durduğumuz uzay-zaman fikirlerini içerir. Üçüncüsü de eğri uzay-zaman fikrini içerir. Konumuzu basitleştirmek için kütleçekim ve zamanı bir kenara koyacak ve sadece eğri uzayı tartışacağız. Diğer kısımlara sonra geleceğiz, ancak şimdi eğri uzay fikrine –eğri uzayın ne anlama geldiğine, daha da özel olarak Einstein'ın uygulamasında eğri uzayın ne anlama geldiğine– odaklanacağız. Bu bile üç boyutta yeterince zor bir şeydir. Dolayısıyla problemi daha da basite indirgeyecek ve iki boyutta "eğri uzay" kelimelerinin ne anlama geldiğini konuşacağız.

İki boyutlu eğri yüzey fikrini tam olarak anlayabilmek için, böyle bir uzayda yaşayan bir karakterin sınırlı bakış açısını özümsemeniz gerekir. Gözleri olmayan bir böceğin, Şekil 42-1'deki gibi bir düzlem üzerinde yaşadığını düşünelim. Sadece bu düzlemde hareket edebilir ve "dış dünya"yı keşfedebileceğini bilemez. (Sizin hayal gücünüze sahip değildir.) Elbette benzerlikle akıl yürüteceğiz. *Biz* üç boyutlu dünyada yaşıyoruz ve üç boyutlu dünyamızın dışında bir başka yöne girmeye dair bir hayal gücümüz yoktur; dolayısıyla bu şeyi benzerlik kurarak düşünmeliyiz. Sanki bir düzlemde yaşayan böceklermişiz ve bir başka yönde uzay varmış gibi. Bu yüzden önce yüzeyde yaşayan ve oradan çıkamayan bir böceği inceleyeceğiz.



Şekil 42-1 Düz bir yüzeyde bir böcek.

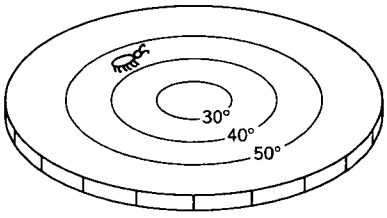
İki boyutta yaşayan böceğe dair bir başka örnek olarak bir küre üzerinde yaşayan bir böceği ele alalım. Şekil 42-2'de göründüğü gibi kürenin yüzeyinde yürüyebilir, ancak "yukarı", "aşağı" veya "dışarı" bakamaz.



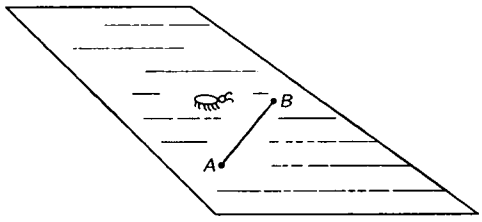
Şekil 42-2 Bir küre üzerinde böcek.

Şimdi de *üçüncü* bir tür böceği ele alalım. O da diğerleri gibidir ve ilk böceğimiz gibi bir düzlem üzerinde yaşar; ancak bu düzlem biraz gariptir. Düzlemin farklı yerlerinde farklı sıcaklıklar vardır. Ayrıca böcek ve kullandığı bütün cetveller ısıtılınca genişleyen bir malzemeden yapılmıştır. Cetvelini bir şey ölçmek için bir yere koyduğunda cetvel hemen o yerdeki sıcaklığa uygun olarak genişler. Nereye bir nesne –kendisini, bir cetveli, bir üçgeni veya herhangi bir şeyi– koyarsa koysun, o şey termal genişleme yüzünden uzar. Her şey sıcak yerlerde soğuk yerdekilere göre daha uzundur ve her şey aynı genişleme katsayısına sahiptir. Üçüncü böceğimizin yuvasına "elektrikli ocak" demiş olsak da aslında merkezde soğuk ve kenarlara doğru gittikçe ısınan özel bir tür elektrik ocağını ele alacağız (Şekil 42-3).

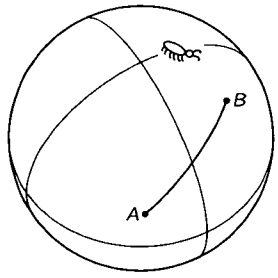
Şimdi de böceklerimizin geometri çalışmaya başladığını düşünelim. Her ne kadar kör olduklarını ve "dış" dünyayı göremediklerini düşünsek de ayakları ve duyargalarıyla çok şeyler yapabilirler. Çizgiler çizebilirler ve cetveller yaparak



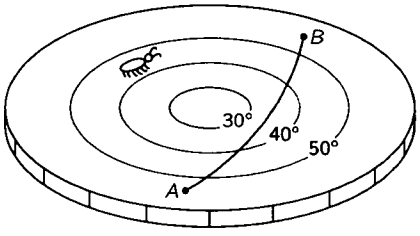
Şekil 42-3 Elektrikli ocak üzerinde bir böcek.



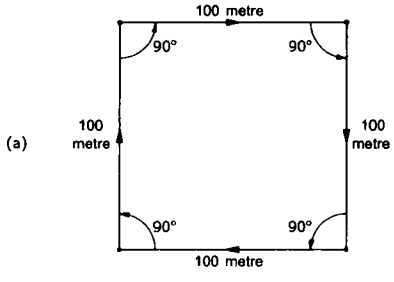
Şekil 42-4 Bir düzlem üzerinde "düz" çizgi çekmek.



Şekil 42-5 Bir küre üzerinde "düz çizgi" çizmek.



Şekil 42-6 Elektrikli ocak üzerinde "düz çizgi" çekmek.



Şekil 42-7 Düz uzayda bir kare, üçgen ve daire.

uzunlukları ölçebilirler. Öncelikle geometrideki en basit fikirle başladıklarını düşünelim. İki nokta arasındaki en kısa çizgi olarak tanımlanan düz bir çizgi yapmayı öğrensinler. İlk böceğimiz *–bkz.* Şekil 42-4– güzel çizgiler çekmeyi öğrenir. Peki ya küredeki böceğimiz? Şekil 42-5'te gösterildiği gibi iki nokta arasında *–kendisi için–* en kısa mesafede bir çizgi çeker. Bu bize bir eğri gibi gözükebilir ancak onun küreden çıkıp, "gerçekten" daha kısa bir çizgi olup olmadığını kontrol etme şansı yoktur. *Kendi dünyasında* çizdiği bir başka herhangi çizginin kendi düz çizgisinden daima uzun olacağını bilir. Bu yüzden kendi düz çizgisinin iki nokta arasındaki en kısa yay olmasını kabul edeceğiz. (Elbette o, büyük bir çemberin yayıdır.)

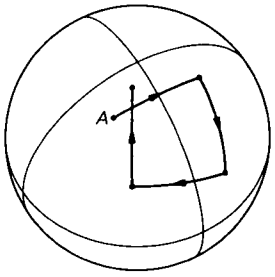
Son olarak, Şekil 42-3'teki böceğimiz de bize eğri gibi gözüken "düz çizgiler" çizecektir. Örneğin, Şekil 42-6'daki *A* ile *B* noktaları arasındaki en kısa mesafe şekilde görüldüğü gibi bir eğri olacaktır. Neden? Çünkü ocağın daha sıcak bölgelerine doğru gittikçe cetveller (bizim çok bilmiş bakış açımıza göre) uzar ve *A* noktasından *B* noktasına gitmek için uç uca eklenmiş daha az "çubuk" gerekir. Dolayısıyla *onun için* çizgi düzdür. Onun, dışarda bir yerde üç boyutlu bir dünyada birinin farklı bir çizgiye "düz" çizgi dediğini bilme ihtimali yoktur.

Analizlerimizin bundan sonrasının bizim bakış açımızdan değil, artık daima bu özel yüzeylerdeki böceklerin bakış açısından olacağını anlamışsınızdır. Bunu aklımızda tutarak, gelin geometrilerin geri kalanlarının nasıl göründüğüne bakalım. Bütün böceklerin birbirine dik açıda iki çizgiyi kesiştirmeyi öğrendiklerini düşünelim. (Bunu nasıl yapabileceklerini siz çıkarabilirsiniz.) Böylece ilk böceğimiz (dik bir düzlemde olan) ilginç bir gerçek keşfeder. *A* noktasında başlayıp 100 metre uzunluğunda bir çizgi çeker, sonra bir dik açıyla 100 metre uzunluğunda bir çizgi daha çeker, sonra bir dik açıyla 100 metre uzunluğunda üçüncü bir çizgi çeker ve tekrar bir dik açıyla dördüncü ve gene 100 metre uzunluğunda bir çizgi çekerse, Şekil 42-7(a)'da gösterildiği gibi, tam başladığı yere döner. Bu onun dünyasının bir özelliği, "geometri"sinin gerçeklerinden biridir.

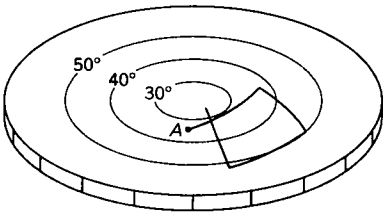
Daha sonra ilginç bir şey daha keşfeder. Üç düz çizgiyle bir üçgen yaptığında, açıların toplamı 180°'ye, diğer bir deyişle iki dik açının toplamına [*Bkz.* Şekil 42-7(b)] eşittir.

Daha sonra çemberi keşfeder. Bir çember nedir? Bir çember şu şekilde yapılır: Tek bir noktadan birçok yöne doğru bir sürü çizgi çeker ve o noktaya eşit uzaklıkta birçok noktayı işaretlersiniz. *Bkz.* Şekil 42-7(c). (Bu şeyleri tanımlarken çok dikkatli olmalıyız çünkü diğer böcek arkadaşlar için de aynı benzerlikleri kurabilmeliyiz.) Elbette bir çember, bir nokta etrafındaki bir cetveli döndürerek elde ettiğiniz eğriye eşittir. Neyse, artık böceğimiz çemberler çizmeyi de öğrendi. Sonra bir gün çemberin çevresini ölçmek istedi. Birçok çemberi ölçtüğünde çok açık bir ilişki bulur: Çemberin çevresi her zaman aynı sayı ile *r* yarıçapının (elbette bu merkezden eğriye olan uzaklıktır) çarpımıdır. Çevrenin yarıçapa oranı çemberin boyutundan bağımsız olarak hep aynıdır, yaklaşık 6,283'tür.

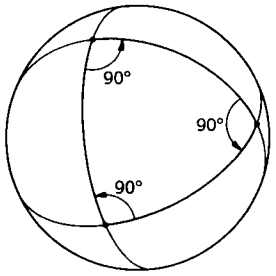
Şimdi de diğer böceklerin *kendi* geometrileri hakkında ne bulduklarına bakalım. Öncelikle, küredeki böcek bir "kare" çizmeye çalıştığında ne olur? Yukarıda verdiğimiz tarifi uygularsa, sonucun harcadığı emeğe değmediğini düşü-



Şekil 42-8 Bir küre üzerinde kare yapmaya çalışmak.



Şekil 42-9 Elektrikli ocak üzerinde "kare" yapmaya çalışmak.



Şekil 42-10 Bir küre üzerindeki "üçgen"de üç 90°'lik açı olabilir.

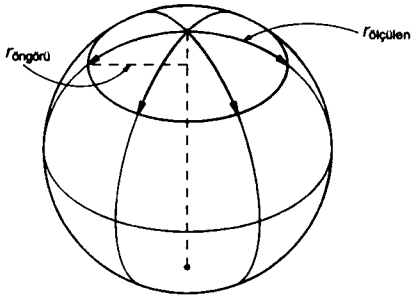
nür. Şekil 42-8'deki gibi bir şekil elde etmişti. Son vardığı nokta *B*, başlangıç noktası *A*'nın üzerinde değildir. Kapalı bir şekil hiç değildir. Elinize bir küre alıp, siz de deneyin. Benzer bir şey elektrikli ocaktaki dostumuzun da başına gelir. Genişleyen cetvelleri yardımıyla eşit uzunlukta ve birbirlerine dik açıda dört düz çizgi çektiğinde Şekil 42-9'daki gibi bir şekil elde eder.

Şimdi de her bir böceğimizin dünyasında bir Öklit olduğunu ve onlara geometrinin nasıl olması "gerektiğini" anlattığını ve böceklerimizin onun dediklerini *küçük* ölçekte kaba ölçümler yaparak onun dediklerini doğruladıklarını düşünelim. Sonra daha büyük ölçekte daha doğru kareler çizmeye çalıştıklarında bir şeylerin yanlış olduğunu keşfederler. Demeye çalıştığımız, sadece *geometrik ölçümler* sayesinde bulundukları uzayla ilgili bir şeylerin yanlış olduğunu keşfederler. *Eğri uzayı*, geometrinin bir düzlemde olmasını beklediğimizle aynı olmadığı uzay olarak tanımlarız. Bir kürenin veya elektrikli ocağın üzerindeki böceklerin geometrisi eğri uzayın geometrisidir. Öklit geometrisinin kuralları geçerli değildir. Yaşadığınız dünyanın eğri olduğun anlamak için kendinizi düzlemden yukarı kaldırmanız gerekmez. Dünyanın bir küre olduğunu anlamak için etrafını dolaşmanız gerekmez. Bir küre üzerinde yaşadığınızı bir kare çizerek anlayabilirsiniz. Kareniz çok küçükse, çok hassas hesaplamalar yapmanız gerekir ancak kare büyükse ölçümü kabaca yapabilirsiniz.

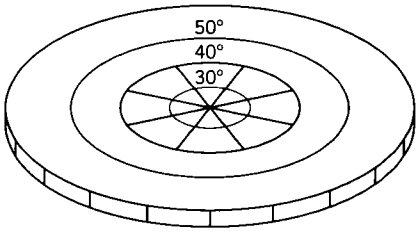
Şimdi de bir düzlem üzerindeki üçgeni ele alalım. Açıların toplamı 180°'dir. Küredeki dostumuz üçgenleri çok garip bulabilir. Örneğin, üçgenlerin *üç dik açısı* olduğunu keşfedebilir. Evet, gerçekten de! Biri şekil 42-10'da gösterilmiştir. Böceğimizin kuzey kutbundan başladığını ve ekvatora doğru dümdüz aşağı indiğini düşünelim. Sonra bir dik açıyla döner ve aynı uzunlukta mükemmel bir düz çizgi daha çeker. Sonra bunu yine yapar. Seçtiği uzunlukla başlangıç noktasına geri döner ve ilk çizgiyle dik açı yapar. Diğer bir deyişle ona göre bu üçgenin üç dik açısı olduğu ve toplamlarının 270 derece olduğu kesindir. Onun için üçgenin iç açılarının toplamının *daima* 180 dereceden fazla olduğu ortaya çıktı. Aslında, fazla miktar (bu özel durum için 90 derece) üçgenin sahip olduğu alanla orantılıdır. Küre üzerindeki üçgen çok küçükse, açılarının toplamı 180 dereceden biraz daha fazladır sadece. Üçgen büyüdükçe fark da büyür. Elektrikli ocaktaki böcekler de kendi üçgenlerini çizerken benzer zorluklarla karşılaşırlar.

Şimdi diğer böceklerimizin çemberler hakkında ne bulduklarına bakalım. Çemberler çizmiş ve çevrelerini ölçmüş olsunlar. Örneğin, kürede yaşayan böceğimiz Şekil 42-11'deki bir çember çizebilir ve çevresinin 2π çarpı yarıçaptan *daha küçük* olduğunu bulabilir. (Bunu siz görebiliyorsunuz çünkü bizim üç boyutlu bakış açısı zekâmızla onun "yarıçap" dediğinin aslında çemberin gerçek yarıçapından *daha uzun* bir eğri olduğu açıkça ortadadır.) Küredeki böceğin Öklit okuduğunu ve çemberin çevresi *C*'yi 2π'ye bölerek bir yarıçap öngörmeye çalıştığını düşünelim.

$$r_{\text{öngörü}} = \frac{C}{2\pi} \qquad (42.1)$$



Şekil 42-11 Bir küre üzerinde çember çizmek.



Şekil 42-12 Elektrik ocak üzerinde çember çizmek.

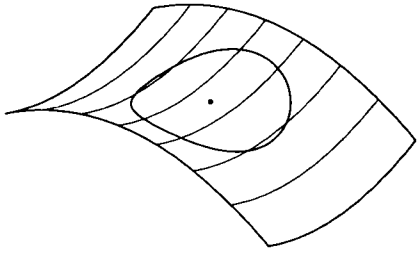
Böylece ölçülen yarıçapın öngörülen yarıçaptan daha büyük olduğunu bulurdu. Konunun üzerine giderek bu farkı "artan yarıçap" diye tanımlayıp aşağıdaki eşitliği yazabilir ve artan yarıçap etkisinin nasıl çember boyutuna bağlı olduğunu araştırabilir.

$$r_{\text{ölçülen}} - r_{\text{öngörü}} = r_{\text{artık}} \tag{42.2}$$

Elektrikli ocak üzerindeki böceğimiz de benzer bir olguyu keşfederdi. Şekil 42-12'de gösterildiği gibi, elektrikli ocağın soğuk bölgesinde bir çember çizdiğini varsayalım. Onu çember çizerken izleseydik, çemberlerinin merkeze yakınken kısa ancak dışarı doğru gittikçe uzadığını görürdük. Elbette, böceğin bundan haberi yoktur. Çemberin çevresini ölçtüğünde cetvel her zaman uzundur, dolayısıyla o da ölçtüğü yarıçapın öngördüğü yarıçaptan, $C/2\pi$, büyük olduğunu bulur. Elektrikli ocak böceği de "artan yarıçap etkisi" bulmuştur. Ve yine etkinin boyutu çemberin yarıçapına bağlıdır.

"Eğri uzay"ı şu bahsedeceğimiz geometrik hataların gerçekleştiği uzay olarak *tanımlayacağız*: Üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden farklıdır; çemberin çevresinin 2π'ye bölümü yarıçapa eşit değildir; kare çizme kuralı kapalı bir şekil ortaya çıkarmaz. Siz başka hatalar da düşünebilirsiniz.

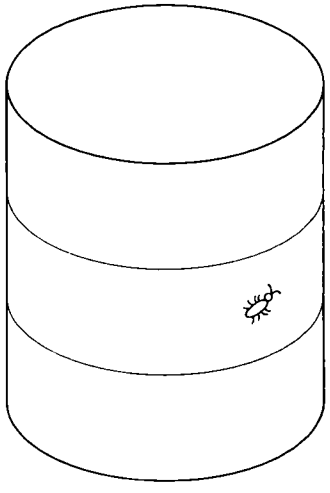
İki farklı eğri uzay örneği verdik: küre ve elektrikli ocak. Elektrikli ocak üzerindeki sıcaklığın değişimini uzaklığa göre doğru bir şekilde seçersek, iki *geometri*nin bire bir aynı olacağını bilmek ilginçtir. Elektrikli ocaktaki böcek ile küre üzerindeki böceğin aynı cevapları elde etmesini sağlayabiliriz. Geometriyi ve geometri problemlerini sevenler için bunun nasıl yapılabileceğini anlatacağız. Cetvellerin (sıcaklıkla belirlenen) uzunluklarının bir artı bir sabit çarpı merkeze olan uzaklığın karesi olduğunu varsayarsanız, bu durumda elektrikli ocağın geometrisinin bütün detaylarıyla* kürenin geometrisiyle aynı olduğunu bulursunuz.



Şekil 42-13 Eyer şekilli bir yüzeyde "çember" çizmek.

Elbette başka tür geometriler de vardır. Bir armut üzerinde yaşayan bir böceği ele alabiliriz. Bir armudun bir yerinde daha keskin ve bir yerinde daha zayıf eğriliği vardır, bu yüzden böceğin bir yerde çizdiği üçgenlerdeki artan açı bir başka yerde çizdiği üçgenlerin artan açısına göre daha fazladır. Diğer bir deyişle, uzayın eğriliği yerden yere değişebilir. Bu sadece fikrin genelleştirilmesidir. Elektrikli ocak üzerinde uygun sıcaklık dağılımıyla da benzerlik kurulabilir.

Zıt tür farklılıklarla da sonuçlar ortaya çıkacağını gösterebiliriz. Örneğin yeterince büyük bütün üçgenlerin iç açılarının toplamının 180 dereceden *daha az* olduğunu bulabilirsiniz. Kulağa imkânsız gelebilir, ancak değildir. Öncelikle merkezden uzağa doğru gidildikçe sıcaklığı düşen bir elektrikli ocağımız olabilir. Bu durumda bütün etkiler tersine döner. Bunu geometrik olarak bir eyerin yüzeyinin iki boyutlu geometrisine bakarak da görebiliriz. Şekil 42-13'te çizilmiş eyer şekilli yüzeyi düşünün. Şimdi yüzeyine, bir merkezden aynı uzaklıkta olan bütün noktaların kümesi olarak tanımlanan bir "çember" çizin. Bu çember, bir tarak etkisiyle yukarı ve aşağı salınan bir eğridir. Dolayısıyla çevresi $2\pi r_{\text{ölçüm}}$ denklemiyle hesaplanan değerden büyük olacaktır. Dolayısıyla $C/2\pi$ $r_{\text{ölçüm}}$'den daha *büyüktür*. "Artan yarıçap" eksi olur.



Şekil 42-14 İçe yönelik eğikliği bulunmayan iki boyutlu uzay.

Küreler, armutlar ve benzeri yüzeylerin tamamı *artı* eğriliklerdir ve diğerleri de *eksi* eğriliktir. Genelde, iki boyutlu bir dünyada bazı yerlerde artı ve bazı yerlerde eksi eğrilikler olabilir. Genel olarak eğri yüzeyle demek istediğimiz Öklit geometrisinin bir tutarsızlıkla geçersiz hale gelmesidir. Eğriliğin düzeyi, atık yarıçapla belirlendiğini diyelim, bir yerden diğerine değişebilir.

Eğriliğe dair tanımımıza göre bir silindirin, şaşırtıcı şekilde, eğri olmadığını söyleyebiliriz. Şekil 42-14'teki gibi, bir böcek bir silindir üzerinde yaşasaydı üçgenlerin, karelerin ve çemberlerin hepsinin tıpkı bir düzlemdekiyle aynı dav-

* Sonsuzluktaki bir nokta haricinde.

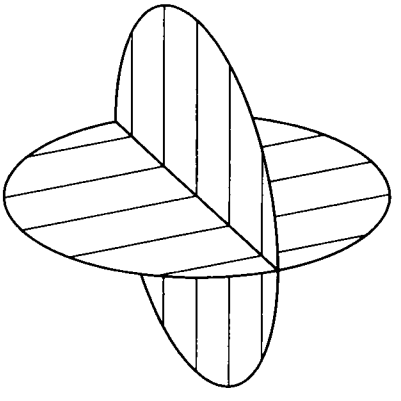
ranışa sahip olduğunu görürdü. Bunu sadece silindirin bir düzlem üzerine açılarak şekillerin nasıl görüneceğini düşünerek görebiliriz. Bu durumda bütün geometrik şekiller, aynı düzlemde oldukları şekle karşılık gelirler. Dolayısıyla bir silindir üzerinde yaşayan böceğin (silindirin tüm çevresini dolaşmadığını ve sadece yerel ölçümler yaptığını varsayarak) uzayının eğri olduğunu keşfetmesinin yolu yoktur. Teknik açıdan, bu uzayın *eğri* olmadığını düşünürüz. Daha açık olarak konuşmak istediğimiz şey *içe yönelik*; sadece yerel olarak yapılan ölçümlerle bulunabilen eğriliktir. (Bir silindirin içe doğru eğriliği yoktur.) Einstein uzayımızın eğri olduğunu söylerken demek istediği buydu. Ancak biz henüz eğriliği iki boyutta tanımladığımızdan, bu fikrin üç boyutta ne anlama geldiğini görmek için ilerlemeliyiz.

42-2 Üç boyutlu uzayda eğrilik

Biz üç boyutlu uzayda yaşıyoruz ve üç boyutlu uzayın eğildiği fikrini ele alacağız. "İyi de hangi yönde büküldüğünü nasıl hayal edebiliriz?" diyebilirsiniz. Aslına bakarsanız uzayın ne yönde büküldüğünü hayal edemeyiz çünkü hayal gücümüz o kadar iyi değildir. (Belki de hayal gücümüzün yeterli olmaması iyi bir şeydir, böylece gerçek dünyadan çok da kopmamış oluruz.) Yine de, üç boyutlu dünyamızın dışına çıkmadan bir eğrilik tanımlayabiliriz. İki boyutta konuştuğumuz her şey, dışardan "içeri bakmak" zorunda kalmadan nasıl eğrilik tanımı yapabileceğimize dair alıştırmalardı.

Dünyamızın eğri olup olmadığını, küre veya elektrikli ocak üzerinde yaşayan birinin tanımlamasına benzer şekilde tanımlayabiliriz. Bu iki durumu birbirinden ayırt edemeyebiliriz ancak onları düz uzaydan, sıradan düzlemden ayırt edebiliriz? Nasıl mı? Çok kolay: Bir üçgen yerleştirir ve açılarını ölçeriz. Ya da büyük bir çember çizer ve çevresiyle yarıçapını ölçeriz. Ya da yeterince doğru kareler çizer veya bir küp yapmaya çalışırız. Her durumda geometri yasalarının işleyip işlemediğine bakarız. İşlemiyorlarsa uzayımızın eğri olduğunu söyleyebiliriz. Büyük bir üçgen yayar ve açılarının toplamının 180 dereceyi aştığını görürsek, uzayımızın eğri olduğunu söyleyebiliriz. Ya da bir çemberin ölçülen yarıçapı çevresinin 2π'ye ölçümüne eşit değilse, uzayımızın eğri olduğunu söyleyebiliriz.

Üç boyut söz konusu olduğunda durumun iki boyuta göre daha zor olduğunu fark etmişsinizdir. İki boyutta herhangi bir yerde belli bir miktar eğrilik vardır. Ancak üç boyutta eğriliğin birçok bileşeni olabilir. Bir düzleme bir üçgen yayarsak, üçgenin düzlemini farklı bir yöne doğrulttuğumuzda farklı bir cevap alırız. Ya da çember örneğini düşünelim. Bir çember çizdiğimizi ve bir miktar artan yarıçap olacak şekilde $C/2\pi$ denklemine uymadığını düşünelim. Şimdi, Şekil 42-15'teki gibi dik açılarda bir başka çember çizelim. Her iki çember için de artan yarıçapın olmasına gerek yoktur. Aslında bir düzlemde bir çember için artı artan ve diğer düzlemde eksi artan olabilir.



Şekil 42-15 Farklı yönelimleri olan çemberlerde artan yarıçap farklı olabilir.

Belki de daha iyi bir fikriniz var: Üç boyutta bir küre kullanarak bütün bu bileşenleri atlatamaz mıyız? Küreyi, hepsi uzaydaki bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları ele alarak tanımlayabiliriz. Daha sonra kürenin üstüne çok ince ölçekli dikdörtgenlerden oluşan bir örgü koyar ve bütün alan parçacıklarını üst üste toplayarak yüzey alanını ölçebiliriz. Öklit'e göre toplam A alanı yarıçapın karesinin 4π'yle çarpımıdır; dolayısıyla "öngörülen yarıçapı" $\sqrt{A/4\pi}$ olarak tanımlayabiliriz. Yarıçapı, merkeze inen bir delik açıp uzaklığı ölçerek de bulabiliriz. Yine, ölçülen yarıçaptan öngörülen yarıçapı çıkartır ve aradaki farka artan yarıçap diyebiliriz ki bu da eğriliğin yeterince tatmin edici bir ölçütü olurdu.

$$r_{\text{artan}} = r_{\text{ölçülen}} - \left(\frac{\text{ölçülen alan}}{4\pi}\right)^{1/2}$$

Bunun avantajı çember veya üçgeni nasıl yönlendirdiğimizden bağımsız olmasıdır.

Ancak bir kürenin artan çapının bir de dezavantajı vardır; uzayı tam anlamıyla nitelendirmez. Çeşitli eğrilikler üzerinden ortalama alma etkisi olduğundan, üç boyutlu dünyanın ortalama eğriliğini verir. Ancak, ortalama olduğundan, geometriyi tanımlama problemini tam olarak çözmez. Sadece bu numarayı biliyorsanız, uzayın geometrisinin bütün özelliklerini öngöremezsiniz; çünkü farklı yönelimlere sahip çemberlerle ne olacağını söyleyemezsiniz. Eksiksiz bir tanım, her bir noktada altı "eğrilik sayıları"nın belirlenmesini gerektirir. Elbette matematikçiler bütün bu sayıları nasıl yazmaları gerektiğini bilirler. Bir gün bir matematik kitabında onları zarif ve yüksek seviyeli bir biçimde nasıl yazabileceğinizi görebilirsiniz, ancak şimdilik ne yazmaya çalıştığınızı kabaca bilmek iyi bir fikirdir. Amaçlarımızın çoğu için ortalama eğrilik yeterli olacaktır.*

42-3 Uzayımız eğridir

Şimdi esas soruyu sormanın zamanı. Gerçekten mi? Diğer bir deyişle içinde yaşadığımız üç boyutlu fiziksel uzay eğri midir? Uzayın eğri olabileceği ihtimalini kanıksayabilecek hayal gücüne kavuşunca, insan doğal olarak, gerçek dünyanın da eğri olup olmadığını merak ediyor. İnsanlar bunu bulmak için çeşitli geometrik ölçümler yaptılar ve herhangi bir sapma bulamadılar. Diğer yandan Einstein, kütleçekim üzerine akıl yürüterek uzayın eğri olduğunu keşfetti ve biz de size eğriliğin miktarı için Einstein yasasını ve ayrıca o yasayı nasıl bulduğunu anlatmak istiyoruz.

Einstein'a göre uzay eğrilmiştir ve nedeni de maddedir. (Madde aynı zamanda kütleçekimin de nedenidir, kütleçekim ile eğrilik birbiriyle ilişkilidir. Ancak buna daha sonra değineceğiz.) İşleri kolaylaştırmak adına maddenin, bir yerden bir yere istediğiniz kadar yoğunluğunu değiştirebildiğiniz şekilde sürekli dağıldığını düşünelim.† Einstein'ın eğrilik için verdiği kural şudur: Uzayın bir yerinde maddeyle dolu bir bölge varsa ve bu bölgeden içindeki madde yoğunluğu ρ'nin sabit kalmasını sağlayacak kadar küçük bir küre alırsak, kürenin artan yarıçapı kürenin içindeki maddeyle orantılıdır. Artan yarıçap tanımından yola çıkarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

Denklemdeki G kütleçekim sabiti (Newton'ın kuramından), c ışık hızı ve M kürenin içindeki kütledir ve $M = 4\pi\rho r^3/3$ şeklinde yazılabilir. Bu, uzayın ortalama eğriliği için Einstein'ın yasasıdır.

$$\text{Artan yarıçap} = r_{\text{ölçülen}} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{G}{3c^2} \cdot M \tag{42.3}$$

Örnek olarak dünyayı ele aldığımızı ve –integrallerle uğraşmamak için– yoğunluğun bir noktadan diğerine değiştiğini unuttuğumuzu varsayalım. Dünyanın çok dikkatlice yüzeyini ve sonra merkeze kadar bir delik açarak yarıçapını ölçtüğümüzü düşünelim. Yüzey alanını $4\pi r^2$'ye eşitleyerek öngörülen yarıçapı elde edebiliriz. Öngörülen yarıçap ile ölçülen yarıçapı karşılaştırdığımızda, gerçek yarıçapın ölçülen yarıçapı Denk. (42.13)'le belirlenen bir miktar kadar aştığını görürdük. $G/3c^2$ sabiti yaklaşık $2{,}5 \times 10^{-29}$ cm bölü gramdır, dolayısıyla her bir malzeme gramı için ölçülen yarıçap $2{,}5 \times 10^{-29}$ cm kadar yanlıştır. Dünyanın yaklaşık 6×10^{27} gr olan ağırlığını da katarsak, dünyanın yarıçapının yüzey alanı için sahip olması gereken yarıçaptan 1,5 mm kadar fazla olduğunu görürüz.‡ Aynı hesaplamayı güneş için yaptığınızda, güneşin yarıçapının bir buçuk kilometre daha uzun olduğunu bulursunuz.

---

* Hiç eksik nokta bırakmamak için bir ilave noktayı daha belirtmeliyiz. Eğik uzaya dair elektrikli ocak modelimizi üç boyuta taşımak isterseniz, cetvelin uzunluğunun sadece onu koyduğunuz yere değil ayrıca cetvelin konulduğu yerdeki yönelimine de bağlı olduğunu düşünmelisiniz. Cetvelin uzunluğunun bağlı olduğu yere dayandığı durumun genelleştirilmesidir, ancak aynı durum kuzey-güney veya doğu-batı veya yukarı-aşağı şeklinde ayarlandığında da geçerlidir. Böyle bir modelle üç boyutlu uzayda herhangi bir geometriyi temsil etmek isterseniz bu genelleştirmeye ihtiyaç vardır, ancak iki boyut için gerekli değildir.

† Kimse –Einstein bile– kütle noktasal olarak yoğunlaşırsa ne yapılabileceğini bilmiyor.

‡ Yaklaşık olarak, çünkü yoğunluk varsaydığımız gibi yarıçaptan bağımsız değildir.

Yasaya göre dünyanın yüzey alanının üzerindeki ortalama eğrilik sıfırdır. Ancak bu, eğriliğin tüm bileşenlerinin sıfır olduğu anlamına gelmez. Dünyanın üzerinde hâlâ bir miktar eğrilik olabilir ve hatta vardır. Bir düzlemdeki çember için belirli yönelimlerde eğriliğin işareti farklı olabilir. İçinde hiç kütle olmayan bir kürenin üzerindeki ortalama eğrilik sıfırdır. Yeri gelmişken, eğriliğin çeşitli bileşenleri ile bir yerden bir yere ortalama eğriliğin değişimi arasında bir ilişki olduğu da ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla her yerdeki ortalama eğriliği bilirseniz, her bir yerdeki eğrilik bileşenlerinin detaylarını çıkarabilirsiniz. Dünyanın içindeki ortalama eğrilik yükseklikle değişir ve bunun anlamı dünyanın hem içinde hem de dışında bazı eğrilik bileşenlerinin sıfırdan başka bir değere sahip olmasıdır. Kütleçekim kuvveti olarak gördüğümüz şey işte bu eğriliktir.

Bir düzlem üzerinde bir böcek olduğunu ve "düzlem"in üzerinde küçük kabarcıklar olduğunu düşünelim. Kabarcıkla karşılaşan böcek, uzayında küçük yerel eğrilik alanları olduğunu düşünür. Bizde de üç boyutta aynı şey vardır. Bir madde yığını üç boyutlu uzayda yerel bir eğriliğe –bir tür üç boyutlu kabarcığa– yol açar.

Düzlem üzerinde birçok yumru yaratırsak, kabarcıkların yanı sıra düzlemde toplam bir eğrilik oluşabilir. Yüzey bir küreye dönüşebilir. Evrenimizin dünya ve güneş gibi madde yığınları dolayısıyla oluşan yerel kabarcıklar dışında net bir ortalama eğriliği olup olmadığını bilmek ilginç olurdu. Astrofizikçiler çok uzak mesafelerdeki galaksilerin ölçümlerini yaparak bu soruyu cevaplandırmaya çalışmaktadır. Örneğin, uzak bir mesafede küresel bir kabuk içindeki galaksilerin sayısı, kabuğun yarıçapına dair bilgimizle öngördüğümüz sayıdan fazla çıkarsa, çok büyük bir kürenin artan yarıçapına dair bir ölçüm yapmış oluruz. Böyle ölçülerle Evrenin ortalamada düz mü yoksa yuvarlak mı olduğunu –bir küre gibi "kapalı" mı, yoksa bir düzlem gibi "açık" mı– anlamayı umut ediyoruz. Bu konuya ilişkin tartışmaları duymuşsunuzdur. Tartışmalar sürmektedir, çünkü astronomik ölçümler hâlâ sonuçsuzdur. Deneysel veriler kesin bir cevap verecek kadar hassas değildir. Ne yazık ki, büyük ölçekte Evrenimizin toplam eğriliğin ne olduğu hakkında en ufak bir fikrimiz yoktur.

42-4 Uzay-zamanda geometri

Şimdi zaman hakkında konuşmalıyız. Özel görelilik kuramından bildiğiniz üzere, uzayın ve zamanın ölçümleri birbirleriyle ilişkilidir. Uzayda bir şey olurken, zamanın dahil olmadığını düşünmek delilik olur. Hatırlarsanız zamanın ölçümü ne kadar hızlı hareket ettiğinize bağlıdır. Örneğin bir uzay gemisinin içindeki birisini izlerken, olayların onun için bizim için olduğundan daha yavaş olduğunu görürüz. Uzay gemisindeki kişinin yolculuğa çıktığını ve bizim saatlerimize göre 100 saniye içinde döndüğünü düşünelim. Onun saatine göre gideli sadece 95 saniye olmuş olabilir. Bizimkilere kıyasla saati –ve diğer bütün süreçleri, örneğin kalbinin atması– daha yavaş işlemiştir.

Şimdi ilginç bir problemi ele alalım. Kendinizi uzay gemisinde düşünün. Belli bir sinyalle yola çıkmanızı ve sonra bir başka sinyali yakalamak için –diyelim ki bizim saatimize göre tam 100 saniye sonra– başlangıç noktasına geri dönmenizi istediğimizi düşünün. Ve bu yolculuğu öyle bir yapmalısınız ki, sizin saatiniz mümkün olan en uzun geçen zamanı göstermelidir. Nasıl hareket etmelisiniz? Yerinizde durmalısınız. Hareket ederseniz, saatiniz geri döndüğünde 100 saniyeden az zaman geçtiğini gösterecektir.

Şimdi de problemi biraz değiştirelim. *A* noktasında harekete başlayıp, *B* noktasına ilerlediğinizi (noktaların her ikisi de bize göre sabittir) ve ikinci bir sinyali yakalamak için tam zamanında (bizim sabit saatimize göre tam 100 saniye sonra) varmanız gerektiğini düşünelim. Yine bu yolculuğu saatinizde en az muhtemel değeri görecek şekilde yapmanız istenmekte. Nasıl yapardınız? Saati-

niz hangi yol ve zaman çizelgesinde ikinci noktaya vardığınızda en uzun geçen zamanı gösterecektir? Sizin bakış açınıza göre en uzun süre, yolculuğu düz bir çizgi üzerinde düzgün hızla yaparsanız olur. Çünkü ilave herhangi bir hareket ve hızınıza ilave yüksek hızlar saatinizin daha yavaş çalışmasına neden olacaktır. (Zamandaki sapmalar hızın *karesine* bağlı olduğundan, bir yerde daha yüksek bir hızla giderek kaybettiğinizi bir başka yerde daha yavaş giderek kazanamazsınız.)

Bütün bunları uzay-zamandaki "düz çizgi" kavramını tanımlamak için kullanabiliriz. Uzayda düz bir çizginin benzeri, uzay-zaman için sabit bir yönde düzgün hızda *harekettir*.

Uzayda en kısa mesafe, uzay-zamanda en kısa süre alan mesafeye değil ancak *en uzun* süre alana karşılık gelmektedir. Bunun nedeni, görelilikte t terimlerine bir şeyler olmasıdır. Bu durumda "düz çizgi" hareketi –"düz bir çizgi boyunca düzgün hız"ın benzeri– bir saati bir zamanda bir yere başka zamanda bir başka yere saatin en uzun süreyi okuyacağı şekilde götürmektir. Uzay-zamanda düz çizgi için benzerlik tanımımız bu olacaktır.

42-5 Kütleçekim ve eşdeğerlik ilkesi

Artık kütleçekim yasalarını tartışmaya hazırız. Einstein daha önce geliştirdiği görelilik kuramına uyacak bir kütleçekim kuramı geliştirmeye çalışıyordu. Kendisini doğru yasalara yönlendirecek çok önemli bir ilkeyi kavrayana kadar çok zorlanmaktaydı. Bu ilke, bir şeyin serbest düşüşü esnasında içindeki her şeyin ağırlıksızmış gibi görünmesine dayanır. Örneğin, dünyanın yörüngesindeki bir uydu serbest düşüş halindedir ve içindeki astronot kendini ağırlıksız hisseder. Bu fikre, daha büyük açıklıkla ifade edildiğinde, *Einstein'ın eşdeğerlik ilkesi* denir. Bütün nesnelerin, neden yapıldıklarından veya kütlelerinden bağımsız olarak aynı ivmelenmeyle düştüğü gerçeğine dayanır. "Seyrüsefer" halinde –serbest düşüşte– bir uzay gemimiz ve içinde bir astronotumuz varsa, astronot ve gemi için geçerli yasalar aynıdır. Geminin ortasına giderse orada kalır. *Gemiye göre* düşmez. "Ağırlıksız" derken demek istediğimiz şey budur.

Şimdi de ivmelenen bir uzay gemisinde olduğunuzu düşünelim. Neye göre ivmeleniyorsunuz? Sadece motorlarının çalıştığını ve serbest düşüş halinde olmadığını söylesek yeter. Ayrıca boş uzayda olduğunuzu ve dolayısıyla gemi üzerinde hiç kütleçekim kuvveti olmadığını düşünün. Gemi "1 g" ivmesiyle ivmeleniyorsa "taban"da ayakta durur ve normal ağırlığınızı hissedersiniz. Ayrıca elinizdeki bir topu düşürürseniz, top tabana doğru "düşer". Neden? Çünkü gemi "yukarı" doğru ivmelenmektedir ancak top üzerinde bir kuvvet olmadığından o ivmelenmez ve geride kalır. Geminin içinde topun sanki aşağıya doğru "1 g" ivmesiyle ivmelenmesi var gibidir.

Şimdi bunu dünya yüzeyinde yerde duran bir uzay gemisindeki durumla karşılaştıralım. *Her şey aynıdır!* Siz tabana doğru bastırılmaktasınız ve top da 1 givmelenmesiyle düşmektedir vb. Hatta yerdeki bir uzay gemisinde mi olduğunuzu, yoksa boş uzaydaki uzay gemisinde mi olduğunuzu nasıl ayırt edebilirsiniz? Einstein'ın eşdeğerlik ilkesine göre sadece içerdeki şeylere dair ölçümler yapıyorsanız bunu söylemenin hiçbir yolu yoktur!

Tam doğru olmak adına, bu sadece gemideki bir nokta için geçerlidir. Dünyanın kütleçekim alanı tam anlamıyla düzgün değildir, dolayısıyla serbest düşüşteki bir top farklı yerler biraz farklı –yön ve büyüklük değişiklikleri– ivmelenmelere sahip olacaktır. Ancak tamamen düzgün bir kütleçekim alanı düşünürsek, yerdeki uzay gemisi sabit ivmelenmeli bir sistemle bire bir taklit edilebilir. Bu, eşdeğerlik ilkesinin temelidir.

42-6 Kütleçekim alanında saatlerin hızı

Şimdi, eşdeğerlik ilkesini kütleçekim alanında olan garip bir şeyi anlamak için kullanacağız. Bir uzay gemisinde, kütleçekim alanında olmasını beklemediğiniz, bir şeyin olduğunu göstereceğiz. Bir uzay gemisinin "baş" tarafına –"ön"

ucuna– bir saat ve tam benzeri bir başka saati de, Şekil 42-16'da görüldüğü gibi geminin "kuyruğu"na koyduğumuzu düşünelim. Saatlere *A* ve *B* diyelim. Gemi ivmelendiği esnada bu iki saati karşılaştırırsak, baştaki saatin kuyruktakine göre daha hızlı ilerlediğini görürüz. Bunu görmek için öndeki saatin her saniye bir flaş çaktığını ve sizin de kuyrukta oturup flaşların varmasını *B* saatinin tıkırtılarıyla karşılaştırdığınızı düşünelim. *A* flaş çaktığında geminin Şekil 42-17'deki *a* konumunda ve flaş *B* saatine vardığında da *b* konumunda olduğunu düşünelim. *A* ikinci flaşı çaktığında gemi *c* konumunda ve ikinci flaşın *B* saatine vardığını gördüğünüzde de *d* konumunda olacaktır.

İlk flaş L_1 mesafesini ve ikinci flaş da daha kısa olan L_2 mesafesini kateder. İkinci mesafe daha kısadır çünkü gemi ivmelenmektedir ve ikinci flaş çaktığında daha yüksek bir hıza sahiptir. İki flaş *A* saatinden bir saniye arayla çakılmış olsaydı, *B* saatine bir saniyeden daha kısa bir aralıkla varırlardı çünkü ikinci flaş ilkinden daha kısa bir mesafe kateder. Daha sonraki flaşlar için de aynı şey geçerlidir. Dolayısıyla kuyrukta otururken *A* saatinin *B* saatinden daha hızlı çalıştığı sonucuna varırsınız. Aynı şeyi tersinden yaparsanız –*B* flaş çakıp, siz onu *A*'da gözlemleseydiniz– *B* saatinin *A* saatinden *daha yavaş* çalıştığı sonucuna varırdınız. Her şey yerli yerine oturmaktadır ve burada hiç gizemli bir şey yoktur.

Şimdi geminin dünyanın kütleçekiminde durağan halde olduğunu düşünelim. *Aynı şey olur.* Siz tabanda elinizde bir saatle oturur ve yüksek raflardaki bir saati incelerseniz, o saat sizin saatinizden daha hızlı gidiyor gibi görünecektir. "Ama bu yanlış. Zamanlar aynı olmalıdır. İvmelenme yoksa saatlerin senkron dışı olması için bir neden yok" diyebilirsiniz. Ancak olmalıdır, eşdeğerlik ilkesi eğer doğruysa. Einstein ilkenin doğru *olduğunda* ısrar etti ve cesaretle ve doğru bir şekilde ilerledi. Bir kütleçekim alanında farklı yerlerdeki saatlerin farklı hızda ilerlemesi gerektiğini öne sürdü. Ancak biri diğerine göre hep farklı hızda ilerliyormuş gibi *görünüyorsa*, o zaman şu ana kadar ilki göz önüne alındığında diğeri farklı bir hızda *ilerlemektedir.*

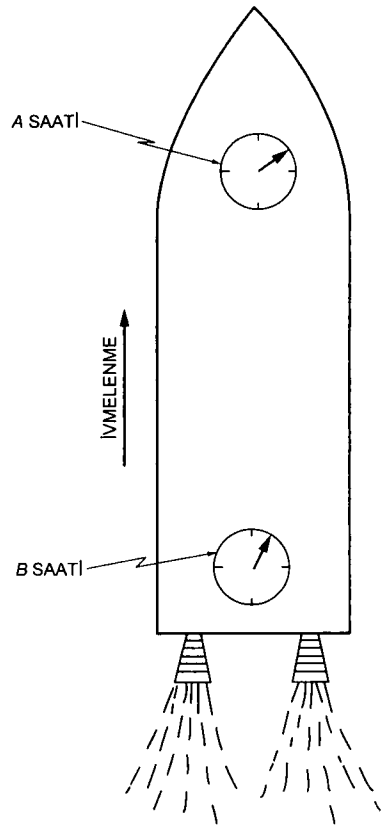
Artık saatler için, daha önce konuştuğumuz elektrikli ocak üzerindeki böceğin elindeki cetvele bir benzerlik kurabiliriz. Değişik sıcaklıklarda cetvellerin, böceklerin ve her şeyin uzunluğunun aynı şekilde değiştiğini, böylece elektrikli ocak üzerinde ilerlerken cetvellerinin değiştiğini anlayamadıklarını düşünmüştük. Kütleçekim alanındaki saatler için de aynı şey geçerlidir. Daha yüksek seviyeye çıkardığımız her şey daha hızlı gider gibi görünür. Kalp atışları hızlanır, bütün süreçler daha hızlı işler.

Böyle olmasaydı, kütleçekim alanı ile ivmelenen bir referans sistemi arasındaki farkı görebilirdiniz. Zamanın bir yerden bir yere değişkenlik göstereceği fikrine alışmak zordur, ancak bu Einstein'ın kullandığı fikirdir ve –ister inanın ister inanmayın– doğrudur.

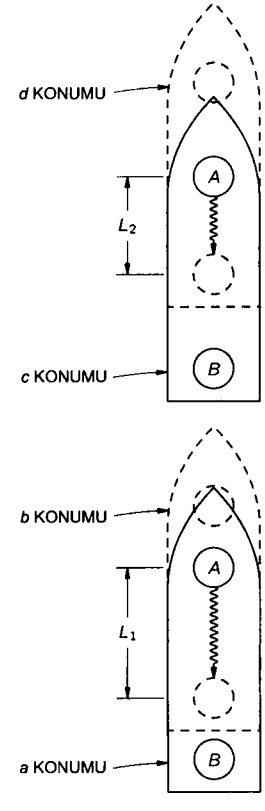
Eşdeğerlik ilkesini kullanarak, bir kütleçekim alanında bir saatin hızının yükseklikle nasıl değiştiğini hesaplayabiliriz. İvmelenen bir uzay gemisindeki iki saat arasındaki bariz farkı çalışmamız yeterlidir. Bunu yapmanın en kolay yolu 1. Cilt, 34. Bölümde Doppler etkisi için bulduğumuz sonucu kullanmaktır. O bölümde –*Bkz.* Denklem (34.14)–bir kaynağın ve bir alıcının *göreli* hızı *v* olduğunda, *alınan* frekans ω'nun *yayılan* ω_0 frekansına aşağıdaki şekilde bağlı olduğunu bulmuştuk:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{42.4}$$

Şekil 42-17'deki ivmelenen uzay gemisini düşünürsek, herhangi bir anda yayıcı ve alıcı eşit hızlarda ilerlemektedir. Ancak *A* saatinden *B* saatine ışık sinyallerinin varma süresinde gemi ivmelenmiştir. *g* ivmelenmeyi ve *t* de ışığın *A*'dan *B*'ye giderken katettiği *H* mesafesini geçtiği süreyi temsil ediyorsa, *gt* ilave hızı-



Şekil 42-16 İki saatle birlikte ivmelenen bir uzay gemisi.



Şekil 42-17 Bir uzay gemisinin baş tarafındaki saat, kuyruğundaki saate göre daha hızlı ilerliyor gibi görünür.

m kazanmıştır. Bu zaman H/c'ye çok yakındır. Dolayısıyla sinyaller B'ye vardığında, gemi hızını gH/c kadar artırmıştır. Alıcının, sinyal yayıcıdan çıktığı anda *yayıcıya göre hızı* daima budur. Dolayısıyla Doppler kayması denklemi, Denk. (42.4) için kullanmamız gereken hız budur. İvmelenmenin ve geminin boyunun bu hızı c'den çok daha küçük kılacak kadar küçük olduğunu varsayarsak, v^2/c^2 terimini ihmal edebiliriz. Böylece aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \tag{42.5}$$

Dolayısıyla, H alıcı ile yayıcı arasındaki yükseklik farkıyken, uzay gemisindeki iki saat için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\text{(Alıcıdaki sıklık)} = \text{(Yayınlanma sıklığı)}\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \tag{42.6}$$

Eşdeğerlik ilkesine göre, serbest düşüş ivmelenmesi g olan bir kütleçekim alanında bulunan ve aralarında H kadar yükseklik bulunan iki saat için de bu sonuç doğru olmalıdır.

Bu o kadar önemli bir fikirdir ki, bir başka fizik yasasından –enerjinin korunumundan–daha çıkarılabileceğini göstermek isteriz. Bir nesne üzerindeki kütleçekim kuvvetinin onun kütlesiyle orantılı olduğunu ve kütle ile toplam iç enerji E arasında $M = E/c^2$ ilişkisi olduğunu biliyoruz. Örneğin, bir çekirdeği bir başkasına dönüştüren nükleer tepkimelerin *enerjilerinden* bulunan çekirdek kütleleri, atomik *ağırlıklar* sayesinde bulunan kütlelerle uyumlu olmalıdır.

En düşük enerji durumu E_0 ve daha yüksek enerji durumu E_1 olan ve E_1 durumundan E_0 durumuna ışık yayınlayarak inebilen bir atomu düşünelim. Işığın frekansı ω aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hbar\omega = E_1 - E_0 \tag{42.7}$$

Şimdi yerde E_1 enerji durumunda bulunan bir atom olduğunu ve onu H yüksekliğine çıkardığımızı düşünelim. Bunu yaparken $m_1 = E_1/c^2$ kütlesini kütleçekim kuvvetine karşı taşıyarak iş yapmamız lazım. Yapılan işin miktarı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{E_1}{c^2}gH \tag{42.8}$$

Sonra atomun bir foton yayınladığını ve daha düşük enerji durumu E_0'ya döndüğünü düşünelim. Sonra da atomu yere geri taşıyalım. Dönüş yolunda kütle E_0/c^2; aşağıdaki enerjiyi geri alırız:

$$\frac{E_0}{c^2}gH \tag{42.9}$$

Böylece yapılan net iş miktarını aşağıdaki denklemle hesaplayabiliriz:

$$\Delta U = \frac{E_1 - E_0}{c^2}gH \tag{42.10}$$

Atom foton yayınladığında $E_1 - E_0$ kadar bir enerji kaybetmiştir. Şimdi o fotonun yere indiğini ve soğrulduğunu düşünelim. Oraya ne kadar enerji taşımış olur? Başta, $E_1 - E_0$ kadar bir enerji taşıdığını düşünebilirsiniz. Ancak enerji korunuyorsa bu doğru değildir. Yerde E_1 enerjisiyle başlamıştık. Sonda, yer seviyesindeki toplam enerji düşük enerji durumundaki atomun E_0 enerjisi artı fotondan gelen E_{foton} enerjisidir. Bu arada, Denklem (42.10)'un ilave enerjisi ΔU'yu da sağlamak zorundaydık. Enerji korunuyorsa, yerde son durumdaki enerji başladığımız andaki enerjiden tam olarak yaptığımız iş kadar fazla olmalıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki eşitliği elde etmeliyiz:

$$E_{\text{foton}} + E_0 = E_1 + \Delta U$$

Ya da bir başka şekilde ifade edecek olursak: (42.11)

$$E_{\text{foton}} = (E_1 - E_0) + \Delta U$$

Diğer bir deyişle foton yere başladığı $E_1 - E_0$ enerjisiyle *değil, biraz daha fazla enerjiyle* varır. Yoksa bir miktar enerji kaybolmuş olurdu. Denklem (42.10)'dan elde ettiğimiz ΔU terimini Denk. (42.11)'e koyarsak, fotonun yere aşağıdaki enerjiyle vardığını buluruz:

$$E_{\text{foton}} = (E_1 - E_0)\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \qquad (42.12)$$

Ancak, E_{foton} enerjisindeki bir fotonun frekansı $\omega = E_{\text{foton}}/\hbar$'dır. *Yayınlanan* fotonun frekansına ω_0 –bu da Denk. (42.7) gereği $(E_1 - E_0)/\hbar$ ifadesine eşittir– dersek, Denk. (42.12)'deki sonucumuz, bir fotonun yerde soğurulduğu andaki frekansı ile yayınlandığı andaki frekansı arasındaki (42.5) ilişkisini verir.

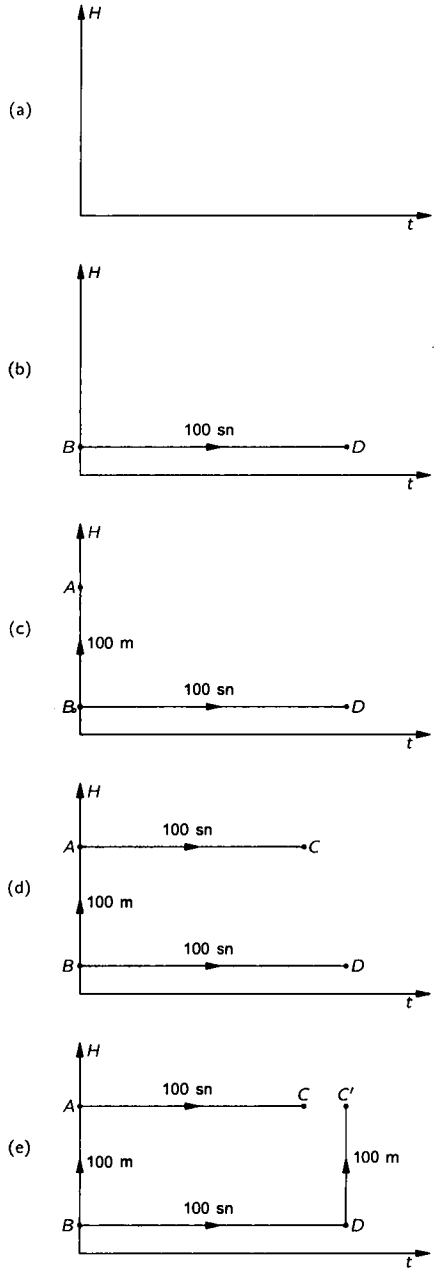
Aynı sonuç bir başka şekilde de elde edilebilir. ω_0 frekansındaki bir fotonun enerjisi $E_0 = \hbar\omega_0$ olarak ifade edilebilir. E_0 enerjisinin görelilik kütlesi E_0/c^2 olduğundan fotonun kütlesi (durağan kütlesi *değil*) $\hbar\omega_0/c^2$ olur ve dünya tarafından "çekilir". H yüksekliğinden düşerken $(\hbar\omega_0/c^2)gH$ kadar bir ilave enerji kazanır, diğer bir deyişle yere aşağıdaki şekilde hesaplanabilen bir enerji miktarıyla düşer:

$$E = \hbar\omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right)$$

Ancak düştükten sonra frekansı $E/\hbar$ olur, böylece Denk. (42.5)'in sonucunu yine verir. Görelilik, kuantum fiziği ve enerji korunumu hakkındaki fikirlerimiz, ancak Einstein'ın kütleçekim alanındaki saatler hakkındaki öngörüsü doğruysa bir arada uyum içinde olur. Örneğin, dünyanın yüzeyindeki 20 metrelik bir yükseklik farkı için frekanstaki farklılık sadece 10^{15}'te ikidir. Mössbauer etkisini kullanarak bu farkın doğru olduğu deneysel olarak gösterilmiştir.* Einstein tamamen haklıydı.

42-7 Uzay-zamanın eğriliği

Şimdi de, az önce konuştuklarımızı eğri uzay-zaman fikriyle ilişkilendirelim. Daha önceden zamanın farklı yerlerde farklı hızlarda geçmesini elektrikli ocağın eğri uzayına benzetmiştik. Bu aslında benzerlikten ötedir, uzay-zaman *eğridir*. Gelin, uzay-zamanda biraz geometri yapalım. İlk başta bu size garip gelebilir, ancak sıklıkla, mesafenin bir eksende ve zamanında da diğer eksende olduğu uzay-zaman diyagramlarını çizmiştik. Uzay-zamanda dikdörtgen çizmeye çalıştığımızı düşünelim. Şekil 42-18(a)'daki gibi H yüksekliğine karşı t zamanının grafiğini çizmekle başlayalım. Dikdörtgenimizin tabanını çizmek için H_1 yüksekliğinde *durağan* bir nesneyi alıp, dünya çizgisini 100 saniye boyunca takip edelim. Şeklimizin (b) kısmındaki t eksenine paralel BD çizgisini elde ederiz. Şimdi de $t = 0$ zamanında birinci nesnenin 100 metre üzerindeki bir başka nesneyi ele alalım. Şekil 42-18(c)'deki A noktasında başlar. Şimdi A noktasındaki bir saatle ölçülecek şekilde 100 saniye boyunca çizgisini takip edelim. Şeklin (d) kısmında gösterildiği gibi A noktasından C noktasına gider. Ancak iki yükseklikte zaman farklı hızlarda ilerlediğinden –bir kütleçekim alanı olduğunu varsayıyoruz– C ve D noktaları eşanlı değildir. Kareyi tamamlamaya çalışmak için, Şekil 42-18(e)'deki gibi, aynı anda D noktasının 100 metre üzerinde bulunan C' noktasına bir çizgi çekmeye çalışsak bile parçalar uyuşmaz. İşte, uzay-zaman eğri derken demek istediğimiz budur.



Şekil 42-18 Uzay-zamanda bir dikdörtgen çizmeye çalışmak.

42-8 Eğri uzay-zamanda hareket

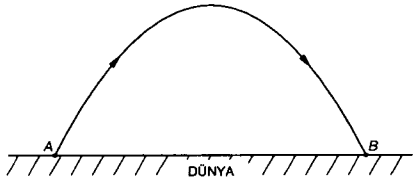
Şimdi ilginç bir bulmacayı ele alalım. Şekil 42-19'da görüldüğü gibi dünyanın yüzeyinde bulunan iki saat, A ve B, olsun. A saatini bir H yüksekliğine kaldıralım, orada bir süre tutalım ve B saati tam 100 saniye ilerlediğinde yere indirelim. Bu durumda A saati 107 saniye ilerlemiş olur, çünkü havadayken daha hızlı ilerlemekteydi. İşte bulmaca burada. A saatini, yere döndüğünde B saati 100 saniye ilerlemiş olacak şekilde, en uzun geçen zamanı gösterecek şekilde nasıl hareket ettirebiliriz? Buna, "Bu kolay. A saatini mümkün olduğunca yuka-

* R. V. Pound ve G. A. Rebka, Jr., *Physical Review Letters*, 4. Cilt, s. 337 (1960).

rı kaldırırız. Orada olabildiğince hızlı çalışacaktır ve böylece döndüğümüzde en geç zamanı gösterecektir" cevabını verebilirsiniz. Yanlış. Bir şeyi unuttunuz: yukarı çıkıp sonra aşağı dönmek için sadece 100 saniyemiz var. Çok yükseğe çıkarsak, 100 saniyede oraya varmak ve sonra geri dönebilmek için çok hızlı gitmemiz gerek. Ayrıca saatlerin $\sqrt{1-v^2/c^2}$ faktörü kadar *yavaşlamasını* sağlayan özel görelilik etkisini de unutmamalısınız. Bu görelilik etkisi *A* saatinin *B* saatine göre *daha az zaman* ölçmesine yol açar. Dolayısıyla elimizde bir tür oyun var. *A* saatiyle sabit durursak 100 saniye okuruz. Küçük bir yüksekliğe yavaşça çıkar ve sonra yine yavaşça inersek 100 saniyeden çok az daha fazla bir zaman ölçeriz. Biraz daha yükseğe çıkarsak belki biraz daha fazla zaman ölçeriz. Ancak çok yükseğe çıkacak olursak, oraya gitmek için çok hızlı olmamız gerekir ve bu yüzden saati 100 saniyeden az ölçecek kadar yavaşlatırız. Yüksekliği zamana karşı nasıl ayarlamalıyız ki –ne kadar yükseğe ve ne hızda çıkmalıyız ki, *B* saati 100 saniye ölçtüğünde yere geri dönmüş olalım– *A* saatinde olası en uzun zaman ölçümünü elde edelim?

Cevap: Bir topu havaya, dünyaya tam olarak 100 saniyede dönecek şekilde, ne kadar hızlı atmamız gerektiğini bulun. Topun hareketi –hızlı yükseliş, yavaşlama, durma ve aşağıya inme– topa bağlanmış bir saatin en uzun zamanı okuması için gerekli harekettir.

Şimdi biraz daha farklı bir oyunu ele alalım. Aralarında belli bir mesafe olan, dünya üzerindeki *A* ve *B* noktalarını düşünelim. Daha önceden oynadığımız düz çizgi oyununu oynayalım. *A* noktasından *B* noktasına –bir sinyalle *A* noktasından çıktığımızı ve *B* noktasındaki bir saat tam 100 saniye ölçtüğünde *B* noktasına vardığımızı düşünelim– hareket eden saatimiz en uzun süreyi ölçecek şekilde nasıl gitmemiz gerektiğini bulalım. "Daha önce yapılması gerekenin, *B* noktasına tam 100 saniye sonra varacak şekilde düzgün bir hızla düz bir çizgi üzerinde ilerlemek olduğunu bulmuştuk. Düz bir çizgi boyunca gitmezsek daha süratli gitmek zorunda kalırız ve saatimiz yavaşlar" diyeceksiniz. Ancak bir dakika bekleyin! Daha önce kütleçekimi hesaba katmamıştık. Önce biraz yukarı doğru eğri bir yolu takip etmek ve sonra aşağı inmek daha iyi değil midir? Böylece bir süre yüksekte dururuz ve saatimiz daha hızlı ilerlemez mi? Elbette öyle. Hareket eğrisini, hareket eden saat için geçen zamanın en yüksek olacak şekilde ayarlamaya dair matematik problemini çözerseniz hareketin, Şekil 42-19'daki gibi, bir parabol olduğunu –kütleçekim alanında serbest balistik yol üzerinde hareket eden bir şeyin izlediği yolu– bulursunuz. Dolayısıyla bir kütleçekim alanındaki hareket yasası şu şekilde ifade edilebilir: *Bir yerden diğerine hareket eden bir nesne, taşıdığı saat diğer olası yollara göre en uzun süreyi gösterecek şekilde hareket eder.* Elbette, aynı başlangıç ve bitiş koşullarıyla. Hareket eden bir saatin ölçtüğü zaman sıklıkla "kendi zamanı" olarak isimlendirilir. Serbest düşüşte yol, bir nesnenin kendi zamanını en yükseğe çıkarır.



Şekil 42-19 Düzgün bir kütleçekim alanında sabit bir geçen zaman için maksimum kendi zamanlı yörünge bir paraboldür.

Bakalım bütün bunlar nasıl işliyor. Hareket eden bir saatin *artan* zamanının aşağıdaki ifade olduğunu belirten Denk.(42.5)'le başlayalım:

$$\frac{\omega_0 gH}{c^2} \tag{42.13}$$

Bunun yanında, hız için ters işaretli bir düzeltme olduğunu hatırlayalım. Bu etki için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu biliyoruz:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Her ne kadar bu ilkenin herhangi bir hız için doğru olduğunu bilsek de, hızların *c*'den çok daha düşük olduğu bir örneği ele alalım. Bu durumda bu denklemi

$$\omega = \omega_0(1 - v^2/2c^2)$$

şeklinde ve saatimizin hızındaki hatayı da aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$-\omega_0\frac{v^2}{2c^2} \tag{42.14}$$

(42.13) ve (42.14)'teki iki terimi birleştirdiğimizde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c^2}\left(gH - \frac{v^2}{2}\right) \tag{42.15}$$

Hareket eden saatimiz için böyle bir frekans kayması, sabit saatimizde dt zamanını ölçtüğümüzde hareket eden saatin aşağıdaki zamanı ölçeceği anlamına gelir.

$$dt\left[1 + \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)\right] \tag{42.16}$$

Yol üstündeki artan zaman, ilave terimin zamana göre integralidir, yani

$$\frac{1}{c^2}\int\left(gH - \frac{v^2}{2}\right)dt \tag{42.17}$$

ve bunun maksimum olması beklenir.

gH terimi, kütleçekim potansiyeli olan ϕ terimidir. Her şeyi, m nesnenin kütlesiyken, $-mc^2$ sabit çarpanıyla çarptığımızı düşünelim. Sabit, maksimum için olan koşulu değiştirmeyecektir ancak eksi işareti maksimumu minimuma çevirecektir. Bu durumda Denk. (42.16)'ya göre nesne aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde hareket eder:

$$\int\left(\frac{mv^2}{2} - m\phi\right)dt = \text{bir minimum} \tag{42.18}$$

İntegral şimdi, kinetik ve potansiyel enerjilerinin farkıdır. 2. Cilt, 19. Bölüme bakarsanız, en az eylem ilkesini tartışırken, herhangi bir potansiyelde bir nesne için Newton yasalarının tam da Denk. (42.18) şeklinde yazılabileceğini göstermiştik.

42-9 Einstein'ın kütleçekim kuramı

Einstein'ın hareket denklemleri –eğri uzay-zamanda kendi zamanının maksimum olması gerektiği– düşük hızlar için Newton yasalarıyla aynı sonucu verir. Dünya etrafında dolaşırken Gordon Cooper'ın saati, onun uydusunun dolaşabileceği herhangi bir yoldakine göre daha geç bir zamanı gösteriyordu.*

Dolayısıyla kütleçekim yasası, uzay-zaman geometrisinin fikirlerinin terimleriyle şu dikkate değer şekilde ifade edilebilir. Parçacıklar daima en uzun –uzay-zamanda "en kısa mesafeye" benzer bir nicelik– kendi zamanında hareket ederler. Bu kütleçekim alanında hareket yasasıdır. Bunu bu şekilde ifade etmenin avantajı, koordinatlara veya durumu tarif edecek bir başka yola dayanmamasıdır.

Şimdi yaptıklarımızı özetleyelim. Size kütleçekim için iki yasa sunduk:

(1) Madde var olduğunda uzay-zaman geometrisinin nasıl değiştiği. Diğer bir deyişle, Denk. (42.3)'le ifade edilen, artan yarıçap cinsinden ifade edilen eğriliğin kürenin içindeki kütleyle orantılı olduğu.

(2) Sadece kütleçekim kuvvetleri olduğunda nesnelerin nasıl hareket ettiği. Dolayısıyla, nesnelerin iki uç koşul arasında kendi zamanları maksimum olacak şekilde hareket ettiği.

Bu iki yasa daha önce gördüğümüz yasa çiftlerine benzer. Daha önce bir kütleçekim alanındaki hareketi Newton'ın ters kare kütleçekim yasası ve onun hareket yasalarıyla tarif etmiştik. Şimdi (1) ve (2) numaralı yasalar onların yerlerini alır. Yeni yasalarımız elektrodinamikte gördüklerimize de karşılık gelir. Orada,

* Aslını söylemek gerekirse, sadece *bölgesel* maksimumdur. Kendi zamanının herhangi bir *yakın* yoldan daha büyük olduğunu söylemeliydik. Örneğin dünyanın etrafındaki eliptik bir yörünge için kendi zamanı, büyük bir yüksekliğe fırlatılan ve yere geri düşen bir nesnenin balistik yolundan daha uzun olmak zorunda değildir.

yükler tarafından meydana getirilen alanları belirleyen yasa –Maxwell denklemleri– vardı. "Uzay"ın niteliğinin yüklü bir madde varlığında nasıl değiştiğini belirtir ki, (1) numaralı yasa da kütleçekim için aynısını yapar. İlaveten, alanlarda parçacıkların nasıl hareket ettiğine dair bir yasa, $d(m\boldsymbol{v})/dt = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, vardı. Bu da, kütleçekim için, (2) numaralı yasayla karşılanır.

(1) ve (2) numaralı yasalar –gerçi çoğu zaman çok daha karmaşık matematiksel bir biçimde ifade edilmiş şekilde görürsünüz– Einstein'ın kütleçekim kuramının tam bir ifadesidir. Yine de bir ilave yapmalıyız. Bir kütleçekim alanında zaman ölçeklerinin değiştiği gibi, uzunluk ölçekleri de değişir. Hareket ettirdiğiniz zaman cetvellerin uzunlukları değişir. Uzay ve zaman birbirine öyle geçmiştir ki, zamanla ilgili bir şey olduğunda bunun bir şekilde uzaya yansımaması imkânsızdır. En basit örneği ele alalım: Dünyanın yanından geçmektesiniz. *Sizin* bakış açınızdan "*zaman*", *bizim* bakış açımıza göre kısmen uzaydır. Dolayısıyla uzayda da değişiklikler olmalıdır. Maddenin varlığında bükülen bütün *uzay-zamandır* ve sadece zaman ölçeğinde bir değişiklikten daha karmaşıktır. Bununla birlikte, uzayın eğriliğine dair bu kuralın sadece birinin bakış açısına göre değil, herkesin bakış açısına göre doğru olduğunun anlaşılması şartıyla Denk. (42.3)'te sunduğumuz kural kütleçekim yasalarını bütünüyle belirlemeye yeterlidir. Bir kütlenin yanından geçen biri, onun kendisi yanından geçerkenki hareketi için hesapladığı kinetik enerji yüzünden farklı bir kütle içeriği görür ve enerjiye karşılık gelen kütleyi de hesaba katmalıdır. Nasıl hareket ediyor olursa olsun, bir kimse bir küre çizdiğinde artan yarıçapı $G/(3c^2)$ çarpı kürenin içindeki toplam kütle (ya da daha iyisi, $G/(3c^4)$ çarpı toplam içerdiği enerji) olarak bulacağı şekilde kuram düzenlenmelidir. Bu yasanın –(1) numaralı yasanın– herhangi bir hareketli sistemde doğru olması kütleçekime dair en büyük yasalardan biridir ve *Einstein'ın alan denklemi olarak isimlendirilir.* Diğer büyük yasa da (2) numaralı yasadır –nesnelerin kendi zamanlarının maksimum olacağı şekilde hareket etmeleri– ve *Einstein'ın hareket denklemi* olarak isimlendirilir.

Bu yasaları Newton yasalarıyla karşılaştırmak veya elektrodinamikle ilişkilendirmek için tamamen cebirsel bir biçimde yazmak matematiksel olarak zordur. Ancak bugün kütleçekim fiziğine dair çoğu eksiksiz yasalarımız bu şekildedir.

Ele aldığımız basit örnekte Newton mekaniğiyle tam uyum içinde olsalar da, her zaman böyle değildir. Einstein tarafından çıkarılan üç farklılık deneysel olarak ispatlanmıştır: Merkür'ün yörüngesi sabit bir elips değildir; bir yıldızın güneş yakınından geçen ışığı, düşündüğünüzden iki kat fazla sapar ve saatlerin hızları kütleçekim alanındaki konumlarına dayanır. Einstein'ın öngörüleri Newton mekaniğindeki fikirlerle çeliştiği zaman, doğa her zaman Einstein'ın yanında olmuştur.

Şimdiye kadar söylediğimiz her şeyi şu şekilde özetleyelim. Birincisi, zaman ve uzaklık oranları onları uzayda ölçtüğünüz yer ve zamana bağlıdır. Bu, uzay-zamanın eğildiğine dair ifadeyle eşdeğerdir. Bir kürenin alanını ölçüp, $\sqrt{A/4\pi}$ denklemiyle bir yarıçap öngörebiliriz; ancak ölçülen gerçek yarıçapın öngörülen yarıçapa göre kürenin içindeki toplam kütleyle (sabit $G/3c^2$'dir) orantılı bir artanı olacaktır. Bu uzay-zamanın eğriliğinin tam derecesini düzeltir. Ve eğrilik, maddeye kimin baktığından veya maddenin nasıl hareket ettiğinden bağımsız aynıdır. İkincisi, parçacıklar bu uzay-zamanda "düz çizgiler" (maksimum kendi zaman yolları) üzerinde ilerler. Bu, Einstein'ın kütleçekim yasalarına dair denklemlerin içeriğidir.

DİZİN

A
"Acayip" parçacıklar, 8-7
"Acayiplik" sayısı, I-2-9
Acayiplik, III-11-12
Korunumu, III-11-12
Açı
Brewster, I-33-6
Gelme, I-26-3, 33-1
Yalpalama, 34-4, III-34-4
Yansıma, I-26-3, 33-1
Açısal frekans, I-21-3, I-29-2, I-49-3
Açısal hız, I-18-3
Açısal momentum, I-7-7, I-18-5, I-20-1,III-18-1, III-20-14
Bileşenleri, III-18-14
Dairesel kutuplanmış ışığın, I-33-10
Korunumu, I-4-7
Katı bir cismin, I-20-8
Yörüngesel, III-19-1
Adenin, I-3-6
Adyabatik genişleme, I-44-5
Adyabatik mıknatıssızlaştırma, 35-9, III-35-9
Adyabatik sıkıştırma, I-39-5
Akı kuralı, 17-1
Akı, 4-7
Bir vektör alanının, 3-2
Elektrik, 1-4
Enerji, 27-2
Akım
Ampèr, 36-2
Atomik, 13-4, 32-4, 36-2
Eddy, 16-6
Elektrik, 13-1
Atmosferdeki, 9-2
Uyarılmış, 16-5
Akım yoğunluğu, 13-1
Akış
Sıvı, 12-8
Isı, II-2-8 f, II-12-2
Dönmesiz, 12-8, 40-5
Kararlı, 40-6
Viskoz, 41-4
Akış çizgisi, 40-6
Aktif devre elemanı, 22-5
Aktivasyon Enerjisi, I-3-4, I-42-7
Aktomiyozin, I-3-3
Alan, 37-6
Alan çizgileri, 4-11
Alan enerjisi, 27-1
Nokta yükün, 28-1
Alan indisi, 29-5
Alan iyon mikroskopu, 6-14
Alan şiddeti, 1-4
Alan, I-14-7
Elektrik, I-2-4, I-12-7, 1-2, 6-1, 7-1
Elektromanyetik, I-2-2, I-2-5, I-10-9
Elektrostatik, 5-1, 7-1
Örgünün, 7-10
Akı vektörü, 3-2
Kütleçekim, I-12-8, I-13-8
Kovuktaki, 5-8
Manyetik, I-12-9, 1-2, 13-1, 14-1
Kararlı akımların, 13-3
Mıknatıslanma, 36-7
Yüklü bir iletkenin, 6-8
İletkenin, 5-7
Göreli elektrik, 13-6
Göreli manyetik, 13-6
Skaler, 2-2
Üst üste binme, I-12-9
İki boyutlu, 7-2
Vektör, 1-4, 2-2
Alıcı, III-14-5
Alınganlık
Elektrik,10-4
Manyetik, 35-7, III-35-7
Alniko V, 36-11, 37-10
Alternatif akım devreleri, 22-1
Alternatif akım üreteci, 17-6
Altıgen örgü, 30-7
Amonyum mazeri, III-9-1
Amonyum molekülü, III-8-11
Durumu, III- 9-1
Ampèr akımı, 36-2
Ampèr Yasası, 13-3
Ampermetre, 16-1
Analiz
Diferansiyel, 2-1
İntegral,3-1
Varyasyon, 19-3
Analog bilgisayar, I-25-8
Angström (birim), I-1-3
Anormal dağılım, I-31-8
Anormal kırılma, I-33-9

Anti-ferromanyetik malzeme, 37-11
Argon, III-19-16
Artan yarıçap, 42-4, 42-13
Asetilkolin, 1-3-3
Astronomi ve fizik, I-3-6
Atmosferin potansiyel gradyanı, 9-1
Atom parçacıkları, I-2-8
Atom saati, I-5-5, III-9-14
Atom yörüngeleri, 1-8
Atom, I-1-2
  Rutherford-Bohr modeli, 5-3
  Kararlılığı, 5-3
  Thomson modeli, 5-3
  Yarı kararlı, 1-42-10
Atomik akımlar, 13-4, 32-4, 36-2
Atomik hipotez, I-1-2
Atomik kutuplaşabilirlik, 32-2
Atomik süreçler, 1-1-5
  ve parite korunumu, III-18-2
Avogadro sayısı, 1-41-10, 8-5
Aydınlanma, 12-10

B
Bağımsız parçacık yaklaşımı, III-15-1
Bar (birim), 1-47-4
Barkhausen etkisi, 37-9
Baryonlar, III-11-13
Basınç, I-1-3
  Gazın, I-39-2
  Hidrostatik, 40-1
  Işık, I-34-11
  Işınım, I-34-11
Belirli enerji, durumları, III-13-3
Belirsizlik ilkesi, I-2-6, I-6-10, I-7-11,I-37-9, 1-37-11, 1-38-3, I-38-5,III-1-9, III-1-11, III-2-3, III-2-5
  ve atomların kararlılığı, 1-1, 5-3
Benzen molekülü, III-10-10, III-15-7
Bernoulli kuramı, 40-6
Bessel fonksiyonu, 23-6, 23-9, 24-4
Betatron, 17-4, 29-6
Bilimsel yöntem, I-2-1
Binoküler görüş, 1-36-4
Biot-Savart Yasası, 14-9, 21-7
Bir boyutlu örgü, III-13-1
Bir fırtına bulutu içindeki yük ayrımı, 9-7
Biriktirici
  Enerjisi, 8-2
  Paralel plakalı, II-6-11, II-8-3
Birim hücre, 1-38-5, III-2-5
Birim matris, III-11-2
Birim vektör, 1-11-10, 2-3
Birleşik (böcek) görme, I-36-6
Birleşik Legendre fonksiyonları, III-19-9
Biyoloji ve fizik, 1-3-2
Bohr magnetonu, 34-12, 35-9, 37-1,III-12-11, III-34-12, III-35-9
Bohr Yarıçapı, I-38-6, III-2-6, III-19-3, III-19-5
Boltzmann enerjisi, 36-11
Boltzmann faktörü, III-14-4
Boltzmann kuramı, III-21-7
Boltzmann sabiti, I-41-10, 7-8, III-14-3
Boltzmann yasası, I-40-2
Bor, III-19-16
Bose parçacıkları, III-4-1, III-15-6
Boya, III-10-12
Boyle Yasası, I-40-8
"Boys " kamerası, 9-10
Bragg-Nye kristal modeli, 30-9, 31-1
Bremsstrahlung , I-34-6
Brewster açısı, I-33-6
Brown hareketi, I-1-8, I-6-5, I-41-1,I-46-2, I-46-5
Buharlaşma, I-1-6
  Bir sıvının, 1-40-3, I-42-1
Bükme işlemcisi, 2-8, 3-1
Bükme, 2-8, 3-1
Büzülme hipotezi, I-15-5

C
Carnot çevrimi, I-44-5, 1-45-2
Cavendish deneyi, I-7-9
Cebir, I-22-1
  Dört vektör, 1-17-7
  Matris ,III-5-14, III-11-3, III-20-17
  Tensör, III-8-4
  Vektör, I-11-6 , 2-2, 2-6, 2-11, 3-1, 3-11, 27-4, III-5-15, III-8-2, III-8-4
  Yunan , I-8-2
Cebirsel işlemci, III-20-3
cebirsel, III-20-3
Cherenkov ışıması, I-51-2
Clausius-Clapeyron denklemi, I-45-6
Clausius-Mossotti denklemi, 11-7, 32-7
Clebsh-Gordon katsayıları, III-18-15, III-18-18
Coriolis kuvveti, 1-19-8, I-20-5, I-51-6, I-52-3, 34-7, III- 34-7,I-52-3, 34-7, III-34-7
Cornu spirali, I-30-9
Couette akışı, 41-10
Coulomb yasası, I-28-1, 1-2 , 1-5, 4-2, 4-10, 5-5,4-2, 4-10, 5-5
Curie noktası, 37-4, 37-10, 37-13
Curie sıcaklığı, 36-13, 36-15, 37-1, 37-4, 37-11
Curie yasası, 11-5
Curie-Weiss yasası, 11-10

Ç
Çakma kiriş, 38-10
Çark ve kilit mandal makinesi, 1-46-1
Çarpışma tesir kesiti, 1-43-3
Çarpışma, I-16-6
  Esnek, I-10-7
Çekirdek, I-2-4, I-2-6, I-2-8
Çift kırılım, I-33-3, I-33-9
Çift kırılım malzemesi, 1-33-9, 33-3, 39-8
Çift yıldızlar, I-7-6
Çiftlenim, sabiti, 17-14
Çinko, III-19-16
Çizgi İntegrali, 3-1
Çizgi Yükü, 5-3
Çizgili (iskelet) kas, 1-14-2
Çomak hücreleri, I-35-1, 1-35-5, I-35-9, I-36-4,I-36-6, III-13-10
Çözme gücü, I-27-7
  Bir kırınım ağının, I-30-5

D
D'Alembert işlemcisi , 25-7
D'Alembert, 25-7
Dağılım
  Normal (Gauss dağılımı), I-6-9, III-16-8
  Olasılık, I-6-7
Daimi hareket, 1-46-2
Dairesel hareket, I-21-4
Dairesel kutuplanma, I-33-2
Dalga boyu, I-26-1, I-29-3
Dalga cephesi, 1-33-9, I-47-3, I-51
Dalga denklemi, 1-47-1, 18-9
Dalga düğümü, III-7-9
Dalga fonksiyonu, III-16-5
  Anlamı , III-21-6
Dalga kılavuzu, 24-1
Dalga paketi, III-13-6
Dalga sayısı, I-29-2
Dalga, I-51-1
  Düzlem, 20-1
  Elektromanyetik, I-2-5, 21-
  Işık, 1-48-1
  İletilen, 33-7
  Kayma, 1-51-4, 38-5
  Küresel, 20-12, 21-2
  Sinüzoidal, I-29-2
  Spin, III-15-1
  Üç boyutlu, 20-8
  Yansıyan, 33-7
Dayanım, I-23-5
Debye uzunluğu, 7-9
Değiştirme kuvveti, 37-2
Denge, I-1-6
Denklem
  Dirac, I-20-6
  Dağınım, I-31-6
  Einstein alan, 42-14
  Einstein'ın hareket, 42-14
  Nötron, 12-7
  Laplace , 7-1
  Maxwell'in, I-46-7, I-47-7, 2-1,2-8, 4-1, 6-1, 7-6, 8-11, 10-6, 13-3, 13-6, 13-11,15-14, 18-1, 22-1, 22-6, 22-10, 23-3, 23-7, 23-9, 24-5, 25-7, 25-9, 25-11, 26-2, 26-11, 27-3, 27-5, 27-7, 27-9, 28-1,32-5, 33-1, 33-3, 34-8, 36-1, 36-3, 36-5, 36-13,38-2, 39-8, 42-14, III-34-8
  Dört vektör için, 25-10
  Genel çözümü , 21-4
  Bir dielektrik içinde, 32-3
  Yenilenmesi, 28-6
  Çözümü ~ boş uzayda, 20-1
  Çözümü ~ akım ve yükleri için, 21-1
  Çözmek, 18-9
  Poisson, 6-1
  Mossotti, 11-7, 32-7
  Saha, I-42-6
  Schrödinger, 15-12, 41-12, III-16-4, III-16-11
  Hidrojen atomu için, III-19-1
  Klasik bakış açısına göre, III-21-1
  Dalga, I-47-1, 18-9
  Yayınım
Devre
  Alternatif akım, 22-1
  Eşdeğer, 22-10
Devre elemanları, 23-1
  Aktif, 22-5
  Pasif, 22-5
Dışarlama ilkesi, III-4-12
Dielektrik sabiti, 10-1
Dielektrik, 10-1, 11-1
Diferansiyel analiz, 1-8-4, 2-1
Dik eksenli örgü, 30-7
Dinamik (p-) momentum, III-21-5
Dinamik, I-9-1
  Dönme, I-18-3
  Gelişimi, I-7-2
  Göreli, I-15-9
Dipol
  Elektrik, 6-2
  Manyetik, 14-7
  Moleküler, 11-1
  Salınan, 21-5
Dipol momenti, I-12-6, 6-3
  Manyetik, 14-8
Dipol potansiyeli, 6-4
Dipol radyatörü, I-28-5, I-29-3

Dirac denklemi, I-20-6
Direnç, I-23-5, I-41-3, I-41-8, 22-4
Dislokasyon, 30-8
  Kayma dislokasyonu, 30-9
  Sarmal dislokasyon, 30-9
  ve kristal büyümesi, 30-9
Dağınım denklemi, 1-31-6
Dağınım, I-31-6
  Anormal, 1-31-8
  Normal, I-31-8
Diverjans
  Dört vektörün, 25-7
Diverjans işlemcisi, 2-7, 3-1
Diverjans, 2-7, 3-1
Diyamanyetizasyon, 34-1, 34-5, III-34-1,III-34-5
DNA, 1-3-5
Doğrultucu, 22-15
Doğrusal dönüşüm, I-11-6
Doğrusal momentum
  Korunumu, I-4-7, I-10-1
Doğrusal sistemler, I-25-1
Dolaşım, 1-5, 3-8
Doppler etkisi, I-17-8, I-23-9, I-34-7,I-38-6, 42-9, III-2-6, III-12-9
Dönme
  İki boyutta, I-18-1
  Düzlem, I-18-1
  Katı bir cismin, I-18-2
  Eksenleri, 1-11-3
  Uzayda, 1-20-1
Dönme matrisi, III-6-4
Dönmesiz akış, 12-8, 40-5
Dönüşen genlikler, III-6-1
Dönüşüm
  Alanların, 26-1
  Doğrusal, I-11-6
  Fourier, I-25-4
  Galileo, 1-12-11, I-15-2
  Hızın 1-16-4
  Lorentz, I-15-3, I-17-1, 1-34-8, I-52-2, 25-1
  Zamanın, I-15-5
Dört kutuplu lens, 7-4, 29-6
Dört kutuplu potansiyel, 6-8
Dört potansiyel, 25-8
Dört vektörler, I-15-8, I-17-5, 25-1
Dörtgen örgü, 30-7
Durağan durumlar, III-7-1, III-11-22
Durum vektörü, III-8-1
  Ayrışması, III-8-3
Durum
  Belirli enerjinin, III-13-3
  Durağan, III-7-1, III-11-22
  Öz, III-11-22
  Taban, III-7-2
  Uyarılmış, 8-7, III-13-9
  Zaman bağımlı, III-13-6
Duvar enerjisi, 37-6
Duyusal geçmiş, I-17-4
Duyusal gelecek, I-17-4
Düğüm, I-49-2
Dünya dışılık, 25-10
Düz kas, I-14-2
Düzeltme, Damıtarak arıtma, I-50-9
Düzlem dalgalar, 20-1
Düzlem örgü, 30-5

E
Eddy akımı, 16-6
Eğik düzlem, I-4-4
Eğik eksenli örgü, 30-7
Eğri uzay, 42-1
Eğrilik
  Negatif, 42-4
  Ortalama, 42-6
  Pozitif, 42-4
  Yapısal, 42-5
Einstein alan denklemleri, 42-14
Einstein hareket denklemleri, 42-14
Einstein katsayıları, III-4-8, III-9-15
Einstein-Podolsky-Rosen paradoksu, III-18-8
ek; ilişik; yan-; eşlek , III-11-23
  Hermitsel , III-20-3
Eksenel vektör, I-20-4, I-52-6, I-52-10
Eksenlerin çevrimi, I-11-1
Eksponansiyel atmosfer, I-40-1
Elektret, 11-8
Elektrik akım yoğunluğu, 2-8
Elektrik akımı, 13-1
  Atmosferdeki, 9-2
Elektrik akışı, 1-4
Elektrik alanı, 1-2-4, I-12-7, 1-2 ,6-1 , 7-1
  Göreliliği, 13-6
Elektrik alınganlığı, 10-4
Elektrik dipol matris elemanı, III-9-15
Elektrik dipol, 6-2
Elektrik enerjisi, I-4-2, I-4-6, I-10-8, 15-3
Elektrik kuvveti, I-2-3, 1-1, 13-1
  Görelilikteki gösterimi, 25-1
Elektrik motoru, 16-1
Elektrik potansiyel, 4-4
Elektrik üreteci, 16-1, 22-5
Elektrik yük dağılımı, 2-8, III-21-6
Elektrodinamik, 1-3
Elektromanyetik alan, I-2-2, I-2-5, I-10-9
Elektromanyetik dalga, I-2-5, 21-1
Elektromanyetik enerji, I-29-2
Elektromanyetik ışınım, I-26-1, I-28-1,I-29-1

Elektromanyetik kütle, 28-1
Elektromanyetizma, 1-1
  Yasası, 1-5
Elektromotor kuvvet (EMK), I6-2
Elektron bulutu, I-6-11
Elektron konfigürasyonu, III-19-15
Elektron mikroskopu, 29-3
Elektron volt (birim), I-34-4
Elektron, I-2-4, I-37-I, I-37-4, III-I-1, III-1-4
  Klasik ~ yarıçap, I-32-4, 28-3
  Yükü , I-12-7
Elektron-ışın tüpü, I-12-9
Elektronik kutuplanma, 11-I
Elektrostatik alan, 5-1, 7-1
  Bir örgünün, 7-10
  Enerjisi, 8-9
Elektrostatik denklemler
  Dielektrikli 10-6
Elektrostatik enerji, 8-1
  Çekirdekte, 8-6
  İyonik kristalin, 8-4
  Nokta yükün, 8-12
  Yükün, 8-1
Elektrostatik lens, 29-2
Elektrostatik potansiyel, denklemleri, 6-1
Elektrostatik, 4-1, 5-1
Elips, I-7-1
Elmas örgüsü, III-14-1
Empedans, I-25-8, 22-1
  Karmaşık, I-23-7
  Vakumun, I-32-2
En az eylem, prensibi, 19-1
En az zaman, prensibi, I-26-1
Enerji akışı, 27-2
Enerji diyagramı, III-14-I
Enerji düzey diyagramı, III-14-3
Enerji düzeyleri, I-38-7, III-2-7, III,I2-7
  Harmonik salınıcının, I-40-9
Enerji kuramı, I-50-7
Enerji yoğunluğu, 27-2
Enerji, I-4-1, 22-11
  Aktivasyon, I-3-4, I-42-7
  Alan, 27-I
  Biriktiricinin, 8-2
  Boltzmann, 36-11
  Dönme kinetik, I-19-7
  Duvar, 37-6
Elektrik, I-4-2, I-4-6, I-10-8, 15-3
Elektromanyetik, I-29-2
Elektrostatik alandaki, 8-9
Elektrostatik, 8-1
  Çekirdekte, 8-6
  Bir nokta yükünün, 8-12
  Yüklerin, 8-1
  İyonik kristallerin, 8-4
  Esneklik, I-4-2, I-4-6
  Isı, I-4-2, I-4-6, I-I0-8
  Kimyasal, I-4-2
  Kinetik, I-1-7, I-2-6, I-4-2, I-4-5
  ve sıcaklık, I-39-6
  Korunumu, I-3-2, I-4-1, 27-1, 42-11, III-7-6
  Kütle, I-4-2, I-4-7
Entalpi, I-45-5
Entropi, I-44-10, I-46-6
Esnek çarpışmalar, I-10-7
Esnek malzemeler, 39-1
Esneklik enerjisi, I-4-2, I-4-6
Esneklik sabiti, 39-6, 39-10
Esneklik tensörü, 39-4
Esneklik, 38-1
Esneklik, eğri, 38-12
Eş değer devreler, 22-10
Eşpotansiyel yüzeyler, 4-11
Eşzamanlılık, I-15-7
Eş-eksenel hat, 24-1
Etilen molekülü, III-15-8
Etkin kütle, III-13-7
Etkisi
  Barkhausen, 37-9
  Doppler, I-17-8, I-23-9, I-34-7, I-38-6, 42-9, III-2-6, III-I2-9
  Hall, III-14-7
  Kerr, I-33-5
  Meissner, III-21-8, III-21-12
  Mössbauer, 42-11
  Purkinje, I-35-2
Euler kuvveti, 38-11
Evre Hızı, I-48-6
Evre kayması, I-21-4
Eylemsizik, I-2-3, I-7-11
  İlkesi, I-9-1
  Momenti, I-18-7, I-19-1

F
Falcı, I-17-4
Farad (Birim), I-25-7, 6-13
Faraday'ın indüklenme yasası, 17-2, 18-1, 18-8
Fermat ilkesi, I-26-3
Fermi (birim), I-5-10
Fermi parçacıkları, III-4-1, III-15-7
Ferritler, 37-12
Ferro-elektrik, 11-8
Ferromanyetik malzemeler, 37-10
Ferromanyetik yalıtkan, 37-12
Ferromanyetizm, 36-1, 37-I
Fırtına, 9-5
Filtre, 22-14
Fizik
  1920 öncesi, I-2-3

Astronomi ve, I-3-6
Biyoloji ve, I-3-2
Diğer bilimlerle ilişkisi, I-3-1
Jeoloji ve, I-3-7
Kimya ve, I-3-I
Matematik ve, I-3-1
Psikoloji ve, I-3-8
Foton yayınlanması, III-4-7
Foton, I-2-7, I-17-8, I-26-1, I-37-8, III-1-8
Kutuplanma durumları, 11-9
Soğurulması, III-4-7
Yayınlanması, III-4-7
Fotosentez, I-3-3
Foucault sarkacı, I-16-2
Fourier analizi, I-25-4, I-50-2, I-50-5
Fourier dönüşümü, 1-25-4
Fourier kuramı, 7-11
Frekans
Açısal, I-21-3, I-29-2, I-49-3
Larmor, 34-7, III-34-7
Plazma, 7-7, 32-I1
Salınım, I-2-5
Fresnel yansıma denklemi, I-33-8

G
Galileo dönüşümü, I-12-11, 1-I5-2
Galileo göreliliği, I-10-3, I-10-6
Galvanometre, 1-8, 16-1
Galyum, III-19-17
Gama ışınları, I-2-5
Gauss (Birim), I-34-4, 36-6
Gauss dağılımı, I-6-9, III-16-8
Gauss kuramı, 3-4, III-21-4
Gauss yasası, 4-9
Alan çizgileri için, 4-I1
Uygulaması, 5-1
Gecikmeli zaman, I-28-2
Geçici, I-24-1
Elektriksel, I-24-5
Geçirgenlik, 36-9
Göreli, 36-9
Gelgit, I-7-4
Gelme, açısı, I-26-3, 33-1
Genişleme
Adyabatik, I-44-5
İzotermal, I-44-5
Genlik ayarlaması, I-48-3
Genlik, III-8-1
Dönüşüm, III-6-1
Girişim, III-5-10
Olasılık, I-37-10, III-1-10, III-3-I, III-16-1
Uzay bağımlılığı, III-I3-4, III-I6-1
Zaman bağımlılığı ,III-7-1
Geometrik optik, I-26-I, I-27-1
Gerilme, 38-2
Hacim, 38-3
Gerilim
Yüzey, I2-5
Gerilme tensörü, 31-11, 39-1
Gezegen hareketi, I-7-I, I-9-6, I-13-5
Girdap, 40-5
Girişim dalgaları, I-37-4, III-1-4
Girişim genliği, III-5-10
Girişim, I-28-6
İki yarıklı, III-3-5
ve kırınım, I-30-1
Göreli geçirgenlik, 36-9
Görelilik
Elektrik alanın, 13-6
Galileocu, I-10-3, I-10-6
Kuramı, I-7-I1, I-17-1
Manyetik alan, 13-6
Özel görelilik, I-I5-1
Göreli dinamik, I-15-9
Göreli enerji, I-16-1
Göreli kütle, I-I6-6
Göreli momentum, I-10-8, I-16-1
Görsel korteks, I-36-4
Görüntü yükü, 6-9
Görüş, I-36-1, III-13-10
Binoküler, I-36-4
Nörolojisi, I-36-9
Psiko-kimyası, I-35-9
Renkli, I-35-1, I-36-1
Göz
Birleşik (Böcek), I-36-6
İnsan, I-35-1
Göz çukuru, I-35-1, I-35-3, I-35-9
Gradyan işlemcisi, 2-4, 3-1
Green fonksiyonu, I-25-4
Grup hızı, I-48-6
Guanin, I-3-6
Güç, I-13-2
Gürültü, I-50-1

H
Hacim gerilimi, 38-3
Hacim modülü, 38-3
Hacim stresi, 38-3
Haidinger fırçası, I-36-7
Hall etkisi, III-14-7
Hamilton matrisi, III-8-1
Hamilton, III-8-10
Hamilton'un ilk ilkesel fonksiyonu, 19-8
Hareket, I-5-1, I-8-1
Brown, I-I-8, I-6-5, I-41-I, I-46-2, I-46-5
Daimi, I-46-2
Dairesel, I-21-4
Gezegensel , I-7-1, I-9-6, I-13-5
Harmonik, I-21-4, I-23-1
Parabolik, I-8-10

Yörüngesel, 34-3, III-34-3
Yükün, 29-I
Hareketli yük, alan momentumu, 28-2
Harmonik hareket, I-21-4, I-23-1
Harmonik salınıcı, I-10-1, I-21-1
Enerji düzeyi, I-40-9
Zorlanmış, I-21-6, I-23-3
Harmonik, I-50-1
Hava Kanalı, I-10-5
Helmholtz kuramı, 40-11
Helyum, I-1-5, I-3-7, I-49-6, III-19-14
Sıvı, III-4-12
Henry (birim), I-25-7
Hermitsel eşlek, III-20-3
Hız potansiyeli, 12-
Hız, I-8-3
Açısal, I-18-3
Bileşenler, I-9-3
Dönüşüm, I-16-4
Evre, I-48-6
Grup, I-48-6
Hız ve, I-9-2
Hızlandırıcı kılavuz alanları, 29-4
Hidrodinamik, 40-2
Hidrojen atomu, III-19-1
Hidrojen dalga fonksiyonu, III-19-12
Hidrojen moleküler iyon, III-10-1
Hidrojen, III-19-14
Aşırı ince yarılma, III-12-1
Hidrostatik basınç, 40-1
Histerezis eğrisi, 37-5
Histerezis ilmeği, 36-8
Hooke yasası, I-12-6, 10-7, 30-12,31-11, 38-1, 39-4, 39-10
Hücre
Çomak, I-35-1, I-35-5, I-35-9, I-36-4, I-36-6, III-13-10
Koni, I-35-1, I-35-5, I-35-8,I-36-1, I-36-4

I
Isı akışı, 2-8, 12-2
Isı yayınım denklemi, 3-6
Isı enerjisi, I-4-2, I-4-6, I-10-8
Isı, I-1-3, I-13-3
Özgül, I-40-7, 37-4
ve klasik fiziğin başarısızlığı, I-40-8
sabit hacimde, I-45-2
"Islak" su, 41-1
Işığın saçılması, I-32-1
Işık basıncı, I-34-11
Işık dalgası, I-48-I
Işık konisi, I-17-4
Işık, I-2-5, 21-1
Hızı, I-I5-1, 18-8
Kırılma, 33-1
Kutuplanmış, I-32-9
Momentumu, I-34-10
Saçılma, I-32-I
Soğurulması, III-9-I4
Yansıması, 33-1
Işıma enerjisi, I-4-2, I-4-6, I-7-11, I-10-8
Işınım
Bremsstrahlung, I-34-6
Cherenkov, I-51-2
Elektromanyetik, I-26-1, 1-28-1, I-29-1
Gama ışın, I-2-5
Işık, I-2-5
Kızıl ötesi, I-2-5, I-23-8, I-26-1
Kozmik ışın, I-2-5, 9-2
Kozmik siklotron, I-34-6
Mor ötesi, I-2-5, I-26-1
Göreli etkiler, I-34-1
Siklotron, I-34-3
Siyah cisim, I-41-3
X-ışını, I-2-5, I-26-1, I-31-6, I-34-5, I-48-6
Işınım direnci, I-32-1
Işınım sönümü, I-32-1

İ
İdeal bir motorun verimliliği, I-44-7
İdeal gaz yasası, I-39-10
İki boyutlu alanlar, 7-2
İki durumlu sistemler, III-10-1, III-11-1
İki yarıklı girişim, III-3-5
İkiz paradoksu, I-16-3
İlerleme faktörü, 22-14
İlerleme, bir kristal örgüde, III-13-1
İlerleyen alanlar, 18-5
İletilen dalgalar, 33-7
İletim bandı, III-14-1
İletim hattı, 24-1
İletken, 1-2
İletkenlik, 32-10
Bir gazın, I-43-9
İyonik, I-43-6
Termal, 2-8, 12-2
İlke
Belirsizlik, I-2-6, I-6-10, I-7-11, I-37-9, I-37-11, I-38-3, I-38-5, III-1-9, III-1-11, III-2-3, III-2-5
Dışarlama, III-4-12
En az etki, 19-1
Eşdeğerlik, 42-8
Eylemsizlik, I-9-1
Sanal işler, I-4-5
Üst üste binme, 1-3, 4-2
ve atomların kararlılığı, 1-1, 5-3
İlkesel kuantum sayısı, III-19-12

İndisi
Alan, 29-5
Kırılma, I-31-1, 32-1
İndüklenmiş akımlar, 16-5
indüksiyon, yasası, 17-1
İndüktans, I-23-6, 16-4, 17-9,22-2
Karşılıklı, 17-9, 22-16
Öz-,16-4, 17-1I
İndüktör, I-25-7
İnsan gözü, I-35-I
İntegral analiz, 3-1
İntegral, I-8-7
Çizgi, 3-I
İnterferometre, 1-15-5
İstatistiksel dalgalanmalar, 1-6-3
İstatistiksel mekanik, I-3-1, I-40-1
İş, I-13-1, I-14-1
İşlemci, III-8-5, III-20-1
İvmelenme, I-8-8
Açısal, I-18-3
Bileşenleri, I-9-3
Kütleçekim, 1-9-4
İyon, 1-1-6
İyonik bağlar, 30-2
İyonik iletkenlik, I-43-6
İyonik kristal, 8-4
İyonik kutuplanabilirlik, 11-8
İyonizasyon enerjisi, I-42-5
Hidrojenin, I-38-6, III-2-6
İyonosfer, 7-6, 9-3, 32-13
İzotermal atmosfer, 1-40-2
İzotermal genişleme, 1-44-5
İzotermal sıkıştırma, I-44-5
İzotermal yüzeyler, 2-3
İzotop, 1-3-4, I-3-7, I-39-10

J
Jeoloji ve fizik, 1-3-7
Jiroskop, I-20-5
Johnson gürültüsü, I-41-2, I-41-8
Josephson bağlantısı, III-21-14
Joule (birim), I-13-3
Joule ısınması, I-24-2

K
Kabuk derinliği, 32-11
Kapasitans (Sığa), I-23-5
Karşılıklı, 22-17
Kapasitör (Sığaç), 1-23-5, 22-3
Paralel plakalı, I-14-10, 6-11, 8-3
Yüksek frekanslarda, 23-2
Kararlı akım, 40-6
Kármán girdap yolu, 41-9
Karmaşık değişkenler, 7-2
Karmaşık empedans I-23-7
Karmaşık sayılar, I-22-7
ve harmonik hareket, I-23-1
Karşı-madde, I-52-10 , III-11-16
Karşı-parçacık, I-2-8, III-11-13
Karşı-proton, III-11-13
Karşılıklı indüktans, 17-9, 22-16
Karşılıklı sığa, 22-17
Karşılıklılık ilkesi, I-26-5, I-30-7
Kas
Çizgili (İskelet), I-14-2
Düz , I-14-2
Katalizör, I-42-8
Katı cisim, I-18-1, 1-20-1
Açısal momentumu, I-20-8
Dönmesi, I-18-2
Katı hal fiziği, 8-6
Katsayı
Clebsch-Gordon, III-18-15, III-18-18
Çiftlenim, I7-14
Einstein, III-9-15
Soğurma, 32-8
Sürtünme, I-12-4
Sürüklenme, 41-7
Viskozite, 41-2
Kayma dislokasyonları, 30-9
Kehribar, 1-10, 37-13
Kendiliğinden mıknatıslanma, 36-11
Kendiliğinden yayınlanma, I-42-9
Kepler yasası, I-7-1, I-9-1, I-18-6
Kerr etkisi, I-33-5
Kerr hücresi, I-33-5
Kayma dalgası, I-51-4, 38-5
Kesme frekansı, 22-14
Kayma modülü, 38-4
Kılcal hareket, I-51-8
Kırınım ağı, I-30-3
Çözme gücü, I-30-5
Kırılma, I-26-2
Anormal, 1-33-9
Işığın, 33-1
İndeksi, I-31-1, 32-1
Kırınım, I-30-1
Bir ekran yardımıyla, I-31-10
X-ışını, I-30-8, I-38-5, 8-4, 30-1, III-2-5
Kırpma sikloidi, I-34-3, I-34-5
Kısmi türev, I-I4-9
Kızılötesi ışınım, I-2-5, 1-23-8, I-26-1
Kilo kalori (birim), 8-5
Kimya ve fizik, I-3-1
Kimyasal bağlar, 30-2
Kimyasal enerji, I-4-2
Kimyasal kinetik, I-42-7
Kimyasal reaksiyon, I-I-6

Kinematik (mv-) momentum, III-21-5
Kinetik enerji, I-1-7, I-2-6, 1-4-2, I-4-5
ve sıcaklık, I-39-6
Dönme, I-19-7
Kinetik kuram
Uygulaması, I-42-1
Gazların, I-39-1
Kipler, I-49-1
Normal, I-48-10
Kirchhoff yasası, I-25-9, 22-7, 22-12
Klasik elektron yarıçapı, I-32-4, 28-3
Klasik limit, III-7-9
Klorofil molekülü, III-15-11
Koloidal parçacıklar, 7-8
Koni hücreler, I-35-1, I-35-5, I-35-8, I-36-1, I-36-4
Kornea, I-35-1, I-36-3, I-36-9
Korunum
Acayiplik, III-11-12
Açısal momentum, I-4-7, I-18-6,I-20-5
Baryon sayısı, III-11-13
Çizgisel momentum, I-4-7, I-10-1
Enerji, I-3-2, 1-4-1, 27-1, 42-11, III-7-6
Yük, 1-4-7, 13-1
Korunumlu kuvvet, I-14-3
Korunumlu olmayan kuvvet, I-14-6
Kovalent bağlar, 30-2
Kovuk rezonatörü, 23-1
Kozmik ışın, I-2-5, 9-2
Kozmik sinkrotron ışınımı, I-34-6
Kripton, III-19-17
Kristal örgü, 30-3
Altıgen, 30-7
Dik eksenli, 30-7
Eğik eksenli, 30-7
İletim, III-13-1
Kusuru, III-13-10
Kübik, 30-7
Tetragonal, 30-7
Üç eksenli, 30-7
Üç köşeli, 30-7
Kristal kırınımı, I-38-4, III-2-4
Kristal, 30-1
Geometrisi, 30-1
İyonik, 8-4
Moleküler, 30-2
Kromatik sapma, I-27-7
Kromatiklik, I-35-6
Kronecker delta, 31-5
Kuantize manyetik durumlar, 35-1, III-35-1
Kuantum mekaniği, I-2-2, I-2-6, I-6-10,I-37-1, I-38-1, III-1-1, III-2-1, III-3-1
ve vektör potansiyeli, 15-8, III-21-1
Momentum, I-10-9
Kuantum mekanik rezonans, III-10-4
Kuantum elektrodinamiği, 1-2-7, I-28-3, 1-42-10
ve nokta yükler, 28-10
Kuantum sayıları, III-12-14
Kuram
Bernoulli, 40-6
Fourier, 7-11
Gauss,3-4, III-21-4
Helmholtz, 40-11
Larmor, 34-6, III-34-6
Stokes, 3-9
"Kuru" su, 40-1, 28-10, 28-12, III-10-6, 30-1, III-2-5
Kutuplanma vektörü, 10-2
Kutuplanma yükleri, 10-3
Kutuplanma, I-33-1
Dairesel, I-33-2
Elektronik, 11-1
Maddenin, 32-1
Saçılan ışığın, 1-33-3
Yönelimi, 11-3
Kutuplanmış ışık, I-32-9
Kutupsal molekül, 11-1, 11-3
Kutupsal vektör, I-20-4, I-52-6
Kuvvet
Bileşenleri, I-9-3
Değişimli, 37-2
Elektrik, I-2-3, 1-1, 13-1
Göreli gösterimde, II-25-1
Elektromotor (EMF), 16-2
Euler, 38-11
Coriolis, I-19-8, I-20-5, I-51-6, I-52-3, 34-7, III-34-7
Korunumlu, I-14-3
Kütleçekim, 1-2-3
Lorentz ,13-1, 15-14
Manyetik, 1-12-9, 1-2, 13-1
Bir akım üzerinde, 13-2
Merkezcil, 1-19-9
Merkezkaç, I-7-5, I-12-11, I-16-2,I-19-8, I-20-8, I-43-4, I-52-3, 34-7,41-10, III-19-11, 1II-19-13, III-34-7
Moleküler, I-12-6
Momenti, I-18-5
Nükleer, I-12-12, 1-1, 8-6,28-10, 28-12, III-10-6
Yalancı, I-12-10
Kübik örgü, 30-7
Kütle merkezi, I-18-1, I-19-1
Küresel dalgalar, 20-12, 21-2
Küresel harmonikler, III-19-7
Küresel sapma, I-27-7, I-36-3
Bir elektron mikroskopunun, 29-4

Küresel simetrik çözümler, III-19-2
Kütle enerji eşdeğerliği, I-15-10
Kütle enerjisi, 1-4-2, I-4-7
Kütle, I-9-1, 1-15-1
  Elektromanyetik, 28-1
  Etkin, III-13-7
  Merkezi, I-18-1, 1-19-1
  Göreli, I-16-6
Kütleçekim, I-2-3, I-7-1, 1-12-2, 42-I
  Kuramı, 42-13
Kütleçekim alanı, 1-12-8, I-13-8
Kütleçekim enerjisi, I-4-2
Kütleçekim ivmesi, I-9-4
Kütleçekim kuramı, 42-13
Kütleçekim kuvveti, I-2-3
Kütleçekim sabiti, I-7-9
Kütleçekim, 1-13-3, 42-8
  İvmesi, 1-9-4

L
Lagrange, 19-8
Lal taşı, 37-12
Lamb-Retherford ölçümü, 5-6
Lamé esneklik sabiti, 39-6
Landé g-faktörü , 34-4, III-34-4
Laplace denklemi, 7-1
Laplace işlemcisi, 2-10
Laplace, 2-10
Larmor frekansı, 34-7, III-34-7
Larmor kuramı, 34-6, III-34-6
Lazer, I-5-3, 1-32-6, 1-42-10 f, I-50-10, III-9-13
Legendre fonksiyonu, birleşik, III-19-9
Legendre polinomları, III-18-12, III-19-9
Lens
  Dört kutup, 7-4, 29-6
  Elektrostatik, 29-2
  Manyetik, 29-3
Lens denklemi, I-27-6
Lenz kuralı, 16-4, 34-2, III-34-2
Liénard-Wiechert potansiyeli, 21-9
Lityum, III-19-14
Logaritma, I-22-2
Lorentz şartı, 25-9
Lorentz ayarı, 18-11, 25-9
Lorentz büzülmesi, I-15-7
Lorentz dönüşümleri, I-15-3, I-17-1, I-34-8, I-52-2, 25-1
  Alanların, 26-1
Lorentz denklemi, 21-12
Lorentz grubu, 25-3
Lorentz kuvveti, 13-1, 15-14

M
Mach sayısı, 41-6
Magenta, III-10-12
Magnon, III-15-4
Manyetik alan, I-12-9, I-2, 13-1, 14-1
  Göreliliği, 13-6
  Kararlı akımların, 13-3
Manyetik alınganlık, 35-7, III-35-7
Manyetik dipol momenti, 14-8
Manyetik dipol, 14-7
Manyetik enerji, 17-12
Manyetik indüksiyon, I-12-10
Manyetik kuvvet, I-12-9, 1-2, 13-1
  Bir akım üzerindeki, 13-2
Manyetik lens, 29-3
Manyetik malzemeler, 37-1
Manyetik moment, 34-3, III-11-4, III-34-3
Manyetik rezonans, 35-1, III-35-I
  Nükleer, 35-10, III-35-10
Manyetize alanlar, 36-7
Manyetizma, I-2-4, 34-1, III-34-1
  Dia, 34-1, 34-5, III-34-1, III-34-5
  Ferro, 36-I, 37-1
  Para, 34-1, 35-1, III-34-1, III-35-1
Manyetostatik, 4-I, 13-I
Matematik ve fizik, 1-3-1
Matris cebri, III-5-14, III-11-3, III-20-17
Matris, III-5-5
Maxwell denklemleri, I-15-2 , I-25-3, 1-25-5,I-46-7, I-47-7, 2-1, 2-8, 4-1,6-1, 7-6, 8-11, 10-6,13-3, 13-6, 13-11, 15-14,18-1, 22-1, 22-6, 22-10,23-3, 23-7, 23-9, 24-5, 25-7, 25-9, 25-11, 26-2, 26-1I, 27-3, 27-5, 27-7, 27-9, 28-1, 32-5, 33-1,33-3, 34-8, 36-1, 36-3,36-5, 36-13, 38-2, 39-8,42-14, III-10-7, III-21-6, III-21-13, III-34-8
  Bir dielektrik içinde, 32-3
  Çözmek, 18-9
  Çözümü ~ akım ve yüklü, 21-1
  Çözümü ~ Boş uzayda, 20-1
  Dört vektörler için, 25-10
  Genel çözümü, 21-4
  Yenilenmesi, 28-6
Maxwell'in şeytanı, I-46-5
Mazer, I-42-10
  Amonyum, III-9-1
Meissner etkisi, III-21-8, III-21-12
Mekanik enerji, 15-3
Merkezcil kuvvet, I-19-9
Merkezkaç kuvveti, I-7-5, I-12-11, I-16-2 I-19-8, I-20-8, I-43-4, I-52-3, 4-7,41-10, III-19-11, III-19-13, III-34-7
Metre (birim), I-5-10
MeV (birim), I-2-9
Mıknatıs alaşımı, 37-11
Mıknatıs, 1-10, 37-13
Mıknatıslanma akımları, 36-1

Mıknatıssızlaştırma, adyabatik, 35-9,III-35-9
Michelson-Morley deneyi, I-15-3
Mikroskop
Alan iyon, 6-14
Alan yayın, 6-14
Elektron, 29-3
Minkowski uzayı, 31-12
Mol (birim), I-39-10
Molekül kristal, 30-2
Molekül, I-1-3
Dipol, I-12-6, 6-3
Eylemsizlik, I-18-7, I-19-1
Kuvvetin, I-18-5
Moleküler dipol, 11-14
Moleküler yayınım, I-43-7
Moleküler hareket, I-41-1
Moleküler kuvvetler, I-12-6
Momentum, I-9-1, I-38-2, III-2-2
Açısal korunumu,
Açısal, I-18-5, I-20-1, III-18-1, III-20-14
Bileşenleri, III-18-14
Korunumu, I-4-7, I-18-6, I-20-5
Katı bir cismin, 1-20-8
Alan, 27-1
Dinamik (p-) , III-21-5
Doğrusal korunumu, I-4-7, I-10-1
Işığın, I-34-10
Kinematik (mv-), III-21-5
Kuantum mekaniğinde, I-10-9
Göreli, I-10-8, I-16-1
Momentum işlemcisi, III-20-2, III-20-9
Momentum spektrometresi, 29-1
Momentum tayfı, 29-2
Momentum işlemcisi, III-20-2, III-20-9
Mor ötesi ışınım, I-2-5, I-26-1
Motor, Elektrik, 16-1
Mutlak sıfır, 1-1-5, I-2-6, I-44-10
Müzik, I-50-1
mv-momentumu, III-21-5

N
Nabla (∇), 2-6
Nabla işlemcisi (∇), 2-6
Negatif taşıyıcılar, III-14-2
Neon, III-19-16
Nernst ısı kuramı, I-44-11
Newton (birim), I-11-6
Newton metre (birim), I-13-3
Newton yasası, I-2-6, I-7-6, 1-9-1,I-10-1, 1-11-2, I-11-4 f, 1-12-I,I-12-11, I-I3-1, I-14-6, I-15-1,I-15-9, I-16-2, I-16-8, I-I8-1, I-19-2,I-20-1, I-28-3, I-39-1, I-39-10,I-41-1, I-46-1, I-46-5, I-47-2, 7-5,I9-1, 42-1, 42-13
Vektör gösteriminde, I-11-7
Nokta yük, 1-2
Alan enerjisi, 28-1
Elektrostatik enerjisi, 8-12
Normal dağılım, I-6-9, III-16-8
Normal dağınım, I-31-8
Normal kipler, I-48-10
Nötron yayınım denklemi, 12-7
Nötron, I-2-4
Yayınımı, 12-6
n-tipli yarı iletken , III-14-5
Nutasyon, I-20-7
Nükleer enerji, I-4-2
Nükleer etkileşimler, 8-7
Nükleer g-faktörü , 34-4, III-34-4
Nükleer kuvvetler, I-12-12, 1-1, 8-6, 28-10, 28-12, III-10-6
Nükleer manyetik rezonans, 35-10, III-35-10
Nükleer tesir kesiti, I-5-9
Nükleon, III-11-3
Nümerik analiz, I-9-6

O
Odak uzunluğu
Bir lensin, I-27-4
Küresel bir yüzeyin, I-27-1
Odaklanmak, 1-26-5, I-27-2
Oersted (birim), 36-6
Ohm (birim), I-25-7
Ohm yasası, 1-23-5, I-25-7, 1-43-7, 19-14, III-14-6
Olasılık dağılımı, I-6-7, III-16-6
Olasılık genliği, I-37-10, III-1-10,III-3-1, III-16-1
Olasılık yoğunluğu, I-6-8, III-16-6
Olasılık, I-6-1
Optik eksen, I-33-3
Optik sinir, 1-35-2
Optik, 1-26-1
Geometrik, I-26-1, 1-27
Ortalama kare uzaklık, I-6-5, I-41-9
Ortalama karekök uzunluğu, I-6-6
Ortalama serbest yol, I-43-3

Ö
Öklitçi geometri, 1-1-1, I-12-3, I-12-12, I-17-2
Öncü adım, 9-10
Öz indüktans, 16-4, 17-11
Özdeş parçacıklar, III-3-9, III-4-1
Özdeğerler, III-11-22
Özdurumlar, III-11-22
Özel görelilik kuramı, I-15-1
Özgül ısı, I-40-7, 37-4
Klasik fiziğin başarısızlığı, 1-40-8
Sabit hacimde, I-45-2

P
Pappus, kuramı, I-19-4
Parabolik anten, I-30-6
Paraksiyal ışın, I-27-2
Paralel levhalı sığaç, I-14-10, 6-11, 8-3
Paralel-eksen kuramı, I-19-6
Paramanyetizma, 34-1, 35-1, III-34-1, III-35-1
Paramanyetizma, 34-1, 35-1, III-34-I, III-35-1
Parçacıklar
  Benzer, III-3-9, III-4-1
  Bose, III-4-1, III-15-6
  Fermi, III-4-1, III-15-7
Parçalanma-düşme kuramı, 9-9
Pasif devre elemanları, 22-5
Paskal üçgeni, I-6-4
Pauli dışarılama ilkesi, 36-I5
Pauli spin değiştirme işlemcisi, III-12-7, III-15-2
Periyodik tablo, I-2-9, I-3-1, III-19-13
Pil, 22-6
Piroelektriklik, 11-8
Planck sabiti, I-4-7, 1-5-10, I-17-8,I-37-11, 15-9, 19-9, 28-10,III-1-11, III-20-15, III-21-2
Plazma frekansı, 7-7, 32-11
Plazma salınımı, 7-5
Plazma, 7-6
p-momentumu, III-21-5
Poincaré stresi, 28-4
Poisson denklemi, 6-1
Poisson oranı, 38-2, 38-10
Polar olmayan molekül, 11-1
Potasyum, III-19-16
Poynting vektörü, 27-5
Pozitif taşıyıcılar, III-14-2
Presesyon
  Açısı, 34-4, III-34-4
  Atomik mıknatısların, 34-4, III-34-4
Proton spini, 8-7
Proton, I-2-4
Psikoloji ve fizik, I-3-8
p-tipli yarı iletken, III-14-5
Purkinje etkisi, I-35-2

R
Rabi moleküler-demet yöntemi, 35-4, III-35-4
Radyoaktif izotoplar, I-3-5, I-5-4, I-52-9
Radyoaktif saat, I-5-3
Rastgele değişme, 1-6-5, 1-41-8
Rayleigh dalgası, 38-8
Rayleigh kriteri, 1-30-6
Rayleigh yasası, I-41-6
Reaktans, 22-11
Renkli görme, I-35-1, I-36-1
  Psiko-kimyası, I-35-9
Retina, I-35-1
Reynolds sayısı, 41-5
Rezonans kovuğu, 23-6
Rezonans devresi, 23-10
Rezonans kipi, 23-10
Rezonans, I-23-1
  Doğada, I-23-7
  Elektrik , I-23-5
  Kuantum mekanik, III-10-4
Ritz kombinasyon ilkesi, I-38-8, III-2-8
Rodopsin, I-35-9
Rutherford-Bohr atom modeli, 5-3
Rydberg (birim), I-38-6, III-2-6
Rydberg enerjisi, III-10-4, III-19-3

S
Sabit
  Boltzmann, I-41-10, 7-8, III-14-3
  Dielektrik , 10-1
  Kütleçekim , I-7-9
  Planck , I-4-7, I-5-10, I-17-8, I-37-11,15-9, 19-9, 28-10, III-1-11,III-20-15, III-21-2
  Stefan-Boltzmann , I-45-8
Saçaklı boşaltım, 9-10
Saf olmayan yarı iletkenler, III-14-4
Saha denklemi, I-42-6
Salınan dipol, 21-5
Salınıcı, I-5-2
  Harmonik, I-10-1, I-21-1
  Zorlanmış 1-21-6, I-23-3
Salınım
  Evresi, I-21-3
  Frekansı, I-2-5
  Genliği, I-21-3
  Periyodik, I-9-4
  Periyodu , I-21-3
  Plazma, II-7-5
  Sönümlü, 1-24-3
Salınım evresi, 1-21-3
Salınım periyodu, I-21-3
Salınımın genliği, I-21-3
Sanal görüntü, I-27-3
Sanal işler, ilkesi, I-4-5
Saniye (birim), I-5-5
Sapma, I-27-7, I-34-10
  Bir elektron mikroskopunun, 29-4
  Kromatik, I-27-7
  Küresel, I-27-7, I-36-3
Sarkaç, I-5-2
  Birleşik, 1-49-6
Sarkaçlı saat, I-5-2
Sarmal dislokasyon, 30-9
Schrödinger denklemi, 15-12, 41-12,III-16-4, III-16-11, III-20-17

Hidrojen atomu için, III-19-1
Klasik durumda, III-21-1
Sinkrotron ışınımı, I-34-3, 17-5
Kozmik, I-34-6
Sinkrotron, I-2-5, I-15-9, 17-5, 29-4, 29-6
Serbestlik derecesi, I-25-2, I-39-12, I-40-1
Ses, 1-2-3, I-47-1, I-50-2
Hızı, I-47-7
Sıcaklık, I-39-6
Sıfır bükme, 3-10, 4-1
Sıfır diverjans, 3-10, 4-1
Sıfır kütle, I-2-10
Sıfır, mutlak, I-1-5, I-2-6
Sığa, 6-12
Bir kondansatörün, 8-2
Sıkıştırma
Adyabatik, I-39-5
İzotermal, I-44-5
Sınır değer problemleri, 7-1
Sınır tabakası, 41-9
Sıvı akışı, 12-8
Sıvı helyum, III-4-12
Sigma elektron, III-12-3
Sigma matrisi, III-11-2
Sigma proton, III-12-3
Sigma vektör, III-11-4
Siklotron, 29-4, 29-6
Simetri, I-1-4, I-11-1
Fizik yasalarında, I-52-1
Sinüzoidal dalga, I-29-2
Sismograf, I-51-5
Sitosin, I-3-6
Siyah cisim ışınımı, I-41-3
Siyah cisim tayfı, III-4-8
Skaler alan, 2-2
Skaler çarpım, 1-11-8 dört
Vektörün, 25-3
Skaler çarpımı, 2-4
Dört vektörün, 25-3
Skaler, I-11-5
Snell yasası, I-26-3, I-26-6, I-31-2, 33-1
Sodyum, III-19-16
Soğurma Katsayısı, 32-8
Soğurma, I-31-8
Işığın, III-9-14
Fotonların, III-4-7
Solenoid, 13-5
Sönüm, I-31-8
Sönümlü salınım, I-24-3
Sözde kuvvet, I-12-10
Spin-bir, III-5-1
Spin-yarım, III-6-1, III-12-1
Presesyonu, III-7-10
Spin dalgaları, III-15-1
Spin yörüngesi, 8-7
Spin-bir parçacıklar, III-5-1
Spinel (MgAl2O4), 37-12
Spin-yarım parçacıklar, III-6-1, III-12-1
Presesyonu, III-7-10
Spin-yörünge etkileşimi, III-15-13
Standart sapma, I-6-9
Stefan-Boltzmann sabiti, I-45-8
Stern-Gerlach aleti, III-5-1
Stern-Gerlach deneyi, 35-3, III-35-3
Stoke kuramı, 3-9
Stres tensörü, 31-9
Stres, 38-2
Hacim, 38-3
Poincaré, 28-4
Süper alaşım, 36-9
Süper iletkenlik, III-21-1
Sürat, I-8-2
Işığın, 1-15-1, 18-8
Sesin, I-47-7
ve hız, I-9-2
Yunanların başarısızlıkları, I-8-2
Sürtünme, I-10-5, I-12-3
Katsayısı, 1-12-4
Kökeni, 1-12-6
Sürüklenme katsayısı, 41-7

T
Taban durumu, 8-7, III-7-2
Taşıyıcı işaret, 1-48-3
Taşıyıcılar
Negatif, III-14-2
Pozitif, III-14-2
Taylor Açılımı, 6-7
Tek atomlu gaz, I-39-5, I-39-10, I-40-7
Temel durumlar, III-5-8, III-12-1
Dünyanın, III-8-5
Tensör alanı, 31-11
Tensör cebri, III-8-4
Tensör, 26-7, 31-1
Dönüşümü ~ bileşenleri, 31-3
Esneklik, 39-4
Eylemsizlik, 31-6
Gerilim, 31-11, 39-1
Kutuplanabilirlik, 31-1
Stres, 31-9
Termal denge, I-41-3
Termal iyonizasyon, I-42-5
Termal iletkenlik, 2-8, 12-2
Bir gazın, I-43-9
Termodinamik, I-39-2, I-45-1, 37-4
Yasaları, 1-44-1
Tersinmezlik, I-46-5
Tesir kesiti, I-5-9

Çarpışma , I-43-3
Nükleer , 1-5-9
Saçılma , 1-32-7
Thomson saçılması, I-32-8
Thomson atom modeli, 5-3
Thomson saçılma tesir kesiti, 1-32-8
Timin, I-3-6
Transformatör, 16-4
Transistör, III-14-11
Trifenil siklopropenil molekülü, III-15-12
Türev, I-8-5
Kısmi, I-14-9
Uyarılmış durumlar, 8-7, III-13-9
Uyarım, III-13-9
Uzaklık ölçümü
Üçgenleştirme yardımıyla, I-5-6
Yıldızların renk-parlaklık ölçümü yardımıyla, I-5-6

U
Uzaklık, I-5-1
Uzay, 1-2-3, I-8-2
Eğri, 42-1
Uzay-zaman, I-2-6, I-17-1, 26-12
Geometrisi, I-17-1

Ü
Üç boyutlu dalgalar, 20-8
Üç boyutlu örgü, III-13-7
Üç cisim problemi, 1-10-1
Üç eksenli örgü, 30-7
Üç fazlı güç, 16-7
Üç köşeli örgü, 30-7
Üreteç
Alternatif akım, 17-6
Elektrik, 16-1, 22-5
Van de Graaff , 5-9, 8-7
Üst üste binme, 13-11
Alanların, I-12-9
İlkesi, I-25-2, I-28-2, I-47-6,1-3, 4-2

V
Van de Graaff üreteci, 5-9, 8-7
Vektör, 2-6
vektör alanı, 1-4, 2-2
Akışı, 3-2
Vektör analizi, I-11-5
Vektör cebri, I-11-6, 2-2, 2-6, 2-11, 3-1, 3-11, 27-4, III-5-15, III-8-2, III-8-4
Dört-vektör, 1-17-7
Vektör çarpımı, I-20-4
Vektör integrali, 3-1
Vektör işlemcisi, 2-6
Vektör potansiyel, 14-1, 15-1
Bilinen akımların, 14-3
ve kuantum mekaniği, 15-8, III-21-1
Vektör, I-11-1
Bileşenleri, I-11-5
Birim, I-11-10, 2-3
Dört-vektör, I-15-8, I-17-5, 25-1
Durum, III-8-1
Ayrışması, III-8-3
Eksenel, 1-20-4, 1-52-6
Kutupsal, I-20-4, I-52-6
Kutuplanma, 10-2
Poynting, 27-5
Vektörel çarpım, 2-8, 31-8
Vidalı kriko, I-4-5
Viskoz akışkan , 41-4
Viskozite, 41-1
Katsayısı, 41-2
Voltmetre, 16-1
Vorteks çizgisi, 40-10

W
Watt (birim), I-13-3

X
X-ışını, I-2-5, I-26-1, I-31-6, I-34-5, I-48-6
X-ışınım kırınımı, I-30-8, I-38-5, 8-4,30-1, III-2-5

Y
Yalıtkan, 1-2, 10-1
Yan bant, I-48-4
Yansıma, I-26-2
Açısı, I-26-3, 33-1
Işığın, 33-1
Toplam iç, 33-12
Yansıyan dalgalar, 33-7
Yarı iletken bağlanma, III-14-8
Bir düzeltmede, III-14-10
Yarı iletkenler, III-14-1
n-tipli, III-14-5
p-tipli, III-14-5
Saf olmayan, III-14-4
Yarı kararlı atom, I-42-10
Yarıçap
Artan, 42-4, 42-13
Bohr, I-38-6, III-2-6, III-19-3, III-19-5
Klasik elektron, I-32-4, 28-3
Yarılma düzlemi, 30-1
Yasa
Ampère,13-3
Biot -Savart, 14-9, 21-7
Boltzmann, I-40-2
Boyle'un, I-40-8
Coulomb'un , I-28-1, 1-2 , 1-5,4-2, 4-10, 5-5

Curie, 11-5
Curie-Weiss, 11-10
Faraday'ın~indüklenme, 17-2,18-1, 18-8
Gauss, 4-9
Alan çizgileri için, 4-11
Gauss Uygulamaları, 5-1
Hooke, I-12-6, 10-7, 30-12, 31-11, 38-1, 39-4, 39-10
İdeal gaz, I-39-10
Kepler, I-7-1, 1-9-1, I-18-6
Kirchhoff, I-25-9, 22-7, 22-I2
Lenz, 16-4, 34-2, III-34-2
Newton, I-2-6, I-7-6, I-9-1,I-10-1, I-11-2, I-11-4, I-12-1, I-12-11, I-13-1, I-14-6, I-15-1,I-15-9, I-16-2, I-16-8, I-18-1, I-19-2, I-20-1, I-28-3, I-39-1, I-39-10,I-41-1, I-46-1, I-46-5, I-47-2, II-7-5,19-1, 42-1, 42-13
Vektör gösterimi, I-I1-7
Ohm, I-23-5, I-25-7, I-43-7, 19-14, III-14-6
Rayleigh, I-41-6
Snell, I-26-3, I-26-6 f, I-31-2,33-1
Yansıma, I-26-2
Yasalar
Elektromanyetizma, 1-5
İndüksiyon, 17-1
Yayınım, I-43-1
Moleküler, 1-43-7
Nötron, 12-6
Yayınlanma, 6-14
Yerdeğiştirme kuralı, III-20-15
Yıldırım, 9-10
Yirmi bir santimetre çizgisi, III-12-9
Yoğunluk, I-1-4
Akım, 13-1
Enerji, 27-2
Olasılık, 1-6-8, III-16-6
Young modülü, 38-2, 38-5
Yönlendirilimiş manyetik moment, 35-4, III-35-4
Yönlendirme kutuplanması, 11-3
Yörüngesel açılsa momentum, III-19-1
Yörüngesel hareket, 34-3, III-34-3
Yukawa "fotonu", 28-13
Yukawa potansiyeli, 28-13, III-10-7
Yunanların hızla ilgili sorunları, I-8-2
Yük
Çizgisi ,5-3
Elektron, 1-12-7
Görüntü, 6-9
Hareketi, 29-1
Korunumu, 1-4-7, 13-1
Kutuplanma, 10-3
Levhası, 5-4
Nokta, 1-2
Yük küresi, 5-4
Yük plakası, 5-4
Yüklü iletken, 6-8, 8-2
Yüksek dayanma gerilimi, 6-13
Yüksüz K-mezonu, III-11-12
Yüksüz pion, III-10-7
Yüzey gerilimi, 12-5
Yüzey
Eşpotansiyel, 4-11
İzotermal, 2-3

Z
Zaman, I-2-3, I-5-1, I-8-1
Dönüşümü, I-15-5
Gecikmeli zaman, I-28-2
Standart, I-5-5
Zamana bağlı durumlar, III-13-6
Bükülme, 38-5
Toplam iç yansıma, 33-12
Tork, I-18-4, I-20-1
Zeeman etkisi, III-12-12
Zeeman yarılması, III-12-9
Zorlamalı hareket, 1-14-3

İSİM DİZİNİ

A

Adams, John C. (1819–92), I-7-5

Aharonov, Yakir (1932–), 15-12

Ampère, André-Marie (1775–1836), 13-3, 18-9, 20-10

Anderson, Carl D. (1905–91), I-52-10

Aristoteles (MÖ 384–322), 1-5-1

Avogadro, L. R. Amedeo C. (1776–1856), I-39-2

B

Becquerel, Antoine Henri (1852–1908), I-28-3

Bell, Alexander G. (1847–1922), 16-3

Bessel, Friedrich W. (1784–1846), 23-6

Boehm, Felix H. (1924–), 1-52-10

Bohm, David (1917–92), 7-7, 15-12

Bohr, Niels (1885–1962), I-42-9, 5-3, III-16-13, III-19-5

Boltzmann, Ludwig (1844–1906), I-41-2

Bopp, Friedrich A. (1909–87), 28-8

Born, Max (1882–1970), I-37-1, I-38-9, 28-7, 28-10, III-1-1, III-2-9, III-3-1, III-21-6

Bragg, William Lawrence (1890–1971), 30-9

Brewster, David (1781–1868), I-33-5

Briggs, Henry (1561–1630), I-22-6

Brown, Robert (1773–1858), I-41-I

C

Carnot, N. L. Sadi (1796–1832), I-4-2, I-44-2, I-45-3, I-45-7

Cavendish, Henry (1731–I810), 1-7-9

Cherenkov, Pavel A. (1908–90), I-51-2

Clapeyron, Benoît Paul Émile (1799–1864), I-44-2

Copernicus, Nicolaus (1473–1543), I-7-1

Coulomb, Charles-Augustin de (1736–1806), 5-6

D

Dedekind, J. W. Richard (1831–1916), 1-22-4

Dicke, Robert H. (1916–97), I-7-11

Dirac, Paul A. M. (1902–84), I-52-10, 2-1, 28-7, 28-10, III-3-1, III-8-2, III-8-4, III-I2-6, III-16-10, III-16-14

E

Einstein, Albert (1879–1955), I-2-6, I-4-7, I-6-10, I-7-11, 1-12-9, 1-12-11, I-I5-1, I-15-3, I-15-9, I-16-1, I-16-5, I-I6-9, I-41-1, 1-41-8, I-42-9, 1-43-9, 13-6, 25-11, 26-12, 27-10, 28-4, 42-1, 42-5 f, 42-8, 42-11, 42-13, III-4-8, III-18-8

Eötvös, Roland von (1848–1919), I-7-11

Öklit (y. MÖ 300), I-2-3, I-5-6, 1-12-3, 42-3

F

Faraday, Michael (1791–1867), 10-1, 16-1, 16-8, 16-10, 17-1, 18-9, 20-10

Fermat, Pierre de (1601–65), I-26-3, I-26-7

Fermi, Enrico (1901–54), 1-5-10

Feynman, Richard P. (1918–88), 21-5, 28-8, 28-10

Fourier, J. B. Joseph (1768–1830), 1-50-5

Frank, Ilya M. (1908–90), I-51-2

Franklin, Benjamin (1706–90), 5-6

G

Galileo Galilei (1564–1642), I-5-1, 1-7-2, I-9-1, 1-10-5, -52-3

Gauss, J. Carl F. (1777–1855), 3-5, 16-2, 36-6

Geiger, Johann W. (1882–1945), 5-3

Gell-Mann, Murray (1929–), I-2-9, lII-11-12, III-11-16

Gerlach, Walther (1889–1979), 35-3, III-35-3

Goeppert-Mayer, Maria (1906–72), III-15-13

H

Hamilton, William Rowan (1805–65), III-8-10

Heaviside, Oliver (1850–1925), 21-5

Heisenberg, Werner K. (1901–76), 1-37-1, 1-37-9, I-37-11, I-38-9, 19-9, III-1-1, III-1-9, III-1-11, III-2-9, III-16-9, III-20-17

Helmholtz, Hermann von (1821–94), I-35-7, 40-10

Hess, Victor F. (1883–1964), 9-2

Huygens, Christiaan (1629–95), I-15-2, I-26-2, I-33-9

I

Infeld, Leopold (1898–1968), 28-7, 28-10

J

Jeans, James H. (1877–1946), 1-40-9, 1-41-6, 2-6

Jensen, J. Hans D. (1907–73), III-15-13

Josephson, Brian D. (1940–), III-21-14

K

Kepler, Johannes (1571–1630), 1-7-1

L

Lamb, Willis E. (1913–2008), 5-6
Laplace, Pierre-Simon de (1749–1827), I-47-7
Lawton, Willard E. (1899–1946), 5-6
Leibniz, Gottfried Willhelm (1646–1716), I-8-4
Le Verrier, Urbain (1811–77), I-7-5
Liénard, Alfred-Marie (1869–1958), 21-11
Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), 1-15-3, I-15-5, 21-12, 25-11, 28-3, 28-7, 28-12

M

MacCullagh, James (1809–47), 1-9
Marsden, Ernest (1889–1970), 5-3
Maxwell, James Clerk (1831–79), I-6-1, I-6-9, 1-28-1, 1-28-3, I-40-8, I-41-7, 1-46-5, 1-8, 1-11, 5-6, 17-2, 18-1, 18-8, 18-11, 20-10, 21-5, 28-3, 32-3
Mayer, Julius R. von (1814–78), I-3-2
Mendeleev, Dmitri I. (1834–1907), I-2-9
Michelson, Albert A. (I852–1931), I-15-3, I-15-5
Miller, William C. (1910–81), I-35-2
Minkowski, Hermann (I864–1909), I-17-8
Mössbauer, Rudolf L. (1929–2011), I-23-9
Morley, Edward W. (1838–1923), I-15-3, I-15-5

N

Nernst, Walter H. (1864–1941), I-44-II
Newton, Isaac (1643–1727), I-7-2, I-7-9, 1-7-11, I-8-4, I-9-1, I-9-4, I-10-2, I-10-9, I-11-2, I-12-1, 1-12-9, I-14-6, I-15-1, 1-16-2, I-16-6, I-18-7, 1-37-1, I-47-7, 4-10, 19-7, 42-1, III-1-1
Nishijima, Kazuhiko (1926–2009), I-2-9, III-11-12
Nye, John F. (1923–), 30-9

O

Oersted, Hans C. (1777–1851), 18-9, 36-6

P

Pais, Abraham (Bram) (1918–2000), III-11-I2, III-11-16
Pasteur, Louis (1822–95), I-3-10
Pauli, Wolfgang E. (1900–58), III-4-3, III-11-2
Pines, David (1924–), 7-7
Planck, Max (1858–1947), 1-40-10, 1-41-6, I-42-8, III-4-12
Plimpton, Samuel J. (1883–1948), 5-6
Poincaré, J. Henri (1854–1912), 1-15-3, I-15-5, I-16-I, 28-4
Poynting, John Henry (1852–1914), 27-3, 28-3
Priestley, Joseph (1733–1804), 5-6
Ptolemaios (y. 2. yüzyıl), I-26-2
Pisagor (y. MÖ 6. yüzyıl), 1-50-1

R

Rabi, Isidor I. (1898–1988), 35-4, III-35-4
Ramsey, Norman F. (1915–2011), 1-5-5
Retherford, Robert C. (1912–81), 5-6
Roemer, Ole (1644–1710), I-7-5
Rushton, William A. H. (1901–80), I-35-9
Rutherford, Ernest (1871–1937), 5-3

S

Schrödinger, Erwin (1887–1961), 1-35-6, I-37-1, I-38-9, 19-9, III-1-1, III-2-9, III-3-1, III-16-4, III-16-12 ff, III-20-17, III-21-6
Shannon, Claude E. (1916–2001), I-44-2
Smoluchowski, Marian (1872–1917), 1-41-8
Snell(ius), Willebrord (1580–1626), 1-26-3
Stern, Otto (1888–1969), 35-3 f, III-35-3 f
Stevin(us), Simon (1548/49–1620), I-4-5

T

Tamm, Igor Y. (1895–1971), 1-51-2
Thomson, Joseph John (1856–1940), 5-3
Tycho Brahe (1546–1601), I-7-1

V

Vinci, Leonardo da (1452–1519), I-36-2
von Neumann, John (1903–57), 12-9, 40-3

W

Wapstra, Aaldert Hendrik (1922–2006), 1-52-10
Weber, Wilhelm E. (1804–91), 16-2
Weyl, Hermann (1885–1955), I-11-1, I-52-1
Wheeler, John A. (1911–2008), 28-8, 28-10
Wiechert, Emil Johann (1861–1928), 21-11
Wilson, Charles T. R. (1869–1959), 9-9

Y

Young, Thomas (1773–1829), 1-35-7
Yukawa, Hideki (1907–81), 1-2-8, 28-13, III-10-6
Yustova, Elizaveta N. (I910–2008), I-35-8

Z

Zeno, Elealı (y. MÖ 5. yüzyıl), I-8-3

SEMBOLLER LİSTESİ

$\| \ \|$	mutlak değer, I-6-5
$\binom{n}{k}$	binom dağılımı, n üzeri k, I-6-4
a^*	a'nın karmaşık eşleniği, I-23-1
$\Box^2$	D'Alembert işlemcisi, $\Box^2 = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$, 25-7
$\langle \ \rangle$	beklenen değer, I-6-5
∇^2	Laplace işlemcisi, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, 2-10
∇	nabla işlemcisi, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, I-14-9
$\|1\rangle, \|2\rangle$	iki durumlu bir sistem için baz vektörlerinin özel bir seçimi, III-9-1
$\|I\rangle, \|II\rangle$	iki durumlu bir sistem için baz vektörlerinin özel bir seçimi, III-9-1
$\langle\phi\|$	bir bra vektörü cinsinden ϕ durumu, III-8-2
$\langle f\|s\rangle$	ilk durumu $\|s\rangle$ ve son durumu $\langle f\|$ olan bir sistem için genlik, III-3-2
$\|\phi\rangle$	bir ket vektörü cinsinden ϕ durumu, III-8-2
$\approx$	yaklaşık olarak, I-6-9
$\sim$	mertebesinde, I-2-10
$\propto$	orantılıdır, I-5-1
α	açısal ivme, I-18-3
γ	ısı sığa oranı (adyabatik indis ya da özgül ısı oranı), I-39-5
ϵ_0	dielektrik sabiti ya da boşluğun geçirgenliği, $\epsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}$ F/m, 1-12-7
κ	Boltzmann sabiti, $\kappa = 1{,}3806504 \times 10^{-23}$ J/K, III-14-3
κ	göreli geçirgenlik, 10-4
κ	termal iletkenlik, I-43-10
λ	dalga boyu, I-17-8
$\lambda\!\!\!^{-}$	indirgenmiş dalga boyu, $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$, 15-9
μ	sürtünme katsayısı, I-12-4
μ	manyetik moment, 14-8
$\boldsymbol{\mu}$	manyetik moment vektörü, 14-8
μ	kesme modülü, 38-4
ν	frekans, I-17-8
ρ	yoğunluk, I-47-3
ρ	elektrik yük yoğunluğu, 2-8
σ	tesir kesiti, I-5-9
$\boldsymbol{\sigma}$	Pauli spin matris vektörü, III-11-4

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Pauli spin matrisleri, III-11-2
σ	Poisson oranı, 38-2
σ	Stefan-Boltzmann sabiti, $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}$ W/m^2 K^4, I-45-8
τ	tork, I-18-4
$\boldsymbol{\tau}$	tork vektörü, I-20-4
ϕ	elektrostatik potansiyel, 4-5
Φ_0	temel akı birimi, III-21-12
χ	elektrik duygunluğu, 10-4
ω	açısal hız, I-18-3
$\boldsymbol{\omega}$	açısal hız vektörü, I-20-4
Ω	girdap, 40-5
$\boldsymbol{a}$	ivme vektörü, I-19-2
a_x, a_y, a_z	ivme vektörünün Kartezyen bileşenleri, I-8-10
a	ivme vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, I-8-8
A	Alan, I-5-9
$A_\mu=(\phi, \boldsymbol{A})$	dört potansiyel, 25-8
$\boldsymbol{A}$	vektör potansiyel, 14-1
A_x, A_y, A_z	vektör potansiyelin Kartezyen bileşenleri, 14-1
$\boldsymbol{B}$	Manyetik alan vektörü (manyetik indüksiyon), I-12-10
B_x, B_y, B_z	Manyetik alan vektörünün Kartezyen bileşenleri, I-12-10
c	ışık hızı, $c = 2{,}99792458 \times 10^8$ m/s, I-4-7
C	Sığa (Kapasitans), I-23-5
C	Clebsch-Gordan katsayıları, III-18-19
C_V	Sabit hacimde özgül ısı, I-45-2
d	uzaklık, I-12-6
$\boldsymbol{D}$	elektrik yerdeğiştirme vektörü, 10-6
$\boldsymbol{e}_r$	r yönündeki birim vektör, I-28-2
$\boldsymbol{E}$	Elektrik alan vektörü, I-12-8
E_x, E_y, E_z	Elektrik alan vektörünün Kartezyen bileşenleri, I-12-10
E	Enerji, I-4-7
$E_{\text{aralık}}$	Enerji aralığı, III-14-3
$\mathcal{E}_{\text{tr}}$	enine elektrik alan vektörü, III-14-7
$\mathcal{E}$	elektrik alan vektörü, III-9-5
$\mathcal{E}$	elektromotor kuvveti, 17-1
$\mathcal{E}$	enerji, I-33-10
f	odak uzunluğu, I-27-3
$F_{\mu\nu}$	Elektromanyetik tensör, 26-6
$\boldsymbol{F}$	kuvvet vektörü, I-11-5
F_x, F_y, F_z	kuvvet vektörünün Kartezyen bileşenleri, I-9-3

F	kuvvet vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, I-7-1
g	dünyanın kütleçekim ivmesi, I-9-4
G	kütleçekim sabiti, I-7-1
$\boldsymbol{h}$	ısı akış vektörü, 2-3
h	Planck sabiti, $h = 6{,}62606896 \times 10^{-34}$ Js, I-17-8
$\hbar$	indirgenmiş Planck sabiti, $\hbar = h/2\pi$, I-2-6
$\boldsymbol{H}$	Mıknatıslanma alan vektörü, 32-4
i	sanal birim, I-22-7
$\boldsymbol{i}$	x yönündeki birim vektörü, I-11-10
I	elektrik akımı, I-23-5
I	Parlaklık, I-30-1
I	eylemsizlik momenti, I-18-7
I_{ij}	eylemsizlik tensörü, 31-7
$\mathcal{I}$	Yoğunluk, III-9-14
$\boldsymbol{j}$	elektrik akım yoğunluk vektörü, 2-8
j_x, j_y, j_z	elektrik akım yoğunluk vektörünün Kartezyen bileşeni, 13-11
$\boldsymbol{j}$	y yönündeki birim vektörü, I-11-10
$\boldsymbol{J}$	elektron yörüngesinin açısal momentum vektörü, 34-3
$J_0(x)$	birinci tür Bessel fonksiyonu, 23-6
k	Boltzmann sabiti, $k = 1{,}3806504 \times 10^{-23}$ J/K, I-39-10
$k_\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$	dalga dört-vektörü, I-34-9
$\boldsymbol{k}$	z yönündeki birim vektörü, I-11-10
$\boldsymbol{k}$	dalga vektörü, I-34-9
k_x, k_y, k_z	dalga vektörünün Kartezyen bileşeni, I-34-9
k	dalga vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, dalga sayısı, I-29-3
K	hacim modülü, 38-3
$\boldsymbol{L}$	açısal momentum vektörü, I-20-4
L	açısal momentum vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni I-18-5
L	öz-indüktans, I-23-6
$\mathcal{L}$	Lagrange denklemi, 19-8
$\mathcal{L}$	öz-indüktans, I-23-6
$\|L\rangle$	sol-elli dairesel kutuplanmış foton durumu, III-11-11
m	kütle, I-4-7
m_{etk}	bir kristal örgüdeki etkin elektron kütlesi, III-13-7
m_0	durgun kütle, I-10-8
$\boldsymbol{M}$	mıknatıslanma vektörü, 35-7
M	karşılıklı indüktans, 22-16
$\mathfrak{M}$	karşılıklı indüktans, 17-9
$\mathfrak{M}$	bükme momenti, 38-9

n	kırılma indisi, I-26-4
n	n. Romen rakamı, $I, II, \ldots,$ N değerlerini alan n sayısı, III-11-22
$\boldsymbol{n}$	normal birim vektörü, 2-4
N_n	birim hacimdeki elektron sayısı, III-14-3
N_p	birim hacimdeki proton sayısı, III-14-3
$\boldsymbol{p}$	dipol moment vektörü, 6-3
p	dipol moment vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, 6-3
$p_\mu = (E, \boldsymbol{p})$	dört-momentum, I-17-7
$\boldsymbol{p}$	momentum vektörü, I-15-9
p_x, p_y, p_z	momentum vektörünün Kartezyen bileşeni, I-10-8
P	momentum vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, I-2-6
p	basınç, 40-1
$P_{\text{spin değiş}}$	Pauli spin değiştirme işlemcisi, III-12-7
$\boldsymbol{P}$	kutuplanma vektörü, 10-3
P	kutuplanma vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, 10-4
P	güç I-24-1
P	basınç, I-39-3
$P(k, n)$	Bernoulli ya da binom olasılığı, I-6-5
$P(A)$	A olayının gözlenme olasılığı, I-6-1
q	elektrik yükü, I-12-7
Q	ısı, I-44-3
$\boldsymbol{r}$	yarıçap (konum) vektörü, I-11-5
r	yarıçap ya da uzaklık, I-5-9
R	direnç, I-23-5
$\mathcal{R}$	Reynold sayısı, 41-6
$\|R\rangle$	sağ-elli dairesel kutuplanmış foton durumu, III-11-11
s	uzaklık, I-8-1
S	eylem, 19-3
S	entropi, I-44-10
$\boldsymbol{S}$	Poynting vektörü, 27-2
S	"acayiplik" sayısı, I-2-9
S_{ij}	stres tensörü, 31-9
t	zaman, I-5-1
T	mutlak sıcaklık, I-39-10
T	yarı-ömür, I-5-3
T	kinetik enerji, I-13-1
u	hız, I-15-2
U	iç enerji, I-39-5
$U(t_2, t_1)$	t_1 anından t_2 anına kadar bekleme işlemini gösteren işlemci, III-8-7

U	potansiyel enerji, I-13-1
v	hız vektörü, I-11-7
v_x, v_y, v_z	hız vektörünün Kartezyen bileşeni, I-8-9
v	hız vektörünün büyüklüğü ya da bileşeni, I-8-4
V	hız, I-4-6
V	gerilim, I-23-5
V	hacim, I-39-3
$\mathcal{V}$	gerilim, 17-12
W	ağırlık, I-4-4
W	iş, I-14-2
x	Kartezyen koordinat, I-1-6
$x_\mu = (t, r)$	konum dört-vektörü, I-34-9
y	Kartezyen koordinat I-1-6
$Y_{l,m}(\theta, \phi)$	küresel harmonikler, III-19-7
Y	Young modülü, 38-2
z	Kartezyen koordinat, I-1-6
Z	karmaşık empedans, I-23-7

FEYNMAN
FİZİK DERSLERİ

> > > > ÖĞRETMENLERİN ÖĞRETMENİNDEN BİR BAŞYAPIT

Bu üç cilt Feynman'ın 1961-64 yılları arasında, California Teknoloji Enstitüsünde (Caltech), bütün birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinin aldıkları fizik derslerinin tarihsel bir kaydıdır.

İkinci cildin dersleri elektrik ve manyetizmanın fiziğinin eksiksiz bir şekilde işlenmesine ayrılmıştır. İlk olarak öğrencilere Franklin'in el yordamı keşiflerinden başlayıp, Maxwell'in büyük birleştirmesinden geçip, malzemenin özelliklerine dair Lorentz elektron kuramına ve elektromanyetik öz enerjinin çözülememiş ikilemlerine kadar eksiksiz bir şekilde aktarmak hedeflenmiştir. İkinci olarak da, vektör analizinin ana hatlarını sunarak öğrencilerin alan kuramlarının matematiğine sağlam bir giriş yapması amaçlanmıştır. Matematiksel yöntemlerin genel yararlılığını vurgulamak için, bazen fiziğin başka kısımlarından ilgili bölümler incelenmiştir.





Richard P. Feynman

Richard P. Feynman 1951-1988 yılları arasında Caltech'de fizik profesörü olarak çalıştı. 1965'te, Sin-Itiro Tomonaga ve Julian Schwinger ile birlikte, kuantum elektrodinamiğindeki çalışmaları nedeniyle Nobel Fizik Ödülünü kazandı. Feynman ayrıca dikkate değer derecede etkin bir eğitimciydi. Caltech'de fizik profesörü olan *Robert B. Leighton* katı hal fiziğinde, kozmik ışın fiziğinde, modern parçacık fiziğinin başlangıç anlarında, güneş fiziğinde, gezegen fotoğrafçılığında, milimetre ve milimetre-altı dalga astronomisinde hayatı boyunca çığır açan çalışmalar yapmıştır. *Matthew Sands*, 1969'dan 1985'e kadar California Üniversitesi, Santa Cruz'da fizik profesörüydü ve 1969'dan 1972'ye kadar oranın Bilimsel Rektör Yardımcısı görevinde de bulundu. 1972'de Amerikan Fizik Öğretmenleri Derneğinden Üstün Hizmet Ödülü aldı.

ALFA
alfakitap
alfakitap
alfakitap
www.alfakitap.com
BİLİM