# İlkokulda Temel Matematik

**Editör:** Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

2. Baskı

PEGEM AKADEMİ

**Editör:** Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

**İLKOKULDA TEMEL MATEMATİK**

ISBN 978-605-241-441-5
DOI 10.14527/9786052414415

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2020, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. A.Ş.'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere http://pegem.net adresinden ulaşılabilmektedir.

1. Baskı: Ekim 2018, Ankara
2. Baskı: Kasım 2020, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türlüdür
Dizgi-Grafik Tasarım: Müge Çetin
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Vadi Grup Basım A.Ş.
İvedik Organize Sanayi 28. Cadde 2284 Sokak No:105
Yenimahalle/ANKARA
Tel: (0312) 394 55 91

Yayıncı Sertifika No: 36306
Matbaa Sertifika No: 26687

**İletişim**

Karanfil 2 Sokak No: 45 Kızılay/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50 - 430 67 51
Dağıtım: 0312 434 54 24 - 434 54 08
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

# ÖN SÖZ

Eğitim alanında uzman yayıncı olan Pegem Akademik Yayıncılık ilkelerine uygun olarak hazırlanan "***İlkokulda Temel Matematik***" kitabı Eğitim Fakültelerinin güncellenen Sınıf Öğretmenliği Programında yer alan İlkokulda Temel Matematik dersi için hazırlanmıştır.

*İlkokulda Temel Matematik* kitabı; alan bilgisi, pedagojik formasyon ve genel kültür temeline dayanan öğretmen yetiştirmenin bu temellerinden alan bilgisine katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Kitapta yeterli konu anlatımının yanında öğrenmeyi pekiştirici ve konu ile ilgili problemleri anlamayı kolaylaştırıcı çözümlü örneklere de yer verilmiştir.

Beş bölüm olarak hazırlanan kitap alanında uzman akademisyenler olan bölüm yazarlarınca hazırlanmıştır. Kitabın bölüm konuları ve yazarları aşağıdaki gibidir.

Birinci Bölüm: Matematiğin Tanımı ve Doğası [Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ - Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]

İkinci Bölüm: Sayılar [Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DELİL – Manisa Celal Bayar Üniversitesi]

Üçüncü Bölüm: Kesirler [Prof. Dr. Abdulkadir TUNA, Doç. Dr. Abdullah Çağrı BİBER - Kastamonu Üniversitesi]

Dördüncü Bölüm: Örüntü [Doç. Dr. Tuba ADA - Eskişehir Anadolu Üniversitesi]

Beşinci Bölüm: Temel Geometri ve Ölçü Kavramı [Prof. Dr. Alper ÇİLTAŞ – Erzurum Atatürk Üniversitesi]

Uyumlu bir ekip çalışması ile bu kitabın ortaya çıkmasını sağlayan *bölüm yazarlarımıza ve Pegem Akademik Yayıncılık çalışanlarına* teşekkür ediyorum. 2018 yılında yayınlanan kitabımızın ikinci baskısını yapmaktayız, okuyucularımıza yararlı olmasını diliyorum.

Kasım 2020
Prof. Dr. Ahmet KAÇAR
Editör

## Bölümler ve Yazarları

***Editör:*** *Prof. Dr. Ahmet KAÇAR*

**1. Bölüm: Matematiğin Tanımı ve Doğası**
**Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ**
*Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi*

**2. Bölüm: Sayılar**
**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DELİL**
*Manisa Celal Bayar Üniversitesi Demirci Eğitim Fakültesi*

**3. Bölüm: Kesirler**
**Prof. Dr. Abdulkadir TUNA**
*Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi*
**Doç. Dr. Abdullah Çağrı BİBER**
*Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi*

**4. Bölüm: Örüntü**
**Doç. Dr. Tuba ADA**
*Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi*

**5. Bölüm: Temel Geometi ve Ölçü Kavramı**
**Prof. Dr. Alper ÇİLTAŞ**
*Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi*

# İÇİNDEKİLER

Ön Söz ..... iii
Bölümler ve Yazarları ..... v

## 1. BÖLÜM
## MATEMATİĞİN TANIMI VE DOĞASI

Matematik Nedir? ..... 2
Matematiğin Doğası ..... 3
Matematiğin Amacı ve Önemi ..... 5
Matematik ve Hayat ..... 6
Matematik ve Diğer Bilimler ..... 8
Kaynakça ..... 10
Harezmi (MS 780-850) ..... 11

## 2. BÖLÜM
## SAYILAR

Doğal Sayılar ..... 14
Sayma Sistemi Kurma ve İşlemler ..... 15
Bir Sayının Farklı Tabanlarda Yazılması ..... 21
Tam Sayılar ve Bölünebilme ..... 24
Alıştırmalar ..... 34
Matematiksel Modelleme ve Problem Çözme ..... 35
Alıştırmalar ..... 45
Kaynakça ..... 47
Eratosten (Eratosthenes) (MÖ.276 – MÖ.194) ..... 48

## 3. BÖLÜM
## KESİRLER

Basit Kesir ..... 50
Bileşik Kesir ..... 50
Tam Sayılı Kesir ..... 50
Denk Kesirler ..... 50
Rasyonel Sayı ..... 51
Kesirlerde Sıralama ..... 52

Kesirlerde İşlemler....53
1. Toplama ve Çıkarma işlemi....53
2. Çarpma İşlemi....54
3. Bölme İşlemi....54
Ondalıklı Sayılar....56
Devirli Ondalıklı sayılar....57
Devirli Ondalıklı Sayıların Kesir Biçimde Yazılması....58
Alıştırmalar....59
Kaynakça....61
Cahit Arf (1910-1997)....62

## 4. BÖLÜM
## ÖRÜNTÜ

Örüntü Nedir?....64
Tekrarlayan Örüntüler....65
Genişleyen Örüntüler....66
Örüntü ile Dizi Arasında Nasıl Bir Fark Vardır?....69
Örüntünün Önemi....69
Alıştırmalar....69
Kaynakça....71
Fibonacci Sayıları....72

## 5. BÖLÜM
## TEMEL GEOMETİ VE ÖLÇÜ KAVRAMI

GİRİŞ....74
TEMEL GEOMETRİK ŞEKİLLER....77
Nokta, Doğru ve Düzlem....77
Doğru Parçası....78
Işın....78
Yarı Doğru....78
Açılar....79
Çokgenler....79
Düzgün Çokgenler....81
Temel Ölçü Birimleri....85
Uzunluk Ölçüleri....86

Ağırlık Ölçüleri....86
Alan ve Arazi Ölçüleri....87
Zaman Ölçüleri....88
Hacim ve Sıvı Ölçüleri....88
Değer Ölçüleri....89
Temel Uzay Geometri....89
Prizma....89
Küp....92
Silindir....92
Alıştırmalar....94
Kaynakça....95
Biraz Geometri Biraz Ölçüler....96

Yazarlar Hakkında....97

# 1. BÖLÜM

# MATEMATİĞİN TANIMI VE DOĞASI

**Öğrenme Hedefleri**

*Bu bölümü çalıştıktan sonra;*

- ✓ *Matematiğin tanımını yapabilme,*
- ✓ *Matematiğin tarihsel gelişimini açıklayabilme,*
- ✓ *Matematiğin amacını ve önemini kavrayabilme,*
- ✓ *Matematik ile diğer bilimler arasında ilişki kurabilme,*
- ✓ *Günlük hayatta matematiğin doğru kullanımı konusunda duyarlı olma,*

*kazanımlarını elde edebileceksiniz.*

**İçindekiler**

- ➢ *Matematik Nedir?*
- ➢ *Matematiğin Doğası*
- ➢ *Matematiğin Amacı ve Önemi*
- ➢ *Matematik ve Hayat*
- ➢ *Matematik ve Diğer Bilimler*
- ➢ *Kaynakça*

## Matematik Nedir?

Matematik nedir? Bu soruya verilen cevaplarda tam bir birliktelik yoktur. Aslında böyle bir birliktelik aramak da herhalde yersizdir. Yani matematiği herkes farklı tanımlar. Bu aslında gayet doğaldır. Çünkü herkes farklı düzeyde matematik bilgisine sahiptir ve sahip olduğu bilgi dahilinde bir tanımlama yapmaya çalışmaktadır. Bu durumda doğal olarak, matematiği sadece temel işlemler boyutunda kullanan birinin yapacağı tanım ile yüksek matematikle uğraşan birinin yapacağı tanım birbirinden oldukça farklı olacaktır. Bunun dışında herkesin matematiği anlayışının da farklı olduğu söylenebilir. "Matematik" terimi, antik Yunanca "matesis" kelimesinden türetilmiş olup "ben bilirim" anlamındadır. Yani antik Yunan'da matematiği bilen bir kimse her şeyi bildiğini iddia edebilmekteymiş (Sertöz, 2013). Literatürde matematik için çeşitli tanımlar yer almaktadır. Bunlardan birkaç örnek verelim.

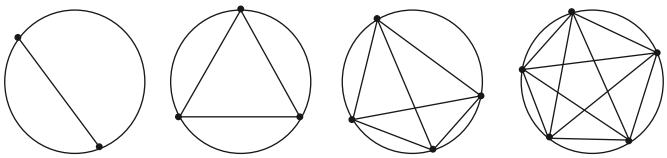
- Şekil, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki bağlantıları düşünce yoluyla inceleyen bilimdir.
- Dil, ırk, din ve ülke tanımdan medeniyetten medeniyete zenginleşerek geçen sağlam, kullanışlı, evrensel bir dil ve kültürdür.
- Yayılma alanına ve derinliğine sınır konamayan bir bilimdir, bir sanattır.
- Doğru düşünmeyi ve akıl yürütmeyi geliştiren bilimdir.
- Günlük hayatın her evresinde başvurulan, hesaplama, çizme ve ölçme bilimidir.

Görüldüğü gibi verilen matematik tanımlarından bir kısmı yetersiz, bir kısmı da özel durumları içermektedir. Görüldüğü gibi ortak bir tanımının yapılamaması bile matematiğin konu ve uygulama alanına sınır konulamayan, insanlık için ne kadar değerli ve ne kadar önemli bir bilgi birikimi olduğunun bir göstergesidir. Belki de tanımlar içerisinde en kapsamlı olanı Türk Ansiklopedisi'nde yer alan tanımdır.

*"Matematik, düşüncenin tümdengelimli bir işletim yolu ile sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar, uzaylar gibi soyut varlıkların özelliklerini ve bunların arasında kurulan ilişkileri inceleyen bilimler grubuna verilen addır".*

Bu tanımda matematiğin düşünme yolunun tümdengelim olduğu belirtilmektedir. Gerçekten de tümdengelim, birçok matematiksel genellemenin bulunmasında ve ispatlanmasında kullanılan tümevarım gibi yanıltıcı değildir. Matematikçilerin tümdengelimli düşünce yolunu tercih etmelerinin sebebi de budur. Bu durumu bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Bir çember üzerinde keyfi 2 nokta alalım ve bu noktaları birleştirelim. Çember içinde kaç bölge oluştu? Şimdi bir başka çember üzerinde 3 nokta alalım ve bunları ikişer ikişer birleştirelim. İçerde oluşan bölge sayısı nedir? Aynı uygulamayı bir başka çember üzerinde 4 nokta ve 5 nokta için tekrarlayalım. Çemberin içerisinde kaç bölge oluştu?



2N 2B | 3N 4B | 4N 8B | 5N 16B

Şimdi, en baştan başlayarak çemberin üzerindeki nokta sayısı ile çemberin içerisinde oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki kurmaya çalışın. İlişki var mı?

| Nokta sayısı | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bölge sayısı | 0 | 2 | 4 | 8 | 16 | | $2^{n-1}$ |

Tümevarım düşünce yoluyla ilk beş adımdaki nokta ve bölge sayıları göz önüne alındığında, çember üzerinde alınacak n nokta için, $2^{n-1}$ bölge oluşacağı genellemesi yapılabilir. "Özelden genele" şeklinde özetlenebilen tümevarımsal düşünce bazen yanıltıcı olabilir. Nitekim bu örnek için de bu durum geçerlidir. Örneğin, yukarıdaki uygulamaya çember üzerinde 6 nokta alarak devam ederseniz, tümevarımla elde ettiğiniz genellemeye göre $2^{6-1}=2^5=32$ bölge oluşması gerekirken elinizde sadece 31 bölge olduğunu görebilirsiniz. Sonuç olarak, örneklerden genellemeye ulaşmayı sağlayan tümevarımsal düşüncenin bazen yanıltıcı olabileceği, ancak tümdengelim düşünce sisteminde böyle bir durumun söz konusu olamayacağını söyleyebiliriz. Çünkü "genelden özele" şeklinde özetlenebilen tümdengelimli düşüncede matematiksel bir önermenin doğruluğu bir kez ispatlanır ve her özel durum için doğru olur. Örneğin, "iki çift sayının çarpımı çifttir" önermesinin doğruluğu bir kez ispatlanır ve bu önerme artık bütün özel örnekler için geçerli olur.

## Matematiğin Doğası

Yaşamın soyutlanmış biçimi olarak tanımlanan Matematik biliminin oluşmasıyla ilgili iki temel yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi, Matematiği insanın kendisinin icat ettiği; ikincisi ise Matematiğin evrende var olduğu ve insanın onu zaman içinde fark ettiği şeklindedir.

*1. Matematik icat edilmiştir.*

Veri toplama, tablo, grafik çizme, denklem çözme gibi Matematiksel eylemlerimiz dikkate alındığında, bunları çevremizi daha kolay algılamak, olup bitenlerle başa çıkmak için geliştirdiğimiz davranışlar olduğunu söyleyebiliriz. Dikdörtgenin alanını

$$A = a \times b$$

şeklinde tanımlamak tümüyle insan zihninin bir ürünüdür. Burada Matematiğin icat edildiği düşüncesi öne çıkıyor.

*2. Matematik keşfedilmiştir.*

Matematiğin bir keşif olduğu görüşünü destekleyen doğal kanıtlar oldukça fazladır. Örneğin, fasulye teleği ve birçok diğer sarmaşık, çubuğa tırmanırken tam bir helis çizmektedir. Bir helis bir noktadan belli bir yüksekliğe dolanarak çıkmak için en kısa yoldur. Arı peteği düzgün altıgendir. Düzgün altıgen, düzlemi homojen örtebilen çokgensel bölgeler arasında bir köşeden en az sayıda ayrıt çıkarmak suretiyle yapılanıdır. Böylece en az malzeme ile düzlemi parsellemek mümkün olmaktadır (Altun, 2005). Literatürde "altın oran" olarak adlandırılan 1,618 sayısı da Matematiğin bir keşif olduğu görüşünü destekleyen önemli doğal kanıtlardandır. Birçok sanat eserinde estetik bir görüntü ortaya koymak amacıyla altın oran kullanıldığı bilinmektedir. Parthenon tapınağı, Taj Mahal, Notre Dame Katedrali, Anıtkabir, Mısır Piramitleri altın oran kullanılarak yapılmış mimari eserlerdendir. Ayrıca Da Vinci'nin Mona Lisa adlı eserinde de altın oranı kullandığı bilinmektedir. Bunun dışında normal gelişim gösteren her insanın vücudunda (boy/bacak boyu gibi) ve yüzünde (yüzün uzunluğu/yüzün genişliği gibi) altın oranı veren basit hesaplamalar yapılabilmektedir.

Matematik biliminin tarihi gelişimini konu edinen birçok esere göre ilk Matematik bilgiler Mısır ve Mezopotamya'da ortaya çıkmaktadır. Bunu, ilgili bölgelerde yaşayan toplumların taşlara, tahta ve kil tabletlere, papirüs yapraklarına koydukları işaretlerden anlayabiliyoruz. Matematikle ilgili ilk eylem sayı saymak olsa gerek. Günlük hayatta insanların sayılarla uğraşmasını gerektiren birçok durum vardır. Sayılar, belki insanların sahip oldukları hayvanların sayısını bilme, belki de kendi arazilerinin büyüklüğünü hesaplama ihtiyacından doğmuş olabilir.

İnsanların çok uzun bir zaman boyunca sadece 1 ve 2 sayılarını kullandıklarını biliyor muydunuz? 3 bunlardan çok sonra kullanılmaya başlanmış ve daha önceden 1 ve 2 ile ilişkilendirilen şekillere değişik anlamlar kazandırmıştır. Bununla ilgili en ilginç örnekler eski Çin ideogramlarında görülmektedir. Örneğin anlamı "ağaç" olan şekilden üç tane olunca anlam değişiyor ve "orman" oluyor, anlamı

"erkek" olan şekilden üç tane olunca anlam değişiyor ve "herkes" oluyor, anlamı "kadın" olan şekilden üç tane olunca anlam nasıl değişiyor dersiniz? (Dedikodu). Sıfırın bulunması çok daha sonraları oluyor. Yani insanlar uzun bir süre sıfırsız yaşıyorlar. Yine tarihi kaynaklara göre, sıfırın ilk kez Hintliler tarafından bulunduğu, onlardan Araplara ve oradan da Avrupa'ya geçtiği söyleniyor. Ancak sıfır sayısını ilk kez hesaplamalarda kullanan kişinin 800 yıllarında bizden biri olan El-Harizmi olduğu biliniyor. El-Harizmi yazdığı Aktarma ve Kısaltma Bilimi adlı kitabıyla cebirin başlangıcını yapmıştır (Sertöz, 2013).

Matematiğin yapısında elemanlar ve önermeler vardır. Elemanlar matematiğin yapı taşlarıdır. Önermeler, doğru veya yanlış bir fikir ifade eden cümleler veya ifadelerdir. Elemanlara örnek olarak nokta, üçgen, sayı; önermelere örnek olarak "iki noktadan yalnız bir doğru geçer", "üçgenin iç açıları toplamı 180°dir" ifadeleri gösterilebilir. Matematikteki kavram ve bağıntılar, eleman ve önermeler ile bunlar arasındaki ilişkilerden oluşur (Baykul, 2005).

## Matematiğin Amacı ve Önemi

Matematiğin amacını tek türlü tanımlamak pek mümkün değildir. Ancak matematiğin temel amacının, insanlarda doğuştan var olan düşünebilme yeteneğini geliştirmek olduğu söylenebilir. Matematik, günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözebilmemizi, neden-sonuç ilişkisi kurabilmemizi ve belki de en önemlisi mantıklı düşünebilmemizi sağlar.

Matematikte beklenen amaçlardan birisi de, insanda davranış ve doğru düşünme yetenekleri oluşturmaktır. Bunları sağlayacak en önemli araç ise matematik eğitimidir (Göker, 1997). Matematik dersi öğretim programlarında çoğunlukla matematik eğitiminin amacı "düşünmeyi ve akıl yürütmeyi geliştirme" şeklinde ele alınmaktadır. Nitekim ülkemizde yenilenen öğretim programları çerçevesinde matematik dersi yeni öğretim programının temel amaçları arasında da "matematiksel problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir" ifadesi yer almaktadır. Yeni programda ayrıca matematik eğitiminin önemini vurgulayan "matematikte veya diğer alanlarda ileri bir eğitim alabilmek için gerekli matematiksel bilgi ve becerileri kazanabilecektir" amacına yer verilmiştir. Matematik dersi öğretim programlarında da belirtildiği gibi matematik dersi ile bireylere akıl yürütme, ilişkilendirme, iletişim ve problem çözme becerilerinin kazandırılması amaçlanmaktadır. Tüm bu becerilere sahip olmak günümüzde yeni bir kavram ile ifade edilmeye başlamıştır: "Matematik okuryazarlığı".

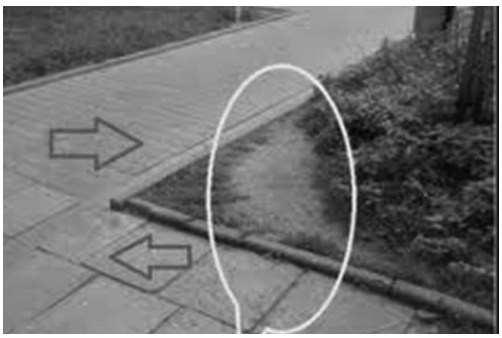
Matematik okuryazarlığı, matematiğin tarihsel gelişimi hakkında bilgi sahibi olma, günlük hayattaki matematiksel ilişkileri fark etme, iletişim kurmak için matematik dilini kullanma, problem çözme ve matematik bilgileri gerçek hayat durumlarında kullanmayı içermektedir.

Günümüzde hemen her türlü meslek az ya da çok matematik ve özellikle de matematiksel düşünmeyi gerektirmektedir. İşverenler elemanlarından daha önce hiç karşılaşılmamış problemleri çözmelerini beklemektedirler. Bu da birtakım kopuk matematiksel becerilerden çok akıl yürütme yolu ile probleme çözüm üretme gereksinimini doğurmaktadır (Olkun ve Toluk Uçar, 2004).

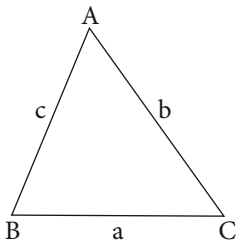
Matematik çoğu zaman öğrencilerin korktukları ve çekindikleri bir ders olmuştur. Bunun bir sonucu olarak da öğrenciler tarafından pek sevilmeyen bir ders haline gelmiştir. Öğrencilerin matematiği sevmeleri ve matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmeleri sağlanabilir, ancak bunu başarmanın yolu öğrencilere matematiğin önemini ve gerekliliğini yeterince iyi anlatmaktan geçmektedir.

## Matematik ve Hayat

Dikkat ederseniz hayatımızın içindeki her şeyde matematik var. Bir gün sabah yataktan kalkıp akşam tekrar yatana kadar yaptığınız işlerde hiç matematik kullanmadan bir gün geçirmeyi deneyin, yapamazsınız, çünkü matematik her yerde. Yaptığımız her işin içinde matematiksel kavramlar, işlemler ve ilişkiler var. Okulda matematik dersinde öğrendiğiniz bilgilerin ve kazandığınız becerilerin günlük yaşamda bir yerlerde mutlaka işinize yaracağını asla unutmayın. Hayatta matematik olmadan hiçbir şeyin olmayacağını bilin. Aslında bu bilgileri çoğu zaman farkında olmadan kullanıyoruz. Örneğin çoğu zaman parklarda karşılaştığınız üçgen şeklindeki bir güzergâhta neden üçgenin iki kenarını yürümek yerine çapraz yolu kullandığınızı hiç düşündünüz mü?



"Kestirme yani daha kısa da ondan" dediğinizi duyar gibiyim. Peki çapraz yolun daha kısa olduğunu nereden biliyorsunuz? Tabi ki matematik dersinden. Çünkü üçgeni anlatırken öğretmeniniz bir üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamının her zaman üçüncü kenarın uzunluğundan daha fazla olduğundan söz etmişti.




$a + b > c$

Bunun gibi matematik dersinde öğrendiğimiz ve günlük yaşamda kullandığımız birçok bilgiyi örnek verebiliriz. İşte bu yüzden okulda öğretilen matematiği iyi öğrenmeli ve günlük yaşamda da bu bilgileri doğru bir şekilde kullanmalıyız.

Matematik hayatımızın bu kadar içinde ise hayatı kaliteli yaşamak isteyen herkesin iyi bir matematik bilgisine ihtiyacı olduğu da kaçınılmaz bir gerçektir. Nitekim bu durum 2018 yılında yayımlanan Matematik Dersi Öğretim Programı'nın özel amaçları arasında

"*Matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirebilecek ve etkin bir şekilde kullanabilecektir.*",

*"Matematiksel kavramları anlayabilecek, bu kavramları günlük hayatta kullanabilecektir.*",

*"Matematiğin sanat ve estetikle ilişkisini fark edebilecektir.*",

"*Matematiğin insanlığın ortak bir değeri olduğunun bilincinde olarak matematiğe değer verecektir.*"

şeklinde ifade edilmektedir. Programın uygulamasında dikkat edilecek hususlarda ise matematiğin hayatın bir parçası olduğunun unutulmaması, bunun için her fırsatın matematiksel düşünmenin gelişimi için değerlendirilmesi gerektiğine değinilmektedir. Bu amaçla diğer derslerle Matematik dersi arasında yeri geldikçe ilişkilendirmeler yapılması, örneğin gerek günlük hayatta karşılaşılan gerekse Hayat Bilgisi ve Sosyal Bilgiler dersi içinde yer bulan ekmek israfı, geri dönüşüm, sağlıklı ve planlı hayat, vergi bilinci, sosyal güvenlik hak ve yükümlülükleri gibi konuların özellikle vurgulanması ve bu konularda örnekler verilmesi önerilmektedir (MEB, 2018).

## Matematik ve Diğer Bilimler

Günümüzde Matematik, neredeyse tüm bilimsel araştırmalarda kullanılan zorunlu bir araç konumuna gelmiştir. Yani, diğer bilim dallarının büyük bir kısmı matematikle yakından ilgilidir. Matematikle hiç ilgisi olmayan bir bilim dalı söylemek pek de kolay değildir. Tıp, mühendislik, astronomi, fizik, kimya vb. bilimlerin temelinde hep matematik vardır. Nitekim bugün kullanılan birçok matematiksel bilgi de diğer bilim dallarında karşılaşılan problemlerin çözümlerinin araştırılması safhasında ortaya çıkmıştır. Bilim ve teknolojideki hızlı gelişim, yeni matematiksel bilgilerin üretilmesi zorunluluğunu hissettirmektedir.

Matematik diğer bilimlerden sadece konu olarak değil düşünce yapısı ve yöntem olarak da farklılık göstermektedir. Örneğin, Fen bilimlerindeki bilgiler gözlem ve deneye bağlı olup ölçülebilir niteliktedir. Matematiğin ise kesin kuralları vardır ve düşünme yapısı tümdengelimdir. Diğer bilim dallarından bağımsız bir yapıya sahiptir ve uygulama alanları çok geniştir. Kullanım alanlarına ve derinliğine sınır konamayan bir bilimdir. Kendine özgü harf, şekil ve sembolleri olan evrensel bir dil olma özelliğine sahiptir.

Tüm bilimler üzerinden; temel bilimler, uygulamalı bilimler, beşeri bilimler ve sosyal bilimler şeklinde bir sınıflama yapıldığında, matematik temel bilimlerin başında yerini almaktadır. Matematiğin bugün için çok sayıda alt bilim dalından söz edilmektedir. Analiz, Cebir, Geometri, Topoloji vb.

Matematiği kendi içinde farklı açılardan sınıflandırmak mümkündür. Teorik-uygulamalı matematik, klasik-modern matematik, akademik-okul matematiği gibi.

### Teorik-Uygulamalı Matematik

Matematiğin güzellik ve zihni uyandırması boyutuyla teorik (pür) matematikçiler ilgilenmektedir. Onlar için önemli olan yapılanın estetik olması ve bu durumun kişiyi entelektüel doyuma ulaştırmasıdır. Hardy'nin dediği gibi, "Teorik matematikçinin üzerinde uğraştığı sorunların, problemlerin uygulama alanı bulması, işe yaraması veya faydalı olması gibi bir endişesi yoktur." Teorik matematikçilerin ortaya koyduğu matematiksel bilgilerin diğer bilim dallarında ve günlük yaşamda nasıl kullanılabileceğini araştırmak ise uygulamalı matematikçilerin işidir. Biliyoruz ki çoğu teorik matematik ürünü daha sonraları pratik uygulama alanı bulmuştur.

### Klasik-Modern Matematik

Klasik matematik daha çok aritmetik ağırlıklı, cebirsel işlemlerin yürütülerek problemlerin çözüldüğü ve Euclid'in tanımladığı geometrik nesnelerin üzerine kurulan bir geometrinin ele alındığı matematiktir. 1960'lı yıllarda ABD'de başlatılan eğitim reformlarının sonucunda modern matematik kavramı ortaya çıkmıştır. Modern matematik, küme ve grup kavramlarını kullanarak matematiksel yapıları yeniden tanımlamaktadır. Modern matematik ile birlikte, belli semboller ve formüller kullanılarak yapılan soyutlamalar ve birbirinden bağımsız gibi görünen işlem ve algoritmalar kendi içinde tutarlı ve bağlantılı hâle gelmiştir. Modern matematik programları ülkemizde 1970'li yılların başında uygulanmaya başlanmıştır.

### Akademik-Okul Matematiği

Akademik matematik, teorik matematikçilerin uğraştığı matematik olarak tanımlanabilir. Akademik matematiğin amacı, matematiğin ulaşmış olduğu birikimi kullanarak teorik ve pratik alanda matematiğe bilimsel katkıda bulunmaktır. Okul matematiği "Toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz?" sorusuna cevap ararken matematik ile ilgili "Ne öğretelim?" ve "Nasıl öğretelim?" konusu ile ilgilenir. Akademik matematik ürünü bilgilerin genç nesillere aktarılması, okul matematiğinin işidir.

Okullarda öğretilen matematiğin amacı her düzeyde bazı farklılıklar göstermektedir. İlköğretim ve ortaöğretim düzeyinde okul matematiğinin amacı, öğrenciye istenilen matematik kültürü vermek ve temel matematiksel beceriler yanında matematiksel düşünme yeteneğini geliştirmektir. Yükseköğretim düzeyindeki okul matematiğinin amacı ise öğrenim görülen alana göre farklılaşmaktadır. Örneğin, Fen Fakültesi Matematik bölümünde okutulan matematiğin amacı, öğrenciye ayrıntılı matematik bilgisi vermek, matematiksel düşünme seviyesini yükseltmek ve öğrenciye akademik matematik alanında çalışabilecek bir altyapı hazırlamak iken Eğitim Fakültesinde okutulan matematiğin amacı, öğretmen adayına sahip olması gereken alan bilgisini sağlayan matematiği kazandırmaktır.

## KAYNAKÇA

Altun, M. (2005). *Matematik Öğretimi*. İstanbul: Erkam Matbaacılık

Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde Matematik Öğretimi (1-5. Sınıflar).* Ankara: Pegem Akademi

Göker, L. (1997). *Matematik Tarihi ve Türk-İslam Matematikçilerinin Yeri*. İstanbul: M.E.B. Yayınları

MEB. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Ankara: M.E.B. Yayınları

Olkun, S. ve Toluk Uçar, Z. (2004). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi*. Ankara: Anı Yayıncılık

Sertöz, S. (2013). *Matematiğin Aydınlık Dünyası*. Ankara: TÜBİTAK Yayınları

## Harezmi (MS 780-850)

Tam olarak ismi Ebu Abdullah Muhammed bin Musa El-Harezmi'dir. IX. yüzyılda yaşamış olan ünlü matematik, coğrafya ve astronomi alimi, "Cebir" biliminin kurucusudur. 780 yılında Harezmi' de doğan ünlü alim dönemin bilgi merkezi ve şehri olan Bağdat'a ilim öğrenmek için gider. Bağdat'ta bulunan Bilim Akademisi Darülhikme'de görev alan Harezmî matematik, coğrafya ve astronomi dallarında çalışmalar yapmıştır. Harezmî, birinci ve ikinci dereceden denklemleri analitik metotla tek bilinmeyenli denklemleri ise cebirsel ve geometrik metotlarla çözmenin yollarını buldu. Bu alanda yaptığı çalışmaları, daha sonra matematiğin bir kolu olarak bildiğimiz cebirin adını alacağı "Al Kitab Fi Hisab Al Cabr wal Muqabalah" adlı kitabında topladı. Söz konusu kitapta Hint sayı sistemini kullanarak yapılan hesaplamalarda sıfırı ilk defa dört işleme dahil ederek kullandı. Matematik alanına Cebir kavramını sokan Harezmî ilgi duyduğu matematik, coğrafya ve astronomi dallarında birçok eser yazdı.

# 2. BÖLÜM

# SAYILAR

**Öğrenme Hedefleri**

*Bu bölümü çalıştıktan sonra;*

- ✓ *Sayı kavramını, doğal sayılar, tam sayılar ve reel sayılar kümelerini kavrayabilme,*
- ✓ *Sayı sistemi kurabilme, değişik tabanlı sayılar üretebilme ve üzerinde işlemler yapabilme,*
- ✓ *Matematiksel modelleme ve problem çözebilme*

*kazanımlarını elde edebileceksiniz.*

**İçindekiler**


- ➢ *Doğal Sayılar*
- ➢ *Sayı Sistemi Kurma ve İşlemler*
- ➢ *Bir Sayının Farklı Tabanlarda Yazılması*
- ➢ *Tam Sayılar ve Bölünebilme*
- ➢ *Matematiksel Modelleme ve Problem Çözme*
- ➢ *Kaynakça*

Bu bölümde sayılar üzerinde duracağız.

Ölçme veya en azından karşılaştırma yaparak günlük pek çok işimizi görür, kararlar veririz. Bunun için sayıları kullanırız. Peki **sayı** nedir? Daha açık olmak gerekirse, örneğin, **iki** dediğimiz ve **2** sembolü ile gösterdiğimiz şey nedir? Sayı sembolleri bize kimlerden mirastır?

Bu çocuksu sorular çoğaltılabilir, ancak cevapları çok kolay değildir.

Sayı kavramı bir özelliktir: Çoklukları aynı olan kümelerin ortak özelliği. 2, çoklukları kulaklarımız kadar olan bütün kümelerin ortak özelliğini belirtmek için kullanılan soyut bir kavramdır. Matematiği soyut yapan da budur. Benzer olarak diğer sayıları tanımlayabiliriz.

## Doğal Sayılar

Doğadaki nesnelerin çokluklarını belirtmek için **Doğal Sayılar**'ı kullanırız. Doğal Sayılar kümesini $\mathbb{N}$ (doğal anlamına gelen natural kelimesinin ilk harfi) ile gösteririz. Doğal Sayılar kümesinin iki tür kuruluşundan söz edilebilir. Bunların ilki sayılara, birbirine denk olan kümelerin ortak özelliği olarak bakmayı esas alan ve yukarıda kısaca sözünü ettiğimiz kuruluştur. İkincisi ise, aşağıdaki Peano Aksiyomları'nı esas alan kuruluştur.

1. Sıfır (0) bir doğal sayıdır.
2. Her doğal sayının (ardışığı denen) 1 fazlası vardır. 0'ın ardışığı 1, 1'in ardışığı 2, … şeklindedir.
3. Sıfır hiçbir sayının ardışığı olamaz.
4. Farklı doğal sayıların ardışıkları da farklıdır.
5. A kümesi Doğal Sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer 0 A'nın elemanı ise ve bir sayının A'da bulunması o sayının ardışığının da A'da bulunmasını gerektiriyorsa, A = $\mathbb{N}$'dir.

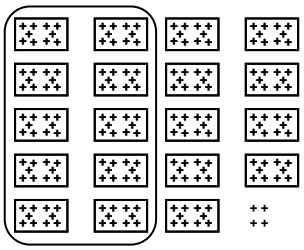
Bu kuruluşlara göre, doğal sayılar kümesini

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ile göstereceğiz. **0'ı doğal sayı saymayan kaynaklar da vardır**, ancak biz doğada yokluğu temsil etmek üzere 0'ı da bu kümeye alacağız. Saymak için kullandığımız 1, 2, 3, … sayılarına **Sayma Sayıları** denir.

## Sayma Sistemi Kurma ve İşlemler

Nesneleri en kolay ve en hızlı, **gruplayarak** sayarız. Doğal sayıların adlandırılmasında ve yazılmasındaki temel esas da bu şekildeki bir **ardışık gruplama**dır. Bu paragraftaki Türkçe harflerin sayısını **onarlı** gruplama ile sayalım.



*Şekil 1: Yukarıdaki paragraftaki harfler kadar noktanın onar ardışık gruplaması.*

Görülüyor ki, bir (1) tane on-onluk (yüzlük), dokuz (9) tane onluk ve dört (4) tane de birlik vardır. Böylece, bu noktaların sayısını 194 ile gösteririz. Buradaki 1, 9 ve 4'ün konumu önemlidir. Bu şekildeki bir gösterim **konumlu sayma sistemi** olarak bilinir.

194 şeklindeki gösterim yerine, 491 şeklindeki bir gösterim de kullanılabilirdi ve bu tercih isabetli de olurdu, çünkü soldan sağa doğru okuruz (Tablo:1). Ancak, tercih edilen 194 şeklindeki gösterimdir (Tablo:2).

*Tablo 1: Soldan sağa onlu konumlu sayma.*

| Birlik | Onluk | On-onluk (Yüzlük) | On-on-onluk (Binlik) | On-on-on-onluk (On-Binlik) |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 1 | 0 | 0 |

*Tablo 2: Sağdan sola onlu konumlu sayma.*

| On-on-on-onluk (On-Binlik) | On-on-onluk (Binlik) | On-onluk (Yüzlük) | Onluk | Birlik |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 9 | 4 |

Konumlu saymanın tarihte ilk olarak milattan önce II. binin başlarında Babil bilginlerinde ortaya çıktığı söylenmektedir (bkz. Rakamların Evrensel Tarihi, Georges Ifrah, Cilt–1, sf.18). Konumlu saymada, ardışık gruplamaların her birine **basamak** (birliklerden onluklar, onluklardan onluklar, on-onluklardan onluklar, on-on-onluklardan onluklar, … yaptık. Yani, sürekli olarak ardı ardına

grupladık. Birlikler grubuna birler basamağı, onluklar grubuna onlar basamağı, on-onluklar grubuna on-onluklar basamağı, … dedik) ardışık gruplamalardaki grup sayısına **rakam** (birliklerden kaç, onluklardan kaç, on-onluklardan kaç, on-on-onluklardan kaç tane olduğunu belirten semboller), her bir gruptaki eleman sayısına da **taban** adı verilir (örneğin, ardışık olarak onluklar oluşturuyorsak taban **on**dur). Yukarıdaki örnekte, on-onluk (yüzlük) grubundan (basamağından) **1** tane, geriye kalanlarda **9** tane onluk ve kalanlarda da **4** tane birlik vardır. Gruplamaların her birinde de **onluklar** vardır. Yani, yukarıdaki saymada, onluklar taban ve 1, 9, 4 ise rakamdırlar.

Onluk tabanın bütün rakamları (saymaya yarayan işaretleri) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9'dur. Bugün kullandığımız ve Arap sembolleri diye bildiğimiz bu sayı sembollerini Hintlilere borçluyuz. (**Soru:** İnsanoğlu neden onluk tabanı seçmiştir? Acaba, nedeni ellerimizdeki parmak sayısı olabilir mi?)

Onluk tabanda yazdığımız 1969 sayısında ilk yazılan 9 ile ikinci yazılan 9'un değerleri, bulundukları basamağa göre değişmektedir. Bulunduğu basamağa göre bir rakamın değerine onun **basamak değeri**, bulunduğu basamağa bakılmaksızın bir rakamın değerine de onun **sayı değeri** deriz. 1969 sayısında 6'nın basamak değeri 60 ve sayı değeri de 6'dır.

**Etkinlik 1:** Bir yemek kaşığı pirinç alıp, **beşli** ardışık gruplayarak sayınız.

**(a)** Beşli ardışık gruplama ile bulduğunuz sayıyı belirtiniz.

**(b)** Bu sayma sisteminin tabanının ismi ne olur? Bu sayma sisteminin rakamları nelerdir?

**(c)** Bulduğunuz sayıyı onluk tabanda yazınız.

**(d)** Beşli tabanda sayınızı okurken ve söylerken hangi güçlükle karşılaşıyorsunuz? Onluk tabandaki benzer güçlük, basamaklara özel isimler verilerek aşılmıştır: On-onluklara **yüzlük**, on-on-onluklara **binlik**, … vb. deriz.

**Örnek 1:** Yukarıdaki örnekteki 194 sayısı, beşlik tabanda 1 tane beş-beş-beşlik, 2 tane beş-beşlik, 3 tane beşlik ve 4 tane de birlik olarak $(1234)_{beş}$ veya $(1234)_5$ şeklinde yazılır. Eğer bir elimizin parmaklarından esinlenerek beşlik tabanda sayıyor olsaydık, muhtemeldir ki beş-beşliklere özel bir isim olarak **yeşlik**, beş-beş-beşliklere **keşlik**, beş-beş-beş-beşliklere **meşlik**, vb. isimler uyduracaktık. Böylece, bu örnekteki $(1234)_5$ sayısını da *keş ikiyeş üçbeş dört* şeklinde okuyor olabilirdik.

Tarihte onluk sayma sisteminden başka konumlu sayma sistemleri kullanılmıştır. Örneğin, bugün açıların derece ölçüsünde ve saatlerimizde kullandığımız

bir sayma şekli **altmışlı** saymadır ve Sümerler tarafından kullanılmıştır. Başka bir konumlu sayma sistemi de günümüzde bilgisayarlarda kullanılan ve elektrik devrelerinin açık-kapalı konumlarını temel alan 0 ve 1 rakamlarından oluşan **ikili sayma sistemi**dir.

Bazı sayma sistemleri ise konumlu saymaya dayanmazlar. Buna iyi bilinen bir örnek, Roma sayma sistemidir. Bu sayma sistemindeki semboller Tablo 3'te gösterilmiştir.

*Tablo 3: Roma sayı sembolleri.*

| **Roma Sayı Sembolü:** | **Hint-Arap Sayı Karşılığı:** |
|---|---|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1000 |

Roma sayma sisteminde sayılar, sembollerin değerleri toplanarak okunur: DCL sayısı 500+100+50 = 650 olarak, DCXII sayısı 500+100+10+1+1 = 612 olarak okunur. Bu sayıların yazımında sembol tekrarını önlemek için bir özellik kullanılır. Örneğin, dokuz sayısı için VIIII yerine IX kullanılır. 9 < 10 olduğundan, I sembolü 10 sayısını temsil eden X in soluna yazılmaktadır. Genel olarak, AB sayısında A < B ise bunun sayı değeri B – A olmaktadır. Buna **eksiltme özelliği** denir. Eğer sayı 7 olsaydı, Roma sayılarıyla VII biçiminde yazılacaktı.

Roma sayma sistemini öğrenmekle kullanmakta olduğumuz konumlu sayma sisteminin değerini daha iyi anlıyoruz. Gerçekten, Roma sayma sistemi ile dört işlem yapmak çok güçtür. Bu yüzden bu iş için özel muhasebeciler tutmuş olmalıdırlar.

Aşağıdaki etkinliği yaparak, onluk sayma sistemimizin güzelliğini ve kolaylığını daha iyi takdir edebiliriz.

**Etkinlik 2:** Bu etkinlikte, Romalı muhasebecilerin nasıl çarpma işlemi yaptıklarını inceleyeceğiz. Bir Roma kralı, XVII (17) tane beyliğinden vergi olarak DLXXIII (573)'er tane altın emrettiğinde, alacağı toplam altını bilmek istemektedir. Bunun için, bir örneği Tablo 4'te gösterilen **yarılama-katlama yöntemi** kullanılırdı:

**(a)** Çarpımdaki çarpanlardan birini yarılarken, diğerini ikiye katlarız.

**(b)** Yarıladığımız sayı tek ise, yarısını aldığımızda bulunan sayı ondalıklı olacaktır, ancak, virgülden sonrasını okumayacağız.

**(c)** Bu yarılama katlama işini sürekli yapacağız, ta ki yarıladığımız taraf 1 olana dek.

**(d)** Daha sonra, sol sütundaki sayılardan tek olanların karşısındakileri (anlaşılsın diye koyu harfle yazdıklarımızı) toplayacağız:

$$8704 + 544 + 272 + 136 + 68 + 17 = 9741$$

**(e)** Bu sayı $573 \times 17 = 9741$ sayısıdır ve olasıdır ki şöyle yazılırdı:

$$\begin{aligned}(\text{DLXXIII}) \times (\text{XVII}) &= \text{MMMMMMMMDCCIV} + \text{DXLIV} + \text{CCLXXII} + \\ &+ \text{CXXXVI} + \text{LXVIII} + \text{XVII} \\ &= \text{MMMMMMMMMDCCXLI}\end{aligned}$$

*Tablo 4: 573 × 17 işleminin yarılama-katlama yöntemiyle yapılması.*

| YARILAMA | KATLAMA |
|---|---|
| DLXXIII | XVII |
| (573) –**tek**– | **(17)** |
| CCLXXXVI | XXXIV |
| (286) | **(34)** |
| CXLIII | LXVIII |
| (143) –**tek**– | **(68)** |
| LXXI | CXXXVI |
| (71) –**tek**– | **(136)** |
| XXXV | CCLXXII |
| (35) –**tek**– | **(272)** |
| XVI | DXLIV |
| (17) –**tek**– | **(544)** |
| VIII | MLXXXVIII |
| (8) | **(1088)** |
| IV | MMCLXXVI |
| (4) | **(2176)** |
| II | MMMMCCCLII |
| (2) | **(4352)** |
| I | MMMMMMMMDCCIV |
| (1) –**tek**– | **(8704)** |

Görüldüğü gibi, bu işlemi Roma sayma sistemi ile yapmak çok zordur. Romalı muhasebeciler, 2000 yıl sonra 9 yaş çocuklarının buna benzer çarpma işlemlerini gözü kapalı yapabileceklerine pek ihtimal vermezlerdi herhalde. Bu çarpma tekniğinin neden doğru olduğunu düşününüz ve daha sonra verilen analizi okuyunuz.

**Analiz:** $573 = 512 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 = (1000111101)_2$ olup bu sayı 17 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} 573\text{x}17 &= (572 + 1)\text{x}17 \\ &= 572\text{x}17 + 17 \\ &= 286\text{x}34 + 17 \\ &= 143\text{x}68 + 17 \\ &= 71\text{x}136 + 68 + 17 \\ &= 35\text{x}272 + 136 + 68 + 17 \\ &= \ . \\ &= \ . \\ &= 8704 + 544 + 272 + 136 + 68 + 17 = 9741 \end{aligned}$$

bulunur. Noktalı yerleri benzer olarak siz doldurunuz.

Görülüyor ki, bu yöntem çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini ve hemen ardından çarpmanın birleşme özelliğini kullanmaktadır.

Aşağıda, Örnek 2'de onluk tabanda toplama ve çıkarma işlemleri için, Örnek 3'te ise onluk tabanda çarpma ve bölme işlemleri için birer örnek veriyoruz. Onluk tabanda yaptığımız bu işlemlerin Roma sayı sistemindeki işlemlere göre hem daha kolay hem de daha zarif olduğuna dikkat ediniz.

**Örnek 2:** Onluk tabanda 1234 ile 78 sayıları için toplama ve 1234 ile 61 sayıları için çıkarma işlemlerini yapalım.

Burada özellikle dikkat etmemiz gereken iki şey vardır:

**1.** Toplama işlemini yaparken, birliklerimiz ne zaman ki 9 taneden fazla oldu, o zaman biriken onlukları (**elde var** deyip) "onluk" basamağına, onluklarımız ne zaman ki 9 taneden fazla oldu, o zaman biriken yüzlükleri (**elde var** deyip) "yüzler" basamağına, … vb. yazarız. Bunu yapmamızın nedeni, onluk tabanda işlem yaptığımızdan, sürekli olarak onluk gruplamalar yapmamızdır.

**2.** Çıkarma işlemini yaparken, büyük olan sayıdan küçük olanı çıkarırız. Ancak, birlikler basamağındaki eksilen rakam çıkan rakamdan küçük ise, bir üst basamaktaki onluklar basamağından bir tane **onluk bozarız**. Benzer olarak, herhangi bir basamaktaki eksilen rakam çıkan rakamdan küçük ise, bir üst basamaktaki

basamaktan bir tane alır ve **on katını** eksilen rakama ekleyip çıkarma yaparız. Bu işe **onluk bozma** deriz. (Aslında bir üst basamaktan yüzlük alıp onluklara aktarıyorsak, yaptığımız işe belki yüzlük bozma denmesi gerektiği akla gelebilir, ancak onluk tabanda çalıştığımızdan dolayı, her basamaktaki sayı grubu bir öncekinin on katı olduğundan buna onluk bozma demek daha doğru olur ve biz de öyle deriz.)

*Tablo 5: Onluk tabanda 1234 + 78 işlemi.*

| On binlik | Binlik | Yüzlük | Onluk | Birlik |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | 7 | 8 |
| | 1 | (2+1)=3 | (10+1)=11 | 12 |
| | 1 | 3 | 1 | 2 |

*Tablo 6: Onluk tabanda 1234 – 61 işlemi.*

| On binlik | Binlik | Yüzlük | Onluk | Birlik |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | 6 | 1 |
| | 1 | 1 | (13–6) | 3 |
| | 1 | 1 | 7 | 3 |

**Örnek 3:** Onluk tabanda 573 ile 17 sayıları için çarpma ve 1234 ile 12 sayıları için bölme işlemlerini yapalım. Burada da dikkat etmemiz gereken iki şey var:

**1.** Çarpma işlemini yaparken, birlik × birlik çarpımından gelecek birlikler birliklere yazılırken, onluklar da (elde var deyip) onluklara aktarılır. Benzeri diğer basamaklar için yapılır (Tablo:7'ye bakınız).

**2.** 1234 ÷ 12 işleminde 1234 **bölünen**, 12 ise **bölen**dir. Bölme işlemini yaparken, **bölüm kısmında, bölünen sayının basamağı kadar basamak yeri ayrılır** (Tablo:8'e bakınız.). Sonra, sırayla şu sorular sorulur ve cevaplanır: 1 tane binlik 12 kişiye pay edilirse kaçar binlik düşer? 0'ar binlik düşer (bölüm kısmının binler hanesine 0 yazılır). 1 binlik artacaktır ve bu on yüzlük eder. On yüzlük 2 yüzlüğe eklenerek 12 yüzlük bulunur. Şimdi, 12 yüzlük 12 kişiye bölünürse kaçar yüzlük düşer? 1'er yüzlük düşer (**bölüm** kısmının yüzler hanesine 1 yazılır). 3 tane onluk 12 kişiye pay edilirse kaçar onluk düşer? 0'ar onluk düşer (bölüm kısmının onlar hanesine 0 yazılır). 3 onluk artacaktır ve bu otuz birlik eder. Otuz birlik 4 birliğe eklenerek 34 bulunur. Şimdi, 34 birlik 12 kişiye pay edilirse kaçar birlik düşer? 2'şer birlik düşer, 10 birlik artar, bu ise bu bölme işleminin **kalan**ıdır.

*Tablo 7: Onluk tabanda 573 × 17 işlemi.*

| On binlik | Binlik | Yüzlük | Onluk | Birlik |
|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 7 | 3 |
| | | | 1 | 7 |
| | (0+4)=4 | (35+5)=40 | (49+2)=51 | 21 |
| | 4 | 0 | 1 | 1 |
| | 5 | 7 | 3 | |
| | 9 | 7 | 4 | 1 |

*Tablo 8: Onluk tabanda 1234 ÷ 12 işlemi.*

| Bin | Yüz | On | Bir |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| − 0 | | | |
| 1 | 2 | | |
| − 1 | 2 | | |
| 0 | 0 | 3 | |
| − | | 0 | |
| | | 3 | 4 |
| − | | 2 | 4 |
| | | 1 | 0 |

| 1 | 2 |
|---|---|

| Bin | Yüz | On | Bir |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 2 |

## Bir Sayının Farklı Tabanlarda Yazılması

Bu kısımda, son olarak konumlu sayı sistemlerinin birbirlerine çevrilmelerinden, yani bir tabanda yazılan bir sayının başka bir tabanda yazılmasından ve bunun bir uygulamasından söz edeceğiz.

Herhangi bir sistemdeki (tabandaki) bir sayıyı ikinci bir sistemde yazmak için ilk sayıyı ikinci sistemdeki taban cinsinden yazarız.

**Örnek 4:** $(10101)_5$ sayısını 2 tabanında yazalım.

İlk olarak 5'lik tabanda verilen sayıyı çözümleyeceğiz. Daha sonra $5 = 1+2^2$ eşitliğini kullanarak, verilen sayının 2'lik tabandaki çözümlenmesini elde edeceğiz. Bu çözümlemeyi kullanarak verilen sayıyı 2'lik tabanda yazacağız:

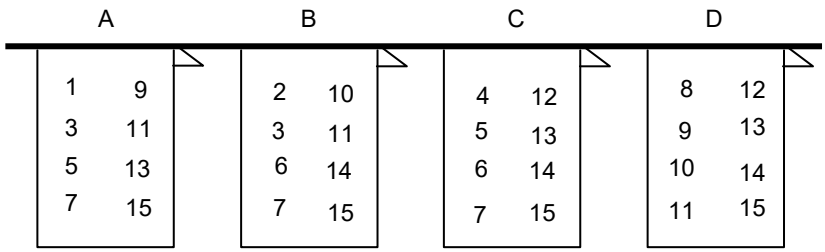
$$\begin{aligned}(10101)_5 &= 1+0+5^2+0+5^4\\ &= 1+(1+2^2)^2+(1+2^2)^4\\ &= 1+(1+2^3+2^4)+(1+4\cdot 2^2+6\cdot 2^4+4\cdot 2^6+2^8)\\ &= 1+2+2^3+2^7+2^9\\ &= (1010001011)_2\end{aligned}$$

**Örnek 5:** Şimdi, onluk tabandaki bir sayıyı iki tabanında yazalım:

$$\begin{aligned}132 &= 10^2+3.10+2\\ &= 2^2.(1+2^2)^2+(1+2).(2^3+2)+2\\ &= 2^2.(1+2^3+2^4)+(2^3+2+2^4+2^2)+2\\ &= (1100100)_2+(100000)_2=(10000100)_2\end{aligned}$$

(**Ödev:** Benzer olarak, aynı sayıyı 3'lük tabanda siz yazın.)

**Etkinlik 3:** Bir kart oyunundan söz edeceğiz şimdi. Öncelikle, 1 ile 15 arasındaki sayılar A, B, C ve D kartları üzerine aşağıda olduğu gibi yazılır.




*Şekil 2: A, B, C ve D kartları.*

(1) Bir kişi 1 ile 15 arasında bir sayı tutar ve A, B, C ile D kartlarından hangilerinde olduğunu söyler, diğeri de tutulan sayının hangisi olduğunu kartlara bakmadan bulur.

(2) Tutulan sayı hangi kartlarda ise, o kartların sol üst köşesindeki sayıların toplamı olan sayı olmalıdır. Şöyle ki, tutulan sayı A, B, C kartlarında bulunan bir sayı ise, sayı bu kartların sol üst köşesindeki 1, 2 ve 4 sayılarının toplamı olan 7 sayısıdır.

(3) Böyle bir oyunun ardındaki mantık nedir? Düşünün ve daha sonra aşağıdaki analizi okuyun.

**Analiz:** Bu oyun, 1 ile 15 arasındaki sayıları ikilik tabanda yazıp, hangi basamakta 2'nin hangi kuvvetinin bilinmesine dayanır. Bu sayılar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ve 15 olup, bunların ikilik tabandaki değerleri sırasıyla

$$(1)_2,(10)_2,(11)_2,(100)_2,(101)_2,(110)_2,(111)_2,(1000)_2,$$
$$(1001)_2,(1010)_2,(1011)_2,(1100)_2,(1101)_2,(1110)_2,(1111)_2$$

sayılarıdır. A kartına 1-ler kartı diyelim. 1-ler kartına yazmamız gereken sayılar, ikilik tabanda yazıldığında son basamağı 1 olan sayılardır. Bunlar $(1)_2,(11)_2,(101)_2,(111)_2,(1001)_2,(1011)_2(1101)_2$ ve $(1111)_2$ sayılarına karşılık gelen 1, 3, … , 15 sayılarıdır. Benzer olarak B kartına 2-ler, C kartına 4-ler ve D kartına 8-ler kartı adını verelim. C kartına yazılacak sayılar da ikilik tabanda yazıldığında 4-ler basamağında 1 bulunan sayılardır. Bunlar da $(100)_2,(101)_2,(110)_2,$ $(1100)_2,(1101)_2,(1101)_2,(1110)_2$ ve $(1111)_2$ sayılarına karşılık gelen 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14 ve 15 sayıları olacaktır. Şimdi oyunun en önemli yerine gelelim: Sadece A ve B kartında bulunan bir sayı sadece 1 tane 1-lik ve sadece 1 tane 2-lik içereceğinden, aranan sayı 1+2=3 olacaktır. Benzer olarak, sadece B, C ve D kartlarında bulunan bir sayı, sadece 1 tane 2-lik, sadece 1 tane 4-lük ve sadece 1 tane 8-lik içereceğinden, aranan sayı 2+4+8=14 olur.

**Ödev:**

(a) Bu oyun, kolaylıkla her sayı bir yemeğe karşılık getirilerek hazırlanacak kartlarla da yapılabilir. Yemekler alfabetik sırayla kartlara dizilerek kartların okunuşunda kolaylık sağlanır. Arkası dönük bir kişinin elinde hangi yemeğin hangi sayıya karşılık getirildiği belli olmalıdır. Böyle bir oyun hazırlayın.

(b) Siz de benzer olarak 5 kartla oynanabilecek bir kart oyunu hazırlayın.

### Alıştırmalar

**1.** Aşağıdaki işlemleri onluk tabana çevirmeden doğrulayınız.

a. $(234)_5+(123)_5=(412)_5$

b. $(2340)_5-(444)_5=(1341)_5$

c. $(4321)_5 x(123)_5=(1203033)_5$

d. $(4321)_5:(123)_5=(30)_5+(31)_5:(123)_5$

**2.** $(12)_3$,$(123)_4$ ve $(1234)_5$ sayılarını onluk tabana çevirmeden ikilik tabanda yazınız.

**3.** İkilik tabanda yapılan $(1111111)_2$:$(11)_2$ işleminde bölüm ve kalan nedir? Onluk tabana çevirmeden hesaplayınız.

**4.** Beşlik tabanda rakamları birbirinden farklı, üç basamaklı, birbirinden farklı üç sayının toplamı $(403)_5$ ise, bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?

**5.** A ≠ B için, onluk tabanda yapılan AA+AB+BA+BB=264 işleminde, iki basamaklı AB sayısının en küçük değeri ne olur?

**6.** Yarılama-katlama yöntemiyle 13 × 28 işlemini yapınız. Yarılanan ile katlananların yerini değiştirerek işlemi tekrar yapın ve sonuçları karşılaştırınız.

**7.** Yukarıdaki kart oyununa benzer olarak, siz de 4 karttaki 15 hayvandan oluşacak bir etkinlik hazırlayınız.

**8.** 63 tane fındığı 6 torbaya öyle dağıtın ve torbaları bağlayın ki bu fındıklardan herhangi bir sayıda isteyen bir kişiye istediğini torbaları çözmeden ve tam olarak verebilesiniz. (*İpucu:* 63'ü 2'nin artan kuvvetlerinin toplamı olarak yazarak başlayabilirsiniz.)

**9.** Bir hayvanat bahçesinde tavşanların nüfusu her yıl 2'ye katlanmaktadır. 6 yıl sonra 384 tavşana ulaşıldıysa başlangıçta kaç tavşan vardı?

## Tam Sayılar ve Bölünebilme

Doğal sayılarda $x + 3 = 0$ denkleminin çözümünün olmadığını biliyoruz. Gerçekten, 3 ile toplandığında 0'ı veren hiçbir doğal sayı yoktur. Hatta 0 haricinde hiç bir doğal sayı yoktur ki 0'a eklediğimizde 0'ı versin.

Genel olarak, "+" bir *A* kümesinde tanımlı bir işlem ve bu işlemin etkisiz elemanı "" olsun. Eğer *A*'nın *x* ve *y* elemanları için $x + y = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, x sayısına "*y*'nin tersi" diyeceğiz.

$x + 3 = 0$ denkleminin sağlandığı hayali bir kümemiz *A* olsun ve bu kümede "+" işlemi bildiğimiz toplama işlemi olsun. Bildiğimiz bu "+" işleminin etkisiz elemanının 0 olduğunu biliyoruz. A kümesinde 3 ile toplandığında 0'ı veren bir *x* sayısı varsa buna "3'ün tersi" dendiğini de söylemiştik. 3'ün tersi için "–3" sembolünü kullanırız. Yani "$x + 3 = 0$" denkleminde 3'ün tersi olan *x* "–3" olur. O halde 0, 1, 2, … doğal sayılarının "+" işlemine göre tersleri –0, –1, –2, –3, ... biçimindedirler. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta şudur: Bu elemanlar doğal sayıların tersleri iseler, bu elemanların tersleri de doğal sayılardır.

Mesela –5, 5 ile toplandığında 0'ı veren sayıyı temsil etmek üzere, $(-5)+5=0$ ise $5+(-5)=0$ olur. Kısaca –5'in tersi 5'tir deriz ve bunu matematiksel olarak $-(-5)=5$ biçiminde gösteririz. Sonuç olarak $A=\mathbb{N}\cup\{-0,-1,-2,-3,...\}$ kümesinin her elemanın tersi vardır. Şunu da belirtelim, $0+0=0$ olduğundan 0'ın tersi –0 = 0'dır.

Şimdi şu itiraz gelebilir: 1 ile toplandığında 0'ı veren bir doğal sayının olmadığını belirtmiştik. Peki, "–1" sayısının varlığını nerden çıkarıyoruz? Yani bu sayı sadece bir hayalden veya varsayımdan mı ibarettir? Bu önemli bir sorudur ve mutlaka cevaplanmalıdır. Bu soruya verilebilecek bir cevap, aslında doğal sayıların da o kadar "doğal" olmadıkları olsa gerek. Örneğin evrende hiç bir yerde "1" sayısı gözlemlenemez. Bu, insanın yüksek soyutlama becerisinin bir ürünüdür ve bellidir ki, milyonlarca yıllık insanlık tarihiyle kıyaslandığında, bir kaç bin yıllık çok yeni bir kavramdır. Yani, "doğal" dediğimiz sayılar da insanın bir icadıdır. Dolayısıyla, "–1" gibi sayıların hayatı anlamamızda bize yardımcı olduklarını sezdiğimiz ölçüde bu sayılara o kadar uzak durmayacağız.

Bu şekilde, doğal sayılara ters işaretlilerinin de katılmasıyla oluşan sayı kümesi "Tam sayılar" olarak bilinir. Bu sayıları günlük yaşantıda örneğin hava durumu raporlarında sıcaklık ifade ederken kullanırız. Tam sayılar kümesi, Almanca tam sayı anlamına gelen "zahlen" kelimesinin baş harfi kullanılarak

$$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,+1,+2,...\}$$

kümesi ile gösterilir.

Tam sayılarda işlemlerin nasıl olduğunu biliyorsunuz. Biz bu kesimde bir tam sayının başka bir tam sayıya kalansız bölünebilmesinden söz edeceğiz. Aslında, bir sayı diğer bir sayıyı tam olarak bölebiliyorsa, açıktır ki onun zıt işaretlisi de böler. Bu yüzden şimdilik tam sayılarda bölünebilmeden çok doğal sayılarda bölünebilmeden söz edeceğiz. Bir $A$ sayısının bir $B$ sayısına bölümünde bölüm $C$ ve kalan $K$ ise,

$$A=C\cdot B+K$$

yazılabilir. Burada $A$, $B$, $C$ ve $K$ sayıları doğal sayılardır. Eğer bu eşitlikte kalan 0 (yani, $K=0$) ise

$$A=C\cdot B$$

olup, "$A$ sayısı $B$'ye bölünür" veya "$B$ sayısı $A$'yı böler" deriz.

**Sonuç 1:** $K$ sayısı hem $B$ hem de $C$ den daha küçük olmak üzere, bir $A$ sayısının bir $B$ sayısına bölümünden bölüm $C$ ve kalan $K$ ise, aynı $A$ sayısının $C$ sayısına

bölümünden bölüm $B$ ve kalan $K$ dır. Örneğin, 34 ün 5 e bölümünden bölüm 6 ve kalan 4'tür. Yani,

$$34 = 6 \cdot 5 + 4$$

yazılabilir. Aynı sayının 6'ya bölümünden bölüm 5 ve kalan 4 olduğundan

$$34 = 5 \cdot 6 + 4$$

yazılabilir. Bunun anlamı, 34 kişi 5'erli sıralansa 6 sıra oluşur ve 4 kişi artar. Aynı 34 kişi 6'şarlı sıralansa 5 sıra oluşur ve yine 4 kişi artar.

Şimdi, sıkça kullandığımız bazı bölünebilme kurallarından söz edelim.

**Problem 1:** Bir sayının 2'ye bölümünden kalanı bulalım. Onluk sistemde üç basamaklı bir $x = abc$ sayısını

$$\begin{aligned} x &= 100a + 10b + c \\ &= 2(50a + 5b) + c \end{aligned}$$

şeklinde yazabildiğimizden bölüm $50a + 50b$ olup, kalan $c$'ye bağlıdır. Daha çok basamaklı sayılar için de görülür ki aranan kalan son basamağın 2'ye bölümünden kalandır.

**Problem 2:** Bir sayının 3'e bölümünden kalanı bulalım. Sayımız $x = abcd$ olsun.

$$\begin{aligned} x &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

olduğundan, aranan kalan $a + b + c + d$ toplamının 3'e bölümünden kalan ne ise o olacaktır. Benzer bir düşünce ile daha çok basamaklı sayıların da 3'e bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 3'e bölümünden kalandır. (**Ödev:** Benzer olarak, siz de 9'a bölünebilme kuralını belirleyiniz.)

**Problem 3:** Bir sayının 4'e bölümünden kalanı bulalım. Sayımız $x = abcd$ olsun. Bu sayı,

$$\begin{aligned} x &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 4(250a + 25b + 2c) + 2c + d \end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiğinden, kalan, $2c + d$'nin 4'e bölümünden kalan olacaktır. Örneğin, 1567 sayısının 4'e bölümünden kalan 2·6+7=19'un 4'e bölümünden kalan olan 3'tür. (Benzer olarak, siz de 8'e bölünebilme kuralını belirleyiniz.) Hemen belirtelim ki

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + cd$$

şeklinde yazılabildiğinden dolayı, *abcd* sayısının 4 ile bölümünden kalan aynı zamanda son iki basamağın 4 ile bölümünden kalandır.

**Ödev:** Bir sayının 5 ile bölümünden kalanın son basamağın 5 ile bölümünden kalan olduğunu gösteriniz. Benzer olarak, bir sayının 10'a bölümünden kalanın son basamağın 10'a bölümünden kalan olduğunu gösterin.

**Problem 4:** Bir sayının 7'ye bölümünden kalanı bulalım. Bunun için, öncelikle şunu söyleyelim: 6 sayısının 7'ye bölümünden kalan aslında 6'dır. Ancak 1 ekleyip 1 çıkarırsak kalan sayı değişmeyeceğinden, bu kalana -1 gözüyle bakabiliriz. Örneğin, 4'ün 5'e bölümünden kalan için -1'dir demek pek de yanlış olmaz. Çünkü $4 = 5 + (-1)$'dir. Buna göre,

$$10^3 = (10^3 + 1) - 1 = 7 \cdot 143 - 1$$

olduğundan, $10^3$'ün 7'ye bölümünden kalan –1'dir. Öte yandan aşağıdaki önerme de doğrudur.

**Önerme 1:** $A_1$ ile $A_2$ sayılarının $B$ sayısına bölümünden bölümler sırasıyla $C_1$ ile $C_2$ ve kalanlar da sırasıyla $K_1$ ve $K_2$ ise, yani,

$$A_1 = C_1 \cdot B + K_1 \text{ ve } A_2 = C_2 \cdot B + K_2$$

ise, $A_1 \cdot A_2$ çarpımının $B$ sayısına bölümünden kalan da $K_1 \cdot K_2$ (veya $K_1 \cdot K_2$'nin $B$'ye bölümünden kalan) olur.

**İspat:** İspatı kolaylıkla yapabiliriz:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 &= (C_1 \cdot B + K_1) \cdot (C_2 \cdot B + K_2) \\ &= (C_1 \cdot C_2 \cdot B + C_1 \cdot K_2 + C_2 \cdot K_1) \cdot B + K_1 \cdot K_2 \end{aligned}$$

olduğundan, görülüyor ki $A_1 \cdot A_2$ çarpımının $B$ sayısına bölümünden kalan $K_1 \cdot K_2$'dir (veya $K_1 \cdot K_2$'nin $B$'ye bölümünden kalandır).

Esas problemimize dönersek, sayımız $x = abc$ olsun. Bu sayı,

$$\begin{aligned} x &= 100a + 10b + c \\ &= 7(14a + b) + (2a + 3b + c) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiğinden, 'in 7'ye bölümünden kalan, 'nin 7'ye bölümünden kalandır.

Sayımız 6 basamaklı $x = abcdef$ ise,

$$\begin{aligned} x &= 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10e + f \\ &= 10^3 (100a + 10b + c) + (100d + 10e + f) \end{aligned}$$

olup, bu eşitlikte $P$ sayısı $x$'in 7'ye bölümünden bulunacak bölümün bir kısmı ve aranan kalan da

$$K = (-1)\cdot(2a + 3b + c) + (2d + 3e + f)$$

şeklindeki sayının 7'ye bölümünden kalan olur. Daha genel olarak, $a_1a_2a_3...a_n$ şeklindeki $n$ basamaklı bir sayının 7'ye bölümünden kalanı bulmak için sayı sağdan sola doğru 3'erli gruplandırılır. Sonra, yukarıdaki gibi gruplardaki rakamların sağdan sola sırayla 1 katı, 3 katı ve 2 katı alınarak bulunacak sayı grupları sağdan sola bir eklenerek (+) ve bir çıkarılarak (-) yazılıp bulunacak kalanın 7'ye bölümünden kalan bulunur.

**Örnek 6:** 12345678 sayısının 7'ye bölümünden kalan

$+ (2\cdot0+3\cdot1+1\cdot2) - (2\cdot3+3\cdot4+1\cdot5) + (2\cdot6+3\cdot7+1\cdot8) = 23$

sayısının 7'ye bölümünden kalan olan 2'dir.

**Uygulama** (*Çarpma işleminde sağlama*)**:** Bölünebilme konusunun güzel bir uygulaması işlemlerin sağlamasıdır. Yukarıda Önerme:1'de gördük ki, $A_1$ sayısının bir $B$ sayısına bölümünden kalan $K_1$ ve $A_2$ sayısının aynı $B$ sayısına bölümünden kalan $K_2$ ise, $A_1 \cdot A_2$ çarpımının $B$ sayısına bölümünden kalan $K_1 \cdot K_2$'nin $B$'ye bölümünden kalan olur. $A_1 \cdot A_2$ çarpma işleminin sonucunu kontrol ederken bu önermeden yararlanabiliriz. Şöyle ki, *K(S)* işareti ile bir *S* sayısının *B* ile bölümünden kalanı gösterirsek, yukarıdaki önermeyi şöyle ifade edebiliriz:

$$K(K(A_1)\cdot K(A_2)) = K(A_1 \cdot A_2)$$

Yani, $A_1$ sayısının $B$ ile bölümünden kalan ile $A_2$ sayısının $B$ ile bölümünden kalanın çarpımı (eğer $B$ den büyükse bunun da $B$ ile bölümünden kalan) $A_1 \cdot A_2$ çarpımının $B$ ile bölümünden kalana eşittir, değilse işlem yanlış yapılmıştır.

Aşağıdaki etkinliği yapınız.

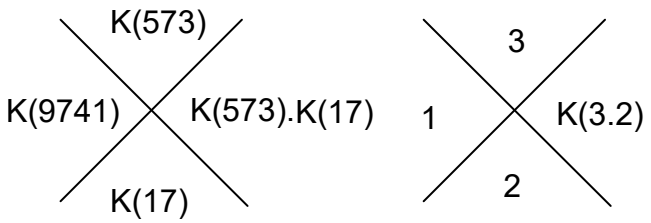
**Etkinlik 4:** Varsayalım ki 573 ile 17 sayılarını çarpıyoruz ve sonucu 9741 buluyoruz. Bir işlem hatası yapıp yapmadığımızı kontrol etmek için şunu yaparız: 573 sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 ve 17 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2'dir. 9741 sayısının 5 ile bölümünden kalan ise 1'dir. O halde,

$$K(K(573)\cdot K(17)) = K(3\cdot 2) = 1$$

ve

$$K(9741) = 1$$

olup bu değerler eşittir. Bu durumu sadelik için aşağıdaki şekilde belirtiriz.




*Şekil 3: Çarpmanın 5'e bölmeye göre sağlaması.*

O halde işlem doğru yapılmış olabilir, çünkü $K(3 \cdot 2)$ değeri 6'nın 5'e bölümünden kalan olup bu da çaprazın solundaki 1 ile aynı sonuçtur. Ancak, 573 ile 17 sayılarının çarpımı 9741 yerine 9746 bulunmuş olsaydı sağlamamız yine doğru yapılmış bir işlemi işaret edecekti. Yani, son basamağa bakarak sağlamayı yapacaktık.

Bu yüzden 5 yerine 9'a bölmeye göre sağlama tercih edilmektedir. Bunun nedeni, 9'a bölmeye göre sağlama yaparken sayılardaki bütün rakamların göz önüne alınmasıdır. Siz de aynı işlemin sağlamasını 9'a bölmeye göre yapınız.

**Tanım 1** (*Asal sayı*)**:** Bir doğal sayının sadece iki tane pozitif böleni varsa bu sayıya *asal sayı* denir.

Bu tanıma göre, bir asal sayı negatif olamaz çünkü bir sayının asal olabilmesi için bu sayının bir doğal sayı olması gereklidir.

Yukarıda verilen asal sayı tanımına eşdeğer olan başka bir tanım, "1 hariç, 1 ile kendisi dışında hiçbir pozitif böleni olmayan sayma sayılarına asal sayı denir" şeklinde olabilir.

Verilen asal sayı tanımına göre 2, 7 ve 41 sayıları birer asal sayıdır, çünkü bunlar sadece iki farklı pozitif böleni olan sayma sayılarıdır.

1 dışındaki asal olmayan sayma sayılarına **bileşik sayı** denir. 1 sayısı ne asal sayı ne de bileşik sayıdır. Bileşik sayılara **dikdörtgensel sayı** dendiği de olur. Bu deyişin nedeni, bir asal sayı kadar insanı tek sıra dışında sıraya koyamazken, bir bileşik sayı kadar insanı tek sıra dışında da (dikdörtgen şeklinde) sıraya koyabilmemizden kaynaklanır. Örneğin, 6 bir dikdörtgensel sayıdır ancak 5 değildir.

Eratosten (Eratosthenes, MÖ. 276–194) asal sayıların elde edilmesi için bir yöntem önermiştir. Asal olmayanların elenmesine dayanan ve **Eratosten kalburu** denen bir yöntemle 1 ile 100 arasındaki asal sayılar aşağıdaki gibi bulunur.

**Tablo: 9 için açıklama:**

(1) 1 sayısı tanımdan dolayı asal değildir, altı çizilir.

(2) Sonra gelen 2 sayısı asaldır ve koyu olarak işaretlenir, ancak bunun katları olan 4, 6, … , 100 asal olamayacaklarından dolayı elenirler ve bunlar işaretlenir.

(3) 3 kendinden önceki hiçbir asal sayının katı olmadığı için asaldır, ama 3'ün katları asal olamayacaklarından dolayı elenirler.

(4) 5 sayısı elenmediğinden asaldır, ancak katları asal olamayacaklarından dolayı elenirler.

(5) Böyle devam ederek 11'e geldiğimizde, bu sayının kendinden önceki bütün sayı katları olan 22, 33, 44, … , 99 elenmiştir.

(6) Benzer olarak, 100'e kadar elenmemiş olan her sayı asal olacağından, koyu olarak işaretlenirler.

*Tablo 9: Eratosten kalburu.*

| |
|---|
| 1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, |
| **11**, 12, **13**, 14, 15, 16, **17**, 18, **19**, 20, |
| 21, 22, **23**, 24, 25, 26, 27, 28, **29**, 30, |
| **31**, 32, 33, 34, 35, 36, **37**, 38, 39, 40, |
| **41**, 42, **43**, 44, 45, 46, **47**, 48, 49, 50, |
| 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58, **59**, 60, |
| **61**, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69, 70, |
| **71**, 72, **73**, 74, 75, 76, 77, 78, **79**, 80, |
| 81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, |
| 91, 92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, |

Bir sayının, asal bölenlerinin çarpımı olarak yazılmasına o sayının **asal çarpanlara ayrılması** deriz. Örneğin, 24 sayısının asal çarpanlara ayrılması

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

şeklindedir.

**Problem 5:** Bir $A$ sayısının bütün pozitif bölenlerinin sayısını ve bunların toplamını bulalım.

$\alpha$ ve $\beta$ asal bölenler ve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $A = \alpha^{n_1} \cdot \beta^{n_2}$ sayısının bütün pozitif bölenlerinin

(a) Sayısı: $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$

(b) Toplamı;

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n_1})(1 + \beta + \beta^2 + ... + \beta^{n_2})$$

şeklindedir.

Gerçekten (a) için,

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n_1})(1 + \beta + \beta^2 + ... + \beta^{n_2})$$

çarpımı açılacak olursa ve sonra aralarına (+) yerine virgül konursa,

$$\begin{aligned} &1, \beta, \beta^2, ..., \beta^{n_2} \\ &\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2, ..., \alpha\beta^{n_2} \\ &\qquad \vdots \\ &\alpha^{n_1}, \alpha^{n_1}\beta, \alpha^{n_1}\beta^2, ..., \alpha^{n_1}\beta^{n_2} \end{aligned}$$

şeklinde, birbirinden farklı $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ tane sayı buluruz ki bunlar $A$ sayısının bütün pozitif bölenleridir.

(b) için ise, (a)'da bulduğumuz bu bölenlerin toplamı aradığımızdır ve

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n_1})(1 + \beta + \beta^2 + ... + \beta^{n_2}) = \frac{\alpha^{n_1+1} - 1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta^{n_2+1} - 1}{\beta - 1}$$

şeklindedir. 2'den fazla olan asal bölenler için benzer yol izlenir.

**Örnek 7:** 24 sayısının bütün pozitif bölenlerinin sayısını ve bunların toplamını bulalım:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

olduğundan, bütün pozitif bölenlerin sayısı (3+1)(1+1) = 8 olup bunların toplamı da

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3)=\frac{2^4-1}{2-1}\frac{3^2-1}{3-1}=15\cdot 4=60$$

olur. Bu bölenler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 şeklindedir.

**NOT:** 24'ün bölenlerinin ters işaretlileri de 24'ü böler. Dolayısıyla, 24'ün bütün bölenlerinin toplamı olur.

Benzer düşünceyle, bir sayma sayısının bütün bölenlerinin toplamı olur.

**Problem 6:** İki *a* ve *b* sayma sayısını ortak bölen sayılar içinde en büyüğünü bulmak istiyoruz. Böyle bir sayıya **ortak bölenlerin en büyüğü** anlamında *OBEB(a,b)* diyelim. Bu problemi çözmek için, *a* ve *b* sayıları çarpanlarına ayrılır ve ortak olan çarpanların en büyüğü bulunur.

**Örnek 8:** *OBEB*(24,36) değerini bulalım:

| | |
|---|---|
| 36, 24 | 2 |
| 18, 12 | 2 |
| 9, 6 | 3 |
| 3, 2 | 1 |

*Şekil:4 24 ile 36 sayıları için OBEB bulma.*

Görüldüğü gibi, 36 ve 24 sayılarını aynı anda bölen sayılar 2, 2 ve 3 olduğundan, *OBEB*(24,36) = 2 · 2 · 3 = 12 olur.

Başka bir yol, 24 ve 36 sayılarını çarpanlarına ayırıp, ortak olan en büyük çarpanı seçmektir: 24 = 2·2·2·3 ve 36 = 2·2·3·3 olduğundan, ortak olan en büyük çarpan 2·2·3 = 12 olur.

**Örnek 9:** Bir işyerindeki 12 m boyunda ve 8 m enindeki odaya tam sayı kenarlı, kare biçiminde en geniş alanlı bürolar kurmak istiyoruz. Bürolar 1×1, 2×2 veya 4×4 boyutlarında olabileceğinden, koşula uygun büroların sayısı $\frac{12\cdot 8}{4\cdot 4}=6$ şeklinde bulunur.

**Problem 7:** *a* ve *b* sayma sayılarının ortak katları içinden en küçüğünü bulmak istiyoruz. Böyle bir sayıya **ortak katların en küçüğü** anlamında diyelim. Böyle bir problemi çözmek için *a* ve *b* sayıları çarpanlarına ayrılır ve ortak olan çarpanlar ile ortak olmayanların hepsi çarpılır.

**Örnek 10:** *OBEB*(24,36) değerini bulalım:

| | |
|---|---|
| 36, 24 | 2 |
| 18, 12 | 2 |
| 9, 6 | 3 |
| 3, 2 | 1 |
| 1, 2 | 3 |
| 1, 1 | 2 |

*Şekil 5: 24 ile 36 sayıları için OKEK bulma.*

Görüldüğü gibi, 36 ve 24 sayılarının ortak bölenleri 2, 2 ile 3 (çizginin sağındaki 1'e kadar olan sayılar) ve ortak olmayanlar da 3 ve 2 (çizginin sağındaki 1'den itibaren olan sayılar) olduğundan, OKEK (24,36) = 2·2·3·2·3 = 72 olur.

Başka bir yol, 24 ve 36 sayılarını çarpanlarına ayırıp, ortak olanlar ile ortak olmayan çarpanları seçip bunları çarpmaktır: 24 = 2·2·2·3 ve 36 = 2·2·3·3 olduğundan, en küçük ortak katı oluşturacak çarpanlar 2·2·3·2·3 = 72 olur.

**Sonuç 1:** Görülüyor ki $a \cdot b = OKEK(a,b) \cdot OBEB(a,b)$ olmaktadır.

**Aralarında asal** sayılar diye 1 dışında ortak bölenleri olmayan doğal sayılara diyeceğiz. Örneğin, 7 ile 9 sayıları aralarında asaldır.

Dikkat edilirse aralarında asal sayıların asal olma zorunlulukları yoktur.

Yukarıda *A, B* ve *C* sayma sayıları ve negatif olmayan *K* sayısı için, *A* nın *B* ye bölümünden elde edilen bölüm *C* ve kalan *K* ise, $A = C \cdot B + K$ eşitliğinin yazılabileceğini gördük.

Daha genel olarak $a, b \in Z$ ve b ≠ 0 olsun. Bu durumda,

$$a = q \cdot b + r, \quad (0 \leq |r| < b)$$

olacak şekilde tek türlü belirli *q* ve *r* tam sayıları vardır. Burada, $|r|$ değeri, *r* sayısının 0'a olan uzaklığı, yani *r*'nin **mutlak değeri**dir. *a* sayısının bu şekilde yazılmasına *bölme algoritması*, *q*'ya *bölüm* ve *r*'ye de *kalan* denir. **Algoritma** sözcüğü Latince Algorismus (Harezmi'nin ismine gönderme) veya Arapçada Elharzemiyyet isminden gelmektedir (A. Kaya, *Sayılar kuramına giriş*). Algoritma, kısaca "işlem yolu" anlamına gelir.

Doğal sayılar kümesi gibi Tam Sayılar kümesi de günlük yaşantıda bize yeterli olamamaktadır. Birinci dereceden, bir bilinmeyenli, tam sayı katsayılı $a \cdot x + b = 0$ şeklindeki denklemlerle karşılaşırız. Günlük yaşamda örneğin, "2 kg elma için 3

TL isteyen bir manav elmanın kilosunu kaç TL'ye satmaktadır?" sorusunun cevabını bir tam sayı ile ifade edemeyiz.

Bir **rasyonel sayı** $a$ ve $b$ tam sayı ve b ≠ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindedir. Rasyonel sayılar kümesi, İngilizce "quotient" (kesir) kelimesinin baş harfi olan $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

ile tanımlanır.

Dikkat edilirse, tam sayılara "paydaları 1 olan rasyonel sayılar" gözüyle bakılabildiğinden, her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır. Ayrıca, küme içindeki sayı tekrarını önlemek için $a$ ve $b$ tam sayıları, işaretlerine bakılmaksızın aralarında asal kabul edilir. Yani $\frac{-4}{6}$ ile $\frac{-2}{3}$ sayılarına aynı sayı gözü ile bakılır.

Rasyonel sayılarda işlemlerin nasıl yapıldığını bir sonraki Kesirler konusunda göreceğiz.

## Alıştırmalar

1. Bir sayının 11'e bölümünden kalanı bulmak için bir yöntem bulunuz. Buna göre 123456789 sayısının 11'e bölümünden kalanı bulunuz.

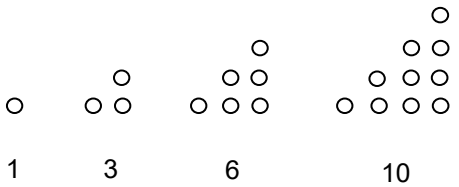
2. $a_1a_2a_3...a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n-1}a_{n-2}...a_3a_2a_1$ şeklinde $2n-1$ (tek) basamaklı veya $a_1a_2a_3...a_{n-2}a_{n-1}a_na_na_{n-1}a_{n-2}...a_3a_2a_1$ şeklinde $2n$ (çift) basamaklı ve ortadaki basamak(lar)a göre simetrik olan sayılara **palindromik sayılar** denir. Örneğin 1, 2, 11, 121, 4554, 10001 birer palindromik sayıdır. Basamak sayısı çift olan bütün Palindromik sayıların 11'e bölünebildiğini gösteriniz.

3. Eratosten kalburunu kullanarak 1 ile 400 arasındaki asal sayıları yazınız.

4. **Goldbach sanısı** "2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir" şeklinde ifade edilir. Örneğin 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, … gibi asal sayıların toplamı olarak yazılabilir.

   Bunun gibi, toplamı 200 eden asal sayı çiftlerini bulunuz.

5. Yalnızca bir tane çift asal sayı vardır. Bunu nasıl açıklarsınız?
6. $n$-inci **üçgensel sayı** $\frac{n(n+1)}{2}$ olarak tanımlanır. Bunlar 1, 3, 6, 10, 15, … şeklindeki sayılar olup, isimlerini aşağıdaki örüntüden alırlar:




*Şekil 6: Üçgensel sayılar için bir model.*

**Karesel sayılar** ise 1, 4, 9, 16, … şeklindeki sayılardır. $n$-inci üçgensel sayıya hangi üçgensel sayıyı ekleyelim ki $n$-inci karesel sayıyı elde edelim? Bunu hem yukarıdaki şekilden hem de cebirsel olarak elde ediniz.

7. En büyük ortak bölenleri 3 ve en küçük ortak katları 18 olan iki pozitif tam sayının toplamı en çok kaç olabilir?
8. Problem 4'teki önermeyi tekrar inceleyiniz. Buna benzer olarak, $A_1 + A_2$ toplamının $B$ sayısına bölümünden kalanın $K_1 + K_2$ sayısının $B$ sayısına bölümünden kalan olduğunu görünüz. Ayrıca, $(A_1)^n$ sayısının $(n \in \mathbb{N})$ $B$'ye bölümünden kalan $(K_1)^n$ sayısının $B$'ye bölümünden kalan olduğunu gösteriniz.
9. Ardışık üç tamsayının toplamının 3'ün katı olduğunu gösterin. Aynı soruyu ardışık üç tek tamsayı için ve ardışık üç çift tamsayı için düşününüz.

## Matematiksel Modelleme ve Problem Çözme

Matematiksel modelleme, bir gerçek hayat probleminin yapısını anlamlandırmak için onun matematiğin sembolik diline aktarılarak ifade edilmesi sürecidir. Bir gerçek hayat problemi ile başlayan **matematiksel modelleme**, problemin matematikselleştirilmesi ve ulaşılan sonucun gerçek hayat için yorumlanması ile tamamlanır.

Genel olarak problem kelimesi *bir kimsenin çözmek isteyip de alelacele çözümü kestiremediği durum* şeklinde ifade edilmektedir (Altun, 2013). **Problem çözme** ise rahatsız edici durumun ortadan kaldırılması süreci olarak tanımlanabilir.

Problemler, benzerleriyle daha önce karşılaşıp karşılaşılmadığına bakılarak **rutin** problemler ve **rutin olmayan** problemler olmak üzere iki kısımda toplanabilir. Bu bölümde işleyeceğimiz "dört işlem problemleri" rutin problemler olarak değerlendirilebilir.

Bir matematik probleminin şu özelliklere sahip olması gerekir: (a) Öğrencilerin önbilgileri ile aynı yerden başlamalı, (b) Problemin merak uyandıran yönü öğrencilerin öğrenecekleri matematiğe dayanmalı, (c) Problem, cevaplar ve yöntemler için gerekçe ve açıklama talep etmelidir (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012).

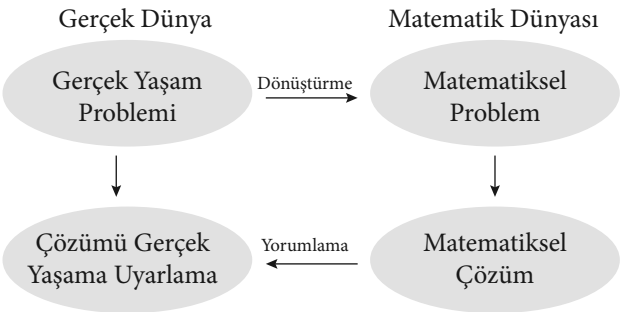
Aşağıdaki üç problemi göz önüne alalım.

**Problem 8:** Sınıfımızdaki 38 öğrenciyi 11 kişi alabilen minibüslerle piknik yerine taşımak istiyoruz. Bunun için en az kaç sefer yapılması gerekir? Açıklayınız.

**Problem 9:** 38 kg pirinç 11 kişiye pay edilecektir. Buna göre bu kişilerin her birine ne kadar pirinç düşer? Açıklayınız.

**Problem 10:** 38 m kumaştan 11'er metrelik perdeler dikilecektir. Buna göre en çok kaç perde yapılabilir? Açıklayınız.

Görüldüğü gibi her üç problemde de bölme işlemi yapılması istenmektedir. Ancak üçünün de çözümü farklıdır. Bu problemlerin ortak özellikleri, birer **gerçek yaşam problemi** olmalarıdır. Bunları çözebilmek için "gerçek dünya" problemini matematik diliyle (matematiksel sembollerle) ifade etmek ve böylece "matematik dünyası"na geçerek matematiksel bir çözüm aramak gerekmektedir. Son olarak bulunan matematiksel çözümün anlamlı olup olmadığı, anlamlı değilse çözümün gerçek yaşama nasıl uyarlanması gerektiği tartışılarak, gerçek yaşam problemine bir çözüm getirilmiş olur. Şekil 7 bu döngüyü açıklamaktadır (MEB, 2013).




*Şekil 7: Matematiksel modelleme için döngüsel süreç.*

Bu problemlerden ilkinin çözümü için $\frac{38}{11} = 3 + \frac{5}{11}$ işlemi yapılır. Yani, minibüs 3 sefer yapar ancak artan 5 öğrenci için de bir sefer daha yapmak zorundadır. Böylece, minibüs 4 sefer yapmalıdır. Gerçekten, 3 seferde 11'er öğrenci ve 1 seferde de 5 öğrenci taşınırsa toplam 4 seferde 38 öğrenci taşınmış olur. Problemde "*en az kaç sefer yapar*" denmemiş olsaydı, her seferde 1 öğrenci alarak 38 sefer veya bazı seferleri boş gidip gelerek 38 seferden daha büyük sayıda sefer yaparak da tüm öğrenciler pikniğe taşınabilirdi.

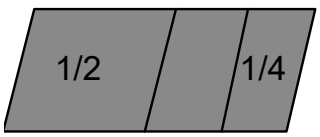
İkinci problemin çözümü için de aynı işlem yapılır ve $\frac{38}{11} = 3 + \frac{5}{11}$ bulunur. Bunun anlamı ise 38 kg pirinç 11 kişiye pay edilirse her birine $3\frac{5}{11}$ kg veya ondalıklı olarak ifade edilirse, her birine  kg pirinç düşeceğini söyleyebiliriz. Gerçekten 11 tane $\frac{38}{11}$ kg 38 kg eder.

Son problemin çözümü size bırakılmıştır.

**Problem 11:** Ali amcanın çiftliğinde bir traktör geçen sene hiç durmadan çalıştığında bir tarlasını 4 saatte sürmüştür. Başka tarlaları da olan Ali amca, işlerinin iyi gittiğini görünce bu sene daha güçlü bir traktör alır ve görür ki diğer traktörün 4 saatte sürdüğü tarlasını yeni traktör 2 saatte sürmektedir.

Acaba her iki traktör beraber çalışsa, gelecek yıl bu tarlayı kaç saatte sürebilirler? Öncelikle bir tahminde bulunun. Tahmininizin mantıklı gerekçesini açıklayın. Bir formül kullanmadan, çözüm için iki yol önerin ve bu çözümleri açıklayın.






Tarla



**Tahmin:** Traktörlerden yeni olanı tarlayı zaten 2 saatte sürebildiğinden ve eski traktör de yardım ettiğinden dolayı 2 saatten daha az sürede bitmesi gerekir.

**Çözüm (1):** Eski traktör bütün tarlayı 4 saatte sürüyorsa, 1 saatte tarlanın 1/4 kadarını sürer. Yeni traktör de 1/2 kadarını süreceğinden dolayı, ikisi beraber 1 saatte tarlanın 1/2+1/4=3/4 kadarını sürer. Yani, 60 dakikada tarlanın 3/4 kadarlık kısmı sürülür. Böylece, 3 çeyreklik kısmı 60 dakikada sürülürse, kalan 1 çeyreklik kısmı da 20 dakikada sürülür. Sonuç olarak, her iki traktör bütün tarlayı 1 saat 20 dakikada sürerler.

**Çözüm (2):** Yeni traktör yalnız başına 2 saatte ve eski traktör yalnız başına 4 saatte 100 br$^2$ tarla sürüyor olsunlar. **1 saatte** bütün 100 br$^2$ tarlanın yarısı olan 50 br$^2$'sini yeni traktör sürerken, dörtte biri olan 25 br$^2$'sini de eski traktör sürer. İkisi beraber toplamda 75 br$^2$ tarlayı 1 saatte sürerler. Kalan 25 br$^2$ tarlayı da 1/3 saatte, yani 20 dakikada beraber süreceklerinden dolayı, bütün 100 br$^2$ tarlayı toplamda 1 saat 20 dakikada sürerler.

**Çözümün Değerlendirilmesi:** Acaba, geçen sene eski traktörün bütün tarlaları 28 saatte sürdüğü biliniyorsa, ikisi beraber aynı tarlaları kaç saatte sürerler?

Bunun zarif bir çözümü şöyle olabilir: Eski traktörün 4 saatte sürdüğünü ikisi beraber 1 saat 20 dakikada sürerse, eski traktörün 28 saatte sürdüğünü ikisi beraber 7 kere 1 saat 20 dakikada, yani 7 saat ve 140 dakikada, yani 9 saat 20 dakikada sürerler.

Başka bir çözümü ise eski traktör 28 saatte sürüyorsa, yenisi 14 saatte süreceğinden, beraber 1 saatte 1/28+1/14=3/28'ini sürerler. Bundan sonra şöyle düşünülebilir: Beraber 1 saatte 3/28'i sürerlerse, kaç saatte 28/28'ini sürerler diye düşünerek 28/3 saatte, yani 9 saat 20 dakikada beraber sürecekleri hesaplanır.

**Soru şöyle sorulsaydı:** Eski traktörün 4 saatte sürdüğü tarlayı yeni traktör 2 saatte sürmektedir. Bu tarlayı traktörlerin ikisi beraber 1 saat sürdükten sonra eski traktör arızalanıyor. Geri kalan kısmın sürülmesine yeni traktör tek başına devam ediyor. Bu tarlanın sürülmesi ne kadar sürer?

İkisi beraber 1 saatte tarlanın 1/4+1/2= 3/4'ünü sürerler. Geri kalan 1/4'lük kısımda yeni traktör yalnızdır: "Yeni traktör 1 saatte 1/2'sini sürerse, kaç saatte 1/4'ünü sürer?" sorusunun cevabı 1/2 saat, yani 30 dakikadır. Böylece tarlanın sürülmesi toplamda 1 saat 30 dakika sürer. (**Soru:** Eski traktör yerine yeni traktör arızalansaydı aynı soru nasıl çözülebilirdi? Açıklayın.)

**Genellemeye varma:** Eski traktör bir tarlayı $A$ saatte ve yeni traktör aynı tarlayı $B$ saatte sürüyorsa ikisi beraber $X$ saatte sürsün. Bu durumda $X$ nedir, yani her iki traktör birlikte kaç saatte sürer? Bunu merak ediyoruz.

Traktörler beraber 1 saatte tarlanın $1/A + 1/B$ kadarını, yani $1/X$ kadarını süreceklerinden dolayı,

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{X}$$

genellemesi yazılabilir. Örneğin, $A = 28$ ve $B = 14$ yazılırsa, $X = 28/3$ saat, yani 9 saat 20 dakika bulunur. Bu ise yukarıdaki problemin üçüncü bir çözümüdür.

Yukarıdaki problemlerin çözüm süreçlerine bakıldığında görüyoruz ki, her problemi çözen bir algoritma veya bir formül yoktur. Her problemin çözümü

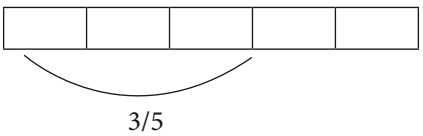
kendine özgüdür ve bir sistematik içindedir. Bu sistematik, *problemin anlaşılması*, çözüm için *bir strateji bulunup bunun uygulanması* ve son olarak elde edilen çözümün *değerlendirilmesi* şeklindedir. Buna göre, hiçbir problem anlaşılmadan çözülemez. Bir çözüm stratejisi seçip uygulamadan da hiçbir problem çözülemez. Son olarak, çözümün değerlendirilmediği bir problem hatalı çözülmüş olabilir. Bunun ötesinde, çözüm değerlendirilmeden kavramsal öğrenme gerçekleşmez. Bu sistematik, *Polya'nın problem çözme aşamaları* olarak bilinir. Bu aşamalar problem çözümünü kolaylaştırır ancak garantilemez. Çünkü problemi anlamak ve devamında çözüm stratejisi seçip uygulamak yine çözen kişiye düşer.

Dört işlem problemlerini, sayı problemleri, hareket problemleri, karışım problemleri, ortak iş görme problemleri ve yaş problemleri başlıkları altında inceleyeceğiz.

**SAYI PROBLEMLERİ:** Genellikle denklem kurmayı gerektiren problemleri bu başlıkta ele alacağız.

**Problem 12:** Ahmet bey kış hazırlığı yapmak üzere parasının 3/5'i ile kasası 35 TL olan 3 kasa domates ve kilogramı 2 TL olan 30 kilogram kapya biber almıştır. Ahmet beyin artan parası kaç TL dir? Açıklayınız.

**Çözüm:** İyi bir tahmin şöyle yapılabilir: Ahmet beyin parasının 1/5'i $1 \cdot 35 + 2 \cdot 10$ TL, yani 50 TL civarında ise 2/5'si 100 TL civarında olur.




Ahmet beyin harcadığı para, TL olup tüm parasının 3/5'üne karşılık gelir. Aradığımız ise parasının 2/5'sidir. Buradan, 3'e karşılık 165 TL ise 2'ye karşılık 110 TL olur. Ahmet beyin artan parası 110 TL bulunur.

**Problem 13:** Bir ailedeki bireylere bir miktar ceviz üçer üçer dağıtıldığında 4 kişiye hiç ceviz düşmüyor ancak cevizler ikişer ikişer dağıtıldığında 6 ceviz artıyor. Bu ailede kaç kişi vardır? Dağıtılan kaç ceviz vardır? Açıklayınız.



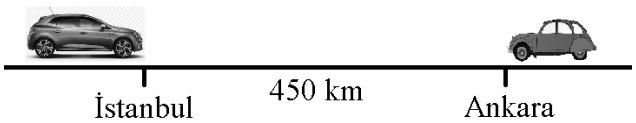
**Çözüm:** Ailedeki kişi sayısı $x$ ise ceviz sayısı ilk durumda $3(x-4)$ olur. Çünkü ceviz düşmeyen 4 kişi varsa ceviz düşen $(x-4)$ kişi olur. 3'er ceviz dağıtıldığından dolayı $3(x-4)$ ceviz var demektir. Benzer olarak ikinci durumda $2x+6$ tane ceviz var demektir. Ceviz sayısı her iki durumda aynı olduğundan dolayı,

$3(x-4)=2x+6 \Rightarrow x=18$ bulunur.

Yani, ailedeki birey sayısı 18 olup dağıtılan cevizler $2\cdot 18+6=42$ tanedir.

**HAREKET PROBLEMLERİ:** Bir veya daha çok hareketlinin konum, hız ve zaman durumlarını irdeleyen problemlerdir.

**Problem 14:** İstanbul ile Ankara arası uzaklık 450 km dir. İstanbul ve Ankara'dan birbirlerine doğru aynı anda harekete başlayan iki aracın hızları sırasıyla saatte 90 km ve 60 km ise bu iki aracın hareketlerine başladıktan kaç saat sonra karşılaşacaklarını, bir formül kullanmadan, hesaplayınız.

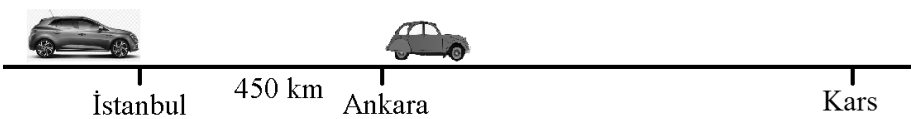



**Çözüm**: Bu iki aracın $x$ saat sonra karşılaştıklarını varsayalım. Bu durumda, bu iki aracın karşılaştıkları anda, İstanbul'dan hareket eden araç $90\cdot x$ km yol alırken Ankara'dan hareket eden araç $60\cdot x$ km yol alır.

Karşılaşana kadar bu iki aracın aldıkları toplam yol $90\cdot x + 60\cdot x = 450$ km olup $x = 3$ bulunur. Öyleyse, bu iki araç harekete başladıktan 3 saat sonra karşılaşırlar.

**Çözümün değerlendirilmesi:** Gerçekten, 3 saat sonra İstanbul'dan kalkan araç $90\cdot 3 = 270$ km yol alırken, Ankara'dan kalkan araç $60\cdot 3 = 180$ km yol alır. Böylece bu iki araç karşılaştıkları anda toplamda, $270 + 180 = 450$ km yol alırlar. Bu toplam İstanbul ile Ankara arası mesafedir. Buradan, varılan sonuç doğrulanmış olur.

**Soru şöyle sorulsaydı:** Bu iki araç aynı anda ve verilen hızlarla Kars yönüne doğru hareket etselerdi, İstanbul'dan hareket eden araç kaç saat sonra Ankara'dan hareket eden araca yetişirdi?




İstanbul'dan ve Ankara'dan harekete başlayan araçlar $x$ saat sonra sırasıyla, $90\cdot x$ km ve $60\cdot x$ km yol alırlar.

Her bir saatte, araçların arasındaki mesafe 90 km – 60 km = 30 km kadar azalır. Yani, bu iki araç arasında kapanan mesafe $x$ saatte, $30\cdot x$ km olur.

İstanbul'dan hareket eden aracın, Ankara'dan hareket eden araca $x$ saat sonra yetiştiğini varsayalım. Kapanan mesafe $450 = 30\cdot x$ olur. Buradan $x = 15$ saat bu-

lunur. Öyleyse, İstanbul'dan hareket eden araç 15 saat sonra Ankara'dan hareket eden araca yetişir.

**Çözümün değerlendirilmesi:** 15 saat sonra Ankara'dan kalkan araç 60·15 = 900 km yol alır. İstanbul ile Ankara arasındaki mesafe 450 km dir. Böylece, Ankara'dan kalkan araç İstanbul'dan 450 + 900 = 1350 km uzaklaşmış olur. İstanbul'dan kalkan araç 15 saat sonra 90·15 = 1350 km yol alır. Böylece, 15 saat sonra, İstanbul'dan kalkan araç Ankara kalkan araca yetişir. Buradan, varılan sonuç doğrulanmış olur.

**Genellemeye varma** (*birbirlerine doğru hareket eden araçlar*)**:** Aralarındaki mesafe *S* km olan iki aracın, aynı anda, saatte *A* km ve *B* km hızlarla birbirlerine doğru hareket eden iki aracın *x* saat sonra karşılaşmaları durumunda buradaki *x* değerini bulmak istiyoruz.

*x* saat sonra, *A* hızıyla hareket araç $A \cdot x$ km yol alırken, *B* hızıyla hareket araç $B \cdot x$ km yol alır. Bu iki araç, *x* saat sonra karşılaştıklarında toplamda $A \cdot x + B \cdot x = (A+B) \cdot x$ km yol alırlar. Bu değer, *S*'ye eşit olmalıdır.

Buradan $S = (A+B) \cdot x$ km olup $x = S / (A+B)$ elde edilir.

Öyleyse, aralarında *S* km mesafesi olup, zıt yönde saatte *A* km ve *B* km hızlarıyla aynı anda harekete başlayan iki araç $S / (A+B)$ saat sonra karşılaşırlar.

**Genellemeye varma** (*aynı yönde hareket eden araçlar*)**:** Aralarındaki mesafe *S* km ve hızları saatte *A* km ve *B* km olan iki aracın, aynı anda ve aynı yönde hareket ettikten *x* saat sonra karşılaşmaları durumunda buradaki *x* değerini bulmak istiyoruz.

Her bir saatte, araçların arasındaki mesafe $A-B$ km azalır. Bu iki araç arasındaki mesafe *x* saatte, $A \cdot x - B \cdot x = (A-B) \cdot x$ km azalır.

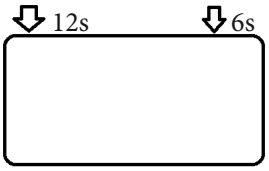
Toplam *S* mesafesi *x* saatte kapanırsa $S = (A-B) \cdot x$ km olmalıdır.

Buradan $x = S / (A-B)$ ile bulunabilir.

Öyleyse, aralarında *S* km mesafesi olup aynı yönde saatte *A* km ve *B* km hızlarıyla aynı anda harekete başlayan iki araç $S / (A-B)$ saat sonra karşılaşırlar.

**ORTAK İŞ GÖRME PROBLEMLERİ:** Bir işin bireysel veya dayanışma içinde yapılma sürelerini irdeleyen problemlerdir. İşçi-havuz problemleri olarak da bilinir.

**Problem 15:** Boş bir havuzu iki musluktan biri 6 diğeri ise 12 saatte doldurabilmektedir. Buna göre, havuz boşken iki musluk aynı anda açılırsa havuz kaç saatte dolar? Açıklayın.




**Çözüm:** Tahmin etmek gerekirse, iki musluk birlikte 6 saatten az sürede doldurmalı, çünkü zaten tek başına biri 6 saatte doldurabiliyor. Diğeri de yardım edince 6 saatten az sürede beraber dolduracaklardır.

**İlk 1 saatte:** Musluklar aynı anda açılırsa, havuzun 1/6'sını birinci musluk, 1/12'sini de ikinci musluk dolduracağından, toplamda havuzun

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

kadarı dolar. Bu ise 1/4'ü demektir. Böylece, "1 saatte havuzun 1/4'ü dolarsa, havuzun 4/4'ü kaç saatte dolar?" diye orantı kurarak 4 saatte beraber doldurabileceklerini görürüz. Bu süre, tahmin ettiğimiz gibi 6 saatten azdır.

**Soru şöyle sorulsaydı:** Bir havuzu iki musluktan biri yalnız başına 6 saatte ve diğeri 12 saatte doldurabilirken, havuzun dibindeki üçüncü bir musluk bu havuzu dolu iken 36 saatte boşaltabiliyor. Havuz boşken bu üç musluğun hepsi açık bırakılırsa havuz kaç saatte dolar?

Çözüm için üç musluk beraber 1 saatte havuzun kaçta kaçını doldurabilmiş, bunu irdelemeliyiz. İki musluk doldururken diğerinin eksilttiğini unutmayalım. 1 saatte musluklardan biri 1/6'ini ve diğeri 1/12'ini doldururken boşaltan musluk da 1 saatte 1/36'ini eksiltir. Böylece, 1 saatte havuzun dolu kalan kısmı havuzun

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}$$

kadarı, yani 2/9'si kadarı olur. Buradan, "muslukların tümü 1 saatte havuzun 2/9'sini doldurursa, 9/9'unu kaç saatte doldururlar" orantısından 9/2 saat, yani 4 saat 30 dakikada doldururlar diyebiliriz.

**Genellemeye varma:** Bir havuzu iki musluktan biri $A$ saatte, diğeri $B$ saatte ve ikisi beraber $X$ saatte doldurabiliyorsa, beraber ilk 1 saatte havuzun

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$$

kadarı, yani $1/X$ kadarı dolar. Buradan,

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{X}$$

eşitliği yazılarak aranan $X$, yani birlikte kaç saatte doldurdukları bulunabilir.

**KARIŞIM PROBLEMLERİ:** Karışımı oluşturan her bir maddelerin miktarları ile bu maddelerin (karışımdaki) oranları arasındaki ilişkileri irdeleyen problemlerdir.

$A$ maddesinden $a$ g (g: gram), $B$ maddesinden $b$ g ve $C$ maddesinden $c$ g alınıp bunların karıştırılmasıyla bir karışım elde edilsin. Şimdi bu karışımın miktarı $(a+b+c)$ g olup bu karışımdaki $A$, $B$ ve $C$ maddelerinin oranları sırasıyla $a/(a+b+c)$, $b/(a+b+c)$ ve $c/(a+b+c)$ olarak bulunur.

Öte yandan, bir karışımın madde miktarı verilip, karışımdaki her bir maddenin oranı bilindiğinde, bu karışımı oluşturan her bir maddenin miktarı da bulunabilir.

Aşağıdaki problemleri inceleyiniz.

**Problem 16:** Kuru yemiş dükkânına giren bir öğrenci 50 g fındık, 100 g yer fıstığı ve 50 g kabak çekirdeğinden oluşan bir karışım sipariş etmiştir. Bu karışımdaki her bir maddenin karışım oranlarını bulunuz.

Karışımda yer fıstığı ve kabak çekirdeği miktarları aynı kalmak üzere, karışımdaki fındık oranının %70 olması için karışıma kaç gram daha fındık ilave edilmelidir?

**Çözüm:** Karışımdaki madde miktarı 50 g + 100 g + 50 g = 200 g olup bu karışımdaki fındık oranı 50 g/200 g = 1/4 veya %25 olur. Aynı şekilde karışımdaki yer fıstığı ile kabak çekirdeği oranları 1/2 ile 1/4 olarak bulunur.

Karışıma $x$ g fındık ilave edildiğinde karışımdaki fındık miktarı $50+x$ g olup karışımın miktarı da $x$ g artarak $200+x$ g olur. Son durumda karışımdaki fındık oranı $(50+x)/(200+x) = 70/100$ olur. Buradan $100\cdot(50+x) = 70\cdot(200+x)$ ve buradan $x = 300$ g bulunur. Öyleyse, karışımdaki fındık oranının %70 olması için başlangıçta oluşturulan karışıma 300 g daha fındık ilave edilmelidir.

**Çözümün değerlendirilmesi:** Karışıma 300 g fındık ilave edildiğinde karışımdaki fındığın miktarı 50+300 = 350 g olur. Karışımdaki yer fıstığı miktarı (100 g) ile kabak çekirdeği miktarı (50 g) değişmediğinden, başlangıçtaki karışımın miktarı 300 g artarak 500 g olur. Son durumda karışımdaki fındık oranı 350/500 = 70/100 veya %70 olur. Buradan, varılan sonuç doğrulanmış olur.

**Problem 17:** 1 litrelik bir kolonya şişesindeki alkol oranı başlangıçta % 99'dur. Kolonya şişesinin kapağı açıldıktan sonra kapağı kapatılması unutulmuştur. Bir süre sonra bu kolonya şişesindeki alkolün bir kısmı şişeden uçmuş, kolonyayı oluşturan diğer maddelerin uçuculuk özelliği olmadığından bu maddeler şişede kalmıştır. Son durumda bu şişedeki alkolün oranı yüzde 98 olarak ölçülmüştür. Buna göre, son durumda şişede kalan kolonyanın miktarı kaç litredir?

**Tahmin:** Başlangıçta kolonya miktarı 1000 ml ve alkol oranı %99'dan %98'e düştüğünden kolonya miktarının 980 ml civarında olduğu tahmin edilebilir.

**Çözüm:** Başlangıçta kolonyadaki alkol oranı %99 olduğundan, şişedeki alkolün miktarı (99/100)·1000 = 990 ml'dir. Şişede kalan diğer maddelerin tümüne bir isim verelim: Kolonyanın özütü. Kolonyanın özütünün uçuculuk özelliği olmadığından kolonya özütü başlangıçtaki gibi (1/100)·1000 = 10 ml'dir.

Son durumda kolonyadaki alkol oranı 98/100 olduğundan, geriye kalan 2/100 oranındaki kolonya özütü olup bunun miktarı 10 ml olur.

Yüzde 2'si 10 ml olan kolonyanın miktarının 500 ml olduğu oran-orantıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Buna göre son durumda, şişede kalan kolonya miktarı 500 ml'dir.

Yaptığımız tahminin (980 ml) gerçek sonuçtan (500 ml) çok uzak olduğunu görüyoruz. Bunun nedeni konusunda düşününüz.

**Çözümün değerlendirilmesi:** Son durumda 500 ml karışımdaki alkol oranı 98/100 olduğunda, alkol miktarı, ml cinsinden, (98/100) olduğunda alkol miktarı (98/100)·500 = 490 ml olur. Son durumda kolonya özütü miktarı, ml cinsinden, (2/100)·500 = 10 ml olur. Böylece, son durumda, şişede kalan kolonya miktarı 490 + 10 = 500 ml olur. Buradan, varılan sonuç doğrulanmış olur.

**YAŞ PROBLEMLERİ:** Yaşları veya yaşları arasındaki ilişkiler bilinen birden çok kişi için bu kişiler belirli bir süre yaşlandığında, bu kişilerin yeni yaşları arasındaki ilişkileri irdeleyen problemlerdir.

- Belirli bir anda $a$ yaşında olan bir kişi, $x$ yıl yaşlandığında yeni yaşı $a+x$ olur.
- Belirli bir anda $a$ yaşında olan bir kişinin $x$ yıl önceki yaşı $a–x$ olur.
- Belirli bir andaki yaşları $a$ ve $c$ olan iki kişinin $x$ yıl sonraki yaşlarının toplamı $(a+x)+(c+x) = (a+c)+2\cdot x$ olur.
- Yaşları ortalaması $k$ olan bir topluluğun yaş ortalaması $x$ yıl sonra $k+x$ olur.
- Yaşları $a$ ve $c$ olan iki kişinin yaşlarının arasındaki fark, kaç yıl yaşlanırlarsa yaşlansınlar, yaşadıkları sürece aynı olur.

**Problem 18:** Bir annenin bugünkü yaşı iki çocuğunun yaşları farkının 5 katıdır. 8 yıl sonra annenin yaşı çocuklarının yaşları farkının 6 katına eşit olacağına göre annenin bugünkü yaşı kaçtır?

**Çözüm:** Çocukların yaşları farkına $x$ denirse annenin bugünkü yaşı $5 \cdot x$ olur. Çocukların yaşları farkı sabit olduğundan, 8 yıl sonra çocukların yaşları farkı $x$ ve annenin yaşı $5 \cdot x+8$ olur. 8 yıl sonra annenin yaşı çocukların yaşları farkının 6 katı olacaksa,

$$5 \cdot x+8 = 6 \cdot x$$

eşitliği yazılabilir. Buradan, $x = 8$ çocukların yaşları farkıdır. Buna göre annenin bugünkü yaşı $5 \cdot 8 = 40$ olur.

**Çözümün değerlendirilmesi:** Annenin bugünkü yaşı 40 ise çocuklarının yaşlarının farkı annenin yaşının beşte birisi olan 8 olur. 8 yıl sonra annenin yaşı $40+8 = 48$ olur. Çocukların 8 yıl sonraki yaşlarının farkı değişmeyip sabit 8'dir. Bunun 6 katı annenin yaşı olduğundan, varılan sonuç doğrulanmış olur.

## Alıştırmalar

1. Hangi sayının yarısı ile üçte birinin farkı 6'dır? Hesaplayınız.
2. Bir hastanedeki her doktora 25 hasta ve her hemşireye 10 hasta düşmektedir. Bu hastanede toplam 570 hasta, doktor ve hemşire varsa bunların sayılarını hesaplayınız. (Doktor veya hemşirelerin hasta olmadığını varsayınız.)
3. Bir sınıftaki öğrenciler sıralara 2'şerli oturduklarında 1 sıra boş kalıyor. Bu sınıftan 2 sıra çıkarılıp sınıfa 8 öğrenci eklendikten sonra, öğrenciler sıralara 3'erli oturduklarında 1 öğrenci ayakta kalıyor. Buna göre son durumda sınıfta kaç öğrenci ve kaç sıra bulunmaktadır? Açıklayınız.
4. Aynı anda yanmaya başlayan, uzunlukları aynı olan iki mumdan biri 4 saatte diğeri ise 6 saatte tamamıyla yanarak bitmektedir. Bu iki mum aynı anda yanmaya başladıktan kaç saat sonra birinin boyu diğerinin boyunun **yarısı** olur? Açıklayınız.
5. M ile N şehirlerinden ortalama hızları sırayla saatte 80 km ve 60 km olan iki araç aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyor ve 4 saat sonra karşılaşıyorlar. Buna göre, hızı 60 km/saat olan araç, karşılaştıklarından kaç saat sonra M şehrine ulaşır? Açıklayınız.
6. Bir aracın ortalama hızı, "*aldığı yol toplamı / hareket süresi*" oranından bulunur. Buna göre, 3 saat boyunca 40 km/saat hızla, sonraki 2 saat boyunca 60 km/saat hızla ve daha sonra 5 saat boyunca 80 km/saat hızla hareket eden bir aracın hareketi boyunca ortalama hızı ne olur?

7. Sinem bir işi 20 saatte ve Derin 30 saatte tek başlarına bitirebilmektedir. Bu işi Sinem bir taraftan 5 saat boyunca ve Derin bir taraftan 20 saat boyunca çalışarak bitirebilir mi? Bitiremezlerse, işin kaçta kaçı kalır? Açıklayınız.
8. Bir havuzu I. musluk 3 saatte, II. musluk 6 saatte ve III. musluk 12 saatte doldurabilmektedir. Muslukların tümü açıldıktan 1 saat sonra I. musluk kapanıyor. I. musluk kapandıktan 1 saat sonra da II. musluk kapanıyor. Havuzun kalan kısmını tek başına III. musluk dolduruyor. Buna göre, havuz kaç saatte dolar? Açıklayınız.
9. Aynı yemle beslenen bir keçi ve bir koyun vardır. Keçi 5 günde 8 kg ve koyun 3 günde 5 kg yem yemektedir. Buna göre, keçi ile koyun birlikte 196 kg yemi kaç günde tüketir? Açıklayınız.
10. Şeker oranı %20 olan 60 g çözeltiye, 20 g şeker ve 20 g su karıştırılıyor. Yeni çözeltinin şeker yüzdesi kaç olur? Açıklayınız.
11. Asit oranı %60 olan asit-su çözeltisinin 3/5'i alınarak yerine aynı miktarda su konursa, yeni oluşan karışımın asit yüzdesi kaç olur? Açıklayınız.
12. Tuz oranı %10 olan 20 g tuz-su çözeltisine tuz oranı %20 olan 70 g çözelti ekleniyor. Bu yeni çözeltiye 10 g daha su eklenirse, yeni çözeltinin tuz yüzdesi kaç olur? Açıklayınız.
13. Ali 13 ve babası 49 yaşındadır. Kaç yıl sonra Ali ile babasının yaşları toplamı yaşları farkının 2 katı olur? Açıklayınız.
14. Ayşe, Fatma'nın bugünkü yaşındayken, Fatma 10 yaşındaydı. Ayşe bugün 32 yaşında olduğuna göre Fatma'nın bugünkü yaşı kaçtır? Açıklayınız.
15. Öykü, Ali ve Derin'in bugünkü yaşları toplamı 33'tür. Öykü, Ali'nin bugünkü yaşındayken Derin 1 yaşındaydı. Buna göre Öykü'nün bugünkü yaşı kaçtır? Açıklayınız.

## KAYNAKÇA

Altun, M. (2013). Ortaokullarda matematik öğretimi. Alfa Akademi Yay.

Karakaş, İ. H. ve Aliyev, İ. (1996). Sayılar teorisinde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri. TÜBİTAK Yay.

Kaya, A. (1988). Sayılar kuramına giriş. Ege Ün. Yay.

Matematik Dünyası, Cilt:1-Sayı:3 (1991) ile Cilt:5-Sayı:4 (1995).

MEB (2013). Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı.

Van De Walle, J., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2012). İlkokul ve ortaokul matematiği. (Çeviri Ed. Soner Durmuş). Nobel Yay.

## Eratosten (Eratosthenes) (MÖ.276 - MÖ.194)

Yunan coğrafyacı ve uzay bilimcisidir. O zamanki adıyla Cyrene, şimdiki adıyla Libya'da doğmuştur. Dünyanın çapını ölçen ilk insan olarak bilinir. Arşimet'in iyi bir arkadaşı olduğu söylenir. Dünyanın kutuplardan geçen çevresini 39690 km olarak ölçtüğü söylenir; gerçekte bu değer bugün 40008 km olarak ölçülmektedir. Asal olmayan sayıların elenip, böylece asal olan sayıların bulunması için bugün Eratosten Kalburu (Eleği) adıyla bilinen yöntemi kullandı.

# 3. BÖLÜM

# KESİRLER

**Öğrenme Hedefleri**

*Bu bölümü çalıştıktan sonra;*

- ✓ *Kesir ve Rasyonel sayı kavramını anlayabilme,*
- ✓ *Kesirlerde işlemleri yapabilme,*
- ✓ *Kesirlerle ilgili problem çözebilme,*
- ✓ *Ondalık kesirleri kavrayabilme*

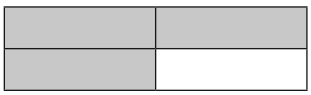
*kazanımlarını elde edebileceksiniz.*

**İçindekiler**


- ➢ *Kesir Nedir?*
- ➢ *Kesir Çeşitleri*
- ➢ *Kesirlerde İşlemler*
- ➢ *Alıştırmalar*
- ➢ *Kaynakça*

**Tanım:** $a, b \in Z$ ve b ≠ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki ifadelere kesri denir. $a \in Z$ sayısına kesrin payı, sayısına ise kesrin paydası denir.

Örneğin; $\frac{3}{7}, \frac{9}{4}, -\frac{8}{5}, \frac{0}{3}$ sayıları birer kesridir.



Taralı kısım $\frac{3}{4}$

Kesirler pay ve paydadaki değerlerin büyüklük küçüklüğüne göre adlandırılırlar.

***1. Basit Kesir***

Eğer kesrin payı paydasından küçükse bu tür kesirlere **basit kesir** denir.

**Örnek**

$\frac{2}{7}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{5}$ kesirleri birer basit kesirdir.

***2. Bileşik Kesir***

Eğer kesrin payı paydasından büyükse bu tür kesirlere de **bileşik kesir** denir.

**Örnek**

$\frac{6}{5}, \frac{11}{7}, -\frac{8}{3}$ kesirleri birer bileşik kesirdir.

***3. Tam Sayılı Kesir***

Eğer kesrin içinde tamsayı varsa bu tür kesirlere de **tam sayılı kesir** denir.

**Örnek**

$4\frac{2}{5}, 3\frac{1}{7}, -5\frac{3}{8}$ kesirleri birer tam sayılı kesirlerdir.

***Denk Kesirler***

**Tanım:** $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerinde eğer $a.d = b.c$ eşitliği sağlanıyorsa $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerine denk kesriler denir ve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ şeklinde gösterilir.

**Örnek**

$\frac{3}{6}, \frac{12}{24}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{-5}{-10}$ kesirleri bir birine denk kesirlerdir.

**Örnek**

$A = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, ...\right\}$ kümesinin bütün elemanları bir birine denk olup bir denklik sınıfı oluştururlar. Bu kümenin elemanları $\frac{3}{5}$ ile temsil edilip kesrin değeri ise $\frac{3}{5}$'tir.

***Rasyonel Sayı***

**Tanım:** $Q = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \text{ ve } a \text{ ile } b \text{ aralarında asal}\right\}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Görüldüğü gibi bir kesrin rasyonel sayı olabilmesi için kesrin pay ve paydası aralarında asal olması gerekmektedir.

**Örnek**

$\frac{3}{7}, \frac{6}{11}, \frac{13}{8}$ ifadeleri birer rasyonel sayı iken $\frac{4}{6}, \frac{15}{9}, \frac{8}{10}$ ifadeleri kesir belirtir.

**Örnek**

Bir kesrin değeri $\frac{4}{7}$ dir. Bu kesrin pay ve paydasından 5 çıkarılırsa kesrin değeri $\frac{1}{3}$ oluyor. Bu kesrin paydası kaçtır.

**Çözüm**

Kesrin değeri $\frac{4.k}{7.k}$ olsun.

$$\frac{4k-5}{7k-5} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12k - 15 = 7k - 5$$
$$\Rightarrow 5k = 10$$
$$\Rightarrow k = 2$$

elde edilir. Bu değer yerine yazıldığında $\frac{4.k}{7.k} = \frac{4.2}{7.2} = \frac{8}{14}$ olur. Dolayısıyla kesrin paydası 14 olduğu görülür.

**Örnek**

$x, y \in R$ olmak üzere;

$$\frac{3x-4y}{2y-6} = 0$$

olduğuna göre $x$'in alamayacağı değer nedir?

**Çözüm**

Kesirli ifadelerde payda sıfır olamayacağından; $2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$ değeri olamaz.

Bu değer payda yerine yazılırsa

$3x - 4y = 0$ eşitliğinde $y = 3$ değeri yerine yazılırsa;

$3x - 4.3 = 0 \Rightarrow 3x = 12$

$\Rightarrow x = 4$

değerini alamaz.

***Kesirlerde Sıralama***

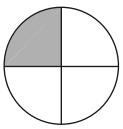
1. Eğer kesirlerin paydaları eşit ise bu durumda payı küçük olan kesir daha küçüktür.

**Örnek**

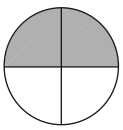
$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ kesirlerini küçükten büyüğe doğru sıralayalım

**Çözüm**

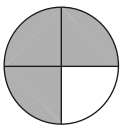
Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi; $\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ tür.



Taralı kısım $\frac{1}{4}$



Taralı kısım $\frac{2}{4}$



Taralı kısım $\frac{3}{4}$

2. Eğer kesirlerin payları eşit ise bu durumda payı büyük olan kesir daha büyüktür.

**Örnek**

$\frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{4}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

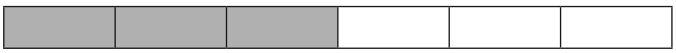
**Çözüm**



Taralı kısım $\frac{3}{4}$



Taralı kısım $\frac{3}{5}$



Taralı kısım $\frac{3}{6}$

şekilde de görüldüğü gibi $\frac{3}{6} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ dır.

3. Eğer kesirlerin hem payları hem de paydaları eşit değilse bu durumda pay veya paydalardan biri eşitlenerek sıralama yapılır.

**Örnek**

$\frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{3}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım

**Çözüm**

Bu sayıların paydaları eşitlenirse;

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{3.3}{4.3} = \frac{9}{12} \\ \frac{1}{6} &= \frac{1.2}{6.2} = \frac{2}{12} \\ \frac{5}{3} &= \frac{5.4}{3.4} = \frac{20}{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Buradan da } \frac{1}{6} < \frac{3}{4} < \frac{5}{3} \text{ olduğu görülür.}$$

## Kesirlerde İşlemler

### *1. Toplama ve Çıkarma işlemi*

Kesirlerde eğer paydalar eşit ise toplama işlemi

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ şeklinde yapılır.

Eğer paydalar eşit değilse bu durumda paydalar eşitlenerek işlem yapılır.

$$\underset{(d)}{\frac{a}{b}} \pm \underset{(b)}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d}{b.d} \pm \frac{b.c}{b.d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$$

**Örnek**

$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3+4-2}{7} = \frac{5}{7}$ elde edilir.

**Örnek**

$\frac{7}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=?$

**Çözüm**

Paydalar 6, 3 ve 5 in ortak katı olan 30 ile eşitlenirse

$$\underset{(5)}{\frac{7}{6}}+\underset{(10)}{\frac{2}{3}}-\underset{(6)}{\frac{3}{5}}=\frac{35}{30}+\frac{20}{30}-\frac{18}{30}=\frac{37}{30}$$

sonucu elde edilir.

***2. Çarpma İşlemi***

Kesirlerde çarpma işlemi $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$ şeklindedir.

**Örnek**

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}+\frac{7}{6}=?$

**Çözüm**

$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{7}{6}=\underset{(1)}{\frac{10}{12}}+\underset{(2)}{\frac{7}{6}}=\frac{10+12}{12}=\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$ elde edilir.

***3. Bölme İşlemi***

Kesirlerde bölme işlemi $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

**Örnek**

$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=?$

**Çözüm**

Birden fazla işlem gerektiren sorularda öncelik parantez içerisine sonra bölme- çarpma sonra da toplama-çıkarma işlemi yapılır. Dolayısıyla

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3-2}{4}:\frac{8+3}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}:\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}.\frac{12}{11}=\frac{12}{44}=\frac{3}{11}$$

sonucu elde edilmiş olur.

**Örnek**

$$3+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}}=?$$

**Çözüm**

$$3+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}}=3+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{\boxed{2+\cfrac{3}{4}}}}=3+\cfrac{2}{1-\cfrac{\boxed{1}}{\cfrac{11}{4}}}$$

$$\Rightarrow 3+\cfrac{2}{\boxed{1-\cfrac{4}{11}}}=3+\cfrac{2}{\cfrac{7}{4}}=3+\frac{8}{7}=\frac{29}{8}$$

sonucu elde edilir.

**Örnek**

$$2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1}{2}}{3}}{2}=?$$

**Çözüm**

$$2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1}{2}}{3}}{2}=2+\cfrac{1+\cfrac{\boxed{2+\cfrac{1}{2}}}{3}}{2}=2+\cfrac{1+\cfrac{\boxed{\cfrac{5}{2}}}{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2+\cfrac{1+\cfrac{5}{2}.\cfrac{1}{3}}{2}=2+\cfrac{\boxed{1+\cfrac{5}{6}}}{2}=2+\cfrac{\boxed{\cfrac{11}{6}}}{2}=2+\frac{11}{6}.\frac{1}{2}$$

$$2+\frac{11}{12}=\frac{35}{12}$$

sonucu bulunur.

**Örnek**

$\frac{3}{4}$ sayısı $\frac{2}{5}$ sayısının kaç katıdır?

**Çözüm**

$\frac{3}{4}$ sayısı $\frac{2}{5}$'in $k$ katı olsun, bu durumda

$\frac{2}{5}.k$ eşitliği yazılır, buradan da k = $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}.\frac{5}{2} = \frac{15}{8}$ katı elde edilmiş olur.

**Örnek**

Bir sayının $\frac{2}{5}$ nin $\frac{3}{4}$'ü 54 ise bu sayı kaçtır?

**Çözüm**

Bu sayı $x$ olsun. Bu durumda;

$\frac{2x}{5}.\frac{3}{4} = 54$ yazılır.

$$\frac{2x}{5}.\frac{3}{4} = 54 \Rightarrow \frac{6x}{20} = 54$$
$$\Rightarrow 6x = 1080$$
$$\Rightarrow x = 180$$

bulunur.

**Örnek**

$k \in Z^+$ olmak üzere; $\frac{3k+45}{k}$ ifadesinin bir tamsayı belirtmesi için $k$'nın alabileceği değerleri bulunuz.

**Çözüm**

Bu tür sorularda yorum yapılabilmesi için kesri parçalama yoluna gidilmelidir. Bunun için $\frac{3k+45}{k} = \frac{3k}{k} + \frac{45}{k} = 3 + \frac{45}{k}$ şeklinde yazılırsa; $3 \in Z$ olduğundan dolayı toplamın tam sayı olması için $\frac{45}{k}$ ifadesinin de tamsayı olması gerekmektedir. Bu da ancak $k$'nın 45 ile tam bölünmesiyle mümkündür. Dolayısıyla 45'in pozitif tam bölenleri

$k = \{1,3,5,9,15,45\}$ değerlerini alabilir.

***Ondalıklı Sayılar***

**Tanım:** Kesirlerden paydaları, 10,100,1000,... gibi 'un katı şeklinde yazılabilenlere ondalık sayı denir. Ondalık sayılar kesirlerden farklı olarak kesir kısmı tam kısmından virgül ile ayrılarak yazılabilmektedir.

**Örnek**

$\frac{8}{10} = 0,8$ "sıfır tam onda sekiz" şeklinde okunur.

$\frac{146}{100} = 1,46$ "Bir tam yüzde kırk altı"

$\frac{3725}{100} = 37,25$ "Otuz yedi tam yüzde yirmi beş"

Görüldüğü gibi her ondalık sayı aynı zamanda bir kesirdir. Yazılışlarındaki farklılık ve buna bağlı olarak dört işlemin yapılışında sağladığı kolaylıklar sebebiyle ondalık sayılar önem kazanmıştır.

**Örnek**

$\frac{4}{5}$ sayısını ondalık sayı olarak yazalım

**Çözüm**

Payın paydaya bölünmesiyle elde edileceği gibi $\frac{4}{5}$ sayısının pay ve paydası 2 ile genişletilerek de elde edilir.

$\frac{4}{5} = \frac{4.2}{5.2} = \frac{8}{10} = 0,8$ değeri bulunur.

**Örnek**

$3\frac{12}{25}$ sayısını ondalık sayıya çevirelim

**Çözüm**

$3\frac{12}{25}$ sayısının kesir kısmı 4 ile genişletilirse

$3\frac{12}{25} = 3\frac{12.4}{25.4} = 3\frac{48}{100} = 3,48$ elde edilir.

***Devirli Ondalıklı sayılar***

Bazı kesirler ondalıklı yazıldıklarında, virgülden sonraki sayılar belli bir yerden sonra aynen tekrar etmektedirler. Bu tür sayılara devirli ondalıklı sayılar denir. Ve devreden kısım üzerine "–" işareti konur.

**Örnek**

$\frac{33}{9} = 3,66666666... = 3,\overline{9}$

$\frac{7}{11} = 0,6363636363... = 0,\overline{12}$

$\frac{6151}{990} = 6,2131313... = 6,2\overline{13}$

***Devirli Ondalıklı Sayıların Kesir Biçimde Yazılması***

Devirli ondalıklı sayıları kesir haline getirmek için devreden kısmı yok etmek için bazı aritmetiksel işlemler yapılarak sonuca gidilir.

**Örnek**

$0,4\overline{2}$ devirli ondalıklı sayısını kesir olarak yazalım.

**Çözüm**

Bu $0,\overline{36}$ sayısına $x$ denilirse

$x = 0,\overline{36} = 0,36363636...$ (1) yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı 100 ile çarpılırsa

$100x = 36,36363636...$ (2) olur. (2 ) eşitliğinden (1) eşitliği çıkarılırsa

$100x = 36,36363636...$

$x = 0,3636363636...$

$99x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

elde edilir.

**Örnek**

$6,\overline{4}$ sayısını kesir olarak yazalım.

**Çözüm**

Bu sayıya $x$ denirse x = 6,44444... yazılır. Her iki taraf 10 ile çarpılırsa,

$10x = 64,4444$ şeklini alır. Bu eşitlikten $x = 64444$ eşitliği çıkarılırsa

$9x = 64 - 6 = 58 \Rightarrow$

$x = \frac{58}{9}$

elde edilir.

**Örnek**

$2,3\overline{45} = 2,345454545...$ sayısını kesir olarak yazalım

**Çözüm**

$x = 2,3454545...$ olsun

$1000x = 2345,45454545...$ olur. Bu eşitlikten $10x = 23,454545...$ değeri çıkarılırsa

$990x = 2322$

$\Rightarrow x = \frac{2322}{990} = \frac{258}{110} = \frac{129}{55}$

elde edilir.

## ALIŞTIRMALAR

1. $(\frac{3}{4}:\frac{2}{3}).\frac{2}{9}+\frac{3}{4}$ işleminin sonucunu bulunuz.
2. $A = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \Rightarrow B = \frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{17}{4}+\frac{26}{5}$ toplamını $A$ cinsinden bulunuz.
3. $x, y, z$ birer pozitif tamsayı olmak üzere; $\frac{x}{0,5} = \frac{y}{0,2} = \frac{z}{0,7}$ ise $x, y, z$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
4. $2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3-\frac{3}{4}}}$ işlemini en sade hale getiriniz.
5. Paydası payının 2 katından 1 eksik olan kesrin, pay ve paydasına 3 eklendiğinde kesrin değeri $\frac{5}{8}$ oluyor. Bu kesri bulunuz.
6. Bir öğrenci bir kitabın önce $\frac{1}{3}$'ünü okuyor. Sonra kalan sayfanın $\frac{1}{4}$'ünü okuyunca geriye 60 sayfa kalıyor. Bu kitabın tamamı kaç sayfadır?
7. $a = \frac{7}{8}, b = \frac{10}{11}, c = \frac{13}{5}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

8. Bir deponun $\frac{4}{7}$'si mazot doludur. Bu depoda bulunan mazotun $\frac{1}{4}$'ü kullanıldığında geriye 51 ton mazot kalmıştır. Buna göre deponun tamamı kaç ton mazot alır?

9. $\left(\frac{3}{1-\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{4}-1}{3}\right):\frac{1}{12}=?$

$a=\frac{10}{11}$

10. $b=\frac{100}{111}$

$c=\frac{1000}{1111}$

Olduğuna göre *a,b,c* sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

11. $\frac{0,\overline{5}}{0,5}+\frac{0,\overline{3}}{0,3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

12. Aşağıdaki devirli ondalıklı sayıları rasyonel hale getiriniz.

a) 4,2222.... b) 3,242424242... c) 0,625252525...

d) $2,\overline{45}$ e) $5,3\overline{42}$ f) $12,\overline{305}$

13. $\frac{3}{8}$'i boş olan bir su deposundaki suyun $\frac{3}{5}$'i kullanılınca, bu deponun tamamını doldurmak için 30 litre su gerekmektedir. Buna göre su deposu kaç litre su almaktadır?

14. $\frac{a}{\frac{b}{3}}$ sayısı $\frac{\frac{a}{b}}{3}$ sayısın kaç katıdır?

15. $a$ bir doğal sayı olmak üzere; $\frac{6a+22}{a+2}$ ifadesinin bir tamsayı belirtmesi için $a$'nın alabileceği değerleri bulunuz.

## KAYNAKÇA

Baykul, Y. (2000). İlköğretimde Matematik Öğretimi, Pegem A yayınları, Ankara

Gaulter, B; Buchanan, L.(1994). Application of Number, Oxford University Press,Oxford.

Williams E; Shuard, H.(1992). Primary mathematics today, Harlow.

Hançerlioğulları, A; Alan, F.(2006). Matematik Seti, Tümay Yayınları, Ankara.

Pesen, C.(2003). Eğitim Fakülteleri ve Sınıf Öğretmenleri için Matematik Öğretimi, Nobel Yayın, Ankara.

## Cahit ARF (1910-1997)

**Cahit Arf, 1910 – 1997** yılları arasında yaşamış dünyaca ünlü matematikçi. Cisimlerin kuadratik formlarının sınıflandırılmasında ortaya çıkan ve kendi adıyla anılan **"Arf Sabiti"**, **"Arf Halkaları"** ve **"Arf Kapanışları"** gibi terimleri bularak, matematik ve bilim dünyasına önemli katkılarda bulundu. **Alman** matematikçi **Helmut Hesse** ile birlikte, **Hesse-Arf** Kuramı'nı geliştirdi.

Yüksek öğrenimini Fransa'da Ecole Normale Superieure'de 1932'de tamamladı. Bir süre Galatasaray Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde doçent adayı olarak çalıştı. Doktorasını yapmak için Almanya'ya gitti. 1938 yılında Göttingen Üniversitesi'nde doktorasını bitirdi.

Türkiye'ye döndüğünde İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde profesör ve Ordinaryus profesörlüğe yükseldi ve 1962 yılına kadar çalıştı. Daha sonra Robert Koleji'nde matematik dersleri vermeye başladı. 1964 yılında Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ilk bilim kurulu başkanı oldu.

Daha sonra gittiği Amerika Birleşik Devletleri'nde araştırma ve incelemelerde bulundu; Kaliforniya Üniversitesi'nde konuk öğretim üyesi olarak görev yaptı. Türkiye'de yaşamak istemesi üzerine kendi isteğiyle 1967 yılında Türkiye'ye döndü. Döndükten kısa bir süre sonra Kanada ve Amerika'daki üniversitelerden konuk öğretim üyesi olarak teklifler aldı. Ancak kendisi bu tekliflere cevap veremeden Ortadoğu Teknik Üniversitesi'nden gelen telefon bu üniversiteye atandığını ve uçak biletinin yolda olduğunu söylüyordu ve artık Ortadoğu Teknik Üniversitesi'nde göreve başlamıştı. 1980 yılında emekli oldu. Emekliye ayrıldıktan sonra TÜBİTAK'ın geliştirilmesinde çok emeği geçti ve TÜBİTAK'a bağlı Gebze Araştırma Merkezi'nde görev aldı. 1983-1989 yılları arasında Türk Matematik Derneği başkanlığını yaptı.

Arf, İnönü Armağanı'nı (1943) ve TÜBİTAK Bilim Ödülü'nü kazandı (1974). Bu ödülü alırken yaptığı konuşmada **"Bilim insanının amacı anlamaktır"** hemen ardından **"ama büyük harflerle anlamaktır"** sözüyle kendine göre bilim insanını açıklamıştır. Onuruna yapılan cebir ve sayılar teorisi üzerine uluslararası bir sempozyum, 1990'da 3-7 Eylül tarihleri arasında Silivri'de gerçekleştirilmiştir. Halkalar ve geometri üzerine ilk konferanslar da 1984'te İstanbul'da yapılmıştır. Arf, matematikte geometri kavramı üzerine bir makale sunmuştur. Cahit Arf, 1997 yılının Aralık ayında ağır bir kalp hastalığı nedeni ile vefat etmiştir..

# 4. BÖLÜM

# ÖRÜNTÜ

**Öğrenme Hedefleri**

*Bu bölümü çalıştıktan sonra;*

- ✓ *Örüntü kavramını örnekler ile açıklayabilme,*
- ✓ *Tekrarlanan örüntüyü örnekler ile açıklayabilme,*
- ✓ *Genişleyen örüntüyü örnekler ile açıklayabilme,*
- ✓ *Örüntü ile dizi arasındaki farkı kavrayabilme,*
- ✓ *Örüntünün önemini kavrayabilme,*

*kazanımlarını elde edebileceksiniz.*

**İçindekiler**

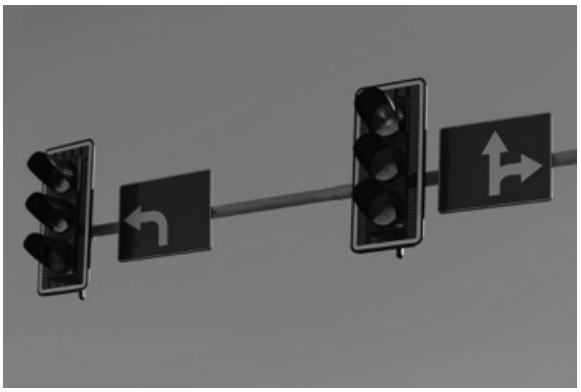

- ➢ *Örüntü nedir?*
- ➢ *Örüntü çeşitleri*
- ➢ *Örüntü ve dizi*
- ➢ *Örüntünün önemi*
- ➢ *Kaynakça*

## Örüntü Nedir?

Günlük yaşantımızda sıkça örüntüyle karşılaşırız. Sabah işe giderken, akşam işten dönerken, yemek sonrası bir çay ya da bir kahve içme gibi işler her zaman yaptığımız eylemlerdir. Doğada da karşımıza örüntü çıkmaktadır. Bir ay çekirdeğinin çekirdeklerinin dizilişi, tavus kuşunun tüyleri, trafik lambaları örüntüye örnek verilebilir.







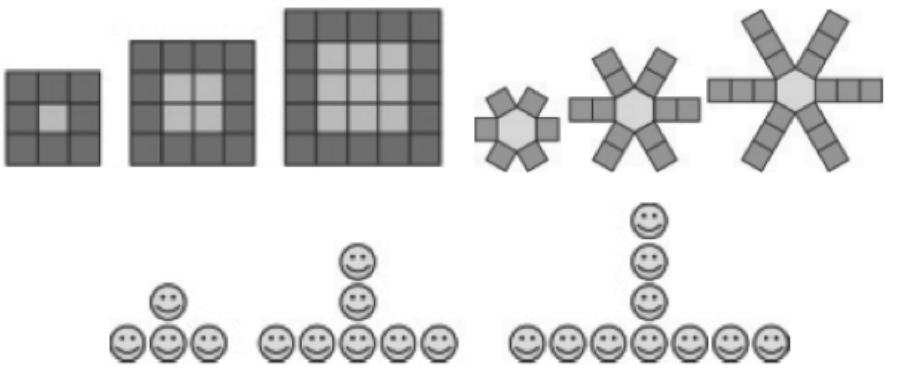
Örüntünün sözlük anlamına bakıldığında desen, model olarak tanımlanmaktadır. Mulligan (2010), matematiksel örüntüyü, sayısal, uzamsal veya mantıksal ilişkileri içeren, tahmin edilebilir bir düzenlilik olarak tanımlanabileceğini belirtmektedir. Souviney (1994) ise geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ve eylemlerin sistematik birleşimi olarak örüntüyü tanımlamaktadır. Yani örüntü düzenli bir yapıya sahip sayıların ya da geometrik şekillerin elemanları arasındaki belli bir ilişki ya da bir kuraldır (Tanışlı, 2013).

Örüntüler sayılardan oluşuyorsa bu örüntülere sayı örüntüleri, geometrik şekillerden oluşuyorsa geometrik örüntüler denir. Sayı örüntüleri şekle dönüştürülebildiği gibi şekil örüntüleri de sayıya dönüştürülebilir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Aşağıda sayı örüntülerine ve geometrik örüntülere örnekler verilmektedir.

2, 6,14, 30, 62,… (örüntünün kuralı: 2 ile başla, sayının iki katını al ve 2 ekle)

0, 3, 9, 12, 15,… (örüntünün kuralı:0 ile başla, her seferinde sayıya 3 ekle)

1, 4, 9, 16, 25,… (örüntünün kuralı: sayıların kareleri)



*Şekil 1. Geometrik örüntülere örnekler (Friel, S. N. and Markworth K. A., 2009)*

Örüntüler tekrarlayan örüntüler, genişleyen örüntüler olmak üzere iki sınıfta toplanır. Şimdi bu örüntüleri aşağıda açıklayalım.

***Tekrarlayan Örüntüler***

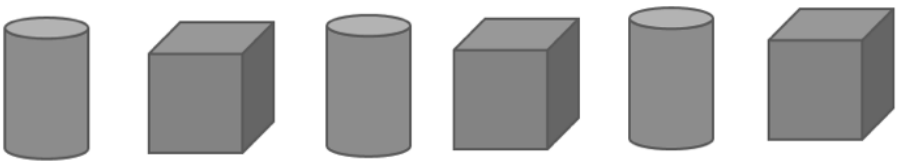
İçinde tekrarlanabilir bir birim olan örüntülerdir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Örneğin, 232323…, bir yılda bulunan on iki ay gibi.

Bu örüntülerde önemli olan örüntünün özünü tanımlamaktır ve örüntünün özü ise en kısa dizilimidir (Van de Walle,2004). Bu en kısa dizilime örüntünün tekrar birimi denir.

CdCdCd… şeklinde devam eden tekrarlayan örüntünün özü Cd dir ve tekrar birimi 2 dir.

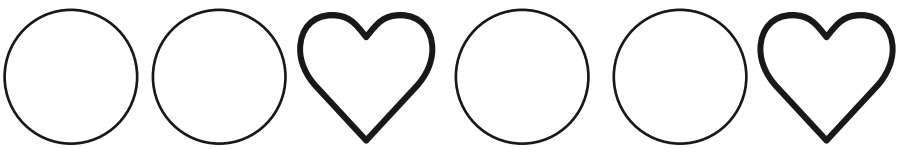
ABCABCABC… şeklinde devam eden tekrarlayan örüntünün özü ABC dir ve tekrar birimi 3 tür.

Aşağıda verilen geometrik örüntünün tekrar birimi 2 dir. Örüntünün kuralı ise silindir, küp, silindir, küp şeklindedir.



*Şekil 2. Tekrarlayan örüntü*

Aşağıda verilen geometrik örüntünün tekrar birimi 3 tür. Dikkat edilirse örüntü çember, çember, kalp, çember, çember, kalp şeklinde devam eder.



*Şekil 3. Tekrarlayan örüntü*

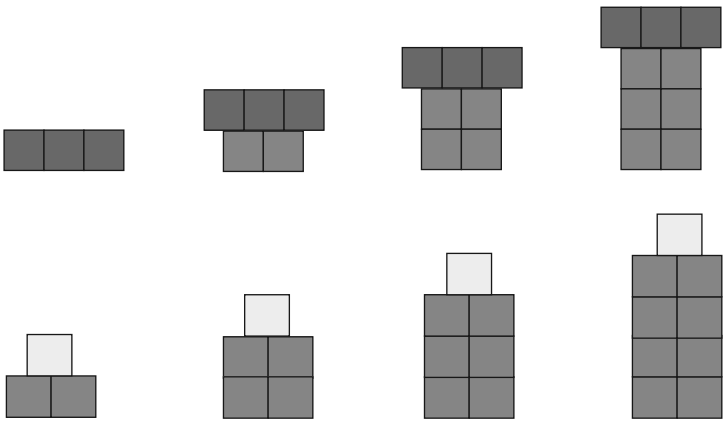
Geometrik örüntülerde zorluk derecesi örüntünün özündeki renk ve sayı gibi birden fazla özelliklere sahip olmasına göre artar (Smith, 2016).

Tekrarlayan örüntüler rasyonel sayıların devirli ondalık açılımları (örneğin; $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$), herhangi bir aritmetik dizinin birer basamağından oluşan sayı dizisi (örneğin; 2,7,12,17,22, 27, 32,...) ya da herhangi bir doğal sayının ardışık kuvvetlerinin son basamaklarından oluşan sayı dizisi (örneğin; $4^n$,16, 64,256, 1024,...) içerisinde karşımıza çıkabilir (Zazkis ve Liljedahl, 2006).

***Genişleyen Örüntüler***

Örüntünün temel elemanı yapı taşı olarak alınarak daha büyük elemanlar oluşturulmasıyla elde edilen örüntülerdir. Örneğin, AB, ABB, ABBB. Genişleyen örüntüler sayılardan oluşturulabildiği gibi geometrik şekillerden de oluşturulabilir (Smith, 2016). Genişleyen örüntülere bazı kaynaklarda değişen örüntüler ya da büyüyen örüntüler de denilmektedir. Genişleyen örüntülerde düzenli bir büyüme görüldüğü gibi küçülme de görülebilir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004).

Aşağıda genişleyen örüntülere örnekler verilmektedir.



*Şekil 4. Genişleyen örüntüler (Beatty, R., Mauro,M. D. and Morris, K., 2013)*

Aşağıda genişleyen örüntülere sayısal örüntülerden örnekler verilmektedir.

1, 3, 6, 10, 15,…

31, 25,19, 13,…

Birinci örüntüde 1'e 2 eklendiğinde 3, 3'e 3 eklendiğinde 6, 6' ya 4 eklendiğinde 10 şeklinde devam etmektedir. Yani her terim ardışık artarak büyümektedir.

İkinci örüntüde ise 31'den başlanarak her terim kendinden sonra gelen terimin 6 eksiği alınarak elde edilmektedir.

Genişleyen örüntülerde sadece örüntüyü genişletilmekle kalınmaz örüntünün herhangi bir adımında hangi elemanın geleceği tahmin edilerek genelleme yapılır ya da örüntünün elemanları arasındaki cebirsel ilişki bulunmaya çalışılır. Bu cebirsel ilişkiler bizi fonksiyona götürür(Van de walle,2004). Aşağıda verilen örneği inceleyelim.



0.adım 1.adım 2.adım 3.adım

*Şekil 5. Genişleyen örüntü (Beatty, 2014).*

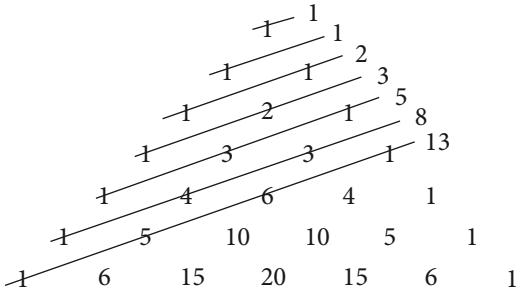
0.adımda kare sayısı birdir. 1.adımda bir sıra 3'lü mavi kareler eklenmektedir. Toplam kare sayısı 4 olmaktadır. 2. adımda iki sıra 3'lü mavi kareler eklenerek toplam kare sayısı 7 olmaktadır. 3.adımda üç sıra 3'lü mavi kareler eklendiğinde

toplam kare sayısı 10 olur. Yani her bir adımda bir sıra 3'lü mavi eklenmektedir. O zaman her terim bir adım sayısı olarak alınırsa bu örüntünün kuralı terim sayısının üç katının bir fazlası olarak ifade edebiliriz. Ortaya çıkan cebirsel ilişkiyi Tablo 1 dan görebiliriz. Örneğin 10.adımda kaç tane kare olacağını n'yi 10 alarak 3n+1 den hesaplarsak 31 olacağını kolaylıkla söyleyebiliriz.

*Tablo 1.Cebirsel ilişki*

| Adım sayısı | Kare sayısı |
|---|---|
| 0.adım | 3.0+1=1 |
| 1.adım | 3.1+1=4 |
| 2.adım | 3.2+1=7 |
| 3.adım | 3.3+1=10 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| n.adım | 3.n+1 |

Genişleyen örüntülerden biri olan yinelemeli örüntü, bir örüntüde bir adımdan diğerine geçişin nasıl olduğunu belirten ifadelere denir (Bezuska ve Kenney, 2008). Örneğin Fibonacci dizisi bir yinelemeli örüntüdür. Dizinin terimleri kendisinden önce gelen iki terimin toplamıyla elde edilir. şeklindedir. Genel terimi $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ dir. Fibonacci dizisinin terimleri Pascal üçgeninde de karşımıza çıkar.




*Şekil 6. Pascal üçgeni*

Pascal üçgeninde tüm katsayılar ve terimlerin çapraz toplamları alındığında Fibonacci dizisi elde edilir.

$f: N \to R$ olacak şekilde bir fonksiyondur. $n \in N$ doğal sayısı için $f(n) = a_n$ oluyorsa, $a_1, a_2, a_3,..., a_n,... \in R$ bir dizi belirtir. $a_n$'e dizinin genel terimi denir. Örneğin, 3,9,12,15,…, (3n),…, n $\in R$ sayıları bir dizidir ve bu dizinin genel terimi $a_n = 3n$ dir.

***Örüntü ile Dizi Arasında Nasıl Bir Fark Vardır?***

Genel terimi belirtilmeyen sayılara ($a_1, a_2, a_3,...$ ) bir dizidir diyemeyiz. Düzenli bir diziliş var ise bu sayılar kümesi bir örüntü oluşturur. Örüntünün genel terimi, her terim için geçerli olan ortak bir özelliğin genellemesiyle bulunur (Tanışlı, 2013).

Örüntü ve dizi aynı kavramlar gibi görünebilir. Ancak örüntü belli bir düzen ve kuralı belirtirken, dizi ise belli bir kurala göre düzenlenmiş sonsuza kadar giden terimlerden oluşur (Bozkurt, 2013).

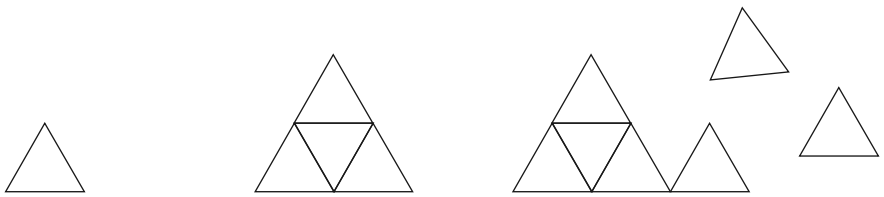
## Örüntünün Önemi

Örüntü etkinlikleri öğrencilerin terimler arasındaki ilişkiyi fark etmelerini sağlar. Böylece öğrenciler ilişki kurabildikleri gibi genellemeler yapabilir ve tahmin edebilirler (Olkun ve Toluk-Uçar, 2004). Örüntüler aynı zamanda öğrencilerin sözel ve sembolik gösterimler yaparak aritmetikten cebire geçmelerine fırsat tanır (English ve Warren, 1998).

Öğrencilerin örüntüleri nasıl yapılandırdıkları, bilişsel süreçlerini nasıl çalıştırdıkları ve nasıl bir zihinsel fonksiyona sahip olduklarının bilinmesi, cebirsel düşünmeleri ve fonksiyon kavramının gelişimini sağlama açısından örüntü kavramı büyük bir önem taşır (Tanışlı ve Özdaş, 2009).

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekilde daha büyük eşkenar üçgenler oluşturmak için kaç tane küçük eşkenar üçgen gereklidir? Elde ettiğiniz sonuçları aşağıda verilen tabloda yazınız.



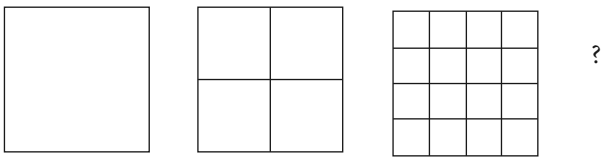
Taban:1 Taban:2 Taban:3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Üçgenin birim taban uzunluğu | 1 | 2 | 3 | | | | |
| Gerekli küçük üçgen sayısı | 1 | 4 | | | | | |

10 birim taban uzunluğu olan büyük bir üçgen oluşturmak için kaç tane küçük üçgen gereklidir? Nedenini açıklayınız.

2. Ali'nin 7 bilyesi vardır. Ali her gün 4 bilye alırsa 25nci günün sonunda kaç bilyesi olur?

3. Aşağıdaki örüntünün kuralını bulunuz. 50 nci adımda kaç kare bulunur?




4. Bir yüzme havuzunu, her gün temiz tutmak için klor tabletleri eklenmektedir. Havuzda yüzen kişi sayısı ile klor tabletleri arasında bir örüntü kurulmuştur. Bu örüntüye göre pazartesi günü 1 tablet, salı günü 3 tablet, çarşamba günü 7, perşembe günü 15 klor tableti eklendiğine göre cuma günü kaç tablet eklenmelidir?

5. Bir lokantada çalışan bir garson her gece kaç tane peçete hazırlaması gerektiğini gösteren bir örüntü oluşturmuştur. Pazartesi 42 peçete, Salı 60 peçete, Çarşamba 78 peçete, Perşembe 96 peçete hazırlayacaktır. Bu örüntüye göre Pazar günü için kaç peçete hazırlamalıdır?

## KAYNAKÇA


Beatty, R. (2014). WHAT WORKS? *Research into Practice.* thelearningexchange.ca adresinden 28.08.2018 tarihinde alınmıştır.

Beatty, R., Mauro M. D. and Morris, K. (2013).*Young Students' Explorations of Growing Patterns: Developing Early Functional Thinking and Awareness of Structure.* North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education .

Bezuska, S. J. and Kenney, M. J. (2008). *The Three R's: Recursive Thinking, Recursion, and Recursive Formulas. In C. E. Greenes and R. Rubenstein* (Eds.), Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook, pp. 81 - 97.Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bozkurt, A. (2013). Diziler: Belli bir kurala göre sıralı listeler. *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar*. (ed. Zembat, İ.Ö., Özmantar, M.F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A.), Pegem Akademi, Ankara.

English, L. ve Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166–170.

Friel, S. N. and Markworth K. A.(2009). A Framework for analyzing geometric Pattern tasks. *Mathematics teaching in the Middle school,*15(1).

Mulligan, J.(2010). *Reconceptualising early mathematics learning. In Teaching mathematics? Make it count. Proceedings of the Annual Conference of the Australian Council for Educational Research,* Edited by: Glascodine, C. and Hoad, K. 47–52. Camberwell, VIC: ACER. Souviney, R. J. (1994). Learning to teach mathematics. Englewood Cliffs: Macmillan Publishing Company.

Olkun, S.ve Toluk-Uçar, Z. (2007). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi.* (3. Baskı). Ankara: Maya Akademi.

Smith, S. S. (2016). *Erken Çocuklukta Matematik*.(Çeviren Editörü: Serap Erdoğan) (5. Baskıdan Çeviri) Ankara: Eğiten Kitap (Orijinal çalışma basım tarihi 2009).

Tanışlı, D. (2013). Matematikte örüntülerin keşfi. *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar.* (ed. Zembat, İ.Ö., Özmantar, M.F., Bingölbali, E., Şandır, H. ve Delice, A.), Pegem Akademi, Ankara.

Tanışlı, D., and Özdaş, A. (2009): *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler.* PRIMUS,17(2) 131-147.

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics.* (5th Ed.) Boston: Allyn and Bacon.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği: gelişimsel yaklaşımla öğretim.* (Çeviri Editörü: S. Durmuş) (7. Baskıdan Çeviri) Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık (Orijinal çalışma basım tarihi 2010).

Zaskis, R. & Liljedahil, P. (2006). "On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway." In R. Zaskis & S. R. Campbell (Ed.), *Number theory in mathematics education* (99-114). London: Lawrence Erlbaum AssocHates, Publishers.

## FİBONACCİ Sayıları

Leonardo FİBONACCİ Rönesans öncesi Avrupa'nın en önde gelen Matematikçilerinden biridir. Adından da anlaşıldığı gibi Fibonacci sayılarına ismini vermiştir. Fibonacci sayıları 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610... şeklinde devam eder. Bu sayı dizisinin özelliği her sayının kendinden önceki iki ardışık sayının toplamına eşit olmasıdır. Bu dizideki sayılar kendilerinden önceki sayıya bölünürse elde edilen bölüm her zaman 1,618 sayısına yaklaşır. Elde edilen bu orana altın oran denir. Bu sayı doğada birçok yerde karşımıza çıkmakla birlikte mimari yapıların inşasında da kullanılmıştır. Çam kozalağı, ay çiçeği, Mısır piramitleri, Süleymaniye ve Selimiye Camileri örnek olarak verilebilir.

# 5. BÖLÜM

# TEMEL GEOMETİ VE ÖLÇÜ KAVRAMI

**Öğrenme Hedefleri**

*Bu bölümün sonunda;*

- ✓ *Temel geometrik şekilleri kavrayabilme,*
- ✓ *Temel uzay geometri ve geometrik cisimleri açınımlarıyla kavrayabilme,*
- ✓ *Ölçü kavramını kavrayabilme,*
- ✓ *Temel ölçü birimlerini kavrayabilme*

*kazanımlarını matematik öğretiminin amaç, ilke ve ilkokul matematik programıyla ilişkisi açısından öğrenimini elde edeceksiniz.*

**İçindekiler**

- ➢ *Temel geometrik şekiller*
- ➢ *Temel uzay geometri-geometrik cisimler*
- ➢ *Açınımları ile ölçü kavramı*
- ➢ *Temel ölçü birimleri*
- ➢ *Kaynakça*

## GİRİŞ

Bu bölümde, 2018 eğitim ve öğretim yılı içerisinde yenilenen sınıf öğretmenliği lisans programında bulunan İkokulda Temel Matematik dersi içeriği bünyesindeki temel geometrik şekiller, temel uzay geometri ve geometrik cisimleri açınımları, ölçü kavramı ve ölçü birimleri, temel ilkelerle ilkokul matematik programıyla ilişkilendirilerek sunulacaktır.

İlkokul matematik dersi öğretim programı; sayılar ve işlemler, *geometri, ölçme* ve veri işleme olmak üzere dört öğrenme alanından oluşmaktadır. Proğram incelendiğinde geometri öğrenme alanının tüm sınıf seviyelerinde olduğu görülmektedir. Geometrik cisimler ve şekiller alt öğrenme alanında yer alan kazanımlarda 1. sınıfta öğrencilerden şekilleri köşe ve kenar sayılarına göre sınıflandırarak üçgen, kare, dikdörtgen ve çemberi adlandırmaları, tanımaları ve model oluşturmaları beklenmektedir. Geometrik cisimleri günlük hayattan verilen örneklerle (matematiksel adlandırılma yapılmadan) sınıflandırmalar da hedeflenmektedir. 2. sınıfta daireye yer verilmekte ve diğer şekillerin kenar ve köşe sayılarına göre sınıflandırılması beklenmektedir. Önce bilinen tek bir şekil kullanarak, daha sonra farklı şekiller kullanarak şekil modelleri oluşturmaları ve bunları noktalı kâğıt üzerine çizebilmeleri hedeflenmiştir. Ayrıca öğrencilerin geometrik cisimleri tanımaları ve modellemeleri beklenmektedir. 3. sınıfta öğrencilerin cisimlerin yüzlerini, köşelerini ve ayrıtlarını; küp, kare ve dikdörtgen prizma arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları belirlemeleri hedeflenmektedir. Ayrıca cetvel kullanarak üçgen, kare ve dikdörtgen çizmeleri; kare ve dikdörtgenin köşegenlerini belirlemeleri beklenmektedir. 4. sınıfın kazanımları arasında üçgen, kare ve dikdörtgenin kenarlarını ve köşelerini isimlendirmeleri, kenar özelliklerini belirlemeleri ve üçgenleri kenar uzunluklarına göre sınıflandırmaları bulunmaktadır. Öğrencilerin izometrik veya kareli kâğıtla, eş küplerle oluşturulan çizimlere uygun yapılar oluşturması da bu sınıf seviyesinde ele alınmaktadır. Uzamsal ilişkiler alt öğrenme alanında ise 1. sınıfta öğrencilerin yer ve yön bildiren ifadeleri günlük hayat durumları ile ilişkilendirerek kullanmaları beklenmektedir. 2. sınıfta bir doğru boyunca konum, yön ve hareketi tanımlamak için matematiksel dil kullanmaları ve çevrelerindeki simetrik şekilleri bulmaları hedeflenmiştir. 3. sınıfta kare, dikdörtgen gibi şekillerin birden fazla simetri doğrusu olduğunu fark etmeleri ve bir parçası verilen şekli yatay veya dikey simetri doğrusuna göre tamamlamaları beklenmektedir. 4. sınıfta simetrinin geometrik yapı ve modeller üzerinden açıklanması ve simetri doğrusunun çizilmesine yönelik kazanımlara yer verilmiştir. Ayrıca verilen bir şeklin doğruya göre simetriğinin çizilmesi hedeflenmiştir. Geometrik örüntüler alt öğrenme alanında, 1. sınıfta öğrencilerin belirli bir geometrik örüntüyü deneyimlerle bulmaları hedeflenmektedir. Ögeleri şekiller veya cisimler olan bir örün-

tüdeki ilişkinin belirlenmesine ve eksik bırakılan ögenin bulunmasına yönelik kazanımlara yer verilmektedir. En çok üç ögeli geometrik örüntü oluşturmaları hedeflenmektedir. 2. sınıfta tekrarlayan bir örüntüde eksik bırakılan ögeleri belirleyerek tamamlama ve bir örüntüdeki ilişkileri görerek farklı malzemeler ile aynı ilişkiye sahip örüntüler oluşturma kazanımları bulunmaktadır. 3. sınıfta kaplama yapmaya, yaptığı kaplama örüntüsünü noktalı ya da kareli kâğıt üzerine çizmeye imkân veren kazanımlar yer almaktadır. Geometride temel kavramlar alt öğrenme alanının, öğrencilerin hazırbulunuşlukları düşünülerek 3. Sınıftan sonra ele alınmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Öğrencilerin nokta, doğru, ışın, doğru parçası gibi daha soyut kavramları ifade etmeleri ve açıyı tanıyarak çevrelerinden örnekler vermeleri beklenmektedir. 4. sınıfta öğrencilerin düzlemi tanıması, örneklendirmesi, açıyı oluşturan kenarları ve köşesini belirlemesi, isimlendirmesi ve açıları sınıflandırması hedeflenmektedir. Verilen bir açının çiziminde, standart açı ölçme araçlarından özellikle pergel kullanılarak açının bir ışının başlangıç noktası etrafında döndürülmesi ile oluştuğunu fark etmesi beklenmektedir.

Ölçme öğrenme alanında ise ölçülecek özelliğin belirlenmesi, karşılaştırma ve sıralama yapma, önce standart olmayan daha sonra standart birimler kullanarak ölçme yapma ve son olarak da bu bilgileri uygulama ve yorumlama Ölçme öğrenme alanının ilerleme sürecini yansıtmaktadır. Bu çalışmalarda önce sezgiye dayalı karşılaştırma ve sıralama yapma, sonrasında standart olmayan ve olan birimler kullanarak ölçme yapması hedeflenmiştir. Öğretim programında 1. ve 2. sınıflarda uzunluk ölçme, paralarımız, zaman ölçme, tartma ve sıvı ölçme alt öğrenme alanlarına ait kazananımlar bulunurken 3. sınıfta ise bu alt başlıklara alan ölçme ve çevre ölçme alt öğrenme alanları eklenmektedir. 1. sınıfta önce nesneleri uzunluklarına göre sıralayıp sonra standart olmayan uygun bir araçla birimleri tekrarlı kullanarak ölçme işlemini gerçekleştirmeye yönelik kazanımlara yer verilmektedir. 2. sınıfta öğrenciler standart olmayan birimleri kullanarak ölçme yaparken aynı birimin daha küçük parçalarına ihtiyaç duymaları gerektiğini fark etmeleri ve neden standart bir birime gerek duyulduğunu açıklamaları beklenmektedir. Standart ölçme birimlerini tanımaları ve uzunlukları standart araçlar kullanarak santimetre ve metre cinsinden ölçmeleri hedeflenmektedir. Modeller kullanarak ya da modelleme yaparak toplama ve çıkarma işlemlerini içeren uzunluk problemlerini çözmeleri amaçlanmıştır. 3. sınıfta öğrencilerin standart ölçme birimleri ile standart olmayan birimler arasında ilişki kurmalarının sağlanması hedeflenmektedir. 4. sınıfta milimetreyi ve milimetrenin diğer ölçme birimleri ile ilişkisini bilmeleri beklenmektedir. Paralarımız alt öğrenme alanının 1. sınıf kazanımları, paralarımızı tanımaya yöneliktir. 2. sınıfta lira ve kuruş arasındaki ilişkinin fark edilerek karşılaştırılması, 3. sınıfta bu ilişkinin gösterilmesi ve bu ilişkilerle ilgili

problemler çözülmesi hedeflenmektedir. Soyut bir kavram olan zamanın ölçülmesi konusunda öğrencilerin belirli olayları ve durumları referans alarak günün bölümlerini söylemeleri beklenmektedir. 1. sınıfta takvim kullanımı ve takvimin üzerindeki günün ve ayın belirtilerek kullanılması, bir haftada 7 gün olduğunun fark edilmesi hedeflenmektedir. Tam saatlerin okunması 1. sınıfta başlamakta, 2. sınıfta tam, yarım ve çeyrek saatlerin okunması ile devam etmektedir. Dakika-saat, saat-gün, gün-hafta, gün-hafta-ay, ay-mevsim, mevsim-yıl arasındaki ilişkilerin açıklanması da bu sınıfta yer almaktadır. 3. sınıfta öğrencilerin saati dakika ve saat cinsinden okuyabilmeleri hedeflenmiştir. Buna ek olarak dönüştürme işlemleri yapılmadan yıl-hafta, yıl-gün, dakika-saniye arasındaki ilişkiyi açıklayabilmeleri beklenmektedir. 4. sınıfta saat-dakika, dakika-saniye, yıl-hafta, yıl-ay-hafta-gün ilişkileri ve birini diğeri cinsinden ifade etmeleri ele alınmaktadır. 1. sınıfta tartma ve sıvı ölçme alt öğrenme alanlarına karşılaştırmalarla başlanılmaktadır. 2. sınıfta standart ölçme biriminin öneminin fark ettirilmesi ve ağırlıkların kilogram cinsinden ölçülmesi, verilen nesnelerin kütlelerine göre sıralanması hedeflenmektedir. Standart olmayan birimlerle sıvıların miktarının ölçülmesi ve daha sonra da standart olmayan küçük birimler kullanarak iki farklı kabın kapasitesinin karşılaştırılması kazanımlarına yer verilmektedir. 3. sınıfta kilogram ve gramın nerelerde kullanıldıklarının fark ettirilmesi ve bu birimler arasındaki ilişkinin açıklanması bulunmaktadır. Tahmine yer vermek açısından öğrencilerden nesnelerin ağırlıklarını tahmin ettikten sonra doğruluğunu araştırmalarına yönelik kazanımlara yer verilmiştir. Standart sıvı ölçme biriminin ne olduğu ve gerekliliğinin açıklanması, litre ve yarım litre ile ölçme yaptırılması gerekmektedir. 4. sınıfta yarım ve çeyrek kilogramın gram cinsinden ölçülmesi, kilogram ve gramın kütle ölçerken birlikte kullanılmaları yer almaktadır. Yine bu sınıfta ton ve miligramın kullanıldığı yerlerin tahmin edilmesi ve problem çözmede kullanılması, mililitre kavramının açıklanması ve litre ile olan ilişkisini ortaya koymaya yönelik kazanımlara yer verilmiştir. Litre ve mililitreyi birlikte kullanarak ölçme yapabilmeleri ve bir kaptaki sıvı miktarını öğrendiği ölçü birimleri ile tahmin etmeleri amaçlanmıştır. Çevre ve alan ile ilgili kazanımlara 3 ve 4. sınıfta yer verilmiştir. 3. sınıfta nesnelerin çevrelerinin belirlenmesi, geometrik şekillerin çevre uzunluğunun ölçülmesi, hesaplanması ve bunlarla ilgili problem çözülmesi bulunmaktadır. Ayrıca farklı büyüklükteki aynı cins iki geometrik şeklin uygun malzeme ile kaplanarak alanın ne olduğunun fark edilmesi hedeflenmektedir. Yine bu sınıfta bir alanı standart olmayan ölçme birimleri ile tahmin etme ve doğruluğunu kontrol etmeye yönelik kazanımlara yer verilmiştir. 4. sınıfta ise kare ve dikdörtgenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin açıklanması beklenmektedir. Şekillerin alanlarının bu alanları kaplayan birim karelerden oluştuğunun öğrenciler tarafın-

dan fark edilmesi beklenmektedir. Diğer yandan kare ve dikdörtgenin alanının çarpma ve toplama işlemi ile ilişkilendirilmesine yönelik kazanımlar bulunmaktadır.

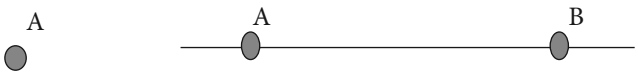
Bu kazanımlar dikkate alındığında öğretim aşamasına geçmeden önce temel ilke ve kuralların öğretmen adayları tarfından kazanılması önem arz etmektedir. Kitabın bu bölümünde lisans ve ilkokul programı dikkate alınarak öğretme adaylarına gerekli olan temel bilgiler sunulmuştur.

## TEMEL GEOMETRİK ŞEKİLLER

Temel geometrik şekillerin öğretiminden önce geometrinin temel kavramlarının bilinmesi gereklidir.

### Nokta, Doğru ve Düzlem

Geometrinin temel elemanları olan nokta, doğru ve düzlem tanımsız kavramlardır. Bu tanımsız kavramlardan yola çıkarak diğer geometrik kavramlar oluşmaktadır. Nokta ve doğru matematiksel olmayan bir yaklaşım olan sezgisellik ilkesine göre tanımlanabilir. Boyutsuz olan *nokta* ince uclu bir kalemin kağıt üzerinde bıraktığı iz olarak düşünülmektedir. Nokta A, B, C, … gibi büyük harfle gösterilir ve temsili olarak çeşitli modeleri örnek olarak verebiliriz.




*Şekil 5.1. A Noktası*

*Doğru,* aynı sıradaki noktalar kümesinden oluşan iki yönde düz olarak uzayabilen tanımsız bir kavramdır. Doğrular küçük harfler veya üzerindeki farklı iki noktası ile adlandırılır.




*Şekil 5.2.* $\overline{AB}$ *Noktası*

Şekil 5.2'den anlaşılacağı gibi iki noktadan bir doğru çizilebilmektedir. Bir noktası doğusu üzerinde ise doğrusu noktasından geçiyor denir ve biçiminde yazılır. Eğer bir noktası doğrusu üzerinde değil ise yazlılır.

*Düzlem*, eni ve boyu olan yüksekliği olmayan tanımsız bir kavram olup her yönde sınırsız kabul edilir. Masanın yüzeyi, tavan ya da herhangi bir pürüzsüz düz yüzey düzlem olarak kabul edilir ve büyük harf ile gösterilir.




*Şekil 5.3. M düzlemi*

Nokta, doğru ve düzlem kavramlarından hareketle geometrinin oluşumunda bulunan diğer bazı önemli kavramlarda yer almaktadır.

***Doğru Parçası***

Bir doğru üzerinde bulunan farklı iki nokta ve bu noktalar arasında kalan bütün noktaların oluşturduğu kümeye doğru parçası denir ve ie gösterilir.




*Şekil 5.4.* $[AB]$ *Doğru Parçası*

***Işın***

Bir doğru üzerinde bulunan bir nokta ve bu noktaya göre doğrunun herhangi bir tarafında bulunan diğer noktaların oluşturduğu alt kümeye ışın denir.




*Şekil 5.5.* $[AB]$ *Işını*

***Yarı Doğru***

Başlangıç noktası çıkartırılmış ışına yarı doğru denir. (Şekil 5.6)




*Şekil 5.6.* $[AB]$ *yarı doğrusu*

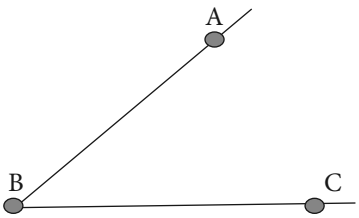
**Nokta, Doğru ve Düzlem Arasındaki Diğer İlişkiler**

- Farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçer.
- İki nokta bir düzlem üzeride ise bu iki noktadan geçen doğru da aynı düzlem üzerindedir.
- Faklı iki düzlem kesişirse, arakesitleri bir doğrudur.
- Doğrusal olmayan üç noktadan yalnız bir düzlem geçer.

- Bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta, yalnız bir düzlem tanımlar.
- Birbirine paralel olan iki doğru, bir düzlem tanımlar.
- Birbirini kesen iki doğru, bir düzlem tanımlar.

***Açılar***

Ortak uç noktalara sahip ışınlar Şekil 5.7'de ki gibi açı oluşturur. Açı oluşturan ışınlardan her birine açının kenarları, ışınların uç noktasına da açının köşesi denir.




*Şekil 5.7.*

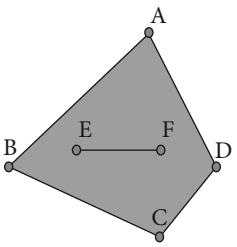
$\widehat{ABC}$ açısı bazen $\widehat{B}$ bazende $\widehat{CBA}$ açısı olarakda okunur. Açı, bir uç noktada birleşen iki kenar arasındaki açıklığın ölçülmesi ile bulunur. Bir nokta etrafındaki tam dönüşün ölçüsü 360°dir.

***Çokgenler***

$n \in N^+$ ve $n \geq 3$ olmak üzere, ardışık olan üçü doğrusal olmayacak biçimde, aynı düzlemde yalnız $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarında kesişen $[A_1,A_2]$, $[A_2,A_3]$, …, $[A_n,A_1]$ doğru parçalarının birleşmesine çokgen denir. $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarına çokgenin köşeleri $[A_1,A_2]$, $[A_2,A_3]$, …, $[A_n,A_1]$ doğru parçalarınada çokgenin kenarları denir. Çokgenler kenar ya da köşe sayılarına göre sınıflanırlar.

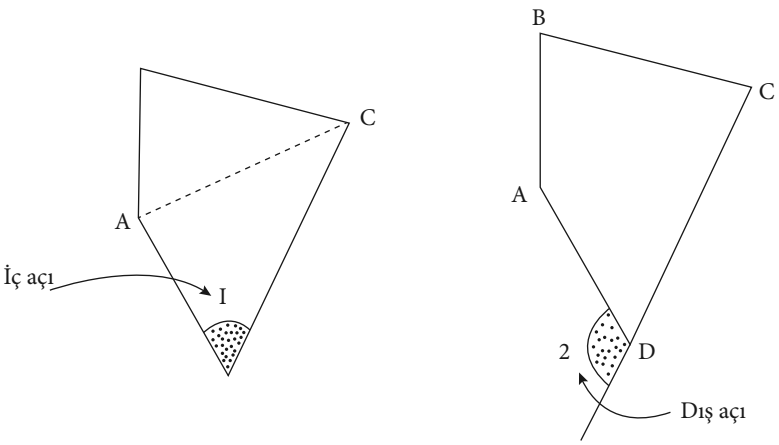
| Çokgen | Kenar ya da Köşe Sayısı |
|---|---|
| Üçgen | 3 |
| Dörtgen | 4 |
| Beşgen | 5 |
| Altıgen | 6 |
| Yedigen | 7 |
| Sekizgen | 8 |
| Dokuzgen | 9 |
| Ongen | 10 |
| . | . |
| n-gen | n |
| . | . |

Bir çokgenin kenarlarının uzantıları alındığında bu uzantılar çokgeni kesmiyorsa bu tip çokgenlere *Konveks (Dışbükey),* eğer uzantılar çokgeni kesiyorsa bu tip çokgenere de *Konkav (İçbükey)* çokgenler denir. Veya Bir çokgen üzerinde bulunan herhangi iki nokta ile bağlantılı doğru parçası eğer o çokgenin alt kümesi ise bu çekgene dışbükey çokgen değil ise içbükey çokgen adı verilir.




*Şekil 5.8. Dışbükey çokgen*

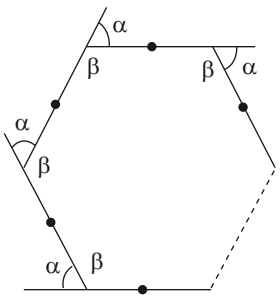
Bir çokgende herhangi iki kenarının oluşturduğu ortak köşe, çokgen iç açısını belirlerler. Bir çokgende herhangi iki kenarının oluşturduğu açıya ortak köşeden kenarların birinin uzantısı ile diğer kenarın dış taraftan oluşturduğu açıya dış açı denir ve *n* kenarlı düzgün bir çokgenin iç açılarının toplamı $(n-2).180°$dir.




*Şekil 5.9. Çokgende iç ve dış açı*

***Düzgün Çokgenler***

Bütün açıları ve kenarları eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir.




*Şekil 5.10. Düzgün beşgen*

- *n* kenarlı düzgün bir çokgenin bir iç açısı, $\alpha = \frac{(n-2).180^{\circ}}{n}$ dir.
- *n* kenarlı düzgün bir çokgenin bir dış açısı, $\beta = \frac{360^{\circ}}{n}$ şeklindedir.
- *n* kenarlı düzgün bir çokgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı 360° dir.
- *n* kenarlı düzgün bir çokgenin köşeğen sayısı, $\frac{n.(n-3)}{2}$ dir.

Çokgenler kenarlarına, açılarına ve bazı özel durumlarına göre isimler almaktadırlar. Başlıca özel çokgenler;

**Örnek:** İç açılarının toplamı 1440° olan bir düzgün çokgenin, köşegen sayısı kaçtır?

**Çözüm:** $n$ bu düzgün çokgenin kenar sayısı olmak üzere, $n$ kenarlı düzgün bir çokgenin iç açılarının toplamı $(n-2).[180^{\circ}]$ formülünden

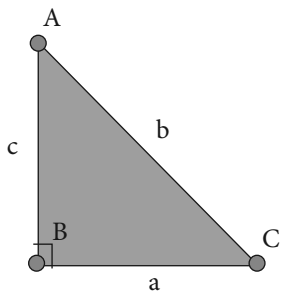
$$(n-2).180^{\circ} = 1440$$
$$(n-2) = 8$$
$$n = 10$$

bulunur. $n$ kenarlı düzgün bir çokgenin köşegen sayısı, $(n.(n-3))/2$ den

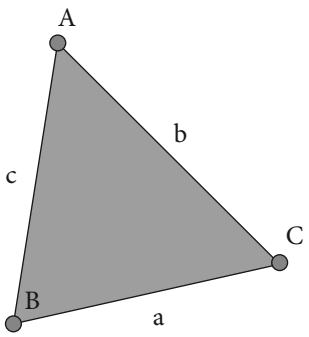
$$\frac{n.(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

dir.

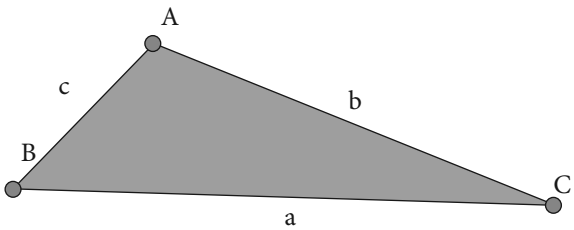
1. Bir açısı 90° olan üçgene *Dik Üçgen* denir.



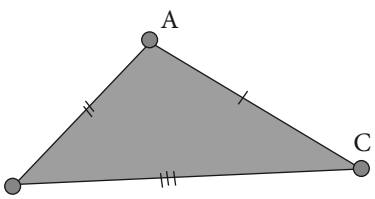

2. Her açısı dar açı olan üçgene *Dar Üçgen* denir.



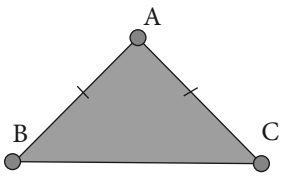
3. Bir geniş açısı bulunan üçgene *Geniş Üçgen* denir.



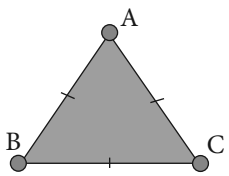

4. Bütün kenarları farklı olan üçgene *Çeşitkenar Üçgen* denir.



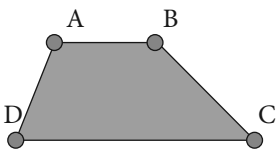

5. Herhangi iki kenarı eşit olan üçgene *İkizkenar Üçgen* denir.



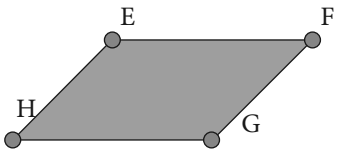

6. Bütün kenarları eşit olan üçgene *Eşkenar Üçgen* denir.




7. Yanlız İki kenarı parallel olan dörtgene *Yamuk* denir.



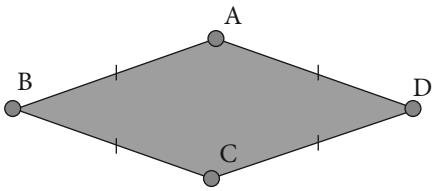
8. Bütün kenarları parale olan dörtgen *Paralelkenar* denir.



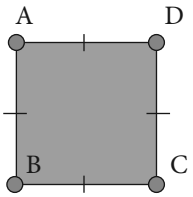

9. Bir açısı dik olan parallelkenar *Dikdörtgen* denir.



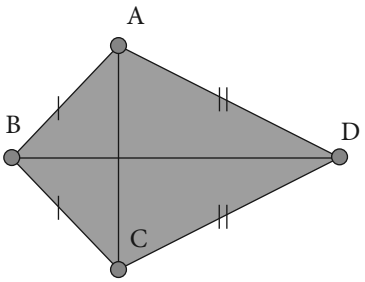

10. Bütün kenarları eşit olan paralekenara *Eşkenar Dörtgen* denir.



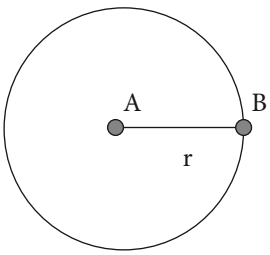

11. Bütün kenarları eşit olan dikdörtgene *Kare* denir.



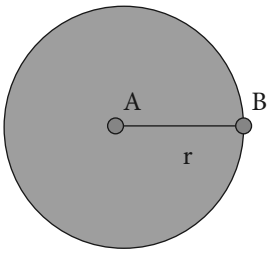

12. Tabanları çakışık olan iki ikizkenar üçgenin oluşturduğu dörtgene *Deltoid* denir.



13. Düzlemde sabir bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine *Çember* denir. Düzlemdeki sabir noktaya çemberin merkezi, eşit uzaklığada çemberin yarıçapı denir.




14. Çember ile çemberin iç bölgesinin birleşimine *Çembersel Bölge (Daire)* denir.




## TEMEL ÖLÇÜ BİRİMLERİ

Ölçme nedir? sorusuna değişik cevaplar vermek mümkündür. Fakat en genel anlamda ölçme sayma demektir. Temelde bir nesnenin bir ölçek yardımıyla sayılması vardır. Yani lçülecek nesneden ölçekten kaç tane olduğunun sayılması vardır. Ölçme konusu anlatılırken doğal ölçülerden hareketle standart ölçülere gitmek, birim kavramını vermek ve boyut fikrini kazandırmak gereklidir.

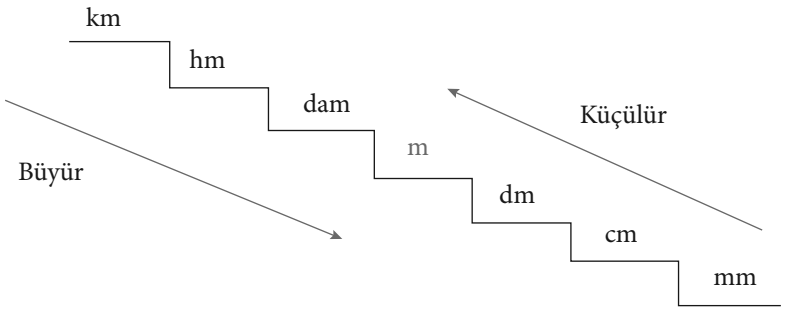
Temel ölçü birimleri;

- Uzunluk ölçüleri
- Ağırlık ölçüleri
- Alan ve arazi ölçüleri
- Zaman ölçüleri
- Sıvı ölçüleri
- Değer ölçüleri

şeklindedir.

## Uzunluk Ölçüleri

Uzunluk ölçüsü birimi metre dir ve kısaca "m" harfiyle gösterilir. Metre, yerküre meridyeninin kırk milyonda biri uzunluğundadır. Metre onluk sisteme göre düzenlenmiş bir ölçü birimidir. Metrnin katları onar onar büyür ve askatları onar onar küçülür.




Uzunluk ölçülerinin birbirine çevrilmesini merdiven basamaklarına benzetebiliriz. Yukarıdaki birime çevrilecek bir sayı her basamak için 10'a bölünür. Örnegin;

Desimetre (dm.), metrenin onda biridir. Yani 1 dm 0,1 m dir.

Kilometre (km.), metrenin 1000 katıdır. Yani 1 km 1000 m dir.

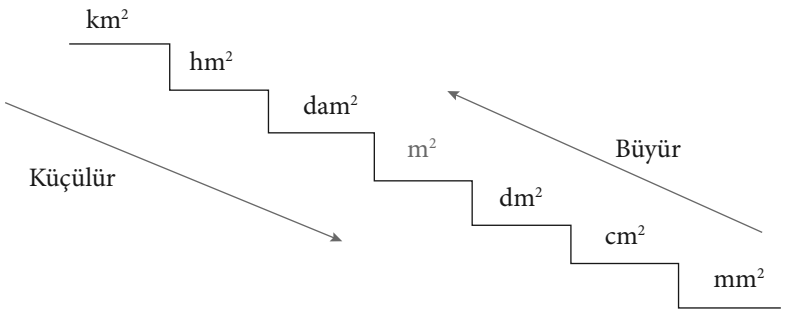
## Ağırlık Ölçüleri

Ağırlık ölçüsü birimi kilogramdır ve "kg" ile gösterilir. Ağırlık ölçü birimleri onar onar büyüyüp küçülür ve kilogramın katlarını meydana getirir. Kilogramın binde birine "gram", bin fazlasına ise "ton" denir. Örneğin;

| | |
|---|---|
| 1 Ton (t) | 1.000.000 gram |
| 1 Kilogram (kg) | 1000 gram |
| 1 Hektogram (hg) | 100 gram |
| 1 Dekagram (dag) | 10 gram |
| 1 Gram (gr) | 1 gram |
| 1 Desigram (dg) | 0,1 gram |
| 1 Santigram (cg) | 0,01 gram |
| 1 Miligram (mg) | 0,001 gram |

## Alan ve Arazi Ölçüleri

Nesnelerin yüzeylerini ölçmek için kullanılır. Alan ölçüleri de uzunluk ölçüleri gibi metre sistemine göre düzenlenmiştir. Alan ölçüsü birimi metre karedir ve "$m^2$" şeklinde gösterilir. Alan ölçüleri için uzunluk ölçülerinde olduğu gibi kullanılan ölçüler yoktur, ölçülecek yüzeyler uzunluk ölçüleri ile ölçülür ve yapılan hesaplamadan sonra alan bulunur.




Metre karenin katları yüzer yüzer büyür ve askatları yüzer yüzer küçülür. Örneğin;

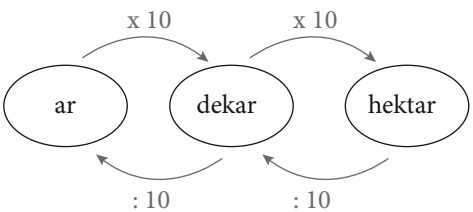
Kilometrekare ($km^2$), Metre karenin 1 000 000 katıdır.

Santimetre kare ($cm^2$), Metre kare'nin onbinde biridir.

Arazi ölçülerinin alan ölçülerinden ayrı tutulmaması gerekir. Arazi ölçüleri ile de ölçülmek istenenin yüzey olduğu bilinmelidir. Örneğin Kenar uzunluğu 1 dekametre (dam) olan karesel bölgenin 1 **Ar** yani $100m^2$ olması aslında alan ölçüsüdür. Benzer şekilde **Ar**'ın 10 katı olan arazi ölüsü **Dekar** (halk arasında dönüm) dır. Dekarın 10 katı ise **Hektar** olarak adlandırılır. Yani,

1 ha=1000m.10m=10.000 $m^2$ dir.

Ar, Dekar ve hektar arasındaki dönüşümlerde 10 ar 10 ar büyüme ve azkatlarında 10 ar 10 ar küçülme meydana gelir.



## Zaman Ölçüleri

Zamanı belirtmek için yıl, ay, hafta, gün, saat, dakika ve saniye gibi çeşitli zaman ölçüleri kullanırız.

- 1 yılda 12 ay vardır.
- Bazı aylar 30, bazı aylar 31 günden oluşur.
- 28 günden oluşan şubat ayı, dört yılda bir 29 gün olur.
- Bir yılda 365 gün vardır. Dört yılda bir şubat ayı 29 olduğu için o yıl, 366 günden oluşur. Bu yıla "artık yıl" denir.
- Hesap yaparken 1 yılda 365 gün, 1 ayda 30 gün olduğunu kabul ederiz.

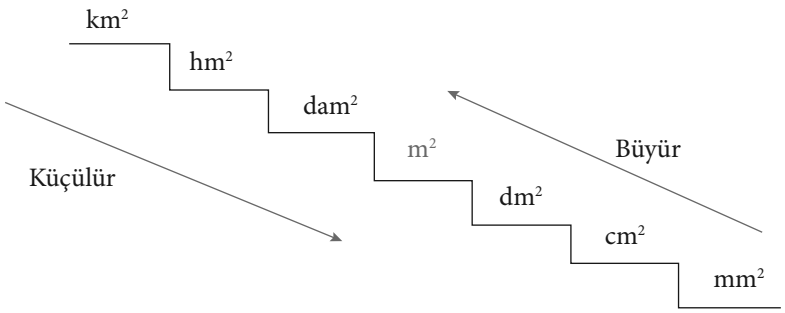
Aynı zamanda saat, dakika ve saniyeyi yaşamımızdaki pek çok olayın süresini belirtmek için kullanırız. 1 saat 60 dakika, 1 dakikada 60 saniyedir. Saat, dakika ve saniye için aşağıdaki kısaltmalar kullanılır.

Saat = sa, Dakika = dk, Saniye = sn

Zaman ölçmede kullanılan sat ve takvim çeşitleri konular arasında verilir. Yeri geldikçe 100 yılda bir asır (Yüz yıl), 50 yıla yarı yüzyıl kavramları kullanılır.

## Hacim ve Sıvı Ölçüleri

Hacim ölçüleri de uzunluk ölçüleri gibi metre sistemine göre düzenlenmiştir. Hacim ölçüsü birimi metre küp olup, $m^3$ şeklinde gösterilir. Kenar uzunluğu 1 metre olan küpün hacmi 1 $m^3$ dür. Hacim ölçüleri için uzunluk ölçülerinde olduğu gibi kullanılan ölçüler yoktur. Hacimleri bulunacak cisimlerin boyutları uzunluk ölçüleri ile ölçülür ve yapılan hesaplamadan sonra hacim bulunur.




Şekilde de görüldüğü gibi metre küpün katları biner biner büyür ve askatları biner biner küçülür. Örneğin;

Kilometre küp ($km^3$), Metre küpün 1 000 000 000 katıdır.

Milimetre küp ($mm^3$), Metre küpün 1/1 000 000 000 katıdır.

5 $m^3$=5000 $dm^3$ dür.

Benzer şekilde su, süt, sıvıyağ, sirke, motorin v.b. sıvı maddeleri ölçmekte kullanılan birime litre denir.

Litrenin Katları

Dekalitre: Litrenin 10 katıdır. 1 dal =10l.

Hektolitre: Litrenin 100 katıdır. 1 hl =100 l.

Kilolitre: Litrenin 1000 katıdır. 1 kl = 1000 l.

As Katları

Desilitre: Litrenin 10 da biridir. 1 dl =0,1 l.

Santilitre: Litrenin 100 de biridir. 1 cl = 0,01 l.

Mililitre: Litrenin 1000 de biridir. 1 ml = 0,001l şeklindedir. Yani 1 $dm^3$ = 1 litredir.

### Değer Ölçüleri

Çarşıdan, pazardan, manavdan, marketten ihtiyaç alındığında karşılık olarak ne verilir? Dolayısıyla alınan ve satılan şeylerin değerin ölçmek için kullanılan ölçülere değer ölçütleri denir. Bu düşünce bizi Türk Lirası üzerinde yoğunlaştırmaktadır. Değer ölçü birimi Türk Lirası'dır. Türk lirası, kısaca TL sembolüyle gösterilir. Liradan daha küçük değer ölçüsü birimi kuruştur. 1 lira, 100 kuruştur. Kuruş kısaca kr sembolüyle gösterilir.

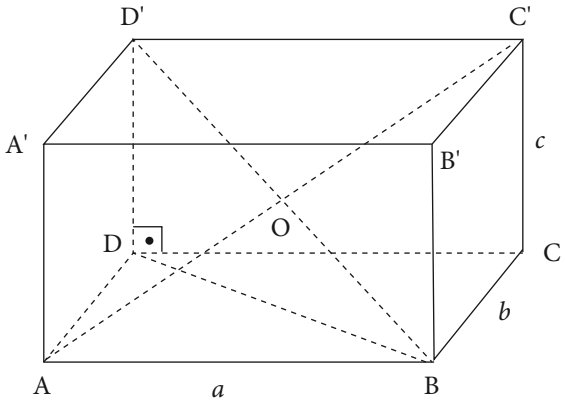
## TEMEL UZAY GEOMETRİ

Temel uzay geometri adı altında, üç boyutlu uzayda cisimlerin geometrik şekilleri ve açınımları incelenecektir. Uzayda yer kaplayan nesnelere katı cisim veya kısaca cisim denir. Uzayda bir cismi sınırlayan noktalar kümesinede o cismin yüzeyi adı verilir.

### Prizma

Birbirine parallel iki düzlemde bulunan iki eş çokgenin eş kenarlarının karşılıklı olarak parallel doğru parçalarıyla birşelmesinden elde edilen cisme prizma denir. Şekil 5.11 incelendiğinde ABCD ve A'B'C'D' çokgenlerinin herbirine

prizma tabanı denir. [AB], [BC],…..[A'A] doğru parçalarına prizmanın ayrıtları, A,B,C, …, A' noktaları prizmanın köşeleri ve iki çokğen arasındaki uzaklığada prizmanın yüksekliği denir.




*Şekil 5. 11. Prizma (Dikdörtgen Prizma)*

Ayrıca [BD], [BC'], [A'C'], vd. doğru parçalarına prizmanın yüzey köşegeni denir ve

$$|e = BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

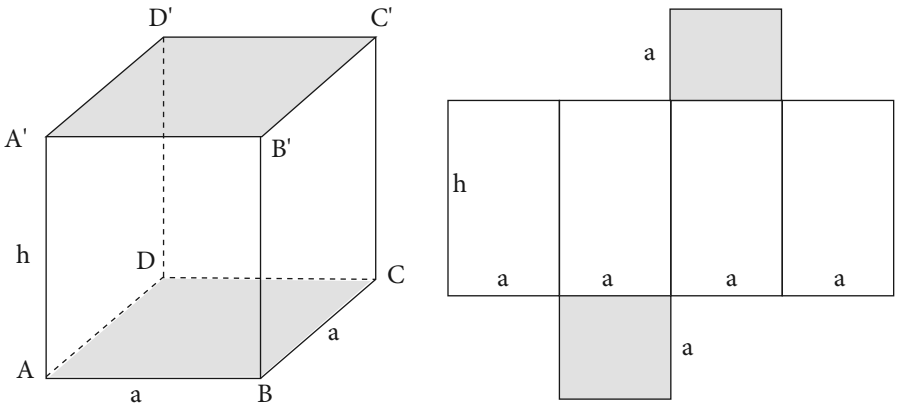
formülü ile bulunur. Benzer şekilde,

$$Alan = S = 2(ab + ac + bc)$$

$$Hacim = V = a.b.c$$

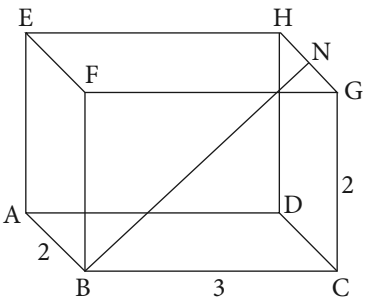
$$Cisim\ Köşegeni = k = |AC'| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

dir. Prizmalar tabanlarındaki çokgenlere ve dik ya da eğik oluşlarına göre adlandırılırlar. Dikdörtgen dik prizma, kare dik prizma, üçgen eğik prizma, daire dik prizma (silindir) gibi. Örneğin bir kare dik pirizma ve açınımı Şekil 5.12'de verilmiştir.




*Şekil 5.12. Kare Dik Prizma ve Açınımı*

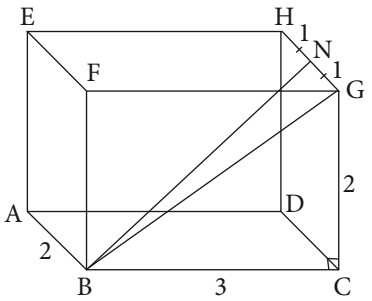
**Örnek:**




şekildeki dikdörtgen prizmasında,

$|AB| = 2\,br$,
$|BC| = 3\,br$,
$|GC| = 2\,br$ ve
$|HN| = |NG|$ ise
$|BN| = ?$

**Çözüm:**




BCG dik üçgeninde pisagor bağıntısı,

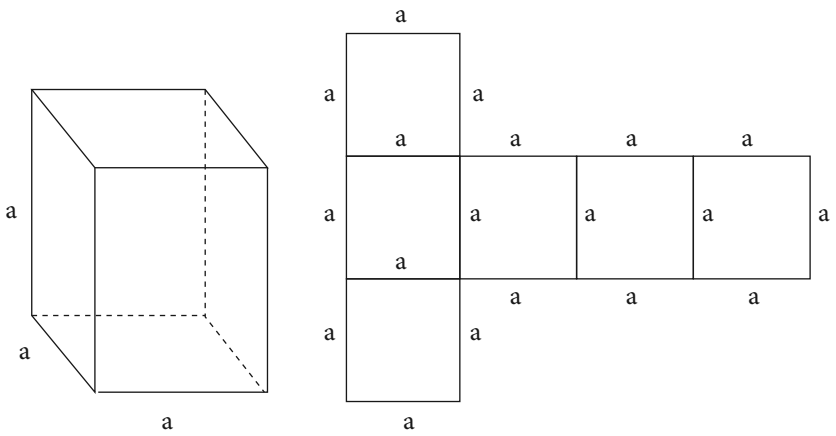
$|BG|^2 = |BC|^2 + |CG|^2$
$|BG|^2 = 3^2 + 2^2$
$|BG| = \sqrt{13}$ bulunur.

BGN dik üçgeninden,

$|BN|^2 = |GN|^2 + |GB|^2$
$|BN|^2 = 1^2 + \left(\sqrt{13}^2\right)$
$|BN| = \sqrt{14}$ bulunur.

## Küp

Bütün yüzeyleri kare olan dik prizmaya küp denir. Dolayısıyla küpün karşılıklı ayrıtlarının tümü parallel ve uzunlıkları birbirine eşittir. Aşağıdaki şekilde bir küp ve açınımı verilmiştir.




*Şekil 5.13. Küp ve açınımı*

Bir ayrıtının uzunluğu *a birim olan* küpün,

$$Alanı = S = 6a^2$$

$$Hacmi = V = a^3$$

$$Yüzey\ Köşegeni = e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Cisim\ Köşgeni = k = a\sqrt{3}\ \text{dür.}$$

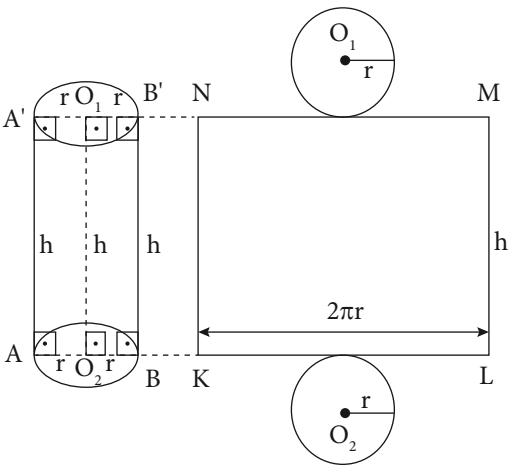
**Örnek:** Taban alanı 25 $cm^2$ olan bir küpün hacmi kaç $cm^3$ tür?

**Çözüm:** Taban alanı: $a \times a = a^2 = 25$ olup bir kenar 5 *cm* dir.

Hacim formülü, $V=a^3$den $5^3 = 125$ dir.

## Silindir

Bir ABCD dikdörtgeninin [BC] kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen cisme dik silindir denir. Silindirin alt ve üst tabanı daire olan prizma şeklinde de tanımlanır. **(Şekil 5.14)**




*Şekil 5.14. Silindir ve açınımı*

Açık ve kapalı bir şekilde verilen silindirde KLMN dikdörtgeni yanal alan, $|KL| = |MN|$ çemberin çevresi, $|KN| = |MN|$ silindirin yüksekliğidir. Dolayısıyla silindirin;

$$Yanal\ alan = 2\pi rh$$

$$Alt\ ve\ üst\ taban\ alan = 2\pi r^2$$

$$Tüm\ alan = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$Hacmi = \pi r^2 h$$

dır.

**Örnek:** Taban alanı $8\pi\ br^2$ olan yanal alanı $4\pi\ br^2$ olan silindirin hacmi kaç $br^3$ tür?

**Çözüm:** Taban alanı $8\pi\ br^2$ olan silindirin yarı çapı,

$$\pi r^2 = 8\pi$$

$$r = 2\sqrt{2}\ \ dir.$$

Yanal alanı $4\pi\ br^2$ olan silindirin yüksekliği ise,

$$2\pi rh = 4\pi$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

Silindirin hacmi, $V = \pi r^2 h$ dan, $V = \pi(2\sqrt{2})^2, \ \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\pi\sqrt{2}\ br^3$ bulunur.

## Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen herbir durum için oluşabilecek ışın sayısını belirleyiniz.
   I. Doğrusal olmayan üç nokta
   II. Doğrusal olmayan dört nokta
   III. Doğrusal olmayan beş nokta
   IV. Doğrusal olmayan *n* nokta

2. Dışbükey bir ABCDE beşgeninin tüm kenarları eşit uzunluktadır. m(A)=m(B)=90° ise m(E) kaç derecedir?

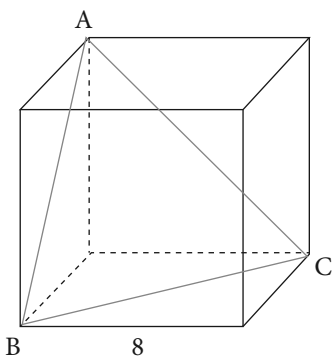
3. 2 018 000 milimetreyi cm, dm, dam, hm ve km cinsinden yazınız.

4. Bir çiftçi elindeki 15 dekar tarlanın 800 $m^2$ sine pamuk, 5 ar lık kısmına tütün ekecektir. Geri kalan alanı ise nadasa bırakacaktır. Nadasa bırakılan alan kaç $m^2$ dir?

5. Bir sürahinin içerisinde 4 litre su vardır. Bu suyu her biri 200 mililitre su alan bardaklara doldurmak istiyoruz. Kaç bardak doldurabiliriz?

6. Bir dikdörtgenler prizmanın ayrıtlarının uzunlukları 2, 3, 4 saylar ile orantılıdır. Tüm alan 104 $cm^2$ olduğuna göre, bu dikdörtgenler prizmasının, hacminin kaç $cm^3$ dür.

7. Aşğıdaki şekilde verilen küpün bir ayrıtı 8 birim olduğuna göre ABC üçgeninin alanı kaçtır?



## KAYNAKÇA

Albayrak, M. (2000). İlköğretimde matematik ve öğretimi. Ankara, Işık Matbaası.

Fraser, P. (1980). Mathematics, TED Ankara College Secondary School Publications.

Mirasyedioğlu, Ş. (1999). Temel matematik-II, Ankara, Gündüğz Eğitim Yayıncılık.

Sulak, H. (2006). Temel Matematik-II. Ankara, Nobel Yayın Dağıtım.

Üstüner, M. (2012). Matematik ve Meslek Matematiği (3. sinif elektrik tesisatçiliği). Ankara, Millî Eğitim Bakanliği Açik Öğretim Okulları, Hayat Boyu Öğrenme Genel Müdürlüğü.

## Biraz Geometri Biraz Ölçüler

Geometri uzayda tasarlanabilen biçimlerin, kurallara uyularak incelenmesini konu alan matematik dalıdır. Etimolojik olarak "geometri" kelimesi, Dünya'nın ölçümü anlamına gelmektedir. Geometri çok eski çağlardan beri vardır. Ancak geometri ismi, bu ilmin ilk sistematik hale gelmeye başladığı Eski Yunanlılardan bu yana kullanılmaya başlanmıştır. Bu bilim dalı başlangıçta, düzlemdeki ve uzaydaki şekillerin incelenmesini konu edinmiştir. Yüzölçümü hesaplamak istenen bir tarlanın çizgisel taslağından tutun da gök cisimlerinin yörüngelerinin saptanmasına, haritalara, planlara, coğrafyada kullanılan ölçeklere, makine yapımına, mimarlığa varıncaya kadar, geometri bilgisinin mutlaka gerekli olduğu alan pek çok ve geniştir.

Geometrinin "yer ölçme" (geo: yer, metr: ölçüm) anlamı aslında tarihin derinliklerinde geometrinin taşıdığı anlamdır. İnsanoğlu toprak ile karşılaştığında ondan yararlanmaya, ona sahip olmaya başlamıştır. İlk medeniyetin beşiği sayılan Nil Vadisi'nde, nehir taşar ve en dar yeri 7 km, en geniş yeri 40 km olan yatağını alüvyonlu topraklarla örtmektedir. Böylece arazi üzerindeki hudutları bir bakıma siler ardından araziyi işlemek isteyenler arasında "burası senindi, burası benimdi" kavgaları olmakta bu probleme kalıcı bir çözüm bulmak hayli zor ve zaman alıcı olmuştur. Nihayet gökyüzündeki yıldızların oluşturduğu üçgen, dörtgen, ... gibi şekiller arazi üzerine çizilmiş ve bunların sahipleri tespit edilerek karışıklıklara son verilmiştir. Böylece ilk geometri konuları da ele alınmış oldu. Bu gayretler devam ettikçe geometri gelişmiştir.

İlk geometrilerin tümü, kendi doğası nedeniyle sezgiseldir. Bunlar daha çok ilk insanların çevresinde görülen doğal şekillerdir. Bu geometriler daha çok görsel türdedir. İkinci olarak şekillerin ölçülmesi aşaması gelmektedir. Ölçü birimleri de geometri gibi zaman içerisinde meydana gelen gereksinimlerden dolayı ortaya çıkmıştır. Ölçü birimlerinin tarihi gelişimi ihtiyaçların zaman içerisinde değişmesi ve bu ihtiyaçların ölçü birimlerine yön vermesi şeklinde meydana gelmiştir. Günümüzde tüm dünya genelinde kullanılan uzunluk, ağırlık, sıcaklık ve zaman gibi ölçme alanlarında yer alan birimler uzun bir periyot sonrasında oluşmuştur. Ölçü birimlerinin ortaya çıkmasındaki en büyük neden dünya genelinde adaletin sağlanmasının istenmesidir. Özellikle farklı coğrafyalarda yaşam süren insanlar ölçü birimleri olarak farklı şeyleri kullandığından dolayı ciddi derecede bir haksızlık oluşuyordu. Günümüzde dünya genelinde kullanılan ölçü birimleri ve ölçme yöntemleri aynı olduğundan dolayı haksızlıkların önüne büyük ölçüde geçilmiştir. Bazı ilkel kabileler eski yöntemleri kullanmaya devam ediyor olsa da zaman içerisinde bu kabilelerde yer alan ölçme yöntemlerinin değişip yerini modern ölçme yöntemlerinin alacağı inancındayız.

# YAZARLAR HAKKINDA

**Prof. Dr. Ahmet KAÇAR**

1962 yılında Kastamonu/Küre'de doğdu.1979 yılında Kastamonu Abdurrahmanpaşa Lisesinden, 1984 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl mezun olduğu bölüme Araştırma Görevlisi olarak atandı. Atatürk Üniversitesinde 1986 yılında Yüksek Lisansını, 1990 yılında Doktorasını tamamladı. 1990 yılında Atatürk Üniversitesinde Yardımcı Doçent unvanıyla öğretim üyesi oldu.

1995 yılında Gazi Üniversitesi Kastamonu Eğitim fakültesine Yardımcı Doçent olarak naklen atandı. Bu fakültede 1999 yılında Doçent, 2005 yılında Profesör oldu.

Halen Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalında öğretim üyesidir. Kastamonu Eğitim Dergisi Editörlüğü ile Kastamonu Üniversitesi Güzel Sanatlar ve Tasarım Fakültesi Dekanlığı görevlerini yürütmektedir.

**Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ**

1973 yılında Emirdağ'da doğmuştur. İlk, orta ve lise öğrenimini Eskişehir'de tamamlamıştır. 1994 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden birincilikle mezun olmuştur. 1996 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans ve 2001 yılında Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimini tamamlamıştır. 1994-2001 yılları arasında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi, 2001-2002 yılları arasında Araştırma Görevlisi Doktor olarak görev yapmıştır. 2002 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü'ne Yardımcı Doçent olarak atanmıştır. 2010 yılında "matematik eğitimi" bilim dalında Doçent ve 2015 yılında Profesör unvanı almıştır. Halen Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Başkanı olarak görevini sürdürmektedir.

### Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DELİL

1966 yılında Siirt'te doğdu. 1989'da Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi'ni bitirdi. 1992'de Uludağ Üniversitesi'nde Yüksek Lisans, 1997'de University of Wales Cardiff'te Doktora yaptı. Halen, Celal Bayar Üniversitesi Demirci Eğitim Fakültesi'nde öğretim üyesidir.

### Prof. Dr. Abdulkadir TUNA

1976'da Erzurum'da doğdu. 1998'de Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü bitirdi. 2005 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını ve 2011 yılında ise aynı enstitüde doktorasını tamamladı. Halen Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesinde öğretim üyesidir.

### Doç. Dr. Abdullah Çağrı BİBER

1977'de Ankara'da doğdu. 2000'de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi. 2004 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını ve 2010 yılında ise Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünde doktorasını tamamladı. Halen Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesinde öğretim üyesidir.

### Doç. Dr. Tuba ADA

1973'te Eskişehir'de doğdu. 1994'te Anadolu Üniversitesi Matematik bölümünü bitirdi. 1997'da Eskişehir Osmangazi Üniversitesinde Yüksek Lisans ve 2005'te aynı üniversitede doktora yaptı. Halen Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesinde öğretim üyesidir.

### Prof. Dr. Alper ÇİLTAŞ

1981 yılında Kars/Sarıkamış'da doğdu. İlk ve orta öğrenimin son sınıfa kadar Sarıkamış'a bağlı Karaurgan nahiyesinde tamamladı. Son sınıfını İzmir/Menemen Lisesinde bitirdi. Lisans öğrenimini ise Erzurum Atatürk Üniversitesi'nde tamamlayarak 2005 yılında mezun oldu. Aralık 2005'te Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. Halen Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde öğretim üyesidir.