MY MATEMATİK-2

KONU ANLATIMLI - ÖRNEK ÇÖZÜMLÜ

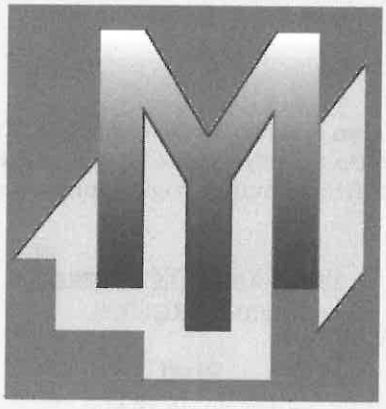
Mustafa YAĞCI



ALTIN NOKTA

MAT 2 DERS NOTLARI

Türkiye Matematik Öğretmenleri Zümresi **TMOZ**'un katkılarıyla



MY MAT-2

Mustafa YAĞCI



ALTIN NOKTA YAYINEVİ

ADANA - 2012

Copyright © Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım

ISBN: 978-975-6146-94-1

Akademik Yayınlar Serisi
MY MATEMATİK-2 DERS NOTLARI
Mustafa YAĞCI
yagcimustafa@yahoo.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır. **Tüm hakları Yazarına aittir.** Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

Genel Yayın Yönetmeni
Halil İ. AKÇETİN

Dizgi
Altın Nokta Grafik

Kapak:
Altın Nokta Grafik

BASKI VE CİLT
ERTEM BASIM Ltd. Şti. / ANKARA
Tel: (0312) 640 16 23 Fax: (0312) 640 16 24

YAYIN - DAĞITIM
Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
859 Sk. No:1/Z-4 Konak / İZMİR
Tel – Faks: 0 (232) 441 25 95

www.altinnokta.com.tr
altinnokta@altinnokta.com.tr
www.nokta2000.com
nokta@nokta2000.com
www.kitapana.com
kitapana@kitapana.com.com
www.irisyayinevi.com
iris@irisyayinevi.com.com

MART – 2012
Birinci Basım

İÇİNDEKİLER

Bölüm	Konu	Sayfa	Bölüm	Konu	Sayfa
1	Giriş	001-006	36	Kosinüs Teoremi	271-280
2	İkinci Dereceden Denklemler	007-017	37	Sinüs Teoremi	281-283
3	Köklü Denklemler	018-021	38	Alan Hesaplarında Trigonometri	284-291
4	Kesirli Denklemler	022-026	39	Toplam – Fark Formülleri	292-302
5	Değişken Değiştirme	027-032	40	Yarım Açı ve Kat Formülleri	303-315
6	İki Bilinmeyenli Denklemler	033-036	41	Dönüşüm Formülleri	316-322
7	Geometride 2. Dereceden Denklem	037-040	42	Ters Dönüşüm Formülleri	323-325
8	Kökler Toplamı ve Çarpımı	041-052	43	Trigonometrik Fonksiyon Grafikleri	326-336
9	Kökleri Bilinen Denklemler	053-057	44	Periyot Bulma	337-339
10	Üçüncü Dereceden Denklemler	058-068	45	Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	340-347
11	Ortak Köklü Denklemler	069-072	46	Temel Trigonometrik Denklemler	348-361
12	Eşitsizlikler	073-077	47	Lineer Trigonometrik Denklemler	362-365
13	Eşitsizliklerde Temizlik	078-088	48	Homojen Trigonometrik Denklemler	366-374
14	Eşitsizlik Sistemleri	089-092	49	Karmaşık Sayılar	375-385
15	Köklerin Bir Reel Sayıyla Kıyaslanması	093-096	50	Sanal Birimin Kuvvetleri	386-389
16	Parabol	097-103	51	Bir Karmaşık Sayının Modülü	390-396
17	Parabol Denkleminin Yazılması	104-111	52	Karmaşık Sayıların Görüntüleri	397-404
18	Parabolün Tepe Noktası	112-118	53	Kutupsal Gösterim	405-412
19	Parabol ile Eğrilerin Kesişimi	119-125	54	Kutupsal Gösterimlerle İşlemler	413-423
20	Saymanın Temel İlkesi	126-139	55	Aradaki Uzaklığın Bulunması	424-425
21	Permutasyon	140-143	56	Orijin Etrafında Dönme	426-427
22	Tekrarlı Permutasyon	144-150	57	Argümenti Bilinen z'leri Çizmek	428-431
23	Dairesel Permutasyon	151-153	58	Logaritma Fonksiyonu	432-434
24	Kombinasyon	154-167	59	Logaritma Fonksiyonu Özellikleri	435-447
25	Geometrik Kombinasyon	168-178	60	Taban Değiştirme	448-455
26	Binom Açılımı	179-192	61	Logaritmik Fonksiyonların Tersi	456-459
27	Olasılık Fonksiyonu	193-217	62	Logaritmik Eşitlikler	460-464
28	Açı ve Açı Ölçüsü Birimleri	218-223	63	Logaritmik Eşitsizlikler	465-469
29	Temel Trigonometrik Teoremler	224-230	64	Logaritmik Fonksiyon Grafikleri	470-473
30	Trigonometrik Oranlar	231-237	65	Doğal Logaritma Fonksiyonu	474-479
31	Özel Ölçülerin Trigonometrik Değerleri	238-241	66	Tümevarımla Kanıt Yöntemi	480-484
32	Trigonometrik Eksenler	242-248	67	Toplam Sembolünün İşlevi	485-490
33	Birim Çemberin Kullanımı	249-258	68	Toplam Sembolü Formülleri	491-496
34	Trigonometrik Değerlerde Sıralama	259-263	69	Toplam Sembolü Teoremleri	497-505
35	Diğer Oranların Bulunması	264-270	70	Çarpım Sembolü	506-512

Teşekkür ediyorum!

Öncelikle, matematiğe bakışımı değiştiren ve meslekte her neyi doğru biliyorsam sebebi olan Prof. Dr. Ali NESİN'e

ve bu kitabın basılmasında imkanlarını, desteğini ve tecrübesini benden esirgemeyen Mehmet EKŞİ ve Halil İbrahim AKÇETİN'e,

ardından ilk günden itibaren bu işin tüm zahmetlerine katlanıp kitabın tüm aşamalarında bana yardımlarını esirgemeyen kıymetli asistanlarım Erkan YILDIRIM ve İmran ÖZENLİ'ye,

ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim güzel dostlarım Füsun YAZICILAR, Reyhan KURTOĞLU, Selcan SÜNNETÇİOĞLU ve Mustafa SÜNNETÇİOĞLU'na,

ve kitabın tashih aşamasında elele verip hatalarımı düzeltmeye çalışan başta Muharrem ŞAHİN, Eyüp Kamil YEŞİLYURT ve İbrahim KUŞCUOĞLU olmak üzere

Ersoy ACAR, Numan AKKOÇ, Murat AKKUŞ, Ahmet ALKAN, Şafak ALTUNSOY, Ahmet ARDUÇ, Murat AYDIN, Kemal AYDIN, Önder BAŞARANHINCAL, Serdal BOZOK, Uğur CESUR, Halit ÇELİK, Murat ÇELİKKAYA, Taylan ÇİFTÇİ, Gökhan DEMİR, Bekir DEMİRBAŞ, Yavuz DEMİRDÖĞEN, Osman DEMİRKOPARAN, Ömer DİLER, Saygın DİNÇER, Levent DOĞAN, Zekeriya DUR, Cihan DURMUŞ, Nevzat DÜZENLİ, Ahmet ELMAS, Yılmaz ERDEM, Erhan ERTÜRK, Murat GİDİCİ, Serkan GÖK, Gürkan GÜLCEMAL, Tolga GÜLEĞLEN, Fethi GÜNAY, Mustafa GÜRBÜZ, Bülent IŞIK, Taner KALYONCU, Gökhan KEÇECİ, Hasan Ali KILIÇ, Göksel KOCA, Serkan KOÇER, İrfan KÖMÜR, Erkan MERİÇ, Deniz POTUR, Eser OĞUZ, Yavuz OĞUZ, Derviş OKTAY, Taylan OKTAY, Murat ÖZARSLAN, Fatih SAĞLAM, İmran SIĞIRCI, Abdullah SÜZEN, İbrahim ŞEPİK, Peri TALAY, Murat TANRIKULU, Murat TAŞTEMUR, Mehmet Akif TEKİNTAŞ, Fatih TURGUT, Hasan YAŞAYACAK, H.Cahit YÜCEL, Rasim ZENCİR

ile birlikte tüm TMOZ üyesi meslektaşlarıma sonsuz teşekkürlerimle…

Mustafa Yağcı

Elleri öpülesi anneme ve babama...

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İkinci Dereceden Denklemler

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ birer reel sayı olmak üzere

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

biçiminde yazılan ifadelere, n doğal sayı olduğu sürece, **x'e bağlı n'ninci dereceden polinom** denir.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$$

biçiminde oluşturulan denklemlere de **polinom denklemler** denir. Bu konuyu işlerken tüm derdimiz, bu eşitlikleri doğrulayan x'leri bulmak olacak, ki bu x'lere denklemin **kökleri** denir. Kökleri bulmanın metotları da, denklemlerin adları da n değiştikçe değişir. $a_n \neq 0$ ise denkleme **n'ninci dereceden denklem** denir. n'ninci dereceden denklemlerin n tane kökü vardır. Bu kanıtlanabilir elbet. Merak etmeyin, derecesi kaç olursa olsun, tüm polinom denklemlerin sırrını çözeceğiz. Bunu bazen denklemleri çözerek yapacağız, bazen çözemeyeceğimizi göstererek...

Birinci Dereceden Denklemler. a ve b birer reel sayı olmak üzere, $a \neq 0$ iken

$$ax + b = 0$$

biçimindeki denklemlere **birinci dereceden denklem** denir.

Birinci dereceden denklemleri bugün artık ilkokul çocukları bile çözebiliyor. a'nın sıfır olmadığını bildiğimizden a'ya bölmekte bir sıkıntı yaşamayacağız.

$$ax + b = 0 \text{ ise } x = -\frac{b}{a}.$$

Fazla detaya girmememizin elbet bir sebebi var. Hala birinci dereceden denklemleri çözerken problem yaşayan veya daha da öte, ne olduğunu bile bilmeyen bir kimse iseniz, elinizdeki bu sayfaları derhal bırakıp, gidip o konuya çalışmanızı şiddetle önermekteyiz. Aksi takdirde bu notları da anlayamayacak, üstüne üstlük belki de bizi suçlayacaksınız! ☺

İkinci Dereceden Denklemler. a, b ve c birer reel sayı olmak üzere, $a \neq 0$ iken

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden denklem** denir.

Bu fasikülün başrol oyuncusu bu denklemler olacak. İkinci dereceden denklemleri çözmeyi, yani bu denklemleri sağlayan x'leri bulmayı M.Ö. 400 yıllarında Babilliler üç aşağı beş yukarı biliyormuş. Şimdi biz de öğreneceğiz. Tabii ki üç aşağı beş yukarı değil, dört dörtlük!

İkinci dereceden denklemleri çözmek için farklı teknikler bulunmaktadır. Önce, daha önceden de bildiğimiz çarpanlara ayırma metodunu verelim.

Çarpanlara Ayırma Metoduyla İkinci Dereceden Denklemlerin Çözülmesi

Baştan belirtelim, her ikinci dereceden denklemde bu metot sökmez. Eğer denklemi oluşturan ikinci dereceden polinom çarpanlarına ayrılabiliyorsa söker. Şimdilik örneklerimizi koşullara uygun şekilde vereceğiz. Sonra diğer durumları da detaylı olarak işleyeceğiz.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerine x_1 ve x_2 diyelim. Bu x_1 ve x_2 değerlerinin bulunması, $a = 1$ ve $a \neq 1$ iken farklı teknikler içerir. Önce $a = 1$ durumunu ele alalım.

***a* = 1 durumu.** a'nın 1 olduğu durumda, $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi $x^2 + bx + c = 0$ şekline döner. $x^2 + bx + c = 0$ denklemleri çözülürken, önce toplamları b ve çarpımları c olan iki sayı aranır. Bu sayıları çoğu zaman zihinden bile bulmak mümkündür. Bu sayılara p ve q diyelim.



$p + q = b$ ve $p \cdot q = c$ olduğundan

$$x^2 + bx + c = x^2 + (p + q)x + (p \cdot q)$$
$$= (x + p)(x + q) = 0$$

olur ki buradan $x_1 = -p$ ve $x_2 = -q$ olarak bulunur. Demek ki, denklemin kökleri, aslında bizim zihinden bulduğumuz sayıların ters işaretlileriymiş.

Örnek. $x^2 - 2x - 3 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{-1\}$ C) $\{3\}$ D) $\{-1, 3\}$ E) $\{-3, 1\}$

Çözüm: Çarpımları -3 ve toplamları -2 olan iki sayı bulmalıyız. Bu sayılar -3 ve 1 olduklarından

$$x_1 = 3 \text{ ve } x_2 = -1\text{'dir.}$$

Test çözerken, çözüm kümesini bulmak için şıklardaki değerleri denklemde yerine yazıp, denklemi sağlayıp sağlamadığına da bakabilirsiniz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 - 7x + 12 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{3\}$ C) $\{4\}$ D) $\{-3,-4\}$ E) $\{3,4\}$

Çözüm: Bu sefer çarpımları 12 ve toplamları -7 olan sayılar aranıyor. Bu sayıların -3 ve -4 olduğunu hepimiz rahatlıkla bulabiliriz. O halde $x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^2 + (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-\sqrt{3}, -1\}$ B) $\{-\sqrt{3}, 1\}$ C) $\{1, \sqrt{3}\}$ D) $\{-1, \sqrt{3}\}$ E) $\{-\sqrt{3}\}$

Çözüm: Bu sefer, çarpımları $-\sqrt{3}$ ve toplamları $\sqrt{3}-1$ olan sayılar aranıyor. Bu sayıların $\sqrt{3}$ ve -1 olduğunu hepimiz rahatlıkla bulabiliriz. Demek ki kökler, bu değerlerin ters işaretlileri yani $x_1 = -\sqrt{3}$ ve $x_2 = 1$'miş.

Doğru cevap: B.

a* ≠ 1 *durumu. $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözmek için önce $ax^2 + bx + c$ ifadesinde a ile c değerleri çarpanlarına ayrılır. a'nın çarpanları a_1 ve a_2, c'nin çarpanları da c_1 ve c_2 olsun. Bu değerleri aşağıdaki gibi birer ok çizerek gösterelim.

$$\begin{array}{cc} ax^2 + bx + c = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ a_1x \quad\quad c_1 \\ a_2x \quad\quad c_2 \end{array}$$

✓ Eğer $a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = b$ oluyorsa, yani çapraz terimlerin çarpımları toplamı ortadaki terimi veriyorsa, karşılıklı terimler toplamı çarpanları verir.

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = 0$$

şeklinde olduğundan

$$x_1 = -\frac{c_1}{a_1} \text{ ve } x_2 = -\frac{c_2}{a_2}$$

bulunur.

✓ Eğer $a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = b$ oluyorsa, yani karşılıklı terimlerin çarpımları toplamı ortadaki terimi veriyorsa, çapraz terimlerin toplamı çarpanları verir.

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_2)(a_2x + c_1) = 0$$

şeklinde olduğundan

$$x_1 = -\frac{c_2}{a_1} \text{ ve } x_2 = -\frac{c_1}{a_2}$$

bulunur.

Örnek. $5x^2 - 99x - 20 = 0$ *denkleminin pozitif kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Çözüm: İkinci dereceden denklemi çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{cc} 5x^2 - 99x - 20 = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 5x \quad\quad +1 \\ 1x \quad\quad -20 \end{array}$$

Çapraz çarpımların toplamı ortadaki terimi verdiğinden, ifadeyi çarpanlarına ayırırken karşılıklı terimleri kullanacağız.

$$5x^2 - 99x - 20 = (5x + 1)(x - 20) = 0$$

O halde $x_1 = -\frac{1}{5}$ ve $x_2 = 20$'dir. Pozitif olanı 20'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $34x^2 - 41x - 15 = 0$ *denkleminin negatif kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{5}{11}$ B) $-\frac{5}{13}$ C) $-\frac{5}{17}$ D) $-\frac{5}{19}$ E) $-\frac{5}{21}$

Çözüm: İkinci dereceden denklemi çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{cc} 34x^2 - 41x - 15 = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 2x \quad\quad -3 \\ 17x \quad\quad +5 \end{array}$$

Çapraz çarpımların toplamı ortadaki terimi verdiğinden, ifadeyi çarpanlarına ayırırken karşılıklı terimleri kullanacağız.

$$34x^2 - 41x - 15 = (2x - 3)(17x + 5) = 0$$

O halde $x_1 = \frac{3}{2}$ ve $x_2 = -\frac{5}{17}$'dir. Negatif olan kök x_2'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $-7x^2 + 23x + 20 = 0$ *denkleminin küçük kökü hangi iki ardışık tam sayının arasındadır?*

A) $(-2,-1)$ B) $(-1,0)$ C) $(0,1)$ D) $(1,2)$ E) $(2,3)$

Çözüm: İkinci dereceden denklemi çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{cc} -7x^2 + 23x + 20 = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ x \quad\quad -5 \\ -7x \quad\quad -4 \end{array}$$

Bu sefer karşılıklı çarpımların toplamı ortadaki terimi verdiğinden, ifadeyi çarpanlarına ayırırken çapraz düşüneceğiz.

$$-7x^2 + 23x + 20 = (x - 4)(-7x - 5) = 0$$

O halde $x_1 = 4$ ve $x_2 = -5/7$'dir. Küçük kök olan $-5/7$ değeri $(-1, 0)$ aralığındadır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olup, $a \neq 0$ olmak üzere*

$$ax^2 - (a^2b + b)x + ab^2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\}$ B) $\{-\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\}$ C) $\{\frac{b}{a}, -\frac{a}{b}\}$

D) $\{\frac{b}{a}, ab\}$ E) $\{ab, \frac{a}{b}\}$

Çözüm:

$$ax^2 - (a^2b+b)x + ab^2 = 0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$ax \qquad -b$$
$$x \qquad -ab$$

Çapraz çarpımların toplamı, ortadaki terimi verdiğinden, ifadeyi çarpanlarına ayırırken karşılıklı terimleri kullanacağız.

$$ax^2 - (a^2b + b)x + ab^2 = (ax - b)(x - ab) = 0$$

O halde $x_1 = \frac{b}{a}$ ve $x_2 = ab$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $3x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$ *denkleminin büyük kökü, küçük kökünün kaç katıdır?*

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

$$3x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\sqrt{3}x \qquad +1$$
$$\sqrt{3}x \qquad -2$$

Çapraz çarpımların toplamı da, karşılıklı terimlerin çarpımlarının toplamı da ortadaki terimi veriyor. O halde ifadeyi çarpanlarına ayırırken ister çapraz, ister karşılıklı terimleri kullanın.

$$3x^2 - \sqrt{3}x - 2 = (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 2) = 0$$

O halde $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$'tür. Büyük kökün, küçük kökün -2 katı olduğu görülmektedir.

İkinci yol. İlerde 'Değişken Değiştirme' başlığı altında bu tekniği detaylı olarak inceledik. Siz şimdi sadece 'Ne güzelmiş!' demekle yetinin. ☺

$x = \sqrt{3}a$ olsun. Denklemimizi buna göre düzenleyelim:

$$9a^2 - 3a - 2 = 0$$
$$(3a + 1)\cdot(3a - 2) = 0$$

olduğundan $a_1 = -\frac{1}{3}$ ve $a_2 = \frac{2}{3}$'tür. Görüldüğü üzere büyük kök, küçük kökün -2 katıdır.

Doğru cevap: A.

İkinci Dereceden Denklemlerin Tamkare Haline Getirilerek Çözülmesi

Önce, tamkare nedir, onu öğrenelim. 1, 4, 25, 100 gibi sayılar kare sayılardır. Aslına bakarsanız 7 de buna göre bir kare sayıdır, çünkü hem $\sqrt{7}$'nin hem de $-\sqrt{7}$'nin karesidir. Bu kargaşayı ortadan kaldırmak için kare sayıları, bir tam sayının karesi olan sayılar diye tanımlamışlar. Bundan sonra artık 7, bir kare sayı olmaktan çıktı.

Benzer bir tanımı polinomlar için de verebiliriz. Bir polinomun karesi olan polinomlara **tamkare polinom** veya kısaca **tamkare** denir.

Birinci dereceden bir polinom yazıp, karesini alalım da tamkare polinomlar nasıl olurlarmış görelim. Şimdilik başkatsayısı 1 olsun.

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$$

olduğundan sabit terimin, x'in katsayısının yarısının karesi olduğunu görürüz.

Örneğin,

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$
$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$
$$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$
$$x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2$$
$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = (x - \frac{7}{2})^2$$
$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = (x + \frac{1}{4})^2$$
$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = (x - \frac{5}{6})^2$$
$$x^2 - 2mx + m^2 = (x - m)^2$$
$$x^2 - (2m+4)x + m^2 + 4m + 4 = (x - m - 2)^2$$

Anladınız değil mi, çok kolay. Peki bunu neden öğreniyoruz? Ne işimize yarayacak ki?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklindeki her denklemi çözemesek de şu anki bilgilerimizle

$$(ax + b)^2 = c$$

denklemlerini çözebilmekteyiz. Soru, temelde *karesi c olan sayıları bul* şeklinde olduğundan, bu sayıların

$$ax + b = \sqrt{c}$$

veya

$$ax + b = -\sqrt{c}$$

eşitliklerini sağlayan x'ler olduğunu söylüyoruz, bitiyor. İşte, tamkare olmayan ikinci dereceden denklemleri terim ekleme çıkarma yaparak tamkare olacak hale getireceğiz. Gerisi birinci dereceden denklem çözmek kadar basit olacak. Hemen bir örnek verelim.

Örnek. $x^2 - 2x - 8 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-3, 3\}$ B) $\{-\sqrt{3}, 3\}$ C) $\{-2, 4\}$
D) $\{-4, 2\}$ E) $\{-8, 1\}$

Çözüm: Siz denklemin çarpanlarına ayrıldığına bakmayın. Sağlamasını rahat yapalım diye böyle bir örnek verdik. Bir soruyla başlayalım. $x^2 - 2x$ ile başlayan tamkare neyle biter? x'in katsayısının yarısının karesiyle bitmesi lazım. Yani 1 ile. Bunun için ifadeye 9 ekleyip, çıkartacağız.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 8 \\ &= x^2 - 2x - 8 + 9 - 9 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 9 \\ &= (x-1)^2 - 9 \\ &= (x-1)^2 - 3^2 \\ &= (x-1-3)(x-1+3) \\ &= (x-4)(x+2) \end{aligned}$$

diye denklemi sağlayan x değeri 4 veya –2'dir. Bakın hiç formül filan bilmeden, kökleri nasıl bulduk. Hatta isteyen

$$(x-1)^2 - 9 = 0$$

eşitliğinden başka yola da sapabilir: $(x-1)^2 = 9$ olduğundan $x - 1 = \pm 3$ denebilir, ki denmelidir, bu yol daha kısadır.

$x - 1 = 3$ eşitliğinden $x = 4$ ve $x - 1 = -3$ eşitliğinden de $x = -2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2 - 3x - 8 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{3 \pm \sqrt{41}\}$ B) $\{3 \pm \sqrt{55}\}$ C) $\{3 \pm 2\sqrt{2}\}$
D) $\{\frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}\}$ E) $\{\frac{3 \pm \sqrt{55}}{2}\}$

Çözüm: Biz bir önceki çözümdeki ikinci yolun sapağından çözümlere devam edeceğiz.

$$0 = x^2 - 3x - 8 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{41}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{41}{4}$$

olduğundan $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{41}{4}$ olur ki buradan

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$$

olduğundan $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$ olur.

Doğru cevap: D.

Gördüğünüz üzere metodumuz, denklemi oluşturan polinom çarpanlarına ayrılmasa da işliyor. Hemen bir örnek daha çözelim.

Örnek. $x^2 + 32x + 56 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{16 \pm 2\sqrt{10}\}$ B) $\{16 \pm 10\sqrt{2}\}$ C) $\{-16 \pm \sqrt{10}\}$
D) $\{-16 \pm 2\sqrt{10}\}$ E) $\{-16 \pm 10\sqrt{2}\}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 32x + 56 \\ &= x^2 + 32x + 256 - 200 \\ &= (x+16)^2 - 200 \end{aligned}$$

olduğundan $(x+16)^2 = 200$ olur ki buradan

$$x + 16 = \pm 10\sqrt{2}$$

olduğundan $x = -16 \pm 10\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Şu an için tamkare haline getirme olayını anlamış olmalısınız. Anladınız, anladınız da şu ana kadar çözdüklerimizin hepsinde polinomun başkatsayı 1 idi. Ya 1 olmazsa, o zaman ne yapacağız? O zaman ne yapacağımızı bir örnekle anlatalım:

Örnek. $2x^2 - 12x - 1 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{3 \pm \sqrt{19}\}$ B) $\{3\sqrt{2} \pm \sqrt{19}\}$ C) $\{6 \pm \sqrt{19}\}$
D) $\{\frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}\}$ E) $\{3 \pm \sqrt{\frac{19}{2}}\}$

Çözüm: Gördüğünüz üzere polinomumuzun başkatsayısı 1 değil. Denklemi tamkare içeren bir hale çevireceğiz ama tamkare olma şartlarında başkatsayının 1 olması vardı, bu sebeple eşitliğin her iki yanını 2'ye böleceğiz.

$$2x^2 - 12x - 1 = 0$$

$$x^2 - 6x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - \frac{19}{2} = 0$$

$$(x-3)^2 = \frac{19}{2}$$

$$|x-3| = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{\frac{19}{2}}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{\frac{19}{2}}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. $\frac{9x^2-6x+1}{9}=(x+a)^2$ *eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{5}$

Çözüm: Eşitliğin sol yanıyla oynamaya başlıyoruz:

$$\frac{9x^2-6x+1}{9}=\frac{(3x-1)^2}{3^2}=\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

olduğundan $a=-\frac{1}{3}$ olur.

Doğru cevap: C.

Tamkare ifadeleri iyice öğrendiğimiz için, artık genel formülü bulabilecek kıvama gelmiş olmamız lazım. Başlıyoruz. İyi takip edin! İnsansoyu tam 2000 yıl beklemiş bunun için. Ne var, siz de bir 10 dakikanızı ayırın!

Önce, yine denklemi tamkare içeren bir şekle getirmek amacıyla denklemi a parantezine alıyoruz. Bu sayede başkatsayımız 1 olacak. İsterseniz eşitliğin her iki yanını a'ya da bölebilirsiniz, nasılsa a sıfırdan farklı olarak verilmiş.

$$\begin{aligned}0&=ax^2+bx+c\\&=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})\\&=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})\\&=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})\right]\\&=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

olduğundan ve $a\neq 0$ olduğunu bildiğimizden

$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

çıkar. Bundan da

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

çıkar. Her iki tarafın karekökünü alalım:

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

olur. x'i yalnız bırakırsak mutlu sona erişeceğiz:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

çıkar. Nihayet! Biri artılı diğeri eksili olmak üzere iki kök bulduk. Bundan böyle birinin adı "x_1", diğerinin "x_2" olsun. x_1 ile x_2 arasındaki ilişkileri daha sonra göreceğiz.

Şimdi daha önce çözümlerini yaptığımız soruları bir de formülümüzle çözelim de formülün nemenem bir şey olduğunu görün.

Örnek. $x^2-2x-8=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-3, 3\}$ B) $\{-\sqrt{3}, 3\}$ C) $\{-2, 4\}$
D) $\{-4, 2\}$ E) $\{-8, 1\}$

Çözüm: Denklemimizde $a=1$, $b=-2$ ve $c=-8$ olduğundan;

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}\\&=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm6}{2}\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$x_1=\frac{2+6}{2}=4 \text{ ve } x_2=\frac{2-6}{2}=-2$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2-3x-8=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{3\pm\sqrt{41}\}$ B) $\{3\pm\sqrt{55}\}$ C) $\{3\pm2\sqrt{2}\}$
D) $\{\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}\}$ E) $\{\frac{3\pm\sqrt{55}}{2}\}$

Çözüm: Denklemimizde $a=1$, $b=-3$ ve $c=-8$ olduğundan;

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}\\&=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$x_1=\frac{3+\sqrt{41}}{2} \text{ ve } x_2=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Eveeet, artık koltuğumuza yaslanabiliriz. Ne de olsa her türlü ikinci dereceden denklemi çözebiliyoruz artık. ☺ Ama yine de şu formülü biraz daha irdeleyelim. Neydi formül?

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bu formülde, diğerlerine göre daha hassas olan bir şey var. Onun a olduğunu zannetmeyin paydada diye, $a \neq 0$ olduğu verildiğinden onun bir hassasiyeti yok. b'nin de tuzu kuru ama bu $b^2 - 4ac$ ifadesi karekök içinde yani tehlike arzediyor. Tehlike arzetmesinden dolayı, köklerin formülünde beliren bu $b^2 - 4ac$ değeri, ikinci dereceden denklemlerde çok büyük önem arz eder. Bu ifadeye denklemin **diskriminantı** denir, Δ sembolü ile gösterilir ve ''delta'' diye okunur. Bu sayede köklerin formülü de yalancıktan kısalır ve

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

halini alır. Δ ifadesi karekökün içinde bulunduğundan, denklemin köklerinin reel sayı olması için Δ negatif olmamalıdır.

Peki, Δ sıfır olursa n'olur, bir düşünün bakalım. Düşünmeye ne gerek var,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

olur. Yani denklemin çakışık iki tane kökü olur. Yani denklemin iki kökü birbirine eşit olur. Bu durumda iki tane değil, tek kökü var deriz. ''Hocam, ikiz çocukları olanlar tek çocuğum var dese olur mu hiç?'' demeyin hiç!

Geldik Δ'nın negatif olma durumuna. Karekökün içi negatif olursa, o sayının reel olmadığını, olamayacağını biliyoruz.

O halde ''$\Delta < 0$ durumunda, denklemin reel kökü yoktur'' deriz. Dikkat edin, *kökü yoktur* demiyoruz, *reel kökü yoktur* diyoruz. Zira bir ikinci dereceden denklemin her zaman iki tane kökü vardır ama bazen burada olduğu gibi kökler reel değil de adına karmaşık, sanal ya da hayali dediğimiz sayılardan olur. Sabredin, onları da göreceğiz. Bildiğimizi esirgediğimiz vaki değildir!

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a ile c ters işaretliyse, kesinlikle farklı iki reel kök vardır. Çünkü farklı iki reel kök olabilmesi için $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olması yeterdi. Verilen bilgiye göre $-4ac > 0$ ve b'nin her değeri için $b^2 \geq 0$ olduğundan $\Delta > 0$ eşitsizliği kanıtlanmış olur.

Yukardaki tüyoya bakıp da ''a ile c aynı işaretliyse, denklemin iki farklı reel kökü olamaz'' anlamayın sakın. Biz sadece ''a ile c ters işaretlilerse kesin böyledir'' diyoruz. Eğer aynı işaretlilerse olabilir de olmayabilir de...

Örnek. $x^2 + 4x + 5 = 0$ *denkleminin* $\mathbb{R}$*'de çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-5, 1\}$ B) $\{-1, 5\}$ C) $\{1, 5\}$ D) $\varnothing$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Eğer a ile c ters işaretli olsaydı, farklı iki reel kökün varlığını bilerek, hemen a, b, c değerlerinin eşitlerini köklerin formülünde yerlerine yazar ve çözüm kümesini bulurduk. Burada a ile c aynı işaretli olduğundan önce Δ'nın işaretini tayin etmekte fayda var.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

olduğundan hiç işlem yapmaya gerek yok, çünkü kökleri reel değildir. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'de çözüm kümesi boştur.

Doğru cevap: D.



Aklımıza ''Acaba Δ'nın işaretini incelemeden köklerin reel olup olmadığını bulamaz mıyız?'' diye bir soru geldiyse cevaplayalım: Bulabiliriz!

Sözgelimi, $x^2 + 4x + \clubsuit = 0$ denkleminde $\clubsuit$ sayısı, ifadeyi bir tamkare yapan değerden büyükse kökler reel değildir, eşitse zaten tamkaredir, küçükse de kesinlikle iki farklı reel kök vardır!

Örneğin;

$$x^2 + 8x + 17 = 0$$

denkleminde 17 sayısı, 8'in yarısı olan 4'ün karesinden daha büyük diye bu denklemin reel kökü yoktur. Bunun izahı kısaca şudur: Denklem,

$$x^2 + 8x + 16 + 1 = 0$$

şeklinde yazıldığında 16'dan büyük kısım eşitliğin sağ tarafına negatif oalrak geçecek ve bir tam kare ifade negatif bir sayıya eşit olmuş olacak. Bu da reel sayılarda mümkün olmadığından reel kök olmayacaktır.

Benzer şekilde;

$$x^2 + 8x + 14 = 0$$

denkleminde 14 sayısı, 8'in yarısı olan 4'ün karesinden daha küçük diye denklemin kesinlikle iki farklı reel kökü vardır. Kanıtını aynen yukardaki gibi yapabilirsiniz.

Ayrıca söylediklerimizin tersleri de doğrudur, bunu da unutmayın...

Ödev. Siz de aşağıdaki denklemlerin diskriminantlarının işaretlerini diskriminant hesaplamadan bulunuz:

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$
$$x^2 + 10x + 25 = 0$$
$$x^2 + 10x + 26 = 0$$
$$x^2 + 12x - 14 = 0$$
$$x^2 + 14x + 14 = 0$$
$$x^2 + 18x + 50 = 0$$

Örnek. $x^2 + 2x + (8 - m) = 0$ *denkleminin iki farklı reel kökü olduğu biliniyorsa, m'nin bulunması gereken aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $m > 7$ B) $m < 7$ C) $m \leq 7$ D) $m \geq 7$ E) $m > -7$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Eski yol. İki farklı reel kök varsa diskriminant pozitif olmalıdır.

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot1\cdot(8 - m) > 0$$
$$4 - 32 + 4m > 0$$
$$4m > 28$$
$$m > 7.$$

Yeni yol. İfadeyi tamkare yapacak sayıya bakacağız.
$x^2 + 2x + \clubsuit$ ifadesini tamkare yapan $\clubsuit_1$ sayısı 1'dir.
$(8 - m)$ değeri 1'den küçük olursa denklemin iki farklı reel kökü olur. $8 - m < 1$ ise $m > 7$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek [1998 ÖYS]. *a bir reel sayı olup,* $a \neq -1$ *olmak üzere* $(a + 1)x^2 - 2(a + 7)x + 27 = 0$ *denkleminin kökleri birbirine eşit olduğuna göre a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?*

A) 15 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: Kökler birbirine eşit olduğuna göre $\Delta = 0$ olmalıdır. Hemen eşitliği kuralım.

$$\Delta = (2a + 14)^2 - 4\cdot(a + 1)\cdot27 = 0$$
$$4a^2 + 56a + 196 - 108a - 108 = 0$$
$$4a^2 - 52a + 88 = 0$$
$$a^2 - 13a + 22 = 0$$
$$(a - 2)\cdot(a - 11) = 0$$

eşitliğinden a'nın alabileceği değerler toplamı görüldüğü üzere $2 + 11 = 13$ bulunur. Tabii ki bu a değerlerinin içinde -1 olmadığını da incelememiz lazım, ben inceledim, yok!

Doğru cevap: B.

İlerde, kökleri bulmadan kökler toplamını hatta çarpımını bulmayı da öğreneceğiz.

Örnek [1991 ÖYS]. b, c *ve* t *birer reel sayı olmak üzere* $(x + t)^2 + 2b(x + t) + c = 0$ *denkleminde köklerin gerçel olmaması için b ile c arasındaki bağıntı ne olmalıdır?*

A) $b^2 + c > 1$ B) $b^2 + c < 1$ C) $b^2 < c$
D) $b^2 > c$ E) $b^2 = c$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Önce şu parantezlerden kurtulalım.

$$x^2 + 2tx + t^2 + 2bx + 2bt + c = 0$$

Düzenleyelim:

$$x^2 + (2t + 2b)x + t^2 + 2bt + c = 0$$

Bu denklemin kökleri gerçel değilse, diskriminantı negatif olduğundandır.

$$(2t + 2b)^2 - 4\cdot1(t^2 + 2bt + c) < 0$$
$$4t^2 + 8bt + 4b^2 - 4t^2 - 8bt - 4c < 0$$
$$4b^2 - 4c < 0$$
$$b^2 - c < 0$$
$$b^2 < c.$$

İkinci yol. $(x + t)^2 + 2b(x + t) + c = 0$ denkleminin kökleri reel değilse $y^2 + 2by + c = 0$ denkleminin de kökleri reel değildir. Şimdi $\Delta < 0$ eşitsizliğinin sağlanması lazımdır.

$$(2b)^2 - 4\cdot1\cdot c < 0$$
$$4b^2 - 4c < 0$$
$$b^2 - c < 0$$
$$b^2 < c.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1983 ÖYS]. $x\cdot|x - 1| = 2$ *denklemini sağlayan (çözümü olan) x'lerin toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) –2

Çözüm: Lise 1 veya üniversiteye hazırlık derslerinde mutlak değerli denklemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmiş olmalısınız. Metotlardan biri de denklemi kritik noktanın solunda ve sağında çözmekti. O metotla çözelim bakalım.

$x \geq 1$ iken denklem $x(x - 1) = 2$ halini alır.

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

eşitliğinden $x = 2$ bulunur. $x = -1$ sağlamaz. Çünkü çözümün başındaki kabulümüzü sağlamıyor.

$x < 1$ iken denklem $x(1 - x) = 2$ halini alır.

$$-x^2 + x - 2 = 0$$
$$x^2 - x + 2 = 0$$

eşitliğinin diskriminantı negatif olduğundan reel kökü yoktur. O halde denklemin tek reel kökü olduğundan, sağlayan x'lerin toplamı da o tek kök yani 2'dir.

Doğru cevap: D.

İndirgenmiş Diskriminant. Hani ikinci dereceden bir denklemin köklerinin reel mi, sanal mı olduğunu anlamak için diskriminantına bakarız ya, bazen denklemin katsayıları o kadar büyük olur ki, $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesini hesaplamak adamı korkutur. Şimdi böyle durumlarda, özellikle de b çiftken, bunun daha kolay bir yolunu göstereceğiz. Amacımız neydi? Δ'nın pozitif mi negatif mi olduğunu anlamak değil mi? Size bir soru: Δ pozitifse $\Delta/4$ de pozitif, Δ negatifse $\Delta/4$ de negatif, Δ sıfırsa $\Delta/4$ de sıfırdır değil mi? Evet! İşte bu yüzden Δ'nın değil, $\Delta/4$ değerinin işaretine bakacağız. Bu yeni diskriminanta Δ', $b/2$'ye de b' diyelim:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$$\Delta' = \frac{b^2}{4} - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (b')^2 - ac$$

$a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin, aynen Δ için anlattıklarımız gibi;

- ✓ $\Delta' > 0$ ise farklı iki reel kökü vardır,
- ✓ $\Delta' = 0$ ise çakışık iki reel kökü vardır,
- ✓ $\Delta' < 0$ ise reel kökü yoktur.

Bu Δ' değerine **indirgenmiş diskriminant** veya kısaca **yarım formül** denir. Bu formülü aynı zamanda

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

formülüne de uyarlayabiliriz. Birlikte uyarlayalım. Hem payı hem de paydayı 2'ye bölersek ifadede değişiklik olmaz.

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

$\Delta/4 = \Delta'$ ve $b/2 = b'$ olduğundan, bundan böyle kökleri bulmak için $x_{1,2} = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a}$ formülünü kullanabiliriz.

Örnek. $5x^2 - 42x + 85 = 0$ *denkleminin indirgenmiş diskriminantı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 21

Çözüm: $b/2 = b'$ olmak üzere $\Delta' = (b')^2 - ac$ olduğunu bulmuştuk. O halde

$$\Delta' = (b')^2 - ac = 21^2 - 5 \cdot 85 = 441 - 425 = 16.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $9x^2 - 34x + 32 = 0$ *denkleminin diskriminantı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İndirgenmiş diskriminantın, asıl diskriminantın ¼'ü olduğunu hatırlayın. Biz yavruyu bulup 4'le çarpacağız.

$$\Delta' = 17^2 - 9 \cdot 32 = 289 - 288 = 1$$

olduğundan $\Delta = 4$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $40x^2 - 34x + 7 = 0$ *denkleminin büyük kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $\Delta = b^2 - 4ac$ formülünü kullanacak olsak, 34'ün karesini hesaplamak gerekecek. Kaçımız 34'ün karesini ezbere biliyor ki? Oysa hepimiz 17'nin karesini biliriz. 289'dur. Bu yüzden yarım formülü kullanmak daha avantajlıdır.

$$b' = b/2 = -17 \text{ ve}$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = (-17)^2 - 40 \cdot 7 = 9$$

olduğundan,

$$x_{1,2} = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{17 \mp \sqrt{9}}{40}$$

çıkar ki, $x_1 = \frac{7}{20}$ ve $x_2 = \frac{1}{2}$ olarak bulunur. Büyük olanını da siz bulun artık!

Doğru cevap: E.

Örnek. $7x^2 + 26x + 24 = 0$ *denkleminin tam sayı olmayan kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{6}{7}$ B) $-\frac{9}{7}$ C) $-\frac{10}{7}$ D) $-\frac{12}{7}$ E) $-\frac{24}{7}$

Çözüm: $\Delta = b^2 - 4ac$ formülünü kullanacak olsak, 26'nın karesini hesaplamak gerekecek. Kaçımız 26'nın karesini ezbere biliyor ki? Oysa hepimiz 13'ün karesini biliriz. Bu yüzden yarım formülü kullanmak burada daha avantajlıdır.

$$b' = b/2 = 13 \text{ ve}$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = 13^2 - 7 \cdot 24 = 1$$

olduğundan,

$$x_{1,2} = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-13 \mp \sqrt{1}}{7}$$

çıkar ki, $x_1 = -2$ ve $x_2 = -\frac{12}{7}$ olarak bulunur. Zor soru şimdi geldi, acaba hangisi tam sayı değil? ☺

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 1\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{1\}$ D) $\{1, 2\}$ E) $\{-1, 2\}$

2.

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 2\}$ B) $\{2\}$ C) $\{-2\}$ D) $\{-2, 3\}$ E) $\{3\}$

3.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-5, 6\}$ B) $\{5\}$ C) $\{6\}$ D) $\{5, 6\}$ E) $\{-6, 5\}$

4.

$$2x^2 + 2x - 60 = 0$$

denkleminin negatif kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

5.

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

denkleminin köklerinin oranı hangisi olabilir?

A) 0,5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

denkleminin köklerinin pozitif farkı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, \sqrt{2}\}$ B) $\{-\sqrt{2}, 1\}$ C) $\{1, \sqrt{2}\}$
D) $\{-\sqrt{2}\}$ E) $\{-\sqrt{2}, -1\}$

8.

m ve n birer reel sayı olmak üzere

$$x^2 + (n - m)x - mn = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{m, n\}$ B) $\{-m, n\}$ C) $\{-m, -n\}$
D) $\{n\}$ E) $\{-n, m\}$

9.

m bir reel sayı olmak üzere

$$x^2 - \frac{m}{6}x - \frac{m^2}{6} = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-\frac{m}{3}\right\}$ B) $\left\{-\frac{m}{2}, \frac{m}{3}\right\}$ C) $\left\{-\frac{m}{3}, -\frac{m}{2}\right\}$
D) $\left\{\frac{m}{2}, m\right\}$ E) $\left\{-\frac{m}{3}, \frac{m}{2}\right\}$

10.

$$x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5} = 0$$

denkleminin tam sayı olmayan kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

1.A 2.D 3.E 4.D 5.D 6.E 7.A 8.E 9.E 10.E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 3\}$ B) $\{3\}$ C) $\{0, 3\}$ D) $\{-3\}$ E) $\varnothing$

2.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ C) $\{1, 2\}$ D) $\{2\}$ E) $\{-2, 2\}$

3.

$$x^2 - mx + 9 = 0$$

denkleminin çakışık iki kökü olduğuna göre *m*'nin negatif değeri kaçtır?

A) -4 B) -5 C) -6 D) -7 E) -8

4.

$$x^2 + 8x + 2t + 5 = 0$$

denkleminin çakışık iki reel kökü olduğuna göre *t* kaçtır?

A) 5,5 B) 5 C) 4,5 D) 4 E) 3,5

5.

Aşağıdakilerden hangisi

$$x^2 + 10x + 3t - 5 = 0$$

denkleminin çakışık iki reel kökünden birine eşittir?

A) $t + 5$ B) t C) $t + 15$ D) $t - 5$ E) $t - 15$

6.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-5\}$ B) $\{5\}$ C) $\{2, 5\}$ D) $\{-2, 5\}$ E) $\varnothing$

7.

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B) $\frac{2+\sqrt{13}}{2}$ C) $\frac{5+\sqrt{12}}{2}$ D) $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ E) $5+\sqrt{13}$

8.

$$21x^2 + x - 2 = 0$$

denkleminin pozitif kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{7}$

9.

$$8x^2 - 31x - 45 = 0$$

denkleminin negatif kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{8}{9}$ B) $-\frac{9}{8}$ C) -5 D) $-\frac{7}{9}$ E) -8

10.

$$9x^2 + 7x - 2 = 0$$

denkleminin köklerinin oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $-\frac{9}{7}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $-\frac{2}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

1. B 2. A 3. C 4. A 5. E 6. E 7. D 8. C 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
a bir reel sayı olmak üzere
$$x^2 - 12x - 2a = 0$$
denkleminin pozitif kökü a olduğuna göre a kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2.
$$x^2 - 16x - 4a = 0$$
denkleminin köklerinden birisi a olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 0 B) 11 C) 12 D) 13 E) 20

3.
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1^2 \cdot x_2$ çarpımı hangisine eşit olabilir?

A) 10 B) 15 C) 25 D) 50 E) 75

4.
Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleriyle
$$x^2 - 4x - 10 = 0$$
denkleminin kökleri aynıdır?

A) $(x-2)^2 = 6$ B) $(x-2)^2 = 8$ C) $(x-2)^2 = 9$
D) $(x-2)^2 = 12$ E) $(x-2)^2 = 14$

5.
$$3x^2 - 5x - 28 = 0$$
denkleminin kökleri aşağıdaki aralıkların hangisinde dir?

A) (0, 4) B) (−1, 4) C) (−6, −3) D) (−3, 5) E) (−1, 2)

6.
$$9x^2 - ax - 4 = 0$$
denkleminin iki farklı reel kökü olduğuna göre a için çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−6, 6) B) [−6, 6] C) (0, 6] D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

7.
$$9x^2 - ax - b = 0$$
denkleminin kökleri sıfırdan farklı olan x_1 ve x_2 değerleri olup $x_1 = x_2$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $b > 0$ B) $b < 0$ C) $a < 0$ D) $a > 0$ E) $x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{9}$

8.
$$3x^2 - (a+2)x - b + 5 = 0$$
denkleminin sıfırdan farklı reel sayı olan kökleri arasında $x_1 = x_2$ bağıntısı olduğu bilindiğine göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $b > 5$ B) $b \leq 5$ C) $b < 5$ D) $a > -2$ E) $a < -2$

9.
$$41x^2 - 34x + 7 = 0$$
denkleminin köklerinin pozitif farkı kaça eşittir?
(Yarım formülü kullanınız.)

A) $\frac{1}{41}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{41}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{41}$ D) $\frac{2}{41}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{41}$

10.
$$x^2 + 30x + 224 = 0$$
denkleminin küçük kökü aşağıdakilerden hangisidir?
(Yarım formülü kullanınız.)

A) −16 B) −15 C) −14 D) −13 E) −12

1.E 2.E 3.D 4.E 5.D 6.D 7.B 8.C 9.E 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Köklü Denklemlerin Çözümleri

Köklü ifade içeren denklemlerin (özellikle kareköklü olanların) çözümlerinde ikinci dereceden denklemlere sıkça rastlanır. Çünkü karekökten kurtulmak isteyen biri, hemen eşitliğin her iki tarafının karesini alır ve doğal olarak karşısında ikinci dereceden bir denklem bulur. Bu denklemi çözdüğü zaman da soru çözülmüş olur. Ama unutulmaması gereken bir nokta var: Bulunan değerlerin kareköklü ifadeyi tanımsız yapıp yapmadığının veya denklemi sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesi, eğer yapıyorsa da çözüm kümesine dahil edilmemesi işi size kalıyor.

Örnek. $\sqrt{3x+10}=2x-5$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{\frac{3}{4}\}$ C) $\{5\}$ D) $\{\frac{3}{4},5\}$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$3x+10=4x^2-20x+25$$
$$4x^2-23x+15=0$$
$$(4x-3)(x-5)=0$$

eşitliğinden $x=3/4$ veya $x=5$ bulunur. Fakat $x=3/4$ değeri denklemi sağlamadığından ÇK = {5}'tir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sqrt{2-x}=2x-3$ *eşitliğini sağlayan x reel sayısı kaçtır?*

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) 1 E) 2

Çözüm: Yine karekökten kurtulmak amacıyla eşitliğin her iki tarafının karesini alalım. Fakat, nolur nolmaz belki unuturuz diye bir kenara $3/2 \le x \le 2$ olması gerektiğini de not edelim.

$$\sqrt{2-x}=2x-3$$

Eşitliğin her iki yanının karesini alıp, düzenleyelim:

$$2-x=4x^2-12x+9$$
$$0=4x^2-11x+7$$
$$0=(4x-7)\cdot(x-1)$$

diye $x_1=1$ ve $x_2=7/4$ bulunur. Yalnız $3/2 \le x \le 2$ olması gerektiğinden eşitliği sağlayan tek x değeri 7/4'tür.

Doğru cevap: A.



$\sqrt{f(x)}=g(x)$ gibi bir eşitliğin çözümünü öğrendik. Oldukça basitmiş. Yalnız bu eşitlikler bazen $\sqrt{f(x)}-g(x)=0$ veya $\sqrt{f(x)}-g(x)=h(x)$ şeklinde de verilebilir. Bu sefer kare almak işe yaramaz. Kareköklü ifadeyi yalnız bırakıp kare almalısınız.

Örnek. $\sqrt{2x+13}+x=1$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{-2\}$ C) $\{6\}$ D) $\{-2,6\}$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Önce kareköklü ifadeyi yalnız bırakmak maksadıyla eşitliği

$$\sqrt{2x+13}=1-x$$

şeklinde düzenleyelim. Şimdi de her iki yanın karesini alalım.

$$2x+13=1-2x+x^2$$
$$x^2-4x-12=0$$
$$(x-6)(x+2)=0$$

eşitliğinden $x=6$ veya $x=-2$ bulunur ama $x=6$ denklemi sağlamadığından ÇK = {−2}'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sqrt{3-x}-x+3=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{3\}$ C) $\{2\}$ D) $\{-3,2\}$ E) $\{3,2\}$

Çözüm: Önce kareköklü ifadeyi yalnız bırakmak maksadıyla eşitliği

$$\sqrt{3-x}=x-3$$

şeklinde düzenleyelim. Şimdi de her iki yanın karesini alalım.

$$3-x=x^2-6x+9$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$

eşitliğinden $x=2$ veya $x=3$ bulunur. Fakat $x \ge 3$ olması gerektiğinden ve 2 değeri bu koşulu sağlamadığından ÇK = {3}'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\sqrt[5]{5-\sqrt{10x-x^2}}=1$$

denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerinin karelerinin toplamı kaçtır?

A) $\frac{17}{64}$ B) $\frac{25}{64}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) 68

Çözüm: Kök işaretlerinden kurtulmak amacıyla önce eşitliğin her iki yanının beşinci kuvvetini alalım.

$$\sqrt[5]{5-\sqrt{10x-x^2}}=1$$

$$5-\sqrt{10x-x^2}=1$$

Halen kökten kurtulamadık. Sorun değil, bu sefer karesini alırız. Yalnız önce köklü ifadeyi yalnız bırakalım.

$$\sqrt{10x-x^2}=4$$

$$10x-x^2=16$$

$$x^2-10x+16=0$$

$$(x-8)(x-2)=0$$

olduğundan kökler 2 ve 8 olarak bulunur. 2 ve 8 değerlerinin kareköklü ifadenin içini negatif yapmadığı görülür. Yani bunların gerçekten kök oldukları anlaşılır. O halde köklerin çarpmaya göre terslerinin kareleri toplamı da

$$\frac{1}{64}+\frac{1}{4}=\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{17}{64}$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt{1-x-2\sqrt{-x}}=3$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) –16 B) –9 C) 0 D) 9 E) 16

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Eşitliğin iki yanının karesini alalım.

$$1-x-2\sqrt{-x}=9$$

$$-8-x=2\sqrt{-x}$$

$$x^2+16x+64=-4x \text{ (Yine kare aldık)}$$

$$x^2+20x+64=0$$

$$(x+16)(x+4)=0$$

olduğundan $x=-16$ veya $x=-4$ olur. Fakat $-8-x\geq 0$ eşitsizliğinden sadece $x=-16$'nın sağladığı görülür.

İkinci yol. 'Köklü İfadeler' dersinde bu tarz ifadelerin nasıl sadeleştirildiğini göstermiştik. Verilen eşitlik

$$\sqrt{T-2\sqrt{Ç}}$$

halinde olduğundan toplamları $1-x$, çarpımları $-x$ olan iki sayı aranır. Bu sayılar 1 ve $-x$'dir. O halde

$$\sqrt{-x}-1=3$$

eşitliğinden $x=-16$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt{ax+4}=x-2$ *denkleminin çözüm kümesini boşküme yapmayan a değerleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

A) $a\neq -2$ B) $a\geq -2$ C) $a\leq -2$

D) $a<0$ E) $-4\leq a\leq -2$

Çözüm: Önce denklemi çözmeye çalışalım. Karşılaşacağımız sıkıntılarda yorum yaparız. Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$ax+4=x^2-4x+4$$

$$ax=x^2-4x$$

$$x^2-(a+4)x=0$$

$$x(x-a-4)=0$$

olduğundan denklemin kökleri 0 ve $a+4$ değerleridir. Yalnız, $x-2$ değeri kareköklü bir ifadeye eşit olduğundan negatif olamaz, yani $x\geq 2$ olmalıdır. Bu durumda 0'ı kök olarak alamayız. O halde denklemin kökü $a+4$ olmalıdır. Bu değer de mecburen $x\geq 2$ eşitsizliğini sağlamalıdır. Yoksa çözüm kümesi boşküme olur. $a+4\geq 2$ eşitsizliğinden $a\geq -2$ olması gerektiğini anlarız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $16^{x^2-3}=\sqrt{4^{3x-2}}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left\{-\frac{1}{2},3\right\}$ B) $\left\{-\frac{5}{4},2\right\}$ C) $\{0,2\}$ D) $\{2\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Eşitliği $16^{x^2-3}=2^{3x-2}$ şeklinde düzenleyip tabanları da aynı hale getirelim.

$$2^{4x^2-12}=2^{3x-2}$$

$$4x^2-12=3x-2$$

$$4x^2-3x-10=0$$

$$(x-2)(4x+5)=0$$

olduğundan doğru cevap B seçeneğidir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^2+\sqrt{(2x-4)^2}-4=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{1, 2\}$ B) $\{4, 2\}$ C) $\{-2, 2\}$

D) $\{1+\sqrt{3}, -2\}$ E) $\{0, 2\}$

Çözüm: $x>2$ için $x^2+2x-8=(x+4)\cdot(x-2)=0$ denklemini, $x\leq 2$ içinse $x^2-2x=x\cdot(x-2)=0$ denklemini çözeceğiz. İlk denklemin çözüm kümesi boş küme, ikincisinin $\{0, 2\}$ olduğundan çözümümüz $\{0, 2\}$ kümesi olmalıdır. Tabi ben olsam şıklardan giderim. ☺

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sqrt{x}+2=x$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{4\}$ C) $\{2, 4\}$ D) $\{1, 4\}$ E) $\{-1, 4\}$

2.

$$\sqrt{x+2}-4+x=0$$

denkleminin kökleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -9 B) -7 C) -2 D) 2 E) 9

3.

$$\sqrt{10-x}-x=2$$

denkleminin en büyük kökü kaçtır?

A) -6 B) -1 C) 1 D) 6 E) 7

4.

$$\sqrt{x^2+9}+3=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\{0\}$ C) $\{-3, 3\}$ D) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ E) $\varnothing$

5.

$$\sqrt{3-x}+1=x$$

denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

$$\sqrt{11x-18}-x=0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) 2 B) 7 C) 9 D) 11 E) 12

7.

$$\sqrt{2x}+4=x$$

denkleminin köklerinin kareleri toplamı kaçtır?

A) 64 B) 68 C) 70 D) 72 E) 80

8.

$$\sqrt{2x+3}=x$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 3\}$ B) $\{-3, 1\}$ C) $\{-3, -1\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{3\}$

9.

$$\sqrt{2x-1}=x-8$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{5, 13\}$ B) $\{13\}$ C) $\{15\}$ D) $\{2, 5\}$ E) $\varnothing$

10.

$$3\sqrt{2-x}=x-4$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 3\}$ B) $\{-3, 1\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{3\}$ E) $\varnothing$

1.B 2.D 3.C 4.E 5.E 6.D 7.A 8.E 9.B 10.E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x=\sqrt{3-x}+1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{1\}$ D) $\{-1, 2\}$ E) $\varnothing$

2.

$$4-x+\sqrt{x-4}=0$$

denkleminin kökler farkının mutlak değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$2\sqrt{1-2x}+x=2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0, 4\}$ B) $\{4\}$ C) $\{-4\}$ D) $\{-4, 0\}$ E) $\{0\}$

4.

$$\sqrt{3x}+3=2x$$

denkleminin kökleri toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{15}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 3 D) $-\frac{9}{4}$ E) -1

5.

$$\sqrt{2x}=\sqrt{x^2}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2\}$ B) $\{1, 2\}$ C) $\{1, 0\}$ D) $\{0, 2\}$ E) $\varnothing$

6.

$$\sqrt{x}=-x$$

denkleminin kaç reel kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{1\}$ E) $\varnothing$

8.

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+64=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{128\}$ B) $\{64\}$ C) $\{32\}$ D) $\{16\}$ E) $\varnothing$

9.

$$x+\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}=10$$

denklemini sağlayan x değeri kaça eşittir?

A) 32 B) 16 C) 8 D) 6 E) 1

10.

$$x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=78$$

denklemini sağlayan x değeri kaça eşittir?

A) 75 B) 72 C) 64 D) 32 E) 16

1.A 2.B 3.D 4.C 5.D 6.B 7.E 8.E 9.C 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kesirli Denklemlerin Çözümleri

Kesirli ifade içeren denklemlerin çözümleri oldukça basittir. İlköğretimden beri bildiğimiz ve sıkça kullandığımız payda eşitleme ve içler-dışlar çarpımı teknikleriyle, denklemi olabildiğince sadeleştiririz. Sonra da ortaya çıkan denklemin köklerini buluruz.

Köklü ifade içeren denklemlerde olduğu gibi burada da tehlikeli durumlar var. Dikkat edilmesi gereken nokta şudur: Bulduğumuz kökler kesirli ifadelerin paydalarını 0 yapmıyor olmalıdır. Eğer yapıyorsa, ifadeler tanımsız olacağından, o kökleri çözüm kümesine alamayız.

Örnek. $\frac{x^2}{2x+3}=-3$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-3\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{0\}$ E) $\{1\}$

Çözüm: Baştan belirtelim. Eğer denklemi çözdüğümüzde x'i $-3/2$ bulursak, onu çözüm kümesine almayacağız. Şimdi denklemi çözmeye çalışalım. Hemen içler-dışlar çarpımı yapalım.

$$x^2=-6x-9$$
$$x^2+6x+9=0$$
$$(x+3)^2=0$$
$$x+3=0$$

olur ki buradan $x=-3$ olduğunu buluruz. Bulduğumuz bu değer verilen kesirli ifadeyi tanımsız yapmadığından, yani paydasını 0 yapmadığından denklemin tek köküdür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{2\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{1\}$ E) $\{-2, 1\}$

Çözüm: Derhal pay ve paydayı çarpanlarına ayıralım.

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\frac{x-2}{x+3}=0$$

$x=-3$ değeri paydayı 0 yapacağından denklemin tek kökü vardır, o da $x-2=0$ eşitliğinden gelen 2'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{x^2+1}{x-1}+x^2=1+\frac{x^2+1}{x-1}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-1, 1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{1\}$ E) $\{2\}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanındaki $\frac{x^2+1}{x-1}$ ifadelerini sadeleştirelim. Geriye $x^2=1$ denklemi kalır.

$$x^2-1=0$$
$$(x-1)(x+1)=0$$

Bu denklemin kökleri -1 ve 1'dir ama $x=1$ değeri bize verilen denklemdeki kesirli ifadelerin paydalarını 0 yapıyor diye çözüm kümesine alınamaz, o halde denklemin çözümü sadece $x=-1$ değeridir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{x+5}{x+3}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+3}$ *denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$ B) $\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$ C) $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ D) $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ E) $\varnothing$

Çözüm: En baştan notumuzu alalım. Eğer sonuçta x'i -3, -1 veya 1 bulursak çözüm kümesine almayacağız. Çünkü bu değerler bize verilen kesirlerin paydalarını 0 yapıyor.

$$\frac{x+5}{x+3}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+3}$$
$$1+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}$$
$$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}$$
$$2x^2-x-1=x^2+2x+1$$
$$x^2-3x-2=0$$

Şimdi de kökleri bulalım:

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

Gördüğünüz gibi, bu sayılar kara listede olmadığından denklemin kökleri olarak alınabilirler.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{2x^2-30x}{x^2-15x}=x-13$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Eşitliğin sol yanında, x'in hem payın hem de paydanın kökü olduğunu görerek x'leri sadeleştirelim. $x = 0$ değeri eşitliği sağlamadığından bu hareketi yapma hakkımız vardır.

$$\frac{2x-30}{x-15}=x-13$$

$x = 15$ değeri de bize verilen eşitliği sağlamadığından eşitliğin sol yanında $x - 15$ çarpanını da sadeleştirebiliriz.

$$2=x-13$$

eşitliği kalır ki bunu sağlayan değer $x = 15$ değeridir. Fakat bu değer bize soruda verilen eşitliği sağlamadığından çözüm kümesi boş kümedir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1982 ÖYS].

$$\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1 + x_2$ toplamı kaçtır?

A) –5 B) –1 C) 0 D) 1 E) 5

Çözüm: Payda eşitlemeden önce, payların aynı olduğunu görerek toplama giren ifadelerden birini eşitliğin diğer yanına atmamızın daha avantajlı olduğunu hissediyoruz.

$$\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=0$$

$$\frac{x-1}{x-3}=-\frac{x-1}{x-5}$$

$x = 1$ için eşitliğin sağlandığını not edip, her iki taraftaki $x - 1$ ifadelerini sadeleştirelim.

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{x-5}$$

$$x-3=5-x$$

$$x=4$$

olarak bulunduğundan ÇK = {1, 4} olmalıdır. O halde kökler toplamı da 5'tir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$x-4+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{x}+\frac{1}{x+1}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {–5} B) {–1} C) {0} D) {1} E) {5}

Çözüm: Eşitliğin her iki yanındaki $\frac{1}{x+1}$ ifadelerini sadeleştirelim. Geriye $x-4=\frac{5}{x}$ gibi sade bir denklem kalır. Hemen içler dışlar çarpımı yapalım.

$$x^2-4x=5$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$(x-5)(x+1)=0$$

eşitliğinden $x = 5$ veya $x = –1$ bulunur. Fakat $x = –1$ değeri, bize verilen denklemde bazı kesirli ifadelerin paydasını 0 yaptığından kök olarak alınamaz. Bu durumda tek kök vardır, o da 5.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\frac{x+8}{x^2-9}+\frac{4}{x-3}=0$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) –8 B) –4 C) 0 D) 3 E) 8

Çözüm: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ olduğundan toplanan ikinci ifadenin paydasını $(x + 3)$ ile genişletelim:

$$\frac{x+8}{x^2-9}+\frac{4(x+3)}{x^2-9}=0$$

$$\frac{5x+20}{x^2-9}=0$$

$$5x+20=0$$

olduğundan $x = –4$ olur. Eğer $x = 3$ veya $x = –3$ bulsaydık, bu değerler, bize verilen eşitliği tanımsız yapacağından cevabımız boşküme olacaktı. Yani, tekrar tekrar söyleyelim, kesirli ifadelerde, bulduğumuz değerin paydayı sıfır yapıp yapmadığını incelemeyi unutmamalıyız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{2x-2}{x^2-36}-\dfrac{x-2}{x^2-6x}=\dfrac{x-1}{x^2+6x}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {–6} B) {0} C) {3} D) {6} E) ∅

Çözüm: Paydaların $(x-6)$, $(x+6)$ ve x değerlerinden oluştuğunu görerek, her kesri paydasında eksik olan çarpanla genişletelim.

$$\frac{2x-2}{\underset{(x)}{x^2-36}}-\frac{x-2}{\underset{(x+6)}{x^2-6x}}=\frac{x-1}{\underset{(x-6)}{x^2+6x}}$$

$$\frac{(2x-2)x}{x^3-36x}-\frac{(x-2)(x+6)}{x^3-36x}=\frac{(x-1)(x-6)}{x^3-36x}$$

$$(2x-2)x-(x-2)(x+6)=(x-1)(x-6)$$

$$2x^2-2x-x^2-6x+2x+12=x^2-7x+6$$

$$x=-6$$

çıkar ki, bu değer sorudaki eşitliğin sağ yanının paydasını 0 yaptığından, kök olarak alınamaz.
O halde bu denklemin çözüm kümesi ∅ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}=-\dfrac{x+1}{2}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {–3, 5} B) {–3} C) {0} D) {3} E) {5}

Çözüm: Oldukça karışık görünüyor ama sol yandaki ifadenin payı ile paydasının birbirlerinin eşlenikleri olduğunu görünce rahatlıyoruz. Eşitliğin sol yanının payını ve paydasını, paydanın eşleniği ile çarpalım.

$$\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}\cdot\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}=-\frac{x+1}{2}$$

$$\frac{x-3+x+3+2\sqrt{x^2-9}}{(x-3)-(x+3)}=-\frac{x+1}{2}$$

$$\frac{2x+2\sqrt{x^2-9}}{-6}=-\frac{x+1}{2}$$

$$4x+4\sqrt{x^2-9}=6x+6$$

$$4\sqrt{x^2-9}=2x+6$$

$$2\sqrt{x^2-9}=x+3$$

$$4\cdot(x^2-9)=(x+3)^2$$

$$4x^2-36=x^2+6x+9$$

$$3x^2-6x-45=0$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$(x-5)(x+3)=0$$

Buradan $x=5$ veya $x=-3$ olabileceğini buluruz. Köklü ifadelerin tanımlı olması için $x\geq 3$ olması gerekiyor. O halde $x=-3$ kök olamaz. $x=5$ değeri bu kriteri sağlamakla birlikte, verilen eşitliğin paydasını da 0 yapmadığından, bir köktür.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\frac{1}{3-\sqrt{9-\sqrt{x}}}-\frac{1}{3+\sqrt{9-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {64} B) {32} C) {16} D) {8} E) {4}

Çözüm: Eşitliğin sol yanındaki ifadelerin paydaları, birbirlerinin eşlenikleri olduklarından hemen sol tarafta paydaları birbirlerine eşitleyelim.

$$\frac{1}{\underset{\left(3+\sqrt{9-\sqrt{x}}\right)}{3-\sqrt{9-\sqrt{x}}}}-\frac{1}{\underset{\left(3-\sqrt{9-\sqrt{x}}\right)}{3+\sqrt{9-\sqrt{x}}}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{3+\sqrt{9-\sqrt{x}}-(3-\sqrt{9-\sqrt{x}})}{9-(9-\sqrt{x})}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

Düzenleyelim.

$$\frac{2\sqrt{9-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

x'in 0'dan farklı olması gerektiği görülüyor. İçler dışlar çarpımı yapılırsa

$$2x\sqrt{9-\sqrt{x}}=2x$$

bulunur. $x\neq 0$ olduğundan her iki taraftaki $2x$ ifadelerini sadeleştirebiliriz.

$$\sqrt{9-\sqrt{x}}=1$$

Her iki yanın karesini alalım.

$$9-\sqrt{x}=1 \text{ yani } \sqrt{x}=8 \text{ ise } x=64$$

bulunur. Bu değer, verilen eşitlikte paydaları 0 yapmadığı gibi, karekök içlerini de negatif yapmadığından denklemin tek köküdür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{x-5}{2}$$

denkleminin bir köküdür?

A) –1 B) 1 C) 2 D) 5 E) 0

Çözüm: Oturup denklemi çözecek halimiz yok. Kesirli denklemlerde paydayı 0 yapan x değerlerinin çözüm olamayacağını biliyoruz. Paydadaki ifadelere dikkat ederseniz x^2-1, x^3-1 ve $x-2$ ifadelerini sırasıyla –1, 1 ve 2 değerleri 0 yapmaktadır. Şu durumda A, B ve C şıkları elenmeye mahkumdur. D şıkkına bakarsak $x=5$ değeri için eşitliğin sol yanı 0 olmamakta ama sağ yanı 0 olmakta. O halde $x=5$ değeri de çözüm olamaz. Bu durumda geriye sadece E şıkkındaki $x=0$ durumu kaldı. Gerçekten de $x=0$ için eşitlik sağlanmaktadır.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{12}{x}=\frac{x}{3}$$

denklemini sağlayan pozitif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2.

$$\frac{x+3}{3}=\frac{2}{x-2}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4\}$ B) $\{3\}$ C) $\{-4, 3\}$ D) $\{3, 4\}$ E) $\{-3\}$

3.

$$\frac{x-1}{x+1}=-\frac{2x}{x+6}$$

denklemini sağlayan negatif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -6 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

4.

$$\frac{x+1}{x+6}=\frac{x-3}{2x-6}$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.

$$\frac{2x^2}{5x+6}=-2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\{-3\}$ B) $\{-3, -2\}$ C) $\{2, 3\}$ D) $\{3\}$ E) $\{-2\}$

6.

$$\frac{2x}{x^2-2}=2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{-2, 1\}$ E) $\{-1, 2\}$

7.

$$\frac{2x^2}{x+2}=x+3$$

denklemini sağlayan değerlerden birisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

$$\frac{x}{x-1}-2=\frac{1}{x-1}-x$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{0\}$ C) $\{1\}$ D) $\{2\}$ E) $\mathbb{R}$

9.

$$\frac{1}{x}-\frac{4x}{x+5}=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1,\frac{5}{4}\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{-\frac{5}{4}\}$ D) $\{-\frac{5}{4},1\}$ E) $\{1\}$

10.

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{13}$$

eşitliğini sağlayan x'in değerlerinden biri kaçtır?

A) 13 B) 12 C) $\frac{13}{12}$ D) 1 E) $\frac{12}{13}$

1.A 2.C 3.C 4.B 5.B 6.E 7.E 8.A 9.A 10.B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{15}$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -15 B) -5 C) 3 D) 5 E) 15

2.

$$\frac{1}{3x-4}=\frac{2}{x^2}$$

denklemini sağlayan en büyük x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.

$$\frac{2x-1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x}=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdaki kümelerden hangisinin altkümesidir?

A) $\{-1, 2, 3\}$ B) $\{-1, 1, 2\}$ C) $\{-1, 0, 2\}$
D) $\{-3, 1, 2\}$ E) $\{1, 2, 4\}$

4.

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-x}=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{-1, 1\}$ D) $\{-2, 1\}$ E) $\{1, 2\}$

5.

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{9-3x}=\frac{1}{12}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 1 D) 3 E) 4

6.

$$\frac{x+2}{x-1}-3=2\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

denkleminin reel kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{11}{8}$

7.

a bir reel sayı olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{a}{x^2-8x+15}=2$$

denkleminin bir köküdür?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}=x+1+\frac{1}{x-1}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{1\}$ D) $\{2\}$ E) $\varnothing$

9.

$$x^2+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-1,1\}$ D) $\{0\}$ E) $\varnothing$

10.

Aşağıdakilerden hangisi

$$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+3}=\frac{9}{x+2}$$

denkleminin bir köküdür?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

1.A 2.C 3.A 4.B 5.A 6.E 7.D 8.A 9.A 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Değişken Değiştirme Yöntemi

Bazen bazı denklemler çok karmaşık görünür. Fakat bakmasını bilene o kadar karmaşık görünmez. Bakmasını bilmekten kastımız şu: Birbirinin aynısı olan ifadelere başka bir değişken vererek denklemleri kısaltmak mümkündür. Bu yüzden denklemi oluşturan ifadelerde, aynı tip ifadeler ararız. İlla denklemlerin karışık görünmesine de gerek yoktur. Değişken değiştirme yöntemini, 2'den daha büyük dereceli denklemlerin derecesini küçültmek için de kullanırız. Her iki kullanım alanına dair örneklerimiz mevcut, biraz sabredin.

Örnek. $(x+1)^2-3(x+1)-4=0$ *denklemini sağlayan x'lerin toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İsterseniz, parantezleri açarak, karşınıza çıkacak ikinci dereceden denklemi çözebilirsiniz ama öyle çok soru çözdüğümüzden, soruyu değişken değiştirme metodunu kullanarak çözeceğiz. $x+1=t$ olsun. Denklemimiz

$$t^2-3t-4=0$$

halini alır.

$$t^2-3t-4=(t-4)\cdot(t+1)=0$$

olduğundan

$$t=4 \text{ veya } t=-1$$

olur. Şimdi geri dönüşüm yapalım:

$$x+1=4 \text{ veya } x+1=-1$$

olur. O halde x'in alabileceği değerler 3 ve -2 olduğundan toplamı 1 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(x-1)^2-4(x-1)-32=0$ *denklemini sağlayan x reel sayılarının çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -27 B) -9 C) -3 D) 9 E) 27

Çözüm: $x-1=t$ dersek, denklem

$$t^2-4t-32=(t-8)(t+4)=0$$

haline döner. Buradan $t=8$ veya $t=-4$ olduğunu buluruz. Şimdi t yerine karşılığını yazalım.

$$x-1=8 \text{ eşitliğinden } x=9,$$
$$x-1=-4 \text{ eşitliğinden } x=-3$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(x+2)^2+15(x+2)-54=0$ *denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?*

A) -20 B) -19 C) -18 D) -15 E) -9

Çözüm: $x+2=t$ dersek, denklem

$$t^2+15t-54=(t+18)(t-3)=0$$

haline döner. Buradan $t=-18$ veya $t=3$ olduğunu buluruz. Şimdi t yerine karşılığını yazalım. $x+2=-18$ eşitliğinden $x_1=-20$, $x+2=3$ eşitliğinden $x_2=1$ bulunur. O halde toplamları $x_1+x_2=-20+1=-19$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\{-1, 2\}$ B) $\{3, -2\}$ C) $\{-3, -2\}$
D) $\{-2, -1, 2, 3\}$ E) $\{-3, -2, 1, 2\}$

Çözüm: $x^2-x=t$ dersek, denklem

$$t^2-8t+12=(t-2)(t-6)=0$$

haline döner. Buradan $t=2$ veya $t=6$ olduğunu buluruz. Şimdi t yerine karşılığını yazalım. $x^2-x=2$ eşitliğinden

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$$

yani $x=2$ veya $x=-1$ bulunur. $x^2-x=6$ eşitliğinden de

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$$

yani $x=3$ veya $x=-2$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $(x^2-1)^2-2(x^2-1)-3=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-2, 0, 1\}$ B) $\{-1, 0, 2\}$ C) $\{-2, 0, 2\}$
D) $\{-2, -1, 0, 2\}$ E) $\{-2, 0, 1, 2\}$

Çözüm: $x^2-1=t$ dersek, denklem

$$t^2-2t-3=(t-3)(t+1)=0$$

haline döner. Buradan $t=3$ veya $t=-1$ olduğunu buluruz. Şimdi t yerine karşılığını yazalım. $x^2-1=3$ eşitliğinden

$$x^2-4=(x-2)(x+2)=0$$

yani $x=2$ veya $x=-2$ bulunur. $x^2-1=-1$ eşitliğinden de $x^2=0$ yani $x=0$ bulunur. O halde çözüm kümesi $\{-2, 0, 2\}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^4 + 18x^2 + 32 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-2\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{1\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: $x^2 = t$ dersek, $x^4 = t^2$ olur. Böylelikle de verilen 4'üncü dereceden denklem 2'nci dereceden denkleme dönüşür.

$$t^2 + 18t + 32 = (t+2)(t+16) = 0$$

eşitliğinden $t = -2$ veya $t = -16$ bulunur. Şimdi t yerine x^2 yazalım. $x^2 = -2$ ve $x^2 = -16$ denklemlerinden reel kök gelmesini bekleyenin de eli boş kalır. Çözüm kümemiz $\varnothing$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $m^4 - 16m^2 + 28 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{\sqrt{2}, \sqrt{14}\}$ B) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{14}\}$ C) $\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$

D) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$ E) $\{1, \sqrt{14}\}$

Çözüm: $m^2 = t$ dersek, $m^4 = t^2$ olur. Böylelikle de verilen 4'üncü dereceden denklem 2'nci dereceden denkleme dönüşür.

$$t^2 - 16t + 28 = (t-2)(t-14) = 0$$

eşitliğinden

$$t = 2 \text{ veya } t = 14$$

bulunur. Şimdi t yerine m^2 yazalım. $m^2 = 2$ eşitliğinden

$$m = \sqrt{2} \text{ veya } m = -\sqrt{2},$$

$m^2 = 14$ eşitliğinden de

$$m = \sqrt{14} \text{ veya } m = -\sqrt{14}$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $100x^{10} + 20x^5 + 1 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) $-\frac{1}{10}$ D) $\sqrt[3]{-\frac{1}{10}}$ E) $\sqrt[5]{-\frac{1}{10}}$

Çözüm: Bu sefer sorun daha da büyük. Çözmemiz gereken denklem 10'uncu dereceden! Olsun, bize vız gelir. $x^5 = t$ dersek $x^{10} = t^2$ olur. Denklem de

$$100t^2 + 20t + 1 = 0$$

haline döner. Size tanıdık geldi mi bilmem ama ben görünce hemen tanıdım ifadeyi.

$$100t^2 + 20t + 1 = (10t+1)^2 = 0$$

olduğundan $10t + 1 = 0$ yani $t = -\frac{1}{10}$'dur.

Şimdi t değerini yerine yazalım:

$x^5 = -\frac{1}{10}$ olduğundan $x = \sqrt[5]{-\frac{1}{10}}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-1\}$ D) $\{81\}$ E) $\{-81\}$

Çözüm: Bildiğiniz üzere $\sqrt{x}$ ifadesi $\sqrt[4]{x}$ ifadesinin karesidir. Bu yüzden $\sqrt[4]{x} = t$ dersek, $\sqrt{x} = t^2$ olur. Bu durumda denklem de şu hali alır:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t-3)(t+1) = 0$$

olduğundan $t = 3$ veya $t = -1$ olduğu görülür. Şimdi t'yi yerine yazalım. $\sqrt[4]{x} = 3$ ise $x = 81$ bulunur. $\sqrt[4]{x} = -1$ olamayacağından diğer eşitliği incelemeye gerek yoktur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ *denkleminin reel kökleri toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 8 E) 9

Çözüm: $x^3 = t$ olsun. Denklem $t^2 - 7t - 8 = 0$ halini alır. Çarpanlarına ayırırsak $(t-8)(t+1) = 0$ bulunur ki

$t = x^3 = 8$ denkleminin reel kökü $x = 2$,

$t = x^3 = -1$ denkleminin reel kökü de $x = -1$

olduğundan cevabımız $2 + (-1) = 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x-2}{x+1} = 3$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{3\}$ E) $\{1, 2\}$

Çözüm: Toplanan kesirlere dikkat ederseniz, sağdaki, soldakinin takla atmış halinin 2 katıdır. Dolayısıyla soldaki kesrinde değerine A dersek, sağdaki $2/A$ olur. Buna göre denklemi tekrar düzenleyelim.

$$A + \frac{2}{A} = 3$$

$$A^2 + 2 = 3A$$

$$A^2 - 3A + 2 = 0$$

$$(A-1)(A-2) = 0$$

Görüldüğü üzere $A = 1$ veya $A = 2$ olmalıdır.

$\frac{x+1}{x-1} = 1$ eşitliğinden kök gelmez, fakat $\frac{x+1}{x-1} = 2$ eşitliğinden $x = 3$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{\frac{1}{2}\}$ C) $\{1\}$ D) $\{2\}$ E) $\{\frac{1}{2},1\}$

Çözüm: Köklü ifadeyi yalnız bırakalım.

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3$$
$$2x^2-3x+3=2\sqrt{2x^2-3x+2}$$

$2x^2-3x+2=t$ dersek, elimizdeki eşitlik

$$t+1=2\sqrt{t}$$

halini alır. Şimdi eşitliğin her iki yanının karesini alalım:

$$t^2+2t+1=4t$$
$$t^2-2t+1=0$$
$$(t-1)^2=0$$
$$t-1=0$$

Şimdi t değerini yerine yazalım:

$$2x^2-3x+2-1=0$$
$$2x^2-3x+1=0$$
$$(2x-1)(x-1)=0$$

bulunur. $x=\frac{1}{2}$ ve $x=1$ değerleri köklü ifadeleri tanımsız yapmadıklarından ÇK $=\{\frac{1}{2},1\}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Katsayıları köklü ifade içeren denklemlerde bir pratik yol. Eğer bir denklemin tüm tek ya da çift dereceli terimlerinin katsayıları aynı bir köklü ifade içeriyorken diğer terimlerinin katsayıları rasyonelse güzel bir değişken değiştirme metodumuz var. Metodu örneklerin çözümlerinde anlattık, okumadan geçmeyin lütfen.

Örnek. $\sqrt{2}x^2-2x-12\sqrt{2}=0$ *denkleminin büyük kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{2}$

Çözüm: Burada diğerlerinden çok daha ilginç bir değişken değiştirme metodu kullanacağız. Çift dereceli terimler $\sqrt{2}$ ihtiva ettiğinden, x yerine $a\sqrt{2}$ yazılır sonra sadeleştirilirse köklü ifadeden kurtulunur.

$$\sqrt{2}x^2-2x-12\sqrt{2}=0$$
$$\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2-2\left(a\sqrt{2}\right)-12\sqrt{2}=0$$
$$2\sqrt{2}a^2-2\sqrt{2}a-12\sqrt{2}=0$$
$$a^2-a-6=0$$
$$(a-3)(a+2)=0$$

diye $a=3$ veya $a=-2$'dir. O halde $x=3\sqrt{2}$ veya $x=-2\sqrt{2}$ 'dir. Geriye büyük kökü bulmak kaldı. ☺

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2-7\sqrt{3}x+36=0$ *denkleminin köklerinin kareleri toplamı kaça eşittir?*

A) 25 B) 50 C) 75 D) 100 E) 125

Çözüm: Bu sefer x yerine $a\sqrt{3}$ yazılırsa köklü ifadeden kurtulunur.

$$x^2-7\sqrt{3}x+36=0$$
$$\left(a\sqrt{3}\right)^2-7\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}\right)+36=0$$
$$3a^2-21a+36=0$$
$$a^2-7a+12=0$$
$$(a-3)(a-4)=0$$

diye $a=3$ veya $a=4$'tür. O halde $x=3\sqrt{3}$ veya $x=4\sqrt{3}$, köklerin kareleri toplamı da $27+48=75$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\sqrt{x^2-12\sqrt{2}x+144}+\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+16}=4\sqrt{10}$$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 4

Çözüm: $\sqrt{x^2-12\sqrt{2}x+144}+\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+16}=4\sqrt{10}$ denkleminde aynı sebeple $x=a\sqrt{2}$ olsun.

$$\sqrt{2a^2-24a+144}+\sqrt{2a^2-8a+16}=4\sqrt{10}$$
$$\sqrt{a^2-12a+72}+\sqrt{a^2-4a+8}=4\sqrt{5}$$
$$\sqrt{a^2-8a-4a+72}+\sqrt{a^2-8a+4a+8}=4\sqrt{5}$$
$$\sqrt{a^2-8a+40-4a+32}+\sqrt{a^2-8a+40+4a-32}=4\sqrt{5}$$

$a^2-8a+40=m$ ve $4a-32=n$ olsun.

$$\sqrt{m-n}+\sqrt{m+n}=4\sqrt{5}$$
$$m-n+m+n+2\sqrt{m^2-n^2}=80$$
$$\sqrt{m^2-n^2}=40-m$$
$$m^2-n^2=1600-80m+m^2$$
$$n^2=80(m-20)$$
$$(4a-32)^2=80(a^2-8a+40-20)$$
$$16(a-8)^2=80(a^2-8a+20)$$
$$(a-8)^2=5(a^2-8a+20)$$
$$a^2-16a+64=5a^2-40a+100$$
$$4a^2-24a+36=0$$
$$a^2-6a+9=0$$

diye $a=3$ yani $x=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$(2x+3)^2+2\cdot(2x+3)-35=0$$

denklemini sağlayan x'lerin toplamı kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$(x^2-5)^2+3\cdot(x^2-5)-10=0$$

denkleminin tam sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {3} B) {2} C) {1} D) {0} E) {−1}

3.

$$m^4+2m^2-8=0$$

denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2,-\sqrt{2},\sqrt{2},2\}$ B) $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ C) $\{\sqrt{2},2\}$

D) {−2, 2} E) $\{-2,\sqrt{2}\}$

4.

$$a^4+2a^2-8=0$$

denkleminin reel köklerinin oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −1 B) 7 C) −7 D) 1 E) 0

5.

$$\left(\frac{2}{x-1}\right)^2-\frac{2}{x-1}-2=0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$\left(\frac{10}{x}-x\right)^2-10\cdot\left(x-\frac{10}{x}\right)+9=0$$

denklemine göre $-\frac{10}{x}+x$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) −1 B) −9 C) 9 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

7.

$$\left(x-\frac{10}{x}\right)^2-10\left(x-\frac{10}{x}\right)+9=0$$

denkleminin dört reel kökünün kaç tanesi tam sayıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-14\left(x-\frac{1}{x}\right)+49=0$$

denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?

A) −1 B) 7 C) −7 D) 1 E) 0

9.

$$\left(\frac{3x+2}{x}\right)^2-5\left(\frac{3x+2}{x}\right)+6=0$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 2 D) −2 E) 3

10.

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}-6=0$$

denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {16, 81} B) {16} C) {81} D) {−81, 16} E) ∅

1.A 2.D 3.B 4.A 5.C 6.C 7.C 8.B 9.D 10.B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$2\sqrt{x}-14\sqrt[4]{x}+20=0$$

eşitliğini sağlayan en küçük x tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 16 C) 25 D) 125 E) 625

2.

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{64\}$ B) $\{27\}$ C) $\{0, 81\}$ D) $\{81\}$ E) $\{81, 256\}$

3.

$$2x+\sqrt{x}-6=0$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{4}{25}$ D) $\frac{25}{4}$ E) $\frac{81}{64}$

4.

$$\sqrt{-x^2+2x}=-x^2+2x$$

denkleminin kaç reel kökü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$\sqrt{2x+3}-2x=1$$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 2

6.

$$2x-3+\sqrt{2x-3}=6$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-6, \frac{7}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{7}{2}, 6\right\}$ D) $\{-6\}$ E) $\{6\}$

7.

$$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x-1}{2x+1}-2=0$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) 4 E) 5

8.

$$(x^2+3x)^2-14(x^2+3x)+40=0$$

denklemine göre x^2+3x ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) -4 B) -10 C) -5 D) 4 E) 5

9.

$$\sqrt{4x^2+20x+25}+2x=-5$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $(-\infty,-\frac{5}{2}]$ C) $[\frac{5}{2}, +\infty)$ D) $\{1\}$ E) $\mathbb{R}$

10.

$$x^2-\sqrt{5}x-30=0$$

denkleminin köklerinin kareleri toplamı kaçtır?

A) 35 B) 45 C) 55 D) 65 E) 125

1.B 2.D 3.B 4.C 5.C 6.B 7.B 8.D 9.B 10.D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$2^{2x+1} - 33\cdot 2^{x-1} + 4 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0, 2\}$ B) $\{-2, 4\}$ C) $\{2, 3\}$ D) $\{-2, 3\}$ E) $\{-3, 1\}$

2.

$$x^{-1} + 4x^{-1/2} - 5 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{5\}$ B) $\{1\}$ C) $\left\{\frac{1}{25}, 1\right\}$ D) $\left\{\frac{1}{25}\right\}$ E) $\varnothing$

3.

$$4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0\}$ B) $\{0, 2\}$ C) $\{2\}$ D) $\{1, 4\}$ E) $\{2, 4\}$

4.

$$3^{x-1} + \frac{3}{3^{x-1}} = 4$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 2\}$ B) $\{0, 1\}$ C) $\{1, 3\}$ D) $\{2, 4\}$ E) $\varnothing$

5.

$$x^2 - 3|x| - 4 = 0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) -16 B) -4 C) 0 D) 4 E) 6

6.

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = 2$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) -4 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

7.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \sqrt{x} = 1$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$\frac{6}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{2} = 4$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) 2 B) 6 C) 4 D) 10 E) 38

9.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \sqrt{x^2+4} = 2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{5\}$ B) $\{0\}$ C) $\left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ D) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ E) $\varnothing$

10.

$$x^2 + mx + n = 0$$

denkleminin çözüm kümesi $\{-5, 3\}$ olduğuna göre $(2x + 1)^2 + m(2x + 1) + n = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{1, 3\}$ C) $\{-1, 2\}$ D) $\{-2, 3\}$ E) $\{-3, 1\}$

1.D 2.B 3.B 4.A 5.A 6.C 7.A 8.E 9.E 10.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İki Bilinmeyenli Denklemler

Burada yapacaklarımızın bir bilinmeyenli ikinci dereceden denklemlerde yaptığımız çarpanlara ayırma işlemlerinden hiçbir farkı yok. Orada x'i bir reel sayı buluyorduk, burada ya x'i y'ye bağlı ya da y'yi x'e bağlı olarak bulacağız.

Örnek. $2x^2 + 15xy + 7y^2 = 0$ *denklemini sağlayan x değerleri aşağıdaki kümelerin hangisinde doğru olarak verilmiştir?*

A) $\{y, 2y\}$ B) $\{-y, y\}$ C) $\{y, 7y\}$

D) $\{y, -7y\}$ E) $\{-\frac{y}{2}, -7y\}$

Çözüm: Hemen iki değişkenli polinomu çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 + 15xy + 7y^2 = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 2x \quad\quad +y \\ x \quad\quad +7y \end{array}$$

Çapraz çarpımların toplamı ortadaki ifadeyi verdiğinden, çarpanları yazarken karşılıklı ifadeleri kullanacağız.

$$2x^2 + 15xy + 7y^2 = (2x + y)\cdot(x + 7y) = 0$$

eşitliğinden $x = -\frac{y}{2}$ veya $x = -7y$ bulunur.

İkinci bir metot olarak da şunu önerebiliriz: Denklemin her iki yanını x^2 veya y^2'ye bölelim. Biz y^2'ye bölelim.

$$2\frac{x^2}{y^2} + 15\frac{xy}{y^2} + 7\frac{y^2}{y^2} = 0$$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 15\left(\frac{x}{y}\right) + 7 = 0$$

Şimdi x/y değerine t diyerek $2t^2 + 15t + 7 = 0$ denklemini t için çözsek yeter.

$$2t^2 + 15t + 7 = (2t+1)(t+7) = 0$$

$$t = \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \text{ veya } t = \frac{x}{y} = -7$$

Buradan $x = -y/2$ veya $x = -7y$ bulunur.

Üçüncü bir metot olarak da şunu söyleyelim: y'ye durdukyere 1 deyin. Denklem $2x^2 + 15x + 7 = 0$ halini alır. Buradan x'ler $-1/2$ ve -7 olarak bulunur. İşte bu x değerlerinin yanına y koyun, bitsin: $x = -\frac{1}{2}y$ veya $x = -7y$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $7x^2 - 20xy - 3y^2 = 0$ *denklemini sağlayan x değerleri aşağıdaki kümelerin hangisinde doğru olarak verilmiştir?*

A) $\{-y, y\}$ B) $\{y, 2y\}$ C) $\{3y, 7y\}$

D) $\{-3y, 7y\}$ E) $\{-\frac{y}{7}, 3y\}$

Çözüm: Hemen denklemi çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{ccc} 7x^2 - 20xy - 3y^2 = 0 \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ 7x \quad\quad -3y \\ x \quad\quad +y \end{array}$$

Bu sefer karşılıklı terimlerin çarpımların toplamı ortadaki ifadeyi verdiğinden, çarpanları yazarken çapraz ifadeleri kullanacağız.

$$7x^2 - 20xy - 3y^2 = (7x + y)\cdot(x - 3y) = 0$$

eşitliğinden $x = -\frac{y}{7}$ veya $x = 3y$ buluruz.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\left.\begin{array}{l} xy + 3x = 4 \\ xy - x = -4 \end{array}\right\}$$

denklem sistemini sağlayan x ve y sayılarının çarpımı kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: İki denklemde de var olan xy ifadelerini çekip, birbirlerine eşitlersek, soru çözülecek gibi duruyor. Çünkü her ikisi de x'e bağlı gelecek.

İlkinden $xy = 4 - 3x$, ikincisinden $xy = x - 4$ bulunduğundan $4 - 3x = x - 4$ yani $4x = 8$ bulunur ki, buradan da $x = 2$ olduğu anlaşılır. Şimdi bu değeri eşitliklerin birinde yerine yazarak y'yi bulacağız. İlk eşitlikte yazdığımızda $2y + 6 = 4$ olur ki buradan $y = -1$ bulunur.

Bize x ile y'nin çarpımı sorulduğundan bu değerleri çarpalım: $2\cdot(-1) = -2$.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$x^2y - x^2 = 1$$
$$xy = 2$$

denklem sistemini sağlayan y değeri kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $x^2y - x^2 = 1$ eşitliğini $x\cdot(xy) - x^2 = 1$ gibi düşünürsek, soruda verilen ikinci bilgiyi çok faydalı kullanmış oluruz. $xy = 2$ verildiğinden $2x - x^2 = 1$ yani

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$$

bulunur. Buradan da $x = 1$ bulunduğundan $xy = 2$ eşitliği gereği $y = 2$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x - y + 3 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini sağlayan x ve y pozitif sayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: İkinci denklemden y'yi çekip, ilk denklemde yerine yazalım.

$$x^2 - x - (5 - 2x) + 3 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$

olduğundan $x = -2$ veya $x = 1$'dir. Soruda x ve y değerlerinin pozitif olduğu söylendiğinden $x = 1$ alacağız. Bu durumda $y = 3$ çıkar. O halde toplam $1 + 3 = 4$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hangi şıkta verilen x ve y değerleri*

$$x^2 - y^2 - 4 + 4y = 0$$

denklemini sağlar?

A) $x = 0, y = 0$ B) $x = 0, y = 1$ C) $x = 0, y = -1$
D) $x = 0, y = -2$ E) $x = 0, y = 2$

Çözüm: En kolayı şıklarda verilen değerleri denemektir ama o zaman benim burada işim ne? ☺ Dört terimli ifadeleri eğer ikili-ikili gruplandırdığımızda ortak çarpan gelmiyorsa, üçlü-birli düşünmeliydik. Zaten 1-4-4 katsayıları bize bir tamkare ifadenin gizli olabileceğini anlatıyor. Öyle de zaten.

$$x^2 - y^2 - 4 + 4y = 0$$
$$x^2 - (y^2 - 4y + 4) = 0$$
$$x^2 - (y-2)^2 = 0$$
$$(x + y - 2)(x - y + 2) = 0$$

eşitliklerinden $x + y = 2$ ve $x - y = -2$ eşitliklerine ulaşırız. Bu iki denklemden $x = 0$ ve $y = 2$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$x^2 + y^2 + 8x + 3 = 0$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm: 3 yerine 16–13 yazıp, eşitliği aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$x^2 + y^2 + 8x + 3 = 0$$
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 13 = 0$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 13$$

Bu eşitlik tam sayılarda ancak

$$(\pm 2)^2 + (\pm 3)^2 = 13 \text{ veya } (\pm 3)^2 + (\pm 2)^2 = 13$$

ile sağlanır. x herhangi bir değeri aldığında buna karşılık y'nin 2 farklı değer alabileceğini fark ediniz. x için 4 aday olduğundan 8 farklı (x, y) ikilisi yazmak mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y \neq 0$ olmak üzere x'e göre ikinci dereceden olan*

$$x^2 - 6xy + 9y = 0$$

denklemini sağlayan tek bir (x, y) ikilisi olduğuna göre (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−1, 3) B) (1, 3) C) (3, −1) D) (3, 1) E) (−3, 1)

Çözüm: Buradan x'e bağlı bu ikinci dereceden denklemin tamkare olması gerektiğini anlamalıyız. Bu sebeple hemen diskriminantını 0'a eşitleyeceğiz.

$$(-6y)^2 - 4\cdot 1\cdot 9y = 0$$
$$36y^2 - 36y = 0$$
$$36y\cdot(y-1) = 0$$

Soruda $y \neq 0$ verildiğinden $y = 1$ olmalıdır. Bu değer içinse denklemimiz $x^2 - 6x + 9 = 0$ halini alır ki

$$(x-3)^2 = 0$$

haline çevirirsek $x = 3$ olması gerektiğini anlarız. Yani çözüm sadece (3, 1)'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere x'e göre ikinci dereceden olan*

$$x^2 - 6xy + 9y = 0$$

denklemini sağlayan hiç bir (x, y) ikilisi olmadığına göre y hangi koşulu sağlamalıdır?

A) $0 < y < 1$ B) $0 < y < 4$ C) $-1 < y < 0$
D) $0 < y < 2$ E) $-4 < y < 4$

Çözüm: Denklemin üstteki soruda verilen denklemle aynı olduğunu fark ediniz. Yalnız bu sefer üstte bulduğumuz diskriminant negatif olmalıdır.

$$36y\cdot(y-1) < 0$$

eşitsizliği çözülürse $0 < y < 1$ olması gerektiği anlaşılır.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

denkleminin x için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $\{\frac{y}{2}, -y\}$ B) $\{-\frac{y}{2}, y\}$ C) $\{y, 2y\}$

D) $\{-y, 2y\}$ E) $\{\frac{y}{2}, y\}$

2.

$$4x^2 + y^2 - 4xy = 0$$

denkleminin x için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\{-\frac{y}{2}, y\}$ B) $\{-2y, 2y\}$ C) $\{2y\}$ D) $\{-\frac{y}{2}\}$ E) $\{\frac{y}{2}\}$

3.

$$2a^2 - ab - b^2 = 0$$

denkleminin b için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\{-2a, a\}$ B) $\{2a, a\}$ C) $\{a, -\frac{a}{2}\}$

D) $\{2a, -a\}$ E) $\{-a, \frac{a}{2}\}$

4.

$$x^2y - x = 4$$
$$xy = 5$$

denklem sistemini sağlayan x'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$$

denklemini sağlayan x ve y değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = -2, y = 0$ B) $x = 0, y = 2$ C) $x = 2, y = 0$
D) $x = 0, y = -2$ E) $x = 2, y = -2$

6.

$$2mn - 2m^2 - n^2 + mn = 0$$

denklemini sağlayan n'nin alabileceği değerlerin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5m$ B) $4m$ C) $3m$ D) $2m$ E) m

7.

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8.

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$$

denklemini sağlayan (x, y) ikilisi aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) (0, 1) B) (−1, 0) C) (−1, 1) D) (1, 2) E) (0, 2)

9.

$$m^2 - 3mn + 2n^2 = 0$$

olduğuna göre $\frac{m}{n}$ oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 3 B) 2 C) 0 D) -1 E) -2

10.

$$x^2 - (2m + 2)xy + (3m + 1)y^2 = 0$$

denkleminin çakışık iki kökü olmasını sağlayacak m değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

1.C 2.E 3.A 4.A 5.C 6.C 7.C 8.B 9.B 10.C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$10x^2 - 9xy + 2y^2 = 0$$

olduğuna göre x/y oranı aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) 2 B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

2.

$$21x^2 + 17xy + 2y^2 = 0$$

denkleminin x için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{1}{7}y, \frac{2}{3}y\right\}$ B) $\left\{-\frac{1}{7}y, \frac{2}{3}y\right\}$ C) $\left\{-\frac{2}{3}y, \frac{1}{7}y\right\}$
D) $\left\{-\frac{2}{3}y, -\frac{1}{7}y\right\}$ E) $\left\{\frac{2}{3}y, 7y\right\}$

3.

$$x^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)xy - \sqrt{2}y^2 = 0$$

denkleminin y için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-x, \frac{\sqrt{2}}{2}x\right\}$ B) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}x, x\right\}$ C) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}x, x\right\}$
D) $\left\{-\sqrt{2}x, -x\right\}$ E) $\left\{x, \sqrt{2}x\right\}$

4.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerleri için $x + 2y$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) −2 E) −3

5.

$$(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x)y + 3y^2 = 0$$

denkleminin y için çözüm kümesinin elemanlarının oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$a^2b - a^2 + 9 = ab = 4$$

eşitliklerini sağlayan a değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) −5 B) −1 C) 1 D) 5 E) 0

7.

$$8^{\frac{2}{3}x^2} = 2^{xy+y^2}$$

eşitliğini sağlayan y değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2x, x\}$ B) $\{3x, 8x\}$ C) $\{-8x, -3x\}$
D) $\{-x, 2x\}$ E) $\{-2x, -x\}$

8.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x - y = 8 \end{array}\right\}$$

denklem sistemini sağlayan (x, y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-6, 2)$ B) $(10, 2)$ C) $(6, 2)$ D) $(9, 1)$ E) $(6, -2)$

9.

$y \neq 0$ olmak üzere

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

x'e göre ikinci dereceden olan yukardaki denklemi sağlayan tek bir (x, y) ikilisi olduğuna göre (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−1, 1) B) (1, 1) C) (1, −2) D) (2, 1) E) (0, 2)

10.

$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

x'e göre ikinci dereceden olan yukardaki denklemi sağlayan <u>hiç bir</u> (x, y) ikilisi olmadığına göre y hangi koşulu sağlamalıdır?

A) $0 < y < 1$ B) $0 < y < 4$ C) $-1 < y < 0$
D) $0 < y < 2$ E) $-4 < y < 4$

1.C 2.D 3.A 4.A 5.E 6.A 7.A 8.E 9.B 10.A

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

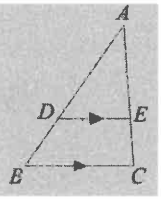
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Geometride 2. Dereceden Denklem

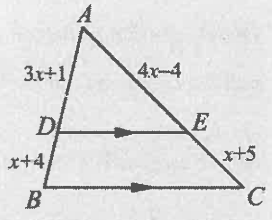
İkinci dereceden denklemler, hiç umulmadık yerlerde karşımıza çıkmalarıyla meşhurdur. Abartmayalım ama geometrinin bile ilerlemesinde çokça katkıları olmuştur. Geometri problemleri çözerken çoğu zaman karşınıza çıktığını hatırlıyor olmalısınız. Hatırlamıyorsanız, ya çok az geometri sorusu çözmüşsünüzdür ya da hafızanızda bir problem vardır! ☺ O kadar çok çeşitli örnek verilebilir ki biz en temel birkaç tanesiyle yetineceğiz. Lazım olan teoremlerin de birkaçını hatırlatacağız.

Teorem [Tales]. *Verilen iki doğruyu kesen paralel doğrular, bu iki doğru üzerinde orantılı doğru parçaları ayırır.*

Yani şekle göre; $\dfrac{|AD|}{|DB|}=\dfrac{|AE|}{|EC|}$.



Örnek.
Yandaki ABC üçgeninde
DE // BC veriliyor.
$|AD| = 3x+1$ br
$|DB| = x+4$ br
$|AE| = 4x-4$ br
$|EC| = x+5$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 7 B) 6 C) 5 D) 1 E) −3

Çözüm: Tales Teoremi'nden

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AE|}{|EC|}$$

olduğunu biliyoruz. Kuralım orantımızı.

$$\frac{3x+1}{x+4}=\frac{4x-4}{x+5}$$

olduğundan

$$3x^2+16x+5=4x^2+12x-16$$

olur. Düzenlenirse

$$x^2-4x-21=0$$

çıkar. Denklem çarpanlarına ayrılırsa

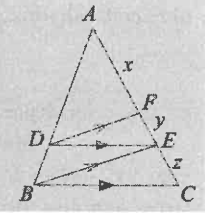
$$(x-7)(x+3)=0$$

yani $x=-3$ veya $x=7$ bulunur. Fakat uzunluklar negatif olamayacağından, $x>1$ sağlanmalıdır, yani $x=-3$ değerini alamayız. O halde $x=7$'dir.

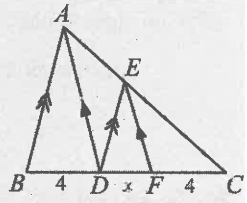
Doğru cevap: A.

Şimdi de Tales Teoremi'ni iki kere kullandıran bir teorem verip, onla ilgili bir alıştırma sorusu çözelim.

Teorem. *Yandaki ABC üçgeninde*
DE // BC ve DF // BE veriliyor.
$|AF| = x$ br
$|FE| = y$ br
$|EC| = z$ br
ise $\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+y}{z}$.



Örnek.
Yandaki ABC üçgeninde
DE // BA ve AD // EF
veriliyor.
$|BD| = |FC| = 4$ cm
$|DF| = x$ cm
olduğuna göre x kaçtır?



A) $2-2\sqrt{5}$ B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $-2+2\sqrt{5}$

Çözüm: Yine Tales Teoremi'ni kullanacağız ama bu sefer iki kere kullanmamız gerekiyor.

$$\frac{|CF|}{|FD|}=\frac{|CE|}{|EA|} \text{ ve } \frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|CD|}{|DB|}$$

olduğundan

$$\frac{|CF|}{|FD|}=\frac{|CD|}{|DB|}$$

olmalıdır. Değerlerini yerlerine yazınca

$$\frac{4}{x}=\frac{x+4}{4}$$

eşitliğiyle karşılaşıyoruz. İçler-dışlar çarpımı yapınca da $x^2+4x=16$ denklemi çıkıyor ki düzenlenirse

$$x^2+4x-16=0$$

halini alır. Burada dikkat etmemiz gereken nokta x'in pozitif olma şartıdır. O halde iki kökten pozitif olanı alacağız. Önce şu iki kökü bulalım bakalım.

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-16)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm4\sqrt{5}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$$

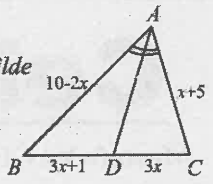
olduğundan pozitif olan kök

$$x=-2+2\sqrt{5}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde AD iç açıortaydır. Uzunluklar şekilde verildiği gibi ise ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{149}{9}$ B) $\frac{159}{9}$ C) $\frac{169}{9}$ D) $\frac{179}{9}$ E) 21

Çözüm: İç açıortay Teoremi'nden

$$\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|CD|}$$

olduğunu biliyoruz. Değerleri yerlerine yazarsak

$$\frac{10-2x}{3x+1}=\frac{x+5}{3x}$$

çıkar ki içler-dışlar çarpımı yapılırsa

$$30x-6x^2=3x^2+16x+5$$

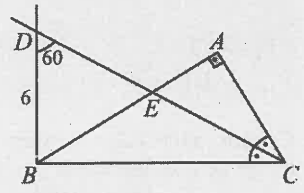
yani $9x^2-14x+5=0$ bulunur. Hemen denklemi çarpanlarına ayıralım. $(9x-5)(x-1)=0$ olduğundan $x=5/9$ veya $x=1$ olarak bulunur.

ABC üçgeninin çevresi $5x+16$ br olduğundan bu değer $x=5/9$ için daha küçük değer alır.

$$\min[\text{Çevre}(ABC)]=5\cdot\frac{5}{9}+16=\frac{169}{9}\text{ br.}$$

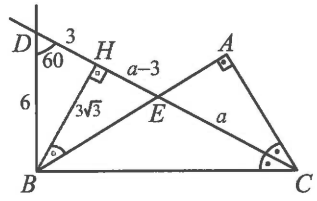
Doğru cevap: C.

Örnek. *$BA \perp AC$*
$m(ACD)=m(BCD)$
$m(BDC)=60^\circ$
$|DB|=6$ cm
olduğuna göre
$|DE|=|EC|=a$ cm
olduğuna göre a kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: B'den DC'ye inilen dikme ayağı H olsun. BHD üçgeni 30°-60°-90° üçgeni, $BHAC$ ise bir kiriş dörtgeni olur. O halde $m(HBA)=m(HCA)$ olur ki, bu durumda HBE ile HCB benzer olur. Eşleme yapılırsa,



$$(3\sqrt{3})^2=(a-3)\cdot(2a-3)$$

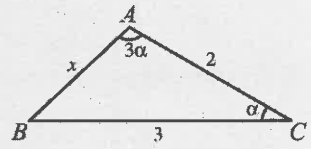
eşitliğinden

$$27=2a^2-9a+9$$
$$2a^2-9a-18=0$$
$$(2a+3)(a-6)=0$$

bulunur. a değeri pozitif olması gerektiğinden $-\frac{3}{2}$ değerini alamaz, o halde $a=6$ olarak bulunur.

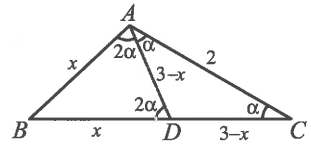
Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BCA)=\alpha$
$m(CAB)=3\alpha$
$|BC|=3$ br
$|CA|=2$ br
$|AB|=x$ br
olduğuna göre x aşağıdaki üçüncü dereceden denklemlerden hangisinin reel köküdür?



A) $x^3-3x^2-13x-27=0$ B) $x^3-3x^2+13x+27=0$
C) $x^3+3x^2-13x+27=0$ D) $x^3-3x^2+13x-27=0$
E) $x^3-3x^2-13x+27=0$

Çözüm: CAB açısının ölçüsünü 2α ve α olarak ayıran $[AD]$ kesenini çizelim. Hem ADC hem de ABD üçgenlerinin ikizkenar olduğunu görerek $|BD|=x$ br ve $|DC|=|AD|=3-x$ br olduğunu yazalım. Şimdi Stewart teoremini yazacağız.



$$(3-x)^2=\frac{x^2(3-x)+2^2x}{x+(3-x)}-x(3-x)$$

$$(3-x)^2+x(3-x)=\frac{x^2(3-x)+4x}{3}$$

$$9(3-x)=-x^3+3x^2+4x$$

$$x^3-3x^2-13x+27=0$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Herhangi bir AB doğru parçasının üzerinde alınan bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|CB|}$ oluyorsa, bu oranların her birine altın oran denir. Buna göre altın oranın değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: Bir AB doğru parçası çizip üzerinde koşulu sağlayan bir C noktası alalım.



$|AC|=x$ ve $|CB|=y$ diyelim. $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$ olduğundan tanım gereği altın oran x/y'ye eşittir. Orantıyı çözelim.

$$x^2=xy+y^2$$
$$x^2-xy-y^2=0$$
$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-1=0$$

x/y kesrine t diyelim. $t^2-t-1=0$ denklemini çözelim.

$$t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

t pozitif olması gerektiğinden + işaretliyi alacağız.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

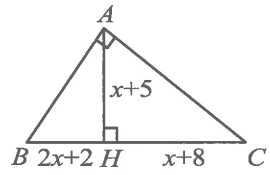
1.
Bir ABC üçgeninde
$|AB| = x^2$ br
$|AC| = x + 3$ br
$|BC| = 3x$ br
olup ABC üçgeninin çevresi 15 br olduğuna göre x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.
Bir kenar uzunluğu a br olan ABC eşkenar üçgeni için
$$\text{Alan}(ABC) = \frac{(2a+3)\sqrt{3}}{4} \text{ br}^2$$
olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç br dir?

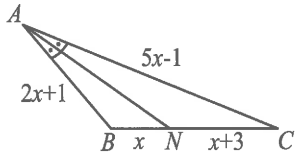
A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

3.
Yandaki ABC üçgeninde
$m(\hat{A}) = 90^\circ$ ve
$AH \perp BC$ veriliyor.
$|AH| = x + 5$ br
$|BH| = 2x + 2$ br
$|HC| = x + 8$ br
olduğuna göre $|AH|$ kaç br dir?



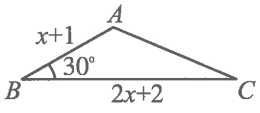
A) 1 B) 2 C) 6 D) 7 E) 8

4.
ABC bir üçgen
AN iç açıortay
$|AB| = 2x + 1$ br
$|AC| = 5x - 1$ br
$|BN| = x$ br
$|NC| = x + 3$ br
olduğuna göre x kaça eşittir?



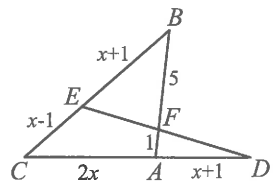
A) 14 B) 7 C) 6 D) 3 E) 1

5.
Yandaki ABC üçgeninde
$m(ABC) = 30^\circ$ ve
$\text{Alan}(ABC) = \frac{9}{2}$ br^2
olarak veriliyor.
$|AB| = x + 1$ br ve $|BC| = 2x + 2$ br olduğuna göre $|AB|$'nin değeri kaça eşittir?



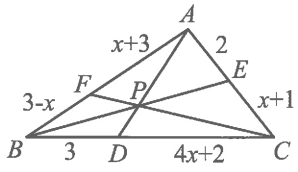
A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 18

6.
ABC ve CDE birer üçgen
$[AB] \cap [DE] = \{F\}$
$|AD| = |BE| = x+1$ br
$|CE| = x - 1$ br
$|AC| = 2x$ br
$|FB| = 5 \cdot |FA| = 5$ br
olduğuna göre x kaçtır?



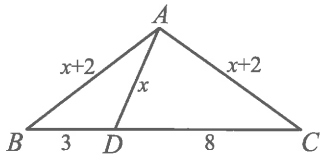
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
ABC bir üçgen
$|AE| = 2$ br,
$|BD| = 3$ br
$|CE| = x + 1$ br
$|AF| = x + 3$ br
$|FB| = 3 - x$ br
$|DC| = 4x + 2$ br
$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{P\}$ olduğuna göre x kaçtır?



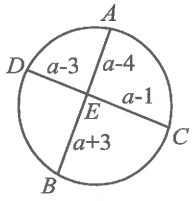
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
ABC bir üçgen
$|AB| = x + 2$ cm
$|AC| = x + 2$ cm
$|BD| = 3$ cm
$|DC| = 8$ cm
olduğuna göre
$|AD| = x$ kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
Yanda verilen çemberde
$[AB] \cap [DC] = \{E\}$
$|AE| = a - 4$ br
$|CE| = a - 1$ br
$|EB| = a + 3$ br
$|ED| = a - 3$ br
olduğuna göre a kaçtır?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

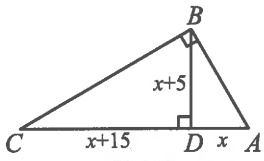
10.
$$(1 - 2a)x + y - 2007 = 0$$
$$(1 + 3a)x - y - 2008 = 0$$
doğruları dik kesişiyorlarsa a'nın pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 2 E) 6

1.A 2.C 3.C 4.D 5.C 6.C 7.A 8.E 9.B 10.C

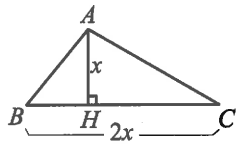
CEVAPLI TEST 2

1.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$ ve $BD \perp CA$
$|DA| = x$ cm
$|BD| = x + 5$ cm
$|CD| = x + 15$ cm
olduğuna göre x kaçtır?



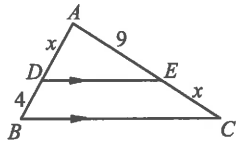
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
Yandaki ABC üçgeninde
$AH \perp BC$ veriliyor.
$|AH| = x$ br, $|BC| = 2x$ br ve
Alan$(ABC) = 9$ br^2
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Yandaki ABC üçgeninde
$DE \,//\, BC$ veriliyor.
$|AD| = x$ br,
$|DB| = 4$ br,
$|AE| = 9$ br,
$|EC| = x$ br
olduğuna göre x'in alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\{-6\}$ B) $\{\frac{13}{2}\}$ C) $\{6\}$ D) $\{-6, 6\}$ E) $\{6, \frac{13}{2}\}$

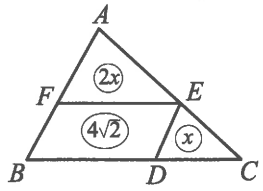
4.
Bir ABC üçgeninde $m(B) = 90°$ ve $m(C) = 30°$ olarak veriliyor.
$|AB| = x^2$ br ve $|BC| = (x+2)\sqrt{3}$ br olduğuna göre $|AC|$'nin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

5.
Bir ABC dik üçgeninde $m(A) = 90°$ olarak veriliyor.
Bu üçgenin kenarortay uzunlukları olan v_a, v_b, v_c arasında $v_a = x$ br ve $v_b^2 + v_c^2 = 4x + 1$ br bağıntıları geçerlidir.
Buna göre hipotenüs uzunluğu kaç br dir?

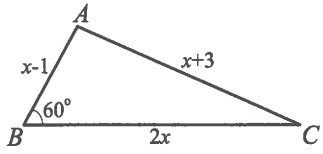
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
ABC bir üçgen
$BDEF$ bir paralelkenar
Alan$(EDC) = x$ br^2
Alan$(AFE) = 2x$ br^2
Alan$(BDEF) = 4\sqrt{2}$ br^2
olduğuna göre x kaçtır?



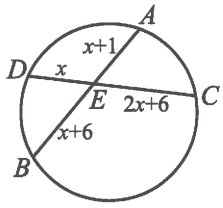
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = 60°$
$|AB| = x - 1$ br
$|BC| = 2x$ br
$|AC| = x + 3$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
Yandaki çemberde
$[AB] \cap [CD] = \{E\}$
$|ED| = x$ br
$|EA| = x + 1$ br
$|EC| = 2x + 6$ br
$|EB| = x + 6$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
Bir ayrıtının uzunluğu $3x$ birim olan bir küpün cisim köşegeninin uzunluğu $2x^2 + 3$ birim olduğuna göre bir yüzey köşegeninin uzunluğu kaç birim olabilir?

A) $3\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 3 E) $\sqrt{3}$

10.
Farklı ayrıtlarının uzunlukları x, $x + 1$ ve $x + 2$ birim olan bir dikdörtgenler prizmasının toplam yüzey alanı 22 br^2 olduğuna göre hacmi kaç br^3 olur?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 60 E) 180

1.E 2.C 3.C 4.E 5.B 6.B 7.D 8.C 9.A 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kökler Toplamı ve Çarpımı

Bu dersimizde, verilen bir ikinci dereceden denklemin kökler toplamını ve çarpımını bulmayı öğreneceğiz. ''Hocam bunda ne var ki, kökleri bulmayı öğrendik zaten, kökleri bulur ve onları toplar ya da çarparız'' diyor olabilirsiniz. Haklısınız ama ben ondan bahsetmiyorum. Kökler toplamını ve çarpımını, hiç kökleri bulmadan bulacağız. Bana hiç öyle bakmayın, bu mümkün! Hatta inanamayacağınız kadar da basit. Hem de tam tahmin ettiğiniz yerden yapacağız.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğunu bildiğimizden bu iki ifadeyi toplarsak kökler toplamını, çarparsak kökler çarpımını, çıkartırsak da kökler farkını buluruz. Yalnız, ben canım öyle istedi diye, eksili köke "x_1", artılı köke "x_2" dedim. Siz eksili köke "x_2", artılı köke "x_1" diyebilirsiniz. Anlayacağınız bunlar yer değiştirebilirler. Bundan dolayı kökler farkına bulduğumuz formül, diğer türlü düşünüldüğünde işaret değiştirmelidir. Bunun için sorularda ya bir kökün diğerinden büyük olduğunu belirteceğiz veya kökler farkının pozitif değerini filan soracağız. Siz de buna dikkat edin. İşini garantiye almak isteyen kökler farkı formülünü mutlak değer içinde düşünebilir. Şimdi, söylediklerimizi sırasıyla yapalım:

Kökler toplamı:

✓ $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$

Kökler çarpımı:

✓ $x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$$=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Kökler farkı:

✓ $|x_1-x_2|=\left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$

$$=\left|\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{-\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

Yukarda iki kökün toplamını, çarpımını ve farkını veren formüller bulduk. Böyle daha nice formül bulmak mümkün, örneğin aynı formülleri, köklerin kendisi için değil de çarpmaya göre tersleri için, kareleri için, küpleri için ve aklınıza gelen herhangi durumları için de bulabilirdik ama hepsi dön-dolaş başta verdiğimiz üç formüle gelir dayanır. 'Ben bulmayacağım ama siz bulun' diyeceğim ama n'olur n'olmaz, ben gene de bulayım ama bu formülleri sakın ezberlemeyin! Gerektiğinde aynı işlemleri yaparsınız.

Köklerin karelerinin toplamı:

✓ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

Köklerin kareleri farkı:

✓ $\left|x_1^2-x_2^2\right|=|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|=\left|-\frac{b}{a}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\frac{|b|\sqrt{\Delta}}{a^2}$

Köklerin küplerinin toplamı:

✓ $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

Köklerin küpleri farkı:

✓ $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)^3+3x_1x_2(x_1-x_2)$

$$=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)^3-3\cdot\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)=\frac{(\Delta-3ac)\sqrt{\Delta}}{a^3}$$

Köklerin çarpmaya göre terslerinin toplamı:

✓ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$

Köklerin çarpmaya göre terslerinin farkı:

✓ $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_2-x_1}{x_1\cdot x_2}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}}{\frac{c}{a}}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}$

Köklerin çarpmaya göre terslerinin kareleri toplamı:

✓ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{(x_1\cdot x_2)^2}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

Köklerin çarpmaya göre terslerinin kareleri farkı:

✓ $\left|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right|=\left|\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1\cdot x_2)^2}\right|=\left|\frac{\frac{b\sqrt{\Delta}}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\right|=\frac{|b|\sqrt{\Delta}}{c^2}$

Köklerinin çarpmaya göre terslerinin küpleri toplamı:

✓ $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_2^3+x_1^3}{(x_1\cdot x_2)^3}=\frac{\frac{3abc-b^3}{a^3}}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$

Köklerinin çarpmaya göre terslerinin küpleri farkı:

✓ $\left|\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^3}\right|=\left|\frac{x_2^3-x_1^3}{(x_1\cdot x_2)^3}\right|=\left|\frac{\frac{(\Delta-3ac)\sqrt{\Delta}}{a^3}}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}\right|=\frac{(\Delta-3ac)\sqrt{\Delta}}{c^3}$

Örnek. $x^2-2x-4=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olsun.*

$x_1<x_2$ *olduğunu farzedip*

- ✓ *kökler toplamını,*
- ✓ *kökler çarpımını,*
- ✓ *diskriminantı,*
- ✓ *kökler farkını,*
- ✓ *köklerin kareler farkını,*
- ✓ *köklerin kareleri toplamını,*
- ✓ *köklerin küpleri farkını,*
- ✓ *köklerin çarpmaya göre tersleri toplamını,*
- ✓ *köklerin çarpmaya göre terslerinin kareleri toplamını,*
- ✓ *köklerin değerlerini*

ayrı ayrı hesaplayınız.

Çözüm: Denklemimizde $a=1$, $b=-2$ ve $c=-4$ olduğunu not edelim.

✓ $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{1}=2$,

✓ $x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4}{1}=-4$,

✓ $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-4)=20$,

✓ $x_1-x_2=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=-\frac{\sqrt{20}}{1}=-2\sqrt{5}$,

✓ $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)=-2\sqrt{5}\cdot2=-4\sqrt{5}$,

✓ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2(-4)=12$,

✓ $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)^3+3x_1x_2(x_1-x_2)$

$=(-2\sqrt{5})^3+3\cdot(-4)\cdot(-2\sqrt{5})$

$=-40\sqrt{5}+24\sqrt{5}=-16\sqrt{5}$,

✓ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{-1}{2}$,

✓ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$,

✓ Kökleri formülleri kullanmadan bulmak içinse

$x_1+x_2=2$ ve $x_1-x_2=-2\sqrt{5}$

eşitliklerini taraf tarafa toplayacağız.

$x_1=1-\sqrt{5}$ ve $x_2=1+\sqrt{5}$

bulunur.

Örnek. $(3m-2)x^2+(2-4m)x+5m-6=0$ *denkleminin kökler çarpımı 2 olduğuna göre kökler toplamı kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) $-\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: Kökler çarpımının formülü $\frac{c}{a}$ olduğundan

$$\frac{5m-6}{3m-2}=2$$

olmalı. $5m-6=6m-4$ eşitliğinden $m=-2$ bulunur. O halde denklem $-8x^2+10x-16=0$ halini alır ki, kökler toplamı da $-\frac{b}{a}$ formülünden $\frac{5}{4}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $(m-3)x^2+2mx-m+2=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2*'dir. Bu kökler arasında* $x_1=\frac{x_2}{x_2-1}$ *bağıntısı varsa m kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $x_1=\frac{x_2}{x_2-1}$ demek $x_1x_2-x_1=x_2$ demektir. Onu da düzenlersek $x_1x_2=x_1+x_2$ olduğunu görürüz. Demek ki $\frac{c}{a}=-\frac{b}{a}$ imiş. Bu durumda $c=-b$ yani $c+b=0$ olmalıdır. $-m+2+2m=0$ eşitliğinden $m=-2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $3x^2 - x + 5 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olduğuna göre*

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}$$

toplamı kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) $-\frac{11}{15}$ D) 0 E) $\frac{4}{15}$

Çözüm: $x_1+x_2=\frac{1}{3}$ ve $x_1x_2=\frac{5}{3}$ olduğunu not edelim.

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{x_2-2+x_1-2}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

olduğundan

$$\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}=\frac{\frac{1}{3}-4}{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}+4}=\frac{-\frac{11}{3}}{5}=-\frac{11}{15}.$$

Doğru cevap: C.

Yukardaki soruda x gördüğümüz yerlere $x+2$ yazsaydık bulacağımız denklemin kökleri zaten x_1-2 ve x_2-2 olurdu. O halde yeni denklemin köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamını bulsak da olurdu.

Örnek [1985 ÖYS]. $a+b\neq 0$ *koşulu ile*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}$$

denkleminin köklerinin çarpımı nedir?

A) $-\frac{a}{b}$ B) $-\frac{1}{ab}$ C) $\frac{1}{ab}$ D) $-ab$ E) ab

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının paydalarını eşitleyelim.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{x(a+b+x)}$$

Soruda $a+b\neq 0$ verildiğinden, eşitliğin her iki yanından $a+b$ ifadelerini sadeleştirebiliriz.

$$\frac{1}{ab}=\frac{-1}{x(a+b+x)}$$

$$-ab=x(a+b+x)$$

$$-ab=ax+bx+x^2$$

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

Kökler çarpımı formülünden denklemi sağlayan değerlerin çarpımının ab olduğunu buluruz.

Doğru cevap: E.

Örnek [1987 ÖYS]. $x^2-2x+a=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *ise a'nın hangi değeri için*

$$x_1+x_2+x_1\cdot x_2$$

toplamı 5 olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x_1+x_2=2$ ve $x_1\cdot x_2=a$ olduğundan

$$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=2+a=5$$

olur ki buradan $a=3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $2x^2-10x+m-2=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *dir.*

$$x_1-2x_2=-10$$

olduğuna göre x_1x_2+m *toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Çözüm: x_1 *ve* x_2'ye bağlı iki bilinmeyenli bir denklemimiz var. Aynı şeylere bağlı ikinci bir denklem daha bulabilirsek, ki bundan kolay ne var, soru çözülmüş sayılır.

$$x_1-2x_2=-10$$

$$x_1+x_2=5$$

denklemleri ortak çözülürse $x_1=0$ ve $x_2=5$ olarak bulunur. Herhangi birini denklemde yerine yazarsak (sağlaması gerekir), $m=2$ olduğu anlaşılır.
O halde $x_1x_2+m=2$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2x^2-6x+a-2=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olsun.*

$$x_1+2x_2=4$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: İki yol gösterelim.

Birinci yol. Kökler arasında bir ilişki verildiği zaman, bir ilişki de biz yazmalıyız demiştik.

$$x_1+2x_2=4$$

$$x_1+x_2=3$$

eşitliklerini birlikte çözersek $x_2=1$ bulunur. Bu değer bir kök olduğundan denklemi sağlamalıdır.

$$2\cdot 1^2-6\cdot 1+a-2=0$$

eşitliğinden $a=6$ bulunur.

İkinci yol. $x_1+2x_2=(x_1+x_2)+x_2=3+x_2=4$ olduğundan $x_2=1$ bulunur. Bu değeri de denklemde yerine yazarsak $a=6$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1993 ÖYS]. $x^2 + (x_1 + 4)x - 3x_2 = 0$ *denkleminin kökleri, sıfırdan farklı olan* x_1 *ve* x_2 *sayılarıdır. Buna göre büyük kök kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

Çözüm: Kökler toplamı ve çarpımı formüllerinden neler elde edebileceğimize bir bakalım bakalım.

$$x_1 + x_2 = -x_1 - 4$$
$$x_1 \cdot x_2 = -3x_2$$

olduğundan $x_1 = -3$ ve $x_2 = 2$ olarak buluruz. Buna göre büyük olan kök 2'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(m-1)x^2 - (m^2-4)x + 25 - m = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olsun.*

$$x_1 > x_2 \text{ ve } |x_1| = |x_2|$$

olduğuna göre $x_1 - 2x_2$ *farkı kaça eşittir?*

A) -3 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm: $x_1 > x_2$ ve $|x_1| = |x_2|$ bilgileri bize köklerin simetrik yani birbirlerinin ters işaretlisi olduğunu anlatır. O halde kökler toplamı 0 olmalıdır.

$$x_1 + x_2 = \frac{m^2-4}{m-1} = 0$$

eşitliğinden $m^2 = 4$ yani $m = -2$ veya $m = 2$ bulunur.
$m = 2$ için denklem $x^2 + 23 = 0$ olur ki bu denklemin reel kökü yoktur.

$m = -2$ için denklem $-3x^2 + 27 = 0$ yani $x^2 = 9$ bulunur.
$x_1 > x_2$ verildiğinden $x_1 = 3$ ve $x_2 = -3$ almalıyız. Buna göre de $x_1 - 2x_2 = 3 - 2\cdot(-3) = 9$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $ax^2 + bx + c = 0$ *denkleminin katsayıları arasında*

$$9a - 3b + c = 0$$

bağıntısı mevcutsa, aşağıdakilerden hangisi bu denklemin bir köküdür?

A) 3 B) $-\frac{3b}{a}$ C) $\frac{3c}{a}$ D) $\frac{c}{3a}$ E) $-\frac{c}{3a}$

Çözüm: $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde x yerine -3 yazılırsa $9a - 3b + c = 0$ elde edileceğini görelim. Demek ki bu denklemin bir kökü -3'müş.

Kökler çarpımı $\frac{c}{a}$ olduğundan diğer kökün $-\frac{c}{3a}$ olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü -3 ile çarpınca $\frac{c}{a}$ çıkacak olan tek ifade budur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$ *denkleminin kökler toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ eşitliğini bilmek gerekiyor. Yani $x + \frac{1}{x} = t$ dersek, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ olur. Bu durumda verilen denklem

$$2(t^2 - 2) - 8t + 9 = 0$$

halini alır. Düzenleyelim:

$$2t^2 - 8t + 5 = 0$$

olur ki denklemin kökler toplamı 4 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3).(x+4) = 15$ *denkleminin reel köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

Çözüm:

$$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3).(x+4) = 15$$
$$(x+1)\cdot(x+4)\cdot(x+2).(x+3) = 15$$
$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 15$$

$x^2 + 5x + 4 = a$ diyelim.

$$a\cdot(a+2) = 15$$
$$a^2 + 2a - 15 = 0$$
$$(a+5)\cdot(a-3) = 0$$
$$(x^2+5x+9)\cdot(x^2+5x+1) = 0$$

Burada ilk çarpanın köklerinin reel olmadığını görüyoruz. O halde soruda verilen denklemin reel kökleri yukardaki ikinci çarpanın kökleridir. Toplamı da görüldüğü üzere -5'tir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^2 - 9x + 4 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olduğuna göre*

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

toplamı kaçtır?

A) $\sqrt{7}$ B) 3 C) $\sqrt{13}$ D) 5 E) 13

Çözüm: $x_1 + x_2 = 9$ ve $x_1x_2 = 4$ eşitliklerini kenarda bekletiyoruz. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = T$ olsun. Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$(x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1x_2} = T^2 = 9 + 2\cdot 2 = 13$$

olur. Buradan $T = \sqrt{13}$ 'e ulaşmak hiç de zor olmasa gerek. Niye pozitif karekökünü aldık bir düşünün ama.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$3^{x^2+x-17}=1$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının çarpımı kaçtır?

A) −18 B) −17 C) −1 D) 17 E) 18

Çözüm: $x^2+x-17=0$ olması lazım. Denklemin her iki kökünün de reel olduğu görülüyor. O halde kökler çarpımı sorulduğundan $x_1 \cdot x_2 = -17$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$5^{2x}-6\cdot 5^{x+1}+125=0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 25 E) 125

Çözüm: ''İkinci dereceden denklemlerin arasında bu denklemin işi ne?'' dediğinizi duymayayım sakın!

$5^{x+1}=5\cdot 5^x$ olduğundan

$$0=5^{2x}-6\cdot 5^{x+1}+125$$
$$=5^{2x}-30\cdot 5^x+125$$

olur. 5^x değerine A dersek;

$$A^2-30A+125=0$$

denklemine ulaşırız ki, alın size ikinci dereceden bir denklem, çözün çözebildiğiniz kadar!

$$0=A^2-30A+125$$
$$=(A-5)(A-25)$$

olduğundan $A=5$ veya $A=25$'dir. Tabii bize A'yı soran yok. A bizim hayali kahramanımız. Gerçek olan 5^x'dir. $5^x=5$ ve $5^x=25$ eşitliklerinden $x=1$ veya $x=2$ bulunur, o halde bu x değerlerinin çarpımı 2'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$25^x+5^{x+1}-6=0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) ∅ B) {0} C) {0, 1} D) {1} E) {0, 6}

Çözüm: 25^x değeri 5^x değerinin karesi olduğundan denklemi ona göre düzenleyelim.

$$25^x+5^{x+1}-6=0$$
$$25^x+5\cdot 5^x-6=0$$

5^x ifadesine A dersek;

$$A^2+5A-6=(A+6)(A-1)=0$$

bulunur ki $A=-6$ veya $A=1$'dir. A'yı tekrar yerine yazarsak $5^x=-6$ veya $5^x=1$ buluruz. 5^x değeri daima pozitif olduğundan, ilk eşitlikten reel kök gelmez. $5^x=1$ eşitliğinden de $x=0$ olduğunu anlarız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) ∅ B) {1} C) {1, 2} D) {2} E) {3, 9}

Çözüm: 3^{2x} değeri 3^x değerinin karesi olduğundan denklemi ona göre düzenleyelim.

$$3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27=0$$
$$(3^x)^2-4\cdot 3\cdot 3^x+27=0$$

3^x ifadesine A dersek;

$$A^2-12A+27=(A-3)(A-9)=0$$

bulunur ki $A=3$ veya $A=9$'dur. A'yı tekrar yerine yazarsak $3^x=3$ veya $3^x=9$ buluruz. O halde $x=1$ veya $x=2$ olabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $px^2-(3p-1)x+2p-2=0$ *denkleminin köklerinin geometrik ortalaması 1 olduğuna göre köklerin aritmetik ortalaması kaçtır?*

A) $\frac{5}{4}$ B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: Köklerin geometrik ortası $\sqrt{x_1x_2}$ demek olup bu değer soruda bize 1 olarak verildiğinden

$$\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{\frac{2p-2}{p}}=1$$

eşitliğini çözmeliyiz. İki yanın karesini alalım:

$$\frac{2p-2}{p}=1$$

yani $2p-2=p$ olduğundan $p=2$ bulunur. Bize köklerin aritmetik ortalaması yani $\frac{x_1+x_2}{2}$ değeri soruluyor.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3p-1}{p}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2-1}{2}=\frac{5}{4}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1992 ÖYS]. $x^2-2x+4=0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olduğuna göre* $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ *'nin pozitif değeri kaçtır?*

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

Çözüm: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=T$ olsun. Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=T^2$$
$$2+2\sqrt{4}=T^2$$

eşitliğinden $T^2=6$ bulunur ki buradan T'nin pozitif değerinin $\sqrt{6}$ olduğu ortaya çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2 - 12x + 4 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olduğuna göre*

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) −2

Çözüm: $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = T$ olsun. Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$T^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{12}{4} + \frac{2}{\sqrt{4}} = 4$$

olduğundan $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = T = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $-qx^2 + x - 4p = 0$ *denkleminin kökleri* p *ve* q *olduğuna göre*

$$\sqrt{p^2 + q^2}$$

ifadesi kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Çözüm: Kökler toplamı ve çarpımından bir şeyler bulabileceğimizi umut ediyoruz.

$$p + q = \frac{1}{q} \text{ ve } pq = \frac{4p}{q}$$

eşitliklerinin ikincisinden $q^2 = 4$ buluruz. Bunu ilk eşitlikte yerine yazarsak $p^2 = \frac{9}{4}$ çıkar. O halde

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1989 ÖYS]. $2x^2 + 5x + p^2 + q^2 = 0$ *denkleminin kökleri* p *ve* q *olduğuna göre diskriminantı kaçtır?*

A) 17 B) 9 C) 1 D) 0 E) −1

Çözüm: Kökler toplamı ve çarpımı formüllerinden

$$p + q = -\frac{5}{2} \text{ ve } p \cdot q = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

eşitliklerini elde ederiz. İkinci eşitliği düzenlersek

$$p^2 + q^2 = 2pq \text{ yani } p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2 = 0$$

buluruz. Bu da $p = q$ anlamına gelir. Yani denklem tamkareymiş ki kökleri birbirine eşit çıkmış. O halde diskriminantı 0 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 - 3x - 4 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *olduğuna göre*

$$x_1^4 - x_2^4$$

ifadesinin pozitif değeri kaçtır?

A) 257 B) 256 C) 255 D) 81 E) 80

Çözüm: İki farklı yol gösterelim.

Birinci yol. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$ olduğundan

$$x_1 - x_2 = \sqrt{25} = 5$$

olur. $x_1 + x_2 = 3$ ve $x_1 x_2 = -4$ olduğunu da biliyoruz.

Öyleyse,

$$\begin{aligned} x_1^4 - x_2^4 &= (x_1^2 - x_2^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) \\ &= 5 \cdot 3 \cdot (3^2 - 2 \cdot (-4)) \\ &= 255 \end{aligned}$$

olur.

İkinci yol. $x^2 - 3x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 1) = 0$ olduğundan $x_1 = 4$ ve $x_2 = -1$'dir. O halde

$$x_1^4 - x_2^4 = 4^4 - (-1)^4 = 256 - 1 = 255$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $2x^2 + 3x - 7 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *dir.*

$$2x_1^2 + 3x_1 + \frac{21}{2x_2^2 + 3x_2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Sakın ha sakın paydaları eşitledikten sonra karşılaştığımız $x_1 + x_2$ yerine $-3/2$ ve $x_1 \cdot x_2$ yerine $-7/2$ yazacağız demeyin. İsteyen buyursun yine yapsın ama Allah sabır versin o arkadaşa. Siz beni dinleyip şunu yapın:

x_1 ve x_2 bu denklemin kökleri olduğundan denklemde x gördüğümüz yere x_1 veya x_2 yazarsak sağlayacaktır.

$$2x_1^2 + 3x_1 - 7 = 0$$
$$2x_2^2 + 3x_2 - 7 = 0$$

Şu durumda

$$2x_1^2 + 3x_1 + \frac{21}{2x_2^2 + 3x_2} = 7 + \frac{21}{7} = 10$$

olacaktır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 + 5x - 2 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2 *ise*

$$\frac{1}{2-x_1^2}+\frac{1}{2-x_2^2}$$

toplamı kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 3

Çözüm: Madem x_1 ve x_2 bu denklemin kökleri, o zaman

$$x_1^2 + 5x_1 - 2 = 0$$

ve

$$x_2^2 + 5x_2 - 2 = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$2 - x_1^2 = 5x_1$$

ve

$$2 - x_2^2 = 5x_2$$

bulunur. Diğer yandan

$$x_1 + x_2 = -5 \text{ ve } x_1x_2 = -2$$

olduğunu da not edelim.

$$\frac{1}{2-x_1^2}+\frac{1}{2-x_2^2}=\frac{1}{5x_1}+\frac{1}{5x_2}$$
$$=\frac{x_2+x_1}{5x_1x_2}$$
$$=\frac{-5}{5(-2)}=\frac{1}{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 - 5x - 1 = 0$ *denkleminin bir kökü* x_1 *olduğuna göre*

$$\frac{x_1^3 - 4x_1 - 5}{x_1}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Çözüm: $x^2 - 5x - 1 = 0$ denkleminin bir kökü x_1 olarak verildiğine göre $x_1^2 - 5x_1 - 1 = 0$ yani $x_1^2 = 5x_1 + 1$ olmalıdır. Şimdi sorulan ifadeye dönelim.

$$\frac{x_1^3 - 4x_1 - 5}{x_1} = \frac{x_1 \cdot x_1^2 - 4x_1 - 5}{x_1}$$
$$=\frac{x_1 \cdot (5x_1 + 1) - 4x_1 - 5}{x_1}$$
$$=\frac{5x_1^2 - 3x_1 - 5}{x_1}$$
$$=\frac{5(5x_1 + 1) - 3x_1 - 5}{x_1}$$
$$=\frac{22x_1}{x_1}$$
$$=22$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^2 - (m^2 - 9)x + m = 0$ *denkleminin simetrik iki kökü varsa m kaçtır?*

A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: Simetrik iki kök olması demek, köklerin birbirinin toplamaya göre tersi olması demektir. Biri t ise diğeri $-t$ olacak yani. Bu durumda kökler toplamı 0 olur. O halde $m^2 - 9 = 0$ eşitliğinden $m = -3$ veya $m = 3$ olması gerekir. Fakat kökler zıt işaretli olduğundan kökler çarpımı negatif bir sayı olmalıdır. Kökler çarpımı da denklemden görüldüğü üzere m değeridir, o halde $m = -3$ olması gerekir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(m + 1)x^2 - (2m - 2)x - m = 0$ *denkleminin* $x = 3$ *doğrusuna göre simetrik iki reel kökü varsa m kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Köklerin birine $3 - p$ dersek, diğeri $3 + p$ olacağından. köklerin $x = 3$ doğrusuna göre simetrik olması kökler toplamının 6 olması manasına gelir. Kökler toplamı formülünden sonuca gidelim.

$$\frac{2m-2}{m+1}=6$$
$$2m - 2 = 6m + 6$$
$$-4m = 8$$
$$m = -2$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2 - ax - b = 0$ *denkleminin köklerinin ikisi de 4'ten büyük olmadığına göre kaç farklı* (a, b) *pozitif tam sayı ikilisi yazmak mümkündür?*

A) 24 B) 16 C) 8 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: 4'ten büyük olmamak demek, 4'ten küçük veya eşit olmak demektir. O halde kökler toplamı 8'den, kökler çarpımı da 16'dan küçükeşittir. Hemen bunu matematik diline dökelim.

$$a \le 8 \text{ ve } -b \le 16 \text{ yani } b \ge -16$$

eşitsizliklerinin sağlanması gerekiyor. Bir de köklerin formülüne bakalım.

$$a \pm \sqrt{a^2 + 4b} \le 8$$
$$\pm\sqrt{a^2 + 4b} \le 8 - a$$
$$a^2 + 4b \le 64 - 16a + a^2$$
$$16a + 4b \le 64$$

olduğundan $a = 3$ olursa 4 farklı b, $a = 2$ olursa 8 farklı b ve $a = 1$ olursa 12 farklı b bulunur. Demek ki 24 tane farklı (a, b) pozitif tam sayı ikilisi yazmak mümkünmüş.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
a bir reel sayı olmak üzere
$$x^2 + x - a = 0$$
denkleminin köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $-a$ E) a

2.
$$2x^2 - 5x - 6 = 0$$
denkleminin köklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) $-\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) 5

3.
$$x^2 - 2ax + b = 0$$
denkleminin köklerinin toplamı 6, çarpımı 5 olduğuna göre $a + b$ toplamının değeri kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 11 E) 13

4.
$$2x^2 + ax - 3a^2 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.
$x_1 + x_2 = 4$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2$ çarpımı kaçtır?

A) -192 B) -96 C) -48 D) 48 E) 96

5.
a ve b birer reel sayı olmak üzere
$$2x^2 + ax - bx + 3 - a + b = 0$$
denkleminin kökler toplamı -1 olduğuna göre kökler çarpımı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

6.
$$2x^2 - 6x - 20 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 70 B) 30 C) 10 D) -30 E) -70

7.
$$x^2 - 7! \cdot x + 6! = 0$$
denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı kaçtır?

A) -7 B) $-\frac{7}{6}$ C) $\frac{7}{6}$ D) 6 E) 7

8.
n bir reel sayı olmak üzere
$$5x^2 - 25x + n + 7 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.
$x_1 + x_2 = 5n$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2$ çarpımının sonucu kaçtır?

A) 8 B) 5 C) $\frac{8}{5}$ D) -5 E) -8

9.
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.
Buna göre $\frac{1}{3-x_1} + \frac{1}{3-x_2}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{3}$ B) -1 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

10.
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.
Buna göre $\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

1.A 2.A 3.C 4.B 5.A 6.D 7.E 8.C 9.E 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x^2+x-11=0$$

denkleminin kökler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) −1 C) 5 D) −5 E) 6

2.

$$x^2+5x-2=0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 2 B) −2 C) 5 D) −5 E) 0

3.

$$x^2-3x-6=0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 3 B) −3 C) −6 D) 6 E) 18

4.

p sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$2px^2+5x-8p=0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) −4 B) 4 C) −8 D) 8 E) −2

5.

$$3x^2-6x+11=0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 2 D) −2 E) 6

6.

$$\frac{x-1}{x-3}+\frac{x+1}{x+5}=0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 4 D) −4 E) 0

7.

$$3^{2x}-4\cdot3^{x+1}+27=0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 2 D) −2 E) 27

8.

$$|x^2+2x-3|=|x^2-3x+2|$$

denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

9.

m bir reel sayı olmak üzere

$$(3m-2)x^2+(2-4m)x+5m-6=0$$

denkleminin kökler çarpımı $\frac{7}{5}$ olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

m bir reel sayı olmak üzere

$$(2m+1)x^2-(3m+3)x+4m-3=0$$

denkleminin kökler toplamı 2 olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 2 D) 3 E) 4

1.B 2.B 3.C 4.A 5.C 6.B 7.C 8.C 9.D 10.A

CEVAPLI TEST 3

1.

$2x^2 - 8x + m - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 - 2x_2 = -5$ olduğuna göre m kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

2.

$x^2 - 8x + 2m - 6 = 0$

denkleminin köklerinden biri, diğerinin 3 katı ise m kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

3.

$(2a-3)x^2 - (2a+2)x + 3a - 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1 x_2$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$9x^2 - (m+1)x + 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \frac{4}{81}$ olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) –4 E) 6

5.

$2x^2 + ax - 3a^2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olup $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$ olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{12}$ C) –12 D) 12 E) 4

6.

m negatif bir reel sayı olmak üzere

$x^2 - mx + 16 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 = x_2^3$ olduğuna göre $x_1 + x_2$ kaçtır?

A) 10 B) –10 C) 8 D) –8 E) 6

7.

$(m-2)x^2 - (m+1)x + m + 2 = 0$

denkleminin köklerinin x_1 ve x_2 olduğu biliniyor.

$(3x_1 - 2) \cdot (3x_2 - 2) = 0$ olduğuna göre m kaçtır?

A) $-\frac{7}{4}$ B) $-\frac{4}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{7}{4}$ E) 4

8.

$x^2 + (p-3)x + 2q = 0$

denkleminin kökleri sıfırdan farklı p ve q reel sayıları olduğuna göre $2q - 3p$ farkı kaçtır?

A) –8 B) –6 C) –3 D) 1 E) 2

9.

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2m = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$x^2 + (3 - a - a^2)x - a^2 = 0$

denkleminin kökler toplamı 0 olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 1 B) –1 C) 2 D) –2 E) 0

1.C 2.B 3.B 4.A 5.B 6.B 7.B 8.A 9.C 10.B

CEVAPLI TEST 4

1.

$$(2m+3)x^2-(m+4)x+m=0$$

denkleminin köklerinin toplamı –2 olduğuna göre köklerin karelerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) –1 C) 5 D) –5 E) 0

2.

$$x^2-3x-5=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) –15 B) –8 C) 2 D) 8 E) 15

3.

$$x^2-3x+m=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olup bu kökler arasında $(5x_1-3)(5x_2-3)=4$ bağıntısı geçerli olduğuna göre m kaçtır?

A) –25 B) –8 C) 8/5 D) 8 E) 50

4.

$$12x^2+7mx-10m^2=0$$

denkleminin kökler çarpımı –30 olduğuna göre köklerin toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 6 B) $\frac{5}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{7}{2}$ E) –14

5.

$$5x^2-25x+n+7=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1+2x_2=10$ olduğuna göre $n+x_1x_2$ toplamı kaçtır?

A) –7 B) –6 C) 0 D) 6 E) 7

6.

$$mx^2-3mx+1=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$3\cdot x_1-x_2=5$ olduğuna göre m kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

7.

$$(m+3)x^2-(2m+4)x+m=0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması –1 olduğuna göre köklerinin karelerinin toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 14 D) 24 E) 34

8.

$$x^2-5x+3=0$$

denkleminin kökleri a ve b'dir.

Buna göre a^2+b^2 toplamı kaçtır?

A) 25 B) 22 C) 19 D) 16 E) 13

9.

$$3x^2+15x+a=0$$

denkleminin köklerinden biri diğerinin 2 katıdır.

Buna göre köklerin çarpımı kaçtır?

A) $\frac{46}{9}$ B) $\frac{47}{9}$ C) $\frac{49}{9}$ D) $\frac{50}{9}$ E) $\frac{51}{9}$

10.

$$x^2+x-3=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^6+x_2^6$ toplamı kaçtır?

A) 194 B) 184 C) 174 D) 164 E) 154

1.E 2.A 3.C 4.D 5.A 6.C 7.C 8.C 9.D 10.E

CEVAPLI TEST 5

1.

$$x^2 - 32x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna olduğuna göre $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4) = 2024$$

denkleminin reel köklerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2000 B) −40 C) 50 D) 2000 E) 2024

3.

$$125^x + 5^{2x+1} - 6 = 0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 5 D) 25 E) 125

4.

$$5^{x^2-3x-7} - 1 = 0$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) −7

5.

$$\left(6^{x^2-3x-1}\right)^{x^2-2x-4} = 1$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

6.

$$3x^2 - (6n+6)x + n = 0$$

denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre bu köklerin çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) −1 D) −2 E) −3

7.

$$3x^2 - (6n+6)x + n + 18 = 0$$

denkleminin kökleri, sayı doğrusu üzerinde 4'e eşit uzaklıkta olduğuna göre köklerin büyük olanı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8.

$$x - \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\ddots}}}} = 2$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{2}{3}$ E) 3

9.

$$x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{\ddots}}} = 1$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) −2 B) $-\sqrt{2}$ C) −1 D) $\sqrt{2}$ E) 2

10.

x bir reel sayıdır.

$$x + 8 + x + 10 + x + 12 + \ldots + 5x - 2 + 5x = 578$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı, toplamının kaç katıdır?

A) −600 B) −592 C) −590 D) −578 E) −566

1.C 2.B 3.A 4.E 5.C 6.B 7.C 8.B 9.A 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kökleri Bilinen Denklemler

Şu ana kadar, bize verilen her türlü ikinci dereceden denklemin köklerini bulmayı öğrendik, sadece bunla da kalmadık, köklerin toplamlarını, farklarını, çarpımlarını bile bulduk. Şimdi de bize denklemin köklerini verip, kökleri bu olan denklem veya denklemleri bulun diyecek. Yine kolay anlamanız amacıyla ilk örneğimizi sayısal verilerle çözelim:

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi kökleri 3 ve 4 olan ikinci dereceden bir denkleme örnek olabilir?*

A) $x^2 - 7x - 12 = 0$ B) $x^2 - 7x + 12 = 0$
C) $x^2 + 7x - 12 = 0$ D) $x^2 + 7x + 12 = 0$
E) $x^2 - 12x + 7 = 0$

Çözüm: Bu ilk sorumuz olduğundan iki değişik yolla çözelim.

Birinci yol. Kök demek, ne demekti? Denklemi sağlayan değer. Soruda, 3 ve 4 kök olarak verildiğinden, 3 ve 4 değerlerinin bu denklemi sağladığını anlıyoruz. Polinomlar dersinden hatırlarsınız, bir $P(x)$ polinomu $x - 3$ ile bölünebiliyorsa $P(3) = 0$ idi. Yani $P(x)$ polinomunda x görülen yere 3 yazılırsa, denklem sağlanıyordu. Burada da hem 3 hem de 4 yazılınca sağlanıyor olmalı. O halde denklemimiz hem $(x - 3)$'e hem de $(x - 4)$'e bölünüyor olmalı, yani bunları birer çarpan olarak içermeli.

Yalnız bunları çarpan olarak içeren sonsuz tane ikinci dereceden denklem vardır. Mesela

$$2(x-3)(x-4)$$
$$3(x-3)(x-4)$$

veya

$$4(x-3)(x-4).$$

Böyle daha bir sürü denklem yazabileceğimizi anlamışsınızdır. Dolayısıyla denklemimiz k bir reel sayı olmak üzere $k\cdot(x-3)\cdot(x-4)$ yani $k\cdot(x^2 - 7x + 12) = 0$ formunda olmalıdır.

İkinci yol. Kökler 3 ve 4 olarak verildiğinden hangi seçenekteki denklemin kökler toplamı 7'dir, ona bakalım. A ve B şıkkında öyle. Diğer yandan kökler çarpımı da 12 olması lazımdır. Bu yüzden doğru cevap B seçeneğidir.

Doğru cevap: B.

Aşağıdaki soruyu çözerek genel formülümüzü çıkartalım.

Örnek. *Başkatsayısı 1 olup kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisiyle kurulur?*

A) $x^2 - (x_1 + x_2)x - x_1x_2 = 0$
B) $x^2 + (x_1 + x_2)x - x_1x_2 = 0$
C) $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$
D) $x^2 - (x_1 - x_2)x + x_1x_2 = 0$
E) $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

Çözüm: Denklemi oluşturan ikinci dereceden polinomun $(x - x_1)$ ve $(x - x_2)$ çarpanlarını içereceğini artık biliyoruz. Başkatsayısı da 1 olduğundan bu denklem kesinlikle

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

olmalı. Durmayalım, parantezleri açalım bakalım:

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$$

yani

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

olur.

Doğru cevap: E.



Bulduğumuz bu formülde, $x_1 + x_2$ toplamını T, x_1x_2 çarpımını da $Ç$ ile gösterirsek, genel formülümüz

$$x^2 - Tx + Ç = 0$$

halini alır. Ezberlenmesi böyle daha kolaydır.

Eğer başkatsayısı 1 değil de k olanı bulun deseydi, bulduğumuz bu denklemi k ile çarpmamız yeterdi,

$$k(x^2 - Tx + Ç) = 0$$

gibi yani.

Örnek. *Başkatsayısı –3 olup köklerinden biri $5 - \sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-3x^2 - 30x + 69 = 0$ B) $-3x^2 + 30x - 69 = 0$
C) $-3x^2 - 30x - 69 = 0$ D) $-3x^2 + 69x - 30 = 0$
E) $-3x^2 + 69x + 30 = 0$

Çözüm: İkinci dereceden denklemlerin köklerinin formülünü hatırlayınız.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

idi. Buradan şöyle bir mantık yürütmekte mahzur görmüyoruz. Eğer köklerinden biri irrasyonel ise diğeri de irrasyoneldir. Çünkü denklemin diskriminantı yani Δ'sı tamkare değilmiş ki ilk kök irrasyonel çıktı, e aynı köklü ifade diğer kökün formülünde de var. O halde irrasyonel olması kaçınılmaz.

Diğer yandan katsayıların rasyonel olması bize diğer kökün sadece irrasyonel olmakla kalmayıp, ilk kökün eşleniği olması gerekliliğini de anlatır. Eşleniği olmasaydı hem kökler çarpımı rasyonel olmazdı hem de belki kökler toplamı. Ki köklerin formüllerine ayrı ayrı bakarsanız, bunların birbirlerinin eşleniği olması gerektiğini zaten anlarsınız. Bu sebeple kökün biri $5-\sqrt{2}$ ise kökün diğeri $5+\sqrt{2}$ olmalıdır. Bu yüzden kökler toplamı 10 ve kökler çarpımı 23'tür. Bunları formülümüzde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} k(x^2-Tx+Ç) &= -3(x^2-10x+23) \\ &= -3x^2+30x-69 \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Kökleri $1+\sqrt{2}$ ve $1-\sqrt{2}$ olup başkatsayısı 3 olan ikinci dereceden denklem $ax^2+bx+c=0$ olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaça eşittir?*

A) -12 B) -6 C) 0 D) 6 E) 12

Çözüm:

$$k=3,$$

$$T=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2 \text{ ve}$$

$$Ç=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} k(x^2-Tx+Ç) &= 3(x^2-2x+(-1)) \\ &= 3x^2-6x-3=0 \end{aligned}$$

olmalıdır. $a=3$, $b=-6$ ve $c=-3$ olduğundan sorulan toplam -6'ya eşittir.

Doğru cevap: B.



Şimdi de iki veya daha çok ikinci dereceden denklemin köklerinin birbirleri arasındaki bazı ilişkileri inceleyeceğiz. Örneğin, önümüzde duran bir ikinci dereceden denklemin köklerini bulmadan, öyle bir denklem yazacağız ki, kökleri, önümüzdeki denklemin köklerinin ikişer katı, yarısı, bazen de karesi olacak. Olmayacak bir şey yok.

Yeter ki iste! Nasıl yapacağımızı aşağıdaki sorunun çözümünde detaylı olarak anlattım.

Örnek. *Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerden hangisinin kökleri $x^2-3x+1=0$ denkleminin köklerinin ikişer katıdır?*

A) $x^2-6x-4=0$ B) $x^2-6x+4=0$
C) $x^2+6x-4=0$ D) $x^2+6x+4=0$
E) $x^2-4x+6=0$

Çözüm: Aslında uzun ama insanın aklına önce şöyle bir yol geliyor: Bana vermiş olduğu denklemin köklerini bulsam, bu köklerin her birini 2 ile çarpsam, daha sonra da bu köklere sahip ikinci dereceden denklemi yazsam... Bravo, doğru, ama çok uzun olur. Hatta sırf bu yoldan gittiğine veya kısa yolunu bilmediğine pişman ol diye verdiği denklemin kökleri rasyonel olmaz, aynen bu sorudaki gibi. Bazen de reel sayı bile değildir, bir sonra sorulacak soruda olacağı gibi. Onun için siz aşağıda yaptığımız çözüme kulak kabartın:

$$x^2-3x+1=0$$

denkleminin köklerine a ve b diyelim. Köklerin toplamı ve çarpımı formüllerinden

$$a+b=3 \text{ ve } ab=1$$

olduğunu biliyoruz, not edelim. Kökleri $2a$ ve $2b$ olan ikinci dereceden denklemi arıyoruz. E, biz bunu öğrenmiştik.

$$x^2-Tx+Ç=x^2-(2a+2b)x+(2a\cdot 2b)=0$$

olur. $a+b$ ve ab değerleri yerlerine yazılırsa

$$x^2-6x+4=0$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^2-3x+5=0$ *denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Aşağıdakilerden hangisi kökleri x_1+3 ve x_2+3 olan ikinci dereceden denkleme örnek olabilir?*

A) $x^2-9x+23=0$ B) $x^2-6x+45=0$
C) $x^2-6x+25=0$ D) $x^2-9x+45=0$
E) $x^2-9x+21=0$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Kökleri x_1+3 ve x_2+3 olan denklemi hemen yazalım:

$$x^2-(x_1+x_2+6)x+(x_1x_2+3x_1+3x_2+9)=0$$

halindedir. $x_1+x_2=3$ ve $x_1x_2=5$ olduğundan cevabımız

$$x^2-(3+6)x+(5+9+9)=x^2-9x+23=0$$

olmalıdır.

İkinci yol. Bu güzel çözümü yıllar önce, İzmir'den meslektaşım Gökhan Keçeci'den duydum. $x+3$'ü bir fonksiyon gibi düşünüp tersini alıp yani $x-3$'ü verilen denklemde yerine yazarsanız, sorunun cevabına ulaşırsınız yani

$$(x-3)^2-3(x-3)+5=x^2-9x+23=0$$

istenen cevaptır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $x^2 - 2x + 5 = 0$ *denkleminin köklerinin karelerini kök kabul eden bir ikinci dereceden denklemdir?*

A) $x^2 - 6x - 25 = 0$ B) $x^2 - 6x + 25 = 0$
C) $x^2 + 6x - 25 = 0$ D) $x^2 + 6x + 25 = 0$
E) $x^2 - 25x + 6 = 0$

Çözüm: $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerine a ve b diyelim. $a + b = 2$ ve $ab = 5$ olduğunu biliyoruz. Birazdan kökleri a^2 ve b^2 olan ikinci dereceden denklemi yazacağımızdan $T = a^2 + b^2$ ve $Ç = a^2b^2$ değerlerini hemen bulalım.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2^2 - 2\cdot 5 = -6$$

ve $a^2b^2 = 25$ olduğundan aranan denklem

$$x^2 - Tx + Ç = x^2 + 6x + 25 = 0$$

denklemidir.

İkinci yol. Pozitif reel sayılarda x^2 fonksiyonunun tersi $\sqrt{x}$ olduğundan x yerine $\sqrt{x}$ yazalım.

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 5 = 0$$
$$x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$$
$$x + 5 = 2\sqrt{x}$$
$$x^2 + 10x + 25 = 4x$$
$$x^2 + 6x + 25 = 0$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 - 2x + 5 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2*'dir. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerden hangisinin kökleri* $x_1 + \frac{1}{x_2}$ *ve* $x_2 + \frac{1}{x_1}$ *dir?*

A) $5x^2 - 12x + 36 = 0$ B) $5x^2 - 12x - 36 = 0$
C) $5x^2 + 12x + 36 = 0$ D) $5x^2 + 12x + 36 = 0$
E) $5x^2 - 36x + 12 = 0$

Çözüm: $x_1 + x_2 = 2$ ve $x_1 \cdot x_2 = 5$ olduğunu bir kenara not edelim. Şimdi de istenen denklemin kökler toplamını ve kökler çarpımını bulalım.

Kökler toplamı

$$x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5},$$

Kökler çarpımı

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + 2 = 5 + \frac{1}{5} + 2 = \frac{36}{5}$$

olduğundan istenen denklem

$$x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{36}{5} = 0$$

yani $5x^2 - 12x + 36 = 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2 - 3x + 5 = 0$ *denkleminin kökleri* $a - 1$ *ve* $b - 1$ *olsun. Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerin hangisinin kökleri* a^2 *ve* b^2 *olur?*

A) $x^2 - 7x + 18 = 0$ B) $x^2 - 5x + 18 = 0$
C) $x^2 - 7x + 81 = 0$ D) $x^2 - 5x + 81 = 0$
E) $x^2 - 7x + 25 = 0$

Çözüm: Kökler toplamından $a - 1 + b - 1 = 3$ yani $a + b = 5$ bulunur. Kökler çarpımından da

$$(a - 1)\cdot(b - 1) = ab - a - b + 1 = 5$$

yani $a \cdot b = 9$ bulunur. Kökleri a^2 ve b^2 olan denklem de $T = a^2 + b^2$ ve $Ç = a^2b^2$ olduğundan,

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2b^2 = 0$$
$$x^2 - [(a + b)^2 - 2ab]x + (a\cdot b)^2 = 0$$
$$x^2 - (5^2 - 2\cdot 9)x + 9^2 = 0$$
$$x^2 - 7x + 81 = 0$$

İkinci yol. Aradığımız denklemin kökleri, verilen denklemin köklerin 1 fazlasının karesi olduğundan, x yerine $(x + 1)^2$ fonksiyonunun tersi olan $\sqrt{x} - 1$ yazalım.

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 - 3\left(\sqrt{x} - 1\right) + 5 = 0$$
$$x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} + 3 + 5 = 0$$
$$x + 9 = 5\sqrt{x}$$
$$x^2 + 18x + 81 = 25x$$
$$x^2 - 7x + 81 = 0$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2 + (3n - 1)x + 2n^2 - 1 = 0$ *denkleminin çakışık iki kökü olduğu biliniyorsa, aşağıdakilerden hangisi kökleri* n^2 *ve* $n + 1$ *olan ikinci dereceden denkleme örnek olabilir?*

A) $x^2 + 6x + 5 = 0$ B) $x^2 - 6x + 5 = 0$
C) $x^2 - 3x + 2 = 0$ D) $x^2 + 33x - 150 = 0$
E) $x^2 - 33x - 150 = 0$

Çözüm: Verilen denklemin çakışık iki reel kökü varsa, diskriminantı 0'dır.

$$\Delta = (3n - 1)^2 - 4\cdot 1\cdot(2n^2 - 1) = 0$$
$$9n^2 - 6n + 1 - 8n^2 + 4 = 0$$
$$n^2 - 6n + 5 = 0$$
$$(n - 1)(n - 5) = 0$$

eşitliğinden $n = 1$ veya $n = 5$ olarak bulunur.

n'yi 1 alırsak, kökleri 1 ve 2 olan denklemi aramalıyız. n'yi 5 alırsak kökleri 25 ve 6 olan denklemi aramalıyız. $x^2 - 3x + 2 = 0$ veya $x^2 - 31x + 150 = 0$ denklemlerinden hangisi şıklarda varsa onu işaretleyeceğiz.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
Kökleri 2 ve 3 olup başkatsayısı 1 olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-5x+6=0$ B) $x^2-6x+5=0$
C) $x^2+6x+5=0$ D) $x^2+5x+6=0$
E) $x^2+5x-6=0$

2.
Kökleri 3 ve – 5 olup başkatsayısı –2 olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2x^2+4x+30=0$ B) $-2x^2+4x-30=0$
C) $-2x^2-4x-30=0$ D) $-2x^2-4x+30=0$
E) $-2x^2-4x-15=0$

3.
Kökleri –2 ve –4 olup başkatsayısı 1/2 olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$ B) $\frac{1}{2}x^2+3x+4=0$
C) $\frac{1}{2}x^2+3x-4=0$ D) $\frac{1}{2}x^2-3x-4=0$
E) $\frac{1}{2}x^2+6x+8=0$

4.
Kökleri $\frac{1}{2}$ ve $-\frac{1}{3}$ olup başkatsayısı 6 olan ikinci dereceden denklem hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $6x^2-x-1=0$ B) $6x^2+x-1=0$
C) $6x^2-x+6=0$ D) $6x^2-x-6=0$
E) $6x^2+x+1=0$

5.
Başkatsayısı 3 olup köklerinden biri $4-\sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x^2-24x+36=0$ B) $3x^2+24x-36=0$
C) $3x^2-24x-36=0$ D) $3x^2+24x+42=0$
E) $3x^2-24x+42=0$

6.
Aşağıdakilerden hangisi kökleri $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{5}$ olan ikinci dereceden denkleme örnek olabilir?

A) $x^2-\sqrt{10}x+2\sqrt{7}=0$ B) $x^2-\sqrt{2}x=\sqrt{5}$
C) $x^2-\sqrt{7}x+2\sqrt{10}=0$ D) $x^2-\sqrt{5}x=\sqrt{2}$
E) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0$

7.
Başkatsayısı 1, kökleri $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ve $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ olan ikinci dereceden denklemin katsayılarının toplamı kaça eşittir?

A) $1-2\sqrt{3}$ B) $1+2\sqrt{3}$ C) $3-2\sqrt{3}$
D) $3+2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}-3$

8.
Bir dikdörtgenin alanı 23 br^2 ve çevre uzunluğu 20 br olarak veriliyor.
Bu dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5-\sqrt{2}$ B) $-5+\sqrt{2}$ C) $-5-\sqrt{2}$
D) $3+\sqrt{2}$ E) $3-\sqrt{2}$

9.
$x^2-2x+4=0$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri (x_1-2) ve (x_2-2)'dir?

A) $x^2-2x+4=0$ B) $x^2-2x-4=0$
C) $x^2+2x-4=0$ D) $x^2+2x+4=0$
E) $x^2+4x+2=0$

10.
$x^2-x-3=0$
denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kökleri $2x_1$ ve $2x_2$ olan ikinci dereceden denkleme bir örnek olabilir?

A) $x^2-2x+12=0$ B) $x^2-2x+6=0$
C) $x^2-2x-6=0$ D) $x^2-2x-12=0$
E) $x^2+2x+12=0$

1.A 2.D 3.B 4.A 5.E 6.E 7.C 8.A 9.D 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x^2+x-7=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerin hangisinin kökleri $(3x_1+1)$ ve $(3x_2+1)$'dir?

A) $x^2-x-67=0$ B) $x^2-x-65=0$ C) $x^2+x-67=0$
D) $x^2-x+65=0$ E) $x^2+x-65=0$

2.

Aşağıdaki denklemlerden hangisi

$$x^2+2x-5=0$$

denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerini kök kabul eder?

A) $5x^2-2x-1=0$ B) $5x^2+2x+1=0$
C) $5x^2-2x+1=0$ D) $5x^2-x-2=0$
E) $5x^2+2x-1=0$

3.

Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri

$$x^2+3x-1=0$$

denkleminin köklerinin kareleridir?

A) $x^2-11x-1=0$ B) $x^2-11x+1=0$
C) $x^2-7x+1=0$ D) $x^2+7x+1=0$
E) $x^2+11x+1=0$

4.

$$x^2-x-1=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olup kökleri $\frac{1}{x_1^2}$ ve $\frac{1}{x_2^2}$ olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x^2-3x+1=0$ B) $x^2-3x-1=0$ C) $x^2+3x-1=0$
D) $x^2+3x+1=0$ E) $x^2-x-1=0$

5.

$$x^2+3x-3=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kökleri $x_1+\frac{1}{x_2}$ ve $x_2+\frac{1}{x_1}$ olan ikinci dereceden denkleme bir örnek olabilir?

A) $3x^2-6x+4=0$ B) $3x^2-6x-4=0$
C) $3x^2+6x-4=0$ D) $3x^2-4x+6=0$
E) $3x^2+6x+4=0$

6.

$$x^2-x-3=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $x_1^2 \cdot x_2$ ve $x_2^2 \cdot x_1$ olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x^2-3x+9=0$ B) $x^2+3x-9=0$
C) $x^2+3x+27=0$ D) $x^2-3x-27=0$
E) $x^2+3x-27=0$

7.

$$x^2-8x+7=0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.
Kökleri x_1-1 ve x_2-1 olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x^2-6x=0$ B) $x^2+6x=0$ C) $x^2-7x+8=0$
D) $x^2-6=0$ E) $x^2-7x-8=0$

8.

Aşağıda verilen ikinci dereceden denklemlerden hangisinin kökleri

$$x^2+2x-8=0$$

denkleminin köklerinin yarısıdır?

A) $x^2-x+2=0$ B) $x^2-x-2=0$ C) $2x^2+2x-4=0$
D) $x^2-2x+1=0$ E) $x^2-2x-1=0$

9.

Başkatsayısı 1, köklerinden biri $2-\sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-4x-2=0$ B) $x^2+4x-2=0$ C) $x^2-2x+4=0$
D) $x^2-2x-4=0$ E) $x^2-4x+2=0$

10.

ABC üçgeni B açısı dik olan bir üçgen olmak üzere

$|AB| = 2x+6$ br
$|BC| = x+2$ br
$|AC| = x+10$ br

olarak veriliyor.
Yukardaki x değerini çift kat kök kabul eden ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x^2-2x+1=0$ B) $x^2-9=0$ C) $x^2+6x+9=0$
D) $x^2-6x+9=0$ E) $x^2-4x+4=0$

1.E 2.A 3.B 4.A 5.C 6.E 7.A 8.C 9.E 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üçüncü Dereceden Denklemler

İkinci dereceden denklemleri bu kadar iyi çalıştıktan sonra, ''Yok mu bunun daha büyük dereceden olanları?'' dediğinizi duyar gibiyim. İnsanın iştahı kabarıyor. Biraz üçüncü dereceden denklemlerde gezindikten sonra daha büyük derecelilere de göz atacağız.

Üçüncü Dereceden Denklemler. a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere, $a \neq 0$ iken

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

şeklindeki denklemlere **üçüncü dereceden denklem** denir.

Böyle denklemlerin "x_1", "x_2" ve "x_3" diye adlandıracağımız üç kökü vardır. Tabi, bu kökleri bulmak birinci ve ikinci dereceden denklemlerde olduğu kadar kolay değil. Ama bu köklerin nasıl bulunduğunu merak edenler için yazının ilerleyen kısımlarında bu metodu açıkladım. Sadece üçüncü değil, dördüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmaya yarayan metodu da yazdım.

Keşke benim de sizler gibi daha lisede okurken bu metotları öğrenebilme şansım olsaydı. ☺

Üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak çok karışık olsa da kökleri arasında çok basit ilişkiler vardır.



$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Şimdi bunları nerden bulduğumuzu izah edelim:
Kökleri x_1, x_2 ve x_3 ve başkatsayısı a olan üçüncü dereceden denklemi kuralım.

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$$

Şimdi, sıkılmadan bu çarpımı yapalım.

$$ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3 = 0$$

Çıkan denkleme göre

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$d = -ax_1x_2x_3$$

olduğunu anlıyoruz. O halde

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Ayrıca, belki sırası değil ama, bir denklem kaçıncı dereceden olursa olsun, köklerinin toplamı $-b/a$'dır. Ne demek istediğimizi anlamışsınızdır. x^{n-1}'li terimin katsayısının x^n'li terimin katsayısına oranının ters işaretlisi. Kanıtı aynı şekilde yapabilirsiniz.

Genel kuralı şöyle verebiliriz:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

denkleminin kökleri $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ olsun.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\ldots$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

Örnek.

$$x^3 - 6x^2 + mx + 2m - 4 = 0$$

denkleminin üç kökünden ikisinin toplamı 5'tir. Bu üç kökün çarpımı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Üç kökün toplamı $-b/a$ formülünden 6 çıkar. İkisinin toplamı 5 olduğuna göre üçüncü kökün 1 olduğunu anlıyoruz. O halde $x = 1$ değeri, denklemi sağlamalıdır. Yerine yazalım, sağlasın.

$$1^3 - 6\cdot1^2 + m\cdot1 + 2m - 4 = 0$$

eşitliğinden $m = 3$ bulunur. Kökler çarpımı $-d/a$ formülünden $4 - 2m$ yani $4 - 2\cdot3 = -2$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$2x^3 - (3m+4)x^2 - 4m + 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun. Bu denklemin kökler toplamı 5 olduğuna göre $x_1x_2x_3 + m$ toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $5 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{3m+4}{2}$ olduğundan $3m + 4 = 10$, dolayısıyla $m = 2$ bulunur. Bu durumda denklemimiz

$$2x^3 - 10x^2 - 6 = 0$$

halini aldığından

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

olur. O halde sorulan $m + x_1x_2x_3 = 2 + 3 = 5$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$8x^3 - y^3 = 0$$

denklemini sağlayan y değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) $8x^3$ B) $-8x^3$ C) $8x$ D) $2x$ E) 2

Çözüm: y değerlerinin çarpımı sorulduğundan denklemin değişkenini y'ymiş gibi düşüneceğiz. Bu durumda x bir sabit gibi olacak. Denklem

$$y^3 - 8x^3 = 0$$

olduğundan kökler çarpımı $-d/a$ formülünden $8x^3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1994 ÖYS].

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri 1, b, c'dir. Buna göre $b^2 + c^2$ toplamı kaçtır?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Çözüm: Hemen kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerinden doğan eşitlikleri yazalım.

$$1 + b + c = 4$$

$$1 \cdot b \cdot c = -4$$

eşitliklerinden $b + c = 3$ ve $b \cdot c = -4$ bulunur. b ve c değerlerinin 4 ve -1 oldukları sırıtıyor ama biz çarpanlara ayırma kurallarıyla çözelim.

$$b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = 3^2 - 2 \cdot (-4) = 17.$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(3x^3 - 6x^2 + 1)y^3 - x^2 + 4x - 7 = 0$$

eşitliğini gerçekleyen y değerini bulmamıza yaramayacak x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

Çözüm:

$$y^3 = \frac{x^2 - 4x + 7}{3x^3 - 6x^2 + 1}$$

olduğundan, paydanın kökleri olan x'leri bilmemiz y değerini bulmaya yetmez. Çünkü o x değerleri paydayı 0 yapacağından y hesaplanamayacaktır. O halde paydanın kökler toplamını bulmalıyız. Bu da $-\frac{b}{a}$ formülünden 2 çıkar.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$8x^3 - px^2 + 6x + 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3'tür. Buna göre Köklerin çarpmaya göre terslerinin toplamı kaçtır?

A) -3 B) 3 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 4

Çözüm: Hemen sorulan ifadenin paydalarını eşitleyelim.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = -\frac{c}{d} = -\frac{6}{2} = -3$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$x^3 + 3x^2 - mx + 15 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olduğuna göre

$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3}$ *toplamı kaçtır?*

A) $-\frac{1}{15}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{15}$

Çözüm: Sorulan bu toplam için bir formül bilmiyoruz ama bilmiyoruz diye oturup soruyu seyredecek de değiliz. Bari paydaları eşitleyelim.

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{b}{d} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $2x^3 - 8x^2 + 6x + p = 0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2 *ve* x_3 *olarak veriliyor. Buna göre* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Sorulan bu toplam için de formül bilmiyoruz ama çarpanlara ayırma dersinden bildiğimiz

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

eşitliğini kullanabiliriz.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \text{ ve } x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$$

olduğunu not edelim.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 10$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ *denkleminin en büyük kökü ortanca kökünden kaç fazladır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Denklemin katsayılar toplamına bakarsanız, 0 olduğunu görürsünüz. Bu da demektir ki $x = 1$ bu denklemin bir köküdür. Diğer köklere y ve z diyelim. Kökler toplamı formülünden $x + y + z = 7$ ve kökler çarpımı formülünden $x \cdot y \cdot z = 8$ bulunur ki buradan $y + z = 6$ ve $y \cdot z = 8$ olarak bulunur. O halde $y = 2$ ve $z = 4$'tür. Bu durumda en büyük kök ortanca kökten 2 fazladır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 4x + 3 = 0$ *denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerinin toplamı kaçtır?*

A) $-\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{8}{3}$

Çözüm: Köklere x_1, x_2, x_3, x_4 diyelim. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ toplamı soruluyor. Bu toplama T deyip, paydaları eşitleyelim.

$$T = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$$

olur.

$$x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 = 4$$

ve

$$x_1x_2x_3x_4 = 3$$

olduğundan $T = \frac{4}{3}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 0$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {−2} B) {1} C) {0} D) {−1, 1, 2} E) {−1, 1}

Çözüm: Payın 0 olması, paydanın da 0 olmaması lazım.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$
$$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$$
$$(x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

olduğundan paydaki denklemin kökleri −1, 1 ve 2 olarak bulunur. Fakat paydayı çarpanlarına ayırdığımızda

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

olduğunu görürüz ki −1 ve 2 değerlerini, paydayı 0 yaptıklarından dolayı alamayız. O halde sağlayan tek değer 1'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^8 + x^5 - x + 2 = 0$ *denkleminin kökler toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots = 0$ şeklindeki polinom denklemler kaçıncı dereceden olurlarsa olsunlar, kökler toplamı her zaman $-b/a$ oluyordu. Bu soruda $a = 1$ ve $b = 0$ olduğu için cevap 0 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^{17} - x^{16} + 2x - 3 = 0$ *denkleminin kökler çarpımı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) −3 E) −2

Çözüm: Tek dereceli polinom denklemlerin kökler çarpımı sabit terimin başkatsayısına oranının ters işaretlisiydi. O halde cevap 3 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^3 + kx - 12 = 0$ *denkleminin tüm köklerinin reel olduğu bilindiğine göre bu köklerin kaç tanesi pozitiftir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Bilinemez

Çözüm: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0$ olduğundan üç kökün üçü de pozitif veya üçü de negatif olamaz, çünkü o zaman toplamları sıfır olamazdı. O halde ya ikisi pozitif biri negatif, ya da ikisi negatif biri pozitiftir. Hangisi olduğuna da kökler çarpımından karar vereceğiz.

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = 12 > 0$$

diye iki kökü negatiftir. Çünkü eğer tek kökü negatif olsaydı, kökler çarpımı da negatif çıkardı.

Doğru cevap: B.

1. Aritmetik ortalama. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ reel sayılarının aritmetik ortalaması (ortası)

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanır. a ve b gibi iki reel sayının aritmetik ortası $\frac{a+b}{2}$ ve a, b, c gibi üç reel sayının aritmetik ortası ise $\frac{a+b+c}{3}$ olur.

2. Geometrik ortalama. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pozitif reel sayılarının geometrik ortalaması (ortası)

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$$

şeklinde tanımlanır. Geometrik ortanın diğer bir adı ise **orta orantıdır.** a ve b gibi iki pozitif reel sayının orta orantısı $\sqrt{ab}$ ve a, b, c gibi üç pozitif sayının geometrik ortası ise $\sqrt[3]{abc}$ olur.

3. Harmonik ortalama. Sıfırdan farklı $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ reel sayılarının harmonik ortalaması (ortası)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

şeklinde tanımlanır. a ve b gibi kendileri ve toplamları sıfırdan farklı iki reel sayının harmonik ortası $\frac{2ab}{a+b}$ ve a, b, c gibi kendileri ve ikişer ikişer çarpımlarının toplamları sıfırdan farklı üç reel sayının harmonik ortası ise $\frac{3abc}{ab+ac+bc}$ olur.

4. Ortalamaların sıralaması. Eğer $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sayılarının en az biri diğerlerinden farklıysa bu sayıların harmonik ortalaması her zaman diğer ortalamalarından küçük olur, aritmetik ortalaması da diğerlerinden büyük olur. Eğer $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$ ise bu sayıların tüm ortalamaları birbirlerine eşit olur.

$$H \le G \le A$$

5. Aritmetik dizi. Ardışık iki teriminin farkları sabit olan dizilerdir. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gibi bir aritmetik dizide herhangi bir terim kendisine eşit uzaklıkta bulunan komşularının aritmetik ortasıdır. Örneğin,

$$x_2 = \frac{x_1+x_3}{2}.$$

6. Geometrik dizi. Ardışık iki teriminin oranı pozitif bir sabit sayı olan dizilerdir.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gibi bir geometrik dizide herhangi bir terim kendisine eşit uzaklıkta bulunan komşularının geometrik ortasıdır. Örneğin,

$$x_2 = \sqrt{x_1 x_3}.$$

Örnek. *m bir reel sayı olmak üzere*

$$x^3 - 15x^2 - mx - 64 = 0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ve geometrik ortalarının toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: Denklemimizin köklerinin aritmetik ortası

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{15}{3} = 5,$$

diğer yandan geometrik ortası

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

olduğundan cevabımız 5 + 4 = 9 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1986 ÖYS]. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *denkleminin kökleri bir aritmetik dizi oluşturduğuna göre ortanca kökün değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{a-b}{2}$ B) $-\frac{a}{3}$ C) $-\frac{b}{3}$ D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\frac{a+b+c}{3}$

Çözüm: Köklere x_1, x_2 ve x_3 adını verelim. Kökler toplamı formülünden $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ olduğunu görebiliriz. Diğer yandan kökler aritmetik dizi oluşturuyorsa

$$x_1 + x_3 = 2x_2$$

olur. Bu durumda

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = -a$$

olur. O halde $x_2 = -\frac{a}{3}$.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$x^3 + wx^2 - 45x + 15 = 0$$

denkleminin köklerinin harmonik ortası kaçtır?

A) 1 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Çözüm: Kökler her zamanki gibi x_1, x_2 ve x_3 olsun. Harmonik ortanın formülü gereği

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}} = \frac{3}{\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}}$$

$$= \frac{3 \cdot x_1x_2x_3}{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{-d}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-3d}{c} = \frac{-3 \cdot 15}{-45} = 1$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^3 - 7x^2 + nx - 8 = 0$ *denkleminin kökleri geometrik dizi oluşturmaktadır. En büyük köke p diyelim. Buna göre* $n - p$ *farkı kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Köklere x_1, x_2 ve x_3 diyelim. Kökler geometrik dizi oluşturuyorsa

$$x_2^2 = x_1 \cdot x_3$$

olmalıdır. Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_2^3 = 8$ eşitliğinden $x_2 = 2$ bulunur. O halde $x_1 \cdot x_3 = 4$'tür. Diğer yandan kökler toplamı 7 diye $x_1 + x_3 = 5$ bulunur. Bu son iki eşitlikten $x_1 = 1$ ve $x_2 = 4$ bulunur.

$x = 1$ değeri, bir kök olduğundan denklemde yerine yazılırsa $n = 14$ bulunur. O halde

$$n - p = 14 - 4 = 10\text{'dur.}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^3 - (a+4)x^2 + 12x - 8 = 0$ *denkleminin kökleri aritmetik dizi oluşturuyorsa a kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 14

Çözüm: Köklere, adet olduğu üzere x_1, x_2 ve x_3 diyelim. Eğer kökler aritmetik dizi oluşturuyorlarsa $x_1 + x_3 = 2x_2$ olmalıdır. Diğer yandan $x_1 x_2 x_3 = 8$ olduğunu da biliyoruz. Bu eşitlikleri şurada kullanacağız:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 12$$

$$x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 = 12$$

$$x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 = 12$$

$$x_2(2x_2) + \frac{8}{x_2} = 12$$

$$x_2^2 + \frac{4}{x_2} = 6$$

Üstteki denklemden $x_2 = 2$ olduğunu anlayabiliriz. Bu durumda $x_1 + x_3 = 2x_2 = 4$ olur. Yani

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + 4 = 6$$

eşitliğinden $a = 2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Üçüncü Dereceden Denklemlerin Köklerini Bulmak İçin Metotlar

Hemen sevinmeyin, her türlü üçüncü dereceden denklemleri çözen tekniği anlatmayacağız. Şu an için bazı özel durumlarda neler yapacağımızı anlatacağız. Ama genel tekniği merak edenler, konunun sonunda griye boyanmış sayfalara bakabilir!

Bazı üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak için illa da bir formül veya ilerde açıklayacağımız metodu bilmeye gerek yoktur. Örneğin,

$$x^3 = 8$$

denklemini hepimiz çözebiliriz. Üç kökü vardır, üçü de 2'dir zannetmeyin. O denklem

$$(x-2)^3 = (x-2)(x-2)(x-2) = 0$$

denklemidir. Bu denklem

$$x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılarak çözülür. Her zaman denklem bu kadar basit olmayabilir ama ona özgü bazı metotlar bulmayı becerebiliriz.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

denklemini düşünelim. Katsayılardaki 1-3-1-3 simetrisi çarpanlarına ayrılabileceğinin ipucunu veriyor. Hemen ayıralım o zaman.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= x^2(x-3) - (x-3) \\ &= (x-3)(x^2 - 1) \\ &= (x-3)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

olduğundan köklerin 3, 1 ve -1 olduğunu söyleriz.

Tavsiye etmem ama şu yol da aklınızın bir köşesinde bulunsun: Kökler toplamı, köklerin ikişer ikişer çarpımlarının toplamı ve köklerin çarpımının formüllerini bildiğimizden üç bilinmeyenli üç denklemi çözebiliriz ama bu çözüm çoğu zaman kabusa döner, yaptığımıza yapacağımıza pişman eder. Her denklem izin vermese de en mantıklı yollardan biri de şudur: Kökler çarpımının $-d/a$ olduğunu hatırlayın. O halde köklerin hepsi bu $-d/a$ sayısının bölenleridir. Dua edelim ki, tam böleni olsunlar. ☺ Tam bölenleri sağlamasa bile, deneme yanılma yoluyla tüm derdimiz sadece bir kökü bulmak olacak. İşte böyle bir kök bulabilirsek, örneğin bulduk diyelim ve o kök 1 olsun, o halde denklem $(x - 1)$ ile tam bölünebilmeli diyerek, denklemi $(x - 1)$'e böleceğiz. Bölümde çıkan ikinci dereceden denklem de bize diğer iki kökü altın tepside sunacak. Hemen bir örnek çözeyim:

Örnek. $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$ *denkleminin reel kökleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $\{-1, 1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}$ B) $\{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$

C) $\{-1, -1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$ D) $\{1, \sqrt{3}-1, 1+\sqrt{3}\}$

E) $\{1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}$

Çözüm: Denklemin katsayıları toplamı 0 olduğundan 1'in bir kök olduğunu anlayabiliriz. Eğer bu aklınıza gelmezse yapacağınız ilk iş 2'nin bölenlerini tek tek denemek olsun. Ben denedim, ''1'' sağladı. Hemen denklemi $(x - 1)$'e bölelim. Bölüm $x^2 + 2x - 2$ çıkacaktır. İnanmayan bölsün. $x^2 + 2x - 2 = 0$ denklemini çözerek de diğer iki kökü bulabilirsiniz.

$$0 = x^2 + 2x - 2 = x^2 + 2x + 1 - 3 = (x+1)^2 - 3$$

olduğundan $x + 1 = \pm\sqrt{3}$ olur. Buradan da diğer iki kök $-1-\sqrt{3}$ ve $-1+\sqrt{3}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$2\sqrt{2}x^3+4x^2-\sqrt{2}x-14=0$$

denkleminin bir reel köküdür?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) -1 E) $-\sqrt{2}$

Çözüm: Tek dereceli terimlerin katsayıları $\sqrt{2}$ içermekte olup çift dereceli terimlerin katsayıları rasyonel olduğundan $x=a\sqrt{2}$ dönüşümü hepsini rasyonel yapar.

$$2\sqrt{2}x^3+4x^2-\sqrt{2}x-14=0$$

$$2\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^3+4\left(a\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)-14=0$$

$$8a^3+8a^2-2a-14=0$$

Bu polinomun katsayılar toplamı 0 olduğundan, a = 1 değerinin bir kök olduğunu anlıyoruz. O halde $x=a\sqrt{2}=\sqrt{2}$ de esas denklemin bir köküdür.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$x^3+4\sqrt{3}x^2-7x-8\sqrt{3}=0$$

denkleminin bir reel köküdür?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) -1 E) $-\sqrt{3}$

Çözüm: Bu sefer çift dereceli terimlerin katsayıları $\sqrt{3}$ içermekte olup, tek dereceli terimlerin katsayıları rasyonel olduğundan $x=a\sqrt{3}$ dönüşümü uygundur.

$$x^3+4\sqrt{3}x^2-7x-8\sqrt{3}=0$$

$$\left(a\sqrt{3}\right)^3+4\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}\right)^2-7\left(a\sqrt{3}\right)-8\sqrt{3}=0$$

$$3\sqrt{3}a^3+12\sqrt{3}a^2-7\sqrt{3}a-8\sqrt{3}=0$$

Katsayılar toplamı yine 0 olduğundan a = 1 olabileceğini anlıyoruz. O halde $x=a\sqrt{3}=\sqrt{3}$ bize verilen denklemin bir köküdür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^3+4x-3=0$ *denkleminin reel kökü aşağıdaki aralıkların hangisindedir?*

A) $(0,\frac{1}{2})$ B) $(\frac{1}{2},1)$ C) $(1,\frac{3}{2})$ D) $(\frac{3}{2},2)$ E) $(2,\frac{5}{2})$

Çözüm: $x^3+4x-3=f(x)$ olsun. $x=0$ için $f(x)<0$ ve $x=1$ için $f(x)>0$ olduğundan $f(x)$'in 0 olduğu yer, 0 ile 1 arasındadır.

Bir de $x=\frac{1}{2}$ olsun bakalım. Yine $f(x)<0$ olduğundan denklemin kökü $\frac{1}{2}$ ile 1 arasındadır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(4-\sqrt{3}x)^2}=1$$

denkleminin bir reel köküdür?

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Çözüm: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(4-\sqrt{3}x)^2}=1$ eşitliğinde $x=\frac{y}{\sqrt{3}}$ diyelim.

$$\frac{3}{y^2}+\frac{1}{(4-y)^2}=1$$

olur ki düzenlenirse

$$y^4-8y^3+12y^2+24y-48=0$$

$$y^4-2y^3-6y^3+12y^2+24y-48=0$$

$$y^3(y-2)-6y^2(y-2)+24(y-2)=0$$

$$(y-2)(y^3-6y^2+24)=0$$

olduğundan $y_1=2$ dolayısıyla $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$ *denkleminin gerçel köklerinin toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Köklerin tamamının reel olup olmadığını bilmediğimizden, direkt olarak $-b/a$ formülüne dayanıp, kökler toplamına 5 diyemeyiz.

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

biçimindeki denklemlerde ifadeyi x^2 parantezine almak gerekir. Neden mi? Seyredin...

$$x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$$

$$x^2\left(x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-5x-\frac{5}{x}+6\right)=0$$

$$x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right)=0$$

$$x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right)=0$$

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=0$$

$$\left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$$

olduğundan iki kökün reel, iki kökün sanal olduğunu görüyoruz. Reel olan kökler toplamı da görüldüğü üzere 4'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^5 - 3x - 1 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2, x_3, x_4 *ve* x_5 *olsun. Buna göre* $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: x_1, x_2, x_3, x_4 *ve* x_5 değerleri bu denklemin kökleri olduğundan, her biri denklemi ayrı ayrı sağlamalıdır.

$$x_1^5 - 3x_1 - 1 = 0$$
$$x_2^5 - 3x_2 - 1 = 0$$
$$x_3^5 - 3x_3 - 1 = 0$$
$$x_4^5 - 3x_4 - 1 = 0$$
$$x_5^5 - 3x_5 - 1 = 0$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - 5 = 0$$
$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5$$

Denklemimizde x^4'lü terim olmadığından kökler toplamı 0'dır, bundan dolayı

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^3 - x^2 + x - 4 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2 *ve* x_3 *olduğuna göre* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ *toplamı kaçtır?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: x_1 denklemin bir kökü olduğundan x yerine x_1 yazılırsa denklemi sağlamalıdır.

$$x_1^3 - x_1^2 + x_1 - 4 = 0$$

olduğundan

$$x_1^3 = x_1^2 - x_1 + 4$$

ve benzer şekilde

$$x_2^3 = x_2^2 - x_2 + 4$$
$$x_3^3 = x_3^2 - x_3 + 4$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) + 12$$

elde ederiz. Şimdi parantez içindeki ifadeleri hesaplayalım:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1^2 - 2(1) = -1$$

olduğundan

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (-1) - (1) + 12 = 10$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.



Niccolo Fontana TARTAGLIA

Üçüncü dereceden denklemlerin köklerini bulmak [MD]. Birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini zaten büyük ihtimalle sizler de yapabiliyordunuz. Ama daha büyük dereceden denklemlerin çözümlerini bulmak insanlık tarihinin nerdeyse 2000 yılını aldı. Üçüncü dereceden denklemler, 1525 yılı dolaylarında İtalyan matematikçi Scipione del Ferro tarafından çözülmüştür. Ama kısmen. Tam olarak çözen yine bir İtalyan olan Niccolo Fontana Tartaglia'dır. 2000 yıllık bir uğraşı burada tek sayfada toparlayabileceğimiz için çok şanslı olduğumuzu söyleyebiliriz. *Burada yazdıklarımızın ÖSS ile ilgisinin olmadığı konusunda da uyaralım.* Başlıyoruz.

Denkleminiz $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ olsun. a'nın sıfırdan farklı olduğunu bir kez daha hatırlatırız. Aynı ikinci dereceden denklemlere uyguladığımız gibi eşitliğin her iki tarafını a'ya bölelim.

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

çıkar. Hem işlem kolaylığı hem de anlaşılabilirlik adına

$$\frac{b}{a} = B, \quad \frac{c}{a} = C \text{ ve } \frac{d}{a} = D$$

eşitliklerini kullanarak denklemimizi

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

biçimine getirelim. Eğer bu denklemi çözebilirsek, baştaki denklemi de çözebileceğimizi çoktan anlamış olmalısınız. Amacımız sadece karışıklığa meydan vermemek üzere denklemleri mümkün olduğunca sadeleştirmek. Yine aynı amaçla denklemdeki x^2 terimini yok ederek denklemin daha da sadeleşmesini sağlamak istiyoruz. x yerine $y - t$ yazarak denklemi düzenlediğimizde oluşan x^2'li terimin $t = B/3$ olduğu zaman 0 olacağını anlıyoruz. Bu amaçla x yerine $y - B/3$ yazacağız. İşlemleri yapınca y^2'lerin sadeleşerek kaybolacağı artık sürpriz değil! Geriye $y^3 + Ey + F = 0$ gibi bir denklem kalır. Burada E ve F değerlerini merak eden bunları B, C, D dolayısıyla a, b, c, d cinsinden yazabilir, biz bunu yapmayacağız. Şimdi tüm marifetimizi $y^3 + Ey + F = 0$ denklemini çözmeye harcayacağız. Eğer E sıfırsa sorun yok, çünkü o zaman eşitlik $y^3 + F = 0$ halini alır ki buradan $y = \sqrt[3]{-F}$ olduğunu bulmayan zaten ne buraya kadar anlattıklarımızı anlamıştır, ne de bundan sonra anlatacaklarımızı anlar! Bundan böyle E'nin sıfır olmadığını düşünelim.

Şimdi bir süre için çarpanlara ayırma dersine dönelim.

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

olduğunu biliyoruz. Hepsini bir tarafta toplayalım:

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) + v^3 - u^3 = 0.$$

Bir şeyler sezdiniz mi?

$$y^3 + Ey + F = 0$$

denklemine ne kadar da benziyor değil mi? O halde hemen

$$y = u - v$$
$$E = 3uv$$
$$F = v^3 - u^3$$

olsun diyelim. Buradan $u - v$ değerini bulan y'yi çoktan bulmuş olacak! E'nin eşitinden v'yi çekip, F'nin eşitinde yerine yazacağız. $v = E/(3u)$ olduğundan

$$F = v^3 - u^3 = E^3/(27u^3) - u^3$$

olur. Düzenlenirse;

$$27u^6 + 27Fu^3 - E^3 = 0$$

ya da

$$u^6 + Fu^3 - E^3/27 = 0$$

olur. Denklemdeki u^3 yerine w yazarsak,

$$w^2 + Fw - E^3/27 = 0$$

biçiminde ikinci dereceden bir denklem buluruz ki, böyle soruları çözmeyi bildiğimizden mutlu sona ulaşmış oluruz. Şimdi geriye sadece yaptığımız dönüşümlerde ters işlemler yaparak a, b, c, d değerlerine ulaşmak kalıyor. Nasıl mı? w'yi bulduğumuzdan w'nin üçüncü dereceden kökünü alarak u'ya ulaşırız. $v = E/(3u)$ eşitliğinde bunu yerine yazarak v'ye ulaşırız. Ardından $y = u - v$ eşitliğinden de y'yi buluruz. Çözümlerden birini bulunca diğerlerini bulmak çocuk oyuncağı gibi bir şeydir. Denklemi sağlayan y değerlerinden bulduğumuz y_0 diyelim. Madem y_0 diye bir kökü var, o halde bu polinom $(y - y_0)$ ile tam bölünür diyerek, polinomu $(y - y_0)$'a böleceğiz. Çıkan ikinci dereceden denklemin iki kökü de üçüncü dereceden denklemin y_0'dan farklı olan diğer iki kökünü verecektir. Sonuç olarak, denklemin (ille de birbirlerinden farklı olmaları gerekmeyen) üç kökü de bulunmuş olur.

Dördüncü Dereceden Denklemler. Bir, iki, üç derken dörde kadar geldik. Nereye kadar gideceğimizi (daha doğrusu gidebileceğimizi) merak ediyorsanız, okumaya devam! Dördüncü dereceden denklemler ilk olarak Girolamo Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari tarafından 1540'larda çözülmüştür.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ denklemiyle ve her zamanki gibi bu denklemin her iki tarafını a'ya bölerek başlıyoruz.

$$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

gibi bir denklem elde ediyoruz, aynı üçüncü dereceden denklemlere uyguladığımız gibi $x = y - B/4$ alıp

$$y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$$

biçiminde yazılan daha basit bir denkleme varıyoruz. Amacımız bu denklemi y cinsinden çözmek.
Önce $y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$ denklemini aşağıdaki gibi kareye tamamlayalım:

$$y^4 + 2Fy^2 + F^2 = Fy^2 + F^2 - Gy - H$$

yani

$$(y^2 + F)^2 = Fy^2 - Gy + F^2 - H.$$

Şimdi biraz zeki olup, her z için,

$$\begin{aligned}(y^2 + F + z)^2 &= (y^2 + F)^2 + 2z(y^2 + F) + z^2 \\ &= Fy^2 + F^2 - Gy - H + 2zy^2 + 2zF + z^2 \\ &= (F + 2z)y^2 - Gy + (F^2 - H + 2zF + z^2)\end{aligned}$$

eşitliklerinin, daha doğrusu sadece

$$(y^2 + F + z)^2 = (F + 2z)y^2 - Gy + (F^2 - H + 2zF + z^2)$$

eşitliğinin ayrımına varmalıyız. Sağ taraf y cinsinden ikinci dereceden denklem olduğundan, z'yi sağ taraf bir kare olacak şekilde seçebiliriz; bunun için z'yi sağ tarafın diskriminantını, yani

$$G^2 - 4(F + 2z)(F^2 - H + 2zF + z^2)$$

sayısını 0 olacak biçimde seçmeliyiz, ki bu da z cinsinden üçüncü dereceden bir denklem olduğundan çözülebilmesi her zaman mümkündür. Bundan böyle z'yi öyle seçelim. Demek ki belli bir $\partial \geq 0$ için,

$$(y^2 + F + z)^2 = \partial^2.$$

Şimdi $(y^2 + F + z)$'yi ∂ biçiminde seçersek;

$$y^4 + Fy^2 + Gy + H = 0$$

denkleminin çözümlerinden birini buluruz. Birini bulduk mu diğerleri kolay zaten. Tartaglia, sen çok yaşa!


Niels Henrik ABEL

Beşinci ve Daha Yüksek Dereceden Denklemler. Beşinci dereceden genel denklemler yukardaki gibi cebirsel olarak, yani dört işlemle ve kök alarak çözülemezler. Çözülmesi bilinmiyor değil, çözülemezler. Hiç kimse, hiçbir zaman çözemez. Bu, matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Bugün hala daha bazıları beşinci dereceden denklemleri çözmeye çalışır, hatta çözdüğünü iddia eder. Buldukları çözüm kesinlikle doğru olamaz, bir yerde hata yapmışlardır mutlaka.

Her denklem çözülemez demek istemiyoruz. Örneğin, $x^5 + a = 0$ türünden denklemler çözülebilir. Çözülebilecek daha karmaşık denklem aileleri de vardır elbet. Ama cebirsel yöntemlerle çözülemeyecek beşinci dereceden denklemler vardır, hatta bunlar çoğunluktadır. Bu imkansızlık çok genç yaşlarında ölen Norveçli Niels Henrik Abel (1802-1829) tarafından 1824'te kanıtlanmıştır.


Evarista GALOIS

Bu sadece $n = 5$ için değil, eğer $n \geq 5$ ise n'ninci dereceden denklemlerin tümü için geçerlidir. Bu da matematik tarihinin en romantik figürü olan Fransız Evariste Galois (1811-1832) tarafından kanıtlanmıştır.

Çözülemez diye kollarımızı kavuştur mayacağız herhalde. Ayrıca kim söyledi çözülemeyeceğini? Sadece cebirsel çözümün bulunamayacağını söyledik, analize dayanan yöntemler bulunabilir, neden bulunmasın? Onların yeri tabii ki burası değil, matematik bölümünü kazandıktan sonra gelin yanıma, olur mu?☺

CEVAPLI TEST 1

1.

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 iken

$$(x_1 + x_2 + x_3)^m = 256$$

olduğuna göre *m* kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$x^3 + x^2 + 2x - 5 = 0$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 2 D) −5 E) 5

4.

$2x^3 - x^2 - 5x - 30 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olduğuna göre

$$\min\left\{x_1 + x_2 + x_3,\ \frac{3}{x_1 x_2 x_3}\right\}$$

ifadesi kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 1

5.

$$5x^3 - (3m+4)x^2 - 3m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun.

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ çarpımı kaçtır?

A) 1 B) −1 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$x^3 + mx^2 - 7x + 15 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olsun.

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre *m* kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$x^3 - 4x = 0$$

denkleminin köklerinin toplamaya göre terslerinin çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) −1 D) −2 E) 0

8.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

denkleminin köklerinin kareleri toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

9.

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3'tür.

Buna göre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.

$3x^3 - x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olduğuna göre

$$\max\left\{2^{x_1 x_2 x_3},\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right\}$$

ifadesi kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3

1.A 2.D 3.E 4.B 5.A 6.E 7.E 8.D 9.D 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

denkleminin üç kökünden herhangi ikisinin kareleri toplamı kaçtır?

A) 4 B) 8 C) −4 D) −8 E) 0

2.

$x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 iken

$$x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2$$

toplamı kaçtır?

A) 18 B) −18 C) −6 D) −12 E) 6

3.

$x^3 + x^2 - 3x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 iken

$$x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2 = 3$$

olduğuna göre *m* kaçtır?

A) 1 B) 2 C) −1 D) −2 E) 0

4.

$$x^3 - 6x^2 + ax + 2 = 0$$

denkleminin köklerinden biri diğer iki kökün toplamı olduğuna göre *a* kaçtır?

A) $\frac{25}{3}$ B) $\frac{10}{7}$ C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$64 - 27a^3 = 0$$

denkleminin reel olmayan köklerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{4}{3}$

6.

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ortalamasının 6 katı kaçtır?

A) 8 B) −8 C) −4 D) 4 E) 0

7.

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olduğuna göre

$$\frac{2^{x_1x_2}}{x_3}$$

oranı kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Belirsizdir

8.

Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökler toplamı kökler çarpımına eşittir?

A) $x^3 - 1 = 0$ B) $x^3 + 1 = 0$ C) $x^3 - x = 0$
D) $x^3 - x^2 = 0$ E) $x^3 + x = 1$

9.

$$x^3 - 3x^2 + (m+2)x + m - 2 = 0$$

denkleminin kökünün aritmetik ortalaması, üçüncü köke eşit olduğuna göre *m* kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$$2x^3 + 7x^2 + 5x = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı köklerinin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalaması kaçtır?

A) $-\frac{7}{10}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $-\frac{5}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{7}{5}$

1.B 2.B 3.A 4.A 5.E 6.B 7.D 8.C 9.A 10.A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$x^3 - 21x^2 + 84x - 64 = 0$$

denkleminin köklerinin aritmetik ve geometrik ortalarının farkı aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 17 E) 43

2.

$$x^3 - qx^2 - 5x + 6 = 0$$

denkleminin köklerinin harmonik ortası kaçtır?

A) $\frac{6}{5}$ B) $-\frac{18}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{18}{5}$

3.

$$2x^3 + 6x^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri, aritmetik dizi oluşturuyorsa *m* kaçtır?

A) 1 B) 3 C) –3 D) –6 E) 6

4.

$$x^3y^3 - 216 = 0$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (*x*, *y*) tam sayı ikilisi yazmak mümkündür?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

5.

Başkatsayısı 2 olup kökleri 1, 2, 3 olan üçüncü dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^3 - 12x^2 - 14x + 12 = 0$ B) $x^3 - 7x + 12 = 0$
C) $2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0$ D) $x^3 - 12x + 7 = 0$
E) $x^3 - 6x^2 - 14x + 6 = 0$

6.

Başkatsayısı –1 olup kökleri 2, –3, 4 olan üçüncü dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x^3 - 12x^2 - 14x - 12 = 0$ B) $x^3 - 12x^2 - 7x - 6 = 0$
C) $-x^3 + 3x^2 + 10x - 24 = 0$ D) $-x^3 + x^2 + 10x - 5 = 0$
E) $x^3 + 10x - 4 = 0$

7.

Başkatsayısı 1 olup köklerinden biri 1 diğeri $1-\sqrt{2}$ olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ B) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
C) $x^3 - 3x^2 - x + 6 = 0$ D) $x^3 - 3x^2 - x + 7 = 0$
E) $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$

8.

Köklerinden ikisi 3 ve $2-\sqrt{3}$ olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklemin tüm köklerinin çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

Bir kökü $7-\sqrt{2}$, bir diğeri –3 olan rasyonel katsayılı üçüncü dereceden denklemin tüm köklerinin toplamı kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

10.

$$2x^3 - 3x + 1 = 0$$

denkleminin negatif olan kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
D) $-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

11.

$$x^3 + bx - 8 = 0$$

denkleminin üç kökü de reel sayıdır.
Bu köklerden kaçı pozitiftir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Bilinemez

12.

$$x^3 - 4x - 1 = 0$$

denkleminin hangi iki ardışık sayı arasında bir reel kökü vardır?

A) (0, 1) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (3, 4) E) (4, 5)

1.C 2.E 3.E 4.D 5.C 6.C 7.A 8.C 9.A 10.C 11.B 12.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Ortak Köklü Denklemler

Bazen bir veya daha çok sayı, iki veya daha çok denklemi birden sağlar. Bu durumda bu sayı veya sayılar birden fazla denklemin kökü olmuş olurlar. Bu yüzden de ''ortak'' sıfatıyla anılırlar. Hatta tüm kökleri ortak olan ama birbirlerine görünüşte hiç benzemeyen denklemler de yazmak mümkündür. $2^x = 16$ denklemi ile $x - 4 = 0$ denklemlerini düşünün. Her ikisinin de tek reel kökü vardır, 4. İşte 4, bu iki denklemin ortak köküdür.

Bu yazımızda en az 1 kökü ortak olan denklemlerle çalışacağız. Bazen ortak kökü aramaya koyulacağız, bazen onu soruda kendi verecek, sonra da denklemde verdiği bilinmeyeni soracak. Ne yaparsa yapsın, bizden kaçmaz! Çözümlere geçmeden önce, isteyen çözümleri formülle yapsın diye formülü çıkartalım.

Örnek.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$dx^2+ex+f=0$$

denklemlerinin birer kökü ortaksa, ortak kökü denklemlerin katsayılarına bağlı olarak bulalım.

Çözüm: Ortak olan köke t diyelim. O halde t değeri her iki denklemi birden sağlamalıdır.

$$at^2+bt+c=0$$
$$dt^2+et+f=0$$

eşitliklerinden t'yi bulmak amacıyla ilk denklemi d'yle ikinci denklemi a'yla çarpıp taraf tarafa çıkarma yapalım.

$$adt^2+bdt+cd=0$$
$$-\ adt^2+aet+af=0$$
$$(bd-ae)t+cd-af=0$$

eşitliğinden

$$t=\frac{af-cd}{bd-ae}$$

bulunur. Matris ve Determinant bilenler bu ifadeyi çok kolay akılda tutacaklardır. Çünkü

$$\left.\begin{matrix}at^2+bt+c=0\\ dt^2+et+f=0\end{matrix}\right\}\ t=-\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}}.$$

Örnek.

$$x^2+2x-5+a=0$$
$$x^2+4x-7+a=0$$

denklemlerinin birer kökü ortak ise a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Ortak olan köke t diyelim. O halde t değeri her iki denklemi birden sağlamalıdır.

$$t^2+2t-5+a=0$$
$$t^2+4t-7+a=0$$

eşitliklerinden t'yi bulmak için denklemleri eşitleyelim:

$$t^2+2t-5+a=t^2+4t-7+a$$

eşitliğinden $2t-5=4t-7$ yani $t=1$ bulunur. Ortak kökü bulduk. Şimdi bu kökü canımızın istediği denklemde yerine koyacak ve $a=2$ olduğunu göreceğiz.

İkinci yol. İlk denklemin köklerine t ve n, ikinci denklemin köklerine ise t ve p diyelim. Bu durumda

$$t+n=-2 \text{ ve } t+p=-4$$

olur. İkisini birlikte çözersek $n-p=2$ bulunur. Diğer yandan kökler çarpımından $tn=-5+a$ ve $tp=-7+a$ olduğundan $tn-tp=2$ olur.

$$tn-tp=t(n-p)=2t=2$$

eşitliğinden $t=1$, buradan da $a=2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2-2ax+b=0$ *denkleminin bir kökü m olup* $x^2-2cx+d=0$ *denkleminin bir kökü de n'dir. Bu iki denklemin diğer kökleri ortak ise a – c farkı m ve n cinsinden neye eşittir?*

A) $\frac{m-n}{2}$ B) $m-n$ C) mn D) $m+n$ E) m^2+n^2

Çözüm: Ortak olan kök yine t olsun. O halde ilk denklemin kökleri m ve t, ikinci denklemin kökleri n ve t olur. Diğer yandan kökler toplamının formülü gereği $m+t=2a$ ve $n+t=2c$'dir. İlk eşitlikten ikincisini çıkartırsak, $2a-2c=m-n$ bulunur. O halde

$$a-c=\frac{m-n}{2}$$

olmalıdır. Bu soruda a ve c ile alakalı şeyler sorduğundan kökler toplamından gittik, eğer b ve d ile alakalı bir soru gelseydi, kökler çarpımından gitmek daha mantıklı olurdu.

Doğru cevap: A.

Örnek [1981 ÖYS]. *$x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 3, $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin bir kökü −5'tir. Bu iki denklemin diğer kökleri eşit olduğuna göre $a - c$ kaçtır?*

A) −8 B) −6 C) −3 D) −2 E) −1

Çözüm: Ortak olan köke p diyelim. Kökler toplamı formülünden

$$3 + p = -a \text{ ve } -5 + p = -c$$

eşitliklerine ulaşmak hiç de zor olmasa gerek. İlk denklemi −1 ile çarpıp ikinciyle toplarsak $a - c = -8$ buluruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$x^2 - ax + b = 0$ denkleminin bir kökü −7 olup $x^2 + (1 - 3a)x + c = 0$ denkleminin bir kökü de 2'dir. Bu iki denklemin diğer kökleri eşitse a kaçtır?*

A) −1 B) 3 C) 5 D) 9 E) 10

Çözüm: Denklemlerin ortak köküne p diyelim. İlk denklemden kökler toplamını yazarsak,

$$p - 7 = a,$$

İkinci denklemden kökler toplamını yazarsak,

$$p + 2 = 3a - 1$$

buluruz. Bu iki eşitlikten p'leri çekip eşitlersek,

$$a + 7 = 3a - 3$$

yani $a = 5$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x^2 + ax + b = 0$ denkleminin köklerinden biri 5 ve $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin köklerinden biri 6'dır. Bu denklemlerin diğer kökleri birbirlerinin simetriği olduğuna göre $a + c$ toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 11 C) −30 D) −11 E) −1

Çözüm: İlk denklemin köklerine 5 ve p dersek, ikinci denklemin kökleri 6 ve $-p$ olur. Her iki denklemde de kökler toplamını yazarsak sorulana ulaşırız.

$$-a = 5 + p$$
$$-c = 6 - p$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-a - c = 11$$

yani $a + c = -11$ olarak buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$x^2 + ax + b = 0$ ve $x^3 + ax^2 + cx + d = 0$ denklemlerinin x_1 ve x_2 kökleri ortak olduğuna göre d'nin değeri kaçtır?* **[1982 ÖYS]**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Verilenlere göre $x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu da $x_3 = 0$ olması anlamına gelmektedir. Bu değer ikinci denklemin kökü olduğundan, onu sağlamalıdır. O halde $d = 0$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *p ve q birer reel sayı olmak üzere, $x^2 - x + p = 0$ denkleminin kökleri aynı zamanda $x^3 + qx + 10 = 0$ denkleminin de kökleridir. Buna göre $p + q$ toplamının değeri kaçtır?*

A) 19 B) 18 C) 17 D) −14 E) −13

Çözüm: $x^2 - x + p = 0$ denkleminin köklerine x_1 ve x_2, $x^3 + qx + 10 = 0$ denkleminin köklerine de x_1, x_2 ve x_3 diyelim.

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ ve } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

eşitliklerinden $x_3 = -1$ olarak bulunur. Bu bilgiyle q değerini bulabiliriz.

$$(-1)^3 + q\cdot(-1) + 10 = 0$$

eşitliğinden $q = 9$ olarak bulunur. Diğer yandan kökler çarpımı formülünden

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -10 \text{ ve } x_3 = -1$$

olduğundan $x_1\cdot x_2 = p = 10$ çıkar.

O halde sorulan toplam

$$p + q = 10 + 9 = 19$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1995 ÖYS]. *p ve q birer reel sayı olmak üzere, $x^2 - 5x + p = 0$ denkleminin kökleri aynı zamanda*

$$x^3 + qx + 30 = 0$$

denkleminin de kökleridir. Buna göre $p + q$ toplamının değeri kaçtır?

A) −18 B) −16 C) −15 D) −14 E) −13

Çözüm: İkinci dereceden denklemin köklerine x_1 ve x_2 diyelim. Üçüncü dereceden denklemin kökleri de x_1, x_2 ve x_3 olsun.

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

eşitliklerinden $x_3 = -5$ olarak bulunur. Bu değer üçüncü dereceden denklemin kökü olduğundan, o denklemi sağlamalıdır. $(-5)^3 - 5q + 30 = 0$ eşitliğinden $q = -19$ çıkar.

Şimdi de kökler çarpımlarına bakalım.

$$x_1\cdot x_2 = p$$
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -30$$

eşitliklerinden $p\cdot(-5) = -30$ yani $p = 6$ bulunur. O halde $p + q = -19 + 6 = -13$'tür.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
a bir reel sayı olmak üzere

$$x^2 + 2x - 5 + a = 0$$
$$x^2 + 4x - 11 + a = 0$$

denklemlerinin birer kökü ortak ise a kaçtır?

A) −10 B) −6 C) 2 D) 3 E) 20

2.
a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 9, $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin bir kökü −2 olarak veriliyor.
Bu iki denklemin diğer kökleri ortak ise $a - c$ farkı kaçtır?

A) −11 B) −7 C) 0 D) 7 E) 11

3.
a, b ve c birer reel sayı olmak üzere $2x^2 - ax + b = 0$ denkleminin bir kökü −10 olup, $4x^2 + (1 - a)x + c = 0$ denkleminin bir kökü 2'dir.
Bu iki denklemin diğer kökleri eşitse a kaçtır?

A) −49 B) 8 C) 15 D) 21 E) 49

4.
a ve c birer reel sayı olmak üzere

$$ax^2 - 3x - 6 = 0$$

denkleminin bir kökü −1 olup diğeri $x^2 = (2a + 6)x - c$ denkleminin de kökü olduğuna göre $a - c$ farkı kaçtır?

A) −17 B) −16 C) −15 D) 1 E) 9

5.
a, b ve c birer reel sayı olmak üzere $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 2'dir. $x^2 + (3 - a)x + c = 0$ denkleminin de bir kökü 5'tir.
Bu iki denklemin diğer kökleri eşit olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) −40 B) −36 C) −32 D) 16 E) 24

6.
k, m ve n birer reel sayı olmak üzere, $x^2 - mx + n = 0$ denkleminin bir kökü −2, $x^2 + mx + k = 0$ denkleminin bir kökü −3 olarak veriliyor.
Bu iki denklemin diğer kökleri ortak ise $n + k$ toplamı kaçtır?

A) −18 B) −15 C) $-\frac{25}{2}$ D) −5 E) $-\frac{5}{2}$

7.
k, m ve n birer reel sayı olmak üzere,

$$x^2 + (1 + m^2)x + k = 0$$

denkleminin bir kökü −2 ve $x^2 - (m - 3)x + n = 0$ denkleminin bir kökü 8 olup bu iki denklemin diğer kökleri ortak olduğuna göre m'nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

A) −12 B) −1 C) 1 D) 12 E) 18

8.
k, m ve n birer reel sayı olmak üzere

$$x^2 - kx + n = 0$$

denkleminin bir kökü 5 ve $x^2 + (k - 3)x + m - 1 = 0$ denkleminin bir kökü −4 olup bu iki denklemin diğer kökleri eşitse k kaçtır?

A) −1 B) 1 C) 4 D) 6 E) 10

9.
p ve q birer reel sayı olmak üzere

$$x^2 - 2x + p = 0$$

denkleminin kökleri aynı zamanda $x^3 + qx + 10 = 0$ denkleminin de kökleridir.
Buna göre q kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10.
m ve n birer reel sayı olmak üzere

$$x^2 - 3x + m = 0$$

denkleminin kökleri aynı zamanda $x^3 + nx + 12 = 0$ denkleminin de kökleridir.
Buna göre $m + n$ toplamının değeri kaçtır?

A) −9 B) −2 C) −1 D) 1 E) 9

1.A 2.A 3.A 4.A 5.C 6.C 7.A 8.D 9.B 10.C

CEVAPLI TEST 2

1.
a bir reel sayı olmak üzere

$$x^2-3x+2=0 \text{ ile } \frac{a}{x-1}+x=10$$

denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 6 D) 8 E) 10

2.
a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$x^2+ax+b=0$$

denkleminin kökleri aynı zamanda $x^3-3x^2+2x=0$ denkleminin de kökleri olduğuna göre $a+b$ toplamı kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

3.
a bir reel sayı olmak üzere

$$2x-4=0 \text{ ile } x^2+ax-a=0$$

denkleminin birer kökleri ortak olduğuna göre a kaçtır?

A) −8 B) −6 C) −4 D) −2 E) 0

4.
a bir reel sayı olmak üzere

$$x^2-3x+2=0$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x^2-5x+a=0$$

denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

5.
a, b ve c birer reel sayı olmak üzere

$$x^2-(a+3)x+b=0$$
$$x^2-(a+5)x+c=0$$

denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre, ortak olmayan köklerin farkı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 8 E) 15

6.
a sıfırdan farklı olmak üzere

$$x^2+5x-3a=0$$
$$x^2-3x+a=0$$

denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre bu ortak kök kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

7.
a bir reel sayı olmak üzere

$$\sqrt{x+1}=x-1$$
$$\sqrt{x+6}=x+a$$

denklemlerinin kökleri ortak olduğuna göre a kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

8.
a bir reel sayı olmak üzere

$$x^2-2x-5=0$$
$$x^3-3x^2+a+1=0$$

denklemlerinin ikişer kökü ortak olduğuna göre a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.
a bir reel sayı olmak üzere

$$2^{x^2-2x}=8$$
$$3^{x+1}=a$$

denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 27 B) 28 C) 81 D) 82 E) 243

10.
$x^3-3x^2+2x=0$ denkleminin bir kökü, x'e bağlı olan

$$\frac{a-3}{x}+\frac{4}{x-1}=0$$

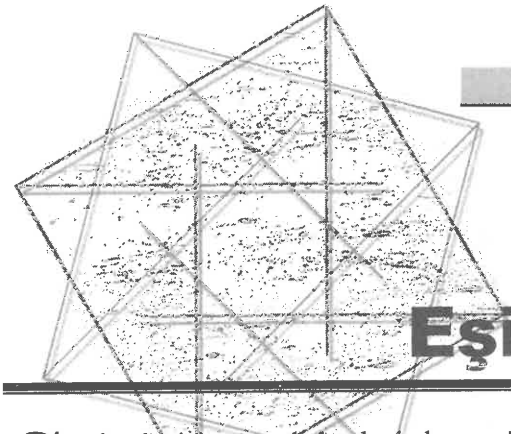
denkleminin de bir kökü olduğuna göre a'nın değeri kaçtır?

A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1

1.D 2.C 3.C 4.D 5.B 6.C 7.C 8.E 9.D 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Eşitsizlikler

Sayılar dersinin sonunda bu dersin başını görmüştük. O zamanlar adına "sadece birinci dereceden denklemleri içeren" manasında *Basit Eşitsizlikler* demiştik. Şimdi de daha büyük dereceden denklemleri içeren *Zor Eşitsizlikler*'e geldik. ☺

Eşitsizlik çözmek, kuralı x'e bağlı bir f fonksiyonunun hangi x değerleri için pozitif, hangi x değerleri için negatif ve hangi x değerleri için sıfır olduğunu bulma işlemidir. Bu x değerlerinin bulunduğu en geniş aralığa **çözüm aralığı** denir. Çözüm aralığını çözümlerimizde Ç.A. diye göstereceğiz. Kuralı birinci dereceden bir polinom olan fonksiyonlar için eşitsizlik çözmeyi öğrenmiştik. Şimdi de daha büyük dereceden fonksiyonlar için öğreneceğiz. Önce birinci dereceden olanları nasıl çözdüğümüzü hatırlayalım:

Örnek. $4x - 8 < 0$ *eşitsizliğinin sağlandığı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, -2]$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(2, +\infty)$ E) $[2,+\infty)$

Çözüm: İstemediğiniz kadar çok yol var. Biz iki tanesini vereceğiz. Siz bu tip soruları birinci yoldan çözeceksiniz ama ikinci yol daha büyük dereceden eşitsizlikleri çözerken kullanacağımız yol olacak, ona da bakın, alıştırma olsun.

Birinci yol. Sanki eşitlikmiş gibi davranacağız.

$$4x - 8 < 0,$$
$$4x < 8,$$
$$x < 2.$$

İkinci yol. $4x - 8 = 0$ denkleminin kökünü, yani 2'yi bir kenara yazın. Bir sayı doğrusu çizip üzerinde de işaretleyebilirsiniz, size kalmış. Sonra fonksiyonun kuralının başkatsayısı-nın işaretini 2'nin sağına yazın, zıt işaretlisini de soluna. Şöyle yani:

$$-\quad (2)\quad +$$

Bize $f(x)$'in sıfırdan küçük olduğu (yani negatif olduğu) yerler sorulduğundan, bu da bizim tasvirimiz de 2'nin solunda bulunduğundan, çözüm aralığının 2'den küçük sayılar olduğunu anlarız. Bunu $x < 2$ şeklinde gösterebileceğimiz gibi, canımız isterse $(-\infty, 2)$ şeklinde de gösterebiliriz.

Doğru cevap: C.

Birinci dereceden eşitsizlikleri çözerken bu son metoda hiç gerek yok ama daha büyük dereceden eşitsizliklerde ilaç gibi geliyor. Hemen mertebeyi yükseltiyoruz. Konu anlatımını, soruyu çözerken yapayım.

Örnek. $(x - 2)\cdot(x + 5) < 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -5)$ B) $(-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(-5, 2)$ E) $(-\infty, -5) \cup (2,+\infty)$

Çözüm: Bu sefer eşitsizliğimiz ikinci dereceden olduğundan 2 kökümüz var. Hem de birbirinden farklı iki kök. Hemen bunları bir kenara boy sırasına göre diziyoruz, küçükten büyüğe:

$$(-5)\quad (2)$$

Bu iki sayı, üzerini işaretlediğiniz sayı doğrusunu üç parçaya ayırır. -5'in solu, -5 ile 2 arası ve 2'nin sağı diye. İşte o 2'nin sağına fonksiyonun başkatsayının işaretini yazacağız. Eğer fonksiyonun kuralı çarpanlarına ayrılmış halde bize verilmişse, fonksiyonu oluşturan çarpanların başkatsayılarının işaretlerinin çarpımını en sağa yazarız, ki burada bu "+" oluyor, sonra sola doğru bir zıt işareti, bir aynı işareti yazacağız:

$$+\quad (-5)\quad -\quad (2)\quad +$$

Bize soruda fonksiyonun sıfırdan küçük olduğu yani negatif olduğu yerler sorulduğundan, bu da tasvirimizde -5 ile 2 arasında göründüğünden cevabımız $(-5, 2)$ olmalıdır.

Doğru cevap D.

Örnek. $(x - 2)\cdot(x + 5) \leq 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -5]$ B) $[-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2]$
D) $[-5, 2]$ E) $(-\infty, -5] \cup [2,+\infty)$

Çözüm: Bu sefer bir önceki örneğe göre köklerin değişmeyeceğini görünüz. Sadece önceden -5 ve 2 değerleri eşitsizliği sağlamıyordu, şimdi sağlıyorlar, o halde bu kökleri de çözüme dahil edeceğiz:

Ç.A.: $[-5, 2]$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\frac{x-2}{x+5} < 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -5)$ B) $(-5, +\infty)$ C) $(-\infty, 2)$
D) $(-5, 2)$ E) $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

Çözüm: Yine kökler aynı, bu yüzden ilk çözümle bir farkı yok.

Ç.A.: $(-5, 2)$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\frac{x-2}{x+5} \leq 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -5]$ B) $[-5, 2)$ C) $(-5, 2]$
D) $[-5, 2]$ E) $(-\infty, -5) \cup [2, +\infty)$

Çözüm: Hatırlarsanız, çarpanlar çarpım durumundayken soruda "< 0" yerine "≤ 0" dendiğinde, her iki kökü de çözüme almıştık. Şimdi de öyle yapmamız gerekir ama bu sefer $x + 5$ çarpanı paydada olduğundan -5 değeri eşitsizliği sağlamaz. O halde cevap olarak $(-5, 2]$ demeliyiz. Unutmayın ki, kaçıncı dereceden olursa olsun, hiçbir zaman paydanın köklerini çözüme dahil edemeyiz.

Doğru cevap: C.

Pratik yol. Bu çözümlerden sonra, ikinci dereceden eşitsizliklerin çözümüyle ilgili şöyle bir genelleme yapabiliriz:

Başkatsayıların çarpımı pozitifken,
"< 0" denmişse kökler arası,
"> 0" denmişse köklerin dışı
çözüm olur.

Başkatsayıların çarpımı negatifken,
"< 0" denmişse kökler dışı,
"> 0" denmişse kökler arası
çözüm olur.



Kökleri çözüm aralığına dahil edip etmeyeceğimiz, eşitliğin verilip verilmediğiyle ilgilidir, bir de ifadenin payda mı paydada mı olduğuyla.

3 ve daha büyük dereceden eşitsizlik çözümleri. Buradaki yolun, birinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız ikinci yoldan ve ikinci dereceden eşitsizliklere uyguladığımız tüm yollardan hiç farkı yok. Sadece burada kök sayısı daha fazla oluyor, o da bazen, ama teknik değişmiyor.

Örnek. $(x + 5)\cdot(x - 2)\cdot x \geq 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-5, 2)$ B) $[-5, 2]$ C) $[-5, 0] \cup [2, \infty)$
D) $[-5, 0) \cup (2, \infty)$ E) $[-5, 0) \cup [2, \infty)$

Çözüm: Derhal üç kökü de yazalım, hem de boy sırasında.

$(-5) \quad (0) \quad (2)$

Üç çarpanın üçünün de başkatsayıları pozitif, o halde üç pozitif sayının çarpımı da pozitif olacağından en sağa "+" yazacağız. Sonra bir zıt işareti, bir kendisi, bir zıt işareti, bir kendisi diye sola doğru ilerleyeceğiz.

$- \quad (-5) \quad + \quad (0) \quad - \quad (2) \quad +$

Eşitsizlik "≥ 0" durumunda olduğundan hem "+" yazan aralıkları hem de kökleri alacağız. O halde cevabımız:

Ç.A.: $[-5, 0] \cup [2, \infty)$.

Sonsuza giden ifadelerin her zaman açık parantezle gösterildiğini de tekrar hatırlatalım.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{-x+3}{x^2-x-2} \geq 0$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tam sayıyla, en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Kökleri yazacağız ama payda çarpanlarına ayrılmış durumda olmadığından kökler bir bakışta görünmüyor. Hemen paydayı da çarpanlarına ayırıyoruz:

$$\frac{-x+3}{x^2-x-2} = \frac{-x+3}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

Derhal üç kökü de boy sırasında yazalım:

$(-1) \quad (2) \quad (3)$

Üç çarpanın başkatsayılarının işaretlerinin çarpımı negatif olduğundan en sağa "$-$" yazıyoruz, gerisi bildiğiniz gibi:

$+ \quad (-1) \quad - \quad (2) \quad + \quad (3) \quad -$

Fonksiyonun sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olduğu yerler sorulduğundan "+" yazan yerleri alacağız, eşitlik olduğundan kökleri de alacağız ama paydada olanları değil, payda olanları.

ÇA : $(-\infty, -1) \cup (2, 3]$.

Görüldüğü üzere eşitsizlikleri sağlayan en büyük negatif tam sayı -2, en küçük pozitif tam sayı da 3 olduğundan bu iki değerin toplamı $-2 + 3 = 1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek [2006 ÖSS]. $(1-m)x^2+4x+m^2-4=0$ *denkleminin biri pozitif, diğeri negatif iki gerçel kökü varsa m'nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(1,\infty)$ B) $(-2,2)$ C) $(-1,0)\cup(1,\infty)$
D) $(-2,1)\cup(2,\infty)$ E) $(-2,0)\cup(1,\infty)$

Çözüm: Köklerin biri pozitif, biri negatifse bu durum kökler çarpımının negatif olmasını gerektirir. Hemen *c/a* formülünden kökler çarpımını yazalım.

$$\frac{m^2-4}{1-m}<0$$

eşitsizliğini çözmek gerekiyor. Şimdi de burada bulunan kökleri küçükten büyüğe doğru sıraya dizelim:

$$+\ (-2)\ -\ (1)\ +\ (2)\ -$$

Tablodan m'nin $(-2,1)\cup(2,\infty)$ aralığında olması gerektiğini anlıyoruz.

Doğru cevap: D.

Bir de daha daha büyük dereceden bir eşitsizlik çözelim ki hepsinin çocuk oyuncağı olduğuna ikna olun.

Örnek. $\frac{x\cdot(-x+3)\cdot(4-x)}{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(-x-5)}\le 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty,-5)\cup[-3,-1)\cup(-1,2]\cup[4,\infty)$
B) $(-\infty,-5)\cup(-1,0]\cup(2,3]\cup[4,\infty)$
C) $(-\infty,-4)\cup(-1,0]\cup(2,3]\cup[5,\infty)$
D) $(-5,-1)\cup(0,2]\cup(3,4]$
E) $(-5,-1)\cup[0,2)\cup[3,4]$

Çözüm: Kökler sırıtıyor, hemen boy sırasında kaydedelim:

$$(-5)\quad(-1)\quad(0)\quad(2)\quad(3)\quad(4)$$

Çarpanların başkatsayıları üç pozitif, üç negatif sayıdan oluştuğundan çarpımları negatif olur, en sağa "–" yazıp, sola doğru anlattığımız üzere ilerleyin.

$$-\ (-5)\ +\ (-1)\ -\ (0)\ +\ (2)\ -\ (3)\ +\ (4)\ -$$

Fonksiyonun sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olduğu yerler sorulduğundan, "–" yazan yerleri alacağız, eşitlik de verildiğinden payın köklerini de. O halde,

Ç.A. : $(-\infty,-5)\cup(-1,0]\cup(2,3]\cup[4,\infty)$

Doğru cevap: B.



Sağ sütundaki soruları çözebilmek, buraya kadar anlatılan her şeyi çok iyi anlamış olmak demektir. Lütfen çözüme bakmadan önce kendi başınıza çözmeyi deneyin ki tam süper olsun!

Örnek. $a^4<a$ *ve* $b<|b|$ *iken* $f(x)=\frac{(2x-a)bx}{ax-1}\ge 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $[\frac{a}{2},\frac{1}{a})$ B) $[\frac{1}{a},\frac{a}{2})$ C) $[\frac{1}{a},\frac{a}{2}]$
D) $(-\infty,0]\cup[\frac{a}{2},\frac{1}{a})$ E) $(-\infty,0]\cup(\frac{1}{a},\frac{a}{2}]$

Çözüm: *a*'nın pozitif basit kesir ve *b*'nin de negatif olduğu gizli kapaklı verilmiş, hemen onu gördük, şimdi sorunun çözümüne geçiyoruz:

Kökler $\frac{a}{2}$, 0 ve $\frac{1}{a}$ olduğunu not edelim ama bunları küçükten büyüğe sıraya dizmek gerekecek. *a* pozitif basit kesir olduğundan (*a*'ya aklınızdan 1/2 değerini verebilirsiniz) küçükten büyüğe doğru sıra şudur:

$$(0)\quad(\frac{a}{2})\quad(\frac{1}{a})$$

Çarpanların başkatsayıları 2, *b* ve *a* olduğundan başkatsayılar çarpımı 2*ab*, yani negatiftir, o zaman en sağa "–" yazacağız:

$$+\ (0)\ -\ (\frac{a}{2})\ +\ (\frac{1}{a})\ -$$

Fonksiyonun sıfırdan büyükeşit değer aldığı yerler sorulduğundan çözüm aralığımız $(-\infty,0]\cup[\frac{a}{2},\frac{1}{a})$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $a<0<b$ *olmak üzere* $\frac{ax+b}{bx-a}\ge 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(\frac{a}{b},-\frac{b}{a}]$ B) $[\frac{a}{b},-\frac{b}{a})$ C) $[\frac{a}{b},-\frac{b}{a}]$
D) $(-\infty,0]\cup(\frac{a}{b},-\frac{b}{a}]$ E) $(0,+\infty]\cup(\frac{a}{b},-\frac{b}{a}]$

Çözüm: Payın kökü $-b/a$, paydanın kökü ise a/b'dir. Şimdi bu değerleri boy sırasına dizeceğiz. *a* ile *b* zıt işaretli olduğundan ilk kök pozitif, ikinci kök negatiftir. Dolayısıyla sıra şu şekildedir:

$$(\frac{a}{b})\quad(-\frac{b}{a})$$

Başkatsayıların işaretleri çarpımı negatif olduğundan

$$-\ (\frac{a}{b})\ +\ (-\frac{b}{a})\ -$$

şeklinde bir tablomuz olur. Buradan da çözüm aralığı $(\frac{a}{b},-\frac{b}{a}]$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$2x^2 - 8 < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B) $(-\infty, -2]$ C) $(-2, 2)$
D) $[2, +\infty)$ E) $[-2, 2]$

2.

$$(x-2)(x-3) > 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ B) $(2, 3)$ C) $[2, 3)$
D) $(-2, +\infty)$ E) $(-2, +\infty) \cup (3, +\infty)$

3.

$$\frac{x-3}{2x+4} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 3)$ B) $[-2, +\infty)$ C) $(-\infty, 3)$
D) $[-2, 3)$ E) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

4.

$$2x^2 - 3x + 1 \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$(2x-6)(x+3)(x-2) \ge 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -3] \cup [2, 3]$ B) $[-3, 2)$ C) $[-3, 2] \cup [3, +\infty)$
D) $[-3, 2) \cup (3, +\infty)$ E) $(-3, 2) \cup (3, +\infty)$

6.

$$\frac{(x-2)x}{3x-9} \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

7.

$$(x-3)(5-x) \ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.

$$(5-x)(x+2)x \ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) −2 B) 0 C) 1 D) 4 E) 5

9.

$$\frac{6-x}{x(3-x)} \le 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0) \cup (3, 6)$ B) $[0, 3] \cup [6, +\infty)$
C) $(-\infty, -3) \cup [0, 6]$ D) $(-\infty, 0) \cup (3, 6]$
E) $(-\infty, -3) \cup (0, 6]$

10.

$$(x-2)(2x^2 + 4x - 30) \le 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -5] \cup [2, 3]$ B) $(-5, 2) \cup (3, +\infty)$
C) $(-\infty, -5] \cup (2, 3)$ D) $[-5, 2) \cup [3, +\infty)$
E) $(-\infty, -5) \cup (2, 3)$

1.C 2.A 3.E 4.A 5.C 6.C 7.B 8.E 9.D 10.A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$(3x-2)^2-(x+4)^2<0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\frac{1}{2},2)$ B) $(-\frac{1}{2},3)$ C) $(\frac{1}{2},3)$ D) $(-3,\frac{1}{2})$ E) $(-1,\frac{1}{2})$

2.

$$x^2-9<0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-3)$ B) $(-3,0)$ C) $(0,3)$ D) $(-3,3)$ E) $(3,+\infty)$

3.

$$x^2-x\geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ B) $[0,1]$ C) $[1,+\infty)$ D) $[-1,1]$ E) $[0,+\infty)$

4.

$$x^2-x-2\leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane tam sayı değeri vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$\frac{3x-4}{6}-\frac{3+x}{3}<\frac{x+5}{9}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 39 B) 40 C) 41 D) 42 E) 43

6.

$$\frac{x-1}{x+5}<0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-1)$ B) $(-5,-1)$ C) $(-5,1)$ D) $(-1,5)$ E) $(1,5)$

7.

$$\frac{x-2}{x+3}\geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-3]$ B) $(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$ C) $(-3,2]$ D) $[-3,+\infty)$ E) $[2,+\infty)$

8.

$$(16-x^2)\cdot(x-1)<0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-4)$ B) $(\infty,-4)\cup(1,4)$ C) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ D) $(-4,1)\cup(4,+\infty)$ E) $(1,+\infty)$

9.

$$\frac{2x-6}{5x+10}\leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$$2^x\leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $(-\infty,0)$ C) $(0,+\infty)$ D) $(-2,0)$ E) $\varnothing$

1.B 2.D 3.A 4.D 5.A 6.C 7.B 8.D 9.E 10.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Eşitsizliklerde Temizlik

Şimdi olaylar biraz alengirli olmaya başlıyor. İfadenin içinde reel kökü olmayan ikinci dereceden çarpanlar verilirse, olmayan kökü nereye ve nasıl yazacağız sorusuna cevap arayacağız.

Pozitif bir ifadeyi bir başka pozitif ifadeyle çarparsanız cevap pozitif, negatif bir ifadeyle çarparsanız cevap negatif olur. Anlayacağınız ilk pozitif sayının çarpılan ikinci ifadeye etkisi olmuyor. O halde denklemde ne duruyor ki o, atalım! Bu hakkı nerden alıyoruz peki? Hemen yazayım:

Bir ikinci dereceden ifadenin daima pozitif olduğunu nereden anlarız? Grafiğinin karşımızda durduğunu düşünün, her noktası x ekseninin üst bölgesindedir değil mi? Yani ordinatları pozitif olan noktaların bulunduğu bölgelerde. Ve x eksenini de kesmiyordur, çünkü kesseydi daima pozitif demezdik ki. Peki bir fonksiyon grafiği, x eksenini hiç kesmeden, hep üst bölgesindeyse, bu durum onun diskriminantı negatif olduğundan değil midir? Peki diskriminantın negatif olması bize ne anlatmak isterdi? İfadenin reel kökünün olmadığını. O halde böyle ifadeler gördük mü hemen atacağız, zaten kökü de olmadığından ilerde karşımıza dikilmez ''Beni niye attın?'' diye.

İkinci dereceden bir ifadenin ne zaman daima pozitif olduğunu grafiğinden değil ama denkleminden anlama metodunu da geçen dersimizde öğrenmiştik.

Örneğin, eşitsizliğin sol tarafında

$$x^2+6x+10,$$
$$x^2-2x+3,$$
$$x^2+1,$$
$$(x-1)^2+2,$$
$$8$$

gibi ifadeleri gördünüz mü gözlerinin yaşına bakmayın, atın! Tabi, illa ikinci dereceden olacak diye bir şart yok, bizim aradığımız özellik ifadenin daima pozitif olmasıdır. Yani,

$$|x|+1,$$
$$|x-8|+3,$$
$$2^x,$$
$$\sqrt{x}+4,$$
$$\sqrt[4]{x-2}+1$$

gibi ifadeleri görürseniz de acımayın!



Şimdi söyleyeceğime çok dikkat edin. Bir ifade, daima pozitif değil ama hiç negatif olmayan bir ifadeyse de atın! Hiç negatif olmayan derken neyi kastettiğimizi anlamışsınızdır, bazen sıfır da olabilen

$$x^2,$$
$$(x-5)^4,$$
$$|x|,$$
$$|x-2|,$$
$$\sqrt{x},$$
$$\sqrt[6]{x-2}$$

gibi ifadelerden bahsediyorum. Yalnız bunları ilerde hatırlamak üzere atın, çünkü bu ifadelerin kökleri vardır, o kökler eşitsizliği sağlıyor da olabilir sağlamıyor da olabilir, bunları incelemek lazım. Attığınız ifadenin kökü, geri kalanların çözümünde var ama eşitsizliği sağlamıyorsa onu çözümden atın. Benzer şekilde attığınız ifadenin kökü, geri kalanların çözümünde yok ama eşitsizliği sağlıyorsa onu da çözüme ekleyin. Bir de burada gösterdiğimiz metotta, eğer sadeleşmesi gereken bir ifade varken sadeleştirmediyseniz de yandınız! Çünkü sadeleştirmeme durumunda yazmamanız gereken bir kökü diğer köklerin arasına bir yere sıkıştırdınız demektir, bizim metotta pay ve paydada kökleri aynı olan iki çarpan varsa derhal onları atarız! Şaşıracaksınız ama payda 2^x-8 payda da $x-3$ varsa yine bunları sadeleştirin! Derdimiz ifadenin aynı olması değil, köklerin aynı olması. Aşağıdaki örnekleri incelerseniz ne demek istediğimi daha rahat anlarsınız.

Örnek. *$x^2\cdot(x-5)<0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, 5)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $(0, 5)$
D) $(-\infty, 5)-\{0\}$ E) $(0, +\infty)-\{5\}$

Çözüm: x^2 negatif olamayacak bir ifade olduğundan atın gitsin. $x-5<0$ eşitsizliğinin çözümü $x<5$'dir. Bu noktada sakın gidip $(-\infty, 5)$ aralığının bulunduğu A şıkkını işaretlemeyin. Çünkü attığınız ifadenin kökünü daha incelemediniz. İnceleyelim: x^2'yi sıfır yapan değer 0'dır, peki bu 0 değeri verilen eşitsizliği sağlıyor mu? Hayır, o halde çözümden atmalıyız bunu. Cevap $(-\infty, 5)-\{0\}$ olmalıdır, bunu $(-\infty, 0)\cup(0, 5)$ diye de yazabilirsiniz.
Eğer soru $x^2\cdot(x-5)\le 0$ şeklinde sorulsaydı, ''0 zaten çözüm aralığında var'' deyip, bir şeye dokunmayacaktık.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 \cdot (x-5) \geq 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $[5,+\infty)$ B) $[0,+\infty)$ C) $[0,5]$
D) $(-\infty,5)-\{0\}$ E) $[5,\infty)\cup\{0\}$

Çözüm: x^2 negatif olamayacak bir ifade olduğundan atın gitsin. Geriye kalanın çözümü $x \geq 5$ olur. Ama dikkat edin, 0 da sağlar ama bu çözümde yok, o zaman derhal 0'ı da ekleyin çözüme.

$$\text{ÇA} : [5,\infty)\cup\{0\}.$$

Eğer soru $x^2 \cdot (x-5) > 0$ şeklinde sorulsaydı, "0 eşitsizliği sağlamıyor, zaten benim bulduğum çözümde de yok" deyip, etliye sütlüye karışmayacaktık.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{16-x^4}{-x^2+x-3} \leq 0$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Sonsuz

Çözüm: $16-x^4$ ifadesinin iki kare farkı olduğunu görelim ve ona göre açalım.

$$\frac{16-x^4}{-x^2+x-3} \leq 0$$

$$\frac{(4-x^2)(4+x^2)}{-(x^2-x+3)} \leq 0$$

$4+x^2$ ve x^2-x+3 ifadeleri her x reel sayısı için daima pozitif olacağından bunları atalım. Reel kökleri olmadığından ilerde dönüp incelememize gerek yok, ardınıza bakmadan atın. Geriye kalanları çözelim:

$$-(2-x)(2+x) \leq 0$$

$$(x-2)(x+2) \leq 0$$

olduğundan çözüm aralığı $[-2,2]$ olur.
Bu aralıkta $\{-2,-1,0,1,2\}$ olmak üzere sağlayan 5 tam sayı vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{(x^3+27)^{2008}}{x^2-4} \leq 0$ *eşitsizliğini gerçekleyen negatif tam sayıların toplamı kaçtır?*

A) -1 B) -3 C) -4 D) -6 E) -10

Çözüm: Paydaki ifadeyi ilerde kökünü hatırlamak üzere atalım. Paydayı da çarpanlarına ayıralım.

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(-2,2)$ olmalıdır. Ama $x=-3$ de eşitsizliği sağlarken bizim çözümümüzde çıkmadı, o zaman hemen ekleyelim. Son cevabımız $(-2,2)\cup\{-3\}$. Bu kümedeki negatif tam sayılar -1 ve -3 olduğundan cevap -4'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{(2^x-64)(3^x+5)}{x^2-16x+48} < 0$ *eşitsizliğini sağlayan kaç pozitif tam sayı vardır?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) Sonsuz

Çözüm: 3^x+5 daima pozitif olduğundan hemen onu atıp, paydayı da çarpanlarına ayıralım:

$$\frac{(2^x-64)}{(x-12)(x-4)} < 0$$

Kökler 4, 6, 12 olduğundan gerekli işlemler yapılırsa, çözüm aralığı $(-\infty,4)\cup(6,12)$ olarak bulunur. Şimdi pozitif tam sayıları sayalım: $\{1,2,3,7,8,9,10,11\}$ olmak üzere 8 tanedir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\dfrac{x^3+6x^2+12x+7}{\sqrt{3-x}} \geq 0$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Sonsuz

Çözüm: Payın katsayıları sırasıyla 1, 6, 12, 8 olsaydı, $(x+2)^3$ olmaz mıydı? O halde paya $(x+2)^3-1$ diyeceğiz. Payda da negatif olamayacak bir ifade olduğundan hemen kökünü hatırlamak üzere atacağız.

$$(x+2)^3-1 \geq 0$$

$$(x+2)^3-1^3 \geq 0$$

$$(x+1)(x^2+5x+7) \geq 0$$

x^2+5x+7 her reel x değeri için daima pozitif olduğundan atabiliriz, kalanı çözelim: $x+1 \geq 0$ olduğundan $x \geq -1$ çözüm kümesidir. Fakat paydanın tanımsız olmaması için $x \leq 3$ olmalıdır. Kesirli ifadenin paydası sıfır olamayacağından $x \neq 3$ olmalıdır.Demek ki $\{-1,0,1,2\}$ olmak üzere eşitsizliği sağlayan 4 tam sayı vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^{2008} < 1$ *için* $\dfrac{m^2-4m-12}{x^2-1} > 0$ *eşitsizliğini gerçekleyen m tam sayı değerlerinden en büyüğü ile en küçüğünün toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $x^{2008} < 1$ eşitsizliğinden x'in basit kesir olduğunu anlarız, yani $-1 < x < 1$. O halde ifadenin paydası daima negatif olur, paydayı "$-$" parantezine alarak daima pozitif olan $1-x^2$ sayısını atabiliriz. Paydada tek başına kalan "$-$" işaretini de atarak (aslında -1 sayısını) eşitsizliğin yönünü değiştirsek bir şey olmaz. O halde son durum da eşitsizlik şu hale gelir:

$$m^2-4m-12=(m-6)(m+2) < 0$$

olduğundan m için çözüm aralığı $(-2,6)$'dır.
O halde m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 5, en küçük tam sayı ise -1 olur. Toplamları 4'tür.

Doğru cevap: C.



Her şeyi bir tarafta topluyoruz. Bazen, gıcıklık parayla değil ya, eşitsizliği $f(x) < 0$ şeklinde değil de, örneğin $f(x) < 2$ şeklinde verir. Böyle durumlarda hemen canımızın istediği bir tanesini diğerinin yanına yollayıp, eşitsizliğin bir tarafını 0 yapma gayretine gireceğiz, $f(x) - 2 < 0$ gibi... Gerisi bildiğiniz gibi...

Örnek. $\frac{x}{2} \le \frac{2}{x}$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $[-2, 2)$ B) $[-2, 2]$ C) $(0, 2]$
D) $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$ E) $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$

Çözüm: Hemen sağdakini sola alalım.

$$\frac{x}{2} \le \frac{2}{x}$$
$$\frac{x}{2} - \frac{2}{x} \le 0$$
$$\frac{(x-2)(x+2)}{2 \cdot x} \le 0.$$

Gereken yapılırsa çözüm aralığının $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$ olduğu görülür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^3 - 4 \ge 4x - x^2$ *eşitsizliğini sağlayan kaç negatif tam sayı vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Hepsini bir tarafta toplayalım:

$$x^3 - 4 \ge 4x - x^2$$
$$x^3 + x^2 - 4x - 4 \ge 0$$
$$x^2 \cdot (x+1) - 4 \cdot (x+1) \ge 0$$
$$(x+1) \cdot (x^2 - 4) \ge 0$$
$$(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \ge 0$$

olduğundan çözüm kümesi $[-2, -1] \cup [2, \infty)$'dur. O halde $\{-2, -1\}$ olmak üzere 2 negatif tam sayı eşitsizliği sağlar.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Hangi aralıktaki sayıların kareleri kendilerinden küçüktür?*

A) $(0, 1)$ B) $(-1, 0)$ C) $(-1, 1)$ D) $(-\infty, -1)$ E) $(1, +\infty)$

Çözüm: Kareleri kendilerinden küçük olan sayılara x diyelim. O halde $x^2 < x$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin sorulduğunu anlıyoruz. Hemen eşitsizliğin bir tarafını sıfır yapalım:

$$x^2 < x$$
$$x^2 - x < 0$$
$$x \cdot (x-1) < 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(0, 1)$ aralığıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Hangi aralıktaki sayıların küpleri kendilerinden büyüktür?*

A) $(1, +\infty)$ B) $(0, +\infty)$ C) $(-1, +\infty)$
D) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ E) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Çözüm: Küpleri kendilerinden büyük olan sayılara x diyelim. O halde $x^3 > x$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin sorulduğunu anlıyoruz. Hemen eşitsizliğin bir tarafını sıfır yapalım:

$$x^3 > x$$
$$x^3 - x > 0$$
$$x \cdot (x^2 - 1) > 0$$
$$x \cdot (x-1) \cdot (x+1) > 0$$

olduğundan hemen kökleri yazıp, işaretleri yerleştirelim:

$$-\ (-1)\ +\ (0)\ -\ (1)\ +$$

diye çözüm aralığı $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ aralığıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2 - 3mx + m - 3 = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2*'dir.* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4$ *olduğuna göre m'nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, +\infty)$ B) $(-\infty, 12)$ C) $\mathbb{R} - \{12\}$
D) $(3, 12)$ E) $(0, 12)$

Çözüm: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3m}{m-3} > 4$ eşitsizliğini çözmemiz gerekecek.

$$\frac{3m}{m-3} - 4 > 0 \text{ yani } \frac{-m+12}{m-3} > 0$$

olduğundan $3 < m < 12$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x-2}} < 0$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Bir saniye bile durmadan paydaları eşitleyelim:

$$\frac{\frac{x^4 - 1}{x^2}}{\frac{x^3 - 1}{x-2}} = \frac{(x^4-1)(x-2)}{(x^3-1)x^2} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)x^2}$$

olduğundan $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$ ve x^2 değerlerini atalım, $x - 1$ değerlerini de sadeleştirelim. Geriye şu kalır:

$$(x+1)(x-2) < 0$$

O halde çözüm aralığı şimdilik $(-1, 2)$'dir. Hatırlamamız gerekenleri hatırlayalım: $\{1\}$ ve $\{0\}$ değerleri ifadeyi tanımsız yapıyor, o halde son cevap: $(-1, 2) - \{0, 1\}$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $a > 0 > b$ *iken* $\dfrac{x^2-a(b+1)x+a^2b}{-ax^2+bx^2} > 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?*

A) $[-ab, a]$ B) $[-a, -b]$ C) $[ab, a]$
D) $[ab, a] - \{0\}$ E) $[ab, -b] - \{0\}$

Çözüm: Pay ve paydaları çarpanlarına ayıralım da böyle korkunç görünmeye devam etmesin. Toplamları $-ab - a$, çarpımları a^2b olan sayıları arıyoruz. Ben sizin yerinize aradım buldum: $-ab$ ve $-a$ sayıları. O halde eşitsizliği tekrar yazalım:

$$\frac{(x-ab)(x-a)}{(b-a)x^2} > 0$$

Köklerin ab, a ve 0 olduğunu zannetmeyin. x^2'yi cehenneme yollamayı unutmayın ama ilerde kökünü incelemeyi de. Dolayısıyla kökler ab ve a'dır. $a > 0 > b$ verildiğinden bu değerlerin küçükten büyüğe sıralaması

$$(ab) \quad (a)$$

şeklinde olur. Diğer yandan $b - a$ sayısının da verilenlere göre negatif olduğu görülürse, çarpanların başkatsayılarının işaretleri çarpımı "–" olur.

$$- \quad (ab) \quad + \quad (a) \quad -$$

Sıfırdan büyük olan yerler sorulduğundan çözüm aralığı $[ab, a]$ bulunur. Ama 0 değeri ifadeyi tanımsız yaptığından atılmalıdır, son ve değişmez cevabımız: $[ab, a] - \{0\}$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{x}{x-\dfrac{2}{x}} - \dfrac{x+\dfrac{2}{x}}{x} < 0$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Yine paydaları eşitleyerek işe başlayalım:

$$\frac{x}{\dfrac{x^2-2}{x}} - \frac{\dfrac{x^2+2}{x}}{x} = \frac{x^2}{x^2-2} - \frac{x^2+2}{x^2} = \frac{x^4-(x^4-4)}{x^2(x^2-2)}$$

olduğundan, ifade $\dfrac{4}{x^2(x^2-2)} < 0$ haline dönüşür. x^2 ve 4'ü hiç negatif olamıyorlar diye atarız, geriye kalanı da çarpanlarına ayırırız.

$$\frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} < 0$$

olduğundan çözüm aralığı $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ olur. Ama 0 ifadeyi tanımsız yaptığından acımadan atılmalıdır, son cevap: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$. Şimdi bu aralıkta kaç tam sayı var, onu sayalım. $\{-1, 1\}$ olmak üzere 2 tanedir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sqrt[x-1]{3^{x^2+5x}} \geq 9^x$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı vardır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $x - 1$ ifadesi kök derecesi olduğundan x'in sadece 1'den büyük sayma sayısı olabileceğini unutmayalım.

$$3^{\frac{x^2+5x}{x-1}} \geq 3^{2x}$$

$$\frac{x^2+5x}{x-1} \geq 2x$$

$$\frac{x^2+5x}{x-1} - 2x \geq 0$$

$$\frac{x^2+5x-2x^2+2x}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+7x}{x-1} \geq 0$$

Bu noktada $x - 1$'in pozitif olduğunu bildiğimizden bunu atabiliriz. Geriye kalanı çözsek yeter.

$$-x^2 + 7x \geq 0$$
$$-x(x-7) \geq 0$$
$$x(x-7) \leq 0$$

olduğundan x için çözüm aralığı $[0, 7]$ çıkar. Düştüğümüz ilk notla birlikte düşünürsek x'in sadece $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ değerlerini alabileceğini görürüz.
Yani cevabımız: 6.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{7}{|x-3|-1} > \dfrac{1}{3}$ *eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaça eşittir?*

A) 35 B) 45 C) 47 D) 49 E) 120

Çözüm: Paydaları eşitlemektense payları eşitleyelim.

$$\frac{7}{|x-3|-1} > \frac{7}{21}$$

olacağından $|x-3|-1 < 21$ olmalıdır. Diğer yandan soldaki kesirli ifadenin paydası da pozitif olmalıdır. Yani $0 < |x-3|-1 < 21$ eşitsizlikleri geçerlidir.

$$1 < |x-3| < 22$$
$$-22 < x-3 < -1 \text{ veya } 1 < x-3 < 22$$
$$-19 < x < 2 \text{ veya } 4 < x < 25$$

olduğundan

$$-18 - 17 - \ldots - 1 + 0 + 1 + 5 + 6 + \ldots + 24 = 120$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-4} \le 0$$

eşitsizliğini doğrulayan kaç tam sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$\frac{x(x^2+3x-10)}{x+5} < 0$$

eşitsizliğinin tam sayılardaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$x^2 < x + 12$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

4.

Karesi 9'dan büyük olmayan kaç farklı tam sayı vardır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5.

$$10x - 2x^2 < 12$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) (2, 3) B) [2, 3) C) [2, 3]
D) $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$ E) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

6.

$$\frac{x}{4} \ge \frac{4}{x}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-4, 0) \cup (4, +\infty)$ B) $[-4, 4] - \{0\}$
C) $(-\infty, -4] \cup (0, 4]$ D) $[-4, 0) \cup [4, +\infty)$
E) $(-\infty, +\infty)$

7.

$$\frac{2}{x} > \frac{3}{x-2}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) −4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

8.

$$x^2 > 5x$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 5) B) [0, 5) C) $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$
D) $(-\infty, 0] \cup (5, +\infty)$ E) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

9.

$$x^2 \cdot (x-3) > 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 3]$ B) $(-\infty, 3)$ C) $(-\infty, +\infty)$
D) $(0, +\infty)$ E) $(3, +\infty)$

10.

$$x^2 \cdot (2x-4) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 2)$ B) $(2, +\infty)$ C) $(-\infty, 2) - \{0\}$
D) $[2, +\infty) - \{0\}$ E) $(-\infty, -2)$

1.B 2.A 3.C 4.A 5.E 6.D 7.C 8.C 9.E 10.C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$(x-2)^2\cdot(x-7)\geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[7,+\infty)\cup\{2\}$ B) $[7,+\infty)$ C) $(7,+\infty)\cup\{2\}$
D) $[7,+\infty)-\{2\}$ E) $(7,+\infty)$

2.

$$(4+x^2)\cdot x>0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ B) $(0,+\infty)$ C) $[0,+\infty)$
D) $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ E) $\varnothing$

3.

$$(5+x^2)\cdot(3-x)\leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$$\frac{(x-3)^{20}}{(x-4)^2}\leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) Yoktur B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.

$$\frac{x^2\cdot(x-2)^{10}}{(x-5)^2}\geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-\{5\}$ C) $(2,5)$
D) $[2,5)$ E) $[2,5)\cup\{0\}$

6.

$$|x-3|\cdot(5x-10)\geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[2,\infty)$ B) $[2,3)$ C) $(3,\infty)$ D) $[3,\infty)$ E) $(-\infty,2]$

7.

$$\frac{|x-12|\cdot(x-10)^2}{x-3}\leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,3]$ B) $(-\infty,3]\cup\{12\}$ C) $(-\infty,3)\cup\{10,12\}$
D) $(-\infty,3)\cup\{10\}$ E) $(-\infty,3]\cup\{10,12\}$

8.

$$\frac{x^2}{\sqrt{4+x}}\geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) 1

9.

$$x^2>x^3$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x<1$ B) $x<1$ ve $x\neq 0$ C) $x<-1$
D) $-1<x<1$ ve $x\neq 0$ E) $0<x<1$

10.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(x-x^2)\cdot(x^2-3x)<0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığının bir <u>alt aralığıdır</u>?

A) $1<x<3$ B) $1<x<2$ C) $x<3$
D) $-3<x<-1$ E) $0<x<3$

1.A 2.B 3.C 4.B 5.B 6.A 7.C 8.C 9.B 10.D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$x^3+1>x^2+x$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x>-1$ ve $x\neq 1$ B) $x>0$ C) $x<1$
D) $-1<x<1$ E) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

2.

$$x^2\cdot(3x-4)<x\cdot(2x-5)$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x>1$ B) $-1<x<0$ C) $x<0$
D) $0<x<3$ E) $3<x<5$

3.

$$\frac{x^2+2x-3}{x^{20}}\leq 0$$

eşitsizliğinin tam sayılardaki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$$\frac{x^6(3-x)}{(5-x)^5}\leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$x\cdot(x-2)>-4$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}-\{2\}$ C) $\{2\}$ D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R}-\{0\}$

6.

$$x+\frac{3}{x}<4$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$(x+3)^2\leq 5$$

eşitsizliğini sağlayan <u>en küçük tam sayı</u> değeri kaça eşittir?

A) -8 B) -5 C) -3 D) 0 E) 2

8.

$$x^2+4x+1\geq 2x^2-11$$

eşitsizliğini sağlayan tam sayılar toplamı kaça eşittir?

A) 21 B) 18 C) 15 D) 11 E) 9

9.

$$\frac{6+4x}{x^2}>2$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1,3)$ B) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ C) $(-1,3)-\{0\}$
D) $[-1,3]-\{0\}$ E) $(-\infty,-1]\cup\{0\}$

10.

$$\frac{x^2+x-11}{(x-2)^2}<1$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x>3$ B) $x<3$ C) $x<2$
D) $-4<x<3$ ve $x\neq 2$ E) $-4<x<2$

1.A 2.C 3.C 4.C 5.D 6.B 7.B 8.B 9.C 10.D

CEVAPLI TEST 4

1.

$$\frac{(3-x)(x^2-2x+3)}{x^2(x^2-4)} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2 < x < 0$ B) $x > 3$ C) $0 < x < 3$
D) $x < -2$ E) $x < -2, 2 < x < 3$

2.

$$\frac{(x+2)^2}{x^2-6x+5} \le 0$$

eşitsizliğini doğrulayan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

3.

$$\frac{x-2}{x+2} \ge 1$$

eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?

A) $x > -2$ B) $x > 2$ C) $x < -2$ D) $x < 2$ E) $-2 < x < 2$

4.

$$\frac{(-x^2-9)(2x-6)}{x+2} \ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5.

$$\frac{(x-1)^5(x+1)^5}{x^8(x-2)^4} \le 0$$

eşitsizliğini doğrulayan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) -2 B) -3 C) 0 D) 2 E) 3

6.

$$\frac{2}{x} > \frac{1}{4}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $x < 8$ B) $x > 8$ C) $0 < x < 8$
D) $x < 0$ veya $x > 8$ E) $-8 < x < 0$

7.

$$\frac{16}{x} \le x$$

eşitsizliğinin sağlandığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 4]$ B) $(-\infty, -4]$ C) $[-4, 4)$
D) $(-\infty, 0)$ E) $[-4, 0) \cup [4, \infty)$

8.

$$\frac{|x^2-2|-2}{-x^2+x-6} \ge 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $[-2, 2]$ B) $(-2, 2)$ C) $[-2, 3)$
D) $(-2, 3]$ E) $[-2, 2] - \{0\}$

9.

$$\sqrt{4-x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?

A) $[-1, 1]$ B) $(-1, 1)$ C) $[-1, 2)$
D) $(-1, 1]$ E) $[-1, 1] - \{0\}$

10.

$$\frac{x^2-2(m-1)x+m^2-2m+8}{x^2-4} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1.E 2.B 3.C 4.B 5.C 6.C 7.E 8.A 9.B 10.D

CEVAPLI TEST 5

1.

$$-x^2+2x-5<|x^2-4|<x+2$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $[1,3]$ B) $(1,3]$ C) $[1,3)$
D) $(1,3)$ E) $[1,3]-\{0\}$

2.

$$\frac{x-1}{2}<\frac{1}{x}$$

eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?

A) $(-\infty,-1)\cup(0,2)$ B) $(-\infty,-2)\cup(1,3)$
C) $(1,2)\cup(4,7)$ D) $\mathbb{R}^-\cup(1,2)$
E) $(-\infty,2)$

3.

$$\frac{x+1}{3}\geq\frac{4}{x}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç doğal sayı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$$|x^2+x-5|>2x+1$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $(1,3)$ B) $(-1,3)$ C) $(-3,1)$
D) $x>1$ veya $x>3$ E) $(-3,3)$

5.

$$|x-2|-|x+1|-x+2<0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $x>1$ B) $x\leq 1$ C) $-1<x\leq 3$
D) $-1<x<3$ E) $x\geq 1$

6.

$$x+2>\sqrt{x^2-16}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x>4$ B) $x>-4$ C) $x\leq 4$
D) $x\leq -4$ E) $x\geq 4$

7.

$$\frac{\sqrt{x+3}\cdot(x^2-16)}{|-x^2+x+2|}<0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

$$\frac{x(7-x)^2}{(4-x)(x^2-3x+3)}\geq 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

9.

$$-\frac{2x-1}{x-3}\leq\frac{x+2}{x+1}$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $(-1,3)$ B) $[-1,3]$ C) $(1,2)$
D) $(2,4)$ E) $(-1,3]$

10.

$$\frac{x^2-x-12}{1-x^3}\geq 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1.D 2.A 3.A 4.D 5.A 6.E 7.C 8.E 9.A 10.E

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\frac{-x^2-x-6}{x^2+2x+4}\le 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x<2$ B) $x<3$ C) $-\infty<x<\infty$
D) $-1<x<0$ E) $x<-3$

2.

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2(1-x)}\ge 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x<1, x\neq 0$ B) $-1<x<0$ C) $1<x<2$
D) $x>1 \cup x<0$ E) $x\le 0 \cup x>1$

3.

$$\frac{\left(1-x^2\right)^4}{x+3}\le 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-3)\cup\{-1,1\}$ B) $(-1,1)$ C) $(1,\infty)$
D) $(1,3)\cup\{0\}$ E) $(-3,-1)$

4.
Karesi, 3 katından küçük olan kaç tane doğal sayı vardır?

A) Yoktur B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
Küpü, kendisinden büyük reel sayıları içeren en dar aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-1)$ B) $[-1,0)$ C) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$
D) $(-1,0)\cup(1,2)$ E) $(-1,1)$

6.

$$-x^2+4x>-5$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,1)$ B) $(1,5)$ C) $(0,5)$
D) $(5,9)$ E) $(5,+\infty)$

7.

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-8x+15}\le 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 7 D) 9 E) 12

8.

$$\frac{2^x+1}{x^4-x^2}<0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-1)$ B) $(-1,0)$ C) $(1,0)$
D) $(-1,0)\cup(0,1)$ E) $(-1,1)$

9.

$$0{,}25^{x^2}<(0{,}5)^{-2x-8}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $(-\infty,-2)$ C) $\{2\}$ D) $(-2,2)$ E) $\varnothing$

10.

$$\frac{2}{x}\le\frac{x}{8}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-4)$ B) $(-\infty,4]$ C) $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$
D) $[-4,0)\cup[4,+\infty)$ E) $[0,+\infty)$

1.C 2.A 3.A 4.C 5.C 6.B 7.B 8.D 9.E 10.D

CEVAPLI TEST 7

1.

$$(-x^2-4).(2x-6).(x+2) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.

$$(x-4)^2(x+5)(6-x) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır? (ÖSS-1995)

A) 1 B) 0 C) –1 D) –2 E) –3

3.

$$(x-1)^2(x^2-6x) < 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 20 E) 21

4.

$$(x-1)^2(x^2+4x) \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) –8 B) –9 C) –10 D) –11 E) –12

5.

Bir tüccar aldığı ürünü maliyet fiyatının karesinin 6 lira eksiğine satarak zarar etmektedir.

Buna göre tüccar, bu ürünü kaç liraya mal etmiş olabilir?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

6.

$$\frac{|x-2|\cdot(x-5)}{(3-x)} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane tam sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\frac{\left(\sqrt{x^4+8}\right)\cdot(x-1)}{x^2-4x} < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,0)$ B) $(0,1)$ C) $(0,4)$
D) $(-\infty,0)\cup(1,4)$ E) $(1,4)$

8.

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)\cdot(3-x)}{x-x^3} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlamayan kaç tane tam sayı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

9.

$$\frac{x+2}{x-5} \leq 0$$
$$x^2-9 > 0$$

eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-2]$ B) $[-2,3)$ C) $[-2,5)$
D) $(3,5]$ E) $[5,+\infty)$

10.

$$\frac{7x^2+3x+17}{x^2+x(-m-5)+\frac{5m}{2}+8} > 0$$

eşitsizliği her x reel sayısı için doğru olduğuna göre m'nin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$ B) $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$
C) $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ D) $-1 < m < 0$
E) $-1 < m < 1$

1.B 2.A 3.A 4.B 5.A 6.D 7.D 8.B 9.D 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Eşitsizlik Sistemleri

1'den çok eşitsizliğin bir arada olmasına eşitsizlik sistemi diyoruz. Eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı da sistemde bulunan tüm eşitsizliklerin hepsini birden sağlayan aralıktır. Bu da sistemdeki tüm eşitsizliklerin çözüm aralıklarının kesişimidir.

Örnek. $\left.\begin{matrix} x^2-x-12\geq 0 \\ x^2-2x-15<0 \end{matrix}\right\}$ *eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde kaç tam sayı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Her iki eşitsizliği ayrı ayrı çözecek, daha sonra çözümlerin kesişimini alacağız. Geriye sadece içindeki tam sayıları saymak kalacak.

$$x^2-x-12\geq 0$$
$$(x-4)(x+3)\geq 0$$

olduğundan ilk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-\infty, -3]\cup[4, \infty)$'dur.

Sıra ikinci de:

$$x^2-2x-15<0$$
$$(x-5)(x+3)<0$$

olduğundan ikinci eşitsizliğin çözüm aralığı da $(-3, 5)$ aralığıdır. Her iki eşitsizliği de aşağıdaki gibi sayı doğrusu üzerinde kesiştirirsek,



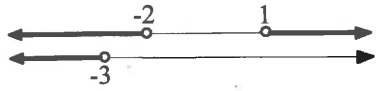
her ikisinde de bulunan aralığın, yani kesişimin $[4, 5)$ aralığı olduğu görülür. O halde eşitsizlik sistemini bir tane tam sayı sağlar, o da $\{4\}$'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left.\begin{matrix} \dfrac{x+2}{x-1}>0 \\ \dfrac{1}{x+3}\leq 0 \end{matrix}\right\}$ *eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-\infty, -2)$ C) $(-\infty, 1)$
D) $(-\infty, 3]$ E) $(-\infty, -2]$

Çözüm: İlk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-\infty, -2)\cup(1, \infty)$ olup, ikincisinin ise $(-\infty, -3)$'tür. Hemen her iki aralığı da çizip kesişimini alalım:



O halde cevabımız $(-\infty, -3)$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $-1<\dfrac{x^2-5}{x-1}<2$ *eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-3, -1)\cup(2, 3)$ B) $(-3, 1)\cup(2, \infty)$
C) $(-\infty, -1)\cup(1, 3)$ D) $(-3, 1)\cup(2, 3)$
E) $(-\infty, -1)\cup(2, 3)$

Çözüm: Bu da aslında gizli kapaklı bir eşitsizlik sistemidir. Çünkü 1 tane değil 2 tane eşitsizliğin birden sağlanması gerekiyor. Sakın her tarafı $x-1$ ile çarpalım demeyin de gerisi sorun değil.

$$\frac{x^2-5}{x-1}>-1 \text{ ve } \frac{x^2-5}{x-1}<2$$

eşitsizliklerini çözüp, kesişimlerini alacağız, bitecek.

$$\frac{x^2-5}{x-1}+1>0$$
$$\frac{x^2+x-6}{x-1}>0$$
$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-1}>0$$

olduğundan ilk eşitsizliğin çözüm aralığı $(-3, 1)\cup(2, \infty)$ dur. Şimdi ikincisine bakalım.

$$\frac{x^2-5}{x-1}-2<0$$
$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}<0$$
$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-1}<0$$

olduğundan ikinci eşitliğin çözüm aralığı da

$$(-\infty, -1)\cup(1, 3)\text{'tür.}$$

Her iki aralığın kesişimi olan $(-3, -1)\cup(2, 3)$ aralığı da cevap olur o zaman.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\left.\begin{matrix} x^2-9\le 0 \\ x^2-4>0 \end{matrix}\right\}$ *eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde kaç tam sayı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İlk eşitsizliğin çözüm aralığı [–3, 3], ikincisinin de $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$ olduğunu hemen bulabiliriz. Bu iki aralığın kesişimi $[-3, -2)\cup(2, 3]$ olduğundan çözüm kümesindeki tam sayılar –3 ve 3'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(m^2+1)x^2+mx+1>0$ *eşitsizliğini daima doğru yapan reel m değerleri için en geniş küme aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\mathbb{N}$ B) $\mathbb{N}^+$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Bir fonksiyonun daima pozitif olma şartını vermiştik. Başkatsayısı pozitif olup, diskriminantı negatif olacaktı. Yani iki eşitsizlik birden sağlanacaktı. Bu da bir eşitsizlik sistemidir işte. Bu fonksiyonda zaten her reel m değeri için başkatsayı olan m^2+1 değeri hep pozitif olacağından sadece diskriminantı negatif tutsak yeter.

$$\Delta = m^2-4\cdot(m^2+1)\cdot 1<0$$
$$m^2-4m^2-4<0$$
$$-3m^2-4<0$$
$$3m^2+4>0$$

Bu eşitsizlik her m değeri için sağlanacağından çözüm kümemiz tüm reel sayılar yani $\mathbb{R}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $mx^2+(2m-2)x+m-1<0$ *eşitsizliğini daima doğru yapan reel m değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{N}$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: İster eşitsizliğin her iki tarafını "–" ile çarpıp, eşitsizliğin de yönünü değiştirip bir önceki örnekteki gibi çözüm yaparız, istersek de bir fonksiyonun daima negatif olması için hangi şartların sağlanması gerektiğini düşünürüz. İkincisinden yapalım: Bir fonksiyonun daima negatif olması, yani grafiğinin x ekseninin alt tarafında kalması, hem başkatsayısının hem de diskriminantının negatif olmasıyla mümkündür. İkisini birlikte düşünüp kesiştireceğiz. İlk eşitsizliğimiz $m<0$. Diğerine bakalım:

$$\Delta = (2m-2)^2-4\cdot m\cdot(m-1)<0$$
$$4m^2-8m+4-4m^2+4m<0$$
$$-4m+4<0$$
$$-4m<-4$$
$$m>1$$

$m<0$ ve $m>1$ eşitsizliklerinin kesişimi $\varnothing$ olduğundan bizim cevabımız da $\varnothing$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $4^{x^2-2x}-7\cdot 2^{x^2-2x}-8<0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (–1, 2) B) (–1, 3) C) (–1, 4) D) (–2, 3) E) (–2, 5)

Çözüm: 4^{x^2-2x} sayısının 2^{x^2-2x} sayısının karesi olduğuna dikkat ediniz. Hemen küçük olanına t diyelim:

$$t^2-7t-8<0$$
$$(t-8)(t+1)<0$$

diye $-1<t<8$ olduğunu buluruz. t yerine değerini yazarsak,

$$-1<2^{x^2-2x}<8$$

Bu da bir eşitsizlik sistemidir. Dikkat ederseniz iki eşitsizlik var. İkisini de çözmek gerekir. 2'nin hiçbir kuvveti negatif olamayacağından eşitsizliklerin sadece sağdakini incelesek yeter.

$$2^{x^2-2x}<8$$
$$2^{x^2-2x}<2^3$$
$$x^2-2x<3$$
$$x^2-2x-3<0$$
$$(x-3)(x+1)<0$$

olduğundan x için çözüm aralığı (–1, 3) bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Kaç farklı x tam sayısı için* $\frac{3x+2}{2x-4}$ *kesri basit kesir olur?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Kesrin basit kesir olması için $-1<\frac{3x+2}{2x-4}<1$ eşitsizliklerinin sağlanması gerekir. Önce sol yanı çözelim:

$$-1<\frac{3x+2}{2x-4}$$
$$0<\frac{3x+2}{2x-4}+1$$
$$0<\frac{5x-2}{2x-4}$$

eşitsizliğinden x'in $(-\infty, \frac{2}{5})\cup(2, +\infty)$ aralığına ait olması gerektiğini buluruz. Şimdi de sağ yanı çözelim:

$$\frac{3x+2}{2x-4}<1$$
$$\frac{3x+2}{2x-4}-1<0$$
$$\frac{x+6}{2x-4}<0$$

eşitsizliğinden x'in (–6, 2) aralığına ait olması gerekir. Bulunan iki sonucun kesişimi alınırsa $x\in(-6, 2/5)$ olduğu çıkar. Buna göre x; –5, –4, –3, –2, –1, 0 olmak üzere 6 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$x\cdot(x-2)>0$$
$$(2x-6)\cdot(x-1)<0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 3) B) (0, 3) C) (1, 2) D) (2, 3) E) (0, 2)

2.

$$(x-5)\cdot x\le 0$$
$$(3x-9)\cdot(x-4)>0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde kaç tane tam sayı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.

$$x^2-9<0$$
$$x^2-4\le 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) [−2, 2] B) [−3, 3] C) [−2, 3)
D) [−2, 3] E) [−3, 2)

4.

$$\frac{4}{x}>0$$
$$x^2-9\le 0$$

eşitsizlik sistemini sağlayan en büyük tam sayı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5.

$$x^2\cdot(5-x)\ge 0$$
$$(x+2)^2>0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−∞, 5] B) (−5, 2) C) (−∞, 5] − {−2}
D) (5, +∞) E) [5, +∞)

6.

$$\frac{3-x}{2x-4}\ge 0$$
$$(3x-6)\cdot(x-8)<0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan en büyük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.

$$|x-2|\cdot(5x+10)\ge 0$$
$$7x-14\le 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) [−2, ∞) B) (−2, 2] C) (−∞, 2]
D) (−2, 2) E) [−2, 2]

8.

$$-7<\frac{x^2-18}{x}<3$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−9, 0) ∪ (2, +∞) B) (0, 6) ∪ (−9, −3)
C) (−9, −3) ∪ (2, 6) D) [−9, 0) ∪ [2, +∞)
E) [−9, −3) ∪ [2, 6]

9.

$$x^2+10<7x$$
$$2x^2-12x>-10$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 1) B) [2, 1) C) (2, +∞) D) (2, 5) E) ∅

10.

$$x^2>-2x-1$$
$$x^2-4x<-3$$

eşitsizliğini sağlayan tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1.D 2.C 3.A 4.B 5.C 6.B 7.E 8.C 9.E 10.B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\left.\begin{array}{l} -x^2+x>0 \\ x^2-1<0 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 0)$ B) $(-1, 0)$ C) $(0, 2)$
D) $(0, 1)$ E) $(-1, 1)$

2.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x-12>0 \\ x^2-2x-24<0 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde kaç tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+3x<4 \\ \dfrac{1}{x}<1 \end{array}\right\}$$

eşitsizliklerini gerçekleyen bütün x değerleri hangi aralıktadır?

A) $x>1$ B) $x<-4$ C) $-4<x<0$
D) $-4<x<1$ E) $0<x<1$

4.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+2>0 \\ x^2-16\le 0 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin reel sayılardaki çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-2, 4)$ B) $(-4, 4)$ C) $[-4, 4]$
D) $(-\infty, \infty)$ E) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

5.

$$4^{x^2-2x}-255\cdot 2^{x^2-2x}-16^2<0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 2)$ B) $(-2, 4)$ C) $(-4, 4)$
D) $(-4, 2)$ E) $(-2, 2)$

6.

Reel sayılarda

$$(m^2+2)x^2+mx+1>0$$

eşitsizliğini daima doğru yapan m'ler için en geniş küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{N}^+$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{R}$

7.

Reel sayılarda

$$mx^2+(2m-2)x<1-m$$

eşitsizliğini daima doğru yapan m'lerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{N}$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{R}$

8.

Hangi aralıktaki sayıların karesi 1'den küçük olup küpü –1'den büyüktür?

A) $(-1, 2)$ B) $(-2, 1)$ C) $(-1, 1)$
D) $(-\infty, 1)$ E) $(1, +\infty)$

9.

Hangi aralıktaki sayıların karesi kendisinden büyük olup küpü kendisinin 2 katından küçüktür?

A) $(-1, 2)$ B) $(-2, 1)$ C) $(-1, 1)$
D) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ E) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

10.

$$A=\{x : x^2-4\le 0, x\in\mathbb{R}\}$$
$$B=\{x : x^2+3x-10>0, x\in\mathbb{R}\}$$

olduğuna göre $(A\cup B)'$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{x : x^2+7x+10\le 0, x\ne -5, x\in\mathbb{R}\}$
B) $\{x : x^2+7x+10\le 0, x\ne -2, x\in\mathbb{R}\}$
C) $\{x : x^2+7x+12\ge 0, x\ne -4, x\in\mathbb{R}\}$
D) $\{x : x^2+7x+12\ge 0, x\ne -3, x\in\mathbb{R}\}$
E) $\{x : x^2+8x+12\le 0, x\ne -4, x\in\mathbb{R}\}$

1.D 2.A 3.C 4.C 5.B 6.E 7.A 8.C 9.E 10.B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Köklerin Bir Reel Sayıyla Kıyaslanması

Bu konu aslında ikinci dereceden denklemler başlıklı ders notuna yakışır ama eşitsizlik çözme bilgisi gerektirdiği için, o derste veremedik. Şu an bunları anlamaya ve kendi kendimize çözmeye hazırız.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri her zamanki gibi x_1 ve x_2 olsun. x_1 ve x_2 sayılarının bir α sayısına göre durumlarını inceleyeceğiz.

Genel olarak şu sorulara cevap arayacağız:

- ✓ $x_1 < x_2 < \alpha$ ise yani her iki kök de α'dan küçükse ne yapmamız gerekir?
- ✓ $\alpha < x_1 < x_2$ ise yani her iki kök de α'dan büyükse ne yapmamız gerekir?
- ✓ $x_1 < \alpha < x_2$ ise yani α, köklerin birinden küçük ama diğerinden büyükse ne yapmamız gerekir?

$\alpha = 0$ durumu. En kolay olan şık bu. Birinin öğretmesine gerek bile yok. Evinin yolunu bulabilen herkes, kendi kendine ne yapması gerektiğini bulabilir.

Kökleri x_1 ve x_2, diskriminantı Δ olan $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için,

$x_1 < x_2 < 0$ ise. Bu eşitsizliklerinin anlatmak istediği, her iki kök de negatif olduğundan kökler toplamının negatif, yine aynı sebepten kökler çarpımının pozitif olduğudur:

$$\Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

$0 < x_1 < x_2$ ise. Burada da her iki kök de pozitif olduğundan hem kökler toplamı hem de kökler çarpımı pozitif olmalıdır.

$$\Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0 \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

$x_1 < 0 < x_2$ ise. Köklerin biri pozitif biri de negatif olduğundan çıkarılabilecek tek sonuç kökler çarpımın negatif olduğudur. Büyüklükleri net olarak bilinmediğinden kökler toplamı için bir şey söylenemez.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$



Eğer köklerin biri pozitif biri negatifse $\Delta > 0$ eşitsizliğini incelemeye gerek yoktur. Çünkü $c/a < 0$ eşitsizliğine göre a ile c zıt işaretliği diye zaten $b^2 - 4ac > 0$ olur.

Örnek [2006 ÖSS].

$$(1-m)x^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$$

denkleminin biri pozitif, diğeri negatif iki gerçel kökü varsa m'nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,\infty)$ B) $(-2, 2)$ C) $(-1, 0)\cup(1, \infty)$
D) $(-2, 1)\cup(2, \infty)$ E) $(-2, 0)\cup(1, \infty)$

Çözüm: Köklerin biri pozitif biri negatif olduğuna göre, kökler çarpımı negatif olmalıdır.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2-4}{1-m} = \frac{(m-2)(m+2)}{1-m} < 0$$

eşitsizliğini çözmemiz gerekiyor.

$$+ \quad (-2) \quad - \quad (1) \quad + \quad (2) \quad -$$

olduğundan çözüm aralığı $(-2, 1)\cup(2, \infty)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

$x_1 < 0 < x_2$ iken kökler toplamı hakkında da bir şeyler söyleyebilmek için köklerin büyüklüğünü gösteren şıklar da ekleyelim:

$x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < x_2$ ise. Önce durumu yorumlayalım. Sonra yorumumuzun doğruluğunu matematik olarak da kanıtlayalım:

Negatif olan x_1 sayısının mutlak değerinin bile x_2'den küçük olması, x_2'nin işaretsiz değerinin x_1'in işaretsiz değerinden de büyük olduğunu anlatır. O halde bu iki sayının toplamı, pozitif olan rakamca daha büyük olduğundan dolayı pozitiftir. Doğru mu bir bakalım:

$|x_1| < x_2$ ise $|x_1| - x_2 < 0$'dır. $x_1 < 0$ diye $|x_1| = -x_1$ olur.
O halde $|x_1| - x_2 = -x_1 - x_2 < 0$ yani

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$$

demektir. Doğruymuş.

Örnek [1995 ÖYS]. $(p+6)x^2 - 17(p+1)x + 5(p-2) = 0$ *denkleminin gerçel kökleri* x_1 *ve* x_2*'dir.*

$$x_1 < 0 < x_2 \text{ ve } |x_1| > x_2$$

olması için p'nin alabileceği değerler aşağıdaki aralıklardan hangisidir?

A) (–6, –1) B) (–1, 3) C) (0, 3) D) (–1, 2) E) (–∞, –6)

Çözüm: $x_1 < 0 < x_2$ eşitsizlikleri kökler çarpımının negatif olduğunu anlatır. Ayrıca yine bu eşitsizliklere göre, $x_1 < 0$ olduğundan

$$|x_1| > x_2$$
$$-x_1 > x_2$$
$$x_1 + x_2 < 0$$

yani kökler toplamının da negatif olduğunu anlarız. Şimdi bu eşitsizlikleri çözelim.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5(p-2)}{p+6} < 0$$

eşitsizliğinden $-6 < p < 2$,

$$x_1 + x_2 = \frac{17(p+1)}{p+6} < 0$$

eşitsizliğinden de $-6 < p < -1$ bulunur. İkisinin birden sağlanması gerektiğinden çözüm aralığı (–6, –1) olmalıdır.

Doğru cevap: A.

$x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ ise. Bu sefer negatif olanın mutlak değeri, yani işaretsiz değeri, pozitif olandan büyük, o halde bunlar toplanırsa negatifin rakamı daha büyük olduğundan, ağır basacak ve toplam negatif olacaktır.

İşlemlerle de gösterelim:

$x_2 < |x_1|$ ise $x_2 - |x_1| < 0$'dır. $x_1 < 0$ diye $|x_1| = -x_1$ olur. O halde $x_2 - |x_1| = x_2 - (-x_1) < 0$ yani

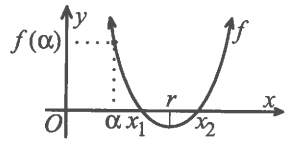
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$$

demektir.

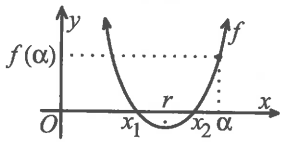
Buraya kadar olanlar dediğimiz gibi kolaydı zaten. Şimdi α'nın 0'dan farklı olduğu durumlara göz atacağız. Bunlar küçük de olsa maharet istiyor. 2012 senesi itibariyle bu konu lise müfredatının dışındadır, okuyacak/çalışacak olanların bilgisine...

$\alpha \neq 0$ durumu. α = 0 sayı doğrusu üzerinde kritik bir nokta olduğundan yorum yapmak kolay oluyordu. Sağı pozitif, solu negatif diyorduk bitiyordu. Ama örneğin α = 2 olsa, α'nın solundaki iki sayının ne toplamı ne de çarpımı hakkında kesin hükümler veremeyiz. Her iki sayı da pozitif olabileceği gibi, her ikisi negatif de olabilir hatta biri pozitif biri negatif de.

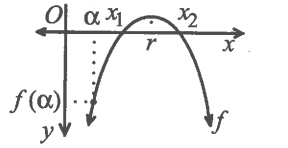
$\alpha < x_1 < x_2$ veya $x_1 < x_2 < \alpha$ ise. Olası durumları düşünelim. Bir kere α sayısı her iki kökten de büyük veya küçük verilmiş. Demek ki köklerin varlığı kesin. Demek ki fonksiyonun grafiği x eksenini iki yerde kesiyor. Bu durum iki şekilde mümkün: Ya kollar yukarı doğru, ya da aşağı doğru. Kollar yukarı doğruyken $a > 0$ ve $f(\alpha) > 0$ olur. Kollar aşağı doğruyken de $a < 0$ ve $f(\alpha) < 0$ olur. Demek ki her iki durumda da $a f(\alpha) > 0$ olmalıdır.



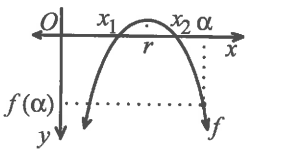
$\alpha < x_1 < x_2$ durumu ($a>0$)



$x_1 < x_2 < \alpha$ durumu ($a>0$)



$\alpha < x_1 < x_2$ durumu ($a<0$)



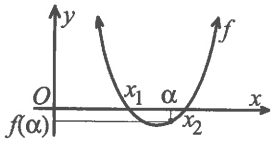
$x_1 < x_2 < \alpha$ durumu ($a<0$)

Peki o zaman, $\alpha < x_1 < x_2$ ve $x_1 < x_2 < \alpha$ durumlarının ikisinde de $a \cdot f(\alpha) > 0$ ise bu durumları birbirinden nasıl ayırt edeceğiz? Dikkat ederseniz, $\alpha < x_1 < x_2$ durumunda (soldaki iki şekil), α sayısı parabolün tepe noktasının apsisinden (r diyelim) yani kökler toplamının yarısından küçüktür. $x_1 < x_2 < \alpha$ durumunda ise (sağdaki iki şekil), α sayısı kökler toplamının yarısından yani r'den büyüktür. Toparlayalım:

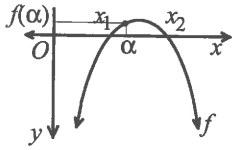
$$\alpha < x_1 < x_2 \text{ ise } \Delta > 0,\ a f(\alpha) > 0 \text{ ve } \alpha < -\frac{b}{2a},$$

$$x_1 < x_2 < \alpha \text{ ise } \Delta > 0,\ a f(\alpha) > 0 \text{ ve } -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

$x_1 < \alpha < x_2$ ise. Olası durumlar yine iki tane. Ya kollar yukarı doğrudur ya da aşağı doğru. Yukarı doğru olursa $a > 0$ ama $f(\alpha) < 0$, kollar aşağı doğru olursa da $a < 0$ ama $f(\alpha) > 0$. Anlayacağınız her iki durumda da a ile $f(\alpha)$ değerleri zıt işaretlidir.



$x_1 < \alpha < x_2$ durumu ($a>0$)



$x_1 < \alpha < x_2$ durumu ($a<0$)

O halde $x_1 < \alpha < x_2$ ise $\Delta > 0$ ve $a \cdot f(\alpha) < 0$'dır.



Köklerin α sayısına göre konumunu incelemeyi öğrendikten sonra, bir başka sayıya göre de incelemek artık çok kolay oldu. İki farklı sayıyla kıyaslamalarda ne yapmamız gerektiğini aşağıda listeledik.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$(p-2)x^2+(2p-4)x+2=0$$

denklemi veriliyor.

Hangi p tam sayısı için bu denklemin reel kökü yoktur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\varnothing$

2.

$$mx^2+2\sqrt{2}x-1=0$$

denkleminin çözüm kümesinin boşküme olması için m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty,-5)$ B) $(-\infty,-3)$ C) $(-\infty,-2)$ D) $(-\infty,-1)$ E) $(-\infty,0)$

3.

$$3x^2+(5m+1)x+2m^2+m=0$$

denkleminin iki kat kökü olması için m kaç olmalıdır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4.

$$x^2-2mx+m+2=0$$

denkleminin bir tamkare olması için m'nin alabileceği değerler nelerdir?

A) $\{2,-2\}$ B) $\{2,-1\}$ C) $\{1,-1\}$ D) $\{3,-1\}$ E) $\{0,-1\}$

5.

$$px^2-5x+2p=(4p-1)x-17$$

denkleminin iki kökü çakışıksa p'nin alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

6.

$$x^2+(3-m)x+2m-1=0$$

denkleminin kökleri negatifse m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(\frac{1}{2},1)$ B) $(\frac{3}{2},1)$ C) $(\frac{1}{2},2)$ D) $(-\frac{1}{2},-1)$ E) $(-\frac{1}{2},1)$

7.

$$(m-2)x^2-2mx+m+5=0$$

denkleminin iki farklı pozitif kökünün olabilmesi için m'nin alabileceği değerler hangi aralıktadır?

A) $(-\infty,-5)\cup(2,\frac{10}{3})$ B) $(-\infty,-3)\cup(1,\frac{10}{3})$

C) $(-\infty,-5)\cup(1,\frac{10}{3})$ D) $(-\infty,-5)\cup(3,\frac{10}{3})$

E) $(-\infty,-3)\cup(0,\frac{10}{3})$

8.

$$(m-2)x^2-5x+6=0$$

denkleminin kökleri birbirinden farklı olup aynı işaretli olduklarına göre m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty,2)$ B) $(2,+\infty)$ C) $(-\infty,2]$ D) $(2,\frac{73}{24}]$ E) $(2,\frac{73}{24})$

9.

$$m^2x^2-2x+m-4=0$$

denkleminin kökleri zıt işaretliyse m aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -2

10.

$$x^2+mx+2m+5=0$$

denkleminin kökleri ters işaretliyse, m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

11.

$$(p+3)x^2-3px+p-1=0$$

denkleminin zıt işaretli iki reel kökü varsa p hangi aralıktadır?

A) $(1,3)$ B) $(-3,-1)$ C) $(-3,1)$ D) $(0,3)$ E) $(-3,-2)$

1.C 2.C 3.D 4.B 5.B 6.A 7.A 8.E 9.B 10.C 11.C

CEVAPLI TEST 2

1.

$f(x) = (m-2)x^2 + 2mx + m - 1$

fonksiyonunun her x reel sayısı için daima negatif olabilmesi için m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty, -\frac{2}{3})$ B) $(-\infty, \frac{5}{3})$ C) $(-\infty, \frac{3}{2})$
D) $(-\infty, \frac{2}{3})$ E) $(-\infty, \frac{4}{3})$

2.

$(m-1)x^2 + (2m-2)x + m + 2 = 0$

denkleminin kökleri aynı işaretli ise m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, -1)$ C) $(-\infty, 0)$
D) $(-\infty, -4)$ E) $(-\infty, -5)$

3.

$(5-4m)x^2 - (3m+1)x + m^2 - 1 = 0$

denkleminin köklerinin birbirlerine dik olan iki doğrunun eğimleri olabilmesi için m kaç olmalıdır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 2

4.

$x^2 - mx + m - 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 < 0 < x_2$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $m \geq 1$ B) $m \leq 1$ C) $m > 2$
D) $m < 1$ E) $m > 1$

5.

$(m-2)x^2 - 2mx - 6 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 < x_2 < 0$ olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty, 2)$ B) $(-\infty, 2]$ C) $(-2, +\infty)$
D) $(0, 2)$ E) $(-3+\sqrt{21}, 2)$

6.

$x^2 - mx + m - 7 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

Kökler arasında $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| < x_2$ bağıntıları geçerli olduğuna göre m'nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaça eşittir?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 28 E) 30

7.

$x^2 + 8x + 5m - 15 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

Kökler arasında $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| > x_2$ bağıntıları geçerli olduğuna göre m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$x^2 + (m+3)x + m + 2 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 < |x_1|$ ise m hangi aralıktadır?

A) (3, 2) B) (−2, −3) C) (−3, −2)
D) (2, 3) E) (−2, 3)

9.

$mx^2 + (m+2)x - m + 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 < 0 < x_2$ ve $x_2 > |x_1|$ ise m sayısı hangi aralıktadır?

A) (1, 2) B) (2, 1) C) (−2, 0)
D) (0, 2) E) (−1, 2)

10.

$x^2 + (6-m)x - 2m + 4 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_2 < 0 < x_1$ ve $|x_2| > x_1$ ise m hangi aralıktadır?

A) (6, 2) B) (2, 6) C) (1, 6)
D) (2, 3) E) (−2, −6)

11.

$(m+1)x^2 - mx - 12 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

Kökler arasında $x_1 < 0 < x_2$ ve $|x_1| > x_2$ bağıntıları geçerli olduğuna göre m hangi aralıkta olmalıdır?

A) (−1, 0) B) [−1, 0) C) (−∞, 0)
D) (−1, +∞) E) [−1, 0]

12.

$x^2 + 3ax + 5a - 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir.

$x_1 < x_2 < 0$ olduğuna göre a aşağıdaki aralıkların hangisinde olabilir?

A) (0, 1/5) B) [2/9, 2) C) (−2, 0)
D) (2, +∞) E) (−∞, 0]

1.D 2.A 3.E 4.D 5.E 6.A 7.B 8.C 9.C 10.B 11.A 12.D

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

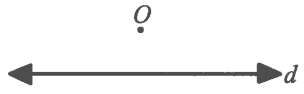
Parabol

Konuya çemberin tanımıyla gireyim de siz de ''Ne alaka!'' deyin... Nedir çemberin tanımı? Yuvarlak geometrik şekil değil elbet. Dünya yuvarlak örneğin, ama dünya çember değildir. Futbol topu da yuvarlak ama futbol topu da çember değil.

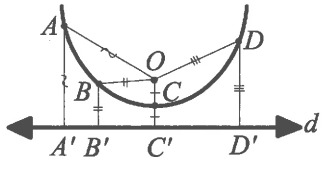
Çember matematikte şöyle tanımlanır:

Sabit bir noktaya eşit uzaklıkta ve onla aynı düzlemde olan noktalar kümesi.

Şimdi, bir düzlem ve o düzlem üzerinde bir noktayla bir doğru düşünün. Ama nokta doğrunun üstünde olmasın. Düzlemi bu sayfanın yüzeyi gibi düşünürsek, aşağıda temsili bir resim bulacaksınız.



Noktayı O noktası, doğruyu da d doğrusu olarak aldık. Şimdi öyle A, B, C, D, ... noktaları bulacağız ki; bu noktaların O noktasına ve d doğrusuna uzaklıkları eşit olacak. Böyle dört noktayı ben bulup, aşağıdaki şekildeki gibi işaretledim.



İşte bu noktaların dördü değil, tamamı, adına **parabol** dediğimiz bir grafik çizerler. Bundan sonra bu O noktasına parabolün **odak noktası**, d doğrusuna da parabolün **doğrultmanı** diyeceğiz.

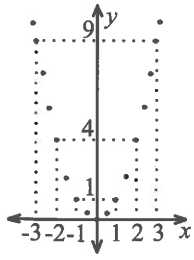
Ama maalesef konumuz konikler dersi olmadığından aşağıdaki gibi bir tanımla yetineceğiz.

İkinci dereceden fonksiyonların grafiklerine **parabol** denir.[1]

[1] Bu tanıma sormuşlar ''Neren yanlış?'' diye, ''Nerem doğru ki?'' demiş...

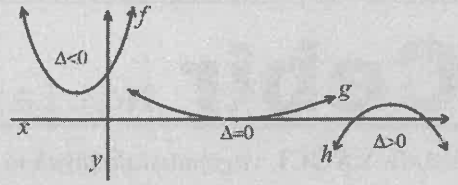
Parabol neye benzer acaba? Madem ikinci dereceden fonksiyonların grafiğine deniyor, o halde en sade ikinci dereceden denklem olan $y = x^2$'nin grafiğini bir çizelim. Grafiği çizebilmek için üzerinde birkaç nokta bilmemiz gerekiyor. Analitik geometri ve fonksiyon derslerinden de biliyoruz ki, bir eğri bir noktadan geçiyorsa, o nokta eğrinin denklemini sağlıyordur. Tersi de mümkündü, bir nokta bir eğri denklemini sağlıyorsa, o nokta o eğrinin grafiği üzerindedir. Bu sebeple, $y = x^2$ eşitliğini sağlayan birkaç tane (x, y) noktası yazıp bunları koordinat düzleminde işaretleyerek grafiği oluşturmaya çalışacağız.

Sağda gördüğünüz üzere, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(3, 9)$ ve $(-3, 9)$ noktaları işaretlendiğinde, az çok neye benzediği anlaşılıyor. Ben daha kolay hayal edebilin diye koordinatlarını şekilde yazmadığım birkaç noktayı daha işaretledim.



Şimdi bu şekli mümkün olduğunca ayrıntısıyla irdeleyeceğiz. Bazı sorulara cevaplar arayacağız. Örneğin: Parabol acaba her zaman böyle çukur şeklinde midir? Ters dönmüş hali, yani tümsek halini alabilir mi? Sola veya sağa yatık olabilir mi? Dikkat ederseniz y ekseni parabolün simetri ekseni konumunda, parabolün kolları her zaman böyle simetrik midir? x eksenine her zaman teğet midir, kesebilir mi? Keserse, ne zaman keser, kesmezse ne zaman kesmez? y eksenini kestiği yer özel mi? Daha birçok soruya cevap arayacağız, ne mutlu ki hiçbiri cevapsız kalmayacak... Başlıyoruz:

Parabolün x Eksenini Kestiği Noktalar. Eğer varsa o noktaya A diyelim. A noktası x ekseni üzerinde olduğundan koordinatları $(x_1, 0)$ şeklinde olur. Nokta parabolün üstünde olduğundan denklemini sağlıyor olmalı, yani x yerine x_1 yazdığımızda $y = 0$ olmalı. O halde bu x_1, düpedüz denklemin kökü! Anlaşılan o ki; bir parabol x eksenini köklerinde kesiyor. Eğer iki farklı reel kökü varsa iki farklı yerde, tek reel kökü varsa tek yerde kesiyor. Hiç reel kökü yoksa da hiçbir yerde kesmiyor. Peki, bir denklemin reel kökünün olup olmadığını nerden anlıyorduk? Diskriminantından...



$y = ax^2 + bx + c$ parabolü;
$\Delta < 0$ ise x eksenini kesmez (üst şekildeki f parabolü böyledir),
$\Delta = 0$ ise x eksenini tek noktada keser, yani x eksenine teğettir (üst şekildeki g parabolü böyledir),
$\Delta > 0$ ise x eksenini iki farklı noktada keser (üst şekildeki h parabolü böyledir).

Örnek. *$y = 2x^2 + ax + 2$ parabolü x eksenine teğet olduğuna göre a kaçtır?*

A) -4 B) 4 C) ± 4 D) 2 E) ± 2

Çözüm: Bir parabol x eksenine teğetse, tek reel kökü var demek olur, o halde denklem bir tamkaredir, yani diskriminantı 0'dır.

$$\Delta = a^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 0 \text{ diye } a^2 = 16.$$

Dolayısıyla $a = \pm 4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = m^2x^2 + mx - m$ parabolü x eksenini iki farklı noktada kesiyorsa m için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?*

A) $m > \frac{-1}{4}, m \neq 0$ B) $m > \frac{-1}{2}$ C) $m > -1$

D) $m > \frac{-3}{4}, m \neq 0$ E) $m > \frac{-3}{2}, m \neq 0$

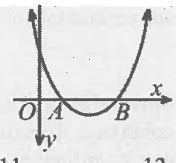
Çözüm: Diskriminantı pozitifmiş ki iki farklı noktada kesiyor diye düşüneceğiz.

$$\Delta = m^2 - 4\cdot m^2\cdot(-m) = m^2 + 4m^3 = m^2\cdot(1 + 4m) > 0$$

olmalıdır. O halde $m > \frac{-1}{4}$. Ayrıca $m \neq 0$ olmalı.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x) = x^2 - 4x + m - 1$ parabolünün grafiği yanda verilmiştir. $|AB| = 3$ olduğuna göre m kaçtır?*



A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{11}{4}$ E) $\frac{13}{4}$

Çözüm: $|AB| = 3$ bilgisinden kökün birinin diğerinden 3 fazla olduğunu yani kökler farkının 3 olduğunu anlıyoruz. Kökler toplamı formülünden de kökler toplamı 4 bulunduğundan $x_1 = 1/2$ ve $x_2 = 7/2$ bulunur. Şimdi de kökler çarpımı formülünden yardım isteyeceğiz. $x_1\cdot x_2 = 7/4 = m - 1$ olduğundan $m = 11/4$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $y = x^2 + (1 - m)x + 2n$
$y = 3x^2 - (2m + 1)x + 4n + 2$
parabollerinin x eksenini kestiği noktalar aynı ise $m\cdot n$ çarpımı kaçtır?

A) -4 B) 4 C) -8 D) 8 E) 12

Çözüm: Bir parabolün x eksenini kestiği noktalarının aslında kökleri olduğunu defalarca söyledik. O halde soruda bu iki parabolün de köklerinin aynı olduğu anlatılmak isteniyor. Kökler toplamında giderek m'yi, kökler çarpımından giderek de n'yi bulacağız.

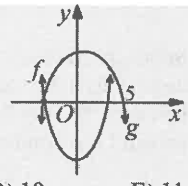
$$-(1 - m) = \frac{2m+1}{3} \text{ diye } m = 4,$$

$$2n = \frac{4n+2}{3} \text{ diye } n = 1.$$

O halde $m\cdot n = 4\cdot 1 = 4$.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki şekilde*
$f(x) = x^2 + mx - 6$
$g(x) = -x^2 + 3x + n$
fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre $m + n$ toplamı kaçtır?



A) -11 B) 9 C) -10 D) 10 E) 11

Çözüm: (5, 0) noktası g fonksiyonunun kökü diye buradan n'yi bulabiliriz.

$$g(5) = -5^2 + 3\cdot 5 + n = 0$$

olduğundan $n = 10$'dur. Bu fonksiyonun diğer kökü aynı zamanda f'nin de köküdür.

$$g(x) = -x^2 + 3x + 10 = (-x + 5)\cdot(x + 2)$$

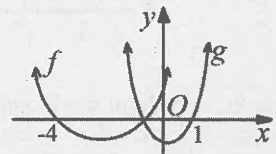
olduğundan diğer kökün -2 olduğunu anlarız. Yani

$$g(-2) = f(-2) = 0.$$

O halde $f(-2) = (-2)^2 + m(-2) - 6 = 0$ diye $-2m = 2$ yani $m = -1$'dir. Buradan $m + n = -1 + 10 = 9$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^2 + bx + c$*
$g(x) = x^2 + mx + n$
parabolleri x ekseni üstünde kesişiyorlar. Buna göre $b - m$ farkı kaçtır?



A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

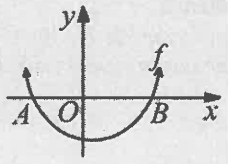
Çözüm: İki parabolün ortak köküne p diyelim. f fonksiyonunun kökler toplamı $p - 4$, g fonksiyonunun ise $p + 1$ olur. Aynı toplamlar denklemlerinden de bulunursa

$$p - 4 = -b$$
$$p + 1 = -m$$

eşitliklerine ulaşılır. İlk eşitliği -1 ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak $b - m = 5$ olarak buluruz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Denklemi* $f(x) = x^2 - 4x + m + 2$ *olan parabolün grafiği yanda verilmiştir.* $|AB| = 6$ *birim olduğuna göre m kaçtır?*



A) –3 B) –4 C) –5 D) –6 E) –7

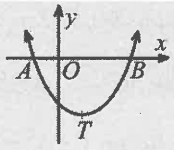
Çözüm: Pozitif köke x_1, negatif köke x_2 diyelim. $|AB| = 6$ olması, kökler farkının 6 olması anlamına gelir. Diğer yandan parabolün denklemine bakınca da kökler toplamının 4 olduğunu görüyoruz. O halde $x_1 - x_2 = 6$ ve $x_1 + x_2 = 4$ eşitliklerinden $x_1 = 5$ ve $x_2 = -1$ olarak bulunur.

$$x_1 \cdot x_2 = m + 2 = -5$$

olduğundan $m = -7$'dir

Doğru cevap: E.

Örnek. *k bir reel sayı olmak üzere* $f(x) = 2x^2 - 3x + k$ *parabolünün grafiği yanda verilmiştir. Kökleri A ve B iken* $|OA| \cdot |OB| = 1$ *br*^{2} *olduğuna göre k kaçtır?*



A) –6 B) –5 C) –4 D) –3 E) –2

Çözüm: $A(x_1, 0)$ ve $B(x_2, 0)$ olsun. $x_1 < 0$ olduğundan $|x_1| = -x_1$ ve $x_2 > 0$ olduğundan $|x_2| = x_2$ olur. $|x_1| \cdot |x_2| = -x_1 x_2 = 1$ olarak verilmiş. Kökler çarpımı formülünden $x_1 x_2 = k/2 = -1$ bulunur ki $k = -2$'dir.

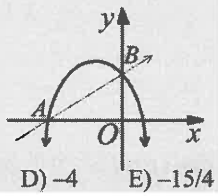
Doğru cevap: E.

Parabolün *y* Eksenini Kestiği Noktalar. Eğer varsa o noktaya C diyelim. C noktası, y ekseni üzerinde olduğundan koordinatları $(0, y_1)$ şeklindedir. Yine denklemi sağlaması gerektiğinden denklemde x gördüğümüz yerlere 0 yazdığımızda $y = y_1$ olmalıdır. Buradan anlaşılan;

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = y_1$$

parabol y eksenini, denkleminin sabit terimi olan c noktasında kesiyor.

Örnek. $x - 4y + 4 = 0$ *doğrusu,* $y = -x^2 + bx + c$ *parabolünü eksenler üzerindeki A ve B noktalarında kesmektedir. Buna göre b kaçtır?*



A) –3 B) –8/3 C) –7/2 D) –4 E) –15/4

Çözüm: Doğru denkleminden $A(-4, 0)$ ve $B(0, 1)$ olduğunu bulalım. Bu noktalar aynı zamanda parabolün üstünde de olduklarından, parabol denklemini de sağlamalıdırlar. B'nin koordinatları yerlerine yazılırsa $c = 1$ bulunur. $A(-4, 0)$ için

$$0 = -(-4)^2 + b \cdot (-4) + 1$$

olduğundan $0 = -16 - 4b + 1$ olur ki buradan $-4b + 1 = 16$ yani $b = -15/4$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $y = x^2 - 15x + 5m + 1$ *parabolü x eksenini pozitif tarafta A'da, negatif tarafta B'de kessin.* $|AO| = 4 \cdot |BO|$ *olduğuna göre parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?*

A) –100 B) –70 C) –64 D) –60 E) –54

Çözüm: Negatif köke x_1, pozitif köke x_2 diyelim. $|AO| = 4 \cdot |BO|$ eşitliği bize $x_2 = -4 \cdot x_1$ olduğunu anlatır. Diğer yandan, denklemden $x_1 + x_2 = 15$ olduğunu anlıyoruz. Her iki eşitlik birlikte çözülürse $x_2 = 20$ ve $x_1 = -5$ bulunur. Parabolün y eksenini kestiği nokta, parabolün açık denkleminin sabit terimi olduğundan $5m + 1$ cevaptır. $5m + 1$ aynı zamanda kökler çarpımı olduğundan $x_1 \cdot x_2 = -100$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Parabolün Kollarının Yönü. Parabolün kollarının çok çok büyük sayılarda hangi yöne doğru gittiğini merak ediyoruz. Analitik düzleme göre düşünürsek, yukarı mı, aşağı mı, sola mı, sağa mı? O halde x değerine çok çok büyük sayılar verdiğimizde, y'nin alacağı değerleri bulmalıyız. Peki, y'nin alacağı değerleri, daha çok x^2'li terim mi etkiler, x'li terim mi, sabit terim mi? Sabit terim, adı üstünde hep sabit, y'ye etkisi de hep sabittir. x^2 sayısının da, x sayısından kat be kat hızlı arttığını hepimiz biliriz. O halde bizim için x^2'li terim önemli olmalı. Ama x^2'li terimin olmadığı parabol yok ki, yani anlatmak istediğimiz x^2'nin katsayısı önemli olmalı.

Eğer x^2'nin katsayısı olan $a > 0$ ise, çok çok büyük x'ler için ax^2 de çok çok büyük olur, $bx + c$ ifadesindeki b ve c negatif olsa dahi ax^2'yi negatif yapmaya güçleri yetmez, y durmadan büyür, o halde kollar yukarı doğru olur. Ama $a < 0$ ise ax^2 terimi daima negatif olur, çok çok büyük x'ler için $bx + c$ sayısı ax^2 sayısını negatif olmaktan kurtaramaz, o halde $a < 0$ durumunda parabolün kolları aşağı doğru olur.

Parabolün kolları sağa veya sola doğru olabilir mi? Evet olabilir, $f(y) = x = ay^2 + by + c$ şeklindeki ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri o şekildedir ama mutlu haber, onlar bizim konumuz değil!

Örnek. $y = ax^2 + 6x + 9a$ *parabolü x eksenine teğet olup, parabolün kolları aşağı doğrudur. Buna göre a kaçtır?*

A) –6 B) –5 C) –4 D) –3 E) –1

Çözüm: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot a \cdot 9a = 0$ eşitliğinden $a^2 = 1$ bulunur. Parabolün kolları aşağı doğru olduğundan başkatsayı olan a negatif olmalıdır, o halde $a = -1$.

Doğru cevap: E.

Tepe Noktası ve Simetri Ekseni. Burada işleyeceğimiz parabol çeşitleri demin bahsettiğimiz üzere hep çukur veya tümsek şeklinde olanlar olacak. Çukur şeklindeki parabollerin azalmaktan artmaya geçtiği noktaya, tümsek şeklindeki parabollerin de artmaktan azalmaya geçtiği noktaya parabolün **tepe noktası** denir.



Her parabolün bir tepe noktası mutlaka vardır. Çukur parabollerde fonksiyonun minimum değeri, tümsek parabollerde de fonksiyonunun maksimum noktası tepe noktasıdır.

Tepe noktasından geçip, y eksenine paralel olan doğruya parabolün **simetri ekseni** denir.

Simetri ekseninin varlığını, mutlak değeri aynı olan negatif ve pozitif sayıların karelerinin eşit olmasına borçluyuz. $y = x^2$ parabolünde

$$1^2 = (-1)^2 = 1,\ 2^2 = (-2)^2 = 4,\ 3^2 = (-3)^2 = 9$$

olduğunu hatırlayınız. Bundan dolayı çukur veya tümsek şeklindeki her parabol, y eksenine paralel olan bir doğruya göre simetriktir.

Örnek. *$y = x^2 - 2x + 4$ parabolünün simetri ekseni aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x = 1$ B) $x = 2$ C) $x = 3$ D) $x = 4$ E) $x = 5$

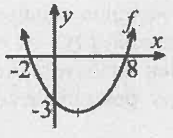
Çözüm: Ordinatı aynı olan iki nokta bulsak yetecek. Bu noktaların ortası bize simetri ekseni hakkında fikir verir.

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 4 = x(x-2) + 4$$

eşitliğinden $f(0) = f(2) = 4$ olduğunu anlarız. $(0, 4)$ ve $(2, 4)$ noktalarının orta noktası simetri ekseni üzerinde yer alacağından simetri ekseni $x = 1$ doğrusudur.

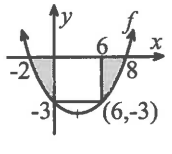
Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f parabolü x eksenini -2 ve 8 apsisli noktalarda, y eksenini de -3 ordinatlı noktada kestiğine göre $f(6)$ kaçtır?*



A) -6 B) -5 C) -4 D) -3 E) -2

Çözüm: Dedik ya parabol simetrik bir şekildir, işte ondan dolayı, soldaki kökten sağa 2 birim gittiğimizde y değeri 3 azalıyorsa, sağdaki kökten sola doğru 2 birim ilerlediğimizde de y değeri 3 azalır. Diğer bir deyişle, şekildeki taralı bölgeler eştir. O halde $f(6) = -3$ olmalıdır.



Doğru cevap: D.

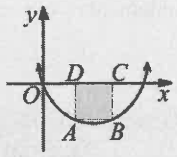
Örnek. *$y = x^2 - x + m$ parabolünün x eksenini kestiği noktalardan biriyle $y = x^2 - 4x + n$ parabolünün tepe noktası aynı noktadır. Buna göre $m + n$ toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Demek oluyor ki, $y = x^2 - 4x + n$ parabolünün tepe noktası x ekseni üzerindeymiş. Bu yüzden denklemi tamkare olmalı ve bu sebepten dolayı $n = 4$ olmalıdır.
$n = 4$ ise $y = = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ olur ki tek kök olan $x = 2$ değerinin $y = x^2 - x + m$ denklemini sağlaması gerekir. Buradan da $m = -2$ ve $m + n = -2 + 4 = 2$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = x^2 - 2x$ parabolünün grafiği yanda verilmiştir. Parabol ile x ekseni arasında kalan bölgeye şekildeki gibi çizilen $ABCD$ karesinin bir kenarı kaç birimdir?*



A) $\sqrt{8} - 1$ B) $\sqrt{8} - 2$ C) $\sqrt{8} - 3$ D) $\sqrt{18} - 2$ E) 1

Çözüm: $y = x^2 - 2x = x \cdot (x - 2)$ olduğundan parabolün kökleri 0 ve 2'dir. $|DC| = t$ denirse, $|OD| = \dfrac{2-t}{2}$ olur ki aynı zamanda $|DA| = t$ olduğundan A noktasının koordinatlarının $\left(\dfrac{2-t}{2}, -t\right)$ olduğu görülür. Bu nokta parabol üstünde diye parabol denklemini sağlaması gerekir.

$$-t = \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2-t}{2}\right)$$

$$-t = \frac{4-4t+t^2}{4} - 2 + t$$

$$4(2-2t) = 4 - 4t + t^2$$

$$8 - 8t = 4 - 4t + t^2$$

$$t^2 + 4t - 4 = 0$$

bulunur. Bu denklemin pozitif kökü cevap olacağından

$$t = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2}$$

$$= -2 + 2\sqrt{2} = -2 + \sqrt{8}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = 9 - x^2$ fonksiyonu $(-\infty, a]$ aralığında birebirdir. Buna göre a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 3

Çözüm: Paraboller simetri eksenlerinin herhangi bir tarafında birebirdir ama iki tarafı birden düşününce birebir olmazlar. Simetri ekseni $x = 0$ olduğundan a en çok 0 olabilir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$y = 5x^2 - 15x + 10$

parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) 0 ve 1 B) 5 ve 10 C) −1 ve 2
D) 1 ve 2 E) −2 ve 10

2.

$y = x^2 - ax + 3$

parabolü x eksenini 1 apsisli noktada kestiğine göre a kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$y = x^2 - 3mx + 2012$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre m'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

4.

$y = 2x^2 + mx + 2$

parabolünün x eksenine değmemesi için m hangi aralıkta olmalıdır?

A) (−4, 4) B) [−4, 4) C) [−4, 4]
D) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ E) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

5.

$y = ax^2 - 3x + a$

parabolünün x eksenini farklı iki noktada kestiği ve kollarının aşağı doğru olduğu bilindiğine göre a'nın alabileceği tam sayı değeri kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 2 E) 3

6.

$y = x^2 - 7x + 4$

parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.

$y = x^2 - 3ax + 4$ parabolünün x eksenini kestiği noktalardan biri

$x^2 - 2x + 1 = y$

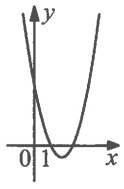
parabolünün x eksenine teğet olduğu nokta olduğuna göre a kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

8.

$y = 3x^2 - mx + 12$

parabolünün grafiği x eksenini şekildeki gibi (1, 0) noktasında kesmekte olduğuna göre m kaça eşittir?

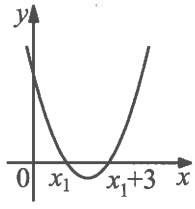


A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

9.

$y = x^2 - 5x + 4a$

parabolünün grafiği x eksenini şekildeki gibi x_1 ve $x_1 + 3$ apsisli noktalarda kesmekte olduğuna göre a kaça eşittir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$y = x^2 - 4x - 2008$

parabolünün x eksenini kestiği noktaların koordinatları toplamı kaça eşittir?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. D 2. D 3. C 4. A 5. B 6. E 7. D 8. B 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m$

fonksiyonunun grafiği *Ox* eksenine teğet olduğuna göre *m* kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

2.

$y = -x^2 - (m+1)x + m - 2$

parabolünün *x* eksenini iki pozitif değerde kesebilmesi için *m*'nin bulunabileceği en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–1, 2) B) (–7, 2) C) $(-\infty, -2)$
D) (–7, 1) E) $(-\infty, -7)$

3.

$f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$

parabolünün *x* eksenini iki negatif değerde kesebilmesi için *m*'nin bulunabileceği en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2 < m < -1$ B) $m < 1$ C) $m > -2$
D) $0 < m < 1$ E) $-1 < m < 2$

4.

$f(x) = x^2 - (a+1)x + 4$

parabolü *x* eksenini kesmediğine göre *a*'nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

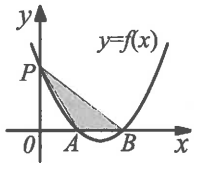
A) 2 B) 1 C) 0 D) –3 E) –4

5.

k bir reel sayı olmak üzere yanda grafiği verilen

$y = x^2 - 9x + k + 1$

parabolünün *y* eksenini kestiği nokta *P*, *x* eksenini kestiği noktalar *A* ve *B*'dir.



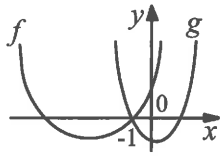
|*OA*| = |*AB*| olduğuna göre *PAB* üçgensel bölgesinin alanı kaç birimkaredir?

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 54

6.

$f(x) = 2x^2 - mx + n$
$g(x) = x^2 - 7x - p$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

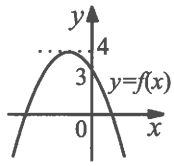


Buna göre *m* + *n* + *p* toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

7.

Tepe noktasının ordinatı 4 olan parabolün *x* eksenini kestiği noktalar x_1 ve x_2, *y* eksenini kesiği nokta da (0, 3) olsun.

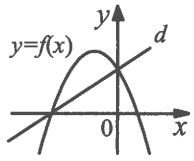


Parabolün simetri ekseni *x* = –2 doğrusu olduğuna göre $x_1 \cdot x_2$ çarpımı kaçtır?

A) –12 B) –5 C) –4 D) –2 E) –1

8.

Şekilde verilen parabolün denklemi $y = -x^2 + bx + c$ olup *d* doğrusunun denklemi de *y* = 2*x* + 6 olduğuna göre *b* + *c* toplamı kaçtır?



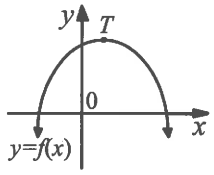
A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 12

9.

Şekildeki grafik

$y = ax^2 + bx + c$

fonksiyonuna aittir.



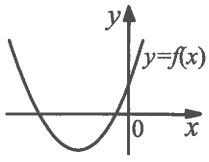
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $b^2 - 4ac > 0$ B) $\frac{b}{a} < 0$ C) $a \cdot c < 0$
D) $c > 0$ E) $b \cdot c < 0$

10.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

fonksiyonuna ait görüntü yanda verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\frac{c}{a} < 0$ B) $b^2 - 4ac < 0$ C) $-\frac{b}{2a} < 0$
D) $a < 0$ E) $c < 0$

1.D 2.E 3.A 4.E 5.C 6.A 7.A 8.B 9.E 10.C

CEVAPLI TEST 3

1.

$y = 2x^2 - mx + m - 3$

parabolü ile $y = x - 2$ doğrusu x ekseni üzerinde kesişmektedirler.

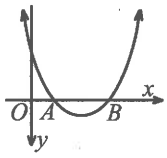
Buna göre parabolün x eksenini kestiği diğer noktanın apsisi kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

2.

$f(x) = x^2 - 8x + m - 2$

parabolünün grafiği yanda gösterildiği üzere x eksenini A ve B noktalarında kesmektedir.



$|AB| = 6$ br olduğuna göre m kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3.

$y = 9x^2 + ax + 1$

parabolü x eksenine teğet olduğuna göre a kaçtır?

A) -6 B) 6 C) ± 6 D) 3 E) ± 3

4.

$y = x^2 + (1 - m)x + n$

$y = x^2 - (2m + 1)x + 4n + 6$

parabollerinin x eksenini kestiği noktalar aynı olduğuna göre $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

A) -6 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

5.

$y = ax^2 + 8x + 16a$

parabolü x eksenine teğet olup kolları aşağı doğrudur.

Buna göre parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) -16 B) -8 C) -4 D) -3 E) 16

6.

$y = x^2 - 6x + 4$

parabolünün simetri ekseni aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = 3$ B) $x = 6$ C) $x = -3$ D) $x = -6$ E) $x = 4$

7.

$y = f(x)$

parabolü için $f(1) = f(7)$ olduğu bilinmektedir.

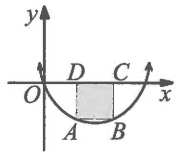
Bu parabolün simetri ekseni aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = 1$ B) $x = 3$ C) $x = 4$ D) $x = 7$ E) $x = 8$

8.

$y = \frac{1}{4}(x^2 - 6x)$

parabolünün grafiği yanda verilmiştir.



Parabol ile x ekseni arasında kalan bölgeye şekildeki gibi çizilen $ABCD$ karesinin bir kenarı kaç birimdir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

9.

a ve p birer reel sayı olsun.

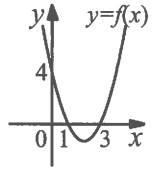
$y = 9x^2 + px + a - 1$

parabolünün simetri ekseniyle $y = ax + p$ doğrusunun belirttiği dar açının ölçüsü 45° olduğuna göre a kaçtır?

A) -1 B) 1 C) ± 1 D) 9 E) ± 9

10.

Yanda grafiği verilen f parabolü x eksenini 1 ve 3 apsisli noktalarda, y eksenini de 4 ordinatlı noktada kestiğine göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi parabolün denklemi bulunmadan hesaplanabilir?



A) $f(-1)$ B) $f(2)$ C) $f(4)$ D) $f(5)$ E) $f(6)$

1.C 2.E 3.C 4.B 5.A 6.A 7.C 8.C 9.C 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parabol Denkleminin Yazılması

Bir doğru kaç noktasıyla belliydi? İki, değil mi... Çünkü tek bir noktadan geçen istediğimiz kadar çok sayıda farklı doğru çizebilecekken, farklı iki noktadan geçen sadece bir doğru çizebiliriz. Bunu doğrunun genel denklemi olan $y = ax + b$ denkleminden de anlayabiliriz. Çünkü bu denklemde iki tane bilinmeyen var: a ve b. Doğrunun oralardan geçtiğini bildiğimiz iki noktanın koordinatlarını doğru denkleminde yerlerine yazarak karşımıza çıkacak iki bilinmeyenli iki denklemi çözerek doğru denklemini yazabiliyorduk.



Şimdi parabol denklemini düşünelim. Genel olarak, $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde olan bir parabol denklemde a, b ve c bilinmeyenlerini bulmak için üç farklı noktaya ihtiyacımız olacak. Çünkü bilinmeyen kadar denklem sayısına sahip olamazsak her zaman çözüm kümesini bulmak mümkün olmaz. İşte bu üç noktanın koordinatlarını denklemde yerlerine yazarak üç bilinmeyenli üç denklem elde edecek ve o sistemi çözeceğiz. Nasıl mı olacak? Bir örnekle anlatalım:

Örnek. *$A(-1, 3)$, $B(1, 3)$ ve $C(0, 4)$ noktalarından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = -x^2 + 4$ B) $y = -x^2 + 5$ C) $y = -x^2 + 6$
D) $y = -x^2 + 7$ E) $y = -x^2 + 8$

Çözüm: Parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olsun. Mademki parabol bu noktalardan geçiyor, o halde bu koordinatlar parabol denklemini sağlıyor olmalıdır.

$A(-1, 3)$ için $3 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$,
$B(1, 3)$ için $3 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$,
$C(0, 4)$ için $4 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$

olur. Son eşitlikten bulduğumuz $c = 4$ eşitliğini ilk iki denklemde yerlerine yazarsak, artık iki bilinmeyenli iki denkleme sahip oluruz.

$$a - b + 4 = 3$$
$$a + b + 4 = 3$$

çıkar ki, buradan da $a = -1$ ve $b = 0$ buluruz. Üç bilinmeyen de artık bilindiğinden geriye sadece denklemde yerlerine yazmak kaldı:

$$y = ax^2 + bx + c = (-1)\cdot x^2 + 0\cdot x + 4 = -x^2 + 4.$$

Yazılıda değil ama hazırlık testlerinde o noktaları sağlayan şıkları denemek daha elverişli olur. Örneğin bu soruda $(-1, 3)$ noktasının sağlandığı tek şık A şıkkıydı.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ ve $C(2, 2)$ noktalarından geçen parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre c kaçtır?*

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{11}{6}$ D) $\frac{13}{6}$ E) $\frac{19}{6}$

Çözüm:

$A(-2, 1)$ için $1 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c$,
$B(1, 3)$ için $3 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$,
$C(2, 2)$ için $2 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$

olur. Birinci ve üçüncü eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak, $b = \frac{1}{4}$ buluruz. Bunu son iki denklemde yerlerine yazıp, iki bilinmeyenli iki denklemi çözeceğiz:

$$a + \frac{1}{4} + c = 3 \text{ ve } 4a + \frac{1}{2} + c = 2$$

çıkar ki, buradan da $a = \frac{-5}{12}$ ve $c = \frac{19}{6}$ buluruz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *p'nin alabileceği her reel sayı değeri için*

$$A(2p - 1, 8p^2 + 6)$$

noktalarının analitik düzlemde çizdiği eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x^2 + 4x + 8$ B) $y = 2x^2 + 4x - 8$
C) $y = 2x^2 + 4x + 12$ D) $y = 2x^2 + 6x + 8$
E) $y = 2x^2 + 6x - 8$

Çözüm: Doğrunun Analitik İncelenmesi dersinde bir eğrinin üzerindeki noktaların bir parametreye bağlı olarak yazılmasına doğrunun parametrik denklemi dendiğini söylemiştik. Burada da parabolün noktaları p parametresine bağlı verildiğinden bu tip denklemlere de parabolün parametrik denklemi deriz. Parametrik denklemleri açık denkleme çevirmek oldukça basittir. İnanmazsanız bakın:

Eğrinin geçtiği noktalar (x, y) olsun.

$$x = 2p - 1 \text{ ve } y = 8p^2 + 6$$

olur. p'leri çekip eşitleyeceğiz.

$p = \frac{x+1}{2}$ ve $p^2 = \frac{y-6}{8}$ olduğundan $(\frac{x+1}{2})^2 = \frac{y-6}{8}$

olur ki düzenlenirse $y = 2x^2 + 4x + 8$ bulunur.

Doğru cevap: A.



Kökleri ve Bir Noktası Bilinen Parabol Denkleminin Yazılması. Kökleri x_1 ve x_2 olarak verilmiş ikinci dereceden denklem için şunu demiştik: $(x - x_1)$ ve $(x - x_2)$ ile tam bölünür. Zaten denklem ikinci dereceden olduğundan başka x'li çarpana da gerek yok. Ama bu çarpanların başında katsayı olarak herhangi bir sayı da bulunabilir. Öyle ya, x ekseni üzerinde iki farklı nokta düşünün, o noktalardan geçen kolları aşağıya veya yukarıya bakan binlerce parabol olabilir. Şimdi bize bir de

$$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$$

denkleminin başkatsayısı olan a lazım. İşte onu da, üçüncü nokta olarak verilen, geçtiği herhangi bir nokta koordinatını kullanarak bulacağız. Buna da bir örnek geliyor:

Örnek. *Kökleri –3 ve 1 olan ikinci dereceden bir denklemin grafiği $A(2, 5)$ noktasından geçmektedir. Bu denklemi yazınız.*

A) $y = x^2 + 4x + 8$ B) $y = x^2 + 2x - 3$ C) $y = x^2 + 4x$
D) $y = x^2 + 2x + 3$ E) $y = x^2 + 2x - 8$

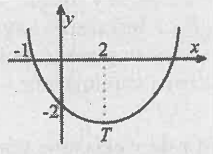
Çözüm: Derhal, kökleri –3 ve 1 olan tüm ikinci dereceden denklemleri yazalım:

$$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2) = a\cdot(x + 3)\cdot(x - 1)$$

Bu denklemi (2, 5) de sağlaması gerekiyor. O halde $5 = a\cdot(2 + 3)\cdot(2 - 1)$ olduğundan $a = 1$'dir. Parabol denklemi bulundu bile: $y = (x + 3)\cdot(x - 1) = x^2 + 2x - 3$.

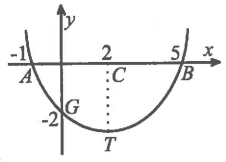
Doğru cevap: B.

Örnek. *x eksenini –1 apsisli, y eksenini –2 ordinatlı noktada kesen yandaki parabolün, tepe noktasının apsisi 2'dir. Bu parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ ise $a - b + 2c$ toplamı kaçtır?*



A) –2 B) 0 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Tepe noktası simetri ekseni üzerinde bulunduğundan $|AC| = |CB|$'dir. O halde verilmemiş kök olan B noktasının apsisi 5'dir. Şu durumda parabolün iki kökü ve geçtiği bir noktası bellidir.



$$y = a\cdot(x + 1)\cdot(x - 5)$$

$G(0, –2)$ noktası da parabol üstünde olduğundan sağlaması gerekir.

$$-2 = a\cdot(0 + 1)\cdot(0 - 5)$$

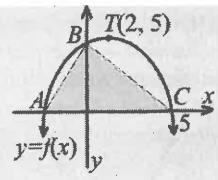
olduğundan $a = \frac{2}{5}$'dir. Bize lazım olan her şey bulunduğundan parabol denklemini yazabiliriz:

$$y = \frac{2}{5}\cdot(x + 1)\cdot(x - 5) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{5}x - 2.$$

Buna göre $a - b + 2c = \frac{2}{5} - (-\frac{8}{5}) + 2\cdot(-2) = -2$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tepe noktası $T(2, 5)$ olan yandaki parabol x eksenini A ve C noktalarında, y eksenini de B noktasında kesmektedir. $C(5, 0)$ ise ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2dir?*



A) 8 B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{26}{3}$ D) 9 E) $\frac{28}{3}$

Çözüm: Tepe noktasının simetri ekseni üzerinde bulunduğunu, dolayısıyla $r = 2$ olduğundan $A(–1, 0)$ olduğunu unutmayın. Şu an üçgenin taban uzunluğu belli olduğundan yüksekliği yani B noktasının ordinatını bulursak, soru çözülmüş olacak. Ki orası da parabolün sabit terimidir. İki kök de belli olduğundan $y = a\cdot(x + 1)\cdot(x - 5)$.
Parabol $T(2, 5)$'ten geçtiğinden koordinatları eşitlikte yerine koyacağız, ve sağlayacak:

$$5 = a\cdot(2 + 1)\cdot(2 - 5)$$

olur ki $a = \frac{-5}{9}$ bulunur.

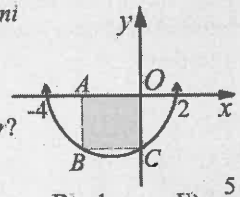
Şimdi parabolün denklemini yazabiliriz:

$$y = \frac{-5}{9}\cdot(x+1)\cdot(x-5) = \frac{-5}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{25}{9}$$

O halde $\text{Alan}(ABC) = \frac{6\cdot\frac{25}{9}}{2} = \frac{25}{3}\ br^2$.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki grafik, x eksenini –4 ve 2 apsisli noktalarda kesen $y = f(x)$ parabolüne aittir. Şekildeki $ABCO$ dörtgeni bir kare olduğuna göre $f(–3)$ kaçtır?*



A) $-\frac{4}{3}$ B) –2 C) $-\frac{3}{2}$ D) –1 E) $-\frac{5}{4}$

Çözüm: Negatif kök noktasına M, pozitif kök noktasına N diyelim. $|MA| = |ON| = 2$ olduğunu görelim. Demek ki karenin bir kenarı 2 birimmiş. $B(–2, –2)$ olup, parabol üstünde olduğundan parabol denklemini yazabiliriz.

$$y = a\cdot(x + 4)\cdot(x - 2)$$
$$-2 = a\cdot(-2 + 4)\cdot(-2 - 2)$$
$$-2 = a\cdot2\cdot(-4)$$
$$a = 1/4$$

Demek ki parabol denklemi

$$y = f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x + 4)\cdot(x - 2).$$

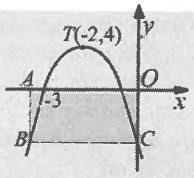
O halde

$$f(-3) = \frac{1}{4}\cdot(-3 + 4)\cdot(-3 - 2)$$

$$f(-3) = \frac{1}{4}\cdot1\cdot(-5) = -\frac{5}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tepe noktası $T(-2, 4)$ olan yandaki parabolün bir kökü -3'tür. Buna göre taralı $ABCO$ dikdörtgeninin alanı kaç birimkaredir?*



A) 16 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

Çözüm: Tepe noktasının apsisi -2 ve parabolün bir kökü -3 olduğundan diğer kök -1'dir. Dikdörtgenin parabolün dışında kalan kısımları eş olduğundan A'nın apsisinin -4 olduğunu yani dikdörtgenin bir kenarının 4 olduğunu anlarız. Diğer kenarı bulursak, alanı bulmuş oluruz.

Kökler -3 ve -1 olup, $(-2, 4)$'ten geçiyor diye

$$y = a\cdot(x+3)\cdot(x+1)$$
$$4 = a\cdot(-2+3)\cdot(-2+1)$$
$$4 = a\cdot 1\cdot(-1)$$
$$a = -4$$

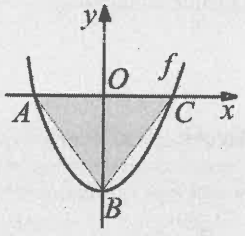
bulunur. Demek ki

$$y = f(x) = -4\cdot(x+3)\cdot(x+1).$$

Parabolün sabit terimi -12 diye dikdörtgenin alanı $4\cdot 12 = 48$ çıkar.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki grafikte ABC üçgeni eşkenardır. Bu üçgenin belirttiği bölgenin alanı $9\sqrt{3}$ br^2 olduğuna göre parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $3y = \sqrt{3}x^2 - 9\sqrt{3}$
B) $y = 3x^2 - \sqrt{3}$
C) $y = x^2 - 3\sqrt{3}$
D) $y = \sqrt{3}x^2 - 9\sqrt{3}$
E) $3y = \sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}$

Çözüm: Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna t diyelim.

$$\frac{t^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

olacağından $t = 6$ çıkar. $|AO| = |OC|$ diye parabolün kökleri -3 ve 3, y eksenini kestiği noktanın ordinatı da $-3\sqrt{3}$'tür.

$$y = a\cdot(x-3)\cdot(x+3)$$
$$-3\sqrt{3} = a\cdot(0-3)\cdot(0+3)$$

diye $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ çıkar. O halde denklem

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x^2-9) \text{ yani } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - 3\sqrt{3}\text{'tür.}$$

Doğru cevap: A.



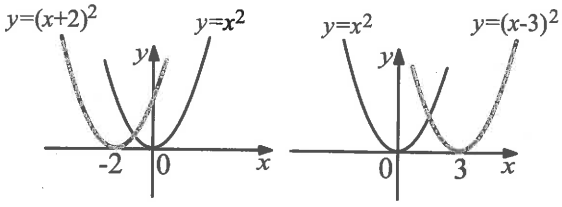
Tepe Noktası ve Bir Noktası Bilinen Parabol Denkleminin Yazılması. Neden bilmiyorum ama tepe noktasının koordinatları tüm kaynaklarda (r, k) olarak gösteriliyor. Biz de sürüye katılacağız. Tepe noktası $T(r, k)$ olarak verilen parabollerin genel denklemi, a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$y = a\cdot(x-r)^2 + k$$

şeklindedir. r ve k zaten bize verilecek, ayrıca verilen geçtiği herhangi bir nokta koordinatı yardımıyla da a'yı bulacağız. İşlem tamam olacak.

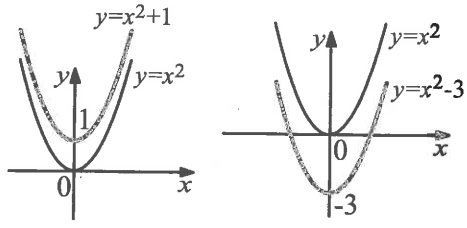
Peki, bu formüle nasıl ulaşılmış? Bu formülü bilmeden de tepe noktası bilinen bir parabolün genel denklemini yazabilir miyiz? Tabii ki yazabiliriz. Bunun için **öteleme** adı verilen bir metot kullanacağız. Fonksiyon dersinde daha detaylı işleyeceğimiz bu metodun temel taşlarını $y = x^2$ parabolüne uygulayalım:

Önce x eksenine göre sola veya sağa doğru ötelemenin parabol denkleminde nasıl bir değişiklik yaptığını gösterelim:



Demek ki r birim sağa kayarsak, x'ten r çıkartıyoruz, eğer r birim sola kayarsak x'e r ekliyoruz. Burada dikkat edilmesi gereken nokta x^2'ye değil x'e ekleme veya çıkarma yapılmasıdır.

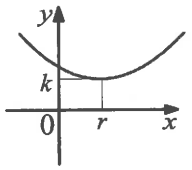
Bir de y eksenine göre yukarı veya aşağı doğru ötelemenin nasıl çalıştığını görelim.



Demek ki k birim yukarı kayarsak y'den k çıkartıyoruz, eğer k birim aşağı kayarsak y'ye k ekliyoruz. Fakat parabol denklemleri genel olarak $y = f(x)$ şeklinde yazıldığından y'den k çıkartacağımıza x^2'ye k ekleriz. Benzer şekilde y'ye k ekleyeceğimize x^2'den k çıkartırız.

Şimdi bu noktada gelebilecek en doğal soru şudur: Ya ötelenecek yani kaydırılacak parabolün bu kaydırmadan sonra kollarının açıklığıyla da oynanacaksa, bunu nasıl halledeceğiz? Önce şunu anlamakta fayda var: Ha kaydırıp kollarla oynamışım, ha kollarla oynayıp kaydırmışım.

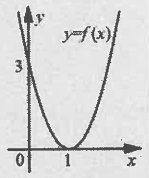
Burada sıranın sonuca etkisi yoktur. Diğer yandan $y = x^2$ parabolünün kollarıyla oynamak parabolün kavisini daraltacak veya genişletecektir, onun orijinden geçmesini bozmayacaktır. O halde bu durumu $y = ax^2$ diyerek aşabiliriz. Şimdi tepe noktası ve geçtiği bir noktası bilinen parabolün denklemini yazabilecek kıvama geldik.



Yukardaki gibi tepe noktasının koordinatları (r, k) olan parabollerin denklemini bulacağız. Bulalım: Önce $y = x^2$ parabolüne nazaran kolların kavisiyle oynanmış olabileceğini düşünüp $y = ax^2$ diyoruz. Sonra r birim sağa doğru kaydırıldığından $y = a(x - r)^2$ diyoruz. Son olarak da k birim yukarı kaydırıldığından $y = a(x - r)^2 + k$ diyoruz. Böylelikle formülü çıkartmış oluyoruz.

Yalnız bu denklem tepe noktası (r, k) olan tüm parabollerin genel denklemidir. Bir parabol sadece tepe noktasıyla belli olmayacağından, denkleminin yazılabilmesi için bir başka noktası daha bilinmelidir. O nokta kullanılarak da a başkatsayısı bulunur. Eğer bu bir başka nokta parabolün y eksenini kestiği noktaysa daha kolay bir yol da mevcuttur. Zira parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatının, parabol denklemindeki sabit terim olduğunu biliyoruz. "a kaç seçilmeli ki sabit terim o ordinata eşit olsun?" sorusuna cevap vererek a'yı zihinden bulmak bile mümkündür. Ne demek istediğimizi örneklerdeki farklı çözümlere bakarak daha iyi anlayabilirsiniz.

Örnek [2006 ÖSS]. *$f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibi, Ox eksenine $(1, 0)$ noktasında teğet olan ve $(0, 3)$ noktasından geçen paraboldür. Buna göre, $f(3)$ kaçtır?*



A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 12

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz. İlki bulduğumuz formülü, ikincisi formülü bulduğumuz metodu kullanacak.

Birinci yol. Tepe noktası (1, 0) olup, (0, 3) noktasından geçen parabolün denklemi sorulmaktadır. Hemen formülümüzde yerine koyalım.

$$y = a(x-r)^2 + k = a(x-1)^2 + 0$$

$x = 0$ için $y = 3$ olması gerektiğinden a'nın 3 olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $f(x) = 3(x-1)^2$ olacağından $f(3) = 12$ olarak bulunur.

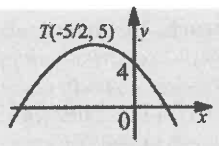
İkinci yol. Grafik orijinden geçen bir parabolün 1 birim sağa doğru kaymış hali olduğundan denklemi

$$y = a(x - 1)^2 = a(x^2 - 2x + 1) = ax^2 - 2ax + a$$

şeklinde olmalıdır. Parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı 3 olduğundan denklemin sabit terimi de 3 olmalıdır. Yani $a = 3$'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek [1996 ÖYS]. *Şekilde grafiği verilen parabolün tepe noktası $T(-\frac{5}{2}, 5)$, y eksenini kestiği nokta da $A(0, 4)$'tür. Bu parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre b kaçtır?*



A) $-\frac{5}{4}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm: Üç farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Parabol, y eksenini $A(0, 4)$ noktasında kestiğinden denklemde x yerine 0 yazdığımızda y'nin 4 çıkması gerekiyor. Bu yüzden $c = 4$ olmalıdır. Diğer yandan parabol $T(-\frac{5}{2}, 5)$ noktasından geçtiğinden

$$5 = a\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + 4$$

$$1 = \frac{25a}{4} - \frac{5b}{2}$$

$$25a - 10b = 4$$

yazabiliriz. Tepe noktasının apsisinden de $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$ bulunur. Son iki eşitlik birlikte düşünülünce $b = 5a$ olduğundan

$$25a - 50a = 4$$

eşitliğinden $a = -\frac{4}{25}$ çıkar. O halde $b = 5a = -\frac{4}{5}$ olur.

İkinci yol. Tepe noktası belli parabol denklemi formülünü kullanacağız. $r = -\frac{5}{2}$ ve $k = 5$ olarak verildiğinden,

$$y = a\cdot(x - r)^2 + k$$

$$y = a\cdot(x + \frac{5}{2})^2 + 5$$

Parabol (0, 4) noktasından da geçtiğinden,

$$4 = a\cdot(0 + \frac{5}{2})^2 + 5$$

eşitliği çözülürse $a = -\frac{4}{25}$ çıkar. Buna göre denklem düzenlenirse b değerine erişilir.

Üçüncü yol. Orijinden geçen bir $y = ax^2$ parabolü 5/2 birim sola 5 birim de sağa doğru kaydırılmış. O halde denklemi

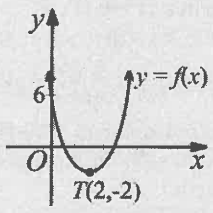
$$y = a\cdot(x + \frac{5}{2})^2 + 5$$

şeklinde olmalıdır. Parabolün sabit terimi 4 olmalıdır. Bu durumda $a\cdot(x + \frac{5}{2})^2$ ifadesinin sabit terimi -1 olmalıdır.

Tamkarenin sabit terimi $\frac{25}{4}$ diye $a = -\frac{4}{25}$ olmalıdır. Gerisi diğer çözümlerde yaptığımız gibidir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda tepe noktası $T(2,-2)$ olup y eksenini 6 ordinatlı noktada kesen $y=f(x)$ parabolünün grafiği çizilmiştir. Buna göre $f(-1)$ kaçtır?*



A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

Çözüm: Birinci yol. Tepe noktası ve geçtiği bir noktası belli olan parabollerin denklemini bulma formülünden yapacağız.

$$y=a\cdot(x-r)^2+k$$
$$y=a\cdot(x-2)^2-2$$
$$6=a\cdot(0-2)^2-2$$
$$8=4a \text{ buradan } a=2$$

olduğundan parabolün denklemi $y=2\cdot(x-2)^2-2$ dir. O halde $f(-1)=2\cdot 9-2=16$'dır.

İkinci yol. Orijinden geçen bir $y=ax^2$ parabolü 2 birim sağa 2 birim de aşağı doğru kaydırılmış. O halde denklemi

$$y=a\cdot(x-2)^2-2$$

şeklinde olmalıdır. Parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı 6 diye, denklemin sabit terimi 6 olmalıdır. Bu durumda $a\cdot(x-2)^2$ ifadesinin sabit terimi 8 olmalıdır. Tamkarenin sabit terimi 4 olacağından $a=2$'dir.

$$f(x)=2\cdot(x-2)^2-2$$

bulunduğundan $f(-1)=2\cdot 9-2=16$'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tepe noktası $T(1,2)$ olup, $G(3,-6)$'dan geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=2x^2$ B) $y=2x^2+4x$ C) $y=-2x^2+4x$
D) $y=-2x^2+4x-1$ E) $y=-2x^2+4x-4$

Çözüm: $r=1$ ve $k=2$ olduğundan,

$$y=a\cdot(x-r)^2+k=a\cdot(x-1)^2+2$$

olur. $G(3,-6)$ noktası parabol üstünde olduğundan hemen görevimizi yapalım:

$$-6=a\cdot(3-1)^2+2$$

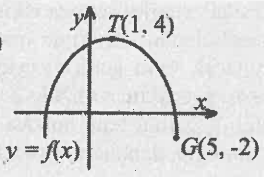
olur ki

$a=-2$ bulunur. Düzenlenirse;

$$y=-2\cdot(x-1)^2+2=-2x^2+4x.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda grafiği verilen parabolün tepe noktası $T(1,4)$ olup, parabol $G(5,-2)$ noktasından geçmektedir. Buna göre $f(8)$ kaçtır?*



A) −115/8 B) 115/8 C) 115 D) 115/4 E) −115/4

Çözüm: Parabolün denklemi olan $y=f(x)$ fonksiyonunu bulup, x yerine 8 yazacağız. $r=1$ ve $k=4$ diye

$$y=a\cdot(x-r)^2+k=a\cdot(x-1)^2+4$$

olur. $G(5,-2)$ noktası parabol üstünde olduğundan denklemi sağlar:

$$-2=a\cdot(5-1)^2+4$$

olur ki $a=-3/8$ bulunur. Düzenlenirse;

$$y=f(x)=\frac{-3}{8}\cdot(x-1)^2+4=\frac{-3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{29}{8}$$

bulunur, dolayısıyla

$$f(8)=\frac{-3}{8}\cdot 8^2+\frac{3}{4}\cdot 8+\frac{29}{8}=\frac{-115}{8}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *x eksenine negatif tarafta teğet, kolları yukarı doğru bir parabol düşünün. Tepe noktası A olsun. B de parabol üstünde bir nokta olsun.*
O orijin olmak üzere ABO üçgeni, alanı $16\sqrt{3}$ br² olan bir eşkenar üçgense, bu parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=(x+8)^2$ B) $y=-(x+8)^2$ C) $y=(x-4)^2$
D) $4y=\sqrt{3}(x+8)^2$ E) $y=(x-8)^2+5$

Çözüm: Eşkenar üçgenin alanı verildiğinden, bir kenar uzunluğunun 8 birim olduğunu bulabiliriz. Demek ki A noktasının koordinatları $(-8,0)$'dır. Demek ki parabol denklemi $y=a(x+8)^2$ şeklinde. B noktasının koordinatları da $(-4,4\sqrt{3})$ olduğundan a'yı $\frac{\sqrt{3}}{4}$ olarak buluruz.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
$A(0, 2)$, $B(-1, 1)$ ve $C(1, 7)$ noktalarından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 + 3x + 2$ B) $y = 2x^2 + 3x + 2$ C) $y = -x^2 + 3x - 2$
D) $y = 2x^2 + x + 3$ E) $y = x^2 + 7x + 2$

2.
$A(-1, 0)$ ve $C(0, 4)$ noktalarından geçen parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde yazılsın.
Buna göre $a - b + 2c$ toplamının değeri kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
$$ax^2 + bx + c = 0$$
denkleminin kökleri -2 ve 4 olup, $y = ax^2 + bx + c$ parabolü $(1, 9)$ noktasından geçmektedir. **Buna göre parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?**

A) $y = -x^2 + 2x + 8$ B) $y = x^2 - 2x + 8$ C) $y = 2x^2 + 4x + 4$
D) $y = -2x^2 + x + 4$ E) $y = x^2 + 2x - 8$

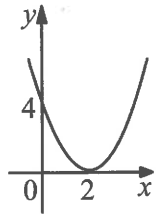
4.
$$y = ax^2 + bx + c$$
parabolü x eksenini 1 ve 3 apsisli noktalarda kesmekte olup, $G(-2, 15)$ noktasından geçtiğine göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
Tepe noktası $T(-1, 1)$ olup $A(2, 19)$ noktasından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

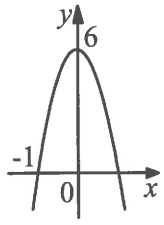
A) $y = 3\cdot(x + 1)^2 + 1$ B) $y = (x + 1)^2 + 1$
C) $y = 2\cdot(x + 1)^2 + 1$ D) $y = 2\cdot(x - 1)^2 - 1$
E) $y = (x + 1)^2 - 1$

6.
f fonksiyonu şekilde verildiği gibi Ox eksenine $(2, 0)$ noktasında teğettir.
$(0, 4)$ noktasından da geçen bu parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



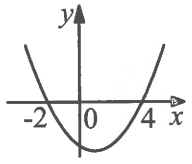
A) $y = x^2 - 4x + 4$ B) $y = 3x^2 - 4x$
C) $y = x^2 - 2x + 4$ D) $y = x^2 - 2x + 2$
E) $y = x^2 + 6x - 4$

7.
Yan şekilde grafiği verilen parabolün tepe noktası $T(0, 6)$'dır.
$(-1, 0)$ noktasından da geçen parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre a değeri kaça eşittir?



A) -10 B) -6 C) -1 D) 0 E) 6

8.
x eksenini $(-2, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarında kesen, kolları yukarı **$y = ax^2 + bx + c$ parabolü için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**



A) Tepe noktasının apsisi pozitiftir.
B) Tepe noktasının ordinatı negatiftir.
C) a pozitiftir.
D) b pozitiftir.
E) c negatiftir.

9.
Tepe noktası $T(5, -25)$ olan parabol orijinden geçtiğine göre parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 - 10$ B) $y = x^2 - 10x$ C) $y = x^2 - 10x + 15$
D) $y = 5x^2 - 10x$ E) $y = 5x^2 - 15x + 20$

10.
$y = x^2$ parabolü x ekseni üzerinde sağa doğru 1 br, y ekseni üzerinde yukarı doğru 2 br kaydırılırsa hangi parabol ile çakışır?

A) $y = 2(x - 1)^2$ B) $y = (x - 2)^2$ C) $y = 2x^2 + 1$
D) $y = (x - 1)^2 - 2$ E) $y = (x - 1)^2 + 2$

1.B 2.D 3.A 4.A 5.C 6.A 7.B 8.D 9.B 10.E

CEVAPLI TEST 2

1.
$A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ ve $C(0, 2)$ noktalarından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 - 1$ B) $y = 1 - x^2$ C) $y = 2 - x^2$
D) $y = 2x^2 - 2$ E) $y = 2 - 2x^2$

2.
$A(-2, -6)$, $B(0, 2)$ ve $C(2, -6)$ noktalarından geçen parabolün, x eksenini kestiği noktaların apsisleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) -2 ve 2 B) -1 ve 1 C) -2 ve 1 D) -1 ve 2 E) 1 ve 2

3.
$A(1, 1)$, $B(-2, 1)$ ve $C(5, 3)$ noktalarından geçen parabol, y eksenini hangi noktada keser?

A) $-\frac{6}{7}$ B) $-\frac{8}{7}$ C) 0 D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{8}{7}$

4.
Denkleminin kökleri $\{0, 5\}$ olan bir parabol,
$G(3, 1)$ noktasından geçiyorsa denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 5x)$ B) $y = \frac{1}{6}(x^2 - 5x)$
C) $y = -\frac{1}{6}(x^2 + 5x)$ D) $y = \frac{5}{6}(x^2 - 5x)$
E) $y = -\frac{5}{6}(x^2 - 5x)$

5.
$A(-1, 3)$, $B(0, 4)$ ve $C(1, 32)$ noktalarından geçen parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ **olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?**

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

6.
Denkleminin kökleri $\{-3, 3\}$ olan bir parabol, $G(2, 1)$ noktasından geçiyorsa y eksenini nerde keser?

A) $-\frac{9}{5}$ B) $-\frac{5}{9}$ C) 0 D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{9}{5}$

7.
Kökleri $\{2, 4\}$ olan ikinci dereceden bir denklemin grafiği $G(3, 1)$ noktasından geçiyorsa denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -(x+2)(x-4)$ B) $y = -(x-2)(x+4)$
C) $y = (x-2)(x-4)$ D) $y = (x+2)(x-4)$
E) $y = -(x-2)(x-4)$

8.
Kökleri $\{2, 4\}$ olan ikinci dereceden bir denklemin grafiği y eksenini -1 ordinatlı noktada kesiyorsa denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -\frac{1}{8}(x+2)(x-4)$ B) $y = -\frac{1}{8}(x+2)(x+4)$
C) $y = -\frac{1}{8}(x-2)(x-4)$ D) $y = -\frac{1}{8}(x-2)(x+4)$
E) $y = \frac{1}{8}(x-2)(x-4)$

9.
Tepe noktası $T(0, 5)$ olup, $G(3, 0)$ noktasından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$ B) $y = -\frac{5}{9}x^2 - 5$ C) $y = -\frac{10}{9}x^2 + 5$
D) $y = -\frac{10}{9}x^2 - 5$ E) $y = -\frac{5}{9}(x+5)^2$

10.
Tepe noktası $T(1, 3)$ olup, $G(2, 1)$ noktasından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -2x^2 + 4x - 1$ B) $y = -2x^2 + 4x + 1$
C) $y = -2x^2 + 4x + 3$ D) $y = -2x^2 + 4x$
E) $y = -2x^2 + 4x - 2$

1.E 2.B 3.D 4.A 5.B 6.E 7.E 8.C 9.A 10.B

CEVAPLI TEST 3

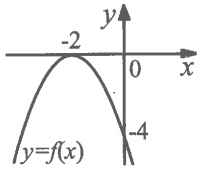
1.
Tepe noktası $T(-1, -2)$ olup, $G(0, 4)$ noktasından geçen parabol y eksenini nerde keser?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

2.
Tepe noktası $T(2, 3)$ olup, $G(-1, 1)$ noktasından geçen parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ **olduğuna göre** $a + b + c$ **toplamı kaçtır?**

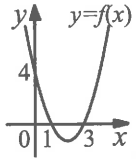
A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{15}{9}$ D) $\frac{20}{9}$ E) $\frac{25}{9}$

3.
Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



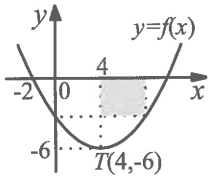
A) $y = -x^2 + 4x + 4$ B) $y = -x^2 - 4x + 4$
C) $y = -x^2 - 4x - 4$ D) $y = -x^2 + 2x$
E) $y = -x^2 + 2x - 4$

4.
Şekildeki grafik
$f(x) = ax^2 + bx + c$
fonksiyonuna ait olduğuna göre $b + c$ **toplamı kaçtır?**



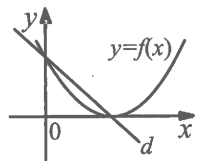
A) $-\frac{16}{3}$ B) -4 C) $-\frac{4}{3}$ D) -1 E) 0

5.
$f(x) = ax^2 + bx + c$
fonksiyonunun koordinat düzlemindeki görüntüsü verilmiştir.
$T(4, -6)$ tepe noktası olduğuna göre şekilde taranmış dikdörtgeninin alanı kaç birim karedir?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) $\frac{40}{3}$

6.
Şekildeki parabolün denklemi $y = a(x - r)^2$ ve d doğrusunun denklemi de $y = 2 - 2x$ **olduğuna göre** $\frac{r}{a}$ **oranı kaçtır?**



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

7.
$y = x^2$ parabolü x ekseninin pozitif tarafına doğru 2 birim kaydırılırsa denklemi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $y = x^2 - 2$ B) $y = 2 - x^2$ C) $y = 2x^2$
D) $y = (x+2)^2$ E) $y = (x-2)^2$

8.
$y = x^2$ parabolü y ekseninin pozitif tarafına doğru 2 birim kaydırılırsa denklemi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $y = x^2 + 2$ B) $y = x^2 - 2$ C) $y = 2x^2$
D) $y = (x+2)^2$ E) $y = (x-2)^2$

9.
$y = x^2$ parabolü x ekseninin negatif tarafına doğru 3 birim ve y ekseninin negatif tarafına doğru 2 birim kaydırılırsa denklemi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $y = (x-3)^2 + 2$ B) $y = (x-3)^2 - 2$ C) $y = 2x^2 - 3$
D) $y = (x+3)^2 - 2$ E) $y = (x+3)^2 + 2$

10.
$y = x^2$ parabolünün $(0, -1)$ noktasına göre simetriğinin denklemi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $y = x^2 - 2$ B) $y = 2 - x^2$ C) $y = 1 - x^2$
D) $y = (x+2)^2$ E) $y = (x-2)^2$

1.C 2.E 3.C 4.C 5.E 6.C 7.E 8.A 9.D 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parabolün Tepe Noktası

Önce bir parabolün tepe noktası neresidir, onu hatırlatalım. Kabaca, parabolün artmaktan azalmaya veya azalmaktan artmaya geçtiği nokta diyebiliriz. Grafik olarak yorumlayınca da kolları yukarı olan paraboller için çukurun en derin noktası, kolları aşağı doğru olan paraboller için de tümseğin zirve yaptığı nokta yani tepe noktası olduğunu anlayabiliriz. Şimdi önümüzde parabolün grafiği olmadan tepe noktasının koordinatlarının nasıl bulunabileceğini göreceğiz. İlk yolumuz biraz uzun ama incelemenizde fayda var. İlerde daha kısa bir şekilde elde edeceğiz. Başlayalım:

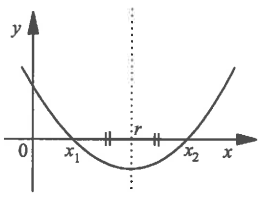
$y = ax^2 + bx + c$ denklemini $y = a\cdot(x - r)^2 + k$ haline getirerek r ve k'nin formüllerini çıkarmış olacağız.

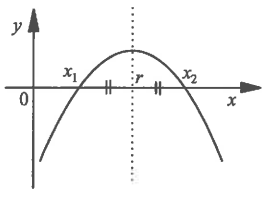
$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \\ &= a\cdot\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})\right] \\ &= a\cdot(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

olduğundan $r = \frac{-b}{2a}$ ve $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ bulunur. Görüldüğü üzere r'nin formülü şık ama k'nin formülü gıcık. Buna hemen bir formül bulmalıyız: $T(r, k)$ noktası parabolün üzerinde olduğundan parabol denklemini sağlaması gerekir. O halde x yerine r yazdığımızda çıkacak y değeri k olmalıdır. Buradan anlaşılması gereken şudur: k'yi bulmak isteyen bir vatandaş, fonksiyonda x gördüğü yere r'yi yazarak da k'yi bulabilir.

$$k = f(r) = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Unutmayın ki, k değeri fonksiyonun alabileceği minimum ya da maksimum değeri verir, r değeri ise o minimum ya da maksimum değerini hangi x değeri için aldığını verir. Şimdi de başka bir yol gösterelim.





Şekillerden de görüldüğü üzere bir parabolün tepe noktasının apsisi, kollar ister yukarı doğru olsun, isterse aşağı doğru, daima köklerin tam ortasında yer alır. O halde

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

olarak bulunur. Diğer yandan her tepe noktası parabolün üstünde olduğundan (r, k) noktası parabol denklemini sağlamalıdır. Denklemde x yerine r yazarsak bulacağımız değer k olur. İşlemleri yaparsanız

$$k = f(r) = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

çıkacaktır. Burada aklınıza şöyle bir soru gelmiş olabilir: Ya parabol x eksenini kesmiyorsa? O zaman parabolü aşağı veya yukarı doğru kaydırdığımızı düşünün. Sizce aşağı veya yukarı hareketlerde tepe noktasının apsisi yani r değişir mi? Tabii ki hayır. İşte bu yüzden işlemlerimizi parabol x eksenini 2 farklı noktada kesiyormuş gibi yapmamızda bir sakınca yoktur.

Formülleri çıkardık ama bunları kullanıyor musun diye bir sorun bakayım bana. Kullanmayalı rahat bir 15 sene olmuştur. ☺ Ben hemen parabolün denklemini tamkareye çeviriyorum. O tamkare ifadeyi de $y = a\cdot(x - r)^2 + k$ gibi düşününce a kaçtır, r kaçtır, k kaçtır, hemen belli oluyor. Şimdi sayılarla örnek vereyim de ne demek istediğimi anlamayanlar anlasın.

Örnek. *$y = -x^2 + 6x - 2$ parabolünün tepe noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (6, −2) B) (1, 2) C) (3, 5) D) (3, 7) E) (6, 7)

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Formülü kullanacağız.

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\cdot(-1)} = 3,$$

$$k = f(r) = f(3) = -3^2 + 6\cdot3 - 2 = 7$$

olduğundan $T(r, k) = T(3, 7)$.

İkinci yol. Tamkareye dönüştüreceğiz.

$$y = -x^2 + 6x - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 7 = -(x - 3)^2 + 7$$

olduğundan $T(r, k) = T(3, 7)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = x^2 + 4x + 8$ parabolünün tepe noktasının orijine olan uzaklığı kaç br dir?*

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $2\sqrt{5}$ E) 4

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.
Birinci yol. Tepe noktasının önce bir koordinatlarını bulalım, orijine olan uzaklığı kolay.

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot 1} = -2,$$

$$k = f(r) = f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 8 = 4.$$

$T(-2, 4)$ noktasının orijine olan uzaklığı ise

$$\sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

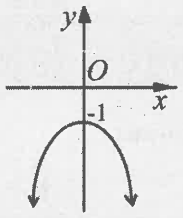
İkinci yol. Tavsiyemiz bu yoldur, verilen ikinci dereceden denklemi derhal tamkare haline getirin, gerisi sıratacak zaten.

$$y = x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Ne kadar da $y = a\cdot(x - r)^2 + k$ formülüne benziyor değil mi? Aslında ta kendisi, $r = -2$ ve $k = 4$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tepe noktasının $(0, -1)$ olduğu görülen yanda grafiği çizilmiş parabolün denklemi $y = (m-1)x^2 - (m^2-9)x - m + 2n$ olduğuna göre n kaç olmalıdır?*



A) -2 B) -3 C) -4 D) 2 E) 3

Çözüm: Parabolün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğundan $r = 0$, o halde $b = 0$'dır. Yani $m^2 - 9 = 0$. Buradan $m = 3$ veya $m = -3$ bulunur. Parabolün kolları aşağı doğru olduğundan $m - 1 < 0$ olmalı, bu durumda $m = -3$'tür. Bir açık parabol denkleminin sabit terimi y eksenini kestiği noktayı vereceğinden $-m + 2n = -1$ yani $3 + 2n = -1$ olur. Buradan $n = -2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1982 ÖYS]. *$y = x^2 + (m - 1)x + 1$ parabolü, x eksenine, eksenin pozitif tarafında teğet olduğuna göre m'nin değeri kaçtır?*

A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -3

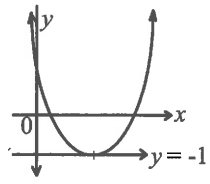
Çözüm: Parabol x eksenine teğet olduğundan, ilk olarak denklemi tamkare olmalıdır. Denkleminin tamkare olması için de $\Delta = 0$ yani $m = 3$ veya $m = -1$ olması gerektiğini buluruz.
İkinci olarak da verilene göre tepe noktasının apsisi yani r pozitif olmalıdır. Bunun için de x'in katsayısı negatif olmalıdır. O halde $m = -1$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x) = x^2 - (2m + 2)x + m + 6$ fonksiyonunun tepe noktası $y = -1$ doğrusu üzerinde ise m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Çözüm: Başkatsayı pozitif olduğundan, parabolün kolları yukarı doğru olup, parabol yandaki gibidir. Parabolün tepe noktası da $y = -1$ doğrusu üstünde olduğundan $k = -1$'dir.



$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot 1\cdot(m+6) - (2m+2)^2}{4\cdot 1} = -1$$

eşitliği çözülürse $(m + 3)\cdot(m - 2) = 0$ buluruz ki $m = -3$ veya $m = 2$ olabilir. O halde toplam -1.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x \in [1,8]$ olduğuna göre,*

$$f(x) = x^2 - 12x + 1$$

parabolünün alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) -31 B) -16 C) -10 D) -9 E) -1

Çözüm:

$$f(x) = x^2 - 12x + 1$$
$$= x^2 - 12x + 36 - 35$$
$$= (x - 6)^2 - 35$$

olduğundan $(x - 6)^2$ ifadesini ne kadar büyük tutabilirsek, $f(x)$ o kadar büyük olur. Bu ifade de $[1, 8]$ aralığından $x = 1$ için en büyük olur. O halde

$$\max f(x) = f(1) = 1^2 - 12\cdot 1 + 1 = -10.$$

Doğru Cevap: C.

Örnek [ÖSS 1993]. *$[-1,3]$ aralığında tanımlı*

$$f(x) = 4 - x^2$$

fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

A) -6 B) -5 C) -4 D) 2 E) 3

Çözüm: $4 - x^2$ değeri, $|x|$ ne kadar büyük olursa o kadar küçüleceğinden, $x = 3$ için en küçük değerini alır.

$$4 - 3^2 = -5.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y=-x^2-2x+8$ parabolünün $-5\le x\le 0$ aralığında aldığı en büyük değerle en küçük değerin çarpımı kaçtır?*

A) –63 B) –56 C) 0 D) 56 E) 63

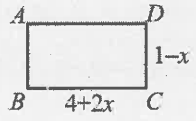
Çözüm: $y=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$ olduğundan ifade en büyük değeri -1 için, en küçük değeri de -5 için alır. O halde

$$y_{max}=-(-1+1)^2+9=9$$
$$y_{min}=-(-5+1)^2+9=-7\text{'dir.}$$

Çarpımları $9\cdot(-7)=-63$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD dikdörtgeninin kenar uzunlukları şekilde verildiği gibidir. Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç olabilir?*



A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

Çözüm: Dikdörtgenin alanı eni ile boyunun çarpımı olduğundan

$$\text{Alan}(ABCD)=(2x+4)(1-x)$$
$$=-2x^2-2x+4=-2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{2}$$

olur. Buradan da $x=-1/2$ için alanın en çok 9/2 olabileceğini anlarız. ''Hocam, x nasıl negatif olabilir ki?'' demeyin. x değil, uzunluk negatif olamaz. Yani $-2<x<1$ olduğu sürece uzunluklar negatif olmaz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y=x^2+6x+m-2$ parabolünün x eksenini kesmediği biliniyorsa, m'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?*

A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: Parabol x eksenini kesmiyorsa, reel kökü olmadığından kesmiyordur. Demek ki diskriminantı negatifmiş.

$$\Delta=6^2-4\cdot1\cdot(m-2)<0$$

olmalıdır. O halde $m>11$ eşitsizliğinden m'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 12'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x)=x^2+(m+3)x+n+1$ parabolünün tepe noktası y ekseni üzerindedir. Bu parabolün görüntü kümesindeki en küçük eleman 5 olduğuna göre $m+n$ kaçtır?*

A) 1 B) 0 C) –1 D) –2 E) –3

Çözüm: Tepe noktası y ekseni üzerinde olan parabollerin denklemleri; a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$ax^2+b$$

şeklindedir. Yani x'li terim içermez. Daha doğrusu x'li terimin katsayısı 0'dır. Dolayısıyla $m+3=0$'dır. Buradan $m=-3$ bulunur. Parabolün görüntü kümesinin en küçük elemanı demek, tepe noktasının ordinatı demek olduğundan $\frac{4ac-b^2}{4a}=5$ yani $\frac{4\cdot1\cdot(n+1)-0^2}{4\cdot1}=5$ eşitliğinden $n=4$ bulunur. Öyleyse $m+n=-3+4=1$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *k negatif bir reel sayı olmak üzere,*

$$f(x)=k\left(x^2+8x+15\right)$$

parabolü veriliyor. Buna göre $(x-3)\cdot f(x)\le 0$ eşitsizliğini sağlayan negatif tam sayıların toplamı kaçtır?

A) –12 B) –9 C) –8 D) –7 E) –4

Çözüm:

$$(x-3)\cdot f(x)\le 0$$
$$(x-3)\cdot k\cdot(x^2+8x+15)\le 0$$
$$(x-3)\cdot k\cdot(x+5)\cdot(x+3)\le 0$$

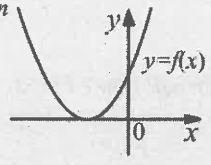
Bu eşitsizlik sistemini çözelim. Hemen kökleri boy sırasına dizelim. Başkatsayıların işaretlerinin çarpımı negatif olduğundan en sağa "–" yazıp, sola doğru ilerleyelim.

$$+\quad(-5)\quad-\quad(-3)\quad+\quad(3)\quad-$$

Bize fonksiyonun negatif olduğu yerler sorulduğundan çözüm aralığı $[-5,-3]\cup[3,+\infty)$ olmalıdır. Buradaki negatif tam sayılar toplamı da $-5-4-3=-12$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda grafiği verilmiş olan $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)$ olup diskriminantı Δ'dır. Parabol x eksenine şekildeki gibi teğet olduğuna göre a, b, c, r, k, Δ değerlerinden kaç tanesi pozitiftir?*



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

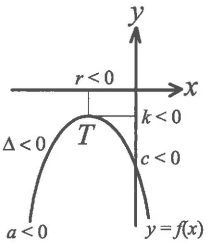
Çözüm: Kollar yukarı doğru olduğundan $a>0$, y eksenini pozitif tarafta kestiğinden $c>0$, tepe noktası x ekseninin üzerinde ve negatif tarafında olduğundan $r<0$ ve $k=0$, aynı sebepten $\Delta=0$, $b=-2ar$ olup, $ar<0$ olduğundan $b>0$. Dolayısıyla sadece 3 tanesi pozitiftir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ olup diskriminantı Δ'dır. Buna göre a, b, c, r, k, Δ değerlerinden en çok kaç tanesi aynı anda negatif olabilir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Eğer $f(x)$'in, yanda görüldüğü üzere, tepe noktası analitik düzlemin III. bölgesinde ve kolları aşağı doğruysa, bahsi geçen altı değer de aynı anda negatif olabilir. Kollar aşağı doğru olduğundan $a < 0$, y eksenini negatif tarafta kestiğinden $c < 0$, Tepe noktası III. bölgede olduğundan $r < 0$ ve $k < 0$, x eksenini kesmediğinden $\Delta < 0$ ve $b = -2ar$ olup, $ar > 0$ olduğundan $b < 0$. Dolayısıyla altı değerin altısı birden aynı anda negatif olabilir.



Doğru cevap: E.

Örnek. *n parametresi değiştikçe, $f(x) = x^2 - (n-1)x + 1$ parabolünün tepe noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = x$ B) $y = 1 - x$ C) $y = 1 + x^2$
D) $y = 1 - x^2$ E) $y = x^2 - 4$

Çözüm: Tepe noktası

$$(r, k) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 1 - (n-1)^2}{4 \cdot 1} \right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{-n^2 + 2n + 3}{4} \right)$$

olduğundan

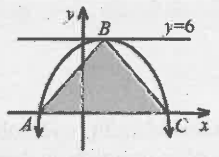
$$x = \frac{n-1}{2} \text{ ve } y = \frac{-n^2 + 2n + 3}{4}$$

denirse $n = 2x + 1$ olduğundan

$$y = \frac{-(2x+1)^2 + 2 \cdot (2x+1) + 3}{4} = \frac{-4x^2 - 4x - 1 + 4x + 2 + 3}{4} = \frac{-4x^2 + 4}{4} = 1 - x^2$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *m ve n birer reel sayı olmak üzere denklemi $y = -x^2 + mx + n$ olan yandaki parabolün tepe noktası $y = 6$ doğrusu üzerindedir. Bu parabol x eksenini A ve C noktalarında kesiyor olup tepe noktası B olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?*



A) 3 B) $3\sqrt{6}$ C) 6 D) $6\sqrt{6}$ E) $12\sqrt{6}$

Çözüm: Üçgenimizin yüksekliği 6 br olduğundan tabanının uzunluğunu bulduk mu soru çözüldü demektir. Taban uzunluğu $|AC|$ olduğundan bu değerin kökler farkının mutlak değeri olduğunu biliyoruz.

$$|AC| = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{\Delta}$$

Şimdi sıra Δ'yı bulmaya geldi. Tepe noktasının ordinatı 6 olarak verildiğinden

$$6 = k = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{-4}$$

eşitliğinden $\Delta = 24$ olarak bulunur. O halde

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{\sqrt{\Delta} \cdot 6}{2} = 3\sqrt{24} = 6\sqrt{6} \text{ br}^2$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdaki parabollerden hangisinin simetri ekseniyle*

$$y = x^2 - 6x + 2008$$

parabolünün simetri ekseni çakışıktır?

A) $y = x^2 + 6x - 2008$ B) $y = x^2 + 6x$
C) $y = 2008 + x^2$ D) $y = 2x^2 - 12x + 1$
E) $y = (x+3)^2 - 4$

Çözüm: Tepe noktasının apsisi r olan bir parabolün simetri ekseninin $x = r$ doğrusu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla seçenekteki parabollerin hangisinin r'sinin soruda verilen parabolün r'siyle aynı olduğuna bakacağız.

$r = -\frac{b}{2a}$ olduğundan soruda verilen parabol için $r = 3$ tür. D seçeneğindeki parabol için de bu değer 3 olduğundan doğru cevap D seçeneğidir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$y = 3x^2 - 12x - 1$

parabolünün tepe noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) (−2, 13) B) (−2, 3) C) (2, 3) D) (2, −13) E) (−2, −3)

2.

$y = -x^2 + 4x - 2$

parabolünün tepe noktasının koordinatlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 4

3.

$y = bx^2 - (b + 2)x + b + a$

parabolünün tepe noktası $T(1, 3)$ olduğuna göre a'nın değeri kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$y = ax^2 + bx + c$

parabolünün kolları aşağı doğru ve tepe noktası $T(r, k)$ dır.

$r < 0$, $k < 0$ olduğu bilindiğine göre a, b, c değerlerinden hangileri ya da hangisi kesinlikle negatiftir?

A) a B) b C) c D) a ve b E) a, b ve c

5.

$y = x^2 - 4mx + m + 5$

parabolünün tepe noktasının apsisi 2 ise ordinatı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

$y = x^2 - 10x + 6$

$y = x^2 - 5mx + m + 3$

parabollerinin tepe noktalarının apsisleri aynı olduğuna göre m'nin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$y = 3x^2 - (m - 2)x + 8$

parabolünün tepe noktasının apsisinin negatif olması için m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $(-\infty, 2]$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(-\infty, +\infty)$ D) $(2, +\infty)$ E) $[2, +\infty)$

8.

$y = x^2 - 2x + m$

parabolünün tepe noktası $T(k, 2k)$ olduğuna göre m'nin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$y = x^2 - 2mx + 3$

parabolünün tepe noktası $T(r, 2)$ olduğuna göre r aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −3 B) −2 C) 0 D) 1 E) 2

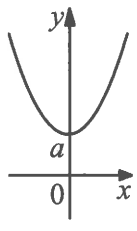
10.

Yan şekilde grafiği verilen

$y = f(x) = x^2 - (6m + 12)x - 4m$

fonksiyonunun minimum değeri

$(0, a)$ noktası olduğuna göre a'nın değeri kaça eşittir?



A) −8 B) −4 C) 0 D) 4 E) 8

1.D 2.E 3.B 4.E 5.A 6.B 7.B 8.C 9.D 10.E

CEVAPLI TEST 2

1.

$y = x^2 + 3x - 2$

parabolünün tepe noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})$ B) $(\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$ C) $(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})$
D) $(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$ E) $(-\frac{3}{4}, -\frac{17}{4})$

2.

$y = x^2 + 4x - 1$

parabolünün tepe noktasının orijine olan uzaklığı kaçtır?

A) $\sqrt{29}$ B) $\sqrt{30}$ C) $\sqrt{31}$ D) $\sqrt{32}$ E) $\sqrt{33}$

3.

$y = x^2 - 4$
$y = x^2 + 9$

parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 5 B) 9 C) 13 D) 15 E) 17

4.

$y = 4x^2 + 16x + 12$

parabolünün tepe noktasından geçip eğimi 2 olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2x + 1$ B) $y = 2x$ C) $y = 2x - 1$
D) $y = 2x + 2$ E) $y = 2x - 2$

5.

$y = -(x - 6)^2$

parabolüyle $y = x^2 + k$ parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklık 10 *br* ise *k*'nin pozitif değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

6.

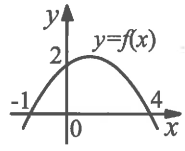
$y = x^2 - 2mx + m$

parabollerinin tepe noktalarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -x^2 + x$ B) $y = x^2$ C) $y = -x^2$
D) $y = x^2 - x$ E) $y = x^2 + 1$

7.

Yanda grafiği verilen *f* fonksiyonunun maksimum değeri kaçtır?



A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{25}{8}$ C) $\frac{15}{4}$ D) 5 E) 3

8.

$y = x^2 - 6x + k$

parabolünün tepe noktasının *x* ekseninin alt bölgesinde konumlanabilmesi için *k* ne olmalıdır?

A) $k < 9$ B) $k > 9$ C) $0 < k < 10$
D) $-9 < k < 0$ E) $-1 < k < 0$

9.

$y = x^2 - 4x + p$

parabolünün tepe noktasının koordinatının (*m*, *n*) ve $2m = n$ olduğu bilindiğine göre *p* kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

10.

$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x = t - 1$ ve $y = t^2 - 8t + 10$

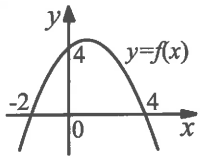
parametrik denklemleri ile verilen parabolün tepe noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–3,3) B) (3,6) C) (6,3) D) (–6,3) E) (3,–6)

1.C 2.A 3.C 4.B 5.D 6.A 7.B 8.A 9.E 10.E

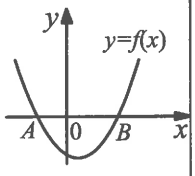
CEVAPLI TEST 3

1.
Şekilde
$f(x) = ax^2 + bx + c$
parabolünün grafiği verilmiştir.
Parabolün tepe noktasının koordinatları (r, k) olduğuna göre $\frac{k}{r}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{15}{4}$ E) $\frac{4}{9}$

2.
Şekildeki grafik
$f(x) = x^2 - 6x + k$
parabolüne aittir. Parabol x eksenini A ve B noktalarında kestiğine ve $2|OA| = |OB|$ **olduğuna göre parabolün tepe noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır?**

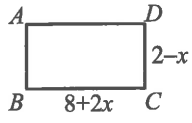


A) –79 B) –78 C) –30 D) 36 E) 66

3.
$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
$g(x) = x^2 - 2x + 11$
$h(x) = x^2 - 2ax + 3 + a^2$
parabollerinin tepe noktalarını köşe kabul eden üçgensel **bölgenin alanının 12 br^2 olduğu bilindiğine göre a aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4.
$ABCD$ dikdörtgeninin kenar uzunlukları şekilde verildiği gibidir.
Bu dikdörtgenin alanı en çok kaç olabilir?



A) 9 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

5. ÖSS 1999
a pozitif bir gerçel sayıdır.
Kenar uzunlukları a cm ve $8 - 2a$ cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 olur?

A) 64 B) 32 C) 24 D) 16 E) 8

6.
p sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere
$y = -px^2 + 4px + 2008$
ifadesi en büyük değerini hangi x için alır?

A) $\frac{p}{4}$ B) $2p$ C) $4p$ D) 2 E) 4

7.
$y = x^2 + 10x + m - 10$
parabolünün x eksenini kesmediği biliniyorsa, m'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 35 B) 36 C) 37 D) 110 E) 111

8.
n parametresi değiştikçe,
$f(x) = x^2 - (n-2)x + 4$
parabolünün tepe noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x$ B) $y = 2 - x$ C) $y = 2 + x^2$
D) $y = 4 - x^2$ E) $y = x^2 - 4$

9.
$y = x^2 + 10x + 26$
parabolünün orijine göre simetriğinin tepe noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–5, 1) B) (5, –1) C) (–5, –1) D) (5, 1) E) (–1, 5)

10.
$y = x^2 - 6x + 10$
parabolünün y eksenini kestiği noktanın parabolün tepe noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $\sqrt{96}$ B) $\sqrt{94}$ C) $\sqrt{92}$ D) $\sqrt{90}$ E) $\sqrt{88}$

1.A 2.B 3.A 4.C 5.E 6.D 7.B 8.D 9.B 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

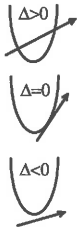
Parabol İle Eğrilerin Kesişimi

Parabol İle Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları. Aslında sadece parabol ve doğru çifti için değil, denklemleri bilinen herhangi bir geometrik şeklin bir diğerine göre konumunu belirlemek için denklemlerini birbirlerine eşitleriz. Ortaya çıkan denklemin kaç farklı reel kökü varsa, o kadar farklı noktada kesiştiklerini söyleriz. Bunun mantığı şudur: Kesişim noktası her iki geometrik şeklin de üzerinde olduğundan, her iki geometrik şeklin de denklemini sağlıyor olmalı, işte bu yüzden eşitlenen denklemlerden ortaya çıkan denklemin kökü zaten her iki denklemin de köküdür. Peki, ya o denklemin tek kökü varsa? O zaman eğriler tek noktada kesişiyorlardır veya teğetlerdir. Eğer hiç reel kökü yoksa da kesişmiyorlardır. Toparlayalım:

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün $y = mx + n$ doğrusuna göre konumunu belirlemek için verilen denklemleri eşitleriz.

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$
$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

denkleminin diskriminantı Δ olsun.



$\Delta > 0$ *ise doğru parabolü iki farklı noktada keser,*

$\Delta = 0$ *ise doğru parabole teğettir,*

$\Delta < 0$ *ise doğru ile parabol kesişmezler.*

Örnek. $y = 2x^2 + 5x + 8$ *parabolü ile* $y = x + 6$ *doğrusunun konumu için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?*

A) Kesişmezler.
B) Doğru, parabole $(-1, 0)$ noktasında teğettir.
C) Doğru, parabole $(-1, 5)$ noktasında teğettir.
D) $(3, 1)$ ve $(-1, 0)$ noktalarında kesişirler.
E) $(6, 7)$ ve $(-1, 5)$ noktalarında kesişirler.

Çözüm:

$$2x^2 + 5x + 8 = x + 6,$$
$$2x^2 + 4x + 2 = 0,$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0 = (x + 1)^2$$

Görüldüğü gibi eşitlenen denklemlerin ortaya çıkardığı denklemin tek kökü var, o halde doğru parabole tek noktada değiyor, yani teğet. $x = -1$ için $y = -1 + 6 = 5$ olduğundan teğet değme noktası koordinatları $(-1, 5)$'tir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $y = x^2 + 4x - 11$ *parabolüyle* $y = 2x - 21$ *doğrusunun birbirine göre durumu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) Kesişmezler.
B) Tek noktada kesişirler.
C) Çakışıktırlar.
D) İki noktada kesişirler.
E) Ben nerden bileyim.

Çözüm: Her zamanki gibi denklemleri ortak çözeceğiz.

$$x^2 + 4x - 11 = 2x - 21,$$
$$x^2 + 2x + 10 = 0.$$

Bu denklemin reel kökü olmadığından doğruyla parabol kesişmezler.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y = kx$ *doğrusu* $y = x^2 + 6x - 11$ *parabolünü orijine göre simetrik iki noktada kestiğine göre k kaçtır?*

A) $-3\sqrt{2}$ B) -3 C) 3 D) 6 E) $3\sqrt{2}$

Çözüm: Orijine göre simetrik iki noktanın apsisleri toplamının 0 olması gerektiği üzerine kurulmuş bir sorudur. Hemen kesişim noktaların apsislerini bulalım. Pardon, bulmayalım, toplamlarını 0'a eşitleyelim.

$$y = x^2 + 6x - 11 = kx$$
$$x^2 + (6 - k)x - 11 = 0$$

denkleminin kökler toplamı 0 olmalıdır. $-b/a = 0$ eşitliğinden $b = 0$ yani $6 - k = 0$ olması gerektiğini buluruz. Demek ki $k = 6$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1967 ÜSS]. $y = x^2 - 1$ *eğrisine teğet ve* $y = 4x - 3$ *doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = 4x - 5$ B) $y = 2x - 5$ C) $y = x - 5$
D) $y = -4x - 5$ E) $y = -2x + 5$

Çözüm: $y = 4x - 3$ doğrusuna paralel olmak demek, eğimi 4 olmak demektir. O halde $y = x^2 - 1$ eğrisine teğet olup, eğimi 4 olan doğruyu bulmalıyız. O doğrunun denklemine $y = 4x + a$ diyelim.

$$x^2 - 1 = 4x + a$$
$$x^2 - 4x - a - 1 = 0$$

eşitliğinin tamkare olması gerekliliğinden, $\Delta = 0$ eşitliği çözülürse $-a - 1 = 4$ yani $a = -5$ bulunur. O halde doğrunun denklemi $y = 4x - 5$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1987 ÖSS]. *Denklemi $y = a^2 - (x - b)^2$ olan parabol, denklemi $y = x^2$ olan parabole teğet olduğuna göre, b'nin a türünden değeri nedir?*

A) $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ B) $\pm a\sqrt{2}$ C) $\pm a$ D) $\pm\frac{a}{2}$ E) $\pm 2a$

Çözüm: İki parabol denklemini eşitlediğimizde ortaya çıkan denklem bir tamkare olmalıdır.

$$a^2-(x-b)^2=x^2$$
$$a^2-x^2+2bx-b^2=x^2$$
$$2x^2-2bx+b^2-a^2=0$$

denkleminin diskriminantını 0'a eşitleyelim.

$$\Delta=(-2b)^2-4\cdot 2\cdot(b^2-a^2)=0$$
$$-4b^2+8a^2=0$$
$$b^2=2a^2$$

olduğundan $b=\pm a\sqrt{2}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x)=x^2$ ve $g(x)=-x^2+32$ parabolleri verilmiştir. Bu parabollerin tepe noktaları ile kesim noktalarının belirttiği dörtgensel bölgenin alanı kaç birimkaredir?*

A) 256 B) 128 C) 64 D) 32 E) 16

Çözüm: $f(x)$ parabolünün tepe noktası (0, 0), $g(x)$ parabolünün ise (0, 32)'dir. Şimdi de kesim noktalarını bulalım. $x^2 = -x^2 + 32$ eşitliğinden $2x^2 = 32$ yani $x = 4$ veya $x = -4$ bulunur. Demek ki kesim noktaları (−4, 16) ve (4, 16) imiş. Bu dört nokta bir deltoit oluşturacağından, alanı $8\cdot\frac{32}{2}=128$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *m parametresi değiştikçe,*

$$y=x^2-mx+5-2m$$

parabollerinin geçtiği sabit nokta nedir?

A) (1, 0) B) (2, 9) C) (−2, −9) D) (−2, 9) E) (2, −9)

Çözüm: $m = 0$ için $y = x^2 + 5$, $m = 1$ için $y = x^2 - x + 3$ olduğundan bu parabollerin kesim noktasını bulmak bize cevabı verir. $x^2 - x + 3 = x^2 + 5$ denkleminden $x = -2$, buradan da $y = 9$ çıkar. Demek ki ortak sabit nokta da (−2, 9)'dur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y=2x+a+b$ doğrusu, $y=x^2+8x+7$ parabolüyle $y=-x^2-4x+b$ parabolüne aynı noktada teğet olduğuna göre doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$x^2+8x+7=2x+a+b$$
$$-x^2-4x+b=2x+a+b$$

denklemleri birer tamkare olmalıdır. İkinci eşitlikten başlayalım:

$$-x^2-4x+b=2x+a+b$$
$$-x^2-4x=2x+a$$
$$x^2+6x+a=0$$

olduğundan $a = 9$ olmalıdır. Şimdi ilk denkleme bakalım:

$$x^2+8x+7=2x+a+b$$
$$x^2+8x+7=2x+9+b$$
$$x^2+6x-2-b=0$$

olduğundan $b = -11$ olmalıdır. O halde doğrunun denklemi

$$y=2x+a+b=2x+9-11=2x-2$$

olacağından, doğru y eksenini (0, −2) noktasında keser.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$y=-x^2+mx-25$$

parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre, m'nin alabileceği değerlerden negatif olanı kaçtır?

A) −9 B) $-3\sqrt{11}$ C) $-\sqrt{11}$ D) −3 E) −1

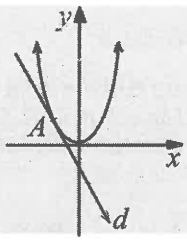
Çözüm: Başlangıç noktasından çizilen teğetlere $y = nx$ doğruları diyelim

$$-x^2+mx-25=nx$$
$$x^2+(n-m)x+25=0$$

bulunur ki bu denklemin tamkare olması gerekir. O halde $n - m = \mp 10$ olmalıdır. Diğer yandan teğetler dik kesiştiğinden n'nin değerlerinin çarpımı −1 olmalıdır. $(m - 10)(m + 10) = -1$ eşitliğinden $m^2 = 99$ bulunur. m'nin negatif değeri $-3\sqrt{11}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yan şekildeki d doğrusu, parabole A(−1, 2) noktasında teğettir. Buna göre d doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $y = -4x - 2$ B) $y = -2x$
C) $y = -x + 1$ D) $y = -4x + 6$
E) $y = -3x - 1$

Çözüm: Parabol orijinden geçtiği için denklemi $y = mx^2$ şeklindedir. Bu parabol aynı zamanda $A(-1, 2)$ noktasından da geçtiğinden $2 = m\cdot(-1)^2$ eşitliğinden $m = 2$ yani parabol denklemi $y = 2x^2$ olarak bulunur.
Doğrunun denklemine de $y = ax + b$ diyelim. Doğru da $A(-1, 2)$'den geçtiği için $2 = a\cdot(-1) + b$ eşitliğinden $2 = -a + b$ yani $b = 2 + a$ olarak bulunur. O halde doğru denklemine $y = ax + 2 + a$ yazabiliriz. Parabolle doğru teğet olduğundan,

$$2x^2 = ax + 2 + a$$

denkleminin tek kökü olmalıdır. Yani diskriminantı sıfır olmalıdır. $2x^2 - ax - 2 - a = 0$ için

$$\Delta = (-a)^2 - 4\cdot2\cdot(-2 - a)$$
$$= a^2 + 16 + 8a = (a + 4)^2$$

eşitliğinden $\Delta = 0$ olması için $a = -4$ bulunur. O halde doğrunun denklemi $y = -4x - 2$.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$f(x) = x^2 - x + 10$$

parabolünün $y = -3x - 13$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi kaçtır?

A) −1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 12

Çözüm: $y = -3x - 13$ doğrusuna paralel olup, parabole teğet olan $y = -3x + k$ doğrusunu düşünün. Teğet değme noktası aranan nokta olur.

$$x^2 - x + 10 = -3x + k$$
$$x^2 + 2x + (10 - k) = 0$$
$$10 - k = 1$$
$$k = 9$$

O halde $(x + 1)^2 = 0$ diye $x = -1$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1967 ÜSS]. $y = x^2 + 2x + 2$ *parabolünün* $y = -2x + 1$ *doğrusuna en yakın noktası aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (2, 1) B) (2, −2) C) (−2, −2) D) (1, 2) E) (−2, 2)

Çözüm: Aranan nokta, parabolün $y = -2x + 1$ doğrusuna paralel olan teğetinin parabole değdiği noktadır. O teğetin denklemi $y = -2x + a$ olsun. Bu durumda

$$x^2 + 2x + 2 = -2x + a$$
$$x^2 + 4x + 2 - a = 0$$

denklemi tamkare olmalıdır. Buradan $a = -2$ bulunur.

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$$

eşitliğinden de değme noktasının apsisinin −2 olduğunu anlarız. Parabol denkleminde yerine yazarsak, ordinatın da 2 olduğunu buluruz. O halde aranan nokta (−2, 2) olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$y = mx \text{ ile } y = x^2 - 4x$$

eğrilerinin kesim noktalarının orta noktalarının geometrik yeri nedir?

A) $y = x^2 - 4x$ B) $y = x$ C) $y = -x$
D) $y = 2x^2 - 4x$ E) $y = x^2 - 2x$

Çözüm: Kesim noktalarını bulalım önce.

$$mx = x^2 - 4x$$
$$x^2 - (4 + m)\cdot x = 0$$
$$x\cdot(x - 4 - m) = 0$$

Kesim noktalarının apsisleri 0 ve $(m + 4)$'tür.
O halde kesim noktaları (0, 0) ve $(m + 4, m^2 + 4m)$ olur. Kesim noktalarının orta noktası da

$$\left(\frac{m+4}{2}, \frac{m^2+4m}{2}\right)$$

olur. $x = \frac{m+4}{2}$ ve $y = \frac{m^2+4m}{2}$ denirse,

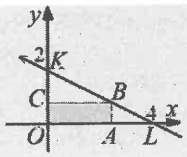
$$m = 2x - 4$$

olacağından

$$y = \frac{(2x-4)^2 + 4\cdot(2x-4)}{2}$$
$$= \frac{4x^2 - 16x + 16 + 8x - 16}{2}$$
$$= \frac{4x^2 - 8x}{2} = 2x^2 - 4x \text{ olur.}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Şekildeki KL doğru parçasının üzerinde değişken bir B noktası alınıyor. OABC dikdörtgenlerinin alanı olan A(x) fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{-3}{2}x^2+2x$ B) $\frac{-1}{2}x^2+2x$ C) $\frac{-1}{2}x^2+3x$

D) $\frac{-3}{2}x^2+x$ E) x^2

Çözüm: *KL* doğrusunun denklemi

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \text{ yani } x+2y-4=0\text{'dır.}$$

B noktası bu doğrunun üzerinde olduğundan koordinatları $\left(t,\frac{4-t}{2}\right)$ şeklindedir.

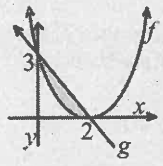
Demek ki dikdörtgenin alanı

$$t\cdot\left(\frac{4-t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(4t-t^2\right)=2t-\frac{1}{2}t^2 \text{ 'dir.}$$

Bunu $A(x)=\frac{-1}{2}x^2+2x$ şeklinde yazabiliriz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *(2, 0) ve (0, 3) ortak noktalarına sahip f parabolü ile g doğrusunun grafikleri yanda verilmiştir. Taralı bölgeye karşılık gelen eşitsizlik sistemini yazınız.*



A) $(x-2)^2\le y\le x+3$ B) $(x-2)^2\le y\le -2x-3$

C) $(x-2)^2<y<\frac{-3}{2}x$ D) $(x-2)^2\le y\le \frac{3}{2}x-3$

E) $\frac{3}{4}(x-2)^2\le y\le\frac{-3}{2}x+3$

Çözüm: Tepe noktası ve geçtiği bir noktası bilindiğinden parabol denklemini

$$y=\frac{3}{4}(x-2)^2$$

olarak buluruz. Geçtiği iki noktası bilinen doğru denkleminin formülünden de doğrunun denklemi

$$y=\frac{-3}{2}x+3$$

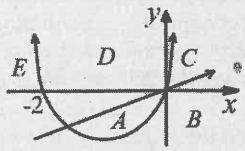
olarak bulunur. Taralı bölge parabolün üstü ile doğrunun alt bölgesinin kesişimi olduğundan eşitsizlik sistemi şöyle olmalıdır:

$$y\ge\frac{3}{4}(x-2)^2 \text{ ve } y\le\frac{-3}{2}x+3.$$

Düzenlersek, $\frac{3}{4}(x-2)^2\le y\le\frac{-3}{2}x+3$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^2+2x\le y\le\frac{x}{3}$ *eşitsizlik sistemini sağlayan bölge A, B, C, D, E olarak isimlendirilmiş bölgelerden hangisidir?*



A) *A* B) *B* C) *C* D) *D* E) *E*

Çözüm: $y\ge x^2+2x$ eşitsizliğini sağlayan bölgeler *A* ve *D*'dir.

$y\le\frac{x}{3}$ eşitsizliğini sağlayan bölgeler de *A* ve *B*'dir.

O halde, her ikisini sağlayan bölge *A* olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y=x^2+3x+1$ *parabolü ile* $y=-x-1$ *doğrusu A ve B noktalarında kesişmektedirler. Buna göre AB doğru parçasının orta noktasının orijine olan uzaklığı kaç br dir?*

A) (2, –3) B) (–2, 1) C) (–2, 3) D) (1, –2) E) (3, –4)

Çözüm: $x^2+3x+1=-x-1$ eşitliğinden *A* ve *B* noktalarının $x^2+4x+2=0$ denkleminin kökleri olduğunu anlarız.

A noktası (x_1, y_1), *B* noktası ise (x_2, y_2) olsun. Bu durumda $[AB]$'nin orta noktasının apsisi $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ yani -2 olacaktır. Bu orta nokta aynı zamanda $y=-x-1$ üstünde olduğundan ordinatı da 1 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$y=x^2+2$$

parabolünün orijine göre simetriğinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=x^2-2$ B) $y=x^2+2$ C) $y=-x^2-2$

D) $y=-x^2+2$ E) $x=-y^2-2$

Çözüm: Herhangi bir noktanın orijine göre simetriğini alırsak hem apsisi hem de ordinatı işaret değiştirir. O halde *x* yerine $-x$, *y* yerine de $-y$ yazmalıyız.

Yazarsak $y=x^2+2$ eşitliği $-y=(-x)^2+2$ yani

$$y=-x^2-2$$

halini alır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
$y = x^2 + 2x + 6$ parabolü ile $y = x + 2$ doğrusunun birbirlerine göre konumu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Doğru, parabolü kesmez.
B) Doğru, parabole teğettir.
C) Doğru, parabolü farklı iki noktada keser.
D) Parabolün tepe noktası doğru üstündedir.
E) Aralarındaki en kısa mesafe 1 birimdir.

2.
$y = 4x - 9$ doğrusunun $y = x^2 + 2x - 8$ parabolüyle birbirine göre konumu aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) Doğru, parabole (0, –8) noktasında teğettir.
B) Doğru, parabole (1, –5) noktasında teğettir.
C) Doğru, parabole (0, –9) noktasında teğettir.
D) Doğru, parabolü kesmez.
E) Doğru, parabolü (1, –5) ve (–1, –13) noktalarında keser.

3.
$y = 4x - 8$ doğrusunun $y = x^2 + 2x - 8$ parabolüyle birbirine göre konumu aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) Doğru, parabole (0, –8) noktasında teğettir.
B) Doğru, parabole (2, 0) noktasında teğettir.
C) Doğru, parabole (0, 2) noktasında teğettir.
D) Doğru, parabolü kesmez.
E) Doğru, parabolü (0, –8) ve (2,0) noktalarında keser.

4.
$$y = x^2 + 3x - 2$$
parabolüyle $y = x^2 + 1$ parabolünün birbirlerine göre konumu hangi şıkta doğru verilmiştir?

A) –2 ve 1 apsisli iki noktada kesişirler.
B) –1 ve 2 apsisli iki noktada kesişirler.
C) 1 apsisli noktada birbirlerini keserler.
D) 1 apsisli noktada birbirlerine teğettirler.
E) Kesişmezler.

5.
$$y = x^2 - 3x - 4$$
parabolüyle $y = 2x^2 - x - 3$ parabolünün birbirlerine göre konumu hangi şıkta doğru verilmiştir?

A) –2 ve 1 apsisli iki noktada kesişirler.
B) –1 ve 2 apsisli iki noktada kesişirler.
C) –1 apsisli noktada birbirlerini keserler.
D) –1 apsisli noktada birbirlerine teğettirler.
E) Kesişmezler.

6.
$$y = x + 3a$$
doğrusunun $y = x^2 + 5x - 2$ parabolüne teğet olması için a'nın değeri ne olmalıdır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

7.
$$y = 2x^2 - 8x + 7$$
parabolünün tepe noktası $y = (m + 2)x + 9$ doğrusunun üzerinde olduğuna göre m'nin değeri kaçtır?

A) –9 B) –7 C) –6 D) 6 E) 7

8.
$$y = ax^2 + 3x - 4$$
parabolünün $y = 5x - 5$ doğrusunu kesmediği bilindiğine göre a hangi aralıktadır?

A) $(-\infty, 1)$ B) $(1, +\infty)$ C) $(-1, 1)$ D) $(-\infty, 1]$ E) $[1, +\infty)$

9.
$y = 3x^2 - 7x + 2$ parabolü $y = x^2 - 5x + m$ parabolünü farklı iki noktada kestiğine göre m aşağıdaki aralıkların hangisinden değerler alır?

A) $(-1, 1)$ B) $[-1, 1)$ C) $(-\infty, 1)$
D) $(\frac{3}{2}, +\infty)$ E) $(-\infty, -1)$

10.
$y = x^2 + 5x + 4$ parabolünün $y = 3x + 2$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

1.A 2.B 3.E 4.C 5.D 6.A 7.B 8.B 9.D 10.A

CEVAPLI TEST 2

1.

$y = -x^2 + x + c$

$y = x^2 + 3x - 1$

parabolleri kesişmediklerine göre c'nin bulunduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \frac{3}{2})$ B) $(-\infty, -\frac{3}{2})$ C) $(\frac{3}{2}, +\infty)$

D) $(-1, \frac{3}{2})$ E) $(1, +\infty)$

2.

$y = x^2 + 3x - 6$

parabolü ile $y = 8x + 9$ doğrusunun kesiştikleri noktaların apsisleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 3 C) 0 D) -3 E) -5

3.

Aşağıda verilen doğrulardan hangisi

$y = x^2 - x - 6$

parabolüne teğettir?

A) $y = x - 7$ B) $y = 2x - 5$ C) $y = x + 7$

D) $y = 2x + 5$ E) $y = -x - 7$

4.

$y = mx$

doğrusu ile $y = x^2 - mx + 1$ parabolünün kesişmemesi için m'nin alabileceği tam sayı değeri kaçtır?

A) -2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

5.

$y = 2x^2 + 3x - 1$

parabolüyle $y = 3x + 31$ doğrularının kesiştikleri iki nokta arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{29}$ B) $\sqrt{30}$ C) $\sqrt{31}$ D) $\sqrt{32}$ E) $8\sqrt{10}$

6.

$y = x^2 + 5x + 17$

parabolüyle $y = x + m$ doğrusu birbirine teğettir.

Teğet değme noktasının orijine olan uzaklığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) $5\sqrt{5}$ E) $6\sqrt{5}$

7.

$y = x^2 - 3x + 2$

parabolünün $y = x - 3$ doğrusuna **en yakın noktasının apsisi kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$y = x^2 - x - 3$

parabolüyle $y = 2x + 1$ doğrusunun kesim noktalarının oluşturduğu kirişin orta nokta koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 4)$ B) $(2, 4)$ C) $(2, 5)$ D) $(\frac{3}{2}, 4)$ E) $(\frac{3}{2}, 5)$

9.

$y = x + 1$ doğrusu

$y = x^2 + (m + 3)x + m + 3$

parabolüne teğetse m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$y = (m + 2)x^2 - x - 9m + 1$

parabollerinin geçtiği ortak sabit noktaların ordinatları toplamı kaçtır?

A) 0 B) 16 C) 22 D) 38 E) 50

1.B 2.A 3.A 4.B 5.E 6.D 7.B 8.D 9.B 10.D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$y = x^2 - mx + 1$$

parabollerinin tepe noktalarının geometrik yer denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 - 1$ B) $y = -x^2 - 1$ C) $y = -x^2 + 1$
D) $y = x^2 - 4$ E) $y = -x^2 + 4$

2.

$$y = x^2 - 4x$$

parabolünün $y = 2x + 5$ denklemli kirişinin orta noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 11) B) (1, 5) C) (–1, 3) D) (2, –3) E) (–5, 7)

3.

a bir reel sayı olmak üzere

$$y = x^2 - ax + 1$$

parabolüyle $y = 3x^2 + (2a + 1)x + 7$ parabolünün kesiştikleri noktaların apsisleri çarpımı kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

4.

$y = ax - 3$ doğrusunun

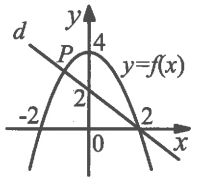
$$y = x^2 - ax + a + 1$$

parabolüne teğet olabilmesi için a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) –4 B) –1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

5.

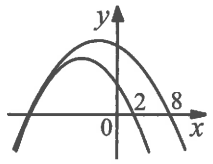
Yanda eksenleri kestiği noktaları verilen parabol ile doğrunun kesim noktalarından biri olan P noktasının koordinatları aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?



A) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ B) $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ C) $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$
D) (–1, 4) E) (–1, 3)

6.

Şekilde $y = -x^2 + x + c$ ve $y = -x^2 + ax + b$ fonksiyonlarının grafiklerinin x ekseni üzerinde kesiştikleri görülmektedir.



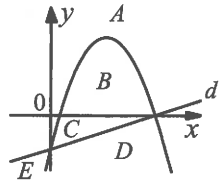
Verilenlere göre a kaç olabilir?

A) –5 B) –3 C) 4 D) 5 E) 6

7.

Yanda verilen A, B, C, D, E bölgelerinden hangisi

$$-\frac{2}{3}(x^2 - 4x + 3) > y$$
$$2x - 3y - 6 < 0$$
$$x \cdot y \geq 0$$

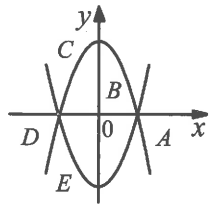


eşitsizlik sistemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin belirttiği bölgedir?

A) A B) B C) C D) D E) E

8.

Yukarda $y = x^2 - 4$ ve $y = 4 - x^2$ fonksiyonlarının grafikleri ve A, B, C, D, E noktaları verilmiştir.



Buna göre $y > x^2 - 4$ ve $y > 4 - x^2$ koşullarına uyan nokta hangisidir?

A) A B) B C) C D) D E) E

9.

$y = f(x)$ parabolü x ekseninin pozitif tarafına doğru 2 birim kaydırılarak, $y = g(x)$ parabolü elde edilmiştir.

Aşağıdakilerden hangisi elde edilen bu parabolün iç bölgesini belirtir?

A) $y > (x+2)^2$ B) $y < (x+2)^2$ C) $y \geq (x-2)^2$
D) $y > (x-2)^2$ E) $y < (x-2)^2$

10.

$$y = x^2 + 1$$

parabolünün orijine göre simetriği olan parabolün iç bölgesi hangi eşitsizlik sistemiyle anlatılabilir?

A) $y > -x^2 - 1$ B) $y < -x^2 - 1$ C) $y \geq -x^2 - 1$
D) $y \leq -x^2 - 1$ E) $y < -x^2 + 1$

1.C 2.A 3.E 4.D 5.E 6.A 7.B 8.C 9.D 10.B

Cebir Notları

Ali ERGİN, Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Saymanın Temel Prensibi

Matematikle ilk tanışmamız sayı saymayla başlamıştır desek sanırım yanılmış olmayız. Daha 2 yaşında bir bebek, 1, 2, 3, 4, ... diye en azından 10'a kadar sayabilir. Bunların birer rakam olduğunu bile bilmeden... Çünkü ''sıfır''ı bilen bebek görmedim ben. Biraz büyüdükçe, artık sayıları değil nesneleri saymaya başlar. 3 elma, 2 araba, 4 kitap diye... Bizim ''saymak'' dediğimiz şey bu kadar basit değil! Bu dersimizin başında önce saymayı öğreneceğiz.

Sonsuza kadar saymayı bilen bir adam bile bazen bazı şeyleri sayamaz. En azından buna ömrü izin vermez. Demek sayı saymayı bilen herkes her zaman nesneleri sayabilir diyemeyiz. Nesneler sonlu miktarda olsalar bile!



Sayma için bilinen 3 farklı metot vardır:

i. *Eşleme yoluyla sayma*
ii. *Toplama yoluyla sayma*
iii. *Çarpma yoluyla sayma*

İlk ikisi zaten günlük hayatta da kullandığımız sayma yöntemleridir. Birilerinin bunları kullanarak nesneleri sayması, onun matematik bildiği anlamına gelmez. Ama üçüncü şıktaki saymayı bilmiyorsan, aslında saymayı bilmiyorsundur. Şimdi sırasıyla bunları öğreneceğiz.

Eşleme Yoluyla Sayma. Bir sınıftaki öğrenci sayısını, bir apartmanın kaç katlı olduğunu, bir pakette kaç sigara bulunduğunu, sonlu bir kümenin eleman sayısını filan belirlemek için söz konusu elemanları sayma sayıları ile birebir eşlemeye *eşleme yolu ile sayma* denir. Örneğin, kitabın ilk sayfasına ''1'', ikinci sayfasına ''2'', üçüncü sayfasına ''3'', ... gibi isim vererek, o kitapta kaç sayfa olduğunu bulabiliriz. Zaten başka yolu da yoktur. Bu işlem en temel sayma işlemidir. Ama bu her zaman geçerli bir yol değildir. Aslında geçerlidir de elverişli değildir desek daha doğru olur. Yüz kenarlı bir çokgenin tüm köşegenlerinin kaç adet olduğu sorulsa mesela n'apacaksın? Diyelim inat ettin, yüzgeni çizdin, tüm köşegenlerini de çizip bismillah deyip saymaya başladın. Ya yüzgen değil, bingen olsa veya milyongen? Olamaz mı, sen inat edersin de ben edemem mi? O halde saymanın başka yolları da olmalı. Yoksa biz sayamıyoruz diye orada köşegen yok demek değil!

Rakamları veya sayıları yazıp okuyamayan çobanlar bile koyunlarının eksik olup olmadığını henüz adı bile konulmamış "birebir eşleme metodu" dediğimiz bu yöntemle kontrol ediyorlardı. Ceplerine doldurdukları bir miktar çakıl taşını kullanarak. Her bir koyunu ahırından dışarı çıkarırken cebine bir çakıl taşı koyup, akşam döndüğünde de ahıra giren her koyun için cebindeki bir çakıl taşını çıkarıyordu. Matematikçiler çobandan etkilenmiş olacaklar ki yıllar sonra birebir eşleme metodunu geliştirmişlerdir. Hatta bazı matematikçiler bu yönteme çoban sayması demeyi sürdürmektedirler. Bu örnekte çoban koyunlarını saymıyor aslında bire bir eşleme ile eksilme veya artmanın olup olmadığını kontrol ediyor.

Matematikçiler çakıl taşları yerine sayma sayıları kümesini geliştirmiş ceplerindeki ağırlıktan kurtulmuşlar. Sayma sayılarının her bir elemanının sırayla başka bir kümenin elemanıyla eşleştirme işlemine "birebir eşleme ile sayma metodu" diye tabir edilir.

Aşağıda vereceğimiz ikinci sayma metodu da bu derdimize derman olmayacak ama çözümlerimizde bunu kullanacağız.

Toplama Yoluyla Sayma. A ve B ayrık iki küme olsun, yani kesişimleri boşküme olsun. A ve B kümelerinin toplam kaç elemanı olduğunu bulmak için $A \cup B$ kümesinin elemanlarını saymalıyız, ki o da $s(A) + s(B)$'dir. Örneğin, bir sınıftaki öğrenci sayısını eşleme yoluyla tek tek sayabileceğimiz gibi, eğer biliniyorsa sınıftaki kız öğrenciler kümesinin eleman sayısı ile sınıftaki erkek öğrencilerin eleman sayılarını toplayarak da sonuca ulaşabiliriz. Örneğin, bu sınıfta 22 kız öğrenci ve 23 erkek öğrenci varsa, bu sınıfta $22 + 23 = 45$ öğrenci vardır deriz. İşte buna *toplama yoluyla sayma işlemi* denir.

Örnek. *A kentinden B kentine 40 farklı karayolu ve 20 farklı demiryolu vardır. A'dan B'ye gitmek isteyen birinin kaç farklı seçeneği vardır?*

A) 2 B) 60 C) 80 D) 800 E) 40^{20}

Çözüm: Bu kadar farklı yol olur mu ya demeyin. Senelerdir ders anlatırım, herkes A'dan B'ye veya B'den A'ya gidiyor, bu kadar farklı yolu tabii yaparlar. ☺
$40 + 20 = 60$ farklı yol olduğundan, bu ''biri'' 60 farklı şekilde A'dan B'ye gider.

Doğru cevap: B.

Örnek. $|x + 1| < 2012$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı* x *tam sayısı vardır?*

A) 4021 B) 4022 C) 4023 D) 4024 E) 4025

Çözüm: $-2012 < x + 1 < 2012$ olduğundan

$$-2013 < x < 2011$$

olur. Bu eşitsizlikleri sağlayan x tam sayıları

$$\{-2012, -2011, \ldots, 2009, 2010\}$$

olmak üzere 4023 tanedir. Sabaha kadar mutlak değer bil, saymayı bilmiyorsan 4023'i bulamazsın!☺

Doğru cevap: C.

Çarpma Yoluyla Sayma. A, B, C boş kümeden farklı birer sonlu küme olmak üzere; A ve B kümelerinden sırasıyla birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün sıralı ikililerin sayısını

$$s(A\times B) = s(A)\cdot s(B)$$

veya A, B, C kümelerinden birer eleman seçerek oluşturulabilecek bütün sıralı üçlülerin sayısını

$$s(A\times B\times C) = s(A)\cdot s(B)\cdot s(C)$$

şeklinde çarpma işlemi yaparak buluruz.

İşte bu çarpma yolu ile sayma kuralı, eşleme veya toplama kuralı ile saatler, belki de bir ömür alacak toplamları birkaç saniyede bizim için yapar. İlerde farklı örneklerini göreceksiniz.

Matematikçiler üçe ayrılır:
Sayı saymayı bilenler ve bilmeyenler!

Saymanın Temel İlkesi. Sonuç olarak ayrık r tane işten,

1'incisi n_1 değişik yoldan,
2'ncisi n_2 değişik yoldan,
...
r'nincisi n_r değişik yoldan

gerçekleştirilebiliyorsa; bu r tane işten her biri

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekilde sayma işlemine **toplama kuralı** denir.

Bu r tane işin hepsi birlikte, sıralı bir biçimde



$$n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot \ldots \cdot n_r$$

değişik yoldan gerçekleştirilebilir ve bu şekildeki sayma işlemine **genel çarpım kuralı** veya **saymanın temel ilkesi** denir.

Örneğin, 3 farklı gömleği, 4 farklı pantolonu olan biri kendine $3\cdot 4 = 12$ değişik kıyafet yapabilir. Buna bir de 5 farklı kravat eklediğinizi düşünün. $3\cdot 4\cdot 5 = 60$ farklı kıyafet olur.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya* 3, *Ankara'dan İstanbul'a* 4 *farklı yol bulunmaktadır.*

Adana ⇉ Ankara ⇉ İstanbul

i. *Adana'dan İstanbul'a kaç farklı gidiş seçeneği vardır?*

Adana'dan Ankara'ya giden yollardan herhangi birini seçin. Hala Ankara'dan İstanbul'a gitmek için önünüzde 4 seçenek var. Ve bu diğer iki Adana-Ankara yolu seçimi için de geçerlidir.
Dolayısıyla $3\cdot 4 = 12$ farklı yoldan gidilebilir.

ii. *İstanbul'dan Adana'ya kaç farklı dönüş seçeneği vardır?*

Dönüş için de aynı olay geçerlidir. Ha $3\cdot 4$, ha $4\cdot 3$.
Bu yüzden yine 12 farklı yoldan dönülebilir.

iii. *Adana'dan İstanbul'a kaç farklı gidiş-dönüş seçeneği vardır?*

Her 12 gidişin, 12 dönüş seçeneği olduğundan, gidiş-dönüş için $12\cdot 12 = 144$ farklı yol vardır.

iv. *Adana'dan İstanbul'a giden bir aracın, Adana'ya dönerken daha önceden kullandığı yolu kullanmamak üzere kaç farklı dönüş seçeneği vardır?*

Hangisi kullanıldı bilinmez ama Adana'dan Ankara'ya ve Ankara'dan İstanbul'a gidilen yollardan biri kullanıldı. Dolayısıyla İstanbul'dan Ankara'ya kullanılmadık 3, Ankara'dan Adana'ya 2 yol kaldı. $3\cdot 2 = 6$ dönüş seçeneği vardır.

Örnek. *A'dan B'ye* 2, *B'den C'ye* 4 *farklı yol bulunmaktadır. C'den A'ya dönüş için* 5 *farklı yol vardır. Soru bu ya, yollar tek yönlüdür. Yani gidiş yollarıyla dönüş yolları tamamen farklı. Bu şartlar altında A'dan B'ye uğramak kaydıyla C'ye gidip, geri A'ya dönmek isteyen birinin önünde kaç değişik seçenek vardır?*

A) 11 B) 13 C) 22 D) 40 E) 64

Çözüm: Şimdi kim oturup da şehir çizecek, sonra şehirleri birbirine bağlayan yollar çizecek? Biz derdimizi kutu çizerek halledelim. Aslında kutu bile çizmesek de olur ama ilerde çok işimize yarayacak bu iş. A'dan B'ye gitmeye bir kutu, B'den C'ye gitmeye bir kutu, C'den geri A'ya dönmeye de bir kutu olmak üzere toplam 3 kutu çizelim.

2	4	5

Demek ki, bu adamın önünde 40 farklı seçenek varmış. Çok kullanacağımız bu yönteme biz **kutu yöntemi** diyeceğiz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya 3, Ankara'dan İstanbul'a 4 farklı karayolu bulunmaktadır. Ayrıca, Adana'dan İstanbul'a iki farklı demiryolu seçeneği de bulunduğuna göre, bir kimse kaç farklı şekilde Adana'dan İstanbul'a gidebilir?*

A) 9 B) 12 C) 13 D) 14 E) 28

Çözüm: Gidilebilecek yolları aşağıdaki şemada gösterdim.



Şemaya göre bir adam yolun bir kısmını karayoluyla bir kısmınıysa demiryoluyla gidemez. Ya hep karayolunu, ya da hep demiryolunu kullanmak zorundadır. Bu durumlar ayrık olduğuna göre eleman sayılarını toplamamız icap eder.

Karayollarıyla $3 \cdot 4 = 12$ gidiş seçeneği olduğunu daha önce hesaplamıştık. 2 de demiryolu ilave edildiği için $12 + 2 = 14$ seçenek mevcuttur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Adana'dan Ankara'ya 3, Ankara'dan İstanbul'a 4, İstanbul'dan İzmir'e de 2 farklı karayolu bulunmaktadır. Bunların dışında Ankara'ya uğramadan Adana'dan İstanbul'a bir yol ve İstanbul'a uğramadan Ankara'dan İzmir'e bir yol bulunmaktadır.*



Buna göre Adana'dan İzmir'e gitmek isteyen biri bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 29 B) 30 C) 48 D) 87 E) 145

Çözüm: Bu soruda ayrık kümelere iyi karar vermek zorundayız. Adana'yı direkt olarak İstanbul'a bağlayan yola *birinci özel yol*, Ankara'yı direkt olarak İzmir'e bağlayan yola *ikinci özel yol* adını verelim. Adana'dan İzmir'e giden biri iki özel yolu birden kullanmış olamaz. O halde bu özel yollardan ya sadece birini kullanmıştır ya da ikisini de kullanmamıştır.

Hiçbir özel yolu kullanmayan yol sayısı $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ olup, birinci özel yolu kullanan 2, ikinci özel yolu kullanan 3 farklı güzergah olduğundan $24 + 2 + 3 = 29$ değişik durum mümkündür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir mobilya satıcısında 9 tip koltuk takımı ve 5 tip sehpa takımı vardır. Bir koltuk ve bir sehpa takımı alacak olan bir kimse için kaç tane koltuk-sehpa takımı seçeneği vardır?*

A) 14 B) 45 C) 90 D) 9^5 E) 5^9

Çözüm: Alıcı koltuk takımını 9 değişik biçimde seçebilir. Bu seçimlerden her biri için sehpa takımını da 5 değişik biçimde seçebileceğinden bir koltuk-sehpa takımını $9 \cdot 5 = 45$ biçimde seçer.

Doğru cevap: B.

Örnek. *İki zar ile bir madeni para birlikte atıldığında kaç farklı durum oluşabilir?*

A) 14 B) 18 C) 36 D) 72 E) 216

Çözüm: İki tane zarlar için, bir tane de para için olmak üzere 3'lü kutu yapacağız. Zarların 6'şar, paranın ise 2 yüzü olduğunu unutmayın. İki yüzlü şeyleri sevmeyin! Ya para veya zarlardan biri dik gelirse geyiğini de yapmayın!

6	6	2

$6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ olduğundan 72 farklı durum vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?*

A) 5 B) 10 C) 25 D) 32 E) 125

Çözüm: Sadece 1 kişi için kaç farklı seçenek var, ona bir bakalım. Ya başarılı olacak, ya başarısız. Yani 2 seçenek var. O halde 5 kişi için

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

farklı seçenek vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *9 farklı basketbol maçının hepsinde yenen takımı garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir? (Basketbol maçları berabere bitmez)*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 81 E) 512

Çözüm: Her maç için 2 ayrı tahminde bulunmak gerekir. Toplam 9 maç olduğundan

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

tahminde bulunmak gerekir. Eğer maçlar futbol maçı olsaydı (berabere kalabilmek de olsaydı) cevap 3^9 olurdu.

Doğru cevap: E.

Örnek. *20 soruluk bir sınavda, her sorunun 4 yanlış ve bir doğru olmak üzere 5 seçeneği vardır. Bu sınavın cevap anahtarı hazırlanacaktır. Kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?*

A) 20! B) 5! C) 100 D) 5^{20} E) 20^5

Çözüm: Her soru için 5 farklı seçenek var olup, toplamda 20 soru olduğundan cevap $5\cdot5\cdot5\cdot\ldots\cdot5 = 5^{20}$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *20 soruluk bir sınavda, her sorunun 4 yanlış ve bir doğru olmak üzere 5 seçeneği vardır. Bu sınavın cevap anahtarı hazırlanacaktır. Ard arda gelen iki sorunun doğru cevabı aynı şıkta olmayacak şekilde kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?*

A) 20! B) $5\cdot4^{19}$ C) 4! D) 5^{20} E) 20^5

Çözüm: İlk sorunun cevabı için herhangi bir kısıtlama yok ama diğer sorularda bir önceki şıkkın kullanılması yasak olduğundan $5\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot4 = 5\cdot4^{19}$ durum mümkündür.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Her gün kravat takan bir A şahsının 4 farklı kravatı vardır. Ardı ardına iki gün aynı kravatı takmayan A şahsı, hafta içi kaç farklı şekilde kravat takabilir?*

A) 324 B) 323 C) 243 D) 242 E) 81

Çözüm: Sakın bu soruya Pazartesi 4, diğer günler de 3 seçeneği olduğundan $4\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 324$ demeyin... Bu adam her gün kravat taktığına göre Pazar günü de bir kravat taktı, o halde Pazartesi için de 3 seçeneği vardır. O halde cevap $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 243$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *8 kişi arasından önce bir başkan, sonra kalanlar arasından bir başkan yardımcısı, sonra da kalanlar arasından bir sekreter, sonra da kalanlar arasından bir çaycı seçilecektir. Bu seçim kaç türlü yapılabilir?*

A) 26 B) 60 C) 840 D) 1680 E) 8^4

Çözüm: Tahmin etmişsinizdir, başkana bir, yardımcısına bir, sekretere bir ve çaycıya bir olmak üzere 4'lü kutu çizeceğiz.

8	7	6	5

$8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$ olduğundan 1680 farklı seçim yapılabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *8 kişi arasından önce bir başkan, sonra kalanlar arasından üç başkan yardımcısı seçilecektir. Başkan yardımcıları arasında statü farkı olmadığına göre bu seçim kaç türlü yapılabilir?*

A) 280 B) 560 C) 840 D) 1680 E) 8^4

Çözüm: Başkana bir ve yardımcılarına üç olmak üzere 4'lü kutu çizeceğiz. İçini de bir önceki problemdeki mantığı kullanarak dolduralım.

8	7	6	5

Yalnız burada farklı bir durum var. A, B, C insanları $3! = 6$ değişik şekilde yardımcı, sekreter ve çaycı seçilebiliyorlardı, fakat burada hepsi eşit statüde yardımcı olacaklarından son seçilen 3 kişiyi 6 değişik şekilde sıraya sokmanın gereği yoktur. Bu yüzden bulunan cevabı 3!'e yani 6'ya bölmek gerekir. O halde cevap $1680/6 = 280$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir kilidin şifresi, birinci ve ikinci bileşenleri alfabemizdeki harflerden, öteki bileşenleri rakamlardan oluşan bir sıralı dörtlüdür. Bu kilit kaç değişik biçimde kilitlenebilir?*

A) $29^2\cdot100$ B) $29\cdot28\cdot10^2$ C) $29\cdot28\cdot99$ D) $29^2\cdot99$ E) $29\cdot28\cdot10\cdot9$

Çözüm: Şifreye uygun sıralı dörtlüyü (X, Y, Z, T) biçiminde gösterelim. X ve Y yerine 29 harften birisi, Z, T yerine ise {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarından biri yazılabilir. Saymanın temel ilkesine göre $29\cdot29\cdot10\cdot10 = 84100$ tane sıralı dörtlü vardır. Öyleyse bu kilit 84100 değişik biçimde kilitlenebilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Her bir telefon için 6 basamaklı bir sayı kullanarak sıfır ile başlamayan kaç tane telefon numarası verilebilir?*

A) $9\cdot10^4$ B) $9\cdot10^5$ C) $9\cdot10^6$ D) 99999 E) 999999

Çözüm: Telefon numarası (x, y, z, t, u, v) biçiminde olsun. Burada x yerine {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ve diğerleri yerine {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin her elemanı yazılabileceğinden $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 900000$ tane farklı ve "0" ile başlamayan telefon numarası verilebilir. Şöyle de düşünebilirsiniz: Her telefon numarasını bir sayı gibi düşünün. 0 ile başlaması yasak olduğundan 6 basamaklı kaç sayı olduğu soruluyor. En büyük 6 basamaklı sayıdan en büyük 5 basamaklı sayıyı çıkarmalıyız.

$$999999 - 99999 = 900000 = 9\cdot10^5.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin elemanlarıyla*
aabeaabe, abccabcc, bcdebcde
gibi ilk dört harfiyle son 4 harfi aynı olan 8 basamaklı kaç değişik kelime yazılabilir?

A) 4! B) 4^4 C) 4^5 D) $4^4 \cdot 4!$ E) 5^4

Çözüm: Son 4 harf ilk 4 harfle aynı olacağından, ilk 4 harfi kaç değişik şekilde yazabileceğimizi bulmalıyız. Harflerin farklı olması gerekmediğinden

$$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5} = 5^4$$

değişik şekilde yazmak mümkündür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ olmak üzere*
$T = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in A, a < b$ ve $a < c\}$
olsun. Buna göre bu şartları sağlayan T üçlülerinin sayısı olan $|T|$ değeri kaçtır?

A) 4900 B) 2450 C) 1200 D) 360 E) 120

Çözüm: Önce soruyu bir Türkçe'ye çevirelim. Diyor ki; a, b, c değerleri 26'dan küçük sayma sayıları olmak üzere, a değeri b'den ve c'den küçük olacak şekilde kaç farklı (a, b, c) sıralı üçlüsü yazabilirsiniz?
Sözgelimi $a = 1$ olsun. b de c de 24 farklı değer alabilir, demek ki $a = 1$ iken 24^2 tane sıralı üçlü yazmak mümkündür. Şimdi $a = 2$ olsun. b de c de 23 farklı değer alabilir. O halde $a = 2$ iken 23^2 tane sıralı üçlü yazılabilir.
Bu böyle devam edecektir. O halde

$$|T| = 24^2 + 23^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$$

olur ve

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

formülünden $|T| = \dfrac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4900$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *4 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?*

A) 7 B) 12 C) 64 D) 81 E) 2^{12}

Çözüm: Tanım kümesindeki 4 eleman için 4'lü bir kutu oluşturalım:

$$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$$

Her eleman değer kümesindeki canının istediği 3 elemanla da eşlenebilir. Bundan dolayı

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

farklı fonksiyon tanımlamak mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *4 elemanlı bir kümeden 5 elemanlı bir kümeye kaç farklı bire-bir fonksiyon tanımlanabilir?*

A) 9 B) 20 C) 24 D) 120 E) 5^4

Çözüm: Tanım kümesindeki 4 eleman için 4'lü bir kutu oluşturalım:

$$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}$$

Bu sefer tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde canının istediğiyle eşleşemez. Bire-bir fonksiyonun tanımına göre iki eleman tek elemanla eşleşemez. O halde

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

tane bire-bir fonksiyon tanımlamak mümkündür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$s(A) = n$ olmak üzere bir A kümesi üzerinde tanımlanabilecek farklı,*
a) *Bağıntı sayısı,*
b) *Yansıyan bağıntı sayısı,*
c) *Simetrik bağıntı sayısı,*

Çözüm:

a) A kümesinde tanımlı bağıntı, $A \times A$ kümesinin alt kümesidir.

$$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = n^2$$

olduğundan $2^{(n^2)}$ tane farklı bağıntı tanımlanabilir.

b) Yansıyan bir bağıntı A kümesinin her x elemanı için $A \times A$ kümesinden bir (x, x) elemanı bulunduracaktır. Dolayısıyla n^2 elemandan n tanesi mutlaka olacaktır, kalan $n^2 - n$ tane elemandan kaç tane küme yapabileceğimize bakalım. O halde

$$2^{(n^2-n)}$$

tane yansıyan bağıntı tanımlanabilir.

c) $s(A \times A) = n \cdot n = n^2$ olduğunu söylemiştik. Bu n^2 elemanın n tanesi (a, a) şeklindedir, yani bileşenleri birbirine eşittir, $n^2 - n$ tanesinin de bileşenleri farklıdır. Hatta, a ile b'yi farklı kabul edersek, $\dfrac{n^2 - n}{2}$ tanesi (a, b) şeklinde, diğer $\dfrac{n^2 - n}{2}$ tanesi de (b, a) şeklindedir. Simetrik bağıntının içinde herhangi bir (a, a) ikilisi sorun teşkil etmez ama (a, b) varsa (b, a) da olmak zorunda olduğundan, her bir (a, b) ile (b, a)'yı bir eleman gibi kabul etmeliyiz. Biri varsa diğeri de olmalı, biri yoksa diğeri de olmamalı diye yani.
O halde, $n + \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$ elemanlı bu kümenin her alt kümesi bir simetrik bağıntıdır. Böyle düşününce cevap

$$2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

bulunur.

Şimdi biraz önce yaptıklarımızdan çok farklı bir sayma metodu öğreneceğiz. Mümkün olduğunca anlamaya gayret edin. ☺

Bir adamın 4 farklı gömleği ve 5 farklı pantolonu olsun. Bu adamın kaç farklı şekilde giyinebileceğini bulacağız. Ne var ki bunda, $4\cdot5 = 20$ farklı seçenek vardır. Evet, doğru.

Şimdi soruyu hafifçe değiştirelim. Bu adama gömlek giymeme hakkı da verelim. O zaman cevap kaç olur? Eski hakları devam ettiğinden elde var 20. Bir de bu 5 pantolonu gömleksiz de giyebilir diye cevap $20 + 5 = 25$ olmalıdır. İşte burada adamın sanki 4 değil de 5 gömleği varmış ama gömleklerinin biri görünmeyen gömlekmiş gibi düşünürsek $5\cdot5 = 25$'e daha rahat ulaşırız. Peki her ikisini de giymeme hakkı verirsek n'olur? O zaman pantolon giymeden 4 gömleği de giyebileceğinden, bir de ikisini de giymeme hakkı olduğundan $25 + 4 + 1 = 30$ olmalıdır. Şimdi bakın 30'u nasıl bulacağız?

4 gömleği ve 5 pantolonu olan bu adamın aslında 5 gömleği ve 6 pantolonu varmış gibi düşünün, gömleğin biri ve pantolonun biri giyildi mi görünmüyor. O halde $5\cdot6 = 30$ olmalıdır.

Bu sayma metodu, aslında bize daha önce ezberletilen bir sürü formülün çıkışında da yatar. Örneğin, bir sayının kaç tane pozitif böleni olduğunu bulurken üslere 1 eklememizin sebebi de budur.

Örnek. *a, b, c farklı asal sayılar ve m, n, p birer sayma sayısı olduğuna göre $a^m b^n c^p$ sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?*

A) $m+n+p$ B) $m+n+p+3$ C) $m\cdot n\cdot p$
D) $(m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)$ E) $m^2\cdot n^2\cdot p^2$

Çözüm: Demek ki bu sayının m tane a çarpanı, n tane b çarpanı, p tane c çarpanı varmış. Bu çarpanların herhangi çarpımları bize bu sayının farklı pozitif bölenlerini verir. Canım ister, a'dan 1 tane b'den 2 tane alır çarparım, canım ister b'den 3 tane c'den 2 tane alır çarparım. Ama 2 tane b varsa 3 tane b alamam tabii ki. Demek ki kaç farklı a, b veya c seçebiliyorsam, o kadar farklı pozitif bölen mevcut. Yalnız unutmayın ki bundan hiç almıyorum demek de bir seçenektir. Yani a çarpanını $m + 1$ değişik şekilde, b çarpanını $n + 1$ şekilde, c çarpanını da $p + 1$ şekilde seçebiliriz. O halde saymanın temel ilkesine göre

$$(m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)$$

kadar farklı seçenek mevcut, bundan dolayı bu sayının pozitif bölenleri bu kadardır.

Doğru cevap: D.



Bazen bize bu sayının tek veya çift pozitif bölenlerinin kaç tane olduğunu sorar. Örneğimizde a'nın çift, b ve c'nin de tek sayı olduğunu varsayalım. a ile çarpılan her şey çift olmak zorundadır. Dolayısıyla içinde a olmayan çarpımlar bize kaç tane pozitif tek böleni olduğunu verir.

✓ O halde pozitif tek bölen adedi $(n + 1)\cdot(p + 1)$ dir.

✓ Pozitif bölen adedinden tek pozitif bölen adedini çıkartırsak çift pozitif bölen adedi $m\cdot(n + 1)\cdot(p + 1)$ olarak bulunur.



Bir A sayısının çift bölen sayısı, aslında $A/2$ sayısının tüm bölenleri sayısıdır. Neden mi? $A/2$ sayısının tüm bölenlerini teker teker 2 ile çarparsak çift çıkacaktır da ondan!

Örnek. *Asal çarpanlarına ayrılmış şekli $T = 2^3\cdot3^4\cdot5^6$ olan bir sayının pozitif tam bölenlerinin,*
a) *Kaç tanesinin çift sayı olduğunu,*
b) *Kaç tanesinin tek sayı olduğunu,*
c) *Kaç tanesinin 5 ile bölünebildiğini bulalım.*

Çözüm:

$$A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$$
$$B = \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4\}$$
$$C = \{5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6\}$$

a) Sayının çift olabilmesi için 2'nin katı olması gerekir. O halde, A kümesinden seçilen 2^1 elemanı ile birlikte, A kümesinin diğer 3 elemanından birinin, B kümesinin 5 elemanından seçilen bir eleman ve C kümesinin seçilen 7 elemanından bir elemanın çarpımı T'nin pozitif çift tamsayı bölenidir. Dolayısıyla: $3\cdot5\cdot7 = 105$ tanedir.

b) B ve C kümelerinden seçilen birer elemanın çarpımı T'nin pozitif tek sayı bölenidir. Çarpım kuralına göre, $5\cdot7 = 35$ tanedir.

c) C kümesinin 5^1 elemanı seçildikten sonra a şıkkındaki çözüm dikkate alınırsa, $1\cdot4\cdot5\cdot6 = 120$ tanedir.

Örnek. *4 özdeş mavi, 7 özdeş sarı toptan en az 1 tanesi kaç değişik şekilde seçilebilir?*

A) 10 B) 20 C) 29 D) 30 E) 39

Çözüm: Toplar kendi aralarında özdeş olduklarından sadece hangi renk toptan kaç tane geldiği önemlidir. Maviler için 5 durum mümkün. Ya 1 tane, ya 2 tane, ya 3 tane, ya 4 tane gelir ya da hiç gelmez. Yani 5 durum mümkündür. Sarılar için de aynı sebepten dolayı 8 durum mümkündür. O halde çarpım yoluyla sayma kuralından 40 durum mümkündür. Bu 40 durumdan bir tanesi 0 mavi ve 0 sarı durumu olduğundan, onu atarız. O halde 39 değişik seçim mümkündür.

Doğru cevap: E.

Bu tip soruların genel formülünü çıkartalım:

Örnek. *Özdeş m tane mavi, y tane yeşil top arasından en az bir tanesi kaç değişik şekilde seçilebilir?*

A) $my + m + y$ B) $my + m$ C) $m \cdot y$ D) $my - m$ E) $m - y$

Çözüm: Özdeş olan toplardan hangisi önce aldığımızın önemi yoktur. Önemli olan sadece kaç tane alacağımızdır. Mavi toplardan m farklı seçim yapabiliriz, bir de mavi almama hakkımız var, o halde mavi için $m + 1$ seçim hakkımız var. Aynı nedenle yeşil toplar için de $y + 1$ seçim hakkımız var. O halde $(m + 1)(y + 1)$ durum mümkündür. Yalnız en az bir top almak zorunda olduğumuzdan ikisinden de almama hakkımız yok. Sonuçtan 1 çıkartmalıyız. O halde cevabımız

$$(m + 1)(y + 1) - 1 = my + m + y$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Bu metodu başka nerelerde kullanırız? İlkokuldan beri bildiğimiz *n elemanlı bir kümenin* 2^n *tane farklı alt kümesi olduğu* da buradan çıkar. Nasıl mı?

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarıyla alt küme yapmaya çalışalım. Başlayalım: Yazacağımız alt kümenin içinde a_1 olsun mu? Olabilir de olmayabilir de... a_2 olsun mu? Olabilir de olmayabilir de... a_3'ü alalım mı? Alabiliriz de almayabiliriz de... Anlayacağınız her eleman için 2 farklı seçeneğimiz olduğumuzdan

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ tane}} = 2^n$$

farklı altküme yazmak mümkündür.

Kişiye özel sayı oluşturmak. Tek basamaklı kaç tane sayı var? 10 değil mi? (Negatifleri saymıyoruz)

Peki, iki basamaklı kaç sayma sayısı var?
Bundan kolay ne var: 90.

Peki üç basamaklı?
900.

Dört?
9000.

Beş?
90000.

Ne kadar da kolay!
Sen öyle san!

Her zaman bu kadar basit değil. Bazen şöyle sorar: Şu şu şu rakamlarla oluşan şu kadar basamaklı kaç sayı var? Şu sayıdan büyük, şu sayıdan küçük, şu kadar basamaklı, tek veya çift kaç basamaklı kaç sayı var? Üstüne üstlük bir de şu sayıya bölünsün. Hıı, unutmadan bir de şu sayıyla başlamasın! Olur, başka emriniz?

İşte notlarımızın bu kısmında, şımarıkça sorulan bu sorulara cevap arayacağız. Örnek soru-çözümlerle anlatalım:

Örnek. *Sadece* 1, 2, 3, 4, 5 *rakamları kullanılarak;*

1) *Üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

5	5	5

Birler, onlar ve yüzler basamağı için 5'er farklı seçeneğimiz var. O halde cevabımız 125 olmalı.

2) *Dört basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

5	5	5	5

Aynen yukardaki gibi ama bu sefer 4 basamak olduğundan $5^4 = 625$ değişik seçenekle karşı karşıyayız.

3) *Üç basamaklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?*

5	5	2

Birler basamağı için {2, 4} olmak üzere 2 hakkımız var, diğer basamaklar için herhangi bir sınırlamamız yok. O halde cevabımız $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$'dir.

4) *Üç basamaklı kaç değişik tek sayı yazılabilir?*

5	5	3

Bunu ister yukardaki gibi birler basamağının 3 ayrı hakkı var diye yapabiliriz, ki bunlar {1, 3, 5}'tir, istersek de yazılabilecek tüm üç basamaklı sayılardan çift olanları çıkararak yapabiliriz: $125 - 50 = 75$ bulunur.

5) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı sayı yazılabilir?*

5	4	3

Yüzler basamağına 5 farklı rakam da gelebilir. Yalnız onlar basamağına böyle diyemeyiz. Çünkü oluşturacağımız sayının rakamlarının farklı olduğu söyleniyor. Hangi rakamı yüzler basamağına kullandıysak kullandık, fark etmez, onlar basamağına 4 hakkımız kalır. Aynen bunun gibi birler basamağına da 3 hakkımız kalır.

O halde $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ tane böyle sayı yazılabilirmiş. Aynı işlemleri birler basamağından başlayarak yüzler basamağına doğru giderek de yapabilirdik, sonuç değişmezdi. İsterseniz deneyin!

6) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı çift sayı yazılabilir?*

3	4	2

Bu sefer birler basamağından başlayacağız. Sayının çift olması istendiğinden birler basamağına 2 hakkımız var, hangisi gelirse gelsin, ortadaki kutuya 4 hak kalır. Aynı şekilde başa da 3. Bunları çarparsak $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ çıkar. Bu sorunun çözümüne yüzler basamağından başlanabilir miydi? Deneyelim: İlk kutuya 5 hak var, ikinci kutuya 4. Eee, son kutuya kaç? 2 diyorsun ama ya bu sayıyı çift yapan değerler ilk kutularda kullanılmışlarsa? Belki de son kutuya hiç hak kalmadı! Belki de 1 tane kaldı, belki de 2'si de hala duruyor. Demek ki kutu yönteminde ilk önce mecbur olduğumuz sayıları yerleştirmemiz gerekir.

Başlamaya mecbur olmadığımız kutular, ne kaldıysa onunla yetinmek zorundalar.

7) *Rakamları farklı kaç değişik üç basamaklı tek sayı yazılabilir?*

3 4 3

Bu soruda da mecbur olduğumuz basamak son basamak. O halde son kutuya 3 yazalım. Rakamları farklı istendiğinden, birer birer azalarak diğer kutulara sayılarımızı yerleştirip çarpalım: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ bulunur. Bu soruyu, istersek yazılabilecek tüm rakamları farklı değişik üç basamaklı sayılardan çift olanları çıkararak da bulabilirdik: $60 - 24 = 36$.

8) *Rakamları farklı, 300'den büyük üç basamaklı kaç değişik çift sayı yazılabilir?*

□□□

Yukardaki kutular niye boş, merak ediyorsunuz değil mi? Anlatayım: Mecbur olduğumuz kaç kutu var? Bu sefer 2. Çünkü hem son basamağa çift sayılar gelecek, hem de ilk basamağa ''3'' veya daha büyük rakamlar. Eee, hangisinden önce başlamamız gerekir? İkisinden de başlayamazsın! Kutu yöntemini kullanabilmek için başlamaya mecbur olduğun kutu sayısı en çok 1 olmalı. O halde ne yapacağız? İki farklı kutu çizeceğiz. Bir mecburiyetimizi birinde, diğer mecburiyetimizi ise diğerinde gidereceğiz. Sorunu bir de başka türlü açıklayayım: Son basamağa {2, 4} olmak üzere iki hakkımız var ya, eğer son basamağa ''2'' gelirse bu ilk basamak için tehdit oluşturmaz ama ya ''4'' gelirse? ''4''ü son basamakta kullandığımız için artık ilk basamakta kullanamayız. İşte bundan dolayı bir sona ''2''nin geldiği kutu çizeceğiz, bir de ''4''ün geldiği.

Son basamağı ''2'' olan: 3 3 1

Son basamakta ''2'' kullanıldığından ilk basamakta ''4''ü kullanabiliriz. İki rakam kullanıldığından onlar basamağına 3 hakkımız kalır. Bundan dolayı bu seçeneğin cevabı 9'dur.

Son basamağı ''4'' olan: 2 3 1

Burada da son basamakta ''4'' kullanıldığından ilk basamağa sadece {3, 5} sayıları kalır. Yine iki rakam kullanıldığından ortadaki kutuya 3 hak kalır. Bu seçeneğin de cevabı 6'dır. İki seçenek sonuçları toplanırsa $9 + 6 = 15$ bulunur.

9) *1200'den büyük dört basamaklı 5 ile bölünebilen 4 basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

□□□□

Rakamları farklı denmediğinden bu sefer tehlike yok gibine geliyor değil mi? Sadece mecbur olduğumuz tek şey var, o da son rakamın ''5'' olması zannediyorsun. Hayır, durum bu kadar basit değil. Çünkü ilk rakam ''1'' olsa, ikinci rakam ''1'' olamaz. Ama ilk rakam ''2, 3, 4, 5'' rakamlarından biri olsa ikinci rakam ''1'' olabilir. O halde yine 2 kutu çizmemiz gerekir.

İlk basamağı ''1'' olan: 1 4 5 1

İlk basamağı ''1'' olmayanlar: 4 5 5 1

İlk seçenekte 20, ikinci seçenekte 100 sayı olduğundan cevabımız 120 olmalıdır.

10) *Rakamları çarpımı çift olan üç basamaklı kaç değişik sayı yazılabilir?*

Bir sayının rakamları çarpımının çift olması için ne olması gerekir? En az bir rakamı çift olmalı. Bu ne demek? Sadece bir rakamı çift olsa da olur, iki rakamı çift olsa da olur, üç rakamının üçü çift olsa da olur. E, bunlar için üç hatta daha çok kutu gerekir. Biz bunun yerine tüm sayılardan rakamları çarpımı tek olanları çıkartacağız. Zira bu çok kolay. Çünkü bir sayının tüm rakamları tek sayı oldu mu, rakamlarının çarpımı zaten tek olur.

Üç basamaklı 125 değişik sayı yazılabileceğini bulmuştuk. Şimdi de tüm rakamları tek sayı olan kaç tane üç basamaklı değişik sayı yazabileceğimizi bulalım:

3 3 3

Her kutuya mecburen {1, 3, 5} rakamlarından biri gelmeli. Rakamları farklı istenmediğinden $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ tane böyle sayı yazılabileceğini anlarız. O halde sorunun cevabı $125 - 27 = 98$'tir.

Örnek. {0, 1, 2, 3, 4, 5} *kümesinin elemanları kullanılarak kaç değişik rakamları farklı üç basamaklı çift sayı yazılabilir?*

A) 52 B) 100 C) 104 D) 126 E) 156

Çözüm: Bu sorunun, üstte on şıkta çözdüğümüz sorudan farkı var. Çünkü bu sefer ''0'' sayısı da kullanılacak. Diğer rakamların hepsi ilk basamakta kullanılabilecekken, sıfırın böyle bir hakkı yok. ''Kullanmayız biter hocam, ne var ki?'' diyorsundur, haklısın ama bu soruda bir de sayının çift olması isteniyor. Yani ''0'' son basamakta kullanılırsa, ilk rakam için artık tehdit oluşturmaz ama ya son rakam da ''0'' değil de ''2'' veya ''4'' kullanılmışsa? İşte bu yüzden iki farklı kutu çizmek zorunda kalacağız. Ama son rakamın çift olma zorunluluğu olmasa tek kutu işimizi görürdü, bunu da bilin…

Son basamağı ''0'' olan:

5 4 1

Son basamağı ''2'' veya ''4'' olanlar:

4 4 2

İlk durumda 20, ikinci durumda ise 32 değişik sayı elde ettik, bunları toplarsak $20 + 32 = 52$ değişik sayı yazılacağını anlarız.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A = {1, 2, 4, 5, 7, 9} kümesinin elemanları ile üç basamaklı 600'den küçük kaç sayı yazılabilir?*

A) 72 B) 144 C) 196 D) 216 E) 288

Çözüm: $\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{Z}$ şekli üç basamaklı bir sayı göstersin. Yüzler basamağına 1, 2, 4, 5 yazılabileceğinden X, 4 seçeneklidir. Y ve Z ise altışar seçenekli olacağından 600'den küçük $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ tane sayı vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarıyla rakamları birbirinden farklı 5 ile bölünebilen 3 basamaklı kaç sayı yazılabilir?*

A) 126 B) 136 C) 146 D) 156 E) 166

Çözüm: 5 ile bölünebilen sayıların son rakamı 5 veya 0'dır. Son rakamı 5 ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için 0 yazılamayacağından dolayı 8, onlar basamağı için de 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı 5 olan ve 5 ile bölünebilen 3 basamaklı $8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$ tane sayı vardır. Son rakamı 0 ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için 9 ve onlar basamağı için 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı sıfır olan $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$ sayı yazılabilir. Verilen koşullara göre 5 ile bölünebilen $64 + 72 = 136$ sayı yazılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarıyla en az iki basamağı aynı olan kaç farklı 3 basamaklı sayı yazılabilir?*

A) 729 B) 504 C) 225 D) 81 E) 72

Çözüm: Yazılabilecek tüm 3 basamaklı sayılardan, yazılabilecek rakamları farklı 3 basamaklı sayıları atacağız. Tüm 3 basamaklı sayılar $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ tane olup, rakamları farklı olanlarsa $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ tanedir. O halde cevabımız $729 - 504 = 225$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Rakamları çarpımı 7'ye bölünebilen kaç tane dört basamaklı sayı vardır?*

A) 9000 B) 5832 C) 4904 D) 3168 E) 1736

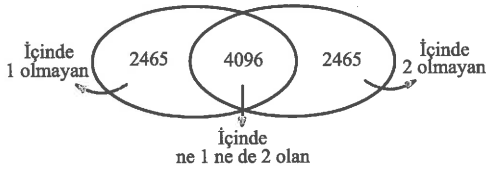
Çözüm: 7 bir asal sayı olduğundan 4 rakamın çarpımının 7'ye bölünebilmesi için içlerinden en az 1 tanesi 7 olmalıdır. O halde içinde hiç 7 olmayan 4 basamaklı sayıların adedini, tüm 4 basamaklı sayıların adedinden çıkartalım. Yazılışında 7 kullanılmayan 4 basamaklı sayıların adedi $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$'dir. Diğer yandan 4 basamaklı sayıların toplam adedi de $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ olduğundan cevabımız $9000 - 5832 = 3168$ olmalıdır. Diğer yandan içinde 7 rakamı olmayıp da 0 rakamı olan 4 basamaklı sayıların rakamları çarpımı da 7'ye bölünebilir. Bu sayıların adedi de 1736 olduğundan cevap $3168 + 1736 = 4904$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *1'den 10000'e kadar olan doğal sayılar içinde hem 1 hem de 2'nin kullanıldığı kaç sayı vardır?*

A) 4096 B) 2465 C) 1000 D) 974 E) 926

Çözüm: 10000 sayısı zaten koşulu sağlamıyor diye onu atalım. 1'den 9999'a kadar olan sayıları da *abcd* ile gösterelim. İçinde 1 olmayan sayılar $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$ tanedir. İçinde 2 olmayan sayılar da 6561 tanedir. Bir de içinde ne 1 ne de 2 olan sayıların adedini bulalım. O da $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ tanedir.



O halde içinde 1 olmayanların kümesiyle, içinde 2 olmayanların kümesini kesişimi içinde ne 1 ne de 2 olan sayıların adedini verir. Şemadan da göreceğiniz üzere 2465 tane içinde 1 olan ama 2 olmayan, yine 2465 tane içinde 2 olan ama 1 olmayan, 4096 tane de içinde ne 1 ne de 2 olan sayı vardır. Toplamları 9026 yapar. Bunu 10000'e kadar olan tüm sayıların adedinden çıkartırsak, cevabı 974 olarak buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *1, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla yazılabilecek rakamları farklı tüm 5 basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıraya dizilse baştan 50'nci sayı kaç olur?*

A) 31254 B) 32154 C) 42153 D) 51234 E) 52143

Çözüm: Toplam $5! = 120$ değişik sayı yazılabilir. Bunlardan 24 tanesi 1'le, 24 tanesi 2'yle, 24 tanesi 3'le, 24 tanesi 4'le, 24 tanesi de 5'le başlayacaktır. O zaman bizim sayı 3'le başlayan en küçük ikinci sayı olmalıdır. En küçüğü 31245 olduğundan, bu sayıdan sonra gelen 31254 sayısıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *1, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla yazılabilecek tüm 5 basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıraya dizilse baştan 50'nci sayı kaç olur?*

A) 11255 B) 21534 C) 32255 D) 32451 E) 54412

Çözüm: Bu sorunun bir öncekinden farkı rakamların tekrar edebilir olmasıdır. Toplam $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$ sayı yazmak mümkündür. Bunlardan $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ tanesi 1 ile başlar. Bizimki de bunların içindedir. Bu 625 sayının $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ tanesinin ikinci rakamı da 1'dir. Bizimki bunun da içindedir. Bu 125 sayının $5 \cdot 5 = 25$ tanesinin üçüncü rakamı da 1'dir. 25 tanesinin üçüncü rakamı 2'dir. O halde bizim sayı ilk iki rakamı 1, üçüncü rakamı 2 olan sayıların en büyüğüdür. Yani 11255.

Doğru cevap: A.

Oturma, dizilme, sıralanma sayıları. Şimdi de bir miktar kimsenin/nesnenin boş buldukları bir yere/sıraya/rafa kaç değişik biçimde oturabileceğini/dizilebileceğini/sıralanacağını bulmaya çalışacağız. İşimiz yok ya!

Yine örneklerle açıklayalım ama ilerde permutasyon konusunda bu soruları farklı şekillerde çözebileceğimizi de belirtelim. Bazen daha kısa ama bazen daha uzun.

Örnek. *Ahmet ve Mehmet'in aralarında bulunduğu 5 kişi bir sıraya;*

i. *Kaç değişik şekilde oturabilir?*

5 kişi olduğundan 5'li bir kutu çizelim.

5	4	3	2	1

Sıranın en başına 5 kişinin 5'i de oturabilir. Onun sağına aday 4 kişi kaldı. Böylece ortaya 3, ortanın sağına da 2 aday kaldı. En sağa da 1 kişi. O halde $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5! = 120$ değişik şekilde oturabilirler.

ii. *Ahmet ile Mehmet yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir?*

Madem Ahmet ile Mehmet ayrılmak istemiyorlar, biz de onları bir iple bağlayalım. Artık Ahmet nereye giderse, Mehmet de oraya gideceğinden sanki tek kişi gibi oldular. 5 kişi bir sıraya 5! değişik şekilde oturuyorsa 4 kişi de 4! = 24 değişik şekilde oturur. Ama bu 24 durumun hepsinde Ahmet ile Mehmet yer değiştirebilirler. Bundan dolayı cevap $2\cdot4! = 48$ olmalıdır.

iii. *Ahmet ile Mehmet birbirlerine küsler ve bundan dolayı yan yana olmak istemiyorlarsa kaç değişik şekilde oturabilirler?*

Toplam durumdan yan yana olma durumlarını çıkartırsak, yan yana olmama durumlarını bulmuş oluruz. O halde cevap $120 - 48 = 72$ olmalıdır.

iv. *Ahmet ile Mehmet arasında her defasında sadece 1 kişi olmak kaydıyla kaç değişik şekilde oturabilirler?*

Ahmet'i A ile, Mehmet'i M ile diğer üç insanı da X, Y, Z ile gösterelim. A ile M'nin arasında X de olabilir, Y de, Z de... Yani $AXMYZ$, $XAYMZ$ ve $XYAZM$ durumları mümkündür. Fakat A ile M yer değiştirebileceği gibi, X, Y, Z de kendi aralarında yer değiştirebilirler. Üç farklı insan kendi arasında 3! kadar yer değiştirebileceğinden, bir de A ile M'nin 2! kadar yer değiştirme durumu olduğundan cevabımız

$$3\cdot3!\cdot2! = 36$$

olmalıdır.

Örnek. *7 kişilik bir sıraya 5 kişi kaç farklı şekilde oturabilir?*

A) 35 B) 120 C) 210 D) 2520 E) 504

Çözüm: Yine 5 kişi olduğundan 5'li bir kutu çizeceğiz.

7	6	5	4	3

İlk adamın oturmak için 7 seçeneği var. İkincisinin 6. Üçüncüsünün 5. Dördüncüsünün 4. Sonuncusunun ise 3. Bundan dolayı cevabımız $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *1, 2, 3, 4 rakamlarıyla yazılabilen, rakamları tekrarsız dört rakamlı sayıların toplamı nedir?*

A) 10^6 B) 10^5 C) $15\cdot10^4$ D) $6\cdot10^5$ E) 66660

Çözüm: 4 rakamla 4! = 24 sayı yazabiliriz. Bunları toplarsak 1, 2, 3, 4 rakamları her basamakta 24/4 = 6 kez tekrar eder. Bu yüzden $6\cdot(1 + 2 + 3 + 4) = 60$'dır. Rakamların basamak değerlerini dikkate alırsak,

$$60\cdot1000 + 60\cdot100 + 60\cdot10 + 60\cdot1 = 66660$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ANA, EMME, NEDEN kelimeleri gibi baştan ve sondan okunuşları aynı olan kelimelere palindrom denir.*

$$A, A, A, B, B, C, C, D, D$$

harfleriyle kaç değişik 9 harfli palindrom yazılabilir?

A) 4 B) 12 C) 24 D) 64 E) 256

Çözüm: A harfinden 3 tane olduğundan, bunlardan bir tanesi mutlaka kelimenin tam ortasına gelmelidir. Diğer harf çiftlerinin de biri bu A'nın solunda, diğeri de sağında yer almalıdır. Ayrıca sadece ilk dört harfin dizilişlerine baksak yeterli olacaktır, çünkü son dört rakam tamamıyla ilk dört harfin ayna görüntüsü olacaktır. A, B, C, D harfleri 4! = 24 farklı şekilde dizilebileceğinden, 24 farklı palindrom yazılabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *4 farklı matematik, 3 farklı geometri kitabı bir rafa;*

i. *Kaç farklı şekilde dizilebilir?*

Tüm kitaplar birbirlerinden farklı diye cevap 7! olur.

ii. *Geometri kitapları birbirinden ayrılmamak üzere kaç değişik şekilde dizilebilir?*

Madem geometri kitapları birbirinden ayrılmayacak, bunları bir iple birbirlerine bağlayalım. 4 matematik kitabıyla birlikte ortada 5 kitap varmış gibi olur. 5 kitap da bir rafa 5! kadar değişik şekilde dizilir. Ama geometri kitapları da bu 120 dizilişin her birinde kendi aralarında yer değiştirebilirler. Bundan dolayı cevap $5!\cdot3! = 720$ olmalıdır.

CEVAPLI TEST 1

1.
A köyünden B köyüne 5 yol, B köyünden C köyüne de 3 farklı yol vardır.
A'dan B'ye uğramak kaydıyla C'ye kaç farklı şekilde gidilebilir?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 15 E) 125

2.
A şehrinden, B şehrine 6 farklı yoldan, B şehrinden C şehrine, 5 farklı yoldan gidilebilmektedir.
Gidiş ve dönüşte B şehrine uğramak ve gidişte kullanılan yol dönüşte kullanılmamak şartıyla, A şehrinden C şehrine kaç değişik yolla gidip dönülebilir?

A) 30 B) 50 C) 300 D) 500 E) 600

3.
3 farklı cep telefonu ve 4 farklı hattı bulunan bir kimse kaç değişik şekilde görüşme yapabilir?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 12 E) 81

4.
Bir öğrenci, okulda 8 dersini haftada ikişer kez dinliyor. Bu derslerden, kendini eksik hissettiği 5 tanesini ise hem dershanede hem de özel derste birer kez daha dinliyor.
Bu öğrenci haftada en az kaç kere ders dinliyordur?

A) 21 B) 24 C) 26 D) 31 E) 36

5.
Bir lokantada 2 çeşit çorba, 5 çeşit yemek, 3 çeşit tatlı vardır.
Her çeşitten birer tane yemek isteyen birinin kaç değişik seçeneği vardır?

A) 10 B) 11 C) 13 D) 17 E) 30

6.
2 farklı takım elbisesi, 3 farklı ayakkabısı, 4 farklı şapkası bulunan bir kişi, bu giysilerden birer tane giymek şartıyla kaç farklı şekilde giyinebilir?

A) 24 B) 14 C) 11 D) 10 E) 9

7.
10 kişilik bir gruptan önce bir başkan sonra bir yardımcı kaç değişik şekilde seçilebilir?

A) 10 B) 19 C) 45 D) 90 E) 10^9

8.
7 kişinin katıldığı bir sınav başarı yönünden kaç değişik şekilde sonuçlanabilir?

A) 7 B) 14 C) 49 D) 98 E) 128

9.
18 takımlı bir ligde bir hafta sonunda oynanan tüm maçların sonuçlarını (ev sahibi takım yener, misafir takım yener, berabere biter şeklinde) garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir?

A) 18 B) 3^9 C) 9^3 D) 3^{18} E) 18^3

10.
10 takımlı bir futbol liginde sezon sonu ilk üç takım kaç değişik şekilde oluşabilir?

A) 27 B) 30 C) 120 D) 360 E) 720

1.D 2.E 3.D 4.C 5.E 6.A 7.D 8.E 9.B 10.E

CEVAPLI TEST 2

1.
10 takımlı bir futbol liginde belli üç takımın ilk üç sırayı paylaşacakları önceden bellidir.
Sezon sonu kaç değişik sıralama oluşabilir?

A) 3! B) 7! C) 3!·7! D) 10! E) 3^7

2.
81 ili olan ülkemizde kendi alfabemizle 01 ĞÇ 000 şeklinde herhangi başka bir şart olmaksızın kaç değişik araç plakası yazmak mümkündür?

A) $10^5 \cdot 29^2$ B) $81 \cdot 29^2 \cdot 10^3$ C) $81 \cdot 29^2 \cdot 999$
D) $82 \cdot 29^2 \cdot 10^3$ E) $81 \cdot 29^2 \cdot 900$

3.
Bir haritadaki 12 şehrin 4'ü kırmızıya, 3'ü sarıya, 5'i maviye kaç farklı şekilde boyanabilir?

A) $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$ B) $\frac{12!}{6!}$ C) $\frac{12!}{3! \cdot 4!}$ D) 12^{12} E) 12^{60}

4.
49 toptan rastgele 6'sını seçip rasgele bir sıraya diziyorlar.
Bu sırayı bilmek için en az kaç değişik tahminde bulunmak gerekir?

A) $\frac{49!}{43!}$ B) $\frac{49!}{6!}$ C) $\frac{49!}{43! \cdot 6!}$ D) 6^{49} E) 49^6

5.
İki zar atıldığında oluşabilecek tüm durumlarda üst yüze gelen sayıların çarpımı kaç durumda tek sayı olur?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

6.
Birler basamağı tek sayı, onlar ve yüzler basamağı çift sayı olan kaç tane değişik üç basamaklı sayı yazılabilir?

A) 100 B) 125 C) 150 D) 250 E) 450

7.
Bir futbol takımı 6 kişi arkada 5 kişi önde olmak üzere kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilir?

A) 11! B) $\frac{11!}{6!}$ C) $\frac{11!}{5!}$ D) $\frac{11!}{6! \cdot 5!}$ E) 5!·6!

8.
Bir futbol takımı en uzun 6 kişi arkada, en kısa 5 kişi önde olmak üzere kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebilir?

A) 11! B) $\frac{11!}{6!}$ C) $\frac{11!}{5!}$ D) 2·5!·6! E) 5!·6!

9.
Bir kimse, bilgisayarındaki dosyalara 1 Türkçe harf ve 2 rakamdan oluşan isimler vermektedir.
Bu sistemle en çok kaç dosyayı isimlendirebilir?

A) 2349 B) 2900 C) 7047 D) 8700 E) 17400

10.
3 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 12 B) 64 C) 81 D) 128 E) 2^{12}

1.C 2.B 3.A 4.A 5.C 6.A 7.A 8.E 9.D 10.B

CEVAPLI TEST 3

1.
4 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç farklı bire-bir fonksiyon tanımlanabilir?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 36

2.
Tüm oyuncaklar dağıtılmak kaydıyla 6 farklı oyuncak, 3 çocuğa kaç değişik şekilde verilebilir?

A) 6 B) 18 C) 20 D) 3^6 E) 6^3

3.
3 mektup, 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

A) 3 B) 10 C) 15 D) 3^5 E) 5^3

4.
5 insan, 2 farklı asansöre kaç değişik şekilde binebilir?

A) 7 B) 10 C) 25 D) 32 E) 120

5.
5 insan, 5 kişilik bir arabaya 2 öne, 3 arkaya olmak üzere kaç değişik şekilde binebilir?

A) 6 B) 12 C) 25 D) 32 E) 120

6.
İkisi ehliyetli 5 kişi, 5 kişilik bir arabaya, ehliyetliler öne, ehliyetsizler arkaya olmak üzere kaç değişik şekilde binebilir?

A) 6 B) 12 C) 25 D) 32 E) 120

7.
4 kişi 8 kişilik bir sıraya kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 32 B) 680 C) 1600 D) 1680 E) 1686

8.
Belli üç kişi bir arada olmak kaydıyla 7 kişi bir sıraya kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 720 B) 630 C) 120 D) 30 E) 20

9.
Belli üç kişinin üçü birden yanyana olmamak üzere 7 kişi bir sıraya kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 4380 B) 4320 C) 4300 D) 720 E) 120

10.
5 farklı matematik, 4 farklı fizik kitabı bir rafa aynı dersin kitapları yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde dizilebilir?

A) 9! B) 9!·2! C) 2!·4!·5! D) 4!·5! E) 20!

1.D 2.D 3.E 4.D 5.E 6.B 7.D 8.A 9.B 10.C

CEVAPLI TEST 4

1.
3 farklı matematik, 4 farklı fizik, 5 farklı kimya kitabı bir rafa dizilecektir.
Matematik kitapları birbirinden ayrılmamak üzere kaç değişik şekilde diziliş sağlanabilir?

A) 10! B) 12! C) 12!·3! D) 10!·3! E) 10!·4!

2.
3 farklı matematik, 4 farklı fizik, 6 farklı kimya kitabı bir rafa dizilecektir.
Bir fizik kitabı ile başlayıp bir başka fizik kitabı ile biten bir sıralama kaç değişik şekilde yapılabilir?

A) 13! B) 12! C) 11! D) 6·11! E) 10!

3.
Herkesin birbirine hediye aldığı bir toplulukta toplam 110 hediye verilmişse, bu toplulukta kaç kişi vardır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 15

4.
$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 200 B) 210 C) 300 D) 310 E) 343

5.
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı kaç çift sayı yazılabilir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 24 E) 26

6.
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
kümesinin elemanlarıyla üç basamaklı rakamları farklı 400'den küçük kaç çift sayı yazılabilir?

A) 24 B) 30 C) 36 D) 38 E) 40

7.
$C = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 9\}$
kümesinin elemanlarıyla 3000 ile 8000 arasında kaç farklı sayı yazılabilir?

A) 343 B) 643 C) 685 D) 686 E) 786

8.
$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$
kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek üç basamaklı rakamları farklı sayıların kaç tanesi 15 ile kalansız bölünür?

A) 38 B) 30 C) 20 D) 19 E) 10

9.
$E = \{1, 2, 3, \ldots\}$
kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayıların adedi 120 olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

10.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla oluşturulabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 25 ile bölünebilir?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 25 E) 35

11.
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin elemanlarıyla oluşturulabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 25 ile bölünebilir?

A) 8 B) 10 C) 15 D) 16 E) 20

12.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
kümesinin elemanlarıyla rakamları tekrarsız, 4 basamaklı 3000'den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?

A) 96 B) 84 C) 72 D) 48 E) 24

1.D 2.B 3.C 4.B 5.C 6.A 7.C 8.C 9.B 10.C 11.D 12.D

Cebir Notları

Ali, ERGİN, Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Permutasyon

$r < n$ olduğu bir durumda, n tane farklı nesnenin r tanesini aynı anda seçerek sıraya dizersek, yani bu nesnelerle bir sıralı r'li oluşturursak, bu sıralamaya ***n*'nin *r*'li bir permutasyonu** denir. Oluşturabileceğimiz tüm sıralı r'liler de ***n*'nin *r*'li permutasyonlarının** tümünü verir. Kaç farklı sıralı r'li yapılabiliyorsa, n'nin r'li permutasyonu o kadardır denir. Örneğin, $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinden aynı anda 3 eleman seçelim. Bunlar da örneğin a, b, c olsun. O halde "bca", A kümesinin bir 3'lü permutasyonudur. Peki seçtiğimiz bu elemanları başka türlü sıraya dizebilir miydik?

Tabii ki, abc, acb, bac, bca, cab, cba gibi 6 farklı şekilde dizilebilirlerdi. O halde A'nın a, b, c elemanlarını içeren 3'lü permutasyonlarının sayısı 6'dır deriz. Eğer 4 elemanın 4'ünü de seçseydik, $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, ... gibi 24 farklı diziliş meydana gelirdi ki A'nın 4'lü permutasyonlarının sayısı da 24'tür derdik. Dikkat ederseniz, A kümesinin a, b, c elemanlarını içeren 3'lü permutasyonlarının sayısı 6 yani 3!, 4'lü permutasyonlarının sayısı da 24 yani 4! çıktı, demek ki bu hesaplamanın faktöryelle bir alakası olmalı diye şüpheye düştük. Yanılmadık, var! Ama tabii ki $r!$ değil. Öyle olsaydı 1'li permutasyonların sayısı $1! = 1$ çıkmalıydı, halbuki A kümesinin a, b, c, d olmak üzere 4 farklı 1'li permutasyonu vardır. O halde n'nin r'li permutasyonlarının sayısı kaç? Şimdi bu soruya cevap arayacağız. Başlıyoruz:

***n*'nin *r*'li permutasyonlarının sayısı.** Önce r tane eleman seçeceğiz, sonra bu r tane elemanı değişik değişik sıralara dizeceğiz. Bunu yapabilmek için başkan ve yardımcılarını seçtiğimiz örneği aklınıza getirin. 1 başkan, 1 yardımcı, 1 sekreter ve 1 çaycı seçtiğimizden 4'lü bir kutu çizmiştik. Burada da r tane eleman seçeceğimizden r'li bir kutu çizeceğiz. Nasıl ki başkana 8 aday var diye başkan kutusuna 8 yazmıştık, burada da ilk elemanın kutusuna n yazacağız. Sonraki kutuya $(n-1)$, bir sonrakine $(n-2)$ filan yazacağız ve bu böyle devam edecek. r'ninci kutuya ise $(n-r+1)$. Şimdi geriye bunları çarpmak kaldı.

$$\begin{aligned} P &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) \\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Zor değilmiş değil mi? İşte bu n'nin r'li permutasyonu sayısı da $P\binom{n}{r}$ veya $P(n, r)$ ile gösterilir. Unutmamamız gereken bu eşitliği yine yazalım: $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Biraz önceki işlemlerin başında bulduğumuz

$$P(n, r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$$

eşitliği gereği, n'nin r'li permutasyonunu yani $P(n, r)$'yi pratik yoldan hesaplamak isteyenler n'den başlayan ve birer birer azalan r tane sayıyı çarpmalılar. Örneğin,

$P(11, 2) = 11\cdot 10$,
$P(10, 3) = 10\cdot 9\cdot 8$,
$P(15, 4) = 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$ gibi...

Teorem. $P(n, 0) = 1$.

Kanıt: $P(n, 0)$ sayısı, n tane nesnenin 0 tanesini kaç değişik şekilde sıraya dizebileceğimizin sayısını verir. 0 nesneyi sıraya dizemeyiz, yani 1 şekli var, o da dizememek! Formülü boşuna mı çıkardık diyenler için bir de formülde yerlerine yazarak hesaplayalım.

$$P(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Teorem. $P(n, 1) = n$.

Kanıt: $P(n, 1)$ sayısı, n tane nesnenin 1 tanesini seçerek, o seçtiğimiz 1 tane nesneyi kaç değişik şekilde sıraya dizebileceğimizin sayısını verir. 1 nesneyi n değişik şekilde seçebileceğimizden, ayrıca 1 nesneyi de sadece 1 şekilde dizebileceğimizden cevap $n\cdot 1 = n$ olmalıdır.
Bir de formülle hesaplayalım.

$$P(n, 1) = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

Teorem. $P(n, n) = n!$.

Kanıt: $P(n, n)$ sayısı, n tane nesnenin n tanesini seçerek, o seçtiğimiz n tane nesneyi kaç değişik şekilde sıraya dizebileceğimizin sayısını verir. n nesneyi 1 değişik şekilde seçebileceğimizden (ne var ne yok hepsini seçeceğiz), ayrıca n nesneyi de $n!$ kadar değişik şekilde dizebileceğimizden cevap $1\cdot n! = n!$ olmalıdır. Formülle çıkar:

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Örnek. *$P(n, 4) = 4 \cdot P(n, 3)$ olduğuna göre n kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: n'nin r'li permutasyonu için bulduğumuz formülü kullanalım.

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 4\frac{n!}{(n-3)!}$$

olduğundan

$$(n-3)! = 4(n-4)!$$

yani

$$(n-3)(n-4)! = 4(n-4)!$$

olur ki $n = 7$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. 10 *kişilik bir grupta herkes birbirine tokat atarsa, toplam kaç tokat atılmış olur?*

A) 10 B) 20 C) 45 D) 90 E) 200

Çözüm: (A, B) sıralı ikilisi, A insanı B insanına tokat atmış demek olsun. (A, B) ile (B, A) farklı tokatları simgelediğinden, bu on insana isim verirsek, bu isimlerle yapabileceğimiz tüm sıralı ikililer bize atılmış bir tokat verir. O halde

$$P(10, 2) = 10 \cdot 9 = 90$$

tokat atılmış olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 10 *kişilik bir grupta herkes birbiriyle dans ederse, toplam kaç dans edilmiş olur?*

A) 10 B) 20 C) 45 D) 90 E) 200

Çözüm: (A, B) sıralı ikilisi, A insanı B insanıyla dans etti demek olsun. Ama bu aynı zamanda B insanının da A ile dans etmiş olduğunu söyler. Yani deminki gibi çözeceğiz ama her dansı iki kere saymış olacağımızdan (ama ortada edilmiş tek dans olduğundan) cevabı ikiye böleceğiz.

$$P(10, 2)/2 = 45.$$

İlerde bunun adını kombinasyon koyacağız.

Doğru cevap: C.

Örnek. 12 *kişinin katıldığı bir yarışmada, hiç bir katılana birden fazla ödül verilmemek şartıyla, birinci ve ikinci ödüller kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 156 B) 144 C) 132 D) 72 E) 66

Çözüm: Problemde, bileşenleri tekrar etmeyen ve birinci bileşeni birinci ödüllü, ikincisi ise ikinci ödüllü olan (bir yarışmacı, başka yarışmacı) şeklindeki ikililerin sayısı istenmektedir. Böyle ikililerin sayısı $P(12,2)$ olup sonuç $12 \cdot 11$ yani 132'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin içinde "a" bulunan 3'lü permutasyonlarının sayısı kaçtır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

Çözüm: Önce "a"yı n'olur n'olmaz diye kenara bir ayıralım. A kümesinin "a" dışındaki elemanlarının kaç değişik 2'li permutasyonu var, onu hesaplayalım, sonra bunların arasına "a"yı koyarız. $P(3, 2) = 6$ olur. Bu altı 2'li permutasyonun hepsinde "a"yı en başa da koyabiliriz, iki elemanın arasına da, en sona da... O halde $3 \cdot 6 = 18$ tane içinde "a" bulunan 3'lü permutasyon vardır.

Bu soruyu ilerde kombinasyon dersinde farklı bir şekilde daha çözeceğiz. Ben size o yolu tavsiye ederim.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin "a" ve "b" elemanlarını yan yana bulunduran 5'li permutasyonlarının sayısı kaçtır?*

A) 24 B) 48 C) 120 D) 240 E) 480

Çözüm: Biz "a" ile "b" elemanlarını, birbirlerinden ayrılmasınlar diye, "ab" gibi tek bir elemanmış gibi düşünelim. O halde şu an A kümesi 7 değil, 6 elemanlı olur. "ab" elemanını yine n'olur n'olmaz diye kenara ayıralım. Kalan 5 eleman ile değişik sıralı 3'lüler yapıp, aralara bu "ab" elemanını serpiştireceğiz. Böylece 5'li permutasyonlar oluşacak. c, d, e, f, g elemanlarıyla

$$P(5, 3) = 60$$

tane sıralı 3'lü yapılabilir. Bu "ab"leri en başa koyabileceğimiz gibi, birinci ile ikinci elemanın arasına da koyabiliriz, ikinci ile üçüncü elemanların arasına da, en sona da. Yani 4 seçenek var. O halde içinde "ab" bulunan 5'li permutasyon sayısı

$$60 \cdot 4 = 240\text{'tür.}$$

Son dikkat edilmesi gereken ise soruda "ab" bulunan demiyor, "a" ile "b"nin yan yana bulunduğu diyor, yani "ba" olsa da olur demek istiyor. Bulduğumuz sonucu 2 ile çarparsak soruyu çözmüş oluruz, cevabımız

$$240 \cdot 2 = 480.$$

Kombinasyon dersinde bu soruyu tekrar çözeriz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir haritada 4 ülke görünmekte olup, bu ülkeler farklı renklere boyanacaktır. Bu iş için 6 farklı renkte boya varsa harita kaç farklı şekilde boyanabilir?*

A) 720 B) 360 C) 240 D) 180 E) 120

Çözüm: Aslında soruda 6 elemanlı bir kümenin 4'*lü permütasyonlarının* sayısı sorulmaktadır. Her dörtlü (birinci ülkenin rengi, ikinci ülkenin rengi, üçüncü ülkenin rengi, dördüncü ülkenin rengi) şeklindedir. Bu yüzden cevap $P(6,4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$'dır.

Doğru cevap: B.

r farklı nesneyi, n kutuya, her kutuda herhangi bir sayıda ama dizilişi önemli olmak kaydıyla,

$$P\binom{n+r-1}{r}$$

kadar değişik şekilde yerleştirebiliriz.

Çünkü birinci nesneyi n kutudan birine yerleştirebiliriz. İkinci nesneyi, yerleştirilen birinci nesnenin sağına da soluna da koyabileceğimizi hesaba katarsak $n + 1$ kutuya yerleştirebiliriz. Aynı şekilde devam edersek, üçüncü nesneye $n + 2$ farklı yer var demek olur. Sonuç olarak nesnelerin dizilişi

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+r-1)$$

farklı şekilde olabilir. Bunun da

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}=P\binom{n+r-1}{r}$$

olduğunu bulmak hiç de zor değildir.

Örnek. *Bir komodinin yeterince büyük beş çekmecesi vardır. 3 farklı gömleği, bu 5 çekmeceye, içindeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde koyabiliriz?*

A) 15 B) 30 C) 60 D) 125 E) 210

Çözüm: Birinci gömleği 5 farklı çekmeceye koyabiliriz. İkinci gömleğe kaç farklı seçenek olduğuna bakalım. Bu gömleği hala 5 çekmeceye de koyabiliriz ama ilk gömleği koyduğumuz çekmecede artık iki farklı durum vardır. İkinci gömleği, ilk gömleğin üstüne de koyabiliriz, altına da, yani aslında ikinci gömlek için 6 farklı seçenek vardır. Şimdi de üçüncü gömleğe geçelim. Bunun için de aynı sebepten dolayı 7 seçenek vardır. O halde cevabımız $5\cdot6\cdot7=210$. Formülden yapsaydınız da $P(7, 3)$.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yeterince büyük üç bölmesi bulunan bir kitaplık rafına 10 farklı kitap, bölmelerdeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde dizilebilir?*

A) $P\binom{12}{3}$ B) $P\binom{13}{3}$ C) $P\binom{12}{9}$ D) $\binom{12}{10}$ E) $P\binom{13}{10}$

Çözüm: Hemen formülümüzü kullanalım.



10 nesne ve 3 kutu varmış gibi düşünmeliyiz. O halde

$$P\binom{10+3-1}{10}=P\binom{12}{10}$$

farklı şekilde diziliş mümkündür. Daha açık olarak, ilk kitap için 3, ikinci kitap için 4 yer var, …, onuncu kitap için 12 yer var. O halde $3\cdot4\cdot\ldots\cdot11\cdot12=P(12, 10)$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 erkek ve 4 kadından oluşan bir grup, kadınlar boy sırasında olmak üzere kaç farklı şekilde sıraya dizilebilirler?*

A) $P\binom{9}{4}$ B) $P\binom{9}{5}$ C) $P\binom{9}{6}$ D) $2\cdot P\binom{9}{4}$ E) $2\cdot P\binom{9}{5}$

Çözüm: Önce kadınları ister kısadan uzuna isterse uzundan kısaya bir sıraya dizelim. Şimdi 5 erkeği başa sona veya aralara yerleştireceğiz. Yani ilk erkeğe 5 farklı yer var. İkinci erkeğe 6, üçüncüsüne 7, dördüncüsüne 8 ve beşincisine de 9 farklı yer bulunabilir. Bir de kadınları ters sırada dizdiğimizi düşünürsek, bulduğumuz sonucu 2'yle çarpmalıyız.

$$5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot2=2\cdot P\binom{9}{5}.$$

Doğru cevap: E.

r farklı nesneyi, n kutuya, her kutuda en fazla 1 nesne olmak kaydıyla

$$P\binom{n}{r}$$

kadar değişik şekilde yerleştirebiliriz.

Çünkü, birinci nesne n kutudan birine, ikinci nesne kalan $(n - 1)$ kutudan birine, üçüncü nesne kalan $(n - 2)$ kutudan birine, … , r'ninci nesne de kalan $(n - r + 1)$ kutudan birine yerleştirilebilir. Bu durumda, farklı yerleştirme sayısı

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}=P\binom{n}{r}$$

olmalıdır.

Örnek. *3 farklı oyuncak, 5 çocuğa, her çocuğa en çok 1 tane oyuncak gelme koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 15 B) 30 C) 60 D) 125 E) 210

Çözüm: Bu soru, *3 kişi 5 kişilik bir sıraya kaç farklı şekilde oturur* problemiyle aynıdır. Bir sıraya iki kişi oturamayacağından, her boş yere en çok 1 kişi oturabilir.

Birinci oyuncağı 5 farklı çocuğa verebiliriz, ikinci oyuncağı ancak 4 farklı çocuğa verebiliriz, üçüncü oyuncak için de ancak 3 farklı çocuk bulunabilir.

Bu yüzden cevabımız $5\cdot4\cdot3 = 60$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$P\binom{n}{0}$$

kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $n-1$ D) n E) $n!$

2.

$$P\binom{n}{1}$$

kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $n-1$ D) n E) $n!$

3.

$$8\cdot P\binom{n}{2}=P\binom{n}{3}$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4.

$$P\binom{n}{2}+P\binom{n}{3}=25\cdot P\binom{n}{1}$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5.

$$P\binom{n+2}{2}=2\cdot P\binom{n+1}{2}$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$$n^2-5n+6$$

ifadesinin permutasyonlu gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $P\binom{n}{2}$ B) $P\binom{n-1}{2}$ C) $P\binom{n-2}{2}$

D) $P\binom{n-2}{3}$ E) $P\binom{n-2}{n-4}$

7.

$$A=\{a,b,c,d,e,f\}$$

kümesinin 3'lü permutasyonlarının kaç tanesinde b eleman olarak bulunur?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

8.

$$C=\{a,b,c,d,e,f\}$$

kümesinin 3'lü permutasyonlarının kaçında a bulunur ama e bulunmaz?

A) 12 B) 32 C) 36 D) 38 E) 40

9.

$$B=\{a,b,c,d,e\}$$

kümesinin 4'lü permutasyonlarının kaç tanesinde a veya b eleman olarak bulunur?

A) 120 B) 146 C) 150 D) 156 E) 160

10.

$$F=\{1,2,3,4,5\}$$

kümesinin elemanlarıyla içinde 1 ya da 2'yi barındıran kaç farklı 3'lü permutasyon yazılabilir?

A) 9 B) 18 C) 36 D) 38 E) 40

1.B 2.D 3.E 4.B 5.B 6.C 7.A 8.C 9.A 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Tekrarlı Permutasyon

Geçen dersimizde n kişinin $n!$ kadar değişik şekilde sıralanabileceğini öğrenmiştik. Şimdiyse bu n kişinin içinde ikiz veya üçüzler varsa kaç değişik sıralama yapabileceğimizi öğreneceğiz. ☺ Kısacası aralarında yer değiştirseler de fark edilmeyen nesnelerin bulunduğu durumlara göz atacağız.

Tekrarlı permutasyon. n_1 tanesi birinci türden, n_2 tanesi ikinci türden, n_3 tanesi üçüncü türden, ... , n_r tanesi r'ninci türden olmak üzere

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$$

tane elemanın birbirlerinden farklı dizilişlerine birer **tekrarlı permutasyon** denir. Böyle bir diziliş

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

farklı şekilde yapılabilir.

Sağol da kim ne anladı ki? Bakın şunu demek istiyor: Hani beş kişi bir sıraya 5! kadar değişik sırada dizilirdi ya, şimdi bu beş kişiden ikisinin ikiz olduğunu düşünün. Yer değiştirseler bile fark edilmiyorlar yani. Böyle olunca ne yapıyorduk? 5!/2 diyorduk. Eğer bu beş kişi arasında ikiz değil de üçüz olsaydı, 3 kişi kendi arasında 3! kadar yer değiştirebileceğinden cevap 5!/3! olmalıydı.

Hala anlamayan varsa, son kozumu oynuyorum: 10 kişi arasından bir başkan, bir yardımcı, bir sekreter, bir de çaycı $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ farklı şekilde seçilebilirdi ama 1 başkan ile 3 yardımcı $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7/3!$ kadardı, ondan dolayı bu bölmeler yani...

Örnek. *MUSTAFA kelimesinin harfleri ile anlamlı veya anlamsız kaç değişik 7 harfli kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 360 C) 720 D) 2520 E) 5040

Çözüm: *MUSTAFA* kelimesinin tüm harfleri farklı olsaydı, bu harflerle 7! tane farklı kelime yazabilirdik ama burada iki tane A olduğundan, yani bunlar kendi aralarında yer değiştirseler bile oluşacak yeni kelime eskisiyle aynı olacağından, 7! sayısı 2!'e bölünmelidir. O halde cevabımız $\frac{7!}{2!} = 2520$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *MATEMATİK kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 360 C) 720 D) 5040 E) 45360

Çözüm: Hepsi farklı harf olsaydı 9! tane değişik kelime yazabilirdik. Ama iki tane M, iki tane A, iki tane T harfinden dolayı

$$\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45360$$

kadar değişik kelime yazılabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *MATEMATİK kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 9 harfli E harfiyle başlayan kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 360 C) 720 D) 2520 E) 5040

Çözüm: Madem ki E harfi mecbur başta olacak, al E'yi, başa koy. Kaç harf kaldı? 8 değil mi? Yani *MATMATİK* kelimesinin harfleriyle kaç değişik kelime yazabilirsen o kadar E harfiyle başlar. Bu da

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7! = 5040$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *MATEMATİK kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 9 harfli M harfiyle başlayıp K harfiyle biten kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 360 C) 1260 D) 2520 E) 5040

Çözüm: Şimdi de M'yi başa, K'yi sona koy. *ATEMATİ* kelimesinin harfleriyle kaç değişik 7 harfli kelime yazabilirsen cevap odur. O halde cevap $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *MATEMATİK kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 9 harfli, sesli harfle başlayıp sesli harfle biten kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) $3\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$ B) $5\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$ C) $6\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$ D) $7\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$ E) $11\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$

Çözüm: Önce kaç tane sesli harfimiz var, ona bakalım. *A*, *A*, *E*, *İ* olmak üzere 4 tane. Peki, bunlarla kaç farklı şekilde başlangıç-bitiş yapabiliriz? *AA*, *AE*, *Aİ*, *Eİ*, *EA*, *İA*, *İE* olmak üzere 7 tane. Yalnız, iki durumda (başa *E*, sona *İ* ve başa *İ*, sona *E* harfleri geldiğinde), ortadaki 7 harfli kelime *MTMTKAA* olur, diğer 5 durumda ise ortadaki kelime $MTMTKS_1S_2$ olur. O halde

$$2\cdot\frac{7!}{2!\,2!\,2!}+5\cdot\frac{7!}{2!\,2!}=6\cdot\frac{7!}{2!\,2!}$$

tane değişik kelime yazılabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *MATEMATİK kelimesinin harfleriyle her M harfinden sonra T harfi gelecek şekilde anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 360 C) 1260 D) 2520 E) 5040

Çözüm: İki *M* harfiyle iki *T* harfini *MT* ve *MT* şeklinde eşleyip onları birer iple bağlayalım. Hatta onlara *X* diyelim. Sorumuz *XAEXAİK* kelimesinin harfleriyle kaç değişik 7 harfli kelime yazılabileceğine döner. O halde cevap $\frac{7!}{2!\,2!}=1260$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *3 özdeş kırmızı, 2 özdeş sarı ve 4 özdeş mavi boncuk bir sıraya kırmızı boncuklardan sadece 2 tanesi yan yana olmak üzere kaç farklı şekilde dizilebilirler?*

A) 600 B) 630 C) 650 D) 700 E) 730

Çözüm: Kırmızı boncuklar bir beklesin bakalım. Diğer boncukları sıraya dizelim. Sarılar ve maviler kendi aralarında özdeş olduklarından tekrarlı permutasyon yapacağız. Yani *SSMMMM* harfleriyle kaç değişik 6 harfli kelime yazılabileceğini bulacağız. Bunun sayısının

$$\frac{6!}{2!\,4!}=15$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu harflerin arasına 3 kırmızıyı serpiştireceğiz. Yalnız ikisini bir boşluğa, diğerini başka bir boşluğa yerleştireceğiz. 2 kırmızıyı birden koymak için 7 boşluğumuz, kalan 1 kırmızıyı koymak içinse 6 boşluğumuz var. O halde problemin çözümü $15\cdot7\cdot6=630$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *111223 sayısının rakamlarıyla 6 basamaklı ve birbirinden değişik kaç sayı yazılabilir?*

A) 60 B) 120 C) 360 D) 720 E) 1040

Çözüm: Hepsi farklı rakam olsaydı 6! değişik sayı yazılabilirdi. Üç tane 1, iki tane 2 olduğundan dolayı

$$\frac{6!}{3!\,2!}=60$$

değişik sayı yazılabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *111223 sayısının rakamlarıyla 6 basamaklı ve birbirinden değişik 3 ile başlayan kaç sayı yazılabilir?*

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Madem 3 ile başlayacak. 3'ü aldık, başa koyduk. Kalan sayının rakamlarıyla kaç değişik sayı yaza-bilirsek, onları getirip 3'ün sağına koyacağız. O halde 11122 sayısıyla $\frac{5!}{3!\,2!}=10$ sayı yazılabildiğinden cevap 10'dur.

İkinci yol. 3 sayısı 6 harften biri olduğundan, yazılabilecek tüm altı basamaklı sayı adedini 1/6 ile çarpsak da sonucu bulabilirdik. Yine $\frac{6!}{3!\,2!}\cdot\frac{1}{6}=10$ çıkardı tabii ki.

Doğru cevap: A.

Örnek. *111223 sayısının rakamlarıyla 6 basamaklı ve birbirinden değişik 3 ile başlayan kaç çift sayı yazılabilir?*

A) 4 B) 6 C) 10 D) 12 E) 20

Çözüm: Madem 3'le başlayacak, 3'ü alalım başa koyalım. Sayının çift sayı olabilmesi tek durum ile mümkün, sayının son rakamının 2 olmasıyla. Hangi 2 olduğunun önemi yok, 2'lerin birini al, sona koy. Geriye ne kaldı? 1112. Bu rakamlarla $\frac{4!}{3!}=4$ sayı yazılacağından cevabımız 4'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek. 0111223 *sayısının rakamlarıyla 7 basamaklı ve birbirinden değişik kaç sayı yazılabilir?*

A) 60 B) 120 C) 360 D) 420 E) 480

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. 3 tane 1 ve 2 tane 2 olduğundan $\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$ tane 7 basamaklı sayı yazılabilir. Yalnız bunlardan bazıları 0 ile başlayacağından atılmaları gerekir. Kaç tane 0 ile başlayan 7 basamaklı sayı olduğunu bulalım. 0'ı alıp başa koyalım, 111223 rakamlarıyla kaç tane 6 basamaklı sayı yapabileceğimizi bulalım. Bunun sayısı $\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$ olduğundan cevabımız 420 – 60 = 360 olmalıdır.

İkinci yol. İlk basamağa 0 dışındaki altı rakam gelebilir. Bu yüzden, sanki içlerinde 0 yokmuş gibi yazılabilecek tüm yedi basamaklı sayıların adedini 6/7 ile çarpsak da olur. Yine cevap $\frac{7!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{6}{7}=360$ çıkacaktır.

Doğru cevap: C.

Örnek. 34400 *sayısının rakamlarıyla yazılabilecek beş basamaklı farklı sayıların kaç tanesi çifttir?*

A) 15 B) 18 C) 48 D) 56 E) 60

Çözüm: Çiftleri bulmak bizi epey uğraştırır. Biz yazılabilecek tüm 5 basamaklı sayılardan tek olanları çıkartalım. Önce tüm sayıların adedini bulalım. $\frac{5!}{2!\cdot 2!}-\frac{4!}{2!}=18$ de diyebilirsiniz, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{3}{5}=18$ de. Tek olanlar da mecburen 3 rakamıyla biten ve yine mecburen 4 rakamıyla başlayan sayılardır. Bunların adedi de 4, 0, 0 rakamlarının dizilişi kadardır, yani 3 tanedir. O halde cevabımız $\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{3}{5}-3=15$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Sadece iki rakamı 0 ve sadece iki rakamı 1 olan beş basamaklı kaç doğal sayı vardır?*

A) 124 B) 144 C) 160 D) 196 E) 234

Çözüm: 0011X şeklinde kaç sayı yazılabileceğini bulacağız. X değişkeni 8 farklı değer alabileceğinden, bulduğumuz sayıyı 8'le çarpacağız.

Cevabımız $\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{3}{5}\cdot 8=144$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. 20072007 *sayısının rakamları yer değiştirilerek kaç farklı 8 basamaklı sayı yazılabilir?*

A) 120 B) 210 C) 420 D) 640 E) 760

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Önce sayıda hiç 0 rakamı yokmuş gibi kaç farklı 8 basamaklı sayı yazabileceğimizi tekrarlı permutasyon kullanarak bulalım. $\frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}=420$

Şimdi 0'la başlayan kaç 8 basamaklı sayı yazabileceğimizi bulalım. O halde 0'lardan birini alıp başa koyalım. Geriye kalan 2072007 sayısının rakamlarının yerini değiştirerek kaç değişik 7 basamaklı sayı yazabileceğimizi bulalım. $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=210$

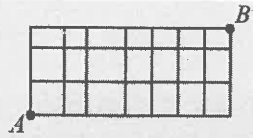
Toplam adetten bunları çıkarınca iş bitti, gitti. O halde cevabımız 420 – 210 = 210 olmalıdır.

İkinci yol. Sayıyı oluşturan rakamların yarısı 0, diğer yarısı da 0'dan farklı sayıdır. Bu yüzden, sanki içlerinde 0 yokmuş gibi yazılabilecek tüm 8 basamaklı sayıların adedini 4/8 yani 1/2 ile çarpsak da olur.

$$\frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2}=210$$

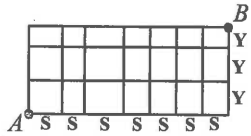
Doğru cevap: B.

Örnek. *Şekildeki çizgiler bir kentin birbirini dik kesen sokaklarını göstermektedir. A'dan B'ye en kısa yoldan kaç değişik biçimde gidilebilir?*



A) 60 B) 120 C) 360 D) 720 E) 1040

Çözüm: Yolun en kısa olması için, daima sağa veya yukarıya gitmeliyiz. 1 kere bile sola veya aşağıya gidersek, yol uzamış olur. O halde yan şekildeki gibi sağa doğru hareket etmeyi ''S'' ile, yukarı doğru çıkmayı ''Y'' ile gösterelim.

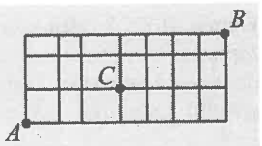


SSSSSSSYYY

kelimesinin harfleri yer değiştirdikçe A'dan B'ye giden yollar da değişir ama hala en kısa yol olur. Demek ki bu harflerle kaç değişik 10 harfli kelime yazabilirsek, o kadar farklı rota belirlemiş oluruz. Bundan dolayı cevabımız $\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$ olmalıdır.

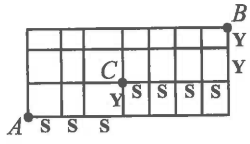
Doğru cevap: B.

Örnek. *A'dan B'ye en kısa yoldan C'ye uğramak kaydıyla kaç farklı şekilde gidilebilir?*



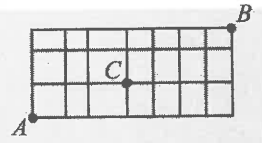
A) 60 B) 120 C) 360 D) 420 E) 480

Çözüm: *A*'dan *C*'ye farklı en kısa yol sayısını, *C*'den *B*'ye farklı en kısa yol sayısıyla çarpacağız, cevap o olacak. *A*'dan *C*'ye farklı en kısa yol sayısı *SSSY* harfleriyle kaç değişik dört harfli kelime yazılabiliyorsa o kadardır. *C*'den *B*'ye farklı en kısa yol sayısı da *SSSSYY* harfleriyle kaç değişik altı harfli kelime yazılabiliyorsa o kadardır. O halde cevabımız $\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}=60$ olmalıdır.



Doğru cevap: A.

Örnek. *A'dan B'ye en kısa yoldan C'ye uğramamak kaydıyla kaç farklı şekilde gidilebilir?*



A) 60 B) 120 C) 360 D) 420 E) 480

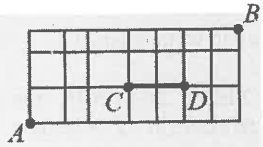
Çözüm: Bulmuştuk, toplam 120 farklı yol vardı, bunların 60'ının *C*'den geçtiğini de demin bulmuştuk, o halde

$$120-60=60$$

yolun *C*'den geçmeyen en kısa yol olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *[CD] yolunu kullanmak şartsa, A'dan B'ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?*

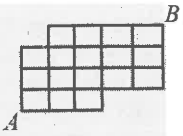


A) 24 B) 30 C) 32 D) 36 E) 48

Çözüm: *A*'dan *C*'ye en kısa yol sayısıyla, *D*'den *B*'ye en kısa yol sayısını çarpacağız. Üstteki sorularda kullandığımız tekniği kullanalım. *SSSY* ve *YYSS* durumlarını çarpacağız demektir. O halde cevap $\frac{4!}{3!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=4\cdot 6=24$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

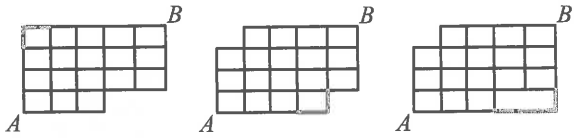
Örnek. *Sadece yukarı ve sağa gitmek kaydıyla çizgiler üzerinden A'dan B'ye kaç farklı şekilde gidilebilir?*



A) 116 B) 120 C) 12 D) 123 E) 126

Çözüm: Bu soruda tersten gitmek daha avantajlıdır. Yani önce dikdörtgen şeklin hiç bozulmamış olduğunu farz ederek *A*'dan *B*'ye kaç farklı en kısa yol olduğunu bulacağız. Daha sonra da yasak yerlerden geçen kaç farklı en kısa yol varsa onları toplamdan çıkartacağız.

Toplam en kısa yol sayısı $\frac{9!}{4!\cdot 5!}=126$ 'dır.



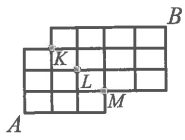
Soldaki yasak yolu kullanan tek en kısa yol vardır.
Ortadaki yasak yolu kullanan 4!/3! = 4 en kısa yol vardır.
Sağdaki yasak yolu kullanan da 1 tane en kısa yol vardır.
O halde cevabımız

$$126-1-4-1=120$$

olmalıdır.

''Ben avantajlı çözümü değil, tersten gitmeyen, direkt çözümü istiyorum!'' diyenler için sözü Üstad Ali Ergin'e bırakıyorum:

A'dan *B*'ye çizgiler üzerinden gidilecekse, şekilde işaretlenmiş *K*, *L*, *M* noktalarından mutlaka geçilecektir. Bu noktalara kavşak diyelim.

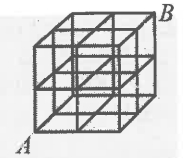


Herhangi bir kavşaktan geçen bir en kısa yol, diğer kavşaklardan kesinlikle geçmeyeceğinden, *K*'den, *L*'den ve *M*'den geçen en kısa yolların sayısını toplarsak sonuca ulaşmış oluruz.

$$\underbrace{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}}_{K\text{'den geçen}}+\underbrace{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}}_{L\text{'den geçen}}+\underbrace{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}}_{M\text{'den geçen}}=120$$

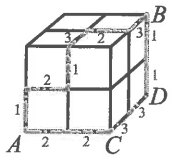
Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda, 8 birimküpten yapılmış bir küp görmektesiniz. Bir karınca bu telleri (çizgileri) kullanarak, en kısa yoldan kaç farklı şekilde A'dan B'ye gidebilir?*



A) 180 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

Çözüm: Küp üzerinde yukarı doğru yani [*DB* yönünde hareket etmeyi 1 ile, sağa doğru yani [*AC* yönünde gitmeyi 2 ile, içe doğru yani [*CD* yönünde gitmeyi 3 ile gösterelim. Karınca eğer en kısa yoldan hedefine varmak istiyorsa 2 tane 1, 2 tane 2, 2 tane de 3 yolunu tercih etmelidir. Bu durumda kaç seçeneğinin olduğunu 112233 harfleriyle kaç değişik sayı yazabileceği problemini çözerek bulabiliriz. Bu da bildiğimiz üzere $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$ değişik şekilde mümkündür.



Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki tabloda sadece sağa ve aşağıya doğru hareket ederek kaç değişik PERMUTASYON yazısı boyamak mümkündür?*

P	E	R	M	U	T
E	R	M	U	T	A
R	M	U	T	A	S
M	U	T	A	S	Y
U	T	A	S	Y	O
T	A	S	Y	O	N

A) 252 B) 250 C) 150 D) 120 E) 45

Çözüm: Şekil dikkatlice incelenirse, boyalı *P* kutusundan boyalı *N* kutusuna kaç farklı en kısa yol vardır sorusuyla nerdeyse aynı olduğu görülür. O problemlerde çizgi üzerinden gidiyorduk, burada kutudan kutuya geçeceğiz. Sağa gitmeyi *S* ile aşağı inmeyi *A* ile gösterirsek *SSSSSAAAAA* harflerini birer kez kullanarak kaç değişik 10 harfli kelime yazabiliyorsak o kadar *PERMUTASYON* yazısı boyanabileceğini rahatlıkla anlarız. Bunun sayısı da $\frac{10!}{5!\,5!}=\binom{10}{5}$ olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Her defasında sadece* 1 *veya* 3 *basamak atlayan bir çocuk,* 12 *basamaklı bir merdiveni kaç değişik şekilde çıkabilir?*

A) 60 B) 90 C) 120 D) 180 E) 240

Çözüm: Canı isterse tüm basamakları teker teker çıkar. Bu 1 seçenektir. Canı isterse sadece 1 kere 3 basamak atlar, diğerlerini teker teker çıkar. Bu da 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 sayılarının kaç değişik şekilde dizilebileceği kadardır. Veya 2 kere 3 basamak atlar, diğerlerini yine tek tek çıkar. Bu da 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1 sayılarını kaç değişik şekilde sıraya dizebileceğimiz kadardır. Benzer durumda 3, 3, 3, 1, 1, 1 ve 3, 3, 3, 3 durumu vardır.

O halde cevap $1+\frac{10!}{9!}+\frac{8!}{2!\,6!}+\frac{6!}{3!\,3!}+1=60$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A ile B takımlarının yapmış olduğu futbol karşılaşması* 3-3 *berabere bitmiştir. Bu maçı seyretmeyen ama sonucunu bilen birinin atılan golleri doğru sırada garanti bilmesi için en az kaç tahminde bulunması gerekir?*

A) 1 B) 2 C) 15 D) 20 E) 36

Çözüm: Örneğin ilk üç golü *A* takımı atmış olsun, son üç golü de *B* takımı.

Bu durumu *AAABBB* yazarak gösterelim.

O halde problem, *AAABBB* kelimesinin harfleriyle kaç değişik 6 harfli kelime yazılabileceğini sormaktadır.

Bunun da nasıl çözülebileceğini biliyoruz: $\frac{6!}{3!\,3!}=20$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tavlanın her elinde yenen* 1 *puan, mars eden* 2 *puan almakta ve yenilen puan almamaktadır. İki kişi,* 5 *puana ilk kim erişirse onun oyunu kazanmış sayılacağında anlaşarak tavla oynamaya başlıyorlar. Oyun* 5-4 *A'nın galibiyetiyle sonuçlanıyor. A ve B oyuncuları oyun esnasında birer el birbirlerini mars etmişlerse, bu oyunun her elini, kim yendi veya kim mars etti şeklinde garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir?*

A) 35 B) 120 C) 180 D) 240 E) 420

Çözüm: Demek ki *A* oyuncusu 3 oyun ve 1 mars yapmış. *B* oyuncusu da 2 oyun ve 1 mars yapmış.

A'nın aldığı oyunları *A* ile, marsı *A'* ile gösterelim. *B*'nin oyun ve marslarını da sırasıyla *B* ve *B'* ile gösterelim.

O halde *AAAA'BBB'* gibi kaç değişik 7 harfli kelime yazabileceğimizi bulacağız. Fakat son oyunu *A* oyuncusu kazandığından kelimenin sonuna *A* veya *A'* gelmelidir.

Eğer sona *A* gelmişse, *AAA'BBB'* gibi $6!/(2!\,2!)=180$,

eğer sona *A'* gelmişse, *AAABBB'* gibi $6!/(3!\,2!)=60$

değişik kelime yazılabilir. O halde bu oyun 240 farklı şekilde oynanmış olabilir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

GEOMETRİ

kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?

A) $\frac{8}{3!}$ B) $\frac{8!}{2}$ C) $\frac{10!}{2!}$ D) $\frac{8!}{3}$ E) $\frac{10}{3!}$

2.

TASTAMAM

kelimesinin harfleriyle *A* harfiyle başlayıp *A* harfiyle biten kaç farklı 8 harfli kelime yazılabilir?

A) $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ B) $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$ C) $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$

D) $\frac{8!}{3!}$ E) $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$

3.

5 aynı matematik kitabı, 4 aynı fizik kitabı bir rafa kaç değişik şekilde dizilebilir?

A) $\frac{9!}{5!}$ B) $\frac{9!}{5!\cdot 4!}$ C) $9!\cdot 5!\cdot 4!$ D) $5!\cdot 4!$ E) $9!$

4.

Üstteki soruda matematik kitabı ile başlayan fizik kitabı ile biten bir sıralama kaç değişik şekilde yapılabilir?

A) $\frac{7!}{4!}$ B) $\frac{9!}{4!\cdot 3!}$ C) $\frac{9!}{5!\cdot 4!}$ D) $\frac{7!}{2!\cdot 4!}$ E) $\frac{7!}{3!\cdot 4!}$

5.

12341234

sayısının rakamlarıyla kaç değişik 8 basamaklı sayı yazılabilir?

A) $\frac{7!}{2}$ B) $7!$ C) $2\cdot 7!$ D) $8!$ E) $\frac{8!}{2}$

6.

12341234

sayısının rakamlarıyla kaç değişik 8 basamaklı çift sayı yazılabilir?

A) $\frac{7!}{8}$ B) $\frac{7!}{4}$ C) $\frac{7!}{2}$ D) $\frac{8!}{4}$ E) $\frac{8!}{2}$

7.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle yazılabilecek tüm yedi harfli kelimeler alfabetik sıraya dizilirse, baştan 25'inci kelime ne olur?

A) *AAMSTFU* B) *AAFMSTU* C) *AAFMSUT*
D) *AAMFSTU* E) *AAMSTUF*

8.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle yazılabilecek tüm yedi harfli kelimeler alfabetik sıraya dizilirse, sondan üçüncü kelime ne olur?

A) *UTSMFAA* B) *UTSMAFA* C) *UTSMAAF*
D) *UTSFMAA* E) *UTSFAMA*

9.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle yazılabilecek harfleri farklı tüm 7 harfli kelimeler alfabetik sıraya dizilirse, *MUSTAFA* baştan hangi sırada olur?

A) 2520 B) 1427 C) 1212 D) 720 E) 648

10.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız, en çok 3 harfli kelime kaç değişik biçimde yazılabilir?

A) 72 B) 144 C) 172 D) 188 E) 212

1.B 2.A 3.B 4.E 5.A 6.B 7.D 8.C 9.B 10.C

CEVAPLI TEST 2

1.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle yazılabilecek tüm 7 harfli kelimelerin kaç tanesi *A* harfiyle başlar ama *A* harfiyle bitmez?

A) 720 B) 600 C) 480 D) 240 E) 120

2.

MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle sesli harflerin alfabetik sırada olduğu yedi harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazmak mümkündür?

A) 7!/ 2! B) 7! / 3! C) 7! / 2!.3! D) 7! / 5! E) 7!

3.

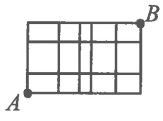
MUSTAFA

kelimesinin harfleriyle sessiz harflerin alfabetik sırada olduğu yedi harfli anlamlı ya da anlamsız kaç değişik kelime yazmak mümkündür?

A) 7! B) 7! / 3! C) 7! / 4!
D) 7! / 3!·4! E) 7! / 2!·4!

4.

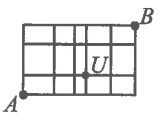
***A* noktasından *B* noktasına, çizgiler üzerinden gitmek şartıyla en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?**



A) 8! B) 8! / 2! C) 8! / 3! D) 8! / 5! E) 8! / 3!·5!

5.

***A* noktasından *B* noktasına, çizgilerin dışına çıkmadan ve *U*'ya uğramak kaydıyla en kısa yoldan kaç değişik şekilde gidilebilir?**



A) 16 B) 24 C) 32 D) 36 E) 40

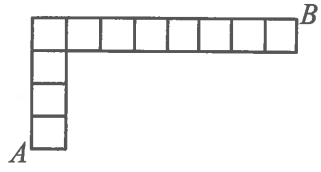
6.

Beşinci soruda *U*'dan geçmek yasak olduğuna göre kaç farklı yol vardır?

A) 56 B) 40 C) 32 D) 24 E) 16

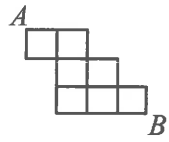
7.

Şekildeki *A* noktasından *B* noktasına karelerin kenarlarını kullanarak en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?



A) 27 B) 28 C) 29 D) 32 E) 33

8.



Bay *X*, birbirini dik kesen sokakların bulunduğu bir mahallede oturmaktadır.

Sadece güneye ve doğuya doğru gidebilen bay *X*, *A* noktasından *B* noktasına kaç değişik yolla gidebilir?

A) 35 B) 27 C) 26 D) 24 E) 23

9.

Her defasında 1 veya 4 basamak atlayan bir çocuk, 12 basamaklı bir merdiveni kaç değişik şekilde çıkabilir?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 26

10.

Rakamları çarpımı 300'den büyük 3 basamaklı rakamları farklı kaç doğal sayı vardır?

A) 96 B) 90 C) 75 D) 72 E) 64

1. B 2. C 3. E 4. E 5. B 6. C 7. E 8. E 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dairesel Permutasyon

Sonlu bir kümenin elemanlarının bir çember üzerinde (kapalı bir eğri üzerinde) birbirlerine göre farklı biçimde dizilişlerinin her birine **bu elemanların bir dairesel permutasyonu** veya **dönel sıralaması** denir.

Toplam diziliş sayısı ise $(n-1)!$ formülüyle hesaplanır.

$(n-1)!$ sayısı nerden çıktı? n tane nesnenin, bir sıraya $n!$ kadar değişik şekilde dizilebileceğini kanıtlamıştık. Bunu unutmayın. Şimdi bu n tane nesneyi sıraya değil de yuvarlak bir masa etrafına oturtalım. Canımız nasıl isterse öyle oturtalım. Sonra herkes aynı yöne doğru birer sandalye kaysın. Sizce birbirlerine göre başka bir sıralama mı elde ettik, yoksa deminkinin aynısını mı? Aynısını değil mi? Peki bu kaymalar ne kadar sürerse sürsün fark etmez, onu da biliyorsunuz değil mi? Yani n tane dizilişin hepsi aslında birbirlerine göre aynı diziliştir. Onun için ilk bulduğumuz $n!$ sayısını n'ye bölmeliyiz, buradan da $(n-1)!$ sayısına ulaşırız.

Örnek. *5 kişilik bir aile yuvarlak masa etrafına kaç değişik şekilde oturabilirler?*

A) 6 B) 12 C) 24 D) 119 E) 120

Çözüm: Eğer yuvarlak masaya değil de sıraya otursalardı $5! = 120$ değişik sıralama olurdu. Yuvarlak masadaki her oturuş, 5 farklı oturuşu simgelediğinden bulunan 120 değeri, olması gereken oturuş sayısının 5 katıdır. Zaten formül de kanıtladığımız üzere yuvarlak masadaki oturuş sayısının

$$(5-1)! = 4! = 24$$

olduğunu söylüyor.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yuvarlak olan yemek masalarında her gün farklı bir oturuşla yemek yemeye karar veren bir aile 121'nci gün başka seçeneklerinin kalmadığını anlıyor. Yani ne yapsalar daha önceki bir oturma durumu elde ediyorlar. Buna göre bu ailede kaç birey vardır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Demek toplam 120 değişik şekilde oturmak mümkün olmuş. $120 = 5!$ olduğundan ve masa da yuvarlak olduğundan ailede 6 birey vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *6 kişilik bir aile bir yuvarlak masada yemek yiyecektir.*

i. *Anne ile babanın yan yana oturması şartıyla*
ii. *Anne ile babanın yan yana olmaması şartıyla*
iii. *Anne ile babanın arasında en küçük çocuk olması şartıyla*
iv. *Anne ile babanın arasında herhangi bir çocuk olmak şartıyla*
v. *Çocukların bir arada olması şartıyla*
kaç farklı şekilde yemek yiyebilirler?

Çözüm: Her şıkkı ayrı ayrı çözeceğiz.

i. Madem anne ile baba ayrılmayacak, onları bir iple bağlayalım. Şimdi 5 kişi oldular. 5 kişi yuvarlak masa etrafına $4! = 24$ kadar değişik şekilde otururlar. Bir de anne ile babanın kendi aralarında yer değiştirme durumlarını düşünürsek $24 \cdot 2 = 48$ farklı şekilde olabileceğini buluruz.

ii. Anne ile babanın yan yana olmama durumunu hesaplamak biraz meşakkatli iştir. Bu yüzden biz tersten gideceğiz yani tüm durumdan anne ile babanın yan yana olma durumunu çıkartacağız. 6 kişi yuvarlak masaya $5! = 120$ değişik şekilde otururlar. 48 seferinde anne ile babanın yan yana olduğunu bulmuştuk. O halde $120 - 48 = 72$ durumda yan yana değillerdir.

iii. Bu sefer anne, en küçük çocuk ve babayı bir iple bağlayalım. İple bağlananları bir kişi sayarsak oldular 4 kişi. Yuvarlak masa etrafına 4 kişi $3! = 6$ değişik şekilde otururlar. Anne ile baba yine kendi aralarında yer değiştirebilirler, ortadaki çocuk, hala ortada olduğundan sorun yok. O halde cevabımız $6 \cdot 2 = 12$'dir.

iv. (iii) nolu şıkta en küçük çocuğun bulunduğu yere diğer üç kardeş de gelebilir. Yani dört kardeş için de 12 değişik şekilde anne ile babanın arasında olma durumu vardır. O halde cevap $12 \cdot 4 = 48$'dir.

v. Çocukların bir arada olması anne ile babanın bir arada olması demektir. Onu da (i) nolu şıkta çözmüştük zaten. Cevap 48 çıkmıştı. Ama sanki o soru çözülmemiş gibi tekrar çözelim. Dört çocuğu bir iple bağlayalım. Aile 3 kişi oldu. Yuvarlak masaya $2! = 2$ farklı şekilde otururlar. 4 çocuk da kendi arasında $4! = 24$ kadar değişik sırada bulunabilirler. O halde toplam oturma sayısı $2 \cdot 24 = 48$'dir.

Örnek. *4 erkek ve 4 kadın yuvarlak bir masada aynı cins iki kişi yan yana olmayacak biçimde kaç farklı şekilde oturabilirler?*

A) 16 B) 36 C) 144 D) 288 E) 576

Çözüm: Önce centilmen olup şu kadınları bir bekleyelim bakalım, önce onlar otursunlar. ''Şu kadınlar'' deyip nasıl centilmen olunuyorsa? ☺ 4 kadın yuvarlak masaya 3! = 6 değişik şekilde oturur. 4 kadın oturunca, 4 kişilik boş yer kaldı aralarda. İşte bu boş 4 yere 4 erkek oturacak. Ama artık masanın yuvarlaklığının bir ehemmiyeti kalmadı. Onun için erkekler 4! = 24 değişik şekilde otururlar. O halde cevap 6·24 = 144 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi 2 öğretmen arasına 1 öğrenci olmak şartıyla 5 öğretmen ile 5 öğrenci yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?*

A) $5!^2$ B) 5!·4! C) $4!^2$ D) 4!·6! E) 4!·3!

Çözüm: Önce öğretmenler yuvarlak masa etrafına (5 – 1)! = 4! = 24 farklı şekilde oturabilirler. Öğrenciler de öğretmenlerin arasında kalan 5 yere 5! değişik şekilde oturabilirler. Sonuç olarak 4!·5!'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *n tane evli çift yuvarlak bir masaya, her çift birlikte olmak şartıyla kaç farklı şekilde oturabilir?*

A) $2^n \cdot (n-2)!$ B) $(2!)^n \cdot n!$ C) $2^n \cdot n!$

D) $(2!)^n \cdot (n-1)!$ E) $(2!)^{n-1} \cdot (n-1)!$

Çözüm: n tane evli çift $2n$ tane kişi demektir. Hiç bir evli çift birbirinden ayrılmayacağından n kişi gibi düşünülür. n tane kişi, yuvarlak masaya $(n-1)!$ farklı şekilde oturur. Her çift kendi arasında 2! farklı şekilde yer değiştirebileceğinden cevap $(2!)^n \cdot (n-1)!$ olur.

Doğru cevap: D.

Anahtarlık Soruları. Anahtarlık sorularında diğerlerinden farklı bir durum vardır. Çünkü anahtarlar diğer nesnelerden biraz farklıdır da ondan. Aynı farka sahip her nesneye ait sorularda birazdan bahsedeceğimiz ayrıntıya dikkat ediniz. Anahtar problemlerinde anahtarların önü ile arkası aynı kabul edilir ve yapılan herhangi bir dizilişte aslında 2 farklı dizilişin birlikte yapıldığı düşünülür. Örneğin *A*, *B*, *C* isminde 3 farklı anahtarın olduğunu düşünün. Bunları bir anahtarlığa takın. Örneğin *ABC* sırasıyla taktınız. Şimdi anahtarlığı elinize alın ve şöyle bir havaya fırlatıp yere düşmesini sağlayın. Tekrar elinize aldığınızda anahtarları *CBA* diziliminde görmeniz mümkün müdür? Bence mümkün... İşte bu yüzden anahtarlık problemlerinde 1 diziliş aslında 2 diziliş demek olduğundan bulduğumuz cevabı 2'ye bölmeliyiz.

Örnek. *6 farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?*

A) 36 B) 60 C) 120 D) 360 E) 720

Çözüm: Dairesel anahtarlığı bir yuvarlak masa, anahtarları da bu yuvarlak masa etrafına oturan insanlar olarak farz edin. Bu problemin cevabı (6 – 1)! = 120 olurdu. O halde bizim anahtarlık probleminin cevabı da 120/2 = 60 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Anahtarlık Maskotlu Olunca. Şimdi bu ''maskotlu'' lafı nerden çıktı diyorsunuzdur. ''Çiçekli-böcekli''si de mi var yoksa? Anahtarlık problemlerinde maskotun işlevi yuvarlak masayı sıraya çevirmektir. Çünkü daha önceden yan yana sayılan anahtarları maskot artık birbirlerinden ayırmıştır. Yuvarlak masa ile sıranın da zaten böyle bir ayrımı yok mudur? *ABC* insanları bir sıraya otursalar *A* ile *C*'ye yan yana diyemeyiz ama bir yuvarlak masada her halükarda *A* ile *C* yan yana gelirler. İşte bu yüzden maskotlu anahtarlıklar dairesel bile olsalar sıra gibi düşünülmelidirler. Peki, bir anahtarlığı maskotlu diye artık havaya atamaz mıyız? Kim tutar bizi? Yani, hala cevabı ikiye bölmeye devam!

Örnek. *6 farklı anahtar dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?*

A) 36 B) 60 C) 120 D) 360 E) 720

Çözüm: Anahtarlık dairesel bile olsa maskottan dolayı artık sıra gibi davranacaktır. Bu yüzden 5!/2 değil 6!/2 diyeceğiz. Bunun sayısı da 720/2 = 360 olmalıdır. Aslında maskotu da bir anahtar gibi düşünerek anahtarlığın daireselliğini koruyabiliriz. Maskotu anahtar kabul edince 7 anahtar oluyor. 7 anahtar da dairesel bir anahtarlığa 6!/2 = 360 değişik şekilde takılabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir kuyumcu, vitrinindeki boruya 20 değişik bilezik takmak istemektedir. Bunu kaç değişik şekilde yapabilir?*

A) 19! B) 19!/2 C) 20! D) 20!/2 E) 21!

Çözüm: Boruya *A*, *B*, *C* bileziklerini taktığınızı düşünün. Sonra borunun arka tarafına geçin. Aynı zamanda *C*, *B*, *A* sırasını da halletmiş olduğunuzu görürsünüz. Yani boruya takılan bilezik sorularında da cevabı 2'ye bölmek gerekiyor.
Bu yüzden cevabımız 20!/2 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
8 kişi yuvarlak bir masa etrafına kaç değişik sırada oturabilirler?

A) 8! B) 7! C) 7!·2 D) 6! E) 6!·2

2.
Belli üç kişi birbirlerinden ayrılmamak üzere 7 kişi yuvarlak masa etrafına kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 5!·3! B) 6!·3! C) 4!·3! D) 4!·2! E) 4!

3.
5 erkek ve 5 kadın, yuvarlak bir masa etrafına 2 erkek arasına 1 kadın gelecek biçimde kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 9! B) 5!·5! C) 5!·4! D) $\frac{9!}{5!}$ E) 5!

4.
5 farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?

A) 5! B) $\frac{5!}{2}$ C) 4! D) $\frac{4!}{2}$ E) 4!·2!

5.
7 farklı anahtar dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç değişik şekilde takılabilir?

A) 7! B) $\frac{7!}{2}$ C) 6! D) $\frac{6!}{2}$ E) 6!·2!

6.
6 farklı anahtar belli ikisi yan yana olmak kaydıyla dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç değişik şekilde takılabilir?

A) 5! B) $\frac{5!}{2}$ C) 4! D) $\frac{4!}{2}$ E) 4!·2!

7.
6 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafına anne ve baba yan yana, iki erkek kardeş yan yana, iki kız kardeş de yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 24 E) 48

8.
6 kişilik bir aile yuvarlak bir masa etrafına anne ve baba yan yana olmak üzere kaç değişik şekilde oturabilir?

A) 24 B) 48 C) 120 D) 240 E)720

9.
Bir kuyumcu, vitrinindeki boruya 10 değişik bilezik takmak istemektedir.
Bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 9! B) 9!/2 C) 10! D) 10!/2 E) 11!

10.
Ayşe teyze, yıkadığı 9 çamaşırı iki ağaç arasına gerilmiş bir ipe kurumaları için asacaktır.
Bunu kaç değişik şekilde yapabilir?

A) 9! B) 9!/2 C) 10! D) 10!/2 E) 11!

1.B 2.C 3.C 4.D 5.B 6.A 7.C 8.B 9.D 10.B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kombinasyon

Kombinasyon. n tane farklı elemandan oluşan bir kümenin altkümelerine birer **kombinasyon** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \le r \le n$ olmak üzere, n elemanlı A kümesinin r elemanlı altkümelerinden her birine A kümesinin ***r*'li bir kombinasyonu** denir ve $C(n, r)$ veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.

Anlayacağınız, kümelerde elemanların sıralanışı önemli olmadığından kombinasyonda da sıra önemli değildir. Sadece elemanların neler ve kaç tane olduğu önemlidir.

Bir diğer önemli nokta da $\binom{n}{r}$ ifadesinin solunda P ya da C harfi yazmıyorsa, bunun kombinasyon olarak anlaşılması gerektiğidir.

***C(n, r)* nasıl hesaplanır?** Yukardaki tanımdan anladığımız kadarıyla kombinasyonla bir miktar nesneyi seçiyoruz, bunu da permutasyonla sıralıyoruz. Peki, r tane nesne kaç değişik şekilde sıralanır? $r!$ kadar değişik şekilde. O halde $P(n, r)$ sayısını $r!$'e bölmek $C(n, r)$'yi verecektir.

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$\binom{n}{r}$ sayısını daha pratik olarak hesaplamak isteyen biri, n'den geriye doğru r tane sayıyı çarpıp $r!$'e bölebilir. Örneğin,

$$\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45,$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20,$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Teorem. $\binom{n}{0} = 1.$

Kanıt: $\binom{n}{0}$ sayısı n tane nesneden 0 tanesini kaç değişik şekilde seçebileceğimizin sayısıdır. O zaman cevap 1 olmalı, çünkü hiçbir nesneyi seçmeme hakkımızı kullanmışız. Formülü boşuna mı bulduk diyenler için bir de formülle çözelim:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1.$$

Teorem. $\binom{n}{n} = 1.$

Kanıt: $\binom{n}{n}$ sayısı, n tane nesnenin n tanesinin kaç değişik şekilde seçilebileceğinin sayısını verir. Yani ne var ne yok hepsini alacakmışız. Buradan da anlaşılıyor ki, bunun 3-5 yolu olmaz, hepsini alacaksan bunu sadece 1 şekilde yapabilirsin. Bundan dolayı cevabımız 1 olmalıdır. Hemen formülün doğru işlediğini de görelim:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1.$$

Teorem. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$

Kanıt: Her ikisinin de eşiti $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ olduğundan eşitlik doğrudur.

Bu teoremi şöyle de izah edebiliriz: $\binom{n}{r}$ ne demek?

n tane nesneden r tanesini seçmek. Peki geride ne bıraktığınızı düşündünüz mü? $n - r$ tane nesne. Seçtiğiniz r tane nesne değiştikçe geride kalan $n - r$ tane nesne de değişir. Yani seçecek n tane nesneyi belirlemek, seçilmeyecek $n - r$ tane nesneyi belirlemektir. Dolayısıyla eşitlik doğrudur.

Örnek.
$$\binom{99}{1}-\binom{99}{2}+\binom{99}{3}-\binom{99}{4}+\ldots+\binom{99}{97}-\binom{99}{98}$$
toplamı kaça eşittir?

A) 99 B) 98 C) 1 D) 0 E) −1

Çözüm: Baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler birbirlerine eşit olduklarından her terim sadeleşir ve geriye kocaman bir 0 kalır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: $1 + 2 = 3$ olduğundan $\binom{3}{1}=\binom{3}{2}$ olduğunu biliyoruz. Sadece birini bulup, 2 ile çarpsak yetecek. $\binom{3}{1}=3$ olduğundan cevap 6'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\binom{7}{3}=\binom{n}{1}-\binom{n}{n}$ *olduğuna göre n kaçtır?*

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

Çözüm: $\binom{n}{1}-\binom{n}{n}=n-1$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan; $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ olduğundan $n - 1 = 35$ olur ki buradan $n = 36$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\binom{15}{2n+1}=\binom{15}{3n-1}$ *olduğuna göre n'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: İki durum mümkündür. Ya $2n + 1$ ile $3n - 1$ değerlerinin toplamı 15'dir veya bu değerler birbirlerine eşittir.

$$2n + 1 + 3n - 1 = 15$$

eşitliğinden $n = 3$,

$$2n + 1 = 3n - 1$$

eşitliğinden $n = 2$'dir. O halde n'nin alabileceği değerler toplamı $3 + 2 = 5$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *1'den 49'a kadar numaralandırılmış 49 toptan 6'sı çekiliyor. Çekilen 6 topun numarasını garanti bilmek için en az kaç tahminde bulunmak gerekir?*

A) $C(49, 6)$ B) $P(49, 6)$ C) $P(49, 43)$ D) 49! E) 49!·6!

Çözüm: Çeken adam kaç değişik şekilde bu 6 topu çekebilirse, bizim de en az o kadar tahminde bulunmamız lazım, yani $C(49, 6)$.

$$C(49,6)=\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=13983816.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *6 kişilik bir ekipten 4 kişi ve bu 4 kişi arasından da bir lider seçilecek. Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: Önce 6 kişiden kaç değişik şekilde 4 kişiyi seçebileceğimizi bulalım: $C(6, 4) = C(6, 2) = 15$.
Şimdi de 4 kişi arasından 1 kişinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım: $C(4, 1) = 4$.
Saymanın temel ilkesine göre bu değerler çarpılmalıdır: $15\cdot4 = 60$ değişik seçenek vardır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir seyahat acentası başvuran 8 kişinin 3'ünü İstanbul'a, 3'ünü Ankara'ya, 2'sini de İzmir'e geziye yollayacaktır. Bunu kaç farklı şekilde yapması mümkün olur?*

A) 120 B) 140 C) 280 D) 560 E) 1120

Çözüm: Önce 3 kişi seçerek İstanbul'a yolcu edelim. Bu $C(8, 3) = 56$ kadar farklı şekilde mümkün. Şimdi de kalan 5 kişiden 3'ünü seçip, Ankara'ya yollayalım. Bu da $C(5, 3) = 10$ kadar farklı şekilde mümkün. Kalan 2 kişi mecburen İzmir'e gidecek. O halde;

$$C(8, 5)\cdot C(5, 3)\cdot C(2, 2) = 56\cdot10\cdot1 = 560.$$

Sıranın önemi var mı, bir düşünün bakalım!

Doğru cevap: D.

Örnek. *52'lik bir deste iskambil kağıdından iki kağıt kaç türlü çekilebilir?*

A) 2652 B) 1326 C) 1200 D) 104 E) 103

Çözüm: 52 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını istiyoruz.

$$C(52,2)=\frac{52!}{2!\cdot(52-2)!}=\frac{52\cdot51}{1\cdot2}=26\cdot51=1326.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *52'lik bir deste iskambil kağıdından, içinde maça ası olan 5 kartlı el kaç farklı şekilde elde edilebilir?*

A) $C(52,5)$ B) $P(52,5)$ C) $C(51,5)$ D) $P(51,4)$ E) $C(51,4)$

Çözüm: Maça ası garanti olduğuna göre, maça asının yanına, kalan 51 kağıttan 4 tanesini seçeceğiz. Bu da

$$C(51,4)$$

değişik şekilde yapılabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İçinde tam 5 maça bulunan 13 kartlı kaç briç eli vardır?*

A) $C(13,5)$ B) $C(39,8)$ C) $C(13,5)+C(39,8)$ D) $C(13,5)\cdot C(39,8)$ E) $C(13,5)\cdot C(52,8)$

Çözüm: 5 maçanın kümesini A ile ve içinde maça bulunmayan diğer 8 kartın kümesini B ile gösterirsek, (A, B) sıralı ikililerinin sayısı sorunun cevabı olur.
52'lik bir destede toplam 13 kupa, 13 karo, 13 maça ve 13 sinek vardır. Öyleyse A için $C(13,5)$ ve B için $C(39,8)$ ihtimal vardır. Böylece aranan sayı $C(13,5)\cdot C(39,8)$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Ali'nin cebinde 7 tane 5 liralık ve 4 tane 10 liralık kağıt para vardır. Ali, 35 liralık hesabı kaç farklı şekilde verebilir?*

A) 343 B) 323 C) 303 D) 140 E) 100

Çözüm: 4 ayrı durum mümkündür. Ya hepsini 5 liralıklarla öder, ya 1 tane 5 liralık ve 3 tane 10 liralıkla, ya 3 tane 5 liralık ve 2 tane 10 liralıkla ya da 5 tane 5 liralık ve 1 tane 10 liralıkla öder. Bunlar birlikte düşünülürse,

$$1+C(7,1)\cdot C(4,3)+C(7,3)\cdot C(4,2)+C(7,5)\cdot C(4,1)$$
$$=1+28+210+84=323$$

farklı ödemenin mümkün olduğu görülür.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir öğrenci 10 soruluk bir sınava girmiştir.*

a) *Sadece 8 tanesini cevaplamışsa, bunu kaç farklı şekilde yapmış olabilir?*

b) *Bu öğrenci ilk 3 soruyu cevaplamak zorundaysa toplam 8 soruyu kaç farklı şekilde cevaplayabilir?*

c) *Bu öğrenci ilk 5 sorudan en az dördünü cevaplamak zorundaysa, toplam 8 soruyu kaç farklı şekilde cevaplayabilir?*

Çözüm:

a) 10 tane sorudan 8 tanesini kaç farklı şekilde seçebiliyorsa, o kadar değişik şekilde cevaplamıştır. Bu yüzden cevap $C(10,8)=C(10,2)=45$.

b) İlk üç soruyu mecburen cevaplayacağı için kalan 5 soruyu $10-3=7$ soru arasından seçmelidir.
O halde $C(7,5)=C(7,2)=21$.

c) Öğrenci ilk 5 soruyu cevaplarsa, kalan 3 soruyu kalan 5 sorudan $C(5,3)=10$ yolla seçebilir. İlk 5 sorudan 4 tanesini cevaplarsa, kalan 4 soruyu beş soru içinden seçecektir.
O halde $10+C(5,4)\cdot C(5,4)=10+25=35$ yolla seçebilir.

Örnek. *Her bir masada en az bir kişinin oturması koşuluyla, 5 kişi iki özdeş yuvarlak masaya kaç farklı şekilde oturabilir?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: Masanın birine 1 kişi diğerine de 4 kişiyi oturturalım. Ama önce 1 kişiyi seçmemiz gerekecek. Kalan 4 kişi de diğer yuvarlak masaya oturur. Sonra da birine 2 diğerine 3 kişiyi oturtturacağız. Önce 2 kişi seçeceğiz, kalan 3 kişi diğer yuvarlak masaya oturacaklar. Masalar özdeş olduğundan 3-2 ve 4-1 oturuşlarını hesaplamaya gerek yoktur.

$$\binom{5}{1}\cdot 0!\cdot 3!+\binom{5}{2}\cdot 1!\cdot 2!=5\cdot 1\cdot 6+10\cdot 1\cdot 2=50.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Başkan, başkan yardımcısı ve 7 üyeden oluşan bir grup sıra halinde dizilerek fotoğraf çektireceklerdir. Başkan ile yardımcısı arasında 5 üye olmak üzere kaç değişik şekilde fotoğraf çektirebilirler?*

A) $7!\cdot 5!\cdot 3!$ B) $7!\cdot 5!\cdot 2$ C) $7!\cdot 3!\cdot 2$ D) $7!\cdot 3!$ E) $5!\cdot 3!$

Çözüm: Önce 7 üyeden 5'ini seçelim. $C(7, 5)$ kadar değişik şekilde 5 üye seçebiliriz. Bu 5 üyeyi başkanla yardımcısının arasına koyarak, hepsini bir iple bağlayalım. Şimdi 1 adam gibi oldular. Diğer iki üyeyle birlikte 3 adamı sıraya dizeceğiz. Bu da 3! kadar diziliş demektir. Başkanla yardımcısı da 2! kadar yer değiştirirler. Ortadaki 5 üye de 5! kadar yer değiştirir. Hepsi birlikte düşünülünce cevap

$$\binom{7}{5}\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!=\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!=7!\cdot 3!$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 erkek ve 2 kız öğrenci yüzleri öğretmenlerine dönük olacak şekilde yan yana sıra olacaktır. Sıranın soldan ilk iki elemanı erkek, son elemanı kız öğrenci olacağına göre bu sıralama kaç farklı şekilde yapılabilir?*

A) 960 B) 720 C) 540 D) 480 E) 360

Çözüm: Önce 2 erkek seçelim, sıranın başına koyalım. Bunu $C(5, 2) = 10$ değişik şekilde yapabiliriz. Şimdi bir kız seçip, sıranın sonuna koyalım. Bunu da $C(2, 1) = 2$ değişik şekilde yapabiliriz. Kalan 3 erkeği ve 1 kızı da araya koyalım. Baştaki erkekler ve ortadaki insanların kendi aralarında yer değiştirmelerini de düşünürsek, cevabımız

$$10 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 4! = 960$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rakamlarından sadece 4 tanesi 0 olan yedi basamaklı kaç doğal sayı vardır?*

A) 9^3 B) $3 \cdot 9^3$ C) $10 \cdot 9^3$ D) $15 \cdot 9^3$ E) $20 \cdot 9^3$

Çözüm: Önce $XYZ0000$ şeklinde kaç sayı olduğunu bulalım. 0 adedi 4'ten fazla olamayacağından X, Y, Z değerleri 1 ile 9 arasında değerler alabilirler. O halde bu şekilde $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$ tane sayı vardır. Şimdi 0'ların yerini değiştireceğiz. Son 6 basamağın herhangi 4'ünde bulunabilirler. Bunun yüzünden sorunun cevabı

$$9^3 \cdot C(6, 4) = 15 \cdot 9^3$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *9 ve 8 rakamlarının kullanılıp, 7 rakamının kullanılmadığı dört basamaklı rakamları farklı kaç değişik doğal sayı vardır?*

A) 234 B) 468 C) 504 D) 936 E) 1008

Çözüm: Toplam 4 basamak olacağından 9 ve 8 rakamlarının yanına 2 rakam daha seçelim. Bu iki rakamı 0'dan 6'ya kadar olan 7 rakam arasından seçeceğimizden, seçim sayısı $C(7, 2) = 21$ olmalıdır. Şimdi elimizdeki dört farklı rakamı $4! = 24$ kadar değişik şekilde sıraya dizebiliriz. Demek ki $21 \cdot 24 = 504$ değişik sayı yazmak mümkündür. Şimdi bu sayıların içinde ilk rakamı 0 olanları atacağız. İlk rakam 0 olsun. 9 ve 8 rakamlarının kesinlikle var olduğunu da biliyoruz. O halde dördüncü rakam 6 değişik sayı olabilir. Daha sonra son üç basamak kendi arasında $3! = 6$ değişik şekilde sıralanabileceğinden $6 \cdot 6 = 36$ sayının 0 ile başladığını anlıyoruz. O halde sorumuzun cevabı $504 - 36 = 468$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a, b, c, d, e, f, g harflerinin tümü yan yana sıralanacaktır. a ve b, sıranın ortasına gelen harfin sağ tarafında olacak şekilde kaç farklı sıralanış mümkündür?*

A) 5! B) 3·5! C) 6! D) 9·5! E) 7!

Çözüm: a ve b sayılarını son üç basamaktan herhangi ikisini seçip, oralara koyalım. Daha sonra da kalan 5 boş basamağa 5 harfi koyup, sıraya dizelim. a ile b'nin yer değiştirebileceğini de unutmayalım. Bu durumda cevap

$$C(3, 2) \cdot 5! \cdot 2! = 3 \cdot 5! \cdot 2 = 6 \cdot 5! = 6!$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *5 evli çiftin oluşturduğu 10 kişiden, içinde sadece 1 evli çift olan 4 kişi kaç değişik biçimde seçilebilir?*

A) 120 B) 100 C) 28 D) 24 E) 20

Çözüm: 5 evli çiftten 1'ni $C(5, 1) = 5$ değişik şekilde seçebiliriz. Bir çifti seçtik diyelim. Geriye 4 evli çiftten oluşan 8 kişi kaldı. Bunlardan da 2 kişi seçeceğiz ama evli olmayacaklar. Bu seçim de

$$C(8, 2) - C(4, 1) = 28 - 4 = 24$$

kadar değişik şekilde yapılabilir. O halde cevabımız $5 \cdot 24 = 120$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *5 erkek ve 5 kızdan oluşan 10 kişi, her grupta 1 erkek ve 1 kız olacak biçimde kaç farklı 5 gruba ayrılabilir?*

A) 120 B) 240 C) 600 D) 10! E) 2·10!

Çözüm: İki farklı yol sunacağız.

Birinci yol. 5 erkeği solumuza, 5 kızı sağımıza alalım. Şimdi herhangi bir erkeği seçelim. Bu erkeğin grubuna girecek kaç kız adayı var? 5 değil mi? Herhangi bir kızı seçip, o grubu yollayalım. Şimdi ikinci erkeği alalım. Bunun grubuna aday 4 kız var. İşlemler böyle böyle sürdürülürse cevabın $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ olduğu görülür.

İkinci yol. 5 grubu 5 kutu olarak düşünün, her erkeği bir kutuya koyun. Kutuların yani grupların isimleri olmadığı olmadığından, bu dağıtımı sadece 1 değişik şekilde yaparız. Şimdi erkeklerin yanında birer boşluk var. *5 boşluğa 5 kız kaç farklı şekilde yerleştirilir* sorusu oldu, bunun da cevabının 5! olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *10 kişiden, her biri 2 kişilik 5 farklı ekip oluşturulup, bu 5 ekibi 5 farklı şehre yollamak istiyoruz. Bunu kaç farklı şekilde yapabiliriz?*

A) 113400 B) 66700 C) 33250 D) 16625 E) 3325

Çözüm: Önce A şehrine yollayacağımız 2 kişilik ekibi seçelim. Bunu $C(10, 2)$ değişik şekilde yapabiliriz. Şimdi de B şehrine gidecek ekibi seçelim. Geriye 8 kişi kaldığından bunu $C(8, 2)$ değişik şekilde yapabiliriz. Bu iş böyle devam ederse, cevabın

$$\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=113400$$

olduğunu buluruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *10 kişiden, her biri 2 kişilik 5 farklı ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?*

A) 4725 B) 945 C) 189 D) 63 E) 21

Birinci yol. Diyelim X değişik şekilde oluşturulabilir. Şimdi biz bu 5 ekibi 5 değişik şehre kaç değişik şekilde yollayabiliriz? 5! değil mi? O zaman 10 kişiden, her biri 2 kişilik 5 farklı ekip oluşturulup, bu 5 ekibi 5 farklı şehre yollamanın $X\cdot 5!$ kadar değişik seçeneği varmış. E, biz bu soruyu bir önceki soruda çözerek cevabın 113400 olduğunu bulmuştuk. O halde

$$X=\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{5!}=945.$$

İkinci yol. $\binom{9}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{1}{1}=945.$

Aşağıdaki örneği de incelerseniz nedenini anlarsınız.

Doğru cevap: B.

Örnek. *10 kişi, aynı anda 5 çift olmak üzere tokalaşıyorlar. Bu tokalaşmalardan kaç değişik fotoğraf çekilebilir?*

A) 4725 B) 945 C) 189 D) 63 E) 21

Çözüm: 10 kişiden birisi A olsun. A ile tokalaşacak kişi $C(9, 1)$ değişik şekilde seçilebilir. Şimdi A ile tokalaşmayan birini alalım. Adı B olsun. B'nin eşini $C(7, 1)$ değişik şekilde seçebiliriz. Şimdi A'yla da B'yle de tokalaşmayan birini alalım. Adı C olsun. C'nin eşini de $C(5, 1)$ değişik şekilde seçebiliriz. Şimdi de ne A ne B ne de C'yle tokalaşmış birini alalım. Adı D olsun. D'nin eşini $C(3, 1)$ değişik şekilde seçebiliriz. Son olarak, A, B, C, D'nin hiçbiriyle tokalaşmamış birini alalım. Onun adı da E olsun. E'nin eşini de $C(1, 1)$ şekilde seçebiliriz. O halde sonuç $\binom{9}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{1}{1}=945$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *9 çocuk, 3'erli 3 takıma kaç farklı şekilde ayrılabilir?*

A) 1680 B) 840 C) 280 D) 140 E) 70

Çözüm: Yine iki çözüm yapacağız.

Birinci yol. Eğer kimlerle takım oluşturduğunla birlikte, hangi takımda olduğun da önemli olsaydı,

$$\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=1680$$

diye çözüm yapardık. Ama burada takımların önemi yok.

Daha açık ifadeyle üstteki durumda (a, b, c), (d, e, f) ve (k, l, m) takımlarını kendi aralarında da yer değiştirmiş oluyoruz. Halbuki bu soruda buna gerek yok. O halde cevabımız

$$\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{3!}=280$$

olmalıdır.

İkinci yol. 9 kişiden rastgele birini alalım. Şimdi bu adama takım oluşturmak için 2 adam lazım. O iki adamı $C(8, 2) = 28$ değişik şekilde seçebiliriz.

Şimdi ilk takım oluştu. Kalan 6 adamdan rastgele birini alalım. Bu adama da takım oluşturmak için iki adam lazım. Kalan 5 adamdan ikisini $C(5, 2) = 10$ değişik şekilde seçebiliriz.

Kalan üç kişi ise bir takımdır zaten. Demek ki cevabımız $28\cdot 10 = 280$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\binom{2007}{3}+\binom{2007}{2}\cdot\binom{2008}{1}+\binom{2007}{1}\cdot\binom{2008}{2}+\binom{2008}{3}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\binom{2007}{3}$ B) $\binom{2008}{3}$ C) $\binom{4015}{4}$

D) $\binom{4015}{3}$ E) $\binom{4015}{2}$

Çözüm: Bir torbada 2007 adet sarı, 2008 adet kırmızı top bilye olduğunu düşünün. Bu torbadan 3 top seçeceksiniz. Sizce gelen 3 topun rengi ne olur? Ya üçü de sarı, ya ikisi sarı biri kırmızı, ya biri sarı ikisi kırmızı ya da üçü de kırmızı olur değil mi? İşte yukardaki kombinasyonlar tam bu problemin çözümü için yazılmıştır. Yani, 4015 toptan 3 tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi anlatır. O halde cevap $\binom{4015}{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

n Elemanlı Bir Kümenin r Elemanlı Altkümelerinin Sayısı. Bir kümenin elemanlarıyla oluşturulabilecek her kümeye o kümenin bir altkümesi denmez miydi? Yani altküme oluşturmak için ille de elemanları bir kümenin elemanlarından seçmeliyiz. Seçme deyince de aklımıza kombinasyon gelmesin de ne gelsin?
n elemanlı bir kümenin elemanlarından r tanesini seçerek, r elemanlı bir altküme oluşturmanın, n tane toptan r tanesini seçmekten zerre farkı yoktur. Bundan dolayı aradığımız sayı $C(n, r)$'dir.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

Çözüm: A kümesi 5 elemanlıdır. Bu 5 elemandan herhangi 3 tanesi her zaman 3 elemanlı bir alt küme verir. O halde kaç farklı şekilde 3 eleman seçebileceğimizi bulmalıyız:

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *5 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin adedi kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

Çözüm: En çok 2 elemanlı alt küme sayısı sorulduğundan 2 elemanlı alt kümelerle birlikte 2'den az elemanlı olan alt kümeleri de saymalıyız. O halde;

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{1}+\binom{5}{0}=10+5+1=16.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *n elemanlı bir kümenin en çok n elemanlı alt küme sayısı kaçtır?*

A) 1 B) n C) $2n$ D) $n!$ E) 2^n

Çözüm: n elemanlı bir kümenin $n + 1$ elemanlı alt kümesi olamayacağına göre, en çok n elemanlı alt kümeleri demek tüm alt kümeleri demektir. Yani cevap 2^n olmalı. Çözdük, çözdük de bu çözüm aklımıza bir şey getirdi: En çok n elemanlı alt kümesi aynı zamanda

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$$

olduğundan bu toplamın aslında 2^n olduğunu kanıtlamış olduk.

Doğru cevap: E.

Unutma.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içermeyen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Madem a eleman olarak bulunmayacak, o zaman a'yı çöpe atalım. Geriye kalan b, c, d, e elemanlarından yapacağımız her 3 elemanlı alt küme kesinlikle a'yı barındırmayacaktır. O halde yanıt $\binom{4}{3}=4$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içeren kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 16

Çözüm: Madem a eleman olarak garanti bulunacak, a'yı kenara ayıralım. a'nın yanına 2 eleman daha getireceğiz. Peki, bunu nerden getireceğiz? Diğer 4 elemandan seçerek. 4 elemandan ikisi

$$\binom{4}{2}=6$$

değişik şekilde seçilebileceğinden sorunun cevabı 6'dır.
Aslında bu soruyu bir önceki sorunun çözümünü kullanarak da çözebilirdik. Herhangi bir şart içermeyen 3 elemanlı alt kümeleri sayısı

$$\binom{5}{3}=10$$

olduğundan, bunlardan içinde a'yı eleman olarak bulundurmayanları çıkartırsak cevap doğal olarak 10 – 4 = 6 olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içeren ama b ve c'nin ikisini de içermeyen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 16

Çözüm: a'yı kenara ayır, b ve c'yi de çöpe at. a'nın yanına 2 eleman daha lazım. Bu 2 elemana kimler aday? d, e ve f. Yani 3 elemandan 2'si seçilecek, o halde yanıt $\binom{3}{2}=3$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde rakam sayısı, harf sayısından fazladır?*

A) 10 B) 11 C) 13 D) 156 E) 312

Çözüm: Yani 3 rakam-1 harften ve 4 rakam-0 harften oluşan kaç tane 4 elemanlı alt küme olduğunu hesaplayacağız. Önce ilk duruma bakalım. 4 rakamdan üçünü ve 3 harften birini seçeceğiz. Bunun sayısı $\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{1}=12$ 'dir.

Şimdi de ikinci durumu inceleyelim. 4 rakamın dördünü ve 3 rakamın 0'ını seçeceğiz. Bunun sayısı da $\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{0}=1$ 'dir. O halde cevabımız 12 + 1 = 13 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

kümeleri veriliyor. Buna göre $A \subset X \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı beş elemanlı X kümesi yazılabilir?

A) 3 B) 6 C) 10 D) 15 E) 20

Çözüm: Eğer X kümesi A'yı kapsayacaksa mecburen a, b, c elemanlarını içermelidir. Eğer B'nin alt kümesi olacaksa da diğer elemanları d, e, f, g, h elemanlarından olmalıdır. X kümesi 5 elemanlı olacağından a, b, c elemanlarının yanına d, e, f, g, h elemanlarından ikisini getirmeliyiz. Bu da seçim meselesidir. Bu yüzden cevap $C(5, 2) = 10$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 30\}$ kümesinin, elemanları toplamı 3 ile bölünebilen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 1360 B) 1200 C) 1160 D) 450 E) 400

Çözüm: Sinan Aşık'ın TMOZ grubuna yolladığı çözümü sunuyorum:
A kümesinin 3 elemanlı bir alt kümesini $\{a, b, c\}$ ile gösterelim. Burada a, b ve c'nin kaç olduğu değil, 3'e bölümünde kaç verdiği önemlidir. Dolayısıyla A kümesinin elemanlarını 10 tane 1, 10 tane 2 ve 10 tane 0 gibi düşünebiliriz. Bizi sonuca götürecek her yol mübah!

Şimdi $a + b + c$ toplamının 3'ün katı olmasını sağlayacağız. Bu neyle mümkün? Ya üçü de 1 olacak, ya üçü de 2 olacak, ya üçü de 0 olacak, ya da biri 0, biri 1, biri 2 sayılarından oluşacak. Bunlar için kaç farklı durum var, ona bakalım:

$\{1, 1, 1\}$ için $\binom{10}{3}=120$,

$\{2, 2, 2\}$ için $\binom{10}{3}=120$,

$\{0, 0, 0\}$ için $\binom{10}{3}=120$,

$\{0, 1, 2\}$ için $10\cdot10\cdot10= 1000$

olduğundan istenen alt küme sayısı 1360'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *MUSTAFA kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız S harfiyle başlayan 4 harfli kaç değişik kelime yazılabilir?*

A) 12 B) 24 C) 36 D) 42 E) 72

Çözüm: S'yi alıp başa koyalım. Geriye kalan *MUTAFA* kelimesinin harfleriyle anlamlı ya da anlamsız 3 harfli kelimeler yazıp, S'nin sağ yanına iliştireceğiz. İki A harfinin varlığından dolayı sıkıntı yaşamamak için tek A ve iki A bulunan durumları ayrı ayrı inceleyelim. M, U, T, A, F harflerinden herhangi üçünü $C(5, 3)$ değişik şekilde seçebiliriz ve onları da 3! kadar değişik sıraya dizebileceğimizden, bu şartlarla $10\cdot6 = 60$ kelime yazabiliriz. Şimdi iki A harfi bulunan duruma bakalım. M, U, T, F harflerinden birini $C(4, 1) = 4$ değişik şekilde seçebiliriz. Seçtiğimizi iki A harfiyle birleştirirsek, hepsini $\frac{3!}{2!}=3$ kadar değişik sıraya dizebileceğimizden, bu şartlarla da 12 kelime yazabiliriz. O halde toplam 60 + 12 = 72 kelime yazmak mümkündür.

Doğru cevap: E.

***r* özdeş nesneyi *n* farklı kutuya dağıtmak.** Şimdi nesnelerin özdeş olduğu durumları inceleyeceğiz. Özdeş nesneler, dış görünüş olarak aynı olduklarından diziliş hesapları yapmayacağız, sadece adet hesapları yapacağız.

Fakat burada çözümler $r \le n$ ve $r \ge n$ durumuna göre değişiklik göstermektedir. Her birini ayrı ayrı inceleyeceğiz. Önce $r \le n$ örneklerine bakalım.

$r \le n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, kutuların herbirinde en çok 1 nesne olacak şekilde

$$C\binom{n}{r}$$

şekilde dağıtabiliriz.

Yani n kutudan r tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi bulsak yeter. Nesneler özdeş olduğundan elimizdeki r tane nesneyi r tane kutuya koymak, kombinasyon değil sadece kas hareketi gerektirir. ☺

Örnek. *3 özdeş oyuncağı, 5 çocuğa, hiçbirine 1'den fazla oyuncak vermemek üzere kaç değişik şekilde dağıtabiliriz?*

A) 5 B) 8 C) 10 D) 15 E) 35

Çözüm: Sadece birer oyuncak alacak olan şanslı 3 çocuğu seçsek yeter. Oyuncaklar özdeş olduğundan, *ona niye onu verdin de bana bunu verdin* kavgası yaşanmayacak. Toplam 5 çocuk olduğundan, bu seçimi

$$C\binom{5}{3}=10$$

kadar değişik şekilde yapabiliriz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *MUSTAFA kelimesinin harfleriyle iki A'nın yan yana olmadığı kaç farklı 7 harfli kelime yazılabilir?*

A) 120 B) 600 C) 900 D) 1800 E) 2160

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Bu yolda soruyu eski bilgilerimizi kullanarak çözelim. Hatırlayın, bu tarz sorularda tekrarlı permutasyon kullanıyorduk. Önce kaç değişik 7 harfli kelime yazabileceğimizi bulalım. İki tane A harfi olduğu için $\frac{7!}{2!}=2520$ farklı kelime yazılabileceğini biliyoruz. Şimdi bu iki A harfinin yan yana olduğu kaç farklı 7 harfli kelime yazabiliyorsak, toplam kelime sayısından çıkartacağız. Madem iki A harfi birbirinden ayrılmayacak, onları bir iple bağlayalım. Şimdi 6 harf varmış gibi oldu. Bu 6 harfle de 6! = 720 değişik kelime üretilebilir. O halde 2520 – 720 = 1800 değişik durum mümkündür.

İkinci yol. Şimdi de yeni öğrendiğimiz teknikleri kullanalım. Önce A dışındaki harfleri bir masaya yatıralım. M, U, S, T, F harfleriyle 5! = 120 değişik sıra oluşturulabilir. Herhangi bir sırayı seçelim. Örneğin

$$_M_U_S_T_F_$$

olsun. Bizden iki tane A harfinin yan yana olmaması istendiğinden bu harflerin aralarındaki çizgiyle gösterilmiş boşluklara bu A'ları teker teker dağıtmalıyız. A'lar aynı olduğundan, boşluk sayısı da 6 olduğundan, problem 2 *özdeş nesneyi 6 kutuya, her kutuya en fazla 1 nesne gelmek üzere kaç değişik şekilde yerleştirebiliriz* problemine dönmüştür. Bu da $C(6, 2) = 15$ değişik şekilde mümkündür. İlk durumla birlikte düşünülünce cevabımız $5!\cdot C(6, 2) = 120\cdot 15 = 1800$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Bazı problemlerde nesneler özdeş değil, farklı olsalar bile bu çözüm yolunu kullanabiliriz. Tabi ki soruda nesnelerin farklı dizilişleri istenmiyor olacak. Herhangi bir diziliş yetecek. Bu nasıl mı olur? Eski senelerin bir ÖSS sorusu buna çok güzel bir örnek olacak. Versiyonlarını da ekledim.

Örnek. *$a > b > c$ olmak üzere kaç farklı abc üç basamaklı sayısı vardır?*

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 120

Çözüm: $a > b > c$ dendiğine göre rakamlarının farklı olması isteniyor. Rakamlar her ne kadar birbirlerinden farklı olsalar da küçükten büyüğe diziliş sadece tek bir şekilde mümkün olduğundan sanki rakamlar özdeşmiş gibi düşünülebilir. O halde 10 rakamdan herhangi 3'ünü seçelim. O halde cevap

$$C(10, 3) = 120$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$a < b < c$ olmak üzere kaç farklı üç basamaklı abc sayısı yazılabilir?*

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 120

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Bir önceki soru gibi düşünerek cevabın C(10, 3) = 120 olduğunu düşünebilirdik ama burada başta sıfırın olmaması gerekiyor. O halde başta 0'ın bulunduğu ve rakamları artan sırada olan kaç 3 basamaklı sayı olduğunu bulup, 120'den çıkaralım. b ve c değerleri 9 rakam içinden seçilip, küçükten büyüğe doğru dizileceğinden, istenen koşuldaki sayı adedi C(9, 2) = 36'dır. Bu durumda cevabımız 120 – 36 = 84 olmalıdır.

İkinci yol. İlk rakam 0 olamıyorsa hiçbiri olamaz. O zaman 0 haricindeki 9 rakamdan herhangi 3'ünü seçelim. $a < b < c$ dendiğine göre, bu üç sayı sadece tek bir şekilde küçükten büyüğe dizilebilir. O halde cevap $C(9, 3) = 84$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Rakamları artan sırada olan kaç farklı dört basamaklı sayı vardır?*

A) 36 B) 64 C) 84 D) 96 E) 126

Çözüm: $a < b < c < d$ olmak üzere kaç farklı $abcd$ sayısının var olduğu sorulmaktadır. Önce on rakam arasından dört tanesini seçelim. $C(10, 4) = 210$ kadar değişik seçim mümkündür. Yalnız bunlar arasında 0 ile başlayanlar da var, onları atarsak cevabı bulmuş olacağız. O halde 0'ı alıp, en başa koyalım. Kalan 9 rakamdan artan sırada üç basamaklı sayılar yazmalıyız. Onun sayısı da $C(9, 3)$ kadar olduğundan cevap

$$C(10, 4) - C(9, 3) = 210 - 84 = 126$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

$r \le n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, herbir kutuya herhangi bir sayıda nesne koymak üzere

$$C\binom{n+r-1}{r}$$

farklı şekilde dağıtabiliriz.

Nesneler farklıyken, her kutudaki nesnelerin dizilişi de önemli olması koşuluyla,

$$P\binom{n+r-1}{r}$$

kadar sayıda dağıtımın sözkonusu olduğunu kanıtlamıştık. Hani komodinli örnek vardı ya, o problemden bahsediyoruz. Burada nesneler özdeş diye dizilişin önemi olmadığından permutasyon yerine kombinasyon yapıyoruz.

Örnek. *3 özdeş oyuncağı, 5 çocuğa herhangi bir şart olmaksızın kaç değişik şekilde dağıtabiliriz?*

A) 5 B) 8 C) 10 D) 15 E) 35

Çözüm: İki farklı yoldan yapacağız.

Birinci yol. Nesneleri özdeş değil de farklı kabul edersek, diziliş önemli olduğunda $P(7, 3)$ kadar değişik yerleştirme mevcut oluyordu. Bu soruda nesneler özdeş olduğundan dizilişin önemi yoktur. O halde permutasyon değil, kombinasyon yapmalıyız. Bu durumda cevap

$$C(7, 3) = 35$$

olmalıdır.

İkinci yol. Formül bilmediğimizi farz edelim. Üç ayrı durum mümkün:

1) Üç oyuncağı da tek çocuğa vermek,

2) İkisini bir çocuğa kalan birini başka bir çocuğa vermek,

3) Üçünü de üç farklı çocuğa vermek.

Her durumu ayrı ayrı inceleyelim, sonuçları toplayalım.

3 oyuncağın 3'ünün de tek bir çocuğa verildiği kaç durum var ona bakalım. Çocukların adları A, B, C, D, E olsun. Hepsini A'ya vermek 1 durumdur, 5 farklı çocuk olduğundan 5 durum oluşur.

Şimdi 2 oyuncağı tek bir çocuğa, kalan 1 oyuncağı da başka bir çocuğa verme durumlarını sayalım. 2 oyuncağı vermek için 5 seçenek var. Kalan oyuncağı vermek için de 4 seçenek var. O halde bu şıkta $5 \cdot 4 = 20$ değişik durum mevcuttur.

Şimdi de 3 oyuncağı 3 farklı çocuğa verme durumlarına bakalım. Bunu bir önceki soruda çözmüştük. Şanslı 3 çocuğu seçelim, yeter. Bu da $C(5, 3) = 10$ değişik durum içeriyordu.

O halde cevap $5 + 20 + 10 = 35$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

$r \ge n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, her kutuda en az 1 tane nesne olacak şekilde yani hiçbir kutu boşta kalmamak üzere

$$C\binom{r-1}{n-1}$$

kadar farklı şekilde yerleştirebiliriz.

Bunun sebebi oldukça basit. Önce her bir kutuyu istenen şartlarda doldururuz. Burada istenen şart her kutuda en az 1 tane nesne olması, bunun için sadece kas hareketi lazım çünkü hatırlarsanız nesneler özdeşti. Şimdi geriye ne kaldı? n tane nesneyi istenen şartları oluşturmak için kullandığımızdan $r - n$ tane nesne kaldı. Bunları kutulara gelişigüzel yerleştirelim. Bu da kanıtladığımız üzere;

$$C\binom{n+(r-n)-1}{(r-n)} = C\binom{r-1}{r-n} = C\binom{r-1}{n-1}$$

değişik şekilde mümkündür.

Örnek. *5 özdeş oyuncak, 3 çocuğa, her birine en az 1 oyuncak vermek kaydıyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 21

Çözüm: Buna birkaç çözüm birden yapalım.

Birinci yol. Problemde hiçbir çocuğu ağlatmamamız isteniyor. O zaman ilk başta herhangi 3 oyuncağı alıp, üç çocuğa da birer birer verelim. Oyuncaklar özdeş olduğundan hangi 3 oyuncağı aldığımızın önemi yoktur. Artık elimizde 2 özdeş oyuncak var. Önümüzde de oyuncak isteyen ama ağlamayan 3 çocuk var. Gelişigüzel dağıtacağız. Bunun sayısının $C\binom{n+r-1}{r}$ olduğunu kanıtlamıştık. 2 özdeş nesneyi, 3 kutuya herhangi bir şart olmaksızın $C(4, 2) = 6$ değişik şekilde yerleştirebileceğimizden 2 özdeş oyuncağı, 3 bebeğe herhangi bir şart olmaksızın 6 değişik şekilde verebiliriz.

İkinci yol. Burada anlatacağımız tekniği çok iyi okumanızı öneririm. Başlıyorum.

5 özdeş oyuncağı 5 tane O harfiyle gösterelim.

$$O\ O\ O\ O\ O$$

Şimdi bu O'ların arasındaki boşluklardan canınızın istediği iki tanesine birer virgül koyun. Örneğin,

$$O\,,O\ O\ O\,,O$$

olsun. Buradaki iki virgül aslında üç çocuğu birbirinden ayırıyor gibi düşünün. Yani, birinci virgüle kadar 1 tane O olması birinci çocuğun 1 tane oyuncak aldığı, birinci ile ikinci virgül arasında 3 tane O olması ikinci çocuğun 3 tane oyuncak aldığı ve son olarak ikinci virgülden sonra 1 tane O olması da üçüncü çocuğun 1 tane oyuncak aldığı anlamına gelmektedir. O'ların en başına veya O'ların en sonuna virgül koymadığınız sürece, bir de aynı boşluğa iki tane virgül koymadığınız sürece hiçbir çocuk 0 tane oyuncak almayacaktır. Demek ki kaç değişik yere virgül koyabileceğimizin sayısı bize problemi çözdürecektir. Toplam 5 tane O olduğundan 4 aralık vardır. Bu 4 aralığın 2'sini $C(4, 2) = 6$ değişik şekilde seçebileceğimizden sorunun cevabı 6 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\binom{3}{0}+\ldots+\binom{10}{0}$$

toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

2.

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{10}{1}$$

toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

3.

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{10}{9}$$

toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

4.

$$\binom{17}{2x}=\binom{17}{x+2}$$

olduğuna göre x'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

5.

p, r, m sayıları birer sayma sayısı olmak üzere;

$$\binom{p}{1}+\binom{r}{r}=\binom{p}{4}+\binom{m}{0}$$

eşitliğini sağlayan p kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

6.

$$\binom{10}{3}\cdot 3!=a!$$

eşitliğini sağlayan a kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7.

$$\binom{0}{0}+\binom{6}{3}=3\cdot\binom{m}{m-1}$$

eşitliğini sağlayan m kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

8.

$$\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}=56$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

9.

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}$$

toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

10.

$$\binom{19}{0}+\binom{19}{1}+\binom{19}{2}+\ldots+\binom{19}{9}$$

toplamı kaçtır?

A) 2^8 B) 2^9 C) 2^{10} D) 2^{18} E) 2^{19}

1. C 2. D 3. D 4. E 5. C 6. A 7. A 8. A 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$2 \cdot C(n, 4) = P(n, 3)$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 16

2.

$$C(x, x-2) + P(5, 2) + 2 \cdot P(x, 2) = C(8, 4)$$

eşitliğine göre x kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

3.

$$P(y+1, 5) = 48 \cdot C(y+1, 4)$$

olduğuna göre y kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 20

4.

$a \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\binom{n}{a+5} = \binom{n}{3-a}$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre $\binom{n}{6}$ kaçtır?

A) 28 B) 26 C) 20 D) 16 E) 12

5.

$$P(a, 7) = 7! \cdot C(a, 4)$$

eşitliğini sağlayan bir a değeri var mıdır? Varsa a kaçtır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 7

6.

6 toptan 2'sini satın almak isteyen bir çocuk, amacına kaç farklı şekilde ulaşabilir?

A) 30 B) 20 C) 15 D) 6 E) 2

7.

30 kişilik bir sınıfta 1 başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 30! B) 29! C) 30 D) 2 E) 1

8.

30 kişilik bir sınıfta 1 başkan ve 1 başkan yardımcısı kaç değişik şekilde seçilebilir?

A) 30! B) 28! C) $\frac{28!}{2}$ D) 870 E) 59

9.

15 kişilik bir sınıftan 3 kişi trafik koluna seçilecektir. Seçilen bu 3 kişiden biri de başkan yapılacaktır.

Trafik kolunun üyeleri ve başkan kaç değişik sekilde seçilebilir?

A) 15!·3! B) $\frac{15!}{3!}$ C) 15·14·13 D) 15·13·7 E) 16

10.

Bilgi yarışmasını kazanan 5 öğrencinin 3'ü ödül olarak cep telefonu, 2'si de kitap seti alacaktır.

Ödülleri kaç farklı şekilde dağıtmak mümkündür?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 32 E) 120

1. D 2. B 3. A 4. A 5. B 6. C 7. C 8. D 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
2 öğretmen ile 5 öğrenci boş olan 5 koltuğa oturacaklardır.
Öğretmenlerin ayakta kalmaması şartıyla kaç değişik şekilde oturabilirler?

A) 10 B) 20 C) 40 D) 120 E) 1200

2.
5'i doktor 7'si hemşire olan 12 kişilik bir sağlık ekibinden acil vakalara bakmak üzere 1 doktor ve 2 hemşireli 3 kişilik küçük bir ekip oluşturmak isteniyor.
Kaç farklı şekilde mümkündür?

A) 21 B) 42 C) 105 D) 210 E) 840

3.
6 bay ve 3 bayan arasından, içlerinde 1 bayan olan 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 60 B) 45 C) 30 D) 15 E) 6

4.
6 bay ve 3 bayan arasından, içlerinde en az 1 bayan olan 3 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 45 B) 46 C) 63 D) 64 E) 90

5.
İçlerinde 3 tanesi matematik öğretmeni olan 12 öğretmenden 3 tanesi doğuya mecburi hizmete yollanacaktır.
En az ikisi matematik öğretmeni olmak zorundaysa bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

A) 27 B) 28 C) 36 D) 56 E) 63

6.
Bir otelde 1 tane 2 kişilik, 4 tane 3 kişilik oda vardır.
3 kişilik odalar özdeş olduğuna göre 14 kişi bu otele kaç farklı şekilde yerleşebilir?

A) $\binom{14}{2}\cdot 2!\cdot 12!$ B) $\binom{14}{2}\cdot 12!$ C) $\binom{14}{2}\cdot 2!$ D) $\binom{14}{2}$ E) $14!$

7.
Bir antrenör, 22 kişilik kadrodan ilk 11'i ve yedek 5'i kaç değişik şekilde oluşturabilir?

A) $\binom{22}{16}$ B) $\binom{22}{11}\cdot\binom{11}{6}$ C) $\binom{22}{11}$
D) $\binom{22}{16}\cdot 16!$ E) $\binom{22}{11}\cdot\binom{11}{5}\cdot 11!\cdot 5!$

8.
22 kişilik kadrosunda 3 farklı kalecisi bulunan bir antrenör, tek kalecili 11 oyuncuyu kaç değişik şekilde seçebilir?

A) $\binom{22}{3}\cdot\binom{3}{1}$ B) $\binom{22}{11}\cdot\binom{3}{1}$ C) $\binom{19}{10}\cdot\binom{3}{1}$
D) $\binom{22}{11}\cdot 3!$ E) $\binom{19}{10}\cdot\binom{3}{1}\cdot 10!$

9.
10'u yabancı olan 22 kişilik kadrosundan 11 kişi seçmek isteyen bir teknik direktör, bir maçta en çok 6 yabancı oynatabilme hakkına sahiptir.
Eğer yabancılardaki tüm hakkını kullanmak istiyorsa, ilk 11'i kaç değişik şekilde seçebilir?

A) $\binom{12}{5}$ B) $\binom{10}{6}$ C) $\binom{22}{11}$
D) $\binom{10}{6}\cdot\binom{12}{5}$ E) $\binom{10}{6}\cdot\binom{22}{5}$

10.
7 kişi, 4 ve 3 kişilik iki ayrı gruba ayrılmak isteniyor. İçlerinden belli 2 tanesi birbirlerine küs olduğundan aynı grupta olmak istemiyorlar.
Grupları seçen adam hırgür çıkmasın diye kaç değişik seçim yapabilir?

A) 20 B) 35 C) 40 D) 70 E) 105

1. E 2. C 3. B 4. D 5. B 6. A 7. B 8. C 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir gruptan 2'şer kişilik 2 ayrı grup 210 farklı şekilde oluşturulabiliyorsa, bu grupta kaç kişi vardır?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

2.
8 farklı dersin 2'si aynı saatte verilmektedir.
Bu derslerden 5 tanesini seçmeye mecbur bir öğrenci seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

A) $\binom{6}{4}+\binom{2}{1}$ B) $\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{5}$ C) $\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{1}$
D) $\binom{8}{5}+\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{1}$ E) $\binom{6}{5}+\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{1}$

3.
10 soruluk bir sınavda ilk 3 tanesini cevaplamaya mecbur olan bir öğrenci cevaplamak üzere bu 10 sorudan 8'ini kaç farklı şekilde seçebilir?

A) 42 B) 35 C) 21 D) 14 E) 7

4.
Herkesin birbiriyle tokalaştığı bir grupta toplam tokalaşma sayısı 36 olduğuna göre, grupta kaç kişi vardır?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

5.
10 kişilik bir gruptan 6 kişi seçilecek ve bir yuvarlak masa etrafına oturtturulacaklar.
Kaç farklı oturuş mümkündür?

A) 210 B) 210·5! C) 210·6!
D) 210·10! E) 210·10!·6!

6.
10 kişilik bir arkadaş topluluğunda Ali ve Veli ayrı gruplarda olmak üzere 5 kişilik gruplar kaç değişik şekilde seçilebilir?

A) 35 B) 70 C) 140 D) 210 E) 410

7.
7 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı kaç altkümesi vardır?

A) $\frac{7!}{2!}$ B) 42 C) 35 D) 21 E) 16

8.
7 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 2 elemanlı altkümelerinin sayısından kaç fazladır?

A) 105 B) 84 C) 70 D) 42 E) 14

9.
7 elemanlı bir kümenin a elemanlı altkümeleri sayısı, b elemanlı altkümeleri sayısına eşit ve $a \neq b$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 11

10.
Beş erkek ve üç kız yuvarlak bir masa etrafında oturacaklardır.
Herhangi iki kız yan yana gelmemek koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 720 B) 1440 C) 1610 D) 1960 E) 2160

1.D 2.E 3.C 4.A 5.B 6.C 7.D 8.E 9.D 10.B

CEVAPLI TEST 4

1.
6 farklı kitap 5 öğrencinin katıldığı bilgi yarışmasının sonunda birinciye üç, ikinci iki, üçüncüye bir kitap vermek koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) 60 B) 120 C) 3600 D) 4800 E) 7200

2.
Farklı 4 renk pantolonu, 3 renk gömleği ve 3 farklı kravatı bulunan bir kişi kravatlı veya kravatsız olarak kaç farklı şekilde giyinebilir?

A) 12 B) 36 C) 42 D) 48 E) 54

3.
3 basamaklı doğal sayıların kaç tanesinin sadece 2 basamağında aynı rakam yer alır?

A) 214 B) 226 C) 243 D) 281 E) 270

4.
Bir öğrencinin üçü aynı saatte verilen 7 seçmeli dersten üçünü seçmesi gerekmektedir.
Bu öğrenci ders seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

A) 98 B) 64 C) 44 D) 36 E) 22

5.
$A = \{a, b, c, d, e\}$
kümesinin *a*'yı eleman olarak içermeyen kaç tane 4 elemanlı altkümesi vardır?

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

6.
$A = \{a, b, c, d, e\}$
kümesinin *a ve b*'nin ikisini birden eleman olarak içermeyen kaç tane 2 elemanlı altkümesi vardır?

A) 10 B) 8 C) 5 D) 3 E) 2

7.
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
kümesinin içinde hem *a* hem de *b* bulunan kaç farklı 4 elemanlı altkümesi vardır?

A) 21 B) 15 C) 10 D) 6 E) 4

8.
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
kümesinin içinde *a* bulunan ama *b* bulunmayan kaç farklı 4 elemanlı altkümesi vardır?

A) 35 B) 20 C) 15 D) 10 E) 6

9.
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
kümesinin, içinde *a* veya *b* bulunan kaç farklı 4 elemanlı altkümesi vardır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 32 E) 35

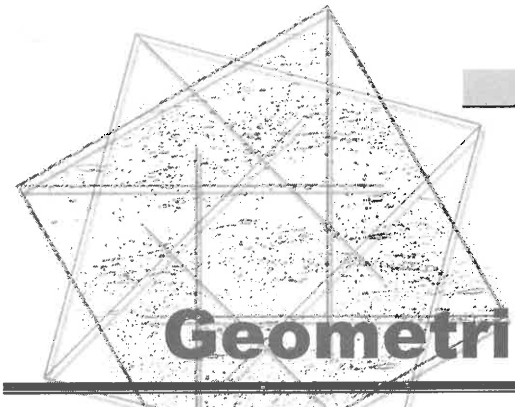
10.
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
kümesinin, içinde *a* ya da *b* bulunan kaç farklı 4 elemanlı altkümesi vardır?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 35 E) 48

1.C 2.D 3.C 4.E 5.E 6.D 7.C 8.D 9.C 10.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Geometrik Kombinasyon

Her farklı iki noktanın bir doğru belirttiğini biliyoruz. Peki hangi doğruyu belirtiyorlardı? O iki noktadan geçen doğruyu. Peki her farklı 3 nokta kaç doğru belirtir? 2 nokta 1 doğru belirtiyorsa, 3 nokta 1,5 doğru belirtir demeyin de diğer her cevaba kendimi alıştırabilirim. ☺

Uzatmayayım, bu sorunun cevabı yoktur, çünkü soru düzgün bir soru değil! 3 farklı nokta doğrusalsa tek bir doğruyu belirtirler ama doğrusal değillerse 3 farklı doğruyu belirtirler. Demek ki belirttikleri doğru sayısı noktaların konumuna göre değişiyor. Eğer konumlarını belirtmeden bir soru sormak istiyorsak, en az ya da en çok kaç tane geçer filan diye sormalıyız veya sormalılar. En az olduğu durum tabii ki hepsinin doğrusal olmasıyla mümkündür, veya izin varsa hepsini çakışık alırız hiçbir doğru belirtmezler. En çok olması da herhangi üçünün doğrusal olmamasıyla mümkündür. İki farklı nokta, belirttiğimiz üzere ne yaparsanız yapın, her zaman doğrusal olur. Benzer şekilde her doğrusal olmayan 3 nokta da bir üçgen, ayrıca bu üçgenin üstünde bulunduğu bir düzlem ve bu üçgenin çevrel çemberi olan bir çember belirtir. Üçü doğrusal olmayan dört farklı nokta da dörtgen belirtir.

Örnek. *9 nokta en az kaç doğru belirtir?*

A) 0 B) 1 C) 9 D) 36 E) 72

Çözüm: Tabii ki 0! (0 faktöryel değil, bildiğin 0). Çünkü 9 nokta da çakışık olursa herhangi bir doğruyu belirtmezler. Ama soruda eğer farklı 9 nokta deseydi, hepsinin doğrusal olduğunu farz ederek cevaba 1 derdik.

Doğru cevap: A.

Örnek. *9 farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 72

Çözüm: Böyle sorularda noktaların mümkün olduğunca çok doğru belirtmesi için noktaların herhangi üçünün doğrusal olmadığını düşünmeliyiz. Biz bu herhangi üçü doğrusal olmayan noktalara bundan böyle *çembersel* veya *dağınık* diyeceğiz. O halde çembersel olan 9 noktanın herhangi ikisi her zaman farklı bir doğru belirtir. Bu da $C(9, 2) = 36$ tane doğru demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *9 farklı nokta en çok kaç üçgen belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 84

Çözüm: En çok üçgen için, 9 noktayı yine çemberselmiş gibi düşüneceğiz. Çembersel olan 9 noktanın herhangi üçü her zaman bir üçgen belirtir. Bu da $C(9, 3) = 84$ tane üçgen demektir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *9 farklı nokta en çok kaç dörtgen belirtir?*

A) 45 B) 84 C) 96 D) 126 E) 154

Çözüm: En çok dörtgen için 9 noktayı yine çemberselmiş gibi düşüneceğiz. Çembersel olan 9 noktanın herhangi dördü her zaman bir dörtgen belirtir. Bu da $C(9, 4)$ yani 126 tane dörtgen demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5'i doğrusal, 4'ü çembersel 9 farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 72

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Doğrusal olan 5 nokta tek bir doğru belirtir. Çembersel olan 4 nokta da $C(4, 2) = 6$ doğru belirtir. Bir de doğrusal noktaların birinden ve çembersel noktaların birinden geçen doğrular var. Bunlar da $C(5, 1)\cdot C(4, 1)$ yani 20 tanedir. Bunu da hesaba kattık mı, işlem tamam!

$$1 + 6 + 20 = 27.$$

İkinci yol. Tüm noktaların dağınık olduğunu düşünün bir an. $C(9, 2) = 36$ doğru olurdu. Doğrusal olan 5 nokta da dağınık olsaydı $C(5, 2) = 10$ tane doğru oluştururdu ama sadece 1 tane oluşturuyorlar. 9 tane doğru kaybolmuş yani: $36 - 9 = 27$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *5'i doğrusal, 4'ü çembersel olan 9 farklı nokta en çok kaç üçgen belirtir?*

A) 74 B) 84 C) 96 D) 126 E) 154

Çözüm: Yine iki yol vereceğiz.
Birinci yol. Doğrusal olan 5 nokta hiçbir üçgen belirtmez. Çembersel olan 4 nokta da $C(4, 3) = 4$ üçgen belirtir. Ayrıca doğrusal 5 noktanın 2'sinden ve çembersel 4 noktanın 1'inden geçen doğrularla, ki bunlar

$$C(5, 2)\cdot C(4, 1) = 10\cdot 4 = 40$$

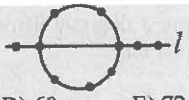
tanedir, doğrusal 5 noktanın 1'inden ve çembersel 4 noktanın 2'sinden geçen doğruları da sayacağız, ki bunlar da

$$C(5, 1)\cdot C(4, 2) = 5\cdot 6 = 30$$

tanedir. O halde $4 + 40 + 30 = 74$.
İkinci yol. Tüm noktaların dağınık olduğunu düşünün. $C(9, 3) = 84$ üçgen oluşurdu. Doğrusal 5 nokta $C(5, 3) = 10$ üçgen belirtmeliyken hiç belirtmiyor. $84 - 10 = 74$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yan şekilde verilen 10 nokta en çok kaç doğru belirtir?*



A) 5 B) 35 C) 36 D) 60 E) 72

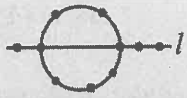
Çözüm: Önce 10 noktanın hepsinin dağınık olduğunu düşünün, yani herhangi üç tanesi doğrusal olmasın. Öyle olsalardı $C(10, 2) = 45$ tane doğru belirtirlerdi. Öyle bir durumda l doğrusu üzerindeki beş nokta da $C(5, 2) = 10$ tane doğru belirteceklerdi ama maalesef sadece 1 tane doğru belirtiyorlar. Yani 9 tane eksiğimiz var. Bu yüzden cevap

$$45 - 10 + 1 = 45 - 9 = 36$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yan şekilde verilen 10 nokta en çok kaç üçgen belirtir?*



A) 120 B) 110 C) 105 D) 90 E) 72

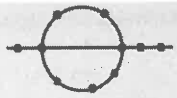
Çözüm: Önce 10 noktanın hepsinin dağınık olduğunu düşünün, yani herhangi üç tanesi doğrusal olmasın. Öyle olsalardı $C(10, 3) = 120$ tane üçgen belirtirlerdi. Öyle bir durumda l doğrusu üzerindeki beş nokta da $C(5, 3) = 10$ tane üçgen belirteceklerdi ama maalesef sadece 1 tane bile belirtmiyorlar. Yani 10 tane eksiğimiz var. Bu yüzden cevap

$$120 - 10 = 110$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yan şekildeki 10 nokta, sadece iki köşesi çember üzerinde olan kaç farklı üçgen belirtir?*



A) 120 B) 66 C) 63 D) 60 E) 40

Çözüm: Çember üzerindeki 7 noktadan 2'sini seçelim. Bunu $C(7, 2) = 21$ kadar farklı şekilde yapabiliriz. Şimdi üçüncü köşeyi seçeceğiz. Üçüncü köşe çember üzerinde olamayacağından geri kalan 3 noktadan birini seçeceğiz. Bunu da $C(3, 1) = 3$ kadar değişik şekilde yapabiliriz. O halde bahsi geçen 63 tane üçgen vardır. Fakat cevap 63 değil! Çünkü ya çember üzerinden seçtiğimiz 2 noktanın 2'si de aynı zamanda doğrunun da üstünde olan noktalarsa? O iki noktayla, dışarıdaki 3 noktanın oluşturduğunu zannederek saydığımız 3 üçgeni toplamdan çıkarmalıyız. O halde cevap $63 - 3 = 60$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 doğru en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının çok olması istendiğinden mümkün olduğunca doğruları birbirlerine paralel almayacağız. Ayrıca ikiden fazla doğrunun tek bir noktada kesiştiğini de düşünmeyeceğiz. Velhasıl, bir kesim noktası için farklı iki doğru lazım. O halde $C(5, 2) = 10$ tane kesim noktası olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *5 çember en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 60 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının mümkün olduğunca çok olması istendiğinden, çemberlerin herhangi iki kesim noktasının çakışmadığını düşüneceğiz. İki çember en çok 2 farklı noktada kesişir. O halde $C(5, 2) = 10$ tane farklı iki çember seçilebileceğinden $10\cdot 2 = 20$ kesim noktası olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *5 üçgen en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 60 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının mümkün olduğunca çok olması istendiğinden, üçgenlerin herhangi iki kesim noktasının çakışmadığını düşüneceğiz. İki üçgen en çok 6 farklı noktada kesişir. O halde $C(5, 2) = 10$ tane farklı iki üçgen seçilebileceğinden $10\cdot 6 = 60$ kesim noktası olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 doğrunun kesim noktası en çok kaç üçgen belirtebilir?*

A) 20 B) 40 C) 60 D) 100 E) 120

Çözüm: Doğruların herhangi ikisinin birbirlerine paralel olmadıklarını düşünelim ki, kesim noktası fazla çıksın. Böyle bir durumda 5 doğrunun herhangi ikisi bir kesim noktası belirteceğinden $C(5, 2) = 10$ farklı kesim noktası vardır. Şimdi soru, 10 *nokta en çok kaç üçgen belirtebilir* sorusuna döndü gibimize geliyor ama tam öyle değil. Çünkü sistemdeki her doğru diğer dört doğruyla da kesişmekte olduğundan her doğrunun üzerinde 4 tane nokta var. Bu noktalar doğrusal olduğundan bazı üçgenler belirecekleri yerde belirmiyorlar. Bu 5 doğru üzerindeki 4'er noktanın belirtmedikleri üçgenleri toplam üçgen sayısından çıkartarak sonuca ulaşacağız.

$$\binom{10}{3} - 5 \cdot \binom{4}{3} = 120 - 5 \cdot 4 = 100 .$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Düzlemde 6 doğru ve farklı yarıçaplarda 4 çember veriliyor. Bu 6 doğru ile 4 çember en çok kaç kesim noktası oluşturabilir?*

A) 48 B) 60 C) 75 D) 80 E) 100

Çözüm: En çok kesim noktası elde edebilmek amacıyla doğruların hiçbirinin herhangi bir çembere teğet olmadığını düşünmeliyiz, her biri bir çemberi 2 farklı noktada kessin. O halde $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ kesim noktası buradan gelir. Diğer yandan 6 doğru kendi arasında $C(6, 2) = 15$ tane kesim noktası oluşturur. Bir de çemberler kendi arasında $2 \cdot C(4, 2) = 12$ kesim noktası oluştururlar. O halde en çok $48 + 15 + 12 = 75$ kesim noktası oluşabilir.

Doğru cevap: C.

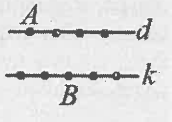
Örnek. *Başlangıç noktaları aynı bir P noktası olan ve herhangi ikisi doğrusal olmayan 6 tane ışın veriliyor. Bu ışınlardan köşesi P'de olan kaç tane açı oluşur?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 30

Çözüm: Köşesi P'de olan herhangi 2 ışın bir açı oluşturacağından $C(6,2) = 15$ tane açı oluşur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A noktasıyla birlikte 4 noktası olan bir d doğrusu ile B noktası ile birlikte 5 noktası bulunan d'ye paralel bir k doğrusu veriliyor. Bu şekildeki 9 nokta;*



i. *Kaç farklı doğru belirtir?*

Aynı doğru üstünde olmayan iki noktaya ihtiyacımız var:

$$C(4, 1) \cdot C(5, 1) = 4 \cdot 5 = 20.$$

Bunlara bir de d ve k doğrularını eklersek cevap 22 olur.

ii. *Kaç farklı üçgen belirtir?*

Üçü aynı doğru üstünde olmayan 3 noktaya ihtiyacımız var. O halde 2'si d'den 1'i k'den veya 1'i d'den 2'si k'den olmak üzere 3 nokta seçelim:

$$C(4, 2) \cdot C(5, 1) + C(4, 1) \cdot C(5, 2) = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 70.$$

iii. *Kaç farklı yamuk belirtir?*

2'si d'den ve 2'si k'den 4 noktaya ihtiyaç var:

$$C(4, 2) \cdot C(5, 2) = 6 \cdot 10 = 60.$$

iv. *A'dan geçen kaç doğru belirtir?*

Doğru mecburen A'dan geçecekse diğer noktası mecburen k doğrusu üstünde olacak. Bir de d doğrusunun kendisi var:

$$C(5, 1) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

v. *A'dan geçen ama B'den geçmeyen kaç doğru belirtir?*

k doğrusu üzerindeki 5 noktadan adı B olan birini yasakladılar ama diğer 4'üne hala izin var, bir de d doğrusunun kendisi var:

$$C(4, 1) + 1 = 4 + 1 = 5.$$

vi. *Bir köşesi A olan kaç üçgen belirtir?*

Ya diğer iki noktayı k'den ya da birini d'den (ama A noktası dışındakilerden), birini k'den seçeceğiz. Diğer iki noktayı da d'den seçersek, doğrusal olacaklarından dolayı üçgen elde edilemez:

$$C(5, 2) + C(3, 1) \cdot C(5, 1) = 10 + 3 \cdot 5 = 25.$$

vii. *A ve B köşelerine sahip kaç üçgen belirtir?*

Üçüncü noktayı hangi doğrudan seçersek seçelim, ama A ve B dışındaki noktalar olmak zorunda, her zaman üçgen oluşur (kalan 7 taneden biri yani):

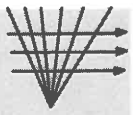
$$C(3, 1) + C(4, 1) = 3 + 4 = 7.$$

viii. *Bir köşesi B olan ama A diye bir köşesi olmayan kaç yamuk belirtir?*

Bize k üzerinde B'den farklı bir nokta ve d üzerinde A'dan farklı 2 nokta lazım:

$$C(4, 1) \cdot C(3, 2) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Örnek. *Şekilde paralel olan üç doğru ile bu doğruları kesen 6 noktadaş doğru görülmektedir. Bu 9 doğru bu konumlarıyla kaç farklı üçgen belirtirler?*



A) 15 B) 18 C) 40 D) 45 E) 60

Çözüm: Bir üçgen elde edilebilmek için tek noktada kesişen doğrulardan herhangi ikisi ve birbirlerine paralel olan doğrulardan herhangi 1'ine ihtiyacımız var. O halde bu seçimi kaç farklı şekilde yapabileceğimizi bulmalıyız.

$$C(6, 2)\cdot C(3, 1) = 15\cdot 3 = 45.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yatay olan 3 doğru ve dikey olan 6 doğru birbirlerine paralel olduğuna göre şekilde kaç farklı paralelkenar vardır?*



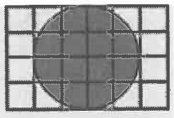
A) 15 B) 18 C) 40 D) 45 E) 60

Çözüm: Bir paralelkenar oluşturmak için, bize yataylardan herhangi ikisi ve dikeylerden herhangi ikisi lazım. O halde bu seçimi kaç farklı şekilde yapabileceğimizi bulmalıyız. Ben buldum:

$$C(3, 2)\cdot C(6, 2) = 3\cdot 15 = 45.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Şekilde taralı dairenin herhangi bir parçasını kapsayan kaç farklı dikdörtgen vardır?*



A) 150 B) 160 C) 170 D) 190 E) 200

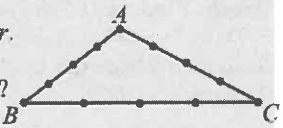
Çözüm: Bu soruda da tersten gitmek daha faydalıdır. Tüm dikdörtgen sayısından taralı dairenin herhangi bir parçasını kapsamayan dikdörtgenlerin sayısını çıkartacağız. Toplam $C(7, 2)\cdot C(5, 2) = 210$ farklı dikdörtgen vardır. En sol ve en sağ sütunlardaki karelerin oluşturdukları dikdörtgenler taralı bölgenin herhangi bir parçasını kapsamıyorlar. Bakalım sol sütunda öyle kaç dikdörtgen var? $C(2, 2)\cdot C(5, 2) = 10$ tane varmış, 10 tane de sağda vardır. O halde cevap

$$210 - 10 - 10 = 190$$

tane olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Şekildeki ABC üçgeni üzerinde 12 farklı nokta vardır. Bu noktaları köşe kabul eden kaç değişik dörtgen çizilebilir?*

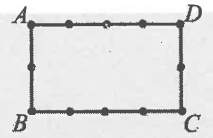


A) 40 B) 60 C) 120 D) 180 E) 270

Çözüm: Böyle sorularda tersten gitmek daha avantajlıdır. Önce 12 nokta çembersel olsalardı kaç değişik dörtgen olurdu, onu bulalım. $C(12, 4) = 495$ tane dörtgen çizilebilirdi. Şimdi AB kenarı üzerindeki 5 noktaya odaklanalım. Bu beş nokta doğrusal olsalardı $C(5, 4) = 5$ tane dörtgen oluştururdu ama bu durumda oldukları için oluşturamıyorlar. Ayrıca bu 5 tanenin 3'ü ve diğer 7 tanenin 1'i de $C(5, 3)\cdot C(7, 1) = 70$ tane dörtgen oluşturabilirlerdi, fakat bunu da oluşturamıyorlar. Aynı durumlar BC ve CA kenarlarına odaklanıldığında oluşacağından $495 - 3\cdot 5 - 3\cdot 70 = 270$ farklı dörtgen çizmek mümkündür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Şekildeki dikdörtgenin üzerinde bulunan 12 noktayı köşe kabul eden en fazla kaç tane üçgen çizilebilir?*

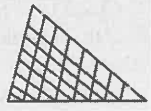


A) 90 B) 108 C) 110 D) 112 E) 198

Çözüm: Yine tersten gideceğiz. 12 nokta dağınık olsaydı $C(12, 3) = 220$ farklı üçgen çizmek mümkün olurdu. AD ve BC kenarları üzerindeki 5'er nokta doğrusal olmasalardı $C(5, 3) = 10$'ar tane, AB ve CD kenarları üzerindeki 3'er nokta da doğrusal olmasalardı $C(3, 3) = 1$'er tane üçgen oluştururlardı. O halde bu durumdaki çizilebilecek üçgen sayısı $220 - 2\cdot 10 - 2\cdot 1 = 198$'dir.

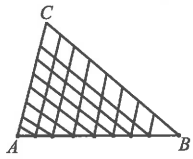
Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki şekilde kaç farklı üçgen vardır?*



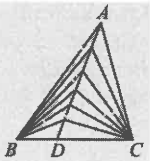
A) 30 B) 35 C) 36 D) 40 E) 42

Çözüm: En büyük üçgene ABC diyelim. Şekle dikkat edilecek olursa, üçgenlerin hepsinin bir kenarının AB doğrusu üzerinde olduğunu anlarız. AB üzerinde 9 farklı nokta olduğundan $C(9, 2) = 36$ tane farklı nokta ikilisi bulunur. 36 nokta ikilisinin belirttiği 36 doğru parçasının tamamı 36 farklı üçgene aittir. Demek ki şekilde 36 farklı üçgen mevcuttur.



Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusaldır. Buna göre şekilde kaç farklı üçgen mevcuttur?*



A) 16 B) 24 C) 48 D) 50 E) 52

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.

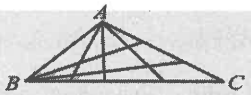
Birinci yol. B'den çıkan ışınların herhangi ikisiyle AD doğrusu farklı birer üçgen belirtir. Aynı durum C'den çıkan ışınlar için de geçerlidir. Bir de tabanı BC olup, tepesi $[AD[$ üstünde olan üçgenler de mevcuttur. Şimdi saymaya geçelim: $\binom{7}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{1}=48$.

İkinci yol. Şekildeki 9 nokta çembersel olsaydı $C(9, 3) = 84$ üçgen oluşurdu. Bu 9 noktadan AD üzerindeki 7 nokta da o durumda $C(7, 3) = 35$ tane üçgen oluşturacakları ama maalesef hiç oluşturmuyorlar. Benzer şekilde B, D, C doğrusal noktaları da 1 üçgeni oluşturacağı yerde oluşturmuyorlar. Anlayacağınız $35 + 1 = 36$ tane kayıp var. Bunu 84'ten çıkartalım, cevabı bulalım:

$$\binom{9}{3}-\left[\binom{7}{3}+\binom{3}{3}\right]=84-[35+1]=48.$$

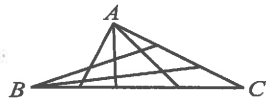
Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki şekilde kaç üçgen vardır?*

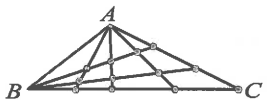


A) 46 B) 44 C) 42 D) 40 E) 30

Çözüm: AB kenarı A'dan çıkan bir doğru gibi de düşünülebilir, B'den çıkan bir doğru gibi de. Biz karışıklığa mahal vermemek için, ikisine de dahil etmeyelim. AB kenarını önce bir silelim.



Bir köşesi A olan üçgenleri sayalım. A'dan çıkan ışınlardan iki tanesiyle B'den çıkan bir ışını düşüneceğiz. $C(4, 2)\cdot C(3, 1) = 18$ tane böyle üçgen vardır. Şimdi bir köşesi B olan üçgenleri sayalım. B'den çıkan iki ışınla A'dan çıkan dört ışını düşüneceğiz. $C(3, 2)\cdot C(4, 1) = 12$ tane de böyle üçgen vardır. Etti 30 ve bu 30 üçgenin hiçbir kenarı AB değil. Şimdi bunlara bir kenarı AB olan üçgenleri de ekleyeceğiz olacak bitecek.



A ve B noktaları dışındaki tüm kesişim noktaları AB tabanına tepe oluşturabilir. A'dan çıkan 4 ışınla, B'den çıkan 3 ışın $C(4, 1)\cdot C(3, 1) = 4\cdot 3 = 12$ kesim noktası oluşturduğundan toplam olarak $30 + 12 = 42$ üçgen vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir üçgenin herhangi iki köşesine ait n'şer kesen, üçgeni kaç parçaya ayırır?*

A) n B) $n+1$ C) $(n+1)^2$ D) 2^n E) n^2

Çözüm: Önce herhangi bir köşeye ait n tane keseni çizelim. Üçgen $n + 1$ üçgenciğe ayrılır. Sonra diğer bir köşeden çizilen ilk kesen bu $n + 1$ tane parçayı $2\cdot(n + 1)$ parça yapar, ikinci kesen $3\cdot(n + 1)$ parça yapar, ... , n'ninci kesen bundan dolayı $(n + 1)\cdot(n + 1) = (n + 1)^2$ parçaya ayırmış olur. Eğer üçüncü köşeden de n tane kesen çizilseydi ve 2'den fazla kesen tek noktada kesişmeseydi, üçgen

$$(n + 1)^2 + n\cdot(2n + 1)$$

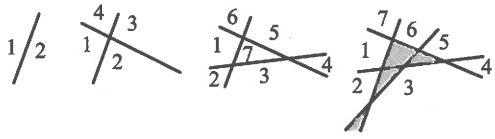
parçaya ayrılırdı. Bunu da siz kanıtlayın...

Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi ikisi paralel olmayan ve üçü tek noktada kesişmeyen n tane doğru, üzerinde bulundukları düzlemi kaç bölgeye ayırır?*

A) n B) $n+1$ C) $(n+1)^2$ D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $\frac{n(n+1)}{2}+1$

Çözüm: Önce tek 1 doğru kaç bölgeye ayırıyor ona bakalım, sonra ikinci doğruyu çizelim, şimdi bakalım, sonra üçüncüyü...



Görülen o ki;

1 doğru 2 bölgeye ayırıyor,
2 doğru 4 bölgeye ayırıyor,
3 doğru 7 bölgeye ayırıyor,
4 doğru 11 bölgeye ayırıyor ...

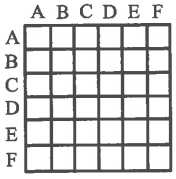
Dikkat ettiyseniz, bölge sayısı önce 2 arttı, sonra 3, sonra 4. O halde ikinci dereceden bir ilişki var doğru ile bölge sayıları arasında. Sabit artsaydı birinci dereceden derdik. 2, 4, 7, 11, ... sayılarının özelliği birer eksiklerinin yani 1, 3, 6, 10, ... sayılarının 1'den başlayan sayma sayılarının toplamlarının sonucu olduğudur.

O halde n doğru düzlemi $\frac{n(n+1)}{2}+1$ bölgeye ayırır.

Doğru cevap: E.

Bulmaca Tablosundaki Kare Sayısı

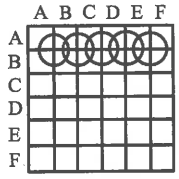
Önce satır sayısıyla sütun sayısı aynı olan bir bulmaca tablosunda sayalım. Sonra kullandığımız tekniği her türlü tablo için genelleştireceğiz. Örnek olarak 6×6 boyutunda bir tablo çizelim.



Kare sayısını hesaplamak, dikdörtgen sayısını hesaplamaya göre biraz çetrefillidir ama kolaydır. Bir kenarı 1 birim olan kareleri, 2 birim olanları ayrı, ... 6 birim olanı ayrı ayrı hesaplamak lazımdır. Hesaplayalım:

Bir kenarı 1 birim olan kareler rahatlıkla görüleceği üzere $6\cdot6 = 36$ tanedir.

Bir kenarı 2 birim olan karelerse şöyle hesaplanır:



Önce sadece en üstteki iki satırla yani AB satırıyla başlayalım. AB satırında yuvarlakla gösterilmiş 5 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır. E böyle AB, BC, CD, DE, EF olmak üzere 5 farklı ikili satır olduğundan

$5\cdot5 = 25$ tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır.

Bu işlemlere aynı şekilde devam edilirse, bir kenarı 3 birim olan kare sayısının $4\cdot4 = 16$, bir kenarı 4 birim olan kare sayısının $3\cdot3 = 9$, bir kenarı 5 birim olan kare sayısının $2\cdot2 = 4$ ve son olarak bir kenarı 6 birim olan kare sayısının da $1\cdot1 = 1$ olduğu görülür. O halde toplam kare sayısı

$$T = 6\cdot6 + 5\cdot5 + 4\cdot4 + 3\cdot3 + 2\cdot2 + 1\cdot1$$
$$= \sum_{i=1}^{6}\left(i^2\right) = \frac{6\cdot7\cdot13}{6} = 91$$

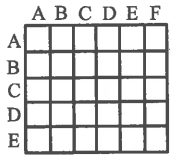
olarak bulunur.

Eğer bulmaca tablosu 6×6 boyutunda değil de $n\times n$ boyutunda olursa toplam kare sayısı

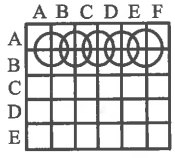
$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^2\right) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

formülüyle hesaplanabilir. Üstteki problemi nasıl çözdüysek, aynısını kullanarak kanıtlayabilirsiniz.

Eğer satır sayısıyla sütun sayısı farklıysa ne yapacağımızı da anlatalım: Örnek olarak, 5 satır ve 6 sütundan oluşan bir bulmaca tablosu çizelim.



Bir kenarı 1 birim olan kareler rahatlıkla görüleceği üzere $6\cdot5 = 30$ tanedir.



Bir kenarı 2 birim olan karelerse şöyle hesaplanır:

Önce sadece en üstteki iki satırla yani AB satırıyla başlayalım. AB satırında yuvarlakla gösterilmiş 5 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır. E böyle AB, BC, CD, DE olmak üzere 4 farklı ikili satır olduğundan $5\cdot4 = 20$ tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır.

Bu işlemlere aynı şekilde devam edilirse, bir kenarı 3 birim olan kare sayısının $4\cdot3 = 12$, bir kenarı 4 birim olan kare sayısının $3\cdot2 = 6$ ve son olarak bir kenarı 5 birim olan kare sayısının $2\cdot1 = 2$ tane olduğu görülür. O halde toplam kare sayısı

$$T = 6\cdot5 + 5\cdot4 + 4\cdot3 + 3\cdot2 + 2\cdot1$$
$$= \sum_{i=1}^{5}\left((i+1)\cdot i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{5}\left(i^2+i\right)$$
$$= \frac{5\cdot6\cdot11}{6} + \frac{5\cdot6}{2} = 70$$

olarak bulunur.

Eğer bulmaca tablosu 6×5 boyutunda değil de $m\times n$ boyutunda olursa $(m > n)$ toplam kare sayısı

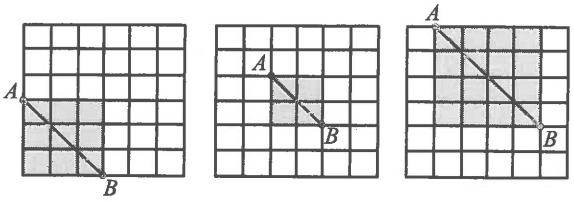
$$T = \sum_{i=0}^{n}\left((m-i)\cdot(n-i)\right)$$

formülüyle hesaplanabilir. Üstteki problemi nasıl çözdüysek, aynısını kullanarak kanıtlayabilirsiniz.

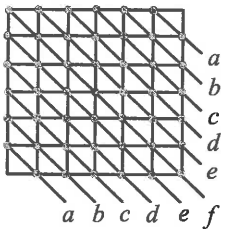
Aslında hepsinin suyunu sıkınca şu kalıyor:

Önce tablo boyutunu yazın, $m\cdot n$ şeklinde. Daha sonra hem m'yi hem n'yi 1'er azalatarak çarpmaya devam edin, taa ki biri 0 olana kadar. Sonra o çarpımları toplayın!

TMOZ grubundan Yasin Temizkan hocam, bu tip sorular için alternatif bir çözüm önermiş. Bizim önerimiz yukarda anlatılanlardır ama farklı bir bakış açısı olması maksadıyla veriyoruz.



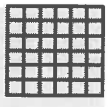
Yukardaki şekillerden de görüldüğü üzere köşegeni $[AB]$ olan tek kare vardır. Yani her yatay $[AB]$ doğru parçası bir kareyi simgelemektedir. O halde problemi kaç değişik $[AB]$ çizilebileceği üzerine kuracağız.



a, b, c, d, e, f doğrularının üstünde sırasıyla 2, 3, 4, 5, 6, 7 nokta olduğundan bu doğrular üzerindeki herhangi iki tane nokta, değişik bir $[AB]$ belirtecektir. Yalnız a, b, c, d, e doğrularından ikişer tane olduğundan, onları 2'yle çarpacağız. O halde tablodaki kare sayısı

$$2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}\right]+\binom{7}{2}=91.$$

Örnek. 36 *birim kareden oluşturulmuş yandaki karedeki dikdörtgen sayısı kare sayısından kaç fazladır?*



A) 150 B) 180 C) 220 D) 440 E) 350

Çözüm: Önce kaç dikdörtgen olduğunu bulalım. 7 dikey ve 7 yatay doğru olduğundan, dikdörtgen sayısı

$$C(7,2)\cdot C(7,2)=21\cdot 21=441,$$

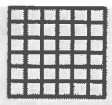
kare sayısı da

$$\sum_{i=1}^{6}\left(i^2\right)=\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}=91$$

olduğundan cevap $441-91=350$ olmalıdır.

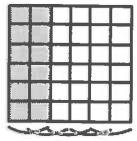
Doğru cevap: E.

Örnek. 36 *birim kareden oluşturulmuş yandaki karedeki alanı* 12 br^2 *olan kaç farklı dikdörtgen vardır?*

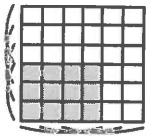


A) 12 B) 24 C) 34 D) 36 E) 48

Çözüm: Eğer bir dikdörtgenin alanı 12 br^2 ise bu dikdörtgenin ebadı ya 2x6 ya da 3x4 olmalıdır. Önce ebadı 2x6 olan dikdörtgenleri sayalım. Sağ şekilden de görüldüğü üzere dikey olarak 5 tane, yatay olarak da 5 tane olmak üzere toplam 10 tane böyle dikdörtgen vardır.

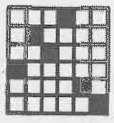


Şimdi de ebadı 3x4 olanları sayalım. En alt 3 satırda böyle 3 tane dikdörtgen olup 1 satır 1 satır yukarı çıkarsak yatay pozisyonda 12 tane böyle dikdörtgen sayarız. 12 tane de dikey var. Etti 24 tane. Ebadı 2x6 olan 10 taneyle birlikte toplam 34 tane dikdörtgen vardır.



Doğru cevap: C.

Örnek. 36 *birimkareden oluşturulmuş yandaki bulmaca tablosunun* 6 *karesi, her satır ve sütunda sadece* 1 *tane kare boyalı olacak şekilde kaç farklı şekilde boyanabilir?*

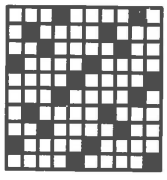


A) 36 B) 100 C) 120 D) 360 E) 720

Çözüm: İlk sütundan başlayalım. İlk sütundaki 6 kareyi de boyayabiliriz. Herhangi birini boyadıktan sonra ikinci sütun için 5 seçenek kalır. Üçüncü sütun için 4, dördüncü sütun için 3, beşinci sütun için 2 ve son sütun için 1 seçeneğimiz olduğundan toplam $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6! = 720$ farklı şekilde boyama gerçekleştirilebilir.

Doğru cevap: E.

Meraklısına Bir Soru. Bir önceki soruyu yazdıktan sonra, bulmaca karesini biraz büyüteyim, bir de öyle çözeyim dedim. Sonra da kare büyüse de teknik değişmiyor ki, bari her satır ve sütundaki boyanacak kare sayısını ikiye çıkarayım dedim. Demez olaydım!

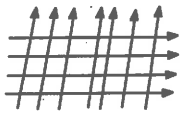


Ben problemin altından kalkamadım, belki siz bir şeyler bulabilirsiniz.

100 birimkareden oluşturulmuş yandaki bulmaca tablosunun 20 karesi, her satır ve sütunda sadece 2 tane kare boyalı olacak biçimde kaç farklı şekilde boyanabilir?

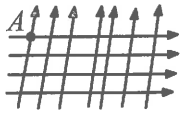
CEVAPLI TEST 1

1.
Yandaki şekilde yatay olan 4 doğru ve dikey olan 7 doğru birbirlerine paralel olduğuna göre şekilde kaç farklı paralelkenar var?



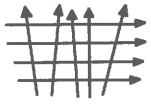
A) 56 B) 102 C) 108 D) 126 E) 168

2.
Yan şekilde yatay olan 4 doğru ve dikey olan 7doğru birbirlerine paraleldir.
Buna göre şekilde bir köşesi A olan kaç farklı paralelkenar var?



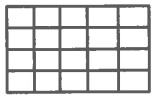
A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

3.
Yatay olan 4 doğru birbirlerine paralel olup 5 farklı doğru bunları şekildeki gibi kesmektedir.
Şekilde kaç farklı yamuk vardır?



A) 56 B) 60 C) 64 D) 72 E) 90

4.
Yandaki şekil 20 küçük dikdörtgenden oluşmuştur.
Şekilde kaç farklı dikdörtgen var?



A) 20 B) 40 C) 60 D) 90 E) 150

5.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel bir *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?



A) 2 B) 30 C) 31 D) 32 E) 60

6.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta kaç üçgen belirtir?



A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 165

7.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta kaç dörtgen belirtir?



A) 150 B) 160 C) 165 D) 180 E) 210

8.
A noktası başka 4 noktayla birlikte *d* doğrusunun üstündedir. Bu doğruya paralel bir *k* doğrusu da 6 ayrı noktaya sahiptir.
Bu 11 nokta, kaç farklı bir köşesi *A* olan üçgen belirtir?



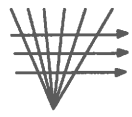
A) 24 B) 39 C) 40 D) 64 E) 65

9.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta en çok kaç değişik doğru parçası belirtir?



A) 30 B) 35 C) 45 D) 48 E) 55

10.
Şekilde paralel olan üç doğru ile bu doğruları kesen 6 noktadaş doğru görülmektedir.
Bu 9 doğru bu konumlarıyla kaç farklı üçgen belirtirler?

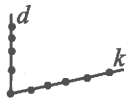


A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

1.D 2.A 3.B 4.E 5.D 6.D 7.A 8.B 9.E 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.
Birer noktaları ortak d ve k doğruları şekildeki gibi 10 nokta taşımaktadırlar.
Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?



A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

2.
Bir üçgende bir köşeye ait 2, bir başka köşeye ait 3 kesen çizilirse, oluşacak yandaki şekilde kaç farklı üçgen mevcuttur?



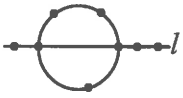
A) 52 B) 44 C) 42 D) 40 E) 38

3.
Yandaki şekilde kaç farklı üçgen vardır?



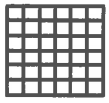
A) 21 B) 28 C) 32 D) 36 E) 42

4.
İki noktaları ortak bir çember ile bir l doğrusu verilmiştir.
Üzerlerindeki bu 8 nokta kaç farklı üçgen belirtir?



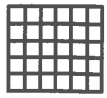
A) 46 B) 48 C) 50 D) 52 E) 56

5.
36 birim kareden oluşturulmuş yandaki karede kaç farklı kare vardır?



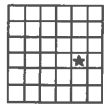
A) 73 B) 82 C) 91 D) 100 E) 109

6.
30 birimkareden oluşturulmuş yandaki dikdörtgende kaç farklı kare mevcuttur?



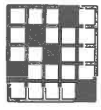
A) 91 B) 85 C) 78 D) 75 E) 70

7.
36 birimkareden oluşturulmuş yandaki karede, içinde yıldız işareti bulunmayan kaç değişik kare vardır?



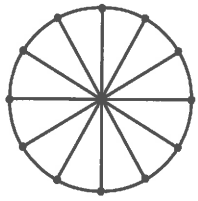
A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

8.
25 birimkareden oluşturulmuş yandaki karenin 5 farklı birim karesi her satır ve sütunda sadece 1 tane boyalı birim kare olacak şekilde kaç farklı şekilde boyanabilir?



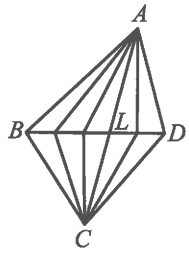
A) 210 B) 150 C) 120 D) 108 E) 90

9.
Yandaki şekilde kaç farklı daire dilimi vardır?



A) 45 B) 66 C) 75 D) 90 E) 132

10.
Yandaki şekilde
***A, L, C* doğrudaş**
***B, L, D* doğrudaş**
olduğuna göre şekilde kaç farklı üçgen vardır?

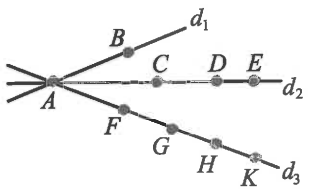


A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

1.D 2.C 3.B 4.A 5.C 6.E 7.A 8.C 9.E 10.D

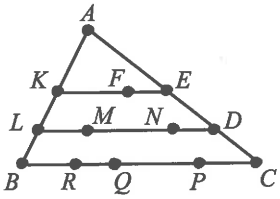
CEVAPLI TEST 3

1.
Farklı doğrular üzerinden alınan herhangi iki nokta doğrusal olmadığına göre şekilde verilen 9 noktadan herhangi üçünü köşe kabul eden kaç farklı üçgen çizilebilir?



A) 56 B) 64 C) 68 D) 70 E) 76

2.
Şekilde verilmiş olan noktaları köşe kabul eden en çok kaç farklı üçgen çizilebilir?



A) 167 B) 184 C) 196 D) 263 E) 286

3.
12 kenarlı bir çokgenin kaç köşegeni vardır?

A) 54 B) 60 C) 74 D) 72 E) 144

4.
Yirmi kenarlı bir çokgenin belli bir köşesinden kaç farklı köşegen çizilebilir?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

5.
Yirmi kenarlı bir çokgenin toplam kaç köşegeni vardır?

A) 170 B) 160 C) 150 D) 140 E) 130

6.
6 doğru en az kaç tane kesim noktası oluşturur?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 15 E) 20

7.
6 doğru en fazla kaç tane kesim noktası oluşturur?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 15 E) 20

8.
Bir üçgenin herhangi iki köşesine ait 7'şer kesen, üçgeni kaç parçaya ayırır?

A) 25 B) 36 C) 49 D) 64 E) 81

9.
Herhangi ikisi paralel olmayan ve üçü tek noktada kesişmeyen 5 tane doğru, üzerinde bulundukları düzlemi kaç bölgeye ayırır?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

10.
***n* tane nokta en çok 20 tane üçgen belirtiyorsa, en çok kaç tane beşgen belirtebilir?**

A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 21

1.D 2.D 3.A 4.D 5.A 6.A 7.D 8.D 9.B 10.B

CEVAPLI TEST 4

1.
***n* tane üçgen en çok kaç kesişim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $3\cdot\binom{n}{2}$ D) $4\cdot\binom{n}{2}$ E) $6\cdot\binom{n}{2}$

2.
***n* tane çember en çok kesim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $3\cdot\binom{n}{2}$ D) $4\cdot\binom{n}{2}$ E) $6\cdot\binom{n}{2}$

3.
***n* tane kare en çok kaç kesim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $4\cdot\binom{n}{2}$ D) $6\cdot\binom{n}{2}$ E) $8\cdot\binom{n}{2}$

4.
Herhangi ikisi paralel olmayan 11 doğrunun 4'ü bir noktada, başka 3 noktası da ayrı bir noktada kesişmektedirler.
Bu doğrular en çok kaç kesim noktası oluştururlar?

A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

5. ÖSS 2000
16 küçük kareden oluşan I. şeklin her satır ve her sütununda bir ve yalnız bir küçük kare karalanarak II. şekildeki gibi desenler elde edilmektedir.

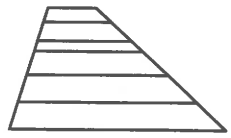

I.Şekil


II.Şekil

Bu kurala göre, <u>en çok</u> kaç farklı desen elde edilebilir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 32 E) 36

6.
Yandaki yamuk içine çizilen doğru parçaları tabanlara paraleldir.



Buna göre şekilde kaç farklı yamuk vardır?

A) 10 B) 15 C) 21 D) 28 E) 36

7.
Bir doğru bir çemberi iki noktada kesiyor. Doğrunun çemberi kestiği noktalar *A* ve *B*, çemberin üzerindeki diğer farklı 3 nokta *C*, *D* ve *E*, doğrunun üzerindeki diğer farklı 2 nokta ise *F* ve *G*'dir.
Buna göre bu noktalar kaç tane üçgen belirtir?

A) 36 B) 35 C) 33 D) 31 E) 28

8.
Yan şekilde işaretlenmiş 9 nokta kaç farklı üçgen belirtir?



A) 75 B) 76 C) 79 D) 80 E) 84

9.
14 tane farklı patlıcan közlenecektir. Ancak her iki patlıcan bir şişe takılacaktır.
Buna göre kaç farklı şişleme işlemi yapılabilir?

A) $14!\cdot 2!$ B) $14!$ C) $\frac{14!}{2!}$ D) $\binom{14}{2}$ E) 14

10.
8 çemberin kesişmeleri sonucunda oluşabilecek en çok nokta sayısı en az nokta sayısından ne kadar fazladır?

A) 28 B) 27 C) 13 D) 7 E) Sonsuz

1.E 2.B 3.E 4.C 5.C 6.C 7.D 8.A 9.D 10.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Binom Açılımı

İki terimli polinoma **binom** dendiğini daha önce polinom başlıklı dersimizde öğrenmiştik. Şimdi binomların kuvvetlerini nasıl (pratik olarak) alabileceğimizi göreceğiz.

Önce en sade binom olan $x + y$ ifadesinin birkaç kuvvetini eski usullerle yani çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini kullanarak bir alalım bakalım.
$x + y$ değeri 0'dan farklı ve n doğal sayı olsun. $(x + y)^n$ açılımlardan bir gidişat yakalamayı umuyoruz.

$$(x+y)^0 = 1,$$
$$(x+y)^1 = x+y,$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$
$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5,$$
...

Yukardaki açılımları biz, canımız öyle istedi diye, x'in azalan kuvvetlerine göre başlar şekilde yazdık. Yoksa siz, toplamanın değişme özelliğinden dolayı, isterseniz y'lerden de başlayarak yazabilirdiniz. Notlarımızda hep bu stilde yazacağız ve sorularımızı da buna göre soracağız, haberiniz olsun.
Görülen o ki, $(x + y)^n$ açılımında;

1. Farklı terimlerin arasındaki işaret hep "+",
2. İlk terim hep x^n, son terim hep y^n,
3. x'lerin dereceleri hep 1 azalıyor, y'lerin dereceleri hep 1 artıyor,
4. Bu sayede her farklı terimin dereceleri toplamı aynı, yani n kalıyor.

İyi hoş da, sırrını çözemediğimiz bir şey var. x'li y'li terimlerin katsayıları her defasında değişiyor. Bu değişmenin neye bağlı olduğunu anlayamazsak $(x + y)^n$ açılımını yapamayız. Blaise Pascal adında bir matematikçi bu katsayıları alt alta yazdığında ilginç bir olaya şahit olmuş.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Her satırda başta ve sonda bulunan katsayıların 1 olduğunu, 1 haricindeki sayıların da kendisinin bir üstündeki satırda bulunan en yakın 2 tanesinin toplamı olduğunu fark etmiş. Bu sayede $(x + y)^6$ açılımındaki katsayıların da

1 6 15 20 15 6 1

olacağını söylemiş, ki doğru söylemiş. Buna dayanarak, $(x + y)^7$ açılımında katsayıların

1 7 21 35 35 21 7 1

olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Pascal'ın oluşturduğu bu piramide günümüzde **Pascal üçgeni** deniyor. Pascal üçgeni sayesinde katsayıların sırrı da çözülmüş olmuuuuş... Siz öyle sanın!

Pascal üçgeni küçük n'ler için derde derman olsa da $(x + y)^{2007}$ gibi açılımlarda hiç de kullanışlı değil. Bu piramidin basamak sayısı 2008 olmalı ki biz 2007'nci kuvvette katsayıların ne olduğunu anlayalım. Bunu yapacak ne yürek var, ne kalem, ne de o kadar kağıt... E şimdi n'olacak?

Pascal üçgeninden rastgele bir satır seçelim, örneğin
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$
Bilindiği üzere
$$(x + y)^4 = (x + y)\cdot(x + y)\cdot(x + y)\cdot(x + y).$$

Şimdi, örneğin, y^3'lü terimi nasıl elde edebileceğimize bir kafa yoralım bakalım. Dört tane $(x + y)$ çarpanın hangi üç tanesini alıp çarparsak çarpalım, mutlaka elimizde y^3 olacak. Peki, bu dört taneden 3 tanesini kaç değişik şekilde seçebiliriz? Tabi ki, $C(4, 3) = 4$ kadar değişik şekilde... x^2'li terim elde etmek için de 2 tanesini almalıyız, o halde bunun katsayısı da $C(4, 2) = 6$ kadar olmalı.

İşte bu gibi yorumlardan

1 4 6 4 1

sayılarının aslında

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

olduğunu anlarız. Benzer şekilde

1 5 10 10 5 1

sayılarının da aslında

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

olduğunu. Demek ki Pascal üçgeni aslında

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

şeklinde de yazılabilirmiş. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x+y)^n$ açılımını yapabilmiş olduk. Yani,

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0},$$
$$(x+y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y,$$
$$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2,$$
$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3,$$
$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

,

...

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Şimdi açılım hakkında her türlü bilgiye sahibiz.

Demek ki $(x+y)^n$ açılımında;

1. Farklı terimlerin arasındaki işaret hep "+",
2. İlk terim hep x^n, son terim hep y^n,
3. x'lerin dereceleri hep 1 azalıyor, y'lerin dereceleri hep 1 artıyor,
4. Bu sayede her farklı terimin dereceleri toplamı aynı, yani n oluyor.
5. $n+1$ tane terim var,
6. Baştan r'ninci terimin katsayısı $\binom{n}{r-1}$,
7. Bir terimin baştan kaçıncı olduğuyla sondan kaçıncı olduğunun toplamı $n+2$, yani sondan k'ninci terim, baştan $(n+2-k)$'ninci terim oluyor,
8. Açılımdaki bir terimin katsayısı $\binom{n}{r}$ ise x'in derecesi $n-r$, y'nin derecesi r oluyor.

Örnek. *$(2x-3y)^8$ açılımında baştan 2'nci terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −3072 B) −3062 C) −3052 D) −3042 E) −3032

Çözüm: $(x+y)^n$ açılımında x yerinde $2x$, y yerinde $-3y$ ve n yerinde 8 varmış gibi düşüneceğiz.

Baştan 2'nci terim $\binom{8}{1}$ ile başlayacağından,

$$\binom{8}{1}\cdot(2x)^7\cdot(-3y)^1$$

bulunur. Katsayısı da yukarıda görüldüğü üzere

$$\binom{8}{1}\cdot 2^7\cdot(-3)^1 = -3072$$ 'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1998 ÖYS]. *$(3x+2y)^{23}$ ifadesinin açılımında baştan 11'inci terimin katsayısı kaçtır?*

A) $2^{10}\cdot 3^{13}\cdot C(23, 10)$ B) $2^{11}\cdot 3^{12}\cdot C(23, 11)$
C) $2^{11}\cdot 3^{12}\cdot C(23, 12)$ D) $2^{12}\cdot 3^{11}\cdot C(23, 12)$
E) $2^{13}\cdot 3^{11}\cdot C(23, 12)$

Çözüm: Baştan 11'inci terim $\binom{23}{10}$ ile başlar. O halde

$$\binom{23}{10}\cdot(3x)^{13}\cdot(2y)^{10} = \binom{23}{10}\cdot 3^{13}\cdot 2^{10}\cdot x^{13}y^{10}$$

olacağından katsayı $2^{10}\cdot 3^{13}\cdot C(23, 10)$'dur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$(2x-y)^8$ açılımında sondan 3'üncü terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −112 B) −56 C) 28 D) 56 E) 112

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Sondan üçüncü terimin baştan kaçıncı terim olduğuna bakalım. Neydi, toplamları 8 + 2 yani 10 edecekti, demek ki baştan 7'nci terim.

O halde sondan 3'üncü terim $\binom{8}{6}\cdot(2x)^2\cdot(-y)^6$.

Katsayısı da yukarda görüldüğü üzere

$$\binom{8}{6}\cdot 2^2\cdot(-1)^6 = 112$$ 'dir.

Soruyu çözdük ama çok daha rahat bir çözüm de yapabilirmişiz. İbrahim Kuşçuoğlu'nun uyarısıyla ekliyorum. İnsanın aklına gelmeyince gelmiyor!

İkinci yol. $(2x-y)^8$ ifadesini $(-y+2x)^8$ şeklinde yazarsak, sondan üçüncü terim baştan üçüncü terim olur. Gerisi bildiğiniz gibi...

Doğru cevap: E.

Örnek. $(x-3y)^6$ *açılımında ortanca terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -1080 B) -540 C) -27 D) 27 E) 540

Çözüm: Açılım 7 terimli olacağından ortanca terim hem baştan hem de sondan 4'nci olan terimdir, o da $\binom{6}{3}$ ile başlar. O halde ortanca terim

$$\binom{6}{3}\cdot(x)^3\cdot(-3y)^3$$

olmalıdır. Katsayısı da

$$\binom{6}{3}\cdot(-3)^3=-540\text{'dır.}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $(2x-y)^8$ *açılımında* x^6*'lı terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1440 B) 1580 C) 1792 D) 2440 E) 2580

Çözüm: $\binom{n}{r}$ ile başlayan bir terimde x'in derecesi $(n-r)$ oluyordu, o halde x^6 elde edebilmek için terim $\binom{8}{2}$ ile başlamalı, bu durumda cevap

$$\binom{8}{2}\cdot(2x)^6\cdot(-y)^2$$

ve katsayısı da $\binom{8}{2}\cdot 2^6\cdot(-1)^2=1792$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(2x-3y)^8$ *açılımında* y^7*'li terimin katsayısı* $16k$ *ise* k *kaçtır?*

A) -3^7 B) -3^6 C) 3^6 D) 3^7 E) 3^8

Çözüm: $\binom{n}{r}$ ile başlayan bir terimde, y'nin derecesi r oluyordu, o halde y^7 elde edebilmek için terim $\binom{8}{7}$ ile başlamalı, bu durumda y^7'li terim

$$\binom{8}{7}\cdot(2x)^1\cdot(-3y)^7$$

ve katsayısı da $\binom{8}{7}\cdot 2^1\cdot(-3)^7=16\cdot(-3)^7$ olur. Bu sayıyı $16k$'ye eşitlersek $k=-3^7$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1988 ÖYS]. $(x+2y)^8=x^8+\ldots+16ax^3y^5+\ldots$ *eşitliğinde* a *hangi sayıyı göstermektedir?*

A) 248 B) 200 C) 148 D) 112 E) 96

Çözüm: x'in üssüne 3, y'nin üssüne 5 gelmiş olduğundan bu ifade $\binom{8}{5}$ ile başlamalıdır.

$$\binom{8}{5}\cdot x^3\cdot(2y)^5=56\cdot 2^5\cdot x^3y^5$$

olduğundan $16a=56\cdot 32$ eşitliğinden $a=112$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\left(x^2+\frac{4}{y}\right)^5$$

açılımında, baştan 2'nci terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 20 C) 32 D) 48 E) 80

Çözüm: Baştan 2'nci terim $\binom{5}{1}$ ile başlar. O halde baştan 2'nci terim

$$\binom{5}{1}\cdot(x^2)^4\cdot\left(\frac{4}{y}\right)^1=20\cdot\frac{x^8}{y}$$

ve katsayısı da 20 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\left(x^2+\frac{4}{y}\right)^5$$

açılımında sonuncu terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

Çözüm: İfadenin açılımı 6 terimli olacağından sonuncu terim baştan 6'ncı terimdir, o halde son terim

$$\binom{5}{5}\cdot(x^2)^0\cdot\left(\frac{4}{y}\right)^5 \text{ yani } \frac{4^5}{y^5}=\frac{1024}{y^5}\text{'dir.}$$

Katsayı da görüldüğü üzere 1024'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\left(x^2+\frac{4}{y}\right)^5$ *açılımında* x^6*'lı terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 20 B) 40 C) 80 D) 160 E) 320

Çözüm: x^6'lı terimi elde etmek için x^2'nin üssüne 3 getirmeliyiz. Bu da terimin önünde $\binom{5}{2}$ olmasıyla mümkündür. O halde x^6'lı terim

$$\binom{5}{2}\cdot(x^2)^3\cdot\left(\frac{4}{y}\right)^2$$

olur. Katsayısı da $\binom{5}{2}\cdot 4^2 = 160$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(x^2+\frac{4}{y}\right)^5$ *açılımında* y^{-3}*'lü terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 64 B) 128 C) 320 D) 640 E) 960

Çözüm: y^{-3} demek $\frac{1}{y^3}$ demek olduğundan y'nin üssüne 3 getirmeliyiz, bu da terimin $\binom{5}{3}$ ile başlamasıyla mümkündür. O halde y^{-3}'lü terim

$$\binom{5}{3}\cdot(x^2)^2\cdot\left(\frac{4}{y}\right)^3 \text{ yani } \binom{5}{3}\cdot 4^3\cdot\frac{x^4}{y^3}$$

bulunur, katsayısı da $\binom{5}{3}\cdot 4^3 = 640$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1997 ÖYS]. $\left(x^2-2y^2\right)^n$ *açılımında* x^4y^4*'lü terimin katsayısı kaçtır?*

A) –48 B) –24 C) 12 D) 24 E) 48

Çözüm: Hem x^2'nin hem de y^2'nin üssüne 2 geldiğini anlarsak eğer, $n = 4$ olduğunu da anlarız.

$$\binom{4}{2}\cdot\left(x^2\right)^2\cdot\left(-2y^2\right)^2 = \binom{4}{2}\cdot x^4\cdot 4\cdot y^4$$

olduğundan katsayı $6\cdot 4 = 24$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ *açılımında* x^{15}*'li terim baştan kaçıncı terimdir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: x^{15} 'li terimin kaçıncı terim olduğunu bilmiyoruz. Her terim gibi onun da başında $\binom{10}{r}$ gibi bir ifade olacak ama. Buna göre yazalım:

$$\binom{10}{r}\cdot(x^3)^{10-r}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^r = \binom{10}{r}\cdot x^{30-3r}\cdot\frac{2^r}{x^{2r}} = \binom{10}{r}\cdot 2^r\cdot x^{30-5r}$$

Bu durumda $30 - 5r = 15$ eşitliğinden r'nin 3 olması gerektiğini anlıyoruz, demek ki terim $\binom{10}{3}$ ile başlıyor, o halde baştan 4'üncü terim olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1990 ÖYS]. $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^7$ *ifadesinin açılımında* x^8*'li terimin katsayısı kaçtır?*

A) 84 B) 48 C) 28 D) –48 E) –84

Çözüm: x^8'li terimin kaçıncı terim olduğunu bilmiyoruz. Her terim gibi onun da başında $\binom{7}{r}$ gibi bir ifade olacak ama. Buna göre yazalım:

$$\binom{7}{r}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{7-r}\cdot\left(-x^2\right)^r = \binom{7}{r}\cdot 2^{7-r}\cdot x^{r-7}\cdot x^{2r} = \binom{7}{r}\cdot 2^{7-r}\cdot x^{3r-7}$$

Bu durumda $3r - 7 = 8$ eşitliğinden r'nin 5 olması gerektiğini anlıyoruz. r'yi tek sayı bulduğumuzdan katsayı negatif olacaktır. O halde x^8'li terimin katsayısı $-\binom{7}{5}\cdot 2^2$ yani –84 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ *açılımında* x^{-5}*'li terim sondan kaçıncı terimdir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Bir önceki çözümden yola çıkarak $30 - 5r = -5$ eşitliğinden $r = 7$ çıkar, terim $\binom{10}{7}$ ile başladığından baştan 8'inci, bu durumda sondan da 4'üncü terim olduğunu anlarız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ *açılımında sabit terim (varsa) aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\binom{10}{5}\cdot 2^5$ B) $\binom{10}{6}\cdot 2^6$ C) $\binom{10}{7}\cdot 2^7$ D) 64 E) Yoktur

Çözüm: Sabit terim varsa eğer x'in derecesi 0 olmalıdır. $30-5r=0$ eşitliğinden $r=6$ çıkar. O halde sabit terim

$$\binom{10}{6}\cdot(x^3)^4\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^6=\binom{10}{6}\cdot 2^6 \text{'dır.}$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1996 ÖYS]. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ *ifadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?*

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

Çözüm: İlk terimin üssüne 4, ikinci terimin üssüne 2 geldiğinde x'li ifadelerin sadeleşeceğini görelim. Buna göre açılım yaparsak, $\binom{6}{2}\cdot x^4\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\binom{6}{2}=15$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(x+y)^n$ *açılımında baştan 5'inci ve 11'inci terimlerin katsayıları eşit olduğuna göre n kaçtır?*

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Baştan 5'inci terimin katsayısı $C(n, 4)$, 11'inci terimin katsayısı da $C(n, 10)$'dur.

$\binom{n}{4}=\binom{n}{10}$ ise $n=14$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *x sayısının hangi değeri için* $(2x+9)^{10}$ *ifadesinin açılımında* x^4*'lü terimin değeri komşu terimlerin değerlerinden küçük değildir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: x^4'lü terimi de, komşuları olan x^3'lü ve x^5'li terimleri de bulmayı biliyoruz. Bulalım ve derhal eşitsizlikleri yazalım.

$$\binom{10}{6}(2x)^4 9^6 \geq \binom{10}{7}(2x)^3 9^7$$

$$\binom{10}{6}(2x)^4 9^6 \geq \binom{10}{5}(2x)^5 9^5$$

İki eşitsizlikte de sadeleştirmeler yapılırsa ilkinden $x\geq 3$, ikincisinden de $x\leq 3$ bulunur ki bu da $x=3$ demektir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(\sqrt{2}x+\sqrt[3]{2}y)^{12}$ *açılımında katsayısı rasyonel olan kaç farklı terim vardır?*

A) Yoktur B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

Çözüm: Katsayının rasyonel olabilmesi için $(\sqrt{2}x)$'in üssü çift, aynı zamanda $(\sqrt[3]{2}y)$'nin üssü 3 'ün katı olmalıdır. Diğer yandan ikisine gelecek üslerin toplamı da 12 etmesi gerektiğinden bu durum sadece (12, 0), (6, 6) ve (0, 12) durumlarında mümkündür. Yani ilk terim, 7'nci terim ve 13'üncü terim olmak üzere 3 farklı terimin katsayısı rasyoneldir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $(x-y)^{10}$ *açılımında ortanca terim*

$$\binom{10}{n-3}x^{n-a}y^{2n-b}$$

olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 8 C) 9 D) 11 D) 14 E) 15

Çözüm: Ortanca terimin katsayısı $\binom{n}{r}$ olsun. Bilmeliyiz ki daima $r=n/2$'dir. Bilmiyorsak da, açılım 11 terimli olduğundan ortanca terim baştan 6'ncı terim olur, bundan dolayı $n-3=5$ yani $n=8$'dir.

$$\binom{10}{n-3}x^{n-a}y^{2n-b}=\binom{10}{5}x^5y^5$$

olduğundan $8-a=5$ ve $16-b=5$ eşitliklerinden $a=3$ ve $b=11$ bulunur, dolayısıyla

$$a+b=3+11=14\text{'tür.}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $(2x-1)\cdot(x+1)^6$ *çarpımı yapıldığında* x^5*'li terimin katsayısı kaç olur?*

A) 6 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

Çözüm: $2x-1$ ifadesi $(x+1)^6$ ifadesinin açılımındaki her terimle çarpılacak. Biz sadece sonuçta x^5 çıkacak çarpımlarla ilgileneceğiz.

$$2x\cdot\binom{6}{2}\cdot x^4\cdot 1^2=30x^5$$

$$(-1)\cdot\binom{6}{1}\cdot x^5\cdot 1^1=-6x^5$$

Bu durumda x^5'li terimin katsayısı $30-6=24$.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(x+y)^{21}$ *ifadesinin açılımında ardışık iki terimin katsayıları eşittir. Bu terimler kaçıncı terimlerdir?*

A) 15, 14 B) 14, 13 C) 13, 12 D) 12, 11 E) 11, 10

Çözüm: Katsayıların $\binom{21}{0}, \binom{21}{1}, \dots, \binom{21}{20}, \binom{21}{21}$ olacağını biliyoruz. Bu sayıların, başlarken arttığını, biterken de azaldığını da biliyoruz. Demek ki ortada birbirlerine eşit olabilirler. Toplam 22 terim olduğundan ilk 11 terimin sonuncusuyla, son 11 terimin ilki aynı katsayıya sahip olurlar. Anlayacağınız 11 ve 12'nci terimlerin katsayıları eşittir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $(x+2y)^{20}$ *ifadesinin açılımında ardışık iki terimin katsayıları eşittir. Bu terimler kaçıncı terimlerdir?*

A) 15, 14 B) 14, 13 C) 13, 12 D) 12, 11 E) 11, 10

Çözüm: Açılımdaki herhangi ardışık iki terimi yazalım.

$$\binom{20}{a}x^{20-a}(2y)^a \text{ ve } \binom{20}{a+1}x^{19-a}(2y)^{a+1}.$$

Hemen katsayılarını eşitleyelim.

$$\binom{20}{a}\cdot 2^a = \binom{20}{a+1}\cdot 2^{a+1}$$

$$\frac{20!}{(20-a)!\,a!}\cdot 2^a = \frac{20!}{(19-a)!\,(a+1)!}\cdot 2^{a+1}$$

$$\frac{1}{20-a} = \frac{1}{a+1}\cdot 2$$

$$40-2a = a+1$$

$$3a = 39$$

$$a = 13$$

olduğundan katsayıları eşit olan terimler baştan 14'üncü ve 15'inci terimlerdir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $2^9+\binom{9}{1}2^8+\binom{9}{2}2^7+\dots+\binom{9}{7}2^2+\binom{9}{8}2 = 3^{9x}-1$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Çözüm: Sağ taraftaki –1 sayısını sol tarafa atalım.

$$2^9+\binom{9}{1}2^8+\binom{9}{2}2^7+\dots+\binom{9}{7}2^2+\binom{9}{8}2+1 = 3^{9x}$$

olur. Sol yanın $(2+1)^9$ açılımı olduğunu fark etmek lazım, o halde $9x = 9$ yani $x = 1$'dir.

Doğru cevap: A.

Trinomların Açılımı. Daha önce üç bilinmeyenli polinomlara **trinom** dendiğini söylemiştik. Trinomların açılımında, gruplama yaparak binom açılımını kullanırız.

Örnek. $(x-2y+3z)^6$ *açılımında* $x^2y^3z^a$ *şeklindeki terimin katsayısı kaçtır?*

A) –1440 B) –1240 C) –1080 D) 1440 E) 1080

Çözüm: Aynen binomlarda olduğu gibi, trinomlarda da (hatta tüm polinomlarda) herhangi bir terimde farklı değişkenlerin üsleri toplamı n'dir. Bu nedenle $a = 1$ olmalıdır. Şimdi $(x-2y+3z)^6$ ifadesinde canımızın istediği iki değişkeni tekmiş gibi düşüneceğiz. Benim canım $x-2y$'yi tek almak istedi. O halde z'nin üssünün 1 olması için terimin başında $\binom{6}{1}$ olması gerekir. Buna göre

$$\binom{6}{1}\cdot(x-2y)^5\cdot(3z)^1.$$

Şimdi de x^2 ile y^3'ü elde etmek için bir ayrım daha yapacağız.

$$\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot(x)^2\cdot(-2y)^3\cdot(3z)^1$$

Katsayıyı ayırırsak

$$\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot(-2)^3\cdot(3)^1 = 6\cdot 10\cdot(-8)\cdot 3 = -1440$$

olduğunu görürüz.

Doğru cevap: A.



$(ax+by+cz)^n$ açılımında $x^py^qz^r$ ifadesini içeren terimin katsayısı $\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\cdot a^p\cdot b^q\cdot c^r$ olup, $p+q+r=n$'dir.

Örnek. $(3x^2+\frac{2}{y}-z^3)^5 = \dots+k\frac{x^4z^3}{y^a}+\dots$ *eşitliğinde* $k+a$ *toplamı kaçtır?*

A) –1080 B) –1078 C) –1076 D) –1074 E) –1072

Çözüm: Ufak bir düzenleme yapalım:

$$(3x^2+\frac{2}{y}-z^3)^5 = \dots+k\cdot(x^2)^2\cdot(\frac{1}{y})^a\cdot(z^3)^1+\dots$$

Görülüyor ki x^2'nin üssüne 2, z^3'ün üssüne 1 gelmiş. O halde $\frac{1}{y}$'nin üssüne 2 gelmelidir. Çünkü üsse gelen sayıların toplamı 5 olmalıydı. Bu durumda $a = 2$'dir. k'yi de formülden bulalım.

$$k = \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot(-1)^1 = -1080.$$

O halde $k+a = -1080+2 = -1078$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(1+x+x^2)^5$ *açılımında* x^6*'lı terimin katsayısı kaçtır?*

A) 20 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm: Daha rahat anlayabilmek için ifadeyi açalım.

$(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)$

Bu beş çarpandan herhangi üçünün çarpımı üç tane x^2 çarpımı meydana getireceğinden x^6 oluşur. Ayrıca herhangi ikisindeki x^2'lerin çarpımıyla, kalanların herhangi ikisindeki x'lerin çarpımından da x^6 oluşur. Son olarak beş terimin herhangi birindeki x^2 ile, kalanlardaki x'lerin çarpımı da x^6 oluşturur. O halde cevabımız

$$\binom{5}{3}+\binom{5}{2}\binom{3}{2}+\binom{5}{1}\binom{4}{4}=10+10\cdot 3+5\cdot 1=45$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(x^3-y^2+z^4)^9$ *açılımında içinde* y^8 *bulunduran kaç farklı terim vardır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: İfadeyi $(x^3+z^4-y^2)^9$ şeklinde düzenleyelim. Burada $x^3 + z^4$ ifadesini tek bir terim gibi düşüneceğiz. y^8'in oluşması için bu terimin üssüne 5, y^2'nin üssüne 4 gelmelidir. O halde y^8'li terim

$$\binom{9}{4}(x^3+z^4)^5(-y^2)^4$$

olur. $x^3 + z^4$ nihayetinde bir binom olduğundan $(x^3 + z^4)^5$ ifadesi 6 terimlidir. Bu durumda çarpmanın dağılma özelliğini kullanarak 6 değişik y^8'li terim yazılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(1+x^5+x^{13})^{10}$ *ifadesinin açılımında derecesi* 44 *olan terimin katsayısı kaçtır?*

A) 800 B) 840 C) 900 D) 940 E) 1000

Çözüm: 10 sayısı, parçalar halinde 1'in, x^5'in ve x^{13}'ün üssüne gelecek. $a + b + c = 10$ olmak üzere, açılımda herhangi bir terim

$$\binom{10}{a,b,c}\cdot 1^a\cdot(x^5)^b\cdot(x^{13})^c$$

olacağından, $5b + 13c = 44$ eşitliği de sağlanmalıdır. Pozitif tamsayılarda bu eşitliğin ancak $b = 1$ ve $c = 3$ için sağlandığı görülür. O halde ilk eşitlik gereği $a = 6$ olmalıdır. Bu durumda katsayı da

$$\binom{10}{6,1,3}=\frac{10!}{6!\,1!\,3!}=840$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(1+2x+3x^2)^{10}$ *ifadesinin açılımında derecesi* 3 *olan terimin katsayısı kaçtır?*

A) 540 B) 600 C) 940 D) 1000 E) 1500

Çözüm: Açılımdaki herhangi bir terim, $a + b + c = 10$ olmak üzere

$$\binom{10}{a,b,c}\cdot 1^a\cdot(2x)^b\cdot(3x^2)^c$$

şeklinde olacaktır. O halde bir de $b + 2c = 3$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Biraz önceki sorudan farklı olarak bu denklemin doğal sayılarda iki çözümü vardır. Birkaç denemeyle hemen bulunur.

$b = 1$ ve $c = 1$ olsa da olur, $b = 3$ ve $c = 0$ olsa da olur. İlk durumda $a = 8$, ikinci durumda $a = 7$'dir. O halde

$$\binom{10}{8,1,1}\cdot 1^8\cdot(2x)^1\cdot(3x^2)^1$$

$$\binom{10}{7,3,0}\cdot 1^7\cdot(2x)^3\cdot(3x^2)^0$$

terimlerinin katsayıları toplamı bize cevabı verecektir.

$$\frac{10!}{8!}\cdot 2\cdot 3+\frac{10!}{7!\,3!}\cdot 2^3=540+960=1500.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $(x+y+z)^{20}$ *açılımında kaç farklı terim vardır?*

A) $\binom{19}{2}$ B) $\binom{20}{2}$ C) $\binom{21}{2}$ D) $\binom{22}{2}$ E) $\binom{23}{2}$

Çözüm: Bu açılımın herhangi bir terimi, k katsayıyı simgelemek üzere $k(x^a y^b z^c)$ şeklindedir. Diğer yandan a, b, c'lerin birer doğal sayı

$$a+b+c=20$$

eşitliğini sağlaması gerektiğini biliyoruz. O halde, kombinasyon dersinde anlattığımız üzere cevap $C(22, 2)$ olmalı...

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
n bir doğal sayı olmak üzere
$$(x+y)^n$$
ifadesinin açılımı kaç terimli olur?

A) $n-2$ B) $n-1$ C) n D) $n+1$ E) $n+2$

2.
$$(2x-y)^8$$
ifadesinin açılımında baştan 3'üncü terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1620x^5y^6$ B) $-1792x^2y^6$ C) $1520x^6y^2$
D) $1620x^2y^6$ E) $1792x^6y^2$

3.
$$(2x+y)^{10}$$
ifadesinin açılımında baştan 4'üncü terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\binom{10}{2}\cdot 3^7$ B) $\binom{10}{3}\cdot 2^7$ C) $\binom{10}{4}\cdot 2^7$
D) $\binom{10}{4}\cdot 3^7$ E) $\binom{10}{3}$

4.
$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$$(ax+by)^8$$
açılımının baştan 6'ıncı terimin katsayısı 448 olduğuna göre $a+b$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

5.
$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$$
açılımında 7 tane terim olduğuna göre açılımda baştan 3'üncü terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-60x^3$ B) $-60x^2$ C) $60x^2$ D) $60x^3$ E) $30x^3$

6.
$$(x-3y)^n$$
açılımında 6 terim vardır.
Buna göre sondan 2'nci terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 180 B) 205 C) 210 D) 240 E) 405

7.
$$(3x-y)^6$$
ifadesinin açılımında sondan 3'üncü terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisi olur?

A) -135 B) -90 C) 135 D) 180 E) 270

8.
$$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^n$$
ifadesinin açılımı x'in azalan kuvvetlerine göre düzenlendiğinde sondan üçüncü terim $270\cdot x$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9.
$$(5x-1)^4$$
ifadesinin açılımında ortanca terimin katsayısı kaçtır?

A) 150 B) -150 C) 6 D) -6 E) -3

10.
$$(2x-y)^{12}$$
ifadesinin açılımında tam ortadaki terimin katsayısı kaç olur?

A) $-2^6\binom{12}{6}$ B) $-\binom{12}{6}$ C) $\frac{1}{2^6}\cdot\binom{12}{6}$
D) $2^6\cdot\binom{12}{6}$ E) $\binom{12}{6}$

1.D 2.E 3.B 4.A 5.C 6.E 7.C 8.A 9.A 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\left(k-\frac{1}{k}\right)^8$$

açılımında ortadaki terimin katsayısı kaçtır?

A) −70 B) −35 C) 15 D) 35 E) 70

2.

$$\left(2x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$$

ifadesinin açılımında ortadaki terim aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $-160\cdot x^6$ B) $-160\cdot x^5$ C) $-120\cdot x^5$ D) $120\cdot x^5$ E) $160\cdot x^5$

3.

$$\left(x^2+\frac{y}{3}\right)^{10}$$

ifadesinin açılımının ortanca teriminin katsayısı kaçtır?

A) $\binom{10}{5}$ B) $\binom{10}{6}$ C) $\frac{1}{3}\cdot\binom{10}{6}$ D) $\frac{1}{3^5}\cdot\binom{10}{5}$ E) $3\cdot\binom{10}{5}$

4.

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$$

açılımında ortadaki terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-63x^5$ B) $-252x^5$ C) $-126x^5$ D) $126x^5$ E) $252x^5$

5.

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$$

ifadesinin açılımında ortanca terim kaçtır?

A) $-10x^3$ B) $-20x^3$ C) 0 D) $10x^3$ E) $20x^3$

6.

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$$

ifadesinin açılımındaki sabit terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

7.

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$$

açılımındaki sabit terim aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 84 B) 72 C) 60 D) −60 E) −72

8.

$$(x-x^{-2})^{15}$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) $\binom{15}{2}$ B) $-\binom{15}{2}$ C) $\binom{15}{4}$ D) $\binom{15}{5}$ E) $-\binom{15}{10}$

9.

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) −495 B) −375 C) 144 D) 375 E) 495

10.

$$\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x}\right)^{10}$$

ifadesinin açılımındaki sabit terim kaçtır?

A) −90 B) −45 C) 30 D) 45 E) 90

1.E 2.B 3.D 4.B 5.B 6.A 7.A 8.E 9.E 10.D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^{10}$$

ifadesinin açılımındaki sabit terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\cdot\binom{10}{2}$ B) $16\cdot\binom{10}{4}$ C) $32\cdot\binom{10}{2}$

D) $-64\cdot\binom{10}{6}$ E) $-8\cdot\binom{10}{3}$

2.

$$\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x}\right)^{12}$$

ifadesinin açılımında sabit terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) 66 B) 110 C) 220 D) 316 E) 495

3.

$$\left(x^3+\frac{8}{x}\right)^8 = x^{24}+....+....$$

açılımında baştan kaçıncı terim sabit terimdir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.

$$P(x)=(x-a)^6$$

açılımındaki sabit terim 64 olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) –1 E) –3

5.

$$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^6$$

açılımında sabit terim kaçtır?

A) 60 B) 30 C) –30 D) –60 E) –80

6.

$$\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^{10}$$

ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) $\binom{10}{2}\cdot 128$ B) $\binom{10}{3}\cdot 64$ C) $\binom{10}{6}\cdot 64$

D) $\binom{10}{6}\cdot 32$ E) $\binom{10}{6}\cdot 128$

7.

$a \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$$

ifadesinin açılımındaki sabit terim aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 20 B) 160 C) 540 D) 840 E) 1280

8.

n bir sayma sayısı olmak üzere

$$\left(x^2+\frac{1}{x^6}\right)^{4n}$$

ifadesi açılırsa baştan kaçıncı terim sabit terimdir?

A) $n-2$ B) $n-1$ C) n D) $n+1$ E) $n+2$

9.

$$(x^2-2y^2)^n$$

ifadesinin açılımında x^4y^4'lü terimin katsayısı kaçtır?

A) –48 B) –24 C) 12 D) 24 E) 48

10.

$$\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^8$$

açılımında x^{-10}'lu terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 120 B) 112 C) 84 D) –84 E) –112

1.B 2.A 3.E 4.B 5.A 6.C 7.D 8.D 9.D 10.B

CEVAPLI TEST 4

1.

$(x-2y^2)^8$

ifadesinin açılımı yapılırsa x^3y^{10}'lu terimin katsayısı kaçtır?

A) $\binom{8}{5}$ B) $-\binom{8}{5}$ C) $\binom{8}{5}-32$ D) $-32\cdot\binom{8}{5}$ E) 32

2.

$(1-2x)\cdot(x+1)^{10}$

ifadesinin açılımında x^8'li terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) −125 B) −145 C) −165 D) −195 E) −245

3.

$\left(x-\frac{m}{x^2}\right)^7$

açılımındaki terimlerden biri $84x$ olduğuna göre m pozitif reel sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$

açılımında x'li terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −448 B) −224 C) −96 D) 64 E) 156

5.

$\left(\frac{1}{x}-x\right)^7$

ifadesinin açılımında x^{-3}'lü terimin katsayısı kaçtır?

A) −21 B) −18 C) 18 D) 21 E) 42

6.

$(a^2-2b)^6$

ifadesinin açılımında a^8'li terimin katsayısı kaçtır?

A) −80 B) −40 C) 30 D) 45 E) 60

7.

$\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^8$

ifadesinin açılımında x'li terimin katsayısı −448 olduğuna göre a kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 2

8.

n bir sayma sayısı olmak üzere

$(2x^3-y^2)^n$

ifadesinin açılımında terimlerden biri $ax^{18}y^{12}$ olduğuna göre a kaçtır?

A) $\binom{12}{6}\cdot 64$ B) $\binom{12}{5}\cdot 32$ C) $\binom{13}{6}\cdot 64$

D) $\binom{12}{6}\cdot 128$ E) $\binom{13}{5}\cdot 32$

9.

$\left(x^3-\frac{3}{x^4}\right)^5$

ifadesinin açılımında x^8'li terimin katsayısı kaçtır?

A) −45 B) −30 C) −15 D) 15 E) 30

10.

n bir sayma sayısı olmak üzere

$(x+y)^n$

açılımındaki terimlerden birisi ax^3y^4 olduğuna göre n kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

1.D 2.D 3.B 4.A 5.D 6.E 7.E 8.A 9.C 10.A

CEVAPLI TEST 5

1.

$(x-2y)^6$

açılımında terim sayısı a ve $(2x-y)^a$ açılımındaki bir terim $40ax^3y^n$ olduğuna göre a'nın alabileceği değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 13 B) 15 C) 16 D) 17 E) 7

2.

$(x+2y)^8 = x^8 + \cdots + 16ax^3y^5 + \cdots$

eşitliğinde a hangi sayı yerine kullanılmıştır?

A) 248 B) 200 C) 148 D) 112 E) 96

3.

$(x^2-x)^{10} = x^{20} - 10x^{19} + \cdots + 6kx^{13} + \cdots + x^{10}$

açılımındaki k aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −60 B) −40 C) −20 D) 20 E) 40

4.

m ve n birer tam sayıdır.

$(a-2b)^n = \ldots + ma^4b^3 + \ldots$

olduğuna göre $\frac{m}{n}$ oranı kaçtır?

A) −40 B) −38 C) −36 D) −25 E) −22

5.

$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^3 = \cdots + ax^7 + \cdots$

olduğuna göre a kaçtır?

A) −72 B) −36 C) 72 D) 144 E) 180

6.

$mx^3 + nx^2 + kx + p = (1+2x)^3$

olduğuna göre $n+p$ toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

7.

$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)^6$

olduğuna göre $a+b+c+d$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −10 B) 10 C) −11 D) 11 E) −12

8.

$\left(x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^7 = x^{10}\sqrt{x} + \ldots$

açılımında baştan kaçıncı terim rasyoneldir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

9.

$\left(\sqrt[3]{11} - 4\right)^7$

açılımındaki terimlerden kaçı rasyoneldir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

10.

$\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)^6$

ifadesinin açılımında rasyonel terimlerin toplamı kaçtır?

A) −107 B) −95 C) −87 D) 74 E) 133

1.E 2.D 3.C 4.A 5.D 6.D 7.A 8.C 9.C 10.A

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)^7$$

ifadesinin açılımındaki rasyonel terimlerin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −420 B) −400 C) −380 D) 380 E) 400

2.

$$(3x-y)^8$$

açılımında katsayılar toplamı kaçtır?

A) 3^8 B) 2^8 C) 2^7 D) 3^4 E) 2^6

3.

$$\left(3x-\frac{1}{y}\right)^5$$

açılımında katsayılar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −32 B) −8 C) 1 D) 8 E) 32

4.

$$(5x-1)^2\cdot(10x+6)^3\cdot(9-x)^4$$

polinomunun katsayılarının toplamı kaçtır?

A) 2^{12} B) 2^{16} C) 2^{18} D) 2^{26} E) 2^{28}

5.

$$f(x)=(x-a)^4$$

açılımındaki terimlerin katsayılarının toplamı 81 olduğuna göre *a*'nın alabileceği değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) −2 E) −3

6.

$$(2xy-x^2y)^{99}$$

ifadesinin açılımı yapıldığında açılımdaki tüm katsayıların aritmetik ortalaması kaç olur?

A) 0,01 B) 0,02 C) 0,03 D) 0,04 E) 0,05

7.

$$(2x-3y)^8$$

ifadesinin açılımındaki terimlerden kaçının katsayısı negatiftir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8.

n pozitif tam sayıdır.

$$(3x^2-y)^n$$

ifadesinin açılımındaki pozitif katsayılı terimlerin sayısı, negatif katsayılı terimlerin sayısından fazla olduğuna göre *n* aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 15 E) 13

9.

$$(2x-1)^4$$

ifadesinin açılımındaki tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı kaçtır?

A) 1 B) 0 C) −8 D) −40 E) −81

10.

$$(3x-2)^3$$

ifadesinin açılımındaki çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı kaçtır?

A) −62 B) −32 C) −8 D) 0 E) 1

1.A 2.B 3.E 4.E 5.D 6.A 7.E 8.B 9.D 10.A

CEVAPLI TEST 7

1.
$x=2, y=1$ olduğuna göre
$$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 729 B) 243 C) 169 D) 81 E) 32

2.
$x=2007$ ve $y=2005$ için
$$x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$$
ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

3.
$$(2x^2-y+3)^5$$
ifadesinin açılımında x^4y'li terimin katsayısı kaça eşittir?

A) −1080 B) −960 C) −360 D) 360 E) 960

4.
$$(a+b+c)^{10}$$
açılımı yapıldığında terimlerden biri $ka^3b^2c^5$ olduğuna göre k kaçtır?

A) $\binom{10}{3}$ B) $\binom{10}{7}$ C) $\binom{7}{5}$
D) $\binom{10}{7}\binom{7}{3}$ E) $\binom{10}{3}\binom{7}{2}$

5.
x, y ve z birer değişken, a bir reel sayı olmak üzere
$$(-3x+2y-a+z)^4$$
ifadesinin açılımında katsayılar toplamı 256 olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −4 B) −2 C) 1 D) 2 E) 8

6.
$$(x-2y-2z)^6$$
açılımı yapıldığında $x^2y^2z^2$'li terimin katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) 720 B) 880 C) 960 D) 1440 E) 1580

7.
$$(x-2xy+2y+5)^{10}$$
açılımındaki sabit terim kaçtır?

A) 10^{10} B) 5^{10} C) 3^{10} D) 2^{10} E) 0

8.
$$(a^2-3b+4c^3)^6$$
açılımında içerisinde a^4 ün bulunduğu kaç terim vardır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

9.
$$(a+b+c)^{20}$$
ifadesinin açılımında kaç tane terim vardır?

A) 251 B) 231 C) 171 D) 151 E) 21

10.
$$\binom{6}{0}\cdot 3^6-\binom{6}{1}\cdot 3^5+\binom{6}{2}\cdot 3^4-\ldots+\binom{6}{6}$$
işleminin sonucu kaçtır?

A) $-2\cdot 3^5$ B) $2\cdot 3^6$ C) 2^7 D) 2^6 E) $3\cdot 2^4$

1.B 2.E 3.A 4.E 5.A 6.D 7.B 8.D 9.B 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Olasılık Fonksiyonu

Çok çok önemli bir konuya geldik, **Olasılık!** Eski dile göre **ihtimal hesapları!** Olasılık deyince aklımıza önce şans oyunları gelse de, olasılık, günümüzde ekonomi, siyaset, spor, fizik, kimya gibi birçok pozitif bilimde kullanılmaktadır. Peki nedir olasılık? Kabaca izah etmeye çalışalım.

A ve B takımları birbirleriyle maç yapacak olsunlar. Neredeyse herkes bu maçı A takımının kazanacağını düşünüyor. Bu durumda deriz ki, A takımının maçı kazanma olasılığı çok yüksek, B takımının da kazanma olasılığı da çok düşüktür. Fakat A'nın maçı kazanma olasılığının çok yüksek olması, A'nın maçı kesin olarak kazanacağı anlamına gelmez. Hatırlayın, Pendikspor, Fenerbahçe'yi yenmemiş miydi? ☺

Tabi olasılık çok yüksek deyince, olasılık bin mi, bir milyon mu, bir milyar mı, ne bilelim. Neye göre yüksek yani? Buna bir kıstas getireceğiz. Şu örneği dinleyin.

Yoldan geçen herhangi birini çekin, sorun:
– Bu elmayı elimden bıraksam, yere düşme olasılığı kaçtır?
– Kesin düşer.
– Nasıl yani kesin? Bi yüzde verebilir misin?
– % 100!

Olacağı kesin olaylara halk arasında % 100 deriz. Ama matematikçi bunu farklı söyler. Hani %x demek $\frac{x}{100}$ demek ya, onun için matematikçi bir olayın olma olasılığına %100 demez, aynı manaya gelen % 100 $= \frac{100}{100} = 1$ sayısını kullanır. Peki, elmayı bıraktığımızda yukarı çıkma olasılığı kaçtır? %0 yani $\frac{0}{100} = 0$'dır.

Yani kesin olayların olasılığı 1 olup imkansız olayların olasılığı 0'dır. Eğer bir olayın olması kesin ya da imkansız değilse olasılığı, yüzde olarak ifade ettiğimiz değerin kesirli ifadesi olan 0 ile 1 arasında bir sayıdır. Yani olasılık bir bakıma şudur: İşimize yarayan durumların adedi x olsun. Olabilecek tüm durumların adedi de y olsun. O halde istediğimiz durumun gerçekleşme olasılığı $\frac{x}{y}$'dir.

Örneğin, bir zar atacağız. Gelebilecek 6 farklı durum var: Ya 1, ya 2, ya 3, ya 4, ya 5 ya da 6 gelecektir. Bizim istediğimiz de zarın çift sayı gelmesi. Yani ya 2, ya 4, ya da 6. O halde 6 durumdan 3'ü işimizi göreceğinden, bir zar atıldığında çift sayı gelme olasılığı $\frac{3}{6}$ yani $\frac{1}{2}$'dir.

Peki, 4'ten büyük gelme olasılığı kaçtır? Sadece 5 ve 6 gelmesi yüzümüzü güldürür. 6 durumdan sadece 2'si istediğimiz durum olduğundan, bir zar atıldığında 4'ten büyük gelme olasılığı $\frac{2}{6}$ yani $\frac{1}{3}$'tür.

Benzer şekilde bir madeni para atıldığında yazı gelme olasılığı da $\frac{1}{2}$'dir. Çünkü paranın 2 yüzü var ve sadece bir yüzü, bizim istediğimiz yüzüdür.

İşte olasılık, yukarda anlatıldığı üzere, zar atınca çift gelmesi, para atınca yazı gelmesi, sınava girince kazanma gibi günlük yaşam olaylarını, anlatılan kurallar çerçevesinde [0, 1] aralığındaki sayılarla eşleştiren bir fonksiyondur. Yani bundan sonra Galatasaray'ın Fenerbahçe'yi yenme olasılığına % 80 değil $\frac{4}{5}$ ya da 0,8 diyeceğiz. ☺

Matematikte veya fizikte ''zar atma'', ''para atma'' gibi oyunlara **deney** denir.

Bir madeni paranın, bir zarın veya bunlar gibi birbirinden farklı yüzleri olan nesnelerin düzgün bir zemine atılması, bunlardan birinin veya birkaçının birden çok kez atılması, bir torbada bulunan topların bir miktarının seçilmesi ve buna benzer hareketler birer deneydir. Bu deneylerin sonunda gelebilecek sonuçlara da **deneyin çıktıları** denir.

Bir deneyde elde edilen çıktıların her birine ise **örneklem nokta**, örneklem noktaların oluşturduğu kümeye de **örneklem uzay** denir. Örneklem uzay E ile gösterilir. (Evrensel küme gibi).

Örneklem uzayın her bir alt kümesine **olay** denir. Boş küme **imkansız olay** olup örneklem uzayı da **kesin olay** diye bilinir.

Örnek. *Bir madeni paranın havaya atılması ve bir zarın masaya atılması deneyinde örneklem noktaları ve örneklem uzayı bulunuz.*

Çözüm: Eğer parada bir hile veya atılan yerde bir pürüz yoksa (ve eğer Kemal Sunal filmi çekilmiyorsa) ya yazı ya da tura gelecektir. Bundan sonra yazıyı Y, turayı T ile gösterelim.

O halde, deneyde örneklem noktalar Y ve T olup örneklem uzay da

$$E = \{Y, T\}\text{'dir.}$$

Zar atma deneyinde de örneklem noktalar 1, 2, 3, 4, 5, 6 olup, örneklem uzay da

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\text{'dır.}$$

Örnek. *Bir madeni paranın arka arkaya iki kez atılması deneyinde örneklem uzayı bulunuz.*

Çözüm: İlk atışta Y geldiğini düşünelim. İkinci atışta Y de gelebilir, T de gelebilir. İlk atışın Y gelmesi, tabi ki ikinci atışı etkilemez. İlk atışta T gelmiş olsa da, ikinci atışta Y de gelebilir, T de. Bunu aşağıdaki şemayla gösterelim.

1. atış	2. atış
Y	Y
Y	T
T	Y
T	T

O halde örneklem uzay

$$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}\text{'dir.}$$

Uyarı. Bir paranın ardı ardına iki kez atılmasıyla, iki madeni paranın aynı anda atılması deneylerinin örneklem noktaları, dolayısıyla örneklem uzayları aynıdır.

Örnek. *Üç madeni paranın aynı anda masaya atılması deneyinin örneklem uzayını bulunuz.*

Çözüm: Hemen şemamızı yapalım.

1. para	2. para	3.para
Y	Y	Y
Y	Y	T
Y	T	Y
Y	T	T
T	Y	Y
T	Y	T
T	T	Y
T	T	T

O halde örneklem uzay;

$E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (Y, T, T),$
$(T, Y, Y), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}$'dir.

Deneylerde şunu gördük:

1 madeni paranın atışında çıktı sayısı $2^1 = 2$,
2 madeni paranın atışında çıktı sayısı $2^2 = 4$,
3 madeni paranın atışında çıktı sayısı $2^3 = 8$ idi.

Bunu genelleyeceğiz. Bir madeni para n kez ardı ardına atılırsa veya n farklı madeni para masaya aynı anda atılırsa 2^n farklı durum olabilir. Çünkü n tane para var ve her paranın 2 yüzü var. Dolayısıyla 2^n tane farklı durum vardır. Bu düşünceyle, n tane zar birlikte atıldığında 6^n farklı durum oluşacağını söyleyebiliriz. Yine benzer şekilde, bir maçın sonucu "ev sahibi yener, berabere kalırlar, konuk takım yener" olmak üzere 3 ihtimalli olduğundan n tane maç 3^n tane farklı şekilde sonuçlanabilir.

Örnek. *İki para aynı anda masaya atılırsa, ikisinin de tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.

Birinci yol. İlk paranın T gelme olasılığı $\frac{1}{2}$, ikinci paranın da T gelmesi olasılığı $\frac{1}{2}$'dir. O halde ikisinin birlikte gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$'tür.

İkinci yol. Örneklem uzay

$$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$$

olmak üzere 4 elemanlıdır. İstediğimiz olay ise $\{(T, T)\}$ olmak üzere 1 elemanlıdır. Bundan dolayı olasılık $\frac{1}{4}$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir çift zar birlikte atıldığında birinin 3 diğerinin 4 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

Çözüm: Yine iki çözüm sunacağız.
Birinci yol. İlk zarın 3, ikincinin 4 gelme durumu da istenilen durumdur. İlk zarın 4 ikinci zarın 3 gelme durumu da. İki durumun olasılıklarını ayrı ayrı bulup toplayacağız.

$$3\text{-}4 \text{ gelme olasılığı} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ve

$$4\text{-}3 \text{ gelme olasılığı} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

olduğundan cevap $\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{1}{18}$'dir.

İkinci yol. İki zar birlikte atıldığında $6^2 = 36$ farklı iki durum vardır. Bizim istediklerimiz

$$\{(3, 4), (4, 3)\}$$

olmak üzere 2 tanedir. O halde cevap $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir çift zar atıldığında "düşeş" yani (6, 6) gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{36}$ E) 1

Çözüm: 36 durumdan sadece 1 tanesi isteniyor diye olasılık $\frac{1}{36}$'dur. İlk zarın 6 gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$, ikincinin de 6 gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$ diye ikisinin birden gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ diye de çözebilirdik.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir tek zar masaya atıldığında, 7 gelme olasılığı kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm: Zarda 7 gelme olasılığı imkansız bir olay olduğundan olasılık 0'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir tek zar masaya atıldığında, tek sayı gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: {1, 2, 3, 4, 5, 6} durumlarından sadece {1, 3, 5} durumları isteniyor, o halde olasılık $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir tek zar masaya atıldığında, asal sayı gelme olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: Bu sefer istenenler {2, 3, 5} diye olasılık $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir tek zar masaya atıldığında, bileşik sayı gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: {1, 2, 3, 4, 5, 6} sayılarından bileşik olanlar {4, 6} olmak üzere 2 tanedir. Dolayısıyla olasılık $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$'tür.

Unutanlara hatırlatalım: 2'den fazla farklı pozitif tam böleni olan sayılara **bileşik sayı** diyorduk. Yani asal olmayacaklar. Bu durumda "1" sayısı ne asalların tanımına uyar, ne de bileşiklerin, onun için 1'i almadık.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir tek zar masaya atıldığında, en az 1 gelme olasılığı kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) 1

Çözüm: Zarda zaten 1'den daha küçük sayı gelemez. Dolayısıyla en az 1 gelme olasılığı kesin olaydır, bundan dolayı olasılığı 1'dir.

Doğru cevap: E

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Birinci zarın 2, ikinci zarın 3 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

Çözüm: Birinci zarın 2 gelme olasılığı 1/6, ikinci zarın da 3 gelme olasılığı 1/6'dır. İkisinin birlikte gerçekleşmesini beklemenin olasılığı 1/36'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Birinin 2, diğerinin 3 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

Çözüm: Şimdi {2, 3} durumu da {3, 2} durumu da işe yarıyor. Her ikisinin de olasılığı 1/36 olduğundan, toplanırsa 1/18 bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların birbirinin aynı olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: Yani {1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 4}, {5, 5} ve {6, 6} durumlarını istiyoruz. 36 seçenekten 6'sı işimize geliyor. O halde cevap 6/36 = 1/6.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 6 olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{5}{36}$

Çözüm: Yani {1, 5}, {5, 1}, {2, 4}, {4, 2} ve {3, 3} durumlarını istiyoruz. 36 seçenekten 5'i işimize geliyor. O halde cevap 5/36.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 10'dan büyük olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{5}{36}$

Çözüm: Bu durum da {5, 6}, {6, 5} ve {6, 6} ile mümkün. 36 taneden 3 tane işimize yarıyor yani. O halde cevap 3/36 yani 1/12.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının tek olması olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: Çarpımın tek olması için her iki zarın da tek gelmesi lazım. Bir zar 1/2 ihtimalle tek gelir, iki zar ise 1/4.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının çift olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: İki zarın çarpımı ya tek olur, ya çift. Tek olma olasılığı 1/4 çıktıysa, çift olma olasılığı 3/4'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki zar masaya atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların birinin diğerinden 2 fazla olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

Çözüm: Yani {1, 3}, {3, 1}, {2, 4}, {4, 2}, {3, 5}, {5, 3}, {4, 6} ve {6, 4} durumlarını istiyoruz.
36 seçenekten 8'i işimize geliyor. O halde cevap 8/36 = 2/9.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Madeni 3 para havaya atılıyor. Yere düşüp birer yüzü üstünde durduklarında birinci paranın yazı, diğer paraların tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

Çözüm: Bir paranın iki yüzü olduğundan, yazı gelme olasılığı da tura gelme olasılığı da 1/2'dir. YTT durumu arıyoruz. Üç para için de ihtimalleri çarpacağız. $(1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2) = 1/8$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Madeni 3 para havaya atılıyor. Yere düşüp birer yüzü üstünde durduklarında birinin yazı diğerlerinin tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{4}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

Çözüm: Şimdi YTT, TYT, TTY durumlarının üçü de geçerlidir. Herbiri 1/8 olduğundan cevap 3/8.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Madeni 3 para havaya atılıyor. Yere düşüp birer yüzü üstünde durduklarında en az birinin yazı gelme olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

Çözüm: En az biri yazı olsun demek, hepsi tura olmasın demek. Biz hepsi tura durumunu bulalım, 1'den çıkartalım. TTT durumu 1/8 ihtimalle gerçekleşir. O halde en az birinin yazı olma olasılığı 7/8'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Madeni 3 para havaya atılıyor. Yere düşüp birer yüzü üstünde durduklarında en çok birinin yazı gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{4}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

Çözüm: İkisi veya üçü Y olmasın diyor. TTT de olur, YTT, TYT, TTY de. 1/8'den 4 tane var, topla, 1/2.

Doğru cevap: D.

Örnek. *4 madeni para birlikte atıldığında hepsinin yazı gelme olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: YYYY durumu istenen durumdur. Her bir paranın Y gelme olasılığı 1/2 olduğundan hepsinin aynı durumda gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1987 ÖYS]. *Düzgün bir para üç defa atıldığında, en az bir tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: 3 atışın üçünde de yazı gelme olasılığını bulur, 1'den çıkartırsak, en az 1 kere yazı gelme olasılığını bulmuş oluruz. 3 atışın üçünde de yazı gelme olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ olduğundan cevap $\frac{7}{8}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Üç çocuklu bir ailede en az 1 erkek çocuk bulunması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

Çözüm: Soruda yazılmamış ama erkekle kızların bulunma olasılıklarını eşit kabul edeceğiz. En az 1 erkek bulunma olasılığı yerine, hepsi kız olma olasılığını hesaplayıp 1'den çıkartacağız.

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *4 madeni para birlikte atıldığında ikisinin yazı, ikisinin tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{2}{16}$ C) $\frac{4}{16}$ D) $\frac{6}{16}$ E) $\frac{8}{16}$

Çözüm: YYTT istenen durumdur ama tek istenen durum değil. YTTY de olur, örneğin TTYY de. Anlayacağınız Y, Y, T, T harfleriyle kaç değişik dört harfli kelime yapabileceğini de hesaplamamız gerekecek. Tekrarlı permutasyon dersinde anlattığımız üzere $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ farklı yazılım vardır. Her birinin olasılığı 1/16 olduğundan cevap $\frac{1}{16}\cdot 6=\frac{3}{8}$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *4 madeni para birlikte atıldığında üçünün yazı, birinin tura gelme olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{2}{16}$ D) $\frac{3}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: YYYT gelme olasılığı 1/16'dır. Y, Y, Y, T harfleriyle $\frac{4!}{3!}=4$ farklı sıra oluşturulabileceğinden cevap $\frac{1}{16}\cdot 4=\frac{1}{4}$'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Üç zar bir masaya aynı anda atıldığında, üçünün de "2" gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{36}$ D) $\frac{1}{216}$ E) 1

Çözüm: 2-2-2 durumu istenen durum. Bir zarın 2 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ olduğundan, üçünün de aynı anda 2 gelme olasılığı $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1984 ÖYS]. *Bir kutudaki 12 ampulden 4'ü bozuktur. Bu ampullerden rastgele seçilen 3 ampulden üçünün de bozuk olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{42}$ C) $\frac{1}{48}$ D) $\frac{1}{55}$ E) $\frac{1}{62}$

Çözüm: İlkinin bozuk olma olasılığı 4/12, ikincisinin de bozuk olma olasılığı 3/11, üçüncüsünün de bozuk olma olasılı 2/10 olduğundan, üçünün de bozuk olma olasılığı

$$\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{55}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Üç zar bir masaya aynı anda atıldığında birinin 2, birinin 3, birinin 4 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{72}$

Çözüm: 2, 3, 4 istenen durum ama tek durum değil. 2-4-3, 4-2-3, 4-3-2, 3-4-2 ve 3-2-4 gibi farklı sıralamalar da olur. 3 sayı 3! = 6 değişik şekilde sıralanabileceğinden cevap $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3!=\frac{1}{36}$'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Üç zar bir masaya aynı anda atıldığında birinin 2, diğer ikisinin 5 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{72}$

Çözüm: 2-5-5 istenen durumdur ama 5-2-5 ve 5-5-2 de olur. Herhangi birinin olasılığını bulup 3'le çarpacağız. 2-5-5 sırasıyla gelme olasılığı $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$ olduğundan cevap $3\cdot\frac{1}{216}=\frac{1}{72}$.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Üç zar bir masaya aynı anda atıldığında hepsinin farklı gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

Çözüm: İlk zar ne gelirse gelsin, ikinci zar birinciyle aynı olmamalı. Üçüncü de hem birinciden hem de ikinciden farklı olmalı. Bu durumda; ilk zarın herhangi bir sayı gelme olasılığı 1'dir. İkinci zarın birinciden farklı olma olasılığı $\frac{5}{6}$'dır, üçüncü zarın da ilk ikisinden farklı olma olasılığı $\frac{4}{6}$'dır. O halde cevap $1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$'dur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1986 ÖYS]. *İçinde 4 kırmızı, 4 mavi ve 4 sarı bilye bulunan bir torbadan rastgele seçilen üç bilyeden her birinin farklı bir renkte olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{6}{15}$ C) $\frac{13}{40}$ D) $\frac{14}{47}$ E) $\frac{16}{55}$

Çözüm: Kırmızıyı *K* ile, maviyi *M* ile, sarıyı *S* ile gösterelim. *KMS*, *KSM*, *MSK*, *MKS*, *SMK* ve *SKM* durumları sorulmaktadır. Herhangi birini bulup 6'yla çarpsak, yeter.

$$KMS \text{ durumu: } \frac{4}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{8}{165}$$

olduğundan cevabımız $6\cdot\frac{8}{165}=\frac{48}{165}=\frac{16}{55}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Üç zar bir masaya aynı anda atıldığında sadece iki zarın aynı, üçüncü zarın bunlardan farklı gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{10}{36}$ D) $\frac{15}{36}$ E) 1

Çözüm: İlk zar ne gelirse gelsin, ikinci zar 1/6 olasılıkla ilkiyle aynı gelir, o halde üçüncü farklı olmalı, bunun olasılığı da 5/6'dır. Diğer yandan ikinci zar 5/6 olasılıkla ilkinden farklı gelir, şimdi üçüncü zar ya birinciyle ya da ikinciyle aynı gelmelidir. Bunun olasılığı da 2/6'dır. Sonuç olarak cevap $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5+10}{36}=\frac{15}{36}$'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki madeni para ve bir zar aynı anda masaya atılıyor. Paraların aynı yüz (her ikisi de yazı veya her ikisi de tura) ve zarın 4 gelme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{12}$

Çözüm: Ne paranın hangi yüzü geldiği zarı etkiler, ne de zarın kaç geldiği paranın yüzünü. Böyle olaylara bağımsız olaylar deriz ve iki olayın gerçekleşme olasılıklarını çarparak buluruz. Paraların aynı yüzlerinin gelme olasılığı 1/2'dir. Çünkü {(Y, Y), (T, T), (Y, T), (T, Y)} örneklem uzayından {(Y, Y), (T, T)}istenen durumdur. Zarın 4 gelme olasılığı da 1/6 olduğundan cevabımız $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1983 ÖYS]. *Bir zarın bir yüzü kırmızı, iki yüzü sarı, diğer yüzleri mavi renktedir. Bu zar iki kez atılıyor. İki atış sonunda zarın bir kez kırmızı, bir kez mavi yüzü üzerine düşmesi olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: Kırmızıyı *K*, maviyi *M* ile gösterelim. *KM* ve *MK* durumları işimize yarıyor. Her zar atışında *K*'nin gelme olasılığı 1/6, *M*'nin gelme olasılığı 1/2'dir. O halde *KM* gelme olasılığı $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ ve benzer şekilde *MK* gelme olasılığı da $\frac{1}{12}$ olduğundan, sorunun cevabı $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir torbadaki beyaz bilyelerin sayısı, kırmızı bilyelerin sayısının 2 katıdır. Torbadan rastgele çekilen iki bilyenin farklı renklerde olma olasılığı 8/17 ise bu torbada kaç tane beyaz bilye vardır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Çözüm: Kırmızı bilye sayısına x dersek, beyaz bilye sayısı $2x$ olur.

KB durumu: $\frac{x}{3x}\cdot\frac{2x}{3x-1}$

BK durumu: $\frac{2x}{3x}\cdot\frac{x}{3x-1}$

olduğundan iki bilyenin farklı renklerde olma olasılığı bu sayıların toplamıdır.

$$\frac{x}{3x}\cdot\frac{2x}{3x-1}+\frac{2x}{3x}\cdot\frac{x}{3x-1}=\frac{4x}{9x-3}$$

Bu oran soruda 8/17 olarak verilmiş, hemen yeni eşitliği yazıp düzenleyelim.

$$\frac{4x}{9x-3}=\frac{8}{17}$$
$$72x-24=68x$$
$$x=6.$$

Beyaz bilye sayısı $2x$ olduğundan cevap 12 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1982 ÖYS]. *Bir zar ve bir madeni para birlikte atılıyor. Zarın 4 veya 4'ten küçük ve paranın tura gelmesi olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

Çözüm: Zarın 4 veya 4'ten küçük gelme olasılığı 4/6 yani 2/3, paranın tura gelme olasılığı da 1/2'dir. O halde bu isteğin gerçekleşme olasılığı $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *5 pozitif ve 7 negatif sayı arasından rastgele 4 sayı seçiliyor. Bu sayıların çarpımının pozitif olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{50}{99}$ B) $\frac{251}{495}$ C) $\frac{49}{100}$ D) $\frac{250}{499}$ E) $\frac{49}{99}$

Çözüm: 4 sayının çarpımın hangi durumlarda pozitif olabileceğini düşünelim. Ya hepsi pozitif olacak, ya hepsi negatif ama ikisi pozitif ikisi negatif olsa da olur. İstenen durum $C(5, 4) + C(7, 4) + C(5, 2)\cdot C(7, 2)$, tüm durum ise $C(12, 4)$. Bu değerler hesaplanır ve istenen durum tüm duruma bölünürse cevabın 250/495 = 50/99 olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Sezen'in üniversite sınavını kazanma olasılığı 4/5, Gülşah'ın ise 9/10'dur.*
- ✓ *Sezen'in kazanamayıp Gülşah'ın kazanma,*
- ✓ *Sezen veya Gülşah'tan birinin kazanma,*
- ✓ *Her ikisinin de kazanamama*

olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm:

✓ Sezen'in kazanamama olasılığı 1/5, Gülşah'ın kazanma olasılığı ise 9/10 olduğundan, bu ikisinin birlikte gerçekleşme olasılığı

$$(1/5)\cdot(9/10) = 9/50\text{'dir.}$$

✓ Sezenin kazanıp Gülşah'ın kazanamama olasılığı = $(4/5)\cdot(1/10) = 4/50$
Gülşah'ın kazanıp Sezen'in kazanamama olasılığı = $(9/10)\cdot(1/5) = 9/50$
olduğundan bu değerler toplanırsa 13/50 bulunur.

✓ $(1/5)\cdot(1/10) = 1/50$

Örnek. *Önümüzde 3 kutu var. Birinci kutuda 3 sarı 5 kırmızı, ikinci kutuda 2 sarı 4 kırmızı, üçüncü kutuda 1 sarı 2 kırmızı bilye bulunmaktadır. Rastgele bir kutu ve bu kutudan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun sarı renkte olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{72}$ B) $\frac{5}{72}$ C) $\frac{20}{72}$ D) $\frac{25}{72}$ E) $\frac{50}{72}$

Çözüm: Önce 3 kutudan birini seçeceğiz, sonra da sarının gelme olasılığını hesaplayacağız. 1/3 olasılıkla ilk torbayı, yine 1/3 olasılıkla ikinci torbayı ve yine 1/3 olasılıkla üçüncü torbayı seçeriz. Bunları da hesaba katacağız. Bu değerleri herbirinde sarı gelme olasılıklarıyla çarpacağız.

$$(1/3)\cdot(3/8) + (1/3)\cdot(2/6) + (1/3)\cdot(1/3) = 25/72.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele alınan bir topun sarı renkte olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) 1

Çözüm: Toplam 8 top var ve 5'i sarı olduğundan, rastgele alınan bir topun sarı renkte olma olasılığı $\frac{5}{8}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele alınan bir topun lacivert renkte olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) 1

Çözüm: Top sarı değilse lacivert olacağından sarı olma olasılığını 1'den çıkartalım. $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele aynı anda alınan iki topun ikisinin de sarı olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{14}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: SS istenen durum. İlkinin S çıkma olasılığı $\frac{5}{8}$ ikincinin de S çıkma olasılığı $\frac{4}{7}$ olduğundan cevap

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}\text{'dir.}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele aynı anda alınan iki topun farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{28}$ B) $\frac{5}{28}$ C) $\frac{10}{28}$ D) $\frac{15}{28}$ E) $\frac{20}{28}$

Çözüm: SL ve LS durumları isteniyor. Birini bulup 2'yle çarpsak da olur. SL olasılığı $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$ olduğundan cevap $2\cdot\frac{15}{56}=\frac{15}{28}$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele aynı anda alınan iki topun aynı renkte olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{28}$ B) $\frac{3}{28}$ C) $\frac{5}{28}$ D) $\frac{10}{28}$ E) $\frac{13}{28}$

Çözüm: Toplar farklı renkte değilseler, aynı renktedirler. O halde $1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$. Tabii bir önceki şık karşımızda olduğundan böyle rahat çözdük. Asıl çözüm şöyle olmalıydı: SS ve LL durumlarının olasılıklarını bulup toplamalıyız.

SS'nin olasılığı $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$ ve LL'nin olasılığı $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$ olduğundan cevap $\frac{20}{56}+\frac{6}{56}=\frac{13}{28}$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir torbada aynı büyüklük ve özelliklerde 5 sarı, 3 lacivert top bulunmaktadır. Bu torbadan rastgele aynı anda alınan üç topun en az ikisinin sarı olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Çözüm: SSL ve SSS durumlarını inceleyeceğiz. İlk durumda SLS ve LSS durumlarını da hesaba katarsak

(SSL) $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3=\frac{15}{28}$ (SSS) ise $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$ olduğunda cevap $\frac{15}{28}+\frac{5}{28}=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1981 ÖYS]. *Bir torbada 5 beyaz, 4 kırmızı top vardır. Bu torbadan rastgele iki top çekiliyor. Çekilen iki topun da beyaz olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{13}$ D) $\frac{2}{11}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm: İlkinin beyaz olma olasılığı $\frac{5}{9}$, ikincsinin de beyaz olma olasılığı $\frac{4}{8}$ yani $\frac{1}{2}$'dir. O halde ikisinin de beyaz olma olasılığı

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1988 ÖYS]. *Bir torbada aynı büyüklükte 4 kırmızı, 5 beyaz, 7 yeşil kalem vardır. Rastgele alınan bir kalemin kırmızı ya da beyaz olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{9}{16}$

Çözüm: Toplam 16 kalem var ve bunların 9 tanesi kırmızı ya da beyaz olduğundan olasılık $\frac{9}{16}$'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1992 ÖYS]. *Bir torbada 2 beyaz, 4 siyah ve 6 mavi bilye vardır. Aynı anda çekilen iki bilyeden birinin beyaz diğerinin siyah olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{2}{11}$ D) $\frac{4}{33}$ E) $\frac{5}{33}$

Çözüm: Beyaz bilyeleri *B* ile, siyah bilyeleri *S* ile gösterelim. *BS* ve *SB* durumlarını inceleyeceğiz. Birinin olasılığını bulup, 2'yle çarpsak yeter.

BS durumu: $\frac{2}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{2}{33}$

olduğundan cevabımız $\frac{4}{33}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1995 ÖYS]. *Bir torbada 6 beyaz, 4 siyah bilye vardır. Bu torbadan rastgele çekilen 3 bilyeden birinin beyaz, diğer ikisinin siyah olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{3}{19}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{5}{13}$

Çözüm: Beyaz bilyeleri *B* ile, siyah bilyeleri *S* ile gösterelim. *BSS*, *SBS* ve *SSB* durumlarını incelememiz gerekiyor. Herhangi birinin olasılığını bulup, 3 ile çarpsak yeter.

BSS durumu: $\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{10}$

olduğundan cevabımız $\frac{3}{10}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek [1998 ÖYS]. *Bir torbada 2 tane mavi, 5 tane yeşil mendil vardır. Bu torbadan, geri atılmamak koşulu ile iki kez birer mendil çekiliyor. Bu iki çekilişin birincisinde mavi, ikincisinde de yeşil mendil çekme olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{12}{70}$ B) $\frac{20}{49}$ C) $\frac{10}{45}$ D) $\frac{10}{21}$ E) $\frac{5}{21}$

Çözüm: Birinci çekilişte mavi gelme olasılığı 2/7, ikinci çekilişte yeşil gelme olasılığı 5/6 olduğundan, iki isteğin aynı anda gerçekleşmesi olasılığı

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{21}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İçinde 3 sarı 4 kırmızı bilye bulunan bir torbadan rastgele bir bilye alınıp, bakılmaksızın içinde 5 sarı 2 kırmızı bilye bulunan bir torbaya atılarak, karıştırılıyor. İkinci torbadan rastgele seçilen bir bilyenin sarı olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{28}$ B) $\frac{9}{28}$ C) $\frac{19}{28}$ D) $\frac{23}{28}$ E) 1

Çözüm: İlk torbadan seçilen bilye $\frac{3}{7}$ olasılıkla sarıdır, sarı seçildiğini düşünürsek ikinci torbadan da sarı çıkma olasılığı $\frac{6}{8}$'dir. İlk torbadan olasılıkla $\frac{4}{7}$ kırmızı gelir, kırmızı geldiyse eğer ikinci torbadan sarı çıkma olasılığı $\frac{5}{8}$ olur. O halde $\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{8}+\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{18+20}{56}=\frac{38}{56}=\frac{19}{28}$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A torbasında 4 sarı 5 mavi, B torbasında da 3 sarı 7 mavi top vardır. A'dan rastgele bir top çekilip bakılmaksızın B'ye atılıyor. Daha sonra B'den rastgele bir top alınıp A'ya atılıyor. Renk olarak ilk durumun bozulmama olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{99}$ B) $\frac{7}{99}$ C) $\frac{8}{99}$ D) $\frac{56}{99}$ E) 1

Çözüm: İlk durumun renk olarak bozulmaması için A'dan B'ye sarı renkte top attıysak B'den A'ya da sarı renkte top atmış olmalıyız. Eğer mavi atmışsak da, mavi renkte bir topu geri göndermeliyiz. O halde

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{11}=\frac{16+40}{99}=\frac{56}{99}$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1985 ÖYS]. *İçinde top bulunan iki torbadan birincisinde 4 beyaz, 6 siyah ve ikincisinde 2 beyaz, 5 siyah top vardır. Birinci torbadan bir top çekilip rengine bakılmadan ikinci torbaya atılıyor. Bundan sonra ikinci torbadan rastgele bir top çekildiğinde bunun beyaz olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{3}{20}$ D) $\frac{7}{20}$ E) $\frac{2}{5}$

Çözüm: Birinci torbadan 4/10 olasılıkla beyaz top gelir, bu durumda ikinci torbadan da beyaz çıkma olasılığı 3/8'dir. Birinci torbadan 6/10 olasılıkla siyah top gelir, bu durumda ikinci torbadan beyaz çıkma olasılığı 2/8'dir.

$$\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{8}=\frac{24}{80}=\frac{3}{10}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1997 ÖYS]. *A torbasında 3 beyaz, 4 kırmızı; B torbasında 5 beyaz, 2 kırmızı top vardır. Aynı anda her iki torbadan birer top alınıyor ve öteki torbaya (A torbasından alınan B'ye, B torbasından alınan A ya atılıyor.) Bu işlemin sonucunda torbalardaki kırmızı ve beyaz top sayılarının başlangıçtakiyle aynı olması olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{18}{49}$ B) $\frac{19}{49}$ C) $\frac{20}{49}$ D) $\frac{22}{49}$ E) $\frac{23}{49}$

Çözüm: İlk durumun bozulmaması için A torbasından B'ye beyaz top atılmışsa, B torbasından A'ya da beyaz top atılmalıdır. Aynı şey siyah top için de geçerlidir. Hemen gerekenleri yapalım:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{23}{49}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *A torbasında 3 kırmızı ve 5 mavi, B torbasında 4 kırmızı ve 2 mavi bilye vardır. Torbalardan biri rastgele seçilip, seçilen torbadan rastgele bir bilye alınırsa alınan bilyenin kırmızı çıkma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{5}{48}$ C) $\frac{10}{48}$ D) $\frac{20}{48}$ E) $\frac{25}{48}$

Çözüm: A torbası $\frac{1}{2}$ olasılıkla seçilir, eğer A seçildiyse kırmızı çıkma olasılığı $\frac{3}{8}$'dir. B torbası da $\frac{1}{2}$ olasılıkla seçilir ve eğer B seçilmişse kırmızı çıkma olasılığı $\frac{4}{6}$'dır. O halde cevap

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{3}{16}+\frac{4}{12}=\frac{9+16}{48}=\frac{25}{48}\text{'dir.}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [Tübitak 1996]. *İçlerinde siyah ve beyaz toplar olan iki torbada toplam 25 top vardır. Her torbadan rastgele birer top alındığında her ikisinin de beyaz olma olasılığı 0,54 ise her ikisinin de siyah olma olasılığı kaçtır?*

A) 0,1 B) 0,4 C) 0,01 D) 0,04 E) 0, 08

Çözüm: İlk torbada t tane, ikinci torbada da $25 - t$ tane top var diyelim. İlk torbadaki beyaz top sayısı a, ikinci torbadaki beyaz top sayısı da b olsun. Hikayeye göre

$$\frac{a}{t}\cdot\frac{b}{25-t}=0,54=\frac{27}{50}$$

olmalıdır. O halde $a\cdot b = 27k$ ve $t\cdot(25 - t) = 50k$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. İkinci eşitlikten t'nin 5'in katı olması gerektiği anlaşılır. $t = 5$ diyelim. $a\cdot b = 54$ olur. $a \le t = 5$ ve $b \le 25 - t = 20$ olduğundan ancak $a = 3$ ve $b = 18$ olabilir. Bu durumda iki topun da siyah olma olasılığı

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{20}=\frac{4}{100}=0,04$$

olarak bulunur. Peki ya $t = 10$ ise? Olsun bakalım.
$t = 10$ diyelim. $a\cdot b = 81$ olur. $a \le t = 10$ ve $b \le 25 - t = 15$ olduğundan ancak $a = 9$ ve $b = 9$ olabilir. Bu durumda iki topun da siyah olma olasılığı

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{15}=\frac{6}{150}=0,04$$

olarak bulunur. Her halükarda 0,04 bulunduğundan cevap da 0,04 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A, B, C makineleri bir fabrikanın toplam üretiminin sırasıyla %50, %30 ve %20'sini üretmektedir. Bu makinelerin bozuk mal üretme yüzdeleri de sırasıyla %2, %3 ve %4'tür. Bu fabrikada üretilmiş rastgele bir mal seçildiğinde*

a. *Bu malın bozuk olma,*
b. *Bu malın A makinesi ile üretilmiş olma,*
c. *Bu malın A makinesi ile bozuk üretilmiş olma olasılıklarını hesaplayınız.*

Çözüm: Bu fabrikada 1000 tane mal üretildiğini düşünelim. Bunun 500'ünü A makinesi, 300'ünü B makinesi, 200'ünü de C makinesi üretmiştir. A'nın ürettiği malların 10'u, B'nin ürettiği malların 9'u, C'nin ürettiği malların da 8'i hatalıdır.

a. Üretilen 1000 malda hatalı mallar toplamı 27 olduğundan bir malın bozuk olma olasılığı 27/1000'dir.
b. 1000 malın 500'ü A makinesi tarafından yapıldığından olasılık 1/2'dir.
c. A makinesi tarafından üretilen bozuk mal 10 tane. O halde bu taneden biri olma olasılığı 10/1000 yani 1/100'dür.

Örnek. *30 kişilik bir sınıfın 18'i erkektir. Erkeklerin 5'i, kızların 3'ü gözlüklüyse, bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin*

Gözlüklü kız
Gözlüklü veya kız
Gözlüklü ya da kız

olma olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: Hemen sınıfın durumunu yansıtan bir tablo yapalım.

	Erkek	Kız
Gözlüklü	5	3
Gözlüksüz	13	9

Gözlüklü kızların toplamı 3 kişi olduğundan cevap $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$'dur

Gözlüklü veya kız 5 + 3 + 9 = 17 kişi olduğundan cevap $\frac{17}{30}$'dur

Gözlüklü ya da kız 5 + 9 = 14 kişi olduğundan cevap $\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$'dir.

Örnek. *Bir önceki örnekte, rastgele seçilen öğrencinin kız olduğu biliniyorsa, gözlüksüz olma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm: Kız öğrenci toplam 12 kişi var. Bu 12 kişiden 9'u gözlüksüzdür. Demek gözlüksüz olma olasılığı $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir zar atıldığında üst yüze gelen sayının 4'ten küçük olduğu biliniyorsa, asal sayı olma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm: Zarın 4'ten küçük olduğu biliniyorsa, olası 3 durum vardır. {1, 2, 3}sayılarından biri gelmiştir. Bunlardan 2 ve 3 asal olduğundan, üst yüze gelen sayının asal olma olasılığı $\frac{2}{3}$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A ve B takımlarının yaptıkları maçın 3 gollü bittiği biliniyorsa, A takımının maçı 2-1 kazanmış olma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm: 3 gollü skor bakalım kaç durumda oluyor. (3-0), (2-1), (1-2), (0-3) olmak üzere 4 durum var. O halde cevap $\frac{1}{4}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A makinesi 3'ü bozuk olan 20 mal, B makinesi de 5'i bozuk olan 10 mal üretmiştir. Bu 30 malın arasından rastgele bir tanesi çekiliyor. Bu malın*
Bozuk
A tarafından üretilmiş bozuk
B tarafından üretilmiş sağlam
mal olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: 30 malın toplamda 3 + 5 = 8'i bozuk olduğundan, çekilen malın bozuk olma olasılığı $\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$'tir.

A'nın ürettiği bozuk mal 3 tane olduğundan cevap $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$'dur.

B'nin ürettiği sağlam mal 5 tane olduğundan cevap $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$'dır.

Örnek. *Bir önceki örnekte çekilen malın bozuk olduğu biliniyorsa, A tarafından üretilmiş olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

Çözüm: Toplam 8 bozuk mal var ve 3'ü A tarafından üretilmiş olduğundan cevap $\frac{3}{8}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek [1987 ÖYS]. *Bir grupta 3 erkek ve 2 kız öğrenci vardır. Bu gruptan seçilecek 2 kişinin ikisinin de erkek olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm: İlkinin erkek olma olasılığı 3/5, ikincisinin de erkek olma olasılığı 2/4 yani 1/2'dir. O halde cevabımız $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1988 ÖYS]. *4 kız 6 erkek öğrenci bulunan bir okul kafilesinde rasgele 2 öğrenci seçilirse öğrencilerden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm: Kızları *K* ile, erkekleri *E* ile gösterelim. *KE* ve *EK* durumlarını incelememiz gerekiyor. Herhangi birini bulup 2'yle çarpsak da olur.

KE durumu: $\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

olduğundan cevap 8/15 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir arada bulunan 4 evli çift yani 8 kişi arasından rastgele seçilen 2 kişinin birbiriyle evli olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Çözüm: İlk seçilen kişi kim olursa olsun, seçilen kişinin eşi geriye kalan 7 kişiden biridir. İkinci seçimde doğru kişiyi seçme olasılığı bundan dolayı $\frac{1}{7}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *4 evli çift, erkekler bir arada kadınlar bir arada olmak üzere iki ayrı grup halinde bulunuyorlar. Her iki gruptan da rastgele birer kişi seçilirse, seçilenlerin birbiriyle evli olma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: Erkek grubundan kim seçilirse seçilsin, seçilenin eşi 4 kişilik kızlar grubundan biridir. Demek ki kızlar grubundan doğru kadını seçme olasılığı 1/4'tür. Önce kadın seçsek de durumun değişmeyeceğini anlamış olmalısınız.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki yüzünde A, diğer iki yüzünde de T yazılı bir düzgün dörtyüzlü bir masaya atılıyor. Düzgün dörtyüzlü sabit durduğunda yan yüzlerinde "ATA" yazma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: Yan yüzlerde "ATA" yazması için düzgün dörtyüzlünün masaya değen yüzüne T gelmeli. 4 yüzün ikisinde T yazılı olduğundan cevap $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Sırt numaraları 1, 2, 3, 4 olan dört atletin katıldığı bir yarışta, atletlerin kazanma olasılıkları sırt numaralarıyla ters orantılıdır. Buna göre yarışı 2 nolu atletin kazanma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{25}$ C) $\frac{4}{25}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{12}{25}$

Çözüm: 1, 2, 3, 4 ile ters orantılı sayılar 12, 6, 4, 3 olduğundan atletlerin yarışı kazanma olasılıkları sırasıyla $12k$, $6k$, $4k$, $3k$'dir. Bir yarışı iki atlet birden kazanamayacağından olaylar ayrıktır. Bu yüzden olasılıklar toplamı 1 olmalıdır.

$$12k + 6k + 4k + 3k = 1$$

eşitliğinden $k = \frac{1}{25}$ bulunur. O halde 2 sırt numaralı atletin kazanma olasılığı $6k = \frac{6}{25}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aynı anda atılan 4 madeni paranın birinin yazı geldiği bilindiğine göre dördünün de yazı olma olasılığı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{3}{15}$ D) $\frac{5}{15}$ E) $\frac{7}{15}$

Çözüm: 4 para, $2^4 = 16$ değişik durum demektir. Birinin yazı geldiği bilindiğine göre (TTTT) durumunu eleriz. Geriye 15 durum kalır. Hepsinin yazı olma olasılığı, bu sebeple $\frac{1}{15}$'tir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$(x+y)^8$ açılımındaki katsayılar birer karta yazılarak bir torbaya konuyor. Torbadan rastgele seçilen bir kartın üzerinde 10'dan küçük bir sayının yazma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{9}$

Çözüm: Katsayıların

$$\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \binom{8}{3}, \binom{8}{4}, \binom{8}{5}, \binom{8}{6}, \binom{8}{7}, \binom{8}{8}$$

olduğunu biliyoruz. Bunlardan sadece ilk 2 ve son 2'si 10'dan küçüktür. O halde olasılık $\frac{4}{9}$'dur.

Doğru cevap. D.

Örnek. *3 erkek ve 5 kadın bir yuvarlak masaya oturduğunda, 5 kadının da yan yana olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Çözüm: Önce kaç değişik oturum olduğuna bakalım. 8 kişi var ama yuvarlak masaya oturduklarından 7! değişik sıra oluşur. Şimdi de 5 kadının birbirinden ayrılmayacağını düşünelim. Kadınları bir iple bağlarsak sanki 4 kişi varmış gibi olur. Yuvarlak masaya 3! kadar değişik şekilde otururlar. Bir de 5! kadar kendi aralarında yer değiştirebilirler. O halde olasılık $\frac{3!5!}{7!} = \frac{3!}{7\cdot 6} = \frac{1}{7}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir kapıyı, içinde 5 anahtar bulunan bir anahtarlıktan sadece 2 tanesi açabilmektedir. Bu kapıyı açmayı deneyen birinin ikinci denemesinde kapının açılma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{9}{25}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

Çözüm: Kapının ikinci denemede açılması demek, birinci denemede açılmamış olması demektir. Kapı ilk denemede 2/5 olasılıkla açılır, 3/5 olasılıkla açılmaz. Açılmadı diyelim. O halde yanlış anahtarlardan birini eledik. Geriye kaldı 2 doğru 2 yanlış anahtar. Şimdiki denemede açılma olasılığı 2/4 yani 1/2'dir. O halde cevabımız

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir kapıyı, içinde 5 anahtar bulunan bir anahtarlıktan sadece 2 tanesi açabilmektedir. Bu kapıyı açmayı deneyen birinin en çok ikinci denemesinde kapının açılma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{7}{20}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{9}{25}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

Çözüm: Bu soruda kapı birinci denemede açılsa da olur, ikinci denemede açılsa da olur, ama üçüncü denemeye kalmamalı. Kapı ilk denemede 2/5 olasılıkla açılır, 3/5 olasılıkla açılmaz. Açılmadı diyelim. O halde yanlış anahtarlardan birini eledik. Geriye kaldı 2 doğru 2 yanlış anahtar. Şimdiki denemede açılma olasılığı 2/4 yani 1/2'dir. O halde cevabımız

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *İki kişi 1'den 100'e kadar olan doğal sayılar arasından birer sayı tutuyorlar. Birinin tuttuğu sayının diğerinin tuttuğu sayının 2 katı olma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{1}{50}$ B) $\frac{1}{60}$ C) $\frac{1}{70}$ D) $\frac{1}{80}$ E) $\frac{1}{100}$

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.

Birinci yol. 50'den küçük veya eşit olan bir sayının yarısı da iki katı da sınırlar içindedir ama 50'den büyük bir sayının sadece yarısı sınırlar içindedir. Ayrıca tek sayıysa yarısı doğal sayı olmaz ama çift sayıysa yarısı da doğal sayı olur. O halde tek, çift, ≤ 50 ve > 50 durumları olmak üzere 4 durum var. Birinci kişi 1/4 olasılıkla 50'den küçük bir tek sayı tutar, ikinci kişi 1/100 olasılıkla o sayının 2 katını tutar. Birinci kişi 1/4 olasılıkla 50'den küçük veya eşit olan bir çift sayı tutar, ikinci kişi 2/100 olasılıkla onun yarısını veya iki katını tutar. Birinci kişi 1/4 olasılıkla 50'den büyük bir tek sayı tutar, ikinci kişi 0 olasılıkla o sayının 2 katını veya yarısını tutar. Birinci kişi 1/4 olasılıkla 50'den büyük veya eşit bir çift sayı tutar, ikinci kişi 1/100 olasılıkla o sayının yarısını katını tutar. O halde cevap

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{100}+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{100}=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}.$$

İkinci yol. Bu iki kişi bu sayıları akıldan tutmasınlar da zar atıyor olsunlar. Zar da altı yüzlü değil de yüz yüzlü olsa. ☺ İki zar atıldığından 100^2 farklı durum mümkündür. Geçerli durumlar (1, 2), (2, 4), (3, 6), …, (50, 100) ve bunların tersi olmak üzere 100 tanedir. O halde cevap $\frac{100}{100^2}=\frac{1}{100}$'dür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir tiyatroya giden 5 kişi şapkalarını vestiyere bırakıyor. Tiyatro çıkışında bu kişilere şapkaları rastgele veriliyor. Bu kişilerden yalnız ikisinin kendine ait olan şapkayı alma olasılığı nedir?*

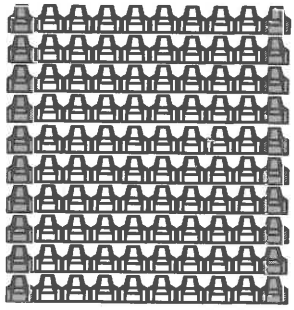
A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm: Bu soru da bir bozuk düzen problemidir. Var olan bozuk düzen formülü yerine ben açık açık çözeceğim. (A, B, C, D, E) sıralı beşlisini düşünelim ve bu harflerle değişik sıralı beşliler yazalım. Bir harf, ilk sıralı beşlideki yerini koruyorsa, o adam doğru şapkayı aldı demek olsun. Örneğin (A, B, D, E, C) demek, A ile B ilk baştaki dizilişte aynı yerlerinde olduklarından kendi şapkalarını almışlar, diğerleri ilk konumlarında olmadıklarından başkalarının şapkalarını almışlar demek olsun. Bu durum (A, B, E, C, D) ile de mümkün olabilirdi. Yani A ile B nin doğru şapka, diğerlerinin yanlış şapka aldığı iki durum var. A ile B yi sabit tuttuğumuz gibi, $C(5, 2) = 10$ değişik ikili yazılabilir. O halde $10\cdot 2 = 20$ tane istenen durum vardır. Toplam durumsa $5! = 120$'dir. O zaman istenilen olasılık 1/6 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek (Tübitak 2002). *Bir tiyatro salonunda 10'ar koltukluk 10 sıra bulunmaktadır ve koltuklar numaralandırılmıştır.*
Birbirinden habersiz bilet alan iki arkadaşın koltuklarının yan yana düşmesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{55}$ B) $\frac{1}{50}$ C) $\frac{2}{55}$ D) $\frac{1}{25}$ E) Hiçbiri



Çözüm: Arkadaşlardan ilkinin kenarlardaki koltuklardan birine oturduğunu farz edelim. 100 koltuğun 20'si kenarda olduğundan bunun olasılığı 1/5'tir. Kenarlardaki koltuğun sadece 1 tane komşusu olduğundan ikinci arkadaşın ilkinin yanına oturma olasılığı 1/99'dur. Şimdi de ilk arkadaşın kenarlardan birine oturmadığını düşünelim. Bunun olasılığı da 4/5'tir. Kenarda olmayan bir koltuğun 2 tane komşusu olduğundan ikinci arkadaşın ilkinin yanına oturma olasılığı 2/99'dur. O halde iki arkadaşın yan yana oturma olasılığı

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{99}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{99}=\frac{9}{495}=\frac{1}{55}$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A ve B bağımsız iki olaydır.*

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6} \text{ ve } P(A')=\frac{3}{8}$$

olduğuna göre $P(A'\cap B')$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{23}{80}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{11}{40}$ D) $\frac{25}{48}$ E) $\frac{3}{14}$

Çözüm: A ve B bağımsız iki olaysa

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')$$

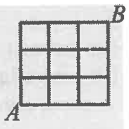
olur. Diğer yandan

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

bulunur. O halde ilk eşitlik gereği $\frac{1}{6}=\frac{5}{8}\cdot P(B)$ yani $P(B)=\frac{4}{15}$ olur. $P(B')=1-P(B)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$ olacağından $P(A'\cap B')=\frac{3}{8}\cdot\frac{11}{15}=\frac{11}{40}$ olur.

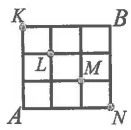
Doğru cevap: C.

Örnek. *9 eş kare parsele ayrılmış kare şeklindeki bir tarlanın A ve B köşelerinden birer fare aynı anda aynı hızlarla harekete başlıyorlar. A'dakinin hedefi en kısa yoldan B'ye varmak, B'dekinin hedefi de en kısa yoldan A'ya varmak olduğuna göre farelerin karşılaşma olasılığı kaçtır?*



A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{9}{200}$ C) $\frac{1}{200}$ D) $\frac{1}{400}$ E) $\frac{1}{800}$

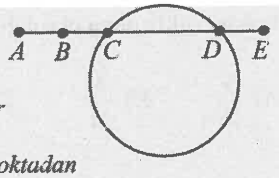
Çözüm: Her ikisi de hedefine ulaşacaksa 6 birim yol almalılar. Eğer karşılaşacaklarsa da, hızları aynı olduğundan her ikisi de 3 birim yol katetmiş olmalıdır. Şekil incelenirse karşılaşma noktasının *K*, *L*, *M*, *N* noktalarından birinin olduğu görülür. Önce *K*'de karşılaşma olasılıklarını hesaplayalım. Şekil simetrik olduğundan bulduğumuz cevap *N*'de karşılaşma olasılığının da cevabıdır. Her iki hareketli için de $\frac{6!}{3!3!}=20$ seçenek olduğundan *K*'den geçme olasılıkları 1/20'dir. Her ikisinin de *K*'de karşılaşma olasılığıysa $\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$ olur. Şimdi *L*'ye (*M* için de durum aynıdır) bakalım. Her ikisi de *L*'ye 3 farklı yolla gelebilirler. Demek ki ikisinin *L*'de karşılaşma olasılığı $\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20}=\frac{9}{400}$ olur. Son olarak *K*, *L*, *M*, *N* noktaları için bulduğumuz olasılıkları toplayacağız:



$$\frac{1}{400}+\frac{1}{400}+\frac{9}{400}+\frac{9}{400}=\frac{20}{400}=\frac{1}{20}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1990 ÖYS]. *Şekildeki A, B, C, D, E noktaları bir doğru ve ayrıca C, D noktaları çember üzerindedir. Bu noktalardan seçilecek olan herhangi iki noktadan yalnız birinin çembere ait olma olasılığı kaçtır?*

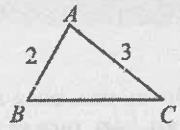


A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{7}{10}$

Çözüm: Toplam 5 nokta olsuğundan herhangi ikisinin seçimi $C(5,\ 2) = 10$ değişik şekilde yapılabilir. Diğer yandan biri çember üzerinde biri çember üzerinde olmayan 6 nokta çifti vardır. *C* ve *D* noktalarının *A*, *B*, *E* noktalarıyla oluşturdukları 6 çiftten bahsediyoruz. O halde olasılık 6/10 yani 3/5'tir.

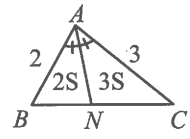
Doğru cevap: C.

Örnek. *$|AB| = 2$ br ve $|AC| = 3$ br olan ABC üçgensel levhasından bir hedef tahtası yapılmıştır. Atılan merminin tahtaya değdiği bilindiğine göre [AB]'ye göre [AC]'ye daha yakın değmiş olma olasılığı kaçtır?*



A) 1 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

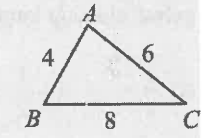
Çözüm: *A*'ya ait iç açıortayını çizelim. [*AN*] üzerindeki her nokta [*AB*] ve [*AC*] kenarlarına eşit uzaklıkta bulunduğundan, merminin [*AN*]'nin sağ tarafına değmesi lazım. Bu da sağdaki alanın, toplam alana oranıyla alakalıdır. İç açıortay teoreminden $\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{2}{3}$ diye $A(ABN) = 25$ ise $A(ANC) = 35$ olur.



O halde cevap $\frac{35}{55}=\frac{3}{5}$'tir.

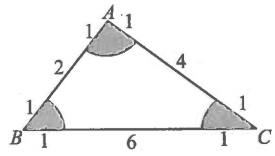
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC üçgensel bölgesine ait noktalardan rastgele seçilen bir tanesinin üçgenin herhangi bir köşesine olan uzaklığının 1 birimden küçük veya eşit olma olasılığı kaç π'dir?*



A) $\frac{\sqrt{15}}{90}$ B) $\frac{\sqrt{17}}{90}$ C) $\frac{\sqrt{19}}{90}$ D) $\frac{\sqrt{21}}{90}$ E) $\frac{\sqrt{23}}{90}$

Çözüm: Noktanın yukarda taranmış 1 br. yarıçaplı daire dilimlerinden alınmış olması gerekir. Taralı alanlar toplamı, üçgensel bölge alanının kaçta kaçıysa, olasılık da o kadardır.



Üç daire diliminin alanları toplamı 1 br. yarıçaplı bir yarım daire yapar ki, bunun alanı da $\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$'dir. Diğer yandan üçgensel bölge alanı da Heron formülünden $3\sqrt{15}$ bulunur. O halde cevap

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{3\sqrt{15}}=\frac{\pi}{6\sqrt{15}}=\frac{\pi\sqrt{15}}{90}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir madeni para art arda 4 defa atıldığında sırasıyla yazı, yazı, tura ve yazı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

2.
Bir madeni para art arda 4 defa atıldığında 3 defa yazı 1 defa da tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

3.
Bir zar havaya atıldığında, üst yüze gelen sayının 2 ile tam bölünebilen bir sayı veya 3'ten büyük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

4.
Bir zar art arda iki kez atıldığında, üst yüze gelen sayının birinci atışta 4, ikinci atışta tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{9}$

5.
İki zarın birlikte atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların çarpımının 12 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{9}$

6.
Bir torbada 4 yeşil, 5 mavi, 6 sarı top vardır.
Bu torbadan rastgele çekilen bir topun yeşil veya mavi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{9}$

7.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
kümesinin alt kümelerinden biri seçildiğinde, seçilen bu alt kümenin 3 elemanlı bir alt küme olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

8.
Kerim ile Tufan'ında aralarında bulunduğu 7 kişiden 4'ü Ankara'ya, 3'ü İzmir'e gönderilecektir.
Kerim ile Tufan'ın farklı şehirlere gönderilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{7}$

9.
Bir torbada 2 mavi, 4 sarı, 3 siyah top vardır.
Bu torbadan aynı anda 3 top çekildiğinde üçününde farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{56}$ B) $\frac{4}{21}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

10.
İki madeni para ile bir zar birlikte atılıyor.
Paralardan en az birinin tura ve zarın üst yüzüne 5'ten küçük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

1.A 2.E 3.D 4.B 5.C 6.B 7.D 8.B 9.C 10.D

CEVAPLI TEST 2

1.
Birbirinden farklı 4 pozitif, 6 negatif sayı arasından 2 sayı seçildiğinde, bu sayıların çarpımının pozitif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{7}{30}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{1}{10}$

2.
İki basamaklı doğal sayılar arasından rastgele seçilen bir sayının 3 veya 5 ile bölünen bir sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{7}{30}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{1}{10}$

3.
Bir kutuda kırmızı ve mavi bilyeler vardır. Bu torbadaki kırmızı ve mavi bilyelerin sayısı eşittir.
Bu kutudan art arda geri konulmaksızın iki bilye çekildiğinde ikisinin de mavi renkli olma olasılığı $\frac{6}{25}$ olduğuna göre kutuda başlangıçta toplam kaç bilye vardır?

A) 25 B) 26 C) 30 D) 50 E) 52

4.
Bir sınıfta 12 kız ve 15 erkek öğrenci vardır. Kız öğrencilerin 3'ü, erkek öğrencilerin 6'sı gözlüklüdür.
Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya gözlüklü olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{9}$

5.
A ve B aynı örneklem uzaya ait iki küme olmak üzere

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B')=\frac{5}{12},\ P(A'\cap B')=\frac{1}{12}$$

olduğuna göre P(A ∩ B) kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{3}{4}$

6.
Bir zar üç kez atıldığında, bu atışların en az birinde üst yüze gelen sayının 6 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{31}{36}$ B) $\frac{25}{36}$ C) $\frac{25}{216}$ D) $\frac{91}{216}$ E) $\frac{125}{216}$

7.
İki madeni para ile bir zar birlikte atılıyor.
Paralarda en az birinin tura veya zarın üst yüzüne 5'ten küçük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{5}{6}$

8.
Bir kutuda 4 siyah, 5 beyaz ve 3 mavi bilye vardır. Bu kutudan alınan bilye yerine konulmaksızın, üç kez birer bilye alınıyor.
Alınan bilyelerin 1.sinin siyah, 2.sinin beyaz ve 3.sünün mavi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{22}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{3}{22}$ D) $\frac{2}{11}$ E) $\frac{5}{22}$

9.
Bir kutuda 4 siyah, 5 beyaz ve 3 mavi bilye vardır. Bu kutudan alınan bilye yerine konulmak koşuluyla, üç kez birer bilye alınıyor.
Her çekişte farklı renk bilye gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{24}$

10.

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı iki veya üç basamaklı doğal sayılar yazılıyor.
Bu sayılardan biri seçildiğinde bu sayının iki basamaklı bir çift sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

1.D 2.D 3.B 4.D 5.B 6.D 7.D 8.A 9.E 10.B

CEVAPLI TEST 3

1.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinden rastgele alınan iki rakamın asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{9}{10}$

2.

Bir torbada 5 beyaz, 6 yeşil, 2 mavi top vardır.

Torbadan rastgele seçilen bir topun yeşil gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{12}{13}$

3.

Bir torbada 4 siyah, 5 beyaz bilye vardır.

Geri bırakılmak şartıyla art arda alınan 2 bilyenin farklı renkte olmaları olasılığı kaçtır?

A) $\frac{20}{45}$ B) $\frac{17}{81}$ C) $\frac{15}{81}$ D) $\frac{40}{81}$ E) $\frac{20}{81}$

4.

Bir torbada 4 yeşil, 5 mavi, 3 beyaz bilye vardır.

Torbadan rastgele seçilen bir bilyenin beyaz ya da yeşil olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{12}$ B) $\frac{3}{12}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{5}{12}$

5.

6 matematik öğretmeni ve 4 tarih öğretmeni arasından 3 kişilik bir sınav komisyonu seçilecektir.

Komisyonda en az 2 matematik öğretmeni bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{29}{30}$ B) $\frac{23}{30}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

6.

10 elektrik ampulünden 4 tanesi bozuktur.

Rastgele seçilen 3 elektrik ampulünden en az ikisinin bozuk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

7.

Bir zar ile bir madeni para birlikte havaya atılıyor.

Paranın yazı ve zarın üzerindeki sayının asal gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

8.

İki kutunun birisinde 5 mavi, 4 yeşil; diğerindeyse 4 mavi, 5 yeşil kalem vardır.

Rastgele bir kutudan, rastgele bir kalem seçildiğinde seçilen kalemin yeşil olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{4}$

9.

Bir torbada 4 siyah, 3 mavi ve 8 kırmızı bilye bulunmaktadır.

Rastgele alınan 3 bilyeden her birinin ayrı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{12}{35}$ C) $\frac{32}{91}$ D) $\frac{96}{455}$ E) $\frac{98}{455}$

10.

Bir torbada aynı cins 6 mavi ve 8 sarı top vardır.

Rastgele seçilen 3 toptan en az birinin mavi olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{11}{13}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{1}{4}$

1.C 2.D 3.D 4.C 5.D 6.B 7.E 8.A 9.D 10.B

CEVAPLI TEST 4

1.
Bir para ile bir zar birlikte havaya atılıyor.
Paranın yazı, zarında 3'ten büyük bir sayı gelmesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

2.
Bir torbada eşit sayıda beyaz ve mavi kalem bulunmaktadır. **Bir defada alınan iki kalemin ikisinin de beyaz olma ihtimali $\frac{7}{30}$ olduğuna göre torbadaki mavi kalem sayısı kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 16

3.
Bir torbada 1'den 7'ye kadar numaralandırılmış 7 tane top vardır.
Rastgele çekilecek iki topun numaraları toplamlarının 7'den büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{13}{21}$

4.
Bir sepette bulunan 15 yumurtadan 6'sı bozuktur.
Rastgele alınan 4 yumurtanın 2'sinin bozuk olma ihtimali kaçtır?

A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $\frac{72}{105}$ D) $\frac{71}{91}$ E) $\frac{72}{91}$

5.
Ali'nin ÖSS'yi kazanma ihtimali $\frac{3}{5}$, Suat'ın kazanma ihtimali $\frac{4}{7}$ **olduğuna göre ÖSS'yi Ali veya Suat'ın kazanma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{6}{35}$ B) $\frac{21}{35}$ C) $\frac{27}{37}$ D) $\frac{29}{35}$ E) $\frac{31}{35}$

6.
8 kişiden 3 kişilik bir ekip rastgele seçilirse Yasin adlı kişiyle Turgay adlı kişinin aynı grupta olmama ihtimali kaçtır?

A) $\frac{29}{56}$ B) $\frac{15}{28}$ C) $\frac{14}{57}$ D) $\frac{16}{57}$ E) $\frac{113}{28}$

7.
3 madeni para aynı anda havaya atılıyor.
En az bir kere tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

8.
Bir torbada 6 mavi ve 3 yeşil bilye vardır.
Torbadan çekilen bilye geri bırakılmamak koşuluyla art arda çekilen iki bilyenin birisinin mavi, diğerinin yeşil olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

9.
4 erkek ve 4 kız yan yana rastgele diziliyorlar.
Erkeklerin kendi aralarında yan yana ve kızların da kendi aralarında yan yana gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{35}$ B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{3}{35}$ D) $\frac{4}{35}$ E) $\frac{6}{35}$

10.
A, B ve C gibi 3 at yarışacaktır. A'nın B'ye göre iki misli, B'nin C'ye göre üç misli kazanma şansı olduğu sanılıyor. **Buna göre C'nin yarışı kazanma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{9}{10}$

1.E 2.C 3.D 4.E 5.D 6.B 7.B 8.C 9.A 10.A

CEVAPLI TEST 5

1.
Bir torbada 3 mavi, 3 kırmızı, 4 siyah bilye vardır.
Rastgele alınan bir bilyenin kırmızı veya mavi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

2.
İki zar ile bir madeni para birlikte atılıyor.
Zarların aynı ve paranın tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{18}$

3.
Bir kutuda 5 beyaz ve 6 siyah kalem bulunmaktadır.
Rastgele çekilen iki kalemin farklı renklerde olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{4}{11}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{7}{11}$

4.
Bir torbadaki beyaz bilyelerin sayısı siyah bilyelerin sayısına eşittir.
İki renk bilyenin bulunduğu bu torbadan geri konulmamak üzere art arda çekilen iki bilyenin ikisinin de beyaz olma olasılığı $\frac{1}{5}$ olduğuna göre torbada kaç tane siyah bilye vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.
Bir torbada 3 beyaz, 4 kırmızı ve 5 siyah top vardır.
Aynı anda çekilen üç topun, ikisinin beyaz, birinin siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{1}{22}$ C) $\frac{3}{22}$ D) $\frac{4}{33}$ E) $\frac{3}{44}$

6.
Bir zar art arda iki kez atılıyor.
Üst yüze gelen sayıların çarpımının tek sayı olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{1}{18}$

7.
5 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişinin karı - koca olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{15}$

8.
5 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişiden birinin bay diğerinin bayan olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{2}{3}$

9.
Bir madeni para art arda 4 kez atılıyor.
Hepsinin de aynı gelmesi olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

10.
Hileli bir zarın 1 gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ 'tür.
Bu zar 3 kez atıldığında sadece 1 kez 1 gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{2}{27}$ C) $\frac{4}{27}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{8}{9}$

1.C 2.D 3.D 4.B 5.E 6.A 7.D 8.D 9.D 10.D

CEVAPLI TEST 6

1.
Yapılan bir deneyle ilgili A, B, C biçiminde üç ayrık sonuç olasıdır.
A'nın meydana gelme olasılığı 1/4 ve B'nin meydana gelme olasılığı 1/3 olduğuna göre C'nin meydana gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{3}{20}$

2.
Sedat arkadaşının telefon numarasının son üç rakamını hatırlayamamaktadır.
Hatırlayamadığı kısımda bir tane 9 olduğunu ve numaranın çift bir rakam ile bittiğini bildiğine göre rastgele tuşlayacağı telefonun doğru numara olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{72}$ C) $\frac{1}{84}$ D) $\frac{1}{90}$ E) $\frac{2}{45}$

3.
4 arkadaş girişte berelerini vestiyere bırakıyor.
Çıkışta her birine bir bere verildiğinde, herkesin kendi beresini alması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{24}$

4.
4 arkadaş girişte eldivenlerini vestiyere bırakıyor.
Çıkışta her birine rastgele 2 eldiven veriliyor. Herkesin kendi eldivenini alması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8!}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{7!}$ E) $\frac{2}{7!}$

5.
A torbasında 3 kırmızı, 5 mavi bilye, B torbasında 4 kırmızı, 3 mavi bilye bulunmaktadır.
A torbasından çekilen bir bilye B torbasına atıldıktan sonra, B torbasından çekilen bir bilyenin mavi olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{29}{64}$ B) $\frac{23}{48}$ C) $\frac{2}{11}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{4}{21}$

6.
Bir zar art arda iki kez atıldığında üst yüze aynı sayının bilindiğine göre üste gelen sayılarının toplamının 5'ten küçük gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

7.
7 madeni para havaya atıldığında üç tanesinin tura, dört tanesinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{21}{32}$ B) $\frac{21}{64}$ C) $\frac{35}{64}$ D) $\frac{35}{128}$ E) $\frac{35}{256}$

8.
Bir kasadaki 42 elmanın 27'si kırmızı, 15'i sarıdır. Kırmızı elmaların 12'si, sarı elmaların 3'ü çürüktür.
Kasadan rastgele seçilen bir elmanın sağlam olduğu bilindiğine göre sarı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{10}$

9.
A torbasında 3 mavi, 5 kırmızı bilye, B torbasında 1 mavi, 3 kırmızı bilye vardır. A torbasının seçilme olasılığı $\frac{1}{3}$, B torbasının seçilme olasılığı $\frac{2}{3}$'tür.
Rastgele alınan bir torbadan, rastgele seçilen bir bilyenin mavi geldiği bilindiğine göre A torbasından alınmış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{4}$

10.
Bir deneye ait E örnek uzayı, $E = \{A, B, C\}$ dir. A, B, C ayrık olaylar ve

$$2 \cdot P(A) = 3 \cdot P(B) = 6 \cdot P(C)$$

olduğuna göre $P(A \cup B)$ kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

1.C 2.D 3.E 4.E 5.A 6.B 7.D 8.C 9.B 10.E

CEVAPLI TEST 7

1.
A ve B, E örnek uzayına ait iki olaydır.

$$P(A)=\frac{3}{5}, P(B')=\frac{7}{20}, P(A\cup B)=\frac{17}{20}$$

olduğuna göre $P(B-A)$ kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{10}$

2.
Bir torbada 3 sarı, 4 mavi ve 5 kırmızı top vardır.
Torbadan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun sarı veya kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

3.
Bir sınıftaki öğrencilerin % 40'ı erkektir. Kızların % 60'ı erkeklerin ise % 30'u gözlüklüdür.
Sınıftan rastgele bir öğrenci seçiliyor. Seçilen öğrencinin gözlüklü veya kız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{16}{25}$ C) $\frac{17}{25}$ D) $\frac{18}{25}$ E) $\frac{4}{5}$

4.
Bir madeni para art arda beş kez havaya atılıyor. En az 3 kez yazı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{7}{32}$

5.
Bir zarın iki yüzünde T, iki yüzünde A, iki yüzünde de L harfleri yazılıdır.
Bu zar bir kez atıldığında, yan yüzlerde ve üst yüzde sırasına ve yönüne bakılmaksızın T, A, L, A, T harflerinin görülme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

6.
Bir torbada 6 tane beyaz, 4 tane siyah top vardır.
Torbadan aynı anda çekilen iki topun ikisinin de aynı renk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{3}{5}$

7.
Bir kutuda 3 siyah, 4 beyaz, 2 kırmızı bilye vardır.
Torbadan rastgele seçilen üç bilyenin üçünün de farklı renk olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

8.
Eşit sayıda kız ve erkek öğrencilerin bulunduğu bir öğrenci grubu içinden seçilen iki öğrenciden birinin kız diğerinin erkek olma olasılığı $\frac{6}{11}$ 'dir.
Buna göre bu grupta kaç öğrenci vardır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

9.
Aralarında Ali ile Burhan'ın da olduğu 5 kişi bir sıraya sıralanacaktır.
Ali ile Burhan'ın yan yana gelmeme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

10.
6 çift ayakkabı arasından rastgele 4 ayakkabı seçiliyor.
Seçilen ayakkabıların iki tane çift oluşturma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{31}$ C) $\frac{1}{32}$ D) $\frac{1}{33}$ E) $\frac{1}{34}$

1.C 2.B 3.D 4.A 5.B 6.C 7.E 8.A 9.B 10.D

CEVAPLI TEST 8

1.

1		
		6

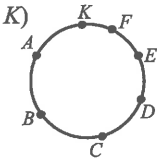
1, 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamları şekildeki gibi 6 kutuya yerleştirilecektir.
1 rakamının ilk kutuya ve 6 rakamının son kutuya gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{20}$ D) $\frac{1}{30}$ E) $\frac{1}{40}$

2.
ÖSS'yi Neslihan, Arda ve Sezen isimli üç öğrencinin kazanma olasılıkları sırasıyla $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$'tür.
ÖSS'yi bu öğrencilerden en az ikisinin kazanma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{24}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{13}{24}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{5}{8}$

3.
Şekildeki 7 noktadan (A, B, C, D, E, F, K) herhangi üçü seçiliyor.
Seçilen noktaların bir köşesi A olan bir üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?



A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{2}{35}$ D) $\frac{3}{35}$ E) $\frac{6}{35}$

4.
Bir torbada 3 siyah, 5 beyaz top vardır. Torbadan, geri atılmamak koşulu ile iki kez birer top çekiliyor.
İkinci topun siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

5.
Bir çift zar atılıyor.
Üst yüze gelen sayılar toplamının 5'ten küçük olduğu bilindiğine göre 4 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

6.
30 kişilik bir sınıfın 16'sı kız öğrenci olup kızların $\frac{3}{8}$'i mavi gözlüdür. Toplam mavi gözlü öğrenci sayısı 10'dur.
Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin mavi gözlü olduğu bilindiğine göre erkek öğrenci olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{20}$

7.
Bir sınıfta 40 öğrenci vardır. Bunlardan 15'i matematikten, 12'si kimyadan ve 4'ü hem matematik hem de kimyadan bütünlemeye kalmıştır. Rastgele seçilen bir öğrencinin matematikten bütünlemeye kaldığı biliniyor.
Bu öğrencinin kimyadan da bütünlemeye kalmış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{10}$

8.
İki zar aynı anda atılıyor.
Zarların üst yüzeylerine gelen sayıların toplamının çift sayı olduğu bilindiğine göre zarlardan her ikisinin de üst yüzüne gelen sayıların tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

9.
Bir torbada 1'den 9'a kadar (9 dahil) numaralandırılmış kartlar bulunmaktadır.
Rastgele seçilen iki karttaki sayıların toplamı çift sayı olduğuna göre ikisinin de tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

10.
Analitik düzlemden rastgele seçilen bir $A(p, q)$ noktasının **$p > q$ ve $p > 0$ koşullarını sağlama olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

1. D 2. C 3. A 4. A 5. E 6. A 7. A 8. B 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 9

1.
Bir atölyede üretilen malların %30'u A makinesi tarafından %70'i B makinesi tarafından üretilmektedir. A makinesinin ürettiği malların %10'u, B makinesinin ürettiği malların da %20'si hatalıdır.
Rastgele seçilen bir malın hatalı olduğu bilindiğine göre A makinesi tarafından üretilmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{17}$ B) $\frac{4}{17}$ C) $\frac{5}{17}$ D) $\frac{6}{17}$ E) $\frac{7}{17}$

2.
İçinde 2 sarı 4 kırmızı bilye bulunan birinci torbadan rastgele bir top çekilerek bakılmaksızın, içinde 3 sarı 2 kırmızı bilye bulunan ikinci torbaya atılıyor. Sonra ikinci torbadan bir bilye çekiliyor.
Bu bilyenin kırmızı olduğu bilindiğine göre, ilk torbadan ikinci torbaya sarı bilye atılmış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{7}{9}$

3.
Rastgele seçilen iki basamaklı bir sayının basamaklarındaki rakamların farklı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

4.
Beş basamaklı *abcd*4 sayısının 4 ile bölünebilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

5.
İçinde beyaz ve yeşil bilyelerin bulunduğu bir torbadaki beyaz bilyelerin sayısı yeşil bilyelerin sayısının üç katıdır.
Torbadan çekilen bilye yerine konmaksızın arka arkaya çekilen iki bilyenin de yeşil olma olasılığı $\frac{1}{19}$ olduğuna göre torbada kaç beyaz bilye vardır?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

6.
Hilesiz bir zarın iki yüzü kırmızı, üç yüzü sarı, bir yüzü de mavi boyalıdır. Bu zar 3 kez ard arda atılıyor.
Her seferinde değişik bir rengin üst yüze gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{9}$

7.
A ve B, E örnek uzayda tanımlı iki olaydır.

$$P(A)=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $P(A\cup B)=\frac{11}{20}$ B) $P(A')=\frac{3}{5}$ C) $P(A-B)=\frac{3}{10}$

D) $P(A\cup B)'=\frac{1}{2}$ E) $P(B\cap A')=\frac{3}{20}$

8.
Bir sınıftaki kız ve erkek öğrenci sayıları sırasıyla 3.2 ve 5.6 ondalık sayılarıyla orantılıdır.
Bu sınıftan bir kız öğrenci ayrılıp, daha sonra sınıfa 2 erkek öğrenci katıldığında rastgele seçilen bir öğrencinin kız öğrenci olma olasılığı $\frac{1}{3}$ olduğuna göre başlangıçta bu sınıfta kaç kişi vardı?

A) 55 B) 46 C) 44 D) 35 E) 33

9.
İlk 100 sayma sayısından rastgele seçilen bir sayının en az bir basamağındaki rakamın 9 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{11}{100}$ C) $\frac{3}{20}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{19}{100}$

10.
Bir torbada bulunan aynı büyüklükteki sarı ve kırmızı bilyelerden bir kırmızı bilye çekme olasılığı, bir sarı bilye çekme olasılığının üç katıdır.
Aynı anda rastgele çekilen iki bilyenin değişik renkli olmaları olasılığı $\frac{2}{5}$ olduğuna göre torbada toplam kaç bilye vardır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

1.A 2.B 3.A 4.E 5.D 6.D 7.D 8.C 9.E 10.E

CEVAPLI TEST 10

1.
Bir öğrenci 41'den küçük rastgele bir pozitif tam sayı yazıyor.
Bu sayının 39 ile aralarında asal olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

2.
İki zardan birinin 2 yüzü kırmızı, 2 yüzü beyaz, 1 yüzü mavi ve 1 yüzü siyahtır. İkincinin olduğuna göre 3 yüzü beyaz, 2 yüzü siyah, 1 yüzü kırmızıdır. Önce bir para, sonra bu zarlardan biri atılıyor.
Para tura gelince ikinci zar, para yazı gelince birinci zar atıldığına göre zarda üste gelen yüzün beyaz olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

3.
Bir öğrenciye 3 seçenekli 5 soru soruluyor. Öğrenci bu sınavda ard arda aynı seçeneğin doğru yanıt olmadığını bilmektedir.
Bu sınavda seçenekleri rastgele işaretleyen bu öğrencinin 5 sorunun beşini de doğru yanıtlama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{54}$ B) $\frac{1}{48}$ C) $\frac{1}{36}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{25}$

4.
Bir avcının hedefi vurma olasılığı $\frac{3}{4}$'tür.
Buna göre bu avcının en çok 3 atışta hedefi vurabilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{63}{64}$ B) $\frac{31}{32}$ C) $\frac{61}{64}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{3}{64}$

5.
$E=(a,b,c)$ örnek uzayı üzerinde tanımlı P olasılık fonksiyonunda

$$P(a)+P(b)=0.6$$
$$P(b)\cdot P(c)=0.1$$

olduğuna göre $P(a)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0.15 B) 0.2 C) 0.25 D) 0.3 E) 0.35

6.
Bir sınıfta öğrenciler sıralara ikişer ikişer oturuyorlar. Bu sınıftan rastgele seçilen iki öğrencinin aynı sınavda oturan öğrenciler olması olasılığı $\frac{1}{21}$'dir.
Buna göre sınıf kaç kişidir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 25 E) 28

7.
Bir deneyin istenilen sonucu verme olasılığı $\frac{2}{3}$'tür.
Bu deneyin ard arda 3 kez yapıldığında yalnız 3. denemede istenilen sonucu vermiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{2}{27}$ C) $\frac{4}{27}$ D) $\frac{8}{27}$ E)1

8.
Atılan bir okun bir kenar uzunluğu 4 cm olan karesel bölge şeklindeki tahtaya saplandığı bilinmektedir. Bu kare tahtanın üzerine, karenin merkezini merkez kabul eden 2br yarıçaplı bir çember çizilmiştir.
Buna göre atılan bir okun bu çemberin iç bölgesine isabet etmiş olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{\pi}{16}$ E) Hesaplanamaz

9.
Yalnızca 3 haneden oluşan bir çeyrek bilete en büyük ikramiyenin çıkma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{10000}$ B) $\frac{1}{1000}$ C) $\frac{1}{500}$ D) $\frac{1}{250}$ E) $\frac{1}{100}$

10.
Cebinizde 4 tane 50 kuruş, 3 tane 1 TL ve 5 tane 25 kuruş yani toplam 12 tane madeni para vardır. Bu madeni paralarla 3,5 TL'lik hesap ödenecektir.
Cebinizden rastgele çekeceğiniz 5 madeni parayla bu hesabı doğru ödeme olasılığınız kaçtır?

A) $\frac{1}{792}$ B) $\frac{1}{396}$ C) $\frac{1}{198}$ D) $\frac{1}{99}$ E) $\frac{1}{9}$

1.C 2.E 3.B 4.A 5.E 6.C 7.B 8.B 9.D 10.B

Cebir Notları

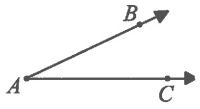
Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Açı ve Açı Ölçüsü Birimleri

Trigonometri demek geometri demektir, geometri demek de trigonometri. Etle tırnak neyse, o! Ayrılamazlar. Bu yüzden çok temel bazı geometrik bilgileri bildiğinizi varsayıyoruz ama olmazsa olmaz önemli bilgileri de n'olur n'olmaz diye veriyoruz. Başlıyoruz. Kolay gelsin!

Açı. Başlangıç noktaları aynı iki ışının birleşimine **açı** denir.

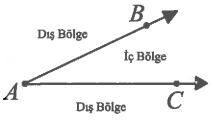
Sağdaki şekilden neye benzediğini görebilirsiniz.
A noktaları ortak olan AB ve AC ışınları birleşerek CAB açısını oluşturmuşlar.



Bu açı $\widehat{CAB}$ yazarak gösterilir ama geometride BAC ya da A açısı da denebilir. Sıranın değil ama ortadaki köşenin önemli olduğuna dikkat ediniz. Sıranın önemli olduğu özel durumları da inceleyeceğiz.

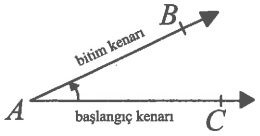
A noktasına **açının köşesi**, AC ve AB ışınlarına da **açının kolları** veya **kenarları** denir.

Açı bir bölge değildir, sadece belirttiği (üzerinde bulunduğu) düzlemi bölgelere ayıran iki ışının birleşimidir. Yandaki şekilde gösterdiğimiz üzere, açının kolları arasında kalan bölgeye **iç bölge**, dışarıda kalan bölgeye de **dış bölge** denir.

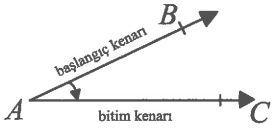


Açı ile iç bölgesinin birleşimi de **açısal bölge** diye isimlendirilir. Açısal bölge de $\left(\widehat{CAB}\right)$ diye gösterilir.

Yönlü Açı. Geometride değil ama trigonometride açının kenarları arasında da bir ayrım yapılır: Biri **başlangıç kenarı**, diğeri **bitim kenarı** diye bilinir. Hangisinin hangisi olduğuna şöyle karar veririz:



Pozitif yönlü CAB açısı



Negatif yönlü BAC açısı

Başlangıç kenarından bitim kenarına ilerlerken saatin ters yönünde gidiyorsak (üst soldaki şekil) açıya **pozitif yönlü açı**, saatle aynı yönde gidiyorsak (üst sağdaki şekil) açıya **negatif yönlü açı** deriz. Yönlü açıların yazımında sıra önemlidir!

Açı Ölçüsü. Üzülerek ifade edeyim ki; daha açının ne olduğunu bilmeyen onlarca yıllık onlarca geometri öğretmenimiz var. Bildiklerini doğru zanneden desem sanırım daha doğru olacak. Tıpkı benim de mesleğimin ilk yıllarında yaptığım gibi... İşin garip tarafı hepsi de aynı yanlışı doğru biliyor.

İki ışının arasına köşeye yakın bir yay çizip (bizim az önceki şekilde yaptığımız gibi), ''İşte, açı budur!'' diyorlar. Halbuki o çizdiğimiz çizgi, yazacağımız açı ölçüsünün hangi açıya ait olduğunu belirtmek, yani diğer açılarla karışmasını önlemek içindir. Nasıl ki; 'kalem' ayrı şeydir, 'kalemin uzunluğu' ayrı şey, bu da onun gibi bir şey. ''Açı'' başka şeydir, ''açının ölçüsü'' başka...

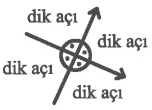
Açının kolları arasındaki açıklık büyüdükçe açının ölçüsünün arttığını, küçüldükçe azaldığını anlamak ve anlatmak için bu açıklığın niceliğini yani büyüklüğünü bir sayıya karşılık getirmemiz gerekir. Bu sayıya da **açının ölçüsü** deriz.

Bir açının ölçüsünü biz önüne m koyarak göstereceğiz. $m(BAC)$, $m(A)$ gibi... Fakat s veya α simgeleri koyanları da görüyoruz. Görmemezlikten geliyoruz. ☺

Bir açının ölçüsü, günümüzde üç değişik ölçüm sistemiyle yapılmaktadır. Tek bir açının ölçüsüne farklı üç sayının verilebilmesi sizi şaşırtmasın. Nasıl ki, Adana ile Ankara arasındaki mesafe sana-bana göre yaklaşık 500 km ama elin gavuruna göre 300 mil olabiliyor, bu da onun gibi bir şey. İki şehir arasındaki mesafeye bir şey olduğu yok, uzayıp kısalmıyor ama o uzunluk farklı farklı anlatılabiliyor. Başkaları gibi 5 saatlik yol demiyorsanız, sorun yok...

İşte insanoğlunun uzunluk ölçülerine verdiği km veya mil birimleri gibi, biz de açı ölçülerine farklı birimler vereceğiz. Bunlar ″derece″ ve ″radyan″ olacak. İçlerinde en yaygın kullanımda olanı derece olduğundan, dereceyi anlatmakla başlayalım. Tabi önce bir açı tanımlamalıyız ki, ölçüsüne değer verebilelim.

Dik Açı. İki doğru birbirini kestiğinde oluşan dört açının dördü de eş oluyorsa, *doğrular birbirini dik kesiyor* denir. Açılara da **dik açı** adı verilir. İki dik açı bir **doğru açı**, dört dik açı da bir **tam açı** oluşturur.



Dik açının ölçüsü 90 derece (90°) olarak tanımlanmıştır. Bu durumda doğru açının ölçüsü 180°, tam açının ölçüsü de 360° olur.

Genel olarak, ölçüsü 0° olan açıya **yoz açı**, (0°, 90°) aralığındaki açıya **dar açı**, 90° olana **dik açı**, (90°, 180°) aralığındakine **geniş açı**, 180° olana **doğru açı** ve 360° olanına da **tam açı** denir.

Bundan sonra ölçüsü (180°, 360°) aralığındaki açılara **üstün** diyeceğiz, 180°'den ne kadar büyükse ona göre özel isimler vereceğiz: (180°, 270°) aralığındaki açılara **üstün dar açı**, 270° olanına **üstün dik açı**, (270°, 360°) aralığındakilere **üstün geniş açı** denir.

Birçok kaynakta, bir açının ölçüsünün derece cinsinden değerinin 0 ile 180 arasında değiştiği yazılıdır. Ama görüldüğü gibi ölçüsü 180'den büyük olan açılar da varmış, peki neden öyle yazılıyor sizce? Hatta siz de ''Ama ben 330 derece gibi 180 dereceden daha büyük ve –30 derece gibi 0 dereceden daha küçük açı ölçüleri de gördüm'' diyor olabilirsiniz. Doğrudur, ölçülerde 0 ile 180 aralığının dışına çıkılabilir, çıkılması açının yönüyle yani başlangıç bitim kenarlarıyla ilgilidir, yani hangi amaca hizmet edildiğini bilmek gerekir. Yoksa ölçüsü –30 derece ve 330 derece olan açıların, ölçüsü 30 derece olan açıyla görünüş olarak (kollar arasındaki açıklığın büyüklüğü olarak) farkı yoktur.

Derecenin Alt Birimleri. Bir tam açının 360'da birine **1 derecelik açı** denir ve 1° şeklinde gösterilir.

Her ne kadar 1 derecelik açı ölçüsünün katlarını kullanarak günlük hayatta dertlerimizi anlatabiliyorsak da çok hassas durumlarda daha hassas açı ölçülerine gereksiniriz. Birer ışınları ortak 22° ölçüye sahip bir açıyla 23° ölçüye sahip bir açı arasında hiç mi boşluk yoktur? Elbette vardır, gözle göremesen de vardır. O boşluğa da bir ışın çizsek ölçüsü 22° ile 23° arasında olan bir açı çizmiş oluruz. Bunun için de 1°'lik ölçünün de parçalanması gerekir. Matematikçiler bu parçalamayı yapıp, adını da koymuşlar.

1 derecenin 60'da birine **1 dakika** denir ve 1′ yazarak gösterilir.

Benzer şekilde, 1 dakikalık açı da parçalanabilir. 1 dakikanın 60'da birine de **1 saniye** denir ve 1″ ile gösterilir.

Bu durumda

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

olacağına dikkat ediniz.

Soru Tipi. *Bir açının ölçüsü derece-dakika-saniye ölçü birimlerinden biri cinsinden verilerek diğer iki birim cinsinden değeri sorulur.*

Çözüm yolu: Derece 60'la çarpılırsa dakika, dakika 60'la çarpılırsa saniye bulunur. O halde derece 3600'le çarpılırsa saniye bulunur.
Saniye 60'a bölünürse dakika, dakika da 60'a bölünürse derece bulunur. O halde saniye 3600'a bölünürse derece bulunur.

Örnek. *60 derecelik açı kaç dakikalıktır?*

A) 1/3600 B) 1/60 C) 1 D) 60 E) 3600

Çözüm: 1 derece, 60 dakikaya eşit olduğundan, 60 derece 60·60 = 3600 dakikaya eşit olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *54000″ lik açı kaç derecedir?*

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Çözüm: Saniye 60'a bölünürse dakika, dakika 60'a bölünürse de derece bulunur. Dediklerimizi yapalım:

$$\frac{54000''}{60} = 900' \text{ ve } \frac{900'}{60} = 15^\circ$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya birbirlerinin tümleri denir. Bu tanıma göre, ölçüsü 23° 35′ 47″ olan bir açının tümlerinin ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 67° 24′ 13″ B) 66° 23′ 47″ C) 66° 24′ 13″
D) 67° 25′ 13″ E) 66° 24′ 47″

Çözüm: 23° 35′ 47″ ile toplayınca 90° edecek olan açı ölçüsünü arıyoruz.

$$\begin{aligned} 90^\circ &= 89^\circ + 1^\circ \\ &= 89^\circ + 60' \\ &= 89^\circ + 59' + 1' \\ &= 89^\circ + 59' + 60'' \end{aligned}$$

olduğundan, cevabımız

$$(89^\circ + 59' + 60'') - (23^\circ\ 35'\ 47'') = 66^\circ\ 24'\ 13''$$

olmalıdır. Bu durumda

Doğru cevap: C.

Örnek. *a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere*
$2009' = a^\circ\, b'$
olduğuna göre a + b toplamı en az kaç olabilir?

A) 34 B) 40 C) 50 D) 60 E) 62

Çözüm: $2009' = 1^\circ\, 1949'$ olarak yazılabildiği gibi $2^\circ\, 1889'$ olarak da yazılabilir. Görüldüğü gibi dereceyi simgeleyen a sayısı büyüdükçe toplam küçülüyor. O halde a'yı mümkün mertebe büyük tutmak gerekir.

2009 sayısı 60'a bölünürse bölüm 33 kalan 29 olacaktır. O halde $2009' = 33^\circ\, 29'$ yazılabilir. Bu durumda $a = 33$ ve $b = 29$ olduğundan $a + b$ toplamı 62'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *A açısının ölçüsü* $12^\circ\, 37'\, 06''$ *olduğuna göre A/2 açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $6^\circ\, 18'\, 33''$ B) $6^\circ\, 19'\, 33''$ C) $6^\circ\, 18'\, 03''$
D) $6^\circ\, 19'\, 03''$ E) $6^\circ\, 18'\, 22''$

Çözüm: $A = 12^\circ\, 37'\, 06'' = 12^\circ\, 36'\, 66''$ olduğundan $A/2 = 6^\circ\, 18'\, 33''$ olmak zorundadır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A açısının ölçüsü* $13^\circ\, 37'\, 06''$ *olduğuna göre A/3 açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $4^\circ\, 31'\, 22''$ B) $4^\circ\, 32'\, 02''$ C) $4^\circ\, 33'\, 12''$
D) $4^\circ\, 32'\, 12''$ E) $4^\circ\, 32'\, 22''$

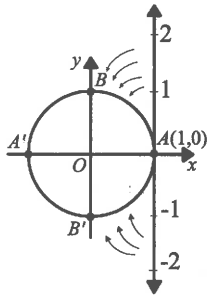
Çözüm: $A = 13^\circ\, 37'\, 06'' = 12^\circ\, 97'\, 06'' = 12^\circ\, 96'\, 66''$ olduğundan $A/3 = 4^\circ\, 32'\, 22''$ olmak zorundadır.

Doğru cevap: E.

Radyan. Çemberin, yarıçapına eşit uzunluğundaki bir yayını gören merkez açıya **1 radyanlık açı** denir. Bir tam açının ölçüsü 2π radyandır.

Şimdi dişinizi sıkıp, şu 1 sayfayı bir güzel anlamaya çalışarak okuyun da, benim gibi, radyanın ne olup ne olmadığını bilmeden liseden mezun olmayın. Ben üniversiteyi bitirdiğimde de bilmiyordum gerçi ama olsun!

Sarma Fonksiyonu. Birim çemberin yarıçapı 1 birim olduğundan, çevresinin 2π birim olduğunu hatırlatarak anlatmaya başlayalım.



İşe önce $\mathbb{R}$ kümesinin resmi olan gerçel sayı eksenini, x eksenine dik olacak ve üzerindeki 0 sayısı çemberin üzerindeki $A(1, 0)$ noktasına denk düşecek şekilde yandaki gibi yerleştirelim. Bu eksenin pozitif tarafı saat yönünün tersinde, negatif tarafı da saat yönünde çembere sarılırsa, her x pozitif veya negatif reel sayısı çember üzerindeki bir noktayla eşleşmiş olur. Bu durumda, küçük AB yayı tüm çemberin dörtte biri olduğundan uzunluğu

$$l = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$$

olup, B noktasına $\frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$ sayısı tekabül eder (denk düşer). AA' yayı da çemberin yarısı olduğundan uzunluğu

$$l' = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1 = \pi = 3{,}14\ldots$$

olup, A' noktasına $\pi = 3{,}14\ldots$ sayısı denk gelir. Böyle böyle sarmaya devam edilirse, çember üzerindeki tüm noktalar da dolmuş olur. ''Sarma-dolma'' derken karnım acıktı yine! ☺

Şimdi B' noktasına hangi sayının geleceğine bakalım. Artık anlamış olmalısınız ki her dörttebir çember yayında $\frac{\pi}{2}$ oynuyor. O halde B' noktasına $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71\ldots$ ve A noktasına 0 sayısı dışında bir de $2\pi = 6{,}28\ldots$ sayısı gelir.

Bir tur bitti, durmayın, şu ana kadar reel eksen üzerinde 0 ile 6,28... arasındaki sayıları çemberde bir nokta ile eşleştirmiş olduk. Sarmaya devam ederek, diğer reel sayıları da çember üzerindeki bir noktayla eşleştirelim.

İkinci turda, bu defa

B noktasına $2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ sayısı,

A' noktasına $2\pi + \pi = 3\pi$ sayısı,

B' noktasına $2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$ sayısı,

A noktasına da 0 ve 2π sayılarından değişik olarak bir de $2\pi + 2\pi = 4\pi$ sayısı denk düşer.

Anlayacağınız,
A noktasına hep $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots . 100\pi, \ldots$ gibi sayılar,
A' noktasına da hep $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots, 99\pi, \ldots$ gibi sayılar eşlenir.

Reel eksenin pozitif kısmını halletmiş olduk, şimdi ters yönde bir sarma işlemiyle negatif sayılara da çember üzerinde yerler arayacağız. Yine bulacağız. Böylelikle eşleştirme bitmiş olacak ve ağzımızdaki baklayı çıkaracağız.

Reel eksenin negatif tarafı saat yönünde yani negatif yönde çember üzerine sarılırsa bu defa

B' noktasına $-\pi/2 = -1{,}57\ldots$ sayısı,
A' noktasına $-\pi = -3{,}14\ldots$ sayısı,
B noktasına $-3\pi/2 = -4{,}71\ldots$ sayısı ve
A noktasına da $-2\pi = -6{,}28\ldots$ sayısı

denk gelir.

Anlayacağınız A'ya hep 2π'nin tam katları geliyor. Yani A'nın ilk aldığı değer 0'dı, sonralar $0 + k\cdot 2\pi$ değerlerini aldı. k bir tam sayı elbet. Benzer şekilde B noktası da ilk olarak $\frac{\pi}{2}$ değerini almıştı, diğer sarmalarda $\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ değerlerini aldı.

O halde bunu genelleyebiliriz: Çember üzerindeki bir P noktasına bir x reel sayısı eşlenmişse, bu noktaya diğer eşlenecek sayılar kesinlikle $x + k\cdot 2\pi$ sayıları olacaktır.

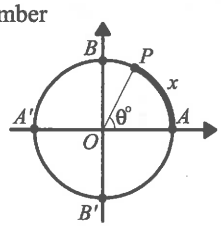
Sona geliyoruz:

Şimdi 1 dakikalığına geçen seneye bir dönüp, fonksiyon tanımını hatırlayalım: A ve B boş olmayan iki kümeyken, A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanıyla eşleyen bağıntıya, **A'dan B'ye bir fonksiyon** denirdi.

Şimdi dönüp kendi yaptıklarımıza bir göz atalım:

Başlangıçta elimizde bir $\mathbb{R}$ kümesi, bir de birim çemberi oluşturan noktalar kümesi vardı. Sonra biz ne yaptık? Reel sayılar kümesinin her bir elemanını çember üzerinde bir ve yalnız bir noktayla eşledik. O halde bir fonksiyon tanımlamış olmuşuz, haberimiz yok! Ama fonksiyonumuzun ismi yok. En yakışan ismi de koyalım, olsun bitsin: **"Sarma fonksiyonu"**.

Ağzımızdaki baklayı çıkarıyoruz. Birim çember üzerinde bir P noktası alalım. P'yi çember üzerinde hareket ettirerek tüm açıları elde edebileceğimizi anlamışsınızdır. AOP açısının küçük AP yayıyla eşit ölçüye sahip ve θ° olduğunu eski bilgilerimizden biliyoruz.



Şimdi bu ölçüyü farklı tanımlayacağız.

Birim çember üzerindeki bir P noktasına sarma fonksiyonuyla eşleştirilen sayıların her birine AOP açısının **radyan cinsinden ölçüsü** denir.

Şeklimizde $m(AOP) = m(AP) = x$ olabileceği gibi, bir k tam sayısı için, $x + k\cdot 2\pi$ de olabilir. Bu ölçülerin derece cinsinden değil radyan cinsinden olduğunu tekrar söyleyelim de karışıklık olmasın.

Soru Tipi. *Bir açının ölçüsü, derece- radyan ölçü türlerinden biri cinsinden verilir ve verilmeyen ölçü türünün cinsinden sorulur.*

Çözüm yolu: Derece(D), radyan (R) arasında

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

eşitliği geçerlidir. Verilen ölçü eşitlikte yerine yazılır ve sorulan değer orantı kurularak rahatlıkla bulunur.

Örnek. 36 *derecelik bir açı ölçüsü kaç radyandır?*

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{2\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{20}$

Çözüm: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ olduğundan $\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi}$ olur ki, radyan cinsinden $\frac{\pi}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 1 *dakikalık açı ölçüsü kaç radyandır?*

A) $\frac{\pi}{720}$ B) $\frac{\pi}{1080}$ C) $\frac{\pi}{5040}$ D) $\frac{\pi}{10800}$ E) $\frac{\pi}{21600}$

Çözüm: 1 derecenin 60 dakika olduğunu biliyoruz. O halde 1 dakika yerine 1/60 derece yazabiliriz. Bunu formülümüzde yerine yazarsak,

$$\frac{\frac{1}{60}}{180} = \frac{R}{\pi}$$

eşitliğinden $R = \frac{\pi}{10800}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Esas Ölçü. Birim çember üzerinde herhangi bir noktada durduğunuzu düşünün ve sonra çember üzerinde hareket etmeye başlayın. 370°'lik bir yay uzunluğu kadar yürürseniz nereye gelirsiniz? 360°'lik yay kadar hareket edince başlangıçtaki konuma geleceğinizden sadece 10°'lik yay boyu kadar gitmiş olmaz mısınız? İşte bu 10°'ye 370°'nin **esas ölçüsü** denir.

Anlayacağınız, derece cinsinden bir açı ölçüsünün 360'a bölümünden kalan, o açının esas ölçüsünü verir. Kalan negatif olmayacağından ve 360'dan küçük olacağından, derece cinsinden esas açı ölçüleri [0, 360) aralığındadır.

Radyan cinsinden açı ölçülerinde esas ölçüyü bulurken de açı ölçüsünün 2π'ye bölümünden kalana bakılmalıdır. Çünkü, birim çemberde x sayısının ölçtüğü tek bir yay vardır ama bir yay 1'den fazla hatta sonsuz x sayısıyla ölçülebilir. İşte bu x'lerin $[0, 2\pi)$ aralığında olanına açının **esas ölçüsü** denir.

Örnek. *Ölçüsü* 500° ve -420° *olan açıların esas ölçülerinin toplamı kaç derecedir?*

A) 80° B) 160° C) 380° D) 440° E) 540°

Çözüm: Derece cinsinden ölçülerde, esas ölçüyü bulurken de 360°'nin katlarını saymayız. Çünkü 360° dönmüşsek, bir tam tur tamamlanmış demektir, fazlasını dönünce eski yerlerden bir kez daha geçmiş oluyoruz.

$$500^\circ = 140^\circ + 1\cdot 360^\circ$$
$$-420^\circ = 300^\circ + (-2)\cdot 360^\circ$$

olduğundan esas ölçüler sırasıyla 140° ve 300°'dür. O halde cevabımız 440° olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$-\frac{17}{4}\pi$$

radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{1}{8}\pi$ B) $\frac{1}{4}\pi$ C) $\frac{3}{4}\pi$ D) $\frac{5}{4}\pi$ E) $\frac{7}{4}\pi$

Çözüm:

$$\frac{-17\pi}{4} = \frac{-24\pi + 7\pi}{4} = -6\pi + \frac{7}{4}\pi$$

şeklinde yazılırsa, 2π'nin tam katları yok sayılabileceğinden esas ölçü $\frac{7}{4}\pi$'tür. Bu yolun cazip olduğunu söyleyemem. ''Benim neeerden aklıma gelsin?'' diyebilirsiniz, haklısınız. O halde π yerine 180° yazın.

$$-\frac{17}{4}\pi = -\frac{17}{4}\cdot 180^\circ = -765^\circ$$

olacağından -765°'nin esas ölçüsünü alın yeter. 3 tane 360° eklerseniz, 315° çıkar ki bu da $7\cdot 45^\circ$ olduğundan esas ölçü $\frac{7}{4}\pi$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Radyan cinsinden ölçüleri*

$$\frac{45\pi}{4}, \frac{55\pi}{4}, 444\pi \text{ ve } -\frac{7\pi}{2}$$

olan açıların esas ölçülerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{5\pi}{2}$ C) $\frac{7\pi}{2}$ D) 4π E) 5π

Çözüm: Tüm ölçüleri, k bir tam sayı ve $x \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $x + k\cdot 2\pi$ şeklinde yazıp cevap olarak x'i vereceğiz.

$$\frac{45\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{40\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 5\cdot 2\pi$$

$$\frac{55\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + \frac{48\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 6\cdot 2\pi$$

$$444\pi = 0 + 222\cdot 2\pi$$

$$-\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + (-2)\cdot 2\pi$$

olduğundan ilk dört açının esas ölçüleri sırasıyla

$$\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 0 \text{ ve } \frac{\pi}{2} \text{ 'dir.}$$

Bunların toplamı sorulduğundan toplayalım:

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Radyan cinsinden ölçüsü* 362 *olan açının esas ölçüsü aşağıdaki aralıkların hangisindedir?*

A) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ B) $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$ C) (5, 6) D) (6, 7) E) (7, 8)

Çözüm: 362 sayısından 2π sayısının tam katlarını atacağız. 362'yi 2π'ye yani yaklaşık olarak 6,28'e bölünce 57,64... elde ediyoruz.

Bu, şu demek: İçinde 57,64... tane 2π var, 57 tanesini ayıralım, 0,64... tanesi esas ölçüyü oluşturacak. O halde 362'nin esas ölçüsü yaklaşık olarak $0{,}64\cdot 2\pi = 4{,}092$'dir.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
30 derecelik bir açının ölçüsü kaç dakikadır?

A) $\frac{1}{120}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 180 E) 1800

2.
Ölçüsü 18000″ olan açı kaç dereceliktir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Ölçüsü $44^\circ\,45'\,46''$ olan açının tümlerinin ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $44^\circ\,45'\,46''$ B) $45^\circ\,46'\,47''$ C) $45^\circ\,46'\,14''$
D) $45^\circ\,15'\,14''$ E) $45^\circ\,14'\,14''$

4.
a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

$$200' = a^\circ\, b'$$

olduğuna göre $a + b$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

5.
Bir doğru açının ölçüsüne 200 grad denirse 144° lik ölçüye sahip bir açının bütünlerinin ölçüsü kaç graddır?

A) 40 B) 80 C) 120 D) 144 E) 160

6.
108 dakikalık açı ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{100}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) π D) 10π E) 100π

7.
Bir tam açısının ölçüsü 400 grad olarak tanımlanırsa 650 gradlık açının esas ölçüsü kaç grad olur?

A) 50 B) 100 C) 150 D) 250 E) 450

8.
$-\frac{25}{4}\pi$ radyanlık açının esas ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

9.
İç açı ölçülerinin oranı 4:5:6 olan bir üçgenin <u>en büyük</u> iç açısının ölçüsü kaç radyandır ?

A) $\frac{1}{4}\pi$ B) $\frac{1}{5}\pi$ C) $\frac{1}{6}\pi$ D) $\frac{2}{5}\pi$ E) $\frac{2}{3}\pi$

10.
Esas ölçüsü 180° ile 360° arasında olan açılara **üstün açı** denir.
Bu tanıma göre aşağıdaki ölçülere sahip açılardan hangisi üstün açıdır ?

A) 2012π B) 2013π C) 2012° D) 500° E) 5π

1. E 2. E 3. E 4. D 5. A 6. A 7. D 8. E 9. D 10. C

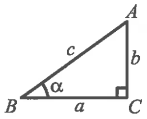
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Temel Trigonometrik Teoremler

Trigonometri Başlıyoooor! Her şey Pisagor'un o meşhur teoremini bulmasıyla başlamış olsa gerek. Hatırlayalım:

Hipotenüs uzunluğu c br, *dik kenar uzunlukları a* br *ve b* br *olan dik bir ABC üçgeninde* $a^2 + b^2 = c^2$*'dir.*



Türkçe'ye çevirelim:
Bir dik üçgende, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.

Bu teoremin daha nicelerine gebe olduğu, en azından olabilme olasılığının çok yüksek olduğu daha o günlerde anlaşılmış olmalı ki, formülü evirip çevirip yeni şeyler bulmaya çalışmışlar. Akla ilk gelen karelerin birini diğer tarafa atarak iki kare farkından yararlanmak olabilir örneğin. Başka ne yapılabilir diye düşününce, akla, toplamı bir sabit sayıya çevirmek amacıyla, eşitliğin her iki yanını c^2'ye bölmek geliyor:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

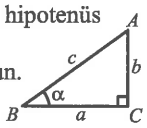
Eşitliğin güzelliği ortada. Her ama her üçgende ''dik kenar uzunluklarının hipotenüs uzunluğuna oranlarının kareleri toplamı hep ama hep 1'e eşit olur'' diyor. Her matematikçinin içindeki dürtü gereği, içimizden, bu oranlara birer isim vererek teoremi sadeleştirmek geliyor. Dik açının gördüğü kenara, "dik açının karşısındaki kenar" demektense, "hipotenüs" deyiverdiğimiz gibi... Böyle yapmak derdimizi anlatmakta kolaylık sağlayacağı gibi, yazı yazarken de kolaylık sağlar. Beni de düşünün biraz! ☺ Hal böyleyse, yani isim vermek işi kolaylaştırıyorsa, var olan diğer oranlara da birer isim verelim, olsun bitsin!

3 farklı uzunluk varken kaç farklı oran tanımlanabilir? a/b ile b/a eşit olmadığından, sıranın önemli olduğunu fark ediyoruz. O halde, kombinasyon değil, permutasyon yapacağız: $P(3, 2) = 6$.

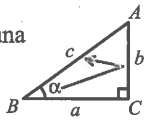
Bu altı oranı isterseniz yazalım: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$.

Sıra bunlara sırasıyla isimler vermeye geldi. Altı tanımı ardı ardına vermek belki pedagojik açıdan yanlıştır ama bu seferlik böyle olsun!

Dik kenar uzunlukları a birim ve b birim, hipotenüs uzunluğu c birim olan yandaki gibi bir ABC dik üçgeni çizilsin. $m(CBA) = \alpha$ olsun.

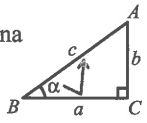


Sinüs. α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün sinüsü** denir. sin α ile gösterilir.



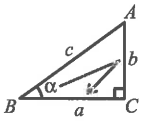
$$\sin(CBA) = \sin\alpha = \frac{b}{c}$$

Kosinüs. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kosinüsü** denir. cos α ile gösterilir.



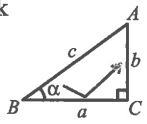
$$\cos(CBA) = \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Tanjant. α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun komşusundaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün tanjantı** denir. tan α ile gösterilir.



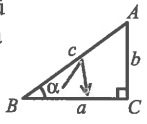
$$\tan(CBA) = \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Kotanjant. α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kotanjantı** denir. cot α ile gösterilir.



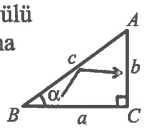
$$\cot(CBA) = \cot\alpha = \frac{a}{b}$$

Sekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün sekantı** denir. sec α ile gösterilir.



$$\sec(CBA) = \sec\alpha = \frac{c}{a}$$

Kosekant. Hipotenüs uzunluğunun, α ölçülü açının karşısındaki dik kenarın uzunluğuna oranına, **α ölçüsünün kosekantı** denir. csc α ile gösterilir.

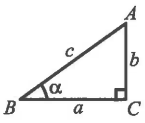


$$\csc(CBA) = \csc\alpha = \frac{c}{b}$$

Şimdi bu tanımlardan doğan en temel teoremleri verelim. Onlarca teorem üretilebilir. İlk teoremi yazının başında vermiştik zaten. Hatırlayalım:

Teorem. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Kanıt: Aynı üçgen için işlem yaptığımızı farz edelim. $\sin\alpha = \frac{b}{c}$ ve $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ diye,



$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Hemen bu teoremin kullanılması gereken örneklerimizi verelim.

Örnek.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

iken $\sin x \cdot \cos x$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: Hemen eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\cdot\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{4}$$

$$2\cdot\sin x\cdot\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\sin x\cdot\cos x = -\frac{3}{8}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\frac{3+\sin^2 x}{2-\cos x} - 2$$

ifadesinin en sade eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\sec x$

Çözüm: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğini kullanacağız. Zaten şu an için başka ne biliyoruz ki? Payda eşitlemeyin de yeter. $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazın, çıkmazsa gelin! ☺

$$\frac{3+\sin^2 x}{2-\cos x} - 2 = \frac{3+1-\cos^2 x}{2-\cos x} - 2$$

$$= \frac{(2-\cos x)(2+\cos x)}{2-\cos x} - 2$$

$$= 2 + \cos x - 2$$

$$= \cos x$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{2\sin^2 x+5\cos^2 x-2}{3\cos^2 x-\sin^2 x+1}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Çözüm: Seyretmekle bir şey olacağı yok. Bari $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazalım. Gerisi kendiliğinden gelir.

$$\frac{2\sin^2 x+5\cos^2 x-2}{3\cos^2 x-\sin^2 x+1} = \frac{2(1-\cos^2 x)+5\cos^2 x-2}{3\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+1}$$

$$= \frac{3\cos^2 x}{4\cos^2 x} = \frac{3}{4}$$

Doğru cevap B.

Örnek. $\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x}$ *ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\csc x$

Çözüm: Verilen ifadede $\cos^2 x$ yerine $1 - \sin^2 x$ yazalım.

$$\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x-1+\sin^2 x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\sin x\cdot(1+\sin x)}{1+\sin x} = \sin x$$

olduğunu gördük.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\tan y = 0{,}66$ *olduğuna göre*

$T = \cos^2 y\cdot\sin y - \sin y + \sin^3 y$

olduğuna göre T ifadesinin değeri kaçtır?

A) −0,66 B) −0,34 C) 0 D) 0,34 E) 0,66

Çözüm: Verilen eşitliği $\sin y$ ortak parantezine alalım:

$$T = \cos^2 y\cdot\sin y - \sin y + \sin^3 y$$

$$= \sin y\cdot[\cos^2 y - 1 + \sin^2 y]$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ olduğundan

$$T = \sin y\cdot[1-1] = 0$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin^6 x+\cos^6 x-\cos^4 x+\sin^2 x-2\sin^4 x$ *ifadesinin sayısal değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\sin x = s$ ve $\cos x = c$ olsun.

$$\begin{aligned} &s^6+c^6-c^4+s^2-2s^4 \\ &=\left(s^2+c^2\right)\left(s^4-s^2c^2+c^4\right)-c^4+s^2-2s^4 \\ &=s^4-s^2c^2+c^4-c^4+s^2-2s^4 \\ &=-s^2c^2+s^2-s^4 \\ &=s^2\left[-c^2+1-s^2\right] \\ &=s^2\cdot[1-1]=0 \end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1989 ÖYS]. $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ *olduğuna göre,*

$$\frac{c^6+3c^2s^2+s^6}{}$$

ifadesinin kısaltılmışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 2\theta$ B) 1 C) $\sin\theta\cdot\cos\theta$ D) 3 E) $\cos 2\theta$

Çözüm:

$$\begin{aligned} c^6+s^6 &=(c^2)^3+(s^2)^3 \\ &=(c^2+s^2)(c^4-c^2s^2+s^4) \\ &=c^4+s^4-c^2s^2 \\ &=(c^2+s^2)^2-2c^2s^2-c^2s^2 \\ &=1-3c^2s^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$c^6+3c^2s^2+s^6=(1-3c^2s^2)+3c^2s^2=1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{a}{\sin x+3}+\dfrac{b}{\sin x-2}=\dfrac{3\sin x+4}{-\cos^2 x+\sin x-5}$ *eşitliğine göre* $a\cdot b$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $-\cos^2 x+\sin x-5$

ifadesinde $\cos^2 x$ yerine $1-\sin^2 x$ yazalım.

$$\begin{aligned} -\cos^2 x+\sin x-5 &=\sin^2 x+\sin x-6 \\ &=(\sin x+3)\cdot(\sin x-2) \end{aligned}$$

olduğundan verilen ifadede sağ tarafın paydasının sol taraftaki paydaların çarpımı olduğunu anlıyoruz. O halde payda eşitlersek

$$a(\sin x-2)+b(\sin x+3)=3\sin x+4$$

olduğunu buluruz. Düzenleyelim.

$$(a+b)\sin x+(-2a+3b)=3\sin x+4$$

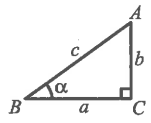
olduğundan $a+b=3$ ve $-2a+3b=4$ eşitliklerine ulaşırız. Bu iki bilinmeyenli iki denklemi çözersek $a=1$ ve $b=2$ bulunur ki $a\cdot b=2$ çıkar.

Doğru cevap: B.

Teorem. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kanıt: Yine aynı üçgendeyiz.

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



Örnek. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{4}{3}$ *olduğuna göre* $\tan x$ *kaçtır?*

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapalım:

$$3\cdot\sin x+3\cdot\cos x=4\cdot\sin x-4\cdot\cos x$$

$$7\cdot\cos x=\sin x$$

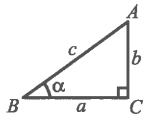
olur. Eşitliğin her iki yanını $\cos x$'e bölersek, sorulan tan x değerinin 7 olduğunu görürüz.

Doğru cevap: D.

Teorem. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Kanıt: Hala aynı üçgendeyiz.

$$\cot\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



Örnek. $\dfrac{3\sin x-5\cos x}{2\sin x-4\cos x}=\dfrac{1}{2}$ *olduğuna göre* $\cot x$ *kaçtır?*

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapalım:

$$6\cdot\sin x-10\cdot\cos x=2\cdot\sin x-4\cdot\cos x$$

$$4\cdot\sin x=6\cdot\cos x$$

olur. Eşitliğin her iki yanını $6\cdot\sin x$'e bölersek, $\cot x=\dfrac{2}{3}$ olduğunu buluruz.

Doğru cevap: A.

Teorem. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$.

Kanıt: İster tanjant ile kotanjantın yukarda kanıtlanan değerlerini çarpın, isterseniz hiç bu teoremlere bulaşmadan tanımlarından gidin.

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \text{ ve } \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

idi. Bu değerler çarpılırsa sonucun 1 çıkacağı ayan beyan ortada. Demek ki neymiş? *Aynı açı ölçüsünün tanjantı ile kotanjantı birbirlerinin çarpmaya göre tersleriymiş.*

Örnek. $\left(\frac{1+\cos x}{\tan x}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\cot x}\right)$ *ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\tan x$

Çözüm: $\tan x\cdot\cot x = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde sadece payları çarpalım:

$$(1+\cos x)\cdot(1-\cos x) = 1-\cos^2 x = \sin^2 x$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\tan x + \cot x = 4$ *olduğuna göre* $\tan^2 x + \cot^2 x$ *toplamı kaçtır?*

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Verilen eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$(\tan x + \cot x)^2 = 4^2$$
$$\tan^2 x + 2\cdot\tan x\cdot\cot x + \cot^2 x = 16$$

$\tan x\cdot\cot x = 1$ olduğundan,

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 16 - 2 = 14.$$

Doğru cevap A.

Örnek [1968 ÜSS]. $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}$ *ifadesi aşağıdaki ifadelerden hangisiyle özdeştir?*

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sin^2 A$ E) $\frac{1}{\sin^2 A}$

Çözüm:

$$\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} - \cot^2 A$$
$$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$
$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} = 1$$

olduğu görülmüş olur.

Doğru cevap: B .

Örnek. $\tan^2 x - 3\cdot\tan x - 7 = 0$ *olduğuna göre* $\tan^2 x - 21\cdot\cot x$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 10 B) 13 C) 16 D) 21 E) 32

Çözüm: Eskiden bu sorular

"$x^2 - 3x + 7 = 0$ *olduğuna göre* $x^2 - \frac{21}{x}$ *kaçtır?*"

diye sorulurdu, hey gidi günleeer hey!

Denklem çarpanlarına ayrılmadığından başka yollar düşünmemiz gerekiyor.

$$\tan^2 x = 3\cdot\tan x + 7$$

eşitliğini kullanalım.

$$\tan^2 x - 21\cdot\cot x = 3\cdot\tan x + 7 - 21\cdot\cot x$$
$$= 3\cdot\tan x + 7 - \frac{21}{\tan x}$$
$$= \frac{3\cdot(3\tan x + 7) + 7\cdot\tan x - 21}{\tan x}$$
$$= \frac{16\cdot\tan x}{\tan x} = 16$$

Doğru cevap: C.

Teorem. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Kanıt: Sekant ile kosinüsün tanımlarına bakarsak,

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ iken } \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

olduğunu görürüz. Demek ki uygun bir ölçünün sekantı gerçekten kosinüsünün çarpmaya göre tersiymiş.

Örnek. $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x$ *ifadesinin sadeleştirilmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\sec x$

Çözüm: Önce kesirli ifadeyi sadeleştireceğiz. Paydasını $(1-\sin x)$ ile çarpmak işi kolaylaştırır:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$= \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1-\sin x}{\cos x}$$
$$= \sec x - \tan x$$

olduğundan

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x = \sec x$$

bulunur. O halde

Doğru cevap E.

Örnek. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ *ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cot x$ B) $2\cdot\cot x$ C) $\tan x$ D) $2\cdot\tan x$ E) $4\cdot\tan x$

Çözüm: $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\sec x-\tan x$

olduğunu bir önceki soruyu çözerek bulmuştuk, aynı şekilde

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\sec x+\tan x$$

olduğunu da bulabiliriz. Bulduğumuz bu değerleri sorulan ifadede yerlerine yazarsak, sonucu bulmuş olacağız.

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\cdot\tan x.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $(\sec x-\tan x)^2=\dfrac{1-a}{1+a}$ *eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\csc x$

Çözüm: Eşitliğin sol tarafıyla oynayalım bakalım:

$$\begin{aligned}(\sec x-\tan x)^2&=\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\\&=\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2\\&=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}\\&=\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\\&=\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\\&=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\ \text{olur.}\end{aligned}$$

$\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=\dfrac{1-a}{1+a}$ eşitliğinden $a=\sin x$ olduğu rahatlıkla görülebilir.

Doğru cevap: A.

Teorem. $\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Kanıt: Sekant ile kosinüsün tanımlarına bakarsak,

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\ \text{iken}\ \csc\alpha=\frac{c}{a}$$

olduğunu görürüz. Demek ki uygun bir ölçünün kosekantı gerçekten sinüsünün çarpmaya göre tersiymiş.

Bu noktada, bir durup soluklanalım. Olanları şöyle bir yorumlayalım:



Tanjant ve kotanjant oranları aslında sinüs ve kosinüsün birbirlerine oranıymış, sekant ve kosekant oranları da sinüs ve kosinüsün çarpmaya göre tersleriymiş. Anlayacağınız her şey dön dolaş sinüs ve kosinüse geliyor.

Buradan çıkan sonuç; sinüs ve kosinüsü adam gibi bilen birinin sırtının yere gelmeyeceğidir. Diğer dört oranın sadece tanımlarını bilin, yeter!

İnanın bana...

Örnek. $\dfrac{\sec x+\csc x}{\tan x+\cot x}$ *ifadesinin sadeleşmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) cos C) $\tan x$ D) $\sin x+\cos$ E) $\sin x-\cos x$

Çözüm: Her bir ifadenin eşitini yerine yazalım:

$$\frac{\sec x+\csc x}{\tan x+\cot x}=\frac{\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=\sin x+\cos x$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\cot x+\tan x=(2k+5)\cdot\sec x\cdot\csc x$ *eşitliğini doğru kılan k değeri kaçtır?*

A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Eşitliğin sol tarafını açalım:

$$\begin{aligned}&\cot x+\tan x\\&=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\\&=\csc x\cdot\sec x\end{aligned}$$

olduğundan $2k+5=1$ olduğu anlaşılır. O halde $k=-2$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=\dfrac{a-1}{a+1}$ *eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\tan x$ D) $\cot x$ E) $\csc x$

Çözüm: Verilen eşitliğin sağ yanındaki -1 ve $+1$ sayılarından dolayı, eşitliğin sol yanının hem pay hem de paydasını $\sin x$'e bölesimiz geliyor.

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{\dfrac{1-\sin x}{\sin x}}{\dfrac{1+\sin x}{\sin x}}=\frac{\dfrac{1}{\sin x}-1}{\dfrac{1}{\sin x}+1}=\frac{\csc x-1}{\csc x+1}=\frac{a-1}{a+1}$$

olduğundan $a=\csc x$'tir. O halde

Doğru cevap: E.

Teorem. $\sin\alpha\cdot\csc\alpha = 1$ ve $\cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1$

Kanıt: İster sinüs ile kosekantın ve kosinüs ile sekantın daha önce kanıtladığımız değerlerini çarpın, isterseniz hiç bu teoremlere bulaşmayın, tanımları kullanın.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ iken } \csc\alpha = \frac{c}{a}$$

idi. Bu değerler çarpılırsa sonucun 1 çıkacağı ayan beyan ortada. Benzer şekilde

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ iken } \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

idi. Bu değerler çarpılırsa sonuç tabii ki 1 çıkar.

Örnek. $\sin x\cdot\tan x\cdot\sec x\cdot\cos x\cdot\cot x\cdot\csc x$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) $\sin^2 x$ D) $\sin^3 x$ E) $\sin^6 x$

Çözüm: $\sin x\cdot\csc x = \cos x\cdot\sec x = \tan x\cdot\cot x = 1$ olduğundan hepsinin çarpımı 1'e eşittir.

Doğru cevap: B.

Teorem. $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$.

Kanıt: Hemen bir üçgen çizip değerleri yerlerine yazabileceğiniz gibi üstte kanıtladığımız teoremleri de kullanabiliriz. Biz diğer teoremleri kullanalım da devamlı hatırımızda kalsınlar.

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha\,.$$

Örnek. $0 < 2x < \pi$ *olmak üzere* $\dfrac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x} = 3\cdot\tan x$ *olduğuna göre* $\cot x$*'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ olduğunu öğrendik. O halde

$$\frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x} - 1 = 2\cdot\sec^2 x - 1$$
$$= 2\cdot(1 + \tan^2 x) - 1$$
$$= 2 + 2\cdot\tan^2 x - 1$$
$$= 1 + 2\cdot\tan^2 x$$

olur. Bu sayede verilen denklem de

$$1 + 2\cdot\tan^2 x = 3\cdot\tan x$$

halini alır. Yani $2\cdot\tan^2 x - 3\cdot\tan x + 1 = 0$ olur. Hemen bu ifadeyi çarpanlarına ayıralım:

$$2\cdot\tan^2 x - 3\cdot\tan x + 1 = (2\cdot\tan x - 1)\cdot(\tan x - 1)$$

olduğundan $\tan x = \dfrac{1}{2}$ veya $\tan x = 1$ olabileceğini anlarız. O halde $\cot x = 2$ veya $\cot x = 1$ olabilir. Demek ki alabileceği değerler toplamı 3'müş.

Doğru cevap: C.

Örnek. x *bir dar açı ölçüsü ve* $2\cdot\sec^2 x = 3\cdot\tan x + 1$ *olduğuna göre* $\tan x$ *ifadesinin alabileceği değerler toplamı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: $\sec^2 x$ ile $\tan x$ arasında bir ilişki bulmamız lazım. O ilişkiyi de biraz önce öğrendik.

$$2\cdot\sec^2 x = 3\cdot\tan x + 1$$
$$2\cdot(1 + \tan^2 x) = 3\cdot\tan x + 1$$
$$2 + 2\cdot\tan^2 x = 3\cdot\tan x + 1$$
$$2\cdot\tan^2 x - 3\cdot\tan x + 1 = 0$$

Görüldüğü üzere bulduğumuz denklem aradığımız tan x'e bağlı. Bu durumda kökler toplamı formülünden tan x'in alabileceği değerler toplamının $\dfrac{3}{2}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: C.

Teorem. $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

Kanıt: Yine daha önce bulduğumuz sonuçları kullanacağız.

$$1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha.$$

Örnek. x *bir dar açı ölçüsü ve* $4\cdot\csc^2 x = 3\cdot\cot x + 8$ *olduğuna göre* $\cot x$ *ifadesinin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?*

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Biraz önce öğrendiğimiz $\csc^2 x$ ile $\cot x$ arasındaki ilişkiyi kullanacağız.

$$4\cdot\csc^2 x = 3\cdot\cot x + 8$$
$$4\cdot(1 + \cot^2 x) = 3\cdot\cot x + 8$$
$$4 + 4\cdot\cot^2 x = 3\cdot\cot x + 8$$
$$4\cdot\cot^2 x - 3\cdot\cot x - 4 = 0$$

Görüldüğü üzere bulduğumuz denklem aradığımız cot x'e bağlı. Bu durumda kökler çarpımı formülünden cot x'in alabileceği değerler çarpımının -1 olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{4+\sin^2 x}{5-\cos^2 x}$$

oranı kaça eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) -1

2.

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{5}{4}$$

olduğunda tan x ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

3.

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cot x}\right)\cdot\left(\frac{1-\sin x}{\tan x}\right)$$

çarpımın özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\tan^2 x$

4.

$\sin x+\cos x=0$ iken

$\sin x\cdot\cos x$

çarpımı kaça eşit olur?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

5.

$\tan x+\cot x=3$ iken

$\tan^2 x+\cot^2 x$

toplamı kaça eşit olur?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

6.

α bir dar açı ölçüsü olmak üzere

$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha$

farkı kaça eşittir?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sin^2\alpha$ E) $\cos^2\alpha$

7.

Aşağıdaki ifadelerden hangisi

$\sec x\cdot\cos x+\tan^2 x$

ifadesiyle özdeştir?

A) $\sec^2 x$ B) $\csc^2 x$ C) $\sin^2 x$ D) $\cos^2 x$ E) $\csc^2 x$

8.

$$\frac{\tan x+\cot x}{\sec x\cdot\csc x}$$

ifadesi tanımlı olduğu değerler için kaça eşittir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

9.

Aşağıdaki ifadelerden hangisi

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

ifadesiyle özdeştir?

A) $\tan x$ B) $\cot x$ C) $2\cdot\cos x$ D) $2\cdot\cot x$ E) $2\cdot\tan x$

10.

$$\frac{\csc x-1}{\csc x+1}=\frac{1-m}{1+m}$$

özdeşliğini doğrulayan m değeri neye eşittir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $-\sin x$ D) $-\cos x$ E) $-\csc x$

1. B 2. E 3. D 4. B 5. C 6. B 7. A 8. C 9. E 10. A

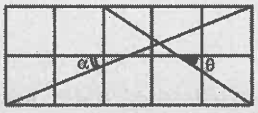
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Trigonometrik Oranlar

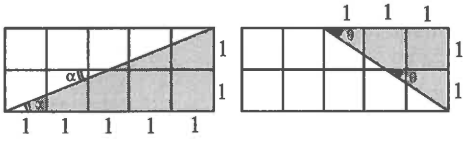
Tanımlardan doğan temel teoremlerimiz bununla birlikte son buldu. Şimdi yine sadece trigonometrik tanımlar yardımıyla çözülen geometri soruları çözeceğiz.

Örnek. 10 *adet eş kareden oluşturulmuş üstteki şekilde belirtilen* α *ve* θ *ölçülü açılar için* $\tan\alpha\cdot\cot\theta$ *çarpımı kaça eşittir?*



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

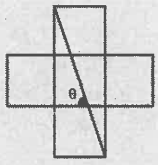
Çözüm: Şekilde görülen α ve θ açılarının trigonometrik değerleri içinde bulundukları üçgenlerden hemen seçilemiyor. Bu yüzden, iç ters ve yöndeş açıları kullanarak şekilde olduğu gibi yeni α ve θ açıları bulalım.



Görüldüğü üzere, $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ ve $\cot\theta = \frac{3}{2}$'dir. Bu durumda $\tan\alpha\cdot\cot\theta = \frac{3}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1983 ÖYS]. *Yandaki şekil tabanlarından biri olmayan bir küpün açılımıdır.*
Buna göre $\tan\theta$ *değeri kaçtır?*

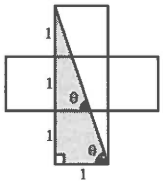


A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Uzun lafa gerek yok. Şekildeki taralı dik üçgenden de görüldüğü üzere

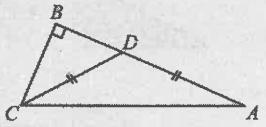
$$\tan\theta = 3$$

olmalıdır.



Doğru cevap: D.

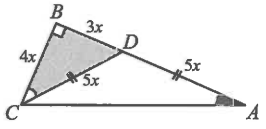
Örnek. *Yandaki ABC dik üçgeninde* $BC \perp BA$, $|CD| = |DA|$



$\tan(BCD) = \frac{3}{4}$ *olduğuna göre* $\tan A$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

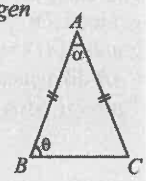
Çözüm: $|BD| = 3x$ br ise $|BC| = 4x$ br olur, o halde $|CD| = |DA| = 5x$ br dir.



Buradan $\tan A = \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

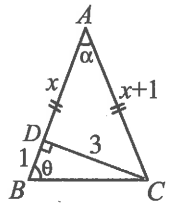
Doğru cevap: C.

Örnek [1997 ÖYS]. *ABC bir ikizkenar üçgen*
$|AB| = |AC|$
$m(ABC) = \theta$ •
$m(BAC) = \alpha$
Yandaki şekilde $\tan\theta = 3$
olduğuna göre $\tan\alpha$ *değeri kaçtır?*



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: $\tan\theta = 3$ eşitliğinden faydalanmak amacıyla C'den AB'ye dik indirelim. Dikme ayağı D olsun. $|DB| = 1$ dersek $|DC| = 3$ olur. Diğer yandan $|AD| = x$ dersek BAC üçgeninin ikizkenar olmasından dolayı $|AC| = x + 1$ bulunur. ADC dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $x = 4$ olduğu rahatlıkla bulunur. O halde $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ olmalıdır.



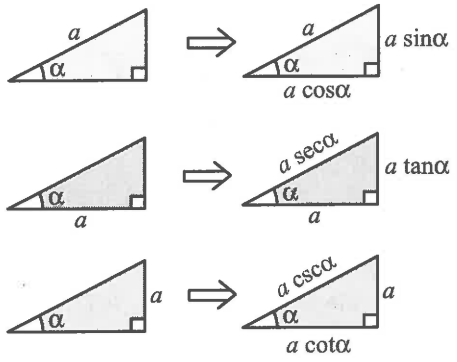
Aramızda Kalsın. Dünyadaki her üçgende üç iç açı ölçüsünün tanjantının çarpımıyla toplamı birbirine eşittir.

$$3\cdot3\cdot\tan\alpha = 3 + 3 + \tan\alpha$$

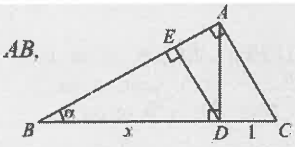
eşitliğinden $\tan\alpha = 3/4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Bazen bazı uzunluklar trigonometrik olarak verilir veya sorulur. Böyle durumlarda, herhangi bir kenar uzunluğu belliyken diğer kenarların uzunluklarını da herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonu şeklinde yazmayı bilmek lazımdır. Gerekli bilgileri aşağıda verdik:

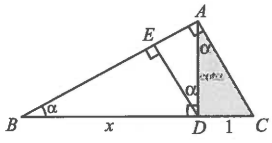


Örnek. *Yandaki üçgende* $BA \perp AC$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$, $m(ABC) = \alpha$ *ve* $|DC| = 1$ br *olduğuna göre* $|BD| = x$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



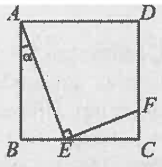
A) $\tan\alpha$ B) $\cot\alpha$ C) $\tan^2\alpha$ D) $\cot^2\alpha$ E) $\sec\alpha$

Çözüm: DAC açısının ölçüsünün de α olduğunu fark edelim. ADC dik üçgeninde $|DC| = 1$ br olduğundan $|AD| = \cot\alpha$ olur. CAB dik üçgeninde Öklit Teoremi'nden $\cot^2\alpha = x \cdot 1$ olur ki bu da bize cevabı verir.



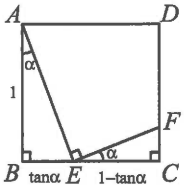
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABCD birim kare* $AE \perp EF$, $m(BAE) = \alpha$ *olduğuna göre* $|DF|$ *uzunluğu aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



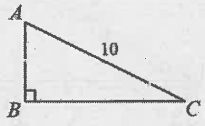
A) $1 - \tan\alpha + \tan^2\alpha$ B) $\tan\alpha$ C) $\cot^2\alpha$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm: $m(FEC) = m(BAE) = \alpha$'dır. $|BE| = \tan\alpha$ olduğundan $|EC| = 1 - \tan\alpha$ ve $|FC| = \tan\alpha - \tan^2\alpha$ olur. O halde $|DF| = 1 - |FC|$ yani $|DF| = 1 - \tan\alpha + \tan^2\alpha$.



Doğru cevap: A.

Örnek. *Sağdaki ABC dik üçgeninde* $|AC| = 10$ br *olarak veriliyor.* $\tan A \div \tan C = x$ *ise* Alan(ABC) *değeri* x *cinsinden kaç olur?*

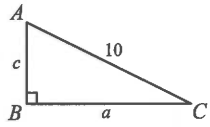


A) $\frac{10}{x}$ B) $\frac{20}{x}$ C) $\frac{50}{x}$ D) $\frac{100}{x}$ E) $\frac{200}{x}$

Çözüm: Veriler,

$$x = \frac{a}{c} \div \frac{c}{a} = \frac{a^2 + c^2}{ac} = \frac{100}{ac}$$

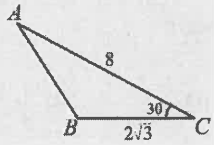
olduğunu söylüyor.



Demek ki $ac = \frac{100}{x}$'tir. Diğer yandan, Alan$(ABC) = \frac{ac}{2}$ olduğundan cevap $\frac{50}{x}$'tir.

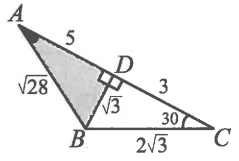
Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde,* $m(BCA) = 30°$, $|BC| = 2\sqrt{3}$ br, $|AC| = 8$ br *olduğuna göre* $\sin A$ *kaçtır?*



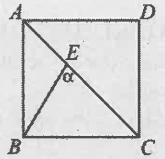
A) $\sqrt{\frac{3}{25}}$ B) $\sqrt{\frac{3}{26}}$ C) $\sqrt{\frac{3}{28}}$ D) $\sqrt{\frac{3}{29}}$ E) $\sqrt{\frac{3}{31}}$

Çözüm: B'den AC kenarına inilen dikme ayağı D olsun. CDB üçgeni 30°-60°-90° üçgeni olur ki, $|BD| = \sqrt{3}$ br ve $|DC| = 3$ br olarak bulunur. O halde $|AD| = 5$ br dir. BDA dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|AB| = \sqrt{28}$ br olur ki, buradan $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3}{28}}$ bulunur.



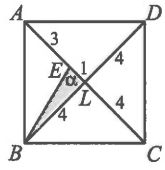
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABCD bir kare* $[AC]$ *köşegen* $5 \cdot |AE| = 3 \cdot |CE|$, $m(CEB) = \alpha$ *olduğuna göre* $\tan\alpha$ *kaça eşittir?*



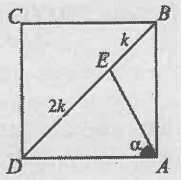
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Köşegen uzunluğuna 8 br diyelim. $|AE| = 3$ br olur. Şimdi diğer köşegeni de çizelim. Köşegenler birbirini hem dik keser hem de ortalar. $|CL| = 4$ ve $|LE| = 1$ br olur. O halde $\tan\alpha = 4$ bulunur.



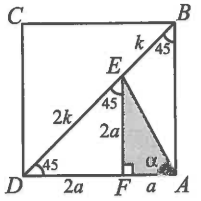
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABCD bir kare olarak veriliyor.*
[DB] köşegen
$|DE| = 2\cdot|EB|$
$m(DAE) = \alpha$
olduğuna göre tan α *kaçtır?*



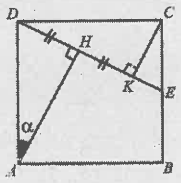
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: E'den AD'ye inilen dikme ayağı F olsun. Tales Teoremi gereği $|FA| = a$ ise $|DF| = 2a$ olur. DFE ikizkenar dik üçgen olduğundan $|EF| = 2a$'dır. O halde EFA dik üçgeninden tan α = 2 olduğu görülür.



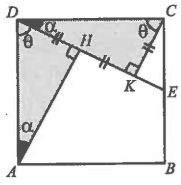
Doğru cevap: B.

Örnek [1987 ÖYS]. *Sağdaki şekilde*
ABCD bir kare
$AH \perp DE$ ve $CK \perp DE$
$m(DHA) = 90^\circ$
$|DH| = |HK|$
$m(DAH) = \alpha$
tan α*'nın değeri kaçtır?*



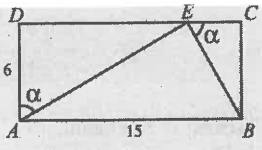
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 2 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $m(HAD) = m(KDC) = \alpha$ ve $|DA| = |DC|$ olduğundan HAD ile KDC üçgenleri eştir. O halde $|KC| = |DH|$ olmalıdır. Bu durumda $\tan(DAH) = \tan(CDK) = 1/2$ olarak bulunur.



Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖYS].
$|AB| = 15$ birim
$|AD| = 6$ birim
$m(DAE) = m(CEB) = \alpha$
ABCD bir dikdörtgen,
$E \in [CD]$ *olduğuna göre* tan α *değerlerinden biri kaçtır?*



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

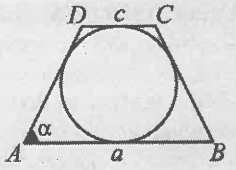
Çözüm: Bu bilgilerle BEA açısının dik ve ADE ile ECB üçgenlerinin benzer olduklarını anlarız. $|EC| = x$ dersek, $|DE| = 15 - x$ olur ve eşleme yapılırsa $\frac{6}{x} = \frac{15-x}{6}$ orantısı bulunur. Bu orantının doğurduğu denklem çözülürse

$$x = 3 \text{ veya } x = 12$$

bulunur ki buradan da tan α = 2 veya tan α = 1/2 olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1987 ÖYS]. *Yandaki şekilde ABCD bir ikizkenar teğetler yamuğudur.*
$a > c$ *olduğuna göre,*
cos α*'nın değeri nedir?*

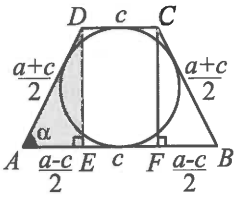


A) $\frac{a-c}{a+c}$ B) $\frac{a-c}{2a+c}$ C) $\frac{a-c}{a+2c}$ D) $\frac{a}{a+c}$ E) $\frac{c}{a+c}$

Çözüm: Teğet dörtgenlerinde karşılıklı kenar uzunlukları toplamı birbirlerine eşit olduklarından,

$$|AD| + |BC| = a + c$$

olmalıdır. Diğer yandan dörtgen ikizkenar diye $|AD| = |BC|$'dir.

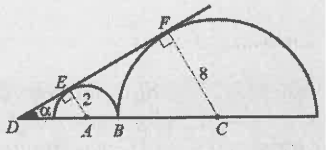


O halde $|AD| = \frac{a+c}{2}$ olur. D ve C köşelerinden AB'ye dikler indirirsek, $|AE| = \frac{a-c}{2}$ bulunur.

O halde AED dik üçgeninden $\cos\alpha = \frac{a-c}{a+c}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

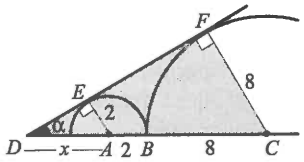
Örnek [1988 ÖYS].
$|EA| = 2$ br
$|FC| = 8$ br
A ve C noktaları çemberlerin merkezleri,
EF ortak teğet,
AC merkezler doğrusu, D noktası EF ile AC doğrularının kesim noktası ve çemberler B noktasında birbirine teğet veriliyor. Yukarıdaki şekilde $m(EDA) = \alpha$ *olduğuna göre* tan α*'nın değeri kaçtır?*



A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $|AB| = 2$ br ve $|BC| = 8$ br olacağını biliyoruz. $|DA| = x$ br olsun. DAE ile DCF üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{x}{x+10} = \frac{2}{8}$$

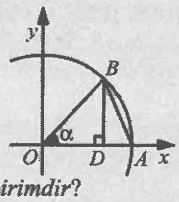


yazılır ve buradan $x = \frac{10}{3}$ olarak bulunur. DEA üçgeninde Pisagor Teoremi'nden de $|DE| = \frac{8}{3}$ br olarak bulunur.

O halde $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1996 ÖYS]. *A ve B noktaları O merkezli birim çember üzerinde olup $A \in Ox$ olduğu veriliyor. $[BD] \perp [OA]$ ve $m(BOD) = \alpha$ olduğuna göre şekildeki O merkezli birim çemberde $\cos\alpha = |AB|$ olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?*

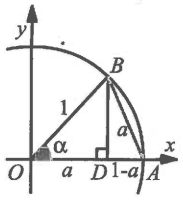


A) $2+\sqrt{3}$ B) $1+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $\sqrt{3}-2$

Çözüm: $|AB| = a$ diyelim.

$$\cos\alpha = \frac{|OD|}{|OB|} = \frac{|OD|}{1} = a$$

olacağından $|OD| = a$ olur. Şimdi BDO ve BDA dik üçgenlerinde Pisagor Teoremi'nden



$$1^2 - a^2 = a^2 - (1-a)^2$$

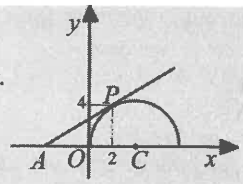
$$1^2 - a^2 = a^2 - 1 + 2a - a^2$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

bulunur ki, $\cos\alpha = a$ olduğundan $\cos\alpha$ bu denklemin pozitif kökü olan $\sqrt{3}-1$ değerine eşit olur.

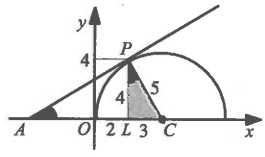
Doğru cevap: D.

Örnek [1983 ÖYS]. *Yandaki şekilde C merkezli çemberin yarıçapının uzunluğu 5 birimdir. AP doğrusu çemberin P(2, 4) noktasındaki teğeti olduğuna göre $\tan(PAC)$ değeri kaçtır?*



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

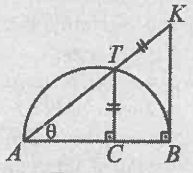
Çözüm: P noktasından x eksenine inen dikme ayağına L diyelim. $|OC| = 5$ olduğundan $|LC| = 3$ olmalıdır. Ayrıca P noktası değme noktası olduğundan CPA açısı diktir.



$$\tan(PAC) = \tan(LPC) = \frac{3}{4}.$$

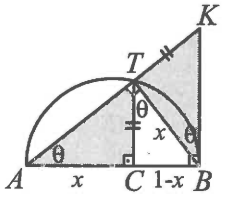
Doğru cevap: B.

Örnek[1975 ÜSS]. *Yanda verilen yarı çemberin AB çapının uzunluğu 1 birim ve TK ile TC aynı uzunlukta $[\neq 0]$ olduğuna göre $\sin\theta$ kaç olur?*



A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Çözüm: ATB açısı, çapı gören çevre açı olduğundan, diktir. $|CT| = |TK|$ ve $m(TBK) = m(CAT) = \theta$ olduğundan TBK ile CAT üçgenleri eştir. $|TB| = |CA| = x$ dersek, $|CB| = 1 - x$ olur. CTB ile CAT üçgenlerinin benzerliğinden $x^2 = 1 - x$ bulunur. Denklem çözülürse



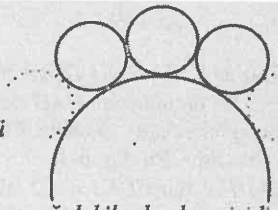
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

olduğu görülür. Şimdi sıra $\sin\theta$ değerini bulmaya geldi.

$$\sin\theta = \frac{|CB|}{|TB|} = \frac{1-x}{x} = \frac{x^2}{x} = x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

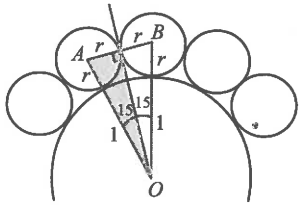
Doğru cevap: E.

Örnek [1975 ÜSS]. *Birbirine eşit ve dıştan teğet 12 çemberin oluşturduğu dairesel bir zincir, şekilde görüldüğü gibi yarıçapı 1 olan bir çembere dıştan teğettir. Küçük çemberin yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{1+\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}$ B) $\frac{\sin 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}$ C) $\frac{\cos 15^\circ}{1-\cos 15^\circ}$ D) $\frac{\cos 15^\circ}{1+\cos 15^\circ}$ E) $\frac{\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}$

Çözüm: O noktasını, 12 küçük çemberin merkeziyle birleştirirsek şekildeki AOB ikizkenar üçgeninden 12 tane oluşur. Bu yüzden $m(AOB) = 30^\circ$'dir.



$$\sin 15^\circ = \frac{r}{1+r}$$

$$\sin 15^\circ + r\sin 15^\circ = r$$

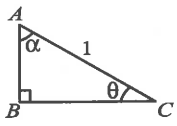
$$\sin 15^\circ = r - r\cdot\sin 15^\circ$$

$$r = \frac{\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}$$

Doğru cevap: E.

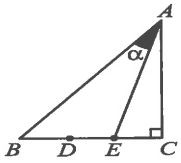
CEVAPLI TEST 1

1.
Yandaki ABC üçgeninde
$[AB] \perp [BC]$
$m(CAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$
olduğuna göre $|BC|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?



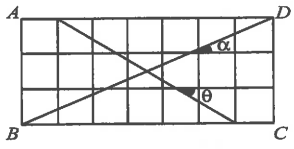
A) $\sin\theta$ B) $\tan\theta$ C) $\cos\alpha$ D) $\tan\alpha$ E) $\sin\alpha$

2.
ABC ikizkenar dik üçgen
$AC \perp BC$
$|AC| = |BC|$
$|BD| = |DE| = |EC|$
$m(BAE) = \alpha$
olduğuna göre $\tan\alpha$ kaça eşittir?



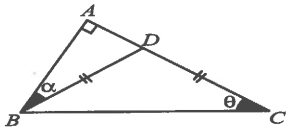
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

3.
Yukarıdaki şekil 21 birimkareden oluşturulmuş olup, ölçüsü α ve θ olan açılar taranmıştır.
Buna göre $\cot\alpha \cdot \tan\theta$ çarpımının değeri kaça eşittir?



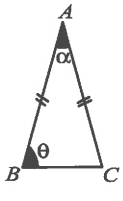
A) 1 B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{35}{9}$

4.
$BA \perp AC$
$|BD| = |DC|$
$m(DBA) = \alpha$
$m(ACB) = \theta$
$\tan\alpha = \frac{5}{12}$
olduğuna göre $\tan\theta$ değeri kaça eşittir?



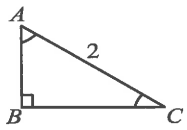
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{13}{3}$

5.
Yandaki şekilde CAB ikizkenar üçgen olup $|AB| = |AC|$ verilmiştir.
$m(CAB) = \alpha$ ve $m(ABC) = \theta$ olup,
$\tan\theta = 3$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değeri kaça eşittir?



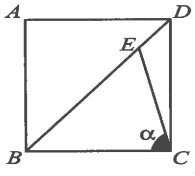
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

6.
Yandaki verilen şekilde ABC dik üçgendir.
$AB \perp BC$,
$|AC| = 2$ br,
$\tan A + \tan C = x$,
Alan$(ABC) = y$
olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaça eşittir?



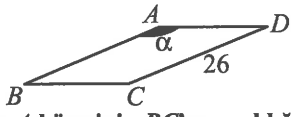
A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

7.
Yandaki şekilde $ABCD$ bir karedir. E noktası $[BD]$ köşegeni üzerinde olup, $m(ECB) = \alpha$ ve
$|BE| = 4 \cdot |ED|$
olduğuna göre $\tan\alpha$ değeri kaça eşittir?



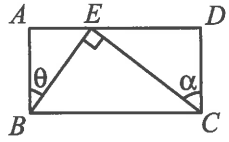
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) 4

8.
$ABCD$ paralelkenardır.
$|CD| = 26$ br ve
$m(BAD) = \alpha$ veriliyor.
$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ olduğuna göre A köşesinin BC'ye uzaklığı kaç br dir?



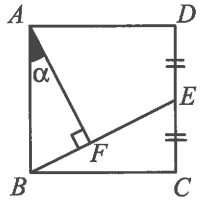
A) 5 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

9.
$ABCD$ dikdörtgen ve CEB dik üçgen olarak veriliyor.
$m(ABE) = \theta$, $m(ECD) = \alpha$
ve $\tan\theta = \frac{1}{2}$
olduğuna göre $\cos\alpha$ değeri kaça eşittir?



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) 2

10.
$ABCD$ bir kare
$|CE| = |ED|$
$[BE] \perp [AF]$
$m(BAF) = \alpha$
olduğuna göre $\cot\alpha$ değeri kaçtır?

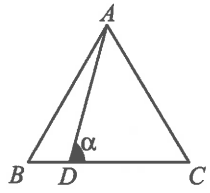


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. E 2. A 3. C 4. A 5. D 6. B 7. E 8. A 9. C 10. B

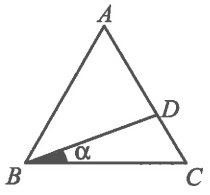
CEVAPLI TEST 2

1.
ABC eşkenar üçgen
$|DC| = 3\cdot|BD|$
$m(ADC) = \alpha$
olduğuna göre
tan α oranı kaça eşittir?



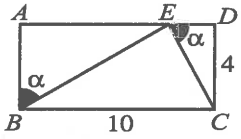
A) 2 B) 3 C) 4 D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{13}$

2.
ABC eşkenar üçgen
$|DA| = 2\cdot|DC|$
$m(CBD) = \alpha$
olduğuna göre
cot α oranı kaça eşittir?



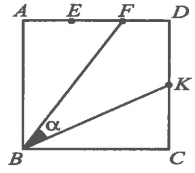
A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 4 E) 5

3.
Yandaki şekilde
$ABCD$ bir dikdörtgendir.
$|CD| = 4$ br ve
$|BC| = 10$ br olup
$m(ABE) = m(DEC) = \alpha$
olduğuna göre tan α ifadesinin alabileceği değerlerden biri kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 4

4.
Yandaki şekilde $ABCD$ bir karedir.
$|AE| = |EF| = |FD|$ ve
$|DK| = |KC|$ olup,
$m(FBK) = \alpha$
olduğuna göre tan α ifadesinin değeri kaça eşittir?

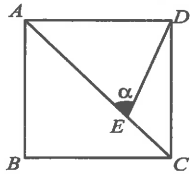


A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 1

5.
Yandaki şekilde $ABCD$ bir karedir. E noktası AC köşegeni üzerinde olup, $m(DEA) = \alpha$ ve

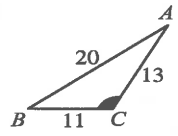
$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{17}{7}$$

olduğuna göre cos α değeri kaça eşittir?



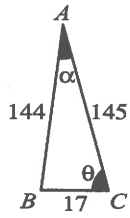
A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{5}{17}$ E) $\frac{12}{17}$

6.
Yandaki ABC üçgeninde
$|BC| = 11$ br
$|CA| = 13$ br
$|AB| = 20$ br
olduğuna göre sin C değeri kaça eşittir?



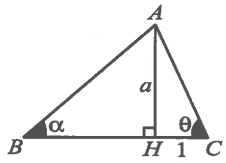
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{8}{17}$

7.
Yandaki ABC üçgeninde
$|BC| = 17$ br
$|CA| = 145$ br
$|AB| = 144$ br
$m(CAB) = \alpha$
$m(ACB) = \theta$
olduğuna göre $\sin^2\alpha + \sin^2\theta$ ifadesinin değeri kaça eşittir?



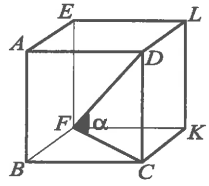
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 1 E) $\frac{6}{5}$

8.
Yandaki ABC üçgeninde A köşesine ait yükseklik ayağı H olsun.
$|AB|$ ve $|BH|$ birer tam sayı,
$|AH| = a$ br ve $|HC| = 1$ br olup
a asal sayı olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi csc α − cot α farkına eşittir?



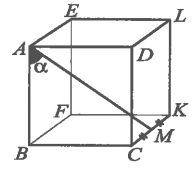
A) sin θ B) cos θ C) tan θ D) cot θ E) sec θ

9.
Yandaki şekilde verilen küpte $[FC]$ yüzey köşegeni, $[FD]$ ise cisim köşegenidir.
$m(DFC) = \alpha$ olduğuna göre $\cos^2\alpha$ ifadesinin değeri kaça eşittir?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

10.
Yandaki şekilde verilen küpte $|CM| = |MK|$ olup, $m(BAM) = \alpha$ olarak verilmiştir.
Buna göre $\tan^2\alpha$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

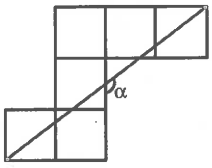


A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

1. D 2. A 3. D 4. A 5. B 6. D 7. D 8. D 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 3

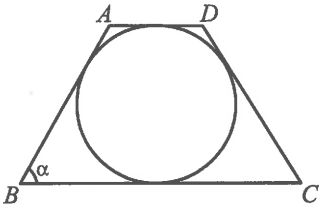
1.
Yandaki şekil 6 adet birimkareden oluşturulmuştur.



Buna göre cos α değeri kaça eşittir?

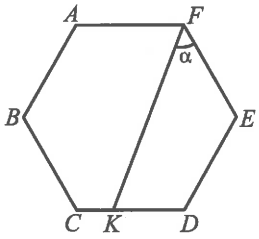
A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

2.
$ABCD$ bir ikizkenar teğetler yamuğudur.
$|AD| = 3$ br
$|BC| = 11$ br
$m(ABC) = \alpha$
olduğuna göre cos α değeri kaçtır?



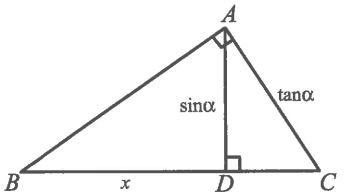
A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{8}{11}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{4}{7}$

3.
$ABCDEF$ bir düzgün altıgendir.
$K \in [CD]$
$|DK| = 2 \cdot |CK|$
$m(EFK) = \alpha$
olduğuna göre tan α kaçtır?



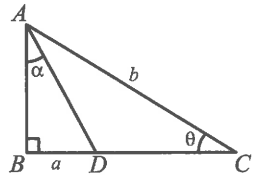
A) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

4.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$|AD| = \sin\alpha$ br
$|AC| = \tan\alpha$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?



A) 1 B) $\sin^2\alpha$ C) $\cos^2\alpha$ D) $\cos\alpha$ E) $\sec\alpha$

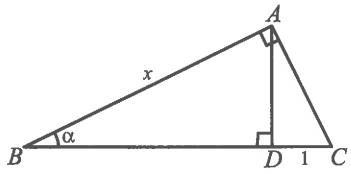
5.
ABC bir dik üçgen
$AB \perp BC$
$m(DAB) = \alpha$
$m(BCA) = \theta$
$|BD| = a$ br
$|CA| = b$ br



olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $\frac{a}{b}$'ye eşittir?

A) $\frac{\sin\theta}{\cos\alpha}$ B) $\frac{\sin\theta}{\tan\alpha}$ C) $\frac{\sin\alpha}{\tan\theta}$
D) $\sin\theta \cdot \tan\alpha$ E) $\sin\alpha \cdot \cos\theta$

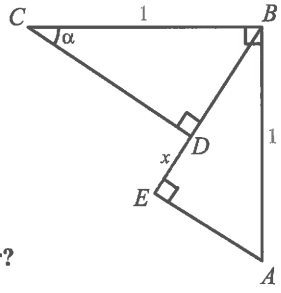
6.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$m(ABC) = \alpha$
$|DC| = 1$ br
$|AB| = x$ br



olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

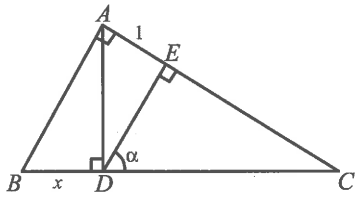
A) $\tan\alpha$ B) $\cot\alpha$ C) $\tan^2\alpha$
D) $\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ E) $\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}$

7.
Yandaki şekilde
$AB \perp BC$
$CD \perp BE$
$BE \perp EA$
$m(BCD) = \alpha$
$|AB| = |BC| = 1$ br
$|DE| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\cos\alpha - \sin\alpha$ B) $\sin\alpha - \cos\alpha$ C) $\tan\alpha - \cot\alpha$
D) $\sec\alpha - \csc\alpha$ E) $\csc\alpha - \sec\alpha$

8.
ABC bir dik üçgen
$CA \perp AB$
$AD \perp BC$
$DE \perp AC$
$m(CDE) = \alpha$
$|AE| = 1$ br
$|BD| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\csc\alpha$ D) $\sec\alpha$ E) $\tan\alpha$

1. B 2. E 3. A 4. D 5. D 6. D 7. A 8. C

Cebir Notları

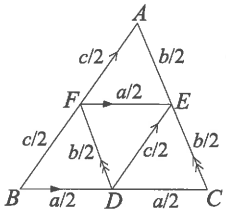
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Özel Ölçülerin Trig. Değerleri

Şimdi 30°, 45°, 60° gibi bazı özel açı ölçülerinin tüm trigonometrik değerlerini bulmayı öğreneceğiz. Daha sonra da diğerleri kadar olmasa da sıkça karşılaştığımız 15°, 22,5°, 67,5°, 75° gibi özel açı ölçülerinin trigonometrik değerlerini bulacağız. Tabi değerlerini bulmakla kalmayıp, bunları ezberleyecek ve ilerde bunların katlarının, yarılarının veya birbirleriyle toplam veya farklarının da trigonometrik değerlerini bulabileceğiz. Ama n'olursa olsun bunları bilmek şart, ona göre!

Kanıtlara başlamadan önce bilinmesi gereken geometrik bilgileri verelim:

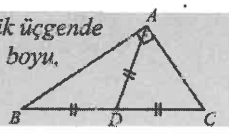
Orta Taban. Bir üçgende iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.



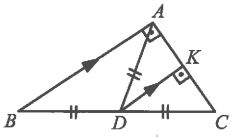
Şekilde $[DE]$, $[EF]$, $[FD]$ birer orta tabandır.

Orta taban daima üçüncü kenara (tabana) paraleldir ve tabanın yarısı uzunluktadır. Kanıtları benzerlik konusunda bulabilirsiniz.

Teorem [Muhteşem Üçlü]. *Bir dik üçgende hipotenüse indirilen kenarortayın boyu, hipotenüs uzunluğunun yarısıdır.*

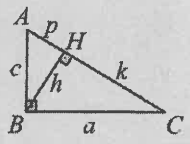


Kanıt: D'den BA'ya paralel olarak çizilen doğru AC'yi K'da kessin. BAC üçgeninde $[DK]$ orta taban olduğu için K orta noktadır. ADC üçgeninde $[DK]$ hem yükseklik hem kenarortay olduğundan ADC ikizkenar üçgendir. $|AD| = |DC| = |BD|$ olduğundan kanıt biter.

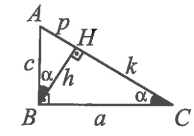


Muhteşem üçlü teoreminin tersi de doğrudur, yani $|AD| = |DC| = |BD|$ ise $m(BAC) = 90°$'dir.

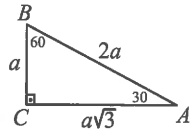
Teorem [Öklid]. *Bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikmenin uzunluğunun karesi, hipotenüsü ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.*
Yani yandaki şekle göre; $h^2 = pk$.

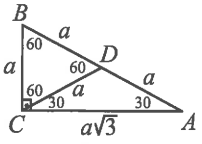


Kanıt: ABH ile BCA açılarının aynı olduğuna dikkat etmişsinizdir. O açılara α diyelim. AHB dik üçgeninde $\tan\alpha = p/h$ iken BHC dik üçgeninde $\tan\alpha = h/k$ olduğundan, $\frac{p}{h} = \frac{h}{k}$ olur ki, düzenlenirse $h^2 = pk$.



30° – 60° – 90° üçgeni. İç açı ölçülerinden biri 30° olan bir dik üçgende, ortanca kenarın uzunluğu kısa kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katı, hipotenüs uzunluğunun ise 2 katıdır. Yani 30°'nin karşısındaki kenarın uzunluğu a ise 60°'nin karşısındaki kenarın uzunluğu $a\sqrt{3}$ ve 90°'nin karşısındaki kenarın uzunluğu da $2a$'dır. Bunu şöyle izah edebiliriz: Dik olan C köşesinden hipotenüse kenarortay indirirsek, CDB eşkenar, ADC de ikizkenar üçgen olur. Buradan $|BC| = a$ iken $|CA| = a\sqrt{3}$ ve $|AB| = 2a$ bulunur.





O halde,

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\tan 60° = \cot 30° = \sqrt{3},$$

$$\sec 30° = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec 60° = \csc 30° = 2.$$

Örnek. *$x = 1400^\circ\ 4000'\ 12000''$ için $\sin x$ ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

Çözüm: $4000' = 66^\circ\ 40'$ ve $12000'' = 3^\circ\ 20'$ olduğundan

$$x = 1400^\circ\ 4000'\ 12000'' = 1400^\circ + 66^\circ 40' + 3^\circ 20'$$
$$= 1469^\circ\ 60' = 1470^\circ$$

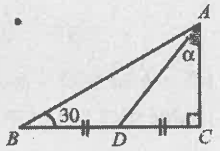
olur. Demek ki sin 1470° soruluyor. 1470 sayısının 360'a bölümünden kalan 30 olduğundan

$$\sin 1470^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1983 ÖYS]. *Yandaki şekilde*
$m(ABC) = 30^\circ$
$m(BCA) = 90^\circ$
$|BD| = |DC|$
olduğuna göre
$\tan(DAC)$'nin değeri kaçtır?



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

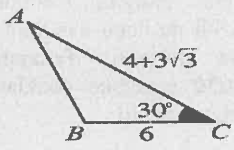
Çözüm: 30°-60°-90° üçgeninin özelliği gereği $|AC| = 2$ br dersek, $|BD| = |DC| = \sqrt{3}$ br olur. Bu durumda

$$\tan(DAC) = \tan\alpha = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde*
$|AB| = 4+3\sqrt{3}$ br
$|BC| = 6$ br
$m(ACB) = 30^\circ$
olduğuna göre $\tan A$ değeri kaça eşittir?

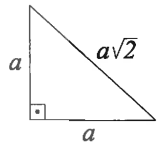


A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm: B'den AC'ye indirilen dikme ayağı D olsun. $|BD| = 3$ br ve $|DC| = 3\sqrt{3}$ br olarak bulunur. Bu sayede $|AD| = 4$ br olduğu görülür. O halde ADB dik üçgeninden $\tan A = \frac{3}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

$45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ üçgeni. Dik kenarları eşit uzunlukta olan dik üçgenlere **ikizkenar dik üçgen** denir.



İç açı ölçüleri (45°, 45°, 90°)'dir. Karenin yarısı gibi düşünebilirsiniz.

Teorem. *İkizkenar dik üçgende hipotenüs uzunluğu, dik kenar uzunluklarının $\sqrt{2}$ katıdır.*

Kanıt: Pisagor Teoremi'nden kanıtını kolaylıkla yapabilirsiniz. Yani; 45°'nin karşısındaki kenar a ise 90°'nin karşısı $a\sqrt{2}$'dir. O halde,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1,$$
$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Örnek. $\frac{(1-\sin^2 30^\circ)\cdot(1+\tan^2 30^\circ)}{(1-\cos^2 45^\circ)\cdot(1+\cot^2 45^\circ)}$ *oranı kaça eşittir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cot 45^\circ = 1$

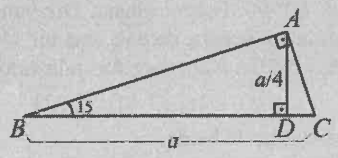
değerlerini yerlerine yazarsak, sonucu buluruz.

$$\frac{(1-\sin^2 30^\circ)\cdot(1+\tan^2 30^\circ)}{(1-\cos^2 45^\circ)\cdot(1+\cot^2 45^\circ)} = \frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot(1+1)} = 1.$$

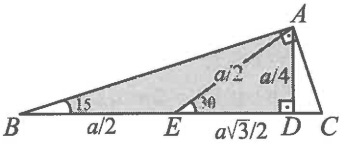
Doğru cevap: D.

$15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ üçgeni. Bir iç açı ölçüsü 15° olan dik üçgene denir.

Teorem. *Bir 15°-75°-90° üçgeninde hipotenüse inen dikmenin uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun dörtte biridir.*



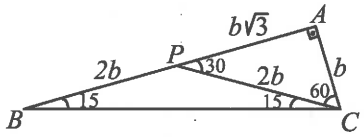
Kanıt: $[AE]$ kenarortayı çizilirse; muhteşem üçlü gereği AEB üçgeni ikizkenar ve AED 30°-60°-90° üçgeni olur.



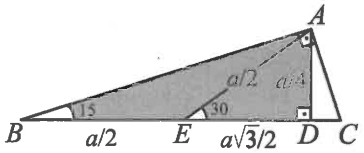
$|AD| = a/4$ ise $|AE| = a/2$'dir. O halde $|BC| = 2\cdot|AE| = a$.

Teorem. *Bir 15°-75°-90° üçgeninde uzun dik kenarın boyu, kısa dik kenarın boyunun $2+\sqrt{3}$ katıdır.*

Kanıt:

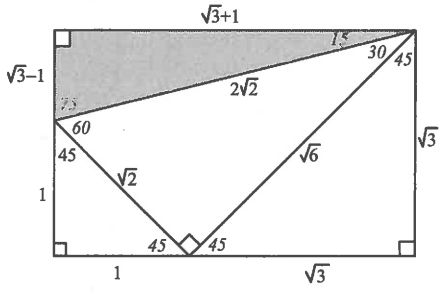


BAC açısını 15° ve 60° olarak bölecek şekilde bir CP doğrusu çizilirse BPC ikizkenar olup, CAP üçgeni de 30°-60°-90° üçgeni olur. Böylelikle uzun dik kenarın boyunun, kısa dik kenarın boyunun $2+\sqrt{3}$ katı olduğu kanıtlanmış olur.



Aslında bir önceki teoreme verdiğimiz kanıttaki şekil de bunu kanıtlamaya müsaitti. Taranmış ADB üçgenine odaklanmak yeterdi!

Ailles Dikdörtgeni. 15°-75°-90° üçgeninin üç kenarının birbirine göre orantısını bulmak için Ailles'in bulduğu metodu vereceğiz.



İkiz kenarlarının uzunlukları 1 birim ve $\sqrt{3}$ birim olan iki ikizkenar dik üçgen üst şekildeki gibi birbirlerine yapıştırılırlarsa, ortada hipotenüs uzunluğu $2\sqrt{2}$ birim olan bir 30°-60°-90° üçgeni oluşur. Dik yamuğu dikdörtgene tamamlayan üçgene de bakılırsa bir 15°-75°-90° üçgeni olduğu görülür. Kenarları arasında sırasıyla

$$(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):(2\sqrt{2})$$

orantısı mevcuttur. O halde,

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 15^\circ = \cot 75^\circ = 2-\sqrt{3},$$

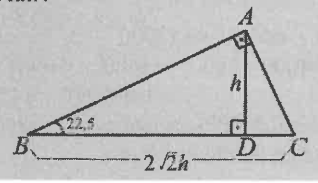
$$\tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3},$$

$$\sec 15^\circ = \csc 75^\circ = \sqrt{6}-\sqrt{2},$$

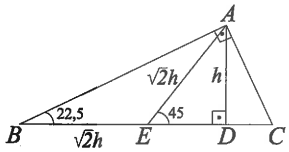
$$\sec 75^\circ = \csc 15^\circ = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

22,5° − 67,5° − 90° üçgeni. Bir iç açı ölçüsü 22,5° olan dik üçgene denir.

Teorem. *Bir iç açısının ölçüsü 22,5° olan bir dik üçgende hipotenüse inen dikmenin boyu, hipotenüsün boyunun $2\sqrt{2}$'de biridir.*



Kanıt: $[AE]$ kenarortayı çizilirse; muhteşem üçlü gereği AEB ikizkenar olduğundan ADE ikizkenar dik üçgen olur.

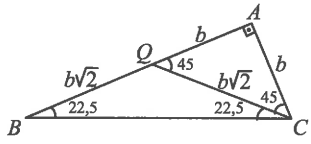


$|AD| = h$ ise $|AE| = h\sqrt{2}$'dir.

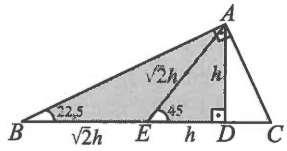
O halde $|BC| = 2\cdot|AE| = 2\sqrt{2}\,h$'dir.

Teorem. *Bir iç açısının ölçüsü 22,5° olan bir dik üçgende uzun dik kenarın boyu, kısa dik kenarın boyunun $1+\sqrt{2}$ katıdır.*

Kanıt: BCA açısının ölçüsünü 22,5° ve 45° olacak şekilde bölen CQ doğrusu çizilirse; BQC ikizkenar, CAQ üçgeni de ikizkenar dik üçgen olur. Gerekli uzunluklar üstteki şekildeki gibi yazılırsa uzun dik kenarın boyunun kısa dik kenarın boyunun $1+\sqrt{2}$ katı olduğu kanıtlanır.



Aslında bir önceki teoreme verdiğimiz kanıttaki şekil de bunu kanıtlamaya müsaitti. Taranmış ADB üçgenine odaklanmak yeterdi!



O halde,

$$\sin 22{,}5^\circ = \cos 67{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\sin 67{,}5^\circ = \cos 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\tan 22{,}5^\circ = \cot 67{,}5^\circ = \sqrt{2}-1,$$

$$\tan 67{,}5^\circ = \cot 22{,}5^\circ = \sqrt{2}+1,$$

$$\sec 22{,}5^\circ = \csc 67{,}5^\circ = \sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$\sec 67{,}5^\circ = \csc 22{,}5^\circ = \sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$\sin(80^\circ\,4000'\,12000'')$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

2.

$$\cos^2\frac{\pi}{6}+\frac{5}{\sec^2\frac{\pi}{3}}$$

toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$\sin^4\frac{\pi}{4}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{4}$$

farkı kaça eşittir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4.

$4\cdot\sin 15^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ E) 1

5.

$\tan 15^\circ + \tan 60^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

6.

$\tan 75^\circ - 2\cdot\cos 30^\circ$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

7.

$\tan 22{,}5^\circ + \tan 45^\circ = a\cdot\cos 45^\circ$

eşitliğini sağlayan *a*'nın değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$\tan 67{,}5^\circ - 2\cdot\sin 45^\circ = \sec p$

eşitliğini doğrulayan *p* aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

9.

$\tan 15^\circ + \tan 22{,}5^\circ + \tan 67{,}5^\circ + \tan 75^\circ$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $4+2\sqrt{2}$ B) $2+2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}+4$

10.

$$\frac{\sin x\cdot\tan x\cdot\csc x}{\sec x\cdot\cot x\cdot\cos x}$$

ifadesinin $x=\frac{\pi}{3}$ için değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

1. B 2. B 3. B 4. C 5. C 6. C 7. B 8. A 9. A 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Trigonometrik Eksenler

Nasıl ki Pisagor Teoremi'ni kurcalaya kurcalaya, trigonometrinin temeli sayabileceğimiz

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

eşitliğini bulmuştuk. Şimdi de bu eşitliği kurcalayacağız. $\sin^2\alpha$ ve $\cos^2\alpha$ değerleri nihayetinde bir kare olduklarından negatif olamazlar. O halde her ikisi de daima sıfırdan büyük eşittirler. Bu durumda,

$$\sin^2\alpha \geq 0,$$
$$1-\cos^2\alpha \geq 0,$$
$$(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha) \geq 0,$$
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Benzer şekilde,

$$\cos^2\alpha \geq 0,$$
$$1-\sin^2\alpha \geq 0,$$
$$(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha) \geq 0,$$
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1.$$

Zaten mantıken de bir dik üçgende hipotenüs her zaman her iki dik kenardan da uzun olacağından

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ ve } \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

değerleri 1'den büyük olamazlar. Burada doğal olarak akla şu soru gelir: '' Bu oranlar üçgende negatif de olamazlar, peki nasıl sin ve cos oranları [–1, 1] aralığında oluyorlar?'' Bu oranların negatif olması uzunlukların negatif olması anlamında değildir, açının büyüklüğüyle alakalıdır. Dar mı, dik mi, geniş mi, üstün mü olduğuyla alakalıdır yani. Nasıl ki ters yöndeki bir açıya $-\alpha^\circ$ diyorduk ve buradaki eksi işareti bize açının negatif olduğunu değil, açının yönünü anlatıyordu, onun gibi.

Örnek. $\frac{5+\cos x}{2}$ *ifadesi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$
$$4 \leq 5+\cos x \leq 6$$
$$2 \leq \frac{5+\cos x}{2} \leq 3$$

olduğundan sadece {2, 3} değerleri olmak üzere 2 farklı tamsayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{|2+\cos x|+|\cos x-2|}{|1-\sin x|-|1+\sin x|}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-2\csc x$ B) $2\csc x$ C) 2 D) $2\cot x$ E) $2\cos x$

Çözüm: $\sin x$ ve $\cos x$ ifadelerinin [–1, 1] aralığında yaşadığını bilmek, soruyu çözmeye yetiyor.

$$|2+\cos x| = 2+\cos x$$
$$|\cos x-2| = 2-\cos x$$
$$|1-\sin x| = 1-\sin x$$
$$|1+\sin x| = 1+\sin x$$

olacağından

$$\frac{|2+\cos x|+|\cos x-2|}{|1-\sin x|-|1+\sin x|} = \frac{2+\cos x+2-\cos x}{1-\sin x-1-\sin x}$$
$$= \frac{4}{-2\sin x} = -2\csc x$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin\alpha = \frac{a-2}{3}$ *ve* $\cos\theta = \frac{b+1}{2}$ *olduğuna göre* a^2+b^2 *toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 31 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

Çözüm: $\sin\alpha$ ve $\cos\theta$ değerleri [–1, 1] aralığında yaşadığından

$$-1 \leq \frac{a-2}{3} \leq 1 \text{ ve } -1 \leq \frac{b+1}{2} \leq 1$$

yazabiliriz. Eşitsizlikleri düzenlersek, $-1 \leq a \leq 5$ ve $-3 \leq b \leq 1$ bulunur. Buradan $0 \leq a^2 \leq 25$ ve $0 \leq b^2 \leq 9$ olduğunu bildiğimizden $0 \leq a^2+b^2 \leq 34$ olduğunu görürüz. Demek ki, a^2+b^2 değeri 0'dan başlayarak 34'e kadar 35 farklı tamsayı değeri alabiliyor.

Doğru cevap: E.

Örnek [1966 ÜSS]. $\sin 2x = m$ *eşitliğinde* m*'nin değeri aşağıdakilerden hangisinde bulunmaktadır?*

A) $-2 \leq m \leq 2$ B) $-2 \leq m \leq 0$ C) $-1 \leq m \leq 0$
D) $-1 \leq m \leq 1$ E) $0 \leq m \leq 1$

Çözüm: $2x$ nihayetinde herhangi bir açı ölçüsüdür. Onun için $-1 \leq \sin 2x = m \leq 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $(10 + \tan x)\cdot(6 - \tan x)$ *çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 16 B) 45 C) 55 D) 63 E) 64

Çözüm: Toplamları sabit olan iki ifadenin çarpımı maksimum değere, ifadeler birbirine eşit olunca ulaşır.
$10 + \tan x = 6 - \tan x$ eşitliği gereğince $\tan x = -2$ olunca çarpımın maksimum olacağını anlarız.
O halde en büyük değerin $8\cdot 8 = 64$ olduğunu söyleyebiliriz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(10 + \sin x)\cdot(6 - \sin x)$ *çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

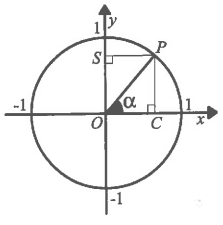
A) 16 B) 45 C) 55 D) 63 E) 64

Çözüm: Bir önceki soruyu nasıl çözdüysek, aynı işlemleri yapacağız. Toplamları sabit olan iki ifadenin çarpımı maksimum değere, ifadeler birbirine eşit olunca ulaşır. $10 + \sin x = 6 - \sin x$ eşitliği gereğince $\sin x = -2$ olunca çarpımın maksimum olacağını anlarız. Fakat $\sin x$ değeri hiçbir zaman -2 olamaz ki. O halde çarpılan ifadeleri mümkün mertebe birbirlerine yakın tutalım. Bu da $\sin x = -1$ vermekle olur. Bu durumda çarpımın alabileceği en büyük değer $9\cdot 7 = 63$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ eşitliği başka neler sunuyor bize?
Şöyle bir bakınca eşitliğin $x^2 + y^2 = 1$ tipinde olduğunu görmek insana, bu eşitlikle bu çember arasında bir alakanın istenirse kurulabileceğini anlatıyor. Biz de bu amaçla 1 birim yarıçaplı bir çember çizerek işlemlere başlıyoruz. Yarıçap 1 birim olduğundan çemberin adına da **birim çember** diyeceğiz.

Sinüs ve Kosinüs Eksenleri



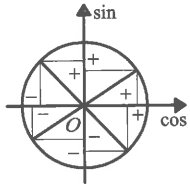
Birim çemberi çizerek, üzerinde yandaki gibi bir P noktası işaretleyelim. P'den x ve y eksenlerine inen dikme ayakları da sırasıyla C ve S olsun. $|OP| = 1$ olduğuna dikkat ediniz. $m(POC) = \alpha$ olsun. Bu durumda $|OC| = \cos\alpha$ ve $|CP| = |OS| = \sin\alpha$ olur. İlişkiler nasıl da beklendiği gibi dökülüyor gördünüz mü?
P noktası nerede alınırsa alınsın, $|OP| = 1$ olduğundan S noktası her zaman α'nın sinüsünü, C noktası da her zaman kosinüsünü verecektir. O zaman biz bundan sonra eksenlerin adını değiştirip, y eksenine **sinüs ekseni**, x eksenine de **kosinüs ekseni** diyelim. P nerde alınırsa alınsın,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

eşitliğinin hala geçerli olduğunu da fark etmişsinizdir.



Birim çemberin düzlemde taradığı bölgeler de aynı analitik düzlemdeki gibi I., II., III. ve IV. bölge olarak isimlendirilirler.



I.bölgedeki bir açının hem sinüsü hem kosinüsü pozitiftir.

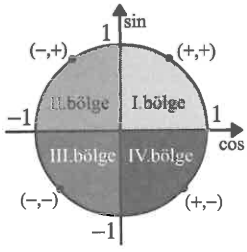
II. bölgedeki bir açının sinüsü pozitif ama kosinüsü negatiftir.

III. bölgedeki bir açının hem sinüsü hem de kosinüsü negatiftir.

IV. bölgedeki bir açının sinüsü negatif ama kosinüsü pozitiftir.

Ayrıca 0° ve 180°'lik açı ölçüleri için sinüsün 0, 90°'lik açı ölçüsü için 1, 270°'lik açı ölçüsü için de -1 olduğunu görebiliriz.

Bunun yanında 90° ve 270°'lik açı ölçüleri için kosinüsün 0, 0°'lik açı ölçüsü için 1, 180°'lik açı ölçüsü için de -1 olduğunu görebiliriz.



	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−
sec	+	−	−	+
csc	+	+	−	−

Örnek.

$a = \sin 85^\circ$,
$b = \tan 175^\circ$,
$c = \cot 275^\circ$,
$d = \cos(-335^\circ)$

olduğuna göre a, b, c, d sayılarının işaretleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

A) +, +, +, + B) +, −, −, + C) +, −, +, −
D) +, −, −, − E) +, −, +, +

Çözüm: I. bölgedeki açı ölçülerinin sinüsleri pozitif diye $a > 0$, II. bölgedeki açı ölçülerinin tanjantları negatif diye $b < 0$, III. bölgedeki açı ölçülerinin kotanjantları negatif diye $c < 0$, I. bölgedeki açı ölçülerinin kosinüsleri pozitif diye $d > 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1981 ÖYS].

I. $\sin 85^\circ$
II. $\tan 175^\circ$
III. $\cos 260^\circ$
IV. $\cot 275^\circ$

Yukarıdaki trigonometrik değerlerin işaretleri sırasıyla ne olur?

A) +, −, +, − B) −, −, −, + C) +, −, −, +
D) −, −, −, − E) +, −, −, −

Çözüm:

$85^\circ \in$ I. bölge olduğundan $\sin 85^\circ > 0$,
$175^\circ \in$ II. bölge olduğundan $\tan 175^\circ < 0$,
$260^\circ \in$ III. bölge olduğundan $\cos 260^\circ < 0$,
$275^\circ \in$ IV. bölge olduğundan $\cot 275^\circ < 0$
olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖYS]. $\sin 95^\circ$, $\cos 190^\circ$, $\tan 210^\circ$ *sayılarının işaretleri aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?*

	$\sin 95^\circ$	$\cos 190^\circ$	$\tan 210^\circ$
A)	+	−	−
B)	−	−	+
C)	−	+	+
D)	+	+	−
E)	+	−	+

Çözüm:

$95^\circ \in$ II. bölge olduğundan $\sin 95^\circ > 0$,
$190^\circ \in$ III. bölge olduğundan $\cos 190^\circ < 0$,
$210^\circ \in$ III. bölge olduğundan $\tan 210^\circ > 0$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin 100^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\tan 300^\circ$, $\cot 400^\circ$, $\sec 500^\circ$ *ve* $\csc 600^\circ$ *değerlerinden kaç tanesi pozitiftir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: II. bölgede sinüs pozitif diye $\sin 100^\circ$ pozitiftir.
III. bölgede kosinüs negatif diye $\cos 200^\circ$ negatiftir.
IV. bölgede tanjant negatif diye $\tan 300^\circ$ negatiftir.
$\cot 400^\circ = \cot 40^\circ$ ve I. bölgede kotanjant pozitif olduğundan $\cot 400^\circ$ pozitiftir.
$\sec 500^\circ = \sec 140^\circ$ ve II. bölgede kosinüs negatif olduğundan $\sec 500^\circ$ negatiftir.
$\csc 600^\circ = \csc 240^\circ$ ve III. bölgede sinüs negatif olduğundan $\csc 600^\circ$ negatiftir.

O halde sadece ikisi pozitiftir.

Doğru cevap B.

Örnek. $\dfrac{\sin 90^\circ - \cos 180^\circ + \cos 270^\circ}{\tan 180^\circ - \cos 360^\circ + \sin 270^\circ}$ *oranı kaça eşittir?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\frac{\sin 90^\circ - \cos 180^\circ + \cos 270^\circ}{\tan 180^\circ - \cos 360^\circ + \sin 270^\circ} = \frac{1-(-1)+0}{0-1+(-1)} = -1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sin\left(\cos 270^\circ\right)$ *kaça eşittir?*

A) −1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm: $\sin\left(\cos 270^\circ\right) = \sin 0 = 0$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

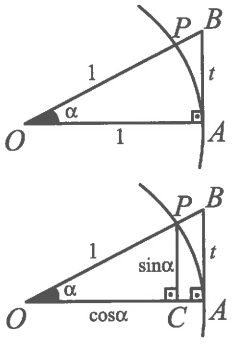
$\sin(\pi^2)$, $\cos\sqrt{\pi}$, $\tan 1$, $\cot 2$, $\sec 3$
değerlerinden kaç tanesi pozitiftir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 D) 5

Çözüm: π sayısını yaklaşık olarak 3,14 alırsak, π^2 sayısı yaklaşık olarak 9,85 ve $\sqrt{\pi}$ sayısı da yaklaşık olarak 1,77 olur. Radyan cinsinden açı ölçülerinde bölgeler her 1,57'de değişir. Buna göre I. bölge 0 ile 1,57 sayıları arasına, II. bölge 1,57 ile 3,14 sayıları arasına, III. bölge 3,14 ile 4,71 sayıları arasına ve nihayet IV. bölge de 4,71 ile 6,28 sayıları arasına denk düşer. Bu durumda
$\pi^2 \cong 9,85 \equiv 9,85 - 6,28 = 3,57$ ve
$3,57 \in$ III. bölge olduğundan $\sin(\pi^2) < 0$,
$1,57 < \sqrt{\pi} \cong 1,77 < 3,14$ olduğundan
$\sqrt{\pi} \in$ II. bölge yani $\cos\sqrt{\pi} < 0$,
$0 < 1 < 1,57$ olduğundan
$1 \in$ I. bölge yani $\tan 1 > 0$,
$1,57 < 2 < 3,14$ olduğundan
$2 \in$ II. bölge yani $\cot 2 < 0$,
$3,14 < 3 < 4,71$ olduğundan
$3 \in$ III. bölge yani $\sec 3 < 0$
olur. O halde sadece 1 tanesi pozitiftir.

Doğru cevap: A.

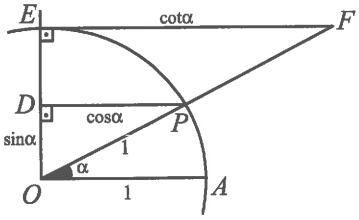
Tanjant ve Kotanjant Eksenleri. Bir açı çizelim. Ölçüsünün tanjantı t olsun. $|AB| = t$ br ve $|AO| = 1$ br olan bir BAO dik üçgeni iş görür. Bir dik üçgende hipotenüsün daima her iki dik kenardan da uzun olduğunu bildiğimizden, yani $|OB| > 1$ olduğundan, $|AO|$ yarıçaplı, O merkezli çember, OB'yi $[OB]$ üstünde bir P noktasında keser. $|PO| = 1$ br olduğundan P'den OA'ya PC dikmesini çizersek, $|PC| = \sin\alpha$ br ve $|OC| = \cos\alpha$ br olur.



Bu durum bize, çizilen bu çemberin aslında birim çember olduğunu anlatır. O halde AB doğrusu da tanjant ekseni olmaya adaydır. Çünkü OP doğrusunun AB'yi kestiği noktanın A'ya olan uzaklığı tam da açının tanjantı kadar büyüklükte olmakta. Niye mi? PC // BA olduğundan Tales Teoremi gereği

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{|PC|}{|OC|} = \frac{|BA|}{|OA|} = \frac{t}{1} = t$$

olduğundan, P çember üzerinde ilerledikçe, yani α değeri büyüdükçe $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ değeri değişecek ama her zaman t'ye eşit olacak.



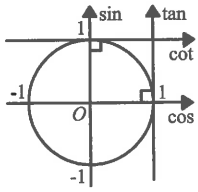
Benzer şekilde $|OE| = 1$ olan bir FEO dik üçgeni ve $|EO|$ yarıçaplı, O merkezli çember çizilirse, $|PD| = \cos\alpha$ ve $|OD| = \sin\alpha$ olur. DP // EF olduğundan Tales Teoremi gereği

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|EF|}{|EO|} = \frac{|EF|}{1} = \cot\alpha$$

olduğundan $|EF|$'nin tam da α açısının kotanjantını verdiğini anlarız.

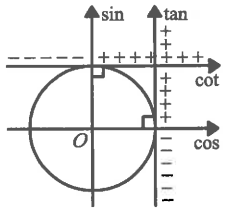
Toparlayalım:

Tanjant ekseni, sinüs eksenine paralel olup (1, 0) noktasında geçer. Kotanjant ekseni de kosinüs eksenine paralel olup, (0, 1) noktasından geçer.



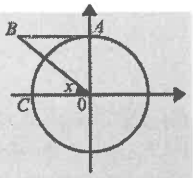
Gelelim bu eksenleri nasıl kullanacağımıza:

Çember üzerinde alınan bir P noktası için OP'nin tanjant eksenini kestiği noktanın (1, 0) noktasına olan uzaklığı, POx açısının tanjantını verir. Eğer kesim noktası x ekseninin üst tarafındaysa tanjant pozitif, alt tarafındaysa negatif, x ekseninin üzerindeyse sıfırdır.



P noktasının kotanjant eksenini kestiği nokta da POx açısının kotanjantını verir. Eğer kesim noktası y ekseninin sağ tarafındaysa kotanjant pozitif, sol tarafındaysa negatif, y ekseninin üzerindeyse sıfırdır.

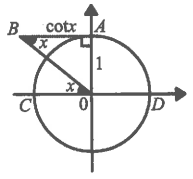
Örnek. *Yandaki birim çemberde* $m(BOC) = x$ *olduğuna göre* $|AB|$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) $\sin x$ B) $\tan x$ C) $-\tan x$ D) $\cot x$ E) $-\cot x$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

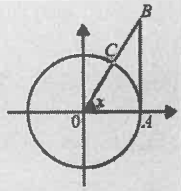
Birinci yol. $m(DOB) = \pi - x$ olduğundan B noktasının apsisi $\cot(\pi - x)$ olur.
Bu değer negatif olduğundan $|AB| = -\cot(\pi - x)$ olmalıdır. O halde $|AB| = -(-\cot x) = \cot x$.



İkinci yol. $m(BOC) = m(OBA) = x$ ve $|AO| = 1$ br olduğu görülürse OAB dik üçgeninden $|AB| = \cot x$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki birim çemberde* $m(AOB) = x$ *olduğuna göre* $|BC|$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

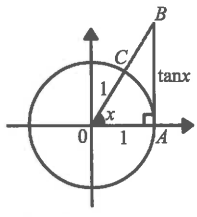


A) $\sec x$ B) $1 + \sec x$ C) $1 - \sec x$ D) $\sec x - 1$ E) $1 + \csc x$

Çözüm: AB doğrusunun tanjant ekseni olduğunu fark ediniz.
$m(AOB) = x$ olduğundan
$|AB| = \tan x$'tir.
OAB dik üçgeninde
Pisagor Teoremi gereği

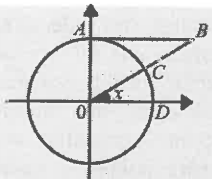
$|OB| = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\sec^2 x} = \sec x$

ve $|OC| = 1$ olduğundan $|BC| = \sec x - 1$ bulunur.



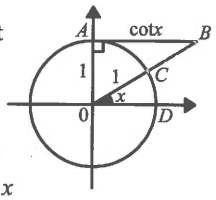
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki birim çemberde $m(DOB) = x$ olduğuna göre $|BC|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



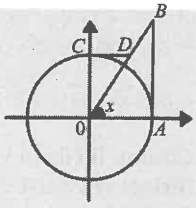
A) $\csc x$ B) $\csc x - 1$ C) $1 - \csc x$ D) $1 - \csc x$ E) $1 + \sec x$

Çözüm: AB doğrusunun kotanjant ekseni olduğunu fark ediniz. $m(DOB) = x$ olduğundan $|AB| = \cot x$'tir. OAB dik üçgeninde Pisagor Teoremi gereği $|OB| = \sqrt{1+\cot^2 x} = \sqrt{\csc^2 x} = \csc x$ ve $|OC| = 1$ olduğundan $|BC| = \csc x - 1$ bulunur.



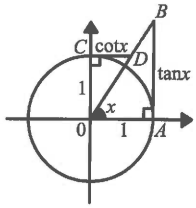
Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki birim çemberde $m(BOA) = x$ olduğuna göre $|DB|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



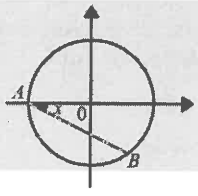
A) $\sec x - \csc x$ B) $1 - \sec x$
C) $1 - \csc x$ D) $\csc x - \sec x$
E) $\sec x \div \csc x$

Çözüm: AB doğrusunun tanjant ekseni, CD doğrusunun da kotanjant ekseni olduğunu biliyoruz. $m(AOB) = x$ olduğundan $|AB| = \tan x$ ve $|CD| = \cot x$'tir. OAB ve OCD üçgenlerinde Pisagor Teoremi'ni uygularsak $|OB| = \sec x$ ve $|OD| = \csc x$ buluruz. O halde $|BD| = |OB| - |OD| = \sec x - \csc x$.



Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki birim çemberde $m(BAO) = x$ olduğuna göre $|AB|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

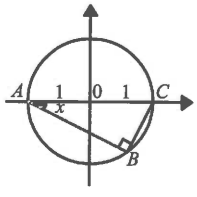


A) $\cos x$ B) $\sin x$ C) $2\cdot\cos x$ D) $\sin 2x$ E) $\tan x$

Çözüm: Şekildeki ABC üçgenini oluşturursak ABC açısı dik olur. Hipotenüsünün 2 olduğunu da fark ediniz.

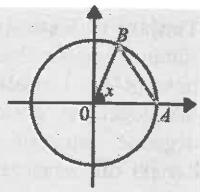
$$\cos x = \frac{|AB|}{2}$$

olduğundan $|AB| = 2\cdot\cos x$ olarak bulunur.



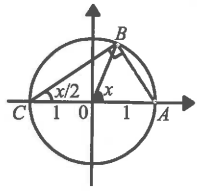
Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki birim çemberde $m(AOB) = x$ olduğuna göre $|AB|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



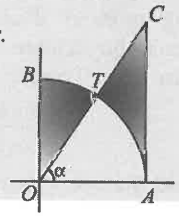
A) $\sin\frac{x}{2}$ B) $2\cdot\sin\frac{x}{2}$ C) $\sin 2x$ D) $\cos x$ E) $2\cdot\cos x$

Çözüm: Şekildeki ABC üçgenini oluşturursak ABC açısı dik olur. Hipotenüsünün 2 olduğunu da fark ediniz. $|OB| = |OC|$ olduğundan $m(ACB) = \frac{x}{2}$ olur. $\sin\frac{x}{2} = \frac{|AB|}{2}$ olduğundan $|AB| = 2\cdot\sin(x/2)$ olarak bulunur.



Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki birim çemberde AC // OB olup $m(AOC) = \alpha$ verilmiştir. Taralı alanlar eşit olduğuna göre $\tan\alpha$ kaça eşittir?*



A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) 2 E) 3

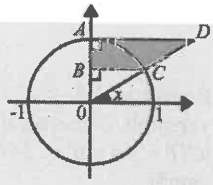
Çözüm: Taralı alanların eşit olması çeyrek daire dilimiyle OAC dik üçgeninin eşit alanlı olmaları anlamına gelir. $|OA| = 1$ ve $|AC| = \tan\alpha$ olduğundan

$$\frac{1\cdot\tan\alpha}{2} = \frac{\pi\cdot 1^2}{4}$$

olur ki buradan $\tan\alpha = \pi/2$ olarak bulunur.

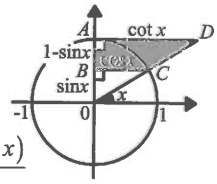
Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki birim çemberde taralı olan $ABCD$ yamuğunun alanı x ölçüsü cinsinden neye eşittir?*



A) $\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ B) $\frac{\cos^3 x}{2\cdot\sin x}$ C) $\frac{\cos^3 x}{\sin x}$ D) $\tan x$ E) $\cot x$

Çözüm: $|AD| = \cot x$, $|BC| = \cos x$ ve $|OB| = \sin x$ olduğunu biliyoruz. O halde $|AB| = 1 - \sin x$ olur. Bu durumda $ABCD$ yamuğunun alanı



$$A(ABCD) = \frac{(\cot x + \cos x)\cdot(1-\sin x)}{2}$$

$$= \frac{(\cot x - \cos x + \cos x - \cos x\sin x)}{2}$$

$$= \frac{(\cot x - \cos x\sin x)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x\sin^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{7-\cos x}{2}$$

ifadesi kaç farklı tamsayı değeri alabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

2.

$$\frac{|1+\cos x|+|1-\cos x|}{|2-\sin x|+|2+\sin x|}$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

3.

α ve θ keyfi seçilebilen birer ölçü olsun.

$$\sin\alpha=\frac{a-1}{2} \text{ ve } \cos\theta=\frac{b+2}{3}$$

olduğuna göre $a^2 + b^2$ ifadesi kaç farklı tamsayı değeri alabilir?

A) 6 B) 7 C) 33 D) 34 E) 35

4.

$$(12+\tan x)\cdot(8-\tan x)$$

çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 100 B) 99 C) 96 D) 91 E) 64

5.

$$(12+\sin x)\cdot(8-\sin x)$$

çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 100 B) 99 C) 96 D) 91 E) 64

6.

$$\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x,\ \sec x,\ \csc x$$

ifadelerinden kaç tanesi, uygun bir x değeri için, istenilen her reel sayı değerine eşit olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\sec x$$

ifadesinin alabileceği tüm değerler aşağıdaki kümelerden hangisini oluşturur?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-\{0\}$ C) $\mathbb{R}-(-1,1)$
D) $\mathbb{R}-[-1,1]$ E) $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

8.

Aşağıdaki değerlerden hangisi

$$\csc x$$

ifadesine hiçbir zaman eşit olamaz?

A) -9 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{10}$

9.

$$6\cdot\sin x-8\cdot\cos y$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) -2 B) 2 C) 6 D) 10 E) 14

10.

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$ olmak üzere

$$4\cdot\sec^2 x$$

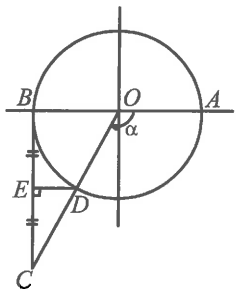
ifadesi kaç farklı tamsayı değerine eşit olabilir?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

1. C 2. D 3. E 4. A 5. B 6. C 7. C 8. C 9. E 10. B

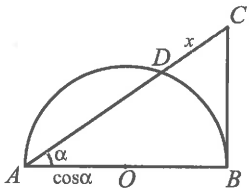
CEVAPLI TEST 2

1.
Yandaki birim çemberde
B teğet değme noktasıdır.
$m(AOC) = \alpha$
$DE \perp BC$
$|CE| = |EB|$
olduğuna göre sin α kaçtır?



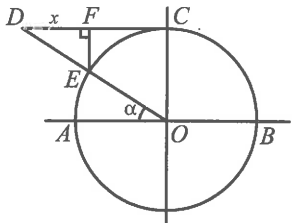
A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.
Yandaki $[AB]$ çaplı yarım
çemberin merkezi O noktasıdır.
$m(CAB) = \alpha$
$|AO| = \cos\alpha$ br
$|CD| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



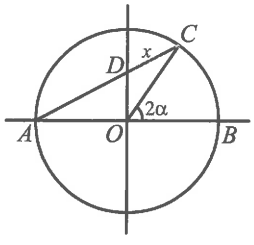
A) $\sin^2\alpha$ B) $\cos^2\alpha$ C) $2\cdot\sin^2\alpha$
D) $2\cdot\cos^2\alpha$ E) $\tan\alpha$

3.
Yandaki O merkezli birim
çemberde C teğet değme
noktasıdır.
$m(DOA) = \alpha$
$EF \perp DC$
$|DF| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



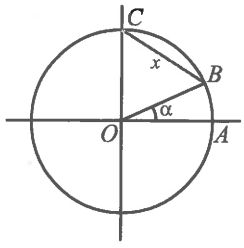
A) $\cot\alpha - \tan\alpha$ B) $\tan\alpha - \sin\alpha$ C) $\tan\alpha - \cos\alpha$
D) $\cot\alpha - \sin\alpha$ E) $\cot\alpha - \cos\alpha$

4.
Yandaki birim çemberde
A, D, C doğrusal
$m(BOC) = 2\alpha$
$|DC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



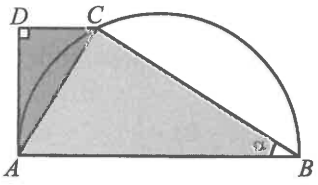
A) $\sec\alpha - \cot\alpha$ B) $\sec\alpha - \tan\alpha$ C) $\sec\alpha - \cos\alpha$
D) $2\cdot\cos\alpha - \sec\alpha$ E) $2\cdot\cos\alpha - \csc\alpha$

5.
Yandaki birim çemberde
O merkezdir.
$m(AOB) = \alpha$
$|BC| = x$ br
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisine eşittir?



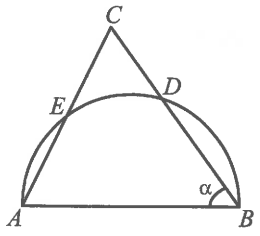
A) $\cos\alpha$ B) $2\cdot\sin\alpha$ C) $\tan(45° + \alpha)$
D) $2\cos(45° + \frac{\alpha}{2})$ E) $\sqrt{\sin 2\alpha}$

6.
Yandaki yarım
çemberin çapı $[AB]$'dir.
DA doğrusu çembere
A'da teğettir.
$AD \perp DC$
$m(ABC) = \alpha$
olduğuna göre
$\frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(ACD)}$ **oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**



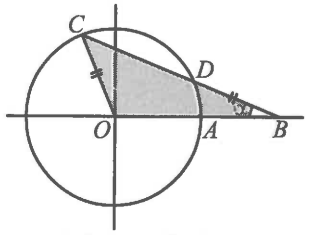
A) $\sin^2\alpha$ B) $\cos^2\alpha$ C) $\tan^2\alpha$ D) $\sec^2\alpha$ E) $\csc^2\alpha$

7.
Yandaki $[AB]$ çaplı yarım
çemberde
$|AE| = |EC| = 2$ br
$|AB| = 5$ br
$m(ABC) = \alpha$
olduğuna göre
tan α kaçtır?



A) $\frac{20}{21}$ B) $\frac{21}{20}$ C) $\frac{21}{22}$ D) $\frac{23}{24}$ E) $\frac{24}{25}$

8.
Yandaki O merkezli
birim çemberde
$|BD| = |OC|$
$m(OBC) = \alpha$
olduğuna göre OBC
üçgensel bölgesinin
alanı kaç br^2 dir?



A) $\cos 3\alpha\cdot\sin\alpha$ B) $\cos\alpha\cdot\sin 3\alpha$ C) $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha$
D) $\tan 3\alpha\cdot\cos\alpha$ E) $\tan\alpha\cdot\cos 3\alpha$

1. D 2. C 3. E 4. D 5. D 6. E 7. A 8. B

Cebir Notları

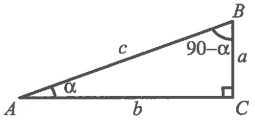
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Birim Çemberin Kullanımı

Analitik düzlemde birim çember çizildiği vakit, artık x ekseninin cos ekseni, y ekseninin de sin ekseni gibi davrandığını bir önceki yazımızda uzun uzadıya anlatmıştık. Şimdi birim çemberin diğer marifetlerini göreceğiz. Birim çember sayesinde, ölçüsü kaç derece olursa olsun bir açının tüm trigonometrik değerlerini veya ona özdeş olan tüm ifadeleri rahatlıkla bulabileceğiz. Daha sonra da birim çemberlerin trigonometrik ifadelerin değerlerinin sıralanışında oynadıkları rolü anlatacağız. Lisedeki öğretmenimin birim çemberi adam gibi kullanmayı bilen trigonometrinin 2/3'ünü halletmiş sayılır dediğinde inanmamıştım, şimdi bakıyorum da haklıymış!

Teorem. *Tümler iki açının birinin sinüsü, diğerinin kosinüsüdür, birinin tanjantı diğerinin kotanjantıdır, birinin sekantı diğerinin kosekantıdır.*

Kanıt: Bir dik üçgen çizerek rahatlıkla kanıtlanabilir. Yandaki ACB dik üçgeninde $m(BAC) = \alpha$ olsun. $m(ABC) = 90 - \alpha$ olur.



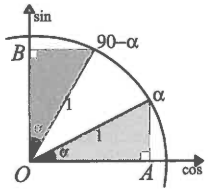
Şimdi hem α açısının hem de $90 - \alpha$ açısının trigonometrik değerlerini bulalım bakalım:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha),\quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha),\quad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha)$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc(90-\alpha),\quad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec(90-\alpha)$$

İsterseniz bu durumu bir de birim çember üzerinde irdeleyelim:



α ve $90 - \alpha$ açılarını oluşturan doğrular $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler. Yani yukarda taradığım iki dik üçgenin hem üç iç açısı hem de hipotenüsleri eşit uzunlukta olduğundan eş olduklarını söylüyorum. $|OA|$ değeri α açısının kosinüsü, $|OB|$ değeri de $90 - \alpha$ açısının sinüsü olduğundan ve eşlik gereği $|OA| = |OB|$ olduğundan kanıt tamamlanmış olur. Diğer dik kenar eşliğinden de $\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$ kanıtlanır.

tan-cot ve sec-csc çiftleri için de aynı teorem buradan rahatlıkla kanıtlanır. Gerçi sin-cos çifti birim çember yardımıyla kanıtlandıktan sonra, diğer çiftlerin kanıtı için çember kullanmasak da olur. Çünkü diğer çiftlerin sin-cos çiftiyle olan akrabalıklarını kullanabiliriz:

$$\tan(90-\alpha) = \frac{\sin(90-\alpha)}{\cos(90-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha,$$

$$\cot(90-\alpha) = \frac{\cos(90-\alpha)}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha,$$

$$\sec(90-\alpha) = \frac{1}{\cos(90-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha,$$

$$\csc(90-\alpha) = \frac{1}{\sin(90-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Aşağıdaki eşitlikleri inceleyiniz.

- ✓ $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$
- ✓ $\cos 42^\circ = \sin 48^\circ$
- ✓ $\tan 51^\circ = \cot 39^\circ$
- ✓ $\cot 57^\circ = \tan 33^\circ$
- ✓ $\sec 7^\circ = \csc 83^\circ$
- ✓ $\csc 87^\circ = \sec 3^\circ$
- ✓ $\sin^2 13^\circ + \sin^2 77^\circ = \sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ = 1$
- ✓ $\cos^2 43^\circ + \cos^2 47^\circ = \sin^2 47^\circ + \cos^2 47^\circ = 1$
- ✓ $\dfrac{\sin 58^\circ}{\sin 32^\circ} = \dfrac{\sin 58^\circ}{\cos 58^\circ} = \tan 58^\circ = \cot 32^\circ$
- ✓ $\dfrac{\cos 11^\circ}{\cos 79^\circ} = \dfrac{\cos 11^\circ}{\sin 11^\circ} = \cot 11^\circ = \tan 79^\circ$
- ✓ $\dfrac{1}{\cos 23^\circ} = \dfrac{1}{\sin 67^\circ} = \csc 67^\circ = \sec 23^\circ$
- ✓ $\dfrac{1}{\sin 8^\circ} = \dfrac{1}{\cos 82^\circ} = \sec 82^\circ = \csc 8^\circ$
- ✓ $\tan^2 10^\circ - \csc^2 80^\circ = \dfrac{\sin^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 10^\circ}$
$= \dfrac{\sin^2 10^\circ - 1}{\cos^2 10^\circ}$
$= \dfrac{-\cos^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ}$
$= -1.$

Örnek. $\dfrac{\sin 10^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \cot 45^\circ}{\tan 45^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cos 80^\circ}$ *oranı kaça eşittir?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$ olduğundan bu iki ifadeyi sadeleştirebiliriz. Diğerlerinin de değerlerini yerine yazarsak, soru çözülmüş olur.

$$\frac{\sin 10^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \cot 45^\circ}{\tan 45^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 45^\circ}{\tan 45^\circ \cdot \cot 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1984 ÖYS]. $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{a}{2}$ *olduğuna göre a'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2+\sqrt{2}$ D) 2 E) $\sqrt{2}-1$

Çözüm: $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gözden kaçırmadıysanız, $\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$ olduğunu da fark etmişsinizdir.

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 = \frac{a}{2}$$

$$a = 2$$

olduğu kolayca görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir dik üçgen olduğuna göre*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

toplamı kaça eşittir?

A) $1+\sin^2 A$ B) $\cos^2 A$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Genelliği bozmadan A açısını dik kabul edelim. Yapacağımız çözüm B veya C açısını dik kabul ettiğimizde de geçerli olacaktır.

$m(A) = 90^\circ$ ise $\sin A = 1$ olacağından

$$\sin^2 A = 1$$

olur. Diğer yandan $m(B) + m(C) = 90^\circ$ yani B ve C açıları tümler olduğundan $\cos C = \sin B$ olur ki buradan da

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

çıkar ki sorulan toplam 2'ye eşit bulunmuş olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC bir dik üçgen olduğuna göre*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

toplamı kaça eşittir?

A) $1+\sin^2 A$ B) $\cos^2 A$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Genelliği bozmadan A açısını dik kabul edelim. Yapacağımız çözüm B veya C açısını dik kabul ettiğimizde de geçerli olacaktır.

$m(A) = 90^\circ$ ise $\cos A = 0$ olacağından

$$\cos^2 A = 0$$

olur. Diğer yandan $m(B) + m(C) = 90^\circ$ yani B ve C açıları tümler olduğundan $\cos C = \sin B$ olur ki buradan da

$$\cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 B + \sin^2 B = 1$$

çıkar ki sorulan toplam 1'e eşit bulunmuş olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\tan\frac{61\pi}{5} - \cot\frac{163\pi}{10} = k$ *olduğuna göre* $\cos\frac{k\pi}{2}$ *kaça eşittir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\tan\frac{61\pi}{5} = \tan\left(12\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\frac{\pi}{5}$$

$$\cot\frac{163\pi}{10} = \cot\left(16\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = \cot\frac{3\pi}{10}$$

olduğunu not edelim. $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan açıların tümler, ifadelerin de dolayısıyla birbirlerine eşit olduklarını anlıyoruz. Bu durumda

$$\tan\frac{61\pi}{5} - \cot\frac{163\pi}{10} = k = 0$$

bulunur ki buradan $\cos\frac{k\pi}{2} = \cos 0 = 1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1987 ÖYS]. $\sin 2x = \cos 35^\circ$ *denkleminin* $[0^\circ, 90^\circ]$ *aralığındaki bir kökü aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) 70° B) 65° C) $37{,}5^\circ$ D) $27{,}5^\circ$ E) $17{,}5^\circ$

Çözüm:

$$\sin 2x = \cos 35^\circ$$

$$\sin 2x = \sin 55^\circ$$

$$2x = 55^\circ$$

$$x = 27{,}5^\circ$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos^2 25^\circ}{\cos^2 25^\circ} = a^2$ *eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin 25^\circ$ B) $\cos 25^\circ$ C) $\tan 25^\circ$ D) $\cot 25^\circ$ E) $\sec 25^\circ$

Çözüm: Bir 20°-70°-90° üçgeni çizerseniz $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ olduğunu görürsünüz. $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = 1$ diye

$$\frac{1-\cos^2 25^\circ}{\cos^2 25^\circ} = \frac{\sin^2 25^\circ}{\cos^2 25^\circ} = \tan^2 25^\circ.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ *ve* $x - 2y = \dfrac{\pi}{2}$ *olmak üzere*

$$A = \left(\tan x - \frac{1}{\tan 2y}\right)\cdot\left(\tan 2y - \frac{1}{\tan x}\right)$$

çarpımının sonucu kaçtır?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $x - 2y = \dfrac{\pi}{2}$ ise $2y = x - \dfrac{\pi}{2}$ olur. Dolayısıyla da

$$\tan 2y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cot x$$

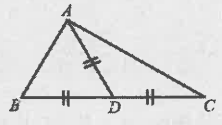
olur. O halde $\dfrac{1}{\tan 2y} = -\tan x$ 'dir. Şimdi sorulan çarpımı tekrar düzenleyelim.

$$A = (2\tan x)\cdot\left(-\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= (2\tan x)\cdot\left(-\frac{2}{\tan x}\right) = -4$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1981 ÖYS]. *Şekildeki üçgende* $|AD| = |BD| = |CD|$ *ve* $\tan B = 2$ *olduğuna göre,* cot *C'nin değeri kaçtır?*



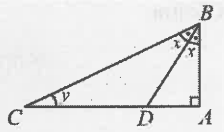
A) 2 B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{3}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 3

Çözüm: $AD| = |BD| = |CD|$ eşitliği muhteşem üçlüden dolayı $m(CAB) = 90^\circ$ olmasını gerektirir. O halde B ve C açıları tümlerdir. Bu durumda

$$\cot C = \tan B = 2.$$

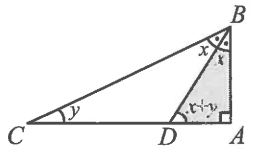
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC bir dik üçgen*
BD iç açıortay,
$m(ABD) = x$,
$m(BCA) = y$
olduğuna göre $\cos(x + y)$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?



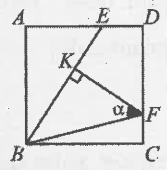
A) $\sin x$ B) $\tan x$ C) $\cot x$ D) $\sec x$ E) $\csc x$

Çözüm: Kosinüsü sorulan $x + y$ açısının BDA açısı olduğunu önce görünüz.
$x + y$ açısı ile x açısı tümler olduğundan
$\cos(x + y) = \sin x$ olur.



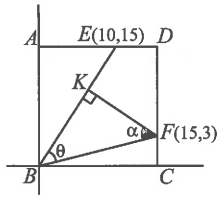
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD bir kare*
$|DF| = 4\cdot|FC|$
$|AE| = 2\cdot|ED|$
$FK \perp BE$
$m(BKF) = \alpha$
olduğuna göre cot α *kaçtır?*



A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: $m(EBF) = \theta$ olsun.
α ile θ tümler diye
$\tan\theta$ değerini bularak cot α'ya ulaşmayı planlıyoruz. Karenin bir kenarına 15 br diyelim.
$|AE| = 10$ br ve $|FC| = 3$ br olur.
Kareyi, B noktası orijine denk gelecek şekilde analitik düzleme yerleştirelim. $m_{BF} = 1/5$ ve $m_{BE} = 3/2$ olduğundan



$$\tan(EBF) = \tan\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}} = 1$$

olduğundan $\theta = 45^\circ$, dolayısıyla cot $45^\circ = 1$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a ve b birer dar açı ölçüsü olmak üzere*

$$\cot b = \frac{1}{\cos a} - \frac{\sin b}{1 + \cos b}$$

eşitliğini sağlayan a ve b değerleri için a + b toplamı aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $\dfrac{\pi}{6}$ B) $\dfrac{\pi}{4}$ C) $\dfrac{\pi}{3}$ D) $\dfrac{\pi}{2}$ E) π

Çözüm:

$$\cot b = \frac{1}{\cos a} - \frac{\sin b}{1+\cos b}$$
$$= \frac{1}{\cos a} - \frac{(\sin b)\cdot(1-\cos b)}{(1+\cos b)\cdot(1-\cos b)}$$
$$= \frac{1}{\cos a} - \frac{(\sin b)\cdot(1-\cos b)}{(1-\cos^2 b)}$$
$$= \frac{1}{\cos a} - \frac{(\sin b)\cdot(1-\cos b)}{\sin^2 b}$$
$$= \frac{1}{\cos a} - \frac{1-\cos b}{\sin b}$$
$$= \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\sin b} + \cot b$$

olduğundan cot b ifadeleri sadeleşirse

$$\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\sin b} = 0$$

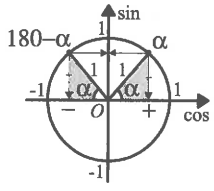
yani $\cos a = \sin b$ bulunur. Bu da $a+b=\frac{\pi}{2}$ olmasıyla mümkündür.

Doğru cevap: D.

Tümler açılar arasındaki ilişkiyi de öğrendik. Şimdi işimizin sadece I. bölgedeki açılarla olmadığını anlama vakti geldi. II., III. ve IV. bölgelerdeki açıların trigonometrik değerlerini öğrenmeye geldi sıra. Burası çok çok önemlidir. Lisedeki öğretmenimin dediğini hatırlayın!

II. Bölgede Trigonometrik Değerler.

$0° < \alpha < 90°$ olmak üzere bir α açı ölçüsü için II. bölgedeki ölçüleri $180° - \alpha$ diye yazabiliriz. Şekilden de görüleceği üzere ölçüleri $180° - \alpha$ ile α olan açılar y eksenine göre simetrik olurlar. O halde sinüsleri aynı yere tekabül eder. Diğer yandan kosinüslerinin aynı boyda ama zıt işaretli olduklarına dikkat ediniz.



Formülize edilirse,

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha,$$

$$\cot(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha,$$

$$\sec(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha,$$

$$\csc(180° - \alpha) = \frac{1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha.$$



Bu eşitliklerde işaret hatası yapmamak için şunu göz önünde bulundurun: II. bölgede sin ve csc pozitiftir, cos, tan, cot ve sec negatiftir.

Özetle, bütünler iki açının sinüs ve kosekantları birbirlerine eşittir ama kosinüs, tanjant, kotanjant ve sekantları birbirlerinin ters işaretlileridir.

Bir de buradaki en önemli nokta II. bölgedeki açı ölçüsünün $180° - \alpha$ diye gösterilmiş olması. Bu ölçü $90° + \alpha$ diye de gösterilebilirdi, o zaman formüller değişirdi:

$\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$
$\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha) = -\sin\alpha,$
$\tan(90° + \alpha) = -\tan(90° - \alpha) = -\cot\alpha,$
$\cot(90° + \alpha) = -\cot(90° - \alpha) = -\tan\alpha,$
$\sec(90° + \alpha) = -\sec(90° - \alpha) = -\csc\alpha,$
$\csc(90° + \alpha) = \csc(90° - \alpha) = \sec\alpha.$

Daha önceki ve bu formüllerin tamamı $0° < \alpha < 90°$ olmasa da sağlar unutmayın. Ama biz ilk formülleri esas alacağız.

Kısaca, II. bölgedeki bir açının trigonometrik değerleri sorulduğunda, açının 180'den kaç eksik olduğuna bakacağız ve daha sonra ne kadar eksikse, o açının trigonometrik adını değiştirmeden, o bölgedeki işaretini de düşünerek sadeleştireceğiz. Yani verilen açıyı birim çemberde çizip yatay eksenle yaptığı dar açıya bakıyoruz. İşaretiyle birlikte servis ediyoruz.

Örneğin,

$\sin 100° = \sin(180° - 80°) = \sin 80°,$
$\cos 110° = \cos(180° - 70°) = -\cos 70°,$
$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60°,$
$\cot 130° = \cot(180° - 50°) = -\cot 50°,$
$\sec 140° = \sec(180° - 40°) = -\sec 40°,$
$\csc 150° = \csc(180° - 30°) = \csc 30°.$

Örnek. *Bir ABC üçgeninde,* $\frac{\sin^2 A + \cos^2(B+C)}{\sin^2 B + \cos^2(A+C)}$ *oranı kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: $A + B + C = 180°$ olduğundan

$$\cos(B + C) = -\cos A$$

ve

$$\cos(A + C) = -\cos B$$

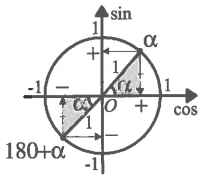
olur. Şimdi ifadeyi tekrar düzenleyelim:

$$\frac{\sin^2 A + \cos^2(B+C)}{\sin^2 B + \cos^2(A+C)} = \frac{\sin^2 A + (-\cos A)^2}{\sin^2 B + (-\cos B)^2}$$
$$= 1$$

Doğru cevap B.

III. Bölgede Trigonometrik Değerler.

$0° < \alpha < 90°$ koşulunu sağlayan bir α açı ölçüsü için III. bölgedeki ölçüleri $180° + \alpha$ diye yazabiliriz. Şekilden de görüleceği üzere ölçüleri $180° + \alpha$ ile α olan açılar orijine göre simetrik olurlar. O halde sinüsleri ve kosinüslerinin aynı boyda ama zıt işaretli olduklarını görürüz.



Formülize edilirse,

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha,$

$$\tan(180° + \alpha) = \frac{\sin(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha,$$

$$\cot(180° + \alpha) = \frac{\cos(180° + \alpha)}{\sin(180° + \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha,$$

$$\sec(180° + \alpha) = \frac{1}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha,$$

$$\csc(180° + \alpha) = \frac{1}{\sin(180° + \alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\csc\alpha.$$



Bu eşitliklerde işaret hatası yapmamak için şunu göz önünde bulundurun: III. bölgede tan ve cot pozitiftir, sin, cos, sec ve csc negatiftir.

Özetle, iki açının ölçüleri arasındaki fark $180°$ ise tanjant ve kotanjantları birbirlerine eşittir ama sinüs, kosinüs, sekant ve kosekantları birbirlerinin ters işaretlileridir.

Bir de buradaki en önemli nokta, III. bölgedeki açının ölçüsünün $180° + \alpha$ diye gösterilmiş olması. Bu açının ölçüsü $270° - \alpha$ diye de gösterilebilirdi, o zaman formüller değişirdi:

$\sin(270° - \alpha) = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha,$

$\cos(270° - \alpha) = -\cos(90° - \alpha) = -\sin\alpha,$

$\tan(270° - \alpha) = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha,$

$\cot(270° - \alpha) = \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha,$

$\sec(270° - \alpha) = -\sec(90° - \alpha) = -\csc\alpha,$

$\csc(270° - \alpha) = -\csc(90° - \alpha) = -\sec\alpha.$

Daha önceki ve bu formüllerin tamamı $0° < \alpha < 90°$ olmasa da sağlar unutmayın. Ama biz ilk formülleri esas alacağız.

Kısaca, III. bölgedeki bir açı ölçüsünün trigonometrik değerleri sorulduğunda, ölçünün 180'den kaç fazla olduğuna bakacağız ve daha sonra ne kadar fazlaysa, o açının trigonometrik adını değiştirmeden, o bölgedeki işaretini de düşünerek sadeleştireceğiz. Yani, o açıyı birim çemberde çizip, yatay eksenle yaptığı dar açıya bakarak, işaretiyle birlikte cevap vereceğiz. Örneğin,

$\sin 190° = \sin(180° + 10°) = -\sin 10°,$

$\cos 200° = \cos(180° + 20°) = -\cos 20°,$

$\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30°,$

$\cot 220° = \cot(180° + 40°) = \cot 40°,$

$\sec 230° = \sec(180° + 50°) = -\sec 50°,$

$\csc 240° = \csc(180° + 60°) = -\csc 60°.$

Örnek [1974 ÜSS]. *sin 210° ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm:

$$\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x + y = 90°$ iken $\cos x = \frac{4}{5}$ olduğuna göre $\sin(2x + 3y)$ ifadesi kaça eşittir?*

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) 1 D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: $x + y = 90°$ olduğundan $2x + 2y = 180°$ olur. Bu durumda

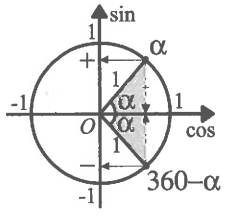
$$\begin{aligned}\sin(2x + 3y) &= \sin(2x + 2y + y)\\ &= \sin(180° + y)\\ &= -\sin y\\ &= -\cos x\\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

IV. Bölgede Trigonometrik Değerler.

$0° < \alpha < 90°$ koşulunu sağlayan bir α açı ölçüsü için IV. bölgedeki ölçüleri $360° - \alpha$ diye yazabiliriz. Şekilden de görüleceği üzere ölçüsü $360° - \alpha$ ile α olan açılar x eksenine göre simetrik olurlar. O halde kosinüsleri aynı yere tekabül eder. Diğer yandan sinüslerinin aynı boyda ama zıt işaretli olduklarına dikkat ediniz.



Formülize edilirse,

$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha,$

$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha,$

$$\tan(360° - \alpha) = \frac{\sin(360° - \alpha)}{\cos(360° - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha,$$

$$\cot(360° - \alpha) = \frac{\cos(360° - \alpha)}{\sin(360° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha,$$

$$\sec(360° - \alpha) = \frac{1}{\cos(360° - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha,$$

$$\csc(360° - \alpha) = \frac{1}{\sin(360° - \alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\csc\alpha.$$



Bu eşitliklerde işaret hatası yapmamak için şunu göz önünde bulundurun: IV. bölgede cos ve sec pozitiftir, sin, tan, cot ve csc negatiftir.

Özetle, tamlar iki açı ölçüsünün (toplamları 360°) kosinüs ve sekantları birbirlerine eşittir ama sinüs, tanjant, kotanjant ve kosekantları birbirlerinin ters işaretlileridir.

Bir de buradaki en önemli nokta IV. bölgedeki açı ölçüsünün $360° - \alpha$ diye gösterilmiş olması. Bu açı ölçüsü $270° + \alpha$ diye de gösterilebilirdi, o zaman formüller değişirdi:

$$\sin(270° + \alpha) = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270° + \alpha) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\tan(270° + \alpha) = -\tan(90° - \alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\cot(270° + \alpha) = -\cot(90° - \alpha) = -\tan\alpha,$$
$$\sec(270° + \alpha) = \sec(90° - \alpha) = \csc\alpha,$$
$$\csc(270° + \alpha) = -\csc(90° - \alpha) = -\sec\alpha.$$

Formüllerin tamamı $0° < \alpha < 90°$ olmasa da sağlar unutmayın. Ama biz ilk formülleri esas alacağız.

Kısaca, IV. bölgedeki bir açı ölçüsünün trigonometrik değerleri sorulduğunda, ölçünün 360'den kaç eksik olduğuna bakacağız ve daha sonra ne kadar eksikse, o açının trigonometrik adını değiştirmeden, o bölgedeki işaretini de düşünerek sadeleştireceğiz. Yani yine açının birim çemberde çizildiğinde yatay eksenle kaç derecelik dar açı yaptığına bakacağız.

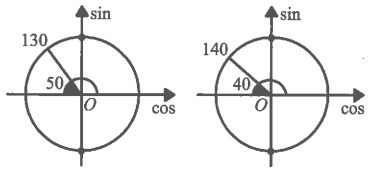
Örneğin,

$$\sin 280° = \sin(360° - 80°) = -\sin 80°,$$
$$\cos 290° = \cos(360° - 70°) = \cos 70°,$$
$$\tan 300° = \tan(360° - 60°) = -\tan 60°,$$
$$\cot 310° = \cot(360° - 50°) = -\cot 50°,$$
$$\sec 320° = \sec(360° - 40°) = \sec 40°,$$
$$\csc 330° = \csc(360° - 30°) = -\csc 30°.$$

Okumadan Geçmeyin!
Şimdi birim çember adı altında anlattıklarımızın suyunu sıkacağız. Geriye, altın değerinde bir metot kalacak.

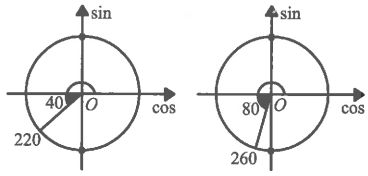
Trigonometrik değeri sorulan açıyı boşverip, o açıyı birim çemberde çizdiğimiz zaman yatay eksenle yapacağı dar açıya göre trigonometrik değeri hesaplayacağız. Sorulan değerin bölgesine göre işaretini de koyarak, kollarımızı kavuşturacağız.

Örneğin, sin 130° mu soruldu, 130°'lik açının yatay eksenle yaptığı açının ölçüsü 50° olduğundan sin 50° sorulmuş gibi davranacağız. Tabi işareti unutmuyoruz, II.bölgede sinüs zaten pozitif olduğundan sorun yok. Ama cos 130° sorulsaydı, —cos 50° diyecektik.



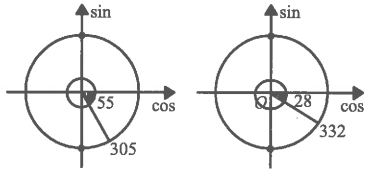
$\sin 130° = \sin 50°$ ve $\cos 140° = -\cos 40°$

Şimdi de sin 220° ve cos 260° değerlerini bulalım. 220° ve 260°'lik açıların yatay eksenle yaptıkları dar açıların ölçüleri sırasıyla 40° ve 80° olduğundan



$\sin 220° = -\sin 40°$ ve $\cos 260° = -\cos 80°$

olur. Dikkat ettiyseniz her iki değerin de negatif olması gerektiğini unutmadık, siz de unutmayın!
IV. bölgeden de örnek verelim:



$\sin 305° = -\sin 55°$ ve $\cos 332° = \cos 28°$

Biz örneklerimizi sinüs ve kosinüs için verdik ama diğer trigonometrik oranlarda da bu metot geçerlidir. Herkese bu yolu anlatmayın ama, bizim farkımız olsun! ☺

Ama ben illa 90°'ye ve 270°'ye göre kıyaslama yapmak istiyorum diyenler de şunu yapmalı:
Trigonometrik değeri sorulan açı ölçüsünün, önce 90° veya 270°'den ne kadar küçük veya ne kadar büyük olduğunu yazmalıdır. Sonra sorulan sinüs değeri kosinüse, tanjant değeriyse kotanjanta, sekant değeriyse kosekanta çevirmelidir. Tabi tam tersiyse tam tersini yapmalıdır. En son olarak da sorulan açı ölçüsü hangi bölgeye aitse ona göre işaret koymalıdır. Birkaç örnek yapalım, görün:

$$\sin 50° = \sin(90° - 40°) = \cos 40°,$$
$$\cos 170° = \cos(90° + 80°) = -\sin 80°,$$
$$\tan 250° = \tan(270° - 20°) = \cot 20°,$$
$$\cot 320° = \cot(270° + 50°) = -\tan 50°.$$
$$\sec 110° = \sec(90° + 20°) = -\csc 20°$$
$$\csc 200° = \csc(270° - 70°) = -\sec 70°$$

Örnek. $\dfrac{\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ \cdot \tan 300^\circ}{\cot 135^\circ \cdot \sec 330^\circ \cdot \csc 150^\circ}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\dfrac{3}{16}$ B) -1 C) 1 D) $\dfrac{3}{8}$ E) $\dfrac{3}{16}$

Çözüm:

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$
$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$
$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3},$$
$$\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1,$$
$$\sec 330^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},$$
$$\csc 150^\circ = \csc 30^\circ = 2$$

olduğundan

$$\frac{\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ \cdot \tan 300^\circ}{\cot 135^\circ \cdot \sec 330^\circ \cdot \csc 150^\circ} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)}{-1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{4}{\sqrt{3}}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{\sin(-210^\circ)\cdot\cos(-240^\circ)\cdot\tan(-300^\circ)}{\cot(-135^\circ)\cdot\sec(-330^\circ)\cdot\csc(-150^\circ)}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\dfrac{3}{16}$ B) -1 C) 1 D) $\dfrac{3}{8}$ E) $\dfrac{3}{16}$

Çözüm:

$$\frac{\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ \cdot \tan 300^\circ}{\cot 135^\circ \cdot \sec 330^\circ \cdot \csc 150^\circ} = \frac{3}{16}$$

olduğunu bir önceki örnekte çözmüştük. Açı ölçüsünün ters işaretinin alınması kosinüs ve sekantta sonucu değiştirmemekle birlikte, diğer dört trigonometrik oranda cevabı ters işaretli yapmaktadır. Bu sayı çift olduğundan sonuç değişmez. Yani, 3 veya 5 tanesinde cevap ters işaretlisi çıksaydı cevaba $-\dfrac{3}{16}$ diyecektik, ama şu durumda cevap $\dfrac{3}{16}$.

Doğru cevap: E.

Örnek [1982 ÖYS]. *Aşağıdakilerden hangisi* $\sin 40^\circ$*'ye eşittir?*

A) $\sin 220^\circ$ B) $\cos 130^\circ$ C) $\sin 50^\circ$ D) $\sin(-40^\circ)$ E) $\cos(-50^\circ)$

Çözüm:

$$\sin 220^\circ = -\sin 40^\circ$$
$$\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ = -\sin 40^\circ$$
$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$
$$\sin(-40^\circ) = -\sin 40^\circ$$
$$\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $|\cos 260^\circ| - |\cos 100^\circ|$ *farkı kaça eşittir?*

A) 0 B) -1 C) 1 D) $-2\cdot\cos 80^\circ$ E) $2\cdot\cos 80^\circ$

Çözüm:

$$|\cos 260^\circ| = |-\cos 80^\circ| = \cos 80^\circ$$

ve

$$|\cos 100^\circ| = |-\cos 80^\circ| = \cos 80^\circ$$

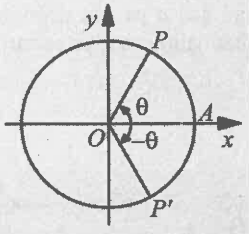
olduğundan

$$|\cos 260^\circ| - |\cos 100^\circ| = \cos 80^\circ - \cos 80^\circ = 0$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek[2006 ÖSS]. *Şekilde O merkezli birim çember üzerinde P ve P′ noktaları Ox eksenine göre birbirinin simetriği olup,* $m(AOP) = \theta$ *,* $m(AOP') = -\theta$ *olarak verilmiştir. Buna göre P′ noktası aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilemez?*



A) $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ B) $(\cos(-\theta), \sin\theta)$
C) $(\cos\theta, -\sin\theta)$ D) $(\cos\theta, \sin(2\pi-\theta))$
E) $(\cos(2\pi-\theta), -\sin\theta)$

Çözüm: P' noktasının koordinatlarının $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ olduğunu biliyoruz.

$$\cos(-\theta) = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$$

ve

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta = \sin(2\pi - \theta)$$

olarak yazılabileceğinden A, C, D ve E şıklarındaki ifadeler de doğrudur. B şıkkı ordinatından dolayı yanlıştır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi daima* $\sin\alpha$ *ile özdeştir?*

A) $\sin(\pi+\alpha)$ B) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ C) $\sin(2\pi-\alpha)$

D) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ E) $\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)$

Çözüm: Biz tüm şıkların özdeşini bulalım:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

olduğundan

Doğru cevap E.

Örnek [1984 ÖYS]. *Aşağıdakilerden hangisi* $\sin(\frac{\pi}{2}-a)$ *ile özdeş değildir?*

A) $\sin(\frac{\pi}{2}+a)$ B) $\sin(-a)$ C) $\cos(-a)$

D) $\cos a$ E) $\cos(2\pi-a)$

Çözüm: $\sin(\frac{\pi}{2}-a)=\cos a$ olduğundan cos a'ya eşit olmayan şıkkı bulacağız. $\sin(-a)=-\sin a$ olup, her daim cos a'ya eşit değildir. Fakat diğer dört şıktaki ifade her daim cos a'ya eşittir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cdot\tan(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\cot(\pi-x)}$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\cot x$ B) $-\tan x$ C) -1 D) 1 E) $\tan x$

Çözüm:

$$\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x \text{ ve } \cot(\pi-x)=-\cot x$$

olduğundan yani bu iki ifade birbirlerine eşit olduklarından sadeleşirler. Diğer yandan

$$\cos(\pi+x)=-\cos x \text{ ve } \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$$

olduğundan bunlar sadeleşince de geriye -1 kalır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -1 B) $-1/2$ C) 0 D) 1/2 E) 1

Çözüm: Her trigonometrik ifadeyi ayrı ayrı sadeleştirelim:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

olduğundan,

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}\cdot\tan\alpha$$

$$=\cot\alpha\cdot\tan\alpha=1.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $\cot 2009^\circ$ *ile aynı değere sahip değildir?*

A) $\cot 209^\circ$ B) $\tan 61^\circ$ C) $\cot 29^\circ$

D) $-\tan(-61^\circ)$ E) $\cot 151^\circ$

Çözüm: Öncelikle 2009° lik ölçünün $[0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki karşılığını bulalım. $2009^\circ \equiv 209^\circ$ olduğundan

$$\cot 2009^\circ = \cot 209^\circ$$

yazabiliriz. A şıkkı doğrudur. Diğer yandan

$$\cot 209^\circ = \cot 29^\circ = \tan 61^\circ = -\tan(-61^\circ)$$

olduğundan B, C ve D şıkları da doğrudur. Geriye sadece E şıkkı kaldığından yanlış olan seçenek odur.

Doğru Cevap: E.

Örnek. $\dfrac{\sin^2(-x)}{\cos(\frac{3}{2}\pi-x)\cdot\sin(\pi+x)}$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\sin^2(-x)=[\sin(-x)]^2=[-\sin x]^2$$

olduğunu not edelim. Diğer yandan

$$\cos(\frac{3}{2}\pi-x)=-\sin x \text{ ve } \sin(\pi+x)=-\sin x$$

olduğundan pay ile paydanın birbirlerine eşit olduklarını görüyoruz. O halde sorulan oran 1'e eşittir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1976 ÜSS]. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *ve* $k \in \mathbb{Z}$ *olduğuna göre*

$$\cos\left[(k+\frac{1}{2})\pi+(-1)^k\cdot(\alpha-\frac{\pi}{2})\right]$$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cos\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $(-1)^k\cdot\cos\alpha$ D) $(-1)^k\cdot\sin\alpha$ E) $(-1)^k$

Çözüm: k'nin tek ve çift olduğu durumları inceleyeceğiz.

***k* tek ise**

$$\cos\left[(k+\frac{1}{2})\pi+(-1)^k\cdot(\alpha-\frac{\pi}{2})\right]=\cos\left[k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$
$$=\cos[k\pi+\pi-\alpha]$$
$$=\cos[(k+1)\pi-\alpha]$$
$$=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

***k* çift ise**

$$\cos\left[(k+\frac{1}{2})\pi+(-1)^k\cdot(\alpha-\frac{\pi}{2})\right]=\cos\left[k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=\cos[k\pi+\alpha]$$
$$=\cos\alpha$$

Her iki durumda da cevabın $\cos\alpha$ çıkıyor.

Doğru cevap: B.

Örnek. $T=\dfrac{\cos(7\pi+x)+\cos(13\pi-x)}{\cos(2\pi-x)-\sin(\frac{15}{2}\pi-x)}$ *olduğuna göre* T *kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\cos(7\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x,$$
$$\cos(13\pi-x)=\cos(\pi-x)=-\cos x,$$
$$\cos(2\pi-x)=\cos(-x)=\cos x,$$
$$\sin(\frac{15}{2}\pi-x)=\sin(\frac{3}{2}\pi-x)=-\cos x$$

olduğundan

$$T=\frac{\cos(7\pi+x)+\cos(13\pi-x)}{\cos(2\pi-x)-\sin(\frac{15}{2}\pi-x)}=\frac{-\cos x-\cos x}{\cos x-(-\cos x)}=-1$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\tan 25^\circ = a$ *olduğuna göre* $\dfrac{\tan 205^\circ-\tan 115^\circ}{\tan 155^\circ+\tan 335^\circ}$ *ifadesinin* a *türünden eşiti nedir?*

A) $\dfrac{a^2-1}{-2a^2}$ B) $\dfrac{a^2-1}{2a^2}$ C) $\dfrac{a^2+1}{-2a^2}$ D) $\dfrac{a^2+1}{-a^2}$ E) $\dfrac{a^2+1}{a^2}$

Çözüm: Her birini ayrı ayrı hesaplayalım:

$\tan 205^\circ = \tan 25^\circ = a$,

$$\tan 115^\circ = -\tan 65^\circ = -\cot 25^\circ = \frac{-1}{\tan 25^\circ} = \frac{-1}{a},$$

$\tan 155^\circ = -\tan 25^\circ = -a$,

$\tan 335^\circ = -\tan 25^\circ = -a$

olduğundan

$$\frac{\tan 205^\circ-\tan 115^\circ}{\tan 155^\circ+\tan 335^\circ}=\frac{a-(-\frac{1}{a})}{-a-a}=\frac{a^2+1}{-2a^2}.$$

Doğru cevap: C.

Doğru mu yanlış mı?

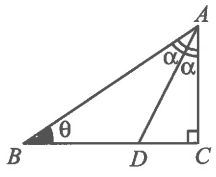
$f(\alpha)$	Doğru	Yanlış
$\sin 0^\circ = 0$		
$\tan 180^\circ = 0$		
$\sec 360^\circ = 0$		
$\cos 90^\circ = 0$		
$\cot 270^\circ = 0$		
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + \alpha)$		
$\sin(180^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$		
$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$		
$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$		
$\tan(270^\circ - \alpha) = \cot(-\alpha)$		
$\sin(-\alpha) = \sin(270^\circ - \alpha)$		
$\cos(-\alpha) = -\cos(180^\circ + \alpha)$		
$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(270^\circ + \alpha)$		
$\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ)$		
$\sec\alpha = \csc(\alpha - 180^\circ)$		
$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -1$		
$\tan 182^\circ = \cot 2^\circ$		
$\sin 180^\circ + \cos 90^\circ + \tan 45^\circ = 2$		
$\tan 225^\circ - \cot 45^\circ + \sin 30^\circ = 2$		

CEVAPLI TEST 1

1.
ABC bir dik üçgen olduğuna göre
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$
toplamı kaça eşittir?

A) $1+\sin^2 A$ B) $\cos^2 A$ C) 0 D) 1 E) 2

2.
$AC \perp BC$
$m(ABC) = \theta$
$m(BAD) = m(DAC) = \alpha$
olduğuna göre
$\sin(\alpha+\theta)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\sin\alpha$ B) $\sin\theta$ C) $\cos\alpha$ D) $\cos\theta$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.
$x+y=\frac{\pi}{2}$ ve $\cos x=\frac{3}{4}$ olmak üzere
$$\cos(3x+2y)$$
ifadesi kaça eşittir?

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

4.
$$\frac{\sin 210^\circ \cdot \cos 240^\circ}{\cot 225^\circ \cdot \sec 300^\circ}$$
ifadesi kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

5.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\sin 20^\circ$$
ile aynı değere <u>sahiptir</u>?

A) $\sin 200^\circ$ B) $\cos 110^\circ$ C) $\sin 70^\circ$ D) $\sin(-20^\circ)$ E) $\cos(-70^\circ)$

6.
$$|\cos 265^\circ| - |\cos 95^\circ|$$
farkı kaça eşittir?

A) 0 B) −1 C) 1 D) $-2\cdot\cos 85^\circ$ E) $2\cdot\cos 85^\circ$

7.
$$\sin(\pi+\alpha),$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha),$$
$$\sin(2\pi-\alpha),$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha),$$
$$\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)$$
ifadelerinden kaç tanesi $\sin\alpha$ ile özdeştir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
x bir dar açı ölçüsü olmak üzere
$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\cot(2\pi-x)}{\cos(3\pi+x)\cdot\tan(\frac{\pi}{2}+x)}$$
oranı kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{4}$ B) −1 C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{4}$

9.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\sin 2008^\circ$$
ile aynı değere <u>sahip değildir</u>?

A) $\sin 208^\circ$ B) $\sin 332^\circ$ C) $\cos 242^\circ$ D) $\cos 152^\circ$ E) $\cos 118^\circ$

10.
Her x için $f(-x) = f(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlara çift fonksiyon denir.
Bu tanıma göre, tanımlı oldukları aralıklarda
$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$
fonksiyonlarından kaç tanesi çift fonksiyondur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

1. D 2. C 3. B 4. E 5. E 6. A 7. A 8. B 9. D 10. B

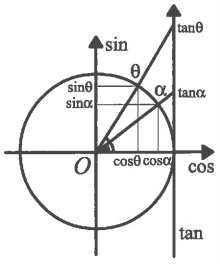
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Trig. Değerlerde Sıralama

Birim çemberi adam gibi kullanmayı bilmek burada da derdimize derman olacak. Birim çemberi kullanarak bir trigonometrik değerin bir diğerinden büyük mü, küçük mü veya ona eşit mi olduğunu anlayabiliriz. Aslında her şey sinüslü ifadeleri kıyaslamayı bilmeye dayanıyor. Çünkü tüm kosinüslü ifadeler de sinüslü halde yazılabilir. Tanjant ve kotanjant da sin ve cos'lu hale getirilebilir. Sekant ve kosekant da öyle. O halde biz sin'li ifadelerin kıyaslanmasını öğrenelim yeter!

I. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs büyür. Yandaki gibi bir birim çember çizip, $\alpha < \theta$ olacak şekilde birer α ve θ açısı çizelim. Şekilde de görüldüğü üzere $\sin\alpha < \sin\theta$ olur. Fakat $\cos\alpha > \cos\theta$ olduğuna da dikkat ediniz. Şekle bir de tanjant eksenini eklersek, $\tan\alpha < \tan\theta$ olduğunu da görürüz. O halde aralarındaki ters ilişkiden dolayı $\cot\alpha > \cot\theta$ yazılabilir.



Şimdi de sec ve csc değerlerine bakalım. İlgili eksenleri çizmeye gerek yok, sin ve cos değerlerinden yorum yapacağız. $\sin\alpha < \sin\theta$ olduğundan $\csc\alpha > \csc\theta$ ve $\cos\alpha > \cos\theta$ olduğundan $\sec\alpha < \sec\theta$ olmalıdır. Bulduklarımızı toparlayalım:

I. bölgeye ait α ve θ ölçüleri için $\alpha < \theta$ ise

$$\sin\alpha < \sin\theta$$
$$\cos\alpha > \cos\theta$$
$$\tan\alpha < \tan\theta$$
$$\cot\alpha > \cot\theta$$
$$\sec\alpha < \sec\theta$$
$$\csc\alpha > \csc\theta$$

Açı ölçüleri başka bölgelere ait olsalar dahi, onları bir şekilde birinci bölgeye ait bir açı ölçüsüne dönüştüreceğimizden, birinci bölgeye ait yukardaki eşitsizlikleri hafızada tutmaya gayret ediniz. Ben size bir yol önereyim. Sıralama çok simetrik:

$$< > < > < >$$

Farklı iki açı ölçüsünün aynı tip trigonometrik oranlarını kıyaslamayı öğrendik, şimdi de birbirine eşit iki açı ölçüsünün farklı tip trigonometrik oranlarını kıyaslayalım. Şekilden de görüldüğü üzere birinci bölgede her zaman $\tan\alpha > \sin\alpha$ ve $\cot\alpha > \cos\alpha$ olur.

Örnek [1985 ÖYS]. *$a = \sin 5^\circ$, $b = \sin 85^\circ$, $c = \sin 105^\circ$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

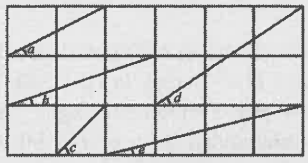
A) $c < b < a$ B) $b < c < a$ C) $b < a < c$
D) $a < c < b$ E) $a < b < c$

Çözüm: I. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs değerinin büyüyeceğini söylemiştik.

$a = \sin 5^\circ$, $b = \sin 85^\circ$ ve $c = \sin 105^\circ = \sin 75^\circ$ olduğundan $a < c < b$ doğru sıralamadır.

Doğru cevap: D.

Örnek.



18 adet eş kareden oluşturulmuş yukardaki şekilde a, b, c, d, e ölçülerine sahip açıların kosinüslerine göre küçükten büyüğe doğru dizilişi aşağıdakilerden hangisindedir?

A) $\cos a < \cos b < \cos c < \cos d < \cos e$
B) $\cos a < \cos d < \cos c < \cos b < \cos e$
C) $\cos c < \cos d < \cos b < \cos a < \cos e$
D) $\cos c < \cos a < \cos d < \cos b < \cos e$
E) $\cos c < \cos d < \cos a < \cos b < \cos e$

Çözüm: Beş açı ölçüsü de dar olduğundan küçükten büyüğe kosinüs sıralaması yerine, büyükten küçüğe sinüs sıralaması yapabiliriz. Hatta hipotenüsleri bulmaktansa, büyükten küçüğe tanjant sıralaması daha uygundur.

$\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$, $\tan c = 1$, $\tan d = \frac{2}{3}$, $\tan e = \frac{1}{4}$ olduğunu not edelim.

$$1 > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$\tan c > \tan d > \tan a > \tan b > \tan e$$

doğru sıralamadır. "tan" yerine "cos" yazarsak, oklar yön değiştirir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC çeşitkenar üçgeninde en uzun kenarın [BC] olduğu bilinmekteyse* cos *A değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?*

A) $\frac{49}{100}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: En uzun kenarın gördüğü açının en büyük iç açı ölçüsüne sahip olduğunu bilmekteyiz. O halde $m(A) > 60°$ olmalıdır. Açı ölçüsü büyüdükçe kosinüsü küçüleceğinden $\cos A < \cos 60° = \frac{1}{2}$ olmalıdır. Şıklarda bu koşulu sağlayan tek değer $\frac{49}{100}$ değeridir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC daraçılı çeşitkenar üçgeninde en uzun kenarın [BC] olduğu bilinmekteyse* cot *A değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?*

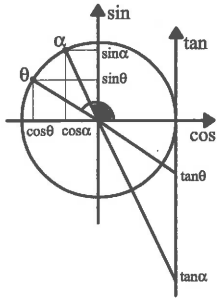
A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

Çözüm: Üç iç açısının eş olduğunu farz edersek her birinin ölçüsü 60° olur. Demek ki en büyük ölçülü açının ölçüsü 60°'den büyük olmalıdır. Diğer yandan üçgenimiz dar açılı olduğundan $60° < m(A) < 90°$ olmalıdır. Bu durumda $0 < \cot A < \frac{\sqrt{3}}{3}$ olmalıdır. O halde şıklara bakınca bu aralığa uyan sadece 1/2 var.

Doğru cevap: A.

II. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs küçülür.

Aynı birim çember üstünde, ama bu sefer II. bölgede $\alpha < \theta$ olacak şekilde birer α ve θ ölçülü açı çizelim. $\sin\alpha > \sin\theta$ olduğu bariz. Bu bölgede kosinüsler negatif olduğundan boyu kısa olan daha büyüktür. O halde $\cos\alpha > \cos\theta$. Tanjant eksenini çizip tanjant kıyaslaması da yapılabilir. Tanjantlar da negatif olduğundan $\tan\alpha < \tan\theta$. Hemen ters ilişkileri düşünerek şunları da yazalım:



$\cot\alpha > \cot\theta$, $\sec\alpha < \sec\theta$ ve $\csc\alpha < \csc\theta$ olur.

Bulduklarımızı toparlayalım:

II. bölgeye ait α ve θ ölçüleri için $\alpha < \theta$ ise

$\sin\alpha > \sin\theta$
$\cos\alpha > \cos\theta$
$\tan\alpha < \tan\theta$
$\cot\alpha > \cot\theta$
$\sec\alpha < \sec\theta$
$\csc\alpha < \csc\theta$

Tanjant ve sinüs kıyaslaması burada sorulmaz, keşke sorulsa, çünkü zaten biri pozitif biri negatif olduğundan, ilkokul çocuğu bile bu sırayı bulabilir. Ama kotanjant ile kosinüs kıyaslaması yapılabilir. II. bölgeye ait bir α ölçüsü için $\cos\alpha > \cot\alpha$ olur. İlgili şekilden neden böyle olduğuna bakınız.

Örnek. *Bir ABC üçgeninin A açısının ölçüsü için*

$$\sin A > \cos A$$

eşitsizliği geçerliyse, A açısının ölçüsü hangi aralıktadır?

A) $(0°, 45°)$ B) $(45°, 90°)$ C) $(45°, 135°)$
D) $(45°, 180°)$ E) $(0°, 180°)$

Çözüm: A açısı için üç durum mümkündür. Ya dar açıdır, ya dik açıdır ya da geniş açıdır. Önce A açısının dar olduğu durumu inceleyelim.

$$\sin A > \cos A$$
$$\sin A > \sin(90° - A)$$

I. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs büyüdüğünden

$$A > 90° - A$$
$$2A > 90°$$
$$A > 45°$$

olmalıdır. Yani $45° < A < 90°$ eşitsizliği sağlar.

Eğer A dik açıysa $\sin A = 1$ ve $\cos A = 0$ olacağından $A = 90°$ de çözüm kümesine dahildir.

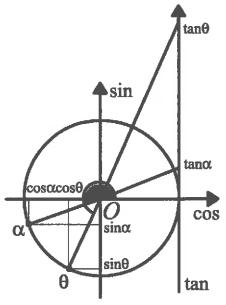
Eğer A açısı genişse, $\sin A$ pozitif ve $\cos A$ negatif olacağından eşitsizlik yine sağlanır.

Dolayısıyla üç durum da düşünülünce $45° < A < 180°$ bulunur.

Doğru cevap: D.

III. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs küçülür.

Yine $\alpha < \theta$ olacak şekilde birer α ve θ ölçülü açı çizelim. Bu bölgede sinüsler negatif olduğundan boyu kısa olan daha büyüktür. Yani, $\sin\alpha > \sin\theta$. Kosinüslerin de negatif olduğunu unutmadan $\cos\alpha < \cos\theta$ yazabiliriz. Tanjantlar için de $\tan\alpha < \tan\theta$ olduğu görülüyor. Diğerlerinin kıyaslamasını da ters ilişkilere dayanarak hemen yazabiliriz.



$\cot\alpha > \cot\theta$, $\sec\alpha > \sec\theta$ ve $\csc\alpha < \csc\theta$ olur.

Şimdi bulduklarımızı toplu bir şekilde yazalım.

III. bölgeye ait α ve θ ölçüleri için $\alpha < \theta$ ise

$$\sin\alpha > \sin\theta$$
$$\cos\alpha < \cos\theta$$
$$\tan\alpha < \tan\theta$$
$$\cot\alpha > \cot\theta$$
$$\sec\alpha > \sec\theta$$
$$\csc\alpha < \csc\theta$$

Bu bölgede de biri pozitif biri negatif diye tanjant-sinüs kıyas kabul etmez. ☺

Örnek.

$a = \sin 200^\circ$,
$b = \cos 200^\circ$,
$c = \tan 200^\circ$,
$d = \cot 200^\circ$,
$e = \sec 200^\circ$,
$f = \csc 200^\circ$

değerlerinden en küçüğü ile en büyüğü hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) e ve d B) e ve b C) f ve c D) f ve d E) f ve a

Çözüm: 200°'lik açı birim çemberde III. bölgeye düştüğünden c ve d sayılarının pozitif, diğerlerinin negatif olduğunu baştan fark edelim. En büyüğü bulmak için c ve d'yi kıyaslamamız gerekir.

$$c = \tan 200^\circ = \tan 20^\circ$$

ve

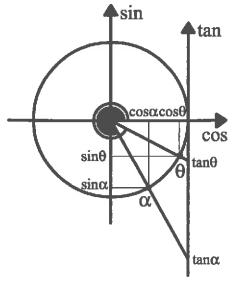
$$d = \cot 200^\circ = \tan 70^\circ$$

olduğundan en büyük sayı d'dir.
Şimdi en küçüğü arayacağız. a ve b değerleri -1'den büyük ama e ve f değerleri -1'den küçük olduklarından e ve f en küçük olmaya adaylardır.
$e = \sec 200^\circ = -\sec 20^\circ$ ve $f = \csc 200^\circ = -\sec 70^\circ$ olup $-\sec 70^\circ < -\sec 20^\circ$ olduğundan en küçük değer f'dir.

Doğru cevap: D.

IV. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüs büyür.

Hemen $\alpha < \theta$ olacak şekilde birer α ve θ ölçülü açı çizelim. Sinüsler bu bölgede negatif olduğundan boyu uzun olan daha küçüktür. O halde $\sin\alpha < \sin\theta$. Kosinüsler pozitif olduğundan normal sıralama geçerli: $\cos\alpha < \cos\theta$. Bu bölgede tanjantlar negatif diye $\tan\alpha < \tan\theta$.



Diğer trigonometrik değerleri de ters ilişkileri düşünerek rahatlıkla yazabiliriz.

IV. bölgeye ait α ve θ ölçüleri için $\alpha < \theta$ ise

$$\sin\alpha < \sin\theta$$
$$\cos\alpha < \cos\theta$$
$$\tan\alpha < \tan\theta$$
$$\cot\alpha > \cot\theta$$
$$\sec\alpha > \sec\theta$$
$$\csc\alpha > \csc\theta$$

Ayrıca aynı açı değerleri için IV. bölgede $\tan\theta < \sin\theta$ olduğuna da dikkat ediniz.

Örnek.

$a = \tan 300^\circ$,
$b = \cot 300^\circ$,
$c = \sin 300^\circ$,
$d = \cos 300^\circ$

değerlerinin küçükten büyüğe sıralanışı nedir?

A) $b < c < a < d$ B) $d < c < b < a$ C) $a < c < b < d$
D) $c < a < b < d$ E) $a < b < c < d$

Çözüm:

$$a = \tan 300^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$b = \cot 300^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c = \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d = \cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

ve

$$-\sqrt{3} < -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{1}{2}$$

olduğundan doğru sıralama $a < c < b < d$ şeklinde olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hangi bölgelerde açı ölçüsü büyüdükçe tanjant büyür?*

A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) I, II, ve IV E) Tüm bölgelerde

Çözüm: Açı ölçüsünü büyüttüğümüzde tanjantı küçülen ifade yoktur. Kanıtı, birim çember çizerek yapınız.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?*

$\cot 2° < \cot 1°$
$\cot 92° < \cot 91°$
$\cot 182° < \cot 181°$
$\cot 272° < \cot 271°$
$\cot 358° < \cot 359°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Hangi bölgede olursak olalım, açı ölçüsünü büyüttüğümüzde tanjant büyüdüğü için kotanjant küçülecektir. Dolayısıyla verilen ilk 4 önerme de doğrudur. Son önermede ölçü büyümüşken kotanjantı da büyümüş olduğundan önerme doğru değildir.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$a = \sin 6°$
$b = \sin 7°$
$c = 1 - \sin 84°$

olduğuna göre a, b, c sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $c < b < a$ B) $c = a < b$ C) $c < a < b$
D) $a < c < b$ E) $b < c < a$

Çözüm: Birinci bölgede açı ölçüsü büyüdükçe sinüsü büyüyeceğinden $a < b$ olduğunu biliyoruz. Şu durumda a'yla c'yi ya da b'yle c'yi kıyaslamamız lazım. $\sin 84° = \cos 6°$ olduğundan mantıklı olan a ile c'yi kıyaslamaktır.

$$\sin^2 6° + \cos^2 6° = 1$$
$$\sin^2 6° + 2\cdot\sin 6°\cdot\cos 6° + \cos^2 6° = 1 + 2\cdot\sin 6°\cdot\cos 6°$$
$$(\sin 6° + \cos 6°)^2 = 1 + 2\cdot\sin 6°\cdot\cos 6°$$
$$(\sin 6° + \cos 6°)^2 > 1$$
$$\sin 6° + \cos 6° > 1$$
$$\sin 6° > 1 - \cos 6° = 1 - \sin 84°$$

olduğundan $a > c$ bulunur. Dolayısıyla cevabımız $c < a < b$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin x > \tan x$ *eşitsizliğinin geçerli olmasını sağlayan x açıları hangi bölge veya bölgelerdedir?*

A) I. B) I. ve II. C) II. D) II. ve IV. E) IV.

Çözüm: Bir kere x, III. bölgede olamaz, çünkü orada sin x negatif ama tan x pozitiftir. Negatif sayı nasıl pozitif sayıdan büyük olsun ki? Zaten III. bölge şıklarda da yok! ☺

I. bölge de doğru cevap olamaz, zira orada her açı ölçüsü için tanjantın sinüsten daha büyük olduğunu kanıtlamıştık.

II. bölge eşitsizliği geçerli kılan en bariz bölgedir. Çünkü orada sinüs pozitif, tanjant negatiftir.

IV. bölge de x'in yaşadığı bölge olabilir. tan x'in boyu her ne kadar sin x'ten daha büyük olsa da her ikisi de negatif olduğundan $\sin x > \tan x$ olur. O halde

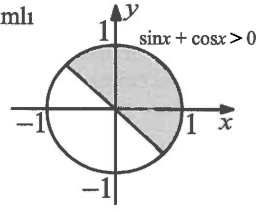
Doğru cevap D.

Örnek. $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$ *eşitsizliğinin sağlandığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(0,\pi)$ B) $(\frac{\pi}{2},\pi)$ C) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ D) $(\frac{3\pi}{4},\pi)$ E) $(\frac{3\pi}{2},\pi)$

Çözüm: Bir kere ifadenin tanımlı olabilmesi için $\sin x > 0$ ve $\cos x < 0$ olmalıdır. Bu da

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmasıyla mümkündür.



$$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$$
$$\sin x > -\cos x$$
$$\sin x + \cos x > 0$$

Bu eşitsizliğin sağlandığı bölgeler yandaki birim çemberde gösterilmiştir. Neden oralar olduğunu biraz düşününce çok rahat anlarsınız. Tanım aralığından bulduğumuz eşitsizlikle birlikte düşününce çözüm aralığının $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ olduğu görülür.

Doğru cevap: C.

Alıştırma. Tabloda verilen a, b, c, d değerlerini küçükten büyüğe boy sırasına diziniz.

a	b	c	d	Sıralama
sin 20°	sin 32°	sin 39°	sin 81°	$a < b < c < d$
sin 20°	tan 20°	sin 190°	tan 190°	
sin 10°	cos 20°	sin 60°	cos 70°	
sin 220°	cos 210°	sin 230°	cos 240°	
tan 20°	tan 50°	cot 80°	cot 45°	
sin 530°	sin 920°	cos 660°	tan 240°	
sin 24°	cos 71°	cot 225°	cos 290°	
sin 272°	sin 273°	tan 273°	tan 274°	
sec 50°	csc 51°	sec 52°	tan 51°	

CEVAPLI TEST 1

1.

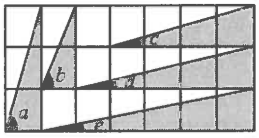
$a = \sin 10^\circ$, $b = \sin 80^\circ$, $c = \sin 105^\circ$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $c < b < a$ B) $b < c < a$ C) $b < a < c$
D) $a < c < b$ E) $a < b < c$

2.

21 adet birimkareden oluşmuş yandaki şekilde verilen a, b, c, d, e ölçüleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



A) $\cos a < \cos b < \cos c < \cos d < \cos e$
B) $\sin a < \sin b < \sin c < \sin d < \sin e$
C) $\tan a < \tan b < \tan c < \tan d < \tan e$
D) $\cos a < \cos b < \cos e < \cos d < \cos c$
E) $\sin e < \sin d < \sin c < \sin a < \sin b$

3.

$a = \sin 190^\circ$, $b = \cos 190^\circ$, $c = \tan 190^\circ$,
$d = \cot 190^\circ$, $e = \sec 190^\circ$, $f = \csc 190^\circ$

değerlerinden en küçüğüyle en büyüğü hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) e ve d B) e ve b C) f ve c
D) f ve d E) f ve a

4.

$a = \tan 290^\circ$, $b = \cot 290^\circ$,
$c = \sin 290^\circ$, $d = \cos 290^\circ$

değerleri için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $b < a < c < d$ B) $a < c < b < d$ C) $d < c < b < a$
D) $c < a < b < d$ E) $a < b < c < d$

5.

$\sin x < \tan x$

eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan x ölçüleri birim çemberin hangi bölge veya bölgelerine aittir?

A) I. B) II. C) III. D) I. ve III. E) II. ve III.

6.

a ve b, birim çemberin aynı bölgesine ait olsunlar.

$a > b$ ise $\tan a > \tan b$

önermesi hangi bölgelerde doğrudur?

A) I. ve III. B) II. ve IV. C) I. ve III.
D) II. ve IV. E) Tüm bölgelerde

7.

Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

A) I. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe, o ölçünün sinüsü de büyür.
B) II. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe, o ölçünün kosinüs değeri de büyür.
C) III. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe, o ölçünün kosinüs değeri de büyür.
D) IV. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe, o ölçünün sinüs değeri de büyür.
E) I. bölgede açı ölçüsü büyüdükçe, o ölçünün tanjant değeri de büyür.

8.

$$\tan x = \frac{7}{2}$$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) $(45^\circ, 52.5^\circ)$ B) $(52.5^\circ, 60^\circ)$ C) $(60^\circ, 67.5^\circ)$
D) $(67.5^\circ, 75^\circ)$ E) $(75^\circ, 82.5^\circ)$

9.

Aşağıdakilerden hangisi $\sin 22^\circ$ sayısına en yakındır?

A) $\sin 24^\circ$ B) $\tan 24^\circ$ C) $\cot 24^\circ$
D) $\cos 67^\circ$ E) $\cot 67^\circ$

10.

Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

A) $\sin 76^\circ > \sin 75^\circ$ B) $\cos 76^\circ < \cos 75^\circ$
C) $\cot 76^\circ > \cot 75^\circ$ D) $\tan 76^\circ > \sin 76^\circ$
E) $\sin 2^\circ > \sin 2$

1. D 2. A 3. D 4. B 5. D 6. E 7. B 8. D 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Diğer Oranların Bulunması

Trigonometrinin geometri demek olduğunu daha önce defalarca söylemiştik. Bunu derken kastımız şuydu: Trigonometri olmadan geometri olmaz, geometri olmadan da trigonometri olmaz. İşte bu dersimizde trigonometrinin geometri problemlerindeki kullanım alanlarına örnekler sunacağız. Trigonometri kullanmadan çok uzun süre alacak çözümlerin, trigonometri sayesinde nasıl kısaldığına hep birlikte şahit olacağız.

Trigonometrik Değerlerin Biri Verildiğinde Diğerlerinin Bulunması. Herhangi bir açının, herhangi bir trigonometrik değeri biliniyorsa, diğer tüm trigonometrik değerleri de bulunabilir. Bu, aralarında bulduğumuz eşitlikler yardımıyla olabileceği gibi, verilen koşulu sağlayan bir dik üçgen çizerek de mümkün. Hatta önerimiz bu üçgenin çizilmesidir. Şöyle ki:

Örnek. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ *koşulunu sağlayan dar* α *ölçüsü için,* $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ *ve* $\csc\alpha$ *değerlerini hesaplayalım.*

Çözüm: İki yol göstereceğiz. İlki formüller yardımıyla olacak, ikincisi üçgen çizerek.

Birinci yol. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ olduğundan,

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

olur ki, α dar açı olduğundan $\cos\alpha$ pozitif olmalıdır, o halde $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

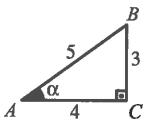
Sıra geldi $\tan\alpha$ ve $\cot\alpha$'ya. Onlar da pozitif olmalı:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4} \text{ ve } \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{4}{3}.$$

Son olarak geldik yine pozitif olmaları gereken $\sec\alpha$ ve $\csc\alpha$ değerlerini bulmaya:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4} \text{ ve } \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}.$$

İkinci yol. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ koşulunu sağlayan bir dik üçgen çizilirse, tüm sorulanlar rahatlıkla cevaplanabilir:



$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \tan\alpha=\frac{3}{4},\ \cot\alpha=\frac{4}{3},$$

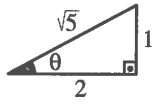
$$\sec\alpha=\frac{5}{4},\ \csc\alpha=\frac{5}{3}.$$

Bu yolu okuduktan sonra, bu tarz soruları birinci yoldan çözenlerin kulağını çeken öğretmen haklı mıdır haksız mıdır, söyleyin bakalım. ☺

Örnek [1974 ÜSS]. $\tan\theta=\frac{1}{2}$ ve $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ *olduğuna göre* $\cos\theta$*'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) -1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Çözüm: Dik kenar uzunlukları 1 ve 2 birim olan bir dik üçgen çizersek, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ olduğu görülür.



$\theta\in(0,\pi/2)$ olduğundan işaretini değiştirmiyoruz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\alpha\in[90^\circ, 180^\circ]$ *olmak üzere,* $\csc\alpha=4$ *olduğuna göre* $\cot\alpha$ *kaçtır?*

A) $-\sqrt{17}$ B) $\sqrt{17}$ C) 4 D) $-\sqrt{15}$ E) $\sqrt{15}$

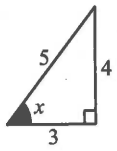
Çözüm: $4=\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$ olduğundan $\sin\alpha=\frac{1}{4}$'tür. O halde, gerekli dik üçgen çizilirse diğer dik kenar uzunluğunun $\sqrt{15}$ br olduğu anlaşılır. Bu sebeple, ikinci bölgeyi de hesaba katarak $\cot\alpha=-\sqrt{15}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x\in(0^\circ, 90^\circ)$ *olmak üzere* $\sin x = \frac{4}{5}$ *olduğuna göre* $\tan x - \cos x$ *farkı kaçtır?*

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{15}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{11}{15}$

Çözüm: Verilen koşulu sağlayan bir dik üçgeni yandaki gibi çizersek, $(0^\circ, 90^\circ)$ aralığında her trigonometrik oran pozitif olacağından



$$\tan x = \frac{4}{3} \text{ ve } \cos x = \frac{3}{5}$$

buluruz. Bu durumda

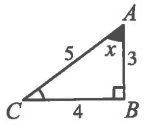
$$\tan x - \cos x = \frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{4\cdot 5 - 3\cdot 3}{15} = \frac{11}{15} \text{ olur.}$$

Doğru cevap: E.

Örnek[1993 ÖYS]. $\frac{3}{\cos x} = \frac{4}{\sin x}$ *olduğuna göre,* $\cos x$*'in pozitif değeri kaçtır?*

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Çözüm: $3\cdot\sin x = 4\cdot\cos x$ olduğundan $\tan x = \frac{4}{3}$ olur. Uygun dik üçgen çizilirse $\cos x = \frac{3}{5}$ olduğu görülür.

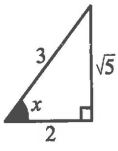


Doğru cevap: C.

Örnek. $x\in(0^\circ, 90^\circ)$ *olmak üzere* $\cos x = \frac{2}{3}$ *olduğuna göre* $\csc x$ *kaçtır?*

A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: Verilen koşulu sağlayan bir dik üçgeni yandaki gibi çizersek, $(0^\circ, 90^\circ)$ aralığında her trigonometrik oran pozitif olacağından



$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

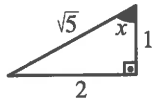
Örnek[1982 ÖYS]. $\tan x = 2$ *olduğuna göre*

$\cos^2 x - \cos x\cdot\sin x$ *ifadesinin değeri nedir?*

A) -1 B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) 0 E) $\frac{2}{3}$

Çözüm: $\cos^2 x - \cos x\cdot\sin x = \cos^2 x\cdot(1-\tan x)$ olduğundan $\cos^2 x$ ifadesini hesaplamalıyız.

$\tan x = 2$ ise $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ olduğundan $\cos^2 x = \frac{1}{5}$ olur, o halde



$$\cos^2 x - \cos x\cdot\sin x = \frac{1}{5}\cdot(1-2) = -\frac{1}{5}$$

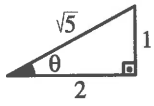
bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ *olmak üzere* $\tan\theta = ½$ *olduğuna göre* $\cos\theta$*'nın değeri kaçtır?*

A) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Çözüm: $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ iken $\tan\theta$ değeri pozitif de negatif de olabilir. Soruda $\tan\theta$ pozitif verildiğinden aslında



$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ olduğunu anlamalıyız. Buna göre düşününce $\cos\theta$'nın negatif olması gerektiği çıkar. Verilere uygun dik üçgen çizilirse $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ olduğu ortaya çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x\in(0^\circ, 90^\circ)$ *olmak üzere* $\cos(90^\circ + x) = -\frac{5}{13}$ *olduğuna göre* $\tan(180^\circ - x)$ *kaçtır?*

A) $-\frac{5}{12}$ B) $-\frac{12}{5}$ C) $-\frac{5}{13}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{12}{5}$

Çözüm: $\cos(90^\circ + x) = -\sin x = -\frac{5}{13}$ olduğundan $\sin x = \frac{5}{13}$ bulunur. O halde $\tan x = \frac{5}{12}$'dir. Diğer yandan

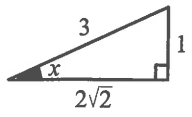
$\tan(180^\circ - x) = -\tan x$ olduğundan cevap $-\frac{5}{12}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x\in(90^\circ, 180^\circ)$ *olmak üzere* $\sin x = \frac{1}{3}$ *olduğuna göre* $\tan x + \cos x$ *toplamı kaçtır?*

A) $-\frac{5}{12}\sqrt{2}$ B) $-\frac{7}{12}\sqrt{2}$ C) $-\frac{11}{12}\sqrt{2}$ D) $-\frac{13}{12}\sqrt{2}$ E) $-\frac{17}{12}\sqrt{2}$

Çözüm: Sanki x dar açıymış gibi, verilen koşulu sağlayan bir dik üçgen çizelim. Bu durumda



$\tan x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ve $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ müş

gibi olur. Fakat $x\in(90^\circ, 180^\circ)$ olduğundan

$$\tan x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ ve } \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

almalıyız. Bu durumda

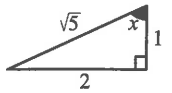
$$\tan x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{11}{12}\sqrt{2}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x\in(270^\circ, 360^\circ)$ *olmak üzere* $\tan x = -2$ *olduğuna göre* $\sin x$ *kaçtır?*

A) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $-\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

Çözüm: Sanki x dar açıymış gibi, verilen koşulu sağlayan bir dik üçgen çizelim.



Bu durumda $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ olur. Ama

$x\in(270^\circ, 360^\circ)$ olduğundan $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ almalıyız.

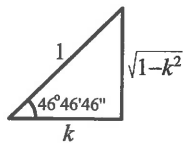
Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin 43^\circ 13' 14'' = k$ *olduğuna göre* $\tan 46^\circ 46' 46''$ *sayısının* k *türünden eşiti nedir?*

A) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ B) $\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}$ C) $\sqrt{1-k^2}$ D) $2k$ E) k

Çözüm: $43^\circ\ 13'\ 14''$ ile $46^\circ\ 46'\ 46''$ ölçülerinin birbirlerinin tümleri olduğunu görmek gerekiyor.

$$\cos 46^\circ 46' 46'' = \sin 43^\circ 13' 14'' = k$$



olduğundan $\tan 46^\circ 46' 46'' = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin x + \cos x = \sqrt{7\sin^2 x + 3\sin x\cos x}$ *olduğuna göre* $\tan x$*'in pozitif değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: Karekökten kurtulmak amacıyla eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = 7\sin^2 x + 3\cdot\sin x\cdot\cos x$$
$$6\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - \cos^2 x = 0$$
$$(3\cdot\sin x - \cos x)(2\cdot\sin x + \cos x) = 0$$

O halde

$$3\cdot\sin x = \cos x \text{ veya } 2\cdot\sin x = -\cos x$$

yani

$$\tan x = 1/3 \text{ veya } \tan x = -1/2.$$

Pozitif değer sorulduğundan 1/3'ü alacağız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2\pi < 2\theta < 3\pi$ *ve* $\sin(\pi - \theta) = k$ *olduğuna göre* $\tan(-\theta)$*'nın* k *cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$ B) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ C) $-k$ D) $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ E) k

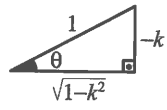
Çözüm:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta = k$$

olduğunu baştan not edelim. Hatta θ değeri III. bölgeye ait olduğundan k'nin negatif olduğunu da. Sorulan sorunun da $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ olduğunu anlayalım. III. bölgede bu değer negatiftir.

Şimdi uygun dik üçgeni çizelim.

$$\tan\theta = \frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$$



olduğundan $-\tan\theta = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $0 < x < \pi/2$ *olduğuna göre*

$$7\cdot\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - 1 = 0$$

olduğuna göre $\cot x$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Denklemdeki 1 yerine $\sin^2 x + \cos^2 x$ yazalım bakalım, ne çıkıyor?

$$7\cdot\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$
$$6\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - \cos^2 x = 0$$

çıkar. Bu da bir önceki soruda çözdüğümüz denklemdir. x dar açı olduğundan tanjantı ve kotanjantı pozitif olmalıdır, $\tan x = 1/3$ diye $\cot x = 3$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. x, $3-\sqrt{4\cos x-3\sin x}$, $1+\sqrt{6\sin x-8\cos x}$ *sayıları sıfırdan farklı üç reel sayı olduğuna göre* $\cot x$ *oranı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

Çözüm: Verilen sayılar reel sayı olduğuna gore karekök içleri negatif olmamalıdır. O halde $4\cdot\cos x \geq 3\cdot\sin x$ ve $6\cdot\sin x \geq 8\cdot\cos x$ eşitsizlikleri sağlanmalıdır.
Hem $4\cdot\cos x \geq 3\cdot\sin x$ hem de $3\cdot\sin x \geq 4\cdot\cos x$ diye

$4\cdot\cos x = 3\cdot\sin x$ olduğunu anlıyoruz. O halde $\cot x = \frac{3}{4}$.

Doğru cevap: C.

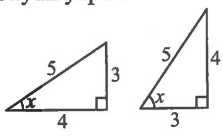
Örnek. $0 < x < \pi/2$ *olmak üzere,* $5\cdot\sin x$ *ifadesinin alabileceği en büyük değerin 4, en küçük değerin 3 olmasını sağlayan* x *açısı için* $\tan x$*'in alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin çarpımı kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{25}{12}$ E) 3

Çözüm: $3 \leq 5\cdot\sin x \leq 4$ olarak verildiğinden

$$\frac{3}{5} \leq \sin x \leq \frac{4}{5}$$

olduğunu anlıyoruz. I. bölgede açının büyümesiyle sinüs ve tanjantın büyümesi doğru orantılı olduğundan sinüsü en küçük yapan açı, tanjantı da en küçük yapar, sinüsü en büyük yapan açı tanjantı da en büyük yapar.
$\sin x = 3/5$ olduğunda $\tan x = 3/4$, $\sin x = 4/5$ olduğunda $\tan x = 4/3$ olduğunda $\tan x$'in alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin çarpımı 1 olur.



Doğru cevap A.

Örnek. $\pi/2 < x < \pi$ *olmak üzere* $2\cdot\sin^2 x - 5\cdot\sin x + 2 = 0$ *eşitliğini sağlayan* x *açısı için* $\tan x$ *kaça eşittir?*

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

Çözüm: Verilen ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$2\cdot\sin^2 x - 5\cdot\sin x + 2 = (2\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0$

olur. $-1 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan $\sin x = 2$ olamayacağına göre $\sin x = \frac{1}{2}$'dir. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olduğundan $x = \frac{5\pi}{6}$ olmalıdır, o halde

$$\tan x = \tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur.

Doğru cevap B.

Örnek. $0° < \alpha < 90°$ *olmak üzere,* $\alpha + \theta = 90°$ *olsun.* $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ *olduğuna göre* $\tan(2\alpha + 3\theta)$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{12}{5}$ E) $-\frac{5}{12}$

Çözüm: $\alpha + \theta = 90°$ ise

$$\tan(2\alpha + 3\theta) = \tan(2\alpha + 2\theta + \theta)$$
$$= \tan(180° + \theta) = \tan\theta$$

olur. Demek ki $\tan\theta$ değerini bulursak, soruyu çözmüş olacağız. Diğer yandan

$$\alpha + \theta = 90° \text{ diye } \cos\alpha = \sin\theta = \frac{5}{13}\text{'tür.}$$

Uygun dik üçgen çizilirse $\tan\theta = \frac{5}{12}$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\pi < 2x < 2\pi$ *ve* $\tan x = -\frac{4}{3}$ *olduğuna göre,*

$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x\cdot\cos x}$$

oranı kaça eşittir?

A) $-\frac{7}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) 1 D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

Çözüm: $\sin x = a$ ve $\cos x = b$ dersek, sorulan oranın $\frac{a^3 - b^3}{1 + ab}$ olduğu anlarız. Payda $a^2 + b^2 + ab$ olsaydı ne güzel olurdu değil mi? O zaman sadeleşebilirdi. Hiç üzülmeyin, bu şartlar altında $a^2 + b^2 = 1$ zaten.

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

olduğundan sorulan değerin $\sin x - \cos x$ olduğunu anlıyoruz. Uygun dik üçgen çizilirse,

$\tan x = -\frac{4}{3}$ iken II. bölgedeki bir x açısı için

$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ ve } \cos x = -\frac{3}{5}$$

olduğu görülür. O halde cevabımız

$$\sin x - \cos x = \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $-3\pi < 2\theta < -2\pi$ *olmak üzere* $\sin(-\theta) = -\frac{5}{13}$ *olduğuna göre* $\tan(\theta - \pi)$*'nin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{12}{5}$ B) $-\frac{5}{12}$ C) 1 D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{12}{5}$

Çözüm:

$\tan(\theta - \pi) = -\tan(\pi - \theta) = -(-\tan\theta) = \tan\theta$ olduğundan $\tan\theta$ değerini bulmaya çalışacağız.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta = -\frac{5}{13}$$

olduğundan $\sin\theta = \frac{5}{13}$ olur. Uygun dik üçgen çizilirse $\tan\theta = \frac{5}{12}$ olduğu görülür. Şimdi de işaretini inceleyeceğiz.

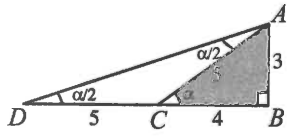
$-3\pi < 2\theta < -2\pi$ eşitsizliğinin her yanına 4π eklemek eşitsizliği bozmaz. O halde $\pi < 2\theta < 2\pi$ yani $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ bulunur ki bu durumda $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ dememiz gerekir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ *olmak üzere,* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ *olduğuna göre* $\tan\frac{\alpha}{2}$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 1

Çözüm: Yeni bir teknik öğreneceğiz. Göstereceğimiz bu tekniği bir açının herhangi bir trigonometrik değeri verilip, o açının **yarısının** herhangi bir trigonometrik değeri sorulduğunda uygulayacağız.



Sanki α dar açıymış gibi, $\sin\alpha = 3/5$ olacak şekilde α açısına sahip bir ABC dik üçgenini çizelim. $[BC]$'yi C yönünde $|AC|$ kadar uzatırsak, ACD ikizkenar üçgen olur ki, oluşan ABD dik üçgeninin bir iç açısı $\alpha/2$ olduğundan

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Yalnız burada önemli olan bir durum var:

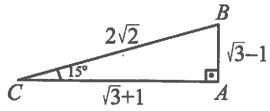
$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ ise $\frac{\alpha}{2} \in (45^\circ, 90^\circ)$ diye $\tan\frac{\alpha}{2}$ pozitif olmalıdır, işaretine dokunmuyoruz.

Doğru cevap: B.

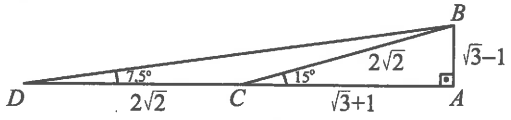
Örnek. $\tan 82{,}5^\circ$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$
C) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$
E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

Çözüm: Büyük açılarla uğraşmaktansa küçük açılarla uğraşmak daha kolaydır, bu yüzden $\cot 7{,}5^\circ$ değerini hesaplamaya çalışalım. $7{,}5^\circ$'nin bize ilk çağrıştırdığı 15°'nin yarısı olmasıdır. O halde 15°-75°-90° üçgeninden faydalanarak cevabı bulabiliriz. Bu üçgenin kenarları arasındaki bağıntıyı unutanlar için hatırlatalım:



Şimdi yarım açı tekniğinden sorumuzu çözelim:



Şekilden de görüldüğü üzere

$$\cot 7{,}5^\circ = \tan 82{,}5^\circ = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

çıkar. Hem payı hem de paydayı $\sqrt{3}+1$ ile çarparsak,

$$\tan 82{,}5^\circ = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4}{2}$$

$$= \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$$

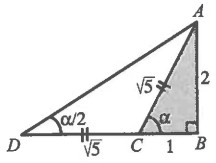
olduğu görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\alpha\in(180^\circ, 270^\circ)$ *olmak üzere,* $\tan\alpha = 2$ *olduğuna göre* $\tan\frac{\alpha}{2}$ *kaçtır?*

A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) $\sqrt{5}$ E) 1

Çözüm: Yanlış çözüm. Sanki α dar açıymış gibi, $\tan\alpha = 2$ olacak şekilde α açısına sahip bir ABC dik üçgenini çizelim. $[BC]$'yi C yönünde $|AC|$ kadar uzatırsak, ACD ikizkenar üçgen olur ki, oluşan ABD dik üçgeninin bir iç açısı $\frac{\alpha}{2}$ olduğundan



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Yalnız burada önemli olan bir durum var:

$\alpha\in(180^\circ, 270^\circ)$ ise $\frac{\alpha}{2}\in(90^\circ, 135^\circ)$ olduğundan $\tan\frac{\alpha}{2}$ negatif olmalıdır, o halde cevap: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Doğru çözüm. $\alpha\in(180^\circ, 270^\circ)$ olduğundan, θ dar bir açı ölçüsü olmak üzere $\alpha = 180^\circ + \theta$ diyelim.

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta = 2 \text{ olur.}$$

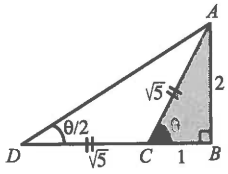
Diğer taraftan, sorulan değerin aslında

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \tan(90^\circ + \frac{\theta}{2}) = -\cot\frac{\theta}{2}$$

olduğunu anlamak gerekiyor. θ gerçekten dar olduğundan şu an çizeceğiz şablon yanılmaz.

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur ki buradan da cevabın $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğunu anlarız.



Doğru cevap: C.



Bu da bize ders olsun!

Bir α açısının yarısının trigonometrik değeri sorulduğunda eğer $\pi < \alpha < 2\pi$ veya bunun herhangi bir alt aralığındaysa $0 < \theta < \pi$ olmak üzere $\alpha = \pi + \theta$ diyerek şablonu çizmeliyiz. Eğer yarısı değil de kendisinin başka bir trigonometrik oranı soruluyorsa $\pi < \alpha < 2\pi$ olsa bile üçgen çizmekte mahzur yoktur.

Örnek. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$ *olmak üzere* $\tan 4x = 0{,}75$ *olduğuna göre* $\cos 2x$ *değeri kaçtır?*

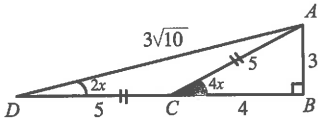
A) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ C) 1 D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

Çözüm: Çok sık yapılan bir yanlış olduğundan yine önce yanlış çözümü verelim.

Yanlış çözüm:

$$\tan 4x = 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çizelim.



Daha sonra B, C, D doğrusal olacak şekilde ACD ikizkenar üçgeni çizilirse $m(ADB) = 2x$ olur. Buradan da

$$\cos 2x = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

bulunur. Fakat $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$ yani $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{4}$ olduğundan $\cos 2x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ olmalıdır.

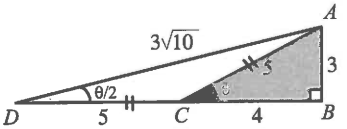
Doğru çözüm: $\pi < 4x < \frac{3\pi}{2}$ diye $0 < \theta < \pi$ olmak üzere $4x = \pi + \theta$ demeliyiz. O zaman

$$\tan 4x = \tan(\pi + \theta) = \tan\theta = \frac{3}{4}$$

olur. Diğer yandan $2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ olduğundan

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) = -\sin\frac{\theta}{2}$$

olur. Şimdi gönül rahatlığıyla θ'ya bağlı şablon çizebiliriz.



$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ olduğundan $-\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ olur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan α dar açı ölçüsü için cos α kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

2.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

eşitliğini sağlayan α geniş açı ölçüsü için cos α kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

3.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre sin α kaça eşittir?

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{5}$

4.

$\alpha \in [90°, 180°]$ olmak üzere

$$\csc\alpha = 3$$

olduğuna göre cot α kaça eşittir?

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 3

5.

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ olmak üzere

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

olduğuna göre tan x − cot x ifadesi kaça eşittir?

A) −1 B) $-\frac{7}{12}$ C) $-\frac{25}{12}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{25}{12}$

6.

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$$\sin\theta = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre cos θ kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $-2\sqrt{2}$

7.

x bir dar açı ölçüsü olmak üzere

$$\cos(90° + x) = -\frac{5}{13}$$

olduğuna göre tan(180° + x) kaça eşittir?

A) $-\frac{12}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $-\frac{5}{12}$ E) $-\frac{5}{13}$

8.

$x \in (270°, 360°)$ olmak üzere

$$\tan x = -2$$

olduğuna göre sec x·csc x çarpımı kaça eşittir?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

9.

Pozitif α ve θ açı ölçüleri için $\alpha + \theta = 90°$ olarak veriliyor.

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

olduğuna göre tan(2α + 3θ) kaça eşittir?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $-\frac{5}{12}$ E) $-\frac{12}{13}$

10.

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

olduğuna göre cot $\frac{\theta}{2}$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

1. D 2. A 3. A 4. A 5. B 6. D 7. C 8. A 9. A 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kosinüs Teoremi

Üçgenin temel elemanlarının açıları ile kenarları olduğunu biliyoruz. Açılarıyla kenarları arasındaki bağıntılar, hep trigonometri sayesinde gün ışığı görmüşler. Bunlardan en temeli şimdi vereceğimiz kosinüs teoremi olsa gerek. Hatta trigonometri bile bu teoremin bulunuşuyla başlamıştır.

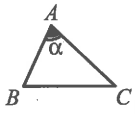
Teorem [Kosinüs]. *Kenar uzunlukları sırasıyla a* br, *b* br *ve c* br *olan bir ABC üçgeninde*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Geometrinin en önemli teoremlerinden biri olduğu için iki farklı kanıt sunacağız.

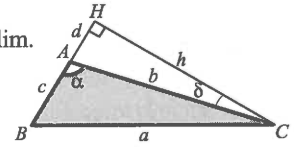
Birinci kanıt. A açısının ölçüsüne α diyelim. Eğer $\alpha = 90^\circ$ ise, kosinüs teoremi tam tamına Pisagor teoremidir.



Bundan böyle $\alpha \neq 90^\circ$ olsun. α'nın 90°'den büyük ya da küçük olmasına göre iki şıkkımız var.

Birinci Şık. $\alpha \geq 90^\circ$.
Yandaki şekilden takip edelim.
Tanımlardan dolayı,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\sin(\alpha - 90^\circ)\\ &= -\sin\delta\\ &= -d/b.\end{aligned}$$



Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.
AHC'ye Pisagor teoremini uygularsak,

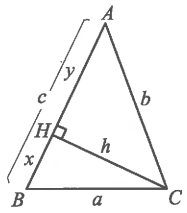
$$b^2 = h^2 + d^2$$

buluruz. Bunu da aklımızda tutalım, bu da gerekecek. Son olarak, BHC'ye Pisagor uygulayıp yukarda bulduğumuz iki eşitliği yerlerine koyalım:

$$\begin{aligned}a^2 &= (c+d)^2 + h^2\\ &= c^2 + d^2 + h^2 + 2cd\\ &= c^2 + b^2 + 2cd\\ &= c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha.\end{aligned}$$

Bu şıkta teoremimiz kanıtlanmıştır.

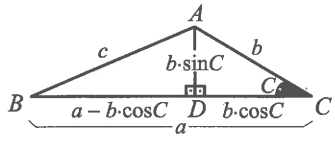
İkinci Şık. $\alpha \leq 90^\circ$. Gene yandaki şekilden takip edelim. Tanıma göre $\cos\alpha = y/b$.
Pisagor Teoremi'ni şekildeki iki dik üçgene uygulayarak, $b^2 = y^2 + h^2$ ve $a^2 = x^2 + h^2$ elde ederiz. Şimdi bunları kullanarak,



$$\begin{aligned}a^2 &= x^2 + h^2\\ &= x^2 + b^2 - y^2\\ &= b^2 + (x+y)(x-y)\\ &= b^2 + (x+y)(x+y-2y)\\ &= b^2 + (x+y)^2 - 2y(x+y)\\ &= b^2 + c^2 - 2yc\\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da bizim kanıtlamak istediğimiz eşitlik. □

İkinci kanıt. ABC üçgeninde A'ya ait yüksekliği çizelim. $|AD| = b\cdot\sin C$ br ve $|DC| = b\cdot\cos C$ br olur. Buradan $|BD| = a - b\cdot\cos C$ br bulunur. ADB'de Pisagor teoreminden



$$\begin{aligned}c^2 &= (b\cdot\sin C)^2 + (a - b\cdot\cos C)^2\\ c^2 &= b^2\cdot\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cdot\cos^2 C\\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ab\cos C\end{aligned}$$

olduğundan kanıt biter.

Örnek [1974 ÜSS]. *ABC üçgeninde* $m(A) = 60^\circ$, $b = 12$ br, $c = 10$ br *olduğuna göre, a kenarı kaç* br *dir?*

A) $\sqrt{31}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{31}$ C) $\frac{1}{2}\sqrt{31}$ D) $2\sqrt{31}$ E) $3\sqrt{31}$

Çözüm: Verilen üçgende iki kenar uzunluğu ve bu kenarların belirttiği açı ölçüsü bilindiğinden kosinüs teoremi yazılabilir.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\\ &= 12^2 + 10^2 - 2\cdot 12\cdot 10\cdot\cos 60^\circ\\ &= 144 + 100 - 120 = 124\end{aligned}$$

olduğundan $a = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Kenar uzunlukları 3-5-7 olan bir üçgenin en büyük iç açısının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 75° B) 90° C) 105° D) 120° E) 135°

Çözüm: Bir üçgenin en büyük iç açısı, en uzun kenarın karşısındaki açıdır. Bu yüzden kosinüs teoremini uzunluğu 7 olan kenara göre yazacağız.

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cdot\cos\alpha$$
$$49 = 9 + 25 - 30\cdot\cos\alpha$$
$$15 = -30\cdot\cos\alpha$$

olduğundan $\cos\alpha = -1/2$ olarak bulunur. $\cos\alpha = 1/2$ olsaydı $\alpha = 60°$ diyecektik, kosinüsün negatif çıkması bize açının geniş olduğunu anlatıyor, o halde $\alpha = 120°$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki kenar uzunluğu 3 birim ve 8 birim olan bir üçgende, bu kenarların belirttiği açının ölçüsü 60° ise, üçüncü kenarın uzunluğu kaç birimdir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

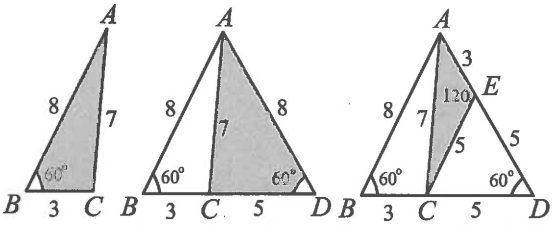
Çözüm: Üçüncü kenarın boyuna x diyelim. Kosinüs teoreminden

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2\cdot3\cdot8\cdot\cos 60°$$
$$= 9 + 64 - 24 = 49$$

diye $x = 7$ bulunur.

Doğru cevap: B.

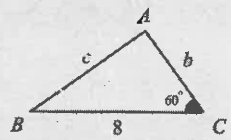
Okumadan Geçmeyin! Son örneğimizde 3-7-8 üçgeninde, uzunluğu 7 olan kenarın gördüğü açı ölçüsünün 60° olduğunu bulduk.



Şimdi yukardaki gibi bir ABC üçgeni çizelim. Kenar uzunlukları 3-7-8 olsun. $[BC]$'yi C yönünde 5 birim uzatalım. Oluşan ABD üçgeni tepe açısı 60° ve yan kenarları eşit uzunlukta diye eşkenar üçgen olur. O halde 5-7-8 üçgeninde de uzunluğu 7 olan kenarın gördüğü açı ölçüsünün 60° olduğunu anlarız. Şimdi de C'den AB'ye paralel bir doğru çizelim. AD'yi E'de kessin. Görülüyor ki 3-5-7 üçgeninde de uzunluğu 7 birim olan kenarın gördüğü açı ölçüsü 120°'ymiş.

Notları okuyan öğrencilere bir tavsiyem olacak: Cevabın tamsayı çıkmasını isteyen bir çok öğretmen sorusunu bu üçgenleri kullanarak hazırlar. Bu üç özel üçgeni ezbere bilmenizde fayda vardır! Kim oturup da kosinüs teorem yapacak?

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|BC| = 8$ br
$|AC| = b$ br
$|AB| = c$ br
$m(BCA) = 60°$



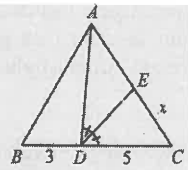
b ve c tam sayı olduğuna göre b + c toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: (b, c) ikilisi daha önce anlatıldığı üzere (3, 7) veya (5, 7)'dir. Bu durumda $b + c$ toplamı en çok $5 + 7 = 12$ olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir eşkenar üçgen*
$m(ADE) = m(EDC)$
$|BD| = 3$ br
$|DC| = 5$ br
olduğuna göre $|EC| = x$ *kaçtır?*

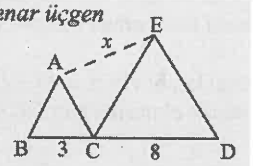


A) 10/3 B) 11/3 C) 4 D) 15/3 E) 6

Çözüm: $|AD| = 7$ br olduğunu biliyoruz. İç açıortay teoreminden $|AD|/|DC| = 7/5$ diye $|AE| = 7k$ ise $|EC| = 5k$ olur. $12k = 8$ eşitliğinden $k = 2/3$ olur ki buradan $|EC| = 5k = 10/3$ olarak bulunur. Eğer biraz önce gösterdiğimiz özel üçgenleri bilmeseydik, ABD veya ACD üçgenlerinde kosinüs teoremi uygulayarak $|AD|$'yi bulacaktık veya ABC üçgeninde Stewart teoreminden yardım isteyecektik veya A'dan BC'ye bir dik indirecektik, iyi ki biliyoruz!

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC ve ECD birer eşkenar üçgen*
$|BC| = 3$ br
$|CD| = 8$ br
$|AE| = x$ *kaçtır?*

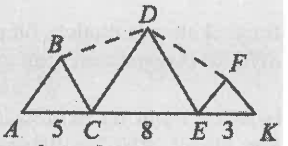


A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $|AC| = 3$ br, $|CE| = 8$ br ve $m(ECA) = 60°$ olduğundan $|AE| = x = 7$ br dir. Bu notları okumayanlar ACE'de kosinüs teoremini yapadursunlar!

Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC, DCE ve FEK birer eşkenar üçgen*
$|AC| = 5$ br
$|CE| = 8$ br
$|EK| = 3$ br
olduğuna göre $|BD| : |DF|$ *oranı kaçtır?*

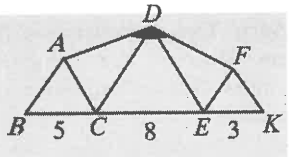


A) 3/4 B) 4/5 C) 1 D) 5/4 E) 4/3

Çözüm: Bir önceki örnekten $|BD| = 7$ br olduğunu biliyoruz. Aynı metotla $|DF| = 7$ br bulunur. Demek ki sorulan oran 1'dir.

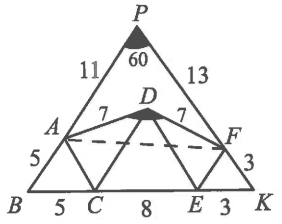
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABC, DCE ve FEK birer eşkenar üçgen,*
$|AC| = 5$ br
$|CE| = 8$ br
$|EK| = 3$ br
olduğuna göre $m(ADF)$ *kaç derecedir?*



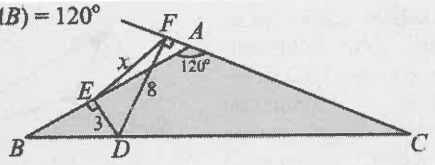
A) 90° B) 105° C) 120° D) 135° E) 150°

Çözüm: $[BA]$'yı A yönünde, $[KF]$'yi F yönünde uzatarak kesiştirelim. Kesişim noktası P olsun. PBK eşkenar üçgen olur. O halde $|PA| = 11$ ve $|PF| = 13$ olarak bulunur. APF üçgeninde kosinüs teoreminden $|AF| = 7\sqrt{3}$ bulunur ki, $m(ADF) = 120°$ olduğunu anlarız.



Doğru cevap: C.

Örnek. $m(CAB) = 120°$
$DF \perp AC$
$DE \perp AB$
$|DE| = 3$ br
$|DF| = 8$ br
olduğuna göre $|EF|$ *kaç* br *dir?*

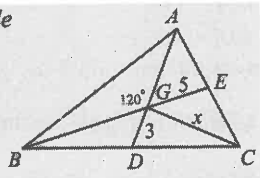


A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Gerekli açı takibi yapılırsa $m(EDF) = 60°$ bulunur. O halde $|EF| = x = 7$ br dir.

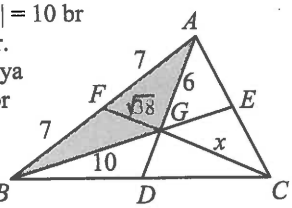
Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde G noktası kenarortayların kesim noktasıdır.*
$|GD| = 3$ br
$|GE| = 5$ br
$m(AGB) = 120°$
olduğuna göre $|GC| = x$ *kaçtır?*



A) 6 B) 7 C) 8 D) $2\sqrt{38}$ E) $4\sqrt{10}$

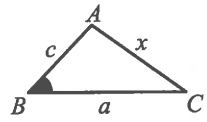
Çözüm: $|AG| = 6$ br ve $|BG| = 10$ br olduğundan $|AB| = 14$ br dir. CG'nin AB'yi kestiği noktaya F diyelim. $|AF| = |FB| = 7$ br olur. AGB üçgeninde kenarortay teoreminden $|FG| = \sqrt{38}$ br bulunur ki, buradan $|CG| = 2|FG| = 2\sqrt{38}$ br olarak bulunur.



Doğru cevap: D.

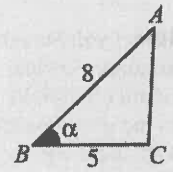
Soru Tipi. *a ve c kenarları verilip, B açısının bir α açısından küçük veya büyük olduğu verilir. Bu durumda x'in alabileceği değerler sorulur.*

Çözüm yolu. B açısının ölçüsü tam $\alpha°$ olduğunda x'in kaç olacağı kosinüs teoremi yardımıyla bulunur. Bulunanın p olduğunu farzedelim.



$m(B) < \alpha°$ ise $|a - c| < x < p$,
$m(B) > \alpha°$ ise $p < x < a + c$.
Diğer sınır değerlerini üçgen eşitsizliği yardımıyla bulduk.

Örnek. *ABC üçgeninde*
$|AB| = 8$ br *ve* $|BC| = 5$ br
olarak veriliyor.
$m(B) = \alpha < 60°$
olduğuna göre $|AC|$ *kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

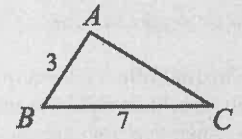


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\alpha = 60°$ olsaydı, $|AC| = 7$ olurdu. O halde $|AC| < 7$. Diğer yandan üçgen eşitsizliğinden $|AC| > 3$. Sonuç olarak {4, 5, 6} olmak üzere 3 farklı tamsayı değeri alabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek [1988 ÖSS]. *Yanda verilen ABC üçgeninde*
$|AB| = 3$ br *ve* $|BC| = 7$ br
olarak veriliyor.
$m(ABC) < 60°$ *olduğuna göre* $|AC|$ *kaç birim olabilir?*



A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $m(ABC) = 60°$ olsaydı, kosinüs teoreminden

$$|AC|^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 37$$

$$|AC| = \sqrt{37}$$

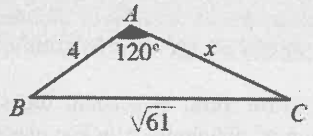
olurdu. $m(ABC) < 60°$ olduğundan $|AC| < \sqrt{37}$ olmalıdır. Diğer yandan üçgen eşitsizliğinden gelen $4 < x < 10$ durumunu da düşünürsek,

$$4 < x < \sqrt{37}$$

olduğunu anlarız. Şıklarda bu aralıkta yaşayan sadece 6 değeri var.

Doğru cevap: B.

Örnek [1997 ÖSS].
ABC bir üçgen
$m(BAC) = 120^\circ$
$|AB| = 4$ br
$|BC| = \sqrt{61}$ br
$|AC| = x$ br
Yukarıdaki verilenlere göre x kaçtır?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Kosinüs Teoremi'ni kullanacağız.

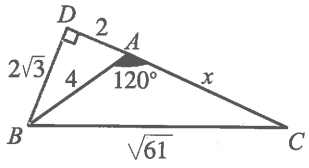
$$61 = 16 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot(-\frac{1}{2})$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$(x+9)(x-5) = 0$$

ve $x > 0$ olduğundan $x = 5$ olarak bulunur.

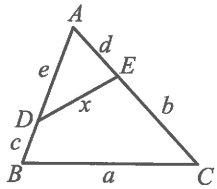
İkinci yol. Şu anki konumuz kosinüs teoremi olmasa, ilk yolu hiç göstermezdik. 120° özel bir açı olduğundan bütünleri de özel bir açıdır.



B'den CA'ya dik indirirsek, $|DA| = 2$ br ve $|DB| = 2\sqrt{3}$ br olduğunu buluruz. BDC dik üçgeninde Pisagor Teoremi'yle de $|DC| = 7$ br yani $|AC| = x = 5$ bulunur.

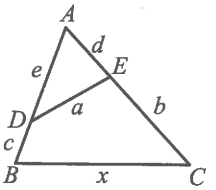
Doğru cevap: A.

Soru Tipi. *Yandaki gibi bir şekilde a, b, c, d, e değerleri verilip, x değeri sorulur.*



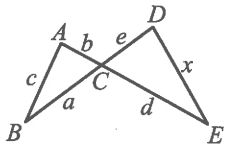
Çözüm yolu. Üç kenar uzunluğu da bilinen ABC üçgeninde kosinüs teoremi yardımıyla cos A bulunur, sonra DAE üçgenindeki kosinüs teoreminde yerine yazılarak x bulunur.

Soru Tipi. *Yandaki gibi a, b, c, d, e değerleri verilip, x değeri sorulur.*



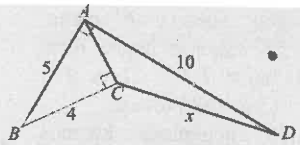
Çözüm yolu. Üç kenar uzunluğu da bilinen ADE üçgeninde kosinüs teoremi yardımıyla cos A bulunur, sonra ABC üçgenindeki kosinüs teoreminde yerine yazılarak x bulunur.

Soru Tipi. *Yandaki gibi bir şekilde a, b, c, d, e, x değerlerinden beşi verilir, altıncı sorulur.*



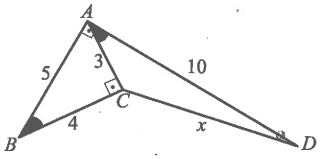
Çözüm yolu. Üç kenarı da bilinen üçgende kosinüs teoremi yardımıyla cos C bulunur, bu değer diğer üçgende kosinüs teoreminde yerine yazılarak cevaba ulaşılır.

Örnek. *Yandaki şekilde $BA \perp AD$ ve $BC \perp CA$ veriliyor.*
$|CB| = 4$ br
$|BA| = 5$ br *ve*
$|AD| = 10$ br
olduğuna göre $|CD| = x$ kaç br *olur?*



A) $\sqrt{51}$ B) $\sqrt{61}$ C) $\sqrt{71}$ D) $\sqrt{82}$ E) $\sqrt{93}$

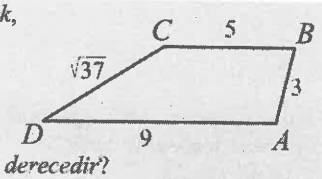
Çözüm: $|AC| = 3$ olduğunu hemen yazalım. x'in bulunabilmesi cos(DAC) değerinin bilinmesine bağlı. Diğer yandan $m(DAC) = m(ABC)$ olduğundan cos$(ABC) = 4/5$ diye cos$(DAC) = 4/5$.



$$x^2 = 3^2 + 10^2 - 2\cdot 3\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = \sqrt{61}.$$

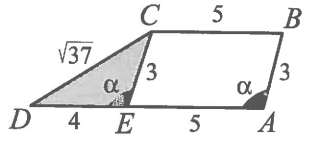
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir yamuk,*
$|DA| = 9$ br
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 5$ br
$|CD| = \sqrt{37}$ br
olduğuna göre $m(A)$ kaç derecedir?



A) 90° B) 105° C) 120° D) 135° E) 150°

Çözüm: İster B'den CD'ye paralel olarak geçen doğruyu çizin, isterseniz şekilde yaptığımız gibi C'den BA'ya paralel olarak geçen CE doğrusunu. $EABC$ paralelkenar olur. CEA üçgeninde kosinüs teoreminden,



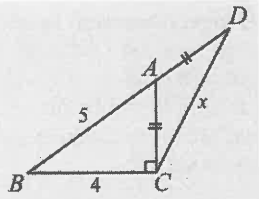
$$37 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\alpha$$

$$37 = 25 - 24\cdot\cos\alpha$$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ olduğundan $\alpha = m(A) = 120^\circ$'dir.

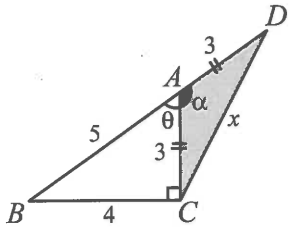
Doğru cevap: C.

Örnek. *CDB üçgeninde*
$AC \perp BC$
$|AC| = |AD|$
$|BC| = 4$ br
$|BA| = 5$ br
ise $|CD| = x$ *kaçtır?*



A) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{13}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{14}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{15}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{16}{\sqrt{5}}$

Çözüm: $m(DAC) = \alpha$ olsun. $\cos\alpha$ değerini bulabilirsek, DAC üçgeninde kosinüs teoreminden soruyu çözeriz.
$m(CAB) = \theta$ olsun. α ile θ bütünler olduğundan $\cos\alpha = -\cos\theta = -3/5$ olur. O halde,

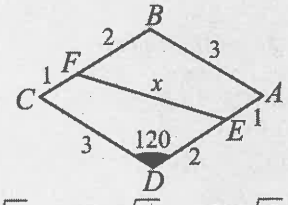


$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot3\cdot3\cdot(-\frac{3}{5}) = 18 + \frac{54}{5} = \frac{144}{5}$$

diye $x = \frac{12}{\sqrt{5}}$ bulunur. Direkt olarak, DBC üçgeninde B açısına bağlı bir kosinüs teoremi de yazabilirdik, daha kısa sürerdi ama bütünler açıların kosinüslerinin birbirlerinin zıt işaretlileri olduğunu da hatırlayalım istedim.

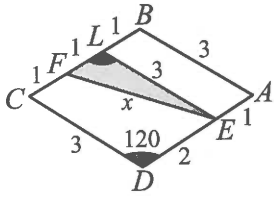
Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD*
bir eşkenar dörtgen,
$|CF| = |EA| = 1$ br
$|BF| = |DE| = 2$ br
$m(CDA) = 120^o$
ise $|FE| = x$ *kaçtır?*



A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{12}$ E) $\sqrt{13}$

Çözüm: E'den AB kenarına paralel olan EL doğrusunu çizelim.
$|FL| = 1$ br ve $|LE| = 3$ br olur. ELF açısının ölçüsü de 120^o olacağından ELF üçgeninde kosinüs teoreminden,

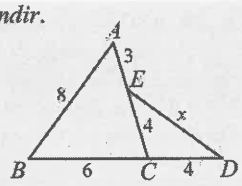


$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot1\cdot3\cdot(-\frac{1}{2}) = 1 + 9 + 3 = 13$$

olur ki buradan $x = \sqrt{13}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ABC ve CDE birer üçgendir.*
$|EA| = 3$ br
$|AB| = 8$ br
$|BC| = 6$ br
$|CD| = |CE| = 4$ br
ise $|ED| = x$ *kaçtır?*

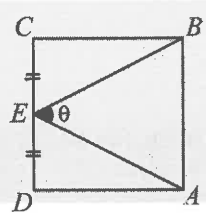


A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $\sqrt{40}$ E) 7

Çözüm: $m(ECD) = \alpha$ ve $m(BCA) = \theta$ olsun. α ile θ'nın bütünler olduğuna da dikkat edin. BCA üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos\theta$'yı bulacağız.
$\cos\alpha = -\cos\theta$ olduğundan bunu ECD üçgenindeki kosinüs teoremi uygulamasında yerine koyacağız. Uzatmayayım, $\cos\theta = 1/4$ diye $\cos\alpha = -1/4$ olur. Yerine yazılırsa $x = \sqrt{40}$ olarak bulunur.

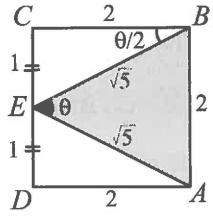
Doğru Cevap: D.

Örnek. *ABCD bir kare*
$|CE| = |ED|$
$m(BEA) = \theta$
olduğuna göre $\tan\theta$ *kaçtır?*



A) 3/2 B) 4/3 C) 5/4 D) 6/5 E) 7/6

Çözüm: Karenin bir kenar uzunluğu 2 br olsun.
$|CE| = |ED| = 1$ br olur.
$|BE| = |EA| = \sqrt{5}$ br olduğundan ABE üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos\theta$'yı bulup, oradan $\tan\theta$ değerini bulacağız.



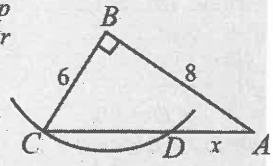
$$2^2 = 5 + 5 - 2\cdot5\cdot\cos\theta$$

eşitliğinden $\cos\theta = 3/5$ bulunur. Uygun dik üçgeni çizerek, θ dar açı olduğundan, $\tan\theta = 4/3$ olduğu rahatlıkla bulunabilir.

EBC üçgeninde $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}$ olduğundan, yarım açı formüllerini kullanarak da $\tan\theta$'ya ulaşılabilirdi, tavsiyemiz odur, ilerde göreceğiz.

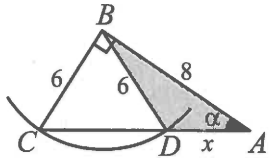
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir dik üçgen olup C'den geçen B merkezli çember hipotenüsü D'de kesiyor.* $|BC| = 6$ br *ve* $|BA| = 8$ br *olduğuna göre* $|AD| = x$ *kaçtır?*



A) 1,6 B) 1,9 C) 2,3 D) 2,8 E) 3,2

Çözüm: Çemberde kuvvet teoreminden hemen çözülebilecek bu soruyu biz şu an kosinüs teoremiyle çözeceğiz. $[BD]$ yarıçap olduğundan $|BD| = 6$'dır.



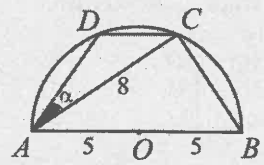
Diğer yandan $m(CAB) = \alpha$ iken $\cos\alpha = 4/5$ olur. BDA üçgeninde kosinüs teoreminden,

$$36 = x^2 + 64 - 2\cdot x\cdot 8\cdot\frac{4}{5}$$

bulunur ki, denklemin pozitif kökü $x = \frac{14}{5}$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *O merkezli yarım çemberde AB // DC olup* $|AC| = 8$ br *ve* $|AO| = |OB| = 5$ br *dir.* $m(DAC) = \alpha$ *olduğuna göre* $\cos\alpha$ *kaçtır?*



A) $\frac{7}{25}$ B) $\frac{18}{25}$ C) $\frac{19}{25}$ D) $\frac{21}{25}$ E) $\frac{24}{25}$

Çözüm: AB // DC ise $ABCD$ bir ikizkenar yamuktur. ACB açısı dik olduğundan Pisagor Teoremi gereği

$$|BC| = |AD| = 6$$

bulunur. Ayrıca diğer köşegenin boyu da 8'dir. Dörtgen kiriş dörtgeni olduğundan Batlamyüs Teoremi gereği

$$10\cdot|DC| + 6\cdot 6 = 8\cdot 8$$

eşitliğinden $|DC| = \frac{14}{5}$ bulunur. Şimdi CAD üçgeninde kosinüs teoremi yazacağız:

$$\left(\frac{14}{5}\right)^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos\alpha$$

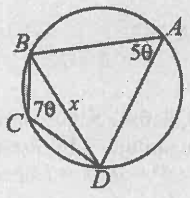
$$\frac{196}{25} = 100 - 96\cdot\cos\alpha$$

$$96\cdot\cos\alpha = 100 - \frac{196}{25} = \frac{2304}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{2304}{25\cdot 96} = \frac{2304}{2400} = \frac{24}{25}$$

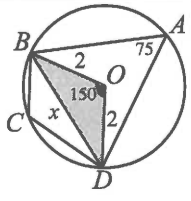
Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki ABCD kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 2'dir.* $m(DAB) = 5\theta$, $m(BCD) = 7\theta$ *ise* $|BD| = x$ *kaçtır?*



A) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}+1$ D) $\sqrt{3}-1$ E) $2+2\sqrt{3}$

Çözüm: Kiriş dörtgenlerinde karşılıklı açı ölçüleri toplamı 180°'ydi. O halde $12\cdot\theta = 180°$ ve $\theta = 15°$ olur. O halde $m(DAB) = 75°$ ve dolayısıyla $m(DOB) = 150°$ bulunur. Gerisi kosinüs teoremi:

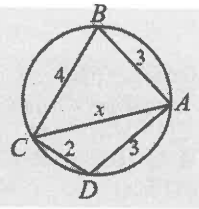


$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 8 + 4\sqrt{3}$$

diye $x = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

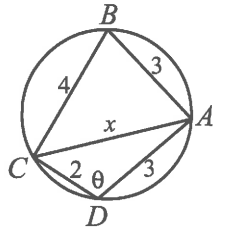
Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki ABCD kirişler dörtgeninde,* $|CD| = 2$ br, $|DA| = |AB| = 3$ br, $|BC| = 4$ br *ise* $|CA| = x$ *kaçtır?*



A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{17}$ E) 4

Çözüm: $m(CDA) = \theta$ olsun. Bir önceki örnekten sebeplenelim:



Ona göre $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

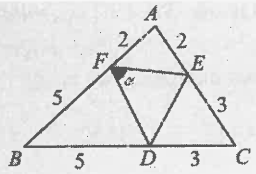
CDA üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot(-\frac{1}{3}) = 4 + 9 + 4 = 17$$

olduğundan $x = \sqrt{17}$ bulunur.

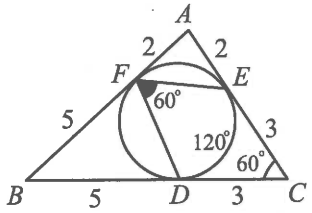
Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$|AF| = |AE| = 2$ br
$|BF| = |BD| = 5$ br
$|CD| = |CE| = 3$ br
olduğuna göre
$m(EFD)$ *kaç derecedir?*



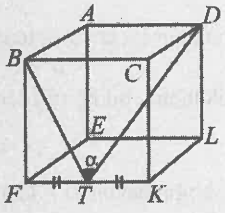
A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Çözüm: ABC üçgeninin kenar uzunluklarının 8-5-7 olmasından C açısının ölçüsünün 60° olduğunu anlıyoruz. Diğer yandan $|AF| = |AE|$, $|BF| = |BD|$ ve $|CD| = |CE|$ eşitliklerinden D, E, F noktalarının iç teğet çemberin değme noktaları olduğunu anlamamız gerekir. Bu durumda kısa DE yayının ölçüsü 120° olacağından $m(EFD) = 60^\circ$ olarak bulunur.



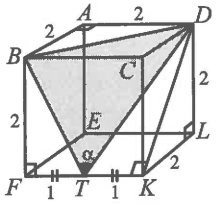
Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki küpte*
$|FT| = |TK|$
$m(BTD) = \alpha$
olduğuna göre
$\cos\alpha$ *değeri kaça eşittir?*



A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

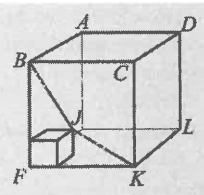
Çözüm: DAB, BFT, DLK ve DKT üçgenlerinin dik olduğunu biliyoruz. Bilmeyen de öğrensin. Bu arada kübün bir kenarına 2 br dersek $|DK| = 2\sqrt{2}$ br olacağından $|DT| = 3$ br olur. $|BT| = \sqrt{5}$ br ve $|BD| = 2\sqrt{2}$ br olduğunu çoktan bulmuşsunuzdur. BTD üçgeninin tüm kenarlarını artık bildiğimizden kosinüs teoreminden $\cos\alpha$ değerini bulabiliriz.



$$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 3^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 3\cdot\cos\alpha$$
$$8 = 14 - 6\sqrt{5}\cos\alpha$$
$$6\sqrt{5}\cos\alpha = 6$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

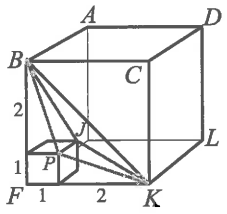
Doğru cevap: A.

Örnek. *F köşeleri ortak olan yandaki iki küpten birinin hacmi diğerinin 27 katıdır.*
Buna göre $\tan(BJK)$ *değeri kaçtır?*



A) $-2-\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) -1 D) $-3/2$ E) -2

Çözüm: Hacmi 27 katıysa, bir kenar uzunluğu diğerinin 3 katıdır. Küçük küpün bir kenar uzunluğuna 1 br dersek, büyük küpün bir kenar uzunluğu 3 br olur. Şimdi BPJ ve KPJ açılarının dik olduğunu görünüz.



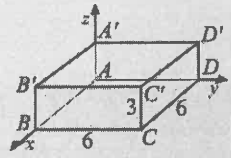
$|PJ| = 1$ br olduğundan $|BJ| = |JK| = \sqrt{6}$ br olur.
Diğer yandan, kendileri yüzey köşegeni olduklarından $|BK| = 3\sqrt{2}$ br dir. BJK ikizkenar üçgeninde uzun kenar kısa kenarların $\sqrt{3}$ katı çıktığından $m(BJK) = 120^\circ$'dir. Bundan dolayı

$$\tan(BJK) = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

Tabi ki 30°-30°-120° üçgeninin bu özelliğini bilmeyenler yine kosinüs teoremi yardımıyla bulacaklar.

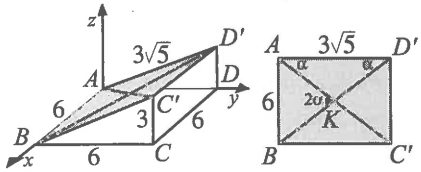
Doğru cevap: B.

Örnek [1997 ÖSS]. $|BC| = 6$cm
$|CD| = 6$ cm
$|DD'| = 3$ cm
Bu prizmanın $[AC'$ *ve* $[BD'$ *ışınlarının belirttiği dar açının kosinüsü kaçtır?*



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

Çözüm: $[AC'$ ve $[BD'$ ışınlarını çizip, belirttikleri düzlem içinde bulunan $ABC'D'$ dikdörtgenini de tarayalım.



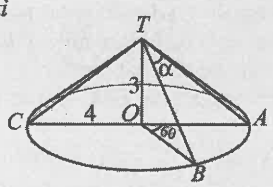
Bu dikdörtgeni üstte sağdaki gibi iki boyutta çizersek $\cos 2\alpha$'yı bulmamız gerektiğini anlarız. $D'AB$ üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|BD'| = 9$ br olarak bulunduğundan $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ olur. O halde

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

bulunur.

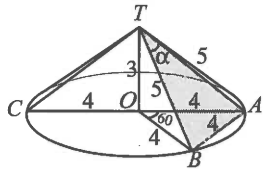
Doğru cevap: C.

Örnek [1993 ÖYS]. *Şekildeki dönel koninin tepesi T, taban merkezi O, yüksekliği 3 cm, taban yarıçapı 4 cm.dir. Çember üzerindeki A ve B noktaları O ve T'ye birleştirilmiştir. $m(AOB) = 60°$ ve $m(ATB) = \alpha$ olduğuna göre $\cos\alpha$ değeri kaçtır?*



A) $\frac{17}{25}$ B) $\frac{19}{25}$ C) $\frac{21}{25}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

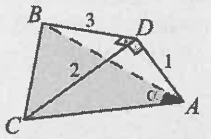
Çözüm: $|OA| = |OB|$ ve $m(AOB) = 60°$ olduğundan AOB üçgeni eşkenardır ve bu sebeple $|AB| = 4$ cm olur. Diğer yandan TOB ve TOA açılarının dikliğinden ötürü $|TB| = |TA| = 5$ cm bulunur. TBA üçgenin üç kenar uzunluğunu da bulduğumuzdan dolayı kosinüs teoremini uygulayabiliriz.



$$4^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos\alpha$$
$$16 = 50 - 50\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{34}{50} = \frac{17}{25} \text{ bulunur.}$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. *Yandaki şekilde verilen DABC dörtyüzlüsünün D köşesinden geçen ayrıtları birbirine diktir. BAC açısının ölçüsü α ise $\cos\alpha$'nın değeri nedir?*



A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

Çözüm: D köşesinden geçen ayrıtları birbirine dikse BDC, CDA ve BDA üçgenleri diktir. Pisagor Teoremi gereği $|BC| = \sqrt{13}$ br, $|CA| = \sqrt{5}$ br ve $|BA| = \sqrt{10}$ br bulunur. ABC üçgeninin üç kenar uzunluğu bilindiğinden kosinüs teoremi uygulanabilir.

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos(BAC)$$
$$13 = 10 + 5 - 2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$$
$$13 = 15 - 10\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$$
$$10\sqrt{2}\cdot\cos\alpha = 2$$
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları arasında $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$ bağıntısı varsa bu üçgenin C açısının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 135

Çözüm: Kosinüs teoremine göre $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ olmalıdır. Demek ki üçgenimizde $\sqrt{2}ab = 2ab\cos C$ eşitliği sağlanmaktadır. Bu da $m(C) = 45°$ olduğu anlamına gelir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde $b + c - a = \frac{bc}{a+b+c}$ bağıntısı geçerliyse, bu üçgenin A açısının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 60° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

Çözüm: $(b + c - a)\cdot(b + c + a) = bc$ olduğundan $(b + c)^2 - a^2 = bc$ olur.

$$b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = bc$$

eşitliğinden

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

bulunur ki, kosinüs teoremi gereği

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$$

olduğunu bildiğimizden $bc = -2bc\cdot\cos A$ bulunur.

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

çıktığından $m(A) = 120°$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları olan a, b, c değerleri arasında $a^2\cdot(a - b - c) = a^3 - b^3 - c^3$ bağıntısı geçerliyse, bu üçgenin A açısının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 60° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

Çözüm: $a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$ eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$a^2\cdot(b + c) = (b + c)\cdot(b^2 - bc + c^2)$$

çıkar. Bu da $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ demektir. Üst soruda yaptığımız gibi

$$-bc = -2bc\cdot\cos A$$

dersek, $\cos A = 1/2$ çıktığından $m(A) = 60°$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$a = 3$ br, $b = 5$ br, $m(C) = 120^\circ$

olan bir ABC üçgeninde $|AB|$ kenarının uzunluğu kaç br olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.

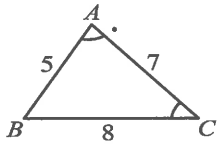
$a = 7$ br, $b = 8$ br, $c = 13$ br

olan bir ABC üçgeninde $m(C)$ kaç radyandır?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

3.

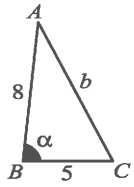
Yandaki ABC üçgeninde
$|AB| = 5$ br,
$|AC| = 7$ br,
$|BC| = 8$ br
olduğuna göre
$\cos(A + C)$ kaça eşittir?



A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.

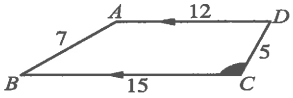
Yandaki üçgende
$|AB| = 8$ br,
$|BC| = 5$ br,
$m(ABC) = \alpha$
olmak üzere $\alpha > 60^\circ$ ise $|AC| = b$ kaç farklı tamsayı değeri alabilir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

$ABCD$ yamuk
$AD \,//\, BC$
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 15$ br
$|CD| = 5$ br
$|DA| = 12$ br
olduğuna göre tan C kaça eşittir?



A) -1 B) $-\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{3}$ D) -2 E) $-\sqrt{5}$

6.

Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde

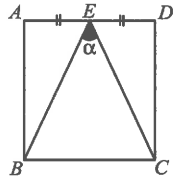
$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

bağıntısı geçerliyse $m(A)$ hangisine eşittir?

A) 30° B) 60° C) 90° D) 120° E) 150°

7.

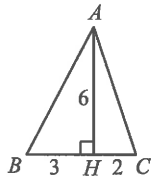
Yandaki şekilde $ABCD$ bir kare olup, $|AE| = |ED|$ verilmiştir.
$m(BEC) = \alpha$ olduğuna göre $\tan(\pi + \alpha)$ kaça eşittir?



A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

8.

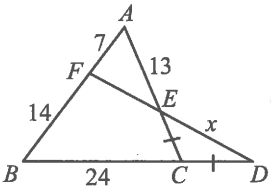
Yandaki ABC üçgeninde
$[AH] \perp [BC]$
$|AH| = 6$ br
$|BH| = 3$ br
$|HC| = 2$ br
olduğuna göre $m(CAB)$ kaçtır?



A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 45°

9.

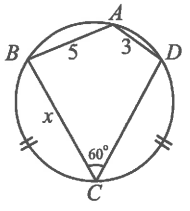
Yandaki şekilde ABC ve FBD birer üçgen
$|EA| = 13$ br
$|AF| = 7$ br
$|FB| = 14$ br
$|BC| = 24$ br
$|CD| = |CE|$
olduğuna göre $|ED| = x$ kaç br dir?



A) 4 B) 5 C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

10.

Yandaki şekilde A, B, C, D noktaları çembersel olup, BC ve CD yaylarının uzunlukları birbirlerine eşit olarak verilmiştir.
$m(BCD) = 60^\circ$
$|AD| = 3$ br
$|AB| = 5$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. D 2. D 3. B 4. B 5. C 6. D 7. D 8. E 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.
Bilindik gösterimleriyle
$a = 16$ br, $c = 6$ br, $m(B) = 60°$
olan bir *ABC* üçgeninde $[AC]$ kenarının uzunluğu kaç br olur?

A) 7 B) 10 C) 14 D) 16 E) 20

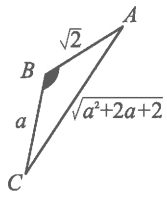
2.
Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde
$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}\ bc$
bağıntısı geçerliyse $m(A)$ hangisine eşittir?

A) 30° B) 45° C) 120° D) 135° E) 150°

3.
Kenar uzunlukları 6-10-14 olan bir üçgenin en küçük dış açısının ölçüsü kaç derecedir?

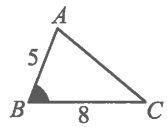
A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

4.
Yandaki ABC üçgeninde
$|BC| = a$ br
$|AB| = \sqrt{2}$ br
$|AC| = \sqrt{a^2 + 2a + 2}$ br
olduğuna göre $m(ABC)$ kaçtır?



A) 75° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

5.
Yandaki ABC üçgeninde
$|AB| = 5$ br
$|BC| = 8$ br
olup, $|AC| > 7$ br olarak veriliyor. Buna göre $m(ABC)$ değeri derece cinsinden kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

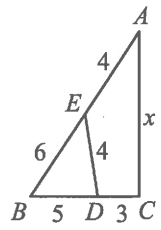


A) 59 B) 60 C) 119 D) 120 E) 121

6.
***ABC* kenar uzunlukları asal sayı olan çevrece en küçük çeşitkenar üçgen olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi bu üçgenin bir iç açısının ölçüsü olabilir?**

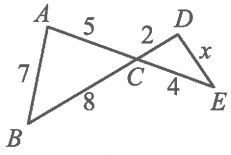
A) 60° B) 72° C) 90° D) 120° E) 135°

7.
ABC bir üçgen
$|AE| = |ED| = 4$ br
$|EB| = 6$ br
$|BD| = 5$ br
$|DC| = 3$ br
olduğuna göre $|AC| = x$ kaç br dir?



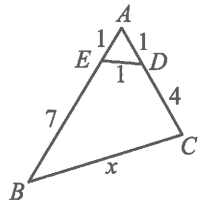
A) 5 B) 6 C) 7 D) $2\sqrt{11}$ E) $\sqrt{22}$

8.
Yandaki şekilde A, C, E ve B, C, D noktaları doğrusaldır.
$|CA| = 5$ br
$|AB| = 7$ br
$|BC| = 8$ br
$|CD| = 2$ br
$|CE| = 4$ br
olduğuna göre $|DE| = x$ kaç br dir?



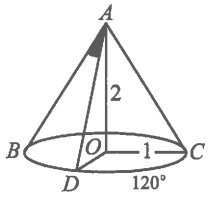
A) 3 B) 4 C) 5 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

9.
Yandaki şekilde ABC ve AED birer üçgen
$|AE| = |ED| = |DA| = 1$ br
$|DC| = 4$ br
$|EB| = 7$ br
olduğuna göre $|BC| = x$ kaç br dir?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.
Yandaki dik konide taban çemberinin merkezi O noktasıdır.
Kısa *CD* yayının ölçüsü 120° olup, $|OC| = 1$ br ve $|OA| = 2$ br olduğuna göre $\cos(BAD)$ kaçtır?



A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{13}{14}$

1. C 2. D 3. C 4. D 5. C 6. D 7. D 8. D 9. C 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Sinüs Teoremi

Bir üçgenin temel elemanları arasındaki ilişkileri verdiğinden kosinüs teoremini ne kadar övsek azdır. Zaten onun için örnek sayımızı oldukça geniş tutmuştuk. Fark ettiğiniz üzere, üçgenden tutun kareye, yamuktan tutun çembere, analitik geometriden tutun katı cisimlere kadar geometrinin her safhasında kullanım alanı vardı. Yalnız kosinüs teoremini kullanabilmek için en az iki kenar uzunluğu gerekiyordu. Hatta bir açı ölçüsü bulacaksak, üç kenar uzunluğu da bilmeye mecburduk. İşte şimdi kosinüs teoreminin yeter şartları oluşmadığında aklımıza gelmesi gerek bir o kadar da önemli sinüs teoremini öğreneceğiz. Sinüs teoremini kullanabilmek için de en az bir tane açı ölçüsünü bilmek zorundayız.

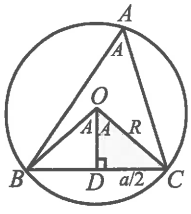
Teorem [Sinüs]. *ABC herhangi bir üçgen olsun. Açılara sırasıyla A, B, C diyelim. O zaman*

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, üçgenin köşelerinin bulunduğu çember R yarıçaplıysa, bu değerler 2R'ye eşittir.

Kanıt: İki farklı kanıt göstereceğiz.

Birinci kanıt. Bir ABC üçgeni ve onun çevrel çemberini çizelim. Çemberin merkezine O diyelim.



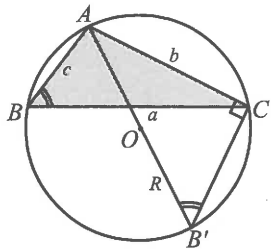
Şekildeki gibi O'dan BC'ye dik inelim. $m(COD)=m(A)$ eşitliğine dikkatinizi çekerim. $|BO|=|OC|$ olduğundan, BOC ikizkenar bir üçgendir. Dolayısıyla $|BD|=|DC|$ olmalıdır. ODC dik üçgeninden

$$\sin A=\sin(COD)=\frac{|DC|}{|CO|}=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R}.$$

Demek ki $\dfrac{|BC|}{\sin A}=2R.$

(Dikkat: Eğer A açısının ölçüsü 90°'den fazlaysa, o zaman O noktası üçgenin dışında kalır ama gene aynı eşitliği elde ederiz.) Aynı şeyi diğer açı ölçüleriyle de yaparsak teoremi elde ederiz. □

İkinci kanıt. Bir ABC üçgeni ve onun R yarıçaplı çevrel çemberini çizelim



A köşesinden geçen çap, çemberi B' noktasında kessin. $m(ACB')=90°$ ve $m(AB'C)=m(ABC)$ olur.

$$\sin B=\sin B'=\frac{b}{2R}$$

olduğundan eşitliğin biri gösterilmiş olur. Diğerleri de simetrik şekilde kanıtlanabilir

Örnek [1966 ÜSS]. *Bir ABC üçgeni için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*

A) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ B) $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$
C) $2R\cdot\sin A=a$ D) $a\cdot\sin A=b\cdot\sin B$
E) $\sin(A+B)=\sin C$

Çözüm: Her x reel sayısı için $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ eşitliği geçerli olduğundan A şıkkı doğrudur. B şıkkındaki ifade Kosinüs Teoremi olduğundan doğrudur. Bir ABC üçgeninde

$$A+B+C=\pi$$

olduğundan $A+B$ ile C açıları bütünlerdir. Bundan dolayı sinüsleri eşittir. E şıkkı da doğrudur. Sinüs Teoremi'nden

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

olduğunu biliyoruz. O halde C şıkkındaki ifade doğru olup,

$$a\cdot\sin B=b\cdot\sin A$$

olmalıdır. Bu durumda D şıkkı yanlıştır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir ABC üçgeninde,*

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

eşitliği geçerliyse, bu üçgen ailesi hakkında ne söylenebilir?

A) Çeşitkenar B) İkizkenar C) Eşkenar D) Dik E) İkizkenar dik

Çözüm: Sinüs Teoremi'ne göre

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

diye

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R} \text{ ve } \sin C = \frac{c}{2R}.$$

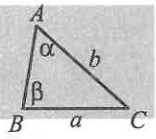
Verilen bağıntıda bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$(\frac{b}{2R})^2 + (\frac{c}{2R})^2 = (\frac{a}{2R})^2$$

olur ki, sadeleştirilirse $b^2 + c^2 = a^2$ bulunur. O halde bu eşitliğin geçerli olduğu üçgen ailesi A açısı dik olan üçgenlerdir.

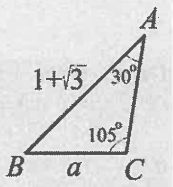
Doğru cevap: D.

Soru Tipi. *Bir üçgenin herhangi 2 açı ölçüsü ve 1 kenar uzunluğu verilip, diğer kenarlardan biri sorulur.*



Çözüm yolu: Sinüs Teoremi'nden kolaylıkla çözülebilir. Uygun şartlar altında, 1 açı ölçüsü ve 2 kenar uzunluğu verilip, diğer bir açı ölçüsü sorulduğunda da Sinüs Teoremi uygulanabilir.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(BCA) = 105°$
$m(CAB) = 30°$
$|AB| = 1+\sqrt{3}$ br
olduğuna göre
$|BC| = a$ *kaç birimdir?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: C açısının ölçüsü ve c kenarının uzunluğu bilinmekteyken, A açısının ölçüsünü verip a kenarının uzunluğunu sorduğundan aklımıza hemen Sinüs Teoremi gelmelidir.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin 105°} = \frac{a}{\sin 30°}$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot \sin 30° = a \cdot \sin 105°$$

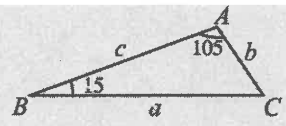
$$\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot \frac{1}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

eşitlişiğinden $a = \sqrt{2}$ olarak bulunur.

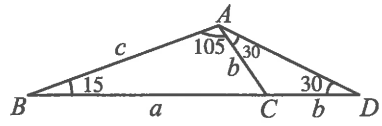
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABC bir üçgen*
$m(ABC) = 15°$
$m(CAB) = 105°$
olduğuna göre
$\frac{a+b}{c}$ *oranı kaçtır?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: $[BC]$ kenarını C yönünde B kadar uzatalım. Bittiği yere D diyelim.



ABD üçgeninde sinüs teoreminden

$$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{a+b}{c} = \frac{\sin 135°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir ABC üçgeninde* $a = 12$ br *olup* $\cos A = 5/13$ *olarak veriliyor. Bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?*

A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) 7

Çözüm: Uygun dik üçgeni hemen çizerseniz $\sin A = \frac{12}{13}$ olduğunu görürsünüz. Sinüs Teoremi gereği

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

olduğunu biliyoruz. a ve $\sin A$ değerleri bu eşitlikte yerlerine yazılırsa $R = 6{,}5$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Çevresi* 26 br *olan bir ABC üçgeninde*

$$2\cdot\sin A = 3\cdot\sin B = 4\cdot\sin C$$

eşitli mevcuttur. Buna göre üçgenin en kısa kenarının uzunluğu kaç br *dir?*

A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) 7

Çözüm: Sinüs teoremi gereğince, bir üçgenin açılarının sinüslerinin, üçgenin kenarlarıyla doğru orantılı olduğunu biliyoruz. O halde

$$2a = 3b = 4c$$

yazmakta bir mahzur yoktur. Bu değerlerin hepsini $12k$ sayısına eşitlersek

$$a = 6k,\ b = 4k \text{ ve } c = 3k$$

çıkar ki çevre $13k = 26$ br verildiğinden $k = 2$ bulunur. O halde en kısa kenarın uzunluğu $3k = 6$ br dir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir ABC üçgeninde $m(C) = 30^\circ$, $|AB| = 1$ br ve $|BC| = 2$ br olarak veriliyor.
Buna göre $|AC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 2 E) $\sqrt{6}$

2.
Bir ABC üçgeninde $m(A) = 45^\circ$, $m(B) = 60^\circ$ ve $|BC| = 4$ br olarak veriliyor.
Buna göre $|AC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

3.
Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ br olarak veriliyor.
$m(A) = 30^\circ$ olduğuna göre $|BC|$ uzunluğu kaç birim olur?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

4.
Bir ABC üçgeninde $m(A) = 30^\circ$ ve $a = 6$ cm olduğuna göre bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç cm dir?

A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 12 E) $12\sqrt{3}$

5.
$$a = 24 \text{ br}$$
$$\cos A = \frac{5}{13}$$
olan bir ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı kaç br dir?

A) 15 B) $\frac{13}{2}$ C) 10 D) 13 E) 24

6.
Bir ABC üçgeninde $a = 6$ cm ve çevrel çemberin yarıçapı $2\sqrt{3}$ br olduğuna göre $\tan A$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

7.
Çevrel çember çapının uzunluğu, bir kenarının uzunluğuna eşit olan bir üçgen için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) Eşkenar üçgendir. B) İkizkenar üçgendir.
C) Geniş açılı üçgendir. D) Dar açılı üçgendir.
E) Dik üçgendir.

8.
Aşağıdakilerden hangisi ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapına eşittir?

A) $\frac{a}{\sin A}$ B) $\frac{a}{2\sin A}$ C) $\frac{2a}{\sin A}$ D) $\frac{\sin A}{a}$ E) $\frac{\sin A}{2a}$

9.
Çevrel çember yarıçapı R olan bir ABC üçgeninin alanı aşağıdaki bağıntıların hangisiyle hesaplanabilir?

A) $R\sin A\sin B\sin C$ B) $2R\sin A\sin B\sin C$
C) $R^2\sin A\sin B\sin C$ D) $2R^2\sin A\sin B\sin C$
E) $\frac{R}{2}\sin A\sin B\sin C$

10.
Bir ABC üçgeninde aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ B) $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin A+\sin B}{\sin B}$
C) $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$ D) $a\cdot\sin C = c\cdot\sin A$
E) $a < b$ ise $\sin A > \sin B$

1. B 2. C 3. C 4. A 5. D 6. A 7. E 8. B 9. D 10. E

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

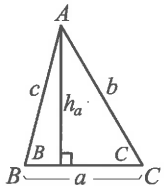
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Alan Hesaplarında Trigonometri

Üçgensel bir bölgenin alanının hesaplanması insanoğlu için hep bir merak konusu olmuştur. Hatta bu merak abartılıp günümüze kadar 110 değişik formül üretilmiştir. Biz bunların hepsini değil ama en temel 5-6 tanesini çıkartacağız. Siz de benzer metotlar kullanarak kalan 104-105 taneyi çıkarırsınız artık. ☺

Rahmetli dedem temel olan *tabançarpıyükseklikbölüiki* formülünü şöyle söylerdi: *Bir müsellesin mesaha-i sathıyyesi kaidesiyle irtifaının hasıl-ı darbının nısfına müsavidir.*

Üçgensel Bölgelerin Alan Hesabı. *İki kenarı ve bu iki kenarın belirttiği açının ölçüsü verilen bir ABC üçgeni için;*



$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$$
$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin B$$
$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

Sebebi şudur: Şekle göre $\sin B = \frac{h_a}{c}$ olduğundan $h_a = c\cdot\sin B$'dir.

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin B.$$

Diğer eşitlikler de benzer şekilde kanıtlanabilir.

Örnek. *Tepe açısı* 120° *ve ikiz kenarları a olan bir ikizkenar üçgenin alanını bulunuz.*

A) a^2 B) $\frac{a^2}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ E) $\frac{a^2}{4}$

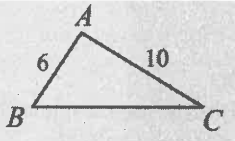
Çözüm:

$$A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Dikkat ettiyseniz, bir kenarı a br olan bir eşkenar üçgenin alanıyla aynı. Bunun sebebini her iki şekli de çizerek düşünün, kolaylıkla bulacaksınız.

Doğru cevap: D.

Örnek [1967 ÜSS]. *Yandaki ABC üçgeninin alanı* $15\ cm^2$ *olarak veriliyor. Buna göre A açısının ölçüsü kaç derece olabilir?*



A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

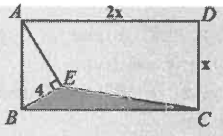
Çözüm: $\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A$

$$15 = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \sin A$$

eşitliğinden $\sin A = \frac{1}{2}$ bulunur. Buna göre A açısının ölçüsü 30° veya 150° olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABCD bir dikdörtgen*
BEA bir dik üçgen
$|AD| = 2\cdot|DC|$
$|BE| = 4$ br
olduğuna göre BEC üçgensel bölgesinin alanı kaçtır?



A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

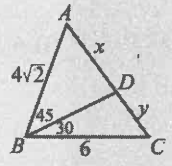
Çözüm: Taralı alanı bulmak için $\sin(EBC)$ lazım.

$$\sin(EBC) = \sin(EAB) = 4/x$$

bulunur, o halde $\text{Alan}(EBC) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2x\cdot\frac{4}{x} = 16.$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde*
$m(ABD) = 45^\circ$
$m(CBD) = 30^\circ$
$|AB| = 4\sqrt{2}$ br *ve* $|BC| = 6$ br
olduğuna göre
$|AD|/|DC| = x/y$ *oranı kaçtır?*



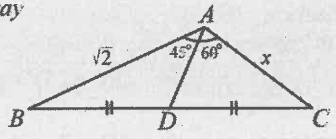
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{6}{5}$ E) 1

Çözüm: Sorulanı nerden bulabileceğimizi bir düşünelim bakalım. x/y oranını $\text{Alan}(ABD)/\text{Alan}(DBC)$ oranı verir. Her iki üçgende de alan formülünü tatbik edersek,

$$\frac{\text{Alan}(ABD)}{\text{Alan}(DBC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot|BD|\cdot\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot|BD|\cdot\sin 30^\circ} = \frac{4}{3}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *[AD] kenarortay*
$m(CAD) = 60^\circ$
$m(DAB) = 45^\circ$
$|AB| = \sqrt{2}$ br
$|AC| = x$ br
olduğuna göre x kaçtır?



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

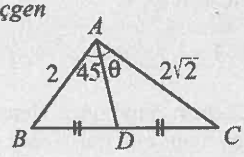
Çözüm: $|BD| = |DC|$ olduğundan *CAD* ile *DAB* üçgenlerinin alanlarının eşit olduklarını anlarız. Bu üçgenlerin birer kenarı ortak ve birer açıları bilindiğinden sinüslü alan formüllerinden alanlarını yazıp eşitleyeceğiz. Öncelikle ortak kenarın uzunluğuna *n* br diyelim.

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot n\cdot\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot n\cdot x\cdot\sin 60^\circ$$

olduğundan sadeleştirmeler yapılır ve değerler yerlerine yazılırsa, $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1991 ÖYS]. *ABC bir üçgen*
$|BD| = |DC|$
$|AB| = 2$ br
$|AC| = 2\sqrt{2}$ br
$m(BAD) = 45^\circ$
$m(DAC) = \theta$
Yukarıdaki verilere göre, $\sin\theta$*'nın değeri kaçtır?*



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm: $|BD| = |DC|$ olması *BAD* ile *DAC* üçgensel bölgelerinin alanlarının eşit olması anlamına gelir.

$$\text{Alan}(ABD) = \text{Alan}(ADC)$$

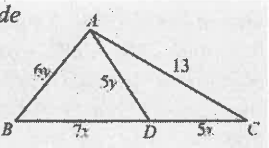
$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|AD|\cdot\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot|AD|\cdot\sin\theta$$

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2}\cdot\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde* $\frac{\sin(BAC)}{\sin(DAC)}$ *oranı kaça eşittir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{A(BAC)}{A(DAC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6y\cdot 13\cdot\sin(BAC)}{\frac{1}{2}\cdot 5y\cdot 13\cdot\sin(DAC)} = \frac{12}{5}$

$$\frac{6\cdot\sin(BAC)}{5\cdot\sin(DAC)} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{\sin(BAC)}{\sin(DAC)} = \frac{12}{6} = 2$$

Doğru cevap: B.

Teorem [Maksimum Alan]. *İki kenar uzunluğu verilen bir üçgensel bölgenin alanı en çok bu iki kenar uzunluğunun çarpımının yarısı olabilir.*

Kanıt:

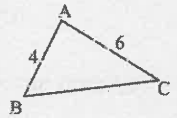
$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A$$

olduğunu öğrendik. Burada *b* ve *c değerleri* sabit olduğundan tek değişken olan sin *A* değeri en büyük olduğunda alan en büyük olur. sin *A* değeri de en çok 1 olabilir. O halde

$$\max\{\text{Alan}(ABC)\} = \frac{b\cdot c}{2}.$$

Uyarı. İki kenar uzunluğu verilen bir üçgen, en büyük alana bu iki kenar dik kesiştiğinde sahip olur. Üçüncü kenar ne kadar büyük olursa değil!

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde* $60^\circ < m(A) < 150^\circ$*'dir. ABC üçgensel bölgesinin alanının tam sayı olarak alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?*

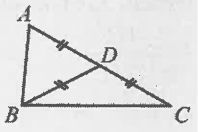


A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm: $\text{Alan}(ABC) > \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\sin 150^\circ = 6$ olduğundan $\min\{\text{Alan}(ABC)\} = 7$. $\text{Alan}(ABC) \le \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\sin 90^\circ = 12$ olduğundan $\max\{\text{Alan}(ABC)\} = 12$. O halde cevap $7 + 12 = 19$.

Doğru cevap: C.

Örnek [1976 ÜSS]. *Yandaki ABC üçgeninde* $|AD| = |DC| = |BD| = a$ br *olup B köşesi sabit değildir. Bu üçgenin alanının en büyük değeri nedir?*



A) a^2 B) $3a$ C) $2a$ D) $4a$ E) $2a^2$

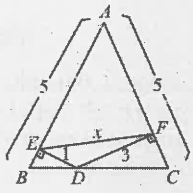
Çözüm: Muhteşem üçlü gereği ABC açısının dik olduğunu biliyoruz. Ayrıca hipotenüsü belli olan dik üçgenlerin alanları, üçgen ikizkenar olduğunda en büyük değerini aldığından, bu durumda dik kenar uzunlukları $a\sqrt{2}$ br olacaktır. O halde üçgenin alanı en çok

$$\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} = a^2 \text{ br}^2$$

olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ABC dar açılı bir üçgen,* $|BA| = |AC| = 5$ br, $D \in [BC]$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $|DE| = 1$ br *ve* $|DF| = 3$ br *olduğuna göre* $|EF| = x$ *kaçtır?*



A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\sqrt{15}$ D) $\sqrt{\frac{65}{8}}$ E) 3

Çözüm: x'i bulmak için EDF açısının kosinüsüne ihtiyacımız var. $AEDF$ dörtgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından, bu değer $-\cos A$'ya eşittir.

$$\text{Alan}(ABC) = \text{Alan}(ADB) + \text{Alan}(ADC)$$
$$= \frac{5\cdot 1}{2} + \frac{5\cdot 3}{2} = 10.$$

Diğer yandan

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin A$$

olduğundan $\sin A = \frac{4}{5}$'dir. A açısının ölçüsü dar olduğundan $\cos A = \frac{3}{5}$ olur. Demek ki $\cos(EDF) = -\frac{3}{5}$. Bunu EDF üçgeninde kosinüs teoreminde yerine yazarsak

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = 10 + \frac{18}{5} = \frac{68}{5}$$

bulunur, o halde $x = \sqrt{\frac{65}{8}}$'tir.

Doğru cevap: D.

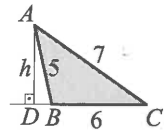
Teorem [Heron]. *Kenarları* a br, b br, c br *ve yarımçevresi* u br *olan bir üçgenin alanı* $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ br^2 *dir.*

Bu teoremin kanıtını MY GEOMETRİ 1 kitabında bulabilirsiniz.

Örnek. $|AB| = 5$ br, $|BC| = 6$ br, $|CA| = 7$ br *olan ABC üçgeninin ortanca yüksekliğinin uzunluğu kaçtır?*

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{6}$ E) 5

Çözüm: Önce Heron formülünden alanı bulalım. Sonra yüksekliği bulmak kolay. Çevre = 18 br olduğundan $u = 9$ olur.



$$\text{Alan}(ABC) = \sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 6\sqrt{6}$$

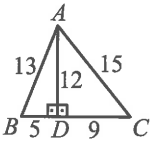
Ortanca yükseklik, ortanca kenara inendir. Boyuna h dersek $6\cdot h/2 = 6\sqrt{6}$ olduğundan $h = 2\sqrt{6}$ bulunur. ABC üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos(ABC)$ bulunup, buradan $\cos(ABD) = -\cos(ABC)$ olduğu düşünülerek ABD üçgeninde $\cos(ABD)$ kullanılarak da h değerine ulaşabilirdiniz.

Doğru cevap: B.

Örnek. $|AB| = 13$ br, $|BC| = 14$ br *ve* $|CA| = 15$ br *olan ABC üçgeninde A'dan inen yükseklik ayağı D ise* $|BD|$ *kaç* br *dir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Yine önce Heron formülünden alanı bulalım. Sonra sıra yüksekliğe gelir.



Çevre = 42 olduğundan $u = 21$.

$$\text{Alan}(ABC) = \sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 84$$

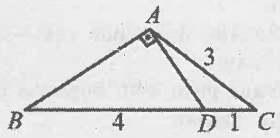
olur. Aynı alanı $14\cdot h/2 = 7h$'ye eşitlersek $h = 12$ bulunur. ADB üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $|BD| = 5$ olur.

Doğru cevap: E.



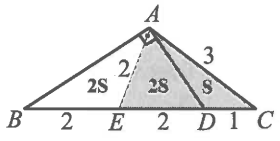
Soruyu çözdük, çözdük de bir şey dikkatinizi çekmiş olmalı. Çekmediyse ben uyarayım. Üçgenin üç kenarı da tamsayı, alanı da tamsayı, yüksekliği de tamsayı hatta yüksekliğin kenarları böldüğü parçalar da tamsayı. Birazdan göreceğimiz üzere iç teğet çemberinin yarıçapı bile tamsayı. ABD ve ADC birer özel üçgen, vs... İşte birkaçını verdiğimiz bu özelliklerden dolayı 13-14-15 üçgenine **Mükemmel Üçgen** denir.

Örnek. *DA ⊥ AB*
|AC| = 3 br
|CD| = 1 br
|DB| = 4 br
olduğuna göre
Alan(ABC) kaç br² dir?



A) 8 B) $5\sqrt{2}$ C) 10 D) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ E) 12

Çözüm: Pisagor Teoremi'ni uygulayacak kadar veri olmadığında Muhteşem Üçlü'yü deneyin dediğimi unutmadınız değil mi? $[AE]$ kenarortayını çizersek, AEC üçgeninin üç kenar uzunluğu da biliniyor olur ki Heron formülünden veya ikizkenar olduğundan tabana dik indirerek $\text{Alan}(AEC) = 2\sqrt{2}$ bulunur. Bu sayıyı 3'e bölüp, 5'le çarparsak ABC üçgeninin alanını bulmuş oluruz, o halde cevap $10\sqrt{2}/3$.



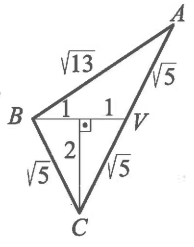
Doğru cevap: D.

Örnek. $|BC| = \sqrt{5}$ br, $|CA| = \sqrt{20}$ br *ve* $|AB| = \sqrt{13}$ br *olan ABC üçgeninin alanı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Üç kenar uzunluğu da bilindiğinden Heron formülünden alan bulunabilir ama ne size böyle bir eziyeti öneririm ne de ben bunun altına girerim. Başka bir çözüm yolu arayalım.

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ olduğundan adamın bunu ikiye bölesi geliyor. B'den bir kenarortay çizelim. Daha sonra kenarortay teoreminden veya Stewart teoreminden $|BV| = 2$ çıkar. BCV ikizkenar olduğundan tabana indirilen dikmesi tabanı ikiye böler ve boyu da 2 olur. $A(BVC) = 2$ olduğundan $A(ABC) = 4$ bulunur.



Doğru cevap: C.

Teorem. *ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R ise;*

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

Kanıt: $\frac{a}{\sin A} = 2R$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde

$$\sin A = \frac{a}{2R}.$$

Bu eşitliği $\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ eşitliğinde yerine yazalım.

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Örnek. *Kenar uzunlukları 5-6-7 olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?*

A) $\frac{35\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{35\sqrt{6}}{12}$ C) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

Çözüm: Önce Heron formülünden alanı bulup, onu çevrel çember yarıçapını içeren alan formülüne eşitleyeceğiz.

$$6\sqrt{6} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4R} \text{ olduğundan } R = \frac{35\sqrt{6}}{24}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *6-8-10 üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 10 E) 12

Çözüm: 6-8-10 uzunlukarı bir dik üçgen belirttiğinden *tabançarpıyükseklikbölüiki* formülünden bulduğumuz alanı, çevrel çember yarıçapını içeren alan formülüne eşitleyeceğiz.

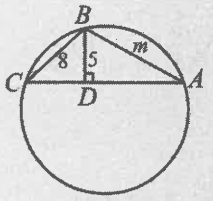
$$24 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot R} \text{ olduğundan } R = 5.$$

Doğru cevap: B.



Bir dik üçgenin çevrel çember yarıçapı, hipotenüsünün yarısı kadardır. Çünkü dik üçgenin çevrel çemberini çizdiğimizde, hipotenüs bu çemberin çapı olur. Hani çapı gören çevre açı dik olurdu ya, o yüzden!

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı* 16 br
BD ⊥ CA
|BD| = 5 br
|BC| = 8 br
|BA| = m br
olduğuna göre m kaçtır?



A) 20 B) 16 C) 13 D) 12 E) 10

Çözüm: $|AC| = x$ olsun. Alanı iki türlü hesaplayıp, sonuçları eşitleyeceğiz:

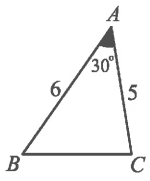
$$\frac{x \cdot 5}{2} = \frac{x \cdot 8 \cdot m}{4 \cdot 16}$$

eşitliğinden m değeri 20 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

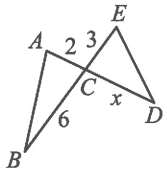
CEVAPLI TEST 1

1.
Yandaki üçgende
$|AB| = 6$ br,
$|AC| = 5$ br,
$m(BAC) = 30^\circ$
olduğuna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alanı kaç br^2 dir?



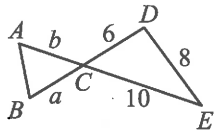
A) 15 B) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $7\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{2}$

2.
Yandaki şekilde *A*, *C*, *D* ve *B*, *C*, *E* noktaları doğrusaldır.
$|EC| = 3$ br
$|AC| = 2$ br
$|BC| = 6$ br
olup *ABC* ve *CDE* üçgensel bölgelerinin alanları birbirlerine eşit olduğuna göre $|CD| = x$ kaç br dir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.
Yandaki şekilde *B*, *C*, *D* ve *A*, *C*, *E* noktaları doğrusaldır.
Alan(*ABC*) = 2 br² ve uzunluklar şekilde gösterildiği gibi olduğuna göre $a \cdot b$ kaçtır?

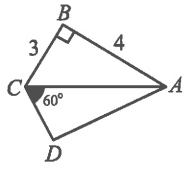


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.
Bir *ABC* üçgeninde $|AB| = 5$ br ve $|AC| = 9$ br olup, Alan(*ABC*) = 18 br^2 olarak veriliyor.
Buna göre cos *A*'nın değeri kaça eşit olabilir?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{7}{8}$

5.
Yandaki şekilde
Alan(*ABC*) = Alan(*DCA*)
$|BC| = 3$ br, $|BA| = 4$ br,
$m(ACD) = 60^\circ$ $m(CBA) = 90^\circ$
olduğuna göre $|CD|$ uzunluğu kaça eşittir?

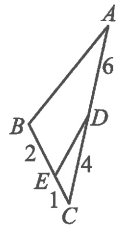


A) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) 12 E) $8\sqrt{3}$

6.
Bir *ABC* üçgeninde $|AB| = 2$ br ve $|BC| = 7$ br olarak veriliyor.
Buna göre *ABC* üçgensel bölgesinin alanı en çok kaç br^2 olabilir?

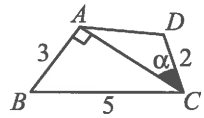
A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 7 D) 8 E) 9

7.
Yandaki üçgende
$|CE| = 1$ br,
$|EB| = 2$ br,
$|CD| = 4$ br,
$|DA| = 6$ br
Alan(*ABC*) = 15 br^2
olduğuna göre Alan(*ECD*) kaç br^2 dir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

8.
Yandaki şekilde $\frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(ACD)} = 2$
$|AB| = 3$ br
$|BC| = 5$ br
$|DC| = 2$ br
$m(BAC) = 90^\circ$ olarak veriliyor.
Buna göre sin α'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

9.
Kenar uzunlukları $a = 7$ br, $b = 5$ br ve $c = 3$ br olan bir *ABC* üçgeninde *C* köşesinin *AB* doğrusuna olan uzaklığı kaç br dir?

A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ B) $5\sqrt{3}$ C) 4 B) 3 E) 2

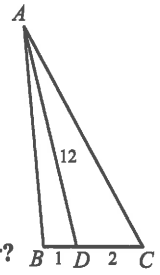
10.
Bir *ABC* üçgeninde $|AB| = 4$ br, $|AC| = 7$ br ve $|BC| = 9$ br olduğuna göre *A* köşesinin *BC*'ye olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

1. C 2. C 3. A 4. A 5. A 6. C 7. B 8. B 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.
Yandaki ABC üçgeninde
B, D, C noktaları doğrusaldır.
$|AD| = 12$ br
$|BD| = 1$ br
$|DC| = 2$ br
Alan$(ABC) = 15$ br²
olduğuna göre cot(BDA) aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?



A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{5\sqrt{11}}{11}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ E) 1

2.
Çevrel çemberinin çapı 8 br olan bir ABC üçgeninde $|BC| = 4$ br olarak veriliyor. $m(B) = 60°$ olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

A) $16\sqrt{3}$ B) 16 C) $8\sqrt{3}$ D) 8 E) $4\sqrt{3}$

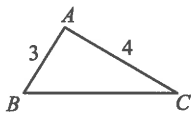
3.
Bir ABC üçgeninde $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ eşitliği sağlanmaktadır.
$|BC|\cdot|AC| = 6$ olduğuna göre ABC üçgensel bölgesinin alanı kaç br² dir?

A) $6\sqrt{3}$ B) 6 C) $3\sqrt{3}$ D) 3 E) $\frac{3}{2}$

4.
Dik kenarlarının uzunlukları 7 ve 24 br olan bir dik üçgenin çevrel çemberinin çapı kaç br dir?

A) 25 B) $\frac{25}{2}$ C) 12 D) 7 E) $\frac{7}{2}$

5.
Yandaki ABC üçgensel bölgesinin alanı 6 br² olarak veriliyor.
$|AB| = 3$ br
$|AC| = 4$ br
olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı kaç br dir?



A) 5 B) 4 C) 3 D) $\frac{5}{2}$ E) 1

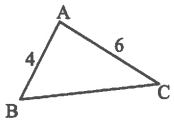
6.
Bir ABC üçgeninde $|AB| = 5$ br, $|AC| = 7$ br, $|BC| = 8$ br olduğuna göre bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç br dir?

A) 14 B) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ C) 7 D) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ E) $7\sqrt{3}$

7.
ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O noktasıdır.
$|OB| = 7$ br ve $|BC| = 14$ br olduğuna göre sin A'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

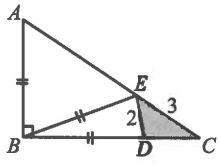
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

8.
ABC üçgeninde
$30° < m(A) < 120°$'dir.
ABC üçgensel bölgesinin alanının tam sayı olarak alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamı kaçtır?



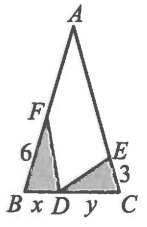
A) 18 B) 19 C) 20 D) 23 E) 24

9.
ABC dik üçgeninde
$|BA| = |BE| = |BD|$
veriliyor.
$|ED| = 2$ br
$|EC| = 3$ br
olduğuna göre Alan(DEC) kaçtır?



A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 3 D) 6 E) $6\sqrt{2}$

10.
Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve taralı olan FBD ile EDC üçgensel bölgelerin alanları birbirine eşittir.
$|FB| = 6$ br
$|EC| = 3$ br
ise $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{x}{y}$ kaçtır?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

1. C 2. C 3. D 4. A 5. D 6. D 7. A 8. B 9. A 10. B

KARIŞIK TEST 1

1.
A, B ve C bir üçgenin açıları olmak üzere

$$\frac{\cos^2(\frac{A+B}{2})+\cos^2\frac{C}{2}}{\cot(\frac{A+B}{2})\cdot\cot\frac{C}{2}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
Bir ABC üçgeninde

$$2\cdot\cos^2(A+B)+3\cdot\cos C=-1$$

olduğuna göre C açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B) 75 C) 90 D) 120 E) 150

3.

$$(\tan x-\sin x)^2+(1-\cos x)^2$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(\cos x-1)^2$ B) $(\sin x+1)^2$ C) $(\sec x-1)^2$
D) $(\csc x+1)^2$ E) $(\tan x-1)^2$

4.

$$\sin^2\left(x+y+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-y-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerin hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

5.
Birim çember üzerinde standart konumda yerleştirilmiş $\frac{5\pi}{3}$ radyanlık bir açının bitim kenarının çemberi kestiği nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ B) $(-1, 0)$ C) $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$
D) $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ E) $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

6.
$16x=\pi$ olmak üzere

$$\frac{\cos 9x}{\cos x}=\frac{a}{b}$$

olduğuna göre cot x'in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a}{b}$ B) $-\frac{b}{a}$ C) $-\frac{a}{b}$ D) $\frac{b}{a}$ E) $\sqrt{b^2-a^2}$

7.
$x=\frac{\pi}{22}$ olmak üzere

$$\cot 3x\cdot\cot 8x$$

çarpımının sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

8.

$$\sin 3x=\cos 2y$$

olduğuna göre $\frac{\tan 6x}{\tan 4y}$ oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

9.

$$m=\sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\ldots+\sin^2 85^\circ$$
$$n=\tan^2 5^\circ\cdot\tan^2 10^\circ\cdot\tan^2 15^\circ\cdot\ldots\cdot\tan^2 85^\circ$$

olduğuna göre $\frac{m}{n}$ oranı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{17}{2}$ E) 17

10.
Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı 4 br dir.

$$a-b=2$$
$$2\cdot\sin A+2\cdot\sin B=1$$

olduğuna göre cos A aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\sqrt{55}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{50}}{8}$ C) $\frac{\sqrt{46}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{35}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{33}}{8}$

1.A 2.D 3.C 4.A 5.E 6.B 7.C 8.A 9.E 10.A

KARIŞIK TEST 2

1.
Çevresinin uzunluğu 27 cm olan bir ABC üçgeninde
$$\sin A + \sin B = 2\sin C$$
olduğuna göre $|AB|$ kaç cm dir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.
Bir ABC üçgeninde $m(A) = 150°$ ve üçgenin kenar uzunlukları a, b, c arasında
$$b^2 + a^2 + 68 - 4b - 16a = 0$$
bağıntısı olduğuna göre bu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı kaç birimdir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

3.
ABC üçgeninin kenarlarının uzunlukları arasında
$$\frac{b+c}{a+c} = \frac{a}{b-c}$$
bağıntısı varsa B açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 30 B) 60 C) 120 D) 150 E) 165

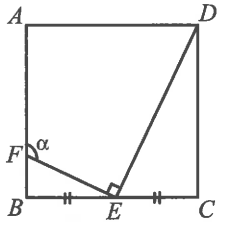
4.
$$x = \cos(2\pi - \theta)$$
$$\frac{y}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$
olduğuna göre x'in y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{2+\sqrt{y}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{y}}{2}$ C) $\sqrt{1+y^2}$ D) $\sqrt{1-y^2}$ E) $\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}$

5.
$$2x + y = 180°$$
$$\cot(x+y) = -\frac{12}{5}$$
olduğuna göre sin x'in değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

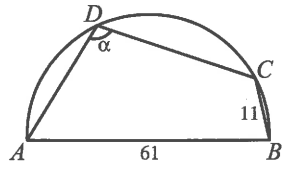
A) $-\frac{12}{13}$ B) $-\frac{12}{25}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{5}{13}$

6.
$ABCD$ bir karedir.
$|BE| = |EC|$
$DE \perp EF$
$m(EFA) = \alpha$
olduğuna göre tan α kaçtır?



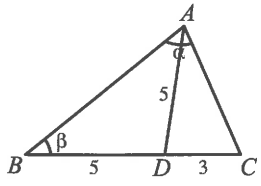
A) –5 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

7.
Yandaki yarım çemberde $[AB]$ çaptır.
$|AB| = 61$ br
$|BC| = 11$ br
$m(CDA) = \alpha$
olduğuna göre tan α kaçtır?



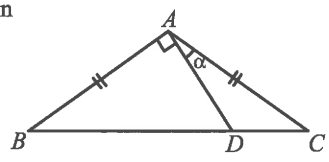
A) $\frac{11}{60}$ B) $\frac{60}{11}$ C) $-\frac{11}{60}$ D) $-\frac{60}{11}$ E) $-\frac{60}{61}$

8.
ABC bir üçgen
$|BD| = |AD| = 5$ br
$|DC| = 3$ br
$m(CAB) = \alpha$
$m(ABC) = \beta$
olduğuna göre
$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ **oranı kaçtır?**



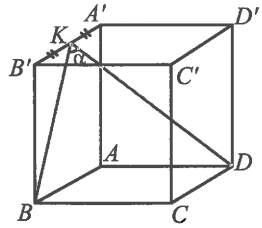
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.
ABC bir ikizkenar üçgen
$m(BAD) = 90°$
$3\cdot|BD| = 5\cdot|AD|$
$m(CAD) = \alpha$
olduğuna göre tan α kaçtır?



A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{5}$

10.
$A'B'C'D'ABCD$ bir küptür.
$|A'K| = |KB'|$
$m(DKB) = \alpha$
olduğuna göre sec α kaçtır?



A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

1.E 2.D 3.C 4.E 5.E 6.D 7.D 8.C 9.A 10.B

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Toplam – Fark Formülleri

Geçen bölümde altı trigonometrik oranı tanımlayarak, bazı özel ölçüler için değerlerini hesaplamayı öğrenmiştik. Daha sonra da bu altı trigonometrik orandan biri verildiğinde diğer beşinin nasıl bulunduğuna dair çalışmalar yapmıştık. Onları bilenler bu notu okusunlar, bilmeyenler derhal kapatsınlar!

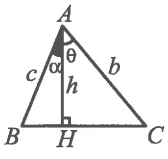
Toplam Fark Formülleri. Şimdi ise trigonometrik değerleri bilinen farklı veya aynı iki açının, toplamlarının veya farklarının trigonometrik değerlerini bulmayı öğreneceğiz. Örneğin α ve θ ölçülerinin her ikisinin de herhangi bir trigonometrik değeri biliniyorsa, $\alpha+\theta$ ve $\alpha-\theta$ ölçülerinin de herhangi bir trigonometrik değerini bulabileceğiz. Bunlara **toplam ve fark formülleri** diyeceğiz.

Sadece toplam formüllerini bilmek bize yetecek, çünkü θ yerine $-\theta$ yazarak toplama yaptığımızda, aslında fark formüllerini de çıkarmış olacağız. Tabi, Trigonometri-I dersini iyi bilmeyenler burada afallayacak. Daha sonra toplam kurallarını bildiğimizden θ yerine α yazarak, $\alpha+\alpha=2\alpha$ açılarının ve benzer şekilde $2\alpha+\alpha=3\alpha$ açılarının trigonometrik değerlerine erişebileceğiz. Bu işlemi dilediğimiz kadar sürdürüp α'nın tüm katlarının trigonometrik değerlerine de ulaşabileceğiz. Bunlara **kat formülleri** diyeceğiz. Diğer yandan $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$ ettiğinden, toplam formüllerini bilmek, adına **yarım açı formülleri** diyeceğimiz, bir ölçünün yarısının trigonometrik değerlerini veren formülleri de bize sunacak. Tüm olay, toplam formülünü bilmekten geçiyor yani. Başlıyoruz:

Teorem. *İki ölçünün toplamının sinüsü, ilkinin sinüsüyle ikincisinin kosinüsü çarpımının, ilkinin kosinüsüyle ikincisinin sinüsünün çarpımının toplamına eşittir.*

$$\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\alpha$$

Kanıt: Yandaki gibi bir ABC üçgeni ve A köşesinden inen AH yüksekliğini çizelim. BAH ve CAH açılarının ölçülerine sırasıyla α ve θ diyelim.



Niye böyle bir şekil çizdiğimizi anlamışsınızdır. Hem α ile θ açıları bir dik üçgenin iç açıları olacak, böylelikle trigonometrik değerlerini bulmak kolay olacak, hem de komşu iki açı seçtik ki, $\alpha+\theta$ açısını elde edebilmek için.

$$\text{Alan}(ABC)=\text{Alan}(AHB)+\text{Alan}(AHC)$$

$$\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\alpha+\theta)=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot h\cdot b\cdot\sin\theta$$

$$b\cdot c\cdot\sin(\alpha+\theta)=c\cdot h\cdot\sin\alpha+h\cdot b\cdot\sin\theta$$

Amacımız $\sin(\alpha+\theta)$'yı bulmak diye eşitliğin her iki yanı $b\cdot c$ çarpımına bölünürse,

$$\sin(\alpha+\theta)=\frac{h}{b}\cdot\sin\alpha+\frac{h}{c}\cdot\sin\theta$$

olur ki, $\frac{h}{b}=\cos\theta$ ve $\frac{h}{c}=\cos\alpha$ olduğundan,

$$\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\alpha$$

İnanmayacaksınız ama bu formülle birlikte tüm toplam-fark formülleri bitti! Çünkü $\alpha+\theta=\beta$ denirse, $\sin\beta$ bilindiğinden $\cos\beta$ yani $\cos(\alpha+\theta)$ bulunabilir. Ayrıca $\sin\beta$ ve $\cos\beta$ bilindiğinden $\tan\beta$ yani $\tan(\alpha+\theta)$, dolayısıyla $\cot\beta$ yani $\cot(\alpha+\theta)$ bulunabilir. Zaten $\sin\beta$ ve $\cos\beta$ bilgileri, $\sec\beta$ ve $\csc\beta$ değerlerini bulmaya da yeteceğinden toplam formülleri için neden ''bitti'' dediğimizi anlamışsınızdır.

Fark formülleri de şundan dolayı ''bitti'': Daha önce dediğimiz gibi toplam formüllerinde θ yerine $-\theta$ yazarsak, elimize $\sin(\alpha-\theta)$, $\cos(\alpha-\theta)$, $\tan(\alpha-\theta)$, $\cot(\alpha-\theta)$, $\sec(\alpha-\theta)$ ve $\csc(\alpha-\theta)$ formülleri gelmiş olur. Haydi yapalım:

Teorem. *İki ölçünün farkının sinüsü, ilkinin sinüsüyle ikincisinin kosinüsü çarpımının, ilkinin kosinüsüyle ikincisinin sinüsünün çarpımının farkına eşittir.*

$$\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot\cos\alpha$$

Kanıt: Toplam formülünde + yerine – yazıldığında fark formülü elde edeceğimizi daha önce anons etmiştik.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\theta)&=\sin(\alpha+(-\theta))\\&=\sin\alpha\cdot\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\cdot\cos\alpha\\&=\sin\alpha\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot\cos\alpha\end{aligned}$$

Sinüsün toplam ve fark formüllerini öğrenmiş olduk, sıra geldi kosinüsünkine. Aslında $\cos(\alpha+\theta)$ veya $\cos(\alpha-\theta)$ sorulduğunda, biz önce $\sin(\alpha+\theta)$ veya $\sin(\alpha-\theta)$'yı bulup, bulduğumuz değerlerden sorulanı bulsak da olur ama zaman kazanmak isteyen mutlaka cos açılımlarını da bilmelidir.

Teorem. *İki ölçünün toplamının/farkının sinüsü, kosinüslerinin çarpımıyla sinüslerinin çarpımının toplamına/farkına eşittir.*

$$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\sin\alpha$$

Kanıt: Sinüs açılımlarını bildiğimiz için işimiz kolay olacak. Hemen kosinüsü sinüse çevirelim.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\theta)&=\sin(90-\alpha-\theta)\\&=\sin[(90-\alpha)-\theta]\\&=\sin(90-\alpha)\cdot\cos\theta-\cos(90-\alpha)\cdot\sin\theta\\&=\cos\alpha\cdot\cos\theta-\sin\alpha\cdot\sin\theta\end{aligned}$$

Bu eşitlikte θ yerine $-\theta$ yazarsak fark formülünü bulmuş oluruz.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\theta)&=\cos\alpha\cdot\cos(-\theta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\theta)\\&=\cos\alpha\cdot\cos\theta+\sin\alpha\cdot\sin\theta\end{aligned}$$

Örnek. $\sin 15^\circ$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2-\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Çözüm: 15°'yi tüm trigonometrik değerlerini bildiğimiz iki açı ölçüsünün toplamı veya farkı şeklinde yazmalıyız. Buna 30° ve 45° de aday olabilir, 45° ve 60° de. Biz ikinciyi seçerek çözdük:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(60^\circ-45^\circ)\\&=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin 75^\circ$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D) $2-\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

Çözüm: 45° ve 30° ölçülerinin tüm trigonometrik değerlerini bildiğimizden $75=45+30$ eşitliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Aşağıdaki tabloyu benzer şekilde doldurunuz.

$\sin 7^\circ\cdot\cos 23^\circ+\cos 7^\circ\cdot\sin 23^\circ$	$\sin(7^\circ+23^\circ)$	1/2
$\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ+\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ$		
$\sin 111^\circ\cdot\cos 9^\circ+\sin 9^\circ\cdot\cos 111^\circ$		
$\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ-\sin 20^\circ\cdot\cos 50^\circ$		
$\sin 159^\circ\cdot\cos 9^\circ-\sin 9^\circ\cdot\cos 159^\circ$		
$\cos 25^\circ\cdot\cos 5^\circ-\sin 25^\circ\cdot\sin 5^\circ$		
$\cos 85^\circ\cdot\cos 5^\circ-\sin 85^\circ\cdot\sin 5^\circ$		
$\cos 62^\circ\cdot\cos 2^\circ+\sin 62^\circ\cdot\sin 2^\circ$		
$\cos 141^\circ\cdot\cos 6^\circ+\sin 141^\circ\cdot\sin 6^\circ$		

Örnek. *x ve y birer dar açı ölçüsü iken* $\sin x=\frac{3}{5}$ *ve* $\sin y=\frac{5}{13}$ *olduğuna göre* $\cos(x+y)$ *değeri kaçtır?*

A) $-\frac{33}{65}$ B) $-\frac{11}{13}$ C) $\frac{11}{13}$ D) $\frac{33}{65}$ E) $\frac{36}{65}$

Çözüm: İki yol göstereceğiz.

Birinci yol. Direkt olarak kosinüs açılımından yapacağız.

$$\begin{aligned}\cos(x+y)&=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}\end{aligned}$$

Burada aklınıza şöyle bir soru gelebilir: ''Tamam, x ve y birer dar açı ölçüsü ama ikisinin toplamı olan $x+y$ değeri belki bir geniş açı ölçüsüdür ve bu yüzden cevap bulduğumuzun ters işaretlisi de olabilir, kontrol etmek gerekmez mi?'' Cevap veriyorum: Gerekmez! Çünkü toplamlar ikinci bölgeye taşacak kadar büyük dar açı ölçüleri olsalardı, kosinüsleri küçülüp, sinüsleri de büyüyeceğinden $\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$ farkı zaten negatif olacaktı.

İkinci yol. İstersek hala sinüs için bildiğimiz toplam formülünü kullanabiliriz. Tavsiye etmeyiz ama yapabileceğinizi bilin.

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{56}{65}\end{aligned}$$

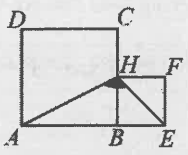
olduğundan, 33-56-65 dik üçgeni çizilirse;

$$\cos(x+y)=\frac{33}{65}$$

elde edilir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1985 ÖYS]. *Yandaki şekilde ABCD ve BEFH birer karedir.* $|AB| = 2\cdot|BE|$ *olduğuna göre* $\sin(AHE)$*'nin değeri kaçtır?*



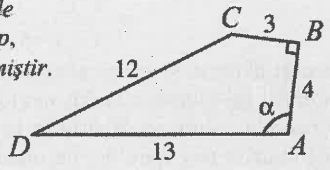
A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Çözüm: $|HB| = |BE| = 1$ br dersek, $|AB| = 2$ br, $|AH| = \sqrt{5}$ br ve $|HE| = \sqrt{2}$ br olur. $m(AHB) = \alpha$ diyelim. Ayrıca karede köşegen açıortay olduğundan $m(EHB) = 45^\circ$ olur.

$$\sin(AHE) = \sin(\alpha + 45^\circ)$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos 45^\circ + \sin 45^\circ\cdot\cos\alpha$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

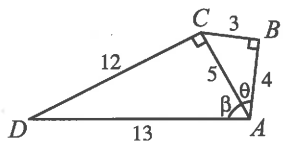
Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki şekilde ABCD bir dörtgen olup,* $AB \perp BC$ *olarak verilmiştir. Uzunluklar şekildeki gibi olduğuna göre* $\sin\alpha$*'nın değeri kaçtır?*



A) $\frac{22}{65}$ B) $\frac{36}{65}$ C) $\frac{48}{65}$ D) $\frac{56}{65}$ E) $\frac{63}{65}$

Çözüm: A ile C köşelerini birleştirelim. ACD üçgeninin kenar uzunlukları 5-12-13 olacağından bir dik üçgendir. BAC ve CAD açılarının ölçülerine sırasıyla θ ve β dersek, $\alpha = \theta + \beta$ olur. Öyleyse,



$$\sin\alpha = \sin(\theta+\beta) = \sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{63}{65}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\cot x + \cot y = 1$$
$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre $x + y$ *toplamı pozitif olarak en az kaç derecedir?*

A) 225° B) 150° C) 120° D) 60° E) 30°

Çözüm:

$$1 = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y}$$
$$= \frac{\cos x\cdot\sin y + \cos y\cdot\sin x}{\sin x\cdot\sin y}$$
$$= \frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}}$$

olduğundan $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$ olur ki burdan da $x + y = 30^\circ$ olur. Eğer en az şartı konulmasaydı, 150° ve daha birçok açı ölçüsü de doğru cevap olabilirdi.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir ABC üçgeninde* $\sin A = 2\cdot\sin B\cdot\cos C$ *ve* $c = 10$ *olduğuna göre b kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 5 D) 10 E) $5\sqrt{3}$

Çözüm: $A + B + C = 180^\circ$ olduğundan $\sin A = \sin(B + C)$ olur.

$$\sin(B + C) = 2\cdot\sin B\cdot\cos C$$
$$\sin B\cdot\cos C + \sin C\cdot\cos B = 2\cdot\sin B\cdot\cos C$$
$$\sin C\cdot\cos B - \sin B\cdot\cos C = 0$$
$$\sin(B - C) = 0$$
$$B = C$$

Demek ki üçgen ikizkenarmış. O halde $b = c$ olmalıdır, bundan dolayı $b = 10$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\cos(x+y) = m$ *ve* $\cos(x-y) = n$ *olduğuna göre* $\sin^2 x + \sin^2 y$ *toplamının m ve n türünden değeri nedir?*

A) mn B) m^2n^2 C) $1 - mn$ D) $1 + mn$ E) m^n

Çözüm:

$$m = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$n = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

değerlerini çarparsak

$$mn = \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y$$
$$= (1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y) - \sin^2 x\sin^2 y$$
$$= (1-\sin^2 x - \sin^2 y + \sin^2 x\sin^2 y) - \sin^2 x\sin^2 y$$
$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 y$$

olduğundan $\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - mn$.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin a+\cos b=\frac{1}{2}$ *ve* $\cos a+\sin b=-\frac{1}{3}$ *olduğuna göre* $\sin(a+b)$ *aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?*

A) $-\frac{55}{72}$ B) $-\frac{57}{72}$ C) $-\frac{59}{72}$ D) $\frac{57}{72}$ E) $\frac{59}{72}$

Çözüm: Her iki eşitliğin de karesini alıp, taraf tarafa toplayalım.

$$\sin^2 a+2\sin a\cos b+\cos^2 b=\frac{1}{4}$$

$$\cos^2 a+2\cos a\sin b+\sin^2 b=\frac{1}{9}$$

$$2+2(\sin a\cos b+\sin b\cos a)=\frac{13}{36}$$

elde edilir. Parantez içinin sorulan $\sin(a+b)$ değeri olduğunu fark edin.

$$2\sin(a+b)=-\frac{59}{36} \text{ diye } \sin(a+b)=-\frac{59}{72}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\sin x+\sin y=2a$$
$$\cos x+\cos y=2b$$

olduğuna göre $\cos(x-y)$ *ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) a^2+b^2 B) a^2+b^2-1 C) a^2+b^2+1
D) $2a^2+2b^2-1$ E) $2a^2+2b^2+1$

Çözüm: Bunun için verilen eşitliklerin karelerini alıp, taraf tarafa toplayacağız.

$$4a^2=\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y$$
$$4b^2=\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y$$
$$4a^2+4b^2=1+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+1$$
$$4a^2+4b^2=2+2\cdot\cos(x-y)$$
$$2\cdot\cos(x-y)=4a^2+4b^2-2$$
$$\cos(x-y)=2a^2+2b^2-1$$

Doğru cevap: D.

Teorem. *$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $-\sqrt{a^2+b^2}$, en büyük değer ise $\sqrt{a^2+b^2}$ 'dir.*

Birinci kanıt: $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ ifadesine T diyelim.

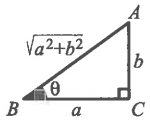
$$T=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$$
$$\frac{T}{a}=\sin x+\frac{b}{a}\cdot\cos x$$

$$\frac{b}{a}=\tan\theta$$

diyelim.

$$\frac{T}{a}=\sin x+\frac{b}{a}\cdot\cos x$$
$$=\sin x+\tan\theta\cdot\cos x=\sin x+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos x$$
$$=\frac{\sin x\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos x}{\cos\theta}=\frac{\sin(x+\theta)}{\cos\theta}$$

olur. $\tan\theta$ belli olduğundan $\cos\theta$'yı da bulabiliriz. Tabii ki uygun dik üçgeni çizerek. Yanda görüldüğü üzere



$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

olur. Şimdi bunu bulduğumuz eşitlikte yerine yazalım:

$$\frac{T}{a}=\frac{\sin(x+\theta)}{\cos\theta}$$
$$\frac{T}{a}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\sin(x+\theta)}{a}$$
$$T=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ değeri sabit olduğundan $\sin(x+\theta)$ değeri ne kadar büyük olursa T, o kadar büyük olur, ne kadar küçük olursa da T, o kadar küçük olur.

$\sin(x+\theta)$ sayısı sadece $[-1, 1]$ aralığından değerler alabileceğinden

T'nin en küçük değeri $-\sqrt{a^2+b^2}$,

T'nin en büyük değeri de $\sqrt{a^2+b^2}$ 'dir

Örnek. $\sin x+\cos x=\frac{3}{2}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Daha trigonometrik denklemleri çözmeyi öğretmedin ki demeyin, siz cevaba bakın. $\sin x+\cos x$ ifadesi en çok $\sqrt{2}$ değerini alabilir. $3/2>\sqrt{2}$ olduğundan çözüm kümesi boşküme olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Tanjant ve Kotanjant İçin Toplam-Fark Formülleri. Sinüs ve kosinüs için toplam ve fark açılımları bilindiğinden tanjant açılımı da bulunabilir ama test sorusu çözerken her soruda formülleri çıkarmak zaman açısından ekonomik olmayacağından aşağıdaki eşitlikleri de bir zahmet hafızanıza alınız.

Teorem. $\tan(A \mp B) = \dfrac{\tan A \mp \tan B}{1 \pm \tan A \cdot \tan B}$.

Kanıt: Herhangi bir β ölçüsü için $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ olduğundan,

$$\tan(A \mp B) = \frac{\sin(A \mp B)}{\cos(A \mp B)}$$

yazabiliriz. $\sin(A \mp B)$ ve $\cos(A \mp B)$ değerlerini artık ezbere biliyoruz. Yerlerine yazalım.

$$\tan(A \mp B) = \frac{\sin A \cdot \cos B \mp \sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B \pm \sin A \cdot \sin B}$$

Aslında şu an tanjant için toplam fark formüllerini bulmuş olduk ama akılda tutması hiç de kolay olmadığından eşitlik üzerinde birkaç oynama yapacağız. Eşitliğin sağ yanının hem payını hem de paydasını $\cos A \cdot \cos B$ ile çarpıp bölelim.

$$\tan(A \mp B) = \frac{\dfrac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} \mp \dfrac{\sin B \cdot \cos A}{\cos A \cdot \cos B}}{\dfrac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} \pm \dfrac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}} = \frac{\tan A \mp \tan B}{1 \pm \tan A \cdot \tan B}$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur. Toplam formülünde pay "+" payda "–", fark formülünde de pay "–" payda "+" olduğuna dikkat ediniz.

Örnek. $\tan 75^\circ$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1-\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

Çözüm: $75 = 45+30$ diye düşüneceğiz.

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\tan 15^\circ$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1-\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2+\sqrt{3}$

Çözüm: $15 = 60 - 45$ düşünülebileceği gibi $15 = 45 - 30$ diye de düşünülebilir. Biz ikincisine göre açılım yapalım.

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\tan 105^\circ$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-2-\sqrt{3}$ B) $-1-\sqrt{3}$ C) $-2+\sqrt{3}$ D) $2-\sqrt{3}$ E) $1+\sqrt{3}$

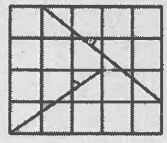
Çözüm: Burada $105 = 60 + 45$'den daha kolay olan bir yol yok gibi. Tabi isteyen $105 = 135 - 30$ diye de düşünebilir. Ama 75°'nin tanjantını ezbere biliyorsanız $105 = 75 + 30$ diye düşünmenin de bir sakıncası yoktur diyecektim ki söylediğimin çok saçma olduğunu farkettim. $\tan 75^\circ$'yi ezbere biliyorsanız, $\tan 105^\circ = -\tan 75^\circ$ eşitliğini kullanırsınız. ☺

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = -2-\sqrt{3}.$$

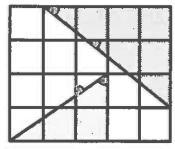
Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda 20 tane birimkareden oluşturulmuş dikdörtgen içinde belirtilmiş açı ölçülerinin toplamının tanjantı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) -20 B) -18 C) -16 D) -12 E) -8

Çözüm: Açılardan birinin tanjantının $\dfrac{3}{4}$, diğerinin tanjantınınsa $\dfrac{3}{2}$ olduğunu daha önce anlattığımız tekniklerle hemencecik bulabilirsiniz.



$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\theta} = \frac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{4}} = -18.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *x ve y birer dar açı ölçüsü olmak üzere*

$$\tan x = 2 \text{ ve } \cot y = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre x + y toplamı kaç derecedir?

A) 120° B) 135° C) 150° D) 165° E) 167,5°

Çözüm: $\cot y = \frac{1}{3}$ ise $\tan y = 3$'tür. Bu durumda

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

olur. O halde $x + y = 135°$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x^2 - mx + n = 0$ *denkleminin çözüm kümesi*

$\{\tan 65°, \tan 70°\}$

olduğuna göre n'nin m cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m - 1$ B) $m + 1$ C) $1 - m$ D) $2 + m$ E) $2m + 1$

Çözüm: Kökler toplamı formülünden $\tan 65° + \tan 70° = m$, kökler çarpımı formülünden de $\tan 65° \cdot \tan 70° = n$ olduğunu not edelim. Diğer yandan 70 + 65 = 135 olduğundan aklımıza tanjant toplam formülünü yazmak geliyor.

$$-1 = \tan 135° = \frac{\tan 70° + \tan 65°}{1 - \tan 70° \cdot \tan 65°} = \frac{m}{1-n}$$

eşitliğinden $m = -1\cdot(1 - n) = n - 1$ yani $n = m + 1$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $x \in (0°, 90°)$ *olmak üzere*

$$(1+\tan x)(1+\tan 18°) = 2$$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9° B) 18° C) 27° D) 36° E) 54°

Çözüm:

$$(1+\tan x)(1+\tan 18°) = 2$$

$$1+\tan x = \frac{2}{1+\tan 18°}$$

$$\tan x = \frac{2}{1+\tan 18°} - 1$$

$$\tan x = \frac{1-\tan 18°}{1+\tan 18°}$$

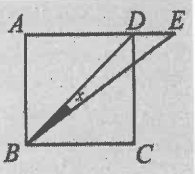
$$\tan x = \frac{\tan 45° - \tan 18°}{1+\tan 45°\cdot\tan 18°}$$

$$\tan x = \tan(45° - 18°)$$

olduğundan $x = 27°$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1978 ÜSS]. *Şekilde verilen ABCD karesinde* $|AD| = 3\cdot|DE|$ *ve* $m(EBD) = x°$ *olduğuna göre* $\tan x$*'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: $|BA| = |AD| = 3$ br dersek, $|DE| = 1$ br olur. Diğer yandan karede köşegen açıortay olduğundan $m(ABD) = 45°$'dir. Bu durumda

$$\tan(ABE) = \frac{|AE|}{|AB|}$$

$$\tan(45° + x) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan 45° + \tan x}{1 - \tan 45°\cdot\tan x} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1+\tan x}{1-1\cdot\tan x} = \frac{4}{3}$$

$$4 - 4\cdot\tan x = 3 + 3\cdot\tan x$$

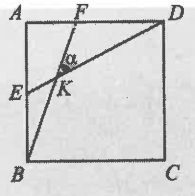
$$7\cdot\tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{7}$$

olarak bulunur.

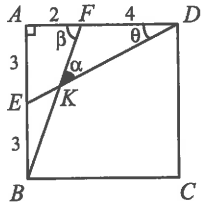
Doğru cevap: B.

Örnek. *ABCD bir kare*
$|AE| = |EB|$
$|FD| = 2\cdot|AF|$
$BF \cap DE = \{K\}$
$m(FKD) = \alpha$ *olduğuna göre*
α *kaç derecedir?*



A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Çözüm: Karenin bir kenarı iki eşit parçaya, diğer kenarı üç eşit parçaya bölündüğünden karenin bir kenar uzunluğuna 6 br demek kolaylık sağlar. Bu durumda $|AE| = |EB| = 3$ br, $|AF| = 2$ br ve $|FD| = 4$ br olur. $m(EDA) = \theta$ ve $m(BFA) = \beta$ olsun. $\alpha + \theta = \beta$ olduğundan $\alpha = \beta - \theta$ olur. O halde $\tan\alpha = \tan(\beta - \theta)$ demektir.

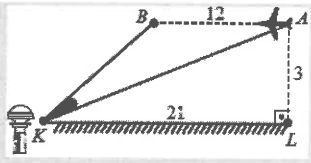


$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta - \tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

olduğundan $\alpha = 45°$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

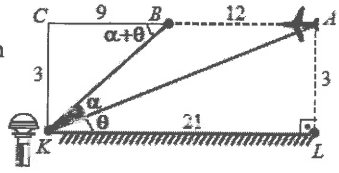
Örnek [2006 ÖSS].
AL ⊥ KL
BA // KL
$|AL| = 3$ km
$|BA| = 12$ km
$|KL| = 21$ km



K noktasındaki kontrol kulesinde bulunan bir görevli, yerden 3 km yükseklikte yere paralel uçan bir uçağın, A noktasından B noktasına kadar 12 km.lik hareketini radarla izliyor. A noktasının yerdeki dik izdüşümü L noktası ve $|KL| = 21$ km olduğuna göre, radarın taradığı AKB açısının tanjantı kaçtır?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{11}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{7}{17}$

Çözüm: *AKB* açısının ölçüsüne α, *LKA* açısının ölçüsüne de θ diyelim. θ ve α + θ ölçülerinin tanjantlarının bilindiğine dikkat ediniz.

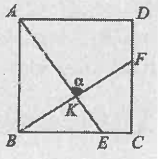


$$\frac{1}{3} = \tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta} = \frac{\tan\alpha+\frac{1}{7}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{1}{7}}$$

eşitliği çözülürse $\tan\alpha = \frac{2}{11}$ olarak bulunur.

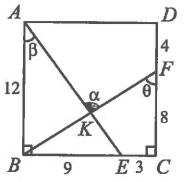
Doğru cevap: C.

Örnek. *ABCD bir kare*
$|BE| = 3\cdot|EC|$
$|FC| = 2\cdot|DF|$
$BF \cap AE = \{K\}$
$m(AKF) = \alpha$
olduğuna göre tan α *kaçtır?*



A) −18 B) −16 C) −14 D) −12 E) −10

Çözüm: $m(BAE) = \beta$ ve $m(BFC) = \theta$ olsun. $\beta + \theta = \alpha$ olduğuna dikkat ediniz. O halde α yerine β + θ yazabiliriz.



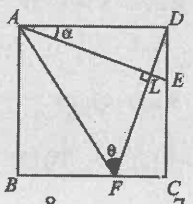
$$\tan\alpha = \tan(\beta+\theta) = \frac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\cdot\tan\theta}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{8}} = -18$$

Demek ki tan α = −18'miş.

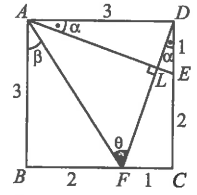
Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki ABCD karesinde*
AE ⊥ DF olup,
$m(DAE) = \alpha$ *ve*
$m(AFD) = \theta$
olarak verilmiştir.
cot α = 3 *ise* tan θ *değeri kaçtır?*



A) $\frac{9}{7}$ B) $\frac{9}{8}$ C) 1 D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

Çözüm: cot α = 3 verildiğinden $|AD| = 3$ ise $|DE| = 1$'dir. $m(CDF) = \alpha$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca $m(FAB)$ değerine de β diyelim. θ = α + β olduğundan tan θ = tan(α + β) olur.

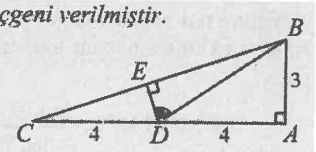


$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7}.$$

Doğru cevap: A.

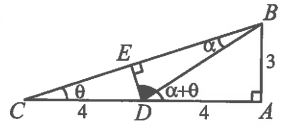
Örnek. *Yanda ABC dik üçgeni verilmiştir.*
BA ⊥ AC, DE ⊥ CB,
$|BA| = 3$ br
$|CD| = |DA| = 4$ br
olduğuna göre
tan(*EDB*) *kaçtır?*



A) $\frac{12}{41}$ B) $\frac{13}{41}$ C) $\frac{41}{10}$ D) $\frac{41}{11}$ E) $\frac{41}{12}$

Çözüm: $m(DBE) = \alpha$ ve $m(BCA) = \theta$ olsun. $m(BDA) = \alpha + \theta$ olur.

$\tan(\alpha+\theta) = \frac{3}{4}$ ve



$\tan\theta = \frac{3}{8}$ olduğunu görelim.

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\theta} = \frac{\tan\alpha+\frac{3}{8}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{3}{8}} = \frac{3}{4}$$

eşitliğinden

$$4\cdot\tan\alpha+\frac{3}{2} = 3-\frac{9}{8}\cdot\tan\alpha$$

yani $\frac{41}{8}\cdot\tan\alpha = \frac{3}{2}$ bulunur. Buradan da $\tan\alpha = \frac{12}{41}$ çıkar. *EDB* ile α açıları tümler olduklarından

$$\tan EDB = \frac{41}{12}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Teorem. *Dik olmayan bir üçgenin iç açılarının tanjantlarının toplamlarıyla çarpımları birbirlerine eşittir. Yani, üçgenimiz ABC ise*

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

Kanıt: $A + B + C = 180^\circ$ olduğundan

$$A + B = 180^\circ - C$$

olur. O halde

$$\tan(A+B) = \tan(180^\circ - C)$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$

$$\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Örnek. *Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$'dir. $\tan C = 3$ olduğuna göre $\tan A$ kaçtır?*

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: $|AB| = |AC|$ ise $m(B) = m(C)$ dolayısıyla

$$\tan B = \tan C = 3$$

olur. Bir üçgende üç açı ölçüsünün tanjantının toplamıyla çarpımı eşit olduğundan

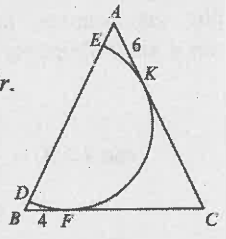
$$3 \cdot 3 \cdot \tan A = 3 + 3 + \tan A$$

$$8 \cdot \tan A = 6$$

eşitliğinden $\tan A = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.

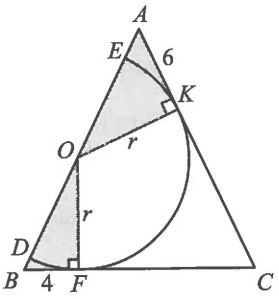
Doğru cevap: B.

Örnek [Betül TAŞÇI]. *Merkezi AB üzerinde olan [DE] çaplı yarım çember BAC ikizkenar üçgenine F ve K noktasında teğettir.*
$|BA| = |CA|$,
$|AK| = 6$ br
$|BF| = 4$ br
olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç birimdir?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 D) 10

Çözüm: Yarım çemberin merkezine O ve yarıçap uzunluğuna r diyelim.



$$\tan C = \tan B = \frac{r}{4}$$

ve $\tan A = \frac{r}{6}$

olduğu ortada olduğundan eşitliğimizi yazalım.

$$\frac{r}{6} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{6} \cdot \frac{r}{4} \cdot \frac{r}{4}$$

eşitliğinden $r^2 = 64$ yani $r = 8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$ *iken*

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta + \tan\alpha \cdot \tan\theta + \tan\theta \cdot \tan\beta$$

toplamı kaça eşittir?

A) $-\frac{4}{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ olduğundan

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \cot\theta$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\alpha \cdot \tan\theta + \tan\theta \cdot \tan\beta = 1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta$$

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta + \tan\alpha \cdot \tan\theta + \tan\theta \cdot \tan\beta = 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\cot A = 3,\ \cot B = 5,\ \cot C = 7,\ \cot D = 8$$

olduğuna göre $A + B + C + D$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

Çözüm:

$$\tan A = \frac{1}{3},\ \tan B = \frac{1}{5},\ \tan C = \frac{1}{7} \text{ ve } \tan D = \frac{1}{8}$$

olduğundan

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{4}{7}$$

$$\tan(C+D) = \frac{\tan C + \tan D}{1 - \tan C \cdot \tan D} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{11}$$

olduğunu not edelim.

$$\tan(A+B+C+D) = \frac{\tan(A+B) + \tan(C+D)}{1 - \tan(A+B) \cdot \tan(C+D)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11}} = \frac{\frac{44+21}{77}}{\frac{77-12}{77}} = 1$$

olduğundan $A + B + C + D = \frac{\pi}{4}$ olabilir.

Doğru cevap: C.

Benzer üç eşitlik daha vereyim. Bunları kanıtlamak da size kalsın:

Bir ABC üçgeninde,

$$\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A+\cot A\cdot\cot B=1$$

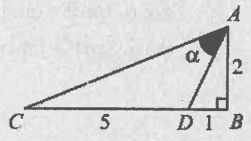
ve

$$\tan A\cdot\cot B\cdot\cot C+\tan B\cdot\cot C\cdot\cot A+\tan C\cdot\cot A\cdot\cot B=\tan A+\tan B+\tan C+2\cdot(\cot A+\cot B+\cot C)$$

ve

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}.$$

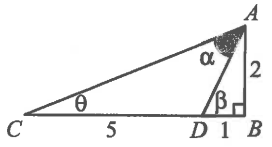
Örnek. *ABC dik üçgen,*
$|AB| = 2$ br,
$|DB| = 1$ br,
$|CD| = 5$ br,
$m(CAD) = \alpha$ *olduğuna göre* α *kaçtır?*



A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 45° E) 60°

Çözüm: Çok önemli bir soru tipidir. Sıkılana kadar değişik çözüm arayın derim..

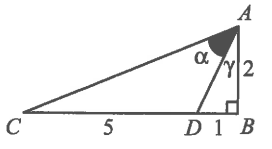
Birinci yol. $m(BCA)=\theta$ olsun. $\alpha=\beta-\theta$ olduğundan



$$\tan\alpha=\tan(\beta-\theta)=\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$$

olur. Bu da $\alpha=45°$ olduğu anlamına gelir.

İkinci yol. $m(BAD)=\gamma$ olsun. Hem α ölçüsünün hem de $\alpha+\gamma$ ölçüsünün tanjantı belli olduğundan,



$$\tan\alpha=\tan(\alpha+\gamma-\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\alpha+\gamma)\cdot\tan\gamma}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

diye $\alpha=45°$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Şimdi geldik kotanjant için toplam-fark formüllerine.

Daha önce de $\sin(x\pm y)$ biliniyorken $\cos(x\pm y)$'yi filan bilmeye gerek yok çünkü cos'lu bir ifade her zaman sin'li hale dönüştürülebilir demiştik ama yine de $\cos(x\pm y)$ açılımını da hızlı olmak adına öğrenmiştik. Şimdi hızlı olmak adına da olsa kotanjant açılımlarını bilmeye gerek yok diyoruz. Çünkü sadece tanjant açılımının çarpmaya göre tersi cevap oluyor. Biz yine de formülün ne olduğunu ve kanıtını verelim ama buna ait örneklerden kaçınalım.

Teorem. $\cot(A\mp B)=\dfrac{1\mp\cot A\cdot\cot B}{\cot A\pm\cot B}$.

Kanıt: İki farklı kanıt göstereceğiz.

Birinci yol. Herhangi bir β ölçüsü için $\cot\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$ olduğundan,

$$\cot(A\mp B)=\frac{\cos(A\mp B)}{\sin(A\mp B)}$$

yazabiliriz. $\sin(A\mp B)$ ve $\cos(A\mp B)$ değerlerini artık ezbere biliyoruz. Yerlerine yazalım.

$$\cot(A\mp B)=\frac{\cos A\cdot\cos B\pm\sin A\cdot\sin B}{\sin A\cdot\cos B\mp\sin B\cdot\cos A}$$

Aslında şu an kotanjant için toplam fark formüllerini bulmuş olduk ama akılda tutması hiç de kolay olmadığından eşitlik üzerinde birkaç oynama yapacağız. Eşitliğin sağ yanının hem payını hem de paydasını $\sin A\cdot\sin B$ ile çarpıp bölelim.

$$\cot(A\mp B)=\frac{\frac{\cos A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}\pm\frac{\sin A\cdot\sin B}{\sin A\cdot\sin B}}{\frac{\sin A\cdot\cos B}{\sin A\cdot\sin B}\mp\frac{\sin B\cdot\cos A}{\sin A\cdot\sin B}}=\frac{\cot A\cdot\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A}=\frac{1\mp\cot A\cdot\cot B}{\cot A\pm\cot B}$$

olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

İkinci yol. Daha önce kanıtladığımız tanjant toplam-fark formüllerini de kullanarak kanıtlayabiliriz.

$$\cot(A\mp B)=\frac{1}{\tan(A\mp B)}=\frac{1\pm\tan A\cdot\tan B}{\tan A\mp\tan B}$$

$$=\frac{1\pm\frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A}\mp\frac{1}{\cot B}}=\frac{\cot A\cdot\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A}=\frac{1\mp\cot A\cdot\cot B}{\cot A\pm\cot B}$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sin 75^\circ$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

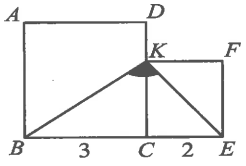
2.

Yanda $ABCD$ ve $KCEF$ kareleri verilmiştir.

$|BC| = 3$ br,

$|CE| = 2$ br

olduğuna göre $\sin(BKE)$ değeri kaça eşittir?



A) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{13}}$ D) $\frac{5}{\sqrt{26}}$ E) $\frac{8}{\sqrt{26}}$

3.

Yanda verilen $ABCD$ dörtgeninde $AB \perp BC$ olup,

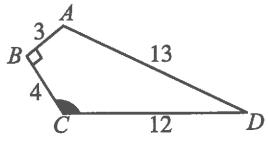
$|AD| = 13$ br,

$|AB| = 3$ br,

$|BC| = 4$ br,

$|DC| = 12$ br

olduğuna göre $\cos(BCD)$ değeri kaça eşittir?



A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $-\frac{56}{65}$

4.

x ve y birer dar açı ölçüsü olmak üzere,

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ ve } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olarak veriliyor. **Buna göre $\cos(x+y)$ kaça eşittir?**

A) -1 B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

5.

$$6\cdot\sin x - 8\cdot\cos x$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

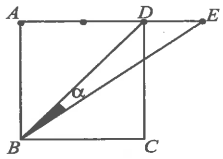
A) -2 B) 2 C) 6 D) 10 E) 14

6.

Yandaki şekilde $ABCD$ kare olup A, D, E noktaları doğrusaldır.

$|AD| = 2\cdot|DE|$ ve

$m(DBE) = \alpha$ olmak üzere $\tan\alpha$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

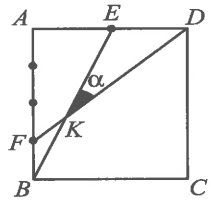


A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

7.

Yandaki $ABCD$ karesinin AB kenarı 4 eşit parçaya, AD kenarı ise 2 eşit parçaya bölünmüştür.

$BE \cap DF = \{K\}$ olup, $m(EKD) = \alpha$ olduğuna göre $\cot\alpha$ değeri kaça eşittir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

Bir ABC üçgeninde

$$\tan A = 2$$
$$\tan B = 3$$

olduğuna göre C açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 15° B) $22{,}5^\circ$ C) 30° D) 45° E) 60°

9.

$$6\cdot\sin x + 7\cdot\cos x$$

toplamının alabileceği en büyük tam sayı değeri kaç olabilir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 13

10.

$$\frac{1+\tan 20^\circ}{1-\tan 20^\circ}$$

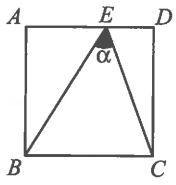
sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan 20^\circ$ B) $\tan 25^\circ$ C) $\tan 50^\circ$ D) $\tan 65^\circ$ E) $\tan 70^\circ$

1. D 2. D 3. B 4. C 5. D 6. C 7. A 8. D 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.
Yandaki $ABCD$ karesinde
$|AE| = 2\cdot|ED|$
$m(BEC) = \alpha$
olduğuna göre tan α'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{11}{9}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 3

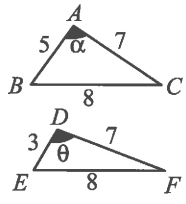
2.
Bir ABC üçgeninde
$\tan A = 2$
$\tan B = 5$
olduğuna göre tan C'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{9}$

3.
Bir ABC üçgeninde $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=6$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi
$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$
değerine eşittir?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{6}$ C) 1 D) 6 E) 36

4.
Yandaki ABC ve DEF üçgenlerinde
$|AB| = 5$ br, $|AC| = 7$ br, $|BC| = 8$ br,
$m(BAC) = \alpha$,
$|DE| = 3$ br, $|DF| = 7$ br, $|EF| = 8$ br,
$m(EDF) = \theta$
olduğuna göre cos(α + θ) değeri kaça eşittir?



A) −1 B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5.
$\sin A = 2\cdot\sin B\cdot\cos C$
eşitliği sağlanan bir ABC üçgeninde $m(B) = \alpha$ ise $m(A)$ değeri kaçtır?

A) $180^\circ - \alpha$ B) $180^\circ - 2\alpha$ C) $90^\circ - 2\alpha$ D) $90^\circ - \alpha$ E) 2α

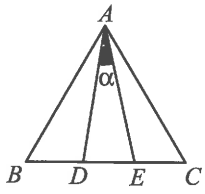
6.
Aşağıdakilerden hangisi
$\sin 3x\cdot\sin(90^\circ - x) - \sin x\cdot\sin(90^\circ - 3x)$
farkıyla özdeştir?

A) $\sin 4x$ B) $\cos 4x$ C) $\sin 2x$ D) $\cos 2x$ E) $-\sin 2x$

7.
$\sqrt{3}\cdot\sin x + a\cdot\cos x$
ifadesinin alabileceği en büyük değer 3 ise a'nın alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

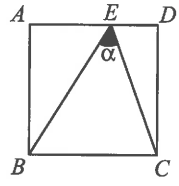
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) 6 E) 9

8.
Yandaki ABC eşkenar üçgeninde B, D, E ve C noktaları doğrusaldır.
$|BD| = |DE| = |EC|$
$m(DAE) = \alpha$
olduğuna göre cos α kaça eşittir?



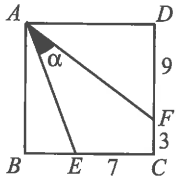
A) $\frac{11}{12}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{13}{14}$ D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{15}{16}$

9.
Yandaki şekilde $ABCD$ karesinde, E noktası $[AD]$ üzerinde hareketli bir nokta olsun.
$m(BEC) = \alpha$ olmak üzere 12·tan α ifadesi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
Yandaki $ABCD$ karesinde
$|EC| = 7$ br,
$|CF| = 3$ br,
$|FD| = 9$ br,
$m(EAF) = \alpha$
olduğuna göre cos α kaça eşittir?



A) $\frac{13}{15}$ B) $\frac{15}{56}$ C) $\frac{56}{65}$ D) $\frac{13}{56}$ E) $\frac{27}{65}$

1. B 2. E 3. B 4. A 5. B 6. C 7. A 8. C 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Yarım Açı ve Kat Formülleri

Bu formüller, daha önce de söylediğimiz gibi trigonometrik değerleri bilinen bir açının yarısının veya iki katının trigonometrik değerlerini verecek bize. Yarısının değerlerini bulabiliyorsak, onun da yarısının bulabiliriz manasına gelir ki bu böyle devam edebilir. Benzer şekilde iki katının değerlerini bulabiliyorsak, onun da iki katını bulabileceğimiz manasına gelir ki, kat almayı da canımızın istediği kadar sürdürebiliriz. Bu formüllerin hepsinin arkasında tahmin ettiğiniz gibi toplam-fark formülleri yatmaktadır.

Teorem. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Kanıt:

$$\sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha$$

eşitliğini adımız gibi biliyoruz. θ yerine α yazalım.

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Örnek. $\sin 10^\circ = m$ *olduğuna göre* $\sin 20^\circ$*'nin* m *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2m$ B) m^2 C) $2m^2-1$ D) $2m\sqrt{1-m^2}$ E) $\sqrt{m^2-1}$

Çözüm:

$$\sin 20^\circ = 2\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ$$

olduğundan $\sin 10^\circ$ ile birlikte $\cos 10^\circ$ değerine de ihtiyacımız var. Bu iki değerin kareleri toplamı 1 olduğundan

$$\cos 10^\circ = \sqrt{1-m^2}$$

bulunur. Öyleyse

$$\sin 20^\circ = 2\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ = 2\cdot m\cdot\sqrt{1-m^2}\ .$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\cos 78^\circ = n$ *olduğuna göre* $\cos 66^\circ$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\sqrt{1-n^2}$ B) $\sqrt{2n^2-1}$ C) $2n\sqrt{1-n^2}$ D) $\frac{11}{13}n$ E) $\frac{2}{13}\sqrt{n}$

Çözüm: 66° ile 78° arasında ne gibi bir alaka var demeyin. Adamın istediği de zaten sizi bu ikileme düşürmek.

$$\cos 78^\circ = \sin 12^\circ \text{ ve } \cos 66^\circ = \sin 24^\circ$$

olduğunu hatırlarsak, sorunun aslında yarım açı formülleriyle ne kadar alakalı olduğunu görürüz. Birbirinin yarısı ya da iki katı gibi görünmeyen açılarda bu değişimi mutlaka yapıp, bir de öyle bakmanız şiddetle tavsiye edilir.

$\cos 78^\circ = \sin 12^\circ = n$ olacak şekilde üçgen çizilirse

$$\cos 12^\circ = \sqrt{1-n^2}$$

bulunur. O halde

$$\cos 66^\circ = \sin 24^\circ = 2\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 12^\circ = 2\cdot n\cdot\sqrt{1-n^2}\ .$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *olmak üzere,* $\frac{\sin 2x}{2\cdot\cos x} = \frac{3}{5}$ *olduğuna göre* $\tan x$ *kaçtır?*

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

verilen ifadede yerine yazılırsa,

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos x} = \sin x = \frac{3}{5}$$

bulunur. O halde uygun dik üçgen çizilerek $\tan x = \frac{3}{4}$ bulunur. Zaten bu bölgede tanjant pozitif olduğundan işaretinde bir değişiklik yapmıyoruz.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$a = \sin 10° + \sin 80°$
$b = \sin 11° + \sin 79°$
$c = \sin 12° + \sin 78°$

olduğuna göre a, b, c sayılarının büyükten küçüğe doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $c > b > a$ B) $c > a > b$ C) $a > b > c$
D) $a > c > b$ E) $c = b = a$

Çözüm: Verilen sayıları

$a = \sin 10° + \cos 10°$
$b = \sin 11° + \cos 11°$
$c = \sin 12° + \cos 12°$

şeklinde düzenleyelim. Sonra da her eşitliğin karesini alalım:

$a^2 = \sin^2 10° + \cos^2 10° + 2\cdot\sin 10°\cdot\cos 10° = 1 + \sin 20°$
$b^2 = \sin^2 11° + \cos^2 11° + 2\cdot\sin 11°\cdot\cos 11° = 1 + \sin 22°$
$c^2 = \sin^2 12° + \cos^2 12° + 2\cdot\sin 12°\cdot\cos 12° = 1 + \sin 24°$

Bu durumda

$\sin 24° > \sin 22° > \sin 20°$

olduğundan $c > b > a$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

$\sin x + \cos x = a$
$\sin x - \cos x = a$

gibi denklemlerle karşılaştığınızda 1 saniye bile beklemeden eşitliğin her iki yanının karesini alın. Nur topu gibi bir sin 2x ifadesi doğacaktır. Gerisini çözmek çocuk oyuncağı!

Örnek [1967 ÜSS]. $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ *olduğuna göre* $\sin 2x$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{4}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ve $2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$ eşitliklerini kullanırsak,

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$$

olur. Buradan da

$$\sin 2x = \frac{3}{4}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$ *olmak üzere* $\sin x - \cos x = a$ *olduğuna göre* $\sin 2x$ *kaçtır?*

A) $1-a^2$ B) $1+a^2$ C) $1-a$ D) $1+a$ E) a^2-1

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = a^2$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ve $2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$ eşitliklerini kullanırsak, $1 - \sin 2x = a^2$ olur. Buradan da

$$\sin 2x = 1 - a^2$$

olarak bulunur. a için verilen aralığın neden verildiğini anlamış olmalısınız. Bu eşitlik her a değeri için geçerli değildir de ondan, bir önceki başlıkta anlatmıştık

Doğru cevap: A.

Örnek [1994 ÖYS]. $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ *olduğuna göre* $\cos 2x$*'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) -1

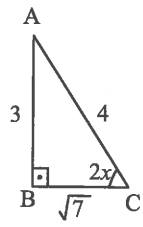
Çözüm: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{3}{4}$$

sin 2x'i bulduk ama cos 2x'i soruyor.



Üçgende görüldüğü gibi $\cos 2x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin 15° - \cos 15°$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) -1 D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Çözüm: İsteyen daha önceden bulduğumuz değerlerini yerlerine yazar, isteyen ifadenin karesini alır. Biz kare alarak çözeceğiz.

$A = \sin 15° - \cos 15°$
$A^2 = \sin^2 15° - 2\cdot\sin 15°\cdot\cos 15° + \cos^2 15°$
$A^2 = 1 - \sin 30° = 1/2$

olduğundan $A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Fakat $\sin 15° < \cos 15°$ olduğundan $A < 0$ olmalıdır, bundan dolayı $A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek[1985 ÖYS]. $\frac{1}{\cos 15^\circ}+\frac{1}{\sin 15^\circ}$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $1+\sqrt{3}$

Çözüm: Payda eşitleyerek işlemlere başlıyoruz.

$$T=\frac{1}{\cos 15^\circ}+\frac{1}{\sin 15^\circ}=\frac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{2\cdot(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)}{\sin 30^\circ}=4\cdot(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)$$

$$T^2=16\cdot(1+\sin 30^\circ)=24$$

ve $T>0$ olduğundan $T=2\sqrt{6}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin x+\sin y=a$ ve $\cos x+\cos y=b$ *olduğuna göre* $\sin 2x+\sin 2y+2\cdot\sin(x+y)$ *ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $a+b$ B) a^2+b^2 C) ab D) $2ab$ E) a^2+b^2+1

Çözüm: Verilen iki eşitliği çarpalım.

$$\underbrace{s x\cdot c x+s x\cdot c y+s y\cdot c x}_{s(x+y)}+s y\cdot c y=ab$$

$$\sin(x+y)+\sin x\cos x+\sin y\cos y=ab$$

$$\sin(x+y)+\frac{1}{2}[\sin 2x+\sin 2y]=ab$$

$$2\cdot\sin(x+y)+\sin 2x+\sin 2y=2ab$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1986 ÖYS]. $\cos^2(x-y)+\sin^2(x+y)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1-\sin 2x\cdot\sin 2y$ B) $1+\cos 2x\cdot\cos 2y$
C) $1+\sin 2x\cdot\sin 2y$ D) $1+\sin 2x\cdot\cos 2y$
E) $1+\sin 2x\cdot\cos 2y$

Çözüm: İki kare farkından yararlanmak için $\sin^2(x+y)$ yerine $1-\cos^2(x+y)$ yazacağız.

$$T=\cos^2(x-y)+\sin^2(x+y)$$

$$=\cos^2(x-y)+1-\cos^2(x+y)$$

$$=1+\cos^2(x-y)-\cos^2(x+y)$$

$$=1+[c(x-y)-c(x+y)]\cdot[c(x-y)+c(x+y)]$$

$$=1+[-2\cdot\sin x\cdot\sin(-y)]\cdot[2\cdot\cos x\cdot\cos(-y)]$$

$$=1+[-2\cdot\sin x\cdot\cos x]\cdot[2\cdot\sin(-y)\cdot\cos(-y)]$$

$$=1-\sin 2x\cdot\sin(-2y)$$

$$=1+\sin 2x\cdot\sin 2y$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $4x^2-3x+c=0$ *ikinci dereceden denkleminin kökleri* $\sin\alpha$ *ve* $\cos\alpha$ *olduğuna göre c kaçtır?*

A) -5 B) $-7/8$ C) 0 D) 7/8 E) 5

Çözüm: Kökler toplamı formülünden $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{4}$ bulunur. Eşitliğin her iki yanının karesi alınırsa

$$1+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{9}{16}$$

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{7}{16}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{7}{32}$$

bulunur. Bu da kökler çarpımı formülünden $\frac{c}{4}=-\frac{7}{32}$ olduğundan $c=-7/8$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}$ *ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\tan^2 x$ B) $\tan^2(2x)$ C) $4\cdot\tan^2 x$ D) $2\cdot\tan^2(2x)$ E) $\tan^4 x$

Çözüm:

$$\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}=\frac{4\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x+4(\sin^2 x-1)}$$

$$=\frac{4\sin^2 x(\cos^2 x-1)}{4\sin^2 x\cos^2 x-4\cos^2 x}$$

$$=\frac{4\sin^2 x\cdot(\cos^2 x-1)}{4\cos^2 x\cdot(\sin^2 x-1)}=\tan^4 x$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=x^2+2\cdot\cos\theta\cdot x-\sin^2\theta+\sin\theta$ *parabolünün tepe noktası* $y=x$ *doğrusu üzerinde ise* $\sin 2\theta$ *kaçtır?*

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm: Tepe noktasının koordinatlarına $T(r, k)$ diyelim. Tepe noktasının $y=x$ doğrusu üstünde olması bize $r=k$ olduğunu söyler.

$$r=-\frac{2\cdot\cos\theta}{2}=-\cos\theta$$

diye $k=f(-\cos\theta)=-\cos\theta$'dır. Tepe noktası parabol üzerinde olduğundan, koordinatları denklemi sağlamalıdır. Değerler yerlerine yazılırsa

$$\sin\theta+\cos\theta=1$$

çıkar ki eşitliğin her iki yanının karesi alınırsa $\sin 2\theta=0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{\sqrt{1-\sin 20^\circ}+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $A=\dfrac{\sqrt{1-\sin 20^\circ}+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ-2\cdot\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{(\sin 10^\circ-\cos 10^\circ)^2}+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}=1$

Doğru cevap: D.

Örnek. $A=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ *ifadesinin sayısal değeri kaçtır?*

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: Bu denklemin çözümünde de daha önce yaptığımız bir alicengiz oyunu yatıyor. Trigonometrik denklemlerin çözümlerini anlatacağımız bir sonraki derste bunun üzerinde detaylı bir şekilde duracağız.

$A=\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\cdot\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cdot\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ\cdot\cos 60^\circ-\sin 10^\circ\cdot\sin 60^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 60^\circ}=\dfrac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cdot\frac{1}{2}}=4.$

Doğru cevap: E.

Morrie Eşitliği. $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\dfrac{1}{8}$.

Doğrulama: Zeka dolu bu çözümü dikkatle incelemenizi öneririm. Öğretmeniniz ben olsaydım, bu soruyu yazılıda mutlaka sorardım!

Eşitliğin sol yanına A deyip A'yı $\sin 20^\circ$ ile çarpıp bölelim.

$A=\dfrac{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{2\cdot\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{2\cdot\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{2\cdot 2\cdot\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{2\cdot\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 20^\circ}=\dfrac{\sin 160^\circ}{8\cdot\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{8}.$

Örnek. $A=\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\dfrac{1}{81}$ B) $-\dfrac{1}{32}$ C) $-\dfrac{1}{27}$ D) $-\dfrac{1}{16}$ E) $\dfrac{1}{16}$

Çözüm: A sayısını $2\cdot\sin 12$ ile çarpıp bölelim.

$A=\dfrac{2\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{\sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{2\cdot\sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{2\cdot\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{\sin 96^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{2\cdot\sin 96^\circ\cdot\cos 96^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{\sin 192^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{-\sin 12^\circ}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 12^\circ}$

$=-\dfrac{1}{16}.$

Doğru cevap: D.

Örnek. $A=\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\dfrac{1}{8}$ B) $-\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{8}$ E) $\dfrac{1}{16}$

Çözüm: A sayısını $2\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}$ ile çarpıp bölelim.

$A=\dfrac{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}$

$=\dfrac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{2\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}$

$=\dfrac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{\sin(\pi+\frac{\pi}{7})}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=-\dfrac{1}{8}$

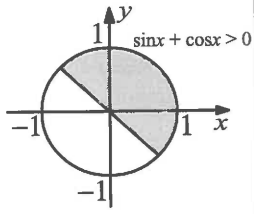
Doğru cevap: A.

Örnek. *$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$ eşitsizliğinin sağlandığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(0,\pi)$ B) $(\frac{\pi}{2},\pi)$ C) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ D) $(\frac{3\pi}{4},\pi)$ E) $(\frac{3\pi}{2},\pi)$

Çözüm: Bir kere ifadenin tanımlı olabilmesi için $\sin x > 0$ ve $\cos x < 0$ olmalıdır. Bu da $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmasıyla mümkündür.

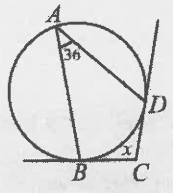
$$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$$
$$\sin x > -\cos x$$
$$\sin x + \cos x > 0$$



Bu eşitsizliğin sağlandığı bölgeler yandaki birim çemberde gösterilmiştir. Neden oralar olduğunu biraz düşününce çok rahat anlarsınız. Tanım aralığından bulduğumuz eşitsizlikle birlikte düşününce çözüm aralığının $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ olduğu görülür.

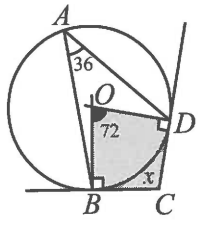
Doğru cevap: C.

Örnek. *C noktasından çembere çizilen teğetlerin değme noktaları B ve D'dir.*
$m(DAB) = 36^\circ$ ve
$m(BCD) = x$ veriliyor.
$\sin 36^\circ = y$ ise $\sin x$ kaçtır?



A) $(1-y^2)\sqrt{2y}$ B) $2y\sqrt{1-y^2}$ C) $\sqrt{y^2-1}$
D) $\sqrt{1+y^2}$ E) $2y^2-1$

Çözüm: Merkez olan O noktasını değme noktalarına birleştirelim. Merkez açı, aynı yayı gören çevre açının 2 katı olması gerektiğinden $m(DOB) = 72^\circ$'dir.
$BCDO$ dörtgeninin iç açı ölçüleri toplamından $x = 108^\circ$ olarak bulunur.



Sorumuz ''$\sin 36^\circ = y$ ise $\sin 108^\circ$ sayısı y cinsinden nedir?'' şeklinde döndü.

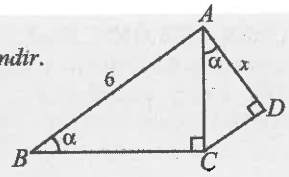
$$\sin 36^\circ = y \text{ ise } \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = 1$$

eşitliğinden $\cos 36^\circ = \sqrt{1-y^2}$ bulunur. O halde,

$$\sin 108^\circ = \sin 72^\circ = 2\cdot\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ = 2\cdot y\cdot\sqrt{1-y^2}\ .$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki şekilde BCA ve CDA birer dik üçgendir.*
$m(ABC) = m(DAC) = \alpha$ ve
$|AB| = 6$ br ise $|AD| = x$
neye eşittir?



A) $\cot\alpha$ B) $\tan 2\alpha$ C) $3\sin 2\alpha$
D) $3\tan 2\alpha$ E) $2\cot 2\alpha$

Çözüm: $|AC| = m$ diyelim. ABC üçgeninde

$$\sin\alpha = \frac{m}{6},$$

CDA üçgeninde

$$\cos\alpha = \frac{x}{m}\text{'dir.}$$

Bu değerleri çarptığımızda m'lerin sadeleşeceğini öngörüyoruz.
O halde

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{m}{6}\cdot\frac{x}{m} = \frac{x}{6}.$$

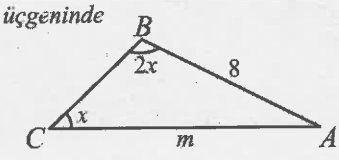
Buradan

$$x = 6\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 3\cdot\sin 2\alpha$$

çıkar.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde*
$m(ABC) = 2x$,
$m(BCA) = x$
olarak veriliyor.
$|AB| = 8$ iken
$|AC| = m$ kaç olur?



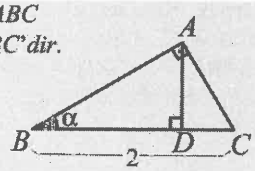
A) $\sin 2x$ B) $2\sin 2x$ C) $8\cos 2x$ D) $16\cos x$ E) $32\sin x$

Çözüm: Bu soruyu da B'ye ait iç açıortayı çizerek çözebilirdik. Daha sonrası Stewart Teoremi'nden de, benzerlikten de açıortay kurallarından da çözülebiliyordu hatırlarsanız. Biz bu derste sinüs teoremi ile çözmeye çalışacağız.

$$\frac{8}{\sin x} = \frac{m}{\sin 2x}$$
$$m\cdot\sin x = 8\cdot\sin 2x$$
$$m\cdot\sin x = 8\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x$$
$$m = 16\cdot\cos x$$

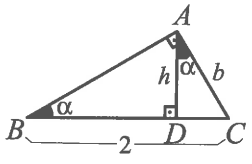
Doğru cevap: D.

Örnek [1986 ÖYS]. *Yandaki ABC üçgeninde BA ⊥ AC ve AD ⊥ BC'dir. ABD açısının ölçüsü α ise |AD|'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $2+\sin 2\alpha$ B) $2-\sin 2\alpha$ C) $1+\sin 2\alpha$ D) $1-\sin 2\alpha$ E) $\sin 2\alpha$

Çözüm: *CAD* açısının ölçüsünün de α olduğunu fark edelim. *CAB* dik üçgeninden



$\sin\alpha=\frac{b}{2}$ olduğundan

$$b=2\cdot\sin\alpha$$

olur. Diğer yandan *ADC* dik üçgeninden $\cos\alpha=\frac{h}{b}$ olduğundan

$$h=b\cdot\cos\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\cos 5^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 89^\circ$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $2^{-\frac{87}{2}}$ B) 2^{-44} C) $2^{-\frac{89}{2}}$ D) 2^{-45} E) $2^{-\frac{91}{2}}$

Çözüm:

$$A=\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\cos 5^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 89^\circ$$

$$=\frac{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}{\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 88^\circ}$$

$$=\frac{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 3^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 88^\circ}$$

$$=\frac{2^{44}\cdot\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 3^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\sin 1^\circ}{2^{44}\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 88^\circ}$$

$$=\frac{\cos 45^\circ\cdot\sin 2^\circ\cdot\sin 4^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 86^\circ\cdot\sin 88^\circ}{2^{44}\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 88^\circ}$$

$$=\frac{\cos 45^\circ}{2^{44}}=\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}=2^{-\frac{89}{2}}$$

Doğru cevap: C.

Teorem. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$

Kanıt: $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta$ eşitliğinde θ gördüğümüz yere α yazacağız.

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$
$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$=2\cos^2\alpha-1.$$
$$=2(1-\sin^2\alpha)-1$$
$$=1-2\sin^2\alpha.$$

Bunu kısaca; $\mathbf{C=2c^2-1=1-2s^2}$ biçiminde aklınızda tutabilirsiniz.

Örnek [1974 ÜSS]. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ *olmak üzere*

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

olduğuna göre $\cos 2\alpha$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

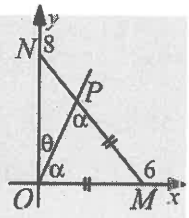
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

Çözüm: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3})^2-1=-\frac{1}{3}$

olur. Yalnız bir şeye dikkatinizi çekeyim: α'nın hangi aralıkta olduğunun verilmesine gerek yoktu.

Doğru cevap: D.

Örnek [1979 ÜSS]. *Yandaki şekilde N(0, 8), M(6, 0), m(MOP) = m(OPM) = α ve m(PON) = θ olduğuna göre* sin θ*'nın değeri nedir?*



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Çözüm: $\alpha+\theta=90^\circ$ olduğundan $m(OMN)=2\theta$ olmalıdır.

$$\cos(OMN)=\cos 2\theta=\frac{6}{10}$$

$$1-2\cdot\sin^2\theta=\frac{3}{5}$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{5}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin 25^\circ = p$ *olduğuna göre* $\sin 40^\circ$*'ın* p *cinsinden değeri nedir?*

A) $2p-1$ B) p^2-1 C) $2p^2-1$ D) $2-p^2$ E) $1-2p^2$

Çözüm: 40 ile 25 sayılarından herhangi biri diğerinin yarısı veya iki katı değil. E bu sorunun o zaman burada işi ne demiş olabilirsiniz. Demeyin, rakamlarla oynayın!

$$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = 1-2\cdot\sin^2 25^\circ = 1-2p^2.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ *ifadesinin en sade hali nedir?*

A) $\sin x$ B) $1-\cos x$ C) $\cos\dfrac{x}{2}$ D) $\tan\dfrac{x}{2}$ E) $2\sin\dfrac{x}{2}$

Çözüm: Trigonometri dersinin ilkinde paydada ne zaman $1+\cos x$ gibi bir şey görürseniz $1-\cos x$ ile çarpın demiştik. O dediğimizi şimdi unutun! ☺ Aslında yanlış bir şey yapmazsınız da muhtemelen bulduğunuz cevap şıklarda olmayacaktır. İşte bulduğunuz cevap şıklarda olmadığı zaman, aşağıdaki gibi yarım açı formüllerine başvurun...

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1+2\cdot\cos^2\frac{x}{2}-1} = \tan\frac{x}{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek [2006 ÖSS].

$$\frac{\sin 2a}{1-\cos 2a}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin a$ B) $\cos a$ C) $\tan a$ D) $\cot a$ E) $\sin a+\cos a$

Çözüm:

$$\frac{\sin 2a}{1-\cos 2a} = \frac{2\sin a\cos a}{1-(1-2\sin^2 a)} = \frac{2\sin a\cos a}{2\sin^2 a} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = 2$$

olduğuna göre $\tan x$ *ifadesinin alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) -2 B) $-\dfrac{2}{3}$ C) $-\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) 1

Çözüm:

$$2 = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x} = \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$$

eşitliğinden

$$2\cdot\cos x+2\cdot\sin x = \cos x-\sin x$$
$$\cos x = -3\cdot\sin x$$
$$\tan x = -\frac{1}{3}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1981 ÖYS].

$$\tan x = \frac{\sin 2y}{1-\cos 2y}$$

olduğuna göre $x+y$*'nin* 0 *ile* π *arasındaki değeri kaç radyandır?*

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{3}$ C) $\dfrac{\pi}{4}$ D) $\dfrac{\pi}{5}$ E) $\dfrac{\pi}{6}$

Çözüm:

$$\tan x = \frac{2\cdot\sin y\cdot\cos y}{1-(1-2\cdot\sin^2 y)} = \frac{2\cdot\sin y\cdot\cos y}{2\cdot\sin^2 y} = \frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$$

bulunduğundan $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{3}{4}$ *olduğuna göre* $\sin 4x$ *değeri kaça eşittir?*

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm:

$$\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{3}{4}$$
$$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=\frac{3}{2}$$
$$2\sin x\cos x+2\sin^2 x-1=\frac{3}{2}-1$$
$$\sin 2x-\cos 2x=\frac{1}{2}$$
$$(\sin 2x-\cos 2x)^2=\frac{1}{4}$$
$$1-\sin 4x=\frac{1}{4}$$
$$\sin 4x=\frac{3}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $0<x<\frac{\pi}{4}$ *olmak üzere* $\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\cos x-\sin x$ B) $\cos x+\sin x$ C) $2\cos x$ D) $\tan 2x$ E) $\tan x-\cot x$

Çözüm: Kök içini tamkare yapınca bitecek!

$$\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sqrt{1-2\sin x\cos x}}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{|\cos x-\sin x|}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)}$$
$$=\cos x+\sin x$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1991 ÖYS]. $\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=1$ *olduğuna göre,* $\cos^2 x$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm:

$$\frac{\sin 3x}{\underset{(\cos x)}{\sin x}}+\frac{\cos 3x}{\underset{(\sin x)}{\cos x}}=1$$
$$\frac{\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=1$$
$$\sin(3x+x)=\sin x\cdot\cos x$$
$$\sin 4x=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x$$
$$2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$$
$$\cos 2x=\frac{1}{4}$$
$$2\cdot\cos^2 x-1=\frac{1}{4}$$
$$\cos^2 x=\frac{5}{8}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin\theta=\frac{7}{9}$ *ve* $\sin(2x+\theta)=1$ *olduğuna göre* $\sin x$ *değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

Çözüm: $\sin(2x+\theta)=1$ ise $2x+\theta=\frac{\pi}{2}$ diyebiliriz.

Bu durumda $\theta=\frac{\pi}{2}-2x$ olur. Öyleyse $\sin\theta=\frac{7}{9}$ eşitliği

$$\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{7}{9}$$

halini alır. Kurcalamaya devam edelim.

$$\cos 2x=\frac{7}{9}$$
$$1-2\sin^2 x=\frac{7}{9}$$
$$\sin^2 x=\frac{1}{9}$$

olduğundan $\sin x=\pm\frac{1}{3}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin x = \frac{1}{3}$ *olduğuna göre* $\cos 4x$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{7}{81}$ E) $\frac{17}{81}$

Çözüm:

$$\cos 4x = 2\cdot\cos^2 2x - 1$$

olduğundan önce $\cos 2x$'in bulunması lazım.

$$\cos 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 x = 1 - 2\cdot(\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Şimdi de yukardakinin aynısıyla $\cos 4x$ değerine ulaşacağız:

$$\cos 4x = 2\cdot\cos^2 2x - 1 = 2\cdot(\frac{7}{9})^2 - 1 = \frac{98}{81} - 1 = \frac{17}{81}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin\alpha = k$ *ise* $\cos 4\alpha$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $4k^4 - 4k^2 + 1$ B) $4k^4 - 4k^2 + 1$ C) $8k^4 - 4k^2 + 1$
D) $8k^4 - 8k^2 + 1$ E) $8k^4 - 8k^2 + 2$

Çözüm:

$$\cos 4\alpha = 2\cdot\cos^2 2\alpha - 1$$

olduğundan $\cos 2\alpha$'yı bulmamız lazım.
Elimizde $\sin\alpha = k$ bilgisi olduğundan sinüse bağlı yarım açı formülünü kullanacağız.

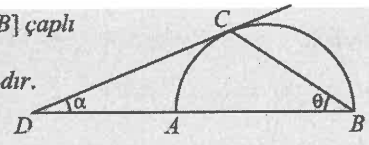
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha = 1 - 2k^2$$

O halde

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= 2\cdot(1 - 2k^2)^2 - 1\\ &= 2\cdot(1 - 4k^2 + 4k^4) - 1\\ &= 2 - 8k^2 + 8k^4 - 1\\ &= 8k^4 - 8k^2 + 1\end{aligned}$$

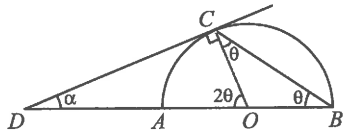
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki* $[AB]$ *çaplı yarım çemberde* C *teğet değme noktasıdır.* $m(CDB) = \alpha$ *ve* $m(DBC) = \theta$ *iken* $\sin\alpha = p$ *ise* $\cos\theta$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) $\sqrt{\frac{p+1}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{p}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{p-1}{2}}$ D) p^2 E) $2p$

Çözüm: Çemberin merkezine O diyelim. OCD açısı dik olur.
$\alpha + 2\theta = 90^\circ$ olduğundan $\sin\alpha = \cos 2\theta = p$ olur.



$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = p$$

eşitliğinden $\cos\theta = \sqrt{\frac{p+1}{2}}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

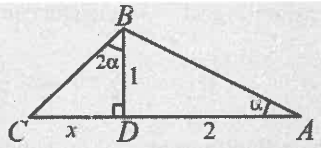
Teorem. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

Kanıt: Bildiğimiz $\tan(\alpha + \theta)$ formülünde θ yerine α yazacağız.

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Örnek. $m(CBD) = 2\alpha$, $m(BAC) = \alpha$, $|BD| = 1$ br, $|DA| = 2$ br, $|CD| = x$ *kaçtır?*



A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 2

Çözüm: Soru aslında ''tan α = 1/2 iken tan 2α kaçtır?'' sorusundan başka bir şey değil.

$$x = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $0^\circ < x < 45^\circ$ *iken* $\tan 2x = \frac{3}{4}$ *olduğuna göre* $\tan x$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{8}{3}$

Çözüm: Aslında burada en kolay yol, geçen ders anlattığımız yarım açı şablonunu çizmektir. Ama şu an yarım açı formüllerini anlattığımızdan bunu yapmayacağız.

$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ olduğundan $\frac{3}{4} = \frac{2\cdot\tan x}{1 - \tan^2 x}$ olur ki, $8\cdot\tan x = 3 - 3\cdot\tan^2 x$ eşitliği $3\cdot\tan^2 x + 8\cdot\tan x - 3 = 0$ eşitliğine dönüşür. Denklem çarpanlarına ayrılırsa,

$$(3.\tan x - 1).(\tan x + 3) = 0$$

çıkar ki, $\tan x = 1/3$ veya $\tan x = -3$ olmalıdır. Fakat verilen aralığa göre mümkün olan $\tan x = \frac{1}{3}$ eşitliğidir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Dar bir* x *açısı için* $\cos x = \frac{1}{8}$ *olduğuna göre* $\tan\frac{x}{2}$ *kaçtır?*

A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

Çözüm: İki yol önerilebilir. $\cos x$ yardımıyla $\cos\frac{x}{2}$ bulunur, buradan da $\tan\frac{x}{2}$ bulunur. Diğer yol ise $\cos x$ yardımıyla $\tan x$ bulunur, buradan da $\tan\frac{x}{2}$ ...

Biz ilk yoldan yapacağız, siz bir de ikinci yoldan çözün ama.

$\cos x = 2\cdot\cos^2\frac{x}{2} - 1$ olduğundan

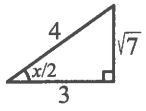
$$\frac{1}{8} = 2\cdot\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

olur. Buradan $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{9}{16}$ bulunur. O halde

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\frac{3}{4}$$

demek olur ki, x açısı dar dendiğinden pozitif olan tercih edilecektir. Bundan sonrası üçgen yardımıyla rahatlıkla bulunur:

$\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ ise $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.



Doğru cevap: D.

Örnek. $\sin 3x$ *ifadesinin* $\sin x$ *cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $3\sin x + 4\sin^3 x$ B) $3\sin x - 4\sin^3 x$ C) $3\sin^3 x - 4\sin x$
D) $3\sin^3 x + 4\sin x$ E) $4\sin x - 3\sin^3 x$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos 2x\\ &= 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(1 - 2\cdot\sin^2 x)\\ &= 2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x + \sin x\cdot(1 - 2\cdot\sin^2 x)\\ &= 2\cdot\sin x\cdot(1 - \sin^2 x) + \sin x\cdot(1 - 2\cdot\sin^2 x)\\ &= 2\cdot\sin x - 2\cdot\sin^3 x + \sin x - 2\cdot\sin^3 x\\ &= 3\cdot\sin x - 4\cdot\sin^3 x\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\cos 3x$ *ifadesinin* $\cos x$ *cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $3\cos^3 x - 4\cos x$ B) $4\cos x - 3\cos^3 x$
C) $4\cos^3 x - 3\cos x$ D) $4\cos x + 3\cos^3 x$
E) $3\cos^3 x + 4\cos x$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x\sin^2 x\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin 82^\circ = x$ *olmak üzere* $\frac{\sin 24^\circ}{\sin 8^\circ}$ *oranının* x *cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1 - 4x$ B) $4x - 1$ C) $1 - 4x^2$ D) $4x^2 - 1$ E) $4x^3 - 1$

Çözüm: $\frac{\sin 24^\circ}{\sin 8^\circ} = \frac{3\cdot\sin 8^\circ - 4\sin^3 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 3 - 4\cdot\sin^2 8^\circ$

olduğunu not edelim. $\sin 8^\circ$ değerini x cinsinden yazabilirsek soru çözülmüş olacak.

$$\sin 82^\circ = x = \cos 8^\circ$$

olduğundan $\sin 8^\circ = \sqrt{1 - x^2}$ olur. O halde

$$3 - 4\cdot\sin^2 8^\circ = 3 - 4\cdot(1 - x^2) = 4x^2 - 1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sin 3x + \cos 3x = (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x\cos x)$ *eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.*

Çözüm:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

olduğunu daha önce bulmuştuk.

$$\begin{aligned}\sin 3x + \cos 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 4\sin^3 x + 3\sin x - 3\cos x\\ &= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) + 3(\sin x - \cos x)\\ &= 4(\cos x - \sin x)(c^2 + cs + s^2) + 3(\sin x - \cos x)\\ &= 4(\cos x - \sin x)(1 + \cos x\sin x) - 3(\cos x - \sin x)\\ &= (\cos x - \sin x)[4(1 + \cos x\sin x) - 3]\\ &= (\cos x - \sin x)(1 + 4\cos x\sin x)\\ &= (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x\cos x)\end{aligned}$$

Örnek. $x = \sin 2^\circ$ *olduğuna göre* $\frac{\sin^2 2^\circ - \cos^2 2^\circ}{3 - \sin 82^\circ}$ *sayısının* x *cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{1}{2x^2 - 1}$ B) $\frac{1}{3x^2 - 1}$ C) $\frac{1}{4x^2 - 2}$ D) $2x^2 - 1$ E) $4x^2 - 1$

Çözüm: $\frac{\sin^2 2^\circ - \cos^2 2^\circ}{3 - \sin 82^\circ} = \frac{\sin^2 2^\circ - \cos^2 2^\circ}{3 - \cos 8^\circ}$

$\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 2^\circ - \cos^2 2^\circ}{3 - \cos 8^\circ} &= \frac{\sin^2 2^\circ - (1 - \sin^2 2^\circ)}{3 - (1 - 8\sin^2 2^\circ + 8\sin^4 2^\circ)}\\ &= \frac{x^2 - (1 - x^2)}{3 - (1 - 8x^2 + 8x^4)}\\ &= \frac{2x^2 - 1}{8x^4 - 8x^2 + 2}\\ &= \frac{2x^2 - 1}{2\cdot(2x^2 - 1)^2} = \frac{1}{4x^2 - 2}.\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sin 12^\circ = p$$

olduğuna göre sin 24° ifadesinin p cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2p$ B) p^2 C) $2p^2-1$ D) $2p\sqrt{1-p^2}$ E) $\sqrt{p^2-1}$

2.

$$\cos 74^\circ = n$$

olduğuna göre cos 58° ifadesinin n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2n$ B) n^2 C) $2n^2-1$ D) $2n\sqrt{1-n^2}$ E) $\sqrt{n^2-1}$

3.

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere

$$\frac{\sin 2x}{2\cdot\cos x} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre tan x ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ B) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ C) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ D) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

4.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre sin 2x değeri kaça eşittir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{8}{9}$

5.

$$2x^2 - x + a = 0$$

denkleminin kökleri sin θ ve cos θ olduğuna göre a değeri kaça eşittir?

A) $-\frac{3}{8}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

6.

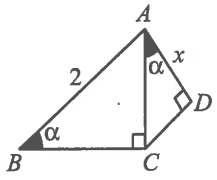
$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{16}$

7.

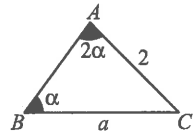
Yandaki $ABCD$ dörtgeninde $AC \perp BC$ ve $AD \perp DC$ olarak verilmiştir.
$|AB| = 2$ br
$m(DAC) = m(ABC) = \alpha$
olduğuna göre $|AD|$ kaç br dir?



A) cot α B) tan α C) sin α D) sin 2α E) 2·sin 2α

8.

Yandaki ABC üçgeninde,
$m(CAB) = 2\cdot m(ABC) = 2\alpha$
ve $|AC| = 2$ br
olduğuna göre $|CB|$ kaç br dir?



A) sin α B) cos α C) 2cos α D) 4cos α E) 4sin α

9.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = a \cdot \cos 2x$$

eşitliğini sağlayan a değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

10.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$$

olduğuna göre cos 2x değeri kaça eşittir?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

1. D 2. D 3. B 4. E 5. B 6. B 7. D 8. D 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre cos 2α kaça eşittir?

A) $-\frac{7}{8}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

2.

$$\sin 28^\circ = p$$

olduğuna göre sin 34° ifadesinin *p* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2p-1$ B) p^2-1 C) $2-p^2$ D) $2p^2-1$ E) $1-2p^2$

3.

$$\sin 56^\circ = p$$

olduğuna göre sin 73° ifadesinin *p* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2p^2-1$ B) p^2-1 C) $1-2p^2$ D) $\sqrt{\frac{p+1}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{p+1}}{4}$

4.

$$\cos 14^\circ = p$$

olduğuna göre sin 242° ifadesinin *p* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2p^2-1$ B) p^2-1 C) $1-2p^2$ D) $\frac{\sqrt{p+1}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{p+1}}{4}$

5.

Aşağıdakilerden hangisi

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

ifadesiyle özdeştir?

A) $\cos\frac{x}{2}$ B) $\sin\frac{x}{2}$ C) $\tan\frac{x}{2}$ D) $2\cdot\tan\frac{x}{2}$ E) $\frac{1}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}$

6.

$$\sin x = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre cos 4*x* kaça eşittir?

A) $-\frac{80}{81}$ B) $-\frac{79}{81}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{79}{81}$ E) $\frac{80}{81}$

7.

$\sin 82^\circ = x$ olsun.

$$\frac{\sin 24^\circ}{\sin 8^\circ}$$

oranı *x* cinsinden neye eşittir?

(İpucu: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$)

A) $1-4x$ B) $4x-1$ C) $1-4x^2$ D) $4x^2-1$ E) $4x^3-1$

8.

$$\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin 2a}$$

İfadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan 2a$ B) $\tan a$ C) $\cos 2a$ D) $\cot 2a$ E) $\cot a$

9.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre sin α aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

10.

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x$$

olduğuna göre *x* aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

1. A 2. E 3. D 4. C 5. C 6. B 7. D 8. D 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\frac{\cos 2a}{4\sin^2 a - 2}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

2.

$$\sin 20^\circ = p$$

olduğuna göre cos 50° ifadesinin p cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{1-p^2}$ B) $2p\sqrt{1-p^2}$ C) $2\sqrt{p^2-1}$ D) $\sqrt{p^2-1}$ E) $2p$

3.

$$\frac{2\cdot\tan\frac{x}{8}}{\tan^2\frac{x}{8}-1}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\tan\frac{x}{4}$ B) $-\cot\frac{x}{4}$ C) $\tan\frac{x}{8}$ D) $\cot\frac{x}{4}$ E) $\tan\frac{x}{4}$

4.

$$\tan\alpha = m$$

olduğuna göre cot 2α'nın m türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1-m^2}{2m}$ B) $2m$ C) $\frac{2m}{1-m^2}$ D) m E) $\frac{1+m^2}{2m}$

5.

$$\cot\alpha = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre cot 2α aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

6.

$$\frac{1-\tan^2 40^\circ}{2\tan 40^\circ} = a$$

olduğuna göre tan 80° ifadesinin a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2a$ B) a C) $\frac{1}{a}$ D) $-\frac{1}{a}$ E) $\frac{1}{2a}$

7.

$0^\circ < x < 45^\circ$ olmak üzere

$$\tan x = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre tan 2x değeri kaça eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

8.

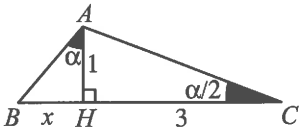
$$\frac{\cot x\cdot\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

Yandaki şekilde verilen üçgende
$AH \perp HC$ olup
$|AH| = 1$ br
$|DC| = 3$ br
$|BH| = x$ br



olduğuna göre x değeri kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) 2

10.

Bir ABC üçgeninde

$$\cot\frac{A}{2} = 2$$

$$\cot\frac{B}{2} = 3$$

olduğuna göre C açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

1. A 2. B 3. A 4. A 5. B 6. C 7. B 8. A 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dönüşüm Formülleri

Dönüşüm formülleri, toplam halindeki trigonometrik fonksiyonları, çarpım haline dönüştürür. Tecrübeyle sabittir ki, bu formüller kolay kolay akılda kalmıyor. Kalmamasının sebebi, hafızamızın çok zayıf olması değil elbet, çok fazla karşılaşılmayan formüller olmasıdır. Bu yüzden sadece ilk formülün bilinmesi bize yeter, bu formül bile unutuluyor, bunun için nerden çıktığını unutmamak lazım. Trigonometri konusunda azıcık dirsek çürütmüş biri toplam fark formüllerini unutmayacağından, ufak bir hesapla formüllerin tamamı çıkarılabilir.

Teorem. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Kanıt: Toplam-fark formüllerini boşa öğrenmedik.

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B$$

bağıntılarını taraf tarafa toplarsak:

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\cdot\sin A\cdot\cos B$$

bulunur.

$A+B=x$ ve $A-B=y$ dersek, $A=\frac{x+y}{2}$ ve $B=\frac{x-y}{2}$ bulunur. Bu değerleri yerleştirdiğimizde,

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

buluruz.



Öğrendiğimiz formülde x ve y yerine gerekli değerleri yazarak aşağıdaki formüllere rahatça erişebilirsiniz:

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x+\cos y=2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Birincisini ezberliyoruz.
İkincisinde açıları yer değiştiriyoruz.
Üçüncüsünde her şey cos.
Dördüncüsünde her şey üçüncünün zıttı.

Bu formüllerden sadece ilkini ezbere bilmek tüm dönüşüm sorularını çözmeye yeter. Çünkü diğer hepsi bir şekilde ilk formüle adapte edilebilir.

$\sin x+\sin y$ formatında olmayan toplamları nasıl bu formata çevireceğimize örnekler verelim.

$$\sin 120^\circ-\sin 10^\circ=\sin 120^\circ+\sin 190^\circ$$
$$\cos 20^\circ+\cos 50^\circ=\sin 70^\circ+\sin 40^\circ$$
$$\cos 10^\circ-\cos 40^\circ=\sin 80^\circ-\sin 50^\circ=\sin 80^\circ+\sin 230^\circ$$
$$\sin 200^\circ-\cos 250^\circ=\sin 200^\circ+\cos 70^\circ=\sin 200^\circ+\sin 20^\circ$$
$$\cos 310^\circ-\cos 190^\circ=\cos 50^\circ+\cos 10^\circ=\sin 40^\circ+\sin 80^\circ$$

Gördüğünüz üzere sadece $\sin x+\sin y$ toplamı için dönüşüm formülleri ezberlemek, diğerlerini çözmeye de yetiyor. Ama biz bu notlarda formülleri bildiğinizi farz ederek çözümler yaptık.

Örnek. $\left(\frac{\sin 100^\circ+\sin 50^\circ}{\sin 100^\circ-\sin 50^\circ}\right)\cdot\tan 25^\circ$ *ifadesinin en sade hali nedir?*

A) $\sin 15^\circ$ B) $\tan 15^\circ$ C) $\sin 75^\circ$ D) $\cos 15^\circ$ E) $\tan 75^\circ$

Çözüm:

$$\frac{2\cdot\sin 75^\circ\cdot\cos 25^\circ}{2\cdot\cos 75^\circ\cdot\sin 25^\circ}\cdot\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}=\tan 75^\circ.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 75^\circ+\cos 75^\circ}$ *oranı kaça eşittir?*

A) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

Çözüm:

$$\frac{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 75^\circ+\cos 75^\circ}=\frac{-2\cdot\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ}{2\cdot\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ}=\frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Soruyu çözdük fakat dönüşüm formüllerini anlatıyoruz diye böyle çözdük. Orana A deyip, her iki tarafın karesini alsaydık, yine soru çözülürdü.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ$ *ifadesinin sayısal değeri kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ D) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$ E) 1

Çözüm:

$$\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = (\sin 24^\circ + \sin 6^\circ)(\sin 24^\circ - \sin 6^\circ)$$
$$= 2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 9^\circ \cdot 2\cdot\sin 9^\circ\cdot\cos 15^\circ$$
$$= 2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ \cdot 2\cdot\sin 9^\circ\cdot\cos 9^\circ$$
$$= \sin 30^\circ\cdot\sin 18^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{1+\sin 54^\circ}{1-\sin 54^\circ}$ *oranı kaça eşittir?*

A) $\sin^2 72^\circ$ B) $\cos^2 72^\circ$ C) $\tan^2 72^\circ$ D) $\cot^2 72^\circ$ E) $\csc^2 72^\circ$

Çözüm: Yapacak bir şey yok gibi görünüyor. Seyretmekle de çözülecek hali yok. Bari $\sin 90^\circ = 1$ eşitliğini kullanalım.

$$\frac{1+\sin 54^\circ}{1-\sin 54^\circ} = \frac{\sin 90^\circ + \sin 54^\circ}{\sin 90^\circ - \sin 54^\circ} = \frac{2\cdot\sin 72^\circ\cdot\cos 18^\circ}{2\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 72^\circ}$$
$$= \frac{\sin 72^\circ\cdot\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ\cdot\cos 72^\circ} = \frac{\sin^2 72^\circ}{\cos^2 72^\circ} = \tan^2 72^\circ$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\tan 20^\circ + 4\cdot\sin 20^\circ$ *toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm:

$$\tan 20^\circ + 4\cdot\sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4\cdot\sin 20^\circ$$
$$= \frac{\sin 20^\circ + 4\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2\cdot\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$$
$$= \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$$
$$= \frac{2\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$$
$$= \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\cos 24^\circ = x$ *olduğuna göre* $\sin^2 48^\circ + \cos^2 18^\circ$ *toplamının x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1-2x^2$ B) $2x^2-1$ C) $\frac{x+1}{2}$ D) $\frac{x-2}{2}$ E) $\frac{x+2}{2}$

Çözüm:

$$\cos^2 18^\circ = 1-\sin^2 18^\circ$$

olduğundan

$$\sin^2 48^\circ + \cos^2 18^\circ = 1+\sin^2 48^\circ - \sin^2 18^\circ$$

eşitliğiyle uğraşabiliriz.

$$\sin^2 48^\circ + \cos^2 18^\circ = 1+\sin^2 48^\circ - \sin^2 18^\circ$$
$$= 1+(\sin 48^\circ - \sin 18^\circ)\cdot(\sin 48^\circ + \sin 18^\circ)$$
$$= 1+2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 33^\circ\cdot 2\cdot\sin 33^\circ\cdot\cos 15^\circ$$
$$= 1+2\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ\cdot 2\cdot\sin 33^\circ\cdot\cos 33^\circ$$
$$= 1+\sin 30^\circ\cdot\sin 66^\circ$$
$$= 1+\sin 30^\circ\cdot\cos 24^\circ$$
$$= 1+\frac{1}{2}\cdot x = \frac{2+x}{2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $10a = \frac{\pi}{2}$ *olduğuna göre* $\frac{\sin 8a + \sin 4a}{\cos 4a\cdot\cos 2a}$ *oranı kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 10

Çözüm:

$$\frac{\sin 8a + \sin 4a}{\cos 4a\cdot\cos 2a} = \frac{2\cdot\sin 6a\cdot\cos 2a}{\cos 4a\cdot\cos 2a}$$

olur ki $\sin 6a = \cos 4a$ olduğundan cevap 2'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek [1980 ÜSS]. $10a = \frac{\pi}{2}$ *olduğuna göre;*

$$\frac{\cos 4a - \cos 8a}{\cos 4a\cdot\cos 8a}$$

ifadesinin değeri nedir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) -2 D) 1 E) 2

Çözüm: Hemen paya dönüşüm uyguluyoruz:

$$\frac{\cos 4a - \cos 8a}{\cos 4a\cdot\cos 8a} = \frac{-2\cdot\sin(-2a)\cdot\sin 4a}{\cos 4a\cdot\cos 8a} = \frac{2\cdot\sin 2a\cdot\sin 4a}{\cos 4a\cdot\cos 8a}$$

$10a = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $2a$ ile $8a$ ve $4a$ ile $6a$ açıları birbirlerinin tümleridir. Bu yüzden $\sin 2a = \cos 8a$ ve $\sin 6a = \cos 4a$ olup, bu değerler sadeleştirilirse sorulan oranın 2 olduğu görülür.

Doğru cevap: E.

Örnek [1996 ÖYS]. $\dfrac{\sin 2A+\sin 4A}{\cos 2A+\cos 4A}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin 2A$ B) $\tan 2A$ C) $\tan 3A$ D) $\cot 3A$ E) $\cos 2A$

Çözüm:

$$\frac{\sin 2A+\sin 4A}{\cos 2A+\cos 4A}=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=\tan 3A\,.$$

Doğru Cevap: C.

Örnek.

$$A=\frac{\sin 6x+\sin 2x}{\cos 6x+\cos 2x}$$

neye eşittir?

A) $\sin 2x$ B) $\tan 4x$ C) $\cos 6x$ D) $\sin 8x$ E) $\cot 8x$

Çözüm: Hem payda hem de paydada, dönüşüm formülleri uygulanırsa,

$$A=\frac{2\cdot\sin 4x\cdot\cos 2x}{2\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\tan 4x.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$A=\frac{\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$$

olduğundan aşağıdakilerden hangisi A'ya eşittir?

A) $\sin 3x$ B) $\tan 3x$ C) $\cot 6x$ D) $\sin 6x$ E) $\tan 6x$

Çözüm:

$$A=\frac{\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$$

$$=\frac{(\sin 2x+\sin 4x)+\sin 3x}{(\cos 2x+\cos 4x)+\cos 3x}$$

$$=\frac{2\cdot\sin 3x\cdot\cos x+\sin 3x}{2\cdot\cos 3x\cdot\cos x+\cos 3x}$$

$$=\frac{\sin 3x\cdot(2.\cos x+1)}{\cos 3x\cdot(2.\cos x+1)}$$

$$=\tan 3x.$$

Doğru cevap: B.

Yukarıdaki gibi, açılar aritmetik dizi oluşturuyorsa, ortadaki terimlerin bölümü bize sonucu verir.

Örnek. $A=\dfrac{\sin 8x-\sin 6x+\sin 4x}{\cos 8x-\cos 6x+\cos 4x}$ *neye eşittir?*

A) $\cot 4x$ B) $\tan 6x$ C) $\sin 6x$ D) $\cot 8x$ E) $\tan 8x$

Çözüm: Pay ve paydada, başta ve sondaki terimler için dönüşüm formülünü uygulayalım.

$$A=\frac{2\cdot\sin 6x\cdot\cos 2x-\sin 6x}{2\cdot\cos 6x\cdot\cos 2x-\cos 6x}$$

$$=\frac{\sin 6x\cdot(2\cdot\cos 2x-1)}{\cos 6x\cdot(2\cdot\cos 2x-1)}=\tan 6x.$$

Doğru cevap: B.

Örnek[1988 ÖYS].

$$\frac{\cos x+\cos 6x+\cos 11x}{\sin x+\sin 6x+\sin 11x}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cot 6x$ B) $\cot 18x$ C) 1
D) 0 E) $\cot x+\cot 6x+\cot 11x$

Çözüm:

$$\frac{\cos x+\cos 6x+\cos 11x}{\sin x+\sin 6x+\sin 11x}=\frac{\cos 6x}{\sin 6x}=\cot 6x\,.$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$A=\frac{2\cdot(\sin 10^c+\sin 20^\circ)+1}{2\cdot(\sin 10^\circ+\cos 20^\circ)+\sqrt{3}}$$

olduğuna göre A sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin 20^\circ$ B) $\cos 20^\circ$ C) $\tan 20^\circ$ D) $\cot 20^\circ$ E) $\sec 20^\circ$

Çözüm: Hem payı hem de paydayı 2'ye bölelim.

$$A=\frac{2\cdot(\sin 10^\circ+\sin 20^\circ)+1}{2\cdot(\cos 10^\circ+\cos 20^\circ)+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sin 10^\circ+\sin 20^\circ)+\frac{1}{2}}{(\cos 10^\circ+\cos 20^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ}=\tan 20^\circ$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $14x = \pi$ *olduğuna göre* $\dfrac{\tan 7x + \tan 3x}{\tan 7x - \tan 3x}$ *kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) Hesaplanamaz

Çözüm:

$$\frac{\tan 7x + \tan 3x}{\tan 7x - \tan 3x} = \frac{\dfrac{\sin(7x+3x)}{\cos 7x \cdot \cos 3x}}{\dfrac{\sin(7x-3x)}{\cos 7x \cdot \cos 3x}} = \frac{\sin 10x}{\sin 4x} = 1.$$

Doğru cevap B mi? Siz öyle zannedin. Yukardaki sorunun cevabı 1 değildir. Neden sizce?

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ *kaça eşittir?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: İlerde hayırlara vesile olacak bu çözümü dikkatle inceleyin, sonucu da aklınızın bir köşesine yazın.

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = -2 \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin(-18)^\circ$$
$$= \frac{2 \cdot \cos 36 \cdot \sin 18 \cdot \cos 18}{\cos 18}$$
$$= \frac{2 \cdot \cos 36 \cdot \sin 36}{2 \cdot \cos 18}$$
$$= \frac{\sin 72}{2 \cdot \cos 18} = \frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: D.



Yukarıdaki bu eşitlik, aslında zor bir soruymuş gibi görünen $\sin 18^\circ$'in değerinin hesaplanmasında kullanılabilir. Çünkü $\cos 36^\circ$'yı da $\cos 72^\circ$'yi de sadece $\sin 18^\circ$'e bağlı olarak yazmak mümkündür.

Örnek. $\sin 18^\circ$ *ifadesinin sayısal değeri kaçtır?*

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

Çözüm: Üç farklı yol göstereceğiz.

Birinci çözüm: Bir önceki çözüme bağlıyız. $\cos 36^\circ = 1 - 2\cdot\sin^2 18^\circ$ ve $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$ olduğundan bu değerleri biraz önce bulduğumuz

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$$

eşitliğinde yerine yazacağız.

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2},$$
$$1 - 2\cdot\sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2},$$
$$2\cdot\sin^2 18^\circ + \sin 18^\circ - \frac{1}{2} = 0,$$
$$4\cdot\sin^2 18^\circ + 2\cdot\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

$\sin 18^\circ = t$ olsun.

$$4\cdot t^2 + 2\cdot t - 1 = 0$$

denkleminin pozitif kökü bize t'yi yani $\sin 18^\circ$'i verir. O halde $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

İkinci çözüm: $\sin 18^\circ = x$ olsun. O halde

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$$
$$= 2\cdot\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ$$
$$= 2\cdot(2\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ)\cdot(1 - 2\cdot\sin^2 18^\circ)$$
$$= 4\cdot\cos 18^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot(1 - 2\sin^2 18^\circ)$$

olduğundan $\cos 18^\circ$ değerlerini sadeleştirirsek

$$1 = 4x\cdot(1 - 2x^2) \text{ yani } 8x^3 - 4x + 1 = 0$$

bulunur. $x_1 = 1/2$ değeri bu denklemin kökü olmasına rağmen $\sin 18^\circ \neq 1/2$ olduğundan diğer köklere ihtiyaç duyarız. $P(x) = 8x^3 - 4x + 1$ polinomunu $(2x - 1)$'e bölersek denklemin ikinci çarpanını bulur ve oradan ikinci ve üçüncü köklerin $x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{5})/4$ olduğunu anlarız. $\sin 18^\circ > 0$ olduğundan $x = \sin 18^\circ = (-1 + \sqrt{5})/4$ bulunur.

Üçüncü çözüm: Şimdi bu değeri başka bir yolla bulmaya çalışın. İpucu vereyim: Tepe açısı 36° olan bir ikizkenar üçgen çizip, aramaya başlayın!

Doğru cevap: A.

Örnek. $A = \sin 47^\circ - \sin 11^\circ + \sin 61^\circ - \sin 25^\circ$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin 3^\circ$ B) $\cos 3^\circ$ C) 1 D) $\sin 7^\circ$ E) $\cos 7^\circ$

Çözüm:

$$A = \sin 47^\circ - \sin 11^\circ + \sin 61^\circ - \sin 25^\circ$$
$$= (\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ)$$
$$= 2\cdot\sin 54^\circ\cdot\cos 7^\circ - 2\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 7^\circ$$
$$= 2\cdot\cos 7^\circ\cdot[\sin 54^\circ - \sin 18^\circ]$$
$$= 2\cdot\cos 7^\circ\cdot[\cos 36^\circ - \cos 72^\circ]$$
$$= 2\cdot\cos 7^\circ\cdot\frac{1}{2} = \cos 7^\circ$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{\sin 75^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) -2 D) $\sqrt{3}$ E) 2

2.

$$\frac{\sin 7x + \sin 9x}{\cos 7x + \cos 9x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $\cos 8x$ B) $\sin 3x$ C) $\tan 8x$
D) $2\cdot\tan 8x$ E) $\cot 8x$

3.

$$\frac{\cos x - \cos 3x + \cos 5x}{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $-\tan 3x$ B) $\tan 3x$ C) $-\cot 3x$
D) $\cot 3x$ E) $\cot 2x$

4.

$$1 + \sin 54^\circ$$

toplamının değeri kaça eşittir?

A) $2\cdot\sin^2 72^\circ$ B) $2\cdot\sin^2 18^\circ$ C) $2\cdot\sin^2 54^\circ$
D) $\sin^2 18^\circ$ E) $\sin^2 72^\circ$

5.

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

6.

$10x = \pi$ olduğuna göre

$$\frac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 7x + \cos 5x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) $\cos 5x$ C) $\tan 5x$ D) -1 E) $\cot 5x$

7.

$$\frac{\cos 4x + \cos 2x + 1}{\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $\tan 2x$ B) $\sec 2x$ C) $\csc 2x$ D) $\frac{1}{2}\csc 2x$ E) 1

8.

$14x = \pi$ olduğuna göre

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{2\cos^2 x \sin x - \sin x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 2 B) -2 C) -1 D) $\sin x$ E) $\sin 18^\circ$

9.

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ}$$

toplamının sonucu kaça eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{6}$

10.

$\sin 18^\circ = k$ olduğuna göre

$$\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ$$

farkının k türünden eşiti nedir?

A) $-k$ B) $-\frac{k}{2}$ C) $2k$ D) $\sqrt{k}$ E) $\frac{k}{2}$

1. A 2. C 3. D 4. A 5. D 6. D 7. D 8. A 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
$a+b=120^\circ$ olmak üzere

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos(\frac{a-b}{2})}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.

$$\frac{\sin 10^\circ-\sin 70^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 20^\circ}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 0 D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\sqrt{3}$

3.
$\cos 50^\circ = m$ olmak üzere,

$$\cos 10^\circ-\sin 20^\circ$$

ifadesinin sonucunun *m* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2m$ B) $-2m$ C) m D) $-m$ E) m^2

4.
$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y}=a$ olmak üzere,

$$\cot(\frac{x-y}{2})$$

ifadesinin *a* türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) a B) $2a$ C) $2a^2$ D) $-a$ E) $\sqrt{a}$

5.

$$\frac{\cos 20^\circ+\cos 100^\circ}{\cos 40^\circ}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$\frac{\frac{1}{2}+\sin 50^\circ}{(1-\cos 40^\circ)\cos 10^\circ}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\cot 20^\circ$ B) $2\tan 20^\circ$ C) $\cot 20^\circ$ D) $\tan 20^\circ$ E) $\cos 20^\circ$

7.

$$\cos^2 x-\cos^2 y=\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)-\frac{1}{2}$$

olduğu bilindiğine göre $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

8.

$$1-\sin 10^\circ$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin^2 40^\circ$ B) $\sin 80^\circ$ C) $\cos^2 40^\circ$
D) $\cos 80^\circ$ E) $\sin 40^\circ$

9.
$\sin 40^\circ = m$ olmak üzere,

$$\sin 80^\circ-\cos 70^\circ$$

ifadesinin sonucunun *m* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{m}{2}$ B) m C) $2m$ D) $4m$ E) m^2

10.
$\cot 10^\circ + 2\cdot\cos 10^\circ = m$ olmak üzere,

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 50^\circ}$$

ifadesinin sonucunun *m* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{m}$ B) $\frac{m}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2m}$ D) $\frac{2m}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{m}{2}$

1. B 2. D 3. C 4. D 5. C 6. A 7. E 8. A 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\sin 18^\circ + \sin 234^\circ$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

2.

$$\cos^2(x+y) - \sin^2(x-y)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos 2x \cdot \cos 2y$ B) $\cos x \cdot \cos y$ C) $\sin 2x \cdot \sin 2y$
D) $\sin x \cdot \sin y$ E) $\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2y$

3.

ABC üçgeninde, $m(A) = m(B) + 90^\circ$ olduğuna göre

$$\frac{a+b}{a-b}$$

oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cot\frac{C}{2}$ B) $\tan\frac{C}{2}$ C) $\cos\frac{C}{2}$ D) $\sin\frac{C}{2}$ E) $\csc\frac{C}{2}$

4.

$$\frac{\sin(a+b-c)+\sin(a-b+c)}{\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\tan(b-c)$ C) $\cot(b-c)$ D) $\tan a$ E) $\cot a$

5.

$$\sin 50^\circ - \frac{\cos^2 10^\circ}{\sin 50^\circ}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

6.

$$\frac{\sin 6^\circ + \sin 12^\circ + \sin 18^\circ}{1+\cos 6^\circ + \cos 12^\circ}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $2\sin 6^\circ$ B) $-2\sin 6^\circ$ C) -1 D) 1 E) 2

7.

$\sin x = \frac{1}{2}$ ve $\sin y = \frac{1}{3}$ olduğuna göre

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{12}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

8.

$$\sqrt{\frac{1-\sin 54^\circ}{1+\sin 54^\circ}}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cot 18^\circ$ B) $\cos 18^\circ$ C) $\tan 18^\circ$
D) $\sin 18^\circ$ E) $\sec 18^\circ$

9.

$\pi < x < 2\pi$ olmak üzere

$$A = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

olduğuna göre $\sqrt{A}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) $\tan\frac{x}{2}$ C) $-\tan\frac{x}{2}$ D) $2\tan\frac{x}{2}$ E) $-2\tan\frac{x}{2}$

10.

$T = \cos 72^\circ + 2\cdot\cos 144^\circ + 3\cdot\cos 216^\circ + 4\cdot\cos 288^\circ$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) $-\frac{3}{2}$ C) -1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{5}{2}$

1. B 2. A 3. A 4. D 5. E 6. A 7. B 8. C 9. B 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Ters Dönüşüm Formülleri

Adı üstünde dönüşüm formüllerinin tersleridir. Onlar toplamı çarpıma dönüştürüyordu, bunlar da çarpımı toplama dönüştürür. Ters dönüşüm formülleri, dönüşüm formüllerinden elde edilir, yani bunlar da eni sonu toplam ve fark formüllerine dayanıyor. Ezberlemeye çalışmayın, dönüşüm formüllerinden nasıl elde edildiğini anlayın yeter!

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

Bu formüller **Prosthaphaeresis formülleri** olarak anılır. Eşitliklerin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa ortaya çıkan eşitlikler **Werner formülleri** diye de bilinir.

Örnek. $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}$ *çarpımı kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Çözüm: İki türlü çözeceğiz.

Birinci yol. Dersimiz ters dönüşüm formülleri diye formülü kullanarak çözeceğiz ama ikinci çözüm daha güzeldir.

$$\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

İkinci yol. $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{1+4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ *oranı kaçtır?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ açılımını kullanmalıyız.

$$\frac{1+4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{1+4\cdot\left[-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)\right]}{\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{1-2\cdot(\frac{1}{2}-\cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ}=2.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$\tan(45^\circ+\alpha)+\tan(45^\circ-\alpha)$$

toplamıyla özdeştir?

A) $\csc 2\alpha$ B) $2\cdot\sec 2\alpha$ C) $\csc\alpha$ D) $2\cdot\sec\alpha$ E) 1

Çözüm: Önce toplama T deyip sonra tanjantı açalım.

$$T=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}+\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin 90^\circ}{\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left[\cos 90^\circ+\cos 2\alpha\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha}=2\cdot\sec 2\alpha$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $x-y=30^\circ$ *olduğuna göre* $\cot(x-2y)\cdot\cot(2x-y)$ *çarpımı kaçtır?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Hemen kotanjantları açalım.

$$\cot(x-2y)\cdot\cot(2x-y)=\frac{\cos(x-2y)\cdot\cos(2x-y)}{\sin(x-2y)\cdot\sin(2x-y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\cos(3x-3y)+\cos(-x-y)]}{-\frac{1}{2}[\cos(3x-3y)-\cos(-x-y)]}=\frac{\frac{1}{2}[0+\cos(-x-y)]}{-\frac{1}{2}[0-\cos(-x-y)]}=1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\frac{3}{16}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{16}$

Çözüm:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

olduğunu baştan hatırlatalım.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{4}$$

$\sin 60^\circ$ değerini zaten biliyoruz. Biz bulduğumuz bu değeri $\sin 80^\circ$ ile çarpalım.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin 70^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 10^\circ - \cos 150^\circ\right] - \frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Şimdi bu değeri $\sin 60^\circ$ yani $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ile çarpacağız.

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$ *çarpımı kaçtır?*

A) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Çözüm:

$\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$

olduğunu fark eder ve

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = = \frac{3}{16}$$

eşitliğini bir önceki soruda bulduğumuzu hatırlarsanız

$$\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ = \frac{\frac{3}{16}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) $-\frac{3}{16}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{16}$

Çözüm: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

olduğunu baştan hatırlatalım.

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 20^\circ + \cos 60^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ + \frac{1}{4}$$

$\cos 60^\circ$ değerini zaten biliyoruz. Biz bulduğumuz bu değeri $\cos 80^\circ$ ile çarpalım.

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 60^\circ + \cos 100^\circ\right] + \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \cos 100^\circ\right] + \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos 100^\circ + \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

Şimdi bu değeri $\cos 60^\circ$ yani $\frac{1}{2}$ ile çarpacağız.

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 80^\circ$ *olduğuna göre A sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

Çözüm:

$$A = \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 80^\circ$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}$$

şeklinde düzenleyelim.

$$A = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{16}} = 3$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$2\cdot\sin x\cdot\cos y$

ifadesinin özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ B) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)-\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

C) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ D) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

E) $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2.

$2\cdot\cos x\cdot\cos y$

ifadesinin özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ B) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)-\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

C) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ D) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

E) $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

3.

$2\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $\cos 20^\circ-\frac{1}{2}$ B) $\cos 20^\circ+\frac{1}{2}$ C) $\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\cos 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}-\cos 20^\circ$

4.

$\tan 20^\circ\cdot\tan 40^\circ\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 80^\circ$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$\tan 10^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 50^\circ\cdot\tan 70^\circ$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

6.

$x-y=36^\circ$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi

$\tan(3x-2y)\cdot\tan(2x-3y)$

işleminin sonucuna eşittir?

A) $\frac{\cos(x+y)-1}{\cos(x+y)-1}$ B) $\frac{\cos(x+y)+1}{\cos(x+y)-1}$ C) $\tan(x+y)$

D) $-\tan(x+y)$ E) $\frac{\sin(x+y)+1}{\sin(x+y)-1}$

7.

$$\sin(x-y)=\frac{1}{2}$$

$$\sin(x+y)=\frac{3}{4}$$

olduğuna göre $\sin x\cdot\cos y$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

8.

$$\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 10^\circ$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 0

9.

$$\frac{\sin 10^\circ+1}{2\cdot\cos 40^\circ}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos 40^\circ$ B) $\cos 50^\circ$ C) $\sin 40^\circ$ D) $\sin 50^\circ$ E) $\tan 40^\circ$

10.

$\cos 100^\circ=P$ ise

$\sin 80^\circ\cdot\sin 20^\circ$

çarpımının sonucunun P türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1+2P}{4}$ B) $\frac{1-2P}{4}$ C) $\frac{P}{4}$ D) $\frac{P}{2}$ E) $1-2P$

1. A 2. E 3. A 4. C 5. C 6. B 7. D 8. A 9. D 10. B

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Trigonometrik Fonksiyon Grafikleri

Önce en temel trigonometrik fonksiyonlar olan

$$y = \sin x \text{ ve } y = \cos x$$

fonksiyonlarının grafikleriyle derse başlayalım.

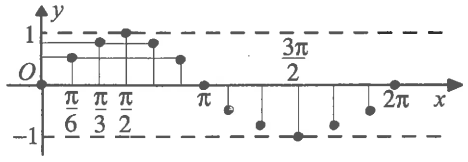
Sinüs Fonksiyonunun Grafiği.
Daha önceden bildiğimiz üzere, bir (x, y) ikilisi bir fonksiyonun kuralını sağlıyorsa, bu fonksiyonun grafiği (x, y) noktasından geçiyordur. O halde

$$y = \sin x$$

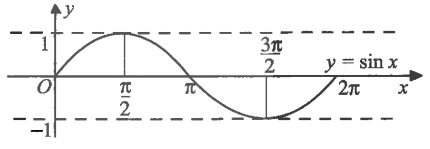
denklemini sağlayan bildiğimiz ikilileri, şekil az çok belirene kadar işaretleyelim. Yalnız şuna dikkat etmek gerekir, $\sin x$ yani y değeri bir reel sayıyken, x değeri bir açı ölçüsüdür. Açının derece cinsinden değerini belirten bir eksen şu ana kadar bilmediğimizden[1] radyan cinsi ölçüleri kullanacağız. Radyan değerler reel sayı belirttiğinden bu iş için x eksenini kullanabiliriz:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Hemen yukardaki $(x, y) = (x, \sin x)$ noktalarını analitik düzlemde işaretleyelim. Dar açıların, bütünlerleriyle aynı değerleri aldığını biliyoruz. III. ve IV. bölgelerde de eski değerlerin ters işaretlerini aldığını biliyoruz. Bunları işaretlersek,



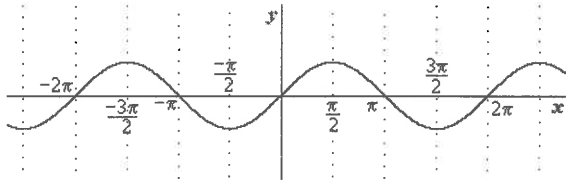
gibi bir grafikle karşılaşırız. Buradan nasıl bir şey olduğunu hala anlamayan varsa, onu zaten kimse kurtaramaz. Yine de biz çizelim:



[1] İstersek isteğimize uygun şekilde bu ekseni tanımlar ve kullanabiliriz.

Bu grafik çok önemli, x eksenine yılan gibi sarıldığını düşünerek, $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin bir yılan olduğunu söyleyeceğiz. Ayrıca açı ölçüsü 2π'den fazla veya 0'dan küçük olduğu zamanlar esas ölçü gereği fonksiyonun aynı davranacağını da biliyoruz. O halde $[0, 2\pi)$ aralığında çizmiş olduğumuz bu şekli her 2π'lik aralıkta aynen çizebiliriz, çizmeliyiz de.

O halde $y = \sin x$ için taslak şekil aşağıdaki gibi olmalıdır:

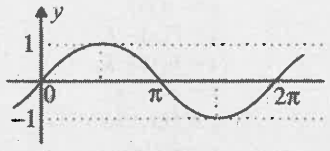


Grafiğimiz bitti. Şimdi bir başka açıdan grafiği irdeleyeceğiz.

Periyot. Matematiksel tanımı ilerde vereceğiz. Önce olayı anlayalım.
İşinizi gücünüzü bırakıp, evinizin elektrik sayacının başına dikilin. İçinde dönen bir zımbırtı var, gördünüz mü? Onu görmüşseniz arada sırada gözünüze çarpıp kaybolan siyah bantı da görmüşsünüzdür. Evde o an çok fazla elektrikli cihaz çalışmaktaysa, zımbırtı daha hızlı döner ve siz o siyah bantı daha sık aralıklarla görürsünüz. Aletlerin herhangi biri kapatılmadıktan ve yeni bir alet devreye girmedikten sonra da daha önce örneğin 3 saniyede bir gördüğünüz bantı hep 3 saniyede bir görürsünüz. Bu da zımbırtının bir dönüşünü o anda 3 saniyede yaptığını gösterir. Her 3 saniyelik zaman diliminde hep aynı hareketleri yapar. İşte buna zımbırtının o anki **periyodu** denir. Birkaç aletin çalışmasını durdurursanız, siyah bant artık örneğin 5 saniyede bir gözünüzün önünden geçer, o zaman o anki periyot 5 saniyedir denir.

Şimdi orijinden başlamak üzere, $y = \sin x$ fonksiyonu üzerinde bir karıncanın herhangi bir yöne doğru sabit hızla yürüdüğünü düşünün. x ekseni üzerindeki her 2π'lik aralıkta karınca hep aynı yolu yürüyormuş gibi hissetmez mi? Adına yılan dediğimiz o devrilmiş S harfine benzeyen şeklin hep ne kadarda bir aynı şekilde belirdiğini yani devrettiğini düşünün. Cevabınız 2π olacaktır. Sonuç olarak, $y = f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodu 2π'dir.

Örnek [1968 ÜSS].



Yukarıda grafiği çizilmiş olan fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \cos x$ B) $y = \sin x$ C) $y = \tan x$
D) $y = \sec x$ E) $y = \cot x$

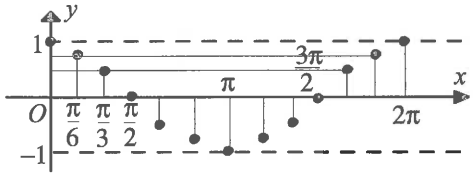
Çözüm: O kadar uğraştım ama çözemedim. İnşallah bu sene bu kadar zor soru sormazlar. ☺ Bari ÖSYM'nin verdiği cevabı vereyim.

Doğru cevap: B.

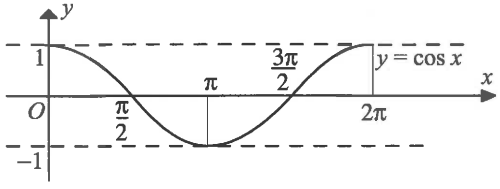
Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği. Şimdi $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizmeye başlayalım. sin x fonksiyonundaki uygulamaların aynısını yapacağız.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1

Hemen yukardaki $(x, y) = (x, \cos x)$ noktalarını analitik düzlemde işaretleyelim. II. ve III. bölgede ilk bölgeye göre zıt ama IV. bölgede aynı işareti aldığını biliyoruz. Bunları da işaretlersek,



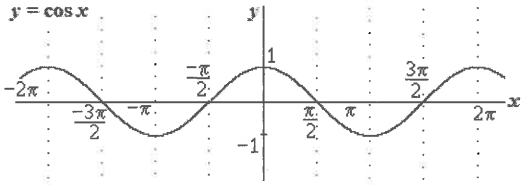
gibi bir grafikle karşılaşırız. Buradan grafiğin neye benzediğini anlamışsınızdır ama biz yine de verelim:



Bu grafik de çok önemli, bu da x eksenine yılan gibi sarılıyor ama sinüs grafiğiyle karışmasın diye buna başka isim bulalım. Grafiğin $[0, 2\pi)$ aralığındaki hali daha çok çanağa benzediğinden,

$y = \cos x$

grafiğine çanak yapıyor diyeceğiz. Ayrıca açı ölçüsü 2π'den fazla veya 0'dan küçük olduğu zamanlar esas ölçü gereği fonksiyonun aynı davranacağını da biliyoruz. O halde $[0, 2\pi)$ aralığında çizmiş olduğumuz bu şekli her 2π'lik aralıkta aynen çizebiliriz, çizmeliyiz de. O halde $y = \cos x$ için taslak şekil aşağıdaki gibi olmalıdır:



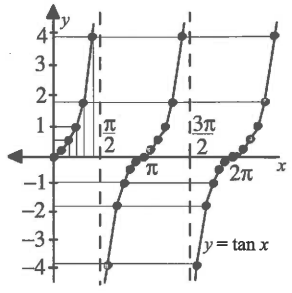
$y = \sin x$ grafiğinin, x ekseninin soluna doğru $\frac{\pi}{2}$ birim kaydırılmış halidir.

$y = \cos x$ grafiği de böylelikle çizilmiş oldu. Dikkat ettiyseniz, bu fonksiyon da her 2π'lik aralıkta çanak hareketini yapıyor. Dolayısıyla, $y = \cos x$ fonksiyonunun da periyodu 2π'dir.

Tanjant Fonksiyonunun Grafiği. Şimdi de $y = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Metot değişmiyor. Birkaç nokta yazalım hemen fonksiyonu sağlayan.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan x$	0	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

Hemen bu değerleri analitik düzlemde işaretleyeceğiz. Tabi bu kadar noktayla grafiğin neye benzediği anlaşılmaz da ben yazmaya üşendim. Bilinen diğer değerleri grafikte işaretleyince yandaki gibi bir şekil çıkar karşımıza.

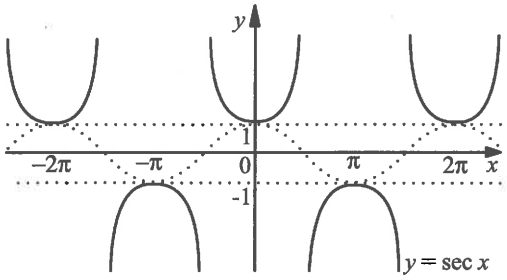


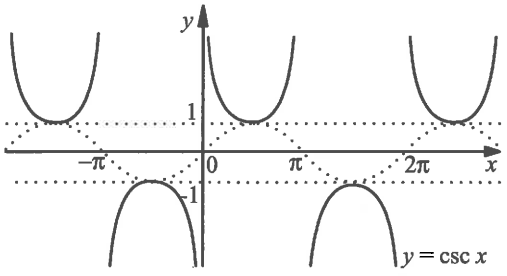
Tanjantın $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ değerleri için tanımsız olduğuna dikkat edin. Aslında $\frac{\pi}{2}$'nin tüm tek katlarında tanımsızdır.

$y = \cot x$ fonksiyonunun grafiğini de benzer şekilde çizebilirsiniz. Ama onda $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ değerlerinde tanımsızlık yaşanır. Anlayacağınız bir k tam sayısı için $x = k \cdot \pi$ değerlerinde tanımsız.

Ayrıca $y = \tan x$ fonksiyonu, ki $y = \cot x$ fonksiyonunda da böyledir, her 2π'lik aralıkta değil, her π'lik aralıkta aynı hareketi yapıyor yani devrediyor. Bundan dolayı $y = \tan x$ ve $y = \cot x$ fonksiyonlarının periyotları π'dir.

$y = \sec x$ ve $y = \csc x$ fonksiyonlarının grafiklerini detaylı vermeye gerek duymuyoruz. Çok merak eden didik didik edebilir, biz sadece grafiği vereceğiz.





Uyarı. $y = \sec x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğine π'nin katlarında, $y = \csc x$ fonksiyonunun grafiğinin de $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğine $\pi/2$'nin tek katlarında teğet olduklarına dikkat ediniz.

Diğer Trigonometrik Fonksiyonların Grafiği.

Her zaman fonksiyonumuz

$$y = \sin x,$$
$$y = \cos x,$$
$$y = \tan x$$

gibi sade olmaz. Bazen

$$y = 2\cdot\sin(x + 3),$$
$$y = -\cos(3x),$$
$$y = 5 + \tan^2 x,$$

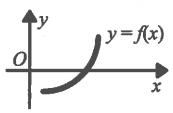
hatta bazen çok daha karışık halde de verilebilir.

Genel ifadeyle

$$y = a\cdot\sin^n(bx \pm c) \pm d$$

fonksiyonlarının çizimlerine değineceğiz. Siz bunu kılavuz kabul ederek cos, tan veya cot grafiklerini çizersiniz artık. Grafik çizmek, periyot bulmak için de birebirdir. Yoksa onun formülü, bunun formülü derken formüller altında kalırsınız.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun belli bir aralıktaki görüntüsü yandaki gibi, k reeli de pozitif olsun.

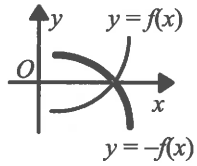


Aşağıda

$$y = -f(x),$$
$$y = f(x) - k,$$
$$y = f(x) + k,$$
$$y = f(x - k),$$
$$y = f(x + k),$$
$$y = k\cdot f(x),$$
$$y = f(k\cdot x),$$
$$y = |f(x)|,$$
$$y = f^n(x)$$

fonksiyonlarının grafiklerini bulacaksınız.

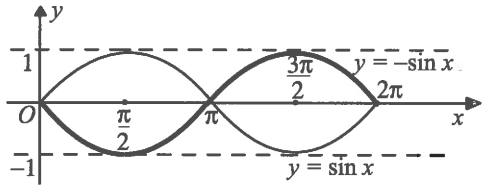
$y = -f(x)$ grafikleri. En kolay olan bu olsa gerek. $y = f(x)$ iken fonksiyon herhangi x değerleri için hangi y değerlerini alıyorsa, şimdi onların ters işaretlilerini alacak.



Anlayacağınız fonksiyon grafiğinin x eksenine göre simetriğini çizeceğiz.

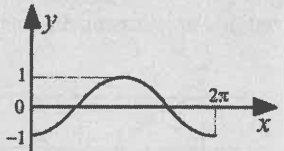
Örnek. *$y = -\sin x$ fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ aralığında çizerek periyodunu bulunuz.*

Çözüm: Hemen $y = \sin x$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriğini çizelim, olsun bitsin:



Anladığınız üzere, fonksiyonun periyodu da değişmiyor, periyot hala 2π.

Örnek. *$[0, 2\pi]$ aralığındaki görüntüsü verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



A) $\cos x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$ D) $-\sin x$ E) $\cos(-x)$

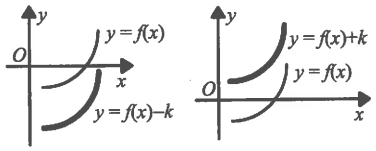
Çözüm: $[0, 2\pi]$ aralığında bir ters çanak görmekteyiz. Demek ki birileri cos x fonksiyonunun grafiğini ters çevirmiş yani x eksenine göre simetriğini almış. Biliyorsunuz ki bu hareketi, fonksiyonu "$-$" ile çarpmak yapar. O halde grafik

$$y = -\cos x$$

fonksiyonuna ait olmalıdır, daha doğrusu olabilir.

Doğru cevap: B.

$y = f(x) \pm k$ grafikleri. Tanım kümesinin değişmeyeceğine dikkat edin ama görüntü kümesi yani $y = f(x)$ değerleri her x noktasında eskisine göre ya k eksik olacak ya da k fazla.



$$y = f(x) - k$$

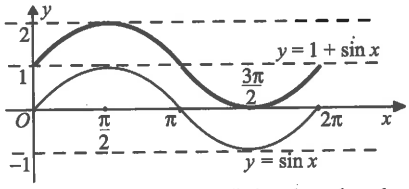
grafiği, eskisinin k birim aşağı doğru kaymış hali,

$$y = f(x) + k$$

grafiği de $y = f(x)$ grafiğinin k birim yukarıya doğru kaymış hali olur.

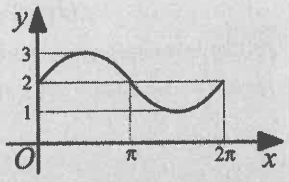
Örnek. $y = 1 + \sin x$ *fonksiyonunun grafiğini* $[0, 2\pi]$ *aralığında çizerek, periyodunu bulunuz.*

Çözüm: Fonksiyon $y = \sin x$ iken y hangi değerleri alıyorsa şimdi hep 1'er fazlasını alacak. Dolayısıyla, grafiği y ekseninde 1 birim yukarıya doğru kaydırmak bize yetecek.



Anlamış olduğunuz üzere, grafiği yukarı kaydırmak, periyoda etki etmiyor. Benzer şekilde aşağı kaydırsaydık da periyot hala 2π olacaktı.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



A) $1 + \sin x$ B) $2 + \sin x$ C) $\sin(x + 2)$
D) $3 \cdot \sin x$ E) $1 + 2 \cdot \sin x$

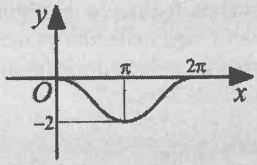
Çözüm: Bu yılan hareketi bize sinüs fonksiyonunu hatırlatmalı. $y = \sin x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından değerler alır ama bu fonksiyon $[1, 3]$ aralığından değerler almış. Anlayacağınız birileri $\sin x$'e 2 eklemiş.
O halde grafik

$$y = 2 + \sin x$$

fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



A) $\cos x - 1$ B) $1 - \cos x$ C) $\cos(x - 1)$
D) $\cos x - 2$ E) $2 - \cos x$

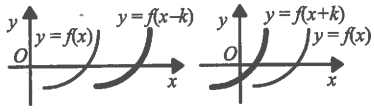
Çözüm: Çanak şeklindeki grafik bize kosinüsü hatırlatıyor. $y = \cos x$ fonksiyonunun alabileceği en küçük ve en büyük değerler -1 ve 1 ama bu fonksiyonun -2 ve 0 olduğundan anlıyoruz ki birileri cos x'ten 1 çıkarmış. O halde grafik

$$f(x) = \cos x - 1$$

fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: A.

$y = f(x \pm k)$ grafikleri. Bu sefer de görüntü kümesi değişmiyor yani y'ler yerinde duruyor ama tanım kümesindeki her eleman ya k birim artıyor ya da k birim azalıyor.



$$y = f(x - k)$$

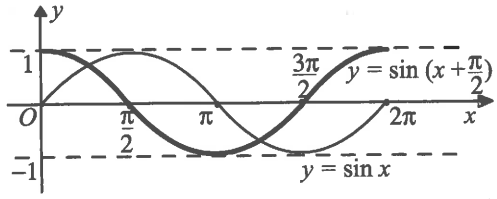
grafiği, $y = f(x)$ grafiğinin x ekseni boyunca k birim sağa kaymış halidir,

$$y = f(x + k)$$

grafiği de k birim sola kaymış hali olur.

Örnek. $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *fonksiyonunun grafiğini* $[0, 2\pi]$ *aralığında çiziniz.*

Çözüm: Grafiği x ekseni üzerinde $\pi/2$ birim sola doğru kaydırmak gerekir.
Unutmayın ki, $y = \sin(x - \pi/2)$ olsaydı sağa doğru $\pi/2$ birim kaydıracaktık.



Kaydırma sonucunda üstteki gibi, bize bayağı tanıdık gelen, bu grafiği buluruz. Bu grafik tam da

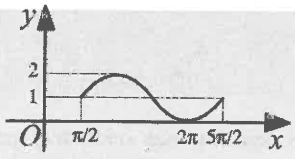
$$y = \cos x$$

fonksiyonunun grafiği değil midir? E zaten

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\text{'dir.}$$

Ayrıca fonksiyon grafiğini, kaç birim olursa olsun, sola veya sağa hatta alta ve üste kaydırmanın fonksiyonun periyodunu değiştirmediğini de anlamış olmalısınız. Yoksa anlamadınız mı?

Örnek. $[\pi/2, 5\pi/2]$ *aralığında çizilmiş yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $\sin x + 1$ B) $\sin(x - \pi/2) + 1$ C) $\sin(x - \pi/2)$
D) $1 + \sin(x + \pi/2)$ E) $2\cdot\sin(x - \pi/2)$

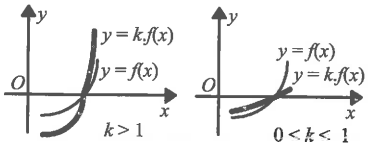
Çözüm: x ekseni üzerinde $\pi/2$ birimlik sağa kaymayı $\sin(x - \pi/2)$ ile halledeceğiz. Diğer yandan 1 birimlik yukarı kaymayı da fonksiyona 1 ekleyerek halledeceğiz. O halde fonksiyonun denklemi

$$f(x) = \sin(x - \pi/2) + 1$$

olabilir.

Doğru cevap: B.

$y = k\cdot f(x)$ grafikleri.
Yine tanım kümesinin elemanları değişmiyor ama görüntü değerleri k katına çıkıyor.



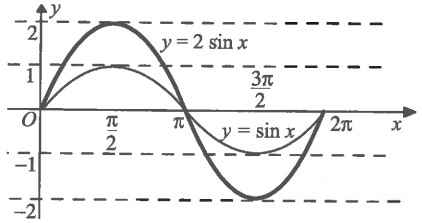
0'ın k katı da 0 olduğundan, x eksenini kestiği yer değişmez. $k > 1$ iken görüntü kümesinin bulunduğu aralığın sınırları büyür ama $0 < k < 1$ iken sınırlar küçülür.

Örnek.

$$y = 2\cdot\sin x$$

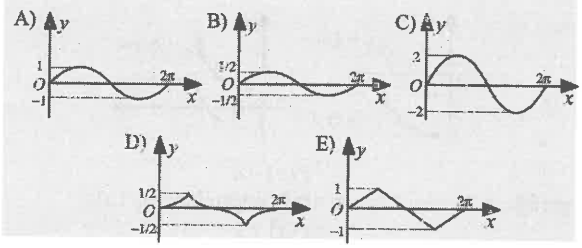
fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ *aralığında çiziniz.*

Çözüm: Alt şekilde de görüldüğü üzere tanım kümesi değişmez. Ayrıca $\sin x = 0$ olduğu zamanlar $2\cdot\sin x$ değeri de 0 olacağından kökler de değişmez. Ama $\sin x = m$ olduğundan $2\cdot\sin x = 2m$ olacağından görüntü kümesinin elemanları 2'şer katına çıkar.



Ayrıca bu durumda periyodun değişmediğini de not düşün. Eskiden de 2π idi hala 2π.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığında çizilmiş aşağıdaki grafiklerden hangisi* $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ *fonksiyonunu aittir?*



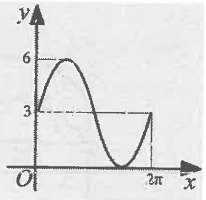
Çözüm: $\sin 2\theta = 2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$ olduğu hatırlanırsa

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$$

olur ki, $\sin x$ fonksiyonunun alabileceği minimum ve maksimum değerler 1/2 katına çıkar ama periyot değişmez.

Doğru cevap: B.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığında çizilmiş yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $\sin x + 3$ B) $3\cdot\sin x + 3$
C) $3\cdot\sin x + 5$ D) $\sin x + 6$
E) $\sin(3x) + 3$

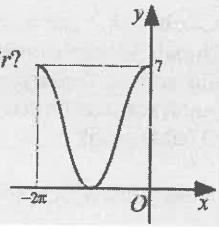
Çözüm: Sinüs fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından değerler aldığından grafiğinin kalınlığı 2 birimdir. Ama bu grafiğin kalınlığı 6 birim olduğundan anlıyoruz ki $\sin x$ değerleri 3'le çarpılmış. Diğer yandan $3\cdot\sin x$ fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığından değerler alır, burada bu aralığın 3'er fazlalarının olduğunu görüyoruz. Demek ki fonksiyonumuz

$$f(x) = 3\cdot\sin x + 3$$

olabilir.

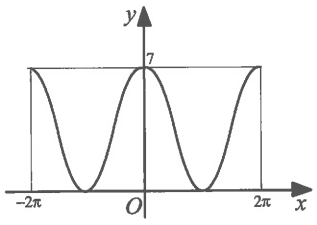
Doğru cevap: B.

Örnek. $[-2\pi, 0]$ *aralığında çizilmiş yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $\cos(x + 2\pi) + 7$ B) $7 + \cos x$
C) $7/2 + \cos x$ D) $7\cdot\cos x$
E) $\frac{7}{2}\cdot\cos x + \frac{7}{2}$

Çözüm: Bu çanak şekli aklımıza kosinüs fonksiyonunu getiriyor. Her ne kadar x ekseni üzerinde 2π birim sola kaymış gibi görünse de periyot 2π olduğundan kayma yokmuş gibi davranabiliriz. Yani $[-2\pi, 0]$ aralığındaki grafik neyse $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafik de aynıdır. Fakat kalınlık 7 birime çıktığından cos x değeri 7/2 ile çarpılmıştır. Hatta sonra da 7/2 birim yukarı doğru kayma olmuştur. Olası denklem

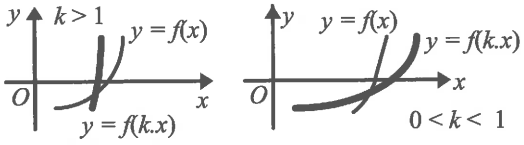


$$f(x)=\frac{7}{2}\cdot\cos x+\frac{7}{2}$$

şeklindedir.

Doğru cevap: E.

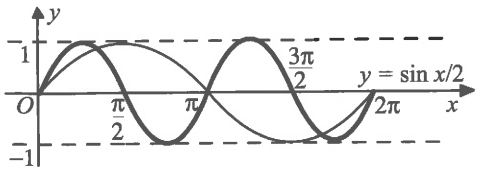
$y = f(k\cdot x)$ grafikleri. y değerleri değişmediğinden görüntü kümesi değişmez ayrıca $x = 0$ olsa $k\cdot x = 0$ olacağından grafiğin y eksenini kestiği nokta da bir değişiklik olmaz.



Olan tanım kümesinin sınırlarına olur. Eğer $k > 1$ ise tanım aralığı $1/k$'sına düşer, $0 < k < 1$ ise k katına çıkar.

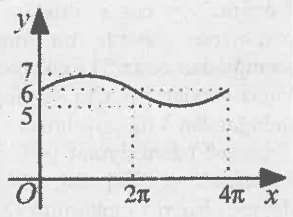
Örnek.
$$y = f(x) = \sin 2x$$
fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ *aralığındaki grafiğini çiziniz.*

Çözüm: Bir kere görüntü kümesi değişmez yani y'ler hala $[-1, 1]$ aralığında olacaktır. Önceden $y = \sin x$ fonksiyonunda $x = \pi/2$ iken $y = 1$ oluyordu ama şimdi $y = \sin 2x$ fonksiyonunda $x = \pi/4$ iken $y = 1$ olacak.



Anlayacağınız grafik tam yarısına sıkışır. Periyot önceden 2π iken π'ye düşer.

Örnek.
$[0, 4\pi]$ aralığındaki görüntüsü verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $\sin(2x) + 6$ B) $\sin(x/2) + 7$ C) $6\cdot\sin(x/2)$
D) $\sin(x/2) + 6$ E) $3\cdot\sin(x/2) + 3$

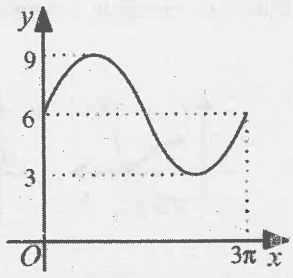
Çözüm: Periyot 4π'ye çıktığından $\sin(x/2)$ ile ilgilenmeliyiz. Diğer yandan minimum ve maksimum değerler -1 ve 1 olması gerekirken 5 ve 7 olduğundan 6 birim yukarı kaydığını fark etmeliyiz. O halde grafik

$$f(x) = \sin(x/2) + 6$$

fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $[0, 3\pi]$ *aralığında çizilmiş yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $3\cdot\sin(\frac{2}{3}x)+6$

B) $\sin(\frac{3}{2}x)$

C) $3\cdot\sin(\frac{3}{2}x)+3$ D) $3\cdot\sin(\frac{3}{2}x)$ E) $\sin(\frac{3}{2}x)+6$

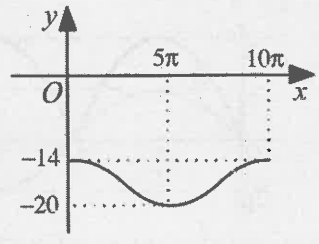
Çözüm: Bu yılan hareketi bize sinüs fonksiyonunu hatırlatıyor. Enine kalınlığın 2, boyuna kalınlığın 2π olması gerekirken burada enine kalınlık 6 ve boyuna kalınlık 3π olmuş. Demek ki sin x fonksiyonu yatayda ve dikeyde sünmüş. Önce yatayda sünmeyi $\frac{\pi}{4}$ ile halledelim. Dikeyde sünmeyi de 3 ile çarparak hallederiz. Diğer yandan 6 birim de yukarı çıkmalıyız. O halde grafik

$$f(x)=3\cdot\sin(\frac{2}{3}x)+6$$

fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $[0, 10\pi]$ *aralığında çizilmiş yandaki grafik aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $\cos(x/5) - 20$ B) $\cos(x/5) - 19$ C) $3\cdot\cos(x/5) - 15$
D) $3\cdot\cos(x/5) - 17$ E) $3\cdot\cos(5x) - 17$

Çözüm: $y = \cos x$ fonksiyonu çanak hareketini 2π'lik aralıklarda yapardı, bu fonksiyon 10π'lik aralıklarda yaptığından $\cos(x/5)$ fonksiyonuyla bir akrabalığı olmalı. Diğer yandan $\cos x$'in kalınlığı 2 birimdi, bunun 6 birim olduğundan 3 ile çarpılmalı.

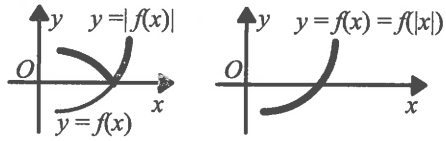
$3\cdot\cos(x/5)$ fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığından değerler alır fakat bizim grafik $[-20, -14]$ aralığından değerler almış, demek birileri 17 çıkarmış. O halde grafik

$$f(x) = 3\cdot\cos(x/5) - 17$$

fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: D.

$y = |f(x)|$ grafikleri. İlk fonksiyon grafiğinde y'ler bir mutlak değerli fonksiyona eşit olduklarından negatif olamazlar, bundan dolayı y'nin aldığı tüm negatif değerleri pozitife çevirerek çizmeliyiz, x eksenine göre simetriğini çizin, dediğimi yapmış olursunuz.



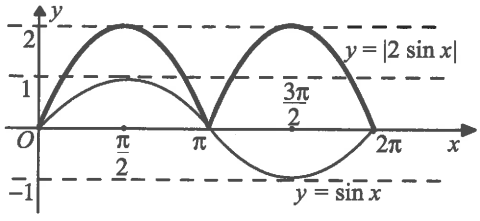
İkinci fonksiyonda ise, eğer $x = -2$ olsaydı bile $f(-2)$'yi değil, (2)'yi hesaplayıp işaretlemeliydik, çünkü x'ler mutlak değer içine alınmış. Burada grafiği verilen fonksiyonda zaten tüm x'ler pozitif olduğundan grafikte bir değişiklik olmayacaktır.

Örnek.

$$y = |2\cdot\sin x|$$

fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ *aralığında çizerek, periyodunu belirleyiniz.*

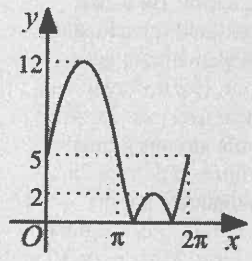
Çözüm: $y = 2\cdot\sin x$ fonksiyonunun grafiğini biraz önce çizmiştik. Orada y değerleri negatif de olabiliyordu ama şimdi mutlak değerden dolayı $y = 2\cdot\sin x$ fonksiyonunda y'nin aldığı negatif değerleri rakamını değiştirmeden pozitife değiştireceğiz.



Aynı tümsekten 2 tane olduğundan önceden 2π olan periyot π'ye düşmüştür. Çünkü her π aralıkta bu tümsek şekli çizilecektir.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $|7\cdot\sin x + 5|$
B) $|7\cdot\sin x| + 5$
C) $|5\cdot\sin x + 7|$
D) $|5\cdot\sin x| + 7$
E) $7\cdot\sin^2 x + 5$



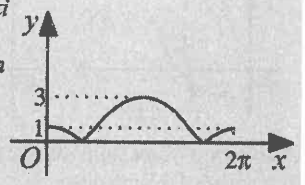
Çözüm: Grafik yılana da çanağa da benzemediğinden yine mutlak değer fonksiyonuyla işimiz olacağını seziyoruz. $(\pi, 2\pi)$ aralığındaki tümseği ters çevirirsek yani x eksenine göre simetriğini alırsak bir sinüs fonksiyonu grafiğiyle karşılaşırız. Kalınlığı 14 birim olduğundan $7\cdot\sin x$ aklımıza gelmeli, diğer yandan 5 birim de yukarı doğru kayacağız. Son olarak mutlak değer alırsak x ekseninin altında kalan küçük tümsek de ters dönerek soru-daki grafiği oluşturur. O halde grafik

$$f(x) = |7\cdot\sin x + 5|$$

fonksiyonuna ait olabilir.

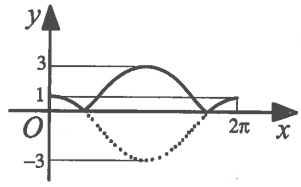
Doğru cevap: A.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



A) $|2\cdot\cos x|$ B) $|\cos x - 1|$ C) $|2\cdot\cos x - 1|$
D) $|2\cdot\cos x - 2|$ E) $2\cdot\cos^2 x - 1$

Çözüm: Grafik ne sinüse, ne kosinüse, ne de bildiğimiz başka bir fonksiyonun grafiğine benziyor. Şimdi ufak bir alicengiz oyunu yapalım. Ortadaki tümseği ters çevirelim yani x eksenine göre simetriğini çizelim.



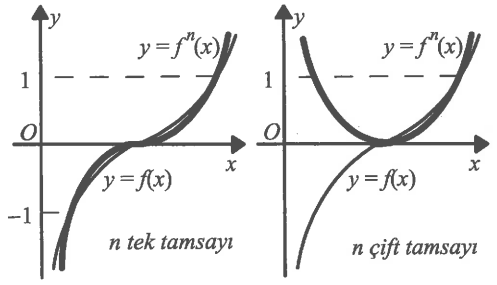
Bakın, şimdi bir kosinüs grafiğine benzedi. Kalınlığı 4 birim olduğundan $\cos x$'in 2'yle çarpıldığını anladık. Ama o zaman $[-2, 2]$ aralığında olurdu, demek ki bir de 1 çıkarmışlar $2\cdot\cos x$'ten. Şimdi grafiğin x ekseni altında noktalı olarak çizdiğimiz kısmı geri yukarıya çevirmek için mutlak değer almak yetecek. Grafik için olası fonksiyon denklemi

$$f(x) = |2\cdot\cos x - 1|$$

şeklindedir.

Doğru cevap: C.

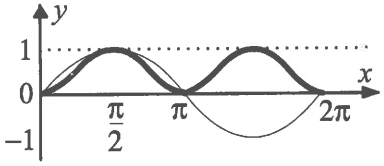
$y = f^n(x)$ grafikleri. n'nin 1'den farklı bir tam sayı olduğunu düşünüyoruz elbet. $n = 1$ ise grafik zaten çizilmiş durumda. Ayrıca n'yi pozitif alacağız. n'nin negatif olma durumunu grafik dersi bittikten sonra fonksiyon tersleri dersinde öğreneceğiz. Bir de n'yi tek ve çift diye iki ayrı kolda incelemek gerekecek, çünkü grafikleri değişiklik arz ediyor.



k bir tam sayı olmak üzere, $f^{2k-1}(x)$ ve $f^{2k}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri üstte çizilmiş durumda. Dikkat edilmesi gereken iki nokta var gibi görünüyor. Birincisi n çiftken y değerleri negatif olamıyor ama tekken olurlar. İkinci nokta da (0, 1) aralığındaki sayıların yani pozitif basit kesirlerin kareleri, küpleri kendilerinden daha küçüktür. Bundan dolayı (0, 1) aralığında $f^n(x)$'in grafiği $f(x)$'in altında kalır.

Örnek. *$y = \sin^2 x$ fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ aralığında çizerek, periyodunu belirleyiniz.*

Çözüm: Bir kere y ekseninin altına grafik inmemeli. $[\pi, 2\pi]$ aralığındaki $y = \sin x$ grafiğini yukarı çevireceğiz, $[0, \pi]$ aralığında da $y = \sin x$'e göre daha dar bir grafik olup, onun altında olmalıdır. 1'in karesi yine 1 olduğundan tümseğin tepe noktası değişmez.



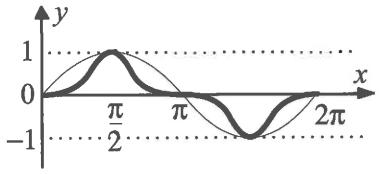
$y = \sin x$ fonksiyonunun tümseğinden daha dik bir tümsek (ama yüksekliği aynı) her π aralıkta devrettiğinden, eski periyot olan 2π, şimdi π oldu.

Örnek.

$$y = \sin^3 x$$

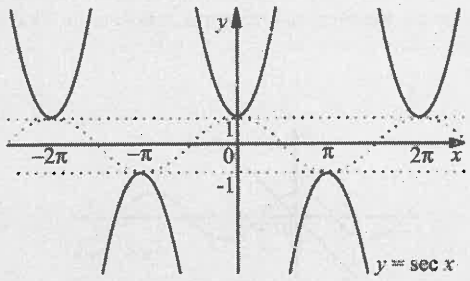
fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ aralığında çizerek periyodunu belirleyiniz.

Çözüm: Bir reel sayının küpü negatif de olabileceğinden üstteki ilk şıkkı incelemeye gerek yok, sadece daha dik tümsekler yapsak yetecek.



$y = \sin^2 x$ fonksiyonundan ayrı olarak burada periyodun değişmediğine dikkat ediniz, hala 2π.

Örnek.



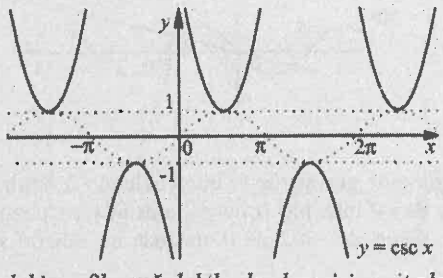
Yukardaki grafik aşağıdakilerden hangisine ait olabilir?

A) $\sec^2 x$ B) $\sec^3 x$ C) $\csc x$ D) $\csc^2 x$ E) $\csc^3 x$

Çözüm: Grafik $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ aralıklarından değerler aldığından sec veya csc fonksiyonu grafiği olduğunu, noktalı grafikten de cos fonksiyonunun tersi olduğunu, yani sec fonksiyonu olduğunu anlıyoruz. Negatif değerler de aldığından $\sec^2 x$ olamaz, o halde grafik $\sec^3 x$ fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek.



Yukardaki grafik aşağıdakilerden hangisine ait olabilir?

A) $\sec x$ B) $\sec^2 x$ C) $\sec^3 x$ D) $\csc^2 x$ E) $\csc^3 x$

Çözüm: Grafik $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ aralıklarından değerler aldığından sec veya csc fonksiyonu grafiği olduğunu, noktalı grafikten de sin fonksiyonunun tersi olduğunu, yani csc fonksiyonu olduğunu anlıyoruz. Negatif değerler de aldığından $\csc^2 x$ olamaz, o halde grafik $\csc^3 x$ fonksiyonuna ait olabilir.

Doğru cevap: E.

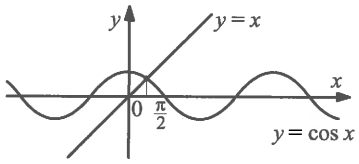
Grafik Yardımıyla Kök İncelemesi. Dilimiz döndüğünce anlatmaya çalıştığımız trigonometrik fonksiyon grafikleri gerçekten çok önem taşır. Sadece trigonometrik olanlar değil, tüm fonksiyonların grafiklerini mümkün mertebe bilmeliyiz. Bir fonksiyonun grafiğinin, bırakın nasıl olduğunu bilmeyi, sadece neye benzediğini bilmek bile çoğu zaman işe yarar.

Örneğin

$$x = \cos x$$

denklemini sağlayan kaç reel sayı olduğunu grafik yardımıyla hemencecik söyleyebiliriz.

Bunun için $y = x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizmek yeter. Kaç yerde kesişiyorlarsa o kadar kök vardır deriz. Kesişim noktalarının apsisleri de bize kökleri verir.

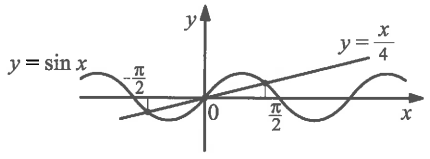


Gördüğünüz gibi tek noktada kesişiyorlar. Kesiştikleri noktanın apsisi kaç bilmiyoruz ama 0 ile $\pi/2$ arasında bir sayı olduğu görülüyor.

Bir örnek daha çözelim.

$$\sin x = \frac{x}{4}$$

denklemini sağlayan kaç x reel sayısı olduğunu bulalım.



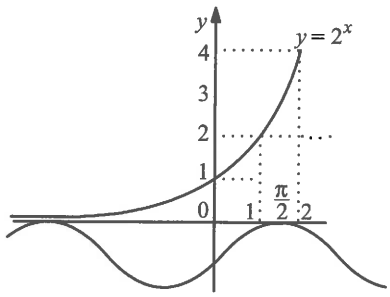
Bu grafikte de görüyoruz ki bu denklemin 3 farklı kökü varmış. Biri 0'mış, biri 0 ile $\pi/2$ arasında bir pozitif sayıymış, diğeri de $-\pi/2$ ile 0 arasında bir negatif sayıymış.

Grafikler sadece denklemi çözmeye değil, denklemi sağlayan değer olmadığını göstermeye de birebirdir.

Örneğin

$$2^x = \sin x - 1$$

denkleminin gerçel sayılarda çözüm kümesinin sorulduğunu düşünelim. $y = 2^x$ ve $y = \sin x - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

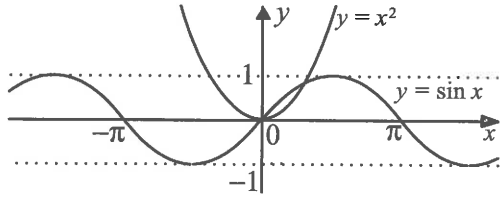


Grafikler kesişmediği için 2^x ile $\sin x - 1$ değerlerini eşit yapan bir x reel sayısının olmadığını söyleriz. Yani çözüm kümesi boşmuş!

Örnek. $x^2 = \sin x$ *denkleminin kaç reel kökü vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Hemen $y = x^2$ ve $y = \sin x$ eğrilerini çizelim. Bakalım kaç yerde kesişiyorlar?



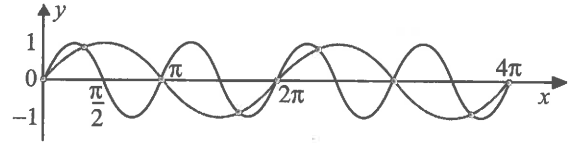
Grafikten de görüldüğü üzere biri 0 diğeri de kaç olduğunu bilmediğimiz ama pozitif olan başka bir kökü daha vardır. Yani toplam 2 tane.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin 2x = \sin x$ *denkleminin* $[0, 4\pi]$ *aralığında kaç reel kökü vardır?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 9 E) Sonsuz çoklukta

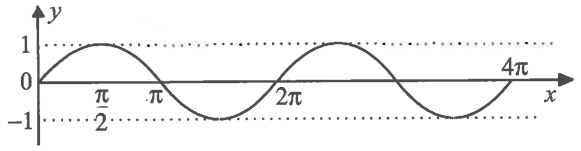
Çözüm: Hemen $y = \sin 2x$ ve $y = \sin x$ eğrilerini çizelim. Bakalım bunlar kaç yerde kesişiyorlar?



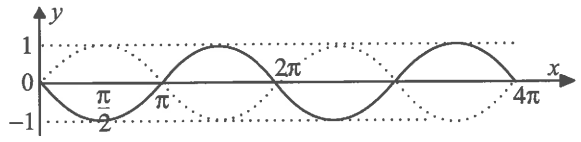
Grafikten de görüldüğü üzere iki grafik birbirini tam 9 yerde kesmektedir. O halde bu denklemin $[0, 4\pi]$ aralığında tam 9 tane reel kökü vardır. .

Doğru cevap: D.

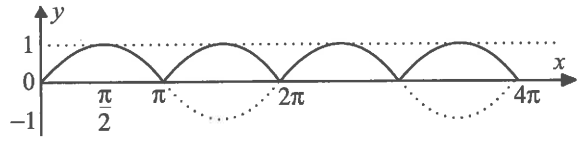
Trigonometrik fonksiyonların grafikleri dersine noktayı koyarken, bir fonksiyon kuralına yapılan işlemlerin grafiklerdeki etkilerini tekrar bir özetleyelim. Örnek olarak $y = \sin x$ aldık.



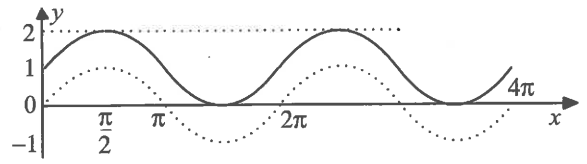
$y = \sin x = \sin|x|$



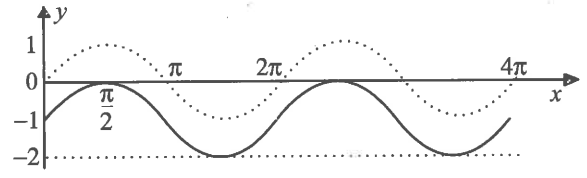
$y = -\sin x$



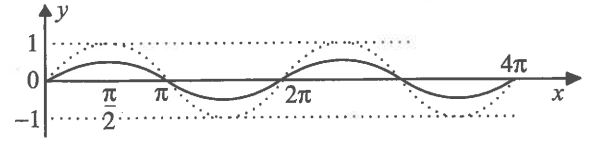
$y = |\sin x|$



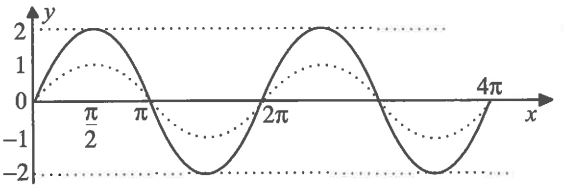
$y = 1 + \sin x$



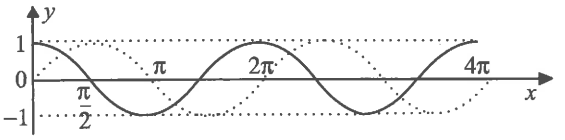
$y = \sin x - 1$



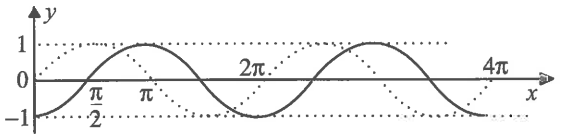
$y = \frac{1}{2}\sin x$



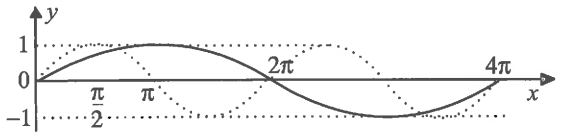
$y = 2\sin x$



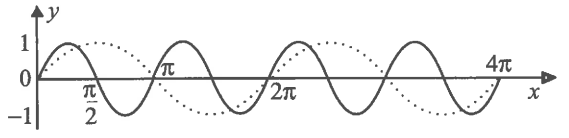
$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$



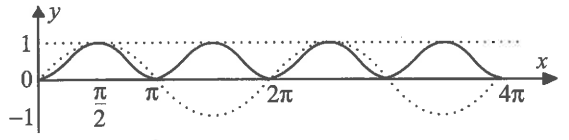
$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$



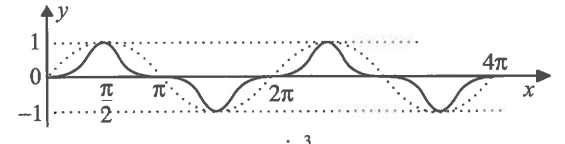
$y = \sin\frac{x}{2}$



$y = \sin 2x$



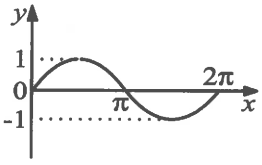
$y = \sin^2 x$



$y = \sin^3 x$

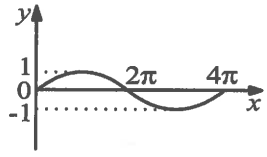
CEVAPLI TEST 1

1.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



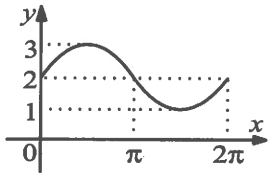
A) $y = \sin x$ B) $y = \cos x$ C) $y = \sin 2x$
D) $\sin\frac{x}{2}$ E) $\cos\frac{x}{2}$

2.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



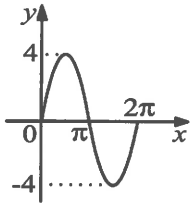
A) $y = \sin x$ B) $\sin\frac{x}{2}$ C) $y = \sin\frac{x}{2}$
D) $y = \cos 2x$ E) $y = \cos\frac{x}{2}$

3.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y = \sin x$ B) $y = 1 + \sin x$ C) $2 + \sin x$
D) $\sin(x + 2)$ E) $y = 2 \sin x$

4.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

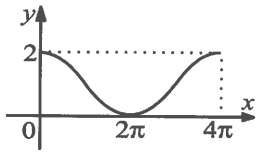


A) $y = \sin 4x$ B) $y = \sin\frac{x}{4}$
C) $y = \sin(x + 4)$ D) $y = 4 \cdot \sin x$
E) $y = 4 + \sin x$

5.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiği y eksenine göre simetriktir?

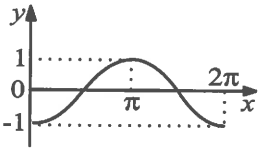
A) $y = \sin 2x$ B) $y = \tan(x + 1)$ C) $y = \cot 3x$
D) $y = 5 + \cos x$ E) $y = 3 \cdot \csc x$

6.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



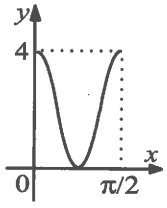
A) $y = \cos\frac{x}{2}$ B) $y = 2\cos\frac{x}{2}$ C) $y = \cos\frac{x}{2} - 1$
D) $y = 1 + \cos\frac{x}{2}$ E) $y = 1 + \cos 2x$

7.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



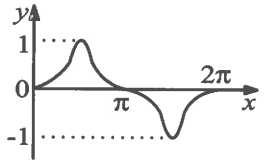
A) $y = -\sin x$ B) $y = -\cos x$ C) $y = |\sin x|$
D) $y = \cos(-x)$ E) $y = \sin(-x)$

8.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y = 4 + \cos 4x$ B) $y = \cos 2x$
C) $y = 2 + \cos 2x$ D) $y = \cos 4x$
E) $y = 2 + 2\cos 4x$

9.
Yanda grafiği çizilmiş olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y = \sin^4 x$ B) $y = \sin^5 x$ C) $y = \sin^6 x$
D) $y = \sin^8 x$ E) $y = \sin^{10} x$

10.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiği orijine göre simetrik değildir?

A) $y = \sin 2x$ B) $y = \tan(x + \pi)$ C) $y = 5 \cdot \sec x$
D) $y = \sin x \cdot \cos x$ E) $y = 3 \cdot \csc x$

1. A 2. C 3. C 4. D 5. D 6. D 7. B 8. E 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Periyot Bulma

Grafikler üzerinde ne olduğunu anlatmaya çalıştığımız periyodun şimdi matematiksel tanımını vereceğiz.

Bir f fonksiyonu için

$$f(x) = f(x+T)$$

eşitliğini sağlayan pozitif bir T reel sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T'ye de **f fonksiyonunun bir periyodu** denir. Bu T'lerin varsa en küçüğüne de **f fonksiyonunun esas periyodu** denir.

Örneğin, her x için

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \ldots$$

eşitliği doğru olduğundan $f(x) = \sin x$ periyodik bir fonksiyon olup, 2π de, 4π de, 6π de $\sin x$ fonksiyonunun bir periyodudur. Genel olarak, n bir tamsayıysa $2n\pi$ periyottur. O halde 2π de esas periyottur. Grafik çizerek belirlediğimiz periyotları artık, çıkardığımız dersler ışığında, şu kurallar altında toplayabiliriz:

a, b, c, d reel sayılar, n pozitif tam sayı ve ilgili fonksiyonun esas periyodu da T olsun.

$$f(x) = a\cdot\sin(bx+c)+d \text{ ise } T = \frac{2\pi}{|b|},$$

$$f(x) = a\cdot\tan(bx+c)+d \text{ ise } T = \frac{\pi}{|b|},$$

$$f(x) = a\cdot\sin^{2n}(bx+c)+d \text{ ise } T = \frac{\pi}{|b|},$$

$$f(x) = a\cdot\sin^{2n-1}(bx+c)+d \text{ ise } T = \frac{2\pi}{|b|},$$

$$f(x) = a\cdot\tan^{n}(bx+c)+d \text{ ise } T = \frac{\pi}{|b|},$$

$$f(x) = [a\cdot\sin(bx+c)+d]^{n} \text{ ise } T = \frac{2\pi}{|b|},$$

$$f(x) = [a\cdot\tan(bx+c)+d]^{n} \text{ ise } T = \frac{\pi}{|b|}.$$



Periyot bulurken sin fonksiyonu için sağlanan eşitliklerin tamamı cos fonksiyonu için de geçerlidir. Benzer şekilde tan fonksiyonu için sağlanan eşitlikler de cot fonksiyonu için sağlanır.

Örnek. $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan,*

$f(x) = 3$
$g(x) = 2x+5$
$h(x) = x^2$
$m(x) = \sin x$
$n(x) = \ln x$

fonksiyonlarından kaç tanesi periyodiktir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Her T pozitif reel sayısı için $f(x) = f(x+T) = 3$ eşitliği sağlanacağından $f(x) = 3$ fonksiyonu periyodiktir. Diğer yandan $\sin x = \sin(x+T)$ eşitliği de, T değeri 2π'nin katı olduğu sürece doğru olacağından $m(x) = \sin x$ fonksiyonu da periyodiktir.

$$2x+5 = 2(x+T)+5$$
$$x^2 = (x+T)^2$$
$$\ln x = \ln(x+T)$$

eşitlikleri sadece $T = 0$ için sağlanacağından ve bu değer de pozitif olmadığından $g(x)$, $h(x)$ ve $n(x)$ fonksiyonları periyodik değildir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi periyodik değildir?*

A) $y = 3$ B) $y = \cos(2x-1)$ C) $y = x$
D) $y = \sin^2 x$ E) $y = |\tan x|$

Çözüm: $y = 3$ doğrusunun grafiği x eksenine paralel bir doğrudur. Herhangi bir x için $f(x)$ neyse $f(x+T)$ de o olacaktır. Dolayısıyla bu fonksiyon periyodiktir.
$y = \cos(2x-1)$, $y = \sin^2 x$ ve $y = |\tan x|$ fonksiyonları da uzunluğu π br olan her aralıkta aynı davranır.
Fakat $y = x$ fonksiyonu periyodik değildir. Sıfırdan farklı herhangi bir T sayısı yoktur ki $x = x+T$ olsun.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = 2\cdot\sin(x+3)+4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $\pi/2$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

Çözüm: Açı ölçüsüne eklenen ya da çıkarılan değerler grafikte sola veya sağa kayma yapar. Fonksiyona eklenen değerler yukarı veya aşağıya doğru kayma yapar. Fonksiyonun çarpıldığı sayı da dikey yönde sünme anlamına gelir. Hiçbirinin esas periyoda etkisi yoktur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = -2\cdot\sin(2x-3) - 4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $\pi/2$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

Çözüm: Sadece x'in çarpıldığı 2 sayısının esas periyoda etkisi vardır. Grafik daralır. Yatay boyda yarıya düşer. Bundan dolayı esas periyot $2\pi/2 = \pi$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = 2\cdot\cos^2(5x+3) + 4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $5\pi/2$ B) $\pi/3$ C) $2\pi/5$ D) $\pi/5$ E) 5π

Çözüm: x açı ölçüsünün 5'le çarpımı esas periyodu 1/5'ine düşürür. Kare almak da yarıya düşüreceğinden esas periyot
$2\pi/10 = \pi/5$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = -2\cdot\cos^3(x+3) + 4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $\pi/2$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

Çözüm: Burada hiçbir işlemin esas periyoda etkisi yoktur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = 2\cdot|\sin(x+3)| - 4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $\pi/2$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

Çözüm: Mutlak değer belli aralıktaki bir yılan hareketini aynı aralıkta iki adet tümseğe dönüştüreceğinden esas periyot yarıya düşer.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = 2\cdot|\tan^2(x+3)| + 4$ *fonksiyonunun esas periyodu kaçtır?*

A) $\pi/2$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

Çözüm: Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarına kare almanın ve mutlak değer almanın etkisi yoktur. Eski periyot hala devam eder. Yalnız tan x fonksiyonunun esas periyodunun 2π değil π olduğunu unutmayın!

Doğru cevap: B.

Örnek. $f: [0, 12] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *periyodik fonksiyonunun esas periyodu 2'dir. Bu fonksiyonun grafiği* $A(2, 3)$ *noktasından geçtiğine göre* $f(x) = 3$ *eşitliğini sağlayan en az kaç farklı x değeri vardır?*

A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) 12

Çözüm: Esas periyot 2 olduğundan dolayı x'teki 2 birimlik artışlar y değerlerini bozmamalıdır.
$f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = f(10) = f(12) = 3$
olduğundan 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 olmak üzere en az 7 farklı x değeri vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(\frac{2x+9}{3}) = f(\frac{2x+12}{3}) = f(\frac{2x+15}{3})$ *eşitliği veriliyor. f fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Verilen eşitliği

$$f(\frac{2}{3}x+3) = f(\frac{2}{3}x+4) = f(\frac{2}{3}x+5)$$

şeklinde düzenlersek, $f(\frac{2}{3}x)$ fonksiyonunun periyodunun 1 olduğunu anlarız.

$f(x)$ fonksiyonunun periyodu t olsun. $f(\frac{2}{3}x)$ fonksiyonunun $\frac{t}{\frac{2}{3}}$ olur. $\frac{t}{\frac{2}{3}} = 1$ eşitliğinden $t = \frac{2}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f ve g fonksiyonlarının esas periyotları sırasıyla 5 ve 4'tür.* $f(2) = 3$ *ve* $g(3) = 5$ *olduğuna göre*

$$f(12) + g(11) - (g \circ f)(7)$$

toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: f fonksiyonunun periyodu olduğundan
$f(2) = f(7) = f(12) = f(17) = \ldots = 3$,
g fonksiyonunun periyodu 4 olduğundan
$g(3) = g(7) = g(11) = g(15) = \ldots = 5$
olur.

$$f(12) + g(11) - (g \circ f)(7) = 3 + 5 - g(3)$$
$$= 3 + 5 - 5 = 3.$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$f(x) = 5,$$
$$g(x) = x + 3,$$
$$h(x) = x^3,$$
$$k(x) = \cos x,$$
$$m(x) = \ln x$$

fonksiyonlarının kaç tanesi periyodiktir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x - 2) + 1$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

3.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2 \cdot \cos(2x - \pi) - 3$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) 2π D) 4π E) 6π

4.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4 \cdot \sin^5 x + 1$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) 2π D) 5π E) 10π

5.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tan 3x$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) 3π E) 6π

6.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = (5 + \sin x)^4$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) 2π D) 4π E) 8π

7.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin^2(5 - 2x) - 4$$

fonksiyonun esas periyodu kaça eşittir?

A) $-\pi$ B) $-\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

8.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = |\cos^4(4 + 3x)| + 16$$

fonksiyonun esas periyodu kaça eşittir?

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π E) $\frac{5\pi}{2}$

9.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin 8x \cdot \cos 4x$$

fonksiyonunun esas periyodu kaça eşittir?
(Ters dönüşüm kullanarak toplam haline getiriniz.)

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) 4π E) 8π

10.
f ve g fonksiyonlarının esas periyotları sırasıyla 5 ve 4 olarak verilsin. $f(2) = 3$ ve $g(3) = 5$ olduğuna göre,

$$f(17) + g(15) - (g \circ f)(12)$$

toplamının değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. B 2. C 3. B 4. C 5. B 6. C 7. C 8. B 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için, o fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta bijeksiyon (bire-bir ve örten) olması gerekir. Trigonometrik fonksiyonlar bire-bir ve örten olmadıklarından, bire-bir ve örten oldukları alt aralıklardaki ters fonksiyonlarından bahsedeceğiz. Sözgelimi,

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

fonksiyonu ne bire-birdir ne de örtendir.

$$f: \mathbb{R} \mapsto [-1, 1], f(x) = \sin x$$

fonksiyonuysa örtendir ama bire-bir değildir.

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$$

fonksiyonuysa bire-birdir ama örten değildir.

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1], f(x) = \sin x$$

fonksiyonuysa hem bire-bir, hem de örtendir. Dolayısıyla $y = \sin x$ fonksiyonunun bu aralıkta tersi alınabilir, hatta bu ters fonksiyon f^{-1}: $[-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ diye tanımlıdır.

Yanlış anlaşılmasın, diğer aralıklarda da tersi alınabilir ama tersi her zaman fonksiyon olmaz, sadece bağıntı olarak kalır. Biz kocaman başlık atmışız ters trigonometrik fonksiyonlar diye, onun için tersinin fonksiyon olduğu aralığı seçtik.

$\sin x$ fonksiyonunun tersi, $\sin^{-1} x$ veya **arcsin** x diye gösterilir. $\sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $[-1, 1]$ aralığına tanımlandığından, tersi olan arcsin x bağıntısı da $[-1, 1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye tanımlıdır.

$$f: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$$

yazılabilirse de $y = \sin x$ fonksiyonunun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için, değer kümesinin arcsin x'in esas değerleri dediğimiz $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığı alınması gerekir. Eğer bu aralıkta tanımlanırsa bağıntının artık fonksiyon olduğunu belirtmek üzere ilk harf büyültülür,

$$f(x) = \text{Arcsin } x$$

olur. Yani arcsin x'i bağıntı anlamında, Arcsin x'i fonksiyon anlamında kullanırız.

Örnek. *$f: [-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere*

$$f(x) = \text{Arcsin } x$$

olduğuna göre $f(\frac{1}{2})$ değeri kaça eşittir?

A) 30 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $-\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Çözüm: Verilen aralıkta Arcsin x fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan tersini alabiliriz.

$$f^{-1}(x) = \sin x$$

olur.

$f(\frac{1}{2}) = A$ olsun.

$$f^{-1}(A) = \frac{1}{2}$$

olur.

Şimdi, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ olduğunu hatırlayarak

$$f^{-1}(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

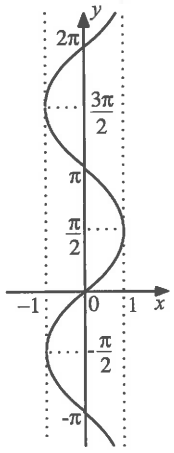
eşitliğini yazdığımızda $A = \frac{\pi}{6}$ olduğunu anlarız. O halde cevap $\frac{\pi}{6}$'dır.

Şimdi burada ''ama $\sin\frac{5\pi}{6}$ da $\frac{1}{2}$ değil mi?'' diye bir soru aklınıza gelebilir, yani cevap o da olamaz mı? Veya ''bu değil de niye o?'' denebilir. Bir kere ''Cevap o da olamaz mı?'' sorusu çok saçma, bir fonksiyonun herhangi bir noktada tek 1 değeri olabilir, 2 tane olamaz. ''Bu değil de niye o?'' sorusu nispeten mantıklı ama görüntü kümesinin $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ olduğuna dikkat ederseniz $5\pi/6$'nın orada olmadığını da görürsünüz.

Doğru cevap: B.

arcsin x grafiği.

$f:[-1,1]\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\arcsin x$ bağıntısının grafiğini çizeceğiz. Fonksiyon değil bağıntı diyoruz, fark ettiniz mi? Trigonometrik fonksiyonları çizdiğimiz gibi, önce yeterli sayıda nokta işaretleyip onları birleştirerek neye benzediğini görebiliriz ama biz böyle yapmayacağız. 9'ncu sınıfta fonksiyonlar dersinde, bir bağıntı ile o bağıntının tersinin grafiklerinin $y=x$ doğrusuna göre simetrik olduğunu söylemiştik.
O halde $y=\sin x$ fonksiyonunun grafiğinin $y=x$'e göre simetriğini çizeceğiz. Yanda görebilirsiniz.



Yukardakilere benzer biçimde,

$$f(x)=\cos x \text{ ve } f(x)=\tan x$$

kuralı ile belirli fonksiyonların, tersleri olacak şekilde, tanım ve değer kümeleri ayarlanabilir.

Antlaşma olarak,

$f:[0,\pi]\mapsto[-1,1], f(x)=\cos x$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(x)=\text{Arccos}\,x,$$

$g:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\mapsto\mathbb{R}, g(x)=\tan x$ fonksiyonunun tersi

$$g^{-1}(x)=\text{Arctan}\,x$$

ile gösterilir.
Kısaca,

$\sin^{-1}x=\text{Arcsin}\,x=y$ ise $\sin y=x$

$$(-1<x<1, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$$

$\cos^{-1}x=\text{Arccos}\,x=y$ ise $\cos y=x$

$$(-1\le x\le 1, 0\le y\le\pi)$$

$\tan^{-1}x=\text{Arctan}\,x=y$ ise $\tan y=x$

$$(-\infty<x<\infty, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$$

$\cot^{-1}x=\text{Arccot}\,x=y$ ise $\cot y=x$

$$(-\infty<x<\infty, 0<y<\pi)$$

Örnek. Arccos$(4x-2)$ *fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ C) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ D) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ E) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

Çözüm: Arccos fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki sayıları $[0,\pi]$ aralığına götürdüğünü biliyoruz. Şu durumda $4x-2$ ifadesi $[-1,1]$ aralığına ait olmalıdır.

$$-1\le 4x-2\le 1$$

$$1\le 4x\le 3$$

$$\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. Arctan (-1) *değeri kaça eşittir?*

A) $-3\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $-\frac{\pi}{6}$ D) $3\frac{\pi}{4}$ E) $-\frac{\pi}{4}$

Çözüm: $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ diye sakın cevaba $3\pi/4$ demeyin.
Aynı zamanda

$$\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$$

eşitliğini de hatırlayın ve cevaba $-\pi/4$ deyin.

Ters trigonometrik fonksiyonların tanımlandıkları aralıkları bilmenin önemini bu örnek de anlatmadıysa, başka bir şey anlatamaz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos(2\cdot\text{Arctan}\sqrt{3})$ *değeri kaça eşittir?*

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Çözüm: sin, cos, tan fonksiyonları açı ölçülerini reel sayılara götürürken, Arcsin, Arccos, Arctan fonksiyonları reel sayıları açı ölçülerine götürür. O halde $\text{Arctan}\sqrt{3}=\alpha$ dersek, bize $\cos 2\alpha$'nın sorulduğunu anlarız.

$$\text{Arctan}\sqrt{3}=\alpha \text{ ise } \tan\alpha=\sqrt{3}$$

olduğundan $\alpha=\frac{\pi}{3}$ bulunur. Şimdi $\cos(\frac{2\pi}{3})$ değerini hesaplamalıyız ki, bu da $-\frac{1}{2}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek [1995 ÖYS]. $\cos(2\cdot\text{Arccot}\frac{1}{2})$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: $\text{Arccot}\frac{1}{2}=\alpha$ yani $\cot\alpha=\frac{1}{2}$ olsun. O halde bize $\cos 2\alpha$ soruluyor.

$$\cot\alpha=\frac{1}{2} \text{ ise } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olacağından $\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\text{Arcsin}(2\cdot\cos\frac{\pi}{6})$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) Hiçbiri

Çözüm: $2\cdot\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

olduğundan bize $\text{Arcsin}\sqrt{3}$ soruluyor demektir.

$$\text{Arcsin}\sqrt{3}=\alpha \text{ ise } \sin\alpha=\sqrt{3}$$

olmalıdır.

Ama bir açı ölçüsünün sinüsü [–1, 1] aralığının dışında değerler alamayacağından bu koşulu sağlayan bir açının olmadığını söyleyeceğiz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin(\text{Arccos}\,x)$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?*

A) x^2 B) $\sqrt{1+x^2}$ C) $-\sqrt{1+x^2}$ D) $\sqrt{x^2-1}$ E) $\sqrt{1-x^2}$

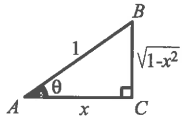
Çözüm:

$$\text{Arccos}\,x=\theta$$

olsun. Bu durumda bize $\sin\theta$ soruluyor.

$$\text{Arccos}\,x=\theta \text{ ise } \cos\theta=x$$

olduğundan, sorumuz ''$\cos\theta=x$ *iken* $\sin\theta$ *kaçtır*?'' sorusuna dönüştü.



Bir üçgen çizip çözelim:

Şekilden de görüldüğü üzere,

$\cos\theta=x$ iken $\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ oluyor.

Doğru cevap: E.

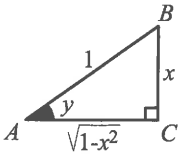
Örnek [1976 ÜSS].

$$\cos(\text{Arcsin}\,x)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos x$ B) $\sqrt{x^2-1}$ C) $\sqrt{1-x^2}$ D) x E) $\sin x$

Çözüm: Gelin hemen $\text{Arcsin}\,x=y$ diyelim. O zaman soru, $\cos y$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir* sorusuna dönüşür. E, $\text{Arcsin}\,x=y$ ise $\sin y=x$ olmaz mı? Şimdi de çiz meşhur dik üçgenini, bul sinüsü bilinen açının kosinüsünü!



$$\cos y=\sqrt{1-x^2}$$

olduğu görülebilmektedir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\tan(2\cdot\text{Arcsin}\,x)$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?*

A) $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$ B) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$ C) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2}$

D) $\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$ E) $\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2}$

Çözüm:

$$\text{Arcsin}\,x=\theta$$

olsun. O halde bizden $\tan 2\theta$ isteniyor.

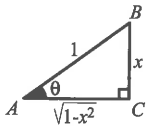
$$\text{Arcsin}\,x=\theta \text{ ise } \sin\theta=x$$

demektir.

Şimdi $\sin\theta$ belliyken $\tan\theta$'yı bulacağız, sonra yarım açı formüllerini kullanarak $\tan 2\theta$'ya erişeceğiz.

Yine üçgen çizmek gerekecek:

$\sin\theta=x$ ise $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ oluyor.



$\tan 2\theta=\frac{2\cdot\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ olduğundan $\tan\theta$ değeri yerine konursa, $\tan 2\theta=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $\text{Arccos}(\sin x)$ *ifadesine eşittir?*

A) $\frac{\pi}{2}-2x$ B) $\sqrt{1-x^2}$ C) $x-\frac{\pi}{2}$ D) $\sqrt{x^2-1}$ E) $\pi-x$

Çözüm: İki çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. Cevabın bir açı ölçüsü olması gerektiğinden,

$$\text{Arccos}(\sin x)=\theta$$

olsun. O zaman $\cos\theta=\sin x$ demektir.

$$\cos\theta=\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$$

olduğundan, $\theta=\frac{\pi}{2}-x$ veya $\theta=x-\frac{\pi}{2}$'dir.

İkinci yol. cos ve Arccos fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğu bilgisini kullanacağız.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \text{ olduğundan}$$

$$\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{\pi}{2}-x \text{ veya}$$

$$\text{Arccos}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=x-\frac{\pi}{2}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\cos(\text{Arcsin}\frac{3}{5} + \text{Arccos}\frac{5}{13})$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $-\frac{36}{65}$ B) $-\frac{16}{65}$ C) -1 D) $\frac{16}{65}$ E) $\frac{36}{65}$

Çözüm:

$$\text{Arcsin}\frac{3}{5} = \alpha \text{ ve } \text{Arccos}\frac{5}{13} = \theta$$

olsun. O halde bize $\cos(\alpha + \theta)$ soruluyor. $\cos\alpha$, $\cos\theta$, $\sin\alpha$ ve $\sin\theta$ değerlerini bulduğumuz anda soru çözülmüş olacak.

$$\text{Arcsin}\frac{3}{5} = \alpha \text{ ise } \sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ ve } \cos\alpha = \frac{4}{5},$$

$$\text{Arccos}\frac{5}{13} = \theta \text{ ise } \cos\theta = \frac{5}{13} \text{ ve } \sin\theta = \frac{12}{13}$$

olur. $\cos\alpha$ ve $\sin\theta$ değerlerini neden negatif değil de pozitif aldığımızı bir düşünün. Diğer yandan,

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \sin\alpha\cdot\sin\theta = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{16}{65}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\text{Arcsin}(1-x) + \text{Arccos}\frac{4}{5} = \pi$$

denklemini sağlayan x değeri hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: Hemen çıkarımlarımızı not edelim:

$$\text{Arcsin}(1-x) = \alpha \text{ ise } \sin\alpha = 1-x,$$

$$\text{Arccos}\frac{4}{5} = \theta \text{ ise } \cos\theta = \frac{4}{5}.$$

Sorunun kalıbı şu: $\alpha + \theta = \pi$ verilmiş ve bize x soruluyor. $\alpha + \theta = \pi$ olduğundan $\sin\alpha = \sin\theta$'dır.

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ ise $\sin\theta = \frac{3}{5}$ olduğunu üçgen çizmeden bile bulabiliriz. $1-x = \frac{3}{5}$ eşitliğinden $x = \frac{2}{5}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\text{Arctan}\,x = \text{Arcsin}\frac{2\sqrt{5}}{5}$ *eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) -1 B) 0 C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) 1 E) 2

Çözüm: $\text{Arctan}\,x$ ve $\text{Arcsin}\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ifadeleri birer açı ölçüsü belirtirler. Her ikisine de α diyelim. Böyle demekle

$$\tan\alpha = x \text{ ve } \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

olduğunu söylemiş oluruz. Bu durumda sorumuz, bir açı ölçüsünün sinüsü belliyken tanjantını bulabilir misin sorusuna dönüşür. Bunu da dedem bile bulur. ☺ Uygun dik üçgen çizilirse $\tan\alpha = 2$ çıkacaktır. Peki sorunun neden "x kaçtır" şeklinde değil de "hangisi olabilir" şeklinde sorulduğunu düşünün bakalım!

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,y + \text{Arctan}\,z = \pi$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $x + y + z$ toplamına eşittir?

A) -1 B) 0 C) xyz D) $-xyz$ E) 1

Çözüm: $\text{Arctan}\,x = \alpha$, $\text{Arctan}\,y = \theta$ ve $\text{Arctan}\,z = \beta$ diyelim. Geçen derste $\alpha + \theta + \beta = \pi$ ise

$$\tan\alpha + \tan\theta + \tan\beta = \tan\alpha\cdot\tan\theta\cdot\tan\beta$$

olduğunu kanıtlamıştık. O halde $x + y + z = xyz$ olmalı.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\text{Arctan}\frac{1}{3} + \text{Arctan}\frac{1}{2}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\text{Arctan}\frac{1}{3} = \alpha$ ve $\text{Arctan}\frac{1}{2} = \theta$ diyelim. $\alpha + \theta$ toplamı soruluyor. $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ ve $\tan\theta = \frac{1}{2}$ eşitliklerini not ederek, $\alpha + \theta$ değerinin tanjantına bakalım:

$$\tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\theta} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

olduğundan $\alpha + \theta = \frac{\pi}{4}$.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2\cdot\text{Arctan}\frac{1}{3}+\text{Arctan}\frac{1}{7}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: Hemen bu açı ölçülerine değerler verelim.

$$\text{Arctan}\frac{1}{3}=\alpha \text{ ve } \text{Arctan}\frac{1}{7}=\theta$$

diyelim. $2\alpha+\theta$ toplamı soruluyor.

$$\tan\alpha=\frac{1}{3} \text{ ve } \tan\theta=\frac{1}{7}$$

bilgileri elimizde duruyor ama bize $\tan 2\alpha$ lazım.

$$\tan 2\alpha=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$$

Şimdi $2\alpha+\theta$ değerinin tanjantına bakalım:

$$\tan(2\alpha+\theta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\theta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\theta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}=1$$

olduğundan $2\alpha+\theta=\frac{\pi}{4}$.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2\cdot\text{Arctan}\frac{1}{2}-\text{Arctan}\frac{1}{7}$ *farkı kaça eşittir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: Yine açı ölçülerine değer vererek başlayalım:

$$\text{Arctan}\frac{1}{2}=\alpha \text{ ve } \text{Arctan}\frac{1}{7}=\theta$$

diyelim. $2\alpha-\theta$ farkı soruluyor.

$$\tan\alpha=\frac{1}{2} \text{ ve } \tan\theta=\frac{1}{7}$$

bilgileri elimizde duruyor ama bize $\tan 2\alpha$ lazım.

$$\tan 2\alpha=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

Şimdi $2\alpha-\theta$ değerinin tanjantına bakalım:

$$\tan(2\alpha-\theta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\theta}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan\theta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$$

olduğundan

$$2\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\text{Arccos}\,x+\text{Arccos}\,y+\text{Arccos}\,z=3\pi$ *olduğuna göre*

$$x^2+y^2+z^2$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) xyz B) $1-xyz$ C) $1-2xyz$ D) $2xyz-1$ E) $xyz+1$

Çözüm: Aşağıdaki işlemleri takip edin lütfen.

$$\text{Arccos}\,x+\text{Arccos}\,y+\text{Arccos}\,z=3\pi$$
$$\text{Arccos}\,x=3\pi-\text{Arccos}\,y-\text{Arccos}\,z$$
$$x=\cos(3\pi-\text{Arccos}\,y-\text{Arccos}\,z)$$
$$x=\cos(3\pi)\cdot\cos(\text{Arccos}\,y+\text{Arccos}\,z)+\sin(3\pi)\cdot\sin(\text{Arccos}\,y+\text{Arccos}\,z)$$
$$x=-\cos(\text{Arccos}\,y+\text{Arccos}\,z)+0$$
$$x=-\cos(\text{Arccos}\,y)\cdot\cos(\text{Arccos}\,z)+\sin(\text{Arccos}\,y)\cdot\sin(\text{Arccos}\,z)$$
$$x=-yz+\sin(\text{Arccos}\,y)\cdot\sin(\text{Arccos}\,z)$$
$$x=-yz\pm\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-z^2}$$
$$x+yz=\pm\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-z^2}$$
$$x^2+2xyz+y^2z^2=1-y^2-z^2+y^2z^2$$
$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$
$$x^2+y^2+z^2=1-2xyz$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\text{Arctan}\,x+\text{Arctan}(1-x)=2\cdot\text{Arctan}\sqrt{x-x^2}$ *eşitliğini sağlayan x kaça eşittir?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm: $\text{Arctan}\,x=a$ ve $\text{Arctan}(1-x)=b$ olsun. O halde $\tan a=x$ ve $\tan b=1-x$'tir.

$$a+b=2\cdot\text{Arctan}\sqrt{x-x^2}$$

olacağından

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sqrt{x-x^2}$$

olur. Bu bilgiyi kullanarak $\tan(a+b)$ değerini bulabiliriz.

$$\tan(a+b)=\frac{2\cdot\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{x-x^2}}{1-(x-x^2)}$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{x+1-x}{1-x(1-x)}=\frac{1}{1-x+x^2}$$

$$2\sqrt{x-x^2}=1$$
$$4(x-x^2)=1$$
$$4x-4x^2=1$$
$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2=0$$

olduğundan $x=1/2$ olur.

Doğru cevap: B.

DİĞER TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TERSLERİNİN BULUNMASI

Fonksiyon dersinde, bir fonksiyonun kuralının tersini tanımlamış ve daha sonra olan olaylara bakıp, olayı şöyle yorumlamıştık:
x'e bağlı bir fonksiyonun tersi, fonksiyon kuralında, x'i atıp boşalan yere yazıldığında, fonksiyon kuralını x'e dönüştüren değer oluyordu.
Örneğin, tanımlı olduğu değerler için

$$f(x)=2x \text{ ise } f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$

olmasını $(f \circ f^{-1})(x)=2\cdot\frac{x}{2}=x$ olmasına borçluyduk.

O halde, şimdi de benzer bir mantık yürüterek

$$f(x)=a\cdot\sin(bx+c)+d$$

fonksiyonunda x yerine ne yazarsak fonksiyon kuralı x'e dönüşür sorusunun cevabını aramalıyız.
Ters bulmanın yaygınca bilinen ve kullanılan yöntemini de kullanmakta özgürsünüz tabi ki. Ben bildiğim gibi çözeceğim. Yani x yerine w yazıp cevabı x'e eşitleyeceğim. O zaman w, fonksiyonun tersi olmuş olacak.

Örnek. *a ve b sıfırdan farklı olmak üzere*

$$f(x)=a\cdot\sin(bx+c)+d$$

fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.

Çözüm: iki farklı yol göstereceğiz.
Birinci yol. Fonksiyonun tersine w diyelim. x yerine w yazarsak birim fonksiyonu yani x'i bulmalıyız.

$$a\cdot\sin(bw+c)+d=x$$
$$a\cdot\sin(bw+c)=x-d$$
$$\sin(bw+c)=\frac{x-d}{a}$$
$$bw+c=\text{Arcsin}\left(\frac{x-d}{a}\right)$$
$$bw=\text{Arcsin}\left(\frac{x-d}{a}\right)-c$$
$$w=f^{-1}(x)=\frac{\text{Arcsin}\left(\frac{x-d}{a}\right)-c}{b}$$

İkinci yol. f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. b'yle çarpmış.
2. c eklemiş.
3. sinüsünü almış.
4. a'yla çarpmış.
5. d eklemiş.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapar. Önce d çıkartır. Sonra a'ya böler. Sonra Arcsinüsünü alır. Sonra c çıkartır. En son olarak da b'ye böler. Yani;

$$f^{-1}(x)=\frac{\text{Arcsin}\left(\frac{x-d}{a}\right)-c}{b}.$$

Örnek. *Uygun a, b, c, d, e sayıları için*

$$f(x)=a\cdot\text{Arcsin}\left(\frac{bx+c}{d}\right)+e$$

fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.
Birinci yol. Fonksiyonun tersine w diyelim. x yerine w yazarsak birim fonksiyonu yani x'i bulmalıyız.

$$a\cdot\text{Arcsin}\left(\frac{bw+c}{d}\right)+e=x$$
$$a\cdot\text{Arcsin}\left(\frac{bw+c}{d}\right)=x-e$$
$$\text{Arcsin}\left(\frac{bw+c}{d}\right)=\frac{x-e}{a}$$
$$\frac{bw+c}{d}=\sin\left(\frac{x-e}{a}\right)$$
$$bw+c=d\cdot\sin\left(\frac{x-e}{a}\right)$$
$$bw=d\cdot\sin\left(\frac{x-e}{a}\right)-c$$
$$w=f^{-1}(x)=\frac{d\cdot\sin\left(\frac{x-e}{a}\right)-c}{b}$$

İkinci yol. f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. b'yle çarpmış.
2. c eklemiş.
3. d'ye bölmüş.
4. Arcsinüsünü almış.
5. a'yla çarpmış.
6. e eklemiş.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapar. Önce e çıkartır. Sonra a'ya böler. Sonra sinüsünü alır. Sonra d'yle çarpar. Sonra c çıkartır. En son olarak da b'ye böler. Yani;

$$f^{-1}(x)=\frac{d\cdot\sin\left(\frac{x-e}{a}\right)-c}{b}.$$

Örnek. *Uygun olduğu aralıkta $f(x)=\tan(5x-3)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.*

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.
Birinci yol. $y=\tan(5x-3)$ ise $\text{Arctan}\, y=5x-3$ olur.

O halde $x=\frac{\text{Arctan}\, y+3}{5}$ olur. Gerisi çocuk oyuncağı:

$$f^{-1}(x)=\frac{\text{Arctan}\, x+3}{5}.$$

İkinci yol. f fonksiyonu x'i 5'le çarpıp, ondan 3 çıkartmış, son olarak da tanjantını almış. O halde f^{-1} fonksiyonu ilk olarak x'in Arctanjantını alır, 3 ekler, son olarak da 5'e böler.

$$f^{-1}(x)=\frac{\text{Arctan}\, x+3}{5}.$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$f:[-1,1]\mapsto[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ olmak üzere,

$f(x)=\text{Arcsin}\,x$

olduğuna göre $f(\frac{\sqrt{3}}{2})$ **değeri kaça eşittir?**

A) 60 B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $-\frac{\pi}{3}$ E) 0

2.

$\text{Arctan}(-\sqrt{3})$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $-\frac{\pi}{3}$ E) $-\frac{2\pi}{3}$

3.

$\cos(2\cdot\text{Arccot}\,1)$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

4.

$\cos(\text{Arcsin}\frac{1}{3})$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.

Uygun tanım aralığında

$\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{10}}{10}=\text{Arctan}\,x$

eşitliğini sağlayan x **değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

Arccot 2 + Arccot 3

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

7.

$\cos\left(\text{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{Arcsin}(\frac{-1}{2})\right)$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

8.

$f:\mathbb{R}\mapsto[0,1]$ olmak üzere,

$f(x)=\sin^2(2x)$

fonksiyonunun esas periyodu θ **olduğuna göre** $f(\theta)$ **kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

9.

$f:[-1,1]\mapsto\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere,

$f(x)=\text{Arcsin}\,x-1$

fonksiyonu veriliyor.

Verilenlere göre $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **değeri kaça eşittir?**

A) $\frac{\pi}{2}-2$ B) $\frac{\pi}{6}-1$ C) $\frac{\pi}{2}-1$ D) $\frac{\pi}{3}-1$ E) $\frac{2\pi}{3}-1$

10.

$\sin(\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{5}})+\cos(\text{Arccot}\frac{1}{2})$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{10+3\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{6+\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

1. B 2. D 3. C 4. B 5. D 6. B 7. D 8. A 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

olduğuna göre $f^{-1}(-\frac{1}{2})$ **kaça eşittir?**

A) $-\frac{2\pi}{3}$ B) $-\frac{\pi}{3}$ C) 0 D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

2.

$$f(x)=2\cdot\text{Arcsin}\,x-\pi$$

olduğuna göre $f^{-1}(\frac{\pi}{3})$ **değeri kaça eşittir?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

3.

$$f:\mathbb{R}\mapsto[-1,1], f(x)=\sin x$$

$$g:[0,\pi)\mapsto[-1,1], g(x)=\cos x$$

olduğuna göre $(g^{-1}of)(\frac{\pi}{2})$ **değeri kaça eşittir?**

A) $-\pi$ B) $-\frac{\pi}{2}$ C) 0 D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

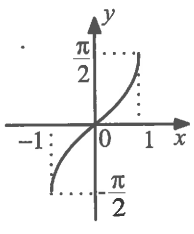
4.

$$x\,\Delta\,y=6(\sin x+\text{Arccos}\,y)$$

olarak tanımlanan Δ **işleminde göre** $\frac{\pi}{6}\,\Delta(-\frac{1}{2})$ **değeri kaçtır?**

A) $3+4\pi$ B) $3-4\pi$ C) $4\pi-3$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $-\frac{2\pi}{3}$

5.
Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) Arcsin $2x$ B) Arcsin x
C) Arcsin $\frac{x}{2}$ D) Arccos x
E) Arctan x

6.

$$f(x)=\tan 2x$$

olduğuna göre $f(\frac{2}{3}\pi)+f^{-1}(-\sqrt{3})$ **değeri kaça eşittir?**

A) $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$ B) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ C) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$ E) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

7.

$$f(x)=\tan x$$
$$g(x)=\text{Arctan}(2x)$$

fonksiyonları veriliyor.
Buna göre $(fog)(x)$ **değeri kaçtır?**

A) x B) $\frac{x}{2}$ C) $2x$ D) $2x^2$ E) $\sqrt{1+x^2}$

8.

$$f(x)=2\cdot\sin\frac{x}{3}-4$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\text{Arcsin}(\frac{3x+12}{2})$ B) $\frac{3}{2}\text{Arcsin}(x+4)$ C) $3\,\text{Arcsin}(\frac{x}{2})+4$
D) $3\,\text{Arcsin}(\frac{x+4}{2})$ E) $2\text{Arcsin}(3x+12)$

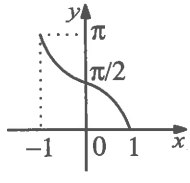
9.

$$f(x)=\sqrt[3]{\text{Arcsin}\sqrt[5]{x}}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sin(x^{15})$ B) $\sin^{15}x$ C) $\sin^3(x^5)$ D) $\sin^5(x^3)$ E) $\sin\sqrt[15]{x}$

10.
Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) Arcsin x B) Arccos x
C) Arccos $x+\frac{\pi}{2}$ D) Arccos $\frac{x}{2}$
E) 1 + Arccos x

1. A 2. D 3. C 4. A 5. B 6. C 7. C 8. D 9. D 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Temel Trigonometrik Denklemler

Artık trigonometrik denklemleri çözebilir hale geldik. Şimdi denklem tiplerini gruplayacağız ve bu tipler böyle çözülür, bu tipler de böyle falan diyeceğiz. Önce en temel olanlara bir göz atalım.

sin x = sin α eşitlikleri.
Önce size bir soru sorarak başlayayım:

$$\text{''}\sin x^\circ = \frac{1}{2} \text{ ise } x \text{ kaçtır?''}$$

''Ne var ki bunda, otuuuuuz!'' dediğinizi duyar gibiyim. Peki ''sin 150° kaçtır?'' desem ona ne diyeceksin, $\frac{1}{2}$ demeyecek misin, hani 30°'ydi?

Şaşacaksın ama cevap 30° de değil, 150° de değil! Örneğin 390° neden olmuyor veya 510°'un suçu ne? Bize denklemi sağlayan açının esas ölçüsü sorulmuyor ki, sağlayan tüm açı ölçüleri soruluyor. O halde doğru cevap, esas ölçüsü 30° ve 150° olan tüm açılar olmalıdır.

Bunu, k bir tamsayı olmak üzere,

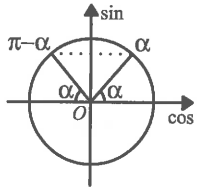
$$30^\circ + k\cdot 360^\circ \text{ ve } 150^\circ + k\cdot 360^\circ$$

yazarak göstereceğiz. Anlayacağınız bulduğumuz açı ölçülerine 360°'nin tam katlarını ekledik. Eğer esas ölçüyü radyan cinsinden bulmuş olsaydık, bulduğumuz her değere $k\cdot 2\pi$ eklemeliydik.

Şimdi buradaki çözümü genelleyeceğiz.

Nasıl ki $0 \le \alpha < 360^\circ$ aralığında sinüsü 1/2 olan iki açı ölçüsü var, sinüsü [−1, 1] aralığında bir sayı örneğin 73/89 olan da daima iki farklı açı ölçüsü vardır. Birim çemberi çizerek bunu rahatlıkla görebilirsiniz.

Hatta çizimi yaptığınızda şunu göreceksiniz: Hangi açıyı alırsanız alın, sinüsü ona eşit olan diğer açı, ilkinin y eksenine (sinüs eksenine) göre simetriği çıkacaktır.
α dar açıyken, biri α ise diğeri 180° − α'dır, biri 360° − α iken de diğeri 180° + α'dır.



sin π−α = sin α

Bu çiftlerin toplamları da her zaman 180° veya 540°'ye eşittir. Zaten 540° ≡ 180° olduğundan, sin x = sin α denklemini sağlayan x değerlerinden biri α ise diğeri hep 180° − α veya diğer bir deyişle $\pi - \alpha$'dır. Artık derece cinsinden mi cevap isteniyor, radyan cinsinden mi, ona göre cevap verirsiniz...

Bunlardan her birine, $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\cdot 2\pi$ eklendiğinde genel çözüm elde edilir.

$$\sin x = \sin \alpha$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Öyleyse

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ ve } x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

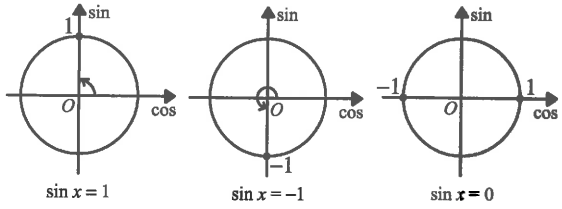
Daha da genel olarak, $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere;

$\sin f(x) = \sin g(x)$ ise

$$f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ ve } f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$$

eşitlikleri geçerlidir.





$$\sin x = 1 \text{ iken } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -1 \text{ iken } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\sin x = 0 \text{ iken } x = k\pi.$$

Örnek. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ *denkleminin* $\mathbb{R}$*'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

B) $\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

C) $\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

E) $\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Çözüm: Eşitliği $\sin x = \sin\alpha$ formatına getirelim.

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ ise } \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}.$$

O halde

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ veya } 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

olmalıdır. Buradan

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ veya } x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

bulunur. Cevabımız:

$$\text{ÇK} = \{x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ veya } x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin 3x = 1$ *denkleminin* $[0, 2\pi)$ *aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$ B) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\}$ C) $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\}$

D) $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\}$ E) $\{\frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$

Çözüm: Bu denklemi de $\sin x = \sin\alpha$ formatına getirelim.

$$\sin 3x = 1 \text{ ise } \sin 3x = \sin\frac{\pi}{2}.$$

O halde

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ise } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

olmalıdır.

$k = 0$ için $x = \frac{\pi}{6}$,

$k = 1$ için $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$,

$k = 2$ için $x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6}$

$$\text{ÇK} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\}.$$

Doğru cevap: D.



$\sin x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında p tane kökü varsa $n\in\mathbb{Z}^+$ için $\sin(nx) = a$ 'nın aynı aralıkta $n\cdot p$ tane kökü vardır.

Örnek [1974 ÜSS]. $\sin^2 x - 4\cdot\sin x + 4 = 0$ *denkleminin kökleri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x_1 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

B) $x_1 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

C) $x_1 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

D) $x_1 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

E) Denklemin çözümü yoktur.

Çözüm: $\sin x = m$ olsun. Bunu denkleme tatbik edersek,

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

olduğu görülür. Hemen çarpanlarına ayıralım.

$$(m-2)^2 = 0$$

eşitliğinden $m = 2$ yani $\sin x = 2$ bulunmuş olur. Şimdi $-1 \le \sin x \le 1$ olduğunu unutmadıysan ve şu an bunları okurken uyumuyorsan, 'Hoop nooluyor! Hiçbir x reel sayısı için bu denklem çözülemez.' diye haykırmış olman gerekir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, 0'dan ve 1'den farklı olmak üzere* $ax = 1$ *ise*

$$x^{\sin x - \cos x} = a^{\cos x}$$

denkleminin köklerinden birisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) π E) $\frac{5\pi}{4}$

Çözüm: $x = \frac{1}{a} = a^{-1}$ olduğundan $x^{\sin x - \cos x} = a^{\cos x}$ denklemi

$$a^{\cos x - \sin x} = a^{\cos x}$$

haline dönüşür. Bu durumda

$$\cos x - \sin x = \cos x$$

olduğundan $\sin x = 0$ olur. Bu denklemin köklerinden biri de π'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $2\cdot\cos 2x - 4\cdot\sin x + 1 = 0$ *denklemini sağlayan en küçük iki pozitif x değerinin toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) π E) 2π

Çözüm:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

eşitliğini kullanarak denklemi tek bilinmeyenli yapalım.

$$2\cdot(1 - 2\cdot\sin^2 x) - 4\cdot\sin x + 1 = 0$$

$\sin x = t$ olsun. Eşitlik

$$2(1 - 2t^2) - 4t + 1 = 0$$

yani

$$4t^2 + 4t - 3 = 0$$

haline dönüşür. Denklem çözülürse

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } t_2 = -\frac{3}{2}$$

bulunur. $-1 \le t \le 1$ olması gerektiğinden $\sin x = \frac{1}{2}$ denklemini çözmek yeter. Çözelim:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ veya } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

olmalıdır. Görüldüğü üzere en küçük pozitif iki kök $\frac{\pi}{6}$ ve $\frac{5\pi}{6}$'dır. Bunların toplamı da π yapar.

Doğru cevap: D.

Örnek [1995 ÖYS]. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ *olmak üzere*

$\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ *olduğuna göre x açısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{8}$

Çözüm: ''Ne zaman paydada $1 + \cos x$ görürsen, $1 - \cos x$ ile çarp!'' demiştik.

$$\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\underset{(1-\cos x)}{1+\cos x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} = 2$$

Öyleyse $\sin x = \frac{1}{2}$ bulunur ki $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ olduğundan $x = \frac{\pi}{6}$ olduğu görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek [1990 ÖYS]. $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 8$ *denkleminin dar açı olan çözümü nedir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

Çözüm: Hemen payda eşitleyip gerekli cebirsel düzenlemeleri yapalım.

$$\frac{1}{\underset{(\sin^2 x)}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\underset{(\cos^2 x)}{\sin^2 x}} = \frac{1}{(\sin x\cdot\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2} = \frac{1}{\frac{\sin^2 2x}{4}} = \frac{4}{\sin^2 2x} = 8$$

eşitliğinden $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$ yani $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ bulunur ki bu da denklemin dar açı çözümünün $\frac{\pi}{8}$ olduğu anlamına gelir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1992 ÖYS]. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{6}$ *denklemini sağlayan dar açı kaç derecedir?*

A) 15° B) 25° C) 30° D) 35° E) 45°

Çözüm:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2\sqrt{6}$$
$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}=2\sqrt{6}$$
$$\sin x+\cos x=2\sqrt{6}\cdot\sin x\cdot\cos x$$
$$\sin x+\cos x=\sqrt{6}\cdot\sin 2x$$

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$1+\sin 2x=6\cdot\sin^2 2x$$
$$6\cdot\sin^2 2x-\sin 2x-1=0$$
$$(3\cdot\sin 2x+1)(2\cdot\sin 2x-1)=0$$

x dar açı olduğundan sin $2x$ pozitif olmalıdır. Bu sebeple $\sin 2x=\frac{1}{2}$ eşitliğini çözmeliyiz. $2x = 30°$ olduğundan $x = 15°$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{1}{1-\sin 3x}-\frac{1}{1+\sin 3x}=\frac{4}{3}$ *eşitliğini sağlayan en küçük pozitif x dar açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) π/18 B) π/15 C) π/12 D) π/9 E) 5π/18

Çözüm: Eşitliğin sol tarafında payda eşitleyelim.

$$\frac{1+\sin 3x-1+\sin 3x}{1-\sin^2 3x}=\frac{4}{3}$$
$$\frac{2\sin 3x}{1-\sin^2 3x}=\frac{4}{3}$$
$$4-4\cdot\sin^2 3x=6\cdot\sin 3x$$
$$2\cdot\sin^2 3x+3\cdot\sin 3x-2=0$$
$$(2\cdot\sin 3x-1)(\sin 3x+2)=0$$

eşitliğine erişiriz. sin $3x = -2$ olamayacağından sin $3x$ = 1/2 eşitliğini çözmeliyiz.

$3x = \pi/6 + 2k\pi$ eşitliğinden $x = \pi/18 + 2k\pi/3$

$3x = 5\pi/6 + 2k\pi$ eşitliğinden $x = 5\pi/18 + 2k\pi/3$

Doğru cevap: A.

Örnek. $4\cos x\cdot(4\sin x\cos x+3\sin x-1)=3$ *denkleminin en küçük pozitif kökü kaçtır?*

A) $\frac{\pi}{18}$ B) $\frac{\pi}{15}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Çözüm:

$$4\cos x(4\sin x\cos x+3\sin x-1)=3$$
$$16\sin x\cos^2 x+12\sin x\cos x-4\cos x-3=0$$
$$8\sin 2x\cos x+6\sin 2x-4\cos x-3=0$$
$$2\sin 2x(4\cos x+3)-(4\cos x+3)=0$$
$$(2\sin 2x-1)\cdot(4\cos x+3)=0$$
$$\sin 2x=\frac{1}{2}\ \text{veya}\ \cos x=-\frac{3}{4}$$

bulunur. İkinci çarpanın kökü geniş açı olacağından, cevap ilk çarpanın en küçük pozitif kökü yani $x=\frac{\pi}{12}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sin 6x + 3\cdot\sin 4x\cdot\cos 2x = 0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{10}}$ B) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{10}}$ C) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}$

D) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{1}{4}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}$

Çözüm: Ters dönüşüm formülünden,

$$\sin 4x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)$$

olduğunu biliyoruz. Hemen yerine yazalım:

$$\sin 6x+\frac{3}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=0$$
$$5\cdot\sin 6x+3\cdot\sin 2x=0$$

Şimdi üç kat formülüne ihtiyacımız var.

$$\sin 6x = 3\cdot\sin 2x - 4\cdot\sin^3 2x$$

olduğundan $\sin 2x = t$ denirse

$$15t-20t^3+3t=9t-10t^3=t(9-10t^2)=0$$

olur. $t_1=0$, $t_2=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $t_3=\frac{-3}{\sqrt{10}}$ olacağı için

$\sin 2x=0$ eşitliğinden $2x=2k\pi$ yani $x=k\pi$,

$\sin 2x=\frac{3}{\sqrt{10}}$ eşitliğinden $x=\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}+k\pi$,

$\sin 2x=\frac{-3}{\sqrt{10}}$ eşitliğinden $x=\frac{-1}{2}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}+k\pi$

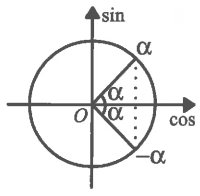
bulunur. Demek ki; ÇK $=\left\{k\pi,\ \pm\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}+k\pi\right\}$.

Buradan da görülmektedir ki, pozitif en küçük x değeri $\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}$'dur.

Doğru cevap: D.

cos x = cos α eşitlikleri

Artık akıllandık... ''cos $x = \frac{1}{2}$ ise x kaçtır?'' sorusuna sadece 60° değil, hem 60° hem de 300° diyoruz. Ama lütfen her iki değere de $k\cdot 360°$ eklemeyi unutmayın. k'nın tamsayı olduğunu da...



cos α = cos −α

$300° \equiv -60°$ olduğundan ve bu aslında hep böyle olduğundan yani kosinüsleri eşit ama kendileri farklı iki açının daima cos eksenine göre simetrik olduklarından, $0 \le \alpha \le 2\pi$ olmak üzere,

$$\cos x = \cos \alpha$$

denkleminin çözümünü sağlayan x değerlerinden biri α ise diğeri hep $-\alpha$'dır.

Bunlardan her birine, $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $2k\pi$ eklendiğinde genel çözüm elde edilir.

$$\cos x = \cos \alpha$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Öyleyse

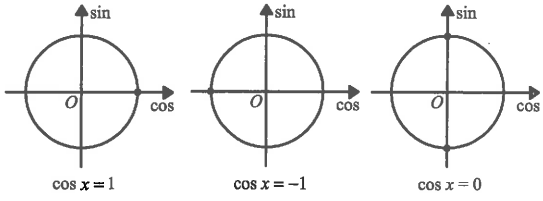
$$x_1 = \alpha + 2k\pi,$$
$$x_2 = -\alpha + 2k\pi$$

Genel olarak $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere,
cos $f(x)$ = cos $g(x)$ ise

$$f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ ve } f(x) = -g(x) + 2k\pi$$

eşitlikleri geçerlidir.





$$\cos x = 1 \text{ ise } x = 2k\pi,$$
$$\cos x = -1 \text{ ise } x = \pi + 2k\pi,$$
$$\cos x = 0 \text{ ise } x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Ayrıca cos x = a denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında p tane kökü varsa $n\in\mathbb{Z}^+$ için cos(nx) = a'nın aynı aralıkta $n\cdot p$ tane kökü vardır.

Örnek. $\cos(x+\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *denkleminin* $\mathbb{R}$*'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?* ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ -\pi+2k\pi\}$ B) $\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ -\pi+2k\pi\}$

C) $\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ -\pi+k\pi\}$ D) $\{\frac{4\pi}{3}+k\pi,\ -\pi+k\pi\}$

E) $\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ -\pi+2k\pi\}$

Çözüm: Şimdi de cos x = cos α haline getireceğiz:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ise

$$\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} \text{ veya } \cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(-\frac{5\pi}{6})$$

eşitliklerini çözmeliyiz. Bunun için

$$x+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ veya } x+\frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

eşitlikleri çözülmelidir. Çözersek,

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x_2 = -\pi + 2k\pi$$

çıkar.

$$\text{ÇK} = \{x: x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x_2 = -\pi + 2k\pi\}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. cos $3x$ = -1 *denkleminin* $\mathbb{R}$*'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?* ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\}$ B) $\{\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\}$ C) $\{\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\}$

D) $\{\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\}$ E) $\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\}$

Çözüm: -1 sayısını derhal cos'lu bir hale çevirelim. Dikkat edin bunun için iki farklı seçeneğimiz yok, tek seçenek var, o da cos π.

$$\cos 3x = -1 \text{ ise } \cos 3x = \cos\pi.$$

Buradan $3x = \pi + 2k\pi$ olacağından $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ bulunur.

$$\text{ÇK} = \{x: x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos 4x = \cos x$ *denklemini* $[0, 2\pi)$ *aralığında sağlayan kaç farklı x değeri vardır?*

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $\cos 4x = \cos x$ ise

$$4x = x + 2k\pi \text{ veya } 4x = -x + 2k\pi$$

olmalıdır. Buradan

$$3x = 2k\pi \text{ veya } 5x = 2k\pi$$

bulunur. O halde

$$x = \frac{2k\pi}{3} \text{ veya } x = \frac{2k\pi}{5}\text{'dir.}$$

Sonuç olarak, $[0, 2\pi)$ aralığında olan x değerleri $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{5}$ olmak üzere 6 tanedir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\cos 3x = \sin x$ *denkleminin* $[0, \pi)$ *aralığında kaç kökü vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\cos f(x) = \sin g(x)$$

diye bir eşitliğin çözümünü göstermedik. Diğer gösterdiklerimiz yeter diye göstermedik. cos'lu ifade sin'liye veya sin'li ifade cos'luya çevrilirse gösterdiğimiz tekniklerden birine dönüşür ki onu da rahatlıkla yaparsınız. Biz cos'luların çözümü daha kısa diye sin'li ifadeyi cos'luya çevirelim.

$\cos 3x = \sin x$ ise $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ olur. O halde

$$3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ veya } 3x = -(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$$

olur. Buradan

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ veya } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

olur ki

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ veya } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

bulunur. Bu x'ler arasında sadece $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ ve $\frac{3\pi}{4}$ değerleri $[0, \pi)$ arasındadır. Yani 3 tanesi.

Doğru cevap: D.

Örnek $\sin 3x = \cos 2x$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left\{x : x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{x : x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{5} + \frac{k\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Çözüm:

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \text{ yani } x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ veya}$$

$$3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi \text{ yani } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\text{ÇK} = \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right\}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek[1979 ÜSS]. $2\cdot\cos^2 x - 5\cdot\cos x + 2 = 0$ *denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?* ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ B) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ C) $(2k \pm 1)\pi$

D) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ E) $4k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\cos x = m$ olsun. İşte o zaman $2m^2 - 5m + 2 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Hemen çarpanlarına ayıralım.

$$(2m - 1)\cdot(m - 2) = 0$$

$m = \frac{1}{2}$ veya $m = 2$ olarak bulunur. Öyleyse,

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ veya } \cos x = 2$$

olduğu çıkar ki $\cos x = 2$ denkleminin çözümünün olmadığı aşikardır. Hadi o zaman $\cos x = \frac{1}{2}$ denklemini çözelim.

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1993 ÖYS]. $\frac{1}{1-\cos x}-\frac{1}{1+\cos x}=\frac{4}{3}$ *denklemini sağlayan x dar açısı kaç derecedir?*

A) 25° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

Çözüm: Payda eşitlemelisin. Gerisi cebir, emin ol!

$$\frac{1}{1-\cos x}-\frac{1}{1+\cos x}=\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{4}{3}$$
$$\underset{(1+\cos x)}{} \qquad \underset{(1-\cos x)}{}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$4\cos^2 x+6\cos x-4=0$$
$$(4\cos x-2)(\cos x+2)=0$$
$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ veya } \cos x=-2$$

İkincisinin çözümü boşküme olduğundan sadece birincisini çözeceğiz.

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ancak x dar açısı sorulduğundan $x=\frac{\pi}{3}=60°$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.
$4\sin x\cos x+2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{3}\cos x-\sqrt{6}=0$
denkleminin $[90°, 360°]$ *aralığındaki çözümleri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {120°, 135°} B) {135°, 225°} C) {120°, 225°}
D) {120°, 135° ve 225°} E) {120°, 135° ve 210°}

Çözüm:

$$4\sin x\cos x+2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{3}\cos x-\sqrt{6}=0$$
$$2\sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)=0$$
$$\left(2\sqrt{2}\sin x-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)=0$$

eşitliğinden $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ veya $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur. O halde istenen aralıktaki çözümler 120°, 135° ve 225° olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\cos 9x+\sin 4x\cdot\sin 5x=0$
denklemini sağlayan pozitif en küçük üç x değerinin toplamı derece cinsinden kaça eşittir?

A) 40,5° B) 54° C) 56,5° D) 62,5° E) 130,5°

Çözüm: Ters dönüşüm formülünden,

$$\sin 4x\cdot\sin 5x=\frac{1}{2}\cdot(\cos x-\cos 9x)$$

olduğu için denklem aşağıdaki halleri alır.

$$\cos 9x+\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x)=0,$$
$$2\cos 9x+\cos x-\cos 9x=0,$$
$$\cos 9x+\cos x=0.$$

Şimdi de dönüşüm formülünü uygulayalım:

$$2\cdot\cos 5x\cdot\cos 4x=0$$

olur ki $\cos 5x=0$ eşitliğinden

$$5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ yani } x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},$$

$\cos 4x=0$ eşitliğinden

$$4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ yani } x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$$

bulunur. O halde

$$\text{ÇK}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\ \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}.$$

olmalıdır. Buradan en küçük pozitif üç x değeri $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{8}$ ve $\frac{\pi}{2}$ yani 18°, 22,5° ve 90° olduğundan cevabımız 130,5° olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri derece cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 9° B) 15° C) 18° D) 36° E) 72°

Çözüm:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$$
$$2\cdot\sin 2x\cdot\cos x+2\cdot\sin 3x\cdot\cos x=0$$
$$\sin 2x\cdot\cos x+\sin 3x\cdot\cos x=0$$
$$\cos x\cdot(\sin 2x+\sin 3x)=0$$

$\cos x=0$ ise $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ veya $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$\sin 3x=-\sin 2x$ ise $3x=-2x+2k\pi$ yani $x=\frac{2k\pi}{5}$ veya $3x=\pi+2x+2k\pi$ veya $x=\pi+2k\pi$

olarak bulunduğundan en küçük pozitif x değerinin $2\pi/5$ yani 72° olduğu görülmektedir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin 6x+\sin 4x=\sqrt{3}\sin 5x$ *eşitliğini sağlayan* x *değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 5° B) 10° C) 18° D) 36° E) 60°

Çözüm: Eşitliğin sol yanını dönüşüm formülünü kullanarak açalım.

$$\sin 6x+\sin 4x=\sqrt{3}\sin 5x$$
$$2\cdot\sin 5x\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin 5x$$
$$2\cdot\sin 5x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cdot\sin 5x=0$$
$$\sin 5x\cdot\left[2\cos x-\sqrt{3}\right]=0$$

eşitliğinden $\sin 5x=0$ veya $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olması gerektiğini anlarız. İlk denklemden başlayalım.

$5x=k\pi$ olduğundan $x=\dfrac{\pi}{5}k$ bulunur ki $k=1$ için $x=36^\circ$ olabileceği görülür. Yani cevabımız klima altındaki Adana sıcağına eşit! ☺

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sqrt{7-4\sqrt{2}\sin x}=2\cos x-\sqrt{2}\tan x$ *denklemini sağlayan* x *değeri için* $\cos x$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\pm\dfrac{1}{2}$ B) $\pm\dfrac{1}{3}$ C) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) ± 1

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$7-4\sqrt{2}\sin x=4\cos^2 x-4\sqrt{2}\sin x+2\tan^2 x$$
$$7=4\cos^2 x+2\tan^2 x$$
$$7=4\cos^2 x+2\left(\sec^2 x-1\right)$$
$$7=4\cos^2 x+2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)$$
$$7\cos^2 x=4\cos^4 x+2\left(1-\cos^2 x\right)$$
$$7\cos^2 x=4\cos^4 x+2-2\cos^2 x$$
$$4\cos^4 x-9\cos^2 x+2=0$$
$$\left(4\cos^2 x-1\right)\left(\cos^2 x-2\right)=0$$

O halde

$$\cos x=\pm\frac{1}{2}\ \text{veya}\ \cos x=\pm\sqrt{2}$$

olmalıdır. İkinci durumdan reel kök gelmeyeceğinden eşitliği sağlayan $\cos x$ değeri $\pm\dfrac{1}{2}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sin 3x+\sin 4x+\cos 6x+\cos 7x=0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif* x *değeri derece cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 9° B) 15° C) 18° D) 27° E) 36°

Çözüm:

$$\sin 4x+\sin 3x=2\cdot\sin\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2},$$
$$\cos 6x+\cos 7x=2\cdot\cos\frac{13x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

eşitliklerini yerlerine yazıp, ortak paranteze alalım.

$$2\cdot\sin\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+2\cdot\cos\frac{13x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0$$
$$2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{7x}{2}+\cos\frac{13x}{2}\right)=0$$

$\cos\dfrac{x}{2}=0$ denkleminden

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \text{yani}\ x=\pi+2k\pi$$

bulunur.

Şimdi $\sin\dfrac{7x}{2}+\cos\dfrac{13x}{2}=0$ denklemi çözelim.

$$\cos\frac{13x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13x}{2}\right)=\sin\frac{\pi-13x}{2}$$

olduğundan denklem

$$\sin\frac{7x}{2}+\sin\frac{\pi-13x}{2}=0$$

halini alır. Dönüşüm formülüne göre açılırsa

$$2\cdot\sin\frac{7x+\pi-13x}{4}\cdot\cos\frac{7x-\pi+13x}{4}=0$$

yani

$$-2\cdot\sin\frac{6x-\pi}{4}\cdot\cos(5x-\frac{\pi}{4})=0$$

bulunur.

$\sin\dfrac{6x-\pi}{4}=0$ eşitliğinden

$$\frac{6x-\pi}{4}=2k\pi\ \text{yani}\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}$$

çıkar.

$\cos(5x-\dfrac{\pi}{4})=0$ eşitliğinden

$$5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \text{yani}\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$$

çıkar. Buradan

$$\text{ÇK}=\left\{\pi+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3},\ \frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right\}.$$

olduğu görülür. En küçük x değeri de $3\pi/20$ yani 27° olarak kaydedilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. [0 ,2π) *aralığında* $(\sin x)^{\cos 2x} = 1$ *eşitliğini sağlayan kaç x değeri vardır?*

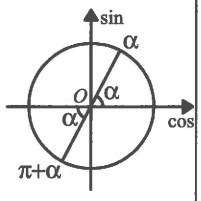
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $a^b = 1$ eşitliğinin sağlanması üç durumda mümkündü. Ya b ne olursa olsun $a = 1$ olacak, ya $a = -1$ olacak ama b çift olacak ya da $a \neq 0$ olmak üzere $b = 0$ olacak.
$\sin x = 1$ ise $x = \pi/2$ olur.
$\sin x = -1$ ise $x = 3\pi/2$ ama bu durumda $\cos 2x$ yani $\cos 3\pi$ çift olmadığından bunu alamayız.
$\cos 2x = 0$ ise x, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ değerlerini alabilir.

Doğru cevap: E.

tan x = tan α eşitlikleri.

Tanjant denklemlerinde durum azıcık farklı. Tanjantın periyodu diğerleri gibi 2π değil, π olduğundan, sağlayan herhangi bir değer bulduktan sonra ona $k\cdot\pi$ ekleyin, yeter. Bu size, eşitliği sağlayan her değeri verecektir.



$\sin \pi+\alpha = -\sin \alpha$
$\cos \pi+\alpha = -\cos \alpha$

Durumu genelleyelim:
$0 \le \alpha < \pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\tan x = \tan \alpha \text{ ve } \cot x = \cot \alpha$$

denklemlerinin kökü

$$x = \alpha + k\pi.$$

Genel olarak $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
$\tan f(x) = \tan g(x)$ ise

$$f(x) = g(x) + k\pi$$

$\cot f(x) = \cot g(x)$ ise

$$f(x) = g(x) + k\pi$$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek. $\tan x = \sqrt{3}$ *denkleminin* $\mathbb{R}$*'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ C) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
D) $\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ E) $\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Çözüm: Bu sefer $\sqrt{3}$ sayısını tanjantlı yazmak icap ediyor. $\tan x = \sqrt{3}$ ise

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$$

olur, buradan $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1973 ÜSS]. $2x^2 - 3x + \tan A = 0$ *denkleminin kökleri* x_1 *ve* x_2*'dir.* $x_1 = 2 \cdot x_2$ *olması için A açısının ölçüsü ne olmalıdır?*

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

Çözüm: Öncelikle verilen ifadede $\tan A$ denilen şeyin bir reel sayı olduğunu fark edin. İfadenin basit bir ikinci dereceden bir denklem olduğunu, kökleri arasında bir bağıntı verildiğini ve bunu kullanarak ifadenin sabit terimini bulmaya çalıştığınızı düşünün.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

idi. Soruda da $x_1 = 2 \cdot x_2$ olduğu verilmiş.

$3x_2 = \frac{3}{2}$ olduğundan $x_2 = \frac{1}{2}$. Denklemin bir kökü olduğundan denklemi sağlamalı. Öyleyse yaz denklemde yerine.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \tan A = 0$$

Buradan $\tan A = 1$ yani $A = 45^\circ$ bulunmuş olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1978 ÜSS]. $a \cdot b = 1$ *ise aşağıdaki x değerlerinden hangisi*

$$a^{\sin x} = b^{\cos x}$$

eşitliğini sağlar?

A) 0 B) π C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

Çözüm: $a \cdot b = 1$ eşitliğinde $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ olduğu görülür.
Hemen diğer eşitlikte yerine yazalım.

$$a^{\sin x} = a^{-\cos x}$$
$$\sin x = -\cos x$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\tan x = -1$$

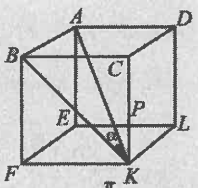
Trigonometrik denklem çözümünden bildiklerimizle

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

olduğunu söylemek hiç de zor olmasa gerek.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki küpte* $m(BKA) = \alpha$ *veriliyor.* $\tan\theta = \sin\alpha$ *eşitliğini sağlayan* θ *açılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?* ($k \in \mathbb{Z}$)



A) $\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\}$ B) $\{\frac{\pi}{6}+k\pi\}$ C) $\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\}$

D) $\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\}$ E) $\{\frac{\pi}{3}+k\pi\}$

Çözüm: $|AB| = 1$ br ise $|BK| = \sqrt{2}$ ve $|AK| = \sqrt{3}$ olacağını biliyoruz. Bu değerler, ABK üçgeninin dik olduğunu unutanlara da hatırlatma yapar. O halde

$$\tan\theta = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

denklemini çözmeliyiz. Bu da çocuk oyuncağı.

$$\theta \text{ için ÇK} = \{\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $2\cdot\cos^2 x + 4\cdot\tan x + 3 = 0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif* x *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) $\frac{3\pi}{4}$

Çözüm:

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

olduğunu hatırlayalım. Bu dönüşümle birlikte denklem tek bilinmeyenli hale gelmiş olur.
$\tan x = t$ olsun. Eşitlik

$$\frac{2}{1+t^2}+4t+3=0$$

yani

$$4t^3+3t^2+4t+5=0$$

haline dönüşür. Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamıyla çift dereceli terimlerin katsayıları toplamının birbirlerine eşit olduğunu farkederseniz
$t=-1$ değerinin bir kök olduğunu anlarsınız.
Diğer kökleri bulmak için de denklemi çarpanlarına ayırırız.

$$(t+1)(4t^2-t+5)=0.$$

İkinci çarpanın diskriminantı negatif olduğundan sadece $\tan x = -1$ denkleminin köklerini bulmak lazım. Ben buldum: $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

$$\text{ÇK} = \left\{x : x = \frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin x+\cos x = 1$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\}$ B) $\{2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\}$ C) $\{k\pi, \frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\}$

D) $\{k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\pi\}$ E) $\{2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\}$

Çözüm:
Birinci yol (Yanlış).

$$\sin x+\cos x = 1$$
$$(\sin x+\cos x)^2 = 1^2$$
$$1+\sin 2x = 1$$
$$\sin 2x = 0$$

O halde $x_1 = k\pi$ ve $x_2 = \frac{\pi}{2}+k\pi$ bulunur.

İkinci yol (Yanlış).

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \text{ ve } \tan\frac{x}{2} = a$$

dönüşümlerini yaparsak

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{1-a^2}{1+a^2}=1$$

olur. Eşitlik düzenlenirse $2a^2-2a=0$ yani $a=1$ veya $a=0$ bulunur.

$$\tan\frac{x}{2}=1 \text{ ise } \sin x = 1 \text{ olur ki } x_1 = \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\tan\frac{x}{2}=0 \text{ ise } \sin x = 0 \text{ olur ki } x_2 = 2k\pi$$

bulunur. fark ettiniz mi ilk yolun sonucuyla farklı bir sonuç bulduk. Sabredin üçüncü çözüme bakın.

Üçüncü yol (Doğru).
$\sin x+\cos x = 1$ eşitliği yarım açı formüllerinden

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}=1$$
$$\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

haline dönüşür.

$\sin\frac{x}{2}=0$ eşitliğinden $x=4k\pi$ veya $x=2\pi+4k\pi$,

$\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$ eşitliğinden $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

buluruz.

$$\text{ÇK} = \left\{x : x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

Bu sefer de bambaşka bir çözüm kümesi bulduk. Birinci ve ikinci yollarda verilen sonuçların hem birbirlerinden hem de üçüncü yolun sonucundan farklı olduğu görülecektir.

Bunun sebebi bizim denklemin her iki tarafının karesini almamız yani alınan üs çift sayı olduğunda mutlak değerce birbirine eşit olan sayıları birbirine eşit kabul etmiş olmamız. Bu yüzden, karesini alarak çözüm yapmış olduğumuz denklemlerde cevapları denklemde yerine koyarak kontrol etmeliyiz ve düzenlemeyi ona göre yapmalıyız.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|=\sin x-\frac{1}{2}$ *denkleminin en küçük pozitif üç kökünün toplamı kaçtır?*

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) $\frac{3\pi}{4}$ E) 2π

Çözüm:

$$\cos x-\frac{1}{2}=\sin x-\frac{1}{2} \text{ ve } \cos x-\frac{1}{2}=-\sin x+\frac{1}{2}$$

eşitliklerini inceleyeceğiz.

$$\cos x-\frac{1}{2}=\sin x-\frac{1}{2}$$
$$\cos x=\sin x$$
$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Fakat $\sin x>\frac{1}{2}$ olması gerektiğinden çözüm kümesine $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ değerlerini alacağız. Diğer yandan

$$\cos x-\frac{1}{2}=-\sin x+\frac{1}{2}$$
$$\sin x+\cos x=1$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}=1$$
$$\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

haline dönüşür.

$\sin\frac{x}{2}=0$ eşitliğinden $x=4k\pi$ veya $x=2\pi+4k\pi$,

$\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$ eşitliğinden $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

buluruz.

$\sin x>\frac{1}{2}$ olması gerektiğinden $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ olmalıdır.

Her iki sonucu birleştirirsek,

$$\text{ÇK}=\left\{x: x=\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

olarak bulunur. O halde en küçük üç pozitif kök $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{5\pi}{4}$ olur ki toplamları da 2π'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x\in(0,\pi/2)$ *olmak üzere* $\frac{2\sin x-1}{2\cos x-1}\le 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ B) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ C) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ D) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

Çözüm: Payın kökünün $\pi/6$, paydanın kökünün de $\pi/3$ olduğunu fark ederseniz, tablo yapılırsa çözüm aralığının kökler arası olduğu anlaşılır. Yalnız paydanın değeri 0 olamayacağından çözüm aralığı $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{(x-5)\cdot\cos^2 x}{x+3}\le 0$ *eşitsizliğinin pozitif tam sayılar kümesinde kaç çözümü vardır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Önce $\cos^2 x$ ifadesi negatif olamayacak bir ifade olduğundan onu atalım. Geriye kalan eşitsizlik çözülürse çözüm aralığı $(-3, 5]$ çıkacaktır. Bu aralıkta pozitif tam sayı olan 5 değer vardır. Diğer yandan $\cos^2 x$ ifadesi $\pi/2$ ve onun tek katlarında 0 olurlar ama bu değerler tam sayı olmadıklarından çözüm kümesine dahil edilemezler.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2\sqrt{3}+\sec^2 x\le(1+\sqrt{3})(1+\tan x)$ *eşitsizliğinin* $[0, 2\pi]$ *aralığındaki çözümlerinin en küçüğüyle en büyüğünün toplamı kaçtır?*

A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\frac{17}{12}\pi$ C) $\frac{3}{2}\pi$ D) $\frac{19}{12}\pi$ E) $\frac{5}{3}\pi$

Çözüm: Eşitsizlik tek bilinmeyenli olsun diye hemen $\sec^2 x$ yerine $1+\tan^2 x$ yazalım.

$$2\sqrt{3}+1+\tan^2 x\le(1+\sqrt{3})(1+\tan x)$$
$$2\sqrt{3}+1+\tan^2 x\le 1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\tan x$$
$$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}\le 0$$
$$(\tan x-1)(\tan x-\sqrt{3})\le 0$$
$$1\le\tan x\le\sqrt{3}$$

Bu durumda $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$ veya $\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{4\pi}{3}$ olmalıdır. Görüldüğü üzere x'in alabileceği en küçük değer $\pi/4$, en büyük değer ise $4\pi/3$'tür. Bu değerlerin toplamı da $19\pi/12$ yapar.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir? ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

2.

$$\sin 3x = 1$$

denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında kaç farklı çözümü vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$\cos^2 x - 5 \cdot \cos x + 6 = 0$$

denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığında kaç kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$2 \cdot \cos 2x = 4 \cdot \sin x - 1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdaki denklemlerin hangisinin çözüm kümesiyle aynıdır?

A) $\cos x = \frac{1}{2}$ B) $\sin x = 1$ C) $\cos x = 0$

D) $\sin x = \frac{1}{2}$ E) $\cos x = -1$

5.

$$\cos 4x = \cos x$$

denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında kaç kökü vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.

$$\cos 2x = \sin x$$

denkleminin $\mathbb{R}$'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir? ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ D) $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k}{3}\pi, \frac{-\pi}{2} + k\pi\right\}$

E) $\left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

7.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı pozitif dar açı ölçüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

denkleminin çözüm kümesi kaç farklı pozitif dar açı ölçüsü içerir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

$$\sin x = \cos 60^\circ$$

denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir? ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ E) $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

10.

$$2^{2\cos x} = 2^{\cos^2 x + 1}$$

denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir? ($k \in \mathbb{Z}$)

A) $\{2k\pi, \pi + 2k\pi\}$ B) $\{0, 2\pi\}$ C) $\{-2\pi, 0\}$

D) $\{2k\pi\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

1. D 2. C 3. A 4. D 5. D 6. C 7. B 8. B 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=4$$

eşitliğini gerçekleyen en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

A) 12 B) 15 C) 30 D) 45 E) 60

2.

$$\sin 2x=\cos x$$

ve $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ olduğuna göre, x açısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

3.

$$\frac{\cos x}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

olduğuna göre, x açısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{8}$

4.

$$\tan x\cdot\tan 3x=1$$

denkleminin $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ aralığındaki kökleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{9\pi}{4}$

5.

$$\sin x-\cos x-1=0$$

denkleminin çözüm kümesi hangisidir? $(k\in\mathbb{Z})$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ B) $(2k+1)\pi$ C) $\frac{k\pi}{2}$

D) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ E) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$

6.

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$$

ve $0<x<2\pi$ koşullarını gerçekleyen en büyük x ile en küçük x değerlerinin farkı kaç derecedir?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 30 E) 60

7.

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir? $(k\in\mathbb{Z})$

A) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ B) $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$ C) $x=(3k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$

D) $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$ E) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $x_2=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}$

8.

$$2\tan^2 x-\sec^2 x=0$$

denkleminin çözüm kümesi nedir? $(k\in\mathbb{Z})$

A) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ B) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ C) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$

D) $x=(2k+1)\frac{\pi}{5}$ E) $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$

9.

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

denklemini gerçekleyen tüm x'ler hangi seçenekte verilmiştir? $(k\in\mathbb{Z})$

A) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ B) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ C) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

D) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x_2=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}$ E) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

10.

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin genel çözümü hangi x'lerle gösterilir? $(k\in\mathbb{Z})$

A) $x_1=k\pi+\frac{\pi}{6}$, $x_2=k\pi+\frac{\pi}{3}$ B) $x_1=k\pi+\frac{2\pi}{3}$, $x_2=k\pi-\frac{\pi}{6}$

C) $x_1=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $x_2=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ D) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ $x_2=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

E) $x_1=2k\pi-\frac{\pi}{3}$, $x_2=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$

1. B 2. C 3. D 4. B 5. A 6. E 7. E 8. C 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$$

denkleminin genel çözümü hangi şıktadır? ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $x_1=2k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4},\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

B) $x_1=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4},\ x_2=2k\pi-\frac{\pi}{4}$

C) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{3},\ x_2=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

D) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ x_2=(2k+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

E) $x_1=k\pi+\frac{2\pi}{3},\ x_2=k\pi-\frac{\pi}{3}$

2.

$$\sin 2x=\sin x$$

denkleminin çözüm kümesi hangisidir? ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}, x_2=k\pi+\frac{\pi}{4}$ B) $x_1=k\pi,\ x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

C) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{3}, x_2=k\pi+\frac{\pi}{2}$ D) $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ x_2=k\pi$

E) $x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

3.

$$\sin x=\tan x$$

denkleminin $\mathbb{R}$'deki çözüm kümesi hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ C) $\{k\pi\}$ D) $\{2k\pi\}$ E) $\mathbb{R}$

4.

$$\tan\frac{2x}{3}$$

ifadesinin $\mathbb{R}$'de tanımsız olmasını sağlayan x'ler hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$ B) $\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right\}$

D) $\left\{\frac{3\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

5.

$$\cot 3x=-1$$

denklemini sağlayan en küçük üç pozitif kökün toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{11\pi}{12}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) 2π

6.

$$\cos 2x=\sin x$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir? ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $x_1=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ x_2=2k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

B) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ x_2=k\pi$

C) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ x_2=2k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$

D) $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{4},\ x_2=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}$

E) $x_1=k\pi+\frac{\pi}{3},\ x_2=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}$

7.

$$\tan x=1$$

denkleminin $\mathbb{R}$'deki çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}$

8.

$$\tan 4x=\sqrt{3}$$

denkleminin [0, 2π) aralığında kaç kökü vardır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

9.

$$\tan 2x=\cot x$$

denklemini sağlayan en küçük pozitif iki kökün toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

10.

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$ D) $\{k\pi\}$ E) $\mathbb{R}$

1. A 2. B 3. C 4. D 5. D 6. A 7. C 8. D 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Lineer Trigonometrik Denklemler

Birinci Dereceden Trigonometrik Denklemlerin Çözümleri. Burada göstereceğimiz denklemler şu ana kadar gördüklerimizden biraz farklı. Ama burada kullandığımız tekniği daha önce Trigonometri-II dersinde ucundan göstermiştik.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ iken

$$a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = c$$

tipindeki denklemlerde

$$\sin x + \frac{b}{a}\cdot\cos x = \frac{c}{a}$$

olduğundan daha önce yaptığımız gibi

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

dönüşümü yapacağız. Bu, bizi bakın nerelere götürecek:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cdot\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \tan\theta\cdot\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot\cos x = \frac{c}{a}\cdot\cos\theta$$

$$\sin(x+\theta) = \frac{c}{a}\cdot\cos\theta$$

haline gelir. tan θ'nın değerini bildiğimizden, uygun bir dik üçgen çizerek cos θ'nın değerini de bulur ve yerine yazarız, gerisi şu ana kadar anlattığımız denklem çözümleriyle aynıdır.

Bir başka yol da şu olabilir:

$$a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = c$$

tipindeki denklemlerde öyle bir d reel sayısı bulun ki a/d, b/d ve c/d değerleri ölçüsünü bildiğiniz bir açının sinüsü veya kosinüsü olsun. Eğer böyle bir d sayısı bulabilirseniz eşitliğin her iki yanını hemen d'ye bölün. Sözgelimi a/d sayısı cos α'ya, b/d sayısı da sin α'ya eşit olsun. O halde

$$\frac{a}{d}\cdot\sin x + \frac{b}{d}\cdot\cos x = \frac{c}{d}$$

eşitliği

$$\cos\alpha\cdot\sin x + \sin\alpha\cdot\cos x = \frac{c}{d}$$

yani $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{d}$ olur ki bu da temel denklemdir.

Örnek. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ *denklemini sağlayan pozitif en küçük x değeri kaçtır?*

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

Çözüm: İlk soru diye üç yol göstereceğiz.

Birinci yol. $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$ denirse,

$$\sin x + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cdot\cos x = 2$$

bulunur. Paydalar eşitlenirse

$$\frac{\sin x\cdot\cos 60^\circ + \sin 60^\circ\cdot\cos x}{\cos 60^\circ} = 2$$

eşitliğine ulaşılır. Bunun bir sinüs toplam açılımı olduğunu fark etmelisiniz.

$$\sin(x+60^\circ) = 1$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2})$$

$$x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

eşitliğinden $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ bulunur. O halde

$$\text{Ç.K.} = \{x: x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}.$$

İkinci yol. Her iki tarafı $\frac{1}{2}$ ile çarpalım. Denklem

$$\frac{1}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x = 1$$

$$\cos 60^\circ\cdot\sin x + \sin 60^\circ\cdot\cos x = 1$$

$$\sin(x+60^\circ) = \sin 90^\circ$$

haline dönüşür. Bir önceki yola göre bu satıra daha önce vardığımıza dikkat edin. Gerisi aynı:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Üçüncü yol. Her zaman sökmez ama burada işe yarar. Böyle en küçük pozitif eleman filan sorulduğunda şıkları denemek çoğu zaman daha avantajlıdır. Tabi bunun için özel ölçülerin trigonometrik değerlerine tam olarak vakıf olmalısınız.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=1$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif iki x değerinin toplamı kaç radyandır?*

A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\frac{5}{3}\pi$ C) 2π D) $\frac{8}{3}\pi$ E) 3π

Çözüm: Burada şıklardan gitmek biraz önceki kadar basit değil. Biz adam gibi çözelim. $\sqrt{3}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$ diye denklemimiz

$$\frac{\sin 60^\circ\cdot\sin x}{\cos 60^\circ}+\cos x=1$$

halini alır. Paydalar eşitlenirse

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

bulunur ki bu da bir kosinüs fark açılımıdır.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

olduğundan,

$$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ veya}$$

$$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

olmalıdır. Düzenlenirse

$$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ veya } x=2k\pi.$$

O halde en küçük pozitif iki x değeri $\frac{2\pi}{3}$ ve 2π'dir. Toplamları da $\frac{8\pi}{3}$ eder.

Doğru cevap: D.

Örnek. $3\cdot\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x=0$ *denkleminin* $[0,2\pi]$ *aralığında kaç kökü vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$3\cdot\sin x=\sqrt{3}\cdot\cos x \text{ diye } \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

olur. O zaman $\tan x=\tan\frac{\pi}{6}$ denklemini çözmek yeter. Ben çözdüm: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ bulunur. $k=0$ ve $k=1$ için verilen aralıkta 2 kökün olduğu görülür.

Doğru cevap: B.

Örnek[1997 ÖYS]. $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ olmak üzere,

$$\cos x-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=\sqrt{3}$$

denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{11}{6}\pi$ B) $\frac{9}{5}\pi$ C) $\frac{8}{5}\pi$ D) $\frac{7}{4}\pi$ E) $\frac{5}{3}\pi$

Çözüm:

$$\cos x-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=\cos x-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\sin x$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Buradan da $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ olduğundan,

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ yani } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

bulunur. $k=1$ için $x=\frac{11\pi}{6}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

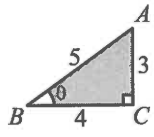
Örnek. $3\cdot\sin x+4\cdot\cos x=5$ *eşitliğini sağlayan x ölçüsü için* $\tan 2x$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{24}{7}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{25}{7}$ E) $\frac{24}{25}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanını 5'e bölelim verilen eşitlik

$$\frac{3}{5}\cdot\sin x+\frac{4}{5}\cdot\cos x=1$$

halini alır. 3, 4, 5 değerleri aklımıza 3 – 4 – 5 dik üçgenini getiriyor. Hemen o üçgeni çizelim.



$$\sin\theta=\frac{3}{5} \text{ ve } \cos\theta=\frac{4}{5}$$

olduğundan

$$\sin x\cdot\sin\theta+\cos x\cdot\cos\theta=1$$

$$\cos(x-\theta)=1$$

bulunur. Bu da $x=\theta$ demektir. Şu durumda

$$\tan 2x=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7}=\frac{24}{7}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $8\sin x+15\cos x=17$ *olduğuna göre* $9\sin x+2\cos x$ *kaça eşittir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Verilen eşitliğin her iki yanını 17'ye bölelim.

$$\frac{8}{17}\sin x+\frac{15}{17}\cos x=1$$

eşitliğine ulaşırız.

$\sin\theta=\frac{8}{17}$ olsun. $\cos\theta=\frac{15}{17}$ olur. Bu durumda eşitlik de

$$\sin\theta\sin x+\cos\theta\cos x=1$$

yani $\cos(\theta-x)=1$ olur. Bu da $\theta=x$ demek olur. Hemen sorulan ifade de yerine yazalım.

$$9\sin x+2\cos x=9\sin\theta+2\cos\theta=9\cdot\frac{8}{17}+2\cdot\frac{15}{17}=6.$$

Doğru cevap: D.

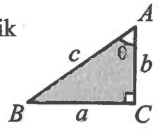
Örnek. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ *eşitliğini sağlayan* x *ölçüsü için* $\tan\frac{x}{2}$ *kaçtır?*

A) $\frac{a}{b-c}$ B) $\frac{a}{c-b}$ C) $\frac{b+c}{a}$ D) $\frac{a}{b+c}$ E) $\frac{a-b}{c}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanını c'ye bölelim.

$$\frac{a}{c}\cdot\sin x+\frac{b}{c}\cdot\cos x=1$$

Kenar uzunlukları a, b ve c br olan bir dik üçgen çizilirse



$$\frac{a}{c}=\sin\theta \text{ ve } \frac{b}{c}=\cos\theta$$

yazılabilir. Bu durumda denklemimiz

$$\sin\theta\cdot\sin x+\cos\theta\cdot\cos x=1$$

yani

$$\cos(x-\theta)=1$$

halini alır ki bu da $x=\theta$ demektir. O halde $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{a}{b+c}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $5\cdot\sin 4x-12\cdot\cos 4x=6{,}5$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

olduğundan eşitliğin her iki yanını 13'e bölmek gerekir. Bölelim:

$$\frac{5}{13}\cdot\sin 4x-\frac{12}{13}\cdot\cos 4x=\frac{1}{2}$$

olur. $\alpha=\text{Arcsin}\frac{12}{13}$ alırsak,

$$\sin\alpha=\frac{12}{13} \text{ ve } \cos\alpha=\frac{5}{13}$$

olur. Böylelikle denklemimiz

$$\sin 4x\cdot\cos\alpha-\cos 4x\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

halini alır. Eşitliğin sol tarafı oldukça tanıdık.

$$\sin(4x-\alpha)=\frac{1}{2}$$

olduğundan buradan

$$4x-\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+2n\pi$$

yani

$$x=\frac{1}{4}\cdot\text{Arcsin}\frac{12}{13}+(-1)^n\frac{\pi}{24}+2n\pi$$

bulunur.

Örnek. $5\cdot\sin x+2\cdot\cos x=\sqrt{29}\cdot\cos 3x$ *denkleminin çözüm kümesini bulalım.*

Çözüm: $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ olduğundan eşitliğin her iki yanını $\sqrt{29}$'a bölelim. Denklem

$$\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\sin x+\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\cos x=\cos 3x$$

halini alır. Şimdi $\alpha=\text{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{29}}$ seçelim. O halde şimdi de denklem

$$\sin\alpha\cdot\sin x+\cos\alpha\cdot\cos x=\cos 3x$$

haline dönüştü. Düzenlersek $\cos(x-\alpha)=\cos 3x$ bulunur.

$x-\alpha=3x+2k\pi$ eşitliğinden $-2x=\alpha+2k\pi$ yani

$$x=-\frac{\alpha}{2}-k\pi=-\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{29}}-k\pi$$

$x-\alpha=-3x+2k\pi$ eşitliğinden $4x=\alpha+2k\pi$ yani

$$x=\frac{\alpha}{4}+\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{4}\text{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{29}}+\frac{k\pi}{2}$$

$$\text{ÇK}=\left\{-\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{29}}-k\pi,\ \frac{1}{4}\text{Arcsin}\frac{5}{\sqrt{29}}+\frac{k\pi}{2}\right\}.$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$$

denkleminin en büyük negatif kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-\pi}{6}$ B) $\frac{-\pi}{3}$ C) $\frac{-5\pi}{6}$ D) $\frac{-7\pi}{6}$ E) $\frac{-11\pi}{6}$

2.

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$$

denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

3.

$\pi < x < 2\pi$ olmak üzere

$$\sqrt{3}\cos x-3\sin x=0$$

denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{10\pi}{9}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{6\pi}{5}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

4.

$$5\cdot\sin x+12\cdot\cos x=13$$

olduğuna göre $8\cdot\sin x+\cos x$ değeri kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Ç.K. $=\{x: x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

B) Ç.K. $=\{x: x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi, x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

C) Ç.K. $=\{x: x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

D) Ç.K. $=\{x: x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi, x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

E) Ç.K. $=\{x: x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi, x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ k\in\mathbb{Z}\}$

6.

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$$

denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

7.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\cos x-\cot\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{7}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

8.

$$4\cdot\sin x+3\cdot\cos x=5$$

olduğuna göre $\sin x-\cos x$ değeri kaça eşittir?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 4 D) 5 E) 6

9.

$$7\cdot\sin x+24\cdot\cos x=25$$

olduğuna göre $4\cdot\sin x-2\cdot\cos x$ değeri kaça eşittir?

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) 1

10.

$$3\cdot\sin x+4\cdot\cos x=5$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Ç.K. $=\{x: x=-\text{Arcsin}\frac{4}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

B) Ç.K. $=\{x: x=-\text{Arcsin}\frac{3}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

C) Ç.K. $=\{x: x=\text{Arcsin}\frac{4}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

D) Ç.K. $=\{x: x=\text{Arcsin}\frac{3}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

E) Ç.K. $=\{x: x=-\text{Arcsin}\frac{3}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

1. E 2. E 3. E 4. C 5. E 6. D 7. B 8. A 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Homojen Trigonometrik Denklemler

İki değişkenli denklemlerin, değişkenlerinin birbirlerine oranı bulunabilenlerine **homojen denklem** denir. Örneğin

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

denklemi homojen bir denklemdir. Zira eşitliğin her iki yanını x^2 veya y^2'ye bölersek istediğimize ulaşırız. Biz, sözgelimi y^2'ye bölelim.

$$\frac{ax^2+bxy+cy^2}{y^2} = \frac{0}{y^2}$$

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0$$

olur ki x/y ifadesine t denirse

$$a\cdot t^2 + b\cdot t + c = 0$$

şeklinde t'ye bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. İkinci dereceden denklemlerin çözüm metodunu da bildiğimizden t yani x/y değeri rahatlıkla bulunabilir.

Bu dersimizde değişkenleri trigonometrik ifadeler olan homojen denklemleri işleyeceğiz. Tekniğimiz aynısı olacak.

$$a\cdot\cos x + b\cdot\sin x = 0$$
$$a\cdot\cos^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\sin^2 x = 0$$

biçimindeki denklemlere **homojen trigonometrik denklemler** denir.

Her iki tip denklemin de çözüm metodunu vereceğiz. Her ikisi de bir noktada biraz önceki tiplere dönüşecek. Birincisi zaten biraz önce gösterdiğimiz lineer trigonometrik denklemlerle nerdeyse aynı, hatta daha kolaydır.

***a*·sin *x* + *b*·cos *x* = 0 denklemlerinin çözümü.** Bu tip denklemlerde her iki tarafı a ile böler (a sıfır değilse tabii ki) ve denklemi

$$\sin x + \frac{b}{a}\cdot\cos x = 0$$

haline getiririz. Sağ tarafın 0 olması bize şu kolaylığı sağlar:

$$\sin x = -\frac{b}{a}\cdot\cos x \text{ dolayısıyla } \tan x = -\frac{b}{a}.$$

Bu denklem de bir temel trigonometrik denklem olduğundan çözmeyi biliyoruz zaten.



Eğer $\cos x = 0$ durumu bir çözüm değilse eşitliğin her iki yanının $\cos x$'e de bölebilirsiniz. Bu durumda

$$a\cdot\cos x + b\cdot\sin x = 0$$

denklemi

$$a + b\cdot\tan x = 0$$

halini alır ki, bu da

$$\tan x = -\frac{b}{a}$$

şeklinde bir temel trigonometrik denklemdir.

Örnek. $\cos 3x + \sin 3x = 0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif iki x değerinin toplamı kaç radyandır?*

A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\frac{5}{6}\pi$ C) 2π D) $\frac{8}{3}\pi$ E) 3π

Çözüm: Denklemi $\tan x = -\frac{b}{a}$ şekline dönüştüreceğiz. Bunun için eşitliğin bir yanını diğer tarafa atacağız.

$$\sin 3x = -\cos 3x$$

eşitliğinde her iki tarafı $\cos 3x$'e bölersek

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = -1$$

bulunur. ($\cos 3x = 0$ olduğunda $\sin 3x = -1$ veya $\sin 3x = 1$'dir, bu değerler denklemi sağlamadığı için $\cos 3x$'e bölmekte bir mahzur yoktur.)

$$\tan 3x = -1$$

olduğundan -1 yerine $\tan\frac{3\pi}{4}$ yazabiliriz.

$\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{4}$ ise $3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ yani $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ olur.

$$k = 0 \text{ için } x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \text{ için de } x = \frac{7\pi}{12}$$

olduğundan, en küçük pozitif iki x değerinin toplamı $\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Şimdi gelelim diğer tip homojen denklemlerin çözümüne...

$a\cdot\cos^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\sin^2 x = 0$ denklemlerini ise tipik çarpanlara ayırma metotlarıyla çözmeye çalışırız. Ama bu her zaman çok kolay olmadığından eşitliğin her iki tarafını $\cos^2 x$ $(\neq 0)$ ile bölerek, denklemi;

$$a + b\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + c\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

haline getiririz. Bu da

$$a + b\cdot\tan x + c\cdot\tan^2 x = 0$$

denkleminden başka bir şey değildir. Şimdi

$$\tan x = t$$

denirse, denklem bilinen

$$c\cdot t^2 + b\cdot t + a = 0$$

gibi ikinci dereceden bir denklem olur ki, bunu da çözemeyecek olan bu notları elinden bırakıp, ikinci dereceden denklem notunu alsın, okusun, yazsın, çizsin, çalışsın.

Eğer denklem, d sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$a\cdot\cos^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\sin^2 x = d$$

şeklindeyse de homojenlik bozulmaz. Halen eşitliğin her iki yanının $\cos^2 x$'e bölebilirsiniz. Böyle bir durumda

$$a + b\cdot\tan x + c\cdot\tan^2 x = d\cdot\sec^2 x$$

olacaktır. $\sec^2 x$ yerine $1 + \tan^2 x$ yazarsanız kabus sona erer! Daha zekice bir çözüm yolu daha var. Eşitliğin her iki yanının bir şeye bölmeden d yerine $d\cdot 1$ yazarız, 1 yerine de $\sin^2 x + \cos^2 x$ yazıp denklemi düzenleriz, olur biter.

Örnek. $3\cdot\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x - 4\cdot\cos^2 x = 0$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $\text{Arctan}\frac{4}{3}$ B) $\text{Arctan}\frac{3}{4}$ C) $\text{Arctan}\frac{-4}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanını $\cos^2 x$ ile bölelim.

$$3\cdot\tan^2 x - \tan x - 4 = 0$$

olur. $\tan x = t$ için

$$3t^2 - t - 4 = 0 \text{ yani } (3t-4)(t+1) = 0$$

olur. O halde $t = \frac{4}{3}$ veya $t = -1$'dir. Yani

$$\tan x = \frac{4}{3} \text{ veya } \tan x = -1$$

olmalıdır. Buradan $x = \text{Arctan}\frac{4}{3} + k\pi$ veya $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$. bulunur. İkinci x değeri bir geniş açı ölçüsüne tekabül ederken ilki dar açı ölçüsü diye küçük olanın $\text{Arctan}\frac{4}{3}$ olduğunu anlarız.

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. $\cos^2 x + \cos 2x = \sin^2 x + \sin 2x$ *denklemini sağlayan en küçük dar açı ölçüsünün tanjantı kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $1+\sqrt{5}$ D) $2+\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Çözüm: Eşitlikte $\cos 2x$ yerine $\cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x$ yerine de $2\cdot\sin x\cdot\cos x$ yazıp, düzenleyelim.

$$\cos^2 x + \cos 2x = \sin^2 x + \sin 2x$$
$$\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x$$
$$2\cdot\cos^2 x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x - 2\cdot\sin^2 x = 0$$

Şimdi eşitliğin her iki yanını $\cos^2 x$'e bölelim. Sonra da eşitliğin her iki yanını $-\frac{1}{2}$ ile çarpalım.

$$\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$$

olur. $\tan x = m$ olsun.

$$m^2 + m - 1 = 0$$

olur ve şimdi bu denklemi çözelim.

$$m_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

yani $\tan x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ veya $\tan x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ bulunur. İkinci eşitlikte x geniş açı ölçüsü olduğundan cevabımız ilk eşitlikte yazılıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $6\cdot\sin^2 x + 3\cdot\sin x\cdot\cos x - 5\cdot\cos^2 x = 2$ *denklemini sağlayan x'ler için* $\tan x$ *en çok kaç olabilir?*

A) $-\frac{7}{4}$ B) $-\frac{4}{7}$ C) 0 D) $\frac{4}{7}$ E) 1

Çözüm: Dikkat ettiyseniz, homojen denklem diye size tanıştırdığımız denklemlerde sağ taraf 0'a eşitti ama burada değil. O halde aşağıda gösterdiğimiz gibi alicengiz oyunu yapacağız:

$$6\cdot\sin^2 x + 3\cdot\sin x\cdot\cos x - 5\cdot\cos^2 x = 2$$
$$6\cdot\sin^2 x + 3\cdot\sin x\cdot\cos x - 5\cdot\cos^2 x = 2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$4\cdot\sin^2 x + 3\cdot\sin x\cdot\cos x - 7\cdot\cos^2 x = 0$$
$$4\cdot\tan^2 x + 3\cdot\tan x - 7 = 0$$
$$(\tan x - 1)\cdot(4\cdot\tan x + 7) = 0$$

eşitliğinden $\tan x = -\frac{7}{4}$ veya $\tan x = 1$ olabileceğini görürüz. Demek ki $\tan x$ en çok 1 değerini alabilirmiş.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin^2 x - 7\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = -2$ *denklemini sağlayan en küçük pozitif x değeri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $\text{Arctan}\frac{4}{3}$ B) $\text{Arctan}\frac{3}{4}$ C) $\text{Arctan}\frac{-4}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Çözüm:

$$\sin^2 x - 7\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = -2$$
$$\sin^2 x - 7\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = -2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$3\cdot\sin^2 x - 7\cdot\sin x\cdot\cos x + 4\cdot\cos^2 x = 0$$

Bakın ne güzel oldu, tam da çözümünü bildiğimiz bir tipe dönüştü. Her iki yanı $\cos^2 x$ ile bölelim:

$$3\cdot\tan^2 x - 7\cdot\tan x + 4 = 0$$

olur. $\tan x = t$ için

$$3t^2 - 7t + 4 = 0 = (3t - 4)(t - 1)$$

olduğundan

$$t_1 = \frac{4}{3} \text{ veya } t_2 = 1$$

olur ki, $\tan x = \frac{4}{3}$ veya $\tan x = 1$ olduğunu anlarız. O halde çözüm kümesi şöyle yazılabilir:

$$x = \text{Arctan}\frac{4}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ veya } x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Sonuç olarak, $\frac{\pi}{4} < \text{Arctan}\frac{4}{3}$ olduğunu görmek zor olmasa gerek.

Doğru cevap: D.

Örnek. $6\cdot\cos^2 x + 4\cdot\sin x\cdot\cos x = 1$ *olduğuna göre* $\tan x$ *ifadesinin alabileceği değerler toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Hemen 1 yerine $\sin^2 x + \cos^2 x$ yazalım.

$$6\cdot\cos^2 x + 4\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$5\cdot\cos^2 x + 4\cdot\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x = 0$$

Eşitliğin her iki yanını $\cos^2 x$'e bölersek,

$$5 + 4\tan x - \tan^2 x = 0$$

buluruz. O halde kökler toplamı formülünden $\tan x$ ifadesinin alabileceği değerler toplamı da 4 olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $10 + \sin 6x - 22\cdot\cos^2 3x = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm:

$$10 = 10\cdot\sin^2 3x + 10\cdot\cos^2 3x$$

ve

$$\sin 6x = 2\cdot\sin 3x\cdot\cos 3x$$

olduğundan denklem

$$10\cdot\sin^2 3x + 2\cdot\sin 3x\cdot\cos 3x - 12\cdot\cos^2 3x = 0$$

haline döner. Şimdi $\sin 3x$ ve $\cos 3x$'e bağlı bu ikinci derece denklemi çözelim. $\cos 3x \neq 0$ olmak üzere her terimi $2\cdot\cos 3x$'e bölersek

$$5\cdot\tan^2 3x + \tan 3x - 6 = 0$$

elde edilir. $\tan 3x = t$ değişken değişimi yapılırsa

$$5t^2 + t - 6 = 0 = (t - 1)\cdot(5t + 6)$$

olur ki buradan $t_1 = 1$ ve $t_2 = -\frac{6}{5}$ bulunur.

$\tan 3x = 1$ eşitliğinden

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ yani } x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3},$$

$\tan 3x = -\frac{6}{5}$ eşitliğinden

$$3x = -\text{Arctan}\frac{6}{5} + k\pi \text{ yani } x = -\frac{1}{3}\cdot\text{Arctan}\frac{6}{5} + k\frac{\pi}{3}$$

bulunur.

Örnek [1998 ÖYS]. $\sin^2 x + 10\cdot\cos^2 x - 10 = 0$ *denkleminin* $[\pi/2, 5\pi/2]$ *aralığındaki kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{7}{6}\pi$ B) $\frac{4}{3}\pi$ C) $\frac{3}{2}\pi$ D) 2π E) π

Çözüm: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğundan, 10 yerine $10\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$ yazabiliriz.

$$\sin^2 x + 10\cdot\cos^2 x - 10 = 0$$
$$\sin^2 x + 10\cdot\cos^2 x - 10\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 0$$
$$\sin^2 x + 10\cdot\cos^2 x - 10\cdot\cos^2 x - 10\cdot\sin^2 x = 0$$
$$\sin^2 x - 10\cdot\sin^2 x = 0$$
$$-9\cdot\sin^2 x = 0$$
$$\sin^2 x = 0$$
$$\sin x = 0$$

çıkar. O zaman $x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ancak $[\pi/2, 5\pi/2]$ aralığındaki kökü istenildiğinden $k = 1$ için $x = \pi$ bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdakilerden hangisi
$$3\cdot\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x - 4\cdot\cos^2 x = 0$$
denkleminin bir çözümüdür?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

2.
$$\sin^2 x - 7\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = -2$$
denkleminin en küçük pozitif kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{16}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

3.
$$3\cdot\cos^2 x + 5\cdot\sin x\cdot\cos x = 2$$
denklemini sağlayan x değerleri için tan x ifadesinin alacağı değerler toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{-5}{2}$ B) $\frac{-2}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

4.
$$\sin^2 x + 6\cdot\cos^2 x = 6$$
denkleminin [0, 4π] aralığında kaç kökü vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.
$$3\cdot\sin^2 x + 9\cdot\cos^2 x - 6\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x = 0$$
olduğuna göre tan x değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

6.
$$\sin^2 x + \cos^2 x + \tan x = 0$$
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir? ($k\in\mathbb{Z}$)

A) $\varnothing$ B) $\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$ D) $\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$ E) $\mathbb{R}$

7.
$$\sin 5x - \cos 5x = 0$$
denklemini sağlayan en küçük pozitif değeri ile en büyük negatif değerinin toplamı kaç radyandır?

A) $-\frac{\pi}{10}$ B) $-\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{5}$

8.
$$\sin^2 x - 3\cdot\sin x\cdot\cos x - 2\cdot\cos^2 x = 0$$
denklemini sağlayan en küçük pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) Arctan2 B) Arctan$\frac{4}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

9.
$$\sin^2 x - 3\cdot\cos^2 x = 0$$
denklemini sağlayan en küçük dar açı ölçüsünün tanjantı kaçtır?

A) –3 B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

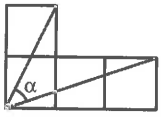
10.
$$\sin^2 x - 3\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = 0$$
olduğuna göre tan x ifadesinin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. D 2. C 3. D 4. D 5. C 6. B 7. A 8. C 9. C 10. B

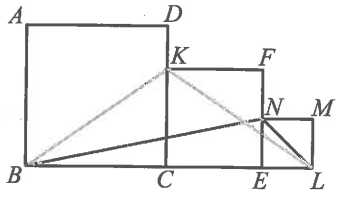
KARIŞIK TEST 1

1.
Yandaki şekil 4 adet birimkareden oluşturulmuştur.
Buna göre sin α – sin 5α kaçtır?



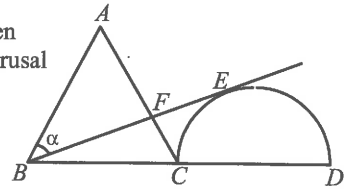
A) $-\sqrt{2}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{2}$

2.
Yandaki şekilde
ABCD, *KCEF* ve
NELM birer karedir.
$|BC| = 3$ br
$|CE| = 2$ br
$|EL| = 1$ br
$m(LNB) + m(LKB) = \theta$
olduğuna göre tan θ kaçtır?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

3.
Yandaki şekilde
ABC bir eşkenar üçgen
B, *C*, *D* noktaları doğrusal
$|BC| = |CD|$
$m(ABF) = \alpha$
***BF*, [*CD*] çaplı yarım çembere**
***E*'de teğet olduğuna göre 5·tan α kaçtır?**



A) $5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{3}-6\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{3}-7\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{3}-8\sqrt{2}$

4.
$\cos(40° - a)\cdot\sin 40° + \sin(a - 40°)\cdot\cos(-40°)$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sin a$ B) $-\cos a$ C) $\sin a$ D) $\cos a$ E) $\cot a$

5.
Bir *ABC* üçgeninde,
$(\sin A + \cos B)^2 + (\cos A + \sin B)^2 = 3$
olduğuna göre *C* açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 60° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

6.
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\tan x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ olduğuna göre

$$\frac{\sqrt{a}\sin x + \sqrt{b}\cos x}{\sqrt{a}\sin x - \sqrt{b}\cos x}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{a+b}{a}$ B) $\frac{a+b}{a-b}$ C) $\frac{b}{a-b}$ D) $-\frac{a+b}{a-b}$ E) 1

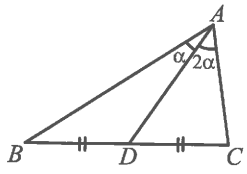
7.

$$\frac{\tan^2 40° - \tan^2 20°}{1 - \tan^2 40° \cdot \tan^2 20°}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

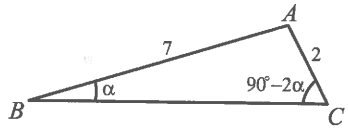
A) tan 20 B) tan 40 C) $\sqrt{3}\tan 20°$
D) $\sqrt{3}\tan 40°$ E) $\sqrt{3}\tan^2 20°$

8.
ABC bir üçgen
$|BD| = |DC|$
$3\cdot|AB| = 5\cdot|AC|$
$m(CAD) = 2\alpha$
$m(DAB) = \alpha$
olduğuna göre cos α kaçtır?



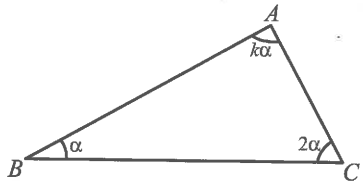
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

9.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = \alpha$
$m(BCA) = 90° - \alpha$
$|AC| = 2$ br
$|AB| = 7$ br
olduğuna göre $|BC|$ kaç br dir?



A) 7 B) $2\sqrt{13}$ C) $3\sqrt{6}$ **D)** $\sqrt{60}$ E) 8

10.
ABC bir üçgen
$m(ABC) = \alpha$
$m(BCA) = 2\alpha$
$m(CAB) = k\alpha$
$|AB| = \cos\alpha$ br
$|AC| = \sin\alpha$ br
olduğuna göre *k* kaçtır?

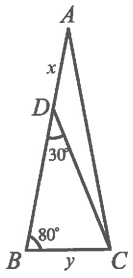


A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1. E 2. B 3. E 4. C 5. E 6. B 7. C 8. C 9. D 10. A

KARIŞIK TEST 2

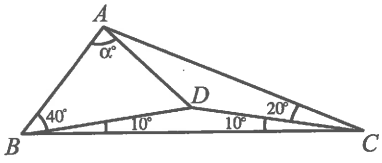
1.
ABC bir üçgen
$|AB| = |AC|$
$m(BDC) = 30°$
$m(B) = 80°$
$|AD| = x$ br
$|BC| = y$ br



olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{5}$

2.
ABC bir üçgen
$m(DCA) = 20°$
$m(BCD) = 10°$
$m(DBC) = 10°$
$m(ABD) = 40°$
$m(DAB) = \alpha°$



olduğuna göre α kaçtır?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 85

3.
$x - y = \pi$ olmak üzere

$$\sin(x+y) = -0{,}8$$

olduğuna göre csc $2y$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) 2

4.
$0° < x < 90°$ olmak üzere

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre sin x'in değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

5.
$14x = \pi$ olmak üzere,

$$\frac{\cos^2 2x}{1-\cos 5x} - 1$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin 2x$ B) $\cos 2x$ C) $\sin 5x$
D) $\cos 4x$ E) $1 + \cos 2x$

6.

$$\frac{\cos 2a - 1}{\sin 2a + 2\sin a}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sec a$ B) $-\csc a$ C) $-\tan\frac{a}{2}$
D) $-\tan 2a$ E) $-\cot\frac{a}{2}$

7.

$$\frac{1-\cos 4x}{\sec 2x \cdot \sin 2x}$$

ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 2x$ B) 1 C) $\sin 4x$ D) $\cos 4x$ E) $\cos 2x$

8.
$10x = \pi$ olmak üzere

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin 3x}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos x$ B) $\cos 2x$ C) $\sqrt{2}\cos x$
D) $\sqrt{2\cos x}$ E) $\sqrt{2\sin x}$

9.

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 2x - 2\cos^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\tan 2x$ B) $\tan 2x$ C) $-\cot 2x$ D) 1 E) -1

10.

$$x \cdot \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = x$$

olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cot\frac{\pi}{24}$ B) $\cot\frac{\pi}{24}$ C) $-\tan\frac{\pi}{12}$
D) $\tan\frac{\pi}{24}$ E) $\sec\frac{\pi}{24}$

1. C 2. C 3. C 4. D 5. A 6. C 7. C 8. C 9. E 10. A

KARIŞIK TEST 3

1.

$$\frac{2\cos^2(45^\circ-\frac{x}{2})-\sin x}{2\cos^2(45^\circ+\frac{x}{2})+\sin x}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş şekli nedir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) -1 D) 0 E) 1

2.

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}-\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş şekli nedir?

A) $\sin 2\alpha$ B) $1-\cos\alpha$ C) $1-\tan\alpha$ D) -2 E) 0

3.

$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=3+2\sqrt{2}$ olduğuna göre

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$

ifadesinin pozitif değeri kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}+1$

4.

$$\frac{\cos x\cdot(1-\cos 2x)}{\sin 2x\cdot(1-\cos x)}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sec x$ B) $\csc x$ C) $\cot\frac{x}{2}$ D) $\tan\frac{x}{2}$ E) $\cos\frac{x}{2}$

5.

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ olmak üzere

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x+\cos 2x}=\frac{4}{3}$$

olduğuna göre tan 2*x*'in değeri nedir?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

6.

$$\frac{\cos 2x-3\sin x+1}{2+\sin x}=-\frac{1}{5}$$

olduğuna göre cot 2*x* kaça eşittir?

A) $\frac{24}{7}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

7.

$0<x<45$ olmak üzere

$$\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}+\sin x$$

olduğuna göre cot *x*'in değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

$$\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x=\frac{3}{4}$$

olduğuna göre sin 4*x*'in değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

9.

$$24\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+3\cdot\cos 4\theta-2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 **B)** 1 C) $\cos\theta$ D) $\sin\theta$ E) $2\cos\theta$

10.

$A=2^{30}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^{30}}$ olduğuna göre

$$A\cdot\cos(\frac{x}{2^{30}})$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan\frac{x}{2^{30}}$ B) $\sin x\cdot\cot\frac{x}{2^{30}}$ C) 1 D) $2\cot\frac{x}{2^{30}}$ E) $2\tan\frac{x}{2^{30}}$

1. E 2. E 3. D 4. C 5. D 6. B 7. D 8. E 9. B 10. B

KARIŞIK TEST 4

1.
$x = \cos\theta$ ve $y = \sin\theta$ olduğuna göre
$$x^4 - y^4 + 2x^2 - y^2 + 2$$
ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $5\cos^2\theta$ B) $4\cos^2\theta$ C) $3\cos^2\theta$
D) $2\cos^2\theta$ E) $\cos^2\theta$

2.
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ olmak üzere
$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2\csc x$ B) $2\csc x$ C) $\sec x$
D) $-\sec x$ E) $2\sec x$

3.
$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{(\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)}$$
ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sin x \cdot \cos x$ B) $\sin 2x$ C) $-\sin 2x$
D) $\sin x \cdot \cos x$ E) $\cos 2x$

4.
$$A = \frac{\sin 7x}{2\sin x} - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x$$
ifadesinin eşiti kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

5.
$$2\left[1-2\left[2\left(\sin^2\frac{\pi}{96} - \cos^2\frac{\pi}{96}\right)^2 - 1\right]^2\right]^2$$
ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

6.
$$\sin^2\frac{\pi}{8}\cdot\sin^2\frac{7\pi}{8}\cdot\sin^2\frac{9\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{9\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{15\pi}{8}$$
ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{5}{8}$

7.
$a = \frac{\pi}{30}$ olduğuna göre
$$\frac{\sin 12a + \sin 10a + \sin 6a + \sin 4a}{\cos 7a \cdot \sin 12a}$$
ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\cos\frac{\pi}{30}$ B) $2\sin\frac{\pi}{15}$ C) $4\cos\frac{\pi}{30}$
D) $\cos\frac{2\pi}{15}$ E) $\sin\frac{2\pi}{15}$

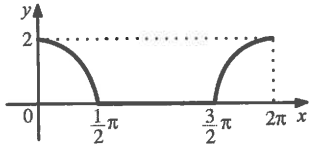
8.
$$x\cdot\cos 50^\circ + \sin 50^\circ + x = 0$$
olduğuna göre x'in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 25^\circ$ B) $-\cos 25^\circ$ C) $\cot 25^\circ$
D) $-\tan 25^\circ$ E) $\cos 50^\circ$

9.
$$f(x) = \frac{a}{4} + \frac{1}{2}\cdot\sec x$$
fonksiyonunun grafiği (0, 1) noktasından geçtiğine göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

10.
Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $f(x) = 2|\sin x|$ B) $f(x) = |\sin 2x|$
C) $f(x) = \cos x + |\cos x|$ D) $f(x) = 2|\cos x|$
E) $f(x) = \cos x - |\cos x|$

1. A 2. A 3. A 4. D 5. C 6. E 7. C 8. D 9. B 10. C

KARIŞIK TEST 5

1.

$$f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$$

fonksiyonunun grafiği $(\frac{\pi}{3}, 2)$ **ve** $(\frac{\pi}{2}, -3)$ **noktalarından geçtiğine göre** $f(\pi)$ **kaçtır?**

A) $4+3\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}-4$ C) $2\sqrt{3}-4$ D) 3 E) $-4-3\sqrt{3}$

2.

$0° < x < 360°$ olmak üzere

$$\sin x = \cos 50°$$

olduğuna göre x**'in alabileceği değerlerin toplamı kaç derecedir?**

A) 50 B) 70 C) 100 D) 180 E) 250

3.

$$\cot 2\alpha\cdot\cot 4\alpha = 1$$

eşitliğini sağlayan α **değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{16}$ E) $\frac{\pi}{20}$

4.

$$\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \tan 3x$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{15\pi}{16}$

5.

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\alpha$$

olduğuna göre $\alpha + \theta$ **toplamı kaç derece olabilir?**

A) 45 B) 60 C) 90 D) 120 E) 150

6.

$\alpha \in (0, 2\pi)$ olmak üzere

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{1}{2}$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre α**'nın alabileceği kaç farklı değer vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$2\cos^2 x - 1 = \sin 7x + \sin 3x$$

olduğuna göre x**'in alabileceği en** <u>küçük</u> **pozitif açı değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{40}$ B) $\frac{\pi}{30}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{10}$

8.

$x \in [0°, 360°)$ olmak üzere

$$\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = -1$$

denkleminin kökler toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 90° B) 180° C) 270° D) 360° E) 450°

9.

$\pi \le 2\alpha \le 3\pi$ olmak üzere

$$2\cos^2\alpha + 7\sin\alpha - 5 = 0$$

denkleminin kökü kaç radyandır?

A) $\frac{4\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) π D) $\frac{5\pi}{8}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

10.

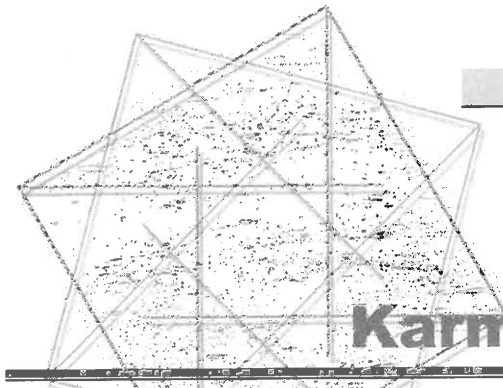
$$\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = \cos^2\alpha - \sin 2\alpha$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre $\tan\alpha$**'nın alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{-1-\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$ C) $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ D) $\frac{2-\sqrt{10}}{6}$ E) $\frac{-2-\sqrt{10}}{6}$

1. E 2. D 3. C 4. B 5. C 6. B 7. B 8. C 9. B 10. B



Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Karmaşık Sayılar

$x + 2 = 0$ gibi denklemler doğal sayılar kümesinde çözülemeyince, buna duyulan gereksinim gereği, küme genişletilerek, tamsayılar kümesi bulunmuştur. Artık bu bir icat mıydı, keşif mi, o benim boyumu aşar. Daha sonra $3x + 17 = 0$ gibi denklem çözümleri için rasyonel sayılar kümesine, $x^2 = 6$ gibi denklem çözümleri için de reel sayılara gereksinim duyulmuştur. Reel sayılar, şu ana kadar bildiğimiz en büyük sayı kümesiydi. Şimdi onu da genişleteceğiz. Çünkü reel sayılar, karşılaştığımız $x^2 + 1 = 0$ gibi bir denklemi çözmeye yetmiyor. $x^2 = -1$ çıkıyor ya, daha önceki bilgilerimiz bize bunun anlamsız olduğunu söylüyor.

Karesi çift olan sayılarla ile ilgili ilk bilgilere M.S. 1'inci yüzyılda Heron'un çalışmalarında rastlanmıştır. Heron'u, üç kenarı bilinen üçgenlerin alanlarını hesaplamak için bulduğu formülünden hatırlarsınız zaten. Oluşturulması imkansız bir kesik piramidin hacmini hesaplamaya çalışırken böyle sayıların olabileceğini farketmiş, ama o kadarla kalmış. Elle tutulur gelişmeler, taa 16'ıncı yüzyılda, daha önce ikinci dereceden denklemler dersinde isimlerini zikrettiğimiz Niccolo Fontana Tartaglia ve Gerolamo Cardano tarafından üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin köklerini veren kapalı formüllerin bulunmasına rastlar. Tabii milleti inandırmak ne mümkün! Analitik Geometri dersinde tanıştığımız Rene Descartes, 17'inci yüzyılda bu sayıların olabileceğine inanıyormuş, fakat kurduğu koordinat sisteminde onlara yer bulamayınca, bu sayılara ''sanal'' adını koymuş. Hatta ''sanal'' demek Fransızca ''imaginaire'' demek olduğundan, bu sanal sayıya, karşılığı olan kelimenin başharfi olan ''i'' demiş ve bu ''i'' günümüze kadar da gelmiş. Daha neye benzedikleri, nasıl bir şey oldukları bilinmeden i'li eşitlikler bulunur olmuş.

18'inci yüzyılda (1730) Abraham De Moivre, sayesinde meşhur olduğu

$$(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha)$$

eşitliğini, 1748'de de Leonard Euler

$$\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

eşitliğini bulmuş. Her iki eşitliği de notlarımızda kanıtladık ama bu notlarda değil. Çok merak ettiyseniz, seriler notlarına bakınız. Tabii bulunan bulunuyormuş ama inanan olmayınca yol katetmek de zor. 1685'de De Algebra Tractatus isimli eserinde ''Bunun bir geometrik açıklaması olmalı'' diye direten Wallis'ten 114 yıl sonra 1799'da Caspar Wessel açık bir tarafı olmayacak şekilde karmaşık sayıları geometrik olarak göstermeyi başarınca, yavaş yavaş inatlar da kırılmaya başlamış. Yeterince eksiksiz ve olabildiğince sade bu çalışması, küresel trigonometrinin bulunmasına da yol açmıştır.

Daha sonra birçok matematikçi bu konuya el etmiş. Hatta gelmiş geçmiş en büyük matematikçi kabul edilen Carl Friedrich Gauss'da Wessel'dan yıllar sonra karmaşık düzlemi tekrar keşfederek, yayımladığı Karmaşık Sayılar Teorisi isimli makalesiyle hem konunun gelişmesini hem de popüler olmasını sağlamış. Gauss bu, boru değil! Yeter ki el atsın...

Kaldığımız yerden devam edelim:

$$x^2 + 1 = 0 \text{ ise } x^2 = -1$$

demiş ve reel sayılarda buna bir çözüm bulamamıştık. Şu an da bulmuş değiliz zaten. İnsanın x^2 belliyken x'i bulmak için her iki tarafın karekökünü alası geliyor ama negatif bir sayının karekökü de alınmaz ki! Çözülemiyor deyip, bir kenara atacak halimiz de yok.

İşte, insansoyu tam bu noktada karesi -1 eden bu sayıya, yani bu denklemin köküne i veya $-i$ olsun deyivermiş. Bu değerlerden i olanına **sanal sayı birimi** denir.

Dikkat edin, "i olanına" dedik, "pozitif olanına" demedik, çünkü reel olmayan bir sayıda pozitiflik negatiflik ne arar! Zaten i ile $-i$ arasında da bir fark yoktur!

''Sanal'' yerine ''imajiner'' dendiği de olur. Hatta ikinci isminden dolayı bu sayıya ''i'' denmiştir.

Karmaşık Sayılar Kümesi. a ve b birer reel sayı ve $i^2 = -1$ iken $a + bi$ şeklindeki sayılara **karmaşık sayılar** denir. Bu sayıların tümünün oluşturduğu kümeye de **karmaşık sayılar kümesi** adı verilir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$z = a + bi$ karmaşık sayısında a'ya **z karmaşık sayısının reel kısmı** denir ve $Re(z)$ ile gösterilir, b'ye de **z karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı** denir ve $Im(z)$ ile gösterilir.

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$1 + 2i$	1	2
$-3 - 5i$	-3	-5
4	4	0
$-6i$	0	-6

Reel sayıların, imajiner kısımları sıfır olan karmaşık sayılar olduğunu fark ederseniz, karmaşık sayılar kümesinin reel sayılar kümesini kapsadığını da anlarsınız. E reel sayılar kümesini kapsıyorsa doğal olarak bildiğimiz diğer tüm sayı kümelerini de kapsar.

Örnek. *$2i - 1$, -4, $3i$ ve $2 - i$ sayılarının imajinerlerinin toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sayıları $-1 + 2i$, $-4 + 0i$, $0 + 3i$ ve $2 + (-1)i$ şeklinde düzenlersek, imajinerlerin sırasıyla 2, 0, 3 ve -1 olduğunu görürüz. O halde toplam da 4'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Karesi -4 olan sayılar hangi şıkta verilmiştir?*

A) -2 ve 2 B) $-2i$ ve $2i$ C) $-4i$ ve $4i$
D) $2 - i$ ve $2 + i$ E) $-2 - i$ ve $2 + i$

Çözüm: O sayı veya sayılara x diyelim.

$$x^2 = -4 = 4\cdot(-1) = 4\cdot i^2$$

olduğundan

$$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i) = 0$$

olur ki buradan $x = 2i$ veya $x = -2i$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$x^2 + 7 = 0$ denklemini sağlayan x sayıları aşağıdaki şıkların hangisine doğru olarak verilmiştir?*

A) $-\sqrt{7}$ ve $\sqrt{7}$ B) $-\sqrt{7}i$ ve $\sqrt{7}i$ C) $-7i$ ve $7i$
D) $\sqrt{7} - i$ ve $\sqrt{7} + i$ E) $-\sqrt{7} - i$ ve $-\sqrt{7} + i$

Çözüm: Düne kadar böyle denklemlerin çözüm kümelerine boş dediğimizi hatırlayın. Yanlış değildi. Biz hepten boş demiyorduk ama. Reel sayılar kümesinde çözümünün olmadığını söylüyorduk. Aksi iddia edilmedikçe çözüm kümesinin reel sayılar kümesinde sorulduğunu farz ederdik, çünkü o zamana kadar en büyük küme o idi.

Artık, herhangi bir şey söylenmediği takdirde bildiğimiz en geniş sayı kümesinde yani karmaşık sayılar kümesinde sorulduğunu farzedeceğiz.

$$x^2 + 7 = 0 \text{ ise } x^2 = -7 = 7\cdot(-1) = 7\cdot i^2$$
$$x^2 - 7i^2 = (x - \sqrt{7}i)(x + \sqrt{7}i) = 0$$
$$x = \pm\sqrt{7}i$$

Doğru cevap: B.

Dikkatinizi bir şey çekti mi, çarpanlarına ayrılamayan $x^2 + 7$ ifadesini, $x^2 - 7i^2$ şeklinde yazarak çarpanlarına ayrılabilir hale getirdik. Daha önce mümkün olmayan çarpanlara ayırmalar, i'nin bu marifetiyle mümkün oldular. Ama sadece karmaşık sayılar kümesinde işlem yapıyorsak buna hakkımız var, unutmayın!

Bir örnek daha çözelim:

$$M = (a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2)$$

çarpımını iki kare farkı biçiminde yazalım.

$$\begin{aligned} M &= (a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2) \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (ac - bd)^2 - (ad - bc)^2i^2 \\ &= (ac - bd)^2 - ((ad - bc)i)^2 \end{aligned}$$

Neyse, biz tekrar konumuza dönelim:

Örnek. *$x^2 - 2x + 7 = 0$ denklemini sağlayan x sayıları hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $1 \pm \sqrt{7}i$ B) $1 \pm \sqrt{6}i$ C) $2 \pm \sqrt{5}i$ D) $8 \pm i$ E) $1 \pm i$

Çözüm: Eskiden olsa diskriminant negatif diye boş küme der geçerdik, o günler geride kaldı.

$$x^2 - 2x + 7 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + 6 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = -6$$
$$(x - 1)^2 = 6\cdot i^2$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{6}\cdot i$$
$$x = 1 \pm \sqrt{6}i$$

Demek ki biri $x_1 = 1 + \sqrt{6}i$, diğeri $x_2 = 1 - \sqrt{6}i$ olmak üzere iki farklı kökü var. Dikkat edin, reel sayılar kümesinde denklemimizin çözümü yok.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Toplamları 8, çarpımları 20 olan iki sayı aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?*

A) $2 \pm 2i$ B) $2 \pm 4i$ C) $4 \pm 2i$ D) $4 \pm 4i$ E) $4 \pm i$

Çözüm: Bu sayılar x_1 ve x_2 olsun.

$$x_1 + x_2 = 8 \text{ ve } x_1\cdot x_2 = 20$$

olduğundan x_1 ve x_2 sayılarının $x^2 - 8x + 20 = 0$ denkleminin kökleri olduğunu söyleyebiliriz. Denklemin diskriminantı

$$\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 20 = -16$$

olduğundan,

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{8 \pm 4i}{2} = 4 \pm 2i$$

bulunur ki, bu sayılar $4 - 2i$ ve $4 + 2i$'ymiş.

Doğru cevap: C.



Karekök fonksiyonu, karmaşık sayılar kümesinde değil reel sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olduğundan -16'nın karekökü veya karekökleri diye bir şey yoktur. Sadece karesi -16 eden sayılar vardır. Bu yüzden $\sqrt{-16}$ gibi bir ifadenin yazılması bile sakıncalıdır. Siz benim yazdığıma bakmayın, siz yazmayın! ☺

Örnek. *$z^2 + z + 1 = 0$ denkleminin kökleri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$ B) $\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3}i}{2}$ C) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

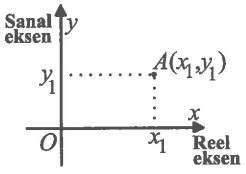
D) $-1\pm\sqrt{3}i$ E) $-\sqrt{3}\pm i$

Çözüm: Hemen denklemi tamkare içeren bir şekle sokalım.

$$z^2+z+1=0$$
$$z^2+z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0$$
$$z^2+z+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}i^2$$
$$z+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

Doğru cevap: C.

Geometrik Gösterim. Her ne kadar $a + bi$ sayısının kendisi reel olmasa da, a ve b sayıları reel olduğundan, $a + bi$ sayısını göstermek için analitik düzlemi kullanabiliriz. Analitik düzlemdeki her $P(a, b)$ noktasını,



$$z = a + bi$$

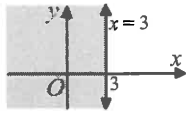
karmaşık sayısıyla bire-bir eşleştirirsek, üzerinde çalışmak için yeni bir düzlemimiz olur. Bu düzleme de **karmaşık düzlem** deriz. *Ox* eksenine **reel eksen**, *Oy* eksenine de **sanal eksen** diyeceğiz, olup bitecek.

Uyarı. Karmaşık düzleme azami ölçüde önem vermek ve anlamaya çalışmak lazım. Zira, adı üstünde, sayılar ''sanal'' olduğundan, üzerlerinde düşünebilmek için tek çıkar yol burasıdır. Hatta karmaşık düzlem inşa edilene dek birçok matematikçi böyle sayıları kabul etmemiş, varlığını inkar etmişler. Film burada kopuyor aslında, şimdi de bu sayılar var demiyoruz ki, işlemler sadece zihinde.

Reel sayıların aksine, karmaşık sayılar doğal bir sıra içinde değillerdir. Bu yüzden içinde karmaşık sayı içeren eşitsizlikler yazılamaz. Böyle bir mefhum yoktur. İnanması zor ama $2i + 3$ sayısı $i + 1$'den büyük değildir! Ama küçük de değildir! Hatta eşit hiç değil! Bu yüzden bu sayıları noktalarla göstermek bir nebze de olsa mantıklı oluyor. Farklı iki noktanın biri diğerinden büyük de değildir, küçük de değildir, eşit de değildir!

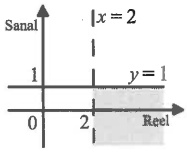
Örnek. *$Re(z) \le 3$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Sanalı önemli değil diyor, reeli 3'ten küçük veya eşit olsun yeter. O halde yukarda anlattığımız gibi apsisi 3'ten küçük veya eşit olan noktaların oluşturduğu bölge istenilen cevap olacaktır.



Örnek. *$Re(z) > 2$ ve $Im(z) \le 1$ koşullarını sağlayan karmaşık sayıların görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Uzatmayalım, apsisi 2'den büyük ve ordinatı 1'den küçük veya eşit olan noktaların oluşturduğu bölge soruluyor. İlk veride eşitlik olmadığı için $x = 2$ doğrusunu kesik kesik çizdiğimizi fark ettiniz değil mi?



Örnek. *$2 + i$ sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsünün, $3 - 5i$ sayısının görüntüsüne göre simetriği hangi sayısının görüntüsüdür?*

A) $4-9i$ B) $4-10i$ C) $4-11i$ D) $1+8i$ E) $1+11i$

Çözüm: (2, 1) noktasının (3, –5) noktasına göre simetriğinin hangi nokta olduğunun sorulduğunu anlamışsınızdır. Apsis ve ordinatların artış miktarından yararlanarak noktanın (4, –11) olduğunu anlarız. Bu nokta da karmaşık düzlemde $4 - 11i$ sayısının görüntüsüdür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$2 - i$, $4 + 5i$ ve $8 + xi$ sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri doğrusal olduğuna göre x kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Problemimiz, dik koordinat sisteminde $A(2, -1)$, $B(4, 5)$ ve $C(8, x)$ noktalarının doğrusal olmasıyla aynı problemdir. $m_{AB} = m_{BC}$ olmalıdır.

$$m_{AB}=\frac{5-(-1)}{4-2}=\frac{6}{2}=3 \text{ ve } m_{BC}=\frac{x-5}{8-4}=\frac{x-5}{4}$$

diye $\frac{x-5}{4}=3$ eşitliğinden $x = 17$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Karmaşık Sayıların Eşitliği. Analitik düzlemde iki noktanın çakıştığını yani aslında aynı nokta olduğunu nerden anlıyorduk, koordinatlarından değil mi? İki noktanın da hem apsisi hem ordinatı eşitse bu noktalar aynı demekti. Analitik düzlemdeki her noktanın da karmaşık düzlemde bir sayı belirtebileceğine değinmiştik. O halde analitik düzlemdeki apsis ve ordinat, karmaşık düzlemdeki reel ve sanal kısımlar demek olduğundan, iki karmaşık sayının eşit olması için her ikisinin de reel ve sanal kısımlarının eşit olması lazım diyeceğiz.

a, b, c, d birer reel sayı olmak üzere;

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ iken $z_1 = z_2$ isse $a = c$ ve $b = d$'dir.

Örnek. *$z_1 = 3 + m - ni$ ve $z_2 = n + mi - 5i$ karmaşık sayıları birbirine eşit olduğuna göre $m + 2n$ toplamı kaçtır?*

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm: $Re(z_1) = Re(z_2)$ olması gerektiğinden

$$3 + m = n,$$

$Im(z_1) = Im(z_2)$ olması gerektiğinden

$$-n = m - 5$$

olur. Bu iki denklem ortak çözülürse $m = 1$ ve buradan $n = 4$ olarak bulunur. O halde $m + 2n = 9$.

Doğru cevap: A.

Sanal Sayıların Eşleniği. İki karmaşık sayının toplamı ve çarpımı reel sayı ise bu karmaşık sayılara, **birbirlerinin karmaşık sayılar kümesine göre eşlenikleri** denir.

Dersimiz zaten karmaşık sayılar olduğundan, bundan sonra ''karmaşık sayılar kümesine göre eşleniği'' yerine ''eşleniği'' yazacağız. Siz de ne anlatmak istediğimizi anlayacaksınız.

a ve b reel sayılar olmak üzere, $a + bi$ şeklindeki bir karmaşık sayının eşleniği $a - bi$'dir.

Dikkat ettiyseniz sadece sanal kısmının işaretini değiştiriyoruz. Sağlamasını da yapalım:

$$(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

ve

$$a + bi + a - bi = 2a$$

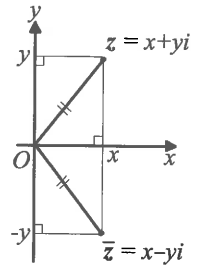
çıkıyor. a ve b birer reel sayı olduğundan $a^2 + b^2$ sayısı da $2a$ sayısı da reeldir. Demek ki gerçekten $a + bi$ ile $a - bi$ sayıları birbirlerinin eşlenikleriymiş!

z karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z}$ ile gösterilir.

z	$\overline{z}$
$2 - i$	$2 + i$
$-3 - i$	$-3 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

Eğer z, imajineri 0 olan bir karmaşık sayı ise, eşleniğinin yine kendisi olacağını fark etmişsinizdir.

Olayı bir de grafik olarak yorumlayalım. z ile $\overline{z}$ sayılarının reel kısımları aynı olup, sanal kısımları ters işaretli olduklarından, görüntüleri birbirlerinin reel eksene göre simetrikleri olur.



Eşlenik konusuna tekrar döneceğiz, şimdi karmaşık sayılarla biraz işlem yapmayı öğrenelim.

Karmaşık Sayılarda Dört İşlem. Karmaşık sayıların toplamları da, farkları da, çarpımları da bir karmaşık sayıdır. Eğer bölen sıfır değilse bölümleri de.

İki veya daha çok karmaşık sayı toplandığında ortaya çıkan karmaşık sayının reel/sanal kısmı, toplama katılan karmaşık sayıların reel/sanal kısımlarının toplamıdır.

Çıkarma zaten tersiyle toplama demek olduğundan ayrıca izaha gerek yok sanırım.

Karmaşık sayıları çarparken de çarpmanın toplama üzerinde dağılma özeliğini kullanırız.

Bölmeyi yapmak için de bölümü merak edilen sayıları kesirli olarak yazdıktan sonra, kesri paydanın eşleniği ile genişleterek paydanın bir rasyonel sayı olmasını sağlarız. Sonrası zaten bildiğiniz gibi.

Toparlayalım, $a + bi$ ve $c + di$ şeklindeki iki karmaşık sayının dört işlemine dair formüller:

- ✓ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- ✓ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- ✓ $(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- ✓ $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Birkaç örnek verelim:

Örnek. *$z_1 = 3 + i$ ve $z_2 = 5 - 12i$ iken $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1\cdot z_2$ ve $\dfrac{z_1}{z_2}$ sayılarını bulalım.*

Çözüm: z_1 ve z_2 sayılarını sırasıyla hesaplanması istenen ifadelerde yerlerine yazalım:

$$z_1 + z_2 = (3 + i) + (5 - 12i)$$
$$= (3 + 5) + (i - 12i) = 8 - 11i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 + i) - (5 - 12i)$$
$$= 3 + i - 5 + 12i$$
$$= (3 - 5) + (i + 12i) = -2 + 13i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3+i)\cdot(5-12i)$$
$$= 3\cdot 5 - 3\cdot 12i + 5\cdot i - i\cdot 12i$$
$$= 15 - 36i + 5i + 12 = 27 - 31i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{5-12i}$$
$$= \frac{(3+i)\cdot(5+12i)}{(5-12i)\cdot(5+12i)}$$
$$= \frac{15+36i+5i-12}{25+60i-60i+144}$$
$$= \frac{3+41i}{169}.$$
$$= \frac{3}{169} + \frac{41}{169}i$$

.

Örnek. *$z + 2i = 3z + 4$ olduğuna göre $Re(z)$ kaçtır?*

A) 3 B) −3 C) 2 D) −2 E) 1

Çözüm: İki farklı şekilde çözeceğiz. Tavsiyemiz birinci yol tabii ki ama ikinci yol da birazdan göreceğimiz başka soru tiplerinin ilacı olacak.

Birinci yol. $z - 3z = 4 - 2i$ olduğundan
$$-2z = 4 - 2i$$
yani $z = -2 + i$ olur. O halde $Re(z) = -2$ bulunur.

İkinci yol. $z = x + yi$ olsun. $z + 2i = 3z + 4$ eşitliği
$$x + yi + 2i = 3x + 3yi + 4$$
eşitliğine dönüşür ki, her iki tarafın reel kısımları eşitlenirse $x = 3x + 4$ olduğundan $x = Re(z) = -2$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1974 ÜSS]. $\frac{1}{4-3i}$ *sayısının eşleniğinin sanal kısmı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 3 B) $\frac{3}{25}$ C) $\frac{-3}{25}$ D) $-3i$ E) $3i$

Çözüm: Hemen sayıyı $a + bi$ formatına getirelim ki eşleniğini bulmak kolay olsun.

$$\frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{4+3i}{16-9i^2} = \frac{4+3i}{25}$$

olduğundan verilen sayının eşleniği $\frac{4-3i}{25}$ olarak bulunur. Eşleniği de görüldüğü üzere $\frac{-3}{25}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek [1985 ÖYS]. $\frac{1}{1+i} + a + bi = 1 - i$ *olduğuna göre $a + b$ değeri kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2}$$

olduğundan, eşitlik $\frac{1-i}{2} + a + bi = 1 - i$ halini alır.

$$a + bi = 1 - i - \frac{1-i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

olur. $a = \frac{1}{2}$ ve $b = -\frac{1}{2}$ olduğundan $a + b = 0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere $z = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy}$ olduğuna göre $Im(z)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x - y$ B) $x + y$ C) xy D) 0 E) $x^2 + y^2$

Çözüm: Payda eşitleyerek işlemlere başlayalım.

$$z = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy}$$
$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2 - 2xyi - y^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{x^2+y^2}$$

Görüldüğü üzere z'nin imajiner kısmı 0'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1997 ÖYS]. *$z = 2 + 4i$ ve $u = 3i$ birer karmaşık sayı olmak üzere $\frac{\bar{z}\cdot\bar{u}}{6+3i}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −2 B) −1 C) 2 D) $\frac{1+2i}{3}$ E) $\frac{1-2i}{3}$

Çözüm: $\bar{z} = 2 - 4i$ ve $\bar{u} = -3i$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\frac{\bar{z}\cdot\bar{u}}{6+3i} = \frac{(2-4i)\cdot(-3i)}{6+3i} = \frac{-12-6i}{6+3i} = -2$$

çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek [1983 ÖYS]. *$(2-i)z=1-\bar{z}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1+i}{3}$ B) $\frac{1+i}{4}$ C) $\frac{2+2i}{3}$ D) $\frac{3+i}{3}$ E) $\frac{1+2i}{4}$

Çözüm: $z=x+yi$ diyelim. $\bar{z}=x-yi$ olur.

$$(2-i)z=1-\bar{z}$$
$$(2-i)(x+yi)=1-(x-yi)$$
$$2x+2yi-xi+y=1-x+yi$$
$$2x+y+(2y-x)i=1-x+yi$$

olduğundan $2x+y=1-x$ ve $2y-x=y$ bulunur. İkinci eşitlikten $y=x$ bulunduğundan bunu birinci eşitlikte yerine yazarsak $y=x=\frac{1}{4}$ buluruz.

O halde $z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1+i}{4}$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$2\cdot z-1=3\cdot\bar{z}+2i$ olduğuna göre Im(z) kaçtır?*

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) 1

Çözüm: Şimdi daha önce bahsettiğimiz metoda geldik. $z=x+yi$ dersek, $\bar{z}=x-yi$ olur. Şimdi bu değerleri denklemde yerlerine yazacağız: $2z-1=3\bar{z}+2i$ eşitliği

$$2x+2yi-1=3x-3yi+2i$$

halini alır. Bize $\text{Im}(z)=y$ sorulduğundan sadece sanal kısımları eşitlesek yetecek: $2y=-3y+2$ olur ki buradan $y=2/5$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$z-\sqrt{2}=(z\sqrt{2}+1)i$ olduğuna göre Re(z) kaçtır?*

A) $2i$ B) i C) $-i$ D) $-2i$ E) 0

Çözüm: Parantezi açarsak,

$$z-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot z\cdot i+i$$

olur. $z-\sqrt{2}\cdot z\cdot i=\sqrt{2}+i$ olduğundan

$$z=\frac{\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}\cdot i}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+i)\cdot(1+\sqrt{2}\cdot i)}{(1-\sqrt{2}\cdot i)\cdot(1+\sqrt{2}\cdot i)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+2i+i-\sqrt{2}}{1-2i^2}=\frac{3i}{3}=i$$

olduğundan $Re(z)=0$'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ sayısının imajiner kısmı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cos\alpha$ B) $\sin\alpha$ C) $\tan\alpha$ D) $\sin 2\alpha$ E) $\cos 2\alpha$

Çözüm: Payı ve paydayı $1+i\cdot\tan\alpha$ ile çarpalım.

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{(1+i\tan\alpha)^2}{1^2-i^2\tan^2\alpha}$$
$$=\frac{1+2i\tan\alpha-\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha}i$$

Görüldüğü üzere imajiner $\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha}$ dir. Şimdi bunu düzenleyeceğiz.

$$\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha}=\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$Im(z+2i)\le 1$ koşuluna uyan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

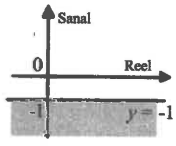
Çözüm: $z=x+yi$ olsun.

$$z+2i=x+(y+2)i$$

olur.

$$Im[x+(y+2)i]=y+2\le 1$$

verildiğinden $y\le -1$ aranılan bölgedir.



Teorem. *$z=x+yi$ ise $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$.*

Kanıt: $z=x+yi$ ise $\bar{z}=x-yi$ olacağından

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2-y^2i^2=x^2+y^2.$$

Teorem. *$\overline{(\bar{z})}=z$.*

Kanıt: $z=x+yi$ olsun. $\bar{z}=x-yi$ olur. O halde

$$\overline{(\bar{z})}=\overline{x-yi}=x+yi=z.$$

Teorem. *$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$.*

Kanıt: $z_1=x_1+y_1i$ ve $z_2=x_2+y_2i$ olsun.

$$\overline{z_1}=x_1-y_1i \text{ ve } \overline{z_2}=x_2-y_2i$$
$$z_1+z_2=x_1+x_2+(y_1+y_2)\cdot i$$

olur. O halde

$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=x_1-y_1i+x_2-y_2i$$
$$=x_1+x_2-(y_1+y_2)\cdot i$$
$$=\overline{z_1+z_2}$$

olduğundan kanıt biter.

Teorem. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun.

$$\overline{z_1} = x_1 - y_1 i,$$
$$\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\cdot i$$

olur. O halde

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = x_1 - y_1 i - (x_2 - y_2 i)$$
$$= x_1 - x_2 - (y_1 - y_2)\cdot i$$
$$= \overline{z_1 - z_2}$$

olduğundan kanıt biter.

Teorem. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun.

$$\overline{z_1} = x_1 - y_1 i,$$
$$\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\cdot i$$

olur. O halde

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)\cdot i$$
$$= \overline{z_1 \cdot z_2}$$

olduğundan kanıt biter.

Teorem. $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

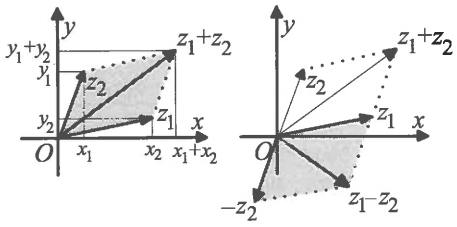
Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun.

$$\overline{z_1} = x_1 - y_1 i,$$
$$\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2}$$

olur. O halde

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)(x_2 + y_2 i)}$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

Toplama ve Çıkarmanın Geometrik Yorumu. İki karmaşık sayının cebirsel işlemlerle toplanmasını ve çıkarmasını biraz önce öğrenmiş olduk. Şimdi buna geometrik izah getireceğiz.



$z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun. Bunu hemen üst sol şekildeki gibi resmedelim. Bize ne lazım?

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) i.$$

x_1, x_2, y_1, y_2 değerleri belli olduğundan hemen $x_1 + x_2$ ve $y_1 + y_2$ değerlerini hesaplar ve $z_1 + z_2$'yi resmederiz. Dersimiz olmadığı için ayrıntıya girmeyeceğim, birkaç küçük geometrik özellikler (eşlik) kullanarak O, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ noktalarının bir paralelkenarın köşeleri olduğunu görürüz.

Çıkarmayı her zamanki gibi yine kaale almayacağız, zira çıkarma dediğin ters işaretlisiyle toplamadan başka bir şey değil! O halde derhal z_2'nin ters işaretlisi olan $-z_2$'yi çizelim. Bunu yaparken sadece z_2'nin orijine göre simetriğini çizmek yeter, çünkü hem reel hem de sanal işaret değiştiriyor. Şimdi de bu $-z_2$'yi gösterdiğimiz paralelkenar metoduyla z_1 ile toplayacağız, bulduğumuz şey $z_1 - z_2$ olacak. Bunu da üst sağ şekilde çoktan göstermiştik. Siz de çarpma işlemine geometrik bir yorum getirmeye çalışınız.

Bir Karmaşık Sayının Çarpımsal Tersi. Çarpma ve bölme işlemlerini nasıl yapacağımızı öğrendiğimize göre ters alma işlemini de öğrenme vakti geldi. Sayı karmaşık diye çarpmaya göre tersi değişmez, hala bir z sayısının çarpmaya göre tersi $\dfrac{1}{z}$'dir. Nasıl ki reel sayılarda, eşleniğiyle çarparak paydada irrasyonel ifade bırakmamaya gayret ederdik, burada da aynı gayreti paydada sanal bir sayı bırakmamak için vereceğiz. Bunu da yine eşleniğiyle çarparak yapacağız. Dediklerimiz şöyle bir formüle götürür bizi:

$z = x + yi$ şeklindeki bir karmaşık sayı için

$$z^{-1} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

Örnek. *$z = 2 + i$ olduğuna göre $Re(z^{-1})$ kaçtır?*

A) 5 B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{2}{5}$ D) $-\dfrac{2}{5}$ E) 1

Çözüm: $z = 2 + i$ ise

$$z^{-1} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} i$$

diye $Re(z^{-1}) = \dfrac{2}{5}$'tir.

Doğru cevap: C.

Sanal Köklü Denklemler. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğunu daha önce kanıtlamıştık. Eğer $\Delta < 0$ olursa, denklemin köklerinin sanal olacağı aşikar. Aşikar olmayan şu: O zaman kökler, birbirlerinin eşlenikleri olur. Çünkü birer karmaşık sayı olan köklerin toplamı da, çarpımı da bir reel sayı çıkıyor. Bu olay zaten karmaşık sayılara göre eşlenik kavramının tanımının ta kendisiydi!

Örnek. *$x^2 - mx + n = 0$ reel katsayılı denkleminin bir kökü $3 + i$ ise $m + n$ toplamı kaçtır?*

A) -16 B) 6 C) 12 D) -12 E) 16

Çözüm: $x_1 = 3 + i$ ise $x_2 = 3 - i$ olur. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri olan x_1 ve x_2 için

$$x_1 + x_2 = m = (3 + i) + (3 - i) = 6 \text{ ve}$$
$$x_1 \cdot x_2 = n = (3 + i)\cdot(3 - i) = 9 - i^2 = 10$$

olduğundan $m + n = 6 + 10 = 16$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *α ve β birer reel sayı olmak üzere*

$$x^2 - (\beta - 3)x + 15 = 0$$

denkleminin bir kökü $2 + \alpha i$ ise β kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Bir kökü $2 + \alpha i$ ise diğer kökü onun eşleniği olan $2 - \alpha i$'dir. O halde bu denklemin kökler toplamı

$$(2 + \alpha i) + (2 - \alpha i) = 4$$

olur. $4 = \beta - 3$ diye $\beta = 7$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ reel katsayılı denkleminin bir kökü 1, bir kökü de $1 - i$ ise b/d oranı kaçtır?*

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

Çözüm: Reel katsayılı bir polinom denkleminin hiçbir zaman tek sayıda sanal kökü olamaz. Yani sanal kökü varsa ya 2 tanedir, ya 4 tane, ya 6 tane... Ayrıca sanal kökler daima ikişer ikişer birbirlerinin eşlenikleri olur. Öyle olmalı ki denklemin katsayıları reel olsun. İşte bu yüzden denklemin üçüncü kökü $1 + i$ olmalıdır. Kökler x_1, x_2 ve x_3 olsun.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 + (1 - i) + (1 + i) = 3 = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1\cdot(1 - i)\cdot(1 + i) = 2 = -\frac{d}{a}$$

olduğundan $\frac{b}{d} = \frac{3}{2}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Reel olan a sayısının her değeri için*

$$x^3 + ax^2 + 9x - 1 = 0$$

denkleminin kökleri ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğrudur?

A) En az biri pozitiftir. B) Yalnız biri negatiftir.
C) Kökleri birbirine eşittir. D) Gerçel kökü yoktur.
E) Bir tane karmaşık kökü vardır.

Çözüm: Denklemin tüm katsayıları reel olduğundan, köklerin ya üçü de reeldir ya da biri reel ikisi sanaldır. Hatta ikisi sanalsa da mutlaka birbirlerinin eşlenikleridir. Çünkü öyle olmasalardı, kökler toplamı ve çarpımının ikisi birden reel olmazdı. Bu bilgilerle C, D, E şıklarını eleriz. Diğer yandan kökler çarpımı 1 olduğundan bu denklemin yalnız bir kökü negatif olamaz. Çünkü, eğer diğer iki kök reel ve pozitif olursa kökler çarpımı negatif olurdu. Bu yüzden B şıkkı da doğru cevap olamaz.

Doğru cevap: A.

Örnek [1973 ÜSS]. *Köklerinden biri 3, diğer ikisi $2 + i$ ve $2 - i$ kompleks (karmaşık) sayıları olan denklem, aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$ B) $x^3 - 3x^2 - 7x + 21 = 0$
C) $x^3 + 3x^2 - 7x + 21 = 0$ D) $x^3 - 27 = 0$
E) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

Çözüm: Birinci yol. Test çözerken bu yolu kullanın. Kökler toplamı $3 + 2 + i + 2 - i = 7$ olan sadece A şıkkı olduğundan doğru cevap A'dır.

İkinci yol. ''Polinom fonksiyondan oluşan bir denklemde, x_1 kökse eğer, denklemin $(x - x_1)$ diye bir çarpanı vardır'' gerçeğinden gideceğiz.

$$(x-3)(x-2-i)(x-2+i) = 0$$
$$(x-3)(x^2-4x+5) = 0$$
$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$ B) $\sin\alpha + i\cdot\cos\alpha$ C) $\cos\alpha + i\cdot\cos\alpha$
D) $\sin\alpha + i\cdot\sin\alpha$ E) $\cos 2\alpha + i\cdot\sin 2\alpha$

Çözüm: Hemen ifadeyi tamkare haline getirelim.

$$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + 1 = 0$$
$$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0$$
$$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + \cos^2\alpha = -1 + \cos^2\alpha$$
$$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + \cos^2\alpha = -\sin^2\alpha$$
$$x^2 - (2\cdot\cos\alpha)x + \cos^2\alpha = i^2\cdot\sin^2\alpha$$
$$(x - \cos\alpha)^2 = (i\cdot\sin\alpha)^2$$

olduğundan

$$x = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha \text{ veya } x = \cos\alpha - i\cdot\sin\alpha$$

elde edilir.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$(2-3i)(2+3i)+(4+5i)(4-5i)$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 27 B) 32 C) 54 D) 64 E) 72

2.

$$x^2-2x+2=0$$

denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-i, i\}$ B) $\{1-i, 1+i\}$ C) $\{2-i, 2+i\}$
D) $\{2-2i, 2+2i\}$ E) $\varnothing$

3.

$$x^2+4x+13$$

ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2+3i$ B) $1+3i$ C) $-1-i$ D) $3i$ E) $-i$

4.

$$3z-iz=20+30i$$

olduğuna göre $Re(z) + Im(z)$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 9 E) 5

5.

$$(3x-y)+4i=5+(x+2y)i$$

olduğuna göre $x+y$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

$$z_1=3x-2+4i$$
$$z_2=y-(2-x)i$$

ve $z_1=z_2$ olduğuna göre y kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

7.

$$z_1=x+2+(y^2-4)i$$
$$z_2=y-2+(x^2+4)i$$

ve $z_1=z_2$ olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranı kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 4

8.

i sanal sayı birimi olmak üzere

$$3yi+5x-10-9i=0$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$2-5i=(1-i)(z+i)$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2-5i}{7}$ B) $\frac{7-i}{2}$ C) $\frac{7-5i}{2}$ D) $5i-7$ E) $-5i$

10.

$$(1-i)(z-i)=1+i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) i B) $2i$ C) $4i$ D) $-2i$ E) $-4i$

1. C 2. B 3. A 4. A 5. B 6. D 7. B 8. E 9. C 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
z karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z}$ ile gösterilsin.

$$z+2+i=(1+2i)\overline{z}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının reel kısmı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

2.

$$z=12-5i$$

olduğuna göre $z\cdot\overline{z}$ çarpımı kaçtır?

A) –169 B) –13i C) 13 D) 169 E) 13i

3.

$$2z+6i=\overline{z}+3$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı kaçtır?

A) 2i – 3 B) – 3 – 2i C) 2i + 3
D) 3 – 2i E) 2 + 3i

4.

$$z+3+8i=\overline{z}(1+i)$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3i – 14 B) 14 + 3i C) 1 – 7i
D) 7 – 3i E) –7

5.

$$z(2-i)+3(\overline{z}-4)=1+i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının 2 katı aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 3 + 3i B) – 7 – 3i C) 9 – 3i
D) – 9i E) 7 – 9i

6.

$$(2-i)z+\overline{z}=1$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4-i}{2}$ B) $\frac{1+i}{4}$ C) $\frac{i-2}{4}$ D) $i+1$ E) $2-i$

7.

$$(1+2i)\overline{z}=(2+i)+z$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2-i}{3}$ B) $\frac{3+i}{2}$ C) $\frac{2+i}{3}$ D) $\frac{3+2i}{2}$ E) $\frac{i}{2}$

8.

$$\overline{z}-2zi=1-11i$$

koşulunu sağlayan z için $Re(z)$ kaçtır?

A) – 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

9.
***a*, *b*, *c* birer karmaşık sayı olsun. *a*'nın sanal eksene göre simetriği *b*, *b*'nin orijine göre simetriği *c* ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $a=\overline{c}$ B) $b=-c$ C) $\overline{b}=-a$
D) $\mathrm{Re}(c+\overline{b})=0$ E) $-b=a$

10.

$$z=1+2i$$

karmaşık sayısının toplamaya göre tersinin eşleniğinin sanal kısmı kaçtır?

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) –2 D) 0 E) 2

1. B 2. D 3. D 4. B 5. E 6. B 7. D 8. E 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\frac{(2+4i)^2}{1+i}$$

karmaşık sayısının eşleniğinin imajiner kısmı kaçtır?

A) -16 B) -14 C) -12 D) 12 E) 14

2.

$$A=\frac{5\pi}{\text{Arccos}\frac{1}{2}-i\cdot\text{Arcsin}\frac{1}{2}}$$

olduğuna göre A kaça eşittir?

A) -18 B) $-18i$ C) $12+6i$ D) $18i$ E) $12-6i$

3.

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2+\frac{z+1}{z-1}+1=0$$

denkleminin köklerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2i+1}{2}$ B) $\frac{-i+1}{2}$ C) $\frac{-i-1}{2}$ D) 0 E) $-2+2i$

4.

Karmaşık düzlemde

$$z_1=2-3i$$
$$z_2=-1+2i$$
$$z_3=1+3i$$

sayılarının görüntülerini köşe kabul eden üçgensel bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) $6{,}5$ C) 6 D) $5{,}5$ E) 5

5.

$$z=1-2i$$

karmaşık sayısının çarpmaya göre tersinin eşleniğinin sanal kısmı kaçtır?

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) 0 E) $\frac{2}{5}$

6.

$$z=3-4i$$

karmaşık sayısının çarpmaya göre tersinin eşleniğinin sanal kısmı kaçtır?

A) -5 B) -4 C) $-\frac{4}{25}$ D) $-\frac{9}{25}$ E) $\frac{3}{5}$

7.

$$z=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$$

olduğuna göre $Im(z^{-1})$ kaçtır?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{1}{2}$

8.

$$z=\sqrt{3}-i$$

olduğuna göre $z\cdot\overline{z}\cdot\text{Im}(\overline{z})^{-1}$ kaçtır?

A) -1 B) $-4\sqrt{3}$ C) 0 D) 1 E) $2\sqrt{3}$

9.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$x^2+ax-3i+2b=0$$

denkleminin bir kökü $1+i$ olduğuna göre diğer kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $2+i$ D) $-1-i$ E) $-2-2i$

10.

$$z^3-iz+a+i=0$$

denkleminin köklerinden biri $1-i$ olduğuna göre a reel sayısı kaçtır?

A) $-2i-3$ B) $2i-3$ C) $2i+3$ D) $-2i$ E) i

1. B 2. C 3. D 4. B 5. B 6. C 7. C 8. A 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sanal Birimin Kuvvetleri

Şimdi i'nin çok büyük güçlerini (kuvvetlerini) kolaylıkla hesaplamayı öğreneceğiz. Bunun için sırasıyla güçlerini yazmaya başlayalım bakalım:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = 1$$

Güzeeel, 1'i yakaladık. Demek ki, i'nin gücü 4'e bölündüğü zaman, sayının değeri 1 oluyor. Bu durum bize şöyle bir genelleme yapma hakkı veriyor:

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i$$
$$i^{4n+4} = i^{4n} \cdot i^4 = 1$$

Anlayacağınız, i'nin herhangi bir kuvvetini bulmak istediğimizde, kuvvetin 4'e bölümünden kalanı i'ye kuvvet yazsak da olur. Aşağıda bunlara ait örnekler bulacaksınız:

$$i^{70} = i^{68} \cdot i^2 = -1$$
$$i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = i$$
$$i^{-80} = 1$$
$$i^{-17} = i^{-20} \cdot i^3 = -i$$

Örnek. $(1-i)\cdot(1-i^2)\cdot(1-i^3)\cdot\ldots\cdot(1-i^{49})$ *çarpımının sonucu kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) -1 D) 2 E) 0

Çözüm: i^n sayısında n, 4'ün katı olduğunda $i^n = 1$ olacağından $1 - i^n = 0$ olur (örneğin $i^4 = 1$), bu da tüm çarpımın sonucunun sıfır olması demektir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖYS]. $(1+i)\cdot(1+i^3)\cdot(1+i^6)$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) 3 B) 1 C) 0 D) -1 E) -3

Çözüm: $i^6 = i^2 = -1$ olduğundan $1 + i^6 = 0$ olur. O halde

$$(1+i)\cdot(1+i^3)\cdot(1+i^6) = (1+i)(1+i^3)\cdot 0 = 0$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{99}$ *toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) -1 D) 2 E) 0

Çözüm: Biraz önce gösterdiğimiz üzere, i'nin kuvvetleri her dört tanede bir devrediyor, yani aynı sonuçları veriyor. Bu soruyu çözerken sırtımızı bu özelliğe yaslayacağız.

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$$

olduğundan baştan itibaren her dört terimin toplamı 0 olur. O halde bu 99 terimin ilk 96 tanesinin (4'ün katı olduğundan) toplamı 0'dır. Son üç terim toplamı bize cevabı verir:

$$i^{97} + i^{98} + i^{99} = i - 1 - i = -1.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1991 ÖYS]. $(1+i)\cdot(1+i^3)\cdot(1+i^5)\cdot(1+i^7)$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) $1+i$ D) $1-i$ E) $4i$

Çözüm: $i^5 = i$ ve $i^7 = i^3$ olduğundan

$$\begin{aligned}(1+i)\cdot(1+i^3)\cdot(1+i^5)\cdot(1+i^7) &= (1+i)^2\cdot(1+i^3)^2\\ &= (1+i)^2\cdot(1-i)^2\\ &= 2i\cdot(-2i)\\ &= -4i^2 = 4\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1995 ÖYS]. *n bir pozitif tam sayı olmak üzere,*

$$\frac{i^{8n-1}+i^{4n}}{i^{4n-1}}$$

ifadesinin kısaltılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) i B) $1+i$ C) $i-1$ D) 1 E) 2

Çözüm: $i^4 = 1$, dolayısıyla $i^{4n} = 1$ eşitliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned}\frac{i^{8n-1}+i^{4n}}{i^{4n-1}} &= \frac{i^{-1}+1}{i^{-1}}\\ &= \frac{i^{-1}}{i^{-1}} + \frac{1}{i^{-1}}\\ &= 1+i\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1990 ÖYS]. *$z=3+2i$ olduğuna göre $\left(\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}\right)^4$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{81}{16}$ B) $-\frac{81}{16}$ C) $-\frac{81}{16}i$ D) $\frac{81}{16}i$ E) $-i$

Çözüm: $z=3+2i$ ise $\bar{z}=3-2i$ olduğundan

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}\right)^4=\left(\frac{3+2i+3-2i}{3+2i-3+2i}\right)^4=\left(\frac{6}{4i}\right)^4=\left(\frac{3}{2i}\right)^4=\frac{81}{16}$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi $(x+i^{19})^{99}=-i$ denkleminin bir köküdür?*

A) $2i$ B) i C) $-i$ D) $-2i$ E) 1

Çözüm: Önce i^{19} sayısını hesaplayalım:

$$i^{19}=i^{16}\cdot i^3=i^3=-i.$$

$(x+i^{19})^{99}=-i$ eşitliği

$$(x-i)^{99}=-i$$

halini aldı. Bir önceki örnekte $i^{99}=-i$ olduğunu bulmuştuk. Bunu da yerine yazalım:

$$(x-i)^{99}=i^{99}$$

olduğundan $x-i=i$ olur ki $x=2i$ denklemin çözümlerinden biridir. İnanmayan dener☺

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$f(z)=z^3-3i$$
$$g(z-1)=2z+1$$

fonksiyonları için $(g\circ f)(i)$ kaçtır?

A) $8i-3$ B) $3-8i$ C) $3-3i$ D) i E) $-i$

Çözüm: $g(z)=2(z+1)+1=2z+3$ olduğunu baştan kenara not edelim.

$$(gof)(i)=g(f(i))=g(i^3-3i)$$
$$=g(-4i)=2(-4i)+3=-8i+3.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$P(x)=x^4-3\cdot x^3+4\cdot x^2+2x$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(i)$ kaçtır?*

A) $5i$ B) $-3i$ C) $-3+5i$ D) $-3-5i$ E) i

Çözüm:

$$P(i)=i^4-3\cdot i^3+4\cdot i^2+2i$$
$$=1-3(-i)+4\cdot(-1)+2i$$
$$=1+3i-4+2i=-3+5i.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x-\frac{1}{x}=i\sqrt{2}$ olduğuna göre $x^{2007}-\frac{1}{x^{2007}}$ farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-i\sqrt{2}$ B) $-i$ C) 0 D) i E) $i\sqrt{2}$

Çözüm: Verilen eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=2i^2$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\frac{x^4+1}{x^2}=0$$
$$x^4=-1$$

olduğundan

$$x^{2007}-\frac{1}{x^{2007}}=x^{2004}\cdot x^3-\frac{1}{x^{2004}\cdot x^3}=-x^3+\frac{1}{x^3}$$
$$=-\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=-i\sqrt{2}\cdot(0+1)=-i\sqrt{2}$$

Doğru cevap: A.



$n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$(a\pm ai)^{2n}=[(a\pm ai)^2]^n$$
$$=(a^2\pm 2\cdot a^2\cdot i+a^2\cdot i^2)^n$$
$$=(\pm 2\cdot a^2\cdot i)^n.$$

Örneğin,

- ✓ $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$,
- ✓ $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$,
- ✓ $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(2i)^2=4\cdot i^2=-4$,
- ✓ $(1-i)^{20}=[(1-i)^2]^{10}=(-2i)^{10}=(-2)^{10}\cdot i^{10}$ $=1024\cdot i^2=-1024$,
- ✓ $(1+i)^9=(1+i)^8\cdot(1+i)=[(1+i)^2]^4\cdot(1+i)$ $=(2i)^4\cdot(1+i)=16\cdot(1+i)=16+16i$,
- ✓ $(3-3i)^5=3^5\cdot(1-i)^5$ $=243\cdot[(1-i)^2]^2\cdot(1-i)$ $=243\cdot(-2i)^2\cdot(1-i)$ $=243\cdot(-4)\cdot(1-i)=-972+972i$.

Örnek [1992 ÖYS]. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-2i$ B) $-i$ C) -1 D) 1 E) $2i$

Çözüm: Birinci yol. Önce parantez içini sadeleştirelim. Hem payı hem de paydayı, paydanın eşleniğiyle çarparsak, parantez içinin aslında i olduğunu görürüz. O halde cevap $i^{20} = 1$ olur.

İkinci yol. Üslü sayı özelliklerini kullanacağız.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20} = \frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{20}} = \frac{\left((1+i)^2\right)^{10}}{\left((1-i)^2\right)^{10}} = \frac{(2i)^{10}}{(-2i)^{10}} = 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $(1+i)\cdot z + i = 1$ *olduğuna göre* z^{2009} *kaçtır?*

A) -1 B) $-i$ C) 0 D) i E) 1

Çözüm: Birinci yol. $(1+i)\cdot z = 1 - i$ olduğundan

$$z = \frac{1-i}{1+i}$$

olur. Pay ve payda $1 - i$ ile çarpılarak, sonradan sadeleştirilirse $z = -i$ olur.

$$z^{2009} = (-i)^{2009} = -i^{2009} = -i^{2008}\cdot i = -i.$$

İkinci yol. Biraz önce verdiğimiz tekniği kullanalım.

$$z^{2006} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2009} = \left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)^{1004}\cdot\frac{1-i}{1+i}$$

$$= \left(\frac{-2i}{2i}\right)^{1004}\cdot\frac{1-i}{1+i} = 1\cdot\frac{1-i}{1+i} = -i$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $i + zi = 1 - z$ *eşitliğini sağlayan* z *sayısı için* z^{2008} *kaçtır?*

A) -2^{2008} B) -1 C) 0 D) 1 E) 2^{2008}

Çözüm: Hemen z'leri bir tarafta toplayalım.

$z + zi = 1 - i$ olduğundan $z = \frac{1-i}{1+i}$ bulunur.

$$z^{2008} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^{1004} = (-1)^{1004} = 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $z = \frac{2i}{1-i}$ *olduğuna göre* z^{50} *kaçtır?*

A) $2^{25}\cdot i$ B) $2^{20}\cdot i$ C) $-2^{25}\cdot i$ D) $2i$ E) $20i$

Çözüm: İster bir önceki soruda yaptığımız gibi önce ifadeyi sadeleştiririz, istersek de şöyle:

$$z^{50} = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^{50} = \frac{(2i)^{50}}{(1-i)^{50}} = \frac{2^{50}\cdot i^{50}}{((1-i)^2)^{25}}$$

$$= \frac{2^{50}\cdot i^2}{(-2i)^{25}} = \frac{-2^{50}}{-2^{25}\cdot i^{25}} = \frac{2^{25}}{i} = \frac{2^{25}\cdot i}{i^2} = -2^{25}\cdot i$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1989 ÖYS]. $(1+i)^5 + (1-i)^5$ *toplamı kaçtır?*

A) -8 B) -5 C) 0 D) 5 E) 8

Çözüm:

$$(1+i)^5 + (1-i)^5 = (1+i)(1+i)^4 + (1-i)(1-i)^4$$
$$= (1+i)(2i)^2 + (1-i)(-2i)^2$$
$$= (1+i)(-4) + (1-i)(-4)$$
$$= -4 - 4i - 4 + 4i = -8$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$z^2 - 4z = -4 + 2i$$

eşitliğini sağlayan z*'lerden biri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1 + i$ B) $2 + i$ C) $3 + i$ D) $2 - i$ E) $3 - i$

Çözüm: 1-4-4 katsayıları bize tamkareyi hatırlatmalı.

$$z^2 - 4z + 4 = 2i$$
$$(z-2)^2 = (1+i)^2$$

diye $z - 2 = 1 + i$ veya $z - 2 = -(1 + i)$ yani $z = 3 + i$ veya $z = 1 - i$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(1 + 2i)^{3x} = (-3 + 4i)^{x-1}$ *eşitliğini sağlayan* x *kaçtır?*

A) -4 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

Çözüm: $1 + 2i$ ile $-3 + 4i$ arasında bir ilişki göremediğimiz sürece bu soruyu çözemezsiniz. En azından ben çözemem!

Biz bu soruyu $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ eşitliğini kullanarak çözeceğiz.

$$(1 + 2i)^{3x} = (1 + 2i)^{2x-2}$$

eşitliğinden

$$3x = 2x - 2$$

yani $x = -2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$i^{1234} - i^{567} + i^{890} + i^{345}$$

sayısı kaça eşittir?

A) $-2+2i$ B) $-3+2i$ C) $-3+2i$
D) $3+2i$ E) $3i+3$

2.

$$i^{2004} + i^{2005} + i^{2006}$$

toplamı kaçtır?

A) -1 B) $-i$ C) 1 D) i E) 2i

3.

$$i - i^3 + i^5 - i^7 + \ldots + i^{53} - i^{55}$$

sayısı kaça eşittir?

A) $28i$ B) $14i$ C) $-i$ D) $-14i$ E) $-28i$

4.

$$P(x) = x^{27} - x^{24} - x^3 + x - 1$$

polinomunun $x^3 - i$ ile bölünmesinden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) i B) $x+i$ C) $x-i$ D) $x-2$ E) $x+1$

5.

$$\frac{5i^5 - 17i^{19}}{10i^{10} - i^{12}}$$

sayısı kaça eşittir?

A) $3i$ B) $2i$ C) i D) $-2i$ E) $-3i$

6.

$$x + yi = (1+i)^4 + (1+i)^3 + (1+i)^2$$

olduğuna göre $x - y$ farkı kaça eşittir?

A) -12 B) -10 C) -6 D) -4 E) -2

7.

$$\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^{27} - i\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{17}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-i$ D) i E) 0

8.

$$\frac{(1+i)^{50}}{(1-i)^{50}}$$

sayısı kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

9.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$x^3 + ax + b = 0$$

denklemin köklerinden biri $1 + i^{2009}$ olduğuna göre diğer iki kökün çarpımı kaçtır?

A) 4 B) $4+i$ C) $4-4i$ D) $2-2i$ E) $-2+2i$

10.

$$z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1-i, 2+3i\}$ B) $\{-i, 2+3i\}$ C) $\{1-i, 3i\}$
D) $\{-1+i, -2-3i\}$ E) $\{1-i, 2+3i\}$

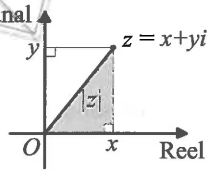
1. A 2. D 3. A 4. D 5. D 6. B 7. B 8. B 9. E 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Bir Karmaşık Sayının Modülü

Bir karmaşık sayının karmaşık düzlemdeki görüntüsünün (ona karşılık gelen noktanın) orijine olan uzaklığına, o karmaşık sayının **modülü** denir.



Mutlak değeri veya **büyüklüğü** dendiği de olur. $|z|$ ile gösterilir.

$|z|$'nin değeri. $z = x + yi$ şeklindeki bir karmaşık sayının modülünün, yan şekilde gördüğünüz taralı üçgende Pisagor Teoremi uygulanarak,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olduğu rahatlıkla bulunabilir.

z	$\lvert z\rvert$
$3+4i$	5
$-5-12i$	13
$-8+15i$	17
$7-24i$	25

Teorem. *Bir karmaşık sayının modülü, eşleniğinin modülüne, toplamaya göre tersinin modülüne, eşleniğinin toplamaya göre tersinin modülüne ve toplamaya göre tersinin eşleniğinin modülüne eşittir. Yani,*

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = |\overline{-z}| .$$

Kanıt: $z = x + yi$ diyelim.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

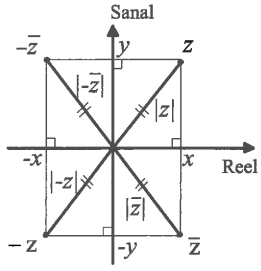
$$\overline{z} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|-\overline{z}| = |\overline{-z}| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olduğundan eşitlikler doğrudur.

Bu durumu bir de yandaki gibi grafikle açıklayalım: z, $\overline{z}$, $-z$ ve $-\overline{z}$ sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri orijin merkezli bir dikdörtgen oluştururlar ki, dikdörtgende köşegenlerin merkeze olan uzaklıklarının eşit olduğunu bildiğimizden



kanıt tamamlanmış olur. Bu kanıtla birlikte bir karmaşık sayının ters işaretlisinin görüntüsünün, kendisinin orijine göre simetriği olduğunu da anlamış olduk.

Örnek. *$|z| - 4i = \overline{z} + 2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının modülü kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: $z = a + bi$ olsun. Eşitliği yeniden yazalım.

$$|z| - 4i = \overline{z} + 2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} - 4i = a - bi + 2$$

Eşitliğin her iki tarafının imajinerlerini eşitlersek $b = 4$ olduğunu görürüz. Şimdi de b'yi yerine yazıp, reelleri eşitleyeceğiz.

$$\sqrt{a^2 + 16} = a + 2$$

$$a^2 + 16 = a^2 + 4a + 4$$

$$4a = 12$$

$$a = 3$$

a'yı da bulduk. O halde sonucu bulduk.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Doğru cevap: C.

Örnek [2006 ÖSS]. *$|z| + z = 3 - 2i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{3}{5} - 2i$ B) $\frac{5}{6} - 2i$ C) $\frac{3}{4} + 2i$ D) $\frac{2}{3} - 3i$ E) $\frac{3}{5} + 3i$

Çözüm: $|z|$ bir reel sayı olduğundan $|z| + z = 3 - 2i$ eşitliğini düşününce $\text{Im}(z) = -2$ olduğunu anlarız. Hatta böyle düşündüğümüz için direkt olarak üç şıkkı da eleriz. ☺

$z = a - 2i$ diyelim.

$$|z| + z = \sqrt{a^2 + 4} + a - 2i = 3 - 2i$$

$$\sqrt{a^2 + 4} + a = 3$$

$$\sqrt{a^2 + 4} = -a + 3$$

$$a^2 + 4 = a^2 - 6a + 9$$

$$6a = 5$$

olduğundan $a = \frac{5}{6}$, dolayısıyla $z = \frac{5}{6} - 2i$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$x < 2$ olmak üzere $z = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-2}$ sayısının modülü $3\sqrt{2}$ olduğuna göre x reel sayısı kaça eşittir?*

A) 1 B) 0 C) −1 D) −7 E) −18

Çözüm: $x < 2$ iken $x - 2 < 0$ olacağından şöyle bir düzenleme yapacağız:

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{-1\cdot(2-x)} = \sqrt{i^2(2-x)} = \pm i\sqrt{2-x}$$

olacağından verilen z sayısı şu halde yazılabilir:

$$z = \sqrt{2-x} \pm i\sqrt{2-x}$$

O halde $|z| = \sqrt{(2-x)+(2-x)} = \sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ olmalıdır ki $\sqrt{2-x} = 3$ eşitliğinden $x = -7$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Teorem. *İki karmaşık sayının çarpımlarının modülü, modüllerinin çarpımına eşittir. Yani,*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun.

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cdot i| \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} \\ &= \sqrt{x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= |z_1|\cdot|z_2| \end{aligned}$$

Örnek. *$z_1 = 3 - 4i$ ve $z_2 = -5 + 12i$ olduğuna göre $|z_1 \cdot z_2|$ kaçtır?*

A) 65 B) 60 C) 55 D) −65 E) −55

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz. İlk çözümü, ikincinin kıymetini anlayıp, unutmayın diye vereceğiz.

Birinci yol. Madem sayıların çarpımının modülü soruluyor. Biz de önce sayıları çarpmakla işe başlayacağız.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 - 4i)(-5 + 12i) \\ &= -15 + 36i + 20i + 48 \\ &= 33 + 56i \end{aligned}$$

olduğundan

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{3035} = 65.$$

İkinci yol. $|z_1| = 5$ ve $|z_2| = 13$ olup,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

olduğundan $|z_1 \cdot z_2| = 5 \cdot 13 = 65$.

Doğru cevap: A.

Teorem. *İki karmaşık sayının bölümlerinin modülü, modüllerinin bölümüne eşittir. Yani,*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ olsun.

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right| = \left|\frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}\right| \\ &= \left|\frac{x_1x_2 + y_1y_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)i}{x_2^2 + y_2^2}\right| \\ &= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \end{aligned}$$

Örnek. *$z_1 = 3 - 4i$ ve $z_2 = -5 + 12i$ olduğuna göre $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $-\frac{1}{13}$ D) $-\frac{5}{13}$ E) 1

Çözüm: $|z_1| = 5$ ve $|z_2| = 13$ olup,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

olduğundan $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{5}{13}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1981 ÖYS]. *$z = \frac{1+ix}{1-ix}$ olduğuna göre $|z|$'nin değeri kaçtır?*

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ olduğundan

$$|z| = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{\sqrt{1^2 + x^2}}{\sqrt{1^2 + (-x)^2}} = 1.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\bar{z}\cdot|z|^{-2}$ *sayısının sadeleştirilmiş biçimini yazınız.*

A) z^{-1} B) z C) $-z$ D) $-z^{-1}$ E) $-2z$

Çözüm: $z=x+yi$ olsun.

$$\bar{z}\cdot|z|^{-2}=(x-yi)\cdot(\sqrt{x^2+y^2}\,)^{-2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=z^{-1}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1993 ÖYS]. *Karmaşık düzlemde* $z=3-i$ *olduğuna göre* $|z^{-1}|$ *kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{20}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{20}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{30}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

Çözüm: $z=3-i$ ise $|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ olduğundan

$$|z^{-1}|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Bir karmaşık sayının herhangi bir kuvvetinin modülü, modülünün o kuvvetine eşittir. Yani,*

$$|z^n|=|z|^n.$$

Kanıt: İlerde kanıtlanacak.

Örnek. $z_1=3-4i$ *olduğuna göre* $|z^{10}|$ *kaçtır?*

A) 5^2 B) 5^5 C) 5^{10} D) 5^{15} E) 1

Çözüm: $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ olduğunu not edelim. Öyleyse

$$|z^{10}|=|z|^{10}=5^{10}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $z=6+8i$ *olduğuna göre* $|z^{-1}|$ *kaça eşittir?*

A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ C) $\frac{1}{10}$ D) 10 E) 100

Çözüm: $z=6+8i$ ise $|z|=10$ olduğunu biliyoruz.

$$|z^{-1}|=|z|^{-1}=10^{-1}=\frac{1}{10}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $z=2+i$ *olmak üzere* z^{50} *sayısının büyüklüğü kaçtır?*

A) 5 B) 5^5 C) 5^{10} D) 5^{25} E) 5^{50}

Çözüm: Bize $|z^{50}|$ soruluyor. Biz de

$$|z^{50}|=|z|^{50}$$

eşitliğini biliyoruz. O zaman ne duruyoruz?
$z=2+i$ olduğundan

$$|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

olur. Bu yüzden

$$|z^{50}|=|z|^{50}=\sqrt{5}^{50}=5^{25}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $|z^2|-13=\bar{z}-z+6i$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının toplamı kaçtır?*

A) -6 B) 6 C) 0 D) $-6i$ E) $6i$

Çözüm: $z=x+yi$ olsun.

$$|z^2|=|z|^2=x^2+y^2$$

olduğunu görerek eşitliği tekrar yazalım.

$$x^2+y^2-13=x-yi-x-yi+6i$$

$$x^2+y^2-13=-2yi+6i$$

Eşitliğin sol tarafı reel olduğundan sağ tarafı da reel olmalıdır. Bu sadece $y=3$ olmasıyla mümkündür. O halde

$$x^2+y^2=13$$

bulunur ki buradan $x=2$ veya $x=-2$ olması gerektiği çıkar. Bu durumda z'nin alabileceği değerler

$$2+3i \text{ ve } -2+3i$$

olur. Bunların toplamı da $6i$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$z_1=\sin 40^\circ+i\cos 20^\circ$$

$$z_2=\sin 20^\circ+i\cos 40^\circ$$

olduğuna göre $|z_1^2|+|z_2^2|$ *toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

Çözüm: $|z_1^2|+|z_2^2|=|z_1|^2+|z_2|^2$

$=\sin^2 40^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin^2 20^\circ=1+1=2.$

Doğru cevap: D.

Teorem. *Bir karmaşık sayıyla eşleniğinin çarpımı, modülünün karesine eşittir. Yani,*

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

Kanıt: $z=x+yi$ ise $\bar{z}=x-yi$ olacağından

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2-y^2i^2=x^2+y^2$$

olduğunu daha önce kanıtlamıştık zaten.

$$x^2+y^2=|z|^2$$

olduğundan kanıt biter.

Örnek. $z\cdot\bar{z}+3|\bar{z}|=40$ *olduğuna göre* $|z|$ *kaçtır?*

A) −8 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

Çözüm: $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ ve $|\bar{z}|=|z|$ olduğunu biliyoruz.

$$z\cdot\bar{z}+3|\bar{z}|=40$$
$$|z|^2+3|z|-40=0$$
$$(|z|+8)\cdot(|z|-5)=0$$

olduğundan $|z|=5$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\bar{z}=\dfrac{64}{z}$ *ise z karmaşık sayısının modülü kaçtır?*

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

Çözüm: $\bar{z}=\dfrac{64}{z}$ eşitliği $z\cdot\bar{z}=64$ şeklinde düzenlenirse, teroem gereği $|z|^2=64$ olur ki, $|z|$ negatif olamayacağından $|z|=8$ olduğunu buluruz.

Doğru cevap: B.

Örnek [1977 ÜSS]. $a\in\mathbb{R}$ *için* $z=a+(a+1)i$ *ve* $|\overline{z+iz}|=\sqrt{2}$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) 0 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Çözüm: $z=a+(a+1)i$ iken $\bar{z}=a-(a+1)i$ olduğundan

$$|\overline{z+iz}|=|z+i\bar{z}|=|a+(a+1)i+i(a-(a+1)i)|$$
$$=|a+(a+1)i+ai+a+1|$$
$$=|2a+1+(2a+1)i|$$
$$=\sqrt{(2a+1)^2+(2a+1)^2}$$
$$=(2a+1)\sqrt{2}$$

olur. O halde $(2a+1)\sqrt{2}=\sqrt{2}$ eşitliğinden $a=0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $Re(z)>0$ *olmak üzere* $3\cdot(\sqrt{z}+i)+1=|z|$ *eşitliğini sağlayan z sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $2-4i$ D) $3-2i$ E) $8-6i$

Çözüm: Bu soruda $z=x+yi$ olsun demek, başa bela almaktan başka bir şey değildir. Biz

$$\sqrt{z}=x+yi$$

diyeceğiz. Dolayısıyla $z=x^2+2xyi-y^2$ olacak. Şimdi buna göre eşitliği tekrar düzenleyelim.

$$3\cdot(\sqrt{z}+i)+1=|z|$$
$$3\cdot(x+(y+1)i)+1=\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}$$
$$3x+1+3(y+1)i=\sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}$$
$$3x+1+3(y+1)i=\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}$$
$$3x+1+3(y+1)i=\sqrt{(x^2+y^2)^2}$$
$$3x+1+3(y+1)i=x^2+y^2$$

eşitliğinden $3x+1=x^2+y^2$ ve $y=-1$ olduğunu buluruz. O halde $3x+1=x^2+1$ eşitliğinden $x=0$ veya $x=3$ olduğu çıkar. Soruda $x>0$ verildiğinden $x=3$'tür. Diğer yandan $y=-1$ olduğunu daha önce bulduğumuzdan

$$\sqrt{z}=x+yi=3-i$$

olur. Her iki yanın karesi alınırsa

$$z=(3-i)^2=9-6i+i^2=8-6i$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Modülü, reelinden 2, imajinerinden 9 fazla olan karmaşık sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $3+4i$ B) $3-4i$ C) $8-15i$ D) $8+15i$ E) $18+4i$

Çözüm: Bahsi geçen karmaşık sayı $z=a+bi$ olsun. Bahse göre

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+2=b+9$$

imiş. Demek ki $b=a-7$. Bu durumda eşitliği sadece a'ya bağlı yazabiliriz.

$$\sqrt{a^2+(a-7)^2}=a+2$$
$$a^2+a^2-14a+49=a^2+4a+4$$
$$a^2-18a+45=0$$
$$(a-15)(a-3)=0$$

olduğundan $a=15$ veya $a=3$'tür.

$a=15$ ise $b=8$

$a=3$ ise $b=-4$

olduğundan, şartları sağlayan karmaşık sayılar $15+8i$ ile $3-4i$'dir. Toplamları da $18+4i$ yapar.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Reel olmayan bir karmaşık sayının imajineri modülüyle reelinin aritmetik ortalamasıdır. Bu sayının imajineri, reelinin kaç katıdır?*

A) $\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm: Bu karmaşık sayıya $a + bi$ diyelim. Buna göre

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}=b$$
$$\sqrt{a^2+b^2}+a=2b$$
$$\sqrt{a^2+b^2}=2b-a$$
$$a^2+b^2=4b^2-4ab+a^2$$
$$3b^2-4ab=0$$
$$b(3b-4a)=0$$

$b = 0$ ise sayı reel olacağından $b = 0$ olamaz. O halde $3b = 4a$ olmalıdır. Buradan $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için*

$$\text{Im}(z_1)-\text{Re}(z_1)=\text{Im}(z_2)-\text{Re}(z_2)=7$$
$$|z_2-z_1|=3\sqrt{2}$$
$$|z_2|-|z_1|=4$$

olduğuna göre $|z_2|$ en fazla kaç olabilir?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 20

Çözüm: $z_1 = a + (a + 7)i$ dersek $z_2 = b + (b + 7)i$ olur. Diğer yandan $z_2 - z_1 = (b - a) + (b - a)i$ olduğundan

$$|z_2-z_1|=(b-a)\sqrt{2}$$

olmalıdır. O halde $b - a = 3$ olur. Şimdi verilen son eşitliği yazalım.

$$|z_2|=|z_1|+4$$
$$\sqrt{(a+10)^2+(a+3)^2}=\sqrt{(a+7)^2+a^2}+4$$
$$(a+10)^2+(a+3)^2=(a+7)^2+a^2+4^2+8\sqrt{(a+7)^2+a^2}$$
$$20a+100+6a+9=14a+49+16+8\sqrt{(a+7)^2+a^2}$$
$$12a+44=8\sqrt{(a+7)^2+a^2}$$
$$3a+11=2\sqrt{(a+7)^2+a^2}$$
$$9a^2+66a+121=8a^2+56a+196$$
$$a^2+10a-75=0$$
$$(a+15)(a-5)=0$$

Bu durumda $a = -15$ için $b = -12$ veya $a = 5$ için $b = 8$ olur. Yani z_2 sayısı ya $-12 - 5i$ ya da $8 + 15i$'dir. Demek ki $|z_2|$ en fazla 17 olabilir.

Doğru cevap: D.

Teorem. *İki karmaşık sayının toplamlarının modülü, modüllerinin toplamından küçük veya ona eşittir. Yani,*

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$$

Kanıt: $z_1 = x_1 + y_1i$ ve $z_2 = x_2 + y_2i$ olsun.

$$z_1+z_2=x_1+x_2+(y_1+y_2)i$$

olur.

$$|z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\&=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2x_1x_2+2y_1y_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2x_1x_2+2y_1y_2\\&\le|z_1|^2+|z_2|^2+2x_1x_2+2y_1y_2+2x_1y_1+2x_2y_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\cdot|z_1|\cdot|z_2|\\&=(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

Örnek. *$|z| \le 3$ olmak üzere $|z - 5 - 12i|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) −8 B) −16 C) 0 D) 8 E) 16

Çözüm: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ olduğunu biliyoruz. Uyarlarsak,

$$|z+(-5-12i)|\le|z|+|-5-12i|$$

olur. O halde $|z - 5 - 12i| \le |z| + 13$ olduğundan $|z|$'i ne kadar büyük tutarsak, istenileni o kadar büyütmüş oluruz. $|z|$ en çok 3 olduğundan sorulan değer de en çok 16 olabilir.

Doğru cevap: E.

Teorem. *İki karmaşık sayının farkının modülü, modüllerinin farkından büyük veya ona eşittir. Yani,*

$$|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|.$$

Kanıt: Bir önceki teoremin kanıtında kullandığımız metodun aynısını kullanarak kanıtlayabilirsiniz. Kafanızı çalıştırıp şunu da söyleyebilirsiniz: $|z_1 - z_2|$ demek z_1 ile z_2 karmaşık sayıları arasındaki uzaklık demektir. $|z_1|$ ve $|z_2|$ de, bu sayıların orijine olan uzaklıkları demektir. Bu sayılarla orijin doğrusalsa eşitlik gerçekleşir, eğer doğrusal değillerse üçgen oluştururlar, bu durumda üçgen eşitsizliği gereği ikisi arasındaki uzaklık, diğer iki kenar farkından mutlaka büyük olmalıdır. Diğer iki kenar farkı negatifse zaten büyüktür ama pozitif farkından da büyüktür. Yani teoremin aslı şu: $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|\ge|z_1|-|z_2|$.

Örnek. *$|z| \le 3$ olmak üzere $|z - 5 - 12i|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) −8 B) −16 C) 0 D) 8 E) 16

Çözüm: $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$ olduğunu biliyoruz. Uyarlarsak, $|z_1-(5+12i)|\ge\big||z_1|-|5+12i|\big|$ olur. O halde

$$|z_1-(5+12i)|\ge13-|z_1|$$

olduğundan $|z|$'yi ne kadar büyük tutarsak, istenileni o kadar küçültme imkanı doğar. $|z|$ en çok 3 olduğundan sorulan değer de en az 10 olabilir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$z=3-4i,\ w=8+6i,\ p=2-2\sqrt{3}i,\ q=-5,\ t=8i$

karmaşık sayılarının modüllerinin toplamı kaçtır?

A) 16 B) 32 C) 34 D) 38 E) 66

2.

$z=x+3i$

karmaşık sayısı için $|z|=5$ olduğuna göre x kaçtır?

A) -4 B) ∓ 4 C) 4 D) 8 E) 16

3.

$z=-9+40i$

olduğuna göre $|\overline{z}|$ kaça eşittir?

A) 49 B) 47 C) 45 D) 43 E) 41

4.

$z_1=18-80i,\ z_2=-13+84i,\ z_3=48+64i$

olduğuna göre $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $|z_1|<|z_2|<|z_3|$ B) $|z_1|<|z_3|<|z_2|$ C) $|z_3|<|z_2|<|z_1|$
D) $|z_3|<|z_1|<|z_2|$ E) $|z_2|<|z_1|<|z_3|$

5.

$z_1=2006+2007i,\ z_2=2005+2008i,\ z_3=2004+2009i$

olduğuna göre $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $|z_1|<|z_2|<|z_3|$ B) $|z_1|<|z_3|<|z_2|$ C) $|z_3|<|z_2|<|z_1|$
D) $|z_3|<|z_1|<|z_2|$ E) $|z_2|<|z_1|<|z_3|$

6.

61 m/dk'lık sabit hızla gezinen bir sahil güvenlik botu, karmaşık düzlemin orijininde bulunmaktayken $44-240i$ sayısının görüntüsünün olduğu yerden bir imdat çağrısı alıyor.

Hızını değiştirmeden, yaralıya en az kaç dakikada ulaşabilir?

A) 0.25 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

7.

$$z=\frac{24+7i}{4-3i}$$

olduğuna göre $|z|$ kaça eşittir?

A) 25 B) 16 C) 9 D) 5 E) 1

8.

$$z=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}i}{1-\sqrt{3}i}$$

olduğuna göre $|z|$ kaça eşittir?

A) 32 B) 16 C) 8 D) $2\sqrt{3}$ E) 2

9.

$$z=\frac{2+\sqrt{5}i}{x+i}$$

sayısının modülü $\sqrt{3}$ olduğuna göre x'in pozitif değeri kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

10.

$z_1=3-2i,\ z_2=1+2i,\ z_3=a-3i$

karmaşık sayıları veriliyor.

z_1 ile z_2 sayılarının çarpımının z_3'e bölünmesinden elde edilen karmaşık sayının orijine olan uzaklığı $\sqrt{5}$ birim olduğuna göre a reel sayısının pozitif değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. B 2. B 3. E 4. D 5. A 6. D 7. D 8. E 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
$x < 0$ olmak üzere

$$z = \frac{1+xi}{4-i}$$

karmaşık sayısı için $|z| = 1$ olduğuna göre x kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

2.

$$z_1 = 1+i$$
$$z_2 = 2-2i$$

olduğuna göre $|z_1^5 \cdot z_2^3|$ ifadesi kaça eşittir?

A) 27 B) 64 C) 81 D) 128 E) 256

3.
$z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{2}+i$, $z_3 = -2i$ olduğuna göre

$$\left|\frac{3z_1^4}{z_2^2 \cdot z_3}\right|$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

4.
z karmaşık sayısının büyüklüğü 16 birim olduğuna göre

$$\frac{z\sqrt{|z|}}{\overline{z}}$$

sayısının büyüklüğü kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 64 E) 128

5.

$$z = \frac{\left(\sqrt{13}+i\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^5}$$

sayısının modülü kaça eşittir?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 2^2 D) 2^3 E) 2^{15}

6.
O merkezli karmaşık düzlemde $OABC$ dikdörtgeni çiziliyor.
A köşesinin simgelediği karmaşık sayının modülü 18'dir. C köşesi de $-3\sqrt{3}+3i$ sayısının görüntüsüyse dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 18 B) 24 C) 36 D) 54 E) 108

7.

$$\left|-12+9i\right| + \left|12-16i\right| \cdot i\Big|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 25 E) 28

8.

$$|z+3| = |z-11|$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$ en az kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

9.

$$|z+3i| = |z+11i|$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$ en az kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

10.

$$|z| + z = 16+8i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6+8i$ B) $6-8i$ C) $3-4i$ D) $3+4i$ E) $8+4i$

1. B 2. D 3. C 4. B 5. B 6. E 7. D 8. D 9. E 10. A

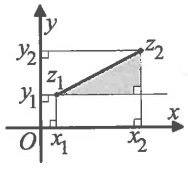
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Karmaşık Sayıların Görüntüleri

İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık. Karmaşık sayıların karmaşık düzlemdeki görüntüleri, dik koordinat sistemindeki noktalar gibi düşünülebileceğinden, iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanacağız:

$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ ise yan şekildeki taralı dik üçgende Pisagor Teoremi'ni kullanarak z_1 ve z_2 sayıları arasındaki uzaklığın



$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

kadar olduğunu bulmak hiç de zor olmasa gerek.

z_1	z_2	Uzaklık
$2+4i$	$5+8i$	5
$-2+3i$	$4-5i$	10
$1+i$	$6+13i$	13
$-7-5i$	$-15+10i$	17

Örnek. *Karmaşık düzlemde $A(1+3i)$ ile $B(1-2i)$ noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?*

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 12

Çözüm: Analitik düzlemde (1, 3) ve (1, –2) noktaları arasındaki uzaklığı nasıl buluyorsak öyle bulacağız. Apsisler aynıyken ordinatların pozitif farkı uzaklığı veriyordu. O halde uzaklık 3 – (–2) = 5 br olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Karmaşık düzlemde $A(2+3i)$ ile $B(6+ai)$ noktaları arasındaki uzaklık 5 br olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?*

A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm: Analitik düzlemde (2, 3) ve (6, a) noktaları arasındaki uzaklığın 5 br olmasını nasıl çözüyorsak aynen öyle çözeceğiz. Apsisler farkı 4 olduğundan ordinatlar farkı 3 olmalıdır. Bu durumda $a = 6$ veya $a = 0$ olabilir. Alabileceği değerlerin çarpımı da görüldüğü üzere 0'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek [1991 ÖYS]. *Karmaşık düzlemde $A(4+6i)$, $B(-2-i)$, $C(4+5i)$ noktaları veriliyor. A'nın $[BC]$'nin orta noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

Çözüm: A, B ve C noktalarının sırasıyla (4, 6), (–2, –1) ve (4, 5) noktaları olduğunu biliyoruz. Bu durumda $[BC]$'nin orta noktası $O(1, 2)$ olur. A ile O noktaları arasındaki uzaklık da, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$|AO| = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$3+4i$ karmaşık sayısına 2 birim uzaklıkta olan noktaların geometrik yer denklemi nedir?*

A) $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ B) $(x+3)^2+(y+4)^2=2$
C) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ D) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$
E) $(x-4)^2+(y-3)^2=4$

Çözüm: Düzlemde bir nokta varmış, ona sabit uzaklıkta başka başka noktalar varmış. Hayalinizde canlanan şey çember değil mi? İlk aldığımız nokta çemberin merkezi, sabit uzaklık da yarıçaptır. O diğer başka başka noktalar da çemberin ta kendisi. O noktaların geometrik yer denklemi nedir demek, bu çemberin denklemi nedir demek. Bilenler şurdan çözmeli: $O(a, b)$ merkezli r yarıçaplı bir çemberin denklemi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

dir. O halde (3, 4) merkezli 2 birim yarıçaplı çember denklemi de $(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$ olur. ''Hocam, ben çember denklemini bilmeseydim n'olacaktı?'' diyorsan, dinle:

Karmaşık düzlemdeki $3+4i$ karmaşık sayısına, diğer deyişle analitik düzlemdeki (3, 4) noktasına 2 birim uzaklıkta olan noktaya (x, y) diyelim. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden yine

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

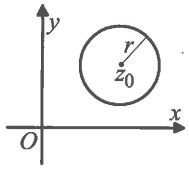
bulursun ki koşulları sağlayan tüm (x, y) noktalarının oluşturduğu şeyin denklemi budur demek olur. Bu çözümde anlamadığınız yer varsa, şimdiki konuya lütfen geçmeyin.

Doğru cevap: C.

Karmaşık Sayıların Görüntüleri. a ile b'nin farkı nasıl gösterilir? $a-b$ ya da $b-a$. Bunlardan en az bir tanesi bu iki sayı arasındaki uzaklıktır, yani bunlardan hangisi pozitifse o uzaklık simgeler. Dolayısıyla a ile b arasındaki uzaklığı $|a-b|$ ile gösteririz.

$|a-b|=c$ eşitliği de bize, a ile b'nin pozitif farkının, yani aralarındaki uzaklığın c birim olduğunu anlatır.

O halde $|z-z_0|=r$ eşitliğini şöyle yorumlamak gerekir:



z ile z_0 sayıları arasındaki uzaklık r birimdir. O halde z sayıları, z_0 merkezli r yarıçaplı çemberi oluşturur.

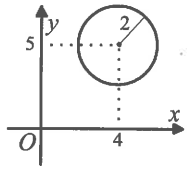
Örnek. *$|z-4-5i|=2$ eşitliğini sağlayan z sayılarının geometrik yeri nedir?*

A) $O(4+5i)$ merkezli 2 br yarıçaplı bir çember
B) $O(4+5i)$ merkezli 4 br yarıçaplı bir çember
C) $O(5+4i)$ merkezli 2 br yarıçaplı bir çember
D) $O(5+4i)$ merkezli 4 br yarıçaplı bir çember
E) $O(-4-5i)$ merkezli 2 br yarıçaplı bir çember

Çözüm: İki yol göstereceğiz. İlki tanımı kullanacak.

Birinci yol.

$|z-4-5i|=|z-(4+5i)|=2$ olduğundan z ile $4+5i$ sayıları arasındaki uzaklık 2'ymiş. Analitik düzleme geçelim: z ile (4, 5) noktası arasındaki uzaklık 2'ymiş. Yorumlayalım:



(4, 5) noktasına uzaklığı 2 birim olan noktalar z sayılarını oluştururmuş, yani z sayıları (4, 5) merkezli 2 birim yarıçaplı çembermiş. Geometrik yeri değil de bu geometrik yerin denklemi sorulsaydı,

$$(x-4)^2+(y-5)^2=2^2$$

diyecektik.

İkinci yol. İlk çözümdeki mantık silsilesini kurmakta zorlanan öğrenci, hemen $z=x+yi$ diyerek, kendini taca atabilir. Şöyle ki:

$$\begin{aligned}2&=|z-4-5i|\\&=|x+yi-4-5i|\\&=|(x-4)+(y-5)i|\end{aligned}$$

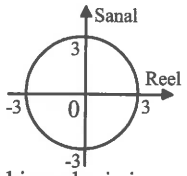
olduğundan

$$(x-4)^2+(y-5)^2=2^2.$$

Doğru cevap: A.

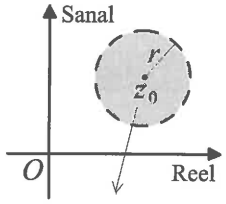
Örnek. *Karmaşık düzlemde $|z|=3$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntülerini çiziniz.*

Çözüm: Orijine uzaklığı 3 birim olan noktalar istenildiğinden 3 birim yarıçaplı merkezil çember isteniyor demektir. Formülü kullanmak isteyenin gözü $|z|=3$ eşitliğini $|z-(0+0\cdot i)|=3$ diye görmeli ve (0, 0) merkezli 3 birim yarıçaplı yandaki çemberi çizmeli.

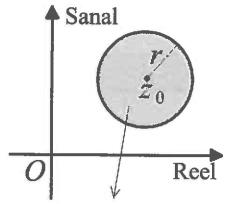


Biraz da eşitsizlikler üzerine birkaç kelam edeceğiz: $|a-b|<2$'den ne anlıyoruz? a ile b'nin pozitif farkının yani aralarındaki uzaklığın 2 birimden küçük olduğunu.

O halde $|z-z_0|<r$ eşitsizliği de bize z ile z_0 arasındaki uzaklığın r'den küçük olduğunu anlatmalı. Şöyle de diyebiliriz: z sayıları, z_0 sayılarına uzaklığı r birimden küçük olan sayılardır.

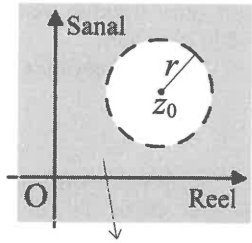


$|z-z_0|<r$ eşitsizliğini sağlayan z sayılarının görüntüsü

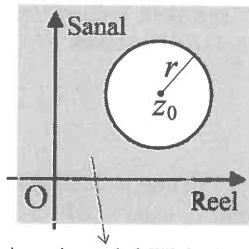


$|z-z_0|\le r$ eşitsizliğini sağlayan z sayılarının görüntüsü

Anlayacağınız, z_0 merkezli r yarıçaplı çemberin iç bölgesindeki tüm sayılar aranılan sayılardır. Dikkat edin üzerindeki demedik, zira üzerinde olursa uzaklık r'den küçük değil tam r olur. O halde $|z-z_0|\le r$ olsaydı, hem çemberin iç bölgesini hem de çemberin kendisini alacaktık.



$|z-z_0|>r$ eşitsizliğini sağlayan z sayılarının görüntüsü



$|z-z_0|\ge r$ eşitsizliğini sağlayan z sayılarının görüntüsü

Benzer şekilde,

$$|z-z_0|>r$$

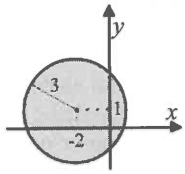
olsaydı çember dışını,

$$|z-z_0|\ge r$$

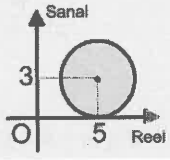
olsaydı da hem çemberin dışını hem de çemberin kendisini almalıydık.

Örnek. *$|z + 2 - i| \le 3$ eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: $|z + 2 - i| = |z - (-2 + 1 \cdot i)| \le 3$ olduğundan z sayılarının $(-2, 1)$ noktalarına uzaklığının 3 birimden küçük veya eşit olduğunu anlıyoruz, yani bu z noktaları $(-2, 1)$ merkezli 3 birim yarıçaplı çemberi ve bu çemberin iç bölgesini oluşturmuş. Yandaki grafikten takip edebilirsiniz.



Örnek. *Sadece yanda görüntüleri çizilen z karmaşık sayılarını eleman kabul eden bir küme yazınız.*



Çözüm: Şekildeki daire (5, 3) merkezli ve 3 birim yarıçaplı olduğundan,

$$Z = \{z : |z - (5 + 3i)| \le 3, z \in \mathbb{C}\}$$

istenilen kümedir.

Örnek [1994 ÖYS]. *$|z + 2 - i| = 10$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ B) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 64$
C) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$ D) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 81$
E) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 121$

Çözüm: $z = x + yi$ diyelim.

$$|z + 2 - i| = 10$$
$$|x + yi + 2 - i| = 10$$
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 10$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$$

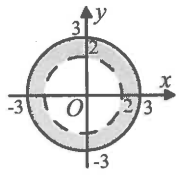
Doğru cevap: C.

Örnek. *$4 < z \cdot \overline{z} \le 9$ eşitsizliklerini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm:

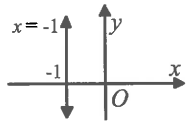
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

olduğunu göstermiş ve anlatmıştık. O halde $4 < z \cdot \overline{z} \le 9$ demek $4 < |z|^2 \le 9$ demektir. Buradan $2 < |z| \le 3$ olduğunu buluruz. Bu da orijine olan uzaklığı 2'den büyük ama 3'den küçük veya eşit olan noktalar kümesi demektir. O halde bu şekil üstteki şekilden başkası olamaz.



Örnek. *$|z| = |z + 2|$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm:Birinci yol. İlk bakışta tipik bir mutlak değer sorusu gibi görünüyor. Biz de o zaman hiç karmaşık sayıları karıştırmayıp bir çözelim bakalım.



$|z| = |z + 2|$ olduğundan $z = z + 2$ veya $z = -z - 2$ olmalıdır. İlki imkansız olduğundan $2z = -2$ dolayısıyla $z = -1$'dir. Bu reel kısımları -1 olan tüm karmaşık sayıların iş göreceğini anlatır, o halde cevap analitik düzlemdeki $x = -1$ doğrusudur.
Yalnız bu çözümü her zaman yapamazsınız. Denklemde i yoksa yapabilirsiniz.

İkinci yol. Ayıp olmasın diye biraz karmaşık sayılara bulanalım.
$z = x + yi$ olsun.

$$|x + yi| = |x + 2 + yi|$$

olduğundan $x^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2$ olması gerekir.
$x^2 = (x+2)^2$ eşitliği $x^2 = x^2 + 4x + 4$ eşitliğine dönüşür ki $4x = -4$'ten $x = -1$ olduğu çıkar. Bakın, bu da kolay!

Örnek [1993 ÖYS]. $|z|=|z-2|$ *olduğuna göre, z'nin karmaşık düzlemdeki geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) Gerçel eksene dik bir doğru B) Bir elips
C) Sanal eksene dik bir doğru D) Bir parabol
E) 2 birim çaplı bir çember

Çözüm:

$$|z|=|z-2|$$
$$|x+yi|=|x+yi-2|$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2=x^2-4x+4+y^2$$
$$0=-4x+4$$
$$x=1$$

$x=\text{Re}(z)$ olduğundan, reeli 1 olan karmaşık sayıların görüntüsünü cevap olarak vermeliyiz. Bu da gerçel eksene dik bir doğrudur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|z+3-i|=|z-1+2i|$ *koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Birinci yol. Her zamanki gibi $z = x + yi$ diyelim.

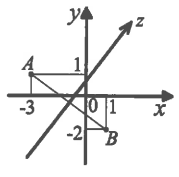
$$|x+yi+3-i|=|x+yi-1+2i|$$

eşitliğinden

$$(x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$$
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+4y+4$$
$$6x-2y+10=-2x+4y+5$$
$$8x-6y+5=0$$

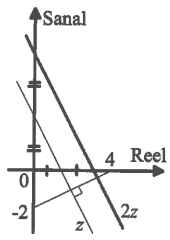
olduğundan, verilen eşitiği sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsü $8x-6y+5=0$ doğrusudur.

İkinci yol. $|z+3-i|$ demek, z sayısının $-3+i$ sayısına uzaklığı demektir. $|z-1+2i|$ demek, z sayısının $1-2i$ sayısına uzaklığı demektir. O halde $|z+3-i|=|z-1+2i|$ demek $-3+i$ ve $1-2i$ sayılarına eşit uzaklıkta bulunan noktalar demektir. O halde $A(-3, 1)$ ve $B(1, -2)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesini arıyoruz. Bu da $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesidir.



Örnek. $|z+2i|=|z-4|$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları veriliyor. 2z sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: z sayılarının $-2i$ ve 4 sayılarına olan uzaklıkları eşitmiş yani $A(0, -2)$ ve $B(4, 0)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesiymiş. Bu da doğrunun analitiği dersinden hatırladığınız üzere $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesidir. Buna göre 2z sayıları da şekildeki gibi olur.



Örnek. $|z-2|=|z+4i|$ *eşitliğini sağlayan z sayılarının belirttiği doğrunun eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı kaç br² dir?*

A) 2 B) 9/4 C) 3 D) 6 E) 12

Çözüm: Birinci yol. $z = x + yi$ olsun.

$$|x-2+yi|=|x+(y+4)i|$$
$$(x-2)^2+y^2=x^2+(y+4)^2$$
$$x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2+8y+16$$
$$-4x+4=8y+16$$
$$4x+8y+12=0$$
$$x+2y+3=0$$

$x = 0$ için $y = -3/2$ ve $y = 0$ için $x = -3$ olduğundan bu doğrunun eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı $3\cdot(3/2)/2 = 9/4$ olarak bulunur.

İkinci yol. z sayılarının 2 ve $-4i$ sayılarına olan uzaklıkları eşitmiş yani $A(2, 0)$ ve $B(0, -4)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesini arıyoruz. Bu da doğrunun analitiği dersinden hatırladığınız üzere $[AB]$ doğru parçasının orta dikmesidir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Reel eksenin pozitif tarafı üzerinde ve* $3 + 5i$ *sayısına uzaklığı 13 birim olan sayı kaçtır?*

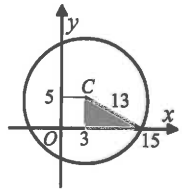
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm: Birinci yol. Sayı reel eksen üzerindeyse sanalı sıfırdır. O halde bu sayıya $k + 0i$ diyelim.

$$13^2=(3-k)^2+(5-0)^2$$

olması gerektiğinden $3 - k = 12$ veya $3 - k = -12$ olur ki buradan $k = -9$ veya $k = 15$ bulunur. Pozitif olması gerektiğinden $k = 15$.

İkinci yol. $3 + 5i$ karmaşık sayısına 13 birim uzaklıkta bulunan karmaşık sayılar (3, 5) merkezli 13 birim yarıçaplı çemberi oluştururlar. Hem bu çember üstünde hem de pozitif x ekseninin üstünde olan sayı yanda görüldüğü üzere 5-12-13 üçgeninden dolayı (15, 0) noktasıdır. Yani 15'tir.

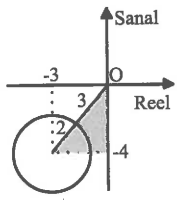


Doğru cevap: C.

Örnek. *$|z+3+4i|=2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $|z+3+4i|=2$ demek $(-3, -4)$ noktasına uzaklığı 2 birim olan noktalar kümesi yani $(-3, -4)$ merkezli 2 birim yarıçaplı çember demektir. $|z|$ ifadesinin olabilecek en küçük olması için çember üzerinde orijine en yakın noktanın modülüne bakmalıyız. Çember merkeziyle orijini birleştirdiğimizde $|z|$'in en az 3 olabileceğini anlarız.

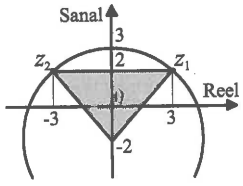


Doğru cevap: C.

Örnek. *$|z+2i|=5$ ve $Im(z)=2$ eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayılarının çarpımı kaçtır?*

A) −5 B) −7 C) −10 D) −13 E) −25

Çözüm: Birinci yol. $|z+2i|=5$ demek $(0, -2)$ noktasına uzaklığı 5 birim olan noktalar kümesi yani $(0, -2)$ merkezli 5 birim yarıçaplı çember demektir. Bu çember üzerinde imajineri 2 olan sadece 2 nokta vardır. Bu noktalar şekilde de gösterilen z_1 ve z_2 sayıları olsun. Taranmış iki dik üçgenin hipotenüsleri 5 ve ortak dik kenarları 4 birim uzunlukta olduğundan apsisleri −3 ve 3 olmalıdır. O halde sayılarımız $-3+2i$ ve $3+2i$ sayılarıdır. Çarpımları da kolayca yapılabileceği üzere $(-3+2i)\cdot(3+2i)=-9+4i^2=-13$'tür.

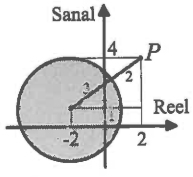


İkinci yol. $Im(z)=2$ verildiğinden $z=x+2i$ diyelim. O halde $|z+2i|=5$ eşitliği $|x+4i|=5$ eşitliğine dönüşür. Buradan x'in -3 veya 3 olabileceğini anlarız. Olabilecek z sayılarının çarpımı da $(-3+2i)\cdot(3+2i)=-9+4i^2=-13$ olur.

Doğru cevap: D.

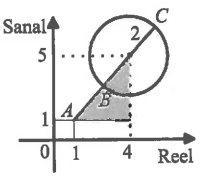
Örnek. *$|z+2-i|\le 3$ olmak üzere $|z-2-4i|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

Çözüm: $|z+2-i|\le 3$ eşitsizliğini sağlayan z noktaları, grafikte gösterildiği üzere $(-2, 1)$ merkezli 3 br yarıçaplı çember ve bu çemberin iç bölgesidir. P noktasının bu z noktalarına en kısa uzaklığı sorulmakta. P'yi merkezle birleştirelim. Bu uzaklık 5 br olduğundan, yarıçapı çıkartırsak cevabın 2 olduğunu anlarız.



Örnek. *$|z-4-5i|=2$ olmak üzere $|z-1-i|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

Çözüm: $|z-4-5i|=2$ eşitliğini sağlayan z noktaları, yan şekilde de gösterildiği üzere (4, 5) merkezli 2 br yarıçaplı çemberdir. $A(1, 1)$ noktasının bu z noktalarına uzaklığının en çok kaç olabileceği soruluyor. A'dan ve merkezden geçen doğru çemberi önce B'de sonra C'de kessin. Taralı dik üçgen bir 3-4-5 üçgeni olduğundan $|AB|=3$ br ve $|AC|=7$ br olur. Demek ki $|z-1-i|$ sayısı en çok 7 olabilir.



Örnek. *$|z-2-4i|=|z|$ eşitliğini sağlayan noktalar kümesinin eksenlerle oluşturduğu üçgensel bölgenin alanı kaç birimkaredir?*

Çözüm: $z=x+yi$ olsun.

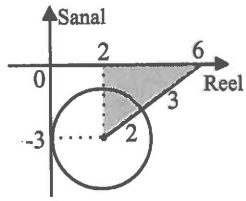
$$|x+yi-2-4i|=|x+yi|$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(x-2)^2+(y-4)^2=x^2+y^2$$
$$x^2-4x+4+y^2-8y+16=x^2+y^2$$
$$-4x-8y+20=0$$
$$x+2y-5=0$$

Bu doğrunun x eksenini kestiği nokta (5, 0) ve y eksenini kestiği nokta da $(0, \frac{5}{2})$ olduğundan oluşan üçgensel bölgenin alanı $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$ olarak bulunur.

Örnek. *Karmaşık düzlemde $|z-2+3i|=2$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarının, yine karmaşık düzlemde 6'ya denk gelen nokta arasındaki uzaklık en az kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Verilen eşitliği sağlayan z sayıları daha önce de anlattığımız üzere $(2, -3)$ merkezli 2 birim yarıçaplı çemberi oluştururlar. 6 sayısı aslında $6+0i$ sayısına eşit olduğundan düzlemdeki görüntüsü (6, 0) noktasıdır. En yakın noktayı bulmak için de bu noktayı merkeze birleştiririz. Oluşan 3-4-5 üçgeninden en kısa uzaklığın 3 olduğu anlaşılır.



Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$z_1 = 3-5i$$
$$z_2 = -3-13i$$

olduğuna göre z_1 ile z_2 sayılarının karmaşık düzlemde aralarındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

2.

$$z_1 = 3-5i$$
$$z_2 = -3+3i$$

karmaşık sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

3.

$$z_1 = x+6i$$
$$z_2 = 2i$$

karmaşık sayıları için $|z_1 - z_2| = 5$ olduğuna göre x kaçtır?

A) ±6 B) ±3 C) ±2 D) −2 E) 2

4.

$$z_1 = x-1+(x+2)i$$
$$z_2 = -1+(x-1)i$$

karmaşık sayıları arasındaki uzaklık 5 birim olduğuna göre x'in pozitif değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

5.

$$z_1 = -3+2i$$
$$z_2 = 1-i$$
$$z_3 = m+3i$$

karmaşık sayıları, m'nin hangi değeri için karmaşık düzlemde doğrusaldır?

A) $-\frac{13}{3}$ B) -2 C) 1 D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{3}{7}$

6.

$$z_1 = 3+5i$$
$$z_2 = 2-3i$$
$$z_3 = -10+13i$$

olduğuna göre $\mathrm{Re}(z_1^2) - |z_2 - z_3|$ işleminin sonucu hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) -36 B) -4 C) 0 D) 4 E) 29

7.

$$z_1 = 2-7i$$
$$z_2 = -3-2i$$
$$z_3 = 3+4i$$

olduğuna göre z_3'ün $[z_1 z_2]$'nin orta noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $\frac{13}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{11}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 5

8.

Hangi z karmaşık sayısı için

$$z, \frac{1}{z}, 1-z$$

karmaşık sayılarının modülleri eşit olur?

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ D) $\frac{i}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

9.

r bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$|z| = r$$

eşitliğini sağlayan z sayıları karmaşık düzlemde ne belirtir?

A) Nokta B) Doğru C) Düzlem D) Çember E) Daire

10.

r bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$|z| \le r$$

eşitliğini sağlayan z sayıları karmaşık düzlemde ne belirtir?

A) Nokta B) Doğru C) Düzlem D) Çember E) Daire

1. B 2. E 3. B 4. A 5. A 6. A 7. A 8. C 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
$z = x + yi$ olmak üzere $|z-3+2i| = 7$ eşitliğini sağlayan x ve y reel sayıları için aşağıdaki bağıntılardan hangisi geçerlidir?

A) $(x-3)^2+(y+2)^2 = 7$ B) $(x+3)^2+y^2 = 49$
C) $(x+3)^2+(y-2)^2 = 49$ D) $(x-3)^2+y^2 = 49$
E) $(x+3)^2+(y-2)^2 = \sqrt{7}$

2.

$$|z-3-2i| = 2$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) Merkezi (3,2) noktası, yarıçapı 2 birim olan çember
B) Merkezi (2,2) noktası, yarıçapı 4 birim olan çember
C) Merkezi (2,3) noktası, yarıçapı 2 birim olan çember
D) Merkezi (3,2) noktası, yarıçapı 4 birim olan çember
E) Merkezi (3,3) noktası, yarıçapı 2 birim olan çember

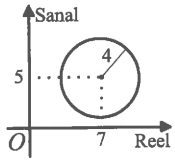
3.

$$|z-2-2i| < 2$$

eşitsizliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–2, –2) noktasını merkez kabul eden 2 birim yarıçaplı çemberin iç bölgesi
B) (2, 2) noktasını merkez kabul eden 2 birim yarıçaplı çember
C) (–2, –2) noktasını merkez kabul eden 2 birim yarıçaplı çemberin dış bölgesi
D) (2, 2) noktasını merkez kabul eden 2 birim yarıçaplı çemberin iç bölgesi
E) (–2, 2) noktasını merkez kabul eden 2 birim yarıçaplı çember ve iç bölgesi

4.
Aşağıdaki şıklardan hangisindeki eşitliği sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüleri yanda verilen çemberi belirtir?



A) $|z-5-7i| = 4$ B) $|z-7-5i| = 4$ C) $|z| = 4$
D) $|z+5-7i| = 4$ E) $|z-7+5i| = 4$

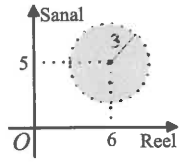
5.

$$|z-3-4i| = 1$$

eşitliğini sağlayan karmaşık sayılarından reel eksene en uzak olanı $z = x + yi$ olduğuna göre $x + y$ toplamı kaça eşittir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6.
Aşağıdaki şıklardan hangisindeki eşitliği sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüleri yanda verilen çemberi belirtir?



A) $|z-6-5i| > 3$ B) $|z-6-5i| < 3$
C) $|z| < 3$ D) $|z-5-6i| < 3$
E) $|z+6+5i| < 3$

7.
Karmaşık düzlemde 3 birim yarıçaplı merkezil daireyi görüntü kabul eden z sayıları aşağıdaki hangi denklemin çözümlerdir?

A) $|z| < 3$ B) $|z| \le 3$ C) $|z| \ge 3$
D) $|z| < 9$ E) $|z| \le 9$

8.

$$|z+3i| = |z-3|$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1. açıortay doğrusu B) 1 birim yarıçaplı bir çember
C) Bir parabol D) $x - 2y = 0$ denklemli doğru
E) $x + y = 0$ denklemli doğru

9.

$$|z-3| = |z-4+2i|$$

eşitliğini sağlayan $z = x + yi$ karmaşık sayıları için aşağıdaki bağıntılardan hangisi geçerlidir?

A) $x-y+1=0$ B) $2x-y-10=0$ C) $x+y+11=0$
D) $x-2y+5=0$ E) $2x-4y-11=0$

10.
$|z| \le 3$ olduğuna göre

$$|z-3-4i|$$

sayısının en büyük değeri kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 15

1. C 2. A 3. D 4. B 5. D 6. B 7. B 8. E 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
$|z| \le 3$ olduğuna göre

$$|z+4-3i|$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

2.
$|z| \le 3$ olduğuna göre

$$|z-15+8i|$$

sayısının en küçük değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 14

3.
$|z| \le 3$ olduğuna göre

$$|z+24-7i|$$

sayısının en büyük değeri kaçtır?

A) 22 B) 25 C) 28 D) 31 E) 37

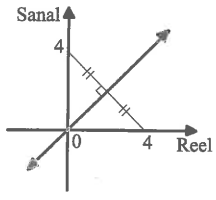
4.
Geometrik yer denklemi

$$x^2+y^2 \le 2$$

olan $z = x + yi$ karmaşık sayısı için $|z-6-8i|$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

5.
Aşağıdaki denklemlerden hangisini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsü yandaki doğrudur?



A) $|z-4| = |z+4|$
B) $|z-4i| = |z+4i|$
C) $|z-4| = |z+4i|$
D) $|z+4| = |z-4i|$
E) $|z-3-i| = |z-1-3i|$

6.

$$|z-8i| = 5$$

koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$ kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

7.

$$|z-i| = 6$$
$$|z+2-i| = 4$$

olduğuna göre $|z|$ kaçtır?

A) 6 B) $\sqrt{37}$ C) $\sqrt{38}$ D) $\sqrt{39}$ E) $2\sqrt{10}$

8.

$$|z-1-3i| = 3$$
$$|z-8-3i| = 4$$

olduğuna göre $|z|$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9.

$$|z_1-1-3i| = 3$$
$$|z_2-8-3i| = 4$$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ en çok kaç olabilir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10.

$$|z_1| = 2$$
$$|z_2-2| = 5$$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ en az kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. B 2. E 3. C 4. C 5. E 6. E 7. B 8. C 9. E 10. A

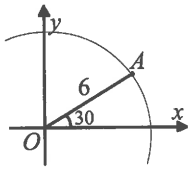
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kutupsal Gösterim

Karmaşık sayıları, adına karmaşık düzlem dediğimiz bir düzlemde bir nokta olarak gösteriyor ve o noktayı reel ve sanalıyla tanımlıyorduk. Şimdi onlarla değil de başka iki bilgiyle tanımlayacağız. Yalnız bu iki bilgi öyle iki bilgi olacak ki, verilince anlatmak istediğimiz noktadan başkası anlaşılmayacak. Bu bilgilerden biri o noktanın orijine olan uzaklığı olacak. Ama fark etmişsinizdir ki sadece orijine olan uzaklık bilgisi bir noktayı tanımlamaya yetmez. Örneğin, A noktasının orijine uzaklığı 5 birim ise 5 birim yarıçaplı merkezil çember üzerindeki her nokta A noktası olmaya adaydır. Hatta bu çember hikayesinden dolayı, noktanın orijine olan uzaklığını r ile göstereceğiz.

Şimdi ikinci bir bilgiyle, istediğimiz A noktasını, diğer A aday noktalarından ayırmamız lazım. Bir öneri: İkinci bilgi, noktanın apsisi olsa olur mu? Örneğin, A'nın apsisinin 3 olduğunu da söylesek? Olmaz, çünkü bu şartları sağlayan 1 tane değil 2 tane A olur, örneğimizdeki (3, 4) ve (3, −4) gibi... Peki, ikinci bilgi, ordinat olsa? Benzer durumdan dolayı o da olmaz, örneğin ordinatı 3 deseler, örneğimizdeki (4, 3) ve (−4, 3) gibi yine iki farklı nokta karşımıza çıkar. Şöyle bir şey aklınıza gelebilir: ''O zaman bir de hangi bölgede olduğunu üçüncü bilgi olarak versek?''. Bu olabilir tabii ki ama gönül istiyor ki daha az veriyle bu işi halledelim, eğer halledebilirsek. Anlayacağınız, bu ikinci bilgi öyle bir bilgi olacak ki bize hangi bölgede olduğunu da anlatacak. Çok mu şey istedik? Söyleyeyim: Noktayı orijine birleştiren doğru parçasının reel eksenle yaptığı pozitif yönlü açı, yani eğim açısı ikinci bilgi olarak yeter. Deneyelim, orijine olan uzaklığı 6 ve kendisini orijine birleştiren doğrunun eğim açısı 30° olan noktanın koordinatlarını bulalım. Eğer şartları sağlayan tek bir nokta bulursak, bilgiler yetiyordur.



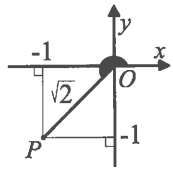
Yanda görüldüğü üzere, orijine uzaklığı 6 br olan noktalar içinde sadece işaretli olan A noktasını orijinle birleştirdiğimizde istenen açı ölçüsü 30° oluyor. Hatta noktanın koordinatlarını bulmak isteyen biri 30°-60°-90° üçgeninden faydalanarak, $A(3\sqrt{3},\ 3)$ olduğunu da rahatlıkla görebilir. Hatta canı isteyen hemen noktanın aslında karmaşık düzlemde $3\sqrt{3} + 3i$ sayısına tekabül ettiğini de çıkarabilir.

Biraz uzatmış olsak da, orijine olan uzaklığı r br ve bahsi geçen açısının ölçüsü de $\alpha°$ olan bir A noktasını bundan böyle $A(r, \alpha°)$ şeklinde göstereceğiz. İşte böyle bir gösterime **o sayının kutupsal koordinatları** diyeceğiz.

Örnek. *Kutupsal koordinatları $P(\sqrt{2}, 225°)$ olan karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-1+i$ B) $-i$ C) $-2+i$ D) $-1-i$ E) i

Çözüm: Yazılımdan P noktasının orijine olan uzaklığının $\sqrt{2}$ ve PO doğrusunun eğim açısının 225° olduğunu anlıyoruz. O halde bu P noktası, III. bölgede olup sağdaki şekilde resmedilen P noktasıdır.



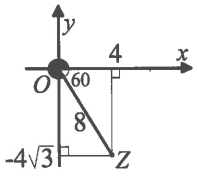
İkizkenar dik üçgen yardımıyla P'nin reelinin de sanalının da -1 olduğunu anlarız. O halde bu P noktasına karşılık gelen karmaşık sayı $-1-1\cdot i$ yani $-1-i$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sayısının kutupsal koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (8, 300°) B) (4, 210°) C) (8, 240°)
D) (4, 300°) E) (8, 330°)

Çözüm: Karmaşık düzlemdeki $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sayısının analitik düzlemdeki $Z(4, -4\sqrt{3})$ noktasına tekabül ettiğini biliyoruz. O halde grafikte bu Z noktasını işaretleyip, orijine olan uzaklığını ve ZO doğrusunun eğim açısını bulacağız. Dediklerimizi yan şekilde yaptım.

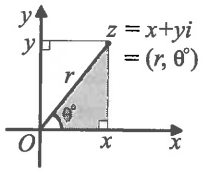


$|ZO| = r = 8$ br ve $\alpha = 300$ çıktı.
O halde bu sayının kutupsal koordinatları Z(8, 300°)'dür, tabii isteyen $Z(8, -60°)$ diye de gösterebilir, aynı kapıya çıkar.

Doğru cevap: A.

$(r, \alpha^\circ) = r\cdot\text{cis}\,\alpha^\circ$. Şimdi burada yapılan işlemleri, şekil çizmeden yapmak için karmaşık sayıların başka türlü bir gösterimini göstereceğiz.

Kutupsal koordinatları (r, θ°) olan bir $z = x + yi$ sayısını alalım.



$x = r\cdot\cos\theta^\circ$ ve $y = r\cdot\sin\theta^\circ$ diye,

$$\begin{aligned} x + yi &= r\cdot\cos\theta^\circ + r\cdot\sin\theta^\circ\cdot i \\ &= r\cdot(\cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ) \\ &= r\cdot\text{cis}\,\theta^\circ \end{aligned}$$

Bu yazılımı bundan sonra sıkça kullanacağız, hatta diğerinden daha sık.

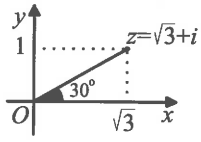
Argüment ve Esaş Argüment. $r\cdot\text{cis}\,\theta^\circ$ yazılımındaki θ değerine, z karmaşık sayısının **argümenti** denir. Arg(z) ile gösterilir. Bazen argüment negatif verilir ya da 360°'den büyük veya eşit bir değer verilir. Ama biz biliriz ki -30° ile 330° veya ne bileyim 370° ile 10° aslında aynı şeydir.

Genel olarak, θ° ile $360^\circ + \theta^\circ$ hatta daha da genel olarak, k bir tam sayı olmak üzere $k\cdot360^\circ + \theta^\circ$ açıları düzlemde aynı yere tekabül eder, bundan dolayı $k \neq 0$ olduğunda, argümenti k'ye 0 değerini vererek, $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ aralığındaki karşılığına çevirirz. İşte argümentin bu aralıktaki değerine, z karmaşık sayısının **esas argümenti** denir.

Örnek [1974 ÜSS]. *$z = i + \sqrt{3}$ sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sqrt{2}\cdot[\cos30^\circ + i\cdot\sin30^\circ]$ B) $\sqrt{2}\cdot[\cos60^\circ + i\cdot\sin60^\circ]$
C) $\sqrt{2}\cdot[\cos45^\circ + i\cdot\sin45^\circ]$ D) $2\cdot[\cos30^\circ + i\cdot\sin30^\circ]$
E) $2\cdot[\cos60^\circ + i\cdot\sin60^\circ]$

Çözüm: z karmaşık sayısının reeli $\sqrt{3}$ ve sanalı 1 olduğundan, bu sayının karmaşık düzlemdeki görüntüsü şekildeki gibidir. Görüldüğü üzere orijine olan uzaklığı 2 birim olup, esas argümenti de 30° olduğundan, kutupsal gösterimi



$$z = 2\cdot[\cos30^\circ + i\cdot\sin30^\circ]$$

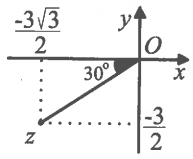
şeklinde olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1989 ÖYS]. $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ *karmaşık sayısının kutupsal biçimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $9\cdot[\cos30^\circ + i\cdot\sin30^\circ]$ B) $9\cdot[\cos120^\circ + i\cdot\sin120^\circ]$
C) $3\cdot[\cos120^\circ + i\cdot\sin120^\circ]$ D) $3\cdot[\cos210^\circ + i\cdot\sin210^\circ]$
E) $3\cdot[\cos60^\circ + i\cdot\sin60^\circ]$

Çözüm: z karmaşık sayısının reeli $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ve sanalı $-\frac{3}{2}$ olduğundan, bu sayının karmaşık düzlemdeki görüntüsü şekildeki gibidir. Görüldüğü üzere orijine olan uzaklığı 3 birim olup, esas argümenti de 210° olduğundan, kutupsal gösterimi



$$z = 3\cdot[\cos210^\circ + i\cdot\sin210^\circ]$$

şeklinde olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Argümenti Bulmak İçin. $z = x + yi$ şeklindeki bir karmaşık sayının argümenti için

$$\text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

eşitliğinden yardım isteyebileceğimiz gibi, bunun geometrik yorumu olan şu yol da izlenebilir:

Her defasında verilen z karmaşık sayısını karmaşık düzlemde işaretleyip sonra o noktayı orijine bağlayan doğru parçasını çizeriz. Noktadan eksenlere dik indirildiğinde oluşan dik üçgenlerden Arg(z) rahatlıkla bulunur. Aslında söylemeye gerek var mı bilmiyorum, bulduğumuz esas argümenttir!

Örnek. *$z = 2 + 2i$ olduğuna göre* Arg(z) *kaçtır?*

A) 30° B) 45° C) 60° D) 120° E) 0°

Çözüm: Karmaşık düzlemdeki $2 + 2i$ sayısı analitik düzlemdeki (2, 2) noktasına tekabül ettiğinden oluşan ikizkenar dik üçgen gereği Arg(z) = 45°'dir.
Formülden de yapsaydık

$$\text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{2}\right) = \text{Arctan}(1) = 45^\circ$$

çıkardı zaten. Aslında buradan argümentin 225° de olabileceği anlaşılır, anlaşılmamalıdır. Sayının reel ve sanalından hangi bölgede olduğunu anlarız. Reeli de pozitif sanalı da pozitif diye argüment I.bölgeden olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $z = 2 - 2i$ *olduğuna göre* Arg(z) *kaçtır?*

A) 45° B) 135° C) 300° D) 315° E) 345°

Çözüm: $\text{Arg}(z) = \text{Arctan}(\frac{-2}{2}) = \text{Arctan}(-1)$

Sakın ha sakın tan 135° = −1 diye B şıkkına atlamayın. Arctan fonksiyonu (−90°, 90°) aralığında tanımlı diye cevaba −45° yani 315° demeliyiz.

Doğru cevap: D.

$\pm\frac{\sin}{\cos}(\alpha) \pm i\cdot\frac{\cos}{\sin}(\alpha) = \text{cis}(?)$ **Soruları.** cis α'nın açılımının cos α + i·sin α olduğunu biliyoruz. Fakat böyle bir



yazılımda + işaretlerinin −'ye dönmesi, sin'lerin cos'a veya cos'ların sin'e dönüşmesi durumunda cevabın nasıl etkilendiğini araştıracağız. Basit trigonometrik özdeşlikleri kullanarak birkaç örnek çözümde derdimizi anlatıp sonuna da gelebilecek her türlü soru için bir tablo yapacağız. Sakın ha bu tablodaki verileri ezberlemeye kalkmayın, her birinin nasıl bulunduğunu kendi kendinize çıkarmaya çalışın.

Örnek. $\cos\alpha^\circ - i\cdot\sin\alpha^\circ = \text{cis}\,\theta^\circ$ *olduğuna göre* θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −α B) α C) 2α D) 90 − α E) 90 + α

Çözüm: Eşitliğin sağ yanını açalım.

$$\cos\alpha^\circ - i\cdot\sin\alpha^\circ = \cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ$$

olur. Bu eşitliği şöyle yorumlamalıyız: θ yerine öyle bir α'lı değer yazacağız ki, kosinüsü aynı olacak ama sinüsü işaret değiştirecek. O halde θ = −α olmalıdır, hatta daha genel olarak $k\cdot360^\circ - \alpha^\circ$. ($k$ elbet ki tam sayı)

Doğru cevap: A.

Bu sayede bir karmaşık sayının eşleniğinin argümentinin kendi argümentinin ters işaretlisi olduğunu bir kez daha kanıtlamış olduk. $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}\,z$.

Örnek. $-\cos\alpha^\circ - i\cdot\sin\alpha^\circ = \text{cis}\,\theta^\circ$ *olduğuna göre* θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −α B) α C) 2α D) 90 − α E) 180 + α

Çözüm: Yine eşitliğin sağ yanını açalım.

$$-\cos\alpha^\circ - i\cdot\sin\alpha^\circ = \cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ$$

olur. Bu eşitliği şöyle yorumlamalıyız: θ yerine öyle bir α'lı değer yazacağız ki, kosinüsü de sinüsü de işaret değiştirecek. O halde θ = 180 + α olmalıdır, tabii ki bu değere canımızın istediği kadar 360'ın tam katlarını ekleyebilirsiniz.

Doğru cevap: E.

Bu örnekle birlikte de bir karmaşık sayının ters işaretlisinin argümentinin, kendi argümentinden 180° fazla olduğunu kanıtlamış olduk. $\text{Arg}(-z) = 180^\circ + \text{Arg}\,z$.

Örnek. $-\cos\alpha^\circ + i\cdot\sin\alpha^\circ = \text{cis}\,\theta^\circ$ *olduğuna göre* θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −α B) α C) 2α D) 180 − α E) 90 + α

Çözüm: Yine eşitliğin sağ yanını açarak başlayalım.

$$-\cos\alpha^\circ + i\cdot\sin\alpha^\circ = \cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ$$

olduğundan, θ yerine öyle bir α'lı değer yazacağız ki, sinüsü aynı kalacak ama kosinüsü işaret değiştirecek. O halde θ = 180 − α olmalıdır. Genel halini sorarsa da yukarda yaptıklarımız gibi θ = 180 − α + 360·k dersiniz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sin\alpha^\circ + i\cdot\cos\alpha^\circ = \text{cis}\,\theta^\circ$ *olduğuna göre* θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −α B) α C) 2α D) 180 − α E) 90 − α

Çözüm: Eşitliğin sağ yanını açalım.

$$\sin\alpha^\circ + i\cdot\cos\alpha^\circ = \cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ$$

olur. Demek ki $\cos\theta^\circ = \sin\alpha^\circ$ ve $\sin\theta^\circ = \cos\alpha^\circ$ olacak şekilde α'ya bağlı bir θ bulmamız gerekiyor. Bunun da θ = 90 − α olduğunu anlamışsınızdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sin\alpha^\circ - i\cdot\cos\alpha^\circ = \text{cis}\,\theta^\circ$ *olduğuna göre* θ*'nın* α *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −α B) α C) 2α D) 180 − α E) 270 + α

Çözüm: Eşitliğin sağ yanını açalım.

$$\sin\alpha^\circ - i\cdot\cos\alpha^\circ = \cos\theta^\circ + i\cdot\sin\theta^\circ$$

olur. Demek ki $\cos\theta^\circ = \sin\alpha^\circ$ ve $\sin\theta^\circ = -\cos\alpha^\circ$ olacak şekilde α'ya bağlı bir θ bulmamız gerekiyor. Bunun da θ = 270 + α olduğunu anlamışsınızdır.

Doğru cevap: E.

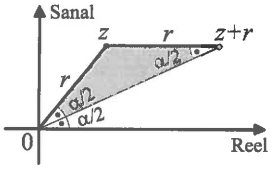
z	Arg(z)
$\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$	α
$\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha$	−α
$-\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$	π − α
$-\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha$	π + α
$\sin\alpha + i\cdot\cos\alpha$	$\frac{1}{2}\pi - \alpha$
$\sin\alpha - i\cdot\cos\alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$
$-\sin\alpha + i\cdot\cos\alpha$	$\frac{1}{2}\pi + \alpha$
$-\sin\alpha - i\cdot\cos\alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$

$\pm r\cdot\text{cis}\,\alpha \pm r(i)$ Sayılarının Argümenti. Şimdi de kutupsal gösterimi verilmiş bir karmaşık sayıya, modülü kadar bir reel sayının veya modülü kadar sanal birimin eklenmesi veya çıkarılmasında oluşacak sayının argümentini pratik olarak bulmayı öğreneceğiz. Bu tarz sorularda kutupsal gösterimin geometrik yorumu işleri acaip kolaylaştırır. Seyredin, görün.

Örnek. *z sayısının argümenti α ise $z + |z|$ sayısının argümenti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\alpha/2$ B) α C) 2α D) $180-\alpha$ E) $90-\alpha$

Çözüm: Argümenti α olarak verilmiş z sayısını $r\cdot\text{cis}\,\alpha$ olarak alalım. Bu durumda $|z| = r$ olduğundan $r\cdot\text{cis}\,\alpha + r$ sayısının argümentini bulacağız.



Bir karmaşık sayıya r eklenmesi onun görüntüsünü r br sağa kaydıracaktır. Taralı üçgenin ikizkenar olmasından dolayı $z + r$ sayısının argümentinin $\alpha/2$ olduğu anlaşılır.

Doğru ceyap: A.

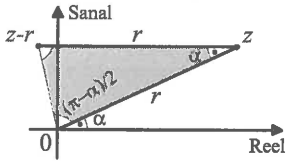
Demek ki örneğin,

$$\text{Arg}(1 + \text{cis}\,20^\circ) = 10^\circ$$
$$\text{Arg}(2 + 2\cdot\text{cis}\,72^\circ) = 36^\circ$$

Örnek. *z sayısının argümenti α ise $z - |z|$ sayısının argümenti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{\pi+\alpha}{2}$ C) $\frac{\pi-\alpha}{2}$ D) 2α E) $\pi-\alpha$

Çözüm: Argümenti α olarak verilmiş z sayısını $r\cdot\text{cis}\,\alpha$ olarak alalım. Bu durumda $|z| = r$ olduğundan $r\cdot\text{cis}\,\alpha - r$ sayısının argümentini bulacağız.



Bir karmaşık sayıdan r çıkarılması onun görüntüsünü r br sola kaydıracaktır. Taralı üçgenin tepe açısı α olan ikizkenar olmasından dolayı taban açılarının ölçüleri $(\pi - \alpha)/2$ olacaktır. Bu durumda $z - r$ sayısının argümentinin $\pi/2 + \alpha/2$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: B.

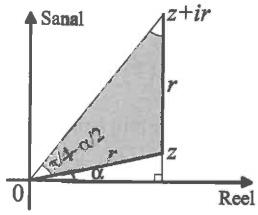
Demek ki örneğin,

$$\text{Arg}(\text{cis}\,20^\circ - 1) = 100^\circ$$
$$\text{Arg}(2\cdot\text{cis}\,72^\circ - 2) = 126^\circ$$

Örnek. *z sayısının argümenti α ise $z + |z|\cdot i$ sayısının argümenti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{\pi+\alpha}{2}$ C) $\frac{\pi+2\alpha}{4}$ D) 2α E) $\pi-\alpha$

Çözüm: Argümenti α olarak verilmiş z sayısını $r\cdot\text{cis}\,\alpha$ olarak alalım. Bu durumda $|z| = r$ olduğundan $r\cdot\text{cis}\,\alpha + r\cdot i$ sayısının argümentini bulacağız.



Bir karmaşık sayıya $r\cdot i$ eklenmesi onun görüntüsünü r br yukarı kaydıracaktır. Taralı üçgenin ikizkenar olmasından dolayı $z + ir$ sayısının argümentinin $\pi/4 - \alpha/2 + \alpha$ yani $\pi/4 + \alpha/2$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: C.

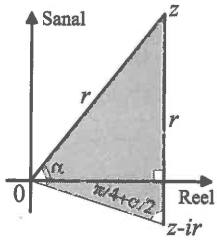
Demek ki örneğin,

$$\text{Arg}(\text{cis}\,20^\circ + i) = 55^\circ$$
$$\text{Arg}(2\cdot\text{cis}\,72^\circ + 2i) = 81^\circ$$

Örnek. *z sayısının argümenti α ise $z - |z|\cdot i$ sayısının argümenti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) $\frac{\pi+\alpha}{2}$ C) $\frac{\pi-\alpha}{2}$ D) $\frac{7\pi+2\alpha}{4}$ E) $\pi-\alpha$

Çözüm: Argümenti α olarak verilmiş z sayısını $r\cdot\text{cis}\,\alpha$ olarak alalım. Bu durumda $|z| = r$ olduğundan $r\cdot\text{cis}\,\alpha - r\cdot i$ sayısının argümentini bulacağız.



Bir karmaşık sayıdan $r\cdot i$ çıkarılması onun görüntüsünü r br aşağı kaydıracaktır. Taralı üçgenin tepe açısı $\pi/2 - \alpha$ olan ikizkenar olmasından dolayı taban açılarının ölçüleri $\pi/4 + \alpha/2$ olacaktır. Bu durumda $z - r\cdot i$ sayısının argümentinin $7\pi/4 + \alpha/2$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: D.

Demek ki örneğin,

$$\text{Arg}(\text{cis}\,20^\circ - i) = 325^\circ$$
$$\text{Arg}(2\cdot\text{cis}\,72^\circ - 2i) = 351^\circ$$

Örnek. $z = \sin 40^\circ + (1 + \cos 40^\circ)\cdot i$ *olduğuna göre z sayısının esas argümenti kaçtır?*

A) 20° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz. Birincisi, biraz önce çıkardığımız formüllerden haberi olmayan vatandaş için, ikincisi ise formülü kullanarak çözüm olacak.

Birinci yol. $z = x + yi$ için $Arg(z) = \text{Arctan}(\frac{y}{x})$ olduğundan

$$\alpha^\circ = \text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{1+\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)$$

olur. O halde

$$\tan\alpha^\circ = \frac{1+\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1+2\cos^2 20^\circ - 1}{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ} = \cot 20^\circ$$

olduğundan $\alpha = 70^\circ$ olmalıdır.

İkinci yol. Önce z sayısını düzenleyelim.

$$\begin{aligned} z &= \sin 40^\circ + (1 + \cos 40^\circ)\cdot i \\ &= \cos 50^\circ + (1 + \sin 50^\circ)\cdot i \\ &= \cos 50^\circ + i\cdot\sin 50^\circ + i \\ &= \text{cis } 50^\circ + i \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{\pi+2\alpha}{4}$ formülü gereği cevap 70° olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. x *bir dar açı ölçüsü olmak üzere,* $z = \text{cis } 2x^\circ + 1$ *ve* $|z| = \sqrt{3}$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

Çözüm: Yine iki yoldan çözelim.

Birinci yol.

$$z = \text{cis } 2x^\circ + 1 = \cos 2x^\circ + i\cdot\sin 2x^\circ + 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1+\cos 2x)^2 + (\sin 2x)^2} \\ &= \sqrt{1+2\cos 2x+\cos^2 2x+\sin^2 2x} \\ &= \sqrt{2+2\cdot\cos 2x} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

olduğundan $2\cdot\cos 2x^\circ = 1$ yani $\cos 2x^\circ = \frac{1}{2}$ olur.

x bir dar açı ölçüsü olduğundan $x = 30^\circ$ olmalıdır.

İkinci yol.

$$\begin{aligned} z &= \text{cis } 2x + 1 \\ &= \cos 2x + i\cdot\sin 2x + 1 \\ &= 2\cdot\cos^2 x - 1 + i\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x + 1 \\ &= 2\cdot\cos x\cdot\cos x + i\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x \\ &= 2\cdot\cos x\cdot[\cos x + i\cdot\sin x] \end{aligned}$$

olduğundan $|z| = 2\cdot\cos x$ olduğu görülüyor. Soruda $|z| = \sqrt{3}$ olarak verildiğinden $2\cdot\cos x = \sqrt{3}$ eşitliği çözülmelidir. Bunu sağlayan dar x açısı da 30° ölçüye sahiptir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $z = 1 + \cos 24^\circ + 2\cdot\cos 12^\circ + i\cdot\sin 24^\circ$ *karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 24 E) 84

Çözüm:

$$\begin{aligned} z &= 1 + \cos 24^\circ + 2\cdot\cos 12^\circ + i\cdot\sin 24^\circ \\ &= 1 + 2\cdot\cos^2 12^\circ - 1 + 2\cdot\cos 12^\circ + i\cdot\sin 24^\circ \\ &= 2\cdot\cos^2 12^\circ + 2\cdot\cos 12^\circ + i\cdot 2\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 12^\circ \\ &= 2\cdot\cos 12^\circ\cdot[\cos 12^\circ + 1 + i\cdot\sin 12^\circ] \\ &= 2\cdot\cos 12^\circ\cdot[2\cdot\cos^2 6^\circ - 1 + 1 + i\cdot\sin 12^\circ] \\ &= 2\cdot\cos 12^\circ\cdot[2\cdot\cos^2 6^\circ + i\cdot 2\cdot\sin 6^\circ\cdot\cos 6^\circ] \\ &= 2\cdot\cos 12^\circ\cdot 2\cdot\cos 6^\circ\cdot[\cos 6^\circ + i\cdot\sin 6^\circ] \\ &= 4\cdot\cos 6^\circ\cdot\cos 12^\circ\cdot[\text{cis } 6^\circ] \end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{Arg(3+4i)}{Arg(8+4i)}$ *oranı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Yine iki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Sorulan orana $\frac{x}{y}$ diyelim.

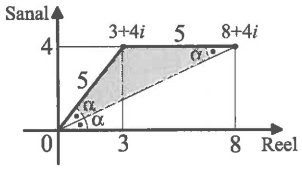
$$\frac{x}{y} = \frac{Arg(3+4i)}{Arg(8+4i)} = \frac{\text{Arctan}\frac{4}{3}}{\text{Arctan}\frac{1}{2}}$$

olduğundan $\tan x = \frac{4}{3}$ ve $\tan y = \frac{1}{2}$ olur.

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} = \tan y$$

diye $x = 2y$ bulunur ki buradan da $\frac{x}{y} = 2$ olduğu anlaşılır.

İkinci yol. $3 + 4i$ ve $8 + 4i$ karmaşık sayılarının görüntülerini çizersek, bu iki sayı arasındaki uzaklığın da $3 + 4i$ sayısının orijine uzaklığının da 5 olduğu görülür. Taralı üçgen ikizkenar olduğundan argümentlerinin oranının 2 olduğu aşikardır.

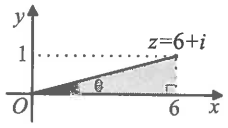


Doğru cevap: B.

Örnek [1996 ÖYS]. *$z-5-i=1$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayısının argümenti θ olduğuna göre, $\tan\theta$ kaçtır?*

A) $-\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{6}$ E) 1

Çözüm: z sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsünü çizersek, $\tan\theta=\frac{1}{6}$ olduğu gün gibi ortaya çıkar.



Doğru cevap: D.

Örnek. *m bir tam sayı olmak üzere, $z-m-4i=3-mi$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının esas argümenti α ise $\tan\alpha$ en çok kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $z=m+3+(4-m)i$ olduğundan

$$\text{Arctan}\left(\frac{4-m}{m+3}\right)=\alpha$$

olur. O halde $\tan\alpha=\frac{4-m}{m+3}$ olmalıdır. Bu ifadenin mümkün olduğunca büyük olmasına çalışacağız.

$$\tan\alpha=\frac{4-m}{m+3}=\frac{-m-3+7}{m+3}=-1+\frac{7}{m+3}$$

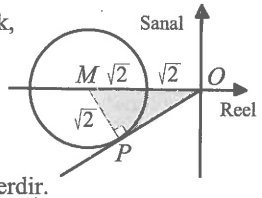
olduğundan bu toplam $m=-2$ için en büyük olur. Alabileceği en büyük değer de 6'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$|z+2\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ eşitliğini sağlayan karmaşık sayıların esas argümentlerinin en büyüğü kaç derecedir?*

A) 30° B) 90° C) 120° D) 150° E) 210°

Çözüm: $|z+2\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ demek, karmaşık düzlemde $-2\sqrt{2}$ sayısına tekabül eden noktaya olan uzaklıkları $\sqrt{2}$ birim olan z noktaları demektir. Bu da şekilde gösterilen çemberdir.



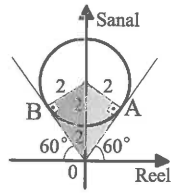
Esas argümenti en büyük olan nokta da yine şekilde gösterilen P noktasıdır. OMP üçgeninin 30°-60°-90° üçgeni olduğu görülürse P'nin esas argümentinin 210° olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$|z-4i|=2$ eşitliğini sağlayan z sayılarının esas argümenti en az ve en çok kaç olabilir?*

A) En az 15°, en çok 165° B) En az 30°, en çok 150°
C) En az 45°, en çok 135° D) En az 60°, en çok 120°
E) En az 75°, en çok 105°

Çözüm: $|z-4i|=2$ eşitliğini sağlayan z sayılarının (0, 4) merkezli 2 birim yarıçaplı çemberi oluşturan noktalar olduğunu biliyoruz. Hemen şeklimizi çizelim.



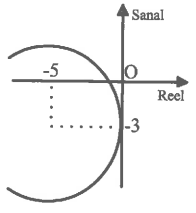
Orijinden bu çembere şekildeki gibi iki teğet çizersek, taranmış dik üçgenlerin birer kenarının 2 ve hipotenüslerinin 4 olmasından dolayı birer 30°-60°-90° üçgeni oldukları görülür. Ayrıca bu teğetlerin, sanal eksene göre simetrik olduklarını söylememize gerek yok sanırım. O halde bu çember üzerindeki her noktanın tekabül ettiği karmaşık sayıların argümentleri [60°, 120°] aralığında oynar. O halde sayı A olduğunda argüment en az 60°, B olduğunda en çok 120° olabilir.

Doğru cevap: D

Örnek. *$|z+5+3i|=5$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayıları içinde esas argümenti en büyük olanın argümenti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

Çözüm: $|z+5+3i|=5$ demek $(-5,-3)$ noktasına uzaklığı 5 birim olan noktalar kümesi yani $(-5,-3)$ merkezli 5 birim yarıçaplı çember demektir. Bu çember üzerindeki noktalardan esas argümenti en büyük olanın, $(0,-3)$ noktasına tekabül eden $-3i$ sayısının esas argümenti olan $\frac{3\pi}{2}$ olduğu şekilden görülmektedir. Grafik dördüncü bölgeye taşmadığından esas argümenti $\frac{3\pi}{2}$'den büyük olan sayı yoktur.



Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
Kutupsal koordinatları

$$\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$$

olan karmaşık sayının reel kısmı kaçtır?

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 0 D) $-\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{2}$

2.

$$z = 1+i$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\cdot cis\frac{\pi}{4}$ B) $2\cdot cis\frac{\pi}{2}$ C) $\sqrt{2}\cdot cis\frac{5\pi}{3}$
D) $\sqrt{2}\cdot cis\frac{3\pi}{4}$ E) $\sqrt{2}\cdot cis\frac{\pi}{4}$

3.

$$z = \sqrt{3}+i$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{cis}\frac{\pi}{3}$ B) $\text{cis}\frac{2\pi}{3}$ C) $2\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}$
D) $2\cdot\text{cis}\frac{\pi}{6}$ E) $2\cdot\text{cis}\frac{2\pi}{3}$

4.

$$z = -4-4i$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\sqrt{2}\cdot\text{cis}45^\circ$ B) $4\sqrt{2}\cdot\text{cis}135^\circ$ C) $4\sqrt{2}\cdot\text{cis}225^\circ$
D) $4\sqrt{2}\cdot\text{cis}300^\circ$ E) $4\sqrt{2}\cdot\text{cis}315^\circ$

5.

$$z = -2+2\sqrt{3}i$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{3}\cdot\text{cis}30^\circ$ B) $4\cdot\text{cis}60^\circ$ C) $2\sqrt{3}\cdot\text{cis}120^\circ$
D) $4\cdot\text{cis}120^\circ$ E) $4\cdot\text{cis}150^\circ$

6.

$$z = -2\sqrt{3}-2i$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4\cdot\text{cis}210^\circ$ B) $4\cdot\text{cis}150^\circ$ C) $4\cdot\text{cis}120^\circ$
D) $4\sqrt{3}\cdot\text{cis}210^\circ$ E) $4\sqrt{3}\cdot\text{cis}150^\circ$

7.

$$z_1 = -1-\sqrt{3}i$$

karmaşık sayısının esas argümenti kaçtır?

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{11\pi}{6}$

8.

$$(3+i)(-1-3i)$$

çarpımının esas argümenti kaçtır?

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{4\pi}{5}$ E) 2π

9.

Esas argümenti $\frac{2\pi}{3}$ olup, modülü 8 birim olan karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4-4\sqrt{3}i$ B) $-6+8\sqrt{3}i$ C) $-4+2\sqrt{3}i$
D) $-4+4\sqrt{3}i$ E) $4+4\sqrt{3}i$

10.

$$z = -\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) -15° B) 105° C) 165° D) 195° E) 255°

1. E 2. E 3. D 4. C 5. D 6. A 7. B 8. C 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$|z-2\sqrt{2}i|=\sqrt{2}$$

eşitliğini sağlayan karmaşık sayıların esas argümentlerinin en büyüğü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30° B) 90° C) 120° D) 150° E) 210°

2.

$$\text{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$$

olduğuna göre $\text{Arg}(\overline{z})$ **kaça eşittir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

3.

$$z=1+\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) 160° B) 80° C) 40° D) 20° E) 10°

4.

$$z=\tan 80^\circ-i$$

olduğuna göre z'nin kutupsal koordinatları hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $(\sec 80^\circ, 350^\circ)$ B) $(\cos 40^\circ, 40^\circ)$ C) $(\sec 40^\circ, 320^\circ)$
D) $(\cos 20^\circ, 350^\circ)$ E) $(\sec 80^\circ, 10^\circ)$

5.

$$z=1+\cos 28^\circ+2\cos 14^\circ+i\sin 28^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) 63° B) 42° C) 28° D) 14° E) 7°

6.

$$z=1-i\tan 40^\circ$$

olduğuna göre z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\sec 40^\circ, 40^\circ)$ B) $(\cos 40^\circ, 40^\circ)$ C) $(\sec 40^\circ, 320^\circ)$
D) $(\cos 20^\circ, 300^\circ)$ E) $(\sec 40^\circ, 160^\circ)$

7.

$$z=1+\text{cis}\,40^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) 80° B) 40° C) 30° D) 20° E) 10°

8.

$$z=2i+2\cdot\text{cis}\,40^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) 75° B) 65° C) 55° D) 50° E) 20°

9.

$$z=-3+3\cdot\text{cis}\,40^\circ$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) 110° B) 105° C) 100° D) 90° E) 85°

10.

$$z=-4i+4\cdot\text{cis}\,40^\circ$$

olduğuna göre $\text{Arg}(\overline{z})$ **kaç derecedir?**

A) 45° B) 40° C) 35° D) 30° E) 25°

1. C 2. C 3. C 4. A 5. E 6. C 7. D 8. B 9. A 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kutupsal İşlemler

$x + yi$ şeklindeki karmaşık sayıların toplamlarını, farklarını, çarpımlarını, bölümlerini bulmayı ve kuvvetlerini almayı öğrenmiştik.

Şimdi de karmaşık sayıların kutupsal gösterimleriyle aynı işlemleri nasıl yapabileceğimizi öğreneceğiz. Böylelikle kutupsal gösterimin işleri ne kadar da kolaylaştırdığına tanık olacaksınız. Yani matematikçiler, canları sıkıldıkları için, gelin bu sayılara başka bir gösterim bulalım dememişler, bu kaçınılmaz bir son olmuş. ☺

Teorem. *$z_1 = r_1\cdot\text{cis}\,\alpha_1$ ve $z_2 = r_2\cdot\text{cis}\,\alpha_2$ iken*

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot\text{cis}(\alpha_1+\alpha_2).$$

Kanıt:

$$z_1 = r_1\cdot\text{cis}\,\alpha_1 = r_1\cdot(\cos\alpha_1 + i\cdot\sin\alpha_1)$$
$$z_2 = r_2\cdot\text{cis}\,\alpha_2 = r_2\cdot(\cos\alpha_2 + i\cdot\sin\alpha_2)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1\cdot(\cos\alpha_1 + i\cdot\sin\alpha_1)\cdot r_2\cdot(\cos\alpha_2 + i\cdot\sin\alpha_2)\\ &= r_1\cdot r_2\cdot(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot i\\ &\qquad + \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\cdot i - \sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2)\\ &= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\\ &= r_1\cdot r_2\cdot\text{cis}(\alpha_1+\alpha_2) \end{aligned}$$

Teorem. *$z_1 = r_1\cdot\text{cis}\,\alpha_1$ ve $z_2 = r_2\cdot\text{cis}\,\alpha_2$ iken*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\text{cis}(\alpha_1-\alpha_2).$$

Kanıt:

$$z_1 = r_1\cdot\text{cis}\,\alpha_1 = r_1\cdot(\cos\alpha_1 + i\cdot\sin\alpha_1)$$

ve

$$z_2 = r_2\cdot\text{cis}\,\alpha_2 = r_2\cdot(\cos\alpha_2 + i\cdot\sin\alpha_2)$$

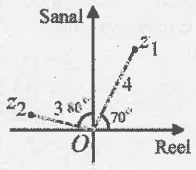
olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\alpha_1 + i\cdot\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2 + i\cdot\sin\alpha_2}\\ &\cdots\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\cdot\sin(\alpha_1-\alpha_2)]\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\text{cis}(\alpha_1-\alpha_2) \end{aligned}$$

Son iki teoremden anlaşılıyor ki,

$$\text{Arg}(z_1\cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$
$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

Örnek. *Yan şekilde bilgileri verilen z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için $z_1\cdot z_2$ çarpımı kaçtır?*



A) $-12-12\sqrt{3}i$ B) $-12\sqrt{3}-12i$
C) $-12+15\sqrt{3}i$ D) $-6-6\sqrt{3}i$
E) $-6+6\sqrt{3}i$

Çözüm: $z_1 = 4\text{cis}\,70^\circ$ ve $z_2 = 3\cdot\text{cis}\,170^\circ$ olduğundan,

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 4\cdot3\cdot\text{cis}(70^\circ + 170^\circ) = 12\cdot\text{cis}\,240^\circ\\ &= 12\cdot(\cos 240^\circ + i\cdot\sin 240^\circ)\\ &= 12\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6-6\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Ayrıca çok önemli bir şey daha anlaşılıyor:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = r_1\cdot\frac{1}{r_2}\cdot\text{cis}\left(\theta_1 + (-\theta_2)\right)$$

olduğu fark edilirse, $z = r\cdot\text{cis}\,\theta$ için

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\cdot\text{cis}(-\theta)$$

olduğu da anlaşılıyor.

Teorem (De Moivre). *$z = r\cdot\text{cis}\,\alpha$ iken*

$$z^n = r^n\cdot\text{cis}(n\alpha) \text{ ve } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\text{cis}\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Kanıt: Önce n'nin doğal sayı olduğunu farz edelim.
z^n demek n tane z'yi çarpmak demektir, bu yüzden n tane $r\cdot\text{cis}\,\alpha$'yı çarpalım:

$$\begin{aligned} z^n &= r\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot r\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot r\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot\ldots\cdot r\cdot\text{cis}\,\alpha\\ &= r\cdot r\cdot r\cdot\ldots\cdot r\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot\text{cis}\,\alpha\cdot\ldots\cdot\text{cis}\,\alpha\\ &= r^n\cdot\text{cis}(\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha)\\ &= r^n\cdot\text{cis}(n\alpha) \end{aligned}$$

n reel sayıyken de eşitlik sağlanır ama kanıtı bu kadar kolay değildir. Tümevarım içeren bu kanıt, ilerki derslerde verilecektir.

Örnek. *$z = (1 + i)^{20}$ sayısının orijine uzaklığı ve esas argümenti kaç derecedir?*

A) 512 ve 90° B) 512 ve 180° C) 1024 ve 270° D) 1024 ve 180° E) 1024 ve 360°

Çözüm: İki farklı şekilde çözelim.

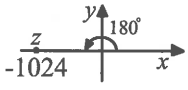
Birinci yol. İlk çözümde $1 + i$ sayısını kutupsal forma çevireceğiz, işlemleri öyle yapacağız.

$$\begin{aligned} z &= (1+i)^{20} \\ &= (\sqrt{2}\cdot\text{cis}\,45^\circ)^{20} \\ &= \sqrt{2}^{\,20}\cdot\text{cis}(45^\circ\cdot 20) \\ &= 2^{10}\cdot\text{cis}\,900^\circ \\ &= 1024\cdot\text{cis}\,180^\circ \end{aligned}$$

olduğundan z sayısının modülü 1024, esas argümenti de 180°'dir.

İkinci yol. Bu çözümdeyse direkt olarak sayının değerini hesaplayacağız.

$$\begin{aligned} z &= (1+i)^{20} \\ &= [(1+i)^2]^{10} \\ &= (2i)^{10} \\ &= 2^{10}\cdot i^{10} \\ &= 1024\cdot(i^2) \\ &= -1024 \end{aligned}$$



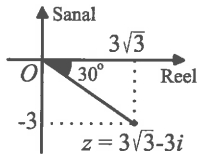
olduğundan, yan şekilden göreceğiniz üzere z sayısının orijine olan uzaklığı 1024 ve esas argümenti de 180°'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1975 ÜSS]. *$z = 3\sqrt{3} - 3i$ karmaşık sayısı için z^6 kaçtır?*

A) 36^3 B) -36^3 C) $36^3 i^3$ D) $-36^3 i^3$ E) 0

Çözüm: z karmaşık sayısının reeli $3\sqrt{3}$ ve sanalı -3 olduğundan, bu sayının karmaşık düzlemdeki görüntüsü şekildeki gibidir. Görüldüğü üzere orijine olan uzaklığı 6 birim olup, esas argümenti de 330° olduğundan, kutupsal gösterimi



$$z = 6\cdot[\cos 330^\circ + i\cdot\sin 330^\circ]$$

şeklinde olmalıdır. Şimdi 6'ncı kuvvetini bulalım.

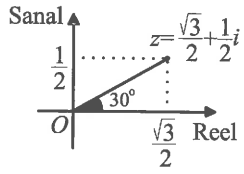
$$\begin{aligned} z &= 6\cdot[\cos(-30^\circ)+i\cdot\sin(-30^\circ)] \\ z^6 &= 6^6\cdot[\cos(-180^\circ)+i\cdot\sin(-180^\circ)] \\ z^6 &= 6^6\cdot[\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ] \\ z^6 &= 6^6\cdot\text{cis}\,180^\circ = -6^6 = -36^3 \end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1998 ÖYS]. *$i^2 = -1$ ve $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ olduğuna göre z^9 aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D) $-i$ E) 1

Çözüm: z karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsünü çizersek, orijine olan uzaklığının 1 birim ve argümentinin 30° olduğu görülür. O halde kutupsal gösterimi $z = \text{cis}\,30^\circ$ olduğundan



$$z^9 = \text{cis}\,(9\cdot 30^\circ) = \text{cis}\,270^\circ = -i$$

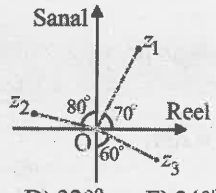
bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yan şekilde verilen z_1, z_2 ve z_3 sayıları için*

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1^{\,2}\cdot z_2}{z_3}\right)$$

kaçtır?



A) 170° B) 210° C) 300° D) 320° E) 340°

Çözüm: z_1, z_2 ve z_3 sayılarının esas argümentlerinin sırasıyla 70°, 170° ve 330° olduğunu not edin.

$$\begin{aligned} \text{Arg}\left(\frac{z_1^{\,2}\cdot z_2}{z_3}\right) &= 2\cdot\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_3) \\ &= 2\cdot 70^\circ + 170^\circ - 330^\circ = -20^\circ = 340^\circ. \end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1993 ÖYS]. *Karmaşık düzlemde*

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + i\sin^2 x$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi x'in değerlerinden biridir?

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 180°

Çözüm:

$$(\cos x + i\sin x)^2 = (\text{cis}\,x)^2 = \text{cis}\,2x$$

olduğundan, eşitlik

$$\begin{aligned} \text{cis}\,2x &= \cos^2 x + i\sin^2 x \\ \cos 2x + i\sin 2x &= \cos^2 x + i\sin^2 x \\ \cos^2 x - \sin^2 x + i\sin 2x &= \cos^2 x + i\sin^2 x \\ -\sin^2 x + i\sin 2x &= i\sin^2 x \end{aligned}$$

haline dönüşür. Şu halde $\sin^2 x = 0$ yani $\sin x = 0$ olması gerekir. 180° için eşitliğin sağlandığı görülüyor.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{1+\text{cis}\,2a}{1-\text{cis}\,2a}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $i\cdot\text{cis}\,a$ B) $i\cdot\cos a$ C) $i\cdot\sin a$ D) $i\cdot\cot a$ E) $i\cdot\tan a$

Çözüm: Hemen cis 2a ifadelerini açalım.

$$\frac{1+\text{cis}\,2a}{1-\text{cis}\,2a}=\frac{1+\cos 2a+i\sin 2a}{1-\cos 2a-i\sin 2a}$$

$$=\frac{1+2\cos^2 a-1+i\cdot 2\sin a\cos a}{1-1+2\sin^2 a-i\cdot 2\sin a\cos a}$$

$$=\frac{2\cos^2 a+i\cdot 2\sin a\cos a}{2\sin^2 a-i\cdot 2\sin a\cos a}$$

$$=\frac{2\cos a(\cos a+i\sin a)}{2\sin a(\sin a-i\cos a)}$$

$$=\frac{\cos a\cdot\text{cis}\,a}{\sin a\cdot\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)}$$

$$=\frac{\cos a\cdot\text{cis}\,a}{\sin a\cdot\text{cis}\left(a-\frac{3\pi}{2}-a\right)}$$

$$=\cot a\cdot\text{cis}\,\frac{\pi}{2}=i\cdot\cot a$$

Doğru cevap: D.

Bir karmaşık sayının karekök ve küp kökleri[1]**.** Hem kartezyen hem de kutupsal gösterimlerle "karekök" he saplamayı öğreneceğiz. Önce daha kolay görünenden başlayalım.

Örnek. $21+5xi$ *sayısı,* $5+2i$ *sayısının karesi ise x kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Demek ki $(5+2i)^2=21+5xi$.

$$25+20i+4i^2=21+5xi$$

olduğundan $5x=20$, dolayısıyla $x=4$ bulunur.

Doğru cevap: D.

[1] Ali Nesin: Sıfır böleni olmayan bir halkada $x^2=a$ denkleminin 0, 1 ya da 2 çözümü vardır. İki çözüm olduğunda birini diğerinden ayırabiliyorsak, o zaman karekökü tanımlayabiliriz. Gerçel sayılarda denklemin çözümlerinden biri pozitif olacağından, onu diğerinden ayırıp "karekök" fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Kompleks sayılarda denklemin çözümlerini ayırt edemeyiz. i ile $-i$ arasında hiçbir fark yoktur örneğin. Daha genel olarak $a+bi$ ile $a-bi$ arasında hiçbir fark yoktur. **Dolayısıyla karmaşık sayılarda "karekök" diye bir fonksiyon yoktur.** Bu sayılar için "a'nın karekökünü bul" yerine "$x^2=a$ denkleminin çözümlerini bul" demeliyiz. Benzer şekilde "küpkök" diye bir fonksiyon da yoktur.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisinin karesi* $4+3i$*'dir?*

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}i$ B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}i$ C) $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

D) $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ E) $2+\sqrt{3}i$

Çözüm: O sayılara $x+yi$ diyelim.

$$(x+yi)^2=4+3i$$
$$x^2+2xyi+y^2i^2=4+3i$$
$$x^2-y^2+2xyi=4+3i$$

O halde $x^2-y^2=4$ ve $2xy=3$ eşitliklerini çözmeliyiz.

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$
$$x^2-\frac{9}{4x^2}=4$$
$$4x^4-9=16x^2$$
$$4x^4-16x^2-9=0$$
$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

O halde $x^2=\dfrac{9}{2}$ veya $x^2=-\dfrac{1}{2}$ olmalıdır. x ve y reel olduğundan ikinci şık geçerli olamaz. Buradan

$$x_1=\frac{3}{\sqrt{2}}\ \text{ve}\ x_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

bulunur. $2xy=3$ olduğundan $y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olur. Demek ki karesi $4+3i$ olan sayılar

$$z_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\ \text{ve}\ z_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

imiş.

Doğru cevap: D.

Şimdi de karesi kutupsal olarak verilmiş sayıları bulmaya bir örnek verelim. Korkmayın, bu da kolay!

Örnek. $w^2=4\cdot\text{cis}\,120^\circ$ *eşitliğini sağlayan w sayılarını bulalım.*

Çözüm: Yine iki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. $w=x+yi$ diyelim. O halde

$$(x+yi)^2=4\cdot\text{cis}\,120^\circ=4\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2+2\sqrt{3}i$$

olur.

$$x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\cdot i=-2+2\sqrt{3}i$$

olduğundan

$$x\cdot y=\sqrt{3}\ \text{ve}\ y^2-x^2=2$$

gibi iki bilinmeyenli iki denklemimiz olur ki, bunu çözmeyi hepimiz biliyoruz. Bu yolu, kesinlikle tavsiye etmediğimiz için burada bırakıyorum. Şimdi ikinci yola bakın.

İkinci yol. Bir karmaşık sayının "karekökünü" De Moivre Teoremleri'nden bulmayı biliyoruz ama burada denklemi sağlayan 1 tane değil, 2 tane w olabilir, eğer öyleyse ikinci w'yi nasıl bulacağız? Karekökünü bulmak istediğimiz sayının argümentini, ona denk olan başka bir argümentle değiştirerek, yani argümente 360° eklersek bir şey olmuyordu ya, öyle yapacağız. O halde $4\cdot\text{cis}120^\circ$ ile $4\cdot\text{cis}480^\circ$ sayılarının kareköklerini alacağız. Onlara sırasıyla w_0 ve w_1 diyelim.

$$w_0 = 2\cdot\text{cis}\,60^\circ$$
$$w_1 = 2\cdot\text{cis}\,240^\circ$$

olarak bulunur.

Uyarı. w_1'i pratik olarak bulmak için, w_0'ın argümentine 180° ekleyebilirsiniz.

Örnek. *$z = w^3 = 27\cdot\text{cis}\,150^\circ$ eşitliğini sağlayan w sayılarını bulunuz.*

Çözüm: Üç tane w sayısı çözüme aday olduğundan z'nin argümentine iki kere 360° ekleyeceğiz. Böylelikle farklıymış gibi görünen ama tamamen aynı olan üç karmaşık sayı elde edeceğiz. Bu sayıların "küpkök"lerini alınca üç farklı w sayısı ortaya çıkmış olacak.

$$z = 27\cdot\text{cis}\,150^\circ = 27\cdot\text{cis}\,510^\circ = 27\cdot\text{cis}\,870^\circ$$

olduğundan;

$$w_0 = 3\cdot\text{cis}\,50^\circ$$
$$w_1 = 3\cdot\text{cis}\,170^\circ$$
$$w_2 = 3\cdot\text{cis}\,290^\circ$$

Uyarı. w_1'i pratik olarak bulmak için, w_0'ın argümentine 120° ekleyebilirsiniz, w_2'yi pratik olarak bulmak için de w_1'in argümentine 120° ekleyebilirsiniz, yani w_0'ın argümentine 240°

Örnek. *Karesi $-\text{cis}\,32^\circ$ olan karmaşık sayıları bulunuz.*

Çözüm:

$$w^2 = -\text{cis}\,32^\circ = -\left(\cos 32^\circ + i\sin 32^\circ\right)$$
$$= -\cos 32^\circ - i\sin 32^\circ$$
$$= \cos 212^\circ + i\sin 212^\circ$$

olduğundan

$$w_1 = \text{cis}\,106^\circ$$
$$w_2 = \text{cis}\,286^\circ$$

$w^2 = a + bi$ eşitliğini sağlayan olası w'leri bulmanın formülü. Karesi $(a + bi)$ olan w sayısına $x + yi$ diyelim.

$$(x+yi)^2 = (x+yi)\cdot(x+yi) = a+bi$$

eşitliğini sağlayan x ve y reel sayılarını arıyoruz.

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$
$$x^2 - y^2 = a \text{ ve } 2xy = b$$

b değeri 0 değil diye y de 0 değildir, o halde $x = b/2y$ demekte bir mahzur yok.

Diğer yandan $x^2 - y^2 = a$ olduğundan $\dfrac{b^2}{4y^2} - y^2 = a$ olur,

düzenlenirse $b^2 - 4y^4 = 4ay^2$ yani

$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0$$

elde edilir. $y^2 = t$ dönüşümü yapılırsa

$$4t^2 + 4at - b^2 = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

Köklerin t_1 ve t_2, denklemin diskriminantının da $\Delta = 16(a^2 + b^2)$ olduğunu bir kenara not edin. Diğer yandan $|z|^2 = a^2 + b^2$ olduğunu hatırlarsak $\Delta = 16|z|^2$ olur.

$$t_1 = \frac{-4a+\sqrt{\Delta}}{8} = \frac{-4a+4|z|}{8} = \frac{-a+|z|}{2},$$
$$t_2 = \frac{-4a-\sqrt{\Delta}}{8} = \frac{-4a-4|z|}{8} = \frac{-a-|z|}{2}$$

y reel ve $|z| > a$ olduğundan $t_1 > 0$'dır ve bu bize y'nin değerlerini verir.

Ayrıca köklerin çarpımı $-b^2/4 < 0$ olduğundan, t_2 kesinlikle negatiftir. O halde t_2'nin kökleri reel olmadığından buradan elimiz boş döndük. Şu an elde t_1'den gelen iki kök var. Bunlara y_1 ve y_2 diyelim.

$$y_1 = \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \text{ ve } y_2 = -\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}.$$

Buna karşılık x değerleri ise

$$x_1 = b/(2y_1) \text{ ve } x_2 = b/(2y_2)$$

olur. Buradan da anladığımız şey şu: Kökler birbirinin zıt işaretlisidir, birini bulduk mu, diğerini bunun ters işaretlisi olarak yazacağız. Toparlayalım:

Sonuç. Reel olmayan $a + bi$ sayısını karesi kabul eden sayılar, $y = \sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}$ ve $x = \dfrac{b}{2y}$ olmak üzere, $x + yi$ ve $-(x + yi)$'dir.

Örnek. *$w^2 = 3 + 4i$ eşitliğini sağlayan w sayılarını bulunuz.*

Çözüm: $|3 + 4i| = 5$ olduğundan

$$y = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = 1 \text{ ve } x = \frac{4}{2} = 2 \text{ olur.}$$

O halde $w_0 = 2 + i$ ve $w_1 = -2 - i$'dir.

CEVAPLI TEST 1

1.

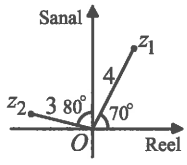
$$z_1 = 2\sqrt{2}\cdot\text{cis}12^\circ$$
$$z_2 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}18^\circ$$

olduğuna göre $z_1 \cdot z_2$ çarpımı kaçtır?

A) $3\sqrt{2}\cdot\text{cis}30^\circ$ B) $4\cdot\text{cis}30^\circ$ C) $8\cdot\text{cis}30^\circ$
D) $4\cdot\text{cis}60^\circ$ E) $8\cdot\text{cis}60^\circ$

2.

z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri yanda verilmiştir.



$$z_1 \cdot z_2 \cdot \text{cis}30^\circ$$

çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) $12i$ C) -12 D) $-12i$ E) 0

3.

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = 30^\circ$$
$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_3) = 50^\circ$$
$$\text{Arg}(z_2 \cdot z_3) = 70^\circ$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)$ kaç derecedir?

A) 300° B) 210° C) 105° D) 75° E) 30°

4.

$$z_1 = 12\cdot\text{cis}85^\circ$$
$$z_2 = 8\cdot\text{cis}25^\circ$$

olduğuna göre $\frac{z_1}{z_2}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{3}\cdot\text{cis}\pi$ B) $\frac{2}{3}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{3}{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{3}{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{3}{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{2}$

5.

$$\frac{z}{i} = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$$

olduğuna göre Re(z) kaça eşittir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 0 D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

6.

$$\frac{2\left(\cos 57^\circ + i\sin 123^\circ\right)\left(\cos 118^\circ - i\sin 298^\circ\right)}{\cos 25^\circ + i\cos 65^\circ}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3}+i$ B) $\sqrt{3}-i$ C) $-\sqrt{3}+i$
D) $-4+4\sqrt{3}i$ E) $4+4\sqrt{3}i$

7.

$|z_1| = |z_2| = 1$ olarak veriliyor.

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ ve } \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \frac{\pi}{2}$$

olduğuna göre $z_1^4 + z_2^4$ toplamı neye eşittir?

A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $1+\sqrt{3}i$ D) i E) -1

8.

$$z = \frac{\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ}{i^7 + i^8 + \ldots + i^{18} + i^{19}}$$

olduğuna göre $-\frac{1}{z}$ sayısının esas argümenti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 315° B) 190° C) 170° D) 90° E) 10°

9.

$$z = \frac{\sin 122^\circ + i\sin 148^\circ}{\cos 148^\circ + i\cos 58^\circ}$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi hangisidir?

A) $\text{cis}244^\circ$ B) $\text{cis}222^\circ$ C) $\text{cis}90^\circ$ D) $\text{cis}32^\circ$ E) -1

10.

$$z = \frac{\sin 130^\circ - i\sin 320^\circ}{\sin 80^\circ - i\sin 350^\circ}$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi hangisidir?

A) $\text{cis}130^\circ$ B) $\text{cis}80^\circ$ C) $\text{cis}60^\circ$ D) $\text{cis}40^\circ$ E) $\text{cis}30^\circ$

1. B 2. D 3. D 4. D 5. D 6. C 7. E 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$z_1 = \sin 160^\circ + i\cos 340^\circ$$
$$z_2 = \sin 80^\circ - i\cos 280^\circ$$

olduğuna göre $\frac{z_1}{z_2}$ sayısı hangisine eşittir?

A) $\text{cis}\,240^\circ$ B) $\text{cis}\,120^\circ$ C) $\text{cis}\,90^\circ$ D) $\text{cis}\,80^\circ$ E) $\text{cis}\,350^\circ$

2.

$$z = \frac{1-\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha}$$

olduğuna göre Arg(z) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{3\alpha}{2}$ D) $\frac{\pi+3\alpha}{2}$ E) $\frac{\pi-3\alpha}{2}$

3.

$$z = i + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

olduğuna göre z'nin çarpımsal tersinin esas argümenti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{3\alpha}{2}$ D) $\frac{7\pi}{4}-\alpha$ E) $\frac{\pi}{4}+\alpha$

4.

$$z = \sqrt{2}\cdot\text{cis}15^\circ$$

olduğuna göre z^4 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $4\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}$ B) $2\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}$ C) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{12}$ D) $4\cdot\text{cis}\frac{\pi}{6}$ E) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{6}$

5.

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

olduğuna göre z^3 sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $-i$ C) 0 D) 1 E) i

6.

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

olduğuna göre z^{100} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^{100}\cdot\text{cis}120^\circ$ B) $4^{100}\cdot\text{cis}300^\circ$ C) $2^{50}\cdot\text{cis}300^\circ$ D) $4^{100}\cdot\text{cis}120^\circ$ E) $2^{100}\text{cis}300^\circ$

7.

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

olduğuna göre z^{20} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{cis}240^\circ$ B) $\text{cis}120^\circ$ C) $\text{cis}90^\circ$ D) $\text{cis}24^\circ$ E) $\text{cis}12^\circ$

8.

$$z = \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8})$$

olduğuna göre z^6 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6\cdot\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ B) $8\cdot\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ C) $8\sqrt{2}\cdot\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ D) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{8}$ E) $8\cdot\text{cis}\frac{\pi}{8}$

9.

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ\right)$$

olduğuna göre z^{-15} sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{32}\text{cis}30^\circ$ B) $\frac{1}{32}\text{cis}150^\circ$ C) $\frac{1}{32}\text{cis}210^\circ$ D) $32\text{cis}30^\circ$ E) $32\text{cis}150^\circ$

10.

$$z_1 = 4\text{cis}52^\circ$$
$$z_2 = 2\text{cis}22^\circ$$

olduğuna göre $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{13}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4^{13}\cdot\text{cis}74^\circ$ B) $4^{13}\cdot\text{cis}30^\circ$ C) $2^{13}\cdot\text{cis}74^\circ$ D) $2^{13}\cdot\text{cis}30^\circ$ E) $8^7\cdot\text{cis}30^\circ$

1. D 2. E 3. D 4. A 5. A 6. A 7. D 8. B 9. C 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
$|z_1|=|z_2|=1$ olarak veriliyor.

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\pi}{6} \text{ ve } \text{Arg}(z_1\cdot z_2)=\frac{\pi}{2}$$

olduğuna göre $z_1^4+z_2^4$ toplamı neye eşittir?

A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $1+\sqrt{3}i$ D) i E) 1

2.

$$z=\frac{1}{3}\text{cis}210°$$

olduğuna göre z^{-1} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\cdot\text{cis}150°$ B) $\frac{1}{3}\cdot\text{cis}150°$ C) $3\cdot\text{cis}120°$
D) $\frac{1}{3}\cdot\text{cis}120°$ E) $\frac{1}{3}\cdot\text{cis}105°$

3.

$$z=2\text{cis}120°$$

olduğuna göre $\text{Arg}(-\overline{z^{-1}})$ kaçtır?

A) 120° B) 150° C) 210° D) 240° E) 300°

4.

$$z=-i$$

olduğuna göre $z^{\frac{1}{6}}$'nın değeri kaça eşittir?

A) $-i$ B) i C) $\sqrt{2}i$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}i$

5.

$$z=\frac{(\cos112°+i\sin292°)\cdot(\cos6°+i\sin6°)}{(\cos8°-i\sin352°)^7}$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) cis 48° B) cis 68° C) cis 112°
D) cis 246° E) cis 254°

6.

$$z=\left(\frac{\sin105°-i\cos105°}{\sin135°+i\cos315°}\right)^4$$

karmaşık sayısının kutupsal gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) cis(−90°) B) cis(−60°) C) cis(−45°)
D) cis 45° E) cis 60°

7.
z_1, z_2, z_3 karmaşık sayılarının esas argümentleri $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ **olduğuna göre**

$$\text{Arg}\left(\frac{2\cdot z_1^3\cdot z_2^5}{7\cdot z_3}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 9π B) 7π C) 2π D) $\frac{8\pi}{5}$ E) $\frac{4\pi}{5}$

8.
$|z| = 1$ olmak üzere

$$\text{Arg}\left((\overline{z})^{20}\right)=160°$$

eşitliğini sağlayan z sayısının 18'inci kuvveti aşağıdakilerden hangisidir?

A) cis 144° B) cis 216° C) cis 240°
D) cis 300° E) cis 320°

9.
$|z|=1$ olmak üzere

$$\text{Arg}\left((\overline{z})^{14}\right)=280°$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı için $\text{Re}(z^9)$ kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

10.

$$z^{\frac{3}{2}}=\text{cis}\frac{\pi}{6}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{cis}\frac{\pi}{18}$ B) $\text{cis}\frac{5\pi}{18}$ C) $\text{cis}\frac{7\pi}{9}$ D) $\text{cis}\frac{7\pi}{3}$ E) $\text{cis}\frac{\pi}{7}$

1. E 2. A 3. E 4. D 5. D 6. B 7. E 8. B 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.

$$z=\frac{1}{(\sin\alpha-i\cos\alpha)^4}$$

olduğuna göre Arg(z) kaç derecedir?

A) -4α B) -2α C) α D) 2α E) 4α

2.

$$z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$$

olduğuna göre z^9 hangi şıkta doğru verilmiştir?

A) $1+i$ B) $2+i$ C) i D) $-1-i$ E) $-i$

3.

Karesi $24+25i$ olan karmaşık sayıların toplamı kaça eşittir?

A) $-12+i$ B) -10 C) $-6-i$ D) $-4i$ E) 0

4.

Karesi $9+40i$ olan karmaşık sayıların biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+i$ B) $3-4i$ C) $9i$ D) $5+i$ E) $-9-40i$

5.

Karesi $-7-24i$ olan karmaşık sayıların biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $25i$ B) $7i-1$ C) $-3+4i$ D) $1+2i$ E) $-i$

6.

Karesi $3-4i$ olan karmaşık sayılardan biri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $1+i$ B) $2-i$ C) i D) $-1-i$ E) $-i$

7.

Karesi $5-12i$ olan karmaşık sayılardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5-i$ B) $3-2i$ C) $2-3i$ D) $2+3i$ E) $3+2i$

8.

Karesi $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ olan karmaşık sayılardan esas argümenti küçük olan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}112{,}5^\circ$ B) $\sqrt{2}\cdot\text{cis}292{,}5^\circ$ C) $\text{cis}112{,}5^\circ$
D) $2\cdot\text{cis}112{,}5^\circ$ E) $2\cdot\text{cis}102{,}5^\circ$

9.

Karesi $\sqrt{3}+3i$ olan karmaşık sayılardan esas argümenti büyük olan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{6}\cdot cis210^\circ$ B) $\sqrt[4]{12}\cdot cis210^\circ$ C) $3\cdot cis120^\circ$
D) $\sqrt{3}\cdot cis120^\circ$ E) $2\sqrt{3}\cdot cis210^\circ$

10.

Karesi $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ olan karmaşık sayıların esas argümentlerinin toplamı kaçtır?

A) 60° B) 120° C) 180° D) 240° E) 300°

1. A 2. E 3. E 4. E 5. C 6. B 7. B 8. D 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

Karesi $\frac{2}{i}$ olan karmaşık sayılardan biri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $2cis135°$ B) $2cis150°$ C) $\sqrt{2}cis225°$
D) $2cis300°$ E) $\sqrt{2}cis315°$

2.

$$z^2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt[4]{8}\text{cis}\frac{11\pi}{6}$ B) $2\sqrt{2}\text{cis}\frac{11\pi}{6}$ C) $\sqrt[4]{8}\text{cis}\frac{5\pi}{12}$
D) $2\text{cis}\frac{11\pi}{6}$ E) $2\text{cis}\frac{5\pi}{6}$

3.

$$z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3}+i$ B) $\sqrt{3}-i$ C) $-\sqrt{3}+i$
D) $-4+4\sqrt{3}i$ E) $4+4\sqrt{3}i$

4.

$$z^2 = (18\text{cis}18°)\cdot(72\text{cis}72°)$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından biri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $6\sqrt{2}(1+i)$ B) $18\sqrt{2}(1+i)$ C) $18\sqrt{2}i$
D) $36(\sqrt{2}-i)$ E) $18\sqrt{2}(1-4i)$

5.

$$z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-i, -2+i\}$ B) $\{-i+2, i+1\}$ C) $\{\ \}$
D) $\{i-2, i+1\}$ E) $\{-i, i\}$

6.

Küpü 1 olan karmaşık sayılardan biri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ B) $-i$ C) $\sqrt{3}+i$
D) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{i\sqrt{3}}{2}$

7.

Küpü $-8i$ olan karmaşık sayılardan esas argümenti en küçük olan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-i$ B) $i\sqrt{2}$ C) $i\sqrt[3]{2}$ D) $2i$ E) $4i$

8.

Küpü $1-\sqrt{3}i$ olan karmaşık sayıların esas argümentlerinin en büyüğü kaç derecedir?

A) 60° B) 160° C) 200° D) 290° E) 340°

9.

Küpü $-8 + 8i$ olan karmaşık sayıların esas argümentlerinin toplamı kaçtır?

A) 75° B) 105° C) 315° D) 495° E) 525°

10.

$$z^4 = 16\text{cis}\frac{4\pi}{9}$$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\text{cis}\frac{10\pi}{9}$ B) $2\text{cis}\frac{14\pi}{9}$ C) $2\sqrt{2}\text{cis}\frac{2\pi}{9}$
D) $2\text{cis}\frac{2\pi}{3}$ E) $\sqrt{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3}$

1. E 2. C 3. A 4. B 5. A 6. A 7. D 8. E 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 6

1.

$$1-i=r^3(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$$

eşitliğini sağlayan en küçük pozitif α reel sayısı kaçtır?

A) 15° B) 45° C) 75° D) 90° E) 105°

2.

w_0, w_1 ve w_2 karmaşık sayılarının küpleri eşittir.

$$w_0+w_1=-3+4i$$

olduğuna göre w_2 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3+4i$ B) $3-4i$ C) $1+2i$ D) $1-4i$ E) $-4i$

3.

$$z^4=16\cdot\text{cis }160°$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarından biri aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $2\cdot cis10°$ B) $2\cdot cis20°$ C) $2\cdot cis40°$
D) $2\cdot cis160°$ E) $16\cdot cis40°$

4.

Aşağıdaki sanal sayılardan hangisinin dördüncü kuvveti –1'dir?

A) cis 20° B) cis 22,5° C) cis 45°
D) cis 67,5° E) cis 75°

5.

z değişkenine bağlı

$$z^5-z(1+i)+x+yi=0$$

denkleminin bir kökü $-i$ olduğuna göre $x+y$ toplamı kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

6.

$$z^5-16-16\sqrt{3}i=0$$

denklemini sağlayan karmaşık sayılar, karmaşık düzlemde hangi geometrik şekli belirtir?

A) Çember B) Bir düzgün beşgenin köşeleri
C) Daire D) Bir düzgün onaltıgenin köşeleri
E) Bir doğru

7.

$$z^9+i=0$$

denkleminin kökleri karmaşık düzlemde hangi geometrik şekli belirtir?

A) Bir düzgün sekizgen
B) Bir düzgün dokuzgen
C) Bir düzgün ongenin köşeleri
D) Bir düzgün dokuzgenin köşeleri
E) Bir düzgün dokuzgenin iç bölgesi

8.

$$z^3-3iz^2-(4i+3)z+9i-12=0$$

denkleminin köklerinden biri sırf sanal olduğuna göre (reeli 0) diğer iki kökünün çarpımı kaçtır?

A) $-12i$ B) $12i$ C) $-3-4i$ D) $3+4i$ E) $-i$

9.

$$z^2-z+1=0$$

olduğuna göre z^{24} hangisine eşittir?

A) 1 B) $2+i$ C) i D) $-1-i$ E) $-i$

10.

$$\cos45°+i\cos135°+i^2\cos225°+...+i^{40}\cos3645°$$

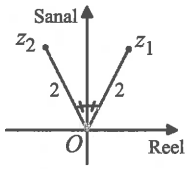
toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt{2}(40+40i)$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(41+40i)$ C) $\sqrt{2}(10+10i)$
D) $\sqrt{2}(20-20i)$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}(21-20i)$

1. E 2. B 3. C 4. C 5. D 6. B 7. D 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 7

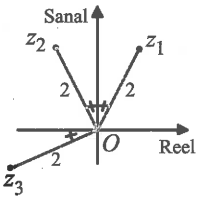
1.
Yanda sanal eksene göre simetrik olan z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının görüntüleri verilmiştir.



Buna göre $z_1 \cdot z_2$ çarpımı kaçtır?

A) -4 B) 4 C) $4i$ D) $-4i$ E) -2

2.
Yanda sanal eksene göre simetrik olan z_1 ve z_2 karmaşık sayıları ve $m(z_2Oz_3) = 90°$ olacak şekilde z_3 karmaşık sayılarının görüntüleri verilmiştir.



Buna göre $z_1 \cdot (z_3 + 1) + \overline{z_2}$ kaçtır?

A) -4 B) 4 C) $4i$ D) $-4i$ E) -2

3.
n, 4 ile bölünebilen bir sayı olduğuna göre

$$s = 1 + 2i + 3i^2 + ... + (n+1)i^n$$

sayısının değeri hangisidir?

A) 0 B) $\frac{n}{4} + 2i$ C) $\frac{n}{4}(-2i+2)+1$

D) $\frac{n}{2}(1+i)+1$ E) $n(-1+i)+1$

4.

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + ... + (n+1)i^n + ... + 21i^{20}$$

toplamı kaça eşittir?

A) $2-2i$ B) $2+3i$ C) $5+5i$ D) $10+10i$ E) $11-10i$

5.

$$y^2 + 4x^2$$

ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x+2y)(x-2y)$ B) $(2x+y)(2x-y)$
C) $(xi+2y)(xi-2y)$ D) $(y+2xi)(y-2xi)$
E) $(y+2x)(y-2x)i$

6.

$$z = \text{cis}\,\alpha$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z^2 + z)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) α B) $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ C) $\frac{1}{2}\pi + \alpha$ D) $\frac{3}{2}\alpha$ E) 2α

7.

$$z = \text{cis}\,2\alpha$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z^2 + zi)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) α B) $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ C) $\frac{1}{4}\pi + 3\alpha$ D) $\frac{3}{2}\pi$ E) $\frac{1}{4}\pi$

8.

$$z = 3 \cdot \text{cis}\,2\alpha$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z^2 - 3z)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) α B) $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ C) $\frac{1}{2}\pi + 3\alpha$ D) $\frac{3}{2}\pi$ E) 2π

9.

$$z = 3 \cdot \text{cis}\,2\alpha$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z^2 - 3zi)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\alpha - \frac{1}{4}\pi$ B) $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ C) $\frac{1}{4}\pi + 2\alpha$
D) $\frac{1}{4}\pi - 3\alpha$ E) $\frac{1}{2}\pi + 3\alpha$

10.

$$z = 2 \cdot \text{cis}\,\alpha$$

olduğuna göre $\text{Arg}(z^2 - 2z + 2zi - 4i)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}\pi + 3\alpha$ B) $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ C) $\frac{1}{4}\pi + 2\alpha$
D) $\frac{3}{4}\pi - \alpha$ E) $\frac{3}{4}\pi + \alpha$

1. A 2. D 3. C 4. E 5. D 6. D 7. C 8. C 9. A 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

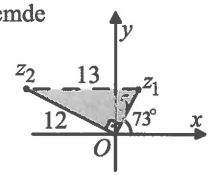
Aradaki Uzaklığın Bulunması

Kutupsal Gösterimli İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklığın Bulunması. Sadece kutupsal gösterimin anlatmak istediği sayıyı karmaşık düzlemde işaretlemeyi bilirsek, gerisini geometri halleder, bilhassa kosinüs veya Pisagor Teoremleri.

Örnek. $z_1 = 5\cdot\text{cis } 73^\circ$ *ve* $z_2 = 12\cdot\text{cis } 163^\circ$ *sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

Çözüm: Bu sayıları karmaşık düzlemde gösterirsek, işimiz daha kolay olacak. z_1 sayısının argümenti ile z_2 sayısının argümenti arasındaki farkın 90° olması bize şekildeki taranmış üçgenin dik olduğunu anlatır. Hatta verilerden, bu üçgen 5-12-13 üçgeni çıkar. O halde bu karmaşık sayılar arasındaki uzaklık 13 birimdir.



Doğru cevap: D.

Örnek. $z_1 = 3\cdot\text{cis } 11^\circ$ *ve* $z_2 = 8\cdot\text{cis } 71^\circ$ *sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Bir önceki soruda yaptığımız gibi z_1 ve z_2 sayılarının görüntülerini çizdiğimizde, şekilde taranmış üçgeninin orijinde bulunan köşe açısının 60° ve iki kenarının 3 ile 8 olduğunu görmüş oluruz.
İster özel üçgenler dersinde söylediklerimizi hatırlayarak cevabın 7 olduğunu söyleyin, ister kosinüs teoremini uygulayarak... Size kalmış...

Doğru cevap: C.

Örnek. $z_1 = 3\cdot\text{cis } \alpha^\circ$ *ve* $z_2 = -3\cdot\text{cis } \alpha^\circ$ *sayıları arasındaki uzaklık kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Bu sayılar birbirlerinin orijine göre simetrikleridir. Birinin orijine uzaklığı 3 br olduğundan ikisi arasındaki uzaklık 6 br dir.

Doğru cevap: B.

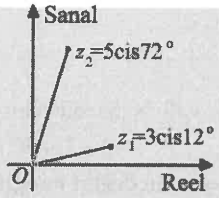
Örnek. *Karesi* $100\cdot\text{cis } 2\alpha$ *olan sayılar arasındaki uzaklık kaç* br *dir?*

A) 10 B) 20 C) 50 D) 100 E) 200

Çözüm: Bu sayıların biri $10\cdot\text{cis } \alpha$ diğeriyse $10\cdot\text{cis}(\pi + \alpha)$ yani $-10\cdot\text{cis } \alpha$ olduğundan bir önceki soruda açıklandığı üzere aralarındaki uzaklık 20 br dir.

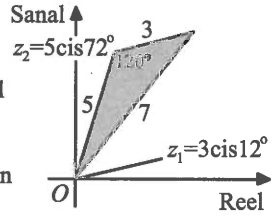
Doğru cevap: B.

Örnek.
$z_1 = 3\cdot\text{cis } 12^\circ$
$z_2 = 5\cdot\text{cis } 72^\circ$
olarak verilen z_1 *ve* z_2 *karmaşık sayıları için* $|z_1 + z_2|$ *kaça eşittir?*

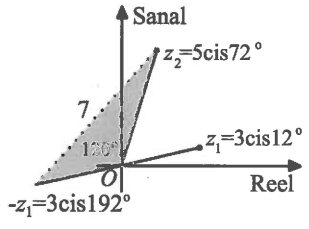


A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Toplama işleminin geometrik yorumunu yapmıştık. Birini diğerinin ucuna eski durumuna paralel şekilde ekliyorduk.
$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = 60^\circ$ olduğundan taranmış üçgenin bir iç açı ölçüsü 120° olur. Kenar uzunlukları da 3 ile 5 olduğundan $|z_1 + z_2| = 7$ olur.



Bu sorunun bu konuda ne işi var demeyin, yapılan işlem aslında z_1 sayısının $-z_2$ sayısına olan uzaklığını hesaplamaktır. Çünkü $|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|$. Bu aynı zamanda z_2 sayısının $-z_1$ sayısına uzaklığı manasına da gelir. Bir karmaşık sayının zıt işaretlisi argümentine 180° ekleyerek bulunduğundan $-z_1$ sayısını ikinci şekildeki gibi çizersek kosinüs teoreminden cevabın 7 olduğunu böyle de bulabiliriz.



Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

$z_2 = 6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

karmaşık sayıları için $|z_1 - z_2|$ değeri kaçtır?

A) $6\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{10}$

2.

$z_1 = 2\text{cis}10^\circ$

$z_2 = 2\text{cis}70^\circ$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

3.

$z_1 = 3 \cdot \text{cis}\, 20^\circ$

$z_2 = 5 \cdot \text{cis}\, 140^\circ$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

4.

$z_1 = 3 \cdot \text{cis}\, 20^\circ$

$z_2 = 8 \cdot \text{cis}\, 80^\circ$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

5.

$z_1 = 5 \cdot \text{cis}\, \alpha^\circ$

$z_2 = 8 \cdot \text{cis}\, (\alpha + 60)^\circ$

olduğuna göre $|z_1 - z_2|$ kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 13

6.

$z_1 = 3 \cdot \text{cis}\, 20^\circ$

$z_2 = 8 \cdot \text{cis}\, 260^\circ$

olduğuna göre $|z_1 + z_2|$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 13

7.

$z = 2 \cdot \text{cis}\, 60^\circ$

olduğuna göre z ile z^2 arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 5 B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$ D) 6 E) $2\sqrt{10}$

8.

Karesi i olan karmaşık sayılar arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

9.

Küpü $\sqrt{15} + 7i$ olan karmaşık sayılar arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$ E) 8

10.

$z^4 = 8\sqrt{2}(1 - i)$ denkleminin kökleri z_1, z_2, z_3 ve z_4'tür.

$|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|$

en çok kaç olabilir?

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 8 D) $8\sqrt{2}$ E) 16

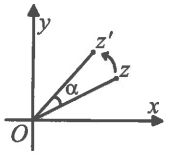
1. E 2. B 3. E 4. E 5. A 6. D 7. B 8. C 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Orijin Etrafında Dönme

$Z(a, b)$ noktasını orijinin etrafında, orijine olan uzaklığını değiştirmeksizin α açısı kadar döndürdüğümüzde, Z noktasının aldığı yeni konumu bulmayı öğreneceğiz.



Olayı tam anlayamayan yandaki grafiğe baksın.

z''yi biliyoruz, z' sayısını bulacağız.

z'nin argümentine θ diyelim. O halde z'nin kutupsal gösterimi $r\cdot\text{cis}\,\theta$ olur. Diğer yandan z''nün orijine olan uzaklığı z'nin orijine uzaklığıyla aynı olup, argümenti $\alpha + \theta$ olduğundan z''nün kutupsal gösterimi de $r\cdot\text{cis}(\theta + \alpha)$ olur. Daha önce

$$r\cdot\text{cis}(\theta + \alpha) = r\cdot\text{cis}\,\theta\cdot\text{cis}\,\alpha$$

olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki

$$z' = r\cdot\text{cis}\,\theta\cdot\text{cis}\,\alpha$$

Yani nokta pozitif yönde $\alpha°$ döndürülmüşse, yeni noktaya karşılık gelen sayı, eski noktaya karşılık gelen sayının cis $\alpha°$ katı olurmuş.

Örnek. *$z = -1 + \sqrt{3}i$ karmaşık sayısını, orijine uzaklığı sabit kalacak şekilde, orijin etrafında pozitif yönde $60°$ döndürdüğümüzde hangi karmaşık sayının konumuna geliriz?*

A) -4 B) -2 C) -1 D) 2 E) 4

Çözüm:

$$\begin{aligned} z' &= z\cdot\text{cis}\,60° \\ &= (-1 + \sqrt{3}i)\cdot\text{cis}\,60° \\ &= (-1 + \sqrt{3}i)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir $Z(a, b)$ noktası orijin etrafında pozitif yönde $\alpha°$ döndürüldüğünde $(7, 3)$ noktasına geliniyorsa, aynı noktanın aynı yönde $90° + \alpha°$ döndürülmesiyle hangi noktaya gelinir?*

A) $(3, 7)$ B) $(-3, 7)$ C) $(7, -3)$ D) $(-3, -7)$ E) $(-7, -3)$

Çözüm: $z_1 = 7 + 3i$ ve

$z_2 = z_1.\text{cis}\,90° = (7 + 3i)(0 + 1\cdot i) = 7i + 3\cdot i^2 = -3 + 7i$

olduğundan Z sayısının yeni konumu $(-3, 7)$'nin bulunduğu yerdir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Dik koordinat sisteminde köşelerinin koordinatları tam sayı olan eşkenar üçgen olamayacağını kanıtlayınız.*

Çözüm: Eşkenar olmasına gerek yok, herhangi bir üçgenin köşe koordinatlarının apsislerini veya ordinatlarını eşit miktarlarda arttırmak ya da azaltmak alanını değiştirmeyeceği gibi görünüşünü de değiştirmez. Hal böyleyken dik koordinat düzlemindeki her üçgenin koordinatlarıyla uygun bir şekilde oynayarak, bir köşesini $(0, 0)$ noktasına taşıyabilirsiniz. Taşınan üçgeni şimdi eşkenar olarak düşünelim. Şu durumda diğer iki köşe koordinatlarının tamsayılardan oluşmasını beklemekteyiz.

a, b, c, d birer tam sayı olmak üzere orijin dışındaki bir köşesinin (a, b), diğerinin de (c, d) olduğunu farzedelim. Şimdi kompleks düzleme taşınalım. Noktaları $a + bi$ ve $c + di$ gibi düşünelim yani. O halde orijine olan uzaklığı değişmeden orijin etrafında dönme problemiyle karşı karşıya kalırız. O zaman bu karmaşık sayılardan herhangi biri diğerinin cis $60°$ katı olmalıdır. Sözgelimi,

$$\begin{aligned} c + di &= (a + bi)\cdot\text{cis}\,60° \\ &= (a + bi)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{b}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

olsun.

$$2c = a - b\sqrt{3} \text{ ve } 2d = b + a\sqrt{3}$$

eşitliklerine erişilir ki bu sadece $a = 0$ ve $b = 0$ ile mümkün olabilir. Bu da bir çelişkidir.

CEVAPLI TEST 1

1.

$z = 3 + i$

karmaşık sayısına karşılık gelen nokta, orijine uzaklığı değişmeden pozitif yönde kaç derece döndürülürse $z' = -1 + 3i$ sayısına karşılık gelen noktaya gelinir?

A) 90° B) 120° C) 180° D) 270° E) 300°

2.

$z = 2\sqrt{3} + 2i$

karmaşık sayısını simgeleyen nokta, orijine uzaklığı değişmeden negatif yönde 60° döndürüldüğünde elde edilecek yeni sayılar hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $\sqrt{3} + i$ B) $2\sqrt{3} - 2i$ C) $4i$ D) i E) $4\sqrt{3} + 4i$

3.

$z = 2i$

karmaşık sayısının görüntüsü, orijine olan uzaklığı değiştirilmeden pozitif yönde 90° döndürülürse hangi karmaşık sayının görüntüsüyle çakışır?

A) -2 B) $-2i$ C) 2 D) $2i$ E) $2 - i$

4.

$z = 2 - 2\sqrt{3}i$

karmaşık sayısının görüntüsü, orijine olan uzaklığı değiştirilmeden negatif yönde 240° döndürülürse hangi karmaşık sayının görüntüsüyle çakışır?

A) $2\sqrt{3}i$ B) $2 + \sqrt{3}i$ C) $2 + 2\sqrt{3}i$
D) $2 - \sqrt{3}i$ E) $2 - i$

5.

$z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

karmaşık sayısına karşılık gelen noktanın, orijine uzaklığı değişmeden negatif yönde 15° döndürülmesiyle gelinen noktanın belirttiği karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}i$

6.

Karmaşık düzlemde i, z, iz karmaşık sayılarının görüntü noktalarının doğrusal olması için z sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $1 + i$ B) $-1 + i$ C) -1 D) $-i$ E) 0

7.

$z = a + ia$ olmak üzere

z, iz ve $2i$

karmaşık sayılarının karmaşık düzlemde görüntülerinin eşkenar üçgen belirtmesi için a'nın pozitif değeri kaç olmalıdır?

A) $\sqrt{2} - 1$ B) $\sqrt{2} + 1$ C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
D) $\sqrt{3} - 1$ E) $\sqrt{3} + 1$

8.

Orijine uzaklığı değişmeden orijin etrafında pozitif yönde 180° dönülünce çarpımsal tersine giden sayı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) $1 + i$

9.

Orijine uzaklığı değişmeden orijin etrafında pozitif yönde 90° dönülünce karesine giden sayı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) -1 C) i D) $-i$ E) $1 + i$

10.

z_1 karmaşık sayısı orijin etrafında, orijine uzaklığını değiştirmeden pozitif yönde 120°, z_2 sayısını da negatif yönde 60° döndürünce çakışıyorlar.

Buna göre $z_1 + z_2$ kaçtır?

A) $-i$ B) -1 C) 0 D) 1 E) i

1. A 2. B 3. A 4. C 5. C 6. A 7. D 8. C 9. C 10. C

Cebir Notları

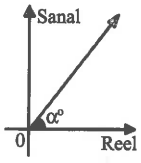
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Argümenti Bilinen z'leri Çizmek

Argümenti Bilinen Karmaşık Sayıların Düzlemdeki Görüntüleri. Reeli ve sanalı bilinen bir karmaşık sayıyı resmetmeyi biliyoruz. Modülü ve argümenti bilinen karmaşık sayıların da görüntülerini biliyoruz. Şimdi sadece argümenti bilinen karmaşık sayıların görüntülerini çizeceğiz. Örnekle açıklayalım:

Örnek. $\text{Arg}(z) = \alpha^\circ$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Orijine uzaklığı yani modülü de verilseydi koşulu sağlayan tek nokta olurdu ama modül verilmediğinden koşulu sağlayan sonsuz nokta vardır. Peki bu noktalar hangi noktalar? O noktayı orijine birleştiren doğru parçasının eğim açısının α° olduğu noktalardır. Bu yüzden grafik orijinden, x ekseniyle pozitif yönde α°'lik açı yapacak şekilde çıkan bir ışındır.



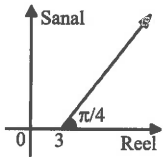
Peki neden bir yarıdoğru değil de ışın çizdik? (0, 0) noktası yani $0 + 0i$ sayısı $0\cdot\text{cis}\,\alpha^\circ$ gibi düşünüldüğünde α'ya hangi değer verilirse verilsin yine $0 + 0i$ sayısını gösterdiğinden... Yani;

$$0 = 0\cdot\text{cis}\,2^\circ$$
$$0 = 0\cdot\text{cis}\,34^\circ$$
$$0 = 0\cdot\text{cis}\,117^\circ$$

eşitliklerinin hepsi doğrudur.

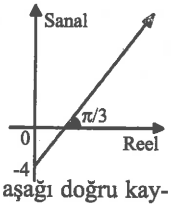
Örnek. $\text{Arg}(z - 3) = \dfrac{\pi}{4}$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Bir karmaşık sayıdan 3 çıkardığımızda, reeli 3 azalacağından düzlemdeki konumu 3 birim sola doğru kayar. Soru da 3 birim sola kaydırılınca argümenti $\pi/4$ olacak noktaları sorduğundan $\text{Arg}(z) = \pi/4$ eşitliğini sağlayan z noktalarını 3 birim sağa doğru kaydırmalıyız.



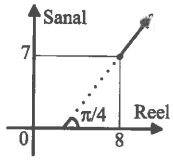
Örnek. $\text{Arg}(z + 4i) = \dfrac{\pi}{3}$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Bir karmaşık sayıya $4i$ eklediğimizde, imajineri 4 artacağından düzlemdeki konumu 4 birim yukarı doğru kayar. Soru da 4 birim yukarı kaydırılınca argümenti $\pi/3$ olacak noktaları sorduğundan $\text{Arg}(z) = \pi/3$ eşitliğini sağlayan z noktalarını 4 birim aşağı doğru kaydırmalıyız.



Örnek. $\text{Arg}(z - 8 - 7i) = \dfrac{\pi}{4}$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüsünü çiziniz.*

Çözüm: Bir karmaşık sayıdan 8 çıkarmak, reelini 8 azaltacağından karmaşık düzlemdeki görüntüsü 8 birim sola kayar. Bir karmaşık sayıdan 7i çıkartmak da imajinerini 7 azaltacağından karmaşık düzlemdeki görüntüsü 7 birim aşağı doğru kayar. O halde 8 birim sola ve 7 birim aşağı doğru kayınca argümenti $\pi/4$ olacak olan noktaları grafik olarak çizmeliyiz. Bunu için de işlemlerin tersini yapmalıyız. Grafik üst şekildeki gibi olur.



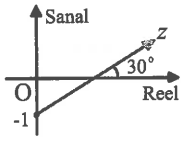
Şimdi son üç örnekte yaptıklarımızın formülünü çıkartacağız. Kanıtı aynı şekilde yapacağız.

Teorem. $\text{Arg}(z - z_0) = \alpha^\circ$ *eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntüleri z_0 noktasından reel eksenle α° açı oluşturacak şekilde çıkan ışındır.*

Kanıt: z_0 sayısına $a + bi$ dersek, z sayısından a ve bi sayılarının çıkartıldığını anlarız. Bu çıkartma sonucunda z'nin grafiği a birim sola ve b birim aşağı doğru kayacaktır. O halde a birim sola ve b birim aşağı doğru kayınca argümenti α° olacak olan noktaları grafik olarak çizmeliyiz. Bunun için de işlemlerin tersini yapmak zorundayız. Bunu yaptığımızda $a + bi$ karmaşık sayısına tekabül eden noktadan yani (a, b) noktasından, x ekseniyle pozitif yönde α°'lik açı oluşturacak şekilde çıkan bir ışın çizmemiz gerektiğini anlıyoruz.

Örnek. *$\text{Arg}(z+i)=30^\circ$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının görüntülerini çiziniz.*

Çözüm: $\text{Arg}(z+i)=30^\circ$ eşitliğini $\text{Arg}(z-(-i))=30^\circ$ şekline dönüştürürsek, $(0,-1)$ noktasından, x ekseniyle pozitif yönde 30°'lik açı yapacak şekilde çıkan bir ışın çizmeliyiz.



Örnek. *$\text{Arg}(z-2)=\frac{\pi}{3}$ eşitliğini sağlayan z sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü olan ışın için hangisi doğrudur?*

A) $(2, 0)$'dan geçip, reel eksenle 60° açı yapar.
B) $(0, 2)$'den geçip, reel eksenle 60° açı yapar.
C) $(-2, 0)$'dan geçip, reel eksenle 60° açı yapar.
D) $(0, -2)$'den geçip, reel eksenle 60° açı yapar.
E) $(2, 0)$'dan geçip, reel eksenle -60° açı yapar.

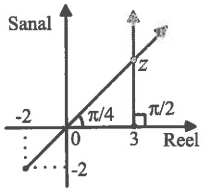
Çözüm: $\text{Arg}(z-(2+0i))=\frac{\pi}{3}$ eşitliğine göre $(2, 0)$ noktasından çıkıp reel eksenle 60°'lik açı yapan ışın doğru cevap olacaktır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$\text{Arg}(z+2+2i)=\frac{\pi}{4}$ ve $\text{Arg}(z-3)=\frac{\pi}{2}$ koşullarını sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $2+2i$ D) $3+3i$ E) $3+4i$

Çözüm: $\text{Arg}(z+2+2i)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları $(-2, -2)$ noktasından çıkıp reel ekseni pozitif yönde 45°'lik açı yapacak şekilde çizilen ışını belirtirler.



$\text{Arg}(z-3)=\frac{\pi}{2}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları da $(3, 0)$ noktasından çıkıp reel ekseni pozitif yönde 90°'lik açı yapacak şekilde çizilen ışını belirtirler.

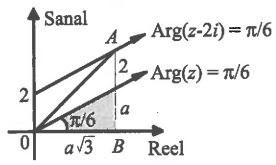
Sorulan z sayısı her iki koşulu da sağladığından her iki ışının da üstünde olmalı yani onların kesişimi olmalıdır. İkizkenar dik üçgen fark edilirse $z = 3 + 3i$ olduğu görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$|z|=2\sqrt{7}$ olmak üzere $\text{Arg}(z-2i)=\frac{\pi}{6}$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2+2i$ B) $2-2i$ C) $2+4i$
D) $2\sqrt{3}-2i$ E) $2\sqrt{3}+4i$

Çözüm: Esas argümenti $\pi/6$ olan karmaşık sayılar, şekilde gösterildiği üzere orijinden çıkan ışını oluştururlar. Bizim aradığımız z sayısı bu ışın üstünde değildir. Çünkü bizim z sayısından $2i$ çıkarınca bu ışın üstünde oluyormuş. $2i$ çıkarmak sanal eksene göre 2 birim aşağıya kaymak olduğundan, aradığımız z sayısı üstteki ışın üzerindedir. Bu ışın üzerinde modülü $2\sqrt{7}$ olan tek nokta vardır. Şekilde A ile isimlendirilmiş olan nokta aradığımız noktadır. Taranmış dik üçgen 30°-60°-90° üçgeni olduğundan Pisagor Teoremi yazabiliriz.



$$\left(a\sqrt{3}\right)^2+(a+2)^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2$$
$$3a^2+a^2+4a+4=28$$
$$4a^2+4a-24=0$$
$$4(a-2)(a+3)=0$$

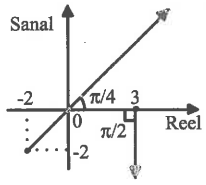
ve $a > 0$ olduğundan $a = 2$ olmalıdır. Bu durumda aranan z noktasının reeli $2\sqrt{3}$ ve imajineri 4 olarak bulunur. O halde $z=2\sqrt{3}+4i$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$\text{Arg}(z+2+2i)=\frac{\pi}{4}$ ve $\text{Arg}(z-3)=\frac{3\pi}{2}$ koşulları sağlayan z karmaşık sayısı (varsa) aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $2+2i$ D) $2-2i$ E) Yoktur

Çözüm: $\text{Arg}(z+2+2i)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları $(-2, -2)$ noktasından çıkıp reel ekseni pozitif yönde 45°'lik açı yapacak şekilde çizilen ışını belirtirler.



$\text{Arg}(z-3)=\frac{3\pi}{2}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları da $(3, 0)$ noktasından çıkıp reel ekseni negatif yönde 90°'lik açı yapacak şekilde çizilen ışını belirtirler. Sorulan z sayısı her iki koşulu da sağladığından her iki ışının da üstünde olmalı ama bu ışınlar kesişmediğinden böyle bir z sayısı yoktur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\text{Arg}(z-1)=\frac{2\pi}{3}$$

eşitliğini sağlayan z sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü olan ışın için hangisi doğrudur?

A) (0, 0)'dan çıkıp reel eksenle 60° açı yapar.
B) (1, 0)'dan çıkıp reel eksenle 60° açı yapar.
C) (1, 0)'dan çıkıp reel eksenle 120° açı yapar.
D) (1, 1)'den çıkıp reel eksenle 120° açı yapar.
E) (–1, 0)'dan çıkıp reel eksenle 120° açı yapar.

2.

$$\text{Arg}(z-i)=\frac{7\pi}{6}$$

eşitliğini sağlayan z sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü olan ışın için hangi bilgi doğrudur?

A) (1, 0)'dan çıkıp reel eksenle 120° açı yapar.
B) (0, 1)'den çıkıp reel eksenle 210° açı yapar.
C) (1, 0)'dan çıkıp reel eksenle 240° açı yapar.
D) (0, 1)'den çıkıp reel eksenle 150° açı yapar.
E) (0, 1)'den çıkıp reel eksenle 120° açı yapar.

3.

$$\text{Arg}(z+3)=\frac{\pi}{12}$$

eşitliğini sağlayan z sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–3, 0)'dan geçip, eğimi tan 15° olan doğru
B) (–3, 0)'dan geçip, eğimi tan 75° olan doğru
C) (0, –3)'dan geçip, eğimi tan 15° olan ışın
D) (3, 0)'dan geçip, eğimi tan 75° olan ışın
E) (–3, 0)'dan geçip, eğimi tan 15° olan ışın

4.

$$\text{Arg}\big(z(1-i)\big)=\frac{4\pi}{3}$$

olduğuna göre Arg(z) kaç radyan olur?

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{19\pi}{12}$

5.

$$\text{Arg}(z+2-3i)=\frac{2\pi}{3}$$

şartını sağlayan z karmaşık sayıların görüntüsü hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) (–2, 3) uçlu, 120° eğim açılı yarı doğru
B) (2, –3) uçlu, 120° eğim açılı yarı doğru
C) (–2, 3) uçlu, 120° eğim açılı ışın
D) (2, –3) uçlu, 60° eğim açılı yarı doğru
E) (–2, 3) uçlu, 60° eğim açılı ışın

6.

$z=x+yi$ olmak üzere

$$\text{Arg}(z+i)=\frac{\pi}{4}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı için aşağıda verilen bağıntılardan hangisi doğrudur?

A) $y=x-1$ B) $y=x+1$ C) $y=-x-1$
D) $y=-x+1$ E) $y=x-2$

7.

$|z-1|=1$ olmak üzere

$$\text{Arg}(z-1)=\frac{\pi}{5}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının esas argümenti kaç derecedir?

A) 180° B) 72° C) 36° D) 18° E) 0°

8.

$$|z|=3 \text{ ve } \text{Arg}(z-\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

olduğuna göre z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3}i$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ C) $\frac{3}{2}+\sqrt{3}i$
D) $\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)i$ E) 3.cis 30°

1. C 2. B 3. E 4. E 5. C 6. A 7. D 8. E

CEVAPLI TEST 2

1.
$|z| \le 5$ olmak üzere

$$\text{Arg}(z+3)=\frac{\pi}{2}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıları hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $\text{Re}(z)=-3,\ |\text{Im}(z)| \le 5$ B) $\text{Re}(z)=-3,\ |\text{Im}(z)|=5$
C) $\text{Re}(z)=-3,\ |\text{Im}(z)| \ge 5$ D) $\text{Re}(z)=3,\ |\text{Im}(z)| \le 5$
E) $\text{Re}(z)=3,\ |\text{Im}(z)|=5$

2.

$$\text{Arg}(z+2)=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Arg}(z+i)=\frac{\pi}{2}$$

eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}i$ E) $\sqrt{3}i$

3.

$$\text{Arg}(z-3)=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(z-i)=\frac{\pi}{4}$$

eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3+4i$ B) $2+3i$ C) $3-i$ D) $1+3i$ E) $-3i$

4.

$$\text{Arg}(z-2)=\frac{\pi}{5}$$

$$\text{Arg}(z+2)=\frac{\pi}{3}$$

eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2+2i$ B) $2-2i$ C) $2+\sqrt{3}i$ D) $\varnothing$ E) 0

5.

$$\text{Arg}(z+2)=30^\circ$$

$$\text{Arg}(z-6)=120^\circ$$

olduğuna göre z aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) $4-i$ C) $2\sqrt{3}i$ D) $4+2\sqrt{3}i$ E) $2+4i$

6.

$$\text{Arg}(z+i)-\text{Arg}(z-3i)=\frac{\pi}{2}$$

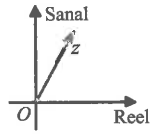
eşitliğini sağlayan karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

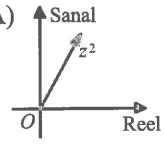
A) Doğru B) Doğru parçası C) Parabol
D) Tam Çember E) Yarım çember

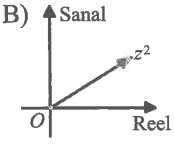
7.
Hangi seçenekteki z sayılarının görüntüleri, Arg $z = \alpha$ eşitliğini sağlayan z sayılarının görüntüleriyle aynıdır?

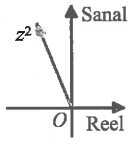
A) Arg $(z+1) = \alpha$ B) Arg $(z-i) = \alpha$
C) Arg $(2z) = \alpha$ D) Arg $(z^2) = \alpha$
E) Arg $(-z) = \alpha$

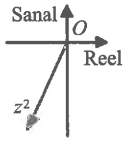
8.
Yandaki ışın Arg $(z) = \alpha$ eşitliğini sağlayan z sayılarının görüntülerinden oluşmaktadır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi z^2 sayılarının görüntüsü olabilir?

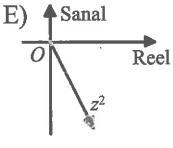


A)


B)


C)


D)


E)


1. A 2. D 3. A 4. D 5. D 6. E 7. C 8. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Logaritma Fonksiyonu

Şu an için $2^x = 32$ gibi eşitlikleri çözebiliyoruz. Üslü sayılar dersinde, uygun şartlar altında $a^x = a^y$ ise $x = y$ olduğunu anlatmış ve kanıtlamıştık, o halde $2^x = 2^5$ ise $x = 5$'tir.

Peki, $2^x = 3$ eşitliğini çözebilir misiniz?

Ben şahsen çözemem, çözebilecek bir babayiğit de tanımıyorum. Üç aşağı beş yukarı kaçtır söylerim ama ben ondan bahsetmiyorum. Örneğin bu sayının 1'den büyük ve 2'den küçük olduğu kesin bir kere. Hatta 1,5'tan da küçük.

İşte, logaritma dersi $2^x = 3$ eşitliğini sağlayan 1 ile 1,5 arasındaki bu x değerine bir isim verecek. Biz de o sayı tam olarak kaçtır bilmesek bile o sayının gerçek değerleriyle işlem yapabileceğiz. Aslında her derste de böyle bir durum yok mu? Geçen dersimizi hatırlayın, cis 62°'nin ve cis 118°'in gerçek değerlerini bilmememize rağmen bu iki sayının çarpımının

$$\text{cis } 62^\circ \cdot \text{cis } 118^\circ = \text{cis } 180^\circ = -1$$

olduğunu bulabiliyorduk. Daha daha öncesine gidin. Aramızda sin 17° ve sin 73° sayılarının gerçek değerlerini bilen biri olmamasına karşın hepimiz,

$$\sin^2 17^\circ + \sin^2 73^\circ = 1$$

eşitliğini bulabiliyoruz. Her şey bu sayılara birer isim vermekle başlıyor yani. Gerisi kendiliğinden geliyor.

Bundan böyle ''*a'nın kaçıncı kuvveti b'dir*?'' sorusunun cevabı ''$\log_a b$'' olacak. Dedik ve oldu!

Her şey bu kadar basit değil tabii ki... Şimdi kırdığımız cevizleri, devirdiğimiz çamları düzeltmek gerekiyor. Çünkü üslü sayılar dersini hatırlarsanız, her a ve b değeri için böyle bir sorunun sorulamayacağını da hatırlarsınız. O zaman her a ve b değeri için $\log_a b$ diye bir şey de yazılamaz. Aklıma ilk gelen örnek, ''1'in kaçıncı kuvveti 8'dir?'' sorusunun saçmalığı oldu. Sorun 8'de değil, 8 yerine 7 deseydik de saçma olurdu. Sorun 1'de. O halde $\log_a b$ ifadesinde a değeri 1 olmamalı. Ayrıca, her a ve b değeri için böyle bir eşitlik yazabilmemiz için a ve b değerlerinden her ikisi de pozitif olmalı. Sadece birinin bile negatif veya sıfır olması halinde, soru yine saçma olur. Denemesi bedava!

Kaynaklar, bu tür birtakım hesaplamaların kolaylıkla yapılmasını sağlayan logaritmayı ilk kullanan kişinin John Napier (1550-1617) olduğunu göstermektedir.

Şimdi matematiksel tanımı anlayacak duruma gelmiş olmamız lazım.

Logaritma. $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $a^x = b$ denklemini sağlayan x sayısına $\log_a b$ denir ve bu sayı **logaritma a tabanında b** veya **b'nin a tabanında logaritması** diye okunur.

Tekrar tekrar söylemekte yarar var, negatif sayıların ve sıfırın herhangi bir tabanda logaritması yoktur.

Buradan anladığımız, uygun şartlar altında her logaritmik denklem üstele ve her üstel denklem de gerek görülürse logaritmiğe çevrilebilir. Logaritmayı anlayamayan vatandaş üslü ifadeler dersine çalışmalıdır, her logaritma sorusu, vaktimizi alsa da üslü sayı kurallarıyla da çözülebilir.

Şimdi bu çevirmelere birkaç örnek vereceğiz:

$$2^4 = 16 \text{ diye } \log_2 16 = 4,$$
$$4^3 = 64 \text{ diye } \log_4 64 = 3,$$
$$m^5 = 7 \text{ diye } \log_m 7 = 5,$$
$$3^1 = 3 \text{ diye } \log_3 3 = 1,$$
$$12^2 = 144 \text{ diye } \log_{12} 144 = 2\text{'dir.}$$

Fakaaat,

$$(-3)^2 = 9 \text{ diye } \log_{-3} 9 = 2$$

yazamadığımız gibi

$$(-2)^3 = -8 \text{ diye } \log_{-2} (-8) = 3$$

de yazamayız! $\log_a b$ ifadesinde a'nın da b'nin de pozitif reel sayı olması gerektiğini hatırlayın. Hatta taban da 1'den farklı olmalı...

Örnek. $\log_8 x = 0$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) 0 C) 1 D) 8 E) 64

Çözüm: Şu an için logaritma bilgimiz kısıtlı olduğundan, logaritmik denklemi üstel denkleme çevireceğiz.

$$\log_a b = c \text{ ise } a^c = b$$

olacağından $\log_8 x = 0$ denkleminden $x = 8^0$ yani $x = 1$ eşitliği elde edilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_8 x = 1$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) 0 C) 1 D) 8 E) 64

Çözüm: Yine logaritmik denklemi üstel denkleme çevireceğiz.

$$\log_a b = c \text{ ise } a^c = b$$

olduğundan $\log_8 x = 1$ denkleminden $x = 8^1$ yani $x = 8$ eşitliği elde edilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $a > 1$ *olmak üzere* $\log_a(a^6) = x + 2$ *eşitliğini sağlayan x sayısı kaça eşittir?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Yine denklemimizi üstele çevireceğiz.

$$\log_a b = c \text{ ise } a^c = b$$

olacağından $a^{x+2} = a^6$ yani $x + 2 = 6$ olur. O halde $x = 4$

Doğru cevap: B.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere*

$$\log_2 x = \log_y \frac{1}{2} = 4$$

eşitliğini sağlayan x ve y sayıları için y^x *kaçtır?*

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $\log_2 x = 4$ diye $x = 2^4 = 16$'dır. $\log_y \frac{1}{2} = 4$ diye de $y^4 = \frac{1}{2}$ olur. Bize y^x yani y^{16} soruluyor. İkinci eşitliğin 4'üncü kuvvetini alırsak $y^{16} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\log_2 64 + \log_{10} 1000 - \log_{100} 0{,}01$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $\log_2 64 = a$ olsun. $2^a = 64$ olduğundan $a = 6$'dır.
$\log_{10} 1000 = b$ olsun. $10^b = 1000$ diye $b = 3$'tür.
$\log_{100} 0{,}01 = c$ olsun. $100^c = 0{,}01$ diye $c = -1$'dir.
$a + b - c$ sorulduğundan $a + b - c = 6 + 3 - (-1) = 10$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{\log_2 \sqrt{3}}{\log_{\sqrt{3}} 3}$ *oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $\log_3 \sqrt{3} = a$ olsun. $3^a = \sqrt{3}$ diye $a = 1/2$'dir.
$\log_{\sqrt{3}} 3 = b$ olsun. $\sqrt{3}^b = 3$ diye $b = 2$'dir. O halde

$$\frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_{\sqrt{3}} 3} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -1$ *eşitliğini sağlayan x sayısı kaçtır?*

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 27

Çözüm: $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ olduğundan $\frac{1}{x} = 27$ olur. Buradan da $x = \frac{1}{27}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1984 ÖYS]. $\log_2(\log_{10} x) = 3$ *eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 10^2 B) 10^3 C) 10^6 D) 10^8 E) 10^9

Çözüm: Verilen logaritmik eşitlik üstele çevrilirse

$$\log_{10} x = 2^3$$

olur ki buradan $x = 10^8$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdaki değerlerden hangisi* $\sin(\log_4 x) = 0$ *eşitliğini sağlar?*

A) $4^{-\pi}$ B) $2^{-\pi}$ C) 2^{π} D) 8^{π} E) 4

Çözüm: k bir tam sayı olmak üzere $\sin k\pi = 0$ olduğundan $\log_4 x = k\pi$ yani $x = 4^{k\pi}$ olmalıdır.
$k = -1$ için $x = 4^{-\pi}$ olur ki bu da A şıkkında mevcuttur.

Doğru cevap: A.

Logaritma Fonksiyonunun Tanım Kümesi. Dersin başında da açıkladığımız üzere $\log_a b$ ifadesinin tanımlı olması, hem a'nın hem de b'nin pozitif olması, bunun yanında da $a \neq 1$ olması ile mümkündür.

Şimdi bu koşullarla ilgili örnekler çözeceğiz.

Örnek. *$f(x) = x + \log_4(x + 5)$ fonksiyonunun tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -5)$ B) $(-5, 0)$ C) $(-5, \infty)$
D) $(5, \infty)$ E) $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tanım aralığını bulmak için sadece $\log_4(x + 5)$ ifadesinin tanım aralığını bulmak yeterlidir. Çünkü o aralıktaki hiçbir değer x'i tanımsız yapamaz. Öyleyse;

$$x + 5 > 0 \text{ olmalı diye } x > -5$$

olmalıdır. Buradan en geniş tanım aralığı $(-5, \infty)$ olarak bulunur.

Doğru Cevap: C.

Örnek. *$f(x) = \log_x(16 - x^2)$ fonksiyonu kaç tane x tam sayısı için tanımlıdır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $y = \log_x(16 - x^2)$ ifadesinin tanımlı olması için

$$16 - x^2 > 0, x > 0 \text{ ve } x \neq 1$$

eşitsizliklerinin sağlanması gerekmektedir.

İlk eşitsizlikten $x \in (-4, 4)$ buluruz, bunu ikinci eşitsizlikle birlikte düşünürsek cevap $x \in (0, 4)$ olur. Sonuncusunu da hesaba katarsak

$$x \in (0,1) \cup (1, 4)$$

olur, o halde fonksiyon $\{2, 3\}$ değerleri olmak üzere iki tane tam sayı değeri için tanımlıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$f(x) = \log_x(\sin x)$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(0, 2\pi)$ B) $(0, \pi)$ C) $(0, \pi/2)$
D) $(0, 2\pi) - \{1\}$ E) $(0, \pi) - \{1\}$

Çözüm: Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için hem x hem de $\sin x$ pozitif olmalıdır, bir de x, 1 olmamalıdır. Verilen aralıkta $\sin x$'in pozitif olduğu yerler $(0, \pi)$ aralığıdır. 1 değeri bu aralığa ait olduğundan onu atmalıyız. O halde çözüm aralığı $(0, \pi) - \{1\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$f(x) = \log_{(x-5)}\left(\frac{x-2}{10-x}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığında kaç farklı tam sayı vardır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $y = \log_{(x-5)}\left(\frac{x-2}{10-x}\right)$ ifadesinin tanımlı olması için

$$\frac{x-2}{10-x} > 0,\ x-5 > 0 \text{ ve } x-5 \neq 1$$

eşitsizliklerinin sağlanması gereklidir.

İlk eşitsizlikten $x \in (2, 10)$ buluruz, bunu ikinci eşitsizlikle birlikte düşünürsek, o zaman cevap $x \in (5, 10)$ olur. Sonuncusuna göre de x değeri 6 olmamalıdır. O halde en geniş tanım aralığı

$$(5, 10) - \{6\}$$

olarak bulunur. Demek ki x; 7, 8, 9 olmak üzere 3 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = \log_{(x-1)}\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?*

A) $(-\infty, 2)$ B) $(2, 3)$ C) $(2, \infty)$
D) $(1, 2) \cup (3, \infty)$ E) $(1, 2)$

Çözüm: $y = \log_{(x-1)}\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ ifadesinin tanımlı olması için

$$\frac{x-2}{x-3} > 0,\ x-1 > 0 \text{ ve } x-1 \neq 1$$

eşitsizliklerinin sağlanması gereklidir.

İlk eşitsizlikten $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ buluruz, bunu ikinci eşitsizlikle birlikte düşünürsek, o zaman cevap

$$x \in (1, 2) \cup (3, \infty)$$

olur. Sonuncusuna göre de x değeri 2 olmamalıdır, e zaten olamıyor. O halde en geniş tanım aralığı

$$(1, 2) \cup (3, \infty)$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Logaritma Fonk. Özellikleri

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri. Aşağıda kanıtladığımız teoremlerde, her defasında $a\in\mathbb{R}^+$ ve $a\neq 1$ olup $x, y\in\mathbb{R}^+$ için yazmaktan özellikle çekindim. Çünkü önce olayları, ilişkileri anlayın istedim.

Ayrıca bir logaritmik ifadede taban verilmemişse taban olmadığı için değil, 10 olduğu için verilmemiştir. Yani $\log x$ ifadesi $\log_{10} x$ demektir. 10 tabanında logaritmik fonksiyona **bayağı logaritma fonksiyonu** denir.

Teorem. *1 sayısının uygun her tabandaki logaritması sıfırdır.*

$$\log_a 1 = 0$$

Kanıt:

$$\log_a 1 = w$$

olsun. $a^w = 1$ olacağından ve a'nın 0 olmadığını bildiğimizden $w = 0$'dır.

Örnek. *$x\in(0, \pi)$ olmak üzere $\log_3(\sin x) = 0$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) $\pi/6$ B) $\pi/4$ C) $\pi/3$ D) $\pi/2$ E) $2\pi/3$

Çözüm: $3^0 = \sin x$ yani $\sin x = 1$ olması gerektiğinden eşitliği sağlayan x değeri $\pi/2$'dir.

Doğru cevap: D.

Teorem. *1'den farklı pozitif bir sayının kendi tabanındaki logaritması 1'dir.*

$$\log_a a = 1$$

Kanıt:

$$\log_a a = w$$

olsun. $a^w = a$ olacağından ve a'nın 0 ve 1 olmadığını bildiğimizden $w = 1$'dir.

Örnek. $\log_3(\log_2 x) = 1$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 8

Çözüm: Bir önceki teoremden dolayı $\log_2 x = 3$ olmalıdır. O halde $x = 2^3 = 8$.

Doğru cevap: E.

Örnek [1997 ÖYS]. $\log_2\left[2\cdot\log_3\left(3\cdot\log_4(x+2)\right)\right]=1$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: En büyük parantez içinden başlıyoruz.

$$\log_2\left[2\cdot\log_3\left(3\cdot\log_4(x+2)\right)\right]=1$$
$$2\cdot\log_3\left(3\cdot\log_4(x+2)\right)=2$$
$$\log_3\left(3\cdot\log_4(x+2)\right)=1$$
$$3\cdot\log_4(x+2)=3$$
$$\log_4(x+2)=1$$
$$x+2=4$$

olduğundan $x = 2$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, b ve c, 1'den büyük reel sayılardır.*

$$\log_a b = \log_b c = \log_c a$$

eşitliğine göre $\log_{a+b}(b + c)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) $2a$ E) a^2

Çözüm: Soruda verilen eşitlik $a = b = c$ olduğunu anlatmaktadır. Önce neden böyle olduğunu gösterelim.

$$\log_a b = \log_b c = \log_c a = x$$

diyelim.

$$a^x = b$$
$$b^x = c$$
$$c^x = a$$

eşitliklerini taraf tarafa çarparsak $(a\cdot b\cdot c)^x = a\cdot b\cdot c$ eşitliğinden $x = 1$ bulunur. Bu da $a = b = c$ demektir. O halde

$$\log_{a+b}(b + c) = \log_{2a}(2a) = 1$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Teorem. *x^n sayısının a tabanındaki logaritması, x sayısının a tabanındaki logaritmasının n katıdır.*

$$\log_a x^n = n\cdot\log_a x$$

Kanıt: $\log_a x^n = c$ olsun. $a^c = x^n$ olur. Eşitliğin her iki yanında da üsleri n'ye bölersek,

$$a^{\frac{c}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x$$

olur ki bu da $\frac{c}{n} = \log_a x$ demek olur. Buradan

$$\log_a x^n = c = n\cdot\log_a x$$

olur.

Örnek. $\log_3 9 + \log_2 8 + \log_4 64$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\cdot\log_3 3 = 2$$
$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\cdot\log_2 2 = 3$$
$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\cdot\log_4 4 = 3$$

olduğundan

$$\log_3 9 + \log_2 8 + \log_4 64 = 2 + 3 + 3 = 8.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1981 ÖYS]. $y = \log_7 \frac{1}{x}$ *ve* $x = 7^5$ *olduğuna göre y'nin değeri kaçtır?*

A) -5 B) $\frac{-1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) 5 E) 7

Çözüm: $x = 7^5$ ise $\frac{1}{x} = 7^{-5}$ olur. Bu durumda

$$y = \log_7 \frac{1}{x} = \log_7 7^{-5} = -5$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1982 ÖYS)]. $\sqrt{(\log 2)^2 + (\log\frac{1}{2})^2}$ *ifadesinin değeri nedir?*

A) 0 B) $\log\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}\cdot\log\frac{1}{2}$ D) $\log\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}\cdot\log 2$

Çözüm: $\log(\frac{1}{2}) = \log 2^{-1} = -\log 2$

olduğundan

$$\sqrt{(\log 2)^2 + (\log\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\log 2)^2 + (-\log 2)^2}$$
$$= \sqrt{2\cdot(\log 2)^2} = \sqrt{2}\cdot|\log 2| = \sqrt{2}\cdot\log 2$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1983 ÖYS]. $\log_a c = x$, $\log_b c = y$ *olduğuna göre x'in a, b, y türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\log_{ab} y$ B) $\frac{\log_b a}{y}$ C) $\frac{\log_a b}{y}$

D) $y\cdot\log_b a$ E) $y\cdot\log_a b$

Çözüm: $a^x = c$ ve $b^y = c$ olduğundan $a^x = b^y$ olur. Eşitliğin iki yanının a tabanındaki logaritması alınırsa

$$\log_a a^x = \log_a b^y$$
$$x = \log_a b^y$$
$$x = y\cdot\log_a b$$

olduğu görülür.

Doğru cevap: E.

Örnek [1995 ÖYS]. $\frac{4\cdot\log_3 x}{\log_3 9} = \log_3\frac{27}{x}$ *denklemini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Çözüm: $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\cdot\log_3 3 = 2\cdot 1 = 2$

olduğundan soruda verilen eşitlik $2\cdot\log_3 x = \log_3\frac{27}{x}$ haline dönüşür.

$$\log_3 x^2 = \log_3\frac{27}{x}$$
$$x^2 = \frac{27}{x}$$
$$x^3 = 27$$

bulunur. O halde $x = 3$'tür.

Doğru cevap: C.

Teorem.

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\cdot\log_a x$$

Kanıt: $\log_{a^m} x = c$ olsun.

$$(a^m)^c = x = a^{m\cdot c}$$

olur ki bu da $m\cdot c = \log_a x$ demek olur. Buradan

$$\log_{a^m} x = c = \frac{1}{m}\cdot\log_a x$$

bulunur.

Örnek [1980 ÖSS]. $\log_2 a = \log_{\frac{1}{2}} b$ *olduğuna göre* $\log(a\cdot b)$*'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 5 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

Çözüm:

$$\log_2 a = \log_{\frac{1}{2}} b = \log_{2^{-1}} b = -\log_2 b = \log_2 b^{-1}$$

olduğundan $a = b^{-1}$ olduğunu anlıyoruz. Bu durumda

$$\log(a\cdot b) = \log(b^{-1}\cdot b) = \log 1 = 0$$

olur.

Doğru cevap: E.



Son iki teoremi birleştirerek şöyle bir eşitliğe sahip olmuş oluruz:

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\cdot\log_a x$$

Örneğin,

$$\log_9 81 = \log_{3^2} 3^4 = \frac{4}{2}\cdot\log_3 3 = \frac{4}{2}\cdot 1 = 2,$$

$$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2}\cdot\log_2 2 = \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2},$$

$$\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\cdot\log_2 2 = = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3},$$

$$\log\sqrt[5]{100} = \log 100^{1/5} = \frac{1}{5}\cdot\log 100 = \frac{1}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5},$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{2^3}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\cdot\log_2 2 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Örnek [1989 ÖSS]. *$a^5 = b$ olduğuna göre $\log_b a^3$ kaçtır?*

A) 2 B) 8 C) 15 D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm: Hemen b yerine a^5 yazalım.

$$\log_b a^3 = \log_{a^5} a^3 = \frac{3}{5}\cdot\log_a a = \frac{3}{5}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$\log_a b = x$ olduğuna göre $\log_{(a^2b^3)}(a^5b^4)$ ifadesinin x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{5+4x}{2+3x}$ B) $\frac{2+3x}{5+4x}$ C) $\frac{4+5x}{3+2x}$ D) $\frac{3+2x}{4+5x}$ E) $\frac{5-4x}{2-3x}$

Çözüm: $\log_a b = x$ ise $b = a^x$ olur. Şimdi bize sorulan ifadede b yerine a^x yazıp sadeleştirme yapalım.

$$\log_{(a^2b^3)}(a^5b^4) = \log_{(a^2a^{3x})}(a^5a^{4x})$$

$$= \log_{(a^{2+3x})}(a^{5+4x})$$

$$= \frac{5+4x}{2+3x}\cdot\log_a a = \frac{5+4x}{2+3x}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Eğer bu ifadeler eşitse, bu ifadelerin b tabanındaki logaritmaları da eşit olmalıdır. Bakalım eşitler mi?

$$\log_b\left[a^{\log_b c}\right] \overset{?}{=} \log_b\left[c^{\log_b a}\right]$$

$$\log_b c\cdot\log_b a = \log_b a\cdot\log_b c$$

olduğundan verilen eşitlik doğrudur.

Sonuç. Bundan sonra, eğer işinize yarayacaksa, $a^{\log_b c}$ ifadesinde logaritmanın tabanı olan b değeri aynı kalmak üzere, a ile c'yi yer değiştirebilirsiniz.

Örnek. *$x^{\log 5} = 5^{\log y}$ eşitliğini sağlayan x ve y sayıları için x/y oranı kaçtır?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm: İki yol vereceğiz.

Birinci yol. $x^{\log 5}$ ifadesinde x ile 5 yer değiştirse bir şey olmazdı. O halde $5^{\log x} = 5^{\log y}$ eşitliğinden $x = y$ bulunur. O halde x/y oranı 1'e eşittir.

İkinci yol. Verilen eşitliğin her iki yanının 10 tabanında logaritmasını alalım bakalım, neler olacak?

$$x^{\log 5} = 5^{\log y}$$

$$\log(x^{\log 5}) = \log(5^{\log y})$$

$$\log 5\cdot\log x = \log y\cdot\log 5$$

$$\log x = \log y$$

bulunur ki buradan $x = y$ olduğunu anlarız.
O halde x/y oranı 1'e eşit olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Teorem. *Pozitif reel sayıların çarpımının herhangi bir tabandaki logaritması bu sayıların o tabandaki logaritmaları toplamına eşittir.*

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Kanıt:

$$\log_a x = c \text{ ve } \log_a y = d$$

olsun. Eşitlikleri üstel eşitliğe döndürürsek

$$a^c = x \text{ ve } a^d = y$$

olur. Amacımız $x\cdot y$'li bir eşitlik bulmak olduğundan içimizden bir ses bulduğumuz eşitlikleri çarpmamızı söylüyor.

$$x\cdot y = a^c\cdot a^d = a^{c+d}$$

olduğundan

$$\log_a(x\cdot y) = c + d = \log_a x + \log_a y$$

olur ki, kanıt bitmiştir.

Örnek [1982 ÖYS]. $\log_5 3+\log_5 a=1$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Bir önceki teoreme göre

$$\log_5 3+\log_5 a=\log_5(3\cdot a)$$

olur.

$$\log_5(3\cdot a)=1$$

eşitliğinden de $3a=5$ yani $a=\frac{5}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\log_3 2=x,$$
$$\log_3 5=y,$$
$$\log_3 7=z$$

iken $\log_3 700$ *sayısını x, y, z cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-2(x+y)+z$ B) $2(x+y)+z$ C) $-2(x-y)+z$
D) $2(x-y)-z$ E) $2(x+y)-z$

Çözüm:

$$\log_3 700=\log_3(2^2\cdot 5^2\cdot 7)$$
$$=\log_3 2^2+\log_3 5^2+\log_3 7$$
$$=2\cdot\log_3 2+2\cdot\log_3 5+\log_3 7$$
$$=2(x+y)+z$$

Doğru cevap: B.

Örnek[1996 ÖYS].

$$\log_{10} 2=a$$
$$\log_{10} 3=b$$

olduğuna göre $\log_{10}72$*'nin a ve b türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2b-3a$ B) $3a-b$ C) $3a-2b$
D) $3a+2b$ E) $2a+3b$

Çözüm: Taban değeri 10 olduğundan yazmasak da olur.

$$\log 72=\log(2^3\cdot 3^2)$$
$$=\log 2^3+\log 3^2$$
$$=3\cdot\log 2+2\cdot\log 3$$
$$=3a+2b$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1986 ÖYS].

$$\log 1656=a$$
$$\log 2=b$$
$$\log 3=c$$

olduğuna göre log 23*'ün değeri nedir?*

A) $a-2b-3c$ B) $a-3b-2c$ C) $a-b-3c$
D) $a-2b-c$ E) $a-b-c$

Çözüm: Bu gibi sorularda logaritması verilen en büyük sayının bulunduğu denklemi kurcalayarak işlemlere başlanır.

$$\log 1656=\log(2^3\cdot 3^2\cdot 23)$$
$$\log 1656=\log 2^3+\log 3^2+\log 23$$
$$\log 1656=3\cdot\log 2+2\cdot\log 3+\log 23$$
$$a=3b+2c+\log 23$$

olduğundan $\log 23=a-3b-2c$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\log_{10!} 6!+\log_{10!} 7!$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 10 E) 10!

Çözüm: Önce 6!·7! sayısını hesaplayalım.

$$6!=720=10\cdot 9\cdot 8$$

olduğundan

$$6!\cdot 7!=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!=10!$$

yapar. O halde

$$\log_{10!} 6!+\log_{10!} 7!=\log_{10!}(6!\cdot 7!)=\log_{10!}10!=1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\log(a^4\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{c})$$

sayısını a, b ve c'nin logaritmaları türünden yazınız.

Çözüm:

$$\log(a^4\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{c})=\log a^4+\log\sqrt{b}+\log\sqrt[3]{c}$$
$$=4\cdot\log a+\log b^{\frac{1}{2}}+\log c^{\frac{1}{3}}$$
$$=4\cdot\log a+\frac{1}{2}\cdot\log b+\frac{1}{3}\cdot\log c$$

Örnek. $A=\log\frac{3}{4}+\log\frac{160}{3}+\log\frac{5}{2}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $A=\log(\frac{3}{4}\cdot\frac{160}{3}\cdot\frac{5}{2})=\log 100=2.$

Doğru cevap: B.

Örnek. 2^x *ifadesini asal sayı yapan* x*'in birbirinden farklı en küçük iki değerinin toplamı kaçtır?*

A) $\log_2 3$ B) $\log_2 6$ C) $\log_2 12$
D) $\log 3$ E) $\log 6$

Çözüm: x büyüdükçe 2^x büyüyeceğinden x'in en küçük değerini alması için 2^x'in en küçük asal sayılara eşit olması gerekir. Bu yüzden 2^x sayısını en küçük 2 asal sayıya eşitlersek, x'in alabileceği en küçük 2 değeri buluruz. $2^x = 2$ eşitliğinden $x_1 = 1$, $2^x = 3$ eşitliğinden $x_2 = \log_2 3$ bulunur. Bu değerlerin toplamı da

$$1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Teorem. *Uygun iki sayının, bölümünün herhangi bir tabandaki logaritması, bölünenin o tabandaki logaritması ile bölenin o tabandaki logaritmasının farkına eşittir.*

$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$$

Kanıt: $\log_a x = c$ ve $\log_a y = d$ olsun. Eşitlikleri üstel eşitliğe döndürürsek

$$a^c = x \text{ ve } a^d = y$$

olur. Amacımız $\frac{x}{y}$'li bir eşitlik bulmak olduğundan içimizden bir ses bulduğumuz eşitlikleri birbirine bölmemizi söylüyor.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$$

olduğundan

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = c - d = \log_a x - \log_a y$$

olur ki, kanıt bitmiştir.

Birkaç örnek verelim:

$$\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$$

$$\log_3 33 - \log_3 11 = \log_3 \frac{33}{11}$$

$$\log_5\left(\frac{a\cdot b}{c}\right) = \log_5(a\cdot b) - \log_5 c = \log_5 a + \log_5 b - \log_5 c$$

Uyarı. Sıkça yapıldığı için biliyorum, onun için yazıyorum. Aşağıda yazanları beyninizin bir köşesine yazın, bu hataları yapmayın.

$$\log_a(x \pm y) \neq \log_a x \pm \log_a y$$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a \frac{x}{y}$$

Örnek. $\log_2(\frac{b}{\sqrt{a}\cdot c^5})$ *sayısını* a, b *ve* c*'nin 2 tabanındaki logaritmaları türünden yazınız.*

Çözüm:

$$\log_2(\frac{b}{\sqrt{a}\cdot c^5}) = \log_2 b - \log_2(\sqrt{a}\cdot c^5)$$
$$= \log_2 b - [\log_2\sqrt{a} + \log_2 c^5]$$
$$= \log_2 b - \log_2\sqrt{a} - \log_2 c^5$$
$$= \log_2 b - \frac{1}{2}\cdot\log_2 a - 5\cdot\log_2 c$$

Örnek. $A = \log_5 3 + \log_5 x - \log_5(x+1)$ *olduğuna göre* A *sayısını tek bir sayının logaritması türünden yazınız.*

Çözüm: Üçünü birden düşünmek hiç zor olmasa da biz önce ilk iki terimi halledeceğiz, sonra son terimi...

$$A = \log_5 3 + \log_5 x - \log_5(x+1)$$
$$= \log_5(3\cdot x) - \log_5(x+1) = \log_5(\frac{3x}{x+1})$$

Örnek. $\log_6 x = a$, $\log_6 y = b$ ve $\log_6 z = c$ *olduğuna göre*

$$6\cdot\log_6\left(\frac{36\cdot x^4\cdot\sqrt{y}}{z^3}\right)$$

ifadesini a, b *ve* c *türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $6+24a+3b-18c$ B) $12+24a+3b-18c$
C) $18+24a+3b-18c$ D) $24+24a+3b-18c$
E) $30+24a+3b-18c$

Çözüm: $6\cdot\log_6\left(\frac{36\cdot x^4\cdot\sqrt{y}}{z^3}\right)$

$$= 6\cdot\left(\log_6 36 + \log_6 x^4 + \log_6\sqrt{y} - \log_6 z^3\right)$$
$$= 6\cdot\left(2 + 4\cdot\log_6 x + \frac{1}{2}\cdot\log_6 y - 3\cdot\log_6 z\right)$$
$$= 12 + 24\cdot\log_6 x + 3\cdot\log_6 y - 18\cdot\log_6 z$$
$$= 12 + 24a + 3b - 18c$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *A pozitif bir dar açı ölçüsü olmak üzere*

$$\log(1-\cos A)=m$$

$$\log\left(\frac{1}{1+\cos A}\right)=n$$

olduğuna göre log (sin *A*) *ifadesinin m ve n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{m-n}{2}$ B) $\frac{m+n}{2}$ C) $m-n$ D) $m+n$ E) $m\cdot n$

Çözüm: Verilen ikinci eşitlikte parantez içini $1-\cos A$ ile çarpıp bölelim.

$$\begin{aligned} n &= \log\left(\frac{1}{1+\cos A}\right) \\ &= \log\left(\frac{1-\cos A}{1-\cos^2 A}\right) \\ &= \log\left(\frac{1-\cos A}{\sin^2 A}\right) \\ &= \log(1-\cos A)-\log(\sin^2 A) \\ &= m-\log(\sin^2 A) \\ &= m-2\cdot\log(\sin A) \end{aligned}$$

olduğundan $2\cdot\log(\sin A)=m-n$ dolayısıyla

$$\log(\sin A)=\frac{m-n}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\log(2a+3b)=\log a+\log b$ *eşitliğini sağlayan b sayısının a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{3a}{a+2}$ B) $\frac{a+1}{a}$ C) $\frac{2a}{a-3}$ D) $\frac{a-2}{3a}$ E) $\frac{a+2}{a-3}$

Çözüm:

$$\log a+\log b=\log(a\cdot b)$$

olduğundan verilen eşitlik $\log(2a+3b)=\log(a\cdot b)$ haline döner. Buradan $2a+3b=a\cdot b$ olduğunu anlarız. *b*'yi bulmak istediğimizden *b*'li ifadeleri bir tarafta, *b*'siz ifadeleri diğer tarafta toplayalım.

$$\begin{aligned} a\cdot b-3b &= 2a \\ b(a-3) &= 2a \\ b &= \frac{2a}{a-3}. \end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1987 ÖYS]. $\log(a+b)=\log a+\log b$ *olduğuna göre b'nin a türünden değeri nedir?*

A) $\frac{a}{a+1}$ B) $\frac{a+1}{a}$ C) $\frac{a}{a-1}$ D) $\frac{a-1}{a}$ E) $\frac{a+1}{a-1}$

Çözüm:

$$\log a+\log b=\log(a\cdot b)$$

olduğundan eşitlik $\log(a+b)=\log(a\cdot b)$ haline döner. Buradan $a+b=a\cdot b$ olduğunu anlarız.

$$\begin{aligned} a\cdot b-b &= a \\ b\cdot(a-1) &= a \\ b &= \frac{a}{a-1}. \end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log(a-b)=\log a-\log b$ *eşitliğini sağlayan a sayısının b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{b^2}{b+1}$ B) $\frac{b+1}{b^2}$ C) $\frac{b}{b-1}$ D) $\frac{b-1}{b}$ E) $\frac{b^2}{b-1}$

Çözüm:

$$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$$

olduğundan eşitlik $\log(a-b)=\log\frac{a}{b}$ haline döner. Buradan $a-b=\frac{a}{b}$ olduğunu anlarız.

$$\begin{aligned} a\cdot b-b^2 &= a \\ a\cdot b-a &= b^2 \\ a(b-1) &= b^2 \\ a &= \frac{b^2}{b-1} \end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. log 2 = 0,30103 *olarak alınırsa* log 5 *kaça eşit olur?*

A) 0,30103 B) 0,50103 C) 1,30103 D) 0,69897 E) 1,69897

Çözüm: 2 ve 5'ler bize 10'u hatırlatıyor. Biz de hemen

$$\log 10=1$$

olduğunu düşünerek,

$$1=\log 10=\log(2\cdot 5)=\log 2+\log 5$$

yazıyoruz. Demek ki

$$\log 5=1-\log 2=1-0{,}30103=0{,}69897.$$

Doğru cevap: D.



$$\log 2 + \log 5 = 1$$

olduğunu ezbere bilmek işinizi kolaylaştırır. Bunun gibi

$$\log 4 + \log 25 = 2,$$
$$\log 2 + \log 50 = 2,$$
$$\log 8 + \log 125 = 3$$

gibi eşitlikleri bu tarz sorular çözerken aklınızda tutunuz.

Örnek[ÖYS 1989].

$$\log 2 = 0{,}301$$
$$\log 3 = 0{,}477$$

olduğunda log 360'*ın değeri kaç olur*?

A) 2,731 B) 2,556 C) 2,043 D) 1,987 E) 1,865

Çözüm:

$$\begin{aligned}\log(360) &= \log(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)\\ &= \log 2^3 + \log 3^2 + \log 5\\ &= 3\cdot\log 2 + 2\cdot\log 3 + 1 - \log 2\\ &= 2\cdot\log 2 + 2\cdot\log 3 + 1\\ &= 2\cdot(0{,}301) + 2\cdot(0{,}477) + 1\\ &= 2{,}556\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. log 2 = *a ve* log 3 = *b olsun.* log 2400 *sayısının a ve b türünden eşiti nedir*?

A) $-3a + b + 2$ B) $-3a - b + 2$ C) $3a + b - 2$
D) $3a + b + 2$ E) $3a - b + 2$

Çözüm: Logaritmasının verildiği veya sorulduğu sayıların hangisi en büyükse, onu ayırarak işe başlamak avantajınızadır.

$2400 = 8\cdot3\cdot100$ diye ayrılırsa,

$$\begin{aligned}\log 2400 &= \log(8\cdot3\cdot100)\\ &= \log 8 + \log 3 + \log 100\\ &= 3\cdot\log 2 + \log 3 + 2\\ &= 3a + b + 2\end{aligned}$$

Çözüm bitti ama tabi $2400 = 8\cdot3\cdot100$ diye ayırmak bir an için aklınıza gelemeyebilirdi, o halde çarpanlarına ayıracak ve $2400 = 2^5\cdot3\cdot5^2$ bulacaktınız. Bu noktada log 5 değerini vermemiş ki ama demiyorsunuz, log 2 + log 5 = 1 eşitliğini hatırlıyorsunuz:

$$\begin{aligned}\log 2400 &= \log(2^5\cdot3\cdot5^2)\\ &= \log 2^5 + \log 3 + \log 5^2\\ &= 5\cdot\log 2 + \log 3 + 2\cdot\log 5\\ &= 5a + b + 2\cdot(1 - a)\\ &= 5a + b + 2 - 2a\\ &= 3a + b + 2\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log 3 = 0{,}47712$$

bilgileri elimizde mevcutken 1*'den* 10*'a kadar sayıların kaç tanesinin logaritmasını hesaplayabiliriz*?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: log 2 ve log 3 değerleri de soruda verilmiş.

$$\log 1 = 0,$$
$$\log 4 = 2\cdot\log 2,$$
$$\log 5 = 1 - \log 2,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3,$$
$$\log 8 = 3\cdot\log 2$$
$$\log 9 = 2\cdot\log 3$$
$$\log 10 = 1$$

olduğundan 9 tanesini hesaplayabiliriz. Sadece log 7 değeri hesaplanamaz.

Doğru cevap: D.

Teorem. $a^{\log_a x} = x$.

Kanıt: Aslında bu teoremi daha ilk sayfada kanıtlamıştık. Çünkü orada "*a'nın kaçıncı kuvveti b'dir*?" sorusunun cevabı bundan sonra "$\log_a b$" olacak demiştik. Doğal olarak $\log_a x$ sayısı da *a*'nın kaçıncı kuvveti *x* ise o sayıya eşittir, o halde $\log_a x$ sayısı *a*'nın üssüne yazılırsa tabii ki cevap *x* olur.

Bir de cebirsel olarak kanıtlayalım:

$$a^{\log_a x} = c$$

olsun. Üstel olan bu denklemi logaritmiğe çevirelim:

$$\log_a c = \log_a x$$

olur ki buradan $c = x$ olduğu kanıtlanmış olur.

Hemen birkaç uygulamasını görelim:

$$9^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5} = 3^{\log_3 5^2} = 25,$$
$$2^{\log_4 7} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 7} = 2^{\log_2 7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}.$$

Bir de şunu dinleyin: $\log_a c$ ifadesinde *a* ile *c*'nin aynı dereceden kuvvetlerini alırsanız eşitlik bozulmayacağından, soruları

$$9^{\log_3 5} = 9^{\log_{3^2} 5^2} = 9^{\log_9 25} = 25$$
$$2^{\log_4 7} = 2^{\log_{\sqrt{4}} \sqrt{7}} = 2^{\log_2 \sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

şeklinde de çözebilirsiniz, çok daha rahattır!

Örnek. $3^{\log_3 x}+5^{\log_5 2}=\log_2 32$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$3^{\log_3 x}+5^{\log_5 2}=\log_2 32$ ise $x+2=\log_2 2^5$

olur, buradan da $x+2=5$ eşitliğinden $x=3$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $64^{\log_4 5}+9^{\log_3 8}$ *sayısı kaçtır?*

A) 185 B) 186 C) 187 D) 188 E) 189

Çözüm:

$$64^{\log_4 5}=4^{3\cdot\log_4 5}=4^{\log_4 5^3}=5^3=125$$

ve

$$9^{\log_3 8}=3^{2\cdot\log_3 8}=3^{\log_3 8^2}=8^2=64$$

olduğundan $64^{\log_4 5}+9^{\log_3 8}=125+64=189$'dur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $3^{2+\log_9 2}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) 9 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) $9\sqrt{2}$ E) 1

Çözüm:

$$3^{2+\log_9 2}=3^2\cdot 3^{\log_9 2}=3^2\cdot 3^{\log_{\sqrt{9}}\sqrt{2}}=9\sqrt{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$ *toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) $2\sqrt{3}$

Çözüm: $\log_a b$ ifadesinde a ile b'nin aynı dereceden kuvvetini almanın sonucu değiştirmediğini göstermiştik. Biz her ikisinin de ½'nci kuvvetini alacağız yani karekökünü alacağız.

$$2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$$
$$2^{\log_{\sqrt{4}}\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}+3^{\log_{\sqrt{9}}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}$$
$$2^{\log_2|\sqrt{3}-2|}+3^{\log_3|2+\sqrt{3}|}$$
$$|\sqrt{3}-2|+|2+\sqrt{3}|$$
$$2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{3}{\log_3 24}+\dfrac{6}{\log_{\sqrt{2}} 4}-\dfrac{12}{\log_{\sqrt[4]{3}} 24}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

Çözüm: Öncelikle sorulan işlemin sonucuna T diyelim.

$$T=\frac{3}{\log_3 24}+\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 4}-\frac{12}{\log_{\sqrt[4]{3}} 24}$$
$$=\frac{3}{\log_3 24}+\frac{6}{\log_{\frac{1}{2^2}} 2^2}-\frac{12}{\log_{\frac{1}{3^4}} 24}$$
$$=\frac{3}{\log_3 24}+\frac{6}{4}-\frac{3}{\log_3 24}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Doğru Cevap: B.

Örnek. $\log_3(3^x-8)=2-x$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 9 B) 3 C) 2 D) 0 E) –1

Çözüm: $3^{2-x}=3^x-8$ yazabiliriz. Burada işlem kolaylığı açısından $3^x=m$ denirse; $\dfrac{9}{m}=m-8$ bulunur. Buradan da $m^2-8m-9=0$ denklemine ulaşılır ve denklem çözülürse; $m=9$ veya $m=-1$ yani

$3^x=9$ veya $3^x=-1$

sonuçlarına ulaşılır ki buradan yalnızca $x=2$ bulunur.

Doğru Cevap: C.

Örnek. $a^{\log_a 3}=8$ *olduğuna göre* $a^{(\log_3 3)^2}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 64

Çözüm: $\log_2 3=b$ olsun. Verilen eşitlik $a^b=8$ halini alır. Sorulan değer de $a^{(b^2)}$ olur.

$$a^{(b^2)}=a^{b\cdot b}=\left(a^b\right)^b=8^b$$

olduğundan

$$8^b=8^{\log_2 3}=8^{\log_{2^3} 3^3}=8^{\log_8 27}=27$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\log_x 27 = -3$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$$\log_2 \sqrt[7]{64}$$

sayısı kaça eşittir?

A) $\frac{3}{7}$ B) $-\frac{3}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{7}$

3.

$$\log_a \sqrt[5]{9} = \frac{4}{5}$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 3 E) 5

4.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81}$$

sayısı kaça eşittir?

A) 6 B) 8 C) -8 D) 4 E) -4

5.

$$\log_a 5 = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 25 B) 50 C) 75 D) 125 E) 150

6.

Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $-\log_8[\log_4(\log_2 16)] = 0$

B) $-\log_2(\log_3 \sqrt[8]{3}) = 3$

C) $\log(\log \sqrt[10]{10}) = -1$

D) $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = \frac{49}{5}$

E) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} + 3^{\log_9 36} = 16$

7.

$$\log_3(x-4) = \log_9(\log_2 16)$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

8.

$$\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$$

sayısı kaça eşittir?

A) -2 B) $-\frac{8}{9}$ C) 2 D) 6 E) $-\frac{2}{3}$

9.

$$\log_3(x-1) = \log_3(\log_2 8)$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

10.

a, b ve c, 1'den büyük reel sayılardır.

$$\log_a b = \log_b c = \log_c a$$

eşitliğine göre $\log_a(bc)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) $2a$ E) a^2

1. A 2. C 3. B 4. C 5. D 6. E 7. B 8. B 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\log_3(\log_2 32) = \log_9 x$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 25 B) 16 C) 81 D) $\sqrt{5}$ E) 9

2.

$$\log_5(\log_3 x) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

3.

$$\log_8 x + \log_4 x = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\sqrt{8}$ B) $\sqrt[5]{4}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt[5]{8}$ E) $\sqrt[3]{4}$

4.

$$\frac{2}{3}\cdot\log a - \frac{1}{2}\cdot\log b + \frac{1}{2}\cdot\log c$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\log\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}\cdot c}$ B) $\log\frac{\sqrt{b\cdot c}}{\sqrt[3]{a^2}}$ C) $\log\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$

D) $\log\frac{a\cdot b}{c}$ E) $\log\frac{\sqrt{b\cdot a}}{\sqrt[3]{c^2}}$

5.

$$-2\cdot\log a + 3\cdot\log b + 5\cdot\log c$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\log\frac{c^5}{a^2\cdot b^3}$ B) $\log\frac{\sqrt{b\cdot c}}{\sqrt[3]{a^2}}$ C) $\log\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot c}{\sqrt{b}}$

D) $\log\frac{a^2\cdot b^3}{c^5}$ E) $\log\frac{b^3\cdot c^5}{a^2}$

6.

$$\log_2(x-5) = \log_{21}(\log_7 7)$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

7.

$$\log_3 2^x = 4$$

eşitliğini sağlayan x sayısı aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) (5, 6) B) (6, 7) C) (7, 8) D) (8, 9) E) (9, 10)

8.

$$\log 2 = a$$

olduğuna göre log 25 sayısı a cinsinden neye eşittir?

A) $1-a$ B) $2-a$ C) $1+a$

D) $2+a$ E) $2-2a$

9.

$$\log_a x = m \text{ ve } \log_b x = n$$

olduğuna göre aşağıdaki eşitliklerden hangisi doğrudur?

A) $n\cdot x = m$ B) $m^a = n^b$ C) $m = n$

D) $a^m = b^n$ E) $x\cdot n\cdot b = m\cdot a$

10.

$$\log x = \frac{6}{7}$$

olduğuna göre $\log\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ sayısı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{36}{49}$

1. A 2. A 3. D 4. C 5. E 6. E 7. B 8. E 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\log_3 x = \log_3 6 + \log_3 10 - \log_3 5$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

2.

$$\log x = 1{,}28$$

olduğuna göre $\sqrt[16]{x^{25}}$ sayısı kaça eşittir?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 100 E) 0

3.

$$\log_5(\log_3 x) = \log_{25} 4$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

4.

$$\log_a 2 + \log_a 4 + \log_a 8 = 24$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 4 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

5.

$$\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \ldots + \log(\tan 89^\circ)$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 10 B) 5 C) 4 D) 1 E) 0

6.

$$\log_3 2 = n$$

olduğuna göre, $\log_3 \frac{9}{2}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $n-2$ B) n^2-1 C) $n+1$ D) $2-n$ E) $1-n$

7.

$$\log_3[24 + \log_4(x-1)] = 3$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 65 B) 64 C) 63 D) 62 E) 60

8.

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{9}}(\log_3 x)\right) = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{5}$ E) $\sqrt[3]{6}$

9.

$$y = \log_{(x-8)}(3x-21)$$

fonksiyonunun tanımlı olmasını sağlayan <u>en küçük</u> x tam sayısı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

10.

$$\log(x \cdot y) = 2 \text{ ve } \log\left(\frac{x}{y}\right) = -2$$

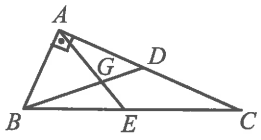
olduğuna göre y kaçtır?

A) 1 B) 10 C) 100 D) 1000 E) $\frac{1}{10}$

1. D 2. D 3. A 4. E 5. E 6. D 7. A 8. B 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
Yandaki şekilde
D ve E orta nokta olup
$|GE| = \log_{27} 81$
olduğuna göre
$|BC|$ **kaçtır?**



A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) $\frac{8}{3}$

2.

$$3^x = a$$

olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?

A) $\log_a 3$ B) $\log_3 a$ C) $\log(3 \cdot a)$
D) $\log(\frac{a}{3})$ E) $\log_3(-a)$

3.

$$\log_{10} 3 = a \text{ ve } \log_{10} 5 = b$$

olduğuna göre $\log_{10}$ 225'in a ve b türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a + b$ B) $a - b$ C) $2a + 2b$
D) $2a - 2b$ E) $2a + b$

4.
log 2'nin yaklaşık değeri 0,3 ve log 3'ün yaklaşık değerini de 0,5 alırsak, log 72'nin yaklaşık değeri kaç olur?

A) 1,5 B) 1,6 C) 1,7 D) 1,8 E) 1,9

5.

$$\log_2 m = \log_{\frac{1}{2}} n$$

ve $m + n = 5$ **olduğuna göre** $m^2 + n^2$ **toplamı kaçtır?**

A) 27 B) 26 C) 25 D) 24 E) 23

6.

$$\frac{\log 27}{\log 3 - \log 81}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

$$\log_{25}(\log_2 a) = \log_4 2$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

8.

$$\log_2(\log_3(x - 1)) = 0$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$\log_2 5 = m$$

olduğuna göre $\log_2 250$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3m + 1$ B) $m + 3$ C) $2m + 1$
D) $2m + 3$ E) $m + 2$

10.

$$\log 20 = a$$

olduğuna göre log 5 sayısı a cinsinden neye eşittir?

A) $a - 2$ B) $2 - a$ C) $\frac{a}{4}$ D) $\frac{4}{a}$ E) $4 - a$

1. A 2. B 3. C 4. E 5. E 6. B 7. D 8. D 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 5

1.

$$\log_2(32!) = a$$

olduğuna göre $\log_2(31!)$ sayısı a cinsinden neye eşittir?

A) $a-5$ B) $a+5$ C) $5a$ D) $\frac{a}{5}$ E) $\frac{a}{32}$

2.

$$\log_3 m = \log_{\frac{1}{3}} n$$

ve $m-n=5$ olduğuna göre m^2+n^2 toplamı kaçtır?

A) 27 B) 26 C) 25 D) 24 E) 23

3.

$$7^{\log_3 x} = 49$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 3

4.

$$100^{\log_4(x-3)} = 10$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

5.

A pozitif bir dar açı ölçüsü olmak üzere

$$\log_{\sin A}(1-\sin A) = m$$

$$\log_{\sin A}\left(\frac{1}{1+\sin A}\right) = n$$

olduğuna göre $\log_{\sin A}(\cos A)$ ifadesinin m ve n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{m-n}{2}$ B) $\frac{m+n}{2}$ C) $m-n$ D) $m+n$ E) $m \cdot n$

6.

$$b^b = a$$

olduğuna göre $\log_a(b^a)$ sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) b^b B) b^{b-1} C) b^{b+1} D) b^b+1 E) a^b

7.

$$(\log_3 x)\cdot\left(5+5^{\log_5(\log_3 x)}\right) = 24$$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 27

8.

x ve y birer sayma sayısıdır.

$$x + \log_5 y = \log_5(101!)$$

olduğuna göre x en çok kaçtır?

A) 21 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

9.

$$36x = x^{\log_6 x}$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 36

10.

$$x^{\log_3 x^8} = 3^{\log_x 3}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) 6 E) 9

1. A 2. A 3. B 4. A 5. A 6. B 7. E 8. C 9. B 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Taban Değiştirme

İki logaritmik ifadeyi toplamak ya da birbirlerinden çıkarmak için tabanlarının birbirlerine eşit olmaları gerekir. Yoksa toplama ya da çıkarma yapılamaz. Ama bazen denklemlerde hiç de birbirleriyle alakaları olmayan tabanlarda logaritmik ifadeler verirler. İşte bu gibi durumlar da canımız isterse eğer, her ifadeyi aynı tabanda olacak hale getirebiliriz. Çok önemli olan aşağıdaki teoremi can kulağıyla dinleyin.

Teorem. $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *olmak üzere* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Kanıt: Burada yapacağımız kanıt, birbirlerine eşit olan sayıların logaritmalarının da eşit olması gerekliliğine dayanıyor.$\log_a x = c$ olsun. Üstele çevrilirse $a^c = x$ olur. a^c ile x sayıları eşit olduğundan herhangi bir tabana göre logaritmaları da eşit olmalıdır. Biz b tabanına göre logaritmasını alalım eşitliğin her iki yanının.

$$\log_b(a^c) = \log_b x$$
$$c \cdot \log_b a = \log_b x$$
$$c = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Hemen birkaç örnek yazalım, siz de inceleyin:

$$\log_{27} 243 = \frac{\log_3 3^5}{\log_3 3^3} = \frac{5}{3}$$

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{\log b}{\log a} = \ldots$$

Örnek [1980 ÜSS]. *a, b, c her biri 1'den farklı üç gerçel sayıdır. Elde yalnız a tabanına göre düzenlenmiş bir logaritma tablosu olduğuna göre* $\log_b c$ *aşağıdaki ifadelerden hangisi ile hesaplanır?*

A) $\log_a(c-b)$ B) $\log_a c - \log_a b$ C) $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ D) $\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$ E) $\log_a b \cdot \log_a c$

Çözüm: Eldeki tablo a tabanına göre düzenlenmiş olduğundan verilen sayıyı a tabanında yazmak gerekir.

$\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ olduğunu kanıtlamıştık.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_3 7 = a$ *ve* $\log_3 10 = b$ *olduğuna göre* $\log 7$ *sayısının a ve b cinsinden eşiti nedir?*

A) $\dfrac{b}{a}$ B) $\dfrac{a}{b}$ C) ab D) $a+b$ E) $\dfrac{7a}{10b}$

Çözüm: Verilen bilgiler 3 tabanında diye sorulan ifadeyi 3 tabanına çevireceğiz.

$$\log 7 = \log_{10} 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 10} = \frac{a}{b}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1991 ÖYS]. $\log_3 5 = a$ *olduğuna göre* $\log_9 25$*'in değeri kaçtır?*

A) a B) $2a$ C) a^2 D) $\dfrac{a}{2}$ E) $\sqrt{a}$

Çözüm: Elimizdeki logaritmik ifadenin tabanı 3 olduğundan sorulan ifadeyi de 3 tabanında yazalım.

$$\log_9 25 = \frac{\log_3 25}{\log_3 9} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\log_2 3 = p$ *olduğuna göre* $\log_6 72$ *sayısı p cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) p B) p^2 C) $2p$ D) $\dfrac{1+2p}{3+p}$ E) $\dfrac{3+2p}{1+p}$

Çözüm: Verilen bilgi 2 tabanında diye sorulan ifadeyi de 2 tabanına çevirelim.

$$\log_6 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 6} = \frac{\log_2\left(2^3 \cdot 3^2\right)}{\log_2(2 \cdot 3)}$$
$$= \frac{3 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3}$$
$$= \frac{3+2p}{1+p}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log_3 2 = a$ *olduğuna göre* $\log_2 18$ *sayısının a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{2+a}{a}$ B) $\frac{2-a}{a}$ C) $\frac{2+a}{2-a}$ D) $\frac{2+a}{9}$ E) $9a$

Çözüm: Bize verilen bilgi 3 tabanında diye sorulan değeri 3 tabanında yazalım.

$$\log_2 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 2} = \frac{\log_3(3^2 \cdot 2)}{\log_3 2} = \frac{2+\log_3 2}{\log_3 2}$$

$\log_3 2 = a$ olduğundan $\log_2 18 = \frac{2+a}{a}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1985 ÖYS]. $\log_3 5 = a$ *olduğuna göre* $\log_5 15$ *'in değeri nedir?*

A) $\frac{1}{a-1}$ B) $\frac{a}{a-1}$ C) $\frac{a-1}{a}$ D) $\frac{a}{a+1}$ E) $\frac{a+1}{a}$

Çözüm: Elimizdeki logaritmik ifadenin tabanı 3 olduğundan sorulan ifadeyi de 3 tabanına çevirelim.

$$\log_5 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 5} = \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{\log_3 5} = \frac{1+a}{a}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log 3 = a$ *ve* $\log 2 = b$ *olduğuna göre* $\log_6 12$ *sayısının a ve b cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{4+a}{a}$ B) $\frac{4-a}{a-b}$ C) $\frac{a}{b}$ D) $\frac{2+a}{b+a}$ E) $\frac{2b+a}{b+a}$

Çözüm: Verilen bilgiler 10 tabanında diye sorulan ifadeyi de 10 tabanına çevirelim.

$$\log_6 12 = \frac{\log 12}{\log 6}$$
$$= \frac{\log(2^2 \cdot 3)}{\log(2 \cdot 3)}$$
$$= \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3}$$
$$= \frac{2b+a}{b+a}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log_7 2 = a$ *ve* $\log_7 3 = b$ *ise* $\log_6 24$ *sayısının a ve b cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{a+b}{3a}$ B) $\frac{3ab}{a+b}$ C) $\frac{3a+b}{a+b}$ D) $\frac{3}{a+b}$ E) $\frac{3b}{a+b}$

Çözüm: Bize verilen değerler 7 tabanında olduğundan sorulan değeri 7 tabanına çevireceğimizi öngörüyoruz.

$$\log_6 24 = \frac{\log_7 24}{\log_7 6} = \frac{\log_7(2^3 \cdot 3)}{\log_7(2 \cdot 3)}$$
$$= \frac{3 \cdot \log_7 2 + \log_7 3}{\log_7 2 + \log_7 3}$$
$$= \frac{3a+b}{a+b}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_3 7 = a$ *ve* $\log_3 8 = b$ *ise* $\log_{56} 9$ *sayısının a ve b cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{2}{a-b}$ B) $\frac{1}{a+b}$ C) $\frac{2}{a+b}$ D) $-\frac{2}{a-b}$ E) $-\frac{2}{a+b}$

Çözüm: Bize verilen değerler 3 tabanında olduğundan sorulan değeri 3 tabanına çevireceğimizi öngörüyoruz.

$$\log_{56} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 56} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3(7 \cdot 8)}$$
$$= \frac{2}{\log_3 7 + \log_3 8} = \frac{2}{a+b}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log 5 = x$ *ve* $\log 3 = y$ *olduğuna göre* $\log_2 6$ *sayısının x ve y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{x-y-1}{x-1}$ B) $\frac{x+y-1}{x-1}$ C) $\frac{x-y+1}{x+1}$ D) $\frac{x-y+1}{x-1}$ E) $\frac{x-y-1}{1-x}$

Çözüm:

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}$$

olduğundan soruyu çözmek için log 2 sayısının değerini bulmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$\log 10 = \log 2 + \log 5 = 1$$

olduğundan log 2 yerine 1 — log 5 yazmalıyız.

$$\frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{1-x+y}{1-x} = \frac{x-y-1}{x-1}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $60^a = 3$ *ve* $60^b = 5$ *olduğuna göre* $12^{\frac{1-a-b}{2-2b}}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$60^a = 3 \text{ ise } a = \log_{60} 3$$

ve

$$60^b = 5 \text{ ise } b = \log_{60} 5$$

olur. Bu durumda $a + b = \log_{60} 15$'dir.

$$\frac{1-a-b}{2-2b} = \frac{1-(a+b)}{2(1-b)}$$

$$= \frac{1-\log_{60} 15}{2(1-\log_{60} 5)}$$

$$= \frac{\log_{60} 60 - \log_{60} 15}{2(\log_{60} 60 - \log_{60} 5)}$$

$$= \frac{\log_{60} 4}{2 \cdot \log_{60} 12}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_{12} 4$$

$$= \log_{12} 2$$

olduğundan

$$12^{\frac{1-a-b}{2-2b}} = 12^{\log_{12} 2} = 2$$

olur.

Doğru cevap: B.

Teorem. *Uygun şartlar altında*

$$\log_a x = t \text{ ise } \log_x a = \frac{1}{t}.$$

Kanıt:

Birinci yol. $\log_a x = t$ ise $a^t = x$ olur. Eşitliğin her iki yanının da üssünü t'ye bölersek

$$a = x^{\frac{1}{t}}$$

olur ki, üstel olan bu eşitliği logaritmiğe çevirirsek,

$$\log_x a = \frac{1}{t}$$

buluruz ki bu da aradığımız şeydi.

İkinci yol. Bize verilen bilgi a tabanında olduğundan bulmak istediğimiz eşitliği a tabanına çevirelim:

$$\log_x a = \frac{\log_a a}{\log_a x} = \frac{1}{\log_a x}$$

Buradan doğal olarak şöyle bir sonuç çıkar:

$$\log_a x \cdot \log_x a = 1.$$

Örnek [1993 ÖYS].

$$\log_a 9 = 4$$
$$\log_3 a = b$$

olduğuna göre $a \cdot b$ *kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Çözüm: $\log_a 9 = 2 \cdot \log_a 3 = 4$ verildiğinden $\log_a 3 = 2$'dir.

$$\log_a 3 \cdot \log_3 a = 1$$

olması gerektiğinden $2 \cdot b = 1$ yani $b = \frac{1}{2}$ bulunur.

$\frac{1}{2} = \log_3 a$ eşitliğinden de $a = \sqrt{3}$ bulunduğundan

$a \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\log 3 = a$ *olduğuna göre* $\log_{30} 10$ *sayısının a cinsinden eşiti nedir?*

A) $\frac{1+a}{a}$ B) $\frac{3-a}{a}$ C) $\frac{a}{1+a}$ D) $\frac{1}{1+a}$ E) $\frac{a}{3}$

Çözüm:

$$\log_{30} 10 = \frac{1}{\log_{10} 30} = \frac{1}{\log 30}$$

olduğundan

$$\frac{1}{\log 30} = \frac{1}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{1}{\log 10 + \log 3} = \frac{1}{1+a}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $16^{\frac{1}{\log_4 4}} + 9^{\frac{1}{\log_8 3}}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 10 B) 50 C) 100 D) 200 E) 1000

Çözüm:

$$16^{\frac{1}{\log_4 4}} + 9^{\frac{1}{\log_8 3}} = 16^{\log_4 6} + 9^{\log_3 8}$$

$$= 16^{\log_{4^2} 6^2} + 9^{\log_{3^2} 8^2}$$

$$= 16^{\log_{16} 36} + 9^{\log_9 64}$$

$$= 36 + 64 = 100$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sqrt{4^{\frac{2}{\log_3 4}+2\log_9 3}}$ *ifadesinin değeri kaça eşittir?*

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 64

Çözüm:

$$\sqrt{4^{\frac{2}{\log_3 4}+2\cdot\log_9 3}}=\sqrt{4^{2\cdot\log_4 3+2\cdot\log_9 3}}$$

$$=\sqrt{4^{\log_4 9+\log_9 9}}=\sqrt{4^{\log_4 9}\cdot 4^{\log_9 9}}=\sqrt{9\cdot 4^1}=6$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{2}{\log_2 108^6}+\frac{3}{\log_3 108^6}$ *toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) $\frac{1}{6}$ C) 1 D) $\frac{7}{6}$ E) 2

Çözüm: $\frac{2}{\log_2 108^6}+\frac{3}{\log_3 108^6}$

$$=\frac{2}{6}\log_{108}2+\frac{3}{6}\log_{108}3=\log_{108}\left(\sqrt[3]{2}.\sqrt{3}\right)$$

$$=\log_{108}\left(\sqrt[6]{4.3^3}\right)=\log_{108}\left(\sqrt[6]{108}\right)=\frac{1}{6}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\log_2 9=a$ *ve* $\log_{25}3=b$ *olduğuna göre* $\log_2 5$ *sayısı a ve b cinsinden neye eşittir?*

A) $\frac{1}{4ab}$ B) $\frac{4a}{b}$ C) $\frac{a}{b}$ D) $\frac{2+a}{4b}$ E) $\frac{a}{4b}$

Çözüm: Verilen ifadelerde en çok 3 çarpanı var diye sorulan ifadeyi 3 tabanında yazalım.

$$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}$$

Şimdi bu değerleri bulmaya çalışacağız.

$$\log_2 9=\log_2 3^2=2\cdot\log_2 3=a$$

diye $\log_2 3=\frac{a}{2}$ ve bundan dolayı $\log_3 2=\frac{2}{a}$ olur.

$$\log_{25}3=\log_{5^2}3=\frac{1}{2}\cdot\log_5 3=b$$

diye $\log_5 3=2b$ ve bundan dolayı $\log_3 5=\frac{1}{2b}$ olur. O halde

$$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\frac{\frac{1}{2b}}{\frac{2}{a}}=\frac{1}{2b}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{4b}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{1}{\log_{15}5}-2$ *sayısı hangi sayının 5 tabanındaki logaritmasına eşittir?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm:

$$\frac{1}{\log_{75}5}=\log_5 75$$

$$=\log_5\left(3\cdot 5^2\right)$$

$$=\log_5 3+2\cdot\log_5 5$$

$$=(\log_5 3)+2$$

olduğundan $\frac{1}{\log_{75}5}-2=\log_5 3$'tür. O halde aranan sayı 3'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_a x=5$ *ve* $\log_b x=3$ *olduğuna göre* $\log_{ab}x$ *sayısının değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{15}{8}$ E) $\frac{8}{3}$

Çözüm: Verilen bilgilerde a, b ve x değerleri arasında en fazla kullanılanı x diye sorulan ifadeyi x tabanında yazalım.

$$\log_{ab}x=\frac{\log_x x}{\log_x(ab)}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b}$$

olduğunu not edelim.

$\log_a x=5$ diye $\log_x a=\frac{1}{5}$ ve $\log_b x=3$ diye

$\log_x b=\frac{1}{3}$'tür. Bu durumda

$$\log_{ab}x=\frac{1}{\log_x a+\log_x b}=\frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}=\frac{15}{8}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Teorem.

$$\log_a x\cdot\log_x y\cdot\log_y z=\log_a z$$

Kanıt: Çarpılan her logaritmik ifadeyi 10 tabanına çevirelim. Bunun ödülünü hiç beklemeden alacağız.

$$\frac{\log x}{\log a}\cdot\frac{\log y}{\log x}\cdot\frac{\log z}{\log y}=\frac{\log z}{\log a}$$

Şimdi bu ifadeyi hemen a tabanına çevirelim.

$$\frac{\log z}{\log a}=\log_a z.$$

Örnek. $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Hemen üstteki teoremi kullanalım:

$$\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9=\log_3 9=\log_3 3^2=2.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $A=\log_{\sqrt{2}} 27\cdot\log_{25}\sqrt[3]{4}\cdot\log_9 125$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Teoremi değil, teoremin kanıtını kullanacağız:

$$A=\frac{\log 27}{\log\sqrt{2}}\cdot\frac{\log\sqrt[3]{4}}{\log 25}\cdot\frac{\log 125}{\log 9}$$

$$=\frac{3\cdot\log 3}{\frac{1}{2}\cdot\log 2}\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot\log 2}{2\cdot\log 5}\cdot\frac{3\cdot\log 5}{2\cdot\log 3}$$

$$=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $2^a=18^b$ *eşitliğini sağlayan a ve b değerleri için* $\frac{a+b}{a-b}$ *oranı kaça eşittir?*

A) $\log_2 3$ B) $\log_3 2$ C) $\log_3 6$ D) $\log_6 3$ E) $\log_2 6$

Çözüm: $2^a=2^b\cdot 3^{2b}$ olduğundan $2^{a-b}=3^{2b}$ yazabiliriz. $a-b$ hakkında bir şeyler elde ettik. $a+b$ hakkında da bir şeyler elde etmemiz gerekiyor. Bu yüzden verilen eşitliğin her iki yanını 2^b ile çarpasımız gelmeli.

$$2^a\cdot 2^b=18^b\cdot 2^b$$
$$2^{a+b}=6^{2b}$$

Şu durumda $a+b=\log_2 6^{2b}=2b\log_2 6$ ve aynı zamanda $a-b=\log_2 3^{2b}=2b\log_2 3$ olur.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2b\log_2 6}{2b\log_2 3}=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\frac{\frac{\log 6}{\log 2}}{\frac{\log 3}{\log 2}}=\frac{\log 6}{\log 3}=\log_3 6$$

Doğru cevap: C.

Teorem.

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

Kanıt: Eşitliğin doğru olduğunu göstereceğiz. Üstel olan bu eşitliği logaritmiğe çevirelim:

$$\log_a(c^{\log_b a})=\log_b c$$
$$\log_b a\cdot\log_a c=\log_b c$$
$$\frac{\log a}{\log b}\cdot\frac{\log c}{\log a}=\frac{\log c}{\log b}=\log_b c$$

olduğundan kanıt biter.

Örnek. $3^{\log_5 7}-7^{\log_7 3}$ *farkı kaça eşittir?*

A) −7 B) −3 C) 0 D) 3 E) 7

Çözüm:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

eşitliğini kanıtladığımız için $3^{\log_5 7}=7^{\log_5 3}$ olduğunu söyleyeceğiz. Birbirlerine eşit olan ifadelerin farkı da elbet 0 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $7^{\log_x 3}+3^{\log_x 7}=98$ *eşitliğini sağlayan x sayısı kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}$ D) 7 E) 49

Çözüm:

$$7^{\log_x 3}=3^{\log_x 7}$$

olduğunu biliyoruz. O halde bu değerlerin her biri 49'a eşittir.

$$7^{\log_x 3}=49$$

eşitliğinden $\log_x 3=2$ yani $x=\sqrt{3}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $a^{\log_b c}+2\cdot c^{\log_b a}=3\cdot a^c$ *eşitliğine göre b değerinin c cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) c B) c^c C) $\sqrt{c}$ D) $\sqrt[c]{c}$ E) $c+1$

Çözüm:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

olduğunu biliyoruz. Her ikisine de t diyelim.

$$t+2t=3t=3\cdot a^c$$

eşitliğinden $t=a^c$ bulunur. O halde $t=a^{\log_b c}=a^c$ olduğundan $\log_b c=c$ yani $b^c=c$ bulunur. Buradan da $b=\sqrt[c]{c}$ çıkar.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$x^{\log_3 y}\cdot y^{\log_3 x}=4^{10\log_2 x}$$

eşitliğini sağlayan y değeri kaçtır?

A) 3^5 B) 3^7 C) 3^8 D) 3^{10} E) 3^{20}

Çözüm:

$$x^{\log_3 y}=y^{\log_3 x}$$

olduğunu biliyoruz. Her ikisine de t diyelim.

$$t^2=4^{10\cdot\log_2 x}=2^{20\cdot\log_2 x}=2^{\log_2 x^{20}}=x^{20}$$

olur. O halde $t=x^{10}$ olmalıdır. $t=x^{\log_3 y}=x^{10}$ eşitliğinden $\log_3 y=10$ yani $y=3^{10}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}=2\cdot x^{2\log_x 11}$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) 7 D) 11 E) 49

Çözüm:

$$11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}=2\cdot x^{2\cdot\log_x 11}$$

$$11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}=2\cdot x^{\log_x 11^2}$$

$$11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}=2\cdot 11^2$$

$11^{\log_7 x}=x^{\log_7 11}$ olduğunu fark edersek $11^{\log_7 x}=11^2$ eşitliğinden $\log_7 x=2$ yani $x=49$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x\neq y$ *olmak üzere* $\log_x 5y=\log_y 5x$ *olduğuna göre* $\log_5(x\cdot y)$ *ifadesinin eşiti kaçtır?*

A) −1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $\log_x 5y=\log_y 5x$ ifadesini 10 tabanına dönüştürelim.

$$\frac{\log 5y}{\log x}=\frac{\log 5x}{\log y}$$

buradan da

$$\frac{\log 5+\log y}{\log x}=\frac{\log 5+\log x}{\log y}$$

$$\log 5\cdot\log y+\log^2 y=\log 5\cdot\log x+\log^2 x$$

$$\log^2 y-\log^2 x=\log 5\cdot\log x-\log 5\cdot\log y$$

$$(\log y-\log x)\cdot(\log y+\log x)=-\log 5\cdot(\log y-\log x)$$

$$\log y+\log x=-\log 5$$

$$\log(x\cdot y)=-\log 5$$

$$\log(x\cdot y)=\log 5^{-1}$$

$x\cdot y=5^{-1}$ bulunur. Buradan da

$\log_5(x\cdot y)=\log_5(5^{-1})=-1$ olarak bulunur.

Doğru Cevap: A.

Örnek. $x^{\log_2(x-4)}+(x-4)^{\log_2 x}=2x^2$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm:

$$x^{\log_2(x-4)}=(x-4)^{\log_2 x}$$

olduğundan

$$x^{\log_2(x-4)}+(x-4)^{\log_2 x}=x^2+x^2$$

$$x^{\log_2(x-4)}=x^2$$

$$\log_2(x-4)=2$$

$$x-4=4$$

$$x=8$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $7^{\log_2 5}=a$ ve $10^{\log_4 49}=b$ *olduğuna göre a ile b arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $b=49a$ B) $b=7a$ C) $b=2a$ D) $b=a$ E) $a=7b$

Çözüm: Fark ettiyseniz birinin üssünde taban 2, diğerinin üssünde taban 4 olarak verilmiştir. 4'ü 2 yapmak çok kolay.

$$b=10^{\log_4 49}=10^{\log_2 7}$$

Yaptık, şimdi de logaritmik ifadelerin tabanları aynı kalmak üzere yer değiştirmemizi yapalım.

$$b=10^{\log_2 7}=7^{\log_2 10}$$

Şimdi bu ifadeyi a'ya benzetmeye çalışacağız. $\log_2 10$ sayısı $\log_2(2\cdot 5)=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5$ olduğundan

$$b=7^{\log_2 10}=7^{1+\log_2 5}=7\cdot 7^{\log_2 5}=7a$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $2^{x+1}=6^{x-1}$ *olduğuna göre* $4^{\frac{x+2}{x-1}}$ *kaçtır?*

A) 12 B) 24 C) 36 D) 54 E) 108

Çözüm: Önce verilen bilgiyi sadeleştirelim.

$$2^{x+1}=6^{x-1}$$

$$2^x\cdot 2=\frac{6^x}{6}$$

$$3^x=12$$

Şimdi bize sorulan ifadeyi hesaplayabilmemiz için x'i yerine yazmamız gerekiyor. Bunun için bulduğumuz eşitlikten x'i çekelim. $3^x=12$ ise $x=\log_3 12$ olur.
O halde

$$4^{\frac{x+2}{x-1}}=4^{\frac{\log_3 12+2}{\log_3 12-1}}=4^{\frac{\log_3 108}{\log_3 4}}=4^{\log_4 108}=108$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
$\log_3 7 = m$ ve $\log_3 5 = n$ olduğuna göre
$\log_{49} 125$
sayısının m ve n cinsinden eşiti nedir?

A) $3m+2n$ B) $m+n$ C) $\frac{3n}{2m}$ D) $\frac{m}{n}$ E) $m-n$

2.
$\log_3(2x-1) = 2$ olduğuna göre,
$\log_x 25 + \log_5(5x) + \log_x x$
toplamı kaçtır?

A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 5,5

3.
$\log_2 5 = a$
olduğuna göre $\log_5 20$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+\frac{1}{a}$ B) $1+\frac{2}{a}$ C) $2+\frac{1}{a}$ D) $\frac{a+1}{2a}$ E) $1+\frac{4}{a}$

4.
$\log_2 3 = a$ ve $\log_2 5 = b$
olduğuna göre $\log_5 180$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2a+b+2}{b}$ B) $\frac{a+b+2}{b}$ C) $\frac{2a+b+1}{b}$ D) $\frac{a+b+1}{2}$ E) $2a+b+1$

5.
$b^{\log_a c} - c^{\log_a b}$
ifadesi neye eşittir?

A) 0 B) a C) b D) c E) a^b

6.
$\log 2 = x$ ve $\log 3 = y$ olduğuna göre
$\log_5 15$
sayısının x ve y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x-y-1}{x-1}$ B) $\frac{x+y-1}{x-1}$ C) $\frac{x-y+1}{x+1}$ D) $\frac{x-y+1}{x-1}$ E) $\frac{x-y-1}{1-x}$

7.
$\log 3 = a$ ve $\log 2 = b$ olduğuna göre
$\log_{12} 18$
sayısının a ve b cinsinden eşiti nedir?

A) $\frac{4+a}{a}$ B) $\frac{4-a}{a-b}$ C) $\frac{a}{b}$ D) $\frac{2+a}{b+a}$ E) $\frac{2a+b}{2b+a}$

8.
$5^{\log_x 3} + 3^{\log_x 5} = 50$
eşitliğini sağlayan x sayısı kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}$ D) 7 E) 49

9.
$\frac{1}{\log_{48} 2} - 2$
sayısı hangi sayının 2 tabanındaki logaritmasına eşittir?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 4 E) 3

10.
$\frac{1}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_5 4} + \frac{\log 4 - \log\sqrt{15}}{\log 2}$
toplamı kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. C 2. D 3. B 4. A 5. A 6. A 7. E 8. B 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
Pozitif bir x sayısının 2 tabanındaki logaritması lg x ile gösterilmektedir.
Buna göre $2^{\frac{\lg 36}{\lg 4}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

2.
$$\log_y a = \log_x a^2 = 12$$
olduğuna göre $\log_{xy} a$ kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

3.
$$\log_2 3 = a$$
$$\log_3 5 = b$$
olduğuna göre log 4 kaça eşittir?

A) $\frac{2}{1+ab}$ B) $\frac{1}{1+ab}$ C) $\frac{2}{ab}$ D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{1+ab}{2}$

4.
$$\log_9 2 = x$$
olduğuna göre $\log_{\sqrt[3]{24}} 3$ sayısının x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{6x+1}$ B) $\frac{2}{6x+1}$ C) $\frac{3}{6x+1}$ D) $\frac{3}{3x+2}$ E) $\frac{2}{3x+2}$

5.
$$\log 2 = a$$
olduğuna göre $\log_5 2$ kaça eşittir?

A) $\frac{a+1}{a}$ B) $\frac{a-1}{a}$ C) $\frac{a}{1-a}$ D) $\frac{a}{a+1}$ E) $\frac{1}{a}$

6.
$$x^{\log_3 \sqrt{x}} = 81$$
eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 8 D) 9 E) 81

7.
$$\log_a b = x$$
olduğuna göre $\log_{a^2 b} a^3 b$ ifadesinin x cinsinden değeri nedir?

A) $\frac{2x}{3}$ B) $\frac{3x}{2}$ C) $\frac{x+3}{2}$ D) $\frac{x+2}{x+3}$ E) $\frac{x+3}{x+2}$

8.
$$\log 2 = a$$
$$\log 3 = b$$
olduğuna göre $12^x = 5^4$ eşitliğini sağlayan x değerinin a ve b cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4-4a}{b+2a}$ B) $\frac{4a-4}{b+2a}$ C) $\frac{4-4a}{b-2a}$ D) $\frac{4-4a}{2b+a}$ E) $\frac{1-4a}{b+2a}$

9.
$$3^{x+1} = 6^{x-1}$$
eşitliğini sağlayan x değeri, $\log_a 9$ sayısının 1 fazlasına eşit olduğuna göre a kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
$$3^x = 12^y$$
olduğuna göre $2^{\frac{x+y}{x-y}}$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. D 2. C 3. A 4. C 5. C 6. B 7. E 8. A 9. A 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Logaritmik Fonksiyonların Tersi

Fonksiyon dersinde, bir fonksiyonun tersini tanımlamış ve daha sonra her ikisinin de kurallarına bakıp, olayı şöyle yorumlamıştık:
x'e bağlı bir fonksiyonun tersi, o fonksiyonun kuralında, x'i atıp boşalan yere yazdığımızda, fonksiyon kuralını x'e dönüştüren değer oluyordu.
Örneğin, tanımlı olduğu değerler için

$$f(x) = 2x \text{ ise } f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

olmasını

$$(f \circ f^{-1})(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

olmasına borçluyduk. O halde, şimdi de benzer bir mantık yürüterek

$$f(x) = \log_a x$$

fonksiyonunda x yerine ne yazarsak fonksiyon kuralı x'e dönüşür sorusunun cevabını aramalıyız. $\log_a(a^x) = x$ olduğundan cevabın a^x olduğunu anlamış olmalısınız. Yine benzer şekilde $f(x) = a^x$ kuralıyla belirlenmiş bir fonksiyon kuralında da x yerine $\log_a x$ yazılması, $a^{\log_a x} = x$ olduğundan fonksiyonun kuralını x'e dönüştürür.

$$f(x) = \log_a x \text{ ise } f^{-1}(x) = a^x$$
$$f(x) = a^x \text{ ise } f^{-1}(x) = \log_a x$$

Ters bulmanın yaygınca bilinen ve kullanılan yöntemini de kullanmakta özgürsünüz tabi ki ama mutlaka anlatmak istediğim bir metodu da burada size vereyim.

Yukardaki eşitliklerden anlıyoruz ki x'i bir a sayısının üssüne yazmakla, x'in a tabanındaki logaritmasını almak birbirlerinin ters işlemleriymiş. Hani daha önce de defalarca demiştik ya, f^{-1} fonksiyonu x'e f'nin yaptıklarının tersini yapar, hem de ters sırada yapar diye, şimdi de o metodla çözeceğiz. Ama o metodu sorunun dördüncü yolu olarak verdik.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \log_3(x-3)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.*

A) $-3^x + 3$ B) $-3^x - 3$ C) $3^x + 3$
D) $3^x - 3$ E) 3^{x+1}

Çözüm: Dört farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. "$f(x)$ fonksiyonunun kuralında x yerine ne yazarsak, $f(x)$'in kuralı x'e dönüşür?" sorusunun cevabını arayacağız.
Parantezin içi 3^x olsaydı, fonksiyon kuralı x'e dönüşürdü ya, onun için x yerine $3^x + 3$ yazmalıyız. Bu da doğal olarak tersin kuralıdır. $f^{-1}(x) = 3^x + 3$.

İkinci yol. $y = \log_3(x-3)$ diye $x - 3 = 3^y$ olur. O halde $x = 3^y + 3$'tür. $x = f^{-1}(y)$ olduğundan

$$f^{-1}(y) = 3^y + 3$$

olur. Şimdi y gördüğümüz yerlere x yazalım.

$$f^{-1}(x) = 3^x + 3.$$

Üçüncü yol. Şıklardan gidebilirsiniz. Şıklarda yazan ifadelerden hangisini $\log_3(x-3)$ ifadesinde x gördüğümüz yere yazarsak, soruda verilen fonksiyon x'e dönüşür diyerek yani...

Dördüncü yol. İçlerinde en sevdiğim ve de kullandığım yol, bu üçüncü yoldur. Tavsiye ederim.
f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'ten 3 çıkarmış.
2. 3 tabanında logaritmasını almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'i 3'ün üssüne yazar.
2. 3 ekler.

Yani; $f^{-1}(x) = 3^x + 3$.

Doğru cevap: C.

Dördüncü yolu tam kavramak amacıyla daha detaylı bir örnek çözelim.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x)=a\cdot\log_b\left(\frac{cx+d}{e}\right)+k$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{e\cdot b^{\frac{x-k}{a}}-d}{c}$ B) $\frac{e\cdot b^{\frac{x-k}{c}}-d}{a}$ C) $\frac{d\cdot b^{\frac{x-k}{a}}-e}{c}$

D) $\frac{e\cdot(b^{\frac{x-k}{a}}-d)}{c}$ E) $\frac{(e\cdot b)^{\frac{x-k}{a}}-d}{c}$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'i c'yle çarpmış.
2. d eklemiş.
3. e'ye bölmüş.
4. b tabanında logaritmasını almış.
5. a'yla çarpmış.
6. k eklemiş.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'ten k çıkarır.
2. a'ya böler.
3. b'nin üssüne yazar.
4. e'yle çarpar.
5. d çıkarır.
6. c'ye böler.

Yani; $f^{-1}(x)=\frac{e\cdot b^{\frac{x-k}{a}}-d}{c}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x)=2\cdot\log_3\left(\frac{4x-5}{6}\right)+7$$

fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

A) $\frac{6\cdot(3^{\frac{x-7}{2}}+5)}{4}$ B) $\frac{6\cdot3^{\frac{x-7}{2}}+5}{4}$ C) $\frac{6\cdot3^{\frac{x}{2}-7}+5}{4}$

D) $\frac{6\cdot(3^{\frac{x}{2}-7}+5)}{4}$ E) $\frac{6\cdot3^{\frac{x-2}{7}}+5}{4}$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'i 4'le çarpmış.
2. 5 çıkarmış.
3. 6'ya bölmüş.
4. 3 tabanında logaritmasını almış.
5. 2'yle çarpmış.
6. 7 eklemiş.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'ten 7 çıkarır.
2. 2'ye böler.
3. 3'ün üssüne yazar.
4. 6'yla çarpar.
5. 5 ekler.
6. 4'e böler.

Yani; $f^{-1}(x)=\frac{6\cdot3^{\frac{x-7}{2}}+5}{4}$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta* $f(x)=\sqrt{\log_\pi(\sin x)}$ *fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.*

A) $\text{Arcsin}(\pi^x)$ B) $\text{Arcsin}(\pi^{2x})$ C) $\pi\,\text{Arcsin}(x^2)$

D) $\text{Arcsin}(x^{2\pi})$ E) $\text{Arcsin}(\pi^{(x^2)})$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in sinüsünü almış.
2. π tabanında logaritmasını almış.
3. Karekökünü almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'in karesini alır.
2. π'nin üssüne yazar.
3. Arcsin'ini alır.

Yani; $f^{-1}(x)=\text{Arcsin}(\pi^{(x^2)})$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta* $f(x)=\text{Arctan}^3(\log x)$ *fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.*

A) $\tan^{10}\sqrt[3]{x}$ B) $10^{\sqrt[3]{\tan x}}$ C) $\sqrt[3]{10^{\tan x}}$ D) $10^{\tan\sqrt[3]{x}}$ E) $10^{\tan x^3}$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in 10 tabanında logaritmasını almış.
2. Arctan'ını almış.
3. Küpünü almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. Küpkökünü alır.
2. Tanjantını alır.
3. 10'un üssüne yazar.

Yani; $f^{-1}(x)=10^{\tan\sqrt[3]{x}}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta* $f(x) = 5^{x+1}$ *fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\log_5 x + 1$ B) $\log_5 x - 1$ C) $\log_5 x - 5$
D) $\log_5 (x-1)$ E) $\log_5 (x+1)$

Çözüm: Birinci yol. $f(x) = y = 5^{x+1}$ ise

$$x + 1 = \log_5 y$$

demektir. O halde $x = \log_5 y - 1$'dir. $x = f^{-1}(y)$ olduğundan

$$f^{-1}(y) = \log_5 y - 1$$

olur. y yerine x yazarsak,

$$f^{-1}(x) = \log_5 x - 1$$

olarak bulunur.

İkinci yol. f fonksiyonu x'e 1 eklemiş, daha sonra 5'in üssüne yazmış. O halde f^{-1} fonksiyonu x'in önce 5 tabanındaki logaritmasını alır, daha sonra da 1 çıkartır.

$$f^{-1}(x) = \log_5 x - 1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta* $f(x) = a \cdot b^{cx+d} + e$ *fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\log_b\left(\frac{x-e}{a}\right) - \frac{d}{c}$ B) $\frac{1}{c} \cdot \log_b\left(\frac{x-e}{a}\right) - d$

C) $\frac{1}{a} \cdot \log_b (cx+d) - e$ D) $\frac{1}{a} \cdot \log_b (cx+d) - \frac{e}{a}$

E) $\frac{\log_b\left(\frac{x-e}{a}\right) - d}{c}$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'i c'yle çarpmış.
2. d eklemiş.
3. b'nin üssüne yazmış.
4. a'yla çarpmış.
5. e eklemiş.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'ten e çıkarır.
2. a'ya böler.
3. b tabanında logaritmasını alır.
4. d çıkarır.
5. c'ye böler.

Yani; $f^{-1}(x) = \dfrac{\log_b\left(\frac{x-e}{a}\right) - d}{c}$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta* $f(x) = 5^{2x-1} + 3$ *olduğuna göre* $f^{-1}(w) = 1$ *eşitliğini sağlayan* w *sayısı kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 8 D) 13 E) 16

Çözüm: Burada hiç terse merse girmeye gerek yok. $f^{-1}(w) = 1$ ise $f(1) = w$'dur. O halde

$$f(1) = 5^{2\cdot 1-1} + 3 = 8$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıklarda*

$$f(x) = \log_2 x \text{ ve } g(x) = 4^x$$

olduğuna göre $(f \circ g^{-1})(w) = 2$ *eşitliğini sağlayan* w *sayısı kaçtır?*

A) 32 B) 64 C) 128 D) 256 E) 512

Çözüm: $g(x) = 4^x$ ise $g^{-1}(x) = \log_4 x$ olur.

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(w) &= f(g^{-1}(w)) \\ &= f(\log_4 w) \\ &= \log_2(\log_4 w) = 2\end{aligned}$$

olduğundan

$$2^2 = \log_4 w$$

olur. Böylelikle de

$$w = 4^4 = 256$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = \sqrt{2x+7} + \log_3 x$ *olduğuna göre* $f^{-1}(3)$ *kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Fonksiyonun tersini alamayacağımıza göre, x'e ne verirsek 3 eder, onu düşünelim. $f(1) = 3$ olduğundan $f^{-1}(3) = 1$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1994 ÖYS].

$$f(x) = \log_2 x$$
$$(g \circ f)(x) = x + 2$$

olduğuna göre $g(x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2^x B) $2^x - 1$ C) $2^x + 1$ D) $2^x + 2$ E) $2^x - 2$

Çözüm: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_2 x) = x + 2$ eşitliğinde x yerine 2^x yazarsak,

$$g\left(\log_2(2^x)\right) = 2^x + 2$$
$$g(x) = 2^x + 2$$

olduğunu görürüz.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x) = \log_3(x-1)$$

olduğuna göre $f^{-1}(-2)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\frac{10}{9}$

2.

$$f(x) = 5^{x+1}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ nedir?

A) $\log_5 x$ B) $\log_5(x+1)$ C) $\log_5 x + 1$
D) $\log_5 x - 1$ E) $\log_5(5x)$

3.

$$f(x) = \log_3 x \text{ ve } g(x) = \log_3(x^2+1)$$

olduğuna göre $(f^{-1}og)(4)$ kaçtır?

A) 4 B) 16 C) 17 D) 20 E) 25

4.

$$f^{-1}(x) = 2^x \text{ ve } g(x) = \log_7 x$$

olduğuna göre $(g \circ f)(128)$ kaçtır?

A) 28 B) 14 C) 7 D) 2 E) 1

5.

Tanımlı olduğu aralıkta

$$f(x) = \text{Arctan}^3(\log_2 x)$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan^2 \sqrt[3]{x}$ B) $2^{\sqrt[3]{\tan x}}$ C) $\sqrt[3]{2^{\tan x}}$
D) $2^{\tan \sqrt[3]{x}}$ E) $2^{\tan x^3}$

6.

Tanımlı olduğu aralıkta

$$f(x) = \sqrt[3]{5^{\text{Arcsin } x}}$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos^3(\log_5 x)$ B) $\log_5(\sin x^3)$ C) $\log_5(\cos^3 x)$
D) $\sin(\log_5(x^3))$ E) $\sin(\log_5 x)^3$

7.

$$f(x) = \sqrt{2x+7} + \log_3 x$$

olduğuna göre $f^{-1}(7)$ kaça eşittir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

8.

$$\log_9 x = 9^x$$

denkleminin kaç tane reel kökü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

Pozitif bir x sayısının 2 tabanındaki logaritması lg x yazarak gösterilir.

$$f(x) = \lg(3x+1)$$

olduğuna göre $f^{-1}(4)$ kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.

$$f(x) = 10^{(10^x)}$$

fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log x$ B) $\log_x 10$ C) $10 \cdot \log_x 10$
D) $\log(\log x)$ E) $\log(10^x)$

1. E 2. D 3. C 4. E 5. D 6. D 7. C 8. A 9. D 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Logaritmik Eşitlikler

Şimdi terimleri üslü ifadeler veya logaritma içeren denklemleri çözmeyi öğreneceğiz. Yeni bir şeyler anlatacağımızı sanmayın. Tamamen şu ana kadar öğrendiğimiz bilgileri kullanacağız. Dikkat edeceğimiz tek nokta, denklemi çözdükten, kökleri bulduktan sonra kollarımızı kavuşturmayacağız, cevabımızla sorudaki logaritmik ifadenin tanımlı olabilmesi gereken koşulları ortak düşüneceğiz.

Örnek. $\log_4 x + \log_4(x+6) = 2$ *denkleminin* $\mathbb{R}$*'deki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{1,2\}$ B) $\{-8,2\}$ C) $\{-1,2\}$ D) $\{-8\}$ E) $\{2\}$

Çözüm:

$$\log_4 x + \log_4(x+6) = \log_4[x\cdot(x+6)]$$
$$= \log_4(x^2+6x) = 2$$

olduğundan $x^2+6x = 16$ buluruz. Düzenlenirse

$$x^2+6x-16 = (x+8)\cdot(x-2) = 0$$

olduğundan $x = -8$ veya $x = 2$'dir. Yalnız sorudaki ifadelerin tanımlı olabilmesi

$$x > 0 \text{ ve } x+6 > 0$$

ile mümkün, bunun için denklemi sağlayan tek x değeri var, o da 2'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1989 ÖYS]. $\log x + \log(3x+2) = 0$ *denklemini sağlayan değer kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm:

$$\log x + \log(3x+2) = 0$$
$$\log(3x^2+2x) = \log 1$$
$$3x^2+2x-1 = 0$$
$$(3x-1)(x+1) = 0$$

eşitliğinden $x = \frac{1}{3}$ veya $x = -1$ olması gerektiği görülür, fakat ifadenin tanımlı olması için $x > 0$ ve $3x+2 > 0$ olması gerektiğinden $x = -1$'i alamayız.

Doğru cevap: B.

Örnek [1990 ÖYS]. $\log_7(2x-7) - \log_7(x-2) = 0$ *olduğuna göre* $\log_5 x$ *değeri kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\log_7(2x-7) - \log_7(x-2) = 0$$
$$\log_7(2x-7) = \log_7(x-2)$$
$$2x-7 = x-2$$
$$x = 5$$

olduğundan $\log_5 x = \log_5 5 = 1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\log(3x+2) = 1 + \log(x-4)$ *denklemini sağlayan* x *değeri nedir?*

A) $\varnothing$ B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Çözüm: 1 sayısını bayağı logaritma cinsinden yazmalıyız.

$$\log(3x+2) = 1 + \log(x-4)$$
$$\log(3x+2) = \log 10 + \log(x-4)$$
$$\log(3x+2) = \log[10\cdot(x-4)]$$
$$3x+2 = 10\cdot(x-4)$$

denklemi çözülürse $x = 6$ bulunur. Kontrol edelim. $x = 6$ için $3x+2 > 0$ ve $x-4 > 0$ olduğundan yani bir sorun çıkmadığından $x = 6$ köktür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{1,2\}$ B) $\{-2,2\}$ C) $\{-1,2\}$ D) $\{-2\}$ E) $\{2\}$

Çözüm: Verilen eşitliğin sol tarafı 3 tabanında diye, sağ tarafını da 3 tabanında yazacağız.

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1,$$
$$\log_3[(x-1)\cdot(x+1)] = \log_3 3$$

$x^2-1 = 3$ olacağından $x = \pm 2$'dir ancak $x = -2$ için $x-1 < 0$ ve $x+1 < 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla $x = -2$ kök değildir.
O halde çözüm kümesi $\{2\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log_x(3x-2)=2$ *denklemini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) {1, 2} B) {−4, 2} C) {−1, 2} D) {1} E) {2}

Çözüm: $x^2=3x-2$ yani $x^2-3x+2=0$ denklemini çözeceğiz.

$$(x-2)\cdot(x-1)=0$$

olduğundan $x=1$ veya $x=2$'dir. Fakat x taban olduğundan $x\neq 1$ ve ifadenin tanımlı olması için $x>\frac{2}{3}$ olması gerekiyor. Bundan dolayı çözüm kümesi {2}.

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. $\log_3\left(9\cdot 3^{x+3}\right)=3x+1$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {−1, 1} B) {0, 2} C) {0} D) {1} E) {2}

Çözüm: Hemen logaritmik eşitliği üstele çevirelim.

$$3^{3x+1}=9\cdot 3^{x+3}$$
$$3^{3x+1}=3^2\cdot 3^{x+3}=3^{x+5}$$
$$3x+1=x+5$$

eşitliğinden $2x=4$ yani $x=2$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖSS]. $\log x+2\cdot\log\frac{1}{x}=\log 8-2\cdot\log x$ *denkleminin çözümü nedir?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $\log\frac{1}{x}=\log x^{-1}=-\log x$ olduğundan eşitlik şu hale döner:

$$\log x-2\cdot\log x=\log 8-2\cdot\log x$$
$$\log x=\log 8$$

O halde $x=8$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 16 D) 32 E) 64

Çözüm:

$$\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$$
$$\log_2 x+\frac{1}{2}\cdot\log_2 x+\frac{1}{3}\cdot\log_2 x=11$$
$$\frac{11}{6}\cdot\log_2 x=11$$
$$\log_2 x=6$$
$$x=64$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x=\frac{4}{3}$ *eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2 D) 4 E) 8

Çözüm: $\log_4 x=\frac{1}{2}\cdot\log_2 x$ ve $\log_8 x=\frac{1}{3}\cdot\log_2 x$ olduğundan

$$\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x=\frac{1}{6}\cdot(\log_2 x)^3=\frac{4}{3}$$

olur. Buradan $\log_2 x=2$ bulunur ki $x=4$'tür. Bu değer ifadeyi tanımsız yapmadığından denklemin de çözümüdür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)=2$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm: $\log_4 x=a$ olsun. $\log_2 x=2a$ olur. Bu durumda

$$\log_2 a+\log_4(2a)=2$$
$$\log_2 a+\log_4 2+\log_4 a=2$$
$$\log_2 a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\log_2 a=2$$
$$\frac{3}{2}\cdot\log_2 a=\frac{3}{2}$$
$$\log_2 a=1$$

olduğundan $a=2$'dir. $\log_4 x=a=2$ eşitliğinden $x=16$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a bir reel sayı olmak üzere*

$$\log_2(x+a)+\log_2 x=4$$

denkleminin bir kökü 2 ise diğer kökü kaçtır?

A) −8 B) 1 C) 4 D) 8 E) Yoktur

Çözüm: $x=2$ değeri bir kök olduğundan, denklemde x yerine 2 yazdığımızda eşitliğin sağlanması lazım.

$$\log_2(2+a)+\log_2 2=4$$
$$\log_2(2+a)=3$$
$$2+a=8$$

eşitliğinden $a=6$ bulunur. O halde

$$\log_2(x+6)+\log_2 x=\log_2(x^2+6x)=4$$
$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x-16=0$$
$$(x+8)(x-2)=0$$

olduğundan diğer köke −8 diyesimiz geliyor ama bu değer verilen fonksiyonu tanımsız yaptığından, denklemin 2'den başka kökünün olmadığını anlıyoruz.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$x^{\log 2}+3\cdot 2^{\log x}=8$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 1 B) 10 C) 10^2 D) 10^3 E) 10^4

Çözüm:

$$x^{\log 2}=2^{\log x}$$

olduğunu biliyoruz. $x^{\log 2}=2^{\log x}=t$ olsun.

$$x^{\log 2}+3\cdot 2^{\log x}=t+3t=8$$

eşitliğinden $t=2$ yani $2^{\log x}=2$ bulunur. $\log x=1$ olacağından $x=10$'dur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$6^{2x}-5\cdot 6^{x}+6=0$$

denkleminin reel kökleri toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İki çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. $6^x=t$ denirse

$$t^2-5t+6=(t-2)\cdot(t-3)=0$$

olur ki $t=2$ veya $t=3$ olur.

$6^x=2$ ise $x=\log_6 2$ ve $6^x=3$ ise $x=\log_6 3$'tür. x'in alabileceği değerlerin toplamı

$$\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=1.$$

İkinci yol. $6^{x_1}=2$ ve $6^{x_2}=3$ olduğunu bulmuştuk.

$$6^{x_1+x_2}=6^{x_1}\cdot 6^{x_2}=2\cdot 3=6$$

olacağından $x_1+x_2=1$ olduğu bulunabilir.

Doğru cevap: B.

Not: Eğer verilen denklemde bir üslü ifade varsa ve üs logaritmik bir ifadeyse, eşitliğin her iki yanının o tabandaki logaritması alınır.

Örnek. $10\cdot x^{\log x}=x^2$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 10 B) 50 C) 100 D) 500 E) 1000

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının 10 tabanında logaritmasını alalım.

$$10\cdot x^{\log x}=x^2$$

$$\log\left(10\cdot x^{\log x}\right)=\log\left(x^2\right)$$

$$\log 10+\log x^{\log x}=2\cdot\log x$$

$$1+\log x\cdot\log x=2\cdot\log x$$

$$\log^2 x-2\cdot\log x+1=0$$

$$(\log x-1)^2=0$$

$$\log x-1=0$$

$$\log x=1$$

olduğundan $x=10$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$x^{\log x}=\frac{10000}{x^3}$$

denkleminin reel kökleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10000,1 B) 10000,01 C) 10, 0001 D) 10,001 E) 1,0001

Çözüm:

$$x^{\log x}=\frac{10000}{x^3}$$

$$\log x^{\log x}=\log\frac{10000}{x^3}$$

$$(\log x)^2=\log 10000-\log x^3$$

$$(\log x)^2=4-3\cdot\log x$$

$$(\log x)^2+3\cdot\log x-4=0$$

$$(\log x+4)(\log x-1)=0$$

eşitliğinden $\log x=-4$ veya $\log x=1$ olabileceğini buluruz. Buradan da $x=0{,}0001$ veya $x=10$ olarak bulunur. Toplamları da 10,0001'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$x^{\log_7 x}=27x^2$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

Çözüm: Verilen üstel ifadeyi logaritmiğe çevirelim.

$$\log_x(27x^2)=\log_3 x$$

$$\log_x 27+\log_x x^2=\log_3 x$$

$$3\cdot\log_x 3+2=\log_3 x$$

$$3A+2=\frac{1}{A}$$

$$3A^2+2A-1=0=(3A-1)(A+1)$$

olduğundan $A=\frac{1}{3}$ veya $A=-1$'dir.

$$\log_x 3=\frac{1}{3}\text{ ise }x_1=27,$$

$$\log_x 3=-1\text{ ise }x_2=\frac{1}{3}$$

olur. x'in alabileceği değerler çarpımı 9 olur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\log(3x) - \log(x+1) = \log x + \log(x-1)$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{0, 2\}$ C) $\{4, 2\}$
D) $\{-2, 0, 2\}$ E) $\{2\}$

2.

$$\log_5(4-x) + \log_5(-x) = 1$$

denkleminin reel sayılar kümesindeki çözümü nedir?

A) $\{-5\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{5\}$ D) $\{1\}$ E) $\{-5, 1\}$

3.

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x = \frac{9}{2}$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) 9 E) 27

4.

$$\log_b a = 2$$
$$\log a - \log b = 1$$

eşitliklerini sağlayan a ve b sayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 11 C) 101 D) 110 E) 1010

5.

$$\log(x^3) - \frac{6}{\log x} = 3$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının çarpımı kaçtır?

A) 0,01 B) 0,1 C) 1 D) 10 E) 100,1

6.

$$5^{2+\log_5 x} = 50$$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 25

7.

$$3^{(2x+1)\cdot\log_3 25} = 125$$

olduğuna göre $\log_4 x$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8.

$$\log_2(x+1) - \log_4 x = 1$$

olduğuna göre $\log_7 x$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9.

$$2^x = 9$$
$$3^y = 8$$

eşitliklerini sağlayan x ve y sayılarının çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 12

10.

$$\log_7(2x-7) - \log_7(x-2) = 7^{\log_2 x} - x^{\log_2 7}$$

olduğuna göre $\log_{\sqrt{5}}(x^2)$ *değeri kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. E 2. B 3. E 4. D 5. D 6. B 7. B 8. C 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\log_x(x+12)=2$$

denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3,4\}$ B) $\{-4,3\}$ C) $\{-4,-3\}$ D) $\{3\}$ E) $\{4\}$

2.

$$\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x=\frac{32}{3}$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2 D) 16 E) 64

3.

$$6^{2x}-13\cdot6^{x}+36=0$$

denkleminin reel kökleri toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 13

4.

$$100\cdot x^{\log x}=x^3$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 50 C) 100 D) 500 E) 1000

5.

$$x^{\log_3 x}=27x^2$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin en büyüğü kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

6.

$$\log_b a=2$$
$$\log a+\log b=3$$

eşitliklerini sağlayan a ve b sayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 11 C) 101 D) 110 E) 1010

7.

$$x^{\frac{\log(\log x)}{\log x}}=3$$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 50 C) 100 D) 500 E) 1000

8.

$$5^{\sqrt{\frac{1}{x}}}=7^{\sqrt{x}}$$

eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log_5 7$ B) $\log_7 5$ C) $\log_{25} 7$ D) $\log_{49} 5$ E) $\log 35$

9.

$$\begin{cases} x^y=3x \\ \log_3 x+\log_x 3=\frac{26}{y-1} \end{cases}$$

sistemini sağlayan y değerlerinden büyüğü kaçtır?

A) -6 B) -4 C) 4 D) 6 E) 24

10.

$$\log_3(\log_9 x)=\log_9(\log_3 x)$$

sistemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

1. E 2. D 3. C 4. C 5. D 6. D 7. E 8. B 9. D 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Logaritmik Eşitsizlikler

Bir soruyla derse başlayalım:

$a^b > a^c$ ise $b > c$ diyebilir miyiz?

Bir cevapla derse devam edelim:

Diyemeyiz.

Çünkü $0 < a < 1$ ise $b > c$ değil, $b < c$ olur. O sizin dediğiniz $a > 1$ olduğu sürece geçerlidir. Logaritmik fonksiyonlar ile üstel fonksiyonların aralarındaki akrabalıktan dolayı aynı durum logaritmik eşitsizliklerde de vardır.

$0 < a < 1$ olduğunda

$$\log_a b < \log_a c \text{ ise } b > c$$
$$\log_a b > \log_a c \text{ ise } b < c$$

$a > 1$ olduğunda

$$\log_a b < \log_a c \text{ ise } b < c$$
$$\log_a b > \log_a c \text{ ise } b > c$$

Yukardaki dört önermenin içinde bulundukları aralıklarda tersleri de doğrudur.

Bu konuda dikkat edilmesi gereken en önemli noktayı tekrar izah edelim. Aynı tabandaki iki logaritmayı kıyaslarken, bazen okun yönü aynı kalır, bazen okun yönü değişir. Bu değişme tabana bağlıdır. Eğer taban 0 ile 1 arasındaysa okun yönünü değiştiriyoruz, eğer 1'den büyükse aynı kalıyor.

''Peki taban negatif veya 1 olunca ne yapacağız?'' demiyorsunuz değil mi, negatif veya 1 tabanında logaritma olamayacağını söylemiştik.

Bir diğer önemli nokta da şudur. Logaritmik ifadeler nihayetinde birer fonksiyon olduklarından, bulunan değerlerin ifadeyi tanımsız yapıp yapmadıkları da kontrol edilmelidir. Yani eşitsizliğin çözümünden gelen aralıkla, tanım aralığının kesişimini cevap olarak vermeliyiz. Unutan yanar, bizden söylemesi!

Örnek. $\log_3(2x-9) < 1$ *eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?*

A) $(-\infty, 6)$ B) $(0, 6)$ C) $(\frac{9}{2}, 6)$

D) $(\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$ E) $(\frac{9}{2}, +\infty)$

Çözüm: Eşitsizlik $\log_3(2x-9) < \log_3 3$ haline getirilirse, tabanlar 1'den büyük olduğu için okun yönünü koruyarak $2x - 9 < 3$ yani $x < 6$ olduğunu söyleyebiliriz. Fakat diğer yandan logaritmik ifadenin tanımlı olması için $x > 9/2$ olması gerekir. Demek ki, eşitsizliği sağlayan x'ler $(\frac{9}{2}, 6)$ aralığındaymış.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -2$ *eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İki farklı yol vereceğiz.

Birinci yol. Eşitsizliği sol yanı 1/2 tabanında olduğundan, sağ yanını da 1/2 tabanında yazalım.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 4$$

Şimdi, logaritmik ifadelerden kurtulacağız ama taban 1'den küçük olduğundan ok yönünü değiştireceğiz.

$$2x-1 > 4$$
$$x > \frac{5}{2}.$$

Ayrıca ifadenin tanımlı olması için $x > \frac{1}{2}$ eşitsizliğinin de sağlanması gerekiyor ama şansımıza $x > \frac{5}{2}$ eşitsizliği zaten o eşitsizliği de sağlıyor. Bu durumda eşitsizliği sağlayan en küçük tam sayı değeri 3'tür.

İkinci yol. N'olur n'olmaz, belki okun yönünü değiştirmeyi unuturum diyenler, 1'den küçük olan tabanı aşağıdaki gibi 1'den büyük hale getirebilirler. Bu metodu sadece bu soruda değil, tabanı 1'den küçük her ifadede kullanabilirsiniz.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<-2$$
$$\log_{2^{-1}}(2x-1)<-2$$
$$-\log_2(2x-1)<-2$$
$$\log_2(2x-1)>2$$
$$\log_2(2x-1)>\log_2 2^2$$
$$2x-1>4$$
$$x>\frac{5}{2}.$$

Gördünüz mü, aynı yere geldik.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_{\frac{1}{5}}[\log_2(x-3)]\le 0$ *eşitsizliğini sağlayan x değerleri için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?*

A) $x\ge 3$ B) $x\ge 5$ C) $x\ge 9$ D) $x\ge 10$ E) $x\ge 11$

Çözüm:

$$\log_{\frac{1}{5}}[\log_2(x-3)] \le \log_{\frac{1}{5}} 1$$

olduğundan $\log_2(x-3)\ge 1$ diyeceğiz. Okun yönünün değiştiğine dikkat ettiniz değil mi, taban 1'den küçük diye yaptık bunu.

$$\log_2(x-3)\ge 1$$
$$\log_2(x-3)\ge \log_2 2$$
$$x-3\ge 2$$
$$x\ge 5.$$

Bu değerler, ifadenin tanımlı olmasına engel olmadığından doğru cevaptır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\log_3(\log_2(x-1))\le 2$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1<x\le 513$ B) $1\le x\le 513$ C) $2<x\le 513$
D) $2\le x\le 513$ E) $3\le x\le 513$

Çözüm: Hemen eşitsizliğin sağ tarafını 3 tabanında yazalım. Yalnız burada önemli olan nokta; nasıl ki $\log_2(x-1)$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için $x-1>0$ diyoruz, aynı onun gibi $\log_3(\log_2(x-1))$ ifadesinin de tanımlı olabilmesi için $\log_2(x-1)>0$ olmalı diyeceğiz.

$$\log_3(\log_2(x-1))\le \log_3 9$$
$$0<\log_2(x-1)\le 9$$
$$\log_2 1<\log_2(x-1)\le \log_2 512$$
$$1<x-1\le 512$$
$$2<x\le 513$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\log_3\left(\frac{x-2}{x+3}\right)\le 0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-3,\infty)$ B) $(-\infty,-3)$ C) $(-\infty,2)$ D) $(-3,2)$ E) $(2,\infty)$

Çözüm: Hem tanımlı olması gerektiğini, hem de

$$\log_3\left(\frac{x-2}{x+3}\right)\le \log_3 1$$

olduğunu düşünürsek, $0<\frac{x-2}{x+3}\le 1$ olması gerektiğini anlarız. Soldaki eşitsizlikten $x<-3$ veya $x>2$ olmalı, sağdaki eşitsizliğe göreyse $\frac{x-2}{x+3}-1\le 0$ yani $\frac{5}{x+3}\ge 0$ bulunur. Bu da $x>-3$ ile mümkündür. Her iki çözümün kesişimi doğru cevap olacaktır: $(2,\infty)$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\log_3(x-4)+\log_3(x+4)<2$ *eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:

$$\log_3(x^2-16)<\log_3 9$$
$$x^2-16<9$$
$$x^2-25<0$$
$$(x-5)(x+5)<0$$

olduğundan $-5<x<5$ olmalıdır. Diğer yandan logaritmik ifadelerin tanımlı olabilmesi için $x>4$ olmalıdır. Bu iki eşitsizlik birlikte düşünülünce $4<x<5$ olması gerektiği çıkar. Demek ki eşitsizliği sağlayan tam sayı yokmuş.

Doğru cevap: A.

Örnek. $-1<\log_3(x-1)\le 2$ *eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?*

A) $(\frac{1}{3},9)$ B) $(\frac{4}{3},10)$ C) $(\frac{1}{3},9]$ D) $(1,10]$ E) $(\frac{4}{3},10]$

Çözüm: Kıyaslamayı kolay yapabilmek için eşitsizliğin alt ve üst sınırlarını 3 tabanında logaritmik ifadeler şeklinde yazalım.

$$-1<\log_3(x-1)\le 2$$
$$\log_3\frac{1}{3}<\log_3(x-1)\le \log_3 9$$
$$\frac{1}{3}<x-1\le 9$$
$$\frac{4}{3}<x\le 10$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $y=\sqrt{3-\log_2(x-1)}$ *fonksiyonu x'in kaç tam sayı değeri için tanımlıdır?*

A) 3 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

$$y=\sqrt{3-\log_2(x-1)}$$

ifadesinin tanımlı olabilmesi için

$$3-\log_2(x-1)\geq 0 \text{ ve } x-1>0$$

şartlarının sağlanması gerekir.

$$\log_2(x-1)\leq 3$$

olmalı diye $x-1\leq 2^3=8$, o halde $x\leq 9$, diğer yandan $x>1$ olması gerektiğinden x 'in 8 tam sayı değeri için fonksiyonumuz tanımlıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\log^2 x-\log x^4+4>0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-\{2\}$ C) $\mathbb{R}^+-\{2\}$
D) $\mathbb{R}-\{100\}$ E) $\mathbb{R}^+-\{100\}$

Çözüm:

$$\log^2 x-\log x^4+4>0$$
$$\log^2 x-4\log x+4>0$$
$$(\log x-2)^2>0$$

Eşitsizliğin sol yanı bir tamkare olduğundan eşitsizlik daima sağlanır. Sadece 0 olduğunda sağlanmaz. O halde $\log x = 2$ eşitliğini sağlayan x değerini çözüme katmayacağız. Bu değer de 100'dür. Ama yanlışlıkla D şıkkını işaretlemeyin. Çünkü logaritmik fonksiyonun tanımlı olması için x'in bir de pozitif olması gerekir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $0<\alpha<\pi$ *olmak üzere*

$$a=\sin^{10}\alpha$$
$$b=10^{\sin\alpha}$$
$$c=\log(\sin\alpha)$$

sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $c<b<a$ B) $c<a<b$ C) $a<c<b$
D) $a<b<c$ E) $b<a<c$

Çözüm: $0<\alpha<\pi$ iken $0<\sin\alpha<1$ olur. Bu aralıktaki değerlerin logaritmaları negatif olup a ve b değerleri de pozitif olduğundan en küçüğü c'dir. Diğer yandan $0<a<1$ olup, $1<b<10$ olduğundan en büyük de b'dir. O halde küçükten büyüğü doğru sıralama $c<a<b$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\log_{\frac{1}{2}}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\sqrt{10},\sqrt{10})$ B) $(-\sqrt{10},-3)$ C) $(3,\sqrt{10})$
D) $(-\sqrt{10},-3)\cup(3,\sqrt{10})$ E) $\mathbb{R}-[-3,3]$

Çözüm:

$$\log_{\frac{1}{2}}|\cos x|=-\log_2|\cos x|$$

olup, $0\leq|\cos x|\leq 1$ olduğundan $\log_2|\cos x|$ değeri her daim negatiftir, bu yüzden $-\log_2|\cos x|$ değeri her daim pozitiftir. Bu yüzden eşitsizliği çözerken bu ifadeyi yok sayabiliriz.

$$\log_{\frac{1}{2}}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0$$
$$\log_5(x^2-9)<0$$
$$\log_5(x^2-9)<\log_5 1$$
$$x^2-9<1$$
$$x^2-10<0$$
$$(x+\sqrt{10})\cdot(x-\sqrt{10})<0$$

olduğundan $-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$ olmalıdır. Fakat $\log_5(x^2-9)$ ifadesinin tanımlı olması $x<-3$ veya $x>3$ olmasıyla mümkündür. Ayrıca $|\cos x|$ ifadesi de 0 olmamalıdır. O halde çözüm aralığı

$$-\sqrt{10}<x<-3 \text{ veya } 3<x<\sqrt{10}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\log_3(x-5)<4$ *eşitsizliğini sağlayan x değerleri için* $\log_3(250-x)$ *ifadesinin alabileceği tek tam sayı değeri kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: x'in hangi değerleri alabileceğini bulalım. $\log_3(x-5)<4$ eşitsizliğini $\log_3(x-5)<\log_3 81$ diye düzenlersek $x-5<81$ yani $x<86$ çıkar, bir de fonksiyonun tanım aralığı düşünülünce $5<x<86$ yazabiliriz. Bakalım bu durumda $250-x$ hangi aralıkta?

$$5<x<86$$
$$-86<-x<-5$$
$$164<250-x<245$$
$$\log_3 164<\log_3(250-x)<\log_3 245$$
$$4,...<\log_3(250-x)<5,....$$

olduğundan alabileceği tek tam sayı değeri 5'tir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\log_5(x-2) < 2$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığındaki en büyük ve en küçük tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

2.

$$1 < \log(x+1) < 2$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 89 B) 90 C) 91 D) 99 E) 100

3.

a doğal sayı olmak üzere

$$a < \log_3 2000 < a+1$$

olduğuna göre $\log_a 72 - \log_a 2a$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4.

$$\log_4(x-2) \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) Sonsuz

5.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \ge 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, \infty)$ B) $(-\infty, -1]$ C) $[0, 1)$
D) $(-1, 0]$ E) $(-1, 0)$

6.

$$\log_x(x+2) \le 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, +\infty)$ B) $(1, +\infty)$ C) $(0, 1)$
D) $(0, +\infty) - \{1\}$ E) $(-1, 0)$

7.

$$\log_5(x-2) \le 1$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) Sonsuz

8.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \ge 2$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-\infty, -1]$ C) $(-1, +\infty)$
D) $(-1, -\frac{8}{9}]$ E) $(-\infty, -\frac{8}{9}]$

9.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le -2$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

10.

$$\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \ge 1$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, -1]$ B) $[-3, -1]$ C) $[-3, -1)$
D) $(-\infty, -3]$ E) $(-1, +\infty)$

1. C 2. A 3. C 4. B 5. D 6. C 7. D 8. D 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\log_2(4-x) > \log_2(x+2)$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz

2.

$$1 < \log_3(x+1) \le 2$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

3.

$$\sqrt{1-\log_2(x+3)} < 1$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2,-1]$ B) $[-2,-1]$ C) $[0,1)$
D) $(-1,0]$ E) $(-1,0)$

4.

$$5\cdot\log x \le \log(x^4) + 1$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0,10]$ B) $[0,10]$ C) $[10,+\infty)$
D) $(-\infty,10]$ E) $(-10,0)$

5.

$$\log_2(x^3) \le \log_{\frac{1}{2}} x + 4$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz sayıda

6.

Aşağıdaki aralıkların hangisi

$$\log^2 x - \log(x^2) - 3 < 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığının bir alt kümesidir?

A) $(0,4)$ B) $(\frac{1}{20}, 234)$ C) $(5, 1234)$
D) $(\frac{7}{69}, 438)$ E) $(5, 1000]$

7.

$$\log_a 4 = 3$$
$$\log_b 3 = 2$$
$$\log_c 5 = 6$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $a<b<c$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$
D) $c<a<b$ E) $c<b<a$

8.

$$\log_3(x-5) < (\log_{11} 7)\cdot\log_7 121$$

eşitsizliğini gerçekleyen kaç tane x tam sayı değeri vardır?

A) 14 B) 11 C) 8 D) 6 E) 4

9.

$$\log_2(x-5) < 3$$

eşitsizliğini sağlayan x değerleri $\log_8(520-x)$ ifadesini sadece bir kez tam sayı yapmaktadır.
O tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.

$$\log_{\frac{1}{8}}\left[\log_5(x+2)\right] \ge -\frac{1}{3}$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için x nasıl seçilmelidir?

A) $x \le 23$ B) $x < 20$ C) $-2 < x \le 23$
D) $-1 < x \le 23$ E) $x > 46$

1. C 2. A 3. A 4. A 5. C 6. D 7. D 8. C 9. D 10. D

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

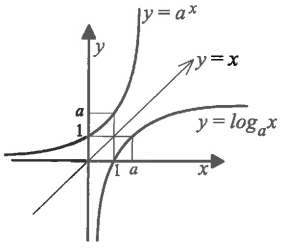
Logaritmik Fonksiyon Grafikleri

1'den farklı pozitif bir a reel sayısı için $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ bağıntılarının birer fonksiyon olduklarını söylemiştik. Her fonksiyonun grafiği olduğu gibi bu fonksiyonların da grafikleri vardır ve şimdi biz bu fonksiyonların grafiklerini çizmeyi öğreneceğiz.

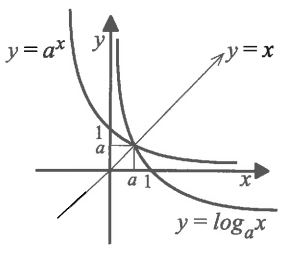
Dikkat edilecek olursa, $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonları birbirlerinin tersleridir. Anlayacağınız birinin grafiğini çizince, diğerinin grafiği de nerdeyse çizilmiş olacak. Hatırlayınız, bir fonksiyon ile tersinin grafikleri birbirlerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrikleriydi. Önce üstel fonksiyonlarla başlayalım, logaritmik fonksiyon grafikleri kendiliğinden belirecek.

$y = a^x$ eğrisi, $a = 1$ için bir doğrudur. Çünkü x reel sayı olarak hangi değeri alırsa alsın, $y = 1^x = 1$ olur. Bundan dolayı $a \neq 1$ durumunu masaya yatıracağız. Şimdi iki seçenek var: $a > 1$ ve $0 < a < 1$ seçenekleri.

$a > 1$ ise $y = a^x$ grafiğinin çizilmesi. Daha önce sayılar dersinde, hatta üslü ifadeler dersinde, hatta eşitsizlikler dersinde anlayacağınız nerdeyse geçmiş tüm derslerimizde, 1'den büyük kesirlerin üsleri arttıkça sayının büyüyeceğini söylemiştik. Grafik belirene kadar yeter sayıda nokta işaretlerseniz, grafiğin neye benzediği aşağı yukarı belirir. y değerlerindeki artış x değerlerindeki artıştan katbekat fazla olacağından grafik bir doğru değil, oldukça hızlı artan bir eğri şeklinde olmalıdır. Birkaç noktayla yukardaki grafiği siz de kolayca bulabilirsiniz.



$0 < a < 1$ ise $y = a^x$ grafiğinin çizilmesi. Aynı derslerde, pozitif basit kesirlerin üsleri arttıkça sayının değerinin küçüleceğini de söylemiştik. $x = 0$ olunca $a \neq 0$ olduğundan $a^0 = 1$ olacağını da biliyoruz. Grafik belirene kadar yeter sayıda nokta işaretlerseniz, grafiğin neye benzediği aşağı yukarı belirir.



Genel olarak logaritmik denklem grafikleri çizilirken şu yolu izleyebilirsiniz.

İzlenecek yolu $y = \log_a x$ için veriyorum.

- ✓ Logaritma fonksiyonunun tanım aralığı bulunur. Burada $x > 0$ olması gerektiğinden grafik kesinlikle y ekseninin solunda olmamalı, hatta y eksenine değmemelidir bile.

- ✓ Denklemde $x = 0$ için grafiğin y eksenini kestiği nokta ve $y = 0$ için x eksenini kestiği noktalar işaretlenir. Tabi örneğimizde x'e 0 veremeyiz.

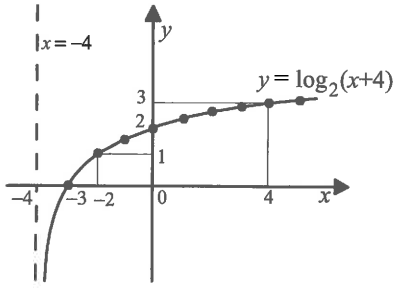
- ✓ Logaritma fonksiyonunun tabanına bağlı kalmak üzere (istenirse birkaç sağlayan nokta daha bularak) grafik tamamlanır.

Örnek. *$y = \log_2(x + 4)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

Çözüm: $x + 4 > 0$ olması gerektiğinden $x > -4$ için grafik çizeceğiz. $x \leq -4$ için bir görüntü olmadığını fark etmeniz lazım.

Daha sonra $x = 0$ vererek, grafiğin y eksenini $y = \log_2 4 = 2$ noktasında kestiğini görün. Sonra da $y = 0$ olması için $x = -3$ olması gerektiğini fark edin. Demek ki grafiğimiz, x eksenini -3 apsisli noktada kesiyor.

Son olarak da taban 2 olduğundan $x = -2$ olursa $y = 1$ olur. Anlayacağınız grafik $(-2, 1)$ noktasından da geçer. Şöyle ki:



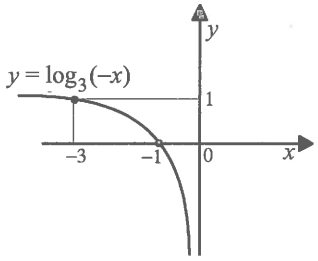
Örnek. *$y = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

Çözüm: $y = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ oldukça karmaşık görünüyor. Biraz oynama yapalım:

$$y = -\log_{\frac{1}{3}}(-x) = -\log_{3^{-1}}(-x) = \log_3(-x)$$

olduğundan $y = \log_3(-x)$ grafiğini çizeceğiz.

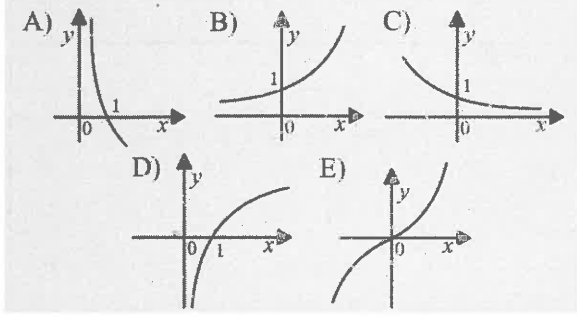
$-x > 0$ olması gerektiğinden grafiği $x < 0$ değerleri için çizeceğiz. $x = 0$ için y tanımsız olduğundan grafik y eksenini kesmeyecektir. $y = 0$ için $x = -1$ olduğundan grafiğimiz, x eksenini -1 apsisli noktada kesecektir.



$a = 3$ yani $x = -3$ olursa da $y = 1$ olur, yani grafik $(-3, 1)$ noktasından da geçer. Bu kadar bilgi bize grafiği çizdirir.

Aslında $y = \log_3 x$ grafiğini çizip, sonra y eksenine göre simetriğini alsak da olurdu. Çünkü trigonometrik fonksiyonların grafiğini anlattığımız derste $f(-x)$ fonksiyonunun grafiğinin $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği olduğunu kanıtlamıştık.

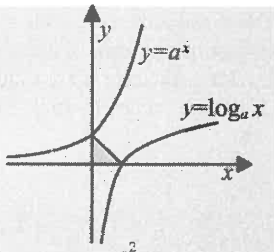
Örnek [1988 ÖYS]. *$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



Çözüm: $x \le 0$ için ifade tanımsız olacağından grafik y ekseninin soluna taşmamalıdır, halbuki B, C, E şıklarında böyle bir durum var. O halde doğru cevap A ve D şıklarından birisidir. x'e 1 dışında herhangi bir değer vererek doğru olanı bulabiliriz. x'e $\frac{1}{3}$ verelim. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$ olduğundan doğru olan grafik $(1/3, 1)$ noktasından geçmelidir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$a > 1$ olmak üzere $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri yanda çizilmiştir. Buna göre taralı üçgenin alanı kaç birimkaredir?*

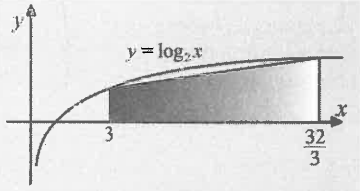


A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{a^2}{2}$ E) a^2

Çözüm: $y = \log_a x$ fonksiyonu x eksenini $(1, 0)$ noktasında, $y = a^x$ fonksiyonu da y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser. O halde taralı dik üçgenin dik kenar uzunlukları 1'er birimdir. Bu durumda alan $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ br^2 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki grafik $y = \log_2 x$ fonksiyonuna aittir. Taranmış yamuğun alanı kaç br^{2}dir?*



A) $\frac{115}{2}$ B) $\frac{115}{3}$ C) $\frac{115}{6}$ D) 18 E) 20

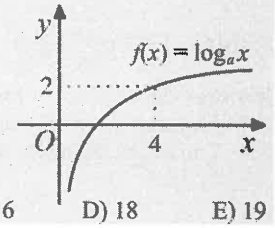
Çözüm: Taralı alanın bir dik yamuk olduğunu görüyoruz. Yüksekliği $32/3 - 3 = 23/3$'tür. Alanını hesaplayabilmek için bize tabanlar toplamı da lazım.

$$\log_2 3 + \log_2 \frac{32}{3} = \log_2 (3 \cdot \frac{32}{3}) = 5$$

olduğundan alan $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{23}{3} = \frac{115}{6}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki grafik $y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $f(8) + f^{-1}(4)$ toplamı kaçtır?*



A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 19

Çözüm: Fonksiyonumuz (4, 2) noktasından geçtiğinden dolayı $f(4) = 2$ olmalıdır. Bu durumda $\log_a 4 = 2$ eşitliğinden $a = 2$ bulunur. Demek ki $f(x) = \log_2 x$ imiş. O halde $f^{-1}(x) = 2^x$ olur. $f(8) = 3$ ve $f^{-1}(4) = 16$ diye

$$f(8) + f^{-1}(4) = 3 + 16 = 19$$

olmalıdır.

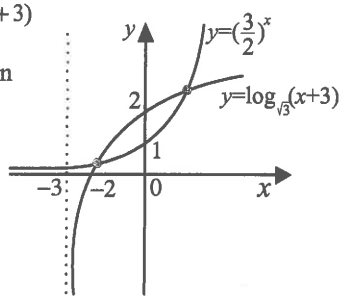
Doğru cevap: E.

Daha önce de defalarca söylediğimiz gibi grafikler olmazsa olmazlardır. Çünkü çözümleri çok zor olan denklemlerin kaç reel kökü olduklarını bile grafik yardımıyla rahatlıkla bulabiliyorduk. Buna dair bir örnek daha verelim:

Örnek. $\log_{\sqrt{3}}(x+3)=(\frac{3}{2})^x$ *denkleminin kaç reel kökü vardır?*

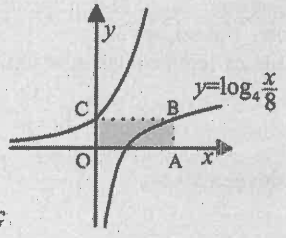
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $y=\log_{\sqrt{3}}(x+3)$ ve $y=(\frac{3}{2})^x$ eğrilerinin kesişim noktalarının adedi kadar reel kök vardır. Her iki eğriyi de yandaki gibi çizersek, sadece 2 tane kesim noktası olduğunu görüyoruz.



Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda birbirlerinin tersi olan iki fonksiyon grafiği görmektesiniz. Bunlardan x eksenini kesenin denklemi* $y=\log_4\frac{x}{8}$ *olduğuna göre taralı dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?*



A) 2^{22} B) 2^{21} C) 2^{20} D) 2^{19} E) 2^{18}

Çözüm: $y=\log_4\frac{x}{8}$ eğrisi x ekseninin 8 apsisli noktada keseceğinden, tersi olan fonksiyon y eksenini 8 ordinatlı noktada keser. Bu da B noktasının ordinatı 8 demek olur. Şimdi bu bilgi yardımıyla B noktasının apsisini bulalım.

$$\log_4\frac{x}{8}=8$$

$$\frac{x}{8}=4^8$$

$$x=8\cdot4^8=2^3\cdot2^{16}=2^{19}$$

olur. Şu durumda dikdörtgenin alanı

$$2^{19}\cdot8=2^{19}\cdot2^3=2^{22}$$

olarak bulunur.

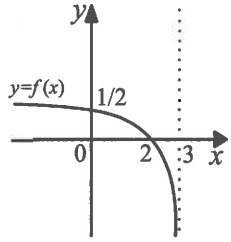
Doğru cevap: A.

Ödev.
Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

1. $y=\log_3(x-2)$
2. $y=\log_2(3x+9)$
3. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$
4. $y=2^x$
5. $y=3^{x+2}$
6. $y=-3^x$

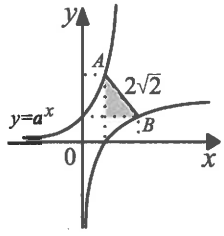
CEVAPLI TEST 1

1.
Yanda grafiği verilmiş
$y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?



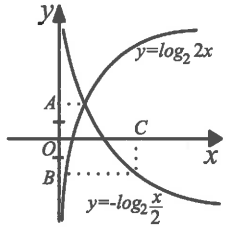
A) $y = \log_9 (x-3)$
B) $y = \log_3 (3-x)$
C) $y = \log_2 (3-x)$
D) $y = \log_9 (3-x)$
E) $y = \log_{\sqrt{3}} (x-3)$

2.
Yanda $y = a^x$ fonksiyonunun ve onun tersinin grafikleri verilmiştir.
AB kirişinin boyu $2\sqrt{2}$ birim olduğuna göre a kaçtır?



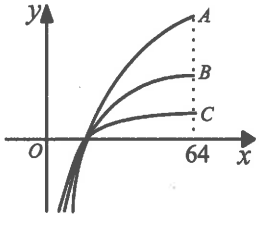
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Yanda $y = \log_2(2x)$ ve $y = -\log_2 \frac{x}{2}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.
Grafiklerin kesişim noktasının ordinatı A olup, $|AO| = |OB|$ verildiğine göre C noktasının apsisi kaçtır?



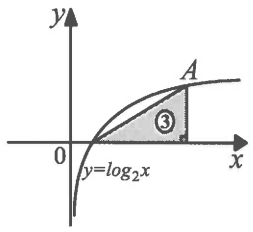
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
Yanda görülen grafikler $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$ ve $y = \log_{16} x$ fonksiyonlarına aittir.
$x = 64$ doğrusunun bu eğrileri kestikleri noktalar şekildeki gibi A, B, C ise $\frac{|AB|}{|BC|}$ oranı kaçtır?



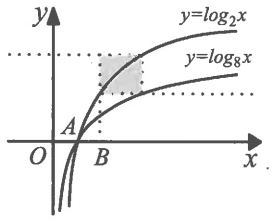
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.
A noktası şekildeki gibi $y = \log_2 x$ eğrisi üzerindedir.
Taralı dik üçgenin alanı 3 br^2 olduğuna göre A noktasının apsisi kaçtır?



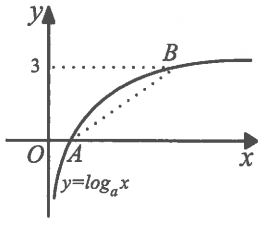
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
Yanda grafikleri verilmiş $y = \log_2 x$ ve $y = \log_8 x$ fonksiyonları Ox eksenini A noktasında kesmektedirler.
$|OA| = |AB|$ olduğuna göre taralı dikdörtgenin alanı kaç br^{2}dir?



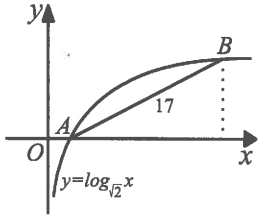
A) 2 B) 4 C) 6 D)8 E) 12

7.
Ox eksenini A noktasında kesen $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bir B noktası alınıyor.
B'nin Oy eksenine ve A'ya uzaklıkları eşit olup ordinatı 3 ise a kaça eşittir?



A) $\sqrt[3]{5}$ B) $\sqrt[5]{3}$ C) 3 D) 5 E) $\frac{1}{3}$

8.
Ox eksenini A noktasında kesen $y = \log_{\sqrt{2}} x$ fonksiyonunun grafiği üzerinde $|AB| = 17$ birim olacak şekilde bir B noktası alınıyor.
B'nin apsisi aşağıdakilerden hangisi olur?



A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

1. D 2. C 3. D 4. B 5. D 6. E 7. A 8. E

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

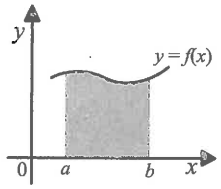
Doğal Logaritma Fonksiyonu

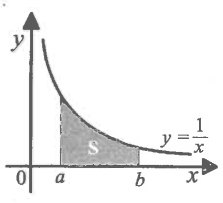
Matematikteki buluşların tarihlerine bakarsanız, hiç de öyle öğrendiğimiz sırada bulunmadıklarını göreceksiniz. Örneğin karmaşık sayılar dersini türevden önce anlatırız ama karmaşık sayı mefhumu bulunduğunda ya da uydurulduğunda türev çoktan bulunmuştu. Bizler her ne kadar türev ve integrali lise öğretiminin en sonuna koysak da, şu an anlatacağımız doğal logaritma fonksiyonu bulunduğunda da onlar biliniyordu. Şimdi bu fonksiyonu dilimiz döndüğünce anlatmaya çalışacağız ama kıyısından yöresinden integrale dokunmazsak olmuyor.

Ucundan azıcık integral. Şimdi oturup koskocaa integral konusunu anlatacak halimiz yok. Kabaca ve kısaca değineceğiz, çünkü işimize yarayacak.

Bir fonksiyonun integrali, o fonksiyonun grafiğiyle, x ekseni arasındaki bölgenin alanını bulmaya yarayan bir fonksiyon verir. Tabi fonksiyonun altında veya üstünde kalan bölge alanı sonsuz olabilir, bundan dolayı belli bir aralıktaki bölgenin alanını hesaplamak için de adına belirli integral dediğimiz integrali kullanırız.

Örneğin, yanda gösterilen $y = f(x)$ eğrisi, x ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğrularıyla sınırlı bölgenin alanı için f fonksiyonunun x'e göre integralini alırız, sonra çıkan fonksiyonda x yerine a ve b değerlerini veririz, bunların pozitif farkı da bize alanı verir. Peki, integralini nasıl alırız diye sormayın, dersimiz o değil! İlerde bunları bir güzel öğreneceğiz.





Analiz dersinin temel teoremlerinden olan yukardaki teoreme göre yanda taranmış bölgenin alanını bulmak isteyen biri, önce $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun x'e göre integralini almalı ve o her ne çıkıyorsa, onda x'e a ve b değerlerini koyup, çıkan sayıların pozitif farkını almalıdır.

Büyüklerimiz bu integrali hesapladıklarında logaritmik bir fonksiyonla karşılaşmışlar. Yalnız bu logaritmik ifadenin tabanı bir tam sayı değilmiş, bırakın tam sayıyı rasyonel bile değilmiş. 2,71'e çok yakın bir sayı olduğu bulunmuş ama tam değeri bulunamamış. Daha sonra Euler, 'Tabi bulamazsınız, çünkü bu sayı $\sqrt{2}$ gibi, π gibi bir irrasyonel sayıdır, dolayısıyla ondalık yazılımının virgülden sonraki kısmı kuralsız bir şekilde sonsuza uzar!'' demiş[1]. Neyse, o gün bugündür, bu sayı Euler'in anısına ''e'' ile gösterilir, biz de millete uyacağız.

Yukarda hikayesini anlattığımız e tabanındaki logaritmik fonksiyonlara **doğal logaritma fonksiyonu** veya kısaca **ln fonksiyonu** denir.[2]

$$\log_e x = \ln x$$

ln fonksiyonu düpedüz bir logaritmik fonksiyon olduğundan logaritmik fonksiyonların tüm özelliklerini sağlar.

Örnek.

$$\ln e^3 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 6$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) e^3

Çözüm: $\ln e^3 = 3 \cdot \ln e = 3$ olduğunu hemencecik bulabiliriz. Diğer yandan

$$\ln 2 + \ln 3 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 6$$

olduğundan cevabımız

$$3 + \ln 6 - \ln 6 = 3$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

---

[1] $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \cong 2,71828182845\ldots$

İlginçtir, Euler 1828'de doğmuştur! Euler'in bu sonuca nasıl vardığı şu an için boyumuzu aşıyor, ama serilerin sonunda biraz türev de kullanarak bu eşitliği kanıtladık. Bu arada şunu da söyleyeyim: $\pi \cdot e$ ve $\pi + e$ sayılarının rasyonel mi irrasyonel mi oldukları bu satırları yazdığım anda hala bulunabilmiş değil. Boyunuz uzarsa bunlara da bakın ve matematiğin altın sayfalarında size de bir yer açılsın.

[2] ln : logarithm natural

Örnek.

$$\ln(x\cdot y)=2a$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=2b$$

olduğuna göre x'in pozitif değeri kaçtır?

A) e^{a+b} B) e^{b-a} C) e^{a-b} D) e^{-a-b} E) $e^{a\cdot b}$

Çözüm: Verilen iki eşitliği taraf tarafa toplayalım.

$$\ln(x\cdot y)+\ln\left(\frac{x}{y}\right)=2a+2b$$

$$\ln(x\cdot y\cdot\frac{x}{y})=2a+2b$$

$$\ln(x^2)=2a+2b$$

$$2\cdot\ln x=2a+2b$$

$$\ln x=a+b$$

bulunacağından $x=e^{a+b}$ olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek [1988 ÖYS].

$$\ln a=p$$

olarak verildiğine göre $\log(a^2)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $p\cdot\log e$ B) $2p\cdot\log e$ C) $p\cdot\log 2e$

D) $p\cdot\log\frac{e}{2}$ E) $\frac{p}{2}\cdot\log e$

Çözüm: $\ln a=p$ demek $a=e^p$ demektir. Bunu, bize sorulan ifadede yerine yazalım.

$$\log(a^2)=\log(e^{2p})=2p\cdot\log e\,.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\ln x-1=6\cdot\log_x e$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) -6

Çözüm:

$$\ln x-1=6\cdot\log_x e=\frac{6}{\log_e x}=\frac{6}{\ln x}$$

olduğundan, $\ln x-1=\frac{6}{\ln x}$ ve dolayısıyla buradan,

$$\ln^2 x-\ln x-6=0$$

olur. $\ln x=p$ için

$$p^2-p-6=0$$

olur ki $p=-2$ veya $p=3$ bulunur. $\ln x=-2$'den $x=e^{-2}$, $\ln x=3$'ten $x=e^3$ bulunacağından kökler çarpımı $e^{-2}\cdot e^3=e$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $e^x-6\cdot e^{-x}-5=0$ *denkleminin kökü nedir?*

A) $-\ln 6$ B) 0 C) 1 D) $\ln 4$ E) $\ln 6$

Çözüm: $e^x-6\cdot e^{-x}-5=0$ eşitliği düzenlenirse

$$e^x-\frac{6}{e^x}-5=0$$

olur. Paydalar eşitlenirse $e^{2x}-5\cdot e^x-6=0$ olur ki, burada $e^x=t$ denirse $t^2-5t-6=0$ bulunur.

$t_1=6$ ve $t_2=-1$ olur ancak e^x sayısı negatif olamayacağından ancak $t_1=6$'yı alabiliriz.

$e^x=6$ diye de $x=\ln 6$'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $e^{2x+2}-5\cdot e^{x+2}+4e^2=0$ *denkleminin kökler çarpımı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 4 D) $\ln 4$ E) e^4

Çözüm:

$$e^{2x+2}-5\cdot e^{x+2}+4e^2=0$$

$$e^{2x}\cdot e^2-5\cdot e^x\cdot e^2+4e^2=0$$

$$e^2\left[e^{2x}-5\cdot e^x+4\right]=0$$

$$e^2(e^x-4)(e^x-1)=0$$

olduğundan $e^x=4$ veya $e^x=1$ olmalıdır. Bu durumda $x=\ln 4$ veya $x=0$'dır. O halde x'in alabileceği değerler çarpımı 0'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $e^{-x}(e^x+1)=2\cdot e^x$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{0\}$ B) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ C) $\{1,2\}$ D) $\{1\}$ E) $\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanını e^x ile çarpalım.

$$e^x+1=2\cdot e^{2x}$$

$$2\cdot e^{2x}-e^x-1=0$$

$$(2\cdot e^x+1)(e^x-1)=0$$

e^x daima pozitif olduğundan $-1/2$'ye eşit olamaz. $e^x=1$ denkleminden de $x=0$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\log_x 5=\ln\sqrt{5}$ *eşitliğini sağlayan x'ten küçük en büyük tam sayı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm:

$$\log_x 5=\ln\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot\ln 5=\log_{e^2}5$$

eşitliğinden $x=e^2$ bulunur. e sayısı yaklaşık 2,71 olduğundan e^2 sayısı yaklaşık 7,34'tür. Bu durumda koşulu sağlayan en büyük sayı 7 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$a = \ln 27 - \ln 10$$
$$b = \ln 3 \cdot \log_3 e$$
$$c = \log 4 + \log 3$$

olduğuna göre a, b, c sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $a < b < c$ B) $a = b < c$ C) $a < b = c$
D) $c < b < a$ E) $a < c < b$

Çözüm: $a = \ln 27 - \ln 10 = \ln(\frac{27}{10}) = \ln(2{,}7) < \ln e = 1$,

$b = \ln 3 \cdot \log_3 e = \log_e 3 \cdot \log_3 e = 1$,

$c = \log 4 + \log 3 = \log 12 > \log 10 = 1$

olduğundan doğru sıralama $a < b < c$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\ln(x^2 + 6x + p)$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer 2 olduğuna göre p hangi aralıkta olmalıdır?*

A) $p > e + 2$ B) $p \geq e^2 + 2$ C) $p \geq e^2$
D) $p \geq e^2 + 9$ E) $p \geq e^2 + 11$

Çözüm: $\ln(x^2 + 6x + p) \geq 2$ eşitsizliğini çözmemiz isteniyor. Sağ tarafı da ln'e bağlı yazalım bakalım.

$$\ln(x^2 + 6x + p) \geq \ln(e^2)$$
$$x^2 + 6x + p \geq e^2$$
$$x^2 + 6x + p - e^2 \geq 0$$

Bunun için denklemin diskriminantının negatif olmaması gerekiyor. O halde

$$p - e^2 \geq 9$$
$$p \geq e^2 + 9$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\ln(\frac{2x-1}{3}) < 0$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-2, \frac{1}{2})$ B) $(\frac{1}{2}, 2)$ C) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D) $(-\infty, 2)$ E) $(2, +\infty)$

Çözüm: Önce eşitsizliğin sağ tarafını da ln'e bağlı yazalım:

$$\ln(\frac{2x-1}{3}) < \ln 1$$

Doğal logaritmanın tabanı $e = 2{,}71\ldots > 1$ olduğu için okun yönünü değiştirmeyeceğiz: $\frac{2x-1}{3} < 1$.

Ayrıca logaritmanın tanımından $\frac{2x-1}{3} > 0$ olmalıdır. Yani $0 < \frac{2x-1}{3} < 1$ olmalıdır, buradan $\frac{1}{2} < x < 2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$0 < \ln x^2 \leq 16$$

olduğuna göre x hangi aralıktadır?

A) $0 < x \leq 4$ B) $-4 \leq x < 0$ C) $-4 \leq x \leq 4$
D) $1 < x^2 \leq e^{16}$ E) $1 < x \leq e^8$ veya $-e^8 \leq x < -1$

Çözüm: 0 ve 16 sayılarını logaritmik yazalım.

$$0 < \ln x^2 \leq 16$$
$$\ln 1 < \ln x^2 \leq \ln e^{16}$$
$$1 < x^2 \leq e^{16}$$

olduğundan $1 < x \leq e^8$ veya $-e^8 \leq x < -1$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$0 < \ln x^3 \leq 9$$

olduğuna göre x hangi aralıktadır?

A) $-e^3 < x \leq e^3$ B) $-3 \leq x < 0$ C) $-3 \leq x \leq 3$
D) $1 < x \leq e^3$ E) $1 < x \leq e^3$ veya $-e^3 \leq x < -1$

Çözüm: 0 ve 9 sayılarını logaritmik yazalım.

$$0 < \ln x^3 \leq 9$$
$$\ln 1 < \ln x^3 \leq \ln e^9$$
$$1 < x^3 \leq e^9$$

olduğundan $1 < x \leq e^3$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tanımlı olduğu değerler için*

$$f(x) = \frac{2\ln x + 3}{3\ln x - 4}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $e^{\frac{4x+3}{3x-2}}$ B) $e^{\frac{2x+3}{3x-4}}$ C) $e^{\frac{4x-3}{3x+2}}$ D) $\frac{4\ln x + 3}{3\ln x - 2}$ E) $\frac{2\ln x + 3}{3\ln x - 4}$

Çözüm: Bir fonksiyonun tersinin, o fonksiyonda x yerine yazıldığında, o fonksiyonu x'e dönüştüren değer olduğunu öğrenmiştik. O halde x yerine ne yazılırsa $\frac{2\ln x + 3}{3\ln x - 4}$ ifadesinin x'e dönüşeceği soruluyor.

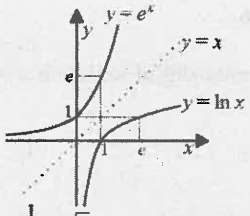
t yazılırsa dönüşür diyelim ve t'yi arayalım.

$$\frac{2\ln t + 3}{3\ln t - 4} = x$$
$$2\ln t + 3 = 3x\ln t - 4x$$
$$4x + 3 = (3x - 2)\ln t$$
$$\ln t = \frac{4x+3}{3x-2}$$

olduğundan $t = e^{\frac{4x+3}{3x-2}}$ olduğunu anlıyoruz.

Doğru cevap: A.

Örnek.
$\ln x = e^x$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\varnothing$ B) $\{0\}$ C) $\{1\}$ D) $\{\frac{1}{e}, \sqrt{e}\}$ E) $\{1, e\}$

Çözüm: $y = \ln x$ ile $y = e^x$ fonksiyonları birbirlerinin tersleri olduklarından grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler. Bu iki grafik hiçbir yerde kesişmediklerinden $\ln x = e^x$ denkleminin çözümü yoktur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x) = \sqrt{\ln(\sin x)}$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{Arcsin}(e^x)$ B) $\text{Arcsin}(e^{2x})$ C) $e\,\text{Arcsin}(x^2)$
D) $\text{Arcsin}(x^{2e})$ E) $\text{Arcsin}(e^{(x^2)})$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in sinüsünü almış.
2. e tabanında logaritmasını almış.
3. Karekökünü almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'in karesini alır.
2. e'nin üssüne yazar.
3. Arcsin'ini alır.

Yani; $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(e^{(x^2)})$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x) = \text{Arctan}^3(\ln x)$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan^e \sqrt[3]{x}$ B) $e^{\sqrt[3]{\tan x}}$ C) $\sqrt[3]{e^{\tan x}}$ D) $e^{\tan \sqrt[3]{x}}$ E) $e^{\tan x^3}$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in e tabanında logaritmasını almış.
2. Arctan'ını almış.
3. Küpünü almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. Küpkökünü alır.
2. Tanjantını alır.
3. e'nin üssüne yazar.

Yani; $f^{-1}(x) = e^{\tan \sqrt[3]{x}}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x) = \cot(5^{\ln x})$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^{\log_5(\text{Arccot } x)}$ B) $e^{\text{Arccot}(\log_5 x)}$ C) $\log_5(\text{Arccot } e^x)$
D) $\text{Arccot}(e^{\log_5 x})$ E) $\text{Arccot}(\log_5 e^x)$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in e tabanında logaritmasını almış.
2. 5'in üssüne yazmış.
3. Kotanjantını almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. Arccot'unu alır.
2. 5 tabanında logaritmasını alır.
3. e'nin üssüne yazar.

Yani; $f^{-1}(x) = e^{\log_5(\text{Arccot } x)}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x) = \sqrt[3]{e^{\text{Arccos } x}}$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos^3(\ln x)$ B) $\ln(\cos x^3)$ C) $\ln(\cos^3 x)$
D) $\cos(\ln(x^3))$ E) $\cos(\ln x)^3$

Çözüm: f fonksiyonunun x'e ne yaptığını sırasıyla listeleyelim.

1. x'in Arccos'unu almış.
2. e'nin üssüne yazmış.
3. Küpkökünü almış.

Bu durumda f^{-1} fonksiyonu x'e ters işlemleri ters sırada yapacaktır.

1. x'in küpünü alır.
2. e tabanında logaritmasını yani ln'ini alır.
3. Kosinüsünü alır.

Yani; $f^{-1}(x) = \cos(\ln(x^3))$ olur.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\log[\log(\ln x)] = 0$$

olduğuna göre $\log_x e$ kaçtır?

A) 0,1 B) 1 C) 10 D) 100 E) 1000

2.

$$\ln(x-1) = \ln x - 1$$

olduğuna göre x'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{e+1}{e-1}$ B) $\frac{e+1}{e}$ C) $\frac{e-1}{e}$ D) $\frac{e}{e-1}$ E) $\frac{e}{e+1}$

3.

$\ln x = a$ olduğuna göre

$$\log_3 x$$

sayısının a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\ln 3}{a}$ B) $\frac{\ln 9}{a}$ C) $a \cdot \ln 3$ D) $\frac{a}{\ln 3}$ E) $\frac{\ln 9}{a^2}$

4.

x ve y sıfırdan farklı birer pozitif reel sayı olmak üzere

$$\ln x + \ln y = 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

koşulunu sağlayan x ile y sayıları arasında ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 = y^3$ B) $x = y^3$ C) $x = y$ D) $x = 3y$ E) $x \cdot y = 2$

5.

$f: \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(x^2)$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^{\sqrt{x}}$ B) $e^{-\sqrt{x}}$ C) $\sqrt{e^{-x}}$ D) $\sqrt{e^x}$ E) $-\sqrt{e^x}$

6.

$$\ln(3x+1) < 2$$

eşitsizliğini sağlayan x'ler hangi aralıktadır?

A) $\left(-\infty, \frac{e^2-1}{3}\right)$ B) $\left(0, \frac{e^2-1}{3}\right)$ C) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{e^2-1}{3}\right)$

D) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ E) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

7.

$$\ln x^n = 4a$$
$$\ln x^{n+1} = 6a$$

olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 1 B) e C) e^a D) e^{2a} E) e^{4a}

8.

$$\log_n a = m \cdot \ln a$$
$$m \cdot \ln 4 = 2$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 0,5 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

9.

$$\ln(x^2 \cdot y) = 11$$
$$\ln(x^3 \cdot y^2) = 19$$

eşitliklerini sağlayan x kaçtır?

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) e^4

10.

$$e^{\log x} + x^{\log e} = 2e^2$$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 10 B) 10^2 C) 10^3 D) 10^4 E) 10^5

1. A 2. D 3. D 4. B 5. E 6. C 7. D 8. B 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$3^{\ln a} + 3^{1-\ln a} = 4$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1\}$ B) $\{e\}$ C) $\{1, e\}$ D) $\{0, 1\}$ E) $\varnothing$

2.
$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{2m} + e^{m} - e^{\ln 6} = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{\ln 2\}$ D) $\{2\}$ E) $\{3\}$

3.
$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$3^{\ln a} + a^{\ln 3} = 162$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) e^4 B) 4 C) e D) 3 E) 1

4.

$$3^{\frac{2}{\ln 3}}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

A) e^2 B) e C) 1 D) $\frac{1}{e}$ E) $\frac{1}{e^2}$

5.

$$e^{\ln\sqrt{2}} \cdot 10^{\log_{100} 8}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) $8\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 4

6.

$$(\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x = 3$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

A) $\{1, e\}$ B) $\left\{e^3, \frac{1}{e^3}\right\}$ C) $\{e, e^2\}$ D) $\left\{e, \frac{1}{e^3}\right\}$ E) $\{e^2\}$

7.

$$2^{\ln x - 1} + 2 \cdot 2^{\ln\frac{1}{x}} = 2$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

A) $\left\{\frac{1}{e}\right\}$ B) $\left\{\frac{e}{2}\right\}$ C) $\{1, e\}$ D) $\{e\}$ E) $\left\{\frac{4}{e}\right\}$

8.

$$e^{-x} + 2e^{x} - 3 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 2\}$ B) $\{\ln 4, \ln 2\}$ C) $\{-\ln 2, 0\}$ D) $\{2\ln 2\}$ E) $\{\ln 2\}$

9.

$$e^{2\ln 3} - 25^{\log_5 \sqrt{x}} = \log_6 (\log_2 64)$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.

$$x^2 - 6x + \ln a = 0$$

denkleminin köklerinin birbirlerine eşit olduğu bilindiğine göre a değeri kaçtır?

A) e B) e^3 C) e^9 D) e^{12} E) e^{16}

1. C 2. C 3. A 4. A 5. E 6. D 7. D 8. C 9. D 10. C

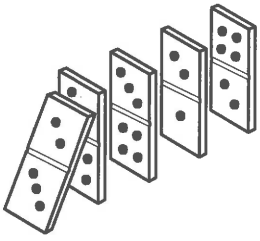
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Tümevarımla Kanıt Yöntemi

Matematikte çeşitli kanıtlama yöntemleri vardır. Doğrudan kanıt, dolaylı kanıt, olmayana ergi metoduyla kanıt gibi... Tümevarımla kanıt da bunlar gibi bir kanıtlama yöntemidir.

Tümevarımla kanıt yöntemini şu oyuna benzetebiliriz: Domino taşlarını aşağıdaki şekildeki gibi ardı ardına dik durur vaziyette dizdiğinizi düşünün.



Ama böyle üç beş tane değil de sayılamayacak kadar çok olduğunu farz edin. Sonsuz domino taşı olsun yani... Amacımız bunları devirmek olacak. Peki tüm domino taşlarının devrilmesi için ne gerekir? Evvela en başta duranın devrilmesi değil mi? Peki bu yeter mi? Yetmeyebilir elbette. Her domino taşı, kendisi devrildiğinde düşerken değdiği domino taşını da düşerecek şekilde konumlandırılmalı değil mi? Anlayacağınız, her domino taşını biri devrildiğinde ardındaki de devrilecek şekilde yerleştirirsek ve ilk taşı da devirirsek, isteğimiz gerçekleşir.

İşte bu oyundaki mantık ve koşullar, tümevarımla kanıt yönteminin temelini oluşturur. Nasıl mı?

Elimizde bir açık önerme var diyelim. Yani önerme, 'şöyle şöyle olursa şöyle şöyle olur' diyor ama biz o dediği şeyin doğru olup olmadığını bilmiyoruz diyelim. Yapmamız gereken şu:

Önce verilen $P(n)$ açık önermesini doğrulayan en küçük sayı bulunur. m olsun bu sayı. $P(m)$'nin doğru olduğu gösterilir. Bu işlem, ilk domino taşını kendi elimizle devirmek demektir bir bakıma...

Sonra $n = k$ için $P(k)$'nin doğru olduğu varsayılarak (yani her taşın uygun yerde olduğunu farz edelim diyor kısacası), $n = k + 1$ için de $P(k + 1)$'in doğru olup olmadığı gösterilir. Bu da her taşın devrildiğini, devrilmek zorunda olduğunu anlamak, oturup izlemek demektir.

Örnek. *Her n sayma sayısı için 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların toplamının*

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

olduğunu tümevarım metoduyla kanıtlayınız.

Çözüm: Emriniz olur, kanıtlayalım. Ama bu çok önemli bir teorem olduğundan önce bir doğrudan kanıtlayalım.

Doğrudan kanıt. Gelmiş geçmiş en büyük üç matematikçiden biri, hatta çoğu matematikçi tarafından da en iyisi olarak kabul edilen Carl Friedrich Gauss'un bu formüle daha ilkokuldayken yaptığı zarif kanıtla başlayalım:

Gauss, değeri istenen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ toplamına x demiş, sonra bir de bu sayıları tersten yazarak yine x demiş. Öyle ya, ha $1 + 2 + 3$, ha $3 + 2 + 1$, toplam değişmez değil mi? Bunları taraf tarafa toplamış ve ikiye bölmüş:

$$\begin{aligned} x &= 1+\ 2\ +\ 3\ +\ldots+n-2+n-1+n \\ +\ x &= n+n-1+n-2+\ldots+\ 3\ +\ 2\ +1 \\ \hline 2x &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ tane}} \end{aligned}$$

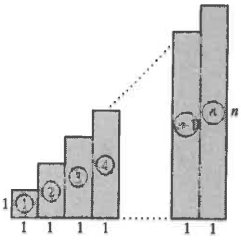
n tane $(n + 1)$'in toplamı $n(n + 1)$ ettiğinden

$$2x = n(n + 1),$$

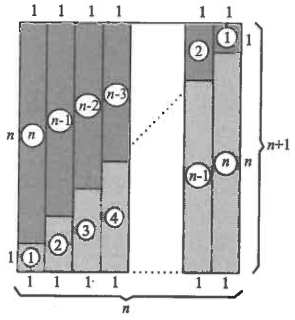
buradan da $x = n\cdot(\frac{n+1}{2})$ bulmuş... Tebrikler!

Geometrik kanıt. Şimdi de gelmiş geçmiş en büyük bir milyon matematikçiden biri, hatta çoğu matematikçi tarafından da en kötüsü olarak kabul edilen bendenizin ilkokulda yaptığı kanıtı vereyim.

Bendeniz, değeri istenen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ toplamının aslında enleri 1 birim, boyları da 1, 2, 3, ..., n olan dikdörtgenlerin alanları toplamı olduğunu fark ettim.



Yani, yukardaki dikdörtgenlerin alanları toplamını bulabilirsem, $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ toplamını bulmuş olacaktım. Bu dikdörtgenler topluluğundan elimde bir tane daha olduğunu düşünerek, ters çevirip buna eklersem bir dikdörtgen oluşacağını gördüm. Şöyle yani:



Oluşan bu dikdörtgenin alanı tabi ki bulmak istediğimiz alanın tam 2 katı oldu. Dikdörtgenin alanı $n(n + 1)$ olduğundan yarısı da $\frac{n(n+1)}{2}$ olmalıydı... Bana tebrik yok mu? ☺

Tümevarımla kanıt. Şimdi iyi dinleyin. Tümevarımla kanıta başlıyoruz. Açık önermemiz şu:

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Toplam 1'den başladığından, ilk olarak $n = 1$ için formülün düzgün çalıştığını göstermemiz gerekiyor. Gösterelim:

$$P(1) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

olduğundan sorun yok. Çünkü 1'den 1'e kadar olan doğal sayıların toplamı gerçekten 1'dir. ☺

Şimdi ilk k tane sayma sayının toplamının

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

olduğunu doğru farzedelim. Eğer doğruysa ilk $(k + 1)$ terimin toplamı da

$$\frac{(k+1) \cdot (k+1+1)}{2}$$

çıkmalı. Bakalım çıkacak mı?

İlk k tane sayma sayısına $k + 1$ eklersek, ilk $k + 1$ tane sayma sayısının toplamını buluruz.

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \cdot \left[\frac{k}{2} + 1\right] = (k+1) \cdot \frac{k+2}{2}$$

olduğundan önermenin doğru olduğu kanıtlanmış olur.

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n \cdot (n+1)$$

olduğunu hem doğrudan hem de tümevarım metoduyla kanıtlayınız.

Çözüm: Doğrudan kanıt burada çok kolay. Çünkü

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n)$$

toplamı

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

toplamının tam 2 katıdır.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

olduğunu biraz önce kanıtlamıştık, o halde

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n \cdot (n+1)$$

olur.

Şimdi de tümevarım metodunu kullanalım.

$$P(1) = 1 \cdot (1 + 1) = 2$$

olur ki doğrudur. Şimdi

$$P(k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + (2k) = k \cdot (k+1)$$

olduğunu farz edelim

$$P(k+1) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2 \cdot (k+1)$$

toplamının $(k + 1) \cdot (k + 2)$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. 2'den $2k$'ye kadar olan toplamın $k \cdot (k + 1)$ olduğunu varsaymıştık, onu yerine yazarsak

$$k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) = (k+1) \cdot (k+2)$$

olur ki, bu önerme de doğruymuş.

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Bu teoreme de iki farklı kanıt sunacağız.

Tümevarımla kanıt.

$n = 1$ için

$$P(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1^2$$

yani $1 = 1$ olduğundan önermenin doğru olduğu ortada.

$n = k$ için

$$P(k) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

eşitliğini doğru kabul edelim.

$n = k+1$ için

$P(k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2$ olduğunu göstermek gerekiyor. $(2k-1)$'e kadar olan toplamın k^2 olduğunu farz ettiğimizden yerine yazalım:

$$k^2 + [2\cdot(k+1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

çıkar ki kanıt tamamlanmış olur.

Doğrudan kanıt. 1, 3, 5, ..., $2n-1$ gibi ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere ritmik veya aritmetik dizi denir. Sayılar dersinde böyle dizilerin elemanları toplamının

$$\frac{(\text{İlk terim} + \text{Son terim})\cdot \text{Terim Sayısı}}{2}$$

olduğunu söylemiştik. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ ifadesinde ilk ve son terim belli. Belli olmayan terim sayısı. Derhal her terime aklınızdan 1 ekleyin, adet değişmeyecektir, sonra her terimi 2'ye bölün. 1'den n'ye kadar ilerleyen sayılar bulacaksınız. O halde ifadede n tane terim vardır. O halde bu toplam $\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2} = \frac{2n\cdot n}{2} = n^2$ dir.

Geometrik kanıt. Bu zarif kanıta mutlaka göz atın.

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

şeklinde devam edildiğinde tek sayıların toplamının daima bir kare oluşturduğu ayan beyan ortadadır.

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	1

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

önermesinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Bu teoreme de iki farklı kanıt sunacağız.

Tümevarımla kanıt. $n = 1$ için doğru olduğu yine ortada...

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$$

eşitliğinden söyledik bunu. Şimdi $n = k$ için

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

eşitliğini doğru farz edelim. O halde $n = k+1$ için

$$P(k+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(k+1+1)\cdot(2\cdot(k+1)+1}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

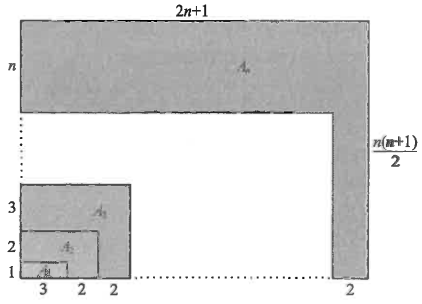
eşitliğinin doğruluğunu göstermeliyiz.

k^2'ye kadar olan toplamın $\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$ olduğunu doğru kabul ettiğimizden bunu yerine yazalım.

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\cdot\left[\frac{k\cdot(2k+1)}{6} + k + 1\right]$$
$$= (k+1)\cdot\left[\frac{2k^2+k}{6} + \frac{6k+6}{6}\right]$$
$$= (k+1)\cdot\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right]$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

Demek bu da doğruymuş.

Geometrik kanıt. Bu toplamı da dikdörtgenlerin alanları toplamından yapabiliriz. Eni 1, 2, 3, ..., n diye, boyu da 3, 2, 2, ..., 2 diye parçalanmış bir dikdörtgen çizip, alt şekildeki gibi parçalara ayıralım. Bu bölgelerin alanlarını da küçükten büyüğe doğru olmak üzere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ diye isimlendirelim.



En büyük dikdörtgenin eninin $\frac{n(n+1)}{2}$ br, boyunun da $2n+1$ br olduğunu not ederek, şimdi bu alanları sırasıyla hesaplayalım.

$$A_1 = 3\cdot1 = 3$$
$$A_2 = 5\cdot3 - 3 = 12$$
$$A_3 = 7\cdot6 - 15 = 27$$
$$\ldots$$
$$A_n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1) - \frac{(n-1)n}{2}\cdot(2n-1) = 3n^2$$

Bu değerleri toplarsak, en büyük dikdörtgenin alanını yani $\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$ bulmalıyız.

$$3+12+27+3n^2 = 3\cdot 1^2+3\cdot 2^2+3\cdot 3^2+\ldots+3\cdot n^2$$
$$= 3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$$

olduğundan,

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğu kanıtlanmış olur.

Dolaylı kanıt. Önceden kanıtladığımız bir teoremi de kullanacağız, ondan dolayı kanıtın adı ''dolaylı'' oldu.

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=T$ olsun.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

olduğundan, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$(1+1)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3$$
$$(2+1)^3 = 2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3$$
$$(3+1)^3 = 3^3+3\cdot 3^2\cdot 1+3\cdot 3\cdot 1^2+1^3$$
$$(4+1)^3 = 4^3+3\cdot 4^2\cdot 1+3\cdot 4\cdot 1^2+1^3$$
$$\cdots$$
$$(n+1)^3 = n^3+3\cdot n^2\cdot 1+3\cdot n\cdot 1^2+1^3$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplayacağız.

$2^3+3^3+\ldots+n^3$ toplamı eşitliğin her iki yanında bulunduğundan sadeleşecektir.

$$(n+1)^3 = 1^3+3\cdot T+3\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n\cdot 1^3$$
$$n^3+3n^2+3n+1 = 1+3T+\frac{3n^2-3n}{2}+n$$
$$2n^3+6n^2+6n = 6T+3n^2-3n+2n$$
$$2n^3+3n^2+7n = 6T$$

bulunduğundan

$$T = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğu tekrar kanıtlanmış olur.

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$P(n): 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$$

olduğunu tümevarım yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm: $n=1$ için

$$1^3=\left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$$

eşitliği doğru olduğundan ilk aşamada sorun yok.

$n=k$ için

$$P(k)=1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2$$

olduğunu doğru kabul edelim. O halde $n=k+1$ için

$$P(k+1)=1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor, k^3'e kadar olan toplamı biliyoruz, hemen yerine yazalım.

$$\left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4}+\frac{4\cdot(k+1)^3}{4}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{4}\cdot[k^2+4k+4]$$
$$=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}$$
$$=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2$$

olduğundan kanıt bitmiş oluyor. Bu da doğru!

Örnek. *Her n sayma sayısı ve 1'den farklı bir reel sayısı için*

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Aslında bu kanıtla birlikte, çarpanlara ayırma dersinde öğrendiğimiz

$$1-r^2=(1-r)(1+r)$$
$$1-r^3=(1-r)(1+r+r^2)$$
$$1-r^4=(1-r)(1+r+r^2+r^3)$$
$$\ldots$$
$$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})$$

formüllerinin de kanıtını yapmış olacağız. Zira bizden kanıtı istenen teorem de yukarda verdiğimiz eşitliklerin sonuncusunun tıpkısının aynısı. O eşitliğin her iki yanını $1-r$ ile bölersek aradığımıza kavuşuruz.

Şimdi önermeyi tekrar yazarak tümevarımla kanıtlayalım:

$$1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

r'nin 1'den farklı olduğunu varsayıyoruz, zaten $r=1$ ise böyle bir toplama hiç ihtiyaç duymayız.

$n=1$ için

$$r^{1-1}=\frac{1-r^1}{1-r}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gördük.

$n = k$ için

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} = \frac{1-r^k}{1-r}$$

olduğunu doğru kabul edelim. Bu durumda $n = k+1$ için

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1} + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. r^{k-1}'e kadar olan toplamı biliyoruz, hemen yerine yazalım:

$$\frac{1-r^k}{1-r} + r^k = \frac{1-r^k+r^k-r\cdot r^k}{1-r} = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Biz bunu doğrudan kanıtlayalım ama siz tümevarım metoduyla da deneyin.

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 &= 2^2\cdot 1^2 + 2^2.2^2 + \cdots + 2^2\cdot n^2 \\ &= 2^2\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Örnek. *Her n sayma sayısı için*

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Biz yine doğrudan kanıt göstereceğiz, tümevarım kullanarak kanıtı size alıştırma olarak bırakıyoruz.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = A$$

olsun.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}$$

idi. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2 = A + \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}$$

çıkar.

$$\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6} = A + \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \frac{n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{3} - \frac{2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n\cdot(2n+1)}{3}\cdot[4n+1-2\cdot(n+1)] \\ &= \frac{n\cdot(2n+1)}{3}\cdot(2n-1) \end{aligned}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Örnek. *2'den büyük n sayma sayıları için*

$$3^n > 1 + 4n$$

olduğunu tümevarım yöntemiyle kanıtlayınız.

Çözüm: Önermeyi doğru yapan en küçük sayma sayısı 3 olduğundan önce $n = 3$ için doğru olup olmadığına bakalım. Gerçekten de

$$3^3 > 1 + 4\cdot 3$$

olduğundan başlangıç için sorun yok. Şimdi 3'den büyük bir k sayısı için hep

$$3^k > 1 + 4k$$

olduğunu farz edelim. Bunu kullanarak

$$3^{k+1} > 1 + 4\cdot(k+1)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor. Gösterelim:

$$3^k > 1 + 4k$$

$$3^k\cdot 3 > (1 + 4k)\cdot 3$$

$$3^{k+1} > 3 + 12k$$

$k > 3$ olduğundan $3 + 12k > 4k + 5$'dir. Bu durumda

$$3^{k+1} > 3 + 12k$$

ise zaten

$$3^{k+1} > 4k + 5\text{'dir.}$$

Örnek. *Her n sayma sayısı için $9^n - 1$ sayısının 8 ile bölünebildiğini tümevarım metoduyla kanıtlayınız.*

Çözüm: $n = 1$ için önermenin doğru olduğu aşikar çünkü $9^1 - 1$ sayısı 8'e bölünür.

Şimdi $9^k - 1$ sayısının 8'in bir katı olduğunu farzedelim. Bunu kullanarak $9^{k+1} - 1$ sayısının da 8'in katı olduğunu gösterebilirsek kanıt bitecek.

$t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $9^k - 1 = 8t$ diyelim. Eşitliğin her iki tarafını 9 ile çarpalım ki 9^{k+1} oluşsun.

$$9\cdot(9^k - 1) = 8t\cdot 9$$

$$9^{k+1} - 9 = 72t$$

$$9^{k+1} - 1 - 8 = 72t$$

$$9^{k+1} - 1 = 72t + 8$$

$$9^{k+1} - 1 = 8\cdot(9t + 1)$$

olur. $8\cdot(9t + 1)$ sayısı 8'e bölünmeyecek de ben mi bölüneceğim?

Kanıt bitmiştir.

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Toplam Sembolü'nün İşlevi

Matematik deyince akla ilk gelen ''dört işlem'' olsa gerek. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme... Ama işin içine girince dört işlemin aslında iki işlemden ibaret olduğunu anlarız. Toplama ve çarpma... Çünkü nihayetinde çıkarma işlemi toplamanın özel bir halidir. $a-b$ ifadesi pek tabi ki $a+(-b)$ ile aynıdır.

Benzer durum çarpma-bölme arasında da vardır. a/b ifadesi $a\cdot(1/b)$'den başka bir şey değildir. Hatta daha da derine inerseniz, çarpma işlemi diye bir işlem de yoktur. Aynı sayıyı 1'den çok kez toplamanın pratik yoludur çarpma dediğimiz. $a+a+a+a$ yerine $4\cdot a$ yazarız, olur biter. Demek ki her şey toplamayla başlıyor. Zaten onun içindir ki ilkokulda sayıları öğrenen birine bu sayılarla işlem yapma adına önce toplama anlatılır.

Bazen toplanacak şeylerin miktarı çok olur. Bırakın bu toplamı hesaplamayı, bu toplamı yazmakta bile sıkıntı çekeriz. İşte bu derste, belli bir kural dahilinde değişmiş sayılabilir miktarda sayının toplamını hem kısaca yazmayı öğreneceğiz hem de o toplamı hesaplamayı...

Kısa yazılımın matematiksel gösterimi şudur:

$r, n\in\mathbb{Z}$ ve $r\le n$ olmak üzere;

$$f(r)+f(r+1)+\ldots+f(n-1)+f(n)=\sum_{k=r}^{n}f(k).$$

Buradaki gösterimi kısaca izah edelim:

Eşitliğin sol tarafına bakarsanız, parantez içindeki sayılar r'den başlamış ve 1'er 1'er artarak n'ye kadar ulaşmış. İşte bu artan sayıyı bir değişkenle gösterip, o değişkenin aldığı ilk değeri $\sum$ (sigma diye okunur) işaretinin altına, son değeri de üstüne yazarak gösteriyoruz. Yukardaki gösterimde olduğu gibi, değişecek şeyin ne olduğu, sigma işaretinin altında değişkenin ilk değeriyle birlikte gösterilmek zorundadır, yoksa biz neyin değişeceğini bilemeyiz.

$\sum_{k=r}^{n}f(k)$ gibi bir yazılımda r'ye **alt sınır**, n'ye **üst sınır**, k'ye de **değişken** adı verilir.

$\sum$ işleminin tam olarak nasıl çalıştığını anlamak için aşağıdaki örnekleri titizlikle inceleyiniz.

- ✓ $\sum_{k=2}^{5}k=2+3+4+5,$
- ✓ $\sum_{k=3}^{6}k^2=3^2+4^2+5^2+6^2,$
- ✓ $\sum_{k=-2}^{4}k^3=(-2)^3+(-1)^3+0^3+1^3+2^3+3^3+4^3,$
- ✓ $\sum_{k=5}^{5}k=5,$
- ✓ $\sum_{n=2}^{5}\sqrt{n}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5},$
- ✓ $\sum_{a=1}^{4}(a^2-2)=1^2-2+2^2-2+3^2-2+4^2-2,$
- ✓ $\sum_{j=3}^{5}(j^3-j)=3^3-3+4^3-4+5^3-5,$
- ✓ $\sum_{k=2}^{4}(k^2-a)=2^2-a+3^2-a+4^2-a,$
- ✓ $\sum_{k=-1}^{100}(3k)=-3+0+3+6+9+\ldots+300,$
- ✓ $\sum_{k=1}^{20}(k^2+1)=2+5+10+17+26+\ldots+401,$
- ✓ $\sum_{i=3}^{5}7=7+7+7=21,$
- ✓ $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+c+\ldots+c=n\cdot c,$
- ✓ $\sum_{k=1}^{5}a=5\cdot a,$
- ✓ $\sum_{k=1}^{19}7=19\cdot 7=133,$
- ✓ $\sum_{k=0}^{n}c+c+c+\ldots+c=(n+1)\cdot c,$
- ✓ $\sum_{k=0}^{30}4=31\cdot 4=124.$

Artık $\sum$ işleminin işlevini aşağı yukarı anlamış olmalısınız. Hatta aralarında birkaç teorem bile verdik, hatta ve hatta onları gizlice kanıtladık!

Örnek. $\sum_{k=3}^{5}(k^2+a)=53$ *eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: k^2+a ifadesinde k'ye önce 3, sonra 4, son olarak da 5 verdiğinizde oluşan sayıların toplamı 53 ediyormuş.

$$\sum_{k=3}^{5}(k^2+a)=3^2+a+4^2+a+5^2+a$$

olduğundan $50+3a=53$ olur ki buradan $a=1$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{k=3}^{5}2^k=\sum_{k=1}^{7}a$ *eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?*

A) 6 B) 8 C) 10 D) 15 E) 56

Çözüm: Önce eşitliğin sol yanını bulalım bakalım:

$$\sum_{k=3}^{5}2^k=2^3+2^4+2^5=56.$$

Demek ki eşitliğin sağ yanı 56'ya eşitmiş.

$$\sum_{k=1}^{7}a=a+a+a+a+a+a+a=7a=56$$

eşitliğinden $a=8$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{k=-1}^{2}\left[(-2)^{k+1}(k+1)!\right]$ *toplamı kaça eşittir?*

A) -42 B) -41 C) -40 D) 58 E) 59

Çözüm: k'ye önce -1, sonra 0, sonra 1, en son da 2 vereceğiz:

$$\sum_{k=-1}^{2}\left[(-2)^{k+1}(k+1)!\right]=1\cdot 0!+(-2)\cdot 1!+4\cdot 2!+(-8)\cdot 3!$$
$$=1\cdot 1-2\cdot 1+4\cdot 2-8\cdot 6=-41.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1974 ÜSS]. $1+4+7+10+\ldots+130$ *toplamının kısa ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sum_{k=1}^{15}k^3$ B) $\sum_{k=0}^{30}(3k+1)$ C) $\sum_{k=1}^{10}k^3$

D) $\sum_{k=0}^{43}(3k+1)$ E) $\sum_{k=0}^{15}(3k-1)$

Çözüm: Her şıkta üst sınır değerini, k yerine yazalım. 130 çıkmazsa o şık doğru olamaz. A, B, C, E şıklarında sırasıyla 225, 91, 1000, 44 çıkıyor. Bu yüzden D şıkkındaki ifade doğru olmaya adaydır. Gerçekten de alt sınırı ve artış miktarını da sağlamaktadır.

Bir de adam gibi çözelim: Sayılar 3'er 3'er artıyor ve hepsinin 3'e bölümünden kalan 1 olduğundan ortak özellik $3k+1$ olmalıdır. İlk değerin 1, son değerin de 130 olması için k değeri 0'dan başlayıp 43'e kadar gitmelidir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $11+16+21+26+\ldots+51$ *aşağıdakilerden hangisiyle ifade edilebilir?*

A) $\sum_{k=11}^{51}(k+5)$ B) $\sum_{k=11}^{51}(5k+1)$ C) $\sum_{k=1}^{10}(5k+6)$

D) $\sum_{k=2}^{10}(5k+1)$ E) $\sum_{k=11}^{51}(5k)$

Çözüm: Sayıların ortak özelliğinin 5'e bölümünden 1 kalanını vermeleri olduğu görülürse k'ye bağlı değişkenin $5k+1$ formatında olacağını anlarız. İlk terimin 11 olması için $k=2$ ile başlamalı, son terimin 51 olması için de $k=10$ ile bitmelidir.

$$11+16+21+26+\ldots+51=\sum_{k=2}^{10}(5k+1).$$

Tabi ki bu tek tip bir yazılım değildir. $k=1$'den $k=9$'a kadar $5k+6$ değerleri toplanmış gibi de düşünebilirdik. Şıklarda olanı bulduk sadece.

Doğru cevap: D.

Örnek. $3\cdot8+4\cdot15+5\cdot24+...+20\cdot399$ *aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?*

A) $\sum_{k=3}^{20}(k+1)!$ B) $\sum_{k=3}^{20}(2k^2+6)$ C) $\sum_{k=3}^{20}(k^3-3)$

D) $\sum_{k=3}^{20}(k^3-k)$ E) $\sum_{k=3}^{20}(3\cdot2^k)$

Çözüm: Çarpılan ifadelerde ikinci terimlerin birinci terimlerle akrabalığını bulmalıyız. Son terimler daha çok ipucu verir. 20'nin karesi 400'dür, 399 da onun 1 eksiğidir gibi düşünürsek, diğer çarpılan ifadelere de bakarak haklı olduğumuzu anlarız. Demek ki çarpılan terimlerden ilkine k dersek, ikincisi k^2-1 oluyor ve k'ler 3'te başlayıp 20'de son buluyor. O halde

$$3\cdot8+4\cdot15+...+20\cdot399=\sum_{k=3}^{20}\left(k\cdot(k^2-1)\right)=\sum_{k=3}^{20}\left(k^3-k\right).$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=2x+1$ *olmak üzere* $\sum_{k=1}^{3}[k\cdot f(k)]$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 34 B) 31 C) 15 D) 6 E) 0

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{3}[k\cdot f(k)]=1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)$$

olduğundan soruyu çözmek için $f(1), f(2)$ ve $f(3)$ değerlerini bulmamız gerektiğini anlıyoruz. O da çocuk oyuncağı gibi bir şey... $f(x)=2x+1$ olduğundan $f(1)=3$, $f(2)=5$ ve $f(3)=7$'dir. O halde

$$\sum_{k=1}^{3}[k\cdot f(k)]=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7=34.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1983 ÖYS]. $f(x)=3x+1$, $x_1=1$, $x_2=4$ *olduğuna göre,* $\sum_{i=1}^{2}[(x_i-3)\cdot f(x_i)]$ *toplamı kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $f(1)=4$ ve $f(2)=7$ olduğunu not edelim.

$$\sum_{i=1}^{2}[(x_i-3)\cdot f(x_i)]=(x_1-3)\cdot f(x_1)+(x_2-3)\cdot f(x_2)$$
$$=(1-3)\cdot f(1)+(4-3)\cdot f(4)$$
$$=(-2)\cdot4+1\cdot13=5.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^3-2x^2+8x-6=0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2 *ve* x_3 *olsun.* $\sum_{k=1}^{3}[x_k(x_k+1)]$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 12 B) 10 C) 6 D) -6 E) -10

Çözüm: Denklemin köklerini bulmanız gerektiğini zannetmeyin! O kadar insafsız değilim.

$$\sum_{k=1}^{3}[x_k(x_k+1)]=\sum_{k=1}^{3}\left[x_k^2+x_k\right]$$
$$=x_1^2+x_1+x_2^2+x_2+x_3^2+x_3$$
$$=x_1+x_2+x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

olduğunu görün.

$$x_1+x_2+x_3=2 \text{ ve } x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$$

olduğunu daha önce anlatmıştık. O halde

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$=2^2-2\cdot8=-12$$

bulunur. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{3}[x_k(x_k+1)]=x_1+x_2+x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
$$=2-12=-10.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^3-x+6=0$ *denkleminin kökleri* x_1, x_2 *ve* x_3 *olsun.* $\sum_{k=1}^{3}\left(x_k^3\right)$ *kaçtır?*

A) 18 B) 17 C) 6 D) -17 E) -18

Çözüm: $x^3-x+6=0$ denkleminin x_1 diye bir kökü varsa o kökü bu denklemi sağlamalı yani $x_1^3-x_1+6=0$ olmalıdır. Bu da $x_1^3=x_1-6$ ile aynı anlamı taşır. Bu olayı diğer kökler için de düşünürsek sonuca hemen ulaşabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(x_k^3\right)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$$
$$=x_1-6+x_2-6+x_3-6$$
$$=x_1+x_2+x_3-18$$
$$=0-18=-18$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1986 ÖYS]. *1'den n'ye kadar olan n tane doğal sayının kareleri toplamı*

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

şeklindedir. Bu n tane sayıdan her biri 1 arttırıldığında T ne kadar artar?

A) $n(n+2)$ B) $n(n-1)$ C) $n(n+1)$ D) n^2 E) n

Çözüm: Oluşan yeni toplama T' diyelim. $T' - T$ farkı bize toplamın kaç arttığını söyleyecektir.

$$T' = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$$

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

olduğundan (sadeleşeceklere dikkat)

$$T' - T = (n+1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n = n(n+2)$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{k=1}^{100} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\sqrt{101}-1$ B) $\sqrt{101}$ C) 10 D) $\sqrt{99}$ E) $\sqrt{99}+1$

Çözüm: Kökler sizi korkutmasın, onların hepsi sadeleşecek...

$k=1$ için $\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$k=2$ için $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$k=3$ için $\sqrt{4}-\sqrt{3}$

....

$k=100$ için $\sqrt{101}-\sqrt{100}$

$+$

$\sqrt{101}-\sqrt{1}$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{k=1}^{20} \left[(-1)^k (3k+2)\right]$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 20 B) 24 C) 28 D) 30 E) 36

Çözüm:

$k=1$ için $(-1)^1 \cdot (3\cdot 1 + 2) = -5$

$k=2$ için $(-1)^2 \cdot (3\cdot 2 + 2) = 8$

$k=3$ için $(-1)^3 \cdot (3\cdot 3 + 2) = -11$

$k=4$ için $(-1)^4 \cdot (3\cdot 4 + 2) = 14$

...

$k=19$ için $(-1)^{19} \cdot (3\cdot 19 + 2) = -59$

$k=20$ için $(-1)^{20} \cdot (3\cdot 20 + 2) = 62$

$$\underbrace{-5+8}_{3} + \underbrace{-11+14}_{3} + \underbrace{-17+20}_{3} - \ldots + \underbrace{-59+62}_{3}$$

ifadesinde 20 tane terim olduğundan 10 tane 3 elde edebiliriz. O halde toplam $10\cdot 3 = 30$ olacaktır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=1}^{29} (k \cdot k!)$ *toplamının sondan kaç basamağı 9'dur?*

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ eşitliğini hem sayılar dersinde hem de tümevarımda vermiştik. O halde

$$\sum_{k=1}^{29} (k \cdot k!) = 30! - 1$$

olduğundan bu sayının sonundaki 9 adedi 30! sayısının sonundaki 0 adediyle aynıdır. Hatırlarsanız 0 adedini bulmak için de 30'u devamlı 5'e bölüp, bölümleri toplayacaktık. 30'u 5'e bölersek bölüm 6, 6'yı da 5'e bölersek bölüm 1 çıkacağından cevap 6 + 1 = 7'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=1}^{37} \cos(k\pi)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) -37 B) -1 C) 0 D) 1 E) 37

Çözüm: k sayısı tek olduğunda $\cos k\pi = -1$, k sayısı çift olduğunda $\cos k\pi = 1$ olduğundan ilk 36 terimin toplamı 0 olur. Sadece son terime bakmak yeter.

$$\sum_{k=1}^{37} \cos k\pi = \cos\pi + \cos 2\pi + \ldots + \cos 36\pi + \cos 37\pi$$

$$= \cos 37\pi = \cos\pi = -1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{\sum_{k=1}^{11} \sin(kx)}{\sum_{t=1}^{11} \cos(tx)} = 1$ *eşitliğini sağlayan en küçük pozitif dar açının ölçüsü kaç radyandır?*

A) $\frac{\pi}{48}$ B) $\frac{\pi}{24}$ C) $\frac{\pi}{18}$ D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Çözüm:

$$\frac{\sum_{k=1}^{11} \sin(kx)}{\sum_{t=1}^{11} \cos(tx)} = \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 10x + \sin 11x}{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos 10x + \cos 11x}$$

Bu tarz, açıların aritmetik dizi oluşturduğu kesirlerde cevabın ortadaki terimlerin oranı olduğunu trigonometride kanıtlamıştık.

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 10x + \sin 11x}{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos 10x + \cos 11x} = \tan 6x = 1$$

olduğundan $6x = \frac{\pi}{4}$ yani $x = \frac{\pi}{24}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sum_{k=1}^{24}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 24

2.

$$\sum_{n=1}^{11}(-1)^n\cdot(3n+2)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) -22 B) -20 C) 0 D) 20 E) 22

3.

$x_n = 2n-1$ ve $f(x)=2x+3$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{3}x_k\cdot f(x_k)$$

değeri kaçtır?

A) 5 B) 32 C) 45 D) 88 E) 97

4.

$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve x_3 olduğuna göre

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) -2 E) -3

5.

$$\sum_{x=1}^{100}[f(x+1)-f(x)]=99$$

ve $f(1)=1$ olduğuna göre $f(101)$ kaça eşittir?

A) 50 B) 100 C) 101 D) 150 E) 200

6.

$$\sum_{k=1}^{18}\ln\left(1+\frac{2}{2k+1}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) ln 11 B) ln 13 C) ln 17 D) ln 19 E) ln 21

7.

$$\sum_{k=1}^{198}\sin\frac{k\pi}{2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 2

8.

$i^2 = -1$ olduğuna göre

$$\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $-1+i$ B) $1-i$ C) 0 D) $\frac{i}{\sqrt{2}}$ E) $2\sqrt{2}i$

9.

$$\sum_{k=1}^{n}k^3<225$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı *n* değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{2k+5}{k+5}$$

olduğuna göre $f(20)-f(19)$ kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{9}{5}$ D) 2 E) 3

1. A 2. B 3. E 4. E 5. B 6. B 7. C 8. A 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$A = 3^2 + 6^2 + 9^2 + ... + (3n)^2$

$B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

ve $A - B = 440$ olduğuna göre n kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.

$$\sum_{n=1}^{10}\left[\binom{n+1}{n}+\binom{10}{n}\right]$$

kaçtır?

A) 1000 B) 1040 C) 1058 D) 1088 E) 1100

3.

$$\sum_{k=1}^{102}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4.

$i^2 = -1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{51}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) $-i$ E) i

5.

$$\sum_{k=1}^{19}(k\cdot k!)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 40! B) 40! – 1 C) 30! – 1 D) 20! E) 20! – 1

6.

$$\sum_{m=1}^{100}\frac{m-1}{m!}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

A) $1-\frac{1}{100!}$ B) $1-\frac{1}{99!}$ C) $1-\frac{1}{90!}$ D) $\frac{1}{99!}$ E) $\frac{1}{100!}$

7.

$$\sum_{k=1}^{3}3mk = 36$$

eşitliği sağlandığına göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

8.

$$\sum_{x=-1}^{3}y = \sum_{y=3}^{5}x$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerleri için $\frac{x}{y}$ oranı kaça eşittir?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

9.

$x \neq y$ olmak üzere

$$\sum_{z=1}^{y}z = \sum_{z=1}^{x}z$$

eşitliği sağlandığına göre $x + y$ kaçtır?

A) $-z$ B) z C) -1 D) 1 E) z – 1

10.

$$\sum_{v=-100}^{100}(100^2 - v^2)\cdot(99^2 - v^2)\cdot(98^2 - v^2)\cdot....\cdot(1 - v^2)\cdot v + v$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -10000 B) -100 C) 0 D) 100 E) 10000

1. C 2. D 3. D 4. B 5. E 6. A 7. B 8. C 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Toplam Sembolü Formülleri

Şu ana kadar sadece Σ sembolünün tanımını kullanarak sorular çözdük. Şimdi Σ işleminin bazı özelliklerini vererek, artık soruları daha hızlı çözeceğiz. Aşağıdaki eşitliklerin hepsini biraz önce kanıtlamıştık zaten.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

Örneğin,

- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} k = 1+2+3+\ldots+99 = \frac{99\cdot 100}{2} = 4950$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2 = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+8^3 = \left(\frac{8\cdot 9}{2}\right)^2 = 36^2$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+39 = 20^2$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (2k) = 2+4+6+\ldots+200 = 100\cdot 101$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 9} = \frac{8}{9}$
- ✓ $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 2^{k-1} = 1+2+2^2+\ldots+2^{99} = \frac{1-2^{100}}{1-2} = 2^{100}-1$

Gördüğünüz gibi bazı formülleri ezbere bilmek işimizi oldukça kolaylaştırıyor, fakat bazen istenmedik şekilde katsayılar işimizi bozar. Korkmayın, çok da sorun değil. Formülünü bildiğiniz bir toplamın katsayısını toplamın dışına alıp, hiç yokmuş gibi davranıp, sonra bulduğunuz sonucu dışarı aldığınız katsayıyla çarpabilirsiniz. Aşağıda buna izin veren teorem var.

Teorem. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (c\cdot a_k) = c\cdot \sum_{k=r}^{n} a_k$.

Kanıt: Soldaki ifadeyi tanımı gereği açalım:

$$\sum_{k=r}^{n} (c\cdot a_k) = c\cdot a_r + c\cdot a_{r+1} + \ldots + c\cdot a_n$$

$$= c\cdot (a_r + a_{r+1} + \ldots + a_n) = c\cdot \sum_{k=r}^{n} a_k$$

Örneğin,

$$\sum_{k=-2}^{15} \left(3k^2\right) = 3\cdot \sum_{k=-2}^{15} \left(k^2\right),\ \sum_{k=8}^{12} \left(4k^5\right) = 4\cdot \sum_{k=8}^{12} \left(k^5\right).$$

Örnek. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k)^3$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 120 B) 450 C) 900 D) 1350 E) 1800

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{5} (2k)^3 = \sum_{k=1}^{5} \left(8k^3\right) = 8\sum_{k=1}^{5} k^3 = 8\cdot \left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2 = 1800.$$

Doğru cevap: E.

Teorem. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=r}^{n} a_k + \sum_{k=r}^{n} b_k$.

Kanıt: Yine tanımdan yola çıkarak soldaki ifadeyi açalım:

$$\sum_{k=r}^{n} (a_k + b_k) = a_r + b_r + a_{r+1} + b_{r+1} + \ldots + a_n + b_n$$

$$= a_r + a_{r+1} + \ldots + a_n + b_r + b_{r+1} + \ldots + b_n$$

$$= \sum_{k=r}^{n} a_k + \sum_{k=r}^{n} b_k$$

Örneğin,

$$\sum_{k=-2}^{15}\left(3+k^2\right)=\sum_{k=-2}^{15}(3)+\sum_{k=-2}^{15}\left(k^2\right),$$

$$\sum_{k=8}^{12}\left(4-k^5\right)=\sum_{k=8}^{12}(4)-\sum_{k=8}^{12}\left(k^5\right).$$

Örnek. [1978 ÜSS]. $\sum_{n=1}^{20}(n+2)$ *toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 250 B) 332 C) 420 D) 432 E) 440

Çözüm: $\sum(n+2)$ için bir formül bilmiyoruz ama $\sum n$ ve $\sum 2$ için elimizde birer formül mevcut. Bu yüzden $n+2$ ifadesini aşağıdaki gibi parçalayacağız.

$$\sum_{n=1}^{20}(n+2)=\sum_{n=1}^{20}n+\sum_{n=1}^{20}2$$

$$=\frac{20\cdot 21}{2}+20\cdot 2=250$$

Doğru cevap: A.

Örnek. [1989 ÖYS]. $\sum_{n=1}^{20}(2+na)=70$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

Çözüm: Burada da önce 2 ile na'yı ayıracağız. Daha sonra da a ile n'yi.

$$\sum_{n=1}^{20}(2+na)=\sum_{n=1}^{20}2+\sum_{n=1}^{20}(na)=\sum_{n=1}^{20}2+a\cdot\sum_{n=1}^{20}n$$

$$=20\cdot 2+a\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=40+210a=70$$

eşitliğinden 210a = 30 yani $a=\frac{1}{7}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{k=1}^{12}(2k+5)=\sum_{k=1}^{p}\left(p^2\right)$ *eşitliğini sağlayan p kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Önce eşitliğin sol tarafını son iki teoremi kullanarak hesaplayalım:

$$\sum_{k=1}^{12}(2k+5)=2\cdot\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}5=2\cdot\frac{12\cdot 13}{2}+12\cdot 5=216$$

Şimdi de eşitliğin sağ yanına bakalım:

$$\sum_{k=1}^{p}\left(p^2\right)=p\cdot p^2=p^3$$

diye $p^3=216$ çıkar ki buradan $p=6$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı* $x\Delta y=\sum_{n=x}^{y}\frac{n^2}{14}$ *işlemine göre* $1\Delta 7$ *kaça eşittir?*

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Hemen x yerine 1, y yerine 7 yazalım.

$$1\Delta 7=\sum_{n=1}^{7}\frac{n^2}{14}=\frac{1}{14}\cdot\sum_{n=1}^{7}n^2=\frac{1}{14}\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}=10$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=1}^{5}\left(k^2+k^3\right)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 200 B) 220 C) 240 D) 260 E) 280

Çözüm: $\sum\left(k^2+k^3\right)$ için bir formül bilmediğimizden, soruyu $\sum\left(k^2\right)$ ve $\sum\left(k^3\right)$ diye parçalayacağız.

$$\sum_{k=1}^{5}\left(k^2+k^3\right)=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k^3=\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}+\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2=280.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1982 ÖYS]. *f ve g;*

$$f:x\to\sum_{n=1}^{x}n \text{ ve } g:x\to\sum_{n=1}^{x}n^2$$

şeklinde tanımlı iki fonksiyondur. Buna göre $(f\circ g)(2)$'nin değeri nedir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

Çözüm: $f:x\to\sum_{n=1}^{x}n$ demek $f(x)=\sum_{n=1}^{x}n=\frac{x(x+1)}{2}$ ve

$g:x\to\sum_{n=1}^{x}n^2$ de $g(x)=\sum_{n=1}^{x}n^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

demek olduğundan,

$$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(5)=15$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1979 ÜSS]. $f(x)=2x-1$, $\sum_{n=1}^{10}n^2=385$ *ve* $\sum_{n=1}^{10}n=55$ *olduğuna göre* $\sum_{n=1}^{10}[f(n)]^2$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) 1163 B) 1245 C) 1330 D) 1526 E) 2012

Çözüm: $f(x)=2x-1$ olduğundan $f(n)=2n-1$ olur.

$$\sum_{n=1}^{10}[f(n)]^2=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)^2=\sum_{n=1}^{10}\left(4n^2-4n+1\right)$$

$$=4\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10=1540-220+10=1330.$$

Doğru cevap: C.

Örnek[1981 ÖYS]. *$\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i+1)=n+1 \text{ ve } \sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)y_i=0$$

olduğuna göre, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\alpha}{2}$ B) α C) $n\alpha$ D) $\alpha-1$ E) $(n-1)\alpha$

Çözüm: Verilen ilk eşitliği kurcalayalım.

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i+1)=\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}y_i+n=n+1$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=1$$

olarak bulunur. Şimdi ikinci eşitliğe geçelim.

$$\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\alpha)\cdot y_i]=\sum_{i=1}^{n}[x_i\cdot y_i-\alpha\cdot y_i]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i=\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=\alpha\cdot1=\alpha$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1979 ÜSS]. *a, b sabit birer tam sayı ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere* $\sum_{p=1}^{n}[p\cdot(p+1)]=\frac{n\cdot(n^2+an+b)}{3}$ *eşitliği bilindiğine göre $2a+b$ aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 11 B) –3 C) –7 D) 5 E) 8

Çözüm:

$$\sum_{p=1}^{n}[p\cdot(p+1)]=\sum_{p=1}^{n}\left[p^2+p\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{3}$$

$$=\frac{n\cdot(n^2+3n+2)}{3}$$

olduğundan

$$\frac{n\cdot(n^2+an+b)}{3}=\frac{n\cdot(n^2+3n+2)}{3}$$

bulunur. Buradan da $a=3$ ve $b=2$ olur ki $2a+b$ toplamı $2\cdot3+2=8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.



Gördüğünüz gibi bu tip hesaplamaları yapmak oldukça kolay. Yalnız dikkat ettiniz mi bilmem yukardaki toplamların nerdeyse tamamı $k=1$ ile başlıyordu, formüllerimiz de öyle başladığından hemen yerlerine koyarak sonuca ulaştık. $k=1$'den başlamayanları 1'den başlar hale getirmenin bir yolu daha vardır, şimdi onu anlatacağız.

$$10+11+12+...+20=\sum_{k=10}^{20}k$$

$$10+11+12+...+20=\sum_{k=1}^{11}(k+9)$$

Yukardaki iki toplamın da doğru olduğunu test ediniz. O halde

$$\sum_{k=10}^{20}k=\sum_{k=1}^{11}(k+9)$$

eşitliğinden söz edebiliriz. Şimdi bunu genelleyeceğiz. Hesaplanması istenen toplamda k = 1'den başlamıyorsa, alt ve üst sınırdan k'yı 1'den başlatacak şekilde bir sayı çıkartabiliriz ama bunu yapınca k'ya da o sayıyı eklemeliyiz. Eğer alt ve üst sınırlardan bir sayı çıkarmak yerine toplamışsak da k'dan o sayıyı çıkarmalıyız.
Genel olarak

$$\sum_{k=a}^{c}(k)=\sum_{k=1}^{c-a+1}(k+a-1)$$

eşitliği geçerlidir. Yani alt sınırı 1 yapmak için alt sınırdan kaç çıkartıyorsak, üst sınırdan da onu çıkartacağız. Fakat çıkarttığımız değeri parantez içindeki değişkene ekleyeceğiz.

Örnek. $\sum_{k=3}^{8}(k^2-2)+9=\sum_{2007}^{2006+p}p$ *eşitliğini sağlayan* p *kaçtır?*

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Önce 9 sayısının parantez dışında olduğuna dikkat edin, yani k'ye bağlı toplamı bulup, ona 9 ekleyin.

$$\sum_{k=3}^{8}(k^2-2)=\sum_{k=3-2}^{8-2}\left((k+2)^2-2\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}(k^2+4k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}(4k)+\sum_{k=1}^{6}2$$
$$=\left(\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\right)+4\cdot\left(\frac{6\cdot7}{2}\right)+(6\cdot2)$$
$$=91+84+12=187$$

Diğer yandan, terim sayısı gereği,

$$\sum_{k=2007}^{2006+p}p$$

demek p tane p'nin toplamı yani p^2 demek olduğundan $187+9=p^2$ eşitliğinden $p=14$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{k=3}^{5}(k^2+1)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 53 B) 48 C) 43 D) 42 E) 33

Çözüm: Sınırlardan 2 çıkarıp, k'ye 2 ekleyeceğiz.

$$\sum_{k=3}^{5}(k^2+1)=\sum_{k=1}^{3}\left((k+2)^2+1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{3}(k^2+4k+5)$$
$$=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}+4\cdot\frac{3\cdot4}{2}+15=53$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $-10-9-8-...-2-1+4^2+5^2+6^2+...+10^2$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 504 B) 502 C) 484 D) 402 E) 316

Çözüm: Negatif terimleri ayrı, pozitif terimleri ayrı düşüneceğiz. Önce negatif toplama bakalım:

$$-10-9-8-...-2-1=-(1+2+3+...+10)$$
$$=-(\sum_{k=1}^{10}k)$$
$$=-\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)=-55$$

Şimdi de pozitif terimler toplamına bakalım:

$$4^2+5^2+6^2+...+10^2=\sum_{k=4}^{10}k^2=\sum_{k=4-3}^{10-3}(k+3)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{7}(k^2+6k+9)$$
$$=\sum_{k=1}^{7}k^2+6\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}9$$
$$=\left(\frac{7\cdot8\cdot15}{6}\right)+6\left(\frac{7\cdot8}{2}\right)+(7\cdot9)$$
$$=140+168+63=371$$

O halde cevap $-55+371=316$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=3}^{10}\left(k^2-4k+5\right)$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) 204 B) 205 C) 211 D) 212 E) 213

Çözüm: $\sum_{k=3}^{10}\left(k^2-4k+5\right)=\sum_{k=3}^{10}\left((k-2)^2+1\right)$

eşitliğini fark ederseniz, alt ve üst sınırlardan 2 çıkarmanın işleri oldukça kolaylaştıracağını anlarsınız. Böylelikle

$$\sum_{k=3}^{10}\left((k-2)^2+1\right)=\sum_{k=1}^{8}\left(k^2+1\right)=\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+8=212$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=3}^{8}\left(k^3-6k^2+12k+5\right)$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) 519 B) 520 C) 521 D) 522 E) 523

Çözüm: $\sum_{k=3}^{8}\left(k^3-6k^2+12k+5\right)=\sum_{k=3}^{8}\left((k-2)^3+13\right)$

eşitliğini fark ederseniz, alt ve üst sınırlardan 2 çıkarmanın işleri oldukça kolaylaştıracağını anlarsınız. Böylelikle

$$\sum_{k=1}^{6}\left((k-2)^3+13\right)=\sum_{k=1}^{6}\left(k^3+13\right)=\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right)^2+78=519$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.



Bazı soru tiplerinde sınırları değiştirmek (diğer örneklerde yaptığımız gibi $k=1$ den başlatmak) her zaman avantajlı değildir. Aşağıda buna dair örnekler bulacaksınız. Gerçi ilk örneğimizde k yine 1'den başlıyor ama o örnekte tekniği anlayın istedik.

Örnek. $\sum_{k=1}^{10}(2k+3)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 130 B) 140 C) 150 D) 160 E) 180

Çözüm: İki farklı çözüm yolu göstereceğiz. Birincide toplam sembolünün verilen kurallarını, ikincide kafamızı kullanacağız.

Birinci yol. Hemen 3'ü ayırıp, 2'yi başa atalım.

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=2\cdot\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}3$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10\cdot 3=110+30=140.$$

İkinci yol. Şööyle geriye yaslanıp toplamın açık halini düşünürsek, soruların aslında birtakım ardışık tek sayıların toplamı olduğunu anlarız.

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=5+7+9+\ldots+23$$

Bu toplamı, sayılar dersinde öğrendiğimiz formülle de hemencecik çözebiliriz. Hatırlayalım:
Eğer toplamları istenen terimlerin farkları sabit ve r ise (yani aritmetik diziyse)

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{(a_n+a_1)}{2}\cdot(\text{Terim sayısı})$$

idi. Demek ki bu formülü kullanabilmek için ilk terim, son terim ve terim sayısını bulmamız gerekiyor. $\sum_{k=a}^{b}f(k)$ toplamlarında $f(k)$ fonksiyonunda k'ye a verilirse ilk terim, k'ye b verilirse son terim bulunur. Terim sayısı da $(b-a+1)$ ile bulunuyordu. O halde

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=\frac{(23+5)}{2}\cdot(10-1+1)=14\cdot 10=140.$$

Doğru cevap: B.

$\sum_{k=a}^{b}f(k)$ toplamlarında, $f(k)$ eğer birinci dereceden bir polinom ise bu yolu daima kullanabilirsiniz. Belki üstteki örnekte avantajı pek anlaşılmadı ama başlangıç değeri $k=1$ değil de başka bir sayı olsaydı o zaman ağzınızı açık bırakırdı. Hemen öyle bir örnek verelim.

Örnek. $\sum_{k=5}^{20}(3k-1)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 584 B) 525 C) 484 D) 412 E) 386

Çözüm: k'ye 5 verince ilk terimi 14, k'ye 20 verince son terimi 59 olarak buluruz. $20-5+1=16$ da terim sayısıdır. O halde

$$\sum_{k=5}^{20}(3k-1)=\frac{(59+14)}{2}\cdot 16=584.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{k=-4}^{12}(4k+2)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 504 B) 502 C) 484 D) 402 E) 306

Çözüm: k'ye -4 verince ilk terimi -14, k'ye 12 verince son terimi 50 olarak buluruz.
Terim sayısı da $12-(-4)+1=17$'dir. O halde

$$\sum_{k=-4}^{12}(4k+2)=\frac{(50+(-14))}{2}\cdot 17=306.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1996 ÖYS]. 102 *ile* 353 *arasında bulunan ve* 5 *ile kalansız bölünebilen sayıların toplamı kaçtır?*

A) 9875 B) 10100 C) 10350
D) 11250 E) 11375

Çözüm: O sayıların 105, 110, 115, ..., 350 olduğunu biliyoruz. Sayılar 5'er 5'er arttığından ortak özellik olarak $5n$ alacağız.

$$105+110+...+350=\sum_{i=21}^{70}(5n)=\sum_{i=1}^{50}(5\cdot(n+20))$$
$$=\sum_{i=1}^{50}(5n+100)=5\cdot\frac{50\cdot 51}{2}+50\cdot 100$$
$$=6375+5000=11375$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=3}^{10}k^3$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 3025 B) 3016 D) 3006 D) 3000 E) 2985

Çözüm: Burada alt sınırı 1 yapmak kabus gibidir, çünkü sınırlardan 2 çıkarınca k'ye 2 eklemeliyiz ki o zaman da $(k+2)^3$ açılımını yapıp ona göre toplamayı yapmak gerekecek. Siz bizi izleyin:

$$\sum_{k=3}^{10}k^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{2}k^3=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2$$
$$=55^2-3^2$$
$$=3025-9$$
$$=3016.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1979 ÜSS]. *p ve n pozitif tam sayı olmak üzere*

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

eşitliği bilindiğine göre,

$$p\cdot(p+1)+(p+1)\cdot(p+2)+...+2p\cdot(2p+1)$$

toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2p(p+1)^2$ B) $\frac{1}{3}p(p+1)(6p+5)$

C) $\frac{1}{3}p(p+1)(5p+6)$ D) $\frac{1}{3}p(p+1)(7p-6)$

E) $\frac{1}{3}p(p+1)(7p+5)$

Çözüm: Verilen formül $1\cdot 2$ değerinden başladığından, sorulan toplamı da $1\cdot 2$'den başlar hale getirmeliyiz.
$1\cdot 2$'den $2p\cdot(2p+1)$'e kadar olan toplamdan, $1\cdot 2$'den $(p-1)\cdot p$'ye kadar olan toplamı çıkartacağız. Sorulan toplama T diyelim.

$$T=\frac{1}{3}\cdot 2p\cdot(2p+1)\cdot(2p+2)-\frac{1}{3}\cdot(p-1)\cdot p\cdot(p+1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot p\cdot(p+1)\cdot[2\cdot(2p+1)\cdot 2-(p-1)]$$
$$=\frac{1}{3}\cdot p\cdot(p+1)\cdot(7p+5)$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=n}^{5n}k^3=an^4+bn^3+cn^2$ *olduğuna göre* $a+b+c$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 115 B) 125 C) 215 D) 225 E) 315

Çözüm: Birinci yol. Bu yoldan yapanın kulağını çekerim.

$$\sum_{k=n}^{5n}k^3=\sum_{k=1}^{5n}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left[\frac{5n(5n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2$$
$$=\left[\frac{25n^2+5n}{2}\right]^2-\left[\frac{n^2-n}{2}\right]^2$$
$$=\frac{625n^4+250n^3+25n^2}{4}-\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}$$
$$=\frac{624n^4+252n^3+24n^2}{4}$$
$$=156n^4+63n^3+6n^2$$

olduğundan $a+b+c=156+63+6=225$'tir.
İkinci yol. $n=1$ olursa $a+b+c$ toplamı bulunur.

$$\sum_{k=1}^{5}k^3=\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2=15^2=225.$$

Doğru cevap: D.

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Toplam Sembolü Teoremleri

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi. Bazı toplama işlemlerinde toplanan terimlerin neye göre değiştiğini rahatlıkla anlar, hatta ona uygun biçimde sigma işaretini kullanan gösterim de yazarız, ama o gösterimin formülünü bilmediğimiz için olay orada kalır. Özellikle kesirli ifade toplamlarında bunu sıkça yaşarız. İşte böyle durumlarda basit kesirlere ayırma yöntemi sorunu çözer, hatta böyle durumların formülünü çıkarmamıza da yarar. Örneklerle anlatalım.

Örnek. $\sum_{k=0}^{16}\frac{1}{k^2+5k+6}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{16}{37}$ B) $\frac{17}{38}$ C) $\frac{18}{39}$ D) $\frac{19}{40}$ E) $\frac{20}{41}$

Çözüm: k'ye alabileceği değerleri verelim bakalım.

$k=0$ için $\frac{1}{6}$

$k=1$ için $\frac{1}{12}$

$k=2$ için $\frac{1}{20}$

$k=3$ için $\frac{1}{30}$

...

$k=16$ için $\frac{1}{340}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+...+\frac{1}{340}$ toplamını nasıl yapacağımızı bilmediğimizden bu yol işe yaramıyor. Başka bir yol bulalım:

$$\frac{1}{k^2+5k+6}=\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{A}{\underset{(k+3)}{k+2}}+\frac{B}{\underset{(k+2)}{k+3}}$$

$$A(k+3)+B(k+2)=1$$
$$Ak+3A+Bk+2B=1$$
$$(A+B)k+(3A+2B)=1$$

Elde edilen $A+B=0$ ve $3A+2B=1$ eşitlikleri ortak çözülürse $A=1$ ve $B=-1$ bulunur.

Bunu $A(k+3)+B(k+2)=1$ denkleminde k'ye -3 ve -2 vererek de bulabilirdik. Neyse...

O halde $\frac{1}{k^2+5k+6}=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}$ olur.

$k=0$ için $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$k=1$ için $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$k=2$ için $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

...

$k=16$ için $\frac{1}{18}-\frac{1}{19}$

$+$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{19}=\frac{19-2}{38}=\frac{17}{38}$.

Doğru cevap: B.

Soruyu çözdük çözmesine de bayağı bir uğraştırdı. Ben de sizin için yukardaki işlemlerin aynısını a ve b değerleri için yapıp bu soruların formülünü çıkardım:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}-\frac{\frac{1}{a-b}}{x-b}$$

olduğundan

$$\sum_{x=p}^{q}\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\sum_{x=p}^{q}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

olur. x değerlerini p'den q'ye kadar sırasıyla koyarak, gerekli sadeleştirmeler yapılır ve sonuca ulaşılır.

$$\frac{1}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+1-a}+...+\frac{1}{q-a}-\frac{1}{p-b}-...-\frac{1}{q-1-b}-\frac{1}{q-b}\right)$$

Eğer $a-b=1$ ise parantez içindeki ifadelerden en baştaki ve en sondaki kalır, diğerleri sadeleşir.

Eğer $a-b=2$ ise parantez içindeki ifadelerden baştaki iki tanesi ve sondaki iki tanesi kalır, diğerleri sadeleşir.

Ve bu böyle devam eder. Üç adet örnek vereyim:

$$\sum_{k=3}^{16}\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{3+2}-\frac{1}{16+3}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{16}\frac{1}{(k+2)(k+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+2}+\frac{1}{4+2}-\frac{1}{15+4}-\frac{1}{16+4}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{9}\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7+3}-\frac{1}{8+3}-\frac{1}{9+3}\right)$$

Örnek. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+10}$ *toplamı kaçtır?*

A) $\frac{16}{11}$ B) $\frac{17}{11}$ C) $\frac{18}{11}$ D) $\frac{19}{11}$ E) $\frac{20}{11}$

Çözüm: Aslında soru şu: $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{1+2+\ldots+k}=?$

Diğer yandan

$$\frac{1}{1+2+3+\ldots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{1+2+\ldots+k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{10+1}\right)=\frac{20}{11}.$$

Doğru cevap: E.

Görüldüğü üzere işlemler kolay ama fazlasıyla uzun. Hemen bunun formülünü verelim.

Teorem.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Kanıt: Kanıtı aynı yukardaki soruları çözdüğümüz gibi.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Örnek. $\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{k^2+3k+2}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{17}{39}$ B) $\frac{16}{39}$ C) $\frac{14}{39}$ D) $\frac{11}{39}$ E) $\frac{10}{39}$

Çözüm: Toplamın açık haline bir bakalım:

$$\sum_{k=2}^{11}\frac{1}{k^2+3k+2}=\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{12\cdot 13}$$

Bir sorun var. Bizim bildiğimiz formül böyle başlamıyor. O halde bir şeyler ekleyip çıkartalım:

$$T=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{12\cdot 13}$$
$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{12\cdot 13}\right)-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)$$
$$=\frac{12}{13}-\frac{2}{3}=\frac{12\cdot 3-2\cdot 13}{39}=\frac{10}{39}$$

Siz bir de çıkardığımız formülü kullanarak çözünüz.

Doğru cevap: E.

$1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n$ toplamları

Şimdi de $1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n$ şeklindeki toplamları hesaplamayı öğreneceğiz. Biraz çarpanlara ayırma formüllerine ihtiyacımız olacak.

$$1-r^2=(1-r)(1+r)$$
$$1-r^3=(1-r)(1+r+r^2)$$
$$1-r^4=(1-r)(1+r+r^2+r^3)$$
$$\ldots$$
$$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})$$

olduğundan son eşitliğin her iki yanını 1 – r ile bölersek aradığımıza kavuşuruz.

$$\sum_{k=0}^{n-1}r^k=1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

r'nin 1'den farklı olduğunu varsayıyoruz, zaten $r=1$ ise böyle bir toplama hiç ihtiyaç duymayız.

Örnek. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{99}}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{2^{100}-1}{2^{99}}$ B) $\frac{2^{100}-1}{2^{100}}$ C) $\frac{2^{100}+1}{2^{99}}$ D) $\frac{2^{100}+1}{2^{100}}$ E) $\frac{2^{101}-1}{2^{100}}$

Çözüm: Sorulan toplamı

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$$

haline getirirsek, formülü kullanma şansımız olur:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)=2\left(\frac{2^{100}-1}{2^{100}}\right)=\frac{2^{100}-1}{2^{99}}$$

Doğru cevap: A.

Bazen de toplanması istenen şey bu tarzda olur ama 1'den başlamaz. Sorun değil, bunu da hemen giderebiliriz:

Örnek. $3^3+3^4+3^5+...+3^{10}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{3^{11}-3}{2}$ B) $\frac{3^{11}-3^2}{2}$ C) $\frac{3^{11}-3^3}{2}$ D) $\frac{3^{11}-3^4}{2}$ E) $\frac{3^{11}-3^5}{2}$

Çözüm: Madem toplam 1'den başlamıyor, o zaman biz 1'den başlayacak şekilde terimler ekleyelim, sonra da çıkartırız. Yani ifadeye $1+3+3^2$ ekleyip, formülü kullanarak hesap yapacağız sonra da eklediğimiz 13'ü bulduğumuz sonuçtan çıkartacağız. Ama ben bunu tavsiye etmiyorum. Şöyle yapabilirsiniz:

$$3^3+3^4+3^5+...+3^{10}=3^3\cdot(1+3+3^2+...+3^7)$$
$$=3^3\cdot\frac{1-3^8}{1-3}=\frac{3^{11}-3^3}{2}$$

Sanırım böyle daha kolay ve güzel.

Doğru cevap: C.

Örnek. $1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}$ B) $\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$ C) $\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ D) $\frac{1-x^{2n+2}}{1-x}$ E) $\frac{1-x^{2n}}{1-x}$

Çözüm: Dikkat ederseniz x'in kuvvetleri teker teker değil, ikişer ikişer artıyor ve bizim bu duruma uygun bir formülümüz yok. Fakat $x^2=r$ diyerek bu sorunu giderebiliriz.

$$1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}=1+r+r^2+...+r^n$$
$$=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^{23}+x^{25}+x^{27}+...+x^{51}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{x^{21}-x^{49}}{1-x^2}$ B) $\frac{x^{23}-x^{51}}{1-x^2}$ C) $\frac{x^{25}-x^{53}}{1-x^2}$ D) $\frac{x^{23}-x^{53}}{1-x^2}$ E) $\frac{x^{23}-x^{52}}{1-x^2}$

Çözüm: Toplam 1'den başlasın diye hemen toplamı x^{23} parantezine alalım:

$$x^{23}+x^{25}+x^{27}+...+x^{51}=x^{23}\left[1+x^2+x^4+...+x^{28}\right]$$
$$=x^{23}\left[\frac{1-x^{30}}{1-x^2}\right]=\frac{x^{23}-x^{53}}{1-x^2}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+k^3+4)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 4100 B) 4094 C) 4088 D) 4082 E) 4078

Çözüm: $\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+k^3+4)=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}+\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}4$

$$=\frac{1-2^{10}}{1-2}+\left(\frac{10\cdot11}{2}\right)^2+10\cdot4$$
$$=1023+3025+40=4088.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $n\neq0$ *olmak üzere*

$$5^x+5^{2x}+5^{3x}+...+5^{nx}+\left(4\cdot5^n\right)^x=4^x$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $5^x+5^{2x}+5^{3x}+...+5^{nx}+\left(4\cdot5^n\right)^x=4^x$

$$5^x+\left(5^x\right)^2+\left(5^x\right)^3+...+\left(5^x\right)^n+4^x\cdot5^{nx}=4^x$$
$$5^x\cdot\left[1+5^x+\left(5^x\right)^2+\left(5^x\right)^3+...+\left(5^x\right)^{n-1}\right]+4^x\cdot5^{nx}=4^x$$
$$5^x\cdot\left[\frac{1-\left(5^x\right)^n}{1-5^x}\right]+4^x\cdot5^{nx}=4^x$$
$$\frac{5^x-5^{nx+x}}{1-5^x}+4^x\cdot5^{nx}=4^x$$
$$\frac{5^x-5^{nx+x}+4^x\cdot5^{nx}-4^x\cdot5^{nx+x}}{1-5^x}=4^x$$
$$5^x-5^{nx+x}+4^x\cdot5^{nx}-4^x\cdot5^{nx+x}=4^x\cdot\left(1-5^x\right)$$
$$5^x\cdot\left(1-5^{nx}\right)+4^x\cdot5^{nx}\cdot\left(1-5^x\right)=4^x\cdot\left(1-5^x\right)$$
$$5^x\cdot\left(1-5^{nx}\right)=4^x\cdot\left(1-5^x\right)\cdot\left(1-5^{nx}\right)$$
$$5^x=4^x\cdot\left(1-5^x\right)$$
$$5^x=4^x-20^x$$
$$x=-1$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$ *toplamı kaça eşittir?*

A) $(n-1)\cdot 2^n$ B) $(n-1)\cdot 2^{n+1}$ C) $(n-1)\cdot 2^{n-1}$
D) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ E) $(n+1)\cdot 2^{n-1}+2$

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n$$

sayısına A diyelim. Bu durumda

$$2A = 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\ldots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$$

olur. Bu sayıdan A'yı çıkartırsak yine A'yı buluruz:

$$2A = 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\ldots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$$
$$A = 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n$$

$$\begin{aligned}A &= -1\cdot 2^1-1\cdot 2^2-1\cdot 2^3-\ldots-1\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}\\ &= 1-1\cdot 2^0-1\cdot 2^1-1\cdot 2^2-1\cdot 2^3-\ldots-1\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}\\ &= 1-(2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n)+n\cdot 2^{n+1}\\ &= 1-(2^{n+1}-1)+n\cdot 2^{n+1}\\ &= n\cdot 2^{n+1}-2^{n+1}+2\\ &= (n-1)\cdot 2^{n+1}+2\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=1}^{10}\sum_{n=5}^{x}(2n-7)=350$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Önce $\sum_{n=5}^{x}(2n-7)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{x}(2n-7) &= \sum_{n=1}^{x-4}(2n+1)\\ &= (x-4)(x-3)+x-4\\ &= (x-4)(x-3+1)\\ &= x^2-6x+8\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{10}\sum_{n=5}^{x}(2n-7)=\sum_{k=1}^{10}\left(x^2-6x+8\right)=350$$

denklemini çözmeliyiz.

$$\sum_{k=1}^{10}\left(x^2-6x+8\right)=10\cdot\left(x^2-6x+8\right)=350$$
$$x^2-6x+8=35$$
$$x^2-6x-27=0$$
$$(x-9)\cdot(x+3)=0$$

ve $x>0$ olduğundan $x=9$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=0}^{3}(m-2k)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) −90 B) −45 C) 0 D) 45 E) 90

Çözüm:

$$\sum_{k=1}^{5}\sum_{m=0}^{3}(m-2k)=\sum_{k=1}^{5}\left[\sum_{m=0}^{3}(m-2k)\right]=\sum_{k=1}^{5}\left[\frac{3\cdot 4}{2}-4\cdot 2k\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{5}[6-8k]=30-8\cdot\frac{5\cdot 6}{2}=-90$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. $\sum_{n=1}^{4}\left[\sum_{m=2}^{3}(m^2n-6n)\right]$ *toplamının sayısal değeri kaçtır?*

A) 30 B) 20 C) 10 D) −10 E) −20

Çözüm: Alt sınırla üst sınır birbirine çok yakın olduğundan parantez içini formülle yapmaktansa, m'ye bir 2, bir de 3 vererek toplamak daha kısadır.

$$\sum_{n=1}^{4}\left[\sum_{m=2}^{3}(m^2n-6n)\right]=\sum_{n=1}^{4}[(4n-6n)+(9n-6n)]$$
$$=\sum_{n=1}^{4}n=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{k=1}^{7}\sum_{k=1}^{5}(m+k+2)=35$ *olduğuna göre m kaça eşittir?*

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

Çözüm: $\sum_{k=1}^{7}\sum_{k=1}^{5}(m+k+2)=\sum_{k=1}^{7}\left[\sum_{k=1}^{5}(m+k+2)\right]$

demek olduğundan, önce $\sum_{k=1}^{5}(m+k+2)$ toplamını hesaplamalıyız.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(m+k+2) &= \sum_{k=1}^{5}m+\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}2\\ &= 5m+\frac{5\cdot 6}{2}+5\cdot 2\\ &= 5m+15+10 = 5m+25\end{aligned}$$

Şimdi asıl toplama geçebiliriz:

$$\sum_{k=1}^{7}\sum_{k=1}^{5}(m+k+2)=\sum_{k=1}^{7}(5m+25)$$
$$=(5m+25)\cdot 7 = 35m+175$$

Bu değeri 35'e eşitleyince m ortaya çıkacak.

$$35m+175=35$$

eşitliğinden $35m=-140$ yani $m=-4$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=1}^{4}\left[\sum_{s=1}^{2}(4s-2k+1)\right]$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) –12 B) –8 C) 0 D) 16 E) 24

Çözüm: Önce en büyük parantez içini hesaplayalım.

$$\sum_{s=1}^{2}(4s-2k+1)=4\cdot\frac{2\cdot3}{2}-2\cdot2k+2\cdot1=14-4k$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{4}\left[\sum_{s=1}^{2}(4s-2k+1)\right]=\sum_{k=1}^{4}[14-4k]=4\cdot14-4\cdot\frac{4\cdot5}{2}=16$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1975 ÜSS]. $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{3}(3i-2j+1)$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) –1 B) 5 C) 10 D) 11 E) 8

Çözüm: Önce sağdaki toplam sembolünü hesaplamalıyız.

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{3}(3i-2j+1)=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}(3i-2j-2)$$

$$=\sum_{j=1}^{4}(3\cdot\frac{4\cdot5}{2}-4\cdot2j-4\cdot2)=\sum_{j=1}^{4}(22-8j)$$

$$=4\cdot22-8\cdot\frac{4\cdot5}{2}=88-80=8.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot2+n\cdot1$ *toplamının sonucunu bulunuz.*

Çözüm: Her terimdeki ilk çarpanın 1'den başlayarak n'ye kadar arttığını, ikinci çarpanların da n'den başlayarak 1'e kadar azaldığını fark etmiş olmalısınız. O halde buna uygun toplam sembolünü yazalım.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot(n+1-k)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(nk+k-k^2\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(nk)+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)$$

$$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left[n+1-\frac{(2n+1)}{3}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left[\frac{3n+3-(2n+1)}{3}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Örnek. $4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9+\ldots+10\cdot13$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 324 B) 400 C) 441 D) 484 E) 518

Çözüm: İkinci çarpanlar, birinci çarpanlardan 3 fazla olduğundan ilk çarpana k dersek, ikinci çarpan $k+3$ olur. O halde bu toplam

$$\sum_{k=4}^{10}[k(k+3)]=\sum_{k=1}^{7}[(k+3)(k+6)]=\sum_{k=1}^{7}(k^2+9k+18)$$

şeklinde yazılabilir. Hesaplayalım:

$$\sum_{k=1}^{7}(k^2+9k+18)=\sum_{k=1}^{7}k^2+9\cdot\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}18$$

$$=\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+9\cdot\frac{7\cdot8}{2}+7\cdot18=140+252+126=518.$$

Doğru cevap: E.

Örnek (Meraklısına). $T=\sum_{k=1}^{98}\left[k!\cdot(k^2+k+1)\right]$ *olduğuna göre T sayısı kaça eşittir?*

Çözüm: $T=\sum_{k=1}^{98}\left[k!\cdot(k^2+k+1)\right]$

$$=\sum_{k=1}^{98}\left[k!\cdot(k^2+2k+1-k)\right]=\sum_{k=1}^{98}\left[k!\cdot((k+1)^2-k)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{98}\left[k!\cdot(k+1)^2-k!\cdot k)\right]=\sum_{k=1}^{98}\left[(k+1)!\cdot(k+1)-k!\cdot k)\right]$$

$$=2!\cdot2-1!\cdot1+3!\cdot3-2!\cdot2+\ldots+99!\cdot99-98!\cdot98$$

$$=99!\cdot99-1!\cdot1=99!\cdot99-1$$

Örnek (Meraklısına). $T=\sum_{k=36}^{99}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$ *olduğuna göre T sayısı kaça eşittir?*

Çözüm: $T=\sum_{k=36}^{99}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$

$$=\sum_{k=36}^{99}\frac{\left(k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}\right)}{\left(k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}\right)\cdot\left(k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}\right)}$$

$$=\sum_{k=36}^{99}\frac{\left(k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}\right)}{\left(k^2(k+1)-(k+1)^2k\right)}$$

$$=\sum_{k=36}^{99}\frac{\left(k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}\right)}{-k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=36}^{99}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{36}}-\frac{1}{\sqrt{37}}+\frac{1}{\sqrt{37}}-\frac{1}{\sqrt{38}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{36}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sum_{k=-7}^{12}(2k+3)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -160 B) -80 C) 0 D) 80 E) 160

2.

$$\sum_{k=8}^{10}\left(k^2+k\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 17 B) 34 C) 68 D) 136 E) 272

3.

$$\sum_{k=-2}^{3}(k^3-k)$$

kaça eşittir?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

4.

$$\sum_{k=1}^{10}[(k-1)k(k+1)]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2950 B) 2960 C) 2970 D) 2980 E) 2990

5.

$$\sum_{n=3}^{11}[(n-2)(n-3)+1]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 249 B) 252 C) 255 D) 258 E) 261

6.

$$\sum_{k=6}^{25}\left(k^2-10k+5\right)$$

kaça eşittir?

A) 2400 B) 2430 C) 2450 D) 2470 E) 2490

7.

$$\sum_{k=1}^{10}\left(2^{k-1}+k^2+2k\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $2^{10}+494$ B) 2^9+494 C) 2^8+494 D) 2^4+494 E) 2^2+494

8.

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{2^n}-n+2\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $2^{-7}-10$ B) $2^{-7}+10$ C) $-2^{-7}-13$ D) $2^{-7}-15$ E) $-2^{-7}+15$

9.

$f(x)=2x^2-50$ olarak veriliyor. Buna göre

$$\sum_{m=-4}^{5}f(m)$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) -660 B) -330 C) -165 D) -25 E) -5

10.

$f(x)=x^2-4$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{8}f(n-2)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 100

1. E 2. E 3. D 4. C 5. A 6. D 7. A 8. C 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\sum_{k=1}^{m}(k+m)^2-\sum_{k=1}^{m}\left(k^2\right)$$

farkı kaçtır?

A) $2m^3$ B) $m^2(m+1)$ C) m^2
D) $m^2(2m+1)$ E) $m^2(2m+2)$

2.

$$\sum_{k=2n}^{3n}(k^2+k+1)=an^3+bn^2+cn+d$$

olduğuna göre $a+b+c+d$ toplamı kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

3.

$$\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}(10)$$

toplamı kaçtır?

A) 10 B) 10! C) 10^9 D) 10^{10} E) 10^{11}

4.

$$\sum_{m=1}^{10}\frac{3m^2+m-2}{m+1}$$

kaça eşittir?

A) 145 B) 165 C) 175 D) 185 E) 200

5.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)}{n^2-1}$$

oranı kaça eşittir?

A) $\frac{n}{3}$ B) $\frac{n}{2}$ C) $2n$ D) $3n$ E) $\frac{3}{n}$

6.

$$\sum_{n=1}^{10}\left((-1)^{n+1}\cdot(4n+5)\right)$$

kaça eşittir?

A) –20 B) 0 C) 20 D) 30 E) 40

7.

$$-11-5+1+7+\ldots+103$$

toplamı kaçtır?

A) 900 B) 905 C) 910 D) 915 E) 920

8.

$$2-4+3-9+4-16+\ldots+10-100$$

toplamı kaça eşittir?

A) –330 B) –165 C) 0 D) 165 E) 330

9.

$$4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+\ldots+15\cdot16$$

toplamı kaça eşittir?

A) 1329 B) 1335 C) 1337 D) 1339 E) 1340

10.

$$1\cdot5+2\cdot6+3\cdot7+\ldots+11\cdot15$$

toplamı kaçtır?

A) 720 B) 730 C) 750 D) 770 E) 790

1. D 2. C 3. E 4. A 5. A 6. A 7. E 8. A 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$-20-18-16-...-4-2+5^2+6^2+7^2+..+20^2$$

toplamı kaça eşittir?

A) −2730 B) 0 C) 546 D) 2730 E) 5460

2.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+20}$$

toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{40}{21}$ B) $\frac{39}{21}$ C) $\frac{38}{21}$ D) $\frac{37}{21}$ E) $\frac{36}{21}$

3.

$$\sum_{k=-10}^{9}(k^3+3k^2+3k+2)$$

toplamı kaçtır?

A) 990 B) 1000 C) 1010 D) 1020 E) 1030

4.

$$\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{99}{100}$ B) $\frac{100}{101}$ C) $\frac{101}{100}$ D) $\frac{90}{700}$ E) $\frac{93}{700}$

5.

$$\sum_{k=4}^{10}\frac{1}{k^2+5k+6}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{17}{18}$ D) $\frac{42}{71}$ E) $\frac{7}{78}$

6.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+5k+6}=\frac{10}{39}$$

olduğuna göre *n* kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

7.

$$A=3^3+3^4+3^5+...+3^{21}$$

olduğuna göre $2A+27$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3^{19} B) 3^{22} C) 3^{24} D) 3^{27} E) 3^{33}

8.

$$\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{11}}\right)^{-1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -2^{-11} B) -2^{-10} C) -2^{11} D) -2^{10} E) -2^9

9.

$$A=\sum_{k=1}^{13}(-2)^{k-1}$$

olduğuna göre $3A-1$ ifadesi kaça eşittir?

A) -2^{13} B) -2^{12} C) -2^{11} D) 2^{14} E) 2^{13}

10.

$$\frac{\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}}{\sum_{n=1}^{10}(-2)^{n-1}}$$

oranı kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −2 D) 2 E) 3

1. D 2. A 3. D 4. E 5. E 6. D 7. B 8. C 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 4

1.

$$\sum_{n=0}^{11}\frac{9^n+1}{3^n}$$

kaça eşittir?

A) $\frac{3^{22}-1}{3^{11}}$ B) $\frac{3^{22}+3^{11}+1}{3^{11}}$ C) $\frac{3^{23}+2\cdot 3^{11}-1}{3^{11}}$

D) $\frac{3^{24}+1}{3^{12}}$ E) $\frac{3^{26}-1}{3^{13}}$

2.

$$A=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots-\frac{1}{1024}$$

olduğuna göre $5A$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^{12}-1$ B) $2^{11}-4$ C) -2^{-11}

D) $4-2^{-10}$ E) -2^{-14}

3.

$$\sum_{a=1}^{33}\left(2^a\cdot a\right)$$

toplamı kaçtır?

A) $2^{39}-1$ B) $2^{39}+1$ C) $2^{39}+2$

D) $2^{40}+2$ E) 2^{40}

4.

$$\sum_{k=1}^{7}\sum_{m=0}^{6}(m-k-1)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –98 B) –49 C) 7 D) 49 E) 98

5.

$$\sum_{n=-2}^{0}\sum_{m=1}^{8}\left(6^n\cdot m\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 23 B) 33 C) 43 D) 53 E) 63

6.

$$\sum_{n=0}^{7}\sum_{m=-2}^{9}(mn+3n)$$

kaça eşittir?

A) 2084 B) 2184 C) 2284 D) 2384 E) 2484

7.

$$x\Delta y=\frac{1}{xy}$$

$$x\nabla y=x+y+\frac{1}{80}$$

olduğuna göre $(1\Delta 2)\nabla(2\Delta 3)\nabla(3\Delta 4)\nabla\ldots\nabla(9\Delta 10)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$s=13$ olmak üzere

$$5^2+7^2+9^2+\ldots+(2s-1)^2=v$$

olduğu bilindiğine göre $3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\ldots+23\cdot25$ ifadesinin v türünden eşiti kaçtır?

A) $v-165$ B) $v-215$ C) $v-270$

D) $v-315$ E) $v-330$

9.

$$\sum_{x=1}^{2k}a_x=(2k+1)^2$$

$$\sum_{x=k+1}^{2k}a_x=85$$

olduğuna göre k kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.

$11+20+31+44+59+76+95+116+139+164$

toplamının sonucu kaçtır?

A) 695 B) 715 C) 755 D) 795 E) 815

1. C 2. D 3. C 4. A 5. C 6. B 7. A 8. E 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Çarpım Sembolü

Aynen toplama sembolünde anlatıldığı gibi, bazen çarpılacak şeylerin miktarı çok olur. Bırakın çarpımı hesaplamayı, bu çarpımı yazmakta bile sıkıntı çekeriz. İşte bu derste, belli bir kural dahilinde değişmiş sayılabilir miktarda nesnenin çarpımını hem kısaca yazmayı hem de o çarpımı hesaplamayı öğreneceğiz.

Kısa yazılımın matematiksel gösterimi şudur:

$r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \le n$ olmak üzere;

$$f(r)\cdot f(r+1)\cdot \ldots \cdot f(n-1)\cdot f(n)=\prod_{k=r}^{n} f(k).$$

Buradaki gösterimi kısaca izah edelim: Eşitliğin sol tarafına bakarsanız, parantez içindeki sayılar r'den başlamış ve 1'er 1'er artarak n'ye kadar ulaşmış. İşte bu artan sayıyı bir değişkenle gösterip, o değişkenin aldığı ilk değeri $\prod$ (pi diye okunur) işaretinin altına, son değerini de üstüne yazarak gösteriyoruz. Yukardaki gösterimde olduğu gibi değişecek şeyin ne olduğu, pi işaretinin altında değişkenin ilk değeriyle birlikte gösterilmek zorundadır, yoksa biz neyin değişeceğini bilemeyiz.

Böyle bir yazılımda r'ye **alt sınır**, n'ye **üst sınır**, k'ye de **değişken** adı verilir.

$\prod$ işleminin tam olarak nasıl çalıştığını anlamak için aşağıdaki örnekleri titizlikle inceleyiniz.

Örnekler.

- ✓ $\prod_{k=1}^{4} 3 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4$,
- ✓ $\prod_{k=1}^{5} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$,
- ✓ $\prod_{k=3}^{5} (2k) = 6\cdot 8\cdot 10 = 480$,
- ✓ $\prod_{k=-8}^{73} k = 0$,
- ✓ $\prod_{k=1}^{4} 2^k = 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4 = 2^{10}$,
- ✓ $\prod_{k=2}^{4} \frac{k}{k+2} = \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{5}$,
- ✓ $\prod_{k=1}^{89} \tan k^\circ = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 89^\circ = 1$.



Görüldüğü üzere, çarpım sembolünün ne işe yaradığını anlamaktan başka önemli bir şey yok. Herhangi bir formül filan bilmeden nerdeyse her türlü çarpım sorusunu hesaplayabiliyoruz. "Nerdeyse" mi dedim, pardon, "tamamını" böyle çözebiliriz!

Örnek. $\prod_{k=2}^{15} \log_k (k+1)$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm: k'ye 2'den başlayıp sırayla 15'e kadar tüm tamsayı değerlerini verip çıkan sonuçları çarpacağız.

$$\prod_{k=2}^{15} \log_k (k+1) = \log_2 3\cdot \log_3 4\cdot \ldots \cdot \log_{15} 16$$

$$= \frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot \ldots \cdot \frac{\log 16}{\log 15}$$

$$= \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{4\log 2}{\log 2} = 4$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\prod_{k=1}^{6} a_k = 3$ ve $\prod_{k=7}^{10} a_k = 2$ *olduğuna göre* $\prod_{k=1}^{10} a_k$ *kaça eşittir?*

A) 1 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: Sorulan ifadenin

$$a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_6\cdot a_7\cdot \ldots \cdot a_{10}$$

olduğunu görmeniz lazım. a_1'den a_6'ya kadar olan ifadelerin çarpımı 3, kalan ifadelerin çarpımı da soruda 2 diye verildiğinden çarpım $3\cdot 2 = 6$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Şimdi aynı metotlarla, kullanacağımız formülleri bir bir çıkartalım bakalım:

Teorem. $\prod_{k=1}^{n} c = c^n$.

Kanıt: k sayısı 1'den n'ye gidene kadar yani n kere c birbiriyle çarpılacağından

$$\prod_{k=1}^{n} c = c \cdot c \cdot c \cdot \ldots \cdot c = c^n .$$

Örnek. $\prod_{k=1}^{4} 2 = \prod_{k=1}^{a} 4$ *eşitliğini sağlayan* a *sayısı kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Çözüm: Eşitliğin sol yanı 2^4, sağ yanı 4^a demek olduğundan $2^4 = 4^a$ eşitliğini çözmeliyiz. Bunu çözemeyecek adam zaten ders çalışmayı bıraksın, gitsin gezsin!☺

Doğru cevap: C.

Örnek. a, b, c *birer sayma sayısı olmak üzere* $\prod_{k=1}^{c} (a^b)$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $a \cdot b \cdot c$ B) $c \cdot a^b$ C) a^{b+c} D) a^{bc} E) 1

Çözüm: İfade, c tane a^b sayısının çarpımı demek olduğundan sonuç $(a^b)^c$ yani a^{bc} olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Teorem. $\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Kanıt: Hemen tanıma göre açılım yapalım:

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Örnek. $\prod_{k=1}^{7} k \cdot \prod_{t=1}^{6} t = \prod_{a=1}^{x} a$ *eşitliğini sağlayan* x *sayısı kaçtır?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 13 E) 42

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{7} k = 7!, \quad \prod_{t=1}^{6} t = 6! \text{ ve } \prod_{a=1}^{x} a = x!$$

olduğundan $7! \cdot 6! = x!$ eşitliğini sağlayan x sayısını bulmalıyız.

$$x! = 7! \cdot 6! = 7! \cdot 720 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$$

olduğundan $x = 10$'dur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\prod_{k=3}^{9} (k-2)$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 5! B) 6! C) 7! D) 8! E) 9!

Çözüm:

$$\prod_{k=3}^{9} (k-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 = 7!.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = \sum_{k=1}^{x} (k+1)$ ve $g(x) = \prod_{k=1}^{x} k$ *şeklinde verilen* f *ve* g *fonksiyonları için* $(gof)(4)$ *kaça eşittir?*

A) 5! B) 6! C) 7! D) 14! E) 15!

Çözüm:

$$(gof)(4) = g(f(4))$$

demek olduğundan önce f(4) değerini bulalım.

$$f(4) = \sum_{k=1}^{4} (k+1) = 2+3+4+5 = 14$$

olduğundan

$$g(f(4)) = g(14) = \prod_{k=1}^{14} k = 14!$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Teorem. $\prod_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c^n\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k$.

Kanıt: k değerlerine 1'den başlayarak n olana kadar değerler verip, çıkan sonuçları birbirleriyle çarpacağız:

$$\prod_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=(c\cdot a_1)\cdot(c\cdot a_2)\cdot\ldots\cdot(c\cdot a_n)=c^n\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k\ .$$

Örnek. $\prod_{k=1}^{31}(\frac{2k}{k+1})=4^a$ *eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?*

A) 13 B) 14 B) 16 C) 26 E) 32

Çözüm:

$$\prod_{k=1}^{31}(\frac{2k}{k+1})=\prod_{k=1}^{31}\left[2\cdot\frac{k}{k+1}\right]=2^{31}\cdot\prod_{k=1}^{31}\frac{k}{k+1}$$

olur. Şimdi kalan kısmı çözelim:

$$\prod_{k=1}^{31}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{31}{32}=\frac{1}{32}=2^{-5}$$

olduğundan

$$\prod_{k=1}^{31}(\frac{2k}{k+1})=2^{31}\cdot2^{-5}=2^{26}$$

olur ki $2^{26}=4^a$ eşitliğinden $a=13$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\prod_{k=1}^{n}\left[4\cdot(1-\frac{1}{k+1})\right]$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{2^n}{n-1}$ B) $\frac{2^n}{n+1}$ C) $\frac{4^n}{n-1}$ D) $\frac{4^n}{n+1}$ E) $\frac{4^{n+1}}{n+1}$

Çözüm: Köşeli parantez içini sadeleştirelim.

$$\prod_{k=1}^{n}\left[4\cdot(1-\frac{1}{k+1})\right]=\prod_{k=1}^{n}\frac{4k}{k+1}=4^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$$

olduğunu görelim.

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

olduğundan cevap $4^n\cdot\frac{1}{n+1}$ yani $\frac{4^n}{n+1}$'dir.

Doğru cevap: D.

Teorem. $\prod_{k=1}^{n}(c\cdot k)=c^n\cdot n!$.

Kanıt: Kanıtımız yine formül kullanmayacak, sadece çarpım sembolünün tanımından faydalanacağız.

$$\prod_{k=1}^{n}(c\cdot k)=(c\cdot1)\cdot(c\cdot2)\cdot(c\cdot3)\cdot\ldots\cdot(c^n\cdot n)$$

$$=(c\cdot c\cdot c\cdot\ldots\cdot c)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)=c^n\cdot n!$$

Anlaşılan o ki, sigma sembolündeki gibi c'yi direkt başa alamıyoruz, eğer çok almak istiyorsanız da terim sayısını c'ye üs yazdıktan sonra alabilirsiniz demek istiyor.

Örnek. $\prod_{k=1}^{4}(3k)$ *yılında doğmuş biri 2009 yılında kaç yaşında olur?*

A) 17 B) 18 C) 19 D) 44 E) 65

Çözüm: Sormuşken burcunu da sorsaydı bari...☺

$$\prod_{k=1}^{4}(3k)=3^4\cdot4!=81\cdot24=1944$$

olduğundan 2009 yılında 2009 — 1944 = 65 yaşında olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\prod_{k=1}^{26}k=m\cdot3^a\cdot5^b$ *olduğuna göre a + b toplamı en fazla kaç olabilir?*

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Çözüm: $\prod_{k=1}^{26}k$ demek, 26! demek olduğundan, aslında bize 26! sayısının içindeki 3 ve 5 çarpanlarının adetlerinin toplamı soruluyor. Bunun için 26'yı devamlı 3'e ve 5'e bölüp bölümleri toplarsak, 10 tane 3 çarpanı ve 6 tane 5 çarpanı olduğunu anlarız. O halde cevap 10 + 6 = 16 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Teorem. $\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Kanıt: Ne kadar da bilimsel görünüyor değil mi? Sanki çözmek için profesör olmak lazım. ☺
Hemen tanıma göre açılım yapalım:

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^n = 2^{1+2+3+\ldots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Örnek. $\prod_{k=1}^{12} 5^{\frac{k}{2}} = 125^a$ *eşitliğini sağlayan a kaçtır?*

A) 17 B) 16 C) 15 D) 13 E) 39

Çözüm: $5^{\frac{k}{2}}$ yerine $(\sqrt{5})^k$ yazabiliriz. Şimdi çarpımın açık haline bakalım:

$$\prod_{k=1}^{12} (\sqrt{5})^k = (\sqrt{5})^1 \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot \ldots \cdot (\sqrt{5})^{12}$$

$$= (\sqrt{5})^{1+2+\ldots+12}$$

$$= (\sqrt{5})^{\frac{12 \cdot 13}{2}} = (\sqrt{5})^{78} = 5^{39}$$

olarak bulunur. $5^{39} = 125^a = 5^{3a}$ eşitliğinden de kolayca $a = 13$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\prod_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} (i-2j+1) \right)$ *kaça eşittir?*

A) –776 B) –388 C) 0 D) 388 E) 776

Çözüm: Önce en büyük parantezin içini halledeceğiz:

$$\sum_{j=1}^{4} (i-2j+1) = 4i - 2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + 4 = 4i - 16$$

olduğundan

$$\prod_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} (i-2j+1) \right) = \prod_{i=1}^{3} (4i-16)$$

olur. Bunu da hesaplarsak

$$\prod_{i=1}^{3} (4i-16) = (-12) \cdot (-8) \cdot (-4) = -388$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1994 ÖYS]. $\sum_{n=1}^{10} \prod_{m=2}^{8} (mn-3n)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) –729 B) –363 C) 0 D) 363 E) 726

Çözüm:

$$\prod_{m=2}^{8} (mn-3n) = \prod_{m=2}^{8} [n(m-3)]$$

çarpımı $m = 3$ değerini aldığında 0 olacağından

$$\sum_{n=1}^{10} \prod_{m=2}^{8} (mn-3n) = \sum_{n=1}^{10} 0 = 0$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *n'nin r'li permutasyonuna eşit olduğunu bildiğimiz* $\frac{n!}{(n-r)!}$ *sayısının çarpım sembolüyle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\prod_{k=n-r}^{n} k$ B) $\prod_{k=r}^{n} k$ C) $\prod_{k=r}^{n-r} k$

D) $\prod_{k=n-r}^{n-1} (k+1)$ E) $\prod_{k=1}^{r-1} (n-k)$

Çözüm: $n!$ demek 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların çarpımı demektir. $(n-r)!$ demek de 1'den $n-r$'ye kadar olan doğal sayıların çarpımı demektir. O halde

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-r) \cdot (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-r)}$$

olduğundan sadeleştirme yapılırsa

$$\frac{n!}{(n-r)!} = (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

bulunur. Yani $n-r+1$ sayısından n'ye kadar olan doğal sayıları çarpacakmışız. Bu çarpım

$$\prod_{k=n-r+1}^{n} k$$

şeklinde gösterilebileceği gibi sınırlardan 1 çıkarıp k'ye 1 ekleyerek

$$\prod_{k=n-r}^{n-1} (k+1)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\prod_{k=1}^{4}\left(k^3\cdot 2^k\right)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $3^4\cdot 2^{19}$ B) $3^3\cdot 2^{19}$ C) $3^3\cdot 2^{18}$
D) $3^4\cdot 2^{17}$ E) $3^3\cdot 2^{20}$

2.

$$\prod_{k=3}^{11}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{2}{5}$ E) 1

3.

$$\prod_{k=1}^{10}\left(k^2-k\right)$$

değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

4.

$$\prod_{i=1}^{6}\left(i^2+i\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $5!\cdot 6!$ B) $7!\cdot 8!$ C) $6!\cdot 7!$
D) $5!\cdot 7!$ E) $7!\cdot 9!$

5.

$$\prod_{k=3}^{7}3^k$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3^{25} B) 3^{24} C) 3^4 D) 3^7 E) 3^{11}

6.

$$\prod_{k=1}^{3}\prod_{m=1}^{3}(2mk)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $6^3\cdot 48^3$ B) $3\cdot 48^3$ C) $2\cdot 48^2$
D) $4\cdot 48^3$ E) 36^2

7.

$$\prod_{m=2}^{5}\log_m(m+1)$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $2+\log_2 3$ B) 15 C) $1+\log_3 2$
D) $1+\log_2 3$ E) 0

8.

$$\prod_{k=5}^{62}\left(1+\frac{1}{k}\right)=x$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\frac{63}{5}$ B) $\frac{62}{5}$ C) $\frac{63}{7}$ D) 5 E) 1

9.

$$\prod_{k=-3}^{3}3^k$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 3^6 C) 3 D) 0 E) $\frac{1}{3}$

10.

$$\sum_{k=1}^{8}\prod_{m=1}^{5}2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2^5 B) $7\cdot 2^4$ C) 2^8 D) 540 E) 10^8

1. B 2. B 3. A 4. C 5. A 6. A 7. D 8. A 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\prod_{m=1}^{5} m = \sum_{k=x}^{n+x} 6$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 0

2.

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\prod_{m=1}^{2}(k+m)\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 116 B) 110 C) 65 D) 50 E) 45

3.

$$\prod_{x=1}^{182} \sin x^{o}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $-\frac{1}{2}$

4.

$$g(x)=\prod_{k=2}^{10} 3(k-3) \text{ ve } f(x)=\sum_{k=1}^{x} 2k$$

şeklinde verilen f ve g fonksiyonları için $g(25)+f(10)$ toplamı kaça eşittir?

A) 25 B) 35 C) 100 D) 110 E) 135

5.

$$\prod_{k=4}^{27} \log_{k}(k-1)$$

çarpımı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$\prod_{m=2}^{10} m = a$$

olduğuna göre $\prod_{n=0}^{8}(n+1)$ ifadesinin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a}{10!}$ B) $\frac{a}{9!}$ C) $\frac{a}{10}$ D) $\frac{a}{9}$ E) $10a$

7.

$$\prod_{k=0}^{2}\left(2\cdot \operatorname{cis}\frac{2k\pi}{3}\right)$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) -8 B) -2 C) 0 D) 2 **E)** 8

8.

$j^2=-1$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{11}(1+j)$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) -32 B) 32 C) $32j$ **D)** $32j-32$ E) $32+32j$

9.

$$\prod_{k=8}^{83}(\cos k^{\circ}-\sin k^{\circ})$$

kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10.

n'nin r'li kombinasyonuna eşit olduğunu bildiğimiz

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

sayısının çarpım sembolleriyle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\prod_{k=n-r}^{n}\frac{k}{r}$ B) $\prod_{k=n-r}^{n}\frac{k}{r!}$ C) $\prod_{k=n!r}^{n-r} k$

D) $\prod_{k=0}^{r-1}\frac{(n-k)}{r}$ E) $\prod_{k=0}^{r-1}\frac{n-k}{k+1}$

1. C 2. B 3. B 4. D 5. A 6. C 7. E 8. D 9. C 10. E