Önsöz

Bilindiği gibi yüksek Matematik düşünceye sahip olma, doğa, mühendislik ve sosyal bilimler üzerine yapılan bütün bilimsel araştırmalarda temel teşkil etmektedir. Bu araştırmaların daha başarılı olabilmesi için, günümüz matematiğinin çok sayılı alanlarını ve uygulamalarını daha iyi anlatabilecek nitelikte çeşitli ders kitaplarının hazırlanması gerekmektedir.

Matematiğin en temel dallarından biri olan Analiz dersinin öğreniminde kullanılabilecek seviyede Türkçe çeşitli ders kitapları yazılmış ve bu konuda yabancı dillerde yayınlanmış en iyi kitapların bazıları değerli bilim adamlarımız tarafından Türkçeye kazandırılmıştır. Bütün bunlara rağmen, klasik Matematik Analiz konularını, Matematiğin çağdaş taleplerine cevap verecek şekilde aksiyomatize edilmeye dayanan yüksek seviyeli ders kitaplarına halen ihtiyaç duyulmaktadır.

Lisans seviyesinde eğitim gören öğrenciler için düzenlenmiş olan bu dört ciltlik kitabın esas amacı Analiz dersinde öğretilen konuları mümkün olduğu kadar günümüz matematiğinin ihtiyaçlarını karşılayabilecek düzeyde ifade etmek, bu dersi öğrenen ve öğretenler için ince noktaları aydınlatmakta gerekli olan teorik bilgiler sunmak ve ayrıntılı biçimde çözümlü problemler vermek, temel kavram ve sonuçları uygulayabilecek teknikleri geliştirmektir. Ayrıca, bazı özel ve ileri anlamda konular içeren bu çalışmanın Yüksek Lisans, Doktora öğrencileri ve ileri araştırma yapmak isteyenler için de faydalı olacağı inancındayım.

Tek değişkenli fonksiyonların analizine ayrılmış **birinci** ve **ikinci** ciltlerde **Analize giriş**, **Limit**, **Süreklilik**, **Türev**, **Belirsiz integraller**, **Riemann integrali**, **Has olmayan integraller**, **Sayısal seriler**, **Fonksiyon dizileri** ve **Serileri** gibi bölümler yer almaktadır. Çok değişkenli fonksiyonların analizini içeren **üçüncü** ve **dördüncü** ciltlerde **Çok değişkenli fonksiyonlar**, **Çok değişkenli fonksiyonların diferensiyel hesabı**, **Çok değişkenli vektör fonksiyonların diferensiyel hesabı**, **Çok katlı integraller**, **Parametreye bağlı integraller**, **Eğrisel ve Yüzey integralleri** gibi bölümler yer almaktadır. Kitabın son iki cildinde yer alan konuların öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için Analitik Geometri ve Lineer Cebir konularının anlaşılmiş olması düşünülmüştür.

Kitabın hem metin hem de problem (çözümleri dahil) yazımında Analiz dalında ana dilimizde ve yabancı dillerde yayınlanmış ve her cildin sonunda belirtilen kaynaklardan geniş ölçüde faydalanılmıştır.

Çalışmanın birinci ve ikinci ciltlerinin hazırlanmasında Yrd. Doç. Dr Murat ALP ve doktora öğrencim Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV, ayrıca birinci cildin hazırlanmasında Yrd. Doç. Dr İsmail EKİNCİOĞLU, hem problem çözümlerinin hem de ek problemlerin cevaplarının kontrolünde ve kitabın dizgi yapımında bana yardımda bulunmuşlardır. Yapmış olduğu çok değerli desteklerinden dolayı öğrencim Arş. Grv. Özgün GÜRMEN'e de teşekkür borcumu ifade etmek isterim.

Büyük emeklerle ortaya konan bu çalışmanın hazırlanmasında gösterilen titizliğe rağmen, bazı hataların olabileceğini şimdiden kabul ederek bu konudaki eleştiri ve uyarıları bizlere bildirecek olan öğrenci ve meslektaşlarımıza teşekkür ederim.

Kitabın siz okuyucularımıza yararlı olmasını içtenlikle dilerim.

Prof. Dr. Binali MUSAYEV
Eylül - 2002
KÜTAHYA

SEMBOL DİZİNİ

Sembol	Sayfa	Sembol anlamı
$\in$	1	Eleman
$\notin$	1	Eleman değil
$\emptyset$	2	Boş küme
$\subset$	2	Alt küme
$A = B$	2	A ve B kümeleri eşittir
$A \neq B$	2	A ve B kümeleri eşit değildir
$A \cup B$	2	A ve B kümelerinin birleşimi
$A \cap B$	2	A ve B kümelerinin kesişimi
$A \backslash B$	2	A ve B kümelerinin farkı
$A \triangle B$	2	A ve B kümelerinin simetrik farkı
$\wedge$	2	Ve anlamında kullanılır
$\vee$	2	Veya anlamında kullanılır
$\exists$	2	Varlık, var olmak
$\forall$	2	Her anlamında kullanılır
$a \in A$	2	$a,\ A$ nın elemanıdır
$a \notin A$	2	$a,\ A$ nın elemanı değildir
$\Rightarrow$	2	İse
$\Leftrightarrow$	2	Gerek ve yeter koşul
$\bigcup_{i \in I} A_i$	3	$A = \{A_i \ : \ i \in I\}$ küme ailesinin birleşimi
$\bigcap_{i \in I} A_i$	3	$A = \{A_i \ : \ i \in I\}$ küme ailesinin kesişimi
A^c	3	A nın tümleyeni
$\mathbb{E}$	3	Evrensel küme
$A \times B$	4	A ile B nin kartezyen çarpımı
R	11	Bağıntı
$a \sim b$	12	a ile b nin denk olması
$\preceq$	12	Kısmi sıralama bağıntısı
$\leq$	13	Tam sıralama bağıntısı

Sembol	Sayfa	Sembol anlamı
$f : X \to Y$ (veya $X \xrightarrow{f} Y$)	13	$f,\ X$ den Y ye bir fonksiyon (dönüşüm)
$D(f)$	13	f' nin tanım kümesi
$\mathcal{R}(f)$	13	f' nin değer (görüntü) kümesi
$f(A)$	14	A nın f altında görüntüsü
$f^{-1}(B)$	14	B nin f altında ters görüntüsü
$f \mid_A$	15	f nin A ' ya kısıtlaması
I_X	15	Özdeşlik (birim) fonksiyonu (dönüşümü)
gof	15	f ile g' nin bileşkesi
f^{-1}	16	f fonksiyonunun (dönüşümünün) tersi
$X \sim Y$	16	X ile Y nin denk (eş kuvvetli) olması
$cardA$	16	A nın gücü
$\mathbb{N}$	16	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	16	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	16	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	16	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}_{\text{ç}}$	24	Çift doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{\text{ç}}$	24	Çift tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	31	Pozitif sayılar kümesi
$\mathbb{R}_-$	31	Negatif sayılar kümesi
$\min\{x \ : \ x \in X\}$	32	$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin minimal (en küçük) elemanı
$\max\{x \ : \ x \in X\}$	32	$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin maksimal (en büyük) elemanı
$\sup X$	33	$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu)
$\inf X$	33	$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu)
(a, b)	34	$\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$ kümesi
$[a, b]$	34	$\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ kümesi

Sembol	Sayfa	Sembol anlamı
$\overline{\mathbb{R}}$	34	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesi
$\mathbb{I}$	50	İrrasyonel sayılar kümesi
$[\![x]\!]$	52	x in tam kısmı
$\mathbb{C}$	106	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}_-$	145	$\mathbb{N}_- = \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$
$m(f) = m_E(f)$	166	Sınırlı $f : e \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun E üzerinde infimumu
$M(f) = M_E(f)$	166	Sınırlı $f : e \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun E üzerinde supremumu
$\Omega(f, A)$	288	$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasındaki sıçraması
$\mathbb{Q}_+$	305	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
X_a^+	418	$\{x \in X \ : \ x < a\}$ kümesi
X_a^-	418	$\{x \in X \ : \ x > a\}$ kümesi

İçindekiler

Önsöz **i**

Semboller **iii**

1 Analize Giriş **1**
1.1 Küme ve Kümeler Üzerinde Elementer İşlemler 1
1.2 Çözümlü Problemler 4
1.3 Ek Problemler 7
1.4 Fonksiyonlar 10
1.5 Çözümlü Problemler 14
1.6 Ek Problemler 21
1.7 Reel Sayılar 23
1.8 Çözümlü Problemler 30
1.9 Ek Problemler 37
1.10 Reel Sayı Sınıfları 40
1.10.1 Doğal Sayılar 40
1.10.2 Tam Sayılar 41
1.10.3 Rasyonel Sayılar 42
1.11 Çözümlü Problemler 46
1.12 Ek Problemler 58
1.13 Reel Sayılar Kümesinin Tamlığı ile İlgili Esas Prensipler . . . 63
1.14 Çözümlü Problemler 80
1.15 Ek Problemler 86

1.16 Kompleks Sayılar 88
1.17 Çözümlü Problemler 91
1.18 Ek Problemler 97
1.19 Elementer Fonksiyonlar 98
1.20 Çözümlü Problemler 115
1.21 Ek Problemler 149

2 Limit **161**
2.1 Reel Sayı Dizileri 161
2.1.1 Yakınsaklık, Iraksaklık ve Yakınsak Dizilerin Temel Özellikleri 161
2.1.2 Sonsuz Küçük ve Sonsuz Büyük Diziler 169
2.1.3 Belirsiz İfadeler 171
2.1.4 Reel Sayı Dizilerinin Yakınsaklık Kriterleri 177
2.1.5 Reel Sayı Dizilerinin Alt ve Üst Limitleri 181
2.2 Çözümlü Problemler 187
2.3 Ek Problemler 222
2.4 Fonksiyonların Limitleri 233
2.4.1 Temel Tanımlar ve Önermeler 233
2.4.2 Sağdan ve Soldan Limitler 237
2.4.3 Limitle İlgili Önermeler 241
2.4.4 Limitin Varlığı Koşulları 247
2.4.5 Sonsuz Küçük ve Sonsuz Büyük Fonksiyonlar ve o-küçük ve O-büyük Sembolleri 252
2.4.6 Belirsiz İfadeler 261
2.4.7 Temel Elementer Fonksiyonların Limitleri 264
2.5 Çözümlü Problemler 279
2.6 Ek Problemler 339

3 Süreklilik **347**
3.1 Temel Tanımlar ve Sonuçlar 347
3.2 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri 352

3.3 Çözümlü Problemler 372
3.4 Ek Problemler 402

4 Türev **409**
4.1 Temel Tanımlar ve Sonuçlar 409
4.1.1 Çözümlü Problemler 416
4.1.2 Ek Problemler 422
4.2 Türev Alma Kuralları 423
4.2.1 Çözümlü Problemler 434
4.2.2 Ek Problemler 446
4.3 Yüksek Mertebeden Türevler ve Diferensiyeller 449
4.3.1 Çözümlü Problemler 460
4.3.2 Ek Problemler 465
4.4 Diferensiyel Hesabın Esas Teoremleri 468
4.4.1 Çözümlü Problemler 478
4.4.2 Ek Problemler 491
4.5 Taylor Formülü 493
4.5.1 Çözümlü Problemler 502
4.5.2 Ek Problemler 513
4.6 L'Hospital Kuralı 517
4.6.1 $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali 517
4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik hali 520
4.6.3 Çözümlü Problemler 523
4.6.4 Ek Problemler 529
4.7 Fonksiyonların Diferensiyel Hesabı Yöntemleri ile Araştırılması 530
4.7.1 Fonksiyonların Monotonluk Koşulları 530
4.7.2 Ekstremumların Varlığı Koşulları 532
4.7.3 Fonksiyonların Bükeylik Koşulları 538
4.7.4 Asimtotlar 542
4.8 Grafik Çizimleri 547
4.8.1 Çözümlü Problemler 551
4.8.2 Ek Problemler 560

Kaynaklar **567**

İndeks **573**

Bölüm 1

Analize Giriş

1.1 Küme ve Kümeler Üzerinde Elementer İşlemler

Matematikte kullanılan küme kavramı, bazı özelliklere sahip nesnelerin bir topluluğu veya bir sınıfı gibi düşünülebilir. Fakat bu kavramın kesin bir tanımı verilmiyor. Kümeyi teşkil eden nesnelere kümenin elemanları veya ögeleri denir. Kümeleri $A, B, C, X, Y, \ldots$ gibi büyük harfler ile, elemanları da $a, b, c, x, y, \ldots$ gibi küçük harfler ile göstereceğiz.

Eğer, a bir A kümesinin bir elemanı ise, bu durumda $a \in A$ biçiminde, a bir B kümesinin elemanı değilse, bunu da $a \notin B$ biçiminde göstereceğiz.

Bir kümenin verilmesi için, o kümenin elemanlarının teker teker belirtilmesi veya o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan bir özelliğin (veya özellikler takımının) verilmesi gerekir. Yani, bir elemanın kümeye ait olup olmadığını belirtmeye yarayan kesin bir kuralın verilmesi gerekmektedir. Buna göre, bir kümeyi gösterirken, ya o kümenin elemanları $\{\ldots\}$ arasına yazılır ya da

$$\{\ x :\ x \text{ in karakteristik özelliği }\ \}$$

sembolü kullanılır. Burada x kümenin genel elemanını gösterir, : işareti de öyle ki anlamına gelen bir sembol olarak kullanılmıştır.

Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1 *: Eğer, bir A kümesinin herbir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir denir ve $A \subset B$ sembolü ile gösterilir. Yani,*

$$A \subset B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

dir.

Her A kümesi için, $A \subset A$ ve $\emptyset \subset A$ dır. Eğer, $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise, A ve B kümeleri eşittir denir ve $A = B$ biçiminde gösterilir. Buna göre

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \ \wedge \ B \subset A)$$

dır. Eğer, $B \subset A$ ve $B \neq A$ ise, B ye A nın öz alt kümesi denir.

Tanım 1.1.2 *: A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerinin birleşimi, kesişimi (veya arakesiti), farkı ve simetrik farkı sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\};\\ A \cap B &= \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\};\\ A \setminus B &= \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\};\\ A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

$\{A_i\}_{i \in I}$ bir kümeler ailesi ise bu ailenin birleşimi ve kesişimi sırasıyla

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{\ x : \exists \ \ i \in I,\ x \in A_i\},\\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{\ x : \forall \ \ i \in I,\ x \in A_i\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Bundan sonra gözönüne alacağımız kümeleri, bilindiği kabul edilen bir $\mathbb{E}$ evrensel kümesinin birer alt kümeleri olarak düşüneceğiz.

$A \subset \mathbb{E}$ kümesi verilsin. $\mathbb{E} \setminus A$ kümesine A kümesinin tümleyeni denir ve A^c ile gösterilir. Buna göre

$$A^c = \{\ x \in \mathbb{E} :\ x \notin A\}$$

dir.

$A,\ B$ ve C kümeleri $\mathbb{E}$ nin herhangi alt kümeleri olsun. Bu durumda, birleşim, kesişim ve tümleyenin aşağıdaki özellikleri vardır:

(a) $A \cup B \subset \mathbb{E},\ \ A \cap B \subset \mathbb{E}$ (Kapalılık özelliği);

(b) $A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A$ (Değişme özelliği);

(c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ \ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Dağılma özelliği);

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği);

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C$ (Kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği);

(f) $A \cup A = A \cap A = A$;

(g) $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$;

(h) $A \cup \emptyset = A,\ \ A \cap E = A,\ \ A \cap \emptyset = \emptyset,\ \ A \cup E = E$;

(i) $A \cup A^c = \mathbb{E},\ \ A \cap A^c = \emptyset$;

(j) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\ ,\ \ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (De Morgan Kuralı).

Bir $\sigma = \{\ A, B, C, \ldots\}$ kümesi üzerinde yukarıdaki özellikleri sağlayan birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri tanımlanmış ise bu kümeye Boole Cebiri denir ve $(\sigma, \cup, \cap)$ ile gösterilir. Böylece σ, $\mathbb{E}$ kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan bir aile ise, $(\sigma, \cup, \cap)$ bir Boole Cebiridir.

Her $i \in I$ için $A_i \subset \mathbb{E}$ olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi için De Morgan kuralı ,

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,\ \ (\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

biçimindedir.

Tanım 1.1.3 *: A ve B kümeleri için $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine ayrık kümeler denir.*

Tanım 1.1.4 *: A bir küme ve $\{A_i\}_{i \in I}$, A kümesinin boş olmayan alt kümelerinden oluşan bir aile olsun.*

(a) $\{A_i\}_{i \in I}$ *ailesi ikişer ikişer ayrık;*

(b) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *ise*

$\{A_i\}_{i \in I}$ *ailesine A kümesinin bir ayrışımı denir.*

Tanım 1.1.5 *: A ve B iki küme olsun.*

$$A \times B = \{\ (a, b) :\ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ile B'nin kartezyen çarpımı denir.

(a, b) ve (c, d) sıralı ikililerin eşitliği

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \text{ ve } \ b = d$$

biçiminde tanımlandığından, genellikle $(a, b) \neq (b, a)$ ve dolayısıyla, $A \times B \neq B \times A$ dır. Eşitlik ancak $A = B$ olması halinde veya bu kümelerden en az birinin boş küme olması halinde mümkündür.

1.2 Çözümlü Problemler

(1) 1.1'deki (c), (e) ve (i) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \cup (B \cap C) = \{\ x \in \mathbb{E} :\ x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\}$

$$\begin{aligned}
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\
&= \{\ x \in \mathbb{E} :\ (x \in A \cup B) \text{ ve } (x \in (A \cup C)\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

(d) özelliğinin doğruluğu benzer şekilde gösterilir. Şimdi (i)'deki birinci eşitliğin doğruluğunu gösterelim. İkinci eşitlik benzer olarak gösterilir.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \ \text{ ve } \ x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \ \text{ ve } \ x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \\ &\Rightarrow (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c. \\ x \in A^c \cap B^c &\Rightarrow x \in A^c \ \text{ ve } \ x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \ \text{ ve } \ x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c. \end{aligned}$$

Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(2) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 1.1' deki (c) ve (e) özelliklerinden

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B)$$

dir. Şimdi $A \cap (A \cup B) = A$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \cup B) &\Rightarrow x \in A \ \text{ ve } \ x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \\ &\Rightarrow A \cap (A \cup B) \subset A, \\ x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B) \\ &\Rightarrow A \subset A \cap (A \cup B). \end{aligned}$$

Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(3) **(a)** $(A^c)^c = A$; **(b)** $\mathbb{E}^c = \emptyset$ **(c)** $\emptyset^c = \mathbb{E}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: **(a)** $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A^c)^c \subset A$,

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c \Rightarrow A \subset (A^c)^c$$

dir. Her iki kapsamadan **(a)** eşitliği bulunur.

(b) $\forall x \in \mathbb{E}$ için $x \notin \mathbb{E}^c$ olduğundan $\mathbb{E}^c$ boş bir kümedir.

(c) $x \in \mathbb{E} \Rightarrow x \notin \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset^c \Rightarrow \mathbb{E} \subset \emptyset^c$. Öte yandan, $\emptyset^c \subset \mathbb{E}$ olduğundan sonuç elde edilir. $\diamond$

(4) $(A \setminus B) \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in (A \setminus B)$ olsun. Bu durumda, $x \in A$ ve $x \notin B$ dir. Eğer, $x \notin C$ ise $x \in (A \setminus C)$ dir. Dolayısıyla, $x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olur. Eğer, $x \in C$ ise $x \notin B$ olduğu durumlarda $x \in (C \setminus B) \Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ olur. Böylece, hem $x \notin C$, hem de $x \in C$ olduğunda $x \in (A \setminus B) \Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ dir. Buradan sonuç elde edilir. $\diamond$

(5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ve $D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olsun. $x \in C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (B \setminus A) \Rightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \in B$ ve $x \notin A) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = D \Rightarrow C \subset D$. Şimdi $D \subset C$ olduğunu gösterelim. $x \in D \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $\{(x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \notin A$ ve $x \in B)\} \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = C$. Her iki kapsamadan $D = C$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(6) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $D = (A \setminus B) \cap C$ ve $G = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ olsun. $x \in D \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ ve $x \in C \Rightarrow x \in A$ veya $x \notin B$ ve $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C)$ ve $x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) = G \Rightarrow D \subset G$. $x \in G \Rightarrow x \in (A \cap C)$ ve $x \notin (B \cap C) \Rightarrow (x \in A$ ve $x \in C)$ ve $\{(x \in B$ ve $x \notin C)$ veya $(x \notin B$ ve $x \in C)\} \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ ve $x \in C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap C = D \Rightarrow G \subset D$. Her iki kapsamadan $D = E$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(7) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $D = A \cup (B \setminus C)$ ve $G = (A \cup B) \setminus C$ olsun. $x \in G \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $x \notin C \Rightarrow x \in A$ veya $x \in B \setminus C \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C) = D \Rightarrow D \supset G$. $\diamond$

(8) $A \cap B = \emptyset$ ise, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ ve $D = A \cup B$ olsun. $x \in C \Rightarrow (x \in (A \cup B))$ ve $(x \in (A^c \cup B^c)) \Rightarrow x \in D \Rightarrow C \subset D$. $x \in D \Rightarrow \{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } (x \notin A \text{ ve } x \in B)\} \Rightarrow \{(x \in A \text{ ve } x \in B^c) \text{ veya } (x \in A^c \text{ ve } x \in B)\} \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \in (A^c \cup B^c) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = C \Rightarrow D \subset C$. Her iki kapsamadan $C = D$ eşitliği bulunur. $\diamond$

(9) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } (x \notin A \text{ ve } x \in B) \Leftrightarrow \{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } x \in B\}$ ve $\{(x \in A \text{ ve } x \notin B) \text{ veya } x \notin A\} \Leftrightarrow (x \in A \text{ veya } x \in B)$ ve $(x \notin A \text{ veya } x \notin B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(10) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(a, b) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow a \in A$ ve $b \in B \setminus C \Leftrightarrow a \in A$ ve $(b \in B \text{ ve } b \notin C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ ve } b \in B)$ ve $(a \in A \text{ ve } b \notin C) \Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$ ve $(a, b) \notin A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(11) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow x \in A^c$ ve $x \notin B^c \Rightarrow (x \in E \text{ ve } x \notin A)$ ve $x \in B \Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow A^c \setminus B^c \subset B \setminus A$. $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \notin B^c$ ve $x \in A^c \Rightarrow x \in A^c \setminus B^c \Rightarrow B \setminus A \subset A^c \setminus B^c$. Her iki kapsamadan istenen eşitlik bulunur. $\diamond$

1.3 Ek Problemler

(12) A, B ve C kümeleri $\mathbb{E}$ nin herhangi üç alt kümesi olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \setminus A = \emptyset$;

(b) $A \setminus \emptyset = A$;

(c) $A \triangle \emptyset = A$;

(d) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

(e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

(g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(i) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$;

(j) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

(k) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

(l) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

(m) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(n) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(o) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

(p) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$;

(q) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$;

(r) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;

(s) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(t) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(u) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

(v) $A \setminus B = A \cap B^c$;

(w) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$;

(x) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

(13) A, B, C ve D kümeleri $\mathbb{E}$ nin herhangi dört alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;

(b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$;

(c) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;

(d) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$;

(e) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$;

(f) $A \cup B = J \Leftrightarrow A^c \subset B = J \Leftrightarrow B^c \subset A$;

(g) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^c$, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$;

(h) $(A \subset B^c) \Leftrightarrow (B \subset A^c)$;

(i) $A \triangle B = J \Leftrightarrow A = B^c$;

(j) $A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c$;

(k) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$;

(l) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$;

(m) $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$;

(n) $A \triangle B \subset (A \triangle D) \cup (B \triangle D)$;

(o) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(14) A_1, A_2, B_1 ve B_2 $\mathbb{E}$ nin herhangi dört alt kümesi olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$;

(b) $(A_1^c \cup A_2^c) \triangle (B_1^c \cup B_2^c) \subset (A_1^c \triangle B_1^c) \cup (A_2^c \triangle B_2^c)$;

(c) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

(d) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2)$;

(e) $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \setminus (A_2 \triangle B_2)$.

1.4 Fonksiyonlar

Tanım 1.4.1 : *X ve Y boş olmayan herhangi iki küme olsun. $X \times Y$'nin boş olmayan her alt kümesine X den Y ye bir ikili bağıntı denir. $X \times X = X^2$ nin boş olmayan her alt kümesine X de (veya X üzerinde) ikili bağıntı denir.*

Tanım 1.4.2 : *X den Y ye bir R bağıntısı verildiğinde $\{(b,a) : (a,b) \in \mathrm{R}\}$ kümesi Y den X e bir bağıntıdır ve bu bağıntıya R nin tersi adı verilir ve R^{-1} ile gösterilir.*

Tanım 1.4.3 : *R, X de bir ikili bağıntı, yani $\mathrm{R} \subset X \times X$ olsun.*

(a) $\forall a \in X$ için, $a\mathrm{R}a$ ise R ye yansıyan bir bağıntı,

(b) $a, b \in X$ için, $a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$ ise R ye simetrik bir bağıntı,

(c) $a, b, c \in X$ için, $(a\mathrm{R}b \ \wedge \ b\mathrm{R}c) \Rightarrow a\mathrm{R}c$ ise R ye geçişken bir bağıntı,

(d) $a, b \in X$ için, $(a\mathrm{R}b \ \wedge \ b\mathrm{R}a) \Rightarrow a = b$ ise R ye ters simetrik bir bağıntı denir.

Tanım 1.4.4 : *Yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntıya denklik bağıntısı denir. R bir denklik bağıntısı olduğunda $a\mathrm{R}b$ yerine $a \sim b$ alınacaktır.*

Örneğin, eğer X, düzlem üzerindeki tüm doğrulardan oluşan bir küme ise, $a\mathrm{R}b = \{(a,b) \in X : \ a \parallel b \}$ (paralellik) bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.4.5 : *Yansıyan, ters simetrik ve geçişken bir bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir. R bir kısmi sıralama bağıntısı olduğunda $a\mathrm{R}b$ yerine $a \preceq b$ alınacak ve "a önce gelir b" diye okunacaktır.*

Örneğin, eğer, $P(X)$, X in tüm alt kümelerinden oluşan bir küme ise, $a\mathrm{R}b = \{(a,b) \in X^2 : \ a \subset b \}$ bağıntısı X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Sıralama bağıntısında $\forall a, b \in X$ için $a\mathrm{R}b$ veya $b\mathrm{R}a$ olması gerekmez.

Tanım 1.4.6 : R, X *de bir ikili sıralama bağıntısı olsun. Eğer,* $\forall a, b \in X$ *için* $a\mathrm{R}b$ *veya* $b\mathrm{R}a$ *ise bu bağıntıya bir tam sıralama bağıntısı denir.*

Üzerinde tam sıralama bağıntısı tanımlı X kümesine tam (lineer) sıralanmış küme denir. R bir tam sıralama bağıntısı olduğunda $a\mathrm{R}b$ yerine $a \leq b$ yazacağız ve "a küçük eşit b" diye okuyacağız.

Örneğin, ileride tanımlanacak olan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, üzerinde tam sıralama bağıntısıyla tam (lineer) sıralanmış bir kümedir.

Boş olmayan X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı R olsun. $a \in X$ için, $\bar{a} = \{x \in X : \ x\mathrm{R}a \ \}$ kümesine a nın denklik sınıfı denir. Denklik sınıfları X in bir ayrışımını belirtir. Tersine, X in bir ayrışımı verildiğinde, bu ayrışım kümelerini denklik sınıfları kabul eden bir denklik bağıntısı vardır.

Şimdi matematiğin temel kavramlarından biri olan ve fonksiyon (veya dönüşüm) adı verilen özel bağıntıları ele alalım ve fonksiyonların sık sık kullanılan özelliklerinin kısa bir özetini verelim.

Tanım 1.4.7 : X *ve* Y *boş olmayan iki küme ve* $f = \{(x, y) : \ x \in X \wedge y \in Y\} \subset X \times Y$ *bir bağıntı olsun. Eğer,*

(a) $x \in X$ *için* $\exists y \in Y$ *öyleki* $(x, y) \in f$,

(b) $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

koşulları sağlanıyorsa f *ye* X *den* Y *ye bir fonksiyon (veya dönüşüm) denir ve* $(f, X \times Y)$ *veya* $f : \ X \to Y, \ \ X \xrightarrow{f} Y$ *sembollerinden biri ile gösterilir.*

X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi , Y kümesine de f fonsiyonunun görüntü kümesi denir. Daha sonra f fonksiyonunun tanım kümesini $\mathcal{D}(f)$, f nin değer kümesi denilen $\{ \ f(x) \in Y : \ x \in \mathcal{D}(f) \ \}$ kümesini de $\mathcal{R}(f)$ ile göstereceğiz. Buna göre, $f : X \to Y$ yazılışında $\mathcal{D}(f) \neq X$ veya $\mathcal{R}(f) \neq Y$ (veya her ikisi) olabilir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanına karşılık gelen (tek türlü belirli) $y \in \mathcal{R}(f)$ elemanı $y = f(x)$ ile gösterilir ve bu elemana x in f altındaki görüntüsü denir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde:

(1) $A \subset \mathcal{D}(f)$ olmak üzere

$$f(A) = \{ \ y \in \mathcal{R}(f) : \ x \in A \text{ ve } y = f(x) \ \}$$

kümesine A nın f altında görüntüsü veya f nin A üzerindeki değer kümesi,

(2) $B \subset \mathcal{R}(f)$ olmak üzere

$$f^{-1}(B) = \{ \ x \in D(f) : \ f(x) \in B \ \}$$

kümesine de B nin f altındaki ters görüntüsü denir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için

$$G = \{ \ (x, y) \in X \times Y : \ x \in X \ \wedge \ y = f(x)\}$$

kümesine f nin grafiği denir. Bu tanıma göre fonksiyon ve onun grafiği aynı şeydir.

Tanım 1.4.8 : $f, g : X \to Y$ *fonksiyonları verilsin. Eğer,* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ *ve* $\forall x \in \mathcal{D}$ *için* $f(x) = g(x)$ *ise* f *ile* g *fonksiyonları eşittir denir ve* $f = g$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.4.9 : X *ve* Y *boş olmayan iki küme olsun.*

(a) Bir $b \in Y$ *ve* $\forall x \in X$ *için* $f(x) = b$ *ise,* f *fonksiyonuna* X *den* Y *ye* b *değerli sabit bir fonksiyon denir.*

(b) $X = Y$ *ve* $\forall x \in X$ *için* $f(x) = x$ *ise* f *fonksiyonuna özdeş (veya birim) fonksiyon denir ve* I_X *ile gösterilir.*

Buna göre $I_X = \{ \ (x, y) \in X^2 : \ y = x\}$ *olur.*

Tanım 1.4.10 : $f : X \to Y$ *bir fonksiyon ve* $A \subset X$ *olsun. Her* $x \in A$ *için* $g(x) = f(x)$ *ile tanımlı* $g : A \to Y$ *fonksiyonuna* f *nin* A *ya kısıtlaması denir,* $f|_A$ *ile gösterilir. Bu durumda,* f *ye de* g *nin* X *üzerine bir genişlemesi denir.*

Tanım 1.4.11 : *$f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer,*

(a) $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ elemanı varsa (veya $f(X) = Y$ ise), f fonksiyonuna örten (veya surjektif) fonksiyon,

(b) $x_1,\ x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (veya $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ise, f fonksiyonuna birebir $(1:1)$ (veya injektif) fonksiyon denir.

Bazı kaynaklarda birebir örten fonksiyona bijektif fonksiyon da denir.

Tanım 1.4.12 : *$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları verilsin. Her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ile tanımlı $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir.*

Genellikle $f \circ g \neq g \circ f$ dir. Hatta $f \circ g$ $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu tanımlı olduğu durumunda $g \circ f$ $(f \circ g)$ fonksiyonu tanımlı olmayabilir. Her ikisi de tanımlı olsa bile genelde $f \circ g \neq g \circ f$ dir. Örneğin, $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2^x$ fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{2x}$ ve $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$ olduğuna göre $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

Tanım 1.4.13 : *$f : X \to Y$ fonksiyonu için, $f \circ \tilde{f} = I_Y$ ve $\tilde{f} \circ f = I_X$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : Y \to X$ fonksiyonu varsa, $\tilde{f}$ fonksiyonuna f nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.*

Teorem 1.4.14 : *$f : X \to Y$ fonksiyonunun tersinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun birebir örten (bijektif)olmasıdır.*

Tanım 1.4.15 : *X ve Y kümeleri arasında birebir örten bir fonksiyon varsa, X ile Y kümelerine denk (veya eş güçlü) kümeler denir ve $X \sim Y$ ile gösterilir.*

X den Y ye $X \sim Y$ şeklinde tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır. $A \subset \mathbb{E}$ için

$$\tilde{A} = \{B \in \mathbb{E} :\ A \sim B\}$$

kümesi A nın bir denklik sınıfı olmak üzere $\sim$ bağıntısı $\mathbb{E}$ üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. $\tilde{A}$ sınıfına A nın gücü (veya kardinal sayısı) denir ve $cardA$ ile gösterilecektir. Eğer, $A \sim B$ bağıntısı sağlanıyorsa $cardA = cardB$ yazacağız.

Eğer, A kümesi B kümesinin herhangi bir $B_1 \subset B$ alt kümesine denk ise bunu $cardA \leq cardB$ ile göstereceğiz.

İleride tanımlanacak (Bkz. §1.10) doğal, tam, rasyonel ve reel sayılar kümeleri sırasıyla $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.16 : *$\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. $\mathbb{N}_n$ ile denk olan bir kümeye sonlu (n elemanlı) bir küme ve $\mathbb{N}$ ile denk olan bir kümeye de sayılabilir bir küme denir. Bir öz alt kümesi ile denk olan bir kümeye sonsuz bir küme denir.*

1.5 Çözümlü Problemler

(1) Düzlemde doğrular arasında tanımlanan $\perp$ "diklik bağıntısı" nın bir denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Düzlemde iki a ve b doğruları arasında

$$a \perp b = \{(a, b) :\ \text{a ile b diktir}\}$$

bıçiminde tanımlı bağıntı yansiyan değildir. Çünkü herhangi bir a doğrusu için $a \perp a$ özelliği doğru değildir. O halde bu bağıntı bir denklik bağıntısı değildir. $\diamond$

(2) $x,\ y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sim$ bağıntısı $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ olarak tanımlansın. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Denklik bağıntısı özelliklerinin sağlandığını gösterelim.
(a) Her $x \in \mathbb{R}$ için $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x \sim x$ dir.
(b) $x,\ y \in \mathbb{R}$ için, $x \sim y$ yani $x - y \in \mathbb{Z}$ olsun. Her tam sayının toplamsal tersi de bir tam sayı olduğundan, $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ ve

dolayısıyla $y \sim x$ dir.
(c) $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ için, $x \sim y$ ve $y \sim z$ yani $x - y \in \mathbb{Z}$ ve $y - z \in \mathbb{Z}$ olsun. İki tam sayının toplamı da tamsayı olduğundan, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $x \sim z$ olur. $\diamond$

(3) $X = \{(x, y) :\ x, y \in \mathbb{N}\ \}$ olsun. $(x, y),\ (x_1, y_1) \in X$ üzerinde $\sim$ bağıntısı , "$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow xy_1 = yx_1$" olarak tanımlansın. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) Her $(x, y) \in X$ için $xy = yx$ olduğundan $(x, y) \sim (y, x)$ dir.
(b) $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X$ için $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ yani $x_1y_2 = y_1x_2$ olsun. Bu durumda, herhangi $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları için $m.n = n.m$ olduğundan $x_2y_1 = y_1x_2 = x_1y_2 = y_2x_1$ yani, $x_2y_1 = y_2x_1$ dir. Dolayısıyla, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ olur.
(c) $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3) \in X$ için $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ve $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ yani $x_1y_2 = y_1x_2$ ve $x_2y_3 = y_2x_3$ olsun. Bu durumda,

$$x_1y_3 = x_1x_2y_3/x_2 = x_1y_2x_3/x_2 = y_1x_2x_3/x_2 = y_1x_3$$

ve dolayısıyla $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ olur. $\diamond$

(4) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ iki fonksiyon ve $f \circ g = I_Y$ olsun.

(a) f nin örten, (b) g nin birebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) $\forall y \in Y$ için, $g(y) = x$ alırsak, $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_Y = y$ olur. Böylece, $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x = g(y) \in X$ elemanı vardır. O halde f örtendir.
(b) $y_1,\ y_2 \in Y$ için

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(y_2) &\Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \\ &\Rightarrow (f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2) \\ &\Rightarrow y_1 = y_2 \end{aligned}$$

olduğundan, g birebirdir. $\diamond$

(5) $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümelerinin denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \times Y \to Y \times X$ fonksiyonu, $f(x, y) = (y, x)$ biçiminde tanımlansın. f nin birebir ve örten olduğunu gösterelim.

$\forall (y, x) \in Y \times X$ çifti için, $(x, y) \in X \times Y$ ve $f(x, y) = (y, x)$ olduğundan, f örtendir.

$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X \times Y$ için,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) &\Rightarrow (y_1, x_1) = (y_2, x_2) \\ &\Rightarrow y_1 = y_2 \text{ ve } x_1 = x_2 \\ &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \end{aligned}$$

olduğundan f birebirdir. O halde Tanım 1.4.15 gereğince $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümeleri denktir. $\diamond$

(6) $f : X \to Y$ birebir örten bir fonksiyon ise, $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu da birebir örtendir. Gösteriniz.

Çözüm: Birebir ve örtenlik özelliklerinin sağlandığını gösterelim. Y kümesinin herhangi iki farklı y_1 ve y_2 elamanı verilsin. Ayrıca, $f^{-1}(y_1) = x_1,\ f^{-1}(y_2) = x_2$ olarak alalım. Eğer, $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ ise $x_1 = x_2$ olur ve f birebir olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ elde edilir. Halbuki, f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre bu $y_1 = y_2$ olması demektir. Böylece, $y_1, y_2 \in Y$ için

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$$

olur. Dolayısıyla, $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu birebirdir.

Herhangi bir $x \in X$ elemanı verilsin. Bu durumda, $f(x) = y$ olacak şekilde $y \in Y$ elemanı vardır. f^{-1} fonksiyonunun tanımına göre $f^{-1}(y) = x$ ve $f^{-1}(Y) = X$ olur. Buna göre $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu örtendir. $\diamond$

(7) Örten, birebir ve birebir örten olmayan fonksiyonlar için örnek veriniz.

Çözüm:

- $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümleleri ve $x \in X$ için $f : x \to 2x$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon birebir olup örten bir fonksiyon değildir. Çünkü $f^{-1}(10) = \emptyset$ dir.
- $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $Y = \{2, 4, 6\}$ kümeleri ve $1 \to 2;\ 2 \to 4;\ 3 \to 6;\ 4 \to 4$ şeklinde tanımlı f fonsiyonu verilsin. Bu fonksiyon örten olup birebir değidir. Çünkü, $2 \neq 4$ ve $f(2) = f(4)$ dir.
- $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ kümleleri ve $1 \to 4;\ 2 \to 8;\ 3 \to 8;\ 4 \to 8$ şeklinde tanımlanan $f : X \to Y$ fonksiyonu hem birebir hem de örten bir fonksiyon değildir. $\diamond$

(8) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları birebir ve örten olduğunda $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonunun da birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $h(x) = (g \circ f)(x),\ x \in X$ olsun.
(a) f ve g birebir ve örten olduğundan $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

dir. Buradan $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ olur. Yani, $h(x_1) \neq h(x_2)$ dir. Dolayısıyla, $h : X \to Z$ fonksiyonu birebir fonksiyondur.
(b) $z \in Z$ olsun. $g : X \to Z$ fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olduğundan $g^{-1}(z) = y$ olacak şekilde tek bir $y \in Y$ elemanı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu da birebir ve örten olduğundan $f^{-1}(y) = x$ olacak şekilde tek bir $x \in X$ elemanı vardır. $f(x) = y,\ g(y) = z$ olduğundan

$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x)$$

dir. Yani, $h^{-1}(z) = x$ olur. Buradan, $h : X \to Z$ örten fonksiyondur. Böylece, $h : X \to Z$ birebir ve örten bir fonsiyon olur. $\diamond$

(9) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile $F,\ X$ in iki alt kümesi olsun.

$$(a)\quad E \subset F \Rightarrow f(E) \subset f(F); \qquad (b)\quad f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$$
$$(c)\quad f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$$

dir. Gösteriniz. Ayrıca, (c) şıkkında eşitliğin doğru olmadığını sağlayan bir örnek veriniz.

Çözüm: (a) $E \subset F$ olsun. $\forall y \in f(E) = \{\ f(x) :\ x \in E\ \}$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ bulunur. Fakat, $E \subset F$ olduğundan $x \in F$ ve $y = f(x) \in f(F)$ olur. O halde $f(E) \subset f(F)$ dir.
(b) $E \subset (E \cup F)$ ve $F \subset (E \cup F)$ olduğundan (a) şıkkına göre, $f(E) \subset f(E \cup F)$ ve $f(F) \subset f(E \cup F)$ dir. Dolayısıyla,

$$(f(E) \cup f(E)) \subset f(E \cup F)$$

elde edilir. Tersine,

$$\begin{aligned} f(x) \in f(E \cup F) &\Rightarrow x \in (E \cup F) \Rightarrow x \in E \text{ veya } x \in F \\ &\Rightarrow f(x) \in f(E) \text{ veya } f(x) \in f(F) \\ &\Rightarrow f(x) \in (f(E) \cup f(E)), \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$f(E \cup F) \subset (f(E) \cup f(E))$$

elde edilir. Bu iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(c) $E \cap F \subset E$ ve $E \cap F \subset F$ olduğundan (a) şıkkına göre $f(E \cap F) \subset f(E)$ ve $f(E \cap F) \subset f(F)$ olur. Buradan,

$$f(E \cap F) \subset (f(E) \cap f(E))$$

elde edilir.

Eşitliğin doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim: $X = \{3, 7, 11\},\ Y = \{0, 1, 2\}$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonu $3 \to 1;\ 7 \to 1;\ 11 \to 2$ şeklinde tanımlansın. X in $E = \{3, 11\}$ ve $F = \{7, 11\}$ alt cümleleri için $E \cap F = \{11\},\ f(E \cap F) = \{2\}$ ve $f(E) = \{1, 2\} = f(F),\ f(E) \cap f(F) = \{1, 2\}$ dir. $\diamond$

(10) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, Y nin alt kümeleri olsun. Bu durumda, aşaıgıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $E \subset F \Rightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$; (b) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$;
(c) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$; (d) $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$.

Çözüm: (a) $E \subset F$ olsun. Her $x \in f^{-1}(E)$ için, $f(x) \in E (E \subset F)$ olduğundan, $x \in f^{-1}(F)$ dir. Yani $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ olur.
(b) $(E \cap F) \subset E$ ve $(E \cap F) \subset F$ olduğundan (a) şıkkına göre, $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(E)$ ve $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(F)$ olur. Dolayısıyla, $f^{-1}(E \cap F) \subset f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$ bulunur. Tersine, her $x \in (f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F))$ için $x \in f^{-1}(E)$ ve $x \in f^{-1}(F)$ olduğundan, $f(x) \in E$ ve $f(x) \in F$ olur. Yani $f(x) \in E \cap F$ olacağından, $x \in f^{-1}(E \cap F)$ bulunur. O halde, $(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \cap F)$ elde edilir. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(c) $E \subset (E \cup F)$ ve $F \subset (E \cup F)$ olduğundan, (a) şıkkına göre, $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(E \cup F)$ ve $f^{-1}(F) \subset f^{-1}(E \cup F)$ olur. Buradan, $(f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \cup F)$ elde edilir. Tersine, her $x \in f^{-1}(E \cup F)$ için $f(x) \in (E \cup F) \Rightarrow f(x) \in E$ veya $f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(E)$ veya $x \in f^{-1}(F) \Rightarrow x \in (f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F))$ olur. Buradan, $f^{-1}(E \cup F) \subset (f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F))$ bulunur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir.
(d) $x \in f^{-1}(E \setminus F)$ olsun. Bu durumda, $f(x) \in (E \setminus F) \Rightarrow f(x) \in E$ ve $f(x) \notin F \Rightarrow x \in (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ olur. Böylece, $f^{-1}(E \setminus F) \subset (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F))$ elde edilir. Tersine, $x \in (f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F))$ olsun. Bu durumda, $x \in f^{-1}(E)$ ve $x \notin f^{-1}(F) \Rightarrow f(x) \in E$ ve $f(x) \notin F \Rightarrow f(x) \in (E \setminus F) \Rightarrow x \in f^{-1}(E \setminus F)$ olur. Böylece, $(f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(E \setminus F)$ bulunur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(11) $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon, E, X in herhangi bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $f^{-1}(f(E)) = E$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \to Y$ örten olduğundan her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ elemanı vardır. Buradan, $\forall y \in Y$ için $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ dir. Böylece, her $E \subset X$ için $f^{-1}(f(E)) \neq \emptyset$ elde edilir. $y \in f^{-1}(f(E)) \Rightarrow f(y) \in f(E) \Rightarrow y \in E$ olur. Buradan, $f^{-1}(f(E)) \subset E$ elde edilir. Tersine, $x \in E$ olsun. Bu durumda, f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $y \in f(E)$ elemanı vardır. $f(x) \in f(E)$ olduğundan $x \in f^{-1}(f(E))$ olur. Dolayısıyla, $E \subset f^{-1}(f(E))$ elde edilir. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir. $\diamond$

(12) Çift doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}_{\text{Ç}}$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \to 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\text{Ç}}$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_{\text{Ç}}$ olur. Böylece, $\mathbb{N}_{\text{Ç}}$ kümesi sayılabilirdir. $\diamond$

(13) Tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$n \to \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{n çift ise,} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{n tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ olur. Buradan, $\mathbb{Z}$ sayılabilirdir. $\diamond$

(14) Çift tam sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$n \to \begin{cases} n, & \text{n çift ise,} \\ -n+1, & \text{n tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\text{Ç}}$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}_{\text{Ç}}$ olur. Buradan, $\mathbb{Z}_{\text{Ç}}$ sayılabilirdir. $\diamond$

(15) 0 ve 1 dahil bu iki sayı arasında kalan $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eşdeğer kesirleri birden fazla tekrarlamamak koşuluyla, önce paydası 2 sonra 3 v.s. şeklinde bütün kesirleri sırayla yazalım. Bu durumda,

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \dots \\ 0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{2}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{5}{6}, \dots \end{array}$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ fonksiyonu birebir örten olduğundan, $\mathbb{N} \sim ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ olur. Böylece, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ kümesi sayılabilirdir. $\diamond$

1.6 Ek Problemler

(16) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve E ile F, X in iki alt kümesi olsun. $f(E) \setminus f(F) \subset f(E \setminus F)$ olduğunu, fakat eşitliğin doğru olmadığını bir örnek ile gösteriniz.

(17) $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $E \subset X$ ve $F \subset Y$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $E \subset f^{-1}(f(E))$;

(b) $f(f^{-1}(F)) = F$;

(c) $f(E) \cap F = f(E \cap f^{-1}(F))$;

(d) $f(E) \cap F = \emptyset \Leftrightarrow E \cap f^{-1}(F) = \emptyset$;

(e) $f(E) \subset F \Leftrightarrow E \subset f^{-1}(F)$.

(18) $f : X \to Y$ bir fonksiyon, E_1, $E_2 \subset X$ ve F_1, $F_2 \subset Y$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f(E_1) \setminus f(E_2) \subset f(E_1 \setminus E_2)$;

(b) $f^{-1}(F_1 \setminus F_2) \subset f^{-1}(F_1) \setminus f^{-1}(F_2)$;

(19) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $F \subset Y$ olsun. $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ olduğunu gösteriniz.

(20) $f : X \to Y$ birebir olması için gerek ve yeter koşul her $F \subset Y$ çin $f(f^{-1}(F)) = F$ olmasıdır. Gösteriniz.

(21) $f(X \setminus E) \subset Y \setminus f(E)$ ve $f(X \setminus E) \supset Y \setminus f(E)$ önermelerini sağlayacak $f : X \to Y$ ve $E \subset X$ için örnekler veriniz.

(22) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları birebir ise, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonun da birebir olduğunu gösteriniz.

(23) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları örten ise, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonun da örten olduğunu gösteriniz.

(24) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonları verilsin.

(a) $g \circ f = I_X$ ise f nin birebir olduğunu;

(b) $f \circ g = I_Y$ ise f nin örten olduğunu;

(c) $g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ ise f nin birebir örten olduğunu gösteriniz.

(25) Tüm pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(26) X ve Y kümeleri sayılabilir ise, $X \cup Y$'nin de sayılabilir bir küme olduğunu gösteriniz.

(27) X ve Y kümeleri sayılabilir ise $X \times Y$ kümesinin de sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(28) Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ nin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(29) $[0,1]$ aralığındaki reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu gösteriniz.

(30) Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ nin ve irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nun sayılamaz olduğunu gösteriniz.

1.7 Reel Sayılar

Tanım 1.7.1 *: Aşağıdaki dört takım aksiyomu gerçekleyen $\mathbb{R}$ kümesine reel (gerçel) sayılar kümesi, elemanlarına da reel (gerçel) sayılar denir.*

(I) **Toplama Aksiyomları**
Her $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $(x,y) \to x+y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i_+) $(a+b)+c = a+(b+c)$;

(ii_+) $a+b = b+a$;

(iii_+) $a+0 = 0+a = a$ olacak şekilde bir $0 \in \mathbb{R}$ elemanı vardır (0 a toplamaya göre sıfır veya etkisiz eleman denir).

(iv_+) $a+(-a) = (-a)+a = 0$ olacak şekilde bir $-a \in \mathbb{R}$ elemanı vardır ($-a$ ya a nın toplamaya göre tersi denir).

Üzerinde i_+, ii_+, iii_+ ve iv_+ özelliklerini sağlayan $(X,+)$ ikilisine bir değişmeli toplamsal grup (veya Abel grubu) denir. O halde, $(\mathbb{R},+)$ bir değişmeli toplamsal gruptur.

(II) **Çarpma Aksiyomları**
Her $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $(x,y) \to x.y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $a,b,c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i.) $(a.b).c = a.(b.c)$;

(ii.) $a.b = b.a$;

(iii.) $a.1 = 1.a = a$ olacak şekilde bir $1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır (1 e çarpmaya göre birim veya etkisiz eleman denir).

(iv.) $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ elemanı vardır (a^{-1} elemanına a nın çarpmaya göre tersi denir).

Üzerinde i., ii., iii. ve iv. özelliklerini sağlayan $(X,.)$ ikilisine bir değişmeli çarpımsal grup denir. O halde $(\mathbb{R},.)$ bir değişmeli çarpımsal gruptur.

(I,II) **Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Soldan ve Sağdan Dağılma Özellikleri**

Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $a.(b+c) = a.b+a.c$, $\quad (a+b).c = a.c+b.c$ dir.

Üzerinde (I),(II) ve (I,II) özelliklerini sağlayan $(X,+,.)$ üçlüsüne bir cisim denir. O halde $(\mathbb{R},+,.)$ üçlüsü bir cisimdir.

(III) **Sıralama Aksiyomları**
$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı " $\leq$ " bağıntısı herhangi $a,b,c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

($i_\leq$) $a \leq a$;

($ii_\leq$) $a \leq b$ ve $b \leq a \Rightarrow a = b$;

($iii_\leq$) $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

($iv_\leq$) $a \leq b$ veya $b \leq a$;

Bu durumda, $\mathbb{R}$ tam (lineer) sıralanmış bir cisimdir.

(I,III) **Toplama ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı**

Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$ dir.

(II,III) **Çarpma ve Sıralama İşlemleri Arasında Bağıntı**

Her $a,b,c \in \mathbb{R}$ için $(a \leq b)$ ve $(0 \leq c) \Rightarrow a.c \leq b.c$ dir.

(IV) **Tamlık Aksiyomu**
$\mathbb{R}$ nin boş olmayan A ve B alt kümeleri her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq b$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ olacak şekilde tek bir $c \in \mathbb{R}$ elemanı vardır.

Belirtelim ki, (I-IV) aksiyomlar takımı reel sayıların çok az sayıda özelliklerini kapsamaktadır. Bunlara ek olarak reel sayıların aşağıdaki özellikleri de verilebilir.

(a) $\mathbb{R}$ de toplamaya göre sıfır elemanı tektir.

(b) $\mathbb{R}$ de her elemanın toplamsal tersi tektir.

(c) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $x + a = b$ denkleminin tek bir $x = b + (-a) = b - a$ çözümü vardır.

(d) $\mathbb{R}$ de birim eleman tektir.

(e) Her $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sayısının a^{-1} tersi tektir.

(f) Her $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $a.x = b$ denkleminin tek bir $x = b.a^{-1} = \dfrac{b}{a}$ çözümü vardır.

(g) Her $a \in \mathbb{R}$ için $a.0 = 0$

(h) $(a.b = 0) \Rightarrow (a = 0)$ veya $(b = 0)$.

(i) Her $a \in \mathbb{R}$ için $-a = (-1).a$.

(j) Her $a \in \mathbb{R}$ için $(-1).(-a) = a$.

(k) Her $a \in \mathbb{R}$ için $(-a).(-a) = a.a$.

(l) Herhangi iki $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için, $a < b$, $a = b$ veya $b < a$ özelliklerinden biri ve yalnızca biri sağlanır. ($a < b$ yazılışını a küçük b ve $b > a$ yazılışını ise b büyük a diye okuyacağız).

(m) Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$(a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a < c);$$
$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c).$$

(n) Herhangi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için

$$(a < b) \Rightarrow (a + c < b + c),$$
$$(0 < a) \Rightarrow (-a < 0),$$
$$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d),$$
$$(a \leq b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d).$$

(o) $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 < a.b)\ , \qquad (a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (0 < a.b)\ ,$$
$$(0 > a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a.b < 0)\ , \qquad (a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow (a.c < b.c)\ ,$$
$$(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (b.c < a.c)\ .$$

(p) $0 < 1$.

(q) $(0 < a) \Rightarrow (0 < a^{-1})$, $(0 < a) \wedge (a < b) \Rightarrow (0 < b^{-1}) \wedge (b^{-1} < a^{-1})$.

Reel sayıların diğer özellikleri daha sonraki bölümlerde verilecektir.

$a > 0$ eşitsizliğini sağlayan sayılara pozitif, $a < 0$ eşitsizliğini sağlayan sayılara ise negatif sayılar denir, sırasıyla $\mathbb{R}_+ = \{\ x \in \mathbb{R} :\ x > 0\ \}$ ve $\mathbb{R}_- = \{\ x \in \mathbb{R} :\ x < 0\ \}$ ile gösterilir.

Tanım 1.7.2 *: Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.*

(a) Her $x \in X$ için $x \leq b$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine üstten sınırlıdır denir ve b sayısına da X kümesinin bir üst sınırı denir.

(b) Her $x \in X$ için $a \leq x$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine alttan sınırlıdır denir ve a sayısına da X kümesinin bir alt sınırı denir.

(c) X hem alttan ve hem de üstten sınırlı ise (yani her $x \in X$ için $a \leq x \leq b$ olacak şekilde a ve b sayıları varsa) X'e sınırlı küme denir.

(d) Her $x \in X$ için $x \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa, M'ye X kümesinin maksimal (veya en büyük) elemanı denir ve $M = \max_{x \in X}\{x\}$ veya $M = \max\{x : \ x \in X \ \}$ şeklinde gösterilir.

(e) Her $x \in X$ için $m \leq x$ olacak biçimde bir $m \in X$ elemanı varsa, m'ye X kümesinin minimal (veya en küçük) elemanı denir ve $m = \min_{x \in X}\{x\}$ veya $M = \min\{x : \ x \in X \ \}$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $X = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 1 \ \}$ kümesinin minimal ve maksimal elemanları yoktur. $Y = \{ \ x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq 1 \ \}$ kümesinin minimal ve maksimal elemanları vardır ve sırasıyla -1 ve 1 dir.

$X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı olduğunda

$$B = \{ \ b \in \mathbb{R} : \ b, X \text{ nin üst sınırıdır } \}$$

kümesi boş değildir. Benzer şekilde $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı olduğunda $A = \{ \ a \in \mathbb{R} : \ a, X \text{ nin alt sınırıdır } \}$ kümesi boş değildir.

Tanım 1.7.3 *:*

(a) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise $B = \{ \ b \in \mathbb{R} : \ b, X$ nin üst sınırıdır $\}$ kümesinin minimal elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı denir ve $\sup X$ (veya **eküs X***) ile gösterilir.*

(b) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise $A = \{ \ a \in \mathbb{R} : \ a, X$ nin alt sınırıdır $\}$ kümesinin maksimal elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı denir ve $\inf X$ (veya **ebas X***) ile gösterilir.*

Böylece, tanıma göre $\sup X = \min\{ \ b \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ x \leq b \ \}$ ve $\inf X = \max\{ \ a \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ a \leq x \ \}$ dir.

Yukarıda söylenenlerden de görüldüğü gibi $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve üstten (alttan) sınırlı her alt kümesinin maksimal (minimal) elemanı olmayabilir. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 1.7.4 (Üst Sınır Prensibi) *: $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir tek en küçük üst sınırı (supremumu) vardır. (Bu özelliğe* sup *özelliği denir.)*

İspat: $X \subset \mathbb{R}$ boş olmayan üstten sınırlı bir küme ve $B = \{b \in \mathbb{R} : b, X$nin üst sınırı$\}$ olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall b \in B$ için $x \leq b$ olduğundan IV Tamlık aksiyomuna göre $\forall x \in X$ ve $\forall b \in B$ için $x \leq c \leq b$ olacak şekilde tek bir $c \in \mathbb{R}$ elemanı vardır. c elemanı X nin üst sınırı olduğundan $c \in B$ dir. Öte yandan, $\forall b \in B$ için $c \leq b$ olduğundan $c = \min B = \sup X$ olur. □

Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 1.7.5 *: $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesinin bir tek en büyük alt sınırı (infimumu) vardır.*

Boş olmayan sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi için $B = \sup X$ ve $A = \inf X$ sayıları aşağıdaki karakteristik özelliklere sahiptir:

(a) $B = \sup X \Leftrightarrow$ "$\forall x \in X$ için $x \leq B$ ve $\forall \epsilon > 0$ için $B - \epsilon < x_\epsilon$ olacak biçimde $x_\epsilon \in X$ elemanı vardır."

(b) $A = \inf X \Leftrightarrow$ "$\forall x \in X$ için $A \leq x$ ve $\forall \epsilon > 0$ için $x_\epsilon < A + \epsilon$ olacak biçimde $x_\epsilon \in X$ elemanı vardır."

Tanım 1.7.6 *: a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun. $\{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ kümesine a başlangıçlı b bitimli açık aralık denir ve (a, b) (veya $]a, b[$) şeklinde gösterilir. Benzer olarak, $\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ kümesine a başlangıçlı ve b bitimli kapalı aralık denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.*

$\{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ ve $\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ kümelerine sırasıyla a da açık b de kapalı ve b de açık, a'da kapalı yarı açık aralıklar denir ve $(a, b]$ (veya $]a, b]$) ve $[a, b)$ (veya $[a, b[$) şeklinde gösterilir. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a, +\infty)$ (veya $]a, +\infty[$), $[a, +\infty)$ (veya $[a, +\infty[$), $(-\infty, b)$ (veya $]-\infty, b[$), $(-\infty, b]$

(veya $]-\infty, b]$) ve $(-\infty, +\infty)$ sonsuz aralıkları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ reel sayı kümesine $+\infty$ ve $-\infty$ ile gösterilen ve artı sonsuz, eksi sonsuz olarak okunan iki yeni sembolü ilave etmek suretiyle elde edilen $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar sistemi denir. Bu sayılar sistemi aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilir.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x < +\infty,\ x - (+\infty) = x - \infty = -\infty,\ x + (+\infty) = x + \infty = +\infty,\ x - (-\infty) = x + \infty = +\infty,\ +\infty + (+\infty) = +\infty, -\infty + (-\infty) = -\infty,\ \dfrac{x}{-\infty} = \dfrac{x}{+\infty} = 0.$

(b) $x > 0$ ise $x.(-\infty) = -\infty,\ x.(+\infty) = +\infty,\ \dfrac{x}{0} = +\infty,$

(c) $x < 0$ ise $x.(-\infty) = +\infty,\ x.(+\infty) = -\infty,\ \dfrac{x}{0} = -\infty.$

Boş olamayan $X \subset \bar{\mathbb{R}}$ alt kümesi verilsin. Eğer, X kümesi alttan sınırlı değilse, $\inf X = -\infty$ ve X kümesi üstten sınırlı değilse, $\sup X = +\infty$ gibi tanımlanır. Buna göre, $\bar{\mathbb{R}}$ nin boş olmayan her alt kümesinin hem supremumu hem de infimumu vardır.

Tanım 1.7.7 *: $x \in \mathbb{R}$ reel sayısının mutlak değeri (veya modülü)*

$$x \to |x| = \begin{cases} x, & x > 0 ise, \\ 0, & x = 0 ise, \\ -x, & x < 0 ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona denir.

Her $x \in X$ için $|-x| = |x| \geq 0$ olduğu açıktır. Mutlak değerin aşağıdaki özellikleri vardır.

(a) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $|a.b| = |a|.|b|,\ |a/b| = |a|/|b|\ (b \neq 0)$;

(b) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $|a \pm b| \leq |a| + |b|$;

(c) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $||a| - |b|| \leq |a - b|$;

(d) Her $a > 0$ sayısı için $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, |x| \geq a \Leftrightarrow (x \leq -a \wedge x \geq a)$.;

$a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ noktaları için $|a - b| = |b - a|$ sayısına a ve b noktaları arasındaki uzaklık (mesafe) denir ve $d(a, b)$ ile gösterilir. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ olmak üzere $b - a > 0$ sayısına $(a, b),\ [a, b),\ (a, b]$ ve $[a, b]$ aralıklarının uzunluğu (vaya boyu) denir.

1.8 Çözümlü Problemler

(1) $\mathbb{R}$ nin §1.7 deki $(c),\ (h),\ (m),\ (p)$ ve (q) özelliklerinin doğruluğunu göteriniz.

Çözüm:
(c). $x = b + (-a)$ sayısının $x + a = b$ denkleminin bir çözümü olduğu açıktır:

$$a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b.$$

Bu çözümün tekliğini görelim. $x_1 \in \mathbb{R}$ sayısı da $a + x = b$ denkleminin bir çözümü olsun. Yani, $a + x_1 = b$ eşitliği sağlansın. Bu durumda, IV_+ aksiyomuna göre ve $\mathbb{R}$ deki her elemanın toplamsal tersi tek olduğundan

$$\begin{aligned} a + x_1 = b &\Rightarrow (a + x_1) + (-a) = b + (-a) \Rightarrow (x_1 + a) + (-a) = b + (-a) \\ &\Rightarrow x_1 + (a + (-a)) = b + (-a) \Rightarrow x_1 + 0 = b + (-a) \\ &\Rightarrow x_1 = b + (-a) \end{aligned}$$

elde ederiz.

(h). $a.b = 0$ olsun. Eğer, $b \neq 0$ (veya $a \neq 0$) ise $a.b = 0$ denkleminin a ya (b ye) göre çözümü tek olduğundan $a = 0.b^{-1} = 0$ ($b = 0.a^{-1} = 0$) elde ederiz.

(m). İkinci önermenin doğruluğunu görelim. Sıralama aksiyomlarının ikinci özelliğine göre

$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (b \leq c) \wedge (b \neq c) \Rightarrow a \leq c$$

olur. Şimdi $a \neq c$ olduğunu gösterelim. $a = c$ olsun. Bu durumda,

$$(a \leq b) \wedge (b < c) \Leftrightarrow (c \leq b) \wedge (b < c) \wedge (c \leq b) \wedge (b \leq c) \wedge (b \neq c)$$

olur. Buradan sıralama aksiyomlarının birinci özelliğine göre $(b = c) \wedge (b \neq c)$ çelişkisi elde edilir.

(p). $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, yani $1 \neq 0$ olsun. Eğer, $1 < 0$ ise (o) özelliğine göre

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1.1) \Rightarrow (0 < 1)$$

elde edilir.

(q). $a \neq 0$ olduğu açıktır. $a^{-1} < 0$ olduğunda

$$(a^{-1} < 0) \wedge (0 < a) \Rightarrow (a.a^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0)$$

çelişkisi elde edilir. Şimdi ikinci önermenin doğruluğunu görelim.

$$\begin{aligned}(0 < a) \wedge (a < b) &\Rightarrow (0 < b) \wedge (a < b) \\ &\Rightarrow (0 < a^{-1}) \wedge (0 < b^{-1}) \wedge (a < b) \Rightarrow (0 < a^{-1}.b^{-1}) \wedge (a < b) \\ &\Rightarrow (a.(a^{-1}.b^{-1}) < b(a^{-1}.b^{-1})) \Rightarrow a.(a^{-1}).b^{-1} < (b.b^{-1}).a^{-1} \\ &\Rightarrow 1.b^{-1} < 1.a^{-1} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $\diamond$

(2) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa, $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \{\ \dfrac{n+1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\ \}$; (b) $X = \{\ \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{n}{3n+1} :\ n \in \mathbb{N}\ \}$;

(c) $X = \{\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} :\ n, m \in \mathbb{N}\ \}$; (d) $X = \{\ 0,5,0,55,\ldots,\underbrace{0,55\ldots5;\ldots}_{n-\text{kez}}\}$.

Çözüm: Bu ve buna benzer problemlerin çözümünde esasen supremum ve infimum karakteristik özellikleri kullanılır.

(a) $\max X = \sup X = 2$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\dfrac{n+1}{n} > 1$ dir. Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > 1/\epsilon$ doğal sayısı için $\dfrac{n+1}{n} < 1 + \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 1$ elde edilir.

(b) $\inf X = 0$ dır. Çünkü, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1-3\epsilon}{9\epsilon}$ doğal sayısı için $0 < \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} < \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 0$ elde edilir.

$\sup X = \frac{2}{3}$ dir. Çünkü, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1-3\epsilon}{9\epsilon}$ doğal sayısı için $\frac{2}{3} - \epsilon < \frac{1}{3} + \frac{n}{3n+1} < \frac{2}{3}$ eşitsizliği sağlandığından $\sup X = \frac{2}{3}$ elde edilir.

(c) $\max X = \sup X = 2$ olduğu açıktır. Şimdi $\inf X = 0$ olduğunu gösterelim. Her $n, m \in \mathbb{R}$ sayıları için $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} > 0$ ve herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \dfrac{2}{\epsilon}$ ve $m > \dfrac{2}{\epsilon}$ doğal sayıları için $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 0$ elde edilir.

(d) $\min X = \inf X = 0,5$ olduğu açıktır. $\sup X = \dfrac{5}{9}$ olduğunu gösterelim. Bunu gösterirken, ileride göstereceğimiz monoton reel sayı dizisinin şu özelliğinden kullanacağımız: Artan ve üstten sınırlı (x_n) reel sayı dizisinin sonlu limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\ \}$$

dir. Terimleri $x_1 = 0,5, x_2 = 0,55, \ldots, x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ biçiminde tanımlanan (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. Diğer taraftan,

$$x_n = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \ldots + 0,\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{kez}}5$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{200} + \ldots + \frac{1}{2\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ kez}}}$$

$$= \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\big)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1-1/10^n}{1-1/10} = \frac{5}{9}\big(1 - \frac{1}{10^n}\big)$$

olduğundan, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{9}$ olur ve dolayısıyla,
$\sup X = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\ \} = \frac{5}{9}$ olur. $\diamond$

(3) $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ ise $\sup X \leq \sup Y$ ve $\inf X \geq \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ olarak alalım. Eğer, Y kümesi üstten sınırlı değilse, $B_2 = +\infty$ dir. Dolayısıyla, $B_1 \leq +\infty = B_2$ olduğu açıktır. Y üstten sınırlı olsun. Bu durumda, üst sınır prensibine göre B_2 sonlu sayıdır. $X \subset Y$ olduğundan her $x \in X$ için $x \leq B_2$ olur. Dolayısıyla, B_2 sayısı X in bir üst sınırıdır. Buradan da $B_1 \leq B_2$ elde edilir. İkinci eşitsizlik benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(4) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ ise X in üstten, Y nin ise alttan sınırlı olduğunu ve $\sup X \leq \inf Y$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Sabit $y_0 \in Y$ ve her $x \in X$ için $x \leq y_0$ olduğundan X üstten sınırlı bir kümedir ve $\sup X \leq y_0$ olur. Her $y \in Y$ için $\sup X \leq y$ olduğundan Y alttan sınırlı bir kümedir. Buradan da $\sup X \leq \inf Y$ elde edilir. $\diamond$

(5) Problem (4) teki X ve Y kümeleri için $X \cup Y = \mathbb{R}$ ise $\sup X = \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sup X \leq \inf Y$ olduğunu Problem (4) te gösterdik. Şimdi $\sup X = \inf Y$ olduğunu gösterelim. IV Tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq c \leq y$ olacak biçimde tek bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı

vardır. Eğer, $\sup X < \inf Y$ ise $c \notin X$ ve $c \notin Y$ elde edilir. Bu ise $X \cup Y = \mathbb{R}$ olması ile çelişdiğinden $\sup X = \inf Y$ olur. $\diamond$

(6) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ sınırlı kümeleri için $X \cap Y$ ve $X \cup Y$ kümelerinin sınırlı olduğunu ve

(a) $\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$;

(b) $\inf(X \cup Y) = \min(\inf X, \inf Y)$;

(c) $\max(\inf X, \inf Y) \leq \inf(X \cap Y)$;

(d) $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup X, \sup Y)$;

önermelerinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: (a) ve (c) önermelerinin doğruluğunu gösterelim. (b) ve (d) nin çözümleri okuyucuya bırakılmıştır.
(a) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ sayıları sonludur (IV Tamlık aksiyomuna göre). $B_1 \leq B_2$ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq B_1 \leq B_2$ ve her $y \in Y$ için $y \leq B_2$ olduğundan her $z \in X \cup Y$ için $z \leq B_2$ olur. Buradan da $X \cup Y$ kümesinin üstten sınırlı olduğu ve

$$\sup(X \cup Y) \leq B_2$$

elde edilir. Diğer taraftan, $Y \subset (X \cup Y)$ olduğundan Problem (3) e göre $\sup Y \leq \sup(X \cup Y)$, yani $B_2 \leq \sup(X \cup Y)$ olur. $B_2 = \max(B_1, B_2)$ olduğundan son iki eşitsizliğe göre (a) önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.
(c) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $A_1 = \inf X$ ve $A_2 = \inf Y$ sayıları sonludur (Teorem 1.7.5 'e göre). $A_1 \leq A_2$ olsun. Her $y \in Y$ için $A_2 \leq y$ olduğundan her $z \in X \cap Y$ için $A_2 \leq z$ olur. Buradan da $X \cap Y$ kümesinin alttan sınırlı olduğu ve

$$A_2 \leq \inf(X \cap Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $(X \cap Y) \subset Y$ olduğundan Problem (3) e göre $\inf Y \leq \inf(X \cap Y)$, yani $A_2 \leq \inf(X \cap Y)$ olur. $A_2 = \max(A_1, A_2)$

olduğundan son iki eşitsizliğe göre (c) önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur. $\diamond$

(7) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$ ve

$$\lambda X = \{x \in \mathbb{R} :\ \exists u \in X, x = \lambda u\} = \{\lambda x :\ x \in X\}$$

olsun. X üstten sınırlı ve $\lambda > 0$ ise

$$\sup(\lambda X) = \lambda . \sup X$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B = \sup X$ olsun. $x \in (\lambda X) \Rightarrow x = \lambda u,\ u \in X,\ u \leq B \Rightarrow x = \lambda u \leq \lambda B \Rightarrow \lambda.B$ sayısı X in bir üst sınırıdır. $B',\ \lambda X$ kümesinin herhangi bir üst sınırı olsun. Bu durumda, $\forall x \in (\lambda X)$ için $x \leq B' \Rightarrow \forall u \in X$ için $\lambda u \leq B' \Rightarrow \forall u \in X$ için $u \leq B'/\lambda$ olur. Buradan, B'/λ sayısının X in bir üst sınırı olduğu ve dolayısıyla, $B \leq B'/\lambda$ veya $\lambda B \leq B'$ olduğu anlaşılır. Bundan dolayı $\lambda B,\ \lambda X$ kümesinin üst sınırının en küçüğüdür, yani $\lambda B = \sup(\lambda X)$ dir. $\diamond$

(8) $X \subset \mathbb{R},\ Y \subset \mathbb{R}$ ve

$$X + Y = \{z : \exists x \in X,\ \exists y \in Y,\ z = x + y\} = \{x + y :\ x \in X,\ y \in Y\},$$
$$X.Y = \{z : \exists x \in X,\ \exists y \in Y,\ z = x.y\} = \{x.y :\ x \in X,\ y \in Y\}$$

olsun.

(a) X ve Y üstten sınırlı olduğunda $X + Y$ nin de üstten sınırlı olduğunu ve

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

olduğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}_+$ ve $Y \subset \mathbb{R}_+$ üstten sınırlı olduğunda $X.Y$ nin de üstten sınırlı olduğunu ve

$$\sup(X.Y) = \sup X . \sup Y$$

olduğunu gösteriniz. Herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için bu özelliğin doğru olmadığını gösteren örnek veriniz.

Çözüm: (a) $\sup X = B_1$ ve $\sup Y = B_2$ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq B_1$ ve her $y \in Y$ için $y \leq B_2$ olduğundan her $x + y \in (X + Y)$ için $x + y \leq B_1 + B_2$ olur. Buradan, $X + Y$ nin üstten sınırı olduğu görülür. Üst sınırın ikinci karakteristik özelliğine göre herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\exists\ x_\epsilon \in X \quad \text{öyleki} \quad x_\epsilon > B_1 - \epsilon/2$$
$$\exists\ y_\epsilon \in Y \quad \text{öyleki} \quad y_\epsilon > B_2 - \epsilon/2$$

olur. Buradan $x_\epsilon + y_\epsilon \in (X + Y)$ ve $x_\epsilon + y_\epsilon > B_1 + B_2 - \epsilon$ elde edilir. O zaman supremum özelliklerinden $\sup(X + Y) = B_1 + B_2$ olur.
(b) $\sup X = B_1$ ve $\sup Y = B_2$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $0 < x \leq B_1$ ve $\forall y \in Y$ için $0 < y < B_2$ olduğundan her $x.y \in (X.Y)$ için $0 < x.y \leq B_1 B_2$ olur. Buradan da $X.Y$ nin üstten sınırlı olduğu görülür.

$B_1 = 0$ veya $B_2 = 0$ ise $\sup(X.Y) = 0 = B_1.B_2$ olduğu açıktır. $B_1 > 0$ ve $B_2 > 0$ olsun. Herhangi $0 < \epsilon < 2\min(B_1^2, B_2^2)$ sayısı verilsin. Üst sınırın ikinci özelliğine göre

$$\exists\ x_\epsilon \in X \quad \text{öyleki} \quad x_\epsilon > B_1 - \frac{\epsilon}{2B_2}$$
$$\exists\ y_\epsilon \in Y \quad \text{öyleki} \quad y_\epsilon > B_2 - \frac{\epsilon}{2B_1}$$

olur. Buradan $x_\epsilon.y_\epsilon \in (X.Y)$ ve

$$x_\epsilon.y_\epsilon > B_1.B_2 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4B_1B_2} > B_1.B_2 - \epsilon$$

elde edilir. Bu durumda, $\sup(X.Y) = B_1.B_2$ olur.
(b) önermesi herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ kümeleri için doğru olmayabilir. Örneğin, $X = (-3, -2)$ ve $Y = (-5, -\frac{1}{2})$ kümeleri için $X.Y = (1, 15)$ ve $\sup X = -2,\ \sup Y = -1/2,\ \sup(X.Y) = 15 \neq 1 = \sup X . \sup Y$ olduğu elde edilir. $\diamond$

(9) Mutlak değerin (c) özelliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Mutlak değerin (b) özelliğine göre

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \tag{1.1}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} |b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a| \Rightarrow |b|-|a| \leq |b-a| = |a-b| \\ \Rightarrow -|a-b| \leq |a|-|b| \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2) den $||a|-|b|| \leq |a-b|$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(10) $|x+1|+|x|+|x-1|-6=0$ denkleminin köklerini (sıfır yerlerini) bulunuz.

Çözüm:

$$|x+1|+|x|+|x-1|-6 = \begin{cases} -3x-6=0, & x \in (-\infty,-1) \text{ ise,} \\ -x-4=0, & x \in [-1,0) \text{ ise,} \\ x-4=0, & x \in [0,1) \text{ ise,} \\ 3x-6=0, & x \in [1,\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu açıktır. Buradan görüldüğü gibi denklemin $[-1,0)$ ve $[0,1)$ üzerinde kökleri yoktur, $(-\infty,-1)$ üzerinde $x=-2$ ve $[1,+\infty)$ üzerinde $x=2$ denklemin birer kökleridir. $\diamond$

1.9 Ek Problemler

(11) $\mathbb{R}$ nin 1.7 deki (d), (f), (l) ve (m) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

(12) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \left\{ \frac{m}{n} : \ m,n \in \mathbb{N} \ \text{ ve } \ m<n \right\}$;

(b) $X = \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n-1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(d) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(e) $X = \left\{ x_n : \ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(f) $X = \left\{ \frac{6^{n+1}-5^{n+1}}{6^n+5^n} \ : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(g) $X = \left\{ \frac{\ln n}{n} \ : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$.

Cevap:

(a) $\inf X = 0, \ \sup X = 1$; (b) $\inf X = 0, \ \sup X = 1$;
(c) $\inf X = \frac{1}{2}, \ \sup X = 1$; (d) $\inf X = \frac{1}{3}, \ \sup X = \frac{1}{2}$;
(e) $\inf X = \frac{1}{2}, \ \sup X = 1$; (f) $\inf X = 1, \ \sup X = 6$;
(g) $\inf X = 0, \ \sup X = \frac{\ln 3}{3}$.

(13) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

(a) $X = \left\{ [1+(-1)^n n].n + \frac{1-(-1)^n}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) $X = \left\{ \frac{n^3}{2n^2+1} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

(c) $X = \left\{ \frac{n^3+1}{n^4+1} : \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$;

(d) $X = \left\{ [(-1)^n+1]n^2 + \frac{(-1)^n-1}{2} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$;

Cevap:

(a) $\inf X = 0,\ \sup X = +\infty$; (b) $\inf X = \frac{1}{3},\ \sup X = \frac{1}{2}$;
(c) $\inf X = \frac{-1}{2},\ \sup X = \frac{1}{2}$; (d) $\inf X = \frac{-1}{2},\ \sup X = +\infty$.

(14) (a) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise $-X$ in üstten sınırlı olduğunu ve $\sup(-X) = -\inf X$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise $-X$ in alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(-X) = -\sup X$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(15) (a) $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri alttan sınırlı olduğunda $X+Y$ nin de alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$ olduğunu gösteriniz.

(b) $X \subset \mathbb{R}_+$ ve $Y \subset \mathbb{R}_+$ alt kümeleri alttan sınırlı olduğunda $X.Y$ nin de alttan sınırlı olduğunu ve $\inf(X.Y) = \inf X.\inf Y$ olduğunu gösteriniz. Herhangi $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için bu özelliğin genel olarak doğru olmadığını gösteren örnek veriniz.

(16) Mutlak değerin (a) ve (b) özelliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

(17) Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz:

(*a*) $|x| + |x-1| + |x+2| - 2,5 = 0$; (*b*) $|2x+3| = x^2$;
(*c*) $x|x+2| - |x+1| - (x+1)|x| + 1 = 0$; (*d*) $|\frac{x-1}{x+1}| = \frac{x-1}{x+1}$;
(*e*) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$.

Cevap: (a) $0,5$ ve $1,5$; (b) -1 ve 3; (c) $(0, +\infty)$;
(d) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$;(e) $[2, 3]$.

1.10 Reel Sayı Sınıfları

1.10.1 Doğal Sayılar

Tanım 1.10.1 *: Birşeyleri saymakta yararlanılan ve rakamlar adı verilen* $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ *on sembol ile yazılabilen sayıların tümüne doğal sayılar kümesi denir ve*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

şeklinde gösterilir.

Doğal sayıları tamamen belirtmeye yeterli olduğu ispatlanabilen en belirgin özellikler Peano aksiyomları adıyla aşağıdaki beş aksiyomla ifade edilebilir:

$\mathbb{N}_1$) 1 bir doğal sayıdır: $1 \in \mathbb{N}$;
$\mathbb{N}_2$) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ = n + 1 \in \mathbb{N}$;
$\mathbb{N}_3$) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 1$;
$\mathbb{N}_4$) $\forall n, m \in \mathbb{N}, n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$;
$\mathbb{N}_5$) $(1 \in A \subset \mathbb{N}$ ve $n \in A \Rightarrow n^+ \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}_5$) aksiyomuna Matematik İndüksiyon Prensibi denir. Bu aksiyom, matematikte sık sık kullanılan bir ispat tekniğini ortaya koymaktadır.

Teorem 1.10.2 *: n doğal sayısına bağımlı bir* $B(n)$ *bağıntısı*

(a) 1 *doğal sayısı için doğru:* $B(1)$ *doğru,*

(b) n için doğru ise $n+1$ *için de doğru:* $B(n)$ *doğru ise* $B(n+1)$ *doğru oluyorsa,* $B(n)$ *bağıntısı bütün doğal sayılar için doğrudur.*

Bu teoremde belirlenen ispat tekniğine Matematik İndüksiyon (veya Tümevarım) Yöntemi denir.

Bu teoremin yardımı ile doğal sayıların sık sık kullanılan bir kaç önemli özellikleri ileride ispatlanacaktır. Bu özelliklerin aşağıdaki gibi kısa bir özetini verelim:

(a) $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+m) \in \mathbb{N} \wedge n.m \in \mathbb{N}$;

(b) $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow (n-1) \in \mathbb{N}$;

(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x \in \mathbb{N} : \ n < x\}$ kümesinin minimal elemanı vardır ve

$$\min\{x \in \mathbb{N} : \ n < x\} = n + 1;$$

(d) $(m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1) \leq m$;

(e) $n \in \mathbb{N}$ ise $n < x < n+1$ olacak biçimde x doğal sayısı yoktur;

(f) $\mathbb{N}$ nin boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı vardır;

(g) $\mathbb{N}$ nin üstten sınırlı her alt kümesinin maksimal elemanı vardır;

(h) $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

1.10.2 Tam Sayılar

Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $n+x = n$ denkleminin tek çözümü 0 (sıfır) ile $n+x = 0$ denkleminin tek çözümü $-n$ elemanlarını $\mathbb{N}$ kümesine ilave ederek elde edilen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

kümesine Tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar şu özelliklere sahiptir:

(a) $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n+m) \in \mathbb{Z} \wedge n.m \in \mathbb{Z}$;

(b) $n, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n + x = m$ denkleminin $\mathbb{Z}$ kümesinde tek bir $x = (-n) + m$ çözümü vardır:

(c) $\mathbb{Z}$ nin her sınırlı alt kümesinin minimal ve maksimal elemanı vardır;

(d) $\mathbb{Z}$ sınırsız bir kümedir.

1.10.3 Rasyonel Sayılar

$n \neq 0$ olmak üzere m ve n birer tam sayı ise $m.n^{-1} = m/n$ şeklindeki sayıya rasyonel sayı ve bu sayıların teşkil ettiği kümeye Rasyonel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre bir değişmeli cisim yapısına sahiptir.

Teorem 1.10.3 *: Rasyonel olmayan sayı vardır.*

İspat: Teoremi ispat etmek için karesi ikiye eşit olan pozitif $s \in \mathbb{R}$ sayısının varlığını ve bu s sayısının rasyonel bir sayı olmadığını göstermek yeterlidir.

$X = \{x \in \mathbb{R}_+ : \ x^2 < 2\}$ ve $Y = \{y \in \mathbb{R}_+ : \ y^2 > 2\}$ olsun. $1 \in X$ ve $2 \in Y$ olduğundan, $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ dir. Her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$ olduğundan her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x < y$ dir. O zaman IV Tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq s \leq y$ olacak şekilde tek bir $s \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $s^2 = 2$ olduğunu görelim. $s^2 < 2$ olsun. O zaman $1 \in X$ olduğundan $1^2 \leq s^2 < 2$ ve $0 < \delta = 2 - s^2 < 1$ dir. Öte yandan

$$(s + \frac{\delta}{3})^2 = s^2 + 2.s.\frac{\delta}{3} + (\frac{\delta}{3})^2 < s^2 + 3.\frac{\delta}{3} = s^2 + \delta = 2$$

olduğundan $s + \dfrac{\delta}{3} \in X$ elde edilir. Bu ise her $x \in X$ için $x \leq s$ olması ile çeliştiğinden $s^2 < 2$ varsayımın doğru olmadığı anlaşılır.

Şimdi $2 < s^2$ olduğunu varsayalım. $2 \in Y$ olduğundan $2 < s^2 \leq 4$ ve $0 < \triangle = s^2 - 2 \leq 2$ dir. Öte yandan ($0 < \dfrac{\triangle}{3} < 1$ olduğundan)

$$(s - \frac{\triangle}{3})^2 = s^2 - 2.s.\frac{\triangle}{3} + (\frac{\triangle}{3})^2 < s^2 - 3.\frac{\triangle}{3} = s^2 - \triangle = 2$$

olduğundan $s - \dfrac{\triangle}{3} \in Y$ elde edilir. Bu ise her $y \in Y$ için $y \geq s$ olması ile çeliştiğinden $s^2 > 2$ varsayımının da doğru olmadığı anlaşılır. Böylece tek bir $s^2 = 2$ durumu gerçeklenebilir. $s \notin \mathbb{Q}$ olduğu kolayca gösterilebilir. □

Rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayılar kümesini $\mathbb{I}$ ile göstereceğiz.

$a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

polinom denkleminin çözümü olan x sayısına bir cebirsel sayı denir. Katsayıları tam sayı olmayan bir polinom denklemin çözümü olan irrasyonel sayılara transandantal sayılar denir.

Cebirsel sayılar kümesi sonsuz ve sayılabilir bir küme olduğu halde transandantal sayılar kümesi sayılamayan bir kümedir.

Teorem 1.10.4 (Archimet Prensibi) *: Her $h > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $(k-1)h \leq x < kh$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. (Bu özelliğe reel sayı kümesinin Archimet özelliği denir.)*

İspat: $\mathbb{Z}$ kümesi üstten sınırlı olmadığından her $h > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$X = \{n \in \mathbb{Z} : \ \frac{x}{h} < n\}$$

kümesi $\mathbb{Z}$ nin alttan sınırlı boş olmayan bir alt kümesidir. O zaman tam sayıların (c) özelliğine göre X kümesinin minimal elemanı vardır, yani $k-1 \leq \frac{x}{h} < k$ olacak şekilde bir tek $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. $h > 0$ olduğundan

$$k - 1 \leq \frac{x}{h} < k \Leftrightarrow (k-1)h \leq x < kh$$

olur. □

Sonuç 1.10.5 *: $\epsilon > 0$ ise $\frac{1}{n} < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.*

Gerçekten, $h = 1$ ve $x = \frac{1}{\epsilon}$ alındığında Archimet Prensibine göre $\frac{1}{\epsilon} < k_0$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. $0 < \frac{1}{\epsilon} \wedge \frac{1}{\epsilon} < k_0$ ise $k_0 \in \mathbb{N}$ olur. Bu durumda, $\forall n > k_0$ doğal sayısı için $\frac{1}{n} < \frac{1}{k_0}$ olduğundan $\forall n > k_0$ doğal sayısı için $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ olur.

Sonuç 1.10.6 *: Eğer, $\forall h > 0$ için $0 \leq x < h$ ise $x = 0$ dır.*

Gerçekten $x > 0$ olamaz. Çünkü $x > 0$ olduğunda Sonuç1.10.5'e göre $\frac{1}{n_0} < x$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu ise her $h > 0$ için $x < h$ olması ile çelişir.

Sonuç 1.10.7 *: a, b ve x reel sayılar olsun. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için*

$$a \leq x < a + \frac{b}{n}$$

ise $x = a$ dır.

Sonuç 1.10.8 *: Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır.*

İspat: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $b - a > 0$ olduğundan Sonuç1.10.5'e göre $0 < \frac{1}{n} < b - a$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Archimet Prensibine göre $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. O halde $\frac{m}{n} < b$ dir. Aksi taktirde $\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n}$ dir ve buradan da $b - a \leq \frac{1}{n}$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ve $a < \frac{m}{n} < b$ dir. Demek ki, herhangi iki reel sayı arasında hiç değilse bir rasyonel sayı bulunacaktır. Bu işleme istenildiği kadar devam edilebilir. □

Sonuç 1.10.9 *: $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $k \leq x < k+1$ olacak şilde tek bir $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır.*

Sözkonusu k tam sayısına x sayısının tam kısmı denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir. $x - [\![x]\!]$ sayısına x sayısının kesir kısmı denir ve $\{x\}$ ile gösterilir. Böylece, $x = [\![x]\!] + \{x\}$ ve $0 \leq \{x\} < 1$ olur.

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının kendisiyle $n (n \in \mathbb{N})$ defa çarpımından ortaya çıkan sayıya a'nın n. kuvveti denir ve a^n ile gösterilir: $a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{n\text{kez}}$ dir. $a^0 = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ şeklinde tanımlanır.

$a \in \mathbb{R}_+$ ve $n \in \mathbb{N}$ sayıları verilsin. Eğer, $a = b^n$ ise b ye a nın n. dereceden kökü denir ve $b = (a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir. $n = 2k (k \in \mathbb{N})$ durumunda $b^{2k} = a$ olacak şekilde iki $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ ve $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$ sayıları vardır. $\sqrt[n]{a}$ kökünün negatif olmayan değerine onun aritmetik değeri denir.

$a \in \mathbb{R}, a \geq 0, r = \dfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ise $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ şeklinde tanımlanabilir.

Aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

(a) $a \in \mathbb{R},\ m,\ n \in \mathbb{N}$, hem de $n \leq 0$ veya $m \leq 0$ olduğunda $a \neq 0$ ise
(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$; (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ dir.

(b) $a,\ b \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}$ ise
(1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$; (2) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$;
(3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; (4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b > 0)$;
(5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

(c) $a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{Q},\ r' \in \mathbb{Q}$ ise
(1) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$; (2) $a^r.a^{r'} = a^{r+r'}$;
(3) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$; (4) $(a.b)^r = a^r.b^r$;
(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.
dir.

$a > 0,\ a \neq 1$ ve $b > 0$ olmak üzere, eğer $a^p = b$ ise p'ye b nin a tabanına göre logaritması denir ve $p = \log_a b$ şeklinde gösterilir. p için yalnız birtane reel değerin mevcut olduğu ileride (bkz. §2.4) gösterilecektir.

Her $a > 0,\ a \neq 1$ ve $b > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0$ sayıları için
(i) $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$;
(ii) $\log_a\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$;
(iii) $\log_a b^r = r.\log_a b, \quad (r \in \mathbb{Q})$
özellikleri sağlanır.

Pratikte iki taban sistemi kullanılır. Briggsion sisteminde $a = 10$ tabanı , Napieraion sisteminde de $a = e = 2,71828\ldots$ doğal tabanı kullanılır ve $\log_a b$ yerine sırasıyla $\log b$ ve $\ln b$ yazılır.

1.11 Çözümlü Problemler

(1) $\mathbb{N}$ kümesinde (a), (c) ve (g) özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: **(a)** $m, n \in \mathbb{N}$ verilsin. $(m+n) \in \mathbb{N}$ olduğunu görelim. $X = \{n \in \mathbb{N} : \ (m+n) \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N}\}$ kümesini gözönüne alalım. Her $m \in \mathbb{N}$ için $(m+1) \in \mathbb{N}$ ise $1 \in X$ dir. $n \in X$, yani $n + m \in \mathbb{N}$ ise $(m + (n+1)) = ((m+n)+1) \in \mathbb{N}$ olduğundan $n+1 \in X$ olur. Matematik indiksiyon metoduna göre $X = \mathbb{N}$ elde edilir.

$n, m \in \mathbb{N}$ olduğunda $n.m \in \mathbb{N}$ olması benzer şekilde gösterilebilir.

(c) $X = \{n \in \mathbb{N} : \ (c)$ önermesi doğru$\}$ kümesini gözönüne alalım ve $X = \mathbb{N}$ olduğunu görelim. Önce $1 \in X$, yani $\min\{x \in \mathbb{N} : \ 1 < x\} = 2$ olduğunu görelim. $Y = \{x \in \mathbb{N} : \ (x = 1) \vee (2 \leq x)\}$ diyelim. $1 \in Y$ olduğu açıktır. Eğer, $x \in Y$ ise, $x = 1$ ve bu durumda $x+1 = 2 \in Y$ dir, veya $2 \leq x$ elde edilir. Bi durumda $2 \leq x + 1$ olur. Yine de $x = y \in Y$ dir. Buradan $Y = \mathbb{N}$ olduğu anlaşılır. Demek ki, $(x \neq 1) \wedge (x \in \mathbb{N})$ ise $2 \leq x$ elde edilir, yani $\min\{x \in \mathbb{N} : \ 1 < x\} = 2$ olur. Böylece $1 \in X$ dir.

Şimdi $n \in X$ iken $n = 1 \in X$ olduğunu görelim. Gerçekten, eğer $x \in \{x \in \mathbb{N} : \ n+1 < x\}$ ise, her x doğal sayısı için $x \geq 1$ olduğundan $(x-1) = y \in \{y \in \mathbb{N} : \ n < y\}$ olur. Buradan da $\mathbb{N}$ nin (b) özelliğine göre $x - 1 = y \in \mathbb{N}$ olur.

$n \in X$ ise $\min\{y \in \mathbb{N} : \ n < y\} = n+1$ dir. Yani $x - 1 \geq y \geq n+1$ ve $x \geq n+2$ dir. Buradan da $(x \in \{x \in \mathbb{N} : \ n+1 < x\}$ ise $(x \geq n+2)$ olur. Dolayısıyla, $\min\{x \in \mathbb{N} : \ n+1 < x\} = n+2$ olur. Yani $n+1 \in X$ dir. Matematik indiksiyon metoduna göre $X = \mathbb{N}$ dir.

(g) $X \subset \mathbb{N}$ üstten sınırlı bir küme olsun. Üst sınır prensibine göre $\sup X = B \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Üst sınırın karakteristik özelliklerine göre $B - 1 < n \leq B$ olacak şekilde $n \in X$ sayısı vardır. Buradan $B = \max X$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(2) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin üstten sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce $\mathbb{N}$ kümesinin üstten sınırsız olduğunu, yani $\mathbb{N}$ nin (h) özelliğinin doğruluğunu görelim. Olmayana ergi yöntemine göre eğer, $\mathbb{N}$ üstten sınırlı bir küme ise $\max \mathbb{N} = n$ elemanı mevcuttur. Fakat, $n+1 \in \mathbb{N}$ ve $n+1 > n$ dir. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ üstten sınırsız olduğundan $\mathbb{Z}$ de üstten sınırsızdır. $\diamond$

(3) **(a)** α rasyonel, β irrasyonel olduğunda $\alpha - \beta$ ve $\alpha + \beta$ sayılarının irrasyonel olacağını gösteriniz.
(b) α sıfırdan farklı rasyonel ve β irrasyonel ise $\alpha.\beta$ ve α/β sayılarının irrasyonel olacağını gösteriniz.

Çözüm: **(b)** önermesinin doğru olduğunu görelim. $\alpha.\beta$ bir irrasyonel sayıdır. Gerçekten, eğer $\alpha.\beta = r \in \mathbb{Q}$ ise iki rasyonel sayının oranı da rasyonel bir sayı olduğundan $\beta = \dfrac{r}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ olur. Bu ise β nın irrasyonel bir sayı olması ile çelişir. $\dfrac{\alpha}{\beta}$ nın da irrasyonel bir sayı olduğu benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(4) $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayaılar olmak üzere $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ polinom denklemi verilsin. Eğer, denklemin p/q şeklinde rasyonel bir kökü varsa a_n, p ile a_0 da q ile tam olarak bölünebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: p/q sayısı bir kök olduğundan, bunu verilen denklemde yerine koyarsak ve her iki tarafı q^n ile çarparsak

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \qquad (1.3)$$

elde edilir ve denklemi p ile bölersek

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + a_2p^{n-3}q^2 + \ldots + a_{n-2}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p} \qquad (1.4)$$

denklemini elde ederiz. (1.4) ün sol tarafı tam sayı olduğundan sağ tarafı da tam sayı olmak zorundadır. p ve q asal sayılar olduğundan p, q^n ni tam olarak bölemez. Dolayısıyla, a_n ni bölmek zorundadır.

Benzer şekilde, (1.3) denkleminin her iki tarafını q ile bölmek suretiyle a_0 ın q ya bölünmesi zorunluluğunu da gösterebiliriz. $\diamond$

(5) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ in bir rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ dersek, $x^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, $x^2 - 8 = 2\sqrt{15}$ ve $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$ denklemini elde ederiz. Problem (4)'e göre bu denklemin muhtemel rasyonel kökleri ± 2 ve ± 4 sayıları olabilir. Fakat, bu sayıların hiçbiri verilen denklemi sağlamadığından $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sayısı rasyonel bir sayı değildir. $\diamond$

(6) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$'ün cebirsel bir sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ dersek, $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2 + 2) \Rightarrow (x^3 + 6x - 3)^2 = 2(3x^2 + 2)^2 \Rightarrow x^6 - 24x^4 - 6x^3 - 12x^2 - 36x - 7 = 0$ elde ederiz. Bu ise katsayıları tam sayılar olan polinom bir denklem olduğundan, bu denklemin bir kökü olan $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ cebirsel bir sayıdır. $\diamond$

(7) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y^n = x$ olacak şekilde tek bir $y = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ sayısının varlığını gösteriniz.

Çözüm: Teklik aşikardır. Gerçekten, $y^n = x$ olacak şekilde iki tane $y_1 \in \mathbb{R}_+$ ve $y_2 \in \mathbb{R}_+$ sayılarının varolduğunu farzedelim. Eğer, $0 < y_1 < y_2$ (veya $0 < y_2 < y_1$) ise $y_1^n < y_2^n$ olur ve bu sonuç $y_1^n = x$, $y_2^n = x$ hipotezi ile bir çelişme teşkil ettiğinden $y_1 = y_2$ dir.

$$X = \{t \in \mathbb{R}_+ : \ t^n < x\}$$

kümesini gözönüne alalım. Eğer, $t = x/(x+1)$ ise $0 < t < 1$ ve $t^n \leq t < x$ dir. Buradan da $t \in X$ olur. Dolayısıyla, X, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan bir alt kümesidir.

$t_0 = 1 + x$ olsun. Eğer, $t > t_0$ ise $t > 1$ ve $t^n > t > x$ dir. Yani, $t \notin X$ dir. Buna göre, t_0, X kümesinin bir üst sınırıdır. Bundan dolayı X, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan üstten sınırlı bir alt kümesi olduğundan üst sınır prensibine göre (Bkz. Teorem 1.7.4) $y = \sup X$ vardır. $y^n = x$ olduğunu görelim.

(a) $y^n < x$ olamaz. Gerçekten, $0 < h < 1$ ve

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir h sayısı seçilsin. Newton Binom Formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}h + \binom{n}{2}y^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n \\ &= y^n + h\big[\binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n}h^{n-1}\big] \\ &< y^n + h\big[\binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\big] \\ &= y^n + h\big[(1+y)^n - y^n\big] < y^n + (x - y^n) = x\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $(y+h)^n < x$ olduğundan $y + h \in X$ olur. Bu ise $y = \sup X$ olması ile bir çelişme teşkil eder.

(b) $y^n > x$ olamaz. Gerçekten, $0 < k < 1,\ k < y$ ve

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir k sayısı seçilsin. Bu durumda, $t \geq y - k$ ise

$$\begin{aligned}t^n \geq (y-k)^n &= y^n - \binom{n}{1}y^{n-1}k + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}k^n \\ &= y^n - k\big[\binom{n}{1}y^{n-1} - \binom{n}{2}y^{n-2}k + \ldots - (-1)^n\binom{n}{n}k^{n-1}\big] \\ &\geq y^n - k\big[\binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\big] \\ &= y^n - k\big[(1+y)^n - y^n\big] > y^n - (y^n - x) = x\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $(y-k)^n > x$ olduğundan $y - k,\ X$ in bir üst sınırıdır. Bu durum $y = \sup X$ olması ile bir çelişme teşkil eder.

Demek ki, $y^n = x$ dir. $\diamond$

(8) $\forall n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu Matematik İndüksiyon yöntemi ile gösteriniz.

(a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}.n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) = \dfrac{1}{p+1}n(n+1)\ldots(n+p),\ p = 2, 3, \ldots$;

(d) $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{n-kez} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

(e) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$;

(f) $1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + n.(5)^n = \dfrac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$;

(g) $a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1},\quad r \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Çözüm: Eşitliklerin sol tarafının $D(n)$, sağ tarafının ise $G(n)$ ile gösterildiğini, yani önermelerin $D(n) = G(n),\ n \in \mathbb{N}$ biçiminde verildiğini farzedeceğiz.

(a) $1^2 = \dfrac{1.(4.1^2 - 1)}{3} = 1$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. O halde,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{n(4k^2-1)}{3}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(2k+1)^2$ yi ilave edersek

$$\begin{aligned}1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 &= \frac{n(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 \\ &= \frac{4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3}{3} \\ &= \frac{4(k+1)^3 - k - 1}{3} \\ &= \frac{(k+1)[4(k+1)^2 - 1]}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(b) $1^2 = (-1)^{1-1}.\dfrac{1.(1+1)}{2} = 1$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{k-1}.k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(-1)^k(k+1)^2$ ilave edersek

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots \; + \; & (-1)^{k-1}.k^2 + (-1)^k(k+1)^2 \\ = \; & (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 \\ = \; & (-1)^k\big[(k+1)^2 - \frac{k(k+1)}{2}\big] \\ = \; & (-1)^k\frac{k^2+3k+2}{2} = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(c) $1(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1) = \dfrac{1}{p+1}1.(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1)(1+p)$ olduğundan her $p = 2, 3, \ldots$ için $D(1) = G(1)$ doğrudur. Farzedelim ki, $D_n = G_n$ ifadesi $n = m$ için doğrudur. Bu durumda, her $p = 2, 3, \ldots$için

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) = \frac{1}{p+1}m(m+1)\ldots(m+p)$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(m+1)(m+2)\ldots(m+p)$ ilave edersek

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1) &+ (m+1)(m+2)\ldots(m+p) \\ &= \frac{1}{p+1}m(m+1)\ldots(m+p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (m+1)(m+2)\ldots(m+p) \\ &= (m+1)(m+2)\ldots(m+p)\big[\frac{m}{p+1} + 1\big] \\ &= \frac{1}{p+1}(m+1)(m+2)\ldots(m+p)(m+1+p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her $p = 2, 3, \ldots$ için $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, her $p = 2, 3, \ldots$ için $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(d) $3 = \dfrac{10^{1+1} - 9.1 - 10}{27} = \dfrac{81}{27} = 3$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{k-kez} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $\underbrace{33\ldots33}_{k+1-kez}$'ü ilave edrsek

$$\begin{aligned} 3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{n-kez} + \underbrace{33\ldots33}_{k+1-kez} &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} + \underbrace{3.3.\ldots3.3}_{k+1-kez} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} \underbrace{33\ldots33}_{k+1-kez} &= 3.10^k + 3.10^{k-1} + \ldots + 3.10 + 3.10^0 \\ &= 3(10k + 10^{k-1} + \ldots + 10 + 10^0) = 3.\frac{10^{k+1} - 1}{10 - 1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + \underbrace{33\ldots33}_{k+1-kez} &= \frac{10^{k+1} - 9k - 10 + 9.10^{k+1} - 9}{27} \\ &= \frac{10^{k+2} - 9(k+1) - 10}{27} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $D(k) = G(k)$ ise $D(k+1) = G(k+1)$ olduğu görülür. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(e) $\sqrt{2} = 2\cos(\pi/2^{1+1}) = 2\cos(\pi/4)$ olduğundan $D(1) = G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda, $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = 2\cos\left(\pi/2^{k+1}\right)$ geçerlidir. Buradan da

$$\begin{aligned} D(k+1) &= \sqrt{2+D(k)} = \sqrt{2+2\cos\left(\pi/2^{k+1}\right)} \\ &= \sqrt{2+2\cos\left(2.\pi/2^{k+2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\pi/2^{k+2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\pi/2^{k+2}\right) = G(k+1) \end{aligned}$$

elde edlir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(f) $1.(5) = \dfrac{5+(4.1-1)5^{1+1}}{16} = 5$ olduğundan $D(1) = G(1)$ dir. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + k.(5)^k = \frac{5+(4k-1)5^{k+1}}{16}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(k+1).(5)^{k+1}$ ilave edersek

$$\begin{aligned} &1.(5) + 2.(5)^2 + 3.(5)^3 + \ldots + k.(5)^k + (k+1).(5)^{k+1} \\ &\quad = \frac{5+(4k-1)5^{k+1}}{16} + (k+1).(5)^{k+1} \\ &\quad = \frac{5+20k5^{k+1}+15.5^{k+1}}{16} = \frac{5+[4(k+1)-1]5^{k+2}}{16} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.
(g) $a = \dfrac{a(r^1-1)}{r-1} = a$ olduğundan $D(1) = G(1)$ dir. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{k-1} = \frac{a(r^k-1)}{r-1}$$

geçerlidir. Her iki tarafa ar^k yı ilave edersek

$$\begin{aligned} a + a.r + a.r^2 + \ldots + a.r^{k-1} + ar^k &= \frac{a(r^k-1)}{r-1} + ar^k \\ &= \frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $D(k+1) = G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur. $\diamond$

(9) Matematik indüksiyon metodu ile aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $n^{n+1} > (n+1)^n$;
(b) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$;
(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2!.4!\ldots(2n)! \geq [(n+1)!]^n$;
(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$;
(e) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\cdots.\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

Çözüm: Eşitsizliklerin sol tarafını $D(n)$, sağtarafını ise $G(n)$ ile gösterildiğini farzedelim.
(a) $3^{3+1} > (3+1)^3$ olduğundan $D(3) = G(3)$ tür. Farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$k^{k+1} > (k+1)^k \tag{1.5}$$

geçerlidir. $n = k+1$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim. (1.5) eşitsizliğinin her iki tarafını $\dfrac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} (k+1)^{k+2} > \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} &= \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} \\ &= (k+2+\frac{1}{k})^{k+1} > (k+2)^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) > G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) > G(n)$ eşitsizliği tüm $n \geq 3$ doğal sayıları için doğrudur.
(b) $(2.2)! < 2^{2.2}(2!)^2$, yani $4! < 8.4$ olduğundan $D(2) < G(2)$olur. Farzedelim ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$$

geçerlidir. $n = k+1$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(2k+2)! = (2k)!(2k+1)(2k+2) &< 2^{2k}(k!)^2(2k+1)(2k+2) < \\ &< 2^{2k}(k!)^2(2k+2)^2 = 2^{2(k+1)}((k+1)!)^2\end{aligned}$$

olur. Bu ise, $D(k+1) < G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği tüm $n \geq 2$ doğal sayıları için doğrudur.
(c) $2! \geq [(1+1)!]^1$ olduğundan $D(1) \geq G(1)$olur. Farzedelim ki, $D(n) \geq G(n)$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$2!.4!\ldots(2k)! \geq [(k+1)!]^k$$

geçerlidir. $n = k+1$ için de bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}2!.4!\ldots(2k)!(2k+2)! &\geq [(k+1)!]^k(2k+2)! \\ &= \frac{[(k+2)!]^k}{(k+2)^k}(2k+2)! \\ &= [(k+2)!]^{k+1}.\frac{k+3}{k+2}.\frac{k+4}{k+2}\cdots\frac{2k+2}{k+2} \\ &> [(k+2)!]^{k+1}\end{aligned}$$

olur. Bu ise, $D(k+1) \geq G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği tüm $n = k$ doğal sayıları için doğrudur.
(d) $D(n) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$ olmak üzere verilen eşitsizlik $D(n) > 1$ biçiminde yazılabilir. $n = 1$ için

$$D(1) = \sum_{k=1}^{2+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$$

olduğu açıktır. Farzedelim ki, $D(n) > 1$, $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

geçerlidir. Her iki tarafa

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

ifadesini ilave edersek

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \\ &\quad > 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} \\ &\quad = 1 + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $D(k+1) > 1$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) > 1$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur.
(e) $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan, $D(1) < G(1)$ olur. Farzedelim ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

geçerlidir. $n = k+1$ için de bu eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2} &< \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.\frac{\sqrt{2k+3}}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.\sqrt{\frac{4k^2+8k+3}{4k^2+8k+4}} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}\end{aligned}$$

Bu ise, $D(k+1) < G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) < G(n)$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur. $\diamond$

(10) Aynı işratli $x_i > -1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ sayıları ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ile verilen Bernoulli eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: $D(n) = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)$ ve $G(n) = 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. $D(1) = 1 + x_1 = G(1)$ olduğu aşikardır. Farzedelim ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

geçerlidir. Her iki tarafı $1 + x_{k+1} \geq 0$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \\ &\quad + (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1},\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $x_i,\ i = 1, 2, \ldots$ sayıları aynı işaretli olduğundan

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{k+1} \geq 0$$

dır. Böylece, $D(k) \geq G(k)$ ise, $D(k+1) \geq G(k+1)$ olduğunu gösterir. Demek ki, $D(n) \geq G(n)$ eşitsizliği tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için doğrudur. $\diamond$

(11) $n \in \mathbb{N}$ için $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısının 19 ile bölünebileceğini gösteriniz.

Çözüm: $5.2^{3-2} + 3^{3-1} = 19$ sayısının 19 ile bölüneceği aşikardır. Farzedelim ki, $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısı $n = k$ için 19 ile bölünür. Bu durumda, $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $5.2^{3k-2}+3^{3k-1} = 19p$ geçerlidir. $5.2^{3k+1}+3^{3k+2}$ sayısının 19 ile bölüneceğini gösterelim.

$$\begin{aligned}5.2^{3k+1} + 3^{3k+2} &= 8.5.2^{3k-2} + 27.3^{3k-1} \\ &= 8(5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19.3^{3k-1} \\ &= 8.19p + 19.3^{3k-1}\end{aligned}$$

olduğundan ve $8.19p + 19.3^{3k-1}$ sayısı 19 ile bölündüğünden $5.2^{3k+1} + 3^{3k+2}$ sayısı19 ile bölünür. Matematik indüksiyon prensibine göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ sayısı19 ile bölününür. $\diamond$

(12) $a_0 = 2,\ a_1 = \dfrac{5}{2}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $a_n = \dfrac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $a_n = 2^n + 2^{-n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_0 = 2 = 2^0 + 2^0 = 2,\ a_1 = \dfrac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}$ olduğu açıktır. Farzedelim ki, $a_n = 2^n + 2^{-n}$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda,

$$a_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{-k+1} \text{ ve } \ a_k = 2^k + 2^{-k}$$

geçerlidir. $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-k-1}$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \frac{5}{2}a_k - a_{k-1} \\ &= \frac{5}{2}(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-k+1}) \\ &= (2 + 2^{-1})(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-k+1}) \\ &= 2^{k+1} + 2^{-k+1} + 2^{k-1} + 2^{-k-1} - 2^{k-1} - 2^{-k+1} \\ &= 2^{k+1} + 2^{-k-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-k-1}$ olduğunu gösterir. Demek ki, $a_n = 2^n + 2^{-n}$ eşitliği tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayıları için doğrudur. $\diamond$

1.12 Ek Problemler

(13) $\mathbb{N}$ kümesinde (d), (f) ve (h) özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

(14) $\mathbb{Z}$ kümesinde (a), (c) ve (d) özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

(15) $\sqrt{3},\ \sqrt{6},\ \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3}$ ve $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sayılarının irrasyonel olduklarını gösteriniz.

(16) $\sqrt{ab}$ irrasyonel sayı ise p ve q iki rasyonel sayı olmak üzere $p\sqrt{a}+q\sqrt{b}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

(17) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ sayısının bir cebirsel sayı olduğunu gösteriniz.

(18) Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu Matematik İndüksiyon metodu ile gösteriniz.

(a) $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1}{2}$;

(b) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$;

(c) $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+[a(n-1)d] = \dfrac{1}{2}[2a(n-1)d], \quad a,d \in \mathbb{R}$;

(d) $1.2+2.5+\ldots+n(3n-1) = n^2(n+1)$;

(e) $1.2+2.3+\ldots+(n-1)n = \dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$;

(f) $2.1+3.2+\ldots+(n+1)2^{n-1} = n2^n$;

(g) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(h) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)n^2 = \dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$;

(i) $1.2^2+2.3^2+\ldots+(n-1)n^2 = \dfrac{1}{12}n(n^2-1)(3n+2)$;

(j) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

(k) $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

(l) $1^4+2^4+\ldots+n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

(m) $1^5+2^5+\ldots+n^5 = \dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$;

(p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

(q) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1}(n+2)(n+3)$;

(r) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)} = \frac{1}{m}\Big[\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)\ldots(n+m-1)}\Big], \; m \in \mathbb{N}$;

(s) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha+kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin(\alpha+\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$;

(t) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha+kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos(\alpha+\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$;

(u) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} + \ldots + \arctan\dfrac{1}{2n^2} = \arctan\dfrac{n}{n+1}$;

(v) $(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{9})\ldots(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}) = \dfrac{n+2}{2n+2}$;

(w) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n} = 3-\dfrac{2n+3}{2^n}$;

(x) $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n-kez} = \dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}$;

(y) $\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{x}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{x}{2^n}\cot x, \quad x \neq m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$.

(19) Matematik İndüksiyon yöntemi ile aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $n! < \big(\dfrac{n+1}{2}\big)^n$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n!)^2 > n^n$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $(n!)^2 < \big(\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\big)^n$;

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n!)^4 < n^n\big(\dfrac{n+1}{2}\big)^{3n}$;

(e) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$;

(g) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}<2$;

(h) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $1<\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{n}$;

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n<\big(1+\dfrac{1}{2^n}\big)^{2n}$;

(j) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$;

(k) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$;

(l) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n})^n<2^n$;

(m) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}>1$;

(n) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a>1$ için $0<\sqrt[n]{a}-1<\dfrac{a-1}{n}$;

(o) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a,b>0$ için $|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}|<\sqrt[n]{|a-b|}$;

(p) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a,b\geq 0$ için $a^n+b^n|\leq(a+b)^n$;

(q) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a,b\geq 0$ için $(a+b)^n\leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$;

(r) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\big(\dfrac{n}{e}\big)^n<n!<e\big(\dfrac{n}{2}\big)^n$;

(s) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n>e^{1-\frac{1}{n}}$;

(t) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$.

(20) $a_1,\ldots,a_n$ ve $b_1,\ldots,b_n$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$\big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\big)^2\leq\big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\big)\big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\big)$$

şeklinde verilen Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ispatlayınız.

(21) $a_i\in\mathbb{R}_+,\ i=1,2,3,\ldots,n$ ve

$$\gamma_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\qquad\text{(Harmonik Ortalama)},$$

$$\eta_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\qquad\text{(Geometrik Ortalama)},$$

$$\xi_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\qquad\text{(Aritmetik Ortalama)}$$

olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\gamma_n\leq\eta_n\leq\xi_n$ eşitsizliğinin ve ayrıca,

$$(\gamma_n=\eta_n=\xi_n)\Leftrightarrow(x_1=x_2=\ldots=x_n)$$

ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

(22) $\forall n\in\mathbb{N}$ için

(a) $n(2n^2-3n+1)$ sayısının 6 ile;

(b) n^5-n sayısının 5 ile;

(c) 12^n+10 sayısının 11 ile;

(d) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ sayısının 133 ile;

(e) $3.5^{2n-1}+2^{3n-2}$ sayısının 17 ile;

(f) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ sayısının 11 ile;

(g) $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ sayısının 11 ile;

kalansız bölündüğünü gösteriniz.

(23) $a_0=2,\ a_1=3$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$ ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n=2^n+1$ olduğunu gösteriniz.

(24) $a_1=2$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n=3a_{n-1}+1$ ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n=\dfrac{1}{2}[5.3^{n-1}-1]$ olduğunu gösteriniz.

(25) $a_1,\ a_2\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_{n+2}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$ ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_n=\frac{2a_2+a_1}{3}-(-1)^{n-1}.\frac{a_2-a_1}{3.2^{n-1}}$$

olduğunu gösteriniz. a_n sayılarına Fibonacci sayıları denir.

(26) $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2^{n-1} - 1)a_2 - (2^{n-1} - 2)a_1$$

olduğunu gösteriniz.

(27) $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2-n)a_1 + (n-1)a_2 + 1 - \frac{3}{2}n + \frac{n^2}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

(28) $a_1 = a_2 = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\Big)$$

olduğunu gösteriniz.

(29) $a_1 = a,\ a_2 = b$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = (2a - 2b + (2b-a)n)2^{1-n}$$

olduğunu gösteriniz.

(30) n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

(31) Rasyonel katsayılı polinom denklemler kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

(32) Cebirsel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

1.13 Reel Sayılar Kümesinin Tamlığı ile İlgili Esas Prensipler

Reel sayı dizileri konusu Bölüm 2 de daha detaylı incelenecektir. Fakat, $\mathbb{R}$ içindeki kümelerin IV Tamlık aksiyomu ile ilgili ele alacağımız özellikleri

diziler ile ifade etmek oldukça kullanışlı olduğundan, bu kesimde reel sayı dizileri ile ilgili bazı ön bilgilerin verilmesi faydalı olacaktır.

Tanım 1.13.1 : *$a \in \mathbb{R}$ noktası ve $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. $(a-\epsilon,\ a+\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} :\ a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$ açık aralığına a noktasının ϵ-komşuluğu denir ve $U_\epsilon(a)$ ile gösterilir. $U_\epsilon(a)\backslash\{a\}$ kümesine de a'nın delinmiş ϵ-komşuluğu denir ve $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ ile gösterilir.*

Örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$, $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2},\ 0) \cup (0, \frac{1}{2})$,
$U_{\frac{1}{3}}(-1) = (-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3})$, $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{3}}(-1) = (-\frac{4}{3},\ -1) \cup (-1, -\frac{2}{3})$ olduğu açıktır.

Tanım 1.13.2 : *$E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. a'nın her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ komşuluğunda E kümesinin en az bir elemanı varsa a noktasına E kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir.*

Örneğin, $E = [0,1]$ kümesinin her noktası $(0,1),\ (0,1],\ [0,1)$ ve $[0,1]$ kümelerinin bir limit noktasıdır. Tanımdan ve bu örnekten de görüldüğü gibi bir kümenin limit noktası kümenin kendisine ait olmayabilir.

$\mathbb{R}$ nin her noktası $\mathbb{Q}$ nun bir limit noktasıdır.

$E = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yalnızca bir $0 \in \mathbb{R}$ limit noktası vardır.

Eğer, $a \in \mathbb{R}$ noktası E nin bir limit noktası ise, her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(a)$ komşuluğunda E nin sonsuz sayıda elemanı vardır.

Tanım 1.13.3 : *$E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.*

(a) Eğer, $a \in E$ ve $U_\epsilon(a) \subset E$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa a ya E nin bir iç noktası denir. E nin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve E^0 ile gösterilir.

(b) Eğer, $E^0 = E$ ise E ye $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir.

Örnek 1.13.4 : *(a) $a \in \mathbb{R}$ noktasının her $U_\epsilon(a)$ komşuluğu bir açık kümedir. Gerçekten, herhangi $x \in U_\epsilon(a)$ noktası verildiğinde $\delta = \epsilon - |x-a| > 0$ sayısı ve $\forall y \in U_\delta(x)$ elemanı için*

$$|y-a| \le |y-x| + |x-a| < \delta + |x-a| = \epsilon$$

olduğundan $y \in U_\delta(a)$ olur. Bu ise, $U_\delta(x) \subset U_\delta(a)$ olması demektir.
(b) $\mathbb{R}$ içindeki her (a,b) $(a,b \in \mathbb{R})$ aralığı açık kümedir. Gerçekten, $x_0 = (a+b)/2$ ve $\epsilon = (b-a)/2$ olmak üzere $(a,b) = U_\epsilon(x_0)$ yazabiliriz.

Teorem 1.13.5 *: (a) $\emptyset$ ile $\mathbb{R}$ açık kümelerdir.*
(b) Sonlu sayıdaki açık kümelerin kesişimi bir açık kümedir.
(c) Herhangi sayıdaki açık kümelerin birleşimi bir açık kümedir.

Sonsuz sayıdaki açık kümelerin kesişimi bir açık küme olmayabilir. Örneğin, $E_n = (-1-\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ kümeleri açık oldukları halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{-1\}$ olup açık değildir.

Not: Daha sonra $a \in \mathbb{R}$ noktası için $a \in E$ olacak şekilde her açık $E \subset \mathbb{R}$ kümesine a nın bir komşuluğu, $E\backslash\{a\}$ kümesine de a nın bir delinmiş komşuluğu diyecek ve sırası ile $U(a)$ ve $U^\circ(a)$ ile göstereceğiz. (Bkz. Tanım1.13.1). Buna göre, $a \in \mathbb{R}$ noktasının her $U(a)(U^\circ(a))$ komşuluğunun $U_\epsilon(a) \subset U(a)$ $(U^\circ_\epsilon(a) \subset U^\circ(a))$ olacak şekilde a nın bir ϵ komşuluğunu (a nın delinmiş bir ϵ komşuluğunu) içerdiği açıktır. •

Tanım 1.13.6 *: $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.*

(a) Eğer, E kümesinin her limit noktası E nin bir elemanı ise, E ye $\mathbb{R}$ de kapalı bir küme denir. Başka bir ifade ile, eğer, $E^c = \mathbb{R}\backslash E$ kümesi bir açık küme ise , E ye kapalı küme denir. E nin limit noktalarının kümesi E' ile gösterilir.

(b) Eğer, $a \in E$ ve a noktası E nin bir limit noktası değilse, a ya E nin bir izole (yalıtık) noktası adı verilir.

Her $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığı kapalı kümedir. Çünkü, $[a,b]$ nin tümleyeni olan $\mathbb{R}\backslash[a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ kümesi iki açık kümenin birleşimi olmak üzere açık kümedir.

$a = 2$ noktası $E = [-1,1] \cup \{2\}$ kümesinin izole noktasıdır. Gerçekten, her $0 < \delta < 1/2$ sayısı için $E \cap U_\delta(2) = \{2\}$ olduğundan, $2 \in E$ noktası E nin limit noktası olamaz.

Teorem 1.13.7 *: (a) $\emptyset$ ile $\mathbb{R}$ kapalı kümelerdir.*
(b) Sonlu sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi de bir kapalı kümedir.
(c) Herhangi sayıdaki kapalı kümelerin kesişimi bir kapalı kümedir.

Sonsuz sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi kapalı olmayabilir. Örneğin, $E_n = [-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ kümeleri kapalı oldukları halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (-1,1)$ kümesi kapalı değildir.

Tanım 1.13.8 *: $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. Eğer, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ için $U_\epsilon(a) \cap E \neq \emptyset$ ise, a noktasına E nin bir kapanış noktası denir. E nin kapanış noktalarının kümesi $\bar{E}$ ile gösterilir.*

Örneğin, $[-1,2]$ aralığının her noktası $E = [-1,2)$ kümesinin bir kapanış noktasıdır. Herhangi $x \notin [-1,2]$ noktası $E = [-1,2)$ nin kapanış noktası olamaz. Çünkü, $\forall x \notin [-1,2]$ için $0 < \delta < \min\{|1+x|, |x-2|\}$ olmak üzere $U_\delta(x) \cap [-1,2) = \emptyset$ dir.

Teorem 1.13.9 *: $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.*

(a) $\bar{E}$ bir kapalı kümedir.

(b) $\bar{E} = E \cup E'$ dür.

(c) E kapalıdır $\Leftrightarrow E = \bar{E}$.

Teorem 1.13.10 *: Boş olmayan $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.*

(a) E üstten sınırlı ve $b = \sup E$ ise, $b \in \bar{E}$ dir.

(b) E alttan sınırlı ve $a = \inf E$ ise, $a \in \bar{E}$ dir.

Tanım 1.13.11 *: $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. $A \cap B = \emptyset$, $E \cap A \neq \emptyset$, $E \cap B \neq \emptyset$ ve $E \subset (A \cup B)$ olacak şekilde A ve B açık kümeleri yoksa, E ye bağlantılı küme adı verilir. $E \subset \mathbb{R}$ kümesi bağlantılı değilse, E ye bağlantısız küme denir.*

Örneğin, $E = [0,1) \cup [2,3]$ kümesi bağlantısızdır. Gerçekten,
$A = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ ve $B = (-\frac{5}{3}, \frac{10}{3})$ açık kümeleri için $A \cap B = \emptyset,\ E \cap A = [0,1) \neq \emptyset,\ E \cap B = [2,3] \neq \emptyset$ ve $E \subset (A \cup B)$ olduğundan E kümesi bağlantısızdır.

Teorem 1.13.12 *: $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ $x \in E,\ y \in E$ ve $x < z < y$ ise, $z \in E$ dir.*

Bu özelliğe $\mathbb{R}$ nin bağlantılılık özelliği denir.

Sonuç 1.13.13 *: $\mathbb{R}$ içindeki E kümesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul a ve b reel sayılar olmak üzere E nin $(-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty),\ (a, b),\ [a, b),\ (a, b]$ ve $[a, b]$ kümelerinden biri olmasıdır. $\mathbb{R}$ bağlantılıdır.*

Tanım 1.13.14 *: Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan her f fonksiyonuna dizi adı verilir. O halde, bir dizi $f : \mathbb{N} \to X$ şeklinde bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f : n \to x_n = f(n) \in X$ yazılabilir. $x_n = f(n) \in X$ elemanına dizinin genel terimi (veya n inci terimi) adı verilir ve bu dizi kısaca (x_n) ile gösterilir. $X \subset \mathbb{R}$ durumunda $f : n \to x_n = f(n) \in X$ dizisine reel sayı dizisi adı verilir. (x_n) reel sayı dizisi olduğunda bu diziye $\mathbb{R}$ içinde bir dizi diyeceğiz.*

$\{x_n :\ n = 1, 2, \ldots\}$ kümesine (x_n) dizisinin değer (veya değişim) kümesi denir ve $\mathcal{R}(x_n)$ ile gösterilir. Bir dizinin değer kümesi sonlu veya sonsuz bir küme olabilir. Örneğin, $x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N};\ y_n = n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$ dizileri için sırası ile
$\mathcal{R}(x_n) = \{-1, 1\},\ \mathcal{R}(y_n) = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \frac{1}{2n+1}, \ldots\}$ dir.

Tanım 1.13.15 *: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin.*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi üstten sınırlıdır denir. b sayısına da (x_n) dizisinin bir üst sınırı adı verilir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \leq x_n$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi alttan sınırlıdır denir. a sayısına da (x_n) dizisinin bir alt sınırı adı verilir.

(c) Hem alttan hem de üstten sınırlı olan bir diziye sınırlı dizi denir.

Başka bir ifade ile, eğer, $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisinin $\mathcal{R}(x_n)$ değer kümesi üstten (alttan) sınırlı bir küme ise (x_n) dizisine üstten (alttan) sınırlı dizi adı verilir. $\mathcal{R}(x_n)$ kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Örneğin,

(a) $x_n = 2 + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi sınırlıdır.

(b) $x_n = -n,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi üstten sınırlıdır.

(c) $x_n = n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi alttan sınırlıdır.

Tanım 1.13.16 *: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin.*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1},\ (x_n \leq x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine artan (azalmayan) dizi;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1},\ (x_n \geq x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine azalan (artmayan) dizi;

(c) Artan veya azalan (azalmayan ya da artmayan) bir diziye monoton dizi denir.

Tanım 1.13.17 *: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. (n_k), $\mathbb{N}$ içinde terimleri $\forall k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ koşulunu sağlayan bir dizi olmak üzere (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin alt dizisi denir.*

Örneğin, $(2k)$ ve $(\frac{1}{2k-1})$ dizileri $(n^{(-1)^n})$ dizisinin birer alt dizisidir. Gerçekten, $x_n = n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n_k = 2k$ için $x_{n_k} = 2k$ ve $n_k = 2k - 1$ için $x_{n_k} = \frac{1}{2k-1}$ olduğu açıktır.

Her bir dizinin sonsuz sayıda alt dizisi vardır.

Tanım 1.13.18 : $\mathbb{R}$ *içinde bir* (x_n) *dizisi ve* $a \in \mathbb{R}$ *sayısı verilmiş olsun. Eğer,* $\forall \epsilon > 0$ *için* $n > n_\epsilon$ *olduğunda* $|x_n - a| < \epsilon$ *olacak şekilde* ϵ *na bağlı* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa,* (x_n) *dizisi a ya yakınsaktır denir ve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ veya } x_n \to a \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yazabiliriz:
(x_n) yakınsaktır $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\forall n > n_\epsilon$ çin $|x_n - a| < \epsilon$ dur.
(x_n) ıraksaktır $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ için $\exists \epsilon > 0$ öyle ki, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ çin $|x_n - a| \geq \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n > n_0$ doğal sayısı vardır.

Bir reel sayı dizisinin yakınsaklık durumunu Tanım1.13.18 gereğince incelerken bu dizinin yakınsadığı noktanın bilinmesi gerekir. Fakat, verilen bir dizinin terimlerinin değişme özelliklerine göre bu dizinin yakınsaklık durumunun doğrudan doğruya incelenebilmesi olanaklarının bulunması önem taşımaktadır. Bu yönde monoton ve Cauchy dizilerinden oluşan dizi sınıfları için mevcut olan aşağıdaki önemli sonuçları verebiliriz.

Teorem 1.13.19 : *Monoton artan ve üstten sınırlı her* (x_n) *reel sayı dizisi yakınsaktır, ayrıca,* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{R}(x_n)$ *dir.*

Teorem 1.13.20 : *Monoton azalan ve alttan sınırlı her* (x_n) *reel sayı dizisi yakınsaktır, ayrıca* $\lim_{n\to 0} x_n = \inf \mathcal{R}(x_n)$ *dir.*

Teorem 1.13.19 ve Teorem 1.13.20 de ifade edilen özelliklere monoton dizi özelliği denir.

Tanım 1.13.21 : $\mathbb{R}$ *içinde bir* (x_n) *dizisi verilsin.* $\forall \epsilon > 0$ *için* $n, m > n_\epsilon$ *olduğunda* $|x_n - x_m| < \epsilon$ *olacak şekilde* ϵ *na bağlı bir* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sayısı varsa* (x_n) *dizisine bir Cauchy dizisi denir.*

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yazabiliriz: $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$, $\forall m > n_\epsilon (n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N})$ için $|x_n - x_m| < \epsilon$ dur.

Teorem 1.13.22 : $\mathbb{R}$ *içindeki her yakınsak dizi aynı zamanda bir Cauchy dizisidir.*

Teorem 1.13.23 : *Eğer,* $\mathbb{R}$ *içindeki bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi* $a \in \mathbb{R}$ *noktasına yakısarsa* (x_n) *dizisinin kendisi de a ya yakınsar.*

Teorem 1.13.24 : $\mathbb{R}$ *içindeki bir* (x_n) *dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* (x_n) *nin bir Cauchy dizisi olmasıdır. (Bu özelliğe Cauchy yakınsaklık kriteri ya da Cauchy dizi özelliği denir).*

Tanım 1.13.25 : *Terimleri herhangi* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *kümelerinden oluşan* (E_n) *dizisi verilmiş olsun. Eğer,*

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

(veya kısaca $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $E_n \supset E_{n+1}$*) ise,* (E_n) *dizisine iç içe kümeler dizisi adı verilir.*

Lemma 1.13.26 (Cantor Prensibi) : (I_n), $\mathbb{R}$ *içinde bir birinin içine giren kapalı ve sınırlı aralıkların bir dizisi ise,* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ *olur. Ayrıca,* $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ *için uzunluğu* $|I_n| < \epsilon$ *olacak şekilde bir* I_n *aralığı varsa* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *kesişimi yalnızca bir noktadan oluşur.*

Bu özelliğe iç içe aralıklar özelliği denir.

Tanım 1.13.27 : $\mathbb{R}$ *de açık aralıkların bir ailesi* $G = (G_i)_{i\in L}$ *olsun. Eğer,* $E \subset \mathbb{R}$ *alt kümesi için* $E \subset \bigcup_{i\in L} G_i$ *ise, G ailesine E kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer,* $L_0 \subset L$ *sonlu bir küme ve* $E \subset \bigcup_{i\in L_0} G_i$ *ise,* $(G_i)_{i\in L_0}$ *ailesine E kümesinin sonlu alt örtüsü denir.*

Tanım 1.13.28 : *Eğer,* $E \subset \mathbb{R}$ *alt kümesinin her açık örtüsünden bu kümeyi örten sonlu alt örtü seçilebiliyorsa, E ye* $\mathbb{R}$ *de kompakt bir küme adı verilir.*

Lemma 1.13.29 (Heine-Borel Prensibi) *: $\mathbb{R}$ nin herhangi kapalı ve sınırlı alt kümesinin her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebilir.*

Teorem 1.13.30 *: $\mathbb{R}$ içindeki sonsuz elemanlı her E alt kümesi aşağıdaki üç özellikten birine sahip ise, diğer ikisine de sahiptir.*

(a) E kapalı ve sınırlıdır.

(b) E kompakttır.

(c) E kümesinin her sonsuz alt kümesi E'de bir limit noktasına sahiptir.

Bu Teoreme göre:

$E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi kompakt olması için gerek ve yeter koşul E nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Lemma 1.13.31 (Bolzano Weierstrass Prensibi) *: $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve sonsuz elemanlı her alt kümesinin en az bir limit noktası vardır.*

Sonuç 1.13.32 *: Her sınırlı reel sayısı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.*

Lemma 1.13.33 *: $\mathbb{R}$ bağlantılı ise,* sup *özelliği vardır.*

Lemma 1.13.34 (Dedekind Prensibi) *: A ve B, $\mathbb{R}$ nin aşağıdaki koşulları sağlayan iki alt kümesi olsun.*

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \in A$ veya $x \in B$ dir;

(b) $A, B \neq \emptyset$ ve $A \cap B = \emptyset$ dir;

(c) $a \in A$ ve $b \in B$ ise, $a < b$ dir.

Bu durumda, $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a \leq \gamma \leq b$ olacak biçimde tek bir $\gamma \in \mathbb{R}$ elemanı vardır. $\gamma \in A$ ise γ, A nın maksimal elemanıdır ve $\gamma \in B$ ise γ, Bnin minimal elemanıdır.

§1.7 de $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini I-IV aksiyomlar takımını gerçekleyen bir küme gibi tanımladık. Daha sonra IV Tamlık aksiyomundan hareket ederek $\mathbb{R}$ nin sup ve Archimet özelliklerine sahip olduklarını gördük. (Bkz. Teorem 1.7.4 ve Teorem 1.10.4). Şimdi amacımız, bu kesimde söylenilen monoton dizi ve Cauchy dizisi, $\mathbb{R}$ bağlantılıdır özelliklerinin ve Cantor, Heine-Borel, Bolzano-Weierstrass ve Dedekind prensiplerinden her birinin diğerini gerektirdiğini göstermektir.

Teorem 1.13.35 *: $\mathbb{R}$ üzerinde I,II,III,(I,III) ve (II,III) aksiyomları sağlandığında aşağıdaki önermeler doğrudur:*

(a) [IV Tamlık aksiyomu] $\Rightarrow$ [sup özelliği]*;*

(b) [sup özelliği] $\Rightarrow$ [Archimet Prensibi]*;*

(c) [sup özelliği] $\Rightarrow$ [monoton dizi özelliği]*;*

(d) [sup özelliği] $\Rightarrow$ [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır]*;*

(e) [sup özelliği] $\Rightarrow$ [Heine-Borel Prensibi]*;*

(f) [Heine-Borel Prensibi] $\Rightarrow$ [Cantor Prensibi]*;*

(g) [Heine-Borel Prensibi] $\Rightarrow$ [Bolzano-Weierstrass Prensibi]*;*

(h) [Archimet Prensibi+İç içe aralıklar Prensibi]
$\Rightarrow$ [Bolzano-Weierstrass Prensibi]*;*

(i) [Bolzano-Weierstrass Prensibi] $\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği]*;*

(j) [Cauchy dizi özelliği] $\Rightarrow$ [Monoton dizi özelliği]*;*

(k) [Archimet Prensibi+Monoton dizi özelliği] $\Rightarrow$ [sup özelliği]*;*

(l) [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır] $\Rightarrow$ [sup özelliği]*;*

(m) [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır] $\Rightarrow$ [Dedekind Prensibi]*;*

(n) [Dedekind Prensibi] $\Rightarrow$ [Tamlık Aksiyomu]*;*

(o) [Archimet Prensibi+İç içe aralıklar Prensibi] $\Rightarrow$ [sup özelliği]*;*

(p) [Archimet Prensibi+Monoton dizi özelliği] $\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği]*;*

İspat: (a) ve (b) şıklarının ispatı Teorem 1.7.4 ve Teorem 1.10.4 de verilmiştir. Biz diğerlerinin ispatını verelim:

(c) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi olsun. $\mathcal{R}(x_n)$ üstten sınırlı olduğundan $B = \sup \mathcal{R}(x_n)$ sayısı vardır. Supremumun karakteristik özelliği gereğince

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq B$ dir ve

2. $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ çin $x_{n_\epsilon} > B - \epsilon$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ sayısına bağlı bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. (x_n) monoton artan olduğundan $\forall n > n_\epsilon$ için $x_{n_\epsilon} \leq x_n$ dir. Dolayısıyla, $\forall n > n_\epsilon$ için

$$B - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n \leq B < B + \epsilon,$$

yani $|x_n - B| < \epsilon$ olduğu elde edilir. Demek ki, (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{R}(x_n)$ dir.

(d) $\mathbb{R}$ nin bağlantısız olduğunu varsayalım. Bu durumda, $A \cap B = \emptyset$ ve $\mathbb{R} \subset A \cup B$ olacak şekilde boş olmayan $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ açık kümeleri vardır. $x \in A$, $y \in B$ ve $x < y$ olsun. $S = A \cap [x, y]$ kümesi üstten sınırlı olduğundan $z = \sup S$ sayısı vardır.

Eğer, $z \in A$ ise $z < y$ olur ve $\exists h \in \mathbb{R}_+$ dir öyle ki, $[z, z + h] \subset A$ ve $[z, z + h] \subset [x, y]$ dir. Bu ise, $z = \sup S$ olduğu ile çelişdiğinden $z \notin A$ dır.

Eğer, $z \in B$ ise $x < z$ olur ve $\exists h \in \mathbb{R}_+$ dır öyleki, $[z - h, z] \subset B$ ve $[z - h, z] \in [x, z]$ dir. Bu ise, $z = \sup S$ olduğu ile çelişdiğinden $z \notin B$ dir. Böylece, $z \notin A$ ve $z \notin B$ olduğu elde edilir. Bu ise, $[x, y] \subset \mathbb{R}$ olduğu ile çelişdiğinden varsayımın doğru olmadığı görülür.

(e) Boş olmayan kapalı ve sınırlı $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilmiş olsun. Bu durumda, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı bir aralık olmak üzere $E \subset [a, b]$ dir.

$G = \{G_i\}_{i\in L}$, $[a, b]$ aralığının herhangi bir açık örtüsü olsun.
$F = \{x \in [a, b] : [a, x]$, G ailesinin sonlu bir alt ailesince örtülür$\}$ alt kümesini gözönüne alalım. Sonuçta $F = [a, b]$ olduğunu gösterebilirsek, istediğimiz özellik elde edilmiş olur. $a \in F$ olduğundan $F \neq \emptyset$ dir. Ayrıca, $\forall x \in F$ için $x \leq b$ olduğundan F üstten sınırlıdır. $\mathbb{R}$ deki sup özelliği gereğince, $c = \sup F$ sayısı vardır. Ayrıca, $c \in \bar{F}$ ve

$$F \subset [a, b] \Rightarrow \bar{F} \subset \overline{[a, b]} = [a, b]$$

olduğundan $c \in [a, b]$ olduğu elde edilir.

$c \in [a, b] \subset \cup_{i\in L} G_i \Rightarrow c \in G_{i_\circ}$ olacak biçimde bir $i_o \in L$ doğal sayısı vardır. Buradan da G_{i_0} açık bir küme olduğundan $U_\epsilon(c) \subset G_{i_0}$ olacak şekilde bir $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısının var olduğu elde edilir. Supremumun karakteristik özelliklerine göre $c = \sup F$ ise $c - \epsilon < x \leq c$ olacak şekilde bir $x \in F$ noktası vardır. F nin tanımı gereğince, $[a, x]$ aralığı $L_0 \subset L$ sonlu bir küme olmak üzere $\{G_i\}_{i\in L_0}$ sonlu alt ailesi tarafından örtülür. Şimdi ispatlamak istediğimizin tersini varsayıp $c < b$ olduğunu düşünelim. Bu koşullar altında $[a, a + \epsilon/2]$ aralığı G nin $(\{G_i\}_{i\in L_0}, G_{i_0})$ sonlu alt ailesi tarafından örtülür. Böylece, F nin c den de büyük bir elemanını bulmuş oluruz ki, bu da $c = \sup F$ ile çelişir. O halde, $c = b$ olup $[a, b]$ nin ve buradan da E alt kümesinin her açık örtüsünden sonlu bir alt örtünün seçilebildiği elde edilmş olur.

(f) $(\mathrm{I_n})$, $\mathbb{R}$ içinde iç içe $(\mathrm{I_1} \supset \mathrm{I_2} \supset \ldots \supset \mathrm{I_n} \supset \ldots)$ kapalı ve sınırlı aralıkların bir dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_n = \mathbb{R}\backslash \mathrm{I_n}$ açık bir kümedir. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n} = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset$$

ve

$$\mathbb{R}\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R}\backslash\emptyset \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}$$

olur. $\mathrm{I_1} \subset \bigcup\limits_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{G_n}$ kapsamasında $\mathrm{I_1}$ in kompakt olduğunu kullanırsak, $B_1 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} G_{k_i}$ olacak şekilde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ doğal sayıları vardır.

$k_0 = \max(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ alırsak bu durumda

$$I_1 \subset G_{k_0} \Rightarrow I_1 \cap \mathrm{I_{k_0}} = \emptyset \Rightarrow \mathrm{I_{k_0}} = \emptyset$$

olur ki, bunun da bir çelişki olduğunu biliyoruz. O halde, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n} \neq \emptyset$ olmalıdır.

Şimdi $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n}$ kesişiminin yalnızca bir noktadan oluştuğunu görelim. $c_1, c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n}$ ve $c_1 < c_2$ olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_1, c_2 \in \mathrm{I_n}$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < c_2 - c_1 \leq |\mathrm{I_n}|$ olur. Bu ise, $(\mathrm{I_n})$ iç içe aralıklar dizisinin boyunun sıfıra gitmesi ile çelişir. O halde, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n}$ kesişimi yalnızca bir noktadan oluşur.

(g) E, $\mathbb{R}$ içinde kapalı sınırlı bir aralık, yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $E = [a, b]$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ noktasının E nin bir limit noktası olduğunu gösterelim. $[a, b]$ nin her açık örtüsünden $[a, b]$'yi örten sonlu alt örtünün bulunmadığını varsayalim. Bu durumda, $\forall x \in [a, b]$ noktasının $[a, b]$ nın yalnızca sonlu sayıda noktasının içine alan bir $U_{\delta(x)}(x)$, $(\delta(x) > 0)$ açık aralığı var olacaktı.

$(U_{\delta(x)}(x))_{x \in [a,b]}$ açık aralıklar ailesi $[a, b]$ nin bir açık örtüsü olduğundan Heine-Borel prensibi gereğince $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ sonlu bir alt küme olmak üzere bu örtünün $[a, b]$ yi örten sonlu bir $(U_{\delta(x_i)}(x_i))_{i \in \mathbb{N}_0}$ alt örtüsü mevcuttur: $[a, b] \subset \cup_{i \in \mathbb{N}_0} U_{\delta(x_i)}(x_i)$ olur. Fakat, her $U_{\delta(x_i)}(x_i)$ aralığında $[a, b]$ nin yalnızca sonlu sayıda noktası bulunduğundan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U_{\delta(x_i)}(x_i)$ kümesi içinde de $[a, b]$ nin yalnızca sonlu sayıda noktası var olacaktır. Bu ise, $[a, b]$ nin yalnızca sonlu sayıda noktaya sahip olacağı anlamına gelir. Buradan, varsayımın yalnış olduğu görülür.

(h) E, $\mathbb{R}$ içinde sınırlı ve sonsuz elemanlı bir alt küme olsun. E sınırlı olduğundan $E \subset [a, b]$ olacak biçimde bir $\mathrm{I_0} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığı vardır.E alt kümesi sonsuz elemanlı bir küme olduğundan $[a, (a + b)/2]$, $[(a + b)/2, b]$ aralıklarından en az biri içinde E nin sonsuz sayıda elemanı vardır. Söz konusu aralığa $\mathrm{I_1}$ diyelim. O halde, $\mathrm{I_1}$ in uzunluğunun $|\mathrm{I_1}| = (\mathrm{b} - \mathrm{a})/2$ olduğu açıktır. Bu yöntemi ard arda uygularsak

(i) $\mathrm{I_0} \supset \mathrm{I_1} \supset \ldots \supset \mathrm{I_n} \supset \ldots$,

(ii) $\mathrm{I_n}$ nin uzunluğu $|\mathrm{I_n}| = (\mathrm{b} - \mathrm{a})/2^{\mathrm{n}}$ dir.

(iii) $\mathrm{I_n}$ nin içinde E nin sonsuz sayıda elemanı vardır

koşullarını sağlayan bir $(\mathrm{I_n})$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kapalı ve sınırlı aralıklar dizisini elde ederiz. İç içe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ olur. Şimdi bu kesişimin bir tek noktadan oluştuğunu görelim. $c_1, c_2 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ ve $c_1 < c_2$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_1, c_2 \in I_n$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < c_2 - c_1 \leq |I_n| = \frac{b - a}{2^n}$$

yazabiliriz. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2^n > n$ eşitsizliği doğru olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n}$ olur. Öte yandan Archimet prensibine göre $\frac{b-a}{c_2 - c_1} < n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda, elde edilen

$$0 < c_2 - c_1 \leq \frac{b-a}{2^{n_0}} < \frac{b-a}{n_0} < c_2 - c_1$$

eşitsizliği bir çelişki olduğundan $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{I_n}$ kesişiminin tek bir noktadan oluştuğu elde edilir. Bu noktayı c ile gösterelim.

Şimdi $\forall \epsilon > 0$ için $\cup_\epsilon(a)$ komşuluğunda E nin sonsuz sayıda elemanı bulunduğunu görelim. $(\mathrm{I_n})$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dizisinin özellikleri gereğince $\mathrm{I_m} \subset \cup_\epsilon(\mathrm{a})$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu ise, $\cup_\epsilon(c)$ içinde E nin sonsuz sayıda elemanı olduğu ve dolayısıyla, c noktasının E nin bir limit noktası olduğu anlamına gelir.

(i) $\mathbb{R}$ de yakınsak olan her dizinin bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 1.13.22'den görülür. (x_n), $\mathbb{R}$ içinde herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin yakınsak olduğunu görelim. $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (x_n) sınırlı bir dizidir. (Bkz. Problem (3)). Bu durumda, Bolzano-Weierstrass prensibi gereğince (x_n) dizisinin yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Eğer, $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$ dersek Teorem 1.13.23. gereğince (x_n) dizisinin kendisi de a ya yakınsar. Böylece $\mathbb{R}$ de verilen her Cauchy dizisi yakınsaktır.

(j) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde monoton artan ve üstten sınırlı herhangi bir dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olmadığını varsayalım. Bu durumda, (x_n) bir Cauchy dizisi olamaz. O halde, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki her $m > n \geq k_0$ için

$$|x_m - x_n| = x_m - x_n \geq \epsilon$$

olur. Burada $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$ olacak şekilde herhangi $(n_k) \subset \mathbb{N}$ dizisini gözönüne alalım.

$$\begin{gathered} x_{k_2} - x_{k_1} \geq \epsilon, \\ x_{k_3} - x_{k_2} \geq \epsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k_{n+1}} - x_{k_n} \geq \epsilon \end{gathered}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında $x_{k_{n+1}} - x_{k_1} \geq n\epsilon$ eşitsizliği elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{k_{n+1}} > x_{k_1} + n\epsilon$ olduğundan (x_{k_n}) dizisi ve buradan da (x_n) dizisinin üstten sınırsız olduğu elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin üstten sınırlı olması ile çeliştiğinden varsayımın yanlış olduğu görülür.

(k) Boş olmayan üstten sınırlı bir $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. E boş olmadığından bir $x_0 \in E$ elemanı vardır.

Şimdi B sayısı, $B \geq 1$ ve $\forall x \in E$ için $x \leq x_0 + B$ koşullarını sağlayan en küyük doğal sayı olsun. (Böyle bir doğal sayının varlığı, E nin üstten sınırlı olduğundan ve $\mathbb{N}$ nin boş olmayan her alt kümesinin minimal elemanının varlığından görülür). Bu durumda, $x_1 = x_0 + B - 1$ diyelim. Buradan $x_0 \leq x_1$ ve x_1 in E nin bir üst sınırı olmadığı, fakat $x_1 + 1$'in E'nin bir üst sınırı olduğu elde edilir.

Benzer olarak B_1 sayısı, $B_1 \geq 1$ ve $\forall x \in E$ için $x \leq x_1 + \dfrac{B_1}{2}$ koşullarını sağlayan en küçük doğal sayı olsun ve $x_2 = x_1 + \dfrac{B_1 - 1}{2}$ diyelim. (Bu durumda, $B_1 = 1$ veya $B_1 = 2$ dir). Buradan $x_1 \leq x_2$ ve x_2 nin E nin bir üst sınırı olmadığı, fakat $x_2 + \dfrac{1}{2}$ nin E nin bir üst sınırı olduğu görülür.

Burada Matematik indüksiyon yöntemine yöneleceğimiz için yukarıdaki yolla $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in E$ sayılarının bulunmş olduğunu varsayıp, x_k nın

nasıl oluşturulduğunu görelim: B_{k-1} sayısı, $B_{k-1} \geq 1$ ve $\forall x \in E$ için $x \leq x_{k-1} + \dfrac{B_{k-1}}{k}$ koşullarını sağlayan en küçük doğal sayıyı göstersin ve $x_k = x_{k-1} + \dfrac{B_{k-1} - 1}{k}$ diyelim. ($B_{k-1} = 1, 2, \ldots, k$ olabilir). Buradan $x_{k-1} \leq x_k$ ve x_k nın E nin bir üst sınırı olmadığı, fakat $x_k + \dfrac{1}{k}$ nın E nin bir üst sınırı olduğu görülür.

Bu yolla, başka bir ifade ile gerilemeli olarak, (x_k), $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibi monoton artan ve üstten sınırlı reel dizi tanımlamış oluruz. Monoton dizi özelliği gereğince $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Biz şimdi $x = \sup E$ olduğunu gösterelim. Önce x in E nin bir üst sınırı olduğunu görelim. Gercekten, eğer, x sayısı E nin bir üst sınırı olmasydı, $x < a$ olacak biçimde bir $a \in E$ elemanı var olmak zorundaydı.

Archimet prensibi gereğince $0 < \dfrac{1}{a - x} < k$ olacak biçimde en küçük bir k doğal sayısı vardır. Bu durumda, $x_k + \dfrac{1}{k} \leq x + \dfrac{1}{k} < a$ olur ki, bu da x_k nın oluşumuyla çelişir. (Gerçekten,

$$x_k = x_{k-1} + \frac{B_{k-1} - 1}{k} \quad \text{ve} \quad a \leq x_{k-1} + \frac{B_{k-1}}{k}$$

olduğundan $x_k = x_{k-1} + \dfrac{B_{k-1} - 1}{k} \geq a - \dfrac{1}{k}$ bulunması bir çelişkidir).

Supremumun karakteristik özellikleri gereğince, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ için $x - \epsilon < a$ olacak biçimde bir $a \in E$ elemanının varlığını gösterebilirsek ispat tamamlanır. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \Rightarrow x - \epsilon < x_k$ olacak biçimde bir k dogal sayısı vardır. x_k, E nin bir üst sınırı olmadığından, $x_k < a$ olacak biçimde bir $a \in E$ elemanı vardır. Buradan, $x - \epsilon < a$ şartını sağlayan elemanı bulmuş oluruz. Böylece, $x = \sup E$ olduğu elde edilir.

(l) Tersine sup özelliği var olmasın. Bu durumda, boş olmayan üstten sınırlı öyle bir $E \subset \mathbb{R}$ altkümesi vardır ki, $\sup E$ yoktur.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \ x, \ E \text{ nin üst sınırıdır}\}$$

alt kümesini gözönüne alalım. Varsayımımız gereğince B nin minimal elemanı yoktur. $x_0 \in B$ alalım. Bu durumda, $x_0 < x_1$ ise, $x_1 \in B$ dir. Öte

yandan x_0, B nin minimal elemanı olmayacağına göre $x_2 < x_0$ olacak biçimde bir $x_2 \in B$ elemanı vardır. O zaman (x_2, x_1) aralığı, x_0 ın B içinde bir açık komşuluğudur. Böylece, B nin açık küme olduğu görülür. $A = \mathbb{R}\backslash B$ diyelim ve A nın da açık bir küme olduğunu görelim. Bu durumda, $y_0 \notin B$ ve B açık olduğundan $\cup_\epsilon(y_0) \not\subset B$ olacak biçimde bir $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı vardır. Buradan, $\cup_\epsilon(y_0) \subset A$ olduğu ve dolayısıyla, A nın açık küme olduğu anlaşılır. Ayrıca, $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olur ki, bu ve $\mathbb{R} \subset A \cup B$ kapsaması $\mathbb{R}$ nin bağalantılı oluşu ile çelişir. Bu durumda, sup özelliği var olmak zorundadır.

(m) Dedekind prensibindeki (a), (b) ve (c) koşullarını sağlayan iki $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri verilsin. $b \in B$ ise, $\forall a \in A$ için $a \leq b$ olduğundan A üstten sınırlı olan bir kümedir. O zaman, (l) şıkkına göre $\gamma \leq b$ olacak biçimde $\gamma = \sup A$ sayısı vardır. Buradan, (a) koşuluna göre ya $\gamma \in A$ ya da $\gamma \in B$ dir. Eğer, $\gamma \in A$ ise γ, A nın bir maksimal elemanıdır. Bununla beraber B kümesinde bir b_0 minimal elemanın bulunduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$(\gamma + b_0)/2 = d < b_0$$

olur ve b_0, B nin minimal elemanı olduğundan $d \in A$ olur. Öte yandan $\sup A = \gamma < d$ olduğundan $d \in A$ olamaz. Elde edilen çelişki varsayımın yalnış olduğunu gösterir. Benzer şekilde, eğer, $\gamma \in B$ ise γ, B nin bir minimal elemanı olduğu gösterilebilir.

(n) [Dedekind Prensibi] $\Rightarrow$ [IV Tamlık Aksiyomu] önermesinin doğruluğu aşikardır.

(o) ve (p) önermelerinin doğruluğu sırası ile aşğıdaki Problem (9) ve Problem (10)'da ispatlanacaktır. □

Not: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin inşası ile ilgili olarak şunları söyleyebiliriz. Teorem 1.7.4 ve Teorem 1.10.4 ten görüldüğü gibi I, II, III, (I,III) ve (II,III) aksiyomları sağlandığı durumda IV tamlık aksiyomundan hareketle $\mathbb{R}$ de [sup özelliği] ve [Archimet prensibi] niteliklerini gerçeklediği gösterilebilir. Teorem 1.13.35 e göre I, II, III,, (I,III) ve (II,III) aksiyomları sağlandığında [IV Tamlık aksiyomu], [Archimet prensibi+sup özelliği], [Archimet prensibi+ iç içe aralıklar prensibi], [Heine-Borel prensibi], [Bolzano-Weierstrass prensibi], [Archimet prensibi+ Monoton dizi özelliği], [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır], [Dedekind prensibi] ve [Cauchy dizi özelliği] niteliklerinden her biri diğerini gerektiren denk nitelikler olduğundan [IV Tamlık aksiyomu] niteliği yerine bu niteliklerin herhangi biri aksiyom gibi alındığında önce kurulmuş $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi elde edilir. •

1.14 Çözümlü Problemler

(1) Teorem 1.13.20 yi ispatlayınız.

İspat: $\mathbb{R}$ içinde monoton azalan ve alttan sınırlı bir (x_n) dizisi verilsin. O halde, terimleri $y_n = -x_n$, $n \in \mathbb{N}$ biçiminde tanımlı (y_n) dizisi monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan Teorem 1.13.19 gereğince (y_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} y_n = \sup \mathcal{R}(y_n)$ dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \sup\{-x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

yazabiliriz. Herhangi $E \subset \mathbb{R}$ için $\inf E = -\sup(-E)$ olduğundan son eşitliğe göre $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{R}(x_n)$ olduğu elde edilir. □

(2) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak olan her dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayınız (Teorem 1.13.22).

İspat: (x_n) yakınsak bir dizi ve $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ olsun. Bu durumda, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$ için $|x_n - a| < \epsilon/2$ olur. Böylece $\forall n, m > n_\epsilon$ için

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| &\leq |x_n - a| + |a - x_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması demektir. □

(3) $\mathbb{R}$ içinde her Cauchy dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisinin tanımına göre $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n, m \geq n_1$ için $|x_n - x_m| < 1$ olur.

Buradan $m = n_1$ olmak üzere $\forall n > n_1$ için $|x_n - x_m| < 1$ veya $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ olduğu bulunur. $K = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1} - 1\}$ ve $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1} + 1\}$ dersek $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K \leq x_n \leq M$ dir ve dolayısıyla, (x_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\diamond$

(4) Teorem 1.13.23 ü ispatlayınız.

İspat: (x_n) içinde bir Cauchy dizisi ve bu dizinin $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi verilsin. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. (x_n) bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n, m \geq n_\epsilon$ için $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ olur. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists k_1 = k_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k \geq k_1$ için $|x_{n_k} - a| < \epsilon/2$ olur. $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k \geq k_2$ için $n_k > n_\epsilon$ olur. Bu üç sonuçtan $\forall k \geq k_\epsilon = \max(n_\epsilon, k_1, k_2)$ için

$$|x_k - a| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olduğu ve dolayısıyla, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ olduğu elde edilir. $\square$

(5) $\mathbb{R}$ içindeki her kompakt alt kümenin $\mathbb{R}$ de kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E, $\mathbb{R}$ nin herhangi kompakt bir alt kümesi olsun. $E^c = \mathbb{R}\backslash E$ nin $\mathbb{R}$ de açık bir küme olduğunu gösterelim. $a \in \mathbb{R}$ ve $a \notin E$ olduğunu farzedelim. $b \in E$ ise $0 < r < \frac{1}{2}|b - a|$ olmak üzere a ve b noktalarının $U_r(a)$ ve $U_r(b)$ komşuluklarını gözönüne alalım. E, $\mathbb{R}$ de kompakt bir alt küme olduğundan

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_r(b_i) = Y$$

olacak biçimde $\{U_r(b_i)\}_{i\in\mathbb{N}_m}$ aralıklar ailesi vardır.
$0 < r_i < \dfrac{1}{2}|b_i - a|,\ i = 1, \ldots, m$ olmak üzere

$$X = U_{r_1}(a) \cap \ldots \cap U_{r_m}(a)$$

kesişimi a nın bir açık komşuluğu olmakla beraber $X \cap Y = \emptyset$ dur. O halde, $X \subset E^c$ dir ve buradan da a noktasının E^c nin bir iç noktası olduğu elde edilir. Demek ki, E^c, $\mathbb{R}$ de açık bir kümedir. $\diamond$

(6) $\mathbb{R}$ de kompakt olan kümenin her kapalı alt kümesinin de $\mathbb{R}$ de kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi ve F'de E nin $\mathbb{R}$ de kapalı bir alt kümesi olsun. $G = (G_i)_{i\in L}$, F nin bir açık örtüsü olsun. $F^c = \mathbb{R}\backslash F$ olmak üzere $Q = \{F^c,\ (G_i)_{i\in L}\}$ ailesi E nin bir açık örtüsü olduğu açıktır. E, $\mathbb{R}$ de kompakt olduğundan Q örtüsünün E kümesini ve dolayısıyla, F kümesini örten sonlu Q_0 alt örtüsü vardır. Eğer, $F^c \in Q_0$ ise $Q_0\backslash F^c$, F nin açık bir örtüsü olduğu açıktır. Böylece, G örtüsünün F kümesini örten sonlu bir alt örtüsünün varlığı elde edilmiş olur. Demek ki, F, $\mathbb{R}$ de kompakt bir kümedir. $\diamond$

(7) F, bir $E \subset \mathbb{R}$ kompakt kümesinin sonsuz alt kümesi ise, F kümesinin E içinde bir limit noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

İspat: E, $\mathbb{R}$ de kompakt olduğundan sınırlıdır. O halde, F, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve sonsuz elemanlı bir alt kümesi olduğundan Bolzano-Weierstrass prensibi gereğince F nin en az bir limit noktası vardır. $E, \mathbb{R}$ de kapalı olduğundan bu limit noktası E içindedir. $\square$

(8) Teorem 1.13.30 u ispatlayınız.

İspat: **(a)** $E, \mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlı bir küme olsun. Bu durumda, Teorem 1.13.35 in (e) şıkkı ve Problem (7) gereğince E kümesi (b) ve (c) özelliklerini sağlar.

(b) $E, \mathbb{R}$ de kompakt bir küme olsun. E nin (c) özelliğini sağladığı Problem (7) den görülür. Bu durumda, E nin (a) özelliğinide sağladığını gösterelim.

Önce, E nin sınırlı olduğunu görelim. Tersine, E sınırsız bir küme ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| > n$ olacak biçimde $x_n \in E$ elemanı vardır. Bu $x_n, n \in \mathbb{N}$ noktalarından oluşan

$$F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

sonsuz kümesinin $\mathbb{R}$ de limit noktası yoktur. Bu ise E nin her sonsuz alt kümesinin E de bir limit noktasına sahip olması ile çelişdiğinden

E sınırlıdır. Şimdi E nin kapalı olduğunu görelim. Tersine, E nin $\mathbb{R}$ de kapalı olmadığını varsayalım. Bu durumda, E kümesinin bir limit noktası olan, fakat E ye ait olmayan bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası vardır. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x_0| < 1/n$ olacak biçimde en az bir $x_n \in E$ noktası vardır. Çünkü aksi taktirde x_0 noktasının $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$ komşuluğunda E kümesine ait nokta bulunmaz ve x_0, E kümesinin limit noktası olmazdı.

$$S = \{x_n \in E : \ \forall n \quad \text{için} \quad |x_n - x_0| < 1/n\}$$

kümesini gözönüne alalım. S kümesinin eleman sayısı sonsuzdur. (Çünkü, S nin eleman sayısı sonlu olsaydı, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq m_0$ için $|x_n - x_0| \geq d$, d-sabit olur ve buradan da $U_{1/m_0}(x_0) \cap E = \emptyset$ olurdu. Bu ise x_0 noktasının E kümesinin bir limit noktası olması koşuluna aykırıdır.) x_0 noktası S nin bir limit noktasıdır. Ayrıca, S nin $\mathbb{R}$ de x_0 dan farklı hiçbir limit noktası yoktur. Gerçekten, $y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq x_0$ ise

$$\begin{aligned} |x_n - y| = |x_0 - y + x_n - x_0| &\geq |x_0 - y| - |x_n - x_0| \\ &\geq |x_0 - y| - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur. $|x_0 - y| > 0$ olduğundan Archimet prensibi gereğince $n_0 > 2/|x_0 - y|$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $\forall n \geq n_0$ için

$$|x_n - y| \geq |x_0 - y| - \frac{1}{n_0} > \frac{1}{2}|x_0 - y|$$

olduğu elde edilir. Bu ise, y noktasının S nin bir limit noktası olmadığı anlamını verir. Böylece, S kümesinin E de limit noktası yoktur. Bu ise E kümesinin (c) koşulunu sağlaması ile çelişir. Bu çelişme E nin kapalı olmadığını kabul etmekle ortaya çıkmıştır. Demek ki, E kapalıdır.

Böylece, E kümesinde (c)$\Rightarrow$ (a) önermesi doğrudur. Ayrıca, (b)$\Rightarrow$ (c)$\Rightarrow$ (a) önermesinin sonucu olarak (b)$\Rightarrow$(a) önermesinin doğruluğu görülür ve sonuçta teoremin ispatı (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (a) önermesi şeklinde tamamlanmış olur. $\square$

(9) Teorem 1.13.35 de (o) ile ifade edilen önermenin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Boş olmayan ve üstten sınırlı bir $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

$$F = \{y \in \mathbb{R} : \ y, \ E \ \text{ nin üst sınırıdır}\}$$

kümesini gözönüne alalım. $a \in E$ ve $b \in F$ olsun. Archimet prensibi gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$0 \leq \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} \leq m$$

olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Üstelik c, E nin bir üst sınırı ise tüm $y \geq c$ sayıları da E nin üst sınırlarıdır. Böylece, $a + P_n.2^{-n}$, E nin bir üst sınırı olacak biçimde bir minimal $P_n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu eğer, $I_n = [a + (P_n - 1)2^{-n}, \ a + P_n 2^{-n}]$ ise, $E \cap I_n$ nin boş olmadığını gösterir. $P_n 2^{-n} = (2P_n)2^{-n-1}$ olduğundan ve $a + (2P_n - 2)2^{-n-1}$ sayısı E nin bir üst sınırı olmadığından $P_{n+1} = 2P_n$ veya $P_{n+1} = 2P_n - 1$ dir. Ayrıca, $I_{n+1} \subset I_n$ dir. O halde, iç içe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ dir. $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ diyelim ve J nin bir tek elemandan oluştuğunu görelim. $c_1, c_2 \in J$ ve $c_1 < c_2$ olduğunu varsayalım. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_1, c_2 \in I_n$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $[c_1, c_2] \subset I_n$ olur ve buradan da

$$0 < c_2 - c_1 \leq |I_n| = 2^{-n}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan Archimet prensibi gereğince $\frac{1}{c_2 - c_1} < n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda, elde edilen

$$0 < c_2 - c_1 \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < c_2 - c_1$$

eşitsizliği bir çelişki olduğundan varsayım yalnış olur. Böylece J nin bir noktadan oluştuğu elde edilir. Bu noktayı γ ile gösterip, $\gamma = \sup E = \inf F$ olduğunu gösterelim.

Önce γ nın E nin bir üst sınırı olduğunu gösterelim. Aksi taktirde $x_0 > \gamma$ olacak biçimde bir $x_0 \in E$ elemanı mevcut olacaktır. O zaman,

$2^{-n} < x_0 - \gamma$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut olur ve $\gamma \in I_n$ olduğundan $a + P_n.2^{-n} < x_0$ eşitsizliği doğru olacaktır. Bu ise, P_n nin tanımına ters düşer. Üstelik, $\forall y \in F$ için $y \geq \gamma$ dır. Diğer taraftan, eğer, bir $y \in F$ için $\gamma < y$ ise, $2^{-n} < y - \gamma$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut olacaktı ve $\gamma \in I_n$ olduğundan $a+(P_n-1)2^{-n} > y$ olur ve dolayısıyla, $a+(P_n-1)2^{-n},\ E$ nin bir üst sınırı olacaktı. Bu ise, P_n nin tanımına bir çelişkidir. Böylece, γ sayısı F nin minimal bir elemanıdır ve dolayısıyla, $\gamma = \sup E$ dir. $\diamond$

(10) Teorem 1.13.35 de (p) ile ifade edilen önermenin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n) içinde bir Cauchy dizisi olsun. Her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (Bkz. Problem (3)) (x_n) dizisi sınırlıdır. (x_n) dizisi üstten sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, \}$ kümesi de üstten sınırlıdır. Terimleri

$$b_k = \sup\{x_n :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\ \}$$

biçiminde tanımlı (b_k) dizisni gözönüne alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \subset \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$$

olduğundan §1.8 deki Problem (3) e göre (b_k) monoton azalan bir dizidir. Ayrıca, (b_k) dizisi hem de alttan sınırlıdır. O halde, Teorem 1.13.20 gereğince (b_k) yakınsak bir dizidir. $\lim_{k\to\infty} b_k = \gamma$ olduğunu varsayıp, $\lim_{n\to\infty} x_k = \gamma$ olduğunu gösterelim. Herhangi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. $\lim_{k\to\infty} b_k = \gamma \Rightarrow \exists k_1 = k_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, öyleki $\forall k > k_1$ için $|b_k - \gamma| < \epsilon/3$ dür. (x_k) bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow \exists k_2 = k_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$, öyleki $\forall k, m > k_2$ için $|x_k - x_m| < \epsilon/3$ dür. $b_k = \sup\{x_n :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\} \Rightarrow k_3 = k_3(\epsilon) = \max\{k_1, k_2\}$ olmak üzere $k_4 > k_3$ ve $0 \leq b_{k_3} - x_{k_4} = |b_{k_3} - x_{k_4}| < \epsilon/3$ olacak biçimde $k_4 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Son üç sonuçu kullanırsak $\forall k > k_4$ için

$$|x_k - \gamma| \leq |x_k - x_{k_4}| + |x_{k_4} - b_{k_3}| + |b_{k_3} - \gamma|$$
$$\epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

bulunduğundan istenen $\lim_{k\to\infty} x_k = \gamma$ özelliği elde edilmiş olur.

Aşağıdaki Problem (11), (12) ve (13) te $\mathbb{R}$ nin tanımındaki I, II, III, (I,III) ve (II,III) aksiyomlarının sağlandığı farzedilir. $\diamond$

(11) [IV Tamlık aksiyomu] $\Leftrightarrow$ [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır] önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Teorem 1.13.35 de (a), (d), (m) ve (n) ile ifade edilen önerme gereğince [IV Tamlık aksiyomu]$\Rightarrow$ [sup özelliği]$\Rightarrow$ [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır]$\Rightarrow$ [Dedekind prensibi]$\Rightarrow$ [IV Tamlık aksiyomu] şeması gerçekleştiğinden istenen önermenin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(12) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$[Cauchy dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Teorem 1.13.35 de (b), (c), (e), (f), (h), (ı), (i) ve (k) ile ifade edilen önermeler gereğince [sup özelliği]$\Rightarrow$ [Archimet prensibi]+[Monoton dizi özelliği]+[Heine-Borel Prensibi]$\Rightarrow$ [Cantor Prensibi]$\Rightarrow$ [Bolzano-Weierstrass prensibi]$\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği]$\Rightarrow$ [Monoton dizi özelliği]$\Rightarrow$ [sup özelliği] şeması gerçeklendiğinden istenen önermenin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(13) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$[Monoton dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İstenen önermenin doğruluğu Problem (12) deki önermenin ispatına benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

Not: Problem (11), (12) ve (13) te ifade edilen önermelerin doğruluğu doğrudan doğruya (dolaysız) da ispatlanabilir. $\bullet$

1.15 Ek Problemler

(14) Teorem 1.13.5 i ispatlayınız.

(15) Teorem 1.13.7 yi ispatlayınız.

(16) Teorem 1.13.9 u ispatlayınız.

(17) $E = \{p \in \mathbb{Q} : \ 2 < p^2 < 3 \ \}$ kümesinin $\mathbb{Q}$ de kapalı ve sınırlı olduğunu, fakat $\mathbb{Q}$ da kompakt olmadığını gösteriniz.

(18) E, $\mathbb{R}$ de kapalı F, $\mathbb{R}$ de kompakt ve $E \subset F$ ise $E \cap F$ nin $\mathbb{R}$ de kompakt olduğunu gösteriniz.

(19) $\{\ a \leq x \leq b : \ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{Q}\}$ kümesine rasyonel sayılar aralığı denir ve $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ ile gösterilir.

İç içe $([a_n, b_n]_{\mathbb{Q}})$ aralıklar dizisinin kesişiminin $\mathbb{Q}$ da boş olduğunu gösteriniz.

(20) Eğer, $E \subset F \subset \mathbb{R}$ ise, $E^\circ \subset F^\circ$ olduğunu gösteriniz.

(21) Herhangi $E,\ F \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $\overset{\circ}{\overline{E \cap F}} = E^\circ \cap F^\circ$ olduğunu gösteriniz.

(22) Eğer, $E \subset F \subset \mathbb{R}$ ise, $\bar{E} \subset \bar{F}$ olduğunu gösteriniz.

(23) Herhangi $E,\ F \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $\overline{E \cup F} = \bar{E} \cup \bar{F}$ olduğunu gösteriniz.

(24) Eğer, E, $\mathbb{R}$ de bağlantılı bir küme ise, $E \subset F \subset \bar{E}$ koşulunu sağlayan her F kümesinin de $\mathbb{R}$ de bağlantılı olduğunu gösteriniz.

(25) E ve F, $\mathbb{R}$ de $\bar{E} \cap F \neq \emptyset$ olacak şekilde bağlantılı kümeler ise, $E \cup F$ nin $\mathbb{R}$ de bağlantılı olduğunu gösteriniz.

(26) Teorem 1.13.35 in koşulları altında [Archimet prensibi+iç içe aralıklar prensibi]$\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

(27) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$ [IV Tamlık aksiyomu] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

1.16 Kompleks Sayılar

Tanım 1.16.1 *: a ve b reel sayılar olmak üzere her (a,b) çiftine kompleks sayı adı verilir. a ya söz konusu $z = (a,b)$ kompleks sayısının reel kısmı, b ye de sanal kısmı denir ve sırasıyla $a = Rez$ ve $b = Imz$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 1.16.2 *: $z_1 = (a_1, b_1)$ ve $z_2 = (a_2, b_2)$ kompleks sayıları verilsin.*

(a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ *ve* $b_1 = b_2$.

(b) $(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$ *ve* $(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

kompleks sayılarına z_1 ve z_2 kompleks sayılarının toplamı ve çarpımı denir ve sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

biçiminde gösterilir.

(c) $z_1 + z = z_2$ *denklemini sağlayan z kompleks sayısına z_2 ve z_1 kompleks sayılarının farkı denir ve $z_2 - z_1$ biçiminde gösterilir.*

$$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$$

olduğu açıktır.

(d) $z_2 \neq 0$ *olmak üzere $z_2.z = z_1$ denklemini sağlayan z kompleks sayısına z_1 ve z_2 sayılarının bölümü denir ve $z = \frac{z_1}{z_2}$ biçiminde gösterilir.*

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

olduğu açıktır.

$(0,1)$ kompleks sayısı $i = (0,1)$ sembolü ile gösterilir. O zaman, $(0,1).(0,1) = (-1,0)$ veya $i^2 = -1$ olduğu görülür. Herhangi z kompleks sayısı

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(0,b) = a + ib$$

şeklinde yazılabilir. Buna kompleks sayısının cebirsel gösterimi denir.

$\bar{z} = (a, -b) = a - ib$ kompleks sayısına $z = (a, b) = a + ib$ kompleks sayısının eşleniği veya konjügesi denir.

Her $z = (a, b)$ kompleks sayısı düzlemin koordinatları a ve b olan bir noktası ile özdeşleştirilebilir.

Noktaları kompleks sayılara karşılık getirilen düzleme kompleks düzlem adı verilir. ox eksenine reel, oy eksenine imajiner eksen adı verilir. $z = (a, b)$ noktasının $0 = (0, 0)$ başlangıç noktasına olan uzaklığına z kompleks sayısının mutlak değeri (veya modülü) denir ve $|z|$ ile gösterilir. $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğu açıktır. $z = (a, b)$ noktasını $0 = (0, 0)$ başlangıç noktasına bağlayan yarıçap vektörünün θ ilk görüntü açısına z kompleks sayısının açısı veya argümanı denir ve $argz = \theta$ şeklinde gösterilir. (Bkz. şekil 1.1)

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0 \text{ ise;} \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0,\ b \geq 0 \text{ ise;} \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi, & a < 0,\ b < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\pi}{2}\text{sgn}b, & a = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

olduğu açıktır. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve θ sayılarına $z = (a, b)$ kompleks sayısının kutupsal (polar) koordinatları denir. Kutupsal koordinatlarda ikinci koordinat, birbirinden farklı 2π nin herhangi bir katı olan sonsuz sayıda değerler

alabilir. Bütün bu değerlerden $-\pi < \theta \leq \pi$ koşulunu sağlayan değere esas değer denir. Bu durumda, $\text{Arg}z = \arg z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ şeklinde yazılır.

r ve θ sayıları $z = (a, b)$ kompleks sayısının kutupsal koordinatları olduğunda

$$z = (a, b) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ifadesine $z = (a, b)$ kompleks sayısının trigonometrik gösterimi veya formu denir. Böylece, bir z kompleks sayısının kartezyen ve kutupsal gösterimlerindeki (a, b) ve (r, θ) çiftleri arasında şu bağıntılar vardır: $a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,\ r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\theta = \frac{a}{r},\ \sin\theta = \frac{b}{r},\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

Eğer, $z_1 = (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$ ve $z_2 = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$ ise,

$$z_1.z_2 = \big(r_1.r_2\cos(\theta_1 + \theta_2), r_1.r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)\big), \tag{1.6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \big(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2), \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\big) \tag{1.7}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

(1.6) nın açık bir sonucu şudur:

$$z_1.z_2\ldots.z_n = r_1.r_2\ldots r_n\big[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\big], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Son formülde $r = 1$ yazılırsa, de Moivre formülü olarak bilinen

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

bağıntısı elde edilir.

$$|z^n| = |z|^n,\ \arg(z^n) = n\arg z, \quad n = 0, 1, \ldots$$

olduğu açıktır. $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ kompleks sayısının $n.$ dereceden kökü

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\big[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\big], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.9}$$

formülü ile bulunur.

İleride bütün kompleks sayılar kümesini $\mathbb{C}$ ile göstereceğiz.

1.17 Çözümlü Problemler

(1) $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ sayıları ve $n \in \mathbb{N}$ için

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;

(b) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z}_2$;

(c) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$ olsun.
(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2, -b_1 - b_2)$

$$= (a_1, -b_1) + (a_2, -b_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \ .$$

(b) $\overline{z_1.z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)}$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2, -a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= (a_1, -b_1)(a_2, -b_2) = \overline{z}_1.\overline{z}_2.$$

(c) z kompleks sayısının $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ trigonometrik gösteriminden görüldüğü gibi $\overline{z} = \big(r\cos(-\theta), r\sin(-\theta)\big)$ olur. (1.8) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}(\overline{z})^n &= \big(r^n\cos(-\theta), r^n\sin(-\theta)\big)\\ &= (r^n\cos n\theta, -r^n\sin n\theta)\\ &= \overline{(r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta)} = (\overline{z})^n\end{aligned}$$

elde edilir. $\diamond$

(2) Aşağıdaki kompleks sayıları trigonometrik formda yazınız.

(a) $z_1 = -5$; (b) $z_2 = -3i$;
(c) $z_3 = 2 + 2i$; (d) $z_4 = -\sqrt{3} + i$.

Çözüm: (a) $|-5| = 5,\ \theta = \pi,\ \ z_1 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$,
(b) $|-3i| = 3,\ \ \theta = -\dfrac{\pi}{2},\ \ z_2 = 3\big(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) - i\sin(\dfrac{\pi}{2})\big)$,
(c) $|2 + 2i| = 2\sqrt{2},\ \theta = \dfrac{\pi}{4},\ \ z_3 = 2\sqrt{2}\big(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\big)$,
(d) $|-\sqrt{3} + i| = 2,\ \theta = \dfrac{5\pi}{6},\ \ z_4 = 2\big(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\big)$. $\diamond$

(3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

(a) $(3-i)(3+i)^2 - (2-3i) + 5$; (b) $(-2+3i)^3$;
(c) $\dfrac{5}{-3-4i}$; (d) $\big(\dfrac{1-i}{1+i}\big)^{10}$;
(e) $\big(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\big)^{12}$; (f) $(-\sqrt{3}-i)^{15}$;
(g) $\big|\dfrac{2-4i}{5+7i}\big|^3$.

Çözüm: (a) $(3-i)(3+i)^2-(2-3i)+5 = (3-i)(9+6i+i^2)-2+3i+5$

$$\begin{aligned}&= (3-i)(9+6i-1) + 3 + 3i\\ &= 27 + 18i - 3 - 9i - 6i^2 + i + 3 + 3i\\ &= 33 + 13i\ .\end{aligned}$$

(b) Newton Binom formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}(-2+3i)^3 &= (-2)^3 + 3(-2)^2(3i) + 3(-2)(3i)^2 + (3i)^3\\ &= -8 + 36i + 54 - 27i = 46 - 9i.\end{aligned}$$

(c) $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq (0,0)$ olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2} \qquad (1.10)$$

(1.10) formülü doğru olduğundan

$$\frac{5}{-3-4i} = \frac{5(-3+4i)}{|-3-4i|^2} = \frac{1}{5}(-3+4i) = -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

olur.
(d) $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\big)$ ve $1 + i = \sqrt{2}\big(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\big)$

olduğundan (1.7) ifadesine göre

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}\Big(\cos\big(-\frac{\pi}{4}\big)-i\sin\big(-\frac{\pi}{4}\big)\Big)}{\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)}=\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big)-i\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)$$

olur. Buradan da (1.8) formülüne göre

$$\begin{aligned}\big(\frac{1-i}{1+i}\big)^{10}&=\Big(\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big)-i\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)\Big)^{10}\\&=\cos\big(-\frac{10\pi}{2}\big)-i\sin\big(-\frac{10\pi}{2}\big)\\&=\cos(-5\pi)-i\sin(-5\pi)=-1\quad.\end{aligned}$$

(e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}{2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}$

olduğundan (1.8) formülüne göre

$$\begin{aligned}\big(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\big)^{12}&=\frac{1}{6^6}(\cos\frac{84\pi}{12}+i\sin\frac{84\pi}{12})\\&=\frac{1}{6^6}(\cos 7\pi+i\sin 7\pi)=-\frac{1}{6^6}.\end{aligned}$$

(f) $(-\sqrt{3}-i)=2^{15}(\cos\dfrac{5\pi}{6}-i\sin\dfrac{5\pi}{6})^{15}$

$$=2^{15}(\cos\frac{75\pi}{6}-i\sin\frac{75\pi}{6})=-2^{15}\ .$$

(g) (1.9) formülüne göre

$$\frac{2-4i}{5+7i}=\frac{(2-4i)(5-7i)}{|5+7i|^2}=-\frac{9}{37}-i\frac{17}{37}$$

olduğundan

$|\dfrac{2-4i}{5+7i}|^2=|-\dfrac{9}{37}-i\dfrac{17}{37}|^2=\dfrac{81+289}{37^2}=\dfrac{10}{37}$. $\diamond$

(4) $z=\dfrac{(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})(\sqrt{3}+i)}{i-1}$ kompleks sayısını trigonometrik formda yazınız.

Çözüm: $z_1=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ sayısının modülü 1 ve argümenti $\theta_1=-\dfrac{\pi}{3}$; $z_2=\sqrt{3}+i$ sayısının modülü 2 ve argümenti $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$; $z_3=i-1$ sayısının modülü $\sqrt{2}$ ve argümenti $\theta_3=\dfrac{3\pi}{4}$ olduğundan

$$|z|=\frac{|z_1||z_2|}{|z_3|}=\frac{1.2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

, $\theta=\arg z=\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{11\pi}{12}$ olur. Bu durumda,

$$z=\sqrt{2}\big(\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12}\big)$$

elde edilir. $\diamond$

(5) Aşağıdaki köklerin tüm değerlerini bulunuz.
(a) $\sqrt[4]{-1}$; **(b)** $\sqrt[3]{8i}$; **(c)** $\sqrt[5]{-1-i\sqrt{3}}$.

Çözüm: **(a)** $z=-1$ sayısının trigonometrik formu

$$z=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

biçiminde olduğundan (1.9) formülüne göre

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

Buradan, $k=0,1,2,3$ için

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-1}&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\\\sqrt[4]{-1}&=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4},\\\sqrt[4]{-1}&=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4},\\\sqrt[4]{-1}&=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\end{aligned}$$

bulunur.

(b) $8i$ sayısının trigonometrik gösterimi

$$8i=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$$

olduğundan, (1.9) formülüne göre

$$\sqrt[3]{8i} = 2\big(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\big), \quad k=0,1,2$$

olur. Buradan, $k=0,1,2$ için

$$\sqrt[3]{8i} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}),$$
$$\sqrt[3]{8i} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}),$$
$$\sqrt[3]{8i} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

elde edilir.

(c) $-1-i\sqrt{3}$ sayısının trigonometrik gösterimi

$$-1-i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$$

biçiminde olduğundan (1.9) formülüne göre

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\big), \quad k=0,1,2$$

olur. Buradan $k=0,1,2$ için

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}\big),$$
$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\big),$$
$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\big)$$

bulunur. ⋄

(6) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ herhangi reel sayılar olmak üzere $P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ polinomu için $\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi α reel sayısı ve n doğal sayısı için $\bar{\alpha} = \alpha$ ve

$\overline{(\alpha z^n)} = \alpha(\bar{z})^n$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{P_n(z)} &= \overline{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n}\\ &= \overline{(a_0z^n)} + \overline{(a_1z^{n-1})} + \ldots + \overline{(a_{n-1}z)} + \overline{(a_n)}\\ &= a_0(\overline{z})^n + a_1(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\overline{z}) + a_n\\ &= P_n(\overline{z})\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. ⋄

(7) $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ denkleminin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm: §1.11 deki Problem (4) e göre bu denklemin muhtemelen rasyonel kökleri $\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm16,\ \pm32$ dir. Deneme ile $z=-2$ nin bir kök olduğunu görebiliriz. Neticede verilen denklem

$$(z+2)(z^4+4z^2+16)=0$$

şeklinde yazılabilir. $z^2=u$ alınırsa $z^4+4z^2+16=0$ denklemi $u^2+4u+16=0$ kuadratik denklemine dönüşür. Son denklemin kökleri $u_1=-2-2i\sqrt{3},\ u_2=-2+2i\sqrt{3}$ dir. Buradan da $z^2=-2-i\sqrt{3},\ z^2=-2+2i\sqrt{3}$ denklemleri bulunur. $z^2=-2-i\sqrt{3}$ denkleminin kökleri $-1+i\sqrt{3}$ ve $-1-i\sqrt{3}$ olur. $z^2=-2+2i\sqrt{3}$ denkleminin kökleri ise $1+i\sqrt{3}$ ve $1-i\sqrt{3}$ dir. Böylece, verilen denklemin kökleri $-2,\ -1+i\sqrt{3},\ -1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3}$ ve $1-i\sqrt{3}$ dir. ⋄

(8) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Kuadratik denklemin çözüm formüllerine göre

$$z=\frac{2+i\pm\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2}$$

olur. $4-3i$ sayısı $\sqrt{7-24i}$ kökünün bir değeri olduğundan verilen denklemin kökleri

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i$$
$$z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i$$

bulunur. O halde, çözüm seti $3-i,\ -1+2i$ olarak verilir. ⋄

1.18 Ek Problemler

(9) Aşağıdaki önermelrin doğruluğunu gösteriniz:
(a) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; **(b)** $z_1 \neq 0$ için $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

(10) Aşağıdaki kompleks sayıları trigonometrik formda yazınız:
(a) $z_1 = -1 - i$; (b) $z_2 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}$;
(c) $z_3 = \dfrac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})(\sqrt{3}+i)}{i-1}$; (d) $z_4 = -\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$;
(e) $z_5 = (\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i})^6$.

Cevap:
(a)$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4})$; (b) $z_2 = \cos\frac{16\pi}{17} + i\sin\frac{16\pi}{17}$;
(c) $z_3 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12} - i\sin\frac{11\pi}{12})$; (d)$z_4 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$;
(e) $z_5 = \cos\frac{13\pi}{2} + i\sin\frac{13\pi}{2}$.

(11) Aşağıdaki işlemleri yapınız:
(a) $\dfrac{2+5i}{-1+6i}$; (b) $2i(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(c) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$; (d) $\dfrac{13+12i}{-8+6i} + \dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;
(e) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

Cevap: (a) $\frac{28}{37} - \frac{17}{37}i$; **(b)** $-2i$; **(c)** 0 ; **(d)** $\frac{-18}{25} + \frac{33}{50}i$;
(e) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$.

(12) Aşağıdaki köklerin tüm değerlerini bulunuz:
(a) $\sqrt[3]{-1+i}$; **(b)** $\sqrt[6]{-64}$; **(c)** $\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}}$.

Cevap:

(a) $\sqrt[6]{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$,
$\sqrt[6]{2}(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)$;

(b) $2(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 270^\circ,\ 300^\circ$;

(c) $\cos(72^\circ k) + i\sin(72^\circ k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$;

(13) Aşağıdaki denklemlerin tüm çözümlerini bulunuz:
(a) $z^2 + (5-2i) + 5 - 5i = 0$; (b) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$;
(c) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$; (d) $2z^3 + 12z^2 + 13z + 15 = 0$;
(e) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$;.

Cevap: (a) $z_1 = -2 + i,\ z_2 = -3 + i$;
(b) $z_1 = 2i,\ z_2 = -1$;
(c) $z_1 = 4 + i,\ z_2 = -4 + i,\ z_3 = -4 - i,\ z_4 = 4 - i$;
(d) $z_1 = -5,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$;
(e) $z_1 = 1,\ z_2 = 3,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -2i$.

1.19 Elementer Fonksiyonlar

Biz §1.4 de X ve Y boş olmayan herhangi iki küme olmak üzere X den Y'ye tanımlı fonksiyonların (dönüşümlerin) tanımını ve bazı özelliklerini kısaca gördük. Bu bölümde reel değişkenli ve reel değerli (yani $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ durumunda) en çok kullanılan fonksiyonları tanımlayacak ve özelliklerini vereceğiz. Belirtelim ki, fonksiyonların daha detaylı incelenmesi ileriki bölümlerde ele alınacaktır.

Tanım 1.19.1 : *$X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Bu iki fonksiyonun $f+g$ toplamı, $f-g$ farkı, $f.g$ çarpımı ve f/g bölümü*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x),$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $f+g$, $f-g$, ve $f.g$ fonksiyonları f ve g fonksiyonlarının tanımlı olduğu tüm noktalarda, f/g fonksiyonu da $g(x)=0$ denklemini sağlayan x ler hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır.

$f: X \to Y$ fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasındaki değeri $f(x_0)$ veya $f(x)|_{x_0}$ ile gösterilir.

Örneğin, $f(x)=\sqrt{x-1}$ ve $g(x)=\sqrt{5-x}$ fonksiyonları için $D(f)=[1,+\infty)$, $D(g)=(-\infty,5]$, $D(f+g)=D(f.g)=[1,5]$, $D(f/g)=[1,5)$, $f(1)=g(5)=0$, $f(2)=1$, $g(2)=\sqrt{3}$, $f(3)=g(3)=\sqrt{2}$, $f(5)=g(1)=2$, $(f+g)(1)=2$, $(f+g)(2)=1+\sqrt{3}$, $(f+g)(3)=2\sqrt{2}$, $(f+g)(5)=2$ bulunur.

Tanım 1.19.2 *: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall x \in X$ için $x+T \in X$ ve $f(x+T)=f(x)$ olacak şekilde bir $T>0$ sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f nin bir periyodu denir. Eğer, varsa periyodların en küçüğüne fonksiyonun esas (asli) periyodu denir.*

Tanım 1.19.3 *: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna X üzerinde artan;*
$\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna X üzerinde azalmayan;
$\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna X üzerinde azalan;
$\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ise, f fonksiyonuna X üzerinde artmayan fonksiyon denir.

Eğer, bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise, fonksiyona kesin olarak monotondur, artmayan veya azalmayan ise monotondur denir. Eğer, bir fonksiyonun tanımlı olduğu her aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona parçalı monoton fonksiyon denir.

Tanım 1.19.4 *: Eğer, $X \subset \mathbb{R}$ ve $\forall x \in X$ için $-x \in X$ ise X kümesine bir simetrik küme denir. Simetrik bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı f*

fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall x \in X$ için $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ ise, f fonksiyonuna çift (tek) fonksiyon denir.

Tanım 1.19.5 *: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, f fonksiyonunun $\mathcal{R}(X)$ görüntü kümesi üstten (alttan) sınırlı ise, f fonksiyonu X üzerinde üstten (alttan) sınırlıdır denir. Başka bir ifade ile, eğer, $\forall x \in X$ için $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ sayısı varsa, f fonsiyonu X üzerinde üstten (alttan) sınırlıdır denir. Eğer, f fonksiyonu X üzerinde hem üstten ve hem de alttan sınırlı ise f fonksiyonuna X üzerinde sınırlıdır denir.*

Tanım 1.19.6 *: Eğer, x ile $y=f(x)$ arasındaki bağıntı $F(x,y)=0$ biçimindeki bir bağıntı ile verilirse f fonksiyonuna kapalı olarak verilmiş fonksiyon veya kısaca bir kapalı fonksiyon denir.*

Tanım 1.19.7 *: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ için koordinat düzleminin $(x, f(x))$ noktalar kümesine $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği denir.*

Tanım 1.19.8 *: $y=$ c-sabit, $y=x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$-kuvvet, $y=a^x$, $a>0$, $a \neq 1$ üstel (üslü), $y=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$ logoritma, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, trigonometrik ve $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=$ arccotx ters trigonometrik fonksiyonlara esas(temel) elementer fonksiyonlar adı verilir.*

Tanım 1.19.9 *: Esas elementer fonksiyonlardan sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşik fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilip, $y=f(x)$ eşitliği ile ifade edilebilen her f fonksiyonuna elementer fonksiyon adı verilir.*

Şimdi esas ve bazı elementer fonksiyonların özelliklerini ve grafiklerini görelim.

- **Sabit Fonksiyon**. $c \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y=c$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir sabit fonksiyon denir. Tanımından görüldüğü gibi $\mathcal{D}(c)=\mathbb{R}$ ve $\mathcal{R}(c)=c$ dir. Sabit fonksiyonun grafiği şekil 1.2 de verilmiştir.

- **Tam Rasyonel Fonksiyon**. $n \geq 0$ keyfi tam sayı ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $(a_0 \neq 0)$ keyfi reel sayılar olmak üzere n. dereceden

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

şeklindeki polinoma tam rasyonel fonksiyon denir. Tanımından görüldüğü gibi $\mathcal{D}(P_n) = \mathbb{R}$ dir. Şekil 1.3 ve 1.4 de $y = a_0x + a_1$ $(n = 1)$ ve $y = a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x + \frac{a_1}{2a_0})^2 + a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}$ $(n = 2)$ fonksiyonlarının $a_0 > 0$ durumunda grafikleri verilmiştir.

- **Rasyonel (Kesir-rasyonel) Fonksiyon**. $P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ herhangi iki polinom olmak üzere $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir rasyonel (kesir-rasyonel) fonksiyon adı verilir. Bu fonksiyonun tanım bölgesi

$$\mathcal{D}(\frac{P_n}{Q_m}) = \{x \in \mathbb{R} : \ Q_m(x) \neq 0\}$$

dir.

- **Kuvvet Fonksiyonu**. α herhangi bir reel sayı olmak üzere $y = x^\alpha$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kuvvet fonksiyonu adı verilir. α nın rasyonel bir sayı olması durumunda bu fonksiyonun bazı özelliklerini görelim. (Kuvvet fonksiyonu Bölüm 2 de daha detaylı incelenecektir).

  Önce, n doğal bir sayı olsun. Bu durumda $y = x^n$ fonksiyonu n. dereceli polinomun özel halidir. n sayısının tek ve çift olması durumlarında $y = x^n$ fonksiyonunun grafikleri Şekil 1.5 ile 1.6 da verilmiştir.

  n doğal sayı olmak üzere $y = \frac{1}{x^n}$ fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur. n sayısının tek ve çift olması durumlarında bu fonksiyonun grafikleri Şekil 1.7 ile 1.8 de verilmiştir.

n doğal sayı olduğunda $y = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonunun tanım bölgesi

$$\mathcal{D}(\sqrt[n]{x}) = \begin{cases} \mathbb{R}\,, & n \text{ tek ise,} \\ [0, +\infty)\,, & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

dir. Bu durumda, $y = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonunun grafiği Şekil 1.9 ve 1.10 da verilmiştir.

p ve $q \neq 0$ herhangi iki tam sayılar olmak üzere $y = x^{\frac{p}{q}}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde tanımlıdır. Bu fonksiyon her p ve q tam sayıları için $(-\infty, 0)$ üzerinde tanımlı değildir. Üstelik, eğer, bu fonksiyon $(-\infty, 0)$

üzerinde tanımlı ise o ya çift yada tek fonksiyondur. Örneğin, $y = x^{\frac{2}{3}}$ ve $y = x^{\frac{-2}{3}}$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.11 ve 1.12 de verilmiştir.

- **Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar**. $a > 0,\ a \neq 1$ herhangi bir reel sayı olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir üstel fonksiyon adı verilir.

  $a > 1$ için bu fonksiyon artan, demek ki, $x > 0$ için $a^x > a^0 = 1$ ve $x < 0$ için $0 < a^x < a^0 = 1$ dir. $0 < a < 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu azalan, demmek ki, $x > 0$ için $0 < a^x < 1$ ve $x < 0$ için $a^x > 1$ dir.

  $a > 0,\ a \neq 1$ ve $b > 0$ olmak üzere $a^\alpha = b$ olacak şekilde α sayısına b sayısının a tabanına göre logaritması denir ve $\alpha = \log_a b$ şeklinde yazılır. Bu özelliğe sahip α sayısının varlığı ve tekliği §2.4 te gösterilecektir.

  $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna logaritma fonksiyonu adı verilir. Her $y \in \mathbb{R}_+$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $y = a^{\log_a y}$ ve $\log_a a^x = x$ olduğundan $y = a^x$ ve $x = \log_a y$ fonksiyonları karşılıklı ters fonksiyonlardır. Bu sebepten $y = \log_a x$ in grafiği, $y = a^x$ in grafiğinin $y = x$ dogrusuna göre simetriğidir. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 1.13 ve 1.14 de verilmiştir.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının şu özelliklerini verelim. (Bu özelliklerin ispatları Bölüm 2 de verilecektir.)

(1) $\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R},\ \mathcal{R}(a^x) = \mathbb{R}_+$ dir.

(2) $y = a^x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde $a > 1$ olduğunda artan, $0 < a < 1$ olduğunda ise azalandır.

(3) $\forall x, t \in \mathbb{R}$ için $(a^x)^t = a^{xt}$, $a^x.b^x = (a.b)^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$, $a^x.a^t = a^{x+t}$ dir.

(4) $\mathcal{D}(\log_a x) = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{R}(\log_a x) = \mathbb{R}$ dir.

(5) $y = \log_a x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde $0 < a < 1$ olduğunda azalan, $a > 1$ olduğunda ise artandır.

(6) $\forall x, t \in \mathbb{R}_+$ için

$$\log_a(x.t) = \log_a x + \log_a t, \quad \log_a(x/t) = \log_a x - \log_a t$$

dir.

(7) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$$

dir.

Pratikte en çok kullanılan logaritma doğal logaritma adı verilen e tabanına göre yazılan logaritmadır. $\log_e x$ ve $\log_{10} x$ yerine sırasıyla $\ln x$ ve $\log x$ yazılışı kullanılır. O halde,

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x \quad \text{ve} \quad y = \log x \Leftrightarrow 10^x = y$$

olur.

- **Trigonometrik Fonksiyonlar**. Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi çizelim. $(1, 0)$ noktasından başlayarak çember üzerinde $|t|$ birim ilerleyelim. (Eğer, $t > 0$ ise saat yönünün tersine, $t < 0$ ise saat yönünde ilerlenecektir). Bu durumda çember üzerinde elde edilen bir P noktasının absisi $\cos t$ (cosinüs t), ordinatı $\sin t$ (sinüs t) olarak tanımlanır. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ sayısına bir $\cos t$ ve bir $\sin t$ sayısı karşılık gelir. (Şekil 1.15)

Şekilden de görüleceği gibi her $t \in \mathbb{R}$ için $\cos(-t) = \cos t,\ \sin(-t) = -\sin t$ ve $\cos(t+2n\pi) = \cos t,\ \sin(t+2n\pi) = \sin t,\ n \in \mathbb{Z}$ dir. Tanjant ve cotanjant fonksiyonları

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

şeklinde tanımlanırlar. $\mathcal{D}(\cos t) = \mathcal{D}(\sin t) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\tan t) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + n\pi :\ n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}(\cot t) = \mathbb{R}\backslash\{n\pi :\ n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{R}(\cos t) = \mathcal{R}(\sin t) =$

$[-1,1]$, $\mathcal{R}(\tan t) = \mathcal{R}(\cot t) = \mathbb{R}$ olduğu açıktır. Esas trigonometrik fonksiyonlar adı verilen cosinüs, sinüs, tanjant ve cotanjant fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1.16, 1.17, 1.18 ve 1.19 da verilmiştir.

Trigonometrik fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağıntıların doğru olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$
$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t,$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u,$$
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u,$$
$$\tan(t+u) = \frac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t \tan u},$$
$$\cos t \cos u = \frac{1}{2}[\cos(t+u) + \cos(t-u)],$$
$$\sin t \sin u = \frac{1}{2}[\cos(t-u) - \cos(t+u)],$$
$$\sin t \cos u = \frac{1}{2}[\sin(t+u) + \sin(t-u)]$$
$$\sin t + \sin u = 2 \sin \tfrac{t+u}{2} \cos \tfrac{t-u}{2},$$
$$\sin t - \sin u = 2 \sin \tfrac{t-u}{2} \cos \tfrac{t+u}{2}$$
$$\cos t + \cos u = 2 \cos \tfrac{t+u}{2} \cos \tfrac{t-u}{2},$$
$$\cos t - \cos u = 2 \sin \tfrac{t+u}{2} \sin \tfrac{u-t}{2}.$$

sinüs ve cosinüs fonksiyonları 2π, tanjant ve cotanjant fonksiyonları ise π periyotlu fonksiyonlardır.

- **Ters Trigonometrik Fonksiyonlar**. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \cos x$ fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından onun bütün $\mathbb{R}$ de tek değerli ters fonksiyonu yoktur. Bu fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanması olan $\cos|_{[0,\pi]} = g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan bu fonksiyonun $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arccosinüs (kısaca arccos yazılır)fonksiyonu adı verilir. O halde,

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \quad \text{ve} \quad y \in [0, \pi]$$

yazılır.

Benzer şekilde arcsinüs, arntanjant ve arccotanjant fonksiyonları tanımlanır:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad \text{ve} \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \quad \text{ve} \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x \quad \text{ve} \quad y \in (0, \pi).$$

Şekil 1.20, 1.21, 1.22 ve 1.23 de $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctan x$ ve $y = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

- **Hiperbolik Fonksiyonlar**.

(a) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; (b) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;
(c) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; (d) $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

fonksiyonlarına sırası ile hiperbolik cosinüs, hiperbolik sinüs, hiperbolik tanjant ve hiperbolik cotanjant fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonların tanım ve görüntü bölgeleri $\mathcal{D}(\cosh x) = \mathcal{D}(\sinh x) = \mathcal{D}(\tanh) = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{D}(\coth x) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathcal{R}(\cosh x) = [1, +\infty)$, $\mathcal{R}(\sinh x) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(\tanh) = (-1, 1)$, $\mathcal{R}(\coth x) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ dir. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 1.24, 1.25, 1.26 ve 1.27 de verilmiştir. Her $t \in \mathbb{R}$ için $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$ ve her $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $\coth(-x) = -\coth x$ olduğu açıktır.

Hiperbolik fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağıntıların doğru olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh(x+t) = \cosh x \cosh t + \sinh x \sinh t$$
$$\sinh(x+t) = \sinh x \cosh t + \cosh x \sinh t$$
$$\tanh(x+t) = \frac{\tanh x + \tanh t}{1 + \tanh x \tanh t}$$
$$\cosh x \cosh t = \frac{1}{2}[\cosh(x+t) + \cosh(x-t)]$$
$$\sinh x \sinh t = \frac{1}{2}[\cosh(x+t) - \cosh(x-t)]$$

$$\sinh x \cosh t = \frac{1}{2}[\sinh(x+t) + \sinh(x-t)]$$
$$\sinh x + \sinh t = 2\sinh \tfrac{x+t}{2} \cosh \tfrac{x-t}{2},$$
$$\sinh x - \sinh t = 2\sinh \tfrac{x-t}{2} \cosh \tfrac{x+t}{2}$$
$$\cosh x + \cosh t = 2\cosh \tfrac{x+t}{2} \cosh \tfrac{x-t}{2},$$
$$\cosh x - \cosh t = 2\sinh \tfrac{x+t}{2} \sinh \tfrac{t-x}{2}.$$

- **Ters Hiperbolik Fonksiyonlar**.

$$f : \mathbb{R} \to [1, +\infty), \quad f(x) = \cosh x$$

fonksiyonu örten, fakat birebir değildir. Gerçekten, $\forall y \in [1, +\infty)$ için

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad \text{veya} \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

denkleminin iki tane

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

çözümünün varlığı görülür. Demek ki, $\forall y \in (1, \infty)$ için $\mathbb{R}$ içinde $x_1 \neq x_2$ koşulunu sağlayan $x_1 = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ ve $x_2 = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ noktaları bulunur ki $f(x_1) = f(x_2)$ dir. ($y = 1$ değeri için $x_1 = x_2 = 0$). Bu sebeple f nin tek değerli ters fonksiyonu yoktur. Bu fonksiyonun $[0, \infty)$ aralığına kısıtlaması olan $\cosh|_{[0,+\infty)} = g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan $g^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arccosinüs hiperbolik fonksiyon denir ve kısaca arccosh yazılır. O halde,

$$y = \text{arccosh}x \Leftrightarrow \cosh y = x \quad \text{ve} \quad y \in [0, +\infty)$$

olur. Benzer şekilde arcsinüs hiperbolik, arctanjant hiperbolik ve arccotanjant hiperbolik fonksiyonlar da tanımlanır:

$$y = \text{arcsinh}x \Leftrightarrow \sinh y = x \quad \text{ve} \quad y \in \mathbb{R},$$
$$y = \text{arctanh}x \Leftrightarrow \tanh y = x \quad \text{ve} \quad y \in (-1, 1),$$
$$y = \text{arccoth}x \Leftrightarrow \coth y = x \quad \text{ve} \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Ters hiperbolik fonksiyonlar için aşağıda verilen bağıntıların doğru olduğu kolayca gösterilebilir.

(a) $\text{arcsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R};$

(b) $\text{arccosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \in [1, +\infty);$

(c) $\text{arctanh}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1);$

(d) $\text{arccoth}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Tanım 1.19.10 *: Rasyonel olmayan ve rasyonel dereceli kuvvet fonksiyonlarından sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşik fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilebilen fonksiyonlara irrasyonel fonksiyonlar adı verilir.*

Örneğin, $y = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 1]$, $y = \sqrt[3]{x^4-2},\ x \in \mathbb{R}$, $y = \dfrac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{\frac{2}{3}}+1}},\ x \in \mathbb{R}$, $y = \log\sqrt{1-x^2},\ x \in (-1, 1)$ irrasyonel fonksiyonlardır.

Rasyonel ve irrasyonel olmayan elementer fonksiyonlara transandantal fonksiyonlar adı verilir.

Örneğin, üstel, logaritma, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik ve ters hiperbolik fonksiyonlar transandantal fonksiyonlardır.

Not: Elementer olmayan fonksiyonlar da vardır. •

Örneğin,

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n!$ faktöriyel fonksiyonu,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [\![\, x \,]\!]$ fonsiyonu (burada $[\![\, x \,]\!]$, x sayısından büyük olmayan tam sayıların en büyüğünü göstermektedir.),

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - [\![\, x \,]\!]$ kesir kısım fonksiyonu,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \text{Sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise}, \\ -1, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu,

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| = x\text{Sgn}x$ fonksiyonu,

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasyonel ise}, \\ 0 & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonu, elementer olmayan fonksiyonlardır. Şekil 1.28, 1.29, 1.30 ve 1.31 de $[\![\, x \,]\!]$, $x - [\![\, x \,]\!]$, $\text{Sgn}x$ ve $|x|$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

1.20 Çözümlü Problemler

(1) $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\cos x$ fonksiyonu için

(a) $f(\frac{\pi}{6})$;	(b) $f(\frac{\pi}{4})$;	(c) $f(\frac{\pi}{3})$;
(d) $f(\frac{\pi}{2})$;	(e) $f([0,\pi])$;	(f) $f((0,\pi))$;
(g) $f([0,\frac{\pi}{6}])$;	(h) $f([0,2\pi])$;	(i) $f^{-1}(0)$;
(j) $f^{-1}(\frac{1}{2})$;	(k) $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$;	(l) $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(m) $f^{-1}([-1,1])$;	(n) $f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$;	(o) $f^{-1}([-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}])$.

ifadelerini bulunuz.

Çözüm: Trigonometri cetvelini kullanarak

(a) $f(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(c) $f(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$; (d) $f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$;

(e) $f(0)=\cos 0=1,\ f(\pi)=\cos\pi=-1$ olduğundan ve hem de $x,\ [0,\pi]$ aralığında değışdiğinde cosinüs fonksiyonunun değerleri -1 ve 1 arasında değiştiğinden $f([0,\pi])=\{\cos x:\ 0\le x\le\pi\}=[-1,1]$ dir. Benzer şekilde;

(f) $f((0,\pi))=\{\cos x:\ 0<x<\pi\}=(-1,1)$;

(g) $f([0,\frac{\pi}{6}])=\{\cos x:\ 0\le x\le\frac{\pi}{6}\}=[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$;

(h) $f([0,2\pi])=\{\cos x:\ 0\le x\le 2\pi\}=[-1,1]$;

(i) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ iken $\cos x=0$ olduğundan $f^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=0\}=\{\frac{\pi}{2}+k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;

(j) $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ iken $\cos x=\frac{1}{2}$ olduğundan, $f^{-1}(\frac{1}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{1}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$ olur. Benzer şekilde;

(k) $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;

(l) $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;

(m) Görüntü kümesinin tanımı gereğince $f^{-1}([-1,1])=\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)=\cos x\in[-1,1]\}$ dir. $f^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ olduğunu gösterelim. $x\in f^{-1}([-1,1])$ ve $\cos x=\alpha$ olsun. Bu durumda $f(x)=\alpha,\ \alpha\in[-1,1]$ olduğundan $x=\arccos\alpha+2k\pi\in\mathbb{R}$ ve dolayısıyla $f^{-1}([-1,1])\subset\mathbb{R}$ dir. Öte yandan $x\in\mathbb{R}$ ise $\cos x\in[-1,1]$ olur ve buradan da $x\in f^{-1}([-1,1])$ veya $\mathbb{R}\subset f^{-1}([-1,1])$ olduğu elde edilir. O halde, $f^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ dir.

(n) $f^{-1}([-1,1])=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]\}$ dir. $x\in f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$ ve $\cos x=\alpha$ olsun. Bu durumda $\alpha\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ve $x=\arccos\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ dir. Eğer, α sayısı $[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ aralığında değişiyorsa $\cos x$ fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğundan x değişkeni $[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ ve $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]$ aralıklarında değişir. O halde,

$$f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])\subset\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\big)\cup\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\big)$$

olur. Öte yandan, $x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]$ veya $x\in[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ ise $\cos x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ olduğundan

$$\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\big)\cup\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\big)\subset[f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$$

elde edilir. Son iki sonuçtan

$$f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])=\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\big)\cup\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\big)$$

elde edilir. Benzer şekilde;
(o) $f^{-1}([-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$ olduğu gösterilir. $\diamond$

(2) Aşağıda tanımlanan $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonlarından hangisi birebir, örten ve birebir örtendir.

(a) $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$; (b) $f(x) = 1 - x^2$; (c) $f(x) = |x|$;
(d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$; (e) $f(x) = 2^{x-1}$

Çözüm: (a) $y = 1$ için $\cos\frac{\pi}{2}x = 1$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in [-1, 1)$ için $\cos\frac{\pi}{2}x = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -\frac{2}{\pi}\arccos y$ ve $x_2 = \frac{2}{\pi}\arccos y$ çözümü bulunduğundan, $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(b) $y = 1$ için $1 - x^2$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in [0, 1)$ için $1 - x^2 = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -\sqrt{1-y}$ ve $x_2 = \sqrt{1-y}$ çözümleri bulunduğundan $f(x) = 1 - x^2 : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(c) $y = 0$ için $|x| = 0$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in (0, 1]$ için $|x| = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -y$ ve $x_2 = y$ çözümleri bulunduğundan, $f(x) = |x| : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(d) $\forall y \in [0, 1]$ için $\frac{1}{2}(x + 1) = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde bir tek $x = 2y-1$ çözümü bulunduğundan, $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu birebir ve örtendir.
(e) $y \in [0, 1]$ olsun. $y \in [\frac{1}{4}, 1]$ için $2^{x-1} = y$ denkleminin bir tek $x = 1+\log_2 y \in [-1, 1]$ çözümü bulunur. $\forall x \in [-1, 1]$ için $\frac{1}{4} \le 2^{x-1} \le 1$ olduğundan $y \in [0, \frac{1}{4})$ için $2^{x-1} = y$ denkleminin $[-1, 1]$ içinde çözümü yoktur. O halde, $f(x) = 2^{x-1} : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu birebirdir fakat örten değildir. $\diamond$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ fonksiyonu için

(a) $f(3)$; (b) $f(a) + f(-a)$; (c) $f(b) - 1$;
(d) $f(b - 1)$; (e) $f(\frac{1}{c})$; (f) $\dfrac{1}{f(c)}$.

ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

(a) $f(3) = 3$; (b) $f(a) + f(-a) = \dfrac{2a^2}{a^2-4}$;
(c) $f(b) - 1 = \dfrac{2}{b-2}$; (d) $f(b - 1) = \dfrac{b-1}{b-3}$;
(e) $f(\frac{1}{c}) = \dfrac{1}{1-2c}$; (f) $\dfrac{1}{f(c)} = \dfrac{c-2}{c}$.

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & -1 \le x < 0 \text{ ise,} \\ \sin^2 x, & 0 \le x \le \pi \text{ ise,} \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \pi < x \le 5 \text{ ise.} \end{cases}$

fonksiyonu için $f(-1)$, $f(\frac{-1}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$ ve $f(4)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 0)$ aralığında $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin^2 x$ ve $(\pi, 5]$ aralığında $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
x = -1 \in [-1, 0) &\quad \text{için} \quad f(-1) = (1)^2 + (-1) + 1 = 1, \\
x = \tfrac{-1}{2} \in [-1, 0) &\quad \text{için} \quad f(\tfrac{-1}{2}) = (\tfrac{-1}{2})^2 + (\tfrac{-1}{2}) + 1 = \tfrac{3}{4}, \\
x = 0 \in [0, \pi] &\quad \text{için} \quad f(0) = \sin^2 0 = 0, \\
x = \tfrac{\pi}{4} \in [0, \tfrac{\pi}{4}] &\quad \text{için} \quad f(\tfrac{\pi}{4}) = \sin^2 \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}, \\
x = 4 \in (\pi, 5] &\quad \text{için} \quad f(4) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(5) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fonksiyonu için

$$f(2x) = 2f(x)\sqrt{1 - [f(x)]^2}$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: $f(2x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ ve $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ olduğundan dolayı

$$f(2x) = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} = 2f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}$$

bulunur. $\diamond$

(6) $f(1+2x) = \sin x - x^3 + \tan\frac{x-1}{2} + 1$ olduğuna göre, $f(x)$ i bulunuz.

Çözüm: $1+2x = u$ olsun. Bu durumda, $x = \frac{1}{2}(u-1)$ ve $x-1 = \frac{u-3}{2}$ olduğundan,

$$f(u) = \sin\tfrac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^3}{8} + \tan\tfrac{u-3}{4} + 1$$

bulunur. $\diamond$

(7) Aşağıdaki kurallarla tanımlanan reel değerli fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \log\frac{x+1}{x-2}$; (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$;

(c) $f(x) = \log(3\sin^2 x - 4)$; (d) $f(x) = \cot\pi x + \arccos 2^x$;

(e) $f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2} + \log(\sin\frac{\pi}{x})$; (f) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;

(g) $f(x) = \log_{x+3}(x^2-1)$; (h) $f(x) = (\sin x - 2\sin^2 x)^{-3/4}$;

(i) $f(x) = \arccos x - \arcsin(3-x)$; (j) $f(x) = \tan(2\arccos x)$;

(k) $f(x) = \log(1-2\mathrm{arccot}x)$; (l) $f(x) = \dfrac{\arcsin(0,5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$;

(m) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$; (n) $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x - \cos^2 3x}$;

(o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$; (p) $f(x) = \dfrac{\log_{2x} 3}{\arccos(2x-1)}$;

(r) $f(x) = (|x|-x)\sqrt{-\sin^2\pi x}$.

Çözüm: Problemin cözümünde reel değerli f ve g fonksiyonlarının tanım bölgeleri ile $f+g$, $f-g$, $f.g$ ve f/g fonksiyonlarının tanım

bölgeleri arasında

$$\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f-g) = \mathcal{D}(f.g) = \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$$
$$\mathcal{D}(f/g) = \mathcal{D}(f)\cap(\mathcal{D}(g)\setminus\{x\in\mathcal{D}(g):\ g(x)=0\})$$

mevcut bağıntılarından faydalanacağız.

(a) $\mathcal{D}(\sqrt{9-x^2}) = \{x:\ 9-x^2\geq 0\} = [-3,3]$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\log\frac{x+1}{x-2}) &= \{x:\ \frac{x+1}{x-2} > 0\}\\ &= \{x:\ (x+1>0,\ x-2>0)\vee(x+1<0,\ x-2<0)\}\\ &= \{x:\ x>2\vee x<-1\} = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = [-3,3]\cap\big((-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\big) = [-3,-1)\cup(2,3]$$

elde edilir.

(b) $\mathcal{D}(\sqrt{x}) = [0,+\infty)$, $\mathcal{D}(\sin\pi x) = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{D}(\sin\pi x)\setminus\{x:\ \sin\pi x = 0\} = \mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\}$ olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = [0,+\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\}) = (0,+\infty)\setminus\{k:\ k\in\mathbb{N}\}.$$

(c) $\mathcal{D}(f) = \{x:\ 3\sin^2 -4 > 0\} = \{x:\ |\sin x| > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için $|\sin x|\leq 1$ olduğundan, $\mathcal{D}(f) = \emptyset$ buluruz.

(d) $\mathcal{D}(\cot\pi x) = \{x:\ \sin\pi x\neq 0\} = \{x:\ x\neq k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$$= \mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{D}(\arccos 2^x) = \{x:\ -1\leq 2^x\leq 1\} = (-\infty,0]$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = (\mathbb{R}\setminus\{k\in\mathbb{Z}\}\cap(-\infty,0] = (-\infty,0)\setminus\{k:\ k=-1,-2,\ldots\}.$$

(e)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\arccos\tfrac{2x}{1+x^2}) &= \{x:\ -1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1\}\\ &= \{x:\ -1-x^2\le 2x\le 1+x^2\}\\ &= \{x:\ -(x-1)^2\le 0 \quad \text{veya} \quad (x-1)^2\ge 0\}=\mathbb{R},\\ \mathcal{D}(\log(\sin\tfrac{\pi}{x})) &= \{x:\ \sin\tfrac{\pi}{x}>0\}=\{x:\ 2k\pi<\tfrac{\pi}{x}<\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\\ &= (\bigcup_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2k+1},\tfrac{1}{2k}))\cup(\bigcup_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2(k+1)},-\tfrac{1}{2k+1}))\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}D(f) &= \mathbb{R}\cap\Big((\bigcup_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2k+1},\tfrac{1}{2k}))\cup(\bigcup_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2(k+1)},-\tfrac{1}{2k+1}))\Big)\\ &= (\bigcup_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2k+1},\tfrac{1}{2k}))\cup(\bigcup_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2(k+1)},-\tfrac{1}{2k+1})).\end{aligned}$$

(f) $\mathcal{D}(f)=\{x:\ \arcsin(\log_2 x)\ge 0\}=\{x:\ 0\le\log_2 x\le 1\}$

$$=\{x:\ 1\le x\le 2\}=[1,2].$$

(g) $f(x)=\dfrac{\log(x^2-1)}{\log(x+3)}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f) &= \{x:\ x^2-1>0 \quad \text{ve} \quad x+3>0 \quad \text{ve} \quad x+3\neq 1\}\\ &= \{x:\ |x|>1 \quad \text{ve} \quad x>-3 \quad \text{ve} \quad x\neq -2\}\\ &= (-3,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,+\infty).\end{aligned}$$

(h) $\mathcal{D}(f)=\{x:\ \sin x-\sin^2 x>0\}=\{x:\ \sin x(1-2\sin x)>0\}$

$$\begin{aligned}&= \{x:\ (\sin x>0,\ 1-2\sin x>0) \quad \text{veya} \quad (\sin x<0, 1-2\sin x<0)\}\\ &= \{x:\ 0<\sin x<\tfrac{1}{2} \quad \text{veya} \quad (\sin x<0, \sin x>\tfrac{1}{2})\}\\ &= \{x:\ 0<\sin x<\tfrac{1}{2}\}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\big((2n\pi,\tfrac{\pi}{6}+2n\pi)\cup(\tfrac{5\pi}{6}+2n\pi,\pi+2n\pi)\big).\end{aligned}$$

(i) $\mathcal{D}(\arccos x)=\{x:-1\le x\le 1\}=[-1,1]$,
$\mathcal{D}(\arcsin(3-x))=\{x:-1\le 3-x\le 1\}=[2,4]$
olduğundan, $\mathcal{D}(f)=[-1,1]\cap[2,4]=\emptyset$ olur.

(j) $\mathcal{D}(f)=\{x:0\le 2\arccos x<\frac{\pi}{2}\vee\frac{\pi}{2}<2\arccos x\le\pi\}$

$$\begin{aligned}&= \{x:0\le\arccos x<\frac{\pi}{4}\vee\frac{\pi}{4}<arccosx\le\frac{\pi}{2}\}\\ &= [-1,1]\setminus\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}\end{aligned}$$

elde edilir.

(k) $\mathcal{D}(\log u)=(0,\infty)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f) &= \{x:0<1-2\text{arccot}x\}=\{x:\frac{1}{2}>\text{arccot}x\}\\ &= \{x:\cot\tfrac{1}{2}<x<+\infty\}=(\cot\tfrac{1}{2},+\infty)\end{aligned}$$

olur.

(l) $x^2-3x+1=0$ denkleminin kökleri $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ve

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\arcsin(0,5x-1)) &= \{x:-1\le 0,5x-1\le 1\}=[0,4]\\ \mathcal{D}(\sqrt{x^2-3x+1}) &= \{x:x^2-3x+1\ge 0\}\\ &= (-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f) &= [0,4]\cap\big((-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)\big)\\ &= [0,\frac{3-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{5}}{2},4]\end{aligned}$$

elde edilir.

(m) $\arcsin(2-x)=0$ denkleminin kökü $x=2$ ve

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\sqrt{4-x^2}) &= \{x:4-x^2\ge 0\}=[-2,2]\\ \mathcal{D}(\arcsin(2-x)) &= \{x:-1\le 2-x\le 1\}=[1,3]\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = [-2,2] \cap ([1,3] \setminus \{2\}) = [1,2)$$

elde edilir.

(n) $\mathcal{D}(f) = \{x : -\sin^2 x - \cos^2 3x \geq 0\}$

$$\begin{aligned} &= \{x : \sin 2x = 0 \wedge \cos 3x = 0\} \\ &= \{x = \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\frac{k\pi}{2} : 3k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{2}\} \end{aligned}$$

olur.

(o) $6 - 35x - 6x^2 = 0$ denkleminin kökleri $x = -6$ ve $x = \frac{1}{6}$ ve

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\sqrt{\cos x - \tfrac{1}{2}}) &= \{x : \cos x \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &= \{x : -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}, \\ \mathcal{D}(\sqrt{6 - 35x - 6x^2}) &= \{x : 6 - 35x - 6x^2 \geq 0\} \\ &= \{x : -6 \leq x \leq \tfrac{1}{6}\} = [-6, \tfrac{1}{6}] \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= (-6, \tfrac{1}{6}) \cap \big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi] \big) \\ &= (-6, -\tfrac{5\pi}{3}] \cup [-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{1}{6}) \end{aligned}$$

bulunur.

(p) $\arccos(2x-1) = 0$ denkleminin kökü $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ ve

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\log_{2x} 3) &= \{x : 2x > 0 \vee 2x \neq 1\} \\ &= (0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty), \\ \mathcal{D}(\arccos(2x-1)) &= \{x : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = [0,1] \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = \big((0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty)\big) \cap [0,1] = (0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1]$$

bulunur.

(q) $\forall x \in [0, +\infty)$ için $|x| - x = 0$ dir. Dolayısıyla, $f(x) = 0$ olduğundan $[0, +\infty) \subset \mathcal{D}(f)$ olduğu görülür. $\mathcal{D}(f)$ tanım bölgesine negatif x lerden yalnızca $\sin \pi x = 0$ denklemini sağlayanlar yani $x = k, k = -1, -2, \ldots$ noktaları aittir. Böylece,

$$\mathcal{D}(f) = \{k : k = -1, -2, \ldots\} \cup [0, +\infty)$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

(8) $y = f(u)$ fonksiyonunun tanım bölgesi $(0,1)$ olduğunda

(a) $f(x^2)$; (b) $f(\cos x)$; (c) $f(\ln^2 x)$; (d) $f(\frac{[|x|]}{x})$

fonksiyonlarının tanım bölgelerini bulunuz.

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f(x^2)) = \{x : 0 < x^2 < 1\} = (-1,0) \cup (0,1)$ dir.

(b) $\mathcal{D}(f(\cos x)) = \{x : 0 < \cos x < 1\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \big((-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \setminus \{2n\pi\}\big)$ dir.

(c) $\mathcal{D}(f(\ln^2 x)) = \{x : 0 < \ln^2 x < 1\} = \{x : 0 < |\ln x| < 1\} = (\frac{1}{e}, 1) \cup (1, e)$ olur.

(d) $x = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ noktaları için $\frac{[|x|]}{x} = 1$ dir. $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ noktaları için $0 < \frac{[|x|]}{x} < 1$ ve $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{N}_-$ ($\mathbb{N}_- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$) noktaları için $\frac{[|x|]}{x} > 1$ olduğu açıktır. O halde, $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1)$ olur. $\diamond$

(9) Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olup olmadığını araştırınız.

(a) $f(x) = \log x^2$ ve $g(x) = 2\log|x|$;

(b) $f(x) = \log x^2$ ve $g(x) = 2\log x$;

(c) $f(x) = \arcsin x$ ve $g(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$, $\quad x \in [0,1]$;

(d) $f(x) = \arcsin x$ ve $g(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 0]$;

Çözüm: Tanıma göre (Bkz. Tanım 1.4.8) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için eğer, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonları eşittir.
(a) $\mathcal{D}(f) = \{x : x^2 > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $\mathcal{D}(g) = \{x : |x| > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ve $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ için $f(x) = \log x^2 = \log|x|^2 = 2\log|x| = g(x)$ olur. O halde, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ üzerinde f ve g fonksiyonları eşittir.
(b) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ve $D(g) = \{x : x > 0\} = (0, +\infty)$ dir. $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$ olduğundan, f ve g fonksiyonları eşit değildir.
(c) $0 \leq x \leq 1$ ve $y = \arcsin x$ olsun. Bu durumda, $\sin y = x$ ve $0 \leq y \leq \pi/2$ olur. Buradan, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ dir. $\forall y \in [0, \pi/2]$ için $\cos y \geq 0$ olduğundan,

$$\cos^2 y = 1 - x^2 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

dir. Böylece, $\forall x \in [0, 1]$ için $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ olduğu, yani $[0, 1]$ üzerinde f ve g fonksiyonlarının eşit olduğu görülür.
(d) $-1 \leq x \leq 0$ ve $y = \arcsin x$ olsun. O halde,(c) de olduğu gibi $\cos^2 y = 1 - x^2$, $-\pi/2 \leq y \leq 0$ olduğu elde edilir. Her $y \in [-\pi/2, 0]$ için $\cos y \geq 0$ olduğundan, $\cos^2 y = 1 - x^2 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ elde edilir. Demek ki, her $x \in [-1, 0]$ için $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ dir. Bundan dolayı $[-1, 0]$ üzerinde f ve g fonksiyonları eşit değildir. $\diamond$

(10) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ve $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ fonksiyonlarını ve tanım bölgelerini bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

(b) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

(c) $f(x) = 10^x$, $g(x) = \log x$;

(d) $f(x) = x^5$, $g(x) = x + 5$;

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise;} \end{cases}$

(f) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = \sin x$.

Çözüm: (a) $f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$, $\mathcal{D}(f \circ g) = [0, +\infty)$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(b) $f(g(x)) = \sqrt{1 - (g(x))^2} = \sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})} = \sqrt{x^2} = |x|$, $\mathcal{D}(f \circ g) = [-1, 1]$ dir. Benzer şekilde, $g(f(x)) = |x|$, $\mathcal{D}(g \circ f) = [-1, 1]$ olur.
(c) $f(g(x)) = 10^{g(x)} = 10^{\log x} = x$, $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}_+$,

$$g(f(x)) = \log f(x) = \log 10^x = x, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(d) $f(g(x)) = (g(x))^5 = (x + 5)^5$, $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$,

$$g(f(x)) = f(x) + 5 = x^5 + 5, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(e) $\forall x \in [0, +\infty)$ için $g(x) = 0$ olduğundan, $f(g(x)) = 0$, $x \in [0, +\infty)$ elde edilir. $\forall x \in (-\infty, 0)$ için $g(x) = x^2 \neq 0$ olduğundan, $f(g(x)) = g(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ elde edilir.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise.} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, $g(f(x)) = 0$ ve $\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$ olduğu gösterilir.
(f) $f(g(x)) = \ln(g(x))^2 = \ln(\sin^2 x)$, $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$g(f(x)) = \sin f(x) = \sin(\ln x^2), \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

bulunur. $\diamond$

(11) $f(x) = |x| + \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = |x| + \sqrt{x^2-1}$ olsun.

(a) $x \neq 0$ için $g(\sqrt{x^2+1}) = f(x)$ olduğunu gösteriniz.

(b) $|x| \geq 1$ için $f(\sqrt{x^2-1}) = g(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ olduğu açıktır.

(a) $\forall x \neq 0$ için $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ ve $\sqrt{x^2} = |x|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x^2+1}) &= \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{x^2+1} + |x| = f(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(b) $\forall |x| \geq 1$ için $\sqrt{x^2} = |x|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x^2-1}) &= \sqrt{x^2-1} + \sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2 + 1} = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{x^2-1} + |x| = g(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\diamond$

(12) Aşağıda verilen fonksiyonların çift olup olmadığını gösteriniz.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$;

(c) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$; (d) $f(x) = \begin{cases} x^4, & x > 0 \text{ ise,} \\ x^2, & x \leq 0) \text{ ise.} \end{cases}$

(e) $f(x) = |10 - x| - |10 + x|$; (f) $f(x) = \sin x + \cos x$;

(g) $f(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$.

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ simetrik bir küme ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

olduğundan, f fonksiyonu tektir.

(b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2+1} = -\frac{x+1}{x^2+1}$$

dir. $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $x = 0$ noktasında sağlandığında, ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan, f fonksiyonu ne tektir, ne de çifttir.

(c) $\forall x \geq 0$ için $x + \sqrt{x^2+1} \geq 1 > 0$ ve $\forall x < 0$ için $x + \sqrt{x^2+1} \geq x + \sqrt{x^2} = x + |x| = 0$ olduğundan $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$-x + \sqrt{x^2+1} = \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

ve buradan da $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_2(-x + \sqrt{x^2+1}) = \log_2 \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= -\log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x) \end{aligned}$$

olduğundan, f fonksiyonu tektir.

(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $f(-x) = \begin{cases} (-x)^4, & -x > 0\ , \\ (-x)^2, & -x \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} x^4, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

olduğundan, $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $x = 0$ ve $x = \pm 1$ noktalarında, $f(-x) = -f(x)$ denklemi ise, yalnızca $x = 0$ noktasında sağlandığından f fonksiyonu ne tektir, ne de çifttir.

(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = |10 + x| - |10 - x| = -f(x)$$

denklemi sağlandığından f fonksiyonu tektir.

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos$ dir. $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $\sin x = \dfrac{1}{2}$ denklemini sağlayan noktalarda, yani $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağlandı-ğından, $f(-x) = -f(x)$ denklemi ise, yalnızca $\cos x = \dfrac{1}{2}$ denklemini sağlayan noktalarda, yani $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağlandığından f fonksiyonu ne tektir, ne de çiftir.

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = \sin^2(-x) - \cos^3(-x) = \sin^2 x - \cos^3 x = f(x)$$

olduğundan, f fonksiyonu çifttir. $\diamond$

(13) Simetrik bir küme üzerinde tanımlı bir fonksiyonun, biri çift biri tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde ifade edilebileceğini gösteriniz.

Çözüm: Simetrik bir $E \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. E üzerinde tanımlı

$$F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{ve} \quad G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. E üzerinde $F(x)$ fonksiyonu çift, $G(x)$ fonksiyonu ise tektir. Her $x \in E$ için

$$f(x) = F(x) + G(x)$$

şeklinde yazılabileceğinden istenen iddianın doğruluğu görülür. $\diamond$

(14) Aşağıda verilen önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) Eğer, φ çift ise $f[\varphi(t)]$ de çifttir.

(b) Eğer, $y = f(x)$ ve $x = \varphi(t)$ tek ise $y = f[\varphi(t)]$ çifttir.

(c) Eğer, $y = f(x)$ çift ve $x = \varphi(t)$ tek ise $y = f[\varphi(t)]$ çifttir.

(d) Eğer, f ve g çift ise $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları da çifttir.

(e) Eğer, f ve g çift (tek) ise $f.g$ ve f/g $(g(x) \neq 0)$ fonksiyonları da çifttir.

(f) Eğer, f çift (tek) ve g tek (cift)ise $f.g$ ve f/g $(g(x) \neq 0)$ fonksiyonları da tektir.

Çözüm: (c) ve (e) önermelerinin doğruluğunu görelim. Diğer önermelrin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.
(**c**) φ tek ve f çift olduğu, dolayısı ile

$$f[\varphi(-t)] = f[-\varphi(t)] = f[\varphi(t)]$$

dir. Bu ise $f[\varphi(t)]$ nin çift fonksiyon olması demektir.
(**e**) f ve g çift olsun. O halde,

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

olduğundan $f.g$ çifttir. Eğer, f ve g tek iseler

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = (-f(x)).(-g(x)) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

olduğundan $f.g$ çifttir. $\diamond$

(15) Problem (14) teki önermelerden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sin x^2 + e^{-x^2} + x^4 - 6x^2 + 14$;

(b) $f(x) = \dfrac{\cos x^3 + 7x^{12}}{x^6 + \sin^2 x^3}$;

(c) $f(x) = \tan(x^3) + 4x^7$;

(d) $f(x) = \sin mx \cos nx$;

(e) $f(x) = \sin^5 3x . \cos^2 6x$;

(f) $f(x) = x^3 \arctan 2x$;

(g) $f(x) = x^3 + \operatorname{arccot} 2x$.

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin x^2 + e^{-x^2}$ ve $G(x) = x^4 - 6x^2 + 14$ fonksiyonları çift olduklarından, $f(x) = F(x) + G(x)$ çifttir.
(b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dir. $F(x) = \cos x^3 + 7x^{12}$ ve $G(x) = x^6 + \sin^2 x^3$ fonksiyonları çift olduklarından, $f(x) = F(x)/G(x)$ çifttir.
(c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$dir. $F(x) = \tan x^3$ ve $G(x) = 4x^9$ fonksiyonları tek olduklarından $f(x) = F(x) + G(x)$ tektir.
(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin mx$ tek ve $G(x) = \cos nx$ çift olduğundan $f(x) = F(x).G(x)$ tektir.
(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin^5 3x$ tek ve $G(x) = \cos^2 6x$ çift olduklarından, $f(x) = F(x).G(x)$ tektir.

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ dir. $F(x) = x^3$ ve $G(x) = \arctan 2x$ tek olduklarından, $f(x) = F(x).G(x)$ çifttir.

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$dir.$F(x) = x^3$ ve $G(x) = \text{arccot}2x$ tek olduklarından, $f(x) = F(x) + G(x)$ tektir. $\diamond$

(16) $f(x) = x^3 + x^2 - 3\sin x,\ x \in [0, +\infty)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde öyle genişletiniz ki, elde edilen fonksiyon tek olsun.

Çözüm: $x < 0$ olsun. O halde, $-x > 0$ ve

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 3\sin(-x)$$

dir. $f(x)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde genişlemesinin tekliği istenildiğinden $x < 0$ için

$$f(x) = -f(-x) = x^3 - x^2 - 3\sin x$$

denklemi sağlanmalıdır. O halde, istenen fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 3\sin x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ x^3 - x^2 - 3\sin x & x < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

biçimindedir. $\diamond$

(17) $A,\ w$ ve φ $(A \neq 0,\ w > 0)$, sabit reel sayılar olmak üzere $f(x) = A\sin(wx + \varphi)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

Çözüm: $T \neq 0$ sayısı f nin bir periyodu olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$A\sin[(wx + T) + \varphi] = A\sin(wx + \varphi)$$

veya

$$A\sin[(wx + \varphi) + wT] = A\sin(wx + \varphi)$$

denklemi sağlanır. Buradan, $wx + \varphi = \frac{\pi}{2}$ durumunda

$$A\sin(\frac{\pi}{2} + wT] = A\sin\frac{\pi}{2} = A$$

elde ederiz. Öte yandan, $A\sin(\frac{\pi}{2} + wT] = A\cos wT$ olduğundan $A\cos wT = A$ dır ve buradan da $wT = 2\pi n$ dir. Yani $T = \frac{2n\pi}{w},\ n \in \mathbb{Z}$ olduğu elde edilir. Demek ki, eğer $T \neq 0$, f nin periyodu ise $T = 2n\pi/w,\ n \in \mathbb{Z}$ koşulunu sağlamak zorundadır. Bu koşulu sağlayan en küçük T pozitif sayısı $T = 2\pi/w$ biçimindedir. Şimdi $T = 2\pi/w$ sayısının f nin bir periyodu olduğunu gösterelim.

$$f(x + \frac{2\pi}{w}) = A\sin[w(x + \tfrac{2\pi}{w}) + \varphi] = A\sin(wx + \varphi + 2\pi)$$
$$A\sin(wx + \varphi) = f(x)$$

dir. Böylece, $T = 2\pi/w$ sayısının f nin esas periyodu olduğu anlaşılır.$\diamond$

(18) Problem (17) deki önermeden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

(a)	$f(x) = \cos\frac{x}{2}$;	(b)	$f(x) = \sin 3x$;
(c)	$f(x) = \cos \pi x$;	(d)	$f(x) = 2\sin(\frac{x}{2} + 3)$;
(e)	$f(x) = 6\cos(3\pi x/4)$;	(f)	$f(x) = \tan 5x$.

Çözüm: **(a)** $f(x) = \cos\frac{x}{2} = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}),\ (A = 1,\ w = \frac{1}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \frac{2\pi}{w} = 4\pi$ dir.

(b) $A = 1,\ w = 3$ ve $\varphi = 0$ olduğundan, f nin esas periyodu $T = \frac{2\pi}{3}$ dür.

(c) $f(x) = \cos \pi x = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2})$ $(A = 1,\ w = \pi,\ w = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ dir.

(d) $A = 2,\ w = \frac{1}{2}$ ve $\varphi = 3$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \frac{2\pi}{(1/2)} = 4\pi$ dir.

(e) $f(x) = 6\cos(\frac{3\pi x}{4}) = 6\sin(\frac{3\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}),\ (A = 6,\ w = \frac{3\pi}{4},\ \varphi = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \frac{2\pi}{(3\pi/4} = \frac{8}{3}$ dür.

(f) $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{\cos 5x} = \dfrac{\sin 5x}{\sin(5x + \frac{\pi}{2})}$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{5}$ dir. $\diamond$

(19) $f(x) = \sin x^2$ fonksiyonu periyodik değildir. Gösteriniz.

Çözüm: Önermenin doğruluğunu olmayana ergi yöntemi ile göstereceğiz. $f(x) = \sin x^2$ fonksiyonunun $T > 0$ periyotlu bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x^2 = \sin(x + T)^2 \tag{1.11}$$

denklemi sağlanmaktadır. $x = 0$ durumunda buradan $\sin T^2 = 0$ dir ve dolayısıyla, $T^2 = n\pi$ veya $T = \sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, \ldots$ bulunur. T nin bu değeri (1.11) de yerine yazılırsa $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x^2 = \sin(x + \sqrt{n\pi})^2 = \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi) \tag{1.12}$$

denkleminin sağlandığı elde edilir. m herhangi bir tam sayı olmak üzere $2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2m\pi$ olacak şekilde bir x_0 sayısı seçelim. (Bu x_0 sayısı $x_0 \neq \dfrac{2m\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$, $n = 1, 2, \ldots$ biçiminde seçilebilir). Seçilen x_0 sayısı için

$$\sin x_0^2 \neq \sin(x_0^2 + 2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi)$$

dir. Son ifade (1.12) ile çeliştiğinden kabulümüzün doğru olmadığı görülür. Demek ki, verilen fonksiyon periyodik değildir. $\diamond$

(20)

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonu verilsin. Her T rasyonel sayının $D(x)$ in bir periyodu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İki rasyonel sayının toplamı rasyonel ve irrasyonel sayı ile rasyonel sayının toplamı ise irrasyonel sayı olduğundan, her $T \in \mathbb{Q}$ için

$$D(x + T) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

dir. Böylece, her $T \in \mathbb{Q}$ sayısı ve her $x \in \mathbb{R}$ için $D(x+T) = D(x)$ dir.$\diamond$

(21) $T = 2$ periyotlu f fonksiyonu $[0, 2)$ üzerinde $f(x) = x^2 - 1$ şeklinde tanımlıdır.

(a) f nin $[2k, 2k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ aralığında ifadesini bulunuz.

(b) $f(7)$, $f(\frac{15}{4})$, $f(-\sqrt{2})$, $f(\pi)$ ifadelerin değerlerini bulunuz.

Çözüm: **(a)** $x \in [2k, 2k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde, $0 \leq x - 2k < 2$ olduğundan, $f(x - 2k) = (x - 2k)^2 - 1$ dir. Öte yandan, f, 2 peryodlu olduğundan, her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = f(x - 2k)$ dir. Böylece, $x \in [2k, 2k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = (x - 2k)^2 - 1$ dir.
(b) $f(7) = f(7 - 2.3) = (7 - 2.3)^2 - 1 = 0$,
$f(\frac{15}{4}) = (\dfrac{15}{4} - 2)^2 = (\dfrac{7}{4})^2 - 1 = \dfrac{33}{16}$,
$f(-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2} + 2) = (2 - \sqrt{2})^2 - 1 = 5 - 4\sqrt{2}$,
$f(\pi) = f(\pi - 2) = (\pi - 2)^2 - 1 = \pi^2 - 4\pi + 3$. $\diamond$

(22) Aşağıda verilen önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) İki artan (azalan) fonksiyonun toplamı da artandır (azalandır).

(b) $E \subset \mathbb{R}$ ve $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer, f ve g E üzerinde artan ve $f(E)$, $g(E) \subset \mathbb{R}_+$ ise, $f + g$ de E üzerinde artandır ve $(f + g)(E) \subset \mathbb{R}_+$ dır.

(c) Eğer, $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu artan(azalan) ise $-f$, E üzerinde azalandır (artandır).

(d) Eğer, $x = f(x)$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan (azalan) ve $y = F(x)$, $[f(\alpha), f(\beta)]$ $([f(\beta), f(\alpha)])$ üzerinde artan (azalan) ise $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artandır.

(e) Eğer, $x = f(t)$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan (azalan) ve $y = F(x)$, $[f(\alpha), f(\beta)]$ $\big([f(\beta), f(\alpha)]\big)$ üzerinde azalan (artan) ise $y = F(f(t))$,$[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır.

Çözüm: (e) önermesinin doğru olduğunu gösterelim. Diğer önermelerin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

$t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 < t_2$ olsun. Eğer, f, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan, F ise, $[f(\alpha), f(\beta)]$ üzerinde azalan ise, $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) < f(t_2) \Rightarrow F(f(t_1)) > F(f(t_2))$ olur. O halde, $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır.

Eğer, f, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalan, F ise $[f(\beta), f(\alpha)]$ üzerinde artan ise $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) > f(t_2) \Rightarrow F(f(t_2)) < F(f(t_1))$ olur. O halde, $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır. $\diamond$

(23) Problem (22) deki önermelerden yararlanarak aşağıda verilen fonksiyonların monotonluk karakterini inceleyiniz.

(a) $f(x) = \arctan(x^2 - 2x + 3)$; (b) $f(x) = (x^3 + 4x + 6)\ln(x^2 + 4x + 6)$.

Çözüm: **(a)** $y = \arctan t$ fonksiyonu artan ve $t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ üzerinde artan, $(-\infty, 1)$ üzerinde ise, azalan olduğundan f, $(1, +\infty)$ üzerinde artan $(-\infty, 1)$ üzerinde ise azalandır.

(b) $y = t \ln t$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ üzerinde pozitif ve artan iki fonksiyonun çarpımı olduğundan artandır. $t = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$ fonksiyonu $(-2, +\infty)$ üzerinde artan ve $(-\infty, -2)$ üzerinde ise, azalan pozitif değerli bir fonksiyon olduğu açıktır. $\ln t$ fonksiyonu $[2, +\infty)$ üzerinde pozitif değerli artan bir fonksiyon olduğundan f, $(-\infty, -2)$ üzerinde azalan, $(-2, +\infty)$ üzerinde ise artandır. $\diamond$

(24) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Tanım gereği

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

olacağından $f^{-1}(\frac{1}{2}x - 3) = x$ dir. Bu eşitlikte $\dfrac{1}{2}x - 3 = y$ alınırsa $f{-}1(y) = 2(y+3)$ elde edilir. O halde, f nin tersi $f^{-1}(x) = 2x + 6$ şeklinde tanımlanan $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. $\diamond$

(25) $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$, $f(x) = 2x - x^2$ fonksiyonunun eğer, varsa tersini bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu örten fakat, birebir değildir. Buna göre tek değerli tersi yoktur. Şimdi f fonksiyonunun $(-\infty, 1]$ ve $[1, \infty)$ aralıklarına olan $g = f|_{(-\infty,1]}$ ve $h = f|_{[1,\infty)}$ kısıtlamalarını gözönüne alalım. $g : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan, g^{-1} tersi vardır. Tanım gereği, $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$ olduğundan $g^{-1}(2x - x^2) = x$ tir. Bu eşitlikte $2x - x^2 = y$ $(x = 1 - \sqrt{1-y}$ olacaktır) alınırsa $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y}$ elde edilir. O halde, g fonksiyonunun tersi $g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ şeklinde tanımlanan $g^{-1} : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonudur.

Benzer şekilde, $h : [1, \infty,) \to (-\infty, 1]$ fonksiyonunun tersi $h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ şeklinde tanımlanan $h^{-1} : (-\infty, 1] \to [1, \infty)$ fonksiyonu olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(26) $f : [0, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arccos x^2$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz.

Çözüm: $f : [0, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan, f^{-1} tersi vardır. Tanım gereği $f^{-1}(f(x)) = x$ olacağından, $f^{-1}(\arccos x^2) = x$ dir. Bu eşitlikte $\arccos x^2 = y$ alınırsa, $(x = \sqrt{\cos y}$ olduğundan) $f^{-1}(y) = \sqrt{\cos y}$ elde edilir. O halde, f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{\cos x}$ şeklinde tanımlanan $f^{-1} : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ fonksiyonudur. $\diamond$

(27) Aşağıda verilen bağıntıların yanlarında yazılı bölgelerde doğru olduklarını gösteriniz.

(a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\quad [-1, 1]$;

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\quad [-1, 1]$;

(c) $\arctan(-x) = -\arctan x, \quad \mathbb{R};$

(d) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x, \quad \mathbb{R};$

(e) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad [-1,1];$

(f) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathbb{R};$

(g) $\arcsin(\sin x) = x, \quad [-\pi/2, \pi/2];$

(h) $\arccos(\cos x) = x, \quad [0,\pi];$

(i) $\cos(\arccos x) = x, \quad [-1,1];$

(j) $\tan(\arctan x) = x, \quad \mathbb{R};$

(k) $\arctan(\tan x) = x, \quad (-\pi/2, \pi/2);$

(l) $\operatorname{cot}(\operatorname{arccot} x) = x, \quad \mathbb{R};$

(m) $\operatorname{arccot}(\cot x) = x, \quad (0,\pi);$

(n) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, (0,1);$

(o) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, (0,1);$

(p) $\arctan x = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (0,\infty);$

(q) $\arctan x + \arctan y = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, \qquad x>0,\ y>0;$

(r) $\arctan x - \arctan y = \arctan\dfrac{x-y}{1+xy}, \qquad x>0,\ y>0;$

(s) $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot}\dfrac{xy-1}{x+y}, \qquad x>0,\ y>0;$

Çözüm: (b), (e), (n) ve (q) bağıntılarının doğru olduğunu gösterelim. Diğer bağıntıların ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

(b) $\arccos(-x) = \alpha$ olsun. O halde, $\cos\alpha = -x$ ve $0 \le \alpha \le \pi$ olur.

$$\left.\begin{array}{c} 0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow 0 \le \pi - \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = -x \Rightarrow \cos(\pi-\alpha) = x \end{array}\right\} \Rightarrow \pi - \alpha = \arccos x \Rightarrow \alpha = \pi - \arccos x$$

$\Rightarrow \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

(e) $\arcsin x = \alpha$ ve $\arccos x = \beta$ olsun. O halde,

$$x = \sin\alpha = \cos\beta \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \beta \le \pi.$$

$\sin\alpha = \cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta)$ olduğu açıktır.

$$0 \le \beta \le \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \beta \le \frac{\pi}{2}.$$

Böylece,

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, \quad --\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

olduğu elde edilir. Bu nedenle $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ ve buradan da $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, yani $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ eşitliğinin doğru olduğu görülür.

(n) $0 < x < 1$ olsun. $\arcsin x = \alpha$ dersek $x = \sin\alpha,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ olur. Demek ki, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = +\sqrt{1-x^2}$ olur. Buradan da $\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}$ dir. Dolayısı ile, istenen

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür.

(q) $\arctan x = \alpha, \quad \arctan y = \beta, \quad x>0,\ y>0$ olsun. Bu durumda, $x = \tan\alpha, \quad y = \tan\beta, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ olur. O halde,

$$0 < \alpha + \beta < \pi, \quad \operatorname{cot}(\alpha+\beta) = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1-xy}{x+y}$$

$0 < \alpha + \beta < \pi$ olduğundan, son eşitlikten $\alpha + \beta = \operatorname{arccot}\dfrac{1-xy}{x+y}$ ve dolayısı ile istenen bağıntının doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(28) Aşağıda verilen bağıntıların yanlarında yazılı bölgelerde doğru olduklarını gösteriniz.

(a) $\operatorname{arcsin} hx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\mathbb{R}$;

(b) $\operatorname{arccos} hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $[1, +\infty)$;

(c) $\operatorname{arctan} hx = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $(-1, 1)$;

(d) $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Çözüm: (a) ve (c) önermelerinin doğruluğunu görelim. (b) ve (d) önermelerinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.

(a) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sinh y = x$ olsun.

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \quad \text{veya} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

denklemini çözelim. $e^y > 0$ olduğundan,

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1} \;\; (e^y > 0 \;\; \text{olduğundan, } e^y \neq x - \sqrt{x^2-1})$$

elde edilir. O halde,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

ve buradan da $\operatorname{arcsin} hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in \mathbb{R}$ bağıntısının doğru olduğu görülür.

(c) $x \in (-1, 1)$ olmak üzere $\tanh y = x$ olsun.

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \quad \text{veya} \quad (1-x)e^{2y} = 1 + x$$

denklemini y ye göre çözelim.

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

olur. Buradan da $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $x \in (-1, 1)$ bağıntısının doğru olduğu görülür. ⋄

(29) Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

(a) $\arcsin(\sin 10)$; (b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

(c) $\arcsin(\cos 2x)$, $(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4})$; (d) $\cos(\pi \sinh(\ln 2))$.

Çözüm: (a) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için $\arcsin(\sin x) = x$ olduğundan, $y = \sin x$ fonksiyonunun periyodik ve $|3\pi - 10| < \frac{\pi}{2}$ olmasından faydalanırsak

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin 10) &= \arcsin(\sin(10 - 2\pi)) = \arcsin[\sin(\pi - (10 - 2\pi))] \\ &= \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10\end{aligned}$$

olur.

(b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ olur.

(c) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{3\pi}{2} \leq 0$ ve $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için $\arcsin(\sin x) = x$ olduğundan,

$$\arcsin(\cos 2x) = \arcsin(\sin(2x - \tfrac{3\pi}{2})) = 2x - \frac{3\pi}{2}$$

olur.

(d) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ olduğundan,

$$\cos(\pi \sinh(\ln 2)) = \cos(\frac{\pi}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}))$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \cos\tfrac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. ⋄

(30)

$$\cos x + \sin y = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \; y \in [\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}] \tag{1.13}$$

kapalı şeklinde tanımlanan $f : [\pi, 2\pi] \to [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in [\pi, 2\pi]$ için $\cos x = p$, $p \in [-1, 1]$ dir. O halde, (1.13) ve $\sin y = -p$ denklemleri denktir. $-p \in [-1, 1]$ olduğundan, $\sin y =$

$-p$ denkleminin $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ aralığında tek bir çözümü vardır. Böylece, $f : [\pi, 2\pi] \to [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun mevcut olduğu görülür. Bu f nin ifadesini bulmak amacıyla (1.13) denklemini

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) + \sin y = 0$$

veya

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - x + y}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - x - y}{2} = 0 \tag{1.14}$$

şeklinde yazalım. (1.14) den

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - x + y}{2} & = 0 \\ \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} - x - y}{2} & = 0 \end{cases}$$

ve buradan da y için

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.15}$$

$$y = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

değerleri bulunur.

(1.15) durumunda $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow y \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$ için $y \notin [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ dir. Demek ki, $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, f nin değeri olamaz. (1.16) durumunda, $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow y \in [-\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 3$ için $y \in [-\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi] \subset [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ elde edilir. O halde, $k = 2$ için (1.16) dan

$$y = -x + \frac{7\pi}{2}. \quad x \in [\pi, 2\pi]$$

ifadesi bulunur $\diamond$

(31) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olduğundan f, $\mathbb{R}$ üzerinde alttan sınırlıdır. f, $\mathbb{R}$ üzerinde üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $(1 - x^2)^2 \geq 0$ olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1 + x^4 \geq 2x^2$ veya $1 \geq \dfrac{2x^2}{1 + x^4}$ eşitsizliği sağlanır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1 + x^4 \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{x^2 + 1}{1 + x^4} = \frac{x^2}{1 + x^4} + \frac{1}{1 + x^4} \leq \frac{x^2}{1 + x^4} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

olur. Böylece, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 < \dfrac{x^2 + 1}{1 + x^4} \leq \dfrac{3}{2}$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ise, f nin $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı (hem alttan ve hem de üstten sınırlı) olması demektir. $\diamond$

(32) $x = 0$ noktasının her komşuluğunda $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = 0$ noktasının herhangi bir $(-\epsilon, \epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ komşuluğu ve herhangi bir $M > 0$ sayısı verilsin. $f(x_0) > M$ olacak şekilde bir $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ noktasının varolduğunu gösterelim. $\dfrac{2}{\pi(1 + 4n_0)} < \epsilon$ ve $\dfrac{\pi(1 + 4n_0)}{2} > M$ koşullarını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olduğu açıktır. Örneğin, $n_0 > \max\{\frac{1}{4}[\![\frac{2M}{\pi} - 1]\!], \frac{1}{4}[\![\frac{2}{\pi\epsilon} - 1]\!]$ sayısı istenen koşulları sağlamaktadır.

$x_0 = \dfrac{2}{\pi(1 + 4n_0)}$ olsun. O halde, $|x_0| < \epsilon$ ve

$$f(x_0) = \frac{\pi(1 + 4n_0)}{2}\sin\tfrac{\pi(1+4n_0)}{2} = \frac{\pi(1 + 4n_0)}{2} > M$$

olduğu elde edilir. Bu ise f nin $x = 0$ noktasının her $(-\epsilon, \epsilon)$ komşuluğunda sınırsız olması demektir. $\diamond$

Not: $E \subset \mathbb{R}$ kümesi ve E üzerinde sınırlı $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$m(f) = m_E(f) = \inf\{f(x) : x \in E\}$$
$$M(f) = M_E(f) = \sup\{f(x) : x \in E\}$$

sayılarına f nin E üzerinde sırasıyla infimumu (en büyük alt sınırı) ve supremumu (en küçük üst sınırı) denir. $\bullet$

(33) $f : [0,+\infty) \to [0,1),\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonunun infimumunu ve supremumunu bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in [0,+\infty)$ için $0 \le f(x) < 1$, yani $\mathcal{R}(f) = [0,1)$ olduğu ve dolayısıyla, f nin $(0,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğu görülür. sup ve inf özelliklerine göre f nin $[0,\infty)$ üzerinde sonlu infimumu ve supremumu vardır.

$\forall x \in [0,+\infty)$ için $f(x) > 0$ ve hem de $f(0) = 0$ olduğundan

$$m(f) = \inf\{\frac{x}{1+x} : x \in [0,+\infty)\} = 0$$

dir. Şimdi

$$M(f) = \sup\{\frac{x}{1+x} : x \in [0,+\infty)\} = 1$$

olduğunu gösterelim.

(a) $\forall x \in [0,+\infty)$ için $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} < 1$ dir.

(b) $0 < \forall \epsilon < \dfrac{1}{2}$ iin $\dfrac{1-\epsilon}{\epsilon} < x_\epsilon$

koşullarını sağlayan $x_\epsilon \in (1,\infty)$ noktası için

$$f(x_\epsilon) = \frac{x_\epsilon}{1+x_\epsilon} > 1 - \epsilon$$

olur. O halde, supremumun karakteristik özellikleri dolayısıyla $M(f) = 1$ dir.

$m(f) = 0 \in \mathcal{R}(f),\ f(0) = 0$ ve $M(f) \notin \mathcal{R}(f)$ olduğundan f, $[0,+\infty)$ üzerinde mutlak minimuma sahiptir. Fakat mutlak maksimum değerine sahip değildir. $\diamond$

(34) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde

(a) $y = |f(x)|$; (b) $y = f(|x|)$;
(c) $|y| = f(x)$; (d) $|y| = f(|x|)$;

bağıntılarının grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız. $y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak yukarıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

Çözüm:

(a) $y = f(x)$ in grafiği biliniyorsa, $y = |f(x)|$ in grafiği, $f(x) \ge 0$ bölgesinde aynı kalarak ve $f(x) < 0$ bölgesinde de x eksenine göre simetriği alınarak elde edilir. Sonuçta $y = |f(x)|$ in grafiği çizilmiş olur.

(b) $y = f(x)$ in grafiği $x \ge 0$ bölgesinde aynı bırakılarak $x < 0$ bölgesindeki kısmının y eksenine göre simetriği alınarak elde edilir. Sonra $x < 0$ bölgesindeki kısmı ihmal edilir. Sonuçta $y = f(|x|)$ in grafiği çizilmiş bulunur.

(c) f nin $\mathcal{D}(f)$ bölgesinin $\mathcal{D}_+(f) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \ge 0\}$ alt kümesini gözönüne alalım. $x \in \mathcal{D}(f)$ için $|y| = f(x)$ eşitliği $y = f(x)$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\mathcal{D}_+(f)$ üzerinde tanımlı iki tane $y_1 = f(x)$ ve $y_2 = -f(x)$ fonksiyonları elde edilir. $\mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f) \neq \emptyset$ ise $\forall x \in \mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f)$ için $f(x) < 0$ olduğundan $|y| = f(x)$ denkleminden hiç bir fonksiyon tanımlanamaz. Böylece, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği bilindiğinde $|y| = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $f(x) \ge 0$ bölgesinde aynı bırakılarak bu kısmın x eksenine simetrisi eklenir. Sonra $f(x) < 0$ bölgesindeki (Eğer, $\mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f) \neq \emptyset$) kısmı ihmal edilir. Sonuçta $|y| = f(x)$ in grafiği çizilmiş olur.

(d) $y = f(|x|)$ in grafiği bilindiğinde $|y| = |f(x)|$ in grafiği (c) önermesinde gösterildiği gibi çizilir.

Şimdi $y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak $y = |f(x)| = |x^2 - 2x|,\ y = f(|x|) = x^2 - 2|x|,\ |y| = f(x) = x^2 - 2x$ ve $|y| = |f(|x|)| = |x^2 - 2|x||$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. (Bkz Şekil 1.32; 1.33; 1.34; 1.35; 1.36).

$\diamond$

(35) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $c \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere

$$y = af(bx + c)$$

tipinden fonksiyonların grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız.

Çözüm: (a) $y = f(x)$ ve $y = f(bx)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu fonksiyonlar için $y_1 = f(x)$ ve $y_2 = f(bx)$ iken x yerine x_1/b yazıldığında $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(b\frac{x_1}{b}) = f(x_1) = y_1$ elde edilir. Bu durumda, (x, y) noktası $y = f(x)$ in grafiği üzerinde bir nokta ise, $(x/b, y)$ noktası da $y = f(bx)$ in grafiği üzerinde bir noktadır diyebiliriz.
(b) $y = f(bx)$ ve $y = f(bx+c) = f(b(x+\frac{c}{b}))$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Eğer, $bx + c = x_1$ alınırsa $x = (x_1 - c)/b$ ve eğer $bx = x_1$ alınırsa $x = x_1/b$ bulunur. Bu değerler arasındaki fark c/b dir. O halde, $y = f(bx)$ eğrisi $c > 0$ iken c/b birim sola ($c < 0$ iken c/b birim sağa) kaydırılırsa $y = f(bx + c)$ in grafiği çizilmiş olur.
(c) $y = f(bx + c)$ ve $y = af(bx + c)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Eğer, $y_1 = f(bx + c)$ ve $y_2 = af(bx + c)$ alınırsa, bu durmda $y_2 = a.y_1$ olur. Yani, y_2 ordinatı y_1 in a katıdır. Demek ki, $y = af(bx + c)$ nin grafiği, $y = f(bx+c)$ nin grafiği üzerindeki bir nokta (x, y) iken (x, ay) noktalarını bulup birleştirilmesi ile elde edilir. $\diamond$

(36) Problem 33 ten yararlanarak aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

$$(a) \quad y = \frac{3x-2}{2x+1}; \quad (b) \quad y = \log_2(1-3x); \quad (c) \quad y = \sin(2x + \tfrac{\pi}{4})$$

Çözüm:

(a) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$y = \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{7}{2}}{2x+1} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{7}{4}}{x + \frac{1}{2}}$$

olduğu açıktır. Eğer, $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ alınırsa verilen fonksiyon $y = \dfrac{7}{4}f(x+\frac{1}{2}) + \dfrac{3}{2}$ şeklinde yazılabilir.

Şekil 1.37 ve Şekil 1.38 de $y = f(x) = -\dfrac{1}{x}$ ve $y = \dfrac{7}{4}f(x+\frac{1}{2}) + \dfrac{3}{2}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

(b) $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 3x > 0\} = (-\infty, \frac{1}{3})$. Şekil 1.39, 1.40, 1.41 ve 1.42 de sırasıyla $y = \log_2 x,\ y = \log_2 3x,\ y = \log_2(-3x)$ ve $y = \log_2(1-3x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

(c) $y = \sin x,\ y = \sin 2x$ ve $y = sin(2x + \frac{\pi}{4})$ fonksiyonlarının grafikleri sırası ile şekil 1.43, 1.44 ve 1.45 te verilmiştir.

◇

Not: $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği belli iken, denklemi $y = f(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$ olan fonksiyonun grafiği $y = f(x)$ eğrisi $k > 0$ ise k birim yukarıya, $k < 0$ ise k birim aşağıya kendisine paralel olarak kaydırılarak çizilir. •

1.21 Ek Problemler

(37) $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x$ fonksiyonu için

(a) $f(0)$; (b) $f(\frac{\pi}{6})$; (c) $f(\frac{\pi}{4})$;
(d) $f(\frac{\pi}{3})$; (e) $f([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$; (f) $f((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$;
(g) $f([0,\frac{\pi}{6}])$; (h) $f([0,2\pi])$; (i) $f^{-1}(0)$;
(j) $f^{-1}(\frac{1}{2})$; (k) $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$; (l) $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(m) $f^{-1}([-1,1])$; (n) $f^{-1}((-1,1))$; (o) $f^{-1}([0,\frac{1}{2}])$.

ifadelerini bulunuz.

Cevap:

(a) 0; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $[-1,1]$ (f) $(-1,1)$;
(g) $[0,\frac{1}{2}]$; (h) $[-1,1]$; (i) $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;
(j) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; (k) $(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; (l) $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$;
(m) $\mathbb{R}$; (n) $\mathbb{R}\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;

(o) $\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+\frac{1}{6})\pi]\big)\cup\big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(2k+\frac{5}{6})\pi,(2k+1)\pi]\big)$.

(38) Aşağıda verilen $f:[0,1]\to[0,3]$ fonksiyonlarından

(a) $f(x)=3\sin\frac{x\pi}{2}$; (b) $f(x)=\tan\frac{x\pi}{4}$; (c) $f(x)=3^x$;
(d) $f(x)=12(x-\dfrac{1}{2})^2$; (e) $f(x)=2|x+2|-3$.

hangisi birebir, örten ve birebir örtendir.

Cevap: (a) Birebir ve örten; (b) birebir; (c) birebir; (d) örten; (e) birebir.

(39) $f(x)=(1+x)^4-(1-x)^4$ fonksiyonu için

(a) $f(3)$; (b) $f(a)+f(-a)$; (c) $f(b)-1$;
(d) $f(b-1)$; (e) $f(\frac{1}{p})$; (f) $\dfrac{1}{f(p)}$.

ifadelerini bulunuz.

Cevap: (a) 240 ;(b) 0 ;(c) $8b^3+8b-1$; (d) $8b^3-24b^2+32b-16$; (e) $\dfrac{p^2+1}{p^3}$;(f) $\dfrac{1}{8p(1+p^2)}$.

(40)

$$f(x)=\begin{cases}2x-|x|, & x>-1 \text{ ise},\\ 2^{x+1}, & x\le -1 \text{ ise}.\end{cases}$$

fonksiyonu için $f(-4)$, $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(1)$ ve $f(1984)$ değerlerini bulunuz.

Cevap: $\dfrac{1}{8}$; 1; $-1,5$; 1; 1984.

(41) $f(x)=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ fonksiyonunun $f(x+2)-2\cos a\,f(x+1)+f(x)=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

(42) Aşağıdaki kurallarla tanımlanan reel değerli fonksiyonların tanım kümesini bulunuz.

(a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|+x}}$; (b) $y = \dfrac{x^2}{2|x|-3}$;

(c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}$; (d) $y = \dfrac{[\![\, x \,]\!]}{x+1}$;

(e) $y = \dfrac{1}{x - [\![\, x \,]\!]}$; (f) $y = \dfrac{x}{(9-x^2)^{\frac{2}{3}}}$;

(g) $y = \sqrt{x^2(x-2)}$; (h) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

(i) $y = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$; (j) $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$;

(k) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$; (l) $y = \log(3\sin^2 x - 4)$;

(m) $y = \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{x-1}}$; (n) $y = \log_x \log_{0,5}(\dfrac{4}{3} - 2^{x-1})$;

(o) $y = \log_{x+1}(x^2-3x+2)$; (p) $y = \dfrac{\log_{2x} 3}{\arccos(2x-1)}$;

(q) $y = \arctan\dfrac{x}{x^2-9}$; (r) $y = \cot \pi x + \arccos(2^x)$;

(s) $y = \log[\cos(\log x)]$; (t) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+9) + \sqrt{x^2-2x-8}$;

(u) $y = \arctan\dfrac{3-x}{x^2-4}$; (v) $y = \arccos(3+2^{-x})$;

(w) $y = \arcsin(1-x) + \log(\log x)$; (x) $y = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$;

(y) $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x}$; (z) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\log\cos x}}$.

Cevap:

(a) $(0,+\infty)$; (b) $(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$;

(c) $(0,1)\cup(1,+\infty)$; (d) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

(e) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$; (f) $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$;

(g) $\{0\}\cup[2,+\infty)$; (h) $(\frac{1}{2},1)\cup[3,+\infty)$;

(i) $(-6,\dfrac{-5\pi}{3}]\cup[\dfrac{-\pi}{3},\dfrac{1}{6})$; (j) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{3\pi}{4}+k\pi]$;

(k) $x \neq 2k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}$; (l) $\emptyset$;

(m) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$; (n) $(0,1)\cup(1,\log_2\frac{8}{3})$;

(o) $(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$; (p) $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$;

(q) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$; (r) $(-\infty,0)\backslash\{-n\},\ n\in\mathbb{N}$;

(s) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(10^{(2k-\frac{1}{2})\pi}, 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi})$; (t) $(-\infty,-3)\cup(-3,-2]\cup[4,\infty)$;

(u) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; (v) $\emptyset$;

(w) $(1,2]$; (x) $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$;

(y) $(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2k\pi))\cup(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi))$.

(z) $[(-1-\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2]\cup[(\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}+1)/2]$;

(43) $y = f(u)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-1,0]$ olduğunda

(a) $f(-x^2)$; (b) $f(x-1)$; (c) $f(2x)$;

(d) $f(\frac{|x|}{x})$; (e) $f(x-|x|)$

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

Cevap: (a) $[-1,1]$;(b) $[0,1]$;(c) $[\frac{-1}{2},0]$;(d) $(-\infty,0)$;(e) $[\frac{-1}{2},0]$.

(44) Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $f(x) = x$ ve $g(x) = \sqrt{x^2}$, $x\in(-\infty,\infty)$;

(b) $f(x) = x^3$ ve $g(x) = 10^{\log x^3}$;

(c) $f(x) = 3x^2-2x+1$, eğer, $x\in[1,2]$ ve $g(x) = 3x^2-2x+1$, eğer $x\in[1,3]$ ise

(d) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ ve $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$;

Cevap: **(a)** Eşit değildir; **(b)** $(0,+\infty$ üzerinde eşittirler;
(c) Fonksiyonlar farklı kümelerde tanımlı olduklarından eşit değillerdir;
(d) $[1,+\infty)$ üzerinde eşittirler.

(45) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$ ve $(g\circ g)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1 \text{ ise},\\ 0, & |x|>1 \text{ ise};\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2 \text{ ise},\\ 2, & |x|>2 \text{ ise}.\end{cases}$$

Cevap: $(f\circ f)(x)=1$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, & 1\le|x|\le\sqrt{3} \text{ ise},\\ 0, & |x|<1 \text{ ve } |x|>\sqrt{3} \text{ ise};\end{cases}$$
$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1 \text{ ise},\\ 2, & |x|>2 \text{ ise};\end{cases}$$
$$(g\circ g)(x)=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\le 2 \text{ ise},\\ -2, & |x|>2 \text{ ise}.\end{cases}$$

(46) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(a) $f(x)=\sqrt{4-2^x}$, $g(x)=x^2-3x+2$;
(b) $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=x^2-9x+20$;
(c) $f(x)=\log(x^2-4x+1)$, $g(x)=x^2-1$.

Cevap: (a) $[0,3]$; (b) $[\frac{9-\sqrt{89}}{2},0]$; (c) $[9,\frac{9+\sqrt{89}}{2}]$.

(47) $f(x)=\sin x$ olduğuna göre $f[f^2(x-1)]$ ve $f^2[f(x)-1]$ fonksiyonlarının ifadelerini bulunuz.

Cevap: $f[f^2(x-1)]=\sin[\sin^2(x-1)]$, $f^2[f(x)-1]=\sin^2[\sin x-1]$.

(48) Aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^3-5}$; (b) $f(x)=\sin(x+1)$;
(c) $f(x)=|x+1|+|x-1|$; (d) $f(x)=\begin{cases}x^3+\sin x, & x\ge 0 \text{ ise},\\ -x^3-\sin x, & x<0 \text{ ise};\end{cases}$
(e) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-8}$; (f) $f(x)=\arcsin x+\arccos x$;
(g) $f(x)=\cos(\arccos x)$.

Cevap:
(a) ne tektir ne de çifttir; (b) ne tektir ne de çifttir; (c) çifttir;
(d) çifttir; (e) ne tektir ne de çifttir ; (f) çifttir;
(g) tektir .

(49) Problem (14) teki örneklerden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{1-\cos x}$; (b) $f(x)=\sin(\tan x)$;
(c) $f(x)=\cot(\cos x)$; (d) $f(x)=\cot(\operatorname{arccot} x)$;
(e) $f(x)=\arcsin(\arccos x)$; (f) $f(x)=\sin(2x-\arctan x)$.

Cevap: **(a)** çifttir; **(b)** tektir; **(c)** çifttir; **(d)** tektir; **(e)** ne tektir ne de çifttir; **(f)** çifttir .

(50) Problem (17) deki önermeden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

(a) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$; (b) $f(x)=\cos 5x$;
(c) $f(x)=\tan(3x+5)$; (d) $f(x)=\sin^2(x-1)$;
(e) $f(x)=\sin x+\cos 2x$; (f) $f(x)=\cos 2x\cos 6x$.

Cevap: (a) 6π; (b) $\dfrac{2\pi}{5}$; (c) $\dfrac{\pi}{3}$; (d) π; (e) 2π; (f) $\dfrac{\pi}{2}$.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olmadıklarını gösteriniz.

(a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x\ne\dfrac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

(b) $f(x) = \cos x^2$.

(52) Aşağıdaki fonksiyonların monotonluk karakterlerini inceleyiniz.

(a) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$; (b) $f(x) = x + \arctan x$;

(c) $f(x) = \log(x^2 - 6x + 10)$; (d) $f(x) = \log^3 x + x^5$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1},\ x \neq 1$; (f) $f(x) = x^5 \log^7 x,\ x \geq 1$;

(g) $f(x) = \arctan(x^2 - 4x + 8)$; (h) $f(x) = \arctan^4 x$;

(i) $f(x) = x^3 + \arcsin x$; (j) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 20)$;

(k) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos^2 x}$.

Cevap:

(a) $(0, +\infty)$ da artan, $(-\infty, 0)$ da azalandır (b) artandır ;
(c) $(-\infty, 3)$ de azalan, $(3, +\infty)$ da artandır ; (d) artandır ;
(e) $(-\infty, 2)$ de azalan $(2, +\infty)$ da artandır ; (f) rartandır ;
(g) $(-\infty, 0)$ da azalan, $(0, +\infty$ da artandır ; (i)artandır ;
(j) $(-\infty, 4)$ de artan $(4, +\infty)$ da azalandır ;
(k) $[0, \frac{\pi}{2})$ de artan, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ de azalandır.

(53) Aşağıdaki fonksiyonları çift olarak devam ettiriniz.

(a) $f(x) = \sin x + x \tan x, \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$;

(b) $f(x) = x \log^3 x, \quad 0 < x < +\infty$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 2^x, & 0 \leq x < 1 \text{ ise,} \\ x^3 - x^2 + \log x, & 1 \leq x < 2 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap: (a) $f(x) = x \tan x - \sin x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x \leq 0$;

(b) $f(x) = -x \log^3(-x), \quad -\infty < x < 0$;

(c) $f(x) = \begin{cases} -x^3 - x^2 + \log(-x), & -2 < x \leq -1 \text{ ise,} \\ x^4 - 3x^2 + 2^{-x}, & -1 < x \leq 0 \text{ ise.} \end{cases}$

(54) Aşağıdaki fonksiyonları tek olarak devam ettiriniz.

(a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad 0 \leq x < +\infty$;
(b) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad 0 \leq x < +\infty$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & 0 \leq x < 2 \text{ ise,} \\ x^3 + 6, & 2 \leq x < 3 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap: (a) $f(x) = -\sin^4 - \cos^4 x,\ -\infty < x \leq 0$;
(b) $f(x) = -\log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), -\infty < x \leq 0$;
(c) $f(x) = \begin{cases} -6 + x^3, & -3 < x \leq 2 \text{ ise;} \\ -x^4, & -2 < x \leq 0 \text{ ise.} \end{cases}$

(55) Aşağıdaki verilen fonksiyonların terslerini bulunuz.

(a) $y = \dfrac{4 - x}{4 + x}$; (b) $y = \dfrac{8 + x^3}{8 - x^3}$;
(c) $y = 2x - x^2 \ \ x \geq 1$; (d) $y = x^2 + 4x, \quad x \leq -2$;
(e) $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}, \quad x \leq -1$; (f) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}, \quad 1 \leq x \leq 1$;
(g) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}, \quad x \geq 1$; (h) $y = \sin^3 x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$;
(i) $y = \sin^3 x, \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{3}$.

Cevap:

(a) $x = \dfrac{4(1 - y)}{1 + y},\ y \neq -1$; (b) $x = 2\sqrt[3]{\dfrac{y - 1}{y + 1}},\ y \neq -1$;

(c) $x = 1 + \sqrt{1 - y},\ y \geq 1$; (d) $x = -2 - \sqrt{4 + y},\ y \geq -4$;

(e) $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad -1 \leq y < 0$; (f) $x = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}, & 0 < |y| \leq 1 \ ; \\ 0, & y = 0 \ ; \end{cases}$

(g) $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, -0 < y \leq 1$; (h) $x = \arcsin \sqrt[3]{y}, -1 \leq y \leq 1$;

(i) $x = \pi - \arcsin \sqrt[3]{x}, -1 \leq y \leq 1$.

(56) Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

(a) $\arccos(-\frac{1}{2})$; (b) $\operatorname{arcsin} h(\sqrt{2})$;
(c) $\sin(\pi\cosh(\ln 2))$; (d) $\arcsin(\cos 2x), 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
(e) $\cos(2\arctan x^2)$

Cevap: (a) $\frac{2\pi}{3}$; (b) $\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (d) $\frac{\pi}{2}-2x$; (e) $\frac{1-x^4}{1+x^4}$.

(57) $\cos x + \sin y = 0,\ x \in [\pi, 2\pi],\ y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ kapalı şekilde tanımlanan $f : [\pi, 2\pi] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ y = f(x)$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Cevap: $y = f(x) = x - \frac{\pi}{2}$.

(58) $\sin x - \cos y = 0,\ x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], y \in [4\pi, 5\pi]$ kapalı şekilde tanımlanan $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to [4\pi, 5\pi]$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Cevap: $y = f(x) = -x + \frac{13\pi}{2}$.

(59) Aşağıda verilen fonksiyonların sınırlı olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = \frac{x-4}{2-\sqrt{x}},\ x \in [0, 4)$; (b) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^4-1}$;
(c) $f(x) = \frac{x+1}{x+\sqrt[3]{x^4}},\ x \in (-\infty, -1)$; (d) $f(x) = 2^{\sin x}$;
(e) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}},\ x \in (-\infty, 0)$; (f) $f(x) = \frac{1}{x^2+\ln^2 x}$;
(g) $f(x) = \log_x(1+x),\ x \in [2, +\infty)$; (h) $f(x) = \tan x \cos 3x$;
(i) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cot x - 1}$; (j) $f(x) = \frac{2\cos x}{\pi - \ln^2 x}$;
(k) $f(x) = \cot x - \frac{1}{\sin x}, x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

(60) Aşağıda verilen fonksiyonların sınısız olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$; (b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1},\ x \in (-\infty, -2]$;
(c) $f(x) = \frac{3^x}{x},\ x \in (-\infty, 0)$; (d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, x \in (0, +\infty)$;
(e) $f(x) = x \sin x$; (f) $f(x) = \log_x(1+x),\ x \in (1, 2]$;
(g) $f(x) = \frac{\cos}{x}$; (h) $f(x) = \frac{1}{x - [\![x]\!]}$;
(i) $f(x) = \frac{1}{x^2-4},\ x \in (-2, 2)$.

(61) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen aralıklarda infimum ve supremumlarını bulunuz.

(a) $f(x) = x^2 + 2,\ [-1, 3]$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1},\ (-\infty, +\infty)$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4},\ [-1, 1]$; (d) $f(x) = \tan^2 x,\ (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
(e) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ (\frac{1}{2}, 2)$; (f) $f(x) = x - [\![x]\!],\ (0, 1)$;

Cevap:

(a) $m(f) = 2,\ M(f) = 11$; (b) $m(f) = 0,\ M(f) = 1$;
(c) $m(f) = -\frac{1}{3},\ M(f) = -\frac{1}{4}$; (d) $m(f) = 0,\ M(f) = 1$;
(e) $m(f) = 2,\ M(f) = 2,5$; (f) $m(f) = 0,\ M(f) = 1$.

(62) Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini ciziniz.

(a) $f(x) = 2^{-|x|}$; (b) $f(x) = \cos x - |\cos x|$;
(c) $f(x) = \frac{1}{2}[\![(|x| - x)]\!]$; (d) $f(x) = x - [\![x]\!] - \operatorname{Sgn} x$;
(e) $f(x) = |x-1| + |x+1|$; (f) $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$;

(g) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |1 - 2x| + 2$; (h) $f(x) = |\log_2 |x||$;

(i) $f(x) = -\arctan(2x - 4)$; (j) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \dfrac{3}{2}$;

(k) $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ (l); $f(x) = \arcsin(1 - \frac{x}{2})$;

(m) $f(x) = 4\arccos(2 - 3x)$; (n) $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - (x^2 - 4x + 3)$;

(o) $f(x) = 2^{|\log_2 x|}$.

(63) Aşağıda, denklemlerle verilen eğrileri ciziniz.

(a) $|y| = \sin x$; (b) $|y| = |x + 1|$; (c) $|y| = -x^2 + 5x - 4$;
(d) $|y| = 1 - |x|$; (e) $|x| = y^2 - 1$; (f) $|x| = \cos y$.

(64) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini ciziniz.

(a) $f(x) = x\mathrm{Sgn}x$; (b) $f(x) = x\mathrm{Sgn}(\sin x)$;
(c) $f(x) = e^{\mathrm{Sgn}x}$; (d) $f(x) = \mathrm{Sgn}(\ln x)$;
(e) $f(x) = [\![\log x]\!]$; (f) $f(x) = \log x - [\![\log x]\!]$.

Bölüm 2

Limit

Matematiğin temel kavramlarından biri limit kavramıdır. İleride göreceğimiz bir çok kavramlar (süreklilik, türev, integral vs.) ve yöntemler bu kavrama dayanmaktadır. Bu bölümde reel sayı dizilerinin ve reel değerli tek değişkenli fonksiyonların limitleri tanıtılacaktır. limitlerin varlığı ve bulunması problemleri incelenecektir.

2.1 Reel Sayı Dizileri

2.1.1 Yakınsaklık, Iraksaklık ve Yakınsak Dizilerin Temel Özellikleri

Kesim 1.13 te reel sayı dizisinin limiti ve buna bağlı bazı tanımları ve sonuçları inceledik. Bu kesimde reel sayı dizileri ile ilgili daha geniş bilgi vermeye çalışacağız.

Reel sayı dizilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığına ilişkin §1.13 te görmüş olduğumuz şu tanımları tekrar ele alalım.

Tanım 2.1.1 : $\mathbb{R}$ *içinde bir* (x_n) *dizisi ve* $a \in \mathbb{R}$ *sayısı verilsin. Eğer,* $\forall \epsilon > 0$ *ve* $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ *için* $|x_n - a| < \epsilon$ *olacak şekilde* ϵ *na bağlı* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sayısı*

varsa (x_n) *dizisi* a *ya yakınsıyor (veya* (x_n) *dizisinin limiti* a *dır) denir ve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad veya \quad x_n \to a \ (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksaktır denir.

Bu tanım daha kısa olarak şöyle yazılabilir:
(x_n) dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon$.
(x_n) dizisi ıraksaktır $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ için $\exists \epsilon > 0$ öyleki $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ için $|x_n - a| \geq \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ sayısı vardır.

$\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ için $x \in U_\epsilon(a) \Leftrightarrow |x-a| < \epsilon$ olduğundan, Tanım2.1.1'e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

Tanım 2.1.2 : **(a)** (x_n) *dizisi yakınsaktır* $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0$ *için* (x_n) *dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri* a *noktasının* $U_\epsilon(a)$ *komşuluğu içindedir.*
(b) (x_n) *dizisi ıraksaktır* $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+$ *öyleki* (x_n) *dizisinin sonsuz sayıdaki terimleri* a *noktasının* $U_\epsilon(a)$ *komşuluğu dışındadır (veya* $\mathbb{R} \setminus U_\epsilon(a)$ *içindedir).*

Örnek 2.1.3 : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$ *olduğunu gösterelim.*

Çözüm: Bu nedenle verilen herhangi $\epsilon > 0$ sayısı için ϵ na bağlı $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $\left|\dfrac{2n+1}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayacak bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının bulunabileceğini göstermemiz gerekir. Buna göre,

$$\left|\frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{1}{3(3n+1)}\right| = \frac{1}{3(3n+1)}$$

olduğundan, sözkonusu $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı olarak $\dfrac{1}{3(3n+1)} < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan en küçük (genel olarak herhangi) bir doğal sayının alınması yeterlidir.

$$\frac{1}{3(3n+1)} < \epsilon \Leftrightarrow 3n+1 > \frac{1}{3\epsilon} \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{3\epsilon} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\epsilon} - 1\right)$$

yazabiliriz. Eğer, $n_\epsilon = [\![\frac{1}{3}(\frac{1}{3\epsilon} - 1)]\!]$ dersek her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $(\epsilon > \frac{1}{12}$ iken $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$|\frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3}| < \epsilon$$

olur. Buradan, istenen eşitliğin doğru olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.4 *: $q \in \mathbb{R},\ |q| < 1$ için $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olğunu gösterelim.*

Çözüm: Eğer, $q = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q^n = 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olur. $0 < |q| < 1$ olsun. $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n$ olduğundan, herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|q|^n < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının seçilmesi yeterlidir. $0 < a < 1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde azalan olduğundan,

$$|q|^n < \epsilon \Rightarrow \log_{|q|}\left(|q|^n\right) > \log_{|q|}\epsilon \Rightarrow n > \log_{|q|}\epsilon$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi $n_\epsilon = [|\log_{|q|}\epsilon|]$ dersek, $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $(\epsilon \leq |q|$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ için) $|q|^n < \epsilon$ olur. Tanım2.1.1 dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.5 *: Terimleri $x_1 = 0,3; x_2 = 0,33; \ldots; x_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n-kez}; \ldots$ biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ olduğunu gösterelim.*

Çözüm: Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ'a bağlı $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının bulunabileceğini gösterelim.

$\frac{1}{3}$ sayısı $0,333\ldots$ şeklinde ondalık sayı ile ifade edilebileceğinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0,\underbrace{33\ldots3}_{n-kez} < \frac{1}{3} < 0,\underbrace{33\ldots3}_{n-kez} + \frac{1}{10^n}$$

veya $x_n < \frac{1}{3} < x_n + \frac{1}{10^n}$ eşitsizliği geçerlidir. Buradan da $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n - \frac{1}{3}| < \frac{1}{10^n}$$

olduğu elde edilir. $\forall n > n_\epsilon$ için $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^{n_\epsilon}}$ olduğundan, istenen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının $\frac{1}{10^{n_\epsilon}} < \epsilon$ komşuluğundan seçilmesi yeterlidir.

Eğer, $n_\epsilon = \|\log\frac{1}{\epsilon}\| + 1$ dersek $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $(\epsilon \geq 1$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ için)

$$|x_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

olur. Buradan da $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.6 *: $x_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösterelim.*

Çözüm: $a = -1$ sayısı (x_n) dizisinin limiti olamaz. Çünkü -1 noktasının $U_{1/2}(-1)$ komşuluğunun dışında dizinin sonsuz sayıda (çift indisli) $x_{2k} = 1,\ k \in \mathbb{N}$ terimleri bulunmaktadır. Benzer şekilde, $a = 1$ sayısının da (x_n) dizisinin bir limiti olmayacağı gösterilebilir.

Herhangi $a \in (-1, 1)$ sayısı verilsin. $\delta = \min\{a + 1, 1 - a\}$ olmak üzere a noktasının $U_\delta(a)$ komşuluğu için $x_n \notin U_\delta(a),\ n \in \mathbb{N}$ olduğundan, $a \in (-1, 1)$ sayısı (x_n) dizisinin limiti olamaz.

Şimdi herhangi $a > 1$ $(a < -1)$ sayısı verilmiş olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin U_{a-1}(a)$ $(x_n \notin U_{-(a+1)}(a))$ olduğundan, $a > 1$ $(a < -1)$ sayısı $(x_n$ dizisinin bir limiti olamaz.

Böylece, her $\forall a \in \mathbb{R}$ sayısı için $a \neq \lim_{n\to\infty} x_n$ olduğu ve buradan da Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisinin ıraksak olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.7 *: n inci terimi $x_n = n^{(-1)^n}$ şeklinde verilen $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots, 2k, \frac{1}{2k+1}, \ldots$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Herhangi $a \neq 0$ sayısı x_n dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\epsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $\frac{1}{2k+1} < \frac{|a|}{2}$ olacak şekilde bütün terimleri $a \neq 0$ noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır. $a = 0$ noktasıda (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $a = 0$ noktasının, örneğin,

$U_1(0)$ komşuluğunun dışında (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimleri (çift indisli terimleri) bulunmaktadır.

Böylece, Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisi ıraksaktır. $\diamond$

Tanım 2.1.8 : *$\mathbb{R}$ içinde (x_n) ve (y_n) dizileri verilmiş olsun. $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n.y_n)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olduğunda $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisine sırası ile, (x_n) ve (y_n) dizilerinin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü denir ve $(x_n)+(y_n)$, $(x_n) - (y_n)$, $(x_n).(y_n)$ ve $\frac{(x_n)}{(y_n)}$ şeklinde gösterilir.*

Yakınsak dizilerin aşağıdaki özelliklerini verebiliriz.

Teorem 2.1.9 :

(a) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

(b) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak her dizi sınırlıdır.

(c) $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ ve $a \neq 0$ ise, $\forall n > n_a$ için $|z_n| > \frac{|a|}{2}$ olacak şekilde $n_a \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(d) $\mathbb{R}$ içinde (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ise $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n.y_n)$ ve $b \neq 0$ ise $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisileri de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n) = a.b$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ dir.

(e) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ (veya $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$) için $a_n \leq b_n$ ise, $a \leq b$ dir.

(f) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ (veya $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$) için $a_n \leq c_n \leq b_n$ ise $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ dır.

(g) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve $a < b$ ise, $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ için $a_n < b_n$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(h) $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ dir.

Not: Teorem 2.1.9 daki (b), (d) ve (h) önermelerinin tersi genelde doğru degildir. Gerçekten, (b) durumunda $n.$ terimi $x_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$ şeklinde verilen (x_n) dizisi sınırlıdır. Çünkü, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \leq 1$ dir. Fakat, bu dizi ıraksaktır. (d) durumunda $n.$ terimi $x_n = (-1)^n$ ve $y_n = (-1)^{n-1}$ şeklinde verilen ıraksak (x_n) ve (y_n) dizileri için $x_n + y_n = 0$, $x_n - y_n = 2$, $x_n.y_n = x_n/y_n = -1$ olduğundan, $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, (x_n/y_n) dizileri yakınsaktır. (h) durumunda, $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ıraksak dizisi için $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ dir. $\bullet$

Örnek 2.1.10 : $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 7n}{4n^2 - 1}$ *limitini bulunuz.*

Çözüm: Verilen dizinin $n.$ terimini

$$x_n = \frac{3n^2 + 7n}{4n^2 - 1} = \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 - \frac{1}{n^2}}$$

şeklinde yazalım. O halde, $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ olduğundan Teorem 2.1.9 un (d) önermesini kullanırsak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3 + \frac{7}{n})}{\lim_{n\to\infty}(4 - \frac{1}{n^2})} = \frac{3}{4}$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.11 : $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall n \geq 6$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$0 < \left(\frac{3}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafındaki dizilerin (yani (0) ve $(\frac{1}{2})^n$ dizilerinin) limiti sıfır olduğundan, Teorem 2.1.9 un (f) önermesine göre $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ dır. $\diamond$

Örnek 2.1.12 : $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \geq -1$ *ve* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *olsun. Herhangi* $p \in \mathbb{N}$ *sayısı için* $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{p}} = 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ise, (bu durumda $1 + x_n \geq 1$ dir) ve

$$1 \leq (1+x_n)^{\frac{1}{p}} \leq \left((1+x_n)^{\frac{1}{p}}\right)^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|$$

olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq x_n < 0$ ise, (bu durumda $0 \leq 1 + x_n < 1$ dir) ve

$$1 > (1+x_n)^{\frac{1}{p}} \geq \left((1+x_n)^{\frac{1}{p}}\right)^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|$$

olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x_n \geq -1$ için

$$1 - |x_n| \leq (1+x_n)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + |x_n|$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ (Bkz. Teorem 2.1.9(h)) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1 - |x_n|) = \lim_{n\to\infty}(1 + |x_n|) = 0$ olur. O halde, Teorem 2.1.9 un (f) önermesi gereğince

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{p}} = 1$$

olduğu bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.13 : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$ *limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.14 : $a > 1$ *sayısı için* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$ alalım. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n > 0$ ve Bernoulli eşitsizliği gereğince $n \in \mathbb{N}$ için

$$a = (1+\alpha_n)^n \geq n.\alpha_n$$

olur ve buradan da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha_n \leq \frac{a}{n}$ olduğu elde edilir. O halde, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.15 : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$ alalım. O halde, $\alpha_n \geq 0$ ve $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned} n = (1+\alpha_n)^n &= 1 + n.\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \end{aligned}$$

dir. $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için $n - 1 \geq \frac{n}{2}$ olduğundan, son eşitsizlikten $n \geq \frac{n^2\alpha_n^2}{4}$, dolayısıyla, $0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ olduğu görülür. Buna göre, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.16 : $a > 1$ *sayısı için* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $a - 1 > 0$ ve $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$a^n = (1+a-1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2$$

olduğundan, $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n(a-1)^2}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n(a-1)^2} = 0$ olduğundan, buradan $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.17 : *$a > 1$ sayısı için $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall \epsilon > 0$ sayısı verilsin. $\mathbb{N}$ üzerinde

$$\frac{\log_a n}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n < (a^\epsilon)^n$$

olduğu açıktır. $a^\epsilon > 1$ olduğundan, bir önceki örnek gereğince $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(a^\epsilon)^n} = 0$ dır. O halde, Teorem 2.1.9 un (g) önermesi gereğince $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\frac{n}{(a^\epsilon)^n} < 1 \quad \text{veya} \quad n < (a^\epsilon)^n$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan da $\forall n > n_0$ için $0 \leq \frac{\log_a n}{n} < \epsilon$ veya Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.18 : $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall k \geq 9$ $(k \in \mathbb{N})$ için $\frac{3}{k} \leq \frac{1}{3}$ olduğundan, $\forall n \geq 10$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned} 0 < \frac{3^n}{n!} &= \frac{3^8}{8!}.\frac{3.3\ldots3}{9.10\ldots n} < \frac{3^8}{8!}.\frac{3.3\ldots3}{9.9\ldots9} \\ &= \frac{3^8}{8!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-8} = \frac{3^{16}}{8!}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{16}}{8!}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ olduğundan, son eşitsizlikten $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ bulunur. $\diamond$

2.1.2 Sonsuz Küçük ve Sonsuz Büyük Diziler

Tanım 2.1.19 : *$\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisinin limiti sıfır ise, (x_n) dizisine sonsuz küçük bir dizi adı verilir.*

Tanım 2.1.20 : *$\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin.*
(a) *Eğer, $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n| > \epsilon$ olacak şekilde ϵ na bağlı bir $n_\epsilon \in \mathbb{N})$ sayısı varsa, (x_n) dizisine sonsuz büyük bir dizi denir ve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{veya} \quad x_n \to \infty \ (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.
(b) *Eğer, $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $x_n > \epsilon$ $(x_n < -\epsilon)$ olacak şekilde ϵ na bağlı bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisinin limiti $+\infty(-\infty)$ dur denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ veya $x_n \to \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ $(x_n \to -\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde gösterilir.*

Bu tanım daha kısa olarak şu şekilde de yazılabilir.
(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n| > \epsilon$;
(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $x_n > \epsilon$;
(c) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $x_n < -\epsilon$.

Teorem 2.1.21 : *$a \in \mathbb{R}$ sayısının (x_n) dizisinin limiti olması için gerek ve yeter şart terimleri $\alpha_n = x_n - a,\ n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (α_n) dizisinin sonsuz küçük bir dizi olmasıdır.*

Sonsuz küçük ve sonsuz büyük dizilerin şu özelliklerini verebiliriz.

Teorem 2.1.22 : ***(a)*** *Sonlu sayıdaki sonsuz küçük dizilerin cebirsel toplamı bir sonsuz küçük dizidir.*
(b) *Bir sonsuz küçük dizinin bir sınırlı dizi ile çarpımı bir sonsuz küçük dizidir.*
(c) *Sonlu sayıdaki sonsuz küçük dizilerin çarpımı bir sonsuz küçük dizidir.*
(d) *Eğer, (x_n) bir sonsuz küçük dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 0$ ise $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisi bir sonsuz büyük dizidir. Eğer, (x_n) bir sonsuz büyük dizi ise $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisi bir sonsuz küçük dizidir.*

Örnek 2.1.23 : *$q \in \mathbb{R}$ olmak üzere (q^n) dizisnin $|q| < 1$ durumunda sonsuz küçük ve $|q| > 1$ durumunda ise sonsuz büyük bir dizi olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Az önce, $|q| < 1$ durumunda $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğunu ve dolayısı ile, (q^n) dizisinin sonsuz küçük bir dizi olduğunu göstermiştik. Şimdi $|q| > 1$ olsun. Bu durumda, (q^n) dizisi için Tanım 2.1.20 nin koşullarının sağlandığını gösterelim. Bu nedenle $\forall \epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$|q^n| > \epsilon$ olacak şekilde ϵ na bağlı bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısının varolduğunu göstermek gerekir.

$a > 1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde artan olduğundan

$$|q^n| = |q|^n > \epsilon \Rightarrow \log_{|q|}(|q|^n) > \log_{|q|} \epsilon$$
$$\Rightarrow n > \log_{|q|} \epsilon$$

bulunur. O halde, $n_\epsilon = [|\log_{|q|} \epsilon|]$ dersek $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $(0 < \epsilon \leq |q|$ için $n_\epsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ için$)$ $|q^n| > \epsilon$ olur. Tanım 2.1.20 gereğince $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ olduğu elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.24 *: n. terimi* $x_n = \dfrac{1}{n},\ y_n = -\dfrac{1}{n},\ z_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ t_n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ *ve* $s_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ *şeklinde verilen* (x_n)*,* (y_n)*,* (z_n)*,* (t_n) *ve* (s_n) *birer sonsuz küçük diziler olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Gerçekten, herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\epsilon = [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n| < \epsilon,\ |y_n| < \epsilon,\ |z_n| < \epsilon,\ \forall n > n_\epsilon = [\![\frac{3}{\epsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|t_n| < \epsilon$ ve $\forall n > n_\epsilon = [\![\frac{2}{\epsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|s_n| < \epsilon$ olduğu görülür. $\diamond$

Örnek 2.1.25 *: n. terimi* $x_n = n,\ y_n = -n,\ z_n = (-1)^{n-1}n$ *ve* $t_n = \dfrac{n}{2+(-1)^n}$ *şeklinde verilen* (x_n)*,* (y_n)*,* (z_n)*,* (t_n) *ve* (s_n) *birer sonsuz büyük diziler olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Bir önceki örneğe göre $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n},\ \frac{1}{y_n} = \frac{-1}{n},\ \frac{1}{z_n} = \frac{(-1)^{1-n}}{n}$ ve $\frac{1}{t_n} = \frac{2+(-1)^n}{n}$ birer sonsuz küçük dizilerdir. $\diamond$

2.1.3 Belirsiz İfadeler

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ olmak üzere $(x_n)/(y_n)$ $(y_n \neq 0, n \in \mathbb{N})$ dizisi

(a) Yakınsak; (b) Sınırlı fakat ıraksak; (c) Sonsuz küçük; (d) Sonsuz büyük

olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizileri için örnekler verelim.

(a) $x_n = \dfrac{a}{n}$ $(a \neq 0),\ y_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\dfrac{x_n}{y_n} = a \Rightarrow \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ve limiti a dır.

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n},\ y_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n \Rightarrow \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sınırlıdır, fakat ıraksaktır.

(c) $x_n = \dfrac{1}{n^2},\ y_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz küçüktür.

(d) $x_n = \dfrac{1}{n},\ y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n n \Rightarrow \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz büyüktür.

Böylece, eğer, (x_n) ve (y_n) birer sonsuz küçük diziler ise, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\dfrac{0}{0}$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur denir.

Benzer şekilde

(a) Eğer, (x_n) ve (y_n) birer sonsuz büyük diziler ise, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\dfrac{\infty}{\infty}$ şeklinde;

(b) Eğer, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ (veya $\pm\infty$) ise $(x_n.y_n)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $(x_n.y_n)$ dizisi $0.\infty$ şeklinde;

(c) Eğer, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ (veya $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$) ise, $(x_n + y_n)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $(x_n + y_n)$ dizisi $\infty - \infty$ şeklinde

belirsiz ifade oluşturur denir.

Şimdi belirsiz ifadelerin limitlerinin bulunması ile ilgili birkaç örnek verelim. Belirtelim ki, belirsiz ifadelerin daha detaylı incelemeleri sonraki kesimlerde verilecektir.

Örnek 2.1.26 : $0 < \alpha < 1$ *için* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right] = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $x_n = (n+1)^\alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $y_n = n^\alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ olduğundan, $(n+1)^\alpha - n^\alpha = x_n - y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ dizisi için $\infty - \infty$ şeklinde belirsizlik sözkonusudur. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1\right] < n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n}) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

yazabiliriz. O halde, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ olduğundan, (gerçekten $\forall \epsilon > 0$ için $\forall n > n_\epsilon = [|(\epsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}|]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $0 < \frac{1}{n^{1-\alpha}} < \epsilon$ dur). Teorem 2.1.9 (f) gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right] = 0$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.27 : $x_n = \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ *dizisinin limitini bulunuz.*

Çözüm: Önceki örnekten görüldüğü gibi, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $\dfrac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizlik vardır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}{1 + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

dir. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}{1 + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.28 : $x_n = \dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ *dizisinin limitini bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3} = +\infty$ ve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^3}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} + 1} \\ &= \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $0.\infty$ şeklinde bir belirsizlik vardır. Diğer taraftan,

$$x_n = \frac{n^3}{3} \frac{\frac{3}{n^3}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}} + 1}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.29 : $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$ $(n \in \mathbb{N})$ *dizisinin limitini bulunuz.*

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = +\infty$ olduğundan, verilen (x_n) dizisi için $\dfrac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizlik mevcuttur. Öte yandan,

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

ifadesinden görüldüğü gibi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$ dır. $\diamond$

Şimdi $\dfrac{\infty}{\infty}$ şeklindeki belirsizliklerin limitinin bulunmasında sık sık kullanılan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.30 (Stolz) : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, (y_n) *artan bir dizi ve* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ *limiti varsa,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$ *dir.*

Örnek 2.1.31 : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *ise,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = a_1 + \ldots + a_n$ ve $y_n = n$ alırsak, $x_n - x_{n-1} = a_n$ ve $y_n - y_{n-1} = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n = a\end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak, $a_n = \sqrt[n]{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.32 : $k \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *şeklinde belirsizlik oluşturan*

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$ olarak alırsak, $x_n - x_{n-1} = n^k$ ve

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= n^{k+1} - (n-1)^{k+1} \\ &= n^{k+1} - \left[n^{k+1} - (k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} - \ldots + (-1)^{k+1}\right] \\ &= (k+1)n^k - \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \ldots - (-1)^{k+1}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \dfrac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}} = \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.33 : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1.1! + 2.2! + \ldots + n.n!}{(n+1)!} = 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1.1! + 2.2! + \ldots + n.n!$ ve $y_n = (n+1)!$ alırsak $x_n - x_{n-1} = n.n!$ ve $y_n - y_{n-1} = (n+1)! - n! = (n+1).n! - n! = n.n!$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1.1! + 2.2! + \ldots + n.n!}{(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n.n!}{n.n!} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\diamond$

Örnek 2.1.34 : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Stolz teoreminde $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, $y_n = n$ olarak alırsak, $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}$ ve $y_n - y_{n-1} = n-(n-1) = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

olduğu görülür. $\diamond$

2.1.4 Reel Sayı Dizilerinin Yakınsaklık Kriterleri

Kesim 1.13 ten görüldüğü gibi $\mathbb{R}$ içindeki bir dizinin yakınsadığı noktayı (veya limitini) bilmeden de aşağıdaki kriterler yardımı ile bu dizinin yakınsaklık karakteri incelenebilir. (Bkz. Teorem 1.13.19, 1.13.20 ve 1.13.24).

Teorem 2.1.35 *: **(a)** Monoton artan ve üstten sınırlı her (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\mathcal{R}(x_n)$ dir. Ayrıca, monoton artan (x_n) dizisi üstten sınırsız ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dur.*
***(b)** Monoton azalan ve alttan sınırlı her (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\mathcal{R}(x_n)$ dir. Ayrıca, monoton azalan (x_n) dizisi alttan sınırsız ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dur.*
***(c)** Bir reel sayı dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun bir Cauchy dizisi olmasıdır. (Cauchy yakınsaklık kriteri)*

Adşağıdaki tanımların tekrar ele alınması faydalı olacaktır.

(x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon, m > n_\epsilon$ $(n,m\in\mathbb{N})$ için $|x_n - x_m| < \epsilon$ dur.

(x_n) bir Cauchy dizisi değildir $\Leftrightarrow \exists\epsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$ için $\exists n > N$, $\exists m > N$ $(n,m\in\mathbb{N})$ öyle ki $|x_n - x_m| \geq \epsilon$ dur.

Örnek 2.1.36 *: $q > 0$ için $x_n = \frac{q^n}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin limitini bulunuz.*

Çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olduğu açıktır.

$$x_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q}{n+1}.x_n \quad n\in\mathbb{N}$$

ifadesinden görüldüğü gibi, $\forall n > n_q = [|q-1|]$ için ($0 < q < 1$ olduğunda $\forall n\in\mathbb{N}$ için) $\frac{q}{n+1} < 1$ olduğundan, $x_{n+1} < x_n$ olur ve buradan da (x_n) $(n > n_q, n\in\mathbb{N})$ dizisinin azalan olduğu görülür. (x_n) $(n > n_q, n\in\mathbb{N})$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ sonlu limiti vardır. Şimdi bu a sayısını bulalım.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

ifadesi doğru olduğundan, $\forall n\in\mathbb{N}$ için doğru olan $x_{n+1} = \frac{q}{n+1}.x_n$ eşitliğinde $n\to\infty$ iken limit alırsak $a = 0.a = 0$ olduğunu görürüz. Böylece, her $q > 0$ sayısı için $\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!} = 0$ dır. $\diamond$

Örnek 2.1.37 *: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n\in\mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x_n) dizisinin yakınsaklığını gösterip, limitini bulunuz.*

Çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_{n+1}^2 = 2+x_n$, $x_{n+2}^2 = 2+x_{n+1}$ olduğundan,

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n \tag{2.1}$$

elde edilir.

Verilen (x_n) dizisinin artan olduğunu gösterelim. $x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2} > x_1$ olduğu açıktır. Herhangi $k\in\mathbb{N}$ için $x_{k+1} > x_k$ olduğunu farz edelim. O halde, (2.1) eşitliği gereğince $x_{k+2}^2 > x_{k+1}^2$ olur ve buradan da $x_{k+1} > 0$ ve $x_{k+2} > 0$ olduğunu dikkate alırsak $x_{k+2} > x_{k+1}$ eşitsizliğinin doğruluğu görülür. O halde, Tümevarım yöntemine göre $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_{n+1} > x_n$ olduğu, yani, (x_n) $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin artan olduğu gösterilmiş olur. Şimdi (x_n) $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ve $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 2+x_n$ veya $x_n^2 - x_n - 2 < 0$ olduğundan, $x_n < 2$ olur. Bu ise, (x_n) nin üstten sınırlı olması demektir.

Verilen (x_n) $(n\in\mathbb{N}$ dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan, Teorem 2.1.35 (a) gereğince yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ diyelim. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$

olduğundan Teorem 2.1.9 (e) gereğince $a \geq 0$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olan $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ eşitliğinde $n \to \infty$ iken limit alınırsa o zaman

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1}x_{n+1} \\ &= (\lim_{n\to\infty} x_{n+1})^2 = a^2\end{aligned}$$

olduğu dikkate alındığında, $a^2 = 2 + a$ veya $a^2 - a - 2 = 0$ bulunur. Buradan da $a = 2$ olduğu ve dolayısı ile $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.38 : $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *limitinin varlığını ispat ediniz.*

Çözüm: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall \alpha > -1$ için doğru olan $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha,\ n \in \mathbb{N}$ Bernoulli eşitsizliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\left(1 + \tfrac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n(n+2)^n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)\frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n^2+2n+1)(n+1)} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n\end{aligned}$$

olur. Demek ki, (x_n) dizisi artandır.

Şimdi (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğunu görelim. Binom formülünden faydalanarak

$$\begin{aligned}x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})\ldots(1 - \frac{k-1}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})\ldots(1 - \frac{n-1}{n}) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n\end{aligned}$$

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}y_n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 3$ dür. Yani, (x_n) dizisinin üstten sınırlı olduğu görülür. O halde, Teorem 2.1.35 (a) gereğince (x_n) dizisi yakınsaktır. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 < x_n < 3$ olduğundan, (x_n) dizisinin limiti 2 ile 3 arasında bir reel sayıdır. Bu sayı e ile gösterilir ve değeri yaklaşık olarak $e = 2,718281828459045\ldots$ dir. Şu halde, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ dir.

Genel terimi $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde verilen (z_n) dizisi yakınsaktır ve limiti e dir. Gerçekten, $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = e$$

bulunur. $\diamond$

Not: $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisnin bir Cauchy dizisi olup olmayacağı tanımlarını aşağıdaki şekilde de verebiliriz.

(x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ dur.

(x_n) bir Cauchy dizisi değildir $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$ için $\exists n > N$ ve $\exists p \in \mathbb{N}$ öyle ki $|x_{n+p} - x_n| \geq \epsilon$ dur. $\bullet$

Örnek 2.1.39 : $a \in \mathbb{R}$ *için* $x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{2^3} + \ldots + \frac{\sin na}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$ *dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)a}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)a}{2^{n+p}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan, herhangi $\epsilon > 0$ verildiğinde $\forall n > n_\epsilon = [|\log_2 \frac{1}{\epsilon}|]$ için $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ olur. Bu durumda, $\forall n > n_\epsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow (x_n)$ dizisi yakınsaktır. $\diamond$

Örnek 2.1.40 *:* $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ *dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $n, p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \\ &\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Burada $p = n$ alırsak

$$x_{2n} - x_n \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı görülür. Gerçekten, $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ ve $\forall N \in \mathbb{N}$ için $n = p = N$ alırsak

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| = x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını gösterir. Buna göre (x_n) dizisi ıraksaktır. $\diamond$

2.1.5 Reel Sayı Dizilerinin Alt ve Üst Limitleri

Tanım 2.1.41 *:* (x_{n_k}), (x_n) *dizisinin bir alt dizisi olsun. Eğer,* $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ *($a \in \mathbb{R}, a = +\infty$ veya $a = -\infty$ olabilir) ise, a, (x_n) dizisinin bir limit noktasıdır denir. Bir başka ifade ile, eğer, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ noktasının her $U_\epsilon(a)$ komşuluğunda (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimi bulunuyorsa, a ya (x_n) dizisinin bir limit noktası denir.*

Her ne kadar adlarında benzerlik olsa da, bir dizinin limit noktası ile dizinin limitini birbiriyle karıştırmamalıyız. Bunun ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.1.42 *:* *Eğer, (x_n) dizisinin limiti a ise ($a \in \mathbb{R},\ a = -\infty$ veya $a = +\infty$ olabilir), (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin de limiti a dır.*

Bu teoremi daha kısa olarak şu şekilde de verebiliriz.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \Leftrightarrow (x_n)$ nin her (x_{n_k}) alt dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ dır.

Teorem 2.1.42 den de görüldüğü gibi limiti (sonlu veya sonsuz) olan bir dizinin yalnızca bir tane limit noktası vardır ki, bu da dizinin limitinden başkası değildir.

Herhangi bir (x_n) dizisinin limit noktası var mıdır sorusuna aşağıdaki teorem evet cevabını vermektedir.

Teorem 2.1.43 *:* *Her reel sayı dizinin $\overline{\mathbb{R}}$ de en az bir limit noktası vardır.*

Sınırlı reel sayı dizisi için Teorem 2.1.42, Bolzano-Weierstrass Teoremi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Teorem 2.1.44 (Bolzano-Weierstrass) *:* *$\mathbb{R}$ içindeki her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Tanım 2.1.45 *:* *$\mathbb{R}$ içinde bir dizi (x_n) ve $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x,\ (x_n)$nin bir limit noktasıdır$\}$ olsun. (Teorem 2.1.43 e göre $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ dir.) $L = \sup \mathcal{Z}$ ve $l = \inf \mathcal{Z}$ büyüklüklerine, sırası ile (x_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir ve*

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{veya } L = \limsup x_n \\ l &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \text{veya } l = \liminf x_n \end{aligned}$$

ile gösterilir.

Her (x_n) dizisi için $l \leq L$ (veya $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$) olduğu açıktır.

$\mathbb{R}$ içinde herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. ((x_n) sınırlı veya sınırsız olabilir). $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$l_n = \inf\{x_k : k \geq n\} = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$
$$L_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

diyelim.

Teorem 2.1.46 *: $l = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ ve $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ dir.*

Teorem 2.1.47 *: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a \quad dir.$$

Tanım 2.1.48 *: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin $x_n \leq x_{n_0}$ ($x_n \geq x_{n_0}$) olacak şekilde bir x_{n_0} terimi varsa, x_{n_0}, (x_n) dizisinin en büyük (maksimal) (en küçük veya minimal) terimidir denir ve $x_{n_0} = \max(x_n)$ ($x_{n_0} = \min(x_n)$) şeklinde gösterilir.*

Lemma 2.1.49 *:Eğer, (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise,*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \underline{\lim_{k\to\infty}}\, x_{n_k}$$

dir.

Lemma 2.1.50 *:Herhangi bir (x_n) dizisi için $\underline{\lim}\,(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n$ ve $\overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$ dır.*

Lemma 2.1.51 *:Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere $\underline{\lim}\, x_n.\ \overline{\lim}\, \dfrac{1}{x_n} = \overline{\lim}\, x_n.\ \underline{\lim}\, \dfrac{1}{x_n} = 1$ dır.*

Örnek 2.1.52 *:$x_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için $\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_n)$, $\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_n)$, $\underline{\lim}\, x_n$ ve $\overline{\lim}\, x_n$ ni bulunuz.*

Çözüm: (x_n) dizisinin $x_{2k-1} = 2 + \dfrac{3}{2k-1}$ ve $x_{2k} = -2 - \dfrac{3}{2k}$ olmak üzere (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerini gözönüne alalım. (x_{2k-1}) dizisinin azalan

(x_{2k}) dizisinin artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{2k} < x_{2k-1}$ olduğu açıktır. O halde, x_n dizisinin bütün terimleri (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerin terimleri içinde bulunduğundan,

$$\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_{2k}) = x_2 = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2},$$
$$\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_{2k-1}) = x_1 = 2 + 3 = 5,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2k} = -2,\ \ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2k-1} = 2$$

elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.1.53 *: $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi için $\inf(x_n) = \inf \mathcal{R}(x_n)$, $\sup(x_n) = \sup \mathcal{R}(x_n)$, $\underline{\lim}\, x_n$ ve $\overline{\lim}\, x_n$ ni bulunuz.*

Çözüm: (x_n) dizisinin $x_{4k-2} = 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1}$, $x_{2k-1} = 1$ ve $x_{4k} = 1 + \dfrac{4k}{4k+1}$ olmak üzere (x_{4k-2}), (x_{2k-1}) ve (x_{4k}) alt dizilerini gözönüne alalım. (x_{4k-2}) dizisinin azalan (x_{4k}) dizisinin artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k}$ olduğu açıktır. O halde,

$$\inf(x_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim_{k\to\infty} \big(1 - \frac{4k-2}{4k-1}\big) = 0,$$
$$\sup(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \big(1 + \frac{4k}{4k+1}\big) = 2$$

bulunur. $\diamond$

Örnek 2.1.54 *: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$ dizisinin $\mathcal{Z}$ limit noktaları kümesini bulunuz.*

Çözüm: Verilen dizinin $x_n^{(1)} = \dfrac{1}{2^n}$ ve $x_n^{(2)} = \dfrac{2^n}{2^n-1}$ olmak üzere iki yakınsak $(x_n^{(1)})$ ve $(x_n^{(2)})$ alt dizilerini gözönüne alalım. Bu dizilerin limitleri

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1$$

verilen dizinin birer alt limitleridir. Diğer taraftan, verilen dizinin her yakınsak alt dizisi, $(x_n^{(1)})$ ve $(x_n^{(2)})$ dizilerinin alt dizileri olduğundan verilen dizinin 0 ve 1 den başka limit noktası olamaz. Demek ki, verilen dizinin limit noktaları kümesi $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.55 : $x_n = \sin n^\circ,\ n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* (x_n) *dizisi için*

(i) $\mathcal{Z}$ *limit noktaları kümesini;*

(ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *ve* $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *limitlerini bulunuz.*

Çözüm:

(i) $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $\sin n^\circ = \sin(360^\circ p + n^\circ)$ olduğundan, $0, \pm\sin 1^\circ, \pm\sin 2^\circ, \ldots, \pm\sin 89^\circ, \pm 1$ sayıları (x_n) dizinin terimleri arasında sonsuz sayıda tekrarlanmaktadır. O halde, bu sayılar (x_n) dizinin birer limit noktalarıdır.

Her $a \notin \{0, \pm\sin 1^\circ, \pm\sin 2, \ldots, \pm\sin 89^\circ, \pm 1\}$ sayısının öyle $U_\epsilon(a)$ komşuluğu bulunabilir ki, (x_n) dizinin bütün terimleri bu komşuluğun dışındadır. O halde, (x_n) dizinin limit noktalarının kümesi $\mathcal{Z} = \{0, \pm\sin 1^\circ, \pm\sin 2^\circ, \ldots, \pm\sin 89^\circ, \pm 1\}$ dir.

(ii) $\inf \mathcal{Z} = -1$ ve $\sup \mathcal{Z} = 1$ olduğundan, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sin n^\circ = -1$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sin n^\circ = 1$ dir

Örnek 2.1.56 : $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ *dizisinin*

(i) $\mathcal{Z}$ *limit noktaları kümesini;*

(ii) alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: **(i)** $\forall \alpha \in [0, 1]$ rasyonel sayısı verilen (x_n) dizisinin bir terimi olduğu açıktır. $\forall \alpha \in [0, 1)$ ve yeteri kadar büyük m doğal sayısı

$$\alpha + \frac{1}{n+m} < 1$$

eşitsizliğinin $\forall n \in \mathbb{N}$ için sağlandığı da açıktır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin terimleri içinde

$$\alpha < r_n < \alpha + \frac{1}{n+m}$$

olacak şekilde bir r_n rasyonel sayısı vardır.

Başka bir ifade ile her $\alpha \in [0, 1)$ sayısının her $U_\epsilon(\alpha)$ komşuluğunda $[0, 1)$ aralığının sonsuz sayıda rasyonel noktası bulunur. O halde, $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$ dır ve dolayısıyla, α, (x_n) dizisinin bir alt limitidir. $\alpha = 1$ benzer şekilde incelenebilir. Böylece, (x_n) dizisnin limit noktalarının kümesi $\mathcal{Z} = [0, 1]$ dir.
(ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{Z} = 0$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{Z} = 1$ dir. $\diamond$

Örnek 2.1.57 : *Teorem 2.1.46 dan faydalanarak*

(i) $x_n = n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* (x_n) *dizisinin,*

(ii) $y_n = n,\ n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* (y_n) *dizisinin*

alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\} = \inf\{k^{(-1)^k} : k \geq n\} = 0$ ve $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \sup\{k^{(-1)^k} : k \geq n\} = +\infty$ olduğundan,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty$$

bulunur.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\inf\{y_k : k \geq n\} = n$ ve $\sup\{y_k : k \geq n\} = +\infty$ olduğundan,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{y_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{y_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty$$

bulunur. $\diamond$

2.2 Çözümlü Problemler

(1) **(a)** $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}},\ n \in \mathbb{N}$;
(b) $y_n = \ln(\sqrt{2n^2+1} - n) - \ln,\ \ n \in \mathbb{N}$
dizilerininin sınırlı olduklarını gösteriniz.

Not: Sınırlı diziye verilen Tanım 1.13.15 e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz. $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow \exists M > 0$ öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ dir. •

Çözüm:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|(-1)^n n+10| \leq |(-1)^n n|+10 = n+10$ ve $\sqrt{n^2+1} > n$ olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leq 11$$

bulunur. Dolayısıyla, (x_n) dizisi sınırlıdır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \ln n(\sqrt{2+\tfrac{1}{n^2}} - 1) - \ln n = \ln(\sqrt{2+\tfrac{1}{n^2}} - 1)$$

ve

$$0 < \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2+\tfrac{1}{n^2}} - 1 \leq \sqrt{3} - 1$$

olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\ln(\sqrt{2}-1) \leq y_n \leq \ln(\sqrt{3}-1)$$

bulunur.

Buna göre, (y_n) dizisi sınırsızdır. ⋄

Not: $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırsızdır $\Leftrightarrow \forall M > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyleki $|x_N| > M$ dir. •

(2) **(a)** $x_n = n^{\cos n\pi},\ n \in \mathbb{N}$; **(b)** $y_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n + 1},\ \ n \in \mathbb{N}$
dizilerinin sınırlı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: (a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{2k} = (2k)^{\cos 2k\pi} = 2k$ ve $x_{2k-1} = (2k-1)^{\cos(2k-1)\pi} = (2k-1)^{-1}$ bulunur. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0 \Rightarrow (x_n)$ dizisi alttan sınırlıdır diyebiliriz. Öte yandan, her $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = [|\frac{M}{2}|] + 1$ doğal sayısı için $x_{2N} = (2N)^{\cos 2N\pi} = 2N > M \Rightarrow (x_n)$ üstten sınırsızdır.
(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1} = \big(\frac{3}{2}\big)^n \frac{1 - \big(\frac{2}{3}\big)^n}{1 + \frac{1}{2^n}} \geq \big(\frac{3}{2}\big)^n \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{9}\big(\frac{3}{2}\big)^n \geq \frac{1}{3}$$

olduğundan, (y_n) dizisi alttan sınırlıdır. Herhangi $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = [|\log_{\frac{3}{2}} (\frac{9M}{2})|] + 1$ doğal sayısı için $y_N \geq \dfrac{2}{9}(\dfrac{3}{2})^N > M \Rightarrow (y_n)$ dizisi üstten sınırsızdır. ⋄

(3) **(a)** $x_n = \dfrac{n^2}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$; **(b)** $y_n = \dfrac{100^n}{n!},\ \ n \in \mathbb{N}$
dizilerinin minimal ve maksimal terimlerini varsa bulunuz.

Çözüm: (a) $\forall n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^2 < 1$$

olduğundan (x_n) $(n \geq 3)$ dizisi azalandır. O halde
$\max(x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3\} = x_3 = \dfrac{9}{8}$ dir. Minimal eleman yoktur.
(b) $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{100}{n+1} \Rightarrow (y_n)$ $n > 99$ için dizi azalan, $1 \leq n \leq 99$ için de artandır. Dolayısı ile,

$$\max(y_n) = y_{100} = \frac{100^{100}}{100!} = \frac{100^{99}}{99!}$$

elde edilir. Minimal eleman yoktur.⋄

(4) **(a)** $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ $n \in \mathbb{N}$ dizisinin artan;
(b) $a > 0$ için y_1 herhangi pozitif bir sayı, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_n + \dfrac{a}{y_n}),\ n \in \mathbb{N}$

olmak üzere (y_n) $(n \geq 2)$ dizisinin monoton azalan;

(c) $z_1 = 3, z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (z_n) dizisinin artan olduklarını gösteriniz.

Çözüm: **(a)** $x_n = 1 - \frac{1}{n^2+1}$ ve $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$ olduğu açıktır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow (x_n)$ dizisi artandır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n > 0$ olduğu açıktır. $\forall n \geq 2$ için $y_n \geq \sqrt{a}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $t \in (0, +\infty)$ için geçerli olan $t + \frac{1}{t} \geq 2$ eşitsizliğinde $t = \frac{y_n}{\sqrt{a}} > 0$ olarak alırsak

$$\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n} \geq 2 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\big(\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n}\big) \geq \sqrt{a}$$

olduğu anlaşılır. O halde, $\forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ için

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{a}{y_n^2}\big) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n$$

dolayısıyla, (y_n) $(n \geq 2)$ dizisi monoton azalandır.

(c) $n = 1$ için $z_1 = 3 \geq 3$ dür. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_k \geq 3$ olsun. $z_{k+1} \geq 3$ olduğunu görelim.

$$z_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}z_k^2 - 4 = \frac{1}{2}(z_k^2 - 8) = \frac{1}{2}(z_k - 2\sqrt{2})(z_k + 2\sqrt{2}) > 0$$

ve buradan $z_{k+1} \geq 3$ olduğu anlaşılır. O halde, Matematik indüksiyon yöntemi gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \geq 3$ dür. $z_1 = 3, z_2 = \frac{1}{2}3^2 - 1 = 3,5 \Rightarrow z_2 - z_1 = 0,5 > 0$ dır. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_{k+1} - z_k > 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} 2z_{k+1} = z_k^2 - 2,\ 2z_{k+2} = z_{k+1}^2 - 2 &\Rightarrow 2(z_{k+2} - z_{k+1}) \\ = z_{k+1}^2 - z_k^2 = (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k) > 0 &\Rightarrow z_{k+2} - z_{k+1} > 0 \end{aligned}$$

ise (Matematik indüksiyon yöntemi gereğince) (z_n) dizisi artandır. $\diamond$

(5) Limitin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3+1} = 5$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 7.6^n}{3^n + 6^n} = 7$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

(a)

$$\begin{aligned} \big|\frac{5n^3 - 3n^2}{n^3+1} - 5\big| = \frac{|-3n^2 - 5|}{n^3+1} &= \frac{3n^2+5}{n^3+1} \\ = \frac{3 + \frac{5}{n^2}}{n + \frac{1}{n^2}} < \frac{3+5}{n} &= \frac{8}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{8}{\epsilon} \end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [\![\frac{8}{\epsilon}]\!]$ $(n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 8$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\big|\frac{5n^3 - 3n^2}{n^3+1} - 5\big| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^2+1} = 5$$

bulunur.

(b)

$$\begin{aligned} \big|\frac{2^n + 7.6^n}{3^n + 6^n} - 7\big| = \frac{|2^n - 7.3^n|}{3^n + 6^n} &= \frac{7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + 2^n} \\ < \frac{7}{2^n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{7}{\epsilon} & \end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|\log_2 \frac{7}{3}|]$ $(n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 7$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\big|\frac{2^n + 7.6^n}{3^n + 6^n} - 7\big| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 7.6^n}{3^n + 6^n} = 7$$

bulunur.

(c)

$$\begin{aligned} \big|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} - 0\big| = \frac{\sqrt[3]{n^2}|\sin n^2|}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} &< \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} < \epsilon \\ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon^3} & \end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|\frac{1}{\epsilon^3}|]$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}\right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$$

bulunur.

(d) $\forall n > 2 (n \in \mathbb{N}$ için)

$$|\log_n 2 - 0| = |\log_n 2| = \frac{1}{\log_2 n} < \epsilon \Leftrightarrow n > 2^{\frac{1}{\epsilon}}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|2^{\frac{1}{\epsilon}}|]$ ($n_\epsilon = 1, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$|\log_n 2| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$$

bulunur. $\diamond$

(6) $x_n = (0,5)^{((-1)^n - 1)n}, n \in \mathbb{N}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $a \neq 1$ sayısı (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\epsilon = \frac{|a-1|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $x_{2k-1} = 2^{2(2k-1)} > 1 + \frac{|a-1|}{2}$ olacak şekilde sonsuz sayıda terimleri $a \neq 1$ noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır. $a = 1$ noktası da (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $a = 1$ noktasının, örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(1)$ komşuluğu dışında (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimleri (tek indisli terimleri) bulunmaktadır. Böylece, Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisi ıraksaktır. $\diamond$

(7) Teorem 2.1.9 u ispatlayınız.

Çözüm: **(a)** $\mathbb{R}$ içinde (x_n) yakınsak dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ ve $a \neq b$ olsun. $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$ alalım. Tanım 2.1.1. gereğince $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ olur. $\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n''_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ bulunur. O halde, $n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ ve $x_n \in U_\epsilon(b) \Rightarrow$

$\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b)$ olur. $U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \emptyset$ olduğundan bu mümkün değildir. Elde edilen çelişki $a = b$ olduğunu gösterir.

(b) (x_n) yakınsak bir dizi olsun. Limit tanımında $\epsilon = 1 > 0$ alırsak $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_1$ için $|x_n - a| < 1$ veya $|x_n| < |a| + 1$ olur. $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1}|, |a| + 1\} > 0$ sayısı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ dir. Dolayısıyla, (x_n) dizisinin sınırlı olduğu anlaşılır.

(c) $\lim_{n\to\infty} z_n = d$ ve $d \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} z_n = d$ ise $\epsilon = \frac{|d|}{2} > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$ için $|z_n - d| < \epsilon$ dir. O halde, $\forall n > n_\epsilon$için $|z_n| = |d + z_n - d| \geq |d| - |z_n - d| > |d| - \epsilon = \frac{|d|}{2}$ olur. Dolayısıyla, $\forall n > n_\epsilon$ için $|z_n| > \frac{|d|}{2}$ dir.

(d) Önermeyi (x_n/y_n) dizisi için ispatlayalım. (c) ye göre $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ ise $\exists n_b \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_b$ için $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ dir. Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ise $\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $|x_n - a| < \frac{\epsilon|b|}{4}$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ ise $\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n''_\epsilon$ için $|y_n - b| < \frac{\epsilon|b|^2}{4(|a| + |b|)}$ dir. $n_\epsilon = \max\{n_b, n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ olsun. O halde, $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bx_n - ay_n}{y_n b}\right| &\leq \frac{1}{|y_n|}(|x_n - a| + \frac{|a|}{|b|}|y_n - b|) \\ &< \frac{2}{|b|}\frac{\epsilon|b|}{4} + \frac{2|a|}{|b|^2}\frac{\epsilon|b|^2}{4(|a| + |b|)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

bulunur. Bu da $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ olması demektir.

(e) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve $a < b$ olsun. Herhangi $c \in (a, b)$ sayısını gözönüne alalım. Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $|a_n - a| < c - a$ veya $-c + 2a < a_n < c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise $\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n''_\epsilon$ için $|b_n - b| < b - c$ veya $c < b_n < 2b - c$ bulunur. $n_0 = \max\{n', n''\}$ olsun. O halde, $\forall n > n_0$ için $a_n < c < b_n$ olur.

(f) Gerçekten, eğer, $a > b$ ise (e) ye göre $\forall n > n_0$ için $a_n > b_n$ olacak

şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ise, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $|x_n - a| < \epsilon$ dir. Öte yandan, her $x, y \in \mathbb{R}$ sayıları için $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ eşitsizliği doğru olduğundan, $\forall n > n_\epsilon$ için $\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a| < \epsilon$ bulunur. Buradan, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ elde edilir. $\diamond$

(8) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{2n + 1}{3n - 5}\big)^3$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{n^3}{n^2 + 3} - \dfrac{2n^2}{2n + 1}\big)$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n - 1}{n^2}\big)$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \big|\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n}\big|$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}{n^2 + 1} - \dfrac{2n + 1}{n^2}\big)$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}\big)$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}\big)$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n - 1}{2^n}\big)$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{2}.\sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}\big)$.

Çözüm: **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})}{n - \sqrt{n}} = = \lim\limits_{n\to\infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n - \sqrt{4n^2 - 1})(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} + n}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 3} + n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 1}{3(2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}})} = \frac{1 + 1}{3(2 + \sqrt{4})} = \frac{1}{6} .$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} - 1}{(3 + \frac{1}{n})^3} = -\dfrac{1}{27}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}(1 + \frac{10^n}{n!})}{1 + \frac{1}{n+1}\frac{2^n}{n!}} = 0$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{2n + 1}{3n - 5}\big)^3 = \big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n + 1}{3n - 1}\big)^3 = \big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}}\big)^3 = \big(\dfrac{2}{3}\big)^3$.

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^3}{n^2 + 3} - \frac{2n^2}{2n + 1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 6n^2}{(2n + 1)(n^2 + 3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{6}{n}}{(2 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2} .$$

(g) $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \dfrac{n(n - 1)}{2}$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n - 1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n - 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n - 1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

(h) $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n} = \dfrac{1 - 2 + 3 - \ldots + (-1)^{n-1} n}{n}$ olsun. O halde, $n = 2k$ ise,

$$x_{2k} = \frac{(1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2k - 1 - 2k)}{2k} = \frac{-k}{2k} = \frac{-1}{2}$$

olur. Eğer, $n = 2k - 1$ ise,

$$x_{2k+1} = \frac{(1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + [(2k - 3) - (2k - 2)] + (2k - 1)}{2k - 1} = \frac{(k - 1) + (2k - 1)}{2k - 1}$$

olur. Buradan,

$$\Big|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\Big|=|x_n|=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=2k \text{ ise},\\ \frac{k}{2k-1}, & n=2k-1 \text{ ise}\end{cases}$$

olduğu bulunur. $\mathbb{R}$ içindeki herhangi (a_n) dizisi için

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=a\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}a_n=a$$

önermesi doğru olduğundan (ispatlayınız)

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\Big|=\lim_{n\to\infty}|x_n|=$$
$$\lim_{n\to\infty}|x_{2k}|=\lim_{n\to\infty}|x_{2k-1}|=\frac{1}{2}$$

bulunur.

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n^2}-\frac{2n+1}{n^2+1}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^2}{n^2+1}-\frac{2n+1}{n^2}\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-2n^3-n^2-2n-1}{n^2(n^2+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

bulunur.

(j) $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall k\in\{1,2,\ldots,n\}$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

eşitsizliği doğru olduğundan,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

bulunur. Buradan da $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ olması nedeniyle Teorem 2.1.9 un (f) şıkkı gereğince $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ olur.

(k)

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\big[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\big]$$
$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

(l) $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}$ olsun. O halde,

$$x_n-\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2})+(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3})+\ldots+(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

ve buradan da

$$x_n=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}})-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3$$

bulunur.

(m) $\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}}$ ve $\forall n>2$

için

$$2 = (2^{\frac{1}{2^n}})^{2^n} = (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} -))^{2^n} > (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1))^n$$
$$= 1 + n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) + \ldots + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1) > n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) \Rightarrow$$
$$0 < 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1 \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots\ \sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}} = 2$$

bulunur. $\diamond$

(9) Toerem 2.1.21 i ispatlayınız.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|\alpha_n| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dir. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|\alpha_n| < \epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon$ $(n_\epsilon \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$ dır. $\diamond$

(10) Aşağıdaki Teiblitz teoremini ispatlayınız.
Eğer,

(a) $P_{nk} \geq 0$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$;

(c) Her sabit k için $\lim_{n\to\infty} P_{nk} = 0$;

(d) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

koşulları sağlanırsa, $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (t_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} t_n = a$ dır.

Çözüm: (d) koşulundan $\exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq N$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ olur. (x_n) dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| \leq M, \qquad |x_n - a| \leq 2M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.
(c) koşulundan ise, $\exists n'_\epsilon > N (n'_\epsilon \in \mathbb{N})$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$P_{nk} < \frac{\epsilon}{4NM}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

olur. O halde, (a) ve (b) koşulları kullanıldığında her $n > n'_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - a\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk}a\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x_k - a)\Big|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| = P_{n1}|x_1 - a| + \ldots + P_{nN}|x_N - a| +$$
$$+ P_{nN+1}|x_{N+1} - a| + \ldots + P_{nn}|x_n - a|$$
$$\leq N\frac{\epsilon}{4NM}2M + \frac{\epsilon}{2}(P_{nN+1} + \ldots + P_{nn})$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olduğu görülür. Dolayısı ile,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k = a$$

dir. $\diamond$

(11) Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) (x_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere (ξ_n) dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ dir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n > 0$ olmak üzere (y_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere (γ_n) dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir.

(c) $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = +\infty$ dir.

Çözüm: (a) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $P_{nk} = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n)$ dersek, $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \xi_k$ olur. P_{nk} ve (x_n) için problem 10 un tüm koşulları sağladığından,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} t_n = a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

(b) $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ olsun.

$$P_{nk} = \frac{\frac{1}{y_k}}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \quad (n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n),\ x_n = y_n$$

dersek $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \sum_{k=1}^{n} P_{kn} y_k = \gamma_n$ olur. O halde, problem 10 un tüm koşulları sağladığından

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} t_n == \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

olur. olur.

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\gamma_n} = 0$ olduğunu görelim. $P_{nk} = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n),\ x_n = \dfrac{1}{y_n}$ dersek $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{y_1} + \ldots + \dfrac{1}{y_n}) = \dfrac{1}{\gamma_n}$ olur. O zaman, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\gamma_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = 0$ bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$$

dur. $\diamond$

(12) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere (x_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \xi_n$$

eşitsizliği doğru ve $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ olduğundan, Teorem 2.1.9 (f) gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

dir. $\diamond$

(13) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = a$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Problem 12 den

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \ldots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

bulunur. $\diamond$

(14) Teorem 2.1.30 u ispatlayınız.

Çözüm: l sonlu bir sayı olsun. $x_0 = y_0 = 0$ ve $P_{nk} = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{y_k}$ $(n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \ldots, n),\ X_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ dersek, P_{nk} ve X_n Problem 10 un tüm koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca, $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} X_k = \dfrac{x_n}{y_n}$ dir. Demek ki, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ olur.$\diamond$

(15) $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşeitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} = \dfrac{1}{p+1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\big) = \dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

Çözüm: Stolz teoreminden faydalanarak (c) nin doğruluğunu gösterelim. (a) ve (b) nin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.

$x_n = 1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p$ ve $y_n = n^{p+1}$ olarak alırsak her $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \frac{(2n+1)^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \\ &= \frac{2^p n^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{n^{p+1} - [n^{p+1} - (p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2} n^{p-1} - \ldots + (-1)^{p+1}]} \\ &= \frac{2^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{(p+1) - \frac{(p+1)p}{2}\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n^p}}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{(p+1) - \frac{(p+1)p}{2}\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n^p}} \\ &= \frac{2^p}{p+1}\end{aligned}$$

bulunur. ⋄

(16) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

eşitsizliği doğru olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} < x_n$ olur. Demek ki, (x_n) dizisi azalandır. Şimdi dizinin alttan sınırlı olduğunu gösterelim. (2.2) den dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1 + \tfrac{1}{2}) + \ldots + \ln(1 + \tfrac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(2.\tfrac{3}{2}.\tfrac{4}{3} \ldots \tfrac{n+1}{n}\tfrac{1}{n}) = \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0\end{aligned}$$

olur. Bu ise, (x_n) dizisinin alttan sınırlı olması demektir. O halde, Teorem 1.13.20 gereğince (x_n) yakınsaktır. Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ dersek Teorem 2.1.21 gereğince (α_n) sonsuz küçük bir dizi olmak üzere

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = c + \alpha_n$$

veya $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olmak üzere

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = c + \ln n + \alpha_n \tag{2.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ki $c = 0,577216\ldots$ sayısı Euler sabiti olarak isimlendirilir. ⋄

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\big)$ hesaplayınız.

Çözüm: $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde, (2.3) kullanıldığında

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} &= x_{2n} - x_n = \ln 2n + \alpha_{2n} - \ln n - \alpha_n \\ &= \ln 2 + (\alpha_{2n} - \alpha_n)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\big) = \ln 2$ elde edilir. ⋄

(18) Monoton dizilerin limiti üzerine teoremleri kullanarak terimleri aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 1 + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{4^2} + \ldots + \dfrac{n}{4^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N};$

(b) $x_n = \dfrac{1}{1^2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N};$

(c) $x_n = \big(1 + \dfrac{1}{1^2+1}\big)\big(1 + \dfrac{1}{2^2+1}\big)\ldots\big(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\big), \quad n \in \mathbb{N}.$

Çözüm: (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n + \dfrac{n+1}{4^n} > x_n$ olduğundan (x_n) artan bir dizidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \geq n$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{2.2}{2^2.2} + \frac{3.2}{2^3.2^2} + \ldots + \frac{2n}{2^n.2^{n-1}} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \end{aligned}$$

olur. Demek ki, (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. O halde, (x_n) yakınsaktır.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2+1} > x_n$$

olduğundan, (x_n) artan bir dizidir. Her $n > 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ doğru olduğundan,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. O halde, (x_n) yakınsaktır.

(c) Bu şıktaki (x_n) dizisinin yakınsaklığı benzer şekilde gösterilebilir.$\diamond$

(19) $x_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k(2k+1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}, \ n \in \mathbb{N}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{-1}{2(n+1)(2n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, (x_n) artan bir dizidir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 1$ dir. (x_n) artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır. $\diamond$

(20) $a > 0, \ b > 0$ ve $x_1 = a, \ x_{n+1} = a + \dfrac{bx_n}{ax_n + b}, \ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olduğu açıktır.

$$x_2 - x_1 = a + \frac{bx_1}{x_1 + b} - x_1 = \frac{ab}{a^2 + b} > 0$$

yani $x_2 > x_1$ dir. Herhangi $n = k$ $(k \geq 2, \ k \in \mathbb{N})$ için $x_{k+1} > x_k$ olduğunu kabul edip $x_{k+2} > x_{k+1}$ olduğunu gösterelim.

$$x_{k+2} = a + \frac{bx_{k+1}}{ax_{k+1} + b} = a + \frac{b}{a + \frac{b}{x_{k+1}}} > a + \frac{b}{a + \frac{b}{x_k}} = x_{k+1}$$

dir. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = a + \frac{bx_n}{ax_n + b} < a + \frac{b}{c}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğundan, (x_n) dizisi üstten sınırlıdır. Demek ki, (x_n) dizisi yakınsaktır. $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = t$ diyelim.

$$x_{n+1} = a + \frac{bx_n}{ax_n + b} \quad n \in \mathbb{N}$$

bağıntısında $n \to \infty$ iken limite geçilirse, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = t$ olması nedeniyle

$$t = a + \frac{bt}{at+b} \Rightarrow t^2 - at - b = 0 \Rightarrow$$
$$t_1 = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \text{ ve } t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

bulunur. (x_n) pozitif terimli bir dizi olduğundan, $t = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$ olur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

dir. $\diamond$

(21) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin birer Cauchy dizisi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_n = \dfrac{2n+1}{5n-2},\ n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n-tane},\ n \in \mathbb{N}$;

(d) $|q| < 1$ olmak üzere $x_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}/n!,\ n \in \mathbb{N}$.

Çözüm: **(a)** Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|x_{n+p} - x_n| = |\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}| = |-\frac{p}{n(n+p)}| = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{1}{n}$$

olduğundan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [|\frac{1}{\epsilon}|] \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ olacaktır. Buna göre, (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(b) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= |\frac{2(n+p)+1}{5(n+p)-2} - \frac{2n+1}{5n-2}| \\ &= |\frac{-9p}{(5n-2)(5(n+p)-2)}| = |\frac{9}{5}(\frac{1}{5(n+p)-2} - \frac{1}{5n-2})| \\ &= \frac{9}{5}(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5(n+p)-2}) < \frac{9}{5(5n-2)}\end{aligned}$$

olur. Buradan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\ \dfrac{10\epsilon+9}{25\epsilon}\ ]\!] \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ elde edilir. Buna göre, (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(c) $x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n-tane} = \dfrac{5}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \ldots + \dfrac{5}{10^n},\ n \in \mathbb{N}$ olduğundan, her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}x_{n+p} - x_n &= \frac{5}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{5}{10^{n+p}} \\ &= \frac{5}{10^{n+1}}(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{p-1}}) \\ &= \frac{5}{10^{n+1}}.\frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{5}{9.10^n}\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\ \log \dfrac{5}{9\epsilon}\ ]\!]$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir.

(d) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= |aq^n + aq^{n+1} + \ldots + aq^{n+p-1}| \\ &\le |a||q|^p(1 + |q| + \ldots + |q|^{p-1}) \\ &= |a||q|^n \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} < \frac{|a||q|^n}{1 - |q|}\end{aligned}$$

olduğundan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\ \ln \dfrac{\epsilon(1-|q|)}{|a|} / \ln|q|\ ]\!]$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy

dizisidir.

(e) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{2-1}}{2!} + \dfrac{(-1)^{3-1}}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n! > 2^{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= |\frac{(-1)^{n+1-1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)!}| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}) \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [|\ln \dfrac{1}{\epsilon}|] + 1$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir. $\diamond$

Not: Cuachy yakınsaklık kriteri gereğince (Bkz. Teorem 2.1.35 (c))her bir Cauchy dizisi yakınsak olduğundan Problem 20 de verilen dizilerin her biri yakınsaktır. $\bullet$

(22) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin birer Cauchy dizisi olmadıklarını, dolayısı ile, ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0, 2^{(-1)^n n}$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $x_n = \dfrac{n\cos \pi n - 1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = (-1)^n(1 + \dfrac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$; (d) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$, $n \in \mathbb{N}$; (f) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Çözüm: **(a)** Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|x_{2(2k-1)} - x_{2k-1}| &= |0, 2^{2(2k-1)} - 0, 2^{-(2k-1)}| = |5^{-2(2k-1)} - 5^{2k-1}| \\ &= 5^{2k-1} - 5^{-2(2k-1)} \geq 5 - 5^{-2} = \frac{124}{25}\end{aligned}$$

olur. Buna göre, $\exists \epsilon = \dfrac{124}{25} > 0$ öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k - 1$ ve $p = 2k - 1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{2(2k-1)} - x_{2k-1}| \geq \dfrac{124}{25} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(b) Her $k \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned}|x_{3k} - x_{2k}| &= |\frac{3k\cos 3k\pi - 1}{6k} - \frac{2k\cos 2k\pi - 1}{4k}| \\ &= |\frac{-3k - 1}{6k} - \frac{2k - 1}{4k}| = |\frac{-12k + 1}{12k}| \\ &= 1 - \frac{1}{12k} \geq \frac{11}{12}\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{11}{12} > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ ve $p = k$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{3k} - x_{2k}| \geq \dfrac{11}{12} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1 + \dfrac{1}{n})^n > 1$ olduğundan, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{4k} - x_{2k-1} = (1 + \frac{1}{4^k})^{4k} + (1 + \frac{1}{2k-1})^{2k-1} > 1 + 1 = 2$$

olur. Buradan, $\epsilon = 2$ ve her $k \in \mathbb{N}$) için $n = 2k - 1$ ve $p = k + 1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{4k} - x_{2k-1}| > 2 = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

Not: $x_n = \big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\big)^n$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı c) ye benzer şekilde gösterilebilir. $\bullet$

(d) Her $n, p \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \\ &\geq \frac{p}{\sqrt{n+p}} \Rightarrow x_{2n} - x_n \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve her $n \in \mathbb{N}$) için $p = n$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi

değildir.

(e) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|x_{n+p} - x_n| = |(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p}|$$
$$= |(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^p| = \begin{cases} 0, & p \text{ çift ise;} \\ 1, & p \text{ tek ise.} \end{cases}$$

olur. Buradan, $\epsilon = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$) için $p = 2n-1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{3n-1} - x_n| = 1 \geq \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(f) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k}{(k+1)^2}$$
$$= \frac{n+1}{(n+2)^2} + \frac{n+2}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)^2}$$
$$\geq \frac{p(n+p)}{(n+p+1)^2}$$

olur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{2}{9}$ ve her $n \in \mathbb{N}$) için $p = n$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| \geq \dfrac{2n^2}{(2n+1)^2} \geq \dfrac{2n^2}{(3n)^2} = \dfrac{2}{9} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir. $\diamond$

Not: Cauchy yakınsaklık kriteri gereğince Problem 22 de verilen diziler ıraksaktır. $\bullet$

(23) Teorem 2.1.42 yi ispatlayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. Bu durumda, (x_n) dizisinin herhangi (x_{n_k}) alt dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ olduğunu gösterelim.

(a) $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon$ dir. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow n_\epsilon$ sayısı için $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k > k_\epsilon$ için $n_k > n_\epsilon$ dir. O halde, $\forall k > k_\epsilon$ için $|x_{n_k} - a| < \epsilon$ bulunur. Demek ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ dır.

(b) $a = -\infty$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki

$\forall n > n'_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $x_n < -\epsilon$ dir. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow n'_\epsilon$ sayısı için $\exists k'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k > k'_\epsilon$ için $n_k > n'_\epsilon$ dir. O halde, $\forall k > k'_\epsilon$ için $x_{n_k} < -\epsilon$ bulunur. Demek ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty$ dır.

(c) $a = +\infty$ durumu benzer şekilde ispatlanabilir. $\diamond$

(24) Teorem 2.1.43 ü ispatlayınız.

Çözüm: **(a)** (x_n), $\mathbb{R}$ içinde sınırlı bir dizi ve $\mathcal{R}(x_n)$ ise bu dizinin değer kümesi olsun. $\mathcal{R}(x_n)$ sonlu bir küme ise hiç olmazsa bir x noktası için

$$x = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_k} = \ldots$$

olacak şekilde $\mathbb{N}$ içinde bir (n_k) dizisi vardır. $x_{n_k} = x$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisidir ve teşkili x limitli yakınsak bir dizi olduğunu gösterir.

$\mathcal{R}(x_n)$ sonsuz bir küme ise, sınırlı olduğundan Bolzano-Weierstrass prensibine göre bu kümenin bir x limit noktası vardır. x, $\mathcal{R}(x_n)$ nin limit noktası olduğundan, $|x_{n_1} - x| < 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. x, $\mathcal{R}(x_n)$ nin limit noktası olduğundan, $|x_{n_2} - x| < 1/2$ olacak şekilde bir $n_2 > n_1$ $(n_2 \in \mathbb{N})$ sayısı vardır. Bu işleme devam edildiğinde k. adımda $|x_{n_k} - x| < 1/k$ olacak şekilde bir $n_k > n_{k-1}$ $(n_k \in \mathbb{N})$ sayısı ve dolayısı ile, (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_{n_k} - x| < 1/k$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi elde edilir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_{n_k} - x| < 1/k$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$ dir. Bu ise, x in (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterir.

(b) (x_n) üstten sınırsız olsun. $\mathcal{R}(x_n)$ kümesi üstten sınırsız olduğundan, (i) durumuna benzer olarak her $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} > k$ olacak şekilde $n_k \in \mathbb{N}$ sayısı elde edilecektir. O halde, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ dir. Bu ise $+\infty$ noktasının (x_n) nin bir limit noktası olduğunu gösterir.

(c) (x_n) alttan sınırsız olduğu durumda $-\infty$ noktasının da (x_n) nin bir limit noktası olduğu benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(25) Teorem 2.1.46 yı ispatlayınız.

Çözüm: $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ olduğunu gösterelim. ($l = \lim_{n\to\infty} l_n$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.)

(x_n) üstten sınırsız bir dizi olsun. O halde, Teorem 2.1.43 gereğince (x_n) nin $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardzır. Bu durumda, $+\infty$ noktası (x_n) nin bir limit noktasıdır ve her $x \in \mathbb{R}$ için $x < +\infty$ olduğundan $L = +\infty$ olur. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n = \sup\{x_k :\ k \geq n\} = +\infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} L_n = +\infty = L$ dir.

(x_n) üstten sınırlı bir dizi olsun. $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $A \subset B$ ise, $\sup A \leq \sup B$ olduğunu dikkate alırsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_{n+1} = \sup\{x_k :\ k \geq n+1\} \leq \sup\{x_k :\ k \geq n\} = L_n$$

olduğu bulunur. Demek ki, (L_n) dizisi monoton azalan bir dizidir. Bu durumda, $L = \lim_{n\to\infty} L_n = \inf \mathcal{R}(L_n)$ (L sonlu veya $L = -\infty$) limiti vardır.

(a) $L = -\infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ ve $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $L_n < -\epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Her $n > n_\epsilon$ için $L_n = \sup\{x_k :\ k \geq n\} < -\epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon$ için $x_n < -\epsilon$ olur. Demek ki, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_{|\epsilon}$ için $x_n < -\epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dur. Bu durumda, $L = -\infty$ noktası (x_n) nin en küçük limit noktası olmak üzere $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ dir.
(b) $L \in \mathbb{R}$ olsun. L nin (x_n) dizisinin bir üst limiti olduğunu gösterelim. Bu nedenle supremumun karakteristik özelliklerinden yararlanarak L sayısının aşağıdaki iki karakteristik özelliğini bulalım. $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ ise, her $\epsilon > 0$ için $L_{n_\epsilon} < L + \epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $L + \epsilon > L_{n_\epsilon} = \sup\{x_k :\ k \geq n_\epsilon\}$ ise her $n \geq n'_\epsilon$ için $x_n < L + \epsilon$ dur.
L sayısının I. özelliği: Her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n < L+\epsilon$ dur. Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n \geq L > L-\epsilon$ olduğundan $\exists N > n$ doğal sayısı vardır ki $x_N > L - \epsilon$ olur.
L sayısının II. özelliği: Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x'_n > L - \epsilon$ olacak şekilde bir $n' > n$ sayısı vardır.

L sayısının I ve II özelliklerinden yararlanarak L sayısının (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\epsilon_n > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ olmak üzere azalan (ϵ_n) dizisini gözönüne alalım. $\epsilon_1 > 0$ sayısı için L nin I özelliğine göre $\exists n_{\epsilon_1} \in \mathbb{N}$ öyleki her $n > n_{\epsilon_1}$ için $x_n < L+\epsilon_1$ ve L nin II özelliğine göre $x_{n_1} > L-\epsilon_1$ olacak şekilde $n_1 > n_{\epsilon_1}$ doğal sayısı vardır. Demek ki, $\epsilon_1 > 0$ sayısı için $L - \epsilon_1 < x_{n_1} < L + \epsilon_1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ doğal sayıları seçilmiş olsun. Şimdi $n_k > n_{k-1}$ doğal sayısının nasıl seçilebileceğini görelim.

L sayısının I özelliğine göre $\exists n_{\epsilon_k} \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_{\epsilon_k}$ için $x_n < L + \epsilon_k$ ve L nin II. özelliğine göre $x_{n_k} > L - \epsilon$ olacak şekilde bir $n_k > \max\{n_{k-1}, n_{k_\epsilon}\}$ sayısı vardır. Demek ki, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$l - \epsilon_k < x_{n_k} < L + \epsilon_k \quad \text{veya} \quad |x_{n_k} - L| < \epsilon_k$$

olacal şekilde $n_k \in \mathbb{N}$ ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$) sayısı vardır. $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ olduğundan, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ bulunur. Bu ise L nin (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterir. Şimdi L nin (x_n) dizisinin limit noktalarının en büyüğü olduğunu görelim.

L sayısının I. özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n < L+\epsilon$ dir. Buradan, (x_n) dizisinin hiçbir limit noktasının $L+\epsilon$ dan ve dolayısı ile, ϵ nun herhangi bir pozitif sayı olduğu nedeniyle L den büyük olmayacağı görülür.

Böylece, $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ olduğu ispatlanmış olur. $\diamond$

Not: (x_n) alttan sınırlı bir dizi olduğunda $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ sayısının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir.
l sayısının I. özelliği: Her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n > l - \epsilon$ dur.
l sayısının II. özelliği: Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x'_n < l + \epsilon$ olacak şekilde bir $n' > n$ sayısı vardır. $\bullet$

(26) Teorem 2.1.47 yi ispatlayınız.

Çözüm: $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (x_n)$ dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ dır önermesi doğru olduğundan (Bkz. Teorem 2.1.42) (x_n)

dizisinin limit noktaları kümesi $\mathcal{Z} = \{a\}$ dır. Buradan da $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ olduğu görülür.

$\Leftarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olduğunu gösterelim.

(a) $a = -\infty$ olsun. Bu durumda, $L = \lim_{n\to\infty} L_n = -\infty$ dir ve Problem 25 ten görüldüğü gibi $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dir. Benzer şekilde, $a = +\infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ olduğu gösterilebilir.

(b) $a \in \mathbb{R}$ olsun. l ve L sayılarının II özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için

$$l - \epsilon < x_n < L + \epsilon \quad \text{veya } (\ l = L = a \text{ olduğundan}) \quad |x_n - a| < \epsilon$$

olur. Bu da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olması demektir. $\diamond$

(27) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizisi ve $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$, $\quad L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n$ ve sonuçta $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n), $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır. Bu durumda, (l_n) ve (L_n) sırası ile monoton artan ve monoton azalan diziler olduklarından sonlu $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ ve $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ limitleri vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $l_n \leq L_n$ olduğundan $l \leq L$ olduğu açıktır. (Bkz. Teorem 2.1.9 (e)). $l = L$ olduğunu gösterelim.

(x_n) bir Cauchy dizisi ise her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon,\ m > n_\epsilon$ için

$$|x_n - x_m| < \epsilon/3$$

dır. Buradan, sabit $m = m_\epsilon = n_\epsilon + 1$ ve her $n > n_\epsilon$ için

$$x_{m_\epsilon} - \epsilon/3 < x_n < x_{m_\epsilon} + \epsilon/3$$

bulunur. O halde, $\forall n > n_\epsilon$ için $x_{m_\epsilon} - \epsilon/3 \leq \inf\{x_k :\ k \geq n\} = l_n \leq L_n = \sup\{x_k :\ k \geq n\} \leq x_{m_\epsilon} + \epsilon/3$ olduğundan, $\forall n > n_\epsilon$ için

$$0 \leq L_n - l_n \leq \frac{2\epsilon}{3}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçersek

$$0 \leq L - l \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

bulunur. Buradan da $l = L$ olduğu görülür. Teorem 2.1.47 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

dir. $\diamond$

(28) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

(a) $x_0 = 0, \quad x_n = \sin\frac{n\pi}{6}, n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_0 = 2, \quad x_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n},\ n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Çözüm: (a) $x_{12k+3} = 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{12k+3} = 1$ ve $x_{12k-3} = -1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{12k-3} = -1$ olduğundan, -1 ve 1 noktaları (x_n) dizisinin birer limit noktalarıdır. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq \sin\frac{n\pi}{6} \leq 1$ olduğundan herhangi $a \in \mathbb{R}, |a| > 1$ sayısı (x_n) dizisinin limit noktası olamaz. Dolayısıyla, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$ dir.

(b) $x_{2k-1} = \dfrac{3^{2k-1} - 3^{2k-1}}{4^{2k-1}} = 0\ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 0,\ x_{2k} = \dfrac{3^{2k} + 3^{2k}}{4^{2k}} = 2\big(\dfrac{3}{4}\big)^{2k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 0$ bulunur. (x_n) dizisinin bütün terimleri (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, (x_n) dizisinin limit noktaları kümesi $\mathcal{Z} = \{0\}$ dir. Buradan, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$ bulunur.

Not: $\lim_{k\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n} = \lim_{k\to\infty} \big(\dfrac{3}{4}\big)^n + \lim_{k\to\infty} \big(-\dfrac{3}{4}\big)^n = 0$ olduğundan, (x_n) yakınsak bir dizidir. Dolayısıyla, (x_n) dizisinin yalnızca bir tane $a = 0$ limit noktası vardır. Buradan da $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğu görülür. $\bullet$

(c) $x_n = (-1)^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^n + \sin\frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N}$ dizisinin bütün terimleri sekiz tane $(x_{8k-j})(k \in \mathbb{N}, j = 0,1,\ldots,7)$ alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, (x_n) dizisinin limit noktaları kümesi $a_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_{8k-j}$, $j = 0,1,\ldots,7$ olmak üzere $\mathcal{Z} = \{a_0, a_1, \ldots, a_7\}$ dir. $\inf \mathcal{Z} = a_3$ ve $\sup \mathcal{Z} = a_6$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\inf \mathcal{Z} = a_3 = \lim_{k\to\infty} x_{8k-3} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\big(1+\frac{1}{8k-3}\big)^{8k-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= -\lim_{k\to\infty}\big(1+\frac{1}{8k-3}\big)^{8k-3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup \mathcal{Z} = a_6 = \lim_{k\to\infty} x_{8k-6} &= \lim_{k\to\infty}\left(\big(1+\frac{1}{8k-6}\big)^{8k-6} + 1\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\big(1+\frac{1}{8k-6}\big)^{8k-6} + 1 = e+1,\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = e+1$ dir. $\diamond$

(29) (x_n) ve $y_n = x_n\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (y_n) dizileri verilmiş olsun. (x_n) ve (y_n) dizilerinin aynı limit noktalarına sahip olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow (n_k)$ $\mathbb{N}$ içinde herhangi bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n_k]{n_k} = 1$ dir. (Bkz. Teorem 2.1.42).

$\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin bir limit noktasıdır ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ olsun. O halde, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\cdot\sqrt[n_k]{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{n_k} = \alpha$ bulunur. Demek ki, α, (y_n) dizisinin bir limit noktasıdır.

Şimdi β, (y_n) dizisinin bir limit noktasıve $\lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k} = \beta$ olsun her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt[n]{n} > 0$ olduğundan, $x_n = y_n/\sqrt[n]{n}$ dizisi tanımlıdır. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{y_{m_k}}{\sqrt[m_k]{m_k}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k}}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[m_k]{m_k}} = \beta$$

bulunur. Demek ki, $\beta, (x_n)$ dizisinin bir limit noktasıdır. $\diamond$

(30) Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\underline{\lim}\limits_{n\to} x_n + \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_n$;

Çözüm: **(a)** Alt limitin kendisi bir limit noktası olduğundan, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{p_k}+y_{p_k})$, $\underline{\lim}\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_{p_k}}$ dır. Lemma 2.1.49 kullanıldığında

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n &\le \underline{\lim}_{k\to\infty} x_{p_k} + \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k}\\ &= \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k}\\ &\le \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{m_{p_k}}\end{aligned}$$

olur. $(x_{m_{p_k}} + y_{m_{p_k}})$ dizisi yakınsak $(x_{p_k}+y_{p_k})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{p_k}+y_{p_k}) = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}}+y_{m_{p_k}})$ dir. Ayrıca, $(x_{m_{p_k}})$ yakınsak olduğundan $(y_{m_{p_k}})$ dizisi de yakınsaktır ve $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_{m_{p_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{m_{p_k}}$ olur. Demek ki,

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n &\le \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \lim_{k\to\infty} y_{m_{p_k}}\\ &= \lim_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}} + y_{m_{p_k}}) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\end{aligned}$$

olur. Böylece, (a) nın sol tarafı ispatlanmış olur.
O halde, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(-y_n) = -\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} y_n$ olduğundan, (Bkz. Lemma 2.1.50)

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) - \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n &= \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) + \underline{\lim}_{n\to\infty}(-y_n)\\ &\le \underline{\lim}_{n\to\infty}[(x_n+y_n)+(-y_n)] = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da (a) nın sağ yanının doğruluğu görülür.
(b) Önermesinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(31) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ olsun. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\underline{\lim}_{n\to} x_n . \underline{\lim}_{n\to} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to}(x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to} x_n \, \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\underline{\lim}_{n\to} x_n \, \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

Çözüm: **(a)** $x_n = 0 (n \in \mathbb{N})$ veya $\underline{\lim}_{n\to} x_n = 0$ ise, (a) eşitsizliği açıktır. $\underline{\lim}_{n\to} x_n > 0$ olsun. Bu durumda, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_0 (n \in \mathbb{N})$ için $x_n > 0$ dır. O halde,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{k\to\infty}(x_{p_k} y_{p_k}), \quad \underline{\lim}_{k\to\infty} x_{p_k} = \lim_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}})$$

dersek Lemma 2.1.49 gereğince

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} x_{p_k} . \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k} = \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} . \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k}$$

bulunur. $(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}})$, yakınsak $(x_{p_k} . y_{p_k})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{k\to\infty}(x_{p_k} y_{p_k}) = \lim_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}} y_{m_{p_k}})$$

olur. Diğer taraftan, $\lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} > 0$, $(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}})$ yakınsak bir dizi ve $y_{m_{p_k}} = \big(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}}\big)/x_{m_{p_k}}$, $k \in \mathbb{N}$ olduğundan, $(y_{m_{p_k}})$ diziside yakınsaktır. Yani, $\underline{\lim}_{k\to\infty} y_{m_{p_k}} = \lim_{k\to\infty}(y_{m_{p_k}}$ dır. Demek ki,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n &\leq \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} . \lim_{k\to\infty} y_{m_{p_k}} \\ &= \lim_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}} y_{m_{p_k}}) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \end{aligned}$$

dir. Böylece, (a) eşitsizliğinin sol yanı ispatlanmış olur.

Eğer, $\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0$ ise (a) eşitsizliğinin sağ yanı da açıktır. Gerçekten,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$$

bulunur. $\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n > 0$ olsun. Bu durumda, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n}$ olduğunu (Bkz. Lemma 2.1.51). dikkate alırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n} . \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) &= \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} . \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \\ &\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \big[\frac{1}{y_n} . (x_n y_n)\big] = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \\ \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) &\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, (a) eşitsizliğinin sağ yanıda sağlanır.
(b) eşitsizliği benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(32) $\mathbb{R}$ içindeki yakınsak (x_n) ve herhangi (y_n) dizileri için

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \tag{2.4}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Problem (30)'a göre

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\geq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \\ \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

dir. (x_n) yakınsak olduğundan, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ yazılabilir. O halde, son eşitsizliklerden (2.4) 'ün doğruluğu görülür. $\diamond$

(33) Eğer, $x_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1$ ise, (x_n) dizisi yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: Problemin koşulları ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n}$ olduğu (Bkz. Lemma 2.1.51) gözönüne alındığında, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ eşitliğinin doğruluğu görülür. O halde, Teorem 2.1.47 gereğince (x_n) yakınsak bir dizidir. $\diamond$

(34) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere (x_n) dizisi için aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$;

(b) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

Çözüm: (a) Problem (13) te gösterildiği gibi $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ dizisi yakınsak ise, $(\sqrt[n]{x_n})$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ dir. Alt limitin kendisi bir alt limit olduğundan, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[p_k]{x_{pk}}$ ve $(m_{p_k}), (p_k)$ nın alt dizisi olmak üzere

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{x_{p_k+1}}{x_{p_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}}$$

dir. Lemma 2.1.49 'a göre

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{x_{p_k+1}}{x_{p_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}}$$

ve $(\sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}})$, yakınsak $(\sqrt[p_k]{x_{p_k}})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[p_k]{x_{p_k}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (a) önermesinin doğruluğu görülür.
(b) önermesinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir. ⋄

(35) $(x_n) = (1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \ldots)$ dizisi için $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ ve $(\sqrt[n]{x_n})$ dizilerinin alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: Her $k \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$ ve $\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = \dfrac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \dfrac{k}{k+1}$ olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = 1$$

dir. $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ dizisinin bütün terimleri $(\dfrac{x_{2k}}{x_{2k-1}})$ ve $(\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}})$ alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, $a = 1$ noktası $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ dizisinin tek bir limit noktasıdır. Demek ki,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

ve Teorem 2.1.47 den $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ dir. O halde, $(\sqrt[n]{x_n})$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ bulunur (Bkz. Problem 13). Teorem 2.1.47 den $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ olduğu görülür. ⋄

(36) $(\cos n)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Olmayana egri yöntemini izleyerek (x_n) dizisinin yakınsak bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \cos n = a$ olduğunu farzedelim. Bu durumda, $(\cos(n+2))$ dizisi $(\cos n)$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \cos(n+2) = a$ olduğu ve buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \big(\cos(n+2) - \cos n\big) = 0$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\cos(n+2) - \cos n = -2\sin(n+1)\sin 1 &\Rightarrow \\ \sin(n+1) = -\frac{1}{2\sin 1}(\cos(n+2) - \cos n) & \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0 & \\ \Rightarrow \sin n = 0 &\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\sin(n+1) = \sin n\cos 1 + \cos n.\sin 1 &\Rightarrow \\ \cos n = \frac{1}{\sin 1}(\sin(n+1) - \sin n.\cos 1) &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos n = 0\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\lim_{n\to\infty} \sin n = \lim_{n\to\infty} \cos n = 0$ olduğu elde edilir. Bu da her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ olması ile çeliştiğinden varsayımın doğru olmadığı görülür. Çünkü, $\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \sin n = 0$ durumunda $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ eşitliğinde $n \to \infty$ iken limite geçersek, doğru olmayan $1 = \lim_{n\to\infty} \sin^2 n + \lim_{n\to\infty} \cos^2 n = (\lim_{n\to\infty} \sin n)^2 + \lim_{n\to\infty} (\cos n)^2 = 0$ eşitliği elde edilmiş olurdu. $\diamond$

(37) $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi için $0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n,\ n, m \in \mathbb{N}$ koşulu sağlandığında (x_n/n) dizisi yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: Her $n \ge 2 (n \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned} 0 \le x_n &\le x_{1+(n-1)} \le x_1 + x_{n-1} \le \dots \\ &\le x_1 + x_1 + \dots + x_1 = nx_1 \\ 0 &\le \frac{x_n}{n} \le x_1 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan, (x_n/n) dizisinin alttan sınırlı ve sonlu $\alpha = \inf(x_n/n)$ en büyük alt sınıra sahip olduğu görülür. İnfimumun karakteristik özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\alpha \le \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

r sayısı $0, 1, \dots, m-1$ sayılarından biri olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ sayısı $n = mq + r$ şeklinde gösterilebilir. $x_0 = 0$ alarak

$$\begin{aligned} x_n = x_{qm+r} &\le \underbrace{x_m + x_m + \dots + x_m}_{q-kez} + x_r = qx_m + x_r, \\ \frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} &\le \frac{qx_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m}\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n}, \\ \alpha \le \frac{x_n}{n} &< (\alpha + \frac{\epsilon}{2})\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{x_r}{n} \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $0 \le r \le m-1$ olduğundan, x_r sınırlıdır. Dolayısıyla, her $n > n_\epsilon$ için

$$0 \le \frac{x_r}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde, her $n > n_\epsilon$ için

$$\alpha \le \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$$

limiti mevcuttur. $\diamond$

2.3 Ek Problemler

(38) Aşağıda verilen dizilerin sınırlı olduklarını gösteriniz.

(a) $\left(\frac{2n^2-1}{2+n^2}\right)$; (b) $\left(\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right)$;

(c) $\left(\frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}\right)$; (d) $\left(\frac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right)$;

(e) $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (f) $\left(n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})\right)$;

(g) $\left(\sqrt{\frac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right)$; (h) $\left(\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\right)$;

(i) $\left(\frac{2^n+1}{3^n-2}\right)$; (j) $\left(\frac{5^{n+1}+2^n}{1-25^n}\right)$;

(k) $\left(\log(3n-5)-\log(n+1)\right)$; (l) $\left(\ln^2(n+1)-\ln^2 n\right)$;

(m) $\left(\frac{n}{3^n}\right)$; (n) $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$;

(o) $\left(nq^n\right),\ |q|<1$; (p) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, n \in \mathbb{N}$;

(q) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}, n \in \mathbb{N}$; (r) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}, n \in \mathbb{N}$;

(s) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \in \mathbb{N}$; (t) $x_2 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n^4+1}{5x_n},\ n \in \mathbb{N}$;

(u) $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{b^2}{x_n})$.

(39) Aşağıda verilen dizilerin sınırsız olduklarını gösteriniz.

(a) $((-1)^n n)$; (b) $(\frac{(1-n)}{\sqrt{n}})$;
(c) $(n+(-1)^n n)$; (d) $(\frac{4^n-3^n}{3^n+1})$;
(e) $((1-n)^{\sin(\frac{n\pi}{2})})$; (f) $(n^{\sin(\frac{n\pi}{2})})$;
(g) $\big(\frac{n^3}{n^2+1}\big)$; (h) $(\sqrt{n^2+(-1)^n.\sqrt{n^3}}-n)$;
(i) (5^n-4^n); (j) $(\frac{2^n}{n^2})$;
(l) $(\frac{a^n}{n^k})$; $|a|>1,\ k\in\mathbb{R}$.

(40) Aşağıda verilen dizilerin minimal terimini bulunuz.

(a) $\big((2n-5)(2n-11)\big)$; (b) $\big(n+\frac{5}{n}\big)$;
(c) $\big(\log_3^2 n-3\log_3 n\big)$; (d) $(\frac{(1,4)^n}{n})$.

Cevap: (a) $x_4=-9$; **(b)** $x_2=4,5$; **(c)** $x_5=\log_3^2 5-3\log_3 5$; **(d)** $x_3=\dfrac{(1,4)^3}{3}$.

(41) Aşağıda verilen dizilerin maksimal terimini bulunuz.

(a) $(\frac{21}{3n^2-14n-17})$; (b) $(\frac{n}{n^2+9})$;
(c) $(2^{-n}-3.4^{-n})$; (d) $\big(\frac{n^2}{2^n}\big)$;
(e) $(\frac{n}{n^3+1000})$; (f) $(\frac{(\sqrt{39})^n}{n!})$;
(g) $\big(\sin\frac{n\pi}{2}\big)$; (h) $(\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!})$;
(i) $(\frac{(\sqrt{126})^n}{2n!})$.

Cevap:

(a) $x_6=3$; (b) $x_3=\dfrac{1}{6}$; (c) $x_3=\dfrac{5}{64}$;
(d) $x_3=\dfrac{9}{8}$; (e) $x_8=\dfrac{1}{189}$; (f) $x_6=\dfrac{39^3}{6!}$;
(g) $x_{4n+1}=1$; (h) $x_1=\dfrac{\pi^2}{6}$; (i) $x_5=\dfrac{126^5}{10!}$.

(42) Aşağıda verilen dizilerin monoton artan olduklarını gösteriniz.

(a) $\big(n^3+2n\big)$; (b) $\big(\frac{3n+4}{n+2}\big)$;
(c) $\big(\sqrt{3n-2}\big)$; (ç) $\big(3^n-2^n\big)$;
(d) $\big(\ln n-\ln(n+1)\big)$; (e) $\left(\frac{n^2}{n^2+10}\right)$;
(f) $\big(3-\arcsin\frac{1}{n^2+4}\big)$; (g) $\big(\log\big(\frac{n^4}{n^4+8}+1\big)\big)$;
(ğ) $\big(2\ln n-\ln(n^2+9n)\big)$; (h) $\big(n-\ln n\big)$;
(ı) $\left((1+\frac{1}{2n})^n\right)$; (i) $x_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\sum\limits_{k=1}^{n}k.k!$;

(j) $x_1=a>0, y_1=b>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+y_n)$ olmak üzere (x_n) dizisi;

(k) $0<a<1,\ x_1=\dfrac{a}{2},\ x_{n+1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}$ olmak üzere (x_n) dizisi.

Burada x_n bir dizidir.

(43) Limit tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+3}=2$;
(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\dfrac{n}{n+1})=4$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{3n^2-2n+1}=\dfrac{1}{3}$;
(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}=0$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;
(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+9.7^n}{4^n+7^n}=9$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(44) Aşağıda terimleri verilen dizilerin ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n=\sin(\frac{n\pi}{4}),\ n\in\mathbb{N}$; (b) $x_n=(-1)^n n\ \ n\in\mathbb{N}$;
(c) $x_n=\dfrac{n}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3},\ n\in\mathbb{N}$; (d) $x_n=n^2\cos\frac{n\pi}{4}$;
(e) $x_n=[\![\ \dfrac{(-1)^n}{n}\ ]\!],\ n\in\mathbb{N}$.

(45) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2-n}{n+1}+\dfrac{n2^{-n}}{n+2})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-1}{n})^{6}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2})$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n-1)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n+3}{n^2})^{n}$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+10}{2n-1})^{n}$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{1}{n}}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}(8-\dfrac{1}{n^2})^{-\frac{1}{3}}$;

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+0,25}{8n+1}}$;

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}$;

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{0,5}$;

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{6}$;

(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0,01}}$;

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$;

(20) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{5n+1}{n+5}}$;

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$;

(22) $\lim\limits_{n\to\infty}4^{\frac{n+2}{n+1}}$;

(23) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+9^n)^{\frac{1}{n+1}}$;

(24) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

(25) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$;

(26) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4n]{n}$;

(27) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2^n}}$;

(28) $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\big)$;

(29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$;

(30) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}(a>0,b>0)$;

(31) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})^{n}$;

(32) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n^2})^{n}$;

(33) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}$;

(34) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{n+1}{2n-1})^{n}$;

(35) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3-3n+1}$;

(36) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n.n^2+2n-1}$;

(37) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$;

(38) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$;

(39) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n-2}$;

(40) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$;

(41) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$;

(42) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$;

(43) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\log n}{n^2-1}$;

(44) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2(n+3)}{n-1,3}$;

(45) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\log n}{\log_2(4^n+1)}$;

(46) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+n^2.2^n-1}{n^4+(n!)^2}$;

(47) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{n^2-1}}{(n^3)!}$;

(48) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$;

(49) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^3}$;

(50) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

(51) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3})$;

(52) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}$;

(53) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2n-1}\dfrac{n}{n^2+n+1}$.

Cevap:

(1) $\frac{1}{3}$; (2) -1; (3) 1; (4) -1; (5) $\frac{-1}{2}$; (6) $\frac{1}{2}$;

(7) -1; (8) $\frac{2}{3}$; (9) 27; (10) 0; (11) 0; (12) 3;

(13) $\frac{1}{2}$; (14) $\frac{1}{2}$; (15) 1; (16) 1; (17) 1; (18) $-\frac{1}{2}$;

(19) 1; (20) 1; (21) $\frac{1}{2}$; (22) 4; (23) 9; (24) 1;

(25) 1; (26) 1; (27) 1; (28) -1; (29) $\frac{3}{4}$; (30) $\max\{a,b\}$;

(31) 1; (32) 1; (33) 1; (34) 0; (35) 1; (36) 2;

(37) 1; (38) 1; (39) 1; (40) 1; (41) $\frac{1}{3}$; (42) $\frac{4}{5}$;

(43) 0; (44) 0; (45) $\frac{1}{2}$; (46) 0; (47) 0; (48) 1;

(49) 0; (50) $\frac{1}{3}$; (51) $\frac{1}{2}$; (52) 0; (53) 0.

(46) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n}}=e$ olduğunu gösteriniz.

(47) $x_1=a, x_2=b, x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{4}(n=3,4,\ldots)$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ i hesaplayınız.

Cevap: $\dfrac{a+2b}{3}$.

(48) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\ldots(1-\dfrac{1}{n^2})$ i hesaplayınız.

Cevap: $\frac{1}{2}$.

(49) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{6})\dots(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})$ i hesaplayınız.

Cevap: $\frac{1}{3}$.

(50) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), y_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)}$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri verilsin.

(a) Her $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için $x_n \leq y_n$;

(b) (x_n) monoton artan;

(c) $(y_n), n \geq 2$ monoton azalan;

(d) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq |b-a|/4^n$;

(e) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

(51) $x_1 = a > 0,\ x_2 = b,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri verilsin.

(a) (x_n) artan, (y_n) azalan;

(b) (x_n) ve (y_n) dizileri sınırlı;

(c) $|y_{n+1} - x_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

(52) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n},\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri nin yakınsak olduğunu $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz ve bu limiti bulunuz.

Cevap: $\sqrt{ab}$.

(53) $-\frac{1}{4} < b < 0,\ x_1 = a,\ x_{n+1} = 1 + \frac{b}{x_n},\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve bu limiti bulunuz.

Cevap: $\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$, $a \neq \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ ve $a \neq 0$ ise; a, $a = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ ise.

(54) $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi için $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a,\ \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$ ve $a \neq b$ dir. (x_n) dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz .

(55) (x_n) dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0,\ (y_n)$ dizisi ise ıraksak ise $(x_n y_n)$ dizisi ıraksaktır. Gösteriniz .

(56) **(a)** $x_{n+1} - x_n \geq -\frac{1}{2^n},\ (n \in \mathbb{N})$; **(b)** $x_{n+1} - x_n \geq -\frac{1}{n^2},\ (n \in \mathbb{N})$ koşulunu sağlayan üstten sınırlı (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

(57) m bir doğal sayı olmak üzere aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1)}{n(n+1)\dots(n+m)}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+m+1)}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1)}{\sum_{k=1}^{n} k^m}$.

Cevap: $(a)\quad \frac{1}{m+1}$; $\quad (b)\quad \frac{1}{m.m!}$; $\quad (c)\quad 1$.

(58) Monoton dizilerin limiti üzerine teoremleri kullanarak genel terimleri aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \frac{2n^2+1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_n = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \ldots + \frac{1}{n.2^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n},\ n \in \mathbb{N}$.

(59) $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{k}{n})^n = e^k$ olduğunu gösteriniz.

(60) $\mathbb{N}$ içindeki (k_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{k_n})^{k_n} = e$$

olduğunu gösteriniz.

(61) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin sonsuz küçük dizi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$; (b) $x_n = \frac{2n+3}{n^2}$;

(c) $x_n = \frac{q^n}{n},\ |q| \leq 1$; (d) $x_n = \frac{3n+1}{(n+1)3^n}$;

(e) $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$; (f) $x_n = \frac{n \log n}{n^2-1}$;

(g) $x_n = \frac{\log_2(n+3)}{n-1,3}$; (h) $x_n = \frac{10^n + n!}{2^n + (n+1)!}$.

(62) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin sonsuz büyük dizi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = (-1)^n n$; (b) $x_n = (\log_a n)^p,\ a > 1, p \geq 1$;

(c) $x_n = \sqrt[3]{n - 100}$; (d) $x_n = \frac{n\sqrt{n}}{n+1}$;

(e) $x_n = 4\sqrt{n} - n$; (f) $x_n = 0,5 - (-1)^n \sqrt[3]{n}$;

(g) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$; (h) $x_n = \frac{2}{1 - \sqrt[n]{n}}$;

(i) $x_n = \frac{5^n}{n^2}$; (j) $x_n = \frac{a^n}{n^k},\ |a| > 1, k \in \mathbb{N}$.

(63) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin Cauchy dizisi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n-kez}$; (b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$;

(c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$; (d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$;

(e) $x_n = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$; (f) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

(64) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin Cauchy dizisi olmadıklarını, dolayısıyla ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0, 3^{(-1)^n n}$; (b) $x_n = \frac{n \sin \pi n - 1}{3n}$;

(c) $x_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n$; (d) $x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$;

(e) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;

(f) $x_n = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^2 n},\ n \geq 2$;

(g) $x_n = \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^2 n},\ n \geq 2$.

(65) Genel terimi $x_n = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^p n},\ n \geq 2$ şeklinde verilen (x_n) dizisinin $p > 1$ olduğunda yakınsak, $p \leq 1$ olduğunda ise ıraksak olduğunu gösteriniz.

(66) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin $\mathcal{Z}$ limit noktaları kümesini, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ lerini bulunuz.

(a) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$; (b) $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$;

(c) $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$; (d) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$;

(e) $x_n = \cos^n(\frac{2\pi n}{3})$; (f) $x_n = (-1)^n n$.

Cevap:

(a) $\mathcal{Z} = \{-4, 0, 2, 6\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -4$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 6$;

(b) $\mathcal{Z} = \{-\infty, 1, +\infty\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(c) $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$;
(d) $\mathcal{Z} = \{1, 2\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$;
(e) $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$;
(f) $\mathcal{Z} = \{-\infty, +\infty\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(67) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

(a) $x_n = (\cos\frac{n\pi}{2})^{n+1}$; (b) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{n}$;

(c) $x_n = n^{\sin(\frac{n\pi}{2})}$; (d) $x_n = \dfrac{1}{n} + \sin\frac{n\pi}{3}$;

(e) $x_n = \dfrac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$; (f) $x_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}$;

(g) $x_n = n2^{(-1)^n n}$.

Cevap:

(a) $-1, 1$; (b)$-1, 1$; (c) $0, +\infty$; (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
(e) $0, 2$; (f) $1, 1$; (g) $0, +\infty$.

(68) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $((-1)^n x_n)$ dizisinin yakınsak olması için a ne olmalıdır.

(69) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde limiti $a \neq 0$ ve her n için $x_n \geq 0$ koşulunu sağlayan bir dizi ve $r \in \mathbb{Q}$ herhangi bir rasyonel sayı ise, (x_n^r) dizisi yakınsak ve limiti a^r dir. Gösteriniz.

(70) $x_0 > 0$ herhangi bir reel sayı ve

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}), \quad n = 0, 1, \ldots$$

ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$ olduğunu ispatlayınız.

(71) $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisi için

$$d_n = \sup\{|x_k - x_m| : k \geq n, m \geq n\}$$

olsun. (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

olmasıdır. Gösteriniz.

(72) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_+$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

olduğunu gösteriniz.

(73) $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a > 0,\ a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = b,\ b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

olduğunu gösteriniz.

(74) $a > 0, b > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n}{2^n} = \sqrt{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

(75) $s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N}$ olsun.

(a) $\lim_{n\to\infty} s_n = e$ ve (b) $e - s_n \leq \dfrac{n+2}{n!(n+1)^2}$

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

2.4 Fonksiyonların Limitleri

2.4.1 Temel Tanımlar ve Önermeler

İleride boş olmayan herhangi bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesinin limit (yığılma) noktalarının kümesini X' ile göstereceğiz.

Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $A \in \mathbb{R}$ sayısı ve $a \in X'$ noktası verilsin. Aşağıda, x, X içinde kalmak üzere a ya (eşit olmadan) yaklaşırken f nin değerlerinin A sayısına yaklaşmasının çeşitli tanımları verilecek ve bunların denk oldukları gösterilecektir.

Tanım 2.4.1 *(Cauchy'ye göre): Eğer, her $\epsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $0 < |x-a| < \delta$ iken $|f(x)-A| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f nin X kümesine göre a noktasındaki limiti A dır denir ve $\lim_{x\to a} f(x) = A$ veya $x \in X,\ x \to a$ iken $f(x) \to A$ şeklinde yazılır.*

Bu tanım daha kısa olarak şu şekilde yazılabilir:
$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall x \in X$ için
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \epsilon$ olur.

Bu tanımın değili şu şekilde yazılabilir:
$\lim_{x\to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$ öyle ki $\forall \delta > 0$ için $\exists x \in X$ öyle ki
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| \geq \epsilon$ olur.

$$0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$$
$$|f(x)-A| \leq \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\epsilon(A)$$
$$|f(x)-A| \geq \epsilon \Leftrightarrow f(x) \notin U_\epsilon(A)$$

olduğu dikkate alınırsa yukarıda verilen tanımları aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow A$ nın her $\overset{\circ}{U}_\epsilon(A)$ komşuluğu için a nın öyle bir $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ komşuluğu vardır ki, herhangi $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(A)$ (veya $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X) \subset U_\epsilon(A)$) olur.

$\lim_{X\ni x\to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow A$ nın öyle bir $U_\epsilon(A)$ komşuluğu vardır ki, a nın her $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ delinmiş komşuluğu için öyle $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ vardır ki, $f(x) \notin U_\epsilon(A)$ (veya $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X) \not\subset U_\epsilon(A)$) olur.

Bu tanımları daha kısa olarak şöyle yazabiliriz:

$$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\epsilon(A)\ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X) \subset U_\epsilon(A),$$
$$\lim_{X\ni x\to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists U_\epsilon(A)\ \forall \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X) \not\subset U_\epsilon(A)$$

Uyarı: Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasının bir delinmiş $\overset{\circ}{U}(a)$ komşuluğunda tanımlı ise, yani $\overset{\circ}{U}(a) \cap X = \overset{\circ}{U}(a) \cap \mathbb{R} = \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ ise, $X \ni x \to a$ (veya $x \in X, x \to a$ iken) yerine daha kısa olan $x \to a$ sembolünü kullanacağız.

Örnek 2.4.2 *: $X = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ve $a = 0$ olmak üzere*

$$\lim_{x\to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0 \tag{2.5}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\delta = \epsilon$ alalım. O halde, her $x \in X$ için $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ olduğundan dolayı her $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için $|x \sin \frac{1}{x}| \leq \epsilon$ bulunur. Demek ki, her $\epsilon > 0$ için $\exists \delta = \epsilon$ öyle ki $\forall x \in X$ için

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x \sin \tfrac{1}{x}| \leq \epsilon$$

olur. Bu ise (2.5) eşitliğinin doğruluğunu gösterir. $\diamond$

Örnek 2.4.3 *: $\lim_{x\to 0} |sgnx| = 1$ olduğunu gösteriniz.*

Her $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|\mathrm{Sgn}x| = 1$ olduğundan dolayı 0 ve 1 noktalarının sırasıyla herhangi $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ ve $\overset{\circ}{U}_\epsilon(1)$ komşulukları için $f(\overset{\circ}{U}_\delta(0)) = \{1\} \subset \overset{\circ}{U}_\epsilon(1)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\lim_{x\to 0} |\mathrm{sgn}x| = 1$ dir.

Örnek 2.4.4 *:* $X = \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ *ve* $a = 1$ *olsun. Limit tanımını kullanarak*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(1)$ için $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ'na bağlı $\delta > 0$ sayısının bulunabileceğini gösterelim.

Her $x \in (0,2) = U_1(1)$ için

$$\left|\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2(x+1)} < \frac{1}{2}|x-1|$$

olduğundan, $\delta = \min\{2\epsilon, 1\} > 0$ alırsak her $x \in U_\delta(1)$ için

$$|x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

bulunur. Böylece, her $\epsilon > 0$ için $\exists\delta = \min\{2\epsilon, 1\} > 0$ öyle ki $\forall x \in U_\delta(1)$ için $\left|\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$ olur. Buradan, Tanım 2.4.1 den dolayı istenen eşitlik elde edilir. $\diamond$

Örnek 2.4.5 *:* $f(x) = Sgnx,\ x \in \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $x \to 0$ *iken limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: $f(x) = \mathrm{Sgn}x$ fonksiyonunun değer kümesi $\mathcal{R}(Sgn) = \{-1, 0, 1\}$ kümesi olduğundan, herhangi $A \notin \{-1, 0, 1\}$ sayısı f nin 0 noktasındaki limiti olamaz. Örneğin, herhangi $A > 1$ noktasının $\epsilon = \dfrac{A-1}{2} > 0$ olmak üzere $U_\epsilon(A)$ komşuluğu ve 0 noktasının her $U_\delta(0)$ komşuluğu için $x_0 = -\dfrac{\delta}{2} \in U_\delta(0)$ dır, fakat $f(x_0) = 1 \notin U_\epsilon(A)$ olur. -1 ve 0 değerleri de f nin 0 noktasındaki limitleri olamaz. Örneğin, -1 noktasının $U_{1/2}(-1) = (-3/2, -1/2)$ ve 0 noktasının $U_\delta(0)$ komşuluğu için $t_0 = \dfrac{\delta}{4} \in U_\delta(0)$ dır. Fakat, $f(t_0) = \mathrm{Sgn}t_0 = 1 \notin U_{1/2}(-1)$ bulunur. $\diamond$

Tanım 2.4.6 *(Heyne'ye göre):* $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $a \in X'$ *olsun. Eğer, her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \in X\backslash\{a\}$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *koşullarını sağlayan her* (x_n) *dizisi için* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ *ise,* f *nin* a *noktasında limiti* A *dır denir ve* $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ *veya* $x \in X, x \to a$ *iken* $f(x) \to A$ *yazılır.*

Bu ve ileride verecegimiz Tanım 2.4.13 ve Tanım 2.4.22 nin verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \to a$ (veya $x \to a^-, x \to a^+$) ve $a = +\infty (a = -\infty)$ olmak üzere $x \to +\infty$ (veya $x \to -\infty$) iken limitinin mevcut olmadığını göstermekte büyük kolaylık sağlar.

Tanım 2.4.6 nın değilini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X\backslash\{a\}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan öyle (x_n) dizisi vardır ki, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$ dır.

Önerme 2.4.7 *: Limitin Cauchy ve Heyne'ye göre tanımları denktir.*

İspat: Tanım 2.4.1 $\Rightarrow$ Tanım 2.4.6. $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ olsun (Cauchy'ye göre). Bu durumda, her $\epsilon > 0$ için $\exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x) - A| < \epsilon$ olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X\backslash\{a\}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. O halde, $\exists n_\epsilon = n_{\delta(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ dir. Dolayısıyla, $|f(x_n) - A| < \epsilon$ elde edilir. Böylece, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $(x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ olduğundan) $|f(x_n) - A| < \epsilon$ bulunur. Bu da Heyne'ye göre $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ olması demektir.

Tanım 2.4.6 $\Rightarrow$ Tanım 2.4.1. Cauchy'ye göre $x \in X$ için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ bağıntısının gerçeklenmediğini varsayalım. O halde, verilen $\epsilon > 0$ sayısı için $\delta_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(a) \cap X$ öyle ki $|f(x) - A| \geq \epsilon$ sağlanır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_n}(a) \cap X$, $x_n \in X\backslash\{a\}$ ve $|x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$ koşullarının sağlandığı ve son eşitsizlikten de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ elde edilir. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - A| \geq \epsilon$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$ elde ederiz. Bu da Heyne'ye göre $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ olması ile çelişki olur. $\square$

Örnek 2.4.8 : $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: Terimleri

$$x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{ve} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

şeklinde tanımlayalım. (x_n) ve (y_n) dizilerini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n, y_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ olduğu açıktır. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin\frac{1}{x_n} = -1$ ve $\sin\frac{1}{y_n} = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = -1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = 1$$

elde edilir. Demek ki, her $A \in \mathbb{R}$ sayısı Heyne'ye göre $\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasında limiti olmaz. Bu da istenen limitin mevcut olmadığını göstermektedir. $\diamond$

2.4.2 Sağdan ve Soldan Limitler

Tanım 2.4.9 : *$a \in \mathbb{R}$ ile $\delta > 0$ sayıları verilmiş olsun. $U_\delta(a^+) = [a, a+\delta)$ $(U_\delta(a^-) = (a-\delta, a])$ aralığına a nın sağ (sol) δ komşuluğu denir.$\overset{\circ}{U}_\delta(a^+) = (a, a+\delta)$ $(\overset{\circ}{U}_\delta(a^-) = (a-\delta, a))$ aralığına da a nın delinmiş sağ (sol) δ komşuluğu denir.*

$a = +\infty$ $(a = -\infty)$ durumunda $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$ $(U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta))$ aralığına da $+\infty$ un $(-\infty$'un) δ komşuluğu denir.

Tanım 2.4.10 : *$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ ve $(a, +\infty) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Eğer, her $\epsilon > 0$ ve $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a^+) \cap X$ için $f(x) \in U_\epsilon(A)$ olacak şekilde ϵ'na bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa A'ya f nin X kümesine göre a noktasındaki sağ limiti denir ve $x \in X$ için $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$ veya $f(a^+) = A$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.4.11 : *$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $B \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ ve $(-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Eğer, her $\epsilon > 0$ ve $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a^-) \cap X$ için $f(x) \in$*

$U_\epsilon(B)$ olacak şekilde ϵ'na bağlı bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa B'ye f nin X kümesine göre a noktasındaki sol limiti denir ve $x \in X$ için $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$ veya $f(a^-) = B$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki tanımlarda komşuluk sembolünü kullanmazsak:
$\lim_{X\ni x\to a^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyle ki $\forall x \in X$ için $a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$ olur.
$\lim_{X\ni x\to a^-} f(x) = B \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ öyle ki $\forall\delta > 0$ için $\exists x \in X$ öyle ki $a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - B| < \epsilon$ olur.

Sağ ve sol limit tanımları ile Tanım 2.4.1 gözönüne alındığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.4.12 : *$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ ve $(a, +\infty) \cap X \neq \emptyset$ ve $(-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$ olsun. f nin X kümesine göre a noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter koşul f nin X kümesine göre $f(a^+)$ ve $f(a^-)$ limitlerinin mevcut ve $f(a^+) = f(a^-)$ olmasıdır.*

Cauchy'ye göre verilen Tanım 2.4.10 ve Tanım 2.4.11'e denk olan Heyne'ye göre aşağıdaki tanımı da ifade edebiliriz.

Tanım 2.4.10 ve Tanım 2.4.11 deki koşulların sağlandığını varsayalım.

Tanım 2.4.13 : *Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X\backslash\{a\}$, $x_n > a (x_n < a)$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ $(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B)$ ise, A 'ya (B'ye) f nin X kümesine göre a noktasında sağdan (soldan) limiti denir.*

Örnek 2.4.14 : *$X = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ve $a = 1$ olsun. $\lim_{x\to 1} f(x)$ limitini bulunuz.*

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = 2$$

olduğundan $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ dir. $\diamond$

Örnek 2.4.15 : $X = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, $f(x) = \dfrac{|3-x|}{3-x}$ *ve* $a = 3$ *olsun.* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ *limitini bulunuz.*

Çözüm: $x < 3$ için $3 - x > 0$ ve $x > 3$ için $3 - x < 0$ olduğundan,

$$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{3-x} = \lim_{x\to 3^-} 1 = 1,$$
$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(3-x)}{3-x} = \lim_{x\to 3^+} (-1) = -1$$

olur. $f(3^-) \neq f(3^+)$ olduğundan Teorem 2.4.12 gereğince f nin 3 noktasında limiti yoktur. $\diamond$

Tanım 2.4.16 : $c > 0$ *olmak üzere* $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu ve* $A \in \mathbb{R}$ *sayısı verilmiş olsun. Eğer, her* $\epsilon > 0$ *ve her* $x \in (c, +\infty) \cap U_\delta(+\infty)$ *için* $|f(x) - A| < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *sayısı varsa,* f *nin* $+\infty$ *'da limiti* A *'dır denir ve* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ *veya* $f(+\infty) = A$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.4.17 : $c > 0$ *olmak üzere* $f : (-\infty, -c) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu ve* $B \in \mathbb{R}$ *sayısı verilmiş olsun. Eğer, her* $\epsilon > 0$ *ve her* $x \in (-\infty, -c) \cap U_\delta(-\infty)$ *için* $|f(x) - B| < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *sayısı varsa,* B*'ye* f *nin* $-\infty$ *'da limiti denir ve* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$ *veya* $f(-\infty) = B$ *şeklinde gösterilir.*

Bu tanımları daha kısa olarak aşağıdaki şekilde de verebiliriz.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x > \delta$
(veya $\forall x \in (\delta, +\infty)$) için $|f(x) - A| < \epsilon$ olur.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x < -\delta$
(veya $\forall x \in (-\infty, -\delta)$) için $|f(x) - B| < \epsilon$ olur.

Tanım 2.4.18 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu ve* $A \in \mathbb{R}$ *sayısı verilsin. Eğer,* $\forall\epsilon > 0$ *ve* $\forall x \in U_\delta(-\infty) \cup U_\delta(+\infty)$ *için* $|f(x) - A| < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *sayısı varsa,* f *nin* ∞ *da limiti* A *dır denir ve* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ *veya* $f(\infty) = A$ *şeklinde yazılır.*

Buna göre,

$$x \in U_\delta(-\infty) \cup U_\delta(+\infty) \Leftrightarrow |x| > \delta$$

olduğundan,
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall|x| > \delta$ (veya $\forall x \in (-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$ için $|f(x) - A| < \epsilon$ olur.

Örnek 2.4.19 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ *fonksiyonu verilsin. Tanım 2.4.16 dan faydalanarak* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız ki, her $x > \delta$ için $|f(x) - 0| = |\sqrt{x^2+1} - x| < \epsilon$ eşitsizliği sağlansın. Herhangi $x \in (0, +\infty)$ için

$$|\sqrt{x^2+1} - x| = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} < \frac{1}{x}$$

olduğundan dolayı $\delta = \dfrac{1}{\epsilon}$ olarak seçilirse her $x > \delta$ için $\dfrac{1}{x} < \epsilon$ ve dolayısıyla, $|\sqrt{x^2+1} - x| < \epsilon$ bulunur ki, bu da Tanım 2.4.16 gereğince istenen eşitliği ispatlar. $\diamond$

Örnek 2.4.20 : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *şeklinde tanımlanan* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız ki, her $|x| > \delta$ için $|f(x) - 0| = |\dfrac{\sin x}{x}| < \epsilon$ eşitsizliği sağlansın. Her $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|\dfrac{\sin x}{x}| \leq \dfrac{1}{|x|}$ olduğundan dolayı $\delta = \dfrac{1}{\epsilon}$ olarak seçilirse her $|x| > \delta$ için $\dfrac{1}{|x|} < \epsilon$ ve dolayısıyla, $|\dfrac{\sin x}{x}| < \epsilon$ bulunur ki, bu da Tanım 2.4.18 gereğince istenen eşitliği ispatlar. $\diamond$

Örnek 2.4.21 : $f(x) = \dfrac{x - [\![\, x \,]\!]}{\sqrt{x}}$ *şeklinde tanımlanan* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız ki, her $x > \delta$ için $|f(x) - 0| = |\dfrac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{x}}| < \epsilon$ eşitsizliği sağlansın. Her $x > 0$ için

$$|\frac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{x}}| = \frac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

olduğundan, $\delta = \dfrac{1}{\epsilon^2}$ olarak seçilirse her $x > \delta$ için $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \epsilon$ ve dolayısıyla, $|\dfrac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{x}}| < \epsilon$ bulunur ki, bu da Tanım 2.4.16 gereğince istenen eşitliği ispatlar. $\diamond$

Cauchy'ya göre verilen Tanım 2.4.16 ve Tanım 2.4.17' ye denk olan Heyne'ye göre aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

Tanım 2.4.22 *: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ $(y_n < 0)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty)$ koşularını sağlayan her (x_n) dizisi $((y_n)$ dizisi$)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ $(\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B)$ ise, $+\infty$ da $(-\infty$ da$)$ f nin limiti A dır $(B$ dir$)$ denir.*

Örnek 2.4.23 *: Tanım 2.4.18 den faydalanarak $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $+\infty$ da $(-\infty$ da$)$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: Terimleri $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y_n = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x_n) ve (y_n) dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ olduğu açıktır. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = \sin x_n = -1$ ve $f(y_n) = \sin y_n = 1$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$ bulunur. Bu da Tanım 2.4.22 den dolayı f nin $+\infty$ da limitinin mevcut olmadığını gösterir. f nin $-\infty$ da limitinin var olmadığı benzer şekilde gösterilebilir.

Benzer şekilde, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $+\infty$ da $(-\infty$ da$)$ limitinin mevcut olmadığı gösterilebilir. $\diamond$

2.4.3 Limitle İlgili Önermeler

Aşağıdaki Teoremde $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ $(x_0 \in \mathbb{R}, x_0 = -\infty$ ve $x_0 = +\infty$ olabilir$)$ ve ele alınan fonksiyonların X üzerinde tanımlı reel değerli oldukları

kabul edilir. Ayrıca, $x_0 \in \mathbb{R}$ ise, $a = x_0$, $a = x_0^-$, $a = x_0^+$ ve $x_0 = -\infty$ $(x_0 = +\infty)$ ise, $a = -\infty$ $(a = +\infty)$ olduğu varsayılarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.4.24 *: Aşağıdaki önermeler doğrudur.*

(a) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A_1$ *ve* $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A_2$ *ise,* $A_1 = A_2$ *dir.*

(b) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ *ise,* $\exists \delta > 0$ *öyle ki* f *fonksiyonu* $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ *kümesinde sınırlıdır.*

(c) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ *ve* $A \neq 0$ *ise,* $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ *öyle ki* $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ *için* $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$ *dir.*

(d) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ *ve* $\lim\limits_{X\ni x\to a} g(x) = B$ *limitleri varsa* $f + g$, $f.g$ *ve her* $x \in X$ *için* $g(x) \neq 0$ *ve* $B \neq 0$ *ise,* $\dfrac{f}{g}$ *fonksiyonlarının da* $x \in X$ *için* $x \to a$ *iken limitleri vardır ve*

(1) $\lim\limits_{X\ni x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$; *(2)* $\lim\limits_{X\ni x\to a} (f(x) - g(x)) = A - B$;

(3) $\lim\limits_{X\ni x\to a} (f(x).g(x)) = A.B$; *(4)* $\lim\limits_{X\ni x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ *dir.*

(e) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *limitleri varsa ve her* $x \in X$ *için* $f(x) \leq g(x)$ *ise,* $A \leq B$ *dir.*

(f) Her $x \in X$ *için* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *ve* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ *ise,* $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ *limiti de vardır ve* A *'ya eşittir.*

(g) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *limitleri varsa ve* $A < B$ *ise, öyle* $\delta > 0$ *sayısı vardır ki, her* $x \in U_\delta^0(a) \cap X$ *için* $f(x) < g(x)$ *olur.*

(h) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A$ *ise* $\lim\limits_{X\ni x\to a} |f(x)| = |A|$ *dır.*

İspat: Önerme 2.4.7 den dolayı, bütün bu önermeler diziler için olan önermelere indirgenir ve Teorem 2.1.9 dan bu sonuçlar hemen ispatlanır.

Örnegin, Teoremin (d) şıkkındaki (3)'ün ispatını yapalım. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. Bu durumda, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$ olduğundan Teorem 2.1.9 dan dolayı

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).\lim_{n\to\infty} g(x_n) = A.B$$

bulunur. □

Örnek 2.4.25 *:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *olduğunu ispatlayınız.*

Çözüm: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ olsun. Şekil 2.1 den görüldüğü gibi

$$A_1 = Alan(\overset{\triangle}{AOB}) = \frac{R^2 \sin x}{2},$$
$$A_2 = Alan(AOBdilimi) = \frac{R^2 x}{2},$$
$$A_1 = Alan(\overset{\triangle}{DOB}) = \frac{R^2 \tan x}{2}$$

ve $A_1 < A_2 < A_3$ dür. Buna göre, her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\frac{R^2 \sin x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 \tan x}{2}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\dfrac{R^2}{2}$ ile bölündüğünde her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\sin x < x < \tan x \tag{2.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{veya} \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \tfrac{x}{2} < 2\sin \tfrac{x}{2} < x$$

olduğundan, (2.7) den her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \tag{2.8}$$

bulunur. $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ için $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$ olduğundan, (2.8)'e göre her $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ için

$$0 < 1 - \frac{\sin(-x)}{-x} < -x$$

veya $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < |x|$ eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir. Böylece, her $x \in U^0_{\frac{\pi}{2}}(0)$ için

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < |x| \tag{2.9}$$

dir. $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ olduğundan Teorem 2.4.24 (f) gereğince (2.9) dan istenen eşitlik elde edilir. ⋄

Teorem 2.4.26 (Bileşke Fonksiyonun Limiti) *:* $X, Y \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$ $(a, b \in \bar{\mathbb{R}})$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{Y\ni y\to b} g(y) = A$ *olsun. Eğer, her* $x \in X\backslash\{a\}$ *için* $f(x) \neq b$ *ve* $f(x) \in Y$ *ise,* $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ *bileşke fonksiyonunun* X *kümesine göre* a *noktasındaki limiti vardır ve* $\lim\limits_{x\to a} F(x) = A$ *dır.*

İspat: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$ olduğundan, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki, $\forall y \in \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y$ için $g(y) \in U_\epsilon$ olur.

$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = b$ ise az önce bulunan $\delta > 0$ sayısı için $\exists \eta = \eta(\delta) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a) \cap X$ için $f(x) \in U_\delta$ olur. Öte yandan, $\forall x \in X\backslash\{a\}$ için $f(x) \neq b$ olduğundan, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a) \cap X$ için $f(x) = \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y$ ve buradan da

$$f(x) \in \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y \Rightarrow g(f(x)) \subset U_\epsilon(A)$$

bulunur. Demek ki, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a) \cap X$ için $F(x) = g(f(x)) \in U_\epsilon(A)$ olur. Bu $\lim_{X\ni x\to a} F(x) = A$ olduğunu ispatlar. □

Örnek 2.4.27 : $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $Y = \mathbb{N}$ olmak üzere $g, g_1, g_2 : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$g(n) = (1+\frac{1}{n})^n, \quad g_1(n) = (1+\frac{1}{n+1})^n, \quad g_2(n) = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

biçiminde, $X = \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu da $f(x) = [\![\, x \,]\!]$ biçiminde tanımlanmış olsun.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{n\to\infty} g_1(n) = \lim_{n\to\infty} g_2(n) = e$$

olduğunu biliyoruz.

$$(g\circ f)(x) = (1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]})^{[\![x]\!]}, \quad (g_1\circ f)(x) = (1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]+1})^{[\![x]\!]},$$
$$(g_2\circ f)(x) = (1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]})^{[\![x]\!]+1}$$

fonsiyonlarının da $x \to +\infty$ iken limitleri e dir.

Herhangi $x > 1$ için

$$(1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]+1})^{[\![x]\!]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]})^{[\![x]\!]+1}$$

ve

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]+1})^{[\![x]\!]} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[\![\, x \,]\!]})^{[\![x]\!]+1} = e$$

olduğundan Teorem 2.4.24 ten dolayı

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

bulunur. Şimdi Teorem 2.4.26 dan faydalanarak

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x &= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{(-t)})^{(-t)} = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{t}{t-1}) \\
&= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1}) \\
&= \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

dir.

Şimdi istenen eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \Rightarrow \exists\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x < -\delta_1$ için $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$ dir ve $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \Rightarrow \exists\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x > \delta_2$ için $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$ dir. O halde, her $|x| > \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ için

$$|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$$

bulunur. Bu ise, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ olması demektir. ⋄

2.4.4 Limitin Varlığı Koşulları

Reel terimli dizlerde olduğu gibi bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesine göre bir $a \in X'$ noktasında limitini bilmeden, f nin X üzerinde değişme özellikleri dikkate alınarak $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limitinin varlığı koşullarının bulunması büyük önem taşımaktadır. Aşağıda X üzerinde tanımlı monoton fonksiyonlar ve X üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon için mevcut olan böyle koşullar incelenecektidir.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $i = \inf X$, $s = \sup = X$ olsun. $(i, s \in \mathbb{R}$ veya $i = -\infty,\ s = +\infty$ olabilir).

Teorem 2.4.28 *: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, X üzerinde monoton artan bir fonksiyon ise,*

$$\lim_{X\ni x\to i^+} f(x) = A = \inf\{f(x) : x \in X\},$$
$$\lim_{X\ni x\to s^-} f(x) = B = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

limitleri mevcuttur. Ayrıca, f, X üzerinde üstten (alttan) sınırlı ise, $A \in \mathbb{R}$ $(B \in \mathbb{R})$ dir. Aksi taktirde $A = -\infty$ $(B = +\infty)$ dır.

İspat: **(a)** f nin X üzerinde üstten sınırlı olduğu durumda $B \in \mathbb{R}$ olduğu açıktır. $\lim\limits_{x\to s^-} f(x) = B$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin supremumun karakteristik özelliklerinden dolayı

1. $\forall x \in X$ için $f(x) \le B$ ve

2. $\exists x_\epsilon \in X$ öyle ki $f(x_\epsilon) > B - \epsilon$ dur.

$\forall x \in X$ için $x < s$ olduğundan, $x_\epsilon < s$ olur. $s \in \mathbb{R}$ ise $\delta = s - x_\epsilon$ ve $s = +\infty$ ise $\delta = x_\epsilon$ olmak üzere

$$\overset{\circ}{U}_\delta(s) = \begin{cases} (s-\delta, s), & s \in \mathbb{R} \text{ ise,} \\ (\delta, +\infty), & s = +\infty \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O halde, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(s^-) \cap X$ için $f(x)$ monoton artan olduğundan dolayı

$$B - \epsilon < f(x_\epsilon) \le f(x) \le B < B + \epsilon$$

bulunur. Böylece, $\forall \epsilon > 0$ için s noktasının öyle bir $\overset{\circ}{U}_\epsilon(s^-)$ komşuluğu vardır ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(s^-) \cap X$ için $|f(x) - B| < \epsilon$ olur. Bu da $\lim\limits_{x\to s^-} f(x) = B$ olması demektir.

(b) f, X üzerinde üstten sınırsız olsun. Bu durumda, $\lim\limits_{X\ni x\to s^-} f(x) = +\infty$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. f, X üzerinde üstten sınırsız olduğundan, $f(x_\epsilon) > \epsilon$ olacak şekilde bir $x_\epsilon \in X$ noktası vardır. $\overset{\circ}{U}_\epsilon(s^-)$, s nin a) da tanımlanan bir komşuluğu olmak üzere f, X üzerinde monoton artan olduğundan, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(s^-) \cap X$ için

$$f(x) \ge f(x_\epsilon) > \epsilon$$

bulunur. Böylece, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$$\forall x \in U^0_\epsilon(s^-) \cap X \quad \text{için} \quad f(x) > \epsilon$$

olur. Bu da $\lim\limits_{x\to s+} f(x) = +\infty$ olması demektir.

f nin X üzerinde alttan sınırlı olduğu durum benzer şekilde incelenmektedir. □

Monoton azalan fonksiyonlar için aşağıdaki teorem benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.4.29 *: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, X üzerinde monoton azalan bir fonksiyon ise,*

$$\lim_{X\ni x\to i^+} f(x) = D = \sup\{f(x) : x \in X\}$$
$$\lim_{X\ni x\to s^-} f(x) = C = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

limitleri vardır. Ayrıca, f, X üzerinde üstten (alttan) sınırlı ise, $D \in \mathbb{R}$ $(C \in \mathbb{R})$, aksi taktirde $D = +\infty$ $(C = -\infty)$ dir.

Teorem 2.4.30 *:$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde monoton artan (azalan) bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Bu durumda, f nin x_0 noktasında sonlu $f(x_0-)$ ve $f(x_0+)$ limitleri vardır ve*

$$f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) \quad (f(x_0^-) \ge f(x_0) \ge f(x_0^+)$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.4.31 (Cauchy Kriteri) *:$X \subset \mathbb{R}$ kümesi $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun.*

$$\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$$

için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ sağlanır.

İspat: $\Rightarrow$. $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ limiti mevcut olsun. O halde, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(a) \cap X$ için

$$|f(x') - A| < \epsilon/2, \quad |f(x'') - A| < \epsilon/2$$

olur. Ayni x' ve x'' ler için

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - A| + |A - f(x')| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur.

$\Leftarrow$. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \backslash \{a\}$ ve $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin.
$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_\epsilon = n(\delta_\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n', n'' > n_\epsilon$ için $x_{n'}, x_{n''} \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ olur. Ayni n' ve n'' ler için $|f(x_{n'}) - f(x_{n''}| < \epsilon$ olmasından dolayı reel terimli $(f(x_n))$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Cauchy dizisinin özelliğine göre $(f(x_n))$ yakınsak bir dizidir. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ dersek Önerme 2.4.17 den dolayı $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dır. □

Not: Belirtelim ki, bu teoremde ve ileride göreceğimiz Tanım 2.4.32, Tanım 2.4.35, Tanım 2.4.36 ve Teorem 2.4.34, Teorem 2.4.37 ve Teorem 2.4.39 da $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ve $a = \infty$ olabilir. Ayrıca, $x \to a$ iken söylenebilen bu tanım ve teoremler $x \in X$ için $x \to a^-$ ve $x \to a^+$ durumları için de geçerlidir.
•

Tanım 2.4.32 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$, $A \in \mathbb{R}$ noktaları verilmiş olsun. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X \backslash \{a\}$ ve $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan bir (x_n) dizisi için $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ oluyorsa, A ya f nin $x \to a$ iken hususi (veya özel) limiti denir.*

Uyarı 2.4.33 *Tanım 2.4.32'de söz konusu olan A sayısı, genelde farklı (x_n) dizileri için farklıdır.*

f nin $x \in X$, $x \to a$ iken bütün hususi limitlerden oluşan küme $L_f(a)$ olsun.

Örnek 2.4.34 *: $f(x) = \sin \frac{1}{x} : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \to 0$ iken hususi limitlerini bulunuz.*

Çözüm: Herhangi bir $A \in [-1, 1]$ sayısı için terimleri

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, & A = 1 \text{ ise;} \\ \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2n\pi}, & A = -1 \text{ ise;} \\ \dfrac{1}{(-1)^n \arcsin A + n\pi}, & A \neq \pm 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisini gözönüne alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\forall x_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ve $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ koşullarının sağlandığı ve

$$\lim_{n \to \infty} \sin \tfrac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} A = A$$

olduğu açıktır. Buradan da her $A \in [-1, 1]$ sayısının $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ iken bir hususi limiti olduğu anlaşılır.
Demek ki, $L_f(0) = [-1, 1]$ dir. ⋄

Teorem 2.4.35 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $x \in X$ için $\lim_{x \to a} f(x) = A$ limiti varsa, $L_f(a) = \{A\}$ dır.*

Tanım 2.4.36 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. $L_f(a)$ kümesinin maksimumuna (minimumuna) f nin $x \to a$ iken üst (alt) limiti denir. ve $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$ $(\underline{\lim}_{x\to a} f(x))$ ile gösterilir.*

Buna göre,

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \min L_f(a), \quad \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = \max L_f(a)$$

dir.

Boş olmayan $A \subset \mathbb{R}$ kümesi verilmiş olsun.

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

büyüklüğüne A kümesinin çapı denir.

Örneğin, $A = [-1, 3]$ için $d([-1, 3]) = 4,\ B = [-2, -1] \cup [0, 1]$ için $d(B) = 3,\ C = [1, +\infty)$ için $d(C) = +\infty$, $G = (-\infty, +\infty)$ için $d(G) = +\infty$ dir.

Tanım 2.4.37 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. $\delta > 0$ sayısı için $d(f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X))$, $f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ kümesinin çapı olmak üzere*

$$\Omega(f, a) = \inf\{d(f(\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X)) : \delta > 0\}$$

büyüklüğüne f nin a noktasındaki sıçraması denir.

Teorem 2.4.38 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{X\ni x\to a} f(x) &= \sup\{\inf\{f(x) : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X\} : \delta > 0\} \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X\}, \\
\overline{\lim}_{X\ni x\to a} f(x) &= \inf\{\sup\{f(x) : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X\} : \delta > 0\} \\
&= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(x) : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X\}
\end{aligned}$$

bağıntıları doğrudur.

Teorem 2.4.39 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda,*

$$\Omega(f, a) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) - \underline{\lim}_{x\to a} f(x) \tag{2.10}$$

bağıntısı doğrudur.

Teorem 2.4.40 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \underline{\lim}_{X\ni x\to a} f(x) = A = \overline{\lim}_{X\ni x\to a} f(x)$$

dir veya başka bir ifadeyle

$$\lim_{X\ni x\to a} f(x) \quad \textit{limiti vardır} \Leftrightarrow \Omega(f, a) = 0$$

dır.

2.4.5 Sonsuz Küçük ve Sonsuz Büyük Fonksiyonlar ve o-küçük ve O-büyük Sembolleri

Bu kesimde $a \in \overline{\mathbb{R}}(a \in \mathbb{R},\ a = \pm\infty$ veya $a = \infty)$ nın $X \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir limit noktası ve ele alınacak bütün fonksiyonların X kümesi üzerinde tanımlı (a noktasında tanımlı olmayabilir de) oldukları kabul edilir.

Tanım 2.4.41 : *Eğer, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ise, f ye $x \in X,\ x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyon denir ve $x \in X,\ x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ şeklinde gösterilir.*

Buna göre, $x \in X,\ x \to a$ iken $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| < \epsilon$ sağlanır.

Önerme 2.4.42 : *$\lim_{X\ni x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - A$ olmak üzere $x \in X,\ x \to a$ iken $\alpha(x) = o(1)$ dir.*

İspat: (a) $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{X\ni x\to a} \alpha(x) = \lim_{X\ni x\to a}[f(x) - A] = \lim_{X\ni x\to a} f(x) - \lim_{X\ni x\to a} A = A - A = 0 \text{ dır}$$

(b) $f(x) = A + \alpha(x)$ ve $\lim\limits_{X\ni x\to a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{X\ni x\to a}[A + \alpha(x)] = A + \lim\limits_{X\ni x\to a} \alpha(x) = A$ dır □

Önerme 2.4.43 *: $x \to a$ iken sonlu sayıda sonsuz küçük fonksiyonların cebirsel toplamı da $x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyondur.*

İspat: Önermenin iki tane sonsuz küçük fonksiyonlar için doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in X,\ x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g = o(1)$ olsun. Herhangi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $x \in X,\ x \to a$ iken $\lambda f + \mu g = o(1)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\lim_{X\ni x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) &= \lim_{X\ni x\to a}[\lambda f(x) + \mu g(x)] \\ &= \lambda \lim_{X\ni x\to a} f(x) + \mu \lim_{X\ni x\to a} g(x) = \lambda.0 + \mu.0 = 0\end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 2.4.44 *: $x \in X,\ x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $r > 0$ için $\overset{\circ}{U}_r(a) \cap X$ üzerinde sınırlı ise, $F(x) = f(x).g(x)$ fonksiyonu $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz küçüktür.*

İspat: $g : X \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{U}_r(a) \cap X$ üzerinde sınırlıdır $\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}_r(a) \cap X$ için $|g(x)| \le M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1) \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a) \cap X$ için $|f(x)| < \dfrac{\epsilon}{M}$ olur. O halde, $\delta = \min\{r, \delta_1\} > 0$ olmak üzere $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|F(x)| = |f(x)||g(x)| < \dfrac{\epsilon}{M}.M = \epsilon \Rightarrow x \in X$ için $x \to a$ iken $F = o(1)$ dir. □

Tanım 2.4.45 *: Eğer, $x \in X$ için $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ ise, f'ye $x \to a$ iken sonsuz büyük fonksiyon denir.*

Buna göre, $x \in X$ için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\ (= +\infty) \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) < -\epsilon\ (f(x) > \epsilon)$ dur.

$x \in X$ için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| > \epsilon$ dur.

Önerme 2.4.46 ***:(a)*** *Eğer, $\forall x \in X\backslash\{a\}$ için $f(x) \neq 0$ ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1)$ ise, $\dfrac{1}{f(x)}$ fonksiyonu $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz büyüktür.*

(b) *Eğer, $f,\ x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz büyük bir fonksiyon ise, $\dfrac{1}{f(x)}$ fonksiyonu $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz küçüktür.*

İspat: (a) Herhangi bir $M > 0$ sayısı için $\epsilon = \dfrac{1}{M}$ olsun. $x \to a$ iken $f = o(1)$ ise $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| < \epsilon$ ve buradan da aynı x ler için $\dfrac{1}{|f(x)|} > \dfrac{1}{\epsilon} = M$ bulunur. Bu da $\dfrac{1}{f}$ nin $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz büyük fonksiyon olması demektir.
(b) nin ispatı benzer şekilde yapılabilir. □

Örnek 2.4.47 *: **(a)** $x \to 0$ iken $\sin x = o(1)$ dir. Çünkü $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ dır.*
(b) *$\forall p > 0$ sayısı için $x \to 0$ iken $x^p = o(1)$ dir.*
(c) *$x \to 0$ iken $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$ ve $\dfrac{1}{x^3}$ fonksiyonları sonsuz büyüktürler. Çünkü $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, ve $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$ dir.*

Tanım 2.4.48 *: $\forall x \in X\backslash\{a\}$ için $g(x) \neq$ ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g = o(1)$ olsun. Eğer, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken f ve g aynı mertebeden sonsuz küçük fonksiyonlardır denir. (Bu durumda, $x \in X$ için $x \to a$ iken f ve g aynı hızla sıfıra yaklaşırlar denir).

Eğer, $k = 1$ ise f ve g, $x \in X$ için $x \to a$ iken denk sonsuz küçük fonksiyonlardır denir ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f \sim g$ şeklinde gösterilir.

Buna göre, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f \sim g \Leftrightarrow x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1),\ g = o(1)$ ve $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ dir.

Eğer, $k = 0$ ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken f, g'ye göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür denir ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(g)$ şeklinde gösterilir. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(g)$ yazımı, $x \in X$ için $x \to a$ iken f, g'ye göre o-küçüktür diye okunmaktadır.

Eğer, $|k| = +\infty$ ise $x \in X$ için $x \to a$ iken g, f'den yüksek mertebeden sonsuz küçüktür denir

Örnek 2.4.49 *: **(a)** $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $x \to 0$ iken $\sin ax \sim ax$ dir. Çünkü*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

dir.
(b) *$x \to 0$ iken $\sqrt{1+x} - x \sim \frac{1}{2}x$ dir. Çünkü,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1$$

dir.
(c) *$x \to 0$ iken $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ dir. Çünkü,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

(d) *$x \to \infty$ iken $\frac{x-1}{x} \sim \frac{1}{x}$ dir. Çünkü*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 1$$

dir.

Tanım 2.4.50 *: $\forall x \in X\backslash\{a\}$ için $g(x) \neq 0$ ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g = o(1)$ olsun. Eğer, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(g(x))^p} = k$$

olacak şekilde $p > 0$ sayısı varsa $x \in X$ için $x \to a$ iken f, g ye göre p. mertebeden sonsuz küçüktür denir.

Önerme 2.4.51 *: $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g = o(1)$ olsun. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f \sim g \Leftrightarrow x \to a$ iken $g - f = o(f)$ veya $g - f = o(g)$ dir.*

İspat: $\Rightarrow$ $x \in X$ çin $x \to a$ iken $f \sim g$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} (\frac{g(x)}{f(x)} - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$$

$x \in X$ çin $x \to a$ iken $f - g = o(g)$ dir.
$\Leftarrow$ $x \in X$ çin $x \to a$ iken $g - f = o(f)$ (veya $g - f = o(g)$) olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} = 0 \ \ \left(\lim_{X\ni x\to a} \frac{g(x)-f(x)}{g(x)} = 0\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} (\frac{g(x)}{f(x)} - 1) = 0 \ \ \left(\lim_{X\ni x\to a} (1 - \frac{f(x)}{g(x)}) = 0\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \ \ \left(\lim_{X\ni x\to a} (\frac{f(x)}{g(x)}) = 1\right) \Rightarrow$$

$x \to a$ iken $g \sim f (f \sim g)$ dir. □

Sonuç 2.4.52 *: Eğer, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in X$ için $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(g(x))^p} = k$ olacak şekilde $p > 0$ sayısı varsa, $x \to a$ iken $f \sim k.g^p$ ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = k.g^p + o(g^p)$ dir. Bu durumda, $k.g^p$ ye f nin esas kısmı denir.*

Örnek 2.4.53 : ***(a)*** $x \to 0$ *iken* $f(x) = 1 - \cos x$ *fonksiyonunun* $g(x) = x$ *fonksiyonuna göre esas kısmı* $\frac{1}{2}(g(x))^2 = \frac{1}{2}x^2$ *dir.*

(b) $x \to 0$ *iken* $f(x) = \tan x - \sin x$ *nun* $g(x) = x$ *e göre esas kısmı* $\frac{1}{2}(g(x)) = \frac{1}{2}x^3$ *dir. Çünkü,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} . \frac{1}{\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

dir.

(c) $x \to +\infty$ *iken* $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}$ *nin* $g(x) = \frac{1}{x}$ *ye göre esas kısmı* $-\frac{1}{4}(g(x))^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}$ *dir. Çünkü,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}}{-\frac{1}{4}(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}}{-\frac{1}{4}(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{-\frac{1}{4}(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8}{(\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}$$
$$= 1 \quad dir.$$

Önerme 2.4.54 : $x \in X, x \to a$ *iken* $f, g, f_1, g_1 : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları sonsuz küçükler olsun. Eğer,* $x \in X$ *için* $x \to a$ *iken* $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ *ve* $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *limiti mevcut ise,* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *limiti de mevcuttur ve*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

dir.

İspat: Önerme 2.4.51 den dolayı $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = f_1 + o(f_1)$ ve $g = g_1 + o(g_1)$ dir. Bu durumda, Teorem 2.4.24 (d) den dolayı

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} . \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}}$$
$$= \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} . \lim_{X\ni x\to a} \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} = \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bulunur. □

Örnek 2.4.55 : ***(a)*** $x \to 0$ *iken* $\sin 3x \sim 3x$ *ve* $\tan 5x \sim 5x$ *olduğundan,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

dir.

(b) $x \to 0$ *iken* $\sin x \sim x$ *ve* $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ *olduğundan,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x.\frac{x^2}{2}}{x^3}.1 = \frac{1}{2}$$

dir.

Not: $o(g)$ sembolü, genellikle belirli bir fonksiyon olmayıp, $x \in X$ için $x \to a$ iken g ye göre yüksek mertebeden sonsuz küçük olan bütün fonksiyonlardan oluşan bir kümedir. Bu sebepten $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(g)$ eşitliği yalnızca soldan sağa yönde okunmaktadır. Buna göre, $x \to 0$ iken $x^2 = o(x)$ eşitliği doğrudur, fakat $x \to 0$ iken $\varphi = o(x)$ şeklindeki her φ fonksiyonu $y = x^2$ fonksiyonuna eşit değildir. Örneğin, $x \to 0$ iken $x^2 = o(x)$ ve $x^3 = o(x)$ eşitliğinin doğru olmasına rağmen $x^3 \neq x^2$ dir. •

Tanım 2.4.56 : $X \subset \mathbb{R}$ *kümesi,* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları ve* $a \in X'$ *(*$a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$ *veya* $a = \infty$ *) noktası verilsin. Eğer,* $\alpha : X \to \mathbb{R}$,

herhangi bir $\delta > 0$ için $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) = \alpha(x)g(x)$ ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = O(g)$ şeklinde yazılır ve $x \to a$ iken f, g ye göre O-büyüktür diye okunur.

Buna göre, eğer $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ sayısı varsa, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = O(g)$ dir. Ayrıca, eğer $f, \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ üzerinde sınırlı ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = O(1)$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.4.57 *: **(a)** $x \to 0$ iken $\sin 2x = O(x)$ dir. Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\sin 2x| \leq 2|x|$ dir.*
***(b)** $x \to 0$ iken $x = O(\sin 2x)$ dir. Çünkü $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan Teorem 2.4.24 (b) den dolayı $\dfrac{x}{\sin 2x}$ fonksiyonu yeteri kadar küçük bir $\delta > 0$ sayısı için $\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ üzerinde sınırlıdır. Yani, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için $|\dfrac{x}{\sin 2x}| \leq c$ veya $|x| \leq c|\sin 2x|$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.*
***(c)** $x \to \infty$ iken $(\dfrac{1}{x} + \sin x)x = O(x)$ dir. Çünkü, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(\infty)$ için*

$$|(\frac{1}{x} + \sin x)x| \leq (|\frac{1}{x}| + |\sin x|)|x| \leq (1+1)|x| = 2|x|$$

dir.

Tanım 2.4.58 *: Eğer, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = O(g)$ ve $g = O(f)$ ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken f ve g aynı mertebendendir denir ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f \asymp g$ şeklinde gösterilir.*

Buna göre, eğer $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için

$$c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 pozitif sayıları varsa, $x \to a$ iken $f \asymp g$ dir.

Örneğin, $x \to \infty$ iken $(2+\sin x)x \asymp x$ dir. Fakat $x \to \infty$ iken $(1+\sin x)x$ ve x fonksiyonları aynı mertebeden değildir.

Şimdi o-küçük ve O-büyük sembollerinin bazı özelliklerinin kısa özetini verelim.

1^0. $o(f) + o(f) = o(f)$, $\quad o(f) - o(f) = o(f)$, $\quad o(f).o(g) = o(fg)$ dir.
2^0. $o(f) = O(f)$, $\quad o(f).O(g) = o(fg)$, $\quad o(f) + O(f) = O(f)$, $O(f) + O(f) = O(f)$ dir.
3^0. $\forall 0 \neq k \in \mathbb{R}$ için $o(kf) = o(f)$, $\quad k.o(f) = o(f)$ dir.
4^0. $n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere her $k = 1, 2, \ldots, n-1$ için $o(f^n) = o(f^k)$ dir.
5^0. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(o(f))^n = o(f^n)$ dir.
6^0. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f^n.o(f) = o(f^{n+1})$ dir.
7^0. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1})$ dir.
8^0. Eğer, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $g(x) \neq 0$ ise, $x \to a$ iken $\dfrac{O(f)}{g} = O(\dfrac{f}{g})$ dir.
9^0. $\lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $o(\lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \ldots + \lambda_n f^n) = o(f)$ dir.
10^0. $o(o(f)) = o(f)$ dir.
11^0. $x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g = o(1)$ ise $f.g = o(f)$ ve $f.g = o(g)$ dir.

Not: $x \to a$ iken söylenilen bu özellikler $a \in \mathbb{R}$ ise, $x \to a^-$ ve $x \to a^+$ durumları için de geçerlidir. •

o-küçük ve O-büyük sembollerinin $1^0, 3^0, 5^0$ ve 10^0 özelliklerinin ispatını verelim.

1^0. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(f)$ ve $f_2 = o(f)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X \ni x \to a} \frac{f_1}{f} = \lim_{X \ni x \to a} \frac{f_2}{f} = 0 \Rightarrow \lim_{X \ni x \to a} \frac{f_1 \pm f_2}{f} = \lim_{X \ni x \to a} \frac{f_1}{f} \pm \lim_{X \ni x \to a} \frac{f_2}{f} = 0$$

olduğundan, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 \pm f_2 = o(f)$ dir.

$x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(f)$ ve $f_2 = o(g)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1}{f} = \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_2}{g} = 0 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1.f_2}{f.g}$$
$$= \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1}{f}. \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_2}{g} = 0$$

olduğundan $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1.f_2 = o(f.g)$ dir.

3^0. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(kf)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1}{kf} = 0 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1}{f} = \lim_{X\ni x\to a} k\frac{f_1}{kf}$$
$$= k \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_1}{kf} = k.0 = 0,$$

buradan da $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(f)$ dir.

$x \in X$ için $x \to a$ iken $f_2 = o(f)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to a} \frac{kf_2}{f} = k \lim_{X\ni x\to a} \frac{f_2}{f} = k.0 = 0$$

olduğundan, $x \in X$ için $x \to a$ iken $kf_2 = o(f)$ dir.

5^0. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(f)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1^n}{f^n} = \lim_{x\to a} \big(\frac{f_1}{f}\big)^n = \big(\lim_{x\to a} \frac{f_1}{f}\big)^n = 0$$

olduğundan, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1^n = o(f^n)$ dir.

10^0. $x \in X$ için $x \to a$ iken $f_1 = o(f)$ ve $F = o(f_1)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to a} \frac{F}{f} = \lim_{x\to a} \frac{F}{f_1}.\frac{f_1}{f} = \lim_{x\to a} \frac{F}{f_1}. \lim_{x\to a} \frac{f_1}{f} = 0$$

olduğundan, $x \in X$ için $x \to a$ iken $F = o(f)$ dir.

2.4.6 Belirsiz İfadeler

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $a \in X'$ ($a \in \mathbb{R}, a = \pm\infty$ veya $a = \infty$) noktası ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Teorem 2.4.24 (d) den dolayı eğer,

$x \in X$ için $x \to a$ iken $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ sonlu limitleri varsa, $\frac{f}{g}$ nin de $x \in X$ için $x \to a$ iken sonlu limiti vardır ve $\lim_{X\ni x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ dir. $A = B = 0$ durumunda $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun $x \in X$ için $x \to a$ iken limitinin varlığı üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $x \in X$ için $x \to a$ iken $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizlik oluşturur denir.

Örneğin,

(a) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ve $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ dir.

(b) $f(x) = \sec^2 x$, $g(x) = \tan^4 x$ fonksiyonları için $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ ve $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} = 0$ dır.

(c) $f(x) = xsgnx$, $g(x) = x$ fonksiyonları için $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ dır, fakat $\frac{f(x)}{g(x)} = Sgnx$ fonksiyonunun $x \to 0$ iken limiti yoktur.

Benzer şekilde, eğer, $A = B = +\infty$ (veya $A = B = -\infty$) ise, $x \to a$ iken $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun limitinin varlığı üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $x \in X$ için $x \to a$ iken $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde belirsizlik oluşturur denir.

Eğer, $\lim_{X\ni x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim_{X\ni x\to a} g(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) ise, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f.g$ fonksiyonunun limitinin varlığı üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $x \in X$ için $x \to a$ iken $f.g$ fonksiyonu $0.\infty$ şeklinde belirsizlik oluşturur denir.

Örneğin,

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ fonksiyonları için $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ve $\lim_{x\to+\infty} f(x).g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ dir.

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^2$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ dir.

(c) $f(x)=x^2Sgnx,\ g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0} g(x)=+\infty$ ve $f(x)g(x)=Sgnx$ fonksiyonunun $x\to0$ iken limiti yoktur.

Not: $0.\infty,\ \dfrac{0}{0}$ ve $\dfrac{\infty}{\infty}$ tipindeki belirsizliklerden herhangi biri diğerine dönüştürülebilir. •

$X\subset\mathbb{R}$ kümesi, $a\in X'$ ($a\in\mathbb{R}, a=\pm\infty$ veya $a=\infty$ olabilir) noktası ve $u:X\to\mathbb{R}_+,\ v:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Aşağıdaki durumlar mümkündür.

1. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=b>0,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=c$ ise $\lim\limits_{X\ni x\to a} u^v=b^c$ dir.
2. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=0,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=c>0$ (veya $c=+\infty$) ise, $\lim\limits_{X\ni x\to a} u^v=0$ dır.
3. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=0,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=c<0$ (veya $c=-\infty$) ise, $\lim\limits_{X\ni x\to a} u^v=+\infty$ dur.
4. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=\lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=0$ ise, $x\in X$ için $x\to a$ iken u^v fonksiyonu 0^0 şeklinde bir belirsizlik oluşturur.
5. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\ni X\to a} v(x)=c>0$ (veya $c=+\infty$) ise, $\lim\limits_{X\ni x\to a} u^v=+\infty$ dur.
6. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=+\infty,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=c<0$ (veya $c=-\infty$) ise $\lim\limits_{X\ni x\to a} u^v=0$ dır.
7. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=+\infty,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=0$ ise, $x\in X$ için $x\to a$ iken u^v fonksiyonu 0^∞ şeklinde bir belirsizlik oluşturur.
8. $\lim\limits_{X\ni x\to a} u(x)=1,\ \lim\limits_{X\ni x\to a} v(x)=+\infty$ ise $x\in X$ için $x\to a$ iken u^v fonksiyonu 1^∞ şeklinde bir belirsizlik oluşturur. Örneğin, $x\to0^+$ iken

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonu 1^∞ şeklinde bir belirsizlik oluşturmasına rağmen

$$\lim_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

dir.

$u>0$ durumunda $u^v=e^{v\ln u}$ bağıntısı yardımıyla $0^0,\ \infty^0$ ve 1^∞ tipindeki her belirsizlik $v.\ln u$ fonksiyonu için $0.\infty$ tipindeki bir belirsizliğe dönüştürülebilir. Eğer, bu durumda $\lim\limits_{x\to a} v\ln u=b$ ise, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}$ olduğundan (Bkz. üstel fonksiyonun 3) özelliği) Teorem 2.4.26 dan dolayı

$$\lim_{x\to a} u^v=\lim_{x\to a} e^{v\ln u}=e^b \tag{2.11}$$

elde edilir.

Not: $x\to a$ iken $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 0^0$ ve 1^∞ tipinde belirsizlik oluşturan fonksiyonların limitleri bu fonksiyonlar üzerinde bazı elementer işlemler yapılarak uygun eşdeğer limitlere dönüştürülerek hesaplanabilir. •

2.4.7 Temel Elementer Fonksiyonların Limitleri

Bilindiği gibi $y=c$ (c-sabit), $y=a^x(a>0),\ y=\log_a x\ (a>0, a\neq1),\ y=x^\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R}),\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x$ fonksiyonlarına temel elementer fonksiyonlar ve bu fonksiyonlardan sonlu sayıda cebirsel işlem ve bileşik fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilebilen fonksiyonlara elementer fonksiyonlar denir.

Bu kesimde temel elementer fonksiyonların ve bazı elementer fonksiyonların limitlerinin varlığı problemleri incelenecektir.

I. c bir sabit reel sayı olmak üzere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$ sabit fonksiyonu için $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ olduğu açıktır.

II. §1.19 matematik ve onun uygulamalarında en çok kullanılan üstel ve logaritma fonksiyonlarının tanımını ve onların bazı özelliklerini gördük. Şimdi, reel sayılar ve limit teorilerinden faydalanarak bu fonksiyonlar ile ilgili bilgilerdeki açıkları kapatmaya çalışacağız.

(a) Üstel Fonksiyon. $a > 1$ herhangi bir reel sayı olsun.

1^0. $n \in \mathbb{N}$ için $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n.a$ tanımıyla $a \to a^n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanmış olur. Buna göre, $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n < m$ ise

$$a^m = \underbrace{a.a\ldots a}_{n-kez}.\underbrace{a.a\ldots a}_{m-n-kez} = a^n.a^{n-m}$$

olduğundan, aynı n ve m ler için $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$ özelliğinin doğru olduğu elde edilir. Bu özelliğe dayanarak

2^0. $a^0 = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ tanımlarını verebiliriz. Buna göre, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$a^m.a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

özelliklerinin doğruluğu anlaşılır.

3^0. Reel sayılar teorisinde her bir $b > 0$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = b$ olacak şekilde (b nin n.mertebeden aritmetik kökü denilen ve $x = b^{\frac{1}{n}}$ şeklinde gösterilen) bir $x > 0$ sayısının mevcut olduğunu gördük.

$$a = a^1 = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}\ldots a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall m \in \mathbb{Z}$ için

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad \text{ve} \quad a^{-\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

tanımlarını verebiliriz. Eğer, bu durumda $\forall k \in \mathbb{Z}\ (k \neq 0)$ için $a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}$ ise, $\forall r \in \mathbb{Q}$ için a^r tanımlanmış olur.

4^0. Herhangi $x > 0,\ y > 0$ sayıları ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n, \quad x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$$

bağıntılarının doğruluğu tümevarımla kolayca gösterilebilir.

5^0. $\forall a > 0,\ \forall n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\forall k, m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\ (k \neq 0)$ için

$$a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^{\frac{m_1}{n_1}}.a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}$$

bağıntılarının doğru olduğunu gösterelim. $a^{\frac{m}{n}} > 0$ ve $a^{\frac{mk}{n}} > 0$ oldukları açıktır. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{mk}{nk}}\right)^{nk} &= \left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk}\right)^{nk} = \left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{mk.nk} \\ &= \left(\left(a^{\frac{1}{nk}}\right)^{nk}\right)^{mk} = a^{mk},\end{aligned}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nk} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)^{mk} = a^{mk}$$

olduğundan, 4^0 dan dolayı istenen birinci eşitliğin doğru olduğu anlaşılır.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}.a^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1.n_2} &= \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{n_1.n_2}\left(a^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1.n_2} = \left((a^{\frac{1}{n_1}})^{n_1}\right)^{m_1.n_2}.\left((a^{\frac{1}{n_2}})^{n_2}\right)^{m_1.n_2} \\ &= a^{m_1n_2}.a^{m_2n_1} = a^{m_1n_2+m_2n_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1.n_2} &= \left(a^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2} = \left((a^{\frac{1}{n_1n_2}})^{n_1n_2}\right)^{m_1.n_2+m_2n_1} \\ &= a^{m_1n_2+m_2n_1}\end{aligned}$$

olduğundan, yine de 4^0 dan dolayı istenen ikinci eşitliğin de doğruluğu anlaşılır.

Böylece, $\forall r \in \mathbb{Q}$ için a^r tanımlanmış olur. Ayrıca, $\forall r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için $a^r > 0$ ve $a^{r_1}.a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ olur.

6^0. $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için 4^0 dan dolayı

$$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$$

olduğu görülür. Gerçekten, $\forall n \in \mathbb{N}$ için 4^0 dan dolayı $1 < a \Leftrightarrow 1 < a^{\frac{1}{n}}$ bulunur. Buradan, yine de 4^0 den dolayı $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} > 1$ olur. Demek ki, $a > 1$ olduğunda $\forall r \in \mathbb{Q}_+$ için $a^r > 1$ dir. O halde, 5^0 dan dolayı $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için

$$r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_2} = a^{r_1}a^{r_2-r_1} > a^{r_1}.1 = a^{r_1}$$

bulunur.

7^0. $\forall r_0 \in \mathbb{Q}$ için $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to 0} a^r = 1$ olduğunu görelim. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ ve buna göre $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$ olduğundan, $\forall \epsilon > 0$ için $1-\epsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde, $-\dfrac{1}{n_0} < p < \dfrac{1}{n_0}$ olacak şekilde $\forall p \in \mathbb{Q}$ için 6^0 dan dolayı

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^p < a^{\frac{1}{n_0}}$$

olduğundan aynı p ler için $1-\epsilon < a^p < 1+\epsilon$ olduğu, dolayısıyla, $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni p\to 0} a^p = 1$ olduğu anlaşılır.

$\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni p\to 0} a^p = 1 \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ öyle ki $|p| < \delta_\epsilon$ olacak şekilde $\forall p \in \mathbb{Q}$ için

$$1 - \frac{\epsilon}{a^{r_0}} < a^p < 1 + \frac{\epsilon}{a^{r_0}}$$

olur. Buna göre, $r_0 - \delta_\epsilon < r < r_0 + \delta_\epsilon$ olacak şekilde $\forall r \in \mathbb{Q}$ için

$$a^{r_0} - \epsilon = a^{r_0}(1 - \frac{\epsilon}{a^{r_0}}) < a^r = a^{r_0}.a^{r-r_0} < a^{r_0}(1 + \frac{\epsilon}{a^{r_0}}) = a^{r_0} + \epsilon$$

veya $-\epsilon < a^r - a^{r_0} < \epsilon$ olduğu bulunur. Bu da istenen eşitliğin doğru olduğunu gösterir.

Böylece, aşağıdaki özelliklere sahip $r \to a^r : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

$$\begin{aligned}
&a^1 = a > 1,\\
&\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \text{için} \quad a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2},\\
&\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \text{için} \quad r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2},\\
&r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad r_2 \to r_1 \quad \text{iken} \quad a^{r_2} \to a^{r_1}
\end{aligned}$$

dir. Bu fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine aşağıdaki şekilde genişletelim.

8^0. $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
&A = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}, \qquad B = \{r \in \mathbb{Q} : r > x\}\\
&X = \{a^r : r \in A\}, \qquad Y = \{a^r : r \in B\}
\end{aligned}$$

$s = \sup X,\ i = \inf Y$ olsun. A ve B kümelerinin boş olmadığı ve her $r \in A$ ve her $r' \in B$ için $r < r'$ olduğu açıktır. Bu durumda, her $x \in X$ için $a^r = \alpha$ olacak şekilde bir $r \in A$ sayısı ve $\forall \beta \in Y$ için $a^{r'} = \beta$ olacak şekilde bir $r' \in B$ sayısı mevcuttur. Buna göre, $\forall \alpha \in X$ ve $\forall \beta \in Y$ için $\alpha = a^r < a^{r'} = \beta$ olur. Buradan, X'in üstten, Y'nin de alttan sınırlı olduğu ve buna göre de $s = \sup X \le \inf Y = i$ ve $s, i \in \mathbb{R}_+$ olduğu anlaşılır. s ve i nin tanımından dolayı $\forall r_1 \in A,\ r_2 \in B$ için

$$r_1 < x < r_2 \Rightarrow a^{r_1} \le s \le i \le a^{r_2}$$

bulunur. Buna göre,

$$0 \le i - s \le a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2-r_1} - 1) < s(a^{r_2-r_1} - 1)$$

dir. Öte yandan, $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni p\to 0} a^p = 1$ olduğundan, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ öyle ki,

$0 < r_2 - r_1 < \delta_\epsilon \Rightarrow a^{r_2-r_1} - 1 < \dfrac{\epsilon}{s}$ olur. Buna göre, $0 \le i - s < \epsilon$ ve $\epsilon > 0$ isteksel bir sayı olduğundan dolayı $i = s$ elde edilir.

$x \in \mathbb{R}$ için $a^x = s = i$ diye tanımlayalım.

9^0. $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r = a^x$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&s = \sup X \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists r_1 \in A \quad \text{öyle ki} \quad s - \epsilon < a^{r_1} \le s = a^x\\
&i = \inf Y \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists r_2 \in B \quad \text{öyle ki} \quad a^x = i \le a^{r_2} < i + \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Buna göre, $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $r_1 < r < r_2$ iken $a^{r_1} < a^r < a^{r_2}$ olduğundan, aynı r ler için

$$a^x - \epsilon < a^r < a^x + \epsilon \quad \text{veya} \quad |a^r - a^x| < \epsilon$$

bulunur. Buradan istenen eşitliğin doğruluğu görülür.

Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $x \to a^x$ fonksiyonun özelliklerini inceleyelim.

10^0. $a > 1$ iken $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

önermesinin doğruluğunu gösterelim.

(x_1, x_2) aralığında $r_1 < r_2$ olacak şekilde iki r_1 ve r_2 rasyonel sayıları vardır. a^x nin 8^0 da verilen tanımı ve $r \to a^r$ fonksiyonunun $\mathbb{Q}$ daki özelliklerden dolayı

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}$$

olduğu anlaşılır.

11^0. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

bağıntılarının doğru olduğunu gösterelim.

9^0 dan dolayı $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta'_\epsilon > 0$ öyle ki $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için $|x_1 - r_1| < \delta'_\epsilon,\ |x_2 - r_2| < \delta'_\epsilon$ iken

$$a^{x_1} a^{x_2} - \frac{\epsilon}{2} < a^{r_1} a^{r_2} < a^{x_1} a^{x_2} + \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $\delta'_\epsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta_\epsilon \in (0, \delta'_\epsilon)$ öyle ki $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ için $\mid x_1 - r_1 \mid < \delta_\epsilon, \mid x_2 - r_2 \mid < \delta_\epsilon$ iken

$$|(x_1 + x_2) - (r_1 + r_2)| < \delta_\epsilon$$

ve buradan da aynı r_1 ve r_2 ler için

$$a^{r_1+r_2} - \frac{\epsilon}{2} < a^{x_1+x_2} < a^{r_1+r_2} + \frac{\epsilon}{2}$$

olduğu elde edilir. $r_1,\ r_2 \in \mathbb{Q}$ sayıları için $a^{r_1}.a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ olduğundan, elde edilen son eşitsizliklerden

$$a^{x_1}.a^{x_2} - \epsilon < a^{x_1+x_2} < a^{x_1}.a^{x_2} + \epsilon$$

olduğu elde edilir. Buradan, istenen birinci eşitliğin doğruluğu anlaşılır. İkinci eşitliğin doğruluğu daha sonra (Bkz. Çözümlü Problemler (32)) verilecektir.

12^0. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ olduğunu gösterelim.

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ olduğundan, $\forall \epsilon > 0$ için

$$1 - \frac{\epsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$$

olacak şekilde bir $n_0 > 1$ doğal sayısı vardır. O halde, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ (veya $x_0 - \frac{1}{n_0} < x < x_0 + \frac{1}{n_0}$) iken

$$1 - \frac{\epsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x-x_0} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$$

ve buradan da aynı x ler için

$$a^{x_0} - \epsilon < a^x < a^{x_0} + \epsilon \quad (\text{veya } \ |a^x - a^{x_0}| < \epsilon)$$

eşitsizliğinin doğruluğu anlaşılır. Böylece, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \frac{1}{n_0} > 0$ öyle ki $\forall x \in U_\delta(x_0)$ için $|a^x - a^{x_0}| < \epsilon$ olur. Bu da istenen eşitliğin doğru olması demektir.

13^0. $x \to a^x$ fonksiyonunun değer bölgesinin $\mathbb{R}_+$ kümesi olduğunu gösterelim.

$y_0 \in \mathbb{R}$ olsun. $a > 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty > y_0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0 < y_0$ olduğundan

$$a^{-n} < y_0 < a^n$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : a^x < y_0\} \quad \text{ve} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : a^x > y_0\}$$

kümeleri boş değildir. $a > 1$ için

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

önermesi doğru olduğundan, $x_1 \in A$ ve $x_2 \in B$ olacak şekilde her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ dir. Bu durumda, IV Tamlık aksiyomu gereğince her $x_1 \in A$ ve her $x_2 \in B$ için $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $a^{x_0} = y_0$ olduğunu gösterelim.

$a^{x_0} < y_0$ olsun. Bu durumda, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_0+\frac{1}{n}} = a^{x_0}$ olduğundan Teorem 2.1.9 (g) den dolayı $a^{x_0+\frac{1}{n_0}} < y_0$ (veya $x_0 + \frac{1}{n} \in A$) olacak şekilde bir $n_0 > 1$ doğal sayısı vardır. Öte yandan, $x_0 < x_0 + \frac{1}{n_0}$ koşulu $x_0 + \frac{1}{n_0} \in B$ olmasını

gerektirir. Bu, $A \cap B = \emptyset$ olması ile bir çelişki oluşturduğundan $a^{x_0} < y_0$ olamaz. Benzer şekilde, $y_0 < a^{x_0}$ eşitsizliğinin de sağlanmadığı gösterilebilir. Bu sebepten $\mathbb{R}$ nin özelliklerinden dolayı, $a^{x_0} = y_0$ olduğu anlaşılır.

14^0. $x \to a^x$ fonksiyonunun tanımını ve özelliklerini $a > 1$ durumunda gördük. Benzer işlemler $0 < a < 1$ durumunda da yapılabilir. $0 < a < 1$ iken $\forall r \in \mathbb{Q},\ r > 0$ için $0 < a^r < 1$ dir. Buna göre, 6^0 ve genel olarak 10^0 da $0 < a < 1$ iken

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

olur.

Böylece, $\forall a > 0,\ a \neq 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip $x \to a^x$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

1) $a^1 = a$;

2) $a^{x_1}.a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$;

4) $a > 1$ iken $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
   $0 < a < 1$ iken $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$;

5) $x \to a^x$ fonksiyonunun değer bölgesi $\mathbb{R}_+$ dır.

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}_+$ ya tanımlanan $x \to a^x$ fonksiyonuna üstel (veya a tabanlı üstel) fonksiyon denir.

$$a > 1 \quad \text{iken}, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$
$$0 < a < 1 \quad \text{iken}, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Örneğin, diğerlerini okuyucuya bırakarak, $0 < a < 1$ iken $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ olduğunu gösterelim. Öncelikle, $a > 1$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ olduğunu gösterelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için Bernoulli eşitsizliğindan dolayı $a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+(a-1)n$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} (1+(a-1)n) = +\infty$ olduğundan, $a > 1$ iken $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = +\infty$

olduğu elde edilir. Bu durumda, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\forall n > n_\epsilon$ için $a^n > \epsilon$ olur. $x > n_\epsilon$ ve $[\![x]\!] = n$ olsun. Bu durumda, $n > n_\epsilon$ ve $n \leq x < n+1$ olduğundan, $a^x \geq a^n > \epsilon$ dır. Bu da $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ olması demektir. $0 < a < 1$ iken $b = \dfrac{1}{a} > 1$ olduğundan,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to +\infty} a^{-t} = \lim_{t \to +\infty} (\frac{1}{a})^t = \lim_{t \to +\infty} b^t = +\infty$$

olduğu anlaşılır.

(b) Logaritmik Fonksiyon. $a > 0, a \neq 1$ olmak üzere $a \to a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu bijektif (birebir ve örten) olduğundan, onun $\mathbb{R}_+$ dan $\mathbb{R}$ ye tanımlanan ve

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

semlbolü ile gösterilen ve a tabanlı logaritmik fonksiyon denilen tersi vardır.

Buna göre, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow x = a^{\log_a x}$ ve $\forall y \in \mathbb{R}$ için $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x \Leftrightarrow \log_a(a^y) = y$ yazabiliriz. Burada, özel olarak $a = e$ ve $a = 10$ alırsak, $y = \log_e x$ ve $y = \log_{10} x$ yerine sırası ile $y = \ln x$ ve $y = \log x$ yazılışını kullanacağız. Buna göre, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$y = \ln x \Leftrightarrow \quad x = e^y \Leftrightarrow \quad x = e^{\ln x}$$
$$y = \log x \Leftrightarrow \quad x = 10^y \Leftrightarrow \quad x = 10^{\log x}$$

yazabiliriz.

$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu ve $\ln x$ sayısına da x in doğal logaritması denir.

Logaritmik fonksiyonun tanımı ve üstel fonksiyonun özelliklerinden faydalanarak $y \to \log_a y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun aşağıda verdiğimiz özellikleri ispatlanabilir.

$1^{1)}$ $\log_a a = 1$;

$2^{1)}$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$ için $\log_a(y_1.y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$,
   $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y$;

$3^1)$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}_+$ için $\lim\limits_{\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0} \log_a y = \log_a y_0$;

$4^1)$ $a > 1$ iken, $\log_a y_1 < \log_a y_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2$
$0 < a < 1$ iken $\log_a y_1 > \log_a y_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2$;

$5^1)$ $y \to \log_a y$ fonksiyonunun değer kümesi $\mathbb{R}$ dir.

Bu özelliklerin doğruluğunu gösterelim.

Üstel fonksiyonun 1) deki özelliği ve logaritmik fonksiyonun tanımına göre $1^1)$ özelliğinin doğruluğu hemen görülür. $(a^1 = 1 \Rightarrow 1 = \log_a a)$.

Üstel fonksiyonun 2) deki özelliklerinden logaritmik fonksiyonun $2^1)$ deki özelliklerinin doğruluğu elde edilir. Gerçekten, $x_1 = \log_a y_1$ ve $x_2 = \log_a y_2$ ise, $y_1 = a^{x_1}$ ve $y_2 = a^{x_2}$ ve 2) deki birinci özellikten dolayı $y_1.y_2 = a^{x_1}.a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \Rightarrow \log_a(y_1.y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$. olur. $2^1)$ deki ikinci özelliğin doğruluğu daha sonra (Bkz. Çözümlü Problemler (31)) gösterilecektir.

Üstel fonksiyonun 4) deki özellikleri logaritmik fonksiyonunun $4^1)$ deki özelliklerini gerektirdiği benzer şekilde gösterilebilir.

5) $\Rightarrow 5^1)$ aşikardır.

Şimdi $3^1)$ özelliğinin doğruluğunu gösterelim. Logaritmik fonksiyonun $2^1)$ deki özelliklerinden dolayı $\forall y, y_0 \in \mathbb{R}_+$ için

$$\log_a \tfrac{y}{y_0} = \log_a y + \log_a y_0^{-1} = \log_a y - \log_a y_0$$

bulunur. Buna göre, $\forall y, y_0 \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} |\log_a y - \log_a y_0| < \epsilon \Leftrightarrow & \log_a(a^{-\epsilon}) = -\epsilon \\ & < \log_a \tfrac{y}{y_0} < \epsilon = \log_a(a^{\epsilon}) \end{aligned}$$

dir. Logaritmik fonksiyonun $4^1)$ deki özelliği gereğince, son eşitsizlik $a > 1$ iken, $a^{-\epsilon} < \dfrac{y}{y_0} < a^{\epsilon}$ ve $0 < a < 1$ iken de $a^{\epsilon} < \dfrac{y}{y_0} < a^{-\epsilon}$ eşitsizliğine denktir. Buna göre, $a > 1$ iken $y_0.a^{-\epsilon} < y < y_0 a^{\epsilon}$ ve $0 < a < 1$ iken $y_0 a^{\epsilon} < y < y_0.a^{-\epsilon}$ ise, aynı y ler için

$$-\epsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \epsilon \quad \text{veya} \quad |\log_a y - \log_a y_0| < \epsilon$$

olur. Bu da logaritmik fonksiyonun $3^1)$ deki özelliğinin doğru olduğunu gösterir.

$$a > 1 \quad \text{iken,} \quad \lim_{y \to 0+} \log_a y = -\infty, \quad \lim_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty$$

ve

$$0 < a < 1 \quad \text{iken,} \quad \lim_{y \to 0+} \log_a y = +\infty, \quad \lim_{y \to +\infty} \log_a y = -\infty$$

dur.

Örneğin, diğerlerini okuyucuya bırakarak $0 < a < 1$ iken $\lim\limits_{y \to 0+} \log_a y = +\infty$ olduğunu gösterelim. Bu nedenle

$$\lim_{y \to 0+} \log_a y = \lim_{x \to +\infty} \log_a \frac{1}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \log_a x$$

olduğundan $0 < a < 1$ iken $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall n > n_\epsilon = [\![a^{-\epsilon}]\!] + 2$ için $\log_a(n-1) < -\epsilon$ ve dolayısı ile, $0 < a < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim\limits_{n \to +\infty} \log_a(n-1) = -\infty$ olduğu açıktır. $x > n_\epsilon$ ve $[|x|] = n - 1$ olsun. Bu durumda, $n - 1 > n_\epsilon$ ve $n - 1 \leq x < n$ olduğundan $\log_a x \leq \log_a(n-1) < -\epsilon$ bulunur. Bu da $0 < a < 1$ iken $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ olması demektir.

III. Kuvvet Fonksiyonu. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı $x \to x^\alpha$ fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a x}$$

eşitliği doğru olduğundan, $x \to x^\alpha$ kuvvet fonksiyonu üstel ve logaritmik fonksiyonlarının bileşkesidir. Üstel ve logaritmik fonksiyonların 2) ve $2^1)$ deki özellikleri ve bileşke fonksiyonunun limiti üzerine Teorem 2.4.26 dan dolayı $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$ için

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x \to x_0} x^\alpha = \lim_{\mathbb{R}_+ \ni x \to x_0} (a^{\alpha \log_a x}) = a^{\alpha \log_a x_0} = x_0^\alpha$$

olduğu anlaşılır.

$x \to x^\alpha$ kuvvet fonksiyonu pozitif olmayan x ler için de tanımlanabilir. Bununla ilgili aşağıdakileri söyleyebiliriz.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \to x^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonunun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(x^{\frac{1}{n}}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & n \text{ tek ise;} \\ [0,+\infty), & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

α irrasyonel sayı olmak üzere

$$\mathcal{D}(x^{\alpha}) = \begin{cases} [0,+\infty), & \alpha > 0 \text{ ise;} \\ \mathbb{R}_+, & \alpha \text{ herhangi irrasyonel sayı ise} \end{cases}$$

dir.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \text{ ise;} \\ +\infty, & \alpha < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

ve

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \text{ ise;} \\ 0, & \alpha < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Önermelerinin doğru oldukları açıktır.

IV. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $|\sin t| \le |t|$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. $\forall t \in (0,\pi/2)$ için (2.6) dan dolayı $\sin t < t$ dir. Buna göre, $\forall t \in (-\pi/2, 0)$ için $-t \in (0,\pi/2)$ ise, $\sin(-t) \le -t$ veya $-\sin t < -t$ eşitsizliği, dolayısıyla, $\forall t \in (-\pi/2,\pi/2)\backslash\{0\}$ için $|\sin t| \le |t|$ nin doğruluğu görülür. Öte yandan, $\forall |t| \ge \frac{\pi}{2}$ için $|\sin t| \le 1 \le \dfrac{\pi}{2} \le |t|$ ve $t = 0$ için $\sin 0 = 0$ olduğundan, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $|sint| \le |t|$ eşitsizliğinin doğru olduğu anlaşılır. $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= |2\cos \tfrac{x+x_0}{2}.\sin \tfrac{x-x_0}{2}| \\ &= 2|\cos \tfrac{x+x_0}{2}|.|\sin \tfrac{x-x_0}{2}| \le 2.|\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0| \end{aligned}$$

olduğu için, herhangi $\epsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \epsilon$ seçimini yaparsak

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < |x - x_0| < \delta = \epsilon$$

bulunur. Bu da istenen eşitliğin doğru olması demektir.

Benzer şekilde,

V. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$ dır önermesinin doğruluğu gösterilebilir.

VI. $\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$ olduğunu gösterelim.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$ olduğundan Teorem 2.4.22 (d) den dolayı

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x\to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \tan x_0$$

olduğu anlaşılır.

Benzer şekilde

VII. $\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0$ dir, önermesinin doğruluğu gösterilebilir.

VIII. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0 \tag{2.12}$$

olduğunu gösterelim.

$x_0, x \in \mathbb{R}_+$ olsun. $\arctan x - \arctan x_0 = t$ dersek $\tan t = \dfrac{x - x_0}{1 + x.x_0}$ ve buna göre,

$$|\tan t| = |\frac{x - x_0}{1 + x.x_0}| \le |x - x_0|$$

olduğu elde edilir. O halde, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta_\epsilon = \epsilon > 0$ öyle ki $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \Rightarrow &|\arctan x - \arctan x_0| \\ &= |t| \le |\tan t| \le |x - x_0| < \delta_\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu da, $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$ için istenen eşitliğin doğru olması demektir. $\arctan(-x) = \arctan x$ olduğundan $x_0 < 0$ için bu eşitliğin ispatı az önce incelenen hale dönüştürülür. $x_0 = 0$ için söz konusu eşitliğin doğruluğu $\forall x \in \mathbb{R}$ için geçerli olan

$$0 \le |\arctan x - \arctan 0| = |\arctan x| < |x|$$

eşitsizliğinden görülür.

IX. $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} x_0$ olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \operatorname{arccot} x &= \lim_{x\to x_0} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)\\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to x_0} \arctan x\\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan x_0 = \operatorname{arccot} x_0\end{aligned}$$

olur.

X. $\forall x \in [-1,1]$ için

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \tag{2.13}$$

olduğunu gösterelim.

$$0 \le x < 1 \quad \text{iken,} \quad \arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ve

$$0 < x \le 1 \quad \text{iken,} \quad \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

olduğundan, Teorem 2.4.26 dan dolayı $\forall x_0 \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \arcsin x &= \lim_{x\to x_0} \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \arctan \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = \arcsin x_0\end{aligned}$$

ve $x_0 = 1$ için

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \arcsin x &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\\ &= \operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1\end{aligned}$$

bulunur.

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ olduğundan, $-1 \le x_0 < 0$ durumu az önce incelenen hale dönüştürülür.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \arcsin x &= \lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arctan 0 = 0\\ \lim_{x\to 0^-} \arcsin x &= \lim_{t\to 0^+} \arcsin(-t) = -\lim_{t\to 0^+} \arcsin t = 0\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0 = \arcsin o$$

olduğu anlaşılır.

XI. $\forall x \in [-1,1]$ için

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \tag{2.14}$$

olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan, az önceki önerme gereğince

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \arccos x &= \lim_{x\to x_0} (\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to x_0} \arcsin x\\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x_0 = \arccos x_0\end{aligned}$$

olur.

XII. $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ herhangi reel sayılar olmak üzere $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomu için $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$ olduğunu gösterelim.

$f(x) = c$ sabit fonksiyonu ve $g(x) = x$ fonksiyonunu $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ olduğundan, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall m > 1$ doğal sayısı için

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda x^m) = \lambda \lim_{x\to x_0} x^m = \lambda (\lim_{x\to x_0} x)^m = \lambda x_0^m$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_0\\ &= P_n(x_0)\end{aligned}$$

bulunur.

XIII. $X \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X'$ olmak üzere $u : X \to \mathbb{R}_+$ ve $v : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} u(x) = a > 0$ ve $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v(x) = b$ sonlu limitleri varsa, $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} u^v = a^b$ dir.

Logaritmik fonksiyonun 3[1]) özelliği ve Teorem 2.4.26 dan dolayı

$$\begin{aligned} x \to x_0 \quad \text{iken} \quad \ln u(x) \to \ln a \Rightarrow & v(x) \ln u(x) \to b \ln a \\ \Rightarrow & \lim_{X \ni x \to x_0} u^v = \lim_{X \ni x \to x_0} e^{v \ln u} \\ = & e^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v . \ln u} = e^{b \ln a} = a^b \\ = & (\lim_{X \ni x \to x_0} u(x))^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v(x)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur.

2.5 Çözümlü Problemler

(1) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x \to -3}(3x + 4) = -5$; (b) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 4x) = 12$;

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{10 - x} = 3$; (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x} = 3$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

(a) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x + 3| < \delta < 1$ olduğunda

$$|(3x + 4) - (-5)| = 3|x + 3| < 3\delta$$

dır. $3\delta < \epsilon$ dan $\delta < \dfrac{\epsilon}{3}$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon/3\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \ \ 0 < |x + 3| < \delta \Leftrightarrow \ & x \in (-3 - \delta, -3 + \delta) \backslash \{-3\} \\ \Rightarrow & |(3x + 4) - (-5)| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to -3}(3x + 4) = -5$ olur.

(b) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x - 2| < \delta < 1$ olduğunda

$$|x^2 + 4x - 12| = |(x + 6)(x - 2)| = |x + 6||x - 2| < 9|x - 2| < 9\delta$$

dır. $9\delta < \epsilon$ dan $\delta < \epsilon/9$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon/9\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \ \ 0 < |x - 2| < \delta \Leftrightarrow \ & x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \backslash \{0\} \\ \Rightarrow & |x^2 + 4x - 12| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 4x) = 12$ olur.

(c) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x - 1| < \delta < 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} |\sqrt{10 - x} - 3| = |\frac{(\sqrt{10 - x} - 3)(\sqrt{10 - x} + 3)}{\sqrt{10 - x} + 3}| &= \frac{|1 - x|}{\sqrt{10 - x} + 3} \\ < \frac{|1 - x|}{2\sqrt{2} + 3} &< \frac{\delta}{2\sqrt{2} + 3} \end{aligned}$$

dır. $\dfrac{\delta}{2\sqrt{2} + 3} < \epsilon$ dan $\delta < (2\sqrt{2} + 3)\epsilon$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, (2\sqrt{2} + 3)\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \ \ 0 < |x - 1| < \delta \Leftrightarrow \ & x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \backslash \{1\} \\ \Rightarrow & |\sqrt{10 - x} - 3| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{10 - x} = 3$ olur.

(d) $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ için $|x| < \delta < 1$ olduğunda

$$|\frac{x^2 + 3x}{x} - 3| = |x + 3 - 3| = |x| < \delta$$

dır. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \ \ 0 < |x| < \delta \Leftrightarrow \ & x \in (-\delta, +\delta) \backslash \{0\} \\ \Rightarrow & |\frac{x^2 + 3x}{x} - 3| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x} = 3$ olur. $\diamond$

(2) "$\epsilon-\delta$" yöntemiyle $f(x)=[\![x]\!]-2$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a)\quad \lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=-2; \qquad (b)\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-2;$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-1; \qquad (d)\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1;$$
$$(e)\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0.$$

Çözüm: (d) ve (e) eşitliklerinin ispatını okuyucuya bırakarak (a), (b) ve (c) eşitliklerinin doğru olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı verilsin.
(a) $x\in(1,2)$ için $0<|x-\frac{1}{3}|<\delta<\frac{1}{3}$ olduğunda $[\![x]\!]=0$ olduğundan,

$$|f(x)-(-2)|=|[\![x]\!]-2+2|=|2-2|=0<\delta$$

dır. Buradan, $\delta=\delta(\epsilon)=\min\{\frac{1}{3},\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x\in(1,2),\quad 0<|x-\tfrac{1}{3}|<\delta \Leftrightarrow x\in(\frac{1}{3}-\delta,\frac{1}{3}+\delta)\backslash\{\frac{1}{3}\}$$
$$\Rightarrow |f(x)-(-2)|<\epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=-2$ olur.
(b) $x\in(0,1)$ için $0<1-x<\delta<1$ olduğunda $[\![x]\!]=0$ olduğundan,

$$|f(x)-(-2)|=|[\![x]\!]-2+2|=0<\delta$$

dır. Buradan, $\delta=\delta(\epsilon)=\min\{1,\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x\in(0,1),\quad 0<1-x<\delta \Leftrightarrow x\in(1-\delta,1)\Rightarrow |f(x)-(-2)|<\epsilon$$

olduğuna göre, $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2$ olur.
(c) $x\in(1,2)$ için $0<x-1<\delta<1$ olduğunda $[\![x]\!]=1$ olduğundan,

$$|f(x)-(-1)|=|[\![x]\!]-2+1|=0<\delta$$

dır. Buradan, $\delta=\delta(\epsilon)=\min\{1,\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x\in(0,1),\quad 0<x-1<\delta \Leftrightarrow x\in(1,1+\delta)\Rightarrow |f(x)-(-1)|<\epsilon$$

olduğuna göre, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$ olur. $\diamond$

(3) "$\epsilon-\delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x+1}=\infty$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon>0$ sayısı verilmiş olsun.
(a) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ için $|x|>\delta\geq 1$ olduğunda

$$|\frac{x}{2x+1}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2|2x+1|}<\frac{1}{2(|2x|-1)}<\frac{1}{2(2\delta-1)}$$

dir. Buradan, $\delta=\delta(\epsilon)=\max\{1,\frac{1+2\epsilon}{4\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\quad |x|>\delta\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)$$
$$\Rightarrow |\frac{x}{2x+1}-\frac{1}{2}|<\epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$ olur.
(b) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ için $|x|>\delta\geq 1$ olduğunda

$$|\frac{2x^2}{3x+1}|=\frac{2x^2}{|3x+1|}\geq\frac{2x^2}{3|x|+1}>\frac{2x^2}{4|x|}=\frac{1}{2}|x|>\frac{1}{2}\delta$$

dir. Buradan, $\delta=\delta(\epsilon)=\max\{1,2\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\quad |x|>\delta\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)$$
$$\Rightarrow |\frac{2x^2}{3x+1}|>\epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x+1}=\infty$ elde edilir. $\diamond$

(4) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.
(a) $x \in (1,2)$ için $2 - x < \delta < 1$ olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{\delta}$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \dfrac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (1,2), \quad 0 < 2 - x < \delta \Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2) \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ elde edilir.
(b) $x \in (2,3)$ için $x - 2 < \delta < 1$ olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{x-2} > \frac{1}{\delta}$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \dfrac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (2,3), \quad 0 < x - 2 < \delta \Leftrightarrow x \in (2, 2+\delta) \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ elde edilir.
(c) (a) ve (b) den görüldğü gibi $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \dfrac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (1,3), \quad 0 < |x-2| < \delta \Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2+\delta)\backslash\{2\} \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ elde edilir. $\diamond$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için Tanım 2.4.6 nın koşullarının sağlanmadığını gösterelim.

$x_n \in \mathbb{Q},\ n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ ve $x'_n \in I,\ n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$ koşullarını sağlayan (x'_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoktur. $\diamond$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \text{ ise;} \\ \dfrac{1-\cos x}{x}, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz. $x = 0$ da limit var mıdır?

Çözüm: Örnek 2.4.25 ten dolayı 0 da sağ ve sol taraflı limitler için

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\Big(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\Big(\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t}\Big)^2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $f(0^-) \neq f(0^+)$ olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur. $\diamond$

(7)

$$f(x) = \begin{cases} mx + n, & x > -1 \text{ ise;} \\ mx + 2, & x < -1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x_0 = -1$ da limitinin olması için m ve n ne olmalıdır.

Çözüm: -1 de sağ ve sol taraflı limitler için

$$f(-1^-) = \lim_{x\to -1^-}(mx+2) = -m+2,$$
$$f(-1^+) = \lim_{x\to -1^+}(mx+n) = -m+n$$

bulunur. Teorem 2.4.12 den dolayı $\lim_{x\to -1} f(x)$ limitinin mevcut olması için $f(-1^-) = f(-1^+)$, yani $-m+2 = -m+n$ koşulu sağlanmalıdır. Buna göre, m herhangi bir reel sayı ve $n = 2$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = -1$ de limiti vardır ve $\lim_{x\to -1} f(x) = -m+2$ dir. $\diamond$

(8) Teorem 2.4.24 (f) den faydalanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\tfrac{1}{x};\quad (b)\quad \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad (c)\quad \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\sin\tfrac{1}{x}.$$

Çözüm: **(a)** $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-x^2 \le x^2 \sin\tfrac{1}{x} \le x^2$$

ve $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ bulunur.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-|x| \le x\cos\tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le |x|$$

ve $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ bulunur.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-|\sqrt[3]{x}| \le \sqrt[3]{x}\sin\tfrac{1}{x} \le |\sqrt[3]{x}|$$

ve $\lim_{x\to 0}(-|\sqrt[3]{x}|) = \lim_{x\to 0}|\sqrt[3]{x}| = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x} = 0$ bulunur. $\diamond$

(9) $f(x) = \sqrt{x - [\![\, x \,]\!]}$ fonksiyonunun limitinin var olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

Çözüm: $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $m \le x < m+1$ $(m-1 \le x < m)$ olduğunda $[\![\, x \,]\!] = m$ $([\![\, x \,]\!] = m-1)$ dir. Buna göre,

$$f(m^+) = \lim_{x\to m^+}\sqrt{x - [\![\, x \,]\!]} = \lim_{x\to m^+}\sqrt{x-m} = 0$$
$$f(m^-) = \lim_{x\to m^-}\sqrt{x - [\![\, x \,]\!]} = \lim_{x\to m^-}\sqrt{x-(m-1)} = 1$$

bulunur. $f(m^-) \neq f(m^+)$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonu $\forall m \in \mathbb{Z}$ noktasında limiti yoktur. $\diamond$

(10) Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki, Teorem 2.4.24 teki (d) ve (h) önermeleri doğru olmasın.

Çözüm: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları durumunda uygun örnekler Teorem 2.1.9 da gösterilmiştir.

$f(x) = \text{sgn}x$ ve $g(x) = -\text{sgn}x$ fonksiyonları 0 da limiti olmayıp, $f(x) + g(x) = 0,\ f(x).g(x) = -1$ ve $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 0,\quad \lim_{x\to 0}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

dir.

$F(x) = x + [\![\, x \,]\!]$ ve $G(x) = [\![\, x \,]\!]$ fonksiyonları $\forall m \in \mathbb{Z}$ noktasında limiti olmayıp, $\lim_{x\to m}[F(x) - G(x)] = \lim_{x\to m} x = m$ dir.

$H(x) = \text{sgn}x$ fonksiyonu 0 da limiti olmadığına rağmen $\lim_{x\to 0}|H(x)| = 1$ dir. $\diamond$

(11) $n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n,\ a_0 \neq 0$ reel sayılar ve $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{x\to\infty}|P_n(x)| = +\infty$;

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(c) n çift sayı ise

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(d) n tek sayı ise

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} -\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ +\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Çözüm:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$P_n(x) = x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})$$

ve $\lim_{x\to\infty}(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}) = a_0 \neq 0$ olduğuna göre Teorem 2.4.24 (c) den dolayı $\exists\delta > 0$ öyle ki $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > \delta$ için

$$|a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}| > \frac{|a_0|}{2}$$

dir. Buradan, aynı x ler için

$$|P_n(x)| = |x|^n|a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}| > \frac{|a_0|}{2}|x|^n$$

bulunur. $\lim_{x\to\infty} \frac{|a_0|}{2}|x|^n = +\infty$ olduğuna göre, Teorem 2.4.24 (e) den dolayı $\lim_{x\to\infty} |P_n(x)| = +\infty$ olduğu anlaşılır.

(b) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} P_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^n \lim_{x\to+\infty}(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}) \\ &= a_0 \lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ çift ise;} \\ -\infty, & n \text{ tek ise} \end{cases}$

olduğuna göre, (c) önermesinin doğruluğu (a) ve (b)'ye benzer şekilde gösterilebilir.$\diamond$

(12) $n, m \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n,\ \ b_0, b_1, \ldots, b_m$ reel sayılar $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,\ Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ ve $a_0.b_0 \neq 0$ olmak üzere $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ olsun. $a = x_0 \in \mathbb{R}$ ve $a = -\infty,\ a = +\infty,\ a = \infty$ durumlarında $\lim_{x\to a} R(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $a = x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$ ve $\lim_{x\to x_0} Q_m(x) = Q_m(x_0)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre, $Q_m(x_0) \neq 0$ ise, Teorem 2.4.24 (d) den dolayı

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} P_n(x)}{\lim_{x\to x_0} Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} = R(x_0)$$

bulunur. Örneğin, $\lim_{x\to1}(3x^3 + 4x^2 - 2x + 1) = 6 \neq 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 + 2x + 5}{3x^3 + 4x^2 - 2x + 1} = \frac{1 + 2 + 5}{4 + 3 - 2 + 1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

dir. $Q_m(x_0) = 0$ ve $P_n(x_0) \neq 0$ ise $\lim_{x\to x_0} R(x) = \infty$ dır. Örneğin, $\lim_{x\to2}(x^2 - 5x + 6) = 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 + 7x^2 + x - 18}{x^2 - 5x + 6} = \frac{8 + 28 + 2 - 18}{0.(2-3)} = -\frac{20}{0} = -\infty$$

dir. $P_n(x_0) = Q_m(x_0) = 0$ ise, $P_n = (x - x_0)P^\star_{n-1}(x),\ Q_m(x) = (x - x_0)Q^\star_{m-1}(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P^\star_{n-1}(x)}{Q^\star_{m-1}(x)}$$

dir. Örneğin,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x-1)(x+3), \\ 2x^3 + x^2 - 2x - 1 &= (x-1)(2x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),\ 2x^3+x^2-2x-1=(x-1)(2x^2+3x+1)$ olduğuna göre

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^3+x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x^2+3x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x^2+3x+1}=\frac{2}{3}$$

olur. Şimdi, $a=-\infty$ (veya $a=+\infty$ veya $a=\infty$) olmak üzere $\lim\limits_{x\to a}R(x)$ limitini inceleyelim. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$S(x)=\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

olmak üzere $R(x)=x^{n-m}.S(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a}S(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$ olduğu açıktır. Buna göre,

$$\lim_{x\to a}R(x)=\lim_{x\to a}S(x).\lim_{x\to a}x^{n-m}=\frac{a_0}{b_0}.\lim_{x\to a}x^{n-m}$$
$$=\frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ \lim\limits_{x\to a}x^{n-m}, & n\neq m \text{ ise}\end{cases}$$

bulunur. $n\neq m$ durumlarında

$$\lim_{x\to-\infty}x^{n-m}=\begin{cases}+\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

ve

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}=\begin{cases}+\infty, & n>m \text{ ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to-\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ve } a_0b_0>0 \text{ ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ve } a_0b_0<0 \text{ ise;}\\ \infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } a_0b_0>0 \text{ ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } a_0b_0<0 \text{ ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise,}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ise;}\\ \infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ve } a_0b_0>0 \text{ ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ve } a_0b_0<0 \text{ ise;}\\ \infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

bulunur. $\diamond$

(13) Eğer varsa, aşğıdaki limitleri hesaplayımız.

(a) $\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{|4-x^2|}{|2+x|}}$; (b) $\lim_{x\to\sqrt{5}}[\![\, x^2-5\,]\!]$;

(c) $\lim_{x\to -4}\frac{[\![\, x\,]\!]^{\,2}-16}{x+4}$; (d) $\lim_{x\to 0}([\![\, x\,]\!]+[\![\, x-1\,]\!])$;

(e) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{1}{[\![\, 2x^2+1\,]\!]}$; (f) $\lim_{x\to 3}\frac{[\![\, 2x-[\![\, x+3\,]\!]\,]\!]}{x-3}$;

(g) $\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1}$; (h) $\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|}{\mathrm{Sgn}(x-2)^2}$;

(i) $\lim_{x\to 0}[\![\, \cos x\,]\!]$; (j) $\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}}[\![\, \arcsin x\,]\!]$;

(k) $\lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}}[\![\, \arccos x\,]\!]$.

Çözüm:

(a)

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{|4-x^2|}{|2+x|}}=\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{|2-x||2+x|}{|2+x|}}$$
$$=\lim_{x\to -2}\sqrt{|2-x|}=\sqrt{4}=2.$$

(b) $\sqrt{5}$ in hemen sağında $[\![\, x^2-5\,]\!]=0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+}[\![\, x^2-5\,]\!]=0$$

olur. $\sqrt{5}$ in hemen solunda $[\![\, x^2-5\,]\!]=-1$ olacağından,

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^-}[\![\, x^2-5\,]\!]=-1$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, $\sqrt{5}$ noktasında limit yoktur.

(c) $\forall x\neq -4$ için

$$\frac{[\![\, x\,]\!]^{\,2}-16}{x+4}=\frac{([\![\, x\,]\!]+4)([\![\, x\,]\!]-4)}{x+4}$$

olduğu açıktır. -4 ün hemen sağında $[\![\, x\,]\!]-4=-8$ olacağından,

$$\lim_{x\to -4^+}\frac{[\![\, x\,]\!]^{\,2}-16}{x+4}=\lim_{x\to -4^+}\frac{0(-8)}{x+4}=\lim_{x\to -4^+}0=0$$

olur. -4 ün hemen solunda $[\![\, x\,]\!]-4=-9$ olacağından,

$$\lim_{x\to -4^-}\frac{[\![\, x\,]\!]^{\,2}-16}{x+4}=\lim_{x\to -4^-}\frac{1.(-9)}{x+4}=+\infty$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, -4 noktasında limit yoktur.

(d) 0 ın hemen sağında $[\![\, x\,]\!]=0$ ve $[\![\, x-1\,]\!]=-1$ olacağından,

$$\lim_{x\to 0^+}([\![\, x\,]\!]+[\![\, x-1\,]\!])=\lim_{x\to 0^+}(0+(-1))=-1$$

olur. 0 ın hemen solunda $[\![x]\!]=-1$ ve $[\![x-1]\!]=-2$ olacağından,

$$\lim_{x\to 0^-}([\![\, x\,]\!]+[\![\, x-1\,]\!])=\lim_{x\to 0^-}(-1+(-2))=-3$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, 0 noktasında limit yoktur.

(e) $\frac{1}{3}$ ün hemen sağında (solunda) $[\![\, 2x^2+1\,]\!]=1$ olacağından,

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{1}{[\![\, 2x^2+1\,]\!]}=1$$

bulunur.

(f) 3 ün hemen sağında $[\![\, x+3\,]\!]=6$ ve $[\![\, 2x-[\![\, x+3\,]\!]\,]\!]=0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{[\![\, 2x-[\![\, x+3\,]\!]\,]\!]}{x-3}=0$$

olur. 3 ün hemen solunda $[\![x+3]\!] = 5$ ve $[\![2x - [\![x+3]\!]]\!] = [\![2x-5]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[|2x-[|x+3|]|]}{x-3} = 0$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{x\to 3} \frac{[\![2x - [\![x+3]\!]]\!]}{x-3} = 0$$

bulunur.

(g)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1.(x-1)}{x-1} = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1.(1-x)}{x-1} = 1$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = 1$$

bulunur.

(h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-3|}{\mathrm{Sgn}x(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-3|}{1} = |-1| = 1,$

(i) Her $x \in (-\pi/2, \pi/2)\backslash\{0\}$ için $[\![\cos x]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 0} [\![\cos x]\!] = 0$$

bulunur.

(j) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nin hemen sağında (solunda) $[\![\arcsin x]\!] = 2$ olacağından,

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} [\![\arcsin x]\!] = \lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} 1 = 1$$

bulunur.

(k) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nin hemen sağında (solunda) $[\![\arccos x]\!] = 2$ olacağından,

$$\lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}} [\![\arccos x]\!] = 2$$

bulunur. $\diamond$

(14) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \to 0$ iken

(a) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$; (b) $(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$

eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: **(a)** Binom açılımı formülüne göre,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \ldots + c_n^n x^n \\ &= 1 + nx + x(c_n^2 x + \ldots + x^{n-1}) \\ &= 1 + nx + \alpha(x).x\end{aligned}$$

dir. Burada $c_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ve

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0}(c_n^2 x + c_n^3 x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 0$$

olduğundan, $x \to 0$ iken

$$(1+x)^n = 1 + nx + \alpha(x).x = 1 + nx + o(x)$$

olduğu anlaşılır.

(b) $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 = t$ dersek $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde, (a)'ya göre $(1+t)^n = 1 + nt + o(t)$ olacağından,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{nt + o(t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{n + \frac{o(t)}{t}} = \frac{1}{n + \lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t)}{t}} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

olur. 2.4.44 Önermesinden dolayı buradan $x \to 0$ iken

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{x}{n}} \sim 1 \quad \text{veya} \quad (1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$$

olduğu anlaşılır. $\diamond$

(15) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$;

$(b)\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

$(c)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$;

$(d)\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$;

$(e)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

$(f)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2+1)^3-(1-3x^2)^4}{3x^2-x^3}$;

$(g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$;

$(h)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

$(i)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

$(j)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$;

$(k)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

$(l)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})$;

$(m)\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})$;

$(n)a>0$ için $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$;

$(o)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1},(m,n\in\mathbb{N})$;

$(p)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$;

$(r)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$;

$(s)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$;

$(t)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1},(m,n\in\mathbb{N})$;

$(u)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2})$;

$(v)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x},(n\in\mathbb{N},a>0)$;

$(y)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x},(m,n\in\mathbb{N})$;

$(z)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\sqrt[m]{1+bx}-1}$,

burada $n,m\in\mathbb{N}$ ve $a>0$ dır.

Çözüm: (a)

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{6-x}-1)(\sqrt{6-x}+1)(3+\sqrt{4+x})}{(3-\sqrt{4+x})(3+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(5-x)(3+\sqrt{4+x})}{(5-x)(\sqrt{6-x}+1)}=\lim_{x\to5}\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}=3.$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}&=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1})(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}\\&=\lim_{x\to5}\frac{3(5-x)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}\\&=\lim_{x\to5}\frac{-3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}=\frac{-3}{80}.\end{aligned}$$

(c) $x-1=t$ dersek $x=1+t$ ve $x\to1\Leftrightarrow t\to0$ olur. O halde, Problem 14 (b) den dolayı $t\to1$ iken $(1+t)^{\frac{1}{3}}-1=\dfrac{t}{3}+o(t),(1+t)^{\frac{1}{5}}-1=\dfrac{t}{5}+o(t)$ olacağından, 2.4.54 önermesinden dolayı

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}&=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{5}}-1}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}+o(t)}{\frac{t}{5}+o(t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o(t)}{t}}{\frac{1}{5}+\frac{o(t)}{t}}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

bulunur.

(d) $$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\frac{2-x}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}=\lim_{x\to2^+}\frac{1+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2}.$$

(e) $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^4-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(x^2+\sqrt{x})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}}.\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{1-x}\\&=\frac{2}{2}\lim_{x\to1}[-x(x^2+x+1)]=-3.\end{aligned}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^3-(1-3x^2)^4}{3x^2-x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x^2+3x^4+x^6-(1-12x^2+54x^4-108x^6+81x^8)}{x^2(3-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{15x^2-51x^4+109x^6-81x^8}{x^2(3-x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{15-51x^2+109x^4-81x^6}{3-x}=\frac{15}{3}=5.$$

(g) $\sqrt[5]{32+x}=t$ dersek $x\to 0\Leftrightarrow t\to 2$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^4+2t^3+4t^2+8t+16)}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^4+2t^3+4t^2+8t+16}=\frac{1}{80}.$$

(h) pay ve payda $\sqrt{x}$ ile bölünürse,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+1/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=1.$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(1+\frac{1}{x})^2(\frac{3}{x}-7)^2}{x^4(2-\frac{1}{x})^4}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2(\frac{3}{x}-7)^2}{(2-\frac{1}{x})^4}=\frac{49}{16}.$$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{7}{2}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{(2-\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}=\frac{1}{4}\ .$$

(n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$$=\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})=2\sqrt{a}\ .$$

(o) $x=1+t$ dersek $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olacağından, (c) 'ye benzer şekilde;

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1}=\lim_{t\to 0}\frac{nt+o(t)}{mt+o(t)}=\frac{n}{m}$$

bulunur.

(p) $\dfrac{1}{x}=t$ dersek, $x\to\infty\Leftrightarrow t\to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4t}-\sqrt[4]{1+3t}}{1-\sqrt[5]{1-5t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{4}{3}t+o(4t)-(1+\frac{3}{4}t+o(3t))}{1-(1-\frac{5}{5}t+o(5t))}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{4}{3}-\frac{3}{4})t+o(4t)-o(3t)}{t-o(5t)}=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}.$$

buluruz. Burada $t\to 0$ iken $o(4t)-o(3t)=o(t)$ ve $-o(5t)=o(t)$ eşitliklerini kullandık. (Bkz. "o"sembolünün özellikleri)

(r) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mid x\mid\sqrt{4+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\mid x\mid\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{5}.$$

(s) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\mid x\mid\sqrt{1+\frac{1}{9x^2}}-x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{\mid x\mid\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-x^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^4}}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{9x^2}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{|x|}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\frac{x^{\frac{4}{5}}}{|x|}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^4}}}=3$$

bulunur. Burada $x\to\infty$ iken $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\mid x\mid}\to 0$ ve $\dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{\mid x\mid}\to 0$ olduğu dikkate alınmıştır.

(t) $x=1+t$ dersek, $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{\sqrt[m]{1+t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{n}+o(t)}{\frac{t}{m}+o(t)}=\frac{m}{n}.$$

(u) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mid x\mid}{x^2}=0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\mid x\mid}}{\sqrt{x^2+\mid x\mid.\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mid x\mid\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}{\mid x\mid\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+\mid x\mid}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{\mid x\mid}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{1+\frac{x}{a}}-\sqrt[n]{1-\frac{x}{a}})}{x}$

$$=\sqrt[n]{a}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{na}+o(\frac{x}{a})-(1-\frac{x}{na}+o(\frac{-x}{a}))}{x}$$

$$=\sqrt[n]{a}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{na}+o(\frac{x}{a})-o(\frac{-x}{a})}{x}=\frac{2}{na}\sqrt[n]{a}.$$

(y) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{ax}{n}+o(ax)-\frac{bx}{m}-o(bx)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{a}{n}-\frac{b}{m})x+o(ax)-o(bx)}{x}=\frac{am-bn}{nm}.$$

(z) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}.\sqrt[m]{1+bx}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+\frac{a}{n}x+o(ax)).(1+\frac{b}{m}x-o(bx))-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(\frac{a}{n}+\frac{b}{n})x+\frac{ab}{nm}x^2+(1+\frac{a}{n}x)o(bx)+(1+\frac{b}{m}x)o(ax)+o(ax)o(bx)}$$

$$=\frac{1}{\frac{a}{n}+\frac{b}{m}}=\frac{nm}{am+bn}.$$

(16) $x\to 0$ iken aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $\sin\alpha x=\alpha x+o(x)$;

(b) $1-cosx=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$;

(c) $\tan x=x+o(x)$;

(d) $\ln(1+x)=x+o(x)$;

(e) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;

(f) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$;

(g) $\sinh x = x + o(x)$;

(h) $\cosh x = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x)$.

Çözüm: **(a)** $t \to 0$ iken $\sin t \sim t$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

olur. Önerme 2.4.51 den dolayı buradan $x \to 0$ iken $\sin \alpha x = \alpha x + o(x)$ olduğu anlaşılır.

(b) $x \to 0$ iken $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ olduğuna göre, Önerme 2.4.51 den dolayı $x \to 0$ iken $1 - \cos x = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ dir.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\cos x}$

$= 1 \Rightarrow x \to 0$ iken $\tan x = x + o(x)$ dir.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \Rightarrow x \to 0$ iken $\ln(1+x) = x + o(x)$ dir.

(e) $a^x - 1 = t$ dersek, $x = \log_a(1+t)$ ve $x \to 0 \Leftrightarrow t = 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x\ln a} = \frac{1}{\ln a}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{\log_a e} = 1 \Rightarrow x \to 0 \text{ iken}$$

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \text{ dir.}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \Rightarrow x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ dir.

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x + o(x) - (-x + o(-x))}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x + o(x) - o(-x)}{x} = 1 \Rightarrow x \to 0 \text{ iken}$$

$$\sinh x = x + o(x) \text{ dir.}$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sinh^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\big(\dfrac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\big)^2$
$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\big(\dfrac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\big)^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \to 0$ iken $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ dir. $\diamond$

(17) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$; $(b)\ \lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$;

$(c)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$; $(d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{x^2 - 1}$;

$(e)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1 - \cos x)}{x}$; $(f)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{20} + x^{19}}{\sin(x+1)}$;

$(g)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$; $(h)\ \lim\limits_{x\to 0}\cos\big(\dfrac{\sin x}{2x}\big)$;

$(i)\ \lim\limits_{x\to 2}\sin\big(\dfrac{\pi x}{[\!|\, \pi x \,|\!]}\big)$; $(j)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x}$;

$(k)\ \lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$; $(l)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$.

Çözüm: **(a)** $x \to 0$ iken $\sin \alpha x \sim \alpha x$ ve $\sin \beta x \sim \beta x$ olduğundan, önerme 2.4.54 ten dolayı,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ ($x - \pi = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to \pi \Leftrightarrow$

$t \to 0$ olur)

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt}$$

$$= (-1)^{m-n} \lim_{t\to 0} \frac{\sin mt}{\sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)} \dfrac{(x^2-4)}{(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$$

[sağdaki limitte $t = x^2-4$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 2 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = (2+2)1 = 4$$

dir.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x-1} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x-1} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1}$

soldaki limitte $x-1$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur ve bu durumda $\tan t \sim t$ olduğundan

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t}. \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = 1\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

olur.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x)}.\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}$$

[$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ olduğuna göre sağdaki limitte $t = 1-\cos x$ değişken deştirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

[$x \to 1$ iken $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ olduğundan]

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$ olur.

(f) $x+1 = t$ değişken değştirmesi yaparsak, $x \to -1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur ve bu durumda $\sin t \sim t$, $(1-t)^{20} \sim 1-20t$ ve $(1-t)^{19} \sim 1-19t$ olduğundan,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{20}+x^{19}}{\sin(x+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^{20}+(t-1)^{19}}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1-t)^{20}-(1-t)^{19}}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-20t-(-19t)}{t} = -1\ .$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ [soldaki limitte $t = \sin x$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.1 = 1$$

olur.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\dfrac{\sin x}{2x})$ [$t = \dfrac{sinx}{2x}$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to 0 \Leftrightarrow t \to \dfrac{1}{2}$ olur] $= \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}} \cos t = \cos\dfrac{1}{2}$.

(i) $2\pi = 2,14\cdots = 6,28\cdots$ nin hemen solunda (sağında) $[\![\, \pi x \,]\!] = 6$ olduğundan

$$\lim_{x\to 2} \sin(\frac{\pi x}{[\![\, \pi x \,]\!]}) = \lim_{x\to 2} \sin(\frac{\pi x}{6}) = \sin\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi(1+t)}{\sin 4\pi(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\sin \pi t}{\sin 4\pi t} = -\dfrac{1}{4}.$

(k) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)(\pi+x)} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{\pi+x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{x\to \pi} \frac{1}{\pi+x} = \frac{1}{2\pi}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x(\sqrt{2}\cos x - 1)}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$$

[Sağdaki limitte $x-\frac{\pi}{4}=t$ değişken değiştirmesi yaparsak $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow t\to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{1-\cos t+\sin t}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\frac{t^2}{2}+t} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{2}{\frac{t}{2}+1} = 4$$

(18) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-x)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; $(b)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

$(c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$; $(d)\ \lim_{x\to\infty} x^2(\cos\frac{1}{x}-\cos 3x)$;

$(e)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\tan^2 x+1-\cos 2x}$; $(f)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

$(g)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x}$; $(h)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$;

$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\tan x^2}$; $(j)\ \lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$;

$(k)\ \lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; $(l)\ \lim_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a}, (a\in\mathbb{R}, a\neq n\pi, n\in\mathbb{N})$;

$(m)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos\frac{\pi}{\cos x}-2x\tan x)$; $(n)\ \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos x}$;

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}, (n\in\mathbb{N})$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Çözüm: (a) $x-\frac{\pi}{6}=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow t\to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-x)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{\sqrt{3}-2\cos(t+\frac{\pi}{6})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3}(1-\cos t)+\sin t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{3}\frac{t^2}{2}+t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{3}\frac{t}{2}+1} = 1$$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}.\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

[$x\to 0^+$ iken $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ ve $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} x \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$
$$= 0.\frac{1}{1+1} = 0\ .$$

(c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin^2 x-1} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}+\sqrt[3]{\tan x}+1}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}+\sqrt[3]{\tan x}+1}. \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin^2 x-1}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x(2\sin^2 x-1)}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)} = \frac{1}{3}\ .$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^2\sin\dfrac{1}{x}.\sin\frac{2}{x} = 4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$

[$\dfrac{1}{x}=t$ değişken değiştirimini yaparsak, $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ olur].

$$= 4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\frac{\sin 2t}{2t} = 4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t} = 4\ .$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\tan^2 x+1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\tan^2 x+2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x(\frac{1}{\cos^2 x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+2}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+2\cos^2 x} = \frac{1}{3}\ .$$

(f) $1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x} = 1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})$

$$= 1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x}))$$
$$= 1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})$$
$$= 1-\cos x+\cos x\frac{1-\cos 2x}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$
$$+\cos x\sqrt{\cos 2x}\frac{1-\cos 3x}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$
$$.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}.\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)}{x^2}$$

[$x\to 0$ iken $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos 2x\sim\dfrac{1}{2}4x^2$ ve $1-\cos 3x\sim\dfrac{1}{2}9x^2$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}4x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}9x^2}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{1+1}\frac{1}{2}4+\frac{1}{1+1+1}\frac{1}{2}9 = 3\ .$$

(g) $1-\cos x\cos 2x\cos 3x = 1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$$
$$+\lim_{x\to 0}\cos x\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$$
$$+\lim_{x\to 0}\cos x\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}$$

[$x\to 0$ iken $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos 2x\sim 2x^2, 1-\cos 3x\sim\dfrac{9}{2}x^2$ ve $\sin^2 2x\sim 4x^2$ olduğundan]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{4x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{4x^2}$$
$$= \frac{1}{8}+\frac{2}{4}+\frac{9}{8} = \frac{7}{4}\ .$$

(h)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x+4\sin 5x}{(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})\sin 6x}$

[$x\to 0$ iken $\sin 3x\sim 3x, \sin 5x\sim 5x$ ve $\sin 6x\sim 6x$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2.3x+4.5x}{6x(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})} = \lim_{x\to 0}\frac{26}{6(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})}$$
$$= \frac{26}{6.(1+1)} = \frac{13}{6}\ .$$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\tan x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{\tan x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{\tan x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{cos 2x}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\tan x^2}$$

$[x \to 0$ iken $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, 1-\cos 2x \sim 2x^2$ ve $\tan x^2 \sim x^2]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\sqrt{cos2x}} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+1} 2 = \frac{3}{2} \ .$$

(j) $\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1} = 2\cos\dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})$

$$\times \sin\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$
$$= 2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}) \times \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

eşitliğini ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için $|\cos t| \leq 1$ ve $|\sin t| \leq |t|$ olduğunu dikkate alırsak $\forall x \in \mathbb{R}$ için;

$$|\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}| \leq 2|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}|$$
$$\leq 2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$ olacağından, son eşitsizlikten $\lim\limits_{x\to\infty} |\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}| = 0$ olduğu ve buradan da $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}) = 0$ bulunur.

(k) $\sin x - \sin a = 2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$
$$= \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

[Sağdaki limitte $\dfrac{x-2}{2} = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to a \Leftrightarrow t \to 0$ olur] $= \lim\limits_{x\to a} \cos\dfrac{x+a}{2} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin t}{t} = \cos a$.

(l) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tan x - \tan a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos a\cos x}$

$$= \frac{1}{\cos a} \lim_{x\to a} \frac{1}{cosx} \lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a}$$
$$= \frac{1}{\cos a} \lim_{x\to a} \frac{1}{cosx} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{\cos^2 a} \ .$$

(m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{\cos x} - 2x\tan x\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi - 2x\sin x}{\cos x}$ ($x = t + \dfrac{\pi}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\pi - 2(\frac{\pi}{2}+t)\sin(\frac{\pi}{2}+t)}{\cos(\frac{\pi}{2}+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi(1-\cos t) - 2t\cos t}{-\sin t}$$
$$= -\lim_{t\to 0} \frac{\pi(1-\cos t)}{\sin t} + 2\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \lim_{t\to 0} \cos t$$
$$= -\lim_{t\to 0} \frac{\pi\frac{t^2}{2}}{t} + 2\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} \lim_{t\to 0} \cos t = 0 + 2 = 2$$

(n) $x \to 0$ iken $1-\cos x = o(x), 1-\cos 2x = o(x), \sin x = x + o(x)$ ve $\sin x = x + o(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin 2x - \cos x} \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1}{2}$$

(o) $\sin x + \sin 2x + \cdots \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \cdots \sin nx}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{(\sqrt{1+2x}-1)\sin\frac{x}{2}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{2x\sin\frac{x}{2}} (\sqrt{1+2x}+1)$$

$[x \to 0$ iken $\sin\frac{n}{2}x \sim \frac{n}{2}x,\ \sin\frac{n+1}{2}x \sim \frac{n+1}{2}x]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{n+1}{2}x\frac{n}{2}x}{2x\frac{x}{2}}(\sqrt{1+2x}+1) = \frac{n+1}{2}\frac{n}{2}(1+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(p) $\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a = -2\sin\frac{x}{2}\sin(a+\frac{3x}{2})$
$+ 2\sin\frac{x}{2}\sin(a+\frac{x}{2}) = -4\sin^2\frac{x}{2}\cos(a+x)$olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2} = -\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 \lim_{x\to 0}\cos(a+x)$$
$$= -\cos a\ .$$

(r) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\big(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} + \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\big)$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)} + \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\times\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\Big)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\big(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\big)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\big(\frac{x}{\sin x}\big)^2\lim_{x\to 0}\big(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\big)$$
$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{12}\ \diamond$$

(19) $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ olmak üzere $u : X \to \mathbb{R}_+, v : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\lim_{X\ni x\to x_0} u(x) = 1$ ve $\lim_{X\ni x\to x_0} v(x) = \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to x_0} u^v = e^{\lim_{X\ni x\to x_0}(u-1)v} \tag{2.16}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $U_{\delta_0}(x_0), x_0$ noktasının herhangi bir komşuluğu olmak üzere $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\cap X$ için $u(x) = 1$ ise, aynı x ler için $u^v = 1^v = 1 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to x_0} u^v = 1$ olduğu açıktır.

Şimdi $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\cap X$ için $u(x) \neq 1$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)\cap X$ için

$$u^v = ((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}})^{(u-1)v} = e^{(u-1)v\ln[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}}$$

olduğuna göre, Teorem 2.4.26 dan dolayı

$$\lim_{X\ni x\to x_0} u^v = e^{\lim_{X\ni x\to x_0}(u-1)v\ln(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}}$$
$$= e^{\lim_{X\ni x\to x_0}(u-1)v\ \lim_{X\ni x\to x_0}\ln(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}}$$
$$= [\lim_{X\ni x\to x_0} u = 1 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to x_0}\frac{1}{u-1}$$
$$= \infty \Rightarrow \lim_{X\ni x\to x_0}(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}e]$$
$$= e^{\lim_{X\ni x\to x_0}(u-1)v}$$

bulunur. $\diamond$

(20) $a > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to 0$ iken $a^x = 1 + x\ln a + o(x)(\Rightarrow x \to 0$ iken $e^x = 1 + x + o(x))$ dir.

(b) $x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ dir.

Çözüm: **(a)** $t = a^x - 1$ değişken değiştirmesi yaparsak, $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ olduğuna göre, $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. Bu durumda, $a^x = 1 + t \Rightarrow x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}(a \neq 1)$ ve

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$$

bulunur. Buradan, $x \to 0$ iken $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ bulunur.

(b) $x \to 0$ iken

$$\alpha\ln(1+x) \to 0 \Rightarrow \frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)} = \frac{\alpha\ln(1+x)+0(x)}{\alpha\ln(1+x)} \to 1$$

ve $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to 1$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}.\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha$$

ve buradan da $x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ bulunur. $\diamond$

(21) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^x$; (b) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^x$;

(c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$; (d) $\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

(e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$; (f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(g) $\lim_{x\to 0}(\cos 6x)^{\cot^2 x}$; (h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}$;

(i) $\lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin^3 x}}$; (j) $\lim_{x\to 0}(\frac{\cosh 2x}{\cosh x})^{\frac{1}{x^2}}$;

(k) $\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$; (l) $\lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x-a}, (a>0)$;

(m) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}, (\alpha\in\mathbb{R})$; (n) $\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}, (x>0)$;

(o) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$; (p) $\lim(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x})^{\cot^3 x}$;

(q) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$; (r) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$;

(s) $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, (a>0)$; (t) $\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}, (a>0)$;

(u) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\log_a x}{x^\epsilon}, (a>1, \epsilon>0)$; (v) $\lim_{x\to\infty}\cos^n(\frac{x}{\sqrt{n}})$;

(w) $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$; (x) $\lim_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}$, $(a,b,c\in\mathbb{R}_+)$;

(y) $\lim_{x\to x}\frac{\log_a x - \log_a x_0}{x-x}, (x>0)$.

Çözüm: $x \to x_0$ iken 1^∞ şeklinde belirsizlik oluşturan fonksiyonların limitlerini (2.16) formülünden faydalanarak hesaplayacağız.

(a) $u(x) = \frac{2x+3}{2x+1}, v(x) = x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to\infty}u(x) = 1, \lim_{x\to\infty}v(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1} = 1$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x = e$$

buluruz.

(b) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^x = e^{\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2}-1)x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2}} = e^{-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

(c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2} = e^{\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1)x^2} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3$.

(d) $u(x) = 1+3x^2, v(x) = \frac{1}{sin^2 x}$ fonksiyonları için

$\lim_{x\to 0}u(x) = 1$, $\lim_{x\to 0}v(x) = +\infty$ ve $\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{sin^2 x} = 3$

olduğundan, (2.16) ya göre;

$$\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^3$$

bulunur.

(e) $x = \frac{\pi}{2} + y$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \to 0$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} &= \lim_{y\to 0}(\cos y)^{-\cot y} = e^{\lim_{y\to 0}(1-\cos y)\cot y}\\ &= e^{\lim_{y\to 0}2\sin^2\frac{y}{2}\cot y} = e^{\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{2}.\frac{\cos y}{\sin y}}\\ &= e^{\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}y\cos y} = e^0 = 1\end{aligned}$$

bulunur.

(f) $u(x) = tanx, v(x) = \tan 2x$ fonksiyonları için,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}u(x) = 1, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}v(x) = \infty$$

ve

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\frac{\sin 2x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin x}{\cos x+\sin x}=-1$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}$ bulunur.

(g) $u(x)=\cos 6x, v(x)=\cot^2 x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1, \lim_{x\to 0}v(x)=+\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to 0}(\cos 6x-1)\cot^2 x=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 3x}{\sin^2 x}\cos^2 x$$
$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x^2}\lim_{x\to 0}\cos^2 x=-18$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\cot^2 x}=e^{-18}$ bulunur.

(h) $u(x)=1+\cot x, v(x)=\tan x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}u(x)=1, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}v(x)=\infty$$

ve

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x\tan x=1$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cot x)^{\tan x}=e$ bulunur.

(i) $u(x)=\frac{1+\tan x}{1+\sin x}, v(x)=\frac{1}{\sin^3 x}$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1, \lim_{x\to 0}v(x)=+\infty \quad \text{ve}$$
$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\frac{1}{\sin^3 x}$$

$[x\to 0$ iken $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$ ve $\sin^3 x\sim x^3]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{1+\sin x}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin^3 x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

(j) $u(x)=\frac{\cosh 2x}{\cosh x}, v(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonları için;

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}=1, \lim_{x\to 0}v(x)=+\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}\frac{1}{x^2}$$

$$[e^{2x}+e^{-2x}-(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}-2-(e^x+e^{-x}-2)$$
$$=e^{-2x}(e^{2x}-1)^2-e^{-x}(e^x-1)^2]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}(e^{2x}-1)^2-e^{-x}(e^x-1)^2}{x^2(e^x+e^{-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}[(\frac{e^{2x}-1}{x})^2e^{-2x}-(\frac{e^x-1}{x})^2e^{-x}]\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$
$$=[\lim_{x\to 0}(\frac{e^{2x}-1}{x})^2\lim_{x\to 0}e^{-2x}-\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^2\lim_{x\to 0}e^{-x}].\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$

$[x\to 0$ iken $e^{2x}-1\sim 2x$ ve $e^x-1\sim x$ olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1]=(2^2 1-1^2 1)\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$ olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\cosh 2x}{\cosh x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

(k) $u(x)=\frac{a^x+b^x}{2},\ v(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\infty$ ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{2x}$$

$[x\to 0$ iken $a^x-1\sim x\ln a$ ve $b^x-1\sim x\ln b]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln a}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln b}{2x}=\ln\sqrt{ab}$ olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$

bulunur.

(l) $x-a=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to a\Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{a+t}-(a+t)^a}{t}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{a^t-(1+\frac{t}{a})^a}{t}$$
$$=a^a(\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{t}{a})^a-1}{t})$$

$[t\to 0$ iken $a^t-1\sim t\ln a$ ve $(1+\frac{t}{a})^a\sim t]$

$$=a^a(\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{t}{t})=a^a(\ln a-1)=a^a\ln\frac{a}{e}$$

bulunur.

(m) $\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x=\log(1-\frac{h^2}{x^2})$ olduğunda

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\log(1-\frac{h^2}{x^2})$$
$$=\lim_{h\to 0}(-\frac{1}{x^2})(-\frac{x^2}{h^2})\log(1-\frac{h^2}{x^2})$$
$$=-\frac{1}{x^2}\lim_{h\to 0}\log(1-\frac{h^2}{x^2})^{\frac{-x^2}{h^2}}\ .$$

$\frac{h^2}{x^2}=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $h\to 0\Leftrightarrow t\to 0$ olur.

$$\lim_{h\to 0}(\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2})=-\frac{1}{x^2}\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=-\frac{\log e}{x^2}$$

bulunur.

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+(\cos x-1))^\alpha-1}{\cos x-1}\frac{1-\cos x}{x^2}$ $[x\to 0$ iken $(1+(\cos x-1))^\alpha-1\sim\alpha(\cos x-1), 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ olduğuna göre önerme 2.4.54' ten dolayı]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\cos x-1)}{\cos x-1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{\alpha}{2}\ .$$

(o) $x\to 0$ iken $a^x-1\sim x$ ve (k) yı kullanırsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur.

(p) $u(x)=\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}, v(x)=\cot^3 x$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\infty$ ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-1+1-\cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$[x\to 0$ iken $\cos\alpha x\sim 1-\frac{\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)$, $\cos\beta x\sim 1-\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x^2)$, $\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $\sin^2 x\sim x^2+o(x^2)]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\alpha^2}{2}x^2+\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x)}{1+(x+o(x))(1-\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x^2))}\frac{(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^3}{x^2+o(x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$$

bulunur.

(q) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi((x^\alpha-1)+1)}{\sin\pi((x^\beta-1)+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x^\alpha-1)}{\sin\pi(x^\beta-1)}$
$[x\to 1$ iken $\sin\pi(x^\alpha-1)\sim\pi(x^\alpha-1)$, $\sin\pi(x^\beta-1)\sim\pi(x^\beta-1)]$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x^\alpha-1)}{\pi(x^\beta-1)}$$

$[x-1=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olur$]$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{((1+t)^{\alpha}-1)}{((1+t)^{\beta}-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha t+o(t)}{\beta t+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

bulunur.

(r) $t=\sin^2(\pi 2^x)$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olur. Bu durumda, $\cos(\pi 2^x)=\sqrt{1-t}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(\sqrt{1-t})}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1-t)}\\&=-2\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1-t)^{\frac{-1}{t}}}=-2\frac{1}{\ln e}=-2\end{aligned}$$

bulunur.

(s) $x-a=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to a\Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\lim_{t\to 0}a^{\alpha-\beta}\frac{(1+\frac{t}{a})^{\alpha}-1}{(1+\frac{t}{a})^{\beta}-1}=a^{\alpha-\beta}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\frac{t}{a}+o(t)}{\beta\frac{t}{a}+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$$

bulunur.

(t) $a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x=a^{x-h}(a^{2h}+1-2a^h)=a^{x-h}(a^h-1)^2$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}&=\lim_{h\to 0}a^{x-h}(\frac{a^h-1}{h})^2\\&=\lim_{h\to 0}a^{x-h}(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h})^2=a^x(\ln a)^2=a^x\ln^2 a\end{aligned}$$

bulunur.

(u) $u(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}, v(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1,\lim_{x\to 0}v(x)=\infty$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x)&=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\\&=\frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)=\frac{\ln a^a b^b c^c}{a+b+c}\end{aligned}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})\frac{1}{x}=e^{\frac{\ln a^a b^b c^c}{a^2+b^2+c^2}}=(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

bulunur.

(v) $u,v:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, u(n)=\cos\frac{x}{\sqrt{n}}, v(n)=n$ fonksiyonları (dizileri) için

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}u(n)=1,$$

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}v(n)=+\infty$$

ve

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(u(x)-1)v(x)=\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(\cos\tfrac{x}{\sqrt{(n)}}-1)n$$

$[\mathbb{N}\ni n\to\infty$ iken $\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1=-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}+o(\frac{1}{n})]$

$$=\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}+o(\frac{1}{n}))n=-\frac{x^2}{2}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim_{x\to\infty}\cos^n(\frac{x}{\sqrt{n}})=e^{\frac{-x^2}{2}}$ bulunur.

(w) $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})=\lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+\ln(1+2^{-x})\ln(1+\frac{3}{x}))$

$[x\to+\infty$ iken $\ln(1+2^{-x})=2^{-x}+o(2^{-x})$ ve $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x})]$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+2^{-x}+o(2^{-x}))(\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x}))\\&=\lim_{x\to+\infty}(3\ln 2+\frac{3}{x2^{-x}}+\frac{3}{x}o(2^{-x})+x\ln 2o(\frac{1}{x})+2^{-x}o(2^{-x})+o(2^{-x})o(\frac{1}{x}))\\&=3\ln 2=\ln 8\end{aligned}$$

bulunur.

(x) $x - x_0 = t$ değişken değiştirmesi yaparsak; $x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde, $\ln(1+\frac{t}{x_0}) = \dfrac{t}{x_0} + o(t)$ olacağından

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(1+\frac{t}{x_0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+\frac{t}{x_0})}{t\ln a}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{x_0} + o(t)}{t\ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

bulunur.

(y) $x^\epsilon = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t^\epsilon}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^\epsilon} = 0$ olduğuna göre, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log_a(n+1)}{n^\epsilon} = 0 \Rightarrow < \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_\epsilon$ için

$$0 < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \epsilon$$

olur. $t > n_\epsilon$ ve $n = [\![\, t \,]\!]$ olsun. Bu durumda, $n > n_\epsilon$ ve $n \le t < n+1$ olacağından,

$$0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \epsilon$$

bulunur. Buradan, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\log_a t}{t} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0$ olduğu anlaşılır.$\diamond$

(22) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $\lim\limits_{t\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$;
(c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0$; (d) $\lim\limits_{t\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$;

Çözüm: (a) $\forall \epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ sayısı verilmiş olsun. O halde,

$$x > \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) = \delta_\epsilon \Rightarrow \arctan x > \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

olur. Böylece, $\forall 0 < \epsilon < \dfrac{\pi}{2}$ için $\exists \delta_\epsilon = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \epsilon) > 0$ öyleki $\forall x > \delta_\epsilon$ için $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = [x = -t \Rightarrow x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty]$
$= -\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = -\dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ olduğundan,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = \lim_{x\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

bulunur.

(d) Benzer şekilde,

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \lim_{x\to-\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$
$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

bulunur. $\diamond$

(23) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to 0$ iken $\sinh x = x + o(x)$ dir;

(b) $x \to 0$ iken $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ dir;

(c) $x \to 0$ iken $\tanh x = x + o(x)$ dir.

Çözüm: (a) $x \to 0$ iken $e^x = 1 + x + o(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{t\to 0} e^{-x} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$$
$$\lim_{t\to 0} e^{-x} \frac{2x + o(x)}{2x} = 1$$

bulunur. Buradan, (a) nın doğruluğu anlaşılır.

(b) (a) ya göre

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \Big(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \Big)^2 = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan, da (b) nin doğruluğu anlaşılır.

(c) $x \to 0$ iken $\sinh x = x + o(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 0} \cosh x = 1$ olduğuna göre;

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}.\frac{1}{\cosh x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x}\frac{1}{\cosh x} = 1$$

bulunur. Buradan, (c) nin doğruluğu anlaşılır. $\diamond$

(24) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin ax}{x}$ $(a \neq 0)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan ax}{x}$, $(a \neq 0)$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\arcsin 3x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{\arctan x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(a+x) - \arctan a}{x}$; (l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \arcsin(\sqrt{x^2+x} + x)$;

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$; (n) $\lim\limits_{n\to \infty} \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; (p) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh^2 x}{\ln\cosh 3x}$.

Çözüm: (a) $t = \arcsin x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

bulunur.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} a = a$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{ax} a = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{\tan(\arctan ax)} a = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} a = a$.

(d) (b)'den $x \to a$ iken $\arcsin 3x \sim 3x$ bulunur. O halde, $x \to 0$ iken $\tan x \sim x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

(e) $x \to 0$ iken $\arctan(x^2+3x) \sim x^2+3x$ ve $\arcsin 2x \sim 2x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2 + 3x}{\arcsin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{2} = \frac{3}{2}\ .$$

(f) $t = \arccos(1-x)$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 0+ \Leftrightarrow t \to 0^+$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}\frac{t}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+o(x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|\sqrt{1+o(x)}}{x} \\ &= -\lim_{x\to 0^-} \sqrt{1+o(x)} = -1\end{aligned}$$

(h) $u(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arctan x}$, $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} u(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1,\ \lim_{x\to 0} v(x) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\lim_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)$ limitini bulalım. $t=\arcsin x-\arctan x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde, $t\to 0$ iken $\tan t\sim t$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} t\sim\tan t \Rightarrow \arcsin x-\arctan x &\sim \tan(\arcsin x-\arctan x)\\ &= \frac{\tan(\arcsin x)-\tan(\arctan x)}{1+\tan(\arcsin x)\tan(\arctan x)}\\ &= \frac{\dfrac{x}{\cos(\arcsin x)}-x}{1+\dfrac{x^2}{\cos(\arcsin x)}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x}{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}\\ &= \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2+\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{xx^2}{(x^2+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\sim\frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$\lim_{x\to 0}u[(x)-1]v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^2x}=\frac{1}{2}$$

olduğundan (2.16) dan dolayı $=\lim_{x\to 0}(\frac{\arcsin x}{\arctan x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

(i) $t=-\ln x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1^-\Leftrightarrow t\to 0^+$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\arccos e^{-t}}{\sqrt{t}}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\arccos(1-(1-e^{-t}))}{\sqrt{1-e^{-t}}}\frac{\sqrt{1-e^{-t}}}{\sqrt{t}}=\end{aligned}$$

$[t\to 0^+$ iken $1-e^{-t}\sim t$ ve (f) den dolayı $\arccos(1-(1-e^{-t}))\sim\sqrt{2}\sqrt{1-e^{-t}}]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-e^{-t}}}{\sqrt{1-e^{-t}}}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\sqrt{2}$ bulunur.

(j) (h) den görüldüğü gibi $x\to 0$ iken $\arcsin x-\arctan x\sim\frac{x^3}{2}$ dir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}\ .$$

(k) $t=\arctan(a+x)-\arctan a$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0\Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde, (h) ye benzer olarak $x\to a$ iken $\arctan(a+x)-\arctan a\sim\tan(\arctan(a+x)-\arctan a)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(a+x)-a\arctan a}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\arctan(a+x)-\arctan a)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a+x-a}{1+a(a+x)}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+aa+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+a(a+x)}=\frac{1}{1+a^2}\end{aligned}$$

bulunur.

(l) $\lim_{x\to-\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{x}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{x}{|x|})}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\arcsin\frac{-1}{2}=\frac{-\pi}{6}\ .\end{aligned}$$

(m) $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}))&=\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+\pi n)=(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))\\ &= (-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}\end{aligned}$$

ve $x\to 0$ iken $\sin x\sim x$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}))&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}=0\end{aligned}$$

bulunur.

(n) (l) ye benzer olarak;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi n}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=1\end{aligned}$$

bulunur.

(o) $t=\frac{1}{x}$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0^+\Leftrightarrow t\to+\infty$ olur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+e^t}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

bulunur.

(p) $t=\frac{1}{x}$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0^-\Leftrightarrow t\to-\infty$ olur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t}=\frac{1}{1+0}=1$$

bulunur.

(q) $x\to 0$ iken $\sinh x=x+o(x)$ ve $\cosh 3x\sim 1+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x}{\ln\cosh 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{\ln(1+\frac{9}{2}x^2+o(x^2))}$$

$t\to 0$ iken $\ln(1+t)=t+o(t)]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{o(x^2)}{x})^2}{\frac{9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{2}{9}$$

bulunur. $\diamond$

(25) Eğer, $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonsiyonu her sonlu (a,b) aralığı üzerinde sınırlı ise,

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)$,

(b) $\forall x\in(a,+\infty)$ için $f(x)\geq c>0$

olduğunda $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İspatı okuyucuya bırakılmıştır. $\diamond$

(26) Problem (25) ten yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; (b) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{x+1}}$; (c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+4^x)}{x}$.

Çözüm: (a) Problem (25) (b) den dolayı;

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x(1+\frac{1}{x})[\ln x]^{-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}[\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})][\ln x]^{-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x})\\ &= 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\\ &= 1+\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^{\ln x}\end{aligned}$$

$u(x)=1+\frac{1}{x}, v(x)=\ln x$ fonksiyonları için $\lim_{x\to+\infty}u(x)=1$, $\lim_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$ ve $\lim_{x\to+\infty}[u(x)-1]v(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ olur.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to+\infty}[u(x)-1]v(x)=0$ olur. Bu durumda, (2.16) dan dolayı

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}=e^0=1 &\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^{\ln x}\\ &= \ln 1=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=1\end{aligned}$$

bulunur.

(b) (a) ya benzer olarak

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t+1} = 1$$

(c) Problem (25) (a) dan dolayı

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+4^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+4^{x+1}) - \ln(1+4^x)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+4^{x+1}}{1+4^x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\frac{1}{4^x}+4}{\frac{1}{4^x}+1}$$

$$= \ln 4$$

bulunur. $\diamond$

(27) Aşağıdaki fonksiuyon çiftinin hangisi $x\to 0$ iken aynı mertebedendir.

(a) $f(x) = e^x, \quad g(x) = 10+x;$

(b) $f(x) = \frac{5}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)};$

(c) $f(x) = x(2+\sin\frac{1}{x}), \quad g(x) = x;$

(d) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x.$

Çözüm: (a) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{10+x}{e^x} = \frac{10+0}{1} = 10$
olduğuna göre, $x\to 0$ iken $e^x \asymp 10+x$ dir.

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+x)}{x} = 5\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 5$
olduğuna göre, $x\to 0$ iken $\frac{5}{x} \asymp \frac{1}{\ln(1+x)}$ dir.

(c) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |2+\sin\tfrac{1}{x}| \le 2+|\sin\tfrac{1}{x}| \le 3$$

olduğuna göre, $x\to 0$ iken $f,\ g$ ye göre sınırlıdır. Yani, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|f(x)|\le 3|g(x)|$ dir. Öte yandan, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |2+\sin\tfrac{1}{x}| \ge 2-|\sin\tfrac{1}{x}| \ge 1$$

olduğuna göre, aynı x ler için $|g(x)|\le|f(x)|$ olur. Demek ki, $x\to 0$ iken

$$x(2+\sin\tfrac{1}{x}) \asymp x$$

dir.

(d) $\forall c\in\mathbb{R}_+$ sayısı için $|x|\le c|x^2|$ eşitsizliği $x=0$ noktasının hiç bir komşuluğunda sağlanamaz. Bu nedenle $g(x)=x$ fonksiyonu $f(x)=x^2$ fonksiyonuna göre sınırlı değildir. Dolayısıyla, x ve x^2 fonksiyonları aynı mertebeli fonksiyonlar değillerdir. $\diamond$

(28) Aşağıda verilen fonksiyonların sonsuz küçük olması için α ve β ne olmalıdır?

(a) $x\to\infty$ iken $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta;$

(b) $x\to+\infty$ iken $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1} - \alpha x - \beta;$

(c) $x\to\infty$ iken $f(x) = (x+4)e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta;$

(d) $x\to\infty$ iken $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}.$

Çözüm: (a) $f(x) = \frac{x^2(x-1)-(\alpha x+\beta)(x+1)^2}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(1-\alpha)x^3 - (1+2\alpha+\beta)x^2 - (\alpha+2\beta)x - \beta}{x^2+2x+1}$$

dir. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için payın derecesi paydanın derecesinden küçük olmalıdır. Bu nedenle, $1-\alpha=0$ ve $1+2\alpha+\beta=0$,yani $\alpha=1$ ve $\beta=-3$ olduğunda $x\to 0$ iken $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - x + 3$ fonksiyonu sonsuz küçük bir fonksiyondur. Yani, $x\to 0$ iken $f(x) = o(1)$ dir.

(b) $f(x) = 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}} - \alpha x - \beta =$
$[t \to 0$ iken $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t^2)$ olduğuna göre]

$$\begin{aligned} &= 2x\big(1 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\big) + o(\tfrac{1}{x^2}) - \alpha x - \beta \\ &= \frac{1}{4} - \beta + (2-\alpha)x + xo(\tfrac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için $\frac{1}{4} - \beta = 0$ ve $2 - \alpha = 0$, yani $\alpha = 2$ ve $\beta = \frac{1}{4}$ olmalıdır. Demek ki, $x \to \infty$ iken $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1} - 2x - \frac{1}{4} = o(1)$ dir.
(c) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + o(t)$ olduğuna göre, $x \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+4)e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta \\ &= (x+4)(1 + \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})) - \alpha x - \beta \\ &= 5 - \beta + (1-\alpha)x + \frac{4}{x} + o(\tfrac{1}{x}) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için $\alpha = 1$ ve $\beta = 5$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x \to \infty$ iken $f(x) = (x+4)e^{\frac{1}{x}} - x - 5 = o(1)$ dir.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\forall \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x^\alpha \sin\tfrac{1}{x^\beta}| \\ &= |x^\alpha|.|\sin\tfrac{1}{x^\beta}| \le |x^\alpha| \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\alpha > 0$ ve β herhangi bir reel sayı olmak üzere, $x \to \infty$ iken $f(x) = o(1)$ dir. $\alpha = 0$ durumunda

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin\tfrac{1}{x^\beta} = 0$$

olması için $\beta < 0$ olmalıdır.

Şimdi $\alpha < 0$ olsun. Bu durumda, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $x \to 0$ iken $\sin\frac{1}{x^\beta}$ fonksiyonunun limiti var ve sıfır olmalıdır. Bu nedenle $\beta < 0$ olmalıdır. Bu durumda, $x \to 0$ iken

$$\begin{aligned} x^\alpha.\sin\tfrac{1}{x^\beta} = x^\alpha.\sin x^{-\beta} &\sim x^\alpha(x^{-\beta} + o(x^{-2\beta})) \\ &= x^{\alpha-\beta} + x^\alpha.o(x^{-2\beta}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ durumunda, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $\alpha > \beta$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\alpha > 0$ ve β herhangi bir reel sayı olduğunda, $x \to 0$ iken $f(x) = o(1)$ dir; $\alpha \le 0$, $\beta < 0$ ve $\alpha > \beta$ olduğunda, $x \to 0$ iken $f(x) = o(1)$ sonuçlarının doğruluğu anlaşılır. $\diamond$

(29) Aşağıda verilen fonksiyonların $x = 0$ noktasında sıçramasını (Bkz. Tanım 2.4.37) bulunuz.

(a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;
(c) $f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$; (d) $f(x) = x(2 + \sin\frac{1}{x})$.

Çözüm: (a) $\forall \epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\ |f(x) - f(y)| :\ x, y \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= \sup\{\ f(x) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &\quad - \inf\{\ f(x) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= \sup\{\ \sin\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &\quad - \inf\{\ \sin\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \Omega(f,0) &= \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} \\ &= \inf\{\ 2 : \epsilon > 0\ \} = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\forall \epsilon > 0$ için $\inf\{\dfrac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} = 0$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &= \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\end{aligned}$$

bulunur. $k \in \mathbb{Z}(\epsilon) = \{\ k \in \mathbb{Z} :\ |k|\pi > \dfrac{1}{\epsilon}\ \}$ olmak üzere buradan aynı k lar için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &\geq \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} :\ \frac{1}{|k|\pi} \leq |x| < \epsilon\ \} \\ &= \sup\{k^2\pi^2\ :\ \frac{1}{|k|\pi} \leq |x| < \epsilon\}\end{aligned}$$

olduğu anlaşılır. Dolayısıyla,

$$\Omega(f,0) = \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} = +\infty$$

bulunur.

(c) $\forall \epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\frac{1}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{\frac{1}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}) = 1\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\Omega(f,0) = \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} = 1$$

bulunur.

(d) $\forall \epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{x(2+\sin\tfrac{1}{x}) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{x(2+\sin\tfrac{1}{x}) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\leq 3\epsilon - (-\epsilon) = 4\epsilon\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\Omega(f,0) = \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} = 0$$

bulunur. $\diamond$

(30) Aşağıda verilen fonksiyonların $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ ve $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1}$; (b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1)$;

(c) $f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \dfrac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$.

Çözüm: (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \leq |\frac{\mathrm{sgn}x}{1+x^2}| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

olduğu açıktır. $x_n \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2\ldots$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sgn}x_n}{x_n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2+1} = 1$$

ve $y_n \in \mathbb{R}_-,\ n = 1,2,\ldots$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ koşullarını sağlayan (y_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sgn}y_n}{y_n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{y_n^2+1} = -1$$

olduğuna göre,

$$\underline{\lim}_{x\to 0} \frac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1} = -1, \qquad \overline{\lim}_{x\to 0} \frac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1} = 1$$

bulunur.

(b) $\forall x \in [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$ için

$$0 \leq f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1) = e^{\frac{1}{x}}((x+2)^2-3) < +\infty$$

olduğu açıktır. $x_n \in [-2+\sqrt{3}, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x_n}}(x_n^2+4x_n+1)\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x_n}} \lim_{n\to\infty}(x_n^2+4x_n+1) = 0.1 = 0\end{aligned}$$

ve $y_n \in (0, 2-\sqrt{3}]$ $n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ koşullarını sağlayan (y_n) dizisi için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{y_n}}(y_n^2+4y_n+1)\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{y_n}} \lim_{n\to\infty}(y_n^2+4y_n+1) = +\infty.1 = +\infty\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\underline{\lim_{x\to 0}}\, e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1) = 0, \qquad \overline{\lim_{x\to 0}}\, e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1) = +\infty$$

bulunur.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $0 \le \sin^2\frac{1}{x} \le 1$ olduğuna göre, $x = x_n = -\dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ \sin^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \} = \sin^2\tfrac{1}{x_n} = 0$$

ve $x = y_n = \dfrac{1}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ \sin^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \} = \sin^2\tfrac{1}{y_n} = 0$$

bulunur. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x_n} = -1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{y_n} = 1$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2\tfrac{1}{x_n} + \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x_n}) = -1,\\ \lim_{n\to\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2\tfrac{1}{y_n} + \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{y_n}) = 1\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2\tfrac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x}) = -1,\\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2\tfrac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x}) = 1\end{aligned}$$

olduğu anlaşılır. $\diamond$

(31) Aşağıda verilen fonksiyonların $\underline{\lim}\, f(x)$ ve $\overline{\lim}\, f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sin^2(x\sqrt{2}) + b^2\cos^2(x\sqrt{2})$;

(b) $f(x) = \dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{2+\sin^2\frac{1}{x}}$.

Çözüm: (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 1 + (b^2-1)\cos^2(x\sqrt{2})$ olduğu açıktır.

1. $b^2 = 1$ ise, $f(x) = 1 \Rightarrow \underline{\lim}\, f(x) = \overline{\lim}\, f(x) = 1$ bulunur.

2. $b^2 > 1$ olsun. $x_n = \dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ \cos^2(x\sqrt{2}) :\ x \in \mathbb{R}\ \} = \cos^2(x_n\sqrt{2}) = 1$$

ve $y_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ \cos^2(x\sqrt{2}) :\ x \in \mathbb{R}\ \} = \cos^2(y_n\sqrt{2}) = 0$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(1+(b^2-1)\cos^2(x_n\sqrt{2})) = b^2\\ \underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}(1+(b^2-1)\cos^2(y_n\sqrt{2})) = 1\end{aligned}$$

bulunur.

3. $b^2 < 1$ olsun. Bu durumda, $f(x) = b^2 + (1-b^2)\sin^2(x\sqrt{2})$ biçiminde yazarak 2. ye benzer olarak

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = b^2, \quad \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = 1$$

bulunur. Böylece,

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \min\{1, b^2\}, \quad \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \max\{1, b^2\}$$

olduğu anlaşılır.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $2 \le 2 + \sin^2\frac{1}{x} \le 3$ olduğu açıktır. $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ 2 + \sin^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} = 2 + \sin^2\tfrac{1}{x_n} = 2$$

ve $y_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ 2 + \sin^2\tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} = 2 + \sin^2\tfrac{1}{y_n} = 3$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}}{2+\sin^2\frac{1}{y_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\sin^2\frac{1}{y_n}} \\
&= e.\frac{1}{3} = \frac{e}{3}, \\
\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}}{2+\sin^2\frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\sin^2\frac{1}{x_n}} \\
&= e.\frac{1}{2} = \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(32) $a > 0$ iken aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y$ dir.

(b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$ dir.

Çözüm: (a) Logaritmik fonksiyonunun 2[1] özelliğinden yararlanarak $\forall y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$ sayıları için

$$\log_a(y_1.y_2 \ldots y_n) = \log_a y_1 + \log_a y_2 + \ldots + \log_a y_n$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Buna göre, $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\log_a(y^n) = \log_a \underbrace{(y.y \ldots y)}_{n-kez} = \log_a y + \log_a y + \ldots + \log_a y = n.\log_a y$$

olur. Dolayısıyla, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\log_a(y^n) = n \log_a y \tag{2.17}$$

eşitliği doğrudur.

$$\beta = \log_a y \Rightarrow y = a^\beta \Rightarrow y^{-1} = a^{-\beta} \Rightarrow \log_a(y)^{-1} = -\beta$$

ve dolayısıyla,

$$\log_a(y^{-1}) = -\log_a y \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17) ve (2.18) den dolayı $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$ için

$$\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y \tag{2.19}$$

olduğu anlaşılır. $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için (2.19) dan dolayı

$$\log_a y = \log_a(y^{\frac{1}{n}})^n = n \log_a y^{\frac{1}{n}}$$

olduğuna göre aynı n ler için

$$\log_a(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \log_a y \tag{2.20}$$

bulunur.

Şimdi $\forall \alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Önce (2.20) dan ve sonra da (2.17) den yararlandığımızda

$$\frac{m}{n}\log ay = m\log_a(y^{\frac{1}{n}}) = \log_a(y^{\frac{1}{n}})^m = \log_a(y^{\frac{m}{n}}) \tag{2.21}$$

olduğu elde edilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Üstel fonksiyonunun 3) özelliğinden dolayı $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} y^r = y^\alpha$ ve buna göre (Logaritmik fonksiyonun 3^1) özelliği gereğince) $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a y^r = \log_a y^\alpha$ olduğu elde edilir. Öte yandan, $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $\log_a y^r = r\log_a y$ olduğuna göre,

$$\log_a y^\alpha = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a y^r = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} r\log_a y = \alpha\log_a y$$

dir. Dolayısıyla, $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_a(y^\alpha) = \alpha\log_a y$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır.

(b) $a = 1$ durumunda, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $1^\alpha = 1$ kabul edilir. Dolayısıyla, bu durumda (b) önermesi doğrudur.

$a \neq 1$ durumunda, (a) dan dolayı

$$\begin{aligned}\log_a((a^{x_1})^{x_2}) &= x_2\log_a(a^{x_1}) = x_2.x_1\log_a a\\ &= x_1.x_2 = \log_a(a^{x_1.x_2})\end{aligned}$$

bulunur. Logaritmik fonksiyonun 4^1) özelliğinden dolayı, buradan $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

2.6 Ek Problemler

(33) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2) = 10$; (b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+3} = -\dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4} = 3$; (d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3} = -\dfrac{1}{4}$.

(34) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{|x-1|} = -3$; (b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{|x-1|} = 3$;

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x - [\![\, x \,]\!]) = \dfrac{1}{2}$; (d) $\lim\limits_{x\to n^-}(x - [\![\, x \,]\!]) = 1,\ (n \in \mathbb{Z})$;

(e) $\lim\limits_{x\to n^+}(x - [\![\, x \,]\!]) = 0,\ (n \in \mathbb{Z})$.

(35) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

(36) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz. $x = 0$ da limit var mıdır?

Cevap: $f(0^-) = \dfrac{1}{3},\ f(0^+) = 0,\ x = 0$ noktasında limit yoktur.

(37) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{x}, & x > 1 \text{ ise,} \\ \dfrac{2ax+bx}{x+1}, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ de limitinin olması için a ve b ne olmalıdır?

Cevap: a herhangi bir reel sayı ve $b = 2$.

(38) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{x\pi}{2}), & |x| \leq 1 \text{ ise,} \\ a + |x-1|, & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = -1$ de limitinin olması için a ne olmalıdır?

Cevap: $a = -2$.

(39) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x\text{-irrasyonel ise,} \\ 1, & x\text{-rasyonel ise} \end{cases}$

fonksiyonunun limitli olmadığı noktalar kümesini bulunuz.

Cevap: $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

(40) (a) $\alpha(x) = 2x^2$; (b) $\alpha(x) = 3x$; (c) $\alpha(x) = \sqrt{[\![\, x \,]\!]}$;
(d) $\alpha(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$; (e) $\alpha(x) = 1 - \cos x$

fonksiyonları için $x \to 0$ iken $\alpha(x) = o(x)$ eşitliğinin doğru olup olmadığını inceleyiniz.

Cevap: (a) $2x^2 = o(x)$; (b) $3x \neq o(x)$; (c) $\sqrt{|x|} \neq o(x)$
(d) $\dfrac{x}{\ln|x|} = o(x)$; (e) $1 - \cos x = o(x)$.

(41) (a) $\alpha(x) = \sin^2 x$; (b) $\alpha(x) = x^3$; (c) $\alpha(x) = 1 - \cos x$;

fonksiyonları için $x \to 0$ iken $\alpha(x) = o(x^2)$ eşitliğinin doğru olup olmadığını inceleyiniz.

Cevap: (a) $\sin^2 x \neq o(x^2)$; (b) $x^3 = o(x^2)$; (c) $1 - \cos x \neq o(x^2)$.

(42) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; (b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$; (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$; (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x} - 4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$; (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[5]{x^5+2}}{x}$ (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[5]{x^5+2}}{x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$; (n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$; (p) $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n})$, $(m,n \in \mathbb{N})$;

(r) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2}$; (s) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(2\pi x^\beta)}$, $(\beta \neq 0)$.

Cevap:

(a)-1; (b) $\dfrac{-1}{3}$; (c) 1; (d) $\dfrac{3}{2}$; (e) $+\infty$;
(f) $-\dfrac{5}{2}$; (g) $+\infty$; (h) $-\dfrac{1}{2}$; (i) $\dfrac{1}{6}$; (j) $1 - \sqrt[4]{4}$;

(k) -2; (l) 0; (m) $\dfrac{5^{10}}{3^{25}}$; (n) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; (o) $\dfrac{2}{\pi}$;
(p) $\dfrac{m-n}{2}$; (r) $4\ln\frac{2}{e}$; (s) $-\dfrac{\alpha}{2\beta}$.

(43) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to$ iken

1) $\cos(4x^2+x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$;
2) $2^{x^3+x^2} = 1 + x^2\ln 2 + o(x^2)$;
3) $\ln\cos(2x+x^2) = -2x^2 + o(x^2)$;
4) $5^{e^x - \cos\sqrt{|x|}} = 1 + (x + \dfrac{|x|}{2})\ln 5 + o(x)$.

(b) $x \to 0^+$ iken

1) $\sin^2(5\sqrt{x}+x) = 25x + o(x)$; 2) $e^{2x+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$;
3) $\cosh\sqrt{\sin x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$; 4) $\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{x}{6} + o(x)$;

(c) $x \to 2$ iken

1) $\sin(x-2)^2 = (x-2)^2 + o((x-2)^2)$;
2) $(3-x)^\beta = 1 + \beta(2-x) + o(2-x)$;
3) $\ln(x-1) = x - 2 + o(x-2)$;
4) $\tan(\pi x^2) = \pi(x^2-4) + o(x-2)$;
5) $\sqrt[5]{x-1} - \sqrt[7]{x-1} = \dfrac{2}{35}(x-2) + o(x-2)$;
6) $x^x - 4 = 4(1+\ln x)(x-2) + o(x-2)$.

(d) $x \to \infty$ iken

1) $\sqrt{x^2+x} - x = \dfrac{1}{2} + o(1)$; 2) $\sqrt[3]{x^3+x} - x = \dfrac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$;
3) $\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + o(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$; 4) $\sinh\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + o(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$;

(44) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;
(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$; (ç) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4(3\sqrt{x})}$; (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x + 2\cot x}{(\pi - x)\sin\frac{x}{2}}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x + 1}$; (g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan^3 x}$;

(ğ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$;

(ı) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cot 2x.\cot(\frac{\pi}{4} - x)$; (i) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1+\cos x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$;

(n) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$; (o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cot x - \cot a}{x-a}$, $(a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$;

(ö) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x - \sqrt[7]{x})}$; (p) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$;

(r) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$; (s) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$;

(ş) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{\cos\frac{\pi+x}{2}}$; (t) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}}$;

(u) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\cos\pi x}{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{4x}}$; (ü) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln\cosh x)$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}}$; (y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx - n}{\sin x^2}$;

(z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x} - \sqrt[m]{\cos\beta x}}{\sin^2 x}$, $(m \neq 0)$.

Cevap:

(a)$\dfrac{-1}{4}$; (b) 4; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (c) $\dfrac{-1}{12}$; (d) $\dfrac{1}{324}$; lllll

(e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; (f) 1; (g) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; (ğ) $\dfrac{1}{2}$; (h) $-\dfrac{9}{128}$;

(ı) 2; (i) 14; (j) $4\sqrt{2}$; (k) $\dfrac{1}{3}$; (l) $\dfrac{1}{24}$;

(m) $\dfrac{1}{p}$; (n) $-\sin a$; (o) $-\dfrac{1}{\sin^2 a}$; (ö) $\dfrac{21}{26}\pi\alpha$; (p) $\dfrac{-3}{2}$;

(r) $\dfrac{-9}{2}$; (s) π; (ş) 0; (t) 0; (u) $-2\sqrt{2}\pi^2$;

(ü) $\ln 2$; (v) 2; (y) $\dfrac{-n(n+1)(2n+1)}{12}$; (z) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2m}$.

(45) $a > 1,\ \epsilon > 0$ için

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\epsilon} = +\infty$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(46) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^a}{x-a}$, $(a > 0)$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\dfrac{1+x}{x+2}\big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \big(\dfrac{1+x}{x+2}\big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (ç) $\lim\limits_{x\to 0} \big(\cos x\big)^{\cot^2 x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(1 + xe^x)}$;

(f) $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x - a^b}{\sqrt[3]{bx^2} - b}$, $(a > 0)$; (g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - x^\beta}{\sqrt[5]{x} - 1}$;

(ğ) $\lim\limits_{x\to\beta} \big(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta\alpha}\big)^{\frac{1}{x-\beta}}$, $(\alpha, \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$; (h) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + \sin^2\pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(ı) $\lim\limits_{x\to\pi} \big(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\big)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x} - \pi)^2}}$; (i) $\lim\limits_{x\to 1} (4^x - \sqrt{x+8})^{\tan\frac{\pi x}{2}}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 1} (1 + \sin\pi x)^{\cot\pi x}$; (k) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x - a^a}{x-a}, (a > 0)$;

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$, $(x > 0)$; (m) $\lim\limits_{x\to\infty} [\cos(2\pi(\frac{x}{x+1})^a)]^{x^2}$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n[\frac{\pi - 4}{4} + (1 + \frac{1}{n})^\alpha]$; (o) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(\ln\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}})$;

(ö) $\lim\limits_{n\to\infty} [(\dfrac{n}{n+1})^\alpha + \sin\frac{1}{n}]^n$; (p) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{\cosh(\frac{\pi}{n})}{\cos(\frac{\pi}{n})}\big)^{n^2}$;

(r) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{a - 1 + \sqrt[n]{b}}{a})^n$, $(a > 0, b > 0)$.

Cevap:

(a)$a^a \ln a$; (b) 1 ; (c) $\dfrac{1}{2}$; (ç) $\dfrac{-1}{2}$; (d) 1;

(e) 1; (f) $\dfrac{3a^b \ln a}{2}$; (g) $5(\alpha - \beta)$; (ğ) $e^{\alpha\tan\alpha\beta}$; (h) e^2;

(ı) e^{16} ; (i) $e^{-\frac{2}{\pi}(4\ln 4 - \frac{1}{6})}$; (j) $\dfrac{1}{e}$; (k) $a^a \ln(ae)$ (l) $\ln x$;

(m) $e^{-4\pi^2 a^2}$; (n) $e^{2\alpha}$; (o) $-\dfrac{\pi^2}{4}$; (ö) $e^{1-\alpha}$; (p) e^{π^2}; (r) $\sqrt[a]{b}$.

(47) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{2x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi-\operatorname{arccot} x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\arctan\sin^2 x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha x-\sin^2\beta x}{\arctan^2 x+x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[21]{1+\sin 3x}-1+\tan x}{\arcsin x}$; (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\arctan\frac{2}{x})^x$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$; (j) $\lim\limits_{n\to\infty} n\arccos\frac{n^2}{n^2+1}$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan nx)^{\cot\pi\sqrt{n^2+1}}$, $(x>0)$; (l) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Cevap:

(a) 2 ; (b) $\dfrac{\pi}{8}$; (c) 1; (d) -1; (e) 3; (f) $\alpha^2-\beta^2$;

(g) $\dfrac{8}{7}$; (h) e^2; (i) $e^{-\frac{\pi}{4}}$; (j) $\sqrt{2}$; (k) $e^{-\frac{4}{\pi^2 x}}$; (l) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(48) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x\to 0$ iken $\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}.\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\sim -2|x|^{\frac{7}{3}}$ dir.

(b) $x\to 1$ iken $4\sqrt[4]{x}-5\sqrt[5]{x}+1\sim\dfrac{(1-x)^2}{40}$ dır.

(c) $x\to 0$ iken $\arctan x-\arccos\frac{1}{x}\sim\dfrac{1}{2x^3}$ dir.

(49) Aşağıda verilen fonksiyonların sonsuz küçük olması için α ve β ne olmalıdır.

(a) $x\to\infty$ iken $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$;

(b) $x\to+\infty$ iken $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$;

(c) $x\to-\infty$ iken $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$;

(d) $x\to+\infty$ iken $f(x)=x\arctan x-\alpha x-\beta$;

(e) $x\to-\infty$ iken $f(x)=x\arctan x-\alpha x-\beta$;

(f) $x\to 0^+$ iken $f(x)=x^\alpha\arctan(\frac{1}{x^\beta})$;

(g) $x\to 0^+$ iken $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$.

Cevap: (a) $\alpha=-1,\ \beta=\dfrac{1}{3}$; (b) $\alpha=1,\ \beta=0$; (c) $\alpha=\beta=0$; (d) $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\ \beta=-1$; (e) $\alpha=-\dfrac{\pi}{2},\ \beta=-1$; (f) $\alpha>0,\ \beta$ herhangi bir reel sayı $\alpha\le 0,\beta<0,\alpha>\beta$ (g) $\alpha>\beta$.

(50) Aşağıda verilen fonksiyonların $\underline{\lim}\limits_{x\to 0} f(x)$ ve $\overline{\lim}\limits_{x\to 0} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x)=e^{\cos(\frac{1}{x^2})}$; (b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}$;

(c) $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$; (d) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}$;

(e) $f(x)=\sin\pi x\cos\frac{\pi}{x}$.

Cevap: (a)$\dfrac{1}{e}$ ve e; (b) 0 ve $+\infty$; (c) 0 ve π (d) $-\dfrac{1}{2}$ ve $+\infty$; (e) 0 ve 0.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların $\underline{\lim}\limits_{x\to\infty} f(x)$ ve $\overline{\lim}\limits_{x\to\infty} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x+\arctan x$; (b) $f(x)=\dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2}\sin(x^2)$;

(c) $f(x)=(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-x+1})(1+\cos 2x)$;

(d) $f(x)=(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$; (e) $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x\sin^2 x$;

(f) $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x+\sin^2 x$; (g) $f(x)=a^2\sin^2(x\sqrt{x})+\cos^2(x\sqrt{2})$.

Cevap:

(a)$\dfrac{-\pi}{2}$ ve π ; (b) -3 ve 3 ;(c) -1 ve 1; (d) 2 ve e; (e) 0 ve e; (f) e ve $e+1$; (g)$\min\{1,a^2\}$ ve $\max\{1,a^2\}$.

Bölüm 3

Süreklilik

3.1 Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Bir $a \in \mathbb{R}$ nokataının bir $U(a) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı bir $f : U(a) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, $x \in U(a)$ değişkeninin aldığı değerler a noktasına yeteri kadar yakın olduğunda, $f(x)$ fonksiyonun değeri $f(a)$ değerine çok yakın olursa, yani $x \in U(a),\ x \to a$ iken $f(x) \to f(a)$ ise, f fonksiyonu a noktasında süreklidir diyeceğiz. Buna göre, $x \in U(a), x \to a$ iken $f(x) \to f(a)$ limitinin §2.4'te verilen farklı tanımları yardımı ile f nin a noktasında sürekliliğinin aşağıdaki tanımlarını verebiliriz.

Tanım 3.1.1 : *Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi ,$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0 \quad ve \quad \forall x \in X \ \ için \ \ | x-a | < \delta \Rightarrow | f(x)-f(a) | < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir denir.*

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle verebiliriz: $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$için$\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall x \in X$ için $| \mathrm{x} - \mathrm{a} | < \delta \Rightarrow | \mathrm{f(x)} - \mathrm{f(a)} | < \varepsilon$ olur.

$$| x - a | < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in U_\delta(a)$$

ve

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon \Leftrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

olduğuna göre, yukarıdaki tanımı

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\forall x \in U_\delta(a) \bigcap X$ için f(x) $\in$ U_ε(f(a)) veya

(b) $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $f(U_\delta(a) \bigcap X) \subset U_\varepsilon(f(a))$

şeklinde verebiliriz.

Genel olarak, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekliliği tanımını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 3.1.2 : *Eğer, $f(a)$ nın her $U(f(a))$ komşuluğu için $f(U(a) \cap X) \subset U(f(a))$ olacak şekilde a' nın bir $U(a)$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna X kümesine göre a noktasında süreklidir denir.*

Buna göre, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow f(a)$ nın $\forall U(f(a))$ komşulugu için a nın öyle $U(a)$ komşuluğu vardır ki, $f(U(a) \cap X) \subset U(f(a))$ olur. X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bir f fonksiyonunun bütün süreklilik noktalarından oluşan kümeye f nin süreklilik kümesi diyecek ve $\mathcal{S}(f)$ ile göstereceğiz.

Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir diyeceğiz. Xden $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve X üzerinde sürekli bütün fonksiyonlar kümesini $\mathcal{C}(X)$(veya $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$) ile göstereceğiz.

Fonksiyon limitinin 2.4.6 Tanımından kullanarak $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde $a \in X$ noktasında sürekliliğine verilen Tanım 3.1.1'e denk olarak şu tanımı da verebiliriz.

Tanım 3.1.3 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi ,$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilsin. Eğer, $x_n \in X, \quad n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan*

her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ ise, f fonksiyonu X kümesine göre a noktasında süreklidir (veya dizisel süreklidir) denir.

Not: §2.2 de ki 2.1.1 ve 2.1.6 Tanımları denk olduğundan yukarıda verilen 3.1.1 ve 3.1.3 Tanımlarının denk olduğu açıktır. •

Tanım 3.1.4 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi ,$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilsin. Eğer,f fonksiyonu X kümesine göre a noktasında sürekli değilse, f bu nokatada süreksizdir denir.*

Buna göre, **(a)** $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreksizdir $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ öyleki $\forall \delta > 0$ için $\exists x \in X$ öyleki $\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \geq \varepsilon$ olur.
(b) $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreksizdir $\Longleftrightarrow \lim_{X \ni x \to a} f(x) \neq f(a)$ dır.

Uyarı 3.1.5 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $a \in X$ noktası X in bir izole noktası ise,f fonksiyonu a noktasında süreklidir.Çünkü izole nokta tanımından $U_\delta(a) \bigcap X = a$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda, $f(a)$ noktasının her $U(f(a))$ komşuluğu için $f(a) = f(U_\delta(a) \bigcap X) \subset U(f(a))$ elde edilir. O halde, f, a noktasında süreklidir.*

Not: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f nin $D(f) \subset \mathbb{R}$ tanım bölgesinin her izole noktasında sürekli olduğuna göre ,$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekliliği yalnızca $D(f)$ nin limit noktası olan $a \in D(f)$ noktasında incelenmesi yeterlidir. •

Örnek 3.1.6 : *$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonu her $a \in \mathbb{R},\ a \neq 1$ noktasında süreklidir.*

Gerçekten, $\lim_{x\to a}(x^3 + 2x^2 - 1) = a^3 + 2a^2 - 1$ ve $\lim_{x\to a}(x - 1) = a - 1 \neq 0$ olduğuna göre, Teorem 2.4.24 (d) den dolayı

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x - 1} = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a - 1} = f(a)$$

bulunur.

Örnek 3.1.7 : *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn} x$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir, çünkü $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ limiti yoktur (Bkz. Örnek 2.4.5).*

Örnek 3.1.8 : *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $a = 0$ noktasında süreksizdir,çünkü $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ limiti yoktur (Bkz. Örnek 2.4.8).

Örnek 3.1.9 : *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $\forall a \in \mathbb{R}$ noktasında süreksizdir,çünkü $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur (Bkz. §2.4, Problem (5)).

Tanım 3.1.10 : *Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi ,$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası için $f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ ve $f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ limitleri mevcut olsun. Eğer, $f(a^-) = f(a) (f(a^+) = f(a))$ ise, f fonksiyonu X kümesi üzerinde a noktasında soldan(sağdan) süreklidir denir.*

Örneğin, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağdan sürekli olup, soldan süreksizdir. Çünkü, $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x,\ f(x^+) = x$ ve $f(x^-) = x - 1 \neq f(x)$ dir.

Not: Teorem 2.4.12 gereğince, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesi üzerinde a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul f nin X kümesi üzerinde a noktasında soldan ve sağdan sürekli, yani $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$ olmasıdır. •

Tanım 3.1.11 : *$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde $a \in X$ noktasında süreksiz olsun. Eğer, f nin X kümesine göre a da $f(a^-)$ ve $f(a^+)$*

sonlu limitleri mevcut ve $f(a^-) \neq f(a)$ veya $f(a^+) \neq f(a)$ ise, a noktasına fnin X kümesine göre birinci çeşit süreksizlik noktası adı verilir. Bu durumda, $f(a^+) - f(a^-)$ sayısına fnin a noktasındaki sıçraması denir. Aksi taktirde, yani $f(a^-)$ ve $f(a^+)$ limitlerinden hiç değilse, birisi mevcut değilse veya $f(a^-) = -\infty$, $f(a^-) = +\infty$ veya $f(a^-) = \infty$, (yada $f(a^+) = -\infty$, $f(a^+) = +\infty$ veya $f(a_+) = \infty$ ise), a noktasına fnin X kümesine göre ikinci çeşit süreksizlik noktası adı verilir. Eğer, $f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$ ise a noktasına fnin X kümesine göre kaldırılabilir süreksizlik noktası denir.

Örnek 3.1.12 :

(a) $x = 0$ noktası $f(x) = sgnx$ fonksiyonunun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır. Çünkü, $f(0^-) = -1$ ve $f(0^+) = 1$ limitleri vardır,fakat $f(0) = 0$, $f(0^-) \neq f(0)$ ve $f(0^+) \neq f(0)$ dır ;

(b) $x = 0$ noktası Örnek 3.1.8 deki f fonksiyonunun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;

(c) $\forall a \in \mathbb{R}$ noktası Örnek 3.1.9 daki f fonksiyonunun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;

(d) $x = 1$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \neq 1 \text{ ise,} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır. Çünkü $f(1^-) = +\infty, f(1^+) = -\infty$ ve $f(1) = 0$, $f(1^-) \neq f(0), f(1^+) \neq f(0)$ dır ;

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreklidir (Çünkü, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ dır), fakat her $a \neq 0$ noktası bu fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(f) $x = 0$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |\ sgnx\ |$ fonksiyonunun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır,Çünkü $f(0^-) = f(0^+) = 1 \neq 0 = f(0)$ dır.

3.2 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

A) Lokal (Yerel) Özellikler

Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun belirli bir $\mathcal{P}$ özelliği $a \in X$ noktasında ve bu noktanın yeterli kadar yakınında bulunan $x \in X$ noktalarında, yani istenildiği kadar küçük $r > 0$ sayısı için her $x \in U_r(a) \bigcap X$ noktasında,geçerliyse $\mathcal{P}$ özelliğine f nin lokal(yerel) özelliği denir. Örneğin, f nin X kümesine göre bir $a \in X$ noktasında sürekliliği f nin a da bir lokal özelliğidir.

Limit konusunda verilen teoremler gözönüne alındığında aşağıdaki teoremlerin ispatı kolayca yapılabilir.

Teorem 3.2.1 : *$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli,yani $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = f(a)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeler doğrudur.*

(a) *$\exists \delta > 0$ öyleki f fonksiyonu $U_\delta(a) \bigcap X$ kümesi üzerinde sınırlıdır.*

(b) *$f(a) \neq 0$ ise $\exists \delta > 0$ öyleki $\forall U_\delta(a) \bigcap X$ için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işaretlidir, yani $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$ ise, $\forall x \in U_\delta(a) \bigcap X$ için $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ dır.*

Teorem 3.2.2 : *$X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda, $|\ f\ |, c.f(c \in \mathbb{R}), f + g, f - g, f.g$ ve $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir.*

Teorem 3.2.3 : *$X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında, $g : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Y kümesine göre $b = f(a)$ noktasında sürekli ise, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ bileşke fonksiyonu X kümesine göre a noktasında süreklidir.*

Diğerlerini okuyucuya bırakarak Teorem 3.2.3 ün ispatını verelim.

1.Yol: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.g fonksiyonu Y kümesine göre $b = f(a)$ noktasında sürekli olduğundan dolayı $\exists\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall y \in Y$ için

$$| y - b | < \sigma \Rightarrow | g(y) - g(b) | < \varepsilon \tag{3.1}$$

bulunur. Öte yandan, f fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli olduğundan bir önce bulunan $\sigma > 0$ sayısı için $\exists\delta = \delta(\sigma) > 0$ öyleki $\forall x \in X$ için

$$| x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \sigma$$

olur. Buna göre, $\forall x \in X$ için

$$| x - a | < \delta \Rightarrow | y - b | = |f(x) - f(a)| < \sigma \overset{(3.1)}{\Rightarrow} | g(f(x)) - g(f(a)) | < \varepsilon$$

bulunur. Bu da Tanım 3.1.1 gereğince $g \circ f : X \to \mathbb{R}$, fonksiyonunun X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli olması demektir.

2.Yol: $f : X \to Y$ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli olduğuna göre $x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ dır.$g : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Y kümesine göre $b = f(a) \in Y$ noktasında sürekli olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) &= [y_n = f(x_n) \in Y,\ n \in \mathbb{N},\ \text{dersek}] \\
&= \lim_{n\to\infty} g(y_n) \\
&[\lim_{n\to\infty} y_n = f(a) \text{ ve } g \text{ fonksiyonu b'de sürekli olduğundan dolayı}] \\
&= g(b) = g(f(a))
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu da Tanım 3.1.3 gereğince $g \circ f : X \to \mathbb{R}$, fonksiyonunun X kümesine göre $a \in X$ noktasında sürekli olması demektir.

Süreklilik ile ilgili tanımlar (Bkz §3.1), yukarıdaki teoremler ve elementer fonksiyonların limiti konusunda (Bkz §2.4) elde edilen sonuçlar gözönüne alındığında aşağıdaki özelliklerin doğru olduğu anlaşılır.

(a) c bir sabit reel sayı olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall a \in \mathbb{R}$ için
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c = f(a)$ dır.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a = f(a)$ dır.

(c) $n \geq 0$ bir tamsayı ve $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ler birer reel sayı olmak üzere $n.$ dereceden $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ cebirsel polinomu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Gerçekten, Teorem 3.2.2 den dolayı herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ noktasında sonlu sayıda sürekli fonksiyonların toplamı ve çarpımı da bu a noktasında süreklidir. (a) ve (b) den $f(x) = c$ sabit ve $f(x) = x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğuna göre, $\forall m \geq 0$ tamsayı ve $\forall b \in \mathbb{R}$ için $bx^m = b.\underbrace{x \cdots x}_{m-\text{kez}}$ fonksiyonu ve dolayısıyla, $P(x)$ polinomu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

(d) Teorem 3.2.2 yi ve (c) özelliğini gözönüne alırsak, $p(x)$ ve $q(x)$ sırasıyla $n.$ ve $m.$ dereceden cebirsel polinomlar olmak üzere $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rasyonel fonksiyonu $q(x)$ fonksiyonunun sıfıra eşit olduğu bütün noktalar dışında süreklidir.

(e) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ dır.

(f) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \cos x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ dır.

(g) $X = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ fonksiyonu X üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0 \in X$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$ dır.

(h) $X = \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$ fonksiyonu X üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0 \in X$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0$ dır.

(i) $a > 0$ ve $a \neq 1$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = a^x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ dır.

(j) $a > 0$ ve $a \neq 1$ için $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$ için $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ dır.

(k) $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ f(x)=\arcsin x$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in[-1,1]$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0$ dır.

(l) $f:[-1,1]\to[0,\pi],\ f(x)=\arccos x$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in[-1,1]$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0$ dır.

(m) $f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ f(x)=\arctan x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan x=\arctan x_0$ dır.

(n) $f:\mathbb{R}\to(0,\pi), f(x)=\operatorname{arccot}x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arccot}x=\operatorname{arccot}x_0$ dır.

(o) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to x_0}\sinh x=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}(e^x-\frac{1}{e^x})=\frac{1}{2}(e^{x_0}-e^{-x_0})=\sinh x_0$$

dır.

(p) $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty),\ f(x)=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\cosh x=\cosh x_0$ dır.

(q) $f:\mathbb{R}\to(-1,1),\ f(x)=\tanh x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ için $\cosh x_0\neq 0$ olduğundan dolayı,

$$\lim_{x\to x_0}\tanh x=\lim_{x\to x_0}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\sinh x_0}{\cosh x_0}=\tanh x_0$$

dır.

(r) $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty),\ f(x)=\coth x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. Çünkü, $\forall x_0\in\mathbb{R}\backslash 0$ için $\sinh x_0\neq 0$ olduğundan dolayı,

$$\lim_{x\to x_0}\coth x=\lim_{x\to x_0}\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{\cosh x_0}{\sinh x_0}=\coth x_0$$

dır.

(s) Sonlu sayıda sürekli fonksiyonun bileşke yardımıyla elde edilen her fonksiyon tanım bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyondur.Teorem 3.2.3 gözönüne alındığında bu özelliğin doğruluğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. Örneğin ,$f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\mid y\mid,\ f_3(t)=\ln t,\ f_4(s)=\sin^2 s,\ f_5(u)=e^u$ tanım bölgesi $D=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ olmak üzere

$$e^{\sin^2(\ln|\cos x|)}=(f_5\circ f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1)(x)=f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(x)))))):D\to\mathbb{R}_+$$

fonksiyonu $\forall x_0\in D$ noktasında süreklidir.

(t) $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^\alpha$ kuvvet fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir,çünkü (k) özelliği kullanılarak Teorem 3.2.3 gereğince $\forall a>0\, a\neq 1$ ve $\forall x_0\in\mathbb{R}_+$ için

$$\lim_{x\to x_0}x^\alpha=\lim_{x\to x_0}a^{\alpha\log_a x}=e^{\alpha\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x}=e^{\alpha\log_a x_0}={x_0}^\alpha$$

olduğu elde edilir.

B) Global (Evrensel) Özellikler

Eğer, $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun belirli bir $\mathcal{P}$ özelliği $D(f)\subset X$ kümesinin bütün noktaları için geçerliyse $\mathcal{P}$ ye f nin $D(f)$ de global(evrensel) özelliği denir. Bu kesimde sürekli fonksiyonların bazı önemli global özelliklerini vereceğiz.

Eğer, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) açık aralığının her noktasında sürekli, a noktasında sağdan b nokatasında soldan sürekli ise, f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir denir. $[a,b]$ üzerinde sürekli reel değerli bütün fonksiyonlar kümesini $\mathcal{C}[a,b]$(veya $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$) ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.4 (Bolzano-Cauchy Teoremi) *:$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli (yani $f(a).f(b)<0$) ise,$f(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.*

İspat: Teoremin ispatını Aralığı Yarıya Bölme Yöntemiyle yapacağız. Kabul edelim ki $f(a)<0$ ve $f(b)>0$ dır.(Benzer ispat $f(a)>0$ ve $f(b)<0$

alınarak da yapılabilir.) $\Delta_0 = [a,b]$ aralığının orta noktası $\frac{a+b}{2}$ dir.$f(\frac{a+b}{2}) = 0$ ise $c = \frac{a+b}{2}$ için teorem ispat edilmiş olur. $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ ise $[a, \frac{a+b}{2}]$ ve $[\frac{a+b}{2}, b]$ aralıklarının en az birinin uç noktalarında f nin değerleri ters işaretlidir,yani $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ ya da $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ dır. $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ ise ($f(\frac{a+b}{2}) < 0$ ise) $\Delta_1 = [a, \frac{a+b}{2}] = [a_1, b_1]$ ($\Delta_1 = [\frac{a+b}{2}, b] = [a_1, b_1]$) diyelim. $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ ise $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ için teorem ispat edilmiş olur. Aksi taktirde $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ ve $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ aralıklarının en az birinin uç noktalarında f nin değerleri ters işaretlidir,yani $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$ ya da$f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$ dır. Birinci durumda $\Delta_2 = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2, b_2]$, ikinci durumda ise $\Delta_2 = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$ diyelim.Bu yönteme ardarda devam edersek aşağıdaki özelliklere sahip $\Delta_n = [a_2, b_2], n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ kapalı aralıklar dizisi elde ederiz.

(a) $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \Delta_n \supset \cdots, \Delta_0 = [a,b]$,

(b) Δ_n nin uzunluğu $\mid \Delta_n \mid = \frac{b-a}{2^n}$ dir,

(c) $f(a_n) < 0$ ve $f(b_n) > 0$ dır.

İçiçe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$ dur. Öte yandan, $\lim_{n\to\infty} \mid \Delta_n \mid = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğuna göre, Cantor Prensibi gereğince $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ kesişimi yalnızca bir noktadan oluşur. Bu noktaya c diyelim. $(\Delta_n), n \in \mathbb{N} \bigcup 0$ dizisinin özellikleri gereğince

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots,$$

$$b_0 \leq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

ve $\forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ için $a_n \leq c \leq b_n$ olacaktır. Buradan, (a_n) dizisinin monoton artan ve üstten sınırlı,(b_n) dizisinin monoton azalan ve alttan sınırlı olduğu anlaşılır. O zaman, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ limitleri vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ ve üstelik $\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \mid \Delta_n \mid$ ve $\lim_{n\to\infty} \mid \Delta_n \mid = 0$ olduğuna göre, $\beta = \alpha$ bulunur.$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \leq c \leq b_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ olduğu elde edilir. f fonksiyonu c ($c \in [a_0, b_0] = [a,b]$) noktasında sürekli olduğu için $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$

dir.$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(a_n) < 0$ olduğundan, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ ve $f(b_n) > 0$ olduğundan, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ olur. Demek ki, $f(c) = 0$ dır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. □

Teorem 3.2.5 (Ara Değer Teoremi) *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, $f(a) = A, f(b) = B$ ve $A \neq B$ olsun. Bu durumda, A ile B arasındaki her C sayısı (yani her $\min(A,B) < C < \max(A,B)$ sayısı) için $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.*

İspat: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - C$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $A < B$ olsun ($B < A$ durumunda ispat benzer şekilde yapılır). φ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$,$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$ olduğuna göre, Teorem 3.2.4 gereğince $\varphi(c) = 0$, yani $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. □

Not: Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 in hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!] - \frac{1}{3}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreksizdir. $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$ ve $f(1) = \frac{2}{3} > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (a,b)$ noktası yoktur.

(b) $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \text{ ise;} \\ 1, & x \in [2,3] \text{ ise.} \end{cases}$$

fonksiyonu $D = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi üzerinde sürekli,$f(0) = -1 < 0$ ve $f(3) = 1 > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (0,1] \cup [2,3)$ noktası yoktur.

Demek ki yukarıdaki teoremlerde $[a,b]$ nin bağlantılı olması şartı ve f nin sürekliliği kaldırılamaz. •

Teorem 3.2.6 (Weierstrass) *: Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.*

İspat: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $f([a,b])=\{f(x):x\in[a,b]\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Sürekli fonksiyonların Teorem 3.2.1 (b) deki lokal özelliğine göre $\forall x\in[a,b]$ için $\exists\delta=\delta(x)>0$ öyleki f fonksiyonu $U_\delta(x)\cap[a,b]$ açık aralığında sınırlıdır. $\mathcal{A}=\{U_\delta(x)\cap[a,b]: x\in[a,b]\}$ açık aralıklar ailesini gözönüne alalım. $[a,b]$ aralığı $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olduğuna göre Heyne-Borel Prensibi gereğince $\mathcal{A}$ ailesinin $[a,b]$ yi örten sonlu $\mathcal{A}_0=\{U_\delta(x_1),U_\delta(x_2),\cdots,U_\delta(x_n)\}$ alt ailesi vardır.f fonksiyonu $U_\delta(x_i)\cap[a,b]$ de sınırlı olduğundan, $\forall x\in U_\delta(x_i)\cap[a,b]$ için $m_i\le f(x)\le M_i$ olacak şekilde $m_i,M_i\in\mathbb{R}$ sayıları varolacaktır. Buna göre, $\forall x\in[a,b]$ için

$$\min\{m_1,\cdots,m_n\}\le f(x)\le\max\{M_1,\cdots,M_n\}$$

olduğu elde edilir.Bu da f nin sınırlı olması demektir. □

Teorem 3.2.7 (Weierstrass) *: Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralıkta en küçük ve büyük değerine ulaşır.*

İspat: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda, f nin $[a,b]$ üzerinde en küçük ve büyük değerlerine ulştığını,yani

$$m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}=f(\alpha)$$

$$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}=f(\beta)$$

olacak şekilde $\alpha,\beta\in[a,b]$ noktalarının varlığını gösterelim. Bunu M için yapalım (m için ispat benzer şekilde yapılabilir). Teorem 3.2.6 gereğince $f,[a,b]$ üzerinde üstten sınırlıdır. O halde, sup özelliğine göre $\sup\{f(x):x\in[a,b]\}=M\in\mathbb{R}$ dir. Buna göre, supremumun karakteristik özelliklerinden dolayı $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M$$

olacak şekilde bir $x_n\in[a,b]$ noktası varolacaktır.$\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in[a,b]$ olduğuna göre (x_n) dizisi sınırlı olup Bolzano-Weierstrass Prensibinden dolayı, yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\beta$ diyelim.$[a,b]$ kapalı ve

$\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_{n_k}\in[a,b]$ olduğundan $\beta\in[a,b]$ dir. O halde, f, $\beta\in[a,b]$ noktasında sürekli olduğuna göre, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\beta)$ olur. Öte yandan, $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M$$

eşitsizliğinden $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M$ olduğu açıktır. Yakınsak $(f(x_{n_k}))$ dizisinin limiti tek olduğundan dolayı $M=f(\beta)$ dır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. □

Şimdi Teorem 3.2.6 ve 3.2.7 hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

(a) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir, fakat $(0,1)$ üzerinde $M=\sup\{x:x\in(0,1)\}=1$ ve $m=\inf\{x:x\in(0,1)\}=0$ değerlerine ulaşamaz, çünkü $\forall x\in(0,1)$ için $0<f(x)<1$ dir. Bunun sebebi tanım kümesinin kapalı bir aralık olmayışıdır (Bkz. Şekil 3.1).

(b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\mid x\mid, & x\in(-1,0)\bigcup(0,1)\text{ ise;}\\ \frac{1}{2}, & x=0\text{ veya }x=\pm1\text{ ise.}\end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli değildir.

$$m=\inf\{\mid x\mid:x\in[-1,1]\}=0,$$

$$M=\sup\{\mid x\mid:x\in[-1,1]\}=1$$

olup $\forall x\in[-1,1]$ için $f(x)\neq0$ ve $f(x)\neq1$ dir. Dolayısıyla, fonksiyon $[-1,1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerine ulaşamaz. Bunun sebebi f nin sürekli bir fonksiyon olamayışıdır (Bkz.Şekil 3.2).

(c) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan x$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğu halde bu aralıkta en büyük değere sahip değildir, çünkü $\forall x\in[0,+\infty)$ için

$$\arctan x=\frac{\pi}{2}=\sup\{\arctan x:x\in[0,+\infty)\}$$

dır. Bunun sebebi, f nin tanım kümesinin sınırlı olmayışıdır (Bkz. Şekil 3.3).

Önerme 3.2.8 *: Sürekli bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter koşul onun $[a, b]$ üzerinde kesin monoton, yani kesin artan veya kesin azalan olmasıdır.*

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde kesin monoton ise, onun $[a, b]$ üzerinde birebir olması açıktır, çünkü $x_1, x_2 \in [a, b]$ için $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olur. Şimdi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli birebir olması durumunda onun $[a, b]$ üzerinde kesin monoton (kesin artan veya kesin azalan) olduğunu gösterelim. Bunun doğru olmadığını varsayalım. O halde, $[a, b]$ aralığında $f(x_2)$ sayısı $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ sayıları arasında olmayacak şekilde $x_1 < x_2 < x_3$ noktaları vardır. Bu durumda, ya $f(x_3)$ sayısı $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ sayıları arasında ya da $f(x_1)$ sayısı $f(x_2)$ ve $f(x_3)$ sayıları arasında bulunmaktadır. Kolaylık

için, son durumun gerçeklendiğini varsayalım. f fonksiyonu $[x_2, x_3]$ aralığında sürekli olduğuna göre, Ara Değer Teoreminden $f(x_1{}') = f(x_1)$ olacak şekilde $x_1{}' \in [x_2, x_3]$ noktası vardır. O halde, $x_1 < x_1{}'$ ve $f(x_1) = f(x_1{}')$ olur. Bu da f nin birebir olması ile çelişir.$f(x_3)$ sayısının $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ sayıları arasında olduğu durum benzer şekilde incelenebilir. □

Önerme 3.2.9 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde artan (azalan) bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $Y = f(X)$ kümesi üzerinde artan (azalan) $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ tersi vardır.*

İspat: İspatı artan fonksiyonlar için yapalım. $f : X \to Y = f(X)$ fonksiyonunun örten olduğu açıktır. f, X üzerinde artan olduğuna göre,

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ için } \mathrm{x_1} < \mathrm{x_2} \Longleftrightarrow \mathrm{f(x_1)} < \mathrm{f(x_2)} \tag{3.2}$$

dir. Buna göre, $f : X \to Y = f(X)$ fonksiyonu birebirdir. O halde, f nin $y = f(x)$ iken $x = f^{-1}(y)$ tanımı ile $f^{-1} : Y \to X$ tersi vardır (Bkz. Teorem 1.4.14). $f^{-1} : Y \to X$ ters fonksiyonunun tanımı ve (3.2) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$\forall y_1, y_2 \in Y \text{ için } \mathrm{f^{-1}(y_1)} < \mathrm{f^{-1}(y_2)} \Leftrightarrow \mathrm{y_1} < \mathrm{y_2}$$

olduğu elde edilir. Bu da f^{-1} nin aratan olaması demektir. Azalan fonksiyon için ispat benzer şekilde yapılır. □

Önerme 3.2.10 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde monoton artan (veya azalan) $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde ikinci çeşitten süreksizlikleri yoktur.*

İspat: f, X üzerinde monoton artan ve $a \in X$ noktası f nin süreksizlik noktası olsun.a, bir izole noktası olmayacağından dolayı a noktası

$$X^-{}_a = \{x \in X : x < a\} \text{ ve } \mathrm{X^+{}_a} = \{\mathrm{x \in X : x > a}\}$$

kümelerinin en az birinin limit noktasıdır. f, monoton artan olduğuna göre, $\forall x \in X^-{}_a$ için $f(x) \leq f(a)$ dır.f nin $X^-{}_a$ kümesine kısaltılması olan $f\,|_{X^-{}_a}$

fonksiyonu $X^-{}_a$ üzerinde monoton artan ve üstten sınırlı bir fonksiyondur. Buna göre, Teorem 2.4.24 gereğince

$$\lim_{X^-{}_a \exists x \to a} (f \mid_{X^-{}_a})(x) = \lim_{X \exists x \to a^-} f(x) = f(a^-)$$

limiti vardır. Benzer şekilde,

$$\lim_{X^+{}_a \exists x \to a} (f \mid_{X^+{}_a})(x) = \lim_{X \exists x \to a^+} f(x) = f(a^+)$$

limitinin varlığı gösterilir. Monoton azalan fonksiyon için ispat benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 3.2.11 *: Eğer, $x_0 \in (a,b)$ noktası monoton $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksizlik noktası ise*

(a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ *limitlerinden en az biri mevcuttur;*

(b) f monoton aratan ise, $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ eşitsizliklerinden en az birinde $<$ işareti gerçeklenmektedir.

(c) f monoton azalan ise, $f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+)$ eşitsizliklerinden en az birinde $>$ işareti gerçeklenmektedir.

Önerme 3.2.12 *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde monoton artan (veya azalan)$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X üzerinde süreksiz olduğu noktalardan oluşan küme sonlu vaya sayılabilirdir.*

Önerme 3.2.13 *: $[a,b]$ üzerinde monoton artan(azalan)$f : [a,b]$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$(f([a,b]) = [f(b), f(a)]) olmasıdır.*

İspat: İspatı monoton azalan fonksiyon için yapalım.$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli monoton azalan olsun. $f, [a,b]$ üzerinde monoton azalan olduğuna göre, $\forall x \in [a,b]$ için $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$ dir. Buna göre, $f([a,b]) \subset [f(b), f(a)]$ olduğu açıktır. Öte yandan $f, [a,b]$ üzerinde sürekli olduğuna göre, Ara Değer Teoremi gereğince f fonksiyonu $f(b)$ ile $f(a)$ arasındaki her değeri alır. Dolayısıyla, $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ olduğu anlaşılır.

Şimdi monoton azalan $f : [a,b]$ fonksiyonu için $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ olsun. Bu durumda, f nin $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Eger, f fonksiyonu bir $c \in [a,b]$ noktasında süreksiz ise, Sonuç 3.2.11 (c) gereğince $(f(c), f(c^-))$ ve $(f(c), f(c^+))$ aralıklarından en az biri sonludur ve $\exists x_0 \in [a,b]$ öyleki $f(x_0)$ bu aralığın dışında bulunmaktadır. Bu aralığın $(f(c), f(c^-))$ olduğunu varsayalım. f, monoton azalan olduğuna göre, $(f(c), f(c^-)) \subset [f(b), f(a)]$ dır ve buradan da

$$f(x_0) \notin (f(c), f(c^-)) \Longrightarrow f(x_0) \notin [f(b), f(a)]$$

olduğu elde edilir. Bu çelişki varsayımın doğru olmadığını gösterir. Monoton artan fonksiyon için ispat benzer şekilde yapılır. □

Yukarıdaki 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11, 3.2.13 önermeleri gözönüne alındığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.14 (Ters Fonksiyonun Sürekliliği Üzerine) *: $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde artan(azalan) $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $Y = f(X)$ üzerinde artan(azalan) $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ ters fonksiyonu vardır. Üstelik:*

(a) $X = [a,b]$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $Y = f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ $(Y = f([a,b]) = [f(b), f(a)])$ olup f^{-1} fonksiyonu $[f(a), f(b)]([f(b), f(a)])$ aralığı üzerinde süreklidir;

(b) $X = (a,b)$ ve $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ise $Y = f((a,b)) = (f(a^+), f(b^-))(Y = f((a,b)) = (f(b^-), f(a^+)))$ olup f^{-1} fonksiyonu $(f(a^+), f(b^-))((f(b^-), f(a^+)))$ aralığı üzerinde süreklidir.

Örnek 3.2.15 *:*

(a) $y = f(x) = \sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *fonksiyonu* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *üzerinde sürekli ve artan olduğuna göre, Teorem 3.2.14 gereğince onun* $[\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$ *üzerinde sürekli ve artan* $x = f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *tersi vardır.*

(b) $y = f(x) = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *fonksiyonu* $[0, \pi]$ *üzerinde sürekli ve azalan olduğuna göre, Teorem 3.2.14 gereğince onun* $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ *üzerinde sürekli ve azalan* $x = f^{-1}(y) = \arccos y : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *tersi vardır.*

(c) $y = f(x) = \tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *üzerinde sürekli ve artan olduğuna göre, Teorem 3.2.14 gereğince onun* $\mathbb{R}$ *üzerinde sürekli ve artan* $x = f^{-1}(y) = \arctan y : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *tersi vardır.*

(d) $y = f(x) = \cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $(0, \pi)$ *üzerinde sürekli ve azalan olduğuna göre Teorem 3.2.14 gereğince onun* $\mathbb{R}$ *üzerinde sürekli ve azalan* $x = f^{-1}(y) = arccoty : \mathbb{R} \to [0, \pi]$ *tersi vardır.*

(e) $a > 0$ *ve* $a \neq 1$ *için* $y = f(x) = a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde sürekli ve* $a > 1$ *iken artan ve* $0 < a < 1$ *iken azalan olduğuna göre, Teorem 3.2.14 gereğince onun* $(0, +\infty)$ *üzerinde sürekli ve* $a > 1$ *iken artan ve* $0 < a < 1$ *iken azalan* $x = f^{-1}(y) = \log_a y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tersi vardır.*

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $y = f(x) = x^n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *fonksiyonu* $[0, +\infty)$ *üzerinde sürekli ve artan olduğuna göre, Teorem 3.2.14 gereğince onun* $[0, +\infty)$*üzerinde sürekli ve artan* $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *tersi vardır (Bkz. §1.11 , Problem (7)).*

Bu kesimin sonunda düzgün süreklilik gibi özel bir süreklilik kavramı üzerinde duracağız. Bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in X$ noktasında sürekli olması tanımına göre, (Bkz. Tanım 3.1.1) verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bulunan $\delta > 0$ sayısı genel olarak hem ε sayısına hem de a noktasına bağlıdır (Bkz. Problem (1)de (a),(b)). Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a \in X$ noktasında sürekli ve verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bulunan $\delta > 0$

sayısı a noktasından bağımsız olup yalnızca ε na bağlı ise, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklilik özelliğine sahiptir diyeceğiz.

Tanım 3.2.16 *:* $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Eğer,* $\forall \varepsilon > 0$ *sayısı ve* $\forall x_1, x_2 \in X$ *noktaları için*

$$| x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnızca ε *na bağlı bir* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *sayısı varsa,* f *fonksiyonu* X *üzerinde düzgün süreklidir denir.*

Bu tanım ve onun değili kısaca aşağıdaki şekilde söylenebilir. "$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir" $\Longleftrightarrow$"$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$| x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$$

dir.

"$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir" $\Longleftrightarrow$"$\exists \varepsilon > 0$ öyleki $\forall \delta > 0$ için $\exists x_1, x_2 \in X$ öyleki

$$| x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | \geq \varepsilon$$

dir.

Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli ise süreklidir. Gerçekten, Tanım 3.2.16 da $x_1 = x$ ve $x_2 = a$ alınırsa, Tanım 3.1.1 elde edilir. Sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olmayabilir. Az sonra bunu doğrulayan örnekler vereceğiz.

Tanım 3.2.17 *:* $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* X *üzerinde sınırlı olsun.* $d = d(X)$*,* X*in çapı olmak üzere* $\omega_f : (0, d] \to \mathbb{R}_+$*;*

$$\omega_f(\delta) = \omega_f(\delta; X) = \sup\{| f(x_1) - f(x_2) | : x_1, x_2 \in X, | x_1 - x_2 | \leq \delta\}$$

fonksiyonuna f *nin* X *üzerinde süreklilik modülü denir.*

Her $\delta \in (0,d]$ için $\omega_f(\delta) \geq 0$ olduğu açıktır. Üstelik $\omega_f(\delta)$ monoton artandır. Gerçekten,$\forall \delta_1, \delta_2 \in (0,d]$, $\delta_1 < \delta_2$ için

$$\{|\ f(x_1) - f(x_2)\ |: x_1, x_2 \in X, |\ x_1 - x_2\ | \leq \delta_1\} \subset$$
$$\subset \{|\ f(x_1) - f(x_2)\ |: x_1, x_2 \in X, |\ x_1 - x_2\ | \leq \delta_2\}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta_1) &= \sup\{|\ f(x_1) - f(x_2)\ |: x_1, x_2 \in X, |\ x_1 - x_2\ | \leq \delta_1\} \\ &= \sup\{|\ f(x_1) - f(x_2)\ |: x_1, x_2 \in X, |\ x_1 - x_2\ | \leq \delta_2\} \\ &= \omega_f(\delta_2)\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\omega_f(\delta)$ monoton artan ve alttan sınırlı olduğuna göre, Teorem 2.4.28 den dolayı $\lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta)$ limiti mevcuttur.

Tanım 3.2.18 *: $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde sınırlı olsun. Eğer, $\omega_f(\delta^+) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ ise f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.*

Önerme 3.2.19 *: 3.2.16 ve 3.2.18 tanımları denktir.*

Örnek 3.2.20 *:*

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $\forall \delta > 0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1$ bir tamsayı olmak üzere $(0,1)$ aralığının $x_1 = \frac{1}{n_0}$ ve $x_2 = \frac{1}{n_0+1}$ noktaları için

$$|\ x_1 - x_2\ | = \frac{1}{n_0(n_0+1)} < \frac{1}{{n_0}^2} \leq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\delta}}+1)^2} < \delta$$

olmasına rağmen

$$|\ f(x_1) - f(x_2)\ | = |\ \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\ | = |\ n - (n+1)\ | = 1 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

(b) $f : (0,1) \to (-\infty, 0), f(x) = \ln x$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten, $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln 2$ ve $\forall \delta > 0$ sayısı için $n_0 > \frac{1}{2\delta}$ bir tamsayı olmak üzere $(0,1)$ aralığının $x_1 = \frac{1}{n_0}$ ve $x_2 = \frac{1}{2n_0}$ noktaları için

$$|\ x_1 - x_2\ | = |\ \frac{1}{n_0} - \frac{1}{2n_0}\ | = \frac{1}{2n_0} < \delta$$

olmasına rağmen

$$|\ f(x_1) - f(x_2)\ | = |\ \ln\frac{1}{n_0} - \ln\frac{1}{2n_0}\ | = |\ \ln 2\ | = \ln 2 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $(0,1)$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

(c) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ ve $\forall \delta > 0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{1}{4\delta^2}$ bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{R}$ nin $x_1 = \sqrt{n_0}$ ve $x_2 = \sqrt{n_0+1}$ noktaları için

$$|\ x_1 - x_2\ | = |\ \sqrt{x_0} - \sqrt{n_0+1}\ | = \frac{1}{\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n_0}} < \delta$$

olmasına rağmen

$$|\ f(x_1) - f(x_2)\ | = |\ {x_1}^2 - {x_2}^2\ | = |\ n_0 - (n_0+1)\ | = 1 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

(d) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to [-1,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten, $\forall \delta > 0$ için

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|\ \sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\ |: x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \ |\ x_1 - x_2\ | \leq \delta\} = 2$$

ve $\lim\limits_{\delta \to 0_+} \omega_f(\delta) = 2 \neq 0$ olduğuna göre, Tanım 3.2.18 gereğince $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

(e) $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgün süreklidir. Gerçekten,* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\delta = \varepsilon$ *dersek* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned} | x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | &= | \sin x_1 - \sin x_2 | \\ &= | 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} | \\ &= 2 \, | \sin \frac{x_1 - x_2}{2} | \, | \cos \frac{x_1 + x_2}{2} | \\ &\leq 2 \frac{| x_1 - x_2 |}{2} . 1 \\ &= | x_1 - x_2 | < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan Tanım 3.2.16 gereğince $f(x) = \sin x$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgün süreklidir.*

Not: Örnek 3.2.20'de (a),(b),(c) ve (d) şıklarındaki fonksiyonların tanım bölgelerinin $\mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlı (veya birbaşka deyişle $\mathbb{R}$ de kompakt) bir küme olmadığına dikkat ediniz. •

Teorem 3.2.21 (Düzgün Süreklilik Üzerine Cantor Teoremi) *:* $\mathbb{R}$ *nin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi üzerinde sürekli her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir.*

İspat: Kabul edelim ki, kapalı ve sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesinde sürekli bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir. O halde, $\exists \varepsilon_0 > 0$ öyleki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$| x'_n - x''_n | < \frac{1}{n} \tag{3.3}$$

ve

$$| f(x'_n) - f(x''_n) | \geq \varepsilon_0 \tag{3.4}$$

olacak şekilde $x'_n, x''_n \in X$ noktaları vardır. (x'_n) dizisi sınırlı olduğuna göre, (X sınırlı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x'_n \in X \Longrightarrow (x_n)$ sınırlı)Bolzano-Weierstrass

Prensibi gereğince (Bkz. Lemma 1.13.31)(x'_n) dizisisinin yakınsak bir (x'_{n_k}) alt dizisi vardır. $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0$ olsun. X kapalı olduğundan dolayı $x_0 \in X$ dir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} | x''_{n_k} - x_0 | &\leq | x''_{n_k} - x'_{n_k} | + | x'_{n_k} - x_0 | \\ &\leq [(3.3) \text{ ten dolayı}] \\ &\leq \frac{1}{n_k} + | x'_{n_k} - x_0 | \end{aligned}$$

dır. $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$ ve $\lim_{k\to\infty} | x'_{n_k} - x_0 | = 0$ olduğuna göre, son eşitsizlikten

$$\lim_{k\to\infty} | x''_{n_k} - x_0 | = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = x_0$$

bulunur. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{k\to\infty} | f(x'_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) | = | f(x_0) - f(x_0) | = 0$$

bulunur. Bu (3.4)e göre $\forall k \in \mathbb{N}$ için $| f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) | \geq \varepsilon$ ile çelişir. Buna göre, f ,X üzerinde düzgün süreklidir. □

Sonuç 3.2.22 *:* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *aralığında sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün süreklidir.*

$X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde sınırlı olsun. $x_0 \in X$ ve $\delta > 0$ için

$$m_\delta(f, x_0) = m_{x_0}(f, X)(\delta) = \inf\{f(x) : x \in U_\delta(x_0) \cap X\},$$
$$M_\delta(f, x_0) = M_{x_0}(f, X)(\delta) = \sup\{f(x) : x \in U_\delta(x_0) \cap X\}$$

olsun. $M_\delta(f, x_0)$ ve $m_\delta(f, x_0)$ fonksiyonları δ ya göre sırasıyla azalmayan ve artmayan olduğundan dolayı $M_\delta(f, x_0) - m_\delta(f, x_0)$ fonksiyonu δ ya göre azalmayandır. Buna göre,

$$\lim_{\delta\to 0^+} [M_\delta(f, x_0) - m_\delta(f, x_0)] = \Omega(f, x_0)$$

limiti mevcuttur. $\Omega(f, x_0)$ büyüklüğüne f fonksiyonunun x_0 noktasında sıçraması denir (Bkz. Tanım 2.4.37).

Not: Tanım 2.4.31 gözönüne alındığında

$$\Omega(f, x_0) = \inf\{d(U_\delta(x_0) \cap X) : \delta > 0\}$$

olduğu açıktır. •

Teorem 3.2.23 *: Kapalı ve sınırlı (kompakt) $X \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesine göre $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu noktada f nin sıçramasının sıfır, yani $\Omega(f, x_0) = 0$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.24 *: $A = \{x : x \in [0,1]$ rasyonel$\}$ ve $B = \{x : x \in [0,1]$ irrasyonel$\}$ olmak üzere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise,} \\ 0, & x \in B \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde $\forall a \in [0,1]$ noktasında süreksiz olup $A \subset [0,1]$ kümesi üzerinde $\forall a \in A$ noktasında süreklidir. Çünkü, $\forall a \in A$ ve $\forall \delta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} M_a(f, A)(\delta) &= \sup\{f(x) : x \in U_\delta(a) \cap A\} = 1 \\ &= \inf\{f(x) : x \in U_\delta(a) \cap A\} = m_a(f, A)(\delta) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\Omega(f, a) = \lim_{\delta \to 0^+} [M_a(f, A)(\delta) - m_a(f, A)(\delta)] = 0$ dır.

Tanım 3.2.25 *: $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f nin X deki birinci çeşit süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise, f fonksiyonu X üzerinde parçalı süreklidir denir.*

Örneğin, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu $b - a \geq 1$ olmak üzere herbir $[a, b]$ aralığında parçalı süreklidir.

3.3 Çözümlü Problemler

(1) "$\varepsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; (b) $f(x) = x^3$; (c) $f(x) = \cos(3x + 2)$.

Çözüm: (a) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin.$x \in \mathbb{R}$ için $| x - x_0 | < \delta < 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} | f(x) - f(x_0) | &= | 3(x^2 - {x_0}^2) - 2(x - x_0) | \\ &\leq (3 | x + x_0 | + 2) | x - x_0 | \\ &| \ [|x - x_0| < 1 \Longrightarrow | x + x_0 | \\ &\leq | x | + | x_0 | \leq | x - x_0 | + 2 | x_0 | < 1 + 2 | x_0 | \ ] \\ &\leq (5 + 6 | x_0 |) | x - x_0 | \\ &\leq (5 + 6 | x_0 |)\delta \end{aligned}$$

dır. $(5 + 6 | x_0 |)\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{5+6|x_0|}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5+6|x_0|}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $| x - x_0 | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ olduğu, yani $3x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.

(b) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. $x \in \mathbb{R}$ için $| x - x_0 | < \delta$ olduğunda,

$$\begin{aligned} | {x^3} - {x_0}^3 | &= | x^2 + x x_0 + {x_0}^2 | \, | x - x_0 | \\ &\leq (| x |^2 + | x | \, | x_0 | + | x_0 |^2) | x - x_0 | \\ &\quad [| x - x_0 | < 1 \Longrightarrow | x | < 1 + | x_0 |] \\ &\leq (1 + 3 | x_0 | + 2 | x_0 |^2) | x - x_0 | \\ &< (1 + 3 | x_0 | + 2 | x_0 |^2)\delta \end{aligned}$$

dır. $(1 + 3 | x_0 | + 2 | x_0 |^2)\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+2|x_0|^2}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+3|x_0|+2|x_0|^2}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$

için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid x^3 - {x_0}^3 \mid < \varepsilon$ olduğu, yani x^3 fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre, bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.

(c) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası verilsin.$x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned} \mid \cos(3x+2) - \cos(3x_0+2) \mid &= \mid -2\sin\frac{3(x-x_0)}{2}\sin\frac{3(x+x_0+4)}{2} \mid \\ &\quad [\mid \sin\frac{3(x+x_0+4)}{2} \mid \leq 1 \\ &\quad \text{ve} \mid \sin\frac{3(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{2} \mid \leq \frac{3}{2} \mid \mathrm{x}-\mathrm{x}_0 \mid] \\ &\leq 2\frac{3}{2} \mid x - x_0 \mid = 3 \mid x - x_0 \mid < 3\delta \end{aligned}$$

dır. $3\delta < \varepsilon$ dan $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ bulunur. Burada, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ seçimi yapıldığında $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid \cos(3x+2) - \cos(3x_0+2) \mid < \varepsilon$ olduğu, yani $\cos(3x+2)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğu anlaşılır.$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğuna göre, bu fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir. $\diamond$

(2) $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve süreklilik kümesi $S(f) = \{-1, 1\}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise,} \\ x^2 - 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu -1 ve 1 noktalarında sürekli olup $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ noktasında ikinci çeşit süreksizliğe sahiptir. Gerçekten, $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için ${x'}_n \in \mathbb{Q}$ ve ${x''}_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} {x'}_n = \lim\limits_{n\to\infty} {x''}_n = a$ koşullarını sağlayan $({x'}_n)$ ve $({x''}_n)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f({x'}_n) = 0 \neq a^2 - 1 = \lim_{n\to\infty} f({x''}_n)$$

olduğuna göre, fonksiyon $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ noktasında süreksizdir.
$a = 1$(veya $a = -1$) için $x_n \in \mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (veya $= -1$) koşullarını

sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$$

olduğuna göre, $S(f) = \{-1, 1\}$ dir. $\diamond$

(3) $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı ve süreklilik kümesi $S(f) = \mathbb{Z}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise,} \\ \sin \pi x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{ise.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu için $S(f) = \mathbb{Z}$ olduğunu gösterelim.$\forall a \in \mathbb{Z}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0) \Longrightarrow f, a \in \mathbb{Z} \text{ noktasında süreklidir}$$

$\forall a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için ${x'}_n \in \mathbb{Q}$, ${x''}_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} {x'}_n = \lim\limits_{n\to\infty} {x''}_n = a$ koşullarını sağlayan $({x'}_n)$ ve $({x''}_n)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f({x'}_n) = 0 \neq \sin \pi a = \lim_{n\to\infty} f({x''}_n)$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti yoktur. Buna göre, fonksiyon $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ nin tamamında süreksizdir. $\diamond$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \in \mathbb{Q} \quad \text{ise,} \\ x^2, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $S(f)$ süreklilik kümesini bulunuz.

Çözüm: $\forall a \in \mathbb{R}$,$\forall n \in \mathbb{N}$ için ${x'}_n \in \mathbb{Q}$, ${x''}_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} {x'}_n = \lim\limits_{n\to\infty} {x''}_n = a$ koşullarını sağlayan $({x'}_n)$ ve $({x''}_n)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f({x'}_n) = \lim_{n\to\infty} (3{x'}_n - 2) = 3a - 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} (x''_n)^2 = a^2$$

bulunur. Buna göre, f nin a da sürekli olması için $a^2 = 3a - 2$, yani $a = 1$ ve $a = 2$ olmalıdır. Dolayısıyla, $S(f) = \{1, 2\}$ dir. $\diamond$

(5) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz. Süreksiz oldukları durumlarda süreksizlik çeşidini belirtiniz.

(a) $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] + [\![-x]\!], & x \notin \mathbb{Z} \quad \text{ise,} \\ -1, & x \in \mathbb{Z} \quad \text{ise;} \end{cases}$

(c) $f(x) = x^2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$;

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \ \text{ ise,} \\ 2, & x = 0 \ \text{ ise;} \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \text{ ise,} \\ 4, & \text{x=1 ise;} \end{cases}$

(f) $f(x) = x\,[\![x]\!]$;

(g) $f(x) = \begin{cases} x\,[\![\frac{1}{x}]\!], & x \neq 0 \quad \text{ise,} \\ 1, & x = 0 \quad \text{ise;} \end{cases}$

(h) $f(x) = [\![x]\!] \sin \pi x$;

(i) $f(x) = [\![x]\!]\,([\![x]\!] - (-1)^{[[x]]} \cos \pi x)$;

(j) $f(x) = (-1)^{[[x]]}$;

(k) $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \ \text{ ise,} \\ 1, & x = 0 \ \text{ ise;} \end{cases}$

(l) $f(x) = \dfrac{|\, x \,|}{\arctan x}$;

(m) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |\, x \,| \leq 1 \ \text{ ise,} \\ |\, x - 1 \,|, & |\, x \,| > 1 \ \text{ ise;} \end{cases}$

(n) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} \ \text{ ise,} \\ 1, & x = \frac{\pi}{4} \ \text{ ise,} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi \ \text{ ise;} \end{cases}$

(o) $f(x) = \log(x-1)^2$.

Çözüm: (a) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] = n$ olduğuna göre, $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\,|_{I_n})(x) = \sqrt{x-n}$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = 0$, $f(n^-) = \lim\limits_{x\to n^-} \sqrt{x-n+1} = 1$, $f(n^+) = \lim\limits_{x\to n^+} \sqrt{x-n} = 0$ ve $f(n^-) = 1 \neq f(n) = f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(b) $n < x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![x]\!] = n$ ve $[\![-x]\!] = -n-1$ olduğuna göre, $I_n = (n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\,|_{I_n})(x) = -1$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = 0$, $f(n^-) = \lim\limits_{x\to n^-} (\,[\![x]\!] - [\![-x]\!]\,) = n - 1 + (-n) = -1$, $f(n^+) = \lim\limits_{x\to n^+} (\,[\![x]\!] + [\![-x]\!]\,) = n + (-n-1) = -1$ ve $f(n^-) = -1 \neq f(n) \neq -1 = f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktalarıdır.

(c) $f(\pm 1) = 0$ olduğu açıktır. $|\, x \,| > 1$ için $f(x) = x^2 + 1 \Longrightarrow f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$,

$$f(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} (x^2+1) = 2,$$

ve $|\, x \,| < 1$ için $f(x) = x^2 - 1 \Longrightarrow f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-1) = 0$,

$$f(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} (x^2-1) = 0$$

bulunur. $f(-1^-) = 2 \neq 0 = f(-1) = f(-1^+)$ ve $f(1^-) = 0 = f(0) \neq f(1^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ dir. $x = \pm 1$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(d) $2\sin x, |\, x \,| \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x \neq 0$ için $|\, x \,| \neq 0$ olduğuna göre, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin x}{-x} = -2, f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x}{x} = 2$$

olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dır. $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(e) $x^3 - 1,\ x^2 - 1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x \neq 1$ için $x^2 - 1 \neq 0$ olduğuna göre, $\frac{x^3-1}{x^2-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ dir. $\forall x \neq 1$ için $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ olduğuna göre

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2},\ f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

bulunur. $f(1^-) = f(1^+) = \frac{3}{2} \neq 4 = f(1)$ olduğuna göre $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ dir. $x = 1$ noktası fonksiyonun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

(f) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![\, x \,]\!] = n$ ve $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x) = nx$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n^2$, $f(n^-) = \lim_{x\to n^-} (n-1)x = (n-1)n$, $f(n^+) = \lim_{x\to n^+} nx = n^2$ ve $f(n^-) = (n-1)n \neq n^2 = f(n) = f(n^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(g) $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $I_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x) = nx$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $f(\frac{1}{n}) = 1, f(\frac{1}{n}^+) = \lim_{x\to \frac{1}{n}+} x\,[\![\, \frac{1}{x} \,]\!] = \frac{n-1}{n}$ bulunur. $f(\frac{1}{n}) \neq f(\frac{1}{n}+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dir. $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

Şimdi fonksiyonun $x = 0$ noktasında süreklilik durumunu inceliyelim. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ için

$$\frac{n}{n+1} < x\,[\![\, \frac{1}{x} \,]\!] < \frac{n+1}{n} \tag{3.5}$$

olduğu açıktır. $n \to \infty \Longrightarrow x \to 0+$ iken [(3.5)ten dolayı]

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x\,[\![\, \frac{1}{x} \,]\!] = 1.\, [\![\, \frac{1}{x} \,]\!] = -n, n \in \mathbb{N} \text{ ise}$$

$$-n \leq \frac{1}{x} < -n+1, -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{-n}$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{-n}{-n+1} < x\,[\![\, \frac{1}{x} \,]\!] < \frac{-n+1}{-n} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) dan dolayı,

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x\,[\![\, \frac{1}{x} \,]\!] = 1$$

bulunur. Buna göre, $f(0^-) = f(0) = f(0^+) = 1$ eşitliklerinden fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olduğu anlaşılır.

(h) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![\, x \,]\!] = n$ olduğuna göre, $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x) = n\sin\pi x$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n\sin\pi n = 0$, $f(n^-) = \lim_{x\to n^-} (n-1)\sin\pi x = (n-1)\sin\pi n = 0$, $f(n^+) = \lim_{x\to n^+} n\sin\pi x = n\sin n\pi = 0$ bulunur. $f(n^-) = f(n) = f(n^+) = 0$ olduğuna göre, fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.

(i) $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $[\![\, x \,]\!] = n$ olduğuna göre, $I_n = [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x) = n(n-(-1)^n\cos\pi x)$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f(n) &= n(n-(-1)^n\cos\pi n) = n(n-(-1)^n(-1)^n) = n(n-1), \\ f(n^-) &= \lim_{x\to n^-} (n-1)(n-1-(-1)^{n-1}\cos\pi x) = \\ &= (n-1)(n-1-(-1)^{n-1}(-1)^n = (n-1)n, \\ f(n^+) &= \lim_{x\to n^+} n(n-(-1)^n\cos\pi x) = n(n-1) \end{aligned}$$

bulunur. $f(n^-) = f(n) = f(n^+)$ olduğuna göre, fonksiyon $\mathbb{R}$ nin tamamında süreklidir.

(j) $2n \leq x < 2n+1, n \in \mathbb{Z}$ ise $(-1)^{[|x|]} = 1$ olduğuna göre, fonksiyon $I_n = [2n, 2n+1), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{I_n})(x) = 1$ fonksiyonu I_n aralığında süreklidir. Benzer şekilde $J_n = [2n-1, 2n), n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(f\mid_{J_n})(x) = -1$ fonksiyonu J_n aralığında süreklidir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$f(2n) = 1, \quad f(2n-1) = -1 \quad f(2n^-) = \lim_{x\to 2n^-} (-1)^{2n-1} = -1,$$

$$f(2n^+) = \lim_{x\to 2n^+} (-1)^{2n} = 1\ f((2n-1)^-) = \lim_{x\to (2n-1)^-} (-1)^{2n-2} = 1,$$

$$f((2n-1)^+) = \lim_{x\to (2n-1)^+} (-1)^{2n-1} = -1$$

bulunur. $f(2n^-) = -1 \neq 1 = f(2n) = f(2n^+)$ ve $f((2n-1)^-) = 1 \neq -1 = f(2n-1) = f((2n-1)^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ dir. $x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(k) Terimleri $x'_n = \frac{1}{n\pi}, x''_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ biçiminde tanımlı (x'_n)ve(x''_n) dizilerini gözönüne alalım. $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur.$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $x = 0$ noktası ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(l) $|\ x\ |$, $\arctan x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $x \neq 0$ için $\arctan x \neq 0$ olduğuna göre, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır. $x \to 0$ iken $\arctan x \sim x$ olduğundan dolayı

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\ x\ |}{\arctan x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\arctan x} = -1\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ x\ |}{\arctan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\arctan x} = 1$$

bulunur. Buna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(m) $f \in \mathcal{C}([-1,1]\bigcup(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty))$ olduğu açıktır. $f(1) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$, $f(1^+) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$, $f(-1) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(-1^-) = \lim_{x\to -1^-}(1-x) = 2$, $f(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$, bulunur. $f(-1^-) = 2 \neq 0 = f(-1) = f(-1^+)$ ve $f(1^-) = 0 = f(1) = f(1^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dir. $x = -1$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(n) $f \in \mathcal{C}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]\bigcup(\frac{\pi}{4}, \pi))$ olduğu açıktır. $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}^-) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\frac{\pi}{4}^+) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(x^2 - \frac{\pi^2}{16}) = 0$ ve $f(\frac{\pi}{4}^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 = f(\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4}^+)$ olduğuna göre, $S(f) = \{\frac{\pi}{4}\}$ dir. $x = \frac{\pi}{4}$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(o) $(x-1)^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ve $\ln u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ olduğuna göre, $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ dir. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \log(x-1)^2 = -\infty$ olduğuna göre, $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ dir. $x = 1$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır. $\diamond$

(6) Aşağıdaki eşitlikler ile tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{R}$ nin hangi noktalarında süreksizdir? Süreksizlik çeşidini belirleyiniz.

$(a)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$;

$(b) f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(c) f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise,} \\ 1, & x = 0 \text{ ise,} \\ 1+\tan x, & x > 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(d)\quad f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

$(e)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$;

$(f)\quad f(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}$;

$(g)\quad f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}$;

$(h)\quad f(x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x^3-x^2}$;

$(i)\quad f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}$;

$(j)\quad f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Çözüm: (a) Pay ve payda $\mathbb{R}$ de sürekli ve $\forall x \neq \pm 3$ için $x^2 - 9 \neq 0$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{-3,3\})$ dir. $f(-3^-) = +\infty$, $f(-3^+) = -\infty$, $f(3^-) = -\infty$, $f(3^+) = +\infty$ olduğuna göre, fonksiyon $x = \pm 3$ noktasında bir sonsuz süreksizliğe sahiptir.

(b) $\dfrac{\pi}{x} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ve $\sin y \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ olduğuna göre, $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\pi}{x}$ limitinin mevcut olmadığını biliyoruz. Dolayısıyla, $x = 0$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(c) $x^2 \in C((-\infty,0))$ ve $\tan x \in C(\mathbb{R}_+\backslash\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0,1,2,\ldots\})$ olduğuna göre, $f(x) \in C((-\infty,0)) \cup (\mathbb{R}_+\backslash\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n = 0,1,2,\ldots\})$ dır. $f(0) = 1$, $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$, $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}(1+\tan x) = 1$ bulunur. $f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0) = f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır. $\forall n = 0,1,2,\ldots$ için

$$f((\tfrac{\pi}{2} + n\pi)^-) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-}(1+\tan x) = +\infty$$

$$f((\tfrac{\pi}{2} + n\pi)^+) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^+}(1+\tan x) = -\infty$$

olduğuna göre, $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0,1,2,\ldots$ noktaları fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(d) $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{1\})$ olduğu açıktır.

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1,$$

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

ve $f(1^-) \neq f(1^+)$ olduğuna göre, $x = 1$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(e) $x^3 - 3x^2 - 4x \in C(\mathbb{R})$ ve $x \notin \{-1, 0, 4\}$ için $x^3 - 3x^2 - 4x \neq 0$ olacağından, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 4\})$ dır. $x \notin \{-1, 0, 4\}$ için

$$f(x) = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{20(x-4)} + \frac{1}{5(x+1)}$$

olduğu açıktır. $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x-4}$ Fonksiyonları sırasıyla $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 4$ noktalarında, dolayısıyla, $f(x)$ fonksiyonu -1, 0 ve 4 noktalarında ikinci çeşit süreksizliğe sahiptir.

(f) $\sin x \in C(\mathbb{R})$ ve $\sin\frac{1}{x} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dir. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$|f(x)| = |\sin x||\sin\tfrac{1}{x}| \leq |\sin x| \leq |x|$$

olduğuna göre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ bulunur. Buna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = 0$ tanımıyla $f \in C(\mathbb{R})$ olur.

(g) $\arcsin x \in C([-1, 1])$, $\sin 2x \in C(\mathbb{R})$ ve $\forall x \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ için $\sin 2x \neq 0$ olduğuna göre, $f \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ olur. $x \to 0$ iken $\arcsin x \sim x$ ve $\sin 2x \sim 2x$ olduğuna göre,

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

ve benzer şekilde $f(0^+) = \frac{1}{2}$ dir. $f(0^-) = f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0) = \frac{1}{2}$

tanımıyla $f \in C(\mathbb{R})$ olur.

(h) $\cos(\frac{x\pi}{2}) \in C(\mathbb{R})$, $x^3 - x^2 \in C(\mathbb{R})$ ve $x \neq 0$, $x \neq 1$ için $x^3 - x^2 \neq 0$ olduğuna göre, $f(x) \in C(\mathbb{R}\backslash\{0, 1\})$ dir. $f(0^-) = f(0^+) = -\infty$ olduğu açıktır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(x-1))}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}{x-1}$$
$$[x \to 1 \text{ iken } \sin\tfrac{\pi}{2}(x-1) \sim \frac{\pi}{2}(x-1)]$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}(x-1)}{x-1} = -\frac{\pi}{2}$$

bulunur. Buna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun ikinci çeşit süreksizlik ve $x = 1$ noktası da fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(1) = -\frac{\pi}{2}$ tanımıyla fonksiyon $x = 1$'de süreklidir.

(i) $\frac{1}{x}$, $3^{\frac{1}{x}}$, $2^{\frac{1}{x}} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ olduğuna göre, $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} + 1}{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}} - 1} \; [x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow (\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{x}} = 0] = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 + (\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}}{1 - (\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}} \; [x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow (\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{x}} \to 0] = 1$$

bulunur. $f(0^-) \neq f(0^+)$ olduğuna göre, $x = 0$ noktası fonksiyonun birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(j) $\frac{1}{x} \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ve $\ln\frac{1+x}{1-x} \in C((-1, 1))$ olduğuna göre, $f \in C((-1, 1)\backslash\{0\})$ dır.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln\big(\frac{1+x}{1-x}\big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \ln(1 + \frac{2x}{1-x})^{\frac{1}{x}}$$
$$= \ln[\lim_{x\to 0}(1 + \frac{2x}{1-x})^{\frac{1}{x}}] = \ln e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$
$$= \ln e^2 = 2$$

bulunur. Dolayısıyla, $x=0$ noktası fonksiyonun bir kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f(0)=2$ tanımıyla $f\in C((-1,1))$ olur. $\diamond$

(7) Aąğıdaki fonksiyonların sürekli olması için a ne olmalıdır?

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3}, & x\neq -3 \quad \text{ise},\\ a, & x=-3 \quad \text{ise};\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}(\pi+2x)\tan x, & x\in(-\pi,\frac{\pi}{2})\backslash\{-\frac{\pi}{2}\} \quad \text{ise},\\ a, & x=-\frac{\pi}{2} \text{ ise};\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sinh x}{x}, & x\neq 0 \text{ ise},\\ a, & x=0 \quad \text{ise};\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \text{ ise},\\ a, & x=0 \text{ ise};\end{cases}$ (e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & x\neq 0 \text{ ise},\\ a, & x=0 \text{ ise}.\end{cases}$

Çözüm: (a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6$ olduğuna göre, fonksiyonun -3 noktasında sürekli olması, yani $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)$ olması için $a=-6$ olmalıdır.
(b) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}(\pi+2x)\tan x[\pi+2x=y\Rightarrow x\to -\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow y\to 0]=\lim\limits_{y\to 0} y\tan(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{y\to 0} y\cot\frac{y}{2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}\cos\frac{y}{2}=2$ olduğuna göre, fonksiyonun $x=-\frac{\pi}{2}$ noktasında sürekli olması için $a=2$ olmalıdır.
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}=\frac{1}{2}[\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}]=\frac{1}{2}(1+1)=1$ olduğuna göre, fonksiyonun $x=0$ noktasında sürekli olması için $a=1$ olmalıdır.
(d) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ $[\frac{1}{x^2}=y\Rightarrow x\to 0\Leftrightarrow y\to+\infty]=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty} e^y}=\frac{1}{+\infty}=0$ olduğuna göre, fonksiyonun $x=0$ noktasında sürekli olması için $a=0$ olmalıdır.
(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}[y=(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\Rightarrow x\to 0\Leftrightarrow y\to e]=\frac{1}{2}\frac{1}{\lim\limits_{y\to e}\ln y}=\dfrac{1}{2\ln e}=\frac{1}{2}$ olduğuna göre, fonksiyonun $x=0$ noktasında sürekli olması için $a=\frac{1}{2}$ olmalıdır. $\diamond$

(8) Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

(a) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\leq 0 \quad \text{ise},\\ ax+b, & 0<x<1 \text{ ise},\\ \sqrt{x}, & x\geq 1 \quad \text{ise};\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}(x^2)^a\sin^b(x^2), & x\neq 0 \text{ ise},\\ 0, & x=0 \text{ ise}.\end{cases}$

Çözüm: (a)

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)^3=-1,\quad f(0)=(0-1)^3=-1,$$
$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b,\quad f(1)=\sqrt{1}=1,$$
$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b, f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{1}=1$$

bulunur. Fonksiyonun 0 ve 1 noktalarında sürekli olması için sırasıyla $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$ veya $b=-1$ ve $f(1^-)=f(1)=f(1^+)$ veya $a+b=1$ olmalıdır. Buna göre, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ olması için $a=2$ ve $b=-1$ olmalıdır.
(b) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $f(x)=(x^2)^{a+b}.(\frac{\sin x^2}{x^2})^b$ ve $\forall b\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x^2}{x^2})^b=1$ olduğu açıktır. O halde, fonksiyonun 0 noktasında sürekli olması için

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2)^{a+b}$$

olmalıdır. Bu da yalnızca $a+b>0$ durumunda mümkündür. Dolayısıyla, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ olması için $a+b>0$ olmalıdır. $\diamond$

(9) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ g)$ ve $(g\circ f)$ bileşke fonksiyonlarının süreklilik durumunu inceleyiniz.
(a) $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=1+x^2$; (b) $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=x-x^3$;
(c) $f(x)=1-\mid x-1\mid$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q} \text{ ise},\\ 2-x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{ise}.\end{cases}$

Çözüm: (a) $f(g(x)) = \text{sgn}(1+x^2) = 1$ ve $g(f(x)) = 1 + (\text{sgn}x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 1, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ bulunur. Buna göre, $(f \circ g) \in C(\mathbb{R})$ ve $(g \circ f) \in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dır. (Bkz. şekil 3.4).

(b) $f(g(x)) = \text{sgn}(x - x^2) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ ve } x < -1 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ve } x = \pm 1 \text{ ise,} \\ -1, & x > 1 \text{ ve } -1 < x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ ve $g(f(x)) = \text{sgn}(1 - \text{sgn}^2 x) = 0$ bulunur. Buna göre, $(f \circ g) \in C(\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\})$ ve $(g \circ f) \in C(\mathbb{R})$ (Bkz. şekil 3.5).

(c) $x \in \mathbb{Q}$ için $f(g(x)) = 1 - |x-1|$ ve $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ için $f(g(x)) = 1 - |1-x|$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(g(x)) = 1 - |x-1|$ dir. Benzer şekilde

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 - |x-1|, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise,} \\ 1 + |x-1|, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bulunur. Demek ki, $f \circ g \in C(\mathbb{R})$ ve $g \circ f$ fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olup herhangi bir $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ noktasında süreksizdir.$\diamond$

(10) Reel katsayılı ve tek dereceli polinom denklemin, yani

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

denklemin en az bir reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_0 > 0$ olsun. $q_{2n+1}(\frac{1}{x}) = \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} \\ &= x^{2n+1}(a_0 + q_{2n+1}(\tfrac{1}{x})) \end{aligned}$$

ve $\lim_{x \to +\infty} q_{2n+1}(\frac{1}{x}) = 0$ olduğuna göre, $\exists \Delta > 0$ öyle ki, $\forall x > \Delta$ için $|q_{2n+1}(\frac{1}{x})| < \frac{a_0}{2}$ olur. Buna göre, $\forall x > \Delta$ için

$$P_{2n+1}(x) = x^{2n+1}(a_0 + q_{2n+1}(\tfrac{1}{x})) > \frac{a_0}{2} x^{2n+1}$$

olduğu elde edilir. Demek ki, $\lim_{x \to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$ olduğu bulunur.

$$\lim_{x \to +\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty \Rightarrow \forall \epsilon_1 > 0, \ \exists \delta_1 > 0 \ \text{ öyle ki, } \ \forall x \geq \delta_1$$

için $P_{2n+1}(x) > \epsilon_1$ olur.

Benzer şekilde, $\lim_{x \to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\lim_{x \to -\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty \Rightarrow \forall \epsilon_2 > 0, \ \exists \delta_2 > 0 \ \text{ öyle ki, } \ \forall x \leq -\delta_2$$

için $P_{2n+1}(x) < -\epsilon_2$ olur.

Dolayısıyla, $P_{2n+1}(\delta_1) > 0$ ve $P_{2n+1}(-\delta_2) < 0$ olacak şekilde bir $[a, b] = [-\delta_2, \delta_1] \subset \mathbb{R}$ aralığının varlığı anlaşılır. $P_{2n+1}(x) \in C([a, b])$ olduğuna göre, Bolzano-Cauchy Teoremi gereğince $P_{2n+1}(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır. $a_0 < 0$ durumu benzer şekilde incelenebilir. $\diamond$

(11) $f([0,1]) \subset [0,1]$ koşulunu sağlayan her $f \in C([0,1])$ fonksiyonunun $[0,1]$ de bir sabit noktaya ($f(x_0) = x_0$ olacak şekilde $x_0 \in [0,1]$ noktasına f nin bir sabit noktası denir) sahip olacağını gösteriniz.

Çözüm: $[0,1]$ üzerinde sürekli $\varphi(x) = x - f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\varphi(0) = -f(0) \leq 0$ ve $\varphi(1) = 1 - f(1) \geq 0$ olduğu açıktır. $f(0) = 0$ veya $f(1) = 1$ ise 0 veya 1 noktası f nin sabit noktası olur.$f(0) > 0$ ve $f(1) > 0$ olduğu durumlarda $\varphi(0) < 0$ ve $\varphi(1) > 0$(veya $\varphi(0)\varphi(1) < 0$) olduğundan, Bolzano-Cauchy teoremi gereğince $\varphi(x_0) = 0$ veya $x_0 = f(x_0)$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (0,1)$ noktası vardır. Böylece, bu durumlarda da f nin sabit noktaya sahip olduğu elde edilir. $\diamond$

(12) $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $g \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$ ise, $f(x_0) = g(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in (a,b)$ noktasının mevcut olacağını gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = g(x) - f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.$F \in \mathcal{C}[a,b]$, $F(a) = g(a) - f(a) < 0$ ve $F(b) = g(b) - f(b) > 0$ olduğu açıktır. Buna göre, Bolzano-Cauchy teoremi gereğince $F(x_0) = 0$, yani $f(x_0) = g(x_0)$ olacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır. $\diamond$

(13) $f((0,1)) \subset (0,1)$ koşulunu sağlayan ve $(0,1)$ de sabit noktaya sahip olmayan bir $f \in \mathcal{C}(0,1)$ fonksiyon örneği veriniz.

Çözüm: $f : (0,1) \to (0,1)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun ($f(0,1) \subset (0,1)$ ve $x^2 \in \mathcal{C}(0,1)$ olduğu açıktır) $(0,1)$ de sabit noktası yoktur. $\diamond$

(14) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve x_1, x_2, x_3 bu aralığın herhangi üç noktası olsun. Bu durumda,

$$f(c) = \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olacağını gösteriniz.

Çözüm: $x_1 < x_2 < x_3$ ve $m = \inf\{f(x) : x \in [x_1, x_3]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [x_1, x_3]\}$ olsun. $\min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = A$ ve $\max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = B$ dersek

$$A \leq \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \leq B$$

ve $[A,B] \subset [m,M]$ olduğu açıktır. $f \in \mathcal{C}[x_1, x_3]$ olduğuna göre, Ara Değer teoremi gereğince

$$f(c) = \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası mevcuttur. $\diamond$

(15) $X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise, $\mid f(x) \mid$ de X kümesi üzerinde de bu noktada sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesine göre $x_0 \in X$ noktasında süreklidir $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\forall x \in X$ için $\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon$ dır". Bu durumda, aynı x ler için

$$|| f(x) \mid - \mid f(x_0) \mid| \leq \mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon$$

olduğundan dolayı $\mid f \mid$ fonksiyonu X kümesi üzerinde x_0 noktasında süreklidir. $\diamond$

Not: Problem (15) ten $X \subset \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow \mid f \mid \in \mathcal{C}(X)$ sonucu elde edilir. $\bullet$

(16) $[0,1]$ aralığında tanımlı öyle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunuz ki, $f, [0,1]$ aralığının her noktasında süreksiz fakat $\mid f(x) \mid$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olsun.

Çözüm: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \text{ rasyonel ise,} \\ -1, & x \in [0,1] \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu $[0,1]$ de süreksiz (yani her $x \in [0,1]$ noktasında süreksiz) olup, $\mid f(x) \mid = 1, x \in [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir. $\diamond$

(17) $X \subset \mathbb{R}$ ve $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları X üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, $F, G : X \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}, G(x) = \min\{\varphi(x), \psi(x)\}$$

fonksiyonlarının da X üzerinde sürekli olacağını gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $x \in X$ için

$$F(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x) + \mid \varphi(x) - \psi(x) \mid),$$

$$G(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x) - \mid \varphi(x) - \psi(x) \mid)$$

olduğu açıktır. $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow \varphi \pm \psi \in \mathcal{C}(X)$ ve $\mid \varphi(x) - \psi(x) \mid \in \mathcal{C}(X)$ (Bkz Problem 15) olduğuna göre $F, G \in \mathcal{C}(X)$ dir. $\diamond$

(18) $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için $[f]_a^b : X \to \mathbb{R}$,

$$[f]_a^b(x) = \begin{cases} f(x), & a \le f(x) \le b \,\text{ise}, \\ a, & f(x) < a \,\text{ise}, \\ b, & f(x) > b \,\text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[f]_a^b$ fonksiyonunun X üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$[f]_{-\infty}^b(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le b \quad \text{ise}, \\ b, & f(x) > b \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[f]_{-\infty}^b$ fonksiyonu için $[f]_{-\infty}^b = \min\{f(x), b\}$ olduğuna göre bu fonksiyon Problem 17 den dolayı X üzerinde süreklidir.

$$[f]_a^b = \max\{a, [f]_{-\infty}^b(x)\}$$

olduğuna göre yine Problem 17 den dolayı $[f]_a^b$ fonksiyonu X üzerinde süreklidir. $\diamond$

(19) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşulun her $a \in \mathbb{R}_+$ için Problem 18 de tanımlanan $[f]_{-a}^a$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olmasıdır. İspatlayınız.

Çözüm: $(\Rightarrow:) f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ise Problem 18 den dolayı $[f]_{-a}^a \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ dir. $(\Leftarrow:) f$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreksiz olsun. Eğer, f nin x_0 noktasında sıçraması sonlu , yani $\gamma = \Omega(f, x_0)$ ise $a >\mid f(x_0) \mid + \gamma$ olduğunda x_0 noktasının öyle bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğu vardır ki, $\forall x \in U(x_0)$ için $[f]_{-a}^a(x) = f(x)$ olur. Bu durumda, $[f]_{-a}^a$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreksizdir.

Eğer, $\Omega(f, x_0) = +\infty$ ise $a >\mid f(x_0) \mid$ olduğunda x_0 noktasının her $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda $[f]_{-a}^a$ nın sıçraması

$$\begin{aligned} \omega([f]_{-a}^a, U(x_0)) &= \sup\{[f]_{-a}^a(x) : x \in U(x_0)\} \\ &\quad - \inf\{[f]_{-a}^a(x) : x \in U(x_0)\} \ge a - f(x_0) \end{aligned}$$

olur. Budurumda da $[f]_{-a}^a$ fonksiyonu x_0 noktasında süreksiz olmaktadır. Dolayısıyla, f herhangi bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında süreksiz ise yeteri kadar büyük a lar için $[f]_{-a}^a$ fonksiyonu da x_0 noktasında süreksiz olur. Bu çelişki varsayımın yalnış olduğunu gösterir. $\diamond$

(20) $\varphi, [a, b]$ üzerinde artan ve $A = \varphi(a), B = \varphi(b)$ olmak üzere $f, [A, B]$ üzerinde monoton (azalmayan veya artmayan) bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f \circ \varphi$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde monoton mudur?

Çözüm: Evet. Gerçekten $t_1, t_2 \in [a, b], t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ dir. Buna göre f azalmayan ise $f(\varphi(t_1)) \le f(\varphi(t_2))$ ve f artmayan ise $f(\varphi(t_1)) \ge f(\varphi(t_2))$ dir. Dolayısıyla, f azalmayan (artmayan) bir fonksiyon ise $f(\varphi(t))$ fonksiyonu azalmayandır (artmayandır). $\diamond$

(21) φ ve f Problem 20 deki fonksiyonlar ve φ fonksiyonu bir $t_0 \in (a, b)$ noktasında süreksiz olsun. Bu durumda, $f(\varphi(t))$ fonksiyonu t_0 noktasında süreksiz olmak zorunda mıdır?

Çözüm: Hayır.

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1) \text{ ise}, \\ 1 + t, & t \in [1, 2] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = 1$ noktasında süreksizdir (Çünkü $\varphi(1^-) = 1 \neq 2 = \varphi(1^+)$ dır) ve $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = 3$ dür. $[0, 3]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \text{ ise}, \\ 1, & x \in (1, 2) \text{ ise}, \\ x - 1, & x \in [2, 3] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall t \in [0, 2]$ için $f(\varphi(t)) = t$ ve dolayısıyla $f \circ \varphi$ fonksiyonu $t = 1$ noktasında süreklidir (Üstelik $f \circ \varphi \in \mathcal{C}[0, 2]$ dir). $\diamond$

Not: f kesin monoton (azalan veya artan) ve φ, t_0 noktasında süreksiz ise $f(\varphi(t))$ fonksiyonu t_0 noktasında süreksizdir. $\bullet$

(22) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda,

$$m(x) = \inf\{f(t) : a \le t \le x\}, \quad M(x) = \sup\{f(t) : a \le t \le x\}$$

biçiminde tanımlanan $m, M : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde monoton ve süreklidirler. Gösteriniz.

Çözüm: $x = a$ durumunda $[a, x]$ aralığı bir elemana sahip $\{a\}$ kümesi olmak üzere $m(x)$ ve $M(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde tanımlıdır. $M(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde monoton artan ve sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in [a, b)$ için $0 < h \le b - x$ olmak üzere $[a, x] \subset [a, x + h]$ olduğuna göre $\{f(t) : a \le t \le x\} \subset \{f(t) : a \le t \le x + h\}$ dır. $A \subset B$ olacak şekilde her $A, B \subset \mathbb{R}$ kümeleri için $\sup A \le \sup B$ olacağından dolayı $M(x) \le M(x + h)$ dır ve dolayısıyla $M(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde azalmayandır. Şimdi $M(x)$ in $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösterelim.

Önce, $c < d$ olacak şekilde $c, d \in [a, b]$ noktaları için

$$\omega(f, [c, d]) = \sup\{f(x) : c \le x \le d\} - \inf\{f(x) : c \le x \le d\}$$

f nin $[c, d]$ aralığında salınımı olmak üzere

$$M(d) \le M(c) + \omega(f, [c, d]) \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$M(d) = \max\{M(c), \sup\{f(x) : c \le x \le d\}\}$$

olduğu açıktır. Eğer, $M(d) = M(c)$ ise $\omega(f, [c, d]) \ge 0$ olduğundan dolayı

$$M(d) = M(c) \le M(c) + \omega(f, [c, d])$$

bulunur. Eğer, $M(d) = \sup\{f(x) : c \le x \le d\}$ ise

$$\begin{aligned} M(d) &= M(c) + \sup\{f(x) : c \le x \le d\} - M(c) \\ &\quad [M(c) \ge f(c) \ge \inf\{f(x) : c \le x \le d\}\text{dir}] \\ &\le M(c) + [\sup\{f(x) : c \le x \le d\} - \inf\{f(x) : c \le x \le d\}] \\ &= M(c) + \omega(f, [c, d]) \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla, (3.7) eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiş olur. (3.7) den özel olarak $a < x \le b$ ve $0 < h \le b - x$ olduğunda

$$M(x + h) \le M(x) + \omega(f, [x, x + h])$$

olur. $M(x)$ azalmayan bir fonksiyon olduğuna göre, buradan aynı x ve h lar için

$$0 \le M(x + h) - M(x) \le \omega(f, [x, x + h]) \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır. f fonksiyonu $x \in [a, b)$ noktasında sürekli olduğundan dolayı $\lim_{h\to 0^+} \omega(f, [x, x+h]) = 0$. O zaman, (3.8) den

$$\lim_{h\to 0^+} [M(x + h) - M(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} M(x + h) = M(x)$$

dır ve dolayısıyla, M fonksiyonu $x \in [a, b)$ noktasında sağdan süreklidir. Şimdi M fonksiyonunun $x \in (a, b)$ noktasında soldan sürekli olduğunu gösterelim. $x \in (a, b]$ ve $0 < h \le x - a$ olmak üzere (3.7) den dolayı $x - h$ ve x noktaları için

$$M(x) \le M(x - h) + \omega(f, [x - h, x])$$

dır ve dolayısıyla, aynı x ve h lar için

$$0 \le M(x) - M(x - h) \le \omega(f, [x - h, x])$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\lim_{h\to 0^+} \omega(f, [x - h, x]) = 0$$

olacağından,

$$\lim_{h\to 0}[M(x) - M(x - h)] = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} M(x - h) = M(x)$$

bulunur. Bu da M fonksiyonunun $x \in (a, b]$ noktasında soldan sürekli olması demektir. Böylece, M fonksiyonu $x \in (a, b)$ noktasında hem sağdan hem de soldan, $x = a$ noktasında sağdan ve $x = b$ noktasında soldan sürekli olduğundan dolayı $[a, b]$ üzerinde süreklidir. $m(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde artmayan ve sürekli olduğu benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(23) Önerme 3.2.12 yi ispatlayınız.

Çözüm: İspatı monoton artan fonksiyon için yapalım. Monoton azalan fonksiyon için ispat (aşikar işaret değişiklikleri hariç) aynıdır.$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi E olsun. $\forall x \in E$ için $f(x^-) \neq f(x^+)$ olmak zorundadır. f monoton artan olduğuna göre $f(x^-) < f(x^+)$ dır. Bu durumda, $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$ olacak şekilde bir $r(x) \in \mathbb{Q}$ sayısı vardır. Üstelik $x_1, x_2 \in E$ ve $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$ dır. Böylece $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in E)$ durumunda

$$f(x_1^-) < r(x_1) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < r(x_2) < f(x_2^+)$$

olacağından $r(x_1) < r(x_2)$ dir. Bu durumda, E nin her x elemanına bir $r(x) \in \mathbb{Q}$ sayısı karşılık getirilmiş olur. Böylece, E ve $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında öyle bir dönüşüm belirtilmiş olur ki ,E kümesinin farklı iki elemanının $\mathbb{Q}$ daki görüntüleri farklıdır. Buna göre, E kümesi $\mathbb{Q}$ kümesinin bir alt kümesi ile (veya $\mathbb{Q}$ nun kendisiyle) aynı kuvvetlidir. Dolayısıyla, E kümesi ya sonludur yada sayılabilirdir. $\diamond$

(24) Önerme 3.2.19 u ispatlayınız.

Çözüm: $X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall 0 < \delta < \delta_1$ için

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid : x, y \in X \wedge \mid x - y \mid < \delta\} < \varepsilon$$

olur. Buna göre, $\forall x, y \in X$ için

$$\mid x - y \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$$

olduğu ve f nin Tanım 3.2.16 anlamında düzgün sürekli olduğu anlaşılır.

Şimdi f Tanım 3.2.16 anlamında düzgün sürekli olsun. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall x, y \in X$ için $\mid x - y \mid < \delta_0 \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Buradan da

$$\omega_f(\delta_0) = \sup\{\mid f(x) - f(y) \mid : x, y \in X \wedge \mid x - y \mid < \delta_0\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall 0 < \delta < \delta_0$ için

$$0 < \omega_f(\delta) \leq \omega_f(\delta_0) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0$$

olduğu ve f nin Tanım 3.2.18 anlamında sürekli olduğu anlaşılır. $\diamond$

(25) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde ve dolayısıyla her $a > 0$ için $[0, a]$ üzerinde sürekli olduğu açıktır. O halde, Cantor teoremine göre $\sqrt{x}$ fonksiyonu her $a > 0$ için $[0, a]$ üzerinde düzgün süreklidir.

Öncelikle $\sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ için

$$\mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid = \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid$$

olur. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = 2\varepsilon$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ için

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

bulunur. Bu da $\sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olması demektir. Şimdi $\sqrt{x}$ in $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sqrt{x}$ $[0, 2]$ üzerinde düzgün sürekli olduğuna göre,

$$\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \text{öyleki} \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 2] \quad \text{için}$$

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid < \varepsilon \tag{3.9}$$

dir.$\sqrt{x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan,

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \, \text{öyleki} \, \forall x_1, x_2 \in [1, +\infty) \, \text{için}$$

$$| x_1 - x_2 | < \delta_2 \Rightarrow | \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} | < \varepsilon \tag{3.10}$$

dir. $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ için $| x_1 - x_2 | < \delta$ eşitsizliğinden birincisi ($\delta < 1$ olduğuna göre) x_1 ve x_2 noktalarının herikisi ya $[0, 2]$ ya da $[1, +\infty)$ aralığı içindedir,ikincisi bu durumlarda (3.9) ya da (3.10) dan dolayı $| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} | < \varepsilon$ olduğu elde edilir. Demek ki, $\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(26) Tanım 3.2.18 den faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; (b) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$; (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Çözüm: (a) $\delta > 0$, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ve $| x_1 - x_2 | \leq \delta$ olsun.$x_1 > x_2$ yani $0 < h \leq \delta$ olmak üzere $x_1 = x_2 + h$ olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x_2 > 0$ için $\sqrt{x_2 + \delta} + \sqrt{x_2} > \delta$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} &= \sqrt{x_2 + h} - \sqrt{x_2} \leq \sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{x_2 + \delta} + \sqrt{x_2}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan, $x_1 = x_2 + \delta$ için

$$\lim_{x_2 \to 0^+} (\sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2}) = \sqrt{\delta}$$

olduğuna göre, $\omega_f(\delta) \geq \sqrt{\delta}$ son iki eşitsizlikten $\omega_f(\delta) = \sqrt{\delta}$ olduğu anlaşılır.

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = \lim_{\delta \to 0^+} \sqrt{\delta} = 0$$

olduğuna göre Tanım 3.2.18 den dolayı $\sqrt{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(b) $\delta > 0$, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ve $| x_1 - x_2 | \leq \delta$ olsun. Her $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ için

$$| \cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2} | \leq 2$$

ve demek ki, $\omega_f(\delta) \leq 2$ dir. $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = 0$ olduğuna göre, $0 < x'_{n_0} < \frac{\delta}{2}$, $0 < x''_{n_0} < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde,

$$| x'_{n_0} - x''_{n_0} | < \delta \text{ve } | \cos\frac{1}{x'_{n_0}} - \cos\frac{1}{x''_{n_0}} | = 2$$

dir. Demek ki, $\forall \delta > 0$ için $\omega_f(\delta) = 2$ dir. Buradan,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 2 \neq 0$$

olduğu ve dolayısıyla, $\cos\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli oladığı anlaşılır.

(c) $\delta > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + \delta$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}}$$

ve

$$\lim_{x_1 \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1}} = +\infty\,, \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} = \frac{1}{\delta}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x_1 \to 0^+} (\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}}) = +\infty$$

olduğu elde edilir. Öyleyse,

$$\sup\{\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} : x_1 \in (0, +\infty)\} = +\infty$$

dur. Üstelik

$$\omega_f(\delta) \geq \sup\{\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1 + \delta}} : x_1 \in (0, +\infty)\}$$

olduğuna göre buradan $\forall \delta > 0$ için $\omega_f(\delta) = +\infty$ bulunur. Buna göre, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir. $\diamond$

(27) $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[x_0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve sonlu $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ limiti mevcut olsun. f nin $[x_0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Rightarrow \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > \mid x_0 \mid$$

öyleki $\forall x \in [x_0+\delta_1, +\infty)$ için $\mid f(x) - A \mid < \frac{\varepsilon}{4}$ tür.
f fonksiyonu $[x_0, x_0+\delta_1]$ üzerinde sürekli olduğundan Cantor teoremi gereğince bu aralık üzerinde düzgün süreklidir. Buna göre,
$\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ öyleki, $\forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\delta_1]$ için

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta_2 \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $x_1, x_2 \in [x_0, +\infty)$ ve $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ olsun.$x_1, x_2 \in [x_0, x_0+\delta]$ ise

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$x_1, x_2 \in [x_0+\delta, +\infty)$ ise

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq \quad \mid f(x_1) - A) \mid + \mid A - f(x_2) \mid < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ve nihayet $x_1 \in [x_0, x_0+\delta_1]$ ve $x_2 \in [x_0+\delta_1, +\infty)$ ise

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq \mid f(x_1) - f(x_0+\delta_1) \mid + \mid f(x_0+\delta_1) - f(x_2) \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ seçimi yapıldığında $\forall x_1, x_2 \in [x_0, +\infty)$ için

$$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta_2 \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \varepsilon$$

ve demekki ,f fonksiyonu $[x_0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(28) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$(a) f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ X = (0, \pi);$ $\qquad (b) f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x},\ X = (0, 1);$

$(c) f(x) = x \sin\dfrac{1}{x},\ X = (0, +\infty);$ $\qquad (d) f(x) = x \sin x,\ X = [0, +\infty);$

$(e) f(x) = x^2 - 2x - 1,\ X = [-2, 5];$ $\quad (f) f(x) = \sqrt[n]{x},\ X = (0, +\infty);$

$(g) f(x) = \sqrt{x^2} \ln x,\ X = (0, 1).$

Çözüm: (a) $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in (0, \pi) \text{ ise,} \\ 1, & x = 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = \pi \text{ ise} \end{cases}$
biçiminde tanımlanan $F : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, \pi]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[0, \pi]$ üzerinde hem de düzgün süreklidir. Buna göre, $(F\mid_{(0,\pi)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0, \pi)$ üzerinde düzgün süreklidir.
(b) $\varepsilon = 2$ ve herhangi $\delta > 0$ sayısı verilmiş olsun. $(0, \pi)$ içinde terimleri $x'_n = \frac{1}{2n\pi}, x''_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan (x'_n) ve (x''_n) dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \mid x'_n - x''_n \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)\pi} = 0$$

olduğuna göre $\exists n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\mid x'_n - x''_n \mid < \delta$ fakat

$$\mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} > 2 = \varepsilon$$

olur. Demek ki, fonksiyon $(0, 1)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.
(c) $F(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \text{ ise;} \\ 0, & x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$
biçiminde tanımlanan $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

dir. Problem (27) den dolayı F fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. Buna göre, $(F\mid_{(0,+\infty)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.
(d) $[0, +\infty)$ içinde terimleri $x'_n = n\pi, x''_n = n\pi + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan x'_n ve x''_n dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \mid x'_n - x''_n \mid = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

dır.

$$\mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = (n\pi + \frac{1}{n}) \mid \sin(n\pi + \frac{1}{n}) \mid = (n\pi + \frac{1}{n}) \sin\tfrac{1}{n}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \mid f(x'_n) - f(x''_n) \mid = \lim_{n\to\infty} (\pi + \frac{1}{n^2}) \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$$

bulunur. Dmek ki, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} > 0$ sayısı için $\delta = \varepsilon$ seçimi yapıldığında $\exists x'_{n_0}, x''_{n_0} \in [0, +\infty)$ öyleki $\mid x'_{n_0} - x''_{n_0} \mid < \delta$ fakat

$$\mid f(x'_{n_0}) - f(x''_{n_0}) \mid > \frac{\pi}{2} = \varepsilon$$

dur. Dolayısıyla, fonksiyon $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

(e) f fonksiyonu $[-2, 5]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[-2, 5]$ üzerinde düzgün süreklidir.

(f) Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$0 \le x_1 < \varepsilon^n, 0 \le x_2 < \varepsilon^n \tag{3.11}$$

olacak şekilde her $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ noktaları için

$$0 \le \sqrt[n]{x_1} < \varepsilon, 0 \le \sqrt[n]{x_2} < \varepsilon$$

olduğu açıktır. Burada $\delta = 2\varepsilon^n$ seçimi yapıldığında $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2} \mid < \varepsilon$ bulunur. $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ noktalarının en az biri için (3.11) bağıntısı sağlanmadığında

$$\sqrt[n]{{x_1}^{n-1}} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-2}x_2} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-3}{x_2}^2} + \cdots + \sqrt[n]{{x_2}^{n-1}} > \varepsilon^{n-1}$$

olur. Bu durumda, $\mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon^n = \delta$ iken

$$\begin{aligned} \mid \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2} \mid &= \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\sqrt[n]{{x_1}^{n-1}} + \sqrt[n]{{x_1}^{n-2}x_2} + + \cdots + \sqrt[n]{{x_2}^{n-1}}} \\ &< \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\varepsilon^{n-1}} < \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, fonksiyon $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün süreklidir.

(g) $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2}\ln x, & x \in (0,1) \text{ ise,} \\ 0, & x = 0, x = 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde sürekli olduğundan dolayı Cantor teoremi gereğince $[0, 1]$ üzerinde hem de düzgün süreklidir. Bu nedenle $(F \mid_{(0,1)})(x) = f(x)$ fonksiyonu $(0, 1)$ üzerinde düzgün süreklidir. $\diamond$

(29) Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının her komşuluğunda sınırsız ise bu fonksiyon X üzerinde düzgün sürekli değildir. Gösteriniz.

Çözüm: f fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğuna göre, $\forall \delta > 0$ için $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ fakat $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid > 1$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap X$ noktaları mevcuttur. Bu da f nin X üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonu $x_0 = 0$ ve $x_0 = \pi$ noktalarının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $(0, \pi)$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasının her komşuluğunda sınırsız olduğundan dolayı bu fonksiyon $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün sürekli değildir. $\diamond$

(30) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde süreklilik modülünü bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$, $X = [0, 1]$; (b) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $X = (0, 1)$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = (0, 1)$.

Çözüm: (a) $0 < \delta \le 1, x_1, x_2 \in [0, 1]$ ve $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ olsun $x_1 > x_2$, yani $0 < h \le \delta$ olmak üzere $x_1 = x_2 + h$ olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x_2 \in [0, 1]$ için

$${x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_2 + h)^2 - {x_2}^2 = 2hx_2 + h^2 \le 2\delta + \delta^2$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup\{\mid {x_1}^2 - {x_2}^2 \mid:,\ x_1, x_2 \in [0,1] \wedge \mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta\} \\ &\leq 2\delta + \delta^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan ,$x_1 = x_2 + \delta$ için

$$\lim_{x_2 \to 1^-} [x_2 + \delta^2 - {x_2}^2] = (1+\delta)^2 - 1 = 2\delta + \delta^2$$

olduğuna göre

$$\omega_f(\delta) \geq 2\delta + \delta^2 \tag{3.13}$$

bulunur. (3.12) ve (3.13) ten dolayı $\omega_f(\delta) = 2\delta + \delta^2$ olduğu anlaşılır.
(b) $0 < \delta < 1, x_1, x_2 \in (0,1)$ ve $\mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta$ olsun $\forall x_1, x_2 \in (0,1)$ için

$$\mid \sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2} \mid \leq \mid \sin\frac{1}{x_1} \mid + \mid \sin\frac{1}{x_2} \mid \leq 2$$

olduğuna göre $\omega_f(\delta) \leq 2$ olduğu elde edilir. $(0,1)$ içinde terimleri ${x'}_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}, {x''}_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}, n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanan $({x'}_n)$ ve $({x''}_n)$ dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} \mid {x'}_n - {x''}_n \mid = 0$ olduğuna göre $0 < {x'}_{n_0} < \delta$ ve $0 < {x''}_{n_0} < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde, $\mid {x'}_{n_0} - {x''}_{n_0} \mid < \delta$ fakat $\mid \sin\frac{1}{{x'}_{n_0}} - \sin\frac{1}{{x''}_{n_0}} \mid = 2$ dir. Buna göre, $\omega_f(\delta) = 2$ olduğu anlaşılır.
(c) $0 < \delta < 1, 0 < x_1 \leq \delta, x_2 = \delta$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in (0,1)$ için $\mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\omega_f(\delta) &= \sup\{\mid \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \mid:, x_1, x_2 \in (0,1) \wedge \mid x_1 - x_2 \mid \leq \delta\} \\ &\geq \sup\{\mid \frac{1}{x_1} - \frac{1}{\delta} \mid:, x_1 \in (0,\delta]\} = +\infty\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $\omega_f(\delta) = +\infty$ dur. $\diamond$

3.4 Ek Problemler

(31) "$\varepsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde sürekli olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = x^2,\ X = \mathbb{R}$; (b) $f(x) = x^3 + 2\cos x,\ X = \mathbb{R}$;
(c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+2},\ X = \mathbb{R}$; (d) $f(x) = \sqrt{x}\sin 2x,\ X \in [0, +\infty)$;
(e) $f(x) = \sin(2x-5),\ X = \mathbb{R}$; (f) $f(x) = 2^x,\ X = \mathbb{R}$;
(g) $f(x) = \arcsin x,\ X \in (-1,1)$; (g) $f(x) = \arctan x,\ X = \mathbb{R}$.

(32) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının süreklilik durumlarını inceleyiniz. Süreksiz oldukları durumlarda süreksizlik çeşidini belirtiniz.

$(a) f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - 4x)$; $(b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & x \leq 2 \text{ ise,} \\ x-1, & x > 2 \text{ ise;} \end{cases}$

$(c) f(x) = \dfrac{\mid x-1 \mid}{x^2 - x^3}$; $(d) f(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn}(1-x)}{(\operatorname{sgn}(x+1))^2(x+1+(x-1)\operatorname{sgn}x)}$;

$(e) f(x) = \dfrac{1}{x - [\![x]\!]}$;

$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan^2 x - 2\tan x + 2}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ise,} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ise;} \end{cases}$

$(g) f(x) = \begin{cases} \tan\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$ $(h) f(x) = \begin{cases} \ln \operatorname{arccot}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(i) f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; $(j) f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1 \text{ ise,} \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm 1 \text{ ise;} \end{cases}$

$(k) f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Cevap:(a) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2, 0, 2\}$, $-2, 0, 2$ noktaları birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;

(b) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}, -1$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(c) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $x = 1$noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır, $x = 0$noktası ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(d) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, -1 ve 0 noktaları ikinci çeşit, 1 noktası birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(e) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, x = n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit, süreksizlik noktasıdır;
(f) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır;
(g) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{(2n+1)\pi} : n \in \mathbb{Z}\}, x = \frac{2}{(2n+1)\pi}, n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(h) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x = 0$ noktası ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(i) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\},\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(j) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, x = \pm 1$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(k) $S(f) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik noktalarıdır.

(33) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{R}$ nin hangi noktalarda süreksizdir? Süreksizlik çeşidini belirtiniz.

$(a)\quad f(x) = \dfrac{x^3 + 27}{\mid x + 3 \mid}$; $(b)\quad f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

$(c)\quad f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$; $(d)\quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$;

$(e)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x > 0 \text{ ise,} \\ 1 + x, & x \le 0 \text{ ise;} \end{cases}$ $(f)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \text{ ise,} \\ x + 2, & x \ge 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(g)\quad f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1 \text{ ise,} \\ 1, & x = 1 \text{ ise,} \\ x - 1, & x > 1 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap:(a) $x = -3$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(b) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları ikinci çeşit süreksizlik ve $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları kaldırılabilir süreksizlik noktalarıdır;

(c) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ noktaları birinci çeşit süreksizlik noktalarıdır;
(d) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(e) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(f) $x = 0$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır;
(g) $x = 1$ noktası birinci çeşit süreksizlik noktasıdır.

(34) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in [0,1], m, n \in \mathbb{Z} \text{ m ve n aralarında asal ise,} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ irrasyonel ise,} \end{cases}$
şeklinde tanımlı $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun herbir $a \in [0,1]$ irrasyonel noktalarda sürekli olduğunu ve herbir $a \in [0,1]$ rasyonel noktalarda da süreksiz olduğunu gösteriniz.

(35) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olması için a ne olmalıdır.

$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x \ne 0 \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$ $(b) f(x) = \begin{cases} x \cot 2x, & x \ne 0, \\ & \mid x \mid < \frac{\pi}{2} \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(c) f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 2 \text{ ise,} \\ 2ax, & x \ge 2 \text{ ise;} \end{cases}$ $(d) f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2), & x \ne 0 \text{ ise,} \\ a, & x = 0 \text{ ise;} \end{cases}$

$(e) f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \ne 0 \text{ ise,} \\ 2a, & x = 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap: (a) $a = \sqrt{2}$; (b) $a = \frac{1}{2}$; (c) $a = -\frac{7}{2}$; (d) $a = 0$; (e) $a = \frac{1}{2}$
.

(36) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarının süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - [\![x]\!]$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$;

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(4 - x^2)$.

(37) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $f_-, f_+ : [a,b]\to\mathbb{R}$,

$$f_-(x)=\begin{cases}0, & f(x)\geq 0 \text{ ise},\\ f(x), & f(x)<0 \text{ ise}\end{cases}\quad f_+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)>0 \text{ ise},\\ 0, & f(x)\leq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f_-(x)$ ve $f_+(x)$ fonksiyonlarının da $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

(38) $y=f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise $y=\mid f(x)\mid$ ve $y=f(\mid x\mid)$ fonksiyonları da süreklidir. Gösteriniz.

(39) Aşağıdaki denklemlerin karşılarında yazılı aralıklarda birer köke sahip olduklarını gösteriniz.

(a) $x^3-3x+1=0,\ X=[-1,0]$;

(b) $x^5-6x^2+3x-7=0,\ X=[0,2]$;

(c) $3\sin^3 x-5\sin x+1=0,\ X=[0,\frac{\pi}{2}]$;

(d) $8^x-3.2^x-16=0,\ X=[0,2]$.

(40) Aşağıdaki denklemlerin tek bir köke sahip olduklarını gösteriniz.

$$(a)\quad x.2^x=1\quad (b)\quad x.e^x=2\quad (c)\quad x=\varepsilon\sin x+a,\ (0<\varepsilon<1)$$

(41) $0<a<1,\ b>0$ olmak üzere $x=a\sin x+b$ denkleminin $[0,a+b]$ aralığında en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

(42) $10^{x-1}=x$ denkleminin $\mathbb{R}$ üzerinde iki köke sahip olduğunu gösteriniz.

(43) $2^x=4x$ denkleminin en az iki reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

(44) $x\sin x-0,5=0$ denkleminin sonsuz sayıda köke sahip olduğunu gösteriniz.

(45) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & -1\leq x<0 \text{ ise},\\ 0, & x=0 \text{ ise},\\ x^2-1, & 0<x\leq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerini alır mı?

(46)

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & 0\leq x<2 \text{ ise},\\ (x-4)^2+6, & 2\leq x\leq 4 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu için $f(a)=1$ ve $f(b)=7$ olacak şekilde a ve b sayıları var mıdır?

(47) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+\sin x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de tanımlı sürekli ve artan $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tersinin varlığını gösteriniz.

(48) "$\varepsilon-\delta$" yöntemiyle aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün sürekli olduklarını gösteriniz.

$$(a)\quad f(x)=\frac{1}{x},\ X=[0.1,1]\quad (b)\quad f(x)=2\cos x-\sin x, X=\mathbb{R}$$

(49) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x)=\sin\sqrt{x},\ X=[1,+\infty)$;

(b) $f(x)=\cos x^2,\ X=(-2,3)$;

(c) $f(x)=x\cos x,\ X=\mathbb{R}$;

(d) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x},\ X=(-\pi,0)\bigcup(0,\pi)$;

(e) $f(x)=\cos x\cos(\frac{\pi}{x}),\ X=(0,1)$;

(f) $f(x)=\tan x,\ X=(1,\frac{\pi}{2})$;

(g) $f(x)=\sin(\frac{1}{x}),\ X=[0.01,+\infty)$.

(50) Tanım 3.2.18 den faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerinde düzgün sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$$(a)\quad f(x)=2x-1,\ X=\mathbb{R};\qquad (b)\quad f(x)=\sin(\frac{1}{x}),\ X=(0,+\infty);$$
$$(c)\quad f(x)=\ln x,\ X=[1,+\infty)\quad (d)\quad f(x)=3\cos x-2\sin x,\ X=\mathbb{R}\ .$$

Cevap: (a) düzgün süreklidir ; (b) düzgün sürekli değildir ; (c) düzgün süreklidir; (d) düzgün süreklidir.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde süreklilik modülünü bulunuz.

(a) $f(x)=\sqrt{x},\ X=[0,1]$; (b) $f(x)=\sin x,\ X=[0,\frac{\pi}{2}]$;
(c) $f(x)=\sin x,\ X=\mathbb{R}$; (d) $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ X=[-1,1]\backslash\{0\}$.

Cevap: (a) $\omega_f(\delta)=\begin{cases}\sqrt{\delta}, & 0\le\delta\le 1 \text{ ise},\\ 1, & 1\le\delta \quad \text{ise};\end{cases}$

(b) $\omega_f(\delta)=\begin{cases}\sin\delta, & 0\le\delta\le\frac{\pi}{2} \text{ ise},\\ 1, & \frac{\pi}{2}\le\delta \text{ ise};\end{cases}$

(c) $\omega_f(\delta)=\begin{cases}2\sin\frac{\delta}{2}, & 0\le\delta\le\pi \text{ ise},\\ 2, & \pi\le\delta \quad \text{ise};\end{cases}$

(d) $\omega_f(\delta)=2,\ \delta\in[0,+\infty)$.

Bölüm 4

Türev

Bu bölümde limit kavramına dayanarak Matematik Analizin temel kavramları olan türev ve diferansiyel kavramları verilecek, fonksiyonların türev ve diferansiyellerinin hesaplanması kuralları incelenecek ve bu kavramların çeşitli uygulamaları verilecektir.

4.1 Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım 4.1.1 *: $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f de (a,b) den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a,b)$ olmak üzere*

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = A(x) \tag{4.1}$$

sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$(veya $Df(x)$ ya da $\frac{df(x)}{dx}$) ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir ve

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \tag{4.2}$$

veya $t = x+h$ dersek, $t \to x \Leftrightarrow h \to 0$ olacağından

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A(x) \tag{4.3}$$

dir.

Eğer $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $E \subset (a,b)$ kümesinin her noktasında türevlenebilir ise, $y = f(x)$ fonksiyonu E üzerinde türevlenebilirdir denir. Böylece, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun E üzerinde tanımlı ve $f', D_x f, \frac{df}{dx}$ ya da $y_x', D_x y, \frac{dy}{dx}$ ile gösterilen türev fonksiyonu kavramına varılır.
Eğer, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x \in (a,b)$ olmak üzere

$$A(x^+) = \lim_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \text{ ve } \mathrm{A(x^-)} = \lim_{\mathrm{t\to x^-}} \frac{\mathrm{f(t)-f(x)}}{\mathrm{t-x}}$$

limitleri varsa, bu limitlere sırası ile f nin x noktasında sağ (veya sağ taraflı) ve sol (veya sol taraflı) türevi denir ve $f'(x^+)$ ve $f'(x^-)$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu sırası ile sağdan ve soldan türevlenebilirdir denir ve

$$f'(x^+) = \lim_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \text{ ve } \mathrm{f'(x^-)} = \lim_{\mathrm{t\to x^-}} \frac{\mathrm{f(t)-f(x)}}{\mathrm{t-x}} \tag{4.4}$$

veya

$$f'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ve } \mathrm{f'(x^-)} = \lim_{\mathrm{h\to 0^-}} \frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{\mathrm{h}} \tag{4.5}$$

dir.
Sol ve sağ limitlerle ilgili Teorem 2.4.12 gözönüne alındığında aşağıdaki önermenin doğru olduğu anlaşılır.

Önerme 4.1.2 *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul f nin x noktasında sol ve sağ türevlerinin var ve bunların eşit olmasıdır. Bu durumda, $f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$ dır.*

Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in (a,b)$ noktasında türevli, a'da sağdan ve b'de soldan türevli ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir.
Önerme 2.4.42 ye göre (4.2) ifadesi $x \in (a,b), t \to x$ iken $\alpha(t) = o(1)$(yani $\lim_{t\to x} \alpha(t) = 0$) olmak üzere

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) + \alpha(t), t \neq x$$

veya

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t-x) + \alpha(t)(t-x) \tag{4.6}$$

biçiminde yazılabilir.

Önerme 4.1.3 *: $x \in [a,b]$ noktasında türevli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aynı x noktasında süreklidir.*

İspat: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in (a,b)$ noktasında türevli ise, $t \in (a,b)$, $t \to x$ iken $\alpha(t) = o(1)$ olmak üzere (4.6) ifadesi geçerlidir. Bu durumda (4.6) dan

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x) + [f'(x) + \lim_{t\to x} \alpha(t)] \lim_{t\to x}(t-x) = f(x)$$

bulunur. Bu ise, f nin x noktasında sürekli olması demektir. Benzer şekilde, (4.4) den ($x = a$ ise 1. ve $x = b$ ise, 2. den) faydalanarak $\lim_{t\to a^+} f(t) = f(a)$, $\lim_{t\to b^-} f(t) = f(b)$ olduğundan dolayı f nin a ve b noktalarında sürekli olduğu gösterilebilir. □

Not: Önerme 4.1.3 ün karşıtı genel olarak doğru değildir. Bir fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda fonksiyon türevli olmayabilir. •

Örnek 4.1.4 *: $\mathbb{R}$ üzerinde (özel olarak $x = 0$ noktasında) sürekli $f(t) = \mid t \mid$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevli olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{\mid t \mid -0}{t-0} = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ ise,} \\ -1, & t < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$f'(0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = -1 \text{ ve } \mathrm{f'}(0^+) = \lim_{\mathrm{t}\to 0^+} \frac{\mathrm{f(t)-f(0)}}{\mathrm{t}-0} = 1$$

dir. Şu halde fonksiyon $x = 0$ noktasında türevli değildir. ⋄

Tanım 4.1.5 *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in [a,b]$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $x + h \in [a,b]$ için $B(x)$ reel bir sayı olmak üzere*

$$f(x+h) - f(x) = B(x).h + \varphi(x;h) \tag{4.7}$$

olacak şekilde $h \to B(x)h$ fonksiyonu ve $h \to 0$ ($x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-$) iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacak şekilde bir $\varphi(x;h)$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Bu durumda, h'a göre lineer $h \to B(x)h$ fonksiyonuna f nin x noktasında diferansiyeli denir ve $df(x)$ veya $Df(x)$ ile gösterilir. Bu durumda, $df(x)(h) = B(x)h$ dır.

Buna göre $x, x+h \in [a,b]$ için $\Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x)$ olmak üzere $h \to 0$ ($x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-$) iken

$$\Delta f(x;h) - df(x)(h) = \varphi(x;h) = o(h)$$

olduğu elde edilir. $\Delta f(x;h)$ büyüklüğüne x in $h \neq 0$ artımına karşılık fonksiyon artımı denir. Bu sebepten, $B(x) \neq 0$ ise, $h \to 0$ iken fonksiyonun diferansiyeli fonksiyon artımının esas kısmıdır denir. $x \in (a,b)$ için (4.7) ve (4.3) den dolayı

$$B(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

olduğuna göre,

$$df(x)(h) = f'(x)h \tag{4.8}$$

yazabiliriz. Özel olarak, $f(x) \equiv x$ fonksiyonu için $f'(x) \equiv 1$ olduğuna göre, $dx(h) = 1.h = h$ ve dolayısıyla,

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h)$$

veya

$$df(x)(h) = f'(x)dx \text{ yada } \mathrm{f'(x)} = \frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{dx}}$$

olduğu elde edilir.
Önerme 2.4.42 den dolayı (4.3) ve (4.5) ifadeleri $x, x+h \in [a,b], h \to 0$ ($x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-$) iken $\alpha(x;h) = o(1)$ olmak üzere

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \alpha(x;h)$$

veya

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h)h \tag{4.9}$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre, $\alpha(x;h)h = \varphi(x;h)$ dersek $h \to 0 (x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-)$ iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacağından (4.9) ifadesi $x, x+h \in [a,b]$ olmak üzere

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varphi(x;h) \tag{4.10}$$

biçiminde yazılabilir. $x = a$ ve $x = b$ durumlarında (4.9) ve (4.10) ifadelerinde $f'(x)$ yerine sırası ile $f'(a^+)$ ve $f'(b^-)$ yazıldığı farz edilir. (4.3),(4.5) ve (4.10) gözönüne alındığında aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 4.1.6 : *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x \in [a,b]$ noktasında diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul, f fonksiyonunun bu x noktasında türevlenebilir olmasıdır.*

Şimdi türev ve diferansiyelin geometrik anlamını görelim.
$[a,b]$ üzerinde sürekli bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}, y = f(t)$ fonksiyonu ve $x, t \in (a,b)$ noktaları verilmiş olsun. Bu fonksiyonun G grafiği üzerindeki $A(x, f(x))$ ve $B(t, f(t))$ noktalarından geçen K kirişini gözönüne alalım.
B noktası G eğrisi üzerinde A noktasına yaklaştığında bu K kirişinin limit durumuna A noktasında G eğrisinin teğeti denir.

Şekil 4.1 den görüldüğü gibi K kirişinin eğimi $\widehat{DAB} = \alpha(x;t)$ olmak üzere $\tan\alpha(x;t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ dir. f fonksiyonu x noktasında türevli ise, $f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ olduğuna göre $f'(x) = \lim_{t\to x} \tan\alpha(x;t)$ dir. Bu durumda, $f'(x)$ türevi $B \in G, B \to A$ iken K kirişinin limit durumu, yani A noktasında G eğrisine çizilen teğetin Ot ekseniyle oluşturduğu açının tanjantıdır. Buna göre, x noktasında türevli $y = f(t)$ fonksiyonunun $A(x, f(x))$ noktasında teğet denklemi

$$y = f(x) + f'(x)(t-x) \tag{4.11}$$

dir. Şekil 4.1 den görüldüğü gibi $h = t - x$ dersek $y = f(t)$ fonksiyonunun h artımına karşılık fonksiyon artımı

$$\Delta f(x;h) = f(x+h) - f(x) = \mid BD \mid$$

ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f(x) + f'(x)(t-x)$ fonksiyonunun h artımına karşılık gelen fonksiyon artımı da

$$\Delta g(x;h) = g(x+h) - g(x) = f'(x)h = df(x)(h) = \mid CD \mid$$

olduğu elde edilir. Buna göre, f nin x noktasındaki diferansiyeli T teğetinin ordinat artımı olmaktadır.

Örnek 4.1.7 *: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.*

$(a) f(x) = c$; $(b) f(x) = x^n,\ (n \in \mathbb{N})$;
$(c) f(x) = \sin x$; $(d) f(x) = \cos x$;
$(e) f(x) = a^x,\ (a > 0, a \neq 1)$.

Çözüm: (a) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$
olduğundan, $\forall c \in \mathbb{R}$ için $(c)' = 0$ olur.
(b) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = [(x+h)^n - x^n = (x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \lim_{h\to 0} n.x^{n-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(x^n)' = nx^{n-1}$ olur.
(c)

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}) \end{aligned}$$

[$h \to 0$ iken $\sin\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$ ve cosinüs fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan]

$$= \cos x$$

olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(\sin x)' = \cos x$ olur.
(d) (c) ye benzer olarak $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(\cos)' = -\sin x$ olduğu gösterilebilir.
(e) $\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$ [$h \to 0$ iken $a^h - 1 \sim h\ln a$ olduğundan]

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{h\ln a}{h} = a^x \ln a$$

olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(a^x)' = a^x \ln a$ olur. Özel olarak $a = e$ ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(e^x)' = e^x$ olur. $\diamond$

4.1.1 Çözümlü Problemler

(1) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyon bu noktalarda sürekli midir?

(a) $f(x) = x\,[\![\, x \,]\!]\,, x_0 = 0,\ x_0 = \frac{3}{2}$;

(b) $f(x) =\mid x \mid \sin x, x_0 = 0$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}(1 - \cos x), x_0 = 0$;

(d) $f(x) = 3 \mid x + 1 \mid, x_0 = -2$;

(e) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x.\ln 2x, x_0 = 1$;

(f) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}, x_0 = 1$;

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mid \cos\frac{\pi}{x} \mid, & x \neq 0 \text{ise}, \\ 0 & , x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x_0} = 0 \text{ vex}_0 = \frac{2}{2\mathrm{k}+1}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x^2}{x}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0 & , x = 0 \text{ ise}, \mathrm{x_0} = 0; \end{cases}$$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rasyonel ise}, \\ x^2 & , x \text{ irrasyonel ise}, \mathrm{x_0} = 0; \end{cases}$$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ rasyonel ise} \\ -x^2 & , x \text{ irrasyonel ise}, \mathrm{x_0} = \mathrm{a} \neq 0; \end{cases}$$

Çözüm: (a) $x \in (1,2)$ olsun. Bu durumda, $[\![x]\!] = 1, f(x) = x$ olduğuna göre (4.2) den dolayı

$$f'(\frac{3}{2}) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{3}{2})}{x-\frac{3}{2}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}} = 1$$

olur. $x_0 = 0$ ın solunda ve sağında f nin tanımı değiştiğinden burada sol ve sağ taraflı türevleri bulmalıyız. $\forall x \in (-1,0)$ için $[\![x]\!] = -1, f(x) = -x$ ve $\forall x \in (0,1)$ için $[\![x]\!] = 0, f(x) = 0$ olduğundan (4.4) ten dolayı

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

olduğuna göre, fonksiyonun $x_0 = 0$ da türevi yoktur. $f(x), x_0 = \frac{3}{2}$ de sürekli (Önerme 4.1.3)e göre),$x_0 = 0$ da ise, süreksizdir. (çünkü $f(0^-) = -1, f(0^+) = 0$ ve $f(0^-) \neq f(0^+)$ dır.)

(b) (4.2) ye göre

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \mid x \mid \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \mid x \mid . \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

olur. Fonksiyon $x_0 = 0$ da süreklidir, çünkü bu noktada türevlenebilirdir.

(c) (4.2) ye göre

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$[x \to 0$ iken $1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}} = 0$$

olur. Önerme 4.1.3 den dolayı $f,\ x_0 = 0$ da süreklidir.

(d) (4.2) ye göre

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{3 \mid x+1 \mid -3}{x+2} \end{aligned}$$

$[x \to -2$ iken $\mid x+1 \mid = -(x+1)$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to -2} \frac{-3(x+1)-3}{x+2} \\ &= -3 \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x+2} = -3 \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.1.3 den dolayı fonksiyon $x_0 = -2$ noktasında süreklidir.

(e) (4.2) ye göre

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log_2 x \ln 2x - \log_2 1.\ln 2}{x-1} \ [\log_2 1 = 0] \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\log_2 x \ln 2x}{x-1} \end{aligned}$$

$[x-1 = t$ dersek, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to 0} \frac{\log_2(1+t)\ln 2(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \log_2(1+t)^{\frac{1}{t}} . \lim_{t\to 0} \ln 2(1+t) \\ &= \log_2 e . \ln 2 = 1 \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 1$ noktasında süreklidir.

(f) (4.2) ye göre

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1)} = \lim_{x\to 1} \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 1$ noktasında süreklidir.

(g) (4.2) ye göre

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \mid \cos\frac{\pi}{x} \mid$$

$[\forall x \neq 0$ için $\mid \cos\frac{\pi}{x} \mid \leq 1$ olduğuna göre, $\mid x \mid\mid \cos\frac{\pi}{x} \mid \leq \mid x \mid$ olduğundan] $f'(0) = 0$ olur. Önerme 4.1.3 ten dolayı fonksiyon $x_0 = 0$ noktasında süreklidir.

$\frac{2}{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$ noktalarında $f$nin sol ve sağ taraflı türevlerini (4.4) den yararlanarak bulalım.

$$f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^+\Big) = \lim_{x\to\left(\frac{2}{2k+1}\right)^+} \frac{f(x)-f\left(\frac{2}{2k+1}\right)}{x-\frac{2}{2k+1}} = \lim_{x\to\left(\frac{2}{2k+1}\right)^+} \frac{x^2 \mid \cos\frac{\pi}{x}\mid}{x-\frac{2}{2k+1}}$$

$[x-\frac{2}{2k+1}=t$ dersek, $x\to\left(\frac{2}{2k+1}\right)^+ \Leftrightarrow t\to 0^+$ olduğundan]

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\frac{2}{2k+1}+t)^2 \mid \cos\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t}\mid \ [\lim_{t\to 0^+}(\frac{2}{2k+1}+t)^2=\frac{4}{(2k+1)^2}]$$

$$= \frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\mid \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2}+(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t}-\frac{(2k+1)\pi}{2}))\mid$$

$$= \frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\Big|\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t}-\frac{(2k+1)\pi}{2})\Big|$$

$[u\to 0$ iken $\sin u\sim u$ olduğundan]

$$= \frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\mid \frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)t}-\frac{(2k+1)\pi}{2}\mid = \pi$$

bulunur. Benzer şekilde, $f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^-\Big) = -\pi$ olduğu elde edilir. $f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^-\Big) \neq f'\Big(\big(\frac{2}{2k+1}\big)^+\Big)$ olduğuna göre, fonksiyon $x_0=\frac{2}{2k+1}, k\in\mathbb{Z}$ noktalarında türevlenebilir değildir.

$\lim_{x\to\frac{2}{2k+1}} f(x) = 0 = f(\frac{2}{2k+1})$ olduğuna göre, fonksiyon $x_0=\frac{2}{2k+1}, k\in\mathbb{Z}$ noktalarında süreklidir.

(h) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2}{x}\sin\frac{1}{x}$

[$x\to 0$ iken $\arcsin x^2 \sim x^2$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

olduğuna göre, fonksiyon $x_0=0$ da süreklidir. Bu fonksiyonun $x_0=0$ da sağ ve sol taraflı türevlerinin varolmadığını görelim. Bunu sağ taraflı türev halinde yapalım. (4.4) e göre

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin x^2}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

limiti yoktur çünkü, $g(x)=\frac{\arcsin x^2}{x^2}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ olmak üzere $x_n=\frac{1}{2n\pi}, n\in\mathbb{N}$ dizisi için $n\to\infty$ iken $x_n\to 0^+$, fakat $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin {x^2}_n}{{x_n}^2}\sin\frac{1}{x_n}=0$ ve $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, n\in\mathbb{N}$ dizisi için $n\to\infty$ iken $y_n\to 0^+$, fakat $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin {y^2}_n}{{y_n}^2}\sin\frac{1}{y_n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin {y^2}_n}{{y_n}^2} = 1$ dir.

(i) $f(0)=0$ olduğu açıktır. $h\in\mathbb{Q}, h\to 0$ iken

$$f(0+h)-f(0)=f(h)=0 \Rightarrow \lim_{\mathbb{Q}\ni h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\mathbb{Q}\ni h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$h\in I, h\to 0$ iken

$$f(0+h)-f(0)=f(h)=h^2 \Rightarrow \lim_{I\ni h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{I\ni h\to 0} h = 0$$

olduğuna göre, $f, x_0=0$ da türevlenebilirdir ve $f'(0)=0$ dır. Önerme 4.1.3 den dolayı fonksiyon $x_0=0$ da süreklidir.

(j) $0\neq a\in\mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda, $f(a)=a^2$ ve

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$$

$$\lim_{I\ni x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{I\ni x\to a}\frac{-x^2-a^2}{x-a} = \infty$$

olduğuna göre, fonksiyon $x_0=a\neq 0$ da türevli değildir.

$a\in I$ durumunda f nin $x_0=a$ da türevli olmadığı benzer şekilde gösterilir. Fonksiyon $x_0=a\neq 0$ noktasında süreksizdir, çünkü $\lim_{x\to a} f(x)$ limiti yoktur. $\diamond$

(2) $X\subset\mathbb{R}, f: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun süreksiz olduğu bir $x_0\in X$ noktası verilsin. f, x_0 da (a) sonlu ,(b) sonsuz türeve sahip olabilir mi?

Çözüm: (a) Önerme 4.1.3 e göre fonksiyon türevlenebilir olduğu noktada süreklidir. Dolayısıyla, fonksiyon x_0 da sonlu türeve sahip olamaz.

(b) Evet. Örneğin, $x_0 = 0$ noktası $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{sgn}x$ fonksiyonunun süreksizlik noktasıdır ve (4.4) e göre

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sgn}x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sgn}x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty,$$

olduğuna göre, $f'(0) = +\infty$ olur. $\diamond$

(3) $x_0 \in (a, b)$ noktası $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun 1. çeşit süreksizlik noktası olsun.

$$f'_-(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^-)}{h}$$

ve

$$f'_+(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h}$$

limitlerine $f$nin $x = x_0$ noktasında genelleştirilmiş anlamda sırasıyla sol ve sağ taraflı türevi denir.
$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+x}}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında genelleştirilmiş anlamda sol ve sağ taraflı türevlerini bulunuz.
Çözüm: Önce $f(0^-), f(0^+)$ ları bulalım.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{1+x}}{x} = -1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+x}}{x} = 1$$

olduğuna göre, $x_0 = 0$ noktası f nin 1. çeşit süreksizlik noktasıdır. Yukarıdaki tanıma göre,

$$\begin{aligned} f'_-(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0^-)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\,h\,|\sqrt{1+h} + h}{h^2} \\ &= -\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0^+)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\,h\,|\sqrt{1+h} - h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $f'_-(0^-) = -\frac{1}{2}$ ve $f'_+(0^+) = \frac{1}{2}$ dir. $\diamond$

4.1.2 Ek Problemler

(4) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyon bu noktalarda sürekli midir?

(a) $f(x) = |\,1 - x^2\,|,\ \ x_0 = 1$;

(b) $f(x) = x - [\![\,x\,]\!],\ x_0 = 1$ ve $x_0 = \frac{1}{2}$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ x_0 = 0$;

(d) $f(x) = \text{sgn}(x - x^3),\ x_0 = 0, x_0 = -1,$ ve $x_0 = 1$;

(e) $f(x) = |\ln x\,|,\ x_0 = 1$;

(f) $f(x) = \arccos(\sin x),\ x_0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise,} \\ -x^2, & x \in I \text{ ise, } x_0 = 0 \text{ ;} \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise, } x_0 = 0 \text{ ;} \end{cases}$$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise, } x_0 = 0 \text{ ;} \end{cases}$$

(j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q}\text{ ise},\\ x, & x\in I\text{ ise}, x_0=0\ ;\end{cases}$$

(k) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\text{ ise},\\ 0, & x=0\text{ ise}, x_0=0\ .\end{cases}$$

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(x-x^3)$ fonksiyonunun $x_0=0, x_0=-1$ ve $x_0=1$ noktalarında genelleştirilmiş anlamda sol ve sağ taraflı türevlerini bulunuz.
Cevap: $f_\pm{}'(0^\pm)=0, f_\pm{}'(-1^\pm)=0, f_\pm{}'(1^\pm)=0$.

4.2 Türev Alma Kuralları

Teorem 4.2.1 *: Eğer, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $x\in[a,b]$ noktasında türevleri varsa, $\lambda u+\mu v, (\lambda,\mu\in\mathbb{R}), u.v$ ve $v(x)\neq 0$ ise, $\frac{u}{v}$ fonksiyonları da x noktasında türevlenebilirdir ve*

(a) $(\lambda u+\mu v)'(x)=\lambda u'(x)+\mu v'(x)$;

(b) $(u.v)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(c) $(\frac{u}{v})'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Diğerlerini okuyucuya bırakarak (c) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. v fonksiyonu $x\in[a,b]$ noktasında türevli olduğundan bu noktada süreklidir. O halde, $v(x)\neq 0$ olduğuna göre, $\exists\delta>0$ öyleki $\forall t\in[a,b]\bigcap U_\delta(x)$ için $v(t)\neq 0$ olur (Bkz. Teorem 3.2.1(b)). Bu durumda, $x+h\in[a,b]\bigcap U_\delta(x)$ olacak şekilde $\forall h\neq 0$ için

$$\frac{1}{h}[\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}]=\frac{1}{v(x)v(x+h)}[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}]$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{\frac{u}{v}(x+h)-\frac{u}{v}(x)}{h} &= \frac{1}{v(x)\lim_{h\to0}v(x+h)}[v(x)\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\\ &- u(x)\lim_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}]\\ &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},\end{aligned}$$

dolayısıyla, (c) eşitliğinin doğru olduğu elde edilir. □

Sonuç 4.2.2 *: Teorem 4.2.1 in koşulları sağlanırsa,*

$$(\lambda u)'(x)=\lambda u'(x), (u\pm v)'(x)=u'(x)\pm v'(x), (\frac{1}{v})'(x)=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

dır.

Teorem 4.2.3 *(Bileşik Fonksiyonun Türevi): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $x\in[a,b]$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer, $g: f([a,b])\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevlenebilir ise, $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x)).f'(x) \tag{4.12}$$

dır.

İspat: $y=f(x)$ olsun. Türev tanımı gereğince $x+h\in[a,b]$ ve $h\to0$ iken $\alpha(x;h)=o(1)$ olmak üzere

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\alpha(x;h)h \tag{4.13}$$

ve $y+H\in f([a,b]), H\to0$ iken $\beta(y;H)=o(1)$ olmak üzere

$$g(y+H)-g(y)=g'(y)H+\beta(y;H)H \tag{4.14}$$

yazabiliriz. Bu durumda, $x+h\in[a,b]$ için önce (4.14) den sonra (4.13) den yararlanırsak

$(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x) = g(f(x+h))-g(f(x)) = [f(x+h)-f(x)][g'(f(x))+\beta(f(x).f(x+h)-f(x))]$
$= h[f'(x)+\alpha(x;h)][g'(f(x))+\beta(f(x),f(x+h)-f(x))]$
veya $h\neq 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} &= [f'(x)+\alpha(x;h)][g'(f(x))+\\ &+ \beta(f(x).f(x+h)-f(x))] \qquad (4.15)\end{aligned}$$

yazabilirz. f fonksiyonu x noktasında sürekli olduğuna göre, $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))=0$ dır. Bu durumda, (4.15) ten

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} &= [f'(x)+\lim_{h\to 0}\alpha(x;h)][g'(f(x))\\ &+ \lim_{h\to 0}\beta(f(x).f(x+h)-f(x))]\\ &= f'(x)g'(f(x))\end{aligned}$$

olur. Bu ise, (4.12) ifadesinin doğru olması demektir. □

Not: Teorem 4.2.3 ün koşulları sağlansın. Bu durumda $z=g(y)$ ve $y=f(x)$ dersek (4.12) ifadesi

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ veya } \mathrm{z_x}' = \mathrm{z_y}'\mathrm{y_x}' \qquad (4.16)$$

biçiminde yazılabilir. Bu nedenle bileşik fonksiyonun (4.16) şeklinde türev alma kuralına zincir kuralı denir. •

Teorem 4.2.4 *(Ters Fonksiyonun Türevi): $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer, bu fonksiyon $x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x)\neq 0$ ise, f nin $f^{-1}:(f(a+),f(b-))\to\mathbb{R}$ (veya $f^{-1}:(f(b-),f(a+))\to\mathbb{R}$),$x=f^{-1}(y)$ ters fonksiyonu da $y=f(x)$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)} \text{ veya } \mathrm{x}'_{\mathrm{y}}=\frac{1}{\mathrm{y}'_{\mathrm{x}}} \qquad (4.17)$$

dır.

İspat: $x, x+h\in(a,b), y=f(x)$ ve $y+H=f(x+h)$ ise, $x=f^{-1}(y)$ ve $x+h=f^{-1}(y+H)$ olduğu açıktır. $f,(a,b)$ üzerinde artan (veya azalan) olduğuna göre, $h\neq 0$ iken $H=f(x+h)-f(h)\neq 0$ ve $\lim_{h\to 0}H=0$ dır. O halde, $x, x+h\in(a,b)$ olacak şekilde her $h\neq 0$ için

$$\frac{(f^{-1})(y+H)-(f^{-1})(y)}{H}=\frac{h}{f(x+h)-f(h)}=\frac{1}{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{H\to 0}\frac{(f^{-1})(y+H)-(f^{-1})(y)}{H}=$$

[$h\to 0\Leftrightarrow H\to 0$ olacağından]

$$=\frac{1}{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}}=\frac{1}{f'(x)}$$

olur. Bu ise, (4.17) eşitliğinin doğru olması demektir. □

Örnek 4.2.5 *: $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a\mid x\mid (a>0, a\neq 1)$fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: $\forall x\in(0,+\infty)$ için $y=\log_a\mid x\mid \Leftrightarrow x=a^y$ ve (4.17) den dolayı ${y'}_x=\frac{1}{{x'}_y}$ olduğuna göre, $\forall x\in(0,+\infty)$ için

$$(\log_a\mid x\mid)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

olur. $\forall x\in(-\infty,0)$ için $y=\log_a\mid x\mid \Leftrightarrow x=-a^y$ ve (4.17) den dolayı $\forall x\in(-\infty,0)$ için

$$(\log_a\mid x\mid)'=\frac{1}{(-a^y)'}=\frac{1}{-a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

olur. Dolayısıyla, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$(\log_a\mid x\mid)'=\frac{1}{x\ln a}$$

olur. Özel durumda eğer, $a=e$ ise, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ dir. ⋄

Örnek 4.2.6 *: α herhangi bir reel sayı olmak üzere $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, f(x)=x^\alpha$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: $a>0$ ve $a\neq 1$ olmak üzere $x^\alpha = a^{\alpha\log_a x}$ ve $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ olduğunu biliyoruz. $y=a^u$ ve $u=\alpha\log_a x$ dersek bileşik fonksiyonun türevi için zincir kuralı gereğince

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' = (a^{\alpha\log_a x})' &= (a^u)' = (a^u)'u' = a^u\ln a.u'\\ &= a^{\alpha\log_a x}\ln a(\alpha\log_a x)'\\ &= x^\alpha\ln a.\alpha\frac{1}{x\ln a}\\ &= \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

olur. $\diamond$

Teorem 4.2.7 *(Logaritmik Türev Alma): $u:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ ve $v:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $x\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ise, $u^v:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonuda x noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(u^v)'(x) = (u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)}[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}] \qquad (4.18)$$

olur.

İspat: $y=u(x)^{v(x)}$ dersek, $\ln y = v(x)\ln u(x)$ bulunur. Teorem 4.2.3 den dolayı $w=\ln u(x)$ bileşik fonksiyonunun ($w(z)=\ln z$ ve $z=u(x)$ dersek $\ln u(x) = (w\circ u)(x)$ olduğu açıktır.) türevi

$$(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)}u'(x)$$

olduğuna göre, $\ln y = v(x)\ln u(x)$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= (v(x)\ln u(x))' = [\text{Teorem4.2.1den}]\\ &= v'(x)\ln u(x) + v(x)(\ln u(x))'\\ &= v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\end{aligned}$$

ve buradan da (4.18) ifadesinin doğruluğu anlaşılır. $\square$

Eğer, $y=f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri üçüncü bir t değişkeninin

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t), \qquad t\in(\alpha,\beta)\end{cases} \qquad (4.19)$$

fonksiyonları yardımıyla veriliyorsa, bu f fonksiyonu parametrik şekilde verilmiştir denir. Bu durumda, t değişkenine parametre denir.

Teorem 4.2.8 *: φ ve ψ fonksiyonları $t_0\in(\alpha,\beta)$ noktasının bir $U(t_0)\subset\mathbb{R}$ komşuluğunda türevlenebilir olsunlar. Eğer, $\varphi'(t_0)\neq 0$ ve φ fonksiyonunun $x_0=\varphi(t_0)$ noktasının bir $U(x_0)\subset\mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı $t=\varphi^{-1}(x)$ ters fonksiyonu varsa, (4.19) fonksiyonları yardımıyla parametrik şekilde verilen $y=f(x)$ fonksiyonu $x_0=\varphi(t_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve*

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \quad \text{veya} \quad {y_x}'(x_0) = \frac{{y_t}'(t_0)}{{x_t}'(t_0)} \qquad (4.20)$$

olur.

İspat: $t_0+h=U(t_0)$ olmak üzere

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} = \varphi'(t_0)\neq 0$$

olduğuna göre, $\exists\delta>0$ öyleki $\forall h\in\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için $\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)\neq 0$ olur. $H=\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)$ olmak üzere $h\to 0\Leftrightarrow H\to 0$ olacağı gözönüne alındığında $\forall h\in\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{H\to 0}\frac{f(x_0+H)-f(x_0)}{H}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t_0+h))-f(\varphi(t_0))}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}\end{aligned}$$

[$\forall t\in\overset{\circ}{U}_\delta(0)$ için $\psi(t)=f(\varphi(t))$ olduğundan]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h}.\frac{h}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

bulunur. Bu ise, (4.20) ifadesinin doğru olması demektir. □

Örnek 4.2.9 *: (x,y) noktasının kutupsal koordinatları r ve θ olmak üzere*

$$r = a(1+\cos\theta), \theta \in (0, \frac{2\pi}{3})$$

tanımlı $y = y(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: $y = y(x)$ fonksiyonunun parametrik şekli

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta \ . \end{cases}$$

biçiminde olduğundan dolayı (4.20) formülüne göre

$$\begin{aligned} y_x{}' &= \frac{y_\theta{}'}{x_\theta{}'} = \frac{a(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)'}{a(\cos\theta+\cos^2\theta)'} \\ &= \frac{(\sin\theta)'+(\sin\theta\cos\theta)'}{(\cos\theta)'+(\cos^2\theta)'} \\ &\quad [(\sin\theta)' = \cos\theta, (\cos\theta)' = -\sin\theta, \\ &\quad (\sin\theta\cos\theta)' = (\sin\theta)'\cos\theta + \sin\theta(\cos\theta)' = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \\ &\quad (\cos^2\theta)' = 2\cos\theta(\cos\theta)' = -2\cos\theta\sin\theta = -\sin 2\theta \end{aligned}$$

olduğundan]

$$= -\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta} = -\frac{\cos(\frac{3\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{3\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = -\cot(\frac{3\theta}{2})$$

bulunur. ⋄

Örnek 4.2.10 *: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.*

(a) $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$;

(b) $f : \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \cot x$;

(c) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$;

(d) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos x$;

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arctan x$;

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{arccotx}$;

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sinh x$;

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cosh x$;

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \tanh x$;

(j) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \coth x$;

(k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin hx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(l) $f : \mathbb{R}\backslash[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos hx = \ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$;

(m) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \arctan hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(n) $f : \mathbb{R}\backslash[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \text{arccothx} = \frac{1}{2}\ln\frac{\text{x}+1}{\text{x}-1}$.

Çözüm: (a) Kesirli fonksiyonun türev formülüne göre $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ için

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

olur.

(b) (a) ya benzer şekilde, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ için

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

olduğu gösterilir.

(c) $\forall x \in (-1,1)$ ve $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ olacağından ters fonksiyonun türev formülüne göre

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= y_x{}' = [(4.17)\text{den}] \\ &= \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{(\sin y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

olur.

(d) (c) ye benzer şekilde $\forall x \in (-1,1)$ için

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

olduğu gösterilebilir.

(e) $\forall x \in (-1,1)$ ve $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$ olacağından,

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= y_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{(\tan y)'} \\ &= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

olur.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall y \in (0,\pi)$ için $y = \text{arccotx} \Leftrightarrow \text{x} = \cot \text{y}$ olacağından,

$$\begin{aligned}(\text{arccotx})' &= y_x{}' = \frac{1}{x_y{}'} = \frac{1}{(\cot y)'} \\ &= -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

olur.

(g) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= (\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}))' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') \\ &= [(e^x)' = e^x \text{ ve } (\text{e}^{-\text{x}})' = -\text{e}^{-\text{x}} \text{ olduğundan}] \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x\end{aligned}$$

olur.

(h) (g) ye benzer olarak, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

olduğu gösterilebilir.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= (\frac{\sinh x}{\cosh x})' = \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

olur.

(j) (h) ye benzer olarak $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

olduğu gösterilebilir.

(k) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\arcsin hx)' &= (\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' \\ &\quad [g(y) = \ln y, y = h(x) = x+\sqrt{x^2+1} \text{ dersek} \\ &= g(h(x)) \text{bileşik fonksiyonunun türev formülünden}] \\ &= (g(h(x)))' = g'(h(x)).h'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}((x)' + (\sqrt{x^2+1})') \\ &\quad [g_1(y) = \sqrt{y}, y = h_1(x) = x^2+1 \text{ dersek} \\ &= g_1(h_1(x)) \text{bileşik fonksiyonunun türev formülüne göre} \\ &= (\sqrt{x^2+1})' = (g_1(h_1(x)))' = g_1(h_1(x))h_1'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{olduğundan}] \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

olur.

(l) (i) ye benzer olarak $\forall x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ için

$$(\arccos hx)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

olduğu gösterilebilir.

(m) $\forall x \in (-1,1)$ için

$$\begin{aligned}(\arctan hx)' &= \frac{1}{2}(\ln\frac{1+x}{1-x})' \\ &\quad [g(y)=\ln y, y=h(x)=\frac{1+x}{1-x} \text{ dersek} \\ &= g(h(x)) \text{ bileşik fonksiyonunun türev formülünden}] \\ &= (g(h(x)))' = g'(h(x)).h'(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}(\frac{1+x}{1-x})' \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

olur.

(n) (k) ya benzer olarak $\forall x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ için

$$(\text{arccothx})' = \pm\frac{1}{1-\text{x}^2}$$

bulunur. $\diamond$

Şimdi esas elemanter fonksiyonların türevleri için yukarıda elde edilen türev formüllerini tablo (cetvel) şeklinde yazalım.

No	$f(x)$ fonksiyonu	f nin türevi	f nin türevli olduğu küme
1.	c (const)	0	$\mathbb{R}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ için $x \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{N}$ için $x \in \mathbb{R}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	$a>0, a\neq 1$ için $x \in \mathbb{R}$
4.	$\log_a \mid x \mid$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a>0, a\neq 1$ için $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
5.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

No	$f(x)$ fonksiyonu	f nin türevi	f nin türevli olduğu küme
7.	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
8.	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
9.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
10.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
11.	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
12.	arccotx	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
17.	$\arcsin hx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
18.	$\text{arccoshx} = \ln(\text{x}+\sqrt{\text{x}^2-1})$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$
19.	$\arctan hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1,1)$
20.	$\text{arccothx} = \frac{1}{2}\ln\frac{\text{x}+1}{\text{x}-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$

(Tablo 4.1)

4.2.1 Çözümlü Problemler

(1) $X \subset \mathbb{R}; f,g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve X in limit noktası olan bir $x_0 \in X$ noktası verilmiş olsun. Aşağıdaki durumlarda $f+g, f.g, \frac{f}{g}$ fonksiyonlarının x_0 da türevlimidir?

(a) f, x_0 da türevli g, x_0 da türevli değildir.

(b) f ile g, x_0 da türevli değildir.

Çözüm: Çözümü $F(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu için yapalım. Genel olarak hayır. Örneğin, $x_0 = 0$ noktasında $f(x) = 1$ fonksiyonu türevli, $g(x) =\mid x \mid$ fonksiyonu türevli değildir. Bu durumda, $F(x) = 1. \mid x \mid$ $=\mid x \mid$ fonksiyonu x_0 noktasında türevli değildir. $x_0 = 0$ noktasında $f(x) = x$ fonksiyonu türevli, $g(x) =\mid \sin x \mid$ fonksiyonu türevli değildir fakat $F(x) = x. \mid \sin x \mid$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlidir

(Çünkü, $F'(0) = 0$ dır). $x_0 = 0$ noktasında $f(x) =\mid x \mid$ ve $g(x) = -\mid x \mid$ fonksiyonları türevli değildir, fakat $F(x) = -\mid x \mid^2$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlidir (Çünkü, $F'(0) = 0$ dır). x_0 noktasında $f(x) = \text{sgn}x$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $F(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonları $x_0 = 0$ da türevli değildir. $\diamond$

(2) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz. Türevin varolduğu kümeyi gösteriniz.

(a) $y = 7x^{13} + 13x^{-7}$; (b) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$;
(c) $y = x^3\sqrt[3]{x^2} + x^7\sqrt[3]{x}$; (d) $y = \frac{\sqrt{x}}{\tan x}$;
(e) $y = \cos(2^x - x^3)$; (f) $y = x^2 \cot x + 2$;
(g) $y = \arctan^2 x$; (h) $y = e^x \log_2 x$;
(i) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$; (j) $y = \arctan(\tanh x)$;
(k) $y = \ln(\coth \frac{x}{2})$; (l) $y = \log_x 2^x$;
(m) $y = 4^{x \tan \frac{x}{2}}$; (n) $y = 2^{\text{arccot}\sqrt{x^2+1}}$;
(o) $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$; (p) $y = (\tan \frac{x}{2})^{x \arcsin 2x}$;
(q) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$; (r) $y = \ln^3 \arctan^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}$;
(s) $y = \frac{1}{a^2-b^2}\arcsin(\frac{a \sin x + b}{a + b \sin x})$; $(a^2 - b^2 > 0)$.

Çözüm: Problemin çözümünü türev alma kurallarından (Bkz Teorem 4.2.1,4.2.3,4.2.4 ve 4.2.7)ve esas elemanter fonksiyonların türev formüllerinden yararlanarak çözeceğiz.

(a) $y' = (7x^{13})' + (13x^{-7})' = 7(x^{13})' + 13(x^{-7})'$

$$= 7.13x^{13-1} + 13(-7)x^{-7-1} = 91x^{12} + 91x^{-8}, x \neq 0 \ .$$

(b) $y' = (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' + (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, x > 0 \ .$$

(c) $y' = (x^3\sqrt[3]{x^2})' + (x^7\sqrt[3]{x})' = (x^3)'\sqrt[3]{x^2} + x^3(\sqrt[3]{x^2})' + (x^7)'\sqrt[3]{x} + x^7(\sqrt[3]{x})'$

$$= 3x^2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x^3x^{\frac{-1}{3}} + 7x^6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x^7x^{\frac{-2}{3}}$$
$$= \frac{11x^2\sqrt[3]{x^2} + 22x^6\sqrt[3]{x}}{3}, x \in \mathbb{R} \ .$$

(d) $y' = (\frac{\sqrt{x}}{\tan x})' = \frac{(\sqrt{x})' \tan x - \sqrt{x}(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{x}\sin x} - \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \ .$$

(e) $y' = (\cos(2^x - x^3))'$[$g(u) = \cos u$ ve u = f(x) $= 2^x - x^3$ dersek]

$$= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = -sinu.u'$$
$$= -\sin(2^x - x^3).((2^x)' - (x^3)')$$
$$= -(2^x \ln 2 - 3x^2)\sin(2^x - x^3), x \in \mathbb{R} \ .$$

(f) $y' = (x^2 \cot x + 2)' = (x^2 \cot x)' + (2)'$

$$= (x^2)' \cot x + x^2(\cot x)' = 2x \cot x - \frac{x^2}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \ .$$

(g) $y' = (\arctan^2 x)'$[$g(u) = u^2$ ve u = f(x) = arctan x dersek]

$$= (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) = 2(f(x))f'(x)$$
$$= 2\arctan x(\arctan x)'$$
$$= \frac{2\arctan x}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R} \ .$$

(h) $y' = (e^x \log_2 x)' = (e^x)' \log_2 x + e^x(\log_2 x)' = e^x \log_2 x + \frac{e^x}{x \ln 2}$

$$= e^x(\log_2 x + \frac{1}{x \ln 2}), x > 0 \ .$$

(i) $y' = (\sin^2(\cos x))' + (\cos^2(\sin x))'$

$$= 2\sin(\cos x)(\cos x)' + 2\cos(\sin x)(\sin x)'$$
$$= -2\sin x \sin(\cos x) + 2\cos x \cos(\sin x), x \in \mathbb{R} \ .$$

(j) $y' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}(\tanh x)' = \frac{1}{1+\tanh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x}$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}, x \in \mathbb{R} .$$

(k) $y' = \frac{1}{\coth \frac{x}{2}}(\coth \frac{x}{2})' = \frac{-1}{\coth \frac{x}{2}}\frac{1}{2\sinh^2 \frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sinh x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(l) $y' = (\log_x 2^x)' = (\frac{\log_2 2^x}{\log_2 x})' = (\frac{x}{\log_2 x})' = \frac{\log_2 x - x\frac{1}{x\ln 2}}{\log^2{}_2 x}$

$$= \frac{\ln x - 1}{\ln 2 \log^2{}_2 x}, x > 0, x \neq 1 .$$

(m) $y' = 4^{x\tan\frac{x}{2}}(x\tan\frac{x}{2})'\ln 4 = 4^{x\tan\frac{x}{2}}(x\tan\frac{x}{2} + \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}})\ln 4,$
$x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

(n) $y' = 2^{\operatorname{arccot}\sqrt{x^2+1}}(\operatorname{arccot}\sqrt{x^2+1})'\ln 2 = 2^{\operatorname{arccot}\sqrt{x^2+1}}\frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{1+(\sqrt{x^2+1})^2}\ln 2$

$$= 2^{\operatorname{arccot}\sqrt{x^2+1}}\frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{x^2+1}}\ln 2, \ x \in \mathbb{R} .$$

(o) $y' = ((\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}})'$ [(4.18) den]

$$= (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}[(\frac{\sin x}{x})'\ln\arcsin x + \frac{\sin x}{x}\frac{(\arcsin x)'}{\arcsin x}]$$
$$= (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}[\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\ln\arcsin x + \frac{\sin x}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}],$$

$x \in (0,1)$.

(p) $y' = ((\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x})' =$ [(4.18) den]

$$= (\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x}[(x\arcsin 2x)'\ln\tan\frac{x}{2} + x\arcsin 2x\frac{(\tan\frac{x}{2})'}{\tan\frac{x}{2}}]$$
$$= (\tan\frac{x}{2})^{x\arcsin 2x}[(\arccos 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}})\ln\tan\frac{x}{2} + \frac{x\arcsin 2x}{\sin x}],$$

$x \in (0, \frac{1}{2})$.

(q) $y' = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2})' - \frac{a^2}{2}(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))'$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}) - \frac{a^2}{2}\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= \frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= \frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}, x \in (-\infty, -\mid a \mid) \cup (\mid a \mid, +\infty) .$$

(r) $y' = 3\ln^2\arctan^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}\frac{1}{\arctan^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}}.2\arctan\sqrt{\frac{1}{x^3}}.\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}(-\frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}})$

$$= -\frac{9\ln^2\arctan^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\arctan\sqrt{\frac{1}{x^3}}}.\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, x > 0 .$$

(s) $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x})^2}}\frac{a\cos x(a+b\sin x)-b\cos x(a\sin x+b)}{(a+b\sin x)^2}$

$$= \sqrt{a^2-b^2}\frac{\cos x}{(a+b\sin x)\sqrt{(a^2-b^2)-(a^2-b^2)\sin^2 x}}$$
$$= \frac{1}{a+b\sin x}, x \neq (-1)^{k-1}\arcsin\frac{b}{a} + k\pi, k \in \mathbb{Z} .$$

(3) Aşağıda parametrik denklemlerle verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t), \quad 0 < t < 2\pi \ ; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \ ; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t\arctan t - \ln\sqrt{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \ ; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \ ; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \quad 0 <\mid t \mid< 1 \ . \end{cases}$

Çözüm: Problemin çözümünü parametrik şekilde verilen fonksiyonların türevi için (4.20) formülünden faydalanarak yapacağız.
(a) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(0, 2\pi)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = a(1-\cos t) \neq 0, y'_t = a\sin t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2}$$

olur.
(b) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \neq 0, y'_t = \frac{-t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-t}{(1+t^2)}$$

olur.
(c) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = 3(t^2+1) \neq 0, y'_t = \arctan t + \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \arctan t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\arctan t}{3(1+t^2)}$$

olur.
(d) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(0, \frac{\pi}{2})$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x'_t = 3a\cos^2 t\sin t \neq 0, y'_t = 3b\sin^2 t\cos t$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a}\tan t$$

olur.
(e) $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $(-1,1)\backslash\{0\}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0, y'_t = \frac{-t}{|t|\sqrt{1-t^2}}$ olduğuna göre, (4.20) den dolayı

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1 \text{ ise,} \\ 1, & -1 < t < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\diamond$

(4) Aşağıdaki eşitliklerde kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.
(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$; (b) $x^2 - 1 + \cos xy = 0$;
(c) $y - x = \varepsilon\sin y, \mid \varepsilon \mid< 1$; (d) $x + y = e^{x-y}$;
(e) $\arctan(x^2+y^2) - \ln(xy) \quad -1 = 0, \quad xy > 0$.

Çözüm: (a) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x^2 + 2xy(x) - (y(x))^2 = 4x$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 4, x \in I \Rightarrow$$

$y(x) \neq x$ olmak üzere $y'(x) = \frac{y+x-2}{y-x}$ olur.
(b) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x^2 - 1 + \cos(xy(x)) = 0$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$2x - y\sin(xy) - y'(x)x\sin(xy) = 0, x \in I \Rightarrow$$

$y\sin(xy) \neq 0$ olmak üzere $y'(x) = \frac{2}{\sin(xy)} - \frac{x}{y}$ olur.
(c) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$y(x) - x = \varepsilon\sin y(x)$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$y'(x) - 1 = \varepsilon y'(x)\cos y,\ x \in I \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$$

olur.

(d) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$x + y(x) = e^{x - y(x)}$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$(e^{x-y} + 1)y'(x) = e^{x-y} - 1, x \in I \Rightarrow y'(x) = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$$

olur.

(e) $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen denklemin türevlenebilir bir çözümü, yani $x \in I$ için

$$\arctan(x^2 + (y(x))^2) - \ln(xy(x)) - 1 = 0$$

olsun. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevini alalım. O halde,

$$\frac{2x + 2yy'(x)}{1 + (x^2 + y^2)^2} - \frac{y + xy'(x)}{xy} = 0, x \in I \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{2x^2y - y - y(x^2 + y^2)^2}{x + x(x^2 + y^2)^2 - 2xy^2}$$

olur. $\diamond$

(5) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonlarının terslerinin türevlerini ve onların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $y = x + \ln x, x > 0$; (b) $y = 2x^2 - x^4, x > 1$.

Çözüm: (a) Verilen fonksiyon $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ olur. Bu durumda (4.17) den dolayı $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{x}{1 + x},\ D((f^{-1})') = \mathbb{R}$$

olur.

(b) Verilen fonksiyon $(1, +\infty)$ üzerinde sürekli ve $\forall x \in (1, +\infty)$ için $f'(x) = 4x(1 - x^2) < 0$ olur. $f^{-1} : (-\infty, 1) \to (1, +\infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - y}}$ ters fonksiyonun türevi (4.17) ye göre

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{4x(1 - x^2)}, D((f^{-1})') = (-\infty, 1)$$

olur. $\diamond$

(6) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda türevlerini bulunuz.

(a) $y = x + \frac{1}{5}x^5, y_0 = 0$; (b) $y = 2x^2 - x^4, x > 1, y_0 = -1$.

Çözüm: (a) $y_0 = 0$ olduğundan, $y = x + \frac{1}{5}x^5$ eşitliğinden $x_0 = 0$ olur. Buna göre, $f'(x) = 1 + x^4 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \neq 0$ olduğundan, (4.17) den dolayı

$$(f^{-1}(0))' = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

olur.

(b) $y_0 = -1$ olduğundan, $y = 2x^2 - x^4$ eşitliğinden $x_0 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ olur. Buna göre, $f'(x) = 4x(1 - x^2) \Rightarrow f'(x_0) = -4\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}} \neq 0$ olduğundan, (4.17) den dolayı

$$(f^{-1}(-1))' = \frac{1}{f'(\sqrt{1 + \sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$$

olur. $\diamond$

(7) Aşağıdaki fonksiyonların apsisleri karşılarında yazılı noktalarda teğet ve normal denklemlerini yazınız.

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -\frac{1}{2}$.

Çözüm: $f : (a, b) \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(x_0, f(x_0))(x_0 \in (a, b))$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri $f'(x_0) \neq 0$ olmak üzere sırasıyla

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ve

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

denklemleri yardımıyla verilir.
(a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f(2) = \frac{1}{5}, f'(2) = -\frac{4}{25}$ olduğuna göre, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğine $(2, \frac{1}{5})$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri sırasıyla

$$y = \frac{1}{5} - \frac{4}{25}(x-2) \text{ ve } y = \frac{1}{5} + \frac{25}{4}(x-2)$$

olur.
(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f(-\frac{1}{2}) = -2, f'(-\frac{1}{2}) = -4$ olduğuna göre, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğine $(\frac{-1}{2}, -2)$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemleri sırasıyla

$$y = -2 - 4(x + \frac{1}{2}) \text{ ve } y = -2 + \frac{1}{4}(x + \frac{1}{2})$$

olur. $\diamond$

(8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x, & |\, x \,| \leq 2 \text{ ise,} \\ \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x}, & |\, x \,| > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun

(a) her yerde sürekli,

(b) her yerde türevlenebilir

olması için α ve β ne olmalıdır?

Çözüm: f fonksiyonunun herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ üzerinde hem sürekli hem de türevlenebilir olması açıktır. Bu fonksiyonun -2 ve 2 noktalarında sürekli olması için

$$f(-2^-) = f(-2^+) = f(-2) \text{ ve } f(2^-) = f(2^+) = f(2)$$

koşullarını sağlamak zorundadır. $f(-2^-) = -\frac{1}{6}, f(-2^+) = f(-2) = -8\alpha - 2\beta$ ve $f(2^-) = f(2) = 8\alpha + 2\beta, f(2^+) = \frac{1}{6}$ olduğuna göre, f nin -2 ve 2 noktalarında ve dolayısıyla, her yerde sürekli olması için $8\alpha + 2\beta = \frac{1}{6}$ olmalıdır. Verilen fonksiyonun -2 ve 2 noktalarında türevlenebilir olması için önce bu fonksiyon her yerde sürekli ve $f'(-2^-) = f'(-2^+), f'(2^-) = f'(2^+)$ koşullarını sağlamak zorundadır. Buna göre, $f'(-2^-) = f'(2^+) = \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi}$ ve $f'(-2^+) = f'(2^-) = 12\alpha + \beta$ olduğundan α ve β sayıları için

$$\begin{cases} 12\alpha + \beta = \frac{-1}{2\sqrt{3}\pi} \\ 4\alpha + \beta = \frac{1}{12} \end{cases}$$

denklem sistemini sağlamalıdır. Demek ki, fonksiyonun heryerde türevlenebilir olması için

$$\alpha = -\frac{2\sqrt{3} + \pi}{96\pi}, \beta = \frac{2\sqrt{3} + 3\pi}{24\pi}$$

olmalıdır. $\diamond$

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\alpha x), & |\, x \,| \leq 1 \text{ ise,} \\ \beta \text{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |\, x \,| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ ve $x = -1$ noktalarında türevlenebilir olması için α ve β ne olmalıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olması için önce bu fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli ve $f'(1^-) = f'(1^+)$ koşullarını sağlamak zorundadır. Buna göre, $f(1^-) = f(1) = \arctan \alpha, f(1^+) = \beta$ ve $f'(1^-) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, f'(1^+) = \frac{1}{2}$ olduğundan, α ve β sayıları için

$$\begin{cases} \arctan \alpha = \beta \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

denklem sistemini sağlamalıdır. Demek ki, fonksiyonun $x = 1$ noktasında türevlenebilir olması için

$$\alpha = 1, \beta = \frac{\pi}{4}$$

olmalıdır. Benzer şekilde, verilen fonksiyonun $x = -1$ noktasında türevlenebilir olması için $\alpha = 1, \beta = \frac{\pi-4}{4}$ olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(10) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilir, $x \in (a,b)$, $x < \alpha_n < \beta_n, (n = 1, 2, \cdots)$ ve $n \to \infty$ iken $\alpha_n \to x, \beta_n \to x$ olsun. Eğer, $(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi sınırlı ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$$

dir. İspatlayımız.

Çözüm: $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x) \Rightarrow t_n \in (a,b)\backslash\{x\}, n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = x$ koşullarını sağlayan her (t_n) dizisi için

$$f(t_n) = f(x) + f'(x)(t_n - x) + \varepsilon_n(t_n - x), \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

olacak şekilde bir (ε_n) dizisi vardır. O halde,

$$f(\alpha_n) = f(x) + f'(x)(\alpha_n - x) + {\varepsilon_n}^1(\alpha_n - x), \lim_{n\to\infty} {\varepsilon_n}^1 = 0$$

ve

$$f(\beta_n) = f(x) + f'(x)(\beta_n - x) + {\varepsilon_n}^2(\beta_n - x), \lim_{n\to\infty} {\varepsilon_n}^2 = 0$$

olacak şekilde $({\varepsilon_n}^1)$ ve $({\varepsilon_n}^2)$ dizileri mevcut olacaktır. Son iki eşitlikten

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + {\varepsilon_n}^2 \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} - {\varepsilon_n}^1 \frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n}$$

elde ederiz. $x < \alpha_n < \beta_n$ ve $(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi sınırlı olduğundan, $(\frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n})$ dizisi de sınırlıdır. Buradan (sınırlı bir dizi ile sonsuz küçük bir dizinin çarpımıda sonsuz küçük bir dizi olduğundan)

$$\lim_{n\to\infty} [{\varepsilon_n}^2 \frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n} - {\varepsilon_n}^1 \frac{\alpha_n - x}{\beta_n - \alpha_n}] = 0$$

olduğu, dolayısıyla, istenen eşitliğin doğruluğu anlaşılır. $\diamond$

4.2.2 Ek Problemler

(11) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz. Türevin varolduğu kümeyi gösteriniz.

(a) $y = (3x-7)^{10}$; (b) $y = x\sqrt[3]{x^2+1}$;
(c) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$; (d) $y = e^{x^2}\cos 2x$;
(e) $y = \frac{\tan x}{\cot 2x}$; (f) $y = \ln[\ln(\ln x)]$;
(g) $y = \sin(\arcsin x)$; (h) $y = \cot(\text{arccotx})$;
(i) $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; (j) $y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2})$;
(k) $y = (\sin x)^{\cos x}$; (l) $y = \tanh(\cos x)$;
(m) $y = \frac{\cosh x^2}{\sinh^2 x^2} - \ln\coth\frac{x^2}{2}$; (n) $y = \cot(x^2) - \frac{1}{2}\tan^3(2x)$;
(o) $y = \log_2{}^3(2x+3)^2$; (p) $y = \sin|\ln x|$;
(q) $y = \cos(\frac{1}{\log_2 x})$; (r) $y = 3^{\cos^2 x}$;
(s) $y = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln(\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x})$; (t) $y = \arcsin\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}$;
(u) $y = \frac{1}{\sin\alpha}\ln\frac{1+x}{1-x} - \cot\alpha\ln\frac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$; (v) $y = \ln\frac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}} + \frac{a}{b}\arctan\frac{x^2}{b}$;
(w) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|a|}$; (x) $y = x^{x^2}$;
(y) $y = |\sin x|^{\cos x}$; (z) $y = 2^{x^x}$.

Cevap:

(a) $y' = 30(3x-7)^9$, $\mathbb{R}$; (b) $y' = \frac{5x^2+3}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$, $\mathbb{R}$;
(c) $y' = \frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$, $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$; (d) $y' = 2e^{x^2}(x\cos 2x - \sin 2x)$, $\mathbb{R}$;
(e) $y' = \frac{4\tan x(1+\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)^2}$, $x \neq \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$; (f) $y' = \frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$, $x > e$;
(g) $y' = 1, [-1,1]$; (h) $y' = 1$, $\mathbb{R}$;
(i) $y' = -\frac{\arccos x}{x}$, $(-1,1)\backslash\{0\}$; (j) $y' = \frac{1}{2(1+x^2)}$, $\mathbb{R}$;
(k) $y' = (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x\ln\sin x)$, $2n\pi < x < \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
(l) $y' = -\frac{\sin x}{\cosh^2(\cos x)}$, $\mathbb{R}$; (m) $y' = \frac{4x}{\sinh^3 x^2}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;
(n) $y' = (\frac{-2}{\sin^2 x} + \frac{\tan^2 2x}{\cos^2 2x}), x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
(o) $y' = \frac{12}{\ln 2}\frac{\log_2{}^2(2x+3)^2}{2x+3}, \mathbb{R}\backslash\{\frac{-3}{2}\}$; (p) $y' = \frac{\cos|\ln x|}{x}$, $\mathbb{R}_+$;
(q) $y' = \frac{\sin(\frac{1}{\log_2 x})}{(x\log_2{}^2)\ln 2}$, $x > 0, x \neq 1$; (r) $y' = -(\ln 3)\sin 2x.3^{\cos^2 x}$, $\mathbb{R}$;
(s) $y' = \frac{1}{a+b\cos x}, b^2 - a^2 > 0$, $x \neq \pm\arccos\frac{a}{b} + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}$;

(t) $y' = \frac{\cos x - \cos\alpha}{|\cos x - \cos\alpha|} \cdot \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$; (u) $y' = \frac{2\sin\alpha}{(1-x)^2(1-x^2\cos^2\alpha)}, (-1,1)$;
(v) $y' = \frac{2(a^2+b^2)x}{(x^2+a)(x^4+b)^2},\ \mathbb{R}$; (w) $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}, |\, x\, | < |\, a\, |$;
(x) $y' = x^{1+x^2}(1+2\ln x),\ \mathbb{R}_+$;

(y) $y' = |\, \sin x\, |^{\cos x}\,(\cos x \cot x - \sin x \ln |\, \sin x\, |), \quad x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
(z) $y' = (\ln 2) 2^{x^x} x^x (1+\ln x),\ \mathbb{R}_+$.

(12) Aşağıda parametrik denklemlerle verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5 \\ y = t^2 - 54t^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x = \ln\sin\frac{t}{2} \\ y = \ln\sin t, \quad 0 < t < \pi \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\} \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{cases}$.

Cevap:

(a) $y'_x = -3t^2e^t$; (b) $y'_x = 1 - \frac{3}{t^2} + \frac{9}{t^2}$;
(c) $y'_x = \frac{2\cos t}{1+\cos t}$; (d) $y'_x = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}$;
(e) $y'_x = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ ise}, \\ -1, & t < 0 \text{ ise} . \end{cases}$

(13) Aşağıdaki eşitliklerde kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

(a) $y^5 + y^3 + y - x = 0$; (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y > 0$;
(c) $(2a-x)y^2 = x^3, y < 0$; (e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, y > 0$;
(e) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0, \quad y < -1$.

Cevap:

(a) $y'(x) = \frac{1}{5y^4+3y^2+1}$; (b) $y'(x) = \frac{b^2x}{a^2y}, |\, x\, | > a$;
(c) $y'(x) = \frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}, 0 < x < 2a$; (d) $y'(x) = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, |\, x\, | < a, x \neq 0$;
(e) $y'(x) = \frac{5}{9}\frac{3-x}{y+1}, |\, x-3\, | < 3$.

(14) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $x = f^{-1}(y)$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda türevlerini bulunuz.
(a) $y = 2x - \frac{1}{2}\cos x, y_0 = \frac{1}{2}$; (b) $y = x + \ln x, x > 0, y_0 = 1$.

Cevap: (a) $(f^{-1})'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; (b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

(15) Aşağıdaki fonksiyonların apsisleri karşılarında yazılı noktalarda teğet ve normal denklemlerini yazınız.
(a) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, x_0 = \sqrt{2}$; (b) $f(x) = \cos 2x - 2\sin x, x_0 = \pi$.

Cevap: (a) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8\sqrt{2}}{9}, y = \frac{9}{2}x - \frac{23\sqrt{2}}{6}$;
(b) $y = 1 - 2\pi + 2x, y = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$.

(16) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |\, x\, | < 1 \text{ ise}, \\ \frac{1}{|x|}, & |\, x\, | \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun
(a) her yerde sürekli, (b) her yerde türevlenebilir
olması için α ve β ne olmalıdır?

Cevap: (a) $\alpha + \beta = 1$; (b) $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$.

(17) Aşağıdaki fonksiyonların her yerde türevlenebilir olması için α ve β ne olmalıdır.

(a) $f(x) = \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x}, & x < 0 \text{ ise}, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \text{ ise}; \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0 \text{ ise}, \\ \alpha\cos x + \beta\sin x, & x \geq 0 \text{ ise}. \end{cases}$

Cevap: (a) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$; (b) $\alpha = \beta$.

(18) $[a,b]$ üzerinde tanımlanan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için $|\, f(x_1) - f(x_2)\, | \leq A \mid x_1 - x_2\, |^{1+\alpha}$ olacak şekilde $A \geq 0$ ve $\alpha > 0$ sabit sayıları varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sabit bir fonksiyondur. Gösteriniz.

(19) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \alpha(x; \Delta x)$

(b) $\mid \alpha(x; \Delta x) \mid \leq C \mid \Delta x \mid^2$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Bu koşullar sağlandığında $f(x) = Ax + B$ olduğunu gösteriniz.

(20) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. $a < \alpha_n < x < \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $n \to \infty$ iken $\alpha_n \to x$, $\beta_n \to x$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$$

dir. İsapatlayınız.

4.3 Yüksek Mertebeden Türevler ve Diferensiyeller

Eğer, $f : [a, b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in [a, b]$ noktasında (a' da sağdan ve b'de soldan) türevlenebiliyorsa, f nin $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve türev fonksiyonu denilen yeni bir $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu meydana geldiğini biliyoruz.(Bkz. Bölüm 4.1). Eğer, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, $(f')' : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin 2. mertebeden türevi denir ve y'', $f''(x), D_2 f(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ sembollerinin birisi ile gösterilir.

Tanım 4.3.1 *: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) $n-1$. mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, bu fonksiyonun $(f^{(n-1)})' : [a, b] \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonuna f nin n. mertebeden türevi denir ve $y^{(n)}, f^{(n)}(x), D_n f(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ sembollerinden birisi ile gösterilir. Verilen bir f fonksiyonunun 0. mertebeden türevi de f nin kendisi olarak, yani $f^{(0)} = f$ gibi tanımlanır.*

Örnek 4.3.2 *: Aşağidaki fonksiyonların n. mertebeden türevlerini bulunuz.*

(a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$;

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$;

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$;

(e) $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a \mid x \mid (a > 0, a \neq 1)$;

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{b}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = (a + bx)^\alpha (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \alpha \in \mathbb{R})$

Çözüm: (a)

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, (x^\alpha)(\mathbb{R}), \\
(x^\alpha)'' &= (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\
\cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\ .
\end{aligned}$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
(\sin x)\prime &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \\
(\sin x)^{(2)} &= -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}) \cdots \\
\cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\sin x)^{(n)} &= (\sin(x + (n-1)\frac{\pi}{2}))' \\
&= \cos(x + (n-1)\frac{\pi}{2}) \\
&= \sin(x + n\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

olur.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için (b) ye benzer şekilde,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

olduğu gösterilebilir.
(d) $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (a^x \ln a,\\ (a^x)^{(2)} &= (a^x \ln a)' = (a^x)\ln^2 a, \cdots,\\ (a^x)^{(n)} &= ((a^x \ln^{n-1} a)' = (a^x)\ln^n a\end{aligned}$$

olur.
(e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned}(\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a} = \frac{x^{-1}}{\ln a}\\ (\log_a |x|)^{(2)} &= \Big(\frac{x^{-1}}{\ln a}\Big)' = -\frac{x^{-2}}{\ln a}, \cdots,\\ (\log_a |x|)^{(n)} &= \Big(\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!x^{-(n-1)}}{\ln a}\Big)'\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}}{\ln a}\end{aligned}$$

olur. Özel durumda , $a = e$ ise, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $(\ln |x|)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ bulunur.
(f) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(-\frac{a}{b})\}$ için

$$\begin{aligned}((a+bx)^\alpha)' &= \alpha(a+bx)^{\alpha-1}(a+bx)'\\ &= b\alpha(a+bx)^{\alpha-1}\\ ((a+bx)^\alpha)^{(2)} &= b\alpha((a+bx)^{\alpha-1})'\\ &= b^2\alpha(\alpha-1)(a+bx)^{\alpha-2}, \cdots,\\ ((a+bx)^\alpha)^{(n)} &= b^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(a+bx)^{\alpha-n}\end{aligned}$$

olur. $\diamond$

Örnek 4.3.3 *: $\forall x \in \mathbb{R}$ için*

$$(\arctan x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin[n(\arctan x + \frac{\pi}{2})] \qquad (4.21)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = \arctan x,\ x = \tan y,$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

olduğuna göre, (4.21) eşitliğini

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})] \qquad (4.22)$$

biçiminde yazabiliriz. Matematik İndüksiyon yöntemiyle (4.22) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. $n = 1$ için $(0! = 1)$ dir.

$$\begin{aligned}y' &= (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\\ &= \cos^2 y = (1-1)!\cos y \sin(y+\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise, (4.22) nin $n = 1$ için doğru olması demektir. Kabul edelim ki (4.22) eşitliği bir $n > 1$ için doğrudur. Bu durumda, (4.22) nin $n+1$ için de doğru olduğunu görelim. (4.22) eşitliğinin her iki tarafından x 'e göre türev alırsak ,

$$\begin{aligned}y^{(n+1)} &= (y^{(n)})'\\ &= (n-1)!\{\cos^n y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})]\}'_x\end{aligned}$$

[bileşik fonksiyonun türev formülünden]

$$\begin{aligned}&= (n-1)!\{\cos^n y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})]\}'_y y'_x\\ &= (n-1)!\{(\cos^n y)'_y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})] + \cos^n y(\sin[n(y+\frac{\pi}{2})])'_y\}y'_x\\ &\quad [y'_x = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y, (\cos^n y)'_y = n\cos^{n-1} y(-\sin y),\\ &\quad (\sin[n(y+\frac{\pi}{2})])' = n\cos[n(y+\frac{\pi}{2}) \text{ olduğundan}]\\ &= n!\cos^{n+1} y\{-\sin y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})] + \cos y \cos[n(y+\frac{\pi}{2})]\}\\ &= n!\cos^{n+1} y \cos[(n+1)y + n\frac{\pi}{2}]\\ &= n!\cos^{n+1} y \sin[(n+1)(y+\frac{\pi}{2})]\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise, (4.22) eşitliğinin $n+1$ durumunda doğru olması demektir. Buradan , (4.21) eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır.

$u, v : [a, b] \to \mathbb{R}, [a, b]$ üzerinde $n.$ mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise, $cu(c \in \mathbb{R})$ ve $u \pm v$ fonksiyonlarının da $[a, b]$ üzerinde $n.$ mertebeden türevlenebilir oldukları ve

$$(cv)^{(n)} = cu^{(n)},\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}() \tag{4.23}$$

formüllerinin doğruluğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. $\diamond$

Bu durumda uv fonksiyonun $n.$ mertebeden türevlenebilir olması aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.3.4 (Leibnitz Formülü) *: u ve v fonksiyonları bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde $n.$ mertebeden $(n \in \mathbb{N})$ türevlenebilen fonksiyonlar ise, uv de $[a, b]$ üzerinde $n.$ mertebeden türevlenebilirdir ve*

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) \tag{4.24}$$

dir.

İspat: $n = 1$ için,

$$\begin{aligned}(uv)^{(1)}(x) &= u^{(1)}(x)v(x) + u(x)v^{(1)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} u^{(1-k)}(x)v^{(k)}(x)\end{aligned}$$

ifadesinin doğruluğunu Teorem 4.2.1 (b) de görmüştük. Kabul edelim ki, (4.24) formülü bir $n > 1$ için doğrudur ve onun $n + 1$ içinde doğru olacağını görelim. (4.24) ün her iki tarafından x e göre türev alırsak

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u^{(n-k)}v^{k})'\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u^{(n-k+1)}v^{(k)} + (u^{(n-k)}v^{(k+1)})\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}) u^{(n+1-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$

$[\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ ve $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ olduğundan]

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)}v^{(k)}$$

elde ederiz. Matematik İndüksiyon metodu gereğince (4.24)ün doğruluğu ispatlanmış oldu. $\square$

Örnek 4.3.5 *: $f(x) = x^2 \sin 2x$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden türevini bulunuz.*

Çözüm: $\forall k > 2$ doğal sayısı için $(x^2)^k = 0$ olacağından (4.24) formülünde $u(x) = \sin 2x, v(x) = x^2$ yazarsak,

$$(x^{(2)} \sin 2x)^{(n)} = \binom{n}{0}x^2(\sin 2x)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)^1(\sin 2x)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)^{(2)}(\sin 2x)^{(n-2)}$$

olduğu elde edilir. $\sin 2x$ fonksiyonunun $n., (n-1).$ ve $(n-2).$ mertebeden türevlerini

$$(\sin ax)^{(k)} = a^k \sin(ax + k\frac{\pi}{2})(a \in \mathbb{R})$$

formülünden faydalanarak bulacağız ;

$$\begin{aligned}(\sin 2x)^{(n)} &= 2^{(n)} \sin(2x + n\frac{\pi}{2}),\\ (\sin 2x)^{(n-1)} &= 2^{(n-1)} \sin(2x + (n-1)\frac{\pi}{2})\\ &= -2^{(n-1)} \cos(2x + n\frac{\pi}{2}),\\ (\sin 2x)^{(n-2)} &= 2^{(n-2)} \sin(2x + (n-2)\frac{\pi}{2})\\ &= -2^{(n-2)} \sin(2x + n\frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Buna göre,

$$(x^{(2)} \sin 2x)^{(n)} = 2^n(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}) \sin(2x + n\frac{\pi}{2}) - 2^n nx \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

olur. $\diamond$

Örnek 4.3.6 : *$a_0, a_1, \cdots, a_n$ herhangi reel sayılar olmak üzere $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ polinomunun $P_n^{(k)}(0)$ $k = 1, 2, 3, \cdots$ türevlerini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
P_n^{(1)}(x) &= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1},\\
P_n^{(2)}(x) &= n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2},\\
P_n^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3} + \cdots + 3.2a_{n-3}, \cdots \ ,\\
P_n^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2a_0\\
P_n^{(k)}(x) &= 0, k = n+1, n+2, \cdots
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
P_n(0) &= a_n,\\
P_n^{(1)}(0) &= a_{n-1},\\
P_n^{(2)}(0) &= 2a_{n-2} = 2!a_{n-2},\\
P_n^{(3)}(0) &= 3.2a_{n-3} = 3!a_{n-3}, \cdots \ ,\\
P_n^{(n)}(0) &= n!a_0,\\
P_n^{(k)}(0) &= 0,\ k = n+1, n+2, \cdots
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $a_k = \frac{P_n^{n-k}(0)}{(n-k)!},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n$ olacağından,

$$P_n(x) = \frac{P_n^n(0)}{(n)!}x^n + \frac{P_n^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + \frac{P_n^2(0)}{(2)!}x^2 + \frac{P_n^1(0)}{(1)!}x + P_n(0)$$

olur. $\diamond$

Örnek 4.3.7 *(Parametrik Şekilde Verilmiş Fonksiyonun 2. Mertebeden Türevi):*

$\varphi, \psi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları (α, β) üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen ve $\forall t \in (\alpha, \beta)$ için $\varphi'(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

tanımı ile $y = f(x)$ fonksiyonunun 2. mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm: (4.20) formülüne göre $y_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
y''_{xx} &= (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t}\\
&= \frac{x'_ty''_{tt} - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}
\end{aligned}$$

olur. Özel durumda , $x = \ln t, y = e^t$ için

$$\begin{aligned}
y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{\frac{1}{t}} = te^t \ ,\\
y''_{xx} &= \frac{(y_x)'_t}{x'_t} = \frac{(te^t)'}{\frac{1}{t}} = \frac{e^t + te^t}{\frac{1}{t}} = t(1+t)e^t
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, eğer (4.19) ile tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun $n-1$. mertebeden $y_{x^{n-1}}^{(n-1)}$ türevi bulunmuşsa onun n. mertebeden $y_{x^n}^{(n)}$ türevi $y_{x^n}^{(n)} = \frac{(y_{x^{n-1}}^{(n-1)})'_t}{x'_t}$ formülü yardımıyla hesaplanabilir. $\diamond$

Örnek 4.3.8 *(Ters Fonksiyonun 2. Mertebeden Türevi): $f : (a, b) \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) üzerinde sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer, bu fonksiyon (a, b) üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen ve $\forall x \in (a, b)$ için $f\prime(x) \neq 0$ ise, f nin $f^{-1} : (f(a^+), f(b^-)) \to \mathbb{R}$ (veya $f^{-1} : (f(b^-), f(a^+)) \to \mathbb{R}$), $x = f^{-1}(y)$ tersinin de 2. mertebeden türevlenebilen olduğunu gösteriniz. Ayrıca onun 2. mertebeden x''_{yy} türevini bulunuz.*

Çözüm: $x = f^{-1}(y)$ ters fonksiyonunun türevlenebilen ve $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ formülünün doğru olduğunu Teorem 4.2.4 de gördük. O halde, önce ters ve sonra bileşik fonksiyonların türev formüllerini uygulamayla

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y_x}\right)'_x x'_y = -\frac{(y'_x)'_x}{(y'_x)^2}x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

yani $x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$ buluruz.

Özel durumda, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = x + x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y'_x = f'(x) = 1 + 3x^2 \neq 0, y''_{xx} = 6x$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+3x^2}, \\ x''_{yy} &= -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3} = -\frac{6x}{(1+3x^2)^3} \end{aligned}$$

olur. $\diamond$

Şimdi yüksek mertebeden diferansiyelleri tanımlayalım. $f : (a,b) \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilen ise, onun $df(x)$ ile gösterilen diferensiyeli, hem x, hem de dx değişkenlerine bağlı $df(x) = f'(x)dx$ ya da $df(x)(dx) = f'(x)dx$ eşitliği ile tanımlandığini biliyoruz. (Bkz. Tanım 4.1.5) $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilen olsun. Bu durumda $dx \in \mathbb{R}$ sabit tutulmak üzere $df(x)$ diferensiyeli yalnızca x in bir fonksiyonu olur. Bu fonksiyonun diferensiyeline (x'e dx artımı verilmekle) $f(x)$ fonksiyonunun 2. mertebeden diferensiyeli denir, $d^2f(x)$ ya da $d^2f(x)(dx)$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d^2f(x) &= d(df(x)) = d(f'(x)dx) \\ &\quad [dx \text{ sabit bir sayı olduğundan}] \\ &= d(f'(x))dx \\ &\quad [d(f'(x)) = (f'(x))'dx = f''(x)dx \text{ olduğundan}] \\ &= f''(x)dxdx = f''(x)dx^2, \end{aligned}$$

yani,

$$d^2f(x) = f''(x)dx^2 \tag{4.25}$$

bulunur. Burada, $dx^2 = (dx)^2$ gibi anlaşılmasi gerekir. (a,b) üzerinde n. mertebeden türevlenebilen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun n. mertebeden diferensiyeli benzer şekilde tanımlanabilir. Tümevarımla herhangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$d^nf(x) = f^n(x)dx^n \tag{4.26}$$

elde edilir.

$u, v : (a,b) \to \mathbb{R}, (a,b)$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise, $\alpha u + \beta v (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ ve uv fonksiyonlarının n. mertebeden diferensiyellenebilen ve (4.23),(4.24), (4.26) formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} d^n(\alpha u + \beta v) &= \alpha d^n v + \beta d^n v, \\ d^n(uv) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^{n-k}u d^k v \end{aligned}$$

formüllerinin doğru oldukları tümevarımla gösterilebilir.

Not: (4.25) ve $n > 2$ durumunda (4.26) formülleri yalnızca x bağımsız değişken olduğu durumda geçerlidir. $\bullet$

Bunu $n = 2$ için görelim. $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}, u = \varphi(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde, $f : \varphi((a,b)) \to \mathbb{R}$, $y = f(u)$ fonksiyonu da $\varphi((a,b))$ üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} dy &= y'_x dx = (f(\varphi(x)))'dx \\ &= f'(\varphi(x))\varphi\prime(x)dx, \end{aligned}$$

yani $dy = y'_u u_x dx$ bulunur. Burada, $u_x dx = du$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} dy &= y'_u du, \text{ yani,} \\ dy &= f'(u)du \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde ederiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'_u du) \\ &= d(y'_u)du + (y'_u)d(du) \end{aligned}$$

[(4.27) den dolayı $d(y'_u) = (y_u)'_u du = y''_{uu}du$ ve $d(du) = d^2u$]

$$= y''_{uu}du^2 + (y_u)'_u du^2$$

yani,

$$d^2y = y''_{uu}du^2 + (y_u)'_u d^2u \tag{4.28}$$

bulunur. $dy = y'_x dx$ ve (4.27) formüllerinden görüldüğü gibi, $y = f(u)$ fonksiyonunda , u bağımsız veya bağımlı değişken olduğu durumda, fonksiyonun diferansiyeli, aynı şekle sahip formülle, yani, f nin türevi ile u argümanının diferensiyeli çarpımına eşittir. Buna, fonksiyonun 1. mertebeden diferensiyelinin şeklinin değişmezliği (invaryantlığı) özelliği denir. (4.25) ve (4.28) den görüldüğü gibi $u = f(u)$ fonksiyonunun 2. mertebeden diferansiyeli genel olarak diferansiyel şeklinin invaryantlığı özelliğine sahip değildir. $u = v$ bağımsız değişken veya $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u = ax + b$ şeklinde bağımlı değişken olması durumlarında $d^2u = 0$ olacağından (4.28) den bu durumlarda $d^2y = y''_{uu}du^2$ olduğu elde edilir. Demek ki, $d^n y = y^n_{u^n} du^n$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için yalnızca $u = x$ bağımsız ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u = ax + b$ şeklinde bağımlı değişken olduğu durumlarda diferensiyel şeklinin invaryantlığı özelliğine sahiptir.

Örnek 4.3.9 : *$y = \cos x^2$ fonksiyonunun x bağımsız ve bağımlı değişken olduğu durumlarda 2.mertebeden diferensiyelini bulunuz.*

Çözüm: (a) x bağımlı değişken olsun.

I. Yol: 2. mertebeden diferensiyelin tanımı gereğince

$$d^2y = d(dy) = d(d\cos x^2)$$

[1. mertebeden diferansiyel şeklinin invaryantlığı özelliğinden]

$$\begin{aligned} &= d(-2x\sin x^2 dx) \\ &= -2d(x\sin x^2)dx - 2x\sin x^2 d(dx) \\ &\quad [d(x\sin x^2) = dx\sin x^2 + xd(\sin x^2) \\ &= \sin x^2 dx + 2x^2\cos x^2 dx, \\ d(dx) &= d^2x \text{ olduğundan}] \\ &= -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2)dx^2 - 2x\sin x^2 d^2x \end{aligned}$$

II. Yol: Verilen fonksiyonun x e göre 1. ve 2. mertebeden türevlerini bulalım :

$$\begin{aligned} y'_x &= -2x\sin x^2, \\ y''_{xx} &= -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2. \end{aligned}$$

O halde, (4.28) formülüne göre

$$\begin{aligned} d^2y &= y''_{xx}dx^2 + y'_x d^2x \\ &= -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2)dx^2 - 2x\sin x^2 d^2x \end{aligned}$$

bulunur.

(b) x bağımsız değişken olsun. Bu durumda, $d^2x = 0$ olacağından (4.25) ten dolayı

$$d^2y = y''_{xx}dx^2 = -2(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2)dx^2$$

olur. $\diamond$

4.3.1 Çözümlü Problemler

(1) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 3. mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda $y = f(e^x)$ fonksiyonunun y''' türevini bulunuz.

Çözüm: Bileşik fonksiyonun türev formülüne göre

$$\begin{aligned} y' &= (f(e^x))' = f'(e^x)(e^x)' = f'(e^x)e^x, \\ y'' &= (y')' = (f'(e^x)e^x)' = (f'(e^x))'e^x + f'(e^x)(e^x)' \\ &= f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$y''' = (y'')' = f'''(e^x)e^{3x} + 3f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x$$

bulunur. $\diamond$

(2) u ile v 2. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olduğunda aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının 2. mertebeden diferansiyelini bulunuz.
(a) $y = \arctan\frac{u}{v}$; (b) $y = ue^{-v^2}$.

Çözüm: (a) 1. mertebeden diferansiyel şeklinin invaryantlığından

$$\begin{aligned} dy &= d(\arctan\frac{u}{v}) = (\arctan\frac{u}{v})'d(\frac{u}{v}) \\ &= \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2}\frac{vdu-udv}{v^2} = \frac{vdu-udv}{u^2+v^2}\ . \end{aligned}$$

2. mertebeden diferansiyelin tanımına göre

$$d^2y = d(dy) = d(\frac{vdu-udv}{u^2+v^2})$$

[kesrin diferansiyeli formülünden]

$$= \frac{(u^2+v^2)d(vdu-udv)-(vdu-udv)d(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

$[d(vdu-udv)] = dvdu + vd(du) - dudv - vd(dv)$

$= vd^2u - ud^2v,\ d(u^2+v^2) = d(u^2)+d(v^2) = 2udu+2vdv$ olduğundan]

$$= \frac{vd^2u-ud^2v}{u^2+v^2} - \frac{2\{uv[(du)^2-(dv)^2]+(v^2-u^2)\}dudv}{(u^2+v^2)^2}$$

bulunur.

(b) $dy = d(ue^{-v^2}) = e^{-v^2}du + ud(e^{-v^2})$
$[d(e^{-v^2}) = e^{-v^2}d(-v^2) = -2ve^{-v^2}dv$ olduğundan]

$$\begin{aligned} &= e^{-v^2}du - 2uve^{-v^2}du = e^{-v^2}(du-2uvdv)\ . \\ d^2y &= d(dy) \\ &= (du-2uvdv)d(e^{-v^2}) + e^{-v^2}d(du-2uvdv) \\ &= -2ve^{-v^2}dv(du-2uvdv) + e^{-v^2}(d(du-2(uvdv)) \end{aligned}$$

$[d(du) = d^2u, d(uvdv) = dvd(uv) + uvd(dv) = vdudv + udv^2 + uvd^2v$
olduğundan]

$$= -2ve^{-v^2}dv(du-2uvdv) + e^{-v^2}(d^2u - 2vdudv - 2udv^2 - 2uvd^2v))$$
$$= e^{-v^2}(d^2u - 2uvd^2v - uvdudv + 2u(2v^2-1)dv^2))$$

bulunur. $\diamond$

(3)

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

parametrik denklemle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun y'''_{x^3} türevini bulunuz.

Çözüm:

$$y'_x = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

olduğuna göre, $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ için

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{d(3t-t^3)}{d(2t-t^2)} = \frac{(3-3t^2)dt}{(2-2t)dt} = \frac{3}{2}(1+t), \\ y''_{x^2} &= \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(\frac{3}{2}(1+t))}{d(2t-t^2)} = \frac{\frac{3}{2}dt}{2(1-t)dt} = \frac{3}{4(1-t)}, \\ y'''_{x^3} &= \frac{d(y''_{x^2})}{dx} = \frac{d(\frac{3}{4(1-t)})}{d(2t-t^2)} = \frac{d(\frac{3dt}{4(1-t)^2})}{2(1-t)dt} = \frac{3}{8(1-t)^3} \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(4) $x^2+y^2 = 5xy^3$ denklemi ile kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonunun $y''(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm: $y = y(x)$ fonksiyonu bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında verilen denklemin 2. mertebeden türevlenebilen bir çözümü varolsun, yani $\forall x \in I$ için

$$x^2 + (y(x))^2 = 5x(y(x))^3$$

eşitliği sağlansın. Burada, her iki tarafın x 'e göre türevini alırsak, zincir kuralından

$$\begin{aligned} 2x + 2y(x)y'(x) &= 5y^3(x) + 15xy^2(x).y'(x) \Rightarrow \\ y'(x) &= \frac{2x-5y^3(x)}{15xy^2(x)-2y(x)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} y'' &= (y'(x))' = (\frac{2x-5y^3(x)}{15xy^2(x)-2y(x)})' \\ &= \frac{20y^3(x)-75xy^4(x)-60x^2y(x)+4x)y'(x)-4y(x)+75y^5(x)}{(15xy^2(x)-2y(x))^2} \end{aligned}$$

$[y'(x) = \frac{2x-5y^3(x)}{15xy^2(x)-2y(x)}$ olduğundan]

$$= \frac{1500xy^6(x)-120x^3+150x^2y^3(x)-250y^5(x)}{(15xy(x)-2)^3y^2(x)}$$

bulunur. $\diamond$

(5) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \\ &= (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre, Örnek 4.3.2(f) den

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= ((x-2)^{-1})^{(n)} - ((x-1)^{-1})^{(n)} \\ &= (-1)^n n!(\frac{1}{(x-2)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x-1)^{(n+1)}}) \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(6) $y = \sin^3 x$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ olduğuna göre,

$$y^{(n)} = (\frac{3}{4}\sin x)^{(n)} - (\frac{1}{4}\sin 3x)^{(n)}$$

$[(\sin ax)^{(n)} = a^n.\sin(ax+n.\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$ olduğundan]

$$= (\frac{3}{4})^n \sin(x+n.\frac{\pi}{2}) - (\frac{3}{4})^n \sin(3x+n.\frac{\pi}{2})$$

bulunur. $\diamond$

(7) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ fonksiyonunun $y^{(n)}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ olduğuna göre,

$$y^{(n)} = (\frac{3}{4})^{(n)} + (\frac{1}{4}\cos 4x)^{(n)}$$

$[(\cos ax)^{(n)} = a^n.\cos(ax+n.\frac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}$ olduğundan]

$$= 4^{n-1}\cos(4x+n.\frac{\pi}{2})$$

bulunur. $\diamond$

(8) $y = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$ fonksiyonunun $y^{(100)}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a-bx}{a+bx}(\frac{a+bx}{a-bx})' \\ &= \frac{2ab}{(a+bx)(a-bx)} \\ &= (\frac{a}{b}+x)^{-1} + (\frac{a}{b}-x)^{-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = ((\frac{a}{b}+x)^{-1})^{(n-1)} + ((\frac{a}{b}-x)^{-1})^{(n-1)}$$

[Örnek 4.3.2(f) den]

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(\frac{a}{b}+x)^{-n} + (n-1)!((\frac{a}{b}-x)^{-n} \\ &= \frac{(n-1)!\cdots b^n{}^n}{(a^2-b^2x^2)}\ ((a+bx)^n + (-1)^{n-1}(a-bx)^n) \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(9) $y = \mid x \mid^3$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında hangi mertebeden türevlenebilirdir?

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$y'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \text{ ise,} \\ -3x^2, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve türev tanımına göre

$$y'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{y(0+h)-y(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|\ h\ |^2}{h} = 0$$

olduğu elde edilir. Demek ki, $\forall x \in \mathbb{R}$ için fonksiyon türevlenebilirdir ve $y'(x) = 3x^2 sgnx$ dir. Benzer şekilde, 2. mertebeden türev için

$$y''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \text{ ise,} \\ -6x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{y'(0+h)-y'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3h^2 \text{sgn}h}{h} = 0 \end{aligned}$$

olduğu, dolayısıyla, fonksiyonunun 2. mertebeden türevlenebilir ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y''(x) = 6\ |\ x\ |$ olduğu elde edilir. $|\ x\ |$ fonksiyonu 0 da türevlenemez olduğundan verilen fonksiyon $x = 0$ da 3. mertebeden türevlenemez olup, 2. mertebeden türevlenebilirdir. $\diamond$

4.3.2 Ek Problemler

(10) u ve v 2. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olduğu durumda aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının d^2y diferansiyellerini bulunuz.

(a) $y = u(2+v)$; (b) $y = u\ln v$;
(c) $y = \sqrt{u^2+v^2}$; (d) $y = u^v$.

Cevap: (a) $d^2y = (v+2)d^2u + 2dudv + ud^2v$; (b) $d^2y = \ln v.d^2u + \frac{2}{v}dudv + \frac{u}{v}d^2v - \frac{u}{v^2}dv^2$; (c) $d^2y = \dfrac{(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)+(vdu-udv)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$;
(d) $d^2y = u^v(\frac{v}{u}d^2u + \ln u d^2v + \frac{v(v-1)}{u^2}du^2 + \frac{2(v\ln u+1)}{u}dudv + \ln^2 u.dv^2)$.

(11) Aşağıdaki parametrik denklemlerle tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının y''_{x^2} türevlerini bulunuz.

(a) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2\ ; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos 2t\ ; \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)\sin t, \\ y = \sin^2 t\cos t\ ; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \frac{e^t}{1+t}, \\ y = (t-1)e^t\ ; \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x = \sin\log_2 t, \\ y = \tan\log_2 t\ ; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t}, \\ y = 2^{\sin^2 t}\ . \end{cases}$

Cevap: (a) $\dfrac{-2}{9t^4}$; (b) $\dfrac{-8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$; (c) $\dfrac{1}{\cos^3 t(3\cos^3 t-1)}$;
(d) $\dfrac{2(1+t)^3}{te^t}$; (e) $\dfrac{3\sin\log_2 t}{\cos^5\log_2 t}$; (f) $2^{3\sin^2 t-1}$.

(12) Aşağıdaki denklemlerle kapalı şekilde tanımlanan $y = y(x)$ fonksiyonlarının $y''(x)$ türevlerini bulunuz.

(a) $x^2+y^2 = a^2$; (b) $y^2 = 2px$;
(c) $e^{x-y} = x+y$; (d) $y - x\tan\ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$;
(e) $y^2 = e^{x^4-y^2}$.

Cevap: (a) $\dfrac{-a^2}{y^3}$; (b) $\dfrac{-p^2}{y^3}$; (c) $\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; (d) $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$;
(e) $\dfrac{2x^2y(3y^4+2(3-x^4)y^2+3+2x^4)}{(y^2+1)^3}$.

(13) Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

(a) $(f(x^2))^{(3)}$; (b) $(\sqrt{x})^{(10)}$;
(c) $(\frac{x^2}{x-1})^{(6)}$; (d) $(x^3\cos 5x)^{(15)}$.

Cevap: (a) $2xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2)$; (b) $-\dfrac{1.3.5\cdots 17}{2^{10}x^9\sqrt{x}},\ x > 0$;
(c) $\dfrac{720}{(x-1)^7},\ x \neq 1$; (d) $5^{14}(5x^3-126x)\sin 5x - 3.5^{13}(75x^2-182)\cos 5x$

(14) Aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının $y^{(n)}$ türevlerini bulunuz.

(a) $y = \cos^3 x$; (b) $y = \cos\alpha x\cos\beta x$;
(c) $y = (ax^2+bx+c)e^{kx}$;

(d) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad (a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n)$;
(e) $y = x\log_2(1-3x)$; (f) $y = e^{ax}\cos(bx+c)$;
(g) $y = e^{2x}\sin^2 x$; (h) $y = \cosh ax \sin bx$.

Cevap: (a) $\frac{3}{4}\cos(ax + n\frac{\pi}{2}) + \frac{3^n}{4}\cos(3x + n\frac{\pi}{2})$;
(b) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos[(\alpha-\beta)x + n\frac{\pi}{2})] + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos[(\alpha+\beta)x + n\frac{\pi}{2})]$;
(c) $k^{n-2}e^{kx}[(ax^2+bx+c)k^2 + (2ax+b)nk + n(n-1)a]$;
(d) $a_0n!$;
(e) $\frac{(n-2)!3^{n-1}}{\ln 2}(3x-n)(1-3x)^{-n}, n > 1$;
(f) $e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi)$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

(g) $2^{n-1}e^{2x}(1 - 2^{\frac{n}{2}}\cos(2x + n.\frac{\pi}{4}))$;
(h) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}(\cosh ax\cos(n\varphi - n\frac{\pi}{2})\sin(bx + n\frac{\pi}{2}) + \sinh ax\sin(n\varphi - n\frac{\pi}{2})\cos(bx + n\frac{\pi}{2})), \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(15) Aşağıda verilen $y = y(x)$ fonksiyonlarının $x = 0$ noktasında hangi mertebeden türevlenebilirdirler.

(a) $y(x) = \begin{cases} 1-\cos x, & x > 0 \text{ ise}, \\ \ln(1+x) - x, & x \geq 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(b) $y(x) = \begin{cases} \sinh x - x, & x < 0 \text{ ise}, \\ x - \sin x, & x \geq 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(c) $y(x) = \begin{cases} x^{100}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ ise} ; \end{cases}$

(d) $y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ ise}, \\ 0, & x = 0 \text{ise} . \end{cases}$

Cevap: (a) $y'(0) = 0, y''(0)$ türevi yoktur;
(b) $y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1,\ y^{(4)}(0) = 0\ \ y^{(5)}(0)$ türevi yoktur ;
(c) $y^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots, 50, y^{(51)}(0)$ türevi yoktur ;
(d) $y^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots$

(16) $P_{n,m}(x) = ((1-x^m)^n)^{(n)}, m > 0$ olsun. $P_{n,m}(1)$ bulunuz.
Cevap: $(-1)^n m^n n!$.

(17) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olsun. f çift olduğunda f' nin tek ve f tek olduğunda f' nin çift olacağını gösteriniz.

4.4 Diferensiyel Hesabın Esas Teoremleri

Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, X üzerinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilmiş olsun.

Tanım 4.4.1 *: Eğer, $\forall x \in U(x_0) \cap X$ için $f(x) \leq f(x_o)$ (veya $f(x) \geq f(x_0)$) olacak şekilde x_0 noktasının bir $U(x_0)$ komşuluğu varsa, x_0 noktasına f nin lokal (yerel) maksimum (veya minimum) noktası denir.*

Tanım 4.4.2 *: Eğer, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ için $f(x) < f(x_o)$(veya $f(x) > f(x_0)$) olacak şekilde x_0 noktasının delinmiş bir $\overset{\circ}{U}(x_0)$ komşuluğu varsa,x_0 noktasına f nin kesin lokal (yerel) maksimum (veya minimum) noktası denir.*

Tanım 4.4.3 *: : Lokal minimum ve maksimum noktalarına lokal ekstremum noktaları, fonksiyonun bu noktalardaki değerlerine de fonksiyonun lokal ekstremumları (veya lokal ekstrem değerleri)denir.*

Örnek 4.4.4 *:* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x < 3 \ \text{ ise}, \\ 4, & x \geq 3 \ \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.(Bkz Şekil 4.2)
Bu fonksiyon için,
$x = 0$ noktası lokal maksimum, $x = 1$ noktası lokal minimum,
$x = 3$ noktası lokal maksimum, $x > 3$ noktası hem lokal maksimum hem de lokal minimum noktalarıdır. $[3, +\infty)$ aralığı üzerinde fonksiyon sabit bir fonksiyondur.

Örnek 4.4.5 : *$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos\frac{1}{x}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon için, $x'_k = \frac{1}{2k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ noktaları lokal maksimum, $x''_k = \frac{1}{(2k-1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$ noktaları da lokal minimum noktalarıdır.*

Tanım 4.4.6 : *$x_0 \in X$ noktası X üzerinde tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ekstremum noktası olsun.Eğer, $x_0 \in X$ noktası hem $X_- = \{x \in X : x < x_0\}$ kümesinin, hem de $X_+ = \{x \in X : x > x_0\}$ kümesinin limit noktası ise, x_0 a iç ekstremum noktası denir.*

Örneğin,x'_k ,$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $x''_k, k \in \mathbb{Z}$ noktaları Örnek 4.4.5 deki fonksiyonun iç ekstremum noktalarıdır, $x = 0$ noktası Örnek 4.4.4 deki fonksiyonun iç ekstremum noktası değildir.

Tanım 4.4.7 : *Eğer, her $x \in X$ için $f(x) \leq f(p)(f(x) \geq f(q))$ olacak şekilde bir $p \in X(q \in X)$ noktası varsa, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $p(q)$ noktasında mutlak maksimuma (minimuma) sahiptir denir. Örneğin, Örnek 4.4.4 deki $x = 1$ noktası fonksiyonun mutlak minimum noktası, $x \geq 3$ noktaları da mutlak maksimum noktalarıdır; Örnek 4.4.5 deki $x'_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ noktaları fonksiyonun mutlak maksimum noktaları, $x''_k, k \in \mathbb{Z}$ noktaları da mutlak minimum noktalarıdır.*

Teorem 4.4.8 (Fermat Teoremi) *: $x_0 \in X$ noktası $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir iç ekstremum noktası olsun. Eğer, f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilen ise, $f'(x_0) = 0$ dır.*

İspat: Teoremin ispatını x_0 bir iç maksimum noktası olduğu durumda yapalım. Bu durumda, x_0 noktasının her $x \in U(x_0) \cap X$ için $f(x) \leq f(x_0)$ (veya $f(x) - f(x_0) \leq 0$) olacak şekilde bir $U(x_0)$ komşuluğu vardır. O zaman, $x < x_0$ (veya $x - x_0 < 0$) olacak şekilde her $x \in U(x_0) \cap X$ için

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{4.29}$$

ve $x > x_0$ (veya $x - x_0 > 0$) olacak şekilde her $x \in U(x_0) \cap X$ için

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{4.30}$$

olur. f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilen olduğundan $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ dır. Buna göre, $x \to x_0^-$ iken, (4.29) ve $x \to x_0^+$ iken (4.30) dan sırasıyla $f'(x_0) = f'(x_0^-) \geq 0$ ve $f'(x_0) = f'(x_0^+)$ bulunur. Bu ise, $f'(x_0) = 0$ olması demektir. x_0 bir iç minimum noktası olduğu durumda Teoremin ispatı benzer şekilde yapılır. □

Fermat teoreminin geometrik yorumu şöyledir: $x_0 \in (a, b)$ noktasında türevlenebilen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında bir lokal ekstremuma sahip ise, $A(x_0, f(x_0))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paralel olur. (Bkz. Şekil 4.3)

Not: Fermat teoreminin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin, $f : [1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonu için, $f'(2) = 0$ dır, fakat $x = 2$ noktası fonksiyonun bir iç ekstremum noktası değildir. •

Fermat teoreminin hipotezindeki x_0 ın bir iç ekstremum noktası olması koşulunun kaldırılamayacağını gösteren bir örnek verelim. $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonu için

$$m = \min\{f(x) : x \in [0,1]\} = 0,\ \max\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1,$$

fakat $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = 1 \neq 0$ ve $f'(0^+) = f'(1^-) = 1 \neq 0$ dır.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktada lokal ekstremuma sahip olması fonksiyonun o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\mid x-1 \mid$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında bir lokal maksimumuma sahiptir, fakat fonksiyon bu noktada türevli değildir. (Çünkü, $f'(1^+) = -1$ ve $f'(1^-) = 1$ dir.)

Teorem 4.4.9 (Rolle Teoremi) *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer, $f(a) = f(b)$ ise, $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.*

İspat: $f, [a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan, Teorem 3.2.7 e göre bu fonksiyon $[a,b]$ üzerinde en küçük m ve en büyük M değerlerine sahiptir. $m \leq M$ olduğundan, ya $m = M$ ya da $m < M$ dir. Eğer, $m = M$ ise, fonksiyon sabit bir fonksiyon olur ki, bu takdirde $\forall c \in (a,b)$ için $f'(c) = 0$ olacağından Teorem açıktır. Şimdi $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan, fonksiyon m ve M ekstrem değerlerini $[a,b]$ nin bitim noktalarında alamaz. O halde, fonksiyon bu değerlerinden en az birini $[a,b]$ nin bir $c \in (a,b)$ iç noktasında alır. c noktasında fonksiyon türevlenebilen olduğuna göre, Fermat teoremi gereğince $f'(c) = 0$ olur. □

Rolle teoreminin geometrik yorumu şöyledir: Teoremdeki koşullar sağlandığında öyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardırki $(c, f(c))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paralel olur. (Bkz. Şekil 4.4)

Rolle teoreminin hipotezindeki koşulların kaldırılamayacağını gösteren örnekler verelim:

(a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \mid x \mid$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde sürekli, $x \in (0,1]$ için $f'(x) = 1$ ve $x \in [-1,0)$ için $f'(x) = -1$ olduğuna göre, her $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için $f' \neq 0$ dır.

(b) $f : [1,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}, & x \in (1,2) \text{ ise,} \\ 0, & x = 1 \text{ ve x} = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $(1,2)$ üzerinde türevlenebilen ve $f(1) = f(2) = 0$ dır. $f(1) \neq f(1^+) = +\infty$ ve $f(2) \neq f(2^-) = -\infty$ olduğuna göre, fonksiyon $[1,2]$ üzerinde süreksizdir ve $\forall x \in (1,2)$ için $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0$ olduğundan dolayı $f'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (1,2)$ noktası yoktur.

(c) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli $(0,1)$ üzerinde türevlenebilien ve $f(0) \neq f(1)$ dir. $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = 1$ olduğuna göre, $f'(c) = 0$ olacak şekillde $c \in (0,1)$ noktası yoktur.

Teorem 4.4.10 (Lagrange Teoremi) *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,*

$$f(b) - f(a) \ = \ f'(c)(b-a) \tag{4.31}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

Bazı kaynaklarda bu teoreme Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi adı verilir.

İspat: $F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = (f(b)-f(a))(x-a) - f(x)(b-a)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. F fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli (iki sürekli fonksiyonun farkı olduğuna göre), (a,b) üzerinde türevlenebilir ($\forall x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b-a)$ dır) ve $F(a) = F(b)$ dir. O halde, Rolle teoremine göre $F'(c) = 0$, yani $f(b) - f(a) - f'(c)(b-a) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. □

Lagrange teoreminin geometrik yorumu şöyledir: Teoremdeki koşullar sağlandığında öyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki, $C(c, f(c))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olur. (Bkz Şekil 4.5)

Örnek 4.4.11 *: $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ fonksiyonu için*

$$f(2) - f(0) = 2f'(c) \tag{4.32}$$

olacak şekilde $c \in (0,2)$ sayısını bulunuz.

Çözüm: $f(2) = 12, f(0) = -2$ ve $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ olduğundan, $c \in (0,2)$ sayısı

$$14 = 2(12c^2 - 10c + 1),$$

veya $12c^2 - 10c - 6 = 0$ denkleminin bir kökü olması zorundadır.

$$12c^2 - 10c - 6 = 0 \Longleftrightarrow c_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}$$

dir. $c_1 = \dfrac{5+\sqrt{97}}{12} \in (0,2)$, fakat $c_2 = \dfrac{5-\sqrt{97}}{12} \notin (0,2)$ olduğundan, (4.32) eşitliğini sağlayan tek nokta $c = \frac{5+\sqrt{97}}{12}$ dir.

$\frac{c-a}{b-a} = \theta$ dersek, $a < c < b \Longleftrightarrow 0 < \theta < 1$ olduğuna göre, Teorem 4.4.10 nun hipotezleri altında (4.31) e göre $0 < \theta < 1$ olacak şekilde en az bir θ sayısı için

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a) \tag{4.33}$$

olur. $x_1, x_2 \in [a,b]$ ise, Lagrange teoremi $[x_1, x_2]$ ($x_1 < x_2$ ise,) $[x_2, x_1]$ ($x_2 < x_1$ ise,) aralıkları üzerinde de geçerlidir. Buna göre, (4.33) den dolayı $x_1 < x_2$ ise,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta_1(x_2 - x_1))(x_2 - x_1),\ 0 < \theta_1 < 1 \tag{4.34}$$

$x_2 < x_1$ ise,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_2 + \theta_2(x_1 - x_2))(x_1 - x_2),\ 0 < \theta_2 < 1 \tag{4.35}$$

yazabiliriz. $x_2 < x_1$ durumunda, (4.35) eşitliği $\theta_3 = 1 - \theta_2, 0 < \theta_3 < 1$ olmak üzere

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta_3(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

şeklinde yazılabilir. ⋄

Buna göre , aşağıdaki sonucun doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 4.4.12 (Sonlu Farklar Formülü) *: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, herhangi $x_0, x_{0^+}\Delta x \in [a,b]$ noktaları için*

$$f(x_{0^+}\Delta x) - f(x_0) = f'(x_{0^+}\theta\Delta x)\Delta x \tag{4.36}$$

olacak şekilde en az bir $0 < \theta = \theta(x_0, \Delta x) < 1$ sayısı vardır. (4.36) eşitliğine Sonlu Farklar Formülü denir.

Sonuç 4.4.13 : *$\Delta x > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[x_0, x_{0^+}\Delta x] \subset [a, b]([x_{0^-}\Delta x, x_0] \subset [a, b])$ üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer, f fonksiyonu x_0 da sağdan (soldan) türevlenebiliyorsa $f' : (x_0, x_0 + \Delta x) \to \mathbb{R}(f' : (x_0 - \Delta x, x_0) \to \mathbb{R})$ türev fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan (soldan) limiti vardır ve $f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)(f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x))$ olur.*

İspat: İspatı $[x_0, x_0 + \Delta x]$ aralığı durumunda yapalım. (4.35)den dolayı

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_{0^+}\theta\Delta x)$$

olacak şekilde bir $0 < \theta = \theta(x_0 + \Delta x) < 1$ sayısı vardır. Bu eşitliğin her iki tarafında $\Delta x \to 0^+$ iken limite geçilirse,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} f'(x_{0^+}\theta\Delta x)$$

[$t = x_0 + \theta\Delta x$ dersek, $t \to x_0^+ \Longleftrightarrow \Delta x \to 0^+$ olduğundan]

$$= \lim_{t \to x_0^+} f'(t)$$

olur. □

Uyarı: Sonuç 4.4.13 e göre, eğer, bir $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebiliyorsa, $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu (a, b) üzerinde kaldırılabilir ve 1. çeşit süreksizlik noktasına sahip olamaz.

Örnek 4.4.14 : *$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $f' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limitinin olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ için $f'(x)$ türevinin varlığı ve $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ olduğu açıktır. $x = 0$ noktasında türev tanımı gereğince

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h\cos\frac{1}{h} \end{aligned}$$

$\forall h \neq 0$ için $| h\cos\frac{1}{h} | \leq | h |$ olduğundan] $= 0$ olur. Böylece, $f' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde bulunur. Buradan,f' türev fonksiyonunun $x = 0$ noktasında hem soldan, hem de sağdan limitinin var olmadığı (çünkü, $\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında hem soldan hem de sağdan limiti yoktur) anlaşılır. ⋄

Sonuç 4.4.15 : *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,*
(a) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise f, (a, b) üzerinde bir sabit fonksiyondur.
(b) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0)$ ise f, (a, b) üzerinde artandır (azalmayandır).
(c) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ $(f'(x) \leq 0)$ ise f, (a, b) üzerinde azalandır (artmayandır).

İspat: (a) $x_0 \in (a, b)$ sabit nokta ve $x \in (a, b)$ herhangi bir nokta olsun.

$$\big[\alpha, \beta\big] = \begin{cases} \big[x_0, x\big], & x_0 < x \text{ ise,} \\ \big[x, x_0\big], & x < x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

diyelim. $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ olduğu açıktır. $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (f\Big|_{[\alpha,\beta]})(x)$ fonksiyonu Lagrange teoreminin koşullarını sağlar. O halde, (4.36) dan dolayı

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(\alpha + \theta(\beta - \alpha))(\beta - \alpha),$$

veya

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_{0^+}\theta(x - x_0))(x - x_0)$$

olacak şekilde bir $\theta \in (0, 1)$ sayısı vardır. Buradan, ($\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ olduğundan dolayı) $f(x) = f(x_0)$,yani x_0 sabit seçildiğinden f bir sabit fonksiyondur.
(b) $x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $x_1 < x_2$ olsun. (4.36) dan dolayı

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $0 < \theta < 1$ sayısı vardır. Buna göre,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

olur.

(c) nin doğruluğu (b) ye benzer şekilde gösterilir. □

Not: Sonuç 4.4.15 deki (b) ve (c) önermelerinin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin, $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonu $(-1, 1)$ üzerinde artandır, fakat $f'(0) = 0$ dır. •

Teorem 4.4.16 (Cauchy Teoremi) : *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilir olsunlar. Bu durumda,*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) \;=\; [g(b) - g(a)]f'(c) \tag{4.37}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır.

Bazı kaynaklarda bu teoreme Diferensiyel Hesabın Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi denir. **İspat:** $F : [a, b] \to \mathbb{R}, F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilen iki fonksiyonun farkı şeklinde tanımlı F fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve (a, b) üzerinde türevlenebilirdir. Ayrıca, $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$ olduğuna göre, Rolle teoremi gereğince $F'(c) = 0$ veya ($\forall x \in (a, b)$ için $F'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$ olduğuna göre,) $[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır. Bu ise teoremin doğru olması demektir. □

Not: Teorem 4.4.16 daki g fonksiyonu olarak $g(x) = x$ alındığında Lagrange teoremi bu teoremin bir sonucu olarak elde edilir. •

Sonuç 4.4.17 : *Teorem 4.4.16 nın koşulları sağlansın. Eğer, hem de $\forall x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ ise,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g\prime(c)}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır. $0 < \theta < 1$ olacak şekilde bir θ sayısı için $c = a + \theta(b - a)$ olacağından bu bağıntı

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta(b - a))}{g'(a + \theta(b - a))}, 0 < \theta < 1 \tag{4.38}$$

şeklinde yazılabilir.

4.4.1 Çözümlü Problemler

(1) f, fonksiyonu

(a) f, $[x_0, x_n]$ üzerinde $n - 1$ mertebeden sürekli türevlenebilirdir,

(b) f, (x_0, x_n) üzerinde $n.$ mertebeden türevlenebilirdir,

(c) $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ olmak üzere $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ koşulları sağlanıyorsa ,$f^{(n)}(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (x_0, x_n)$ noktası vardır. Gösteriniz.

Çözüm: Her $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonu için Rolle teoreminin koşulları sağlandığından, $f'(c_i) = 0$ olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ noktaları vardır. Her $[c_j, c_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ aralığında f' fonksiyonu için Rolle teoreminin koşulları sağlandığından, $(f')'(d_j) = f''(d_j) = 0$ olacak şekilde bir $d_j \in (c_j, c_{j+1})$ noktaları vardır. Benzer şekilde, devam ederek $f^{(n-1)}(\xi_k) = 0$ olacak şekilde $n - (n - 2) = 2$ tane $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_n)(\xi_1 < \xi_2)$ noktalarının varlığını elde ederiz.$f^{(n-1)}(x)$ fonksiyonu için $[\xi_1, \xi_2]$ aralığında Rolle teoreminin koşulları sağlandığından $(f^{(n-1)})'(c) = f^{(n)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (\xi_1, \xi_2)$ noktasının var olduğu anlaşılır. ⋄

(2) Eğer, reel katsayılı

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0$$

polinomunun kökleri reel ise, bu polinomun $P_n{}'(x), P_n{}''(x), \ldots, P_n{}^{(n-1)}(x)$ türevlerinin de kökleri reeldir. Gösteriniz.

Çözüm: $P_n(x)$ polinomunun kökleri $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $x_i \neq x_j\, i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ise, Problem (1) den dolayı $P_n{}'(x) = 0$ denkleminin $n-1$ tane reel, $P_n{}''(x) = 0$ denkleminin $n-2$ tane reel ,v.s. $P_n{}^{(n-2)}(x) = 0$ denkleminin bir tane reel kökü vardır. $P_n(x) = 0$ denkleminin p katlı her reel kökü $P_n{}'(x) = 0$ denkleminin $p-1$ katlı bir kökü olduğundan reeldir. $\diamond$

(3) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ Legendre polinomunun köklerinin reel ve $(-1, 1)$ aralığı içinde olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $2n.$ dereceden $U_n(x) = (x^2-1)^n$ polinomunun $2n$ tane $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$ ve $x_{n+1} = \cdots = x_{2n} = 1$ kökleri vardır. Problem 2 den dolayı $n.$ dereceden $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}U(x)$ polinomunun, Rolle teoremi gereğince $(-1, 1)$ içinde olacak n tane kökü vardır. $\diamond$

(4) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m \leq b$, $\omega_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)$ olmak üzere $(m-1).$ dereceden

$$L_{m-1}(x) = L_{m-1}(f; x) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\frac{\omega_m(x)}{\omega_m{}'(x_k)(x - x_k)}$$

polinomuna Lagrange interpolasyon polinomu denir. $L_{m-1}(f; x_k) = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, m$ olduğu açıktır. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde m. mertebeden sürekli türevlenebilir, yani $f^{(m)} \in C[a, b]$ ise,

$$f(x) - L_{m-1}(f; x) = \frac{f^{(m)}(c(x))}{m!}\omega_m(x), x \in [a, b]$$

olacak şekilde bir $c(x) \in (a, b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.
Çözüm: Herhangi bir $A \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için

$$\varphi(x) = f(x) - L_{m-1}(f; x) - A.\omega_m(x)$$

fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde m. mertebeden sürekli türevlenebilirdir ve $\varphi(x_k) = 0\ k = 1, 2, \ldots, m$ olur. A sabit sayısını $\bar{x} \in [a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

olmak üzere $\varphi(\bar{x}) = 0$ koşulundan seçelim. Buna göre, $\bar{x} \neq x_k,\ k = 1, 2, \cdots, m$,dolayısıyla $\omega_m(\bar{x}) \neq 0$ olduğuna göre, $A = \frac{f(\bar{x}) - L_{m-1}(f,\bar{x})}{\omega_m(\bar{x})}$ bulunur. Bitim noktaları $\varphi(x)$ fonksiyonunun $m+1$ tane $\bar{x}, x_1, x_2, \cdots, x_m$ köklerinde olan m tane açık aralık içinde (Rolle teoremi gereğince) $\varphi'(x)$ fonksiyonunun m tane kökü vardır. Rolle teoremini $\varphi'(x)$ fonksiyonuna uygulayarak onun m tane kökleri arasında $\varphi''(x)$ fonksiyonunun $m-1$ tane kökünün varlığını elde ederiz. Benzer şekilde, devam ederek m. adımda $\varphi^{(m)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c = c(x) \in (a, b)$ noktasının mevcut olduğunu görmüş oluruz. $L_{m-1}(f; x)$,$m-1.$ dereceden bir polinom olduğuna göre, $L_{m-1}^{(m)}(f; x) \equiv 0$ ve $\omega_m^{(m)}(x) \equiv m!$ olduğuna göre, $\varphi^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - A.m!$ ve buradan da ($\varphi^{(m)}(c) = 0$ olduğuna göre) $A = \frac{f^m(c)}{m!}$ bulunur. Bu ise, istenen eşitliğin doğru olması demektir. $\diamond$

(5) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları için (4.37) formülünü gerçekleyecek şekilde $\theta = \theta(x_0; \Delta x)$ fonksiyonlarını bulunuz.
(a) $f(x) = ax^2 + bx + c$; (b) $f(x) = e^x$.

Çözüm: (a) $f'(x) = 2ax + b$ olduğuna göre, (4.36) dan dolayı
$a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - ax_0^2 - bx_0 - c = (2a(x_0 + \theta\Delta x) + b)\Delta x$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x \\ &=\ 2ax_0\Delta x + 2a\theta(\Delta x)^2 + b\Delta x \\ &\Rightarrow\ a(\Delta x)^2 = 2a\theta(\Delta x)^2 \\ &\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.
(b) $f'(x) = e^x$ olduğuna göre, (4.36) dan dolayı

$$\begin{aligned} e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} &= e^{x_0+\theta\Delta x}\Delta x \\ &\Rightarrow\ e^{\Delta x} - 1 = e^{\theta\Delta x}\Delta x \\ &\Rightarrow\ e^{\theta\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(6) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1 \text{ ise},\\ \frac{1}{x}, & 1<x<+\infty \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu için $f(2)-f(0)=2f'(c)$ olacak şekilde $c\in(0,2)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{3-(1+h)^2}{2}-1}{h}=-1,\\ f'(1^+) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=1 \end{aligned}$$

olduğuna göre, f fonksiyonu $x=1$ noktasında türevlenebilirdir. $f(2)=\frac{1}{2}, f(0)=\frac{3}{2}$ ve

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le 1 \text{ ise},\\ -\frac{1}{x^2}, & 1<x<2 \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre,

$$f(2)-f(0)=2f'(c), 0<c<2 \Rightarrow -1=\begin{cases}-2c, & 0<c\le 1 \text{ ise},\\ -\frac{2}{c^2}, & 1<c<2 \text{ ise}\end{cases}$$

$\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$ ve $c_2=\sqrt{2}$ bulunur. $\diamond$

(7) $f:(x_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(x_0,+\infty)$ üzerinde türevlenebilir ve $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$ ise,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_n\in(0,+\infty)\ , n=1,2,\cdots$ ve $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ koşullarını sağlayan herhangi artan bir (x_n) dizisi verilsin. $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}f'(x_n)=0\Rightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ n>n_\varepsilon$ için

$$|\ f'(x_n)\ | \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.39}$$

olur. Sabit $n_0>n_\varepsilon$ ve $\forall n>n_0$ için Lagrange teoremi gereğince

$$|\ \frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_0}\ | \ = \ |\ f'(c)\ | \tag{4.40}$$

olacak şekilde bir $c=c(n_0,n)\in(x_{n_0},x_n)$ noktası vardır. (4.39) ve (4.40) tan

$$|\ \frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_0}\ | \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.41}$$

elde ederiz.

$$\frac{f(x_n)}{x_n}=\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_0}\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)+\frac{f(x_{n_0})}{x_n}$$

olduğuna göre, (4.41) den

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{n_0})}{x_n}-(1-\frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} &< \frac{f(x_n)}{x_n}\\ &< \frac{f(x_{n_0})}{x_n}+(1-\frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.42}$$

olduğu elde edilir. $(1-\frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$ ve $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_{n_0})}{x_n}=f(x_{n_0})\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}=0$ olduğuna göre, (4.42) den dolayı $n_0>n_\varepsilon$ ve yeteri kadar büyük $n>n_0$ için

$$-\varepsilon<\frac{f(x_n)}{x_n}<\varepsilon$$

olur. Bu ise, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=0$ dolayısıyla $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ olması demektir. $\diamond$

(8) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f\in C[a,b]$,

(b) $f,(a,b)$ üzerinde türevlenebilirdir,

(c) $f,[a,b]$ üzerinde lineer bir fonksiyon değildir koşulları sağlanıyor ise,

$$|\ f'(c)\ | \ = \ |\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ | \tag{4.43}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ noktası vardır. Gösteriniz.

Çözüm: $[a,b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması verilsin. O halde,

$$\begin{aligned} \mid f(b) - f(a) \mid &= \mid \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \mid \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mid [f(x_i) - f(x_{i-1})] \mid \end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Lagrange teoremi gereğince $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\, i = 1, 2, \cdots, k$ olmak üzere

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$$

olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ nokatsı vardır. Buna göre (4.44) ten

$$\mid f(b) - f(a) \mid \leq \sum_{i=1}^{n} \mid f'(c_i) \mid \Delta x_i \tag{4.45}$$

olur. $f, [a,b]$ üzerinde lineer bir fonksiyon olmadığından dolayı $[a,b]$ nin öyle bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanması vardır ki ,

$$\mid f'(c_{n_0}) \mid = \max\{\mid f'(c_1) \mid, \cdots, \mid f'(c_n) \mid\} > 0, 1 \leq n_0 \leq n$$

olur. O halde, (4.45) ten

$$\mid f(b) - f(a) \mid < \mid f'(c_{n_0}) \mid \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \mid f'(c_{n_0}) \mid (b-a),$$

dolayısıyla (4.43) eşitsizliğinin $c = c_{n_0}$ için doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

(9) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f, [a,b]$, üzerinde 2. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f'(a) = f'(b) = 0$ koşulları sağlanıyor ise,

$$\mid f''(c) \mid \geq \frac{4}{(b-a)^2} \mid f(b) - f(a) \mid \tag{4.46}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = A$ (A *sabit*) fonksiyonu için (4.46) nın her $c \in (a,b)$ için sağlandığı açıktır.Şimdi $f, [a,b]$ üzerinde sabit bir fonksiyon olmasın. Bu durumda (b) den f nin lineer fonksiyon olmadığı anlaşılır. f ve $\varphi : [a, \frac{a+b}{2}] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{(x-a)^2}{2}$ fonksiyonlarına $[a, \frac{a+b}{2}]$ve f ve$\psi : [\frac{a+b}{2}, \mathrm{b}], \psi(\mathrm{x}) = \frac{(\mathrm{b}-\mathrm{x})^2}{2}$ fonksiyonlarına $[\frac{a+b}{2}, b]$ üzerinde Cauchy teoremini uygularsak,

$$\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{(b-a)^2}{8}} = \frac{f'(c_1)}{c_1 - a}, \quad a < c_1 < \frac{a+b}{2}$$

ve

$$\frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{(b-a)^2}{8}} = \frac{f'(c_2)}{b - c_2}, \quad \frac{a+b}{2} < c_2 < b$$

olduğu elde edilir.Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{8(f(b) - f(a))}{(b-a)^2} = \frac{f'(c_1)}{c_1 - a} + \frac{f'(c_2)}{b - c_2} \tag{4.47}$$

bulunur. $f'(a) = f'(b) = 0$ olduğuna göre, (4.47) nin sağ tarafı Lagrange teoremi gereğince $a < d_1 < c_1$ ve $c_2 < d_2 < b$ olmak üzere ,

$$\frac{f'(c_1)}{c_1 - a} + \frac{f'(c_2)}{b - c_2} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{c_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(c_2)}{b - c_2} = f''(d_1) - f''(d_2)$$

biçiminde yazılabilir.O halde, (4.47) den

$$\frac{8 \mid f(b) - f(a) \mid}{(b-a)^2} \leq \mid f''(d_1) \mid + \mid f''(d_2) \mid$$

olduğu elde edilir. $f(a) \neq f(b)$ olsun. ($f(a) = f(b)$ durumunda (4.46) nın $\forall c \in (a,b)$ için doğru olduğu açıktır).Bu durumda, $\mid f''(d_1) \mid$ ve $\mid f''(d_2) \mid$ sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

$$\max\{\mid f''(d_1) \mid, \mid f''(d_2) \mid\} = \mid f''(c) \mid, (c = d_1 \text{ yada } \mathrm{c} = \mathrm{d}_2)$$

dersek, $c \in (a,b)$ olmak üzere

$$\frac{8 \mid f(b) - f(a) \mid}{(b-a)^2} \leq 2 \mid f''(c) \mid \Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2} \mid f(b) - f(a) \mid \leq \mid f''(c) \mid$$

olur. $\diamond$

(10) $0 < x_1 < x_2$vef : $[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir ise,

$$\frac{1}{x_2 - x_1}(x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)) = f(c) - cf'(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ve $G(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonları için $[x_1, x_2]$ aralığında Cauchy teoreminin koşulları sağlandığından

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \tag{4.48}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 x_2} ,$$

$$G(x_2) - G(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} ,$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2},\ G'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \in (x_1, x_2)$$

olduğuna göre,

$$(4.49) \Leftrightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{cf'(c) - f(c)}{-1}$$

olur.Bu ise, istenen sonucun doğru olması demektir. $\diamond$

(11) Eğer, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilirse ve $f'(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sınırlı ise, , f fonksiyonu (a,b) üzerinde düzgün süreklidir.Gösteriniz.

Çözüm: f' fonksiyonu (a,b) üzerinde sınırlı olduğuna göre, $\forall x \in (a,b)$ için $\mid f'(x) \mid \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabit sayısı vardır.O halde, herhanbi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ şeklinde seçildiğinde $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ için
$\mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid$ [*Lagrange teoreminden*]
$= \mid f'(c) \mid \mid x_1 - x_2 \mid \leq M \mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon$ olduğu elde edilir. Bu ise, f nin (a,b) üzerinde düzgün sürekli olması demektir. $\diamond$

(12) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda, $\forall c \in (a,b)$ için,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in (a,b)$ noktaları var mıdır?

Çözüm: $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) \geq 0$ ve f, $\forall [\alpha, \beta] \subset (a,b)$ aralığında lineer olmayan bir fonksiyon olduğu durumda $f, (a,b)$ üzerinde artandır. O halde, $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

olduğuna göre, (a,b) aralığının $f'(x) = 0$ olacak şekildeki noktaları için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

eşitliği sağlanamaz.Örneğin,$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ fonksiyonu ve $\forall x_1, x_2 \in [-1,1]$ noktaları için

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$$

olduğuna göre, $c = 0$ noktası için söz konusu x_1 ve x_2 noktaları mevcut değildir. $\diamond$

(13) $f, g : [x_0, +\infty)$ fonksiyonları için

(a) f ve g, $[x_0, +\infty)$ üzeride n. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$,

(c) $\forall x \in (x_0, +\infty)$ için $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ dir koşulları sağlanıyorsa, $\forall x \in (x_0, +\infty)$ için $f(x) > g(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F:[x_0,x]\to\mathbb{R}, F(t)=f^{(n-1)}(t)-g^{(n-1)}(t)\,(x_0<x)$ fonksiyonu için $[x_0,x]$ aralığında Lagrange teoreminin koşulları sağlandığından

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0)$$

olacak şekilde bir $c\in(x_0,x)$ noktası vardır.
$F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0, F'(c)=f'(c)-g'(c)>0$ ve $x-x_0>0$ olduğuna göre, son eşitlikten $\forall x>x_0$ için $F(x)>0$, yani $\forall x>x_0$ için $f^{(n-1)}(x)>g^{(n-1)}(x)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $\forall x>x_0$ için $f^{(n-2)}(x)>g^{(n-2)}(x),\cdots,f(x)>g(x)$ olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(14) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $e^x>1+x$;

(b) $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$;

(c) $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$;

(d) $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$;

(e) $x,y\in\mathbb{R}_+$ ve $0<\alpha<\beta$ için $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

Çözüm: (a) $f(x)=e^x, g(x)=1+x$ dersek $f(0)=g(0)$ ve $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f'(x)=e^x>1=g'(x)$ olduğuna göre, Problem (13) e göre $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f(x)>g(x)$, yani $e^x>1+x$ olduğu elde edilir.
$x<0$ iken $x=-t$ dersek $f(t)=e^{-t}, g(t)=1-t, t\geq 0$ olduğu açıktır. $f(0)=g(0)$ ve $\forall t>0$ için $f'(t)=-e^{-t}>-1=g'(t)$ olduğuna göre, $\forall t>0$ için $f(t)>g(t)$, yani $\forall x\in(-\infty,0)$ için $e^x>1+x$ olduğu anlaşılır.
(b) $f(x)=x-\frac{x^2}{2},\ g(x)=\ln(1+x), h(x)=x,\ x>0$ olsun. $f(0)=g(0)=h(0)$ ve $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f'(x)<g'(x)<h'(x)$ olduğuna göre, Problem (13) ten $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f(x)<g(x)<h(x)$,yani $\forall x\in\mathbb{R}$ için $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ olduğu elde edilir.
(c) $f(x)=x-\frac{x^3}{6}, g(x)=\sin x, h(x)=x$ dersek $f(0)=g(0)=h(0)$ ve $\forall x\in\mathbb{R}_+\setminus\{2k\pi:k\in\mathbb{N}\}$ için $f'(x)<g'(x)<h'(x)$ olduğuna göre, $\forall x\in\mathbb{R}_+\setminus\{2k\pi:k\in\mathbb{N}\}$ için $f(x)<g(x)<h(x)$ olur.$x=2k\pi, k\in\mathbb{N}$

için $2k\pi(1-\frac{4k^2\pi^2}{6})<0<2k\pi$, yani $f(2k\pi)<g(2k\pi)<h(2k\pi)$ olduğu açıktır.Böylece $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için f(x) < g(x) < h(x) dır.
(d) $f(x)=\tan x, g(x)=x+\frac{x^3}{3}, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ olsun. $f(0)=g(0)$ ve $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x, g'(x)=1+x^2, \tan^2 x>x^2$ olduğuna göre, $f'(x)>g'(x)$ olduğu açıktır. Problem 13 e göre $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $f(x)>g(x)$ dir.
(e) Herhangi $x,y\in\mathbb{R}_+$ ler ve herhangi $0<\alpha<\beta$ için

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\Longleftrightarrow((\frac{x}{y})^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}>((\frac{x}{y})^\beta+1)^{\frac{1}{\beta}}$$

olduğu açıktır. Son eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.$\frac{x}{y}=t$ diyerek, $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ \varphi(\tau)=(t^\tau+1)^{\frac{1}{\tau}}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall\tau\in\mathbb{R}_+$ için $\ln\varphi(\tau)=\frac{1}{\tau}\ln(t^\tau+1)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} &= \frac{t^\tau\ln t}{\tau(t^\tau+1)}-\frac{\ln(t^\tau+1)}{\tau^2}\\ &\Rightarrow\ \varphi'(\tau)=\varphi(\tau)(\frac{t^\tau\ln t}{\tau(t^\tau+1)}-\frac{\ln(t^\tau+1)}{\tau^2})\\ &= \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2(t^\tau+1)}\ln\frac{(t\tau)^{t^\tau}}{(t^\tau+1)^{t^\tau+1}}<0 \qquad (4.49)\end{aligned}$$

olur. Buna göre Sonuç 4.4.15 ten dolayı $\varphi(\tau)$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde azalandır. Demek ki,

$$0<\alpha<\beta<+\infty\Rightarrow\varphi(\alpha)>\varphi(\beta),$$

yani $x,y\in\mathbb{R}_+$ ve $0<\alpha<\beta$ için $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği sağlanır. $\diamond$

(15) Lagrange teoreminden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1<x_2$ için $\arctan x_2-\arctan x_1\leq x_2-x_1$;

(b) $x_1,x_2\in[a,+\infty), a\in\mathbb{R}_+$ için $|\ln x_2-\ln x_1|<\frac{|x_2-x_1|}{a}$;

(c) $x_1,x_2\in[1,e]$için $|\,x_1-x_2\,|\leq|\,x_1^2\ln x_1-x_2^2\ln x_2\,|\leq 3e\,|\,x_2-x_1\,|$;

(d) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $| \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} - \cos x_2 | \leq | x_1 - x_2 |$.

Çözüm: (a) Lagrange teoremi gereğince

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = (\arctan x)'_{x=c}.(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.$\arctan x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \leq (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

dir. Buna göre, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ için

$$0 < \arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1$$

olduğu anlaşılır.
(b) $x_1, x_2 \in [a, +\infty), a \in \mathbb{R}_+$ ve $x_1 < x_2$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ olduğuna göre, Lagrange teoremi gereğince

$$\ln x_2 - \ln x_1 = (\ln x)'_{x=c}(x_2 - x_1) = \frac{1}{c}(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır. O halde,

$$a \leq x_1 < c < x_2 < +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty),$$

$x_1 < x_2$ için ($\ln x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde artan olduğuna göre,)

$$0 < \ln x_2 - \ln x_1 \leq \frac{(x_2 - x_1)}{a}$$

elde ederiz. Benzer şekilde, $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty), x_2 < x_1$ için $0 < \ln x_1 - \ln x_2 \leq \frac{(x_1 - x_2)}{a}$,yani $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ için $| lnx_2 - lnx_1 | \leq \frac{|x_2 - x_1|}{a}$ eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $(x^2 \ln x)' = x(1 + 2\ln x)$ olduğuna göre, Lagrange teoremi gereğince $\forall x_1, x_2 \in [1, e]$ için

$${x_2}^2 \ln x_2 - {x_1}^2 \ln x_1 = (x^2 \ln x)'_{x=c}(x_2 - x_1) = c(1 + 2\ln c)(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde x_1 ile x_2 arasında bir c noktası vardır. $\forall x \in [1, e]$ için $1 \leq x(1 + 2\ln x) \leq 3e$ olduğuna göre, $\forall x_1, x_2 \in [1, e]$ için son eşitlikten

$$| x_2 - x_1 | \leq | {x_2}^2 \ln x_2 - {x_1}^2 \ln x_1 | = c(1 + 2\ln c) | x_2 - x_1 | \leq 3e | x_2 - x_1 |$$

olduğu,dolayısıyla,istenen eşitsizliğin doğru olduğu anlaşılır.
(d) Lagrange teoremi gereğince $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \neq x_2)$ için

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = (\sin x)'_{x=c} = cosc$$

olacak şekilde x_1 ile x_2 arasında bir c noktası vardır. O halde, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}(x_1 \neq x_2)$ için

$$\begin{aligned} | \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} - \cos x_2 | &= | \cos c - \cos x_2 | \\ &= | -2\sin\frac{c - x_2}{2} \sin\frac{c + x_2}{2} | \end{aligned}$$

[$\forall x \in \mathbb{R}$ için $| \sin x | \leq 1$ ve $| \sin x | \leq | x |$ olduğundan]

$$\leq 2\frac{| c - x_2 |}{2} \leq | x_1 - x_2 |,$$

dolayısıyla, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için istenen eşitsizliğin sağlandığı anlaşılır. $\diamond$

(16) **Darboux Teoremi:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, $f'(x)$ fonksiyonu $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.Gösteriniz.

Çözüm: (a) $f'(a)f'(b) < 0$, örneğin, $f'(a) > 0$ ve $f'(b) < 0$ olsun. $f, [a, b]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, bu fonksiyon $[a, b]$ üzerinde süreklidir (Bkz. Önerme 4.1.3). O halde, Weierstrass teoremi gereğince (Bkz.Teorem 3.2.7)

$$f(c) = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ noktası vardır.$c \in (a, b)$ olduğunu görelim.

$$0 < f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \Rightarrow \exists \delta > 0\ (0 < \delta < b - a)\ \forall h \in (0, \delta)$$

için

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \Rightarrow \forall h \in (0,\delta)$$

için $f(a+h) > f(a)$ olduğu açıktır.Buna göre, $f\,[a, a+\delta]$ aralığında artandır, yani $c \neq a$ dır.Benzer şekilde, $c \neq b$ olduğu gösterilir. Demek ki, $c \in (a,b)$. O zaman, Fermat teoremine göre $f'(c) = 0$ dır.

(b) Şimdi teoremi genel durumda, yani herhangi $f'(a)$ ve $f'(b)$ değerleri için ispatlayalım.$f'(a) > f'(b)$ olsun ($f'(a) < f'(b)$ olduğunda ispat benzer şekilde yapılır). $A \in (f'(a), f'(b))$ olmak üzere $F : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = f(x) - Ax$ fonksiyonunu gözönüne alalım. F nin $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir ($\forall x \in [a,b]$) için $F'(x) = f'(x) - A$ dır.) ve $F'(a) = f'(a) - A < 0, F'(b) = f'(b) - A > 0$ olduğu açıktır.O halde, (a) ya göre $F'(c) = 0$, yani $f'(c) = A$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğu anlaşılır. $\diamond$

4.4.2 Ek Problemler

(17) $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ Chebyshev-Laguerre polinomunun köklerinin pozitif olduğunu gösteriniz.

(18) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ Chebyshev-Hermite polinomunun köklerinin reel olduğunu gösteriniz.

(19) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları için $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ Lagrange formülünü gerçekleyen $c \in (a,b)$ noktasını bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$; (b) $f(x) = 5x^3 + 2x$;
(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(20) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında Rolle teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x) = \frac{2-x^2}{x^4}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \text{ ise,} \\ e^x, & x > 0 \text{ ise;} \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \text{ ise,} \\ 1-x^3, & x > 0 \text{ ise.} \end{cases}$

(21) Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonları karşılarında yazılı I aralığında Lagrange teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x) = \mid x \mid, I = [-1,1]$;
(b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, I = [-1,1]$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, I = [-1,2]$;
(d) $f(x) = \frac{1}{x}, I = [a,b], ab < 0$;
(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \text{ ise, I} = [0,4]; \end{cases}$
(f) $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}, I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(22) Aşağıda verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları karşılarında yazılı I aralığı üzerinde Cauchy teoreminin koşullarını sağlar mı?

(a) $f(x) = e^x,\ g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, I = [-2,2]$;
(b) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \sqrt[3]{x^2}, I = [-8,8]$.

(23) Eğer, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sonlu (a,b) aralığında türevlenebilir, fakat sınırsız ise, $f'(x)$ fonksiyonununda (a,b) aralığında sınırsız olacağını gösteriniz.Bu sonucun tersinin doğru olmayacağını gösteren bir örnek veriniz.

Cevap: $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

(24) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

(a) $f, g \in C^n[a,b]$,
(b) f ve g , (a,b) aralığında $(n+1)$. mertebeden türevlenebilirdir koşulları sağlanıyorsa ,

$$\big(g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\big) f^{(n+1)}(c) = \big(f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\big) g^{(n+1)}(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktasının varolacağını gösteriniz.

(25) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq e.x$;

(b) $x \in (-1,+\infty)$ için $e^x > 1+\ln(1+x)$;

(c) $x \in \mathbb{R}$ için $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$;

(d) $x \in \mathbb{R}$ için $\cosh x \geq 1+\frac{x^2}{2}$;

(e) $x \in [0,\infty)$ için $\arctan x \leq x$;

(f) $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ için $\sin x + \tan x > 2x$;

(g) $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ için $x-\frac{x^3}{3} < \arctan x < x-\frac{x^3}{6}$;

(h) $x \in (1,+\infty)$ için $2\sqrt{x} > 3-\frac{1}{x}$.

(26) Lagrange teoreminden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için $\mid \cos x - \cos y \mid \leq \mid x-y \mid$;

(b) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için $\mid \sin x - \sin y \mid \leq \mid x-y \mid$;

(c) $0 < x < y, n \in \mathbb{N}$ için

$$n(y-x)x^{n-1} < y^n - x^n < n(y-x)y^{n-1};$$

(d) $0 < x < y$ için $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$;

(e) $\forall x,y \in [0,1]$ için

$$\mid x^2 \arctan x - y^2 \arctan y \mid \leq \frac{1+\pi}{2} \mid x-y \mid .$$

4.5 Taylor Formülü

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde $(n+1)$. mertebeden türevlenebilen $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in (a,b)$ noktası verilmiş olsun.Taylor formülü yardımıyla,

$$f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$$

değerlerine ve $f^{(n+1)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun x_0 'ın herhangi bir $U(x_0)$ komşuluğundaki belirli özelliklerine göre $f(x)$ fonksiyonu $U(x_0)$ civarında istenildiği kadar küçük hata ile Taylor polinomları adı verilen özel polinomlarla ifade edilebilir.

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ ler herhangi reel sayılar olmak üzere n. dereceden $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ polinomunun

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{4.50}$$

şeklinde de yazılabileceğini biliyoruz (Bkz. Örnek 4.3.6) x_0 herhangi bir reel sayı olmak üzere bu polinom,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{4.51}$$

şeklinde de gösterilebileceği kolayca gösterilir. (4.51) formülüne $P_n(x)$ polinomunun $(x-x_0)$ ın kuvvetlerine göre Taylor formülü denir. x in kuvvetlerine göre (4.50) Taylor formülüne Maclaurin formülü denir. $x_0 \in (a,b)$ noktasında n. mertebeden türevlenebilen $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun.Bu durumda,

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

polinomuna f' nin $(x-x_0)$ ın kuvvetlerine göre n. dereceden Taylor polinomu denir ve $T_n(x)$ (veya $T_n(f;x)$) ile gösterilir. $\forall k = 0,1,\cdots,n$ için $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, dolayısıyla, f fonksiyonu n. dereceden bir polinom ise, $f(x) = T_n(x)$ olduğu açıktır. Genel durumda ise, $f(x) \neq T_n(x)$ yani $f(x) - T_n(x) \neq 0$ olur. $r_n(x_0,x) = f(x) - T_n(x)$ büyüklüğüne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x_0;x) \tag{4.52}$$

Taylor formülünün n. kalan terimi denir. Bu durumda, yaptığımız yaklaşımın iyi değerlendirilmesi amacıyla $r_n(x_0,x)$ kalan terimi için gerekli formüllerin bulunması önem taşımaktadır.

Teorem 4.5.1 *: I, bitim noktaları x_0 ve x olan kapalı bir aralık olmak üzere $f : I \to \Re$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlansın:*
(a) f, I üzerinde n. mertebeden türevlenebilirdir,
(b) $f^{(n)} \in C(I)$ dir,
(c) $f^{(n)}$ türev fonksiyonu $I^\circ = I\backslash\{x_0, x\}$ açık aralığı üzerinde türevlenebilirdir.

Bu durumda, I° üzerinde türevlenebilen ve $\forall t \in I^\circ$ için $\varphi'(t) \neq 0$ koşullarını sağlayan her $\varphi \in C(I)$ fonksiyonu için

$$r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)n!} f^{(n+1)}(c)(x - c)^n \tag{4.53}$$

olacak şekilde bir $c \in I^\circ$ noktası vardır.

İspat: Teoremin ispatını $x_0 < x$ durumunda yapalım. $t \in [x_0, x]$ ve

$$q_n(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

olmak üzere $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}, F(t) = f(x) - q_n(t)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.Teoremin koşulları gereğince $F, [x_0, x]$ üzerinde sürekli ve (x_0, x) üzerinde türevlenebilirdir,ayrıca, $\forall t \in (x_0, x)$ için

$$\begin{aligned} F'(t) &= (f(x) - q_n(t))'_t = -q'_n(t) \\ &= -\big[f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \\ &- \frac{f'(t)}{1!} - 2\frac{f''(t)}{2!}(x - t) - \cdots - n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^{(n-1)}\big] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \end{aligned}$$

olur. F ve φ fonksiyonları için $[x_0, x]$ üzerinde Teorem 4.4.16 'nın koşulları sağlandığına göre (4.37) den dolayı

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)}$$

olacak şekilde bir $c \in (x_0, x)$ noktası vardır. $F(x) - F(x_0) = f(x) - q_n(x) - [f(x_0) - q_n(x_0)] = 0 - r_n(x_0, x)$ ve $F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$ olduğuna göre, buradan (4.53) bağıntısının doğru olduğu anlaşılır. $x < x_0$ durumunda teoremin ispatı benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 4.5.2 *: (4.53) te $\varphi(t) = x - t$ alırsak,*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x - c)^n(x - x_0) \tag{4.54}$$

bulunur. Bu formüle n. kalan terimin Cauchy formu denir.

Sonuç 4.5.3 *: (4.53) te $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ alırsak,*

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \tag{4.55}$$

bulunur. Bu formüle n. kalan terimin Lagrange formu denir.

Not: $c \in I \iff \exists 0 < \theta < 1 \ni c = x_0 + \theta(x - x_0)$ olacağından, (4.54) ve (4.55) formülleri $0 < \theta < 1$ olmak üzere sırasıyla

$$r_n(x) = \frac{(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1} \tag{4.56}$$

ve

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1} \tag{4.57}$$

biçiminde yazılabilir. •

Sonuç 4.5.4 *: f nin $(n+1)$. mertebeden $f^{(n+1)}(t)$ türevi $t = x_0$ noktasında sürekli olduğu durumda, $x \to x_0$ iken*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}) \tag{4.58}$$

olur. Gerçekten , (4.57) den dolayı $x \to x_0$ iken

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\big[f^{(n+1)}(c) - f^{(n+1)}(x_0)\big]$$

$\big[x \to x_0 \Leftrightarrow c \to x_0$ *ve* $f^{(n+1)}(t)$ *fonksiyonu* $t = x_0$ *noktasında sürekli olduğuna göre,* $x \to x_0$ *iken* $\frac{1}{n+1}[f^{(n+1)}(c) - f^{(n+1)}(x_0)] = 0(1)$*olduğundan*$\big]$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + 0((x - x_0)^{n+1})$$

olur.(4.58) formülüne f nin $(n+1)$. kalan terimi Peano formunda Taylor formülü denir.

Not: İleride n. kalan terimin integral formu da verilecektir. (4.52) formülünde, özel olarak ,$x_0 = 0$ alınırsa,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(0;x) \qquad (4.59)$$

formülü elde edilir ki, bu formüle f nin Maclaurin formülü denir. Bu durumda I, bitim noktaları 0 ve x olan kapalı aralık ve $c \in I^\circ$ olmak üzere (4.54) ve (4.55) den dolayı $r_n(0;x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n x$ ve $r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)x^{n+1}$ veya $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$r_n(0;x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)x^n$$

ve

$$r_n(0;x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$$

olur. •

Örnek 4.5.5 *: (4.59) dan faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin (veya x in kuvvetlerine göre Taylor) formüllerini bulunuz.*

(a) $f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$; *(b)* $f(x) = \sin x$;
(c) $f(x) = \cos x$; *(d)* $f(x) = \sinh x$;
(e) $f(x) = \cosh x$; *(f)* $f(x) = \ln(1+x)$;
(g) $f(x) = (1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$.

Çözüm: (a) $f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ fonksiyonu için

$$f^{(k)}(x) = a^x \ln^k a,\ f^{(k)}(0) = \ln^k a,\ f^{(k)}(\theta x) = a^{\theta x}\ln^k a \ (k = 0, 1, \cdots)$$

olduğuna göre, (4.59) dan dolayı a^x fonksiyonunun Lagrange formlu kalan terimli Maclaurin formülü

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + r_n(0;x),$$

$$r_n(0;x) = \frac{a^{\theta x}\ln^{n+1} a}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

olur. Özel durumda, $a = e$ için e^x fonksiyonunun Lagrange formlu kalan terimli Maclaurin formülü

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(0;x),$$

$$r_n(0;x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta, < 1$$

olur. Bu durumda, $\forall x \geq 0$ için $\mid r_n(0;x) \mid \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$ ve $\forall x < 0$ için $\mid r_n(0;x) \mid \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ eşitsizliği doğrudur.

(b) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu için

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}),\ f^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & k \text{ çift ise,} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$f^{(k)}(\theta x) = \sin(\theta x + k\frac{\pi}{2})(k = 1, 2, \cdots)$$

olduğuna göre, (4.59) dan dolayı $\sin x$ fonksiyonunun Lagrange formlu kalan terimli Maclaurin formülü

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n+1}(0;x),$$

$$r_{2n+1}(0;x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}),\ 0 < \theta < 1$$

olur. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid r_{2n+1}(0;x) \mid \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ eşitsizliği doğrudur.

(c) $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için

$$f^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2}),\ f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise,} \\ (-1)^{\frac{k}{2}}, & k\text{çift ise} \end{cases}$$

$$f^{(k)}(\theta x) = \cos(\theta x + k\frac{\pi}{2})\ (k = 1, 2, \cdots)$$

olduğuna göre, (4.59) dan dolayı $\cos x$ fonksiyonunun Lagrange formlu kalan terimli Maclaurin formülü

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + r_{2n}(0;x),$$

$$r_{2n}(0;x)=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos(\theta x+2n\frac{\pi}{2}),\ 0<\theta<1$$

olur. Bu durumda, $\forall x\in\mathbb{R}$ için $\mid r_{2n}(0;x)\mid\leq\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ eşitsizliği doğrudur.

(d) $f(x)=\sinh x$ fonksiyonu için

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}\cosh x, & k \text{ tek ise,}\\ \sinh x, & k \text{ çift ise,}\end{cases}$$

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}1, & k \text{ tek ise,}\\ 0, & k \text{ çift ise,}\end{cases}$$

$$f^{(k)}(\theta x)=\begin{cases}\cosh(\theta x), & k \text{ tek ise,}\\ \sinh(\theta x), & k \text{ çift ise, } (\mathrm{k}=1,2,\cdots)\end{cases}$$

olduğuna göre, (4.49) dan dolayı $\sinh x$ fonksiyonunun Lagrange formlu kalan terimli Maclaurin formülü

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+r_{2n+1}(0;x),$$

$$r_{2n+1}(0;x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh(\theta x)\,0<\theta<1$$

olur. Bu durumda, $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$\mid r_{2n+1}(0;x)\mid\leq\frac{\mid x\mid^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{cases}\frac{1+e^{x}}{2}, & x\geq 0 \text{ ise,}\\ \frac{1+e^{-x}}{2}, & x\leq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

eşitsizliği doğrudur.

(e) Benzer şekilde

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n+2}(0;x),$$

$$r_{2n+2}(0;x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cosh(\theta x)\,0<\theta<1$$

olduğu gösterilir.

(f) $f(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonu için

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\ f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$f^{(k)}(\theta x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+\theta x)^k}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

olduğuna göre, $\ln(1+x)$ fonksiyonunun Maclaurin formülü ((4.59) dan dolayı)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(0;x)$$

olur. Burada, $r_n(0;x)$ kalan terimi $r_n(0;x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_1 x)^{n+1}}$ (Lagrange formda), $0<\theta_1<1$ veya $r_n(0;x)=(-1)^n\frac{(1-\theta_2)^n x^{n+1}}{(1+\theta_2)}$ (Cauchy formda), $0<\theta_2<1$ formüllerinden herhangi biri ile verilebilir. Bu durumda, $\forall x\in[0,1]$ için (kalan terimin Lagrange formuna göre) $\mid r_n(0;x)\mid\leq\frac{1}{n+1}$ eşitsizliği ve $0<r<1$ olmak üzere $\forall x\in[-r,0]$ için (kalan terimin Cauchy formuna göre)

$$\mid r_n(0;x)\mid=\mid(-1)^n(\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x})^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta_2 x}\mid<\frac{r^{n+1}}{1-r}$$

eşitsizliği doğrudur.

(g) $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\\ f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\\ f^{(k)}(\theta x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+\theta x)^{\alpha-k}(k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

olduğuna göre, (4.59) dan dolayı $(1+x)^\alpha$ fonksiyonunun kalan terimi Lagrange formunda Maclaurin formülü

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1))}{n!}x^n+r_n(0;x),$$

$$r_n(0;x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1},\ 0<\theta<1$$

olur.

Bu durumda (e) de olduğu gibi $\forall x\in\mathbb{R},\mid x\mid<1$ için $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(0;x)=0$ olduğu kolayca gösterilebilir. $\diamond$

Not: Özel durumda $\alpha = n \in \mathbb{N}$ için $r_n(0;x) = 0$ olduğuna göre,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Newton binom açılımını elde ederiz. •

Şimdi esas elemanter fonksiyonların Peano formlu kalan terimli Taylor formüllerini aşağıdaki tablo şeklinde sıralıyalım.

No	$f(x)$
1	$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + 0(x^n)$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2})$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$
4	$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2})$
5	$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$
6	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$
7	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$

Tablo 4.2

Tablo 4.2 den $a = e$ ve $\alpha = -1$ gibi özel durumlarda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

olur. Üstelik, son ifadeden

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

ve Tablo 4.2 nin 7.formülünden

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

olduğu görülür.

4.5.1 Çözümlü Problemler

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ polinomunun $x_0 = -1$ noktasindaki 3. dereceden Taylor polinomunu yazınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8, \\ f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 &\Rightarrow f'(-1) = -5, \\ f''(x) = 6x + 6 &\Rightarrow f''(-1) = 0, \\ f'''(x) = 6 &\Rightarrow f'''(-1) = 6, \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

olacağından $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3$ olur. ⋄

(2) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktadaki verilen dereceden Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = (1 - x + x^2)^3, x_0 = 0, n = 2;$ (b) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, n = 2;$
(c) $f(x) = \frac{x+3}{3+x^2}, x_0 = 1, n = 2;$ (d) $f(x) = e^{2x-x^2}, x_0 = 0, n = 3;$
(e) $f(x) = \sin(\sin x), x_0 = 0, n = 3;$ (f) $f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x}, x_0 = 0, n = 6;$
(g) $f(x) = a\cos h\frac{x}{a}, a > 0, x_0 = 1, n = 2;$ (h) $f(x) = \frac{x}{\arcsin x}, x_0 = 0, n = 3;$
(i) $f(x) = e^{x\sin x}, x_0 = 0, n = 4;$ (j) $f(x) = \ln\frac{\sin x}{x}, x_0 = 0, n = 5;$
(k) $f(x) = (1+x)^{\sin x}, x_0 = 0, n = 5;$ (l) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0, n = 4;$
(m) $f(x) = \tan x, x_0 = 0, n = 3.$

Çözüm: (a) $f'(x) = 3(-1+2x)(1-x+x^2)^2, f''(x) = 6(1-x+x^2)^2 + 6(-1+2x)^2(1-x+x^2)$ olduğuna göre, $f(0) = 1, f'(0) = -3, f''(0) = 12$ dır. O halde,

$$f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + r_2(0;x), r_2(0;x) = o(x^2)$$

olur.
(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ olduğuna göre, $f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$ tür. O halde,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + r_2(1;x), r_2(1;x) = o((x-1)^2)$$

olur.
(c) $f(1)=1, f'(1)=-\frac{3}{16}, f''(1)=-\frac{1}{4}$ olduğuna göre,

$$f(x)=1-\frac{3}{16}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+r_2(1;x), r_2(1;x)=o((x-1)^2)$$

olur.
(d) $f'(x)=2(1-x)e^{2x-x^2}, f''(x)=2(-1+2(1-x)^2)e^{2x-x^2}, f'''(x)=4(1-x)e^{2x-x^2}(-3+2(1-x)^2)$ olduğuna göre, $f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=2, f'''(0)=-4$ dır. O halde,

$$f(x)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+r_3(0;x), r_3(0;x)=o(x^3)$$

olur.
(e) $f'(x)=\cos x\cos(\sin x), f''(x)=-\sin x\cos(\sin x)-\cos^2 x\sin(\sin x), f'''(x)=-\cos x\cos(\sin x)+3\sin x\cos x\sin(\sin x)-\cos^3 x\cos(\sin x)$ olduğuna göre, $f(0)=0, f'(0)=1 f''(0)=0, f'''(0)=-2$ dır. O halde,

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+r_3(0;x), r_3(0;x)=o(x^3)$$

olur.
(f) $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=-6, f^{(4)}(0)=24, f^{(5)}(0)=-100, f^{(6)}(0)=480$ olduğuna göre,

$$f(x)=x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+r_6(0;x), r_6(0;x)=o(x^6)$$

olur.
(g) $f(0)=a, f'(0)=0, f''(0)=\frac{1}{a}$ olduğuna göre,

$$f(x)=a+\frac{x^2}{2a}+r_2(0;x), r_2(0;x)=o(x^2)$$

olur.
(h) $f(0)=1, f'(0)=1, f''(0)=-\frac{1}{3}, f^{(4)}(0)=8$ olduğuna göre,

$$f(x)=1-\frac{x^2}{6}-\frac{17}{360}x^4+r_4(0;x), r_4(0;x)=o(x^4)$$

olur.
(i) $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=8$ olduğuna göre,

$$f(x)=1+x^2+\frac{x^4}{3}+r_4(0;x), r_3(0;x)=o(x^4)$$

olur.
(j) $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=-\frac{1}{3}, f^{(4)}(0)=-\frac{2}{15}$ olduğuna göre,

$$f(x)=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+r_4(0;x), r_4(0;x)=o(x^5)$$

olur.
(k) $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=-\frac{1}{3}, f^{(4)}=16, f^{(5)}(0)=80$ olduğuna göre,

$$f(x)=(1+x)^{\sin x}=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}x^5+r_5(0;x), r_5(0;x)=o(x^5)$$

olur.
(l) $f(0)=e, f'(0)=\frac{e}{2}, f''(0)=\frac{11e}{12}, f'''(0)=-\frac{21e}{8}, f^{(4)}(0)=\frac{2447e}{240}$ olduğuna göre,

$$f(x)=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+\frac{2447e}{5760}x^4+r_4(0;x), r_4(0;x)=o(x^4)$$

olur.
(m) $(\tan x)'=\cos^{-2}x, (\tan x)''=2\cos^{-3}x\sin x, (\tan x)'''=6\cos^{-4}x\sin^2 x+2\cos^{-2}x, (\tan x)^{(4)}=24\cos^{-5}x\sin^3 x+16\cos^{-3}x\sin x$ olduğuna göre, $\tan 0=0, \tan' 0=1, \tan'' 0=0, \tan''' 0=2\tan^{(4)} 0=0$ olur. Demek ki,

$$f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

(3) Aşağıdaki fonksiyonların Peano kalan terimli Maclaurin formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = e^{5x-1}$; (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$;
(c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$; (d) $f(x) = \ln(2+ex)$;
(e) $f(x) = (x+5)e^{2x}$; (f) $f(x) = \ln\frac{3+x}{2-x}$;
(g) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-15}$; (h) $f(x) = \frac{1}{x^4-3x^2-4}$;
(i) $f(x) = \sin^2 x.\cos^2 x$; (j) $f(x) = \sin^3 x$;
(k) $f(x) = \arctan x$; (l) $f(x) = \arcsin x$;

Çözüm: (a) $f(x) = e^{-1}e^{5x}[e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]
$= e^{-1}[\sum_{k=0}^{n} \frac{(5x)^k}{k!} + o((5x)^n)] = \sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{e.k!}x^k + o(x^n)$ olur.
(b) $f(x) = (1+4x)^{-\frac{1}{2}}[(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(4x)^k}{k!} + o((4x)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{4^k.x^k}{k!} + o(x^n)$$

olur.
(c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}[\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.t^k + o(t^n)$ olduğundan]
$= 2 - 5[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.x^k + o(x^n)] = -3\sum_{k=1}^{n} 5(-1)^{k-1}.x^k + o(x^n)$ olur.
(d) $f(x) = \ln 2 + \ln(1+\frac{ex}{2})[\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o(t^n)$ olduğundan]
$= \ln 2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}.\frac{(\frac{ex}{2})^k}{k} + o((\frac{ex}{2})^n) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.(\frac{e}{2})^k.x^k + o(x^n)$
olur.
(e) $f(x) = (x+5)e^{2x} = xe^{2x} + 5e^{2x}[e^t = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$ olduğundan]
$= x[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}x^k + o(x^{n-1})] + 5[\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k + o(x^n)] = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k.x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{n}5\frac{2^k}{k!}x^k +$
$o(x^n)[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k.x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k-1!}x^k$ olduğundan] $= 5 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5.2^k}{k!}x^k +$
$o(x^n) = 5 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n)$ olur.
(f) $f(x) = \ln\frac{3}{2} + \ln(1+\frac{x}{3}) - \ln(1-\frac{x}{2})[\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o(t^n)$

olduğundan] $= \ln\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k})x^k + o(x^n)$ olur.
(g) $f(x) = 1 + \frac{17-x}{(x+4)(x-3)} = 1 - \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}[\frac{1}{1+t} =$
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + o(t^n)$ ve $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^n + o(t^n)$ olduğundan] $= 1 - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^k}{4^k} -$
$\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k} + o(x^n) = -\frac{5}{12} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^k} - \frac{2}{3^{k+1}})x^k + o(x^n)$ olur.
(h) $f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{1}{5}(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+1}) = \frac{1}{5}(\frac{1}{4(1-\frac{x^2}{4})} - \frac{1}{x^2+1})[\frac{1}{1-t}$ ve $\frac{1}{1+t}$
fonksiyonlarının Maclaurin formüllerinden] $= \sum_{k=0}^{n}((-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}})\frac{x^{2k}}{5} +$
$o(x^{2n+1})$ olur.
(i) $f(x) = \sin^2 x.\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)[\cos t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} +$
$o(t^{2n+1})$ olduğundan] $= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^k + o(x^{2n+1})$ olur.
(j) $f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{3(-1)^k}{4(2k+1)!}(1-3^{2k}x^{2k+1} + o(x^{2n})$
olur. (k)ve(l) de verilen fonksiyonların Maclaurin formüllerini aşağıdaki önermeden faydalanarak bulacağız.

Önerme 4.5.6 *:: $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'(x)$ tüevi için $b_k = \frac{f^{k+1}(x_0)}{k!}$ olmak üzere $x \to x_0$ iken*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

olsun. Bu durumda, $f^{(n+1)}(x_0)$ türevi vardır ve $x \to x_0$ iken

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1})$$

dir.

(k) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ olduğuna göre, Önerme 4.5.6 dan dolayı

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2^{k+1}} + o(x^{2n+2})$$

olur.

(l) $\forall x \in (-1,1)$ için

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3...(2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

olduğuna göre, Önerme 4.5.6 dan dolayı

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3...(2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

olur. $\diamond$

(4) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktanın komşuluğunda Peano kalan terimli Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}, x_0 = 1;$

(b) $f(x) = \ln(3+2x-x^2), x_0 = 2;$

(c) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2;$

Çözüm: (a) $x+1 = t$ olsun. O halde,

$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2} t (1 - \frac{t^2}{4})^{-\frac{1}{2}} = g(t)$$

olur.$g(t)$ fonksiyonunun Peano kalan terimli Maclaurin formülü

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}t \sum_{k=1}^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{t^{2k}}{4^k} + o(t^{2n})$$

$$= \frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(1.3...(2k-1))}{2^{3k+1}k!} t^{2k+1} + o(t^{2n})$$

olduğuna göre, $t = x+1$ değişken değişimi yaparsak,

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(1.3...(2k-1))}{2^{3k+1}k!} (x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n})$$

olur.

(b) $3+2x-x^2 = (3-x)(x+1)$ olduğuna göre, $t = x-2$ dersek

$$3+2x-x^2 = (1-t)(3+t) = 3(1-t)(1+\frac{t}{3})$$

olur.Buna göre,

$$f(x) = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln(1+\frac{t}{3}) = g(t)$$

olur.$g(t)$ fonksiyonunun Maclaurin formülü

$$g(t) = \ln 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k.3^k} + o(t^n)$$

olduğuna göre, ($t = x-2$ olmak üzere)

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^{n} (\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1) \frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n)$$

olduğu bulunur.

(c) $f(x) = \sin \frac{\pi}{4} x = \cos \frac{\pi}{4}(x-2)[\frac{\pi}{4}(x-2) = t$ dersek$] = \cos t = g(t)$ olur.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1})$$

olduğuna göre,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + o((x-2)^{2n+1})$$

olur. $\diamond$

(5) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f, [0,1]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir,

(b) $f(0) = f(1) = 0,$

(c) $\forall x \in (0,1)$ için $\mid f''(x) \mid \leq A$ olacak şekilde bir $A > 0$ sayısı vardır koşulları sağlanıyorsa $\forall x \in [0,1]$ için $\mid f'(x) \mid \leq \frac{A}{2}$ olur. Gösteriniz.

Çözüm: Lagrange kalan terimli Taylor formülüne göre

$$f(0) = f(x) - xf'(x) + f''(c_1)\frac{x^2}{2}, 0 < c_1 < x \leq 1,$$

$$f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + f''(c_2)\frac{(1-x)^2}{2}, 0 \leq x < c_2 < 1$$

yazabiliriz. Buradan,

$f'(x) = \frac{1}{2}(f''(c_1)x^2 - f''(c_2)\frac{(1-x)^2}{2}), 0 < x < 1 \Rightarrow \mid f'(x) \mid \leq \frac{a}{2}(1-2x+2x^2), 0 \leq x \leq 1$ bulunur. $\forall x \in [0,1]$ için $0 \leq 1-2x+2x^2 \leq 1$ olduğuna göre, son eşitlikten $\forall x \in [0,1]$ için $\mid f'(x) \mid \leq \frac{A}{2}$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

(a) $f, \mathbb{R}$ üzerinde 2. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $M_k = sup\{\mid f^k(x) \mid : x \in \mathbb{R}\} < +\infty, k = 0,1,2$ koşulları sağlanıyorsa

$$M_2^2 \leq 2M_0M_2$$

olacağını gösteriniz.

Çözüm: Lagrange kalan terimli Taylor formülüne göre $x, x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + f''(c)\frac{(x_0-x)^2}{2}$$

olacak şekilde x ile x_0 arasında bir c noktası vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mid f(x_0) \mid &\leq \mid f(x) \mid + \mid f'(x) \mid\mid x_0 - x \mid + \mid f''(c) \mid \frac{\mid x_0 - x^2 \mid}{2} \\ &\leq M_0 + M_1 \mid x_0 - x \mid + M_2\frac{\mid x_0 - x \mid^2}{2} \end{aligned}$$

olur. $\forall y \in [0,+\infty)$ için $M_0 + M_1 y + M_2\frac{y^2}{2} \geq 0$ olduğuna göre, $M_1^2 - 4\frac{M_2}{2}M_0 = M_1^2 - 2M_0M_2 \leq 0$ dır. Bu ise, istenen eşitsizliğin doğru olması demektir. $\diamond$

Şimdi limit hesabında Taylor formüllerinin bazı uygulamalarını görelim.

(7) Taylor formüllerinden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2\sin x - 3x}{x^4}$;
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1+x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$; (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arctan x}$;
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (h) $\lim_{x\to 0}(\cos x + \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x(\sin x - 1)}}$.

Çözüm: (a) $x \to 0$ iken $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}) = -\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

olur.

(b) $x \to 0$ iken $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2sinx - 3x}{x^4} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) + 2(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) - 3x}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4) + 2o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0 \end{aligned}$$

olur.

(c) $x \to 0$ iken $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sqrt{1+2x} = 1 + x - x^3 + o(x^3)$ ve $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))-(1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+xo(x^3)+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -1$$

olur.

(d) $x \to 0$ iken $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^5)$ $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^5))}{(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^5))-(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^5))}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^5)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^5)} = -1$$

olur.

(e) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))}{x^3(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4))}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1}{12}$$

olur.

(f) $t \to 0$ iken $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(\sin x)^6 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6))^3 \\ &+ \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6))^6 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

ve $x \to 0$ iken

$$\begin{aligned}x\sqrt[3]{1-x^2} &= x(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = x(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)) \\ &= x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5))\end{aligned}$$

oldğuna göre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)-(x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5)+o(x^5)}{x^5}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{19}{90}x^5+o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90}$$

olur.

(g) $u > 0$ ıçın $u^v = e^{v\ln n}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{\sin x \ln\cos x}}{x^3}$$

[$t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + o(t^2) \Rightarrow x \to 0$ iken $e^{\sin x\ln\cos x} = 1 + \sin x\ln\cos x + o(\sin x\ln\cos x)$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\ln\cos x + o(\sin x\ln\cos x)}{x^3}$$

[$x \to 0$ iken

$$\begin{aligned}\sin x\ln\cos x &= \sin x \ln\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sin x\ln(1-\sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2}\sin x(-\frac{\sin^2 x}{2}+o(x^4)) = -\frac{1}{4}\sin^3 x + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \to 0$ iken $o(\sin x\ln\cos x) = o(x^3)$ olduğundan]

$$\begin{aligned}= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\ln\cos x + o(x^3)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olur.

(h) $y = (cosx + \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$ olsun. O halde,

$$\ln y = \frac{1}{x(\sin x - x)} \ln(\cos x + \frac{x^2}{2})$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \ln y &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + \frac{x^2}{2})}{x(\sin x - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{x(-\frac{x^3}{6} + o(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5))}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^5)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} \\ &= -\frac{1}{4} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

olur. $\diamond$

4.5.2 Ek Problemler

(8) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktadaki verilen dereceden Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = (1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3,\ x_0 = 0, n = 5;$

(b) $f(x) = \frac{1}{3x+4},\ x_0 = 0, n = 4;$

(c) $f(x) = e^{\tan x},\ x_0 = 0, n = 2;$

(d) $f(x) = \ln\cos x,\ x_0 = 0, n = 2;$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{1 - 3x\cos 2x}\ x_0 = 0, n = 3;$

(f) $f(x) = \ln^3(1 - \frac{x}{2}),\ x_0 = 0, n = 3;$

(g) $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}},\ x_0 = 0, n = 4;$

(h) $f(x) = \sin(\arctan x),\ x_0 = 0, n = 4;$

(i) $f(x) = \sqrt{\cos x},\ x_0 = 0, n = 4;$

(j) $f(x) = \frac{1}{\cos x},\ x_0 = 0, n = 5;$

(k) $f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}},\ x_0 = 0, n = 5;$

(l) $f(x) = \tanh x,\ x_0 = 0, n = 6.$

Cevap:

(a) $1 - 6x + 21x^2 - 32x^3 + 15x^4 + 66x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^5);$

(b) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4^2}x + \frac{3^2}{4^3}x^2 - \frac{3^3}{4^4}x^3 + \frac{3^4}{4^5}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4);$

(c) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + r_2(o;x), r_2(o;x) = o(x^2);$

(d) $-\frac{x^2}{2} + r_2(o;x), r_2(o;x) = o(x^2);$

(e) $1 - x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^3);$

(f) $-\frac{x^3}{8} + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^3);$

(g) $e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4);$

(h) $x - \frac{x^3}{2} + r_3(o;x), r_3(o;x) = o(x^4);$

(i) $1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^4);$

(j) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + r_4(o;x), r_4(o;x) = o(x^5);$

(k) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^5);$

(l) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + r_5(o;x), r_5(o;x) = o(x^6).$

(9) Aşağıdaki fonksiyonların Peano kalan terimli Maclaurin formüllerini yazınız.

(a) $f(x) = 3^{(2-x)};$ (b) $f(x) = (x^2 - x)e^x;$

(c) $f(x) = \ln\frac{2-3x}{3+2x};$ (d) $f(x) = (1 + x^2)\ln\sqrt{1+x};$

(e) $f(x) = \ln\frac{x+4}{x^2-5x+6};$ (f) $f(x) = \frac{x^3}{x-1};$

(g) $f(x) = \frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2};$ (h) $f(x) = x\cosh 3x;$

(i) $f(x) = \sin^3 x\cos x;$ (j) $f(x) = \frac{x}{3}\ln\frac{x^2-1}{x^2-e};$

(k) $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x;$ (l) $f(x) = \cosh x\cosh 3x;$

(m) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}.$

Cevap: (a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{9(\ln 3)^k}{k!}x^k+o(x^n)$;

(b) $-x+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k k}{(k-1)!}x^k+o(x^n)$;

(c) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k-9^k}{k6^k}x^k+o(x^n)$;

(d) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)}{k(k-2)}x^k+o(x^n)$;

(e) $\ln\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}4^{(-k)}+2^{(-k)}+3^{(-k)}}{k}x^k+o(x^n)$;

(f) $\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}((-1)^k3^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$;

(g) $\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{n}((-1)^k2^{-(k+1)}-1)x^k+o(x^n)$;

(h) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^n)$;

(i) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}2^{2k-1}(1-2^{2k})x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

(j) $-\frac{x}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-k}-1}{3k}x^{2k+1}+o(x^{2n})$;

(k) $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{3(-1)^k4^{2k-1}}{2(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

(l) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(2^{2k}+1)x^{2k}+o(x^{2n+1})$;

(m) $\sum_{k=1}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}x^{2k}+o(x^{2n+1})$.

(10) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktanın komşuluğunda Peano kalan terimli Taylor formüllerini yazınız.

(a) $f(x)=\sin(2x-3), x_o=1$;

(b) $f(x)=x^2e^{-2x}, x_o=1$;

(c) $f(x)=\ln(2+x-x^2), x_o=1$;

(d) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}, x_o=1$;

(e) $f(x)=e^{2x^2+8x+3}, x_o=-2$;

(f) $f(x)=\sin^2(x-1)\cos(x-1), x_o=1$;

(g) $f(x)=\log_5\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}, x_o=1$.

Cevap: (a) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin(\frac{k\pi}{2}-1)}{k!}(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

(b) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^ke^22^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k+o((x+1)^n)$;

(c) $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{-k}-1}{k}(x-1)^k+o((x-1)^n)$;

(d) $2+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{2^k}+o((x-1)^n)$;

(e) $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-5}2^k}{k!}(x+2)^{2k}+o((x+2)^{2n+1})$;

(f) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-3^{2k})}{4(2k)!}(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})$;

(g) $\frac{2}{3\ln 5}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1}+o((x-1)^{2n+1})$.

(11) Taylor formüllerinden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, (b) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; (d) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$;

(e) $\lim_{x\to0}\frac{\sinh 2x-2\sinh x}{x^2}$; (f) $\lim_{x\to0}\frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$;

(g) $\lim_{x\to0}\frac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3}$; (h) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\arctan x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}$;

(i) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-\sin x)-1}{\sqrt[3]{8-x^4}-2}$; (j) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+\frac{1}{3}x^3}{x-\tanh x}$;

(k) $\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{\cos x}-\sin x}{x^4}$; (l) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$;

(m) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\tanh x}{x^5}$; (n) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x}{3}}-\sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3}$;

(o) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x\sqrt[3]{1+x^2}}{x^4}$; (p) $\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$;

(q) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x+\frac{x^3}{3}}{\sinh(sinhx)-\tan x}$; (r) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x^3}-\cos x^4}{\tan x-x}$;

(s) $\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$; (t) $\lim_{x\to0}(\cosh x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

(u) $\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{\arcsin x})^{\frac{1}{x^2}}$; (v) $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}$;

(w) $\lim_{x\to0}(\frac{2\tan x}{x+\sin x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (x) $\lim_{x\to2}(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2})^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$;

(y) $\lim_{x\to 0}\frac{((1+x)^{\frac{1}{x}}-e)^2}{\ln(x+\cos x)-x}$; (z) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{2(\sqrt{1+x}-x)})^{\cot x}$;

(xx) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x^2-1})^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$; (yy) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$.

Cevap:

(a) $-\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{6}$; (d) $\frac{1}{24}$; (e) 1; (f) -2;
(g) -1; (h) -1; (i) $-\frac{7}{4}$; (j) $\frac{1}{2}$; (k) 0; (l) $-\frac{1}{45}$;
(m) $-\frac{1}{24}$; (n) $-\frac{1}{30}$; (o) $-\frac{1}{81}$; (p) $\frac{11}{45}$; (q) $-\frac{1}{6}$; (r) -3;
(s) 3; (t) $e^{-\frac{1}{2}}$; (u) $e^{\frac{1}{2}}$; (v) $e^{-\frac{1}{3}}$; (w) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (x) $e^{\frac{5}{6}}$;
(y) $e^{-\frac{1}{4}}$; (z) $-\frac{e^2}{4}$; (xx) $e^{-\frac{1}{3}}$; (yy) $\frac{2}{5}$.

4.6 L'Hospital Kuralı

Bölüm 2'de $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0$ ve 1^∞ şeklinde belirsizlik oluşturan birçok dizilerin ve fonksiyonların limitlerinin, özel olarak, suni usullerle bulunabileceğini gördük. (4.5) ten de görüldüğü gibi böyle belirsizlikler diferansiyel hesap yöntemlerine(yani orta değer teoremleri ve Taylor formülüne) dayanık daha güçlü metodlarla incelenebilir. Bu kısımda sözkonusu metodlardan biri olan L'Hospital kuralı incelenecektir.

4.6.1 $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali

Teorem 4.6.1 (1. L'Hospital Kuralı) :

$\delta\in\mathbb{R}_+, a\in\mathbb{R}$ ve $f,g:\overset{\circ}{U}_\delta(a)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ komşuluğu üzerinde türevlenebilen $\forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ için $g'(x)\neq 0$ ve $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$ olsun. Eğer,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{4.60}$$

limiti varsa, ($A\in\mathbb{R}$ veya $A=\pm\infty$ olabilir) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limiti de vardır ve

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.61}$$

olur.

İspat: $F,G:\overset{\circ}{U}_\delta(a)\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a) \text{ ise,}\\ 0, & x=a \text{ ise}\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(x), & x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a) \text{ ise,}\\ 0, & x=a \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan F ve G fonksiyonlarını gözönüne alalım. F ve G fonksiyonları $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ üzerinde türevli (Her $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x)$ için $F'(x)=f'(x)$ ve $G'(x)=g'(x)$ olduğuna göre,) ve $x=a$ noktasında $\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f(x)=0=F(a)$ ve $\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0=G(a)$ olduğuna göre, F ve G fonksiyonları $U_\delta(a)$ üzerinde süreklidirler. Üstelik, $\forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ için $G'(x)=g'(x)\neq 0$ olduğuna göre, Cauchy teoremi gereğince $\forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ için

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4.62}$$

olacak şekilde x ile a arasında bir $c=a+\theta(x-a)\ \ 0<\theta<1$ noktası vardır. $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, $x\to a\Longleftrightarrow c\to a$ olduğuna ve (4.60) limiti mevcut olduğuna göre, $\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ limiti de vardır ve $\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ olur. Buna göre (4.62) ta $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a), x\to a$ iken limite geçersek $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitinin varlığı ve (4.60) eşitliğinin doğruluğu elde edilir. □

Not: 1. Teoremin karşıtı genellikle doğru değildir. Örneğin, $a=0,\ f(x)=x^2\cos\frac{1}{x},\ g(x)=\sin x$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

olmasına rağmen, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$ limiti yoktur(çünkü $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limiti yoktur). •

Not: 2. Teorem 4.6.1 deki f ve g fonksiyonlarının $f', g' : \overset{\circ}{U}_\delta(a) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının a noktasında sürekli ve $g'(a) \neq 0$ olmaları halinde (4.61) bağıntısı

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{4.63}$$

şeklinde yazılabilir. •

Not: 3. Eğer, $f'(x)$ ve $g'(x)$ türev fonksiyonları f ve g nin Teorem 4.6.1 in koşullarını sağlarsa o halde, L'Hospital kuralı bir defa daha uygulanabilir. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ bulunur. Benzer şekilde, belirsizlikten kurtuluncaya kadar işleme devam edilir. •

Örneğin,

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2\cos x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x-2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{2-2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{24x}{2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{12}{cosx} = 12$.

Not: 4. Teorem 4.6.1 de $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ komşuluğu yerine sırasıyla $\overset{\circ}{U}_\delta(a^-) = (a-\delta, a)$ ve $\overset{\circ}{U}_\delta(a^+) = (a, a+\delta)$ komşulukları alındığında sonucun sol ve sağ limitler (yani $x \to a^-$ ve $x \to a^+$ iken) için de doğru olacağı açıktır. •

Teorem 4.6.2 *: $\Delta > 0$ olmak üzere $f, g : (\Delta, +\infty) \to \mathbb{R}$ ($f, g : (-\infty, -\Delta) \to \mathbb{R}$) fonksiyonları $(\Delta, +\infty)((-\infty, -\Delta))$ üzerinde türevlenebilen , $\forall x \in (\Delta, +\infty)$ $(\forall x \in (-\infty, -\Delta))$ için $g'(x) \neq 0$ ve $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0)$ olsun. Eğer, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A)$ limiti varsa, $(A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} (\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)})$ limiti de vardır ve $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} (\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eşitliği doğrudur.*

İspat: $t = \frac{1}{x}$ dersek, $x \to +\infty \iff t \to 0^+$ olduğuna göre, $F(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x), G(t) = g(\frac{1}{t}) = g(x)$ tanımıyla $F, G : \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{\Delta}}(0^+) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{\Delta}}(0^+)$ üzerinde Teorem 4.6.1'in bütün koşulları sağlanır. Buna göre ,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$[F'(t) = f'(\frac{1}{t})(\frac{1}{t})' = -\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})$ ve $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})$ olduğundan]

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bulunur.$x \to -\infty$ iken teoremin doğruluğu benzer şekilde gösterilir. □

Örnek 4.6.3 *: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$ limitini bulunuz.*

Çözüm: Teorem 4.6.2gereği,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}}{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{1+x})(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}) = 2$$

bulunur. ⋄

4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik hali

Teorem 4.6.4 (2. L'Hospital Kuralı)) *:*

$\delta \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \overset{\circ}{U}_\delta(a^+) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\overset{\circ}{U}_\delta(a^+)$ komşuluğu üzerinde türevlenebilen , $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a^+)$ için $g'(x) \neq 0$ ve $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ (veya $= -\infty$) olsun. Eğer, $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ limiti varsa, ($A \in \mathbb{R}$ veya $A = \pm\infty$ olabilir), $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti de vardır ve

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.64}$$

olur.

İspat: Önce $A \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha : \overset{\circ}{U}_\delta(a^+) \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - A$ fonksiyonu için $\lim_{x\to a^+} \alpha(x) = \lim_{x\to a^+} (\frac{f'(x)}{g'(x)} - A) = 0$ olduğuna göre, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists 0 < \delta_1 < \delta$ öyle ki

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a_+) \text{ için } \mid \alpha(x) \mid < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.65}$$

f(x) ve g(x) fonksiyonları $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a^+)$ üzerinde sürekli (çünkü bu fonksiyonlar $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a^+)$ üzerinde türevlenebilirlerdir) olduklarına göre, $\exists 0 < \delta_2 < \delta$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a^+)$ için $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ (çünkü $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ dır) olur. Üstelik , $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ olduğuna göre, $\delta_3 = min\{\delta_1, \delta_2\}$ olmak üzere $\exists 0 < \delta_0 < \delta_3$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a^+)$ için $f(x) \neq f(a+\delta_0)$ ve $g(x) \neq g(a+\delta_0)$ olur.

$[x, a+\delta_0] \subset \overset{\circ}{U}_{\delta}(a^+)$ olacak şekilde her $[x, a+\delta_0]$ aralığında f ve g fonksiyonları için Cauchy teoreminin koşulları gerçeklendiği açıktır. Bu durumda,

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

veya

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(a+\delta_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{4.66}$$

olacak şekilde bir $t \in (x, a+\delta_0)$ noktası vardır.(4.66) dan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \frac{1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_0)}{f(x)}} \tag{4.67}$$

bulunur. $\beta(x) = 1 - \frac{1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_0)}{f(x)}}$ şeklinde tanımlanan $\beta : \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a^+) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to a^+} \beta(x) = 1 - \lim_{x\to a^+} \frac{1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_0)}{f(x)}}$$

$$[\lim_{x\to a^+} \frac{f(a+\delta_0)}{f(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} = 0 \text{ olduğuna göre, }]$$

$$= 1 - 1 = 0 \qquad \text{olur.}$$

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarının tanımına göre (4.67) den dolayı

$$\frac{f(x)}{g(x)} = [A + \alpha(t)][1 + \beta(x)] = A + \alpha(t) + A\beta(x)\alpha(t)\beta(x) \tag{4.68}$$

yazabiliriz.

$\lim\limits_{x\to a_+} \beta(x) = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta_0' \in (0, \delta_0)$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0'(a_+)}$ için

$$| A\beta(x) + \alpha(t)\beta(x) | < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.69}$$

olur. Bu durumda, $[x, a+\delta_0'] \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a_+)$ olacak şekilde her $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a_+)$ için (4.68),(4.65), ve (4.69) dan dolayı

$$| \frac{f(x)}{g(x)} - A | \leqslant | \alpha(t) | + | A\beta(x) + \alpha(t)\beta(x) | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. Bu ise, (4.64) nin doğru olması demektir. $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty(-\infty)$ olduğu durumda $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ olduğuna göre, yukarıda gösterildiği gibi $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, dolayısıyla, $\lim\limits_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty(-\infty)$ olduğu elde edilir. Böylece, $A = \pm\infty$ durumlarında da teorem ispatlanmış olur. □

Not 1: Teorem 4.6.4 te $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a^+)$ komşuluğu yerine $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a^-)$ alındığında sonucun sol limit için de doğru olacağı açıktır. •

Not 2: 1. L'Hospital kuralında (Teorem 4.6.2) olduğu gibi Teorem 4.6.4 ün uygun koşullar sağlandığında $x \to -\infty$ (veya $x \to +\infty$) durumunda da doğru olacağı açıktır. •

Not 3: $\infty - \infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0$ ve 1^∞ şeklindeki belirsizlikler uygun işlemler yapılarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindeki belirsizliklerden birine dönüştürülebilir. •

Örneğin,

(a) $f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\frac{1}{f}}$ eşitliği yardımıyla $\infty - \infty$ şeklindeki belirsizlik $\frac{0}{0}$ şeklindeki belirsizliğe;

(b) $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} (f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}})$ eşitliği yardımıyla $0 \cdot \infty$ şeklindeki belirsizlik $\frac{0}{0}(\frac{\infty}{\infty})$ şeklindeki belirsizliğe;

(c) 0^0 (ya da ∞^0 veya 1^∞) şeklindeki belirsizlik oluşturan $y = f^g$ ifadesi $\ln y = g \ln f$ eşitliği yardımıyla $\ln y$ fonksiyonu için $0 \cdot \infty$, dolayısıyla, sonuçta $\frac{0}{\infty}$ (veya $\frac{\infty}{\infty}$) şeklindeki belirsizliğe dönüştürülebilir.

4.6.3 Çözümlü Problemler

(1) L'Hospital kuralından faydalanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$; (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{\ln(1+x)}$;
(c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$; (d) $\lim_{x\to 0}\frac{x arcsin(x^2)}{x\cos x-\sin x}$;
(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sinh ax-\sinh bx}$; (f) $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$ $(\beta\neq 0)$;
(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\tan x}$; (h) $\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\tan x}$;
(i) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{e^x-1})$; (j) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$;
(k) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$; (l) $\lim_{x\to+\infty}\{(\frac{\pi}{2}-arctanx)\}^{\frac{1}{x}}$;
(m) $\lim_{x\to 0_+}(\ln\cot x)^{\tan x}$; (n) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
(o) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$; (p) $\lim_{x\to 0_+}\mid \ln x\mid^{2x}$;
(q) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x})^{\frac{1}{\sin \pi x}}$; (r) $\lim_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$.

Çözüm: (a) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, (4.61) formülüne göre

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^5-3x^2+7x-5)'}{(x^4-5x+4)'} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^4-6x+7}{4x^3-5}=-6$$

olur.

(b) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}arccosx)}{\ln(1+x)}$$

[(4.61) den]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}arccosx}}{\frac{1}{1+x}}=-\frac{\pi}{2}$$

olur.

(c) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$ [(4.61) den] $=\lim_{x\to 1}\frac{x^x\ln x+xx^{x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x^{x+1}(\ln x+1)=1$ olur.

(d) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim_{x\to 0}\frac{x arcsin(x^2)}{x\cos x-\sin x}$

[(4.61) den] $=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(x^2)+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x\sin x}$ [$x\to 0$ iken $arcsin(x^2)\sim x^2$ ve $\sin x\sim x$ olduğundan]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-1}=-3$$

olur.

(e) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sinh ax-\sinh bx}[(4.61)den]=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax-b\cos bx}{a\cosh ax-b\cosh bx}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

olur.

(f) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}[(4.61)den]=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

olur.

(g) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\tan x}[(4.64)ten]=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}[(4.61)den]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{1}=0$$

olur.

(h) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\tan x}$

[(4.64) ten] $=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}$ [(4.61) den] $=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0^+}(2cos^2x-\sin^2 x)=2$ olur.

(i) Verilen limit, $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-1}-\tan x}{\tan x(e^x-1)}$$

[$x\to 0$ iken $\tan x\sim x$ ve $e^{x-1}\sim x$ oldugundan]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-1}-\tan x}{x^2}[(4.61)den]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{\cos^2 x}}{2x}[(4.61)den]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{2}=\frac{1}{2}$$

olur.

(j) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}.\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{\sin x}\cos x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}[(4.61)\text{den}]\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}\\ &= \frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

olur.

(k) $y=x^{x^x-1}$ olsun. O halde $\ln y=(x^x-1)\ln x$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln y &= \lim_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x\\ &= \lim_{x\to 0^+}(e^{x\ln x})-1)\ln x\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x\ln x})-1}{x\ln x}x\ln^2 x\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x\ln x})-1}{x\ln x}\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x\end{aligned}$$

olur. $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ [(4.61) den] $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$ ve $t\to 0$ iken $e^{t-1}\sim t$ oldugundan $x\to 0^+$ iken $(e^{x\ln x})-1\sim x\ln x$ dir. Buna göre $\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x\ln x})-1}{x\ln x}=1$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

[(4.61) den] $=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to 0^+}x\ln x$ bulunur. O halde, $x\to 0^+$ iken $y\to 1$, yani $\lim_{x\to 0^+}x^{x^x-1}=1$ olur.

(l) Verilen limit 0^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y=(\frac{\pi}{2}-arctanx)^{\frac{1}{x}}$ olsun. Bu durumda,

$$\ln y=\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-arctanx)}{x}$$

olur. Bu da $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-arctanx)}{x}$$

[(4.64) ten]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(1+x^2)}}{\frac{\pi}{2}-arctanx}$$

[(4.61) den] $=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$ $x\to+\infty$ iken $y\to 1$, yani $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-arctanx)^{\frac{1}{x}}=1$ olur.

(m) Verilen limit ∞^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y=(\ln\cot x)^{\tan x}$ olsun. $\ln y=\tan x\ln(\ln\cot x)=\frac{\ln(\ln\cot x)}{\cot x}$ olur. Bu da $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\ln\cot x)}{\cot x}$ [(4.64) ten] $=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln\cot x}(-\frac{1}{\cos^2 x})}{-\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln\cot x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t}=0\Rightarrow x\to 0^+$ iken $y\to 1$, yani $\lim_{t\to 0^+}(\ln\cot x)^{\tan x}=1$ olur.

(n) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ olsun. $\ln y=\frac{1}{x^2}\ln\cos x$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$ [(4.61) den] $=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$ $x\to 0$ iken $y=e^{-\frac{1}{2}}$, yani $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$ olur.

(o) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y=(\tan x)^{\tan 2x}$ olsun. $\ln y=\tan 2x\ln\tan x$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir.O halde, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}$ [(4.61) den] $=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}4\sin x\cos x=-1$ $x\to\frac{\pi}{4}$ iken $y\to e^{-1}$, yani $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=$

e^{-1} olur.

(p) Verilen limit ∞^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y = |\ \ln x\ |^{2x}$ olsun. $\ln y = 2x \ln |\ \ln x\ |$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x \ln |\ \ln x\ | = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln|\ln x||}{\frac{1}{x}} =$ [(4.64) ten] $= 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{|x|\ln x|}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|\ln x|} = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$ olur. Demek ki, $x \to 0^+$ iken $y \to 1$, yani $\lim\limits_{x\to 0^+} |\ln x\ |^{2x} = 1$ olur.

(q) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ olsun. $\ln y = \frac{1}{\sin \pi x} \ln \frac{1}{x}$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 1} \ln y = -\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$ [(4.61) den] $= -\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\pi x \cos \pi x} = \frac{1}{\pi}$ yani $x \to 1$ iken $y \to e^{\frac{1}{\pi}}$ $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{\sin \pi x}} = e^{\frac{1}{\pi}}$ olur.

(r) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (2 - \frac{x}{a})^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$ olsun. $\ln y = \tan \frac{\pi x}{2a} \ln(2 - \frac{x}{a}) = \frac{\ln(2-\frac{x}{a})}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} \frac{(2-\frac{x}{a})}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to a} \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{2a})}{\pi(2-\frac{x}{a})} = \frac{2}{\pi}$, $x \to a$ iken $y \to e^{\frac{2}{\pi}}$, yani $\lim\limits_{x\to a} (2 - \frac{x}{a})^{\tan \frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}} =$ olur. $\diamond$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \ \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \ \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ da türevi var mıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasında türevlenebilir olması için $F(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \to 0$ iken sonlu limiti olmalıdır. $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ limitini L'Hospital kuralından faydalanarak bulalım. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x(e^x-1)}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^x}{2(e^x(1+x)-1)}$ [(4.61) den] $= \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2e^x+xe^x} = 0$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken $F(x)$ fonksiyonunun limiti $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2(e^x-1)}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{x-1}-e^x-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x-1)+e^x(8x+2x^2)} =$ [(4.61) den] $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^x(x+1)}{(12+12x+2x^2)e^x} = -\frac{1}{12}$,yani $f'(0) = -\frac{1}{12}$ olur. $\diamond$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ limitinin hesaplanmasında L'Hospital kuralının uygulanamadığını gösteriniz. Bu limiti başka yolla hesaplayız.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\ \sin x\ | \leq 1$ ve $|\ \cos x\ | \leq 1$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$|\ \frac{\sin x}{x}\ | \leq \frac{1}{|\ x\ |}, \quad |\ \frac{\cos x}{x}\ | \leq \frac{1}{|\ x\ |}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

olur. O halde, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$ bulunur. Verilen limit $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde belirsizliktir. Ancak burada 2. L'Hospital kuralından yararlanamayız. Çünkü, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ limiti yoktur. Gerçekten, $F(x) = \frac{1-\cos x}{1-\sin x} (x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in N)$ olmak üzere $x'_n = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $F(x'_n) = 0 \to 0$, $x''_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $F(x''_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ $\diamond$

(4) $[a, b]$ üzerinde tanımlanmış $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

(a) f ile g fonksiyonları (a, b) üzerinde $(n+1)$. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$,

(c) $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$,

(d) $\forall x \in (a, b)$ için $g^{(k)}(x) \neq 0,\ k = 0, 1, 2, ..., n$, koşulları sağlanıyorsa,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $[a, x]$ $(a < x \leq b)$ aralığında f ve g fonksiyonları için Teorem 4.4.16 nın koşulları sağlandığından

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}$$

olacak şekilde bir $c_1 \in (a, x)$ noktası vardır. $[a, c_1]$ aralığında f ve g fonksiyonları için Teorem 4.4.16 ' nın koşulları sağlandığından

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}$$

olacak şekilde bir $c_2 \in (a, c_1)$ noktası vardır. Benzer şekilde devam ederek $(n+1)$. adımda

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, c_n) \subset (a, x)$ noktasının mevcut olduğunu elde ederiz. Bu eşitlikte $x \to a$ iken limite geçersek $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $[x \to a \Longrightarrow c \to a$ dan dolayı$] = \lim_{c\to a} \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$,dolayısıyla, istenen eşitliğin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

4.6.4 Ek Problemler

(5) L'Hospital kuralından faydalanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$; (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$;
(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$; (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{2arctanx-x}{2x-arcsinx}$; (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$;
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}-\sin x}{arctan^3 x}$; (h) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$;
(i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$; (j) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\tan x}$;
(k) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$; (l) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+3x^3}{4e^x+2x^2}$;
(m) $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x})$; (n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x})$;
(o) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1})$; (p) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(\ln\frac{1}{x})$;
(q) $\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{2}{\pi}arctanx)$; (r) $\lim_{x\to-\infty} (\cot\frac{\pi x}{1+x})^{\frac{1}{x}}$;
(s) $\lim_{x\to 0^+} x^x$; (t) $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}arccosx)^{\frac{1}{x}}$;
(u) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\tan x)^{\sin 2x}$; (v) $\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{\tan x}$;
(w) $\lim_{x\to 0^+} (2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$; (x) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$;
(y) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^{x-1}-x}}$; (z) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{\ln(1+x)}{3((1+x)^{\frac{1}{3}}-1}})^{\frac{x}{\sin^2 x}}$;

(xx) $\lim_{x\to 0}(\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)})^{\frac{1}{x^2}}$; (yy) $\lim_{x\to 0^+} tan^x(1-x^x)$;
(zz) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin^{100} x}{x^{99}\sin x})^{\frac{2}{3x^2}}$;

Cevap:

(a) $\frac{10}{7}$; (b) -2; (c) $\frac{9}{14}$; (d) $\frac{1}{9}$; (e) 1; (f) 2;
(g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{15}{4}$; (i) 0; (j) 0; (k) 1; (l) $\frac{1}{4}$;
(m) $\frac{1}{2}$; (n) -1; (o) $-\frac{1}{2}$; (p) 0; (q) $-\frac{2}{\pi}$; (r) 1;
(s) 1; (t) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; (u) 1; (v) 1; (w) $\sqrt{e}$; (x) e^2;
(y) $e^{-\frac{1}{6}}$; (z) 1; (xx) 1; (yy) 1; (zz) e^{-11} .

(6) Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L'Hospital kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.
(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-\sin x}$; (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-x}}{e}(2-\sin x-\cos x)$; .
Cevap: (a)1; (b)0; $a > 1$ ise,$+\infty$; $a < 1$ ise, limit yoktur,$a = 1$ ise .

(7) $n \in N$ olmak üzere $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$; limitini bulunuz.
Cevap: 0

(8) Proplem 6. dan ve türev tanımından faydalanarak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevini bulunuz.
Cevap: $f'(0) = 0$.

4.7 Fonksiyonların Diferensiyel Hesabı Yöntemleri ile Araştırılması

4.7.1 Fonksiyonların Monotonluk Koşulları

Önerme 4.7.1 : *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, (a, b) üzerinde*

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow \ f \ artandır \Longrightarrow f'(x) \geq 0,$$
$$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow \ f \ azalmayandır \Longrightarrow f'(x) \geq 0,$$
$$f'(x) \equiv 0 \Longrightarrow \ f \ sabit \Longrightarrow f'(x) \equiv 0,$$
$$f'(x) \leq 0 \Longrightarrow \ f \ artmayandır \Longrightarrow f'(x) \leq 0,$$
$$f'(x) < 0 \Longrightarrow \ f \ azalandır \Longrightarrow f'(x) \leq 0,$$

karşılıklı bağıntıları mevcuttur.

Soldaki sütunda yer alan önermelerin doğru olduğu Sonuç 4.4.15 ten bellidir. Sağdaki sütunda yer alan önermelerin doğruluğu türev tanımından görülür. Örneğin, (a,b) üzerinde türevli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu artan olduğunda $\forall x \in (a,b)$ için $f' \geq 0$ olacağını görelim. $x, x+h \in (a,b)$ olmak üzere $h > 0$ için $f(x+h) - f(x) > 0$ ve $h < 0$ için $f(x+h) - f(x) < 0$ olduğuna göre, $x + h \in (a,b)$ koşulunu sağlayan her $x \in (a,b)$ ve $0 \neq h \in \mathbb{R}$ için $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ olduğuna göre, Teorem 2.4.24 (c) den dolayı

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

olur.

Uyarı 4.7.2 *(a,b) aralığında türevli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu artan (azalan) ise, $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ eşitsizliği değil, $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ eşitsizliği doğrudur. Örneğin, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 (f(x) = -x^3)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilen ve artan (azalan) olmasına rağmen $f'(0) = (3x^2)(0) = 0$ $(f'(0) = (-3x^2)(0) = 0)$ olur.*

Örnek 4.7.3 : *$f(x) = \text{arccotx} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sabit bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{arccotx})' - (\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = c$ (c -sabit) olur. Özel olarak, $x = 0$ için $c = f(0) = \text{arccot}0 - \arccos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ olduğuna göre, $\mathbb{R}$ üzerinde $\text{arccotx} - \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv 0$ olur. $\diamond$

Örnek 4.7.4 : *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun monotonluk aralıklarını bulunuz.*

Çözüm: $f'(x) = 3(x^2 - 1) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $f'(x) = 3(x^2 - 1) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-1, 1)$ olduğuna göre, f fonksiyonu $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıkları üzerinde artan, $(-1, 1)$ aralığında ise, azalandır. $\diamond$

4.7.2 Ekstremumların Varlığı Koşulları

Fermat Teoremi (Bkz. Teorem 4.4.8) göz önüne alındığında aşağıdaki önermenin doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 4.7.5 *(Ekstremumum Varlığı için Gerekli koşul): $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ekstremum noktası olması için gerekli koşul $f'(x_0) = 0$ veya f, x_0 da türevlenebilir değildir koşullarından birinin sağlanmasıdır.*

Uyarı 4.7.6 : *$x_0 \in \mathbb{R}$ noktası $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ekstremum noktası olması için Önerme 4.7.5 deki koşullar gereklidir, fakat yeterli değildir. Örneğin, $f(x) = \mid x - 1 \mid$ ve $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevli değildir, fakat $x = 1$, f nin lokal minimum noktası olup, g fonksiyonu için ekstremum noktası değildir; $F(x) = (x+1)^2$ ve $G(x) = (x+1)^3$ fonksiyonları için $x = -1$ noktası F nin lokal minimum noktası olup, G nin ekstremum noktası değildir.*

Tanım 4.7.7 : *$x_0 \in (a,b)$ noktasında türevli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f'(x_0) = 0$ ise, x_0 noktasına f in duraklama (veya kararlılık) noktası denir.*

Tanım 4.7.8 : *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde duraklama ve türevli olmadığı noktalara f in kritik noktaları (ekstremuma göre) denir.*

Örnek 4.7.9 *: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.*

Çözüm: $0,\frac{4}{7}$ ve 1 noktaları f nin kritk noktalarıdır. Çünkü, $x=1$ noktasında fonksiyon türevli olmayıp, $x=0$ ve $x=1$ noktalarında sırasıyla $f'(0)=0$ ve $f'(\frac{5}{7})=0$ dır. $\diamond$

Not: Yukarıdaki sonuçlardan da görüldüğü gibi fonksiyonun ekstrem değerlerini onun kritik (ekstremuma göre) noktalardaki değerleri arasında aramak gerekir. Bu nedenle, birinci ve yüksek mertebeden türevler yardımı ile ekstrem değerleri için aşağıdaki yeterli türev testlerini verebiliriz. •

Önerme 4.7.10 *(Ekstremumum Varlığı için birinçi Türev Testi):*

$f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0\in\mathbb{R}$ noktasında sürekli ve $\overset{\circ}{U}(x_0^-)=\{x\in U(x_0):x<x_0\}$ ve $\overset{\circ}{U}(x_0^+)=\{x\in U(x_0):x>x_0\}$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,

(a) $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f'(x)<0$ ve $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ için $f'(x)<0$ ise, x_0 noktası f nin ekstremum noktası değildir,

(b) $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f'(x)>0$ ve $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ için $f'(x)>0$ ise, x_0 noktası f nin ekstremum noktası değildir,

(c) $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f'(x)<0$ ve $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ için $f'(x)>0$ ise, x_0 noktası f nin bir lokal minumum noktasıdır,

(d) $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f'(x)>0$ ve $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ için $f'(x)<0$ ise, x_0 noktası f nin bir lokal maksimum noktasıdır,

İspat: İspatı (a) ve (c) durumlarında yapalım ((b) ve (d) durumlarında ispat benzer şekilde yapılır).

(a) f fonksiyonu x_0 da sürekli ve $\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ üzerinde azalan olduğuna göre, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f(x)>f(x_0)$ ve $\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ üzerinde azalan olduğuna göre, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f(x)<f(x_0)$ dır. O halde, x_0, f nin ekstremum noktası değildir.

(c) f fonksiyonu x_0 da sürekli ve $\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ üzerinde azalan olduğuna göre, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ için $f(x)>f(x_0)$ olur. f fonksiyonu x_0 da sürekli ve $\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ üzerinde artan olduğuna göre, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ için $f(x)>f(x_0)$ olur. O halde, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$ için $f(x)>f(x_0)$ olur. Dolayısıyla x_0, f nin bir lokal minumum noktasıdır. □

Not: Önermeden görüldüğü gibi kritik noktadan geçişte, türev işaretini negatiften (pozitiften) pozitife (negatife) değiştiriyorsa bu nokta lokal minimum (maksimum) noktasıdır. Eğer, kritik noktadan geçişte, türev işaretini değiştirmiyorsa bu nokta ekstremum noktası değildir. •

Önerme 4.7.11 *(Ekstremum Varlığı için Yüksek Mertebeden Türev Testi):*

$x_0\in\mathbb{R}$ noktasının bir $U(x_0)\subset\mathbb{R}$ komşuluğunda tanımlı $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $U(x_0)$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilir olsun ve

(a) $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0\quad(n>0)$,

(b) $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ ve $f^{(n)}(x)$ fonksiyonu x_0 da sürekli olma koşullarını sağlasın.

Bu durumda,

(i) Eğer, n çift ve $f^{(n)}(x_0)>0$ ise, x_0, f nin bir lokal minimum, $f^{(n)}(x_0)<0$ ise x_0, f nin lokal maksimum noktasıdır.

(ii) Eğer, n tek ise, x_0, f nin ekstremum noktası değildir.

İspat: (a) koşulundan $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Peano kalan terimli Taylor formülü (Bkz.(4.58)) $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ olmak üzere

$$f(x)-f(x_0)=[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)](x-x_0)^n \tag{4.70}$$

biçiminde yazılabilir. $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ ve $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ olduğuna göre, $\forall x\in\tilde{U}(x_0)$ için $f^{(n)}(x_0)$ ile $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)$ nin işareti aynı olacak şekilde x_0 ın $\tilde{U}(x_0)\subset U(x_0)$ komşuluğu vardır. O halde, n tek ve $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ ise, x_0 dan

geçişte $(x-x_0)^n$ ifadesi işaretini değiştirdiğine göre, $[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)](x-x_0)^n$ ifadesi dolayısıyla, $f(x)-f(x_0)$ ifadesi işaretini değiştirmektedir. Demek ki, n tek ve $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ ise, $x_0,\ f$ nin lokal eksteremum noktası değildir.

Şimdi n çift ve $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ olsun. Bu durmuda, $\forall x\in U(x_0)$ için $(x-x_0)^n>0$ olduğuna göre, (4.70) den $f(x)-f(x_0)$ ve $f^{(n)}(x_0)<0$ aynı işaretlidir. Buna göre, $x_0,\ f$ nin bir lokal eksteremum noktası, yani $f^{(n)}(x_0)>0$ ise, lokal minimum ve $f^{(n)}(x_0)<0$ ise, lokal maksimum noktasıdır. □

Örnek 4.7.12 *: $f(x)=\sin x$ olsun. $f'(x)=\cos x$ ve $f''(x)=-\sin x$ olduğuna göre, $f'(x)=\cos x=0$ olacak şekilde tüm noktalar, yani $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ noktaları $\sin x$ fonksiyonunun lokal eksteremum noktalarıdır, çünkü $n=2$ çift sayısı için $f^{(2)}(x_k)=-\sin(x_k)=(-1)^{(k-1)}\neq 0, k\in\mathbb{Z}$ dır. Buna göre, $f^{(2)}(x_{2k})=-1<0, k\in\mathbb{Z}$ olduğuna göre, $x_{(2k)}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ noktaları $\sin x$ fonksiyonunun lokal maksimum, $f^{(2)}(x_{2k-1})=1>0, k\in\mathbb{Z}$ olduğuna göre, $x_{2k-1}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ noktaları $\sin x$ fonksiyonunun lokal minimum noktalarıdır.*

Örnek 4.7.13 *: Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.*

(a) $\forall x\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\leq 0 \tag{4.71}$$

(b) $\forall x\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ için

$$x^\alpha-\alpha x+\alpha-1\geq 0 \tag{4.72}$$

dır.

Çözüm: $f(x)=x^\alpha-\alpha x+\alpha-1$ olsun. $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow x=1$ noktasından geçişte $f'(x)$ türev fonksiyonu $\alpha\in(0,1)$ iken işareti poziften negatife ve $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ iken negatiften pozitife değiştirir. Birinci halde $x=1,\ f$ nin yerel maksimum, ikinci halde $x=1,\ f$

nin yerel minumum noktası olur. $f(1)=0$ olduğuna göre, (4.71) ve (4.72) eşitsizliklerinin doğru olduğu anlaşılır. $x=1$ noktasının dışında (4.71) ve (4.72) de sırasıyla $<$ ve $>$ işareti geçerlidir. ⋄

Örnek 4.7.14 *(Young Eşitsizliği):*

$p,q\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda, $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$ sayıları için

(a) Eğer $p>1$ ise,

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leq\frac{a}{p}+\frac{b}{q} \tag{4.73}$$

(b) Eğer $0<p<1$ ise,

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geq\frac{a}{p}+\frac{b}{q} \tag{4.74}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (4.71) ve (4.72) te $x=\frac{a}{b}$ ve $\alpha=\frac{1}{p}$ dersek $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$ olacağından (4.73) ve (4.74) eşitsizliklerinin sağlandığı anlaşılır. ⋄

Örnek 4.7.15 *: p ile $q,\ 1<p<+\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere herhangi $x_1,\cdots,x_n$ ve $y_1,\cdots,y_n$ (reel veya kompleks) sayıları için*

$$\sum_{k=1}^{n}\mid x_ky_k\mid\leq(\sum_{k=1}^{n}\mid x_k\mid^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n}\mid y_k\mid^q)^{\frac{1}{p}} \tag{4.75}$$

$$(\sum_{k=1}^{n}\mid x_k+y_k\mid^p)^{1/p}\leq(\sum_{k=1}^{n}\mid x_k\mid^p)^{1/p}+(\sum_{k=1}^{n}\mid y_k\mid^q)^{1/q} \tag{4.76}$$

eşitsizliklesi doğrudur. Gösteriniz.

Not: (4.75) ve (4.76) eşitsizliklerine sırasıyla Hölder ($p = q = 2$ durumunda Cauchy-Bunyakowski) ve Minkowski eşitsizliği denir. •

Çözüm: $A = \sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p, \quad B = \sum_{k=1}^{n} \mid y_k \mid^q$

olsun. A ve B sayılarından biri sıfır ise, (4.75) eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır. $a = \frac{|x_k|^p}{A}, b = \frac{|y_k|^q}{B}$ dersek (4.73) ten dolayı $\frac{|x_k|}{A^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{B^{\frac{1}{q}}} = \frac{|x_k y_k|}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{B}$ olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikleri $k = 1, 2, \cdots, n$ yazıp toplarsak

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \mid x_k y_k \mid}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \mid x_k y_k \mid \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Buradan da (4.75) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. $\forall k = 1, 2, \cdots, n$ için $\mid x_k + y_k \mid^p \leq \mid x_k \mid\mid x_k + y_k \mid^{p-1} + \mid y_k \mid\mid x_k + y_k \mid^{p-1}$ eşitsizliği doğru olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^p \leq \sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid\mid x_k + y_k \mid^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} \mid y_k \mid\mid x_k + y_k \mid^{p-1}$$

dır. Sağ taraftaki terimlere (4.75) eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^p) \mid \; &\leq \; (\sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \; (\sum_{k=1}^{n} \mid y_k \mid^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$= [(\sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} \mid y_k \mid^p)^{\frac{1}{p}}](\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^p)^{\frac{1}{q}}$$

ve buradan da

$$(\sum_{k=1}^{n} \mid x_k + y_k \mid^p)^{1-1/q} \leq (\sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} \mid y_k \mid^q)^{1/q}$$

dolayısıyla $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ olduğundan (4.76) eşitsizliği elde edilir. ⋄

4.7.3 Fonksiyonların Bükeylik Koşulları

Tanım 4.7.16 *: $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanan bir $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda f(x_2) \tag{4.77}$$

oluyorsa, f fonksiyonu (a, b) üzerinde içbükeydir (veya aşağıya bükeydir) denir. Eğer, $x_1 \neq x_2$ ve $\lambda \in (0, 1)$ olduğunda (4.77) de $\geq$ yerine $<$ notasyonu gerçekleniyorsa f, (a, b) kesin içbükeydir (veya aşağıya kesin bükeydir) denir.

Tanım 4.7.17 *: $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için*

$$f(\lambda x_1 + (1 - x)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda f(x_2) \tag{4.78}$$

oluyorsa, f, (a, b) üzerinde dışbükeydir (veya yukarıya bükeydir) denir. Eğer, $x_1 \neq x_2$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için (4.78) de $\geq$ yerine $>$ notasyonu gerçekleniyorsa f, (a, b) üzerinde kesin dışbükeydir (veya yukarıya kesin bükeydir) denir.

Not: Eğer, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde içbükeyse (dışbükeyse) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ($x_1 < x_2$ için f nin $[x_1, x_2]$ üzerindeki grafiği $y = f(x)$ eğrisi üzerindeki $A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren $[A, B]$ doğru parçasının (kirişin) altındadır (üstündedir). Bkz. Şekil 4.6 e 4.7.

Her $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, 1-\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ olduğuna göre, (4.77) eşitsizliği $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ ve $x \in (x_1, x_2)$ için

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

veya

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{4.79}$$

biçiminde yazılabilir. f nin (a,b) üzerinde kesin içbükey olduğu durumda (4.79) ifadesi $<$ notasyonu ile gerçekleniyor. •

Önerme 4.7.18 *: $(a,b) \subset \mathbb{R}$ üzerinde türevli bir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) içbükey (kesin içbükey) olması için gerek ve yeter koşul $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun (a,b) üzerinde azalmayan (artan) olmasıdır.*

İspat: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde içbükey olsun. Bu durumda, $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ ve $\forall x \in (x_1, x_2)$ için (4.79) eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu eşitsizlikte önce $x \to {x_1}^+$, sonra $x \to {x_1}^-$ iken limite geçersek sırasıyla

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{ve} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

olduğu, dolayısıyla $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir. Bu ise, $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun (a,b) üzerinde azalmayan olması demektir.

Eğer, f fonksiyonu (a,b) üzerinde kesin içbükey ise, Lagrange teoreminden

$$f'(x_1) \quad \leq \quad f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2) \leq f'(x_2)$$

olacak şekilde $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ noktaları vardır. Demek ki, f fonksiyonu (a,b) üzerinde kesin içbükey ise, f' türev fonksiyonu (a,b) üzerinde artandır.

Şimdi, $f' : (a,b)$ türev fonksiyonu (a,b) üzerinde azalmayan olsun. Bu durumda f nin (a,b) üzerinde iç bükey olduğunu görelim. $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ ve $x \in (x_1, x_2)$ olsun. Lagrange teoremi gereğince

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= f'(c_1), \\ \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} &= f'(c_2) \end{aligned} \tag{4.80}$$

olacak şekilde $c_1 \in (x_1, x)$ ve $c_2 \in (x, x_2)$ noktaları vardır. Eğer, $f'(c_1) \leq f'(c_2) (f'(c_1) < (f'(c_2))$ oluyorsa (4.80) den (4.79) un sağlandığını, dolayısıyla, f nin üzerinde içbükey (kesin içbükey) olduğu anlaşılır. □

Önerme 4.7.10 ve 4.7.18 gözönüne alındığında aşağıdaki sonucun doğruluğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 4.7.19 *: $(a.b) \subset \mathbb{R}$ üzerinde 2. mertebeden türevli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde içbükey olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır. Eğer, $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) > 0$ oluyorsa, f fonksiyonu (a,b) üzerinde içbükeydir.*

Yukarıdaki önermeye parelel olarak dışbükey (kesin dışbükey) fonksiyon için aşağıdaki uygun önermenin ve sonucun doğru olduğu ispatlanabilir.

Önerme 4.7.20 *: $(a,b) \subset \mathbb{R}$ üzerinde türevli bir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde dışbükey (kesin dışbükey) olması için gerek ve yeter koşul $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun $(a.b)$ üzerinde artmayan (azalmayan) olmasıdır.*

Sonuç 4.7.21 *: $(a.b)$ üzerinde 2. mertebeden türevli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde dışbükey olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) \leq 0$ olmasıdır. Eğer, $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) < 0$ oluyorsa f fonksiyonu (a,b) üzerinde kesin dışbükeydir.*

Tanım 4.7.22 *: $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının bir $U(x_0) \subset \mathbb{R}$ komşuluğunda türevli bir $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, f fonksiyonu $\overset{\circ}{U}(x_0^-)$ dışbükey (veya içbükey), $\overset{\circ}{U}(x_0^+)$ üzerinde ise, içbükey (veya dışbükey) ise, $(x_0, f(x_0))f$ fonksiyonunun büküm noktası adı verilir.*

Bir başka değişle, f fonksiyonunun dışbükeylikten içbükeyliğe veya tersine içbükeylikten dışbükeyliğe geçtiği noktalara f nin büküm noktası adı verilir.

Örnek 4.7.23 *: Aşağıdaki fonksiyonların bükeyliklerini araşyırınız ve eğer varsa,bükülme noktalarını bulunuz.*

(a) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=x^\alpha$;

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x,\ a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$;

(c) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$;

(d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$;

(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

(f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cosh x$;

(g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sinh x$.

Çözüm: (a) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ olduğuna göre, $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f''(x)>0\iff\alpha\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ve $f''(x)<0\iff\alpha\in(0,1)$ olur. Buna göre, x^α fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde $\alpha\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ için kesin içbükey olup, $\alpha\in(0,1)$ için kesin dışbükeydir. (Bkz.Şekil 4.8)

(b) $\forall x\in\mathbb{R}\ f''(x)=a^x\ln^2 a>0$ olduğuna göre, a^x, fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin içbükeydir. (Bkz.Şekil 1.13)

(c) $f''(x)=-\frac{1}{x^2\ln a}$ olduğuna göre, $\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f''(x)>0\iff a\in(0,1)$ ve $f''(x)<0\iff a\in(1,\infty)$ olur. Buna göre, $\log_a x$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde $a\in(0,1)$ iken kesin içbükey olup, $a\in(1,\infty)$ içinde kesin dışbükeydir. (Bkz.Şekil 1.14)

(d) $f''(x)=-\cos x$ olduğuna göre, $f''(x)>0\iff x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi),k\in\mathbb{Z}$, $f''(x)<0\iff x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$ olur. Buna göre, $\cos x$ fonksiyonu $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi),k\in\mathbb{Z}$ aralıkları üzerinde kesin içbükey olup, $(2k\pi,(2k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$ aralıkları üzerinde kesin dışbükeydir. $f''(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0,k\in\mathbb{Z}$ ve $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ noktalarını geçişte $f''(x)$ fonksiyonu işaretini değiştirdiğinden bu noktalar $\cos x$ fonksiyonunun bükülme noktalarıdır. (Bkz.Şekil 1.16)

(e) $f''(x)=-\sin x$ olduğuna göre,

$$f''(x)>0\iff x\in((2k-1)\pi,2k\pi),k\in\mathbb{Z}$$

$$f''(x)<0\iff x\in((2k\pi,(2k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$$

olur. Buna göre, $\sin x$ fonksiyonu $(2k-1)\pi,2k\pi),k\in\mathbb{Z}$ aralıkları içinde kesin içbükey olup, $(2k\pi,\ (2k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$ aralıklarında kesin dışbükeydir. $f''(k\pi)=0,k\in\mathbb{Z}$ işaretini değiştirdiğinden bu noktalar $\sin x$ fonksiyonunun bükülme noktalarıdır. (Bkz.Şekil 1.17)

(f) $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f''(x)=\cosh x>0$ olduğuna göre, $\cosh x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde kesin içbükeydir. (Bkz.Şekil 1.24)

(g) $f''(x)=\sinh x$ olduğuna göre, $f''(x)>0\iff x\in(0,\infty)$ ve $f''(x)<0\iff x\in(-\infty,0)$ olur. Buna göre, $\sinh x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde kesin içbükey olup, $(-\infty,0)$ üzerinde de kesin dışbükeydir. $f''(0)=0$ ve 0 noktasını geçişte $f''(x)$ fonksiyonu işaretini değiştirdiğinden $x=0$ noktası $\sinh x$ fonksiyonunun bükülme noktasıdır. (Bkz.Şekil1.25) $\diamond$

4.7.4 Asimtotlar

Bu kısımda grafik çizimlerinde yararlanacağımız önemli bir kavram olan ve asimtot denilen doğru ve eğrileri tanımlayacağız.

Tanım 4.7.24 : $a \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + l)] = 0$$

olacak şekilde $kx+l$ *fonksiyonu varsa,* $k \neq 0$ *olduğunda* $y = kx+l$ *doğrusuna* $x \to +\infty$ *iken* f *nin eğik asimtotu ve* $k = 0$ *olduğunda* $y = l$ *doğrusuna* f *nin yatay asimtotu denir.*

Tanım 4.7.25 : $b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $g : (-\infty, b)$ *fonksiyonu için*

$$\lim_{x\to\infty}[g(x) - (mx + n)] = 0 \tag{4.81}$$

olacak şekilde $mx + n$ *fonksiyonu varsa,* $m \neq 0$ *olduğunda* $y = mx + n$ *doğrusuna* $x \to -\infty$ *iken* g *nin eğik asimtotu ve* $m = 0$ *olduğunda* $y = n$ *doğrusuna* g *nin yatay asimtotu denir.*

Örneğin, $y = 0$ doğrusu $x \to +\infty$ iken $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun, $y = \frac{\pi}{2}$ ve $y = \frac{-\pi}{2}$ doğruları sırasıyla $x \to +\infty$ ve $x \to -\infty$ iken $\arctan x$ fonksiyonunun $y = 0$ ve $y = \pi$ doğruları sırasıyla $x \to +\infty$ ve $x \to -\infty$ iken $y = \text{arccotx}$ fonksiyonunun, $y = 0$ doğrusu $a > 1$ ve $0 < a < 1$ durumlarında sırasıyla $x \to -\infty$ ve $x \to +\infty$ iken $y = a^x$ fonksiyonunun yatay asimtotudur. (Bkz.Şekil.1.7,1.22,1.23,1.13)

Tanım 4.7.26 : *Eğer,* $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ *(veya* $= -\infty$ *) veya* $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ *(veya* $= -\infty$ *) ise,* $x = a$ *doğrusuna* f *nin düşey asimtotu denir.*

Örneğin, $x = 0$ doğrusu $y = x^{-\frac{2}{3}}$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ doğruları sırasıyla $y = \tan x$, $y = \cot x$ fonksiyonlarının düşey asimptotlarıdır. (Bkz.Şekil 1.12;1.14;1.18;1.19)

Teorem 4.7.27 : $y = kx + l$ *doğrusunun* $x \to +\infty$ *iken* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun eğik asimtotu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ ve } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = l \tag{4.82}$$

olmasıdır.

İspat: $y = kx + l$ doğrusu $x \to +\infty$ iken $y = f(x)$ fonksiyonunun bir eğik asimtotu olsun. Bu durumda, $x \to +\infty$ iken $\frac{1}{x} = o(1)$ ve [(4.82) den dolayı] $f(x) - (kx + l) = o(1)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x) - (kx + l)}{x} + k + \frac{l}{x}] \\
&= \lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x) - (kx + l)}{x} + \lim_{x\to+\infty}(k + \frac{l}{x}) = k, \\
\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] &= \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + l) + l] = l
\end{aligned}$$

bulunur.

$\Longleftarrow$: (4.82) limitleri mevcut olduğu durumda $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = l \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + l)] = 0$ olduğuna göre, Tanım 4.7.24 gereğince $y = kx + l$ doğrusu $x \to +\infty$ iken f nin bir eğik asimtotudur. □

Örnek 4.7.28 : *Aşağıda verilen fonksiyonların, eğer varsa, asimtotlarını bulunuz.*
(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$; *(b)* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$.

Çözüm: (a) $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ ve $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$ olduğuna göre, $x = -1$ doğrusu f nin düşey asimptotudur. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = 2$ ve $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty}[-1 + \frac{1}{x+1}] = -1$ olduğuna göre, $x \to \pm\infty$ iken $y = 2x - 1$ doğrusu f nin asimtotudur.
(b) $\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğuna göre, f nin düşey asimptotu yoktur. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ve $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 0x] = \sqrt{x} = +\infty$ olduğuna göre, $x \to +\infty$ iken f nin eğik asimtotu da yoktur. ⋄

Tanım 4.7.29 : $x_0 \in \mathbb{R}$ *iken* $a = {x_0}^+,\ a = {x_0}^-$ *ve* $a = +\infty$ *veya* $a = -\infty$ *olmak üzere* $\lim_{x\to a}[f(x) - \varphi(x)] = 0$ *olacak şekilde* $\varphi(x)(\varphi(x) \neq kx + m)$ *fonksiyonu varsa,* $y = \varphi(x)$ *fonksiyonuna* $x \to a$ *iken* f *nin eğik asimtotu denir.*

Örnek 4.7.30 : $f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ *fonksiyonunun eğer varsa, asimtototlarını bulunuz.*

Çözüm: f, $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ üzerinde sürekli olduğuna göre, düşey asimtotu yoktur. f fonksiyonu çift olduğundan onun $[1,+\infty)$ aralığında incelenmesi yeterlidir. $\lim_{x\to 1^+}[f(x)-2\sqrt{x-1}]=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}[\sqrt{(x-1)(x^2+1)}-2]=0$ olduğuna göre, $\varphi(x)=2\sqrt{x-1}$ fonksiyonu $x\to 1^+$ iken f nin eğri asimtotudur.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim_{x\to+\infty}x^2(\sqrt{1-x^{-4}})=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2(\sqrt{1-x^{-4}}+1)}=0$$

olduğuna göre, $y=x^2$ parobolu $x\to+\infty$ iken f nin eğri asimptotudur.(Bkz.Şekil 4.9) $\diamond$

Tanım 4.7.31 *:*

$$x=x(t),y=y(t) \tag{4.83}$$

parametrik denklemleri ile tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

(a) $\lim_{t\to a}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to a}y(t)=\infty$ *veya* $\lim_{t\to a^+}x(t)=x_0,\lim_{t\to a^+}y(t)=\infty$ *(yada* $\lim_{t\to a^-}x(t)=x_0,\lim_{t\to a^-}y(t)=\infty$*) olacak şekilde* $a\in\overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$ *noktası varsa,* $x=x_0$ *doğrusuna f nin (veya (4.83) eğrisinin) düşey asimtotu denir.*

(b) $\lim_{t\to a}x(t)=+\infty,\lim_{t\to a}y(t)=b$ *veya* $\lim_{t\to a^+}x(t)=+\infty,\lim_{t\to a^+}y(t)=b$ *(yada* $\lim_{t\to a^-}x(t)=+\infty,\lim_{t\to a^-}y(t)=b$ *) olacak şekilde* $a\in\mathbb{R}$ *noktası varsa,* $y=b$ *doğrusuna f nin (ya da (4.83) eğrisinin) yatay asimtotu denir.*

(c) $\lim_{t\to a}x(t)=+\infty,\lim_{t\to a}y(t)=\infty,\ \lim_{t\to a}\frac{y(t)}{x(t)}=k,\lim_{t\to a}[y(t)-kx(t)]=l$ *veya bu koşullar $x\to a^+$ veya $x\to a^-$ iken sağlanacak şekilde $a\in\mathbb{R}$ noktası varsa $y=kx+l(k\neq 0)$ doğrusu f nin (ya da (4.83) eğrisinin) eğik asimtotu denir.*

Tanım 4.7.32 *:* $\lim_{\varphi\to\varphi_0}r(\varphi)=+\infty$ *ve* $\lim_{\varphi\to\varphi_0}r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d$ *olacak şekilde* $r=\frac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)}$ *(veya* $r\sin(\varphi-\varphi_0)=d\Longrightarrow y\cos\varphi-x\sin\varphi_0=d$*)* $d\neq 0$ *doğrusuna $r=r(\varphi)$ fonksiyonunun asimtotu denir.*

Örnek 4.7.33 *:*

$$x=\frac{t}{1-t^2},\quad y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2} \tag{4.84}$$

parametrik denklemleriyle verilen $y=f(x)$ eğrisinin eğer varsa asimtotlarını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0,\lim_{t\to+\infty}y(t)=\infty$ olduğuna göre, $x=0$ doğrusu (4.84) eğrisinin düşey asimtotudur.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}&=\lim_{t\to 1^\pm}\frac{y(t)}{x(t)}\\&=\lim_{t\to 1^\pm}(1-2t^2)=-1,\\\lim_{x\to\pm\infty}[y+x]&=\lim_{t\to 1^\pm}[\frac{y(t)}{x(t)}+1]\\&=\lim_{t\to 1^\pm}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} &= \lim_{t\to 1^{\pm}}\frac{y(t)}{x(t)}=-1,\\ \lim_{x\to\pm\infty}[y+x] &= \lim_{t\to -1^{\pm}}[\frac{y(t)}{x(t)}+1]\\ &= \lim_{t\to -1^{\pm}}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

olduğuna göre, $y=-x+\frac{3}{2}$ ve $y=-x-\frac{3}{2}$ doğruları (4.84) eğrisinin eğik asimtotlarıdır. $\diamond$

Örnek 4.7.34 *: $r(\varphi)=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$ eğrisinin eğer varsa asimtotlarını bulunuz.*

Çözüm: Verilen fonksiyon 2π periyotlu olduğuna göre, bu fonksiyonun 2π uzunluklu $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ aralığı üzerinde incelenmesi yeterlidir. Bu aralıkta fonksiyonun tanım bölgesinin $D(r)=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})\cup[0,\frac{\pi}{2}]\cup(\frac{3\pi}{4},\pi]$ ve $\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}^-} r(\varphi)=+\infty$, $\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}^+} r(\varphi)=+\infty$ olduğu açıktır. Bu durumda, sırası ile

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}^-} r(\varphi)\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}) &= \lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{4}^-}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2}(1-\sin\varphi\cos\varphi)}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}^+} r(\varphi)\sin(\varphi-\frac{3\pi}{4}) &= \lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}^+} r(\varphi)(-\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}))=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

buluruz. Buna göre, $\varphi\to-\frac{\pi}{4}^-$ iken eğrinin asimtotu $r=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}$ doğrusu $\phi\to\frac{3\pi}{4}^+$ iken eğrinin asimtotu $r=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi-\frac{3\pi}{4})}=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})}$ doğrusu olduğu anlaşılır. Verilen eğrinin grafiği §4.8 Problem (14) te (Bkz. Şekil 4.13) verilmiştir. $\diamond$

4.8 Grafik Çizimleri

Verilen bir fonksiyonun bariz tasviri için çoğu zaman bu fonksiyonun grafik gösteriminden kullanılır. Bir kural olarak böyle bir gösterim incelenmekte olan fonksiyonun niteliklerinin müzakeresinde fayda sağlamaktadır.

Biz kesim 1.7 de esas elementer fonksiyonların ve bazı tipik fonksiyonların grafik gösterimlerini gördük. Bu kesimde diferansiyel hesap yöntemlerine dayanık bazı genel usullerle grafik çizimleri ile ilgili bu bilgileri bütünlemeye çalışacağız.

Analitik yöntemle verilen bir f fonksiyonunun grafiğini çizerken genel olarak aşağıdaki adımların izlenilmesi tavsiye edilir.

(1) Fonksiyonun $D(f)$ tanım bölgesi ve gerekirse $\mathcal{R}(f)$ değer bölgesi bulunur.

(2) Fonksiyonun karakteristik özellikleri (süreklilik aralıkları, süreksizlik noktaları, grafiğin eksenleri kestigi noktaları,işaretini koruduğu aralıklar, periyodikliği ve simetrikliği) belirlenir.

(3) Fonksiyonun $D(f)$ tanım bölgesinin uç noktalarındaki durumları incelenir ve eğer varsa, asimtotlar bulunur.

(4) Fonksiyonun monotonluk aralıkları , ekstremum noktaları ve ekstremum değerleri bulunur.

(5) Fonksiyonun bükeylik karakterleri belirlenir ve eğer varsa ,büküm noktaları bulunur.

(6) Eldeki bilgiler göz önüne alınarak , x , $y=f(x)$ $y'=f'(x)$ ve $y''=f''(x)$ 'lerin sıralandığı bir tabloya toplanır ve bu tabloya göre fonksiyonun grafiği çizilir.

Örnek 4.8.1 *: $y=f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

Çözüm: (1) f nin tanım bölgesi $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ olduğu açıktır.
(2) $x=0\Longrightarrow y=1$,$x=-1\Longrightarrow y=0$ ve $x\in(1,+\infty)$ için $y>0$ $x\in(-\infty,-1)$ için $y<0$ olur. Eğri Oy eksenini $(0,1)$, Ox eksenini $(-1,0)$ noktasında keser. f ne tek ne de çift değildir. Ayrıca, f nin periyodik olmadığı açıktır.
(3) $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to+\infty}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$

1, $l = \lim_{x\to\pm\infty} \lim(f(x) - x) = 5$ olduğu açıktır. Buna göre, $x = 1$ doğrusu f nin düşey $y = x + 5$ doğrusu $x \to \pm\infty$ iken f nin eğik asimtotudur.
(4) $\forall x \in D(f)$ için $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$ olur. Buna göre, $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ ve $x \in (1, 5)$ için $f' < 0$ olduğu elde edilir. Buna göre ,f fonksiyonu $(-\infty, 1)$ ve $(5, +\infty)$ aralıkları üzerinde artan, $(1, 5)$ aralığı üzerinde azalandır. $x = 5$ noktası f nin yerel minimum noktasıdır ve $f(5) = 13.5$ f nin yerel minimumudur.
(5) $\forall x \in D(f)$ için $f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$ tür. O halde, $x \in (-1, +\infty) \setminus \{1\}$ için $f''(x) > 0$ ve $x \in (-\infty, -1)$ için $f''(x) < 0$ olduğuna göre, fonksiyon $(-\infty, -1)$ aralığında dışbükey, $(-1, 1)$ ve $(1, +\infty)$ aralıkları üzerinde içbükeydir. $(-1, 0)$ noktası f nin büküm noktasıdır.

(6)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow+\infty$	$+\infty\searrow$	$13,5$	$\nearrow+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$	$+$		$+$

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.10 da verilmiştir. ⋄

Örnek 4.8.2 *: $y = f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

Çözüm: (1) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} :| \frac{2x}{1+x^2} |\leq 1\} = \mathbb{R}$ olduğu açıktır.
(2) Fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $x = 0 \iff y = 0$ olduğuna göre, eğri $(0, 0)$ noktasından geçer. Fonksiyon periyodik değildir ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = -f(x)$ olduğuna göre, fonksiyon tektir. Fonksiyonumuz orjine göre simetrik olduğundan f nin grafiğinin $[0, +\infty)$ aralığında çizilmesi yeterlidir. $x \in (0, +\infty)$ için $y > 0$ olduğu da açıktır.
(3) Fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğuna göre, düşey asimtotu yoktur.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

olduğuna göre, $x \to \pm\infty$ iken $y = 0$ doğrusu f nin yatay asimtotu olup, f nin eğik asimtotu yoktur.
(4) Fonksiyonun $[0, +\infty)$ üzerinde ekstremum değerlerini bulalım. $\forall x \in [0, +\infty)\setminus\{1\}$ için $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ bulunur. $\lim_{x\to1^-} f'(x) = 1$ ve $\lim_{x\to1^+} f'(x) = -1$ olduğuna göre, fonksiyon $x = 1$ noktasında türevlenemez. $x \in (0, 1)$ için $f'(x) > 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f'(x) < 0$ olduğuna göre, fonksiyon $(0, 1)$ aralığında artan, $(1, +\infty)$ aralığında azalandır. Bu durumda, $x = 1$ noktası f nin yerel maksimum noktasıdır ve $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ dir.
(5) $\forall x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$ için $f''(x) = -\frac{4x\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ bulunur. $x \in [0, 1)$ için $f''(x) < 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f''(x) > 0$ olduğuna göre, fonksiyon $[0, 1)$ aralığında dışbükey, $(1, +\infty)$ aralıgında içbükeydir. $(1, \frac{\pi}{2})$ noktası fonksiyonun büküm noktasıdır.

(6)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$0\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow\ 0$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.11 de verilmiştir. ⋄

4.8.1 Çözümlü Problemler

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ şeklinde tanımlanan $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun $\max\{f : x \in [-4, 4]\}, \min\{f : x \in [-4, 4]\}$ değerlerini ve $f([-4, 4])$ kümesini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 3x^2+6x-9$ olduğundan, $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2+6x-9 = 0 \Longrightarrow x = -3, x = 1$ dir. O halde, -3 ve 1 noktaları f nin [-4,4] aralığında ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(-4) = 25, f(-3) = 32, f(1) = 0$ ve $f(4) = 81$ olduğuna göre, $\max\{f : x \in [-4, 4]\} = \max\{f(-4), f(-3), f(1), f(4)\} = f(4) = 81$, $\min\{f : x \in [-4, 4]\} = \min\{f(-4), f(-3), f(1), f(4)\} = f(1) = 0$ dir. Buna göre, f sürekli olduğundan, $f([-4, 4]) = [0, 81]$ dir. $\diamond$

(2) $f(x) =\mid 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 \mid$ şeklinde tanımlanan $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\max\{f : x \in [-2, 3]\}$, $\min\{f : x \in [-2, 3]\}$ değerlerini ve $f([-2, 3])$ kümesini bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =\mid x \mid$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevsiz olduğuna göre, verilen f fonksiyonu $3x^4-16x^3+24x^2-43 = 0$ denkleminin köklerinde türevsiz olabilir. Söz konusu kökleri bulalım. $3x^4-16x^3+24x^2-43 = (x+1)(3x^3-19x^2+43x-43)$ olduğu açıktır. $g(x) = 3x^3-19x^2+43x-43$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g'(x) = 9x^2+38x+43 > 0$ olduğundan g fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $g(3) < -4$ olduğuna göre, $\forall x \in [-2, 3]$ için $g(x) < 0$ dır. Buna göre, f nin $[-2, 3]$ aralığında türevsiz olduğu tek nokta -1 dir. $x \in [-2, -1)$ için $f'(x) = 12x(x-2)^2$ ve $x \in (-1, 3]$ için $f'(x) = -12x(x-2)^2$ olduğu açıktır. O halde, -1, 0 ve 2 noktaları f nin $[-2, 3]$ aralığında ekstremuma göre kritik noktalarıdır. $f(-2) = 229, f(-1) = 0, f(0) = 43, f(2) = 27, f(3) = 16$ olduğuna göre, $\max\{f : x \in [-2, 3]\} = f(-2) = 229, \min\{f : x \in [-2, 3]\} = f(-1) = 0$ dır. Buna göre, f sürekli olduğundan, $f([-2, 3]) = [0, 229]$ dur. $\diamond$

(3) $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m(1-x)^n$ fonsiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = (m+n)x^{(m-1)}(1-x)^{(n-1)}(\frac{m}{n+m} - x)$ olduğundan, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0\ (m > 1),\ x_2 = \frac{m}{n+m}, x_3 = 1 (n > 1)$ dir. Fonksiyonun türevsiz olduğu noktaları yoktur. O halde, kritik noktalar $0, \frac{m}{n+m}$ ve 1 dir. Türevin işaret tablosunu yapalım.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{m}{n+m})$	$\frac{m}{n+m}$	$(\frac{m}{n+m}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-, m$ çift ise, $+, m$ tek ise,		$+, m$ çift ise, $+m$ tek ise,		$-, n$ çift ise, $+, n$ tek ise,		$+,\ n$ çift ise, $+,\ n$ tek ise,
$f(x)$	$\searrow, m$ çift ise, $\nearrow, m$ tek ise,	0	$\nearrow$		$\searrow, n$ çift ise, $\nearrow, n$ tek ise,	0	$\nearrow$

Tablodan görüldüğü gibi m çift olduğunda $x_1 = 0$ noktası yerel minimum, n tek olduğunda, $x_3 = 1$ noktası yerel minimum, $x_2 = \frac{m}{n+m}$ noktası yerel maksimum noktasıdır. $m > 1$ ve tek olduğunda, $x_1 = 0$ kritik noktası ekstremum nokta değildir. $\diamond$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}), & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $f(k) - f(0) = e^{-\frac{1}{|k|}}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{k}) > 0$ olduğundan, $x = 0$ noktası f nin yerel minimum noktası ve $f(0) = 0$ dır. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $f'(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}((\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x})\text{sgn}x - \cos\frac{1}{x})$ ve $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\mid \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} \mid \leq \sqrt{2}$ olduğundan, $f'(x) = 0$ olacak şekilde $x_0 \neq 0$ noktasını geçtikte $f'(x)$ türev fonksiyonu işaretini degişmez. Buna göre, f nin $x = 0$ noktasından farklı yerel ekstremum noktası yoktur. $\diamond$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$ fonksiyonu için $m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\},\ M = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ leri bulunuz.

Çözüm: f çift olduğundan, f nin $[0, \infty)$ aralığında incelenmesi yeterlidir. $\forall x \in [0, +\infty)$ için $f'(x) = -2\sqrt{2}xe^{-x^2}\cos(\frac{\pi}{4} - x^2)$ olduğundan,

$x_1 = 0$ ve $x_k = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ noktaları f nin ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(0) = 1, f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4} - 2k\pi}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ olduğuna göre, $m = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4}}$ ve $M = 1$ dir. $\diamond$

(6) $\forall x \in [0,1]$ ve $\forall p > 1$ için

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$$

eşitsizliğinin sağladığını gösteriniz.

Çözüm: $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^p + (1-x)^p$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = p(x^{p-1} - (1-x)^{p-1})$ olduğundan, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$ dir. $f(0) = f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}} \Longrightarrow min\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)\} = \frac{1}{2^{p-1}}$, $\max\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)\} = 1$ bulunur. Buradanda istenen eşitsizliğin sağlandığı anlaşılır. $\diamond$

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \max\{2 \mid x \mid,\ \mid 1 + x \mid\}$ fonksiyonunun mutlak minimumunu bulunuz.

Çözüm: $2 \mid x \mid \geq \mid 1 + x \mid$, yani $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty)$ olduğunda $f(x) = 2 \mid x \mid,\ 2 \mid x \mid < \mid 1 + x \mid$, yani $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$ olduğunda $f(x) = \mid 1 + x \mid$ olur. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \mid 1 + x \mid, & x \in (-\frac{1}{3}, 1) \text{ ise,} \\ 2 \mid x \mid, & x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\frac{1}{3}, 1) \text{ ise,} \\ 2\text{sgn}x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, $x_1 = (-\frac{1}{3})$ ve $x_2 = 1$ f nin ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3},\ f(1) = 2$ ve $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ olduğuna göre, $min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{2}{3}$ tür. $\diamond$

(8) $x = 0$ noktasının $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir yerel minimum noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, f'(0) = 0,\ f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, f''(0) = 0,\ f^{(3)}(x) = e^x - e^{-}x + 2\sin x, f^{(3)}(0) = 0,\ f^4(x) = e^x + e^{-}x + 2\cos x, f^{(4)}(0) = 4$, tür. $n = 4$ çift ve $f^{(4)}(0) = 4 > 0$ olduğuna göre, Önerme 4.7.11 dan dolayı 0, f nin bir yerel minimum noktasıdır. $\diamond$

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 - x^3$ fonksiyonunun içbükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 6x - 3x^2,\ f''(x) = 6(x-1)$ olduğuna göre, $x \in (-\infty, 1)$ için $f''(x) > 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f''(x) < 0$ dır. Buna göre, Sonuç 4.7.19 den dolayı fonksiyon $(-\infty, 1)$ üzerinde kesin içbükey , $(1, +\infty)$ üzerinde kesin dışbükeydir ve $(1, 2)$ noktası fonksiyonun büküm noktasıdır. $\diamond$

(10) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^x$ fonksiyonunun içbükey ve dışbükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^x(1 + \ln x),\ f''(x) = x^x(\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2) > 0$ olduğundan, Sonuç 4.7.19 den dolayı fonksiyon $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin içbükeydir ve fonksiyonun büküm noktası yoktur. $\diamond$

(11) $(-\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma^2})$ ve $(\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma^2}))$ noktaları $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ fonksiyonunun büküm noktası olması için pozitif h sayısı ne olmalıdır?

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = -\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},\ f''(x) = \frac{2h^3(2h^2x^2 - 1)}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ olduğundan, $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2h}}$ bulunur. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2h}}$ noktalarını geçtikçe $f''(x)$ fonksiyonu işareti degiştiğinden $h = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}, \sigma > 0$ oldugunda $(\pm\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma^2})$ noktaları f nin büküm noktasıdır. $\diamond$

(12) $x = \frac{t^3}{1+t^2},\ y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$ parametrik denklemleri ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları t'ye göre $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$x'_t = \frac{(t^2+1)3t^2 - 2t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2} > 0$$

dır. O halde, (4.20) den dolayı y'_x türevini $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ formülü yardımıyla bulabiliriz. $y'_t = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(1+t^2)^2}$ olduğundan, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}$ olduğu elde edilir. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $t^2+t+4 > 0$ olduğuna göre, $y'_x = 0 \Longrightarrow t = 1$ dir. O halde, $x = \frac{1}{2}$ $(t = 1$ iken) ve $x = 0($ $t = 0$ iken) $y = f(x)$ fonksiyonunun ekstremumuna göre kritik noktalardır.
y'_x türev fonksiyonu $x = 0$ noktasından geçişte işaretini pozitiften negatife ve $x = \frac{1}{2}$ noktasından geçişte işaretini negatiften pozitife değiştirir. Buna göre, $x = 0$ noktası f nin yerel maksimum noktasıdır. $f(0) = 0$ ve $f(\frac{1}{2}) = y(1) = -\frac{1}{2}$ değerleri f nin sırasıyla yerel maksimum ve yerel mininmum değerleridir. $\diamond$

(13) $y = f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ fonsiyonunun grafigini çiziniz.

Çözüm:

(a) fonksiyonun tanım bölgesi $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

(b) $x = 0 \Longrightarrow y = 0,\ x = -1,\ y = 0$ olduğuna göre, eğri Oy eksenini $(0,0)$ noktasında , Ox eksenini de $(-1,0)$ noktasında keser . $f \in C(\mathbb{R})$ ve $x \in (-\infty,0) \setminus \{-1\}$ için $y < 0$, $x \in (0,+\infty)$ için $y > 0$ dır. f ne tek ne de çift degildir. ayrıca , f hem de periyodik değildir.

(c) Fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğuna göre, düşey asimtotu yoktur. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2} = \pm\infty$ olduguna göre, f nin yatay asimtotu da yoktur. $x \to 0$ iken $f(x) \sim x$, $x \to -1$ iken $f(x) \sim (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $|x| \to -\infty$ iken $f(x) \sim x^{\frac{5}{3}}$ olduğuna göre, f nin grafiği yeteri kadar büyük $|x|$ için $y = x^{\frac{5}{3}}$ fonksiyonunun grafiğine

$x = -1$ noktası civarında $y = -(x+1)^{\frac{2}{3}}$ fonsiyonun grafiğine, $x = 0$ noktası civarında ise $y = x$ fonksiyonun grafiğine benzerdir.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ için $f'(x) = \frac{5(x+\frac{3}{5})}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$ olur. Buna göre, $x \in (-\infty,-1)\cup(-\frac{3}{5},+\infty)$ için $f'(x) > 0$ $x \in (-1,-\frac{3}{5})$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $(-\infty,-1)$ ve $(-\frac{3}{5},+\infty)$ aralıkları üzerinde artan, $(-1,-\frac{3}{5})$ aralığında ise, azalandır. Demek ki, $x = -1$ noktası f nin yerel maksimum,$x = -\frac{3}{5}$ noktası ise f nin yerel minimum noktasıdır. $f(-1) = 0$ ve $f(-\frac{3}{5}) = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$ f nin sırası ile yerel maksimum ve yerel minimum değeridir.

(e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için $f''(x) = \frac{10(x+\frac{6}{5})}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}}$ olur. O halde, $x \in (-\infty,-\frac{6}{5})$ için $f''(x) > 0$, $x \in (-\frac{6}{5},-1)\cup(-1,+\infty)$ için $f''(x) < 0$ olduğuna göre, fonksiyonumuz $(-\infty,-\frac{6}{5})$ aralıgında dışbükey, $(-\frac{6}{5},-1)$ ve $(-1,+\infty)$ aralıklarında içbükeydir. $(-\frac{6}{5},-\frac{6}{25}\sqrt[3]{5})$ noktası f nin büküm noktasıdır.

(f)

x	$(-\infty,-6.5)$	-6.5	$(-6.5,-1)$	-1	$(-1,-0.6)$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty\ \nearrow$	$-\frac{6}{25}\sqrt[3]{5}$	$\nearrow$	0	$\searrow$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$

x	-0.6	$(-0.6,+\infty)$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$	$\nearrow +\infty$
$f''(x)$		$+$

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.12 de verilmiştir.

$\diamond$

(14) $x^3 + y^3 = 3xy$ denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Verilen denklem r ve θ kutupsal koordinatlar ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) cinsinden

$$r = r(\theta) \;=\; \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta^3 + \sin\theta^3} \tag{4.85}$$

biçiminde yazılabilir. Örnek 4.7.33 de bu eğrinin incelenmesi yönünde ilk adımlar atmıştık. Bu incelemeleri tamamlayarak (4.85) eğrisinin grafiğini çizelim. $\cos\theta = 0$ olduğunda (4.85) ten $r = 0$, yani $x = y = 0$ olduğu elde edilir. $\cos\theta \neq 0$ olduğunda $t = tan\theta$ olmak üzere verilen denklem

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^2+1} \tag{4.86}$$

biçiminde parametrik denklemler yardımı ile yazılabilir. $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ için $x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}$ olduğuna göre, $x(t)$ fonksiyonu $(-\infty,-1)$ aralığında 0 'dan $+\infty$ 'a kadar , $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ aralığında $-\infty$ 'dan $\sqrt[3]{4}$ 'e kadar artan ve $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ aralığında ise, $\sqrt[3]{4}$ 'den 0'a kadar azalandır. Bu aralıklar üzerinde $x = x(t)$ fonksiyonunun tersi mevcut olduğundan, (Önerme

3.2.9 dan dolayı) (4.86) denklemleri sırası ile $(0,+\infty)$,$(-\infty, \sqrt[3]{4})$ ve $(0, \sqrt[3]{4})$ aralıkları üzerinde $y = f(x)$ (eğrinin 1. parçası) , $y = g(x)$ (eğrinin 2. parçası) ve $y = h(x)$ (eğrinin 3. parçası) gibi üç fonksiyon belirlemektedir.
$x \in (0,+\infty)$ olsun.$\forall t \in (-\infty,-1)$ için $y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$ olduğuna göre, $f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3}$, $f''(x) = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)}$ bulunur. O halde, $\forall x \in (0,+\infty)(\forall t \in (-\infty,-1)$ için $f'(x) > 0$ ve $f''(x) > 0$ olacağından f fonksiyonu $(0,+\infty)$ aralığında azalan ve içbükeydir.
g ve h fonsiyonlarının incelenmesi benzer şekilde yapılır.
$g(x)$ fonsiyonu $(-\infty,0)$ aralığında azalan ($+\infty$ dan 0 a kadar), $(0, \sqrt[3]{4})$ aralığında artan (0 dan $\sqrt[3]{2}$ ye kadar) ve $\forall x \in (-\infty, \sqrt[3]{4})$ için $g''(x) > 0$ olduğundan, $(-\infty, \sqrt[3]{4})$ aralığında içbükeydir.
$h(x)$ fonksiyonu $(0, \sqrt[3]{2})$ aralığında artan (0 dan $\sqrt[3]{4}$ ye kadar) ($\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$) aralığında azalan ($\sqrt[3]{4}$ den $\sqrt[3]{2}$ ye kadar) ve $\forall x \in (0, \sqrt[3]{4})$ için $h''(x) > 0$ olduğundan, $(0, \sqrt[3]{4})$ aralığında dışbükeydir.

x	0	$(0,+\infty)$	x	$(-\infty,0)$	0	$(0, \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}$
$f'(x)$		+	$g'(x)$	−		+	
$f(x)$	0	$\searrow, -\infty$	$g(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$
$f''(x)$		+	$g''(x)$	+		+	

x	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$
$h'(x)$		+		−	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$
$h''(x)$		+		+	

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.13 de verilmiştir.

◇

(15) $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = f^{(3)}(2) = f^{(4)}(2) = f^{(5)}(2) = 0$, $f^{(6)}(2) = 1440$ olduğuna göre, $x = 2$ noktası civarında $y = f(x)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $(2, 3)$ noktasında $y = f(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -(x-2) \Rightarrow y = -x+5$ biçimindedir. $f^{(4)}(x) = g(x)$ olsun. $g'(2) = f^{(5)}(2) = 0$, $g''(2) = f^{(6)}(2) > 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktası g nin bir minimum noktasıdır. O halde, $g(2) = f^{(4)}(2) = 0$ olduğundan dolayı $x = 2$ noktasının bir $U(2)$ komşuluğunda $g(x) \geq 0$ dır. $f''(x) = h(x)$ olsun. $h'(2) = f^{(3)}(2) = 0$ ve $\forall x \in U(2)$ için $h''(x) = f^{(4)}(x) = g(x) \geq 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktasının bir $U'(2)$ komşuluğunda $x = 2$ noktası h fonksiyonunun bir minimum noktasıdır. $h(2) = f''(2) = 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktasının bir $U''(2)$ komşuluğunda $h(x) = f''(x) \geq 0$ olacaktır. Buna göre , $U''(2)$ komşuluğunda $y = f(x)$ eğrisi dışbükeydir. $y = f(x)$ eğrisinin grafiği şekil 4.14 te verilmiştir.

◇

4.8.2 Ek Problemler

(16) Aşağıdaki $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının (a, b) aralığında ekstremumlarını ve $[a, b]$ aralığında en küçük (m) ve en büyük (M) değerlerini bulunuz.

(a) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $a = -1, b = 4$;

(b) $f(x) = (x-3)^3 e^{|x+1|}$, $a = -2, b = 4$;

(c) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{\mid x \mid (1+x)^2})$, $a = -2, b = 1$;

(d) $f(x) = \arctan \sqrt{\mid x \mid (x-1)^2}$, $a = -1, b = 2$;

(e) $f(x) = \frac{[[x]]}{x} + \frac{x}{3}$, $a = 1, b = 3$;

(f) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}\text{sgn}x) + \sin(x + \frac{\pi}{6})$, $a = -\pi, b = \pi$.

Cevap: (a) $x = 3$ te minimum f, 0 dır, $x = 0$ da minimum f, 9 ve $x = 1$ de maksimum f, $4e$ dir ;
(b) $x = 0$ da minimum f, $-27e$ dır, $x - 1$ de maksimum f, -64 tür ;
(c) $x = 0$ ve $x = -1$ de minimum f, 0, $x = -\frac{1}{3}$ te maksimum

$f,\ \ln(1+\frac{2\sqrt{3}}{9})$ dur ;
(d) $x=0$ ve $x=1$ de minimum $f,\ 0$ dır, ve $x=\frac{1}{3}$ te maksimum $f,\ \arctan\frac{2\sqrt{3}}{9}$ dur ;
(e) $x=\sqrt{3}$ te minimum $f,\ \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\sqrt{6}$ da minimum $f,\ \frac{4}{\sqrt{6}}$ ve $x=2$ de maksimum $f,\ \frac{5}{3}$ tür ;
(f) $x=-\frac{2\pi}{3}$ te minimum $f,\ -2$, $x=0$ da maksimum $f,\ \frac{3}{2}$ dir.

(17) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde inf ve sup değerlerini bulunuz?

(a) $f(x)=\frac{1}{x}+x^2,\ (0,1]$; (b) $f(x)=\ln x-x,\ \mathbb{R}_+$;
(c) $f(x)=2\tan x-\tan^2 x, (\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$; (d) $f(x)=\tan x-3x, [\frac{-\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;
(e) $f(x)=(x^2+4)e^{-x},\ \mathbb{R}_+$; (f) $f(x)=e^{-x^2}\cos(x^2),\ \mathbb{R}$;
(g) $f(x)=x+(\frac{2}{x-2})^2,\ (\frac{3}{2},5)$; (h) $f(x)=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|},\ \mathbb{R}$.

Cevap:

(a) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}},\ +\infty$; (b) $-\infty,\ -1$; (c) $-\infty,\ 1$;
(d) $\sqrt{2}-3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}},\ +\infty$; (e) $0,\ 4$; (f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}},\ 1$;
(g) $5,\ +\infty$; (h) $0,\ \sqrt{3}$.

(18) Aşağıdaki fonksiyonların içbükey ve dışbükey oldukları aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

(a) $2x^4-3x^2+x-1$; (b) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; (c) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$;
(d) $f(x)=\sqrt[3]{4x^3-12x}$; (e) $f(x)=x+sinx$; (f) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.
Cevap: (a) $(-\infty,-\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2},+\infty)$ içbükey, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dışbükey aralıkları, $(-\frac{1}{2},-\frac{17}{8}),\ (\frac{1}{2},-\frac{9}{8})$ büküm noktaları;
(b) $(-\infty,-1),\ (1,+\infty)$ dışbükey,$(-1,1)$ içbükey aralıkları büküm noktası yoktur.
(c) $(-\infty,-3)$ içbükey, $(-3,+\infty)$ dışbükey aralıkları $(-3,0)$ büküm noktası,
(d) $(-\infty,-\sqrt{3})$ içbükey $(-\sqrt{3},0),\ (\sqrt{3},+\infty)$ dışbükeylik aralıkları $(0,0),\ (-\sqrt{3},0)$ ve $(\sqrt{3},0)$ büküm noktaları;
(e) $(2k\pi,2(1+2k)\pi), k\in\mathbb{Z}$ dışbükey, $((1+2k)\pi,2(1+k)\pi), k\in\mathbb{Z}$

içbükey aralıkları, $(0,k\pi), k\in\mathbb{Z}$ büküm noktaları;
(f) $(-\infty,-\frac{1}{2})$ dışbükey, $(-\frac{1}{2},0),(0,+\infty)$ dışbükeylik aralıkları, $(-\frac{1}{2},e^{-2})$ büküm noktası.

(19) Aşagıdaki paremetrik denklemlerle tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonunun büküm noktalarını bulunuz.
(a) $x=te^t,\ y=te^{-t},\ t\in(0,+\infty)$;
(b) $x=\frac{2t^2+2}{t},\ y=\frac{t^3+3t+1}{t^2},\ t\in(0,1)$.

Cevap: (a) $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$; (b)$(5,\frac{21}{2})$.

(20) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $f(x)=\frac{x^3}{6x^2-8-x^4}$; (b) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;
(c) $f(x)=\frac{x^2}{|x|+1}$; (d) $f(x)=\frac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$;
(e) $f(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$; (f) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$;
(g) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; (h) $f(x)=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$;
(i) $f(x)=x2^{\frac{1}{x^2}}$; (j) $f(x)=x(1-\frac{1}{x})^x$;
(k) $f(x)=2x+\coth x$; (l) $f(x)=x+\frac{\sin x}{2x}$;
(m) $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$; (n) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{arccot}\frac{1}{x}}$;

Cevap:

(a) $x=-2, x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}, x=2, y=0$; (b) $x=-2, y=1$;
(c) $y=-x-1, y=x-1$; (d)$x=b, x=2b, y=x-3(a-b)$;
(e) $y=-x, y=3x$; (f)$x=0, y=1$;
(g) $y=1$; (h) $y=1-x, y=3-x$;
(i) $x=0, y=x$; (j) $y=\frac{x}{e}-\frac{1}{2e}$;
(k) $x=0, y=2x-1, y=2x+1$; (l)$y=x$;
(m) $y=0$; (n) $x=0, y=\frac{2}{\pi}$.

(21) Parametrik denklemlerle tanımlanan aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $x=\frac{t-8}{t^2-4},\ \ y=\frac{3}{t(t^2-4)}$; (b) $x=t^3+3t+1,\ \ y=t^3-3t+1$;

(c) $x = t + \sin t,\ \ y = t + \cos t$; (d) $x = t\ln t,\ \ y = t\ln(t+1)$;
(e) $x = 2\cos t,\ \ y = \tan 2t$.

Cevap:

(a) $x = 2,\ \ y = \frac{3(2x+3)}{40},\ \ y = -\frac{2x+1}{8}$; (b) asimtotu yoktur.
(c) asimtotu yoktur. (d) $x \to +\infty$ iken $y = x + 1$;
(e) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$.

(22) Kutupsal koordinatlarla tanımlanan aşağıdaki $y = f(x)$ fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $r = \frac{\pi}{\theta - \frac{\pi}{4}}$; (b) $\theta = \frac{r}{r-1}$;
(c) $r = 2\tan\theta$; (d) $r = \frac{2}{|\sin 2\theta|}$;
(e) $r = \frac{a}{\cos 3\theta}(a > 0)$.

Cevap: (a) $r = \frac{\pi}{\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}$; (b) $r = \frac{1}{\sin(\theta-1)}$;
(c) $r = \frac{2}{\cos\theta},\ r = -\frac{2}{\cos\theta}$;
(d) $r = \frac{1}{\sin\theta},\ r = -\frac{1}{\sin\theta}, r = \frac{1}{\cos\theta},\ r = -\frac{1}{\cos\theta}$;
(e) $r = \frac{a}{3\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}, r = \frac{a}{3\sin(\theta + \frac{\pi}{6})}, r = -\frac{a}{3\cos\theta}$.

(23) Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $x^2y + xy^2 = 1$; (b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$;
(c) $4x^2 + 9y^2 = x^2y^2$; (d) $4x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = 1$;
(e) $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$; (f) $(x^2 + y^2)(y-1)^2 - y^2 = 0$.

Cevap:

(a) $y = 0,\ x = 0,\ y = -x$; (b) $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8},\ y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}$;
(c) $x = 3,\ \ x = -3,\ \ y = 2,\ \ y = -2$; (d) $y = 2\sqrt{2}x,\ \ y = -2\sqrt{2}x$;
(e) $y = -x + 1,\ \ y = -x - 1$; (f) $y = 1$.

(24) Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

(a) $y = \frac{x^3}{4} - 3x + 4$; (b) $y = 32x^2(x^2-1)^3$;
(c) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$; (d) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^3}$;
(e) $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$; (f) $y = \frac{x^4}{x^3+2}$;

(g) $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$; (h) $y = x - \sqrt{x^2 - 2x}$;
(i) $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$; (j) $y = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$;
(k) $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$; (l) $y = \sqrt{\frac{3x^2-4}{x^3}}$;
(m) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$; (n) $y = (x^2 + 8x + 12)^{2/3}$;
(o) $y = \sqrt[3]{(\frac{x+1}{x+2})^2}$; (p) $y = \mid x \mid \sqrt{1 - x^2}$;
(q) $y = \sqrt{\mid 3x^2 - x^3 \mid}$; (r) $y = \sqrt[3]{x^2 \mid 2 - x \mid}$;
(s) $y = (1-x)e^{3x+1}$; (t) $y = \frac{e^{-x}}{1-x}$;
(u) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$; (v) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
(w) $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$; (x) $y = \cos x \cos 2x$;
(y) $y = 2x - \tan x$; (z) $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$;
(xx) $y = e^{-\arctan x}$; (yy) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
(zz) $y = 2lnx - 5\arctan x$.

(25) Aşağıda parametrik denklemlerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

(a) $x = \frac{1}{4}(t+1)^2,\ y = \frac{1}{4}(t-1)^2$; (b) $x = \frac{t^2}{1-t^2},\ y = \frac{1}{1+t^2}$;
(c) $x = \frac{t^2+1}{4(t-1)},\ y = \frac{t}{t+1}$; (d) $x = \frac{t}{1-t^2},\ y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

Cevap: (a) Şekil 4.15; (b) Şekil 4.16; (c) Şekil 4.17; (d) Şekil 4.18.

(26) Aşağıdaki kapalı şekilde tanımlanan fonksiyonların grafiğini çiziniz.

(a) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(a > 0)$; (b) $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$;
(c) $x^2y^2 = 1$; (d) $x^3 + y^3 = 3x^2$.

Cevap: (a) Şekil 4.19; (b) Şekil 4.20; (c) Şekil 4.21; (d) Şekil 4.22.

(27) Aşağıdaki kutupsal koordinatlarla tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

(a) $r = \frac{5}{\theta},\ \ \theta \in \mathbb{R}_+$; (b) $r^2 = 2a^2\cos^2 2\theta,\ \ \theta \in [0, 2\pi]$;
(c) $r = a\cos\theta + b$; (d) $r = a\sin 3\theta (a > 0)$.

Cevap: (a) Şekil 4.23; (b) Şekil 4.24; (c) Şekil 4.25; (d) Şekil 4.26.

Kaynaklar

[1] **Aydın S.**, *Analize Giriş, I*, Betaş Yayınları, Ankara, 1999

[2] **Ayres F.**, *Calculus, Teory and Problem*, Schaumm Publishing Company, New York, 1964

[3] **Balcı M.**, *Matematik Analiz, I,II*, Balcı Yayınları, Ankara, 1999

[4] **Balcı M., Aral A.**, *Çözümlü Matematik Analiz Problemleri, I,II*, Balcı Yayınları, Ankara, 2001

[5] **Bartle R.G.**, *The Elements of Real Analysis*, John Wiley, New York, 1964

[6] **Bayraktar M.**, *Analiz I*, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 2000

[7] **Burbaki N.**, *Funksii deystvitelnogo peremennogo*, Nauka, Moskova, 1965

[8] **Cartan H.**, *Calcul Différentiel. Formes Différentielles*, Herman Paris, 1967

[9] **Courant R., Fritz J.**, *Introduction to Calculus and Analysis, I,II*, Springer-Verlas, Berlin, 1982

[10] **Diedonne J.**, *Foundatious of Modern Analysis*, Academic Press, New York and Londan, 1960

[11] **Demidoviç W.P.**, *Sbornik Sadaç i uprajneniy po matematiçeskomy analizu*, Nauka, Moskava, 1977

[12] **Edwards C.H., Penney D.E.**, *Matematik Analiz ve Analitik Geometri, Cilt I,II. Çeviri Editörü Ömer Akın*, Palme Yayıncılık, Ankara, 2001

[13] **Fihtengoltz G.M.**, *Kurs differentsialnogo i integralnogo isçisleniya, I-III*, Nauka, Moskova, 1969

[14] **Hacısalihoğlu H.**, *Diferansiyel Geometri*, Ankara, 1993

[15] **Halilov H., Hasanoğlu A., Can M.**, *Yüksek Matematik I*, Literatür Yayınları: 34, İstanbul, 1999

[16] **Halilov H., Hasanoğlu A., Can M.**, *Yüksek Matematik II*, Literatür Yayınları: 52, İstanbul, 2001

[17] **Gelbaum B.R., Olmsted J.M.H.**, *Counter-examples in Analysis*, Holden-Day, Inc., Publisher, San Francisco, 1964

[18] **Grauert H., Lieb İ.**, *Funktionen einer reelen veranderlichen*, Springer-Verlag, Berlin, 1967

[19] **Grauert H., Fischer W.**, *Differentialrecknung in mehrerer veranderlichen differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1968

[20] **İlyen V.A., Sadowniçiy V.A., Sendov VP.H.**, *Matematiçeskiy analiz*, Nauka, Moskova, 1979

[21] **Kudryavtsev L.D.**, *Kurs matematiçeskogo analiza, I,II*, Wıssşaya Şıkola, Moskova, 1981

[22] **Kudryavtsev L.D., Kutasov A.D., Çehlow M.İ., Şabunin M.İ.**, *Sbornik zadaç po matematiçeskomu analizy I*, Wıssşaya Şıkola, Moskova, 1984

[23] **Kudryavtsev L.D., Kutasov A.D., Çehlow M.İ., Şabunin M.İ.**, *Sbornik zadaç po matematiçeskomu analizy II*, Wısşaya Şıkola, Moskova, 1986

[24] **Kurant R.**, *Kurs differentsialmogo i integralnogoisçisleniya, I,II*, Nauka, Moskova, 1970

[25] **Lifort G.**, *Algebre at Analyse*, Exercices, Dunod, Paris, 1964

[26] **Lyaşko İ.İ., Boyarçuk A.K., Gay J.G., Golovaç G.P.**, *Spravoçnoya posobiye po matematiçeskomu analizu, I*, Vişa Şkola, Kiyev, 1978

[27] **Lyaşko İ.İ., Boyarçuk A.K., Gay J.G., Golovaç G.P.**, *Spravoçnoya posobiye po matematiçeskomu analizu, II*, Vişa Şkola, Kiyev, 1979

[28] **Nikolskiy S.M.**, *Kurs matematiçeskogo analiza, I,* Nauka, Moskova, 1990

[29] **Nikolskiy S.M.**, *Kurs matematiçeskogo analiza, II*, Nauka, Moskova, 1991

[30] **Özer O., Çoker D., Diker E., Gürçay H.**, *İleri Analiz*, Bilim Yayınları, Ankara, 1999

[31] **Pisot C., Zamansky M.**, *Matematiques Generales*, Algebre-Analiza, Dunod, Paris, 1996

[32] **Polya G., Szegö G.**, *Aufgaben und Lehrsätze ans der Analysiz, I*, Springer-Verlag, Berlin 1964

[33] **Rudin W.**, *Principles of Mathematical Analysis*, 3d ed., Book Company, New York, 1976

[34] **Saban G.**, *Analiz Dersleri, I,II*, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul, 1971

[35] **Schwartz L.**, *Analyse Matematique, I,II*, Hermann, Paris, 1967

[36] **Spigel M.R.**, *Çözümlü Matematik Problemleri. Analiz, Çeviren Demiray H., Sümer B.*, Çağlayan Basımevi,İstanbul, 1975

[37] **Spivak M.**, *Calculus on Manifolds*, W.A. Benjamin, İnc., Cum.Publ. Comp., New York and Amsterdam 1965

[38] **Süray S.**, *Umumi Matematik*, Cilt I, AFF Yayınları 1962

[39] **Şilov G.Y.**, *Matematiçeskiy analiz.* Funksii odnogo peremennogo, Nauka, Moskova, 1969

[40] **Şilov G.Y.**, *Matematiçeskiy analiz. Funksii neskolkih veşestvennıh peremennıh*, Nauka, Moskova, 1979

[41] **Winogradova İ.A., Olehnik S.N., Sadovniçiy U.A.**, *Zadaçi iuprajneniya po matematiçeskomu analizu, I,II*, Vissşaya Şkola, Moskova, 2000

[42] **Zoriç V.A.**, *Matematiçeskiy analiz, I*, Nauka, Moskova, 1981

[43] **Zoriç V.A.**, *Matematiçeskiy analiz, II*, Nauka, Moskova, 1984

İndeks

İndeks

$=$, 2
O
    zellikler, 260
$\triangle$, 2
$\cap$, 2
$\circ$, 13
$\cup$, 2
$\emptyset$, 2
$\in$, 1
$\mathbb{E}$, 2
$\mathbb{I}$, 42
$\mathcal{D}(f)$, 11
$\mathcal{R}(f)$, 11
min, 46
$\notin$, 1
$\|$, 10
$\perp$, 14
$\preceq$, 10
$\setminus$, 2
$\sim$, 10
$\subset$, 2
$\thicksim$, 13
$\times$, 4
card, 14
ebas, 27
eküs, 27
o
    Özellikler, 260
1 : 1, 13
inf, 28
log, 45
$\mathbb{N}$, 40
$\mathbb{Q}$, 42
$\mathbb{Z}$, 41
$\overline{E}$, 66
$\mathring{U}_\epsilon(a)$, 64
sup, 28
f^{-1}, 13
Üst Sınır Prensibi, 28
İnfimum, 28, 29
Çarpımsal grup, 24
1. L'Hospital Kuralı, 517
2. L'Hospital Kuralı, 520

Abel Grubu, 23
Aksiyomlar
    Çarpma, 23
    Peano, 40
    Sıralama, 24
    Tamlık, 24, 42, 64, 86

Toplama, 23
Ara Değer Teoremi, 358, 364
Aralık
Açık, 28, 70
boyu(uzunluğu), 30
Kapalı, 28, 70
Sonlu, 364
Sınırlı, 70
zelliği, 70
Archimet Prensibi, 43, 44
Aritmetik Değer, 45
Asimtot, 542, 548
Düşey, 543, 545
Eğik, 543, 544, 546
Yatay, 543, 546

Bağıntı
İkili, 10
Denk, 10
Diklik, 14
Geçişken, 10
Paralel, 10
Simetrik, 10
Sıralama, 10
Tam sıralama, 11
Ters, 10
Ters simetrik, 10
Yansıyan, 10
Bernoulli eşitsizliği, 168
Binom formülü, 179
Bolzano Weierstrass Prensibi, 71
Bolzano-Cauchy Teoremi, 356
Bolzano-Weierstrass, 182, 359
Boole Cebiri, 3
Briggsion sistemi, 45
Bükey
İç(aşağıya), 538
Dış(yukarıya), 538
Kesin dış, 540
Kesin dış(yukarıya), 538
Kesin iç, 540
Kesin iç(aşağıya), 538

Cantor Prensibi, 70
Cantor Teoremi, 369
Cauchy Kriteri, 249
Cauchy-Bunyakowski, 537
Cauchy-Schwartz eşitsizliği, 61
Cisim, 24
Değişmeli, 42

De Morgan Kuralı, 3
Dedekind Prensibi, 71
Diferansiyel, 412
Esas kısım, 412
Geometrik anlamı, 413
Noktada, 412, 414
Diferansiyel hesabın ortalama değer teoremi, 473
Diferensiyel
İnvaryant(değişmezlik), 459
Yüksek mertebeden, 457
Diferensiyel hesabın genelleştirilmiş ortalama değer teoremi, 477

Dizi, 67
üstten sınırlı, 178
İraksak, 162
Alt, 68, 71, 76
Alttan sınırlı, 67, 69
Artan (azalmayan), 68
Azalan (artmayan), 68
Bölüm, 165
Cauchy, 69, 76, 80, 86, 177, 180, 249
zelliği, 70
Fark, 165
Genel terim, 67
Iraksak, 69, 166
Kapalı aralıklar, 357
Kümeler, 70
Limit, 162, 165, 170, 239, 360
Maksimal terim, 183
Minimal terim, 183
Monoton, 68, 69, 72, 86, 177
Reel sayı, 67, 182
Sonsuz büyük, 169, 171
zellikler, 170
Sonsuz küçük, 169–171
zellikler, 170
Sınırlı, 68, 76, 80, 165, 171
Toplam, 165
Yakınsak, 69, 70, 73, 76, 80, 162, 171, 249
zellikler, 165
arpım, 165
stten sınırlı, 67, 69, 73, 77
stten sınırsız, 77
Doğal logaritma, 106

Ekstremumun varlığı, 532
Türev testi, 533
Yüksek mertebeden, 534
Eleman, 1
Etkisiz, 23
Maksimal, 27, 41, 71
Minimal, 27, 41, 43, 71, 77
Ters, 23
Esas değer, 90
Esas periyod, 99
Eğri Teğeti, 413

Fermat Teoremi, 470
Geometrik yorum, 470
Fonksiyo
Limit, 233
Fonksiyon
Örten(surjektif), 13
Özdeş, 12
Üstel, 104
İrrasyonel, 113
Çift, Tek, 100
Çift,Tek, 104
Artan, 105, 531
Artan,Azalan, 476
Artmayan, 531
Asimtot, 546
Aynı mertebeden, 259

Azalan, 105, 531
Azalmayan, 531
Bijektif, 13
Bileşke, 13, 274
Birebir, 361
Birebir(injektif), 13
Birim, 12
Dirichlet, 114
Elementer, 98, 100, 264
  Esas, 100
Esas kısım, 256
Esas periyodu, 99
Eşit, 12
Grafiği, 100
Hiperbolik, 110
  Ters, 112
Kapalı, 100
Kesir-Rasyonel, 101
Kuvvet, 102, 274
Logaritma
  Doğal, 272
  zellikler, 272
Logaritmik, 104, 272, 274
Monoton, 99
Rasyonel
  Tam, 101
Sürekli, 348, 353
Süreksiz, 349
Sabit, 12, 531
Sonsuz büyük, 253, 254
Sonsuz küçük, 252
Sonsuz küçük, 253, 254
  p. mertebeden, 256
Sürekli, 361, 413, 473
  zellikler, 352
Süreksiz, 360
Sınırlı, 100, 259, 363
Ters, 13, 104, 362
Transandantal, 113
Trigonometrik, 106
  Esas, 107
  Ters, 100, 109
Türev, 410, 411, 449, 475, 539
stel, 265, 271, 274
Fonksiyon(Dönüşüm), 11

Genişleme, 12
Global (evrensel) zellik, 356
Grafik çizimi, 548

Heine-Borel , 359
Heine-Borel Prensibi, 71

Küme
  Öz alt, 2
  Alt, 2
  Ayrık, 4
  Birleşim, 2
  Boş, 2
  Eşit, 2
  Evrensel, 2
  Fark, 2
  Kesişim, 2
  Simetrik fark, 2

  Tümleyen, 3
Kümenin çapı, 251
Kardinal Sayı (Güçlü), 14
Kesir kısım, 44
Komşuluk
  Delinmiş, 237
  Sağ, 237
  Sol, 237
komşuluk
  delinmiş sağ komşuluk, 237
Komşuluk, 65, 162, 233, 468
  ϵ, 64
  Delinmiş, 65, 234, 468
Kume
  Aile, 2
  Ayrışım, 4
  Kartezyen çarpım, 4
Kutupsal koordinat, 89
Küme, 64
  Alt, 29, 43, 64
  Açık, 64, 65, 81
    Birleşim, 65
    Kesişim, 65
  Bağlantılı, 66, 86
    zellikler, 67
  Bağlantısız, 66
  Denk(Eşit güçlü), 13
  Değer, 11
  Görüntü, 100
  Kapalı, 65, 66, 82
    Birleşim, 66
    Kesişim, 66
  Kompakt, 70, 74, 81, 82, 369, 371
  Sınırlı, 26
  Sayılabilir, 14, 363
  Sonlu, 74, 363
  Sonlu,Sonsuz, 67
  Sonsuz, 14
  Syılamayan, 43
  Sınırlı, 361
  Sınırsız, 41
  Tam sıralanmış, 11
  Tanım, 11
  stten sınırlı, 73
Kısıtlama, 12

Lagrange Teoremi, 472, 477
  Geometrik yorum, 473
Leibnitz formülü, 453
Limit, 161, 182, 241, 349, 518, 519, 539
  Özel (hususi), 250
  Üst, 251
  Alt, 182, 251
  Belirsiz, 517
  Belirsiz ifade, 172
  Belirsizlik, 264
  Bileşke fonksiyon, 244
  Cauchy, 233, 236
  Eşdeğer, 263
  Heyne, 236
  Kiriş, 414

Nokta, 362
Sağ, 237
Sağ, 238, 410, 475
Sol, 238, 410, 475
Sonlu, 178, 409
Varlık, 247, 363
st, 182
Limit
Belirsizlik, 262
Logaritma, 45
Lokal
zellik, 352
Lokal (yerel) zellik, 359

Maclaurin Formülü, 494, 497
Kalan terim
Lagrange formu, 497
Matematik İndüksiyon, 46, 54, 77, 454
Matematik İndüksiyon Yöntemi, 40
Minkowski Eşitsizliği, 537
Modül, 29
Moivre formülü, 90
Monoton, 99
Artan, 357, 361
Azalan, 357, 361
Yakınsak, 360
Mutlak Değer, 29
Özellikler, 30

Napieraion sistemi, 45
Newton binom açılımı, 501
Newton Binom formülü, 92
Nokta
İzole (yaltık), 65
Büküm, 540, 548
Ekstremum, 532, 534, 548
iç, 64
Kapanış, 66
Kritik, 534
Limit, 64, 65, 71, 76, 82, 181, 469
Lokal ekstremum, 468
Maksimum
Lokal, 468, 533, 534
Mutlak, 469
Minimum, 470
Lokal, 468, 533
Mutlak, 469
Yığılma, 64

Parametre, 428

Rolle Teoremi, 471
Geometrik yorum, 471

Sürekli, 347, 348
Dizisel, 349
Kapalı aralıkta, 356
Küme, 348
Sağdan, 350
Soldan, 350
Süreksiz
Nokta, 351

1. çeşit, 351
2. çeşit, 351
Kaldırılabilir, 351
Sınır
Üst, 26
Alt, 26
Sayılar
İrrasyonel, 42
Doğal, 40
Rasyonel, 42
Transandantal, 43
Sayılar
Kompleks, 88
Modül, 89
Mutlak değer, 89
Reel kısım, 88
Sanal kısım, 88
Köklü, 45
zelikleri, 45
Rasyonel, 44
Reel, 44, 80
Genişletilmiş, 29
Negatif, 26
Pozitif, 26
Reel (Gerçel), 23
Tam, 41
Sonlu farklar formülü, 474
Stolz, 175
Supremum, 28, 29, 73, 74, 78, 86, 247, 359
Sürekli, 411, 519, 548
Aralıkta, 360
Düzgün, 366, 367
Aralıkta, 370
Cantor Teoremi, 369
Nokta, 411
Noktada, 423, 425
Parçalı, 371
Ters fonksiyon, 364
Weierstrass Teoremi, 358
Süreklilik Modülü, 366
Süreksiz
2. çeşit, 362
Nokta
1. çeşit, 371, 475
Kaldırılabilir, 475
Süreksizlik, 548
Sınırlı
Üstten, 100
Alttan, 100, 357
stten, 357
Sıçrama, 251, 371

Tümevarım Yöntemi, 40
Tam kısım, 44
Taylor Formülü, 494
Kalan terim, 494
İntegral formu, 497
Cauchy formu, 496
Lagrange formu, 496
Peano formunda, 496
Taylor Polinomu, 494
Toplamsal grup, 23

Trigonometrik form, 90
Tümevarım, 453, 457
Türev, 409
    2. mertebeden, 449
        Parametrik fonksiyon, 455
        Ters fonksiyon, 456
    Bileşke fonksiyon, 424
    Cauchy Teoremi, 477
    Elementer fonksiyon, 433
    Komşulukta, 428
    Kuralar, 423
    Logaritmik, 427
    n. mertebeden, 449
    Noktada, 428
    Sağ taraflı, 410, 449
    Sol taraflı, 410, 449
    Ters fonksiyon, 425

Weierstrass, 358, 359

Yakınsak
    Dizi, 370
Young Eşitsizliği, 536

Zincir kuralı, 425

rtü
    Açık, 70, 74
    Sonlu alt, 70, 74